Communications de la Société mathématique de Kharkow.
2-e série, Tome V, № 1 et 2.

СООБЩЕНІЯ
ХАРЬКОВСКАГО
МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА.

ВТОРАЯ СЕРІЯ

Томъ V. 1896-1897

~~№№ 1 и 2.~~

ХАРЬКОВЪ.
Типографія и Литографія Зильберберга, Рыбная—№ 30-й.
1896.

Communications de la Société mathématique de Kharkow.
2-e série. Tome V.

СООБЩЕНІЯ
ХАРЬКОВСКАГО
МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА.

ВТОРАЯ СЕРІЯ

Томъ V.

ХАРЬКОВЪ.
Типографія и Литографія Зильбербергъ.
(Рыбная улица, домъ № 30-й).
1897.

На основанiи § 9 Устава Харьковскаго Математическаго Общества печатать и выпустить въ свѣтъ разрѣшаю. Харьковъ 3-го февраля 1897 года.

Предсѣдатель Математическаго Общества Профессоръ *К. Андреевъ*.

СОДЕРЖАНІЕ

V-го тома.

Составъ Харьковскаго Математическаго Общества

къ 1-му Января 1897 года.

А. Распорядительный комитетъ.

1. Предсѣдатель, К. А. Андреевъ.
2. Товарищи предсѣдателя: А. М. Ляпуновъ и М. А. Тихомандрицкій.
3. Секретарь, В. А. Стекловъ.

В. Почетные члены.

1. Бредихинъ Ѳедоръ Александровичъ, академикъ.
2. Бугаевъ Николай Васильевичъ, проф. Моск. унив.

С. Дѣйствительные члены.

1. Алексѣевскій Владиміръ Петровичъ, приватъ-доцентъ Харьк. унив.
2. Альбицкій Василій Ивановичъ, проф. Харьк. технол. инст.
3. Андреевъ Константинъ Алексѣевичъ, проф. Харьк. унив.
4. Бейеръ Евгеній Ильичъ, почетн. членъ Харьк. унив.
5. Веребрюсовъ Александръ Степановичъ, бывш. препод. Староб. гимн.
6. Виноградовъ Иванъ Алексѣевичъ, директ. Харьк. коммерч. учил.
7. Влезковъ Сергѣй Ѳеодоровичъ, бывш. стипенд. Харьк. унив.
8. Головинъ Харлампій Сергѣевичъ, директоръ СПБ. техн. инст.
9. Гречаниновъ Алексѣй Васильевичъ, проф. Харьк. техн. инст.
10. Грицай Алексѣй Сергѣевичъ, директ. Сумск. реальн. учил.
11. Грузинцевъ Алексѣй Петровичъ, приватъ-доцентъ Харьк. унив.
12. Деларю Даніилъ Михайловичъ, бывш. проф. Харьк. унив.
13. Евдокимовъ Николай Николаевичъ, сверхшт. астрон. Харьк. астр. обс.

14. Зворыкинъ Константинъ Алексѣевичъ, проф. Харьк. техн. инст.
15. Кирпичевъ Викторъ Львовичъ, директ. Харьк. техн. инст.
16. Киселевъ Андрей Петровичъ, препод. Воронежск. кадетск. корп.
17. Клюшниковъ Александръ Андреевичъ, препод. 1-й Харьк. гимн.
18. Кнабе Владиміръ Сергѣевичъ, бывш. проф. Харьк. техн. инст.
19. Ковальскій Матвѣй Ѳедоровичъ, проф. Харьк. унив.
20. Косенко Михаилъ Семеновичъ, бывш. препод. Харьк. прогимн.
21. Котляровъ Михаилъ Григорьевичъ, инспект. народн. уч. Курск. губ.
22. Латышевъ Григорій Алексѣевичъ, проф. Харьк. техн. инст.
23. Левицкій Григорій Васильевичъ, проф. Юрьевск. унив.
24. Линицкій Иванъ Дмитріевичъ, препод. инст. благ. дѣв. въ Харьк.
25. Ляпуновъ Александръ Михайловичъ, проф. Харьк. унив.
26. Маевскій Андрей Васильевичъ, препод. 3-й Харьк. гимн.
27. Михайловскій Болеславъ Григорьевичъ, бывш. преп. Харьк. реал. уч.
28. Морозовъ Юрій Ивановичъ, проф. Харьк. унив.
29. Мухачевъ Петръ Матвѣевичъ, проф. Харьк. техн. инст.
30. Пильчиковъ Николай Дмитріевичъ, проф. Новорос. унив.
31. Погорѣлко Александръ Константиновичъ, проф. Харьк. техн. инст.
32. Предтеченскій Алексѣй Ивановичъ, проф. Харьк. техн. инст.
33. Проскурниковъ Николай Васильевичъ, препод. Харьк. реальн. уч.
34. Радцигъ Александръ Александровичъ, инженеръ-технологъ.
35. Раевскій Сергѣй Александровичъ, инспект. Харьк. учебн. окр.
36. Рейнботъ Александръ Евгеньевичъ, бывш. стипенд. Харьк. унив.
37. Рудневъ Петръ Матвѣевичъ, препод. Урюпинск. реальн. учил.
38. Самецкій Рафаилъ Николаевичъ, препод. Изюмск. реальн. учил.
39. Сикора Іосифъ Іосифовичъ, стипенд. Харьк. унив.
40. Синяковъ Германъ Аѳанасьевичъ, препод. 2-й Харьк. гимн.
41. Стекловъ Владиміръ Андреевичъ, проф. Харьк. унив.
42. Струве Людвигъ Оттовичъ, проф. Харьк. унив.
43. Тихомандрицкій Матвѣй Александровичъ, проф. Харьк. унив.
44. Флавицкій Николай Михайловичъ, бывш. лаборантъ Харьк. унив.
45. Флоровъ Петръ Степановичъ, препод. Харьк. реальн. учил.
46. Шейдтъ Ипполитъ Константиновичъ, препод. 1-й Харьк. гимн.
47. Шимковъ Андрей Петровичъ, проф. Харьк. унив.
48. Шиховъ Василій Васильевичъ, директоръ Харьк. реальн. учил.
49. Штукаревъ Иванъ Дмитріевичъ, препод. 2-й Харьк. гимн.
50. Чернай Николай Александровичъ, препод. Харьк. техн. инст.

D. Члены-корреспонденты.

1. Бобылевъ Дмитрій Константиновичъ, проф. СПБ. унив.
2. Васильевъ Александръ Васильевичъ, проф. Казанскаго унив.
3. Ермаковъ Василій Петровичъ, проф. унив. Св. Владим.

4. Жуковскій Николай Егоровичъ, проф. Моск. унив.
5. Коркинъ Александръ Николаевичъ, проф. СПБ. унив.
6. Марковъ Андрей Андреевичъ, проф. СПБ. унив., академикъ.
7. Некрасовъ Павелъ Алексѣевичъ, проф. Моск. унив.
8. Поссе Константинъ Александровичъ, проф. СПБ. унив.
9. Пташицкій Иванъ Львовичъ, проф. СПБ. унив.
10. Сомовъ Павелъ Осиповичъ, проф. Варш. унив.
11. Тороповъ Константинъ Александровичъ, препод. Пермск. гимн.

Приложеніе теоремы Зилова къ симметрической группѣ.

А. А. Радцигъ.

Одна изъ основныхъ теоремъ теоріи подстановокъ есть теорема *Лагранжа*, по которой порядокъ каждой подгруппы какой либо группы подстановокъ есть дѣлитель порядка послѣдней *).

Коши показалъ **), обратно, что группа, порядокъ которой дѣлится на простое число p, заключаетъ подстановку этого порядка (т. е. содержитъ подгруппу этого порядка).

Эта теорема была обобщена и значительно дополнена *Зиловымъ* ***). Онъ нашелъ, что группа $\mathfrak{S}$, порядокъ которой s дѣлится на какое-либо простое число p въ степени α, содержитъ подгруппы порядка p^α. Подгруппы порядка p^f, гдѣ f — наивысшая степень p, на которую дѣлится s, *подобны* (semblables, ähnlich) другъ другу, т. е. получаются изъ одной чрезъ *преобразованіе* (Transformation) элементами $\mathfrak{S}$. Число N *различныхъ* группъ порядка p^f удовлетворяетъ сравненію

$$N \equiv 1 \pmod{p} \qquad (1)$$

Порядокъ группы $\mathfrak{H}$, состоящей изъ элементовъ $\mathfrak{S}$, перемѣщаемыхъ съ одной изъ группъ $\mathfrak{G}$ порядка p^f, есть

$$h = p^f \nu \qquad (2)$$

гдѣ ν не зависитъ отъ выбора группы $\mathfrak{G}$).

Между s, N и h существуетъ зависимость

$$s = Nh \qquad (3)$$

*) См. напр. *Serret*, Cours d'Algèbre supérieure, § 425, *Netto*, Substitutionentheorie, § 43.

**) Exercices d'Analyse et de Physique mathématique, T. III.

***) *Sylow*, Théorémes sur les groupes de substitutions, Mathematische Annalen, B. V. Теорема эта изложена у *Netto*: „Substitutionentheorie", §§ 48, 121.

Теорема Зилова даетъ возможность во многихъ случаяхъ изучить строеніе группы, зная только *порядокъ* послѣдней, и потому представляетъ большую важность для теоріи группъ *), въ особенности при современной, совершенно абстрактной, постановкѣ въ ней вопросовъ **). Не смотря на большое значеніе теоремы Зилова, существуетъ мало изслѣдованій *извѣстныхъ* группъ, исходящихъ изъ ея точки зрѣнія.

Въ моей диссертаціи: „Die Anwendung des Sylow'schen Satzes auf die symmetrische und die alternirende Gruppe", Berlin 1895, я сдѣлалъ такое изслѣдованіе для симметрической и знакоперемѣнной группъ. Въ настоящемъ сообщеніи я хочу изложить часть результатовъ, полученныхъ мною, именно приложеніе теоремы Зилова къ симметрической группѣ, которой *степень* (т. е. число буквъ, надъ которыми производятся ея подстановки—„*Grad der Gruppe* по Нетто), есть степень простого числа — p^n. Изучивъ этотъ случай, не трудно, какъ показано въ § 3-мъ вышеупомянутой диссертаціи, изслѣдовать и общій случай группы произвольной степени. Я ограничусь, притомъ, сообщеніемъ только одной изъ методъ, послужившихъ мнѣ для рѣшенія поставленныхъ вопросовъ, именно той, при которой основаніемъ изслѣдованія служитъ *аналитическое изображеніе подстановокъ* (§ 2-ой диссертаціи; другая метода, пользующаяся *описаніемъ* составленія группы $\mathfrak{G}$, изложена въ § 1-мъ).

Извѣстно, что наивысшая степень простого числа p, дѣлящая $m!$, выражается такъ:

$$f=\left[\frac{m}{p}\right]+\left[\frac{m}{p^2}\right]+\ldots\ldots\ldots \qquad (4)$$

гдѣ вообще $[a]$ означаетъ наибольшее цѣлое число, заключающееся въ a (обозначеніе Кронекера). По теоремѣ Зилова, симметрическая группа порядка $p^n!$ содержитъ подгруппу $\mathfrak{G}$ порядка p^f. Наша задача будетъ состоять прежде всего въ аналитическомъ изображеніи этой группы.

Когда число буквъ, входящихъ въ подстановки группы, есть p^n, буквы эти можно получить, какъ извѣстно ***), снабдивъ какую-ни-

---

*) Кромѣ доказательства Зилова, этой теоремѣ были посвящены многіе другіе труды:

E. Netto. Neuer Beweis eines Fundamentaltheorems aus der Theorie der Substitutionenlehre. Mathematische Annalen, B. 13.

G. Frobenius. Neuer Beweis des Sylow'schen Satzes. Crelle's Journal, B. 100.

G. Frobenius. Ueber die Congruenz nach einem aus 2 endlichen Gruppen gebildeten Doppelmodul. Crelle's Journal, B. 101.

**) Прекрасное (но нѣсколько сжатое) изложеніе основаній такой абстрактной теоріи представляетъ статья Фробеніуса:

G. Frobenius. Ueber endliche Gruppen. Sitzungsberichte der Königl. Pr. Academie der Wissenschaften zu Berlin 21 Februer 1895.

***) См. напр. *Netto*, Substitutionentheorie, § 136. Другой пріемъ обозначенія и аналитическаго изображенія подстановокъ изложенъ у *Serret* въ Cours d'Algébre supérieure, § 478.

будь одну букву u n индексами: $x_1, \; x_2 \ldots x_n$ и придавая этимъ индексамъ, независимо другъ отъ друга, всѣ цѣлыя значенія отъ 0 до $p-1$ [или вообще значенія полной системы остатковъ (mod. p)]. Тогда всякая подстановка группы можетъ быть изображена выраженіемъ вида:

$$|x_1, \; x_2, \ldots x_n \;\; \psi_1(x_1, \ldots x_n), \;\; \psi_2(x_1, \ldots x_n), \ldots \;\; \psi_n(x_1, \;\ldots x_n)|,$$

что означаетъ замѣну x_i черезъ $\psi_i(x_1, \ldots x_n)$, гдѣ $\psi_i(x_1, \ldots x_n)$—надлежащимъ образомъ выбранная функція входящихъ въ нее перемѣнныхъ.

Не трудно видѣть, что и обратно, для того, чтобы выраженіе вышеприведеннаго рода изображало подстановку, необходимо и достаточно, чтобы p^n различнымъ системамъ величинъ $x_1, \ldots x_n$ соотвѣтствовало такое же число различныхъ относительно модуля p значеній функцій $\psi_1, \ldots \psi_n$.

Предположивъ функціи $\psi_1, \ldots \psi_n$ раціональными, цѣлыли и съ цѣлыми коэффиціентами [степень ихъ относительно каждой изъ перемѣнныхъ можно предположить, на основаніи теоремы Fermat'a, не выше $(p-1)$-ой], можно было бы искать болѣе точныхъ условій, которымъ должны удовлетворять эти функціи для того, чтобы изображать подстановку. Однако, задача эта представляетъ громадныя затрудненія и до сихъ поръ болѣе подробно изслѣдованъ только случай $n=1$ *) и случай *линейныхъ подстановокъ* **) вида:

$$s = |x_1, \ldots x_n \; a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n, \ldots, a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n|.$$

Было показано, что выраженіе это изображаетъ подстановку всегда, когда опредѣлитель

$$\begin{vmatrix} a_{11} \, a_{12} \cdots a_{1n} \\ \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \\ \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \\ a_{n1} \, a_{n2} \cdot \;\; \cdot \, a_{nn} \end{vmatrix}$$

не дѣлится на p, и найдено число различныхъ подстановокъ этого рода (т. е. порядокъ группы, ими образуемой):

$$r = (p^n - 1)(p^n - p) \ldots (p^n - p^{n-1}).$$

Аналитическое изображеніе нашей группы порядка p^f, гдѣ

---

*) См. напр. *Serret*. Cours d'Algébre supérieure, §§ 474—478 и 485—488.

**) См. *Netto*. Substitutionentheorie, §§ 137—143. Подробную теорію этихъ подстановокъ можно найти въ книгѣ *C. Jordan*: Traité des substitutions et des équations algébriques.

$$f = p^{p^{n-1}+p^{n-2}+\ldots+p+1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

получается на основаніи слѣдующихъ теоремъ:

I. Выраженіе

$$|x_1, \ldots x_n \; x_1+\varphi_1(x_2, \ldots x_n), x_2+\varphi_2(x_3, \ldots x_n), \ldots x_{n-1}+\varphi_{n-1}(x_n), x_n+\alpha|, \quad (6)$$

гдѣ $\varphi_1, \ldots \varphi_{n-1}$ — цѣлыя раціональныя функціи соотвѣтственныхъ перемѣнныхъ съ цѣлыми коэффиціентами (степени не выше $p-1$-ой относительно каждой изъ перемѣнныхъ), а α — цѣлое число, изображаетъ подстановку при произвольныхъ коэффиціентахъ функцій φ и произвольномъ α.

Чтобы доказать это, надо только показать, что двумъ различнымъ системамъ величинъ $x_1, \ldots x_n$ и $x_1', \ldots x_n'$ соотвѣтствуютъ двѣ различныя системы значеній функцій:

$$x_1+\varphi_1(x_2, \ldots x_n), \ldots x_{n-1}+\varphi_{n-1}(x_n), \; x_n+\alpha.$$

Положимъ, что

$$x_n' \equiv x_n, \; x_{n-1}' \equiv x_{n-1}, \ldots x_{i+1}' \equiv x_{i+1} \pmod{p},$$

но что x_i' не сравнимо съ x_i по модулю p. Тогда получимъ:

$$x_n' + \alpha \equiv x_n + \alpha$$

$$x_{n-1}' + \varphi_{n-1}(x_n') \equiv x_{n-1} + \varphi_{n-1}(x_n)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_{i+1}' + \varphi_{i+1}(x_{i+2}' \ldots x_n') \equiv x_{i+1} + \varphi_{i+1}(x_{i+2} \ldots x_n).$$

Но

$$x_i' + \varphi_i(x_{i+1}', \ldots x_n')$$

не будетъ сравнимо съ

$$x_i + \varphi_i(x_{i+1}, \ldots x_n)$$

по модулю p, такъ какъ

$$\varphi_i(x_{i+1}', \ldots x_n') \equiv \varphi_i(x_{i+1}, \ldots x_n) \pmod{p},$$

а

$$x_i' \text{ не } \equiv x_i \pmod{p}.$$

II. Произведеніе двухъ подстановокъ вида (6):

$$s_1 = | x_1 \cdots x_n \; x_1 + \varphi_1(x_2 \cdots x_n), \ldots x_n + \alpha |$$

и

$$s_2 = | x_1 \cdots x_n \; x_1 + \varphi_1^{(1)}(x_2 \cdots x_n) \cdot \; \cdot x_n + \alpha^{(1)} |$$

есть подстановка того же типа.

Въ самомъ дѣлѣ:

$$s_1 s_2 = \left| \begin{array}{l} x_1 \;\; x_1 + \varphi_1(x_2, \cdot \; \cdot x_n) + \varphi_1^{(1)}[x_2 + \varphi_2(x_3 \ldots x_n), \ldots x_n + \alpha] \\ x_2 \;\; x_2 + \varphi_2(x_3, \cdots x_n) + \varphi_2^{(1)}[x_3 + \varphi_3(x_4 \ldots x_n), \ldots x_n + \alpha] \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{n-1} \;\; x_{n-1} + \varphi_{n-1}(x_n) + \varphi_{n-1}^{(1)}[x_n + \alpha] \\ x_n \;\; x_n + \alpha + \alpha^{(1)} \end{array} \right|$$

т. е.

$$s_1 s_2 = | x_1 \cdots x_n \; x_1 + \psi_1(x_2 \cdots x_n), x_2 + \psi_2(x_3, \cdots x_n), \ldots x_{n-1} + \psi_{n-1}(x_n), x_n + \beta |$$

что и тр. док.

III. Двѣ подстановки вида (6) будутъ тождественны только тогда когда всѣ коэффиціенты всѣхъ функцій φ въ одной сравнимы по модулю p съ соотвѣтственными коэффиціентами въ другой.

Теорема эта можетъ быть легче всего доказана при помощи такой леммы:

Если имѣемъ цѣлую раціональную функцію перемѣнныхъ $x_1, x_2, \cdots x_m$ съ цѣлыми коэффиціентами, которые не всѣ дѣлятся на p, степени n_i относительно $x_i (i = 1, \ldots m)$, при чемъ $n_i \leqq p - 1$, то, придавая всѣмъ перемѣннымъ, независимо другъ отъ друга, значенія $0.1, \ldots p - 1$, получимъ по крайней мѣрѣ

$$(p - n_1)(p - n_2) \cdots (p - n_m)$$

системъ значеній перемѣнныхъ, для которыхъ функція не дѣлится на p *).

Наша функція имѣетъ видъ:

$$\varphi(x_1, \cdots x_m) = \sum_{\alpha_m = 0}^{\alpha_m = n_m} \cdots \sum_{\alpha_1 = 0}^{\alpha_1 = n_1} C_{\alpha_1 \ldots \alpha_m} x_1^{\alpha_1} \cdots x_m^{\alpha_m}.$$

---

*) Теорема эта представляетъ простое обобщеніе теоремы Lagrange'a относительно сравненій по простому модулю.

Пусть $C_{\alpha_1'\ldots\alpha'_m}$ будетъ коэффиціентъ, не дѣлящійся на p. Расположимъ въ φ члены слѣдующимъ образомъ:

$$\varphi(x_1,\cdots x_m) = \left(\sum_{\alpha_1=0}^{\alpha_1=n_1} C_{\alpha_1\alpha'_2\ldots\alpha'_m} x_1^{\alpha_1}\right) x_1^{\alpha_2'}\cdots x_m^{\alpha'_m} + R(x_1\cdots x_m)$$

гдѣ $R(x_1\cdots x_m)$ заключаетъ всѣ члены φ за исключеньемъ отдѣленной суммы. Изъ извѣстной теоремы Лагранжа для сравненій по простому модулю слѣдуетъ, что можно найти по крайней мѣрѣ $p-n_1$ значеній x_1 не сравнимыхъ между собою по модулю p, для которыхъ

$$\sum_{\alpha_1=0}^{\alpha_1=n_1} C_{\alpha_1\alpha'_2\ldots\alpha'_n} x_1^{\alpha_1}$$

не будетъ дѣлиться на p.

Взявъ одно изъ этихъ значеній для x_1 и подставивъ его въ φ, получимъ функцію отъ $(m-1)$ перемѣнныхъ, въ которой по крайней мѣрѣ одинъ коэффиціентъ (при $x_2^{\alpha'_2}\cdots x_m^{\alpha'_m}$) не дѣлится на p. Очевидно, можно примѣнить къ полученной функціи то же разсужденіе, какъ и къ φ и продолжать этотъ процессъ до тѣхъ поръ, пока не придемъ къ функціи отъ одной перемѣнной x_m, къ которой непосредственно приложима теорема Лагранжа.

Изъ этихъ соображеній очевидна справедливость доказываемой леммы.

Если въ подстановкахъ:

$$s_1 = |\, x_1\cdots x_n\, x_1 + \varphi_1(x_2\cdots x_n), \cdots x_i + \varphi_i(x_{i+1},\cdots x_n), \cdots x_n + \alpha\,|$$

и

$$s_2 = |\, x_1\cdots x_n\, x_1 + \varphi_1^{(1)}(x_2\cdots x_n), \cdots x_i + \varphi_i^{(1)}(x_{i+1},\cdots x_n), \cdots x_n + \alpha\,|$$

какіе-либо соотвѣтственные коэффиценты въ функціяхъ φ_i и $\varphi_i^{(1)}$ не сравнимы между собою (mod. p), то разность

$$\varphi_i(x_{i+1}\cdots x_n) - \varphi_i^{(1)}(x_{i+1},\cdots x_n)$$

заключаетъ по крайней мѣрѣ одинъ коэффиціентъ, не дѣлящійся на p; значитъ эта разность, по только что доказанной леммѣ, не можетъ равняться нулю для всѣхъ системъ величинъ $x_1,\cdots x_n$, т. е. подстановки s_1 и s_2 различны, что и тр. док.

Функція $\varphi_{n-i}(x_{n-i+1},\cdots x_n)$, входящая въ подстановку вида (6), имѣетъ видъ:

$$\varphi_{n-i} = \sum_{\alpha_n=0}^{\alpha_n=p-1}\cdots\sum_{\alpha_{n-i+1}=0}^{\alpha_{n-i+1}=p-1} C_{\alpha_{n-i+1},\ldots\alpha_n} x_{n-i+1}^{\alpha_{n-i+1}}\cdots x_n^{\alpha_n}.$$

Число коэффиціентовъ въ ней есть p^i. Если придавать каждому изъ коэффиціентовъ, независимо отъ остальныхъ, значенія $0, 1, \ldots p-1$, то получимъ:

$$p^{p^i}$$

различныхъ функцій. Дѣлая это для $i = 1, 2, \ldots n-1$, получимъ, по теоремѣ III,

$$p^{p^{n-1}+p^{n-2}+\ldots+p+1}$$

различныхъ подстановокъ, образовывающихъ, по теоремѣ II, группу.

Такъ какъ, по теоремѣ Зилова, группы подстановокъ изъ p^n буквъ порядка

$$p^{p^{n-1}+p^{n-2}+\ldots+p+1}$$

подобны между собою, то найденное нами выраженіе

$$s = |\, x_1 \ldots x_n \; x_1 + \varphi_1(x_2, \ldots x_n), x_2 + \varphi_2(x_3 \ldots x_n), \ldots x_n + \alpha \,|$$

и есть искомое аналитическое изображеніе подстановокъ группы $\mathfrak{G}$ *).

Всѣ подстановки этой группы могутъ быть составлены, комбинируя слѣдующія:

$$\left.\begin{array}{r}
s_{1,\alpha_2,\ldots\alpha_n} = |\, x_1 \ldots x_n \; x_1 + x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}, x_2, \ldots x_n \,| \\
s_{2,\alpha_3,\ldots\alpha_n} = |\, x_1 \ldots x_n \; x_1, x_2 + x_3^{\alpha_3} \ldots x_n^{\alpha_n}, x_3, \ldots x_n \,| \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
s_{n-1,\alpha_n} = |\, x_1 \ldots x_n \; x_1, \ldots x_{m-1} + x_n^{\alpha_n}, x_n \,| \\
s_n = |\, x_1, \ldots x_n \; x_1, \ldots x_{n-1}, x_n + 1 \,| \\
(\alpha_2, \ldots \alpha_n = 0, 1, \ldots p-1).
\end{array}\right\} \ldots \quad (7)$$

Всякая подстановка s группы $\mathfrak{G}$ можетъ быть только единственнымъ образомъ представлена выраженіемъ вида:

$$s = s_n^{i_n} \prod_{\alpha_2,\ldots\alpha_n} s_{1,\alpha_2,\ldots\alpha_n}^{i_{1\alpha_2\ldots\alpha_n}} \, s_{2,\alpha_3,\ldots\alpha_n}^{i_{2\alpha_3\ldots\alpha_n}} \ldots s_{n-1,\alpha_n}^{i_{n-1\alpha_n}} \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

*) Для случая $n=2$ это изображеніе дано Зиловымъ въ статьѣ: „Sur les groupes transitifs dont le degré est le carré d'un nombre premier"; Acta mathematica, T. 11.

Группа $\mathfrak{G}$ заключаетъ, какъ извѣстно *), среди своихъ подгруппъ всѣ типы группъ порядковъ p^α $(\alpha \leqq p^{n-1}+p^{n-2}+\dots+p+1)$.

Поэтому выраженія вида:

$$|x_1,\dots x_n\, x_1+\varphi_1(x_2,\dots x_n),\dots x_n+\alpha|$$

изображаютъ всякую группу порядка p^α и степени p^n $(\alpha \leqq p^{n-1}+p^{n-2}+ +\dots+p+1)$. Въ этихъ группахъ должна быть взята извѣстная часть функцій φ.

Такъ, напримѣръ, одною изъ подгруппъ группы $\mathfrak{G}$ является *группа ариѳметическихъ подстановокъ*, изображаемыхъ выраженіями вида:

$$|x_1,\dots x_n\, x_1+\alpha_1,\, x_2+\alpha_2,\dots x_n+\alpha_n| \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (9)$$

гдѣ $\alpha_1\dots\alpha_n$ — какія либо изъ чиселъ $0, 1, \dots p-1$ (порядокъ этой группы равенъ ея степени $= p^n$).

Подстановки вида:

$$|x_2,\dots x_n\, x_1+f_1(x_2\dots x_n),\, x_2+f_2(x_3\dots x_n),\dots x_{n-1}+f_{n-1}(x_n), x_n| \; (10)$$

гдѣ функціи f такія же, какъ φ, *только не заключаютъ постояннаго члена* тоже образовываютъ группу $\mathfrak{G}'$.

Всѣ подстановки ея не мѣняютъ буквы $u_{0,0,\dots0}$. (Не трудно показать, что, назвавъ группу ариѳметическихъ подстановокъ чрезъ $\mathfrak{A}$, получимъ:

$$\mathfrak{G}=\mathfrak{G}'\mathfrak{A}=\mathfrak{A}\mathfrak{G}'$$

— $\mathfrak{G}$ есть „*произведеніе*“ $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{G}'$, или „*наименьшее кратное*“ ихъ **).

Въ вышеназванной диссертаціи моей показано, что изображеніе группы $\mathfrak{G}$ можетъ быть получено, взявъ вмѣсто *степеней факторіели*. Тамъ найдены (стр. 19 и слѣд.), съ помощью послѣднихъ, выраженія для подстановокъ, служившихъ прежде для описанія группы $\mathfrak{G}$ (у *Netto* въ „Substitutionentheorie“, § 39, у *Jordan*'а въ „Traité des Substitutions“—§ 41).

Опредѣленіе группы $\mathfrak{H}$ подстановокъ, перемѣщаемыхъ съ $\mathfrak{G}$.

Самымъ простымъ путемъ для построенія этой группы былъ бы слѣдующій:

Положивъ

$$t=|x_1,\dots x_n\, \psi_1(x_1\dots x_n),\dots\psi_n(x_1\dots x_n)|$$

и взявъ

$$s=|x_1,\dots x_n\, x_1+\varphi_1(x_2\dots x_n),\dots x_n+\alpha|,$$

---

*) См. *Netto*, Substitutionentheorie, § 49.

**) Термины проф. Фробеніуса. См. *G. Frobenius*. Ueber endliche Gruppen. Sitzungsberichte der Königl. Pr. Academie der Wissenschaften, 21 Februar 1895.

надо было бы составить

$$t^{-1}st$$

и положить это выраженіе равнымъ нѣкоторой подстановкѣ изъ группы $\mathfrak{G}$

$$s_1 = |x_1, \ldots x_n \, x_1 + \theta_1(x_2 \ldots x_n), \ldots x_n + \alpha|.$$

Отсюда можно было бы найти извѣстныя условія для функцій ψ, входящихъ въ t.

Путь этотъ ведетъ, однако, къ слишкомъ длиннымъ вычисленіямъ (даже если брать за s простѣйшія подстановки группы $\mathfrak{G}$). Эти вычисленія могутъ быть значительно сокращены съ помощью слѣдующихъ теоремъ изъ общей теоріи подстановокъ:

I. Положимъ, что группа $\mathfrak{C}$ состоитъ изъ подстановокъ, перемѣщаемыхъ съ группой $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ есть подгруппа $\mathfrak{A}$, образованная всѣми подстановками $\mathfrak{A}$, перемѣщаемыми со всѣми подстановками $\mathfrak{A}$. Тогда группа $\mathfrak{B}$ перемѣщаема со всѣми подстановками группы $\mathfrak{C}$ *).

Назовемъ чрезъ A какую-либо подстановку изъ группы $\mathfrak{A}$, чрезъ B какую-либо подстановку группы $\mathfrak{B}$ и чрезъ C группы $\mathfrak{C}$. По предположенію

$$AB = BA$$

для всякихъ подстановокъ A и B. Отсюда получаемъ чрезъ *преобразованіе* (Transformation) обѣихъ частей подстановкой C:

$$C^{-1} ABC = C^{-1} BAC$$

или

$$C^{-1} ACC^{-1} BC = C^{-1} BCC^{-1} AC.$$

Подстановка $C^{-1} BC$ принадлежитъ группѣ $\mathfrak{A}$ (такъ какъ B принадлежитъ группѣ $\mathfrak{A}$, а $\mathfrak{C}$ состоитъ изъ подстановокъ, перемѣщаемыхъ съ $\mathfrak{A}$).

Если брать за A всѣ подстановки группы $\mathfrak{A}$, то выраженіе $C^{-1} AC$ проходитъ значенія всѣхъ подстановокъ группы $\mathfrak{A}$. Поэтому найденное равенство показываетъ, что подстановка $C^{-1} BC$ тоже принадлежатъ къ числу подстановокъ $\mathfrak{A}$, перемѣщаемыхъ со всѣми подстановками $\mathfrak{A}$, т. е. къ группѣ $\mathfrak{B}$; а значитъ группа $\mathfrak{B}$ перемѣщаема со всѣми подстановками $\mathfrak{C}$, что и тр. док.

Обобщеніемъ этой теоремы является слѣдующая:

II. Положимъ, что имѣемъ 4 группы: $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{A}$, изъ которыхъ каждая послѣдующая есть подгруппа предъидущихъ. Предположимъ, что группы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ перемѣщаемы со всѣми подстановками $\mathfrak{D}$. Пусть $\mathfrak{C}$ есть

---

*) Теорема эта употребляется (безъ доказательства) въ статьѣ Зилова: „Sur les groupes transitifs dont le dégré est le carré d'un nombre premier"; Acta mathematica, T. 11.

группа, образованная всѣми подстановками $\mathfrak{D}$, перемѣщаемыми съ подстановками $\mathfrak{B}$ „до подстановокъ" $\mathfrak{A}$ *). Тогда группа $\mathfrak{C}$ будетъ перемѣщаема съ подстановками $\mathfrak{D}$.

По опредѣленію перемѣщаемости „до подстановокъ" извѣстной группы, имѣемъ:

$$CB = BCA$$

гдѣ C, B и A какія-либо изъ подстановокъ соотвѣтственныхъ группъ $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{A}$.

Преобразовывая это равенство какой-либо подстановкой D изъ $\mathfrak{D}$, получимъ:

$$D^{-1} CBD = D^{-1} BCAD$$

или

$$(D^{-1} CD)(D^{-1} BD) = (D^{-1} BD)(D^{-1} CD)(D^{-1} AD) = \\ = (D^{-1} BD)(D^{-1} CD) A'$$

такъ какъ, по предположенію, группа $\mathfrak{A}$ перемѣщаема съ подстановками группы $\mathfrak{C}$. Выраженіе $D^{-1} BD$ проходитъ, съ измѣненіемъ B, значенія всѣхъ подстановокъ группы $\mathfrak{B}$. Найденное равенство показываетъ, что подстановка $D^{-1} CD$ (принадлежащая къ $\mathfrak{D}$), перемѣщаема съ подстановками группы $\mathfrak{B}$ до подстановокъ изъ $\mathfrak{A}$. Отсюда слѣдуетъ, что $D^{-1} CD$ принадлежитъ $\mathfrak{C}$, т. е. что группа $\mathfrak{C}$ перемѣщаема съ подстановками D, что и тр. док.

Въ нашей группѣ $\mathfrak{G}$ подстановки, перемѣщаемыя со всѣми подстановками ея, будутъ слѣдующія:

$$|x_1, \ldots x_n \; x_1 + \alpha, x_2, \ldots x_n|,$$
$$(\alpha = 0.1, \ldots p-1).$$

---

*) Если $\mathfrak{A}$ есть подгруппа $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B}$ подгруппа $\mathfrak{C}$, то говорятъ, что подстановки группы $\mathfrak{C}$ перемѣщаемы со всѣми подстановками $\mathfrak{B}$ до подстановокъ $\mathfrak{A}$, когда для всякой подстановки B изъ $\mathfrak{B}$ и для всякой подстановки C изъ $\mathfrak{C}$ исполнено условіе:

$$BC = CBA,$$

гдѣ A есть нѣкоторая подстановка группы $\mathfrak{A}$. Не трудно видѣть, что подстановки C удовлетворяющія этому условію, образовываютъ группу; изъ равенствъ:

$$BC = CBA \quad \text{и} \quad BC' = C'BA'$$

слѣдуетъ:

$$B(CC') = CBAC' = CBC'A'' = CC'BA'A'' = (CC')BA''',$$

т. е. и CC' перемѣщаема съ B до подстановки изъ $\mathfrak{A}$.

Въ самомъ дѣлѣ, группа $\mathfrak{G}$ содержитъ въ себѣ группу ариѳметическихъ подстановокъ. Значитъ подстановки, перемѣщаемыя со всѣми подстановками $\mathfrak{G}$, заключаются среди такихъ:

$$s = | x_1, \ldots x_n\, x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + \alpha_1, x_2 + a_{23}x_3 + \\ + \cdots + a_{2n}x_n + \alpha_2, \ldots x_n + \alpha_n |.$$

Сравнивая выраженія:

$$s.| x_1, \ldots x_n\, x_1, \ldots x_i + \beta_i, \ldots x_n | = \\ = | x_1, \ldots x_i, \ldots x_n\, x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + \alpha_1, \ldots x_i + a_{ii+1}x_{i+1} + \\ + \cdots + \alpha_i + \beta_i, \ldots x_n + \alpha_n |$$

и

$$| x_1 \ldots x_n\, x_1, \ldots x_i + \beta_i, \ldots x_n |.s = \\ = | x_1, \ldots x_i, \ldots x_n\, x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + \alpha_1 + a_{1i}\beta_i, \ldots \\ \ldots x_i + a_{ii+1}x_{i+1} + \cdots + \alpha_i + \beta_i, \ldots x_n + \alpha_n |, \\ (i = 2, 3, \ldots n),$$

легко убѣдиться, что всѣ коэффиціенты

$$a_{ik}\begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots n \\ k = 2, 3, \ldots n \end{pmatrix}$$

должны быть равны нулю. Для перемѣщаемости съ подстановками

$$| x_1, \ldots x_n\, x_1 + x_2, x_2, \ldots x_n |$$
$$| x_1, \ldots x_n\, x_1 + x_3, x_2, \ldots x_n |$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

числа

$$\alpha_i (i = 2, 3, \ldots n)$$

должны равняться нулю. Подстановки

$$| x_1, \ldots x_n\, x_1 + \alpha_1, x_2, \ldots x_n | \quad \ldots\ldots\ldots (11)$$

дѣйствительно перемѣщаемы со всѣми подстановками группы $\mathfrak{G}$. Назовемъ группу, ими образовываемую, черезъ $\mathfrak{G}_1$. Пусть

$$H = | x_1, \ldots x_n\, f_1(x_1, \ldots x_n), \ldots f_n(x_1 \ldots x_n) |$$

будетъ какая-либо подстановка группы $\mathfrak{H}$. Составимъ

$$H^{-1}.\left| x_1, \ldots x_n\, x_1 + 1, x_2, \ldots x_n \right| .H.$$

По первой изъ только что доказанныхъ леммъ будетъ

$$H^{-1}\left| x_1 \ldots x_n x_1 + 1, x_2, \ldots x_n \right| H = \left| x_1, x_2, \ldots x_n x_1 + \alpha, x_2, \ldots x_n \right|.$$

Отсюда получаются сравненія:

$$f_1(x_1+1, x_2, \ldots x_n) - f_1(x_1, \ldots x_n) \equiv \alpha (\mathrm{mod.}\, p),$$
$$f_i(x_1+1, x_2, \ldots x_n) - f_i(x_1, \ldots x_n) \equiv 0 (\mathrm{mod.}\, p),$$
$$(i = 2, 3, \ldots n).$$

Изъ этихъ сравненій можно заключить, что x_1 входитъ въ f_1 линейно и съ постояннымъ коэффиціентомъ и вовсе не входитъ въ остальныя функціи $f_i, (i=2, \ldots n)$.

Значитъ, подстановки группы $\mathfrak{H}$ имѣютъ видъ:

$$H = \left| x_1, \ldots x_n a_1 x_1 + f_1^{(1)}(x_2, \ldots x_n), f_2(x_2 \ldots x_n), \ldots f_n(x_2 \ldots x_n) \right|.$$

Подстановки такого вида перемѣщаемы съ подгруппой $\mathfrak{G}_2$ группы $\mathfrak{G}$, образованной подстановками вида:

$$G_2 = \left| x_1 \ldots x_n x_1 + \varphi_1(x_2 \ldots x_n), x_2, \ldots x_n \right| \;.\;.\;.\;.\;. \quad (12)$$

гдѣ за φ_1 берутся всѣ функціи, различныя относительно модуля p. Въ самомъ дѣлѣ, имѣемъ:

$$\left| x_1, \ldots x_n x_1 + \varphi_1(x_2 \ldots x_n), x_2, \ldots x_n \right| H = \left| x_1, \ldots x_n\, x_1 + f_1(x_2 \ldots x_n) + \right.$$
$$\left. + \varphi_1(x_2 \ldots x_n), x_2 + f_2(x_3 \ldots x_n), \ldots x_n + f_n(x_2, \ldots x_n) \right|$$

и

$$H.\left| x_1, \ldots x_n x_1 + \varphi_1(x_2 \ldots x_n), x_2, \ldots x_n \right| = \left| x_1, \ldots x_n\, x_1 + f_1(x_2 \ldots x_n) + \right.$$
$$+ \varphi_1[x_2 + f_2(x_2 \ldots x_n), \ldots x_n + f_n(x_2 \ldots x_n)], x_2 + f_2(x_2 \ldots x_n), \ldots$$
$$\left. \ldots x_n + f_n(x_2, \ldots x_n) \right| =$$
$$= \left| x_1, \ldots x_n\, x_1 + f_1(x_2 \ldots x_n) + \varphi_1(x_2, \ldots x_n), x_2 + f_2(x_3 \ldots x_n), \ldots \right.$$
$$\left. \ldots x_n + f_n(x_2 \ldots x_n) \right| \cdot \left| x_1 \ldots x_n x_1 + \psi_1(x_2 \ldots x_n), x_2 \ldots x_n \right|,$$

гдѣ

$$\psi_1(x_2 \ldots x_n) = \varphi_1[x_2 + f_2(x_2 \ldots x_n), \ldots x_n + f_n(x_2 \ldots x_n)] - \varphi_1(x_2 \ldots x_n).$$

Изъ этихъ равенствъ слѣдуетъ:

$$HG_2 = G_2 HG_2',$$

т. е.

$$H^{-1} G_2 H = G_2'',$$

что и доказываетъ перемѣщаемость подстановокъ H съ групой $\mathfrak{G}_2$.

Съ другой стороны, не трудно убѣдиться, что група $\mathfrak{G}_3$ подстановокъ вида

$$G_3 = |x_1, \ldots x_n\, x_1 + \varphi_1(x_2 \ldots x_n), x_2 + \alpha, x_3 \ldots x_n| \quad . \quad . \quad . (13)$$

гдѣ за φ_1 берутся всѣ функціи, различныя относительно модуля p, а за α числа $0, 1, \ldots p-1$, есть група, образованная подстановками $\mathfrak{G}$, перемѣщаемыми со всѣми подстановками $\mathfrak{G}$ до подстановокъ групы $\mathfrak{G}_2$.

Поэтому групы $\mathfrak{H}, \mathfrak{G}, \mathfrak{G}_3, \mathfrak{G}_2$ удовлетворяютъ условіямъ леммы II, т. е. група $\mathfrak{G}_3$ должна быть перемѣщаема съ подстановками $\mathfrak{H}$.

Взявъ подстановку

$$G_3' = |x_1, \ldots x_n\, x_1, x_2 + 1, x_3, \ldots x_n|$$

и составивъ

$$H^{-1} G_3' H,$$

получимъ, на основаніи только что найденнаго, сравненія:

$$f_2(x_2 + 1, x_3, \ldots x_n) - f_2(x_2, \ldots x_n) \equiv \alpha \ (\mathrm{mod.}\, p),$$

$$f_i(x_2 + 1, x_3, \ldots x_n) - f_i(x_2, \ldots x_n) \equiv 0 \ (\mathrm{mod.}\, p),$$

$$(i = 3, 4, \ldots n),$$

изъ которыхъ, какъ и раньше, найдемъ что x_2 можетъ входить въ f_2 только линейно и съ постояннымъ коеффиціентомъ, и что оно не входитъ въ остальныя f_i, $(i = 3, \ldots n)$, т. е. что подстановки групы $\mathfrak{H}$ имѣютъ видъ

$$H_1 = |x_1, \ldots x_n\, a_1 x_1 + f_1^{(1)}(x_2, \ldots x_n), a_2 x_2 +$$
$$+ f_2^{(1)}(x_3, \ldots x_n), f_3(x_3 \ldots x_n), \ldots f_n(x_3 \ldots x_n)|.$$

Подстановки этого вида перемѣщаемы съ подгрупой $\mathfrak{G}_4$ групы $\mathfrak{G}$ состоящей изъ подстановокъ вида:

$$G_4 = |x_1, \ldots x_n\, x_1 + \varphi_1(x_2 \ldots x_n), x_2 + \varphi_2(x_3 \ldots x_n), x_3, \ldots x_n| \quad . (14)$$

гдѣ за φ_1 и φ_2 берутся всѣ различныя относительно модуля p функціи соотвѣтственныхъ перемѣнныхъ (перемѣщаемость эта доказывается совершенно такъ же, какъ для $\mathfrak{G}_2$).

Не трудно найти, что группа $\mathfrak{G}_5$, составленная изъ подстановокъ

$$G_5 = \left| x_1, \dots x_n \, x_1 + \varphi_1(x_2 \dots x_n), x_2 + \varphi_2(x_3, \dots x_n), x_3 + \alpha, x_4, \dots x_n \right| (15)$$

есть группа подстановокъ $\mathfrak{G}$, перемѣщаемыхъ со всѣми подстановками $\mathfrak{G}$ до подстановокъ группы $\mathfrak{G}_4$. Примѣняя къ $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}_5$, $\mathfrak{G}_4$ нашу лемму II, найдемъ, подобно предъидущему, что f_3 содержитъ x_3 линейно съ постояннымъ коеффиціентомъ и что функціи $f_i\,(i = 4, \dots n)$ не содержатъ x_3.

Заключеніемъ отъ $k-1$ къ k докажемъ, что подстановки $\mathfrak{H}$ имѣютъ видъ *):

$$H = \left| x_1, \dots x_n a_1 x_1 + \Phi_1(x_2, \dots x_n), a_2 x_2 + \Phi_2(x_3 \dots x_n), \dots a_n x_n + \alpha \right|. (16)$$

Такая подстановка есть произведеніе подстановки изъ группы $\mathfrak{G}$ и подстановки вида

$$H' = \left| x_1, \dots x_n \, a_1 x_1, \dots a_n x_n \right| \dots\dots (17)$$

По теоремѣ относительно линейныхъ подстановокъ, приведенной въ началѣ сообщенія, выраженіе это изображаетъ подстановку при

$$a_i = 1, 2, \dots p-1, \; (i = 1, 2, \dots n). \dots\dots (18)$$

Такимъ образомъ получимъ $(p-1)^n$ подстановокъ H', образовывающихъ группу $\mathfrak{H}'$. Комбинируя каждую изъ этихъ подстановокъ съ каждой изъ подстановокъ группы $\mathfrak{G}$, получимъ

$$h = p^{p^{n-1}+p^{n-2}+\dots+p+1}(p-1)^n \dots\dots (19)$$

различныхъ подстановокъ, образовывающихъ группу $\mathfrak{H}$ (группа $\mathfrak{H}$ есть *произведеніе* или „наименьшее краткое" группъ $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{H}'$).

Число различныхъ группъ $\mathfrak{G}$, заключенныхъ въ симметрической группѣ степени p^n, найдется изъ формулы (3):

$$N = \frac{p^n!}{p^{p^{n-1}+p^{n-2}+\dots+p+1}(p-1)^n} \dots\dots (20)$$

---

*) Въ диссертаціи моей сдѣлано подробное изслѣдованіе группы $\mathfrak{G}$ относительно перемѣщаемости подстановокъ ея подгруппъ, уясняющее нахожденіе группы $\mathfrak{H}$. Руководящей мыслью этого изслѣдованія служилъ принципъ классификаціи группъ, высказанный Joung'омъ въ статьѣ: „On the Determination of the Groups whose Order is a Power of a Prime". American Journal of the Mathematics 1893.

Не трудно показать, что число это дѣйствительно сравнимо съ единицей по модулю p. Членъ не дѣлящійся на p въ выраженіи для N (по раздѣленіи на знаменателя) есть

$$(p-1)^{p^{n-1}+p^{n-2}+\dots+p+1-n}\left[(p-2)!\right]^{p^{n-1}+p^{n-2}+\dots+p+1}.$$

Но изъ теоремы Вильсона слѣдуетъ, что

$$(p-2)! \equiv +1 \pmod{p},$$

а число

$$p^{n-1}+p^{n-2}+\dots+p+1-n$$

есть четное для всякаго нечетнаго p. Поэтому для нечетнаго p

$$N \equiv +1 \pmod{p}$$

(для $p=2$ это очевидно).

Германъ фонъ-Гельмгольцъ въ его послѣднихъ произведеніяхъ *).

А. П. Грузинцева.

Въ 1847 году Гельмгольцъ опубликовалъ свой знаменитый мемуаръ „Ueber die Erhaltung der Kraft", въ которомъ изложилъ общій принципъ, управляющій физическими явленіями и извѣстный нынѣ подъ именемъ *закона сохраненія энергіи.* Руководствуясь этимъ принципомъ, мы можемъ отдать себѣ отчетъ во всякомъ физическомъ явленіи; дѣйствительно, законъ сохраненія энергіи состоитъ въ томъ, что, если мы наблюдаемъ какія-нибудь физическія явленія въ данной системѣ тѣлъ, то эти явленія происходятъ *непремѣнно* или за счетъ энергіи взятой системы, или за счетъ энергіи окружающихъ тѣлъ, или за счетъ обѣихъ; причемъ общій итогъ энергіи остается постояннымъ.

Но, съ другой стороны, энергія системы тѣлъ обусловливается тѣмъ или другимъ кинетическимъ состояніемъ ея частей, такъ-что, выразивъ при помощи общихъ теоремъ механики это кинетическое состояніе системы и принявъ въ разсчетъ законъ сохраненія энергіи, мы получимъ средство построить математическую теорію наблюдаемыхъ явленій. Другими словами, физическія явленія должны быть приписаны дѣйствію силъ, подчиненныхъ закону сохраненія энергіи.

Выразимъ въ математической формѣ высказанныя сейчасъ идеи.

Пусть имѣемъ систему точекъ, находящихся подъ дѣйствіемъ системы силъ, какъ внутреннихъ, такъ и внѣшнихъ; пусть какая-нибудь точка этой системы съ массой m опредѣляется во время t координатами x, y, z и пусть X, Y, Z будутъ составляющія силъ дѣйствую-

*) Эта статья содержитъ изложеніе послѣднихъ работъ Гельмгольца съ нѣкоторыми измѣненіями, оговоренными въ соотвѣтственныхъ мѣстахъ. Въ устномъ изложеніи ей было предпослано нѣсколько словъ, посвященныхъ памяти знаменитаго ученаго († 8-го сентября н. с. 1894 года).

щихъ въ разсматриваемой точкѣ; затѣмъ предположимъ, что между точками системы существуютъ нѣкоторыя связи, которыя могутъ-быть намъ не извѣстны.

Примѣняя къ разсматриваемой системѣ принципъ Далямбера, получимъ

$$\sum\left\{\left(X-m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x+\left(Y-m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y+\left(Z-m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right\}=0. \quad . \quad (a)$$

Въ этомъ равенствѣ связи системы уже отсутствуютъ.

Выразимъ состояніе нашей системы въ *общихъ* координатахъ; пусть эти координаты будутъ: $p_1, p_2, \ldots p_k$ и пусть скорости измѣненія ихъ будутъ: $q_1, q_2, \ldots q_k$, — т. е. пусть вообще:

$$q_i=\frac{dp_i}{dt} \qquad (i=1,2,\ldots k).$$

Преобразуемъ равенство (a).

Выраженіе:

$$\sum(X\delta x+Y\delta y+Z\delta z)$$

представляетъ элементарную работу *всѣхъ* силъ, приложенныхъ къ точкѣ (x, y, z); эти же силы будутъ двухъ родовъ: силы внутреннія и силы внѣшнія. Относительно внутреннихъ силъ примемъ допущеніе, что онѣ суть *силы консервативныя*, т. е. силы, имѣющія потенціалъ или сами по себѣ, или вслѣдствіе связей между частями системы.

Относительно-же внѣшнихъ силъ никакихъ предположеній не будемъ дѣлать.

Выражая теперь x, y, z въ функціи перемѣнныхъ $p_1, p_2, \ldots p_k$ и принимая въ соображеніе сказанное сейчасъ относительно характера внутреннихъ силъ, будемъ имѣть:

$$\sum\Big(X\delta x+Y\delta y+Z\delta z\Big)=-\delta\Phi-\sum_{i=1}^{i=k}P_i\delta p_i\,^{*)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

гдѣ Φ есть *потенціалъ внутреннихъ силъ* и

$$\delta\Phi=\sum_{i=1}^{i=k}\frac{\partial\Phi}{\partial p_i}\delta p_i.$$

---

*) Тоже мы получаемъ, если вообще одна часть всѣхъ дѣйствующихъ силъ имѣетъ потенціалъ, а другая нѣтъ.

Количества вида P_i суть внѣшнія силы, стремящіяся *увеличить* параметръ p_i, такъ-что выраженіе

$$-P_i \delta p_i$$

представитъ *работу* силы P_i.

Для преобразованія оставшейся части въ выраженіи (a) принципа Далямбера разсмотримъ функцію, представляющую кинетическую энергію системы, а именно:

$$T = \sum \frac{m}{2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right] = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=k} a_{ij} q_i q_j \quad . \quad . \quad . \quad (c)$$

при условіи:

$$a_{ij} = a_{ji}.$$

Возьмемъ:

$$\int \delta T dt$$

между нѣкоторыми предѣлами $t = t_0$ и $t = t_1$; найдемъ:

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta T dt = \int_{t_0}^{t_1} dt \sum m \left[\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right],$$

если будетъ удовлетворено условіе:

$$\Bigg|_{t_0}^{t_1} \sum m \left[\frac{dx}{dt}\delta x + \frac{dy}{dt}\delta y + \frac{dz}{dt}\delta z\right] = 0;$$

это-же условіе, вслѣдствіе произвольности δx, δy, δz, всегда можетъ быть удовлетворено; напримѣръ, мы всегда можемъ взять моменты времени t_0 и t_1 такими, чтобы перемѣщенія точекъ для нихъ были равны нулю.

Такимъ образомъ, если умножимъ равенство (a) на dt и возмемъ интегралъ отъ $t = t_0$ до $t = t_1$, т. е. за весь промежутокъ времени существованія изучаемаго кинетическаго состоянія системы, то получимъ:

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \left[\delta T - \delta \Phi - \sum_{i=1}^{i=k} P_i \delta p_i\right] = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Положимъ:

$$\Phi - T = H \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

тогда равенство (1) можно написать въ видѣ:

$$\int_{t_0}^{t_1}\left[\delta H+\sum_{i=1}^{i=k}P_i\delta p_i\right]dt=0\,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Гельмгольцъ представилъ это равенство въ слѣдующемъ видѣ:

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}\left(H+\sum P_ip_i\right)dt=0\,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (A)$$

при непремѣнномъ условіи, что силы P_i *варіированію не подлежатъ*, т. е. суть функціи только времени.

Выраженіе (A) представляетъ обобщеніе принципа Гамильтона (1834), выражаемаго равенствомъ:

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}Hdt=0$$

и дано въ первый разъ Кирхгоффомъ въ 1876 г. *) въ формѣ немного отличающейся отъ приведенной нами тѣмъ обстоятельствомъ, что онъ не разбиваетъ силы, приложенныя къ точкамъ системы, на внутреннія и внѣшнія.

Функція H названа Гельмгольцемъ *кинетическимъ потенціаломъ* системы. Эта функція встрѣчается въ теоретической физикѣ очень часто и извѣстна въ различныхъ ея частяхъ подъ разными именами; въ электричествѣ это можетъ быть потенціаломъ одного тока на другой (Ф. Неймана); въ термодинамикѣ это свободная энергія Гельмгольца или термодинамическій потенціалъ Дюгема.

Докажемъ теперь, что равенство (3) заключаетъ въ себѣ принципъ сохраненія энергіи. Дѣйствительно, сначала мы, помня, что:

$$\delta T=\sum_{i=1}^{i=k}\left[\frac{\partial T}{\partial p_i}\delta p_i+\frac{\partial T}{\partial q_i}\delta q_i\right],$$

$$\delta\Phi=\sum_{i=1}^{i=k}\frac{\partial\Phi}{\partial p_i}\delta p_i\,,$$

имѣемъ:

$$\int_{t_0}^{t_1}dt\sum_{i=1}^{i=k}\left[-\frac{\partial T}{\partial p_i}+\frac{\partial\Phi}{\partial p_i}+P_i\right]\delta p_i-\sum_{i=1}^{i=k}\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial T}{\partial q_i}\delta q_i dt=0\,, \quad . \quad . \quad . \, (4)$$

*) См. его Vorlesungen über mathematische Physik, 3 Aufl. S. 27.

*

но

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial T}{\partial q_i} \delta q_i dt = -\int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_i}\right) \delta p_i dt,$$

ибо варіаціи δp_i для $t = t_0$ и $t = t_1$ обращаются въ нуль, а слѣдовательно, предыдущее равенство (4) можно написать въ видѣ:

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \sum_{i=1}^{i=k} \left[-\frac{\partial T}{\partial p_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial p_i} + P_i + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_i}\right) \right] \delta p_i = 0\,,$$

или, вслѣдствіе произвольности δp_i:

$$P_i = -\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_i}\right)$$

или наконецъ, помня, что Φ отъ q_i независитъ:

$$P_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\right) - \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad {\scriptstyle (i=1,2,\ldots k)}. \quad \ldots \ldots \ldots (B)$$

Это Лягранжева форма уравненій динамики.

Изъ этихъ уравненій (B) мы и можемъ вывести принципъ сохраненія энергіи. Съ этой цѣлью умножимъ уравненія (B) на q_i и результаты сложимъ, получимъ:

$$\sum_{i=1}^{i=k} P_i q_i = -\sum_{i=k}^{i=k} \frac{\partial H}{\partial p_i} q_i + \sum_{i=1}^{i=k} q_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\right),$$

но

$$q_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\right) = \frac{d}{dt}\left(q_i \frac{\partial H}{\partial q_i}\right) - \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt},$$

а потому:

$$\sum_{i=1}^{i=k} P_i q_i = -\sum_{i=1}^{i=k} \left[\frac{\partial H}{\partial p_i} q_i + \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt}\right] + \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{i=k} q_i \frac{\partial H}{\partial q_i},$$

но:

$$\sum_{i=1}^{i=k} \left[\frac{\partial H}{\partial p_i} q_i + \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt}\right] = \frac{dH}{dt},$$

а слѣдовательно,

$$\sum_{i=1}^{i=k} P_i q_i = -\frac{d}{dt}\Big(H - \sum_{i=1}^{i=k} q_i \frac{\partial H}{\partial q_i}\Big).$$

Но мы знаемъ, что

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial T}{\partial q_i}$$

и такъ какъ T есть однородная квадратичная функція всѣхъ q_i, то

$$2T = \sum_{i=1}^{i=k} \frac{\partial T}{\partial q_i} q_i = -\sum_{i=1}^{i=k} \frac{\partial H}{\partial q_i} q_i;$$

а потому:

$$\sum_{i=1}^{i=k} P_i q_i = -\frac{d}{dt}(H + 2T) = -\frac{d(T+\Phi)}{dt}.$$

Если-же назовемъ *полную* энергію системы буквой E, то получимъ:

$$E = T + \Phi \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, (C)$$

и, слѣдовательно,

$$\sum_{i=1}^{i=k} P_i q_i = -\frac{dE}{dt}$$

или, окончательно:

$$\sum_{i=1}^{i=k} P_i \frac{dp_i}{dt} dt = -\frac{dE}{dt} dt \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, (D)$$

Но это равенство выражаетъ принципъ сохраненія энергіи *), ибо лѣвая его часть представляетъ работу внѣшнихъ силъ, отдаваемую наружу системы, за промежутокъ времени dt и эта передача совершается по равенству (D), т. е. за счетъ полной энергіи системы, которая при этомъ убываетъ.

---

*) Въ такомъ-же видѣ и Пуэнкаре представляетъ принципъ сохраненія энергіи; см. его *Electricité et Optique*, II, p. 74 (1891 г.) или *Les oscillations électriques*, p. 21 (1894 г.).

И такъ, *принципъ Гамильтона или принципъ наименьшаго дѣйствія*, какъ его называетъ Гельмгольцъ, *заключаетъ въ себѣ принципъ сохраненія энергіи.*

Такимъ образомъ, мы можемъ при построеніи теорій тѣхъ или другихъ физическихъ явленій пользоваться принципомъ Гамильтона, зная уже, что въ немъ содержится законъ сохраненія энергіи.

Но, какъ кажется на первый взглядъ, для тѣхъ-же цѣлей могли-бы служить и уравненія Лягранжа, и уравненіе (D), выражающее самый принципъ сохраненія энергіи, а между тѣмъ Гельмгольцъ предлагаетъ класть въ основаніе теоретическихъ изслѣдованій въ физикѣ лишь принципъ наименьшаго дѣйствія. Причина этого та, что уравненія Лягранжа даютъ лишь уравненія для точекъ *внутри* системы тѣлъ, участвующихъ въ изучаемомъ физическомъ явленіи, а для полнаго рѣшенія вопроса требуются еще условія *на границахъ*, т. е. на поверхности, ограничивающей разсматриваемую систему; интегралы же, входящіе въ составъ равенства (A), могутъ дать по преобразованіи и условія на границахъ. Тѣ-же самыя замѣчанія можно сдѣлать и относительно равенства (D). Если-же мы не имѣемъ въ виду условій на границахъ, а желаемъ лишь имѣть уравненія, представляющія кинетическое состояніе точекъ внутри системы, то можемъ прибѣгать съ этой цѣлью или къ уравненіямъ Лягранжа, какъ это дѣлалъ еще Максвеллъ въ своей теоріи электромагнитнаго поля или къ уравненію (D), какъ поступалъ, напримѣръ Пуэнкаре *) при выводѣ уравненій Герца.

Впрочемъ относительно уравненія (D) надо сдѣлать оговорку. Если кинетическая и потенціальная энергіи выражены въ видѣ объемныхъ интеграловъ, распространенныхъ на всѣ точки системы, то ихъ можно преобразовать частью въ поверхностные, а тогда мы можемъ получить и условія на границахъ. Однако, все-таки, употребленіе принципа Гамильтона во многихъ случаяхъ надо предпочитать уравненію (D). Причины этого обстоятельства сейчасъ выяснятся. Мы опредѣляемъ систему при помощи k независимыхъ, вообще говоря, параметровъ: p_1, $p_2, \ldots p_k$. Эти параметры съ физической стороны обладаютъ извѣстными свойствами, отличающими одни изъ нихъ отъ другихъ и Гельмгольцъ поэтому разбиваетъ ихъ по категоріямъ; у него разсматриваются параметры категоріи a, категоріи b и т. п.; если первыхъ будетъ α числомъ, вторыхъ β и т. д., то, ясно, что:

$$\alpha + \beta + \ldots = k.$$

Критеріемъ для сужденія о принадлежности параметра къ той или другой категоріи служитъ, разумѣется, какая-либо опредѣленная осо-

*) Les oscil. électriques, § 22.

бенность, опредѣленное свойство параметра, отвѣчающее нѣкоторому физическому обстоятельству,—свойство, которымъ параметры, принадлежащіе къ одной категоріи, отличаются отъ параметровъ другихъ категорій.

Съ этимъ обстоятельствомъ встрѣтился еще Максвеллъ въ своей теоріи электромагнитнаго поля *). Такъ, у него параметры, обозначенные буквой y, входили въ составъ кинетической энергіи лишь подъ видомъ производныхъ по времени (то были напряженности электрическихъ токовъ, протекающихъ въ системѣ). Подобные параметры разсматриваетъ и Гельмгольцъ. Эти параметры, слѣдовательно, характеризуются тѣмъ условіемъ, что они входятъ въ составъ кинетическаго потенціала H лишь подъ видомъ своихъ производныхъ по времени. Если эту категорію параметровъ обозначимъ символомъ $p_ъ$, то аналитически это выразится уравненіемъ:

$$\frac{\partial H}{\partial p_ъ} = 0\,,$$

которому должны удовлетворять параметры $p_ъ$.

Можетъ случится, что сверхъ того эти параметры такого рода, что соотвѣтствующія имъ силы $P_ъ$ суть нули, т. е., что

$$P_ъ = 0.$$

Какъ примѣръ подобныхъ параметровъ, можетъ служить температура системы (въ изотермическихъ процессахъ).

Параметры другихъ категорій обладаютъ другими свойствами, выражающимися другими аналитическими условіями: Гельмгольцъ и воспользовался этими обстоятельствами для изученія свойствъ кинетическаго потенціала **).

Эта функція H, выражаемая равенствомъ:

$$H = \Phi - T,$$

въ общемъ случаѣ состоитъ изъ цѣлой однородной квадратичной функціи скоростей q_i и нѣкоторой функціи координатъ p_i; но если нѣкоторые изъ параметровъ, напримѣръ параметры категоріи b, обладаютъ приведенными выше свойствами, то мы можемъ исключить всѣ $q_ъ$, и тогда кинетическій потенціалъ H можетъ заключать и *линейную функ-*

*) См. §§ 572—573 и 576 его трактата, т. II. (1873).

**) См. его статьи по статикѣ моно-и полициклическихъ системъ въ журналѣ *Crelle*, т. 97, стр. 111—140; 317—336 (1884 г.).

цію скоростей; дѣйствительно, если параметры категоріи b удовлетворяютъ уравненіямъ:

$$\frac{\partial H}{\partial p_b}=0\,,\quad P_b=0\,,$$

то уравненіе (B) въ примѣненіи къ этому случаю даетъ:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial q_b}\right)=0.$$

Такихъ уравненій будетъ столько числомъ, сколько параметровъ категоріи b; интегрируя ихъ найдемъ:

$$\frac{\partial H}{\partial q_b}=C_b\,,\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (5)$$

гдѣ C_b будетъ постоянное интегрированія, т. е. нѣкоторая функція параметровъ p_i другихъ категорій. Такъ какъ предыдущее уравненіе *линейно* относительно q_b, то мы можемъ опредѣлить всѣ q_b и подставить ихъ значенія въ функцію H; тогда мы получимъ новое ея значеніе, въ которое параметры другихъ категорій будутъ входить и въ *первыхъ степеняхъ*, т. е. кинетическій потенціалъ H будетъ заключать въ своемъ составѣ *линейную функцію* параметровъ p_i (за исключеніемъ параметровъ p_b). Если обозначимъ это значеніе H буквой H_1, то получимъ, обозначая указателемъ a оставшіеся параметры:

$$\frac{\partial H_1}{\partial p_a}=\frac{\partial H}{\partial p_a}+\sum_b\frac{\partial H}{\partial q_b}\frac{\partial q_b}{\partial p_a},\quad \frac{\partial H_1}{\partial q_a}=\frac{\partial H}{\partial q_a}+\sum_b\frac{\partial H}{\partial q_b}\frac{\partial q_b}{\partial q_a}$$

или, вслѣдствіе равенствъ (5):

$$\frac{\partial H_1}{\partial p_a}=\frac{\partial H}{\partial p_a}+\sum_b C_b\frac{\partial q_b}{\partial p_a},\quad \frac{\partial H_1}{\partial q_a}=\frac{\partial H}{\partial q_a}+\sum_b C_b\frac{\partial q_b}{\partial q_a},$$

но, если положимъ, что:

$$H'=H_1-\sum_b C_b q_b\,,\ \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (6)$$

то получимъ:

$$\frac{\partial H}{\partial p_a}=\frac{\partial H'}{\partial p_a},\quad \frac{\partial H}{\partial q_a}=\frac{\partial H'}{\partial q_a}$$

и уравненія (B) примутъ видъ:

$$P_a = -\frac{\partial H'}{\partial p_a} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H'}{\partial q_a}\right) \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (E)$$

Это уравненіе того-же вида, какъ и (B), но съ той существенной разницей, что функція H' заключаетъ въ себѣ члены *линейные* относительно скоростей q_a.

Такимъ образомъ, мы можемъ утверждать, что существуютъ такія физическія явленія, для которыхъ кинетическій потенціалъ H' можетъ заключать члены линейные относительно скоростей. Такія движенія Гельмгольцъ назвалъ *скрытыми*; мы будемъ называть *скрытымъ кинетическимъ состояніемъ* системы, когда ея кинетическій потенціалъ заключаетъ линейные члены скоростей. Примѣромъ такихъ физическихъ явленій могутъ служить: взаимодѣйствіе между магнитами и токами; отклоненіе плоскости поляризаціи свѣтоваго луча магнитомъ и т. п.

Между тѣми физическими процессами или кинетическими состояніями, которые характеризуются потенціаломъ H и тѣми, которые характеризуются потенціаломъ H', существуетъ та физически-существенная разница, что первые процессы *обратимы*, а вторые—нѣтъ. Дѣйствительно, обратимость физическаго процесса аналитически выражается условіемъ:

$$H(q_a) = H(-q_a),$$

а этому условію функція H', вообще, неудовлетворяетъ. Если, напримѣръ, магнитное поле извѣстной напряженности отклоняетъ плоскость поляризаціи луча, но отклоненіемъ плоскости поляризаціи приличной силы и направленія мы не можемъ произвести магнитнаго поля. Гельмгольцъ даетъ еще одинъ видъ параметровъ особаго свойства. Пусть существуютъ такіе параметры категоріи c, что для нихъ:

$$P_c = 0\,, \quad q_c = \text{Const.};$$

но не трудно убѣдиться въ равнозначности послѣдняго условія съ слѣдующимъ:

$$q_c = 0\,,$$

слѣдовательно, могутъ существовать параметры, удовлетворяющіе условіямъ:

$$P_c = 0\,, \quad q_c = 0\,.$$

Но въ такомъ случаѣ

$$\frac{\partial H}{\partial q_c} = 0\,,$$

а уравненіе (B), примѣненное къ этому случаю даетъ:

$$\frac{\partial H}{\partial p_c} = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (7)$$

Послѣднихъ уравненій столько числомъ, сколько параметровъ категоріи c и изъ нихъ можемъ опредѣлить всѣ p_c и подставить въ выраженіе H; тогда опять для H получимъ выраженіе *съ линейными членами скоростей*, но болѣе сложнаго вида.

Соединяя все сказанное, можемъ утверждать, что принципъ Гамильтона, написанный въ формѣ:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} [H + \sum P_a p_a]\, dt = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (A \text{ bis})$$

можетъ-быть примѣненъ къ построенію теорій какихъ угодно физическихъ явленій, какія-бы силы ни участвовали въ тѣхъ физическихъ процессахъ или кинетическихъ состояніяхъ *), которые лежатъ въ основѣ ихъ; при этомъ дѣйствующія силы могутъ и не принадлежать къ категоріи силъ чисто-консервативныхъ, какъ напримѣръ силы тренія, силы сопротивленія электрическому току и т. п. Кинетическій потенціалъ H системы вопреки „старымъ узкимъ" взглядамъ, можетъ содержать члены съ первыми степенями скоростей точекъ.

Гельмгольцъ приложилъ принципъ Гамильтона въ обобщенной формѣ или *принципъ наименьшаго дѣйствія*, какъ онъ называетъ его, къ явленіямъ термодинамики и явленіямъ электромагнитнымъ (въ широкомъ смыслѣ слова); этимъ-же принципомъ онъ руководствовался при построеніи электромагнитной теоріи свѣторазсѣянія **).

Такимъ образомъ, принципъ Гамильтона въ его обобщенной формѣ по всей справедливости можетъ считаться „рабочимъ" принципомъ;

---

*) Въ этихъ физическихъ процессахъ могутъ принимать участіе не только частицы „вѣсомой" матеріи, но и частицы эфира.

**) Въ 1882 году я пользовался принципомъ Гамильтона въ формѣ, данной Кирхгофомъ, для построенія теоріи двойнаго преломленія въ связи съ свѣторазсѣяніемъ. Этотъ принципъ я выражалъ въ слѣдующей формѣ:

$$\int dt(\delta T + \delta U) = 0\,,$$

гдѣ буквой T обозначена кинетическая энергія, а символомъ δU сумма элементарныхъ работъ всѣхъ силъ; въ обозначеніи Гельмгольца это

$$\delta U = -\delta \Phi - \Sigma P_i \delta p_i\,,$$

причемъ можно не раздѣлять внутреннія силы отъ внѣшнихъ, а разбить всѣ силы на двѣ группы: силы чисто-консервативныя и силы не имѣющія потенціала. См. „Сообщенія Харьк. Матем. Общ." I серія, 1882, вып. 1, стр. 3—82.

Гельмгольцъ считаетъ его даже „эвристическимъ", т. е. могущимъ служить для открытія *новыхъ* физическихъ явленій.

Въ настоящемъ докладѣ, посвященномъ памяти Гельмгольца, мы изложимъ его теорію электрическихъ и магнитныхъ явленій и электромагнитную теорію свѣторазсѣянія. Первая теорія дана имъ въ 1892 г. въ статьѣ: „Принципъ наименьшаго дѣйствія и его значеніе въ электродинамикѣ", а вторая въ 1893 году въ статьѣ: „электромагнитная теорія свѣторазсѣянія" *).

Выводъ основныхъ уравненій электродинамики.

Пусть имѣемъ изотропную систему, состоящую изъ діэлектриковъ и проводниковъ; пусть эта система будетъ ограничена съ одной стороны поверхностями проводниковъ, а съ другой поверхностью сферы безконечно-большаго радіуса, такъ что діэлектрики наполняютъ все пространство, хотя могутъ быть какими угодно. Пусть далѣе, система такова, что скорости ея частицъ или нули, или постоянныя величины, такъ что ея кинетическій потенціалъ равенъ просто функціи Φ и принципъ Гамильтона напишется въ формѣ:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} [\Phi + \sum P_a p_a]\, dt = 0 \,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

причемъ, какъ помнимъ, силы P_a варіированію не подлежатъ.

Кинетическій потенціалъ будетъ, слѣдовательно, вызываться тѣми физическими процессами, которые происходятъ въ діэлектрикѣ и проводникахъ.

Въ каждой точкѣ діэлектрика дѣйствуютъ электрическія и магнитныя силы и механическія, а въ точкахъ проводниковъ силы сопротивленія электрическимъ токамъ и электродвижущія силы и сверхъ того на поверхностяхъ проводниковъ дѣйствуютъ механическія силы. Электрическія и магнитныя силы Гельмгольцъ считаетъ консервативными силами, а прочія нѣтъ.

Выразимъ теперь функцію Φ. Условимся сначала относительно обозначеній и терминовъ. Въ послѣдующемъ мы будемъ употреблять термины и обозначенія теоріи Максвелла, *во первыхъ* потому, что старые термины (діэлектрическій моментъ, діэлектрическая поляризація и т. п.) могутъ повести къ недоразумѣніямъ, *во вторыхъ* — идеи Гельмгольца въ излагаемомъ нами мемуарѣ въ сущности суть идеи Максвелла (Гер-

---

*) Обѣ статьи помѣщены въ Wied. Ann. Bd. 47 und 48, а также въ запискахъ Берлинской академіи наукъ за тѣже года. См. также журналъ Crelle, т. 100, стр. 137—166 (1886 г.).

ца), а не старой его теоріи электродинамики *) и наконецъ *въ третьихъ* обозначенія Максвелла болѣе распространены и общеизвѣстны **).

Пусть V будетъ магнитная энергія системы, W — электрическая и U электромагнитная энергія токовъ перемѣщенія (пертурбаціонныхъ токовъ), въ такомъ случаѣ получимъ:

$$\Phi = V + W + U \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Выразимъ теперь всѣ эти величины въ функціи электрической пертурбаціи, магнитной силы и такъ-называемаго векторъ-потенціала.

Пусть f, g, h будутъ проекціи электрической пертурбаціи въ точкѣ (x, y, z), K діэлектрическая постоянная въ той же точкѣ средины; α, β, γ проекціи магнитной силы и μ магнитная постоянная (коэффиціентъ магнитной проницаемости среды) l, m, n составляющія силы постояннаго магнетизма ***) и наконецъ F, G, H составляющія векторъ-потенціала. Въ такомъ случаѣ, если положимъ для простоты письма:

$$f_m = \frac{\mu}{4\pi}\alpha, \quad g_m = \frac{\mu}{4\pi}\beta, \quad h_m = \frac{\mu}{4\pi}\gamma \text{ ****)},$$

то для V, W и U будемъ имѣть:

$$V = \int \frac{2\pi}{\mu}(f_m^2 + g_m^2 + h_m^2)\, d\tau \text{ *****)}, \quad W = \int \frac{2\pi}{K}(f^2 + g^2 + h^2)\, d\tau$$

и

$$U = A\int \left(F\frac{df}{dt} + G\frac{dg}{dt} + H\frac{dh}{dt}\right) d\tau,$$

причемъ $d\tau$—элементъ объема средины въ точкѣ (x, y, z) и t время.

Между магнитной силой (α, β, γ) и составляющими векторъ-потенціала существуютъ зависимости, даваемыя, *какъ опредѣленія* магнитной силы, а именно:

---

*) Ср. *Poincaré*: Électricité et Optique, II, pp. 110—113; 114; 126 и *Conclusions*. Также *Drude*: Physik des Aethers, SS. 337—342.

**) Полезно ср. *Boltzmann*: Vorlesungen über Maxwell's Theorie der Elektricität und des Lichtes, II Th. p. IV.

***) Въ этомъ пунктѣ теорія Гельмгольца полнѣе теоріи Герца.

****) Это будутъ составляющія такъ называемой *магнитной пертурбаціи*.

*****) Такъ какъ составляющія постояннаго магнетизма l, m, n варіаціоннымъ измѣненіямъ не подлежатъ, то мы ихъ и не вводимъ въ выраженіе для V.

$$\left.\begin{aligned} \mu\alpha + l &= \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z} \\ \mu\beta + m &= \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x} \\ \mu\gamma + n &= \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots \quad (3)$$

Коэффиціентъ A есть абсолютное постоянное, т. е. одно и тоже для всѣхъ срединъ и $\frac{1}{A}$ есть скорость распространенія электромагнитной пертурбаціи въ чистомъ эфирѣ.

Составимъ теперь выраженіе $\sum P_a p_a$.

Пусть P_0, Q_0, R_0 составляющія электродвижущей силы соприкосновенія или термоэлектрической разности проводниковъ и т. п.; p, q, r — составляющія тока проводимости; X, Y, Z составляющія механической силы, приложенной къ точкѣ (x, y, z) внутри средины; X_n, Y_n, Z_n — подобной-же силы, но приложенной къ точкамъ поверхности, ограничивающей средину и наконецъ ξ, η, ζ — проекціи перемѣщенія точки (x, y, z).

Поэтому будемъ имѣть:

$$\sum P_a p_a = \int [(P_0 f + Q_0 g + R_0 h) + A(Fp + Gq + Hr) + (X\xi + Y\eta + Z\zeta)]\,d\tau +$$

$$+ \int [A(Fp + Gq + Hr) + (X_n\xi + Z_n\eta + Z_n\zeta)]\,dS.$$

Здѣсь варіированію будутъ подлежать лишь количества: f, g, h; F, G, H и ξ, η, ζ. Надо замѣтить, что Гельмгольцъ не вводитъ силъ, работающихъ на поверхности проводниковъ или діэлектриковъ; но намъ кажется, что это имъ сдѣлано единственно въ видахъ простоты анализа; сущность-же дѣла, разумѣется, требуетъ введенія силъ на поверхности.

Теперь остается только все найденное подставить въ равенство (1) и вычислить варіаціи, входящія въ составъ этого равенства. Для упрощенія вычисленій мы замѣтимъ слѣдующее. Такъ какъ α, β, γ или, все равно, f_m, g_m, h_m связаны съ F, G, H соотношеніями (3), то независимыхъ перемѣнныхъ подлежащихъ варіированію будетъ три группы: f, g, h; F, G, H и ξ η, ζ; что же касается коэффиціентовъ K и μ, то, хотя они и могутъ измѣняться вслѣдствіе деформацій средины, но ихъ можно разсматривать, какъ функціи x, y, z. Затѣмъ, замѣтимъ еще то обстоятельство, что f, g, h и F, G, H могутъ измѣняться какъ съ теченіемъ времени, т. е. какъ функціи t, такъ и вслѣдствіе деформацій средины, такъ что можемъ положить, что

$$\delta f = \delta_1 f + \delta_2 f,$$

$$\delta F = \delta_1 F + \delta_2 F$$

и подобныя равенства для δg, δh; δG и δH; при этомъ ясно, что символомъ δ_1 мы обозначаемъ variаціи отъ первой причины измѣняемости, а δ_2 — отъ второй.

Такимъ образомъ можемъ изучать отдѣльно измѣняемость разсматриваемыхъ количествъ отъ той и другой причины и тогда анализъ значительно упрощается.

Прежде чѣмъ приступить къ опредѣленію варіаціи интеграла:

$$\int \left(\Phi + \sum P_a p_a\right) dt,$$

замѣтимъ нѣкоторыя свойства перемѣнныхъ F, G, H и f, g, h, а также составляющихъ силы постояннаго магнетизма.

Такъ какъ ξ, η, ζ суть проекціи перемѣщенія точки (x, y, z), то тогда скорости будутъ:

$$\frac{d\xi}{dt} = u, \quad \frac{d\eta}{dt} = v, \quad \frac{d\zeta}{dt} = w \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

Далѣе, если возьмемъ внутри средины безконечно-малый элементъ поверхности, опирающійся на нѣкоторый безконечно-малый замкнутый контуръ, то

$$[l\cos(nx) + m\cos(ny) + n\cos(nz)]\,dS\,^{*})$$

будетъ притокомъ магнитной силы черезъ элементъ dS во время t; для момента $t + dt$ этотъ притокъ будетъ:

$$[l\cos(nx) + m\cos(ny) + n\cos(nz)]\,dS + \delta\,[l\cos(nx) + m\cos(ny) + n\cos(nz)]\,dS.$$

Если мы допустимъ, что въ силу сплошности средины однѣ и тѣ же точки ея приходятся на элементъ dS и ограничивающій его контуръ ds, какъ для момента времени t, такъ и для момента $t + dt$, то получимъ:

$$\delta\,[l\cos(nx) + m\cos(ny) + n\cos(nz)]\,dS = 0$$

*) Не надо смѣшивать нормала n подъ знакомъ cos съ магнитной силой n.

или:

$$\delta[ldydz + mdxdz + ndxdy] = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (b)$$

Но ниже (фор. 21), приведены формулы для δf, δg, δh при условіи, что электрическія пертурбаціи f, g, h удовлетворяютъ соотношенію вида (b), а потому, полагая въ нихъ:

$$udt\,,\quad vdt\,,\quad wdt$$

вмѣсто $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ и l, m, n вмѣсто f, g, h, найдемъ:

$$\delta l = \tau udt + \frac{\partial}{\partial z}(nu - lw)\,dt - \frac{\partial}{\partial y}(lv - mu)\,dt.$$

Но

$$\delta l = \frac{\partial l}{\partial t}dt,$$

а потому находимъ первую изъ ниженаписанныхъ формулъ, остальныя двѣ получатся подобнымъ-же образомъ:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial l}{\partial t} - \tau u + \frac{\partial}{\partial y}(vl - um) - \frac{\partial}{\partial z}(un - wl) = 0\\
&\frac{\partial m}{\partial t} - \tau v - \frac{\partial}{\partial x}(vl - um) + \frac{\partial}{\partial z}(wm - vn) = 0\\
&\frac{\partial n}{\partial t} - \tau w - \frac{\partial}{\partial y}(wm - vn) + \frac{\partial}{\partial x}(un - wl) = 0.
\end{aligned}\right\} \quad \ldots (c)$$

Здѣсь положено:

$$-\tau = \frac{\partial l}{\partial x} + \frac{\partial m}{\partial y} + \frac{\partial n}{\partial z}. \quad \ldots\ldots\ldots (d)$$

Механическое значеніе τ откроется, если сложимъ равенства (c), предварительно продифференцированныя по x, y, z; находимъ тогда;

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{\partial(u\tau)}{\partial x} + \frac{\partial(v\tau)}{\partial y} + \frac{\partial(w\tau)}{\partial z} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (e)$$

или

$$\delta\,(\tau\,dx\,dy\,dz) = 0\,,$$

т. е. τ есть плотность нѣкоторой *фиктивной жидкости*; это τ, слѣдовательно, есть объемная плотность постояннаго магнетизма, существующаго въ точкѣ (x, y, z).

Равенства (3) даютъ:

$$\frac{\partial(\mu\alpha)}{dx}+\frac{\partial(\mu\beta)}{dy}+\frac{\partial(\mu\gamma)}{dz}=\tau \,.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (f)$$

Теперь надо замѣтить относительно F, G, H, что если α, β, γ; l, m, n будутъ даны, то уравненій (3) будетъ недостаточно для опредѣленія F, G, H: надо еще добавочное условіе; за это условіе Гельмгольцъ беретъ слѣдующее:

$$\frac{\partial F}{dx}+\frac{\partial G}{dy}+\frac{\partial H}{dz}=\varDelta\Psi \,.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (g)$$

причемъ функція Ψ должна считаться данной.

Въ этихъ двухъ пунктахъ (τ и Ψ) Гельмгольцева теорія полнѣе Максвелловой; въ этой послѣдней:

$$\tau=0\,,\quad \Psi=\text{Const.}$$

Точно также электрическое перемѣщеніе f, g, h должно удовлетворять соотношенію (b), а слѣдовательно, положивъ въ формулахъ (21)

$$-udt\,,\quad -vdt\,,\quad -wdt$$

вмѣсто $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ и взявъ вмѣсто δf, δg, δh выраженія:

$$\left(\frac{df}{dt}-\frac{\partial f}{\partial t}\right)dt\,,\quad \left(\frac{dg}{dt}-\frac{\partial g}{\partial t}\right)dt\,,\quad \left(\frac{dh}{dt}-\frac{\partial h}{\partial t}\right)dt\,,$$

найдемъ:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{df}{dt}&=\frac{\partial f}{\partial t}+\varrho u+\frac{\partial}{dy}(vf-ug)-\frac{\partial}{dz}(uh-wf)\\
\frac{dg}{dt}&=\frac{\partial g}{\partial t}+\varrho v-\frac{\partial}{dx}(vf-ug)+\frac{\partial}{dz}(wg-vh)\\
\frac{dh}{dt}&=\frac{\partial h}{\partial t}+\varrho w-\frac{\partial}{dy}(wg-vh)+\frac{\partial}{dx}(uh-wf).
\end{aligned}\right\}\;.\;.\;.\;.\;.\quad (h)$$

Такимъ образомъ,

$$\frac{df}{dt}dt\,,\quad \frac{dg}{dt}dt\,,\quad \frac{dh}{dt}dt$$

будутъ *полными варіаціями* f, g, h *по времени* t.

Опредѣлимъ теперь варіаціи F, G, H.

Вообразимъ себѣ безконечно-малый замкнутый контуръ; работа электродвижущей напряженности на элементѣ его будетъ для момента времени t:

$$Fdx + Gdy + Hdz\,,$$

а потому въ силу принципа сплошности имѣемъ:

$$\delta(Fdx + Gdy + Hdz) = 0\,.$$

Отсюда при помощи формулъ (19) находимъ:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dF}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial P'}{\partial x} - v\left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}\right) + w\left(\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x}\right)\\
\frac{dG}{dt} &= \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial P'}{\partial y} - w\left(\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z}\right) + u\left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}\right)\\
\frac{dH}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial P'}{\partial z} - u\left(\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x}\right) + v\left(\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z}\right)
\end{aligned}\right\} \;\ldots\; (i)$$

Здѣсь положено:

$$P' = Fu + Gv + Hw\,. \;\ldots\ldots\ldots\; (j)$$

Такимъ образомъ

$$\frac{dF}{dt}dt\,,\quad \frac{dG}{dt}dt\,,\quad \frac{dH}{dt}dt$$

будутъ *полныя варіаціи* F, G, H *по времени* t.

И такъ, пусть сначала средина не подлежитъ геометрическимъ деформаціямъ, а всѣ количества измѣняются, какъ чистыя функціи времени t.

Поэтому получимъ, опуская на время указатель (ı) при знакѣ δ:

$$\delta V = \frac{4\pi}{\mu}\int (f_m\delta f_m + g_m\delta g_m + h_m\delta h_m)\,d\tau\,,$$

но вслѣдствіе (3):

$$\delta f_m = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial\delta H}{\partial y} - \frac{\partial\delta G}{\partial z}\right)$$

и подобныя формулы для δg_m и δh_m, ибо l, m, n должно считать постоянными по отношенію къ времени t.

Подставляя въ выраженіе для δV и интегрируя по частямъ, найдемъ:

$$\left.\begin{aligned}\delta V = \frac{1}{4\pi}\int\left[\left(\frac{\partial\gamma}{\partial y}-\frac{\partial\beta}{\partial z}\right)\delta F+\left(\frac{\partial\alpha}{\partial z}-\frac{\partial\gamma}{\partial x}\right)\delta G+\left(\frac{\partial\beta}{\partial x}-\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)\delta H\right]d\tau + \\ +\frac{1}{4\pi}\int\{[\gamma\cos(ny)-\beta\cos(nz)]\,\delta F+[\alpha\cos(nz)-\gamma\cos(nx)]\,\delta G+ \\ +[\beta\cos(nx)-\alpha\cos(ny)]\,\delta H\}\,dS.\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Опредѣлимъ теперь δU.

Сначала находимъ:

$$\delta U = A\int\left(\frac{df}{dt}\delta F+\frac{dg}{dt}\delta G+\frac{dh}{dt}\delta H\right)d\tau - A\int\left(\frac{dF}{dt}\delta f+\frac{dG}{dt}\delta g+\frac{dH}{dt}\delta h\right)d\tau,$$

гдѣ вмѣсто членовъ вида:

$$F\frac{d\delta f}{dt}d\tau\,.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(a)$$

подставлены члены вида:

$$-\frac{dF}{dt}\delta f d\tau,\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(b)$$

ибо δU входитъ въ принципъ Гамильтона подъ знакомъ интеграла:

$$\int_{t_0}^{t_1}\delta U dt,$$

а потому, проинтегрировавъ по t члены вида (a) и замѣтивъ, что для $t=t_0$ и $t=t_1$:

$$\delta f=\delta g=\delta h=0,$$

убѣждаемся въ законности подстановки (b).

Соединяя теперь δV, δU и δW, причемъ послѣднее выраженіе напишется безъ всякихъ преобразованій, получимъ:

$$\begin{aligned}\int d\tau\int_{t_0}^{t_1}dt\Big\{&\left(\frac{4\pi}{K}f-A\frac{dF}{dt}\right)\delta f+\left(\frac{4\pi}{K}g-A\frac{dG}{dt}\right)\delta g+\left(\frac{4\pi}{K}h-A\frac{dH}{dt}\right)\delta h+ \\ &+\left[\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial y}-\frac{\partial\beta}{\partial z}\right)+A\frac{df}{dt}\right]\delta F+\left[\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial z}-\frac{\partial\gamma}{\partial x}\right)+A\frac{dg}{dt}\right]\delta G+ \\ &+\left[\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial\beta}{\partial x}-\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)+A\frac{dh}{dt}\right]\delta H\Big\}+ \\ &+\int_{t_0}^{t_1}dt\int\frac{dS}{4\pi}\{[\gamma\cos(ny)-\beta\cos(nz)]\,\delta F+ \\ &+[\alpha\cos(nz)-\gamma\cos(nx)]\,\delta G+[\beta\cos(nx)-\alpha\cos(ny)]\,\delta H\}= \\ &=\delta\int_{t_0}^{t_1}(V+W+U)\,d\tau.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(c)\end{aligned}$$

Затѣмъ имѣемъ:

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}\sum P_a p_a\, dt=$$

$$=\int d\tau\int_{t_0}^{t_1} dt\Big\{(P_0\delta f+Q_0\delta g+R_0\delta h)+A(p\delta F+q\delta G+r\delta H)\Big\}+$$

$$+A\int_{t_0}^{t_1} dt\int(p\delta F+q\delta G+r\delta H)\,dS \; . \; . \; . \; (d)$$

Подставляя все это въ выраженіе (1) принципа Гамильтона и приравнивая нулю коэффиціенты при $\delta f, \ldots \delta H$ въ объемныхъ интегралахъ, получимъ слѣдующія двѣ системы уравненій для точекъ *внутри* средины:

первая система:

$$\frac{4\pi f}{K}-A\frac{dF}{dt}+P_0=0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (e)$$

и подобныя уравненія для g и h;

вторая система:

$$\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial y}-\frac{\partial\beta}{\partial z}\right)+A\frac{df}{dt}+Ap=0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (f)$$

и подобныя-же уравненія для α и γ; β и α.

Введемъ составляющія полной электрической силы, которыя обозначимъ P, Q, R, т. е. положимъ:

$$P=\frac{4\pi}{K}f, \quad Q=\frac{4\pi}{K}g, \quad R=\frac{4\pi}{K}h, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (5)$$

тогда первая система дастъ слѣдующую:

$$P=A\frac{dF}{dt}-P_0, \quad Q=A\frac{dG}{dt}-Q_0, \quad R=A\frac{dH}{dt}-R_0 \; . \; . \; (6)$$

Это извѣстныя соотношенія Максвелла для средины, находящейся въ движеніи.

Вторая система при помощи уравненій (6) обратится въ слѣдующую:

$$\left.\begin{aligned} AK\frac{dP}{dt}+4\pi Ap&=\frac{\partial\beta}{\partial z}-\frac{\partial\gamma}{\partial y}\\ AK\frac{dQ}{dt}+4\pi Aq&=\frac{\partial\gamma}{\partial x}-\frac{\partial\alpha}{\partial z}\\ AK\frac{dR}{dt}+4\pi Ar&=\frac{\partial\alpha}{\partial y}-\frac{\partial\beta}{\partial x}\,. \end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\ (7)$$

Это вторая система уравненій Максвелла *).

Если-бы воспользовались уравненіями (3) и (6), то получили-бы первую систему уравненій Герца:

$$\left.\begin{aligned} A\mu\frac{d\alpha}{dt}&=\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\\ A\mu\frac{d\beta}{dt}&=\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\\ A\mu\frac{d\gamma}{dt}&=\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\,. \end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\ (8)$$

Уравненія (7) представляютъ 2-ую систему Герца.

Если разсматриваемая средина неподвижна ($u=v=w=0$), то въ предыдущихъ формулахъ вмѣсто $\frac{df}{dt},\ldots\frac{dH}{dt}$ надо взять частныя производныя $\frac{\partial f}{\partial t},\ldots\frac{\partial H}{\partial t}$; если-же средина находится въ движеніи, то вмѣсто тѣхъ-же количествъ придется брать ихъ значеніе изъ формулъ (h) и (i); такъ что получимъ вмѣсто системы (e) слѣдующую:

$$\frac{4\pi}{K}f+P_0-A\left\{\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{\partial P'}{\partial x}-v\left(\frac{\partial G}{\partial x}-\frac{\partial F}{\partial y}\right)+w\left(\frac{\partial F}{\partial z}-\frac{\partial H}{\partial x}\right)\right\}=0\quad (e\ \text{bis})$$

и подобныя для g и h.

Исключая изъ нихъ функцію P' по извѣстному пріему и замѣняя значенія $\frac{\partial l}{\partial t}$, $\frac{\partial m}{\partial t}$, $\frac{\partial n}{\partial t}$ изъ равенствъ (c), получимъ:

$$\left.\begin{aligned} A\left[\frac{\partial(\mu\alpha)}{\partial t}+u\tau+\frac{\partial}{\partial y}\mu(v\alpha-u\beta)-\frac{\partial}{\partial z}\mu(u\gamma-w\alpha)\right]&=\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\\ A\left[\frac{\partial(\mu\beta)}{\partial t}+v\tau-\frac{\partial}{\partial x}\mu(v\alpha-u\beta)+\frac{\partial}{\partial z}\mu(w\beta-v\gamma)\right]&=\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\\ A\left[\frac{\partial(\mu\gamma)}{\partial t}+w\tau-\frac{\partial}{\partial y}\mu(w\beta-v\gamma)+\frac{\partial}{\partial x}\mu(u\gamma-w\alpha)\right]&=\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\,. \end{aligned}\right\}.\ (8\ \text{bis})$$

*) Только оси координатъ прямо-противоположны Максвелловымъ.

Вмѣсто уравненій (f) будемъ имѣть слѣдующія:

$$\left.\begin{aligned}
A\left[\frac{\partial f}{\partial t}+u\varrho+\frac{\partial}{\partial y}(vf-ug)-\frac{\partial}{\partial z}(uh-wf)\right]+4\pi Ap&=\frac{\partial\beta}{\partial z}-\frac{\partial\gamma}{\partial y}\cdot\\
A\left[\frac{\partial g}{\partial t}+v\varrho-\frac{\partial}{\partial x}(vf-ug)+\frac{\partial}{\partial z}(wg-vh)\right]+4\pi Aq&=\frac{\partial\gamma}{\partial x}-\frac{\partial\alpha}{\partial z}\\
A\left[\frac{\partial h}{\partial t}+w\varrho-\frac{\partial}{\partial y}(wg-vh)+\frac{\partial}{\partial x}(uh-wf)\right]+4\pi Ar&=\frac{\partial\alpha}{\partial y}-\frac{\partial\beta}{\partial x}
\end{aligned}\right\}.\ (7\text{ bis})$$

Эти двѣ системы получены Г. Герцемъ.

Векторъ: $u\varrho$, $v\varrho$, $w\varrho$ будетъ представлять конвекціонный токъ, открытый Роуландомъ.

Теперь остается изслѣдовать условія на поверхности.

Эти условія получаются изъ выраженій (c) и (d), если приравнять нулю коэффиціенты при δF, δG, δH въ поверхностныхъ интегралахъ; при этомъ поверхность S можетъ быть поверхностью разрыва, отдѣляющею одинъ діэлектрикъ отъ другого; въ такомъ случаѣ надо вообразить двѣ поверхности безконечно-близкія одна отъ другой и взять интегралы по обѣимъ; въ такомъ случаѣ получимъ:

$$[\gamma\cos(ny)-\beta\cos(nz)]_1=[\gamma\cos(ny)-\beta\cos(nz)]_2$$

$$[\alpha\cos(nz)-\gamma\cos(nx)]_1=[\alpha\cos(nz)-\gamma\cos(nx)]_2$$

$$[\beta\cos(nx)-\alpha\cos(ny)]_1=[\beta\cos(nx)-\alpha\cos(ny)]_2,$$

такъ какъ p, q, r для діэлектриковъ равны нулю.

Изъ этихъ уравненій находимъ, взявъ для простоты нормалъ къ поверхности за ось z-овъ, а двѣ ортогональныя касательныя за оси x и y, слѣдующія условія:

$$\alpha_1=\alpha_2,\quad \beta_1=\beta_2.\ \ldots\ldots\ldots\ (9)$$

Если-же поверхность S будетъ отдѣлять проводникъ отъ діэлектрика или проводникъ отъ проводника, то подобнымъ-же образомъ найдемъ для послѣдняго случая:

$$\left.\begin{aligned}
[\gamma\cos(ny)-\beta\cos(nz)+4\pi Ap]_1&=[\gamma\cos(ny)-\beta\cos(nz)+4\pi Ap]_2\\
[\alpha\cos(nz)-\gamma\cos(nx)+4\pi Aq]_1&=[\alpha\cos(nz)-\gamma\cos(nx)+4\pi Aq]_2\\
[\beta\cos(nx)-\alpha\cos(ny)+4\pi Ar]_1&=[\beta\cos(nx)-\alpha\cos(ny)+4\pi Ar]_2.
\end{aligned}\right\}(10)$$

Если положимъ

$$p_1=q_1=r_1=0,$$

то будемъ имѣть случай проводника и діэлектрика.

Замѣтимъ здѣсь нѣкоторыя формулы, которыя намъ ниже будутъ нужны.

Положимъ:

$$\left.\begin{aligned} \varrho &= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} \\ -\sigma &= \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial r}{\partial z} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots (11)$$

такъ что ϱ будетъ объемной плотностью электричества, а σ поверхностной плотностью тока; въ такомъ случаѣ равенства (f) по дифференцированіи по x, y, z и по сложеніи результатовъ дадутъ:

$$\sigma = \frac{d\varrho}{dt} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (12)$$

Для p, q, r можемъ написать соотношенія:

$$p = C(P - P_0), \quad q = C(Q - Q_0), \quad r = C(R - R_0) \quad \ldots (13)$$

выражающія законъ Ома, причемъ C есть коэффиціентъ электропроводности.

Выведемъ теперь еще два соотношенія, необходимыя намъ для послѣдующаго.

Уравненія (7) по умноженіи на $\cos(nx)$, $\cos(ny)$, $\cos(nz)$ и на dS дадутъ, если результаты сложить и взять интегралъ по нѣкоторой не замкнутой поверхности, опирающейся на нѣкоторый замкнутый контуръ. Получимъ:

$$\iint\left[\left(\frac{\partial\beta}{\partial z} - \frac{\partial\gamma}{\partial y}\right)\cos(nx) + \left(\frac{\partial\gamma}{\partial x} - \frac{\partial\alpha}{\partial z}\right)\cos(ny) + \left(\frac{\partial\alpha}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial x}\right)\cos(nz)\right] dS =$$

$$= AK\frac{d}{dt}\int\left[P\cos(nx) + Q\cos(ny) + R\cos(nz)\right] dS,$$

ибо

$$p\cos(nx) + q\cos(ny) + r\cos(nz) = 0.$$

Преобразуя лѣвую часть предыдущаго равенства по теоремѣ Стокса, а въ правую подставляя значенія P, Q, R изъ уравненій (5), найдемъ:

$$\int\left(\alpha\frac{dx}{ds} + \beta\frac{dy}{ds} + \gamma\frac{dz}{ds}\right) ds = 4\pi A\frac{d}{dt}\int\left[f\cos(nx) + g\cos(ny) + h\cos(nz)\right] dS,$$

гдѣ ds будетъ элементъ контура, на который опирается поверхность S.

Умножая на dt и интегрируя отъ $t=t_0$ до какого-нибудь значенія t, найдемъ:

$$\int [f\cos(nx)+g\cos(ny)+h\cos(nz)]\,dS = F(t),$$

если выберемъ нижній предѣлъ t_0 такимъ, чтобы для него f, g, h обращались въ нуль. Такъ какъ контуръ можетъ быть взятъ безконечно-малымъ, то заключаемъ, что если контуръ деформируется, то

$$\delta_2 [f\cos(nx)+g\cos(ny)+h\cos(nz)]\,dS = 0$$

или:

$$\delta_2 \{f dy dz + g dx dz + h dx dy\} = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (14)$$

Физическій смыслъ этого равенства понятенъ: трехчленъ въ скобкахъ выражаетъ число линій электрической силы, проходящихъ черезъ безконечно-малый элементъ поверхности.

Это, въ сущности, есть выраженіе принципа сплошности.

Аналогичное соотношеніе получимъ для магнитныхъ силовыхъ линій. Дѣйствительно, равенства (6) даютъ:

$$A\frac{d}{dt}\int (F dx + G dy + H dz) = \int (P dx + Q dy + R dz),$$

причемъ интегралъ взятъ по замкнутому контуру и кромѣ того замѣчено, что:

$$P_0 = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad Q_0 = -\frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad R_0 = -\frac{\partial \Psi}{\partial z}.$$

Отсюда найдемъ, какъ и выше, что:

$$\int (F dx + G dy + H dz) = f(t),$$

а отсюда:

$$\delta_2 [F dx + G dy + H dz] = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (15)$$

Гельмгольцъ даетъ равенства (14) и (15) безъ доказательства и пользуется ими при опредѣленіи варіацій $\delta_2 f, \ldots \delta_2 H$, обусловленныхъ деформаціями среды.

Теперь мы и перейдемъ къ опредѣленію этихъ варіацій, происходящихъ отъ деформацій среды и дающихъ мѣсто явленіямъ электро-и магнито-стрикціи.

Разовьемъ сначала равенство (15). Взявъ варіацію и опустивъ для простоты указатель (2), получимъ:

$$\delta F dx + \delta G dy + \delta H dz + F\delta . dx + G\delta . dy + H\delta . dz = 0 . \quad . \quad . \quad (16)$$

Если обозначимъ координаты точки (x, y, z) послѣ деформаціи черезъ $x + \xi$, $y + \eta$, $z + \zeta$, то получимъ:

$$\delta x = \delta\xi , \quad \delta y = \delta\eta , \quad \delta z = \delta\zeta ,$$

затѣмъ находимъ:

$$\left.\begin{aligned} \delta . dx = d . \delta x = \frac{\partial\delta\xi}{\partial x} dx + \frac{\partial\delta\xi}{\partial y} dy + \frac{\partial\delta\xi}{\partial z} dz \\ \delta . dy = d . \delta y = \frac{\partial\delta\eta}{\partial x} dx + \frac{\partial\delta\eta}{\partial y} dy + \frac{\partial\delta\eta}{\partial z} dz \\ \delta . dz = d . \delta z = \frac{\partial\delta\zeta}{\partial x} dx + \frac{\partial\delta\zeta}{\partial y} dy + \frac{\partial\delta\zeta}{\partial z} dz . \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Далѣе, если обозначимъ $[\delta F]$, $[\delta G]$, $[\delta H]$ варіаціи F, G, H, входящія въ равенство (16) и происходящія вслѣдствіе измѣненій ξ, η, ζ, удовлетворяющихъ равенству (15), то получимъ по подстановкѣ значеній $\delta . dx$, $\delta . dy$ и $\delta . dz$ изъ равенствъ (17):

$$\left\{[\delta F] + F\frac{\partial\delta\xi}{\partial x} + G\frac{\partial\delta\eta}{\partial x} + H\frac{\partial\delta\zeta}{\partial x}\right\} dx +$$

$$+ \left\{[\delta G] + F\frac{\partial\delta\xi}{\partial y} + G\frac{\partial\delta\eta}{\partial y} + H\frac{\partial\delta\zeta}{\partial y}\right\} dy +$$

$$+ \left\{[\delta H] + F\frac{\partial\delta\xi}{\partial z} + G\frac{\partial\delta\eta}{\partial z} + H\frac{\partial\delta\zeta}{\partial z}\right\} dz = 0 .$$

Это выраженіе должно удовлетворяться при всѣхъ значеніяхъ dx, dy, dz, а потому находимъ:

$$-[\delta F] = F\frac{\partial\delta\xi}{\partial x} + G\frac{\partial\delta\eta}{\partial x} + H\frac{\partial\delta\zeta}{\partial x}$$

и подобныя выраженія для $[\delta G]$ и $[\delta H]$.

Полная варіація F, обусловленная деформаціями среды, будетъ:

$$\delta F = [\delta F] - \frac{\partial F}{\partial x}\delta\xi - \frac{\partial F}{\partial y}\delta\eta - \frac{\partial F}{\partial z}\delta\zeta \;{}^{*)}$$

*) О знакахъ — при $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ см. далѣе.

или, подставивъ значеніе $[\delta F]$ и преобразовавъ:

$$\delta F = -\frac{\partial}{\partial x}(F\delta\xi + G\delta\eta + H\delta\zeta) + \left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}\right)\delta\eta - \left(\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x}\right)\delta\zeta.$$

Если-же положимъ для краткости письма:

$$P = F\delta\xi + G\delta\eta + H\delta\zeta \quad \ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

и введемъ значенія α, β, γ изъ уравненій (3) (положивъ въ нихъ: $l = m = n = 0$), то получимъ слѣдующую систему:

$$\left.\begin{aligned} \delta F &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu(\gamma\delta\eta - \beta\delta\zeta) \\ \delta G &= -\frac{\partial P}{\partial y} + \mu(\alpha\delta\zeta - \gamma\delta\xi) \\ \delta H &= -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu(\beta\delta\xi - \alpha\delta\eta). \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (19)$$

Теперь изъ равенства (14) надо опредѣлить $\delta_2 f$, $\delta_2 g$, $\delta_2 h$. Для этого опредѣленія установимъ сначала одну теорему изъ кинематики измѣняемой системы.

Пусть имѣемъ въ плоскости xy безконечно-малый прямоугольникъ $MACB$ со сторонами параллельными осямъ x-овъ и y-овъ и равными соотвѣтственно dx и dy; его площадь будетъ $dxdy$. Пусть онъ подвергнутъ безконечно-малой деформаціи и обращается вслѣдствіе этого въ безконечно-малый параллелограммъ $M_1A_1C_1B_1$, не лежащій уже въ плоскости xy. Координаты его вершинъ будутъ:

до деформаціи: *послѣ деформаціи:*

$M \quad x \quad y \quad 0 \ldots M_1 \quad x+u, \quad y+v, \quad w$

$A \quad x+dx, \quad y \quad 0 \ldots A_1 \quad x+u+dx+\frac{\partial u}{\partial x}dx, \; y+v+\frac{\partial v}{\partial x}dx, \; w+\frac{\partial w}{\partial x}dx;$

$B \quad x, \quad y+dy, \; 0 \ldots B_1 \quad x+u+\frac{\partial u}{\partial y}dy, \; y+v+dy+\frac{\partial v}{\partial y}dy, \; w+\frac{\partial w}{\partial y}dy;$

$C \; x+dx, \; y+dy, \; 0 \ldots C_1 \; x+u+dx+\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy, \; y+v+dy+$

$+\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy, \; w+\frac{\partial w}{\partial x}dx+\frac{\partial w}{\partial}dy.$

Предполагая, что перемѣщенія u, v, w безконечно-малыя 1-го порядка, находимъ для сторонъ параллелограмма и его площади выраженія:

$$\overline{M_1A_1} = \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) dx\,, \quad \overline{M_1B_1} = \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) dy$$

и

$$\text{пл. } M_1A_1C_1B_1 = \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) dxdy.$$

Такъ какъ эта площадь уже не лежитъ въ плоскости xy, то найдемъ ея проекціи на координатныя плоскости; съ этой цѣлью опредѣлимъ косинусы направленія нормала къ ней.

Сначала имѣемъ съ тѣмъ-же приближеніемъ:

$$\cos(\overline{M_1A_1}\,,\ x) = 1\,;\ \cos(\overline{M_1A_1}\,,\ y) = \frac{\partial v}{\partial x}\,;\ \cos(\overline{M_1A_1}\,,\ z) = \frac{\partial w}{\partial x}\,;$$

$$\cos(\overline{M_1B_1}\,,\ x) = \frac{\partial u}{\partial y},\ \cos(\overline{M_1B_1}\,,\ y) = 1\,;\ \cos(\overline{M_1B_1}\,,\ z) = \frac{\partial w}{\partial y}\,.$$

Отсюда по извѣстному правилу аналитической геометріи находимъ косинусы направленія перпендикуляра къ плоскости прямыхъ $\overline{M_1A_1}$ и $\overline{M_1B_1}$; обозначая направленіе этого перпендикуляра черезъ n_3, получимъ:

$$\cos(n_3\,,\ x) = -\frac{\partial w}{\partial x}\,,\ \cos(n_3\,,\ y) = -\frac{\partial w}{\partial y}\,,\ \cos(n_3\,,\ z) = 1\,;$$

причемъ за положительное направленіе n_3 взято то, которое расположено относительно прямыхъ $\overline{M_1A_1}$ и $\overline{M_1B_1}$ такъ-же, какъ ось z-овъ относительно осей x-овъ и y-овъ.

Поэтому проекціи площади $M_1A_1C_1B_1$ на координатныя плоскости xy, xz и yz соотвѣтственно будутъ:

$$\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) dx\,dy\,;\ -\frac{\partial w}{\partial y}\,dx\,dy\,;\ -\frac{\partial w}{\partial x}\,dxdy.$$

Подобнымъ образомъ найдемъ проекціи площади $dxdz$ послѣ деформаціи на тѣ же координатныя плоскости; онѣ будутъ соотвѣтственно:

$$-\frac{\partial v}{\partial z}\,dx\,dz\,;\ \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) dx\,dz;\quad -\frac{\partial v}{\partial x}\,dxdz$$

и для площади $dydz$:

$$-\frac{\partial u}{\partial z}\,dydz\,,\ -\frac{\partial u}{\partial y}\,dy\,dz\,,\ \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) dydz.$$

Поэтому, если знакомъ δ обозначимъ безконечно-малыя измѣненія площади вслѣдствіе деформаціи, то получимъ слѣдующія формулы:

$$dxdy+\delta.dxdy=\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy-\frac{\partial v}{\partial z}dxdz-\frac{\partial u}{\partial z}dydz,$$

$$dxdz+\delta.dxdz=-\frac{\partial w}{\partial y}dxdy+\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)dxdz-\frac{\partial u}{\partial y}dydz,$$

$$dydz+\delta.dydz=-\frac{\partial w}{\partial x}dxdy-\frac{\partial v}{\partial x}dxdz+\left(1+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)dydz.$$

Отсюда по сокращеніи найдемъ варіаціи элементарныхъ площадей:

$$\left.\begin{aligned}\delta.dxdy&=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy-\frac{\partial v}{\partial z}dxdz-\frac{\partial u}{\partial z}dydz\\ \delta.dxdz&=-\frac{\partial w}{\partial y}dxdy+\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)dxdz-\frac{\partial u}{\partial y}dydz\\ \delta.dydz&=-\frac{\partial w}{\partial x}dxdy-\frac{\partial v}{\partial x}dxdz+\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)dydz.\end{aligned}\right\}\quad . \; . \;(20)$$

Эти равенства и представляютъ ту теорему *), которую мы хотѣли установить.

Обратимся теперь къ равенству (14). Обозначимъ варіаціи f, g, h, входящія въ составъ этого выраженія знаками: $[\delta f]$, $[\delta g]$ и $[\delta h]$; тогда получимъ:

$$[\delta f]\,dydz+[\delta g]\,dxdz+[\delta h]\,dxdz+f\delta.dydz+g\delta.dydz+h\delta.dxdy=0.$$

Полагая теперь въ формулахъ (20):

$$u=\delta\xi,\quad v=\delta\eta,\quad w=\delta\zeta,$$

подставляя значенія $\delta.dxdy$, ... и приравнивая нулю коэффиціенты при $dxdy$, $dxdz$ и $dydz$, найдемъ:

$$[\delta f]=-f\left(\frac{\partial\delta\eta}{\partial y}+\frac{\partial\delta\zeta}{\partial z}\right)+g\frac{\partial\delta\xi}{\partial y}+h\frac{\partial\delta\xi}{\partial z}$$

и подобныя формулы для $[\delta g]$ и $[\delta h]$.

---

*) Ср. *Poincaré:* Leçons sur la théorie de l'élasticité, p. 78.

Полная варіація f, обусловленная деформаціей среды, будетъ:

$$\delta f = [\delta f] - \frac{\partial f}{\partial x}\delta\xi - \frac{\partial f}{\partial y}\delta\eta - \frac{\partial f}{\partial z}\delta\zeta,$$

а, слѣдовательно:

$$\delta f = -\frac{\partial f}{\partial x}\delta\xi - \frac{\partial}{\partial y}(f\delta\eta) - \frac{\partial}{\partial z}(f\delta\zeta) + g\frac{\partial\delta\zeta}{\partial y} + h\frac{\partial\delta\zeta}{\partial z};$$

но приложивъ и вычтя двучленъ:

$$\frac{\partial g}{\partial y}\delta\xi + \frac{\partial h}{\partial z}\delta\xi$$

и положивъ

$$\varrho = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z},$$

найдемъ первую изъ ниже написанныхъ формулъ; остальныя двѣ найдутся подобнымъ-же образомъ:

$$\left.\begin{aligned}
\delta f &= -\varrho\delta\xi - \frac{\partial}{\partial y}(f\delta\eta - g\delta\xi) + \frac{\partial}{\partial z}(h\delta\xi - f\delta\zeta)\\
\delta g &= -\varrho\delta\eta + \frac{\partial}{\partial x}(f\delta\eta - g\delta\xi) - \frac{\partial}{\partial z}(g\delta\zeta - h\delta\eta)\\
\delta h &= -\varrho\delta\zeta - \frac{\partial}{\partial x}(h\delta\xi - f\delta\zeta) + \frac{\partial}{\partial y}(g\delta\zeta - h\delta\eta).
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (21)$$

Къ этимъ формуламъ присоединимъ еще слѣдующую, извѣстную:

$$\delta\,.\,d\tau = \left(\frac{\partial\delta\xi}{\partial x} + \frac{\partial\delta\eta}{\partial y} + \frac{\partial\delta\zeta}{\partial z}\right)d\tau \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

Теперь можемъ уже заняться и второй половиной нашей задачи, а именно выводомъ общихъ уравненій электро-и магнито-стрикціи. Возьмемъ варіаціи отъ W, U и V въ предположеніи, что f, g, h; F, G, H; K, μ и $d\tau$ претерпѣваютъ измѣненія, вызываемыя деформаціей среды; варіаціи первыхъ шести перемѣнныхъ уже даны формулами (19) и (21), а варіація элемента объема формулой (22); остается найти δK и $\delta\mu$. Оба коэффиціента K и μ суть функціи (x, y, z), а потому:

$$\left.\begin{aligned}\delta K &= -\frac{\partial K}{\partial x}\delta\xi - \frac{\partial K}{\partial y}\delta\eta - \frac{\partial K}{\partial z}\delta\zeta\\ \delta\mu &= -\frac{\partial\mu}{\partial x}\delta\xi - \frac{\partial\mu}{\partial y}\delta\eta - \frac{\partial\mu}{\partial z}\delta\zeta,\end{aligned}\right\}\quad \ldots\ldots (23)$$

такъ-какъ послѣ перемѣщенія въ точкѣ (x, y, z) будутъ тѣ значенія K и μ, которыя были до перемѣщенія въ точкѣ $(x-\delta\xi, y-\delta\eta, z-\delta\zeta)$.

Опредѣлимъ сначала δW. Находимъ при помощи (21):

$$\delta W = -\int\frac{4\pi}{K}d\tau\Big\{\varrho(f\delta\xi+g\delta\eta+h\delta\zeta)+f\frac{\partial}{\partial y}(f\delta\eta-g\delta\xi)-g\frac{\partial}{\partial x}(f\delta\eta-g\delta\xi)+$$

$$+h\frac{\partial}{\partial x}(h\delta\xi-f\delta\zeta)-f\frac{\partial}{\partial z}(h\delta\xi-f\delta\zeta)+$$

$$+g\frac{\partial}{\partial z}(g\delta\zeta-h\delta\eta)-h\frac{\partial}{\partial y}(g\delta\zeta-h\delta\eta)\Big\}-\int\frac{\mathbf{R}^2}{8\pi}\delta K d\tau+\int\frac{K\mathbf{R}^2}{8\pi}\delta.d\tau,$$

гдѣ положено для кратности письма:

$$\mathbf{R}^2 = \frac{16\pi^2}{K^2}(f^2+g^2+h^2).$$

Это $\mathbf{R}$ будетъ электрической силой въ точкѣ (x, y, z).

Преобразуемъ члены съ производными отъ $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ и положимъ:

$$\Xi = -4\pi\Big\{g\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{f}{K}\Big)-g\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{g}{K}\Big)-h\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{g}{K}\Big)+$$

$$+h\frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{f}{K}\Big)-\frac{\mathbf{R}^2}{32\pi^2}\frac{\partial K}{\partial x}\Big\}$$

или, подставляя значеніе ϱ, найдемъ первое выраженіе; остальные два найдутся подобнымъ-же образомъ:

$$\left.\begin{aligned}-\Xi &= 4\pi\Big\{\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{f^2-g^2-h^2}{2K}\Big)+\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{fg}{K}\Big)+\frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{fh}{K}\Big)\Big\}\\ -H &= 4\pi\Big\{\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{fg}{K}\Big)+\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{g^2-f^2-h^2}{2K}\Big)+\frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{gh}{K}\Big)\Big\}\\ -Z &= 4\pi\Big\{\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{fh}{K}\Big)+\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{gh}{K}\Big)+\frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{h^2-f^2-g^2}{2K}\Big)\Big\}.\end{aligned}\right\}\quad \ldots (a)$$

Затѣмъ положимъ:

$$\left.\begin{aligned}
-\Xi_n &= 4\pi\left\{\frac{f^2-g^2-h^2}{2K}\cos(nx)+\frac{fg}{K}\cos(ny)+\frac{fh}{K}\cos(nz)\right\}\\
-H_n &= 4\pi\left\{\frac{fg}{K}\cos(nx)+\frac{g^2-f^2-h^2}{2K}\cos(ny)+\frac{gh}{K}\cos(nz)\right\}\\
-Z_n &= 4\pi\left\{\frac{fh}{K}\cos(nx)+\frac{gh}{K}\cos(ny)+\frac{h^2-f^2-g^2}{2K}\cos(nz)\right\}.
\end{aligned}\right\}\ldots (b)$$

При такихъ положеніяхъ для δW получимъ выраженіе:

$$\delta W=\int(\Xi\delta\xi+H\delta\eta+Z\delta\zeta)\,d\tau+\int(\Xi_n\delta\xi+H_n\delta\eta+Z_n\delta\zeta)\,dS.$$

Отсюда ясно, что

$$\delta W=0.\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (\tau)$$

Найдемъ теперь δV.

Сначала имѣемъ:

$$\begin{aligned}
\delta V=&-\frac{1}{4\pi}\int\!\!\left\{\!\left[\left(\frac{\partial\gamma}{\partial y}-\frac{\partial\beta}{\partial z}\right)\frac{\partial P}{\partial x}+\left(\frac{\partial\alpha}{\partial z}-\frac{\partial\gamma}{\partial x}\right)\frac{\partial P}{\partial y}+\right.\right.\\
&+\left.\left(\frac{\partial\beta}{\partial x}-\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)\frac{\partial P}{\partial z}\right]-\mu\left[(\gamma\delta\eta-\beta\delta\zeta)\left(\frac{\partial\gamma}{\partial y}-\frac{\partial\beta}{\partial z}\right)+\right.\\
&\left.\left.+(\alpha\delta\zeta-\gamma\delta\xi)\left(\frac{\partial\alpha}{\partial z}-\frac{\partial\gamma}{\partial x}\right)\right]\right\}d\tau-\frac{1}{4\pi}\int\!\!\left\{[\gamma\cos(ny)-\beta\cos(nz)]\frac{\partial P}{\partial x}+\right.\\
&+[\alpha\cos(nz)-\gamma\cos(nx)]\frac{\partial P}{\partial y}+[\beta\cos(nx)-\alpha\cos(ny)]\frac{\partial P}{\partial z}-\\
&-\mu(\gamma\delta\eta-\beta\delta\zeta)[\gamma\cos(ny)-\beta\cos(nz)]-\mu(\alpha\delta\zeta-\gamma\delta\xi)[\alpha\cos(nz)-\gamma\cos(nx)]-\\
&\left.-\mu(\beta\delta\xi-\alpha\delta\eta)[\beta\cos(nx)-\alpha\cos(ny)]\right\}dS-\int\frac{d\tau}{8\pi}\mathbf{H}^2\delta\mu+\int\frac{\mu\mathbf{H}^2}{8\pi}\delta d\tau,
\end{aligned}$$

гдѣ положено:

$$\mathbf{H}^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2.\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (d)$$

Это **H** будетъ магнитной силой.

Преобразовывая объемные интегралы съ функціей P въ поверхностные, увидимъ, что они сократятся съ другими поверхностными интегралами; затѣмъ преобразовывая члены съ $\delta d\tau$ и подставляя значеніе $\delta\mu$, найдемъ, подобно предыдущему:

$$\delta V = \int (\Xi_1 \delta\xi + H_1 \delta\eta + Z_1 \delta\zeta) d\tau + \int (\Xi_{n1} \delta\xi + H_{n1} \delta\eta + Z_{n1} \delta\zeta)\, dS \ldots (e)$$

гдѣ положено:

$$\left.\begin{aligned} -\Xi_1 &= \frac{1}{4\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mu(\alpha^2-\beta^2-\gamma^2)}{2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}(\mu\alpha\beta) + \frac{\partial}{\partial z}(\mu\alpha\gamma)\right\} \\ -H_1 &= \frac{1}{4\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(\mu\alpha\beta) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mu(\beta^2-\alpha^2-\gamma^2)}{2}\right) + \frac{\partial}{\partial z}(\mu\beta\gamma)\right\} \\ -Z_1 &= \frac{1}{4\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(\mu\alpha\gamma) + \frac{\partial}{\partial y}(\mu\beta\gamma) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mu(\gamma^2-\alpha^2-\beta^2)}{2}\right)\right\} \end{aligned}\right\} \ldots (f)$$

и

$$\left.\begin{aligned} -\Xi_{n1} &= \frac{1}{4\pi}\left\{\frac{\mu(\alpha^2-\beta^2-\gamma^2)}{2}\cos(nx) + \mu\alpha\beta\cos(ny) + \mu\alpha\gamma\cos(nz)\right\} \\ -H_{n1} &= \frac{1}{4\pi}\left\{\mu\alpha\beta\cos(nx) + \frac{\mu(\beta^2-\alpha^2-\gamma^2)}{2}\cos(ny) + \mu\beta\gamma\cos(nz)\right\} \\ -Z_{n1} &= \frac{1}{4\pi}\left\{\mu\alpha\gamma\cos(nx) + \mu\beta\gamma\cos(ny) + \frac{\mu(\gamma^2-\alpha^2-\beta^2)}{2}\cos(nz)\right\}. \end{aligned}\right\} . (g)$$

При этомъ пользовались равенствомъ:

$$\frac{\partial(\mu\alpha)}{\partial x} + \frac{\partial(\mu\beta)}{\partial y} + \frac{\partial(\mu\gamma)}{\partial z} = 0.$$

И здѣсь видъ выраженій таковъ, что:

$$\delta V = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (e)$$

Остается опредѣлить δU и $\sum P_a \delta p_a$.

Для перваго имѣемъ выраженіе:

$$\delta U = \int (\Xi_2 \delta\xi + H_2 \delta\eta + Z_2 \delta\zeta) d\tau + \int (\Xi_{n2} \delta\xi + H_{n2} \delta\eta + Z_{n2} \delta\zeta) dS, \ . (h)$$

гдѣ положено:

$$\left.\begin{aligned}
\Xi_2 &= A\frac{d}{dt}[F\varrho + \mu(\beta h - \gamma g)], & \Xi_{n2} &= A\frac{d(Fv)}{dt} \\
H_2 &= A\frac{d}{dt}[G\varrho + \mu(\gamma f - \alpha h)], & H_{n2} &= A\frac{d(Gv)}{dt} \\
Z_2 &= A\frac{d}{dt}[H\varrho + \mu(\alpha g - \beta f)], & Z_{n2} &= A\frac{d(Hv)}{dt}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots (i)$$

Здѣсь положено для краткости письма:

$$v = f\cos(nx) + g\cos(ny) + h\cos(nz) \quad \ldots\ldots\ldots (j)$$

Подобнымъ образомъ найдемъ:

$$\begin{aligned}
\sum P_a \delta p_a = \iint\Big\{&[X - P_0\varrho + A\mu(\beta r - \gamma q) - AF\sigma]\delta\xi + \\
&+ [Y - Q_0\varrho + A\mu(\gamma p - \alpha r) - AG\sigma]\,\delta\eta + \\
&+ [Z - R_0\varrho + A\mu(\alpha q - \beta p) - AH\sigma]\,\delta\zeta\Big\}\,d\tau + \\
+ \iint\Big\{&[\Lambda\cos(nx) - P_0 v + AFs + X_n]\,\delta\xi + \\
&+ [\Lambda\cos(ny) - Q_0 v + AGs + Y_n]\,\delta\eta + \\
&+ [\Lambda\cos(nz) - R_0 v + AHs + Z_n]\,\delta\zeta\Big\}\,dS. \quad \ldots . (k)
\end{aligned}$$

Здѣсь положено:

$$\Lambda = P_0 f + Q_0 g + R_0 h\,, \quad s = p\cos(nx) + q\cos(ny) + r\cos(nz) \quad . \; . \; (l)$$

приэтомъ для P_0, Q_0, R_0 пользовались условіями:

$$P_0 = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}\,, \quad Q_0 = -\frac{\partial \Psi}{\partial y}\,, \quad R_0 = -\frac{\partial \Psi}{\partial z} \quad \ldots\ldots (m)$$

причемъ Ψ будетъ потенціаломъ электрическихъ массъ, развивающихся въ мѣстахъ соприкосновенія проводниковъ.

Такъ какъ на поверхности проводниковъ должно быть:

$$P_0 = Q_0 = R_0 = 0\,,$$

$$v = 0\,, \quad s = 0\,,$$

то, слѣдовательно и

$$\Lambda = 0,$$

а потому, если положимъ:

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= A\mu(\beta r - \gamma q) - P_0\varrho - AF\sigma \\ Y_1 &= A\mu(\gamma p - \alpha r) - Q_0\varrho - AG\sigma \\ Z_1 &= A\mu(\alpha q - \beta p) - R_0\varrho - AH\sigma, \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots (n)$$

то уравненіе для $\sum P_a \delta p_a$ будетъ:

$$\sum P_a \delta p_a = \int [(X + X_1)\delta\xi + (Y + Y_1)\delta\eta + (Z + Z_1)\delta\zeta] d\tau +$$

$$+ \int [X_n \delta\xi + Y_n \delta\eta + Z_n \delta\zeta]\, dS. \dots\dots\dots (p)$$

Соединяя выраженія δU и $\sum P_a \delta p_a$ вмѣстѣ, найдемъ:

$$\delta U + \sum P_a \delta p_a = \int \left\{ (X_1 + \Xi_2)\,\delta\xi + (Y_1 + H_2)\,\delta\eta + (Z_1 + Z_2)\,\delta\zeta \right\} d\tau +$$

$$+ \int (X\delta\xi + Y\delta\eta + Z\delta\zeta) d\tau + \int (X_n\delta\xi + Y_n\delta\eta + Z_n\delta\zeta) dS, \;\dots (q)$$

такъ какъ вслѣдствіе того, что на поверхности проводниковъ

$$\nu = 0,$$

силы Ξ_{n2}, H_{n2}, Z_{n2} обращаются въ нуль.

Преобразуемъ силы $X_1 + \Xi_2$, $Y_1 + H_2$, $Z_1 + Z_2$.

Положимъ для простоты письма:

$$E_x = \mu(q\gamma - r\beta), \quad E_y = \mu(r\alpha - p\gamma), \quad E_z = \mu(p\beta - q\alpha),$$

это будутъ, очевидно, составляющія электромагнитной силы въ точкѣ (x, y, z) [*Maxwell*, II, § 603, eq. (C)]; затѣмъ:

$$E_{1x} = \mu(g\gamma - h\beta), \quad E_{1y} = \mu(h\alpha - f\gamma), \quad E_{1z} = \mu(f\beta - g\alpha) -$$

это составляющіе момента діэлектрика въ той-же точкѣ (*J. J. Thomson*, Notes on recent researches in electricity and magnetism, p. 9).

Поэтому будемъ имѣть:

$$X_1 + \Xi_2 = -A\left(E_x + \frac{dE_{1x}}{dt}\right) + A\frac{d(F\varrho)}{dt} - AF\sigma - P_0\varrho\,,$$

но

$$\sigma = \frac{d\varrho}{dt}\,,\quad A\frac{dF}{dt} - P_0 = P = \frac{4\pi}{K}f\,,$$

слѣдовательно:

$$X_1 + \Xi_2 = -A\left(E_x + \frac{dE_{1x}}{dt}\right) + \frac{4\pi\varrho}{K}f\,. \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(r)$$

Но формулы (f) даютъ по преобразованіи результата:

$$A\frac{dE_{1x}}{dt} = A\mu\left(g\frac{d\gamma}{dt} - h\frac{d\beta}{dt}\right) - AE_x + \Xi_1 - \frac{\mathbf{H}^2}{8\pi}\frac{\partial\mu}{dx}\,,$$

а потому:

$$X_1 + \Xi_2 = -A\mu\left(g\frac{d\gamma}{dt} - h\frac{d\beta}{dt}\right) - \Xi_1 + \frac{\mathbf{H}^2}{8\pi}\frac{\partial\mu}{\partial x} + \frac{4\pi\varrho}{K}f.$$

Затѣмъ при помощи формулъ (8) находимъ:

$$A\mu\left(g\frac{d\gamma}{dt} - h\frac{d\beta}{dt}\right) = -\frac{K}{4\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{P^2+Q^2-R^2}{2}\right) + \frac{\partial(PQ)}{\partial y} + \frac{\partial(PR)}{\partial z}\right\} +$$

$$+ \frac{KP}{4\pi}\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right),$$

а подставляя значеніе P, Q, R изъ формулъ (5), найдемъ:

$$A\mu\left(g\frac{d\gamma}{dt} - h\frac{d\beta}{dt}\right) = \frac{4\pi\varrho}{K}f + \Xi - \frac{\mathbf{R}^2}{8\pi}\frac{\partial K}{dx}.$$

И такъ, окончательно находимъ:

$$X_1 + \Xi_2 = -\Xi - \Xi_1 + \frac{\mathbf{R}^2}{8\pi}\frac{\partial K}{dx} + \frac{\mathbf{H}^2}{8\pi}\frac{\partial\mu}{dx}.$$

Подобные-же формулы найдемъ для $Y_1 + H_2$ и $Z_1 + Z_2$.

Подставляя эти значенія въ (q) получимъ:

$$\delta U+\sum P_a\delta p_a=\iint\left\{\left(X+\frac{\mathbf{R}^2}{8\pi}\frac{\partial K}{\partial x}+\frac{\mathbf{H}^2}{8\pi}\frac{\partial\mu}{\partial x}\right)\delta\xi+\right.$$

$$\left.+\left(Y+\frac{\mathbf{R}^2}{8\pi}\frac{\partial K}{\partial y}+\frac{\mathbf{H}^2}{8\pi}\frac{\partial\mu}{\partial y}\right)\delta\eta+\left(Z+\frac{\mathbf{R}^2}{8\pi}\frac{\partial K}{\partial z}+\frac{\mathbf{H}^2}{8\pi}\frac{\partial\mu}{\partial z}\right)\delta\zeta\right\}d\tau-$$

$$-\iint\left\{(\Xi+\Xi_1)\,\delta\xi+(H+H_1)\,\delta\eta+(Z+Z_1)\,\delta\zeta\right\}d\tau+$$

$$+\int(X_n\delta\xi+Y_n\delta\eta+Z_n\delta\zeta)\,dS.$$

Соединяя теперь значенія δW, δV и $\delta U+\sum P_a\delta p_a$ въ выраженіи (1), сокращая и приравнивая нулю коэффиціенты при варіаціяхъ ξ, η, ζ въ объемныхъ и поверхностныхъ интегралахъ, найдемъ *во первыхъ* для точекъ *внутри* діэлектриковъ систему:

$$X=-\frac{\mathbf{R}^2}{8\pi}\frac{\partial K}{\partial x}-\frac{\mathbf{H}^2}{8\pi}\frac{\partial\mu}{\partial x}$$

$$Y=-\frac{\mathbf{R}^2}{8\pi}\frac{\partial K}{\partial y}-\frac{\mathbf{H}^2}{8\pi}\frac{\partial\mu}{\partial y}$$

$$Z=-\frac{\mathbf{R}^2}{8\pi}\frac{\partial K}{\partial z}-\frac{\mathbf{H}^2}{8\pi}\frac{\partial\mu}{\partial z}$$

и *во вторыхъ* для точекъ *на поверхности* діэлектрика:

$$-X_n=\Xi_n+\Xi_{n1},\quad -Y_n=H_n+H_{n1},\quad -Z_n=Z_n+Z_{n1}.$$

Получаемъ извѣстныя выраженія для механическихъ силъ электро-и магнитострикціи.

Равенства (c) и (e) показываютъ, что внутри діэлектрика эти силы находятся въ равновѣсіи.

Электромагнитная теорія дисперсіи.

Гельмгольцъ относитъ явленіе свѣторазсѣянія къ категоріи тѣхъ физическихъ явленій, которыя объясняются не однимъ кинетическимъ состояніемъ эфира, но и воздѣйствіемъ самихъ матеріальныхъ частицъ тѣла, внутри котораго происходитъ явленіе. Такъ напримѣръ, явленіе электрическаго сопротивленія току должно-быть приписано участію матеріальныхъ частицъ тѣла; это участіе выражается въ томъ, что часть электрической энергіи тока идетъ на увеличеніе кинетической энергіи матеріальныхъ частицъ, т. е. на развитіе теплоты: имѣемъ явленіе теплоты Джоула. Подобнымъ образомъ Гельмгольцъ объясняетъ явленіе свѣторазсѣянія тѣмъ, что при поляризаціи діэлектрика — поляризуются и матеріяльныя частицы свѣторазсѣивающаго тѣла. Другими словами, когда подъ вліяніемъ электрическихъ силъ эфиръ діэлектрика (или проводника) выполняетъ электрическія пертурбаціи, то и матеріальныя частицы тоже *электрически* перемѣщаются, т. е. каждая матеріальная частица будетъ представлять, подобно частицамъ электролитовъ, совокупность двухъ іонъ, заряженныхъ противоположными электричествами. Значитъ, вступившая въ эфирную средину, электромагнитная волна разобьется на рядъ простыхъ волнъ, когда внутри средины будутъ существовать матеріальныя частицы; характеръ и родъ этихъ волнъ будетъ обусловливаться свойствами матеріальныхъ частицъ.

Пусть f_0, g_0, h_0 будутъ составляющіе электрической пертурбаціи (діэлектрическаго момента) матеріальной частицы; въ такомъ случаѣ, если-бы эфиръ и матеріальныя частицы не вліяли другъ на друга, ихъ энергіи выражались-бы въ видѣ:

$$\int \frac{2\pi}{K}(f^2+g^2+h^2)\,d\tau \quad \text{и} \quad \int \frac{2\pi}{K_0}(f_0^2+g_0^2+h_0^2)\,d\tau\,,$$

причемъ K_0 будетъ коэффиціентъ аналогичный K; полная энергія системы эфира и матеріи была-бы равна выраженію:

$$\int \left[\frac{2\pi}{K}(f^2+g^2+h^2)+\frac{2\pi}{K_0}(f_0^2+g_0^2+h_0^2)\right]d\tau.$$

Но, вслѣдствіе взаимодѣйствій между эфиромъ и матеріей, электрическая энергія системы будетъ меньше на величину энергіи взаимодѣйствія, которую Гельмгольцъ представляетъ въ видѣ:

$$\int \frac{4\pi}{K}(ff_0+gg_0+hh_0)d\tau$$

такъ что электрическая энергія системы представится въ слѣдующей формѣ:

$$W=\int\left[\frac{2\pi}{K}(f^2+g^2+h^2)-\frac{4\pi}{K}(ff_0+gg_0+hh_0)+\right.$$
$$\left.+\frac{2\pi}{K_0}(f_0^2+g_0^2+h_0^2)\right]d\tau.$$

Законность такого выраженія можно оправдать тѣмъ, что если-бы вся энергія, поступившая въ систему, потратилась-бы на приведеніе въ кинетическое состояніе *только* матеріальныхъ частицъ, то электрическая энергія системы, которая есть энергія кинетическаго состоянія эфира, равнялась-бы нулю; дѣйствительно, когда

$$f=f_0\,,\quad g=g_0\,,\quad h=h_0\,,\quad K_0=K\,,$$

то предыдущее выраженіе обращается въ нуль.

При $f_0=g_0=h_0=0$ оно обращается въ энергію эфира.

Выраженіе магнитной энергіи остается въ прежнемъ видѣ, стр. 28, энергія-же токовъ перемѣщенія, понятно, будетъ теперь имѣть видъ:

$$U=A\int\left[F\frac{d(f+f_0)}{dt}+G\frac{d(g+g_0)}{dt}+H\frac{d(h+h_0)}{dt}\right]d\tau.$$

Выразимъ теперь работу силъ P_a. Гельмгольцъ полагаетъ, что

$$\sum P_a p_a=-\frac{1}{2}\int m_1\left[\left(\frac{df_0}{dt}\right)^2+\left(\frac{dg_0}{dt}\right)^2+\left(\frac{dh_0}{dt}\right)^2\right]d\tau+$$
$$+\int(r_1f_0+r_2g_0+r_3h_0)\,d\tau+R,$$

гдѣ

$$R=\int(P_0f+Q_0g+R_0h)d\tau+A\int(Fp+Gq+Hr)\,d\tau$$

и количества r_1, r_2, r_3 суть составляющія силы тренія, а именно:

$$r_1=k_1\frac{df_0}{dt},\quad r_2=k_2\frac{dg_0}{dt},\quad r_3=k_3\frac{dh_0}{dt}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(1)$$

и приэтомъ эти силы тренія варіированію не подлежатъ.

Подставимъ значенія U, V, W и $\sum P_a p_a$ въ равенство, представляющее принципъ Гамильтона въ формѣ Гельмгольца, а именно:

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}\left\{W+V+U+\sum P_a p_a\right\}dt=0\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(2)$$

и приравняемъ нулю коэффиціенты при $\delta F,\ldots\delta f,\ldots\delta h$; но предварительно преобразуемъ члены отъ δU и $\sum P_a\delta p_a$. Найдемъ:

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta U dt = A \int \left[\frac{d(f+f_0)}{dt} \delta F + \frac{d(g+g_0)}{dt} \delta G + \frac{d(h+h_0)}{dt} \delta H \right] d\tau -$$

$$- A \int \left[\frac{dF}{dt} (\delta f + \delta f_0) + \frac{dG}{dt} (\delta g + \delta g_0) + \frac{dH}{dt} (\delta h + \delta h_0) \right] d\tau ,$$

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \sum P_a \delta p_a = \int m_1 \left[\frac{d^2 f_0}{dt^2} \delta f_0 + \frac{d^2 g_0}{dt^2} \delta g_0 + \frac{d^2 h_0}{dt^2} \delta h_0 \right] d\tau +$$

$$+ \int (r_1 \delta f_0 + r_2 \delta g_0 + r_3 \delta h_0) \, d\tau + \delta R .$$

Такимъ образомъ для точекъ *внутри* средины получимъ *три* системы уравненій; первая отъ коэффиціентовъ при δf, δg, δh:

$$\frac{4\pi}{K}(f - f_0) - A \frac{dF}{dt} + P_0 = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (a)$$

и подобныя уравненія для g и h.

Затѣмъ коэффиціенты при δF, δG и δH дадутъ три уравненія вида:

$$\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z} \right) + A \frac{d(f+f_0)}{dt} + Ap = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (b)$$

и наконецъ коэффиціенты при δf_0, δg_0, δh_0 дадутъ уравненія вида:

$$4\pi \left(\frac{f_0}{K_0} - \frac{f}{K} \right) - A \frac{dF}{dt} + m_1 \frac{d^2 f_0}{dt^2} + r_1 = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (c)$$

При этомъ f_0, g_0, h_0 считались перемѣнными, независящими отъ f, g, h.

Если $f_0 = g_0 = h_0 = 0$ и кромѣ того $K_0 = 0$, то уравненія (c) пропадаютъ, ибо обращаются въ тождества и тогда останутся лишь уравненія (a) и (b).

Исключая члены съ $\frac{dF}{dt}$ изъ уравненій (a) и (c), получимъ:

$$\frac{8\pi}{K} f = m_1 \frac{d^2 f_0}{dt^2} + k_1 \frac{df_0}{dt} + 4\pi \left(\frac{1}{K} + \frac{1}{K_0} \right) f_0 + P_0$$

или:

$$m \frac{d^2 f_0}{dt^2} + k \frac{df_0}{dt} + \varkappa f_0 + \frac{K}{8\pi} P_0 = f \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (d)$$

гдѣ положено:

$$\frac{m_1 K}{8\pi}=m\,,\quad \frac{Kk_1}{8\pi}=k\,,\quad \frac{K}{2}\left(\frac{1}{K}+\frac{1}{K_0}\right)=\varkappa.\;.\;.\;.\;.\;.\;(e)$$

Подобныя-же уравненія найдемъ для g_0 и h_0.

Уравненія (a) и (b) дадутъ по исключеніи F, G, H еще соотношенія между пертурбаціями f и f_0. Дѣйствительно, мы знаемъ, что

$$\mu\frac{d\alpha}{dt}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{dH}{dt}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{dG}{dt}\right)$$

и подобныя формулы для β и γ.

Если теперь подставимъ сюда значенія $\frac{dH}{dt}$ и $\frac{dG}{dt}$ изъ уравненій (a) и вспомнимъ, что:

$$P_0=-\frac{\partial\Psi}{\partial x},\quad Q_0=-\frac{\partial\Psi}{\partial y},\quad R_0=-\frac{\partial\Psi}{\partial z}\,,$$

то получимъ:

$$A\mu\frac{d\alpha}{dt}=\frac{4\pi}{K}\left[\frac{\partial(h-h_0)}{\partial y}-\frac{\partial(g-g_0)}{\partial z}\right].\;.\;.\;.\;.\;(f)$$

и подобныя уравненія для β и γ. Изъ уравненій (b) получаемъ по дифференцированіи по t и умноженіи на $A\mu$:

$$\frac{A\mu}{4\pi}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{d\gamma}{dt}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{d\beta}{dt}\right)\right]=-A^2\mu\frac{d^2(f+f_0)}{dt^2}-A^2\mu\frac{dp}{dt}\;.\;.\;(g)$$

и подобныя-же уравненія для α, γ; α, β; затѣмъ равенства:

$$p=C(P-P_0)\,,\quad P=\frac{4\pi}{K}(f-f_0)\ \text{и т. п.}$$

даютъ:

$$\frac{dp}{dt}=\frac{4\pi C}{K}\left(\frac{df}{dt}-\frac{df_0}{dt}\right)\ \text{и т. п.}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(j)$$

Подставляя теперь въ уравненія (g) значенія производныхъ α, β, γ и p, q, r по времени t изъ уравненій (f) и (j), получимъ:

$$A^2\mu K\frac{d^2(f+f_0)}{dt^2}+4\pi A^2\mu C\frac{df}{dt}+4\pi A^2\mu C\frac{df_0}{dt}=\varDelta(f-f_0)-\frac{\partial\Omega}{\partial x}\;.\;(k)$$

гдѣ положено:

$$\Omega = \frac{\partial(f - f_0)}{\partial x} + \frac{\partial(g - g_0)}{\partial y} + \frac{\partial(h - h_0)}{\partial z} \quad \ldots\ldots (l)$$

Подобныя-же уравненія найдемъ для g, h, g_0 и h_0.

Исключимъ теперь изъ уравненій (d) и (k) значенія f, g, h, такъ какъ надо имѣть уравненія для опредѣленія f_0, g_0, h_0, существованію которыхъ Гельмгольцъ приписываетъ дисперсію.

Подставимъ значенія f, g, h въ первую часть равенства (k) и помня, что *во первыхъ*:

$$P_0 = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad Q_0 = -\frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad R_0 = -\frac{\partial \Psi}{\partial z}$$

такъ что

$$\frac{\partial P_0}{\partial x} + \frac{\partial Q_0}{\partial y} + \frac{\partial R_0}{\partial z} = -\Delta \Psi$$

и *во вторыхъ*, что функція Ψ отъ t независитъ, усмотримъ, что члены съ P_0, Q_0, R_0 изчезнутъ, такъ что можно вмѣсто f, g, h брать значенія изъ формулъ (d) безъ послѣдняго члена въ лѣвыхъ частяхъ.

Дѣлая эту подстановку и полагая для краткости письма:

$$\left.\begin{aligned} \theta_0 &= \frac{\partial f_0}{\partial x} + \frac{\partial g_0}{\partial y} + \frac{\partial h_0}{\partial z}, \\ u_1 &= A^2 \mu K \frac{d^2 f_0}{dt^2} + 4\pi A^2 \mu C \frac{d f_0}{dt} - \Delta f_0 + \frac{\partial \theta_0}{\partial x} \\ v_1 &= A^2 \mu K \frac{d^2 f_0}{dt^2} - 4\pi A^2 \mu C \frac{d f_0}{dt} + \Delta f_0 - \frac{\partial \theta_0}{\partial x} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (m)$$

и подобныя формулы для u_2, v_2; u_3, v_3, найдемъ окончательно:

$$m\frac{d^2 u_1}{dt^2} + k\frac{du_1}{dt} + \varkappa u_1 + v_1 = 0 \quad \ldots\ldots (n)$$

и подобныя уравненія для u_2, u_3.

Уравненія (n) и дадутъ намъ законы дисперсіи.

Если разсматриваемая средина—діэлектрикъ, что въ предыдущихъ формулахъ надо положить: $C = 0$; Гельмгольцъ собственно разсматриваетъ лишь этотъ случай, но идеи, положенныя имъ въ основаніе теоріи дисперсіи, позволяютъ распространить ее и на случай проводниковъ (каковы напримѣръ вода, а также металлы).

Сдѣлаемъ теперь окончательные выводы изъ уравненій (n).

Пусть имѣемъ дѣло съ волной, параллельной плоскости yz, распространяющейся, слѣдовательно, вдоль оси x-овъ. Назовемъ τ время колебанія, ω скорость свѣта въ срединѣ, λ—длину волны,—ω_0 и λ_0 тѣже количества для эфира, тогда положимъ:

$$n=\frac{2\pi}{\tau}=\frac{2\pi\omega}{\lambda}=\frac{2\pi\omega_0}{\lambda_0}$$

и если q будетъ коэффиціентъ поглощенія и $\sqrt{-1}=i$, то частными рѣшеніями уравненій (n) можно взять:

$$f_0=0\,,\quad g_0=be^{in(t+px)},\quad h_0=0\,,$$

гдѣ

$$p=\frac{1}{\omega}-\frac{q}{ni}\,.$$

При помощи этихъ выраженій находимъ:

$$v_2=-bn^2\left(\frac{1}{\omega_0^2}+p^2-\frac{\gamma_2}{n}i\right)e^{in(t+px)},$$

$$u_2=-bn^2\left(\frac{1}{\omega_0^2}-p^2+\frac{\gamma_1}{n}i\right)e^{in(t+px)},$$

гдѣ положено:

$$\gamma_1=-4\pi A^2\mu C\,,\ \gamma_2=-\frac{4\pi\omega_0^2}{K_0}\,.$$

Уравненіе (n) для u_2 даетъ по сокращеніи:

$$(mn^2-kni-\varkappa)\left(\frac{1}{\omega_0^2}-p^2+\frac{\gamma_1}{n}i\right)-\left(\frac{1}{\omega_0^2}+p^2-\frac{\gamma_2}{n}i\right)=0.\ .\ .\ (p)$$

Положимъ теперь:

$$\alpha=4\pi^2\omega_0^2m\,,\quad \beta=2\pi k\omega_0\,,\quad \gamma=-2A^2\mu\omega_0 C\,,$$

причемъ коэффиціенты α и β будутъ зависѣть отъ оптическихъ свойствъ тѣла, а γ отъ электрическихъ.

и замѣтимъ, что, если показатель преломленія будетъ μ, т. е.

$$\mu = \frac{\omega_0}{\omega},$$

а показатель поглощенія ν, т. е.

$$\nu = \frac{\lambda_0}{2\pi} q,$$

то получимъ

$$p^2 = \frac{\mu^2}{\omega_0^2} - \frac{\nu^2}{\omega_0^2} + \frac{2\mu\nu}{\omega_0^2} i = \frac{(\mu + \nu i)^2}{\omega_0^2},$$

или

$$p^2 = \frac{x + y\sqrt{-1}}{\omega_0^2},$$

если

$$x = \mu^2 - \nu^2, \quad y = 2\mu\nu.$$

Подставляя все это въ уравненіе (p), найдемъ:

$$(x + iy)\left(1 + \frac{\alpha}{\lambda_0^2} - \frac{\beta i}{\lambda_0} - \varkappa\right) +$$

$$+ \left(1 - \frac{\alpha}{\lambda_0^2} + \frac{\beta i}{\lambda_0} + \varkappa\right) - \lambda_0 \gamma i \left(\frac{\alpha}{\lambda_0^2} - \frac{\beta i}{\lambda_0} - \varkappa + 1\right) = 0$$

или

$$(x + iy)\left[\frac{\alpha}{\lambda_0^2} - \varkappa + 1 - \frac{\beta i}{\lambda_0}\right] +$$

$$+ \left[1 - \frac{\alpha}{\lambda_0^2} + \varkappa - \beta\gamma + \left(\frac{\beta}{\lambda_0} - \frac{\alpha\gamma}{\lambda_0} + \gamma\lambda_0(\varkappa - 1)\right) i\right] = 0 \;.\;.\;. \quad (q)$$

Положимъ:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\alpha}{\lambda_0^2} - \varkappa + 1 = P_1 \cos\Theta_1, && \frac{\beta}{\lambda_0} = P_1 \sin\Theta_1 \\ &\frac{\alpha}{\lambda_0^2} - \varkappa - 1 + \beta\gamma = P_0 \cos\Theta_0, && \frac{\beta - \alpha\gamma}{\lambda_0} + \gamma\lambda_0(\varkappa - 1) = P_0 \sin\Theta_0, \end{aligned}\right\} \;. \quad (r)$$

гдѣ, слѣдовательно, P_0, P_1, Θ_0 и Θ_1 будутъ вспомогательныя величины; въ такомъ случаѣ равенство (q) обратится въ слѣдующее:

$$(x+iy)P_1 e^{-\Theta_1 i} - P_0 e^{-\Theta_0 i} = 0\,;$$

отсюда находимъ:

$$x+iy = \frac{P_0}{P_1} e^{(\Theta_1-\Theta_0)\sqrt{-1}}.$$

Значитъ:

$$\sqrt{x+iy} = \sqrt{\frac{P_0}{P_1}}\left[\cos\frac{1}{2}(\Theta_1-\Theta_0) + \sqrt{-1}\sin\frac{1}{2}(\Theta_1-\Theta_0)\right]$$

и наконецъ:

$$\left.\begin{aligned} \mu &= \sqrt{\frac{P_0}{P_1}}\cos\frac{1}{2}(\Theta_1-\Theta_0) \\ \nu &= \sqrt{\frac{P_0}{P_1}}\sin\frac{1}{2}(\Theta_1-\Theta_0). \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (s)$$

Если имѣемъ дѣло съ діэлектрикомъ, то $\gamma=0$ и тогда эти формулы (s) обращаются въ данныя Гельмгольцемъ (Wied. Ann. Bd. XLVIII, S. 397).

По просьбѣ Гельмгольца его формулы повѣрялъ для терпентина и сѣроуглерода г. Мальке; согласіе получилось очень удовлетворительное (для терпентина).

Изъ формулъ (s) можно получить для нормальной дисперсіи формулу вида:

$$\mu = A + \frac{B}{\lambda_0^2},$$

представляющую частный видъ формулы Коши; но, вообще, для μ получается формула, отличающаяся по виду отъ общепринятыхъ, и даже отъ той, которую далъ самъ Гельмгольцъ раньше въ своей механической теоріи дисперсіи, основное уравненіе которой по внѣшнему виду отличается отъ уравненія (d) только присутствіемъ члена P_0.

Скажемъ въ заключеніе два слова о поляризаціи. При преобразованіи основнаго уравненія (2) (стр. 53) мы оставили безъ вниманія поверхностные интегралы, происходящіе отъ преобразованія δV: они даютъ условія (10) стр. 37, но Гельмгольцъ даетъ вмѣсто нихъ другія, которыя онъ выводитъ изъ уравненій (a) (стр. 54) и изъ тѣхъ уравненій, которыя получаются черезъ исключеніе функцій F, G, H изъ нихъ-же и опредѣленій магнитной силы. Въ результатѣ получаются формулы Фрэнэля.

2-го марта 1895 г.

О разложеніи данной функціи въ рядъ по гармоническимъ функціямъ.

В. А. Стеклова.

1. Въ „Rendiconti del circolo Matematico di Palermo“ за 1894 годъ помѣщенъ весьма интересный мемуаръ H. Poincaré: „Sur les équations de la Physique Mathématique“, посвященный главнымъ образомъ доказательству существованія интеграловъ наиболѣе важныхъ дифференціальныхъ уравненій Математической Физики при нѣкоторыхъ поверхностныхъ условіяхъ, о которыхъ скажемъ ниже.

Для дальнѣйшихъ соображеній намъ нѣтъ надобности подробно излагать всѣ результаты, добытые H. Poincaré въ разсматриваемомъ мемуарѣ; мы обратимъ вниманіе только на тѣ пункты, которые имѣютъ прямое отношеніе къ нашему изслѣдованію.

Въ первой части своего мемуара H. Poincaré доказываетъ, между прочимъ, слѣдующую теорему:

Для каждой данной области (D), *ограниченной поверхностью* (S), *существуетъ безчисленное множество вполнѣ опредѣленныхъ положительныхъ чиселъ*

$$k_1,\ k_2, \ldots,\ k_n, \ldots,$$

каждому изъ которыхъ, положимъ k_n, *соотвѣтствуетъ опредѣленная непрерывная и конечная по* x, y, z *[координаты точекъ области* (D)*] функція* u_n, *удовлетворяющая уравненію*

$$\Delta u_n + k_n u_n = 0 \quad \textit{внутри } (D) \tag{1}$$

и условію

$$u_n = 0 \qquad \textit{на поверхности } (S). \qquad (n=1,2,\ldots)$$

Въ уравненіи (1) Δ обозначаетъ знакъ операціи

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Функціи u_n $(n=1, 2\ldots)$ H. Poincaré называетъ *гармоническими*, а соотвѣтствующія имъ числа k_n $(n=1, 2\ldots)$ *характеристическими числами* этихъ функцій.

Мы въ дальнѣйшемъ удержимъ тѣ же названія.

Въ послѣдней (третьей) части вышеупомянутаго мемуара H. Poincaré трактуетъ о разложеніи данной функціи координатъ f въ рядъ по гармоническимъ.

Результатомъ его изслѣдованій является слѣдующее весьма важное для Математической Физики предложеніе:

Назовемъ черезъ $d\tau$ элементъ объема области (D) и положимъ

$$A_n=\int fu_n d\tau.$$

Рядъ

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} A_n u_n$$

представляетъ разложеніе данной функціи f въ рядъ по гармоническимъ функціямъ всякій разъ, когда онъ сходится.

Но доказательство H. Poincaré крайне сложно и не отличается надлежащей обстоятельностью.

Въ видахъ этого я считаю не безполезнымъ предложить въ настоящей работѣ болѣе простое и строгое доказательство только что упомянутой теоремы.

2. Предварительно необходимо поставить на видъ нѣкоторыя теоремы, которыми придется пользоваться въ нашемъ изслѣдованіи. Нѣкоторыя изъ нихъ мы приведемъ безъ доказательства, заимствуя ихъ прямо изъ мемуара: „Sur les équations etc...“, къ которому и отсылаемъ читателя.

Теорема I. *Существуетъ функція G шести аргументовъ*

$$x, y, z \text{ и } \xi, \eta, \zeta,$$

удовлетворяющая слѣдующимъ условіямъ:

1) *Функція G однозначна, конечна и непрерывна во всѣхъ точкахъ области (D) за исключеніемъ точки*

$$x=\xi,\quad y=\eta,\quad z=\zeta,$$

гдѣ она обращается въ безконечность.

2) *Разность*

$$G - \frac{1}{4\pi r},$$

гдѣ

$$r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2,$$

остается конечной при

$$r = 0.$$

3) *Внутри области* (D) G *удовлетворяетъ уравненію*

$$\Delta G = 0.$$

4) *На поверхности* (S) G *удовлетворяетъ условію*

$$G = 0.$$

Это есть извѣстная функція Грина, вполнѣ опредѣляемая по принципу Дирихле.

Лемма. Если l есть наибольшее изъ разстояній между двумя точками поверхности (S), то

$$\int G^2 d\tau < \frac{l}{4\pi} = Q.$$

Пусть f есть функція координатъ x, y, z, конечная и непрерывная вмѣстѣ съ своими первыми производными по координатамъ внутри (D).

Теорема II. *Уравненіе*

$$\Delta v + kv + f = 0, \tag{2}$$

гдѣ k *есть положительная постоянная, допускаетъ непрерывный и конечный по* x, y, z *интегралъ внутри области* (D), *обращающійся на поверхности* (S) *въ нуль.*

Пока k *не превосходитъ нѣкотораго предѣла* μ, *этотъ интегралъ представляется подъ видомъ абсолютно и равномѣрно сходящагося ряда*

$$v = v_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} k^n v_n,$$

гдѣ

$$v_0 = \int G f' d\tau', \quad v_n = \int G v'_{n-1} d\tau'. \qquad (n=1, 2, \dots) \tag{3}$$

Значки при f и v_{n-1} обозначаютъ, что въ этихъ функціяхъ перемѣнныя x, y, z замѣнены черезъ ξ, η и ζ, а $d\tau'$ означаетъ элементъ объема области (D) при интегрированіи по перемѣннымъ ξ, η и ζ.

Въ дальнѣйшемъ мы будемъ держаться этихъ же обозначеній.

Составимъ интегралы

$$W_{2n} = \int v_n^2 d\tau\,, \quad W_{2n-1} = \int \left[\left(\frac{\partial v_n}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_n}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_n}{\partial z}\right)^2 \right] d\tau\,.$$

Не трудно убѣдиться, что эти интегралы удовлетворяютъ неравенствамъ

$$\frac{W_1}{W_0} < \frac{W_2}{W_1} < \frac{W_3}{W_2} < \ldots < \frac{W_{n+1}}{W_n} < \ldots$$

и

$$\lim \frac{W_{n+1}}{W_n}\bigg|_{n=\infty}$$

есть величина, вообще говоря, конечная.

Этотъ предѣлъ равенъ $\dfrac{1}{\mu}$.

Теорема III. *Для каждой данной области (D) существуетъ безчисленное множество опредѣленныхъ положительныхъ чиселъ*

$$k_1\,,\quad k_2\,, \ldots,\quad k_n\,, \ldots,$$

каждому изъ которыхъ, положимъ k_n, соотвѣтствуетъ опредѣленная до нѣкотораго постояннаго множителя функція u_n, непрерывная и конечная внутри (D), удовлетворяющая уравненію

$$\varDelta u_n + k_n u_n = 0 \quad \textit{внутри } (D) \tag{4}$$

и условію

$$u_n = 0 \quad \textit{на поверхности } (S). \tag{5}$$

Постояннымъ множителемъ мы распорядимся такъ, чтобы имѣло мѣсто равенство

$$\int u_n^2 d\tau = 1\,. \qquad (n=1\,,\,2,\ldots) \tag{6}$$

Функціи $u_n\,(n=1\,,\,2\ldots)$, удовлетворяющія условіямъ (4), (5) и (6), мы и будемъ называть гармоническими.

Характеристическія числа $k_n(n=1\,,\,2\ldots)$, какъ показано H. Poincaré, удовлетворяютъ неравенствамъ

$$k_n > mn^{\frac{2}{3}}\,,$$

гдѣ m есть конечная, отличная отъ нуля, положительная постоянная.

Очевидно, что

$$\lim k_n|_{n=\infty} = \infty.$$

Теорема IV. *Вообще говоря, функція v, удовлетворяющая уравненію (2) и условію*

$$v = 0 \quad \textit{на поверхности } (S),$$

есть мероморфная функція параметра k съ простыми полюсами

$$k_\mu, \quad k_\nu, \ldots, k_\tau, \ldots,$$

гдѣ k_μ, $k_\nu, \ldots, k_\tau \ldots$ суть всѣ или нѣкоторыя изъ характеристическихъ чиселъ данной области (D).

Число полюсовъ функціи v и характеръ ихъ распредѣленія зависитъ отъ свойствъ функціи f.

Функція v можетъ быть представлена подъ видомъ

$$v = \frac{P}{\Delta}.$$

Здѣсь P есть голоморфная функція параметра k, пока

$$k < k_p,$$

гдѣ p какое угодно цѣлое число (можетъ быть сдѣлано сколь угодно большимъ); Δ есть полиномъ степени $(p-1)$ относительно k съ постоянными коэффиціентами.

При

$$k = k_n < k_p$$

Δ обращается въ нуль, а P въ гармоническую функцію u_n.

3. Теорема V. *Если функція f удовлетворяетъ условію*

$$\int f u_n d\tau = 0, \tag{7}$$

то $k = k_n$ есть простая точка функціи v.

Помноживъ уравненіе (2) на u_n и интегрируя по всему объему, получаемъ послѣ небольшого преобразованія

$$(k - k_n)\int v u_n d\tau + \int f u_n d\tau = 0,$$

или, въ силу (7),

$$(k-k_n)\int v u_n d\tau = 0. \tag{8}$$

Если $k=k_n$ есть полюсъ v, то лѣвая часть этого равенства обратится въ

$$M\int u_n^2 d\tau ,$$

гдѣ M есть конечная, отличная отъ нуля, положительная постоянная, и равенство (8) окажется невозможнымъ.

Слѣдовательно, $k=k_n$ есть простая точка функціи v, если f удовлетворяетъ условію (7).

Слѣдствіе. *Если функція f въ уравненіи* (2) *удовлетворяетъ условіямъ*

$$\int f u_1 d\tau = 0\,, \int f u_2 d\tau = 0\,, \ldots \int f u_p d\tau = 0\,,$$

то наименьшій изъ полюсовъ функціи v не менѣе

$$k_{p+1}.$$

Эта теорема, замѣтимъ, имѣетъ существенное значеніе для доказательства теоремы о возможности разложенія данной функціи въ рядъ по гармоническимъ функціямъ.

4. Теорема VI. *Уравненіе*

$$\Delta u + k u = 0\,, \tag{9}$$

гдѣ k есть положительная постоянная, допускаетъ непрерывный и конечный по x, y, z внутри (D) интегралъ, принимающій на поверхности (S) заданныя значенія.

Этотъ интегралъ можетъ быть представленъ подъ видомъ ряда, расположеннаго по цѣлымъ положительнымъ степенямъ k и сходящагося абсолютно и равномѣрно для всѣхъ значеній k, меньшихъ k_1 *).

Доказательство этой теоремы настолько просто, что на немъ нѣтъ надобности останавливаться.

Замѣтимъ, что если на поверхности (S) дано условіе

$$u = 1 \quad \text{на поверхности } (S)\,,$$

то функція u будетъ положительна для всѣхъ точекъ внутри области (D) и отлична отъ нуля.

*) Напомнимъ, k_1 есть наименьшее изъ характеристическихъ чиселъ данной области (D).

5. Теорема VII. *Пусть f есть функція координатъ, непрерывная и конечная вмѣстѣ со своими первыми производными по координатамъ внутри области (D), обращающаяся въ нуль на поверхности (S).*

Отношеніе

$$\frac{V}{W}$$

интеграловъ

$$V = \int\left[\left(\frac{\partial f}{dx}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{dy}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{dz}\right)^2\right] d\tau\,, \quad W = \int f^2 d\tau$$

не менѣе k_1 — наименьшаго изъ характеристическихъ чиселъ области (D).

Обозначимъ черезъ u положительную и отличную отъ нуля для всѣхъ точекъ области (D) функцію координатъ, удовлетворяющую условіямъ

$$\Delta u + ku = 0 \quad \text{внутри } (D),$$

$$u = 1 \quad \text{на поверхности } (S).$$

По предыдущему, такая функція существуетъ для всѣхъ значеній k, меньшихъ k_1.

Положимъ

$$m_1 = \frac{\partial f}{dx} - \frac{f}{u}\frac{\partial u}{dx}, \qquad \varphi_1 = \frac{f^2}{u}\frac{\partial u}{dx}.$$

Имѣемъ тождества

$$m_1^2 + \frac{\partial \varphi_1}{dx} - \frac{f^2}{u}\left(\frac{\partial^2 u}{dx^2} + \frac{k}{3}u\right) = \left(\frac{\partial f}{dx}\right)^2 - \frac{k}{3}f^2$$

и два другихъ, получающихся изъ написаннаго круговой перестановкой значковъ 1, 2, 3 и буквъ x, y, z.

Интегрируя каждое изъ этихъ тождествъ по всему объему области (D) и складывая результаты, получаемъ

$$\int (m_1^2 + m_2^2 + m_3^2)\, d\tau + \int\left(\frac{\partial \varphi_1}{dx} + \frac{\partial \varphi_2}{dy} + \frac{\partial \varphi_3}{dz}\right) d\tau - \int \frac{f^2}{u}(\Delta u + ku)\, d\tau =$$

$$= V - kW.$$

Такъ какъ

$$J = \int\left(\frac{\partial \varphi_1}{dx} + \frac{\partial \varphi_2}{dy} + \frac{\partial \varphi_3}{dz}\right) d\tau = -\int f^2 \frac{\partial u}{dn}\, ds\,,$$

гдѣ ds есть элементъ поверхности (S), а n — направленіе нормали, идущей внутрь области (D), то при условіи

$$f=0 \quad \text{на поверхности } (S)$$

имѣемъ

$$J=0.$$

Слѣдовательно,

$$V-kW=\int(m_1^2+m_2^2+m_3^2)\,d\tau>0.$$

Разность

$$V-kW$$

положительна для всѣхъ значеній k, меньшихъ k_1, т. е. наименьшее значеніе отношенія $\frac{V}{W}$ есть k_1.

Итакъ

$$\frac{V}{W}\geqq k_1.$$

Знакъ равенства соотвѣтствуетъ случаю

$$f=u_1.$$

6. Пусть f есть однозначная, конечная и непрерывная внутри (D) функція координатъ, обращающаяся въ нуль на поверхности (S).

Положимъ

$$A_n=\int f u_n\,d\tau. \qquad (n=1,2,\ldots)$$

Теорема. *Рядъ*

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} A_n u_n$$

представляетъ разложеніе данной функціи f въ рядъ по гармоническимъ функціямъ всякій разъ, когда онъ сходится *).

Будемъ вычислять функцію f по функціямъ $u_n\,(n=1,2\ldots)$, полагая

$$f=A_1u_2+A_2u_2+\cdots+A_pu_p+R_p,$$

гдѣ $A_n\,(n=1,2,\ldots p)$ суть нѣкоторыя постоянныя, а R_p есть нѣкоторая функція координатъ.

*) Хотя бы не абсолютно и не равномѣрно.

Видъ R_p зависитъ отъ выбора коэффиціентовъ A_n и числа ихъ p.

Примемъ за мѣру погрѣшности при указанномъ вычисленіи f интегралъ

$$S_p = \int R_p^2 d\tau$$

и выберемъ постоянныя $A_n (n = 1\,,\ 2\,, \ldots p)$ такъ, чтобы эта погрѣшность была наименьшей.

Опредѣляя подъ этимъ условіемъ коэффиціенты A_n, получаемъ

$$A_n = \int f u_n d\tau. \qquad (n=1,\,2,\ldots,\,p)$$

При этомъ функція R_p, обращающаяся, очевидно, въ нуль на поверхности (S), будетъ еще удовлетворять условіямъ

$$\int R_p u_1 d\tau = 0\,, \quad \int R_p u_2 d\tau = 0\,, \ldots \quad \int R_p u_p d\tau = 0. \qquad \textbf{(10)}$$

Интегралъ S_p есть убывающая функція значка p.

Въ самомъ дѣлѣ,

$$S_p = \int f^2 d\tau - A_1^2 - A_2^2 - \cdots - A_p^2\,,$$

$$S_{p+1} = \int f^2 d\tau - A_1^2 - A_2^2 \cdots - A_p^2 - A_{p+1}^2$$

т. е.

$$S_{p+1} = S_p - A_{p+1}^2\,,$$

откуда и слѣдуетъ вышесказанное.

Назовемъ черезъ v_p функцію координатъ, удовлетворяющую уравненію

$$\Delta v_p + k v_p + R_p = 0 \quad \text{внутри } (D)$$

и условію

$$v_p = 0 \quad \text{на поверхности } (S).$$

Мы знаемъ, что функцію v_p можно представить подъ видомъ ряда

$$v_p = v_{p0} + k v_{p1} + k^2 v_{p2} + \cdots + k^n v_{pn} + \cdots\,, \qquad \textbf{(11)}$$

гдѣ

$$v_{p0} = \int G R'_p d\tau'\,, \quad v_{pn} = \int G v'_{p,n-1} d\tau'. \qquad (n=1\,,\,2\,,\ldots)$$

Составимъ для функцій v_{ps} $(s=0\,,\,1\,,\,2\ldots)$ интегралы Schwarz'a и обозначимъ ихъ черезъ $W_s^{(p)}$ $(s=0\,,\,1\,,\,2\ldots)$.

Рядъ (11) сходится, пока

$$k < \lim \frac{W_s^{(p)}}{W_{s+1}^{(p)}}\bigg|_{s=\infty}.$$

Такъ какъ R_p удовлетворяетъ условіямъ (10), то по теоремѣ (V)

$$\lim \frac{W_s^{(p)}}{W_{s+1}^{(p)}} > k_p\,,$$

а такъ какъ интегралы $W_s^{(p)}$ удовлетворяютъ неравенствамъ

$$\frac{W_1^{(p)}}{W_0^{(p)}} < \frac{W_2^{(p)}}{W_1^{(p)}} < \ldots < \frac{W_{s+1}^{(p)}}{W_s^{(p)}} < \ldots,$$

то и подавно

$$\frac{W_0^{(p)}}{W_1^{(p)}} > k_p\,,$$

или

$$\int v_{p0}^2\,d\tau > k_p \int \left[\left(\frac{\partial v_{p1}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_{p1}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_{p1}}{\partial z}\right)^2\right] d\tau\,.$$

Такъ какъ v_{p1} равно нулю на поверхности (S), то по теоремѣ (VII)

$$\int v_{p0}^2\,d\tau > k_1 k_p \int v_{p1}^2\,d\tau\,.$$

Но

$$\int v_{p0}^2\,d\tau = \int d\tau \left(\int G R_p' d\tau'\right)^2 < W \int R_p^2 d\tau \int G^2 d\tau < WQS_p\,,$$

гдѣ W есть объемъ области (D).

Слѣдовательно,

$$S_p = \int R_p^2 d\tau > k_p M \int v_{p1}^2\,d\tau\,,$$

гдѣ

$$M = \frac{k_1}{QW}$$

есть конечная, отличная отъ нуля, положительная постоянная.

Изъ равенства

$$v_{p2}=\int G v'_{p1}\,d\tau'$$

заключаемъ, что

$$v_{p2}^2<\int v_{p1}^2\,d\tau\int G^2 d\tau<Q\int v_{p1}^2\,d\tau.$$

Слѣдовательно,

$$S_p>k_p N v_{p2}^2\,, \tag{12}$$

гдѣ

$$N=\frac{k_1}{WQ^2}$$

есть конечная, не равная нулю, положительная постоянная.

Неравенство (12) справедливо при всякомъ p.

Будемъ увеличивать p до безконечности.

Такъ какъ по условію рядъ

$$T=\sum_{n=1}^{n=\infty}A_n u_n$$

есть рядъ сходящійся, то R_p имѣетъ предѣломъ нѣкоторую функцію R.

Положимъ затѣмъ

$$\lim v_p\big|_{p=\infty}=w\,,\quad \lim v_{p,n}\big|_{p=\infty}=w_n\,. \qquad (n=0,\,1,\,2\ldots)$$

Такъ какъ S_p стремится къ нѣкоторому предѣлу (конечному) при возрастаніи p до ∞, а число k_p возрастаетъ сверхъ всякаго предѣла, то необходимо

$$\lim v_{p2}=w_2=0\,.$$

Такъ какъ

$$w_s=\int G w'_{s-1}\,d\tau'\,, \qquad (s=3,\,4\ldots)$$

то функція w, удовлетворяющая уравненію

$$\Delta w+kw+R=0\,, \tag{13}$$

приводится къ суммѣ двухъ членовъ

$$w=w_0+kw_1\,.$$

гдѣ, напомнимъ,

$$w_0 = \int GR'd\tau', \quad w_2 = \int Gw_1' d\tau'.$$

Подставивъ это выраженіе w въ уравненіе (13), заключаемъ, что

$$w_1 = 0$$

и затѣмъ, что

$$w_0 = 0.$$

Слѣдовательно,

$$w = 0, \quad R = 0,$$

т. е. R_p стремится къ нулю при безпредѣльномъ возрастаніи p и въ предѣлѣ, который несомнѣнно существуетъ, ибо рядъ

$$T = \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n u_n \tag{14}$$

по условію сходящійся, обращается въ нуль.

Слѣдовательно,

$$f = \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n u_n,$$

что и требовалось доказать.

7. Въ заключеніе этого изслѣдованія укажемъ условія сходимости ряда (14).

Наиболѣе интересенъ, конечно, случай абсолютной сходимости.

Условія такой сходимости ряда (14) можно формулировать въ слѣдующей теоремѣ.

Теорема. *Если функція f конечна и непрерывна внутри (D) вмѣстѣ съ ея частными производными до шестого порядка включительно и, обращаясь въ нуль на поверхности (S), удовлетворяетъ еще условіямъ*

$$\Delta f = 0, \quad \Delta_2 f = 0 \quad \textit{на поверхности } (S), \tag{15}$$

то рядъ (14) сходится абсолютно и равномѣрно.

Эта теорема принадлежитъ H. Poincaré.

Я считаю не лишнимъ привести слѣдующее простое доказательство этого предложенія.

Пользуясь условіями (15) и тѣми, которыми опредѣляются функціи $u_n (n=1, 2 \ldots)$, получаемъ при помощи теоремы Грина рядъ слѣдующихъ почти очевидныхъ равенствъ

$$A_n = \int f u_n d\tau = -\frac{1}{k_n}\int f \Delta u_n d\tau = -\frac{1}{k_n}\int u_n \Delta f d\tau =$$

$$= \frac{1}{k_n^2}\int \Delta u_n \Delta f d\tau = \frac{1}{k_n^2}\int u_n \Delta_2 f d\tau =$$

$$= -\frac{1}{k_n^3}\int \Delta u_n \Delta_2 f d\tau = -\frac{1}{k_n^3}\int u_n \Delta_3 f d\tau ,$$

гдѣ Δ_3 есть знакъ трижды повторенной операціи Δ.

Слѣдовательно,

$$|A_n| < \frac{1}{k_n^3}\left(\int (\Delta_3 f)^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{M}{k_n^3} ,$$

гдѣ M есть конечная, отличная отъ нуля, положительная постоянная.

Съ другой стороны очевидно

$$u_n = k_n \int G u_n d\tau ,$$

т. е.

$$|u_n| < k_n \sqrt{Q} .$$

Слѣдовательно,

$$|A_n u_n| < \frac{M\sqrt{Q}}{k_n^2} < \frac{M\sqrt{Q}}{m n^{\frac{4}{3}}} = \frac{K}{n^{\frac{4}{3}}} , \; ^{*})$$

гдѣ K конечная, неравная нулю, положительная постоянная.

Рядъ

$$K\left(1 + \frac{1}{2^{\frac{4}{3}}} + \frac{1}{3^{\frac{4}{3}}} + \ldots + \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}} + \ldots\right)$$

сходится.

---

*) Напомнимъ,

$$\frac{l}{4\pi} = Q > \int G^2 d\tau , \quad k_n > m n^{\frac{2}{3}} \quad (\text{См. § 2-й}).$$

Наибольшее значенiе модуля каждаго члена ряда (14) меньше соотвѣтствующаго члена послѣдняго ряда. Слѣдовательно, рядъ (13) сходится при указанныхъ условiяхъ абсолютно и равномѣрно.

Замѣтимъ, что съ указаннымъ разложенiемъ функцiи f (данной) по гармоническимъ приходится встрѣчаться при рѣшенiи задачи объ охлажденiи твердаго тѣла, лучеиспускательная способность котораго безконечно велика. Это соотвѣтствуетъ допущенiю, что температура всѣхъ точекъ пространства, внѣшняго относительно тѣла, есть нуль.

Функцiя f представляетъ температуру тѣла въ начальный моментъ времени и должна равняться нулю тождественно во всѣхъ точкахъ пространства, внѣшняго относительно тѣла.

При этомъ естественно получаются условiя

$$f=0\,,\quad \Delta f=0\,,\quad \Delta_2 f=0\ldots \text{ на поверхности } (S)\,,$$

вытекающiя, какъ мнѣ кажется, изъ самой сущности задачи.

Поэтому теорема, поставленная въ началѣ этого параграфа, по крайней мѣрѣ въ примѣненiи къ только что указанному вопросу Математической Физики, имѣетъ, повидимому, совершенно общее значенiе.

О нуляхъ цѣлой функціи Эрмита и функцій Лямэ.

А. А. Маркова.

(Извлеченіе изъ письма академика А. А. Маркова къ проф. А. М. Ляпунову).

Въ надеждѣ, что Вы сохранили интересъ къ функціямъ Лямэ, я позволяю себѣ обратить Ваше вниманіе на замѣтку *) г-на Клейна „Ueber den Hermite'schen Fall der Lamé'schen Differentialgleichung“, которая, впрочемъ, касается не столько самихъ функцій Лямэ сколько цѣлой функціи Эрмита, связанной извѣстнымъ образомъ съ уравненіемъ Лямэ.

На двухъ фигурахъ г-нъ Клейнъ показываетъ, какъ распредѣляются нули этой цѣлой функціи въ различныхъ случаяхъ, но не приводитъ никакого доказательства.

Обдумывая предложеніе г-на Клейна, я убѣдился, что для его доказательства можно съ успѣхомъ воспользоваться разсужденіями вполнѣ подобными тѣмъ, какія были мною примѣнены къ другой цѣлой функціи въ мемуарѣ **) „О цѣлой функціи

$$x^n F\left(\frac{-n-\Delta}{2},\ \frac{2k-n+1-\Delta}{2},\ 1-\Delta,\ \frac{1}{x}\right)\ F\left(\frac{-n+\Delta}{2},\ \frac{2k-n+1+\Delta}{2},\ 1+\Delta,\ \frac{1}{x}\right)$$

и о функціяхъ болѣе общаго характера“; что я и предполагаю сдѣлать въ настоящемъ письмѣ.

*) Mathematische Annalen XL.

**) Mémoires de l'Académie de St.-Pétersbourg; VII série, XLI.

Начнемъ съ установленія обозначеній. Пусть

$$\varphi = \varphi(x) = 4(x - e_1)(x - e_2)(x - e_3), \quad e_1 < e_2 < e_3, \quad A = n(n+1),$$

$F(x, B)$ цѣлая функція n-ой степени отъ x, равная произведенію $y_1 y_2$ двухъ интеграловъ дифференціальнаго уравненія

$$2\varphi y'' + \varphi' y' - 2(Ax + B)y = 0.$$

Извѣстно, что функція $F(x, B)$ удовлетворяетъ линейному дифференціальному уравненію третьяго порядка

$$2\varphi F''' + 3\varphi' F'' + \varphi'' F' - 8(Ax + B)F' - 4AF = 0$$

и нелинейному уравненію второго порядка

$$(F'F' - 2FF'')\varphi - FF'\varphi' + 4(Ax + B)FF = \Phi(B),$$

гдѣ $\Phi(B)$ не зависитъ отъ x.

Извѣстно также, что $F(x, B)$ цѣлая функція n-ой степени не только относительно x, но и относительно B, если коэффиціентъ при x^n мы полагаемъ въ этой функціи равнымъ единицѣ.

Отсюда слѣдуетъ, что $\Phi(B)$ цѣлая функція $2n+1$ степени отъ B и что въ ней коэффиціентъ при B^{2n+1} число положительное.

Мы будемъ заниматься вопросомъ о распредѣленіи вещественныхъ корней уравненія

$$F(x, B) = 0$$

по промежуткамъ

$$(-\infty, e_1), \quad (e_1, e_2), \quad (e_2, e_3), \quad (e_3, +\infty)$$

при различныхъ вещественныхъ значеніяхъ параметра B.

Если число B возрастаетъ непрерывно отъ $-\infty$ до $+\infty$, это распредѣленіе мѣняется только при переходѣ B черезъ корни уравненія

$$\Phi(B) = 0.$$

Для значеній B, удовлетворяющихъ послѣднему уравненію, функція $F(x, B)$ обращается въ квадратъ одной изъ функцій Лямэ, т. е. принимаетъ видъ

$$(x - e_1)^{\varepsilon_1}(x - e_2)^{\varepsilon_2}(x - e_3)^{\varepsilon_3}[f(x)]^2,$$

гдѣ $f(x)$ цѣлая функція отъ x, а показатели ε_1, ε_2, ε_3 имѣютъ одно изъ двухъ значеній: 0 и 1.

Относительно функцій Лямэ я буду предполагать извѣстными только слѣдующія предложенія:

1) онѣ соотвѣтствуютъ вещественнымъ значеніямъ B;

2) число ихъ равно $2n+1$ и каждой изъ нихъ соотвѣтствуетъ свое особое значеніе B, такъ что различнымъ функціямъ Лямэ соотвѣтвѣтствуютъ различныя значенія B;

3) всѣ корни уравненія

$$f(x)=0$$

вещественны и лежатъ между e_1 и e_3.

Въ силу этихъ предложеній всѣ корни уравненія

$$\Phi(B)=0$$

вещественны и различны.

Пусть они будутъ

$$B_1 < B_2 < \ldots < B_i < B_{i+1} < \ldots < B_{2n+1}.$$

Положимъ еще

$$\frac{\partial F(x,B)}{\partial B}=U(x,B),$$

$$F(x,B_i)=(x-e_1)^{\varepsilon_1^{(i)}}(x-e_2)^{\varepsilon_2^{(i)}}(x-e_3)^{\varepsilon_3^{(i)}}[f_i(x)]^2$$

и условимся обозначать черезъ N_i' число корней уравненія

$$f_i(x)=0$$

въ промежуткѣ (e_1, e_2), а черезъ N_i'' число корней того-же уравненія въ промежуткѣ (e_2, e_3).

Наконецъ символомъ ξ_i будемъ обозначать любой корень уравненія

$$f_i(x)=0,$$

а буквою e любое изъ чиселъ e_1, e_2, e_3.

Пока B лежитъ въ одномъ изъ промежутковъ

$$(-\infty, B_1), (B_1, B_2), \ldots, (B_i, B_{i+1}), \ldots, (B_{2n}, B_{2n+1}), (B_{2n+1}, +\infty)$$

распредѣленіе вещественныхъ корней уравненія

$$F(x, B)=0$$

по промежуткамъ

$$(-\infty, e_1), \quad (e_1, e_2), \quad (e_2, e_3), \quad (e_3, +\infty)$$

не мѣняется при возрастаніи B.

Измѣненія-же въ этомъ распредѣленіи происходятъ только при переходѣ B черезъ значенія

$$B_1, B_2, \ldots, B_{2n+1}.$$

Для изслѣдованія этихъ измѣненій намъ надо при значеніяхъ B близкихъ къ B_i разсмотрѣть корни x уравненія

$$F(x, B) = 0$$

близкіе къ ξ_i и къ e.

При безконечно малыхъ величинахъ разностей

$$x - \xi_i \qquad \text{и} \qquad B - B_i$$

уравненіе

$$F(x, B) = 0$$

обращается въ слѣдующее

$$(x - \xi_i)^2 F''(\xi_i, B_i) + 2(B - B_i) U(\xi_i, B_i) = 0.$$

Съ другой стороны изъ вышеуказаннаго нелинейнаго дифференціальнаго уравненія нетрудно вывесть слѣдующее равенство

$$-2U(\xi_i, B_i) F''(\xi_i, B_i) \varphi(\xi_i) = \Phi'(B_i),$$

которое показываетъ, что отношеніе $\dfrac{-U(\xi_i, B_i)}{F''(\xi_i, B_i)}$ имѣетъ тотъ же знакъ какъ и произведеніе

$$\Phi'(B_i) \varphi(\xi_i).$$

Знакъ же послѣдняго произведенія одинаковъ со знакомъ $(-1)^{i-1}$, если ξ_i лежитъ въ промежуткѣ (e_1, e_2), и одинаковъ со знакомъ $(-1)^i$, если ξ_i лежитъ въ промежуткѣ (e_2, e_3).

Слѣдовательно, если i число нечетное, при переходѣ B черезъ значеніе B_i, отъ меньшихъ величинъ къ бо́льшимъ, $2N_i'$ мнимыхъ корней становятся вещественными и лежащими въ промежуткѣ (e_1, e_2), а $2N_i''$ вещественныхъ корней, заключенныхъ въ промежуткѣ (e_2, e_3), становятся мнимыми.

Напротивъ, если i число четное, при такомъ же переходѣ B черезъ значеніе B_i отъ меньшихъ величинъ къ бо́льшимъ, вещественные корни, заключенные въ промежуткѣ (e_1, e_2), обращаются въ $2N_i'$ мнимыхъ корней, а $2N_i''$ мнимыхъ корней становятся вещественными и лежащими въ промежуткѣ (e_2, e_3).

Обращаясь къ тому корню x уравненія

$$F(x, B) = 0,$$

который близокъ къ e при B близкомъ къ B_i, мы прежде всего должны предположить

$$F(e, B_i) = 0.$$

Затѣмъ безъ большого труда находимъ равенство

$$-U(e, B_i) F'(e, B_i) \varphi'(e) = \Phi'(B_i)$$

и, предполагая разности

$$x - e \quad \text{и} \quad B - B_i$$

безконечно малыми, получаемъ уравненіе

$$(x - e) F'(e, B_i) + (B - B_i) U(e, B_i) = 0.$$

Отсюда нетрудно заключить, что знакъ разности $x - e$ одинаковъ со знакомъ произведенія $(-1)^{i-1}(B - B_i)$ при $e = e_1$ и при $e = e_3$; если-же $e = e_2$, то знакъ разности $x - e$ одинаковъ со знакомъ $(-1)^i (B\ B_i)$.

На основаніи всего сказаннаго нами легко составить слѣдующую таблицу:

Предѣлы для B	Число корней уравненія $F(x, B) = 0$			
	въ промеж. $(-\infty, e_1)$	въ промежуткѣ (e_1, e_2)	въ промежуткѣ (e_2, e_3)	въ промеж. $(e_3, +\infty)$
$-\infty < B < B_1$	$\varepsilon_1^{(1)}$	0	$\varepsilon_2^{(1)} + 2N_1'' + \varepsilon_3^{(1)}$	0
$B_1 < B < B_2$	0	$\varepsilon_1^{(1)} + 2N_1' + \varepsilon_2^{(1)} =$ $\varepsilon_1^{(2)} + 2N_2' + \varepsilon_2^{(2)}$	0	$\varepsilon_3^{(1)} = \varepsilon_3^{(2)}$
$B_2 < B < B_3$	$\varepsilon_1^{(2)} = \varepsilon_1^{(3)}$	0	$\varepsilon_2^{(2)} + 2N_2'' + \varepsilon_3^{(2)} =$ $\varepsilon_2^{(3)} + 2N_3'' + \varepsilon_3^{(3)}$	0
$B_3 < B < B_4$	0	$\varepsilon_1^{(3)} + 2N_3' + \varepsilon_2^{(3)} =$ $\varepsilon_1^{(4)} + 2N_4' + \varepsilon_2^{(4)}$	0	$\varepsilon_3^{(3)} = \varepsilon_3^{(4)}$
. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .
$B_{2n} < B < B_{2n+1}$	$\varepsilon_1^{(2n)} = \varepsilon_1^{(2n+1)}$	0	$\varepsilon_2^{(2n)} + 2N_{2n}'' + \varepsilon_3^{(2n)} =$ $\varepsilon_2^{(2n+1)} + 2N_{2n+1}'' + \varepsilon_3^{(2n+1)}$	0
$B_{2n+1} < B < +\infty$	0	$\varepsilon_1^{(2n+1)} + 2N_{2n+1}' + \varepsilon_2^{(2n+1)}$	0	$\varepsilon_3^{(2n+1)}$

А изъ счета мнимыхъ корней выводимъ:

$$N_1''=N_2'',\quad N_2'=N_3',\quad N_3''=N_4'',\ldots,\ N_{2n-1}''=N_{2n}'',\quad N_{2n}'=N_{2n+1}'.$$

Разсматривая нашу таблицу и принимая во вниманіе только что написанныя равенства, нетрудно посредствомъ простаго сложенія и вычитанія придти къ такой формулѣ

$$2N_1'+\varepsilon_1^{(1)}+\varepsilon_2^{(1)}-2N_{2n+1}'=\varepsilon_2^{(2)}-\varepsilon_2^{(3)}+\varepsilon_2^{(4)}-\varepsilon_2^{(5)}+\ldots+$$

$$+\varepsilon_2^{(2n-2)}-\varepsilon_2^{(2n-1)}+\varepsilon_1^{(2n)}+\varepsilon_2^{(2n)}.$$

Съ другой стороны изъ вида функціи $F(x,B)$ легко заключить, что при весьма большихъ значеніяхъ B^2 модули корней уравненія

$$F(x,B)=0$$

должны быть также весьма большими и потому сами корни не могутъ заключаться между e_1 и e_3.

Поэтому должно быть

$$N_1''=0,\quad \varepsilon_2^{(1)}=\varepsilon_3^{(1)}=0,\quad 2N_1'+\varepsilon_1^{(1)}=n,$$

$$N_{2n+1}'=0,\quad \varepsilon_1^{(2n)}=\varepsilon_1^{(2n+1)}=\varepsilon_2^{(2n+1)}=0,\quad 2N_{2n+1}''+\varepsilon_3^{(2n+1)}=n,$$

въ силу чего приведенное выше равенство даетъ

$$n=\varepsilon_2^{(2)}-\varepsilon_2^{(3)}+\varepsilon_2^{(4)}-\varepsilon_2^{(5)}+\ldots+\varepsilon_2^{(2n-2)}-\varepsilon_2^{(2n-1)}+\varepsilon_2^{(2n)}$$

и слѣдовательно

$$\varepsilon_2^{(2)}=\varepsilon_2^{(4)}=\ldots=\varepsilon_2^{(2n-2)}=\varepsilon_2^{(2n)}=1,$$

$$\varepsilon_2^{(1)}=\varepsilon_2^{(3)}=\varepsilon_2^{(5)}=\ldots=\varepsilon_2^{(2n-1)}=\varepsilon_2^{(2n+1)}=0.$$

Такимъ образомъ всѣ числа $\varepsilon_2^{(i)}$ вполнѣ опредѣлены.

Обращаясь къ числамъ $\varepsilon_1^{(i)}$ и $\varepsilon_3^{(i)}$, замѣтимъ, что $\varepsilon_1^{(1)}$ равняется нулю при n четномъ и единицѣ при n нечетномъ. Это число мы обозначимъ черезъ ε.

Затѣмъ послѣдовательно находимъ:

$$\varepsilon_1^{(2)}=1-\varepsilon=\varepsilon_1^{(3)},\quad \varepsilon_1^{(4)}=\varepsilon_1^{(5)}=\varepsilon,\quad \varepsilon_1^{(6)}=\varepsilon_1^{(7)}=1-\varepsilon,\quad \varepsilon_1^{(8)}=\varepsilon_1^{(9)}=\varepsilon,\ldots,$$

$$\varepsilon_3^{(1)}=\varepsilon_3^{(2)}=0,\quad \varepsilon_3^{(3)}=\varepsilon_3^{(4)}=1,\quad \varepsilon_3^{(5)}=\varepsilon_3^{(6)}=0,\quad \varepsilon_3^{(7)}=\varepsilon_3^{(8)}=1,\ldots.$$

Въ виду всѣхъ этихъ равенствъ, таблица распредѣленія вещественныхъ корней уравненія

$$F(x, B) = 0$$

принимаетъ слѣдующій видъ:

Предѣлы для B	Число корней уравненія $F(x, B) = 0$			
	въ промежут. $(-\infty, e_1)$	въ промежут. (e_1, e_2)	въ промежут. (e_2, e_3)	въ промежут. $(e_3, +\infty)$
$-\infty < B < B_1$	$\varepsilon = \frac{1-(-1)^n}{2}$	0	0	0
$B_1 < B < B_2$	0	n	0	0
$B_2 < B < B_3$	$1-\varepsilon$	0	1	0
$B_3 < B < B_4$	0	$n-1$	0	1
$B_4 < B < B_5$	ε	0	2	0
$B_5 < B < B_6$	0	$n-2$	0	0
$B_6 < B < B_7$	$1-\varepsilon$	0	3	0
$B_7 < B < B_8$	0	$n-3$	0	1
$B_8 < B < B_9$	ε	0	4	0
$B_9 < B < B_{10}$	0	$n-4$	0	0
$B_{10} < B < B_{11}$	$1-\varepsilon$	0	5	0
. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .
. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .

Послѣдняя таблица, по существу дѣла, равносильна чертежамъ г-на Клейна.

Замѣчу, что предыдущія разсужденія служатъ также для доказательства замѣченнаго Вами, въ диссертаціи „Объ устойчивости эллипсоидальныхъ формъ равновѣсія вращающейся жидкости", закона послѣдовательности функцій Лямэ.

Объ измѣненіи діаметра солнца въ зависимости отъ явленій, наблюдаемыхъ на его поверхности.

I. I. Сикора.

Съ самаго начала моихъ занятій солнцемъ меня поражали величіе, величина и сила явленій, происходящихъ на немъ; кромѣ того приходилось неоднократно наблюдать движеніе свѣтящейся массы протуберанцевъ. Это навело меня на мысль, что, коль скоро явленія пятенъ и протуберанцевъ реальныя, то, такъ какъ эти явленія захватываютъ большія пространства поверхности солнца и достигаютъ иногда грандіозныхъ размѣровъ, не должны ли они производить подъемы и опусканія поверхности солнца и, слѣдовательно, увеличивать или уменьшать діаметры солнца въ этихъ направленіяхъ.

Прійдя къ этому мнѣнію, я началъ рыться въ журналахъ и спеціальныхъ работахъ по теоріи солнца, думая найти какія-нибудь работы и указанія по этому вопросу; но оказалось, что по этому вопросу почти ничего не сдѣлано, такъ какъ всѣ работы относительно измѣненія діаметра солнца носятъ статистическій характеръ.

Мнѣ кажется, что первый поднялъ вопросъ объ измѣненіи діаметра солнца въ зависимости отъ явленій солнечныхъ пятенъ и протуберанцевъ A. Secchi; его статья относительно этого помѣщена въ журналѣ „Memorie della Società degli Spettroscopisti Italiani" за 1873 годъ. Эта статья касается 182 меридіанальныхъ наблюденій діаметра солнца за время отъ 12 іюля 1871 г. по 12 іюля 1872 г. и въ ней между прочимъ A. Secchi дѣлаетъ выводъ, что діаметръ больше, когда пятенъ и протуберанцевъ меньше. Затѣмъ относительно зависимости величины діаметра солнца отъ пятнообразовательной дѣятельности солнца существуютъ работы Tacchini, Hilfiker-a, Wolf-a, Auwers-a и другихъ. Большинство этихъ работъ сводится къ сравненію кривыхъ такъ называемыхъ горизонтальныхъ и вертикальныхъ діаметровъ солнца, выводимыхъ изъ меридіанальныхъ наблюденій различныхъ обсерваторій, съ кривыми относительныхъ чиселъ Вольфа, при чемъ Вольфомъ давались даже эмпирическія формулы для величины діаметра солнца въ зависимости отъ относительныхъ чиселъ.

Изъ этихъ работъ наиболѣе интересно изслѣдованіе Auwers-a, которое приводитъ къ отрицательнымъ результатамъ, а именно: Auwers говоритъ, что маленькія измѣненія діаметра солнца зависятъ отъ неисправленныхъ личныхъ уравненій наблюдателей и что величина діаметра солнца не мѣняется, а мѣняются личныя уравненія наблюдателей. Что же касается годового періода, то Auwers говоритъ, что онъ зависитъ отъ наблюдателя, атмосферныхъ условій и вліянія температуры на инструментъ.

Кромѣ того нужно обратить вниманіе на то, что меридіанальныя наблюденія даютъ величины діаметра въ направленіи по суточному движенію, а этотъ послѣдній въ теченіе года измѣняетъ свой наклонъ къ экватору солнца отъ -26^0 до $+26^0$, такъ что измѣряется въ теченіе года не одинъ и тотъ же діаметръ.

Познакомившись съ литературой по этому вопросу я въ іюнѣ мѣсяцѣ настоящаго 1895 года предпринялъ измѣренія діаметровъ солнца въ различныхъ направленіяхъ. Наблюденія производились при помощи 6-ти-дюймового рефрактора Харьковской Обсерваторіи съ проектированьемъ солнца и нитей нитянаго микрометра на экранъ. Сѣтка нитей состояла изъ 2-хъ параллельныхъ нитей въ одномъ направленіи и большого числа нитей къ нимъ перпендикулярныхъ, перпендикулярность которыхъ была провѣрена. Микрометрическая коробка устанавливалась такъ, чтобы 2 параллельныя нити были установлены въ направленіи по суточному движенію и затѣмъ наблюдались моменты касанія западнымъ и восточнымъ краями солнца группы нитей. Въ этомъ случаѣ въ томъ мѣстѣ, гдѣ находило солнце, въ томъ же мѣстѣ оно и сходило съ нити. Затѣмъ микрометрическая коробка поворачивалась на опредѣленный уголъ γ, и, слѣдовательно, на этотъ уголъ поворачивались и нити, и снова наблюдалось прохожденіе солнца черезъ нити, но только теперь, очевидно, измѣрялся діаметръ, наклоненный къ діаметру въ направленіи по суточному движенію подъ угломъ γ. Въ этомъ случаѣ, если коробка повернута въ направленіи $NWSO$, край солнца находитъ ниже, чѣмъ сходитъ, а при обратномъ движеніи—наоборотъ. Измѣренный въ этомъ случаѣ діаметръ r, очевидно, будетъ больше діаметра въ направленіи по суточному движенію и дѣйствительная величина его, очевидно, равна $r \cos\gamma$. Затѣмъ по способамъ, употребляемымъ для опредѣленія геліографическихъ широтъ протуберанцевъ, можно опредѣлить широту западнаго конца измѣреннаго діаметра или наклонъ его къ экваторіальному діаметру солнца. Нужно замѣтить, что окуляръ при харьковскомъ рефракторѣ съ наименьшимъ увеличеніемъ позволяетъ измѣрять діаметры съ наклономъ не болѣе 31^0 къ діаметру въ направленіи по суточному движенію, а этотъ послѣдній, вслѣдствіе наклона экватора къ эклиптикѣ приблизительно въ 23^05, наклоненія экватора солнца къ эклиптикѣ приблизительно въ 7^0 и долготы восходящаго узла солнечнаго экватора приблизительно въ 75^0, можетъ имѣть наибольшій наклонъ къ солнечному экватору около 26^0; слѣдовательно, съ даннымъ увеличеніемъ въ теченіе года можно измѣрять діаметры въ предѣлахъ наклонностей къ солнечному экватору отъ -57^0 до $+57^0$. Вышеназванныя измѣренія на Харьковской Обсерваторіи продолжались съ 10 іюня по октябрь мѣсяцъ и за этотъ періодъ широты западнаго конца измѣряемыхъ діаметровъ находились въ предѣлахъ отъ -41^0 до $+54^0$.

Мнѣ кажется, что изъ такого рода наблюденій, при большомъ количествѣ ихъ, можно бы было вывести заключеніе о сжатіи солнца подобно тому, какъ это можно вывести изъ геліометрическихъ наблюденій.

Теперь посмотримъ, какъ можно получить приведенную и исправленную величину измѣреннаго діаметра.

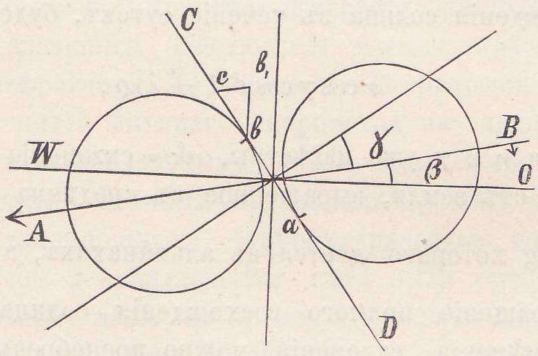
Какъ извѣстно, величина діаметра, приведенная къ экватору, къ среднему разстоянію солнца отъ земли и исправленная на измѣненіе прямого восхожденія солнца въ теченіе сутокъ, будетъ равна

$$r \cos\gamma \cos\delta (1-\lambda)\varrho ,$$

гдѣ обозначенія r и γ уже извѣстны, δ — склоненіе солнца, ϱ — разстояніе солнца отъ земли, выраженное въ среднемъ разстояніи солнца отъ земли и log котораго дается въ альманахахъ, а $\lambda = \frac{\Delta\alpha}{86400+\Delta\alpha}$, гдѣ $\Delta\alpha$ — приращеніе прямого восхожденія солнца за однѣ сутки. (Вліяніемъ измѣненія склоненія можно пренебречь, такъ какъ это вліяніе очень незначительно). Если наблюдать солнце, когда оно высоко стоитъ надъ горизонтомъ, то другихъ поправокъ можно и не вводить, въ противномъ случаѣ нужно ввести поправку на рефракцію.

Прежде чѣмъ сказать, какъ вводится поправка на рефракцію, нужно замѣтить, что вообще наблюдать солнце удобнѣе и выгоднѣе, когда оно стоитъ низко надъ горизонтомъ, во-первыхъ потому, что при высокомъ положеніи солнца наблюдать бываетъ часто неудобно, что оказываетъ, конечно, вліяніе на результатъ наблюденій, а во-вторыхъ потому, что въ полдень воздухъ сильно нагрѣвается, волнуется и потому изображенія бываютъ очень дрожащія. Если опредѣлять абсолютную величину діаметра солнца, то низкимъ положеніемъ солнца, конечно, пользоваться нельзя, такъ какъ мы не можемъ ввести точно поправку и на рефракцію, и на измѣненіе діаметра солнца отъ дѣйствія атмосферы; но, если цѣль наблюденій, какъ было въ данномъ случаѣ, сравнить величины діаметровъ въ различныхъ направленіяхъ, то можно пользоваться и наблюденіями въ горизонтѣ, если умѣть вводить поправку на рефракцію. Легко понять, что рефракція не оказываетъ вліянія на величину діаметра, измѣряемаго въ направленіи по суточному движенію, такъ какъ находящій и сходящій края солнца будутъ имѣть одну и ту же высоту и, слѣдовательно, рефракцію можно считать для нихъ одинаковой; но этого нельзя сказать относительно другихъ діаметровъ. Дѣйствительно, если находящій край имѣетъ меньшее зенитное разстояніе, чѣмъ сходящій, то въ тотъ моментъ, когда наблюдается схожденіе съ нити края солнца, угловой діаметръ уже пройденъ, такъ какъ для сходящаго края солнца рефракція больше и потому наблюденный діаметръ больше дѣйствительнаго. Если же находящій край солнца имѣетъ большее зенитное разстояніе, то происходитъ явленіе обратное. Слѣдовательно, поправку нужно ввести собственно не на рефракцію, а на измѣненіе ея вслѣдствіе разности высотъ сходящаго и находящаго края солнца.

Положимъ на экранѣ AB — направленіе суточнаго движенія, CD — нить, черезъ которую наблюдается прохожденіе краевъ солнца, γ—уголъ наклона измѣряемаго діаметра къ діаметру въ направленіи по суточному движенію, β—наклонъ линіи суточнаго движенія къ горизонту.



Въ этомъ случаѣ солнце находитъ ниже, чѣмъ оно сходитъ. Такъ какъ въ точкѣ b окружности солнца рефракція меньше чѣмъ въ точкѣ a, то видимая высота точки b надъ a меньше дѣйствительной, а потому въ моментъ наблюденія схожденія края солнца, солнце не сходитъ съ той же линіи, которой касалось оно при нахожденіи, такъ какъ въ дѣйствительности относительно точки a точка b на разность рефракціи $dr = bb_1$ находится выше и, чтобы пройти угловой діаметръ, солнце должно пройти еще путь b_1c, на что оно употребитъ нѣкоторое время dt. Изъ треугольника cbb_1 опредѣлимъ dt:

$$dt = \frac{dr}{15} \cdot \frac{\sin cbb_1}{\sin bcb_1} = + \frac{dr \sin(\beta - \gamma)}{15 \cos\gamma}.$$

Если солнце сходитъ ниже, чѣмъ находитъ, то подобнымъ же образомъ найдемъ, что $dt = -\frac{dr \sin(\beta - \gamma)}{15 \cos\gamma}$, при чемъ γ считается положительнымъ внизъ отъ AB и отрицательнымъ вверхъ.

Слѣдовательно, для опредѣленія dt нужно знать dr, β и γ. dr есть не что иное какъ разность рефракціи для сходящаго и находящаго края солнца, т. е. измѣненіе рефракціи при измѣненіи высоты на величину $ab\cos(\beta-\gamma)$ или на величину $r\sin\gamma$ при средней высотѣ солнца h, которая находится по часовому углу солнца и склоненію его, напримѣръ, изъ діаграммы высотъ Radau, построенной для широты города Харькова. Что касается β, т. е. угла линіи суточнаго движенія съ горизонтомъ, то легко видѣть изъ сферическаго треугольника, вершинами котораго служатъ на небесной сферѣ положеніе солнца, проекція его на горизонтъ и точка захода или восхода солнца, что $\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg} 40^0 \cos 15(\tau - t)$, гдѣ 40^0 представляетъ приблизительный наклонъ плоскости экватора къ плоскости горизонта, τ—приблизительное время восхода или захода, а t—приблизительное время наблюденія солнца. Слѣдовательно, по t и δ опредѣляется изъ діаграммы Radau высота солнца h, а по $r\sin\gamma$ и h опредѣляется dr, затѣмъ по t и τ при помощи небольшой таблички опредѣляется β; а зная dr, β и γ, опредѣлимъ и $\pm dt$; при чемъ знакъ $+$ берется въ томъ случаѣ, если солнце находитъ ниже чѣмъ сходитъ, а знакъ—въ противномъ случаѣ. Эта поправка $\pm dt$ на разность рефракціи при высотѣ солнца $> 15^0$ будетъ $< 0^s{\cdot}1$ времени, но при наблюденіи въ горизонтѣ можетъ доходить до $1^s{\cdot}0$.

Найдя приведенныя и исправленныя на рефракцію величины діаметровъ, можно ихъ уже сравнивать другъ съ другомъ и сопоставлять съ явленіями солнечныхъ пятенъ и протуберанцевъ. За вышеуказанный періодъ, съ 10 іюня по октябрь мѣсяцъ, дней измѣренія діаметровъ солнца было 38 и измѣрено въ эти дни 232 діаметра въ различныхъ направленіяхъ, при чемъ вѣроятная ошибка одного измѣренія, выводимаго изъ прохожденія западнаго и восточнаго края солнца черезъ 7,6 или 5 нитей, была большею частью значительно $< 0^s{\cdot}1$ и очень рѣдко достигала величины $0^s{\cdot}1$ времени.

Величины всѣхъ измѣренныхъ діаметровъ я не привожу и изъ 38 дней наблюденій привожу только результаты 27 дней наблюденія, такъ какъ остальные 11 дней не представляютъ ничего особенно интереснаго въ сравненіи съ приводимыми 27 днями: въ эти послѣдніе дни исчезали и появлялись изъ-за видимой поверхности солнца группы пятенъ; въ эти дни наблюдались наиболѣе замѣчательные протуберанцы, въ эти же дни происходили на солнцѣ и другія сильныя возмущенія видимой его поверхности. Вычисленныя величины діаметровъ, измѣренныхъ въ эти 27 дней, для наглядности представлены на прилагаемой къ сему таблицѣ, на которой горизонтальныя линіи, соотвѣтствующія различнымъ днямъ, представляютъ части видимой окружности солнца съ бывшими въ то время протуберанцами въ предѣлахъ позиціонныхъ NWSO-овыхъ угловъ отъ 48^0 до 126^0 и отъ 236^0 до 306^0. Кромѣ протуберанцевъ на таблицѣ крестиками обозначены тѣ мѣста на видимой окружности солнца, вблизи которыхъ во время измѣренія діаметровъ находилась какая-нибудь группа пятенъ. Къ этимъ горизонтальнымъ линіямъ внизу прибавлены коротенькія вертикальныя черточки, которыя указываютъ на положеніе западнаго или восточнаго конца измѣреннаго діаметра, а величина его обозначена на таблицѣ рядомъ съ черточками двумя цифрами: десятыми и сотыми долями секунды, при чемъ 2^m и 8^s подразумѣваются; если же величина діаметра была 2^m 7^s или 2^m 9^s съ долями, то на таблицѣ величина діаметра обозначена тремя цифрами.

При взглядѣ на эту табличку сейчасъ же видно, что діаметры солнца въ различныхъ направленіяхъ неравны и, слѣдовательно, что фигура равновѣсія видимой поверхности солнца представляетъ не правильную фигуру шара или эллипсоида вращенія, а постоянно измѣняющуюся волнообразную фигуру; кромѣ того, если обратимъ вниманіе на тѣ мѣста поверхности солнца, въ направленіи на которыя діаметръ сравнительно очень большой, то увидимъ, что всякое значительное увеличеніе діаметра, соотвѣтствующее какъ бы подъему видимой поверхности солнца, совпадаетъ съ уменьшеніемъ діаметровъ въ направленіи на сосѣднія части видимой окружности солнца или съ уменьшеніемъ діаметра въ томъ же направленіи въ предыдущій или на слѣдующій день. При этомъ нужно замѣтить, что, собственно говоря, сравнивать результаты измѣреній различныхъ дней не всегда вполнѣ возможно, такъ какъ наблюденія производились не въ одно и тоже время и при разныхъ атмосферныхъ условіяхъ и потому различнымъ образомъ вліяла на величину солнца атмосфера и кромѣ того всякій день дѣлалась, конечно, новая установка экрана въ фокусѣ изображенія солнца. Примѣромъ того, что подъемъ сопровождается опусканіемъ, могутъ служить слѣдующіе дни измѣреній: 22 іюня, 20, 21 августа и 4, 5 сентября.

Неравенство діаметровъ зависитъ, повидимому, отъ тѣхъ явленій, которыя происходятъ на солнцѣ: отъ солнечныхъ пятенъ, протуберанцевъ и, вѣроятно, еще отъ другихъ явленій, о которыхъ мы еще ничего не знаемъ. Наиболѣе отчетливо обнаруживается вліяніе пятенъ, а именно: оказывается, что изъ 27 случаевъ исчезновенія или появленія пятенъ въ тѣхъ мѣстахъ, въ направленіи на которыя измѣрялись діаметры, въ 19 случаяхъ пятна произвели, какъ будто, подъемъ поверхности солнца, въ четырехъ случаяхъ въ мѣстахъ исчезновенія или появленія группы пятенъ, обозначенныхъ на таблицѣ цыфрами 7, 10, 23, 24, произошло опусканіе, но при этомъ нужно замѣтить, что во время измѣренія діаметровъ группы 10, 23 и отчасти 24 не были точно на краю солнца, а группа 7 не произвела подъема вслѣдствіе того, что протуберанецъ видѣнный 2-го и 3-го іюля за позиціоннымъ угломъ 296^0, былъ, повидимому, причиной значительнаго опусканія поверхности солнца 4 іюля; что же касается остальныхъ 4-хъ случаевъ: 4, 21, 22 и 26, то въ этихъ случаяхъ ничего нельзя сказать ни о подъемѣ, ни объ опусканiи поверхности солнца.

Слѣдовательно, можно вывести заключенiе, что пятна производятъ подъемъ видимой поверхности солнца и увеличиваютъ дiаметръ солнца въ направленiи на пятна.

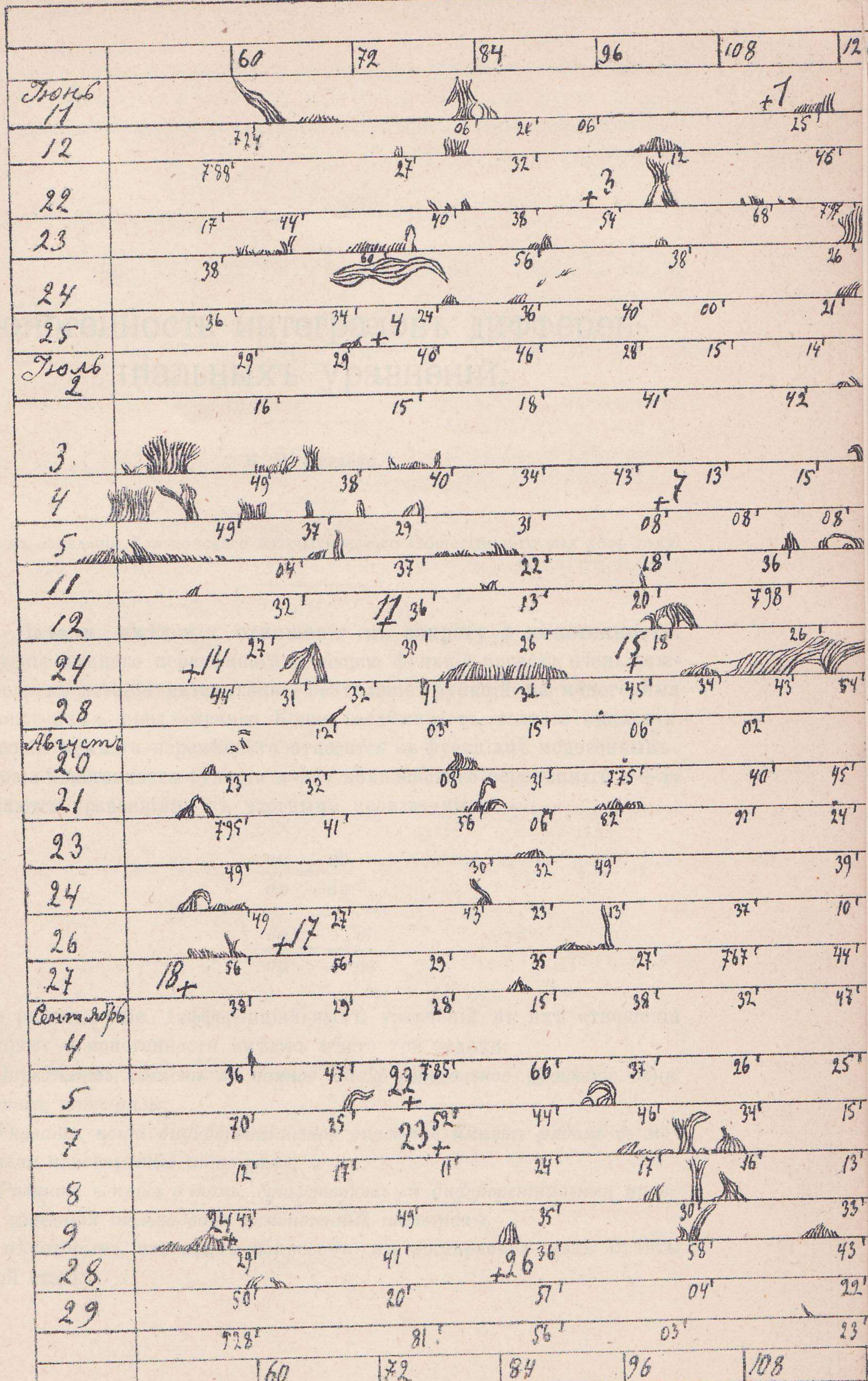
Что касается протуберанцевъ, то дѣйствiе ихъ на видимую фигуру солнечной поверхности такъ же ясно не обнаруживается, но тѣмъ не менѣе нѣкоторые подъемы и опусканiя можно объяснить дѣйствiемъ протуберанцевъ, такъ напримѣръ очень возможно, что протуберанцы 3, 4 iюля за позицiонными углами отъ 48^0—68^0 были причиной подъема поверхности солнца въ мѣстѣ своего появленiя и этотъ подъемъ сопровождался 5 iюля опусканiемъ. Особенно интересны подъемъ и опусканiе, произведенныя протуберанцемъ 2, 3 iюля за позицiоннымъ угломъ 296^0: 2 iюля онъ произвелъ подъемъ поверхности солнца, затѣмъ 3 iюля въ двухъ мѣстахъ замѣтно уже опусканiе, а 4 iюля, когда видимая дѣятельность протуберанца прекратилась, ясно обнаружилось опусканiе поверхности солнца.

Но особенно сильные подъемы и опусканiя нельзя объяснить ни пятнами, ни протуберанцами и, вѣроятно, причиной ихъ служатъ процессы, происходящiе на солнцѣ, которыхъ мы не видимъ и о которыхъ не знаемъ. Что же касается реальности ихъ, то нужно замѣтить, что иногда, когда приходилось наблюдать очень большой дiаметръ, измѣренiя черезъ нѣкоторое время повторялись съ новой установкой, и случалось, что вновь полученная величина дiаметра отличалась отъ первоначальной нѣсколькими сотыми долями секунды. Особенно рельефные подъемы и опусканiя такого рода наблюдались 20-го, 21-го августа и 4-го сентября.

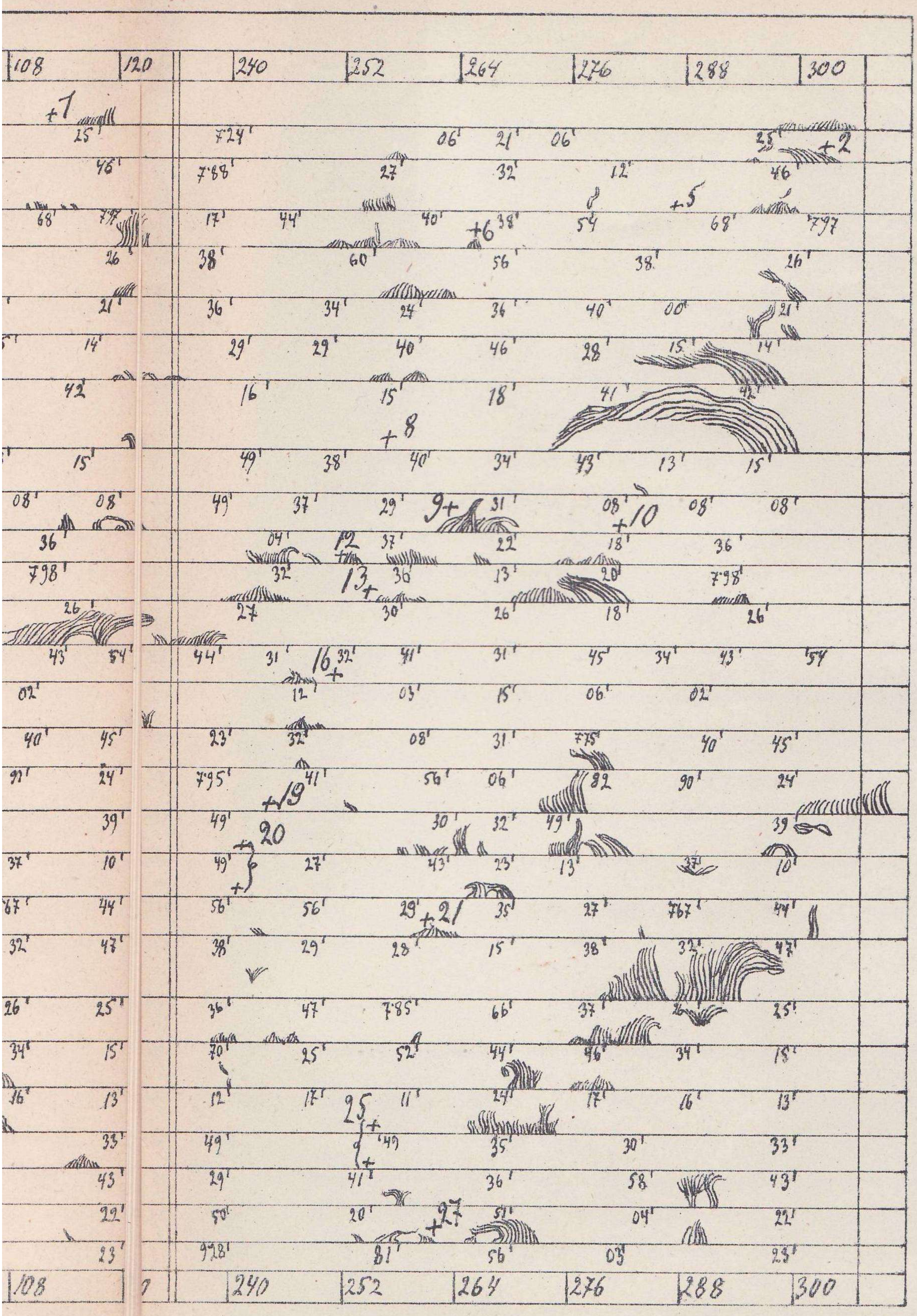
Въ заключенiе нужно сказать нѣсколько словъ по поводу кажущагося противорѣчiя между выводами изъ вышеназванныхъ наблюденiй относительно влiянiя пятенъ на величину дiаметра солнца и утвержденiями Secchi, Wolf-а и другихъ, что, когда пятенъ больше, то дiаметръ меньше и наоборотъ. Это противорѣчiе происходитъ оттого, что при сравненiи величины дiаметра солнца съ пятнообразовательной дѣятельностью солнца берутся дiаметры въ направленiи по суточному движенiю, тогда какъ пятна образуются въ разныхъ широтахъ.

Во время maximum-а пятна образуются въ среднихъ широтахъ и большею частью уменьшаютъ дiаметръ солнца въ направленiи по суточному движенiю, такъ какъ увеличенiе дiаметра въ направленiи на пятно сопровождается уменьшенiемъ дiаметровъ въ направленiи на сосѣднiя части поверхности солнца; а во время minimum-а пятна образуются почти на самомъ экваторѣ или въ высшихъ широтахъ, а потому пятна большею частью будутъ увеличивать дiаметръ въ направленiи по суточному движенiю или никакого дѣйствiя на него не будутъ оказывать. Вслѣдствіе этого ходъ кривой діаметровъ во время maximum-а долженъ былъ бы быть болѣе правильный, а во время minimum-а кривая должна бы итти скачками. Подобный ходъ имѣетъ кривая, помѣщенная въ статьѣ Hilfiker-а: „Première étude sur les observations du diamètre du Soleil faites à l'Observatoire de Neuchatel de 1862—1883".

Что же касается работы A. Secchi, поднявшей, повидимому, вопросъ о связи между дѣятельностью солнца и его діаметромъ, то можно замѣтить, что наблюденія, помѣщенныя въ этой работѣ, продолжались съ іюля мѣсяца 1871 года по іюль 1872 года, т. е. во время близкое къ maximum-у (онъ былъ въ 1870 году), и потому пятна въ большинствѣ случаевъ уменьшали діаметръ солнца въ направленіи по суточному движенію.



60 72 84 96 108 120
Іюнь 11
+1
12
22
+3
23
24
25
+4
Іюль 2
3
4
+7
5
11
12
11
24
+14
15
28
Августъ 20
21
23
24
26
+17
27
18+
Сентябрь 4
5
22+
7
23+
8
9
24+
28
+26
29
60 72 84 96 108


108
120
240
252
264
276
288
300

Моногенность интеграловъ дифференціальныхъ уравненій.

Н. В. Бугаева.

Читано въ засѣданіи Харьковскаго математическаго Общества 9-го мая 1895 года.

§ 1. Задачи, имѣющія отношеніе къ вопросу о моногенности. Введеніе мнимаго перемѣннаго въ теорію функцій играетъ очень важную роль въ исторіи математики. Раздѣленіе функцій на моногенныя и немоногенныя, предложенное Коши, заслуживаетъ полнаго вниманія. Вся теорія мнимаго перемѣннаго относится къ функціямъ моногеннымъ.

Условія моногенности функціи $u+vi$ комплекснаго перемѣннаго $x+yi$ выражаются уравненіями съ частными производными:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

При разсмотрѣніи дифференціальныхъ уравненій въ ихъ отношеніи къ вопросу о моногенности имѣютъ мѣсто три задачи:

1. *Опредѣлить, имѣетъ ли данное дифференціальное уравненіе одни моногенные интегралы;*

2. *Указать, когда дифференціальное уравненіе имѣетъ рядомъ съ моногенными немоногенные интегралы, и*

3. *Рѣшить вопросъ о томъ, существуютъ ли дифференціальныя уравненія, имѣющія только одни немоногенные интегралы.*

По нѣкоторымъ изъ этихъ вопросовъ мы постараемся дать отвѣты въ этой статьѣ.

§ 2. Моногенность интеграловъ дифференціальнаго уравненія перваго порядка.

Не трудно показать, что дифференціальное уравненіе перваго порядка вида

$$\frac{d\alpha}{dz} = f(z,\ \alpha) \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. \tag{1}$$

въ томъ случаѣ, когда $f(z,\ \alpha)$ такого свойства, что для

$$z = x + yi\,,$$

$$\alpha = u + vi\,,$$

$$f(z,\ \alpha) = f(x + yi,\ u + vi) = P + Qi\,,$$

имѣетъ только одни моногенные интегралы.

Дѣйствительно, изъ уравненія

$$d\alpha = f(z,\ \alpha)\,dz$$

получаемъ уравненіе

$$\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy\right) =$$

$$= (P + Qi)\ (dx + idy) = Pdx - Qdy + i\ (Qdx + Pdy).$$

Сравнивая дѣйствительныя и мнимыя части, получаемъ два уравненія:

$$\frac{\partial u}{\partial x}dx + \cdot\frac{\partial u}{\partial y}dy = Pdx - Qdy\,,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = Qdx + Pdy.$$

Эти соотношенія ведутъ къ уравненіямъ:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = Q, \\ &\frac{\partial u}{\partial y} = -Q, \ \frac{\partial v}{\partial y} = P. \end{aligned}\right\} \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. \tag{2}$$

Уравненія (2) прямо ведутъ къ условіямъ:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}\,,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Отсюда мы заключаемъ, что дифференціальныя уравненія вида (1) имѣютъ только одни моногенные интегралы.

§ 3. **Моногенность интеграловъ дифференціальныхъ уравненій вида**

$$\left(\frac{d\alpha}{dz}\right)^2 = f(z, \alpha) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

въ томъ случаѣ, когда $f(x+yi,\ u+vi) = P+Qi$.

Вопросъ о моногенности интеграловъ уравненія (3) имѣетъ значеніе уже потому, что этому уравненію удовлетворяютъ Абелевы интегралы и Абелевы функціи.

Уравненіе (3) ведетъ къ уравненію

$$d\alpha^2 = f(z,\ \alpha)dz^2 = (P+Qi)dz^2$$

или къ уравненію

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy\right)\right]^2 =$$

$$= (P+Qi)(dx^2 + 2i\,dx\,dy - dy^2),$$

которое окончательно приводится къ виду:

$$\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx^2 + 2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}dx dy + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 dy^2\right] -$$

$$-\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 dx^2 + 2\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}dx dy + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 dy^2\right] +$$

$$+ 2i\left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}dx^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx dy + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}dy^2\right] =$$

$$= Pdx^2 - Pdy^2 - 2Qdxdy + i(Qdx^2 + 2Pdxdy - Qdy^2).$$

Это уравненіе даетъ шесть уравненій съ частными производными:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = P \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 = -P \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} = -Q \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

$$\frac{2\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} = Q \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

$$\frac{2\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=-Q\cdot\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(8)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=P\cdot\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(9)$$

Изъ уравненій (7) и (8) находимъ:

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{Q}{\dfrac{2\partial u}{\partial x}},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{Q}{\dfrac{2\partial u}{\partial y}}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(10)$$

Складывая уравненія (7) и (8), получимъ:

$$\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=0\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(11)$$

Вставляя величины (10) въ уравненіе (9), получимъ послѣ приведенія уравненіе:

$$Q\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]+2P\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=0\;.\;.\;.\;.\;.\;(12)$$

Вставляя выраженія (10) въ уравненіе (6), получаемъ уравненіе

$$\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{Q^2}{4\dfrac{\partial u}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial y}}=-Q$$

или уравненіе

$$4\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+4\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}Q+Q^2=0$$

или

$$\left(2\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+Q\right)^2=0\,,$$

откуда имѣемъ

$$2\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+Q=0\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(13)$$

Изъ уравненій (13) и (7) имѣемъ

$$2\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=-2\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}$$

или уравненіе

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (14)$$

Изъ уравненій (13) и (8) получимъ

$$2\frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = 2\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y},$$

откуда

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (15)$$

Уравненія (14) и (15), какъ необходимыя слѣдствія уравненія (3) и уравненій (4), (5), (6), (7), (8) и (9), ясно показываютъ, что уравненіе (3) допускаетъ только одни моногенные интегралы.

Это общее заключеніе весьма важно для теоріи Абелевыхъ функцій.

§ 4. **Вопросъ о моногенности интеграловъ въ примѣненіи къ дифференціальному уравненію**

$$\frac{d^2\alpha}{dz^2} = f(z, \alpha) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (16)$$

въ томъ случаѣ, когда для $z = x + yi$, $\alpha = u + vi$

$$f(x + yi, \; u + vi) = P + Qi.$$

Изъ уравненія (16) вытекаетъ уравненіе

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2 + i\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}dy^2\right) =$$

$$= (P + Qi)\,(dx + idy)^2 =$$

$$= Pdx^2 - Pdy^2 - 2Qdxdy + i\,(Qdx^2 - Qdy^2 + 2Pdxdy),$$

которое ведетъ къ слѣдующимъ уравненіямъ съ частными производными:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = P \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (17) \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = Q \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (20)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -P \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (18) \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -Q \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (21)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -Q \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (19) \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = P \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (22)$$

Складывая уравненія (17) и (18), а также (20) и (21), получаемъ соотношенія:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (23)$$

изъ которыхъ видно, что и u и v гармоническія функціи.

Складывая уравненія (19) и (20) и сравнивая уравненія (19) и (21), получимъ два уравненія:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}+\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=0 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (24)$$

Интегрируя уравненія (24), получаемъ уравненія

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}+\chi(x) \ldots\ldots\ldots\ldots (25)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}+\psi(y) \ldots\ldots\ldots\ldots (26)$$

гдѣ $\chi(x)$ и $\psi(y)$ двѣ произвольныя функціи.

Уравненія (25) и (26) ясно показываютъ, что гармоническія функціи u и v, удовлетворяющія дифференціальному уравненію (16), не будутъ вообще функціями моногенными.

Интегралы уравненія (16) будутъ моногенными функціями только въ томъ частномъ случаѣ, когда произвольныя функціи $\chi(x)$ и $\psi(y)$ обращаются въ нули.

Можно показать, что функціи $\chi(x)$ и $\psi(y)$ суть линейныя функціи перемѣнныхъ.

Дѣйствительно, вставляя величины (25) и (26) въ уравненія (23), находимъ:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\chi'(x)+\psi'(y)=0\,, \ldots\ldots\ldots (27)$$

откуда видно, что вообще

$$\psi'(y)=C_1, \quad \chi'(x)=-C_1$$

и слѣдовательно

$$\psi(y)=C_1 y+C_2,$$

$$\chi(x)=-C_1 x+C_3.$$

Уравненія (25) и (26) принимаютъ видъ:

$$\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=C_1 y+C_2\,,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-C_1 x+C_3\,.$$

Интегралы будутъ моногенными только тогда, когда произвольныя постоянныя обращаются въ нули, т. е. когда

$$C_1=0\,,\qquad C_2=0\,,\qquad C_3=0\,.$$

§ 5. **Немоногенные интегралы дифференціальнаго уравненія**

$$\frac{d^2\alpha}{dz^2}=z\,.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(28)$$

Намъ извѣстно, что моногенный интегралъ этого уравненія выражается формулою:

$$\alpha=\frac{z^3}{6}+Cz+C'=\frac{1}{6}(x+yi)^3+C(x+yi)+C'\,,\;.\;.\;.\;(29)$$

въ которой мы имѣемъ два произвольныхъ постоянныхъ C и C'.

Чтобы найти немоногенный интегралъ этого уравненія, мы замѣчаемъ, что оно принимаетъ видъ:

$$\frac{d^2\alpha}{dz^2}=x+yi\,;$$

слѣдовательно, въ данномъ случаѣ

$$P=x\,,\qquad Q=y$$

и рядъ уравненій отъ (17) до (22) приметъ видъ:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=x\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(30)\qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=y\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(33)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-x\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(31)\qquad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=-y\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(34)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-y\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(32)\qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}=x\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(35)$$

Интегрируя эти уравненія, имѣемъ:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = x\,, \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x^2}{2} + \psi_1(y)\,,$$

$$u = \frac{x^3}{6} + x\psi_1(y) + \psi_2(y) \quad \ldots\ldots\ldots (a)$$

а также

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -x\,, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -xy + \varphi_1(x)\,,$$

$$u = -\frac{xy^2}{2} + y\varphi_1(x) + \varphi_2(x) \quad \ldots\ldots\ldots (b)$$

Изъ уравненія (a) имѣемъ:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x\psi_1'(y) + \psi_2'(y)\,,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x\psi_1''(y) + \psi_2''(y) \quad \ldots\ldots\ldots (36)$$

Сравнивая величины (36) и (31), имѣемъ:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x\psi_1''(y) + \psi_2''(y) = -x\,,$$

откуда имѣемъ:

$$\psi_1''(y) = -1\,, \qquad \psi_2''(y) = 0;$$

слѣдовательно,

$$\psi_2(y) = C_1 y + C_2\,,$$

$$\psi_1(y) = -\frac{y^2}{2} + C_3 y + C_4\,.$$

Вставляя величины $\psi_1(y)$ и $\psi_2(y)$ въ уравненіе (a), получимъ:

$$u = \frac{x^3}{6} + x\left(-\frac{y^2}{2} + C_3 y + C_4\right) + C_1 y + C_2 \quad \ldots\ldots (c)$$

Такъ какъ по уравненію (32)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -y = -y + C_3\,,$$

то $C_3 = 0$ и уравненіе (c) приметъ видъ:

$$u = \frac{x^3}{6} + x\left(-\frac{y^2}{2} + C_4\right) + C_1 y + C_2 =$$

$$= \frac{x^3}{6} - \frac{xy^2}{2} + C_4 x + C_1 y + C_2 \text{. . . . . } (d)$$

Опредѣляя функцію v по уравненіямъ

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = y\,, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -y\,, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = x\,,$$

имѣемъ

$$\frac{\partial v}{\partial x} = xy + \Theta_1(y)\,,$$

$$v = \frac{yx^2}{2} + x\,\Theta_1(y) + \Theta_2(y) \text{. . . . . } (e)$$

Изъ уравненія

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = x\,\Theta_1''(y) + \Theta_2''(y) = -y$$

вытекаетъ, что

$$\Theta_1''(y) = 0\,, \qquad \Theta_2''(y) = -y\,,$$

откуда

$$\Theta_1(y) = K_1 y + K_2\,,$$

$$\Theta_2(y) = -\frac{y^3}{6} + K_3 y + K_4\,;$$

слѣдовательно,

$$v = \frac{yx^2}{2} + x(K_1 y + K_2) - \frac{y^3}{6} + K_3 y + K_4\,.$$

Такъ какъ

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = x = x + K_1\,,$$

то $K_1 = 0$ и

$$v = \frac{yx^2}{2} + K_2 x - \frac{y^3}{6} + K_3 y + K_4 \text{. . . . . } (e)$$

Такъ какъ $\alpha = u + vi$, то на основаніи уравненій (d) и (e) имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned} \alpha = \frac{x^3}{6} - \frac{xy^2}{2} + C_4 x + C_1 y + C_2 + \\ + i\left(\frac{yx^2}{2} + K_2 x - \frac{y^3}{6} + K_3 y + K_4\right). \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (f)$$

Моногенный интегралъ (29) имѣлъ видъ

$$\left.\begin{aligned} \alpha = \frac{(x+yi)^3}{6} + C(x+yi) + C' = \\ = \frac{x^3}{6} - \frac{xy^2}{2} + i\left(\frac{x^2y}{2} - \frac{y^3}{6}\right) + C(x+yi) + C'. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (29)$$

Немоногенный же интегралъ (f) имѣетъ видъ

$$\alpha = \frac{z^3}{6} + (C_4 + iK_2)x + (C_1 + iK_3)\,y + C_2 + iK_4.$$

Полагая

$$C_4 + iK_2 = M, \quad C_1 + iK_3 = N, \quad C_2 + iK_4 = P,$$

мы выражаемъ немоногенный интегралъ въ видѣ

$$\alpha = \frac{z^3}{6} + Mx + Ny + P. \quad \ldots\ldots\ldots (g)$$

Для моногенности необходимо, чтобы выполнялись условія:

$$N = Mi = Ci,$$

$$P = C'.$$

Такимъ образомъ, моногенный интегралъ (29) зависитъ отъ двухъ, а немоногенный (g) отъ трехъ произвольныхъ постоянныхъ.

Отсюда выводимъ

Общее заключеніе: *Уравненіе второго порядка* $\frac{d^2\alpha}{dz^2} = f(z, \alpha)$ *имѣетъ моногенные и немоногенные интегралы. Моногенные интегралы являются какъ частные случаи интеграловъ немоногенныхъ.*

§ 6. **Нелинейное дифференціальное уравненіе, имѣющее моногенные и немоногенные интегралы.**

Хорошимъ примѣромъ такого случая можетъ служить дифференціальное уравненіе:

$$\alpha\frac{d^2\alpha}{dz^2} = \left(\frac{d\alpha}{dz}\right)^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (37)$$

Уравненіе это можетъ быть легко проинтегрировано.

Дѣйствительно, оно даетъ

$$\frac{\frac{d^2\alpha}{dz^2}}{\frac{d\alpha}{dz}} = \frac{\frac{d\alpha}{dz}}{z},$$

откуда

$$l\left(\frac{d\alpha}{dz}\right) = l(\alpha) + l(C),$$

$$\frac{d\alpha}{dz} = C\alpha, \quad \alpha = C'e^{Cz},$$

или

$$\alpha = C'e^{C(x+yi)} \quad \ldots \ldots \ldots (38)$$

Не трудно видѣть, что это же уравненіе имѣетъ немоногенный частный интегралъ:

$$\alpha = Ce^{x+y} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (39)$$

Вставляя эту величину въ уравненіе (37), мы видимъ, что интегралъ (39) ему удовлетворяетъ.

Для насъ остается пока не рѣшеннымъ вопросъ о томъ, существуютъ ли всегда такія общія выраженія, изъ которыхъ вытекаютъ въ формѣ простого слѣдствія какъ моногенные, такъ и немоногенные интегралы.

§ 7. **Происхожденіе дифференціальныхъ уравненій, имѣющихъ немоногенные интегралы.**

Можно легко образовать дифференціальное уравненіе, которое для перемѣннаго $z = x + yi$ имѣетъ немоногенный интегралъ $\alpha = f(x, y)$.

Для этого изъ двухъ уравненій

$$z = x + yi \ldots \ldots \ldots \ldots (40)$$

$$\alpha = f(x, y) \ldots \ldots \ldots \ldots (41)$$

получаемъ два уравненія:

$$\frac{d\alpha}{dz} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy}{dx + idy} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}}{1 + i\frac{dy}{dx}} \ldots \ldots (42)$$

$$\frac{d^2\alpha}{dz^2}=\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\left(1+i\frac{dy}{dx}\right)^2}\,.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(43)$$

Исключивъ изъ четырехъ уравненій (40), (41), (42) и (43) величины x, y, $\frac{dy}{dx}$, получаемъ дифференціальное уравненіе:

$$F\left(z,\,\alpha,\frac{d\alpha}{dz},\;\frac{d^2\alpha}{dz^2}\right)=0,\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(44)$$

интеграломъ котораго будетъ функція (41).

Изъ самаго происхожденія уравненія (44) видно, что немоногенные интегралы встрѣчаются въ первый разъ только въ дифференціальныхъ уравненіяхъ второго порядка.

Изъ $\mu+2$ уравненій

$$z=x+y\iota,$$

$$\alpha=f(x\,,\,y\,,\,C_1\,,\,C_2\,,\dots C_{\mu-2})\,,\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(45)$$

$$\frac{d\alpha}{dz}=\frac{df}{dz}=\frac{df}{dx+idy},$$

$$\frac{d^2\alpha}{dz^2}=\frac{d^2f}{dz^2}=\frac{d^2f}{(dx+idy)^2},$$

$$.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.$$

$$\frac{d^\mu\alpha}{dz^\mu}=\frac{d^\mu f}{(dx+idy)^\mu},$$

можно исключить $\mu+1$ величинъ x, y, $\frac{dy}{dx}$, C_1, C_2, $\dots C_{\mu-2}$ и получить дифференціальное уравненіе

$$F\left(z\,,\,\alpha\,,\,\frac{d\alpha}{dz},\;\frac{d^2\alpha}{dz^2},\dots\frac{d^\mu\alpha}{dz^\mu}\right)=0.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(46)$$

Отсюда заключаемъ, что уравненіе порядка μ можетъ имѣть немоногенный интегралъ (45), содержащій $\mu-2$ произвольныхъ постоянныхъ.

Одинъ случай движенія вязкой несжимаемой жидкости.

В. А. Стеклова.

1. Назовемъ черезъ x, y, z координаты точекъ пространства, заполненнаго вязкой несжимаемой жидкостью, черезъ t время, черезъ u, v, w проекціи скорости точки x, y, z жидкости на координатныя оси, черезъ μ плотность жидкости, черезъ p давленіе ея, черезъ U силовую функцію силъ, дѣйствующихъ на частицы жидкости, черезъ k постоянную, пропорціональную коэффиціенту вязкости, и черезъ Δ обозначимъ операцію вида

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Дифференціальныя уравненія движенія вязкой несжимаемой жидкости можно представить подъ видомъ

$$\begin{aligned}
&\frac{du}{dt}-k\Delta u=\frac{1}{\mu}\frac{\partial(U-p)}{\partial x},\\
&\frac{dv}{dt}-k\Delta v=\frac{1}{\mu}\frac{\partial(U-p)}{\partial y},\\
&\frac{dw}{dt}-k\Delta w=\frac{1}{\mu}\frac{\partial(U-p)}{\partial z},
\end{aligned}\tag{1}$$

$$\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}=0.$$

Пусть a, b, c суть координаты въ начальный моментъ времени той точки жидкости, координаты которой въ моментъ t суть x, y, z.

Разсматривая x, y, z какъ функціи a, b, c и t, мы преобразуемъ предыдущія уравненія къ виду

$$\frac{du}{dt}\frac{dx}{da}+\frac{dv}{dt}\frac{dy}{da}+\frac{dw}{dt}\frac{dz}{da}-k\left(\Delta u\frac{dx}{da}+\Delta v\frac{dy}{da}+\Delta w\frac{dz}{da}\right)=\frac{1}{\mu}\frac{\partial(U-p)}{\partial a},$$

$$\frac{du}{dt}\frac{dx}{db}+\frac{dv}{dt}\frac{dy}{db}+\frac{dw}{dt}\frac{dz}{db}-k\left(\Delta u\frac{dx}{db}+\Delta v\frac{dy}{db}+\Delta w\frac{dz}{db}\right)=\frac{1}{\mu}\frac{\partial(U-p)}{\partial b}, \quad (2)$$

$$\frac{du}{dt}\frac{dx}{dc}+\frac{dv}{dt}\frac{dy}{dc}+\frac{dw}{dt}\frac{dz}{dc}-k\left(\Delta u\frac{dx}{dc}+\Delta v\frac{dy}{dc}+\Delta w\frac{dz}{dc}\right)=\frac{1}{\mu}\frac{\partial(U-p)}{\partial c}.$$

Возьмемъ въ жидкости въ начальный моментъ времени замкнутую кривую, опредѣляемую уравненіями

$$a=\varphi_1(\sigma),\quad b=\varphi_2(\sigma),\quad c=\varphi_3(\sigma), \qquad (3)$$

гдѣ σ есть нѣкоторый параметръ.

Будемъ разсматривать движеніе точекъ жидкости, лежащихъ въ начальный моментъ времени на этой кривой.

Положимъ

$$V^2=u^2+v^2+w^2$$

и назовемъ черезъ df элементъ дуги контура (f), въ который преобразуется кривая (3) въ моментъ t, черезъ ϑ уголъ, составляемый касательной къ этому контуру съ направленіемъ скорости V.

Оперируя надъ уравненіями (2) также, какъ поступаютъ съ уравненіями движенія невязкой жидкости для вывода извѣстной теоремы Томсона *), получаемъ

$$\frac{d}{dt}\int V\cos\vartheta df=k\int(\Delta u dx+\Delta v dy+\Delta w dz)\ ^{**}).$$

Назовемъ черезъ J циркуляцію скорости по замкнутому контуру (f). Имѣемъ

$$J=\int V\cos\vartheta df.$$

*) Н. Е. Жуковскій. „Лекціи по гидродинамикѣ", стр. 77 и 78.
H. Lamb. „A treatise on the motion of fluids", p. 157, 158.
**) Интеграція распространяется на весь замкнутый контуръ (f).

Слѣдовательно,

$$\frac{dJ}{dt} = k \int (\Delta u dx + \Delta v dy + \Delta w dz). \tag{4}$$

Правая часть этого равенства, вообще говоря, не равна нулю, и принципъ сохраненія вихрей для вязкой жидкости, вообще говоря, не имѣетъ мѣста.

Но для нѣкоторыхъ частныхъ случаевъ теченія жидкости интегралъ

$$\int (\Delta u dx + \Delta v dy + \Delta w dz)$$

можетъ обращаться въ нуль. Въ этихъ случаяхъ принципъ сохраненія вихрей будетъ справедливъ и для жидкости неидеальной.

H. Poincaré замѣтилъ, что указанной особенностью обладаетъ теченіе, удовлетворяющее слѣдующему условію.

Положимъ

$$\xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z},$$

$$\eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x},$$

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y},$$

гдѣ ξ, η и ζ суть, какъ извѣстно, проекціи на оси координатъ вихревой скорости точки x, y, z.

Вышеупомянутое условіе можетъ быть представлено въ видѣ

$$\frac{\Delta\xi}{\xi} = \frac{\Delta\eta}{\eta} = \frac{\Delta\zeta}{\zeta}. \tag{5}$$

Но это условіе слишкомъ мало говоритъ о характерѣ ему соотвѣтствующихъ теченій, ибо задача объ опредѣленіи движенія жидкости, удовлетворяющаго уравненіямъ (1) вмѣстѣ съ уравненіями (5), слишкомъ сложна.

Не безъинтересно указать хотя бы нѣкоторыя изъ дѣйствительно возможныхъ движеній вязкой жидкости, для которыхъ имѣетъ мѣсто принципъ сохраненія вихрей.

Въ настоящей замѣткѣ я намѣренъ обратить вниманіе на одно изъ такихъ теченій довольно общаго характера, обладающее нѣкоторыми замѣчательными свойствами, которыя считаю не лишнимъ указать.

2. Уравненія движенія вязкой жидкости можно привести къ слѣдующему виду

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\eta w-\zeta v-k\varDelta u=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{U-p}{\mu}-\frac{1}{2}V^2\right),$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\zeta u-\xi w-k\varDelta v=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{U-p}{\mu}-\frac{1}{2}V^2\right), \tag{6}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+\xi v-\eta u-k\varDelta w=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{U-p}{\mu}-\frac{1}{2}V^2\right).$$

Положимъ

$$u=e^{-st}u_1,\quad v=e^{-st}v_1,\quad w=e^{-st}w_1, \tag{7}$$

гдѣ s есть нѣкоторая положительная постоянная, u_1, v_1 и w_1 суть функціи координатъ, не зависящія отъ t.

При этомъ

$$\xi=e^{-st}\xi_1,\quad \eta=e^{-st}\eta_1,\quad \zeta=e^{-st}\zeta_1, \tag{8}$$

гдѣ ξ_1, η_1, ζ_1 суть функціи координатъ, не зависящія отъ времени и составленныя изъ частныхъ производныхъ функцій u_1, v_1 и w_1 по координатамъ также, какъ ξ, η и ζ составлены изъ u, v и w.

Подставимъ выраженія (7) и (8) въ уравненія (6).

Получимъ

$$-ke^{-st}(\varDelta u_1+\lambda^2u_1)+e^{-2st}(\eta_1w_1-\zeta_1v_1)=\frac{\partial T}{\partial x},$$

$$-ke^{-st}(\varDelta v_1+\lambda^2v_1)+e^{-2st}(\zeta_1u_1-\xi_1w_1)=\frac{\partial T}{\partial y}, \tag{9}$$

$$-ke^{-st}(\varDelta w_1+\lambda^2w_1)+e^{-2st}(\xi_1v_1-\eta_1u_1)=\frac{\partial T}{\partial z},$$

гдѣ введены слѣдующія обозначенія

$$\lambda^2=\frac{s}{k},\quad T=\frac{U-p}{\mu}-\frac{V^2}{2}.$$

Не трудно видѣть, что уравненіямъ (9) можно удовлетворить, полагая

$$\eta_1w_1-\zeta_1v_1=0,$$

$$\zeta_1u_1-\xi_1w_1=0, \tag{10}$$

$$\xi_1v_1-\eta_1u_1=0.$$

Въ самомъ дѣлѣ, уравненія (10) даютъ

$$\xi_1 = mu_1, \quad \eta_1 = mv_1, \quad \zeta_1 = mw_1,$$

гдѣ m какая либо функція координатъ, въ частности постоянная.

Положимъ

$$m = \lambda = \sqrt{\frac{s}{k}}.$$

Имѣемъ

$$\frac{\partial w_1}{\partial y} - \frac{\partial v_1}{\partial z} = \lambda u_1,$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial w_1}{\partial x} = \lambda v_1, \tag{11}$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} = \lambda w_1.$$

Функціи u_1, v_1, w_1, удовлетворяющія этимъ уравненіямъ, удовлетворяютъ и слѣдующимъ

$$\Delta u_1 + \lambda^2 u_1 = 0,$$

$$\Delta v_1 + \lambda^2 v_1 = 0,$$

$$\Delta w_1 + \lambda^2 w_1 = 0.$$

При этомъ лѣвыя части уравненій (9) обращаются въ нуль и уравненія эти приводятся къ тремъ слѣдующимъ

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial z} = 0.$$

Отсюда слѣдуетъ, что

$$U - p - \mu \frac{V^2}{2} = \varphi(t), \tag{12}$$

гдѣ $\varphi(t)$ есть произвольная функція времени.

Опредѣливъ u_1, v_1, w_1 при помощи уравненій (11), мы получимъ рѣшеніе дифференціальныхъ уравненій движенія (9) подъ видомъ

$$u = e^{-k\lambda^2 t} u_1, \quad v = e^{-k\lambda^2 t} v_1, \quad w = e^{-k\lambda^2 t} w_1,$$

причемъ будемъ имѣть интегралъ (12) уравненій (9), позволяющій опредѣлить гидродинамическое давленіе въ каждой точкѣ жидкости до нѣкоторой произвольной функціи времени.

При $k = 0$ получится случай, такъ называемыхъ, постоянныхъ винтовыхъ движенiй идеальной жидкости, указанный впервые Graig'омъ въ III-емъ томѣ „American Journal of Mathematics" и подробнѣе изслѣдованный проф. И. С. Громекой въ соч. „Нѣкоторые случаи движенiя несжимаемой жидкости" (Казань, 1881 г.).

3. Функцiи u, v и w удовлетворяютъ уравненiямъ

$$\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = \lambda u,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = \lambda v,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \lambda w,$$

которыя показываютъ, что линiи вихрей и линiи токовъ совпадаютъ во все время движенiя и что отношенiе скорости теченiя къ вихревой скорости есть величина постоянная во всѣхъ точкахъ жидкости и для всѣхъ моментовъ времени.

Тѣ точки жидкости, скорость которыхъ въ начальный моментъ времени равна нулю, будутъ имѣть скорость равную нулю и во все время движенiя. То же должно сказать и о составляющихъ u, v и w скорости по осямъ координатъ.

Внутри сферы радiуса $\frac{\pi}{\lambda}$, цѣликомъ лежащей внутри жидкости (если это допускаютъ размѣры области (D), заполненной жидкостью), проходитъ по крайней мѣрѣ одна поверхность нулевыхъ значенiй функцiй u, v и w.

То же самое должно сказать и о сферахъ радiусовъ

$$\frac{2\pi}{\lambda}, \quad \frac{3\pi}{\lambda}, \ldots$$

Это предложенiе доказано проф. И. С. Громекой въ вышеупомянутомъ его соч. „Нѣкоторые случаи и т. д." для функцiй u_1, v_1 и w_1, удовлетворяющихъ уравненiямъ (11); оно распространяется, очевидно, и на разсматриваемый нами случай.

Наконецъ, слѣдуетъ замѣтить, что скорость каждой точки жидкости убываетъ съ теченiемъ времени и движенiе жидкости ассимптотически стремится къ покою.

4. Разсматриваемый случай движенiя вязкой жидкости особенно интересенъ потому, что для него имѣетъ мѣсто принципъ сохраненiя вихрей.

Въ самомъ дѣлѣ, функціи u, v и w, очевидно, удовлетворяютъ уравненіямъ

$$\Delta u + \lambda^2 u = 0\,,$$
$$\Delta v + \lambda^2 v = 0\,,$$
$$\Delta w + \lambda^2 w = 0\,.$$

Вслѣдствіе этого правая часть уравненія (4) приводится къ виду

$$k\int(\Delta u dx + \Delta v dy + \Delta w dz) = -\lambda^2 k\int(udx + vdy + wdz) = -\lambda^2 kJ\,,$$

а самое уравненіе (4_1) обращается въ слѣдующее

$$\frac{dJ}{dt} = -k\lambda^2 J\,.$$

Отсюда

$$J = J_0 e^{-k\lambda^2 t}\,,$$

гдѣ J_0 есть значеніе J для начальнаго момента времени.

Слѣдовательно, циркуляція скорости для всякаго замкнутаго контура, циркуляція скорости по которому равна нулю въ начальный моментъ времени, будетъ равна нулю и во все время движенія.

Точки жидкости, лежащія въ начальный моментъ времени на какой нибудь вихревой трубкѣ (L), будутъ лежать въ моментъ t на нѣкоторой трубкѣ (L_1).

Такъ какъ циркуляція скорости по всякому замкнутому контуру, лежащему на вихревой трубкѣ (L), равна нулю, то циркуляція скорости по всякому замкнутому контуру, лежащему на трубкѣ (L_1), также равна нулю, т. е. (L_1) есть также вихревая трубка.

Такъ какъ это справедливо для любой вихревой трубки (L) и для любого момента времени, то точки, лежащія въ начальный моментъ времени на вихревыхъ нитяхъ, будутъ образовать вихревыя же нити и въ любой изъ слѣдующихъ моментовъ движенія.

Принципъ сохраненія вихрей для разсматриваемаго движенія вязкой жидкости доказанъ.

Но напряженіе вихря, само собой разумѣется, не будетъ постояннымъ. Величина напряженія убываетъ съ теченіемъ времени, ассимптотически приближаясь къ нулю.

5. Опредѣленіе движенія жидкости приводится къ разысканію функцій u_1, v_1, w_1, удовлетворяющихъ уравненіямъ (11), которыя можно разсматривать какъ уравненія постояннаго винтового теченія идеальной несжимаемой жидкости со скоростями u_1, v_1, w_1.

Мнѣ извѣстно единственное сочиненіе, въ которомъ разсматривается вопросъ объ интегрированіи уравненій (11), это—вышеупомянутое соч. проф. Громеки „Нѣкоторые случаи и т. д.".

Но и въ этой работѣ мы имѣемъ мало данныхъ общаго характера относительно условій интегрируемости уравненій (11). Изслѣдуются преимущественно частныя рѣшенія этихъ уравненій и главнымъ образомъ движеніе жидкихъ массъ, заполняющихъ области, ограниченныя цилиндрическими поверхностями.

Поэтому я считаю возможнымъ остановиться на нѣкоторыхъ соображеніяхъ общаго характера, которыя и изложу въ слѣдующихъ §§-ахъ.

Въ каждомъ частномъ вопросѣ приходится искать интегралы уравненій движенія при тѣхъ или иныхъ условіяхъ на поверхности (S), ограничивающей область (D), заполненную жидкостью.

Наиболѣе употребительныя изъ условій этого рода состоятъ въ заданіи на поверхности (S) или величинъ u_1, v_1, w_1, или слагающей скорости по какому либо опредѣленному направленію, чаще всего по нормали къ поверхности (S).

Первое изъ этихъ условій не можетъ имѣть мѣста въ разсматриваемомъ случаѣ, ибо не трудно убѣдиться, что при какомъ угодно (неопредѣленномъ) λ не можетъ существовать функцій координатъ u_1, v_1, w_1, удовлетворяющихъ уравненіямъ (11) и принимающихъ произвольно заданныя значенія на поверхности (S) *).

Остается разобрать наиболѣе интересный случай, когда на поверхности (S) задается нормальная составляющая скорости движенія, опредѣляемаго уравненіями (11).

Будемъ предполагать параметръ λ неопредѣленнымъ и отбросимъ для простоты письма значки при u_1, v_1 и w_1.

Будемъ, слѣдовательно, искать конечныя, однозначныя и непрерывныя внутри области (D) функціи координатъ u, v и w, удовлетворяющія уравненіямъ

$$\left.\begin{aligned} \frac{dw}{dy}-\frac{dv}{dz}&=\lambda u,\\ \frac{du}{dz}-\frac{dw}{dx}&=\lambda v,\\ \frac{dv}{dx}-\frac{du}{dy}&=\lambda w \end{aligned}\right\}\quad \text{внутри } (D) \qquad \textbf{(13)}$$

и условію

$$u\cos\alpha+v\cos\beta+w\cos\gamma=f \quad \text{на поверхности } (S), \qquad \textbf{(14)}$$

---

*) Мы не станемъ останавливаться на доказательствѣ этого отрицательнаго результата.

гдѣ α, β и γ суть cosinus'ы угловъ нормали (положимъ, внѣшней) къ поверхности (S) съ осями координатъ, а f есть заданная функція координатъ точекъ поверхности (S).

Предположимъ сначала, что

$$u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma = f = 0 \quad \text{на поверхности } (S) \qquad \textbf{(15)}$$

и что λ не превосходитъ нѣкотораго предѣла λ_1.

Если существуютъ функціи u, v, w, отличныя отъ нуля и удовлетворяющія указаннымъ условіямъ, то онѣ суть въ то же время функціи параметра λ.

Для значеній λ, не превосходящихъ нѣкотораго предѣла (положимъ λ_1), онѣ должны разлагаться въ сходящіеся ряды, расположенные по цѣлымъ положительнымъ степенямъ λ, слѣдующаго вида

$$u = \sum u_n\lambda^n, \quad v = \sum v_n\lambda^n, \quad w = \sum w_n\lambda^n.$$

Такъ какъ эти выраженія должны удовлетворять уравненіямъ (13) и слѣдующему изъ нихъ уравненію

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

при всякомъ λ (не превосходящемъ только нѣкотораго предѣла), то функціи u_0, v_0, w_0 должны удовлетворять уравненіямъ

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial w_0}{\partial y} - \frac{\partial v_0}{\partial z} = 0, \\
&\frac{\partial u_0}{\partial z} - \frac{\partial w_0}{\partial x} = 0, \\
&\frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial y} = 0, \\
&\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0,
\end{aligned}\right\} \text{внутри } (D)$$

а на поверхности (S) условію

$$u_0\cos\alpha + v_0\cos\beta + w_0\cos\gamma = 0.$$

Функціи же u_n, v_n, $w_n (n = 1, 2, \ldots)$ должны удовлетворять условіямъ

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial w_n}{\partial y}-\frac{\partial v_n}{\partial z}=u_{n-1}\,,\\
&\frac{\partial u_n}{\partial z}-\frac{\partial w_n}{\partial x}=v_{n-1}\,,\\
&\frac{\partial v_n}{\partial x}-\frac{\partial u_n}{\partial y}=w_{n-1}\,,\\
&\frac{\partial u_n}{\partial x}+\frac{\partial v_n}{\partial y}+\frac{\partial w_n}{\partial z}=0\,,
\end{aligned}\right\}\text{ внутри } (D)$$

$$u_n\cos\alpha+v_n\cos\beta+w_n\cos\gamma=0 \qquad \text{на поверхности } (S).$$

Всѣмъ этимъ условіямъ можно удовлетворить только значеніями

$$u_n\,,\ v_n\,,\ w_n \qquad (n=0,\,1,\,2,\,3,\ldots)$$

тождественно равными нулю.

Слѣдовательно, при неопредѣленномъ λ не существуетъ конечныхъ, непрерывныхъ и отличныхъ отъ нуля внутри области (D) функцій u, v, w, удовлетворяющихъ уравненіямъ (13) при условіи (15).

Но весьма вѣроятно, что для каждой области (D), ограниченной по крайней мѣрѣ конвексной поверхностью (S), существуетъ безчисленное множество опредѣленныхъ положительныхъ значеній $\lambda_n\,(n=1\,,\,2\,,\ldots)$, при каждомъ изъ которыхъ могутъ быть найдены отличныя отъ нуля функціи U_n, V_n и W_n, удовлетворяющія разсматриваемымъ условіямъ *).

Во всякомъ случаѣ мы знаемъ, что для различныхъ частныхъ видовъ поверхности (S) это предложеніе несомнѣнно справедливо.

Нѣсколько относящихся сюда примѣровъ можно найти въ упоминавшемся выше соч. проф. И. С. Громеки „Нѣкоторые случаи и т. д.“.

Допустимъ, что поверхность (S) принадлежитъ къ классу поверхностей (несомнѣнно существующихъ), для которыхъ существуютъ вышеупомянутыя числа λ_n и имъ соотвѣтствующія функціи U_n, V_n и W_n $(n=1\,,\,2\,,\ldots)$.

Будемъ разумѣть въ уравненіяхъ (13) подъ λ одно изъ чиселъ λ_n, а подъ u, v, w ему соотвѣтствующія функціи U_n, V_n и W_n.

Теченіе жидкости, опредѣляемое уравненіями (13) при условіи (15) на поверхности (S), обладаетъ характерными особенностями, о которыхъ мы считаемъ не лишнимъ сдѣлать нѣсколько замѣчаній.

---

*) Я могъ бы привести рядъ соображеній, дѣлающихъ весьма вѣроятнымъ это интересное предложеніе, но такъ какъ эти соображенія все же нельзя считать безусловно строгими, то я считаю лишнимъ развивать относящіяся сюда изслѣдованія.

Поверхность (S) *должна быть въ разсматриваемомъ случаѣ одновременно и поверхностью тока и поверхностью вихря.*

Для любого вырѣзка (S_1) поверхности (S), ограниченнаго замкнутымъ контуромъ (f), будемъ имѣть

$$\int_{S_1} (\xi \cos\alpha + \eta \cos\beta + \zeta \cos\gamma)\, ds = 0 \ ^{*)}.$$

По теоремѣ Стокса

$$\int_{S_1} (\xi \cos\alpha + \eta \cos\beta + \zeta \cos\gamma)\, ds = \int_{(f)} (udx + vdy + wdz) = J,$$

гдѣ второй изъ интеграловъ этихъ равенствъ распространяется на весь контуръ (f).

Слѣдовательно, циркуляція скорости по любому замкнутому контуру, лежащему на поверхности (S), равна нулю.

Поэтому на поверхности (S) *не можетъ существовать замкнутыхъ линій тока* (въ то же время и линій вихря), если только скорость въ каждой точкѣ этой линіи не равна нулю.

На поверхности (S) *должны образоваться критическія точки, въ которыхъ должны пересѣкаться линіи токовъ.*

Эти точки должны быть точками одновременнаго схода или выхода всѣхъ проходящихъ черезъ нихъ линій токовъ.

Возьмемъ двѣ какія либо линіи токовъ (L) и (L_1), пересѣкающіяся въ критической точкѣ (s).

Изъ какой либо точки (m) линіи (L) проводимъ кривую, ортогональную ко всѣмъ линіямъ токовъ, лежащимъ между (L) и (L_1).

Эта линія пересѣчетъ линію (L_1) въ нѣкоторой точкѣ (m_1).

Разсмотримъ замкнутый контуръ mm_1sm.

Будемъ обозначать, по обыкновенію, циркуляцію скорости по какому угодно замкнутому контуру $abc \ldots l$ вообще черезъ

$$(abc \ldots l).$$

По предыдущему,

$$(mm_1sm) = (mm_1) + (m_1s) + (sm) = (m_1s) + (sm) = 0,$$

ибо, очевидно,

$$(mm_1) = 0.$$

---

*) Интегралъ распространяется на всю поверхность вырѣзка (S_1).

Слѣдовательно,

$$(m_1 s) = -(sm),$$

т. е. линіи токовъ (L) и (L_1) должны имѣть одно и тоже направленіе*).

Число критическихъ точекъ на поверхности (S) должно равняться по меньшей мѣрѣ двумъ, причемъ *одна изъ этихъ точекъ должна быть точкою схода всѣхъ проходящихъ черезъ нее линій тока, другая точкой выхода.*

На поверхности (S) могутъ существовать замкнутыя линіи нулевыхъ значеній скорости теченія, или, какъ мы будемъ говорить, линіи нулей.

Эти линіи раздѣлятъ поверхность (S), вообще говоря, на нѣсколько сегментовъ и нѣсколько поясовъ, ограниченныхъ не пересѣкающимися линіями нулей.

На поверхности каждаго изъ этихъ сегментовъ должна существовать критическая точка схода или выхода линій токовъ, лежащихъ на этомъ сегментѣ.

Концы линій токовъ должны лежать на линіи нулей, ограничивающей этотъ сегментъ.

Въ каждомъ поясѣ концы каждой линіи тока должны лежать на двухъ различныхъ линіяхъ нулей, его ограничивающихъ, и линіи токовъ должны быть одинаково направленными.

Линіи токовъ внутри области (D) должны быть, вообще говоря, замкнутыми, а *поверхности токовъ* (вихрей) *замкнутыми многосвязными поверхностями.*

Примѣры подобнаго рода теченій можно найти въ соч. проф. Громеки „Нѣкоторые случаи и т. д.".

6. Будемъ теперь считать параметръ λ какимъ угодно (неопредѣленнымъ) и ограничимся предположеніемъ, что поверхность (S) конвексна и имѣетъ опредѣленную касательную плоскость въ каждой точкѣ.

Такъ какъ при неопредѣленномъ λ не существуетъ отличныхъ отъ нуля функцій u, v, w, удовлетворяющихъ уравненіямъ (13) при условіи

$$u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma = 0 \quad \text{на поверхности } (S),$$

то *уравненія* (13) *и условіе*

$$u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma = f \quad \textit{на поверхности } (S) \tag{14}$$

опредѣляютъ вполнѣ и единственнымъ образомъ конечныя и опредѣлен-

---

*) Направленіе линіи тока опредѣляется направленіемъ скоростей точекъ, образующихъ эту линію.

ныя для всѣхъ точекъ области (D) *функціи* u, v, w, *если только такія функціи существуютъ.*

Функція f должна удовлетворять только одному условію

$$\int f ds = 0,$$

гдѣ ds обозначаетъ элементъ поверхности (S), на которую распространяется интегралъ лѣвой части этого равенства.

Необходимо доказать, или по крайней мѣрѣ найти условія, при которыхъ можетъ быть доказано существованіе функцій u, v и w.

Для этого мы воспользуемся извѣстной методой послѣдовательныхъ приближеній, развитой E. Picard'омъ въ его мемуарѣ, „Memoire sur la theorie des équations aux dérivées partielles et la méthode des approximations successives“ (Journ. de Mathém., T. VI, série IV).

Подставимъ въ правыя части уравненій (13) вмѣсто функцій u, v и w нули и опредѣлимъ функціи u_0, v_0, w_0 при помощи условій

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial w_0}{\partial y} - \frac{\partial v_0}{\partial z} = 0, \\ &\frac{\partial u_0}{\partial z} - \frac{\partial w_0}{\partial x} = 0, \\ &\frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial y} = 0, \\ &\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0, \end{aligned}\right\} \text{ внутри } (D)$$

$$u_0 \cos\alpha + v_0 \cos\beta + w_0 \cos\gamma = f \quad \text{на поверхности } (S).$$

Подставимъ затѣмъ въ правыя части уравненій (13) вмѣсто u, v, w функціи u_0, v_0, w_0 и опредѣлимъ функціи u_1, v_1, w_1 при помощи уравненій

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial w_1}{\partial y} - \frac{\partial v_1}{\partial z} = \lambda u_0, \\ &\frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial w_1}{\partial x} = \lambda v_0, \\ &\frac{\partial v_1}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} = \lambda w_0, \\ &\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z} = 0 \end{aligned}\right\} \text{ внутри } (D)$$

и условія

$$u_1 \cos\alpha + v_1 \cos\beta + w_1 \cos\gamma = f \quad \text{на поверхности } (S),$$

и т. д., вообще, составимъ функціи

$$u_n,\ v_n,\ w_n,$$

удовлетворяющія уравненіямъ

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial w_n}{\partial y} - \frac{\partial v_n}{\partial z} &= \lambda u_{n-1}, \\ \frac{\partial u_n}{\partial z} - \frac{\partial w_n}{\partial x} &= \lambda v_{n-1}, \\ \frac{\partial v_n}{\partial x} - \frac{\partial u_n}{\partial y} &= \lambda w_{n-1}, \\ \frac{\partial u_n}{\partial x} + \frac{\partial v_n}{\partial y} + \frac{\partial w_n}{\partial z} &= 0 \end{aligned}\right\} \text{внутри } (D) \tag{16}$$

и условію

$$u_n \cos\alpha + v_n \cos\beta + w_n \cos\gamma = f \quad \text{на поверхности } (S). \tag{16$_1$}$$
$$(n = 1, 2, 3, \ldots)$$

Допустимъ, что мы умѣемъ опредѣлить функціи

$$u_n,\ v_n,\ w_n$$

при всякомъ n, предполагая ихъ непрерывными и конечными для всѣхъ точекъ области (D).

Положимъ

$$u_n' = u_n - u_{n-1}, \quad v_n' = v_n - v_{n-1}, \quad w_n' = w_n - w_{n-1}$$
$$(n = 1, 2, 3, \ldots)$$

и

$$\begin{aligned} u &= u_0 + u_1' + u_2' + \cdots + u_n' + \cdots, \\ v &= v_0 + v_1' + v_2' + \cdots + v_n' + \cdots, \\ w &= w_0 + w_1' + w_2' + \cdots + w_n' + \cdots. \end{aligned} \tag{17}$$

Функціи u_n', v_n', w_n', какъ не трудно видѣть, удовлетворяютъ уравненіямъ

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial w'_n}{\partial y}-\frac{\partial v'_n}{\partial z}=\lambda u'_{n-1},\\
&\frac{\partial u'_n}{\partial z}-\frac{\partial w'_n}{\partial x}=\lambda v'_{n-1},\\
&\frac{\partial v'_n}{\partial x}-\frac{\partial u'_n}{\partial y}=\lambda w'_{n-1},\\
&\frac{\partial u'_n}{\partial x}+\frac{\partial v'_n}{\partial y}+\frac{\partial w'_n}{\partial z}=0
\end{aligned}\right\}\ \text{внутри } (D) \qquad \begin{matrix}(18)\\ \\ (18_1)\end{matrix}$$

при условіи

$$u'_n\cos\alpha+v'_n\cos\beta+w'_n\cos\gamma=0 \qquad \text{на поверхности } (S). \qquad (19)$$

Эти уравненія будутъ имѣть мѣсто при всякомъ $n=1, 2, \ldots,$ если поставимъ условіе

$$u'_0=u_0,\quad v'_0=v_0,\quad w'_0=w_0.$$

Опредѣливъ при помощи уравненій (18), (18_1) и условія (19) функціи

$$u'_n,\ v'_n,\ w'_n \qquad {\scriptstyle (n=1,\,2,\,3,\ldots)}$$

въ видѣ конечныхъ и опредѣленныхъ функцій координатъ для всѣхъ точекъ области (D), получимъ u, v и w въ видѣ рядовъ (17), каждый членъ которыхъ будетъ опредѣленной функціей координатъ.

Ряды (17) удовлетворяютъ условію

$$u\cos\alpha+v\cos\beta+w\cos\gamma=f \qquad \text{на поверхности } (S) \qquad (14)$$

и удовлетворяютъ формально уравненіямъ (13).

Они будутъ представлять рѣшеніе задачи, если будутъ сходящимися для всѣхъ точекъ внутри области (D).

7. Покажемъ прежде всего, какимъ образомъ опредѣляются функціи

$$u'_n,\ v'_n,\ w'_n. \qquad {\scriptstyle (n=2,\,3,\ldots)}$$

Не трудно видѣть, что уравненія (18), (18_1) и условіе (19) вполнѣ и единственнымъ образомъ опредѣляютъ эти функціи.

Допустимъ, что какимъ бы то ни было способомъ найдены функціи

$$u'_{n-1},\ v'_{n-1},\ w'_{n-1}.$$

Положимъ

$$
\begin{aligned}
u'_n &= \frac{\lambda}{4\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int\frac{w'_{n-1}}{r}\,d\tau' - \frac{\lambda}{4\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int\frac{v'_{n-1}}{r}\,d\tau' + \frac{\partial P_n}{\partial x} = S_1^{(n)} + \frac{\partial P_n}{\partial x},\\
v'_n &= \frac{\lambda}{4\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int\frac{u'_{n-1}}{r}\,d\tau' - \frac{\lambda}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int\frac{w'_{n-1}}{r}\,d\tau' + \frac{\partial P_n}{\partial y} = S_2^{(n)} + \frac{\partial P_n}{\partial y},\\
w'_n &= \frac{\lambda}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int\frac{v'_{n-1}}{r}\,d\tau' - \frac{\lambda}{4\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int\frac{u'_{n-1}}{r}\,d\tau' + \frac{\partial P_n}{\partial z} = S_3^{(n)} + \frac{\partial P_n}{\partial z},
\end{aligned}
\tag{20}
$$

гдѣ r есть разстояніе какой либо точки x, y, z пространства отъ точекъ ξ, η, ζ области (D) *).

Эти функціи, какъ извѣстно **), удовлетворяютъ уравненіямъ (18) и будутъ удовлетворять всѣмъ налагаемымъ на эти функціи условіямъ, если опредѣлимъ P_n при помощи уравненія

$$\Delta P_n = 0 \quad \text{внутри } (D) \tag{21}$$

и условія

$$\frac{\partial P_n}{\partial n} = -(S_1^{(n)}\cos\alpha + S_2^{(n)}\cos\beta + S_3^{(n)}\cos\gamma) \quad \text{на поверхности } (S). \tag{22}$$

Правая часть этого равенства есть вполнѣ опредѣленная функція координатъ точекъ поверхности (S); n обозначаетъ направленіе внѣшней нормали къ поверхности (S).

Мы знаемъ, что условіями (21) и (22) функція P_n опредѣляется вполнѣ до нѣкоторой произвольной постоянной (по методѣ C. Neumann'a).

Допустимъ, что найдена функція P_n, опредѣляемая этими условіями, конечная и непрерывная вмѣстѣ со своими первыми производными для всѣхъ точекъ области (D).

Опредѣливъ P_n, получимъ по формулѣ (20) и функціи

$$u'_n,\ v'_n,\ w'_n.$$

8. Изъ сказаннаго слѣдуетъ, что функціи u'_n, v'_n, w'_n будутъ извѣстны при всякомъ $n = 0, 1, 2, \ldots$, если будутъ извѣстны функціи

$$u_0,\ v_0,\ w_0;\qquad u'_1,\ v'_1,\ w'_1.$$

*) $d\tau'$ обозначаетъ элементъ объема области (D) при интегрированіи по перемѣннымъ ξ, η и ζ.

**) См. Lamb. „A treatise on the motion of fluids". Cambridge, 1879, p. 150 etc.

Опредѣленіе первыхъ, очевидно, приводится къ разысканію функціи P_0 при помощи условій

$$\Delta P_0 = 0 \quad \text{внутри } (D),$$

$$\frac{\partial P_0}{\partial n} = f \quad \text{на поверхности } (S).$$

Опредѣливъ P_0, получимъ

$$u_0 = \frac{\partial P_0}{\partial x}, \quad v_0 = \frac{\partial P_0}{\partial y}, \quad w_0 = \frac{\partial P_0}{\partial z}.$$

Остается только найти

$$u_1', \; v_1', \; w_1'.$$

Имѣемъ

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial w_1'}{\partial y} - \frac{\partial v_1'}{\partial z} = \lambda u_0, \\ &\frac{\partial u_1'}{\partial z} - \frac{\partial w_1'}{\partial x} = \lambda v_0, \\ &\frac{\partial v_1'}{\partial x} - \frac{\partial u_1'}{\partial y} = \lambda w_0, \\ &\frac{\partial u_1'}{\partial x} + \frac{\partial v_1'}{\partial y} + \frac{\partial w_1'}{\partial z} = 0, \end{aligned}\right\} \text{внутри } (D) \tag{23}$$

$$u_1'\cos\alpha + v_1'\cos\beta + w_1'\cos\gamma = 0 \quad \text{на поверхности } (S).$$

Уравненія (23) отличаются отъ уравненій (18) тѣмъ, что въ разсматриваемомъ случаѣ выраженіе

$$u_0\cos\alpha + v_0\cos\beta + w_0\cos\gamma$$

не равно нулю на поверхности (S). Формулами (20) нельзя пользоваться непосредственно.

Положимъ

$$u_1' = u_1'' + l, \quad v_1' = v_1'' + m, \quad w_1' = w_1'' + n, \tag{24}$$

гдѣ l, m, n суть функціи координатъ, конечныя и непрерывныя для всѣхъ точекъ области (D).

Положимъ затѣмъ

$$\frac{\partial n}{\partial y} - \frac{\partial m}{\partial z} = q_1',$$

$$\frac{\partial l}{\partial z} - \frac{\partial n}{\partial x} = q_2',$$

$$\frac{\partial m}{\partial x} - \frac{\partial l}{\partial y} = q_3',$$

$$\lambda u_0 - q_1' = q_1, \quad \lambda v_0 - q_2' = q_2, \quad \lambda w_0 - q_3' = q_3$$

и подчинимъ функціи l, m, n условію

$$q_1'\cos\alpha + q_2'\cos\beta + q_3'\cos\gamma = \lambda f,$$

или

$$q_1\cos\alpha + q_2\cos\beta + q_3\cos\gamma = 0.$$

Выберемъ какія либо три изъ безчисленнаго множества функцій l, m и n, удовлетворяющихъ всѣмъ этимъ условіямъ.

Разысканіе функцій u_1', v_1' и w_1' сведется къ опредѣленію конечныхъ и непрерывныхъ для всѣхъ точекъ области (D) функцій u_1'', v_1'', w_1'' при помощи уравненій

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial w_1''}{\partial y} - \frac{\partial v_1''}{\partial z} = q_1, \\ &\frac{\partial u_1''}{\partial z} - \frac{\partial w_1''}{\partial x} = q_2, \\ &\frac{\partial v_1''}{\partial x} - \frac{\partial u_1''}{\partial y} = q_3, \\ &\frac{\partial u_1''}{\partial x} + \frac{\partial v_1''}{\partial y} + \frac{\partial w_1''}{\partial z} + \psi = 0 \end{aligned}\right\} \text{внутри } (D) \qquad \textbf{(25)}$$

и условія

$$u_1''\cos\alpha + v_1''\cos\beta + w_1''\cos\gamma + \vartheta = 0 \qquad \text{на поверхности } (S),$$

гдѣ положено для сокращенія

$$\psi = \frac{\partial l}{\partial x} + \frac{\partial m}{\partial y} + \frac{\partial n}{\partial z},$$

$$\vartheta = l\cos\alpha + m\cos\beta + n\cos\gamma.$$

Мы подчинимъ функціи l, m, n еще слѣдующему условію

$$\int\left(\frac{\partial l}{\partial x}+\frac{\partial m}{\partial y}+\frac{\partial n}{\partial z}\right)d\tau=0,$$

причемъ необходимо получимъ

$$\int \vartheta ds=0,$$

гдѣ ds есть элементъ поверхности (S).

Положимъ теперь

$$\begin{aligned} u_1''&=\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int\frac{q_3}{r}d\tau'-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int\frac{q_2}{r}d\tau'+\frac{\partial P_1}{\partial x}=S_1+\frac{\partial P_1}{\partial x},\\ v_1''&=\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int\frac{q_1}{r}d\tau'-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int\frac{q_3}{r}d\tau'+\frac{\partial P_1}{\partial y}=S_2+\frac{\partial P_1}{\partial y}, \qquad (26)\\ w_1''&=\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int\frac{q_2}{r}d\tau'-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int\frac{q_1}{r}d\tau'+\frac{\partial P_1}{\partial z}=S_3+\frac{\partial P_1}{\partial z}.\end{aligned}$$

Функціи u_1'', v_1'', w_1'', такимъ образомъ составленныя, удовлетворяютъ уравненіямъ (25) и будутъ удовлетворять всѣмъ налагаемымъ на нихъ условіямъ, если опредѣлимъ конечную и непрерывную вмѣстѣ съ ея первыми производными функцію P_1 при помощи уравненія

$$\Delta P_1+\psi=0 \qquad \text{внутри } (D)$$

и условія

$$\frac{\partial P_1}{\partial n}+S_1\cos\alpha+S_2\cos\beta+S_3\cos\gamma+\vartheta=0 \qquad \text{на поверхности } (S).$$

Положивъ, наконецъ,

$$P_1=\frac{1}{4\pi}\int\frac{\psi'}{r}d\tau'+P_1'=V+P_1',$$

получимъ

$$\Delta P_1'=0 \qquad \text{внутри } (D),$$

$$\frac{\partial P_1'}{\partial n}+\frac{\partial V}{\partial n}+S_1\cos\alpha+S_2\cos\beta+S_3\cos\gamma+\vartheta=0 \qquad \text{на поверхности } (S).$$

Опредѣливъ по методѣ C. Neumann'a P_1', найдемъ P_1, затѣмъ u_1'', v_1'', w_1'' [по формуламъ (26)] и, наконецъ, функціи u_1', v_1', w_1' по формуламъ (24).

Замѣтимъ, что вообще задача объ опредѣленіи функціи W, удовлетворяющей условіямъ

$$\Delta W = 0 \qquad \text{внутри } (D),$$

$$\frac{\partial W}{\partial n} = F \qquad \text{на поверхности } (S),\,^{*}) \tag{27}$$

гдѣ F есть какая либо заданная функція координатъ, возможна только при условіи

$$\int F ds = 0. \tag{28}$$

Въ нашемъ случаѣ очевидно

$$\int \left(\frac{\partial V}{\partial n} + S_1 \cos\alpha + S_2 \cos\beta + S_3 \cos\gamma + \vartheta \right) ds = 0\,,$$

т. е. условіе (28) выполняется.

Точно также при всякомъ n [рав. (22)]

$$\int (S_1^{(n)} \cos\alpha + S_2^{(n)} \cos\beta + S_3^{(n)} \cos\gamma)\, ds = 0.$$

Такимъ образомъ всѣ функціи u_n', v_n', w_n' $(n = 0\,,\ 1\,,\ 2\,, \ldots)$ могутъ быть опредѣлены послѣдовательно.

9. Воспользуемся теперь функціями

$$G_x, \quad G_y, \quad G_z,$$

существованіе которыхъ утверждаетъ H. Poincaré въ своемъ мемуарѣ „Sur les équations de la Physique Mathématique" **) и которыя опредѣляются слѣдующими условіями:

1) G_x, G_y, G_z суть функціи двухъ системъ координатъ

$$x\,,\ y\,,\ z \qquad \text{и} \qquad \xi\,,\ \eta\,,\ \zeta.$$

2) Функціи G_x, G_y, G_z конечны и непрерывны внутри области (D) во всѣхъ точкахъ за исключеніемъ

---

*) Эту задачу мы будемъ называть задачей C. Neumann'a.

**) См. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. 1894.

$$x = \xi, \quad y = \eta, \quad z = \zeta,$$

гдѣ эти функціи обращаются въ безконечность.

3) Разности

$$G_x - \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{4\pi r}, \qquad G_y - \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{4\pi r}, \qquad G_z - \frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{4\pi r},$$

гдѣ

$$r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2,$$

остаются конечными при $r = 0$.

4) G_x, G_y, G_z удовлетворяютъ уравненію типа

$$\Delta F = 0 \qquad \text{внутри } (D).$$

5) На поверхности (S) онѣ удовлетворяютъ условію типа

$$\frac{\partial F}{\partial n} = 0.$$

Опредѣленіе этихъ функцій сводится на опредѣленіе непрерывныхъ внутри (D) функцій, удовлетворяющихъ всѣмъ условіямъ задачи C. Neumann'a, и не представляетъ особыхъ затрудненій.

Интегралы

$$\int |G_x|\, ds', \qquad \int |G_y|\, ds', \qquad \int |G_z|\, ds',\ ^{*)}$$

гдѣ ds' есть элементъ поверхности (S) при интегрированіи по перемѣннымъ ξ, η, ζ, суть положительныя и конечныя функціи x, y, z *внутри* области (D).

Обозначимъ наибольшее изъ наибольшихъ значеній этихъ интеграловъ внутри области (D) черезъ H.

Обозначимъ по прежнему черезъ W функцію, опредѣляемую условіями (27) (см. § 8-ой).

Пусть W' есть значеніе W въ точкѣ ξ, η, ζ области (D).

Въ такомъ случаѣ, какъ замѣтилъ H. Poincaré,

$$\begin{aligned} \frac{\partial W'}{\partial \xi} &= -\int G_x f ds, \\ \frac{\partial W'}{\partial \eta} &= -\int G_y f ds, \\ \frac{\partial W'}{\partial \zeta} &= -\int G_z f ds. \end{aligned} \tag{29}$$

*) Вообще, черезъ $|F|$ мы означаемъ модуль функціи F.

Отсюда для каждой точки внутри (D)

$$\left|\frac{\partial W'}{\partial \xi}\right| \leqq H(f), \quad \left|\frac{\partial W'}{\partial \eta}\right| \leqq H(f), \quad \left|\frac{\partial W'}{\partial \zeta}\right| \leqq H(f),$$

гдѣ (f) означаетъ maximum модуля f на поверхности (S).

10. Положимъ для сокращенія письма

$$T_n = S_1^{(n)} \cos\alpha + S_2^{(n)} \cos\beta + S_3^{(n)} \cos\gamma.$$

Равенства (20), въ силу (29), приводятся къ виду

$$u_n' = S_1^{(n)} + \int G_x T_n' ds',$$

$$v_n' = S_2^{(n)} + \int G_y T_n' ds',$$

$$w_n' = S_3^{(n)} + \int G_z T_n' ds'.$$

Назовемъ наибольшую величину конечнаго во всей области (D) интеграла

$$\int \frac{d\tau'}{r^2}$$

черезъ Q, наибольшее изъ наибольшихъ значеній модулей функцій u_n', v_n', w_n' внутри (D) черезъ N_n.

Очевидно, что

$$\left| S_n^j \right| \leqq \frac{\lambda}{2\pi} Q N_{n-1}, \quad (j = 1, 2, 3)$$

$$\left| T_n \right| \leqq \frac{3\lambda}{2\pi} Q N_{n-1}.$$

Слѣдовательно,

$$\left| u_n' \right| \leqq \lambda K N_{n-1}, \quad \left| v_n' \right| \leqq \lambda K N_{n-1}, \quad \left| w_n' \right| \leqq \lambda K N_{n-1},$$

гдѣ

$$K = \frac{Q}{2\pi}(1 + 3H)$$

есть конечная положительная постоянная, зависящая только отъ свойствъ поверхности (S).

Такимъ образомъ находимъ

$$N_n \leq K N_{n-1}. \qquad (n=2,\,3,\ldots)$$

Рядъ

$$N_1 + N_2 + \cdots + N_n + \cdots \tag{30}$$

сходится для всѣхъ значенiй параметра λ, не превосходящихъ предѣла $\frac{1}{K}$.

Модуль каждаго члена изъ рядовъ,

$$\sum_1^\infty u_n', \qquad \sum_1^\infty v_n', \qquad \sum_1^\infty w_n' \tag{31}$$

менѣе соотвѣтствующаго члена ряда (30).

Слѣдовательно, ряды (31) сходятся абсолютно и равномѣрно внутри области (D), пока

$$\lambda < \frac{1}{K}.$$

Такимъ образомъ ряды

$$\begin{aligned} u &= u_0 + \sum_1^\infty u_n', \\ v &= v_0 + \sum_1^\infty v_n', \\ w &= w_0 + \sum_1^\infty w_n' \end{aligned} \tag{32}$$

представляютъ предѣлы, къ которымъ стремятся функцiи u_n, v_n и w_n (см. § 6-ой) при возрастанiи n до безконечности, т. е.

$$u = \lim u_n \big|_{n=\infty}, \quad v = \lim v_n \big|_{n=\infty}, \quad w = \lim w_n \big|_{n=\infty}.$$

Такъ какъ ряды (32) сходятся абсолютно, то

$$\lim u_n' = 0, \quad \lim v_n' = 0, \quad \lim w_n' = 0, \text{*)}$$

или

$$\lim u_n = \lim u_{n-1}, \quad \lim v_n = \lim v_{n-1}, \quad \lim w_n = \lim w_{n-1}.$$

---

*) Мы пишемъ $\lim u_n$ и т. д. для краткости вмѣсто $\lim u_n \big|_{n=\infty}$ и т. д.

Уравненія (16) обратятся въ предѣлѣ (при $n=\infty$) въ слѣдующія

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}&=\lambda u, \\ \frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}&=\lambda v, \\ \frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}&=\lambda w. \end{aligned}\right\} \text{ внутри области } (D)$$

Функціи u, v и w, опредѣляемыя рядами (32), удовлетворяютъ дѣйствительно уравненіямъ задачи.

Очевидно, что онѣ удовлетворяютъ и условію

$$u\cos\alpha+v\cos\beta+w\cos\gamma=f \qquad \text{на поверхности } (S).$$

Существованіе искомыхъ функцій такимъ образомъ доказано по крайней мѣрѣ при всѣхъ положительныхъ значеніяхъ параметра λ, не превосходящихъ конечнаго и опредѣленнаго числа $\frac{1}{K}$, которое будетъ тѣмъ болѣе, чѣмъ менѣе размѣры области (D).

11. Опредѣливъ при помощи рядовъ (32) функціи u_1, v_1 и w_1 (мы возвращаемся къ обозначеніямъ § 2-ого), составимъ затѣмъ по формуламъ (7) выраженія проекцій на оси координатъ скорости точекъ вязкой несжимаемой жидкости и такимъ образомъ вполнѣ опредѣлимъ разсматриваемое теченіе въ томъ случаѣ, когда задается нормальная составляющая скорости на поверхности, ограничивающей жидкую массу [рав. (14)].

Замѣтимъ, что изслѣдованія §§-овъ 6, 7, 8, 9 и 10 могутъ имѣть значеніе и независимо отъ ихъ связи съ остальною частью работы, ибо доказываютъ существованіе и даютъ возможность опредѣлить постоянное винтовое теченіе идеальной несжимаемой жидкости, ограниченной конвексной поверхностью (S), по заданной нормальной составляющей скорости этого теченія на поверхности (S).

Соображенія вышеупомянутыхъ §§-овъ приводятъ такимъ образомъ къ обобщенію извѣстной теоремы C. Neumann'а объ опредѣленности и существованіи движенія жидкости (идеальной, несжимаемой) съ потенціаломъ скоростей W при заданной нормальной составляющей скорости теченія на поверхности, ограничивающей жидкую массу.

Теорема C. Neumann'a, выраженная въ только что приведенной механической формѣ, получается изъ доказанной нами при $\lambda=0$.

Новый способъ интегрированія нелинейныхъ дифференціальныхъ уравненій въ частныхъ производныхъ перваго порядка.

М. Ф. Ковальскаго.

(Сообщено въ засѣданіи Харьковскаго Математическаго Общества 8 февраля 1896 г.).

Изучая способы *Коши* и *Якоби* интегрированія дифференціальныхъ уравненій въ частныхъ производныхъ перваго порядка, я искалъ не только упрощеній этихъ пріемовъ, но и прямыхъ обоснованій тѣхъ идей, на которыхъ они зиждутся. Нѣсколько лѣтъ тому назадъ мнѣ удалось достигнуть цѣли; въ настоящей статьѣ я предлагаю результатъ моихъ изысканій.

§ 1. Пусть

$$F(x_1\,,\ x_2\,,\cdots x_n\,,\ z\,,\ p_1\,,\ p_2\,,\cdots p_n) = 0\ .\ .\ .\ .\ .\ (1)$$

будетъ даное нелинейное дифференціальное уравненіе въ частныхъ производныхъ перваго порядка; въ немъ n независимыхъ перемѣнныхъ $(x_1\,,\ x_2\,,\ x_3 \ldots x_n)$ и одна функціональная z; каждое p_s есть частная производная отъ z по соотвѣтствующему x_s.

Если существуетъ интегралъ для этого уравненія въ видѣ

$$z = f(x_1\,,\ x_2\,,\cdots x_n\,,\ c_1\,,\ c_2\,,\cdots c_n),$$

гдѣ c_r суть постоянныя произвольныя, то должны имѣть тождество:

$$F\left(x_1\,,\ x_2 \cdots x_n\,,\ f\,,\frac{\partial f}{\partial x_1}\,,\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) = 0$$

и частныя производныя отъ него, по всякому x_r,

$$(X_r)+(Z)\frac{\partial f}{\partial x_r}+\sum_s(P_s)\frac{\partial^2 f}{\partial x_s \partial x_r}=0\,;$$

здѣсь (X_r), (Z) и (P_s) взяты для краткости письма; каждое изъ нихъ замѣняетъ частную производную отъ F, соотвѣтственно, по x_r, z и p_s; скобки при нихъ указываютъ на то, что z замѣщенъ черезъ f, а p_s — черезъ $\frac{\partial f}{\partial x_s}$.

§ 2. Если въ послѣднемъ тождествѣ, обратно, f замѣнить черезъ z, а $\frac{\partial f}{\partial x_r}$ — черезъ p_r, то оно перейдетъ въ уравненіе линейное, по частнымъ производнымъ отъ p_r:

$$X_r+Zp_r+\sum_s P_s\frac{\partial p_r}{\partial x_s}=0\,,$$

гдѣ X_r, Z и P_s поставлены безъ скобокъ, потому что въ нихъ z и p_i остались ничѣмъ незамѣненными.

Извѣстно, что, для нахожденія интеграла этому уравненію, надо проинтегрировать обыкновенную систему уравненій:

$$\frac{dx_s}{P_s}=-\frac{dp_r}{X_r+Zp_r}.$$

Къ нимъ можно прибавить еще одно:

$$\frac{dx_s}{P_s}=\frac{dz}{\sum P_r p_r}\,,$$

получаемое изъ символическаго тождества:

$$dz=\sum_r p_r dx_r\,,$$

замѣною dx_r черезъ $\frac{P_r dx_s}{P_s}$, изъ уравненій $\frac{dx_r}{P_r}=\frac{dx_s}{P_s}$; здѣсь r и s какое-либо изъ значеній: $1, 2, \ldots n$.

Полную систему уравненій можно написать такъ:

$$\frac{dx_1}{P_1}=\frac{dx_2}{P_2}=\ldots=\frac{dx_n}{P_n}=\frac{dz}{\sum P_s p_s}=\frac{-dp_1}{X_1+Zp_1}=\ldots=\frac{-dp_n}{X_n+Zp_n}\,.\;.\;(2)$$

§ 3. Число всѣхъ уравненій $2n$; пусть ихъ интегралы будутъ:

$$\left.\begin{aligned} x_r &= f_r(x_1, c_1, c_2, \dots c_{2n}), \\ z &= \theta(x_1, c_1, c_2, \dots c_{2n}), \\ p_s &= \theta_s(x_1, c_1, c_2, \dots c_{2n}). \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots (3)$$

Понятно, что x_1, для простоты, взятъ независимою перемѣнною и что $s = 1, 2 \dots n$, а $r = 2, 3 \dots n$; всякое c_i есть постоянная произвольная; число ихъ $2n$.

По занесеніи этихъ интеграловъ въ систему уравненій (2), получимъ тождества:

$$\frac{\partial f_r}{\partial x_1} = \left(\frac{P_r}{P_1}\right), \quad \frac{\partial \theta}{\partial x_1} = \frac{1}{(P_1)} \sum_s (P_s)\,\theta_s \quad \text{и} \quad \frac{\partial \theta_s}{\partial x_1} = -\left[\frac{(X_s) + (Z)\theta_s}{(P_1)}\right] \dots (4)$$

Занося-же наши интегралы въ данное уравненіе (1), получимъ

$$F(x_1, f_2, f_3, \dots f_n, \theta, \theta_1, \theta_2, \dots \theta_n) = 0 \quad \dots\dots (5)$$

уравненіе только между параметрами $(c_1, c_2, \dots c_{2n})$, т. е. результатъ занесенія не зависитъ отъ x_1. Въ этомъ не трудно убѣдиться, если взять отъ него производную по x_1; она, въ силу тождествъ (4), окажется тождественнымъ нулемъ.

Опредѣливъ изъ (5) одну изъ постоянныхъ произвольныхъ (положимъ c_{2n}) функціею остальныхъ и занеся полученное для нея значеніе въ систему интеграловъ (3), получимъ видоизмѣненіе послѣднихъ:

$$\left.\begin{aligned} x_r &= \psi_r(x_1, c_1, c_2, \dots c_{2n-1}), \\ z &= \varphi(x_1, c_1, c_2, \dots c_{2n-1}), \\ p_s &= \varphi_s(x_1, c_1, c_2, \dots c_{2n-1}), \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots (6)$$

гдѣ символы ψ_r, φ и φ_s означаютъ результаты занесенія c_{2n} [полученнаго изъ (5)] соотвѣтственно въ f_r, θ и θ_s.

Система-же тождествъ (4) приметъ видъ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \psi_r}{\partial x_1} &= \left[\left(\frac{P_r}{P_1}\right)\right], \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = \left[\left(\frac{1}{P_1}\sum P_s \varphi_s\right)\right] \\ \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_1} &= -\left[\left(\frac{X_s + \varphi_s Z}{P_1}\right)\right], \end{aligned}\right\} \dots\dots (7)$$

и

$$F(x_1\,,\ \psi_2\,,\ \psi_3\,,\dots\psi_n\,,\ \varphi\,,\ \varphi_1\,,\dots\varphi_n) = 0\,.$$

§ 4. Каждое изъ нихъ останется тождествомъ и послѣ того, какъ всѣ постоянныя произвольныя или часть ихъ (положимъ $c_{n+1}\,,\ c_{n+2}\,,\dots$ $\dots c_{2n-1}$) замѣнимъ какими-либо функціями перемѣнныхъ; напримѣръ черезъ $E_1\,,\ E_2\,,\dots E_{n-1}\,,$ значеніями, полученными для нихъ изъ уравненій: $x_r = \psi_r$.

Ясно, что всякое E_i есть функція перемѣнныхъ x_s и остальныхъ параметровъ, $c_1\,,\ c_2\,,\dots c_n$; такъ-же не трудно видѣть, что всѣ они, будучи занесены, обратно, въ систему $x_r = \psi_r$, превратятъ эту послѣднюю въ тождества:

$$x_r = \psi_r(x_1\,,\ c_1\,,\ c_2\dots c_n\,,\ E_1\,,\ E_2\,,\dots E_{n-1})\,.\ .\ .\ .\ .\ .\ (8)$$

Система интеграловъ (6), послѣ занесенія въ нихъ этихъ E, сведется въ такую:

$$\left.\begin{aligned} &z = \varphi[x_1\,, c_1\,,\dots c_n\,, E_1, E_2,\dots E_{n-1}] = \omega\,(x_1\,, x_2\,,\dots x_n, c_1\,,\ c_2,\dots c_n), \\ &\text{и} \\ &p_s = \varphi_s\,[x_1, c_1,\dots c_n,\ E_1, E_2,\dots E_{n-1}] = \omega_s(x_1\,, x_2\,,\dots x_n, c_1\,, c_2,\dots c_n). \end{aligned}\right\}(9)$$

Тождества (7) примутъ видъ:

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{\partial\psi_r}{\partial x_1}\right) = \left|\frac{P_r}{P_1}\right|,\ \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right) = \left|\frac{1}{P_1}\sum P_s\,\omega_s\right|,\ \left(\frac{\partial\varphi_s}{\partial x_1}\right) = -\left|\frac{X_s + Z\omega_s}{P_1}\right| \\ &\text{и} \\ &\qquad F\,(x_1,\ x_2\,,\dots x_n\,,\ \omega\,,\ \omega_1\,,\ \omega_2\,,\dots\omega_n) = 0\,. \end{aligned}\right\}(10)$$

Въ послѣднемъ изъ этихъ тождествъ, равно какъ и въ X_i, Z и P_i (входящихъ въ правыя части первыхъ трехъ тождествъ) нумерованные x_r возстановились изъ ψ_r, въ силу (8); а z и его частныя производныя (p_s) замѣнены черезъ соотвѣтствующія ω и ω_s. Скобки въ лѣвыхъ частяхъ первыхъ трехъ тождествъ показываютъ, что входившія $c_{n+1}\,,\ c_{n+2}\dots c_{2n-1}$ замѣнены черезъ соотвѣтственныя E_i.

§ 5. Теперь преобразуемъ наши тождества системы (10). Съ этою цѣлію, станемъ брать отъ тождествъ (8) частныя производныя, по каждому нумерованному x; каждое изъ нихъ даетъ n соотвѣтственныхъ тождествъ:

$$0=\left(\frac{\partial\psi_r}{\partial x_1}\right)+\sum_{k=1}^{k=n-1}\frac{\partial\psi_r}{\partial E_k}\frac{\partial E_k}{\partial x_1},\;\ldots\ldots\ldots \tag{11}$$

и

$$\left.\begin{aligned}
0&=\sum\frac{\partial\psi_r}{\partial E_k}\frac{\partial E_k}{\partial x_2},\\
0&=\sum\frac{\partial\psi_r}{\partial E_k}\frac{\partial E_k}{\partial x_3},\\
&\ldots\ldots\ldots\\
1&=\sum\frac{\partial\psi_r}{\partial E_k}\frac{\partial E_k}{\partial x_r},\\
0&=\sum\frac{\partial\psi_r}{\partial E_k}\frac{\partial E_k}{\partial x_{r+1}}\\
&\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\\
0&=\sum\frac{\partial\psi_r}{\partial E_k}\frac{\partial E_k}{\partial x_n}.
\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots \tag{12}$$

Изъ послѣднихъ ($n-1$) тождествъ опредѣлимъ $\dfrac{\partial\psi_r}{\partial E_k}$ и полученное выраженіе занесемъ въ (11).

Пусть детерминантъ системы (12) будетъ

$$\Delta=\begin{vmatrix}
\frac{\partial E_1}{\partial x_2}, & \frac{\partial E_2}{\partial x_2} & \ldots\ldots & \frac{\partial E_{n-1}}{\partial x_2}\\
\frac{\partial E_1}{\partial x_3}, & \ldots & \ldots\ldots & \ldots\\
\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots\\
\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots\\
\frac{\partial E_1}{\partial x_r}, & \frac{\partial E_2}{\partial x_r} & \ldots\ldots & \frac{\partial E_{n-1}}{\partial x_r}\\
\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots\\
\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots\\
\frac{\partial E_1}{\partial x_n}, & \ldots & \ldots\ldots & \ldots
\end{vmatrix};$$

тогда

$$\frac{\partial\psi_r}{\partial E_k}=\frac{\partial\Delta}{\partial\left(\frac{\partial E_k}{\partial x_r}\right)}\cdot\frac{1}{\Delta}.$$

Здѣсь первый множитель представляетъ частную производную отъ Δ, взятую по элементу: $\frac{\partial E_k}{\partial x_r}$.

Заносся это выраженіе въ (11) и замѣняя $\left(\frac{\partial\psi_r}{\partial x_1}\right)$ его значеніемъ изъ перваго тождества группы (10), получимъ слѣдующее тождество:

$$\left|\frac{P_r}{P_1}\right|=-\frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{k=n-1}\frac{\partial\Delta}{\partial\left(\frac{\partial E_k}{\partial x_r}\right)}\frac{\partial E_k}{\partial x_1}=-\frac{\Delta_r}{\Delta}\quad \ldots\ldots \quad (13)$$

гдѣ Δ_r есть детерминантъ, полученный изъ Δ, замѣною въ этомъ послѣднемъ r-й линіи новою линіею: $\frac{\partial E_1}{\partial x_1}$, $\frac{\partial E_2}{\partial x_1}\ldots\frac{\partial E_{n-1}}{\partial x_1}$. Такъ мы видоизмѣнили первое тождество группы (10).

Далѣе видоизмѣнимъ второе,

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)=\left|\frac{1}{P_1}\sum_s P_s\omega_s\right|,\ s=1,\ 2\ldots n.$$

Для этого обратимся къ значенію ω изъ (9) и, взявъ отъ этого символическаго тождества частныя производныя, по каждому изъ независимыхъ перемѣнныхъ $(x_1,\ x_2\ldots x_n)$, получимъ n тождествъ:

$$\frac{\partial\omega}{\partial x_1}=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)+\sum\frac{\partial\varphi}{\partial E_k}\frac{\partial E_k}{\partial x_1},$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial x_2}=\sum\frac{\partial\varphi}{\partial E_k}\frac{\partial E_k}{\partial x_2},\ldots\frac{\partial\omega}{\partial x_n}=\sum\frac{\partial\varphi}{\partial E_k}\frac{\partial E_k}{\partial x_n}.$$

Изъ послѣднихъ $(n-1)$ тождествъ получаемъ

$$\frac{\partial\varphi}{\partial E_k}=\frac{1}{\Delta}\sum_{s=2}^{s=n}\frac{\partial\Delta}{\partial\left(\frac{\partial E_k}{\partial x_s}\right)}\frac{\partial\omega}{\partial x_s}.$$

Занося это выраженіе въ первое изъ предыдущихъ тождествъ и замѣняя $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)$ значеніемъ изъ (10), получаемъ видоизмѣненіе:

$$\sum_{s=1} \omega_s \left|\frac{P_s}{P_1}\right| = \frac{\partial\omega}{\partial x_1} - \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{\partial E_k}{\partial x_1} \sum_{s=2}^{s=n} \frac{\partial\omega}{\partial x_s} \frac{\partial\Delta}{\partial\left(\frac{\partial E_k}{\partial x_s}\right)},$$

или, принимая во вниманіе (13), получаемъ сперва:

$$\sum_{s=1} \omega_s \left|\frac{P_s}{P_1}\right| = \frac{\partial\omega}{\partial x_1} + \sum_{s=2} \frac{\partial\omega}{\partial x_s} \left|\frac{P_s}{P_1}\right|,$$

и окончательно

$$\sum_{s=1}^{s=n} P_s\left(\omega_s - \frac{\partial\omega}{\partial x_s}\right) = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Оперируя точно также надъ ω_r, получимъ видоизмѣненіе третьяго изъ тождествъ (10):

$$-\left|X_r\right| - \left|Z\right| \omega_r = \sum_s \left|P_s\right| \frac{\partial\omega_r}{\partial x_s}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Остается видоизмѣнить и послѣднее изъ группы (10), т. е.

$$F(x_1, x_2 \ldots x_n, \omega, \omega_1 \ldots \omega_n) = 0.$$

Съ этою цѣлью, беремъ отъ него частныя производныя, какъ по x_r, такъ и по одному (любому) изъ параметровъ c—получимъ два тождества:

$$\left.\begin{aligned} &\left|X_r\right| + \left|Z\right| \frac{\partial\omega}{\partial x_r} + \sum \left|P_s\right| \frac{\partial\omega_s}{\partial x_r} = 0, \\ \text{и} \qquad &\left|Z\right| \frac{\partial\omega}{\partial c} + \sum \left|P_s\right| \frac{\partial\omega_s}{\partial c} = 0. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Исключивъ изъ послѣднихъ, при помощи (15), X_r и Z, получимъ тождество:

$$\left(\omega_r - \frac{\partial\omega}{\partial x_r}\right) \sum_s \left|P_s\right| \frac{\partial\omega_s}{\partial c} = \frac{\partial\omega}{\partial c} \sum_s \left|P_s\right| \left(\frac{\partial\omega_r}{\partial x_s} - \frac{\partial\omega_s}{\partial x_r}\right). \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

*

§ 6. Для простоты введемъ обозначеніе:

$$\omega_r - \frac{\partial \omega}{\partial x_r} = S_r \; . \; . \; . \; . \qquad . \; . \; . \; . \; . \; (18)$$

и разность $\frac{\partial \omega_r}{\partial x_s} - \frac{\partial \omega_s}{\partial x_r}$ обозначаемъ символомъ

$$\left(\frac{r}{s}\right) . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (19)$$

Тутъ-же можно замѣтить, что этотъ послѣдній символъ, какъ величина, исчезаетъ, когда $r = s$, и мѣняетъ свой знакъ, при взаимной перестановкѣ его элементовъ.

Послѣ введенія сказанныхъ обозначеній, наши тождества (14) и (17) напишутся такъ:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_s \left| P_s \right| S_s = 0, \\ \text{и} \qquad &\sum_s \left| P_s \right| \left\{ S_r \frac{\partial \omega_s}{\partial c} + \frac{\partial \omega}{\partial c} \left(\frac{s}{r}\right) \right\} = 0. \end{aligned}\right\} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (20)$$

Введемъ еще упрощеніе, пусть

$$S_r \frac{\partial \omega_s}{\partial c} + \frac{\partial \omega}{\partial c} \left(\frac{s}{r}\right) = K_{r,s} .$$

Чтобы совмѣстно существовали оба наши тождества, надо и достаточно существованія такихъ равенствъ:

$$m S_1 = K_{r,1}\,, \quad m S_2 = K_{r,2} \ldots m S_n = K_{r,n}\,,$$

или

$$m = \frac{K_{r,1}}{S_1} = \frac{K_{r,2}}{S_2} = \ldots = \frac{K_{r,s}}{S_s} = \frac{K_{r,\sigma}}{S_\sigma} \ldots = \frac{K_{r,r}}{S_r} = \ldots \frac{K_{r,n}}{S_n}.$$

Хотя равенство $\frac{K_{r,s}}{S_s} = \frac{K_{r,\sigma}}{S_\sigma}$ есть болѣе общее чѣмъ $\frac{K_{r,s}}{S_s} = \frac{K_{r,r}}{S_r}$; но, для нашей главной цѣли, достаточно и этого послѣдняго.

Замѣняя символы $K_{r,s}$ и $K_{r,r}$ ихъ значеніями получимъ, по сокращеніи на S_r:

$$S_r \frac{\partial \omega_s}{\partial c} - S_s \frac{\partial \omega_r}{\partial c} + \frac{\partial \omega}{\partial c} \left(\frac{s}{r}\right) = 0 . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (21)$$

§ 7. Только что построенное нами тождество играетъ важную роль въ нашемъ изслѣдованiи.

Въ самомъ дѣлѣ, вопросъ интеграцiи даннаго уравненiя (1) мы свели, какъ обыкновенно это дѣлается, на интеграцiю обыкновенной системы дифференцiальныхъ уравненiй. При помощи этой системы, мы нашли рядъ функцiй (ω, ω_1, $\omega_2 \ldots \omega_n$), которыя, будучи подставлены соотвѣтственно, вмѣсто z и его производныхъ, въ интегрируемое уравненiе (1), превращаютъ его въ тождество.

Само собою становится яснымъ то обстоятельство, что если всякая разность $\frac{\partial \omega}{\partial x_s} - \omega_s$ есть тождественный нуль, то общимъ интеграломъ данному уравненiю (1) будетъ $z = \omega$.

Если же эта разность, или наше S_s, отлична отъ нуля, то, посчитавъ любой изъ параметровъ c, входящiй въ ω и ω_s, функцiей независимыхъ перемѣнныхъ—можно опредѣлить эту c удовлетворяющею уравненiямъ:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \omega}{\partial x_r} + \frac{\partial \omega}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial x_r} = \omega_r \\ \text{и}\quad &\frac{\partial \omega_s}{\partial x_r} + \frac{\partial \omega_s}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial x_r} = \frac{\partial \omega_r}{\partial x_s} + \frac{\partial \omega_r}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial x_s} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (22)$$

—что и докажемъ въ слѣдующемъ параграфѣ.

§ 8. Предыдущую систему уравненiй (22) можно написать, для краткости, такъ:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{S_r}{\frac{\partial \omega}{\partial c}} = \frac{\partial c}{\partial x_r}, \\ \text{и}\quad &\left(\frac{s}{r}\right) = \frac{\partial \omega_r}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial x_s} - \frac{\partial \omega_s}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial x_r}. \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (23)$$

Не трудно видѣть, что значенiя $\frac{\partial c}{\partial x_r}$ и $\frac{\partial c}{\partial x_s}$, получаемыя изъ перваго уравненiя, отождествляютъ второе: ибо результатомъ исключенiя $\frac{\partial c}{\partial x_r}$ и $\frac{\partial c}{\partial x_s}$ будетъ наше тождество (21).

Точно также, при помощи этого тождества, легко провѣряемъ, что

$$\frac{\partial}{\partial x_s}\left(\frac{S_r}{\frac{\partial \omega}{\partial c}}\right) = \frac{\partial}{\partial x_r}\left(\frac{S_s}{\frac{\partial \omega}{\partial c}}\right)$$

есть тождество, считая c функціею независимыхъ перемѣнныхъ, опредѣляемою первымъ изъ (23).

Коль скоро такъ, то искомое c опредѣляется изъ точнаго дифференціала:

$$dc = \sum_r \frac{S_r}{\frac{\partial \omega}{\partial c}} dx_r \,; \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (24)$$

пусть

$$c = c_1 = G_1(x_1, x_2, \ldots x_n, \alpha_1, c_2, c_3 \ldots c_n) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (25)$$

(α_1 — новый параметръ) будетъ его интегралъ.

Кромѣ того, если первое уравненіе изъ (23) умножимъ на всякое $|P_r|$ и результаты сложимъ, то получимъ уравненіе:

$$\sum \left| P_r \right| S_r = \frac{\partial \omega}{\partial c} \sum \left| P_r \right| \frac{\partial c}{\partial x_r} ,$$

лѣвая часть котораго, въ силу перваго изъ (20), есть тождественный нуль; поэтому уравненіе, для опредѣленія c, является линейнымъ въ частныхъ производныхъ c:

$$\sum \left| P_s \right| \frac{\partial c}{\partial x_s} = 0 . \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (26)$$

Слѣдовательно, прійдется интегрировать систему

$$\frac{dx_1}{|P_1|} = \frac{dx_2}{|P_2|} = \ldots = \frac{dx_s}{|P_s|} = \ldots = \frac{dx_n}{|P_n|} = \frac{dc}{0} .$$

Одинъ изъ интеграловъ этой системы есть

$$c = c_1 = \text{const.} = \beta_1 .$$

Остальные интегралы пусть будутъ:

$$\beta_2 = H_2(x_1, x_2, \ldots x_n, \beta_1, c_2, c_3 \ldots c_n),\ \beta_3 = H_3, \ldots \beta_n = H_n ;$$

тогда, какъ извѣстно,

$$\Pi(c_1 H_2 H_3 \ldots H_n) = 0 , \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (27)$$

гдѣ Π произвольная функція, будетъ служить интеграломъ (26).

Конечно, какъ (25) такъ и (27), можно считать совпадающими рѣшеніями—стоитъ соотвѣтственно подъискать Π. Рѣшеніе (25), въ связи съ $z=\omega$, приводитъ насъ къ общему интегралу, а (27)—къ главному, для даннаго уравненія (1).

Не трудно видѣть всю простоту предлагаемаго метода. Понятно также, что изложеніе можно было нѣсколько сократить; но я старался быть яснымъ.

Задача объ охлажденіи неоднороднаго твердаго стержня.

В. А. Стеклова.

1) Задача объ охлажденіи неоднороднаго твердаго стержня зависитъ, какъ извѣстно, отъ интегрированія слѣдующаго уравненія въ частныхъ производныхъ

$$g\frac{\partial U}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial \xi}n\frac{\partial U}{\partial \xi}-lU, \tag{1}$$

гдѣ t есть время, а g, n и l суть положительныя функціи ξ на всемъ протяженіи стержня, направленіе котораго совпадаетъ съ осью ξ.

Функція U представляетъ температуру стержня, g есть удѣльная теплота стержня, n коэффиціентъ его теплопроводности, l коэффиціентъ лучеиспускательной способности на каждомъ поперечномъ сѣченіи стержня.

Предположимъ, что абсциссы начала и конца стержня суть 0 и X.

Функція U, опредѣляемая уравненіемъ (1), должна удовлетворять слѣдующимъ предѣльнымъ условіямъ

$$\begin{aligned} &n\frac{\partial U}{\partial \xi}-hU=0 \qquad \text{при } \xi=0, \\ &n\frac{\partial U}{\partial \xi}+HU=0 \qquad \text{при } \xi=X, \end{aligned} \tag{2}$$

гдѣ h и H суть положительныя постоянныя.

Въ начальный моментъ времени, который примемъ за начало счета временъ, функція U должна обращаться въ заданную функцію отъ ξ

$$U=f(\xi) \qquad \text{при } t=0.$$

Полагая

$$U=e^{-kt}V,$$

гдѣ k есть нѣкоторая постоянная, а V функція одного ξ, приведемъ рѣшеніе задачи къ опредѣленію функціи V при помощи слѣдующаго линейнаго уравненія

$$\frac{d}{d\xi}n\frac{dV}{d\xi}+(gk-l)V=0 \tag{3}$$

при условіяхъ

$$\begin{aligned} n\frac{dV}{d\xi}-hV=0 \qquad &\text{при } \xi=0, \\ n\frac{dV}{d\xi}+HV=0 \qquad &\text{при } \xi=X. \end{aligned} \tag{4}$$

M. Jordan въ третьемъ томѣ своего соч. „Cours d'Analyse de l'école polytechnique" *), изслѣдуя разсматриваемую задачу, показалъ, что существуетъ безчисленное множество положительныхъ, различныхъ между собою чиселъ

$$k_1,\ k_2,\ \ldots,k_n,\ \ldots,$$

при каждомъ изъ которыхъ, положимъ $k_n(n=1,2,\ldots)$, можетъ быть найдена конечная и отличная отъ нуля въ интервалѣ отъ 0 до X функція $U_n(n=1,2,\ldots)$, удовлетворяющая уравненію типа (3) при условіяхъ (4).

Частнымъ рѣшеніемъ уравненія (1), удовлетворяющимъ условіямъ (2), будетъ выраженіе

$$A_n e^{-k_n t} U_n,$$

гдѣ A_n есть произвольная постоянная.

Болѣе общее рѣшеніе получимъ, положивъ

$$U=\sum_1^{\infty} A_n e^{-k_n t} U_n. \tag{5}$$

Опредѣленная такимъ образомъ функція U будетъ искомымъ рѣшеніемъ разсматриваемой нами задачи, если выберемъ коэффиціенты A_n такъ, чтобы рядъ (5) при $t=0$ представлялъ въ интервалѣ отъ 0 до X разложеніе данной функціи $f(\xi)$ въ рядъ по функціямъ $U_n(n=1,2,\ldots)$.

M. Jordan въ своемъ изслѣдованіи указываетъ только необходимыя условія, которымъ должны удовлетворять постоянныя $A_n(n=1,2,\ldots)$, чтобы рядъ

$$\sum A_n U_n$$

*) См. C. Jordan. „Cours d'Analyse de l'école polytechnique". Paris, 1887, pp. 394—412.

могъ представлять разложеніе функціи $f(\xi)$ въ рядъ по функціямъ $U_n (n = 1, 2, \ldots)$, и заканчиваетъ изслѣдованіе слѣдующимъ замѣчаніемъ, которое приведу дословно:

„Si cette série est convergente et a bien pour somme $f(\xi)$ dans tout l'intervalle de 0 à X, le probléme sera résolu; mais, pour s'en assurer, il serait nécessaire de sommer directement la série. Ce résultat n'a encore été atteint que dans quelques cas particuliers".

2) Въ настоящей работѣ я также намѣренъ заняться вышеуказанной задачей и предложить особый пріемъ ея рѣшенія, позволяющій довести изслѣдованіе до конца при сравнительно общихъ предположеніяхъ относительно функціи $f(\xi)$ предыдущаго §-а.

Разсмотримъ уравненіе

$$\frac{d}{d\xi} n \frac{dV}{d\xi} + (gk - l) V = 0. \tag{6}$$

Предположимъ, что функціи n и g, оставаясь положительными, не обращаются въ нуль въ интервалѣ отъ 0 до X.

Это предположеніе вполнѣ соотвѣтствуетъ физическому характеру функцій k и g.

Итакъ, допустимъ, что для всѣхъ значеній ξ между 0 и X

$$A_1 < n < B_1,$$
$$A_2 < g < B_2,$$

гдѣ A_1, B_1, A_2, B_2 суть конечныя, положительныя, не равныя нулю постоянныя.

Примемъ за независимую перемѣнную

$$x = \int \frac{d\xi}{n} \tag{7}$$

и положимъ

$$ng = p_1(\xi), \qquad nl = q_1(\xi).$$

Функціи $p_1(\xi)$ и $q_1(\xi)$ положительны въ интервалѣ отъ 0 до X, и первая изъ нихъ удовлетворяетъ сверхъ того условію

$$A = A_1 A_2 < p_1(\xi) < B_1 B_2 = B. \tag{8}$$

Обозначимъ черезъ $p(x)$ и $q(x)$ выраженія $p_1(\xi)$ и $q_1(\xi)$ по замѣнѣ въ послѣднихъ ξ черезъ x при помощи (7).

Уравненіе (6), преобразованное къ перемѣнной x, приметъ видъ

$$V'' + [kp(x) - q(x)] V = 0, \tag{9}$$

гдѣ

$$V'' = \frac{d^2 V}{dx^2}.$$

Въ дальнѣйшемъ мы будемъ обозначать первую и вторую производную по x какой либо функціи F соотвѣтственно черезъ F' и F''.

Пусть при измѣненіи ξ отъ 0 до X перемѣнная x измѣняется отъ a до b.

Соотношеніе (7) показываетъ, что

$$a > 0, \qquad b > 0$$

и

$$b - a > 0.$$

Предѣльныя условія (4) замѣнятся слѣдующими

$$\begin{aligned} V' - hV &= 0 \quad \text{при } x = a, \\ V' + HV &= 0 \quad \text{при } x = b. \end{aligned} \tag{10}$$

Послѣдующіе §§-ы будутъ посвящены изслѣдованію свойствъ интеграловъ уравненій типа (9) при условіяхъ (10).

3) Обозначимъ черезъ $f(x)$ конечную и непрерывную въ интервалѣ отъ a до b функцію x.

Теорема I. *Существуетъ единственная, вполнѣ опредѣленная, конечная и непрерывная въ интервалѣ отъ a до b функція x, удовлетворяющая уравненію*

$$V'' - q(x)V + f(x) = 0 \tag{11}$$

и условіямъ

$$\begin{aligned} V' - hV &= 0 \quad \text{при } x = a, \\ V' + HV &= 0 \quad \text{при } x = b. \end{aligned} \tag{12}$$

Обозначимъ черезъ v_1 и v_2 два линейно независимыхъ частныхъ рѣшенія уравненія

$$V'' - q(x)V = 0.$$

Общій интегралъ уравненія (11) представится подъ видомъ

$$V = M_1 v_1 + M_2 v_2, \tag{13}$$

гдѣ

$$M_1 = C_1 + \int_a^x \frac{f v_2}{\Delta}\, dx,$$

$$M_2 = C_2 - \int_a^x \frac{f v_1}{\Delta}\, dx,$$

C_1 и C_2 произвольныя постоянныя, а

$$\varDelta = \begin{vmatrix} v_1, & v_2 \\ v_1', & v_2' \end{vmatrix} = \text{const}.$$

по извѣстной теоремѣ Liouville'a.

Положивъ

$$m(x) = v_1 \int_a^x \frac{fv_2}{\varDelta}\, dx - v_2 \int_a^x \frac{fv_1}{\varDelta}\, dx\,, \tag{14}$$

представимъ равенство (13) подъ видомъ

$$V = C_1 v_1 + C_2 v_2 + m(x). \tag{15}$$

Очевидно, что

$$m(a) = 0\,, \qquad m'(a) = 0\,.$$

Выберемъ постоянныя C_1 и C_2 такъ, чтобы удовлетворялись условія (12).

Для опредѣленія C_1 и C_2 получаемъ слѣдующія уравненія

$$\begin{aligned} &C_1[v_1'(a) - hv_1(a)] + C_2[v_2'(a) - hv_2(a)] = 0\,, \\ &C_1[v_1'(b) + Hv_1(b)] + C_2[v_2'(b) + Hv_2(b)] + n(b) = 0\,, \end{aligned} \tag{16}$$

гдѣ положено для сокращенія

$$n(b) = m'(b) + Hm(b)\,.$$

Всегда можно предположить, что опредѣлитель

$$\varDelta_1 = \begin{vmatrix} v_1'(a) - hv_1(a)\,, & v_2'(a) - hv_2(a) \\ v_1'(b) + Hv_1(b)\,, & v_2'(b) + Hv_2(b) \end{vmatrix}$$

не равенъ нулю.

При этомъ допущеніи уравненія (16) даютъ

$$\begin{aligned} C_1 &= \quad \frac{v_2'(a) - hv_2(a)}{\varDelta_1}\, n(b) = n_1 n(b)\,, \\ C_2 &= -\frac{v_1'(a) - hv_1(a)}{\varDelta_1}\, n(b) = n_2 n(b)\,, \end{aligned} \tag{17}$$

гдѣ положено для сокращенія

$$n_1 = \frac{v_2'(a) - hv_2(a)}{\varDelta_1},$$

$$n_2 = -\frac{v_1'(a) - hv_1(a)}{\varDelta_1}.$$

Разумѣя подъ C_1 и C_2 въ равенствѣ (15) постоянныя, опредѣляемыя равенствами (17), получаемъ интегралъ уравненія (11), удовлетворяющій условіямъ (12).

Функціи v_1 и v_2 конечны и непрерывны въ интервалѣ отъ a до b вмѣстѣ съ ихъ производными, функція $f(x)$ конечна и непрерывна въ томъ же интервалѣ по условію.

Такова же, очевидно, и функція V [рав. (15)].

Лемма I. *Функція V удовлетворяетъ условію*

$$V^2 < Q\int_a^b f^2 dx$$

для всѣхъ значеній x отъ a до b, гдѣ Q есть конечная, отличная отъ нуля, положительная постоянная.

Каковы бы ни были функціи $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, всегда

$$\left(\int_a^b \varphi(x)\,\psi(x)dx\right)^2 < \int_a^b \varphi^2(x)dx \cdot \int_a^b \psi^2(x)dx. \tag{18}$$

Обозначимъ черезъ A' наибольшій изъ наибольшихъ модулей функцій v_1 и v_2 въ интервалѣ отъ a до b.

Примѣнивъ неравенство (18) къ (14), получимъ

$$|m(x)| < \frac{A'}{|\varDelta|}\left[\left(\int_a^x v_1^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^x v_2^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\right]\left(\int_a^x f^2 dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

а, слѣдовательно, и подавно

$$|m(x)| < \frac{A'}{|\varDelta|}\left[\left(\int_a^b v_1^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b v_2^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\right]\left(\int_a^b f^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Положимъ

$$\frac{A'}{|\varDelta|}\left[\left(\int_a^b v_1^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b v_2^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\right] = M_1,$$

гдѣ M_1 есть, очевидно, конечная, положительная, неравная нулю постоянная, зависящая отъ характера функціи $q(x)$ и интервала (a, b).

Получимъ

$$|m(x)| < M_1 \left(\int_a^b f^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Точно также, обозначивъ черезъ B' наибольшій изъ наибольшихъ модулей функцій v_1' и v_2' въ интервалѣ (a, b), можемъ писать

$$|m'(x)| < M_2 \left(\int_a^b f^2 dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

гдѣ

$$M_2 = \frac{B'}{|\varDelta|} \left[\left(\int_a^b v_1^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b v_2^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \right]$$

есть конечная, отличная отъ нуля, положительная постоянная.

Такимъ образомъ

$$|n(b)| < K \left(\int_a^b f^2 dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

гдѣ

$$K = M_2 + HM_1.$$

Назовемъ черезъ n наибольшее изъ численныхъ значеній величинъ n_1 и n_2.

Получаемъ

$$|C_1| < nK \left(\int_a^b f^2 dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$|C_2| < nK \left(\int_a^b f^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

и, наконецъ,

$$|V| < (2nKA' + M_1) \left(\int_a^b f^2 dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

или, положивъ

$$2n\,KA' + M_1 = \sqrt{Q}\,,$$

получимъ

$$V^2 < Q\int_a^b f^2 dx\,, \tag{19}$$

что и требовалось показать.

4) Теорема II. *Уравненіе*

$$V'' + [kp(x) - q(x)]\,V + f = 0 \tag{20}$$

допускаетъ въ интерваль отъ a до b конечный и непрерывный интегралъ, удовлетворяющій условіямъ

$$\begin{aligned} V'(a) - hV(a) &= 0\,,\\ V'(b) + HV(b) &= 0 \end{aligned} \tag{21}$$

и представляющійся въ видѣ ряда, расположеннаго по цѣлымъ положительнымъ степенямъ k, пока $|k|$ не превосходитъ нѣкотораго предѣла ϱ, гдѣ ϱ есть конечная, отличная отъ нуля, положительная постоянная.

Положимъ

$$V = V_0 + kV_1 + k^2 V_2 + \dots + k^n V_n + \dots\,, \tag{22}$$

гдѣ $V_n (n = 0, 1, 2, \dots)$ суть нѣкоторыя функціи отъ x.

Подставивъ это выраженіе V въ уравненіе (20) и приравнявъ нулю коэффиціенты при одинаковыхъ степеняхъ k, получимъ слѣдующую систему уравненій для послѣдовательнаго опредѣленія функцій V_n

$$\begin{aligned} &V_0'' - q(x)V_0 + f = 0\,,\\ &V_1'' - q(x)V_1 + p(x)V_0 = 0\,,\\ &V_2'' - q(x)V_2 + p(x)V_1 = 0\,,\\ &\dots\dots\dots\dots\\ &V_n'' - q(x)V_n + p(x)V_{n-1} = 0\,,\\ &\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

при условіяхъ

$$\begin{aligned} V_n'(a) - hV_n(a) &= 0\,,\\ V_n'(b) + HV_n(b) &= 0. \end{aligned} \qquad (n = 0, 1, 2, \dots) \tag{24}$$

По теоремѣ предыдущаго §-а мы можемъ опредѣлить V_n, начиная съ $n = 0$ и т. д.

Рядъ (22) будетъ навѣрно сходящимся при достаточно малыхъ значеніяхъ параметра k.

Найдемъ высшій предѣлъ радіуса круга сходимости этого ряда по параметру k.

Разсмотримъ интегралы

$$W_{m,n}=\int_a^b p(x)V_mV_n dx\,,$$

гдѣ V_m и V_n суть функціи, опредѣляемыя уравненіями (23) при условіяхъ (24).

Аналогичные интегралы были введены въ употребленіе впервые, если не ошибаемся, Schwarz'емъ при рѣшеніи одной задачи, относящейся къ варіаціонному исчисленію.

Мы будемъ называть иногда интегралы $W_{m,n}$ интегралами Schwarz'a.

Не трудно убѣдиться, что

$$W_{m,n}=W_{m+1,\,n-1}=\ldots=W_{m+j,\,m-j}\,.$$

Въ самомъ дѣлѣ, въ силу (23) и (24) имѣемъ

$$W_{m,n}=\int_a^b p(x)V_mV_n dx=\int_a^b q(x)V_{m+1}V_n dx-\int_a^b V''_{m+1}V_n dx\,,$$

$$\int_a^b V_nV''_{m+1}dx=V_nV'_{m+1}\Big|_a^b-\int_a^b V'_nV'_{m+1}dx\,,$$

$$\int_a^b V'_nV'_{m+1}dx=V'_nV_{m+1}\Big|_a^b-\int_a^b V_{m+1}V''_n dx\,,$$

$$\int_a^b V_{m+1}V''_n dx=\int_a^b q(x)V_{m+1}V_n dx-\int_a^b p(x)V_{m+1}V_{n-1}dx.$$

Отсюда

$$W_{m,n}=V_nV'_{m+1}-V'_nV_{m+1}\Big|_a^b+\int_a^b p(x)V_{m+1}V_{n-1}dx.$$

Но [рав. (24)]

$$V_nV'_{m+1}-V'_nV_{m+1}\Big|_a^b=0$$

и, согласно вышепринятому обозначенію,

$$\int_a^b p(x) V_{m+1} V_{n-1} dx = W_{m+1,\, n-1}.$$

Слѣдовательно,

$$W_{m,n} = W_{m+1,\, n-1}$$

и, вообще,

$$W_{m,n} = W_{m+j,\, n-j}.$$

Разсмотримъ два случая

$$1) \qquad m+n = 2s, \qquad \text{(четное)}$$

$$2) \qquad m+n = 2s-1. \qquad \text{(нечетное)}$$

Пусть $m+n$ есть число четное и равно $2s$.

Въ такомъ случаѣ

$$W_{m,n} = \int_a^b p(x) V_s^2 dx. \tag{25}$$

Интегралъ правой части этого равенства обозначимъ просто черезъ W_{2s}.

Пусть $m+n$ есть число нечетное и равно $2s-1$.

Тогда

$$W_{m,n} = \int_a^b p(x) V_{s-1} V_s dx. \tag{26}$$

Интегралъ правой части этого равенства обозначимъ просто черезъ W_{2s-1}.

Всѣ интегралы $W_n (n = 0, 1, 2, \ldots)$ *положительны.*

Для случая четнаго $n = 2s$ это доказывается равенствомъ (25).

Остается только разсмотрѣть интегралы W_{2s-1}.

Имѣемъ

$$W_{2s-1} = \int_a^b p(x) V_{s-1} V_s dx = \int_a^b V_s [q(x) V_s - V_s''] dx,$$

$$\int_a^b V_s V_s'' dx = V_s' V_s \Big|_a^b - \int_a^b (V_s')^2 dx,$$

т. е.

$$W_{2s-1} = \int_a^b q(x) V_s^2 dx + \int_a^b (V_s')^2 dx - V_s' V_s \Big|_a^b.$$

Но

$$-V_s' V_s \Big|_a^b = H V_s^2(b) + h V_s^2(a) > 0.$$

Слѣдовательно,

$$W_{2s-1} > 0,$$

что и требовалось показать.

Интегралы $W_{2s} (s = 0, 1, 2, \ldots)$ *удовлетворяютъ неравенствамъ*

$$\frac{\sqrt{W_2}}{\sqrt{W_0}} < \frac{\sqrt{W_4}}{\sqrt{W_2}} < \ldots < \frac{\sqrt{W_{2s}}}{\sqrt{W_{2s-2}}} < \ldots. \tag{27}$$

По предыдущему

$$W_{2s} = \int_a^b p(x) V_{s+1} V_{s-1} dx.$$

Отсюда [нерав. (18)]

$$W_{2s}^2 < W_{2s+2} \cdot W_{2s-2},$$

или

$$\frac{\sqrt{W_{2s}}}{\sqrt{W_{2s-2}}} < \frac{\sqrt{W_{2s+2}}}{\sqrt{W_{2s}}}. \qquad (s = 1, 2, \ldots)$$

Неравенства (27) доказаны.

Отношеніе

$$\frac{\sqrt{W_{2s}}}{\sqrt{W_{2s-2}}}$$

стремится при возрастаніи значка s *къ конечному предѣлу.*

Примѣнивъ лемму I къ s'тому изъ уравненій (23) [при s'томъ изъ условій (24)], получимъ

$$|V_s| < \left(Q \int_a^b p^2(x) V_{s-1}^2 dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

или (см. обозначенія §-а 2-ого)

$$V_s^2 < QBW_{2s-1} = Q_1 W_{2s-1}\,. \tag{28}$$

Положимъ

$$\int_a^b p(x)dx = c > 0\,.$$

Неравенство (28) даетъ

$$W_{2s} < Q_2 W_{2s-2}$$

при всякомъ s, гдѣ

$$Q_2 = cQ_1$$

есть конечная, неравная нулю, положительная постоянная.

Такимъ образомъ

$$\lim \frac{\sqrt{W_{2s}}}{\sqrt{W_{2s-2}}}\bigg|_{s=\infty} < \sqrt{Q_2}\,,$$

что и требовалось доказать.

Неравенство (28) показываетъ, что модуль каждаго члена ряда

$$V_0 + kV_1 + k^2V_2 + \ldots + k^nV_n + \ldots \tag{29}$$

меньше соотвѣтствующаго члена ряда

$$Q_1\sqrt{W_0} + |k|Q_1\sqrt{W_2} + |k|^2Q_1\sqrt{W_4} + \ldots + |k|^nQ_1\sqrt{W_{2n}} + \ldots\,.$$

Послѣдній рядъ сходится, пока

$$|k| < \lim \frac{\sqrt{W_{2n-2}}}{\sqrt{W_{2n}}} = \varrho\,.$$

При этомъ же условіи сходится и рядъ (29), удовлетворяющій уравненію (20) и условіямъ (21).

Теорема III. *Функція V, удовлетворяющая уравненію (20) и условіямъ (21), есть голоморфная функція параметра k только для значеній k, лежащихъ внутри круга радіуса*

$$\varrho = \lim \frac{\sqrt{W_{2n-2}}}{\sqrt{W_{2n}}}\,,$$

*

и не можетъ быть голоморфной функціей k во всей плоскости перемѣннаго k, если разсматривать f какъ произвольную функцію x.

Мы видѣли, что радіусъ круга сходимости ряда (29) по параметру k не менѣе ϱ.

Остается только показать, что этотъ радіусъ не можетъ быть болѣе ϱ.

Помножимъ рядъ (29) на $p(x)V_0$ и интегрируемъ полученный рядъ по x въ предѣлахъ отъ a до b.

Получимъ рядъ

$$\int_a^b p(x)V_0^2 dx + k\int_a^b p(x)V_0V_1 dx + \ldots + k^n \int_a^b p(x)V_0V_n dx + \ldots,$$

который можно представить подъ видомъ

$$W_0 + kW_1 + k^2W_2 + \ldots k^nW_n + \ldots \quad . \tag{30}$$

Этотъ рядъ будетъ несомнѣнно сходящимся для тѣхъ значеній k, для которыхъ рядъ (29) сходится абсолютно и равномѣрно, и радіусъ круга сходимости ряда (29) не болѣе радіуса круга сходимости ряда (30).

Послѣдній же радіусъ во всякомъ случаѣ не болѣе радіуса круга сходимости ряда

$$W_0 + k^2W_2 + k^4W_4 + \ldots + k^{2n}W_{2n} + \ldots,$$

который перестанетъ быть сходящимся при

$$|k| \geq \lim \frac{\sqrt{W_{2n-2}}}{\sqrt{W_{2n}}} = \varrho.$$

Итакъ, радіусъ круга сходимости ряда (30), а, слѣдовательно, и (29) не болѣе ϱ.

Интегралъ уравненія (20), удовлетворяющій условіямъ (21), не можетъ быть, вообще говоря, голоморфной функціей параметра k во всей плоскости этой перемѣнной.

Теорема доказана вполнѣ.

5) Теорема IV. *Интегралъ уравненія*

$$V'' + [kp(x) - q(x)]V + f = 0,$$

удовлетворяющій условіямъ

$$V'(a) - hV(a) = 0,$$
$$V'(b) + HV(b) = 0$$

и разсматриваемый какъ функція параметра k, есть, вообще говоря, мероморфная функція этого параметра, полюсами которой служатъ корни нѣкотораго трансцендентнаго уравненія.

Назовемъ черезъ w_1 и w_2 два линейно независимыхъ частныхъ рѣшенія уравненія

$$V'' + [kp(x) - q(x)]V = 0. \tag{31}$$

Функціи w_1 и w_2 суть функціи x и k, конечныя и непрерывныя вмѣстѣ со своими производными для значеній x въ интервалѣ отъ a до b и при всѣхъ значеніяхъ k.

Общій интегралъ уравненія (31) представится подъ видомъ

$$V = D_1 w_1 + D_2 w_2, \tag{32}$$

гдѣ D_1 и D_2 суть произвольныя постоянныя.

Выраженіе (32) будетъ интеграломъ уравненія

$$V'' + [kp(x) - q(x)]V + f = 0, \tag{33}$$

если предположимъ, что

$$D_1 = C_1 + \int_a^x \frac{fw_2}{\Delta}\,dx,$$

$$D_2 = C_2 - \int_a^x \frac{fw_1}{\Delta}\,dx,$$

гдѣ C_1 и C_2 суть произвольныя постоянныя, а

$$\Delta = \begin{vmatrix} w_1, & w_2 \\ w_1', & w_2' \end{vmatrix} = \text{const.}$$

по теоремѣ Liouville'а.

Такимъ образомъ общій интегралъ уравненія (33) приметъ видъ

$$V = C_1 w_1 + C_2 w_2 + \vartheta(x), \tag{34}$$

гдѣ положено для сокращенія

$$\vartheta(x) = w_1 \int_a^x \frac{fw_2}{\Delta}\,dx - w_2 \int_a^x \frac{fw_1}{\Delta}\,dx.$$

Очевидно

$$\vartheta(a) = 0, \quad \vartheta'(a) = 0.$$

Функція V (34) будетъ удовлетворять предѣльнымъ условіямъ теоремы IV, если опредѣлимъ C_1 и C_2 при помощи уравненій

$$\begin{aligned} C_1[w_1'(a) - hw_1(a)] + C_2[w_2'(a) - hw_2(a)] = 0\,, \\ C_1[w_1'(b) + Hw_1(b)] + C_2[w_2'(b) + Hw_2(b)] = \varkappa(b)\,, \end{aligned} \tag{35}$$

гдѣ положено для сокращенія

$$\varkappa(b) = -[\vartheta'(b) + H\vartheta(b)].$$

Уравненія (35) даютъ

$$C_1 = \frac{Q_1}{\varpi(k)}, \qquad C_2 = \frac{Q_2}{\varpi(k)},$$

гдѣ Q_1 и Q_2 суть опредѣленныя постоянныя, а

$$\varpi(k) = \begin{vmatrix} w_1'(a) - hw_1(a)\,, & w_2'(a) - hw_2(a) \\ w_1'(b) + Hw_1(b)\,, & w_2'(b) - Hw_2(b) \end{vmatrix}$$

есть цѣлая трансцендентная функція k.

Такимъ образомъ получаемъ

$$V = \frac{Q_1 w_1 + Q_2 w_2}{\varpi(k)} + \vartheta(x). \tag{36}$$

Функція

$$Q_1 w_1 + Q_2 w_2$$

есть опредѣленная, конечная и непрерывная функція x въ интервалѣ отъ a до b и для всѣхъ значеній параметра k.

Такъ какъ по теоремѣ III функція V не можетъ быть, вообще говоря, голоморфной функціей параметра k во всей плоскости этой перемѣнной, то V должно быть, какъ показываетъ выраженіе (36), мероморфной функціей k, полюсами которой служатъ по крайней мѣрѣ нѣкоторые изъ корней уравненія

$$\varpi(k) = 0. \tag{37}$$

Представимъ функцію V въ видѣ

$$V = \frac{W}{\varpi(k)},$$

гдѣ W есть функція x и параметра k.

Произвольную функцію f всегда можно выбрать такъ, чтобы W не обращалось тождественно въ нуль при k, равномъ одному изъ корней уравненія (37), каковъ бы ни былъ этотъ корень.

Поэтому, считая функцію f произвольной (неопредѣленной), можемъ утверждать, что, вообще говоря, V есть мероморфная функція k, полюсами которой служатъ корни уравненія (37).

6) Теорема V. *При каждомъ изъ значеній k, равномъ корню уравненія*

$$\tilde{\omega}(k) = 0\,,$$

существуетъ конечная и непрерывная въ интервалѣ отъ a до b функція x, удовлетворяющая уравненію

$$V'' + [kp(x) - q(x)]V = 0 \tag{38}$$

и условіямъ

$$\begin{aligned} V'(a) - hV(a) &= 0\,, \\ V'(b) + HV(b) &= 0\,. \end{aligned} \tag{39}$$

Въ самомъ дѣлѣ, функція W удовлетворяетъ уравненію

$$W'' + [kp(x) - q(x)]W + \tilde{\omega}(k)f = 0$$

и условіямъ (39) каково бы ни было значеніе k.

При k, равномъ одному изъ корней уравненія (37), функція W обратится въ функцію V, удовлетворяющую уравненію типа (38) при условіяхъ (39).

По предыдущему, эту функцію можемъ считать не равной нулю.

Каждому корню уравненія (37) будетъ соотвѣтствовать особая функція V.

Условіями (38) и (39) функція V опредѣляется вполнѣ до нѣкотораго произвольнаго множителя.

Этотъ множитель мы опредѣлимъ изъ условія

$$\int_a^b p(x)V^2dx = 1. \tag{40}$$

Функцію V, соотвѣтствующую корню $k_n[n = 1, 2, \ldots$ до числа корней уравненія (37)] и удовлетворяющую уравненію (38) при условіяхъ (39) и (40), мы будемъ въ дальнѣйшемъ обозначать черезъ U_n.

7) Пусть k_n и k_m два неравныхъ между собою корня уравненія (37)

Теорема VI. *Функціи U_n и U_m удовлетворяютъ условію*

$$\int_a^b p(x)U_nU_m dx = 0$$

при всякихъ n и m, не равныхъ между собою.

Въ самомъ дѣлѣ, имѣемъ

$$k_n \int_a^b p(x)U_nU_m dx = \int_a^b U_m[q(x)U_n - U_n'']dx =$$

$$= \int_a^b q(x)U_nU_m dx + \int_a^b U_n'U_m dx - U_mU_n'\Big|_a^b,$$

$$k_m \int_a^b p(x)U_nU_m dx = \int_a^b U_n[q(x)U_m - U_m'']dx =$$

$$= \int_a^b q(x)U_nU_m dx + \int_a^b U_n'U_m' dx - U_nU_m'\Big|_a^b.$$

Отсюда

$$(k_n - k_m)\int_a^b p(x)U_nU_m dx = 0,$$

или

$$\int_a^b p(x)U_nU_m dx = 0,$$

если

$$n \gtrless m,$$

что и требовалось показать.

8) **Теорема VII.** *Всѣ корни уравненія*

$$\varpi(k) = 0 \qquad \textbf{(37)}$$

суть простые, вещественные и положительные.

Предположимъ, что уравненіе (37) допускаетъ мнимый корень

$$k_n = \alpha + i\beta.$$

Выраженіе

$$k_m = \alpha - i\beta$$

есть также корень разсматриваемаго уравненія.

Соотвѣтствующія этимъ корнямъ функціи U_n и U_m будутъ вида

$$U_n = p + iq, \qquad U_m = p - iq.$$

По предыдущей теоремѣ

$$\int_a^b p(x) U_n U_m dx = 0. \tag{41}$$

Съ другой стороны

$$\int_a^b p(x) U_n U_m dx = \int_a^b p(x)(p^2 + q^2) dx.$$

Равенство (41) очевидно невозможно, ибо p и q не могутъ равняться нулю одновременно.

Итакъ, всѣ корни функціи $\varpi(k)$ вещественны.

Допустимъ существованіе отрицательнаго корня функціи $\varpi(k)$.

Положимъ

$$k_n = -\alpha^2,$$

гдѣ α есть вещественная постоянная.

Имѣемъ

$$U_n'' = [p(x)\alpha^2 + q(x)] U_n.$$

Помноживъ это уравненіе на U_n и проинтегрировавъ по x отъ a до b, получимъ

$$-U_n U_n' \Big|_a^b + \int_a^b (U')^2 dx + \int_a^b [p(x)\alpha^2 + q(x)] U_n^2 dx = 0.$$

Это равенство очевидно невозможно, ибо

$$-U_n U_n'\Big|_a^b = HU_n^2(b) + hU_n^2(a) > 0\,,$$

и интегралы, входящіе въ правую часть предыдущаго равенства положительны.

Слѣдовательно, всѣ корни уравненія (37) положительны.

Докажемъ, наконецъ, что это уравненіе имѣетъ только простые корни.

Функція W, введенная нами въ §§-ахъ 5-омъ и 6-омъ, удовлетворяетъ уравненію

$$W'' + [kp(x) - q(x)]\,W + \tilde{\omega}(k) f = 0$$

и условіямъ

$$W'(a) - hW(a) = 0\,,$$
$$W'(b) + HW(b) = 0\,.$$

При k равномъ одному изъ корней уравненія (37), положимъ k_n, W обращается въ U_n.

Положимъ

$$k = k_n + \xi\,,$$

гдѣ ξ есть безконечно малая величина.

Означимъ затѣмъ черезъ (F) производную отъ какой либо функціи F по k_n.

Имѣемъ

$$W\,(x, k_n + \xi) = U_n + \xi(U_n) + \ldots\,,$$

$$W'(x, k_n + \xi) = U_n' + \xi(U_n') + \ldots\,,$$

$$W''(x, k_n + \xi) = U_n'' + \xi(U_n'') + \ldots\,,$$

$$\tilde{\omega}(k) = \tilde{\omega}(k_n) + \xi[\tilde{\omega}(k_n)] + \ldots = \xi[\tilde{\omega}(k_n)] + \ldots\,.\ ^{*)}$$

Слѣдовательно,

$$(U_n)'' + [k_n p(x) - q(x)](U_n) + p(x)[\tilde{\omega}(k_n)]\,U_n + p(x) U_n = 0 \qquad \textbf{(42)}$$

и

$$(U_n)' - h(U_n) = 0 \quad \text{при } x = a\,,$$

$$(U_n)' + H(U_n) = 0 \quad \text{при } x = b\,.$$

---

*) $[\tilde{\omega}(k_n)]$ обозначаетъ также производную отъ $\tilde{\omega}(k_n)$ по k_n.

Если k_n есть двойной корень уравненія (37), то

$$[\tilde{\omega}(k_n)] = 0$$

и уравненіе (42) обращается въ слѣдующее

$$(U_n)'' + [k_n p(x) - q(x)](U_n) + p(x) U_n = 0 \, .$$

Помноживъ это уравненіе на U_n и проинтегрировавъ по x въ предѣлахъ отъ a до b, получимъ

$$\int_a^b U_n (U_n)'' dx + \int_a^b [k_n p(x) - q(x)] U_n (U_n) dx + \int_a^b p(x) U_n^2 dx = 0 .$$

Это равенство очевидно невозможно, ибо

$$\int_a^b U_n (U_n)'' dx + \int_a^b [k_n p(x) - q(x)] U_n (U_n) dx = 0 \, ,$$

а

$$\int_a^b p(x) U_n^2 dx = 1$$

по условію.

Уравненіе (37) не можетъ имѣть корня второй кратности.

Точно такимъ же путемъ убѣдимся, что интересующее насъ уравненіе не можетъ имѣть корня какой бы то ни было p'той кратности.

Итакъ, всѣ корни уравненія (37) суть простые, вещественные и положительные, что и требовалось доказать.

Сопоставляя эту теорему съ теоремой V (§ 6-ого), можемъ утверждать, что существуетъ нѣкоторое число p (p равно по крайней мѣрѣ единицѣ) положительныхъ (неравныхъ между собою) чиселъ

$$k_1 \, , \; k_2 \, , \ldots , k_p \, ,$$

каждому изъ которыхъ, положимъ k_n ($n = 1, \; 2, \ldots, p$), соотвѣтствуетъ единственная, вполнѣ опредѣленная функція U_n, конечная и непрерывная въ интервалѣ $(a, \; b)$, удовлетворяющая уравненію

$$U_n'' + [k_n p(x) - q(x)] U_n = 0$$

и условіямъ

$$U_n'(a) - hU_n(a) = 0\,,$$

$$U_n'(b) + HU_n(b) = 0\,,$$

$$\int_a^b p(x)U_n^2 dx = 1\,.$$

9) Мы покажемъ ниже, что число p безконечно велико. Теперь же установимъ одну лемму, имѣющую существенное значеніе какъ для доказательства только что упомянутаго предложенія о числѣ p, такъ и для многихъ дальнѣйшихъ соображеній.

Лемма II (основная). *Если функція u отъ x удовлетворяетъ условію*

$$\int_a^b u dx = 0\,,$$

то отношеніе $\frac{B}{A}$ *интеграловъ*

$$B = \int_a^b (u')^2 dx\,, \quad A = \int_a^b u^2 dx$$

болѣе числа $\frac{2}{(b-a)^2}$.

Положимъ

$$b - a = l\,.$$

Имѣемъ

$$Al = \int_a^b u^2 dx d\xi = \int_a^b (u)^2 d\xi dx\,.$$

Въ первомъ изъ этихъ интеграловъ (считая слѣва) интегрированіе совершается сначала по x потомъ по ξ, во второмъ сначала по ξ потомъ по x каждый разъ въ предѣлахъ отъ a до b, причемъ въ послѣднемъ изъ этихъ интеграловъ (u) означаетъ, что въ функціи u перемѣнная x замѣнена черезъ ξ.

Такъ какъ

$$\int_a^b u dx \cdot \int_a^b (u) d\xi = 0\,,$$

то

$$2Al = \int_a^b [u - (u)]^2 dx d\xi.$$

Но

$$[u - (u)]^2 = \left(\int_\xi^x \frac{du}{db}\, db \right)^2.$$

Такъ какъ [см. нерав. (18)]

$$\left(\int_\xi^x \frac{du}{db}\, db \right)^2 \leqq (x - \xi) \int_\xi^x \left(\frac{du}{db} \right)^2 db,$$

то

$$2Al \leqq \int_a^b \left((x - \xi) \int_\xi^x \left(\frac{du}{db} \right)^2 db \right) dx d\xi.$$

Положимъ

$$K = \int_a^b \left((x - \xi) \int_\xi^x \left(\frac{du}{db} \right)^2 db \right) dx.$$

Можемъ писать

$$K = \int_a^\xi \left((x - \xi) \int_\xi^x \left(\frac{du}{db} \right)^2 db \right) dx + \int_\xi^b \left((x - \xi) \int_\xi^x \left(\frac{du}{db} \right)^2 db \right) dx.$$

Несомнѣнно

$$\int_a^\xi \left((x - \xi) \int_\xi^x \left(\frac{du}{db} \right)^2 db \right) dx = \int_a^\xi \left((\xi - x) \int_x^\xi \left(\frac{du}{db} \right)^2 db \right) dx \geqq 0,$$

$$\int_a^\xi \left((\xi - x) \int_\xi^x \left(\frac{du}{db} \right)^2 db \right) dx \leqq \int_a^\xi \left((\xi - x) \int_a^b \left(\frac{du}{db} \right)^2 db \right) dx = \frac{(\xi - a)^2}{2}\, \omega,$$

гдѣ положено

$$\omega = \int_a^b \left(\frac{du}{db}\right)^2 db$$

Такъ какъ, далѣе,

$$\frac{(\xi - a)^2}{2} \leqq \frac{(b - a)^2}{2},$$

то

$$\int_a^\xi \left((\xi - x) \int_x^\xi \left(\frac{du}{db}\right)^2 db \right) dx \leqq \frac{(b-a)^2}{2}\,\omega = \frac{l^2}{2}\,\omega. \tag{43}$$

Подобнымъ же путемъ убѣждаемся въ справедливости слѣдующихъ неравенствъ

$$\int_\xi^b \left((x - \xi) \int_\xi^x \left(\frac{du}{db}\right)^2 db \right) dx \geqq 0,$$

$$\int_\xi^x \left((x - \xi) \int_\xi^x \left(\frac{du}{db}\right)^2 db \right) dx \leqq \frac{(b-\xi)^2}{2}\,\omega \leqq \frac{(b-a)^2}{2}\,\omega = \frac{l^2}{2}\,\omega. \tag{44}$$

Неравенства (43) и (44) показываютъ (см. выраж. K), что

$$K < l^2\omega.$$

Слѣдовательно,

$$Al < \frac{l^3}{2}\,\omega.$$

Съ другой стороны

$$Bl = l\omega.$$

Слѣдовательно,

$$\frac{B}{A} > \frac{2}{l^2}, \tag{45}$$

что и доказываетъ лемму.

Раздѣлимъ интервалъ (a, b) на p промежуточныхъ интерваловъ

$$(a, b_1),\ (b_1, b_2), \ldots, (b_{n-1}, b).$$

Предположимъ для простоты эти интервалы равными между собою, такъ что длина каждаго изъ нихъ равна

$$\frac{l}{n}.$$

Слѣдствіемъ предыдущей леммы будетъ слѣдующая

Лемма III. *Если функція u удовлетворяетъ n условіямъ*

$$\int_a^{b_1} u dx = 0\,, \quad \int_{b_1}^{b_2} u dx = 0\,, \ldots, \quad \int_{b_{n-1}}^{b} u dx = 0\,,$$

то отношеніе

$$\frac{B}{A} > \frac{2}{l^2} n^2.$$

Въ самомъ дѣлѣ,

$$B = \int_a^{b_1} (u')^2 dx + \int_{b_1}^{b_2} (u')^2 dx + \ldots + \int_{b_{n-1}}^{b} (u')^2 dx = B_1 + B_2 + \ldots + B_n\,,$$

$$A = \int_a^{b_1} u^2 dx + \int_{b_1}^{b_2} u^2 dx + \ldots + \int_{b_{n-1}}^{b} u^2 dx = A_1 + A_2 + \ldots + A_n.$$

Такъ какъ [нерав. (45)]

$$\frac{B_s}{A_s} > \frac{2}{l^2} n^2\,, \qquad (s = 1\,, 2\,, \ldots, n)$$

то и подавно

$$\frac{B}{A} = \frac{\sum B_s}{\sum A_s} > \frac{2}{l^2} n^2.$$

10) Мы видѣли, что полюсами мероморфной по k функціи V, удовлетворяющей уравненію (20) и условіямъ (21), служатъ корни уравненія

$$\tilde{\omega}(k) = 0. \qquad \textbf{(37)}$$

Характеръ распредѣленія полюсовъ функціи V зависитъ отъ свойствъ функціи f.

Теорема VIII. *Всегда можно подобрать функцію f такъ, что наименьшій *) изъ полюсовъ функціи V будетъ болѣе числа*

$$Kn^2,$$

гдѣ K есть конечная, неравная нулю, положительная постоянная.

Мы видѣли (см. § 4), что функція V голоморфна для значеній k, лежащихъ внутри круга радіуса

$$\varrho = \lim_{s=\infty} \frac{\sqrt{W_{2s-2}}}{\sqrt{W_{2s}}}.$$

Положимъ

$$f = a_1 f_1 + a_2 f_2 + \cdots + a_{n+1} f_{n+1},$$

гдѣ f_j $(j = 1, 2, \ldots, n+1)$ суть какія либо функціи x [конечныя и непрерывныя въ интервалѣ (a, b)], а a_j $(j = 1, 2, \ldots, n+1)$ пока неопредѣленныя постоянныя.

Разсматривая уравненія (23) 4-аго §-а, мы замѣчаемъ, что всѣ функціи V_s $(s = 1, 2, \ldots)$ будутъ при этомъ значеніи f линейными функціями коэффиціентовъ a_j $(j = 1, 2, \ldots, n+1)$.

Можемъ положить

$$V_s = a_1 V_{s1} + a_2 V_{s2} + \cdots + a_{n+1} V_{s,n+1},$$

гдѣ V_{sj} $(j = 1, 2, \ldots, n+1)$ суть функціи перемѣнной x.

Раздѣлимъ интервалъ (a, b) на n равныхъ между собою интерваловъ

$$(a, b_1), \quad (b_1, b_2), \ldots, (b_{n-1}, b)$$

и опредѣлимъ коэффиціенты a_j $(j = 1, 2, \ldots, n+1)$, что всегда возможно, при помощи слѣдующихъ уравненій

$$a_1 \int_a^{b_1} V_{s1} dx + a_2 \int_a^{b_1} V_{s2} dx + \cdots + a_{n+1} \int_a^{b_1} V_{s,n+1} dx = 0,$$

$$a_1 \int_{b_1}^{b_2} V_{s1} dx + a_2 \int_{b_1}^{b_2} V_{s2} dx + \cdots + a_{n+1} \int_{b_1}^{b_2} V_{s,n+1} dx = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_1 \int_{b_{n-1}}^{b} V_{s1} dx + a_2 \int_{b_{n-1}}^{b} V_{s2} dx + \cdots + a_{n+1} \int_{b_{n-1}}^{b} V_{s,n+1} dx = 0.$$

---

*) Мы говоримъ просто: „наименьшій изъ полюсовъ“, такъ какъ по предыдущему значенія k, соотвѣтствующія полюсамъ функціи V, суть числа положительныя.

Эти уравненія опредѣлятъ отношенія n изъ коэффиціентовъ a_j $(j=1, 2,\ldots, n+1)$ къ одному какому либо изъ нихъ.

Приэтомъ на основаніи леммы II (основной) будемъ имѣть

$$\frac{\int_a^b (V_s')^2 dx}{\int_a^b V_s^2 dx} > \frac{2}{l^2} n^2. \tag{46}$$

Соотвѣтствующимъ выборомъ коэффиціентовъ a_j $(j=1, 2,\ldots, n+1)$ этому неравенству можно удовлетворить при какомъ угодно s и, говоря теоретически, при $s=\infty$.

Допустимъ, что коэффиціенты a_j $(j=1, 2,\ldots, n+1)$ выбраны такъ, что

$$\lim_{s=\infty} \frac{\int_a^b (V_s')^2 dx}{\int_a^b V_s^2 dx} > \frac{2}{l^2} n^2,$$

или

$$\lim_{s=\infty} \frac{\int_a^b (V_s')^2 dx}{B\int_a^b V_s^2 dx} > Kn^2, \tag{46_1}$$

гдѣ

$$K = \frac{2}{l^2 B},$$

а B есть maximum $p(x)$ въ интервалѣ (a, b).

Коль скоро удовлетворено неравенство (46), то неравенство

$$\lim_{s=\infty} \frac{\int_a^b (V_s')^2 dx}{W_{2s}} > Kn^2 \tag{47}$$

и подавно удовлетворится, ибо

$$W_{2s} < B\int_a^b V_s^2 dx.$$

Обращаемся теперь къ равенству (26) §-а 6-ого.

Имѣемъ [въ силу s'таго изъ (23)]

$$W_{2s-1} = \int_a^b p(x) V_{s-1} V_s dx = \int_a^b q(x) V_s^2 dx - \int_a^b V_s V_s'' dx.$$

Но

$$\int_a^b V_s V_s'' dx = V_s V_s' \Big|_a^b - \int_a^b (V_s')^2 dx.$$

Слѣдовательно,

$$W_{2s-1} = \int_a^b q(x) V_s^2 dx + \int_a^b (V_s')^2 dx + H V_s^2(b) + h V_s^2(a).$$

Отсюда при всякомъ s

$$W_{2s-1} > \int_a^b (V_s')^2 dx.$$

Коль скоро имѣетъ мѣсто неравенство (47), то и подавно должно быть при всякомъ s

$$\frac{W_{2s-1}}{W_{2s}} > Kn^2. \tag{48}$$

Примѣнивъ къ (26) неравенство (18), получимъ

$$W_{2s-1} < \sqrt{W_{2s-2}}\sqrt{W_{2s}},$$

или

$$\frac{W_{2s-1}}{W_{2s}} < \frac{\sqrt{W_{2s-2}}}{\sqrt{W_{2s}}}.$$

Поэтому непосредственнымъ слѣдствіемъ неравенства (48), а, слѣдовательно, и (46) будетъ неравенство вида

$$\varrho = \lim_{s=\infty} \frac{\sqrt{W_{2s-2}}}{\sqrt{W_{2s}}} > Kn^2. \tag{49}$$

Такъ какъ, по предыдущему, соотвѣтствующимъ выборомъ коэффиціентовъ a_j $(j=1, 2, \ldots, n+1)$ всегда можно удовлетворить неравенству (46) и такъ какъ неравенство (49) есть прямое слѣдствіе (46), то соотвѣтствующимъ выборомъ постоянныхъ a_j $(j=1, 2, \ldots, n+1)$, т. е. функціи f, всегда можно удовлетворить и неравенству (49).

Иначе говоря, функцію f всегда можно выбрать такъ, что функція V будетъ голоморфной функціей параметра k для значеній k, модуль которыхъ больше числа Kn^2. Приэтомъ наименьшій изъ полюсовъ функціи V будетъ болѣе Kn^2.

Теорема доказана.

Слѣдствіемъ этой теоремы и теоремъ предыдущихъ §§-овъ будетъ слѣдующая

Теорема IX. *Всѣ корни уравненія*

$$\tilde{\omega}(k) = 0 \tag{37}$$

суть простые, вещественные, положительные и число ихъ безконечно велико.

Пусть при какомъ либо значеніи функціи f наименьшій изъ полюсовъ функціи V есть k_n.

Постоянная k_n равна, по предыдущему, одному изъ корней уравненія (37).

Замѣнимъ f нѣкоторой другой функціей f_1, которую на основаніи предыдущей теоремы можно выбрать такъ, что наименьшій изъ полюсовъ функціи V будетъ болѣе

$$Kn^2,$$

гдѣ n есть цѣлое число, т. е. болѣе какого угодно заданнаго числа, напр. k_n.

Значеніе k, соотвѣтствующее этому полюсу функціи V, опять будетъ корнемъ уравненія (37), который обозначимъ черезъ k_{n+1}, причемъ

$$k_{n+1} > k_n.$$

Измѣняя снова соотвѣтствующимъ образомъ функцію f_1 на f_2, убѣдимся въ существованіи новаго корня k_{n+2} уравненія (37), удовлетворяющаго условіямъ

$$k_{n+2} > k_{n+1} > k_n,$$

*

и продолжая разсуждать такимъ образомъ далѣе до безконечности, убѣдимся въ существованiи безчисленнаго множества корней уравненiя (37).

Мы обозначимъ корни этого уравненiя черезъ

$$k_1\,,\ k_2\,,\ k_3\,,\ldots,\ k_n\,,\ldots,$$

предполагая ихъ расположенными въ возрастающемъ порядкѣ по величинѣ.

11) Сопоставивъ только что доказанную теорему съ положенiемъ, высказаннымъ въ концѣ §-а 8-ого, выводимъ слѣдующую теорему:

Теорема X. *Существуетъ безчисленное множество положительныхъ, неравныхъ между собою чиселъ*

$$k_1\,,\ k_2\,,\ k_3\,,\ldots,\ k_n\,,\ldots,$$

служащихъ корнями нѣкотораго трансцендентнаго уравненiя, каждому изъ которыхъ, положимъ k_n, *соотвѣтствуетъ единственная, конечная, непрерывная и отличная отъ нуля въ интервалѣ отъ* a *до* b *функцiя* U_n, *удовлетворяющая уравненiю*

$$U_n'' + [k_n p(x) - q(x)]U_n = 0 \qquad (n=1,\,2,\ldots\infty)$$

и условiямъ

$$U_n'(a) - hU_n(a) = 0\,,$$

$$U_n'(b) + HU_n(b) = 0\,, \qquad (n=1,\,2,\ldots\infty)$$

$$\int_a^b p(x)U_n^2 dx = 1\,.$$

12) Теорема XI. *Корни уравненiя*

$$\varpi(k) = 0 \tag{37}$$

при всякомъ n *удовлетворяютъ неравенству*

$$k_n > W(n-1)^2\,,$$

гдѣ M *есть конечная, положительная, неравная нулю постоянная.*

Положимъ

$$U = a_1 U_1 + \cdots + a_n U_n\,,$$

гдѣ a_j $(j = 1,\,2,\ldots,\,n)$ суть нѣкоторыя постоянныя.

Обозначимъ черезъ W и V интегралы

$$W = \int_a^b (U')^2 dx\,, \qquad V = \int_a^b U^2 dx.$$

Имѣемъ

$$W = \sum a_j^2 \int_a^b (U_j')^2 dx + 2\sum a_r a_s \int_a^b U_r' U_s' dx.$$

Далѣе,

$$\int_a^b (U_j')^2 dx = U_j U_j' \Big|_a^b - \int_a^b U_j U_j'' dx,$$

$$\int_a^b U_j U_j'' dx = \int_a^b q(x) U_j^2 dx - k_j,$$

ибо по условію

$$\int_a^b p(x) U_j^2 dx = 1.$$

Слѣдовательно,

$$\int_a^b (U_j')^2 dx = -[HU_j^2(b) + hU_j^2(a)] - \int_a^b q(x) U_j^2 dx + k_j. \qquad \textbf{(50)}$$

Съ другой стороны

$$\int_a^b U_r' U_s' dx = U_r' U_s \Big|_a^b - \int_a^b U_r'' U_s dx,$$

$$\int_a^b U_r'' U_s dx = \int_a^b q(x) U_r U_s dx,$$

ибо по теоремѣ VI

$$\int_a^b p(x) U_r U_s dx = 0. \qquad (r \gtrless s)$$

Слѣдовательно,

$$\int_a^b U_r' U_s' dx = -HU_r(b) U_s(b) - hU_r(a) U_s(a) - \int_a^b q(x) U_r U_s dx. \qquad \textbf{(51)}$$

При помощи равенствъ (50) и (51) получаемъ

$$W = \sum a_j^2 k_j - H(\sum a_j B_j)^2 - h(\sum a_j A_j)^2 - \int_a^b q(x)(\sum a_j U_j)^2 dx\,,$$

гдѣ положено

$$B_j = U_j(b)\,, \qquad A_j = U_j(a).$$

Такъ какъ по условію $q(x)$ есть положительная функція x въ интервалѣ $(a,\ b)$, то

$$W < \sum a_j k_j. \tag{52}$$

Разсмотримъ теперь интегралъ

$$V_1 = \int_a^b p(x)\, U^2 dx.$$

Имѣемъ

$$V_1 = \sum a_j^2 \int_a^b p(x) U_j^2 dx + 2 \sum a_r a_s \int_a^b p(x)\, U_r U_s dx.$$

Такъ какъ

$$\int_a^b p(x) U_j^2 dx = 1\,, \qquad \int_a^b p(x)\, U_r U_s dx = 0\,, \qquad (r \gtrless s)$$

то

$$V_1 = \sum a_j^2.$$

Неравенство (52) и послѣднее равенство даютъ

$$\frac{W}{V_1} < \frac{\sum a_j^2 k_j}{\sum a_j^2} < k_n\,,$$

каковы бы ни были постоянныя a_j.

Съ другой стороны

$$\frac{W}{V_1} < \frac{W}{AV},$$

гдѣ A, напомнимъ, есть minimum функціи $p(x)$ въ интервалѣ отъ a до b.

Слѣдовательно,

$$k_n > \frac{W}{AV}.$$

Распорядившись соотвѣтствующимъ образомъ коэффиціентами a_j, мы можемъ удовлетворить неравенству

$$\frac{W}{V} > \frac{2}{l^2}(n-1)^2$$

(см. § 10), причемъ будемъ имѣть

$$k_n > \frac{2}{l^2 A}(n-1)^2 = M(n-1)^2, \tag{53}$$

гдѣ

$$M = \frac{2}{l^2 A}$$

есть конечная, положительная, отличная отъ нуля постоянная.

Теорема доказана.

Изъ этой теоремы, какъ слѣдствіе, получается слѣдующая

Теорема XII. *Корни*

$$k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots,$$

уравненія

$$\varpi(k) = 0,$$

расположенные въ возрастающемъ порядкѣ по величинѣ, возрастаютъ безпредѣльно съ возрастаніемъ значка n, *такъ что*

$$\lim_{n=\infty} k_n = \infty.$$

13) Теорема XIII. *Если функція* f *удовлетворяетъ условію*

$$\int_a^b f U_n dx = 0,$$

то значеніе $k = k_n$ *есть простая точка функціи* V, *удовлетворяющей уравненію*

$$V'' + [kp(x) - q(x)]V + f = 0 \tag{54}$$

и условіямъ

$$\begin{aligned} V'(a)-hV(a)&=0\,,\\ V'(b)+HV(b)&=0\,. \end{aligned} \tag{55}$$

Помножимъ уравненіе (54) на U_n и интегрируемъ по x въ предѣлахъ отъ a до b.

Если

$$\int_a^b fU_n dx=0\,,$$

то

$$\int_a^b V''U_n dx+k\int_a^b p(x)VU_n dx-\int_a^b q(x)VU_n dx=0\,. \tag{56}$$

Имѣемъ

$$\int_a^b V''U_n dx=\Big|\,U_nV'-U_n'V\,\Big|_a^b+\int_a^b VU_n''dx\,,$$

или, въ силу (55),

$$\int_a^b V''U_n dx=\int_a^b VU_n''dx\,.$$

Но

$$\int_a^b VU_n''dx=\int_a^b q(x)VU_n dx-k_n\int_a^b p(x)VU_n dx\,.$$

Равенство (56) приводится къ виду

$$(k-k_n)\int_a^b p(x)VU_n dx=0\,. \tag{57}$$

Если $k=k$ есть полюсъ функціи V, то

$$V=\frac{W}{k-k_n}\,,$$

гдѣ, по предыдущему, W есть функція x и параметра k, обращающаяся при $k=k_n$ въ U_n (см. § 5).

При сдѣланномъ предположеніи равенство (57) при $k=k_n$ должно приводиться къ слѣдующему

$$\int_a^b p(x)U_n^2dx=0\,,$$

что очевидно невозможно.

Теорема доказана.

Слѣдствіе I. *Если въ уравненіи (54) функція f удовлетворяетъ условіямъ*

$$\int_a^b fU_1dx=0\,,\quad \int_a^b fU_2dx=0\,,\quad \ldots\,,\quad \int_a^b fU_ndx=0\,, \tag{58}$$

то наименьшій изъ полюсовъ функціи V не менѣе числа k_n.

Слѣдствіе II. *Если функція f удовлетворяетъ условіямъ (58), то отношеніе интеграловъ Schwarz'а W_{2s-2} и W_{2s} (см. § 4) болѣе (или равно) числа k_n^2 при всякомъ s, т. е.*

$$\lim_{s=\infty}\frac{W_{2s-2}}{W_{2s}}>k_n^2\,.$$

Это предложеніе является непосредственнымъ слѣдствіемъ теоремы XIII и теоремы III.

Слѣдствіе III. *Если функція f удовлетворяетъ условіямъ (58), то*

$$\frac{W_0}{W_2}>k_n^2\,.$$

Это неравенство непосредственно слѣдуетъ изъ предыдущаго неравенства и неравенствъ (27) 4-аго §-а.

14) Лемма IV. *Модуль функціи U_n ($n=1,\,2,\ldots$) въ интервалѣ отъ a до b менѣе числа Nk_n, гдѣ N есть конечная, неравная нулю, положительная постоянная.*

Назовемъ, какъ и прежде (§ 3), черезъ v_1 и v_2 два линейно независимыхъ частныхъ рѣшенія уравненія

$$V''-q(x)V=0\,.$$

Интегралъ уравненія

$$U''+[k_np(x)-q(x)]U=0$$

можно представить подъ видомъ

$$U=D_1v_1+D_2v_2$$

при соотвѣтствующемъ выборѣ функцій D_1 и D_2, которыя будутъ зависѣть и отъ самой функціи U.

Примѣняя къ разсматриваемому случаю методу измѣненія произвольныхъ постоянныхъ, получаемъ слѣдующія выраженія для D_1 и D_2

$$D_1 = C_1 + k_n \int_a^x \frac{p(x) v_2 U dx}{\Delta}$$

$$D_2 = C_2 - k_n \int_a^x \frac{p(x) v_1 U dx}{\Delta},$$

гдѣ C_1 и C_2 суть произвольныя постоянныя, а

$$\Delta = \mathrm{const}.$$

Такимъ образомъ получаемъ

$$U = C_1 v_1 + C_2 v_2 + r(x), \tag{59}$$

гдѣ

$$r(x) = k_n \left(v_1 \int_a^x \frac{p(x) v_2 U}{\Delta} dx - v_2 \int_a^x \frac{p(x) v_1 U}{\Delta} dx \right).$$

Функція U, опредѣляемая равенствомъ (59), будетъ удовлетворять условіямъ

$$U'(a) - h U(a) = 0,$$

$$U'(b) + H U(b) = 0,$$

если опредѣлимъ C_1 и C_2 при помощи уравненій

$$\begin{aligned} C_1[v_1'(a) - h v_1(a)] + C_2[v_2'(a) - h v_2(a)] &= 0, \\ C_1[v_1'(b) + H v_1(b)] + C_2[v_2'(b) + H v_2(b)] &= s(b), \end{aligned} \tag{60}$$

гдѣ положено для сокращенія

$$-s(b) = r'(b) + H r(b).$$

Опредѣленная такимъ образомъ функція U очевидно будетъ представлять функцію U_n.

Разумѣя подъ C_1 и C_2 постоянныя, удовлетворяющія уравненіямъ (60), получимъ

$$U_n = C_1 v_1 + C_2 v_2 + r(x).$$

Разсуждая далѣе такъ же, какъ при доказательствѣ леммы I (§ 3) получаемъ

$$|U_n| < k_n \sqrt{Q}\left(\int_a^b p^2(x)\, U_n^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} = Nk_n, \tag{61}$$

гдѣ

$$N = \sqrt{Q}\left(\int_a^b p^2(x)\, U_n^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

есть конечная, неравная нулю, положительная постоянная.

15) Обозначимъ черезъ $\varphi(x)$ произвольно заданную функцію отъ x, конечную и непрерывную въ интервалѣ отъ a до b.

Будемъ вычислять функцію $\varphi(x)$ по функціямъ $U_n (n = 1, 2, \ldots)$, полагая

$$\varphi(x) = A_1 U_1 + A_2 U_2 + \cdots + A_p U_p + R_p, \tag{62}$$

гдѣ A_n $(n = 1, 2, \ldots, p)$ суть пока неопредѣленныя постоянныя, а R_p есть функція x, конечная и непрерывная въ интервалѣ (a, b).

Характеръ этой функціи зависитъ отъ выбора коэффиціентовъ $A_n (n = 1, 2, \ldots, p)$ и числа ихъ p.

Положимъ

$$A_n = \int_a^b p(x)\varphi(x)\, U_n dx. \qquad {\scriptstyle (n=1,\, 2, \ldots,\, p)} \tag{63}$$

При такомъ выборѣ коэффиціентовъ $A_n (n = 1, 2, \ldots, p)$ функція R_p обладаетъ слѣдующими свойствами:

1) R_p *удовлетворяетъ* p *условіямъ вида*

$$\int_a^b p(x) R_p U_1 dx = 0, \quad \int_a^b p(x) R_p U_2 dx = 0, \ldots, \int_a^b p(x) R_p U_p dx = 0. \tag{64}$$

Въ этомъ легко убѣдиться, помноживъ обѣ части равенства (62) на $p(x)\, U_n$ и проинтегрировавъ полученный результатъ по x въ предѣлахъ отъ a до b.

Принявъ во вниманіе вышеуказанныя свойства функціи U_n и равенства (63), получимъ условія (64).

2) *Интегралъ*

$$S_p = \int_a^b p(x) R_p^2 dx$$

убываетъ съ возрастаніемъ значка p, *такъ что*

$$\lim_{p=\infty} S_p$$

есть конечная, положительная постоянная.

Въ самомъ дѣлѣ,

$$S_p = \int_a^b p(x)\varphi^2(x)dx + \sum A_j^2 \int_a^b p(x)U_j^2 dx - 2\sum A_j \int_a^b p(x)\varphi(x)U_j dx -$$

$$- 2\sum A_r A_s \int_a^b p(x)U_r U_s dx.$$

Такъ какъ по условію

$$\int_a^b p(x)U_j^2 dx = 1,$$

а по теоремѣ V

$$\int_a^b p(x)U_r U_s dx = 0, \qquad (r \gtrless s)$$

то

$$S_p = \int_a^b p(x)\varphi^2(x)dx + \sum A_j^2 - 2\sum A_j \int_a^b p(x)\varphi(x)U_j dx,$$

или, въ силу (63),

$$S_p = \int_a^b p(x)\varphi^2(x)dx - \sum A_j^2.$$

Замѣнивъ p черезъ $p+1$, получимъ

$$S_{p+1} = S_p - A_{p+1}^2,$$

откуда при всякомъ p

$$S_{p+1} < S_p,$$

что и требовалось доказать.

16) Теорема XIV. *Рядъ*

$$\sum_1^\infty U_n \int_a^b p(x)\varphi(x) U_n dx$$

представляетъ разложеніе въ рядъ функціи $\varphi(x)$ по функціямъ U_n въ интерваль (a, b) всякій разъ, когда этотъ рядъ сходится (хотя бы и не абсолютно и не равномърно).

Положимъ, какъ и въ предыдущемъ §-ѣ,

$$\varphi(x) = A_1 U_1 + A_2 U_2 + \ldots + A_p U_p + R_p,$$

гдѣ

$$A_n = \int_a^b p(x)\varphi(x) U_n dx. \qquad (n=1, 2, \ldots, p)$$

Будемъ искать функцію V, удовлетворяющую уравненію

$$V'' + [kp(x) - q(x)]V + f = 0,$$

гдѣ

$$f = R_p p(x),$$

при условіяхъ

$$V'(a) - hV(a) = 0,$$

$$V'(b) + HV(b) = 0.$$

Такъ какъ функція f (см. предыд. §) удовлетворяетъ условіямъ

$$\int_a^b f U_n dx = 0, \qquad (n=1, 2, \ldots, p)$$

то наименьшій изъ полюсовъ V (слѣдствіе I теоремы XIII) не менѣе числа k_p.

Функція V представляется въ видѣ ряда

$$V = V_0 + kV_1 + k^2 V_2 + \dots + k^n V_n + \cdots,$$

сходящагося для всѣхъ значеній k, модуль которыхъ не болѣе числа k_p.

Составимъ интегралы W_n Schwarz'а для функцій V_n $(n = 0, 1, 2, \dots)$.

На основаніи слѣдствія III теоремы XIII имѣемъ

$$\frac{W_0}{W_2} > k_p^2,$$

или

$$\int_a^b p(x) V_0^2 dx > k_p^2 \int_a^b p(x) V_1^2 dx. \tag{65}$$

По предыдущему (см. лемму I)

$$V_0^2 < Q \int_a^b f^2 dx < Q_1 \int_a^b p(x) R_p^2 dx = QBS_p.$$

Отсюда

$$\int_a^b p(x) V_0^2 dx < QBS_p \int_a^b p(x) dx = Q_2 S_p, \tag{66}$$

гдѣ

$$Q_2 = QB \int_a^b p(x) dx$$

есть конечная, неравная нулю, положительная постоянная.

Неравенства (65) и (66) даютъ

$$S_p > \frac{k_p^2}{Q_2} \int_a^b p(x) V_1^2 dx > \frac{k_p^2}{Q_2} B \int_a^b V_1^2 dx = k_p^2 L \int_a^b V_1^2 dx, \tag{67}$$

гдѣ

$$L = \frac{B}{Q_2}.$$

Неравенство (67) справедливо при всякомъ p.

Допустимъ, что рядъ

$$\sum_1^\infty U_n \int_a^b p(x)\varphi(x)U_n dx$$

есть рядъ сходящійся.

Будемъ увеличивать p до безконечности. Функція R_p будетъ стремиться къ нѣкоторой опредѣленной функціи R, конечной и непрерывной въ интервалѣ (a, b).

Такъ какъ при этомъ S_p стремится къ конечной постоянной, то въ предѣлѣ (при $p=\infty$) должно имѣть [на основаніи неравенства (67)]

$$\lim_{p=\infty} \int_a^b V_1^2 dx = 0\,,$$

ибо k_p стремится къ безконечности при безпредѣльномъ возрастаніи p (теорема XII).

Слѣдовательно,

$$\lim_{p=\infty} V_1 = 0\,.$$

Функція V должна приводиться къ одному члену

$$\lim_{p=\infty} V_0\,,$$

не зависящему отъ параметра k.

Это возможно только въ томъ случаѣ, если

$$\lim_{p=\infty} V_0 = 0$$

и

$$R = 0\,.$$

Положимъ

$$T_p = \sum_1^p U_n \int_a^b p(x)\varphi(x)U_n dx\,.$$

Въ силу вышесказаннаго

$$R = \lim R_p = \lim\,[\varphi(x) - T_p] = 0\,,$$

т. е.

$$\varphi(x)=\sum_1^\infty U_n\int_a^b p(x)\varphi(x)U_n dx.$$

Рядъ правой части этого равенства представляетъ разложеніе функціи $\varphi(x)$ въ рядъ по функціямъ U_n всякій разъ, когда онъ сходится. Теорема доказана.

17) Теорема XV. *Рядъ*

$$\sum_1^\infty U_n\int_a^b p(x)\varphi(x)U_n dx$$

сходится абсолютно и равномѣрно въ интервалѣ (a, b), *если функція* $\varphi(x)$, *конечная и непрерывная въ этомъ интервалѣ вмѣстѣ со своими производными первыхъ четырехъ порядковъ, удовлетворяетъ условіямъ*

$$\begin{aligned}&\varphi'(a)-h\varphi(a)=0,\\&\varphi'(b)+H\varphi(b)=0,\end{aligned}\tag{68}$$

$$\begin{aligned}&\psi'(a)-h\psi(a)=0,\\&\psi'(b)+H\psi(b)=0,\end{aligned}\tag{69}$$

гдѣ

$$\psi(x)=\frac{\varphi(x)q(x)-\varphi''(x)}{p(x)}.$$

По леммѣ IV имѣемъ

$$|U_n|<k_nN,\tag{70}$$

гдѣ N есть конечная, положительная постоянная.

Далѣе,

$$\int_a^b p(x)\varphi(x)U_n dx=\frac{1}{k_n}\left(\int_a^b q(x)\varphi(x)U_n dx-\int_a^b\varphi(x)U_n''dx\right),$$

$$\int_a^b\varphi(x)U_n''dx=\varphi(x)U_n'\Big|_a^b-\int_a^b\varphi'(x)U_n'dx,$$

$$\int_a^b\varphi'(x)U_n'dx=\varphi'(x)U_n\Big|_a^b-\int_a^b\varphi''(x)U_n dx.$$

Слѣдовательно,

$$\int_a^b \varphi(x) U_n'' dx = \int_a^b \varphi''(x) U_n dx,$$

ибо, въ силу условій (68),

$$\left| \varphi(x) U_n' - \varphi'(x) U_n \right|_a^b = 0.$$

Такимъ образомъ

$$\int_a^b p(x)\varphi(x) U_n dx = \frac{1}{k_n} \int_a^b \psi_1(x) U_n dx, \tag{71}$$

гдѣ

$$\psi_1(x) = q(x)\varphi(x) - \varphi''(x).$$

Подобно предыдущему получаемъ

$$\int_a^b \psi_1(x) U_n dx = \frac{1}{k_n} \left(\int_a^b \frac{\psi_1(x) q(x)}{p(x)} U_n \, dx - \int_a^b \frac{\psi_1(x)}{p(x)} U_n'' dx \right).$$

Положимъ

$$\frac{\psi_1(x)}{p(x)} = \psi(x).$$

Имѣемъ

$$\int_a^b \psi(x) U_n'' dx = \left| \psi(x) U_n' - \psi'(x) U_n \right|_a^b + \int_a^b \psi''(x) U_n dx.$$

Если функція $\varphi(x)$ удовлетворяетъ условіямъ (69), то

$$\left| \psi(x) U_n' - \psi'(x) U_n \right|_a^b = 0$$

и

$$\int_a^b \psi(x) U_n'' dx = \int_a^b \psi''(x) U_n dx.$$

Слѣдовательно,

$$\int_a^b \psi_1(x)U_n dx = \frac{1}{k_n}\int_a^b \vartheta(x)p(x)U_n dx\,, \tag{72}$$

гдѣ положено для сокращенія письма

$$\vartheta(x) = \frac{\psi_1(x)q(x)}{p^2(x)} - \frac{\psi''(x)}{p(x)}.$$

Сопоставляя равенства (71) и (72), получаемъ

$$A_n = \int_a^b p(x)\varphi(x)U_n dx = \frac{1}{k_n^2}\int_a^b \vartheta(x)p(x)U_n dx\,,$$

гдѣ $\vartheta(x)$ есть конечная, непрерывная въ интервалѣ (a, b) функція отъ x.

Положимъ

$$\int_a^b \vartheta^2(x)p(x)dx = P,$$

гдѣ P есть конечная, положительная постоянная.

Такъ какъ [нерав. (18)]

$$\left(\int_a^b \vartheta(x)p(x)U_n dx\right)^2 < \int_a^b \vartheta^2(x)p(x)dx \,.\int_a^b p(x)U_n^2 dx = P\,,$$

то

$$|A_n| < \frac{P}{k_n^2}.$$

Принявъ во вниманіе это неравенство и (70), заключаемъ, что

$$|A_n U_n| < \frac{N.P}{k_n} = \frac{R}{k_n},$$

гдѣ R есть конечная, отличная отъ нуля, положительная постоянная.

Такъ какъ по теоремѣ XI

$$k_n > M(n-1)^2,$$

то

$$|A_n U_n| < \frac{S}{(n-1)^2},$$

гдѣ

$$S = \frac{R}{M}$$

есть конечная, неравная нулю, положительная постоянная.

Модуль каждаго члена ряда

$$\sum_{1}^{\infty} A_n U_n \tag{73}$$

меньше соотвѣтствующаго члена ряда

$$S\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots\right).$$

Такъ какъ это есть рядъ сходящійся, то и рядъ (73) сходится въ интервалѣ отъ a до b и притомъ абсолютно и равномѣрно, что и требовалось доказать.

18) Резюмируя все вышеизложенное, получаемъ слѣдующую теорему:

Теорема XVI. *Всякая функція $\varphi(x)$, конечная и непрерывная вмѣстѣ со своими производными первыхъ четырехъ порядковъ въ какомъ либо интервалѣ (a, b) и удовлетворяющая на границахъ этого интервала (при $x=a$ и $x=b$) условіямъ*

$$\begin{aligned} \varphi'(a) - h\varphi(a) &= 0\,, \\ \varphi'(b) + H\varphi(b) &= 0 \\ \psi'(a) - h\psi(a) &= 0\,, \\ \psi'(b) + H\psi(b) &= 0\,, \end{aligned} \tag{74}$$

гдѣ

$$\psi(x) = \frac{\varphi(x)q(x) - \varphi''(x)}{p(x)}$$

а h и H суть положительныя постоянныя, разлагается въ интервалѣ (a, b) въ абсолютно и равномѣрно сходящійся рядъ

$$\varphi(x) = \sum_{1}^{\infty} U_n \int_a^b p(x)\varphi(x) U_n dx\,, \tag{75}$$

гдѣ U_n $(n=1, 2, \ldots)$ суть непрерывныя и конечныя функціи x, удовлетворяющія уравненіямъ

$$U_n'' + [k_n p(x) - q(x)]U_n = 0 \qquad (n=1,2,\ldots)$$

*

и условіямъ

$$U'_n - hU_n = 0 \qquad \text{при } x = a,$$

$$U'_n + HU_n = 0 \qquad \text{при } x = b,$$

$p(x)$ есть положительная, не обращающаяся въ нуль въ интервалѣ (a, b), функція x, $q(x)$ также положительная функція x въ разсматриваемомъ интервалѣ, а

$$k_n \qquad (n=1, 2, \ldots)$$

суть положительныя числа, служащія корнями нѣкотораго трансцендентнаго уравненія.

Припомнимъ соображенія и обозначенія §-а 1-аго и предположимъ, что $f(\xi)$ по замѣнѣ ξ его выраженіемъ черезъ x обращается въ функцію $\varphi(x)$, удовлетворяющую условіямъ только что приведенной теоремы.

На основаніи послѣдней теоремы и разсужденій §-а 1-аго мы можемъ утверждать, что задача объ охлажденіи неоднороднаго твердаго стержня разрѣшается вполнѣ во всѣхъ случаяхъ, когда температура стержня въ начальный моментъ времени обращается въ функцію $\varphi(x)$, удовлетворяющую условіямъ послѣдней теоремы.

Пользуясь же теоремой XIV, можемъ сказать, что вообще для полнаго рѣшенія аналитической задачи объ охлажденіи неоднороднаго твердаго стержня при произвольно заданной функціи $\varphi(x)$ [не удовлетворяющей условіямъ (74)], въ которую должна обращаться температура стержня въ начальный моментъ времени (при $t = 0$), достаточно доказать сходимость ряда (75), не прибѣгая къ непосредственному суммированію его.

Въ заключеніе нашихъ изслѣдованій считаемъ не лишнимъ сдѣлать слѣдующее замѣчаніе: положимъ, что намъ надо рѣшить физическую задачу объ охлажденіи какого либо твердаго стержня, зная, что въ начальный моментъ времени его температура обращается въ нѣкоторую функцію $\varphi(x)$, не удовлетворяющую условіямъ (74).

Можно подыскать такую функцію $\varphi_1(x)$, что для всѣхъ значеній x въ промежуткѣ отъ a до b значенія $\varphi_1(x)$ будутъ сколь угодно мало отличаться отъ значеній $\varphi(x)$, а для $x = a$ и $x = b$ функція $\varphi_1(x)$ будетъ удовлетворять условіямъ (74).

Рѣшимъ задачу объ охлажденіи стержня при условіи

$$U = \varphi_1(x) \text{ при } t = 0,$$

гдѣ U есть температура стержня.

По предыдущему, задача можетъ быть разрѣшена вполнѣ.

Получимъ функцію U_1, достаточно мало отклоняющуюся для всѣхъ значеній x между a и b и всѣхъ значеній t отъ искомой функціи, удовлетворяющей условію

$$U = \varphi(x) \text{ при } t = 0.$$

Для цѣлей практической физики такое рѣшеніе будетъ вполнѣ достаточнымъ, ибо распредѣленіе температуры по длинѣ стержня (за исключеніемъ его концовъ) и для всѣхъ моментовъ времени, даваемое функціей U_1, будетъ весьма мало отличаться отъ дѣйствительнаго.

О присоединенныхъ функціяхъ третьяго рода.

(Дополненіе къ § 54 „Основаній теоріи Абелевыхъ интеграловъ".)

М. А. Тихомандрицкаго.

Означая, какъ въ указанномъ сочиненіи нашемъ, чрезъ $\psi(\overset{m-1}{x}, \overset{n-1}{y})$ присоединенную функцію, слѣд. функцію опредѣленную согласно условіямъ § 44 *), и полагая $x = \frac{1}{\bar{x}}$, $y = \frac{1}{\bar{y}}$, мы будемъ имѣть:

$$\frac{\psi(\overset{m-1}{x}, \overset{n-1}{y})\dfrac{dx}{dt}}{(ax+by+c)\dfrac{\partial F(x, y)}{\partial y}} = \frac{\psi_1(\overset{m-1}{\bar{x}}, \overset{n-1}{\bar{y}})\dfrac{d\bar{x}}{dt}}{(a\bar{y}+b\bar{x}+c\bar{x}\bar{y})F_3(\bar{x}, \bar{y})}, \quad \ldots \quad (1)$$

гдѣ

$$\left.\begin{aligned} F_3(\bar{x}, \bar{y}) &= \bar{x}^m \bar{y}^{n-2} \frac{\partial F\left(\dfrac{1}{\bar{x}}, \dfrac{1}{\bar{y}}\right)}{\partial\left(\dfrac{1}{\bar{y}}\right)} = \\ &= -(\bar{a}_1 + 2\bar{a}_2\bar{y} + 3\bar{a}_3\bar{y}^2 + \ldots + n\bar{a}_n\bar{y}^{n-1}). \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (2)$$

---

*) Гдѣ, кстати замѣтимъ, въ формулахъ (4), (5) и (6) на стр. 74 и 75 должны быть зачеркнуты соотвѣтственно множители $\bar{y}^{\nu-(m-2)}$, $\bar{x}^{\mu-(m-2)}$ и $\bar{x}^{\mu-(m-2)}.\bar{y}^{\nu-(m-2)}$, ошибочно удержанные при перепискѣ. Эта описка, незамѣченная къ сожалѣнію во время, повліяла на разсужденія въ концѣ стр. 82, гдѣ должно зачеркнуть въ строчкѣ 9 снизу слова: „умноженнаго на $\bar{y}^{\nu-(n-2)}$", въ формулѣ (10) члены: $+(\nu-n+2)q$, и въ строчкахъ 4-ой и 3-ей снизу слова: „передвинутаго параллельно самому себѣ на $(\nu-n+2)q$ дѣленій оси $O\alpha$, смотря по знаку, въ ту или другую сторону".

Для $\bar{x}=0$, $\bar{y}=0$ по условіямъ присоединенности одного порядка безконечно-малости съ этимъ выраженіемъ (2) будетъ и числитель правой части (1), такъ что все выраженіе (1) вообще будетъ $=\infty$; если же подчинить функцію $\psi(\overset{m-1}{x}, \overset{n-1}{y})$ еще условіямъ § 54, именно обращаться въ нуль для всѣхъ, за исключеніемъ двухъ, рѣшеній пары уравненій:

$$F(\overset{m}{x}, \overset{n}{y})=0, \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

$$ax+by+c=0 \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

то выраженіе (1) будетъ вообще оставаться конечнымъ при $\bar{x}=0$, $\bar{y}=0$. Въ самомъ дѣлѣ, безконечныя значенія y, опредѣляемаго въ функціи x основнымъ уравненіемъ (3), имѣютъ мѣсто для значеній x, удовлетворяющихъ уравненію

$$a_0=0, \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

гдѣ a_0 коэффиціентъ при наивысшей степени y въ уравненіи (3). Если степень этого уравненія $=m$, то всѣ точки x, гдѣ $y=\infty$, будутъ лежать въ конечномъ, и условія присоединенности четвертой категоріи (стр. 75) отпадаютъ; въ точкахъ же, гдѣ x конечно, а y безконечно (въ точкахъ второй категоріи), лѣвая часть (1) будетъ конечна, ибо числитель и знаменатель при $y=\infty$ будутъ каждый $=\infty^{n-1}$, какъ то легко видѣть, и какъ то объяснено на стр. 97 нашей книги. Если же степень уравненія (5) будетъ $m'<m$, то $m-m'$ корней его удалятся въ безконечность, условія четвертой категоріи (стр. 75 нашей книги) будутъ имѣть мѣсто, и преобразованіе (1) необходимо. Но въ этомъ случаѣ удалится въ безконечность и часть корней уравненія

$$F\left(\overset{m}{x}, -\overset{n}{\frac{ax+c}{b}}\right)=0, \ldots\ldots\ldots (6)$$

получаемаго чрезъ исключеніе y изъ (3) и (4), ибо степень этого уравненія будетъ не выше $m+n-1$, такъ какъ члена съ $x^m y^n$ въ этомъ случаѣ не будетъ въ уравненіи (5).

Но какъ уравненіе

$$\psi\left(\overset{m-1}{x}, -\overset{n-1}{\frac{ax+c}{b}}\right)=0, \ldots\ldots\ldots (7)$$

получаемое чрезъ исключеніе y изъ (4) и

$$\psi(\overset{m-1}{x}, \overset{n-1}{y})=0, \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

должно имѣть всѣ корни общіе съ уравненіемъ (6), за исключеніемъ $x=\xi$ и $x=\eta$, то, если ξ и η величины конечныя, безконечные корни уравненія (6) будутъ также корнями и уравненія (7); т. е. часть нулей функціи $\psi(\overset{m-1}{x}, \overset{n-1}{y})$, удалится въ безконечность, или, выражаясь геометрически, часть тѣхъ изъ $m+n-2$ точекъ пересѣченія кривой (3) съ прямою (4), чрезъ которыя должна проходить кривая (8) по условіямъ § 54, удаляется въ безконечность. Такимъ образомъ, въ силу этихъ дополнительныхъ требованій, которымъ мы подчинили функцію $\psi(\overset{m-1}{x}, \overset{n-1}{y})$ въ § 54, выраженіе $\psi_1(\overset{m-1}{\overline{x}}, \overset{n-1}{\overline{y}})$ въ правой части (1) при $\overline{x}$ и $\overline{y}$ безконечно-малыхъ будетъ порядка безконечно-малости по крайней мѣрѣ на единицу высшаго того, который вытекаетъ для нея изъ однихъ условій присоединенности четвертой категоріи, и слѣдовательно правая часть выраженія (1) будетъ конечная величина.

2. Это какъ разъ имѣетъ мѣсто въ случаѣ гиперэллиптическаго алгебраическаго образа, опредѣляемаго уравненіемъ

$$F(\overset{2\rho-1}{x}, \overset{2}{y}) = y^2 - R(\overset{2\rho+1}{x}) = 0 \, . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Здѣсь $m=2\rho+1$, $n=2$; но какъ $a_0=1$, то всѣ безконечности функціи y, опредѣляемой этимъ уравненіемъ, удаляются въ безконечность. Условія присоединенности, какъ нетрудно убѣдиться, получаются только отъ мѣстъ четвертой категоріи алгебраическаго образа (1), т. е. гдѣ $x=\infty$ и $y=\infty$. Функція перваго рода $\varphi(\overset{m-2}{x}, \overset{n-2}{y})$ принимаетъ теперь видъ

$$\varphi(\overset{2\rho-1}{x}, \overset{0}{y}) = \theta(\overset{2\rho-1}{x}) \, ; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

гдѣ

$$\theta(\overset{2\rho-1}{x}) = \lambda_0 x^{2\rho-1} + \lambda_1 x^{2\rho-2} + \ldots + \lambda_{2\rho-2} x + \lambda_{2\rho-1} \, ; \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

а функція третьяго рода $\psi(\overset{m-1}{x}, \overset{n-1}{y})$ такой

$$\psi(\overset{2\rho}{x}, \overset{1}{y}) = \theta_0(\overset{2\rho}{x}) y + \theta_1(\overset{2\rho}{x}) \, , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

гдѣ

$$\theta_0(\overset{2\rho}{x}) = \alpha_0 x^{2\rho} + \alpha_1 x^{2\rho-1} + \ldots + \alpha_{2\rho-1} x + \alpha_{2\rho} \, , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

$$\theta_1(\overset{2\rho}{x}) = \beta_0 x^{2\rho} + \beta_1 x^{2\rho-1} + \ldots + \beta_{2\rho-1} x + \beta_{2\rho} \, ; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

коэффиціенты λ нужно подчинить только условіямъ присоединенности, коэффиціенты α и β сверхъ того еще условіямъ прохожденія кривой $\psi=0$ чрезъ всѣ точки пересѣченія кривой (1) съ прямою

$$ay+bx+c=0\,, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

за исключеніемъ $(\xi\,,\,y_\xi)$ и $(\eta\,,\,y_\eta)$.

Чтобы получить условія присоединенности, пребразуемъ основное уравненіе (1) чрезъ подстановку $x=\frac{1}{\overline{x}}$ и $y=\frac{1}{\overline{y}}$, что приводитъ насъ къ такому:

$$\overline{x}^{2\rho+1}-\overline{y}^2\overline{R}(\overset{2\rho+1}{\overline{x}})=0\,, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

гдѣ

$$\overline{R}(\overset{2\rho+1}{\overline{x}})=\overline{x}^{2\rho+1}R\left(\frac{1}{\overline{x}}\right). \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Если A коэффиціентъ старшаго члена въ $R(x)$, то главная часть значенія $\overline{y}$ опредѣлится изъ уравненія

$$\overline{x}^{2\rho+1}-\overline{y}^2A=0\,. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

и будетъ:

$$\overline{y}=\pm\frac{1}{\sqrt{A}}\,\overline{x}^{\frac{2\rho+1}{2}}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Полагая

$$\overline{x}=t^2\,, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

будемъ имѣть:

$$\frac{d\overline{x}}{dt}=2t\,, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

$$\overline{y}=\pm\frac{1}{\sqrt{A}}\,t^{2\rho+1}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

Главная часть значенія функціи

$$F_3(\overline{x}\,,\,\overline{y})=-\overline{y}\overline{R}(\overset{2\rho+1}{\overline{x}}) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

будетъ теперь

$$\mp 2\sqrt{A}\,t^{2\rho+1}\,, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

и слѣдовательно главная часть значенія частнаго

$$F_3(\bar{x}, \bar{y}) : \frac{d\bar{x}}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

будетъ

$$\mp\sqrt{A}\,t^{2\varrho}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

что при t безконечно-маломъ представляетъ безконечно-малую величину порядка 2ϱ. Того-же порядка должна быть функція

$$\left.\begin{aligned} \bar{\varphi}(\overset{2\varrho-1}{\bar{x}}, \overset{0}{\bar{y}}) &= \bar{x}^{2\varrho-1}\bar{\theta}\left(\overset{2\varrho-1}{\frac{1}{\bar{x}}}\right) = \lambda_0 + \lambda_1\bar{x} + \lambda_2\bar{x}^2 + \ldots + \lambda_{2\varrho-1}\bar{x}^{2\varrho-1} = \\ &= \lambda_0 + \lambda_1 t^2 + \lambda_2 t^4 + \ldots + \lambda_{2\varrho-1}t^{2(2\varrho-1)}; \end{aligned}\right\} . \quad (19)$$

откуда слѣдуетъ, что должно быть

$$\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_{\varrho-1} = 0\,, \quad \ldots\ldots \quad (20)$$

и слѣдовательно

$$\varphi(\overset{2\varrho-1}{x}, \overset{0}{y}) = \theta(\overset{2\varrho-1}{x}) = \lambda_\varrho x^{\varrho-1} + \lambda_{\varrho+1}x^{\varrho-2} + \ldots + \lambda_{2\varrho-1}\,, \quad \ldots \quad (21)$$

т. е. должна быть полиномомъ степени $\varrho - 1$ съ произвольными коэффиціентами.

3. Переходя къ функціямъ третьяго рода, замѣчаемъ, что уравненіе

$$\left(-\frac{ax+c}{b}\right)^2 - R(\overset{2\varrho+1}{x}) = 0\,, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

будучи только степени $2\varrho+1$, а не $2\varrho+3$, (ибо $m+n = 2\varrho+1+2 = 2\varrho+3$), будетъ имѣть два корня въ безконечности. Слѣдовательно, если ξ и η какія либо два конечные корня этого уравненія, функція (3) должна имѣть два нуля въ безконечности, и слѣдовательно величина функціи

$$\bar{\psi}(\overset{2\varrho}{\bar{x}}, \overset{1}{\bar{y}}) = \bar{x}^{2\varrho}\bar{y}\,\psi\left(\overset{2\varrho}{\frac{1}{\bar{x}}}, \overset{1}{\frac{1}{\bar{y}}}\right) = \bar{\theta}_0(\overset{2\varrho}{\bar{x}}) + \bar{\theta}_1(\overset{2\varrho}{\bar{x}})\bar{y}\,, \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

гдѣ

$$\bar{\theta}_0(\overset{2\varrho}{\bar{x}}) = \alpha_0 + \alpha_1\bar{x} + \alpha_2\bar{x}^2 + \ldots + \alpha_{2\varrho}\bar{x}^{2\varrho} = \alpha_0 + \alpha_1 t^2 + \alpha_2 t^4 + \ldots + \alpha_{2\varrho}t^{4\varrho} \; . \; (3)$$

и

$$\bar{\theta}_1(\overset{2\varrho}{\bar{x}}) = \beta_0 + \beta_1\bar{x} + \beta_2\bar{x}^2 + \ldots + \beta_{2\varrho}\bar{x}^{2\varrho} = \beta_0 + \beta_1 t^2 + \beta_2 t^4 + \ldots + \beta_{2\varrho}t^{4\varrho}\,, . (4)$$

должна быть порядка на двѣ единицы высшаго, чѣмъ порядокъ величины (18). Отсюда слѣдуетъ въ виду (14) пред. §, что должно быть

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{\rho-1} = \alpha_\rho = \beta_0 = 0 \,. \;.\;.\;.\;.\;. \quad (5)$$

Поэтому будетъ

$$\psi(\overset{2\rho}{x},\, \overset{1}{y}) = \theta_0(\overset{\rho-1}{x})\, y + \theta_1(\overset{2\rho-1}{x}) \,. \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; \quad (6)$$

Остальные коэффиціенты функцій $\theta_0(\overset{\rho-1}{x})$ и $\theta_1(\overset{2\rho-1}{x})$, опредѣлятся изъ условія, что должно быть тождественно

$$\theta_0(\overset{\rho-1}{x})\left(-\frac{ax+c}{b}\right) + \theta_1(\overset{2\rho-1}{x}) = C\,\frac{\left(-\dfrac{ax+c}{b}\right)^2 - R(\overset{2\rho+1}{x})}{(x-\xi)(x-\eta)} \,.\;.\;.\; \quad (7)$$

4. Можно однако и не рѣшая уравненій, къ которымъ приводитъ это требованіе, вывести изъ предыдущаго Римановскую форму функціи $\psi(\overset{2\rho}{x},\, \overset{1}{y})$.

Полагая, для краткости

$$Y = -\frac{ax+c}{b}, \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; \quad (1)$$

и внося y^2 вмѣсто $R(\overset{2\rho+1}{x})$ по (1) § 2, можно (7) предъидущаго § такъ написать:

$$0 = -\theta_0(\overset{\rho-1}{x})\, Y - \theta_1(\overset{2\rho-1}{x}) + C\,\frac{Y^2 - y^2}{(x-\xi)(x-\eta)}; \;.\;.\;.\;.\;. \quad (2)$$

придавая это къ (6) того же §, будемъ имѣть:

$$\psi(\overset{2\rho}{x},\, \overset{1}{y}) = \theta_0(\overset{\rho-1}{x})(y - Y) + C\,\frac{Y^2 - y^2}{(x-\xi)(x-\eta)} \,. \;.\;.\; \quad (3)$$

Но, въ силу (1) мы имѣемъ тождество:

$$ax + by + c = b(y - Y); \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; \quad (4)$$

раздѣляя (3) на (4), будемъ имѣть:

$$\frac{\psi(\overset{2\rho}{x},\, \overset{1}{y})}{ax+by+c} = \frac{1}{b}\,\theta_0(\overset{\rho-1}{x}) - \frac{C}{b}\,\frac{y+Y}{(x-\xi)(x-\eta)} \,.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (5)$$

Второй членъ можно такъ преобразовать: изъ уравненія прямой, проходящей чрезъ точки

$$(\xi\,,\ y_\xi = \sqrt{R(\xi)}) \quad \text{и} \quad (\eta\,,\ y_\eta = \sqrt{R(\eta)})\,, \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

мы имѣемъ

$$Y = \frac{y_\eta - y_\xi}{\eta - \xi}(x - \xi) + y_\xi\,; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

слѣдовательно будетъ

$$\left.\begin{aligned} y + Y = y + y_\xi + \frac{y_\eta - y_\xi}{\eta - \xi}(x - \xi) = \\ = \frac{(y + y_\xi)(\eta - x + x - \xi) + (y_\eta - y_\xi)(x - \xi)}{\eta - \xi} = \\ = \frac{(y + y_\eta)(x - \xi) - (y + y_\xi)(x - \eta)}{\eta - \xi}\,, \end{aligned}\right\} \ldots\ldots \quad (8)$$

и потому

$$\frac{y + Y}{(x - \xi)(x - \eta)} = \frac{1}{\xi - \eta}\left(\frac{y + y_\xi}{x - \xi} - \frac{y + y_\eta}{x - \eta}\right). \ldots\ldots \quad (9)$$

Внося это въ (5) и принимая тамъ, согласно съ (23) § 55 нашей книги'

$$C = b(\xi - \eta)\,, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

мы будемъ имѣть окончательно:

$$\frac{\psi(\overset{2\rho}{x}\,,\ \overset{1}{y})}{ax + by + c} = -\left(\frac{y + y_\xi}{x - \xi} - \frac{y + y_\eta}{x - \eta}\right) + \theta(\overset{\rho-1}{x})\,, \quad \ldots \quad (11)$$

гдѣ вмѣсто $\frac{1}{b}\theta_0(\overset{\rho-1}{x})$ мы написали просто $\theta(\overset{\rho-1}{x})$, сливая множитель $\frac{1}{b}$ съ коэффиціентами полинома $\theta_0(\overset{\rho-1}{x})$. Это очевидно присоединенная функція перваго рода. Отнимая ее отъ обѣихъ частей, увидимъ, что первый членъ представляетъ, какъ и лѣвая часть, присоединенную функцію третьяго рода. Внося вмѣсто y, y_ξ и y, y_η ихъ значенія, мы будемъ имѣть присоединенную функцію третьяго рода

$$\frac{\sqrt{R(x)} + \sqrt{R(\xi)}}{x - \xi} - \frac{\sqrt{R(x)} + \sqrt{R(\eta)}}{x - \eta} \quad \ldots\ldots \quad (12)$$

входящую въ Римановскій интегралъ третьяго рода *).

---

*) См. формулу (6) на стр. 8 моего „Обращенія гиперэллиптическихъ интеграловъ". Харьковъ, 1885 г.

Примѣчаніе. Если бы было $\eta = \infty$, то тогда порядокъ $\psi_1(\overset{2\rho}{x}, \overset{1}{y})$ былъ бы только на единицу выше порядка величины (18) § 2, и слѣдовательно условіе $\alpha_\rho = 0$ слѣдовало бы выкинуть изъ ряда (5) § 3; но мы не находимъ нужнымъ останавливаться долѣе на этомъ. Подробнѣе объ этомъ интегралѣ изложено въ сочиненіи Appel'я и Goursat: Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales.

ПОПРАВКА. На стр. 95 нашего сочиненія слѣдуетъ въ строкѣ 9, послѣ словъ „по (1)" приписать: § 47; слѣдующія за симъ двѣ строчки замѣнить такими: „$p+m+n$; изъ этихъ уравненій $m+n-1$ коэффиціентовъ опредѣлятся функціями C и остальныхъ p".

Объ одномъ вопросѣ, касающемся линейныхъ дифференціальныхъ уравненій второго порядка съ періодическими коэффиціентами.

А. М. Ляпунова.

1. Мы разсматриваемъ здѣсь дифференціальныя уравненія вида

$$\frac{d^2x}{ds^2}+px=0, \tag{1}$$

въ предположеніи, что p есть извѣстная періодическая функція вещественнаго перемѣннаго s, опредѣленная и непрерывная для всѣхъ его значеній; при чемъ исключительно останавливаемся на соображеніяхъ, касающихся рѣшенія слѣдующаго важнаго въ извѣстныхъ случаяхъ вопроса:

Дана функція p; требуется узнать, могутъ ли быть назначаемы, при неограниченной измѣняемости s, какіе-либо высшіе предѣлы для модуля функціи x и ея производной $\frac{dx}{ds}$ во всякомъ рѣшеніи уравненія (1)?

Извѣстная теорія линейныхъ дифференціальныхъ уравненій съ періодическими коэффиціентами позволяетъ заключить, что рѣшеніе этого вопроса зависитъ главнымъ образомъ отъ свойствъ одного постояннаго, играющаго весьма важную роль въ теоріи разсматриваемыхъ уравненій. Постоянное это мы можемъ опредѣлить формулою

$$A=\frac{1}{2}[f(\sigma)+\varphi'(\sigma)],$$

разумѣя подъ σ періодъ функціи p и подъ $f(s)$, $\varphi(s)$ частныя рѣшенія уравненія (1), подчиненныя условіямъ

$$f(0)=1, \qquad f'(0)=0,$$
$$\varphi(0)=0, \qquad \varphi'(0)=1.$$

Значеніе постояннаго A для нашего вопроса обнаруживается изъ выраженія общаго интеграла уравненія (1), который при A^2 неравномъ 1 имѣетъ видъ

$$x = C_1 \varrho^{\frac{s}{\sigma}} F_1(s) + C_2 \varrho^{-\frac{s}{\sigma}} F_2(s).$$

Здѣсь

$$\varrho = A + \sqrt{A^2 - 1},$$

C_1, C_2 суть произвольныя постоянныя, а $F_1(s)$, $F_2(s)$ означаютъ нѣкоторыя періодическія функціи s съ періодомъ σ, всегда опредѣленныя и непрерывныя вмѣстѣ со своими первыми производными.

При $A^2 = 1$ выраженіе общаго интеграла можетъ быть нѣсколько инымъ и вообще въ случаѣ $A = 1$ будетъ вида

$$x = C_1 F_1(s) + C_2 [F_2(s) + \varepsilon s F_1(s)],$$

въ случаѣ-же $A = -1$ вида

$$x = C_1 e^{\frac{i\pi s}{\sigma}} F_1(s) + C_2 e^{\frac{i\pi s}{\sigma}} [F_2(s) + \varepsilon s F_1(s)].$$

Здѣсь ε означаетъ нуль или единицу, $i = \sqrt{-1}$, а C_1, C_2, $F_1(s)$, $F_2(s)$ имѣютъ прежнее значеніе.

Изъ этихъ формулъ видно, что вопросъ нашъ разрѣшается тотчасъ-же всякій разъ, когда вычислено A и величина этого постояннаго оказывается отличною какъ отъ $+1$, такъ и отъ -1. При этомъ въ случаѣ, когда A оказывается числомъ вещественнымъ, удовлетворяющимъ неравенству $A^2 < 1$, вопросъ разрѣшается въ утвердительномъ смыслѣ; во всѣхъ другихъ случаяхъ, когда A^2 не равно 1, онъ рѣшается отрицательно.

Что касается случаевъ $A = 1$ и $A = -1$, то для нихъ необходимо дополнительное изслѣдованіе, касающееся величины ε. Но на этомъ изслѣдованіи мы здѣсь не останавливаемся, такъ-какъ въ практическомъ отношеніи оно не могло-бы имѣть большого значенія, въ виду трудности обнаружить самое существованіе равенства $A^2 = 1$ при тѣхъ приближенныхъ способахъ вычисленія A, которые остаются въ нашемъ распоряженіи, когда уравненіе (1) не можетъ быть проинтегрировано въ конечномъ видѣ.

Мы будемъ далѣе предполагать, что функція p принимаетъ только вещественныя значенія. При этомъ A всегда будетъ числомъ вещественнымъ, и если случай $A^2 = 1$ оставимъ въ сторонѣ, то всѣ остальные возможные случаи приведутся къ двумъ:

1) $A^2 < 1$, когда во всякомъ рѣшеніи уравненія (1) для модулей x и $\frac{dx}{ds}$ будутъ существовать нѣкоторые высшіе предѣлы, и

2) $A^2 > 1$, когда во всякомъ рѣшеніи, отличномъ отъ очевиднаго $x = 0$, модули x и $\frac{dx}{ds}$ надлежащимъ выборомъ s могутъ быть дѣлаемы сколь угодно большими.

Эти два случая мы здѣсь и разсматриваемъ, трактуя уравненіе (1) лишь постольку, поскольку дѣло касается различныхъ свойствъ функціи p, обусловливающихъ то или другое изъ неравенствъ $A^2 < 1$ и $A^2 > 1$.

2. Такъ-какъ невозможно указать какую-либо методу, которая позволяла-бы всегда при помощи конечнаго числа дѣйствій узнавать, имѣемъ-ли мы дѣло съ однимъ изъ двухъ указанныхъ сейчасъ случаевъ, то желательно по крайней мѣрѣ знать возможно большее число признаковъ, достаточныхъ для каждаго изъ этихъ случаевъ.

Таковы два признака, указанные нами въ сочиненіи *Общая задача объ устойчивости движенія.*

На основаніи показаннаго тамъ, всякій разъ, когда функція p въ уравненіи (1) удовлетворяетъ условію

$$p \leqq 0,$$

каково-бы ни было s, и при этомъ не равна нулю постоянно, мы можемъ быть увѣрены въ существованіи неравенства

$$A > 1.$$

Такимъ образомъ условіе $p \leqq 0$ служитъ несомнѣннымъ признакомъ втораго случая.

Что касается условія

$$p \geqq 0$$

для всѣхъ значеній s, то какъ можно убѣдиться на примѣрахъ и какъ будетъ видно изъ того, что покажемъ далѣе, оно еще недостаточно для возможности какихъ-либо заключеній относительно A. Но если при этомъ условіи выполняется еще слѣдующее:

$$\sigma \int_0^\sigma p\,ds \leqq 4, \tag{2}$$

въ предположеніи, конечно, что функція p не равна нулю тожественно, мы можемъ быть увѣрены въ существованіи неравенства

$$A^2 < 1.$$

Другой признакъ того-же неравенства, при томъ-же условіи $p \geqq 0$ былъ указанъ потомъ профессоромъ Н. Е. Жуковскимъ *).

Этотъ во многихъ отношеніяхъ замѣчательный признакъ требуетъ только разысканія тѣхъ предѣловъ, между которыми измѣняется функція p.

Означая точный высшій предѣлъ этой функціи черезъ a^2, точный низшій предѣлъ ея черезъ b^2 и предполагая $a > 0$, $b \geqq 0$, мы можемъ признакъ профессора Н. Е. Жуковскаго выразить условіемъ

$$\frac{\sigma}{\pi} a \leqq E \frac{\sigma}{\pi} b + 1\,, \text{ **)} \tag{3}$$

если вообще подъ EN будемъ разумѣть, какъ это принято, наибольшее цѣлое число, непревосходящее N.

Всякій разъ, когда выполняется это условіе и функція p не приводится къ постоянному количеству, мы можемъ заключать о существованіи неравенства $A^2 < 1$.

Въ случаѣ $p = \text{const}$ условіе (3) всегда выполняется; но въ этомъ случаѣ неравенство $A^2 < 1$ можетъ переходить въ равенство $A^2 = 1$, что происходитъ всякій разъ, когда за періодъ σ принимается какая-либо цѣлая кратность числа $\dfrac{\pi}{\sqrt{p}}$.

Признакъ Н. Е. Жуковскаго, обнимая собою тѣмъ большее число случаевъ, чѣмъ (при томъ-же σ) тѣснѣе предѣлы, въ которыхъ измѣняется функція $\sqrt{p}$, и ничего не предполагая относительно низшаго предѣла этой функціи, имѣетъ въ этомъ отношеніи важное преимущество передъ нашимъ признакомъ (2), который для частнаго случая $p = \text{const}$ даетъ не болѣе, чѣмъ для общаго, и возможенъ лишь при условіи $b \leqq \dfrac{2}{\sigma}$. Но взамѣнъ того нашъ признакъ имѣетъ то преимущество, что не зависитъ отъ ширины предѣловъ функціи $\sqrt{p}$, тогда какъ признакъ Н. Е. Жуковскаго требуетъ, чтобы разность $a - b$ не превосходила числа $\dfrac{\pi}{\sigma}$.

Чтобы выводы, получаемые изъ этихъ признаковъ, сравнить на какомъ-либо примѣрѣ, разсмотримъ уравненіе

$$\frac{d^2x}{ds^2} + \lambda^2(1 - \varepsilon \sin s)x = 0\,,$$

*) Математическій Сборникъ, томъ XVI, стр. 582.

**) Какъ здѣсь, такъ и вездѣ далѣе, періодъ σ предполагается числомъ положительнымъ.

гдѣ λ и ε означаютъ нѣкоторыя вещественныя постоянныя и численная величина ε предполагается непревосходящею 1.

Нетрудно видѣть, что для этого уравненія величина A не зависитъ отъ знака ε. Мы можемъ поэтому ограничиться предположеніемъ $\varepsilon > 0$.

Въ этомъ предположеніи, разумѣя подъ λ число положительное, будемъ имѣть

$$a = \lambda\sqrt{1+\varepsilon}, \qquad b = \lambda\sqrt{1-\varepsilon},$$

и такъ какъ въ разсматриваемомъ случаѣ можно принять $\sigma = 2\pi$, то условіе (3) приведется къ виду:

$$2\lambda\sqrt{1+\varepsilon} \leqq E2\lambda\sqrt{1-\varepsilon} + 1,$$

что, полагая

$$E2\lambda\sqrt{1-\varepsilon} = n,$$

можно представить такъ:

$$\frac{n}{2\sqrt{1-\varepsilon}} \leqq \lambda \leqq \frac{n+1}{2\sqrt{1+\varepsilon}}.$$

Это условіе требуетъ, чтобы было

$$\varepsilon \leqq \frac{2n+1}{2n^2+2n+1}.$$

Подъ n здѣсь можно разумѣть какое угодно цѣлое положительное число или нуль.

Что касается нашего признака (2), то для разсматриваемаго уравненія онъ приводитъ къ условію

$$\pi\lambda \leqq 1,$$

которое, очевидно, не даетъ ничего новаго и въ сравненіи съ предыдущимъ условіемъ обнимаетъ значительно меньшее число случаевъ.

Для другого примѣра возьмемъ уравненіе

$$\frac{d^2x}{ds^2} + \lambda^2 \sin^{2n} s\, x = 0,$$

разумѣя подъ n цѣлое положительное число и подъ λ какое-либо положительное постоянное.

Такъ какъ здѣсь

$$a = \lambda, \qquad b = 0$$

и при томъ можно принять $\sigma = \pi$, то условіе (3) приводится къ слѣдующему:

$$\lambda \leqq 1;$$

условіе-же (2) даетъ

$$\lambda^2 \leqq \frac{2.4\ldots 2n}{1.3\ldots(2n-1)} \frac{4}{\pi^2}.$$

Отсюда видно, что въ случаѣ $n = 1$ признакъ Н. Е. Жуковскаго даетъ болѣе; во всѣхъ-же другихъ случаяхъ болѣе широкія заключенія выводятся изъ нашего признака.

I.

3. Указанные выше признаки неравенствъ $A^2 > 1$ и $A^2 < 1$ относятся лишь къ случаямъ, когда функція p сохраняетъ всегда одинъ и тотъ-же знакъ. Но разсматривая уравненіе (1) въ связи съ различными его преобразованіями, можно трактовать на основаніи этихъ признаковъ и случаи, когда функція p мѣняетъ знакъ въ предѣлахъ періода.

Допустимъ, что вмѣсто неизвѣстной функціи x вводится y при помощи уравненія

$$x = wy,$$

гдѣ w означаетъ нѣкоторую данную функцію перемѣннаго s.

Тогда, принимая вмѣсто s за независимое перемѣнное величину

$$t = \int_0^s \frac{ds}{w^2}, \tag{4}$$

мы преобразуемъ уравненіе (1) въ уравненіе того-же вида

$$\frac{d^2y}{dt^2} + qy = 0, \tag{5}$$

гдѣ

$$q = w^3(w'' + pw)$$

и w'' означаетъ производную $\dfrac{d^2w}{ds^2}$.

*

Разсматривая такія преобразованія, мы будемъ здѣсь предполагать, что w есть вещественная періодическая функція перемѣннаго s съ періодомъ σ, никогда не обращающаяся въ нуль и обладающая непрерывными производными w' и w''. Тогда перемѣнное t будетъ вещественнымъ, способнымъ измѣняться отъ $-\infty$ до $+\infty$, и въ силу (4) q будетъ непрерывною періодическою функціей t съ періодомъ

$$\tau = \int_0^\sigma \frac{ds}{w^2}.$$

Такимъ образомъ преобразованное уравненіе будетъ того-же характера, что и первоначальное. При томъ, если положимъ

$$B = \frac{1}{2}[F(\tau) + \Phi'(\tau)],$$

разумѣя подъ $F(t)$, $\Phi(t)$ частныя рѣшенія уравненія (5), опредѣляемыя условіями

$$F(0) = 1, \qquad F'(0) = 0,$$
$$\Phi(0) = 0, \qquad \Phi'(0) = 1,$$

то при сдѣланныхъ предположеніяхъ будетъ

$$B = A,$$

гдѣ A относится къ уравненію (1) и соотвѣтствуетъ періоду σ.

Вслѣдствіе этого всякій разъ, когда какой либо изъ извѣстныхъ признаковъ обнаруживаетъ существованіе того или другого изъ неравенствъ $A^2 < 1$, $A^2 > 1$ для уравненія (5), мы можемъ заключать о существованіи того-же неравенства и для уравненія (1).

Такимъ образомъ, исходя изъ указанныхъ выше признаковъ, можно разсматривать и случаи, въ которыхъ эти признаки при непосредственномъ примѣненіи не выполняются.

4. Чтобы на чемъ-либо остановиться, мы будемъ предполагать, что функція w всегда остается положительною.

Въ этомъ предположеніи, всякій разъ, когда функцію эту удастся подобрать такъ, чтобы для всѣхъ значеній s выполнялось условіе

$$w'' + pw \leqq 0 \tag{6}$$

(не приводящееся постоянно къ равенству), на основаніи замѣченнаго сейчасъ можно утверждать, что для уравненія (1) будетъ имѣть мѣсто неравенство $A > 1$.

Обратимъ вниманіе на одинъ способъ выбора функціи w, позволяющій иногда удовлетворить условію (6).

Разумѣя подъ k какое-либо отличное отъ нуля вещественное постоянное, при которомъ $\frac{k\sigma}{2\pi}$ не приводилось-бы къ числу цѣлому, опредѣлимъ w, какъ періодическое рѣшеніе уравненія

$$w'' + k^2 w = k^2 - p. \tag{7}$$

При сказанномъ условіи относительно k такое рѣшеніе всегда найдется и, если угодно, можетъ быть выражено формулою

$$w = 1 - \frac{1}{2k\sin\frac{k\sigma}{2}} \int_s^{\sigma+s} \cos k\left(s_1 - s - \frac{\sigma}{2}\right) p(s_1)\, ds_1$$

или, что то же самое,

$$w = 1 - \frac{1}{2k\sin\frac{k\sigma}{2}} \int_0^{\sigma} \cos k\left(s_1 - \frac{\sigma}{2}\right) p(s_1 + s)\, ds_1\,, \tag{8}$$

если функцію p, желая указать ея аргументъ s, будемъ обозначать черезъ $p(s)$.

Допустимъ теперь, что въ какомъ либо случаѣ постоянное k оказалось возможнымъ подобрать такъ, чтобы для всѣхъ значеній s выполнялись условія

$$k^2 - p \geqq 0\,, \qquad w - 1 \geqq 0. \tag{9}$$

Тогда, замѣчая, что въ силу (7)

$$w'' + pw = -(w-1)(k^2 - p)\,,$$

мы удовлетворимъ условію (6) и можемъ заключить о существованіи неравенства $A > 1$.

Формулою (8) опредѣляется періодическое рѣшеніе уравненія (7) съ періодомъ σ, и въ случаѣ, когда $\frac{k\sigma}{2\pi}$ не представляетъ числа соизмѣримаго, это есть единственное періодическое рѣшеніе этого уравненія. Но когда

$$\frac{k\sigma}{2\pi} = \frac{l}{m}, \tag{10}$$

гдѣ l и m числа цѣлыя и l не дѣлится на m, уравненіе (7) имѣетъ безчисленное множество другихъ періодическихъ рѣшеній, съ періодомъ $m\sigma$. При этомъ, отбрасывая предположеніе, что періодомъ функціи w должно служить число σ, мы могли-бы за w принять одно изъ этихъ послѣднихъ рѣшеній, и можно замѣтить, что и въ такомъ случаѣ всякій разъ, когда удалось-бы удовлетворить условіямъ (9), мы могли-бы заключить, если не о существованіи неравенства $A > 1$, то по крайней мѣрѣ о существованіи неравенства $A^2 > 1$.

Нетрудно, однако, убѣдиться, что разсмотрѣніе рѣшеній, о которыхъ идетъ рѣчь, не можетъ доставить чего либо новаго, что не могло-бы быть получено при посредствѣ выраженія (8).

Дѣйствительно, означая функцію (8) черезъ $\psi(s)$, мы получимъ всѣ рѣшенія уравненія (7) по формулѣ

$$w = \psi(s) + C\cos(ks + \alpha), \tag{11}$$

гдѣ C и α произвольныя постоянныя, и въ случаѣ, когда имѣетъ мѣсто равенство (10), всѣ эти рѣшенія будутъ періодическими съ періодомъ $m\sigma$.

Допустимъ, что между этими рѣшеніями существуетъ такое, для котораго $w - 1 \geqq 0$, каково-бы ни было s. Останавливаясь на немъ и замѣняя s на $s + j\sigma$, гдѣ j какое угодно цѣлое число, будемъ имѣть

$$\psi(s) - 1 + C\cos(ks + \alpha + jk\sigma) \geqq 0;$$

а дѣлая здѣсь послѣдовательно

$$j = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m-1$$

(число m мы предполагаемъ положительнымъ), складывая затѣмъ всѣ получаемыя такимъ путемъ неравенства и замѣчая, что при l не дѣлящемся на m

$$\sum_{j=0}^{m-1} \cos\left(ks + \alpha + 2\pi j \frac{l}{m}\right) = 0,$$

найдемъ

$$m\psi(s) - m \geqq 0.$$

Отсюда видно, что, каковы-бы ни были C и α въ формулѣ (11), условія (9) не могутъ удовлетворяться, не будучи удовлетворены при $C = 0$.

Вслѣдствіе этого и въ случаѣ $\frac{k\sigma}{2\pi}$ соизмѣримаго можно ограничиваться формулой (8).

Но это справедливо лишь въ предположеніи, что исключаются цѣлыя значенія $\frac{k\sigma}{2\pi}$. Если-же разсматриваются и послѣднія, въ тѣхъ случаяхъ, когда уравненіе (7) при извѣстныхъ цѣлыхъ значеніяхъ $\frac{k\sigma}{2\pi}$ допускаетъ періодическія рѣшенія, то желая получить все, что можетъ дать разсматриваемая метода, мы не должны ограничиваться тѣмъ выраженіемъ w, которое для такихъ значеній $\frac{k\sigma}{2\pi}$ могло-бы быть получено, какъ предѣльное, изъ формулы (8), ибо при $\frac{k\sigma}{2\pi}$ цѣломъ общее выраженіе w, какъ увидимъ, можетъ доставить иногда нѣчто новое.

5. Для примѣра возьмемъ уравненіе

$$\frac{d^2x}{ds^2} - \lambda^2 (1 - \varepsilon \sin^n s)\, x = 0\,,$$

разумѣя подъ n цѣлое положительное число и подъ λ, ε какія либо вещественныя постоянныя.

Такъ какъ въ случаѣ n четнаго при $\varepsilon < 0$ функція

$$p = -\lambda^2 (1 - \varepsilon \sin^n s)$$

всегда отрицательна и слѣдовательно въ разсматриваемомъ преобразованіи нѣтъ надобности, а въ случаѣ n нечетнаго величина A, соотвѣтствующая нашему уравненію, очевидно, не зависитъ отъ знака ε, то мы можемъ здѣсь ограничиться предположеніемъ $\varepsilon > 0$.

Въ этомъ предположеніи, для того, чтобы было $k^2 - p \geqq 0$ при всякомъ s, мы должны выбрать k согласно условію

$$k^2 + \lambda^2 - \lambda^2 \varepsilon \geqq 0\,. \tag{12}$$

Принимая затѣмъ $\sigma = 2\pi$ и предполагая, что k не есть число цѣлое, по формулѣ (8) находимъ

$$w = 1 + \frac{\lambda^2}{k^2} - \frac{\lambda^2 \varepsilon}{2k \sin k\pi} \int_0^{2\pi} \cos k(s_1 - \pi) \sin^n(s_1 + s)\, ds_1\,.$$

Вслѣдствіе этого условіе $w - 1 \geqq 0$ принимаетъ видъ

$$\frac{k\varepsilon}{2\sin k\pi} \int_0^{2\pi} \cos k(s_1 - \pi) \sin^n(s_1 + s)\, ds_1 \leqq 1 \tag{13}$$

и въ случаѣ n нечетнаго приводится къ слѣдующему:

$$\frac{k\varepsilon}{2\cos\frac{k\pi}{2}}\int_0^{\pi}\sin k\left(s_1-\frac{\pi}{2}\right)\sin^n(s_1+s)\,ds_1 \leqq 1\,,$$

въ случаѣ-же n четнаго — къ слѣдующему:

$$\frac{k\varepsilon}{2\sin\frac{k\pi}{2}}\int_0^{\pi}\cos k\left(s_1-\frac{\pi}{2}\right)\sin^n(s_1+s)\,ds_1 \leqq 1\,.$$

Не останавливаясь на изслѣдованіи этихъ условій при неопредѣленномъ n, замѣтимъ только, что, каковы-бы ни были λ и ε, число n всегда можно взять достаточно большимъ для того, чтобы надлежащимъ выборомъ k условіямъ (12) и (13) возможно было удовлетворить. Съ другой стороны, въ случаѣ n нечетнаго, каковы-бы ни были n и ε, мы всегда будемъ въ состояніи удовлетворить этимъ условіямъ, сдѣлавши λ^2 достаточно малымъ. Что касается случая n четнаго, то условіе (13) не всегда будетъ возможно и для возможности его необходимо, чтобы при данномъ n число ε было менѣе нѣкотораго предѣла, ибо въ этомъ случаѣ изъ (13), интегрированіемъ по s въ предѣлахъ отъ 0 до π выводимъ

$$\varepsilon < \frac{2.4\ldots n}{1.3\ldots(n-1)};$$

когда-же выполнено это неравенство, условію (13) всегда можно удовлетворить, дѣлая k^2 достаточно малымъ.

Число k мы предполагали дробнымъ; но ему можно здѣсь приписывать и цѣлыя неравныя нулю значенія: четныя въ случаѣ n нечетнаго и нечетныя въ случаѣ n четнаго, а также—всякія цѣлыя значенія, бóльшія n.

Переходя къ какому либо изъ такихъ значеній k, какъ къ предѣльному, мы получимъ изъ предыдущаго выраженія w нѣкоторое предѣльное выраженіе, которое означимъ $\psi(s)$. Эта функція $\psi(s)$ представитъ одно изъ періодическихъ рѣшеній уравненія (7) для разсматриваемаго цѣлаго значенія k. Всѣ другія рѣшенія того-же уравненія, которыя также будутъ періодическими, опредѣлятся формулою (11).

Согласно вышесказанному, эти рѣшенія, при составленіи условія $w-1 \geqq 0$, должны быть также принимаемы въ разсчетъ. Нужно, однако же, замѣтить, что въ разсматриваемомъ случаѣ, принимая для w выраженіе (11), мы можемъ съ самаго же начала остановиться на нѣкоторомъ опредѣленномъ предположеніи относительно α, а именно: въ случаѣ k четнаго на предположеніи $\alpha=0$, въ случаѣ k нечетнаго на предположеніи $\alpha = -\frac{\pi}{2}$.

Въ самомъ дѣлѣ, изъ условія

$$\psi(s) - 1 + C\cos(ks + \alpha) \geqq 0,$$

которое должно имѣть мѣсто при всякомъ s, замѣняя въ немъ s на $\pi - s$ и замѣчая, что

$$\psi(\pi - s) = \psi(s),$$

выводимъ

$$\psi(s) - 1 + C\cos(k\pi - ks + \alpha) \geqq 0;$$

а изъ этихъ двухъ неравенствъ слѣдуетъ

$$\psi(s) - 1 + C\cos\left(\alpha + \frac{k\pi}{2}\right)\cos\left(ks - \frac{k\pi}{2}\right) \geqq 0,$$

что въ случаѣ k четнаго приводится къ виду

$$\psi(s) - 1 + C\cos\alpha\cos ks \geqq 0,$$

а въ случаѣ k нечетнаго — къ виду

$$\psi(s) - 1 - C\sin\alpha\sin ks \geqq 0.$$

Отсюда ясно, что при k четномъ можно ограничиваться выраженіемъ

$$w = \psi(s) + C\cos ks,$$

а при k нечетномъ — выраженіемъ

$$w = \psi(s) + C\sin ks.$$

Это послѣднее выраженіе, впрочемъ, можетъ быть полезно только въ случаѣ нечетнаго n, ибо при n четномъ $\psi(s)$ будетъ четною функціей s, вслѣдствіе чего условіе

$$\psi(s) - 1 + C\sin ks \geqq 0$$

потребуетъ слѣдующаго

$$\psi(s) - 1 \geqq 0.$$

Такимъ образомъ въ случаѣ n четнаго достаточно разсматривать отдѣльно только четныя значенія k, что слѣдуетъ также и изъ показаннаго въ предыдущемъ параграфѣ, такъ какъ при n четномъ можно принимать $\sigma = \pi$.

6. Разсмотримъ случай $n=1$.

Такъ какъ въ этомъ случаѣ, когда k не есть число цѣлое,

$$w = 1 + \frac{\lambda^2}{k^2} + \frac{\lambda^2 \varepsilon}{1-k^2} \sin s,$$

то для того, чтобы удовлетворить условію $w - 1 \geqq 0$ независимо отъ s, мы должны сдѣлать или

$$\varepsilon \leqq \frac{1-k^2}{k^2}, \tag{14}$$

предполагая при этомъ $k^2 < 1$, или

$$\varepsilon \leqq \frac{k^2-1}{k^2},$$

предполагая $k^2 > 1$.

Но послѣднее предположеніе, въ которомъ ε оказывается менѣе 1, не даетъ ничего новаго, ибо при $\varepsilon < 1$ всегда $p < 0$. Что же касается предположенія $k^2 < 1$, то замѣчая, что изъ условія (14) слѣдуетъ

$$k^2 \leqq \frac{1}{1+\varepsilon},$$

и принимая въ разсчетъ (12), находимъ:

$$\varepsilon^2 \leqq 1 + \frac{1}{\lambda^2}. \tag{15}$$

Обратно, когда выполнено это условіе, всегда можно надлежащимъ выборомъ k удовлетворить (12) и (14). Поэтому условіе (15) служитъ несомнѣннымъ признакомъ неравенства $A > 1$.

Разсматривая цѣлыя значенія k и принимая при этомъ въ разсчетъ также и другія рѣшенія уравненія (7), мы найдемъ еще нѣкоторыя признаки того же неравенства.

Въ разсматриваемомъ теперь случаѣ числу k можно давать всякія цѣлыя значенія, бóльшія 1, при чемъ, согласно замѣченному въ предыдущемъ параграфѣ, можно принимать

$$w = 1 + \frac{\lambda^2}{k^2-1}\left\{\frac{k^2-1}{k^2} - \varepsilon\vartheta\left(\frac{\pi}{2}-s\right)\right\},$$

полагая

$$\vartheta\left(\frac{\pi}{2}-s\right) = \sin s - (-1)^{\frac{k}{2}} \mu \cos ks$$

въ случаѣ k четнаго и

$$\vartheta\left(\frac{\pi}{2}-s\right)=\sin s-(-1)^{\frac{k-1}{2}}\mu\sin ks$$

въ случаѣ k нечетнаго, и разумѣя подъ μ нѣкоторое постоянное.

Изъ этихъ выраженій функціи $\vartheta\left(\frac{\pi}{2}-s\right)$ для обоихъ случаевъ, k четнаго и k нечетнаго, слѣдуетъ

$$\vartheta(s)=\cos s-\mu\cos ks\,,$$

а условіе $w-1\geqq 0$ приводится къ виду

$$\varepsilon\,\vartheta(s)\leqq\frac{k^2-1}{k^2}. \tag{16}$$

Мы замѣчаемъ теперь, что это условіе въ томъ только случаѣ можетъ доставить нѣчто новое, когда функція $\vartheta(s)$ для всѣхъ значеній s остается менѣе $\frac{k^2-1}{k^2}$. Поэтому, имѣя въ виду, что

$$\vartheta(0)=1-\mu\,,$$

мы должны предполагать

$$1-\mu<\frac{k^2-1}{k^2}$$

или, что равносильно этому,

$$\mu>\frac{1}{k^2}. \tag{17}$$

Чтобы получить возможно болѣе, мы должны при томъ выбрать μ такимъ образомъ, чтобы высшій предѣлъ, котораго можетъ достигать функція $\vartheta(s)$, былъ по возможности менѣе.

Мы встрѣчаемся здѣсь, слѣдовательно, съ одною изъ тѣхъ особаго рода задачъ о minima, которыя разсматривались Чебышевымъ.

Наша задача принадлежитъ, конечно, къ числу наиболѣе простыхъ задачъ этого рода и рѣшается безъ всякихъ затрудненій, для чего нужно только идти прямымъ путемъ, указываемымъ самымъ требованіемъ задачи.

Прежде всего мы должны найти наибольшій изъ всѣхъ maxima функціи $\vartheta(s)$.

Такъ какъ $\vartheta(s)$ есть періодическая функція s съ періодомъ 2π и при томъ четная, то для этого достаточно разсматривать лишь тѣ значенія s, которыя лежатъ въ промежуткѣ отъ 0 до π.

Разсматривая этотъ промежутокъ и раздѣляя его на k слѣдующихъ

$$\left(0,\ \frac{\pi}{k}\right),\quad \left(\frac{\pi}{k},\ \frac{2\pi}{k}\right),\quad \left(\frac{2\pi}{k},\ \frac{3\pi}{k}\right),\quad \ldots,\quad \left(\frac{(k-1)\pi}{k},\ \pi\right),$$

мы замѣчаемъ, что въ каждомъ изъ послѣднихъ функція $\cos ks$ можетъ получать всѣ свойственныя ей значенія отъ -1 до $+1$. Вслѣдствіе этого мы должны заключить, что значенія s, соотвѣтствующія высшему предѣлу функціи $\vartheta(s)$, лежатъ въ первомъ промежуткѣ, въ которомъ функція $\cos s$ получаетъ бóльшія значенія, чѣмъ въ любомъ изъ слѣдующихъ.

Мы можемъ такимъ образомъ ограничиться предположеніемъ

$$0 \leqq s \leqq \frac{\pi}{k},$$

и въ этомъ предположеніи интересующія насъ значенія s должны искать въ числѣ тѣхъ, которыя удовлетворяютъ уравненію

$$k\mu \sin ks - \sin s = 0.$$

Этому уравненію мы можемъ удовлетворить, дѣлая $s=0$. Но соотвѣтствующее значеніе функціи $\vartheta(s)$ при условіи (17), которое здѣсь предполагается, есть minimum, а не maximum, ибо

$$\vartheta''(0) = k^2\mu - 1 > 0.$$

Поэтому, полагая

$$k\mu\frac{\sin ks}{\sin s} - 1 = \Phi(s),$$

мы должны обратиться къ уравненію

$$\Phi(s) = 0.$$

Такъ какъ

$$\Phi(0) = k^2\mu - 1, \qquad \Phi\left(\frac{\pi}{k}\right) = -1,$$

то уравненіе это при условіи (17) всегда имѣетъ по крайней мѣрѣ одинъ корень между 0 и $\dfrac{\pi}{k}$; а такъ какъ функція

$$\Phi'(s) = -\frac{k\mu\Psi(s)}{\sin^2 s},$$

гдѣ

$$\Psi(s) = \sin ks \cos s - k \cos ks \sin s,$$

въ этомъ промежуткѣ отрицательна, ибо

$$\Psi(0) = 0, \qquad \Psi'(s) = (k^2 - 1) \sin ks \sin s,$$

то разсматриваемое уравненіе не можетъ имѣть въ немъ болѣе одного корня.

Означая этотъ единственный между 0 и $\frac{\pi}{k}$ корень черезъ s_0, мы можемъ такимъ образомъ утверждать, что при условіи (17)

$$\vartheta(s_0) = \cos s_0 - \mu \cos ks_0$$

есть наибольшій изъ всѣхъ maxima функціи $\vartheta(s)$.

Разсматривая этотъ maximum, какъ функцію параметра μ, мы должны теперь послѣдній подобрать такъ, чтобы этотъ maximum сдѣлался возможно менѣе.

Для этого-же, замѣчая, что въ силу уравненія

$$k\mu \sin ks_0 - \sin s_0 = 0,$$

при возрастаніи μ отъ $\frac{1}{k^2}$ до ∞, s_0 постоянно возрастаетъ отъ 0 до $\frac{\pi}{k}$, и что въ силу того-же уравненія

$$\frac{d\vartheta(s_0)}{d\mu} = -\cos ks_0,$$

мы должны, очевидно, сдѣлать $s_0 = \frac{\pi}{2k}$.

Такимъ образомъ приходимъ къ заключенію, что искомое значеніе μ опредѣляется формулой

$$\mu = \frac{1}{k} \sin \frac{\pi}{2k},$$

и что соотвѣтствующій ему высшій предѣлъ функціи $\vartheta(s)$ равенъ $\cos \frac{\pi}{2k}$.

Останавливаясь на этомъ значеніи μ, обращаемся теперь къ условію (16) и выражаемъ, что оно выполняется независимо отъ s.

Такимъ путемъ проходимъ къ условію

$$\varepsilon \leqq \frac{k^2 - 1}{k^2 \cos \frac{\pi}{2k}}, \tag{18}$$

и можемъ утверждать, что всякій разъ, когда условіе это выполняется при какомъ либо цѣломъ k, бо́льшемъ 1 и удовлетворяющемъ условію (12), для уравненія

$$\frac{d^2x}{ds^2} - \lambda^2(1 - \varepsilon \sin s)\, x = 0$$

будетъ имѣть мѣсто неравенство $A > 1$.

Относительно условія (18) замѣтимъ, что вторая часть его, при возрастаніи k отъ 2 до ∞, постоянно убываетъ отъ $\frac{3}{2\sqrt{2}}$ до 1.

Поэтому разсматриваемый признакъ неравенства $A > 1$ примѣнимъ въ тѣхъ лишь случаяхъ, когда

$$\varepsilon \leqq \frac{3}{2\sqrt{2}}.$$

Что же касается этихъ случаевъ, то онъ приводитъ къ болѣе широкому заключенію, чѣмъ указанный выше признакъ (15), ибо послѣдній при $\varepsilon > 1$ требуетъ

$$\lambda^2 \leqq \frac{1}{\varepsilon^2 - 1},$$

между тѣмъ какъ разсматриваемый теперь признакъ, въ томъ-же предположеніи $\varepsilon > 1$, можетъ быть выраженъ такъ:

$$\lambda^2 \leqq \frac{k^2}{\varepsilon - 1},$$

гдѣ k наибольшее цѣлое число, удовлетворяющее условію (18).

7. Предложенное выше опредѣленіе функціи w, которая должна была удовлетворять уравненію (7) и условію $w - 1 \geqq 0$, возможно только въ случаѣ, когда интегралъ

$$\int_0^\sigma p\, ds$$

представляетъ число отрицательное, ибо изъ уравненія (7) слѣдуетъ

$$\int_0^\sigma p\, ds = -k^2 \int_0^\sigma (w-1)\, ds.$$

Но для случая, когда

$$\int_0^\sigma p\, ds > 0,$$

можно предложить аналогичное опредѣленіе w, получаемое изъ предыдущаго замѣною k^2 на $-k^2$ и позволяющее иногда сдѣлать

$$w'' + pw \geqq 0 \tag{19}$$

и слѣдовательно $q \geqq 0$ для всѣхъ значеній s.

Дѣйствительно, если подъ k будемъ разумѣть какое либо отличное отъ нуля вещественное постоянное, то уравненіе

$$w'' - k^2 w = -k^2 - p, \tag{20}$$

выводимое изъ (7) замѣною k^2 на $-k^2$, всегда будетъ допускать періодическое рѣшеніе, которое, если угодно, можно представить формулою

$$w = 1 + \frac{1}{2k}\int\limits_0^\sigma \frac{e^{-ks_1} + e^{-k(\sigma - s_1)}}{1 - e^{-k\sigma}}\, p(s_1 + s)\, ds_1. \tag{21}$$

Если-же остановимся на такомъ выборѣ функціи w, то будемъ имѣть

$$w'' + pw = (k^2 + p)(w - 1),$$

откуда видно, что всякій разъ, когда постоянное k можетъ быть выбрано такъ, чтобы при всякомъ s выполнялись условія

$$k^2 + p \geqq 0, \qquad w - 1 \geqq 0, \tag{22}$$

мы можемъ удовлетворить условію (19).

Придя такимъ образомъ къ случаю, когда функція q въ уравненіи (5) будетъ сохранять положительныя значенія, мы можемъ затѣмъ по отношенію къ этому уравненію изслѣдовать признаки неравенства $A^2 < 1$ (2) или (3).

Замѣтимъ, что разсматриваемое преобразованіе можетъ быть полезно и въ случаѣ, когда функція p остается всегда положительною. Въ этомъ случаѣ, какъ видно изъ (21), условія (22) будутъ выполняться при всякомъ k, а выборомъ этого постояннаго, отъ котораго будетъ зависѣть функція q, можно иногда распорядиться такъ, чтобы для уравненія (5) выполнялся какой-либо изъ извѣстныхъ признаковъ неравенства $A^2 < 1$, когда ни одинъ изъ нихъ не удовлетворяется для уравненія (1). Возможность такихъ случаевъ видна уже изъ того, что при разсматриваемомъ выборѣ функціи w уравненіе (1) будетъ заключаться въ уравненіи (5), получаясь изъ него, какъ предѣльный случай, соотвѣтствующій $k^2 = \infty$.

8. Чтобы дать какой нибудь примѣръ, разсмотримъ уравненіе

$$\frac{d^2x}{ds^2} + \lambda^2(1 - \varepsilon \sin s)\, x = 0,$$

разумѣя подъ λ и ε вещественныя постоянныя, которыя мы можемъ и будемъ предполагать здѣсь положительными.

Въ разсматриваемомъ случаѣ

$$p = \lambda^2 (1 - \varepsilon \sin s),$$

и уравненіе (20) даетъ

$$w = 1 + \frac{\lambda^2}{k^2} - \frac{\lambda^2 \varepsilon}{k^2 + 1} \sin s.$$

Вслѣдствіе этого, чтобы удовлетворить условіямъ (22) независимо отъ s, мы должны сдѣлать

$$k^2 + \lambda^2 (1 - \varepsilon) \geqq 0, \qquad \frac{k^2 + 1}{k^2} - \varepsilon \geqq 0.$$

При $\varepsilon \leqq 1$ эти условія всегда выполняются. Если-же $\varepsilon > 1$, они возможны только въ случаѣ, когда

$$\lambda (\varepsilon - 1) \leqq 1, \tag{23}$$

и въ этомъ случаѣ приводятся къ слѣдующимъ:

$$\frac{1}{\varepsilon - 1} \geqq k^2 \geqq \lambda^2 (\varepsilon - 1). \tag{24}$$

Предполагая эти условія и останавливаясь на указанномъ опредѣленіи w, мы сдѣлаемъ функцію

$$q = w^3 (k^2 + p)(w - 1)$$

всегда положительною.

При этомъ, полагая

$$\left.\begin{aligned} &\alpha = \frac{k^2 \lambda^2 \varepsilon}{(k^2 + 1)(k^2 + \lambda^2)}, \\ &\alpha_1 = \frac{\lambda^2 \varepsilon}{k^2 + \lambda^2}, \qquad \alpha_2 = \frac{k^2 \varepsilon}{k^2 + 1}, \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

и замѣчая, что

$$w = \frac{k^2 + \lambda^2}{k^2} (1 - \alpha \sin s),$$

$$k^2 + p = (k^2 + \lambda^2)(1 - \alpha_1 \sin s),$$

$$w - 1 = \frac{\lambda^2}{k^2} (1 - \alpha_2 \sin s),$$

будемъ имѣть

$$q = \lambda^2 \frac{(k^2+\lambda^2)^4}{k^8}(1-\alpha\sin s)^3(1-\alpha_1\sin s)(1-\alpha_2\sin s),$$

а по формулѣ

$$\tau = \int_0^\sigma \frac{ds}{w^2},$$

принимая $\sigma = 2\pi$, найдемъ

$$\tau = \frac{k^4}{(k^2+\lambda^2)^2}\int_0^{2\pi}\frac{ds}{(1-\alpha\sin s)^2} = \frac{2\pi k^4}{(k^2+\lambda^2)^2(1-\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Займемся теперь разысканіемъ условій для λ и ε, къ которымъ могутъ привести извѣстные намъ признаки неравенства $A^2 < 1$ въ примѣненіи къ уравненію (5).

9. Начинаемъ съ признака (2), который въ примѣненіи къ уравненію (5) выразится слѣдующимъ условіемъ:

$$\tau\int_0^\tau q\,dt \leqq 4$$

или, что то же самое,

$$\tau\int_0^{2\pi} q\frac{ds}{w^2} \leqq 4.$$

Въ силу предыдущихъ формулъ это условіе принимаетъ видъ

$$\frac{\pi^2\lambda^2}{2}\,\frac{2+\alpha(\alpha_1+\alpha_2)+\alpha_1\alpha_2}{(1-\alpha^2)^{\frac{3}{2}}} \leqq 1 \tag{26}$$

и заключаетъ въ себѣ такимъ образомъ при посредствѣ α, α_1, α_2 постоянное k, которымъ въ извѣстныхъ границахъ можно распоряжаться по произволу.

Наивыгоднѣйшій выборъ k, очевидно, есть тотъ, для котораго первая часть неравенства (26) дѣлается при данныхъ λ и ε возможно меньшею.

При разысканіи этого наименьшаго значенія мы примемъ вмѣсто k за перемѣнный параметръ величину α.

Замѣчая, что формулы (25) даютъ

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \varepsilon + \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda^2}\alpha, \qquad \alpha_1\alpha_2 = \varepsilon\alpha,$$

мы приведемъ первую часть неравенства (26) къ виду

$$\frac{\pi^2\lambda^2}{2}\,\frac{2 + 2\varepsilon\alpha + \frac{\lambda^2-1}{\lambda^2}\alpha^2}{(1-\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{27}$$

Нетрудно теперь видѣть, что внутри предѣловъ, которые мы здѣсь должны предполагать для α, это есть возрастающая функція α.

Дѣйствительно, величина

$$\alpha = \frac{\lambda^2\varepsilon}{k^2 + \frac{\lambda^2}{k^2} + \lambda^2 + 1}$$

никогда не превосходитъ предѣла

$$\frac{\lambda^2\varepsilon}{(1+\lambda)^2},$$

котораго достигаетъ при $k^2 = \lambda$, а при условіи

$$0 < \alpha < \frac{\lambda^2\varepsilon}{(1+\lambda)^2}$$

числитель въ формулѣ (27) есть возрастающая функція α.

Такимъ образомъ искомое наименьшее значеніе функціи (27) соотвѣтствуетъ наименьшему значенію, котораго можетъ достигнуть α.

Что же касается наименьшаго значенія α, то при $\varepsilon \leqq 1$ оно, очевидно, есть нуль, а при $\varepsilon > 1$, когда мы должны предполагать условія (24), оно соотвѣтствуетъ одному изъ предѣльныхъ значеній k^2. Но послѣднія приводятъ къ одной и той-же величинѣ

$$\alpha = \frac{\lambda^2(\varepsilon-1)}{\lambda^2(\varepsilon-1)+1}, \tag{28}$$

которая и представляетъ низшій предѣлъ α въ случаѣ $\varepsilon > 1$.

Такимъ образомъ, дѣлая $\alpha = 0$ при $\varepsilon \leqq 1$ и останавливаясь на выраженіи (28) при $\varepsilon > 1$, мы приходимъ къ слѣдующимъ достаточнымъ условіямъ неравенства $A^2 < 1$:

въ случаѣ $\varepsilon \leqq 1$

$$\pi\lambda \leqq 1 \tag{29}$$

и въ случаѣ $\varepsilon > 1$

$$\frac{\pi^2 \lambda^2}{2} \left(2\lambda\eta^3 + (5\lambda^2 + 1)\eta^2 + 6\lambda\eta + 2\right) \leqq \frac{(1+2\lambda\eta)^{\frac{3}{2}}}{1+\lambda\eta}, \qquad (30)$$

гдѣ сдѣлано

$$\eta = \lambda(\varepsilon - 1)$$

и въ силу (23) должно предполагать $\eta \leqq 1$.

Въ случаѣ $\varepsilon \leqq 1$ функція p въ нашемъ уравненіи остается всегда положительною, и признакъ (2) примѣнимъ къ этому уравненію непосредственно, при чемъ въ результатѣ, какъ уже было указано въ параграфѣ 2-омъ, получается то же условіе (29).

Такимъ образомъ для примѣненія признака (2) въ случаѣ $\varepsilon \leqq 1$ предварительное преобразованіе нашего уравненія при помощи разсматриваемыхъ формулъ оказывается излишнимъ. Не то будетъ, какъ увидимъ, для признака (3), къ которому теперь обращаемся.

10. Означая черезъ a и b точный высшій и точный низшій предѣлы функціи $\sqrt{q}$, мы должны разсмотрѣть условіе

$$\frac{a\tau}{\pi} \leqq E\frac{b\tau}{\pi} + 1. \qquad (31)$$

Изъ предыдущихъ формулъ получаемъ

$$a^2 = \frac{(k^2+\lambda^2)^4}{k^8}\lambda^2(1+\alpha)^3(1+\alpha_1)(1+\alpha_2),$$

$$b^2 = \frac{(k^2+\lambda^2)^4}{k^8}\lambda^2(1-\alpha)^3(1-\alpha_1)(1-\alpha_2),$$

откуда, принимая въ разсчетъ выраженіе τ и выражая α_1, α_2 черезъ α, выводимъ

$$\frac{a^2\tau^2}{\pi^2} = \frac{4\left[\lambda^2(1+\varepsilon)(1+\alpha) - \alpha\right]}{(1-\alpha)^3},$$

$$\frac{b^2\tau^2}{\pi^2} = \frac{4\left[\lambda^2(1-\varepsilon)(1-\alpha) + \alpha\right]}{(1+\alpha)^3}.$$

При разсмотрѣніи условія (31), мы ограничимся предположеніемъ $\varepsilon \geqq 1$.

Въ этомъ предположеніи $\frac{b\tau}{\pi}$ всегда будетъ правильною дробью, такъ какъ

$$(1+\alpha)^3 - 4[\lambda^2(1-\varepsilon)(1-\alpha)+\alpha] = \alpha^3 + 3\alpha^2 + (1-\alpha)[1+4\lambda^2(\varepsilon-1)]$$

будетъ числомъ положительнымъ.

Вслѣдствіе этого условіе (31) приметъ видъ

$$\frac{a\tau}{\pi} \leqq 1$$

и приведется къ слѣдующему:

$$(1-\alpha)^3 - 4[\lambda^2(1+\varepsilon)(1+\alpha)-\alpha] \geqq 0. \tag{32}$$

Здѣсь подъ α должно разумѣть число, лежащее между предѣлами

$$\frac{\lambda^2(\varepsilon-1)}{\lambda^2(\varepsilon-1)+1} \quad \text{и} \quad \frac{\lambda^2\varepsilon}{(1+\lambda)^2}, \tag{33}$$

изъ которыхъ, какъ мы видѣли, не выходятъ возможныя значенія α, и мы должны теперь выразить, что условіе (32) выполняется по крайней мѣрѣ при одномъ изъ такихъ значеній α.

Нетрудно видѣть, что функція, находящаяся въ первой части неравенства (32), при возрастаніи α отъ 0 до 1, или измѣняется постоянно въ одномъ и томъ же смыслѣ, или переходитъ отъ убыванія къ возрастанію. Вслѣдствіе этого наибольшее значеніе этой функціи въ предѣлахъ (33) соотвѣтствуетъ всегда одному изъ предѣльныхъ значеній α, и намъ нужно только выразить, что одно изъ этихъ послѣднихъ удовлетворяетъ условію (32).

Вводя вмѣсто ε, какъ уже было сдѣлано выше, величину

$$\eta = \lambda(\varepsilon - 1),$$

способную принимать всѣ значенія отъ 0 до 1 включительно, и выражая, что условію (32) удовлетворяетъ первое изъ чиселъ (33), получимъ

$$8\lambda^2(1+\lambda\eta)^2(1+2\lambda\eta+\eta^2) \leqq 1. \tag{34}$$

Подобнымъ же путемъ, разсматривая второе изъ этихъ чиселъ, придемъ къ слѣдующему условію:

$$4\lambda^2(1+\lambda)^4(1+2\lambda+\eta)^2 \leqq (1+2\lambda-\lambda\eta)^3. \tag{35}$$

Таковы искомыя условія, изъ которыхъ каждое служитъ достаточнымъ признакомъ неравенства $A^2 < 1$.

Обратимъ вниманіе на случай $\varepsilon = 1$, когда функція p въ разсматриваемомъ уравненіи не можетъ дѣлаться отрицательною.

Въ этомъ случаѣ непосредственное примѣненіе признака (3) къ нашему уравненію даетъ условіе

$$8\lambda^2 \leq 1.$$

Къ тому же выводу приводитъ и условіе (34), въ которомъ мы должны теперь сдѣлать $\eta = 0$. Что же касается условія (35), то ~~оно~~ приводитъ къ болѣе широкому заключенію, ибо обращается въ слѣдующее:

$$4\lambda^2(1+\lambda)^4 \leqq 1 + 2\lambda,$$

которому, какъ нетрудно убѣдиться, можно удовлетворить величинами λ, превосходящими $\frac{1}{\sqrt{8}}$.

Мы видимъ такимъ образомъ, что для признака (3) предварительное преобразованіе нашего уравненія при помощи разсматриваемыхъ здѣсь формулъ и въ случаѣ $p \geqq 0$ можетъ быть небезполезнымъ.

11. Для уравненія

$$\frac{d^2x}{ds^2} + \lambda^2(1 - \varepsilon \sin s)x = 0$$

въ предположеніи

$$1 \leqq \varepsilon \leqq 1 + \frac{1}{\lambda}.$$

мы нашли три достаточныхъ признака неравенства $A^2 < 1$. Эти признаки выражаются условіями (30), (34) и (35), гдѣ

$$\eta = \lambda(\varepsilon - 1).$$

Теперь мы должны были-бы изслѣдовать эти условія и, разобравши всевозможныя предположенія относительно η, для каждаго изъ нихъ рѣшить, которое изъ найденныхъ условій приводитъ къ лучшимъ выводамъ. Но на этомъ останавливаться мы не будемъ и ограничимся сравненіемъ нашихъ условій для двухъ предѣльныхъ значеній η: для $\eta = 0$ и для $\eta = 1$.

При $\eta = 0$ условіе (30), приводящееся къ виду

$$\pi^2\lambda^2 \leqq 1,$$

даетъ, очевидно, менѣе, чѣмъ условіе (34), а послѣднее, какъ уже было замѣчено, даетъ менѣе, чѣмъ условіе (35).

Такимъ образомъ для $\eta=0$ наилучшій выводъ получается изъ условія (35), которое требуетъ, чтобы λ не превосходило единственнаго положительнаго корня уравненія

$$4z^2(1+z)^4=1+2z.$$

Вычисляя этотъ корень и квадратъ его съ пятью десятичными знаками, получимъ

$$z=0,35585\,(-)\,,\qquad z^2=0,12663\,(-)\,.$$

Что касается другого предѣльнаго значенія η, $\eta=1$, то для него наилучшій выводъ получается изъ условія (30).

Дѣйствительно, при $\eta=1$ условіе это приводится къ виду

$$\pi^2\lambda^2(1+\lambda)^2(3+5\lambda)\leqq 2(1+2\lambda)^{\frac{3}{2}}, \tag{36}$$

условія-же (34) и (35) — оба обращаются въ слѣдующее:

$$16\lambda^2(1+\lambda)^3\leqq 1, \tag{37}$$

и чтобы убѣдиться въ справедливости сейчасъ сказаннаго, достаточно разсмотрѣть величину

$$\lambda=\frac{1}{5}\,,$$

которая удовлетворяетъ условію (36) и не удовлетворяетъ условію (37).

Условіе (36) требуетъ, чтобы λ не превосходило единственнаго положительнаго корня уравненія

$$\pi^2z^2(1+z)^2(3+5z)=2(1+2z)^{\frac{3}{2}},$$

а изъ послѣдняго, останавливаясь на пятой десятичной, выводимъ:

$$z=0,23789\,(-)\,,\qquad z^2=0,05659\,.$$

12. Въ разсмотрѣнномъ сейчасъ примѣрѣ пріемъ, указанный въ параграфѣ 7-омъ, доставилъ для w выраженіе вида

$$w=C(1-\alpha\sin s) \tag{38}$$

при C и α положительныхъ и при α, непревосходящемъ предѣла

$$\frac{\lambda^2\varepsilon}{(1+\lambda)^2}\,,$$

и въ этомъ только предположеніи относительно α нами были найдены тѣ случаи, въ которыхъ выраженіе $w'' + pw$ никогда не дѣлается отрицательнымъ.

Но останавливаясь на формулѣ (38), мы должны только предполагать, что α численно менѣе 1, что необходимо для того, чтобы функція w не могла обращаться въ нуль; а разсматривая при этомъ значенія α, лежащія внѣ предѣловъ

$$0 \quad \text{и} \quad \frac{\lambda^2 \varepsilon}{(1+\lambda)^2},$$

мы можемъ встрѣтить новые случаи, когда будетъ

$$w'' + pw \geqq 0 \tag{39}$$

для всѣхъ значеній s.

Для разысканія всевозможныхъ случаевъ этого рода мы можемъ принять

$$w = 1 - \alpha \sin s.$$

Тогда при

$$p = \lambda^2 (1 - \varepsilon \sin s)$$

будемъ имѣть

$$w'' + pw = \lambda^2 - [\lambda^2 \varepsilon - (1 - \lambda^2)\alpha] \sin s + \lambda^2 \varepsilon \alpha \sin^2 s.$$

Отсюда прежде всего заключаемъ, что всякій разъ, когда уравненіе

$$\lambda^2 \varepsilon \alpha z^2 - [\lambda^2 \varepsilon - (1 - \lambda^2)\alpha] z + \lambda^2 = 0 \tag{40}$$

имѣетъ мнимые или равные корни, т. е. всякій разъ когда

$$(1 - \lambda^2)^2 \alpha^2 - 2\lambda^2 (1 + \lambda^2) \varepsilon \alpha + \lambda^4 \varepsilon^2 \leqq 0, \tag{41}$$

условіе (39) навѣрно будетъ выполняться.

Что же касается условія (41), то оно приводится къ слѣдующему:

$$\frac{\lambda^2 \varepsilon}{(1+\lambda)^2} \leqq \alpha \leqq \frac{\lambda^2 \varepsilon}{(1-\lambda)^2}$$

и вслѣдствіе предположенія $|\alpha| < 1$ требуетъ, чтобы было

$$\frac{\lambda^2 \varepsilon}{(1+\lambda)^2} < 1$$

или, что то же самое,

$$\lambda(\sqrt{\varepsilon} - 1) < 1.$$

Допустимъ теперь, что уравненіе (40) имѣетъ вещественные и различные корни, для чего α должно лежать внѣ предѣловъ

$$\frac{\lambda^2 \varepsilon}{(1+\lambda)^2} \quad \text{и} \quad \frac{\lambda^2 \varepsilon}{(1-\lambda)^2}.$$

Нетрудно видѣть, что при этомъ всегда найдется вещественное число $\varkappa$, лежащее между -1 и $+1$, при которомъ можно положить

$$\alpha = \frac{\lambda^2 \varepsilon \varkappa}{(\varkappa+\lambda)(\lambda\varkappa+1)};$$

а принимая это выраженіе α, получимъ

$$w'' + pw = \lambda^2(1-\alpha_1 \sin s)(1-\alpha_2 \sin s),$$

гдѣ

$$\alpha_1 = \frac{\lambda\varepsilon}{\varkappa+\lambda}, \qquad \alpha_2 = \frac{\lambda\varepsilon\varkappa}{\lambda\varkappa+1}.$$

Такъ какъ здѣсь α_1 и α_2 предполагаются различными, то для того, чтобы выраженіе $w''+pw$ сдѣлать всегда положительнымъ, мы должны удовлетворить условіямъ

$$|\alpha_1| \leqq 1, \qquad |\alpha_2| \leqq 1.$$

Предполагая при этомъ $\varkappa > 0$, мы встрѣтимся съ случаями, разсмотрѣнными въ предыдущихъ параграфахъ. Если же предположимъ $\varkappa < 0$, то условія эти приведутъ къ новымъ случаямъ, изъ которыхъ въ однихъ будетъ $\alpha < 0$, въ другихъ

$$\alpha > \frac{\lambda^2 \varepsilon}{(1-\lambda)^2}.$$

Отсюда видно, что пользуясь формулой (38) для преобразованія нашего уравненія къ виду (5), мы можемъ получить, кромѣ найденныхъ выше, многіе новые признаки неравенства $A^2 < 1$. Изъ нихъ одинъ будетъ указанъ далѣе для предѣльнаго случая, получаемаго приближеніемъ λ къ нулю при постоянной величинѣ $\lambda^2\varepsilon$.

13. Въ предыдущемъ, желая сдѣлать выраженіе

$$w'' + pw$$

всегда отрицательнымъ или всегда положительнымъ, мы опредѣляли w, какъ періодическое рѣшеніе уравненія

$$w'' + hw = h - p,$$

въ которомъ подъ h разумѣли положительное или отрицательное, но во всякомъ случаѣ отличное отъ нуля число. При этомъ мы разсматривали лишь тѣ случаи, когда интегралъ

$$\int_0^\sigma p\,ds$$

не равенъ нулю.

Теперь мы хотимъ обратить вниманіе на одну категорію случаевъ, въ которыхъ этотъ интегралъ будетъ нулемъ, и въ которыхъ можно сдѣлать

$$w'' + pw \geqq 0,$$

принимая за w періодическое рѣшеніе того-же уравненія въ предположеніи $h = 0$.

Случаи, которые мы будемъ здѣсь разсматривать, характеризуются существованіемъ равенства

$$p(2a - s) + p(s) = 0, \tag{42}$$

гдѣ a нѣкоторое постоянное, и тѣмъ, что функція p не мѣняетъ знака, пока s не переходитъ черезъ значенія вида $a + n\frac{\sigma}{2}$, гдѣ n число цѣлое.

Что касается этихъ послѣднихъ значеній s, то какъ видно изъ (42), при переходѣ черезъ нихъ функція p всегда будетъ мѣнять знакъ.

Такъ какъ при существованіи равенства (42) необходимо

$$\int_0^\sigma p\,ds = 0,$$

то въ разсматриваемыхъ случаяхъ уравненіе

$$w'' = -p \tag{43}$$

всегда будетъ допускать періодическія рѣшенія, и всѣ эти рѣшенія будутъ различаться между собою прибавочными постоянными.

Мы примемъ за w то изъ этихъ рѣшеній, которое обращается въ 1 при $s = a$. Тогда изъ равенства (42), пользуясь функціональнымъ обозначеніемъ $w(s)$, выведемъ слѣдующее:

$$w(2a - s) + w(s) = 2. \tag{44}$$

На основаніи этого, принимая въ разсчетъ указанныя выше свойства функціи p, нетрудно теперь показать, что всегда будетъ

$$w'' + pw \geqq 0. \tag{45}$$

Покажемъ сначала, что выраженіе $w'' + pw$ сохраняетъ всегда одинъ и тотъ-же знакъ.

Такъ какъ въ силу (43)

$$w'' + pw = (w-1)p,$$

то для этого достаточно показать, что функціи $w-1$ и p мѣняютъ знакъ одновременно.

Изъ (44) заключаемъ, что функція $w-1$ мѣняетъ знакъ всякій разъ, когда s переходитъ черезъ какое-либо изъ значеній вида $\alpha + n\frac{\sigma}{2}$, гдѣ n число цѣлое.

Что-же касается другихъ значеній s, то нетрудно убѣдиться, что при нихъ эта функція не можетъ обращаться въ нуль.

Дѣйствительно, если-бы функція $w-1$, уничтожающаяся при $s = \alpha + n\frac{\sigma}{2}$ и при $s = \alpha + (n+1)\frac{\sigma}{2}$, обращалась въ нуль еще при нѣкоторомъ промежуточномъ значеніи s, то ея производная w' дѣлалась-бы нулемъ въ разсматриваемомъ промежуткѣ болѣе одного раза, а это невозможно, ибо по (43) и по свойству функціи p функція w', при возрастаніи s отъ $\alpha + n\frac{\sigma}{2}$ до $\alpha + (n+1)\frac{\sigma}{2}$, измѣняется постоянно въ одномъ и томъ-же смыслѣ.

Мы видимъ такимъ образомъ, что единственныя значенія s, при которыхъ функція $w-1$ мѣняетъ знакъ, какъ и для функціи p, суть значенія вида $\alpha + n\frac{\sigma}{2}$.

Показавши, что выраженіе $w'' + pw$ никогда не мѣняетъ знака, мы докажемъ справедливость неравенства (45), если покажемъ, что

$$\int_0^\sigma (w'' + pw)\,ds > 0;$$

но въ этомъ убѣждаемся тотчасъ-же, замѣчая, что на основаніи (43)

$$w'' + pw = \frac{d}{ds}(w' - ww') + w'^2,$$

откуда вслѣдствіе періодичности функціи w слѣдуетъ

$$\int_0^\sigma (w'' + pw)\, ds = \int_0^\sigma w'^2\, ds\,.$$

Такимъ образомъ въ разсматриваемыхъ случаяхъ, останавливаясь на указанномъ опредѣленіи w, мы сдѣлаемъ выраженіе $w'' + pw$ всегда положительнымъ.

Но чтобы этимъ можно было воспользоваться для нашей цѣли, необходимо еще одно добавочное условіе, а именно — необходимо, чтобы функція w не могла обращаться въ нуль.

Чтобы получить условіе, которому для этого должна удовлетворять функція p, мы должны найти выраженіе для наименьшаго значенія функціи w.

Обращаясь теперь къ этому, мы будемъ предполагать, что между предѣлами $s = \alpha$ и $s = \alpha + \frac{\sigma}{2}$ всегда $p \geqq 0$.

Въ этомъ предположеніи, функція w' при возрастаніи s отъ α до $\alpha + \frac{\sigma}{2}$ будетъ постоянно убывать, а при дальнѣйшемъ возрастаніи s до $\alpha + \sigma$ возрастать.

Отсюда слѣдуетъ, что функція w, принимающая одинаковыя значенія при

$$s = \alpha, \qquad s = \alpha + \frac{\sigma}{2}, \qquad s = \alpha + \sigma,$$

между предѣлами $s = \alpha$ и $s = \alpha + \sigma$ будетъ имѣть одинъ maximum и одинъ minimum, и что maximum этой функціи будетъ соотвѣтствовать нѣкоторому значенію s, лежащему между α и $\alpha + \frac{\sigma}{2}$.

Называя это значеніе s черезъ β и имѣя въ виду равенство (44), мы найдемъ, что minimum функціи w будетъ равенъ $2 - w(\beta)$.

Но нетрудно убѣдиться, что разсматриваемая функція w можетъ быть выражена формулою

$$w = 1 - \frac{s-\alpha}{\sigma} \int_\alpha^{\alpha+\sigma} sp\, ds - \int_\alpha^s (s - s_1)\, p(s_1)\, ds_1\,.$$

Отсюда для опредѣленія β получаемъ

$$\int_\alpha^{\alpha+\sigma} sp\, ds + \sigma \int_\alpha^\beta p\, ds = 0$$

и на основаніи этого уравненія находимъ

$$w(\beta) = 1 + \int_\alpha^\beta (s-\alpha)\, p\, ds.$$

Вслѣдствіе этого для наименьшаго значенія функціи w получаемъ слѣдующее выраженіе:

$$1 - \int_\alpha^\beta (s-\alpha)\, p\, ds.$$

Отсюда видно, что для выполненія вышесказаннаго требованія мы должны имѣть

$$\int_\alpha^\beta (s-\alpha)\, p\, ds < 1\,.$$

Таково искомое условіе, которое здѣсь должно предполагать.

При выполненіи этого условія, останавливаясь на разсматриваемомъ опредѣленіи функціи w, мы сдѣлаемъ функцію q въ уравненіи (5) всегда положительною, и для полученія какихъ-либо выводовъ относительно величины A, соотвѣтствующей нашему первоначальному уравненію, вмѣсто послѣдняго можемъ трактовать уравненіе (5).

14. Для примѣра возьмемъ уравненіе

$$\frac{d^2x}{ds^2} + \mu \sin s\, x = 0\,, \tag{46}$$

гдѣ подъ μ будемъ разумѣть нѣкоторое вещественное постоянное.

Для этого уравненія можно принять $\sigma = 2\pi$, $\alpha = 0$, а вышеуказанное опредѣленіе w приводитъ къ слѣдующему выраженію:

$$w = 1 + \mu \sin s.$$

Отсюда видно, что мы должны здѣсь предполагать условіе

$$\mu^2 < 1\,.$$

Имѣя это въ виду, находимъ

$$\tau = \int_0^{2\pi} \frac{ds}{(1+\mu \sin s)^2} = \frac{2\pi}{(1-\mu^2)^{\frac{3}{2}}}\,.$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ для функціи q въ уравненіи (5) получаемъ выраженіе

$$q = \mu^2 (1 + \mu \sin s)^3 \sin^2 s\,,$$

изъ котораго видно, что при указанномъ сейчасъ условіи будетъ $q \geqq 0$ для всѣхъ значеній s.

Разсмотримъ теперь въ примѣненіи къ уравненію (5) признаки неравенства $A^2 < 1$ (2) и (3).

Признакъ (2) для этого уравненія выражается условіемъ

$$\tau \int_0^\tau q \frac{ds}{w^2} \leqq 4\,,$$

которое въ разсматриваемомъ случаѣ приводится къ виду

$$\frac{\pi^2 \mu^2}{(1-\mu^2)^{\frac{3}{2}}} \leqq 2$$

и требуетъ, чтобы было

$$\mu^2 \leqq 0,156\ldots, \qquad |\mu| \leqq 0,39\ldots.$$

Что-же касается признака (3), то называя наибольшее значеніе функціи $\sqrt{q}$ черезъ a и замѣчая, что наименьшее значеніе этой функціи есть нуль, найдемъ, что этотъ признакъ выразится условіемъ

$$\frac{\tau}{\pi} a \leqq 1\,.$$

Но предполагая $\mu > 0$, находимъ

$$a = \mu (1+\mu)^{\frac{3}{2}}\,.$$

Поэтому написанное сейчасъ условіе приводится къ виду

$$\frac{2\mu}{(1-\mu)^{\frac{3}{2}}} \leqq 1$$

и требуетъ, чтобы μ было менѣе 0,3.

Такимъ образомъ въ разсматриваемомъ случаѣ признакъ (2) приводитъ къ лучшему выводу.

Далѣе мы еще встрѣтимся съ уравненіемъ (46) и, трактуя его инымъ способомъ, получимъ нѣсколько болѣе широкіе предѣлы для тѣхъ значеній μ, при которыхъ несомнѣнно имѣетъ мѣсто неравенство $A^2 < 1$.

15. Въ послѣднихъ параграфахъ мы разсмотрѣли нѣкоторые случаи, когда надлежащимъ выборомъ функціи w можно было сдѣлать $q \geqq 0$ для всѣхъ значеній s. Теперь мы покажемъ, что этого всегда можно достигнуть, коль скоро

$$\int_0^\sigma p\,ds \geqq 0;$$

но прежде обратимъ вниманіе на нѣсколько иной видъ формулъ преобразованія, приведенныхъ въ параграфѣ 3-емъ.

Припоминая предположенія, сдѣланныя нами относительно функціи w, мы видимъ, что можно положить

$$w = e^{-\int v\,ds},$$

разумѣя подъ v нѣкоторую вещественную періодическую функцію перемѣннаго s съ періодомъ σ, непрерывную вмѣстѣ съ производною

$$\frac{dv}{ds} = v'$$

и удовлетворяющую условію

$$\int_0^\sigma v\,ds = 0, \tag{47}$$

которое необходимо для того, чтобы функція w была періодическою.

При такомъ выраженіи функціи w само собою удовлетворится условіе, въ силу котораго эта функція не должна дѣлаться нулемъ. Если-же постоянное произвольное въ интегралѣ

$$\int v\,ds$$

выбрано такъ, чтобы интегралъ этотъ представлялъ вещественную функцію s, что и будемъ здѣсь предполагать, то функція w будетъ всегда положительною.

Принимая это выраженіе w, мы будемъ имѣть слѣдующія формулы:

$$x = y e^{-\int v\,ds}, \qquad t = \int_0^s e^{2\int v\,ds}\,ds,$$

при посредствѣ которыхъ уравненіе

$$\frac{d^2x}{ds^2} + px = 0$$

преобразуется въ такое

$$\frac{d^2y}{dt^2} + qy = 0,$$

гдѣ

$$q = e^{-4\int v\,ds}(p - v' + v^2),$$

и это q будетъ періодическою функціей перемѣннаго t съ періодомъ

$$\tau = \int_0^\sigma e^{2\int v\,ds}\,ds.$$

Чтобы показать теперь, что въ случаѣ положительной или равной нулю величины интеграла

$$\int_0^\sigma p\,ds$$

всегда можно сдѣлать $q \geqq 0$, мы замѣчаемъ, что интегралъ

$$\int (p - \Omega)\,ds,$$

гдѣ

$$\Omega = \frac{1}{\sigma}\int_0^\sigma p\,ds,$$

представляетъ періодическую функцію s, вслѣдствіе чего функцію v можно опредѣлить уравненіемъ

$$v' = p - \Omega;$$

а при такомъ выборѣ функціи v найдемъ

$$q = (\Omega + v^2)\,e^{-4\int v\,ds} \tag{48}$$

и слѣдовательно, если $\Omega \geqq 0$, будемъ имѣть $q \geqq 0$ для всѣхъ значеній s или t.

16. Примѣнимъ показанное сейчасъ преобразованіе къ слѣдующему уравненію:

$$\frac{d^2x}{ds^2} + (\lambda^2 + \mu \sin s)\,x = 0,$$

гдѣ λ и μ означаютъ нѣкоторыя вещественныя постоянныя.

Согласно вышеуказанному, мы должны здѣсь опредѣлить v при помощи уравненія

$$v' = \mu \sin s\,,$$

изъ котораго, имѣя въ виду условіе (47), находимъ

$$v = -\mu \cos s.$$

Вслѣдствіе этого, останавливаясь на выраженіи

$$\int v\,ds = -\mu \sin s\,,$$

получаемъ

$$q = (\lambda^2 + \mu^2 \cos^2 s)\, e^{4\mu \sin s}.$$

Имѣя такимъ образомъ $q > 0$ для всѣхъ значеній s, посмотримъ, что даетъ въ примѣненіи къ преобразованному уравненію признакъ (2) неравенства $A^2 < 1$.

Въ разсматриваемомъ случаѣ, если принять $\sigma = 2\pi$, этотъ признакъ выразится условіемъ

$$\tau \int_0^{2\pi} q e^{-2\mu \sin s} ds \leqq 4\,,$$

гдѣ

$$\tau = \int_0^{2\pi} e^{-2\mu \sin s} ds = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(e^{2\mu \sin s} + e^{-2\mu \sin s}\right) ds.$$

Если-же положимъ

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(e^{2\mu \sin s} + e^{-2\mu \sin s}\right) \cos^2 s\, ds = \tau_1\,,$$

то будемъ имѣть

$$\int_0^{2\pi} q e^{-2\mu \sin s} ds = \tau\lambda^2 + \tau_1 \mu^2\,,$$

и наше условіе приведется къ виду

$$\tau^2\lambda^2 + \tau\tau_1\mu^2 \leqq 4. \tag{49}$$

Въ предыдущемъ мы уже имѣли дѣло съ разсматриваемымъ здѣсь уравненіемъ, которое было взято нами подъ видомъ

$$\frac{d^2x}{ds^2} + \lambda^2(1 - \varepsilon \sin s)\, x = 0\,,$$

и для этого уравненія нашли нѣсколько различныхъ условій, при которыхъ несомнѣнно имѣетъ мѣсто неравенство $A^2 < 1$.

Такъ, въ параграфѣ 9-омъ, исходя, какъ и здѣсь, изъ признака (2), но примѣняя его къ другому преобразованію нашего уравненія, мы получили условіе (29) для случая $\varepsilon \leqq 1$ и условіе (30) для случая

$$1 \leqq \varepsilon \leqq 1 + \frac{1}{\lambda}\,.$$

Нетрудно видѣть, что, подобно этимъ послѣднимъ, условіе (49) требуетъ, чтобы λ не превосходило числа $\frac{1}{\pi}$. Но этотъ высшій предѣлъ λ при условіи (49) достигается только въ случаѣ, когда $\mu = 0$, и слѣдовательно — когда $\varepsilon = 0$. Поэтому при величинахъ λ, мало отличающихся отъ $\frac{1}{\pi}$, условія (29) и (30) приводятъ къ лучшимъ выводамъ.

Обратное имѣетъ мѣсто при величинахъ λ, близкихъ къ нулю. Для такихъ значеній λ наше новое условіе (49) должно быть предпочитаемо какъ условіямъ (29) и (30), такъ и тѣмъ условіямъ, которыя были получены въ параграфѣ 10-омъ, ибо всѣ эти условія были выведены въ предположеніи

$$\eta = \lambda(\varepsilon - 1) \leqq 1\,,$$

равносильномъ такому

$$|\mu| = \lambda^2 \varepsilon \leqq \lambda(1 + \lambda)\,,$$

и слѣдовательно требующемъ, чтобы при λ безконечно-маломъ параметръ μ былъ также безконечно-малымъ, тогда какъ условіе (49), не предполагающее никакихъ дополнительныхъ условій, позволяетъ приписывать μ тѣмъ бóльшія значенія, чѣмъ менѣе λ.

17. Разсмотримъ ближе случай $\lambda = 0$, когда условіе (49) принимаетъ видъ

$$\tau\tau_1\,\mu^2 \leqq 4\,. \tag{50}$$

Входящія сюда величины τ и τ_1 можно представить рядами, расположенными по степенямъ μ^2, весьма быстро сходящимися при небольшихъ значеніяхъ μ, съ какими намъ придется здѣсь имѣть дѣло.

Обращаясь къ даннымъ выше выраженіямъ τ и τ_1, легко находимъ

$$\tau = 2\pi S, \qquad \tau_1 = \pi S_1,$$

гдѣ

$$S = 1 + \frac{\mu^2}{1^2} + \frac{\mu^4}{1^2.2^2} + \frac{\mu^6}{1^2.2^2.3^2} + \frac{\mu^8}{1^2.2^2.3^2.4^2} + \ldots,$$

$$S_1 = 1 + \frac{1}{2}\frac{\mu^2}{1^2} + \frac{1}{3}\frac{\mu^4}{1^2.2^2} + \frac{1}{4}\frac{\mu^6}{1^2.2^2.3^2} + \ldots$$

Пользуясь этими формулами, мы займемся теперь вычисленіемъ наибольшаго значенія μ^2, при которомъ удовлетворяется условіе (50).

Это значеніе опредѣляется уравненіемъ

$$\tau\tau_1\mu^2 = 4,$$

приводящимся къ виду

$$\pi^2 SS_1\mu^2 = 2, \tag{51}$$

гдѣ

$$SS_1 = 1 + \frac{3}{2}\mu^2 + \frac{5}{6}\mu^4 + \ldots \tag{52}$$

Чтобы найти приближенную величину μ^2, которою можно было-бы затѣмъ воспользоваться для полученія болѣе точныхъ, мы удержимъ въ выраженіи (52) сначала только первые два члена

Такимъ образомъ уравненіе (51) приведется къ слѣдующему:

$$\mu^2 + \frac{3}{2}\mu^4 = \frac{2}{\pi^2}$$

и дастъ

$$\mu^2 = \frac{1}{3}\left(\sqrt{1 + \frac{12}{\pi^2}} - 1\right) = 0,1628\ldots,$$

что, очевидно, представляетъ нѣкоторый высшій предѣлъ для искомаго значенія μ^2.

Для полученія болѣе точной величины μ^2 мы примемъ въ разсчетъ въ выраженіи (52) и членъ съ четвертой степенью μ, вслѣдствіе чего уравненіе (51) обратится въ такое:

$$\mu^2 + \frac{3}{2}\mu^4 + \frac{5}{6}\mu^6 = \frac{2}{\pi^2}.$$

Представляя затѣмъ это уравненіе подъ видомъ

$$\mu^2 = \frac{1}{3}\left(\sqrt{1+\frac{12}{\pi^2}-5\mu^6}-1\right),$$

мы подставимъ во вторую часть его вмѣсто μ^2 число 0,163, мало отличающееся отъ только-что найденнаго.

Такимъ образомъ получимъ

$$\mu^2 = 0,160427\ldots \quad . \tag{53}$$

Для дальнѣйшихъ вычисленій уравненіе (51) полезно представить подъ видомъ

$$\mu^2 = \frac{2}{\pi^2 SS_1}.$$

Тогда, вычисляя вторую часть его при какомъ-либо значеніи μ^2, мы тотчасъ-же получимъ два предѣла, между которыми лежитъ искомое значеніе. Этими предѣлами будутъ служить подставляемое значеніе μ^2 и результатъ вычисленія выраженія

$$\frac{2}{\pi^2 SS_1}.$$

Вычислимъ послѣднее, принимая согласно (53)

$$\mu^2 = 0,16043.$$

При этомъ значеніи μ^2, останавливаясь на 7-ой десятичной, находимъ

$$S = 1,1669803\ (+),$$

$$S_1 = 1,0823887\ (+)$$

и на основаніи этихъ чиселъ получаемъ

$$\frac{2}{\pi^2 SS_1} = 0,160429\ (+).$$

Отсюда можемъ заключить, что искомое значеніе μ^2 лежитъ между предѣлами

$$0,160429 \quad \text{и} \quad 0,16043.$$

Такимъ образомъ находимъ

$$\mu^2 = 0,160429\ldots, \qquad |\mu| = 0,40053\ldots$$

— числа, нѣсколько бóльшія полученныхъ въ параграфѣ 14-омъ.

Къ этому выводу мы пришли, примѣняя къ извѣстному преобразованію уравненія

$$\frac{d^2x}{ds^2} + \mu \sin s\, x = 0$$

признакъ (2).

Укажемъ теперь условіе, къ которому въ томъ-же случаѣ приводитъ признакъ (3).

Для этого, означая черезъ a^2 наибольшее значеніе функціи

$$q = \mu^2 \cos^2 s\, e^{4\mu \sin s}$$

и замѣчая, что наименьшее ея значеніе есть нуль, мы должны составить условіе

$$\frac{\tau^2}{\pi^2} a^2 \leqq 1.$$

Но нетрудно убѣдиться, что

$$a^2 = \frac{\varkappa}{4} e^{2\varkappa},$$

гдѣ

$$\varkappa = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1 + 16\mu^2} - 1\right).$$

Мы имѣемъ при томъ

$$\frac{\tau}{\pi} = 2S.$$

Поэтому искомое условіе будетъ

$$\varkappa e^{2\varkappa} S^2 \leqq 1.$$

Не останавливаясь на болѣе полномъ изслѣдованіи этого условія, покажемъ только, что сравнительно съ условіемъ (50) оно даетъ менѣе удовлетворительный выводъ.

Для этого разсмотримъ предположеніе

$$\mu^2 = 0,14.$$

При этомъ значеніи μ^2 находимъ

$$S > 1 + \mu^2 + \frac{1}{4}\mu^4 > 1,144,$$

откуда

$$S^2 > 1,3.$$

Далѣе, имѣемъ

$$\varkappa = 0{,}4$$

и слѣдовательно

$$e^{2\varkappa} > 1 + 2\varkappa + 2\varkappa^2 > 2\,,$$

$$\varkappa e^{2\varkappa} > 0{,}8\,.$$

Отсюда видно, что при взятомъ значеніи μ^2

$$\varkappa e^{2\varkappa} S^2 > 1\,,$$

вслѣдствіе чего разсматриваемое условіе требуетъ, чтобы μ^2 было меменѣе 0,14.

18. Возвращаясь къ случаю λ неравнаго нулю, мы видимъ, что условіе (49) даетъ менѣе, чѣмъ условіе

$$\pi^2\lambda^2 \leqq 1\,,$$

къ которому при

$$|\mu| \leqq \lambda^2\,,$$

когда функція p въ разсматриваемомъ уравненіи остается всегда положительною, приводитъ непосредственное примѣненіе признака (2).

По этому поводу замѣтимъ вообще, что въ случаѣ $p \geqq 0$ примѣненіе признака (2) къ уравненію, получаемому въ результатѣ преобразованія предложеннаго уравненія при помощи разсматриваемыхъ теперь формулъ, никогда не можетъ дать чего-либо новаго, ибо нетрудно убѣдиться, что условіе

$$\tau \int_0^\tau q\,dt \leqq 4\,,$$

при разсматриваемомъ опредѣленіи функціи v, можетъ выполняться въ тѣхъ только случаяхъ, когда

$$\sigma \int_0^\sigma p\,ds < 4\,.$$

Чтобы показать это, мы замѣчаемъ, что формула (48) даетъ

$$q > \Omega e^{-4\int v\,ds}\,,$$

вслѣдствіе чего

$$\int_0^\tau q\,dt = \int_0^\sigma q\,e^{2\int v\,ds}\,ds > \Omega \int_0^\sigma e^{-2\int v\,ds}\,ds.$$

Замѣчая-же, что произведеніе

$$\tau \int_0^\sigma e^{-2\int v\,ds}\,ds = \int_0^\sigma e^{2\int v\,ds}\,ds \int_0^\sigma e^{-2\int v\,ds}\,ds$$

можетъ быть представлено подъ видомъ

$$\frac{1}{2}\int_0^\sigma \int_0^\sigma \left(\frac{\varphi(s)}{\varphi(s_1)} + \frac{\varphi(s_1)}{\varphi(s)}\right) ds\,ds_1\,,$$

гдѣ

$$\varphi(s) = e^{2\int v\,ds}\,,$$

и что

$$\frac{\varphi(s)}{\varphi(s_1)} + \frac{\varphi(s_1)}{\varphi(s)} > 2\,,$$

находимъ

$$\tau \int_0^\sigma e^{-2\int v\,ds}\,ds > \sigma^2.$$

Вслѣдствіе этого имѣемъ

$$\tau \int_0^\tau q\,dt > \sigma^2 \Omega = \sigma \int_0^\sigma p\,ds\,,$$

чѣмъ и обнаруживается справедливость сказаннаго.

Чтобы устранить указанный сейчасъ недостатокъ разсматриваемаго преобразованія, мы должны обобщить послѣднее такъ, чтобы въ преобразованномъ уравненіи заключалось, какъ частный случай, первоначальное.

Изъ различныхъ способовъ достигнуть этой цѣли мы остановимся здѣсь на простѣйшемъ, который приводится къ опредѣленію функціи v при помощи уравненія

$$v' = k(p - \Omega)\,,$$

гдѣ k означаетъ нѣкоторый неопредѣленный параметръ.

Такимъ путемъ мы придемъ къ преобразованію, изъ котораго при $k=1$ будетъ получаться показанное въ параграфѣ 15-омъ. При томъ преобразованное уравненіе будетъ заключать въ себѣ первоначальное, которое будетъ изъ него получаться при $k=0$.

Останавливаясь на указанномъ опредѣленіи v, будемъ имѣть

$$q=\left\{\Omega+(1-k)(p-\Omega)+v^2\right\}e^{-4\int v\,ds}$$

и параметръ k въ этомъ выраженіи должны будемъ подчинить тому только условію, чтобы было $q \geqq 0$ для всѣхъ значеній s, чего при $\Omega \geqq 0$ всегда можно достигнуть.

Обратимъ вниманіе на случай, когда $p>0$ для всѣхъ значеній s.

Въ этомъ случаѣ мы можемъ сдѣлать $q \geqq 0$, приписывая k численно достаточно малыя положительныя или отрицательныя значенія.

Изслѣдуемъ для такихъ значеній k величину выраженія

$$\tau\int_0^\tau q\,dt.$$

Чтобы на чемъ-нибудь остановиться, мы будемъ при этомъ предполагать, что постоянное произвольное въ интегралѣ

$$\int v\,ds$$

опредѣлено согласно условію

$$\int_0^\sigma\left(\int v\,ds\right)ds=0.$$

Тогда, какъ функція v, которая удовлетворяетъ условію (47), такъ и этотъ интегралъ будутъ заключать въ себѣ множитель k, и потому, разлагая τ и $qe^{2\int v\,ds}$ въ ряды по степенямъ k и останавливаясь на членахъ не выше первой степени относительно k, будемъ имѣть

$$\tau=\int_0^\sigma e^{2\int v\,ds}\,ds=\sigma+\cdots,\qquad qe^{2\int v\,ds}=p-k(p-\Omega)-2p\int v\,ds+\cdots,$$

откуда

$$\tau\int_0^\tau q\,dt=\tau\int_0^\sigma qe^{2\int v\,ds}\,ds=\sigma\int_0^\sigma p\,ds-2\sigma\int_0^\sigma\left(\int v\,ds\right)p\,ds+\cdots.$$

Но

$$\int_0^\sigma\left(\int v\,ds\right)p\,ds=\int_0^\sigma\left(\int v\,ds\right)(p-\Omega)\,ds$$

$$=\frac{1}{k}\int_0^\sigma\left(\int v\,ds\right)v'\,ds=-\frac{1}{k}\int_0^\sigma v^2\,ds.$$

Вслѣдствіе этого находимъ

$$\tau\int_0^\tau q\,dt=\sigma\int_0^\sigma p\,ds+\frac{2\sigma}{k}\int_0^\sigma v^2\,ds+\ldots,$$

чѣмъ обнаруживается, что при k отрицательномъ и численно достаточно маломъ всегда будетъ

$$\tau\int_0^\tau q\,dt<\sigma\int_0^\sigma p\,ds.$$

Отсюда видно, что показанное сейчасъ преобразованіе можетъ быть полезно для признака (2) и въ случаѣ, когда $p>0$ для всѣхъ значеній s.

19. Возьмемъ разсмотрѣнное выше уравненіе, въ которомъ

$$p=\lambda^2+\mu\sin s.$$

Дѣлая, какъ сейчасъ было предложено,

$$v'=k\mu\sin s$$

и имѣя въ виду (47), находимъ

$$v=-k\mu\cos s.$$

Вслѣдствіе этого, принимая

$$\int v\,ds=-k\mu\sin s,$$

получаемъ

$$q=\left\{\lambda^2+(1-k)\,\mu\sin s+k^2\mu^2\cos^2 s\right\}e^{4k\mu.\sin s}.$$

Мы должны теперь выразить, что функція

$$\lambda^2 + (1-k)\mu \sin s + k^2\mu^2 \cos^2 s$$

никогда не дѣлается отрицательною.

Такъ-какъ для этого, очевидно, достаточно, чтобы эта функція не была отрицательною при $\sin s = \pm 1$, то такимъ путемъ мы приходимъ къ условію

$$\lambda^2 \pm (1-k)\mu \geqq 0,$$

которое можетъ быть представлено подъ видомъ

$$\mu - \lambda^2 \leqq k\mu \leqq \mu + \lambda^2. \tag{54}$$

При этомъ условіи будемъ имѣть $q \geqq 0$ для всѣхъ значеній t и всякій разъ, когда

$$\tau \int_0^\tau q\, dt \leqq 4, \tag{55}$$

можемъ заключать о существованіи неравенства $A^2 < 1$.

Посмотримъ, что дастъ въ разсматриваемомъ случаѣ условіе (55).

Имѣемъ

$$\tau = \int_0^{2\pi} e^{-2k\mu \sin s}\, ds = \int_0^{2\pi} e^{2k\mu \sin s}\, ds,$$

а полагая

$$\tau_1 = \int_0^{2\pi} e^{2k\mu \sin s} \cos^2 s\, ds,$$

находимъ

$$\int_0^{2\pi} e^{2k\mu \sin s} \sin s\, ds = 2k\mu\tau_1.$$

Вслѣдствіе этого получаемъ

$$\int_0^\tau q\, dt = \int_0^{2\pi} q e^{-2k\mu \sin s}\, ds = \tau\lambda^2 + k(2-k)\tau_1\mu^2,$$

и условіе (55) обращается въ слѣдующее:

$$\tau^2\lambda^2 + k(2-k)\tau\tau_1\mu^2 \leqq 4.$$

Это условіе мы представимъ въ нѣсколько иномъ видѣ, замѣняя τ и τ_1 ихъ разложеніями въ ряды по степенямъ $k\mu$ и полагая

$$k\mu = \mu + \varkappa.$$

Введемъ слѣдующія обозначенія:

$$S(x) = 1 + \frac{x^2}{1^2} + \frac{x^4}{1^2.2^2} + \frac{x^6}{1^2.2^2.3^2} + \dots,$$

$$S_1(x) = 1 + \frac{1}{2}\frac{x^2}{1^2} + \frac{1}{3}\frac{x^4}{1^2.2^2} + \frac{1}{4}\frac{x^6}{1^2.2^2.3^2} + \dots.$$

Тогда будемъ имѣть

$$\tau = 2\pi\, S(k\mu) = 2\pi\, S(\mu + \varkappa),$$

$$\tau_1 = \pi\, S_1(k\mu) = \pi\, S_1(\mu + \varkappa),$$

и условіе наше приведется къ виду

$$\lambda^2 S^2(\mu + \varkappa) + \frac{1}{2}(\mu^2 - \varkappa^2)\, S(\mu + \varkappa)\, S_1(\mu + \varkappa) \leqq \frac{1}{\pi^2}, \tag{56}$$

гдѣ въ силу (54) должно предполагать

$$-\lambda^2 \leqq \varkappa \leqq \lambda^2.$$

Постараемся теперь найти условіе, которому должны удовлетворять λ и μ для возможности условія (56) въ указанномъ сейчасъ предположеніи.

Для этого мы должны выразить, что наименьшее значеніе функціи

$$F(\varkappa) = \lambda^2 S^2(\mu + \varkappa) + \frac{1}{2}(\mu^2 - \varkappa^2)\, S(\mu + \varkappa)\, S_1(\mu + \varkappa)$$

въ промежуткѣ отъ $\varkappa = -\lambda^2$ до $\varkappa = \lambda^2$ не превосходитъ $\frac{1}{\pi^2}$.

Предполагая, чтобы на чемъ-нибудь остановиться, $\mu > 0$, мы замѣчаемъ, что при возрастаніи $\varkappa$ отъ $-\mu$ до 0 функція $F(\varkappa)$ постоянно возрастаетъ, и что при $\varkappa$ положительномъ, меньшемъ μ,

$$F(\varkappa) > F(-\varkappa). \tag{57}$$

Мы можемъ поэтому утверждать, что въ случаѣ $\mu \geqq \lambda^2$ наименьшее значеніе функціи $F(\varkappa)$ въ разсматриваемомъ промежуткѣ соотвѣтствуетъ всегда $\varkappa = -\lambda^2$.

Покажемъ, что то-же будетъ и въ случаѣ $\mu < \lambda^2$, если только λ^2 достаточно мало.

Для этого прежде всего покажемъ, что при $\mu < \lambda^2$ и при λ^2 достаточно маломъ неравенство (57) будетъ выполняться не только для значенiй $\varkappa$, меньшихъ μ, но и для значенiй $\varkappa$, лежащихъ между μ и λ^2.

Замѣчая, что выраженiе функцiи $F(\varkappa)$ можетъ быть представлено подъ видомъ

$$F(\varkappa) = \frac{1}{2}(\varkappa^2 - \mu^2)\,S(\mu+\varkappa)\Big(S(\mu+\varkappa) - S_1(\mu+\varkappa)\Big) + \left(\lambda^2 - \frac{1}{2}\varkappa^2 + \frac{1}{2}\mu^2\right)S^2(\mu+\varkappa),$$

и что функцiя $S(x) - S_1(x)$ при x положительномъ возрастаетъ вмѣстѣ съ x, въ предположенiи $\varkappa > \mu$ находимъ

$$F(\varkappa) - F(-\varkappa) > \left(\lambda^2 - \frac{1}{2}\varkappa^2 + \frac{1}{2}\mu^2\right)\Big(S^2(\varkappa+\mu) - S^2(\varkappa-\mu)\Big).$$

А отсюда заключаемъ, что при $\mu < \varkappa \leqq \lambda^2$ будетъ

$$F(\varkappa) - F(-\varkappa) > 0,$$

если только λ^2 не превосходитъ 2.

Далѣе, нетрудно показать, что при λ^2 достаточно маломъ функцiя $F(\varkappa)$ будетъ возрастать вмѣстѣ съ $\varkappa$ не только при $\varkappa$, заключающемся между $-\mu$ и 0, но и при $\varkappa < -\mu$.

Для этого разсмотримъ производную $F'(\varkappa)$.

Нетрудно убѣдиться, что

$$\left.\begin{aligned} S'(x) &= 2x\,S_1(x), \\ S_1'(x) &= \frac{2}{x}\,S(x) - \frac{2}{x}\,S_1(x), \end{aligned}\right\} \tag{58}$$

а на основанiи этихъ формулъ находимъ

$$F'(\varkappa) = (\mu - \varkappa)\Big(S^2(\mu+\varkappa) + (\mu+\varkappa)^2 S_1^2(\mu+\varkappa)\Big) + \Big(4\lambda^2(\mu+\varkappa) - \mu\Big)S(\mu+\varkappa)\,S_1(\mu+\varkappa).$$

Но это выраженiе можетъ быть представлено подъ видомъ

$$\begin{aligned} F'(\varkappa) = &-(\mu+\varkappa)\,S(\mu+\varkappa)\Big(S(\mu+\varkappa) - 4\lambda^2 S_1(\mu+\varkappa)\Big) \\ &+ 2\mu\,S(\mu+\varkappa)\Big(S(\mu+\varkappa) - \frac{1}{2}S_1(\mu+\varkappa)\Big) \\ &+ (\mu-\varkappa)(\mu+\varkappa)^2 S_1^2(\mu+\varkappa), \end{aligned}$$

а потому, принимая въ разсчетъ, что

$$S(\mu+\varkappa) > S_1(\mu+\varkappa),$$

и предполагая $\mu+\varkappa<0$, будемъ имѣть

$$F'(\varkappa) > 0$$

всякій разъ, когда $4\lambda^2 \leqq 1$.

Вслѣдствіе этого при $\lambda^2 \leqq \frac{1}{4}$ наименьшее значеніе функціи $F(\varkappa)$ въ промежуткѣ $(-\lambda^2, 0)$ будетъ $F(-\lambda^2)$, а въ силу (57) это значеніе будетъ наименьшимъ и въ промежуткѣ $(-\lambda^2, \lambda^2)$.

Показавши такимъ образомъ, что при λ^2, не превосходящемъ $\frac{1}{4}$, искомое наименьшее значеніе функціи $F(\varkappa)$ во всякомъ случаѣ соотвѣтствуетъ $\varkappa=-\lambda^2$, мы можемъ этимъ ограничиться, ибо нетрудно убѣдиться, что при выполненіи условія (56) въ предположеніи $\varkappa^2 \leqq \lambda^4$ число λ^2 необходимо будетъ менѣе $\frac{1}{4}$.

Это очевидно для случая $\varkappa^2 \leqq \mu^2$, ибо въ этомъ случаѣ условіе (56) даетъ

$$\lambda^2 \leqq \frac{1}{\pi^2}.$$

Что-же касается случаевъ, когда

$$\mu^2 < \varkappa^2 \leqq \lambda^4,$$

то это докажется слѣдующимъ образомъ.

Полагая

$$z = S(x) - x\,S_1(x),$$

на основаніи (58) получаемъ

$$\frac{dz}{dx} = -2z + S_1(x),$$

а отсюда, имѣя въ виду, что при $x=0$ функція z обращается въ 1, выводимъ

$$z = e^{-2x}\left(1+\int_0^x e^{2x}\,S_1(x)\,dx\right).$$

Но, замѣчая, что $S_1(x) > 1$, и предполагая $x>0$, имѣемъ

$$\int_0^x e^{2x}\,S_1(x)\,dx > \frac{1}{2}\left(e^{2x}-1\right).$$

Поэтому находимъ

$$z > \frac{1}{2}\left(1 + e^{-2x}\right)$$

и слѣдовательно

$$S(x) - x\,S_1(x) > \frac{1}{2}. \tag{59}$$

Замѣтивши это, обращаемся къ выраженію $F(\varkappa)$.

Представляя это выраженіе для случая $\mu + \varkappa > 0$ подъ видомъ

$$F(\varkappa) = \lambda^2 S(\mu + \varkappa)\left(S(\mu + \varkappa) - (\mu + \varkappa)\,S_1(\mu + \varkappa)\right)$$
$$+ (\mu + \varkappa)\left(\lambda^2 - \frac{1}{2}\varkappa + \frac{1}{2}\mu\right) S(\mu + \varkappa)\,S_1(\mu + \varkappa),$$

а для случая $\mu + \varkappa < 0$ — подъ видомъ

$$F(\varkappa) = \lambda^2 S(\mu + \varkappa)\left(S(\mu + \varkappa) + (\mu + \varkappa)\,S_1(\mu + \varkappa)\right)$$
$$-(\mu + \varkappa)\left(\lambda^2 + \frac{1}{2}\varkappa - \frac{1}{2}\mu\right) S(\mu + \varkappa)\,S_1(\mu + \varkappa)$$

и принимая въ разсчетъ, что при $\varkappa^2 \leqq \lambda^4$ и при $\mu < \lambda^2$ величины

$$\lambda^2 - \frac{1}{2}\varkappa + \frac{1}{2}\mu, \qquad \lambda^2 + \frac{1}{2}\varkappa - \frac{1}{2}\mu$$

обѣ положительны, находимъ

$$F(\varkappa) > \lambda^2 S(\mu + \varkappa)\left(S(\mu + \varkappa) - (\mu + \varkappa)\,S_1(\mu + \varkappa)\right),$$

если $\mu + \varkappa > 0$, и

$$F(\varkappa) > \lambda^2 S(\mu + \varkappa)\left(S(\mu + \varkappa) + (\mu + \varkappa)\,S_1(\mu + \varkappa)\right),$$

если $\mu + \varkappa < 0$.

Отсюда на основаніи (59), гдѣ x предполагается положительнымъ, для обоихъ случаевъ получаемъ

$$F(\varkappa) > \frac{1}{2}\lambda^2 S(\mu + \varkappa) > \frac{1}{2}\lambda^2,$$

а этимъ обнаруживается, что при выполненіи условія (56) необходимо будетъ

$$\lambda^2 < \frac{2}{\pi^2},$$

гдѣ вторая часть неравенства, очевидно, менѣе $\frac{1}{4}$.

Вслѣдствіе всего вышеизложеннаго мы приходимъ къ заключенію, что искомое условіе, которому должны удовлетворять λ и μ, получается изъ (56) при $\varkappa = -\lambda^2$. Условіе это, слѣдовательно, будетъ

$$\lambda^2 S^2(\mu-\lambda^2) + \frac{1}{2}(\mu^2-\lambda^4)\, S(\mu-\lambda^2)\, S_1(\mu-\lambda^2) \leqq \frac{1}{\pi^2}. \qquad (60)$$

20. Сравнимъ условіе (60) съ другими признаками неравенства $A^2 < 1$, полученными нами для того-же уравненія ранѣе.

Какъ это слѣдуетъ изъ самаго вывода, условіе (60) имѣетъ несомнѣнное преимущество, какъ передъ условіемъ (49), такъ и передъ условіемъ (29), служащимъ признакомъ неравенства $A^2 < 1$ въ предположеніи $\mu \leqq \lambda^2$. Совпадая съ первымъ изъ этихъ условій при $\lambda = 0$, со вторымъ при $\mu = \lambda^2$, во всѣхъ другихъ случаяхъ условіе (60) приводитъ къ болѣе широкимъ заключеніямъ.

Что касается другихъ найденныхъ нами признаковъ неравенства $A^2 < 1$, то прежде всего замѣтимъ, что въ случаѣ $\mu \leqq \lambda^2$ условіе (60) уступаетъ тѣмъ условіямъ, которыя были получены въ параграфѣ 2-омъ при непосредственномъ примѣненіи признака (3) къ разсматриваемому здѣсь уравненію.

Дѣйствительно, въ предположеніи $\mu > 0$, на которомъ мы здѣсь остановились, эти условія приводятъ, между прочимъ, къ заключенію, что неравенство $A^2 < 1$ имѣетъ мѣсто всякій разъ, когда при $\mu \leqq \lambda^2$

$$\lambda^2 + \mu \leqq \frac{1}{4}.$$

Условіе-же (60) не позволяетъ сдѣлать подобнаго заключенія, ибо нетрудно убѣдиться, что при выполненіи этого условія величина $\lambda^2 + \mu$ въ случаѣ $\mu \leqq \lambda^2$ никогда не можетъ достигать $\frac{1}{4}$.

Чтобы показать это, мы замѣчаемъ, что первая часть неравенства (60) не менѣе величины

$$\lambda^2 + \frac{1}{2}(\mu^2 - \lambda^4),$$

которая равна

$$\frac{1}{2}\left\{\lambda^2 + \mu + (\lambda^2-\mu)(1-\lambda^2-\mu)\right\}$$

и слѣдовательно въ случаѣ $\mu \leqq \lambda^2$ и при $\lambda^2 < \frac{2}{\pi^2}$, что необходимо имѣетъ мѣсто при условіи (60), не менѣе

$$\frac{1}{2}(\lambda^2 + \mu).$$

Мы должны поэтому заключить, что при условіи (60) въ случаѣ $\mu \leqq \lambda^2$ всегда будетъ

$$\lambda^2 + \mu \leqq \frac{2}{\pi^2},$$

гдѣ знакъ равенства можетъ имѣть мѣсто только при $\mu = \lambda^2$.

Такимъ образомъ условіе (60) можетъ быть полезно только въ случаѣ $\mu > \lambda^2$. Но и въ этомъ случаѣ къ нему должно обращаться лишь при условіи

$$\eta = \frac{\mu - \lambda^2}{\lambda} > 1,$$

ибо въ предположеніи $\mu > \lambda^2$, $\eta \leqq 1$ въ параграфахъ 9-омъ и 10-омъ были указаны другіе признаки неравенства $A^2 < 1$, изъ которыхъ по крайней мѣрѣ одинъ, а именно тотъ, который выражается условіемъ (30), всегда приводитъ къ лучшимъ выводамъ, чѣмъ нашъ новый признакъ (60).

Въ самомъ дѣлѣ, если положимъ

$$\lambda\eta = \mu - \lambda^2 = \zeta,$$

то условіе (60) напишется такъ:

$$f(\zeta) \leqq \frac{1}{\pi^2},$$

гдѣ

$$f(\zeta) = \lambda^2 \left\{ S^2(\zeta) + \zeta S(\zeta) S_1(\zeta) \right\} + \frac{\zeta^2}{2} S(\zeta) S_1(\zeta),$$

условіе-же (30) приведется къ виду

$$\varphi(\zeta) \leqq \frac{1}{\pi^2},$$

гдѣ

$$\varphi(\zeta) = \lambda^2 \frac{(1+\zeta)\left(1 + 3\zeta + \frac{5}{2}\zeta^2\right)}{(1+2\zeta)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\zeta^2}{2} \frac{1+\zeta}{\sqrt{1+2\zeta}}.$$

Но можно показать, что

$$f(\zeta) > \varphi(\zeta) \tag{61}$$

при всякомъ положительномъ ζ.

Для этого обращаемся къ выраженіямъ $S(\zeta)$ и $S_1(\zeta)$ подъ видомъ рядовъ.

Имѣемъ

$$S(\zeta) = 1 + \zeta^2 + \frac{1}{4}\zeta^4 + \cdots,$$

$$S_1(\zeta) = 1 + \frac{1}{2}\zeta^2 + \cdots.$$

Отсюда выводимъ

$$(1+2\zeta)\,S^2(\zeta)\,S_1^2(\zeta) = 1 + 2\zeta + 3\zeta^2 + \cdots,$$

гдѣ при $\zeta > 0$ всѣ члены положительны.

Вслѣдствіе этого имѣемъ

$$(1+2\zeta)\,S^2(\zeta)\,S_1^2(\zeta) > (1+\zeta)^2$$

и слѣдовательно

$$S(\zeta)S_1(\zeta) > \frac{1+\zeta}{\sqrt{1+2\zeta}} \tag{62}$$

при всякомъ положительномъ ζ.

Далѣе, находимъ

$$(1+2\zeta)\Big(S^2(\zeta) + \zeta S(\zeta)\,S_1(\zeta)\Big)^2 = 1 + 4\zeta + 9\zeta^2 + 17\zeta^3 + 24\zeta^4 + \cdots,$$

а сравнивая это выраженіе, въ которомъ при $\zeta > 0$ всѣ члены положительны, съ слѣдующимъ:

$$\Big(1 + 2\zeta + \frac{3}{2}\zeta^2\Big)^2 = 1 + 4\zeta + 7\zeta^2 + 6\zeta^3 + \frac{9}{4}\zeta^4,$$

получаемъ

$$(1+2\zeta)\Big(S^2(\zeta) + \zeta S(\zeta)\,S_1(\zeta)\Big)^2 > \Big(1 + 2\zeta + \frac{3}{2}\zeta^2\Big)^2,$$

откуда

$$S^2(\zeta) + \zeta S(\zeta)\,S_1(\zeta) > \frac{1 + 2\zeta + \frac{3}{2}\zeta^2}{\sqrt{1+2\zeta}}$$

для всякаго положительнаго ζ.

Но, замѣчая, что

$$(1+\zeta)\left(1+3\zeta+\frac{5}{2}\zeta^2\right)=(1+2\zeta)\left(1+2\zeta+\frac{3}{2}\zeta^2\right)-\frac{1}{2}\zeta^3,$$

въ томъ-же предположеніи $\zeta>0$ находимъ

$$1+2\zeta+\frac{3}{2}\zeta^2>\frac{(1+\zeta)\left(1+3\zeta+\frac{5}{2}\zeta^2\right)}{1+2\zeta}.$$

Вслѣдствіе этого при $\zeta>0$ имѣемъ

$$S^2(\zeta)+\zeta\, S(\zeta)\, S_1(\zeta)>\frac{(1+\zeta)\left(1+3\zeta+\frac{5}{2}\zeta^2\right)}{(1+2\zeta)^{\frac{3}{2}}}. \tag{63}$$

Неравенства-же (62) и (63) обнаруживаютъ справедливость (61).

Изъ доказаннаго сейчасъ слѣдуетъ, что при $\lambda>0$, $\eta>0$ или, что все равно, при $\mu>\lambda^2$ условіе (30) будетъ выполняться всякій разъ, когда выполнено условіе (60), но что обратное не всегда будетъ имѣть мѣсто. Вслѣдствіе этого при η, лежащемъ между 0 и 1, когда условіе (30) служитъ признакомъ неравенства $A^2<1$, оно должно быть предпочитаемо условію (60).

Должно, впрочемъ, замѣтить, что разница въ выводахъ, получаемыхъ изъ этихъ условій при η, непревосходящемъ 1, довольно незначительна.

Такъ, въ случаѣ $\eta=1$ условіе (60), приводящееся тогда къ виду

$$\lambda^2\left\{S^2(\lambda)+\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)S(\lambda)\, S_1(\lambda)\right\}\leqq\frac{1}{\pi^2},$$

требуетъ, чтобы λ^2 не превосходило числа 0,053 . . . ; условіе-же (30), какъ было указано въ параграфѣ 11-омъ, даетъ въ этомъ случаѣ для высшаго предѣла λ^2 число, близкое къ 0,05659.

21. Мы предложили преобразованіе, показанное въ параграфѣ 18-омъ, имѣя въ виду случай когда

$$\int_0^\sigma p\, ds\geqq 0.$$

Но преобразованіе это можетъ быть полезно и въ случаѣ, когда

$$\int_0^\sigma p\, ds<0,$$

ибо въ этомъ случаѣ, опредѣливши функцію v, какъ было предложено, при помощи уравненія

$$v' = k(p - \Omega),$$

мы можемъ иногда выборомъ параметра k распорядиться такъ, чтобы было

$$\Omega + (1 - k)(p - \Omega) + v^2 \leqq 0 \tag{64}$$

для всѣхъ значеній s; а всякій разъ, когда это удастся сдѣлать, мы будемъ имѣть $q \leqq 0$ для всѣхъ значеній t и слѣдовательно будемъ въ правѣ заключить о существованіи неравенства $A > 1$.

Для примѣра возьмемъ уравненіе

$$\frac{d^2x}{ds^2} - (\lambda^2 - \mu \sin s)\, x = 0,$$

съ которымъ мы уже имѣли дѣло въ параграфѣ 6-омъ.

Изъ уравненія

$$v' = k\mu \sin s$$

при условіи (47) находимъ

$$v = -k\mu \cos s.$$

Вслѣдствіе этого условіе (64) обращается въ нашемъ случаѣ въ слѣдующее:

$$-\lambda^2 + (1 - k)\mu \sin s + k^2\mu^2 \cos^2 s \leqq 0$$

или

$$k^2\mu^2 \sin^2 s - (1 - k)\mu \sin s + \lambda^2 - k^2\mu^2 \geqq 0, \tag{65}$$

и мы видимъ, что, между прочимъ, условію этому можно удовлетворить независимо отъ s всякій разъ, когда вещественный параметръ k можетъ быть выбранъ такъ, чтобы уравненіе

$$k^2\mu^2 z^2 - (1 - k)\mu z + \lambda^2 - k^2\mu^2 = 0 \tag{66}$$

имѣло мнимые или равные корни.

Найдемъ условіе, которому должны удовлетворять для этого λ и μ.

Чтобы сдѣлать это, мы должны выразить, что надлежащимъ выборомъ k возможно удовлетворить условію

$$(1 - k)^2 - 4k^2(\lambda^2 - k^2\mu^2) \leqq 0.$$

Но послѣднее приводится къ виду

$$\lambda^2 \geqq k^2\mu^2 + \frac{(1-k)^2}{4k^2}$$

и требуетъ, чтобы наименьшее изъ всѣхъ возможныхъ значеній функціи

$$\mu^2 k^2 + \frac{(1-k)^2}{4k^2}$$

не превосходило λ^2; а это наименьшее значеніе получимъ, принимая за k единственный положительный корень уравненія

$$\frac{1-k}{4k^4} = \mu^2. \tag{67}$$

Такимъ образомъ, разумѣя подъ k этотъ корень и замѣчая, что въ силу (67)

$$k^2\mu^2 + \frac{(1-k)^2}{4k^2} = \frac{(1-k)(2-k)}{4k^2},$$

мы должны имѣть

$$\lambda^2 \geqq \frac{(1-k)(2-k)}{4k^2}, \tag{68}$$

или, такъ-какъ разсматриваемая величина k, очевидно, менѣе 1,

$$\frac{1}{k} \leqq \frac{1}{4}\left(\sqrt{32\lambda^2+1}+3\right).$$

Послѣднее-же при существованіи (67) требуетъ, чтобы было

$$1024\,\mu^2 \leqq \left(\sqrt{32\lambda^2+1}-1\right)\left(\sqrt{32\lambda^2+1}+3\right)^3, \tag{69}$$

что и представляетъ искомое условіе.

Таково условіе, при которомъ корни уравненія (66) надлежащимъ выборомъ k всегда могутъ быть сдѣланы мнимыми или равными.

Но это, очевидно, не единственный способъ, которымъ можно удовлетворить условію (65) независимо отъ s, ибо послѣднее будетъ выполняться также и въ случаѣ, когда названные корни вещественны и различны, если только ихъ численныя величины не менѣе 1, а знаки одинаковы.

Можно однако показать, что тѣмъ не менѣе найденное нами условіе (69) не только достаточно для возможности (65), но и необходимо.

Будемъ разсматривать вмѣсто (69) равносильное ему условіе (68), гдѣ k означаетъ положительный корень уравненія (67).

Полагая

$$1 - k = \alpha^2,$$

это условіе приведемъ къ виду

$$\lambda^2 \geqq \frac{\alpha^2(1+\alpha^2)}{4(1-\alpha^2)^2}, \tag{70}$$

при чемъ α можемъ опредѣлить, какъ вещественный корень уравненія

$$\frac{\alpha}{(1-\alpha^2)^2} = 2\mu, \tag{71}$$

численно не превосходящій 1.

Допустимъ теперь, что условіе (70) не выполнено, и покажемъ, что тогда, каково-бы ни было вещественное число k, перемѣнному s всегда можно приписать такое вещественное значеніе, при которомъ выраженіе

$$k^2\mu^2 \sin^2 s - (1-k)\mu \sin s + \lambda^2 - k^2\mu^2 \tag{72}$$

сдѣлается отрицательнымъ.

Это очевидно для случая, когда произведеніе корней уравненія (66) менѣе или равно 1, ибо при сдѣланномъ допущеніи эти корни будутъ вещественными и различными, каково-бы ни было вещественное значеніе k.

Мы можемъ поэтому ограничиться предположеніемъ, что названное произведеніе, равное

$$\frac{\lambda^2 - k^2\mu^2}{k^2\mu^2},$$

болѣе 1, что выразится условіемъ

$$\lambda^2 > 2k^2\mu^2,$$

или, если предположимъ $\lambda > 0$,

$$|k\mu| < \frac{\lambda}{\sqrt{2}}. \tag{73}$$

Въ этомъ-же предположеніи нетрудно показать, что выраженіе (72) сдѣлается отрицательнымъ или при $\sin s = 1$, или при $\sin s = -1$.

Чтобы на чемъ-нибудь остановиться, мы допустимъ, что $\mu > 0$, и разсмотримъ величину

$$\lambda^2 + k\mu - \mu,$$

въ которую обращается (72) при $\sin s = 1$.

На основаніи (73) величина эта менѣе слѣдующей

$$\lambda^2 + \frac{\lambda}{\sqrt{2}} - \mu.$$

Послѣдняя-же, когда условіе (70) не выполнено, навѣрно отрицательна.

Дѣйствительно, изъ неравенства

$$\lambda^2 < \frac{\alpha^2(1+\alpha^2)}{4(1-\alpha^2)^2},$$

имѣя въ виду (71), выводимъ

$$1 - \frac{\lambda^2}{\mu} - \frac{\lambda}{\sqrt{2}\,\mu} > 1 - \frac{\alpha(1+\alpha^2)}{2} - (1-\alpha^2)\sqrt{\frac{1+\alpha^2}{2}},$$

а вторая часть послѣдняго неравенства, приводящаяся къ виду

$$\frac{1-\alpha}{2}\left\{(1+\alpha)\left(1-\sqrt{\frac{1+\alpha^2}{2}}\right) + (1+\alpha^2)\left(1 - \frac{1+\alpha}{\sqrt{2(1+\alpha^2)}}\right)\right\},$$

очевидно, положительна, ибо α есть правильная дробь.

Мы находимъ поэтому

$$1 - \frac{\lambda^2}{\mu} - \frac{\lambda}{\sqrt{2}\,\mu} > 0,$$

и слѣдовательно

$$\lambda^2 + \frac{\lambda}{\sqrt{2}} - \mu < 0.$$

Такимъ образомъ убѣждаемся, что, когда условіе (70) не выполнено, выраженіе (72) всегда можно сдѣлать отрицательнымъ.

Мы должны поэтому заключить, что найденное нами условіе есть наиболѣе широкій признакъ неравенства $A > 1$, къ которому можетъ привести разсматриваемая метода.

22. Сравнимъ условіе (69) или равносильное ему условіе (70) съ тѣми признаками неравенства $A > 1$, которые были получены нами для разсматриваемаго здѣсь уравненія въ параграфѣ 6-омъ.

Такъ-какъ въ случаѣ, когда численная величина μ не превосходитъ λ^2, $p \leqq 0$ для всѣхъ значеній s, то мы будемъ теперь предполагать $\mu > \lambda^2$, и въ этомъ предположеніи прежде всего преобразуемъ наше условіе къ нѣсколько иному виду, болѣе удобному для нашей настоящей цѣли.

Замѣчая, что при μ и α положительныхъ изъ (70) и (71) слѣдуетъ

$$\frac{\lambda^2}{\mu} \geqq \frac{\alpha(1+\alpha^2)}{2},$$

заключаемъ, что вещественное число β, опредѣляемое уравненіемъ

$$\frac{\beta(1+\beta^2)}{2} = \frac{\lambda^2}{\mu}, \tag{74}$$

необходимо болѣе α, а такъ-какъ это число въ предположеніи $\mu > \lambda^2$, очевидно, менѣе 1, то на основаніи (71) находимъ

$$2\mu \leqq \frac{\beta}{(1-\beta^2)^2};$$

послѣднее-же вслѣдствіе (74) даетъ

$$\lambda^2 \leqq \frac{\beta^2(1+\beta^2)}{4(1-\beta^2)^2}. \tag{75}$$

Это условіе, въ которомъ β означаетъ единственный вещественный корень уравненія (74), и представляетъ искомое преобразованіе *).

Переходя теперь къ нашей задачѣ, мы начнемъ съ признака неравенства $A > 1$, выражаемаго условіемъ (15), которое въ предположеніи $\varepsilon^2 > 1$ можно представить подъ видомъ

$$\lambda^2 \leqq \frac{1}{\varepsilon^2 - 1}.$$

Такъ-какъ здѣсь

$$\varepsilon = \frac{\mu}{\lambda^2},$$

---

*) Нетрудно убѣдиться, что въ предположеніи $\mu > \lambda^2$ не только (75) есть слѣдствіе (70), но и (70) есть слѣдствіе (75).

то вводя число β, опредѣляемое уравненіемъ (74), мы приведемъ это условіе къ виду

$$\lambda^2 \leqq \frac{\beta^2(1+\beta^2)^2}{(1-\beta^2)(4+3\beta^2+\beta^4)};$$

а вторая часть послѣдняго, очевидно, менѣе второй части условія (75).

Такимъ образомъ видимъ, что условіе (75) способно приводить къ болѣе широкимъ заключеніямъ.

Обращаемся теперь къ признаку неравенства $A > 1$, выражаемому условіями (12) и (18), въ которыхъ k представляетъ цѣлое число, не меньшее 2.

Такъ-какъ

$$\cos\frac{\pi}{2k} > 1 - \frac{\pi^2}{8k^2},$$

и вторая часть этого неравенства при указанныхъ сейчасъ величинахъ k положительна, то условіе (18) требуетъ, чтобы было

$$\varepsilon < \frac{k^2-1}{k^2-\frac{\pi^2}{8}};$$

а отсюда, предполагая $\varepsilon > 1$, выводимъ

$$k^2 < \frac{\frac{\pi^2}{8}\varepsilon - 1}{\varepsilon - 1}.$$

Вслѣдствіе этого, обращаясь къ условію (12), которое можетъ быть представлено подъ видомъ

$$\lambda^2 \leqq \frac{k^2}{\varepsilon - 1},$$

заключаемъ, что для возможности этого условія необходимо слѣдующее неравенство:

$$\lambda^2 < \frac{\frac{\pi^2}{8}\varepsilon - 1}{(\varepsilon-1)^2}.$$

Послѣднее-же, если согласно (74) положимъ

$$\varepsilon = \frac{2}{\beta(1+\beta^2)},$$

приведется къ виду

$$\lambda^2 < \frac{\beta(1+\beta^2)\left[\frac{\pi^2}{4} - \beta(1+\beta^2)\right]}{(1-\beta)^2(2+\beta+\beta^2)^2},$$

откуда, замѣчая, что

$$(2+\beta+\beta^2)^2 > 2(1+\beta^2)(1+\beta)^2,$$

найдемъ

$$\lambda^2 < \frac{\beta\left[\frac{\pi^2}{4} - \beta(1+\beta^2)\right]}{2(1-\beta^2)^2}.$$

Этому неравенству необходимо будетъ удовлетворять λ^2 всякій разъ, когда условія (12) и (18) выполняются при какой-либо величинѣ k, бóльшей или равной 2.

Но нетрудно видѣть, что условіе (75) даетъ для высшаго предѣла λ^2 бóльшее число.

Дѣйствительно, неравенство

$$\frac{\beta^2(1+\beta^2)}{4(1-\beta^2)^2} > \frac{\beta\left[\frac{\pi^2}{4} - \beta(1+\beta^2)\right]}{2(1-\beta^2)^2}$$

равносильно слѣдующему

$$\beta(1+\beta^2) > \frac{\pi^2}{6}$$

или

$$\varepsilon < \frac{12}{\pi^2};$$

а послѣднее необходимо допустить, въ чемъ убѣждаемся, замѣчая, что $\pi^2 < 8\sqrt{2}$, и принимая въ разсчетъ, что величина ε, удовлетворяющая условію (18) при $k \geqq 2$, не можетъ превышать числа $\frac{3}{2\sqrt{2}}$.

Мы приходимъ такимъ образомъ къ заключенію, что условіе (69) или равносильныя ему условія (70) и (75) представляютъ болѣе широкій признакъ неравенства $A > 1$, чѣмъ условія, найденныя въ параграфѣ 6-омъ.

23. Возвращаемся опять къ формуламъ преобразованія, указаннымъ въ параграфѣ 18-омъ.

Въ случаѣ отрицательной величины интеграла

$$\int_0^\sigma p\,ds$$

этими формулами, очевидно, нельзя воспользоваться для того, чтобы сдѣлать $q \geqq 0$ для всѣхъ значеній s, ибо вслѣдствіе предполагаемаго нами условія

$$\int_0^\sigma v\,ds = 0$$

всегда существуютъ какъ такія значенія s, для которыхъ

$$v = 0, \qquad v' \geqq 0,$$

такъ и такія, для которыхъ

$$v = 0, \qquad v' \leqq 0,$$

а при $\Omega < 0$, приписывая s одно изъ значеній, для которыхъ

$$v = 0, \qquad \frac{1-k}{k}\,v' \leqq 0,$$

мы, очевидно, сдѣлаемъ $q < 0$.

Но въ этомъ случаѣ, когда не удается сдѣлать $q \leqq 0$ для всѣхъ значеній s, параметръ k иногда можно подобрать такъ, чтобы было

$$\int_0^\tau q\,dt \geqq 0,$$

послѣ чего, повторяя то-же преобразованіе, мы придемъ къ новому уравненію вида

$$\frac{d^2z}{du^2} + rz = 0,$$

въ которомъ всегда можно будетъ сдѣлать $r \geqq 0$ для всѣхъ значеній u.

Мы видимъ такимъ образомъ, что при надлежащемъ выборѣ функціи v въ общихъ формулахъ преобразованія можно придти къ уравненію, въ которомъ будетъ $q \geqq 0$ для всѣхъ значеній независимаго перемѣннаго, не только во всѣхъ случаяхъ, когда

$$\int_0^\sigma p\,ds \geqq 0,$$

но и во многихъ изъ тѣхъ случаевъ, когда

$$\int_0^\sigma p\,ds < 0.$$

Такъ напр. для уравненія, съ которымъ мы имѣли дѣло въ послѣднихъ параграфахъ, это навѣрно возможно, когда надлежащимъ выборомъ $\varkappa$ можно удовлетворить условію

$$\lambda^2 \leqq \frac{1}{2}(\mu^2 - \varkappa^2)\frac{S_1(\mu+\varkappa)}{S(\mu+\varkappa)},$$

гдѣ символы S и S_1 имѣютъ значеніе, указанное въ параграфѣ 19-омъ.

Къ этому замѣчанію относительно общихъ формулъ преобразованія прибавимъ, что въ случаѣ, когда интегралъ

$$\int_0^\sigma p\,ds$$

не есть число отрицательное, функцію v никогда нельзя подобрать такъ, чтобы было $q \leqq 0$ для всѣхъ значеній s, ибо, если условіе $q \leqq 0$, приводящееся къ виду

$$p - v' + v^2 \leqq 0,$$

выполняется для всѣхъ значеній s, то необходимо будетъ

$$\int_0^\sigma p\,ds + \int_0^\sigma v^2\,ds < 0$$

и слѣдовательно

$$\int_0^\sigma p\,ds < 0.$$

Отсюда видно, что, если при положительной или равной нулю величинѣ интеграла

$$\int_0^\sigma p\,ds$$

для разсматриваемаго уравненія имѣетъ мѣсто неравенство $A > 1$, то это обстоятельство никогда не можетъ быть обнаружено на основаніи соображеній, которыми до сихъ поръ мы руководились.

Имѣя въ виду какъ эти, такъ и многіе другіе случаи, для которыхъ указанные выше пріемы могутъ оказаться недостаточными, мы разсмотримъ далѣе другіе способы рѣшенія нашего вопроса. Но прежде, чѣмъ закончить эту часть изслѣдованія, обратимъ вниманіе на нѣкоторыя общія заключенія относительно величины A, къ которымъ приводятъ соображенія, изложенныя выше.

24. Допустимъ, что изслѣдуемое дифференціальное уравненіе дано подъ видомъ

$$\frac{d^2x}{ds^2} + \mu p x = 0,$$

гдѣ μ означаетъ нѣкоторый вещественный параметръ, который мы будемъ предполагать положительнымъ, а p независящую отъ него вещественную періодическую функцію s съ періодомъ σ.

Преобразовывая это уравненіе по формуламъ, предложеннымъ въ концѣ параграфа 15-го, и полагая по прежнему

$$\Omega = \frac{1}{\sigma}\int_0^\sigma p\,ds,$$

мы должны опредѣлить функцію v согласно уравненію

$$v' = \mu(p - \Omega),$$

откуда при условіи (47) найдемъ

$$v = \mu\varphi,$$

разумѣя подъ φ слѣдующую функцію

$$\varphi = \frac{1}{\sigma}\int_0^\sigma \Big(p(s_1 + s) - \Omega\Big)\, s_1\, ds_1.$$

При этомъ мы придемъ къ уравненію

$$\frac{d^2y}{dt^2} + qy = 0, \tag{76}$$

въ которомъ будетъ

$$q = \mu(\Omega + \mu\varphi^2)\, e^{-4\mu\int\varphi\, ds}.$$

Отсюда видно, что, если Ω есть число отрицательное, то дѣлая μ достаточно малымъ, мы всегда можемъ сдѣлать $q \leqq 0$ для всѣхъ значеній s.

Чтобы достигнуть этого, мы должны взять

$$\mu \leqq -\frac{\Omega}{M^2},$$

гдѣ M означаетъ наибольшее численное значенiе функцiи φ, и выбравши такимъ образомъ μ, можемъ быть увѣрены, что для нашего уравненiя будетъ имѣть мѣсто неравенство $A > 1$.

Допустимъ теперь, что $\Omega \geqq 0$.

Въ этомъ случаѣ функцiя q будетъ всегда положительною, а дѣлая μ достаточно малымъ, мы сдѣлаемъ всѣ значенiя этой функцiи сколь угодно малыми, вслѣдствiе чего всегда можемъ удовлетворить извѣстнымъ признакамъ неравенства $A^2 < 1$.

Такимъ образомъ въ этомъ случаѣ, пока μ не превосходитъ нѣкотораго предѣла, для нашего уравненiя будетъ имѣть мѣсто неравенство $A^2 < 1$.

Нетрудно найти подобный предѣлъ въ зависимости отъ величинъ Ω и M.

Пусть интегралъ

$$\int \varphi\, ds,$$

фигурирующiй въ выраженiи функцiи q, никогда не дѣлается отрицательнымъ, но обращается въ нуль при нѣкоторыхъ значенiяхъ s, изъ которыхъ одно пусть будетъ α.

Останавливаясь на этомъ предположенiи, которымъ опредѣляется только постоянное произвольное въ названномъ интегралѣ, будемъ имѣть

$$q < \mu(\Omega + M^2\mu),$$

$$\int \varphi\, ds < M|s-\alpha|;$$

а въ силу послѣдняго неравенства, имѣя въ виду, что формула

$$\tau = \int_0^\sigma e^{2\mu\int\varphi\, ds}\, ds$$

можетъ быть замѣнена слѣдующею:

$$\tau = \int_{\alpha-\frac{\sigma}{2}}^{\alpha+\frac{\sigma}{2}} e^{2\mu\int\varphi\, ds}\, ds,$$

найдемъ

$$\tau < \int\limits_{\alpha-\frac{\sigma}{2}}^{\alpha} e^{2M\mu(\alpha-s)}\, ds + \int\limits_{\alpha}^{\alpha+\frac{\sigma}{2}} e^{2M\mu(s-\alpha)}\, ds,$$

и слѣдовательно

$$\tau < \frac{e^{M\sigma\mu}-1}{M\mu}.$$

Отсюда выводимъ

$$\tau^2 q < \left(\frac{\Omega}{M} + M\mu\right)\frac{(e^{M\sigma\mu}-1)^2}{M\mu}.$$

Вслѣдствіе этого, если сдѣлаемъ

$$\mu \leqq \frac{\zeta}{M\sigma},$$

разумѣя подъ ζ положительный корень уравненія

$$\left(\frac{\sigma\Omega}{M} + \zeta\right)\frac{(e^{\zeta}-1)^2}{\zeta} = \pi^2,$$

то будемъ имѣть

$$\tau^2 q < \pi^2$$

для всѣхъ значеній s, и такимъ образомъ для уравненія (76) удовлетворится признакъ неравенства $A^2 < 1$, предложенный профессоромъ Н. Е. Жуковскимъ.

Мы можемъ поэтому утверждать, что, если при положительной или равной нулю величинѣ Ω положительный параметръ μ не превосходитъ предѣла $\frac{\zeta}{M\sigma}$, для нашего дифференціальнаго уравненія навѣрно будетъ существовать неравенство $A^2 < 1$.

Отсюда для случая $\Omega = 0$ выводится слѣдующее предложеніе:

Всякій разъ, когда въ уравненіи

$$\frac{d^2x}{ds^2} + px = 0$$

функція p такова, что

$$\int\limits_0^{\sigma} p\, ds = 0$$

и численныя значенія функціи

$$\int_0^\sigma p(s_1 + s)\, s_1\, ds_1$$

не превосходятъ величины

$$\log(1 + \pi) = 1{,}42108\ldots,$$

для этого уравненія имѣетъ мѣсто неравенство

$$A^2 < 1.$$

Къ вопросу о существованіи конечной и непрерывной внутри данной области функціи координатъ, удовлетворяющей уравненію Лапласа, при заданныхъ значеніяхъ ея нормальной производной на поверхности, ограничивающей область.

В. А. Стеклова.

1. Задача Neumann'а состоитъ въ слѣдующемъ:

Найти внутри данной области (D), *ограниченной замкнутой поверхностью* (S), *конечную и непрерывную функцію* V *координатъ* x, y *и* z, *удовлетворяющую условіямъ*

$$\Delta V = 0 \qquad \text{внутри } (D), \tag{1}$$

$$\frac{\partial V}{\partial n} = f \qquad \text{на поверхности } (S), \tag{2}$$

гдѣ f *есть заданная функція координатъ точекъ поверхности* (S), n *есть направленіе внѣшней нормали къ этой поверхности, а* Δ *знакъ операціи вида*

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Интегрируя уравненіе (1) по всему объему области (D), получаемъ

$$\int \frac{\partial V}{\partial n} ds = 0,$$

гдѣ ds есть элементъ поверхности (S).

Это равенство въ связи съ условіемъ (2) показываетъ, что задача возможна только въ томъ случаѣ, когда функція f удовлетворяетъ условію

$$\int f ds = 0. \tag{3}$$

До настоящаго времени, насколько мнѣ извѣстно, существовала единственная метода рѣшенія задачи Neumann'а, принадлежащая самому Neumann'у.

Въ настоящемъ году H. Poincaré опубликовалъ въ Acta Mathematica (20 : 1) мемуаръ: „La méthode de Neumann et le problème de Dirichlet“, во второй части котораго онъ указываетъ на возможность примѣненія къ рѣшенію разсматриваемой задачи методы Robin'а, предложенной послѣднимъ для рѣшенія задачи о распредѣленіи электричества (problème de la distribution de l'électricité).

Такимъ образомъ мы имѣемъ теперь двѣ методы рѣшенія интересующей насъ задачи, но обѣ онѣ, какъ увидимъ ниже, весьма неудовлетворительны.

Мы остановимся на болѣе извѣстной методѣ Neumann'а.

Этого будетъ достаточно, такъ какъ слабые пункты послѣдней и вновь предложенной H. Poincaré одни и тѣ же *).

2. Изложимъ сущность метода Neumann'а.

Условимся сначала въ обозначеніяхъ.

Пусть V есть какая либо функція координатъ точекъ пространства.

Пусть (S) есть какая либо замкнутая поверхность, ограничивающая область (D).

Значеніе V въ какой либо точкѣ s поверхности (S) будемъ обозначать черезъ

$$V_s.$$

Значеніе, которое принимаетъ V въ точкѣ s, если будемъ приближаться къ s съ внутренней стороны поверхности (S), обозначимъ черезъ

$$V_{is}.$$

Значеніе той же функціи въ точкѣ s при приближеніи къ этой точкѣ съ внѣшней стороны (S) обозначимъ черезъ

$$V_{es}.$$

Проводимъ въ точкѣ s нормаль къ поверхности (S) и возьмемъ на этой нормали двѣ точки s' и s'', одну внутри, другую внѣ поверхности (S).

Пусть α, β и γ суть углы, составляемые внѣшней нормалью n къ поверхности (S) въ точкѣ s съ осями прямоугольной системы координатъ.

---

*) Слѣдуетъ замѣтить, что H. Poincaré самъ считаетъ послѣднія главы своего мемуара не строгими, заканчивая свое изслѣдованіе слѣдующими словами: „J'ai pensé que, malgré leur peu de rigueur, ils pouvaient être utiles comme procédés d'investigation etc...“.

Значеніе выраженія

$$\frac{\partial V}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial V}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial V}{\partial z}\cos\gamma, \tag{4}$$

когда x, y и z представляютъ координаты точки s, обозначимъ черезъ

$$\frac{\partial V_s}{\partial n}.$$

Выраженіе (4) имѣетъ нѣкоторыя опредѣленныя значенія въ точкахъ s' и s''.

Предѣлъ, къ которому стремится это выраженіе, когда s' стремится къ совпаденію съ точкой s, обозначимъ черезъ

$$\frac{\partial V_{is}}{\partial n}.$$

Предѣлъ, къ которому стремится то же выраженіе, когда точка s'' стремится къ совпаденію съ точкой s, назовемъ черезъ

$$\frac{\partial V_{es}}{\partial n}.$$

3. Назовемъ черезъ r разстояніе какой либо точки x, y, z пространства отъ точки s поверхности (S). Будемъ считать эту поверхность конвексной, имѣющей опредѣленную касательную плоскость и конечную кривизну въ каждой точкѣ.

Если ξ, η, ζ суть координаты точки s, то

$$r^2=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2.$$

Назовемъ черезъ φ уголъ, составляемый направленіемъ r съ внѣшней нормалью n къ поверхности (S) въ точкѣ s.

Положимъ

$$W=\frac{1}{2\pi}\int\mu\frac{\cos\varphi}{r^2}\,ds,$$

гдѣ μ есть конечная и непрерывная функція координатъ ξ, η, ζ точекъ поверхности (S). Интегрированіе производится по перемѣннымъ ξ, η, ζ и распространяется на всю поверхность (S).

Выраженіе W называется *потенціаломъ двойного слоя*, распредѣленнаго по поверхности (S), на точку x, y, z.

Функція μ называется *напряженіемъ слоя*.

Функція W перемѣнныхъ x, y и z конечна и непрерывна во всѣхъ точкахъ внутри и внѣ области (D), въ безконечности обращается въ нуль и удовлетворяетъ внутри и внѣ области (D) уравненію Лапласа

$$\Delta W = 0.$$

При переходѣ точки x, y, z черезъ точку s поверхности (S), функція W претерпѣваетъ разрывъ, выражаемый слѣдующими соотношеніями

$$W_{is} = W_s + \mu_s,$$

$$W_{es} = W_s - \mu_s,$$

$$W_{is} - W_{es} = 2\mu_s.$$

Сверхъ того обыкновенно принимаютъ, что нормальная производная $\dfrac{\partial W}{\partial n}$ потенціала двойного слоя остается конечной и непрерывной при переходѣ точки x, y, z черезъ поверхность (S), такъ что

$$\frac{\partial W_{is}}{\partial n} = \frac{\partial W_{es}}{\partial n}. \tag{5}$$

4. Пусть f есть заданная функція координатъ, конечная и непрерывная во всѣхъ точкахъ поверхности (S).

Будемъ обозначать вообще черезъ F' значеніе какой либо функціи F отъ x, y и z по замѣнѣ этихъ перемѣнныхъ соотвѣтственно черезъ ξ, η и ζ.

Положимъ

$$V_0 = \frac{1}{4\pi}\int \frac{f'}{r}\, ds$$

и составимъ рядъ функцій

$$V_1 = \frac{1}{2\pi}\int \frac{V_0'}{r^2}\cos\varphi\, ds,$$

$$V_2 = \frac{1}{2\pi}\int \frac{V_1'}{r^2}\cos\varphi\, ds,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$V_n = \frac{1}{2\pi}\int \frac{V_{n-1}'}{r^2}\cos\varphi\, ds,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

Въ интегралахъ этихъ равенствъ интегрированіе совершается по перемѣннымъ ξ, η, ζ и распространяется на всю поверхность (S).

Положимъ затѣмъ

$$\Phi = V_1 + V_2 + \cdots + V_n + \cdots =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int \frac{\cos\varphi}{r^2}(V_0' + V_1' + \cdots + V_n' + \cdots)\,ds.$$

Назовемъ черезъ M_n наибольшее, черезъ m_n наименьшее значеніе функціи V_n $(n = 1, 2, \ldots)$ на поверхности (S).

Neumann показалъ, что

$$M_n < M_{n-1}, \qquad m_n > m_{n-1} \tag{6}$$

и

$$M_n - m_n \leqq (M_{n-1} - m_{n-1})\,\varrho. \tag{7}$$

Если поверхность (S) конвексна и имѣетъ въ каждой точкѣ опредѣленную касательную плоскость и опредѣленную, конечную кривизну, то ϱ есть правильная дробь, зависящая отъ свойствъ поверхности (S).

Неравенства (6) и (7) показываютъ, что при этомъ допущеніи

$$\lim_{n=\infty} V_n = \text{const.} = C.$$

Постоянная C, какъ замѣчаетъ H. Poincaré *), излагая методу Neumann'a, равна нулю, если выполняется условіе

$$\int f'ds = 0.$$

При этомъ рядъ

$$V_0' + V_1' + \cdots + V_n' + \cdots$$

сходится абсолютно и равномѣрно въ любой точкѣ s поверхности (S).

Φ есть, слѣдовательно, конечная и непрерывная функція координатъ внутри и внѣ области (D), обращающаяся въ безконечности въ нуль, удовлетворяющая внутри и внѣ (D) уравненію Лапласа и условіямъ

$$\Phi_{is} = \Phi_s + V_{0s} + V_{1s} + \cdots + V_{ns} + \cdots,$$
$$\Phi_{es} = \Phi_s - (V_{0s} + V_{1s} + \cdots + V_{ns} + \cdots) =$$
$$= (V_{1s} - V_{0s}) + (V_{2s} - V_{1s}) + \cdots = -V_{0s},$$
$$\frac{\partial \Phi_{is}}{\partial n} = \frac{\partial \Phi_{es}}{\partial n}. \tag{8}$$

---

*) H. Poincaré: „Sur les équations de la physique mathématique". Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. VIII, parte 1ª, 1894, p. 113.

Положимъ

$$V = V_0 + \Phi. \tag{9}$$

На основанiи второго изъ предыдущихъ равенствъ, получаемъ

$$V_{es} = V_{0es} + \Phi_{es} = V_{0es} - V_{0s}.$$

Такъ какъ V_0 есть потенцiалъ простого слоя, распредѣленнаго по (S) съ плотностью f', то при сдѣланномъ выше допущенiи относительно поверхности (S)

$$V_{0es} = V_{0is} = V_{0s}$$

и

$$\frac{\partial V_{0is}}{\partial n} = \frac{\partial V_{0es}}{\partial n} + f_s. \tag{10}$$

Слѣдовательно, въ любой точкѣ s поверхности (S)

$$V_{es} = V_{0es} - V_{0s} = 0.$$

Функцiя V равна нулю тождественно во всѣхъ точкахъ внѣ области (D).

Слѣдовательно,

$$\frac{\partial V_{es}}{\partial n} = \frac{\partial V_{0es}}{\partial n} + \frac{\partial \Phi_{es}}{\partial n} = 0$$

или, въ силу (10),

$$\frac{\partial V_{0is}}{\partial n} + \frac{\partial \Phi_{es}}{\partial n} = f_s.$$

Отсюда, на основанiи (8),

$$\frac{\partial (V_{0is} + \Phi_{is})}{\partial n} = f_s$$

и, наконецъ, въ силу (9),

$$\frac{\partial V_{is}}{\partial n} = f_s.$$

Если всѣ предыдущiя разсужденiя справедливы, то функцiя V, построенная только что указаннымъ прiемомъ, представляетъ рѣшенiе задачи Neumann'а, ибо эта функцiя удовлетворяетъ внутри области (D) уравненiю Лапласа и ея нормальная производная обращается на поверхности (S) въ заданную функцiю f.

5. Въ вышеприведенномъ изложенiи методы Neumann'а равенство

$$\int f\,ds = 0 \tag{3}$$

служитъ какъ бы существеннымъ условiемъ абсолютной и равномѣрной сходимости ряда

$$V_0 + V_1 + \cdots + V_n + \cdots \quad *). \tag{11}$$

Но мы сейчасъ увидимъ, что это равенство на самомъ дѣлѣ не играетъ никакой роли въ доказательствѣ сходимости ряда (11).

Послѣднiй можетъ быть сходящимся, хотя бы функцiя f и не удовлетворяла условiю (3).

Для примѣра разсмотримъ простѣйшiй случай, когда поверхность (S) есть сфера.

Положимъ

$$f = a_1 f_1 + a_2 f_2,$$

гдѣ a_1, a_2 суть нѣкоторые постоянные коэффицiенты (пока неопредѣленные), а f_1 и f_2 какiя либо функцiи координатъ точекъ поверхности (S) (сферы).

Положимъ

$$V_0 = \frac{1}{4\pi}\int \frac{f'}{r}\,ds = \frac{a_1}{4\pi}\int \frac{f_1'}{r}\,ds + \frac{a_2}{4\pi}\int \frac{f_2'}{r}\,ds = a_1 Q_1 + a_2 Q_2,$$

гдѣ Q_1 и Q_2 суть нѣкоторыя функцiи координатъ x, y и z.

Опредѣлимъ постоянныя a_1 и a_2 при помощи равенствъ

$$\left.\begin{aligned} &\int V_0'\,ds = a_1\int Q_1'\,ds + a_2\int Q_2'\,ds = 0, \\ &\int f'\,ds = a_1\int f_1'\,ds + a_2\int f_2'\,ds = 1. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Всегда можно выбрать функцiи f_1 и f_2 такъ, что опредѣлитель

$$\begin{vmatrix} \int Q_1'\,ds\,, & \int Q_2'\,ds \\ \int f_1'\,ds\,, & \int f_2'\,ds \end{vmatrix}$$

будетъ неравенъ нулю.

---

*) Для простоты письма опускаемъ значекъ $'$ при функцiяхъ V_n.

Уравненія (12) дадутъ вполнѣ опредѣленныя выраженія постоянныхъ a_1 и a_2. При этомъ будемъ имѣть

$$\int V_0' ds = 0\,, \qquad \int f' ds = 1\,.$$

Интегрируемъ равенство

$$V_n = \frac{1}{2\pi}\int V_{n-1}' \frac{\cos\varphi}{r^2}\, ds$$

по всей поверхности (S) по перемѣннымъ x, y и z.

Обозначимъ элементъ поверхности при этомъ интегрированіи черезъ dS. Получимъ

$$\int V_n dS = \frac{1}{2\pi}\int V_{n-1}' \left(\int \frac{\cos\varphi}{r^2}\, dS\right) ds\,.$$

Для сферы

$$\int \frac{\cos\varphi}{r^2}\, dS = \int \frac{\cos\varphi}{r^2}\, ds = 2\pi$$

по теоремѣ Гаусса.

Такимъ образомъ въ разсматриваемомъ случаѣ при всякомъ $n = 1\,, 2\,, \ldots$

$$\int V_n dS = \int V_n' ds = \int V_{n-1}' ds\,.$$

Такъ какъ по условію

$$\int V_0' ds = 0\,,$$

то

$$\int V_n' ds = 0$$

при всякомъ $n = 1\,,\ 2\,, \ldots \infty$.

Каждая изъ функцій V_n принимаетъ на поверхности сферы и положительныя, и отрицательныя значенія.

Слѣдовательно,

$$M_n > 0\,, \qquad m_n < 0\,.$$

Поэтому на поверхности сферы

$$|V_n| < M_n - m_n\,.$$

Но, въ силу неравенствъ (7),

$$M_n - m_n \leqq (M_0 - m_0)\varrho^n,$$

гдѣ ϱ есть правильная дробь.

Модуль каждаго члена ряда

$$V_{1s} + V_{2s} + \ldots + V_{ns} + \ldots \tag{13}$$

для любой точки s сферы (S) менѣе соотвѣтствующаго члена ряда

$$\varrho(M_0 - m_0)(1 + \varrho + \varrho^2 + \ldots + \varrho^n + \ldots) = \frac{\varrho(M_0 - m_0)}{1 - \varrho}.$$

Слѣдовательно, рядъ (13) сходится абсолютно и равномѣрно въ любой точкѣ s сферы (S), и

$$\lim_{n=\infty} V_n = 0,$$

хотя функція f и не удовлетворяетъ условію (3) *).

Составимъ для даннаго случая функцію

$$\Phi = \frac{1}{2\pi}\int \frac{\cos\varphi}{r^2}(V'_0 + V'_1 + \ldots + V'_n + \ldots)\,ds,$$

которая обладаетъ всѣми свойствами функціи Φ предыдущаго §-а.

Полагая затѣмъ

$$V = V_0 + \Phi$$

и повторяя дословно всѣ разсужденія предыдущаго §-а, мы придемъ къ заключенію, что функція V, удовлетворяя внутри сферы уравненію Лапласа, удовлетворяетъ и условію

$$\frac{\partial V_{is}}{\partial n} = f_s \qquad \text{на поверхности сферы.} \tag{14}$$

Поэтому, если всѣ разсужденія методы Neumann'а справедливы, то должно быть справедливо и слѣдующее предложеніе:

---

*) Въ данномъ случаѣ, напоминаемъ,

$$\int f' ds = 1.$$

Существуетъ конечная и непрерывная внутри сферы функція координатъ V, удовлетворяющая уравненію Лапласа и обращающаяся на поверхности сферы въ заданную функцію f, подчиненную условію

$$\int f dS = 1. \tag{15}$$

Это предложеніе есть очевидный абсурдъ.

6. Всѣ разсужденія предыдущаго §-а справедливы вплоть до равенства (срав. § 4)

$$\frac{\partial V_{0is}}{\partial n} + \frac{\partial \Phi_{es}}{\partial n} = f_s.$$

Если же справедливо равенство (8), то справедливо и (14).

Но такъ какъ послѣднее при условіи (15) невозможно, то, слѣдовательно, равенство (8) [или (5)] ошибочно.

Приводимъ обычное доказательство равенства (5) *) (см. § 2-ой).

Примемъ за начало координатъ какую либо точку s поверхности (S), ось z направимъ по внѣшней нормали къ (S) въ этой точкѣ.

Опишемъ около s, какъ центра, сферу достаточно малаго радіуса R. Эта сфера пересѣчетъ поверхность (S) по нѣкоторой замкнутой кривой, которая раздѣлитъ (S) на двѣ части (Σ) и (σ).

Пусть всѣ точки части (Σ) лежатъ внѣ, а части (σ) внутри сферы радіуса R.

Можемъ писать

$$W = \int \frac{\mu' \cos\varphi}{r^2} ds = \int\limits_{(\Sigma)} \frac{\mu' \cos\varphi}{r^2} ds + \int\limits_{(\sigma)} \frac{\mu' \cos\varphi}{r^2} ds.$$

Первый (считая слѣва) интегралъ правой части этого равенства распространяется на всю часть (Σ), второй на часть (σ).

Положимъ

$$W_1 = \int\limits_{(\Sigma)} \frac{\mu' \cos\varphi}{r^2} ds, \quad W_2 = \int\limits_{(\sigma)} \frac{\mu' \cos\varphi}{r^2} ds.$$

Получимъ

$$W = W_1 + W_2,$$

$$\frac{\partial W}{\partial z} = \frac{\partial W_1}{\partial z} + \frac{\partial W_2}{\partial z}.$$

---

*) См. C. Neumann. „Untersuchungen über das logarithmische und newtonische Potential.“ Leipzig, 1877, s. 140.

G. Kirchhoff. „Vorlesungen über Mathematische Physik“. Leipzig, 1883, s. 181.

Функція $\frac{\partial W_1}{\partial z}$ конечна и непрерывна для всѣхъ значеній z; слѣдовательно, и при $z=0$, т. е. при переходѣ точки x, y, z черезъ поверхность (S), $\frac{\partial W_1}{\partial z}$ не испытываетъ разрыва.

Функція $\frac{\partial W}{\partial z}$ будетъ обладать тѣмъ же свойствомъ, если это свойство принадлежитъ и функціи $\frac{\partial W_2}{\partial z}$.

Представимъ функцію W_2 подъ видомъ

$$W_2 = -\int\limits_{(\sigma)} \mu' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} ds.$$

Введемъ полярныя координаты ϱ и φ съ полюсомъ въ точкѣ s.

Получимъ

$$W_2 = \int\limits_0^R \int\limits_0^{2\pi} \mu \frac{z\varrho\, d\varrho\, d\varphi}{(\varrho^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

гдѣ μ есть функція ϱ и φ.

При вычисленіи интеграла W_2 разсуждаютъ обыкновенно слѣдующимъ образомъ.

Всегда можно сдѣлать радіусъ R столь малымъ, что для всѣхъ точекъ части (σ) значенія функціи μ будутъ сколь угодно мало отличаться отъ значенія μ въ точкѣ s.

Поэтому можемъ писать

$$W_2 = \mu_s \int\limits_0^R \int\limits_0^{2\pi} \frac{z\varrho\, d\varrho\, d\varphi}{(\varrho^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

или

$$W_2 = 2\pi\mu_s \left(\frac{z}{\sqrt{z^2}} - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}} \right).$$

Отсюда

$$\frac{\partial W_2}{\partial z} = -2\pi\mu_s \frac{R^2}{(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Переходя къ предѣлу и предполагая, что

$$\lim \frac{z}{R} = 0,$$

получаемъ

$$\lim_{z=0} \frac{\partial W_2}{\partial z} = -2\pi\mu_s \frac{1}{R}.$$

Правая часть этого равенства не зависитъ отъ z.

Слѣдовательно, $\frac{\partial W_2}{\partial z}$ не претерпѣваетъ разрыва при переходѣ точки черезъ точку s поверхности (S).

Такимъ образомъ, употребляя обозначенія §-а 2-ого, можемъ писать

$$\frac{\partial W_{2is}}{\partial n} = \frac{\partial W_{2es}}{\partial n}. \tag{16}$$

Сверхъ того

$$\frac{\partial W_{1is}}{\partial n} = \frac{\partial W_{1es}}{\partial n}.$$

Слѣдовательно,

$$\frac{\partial W_{is}}{\partial n} = \frac{\partial W_{es}}{\partial n}. \tag{17}$$

Ошибка заключается въ замѣнѣ функціи μ постоянной величиной μ_s.

При такой замѣнѣ мы отбрасываемъ въ выраженіи W_2 нѣкоторые члены, зависящіе отъ z и безконечно малые при безконечно маломъ z.

Послѣ дифференцированія по z эти члены могутъ сдѣлаться сколь угодно большими при z безконечно маломъ.

При этомъ равенство (16), а, слѣдовательно, и непосредственно изъ него вытекающее равенство (17) потеряютъ всякій смыслъ.

Разсмотримъ простѣйшій примѣръ *).

Предположимъ, что часть (σ) есть кругъ радіуса R.

Помѣстимъ начало координатъ въ центрѣ этого круга, ось z направимъ по перпендикуляру къ его плоскости.

Предположимъ, что

$$\mu = \varrho.$$

Имѣемъ

$$W_2 = -2\pi z \int_0^R \frac{\varrho^2 d\varrho}{(\varrho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= 2\pi z \left[\frac{R^2}{\sqrt{R^2+z^2}} - \log\left(\frac{R}{\sqrt{z^2}} + \sqrt{\frac{R^2}{z^2}+1} \right) \right].$$

---

*) Этотъ простѣйшій примѣръ указанъ проф. А. М. Ляпуновымъ.

Отсюда

$$\frac{\partial W_2}{\partial z} = 2\pi\left[\frac{R^2}{\sqrt{R^2+z^2}} - \frac{R^2 z^2}{(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{z^2}{(R+\sqrt{R^2+z^2})\sqrt{R^2+z^2}} + \right.$$

$$\left. + 1 - \log(R+\sqrt{R^2+z^2}) + \log z\right].$$

При $z=0$ выраженіе $\frac{\partial W_2}{\partial z}$ обращается въ безконечность какъ $\log z$.

Членъ $\log z$ получился отъ дифференцированія по z члена $z\log z$. При этомъ

$$\lim_{z=0} z\log z = 0,$$

а

$$\lim_{z=0}\frac{d}{dz}(z\log z) = \infty.$$

Въ этомъ случаѣ не можетъ быть рѣчи о справедливости равенства (17).

Примѣровъ подобнаго рода можно привести сколько угодно, мы взяли только простѣйшій.

Но можно подобрать функцію μ и такимъ образомъ, что равенство (17) будетъ имѣть мѣсто.

Если, напримѣръ, функція μ удовлетворяетъ условію

$$\int_0^{2\pi} \mu d\varphi = \text{const.},$$

то справедливость равенства (17) не подлежитъ сомнѣнію.

7. Такимъ образомъ, если и можно пользоваться равенствомъ (8), а, слѣдовательно, и методой Neumann'а, то только для извѣстнаго типа функцій f. Но мы ничего не знаемъ о томъ, каковы общія свойства такого рода функцій.

Ошибочный результатъ §-а 5-аго получился именно потому, что равенство (8) не можетъ имѣть мѣста, коль скоро функція

$$V_0' + V_1' + \cdots + V_n' + \cdots$$

зависитъ отъ функціи f, удовлетворяющей условіямъ

$$\int f' ds = 1, \qquad \int ds\left(\int \frac{f'}{r}\, ds\right) = 0.$$

Правда, въ задачѣ Neumann'а функція f должна удовлетворять иному условію

$$\int f' ds = 0 ,$$

но мы не имѣемъ никакихъ данныхъ думать, что это равенство обусловливаетъ справедливость равенства (8).

Эти соображенія лишаютъ, на мой взглядъ, методу Neumann'а всякаго значенія, или, въ крайнемъ случаѣ, дѣлаютъ достоинство ея весьма условнымъ.

Въ самомъ дѣлѣ, мы не имѣемъ никакихъ основаній утверждать, что построенная нами въ каждомъ данномъ случаѣ функція V есть дѣйствительно искомая.

Замѣтимъ кстати, что въ силу только что сказаннаго должно признать не достаточно удовлетворительными, и требующими дальнѣйшей провѣрки путемъ болѣе строгихъ пріемовъ, всѣ другія изслѣдованія и результаты въ области Математической Физики, основанные на предположеніи непрерывности нормальной производной отъ потенціала двойного слоя (не постояннаго напряженія) при переходѣ точки черезъ его поверхность.

Такъ, напримѣръ, едва ли можно признать достигающими цѣли изысканія H. Poincaré, помѣщенныя въ вышеуказанномъ мемуарѣ: „La méthode de Neumann et le problème de Dirichlet“ и имѣющія цѣлью распространить методу Neumann'а *) на болѣе обширный классъ поверхностей, чѣмъ поверхности конвексныя.

Основныя неравенства этого мемуара H. Poincaré получаетъ, исходя изъ предположенія непрерывности нормальной производной потенціала двойного слоя, предположенія, вообще говоря, несправедливаго.

Заканчивая разборъ методы C. Neumann'а, не мѣшаетъ обратить вниманіе еще и на слѣдующее.

Не говоря уже о томъ недостаткѣ разсматриваемой методы, который основывается на неудобствѣ употребленія равенства (8) [или (5)], обычное изложеніе методы неудовлетворительно и во многихъ другихъ отношеніяхъ.

Какъ было замѣчено выше, H. Poincaré утверждаетъ при изложеніи методы Neumann'а, что если функція f удовлетворяетъ условію

$$\int f' ds = 0 , \tag{18}$$

---

*) Методу для рѣшенія задачи Dirichlet.

то предѣлъ функціи V_n при $n=\infty$ равенъ нулю, и рядъ

$$V'_0+V'_1+\ldots+V'_n+\ldots \tag{19}$$

сходится абсолютно и равномѣрно на поверхности (S).

Мы видѣли уже, что этотъ рядъ можетъ сходиться, хотя бы функція f и не удовлетворяла условію (18).

Не трудно привести и обратный примѣръ: функція f можетъ удовлетворять равенству (18), а рядъ (19) не будетъ сходиться на поверхности (S).

Разсмотримъ опять простѣйшій случай сферы.

Положимъ, какъ и раньше (см. § 5),

$$f=a_1f_1+a_2f_2$$

и опредѣлимъ постоянныя a_1 и a_2 при помощи условій

$$a_1\int f'_1ds+a_2\int f'_2ds=0\,,$$

$$a_1\int Q'_1ds+a_2\int Q'_2ds=1. \tag{20}$$

При этомъ, какъ и въ §-ѣ 5-омъ, получимъ

$$\int V'_nds=\int V'_{n-1}ds. \qquad (n=1,2,\ldots)$$

Такъ какъ, въ силу (20),

$$\int V'_0ds=1\,,$$

то при всякомъ n

$$\int V'_nds=1.$$

Въ разсматриваемомъ случаѣ V_n при возрастаніи значка n стремится къ конечной, положительной, *не равной нулю* постоянной.

Рядъ (19) не сходится въ точкахъ поверхности (S).

Вмѣсто этого ряда слѣдуетъ разсматривать нѣкоторый другой.

Я ограничусь только этимъ замѣчаніемъ, не входя въ подробности, такъ какъ сдѣлавъ методу Neumann'а безупречной во всѣхъ прочихъ отношеніяхъ, мы все же не будемъ въ состояніи избавиться отъ употребленія равенства (8), этого наиболѣе слабаго пункта разсматриваемой методы.

8. Въ виду всего сказаннаго, я считаю не безполезнымъ предложить иную методу рѣшенія задачи Neumann'a.

Хотя пріемъ, который будетъ изложенъ ниже, распространяется только на ограниченный классъ конвексныхъ поверхностей, но зато онъ устраняетъ существенный недостатокъ методы Neumann'a и приводитъ къ болѣе несомнѣннымъ результатамъ.

Въ избѣжаніе повтореній, я напомню сначала нѣкоторыя извѣстныя предложенія изъ теоріи потенціала простого поверхностнаго слоя и приведу нѣкоторыя другія теоремы, которыми придется пользоваться впослѣдствіи.

Пусть x, y, z какая либо точка пространства, ξ, η, ζ точка поверхности (S), элементъ которой ds.

Пусть μ есть конечная и непрерывная функція координатъ ξ, η, ζ точекъ этой поверхности.

Выраженіе

$$P = \int \frac{\mu}{r}\, ds \tag{21}$$

называется *потенціаломъ на точку* x, y, z *простого слоя*, распредѣленнаго по (S) съ плотностью μ.

Функція P перемѣнныхъ x, y, z непрерывна во всемъ пространствѣ и удовлетворяетъ уравненію Лапласа.

Опишемъ около какой либо точки s поверхности (S) сферу (σ) безконечно малаго радіуса ϱ и назовемъ интегралъ типа (21), распространенный на часть поверхности (S), внѣшнюю относительно (σ), черезъ P_1, а интегралъ того же вида, распространенный на часть (S), лежащую внутри (σ), черезъ P_2.

Имѣемъ

$$P = P_1 + P_2.$$

Примемъ точку s за начало координатъ, ось z направимъ по внѣшней нормали къ (S) въ точкѣ s.

Можно писать

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial P_1}{\partial z} + \frac{\partial P_2}{\partial z}.$$

Пусть точка x, y, z лежитъ внутри (S) на оси z.

Предположимъ теперь, что z и ϱ стремятся къ нулю такъ, что

$$\lim \frac{z}{\varrho} = 0,$$

и перейдемъ къ предѣлу.

Выраженіе $\frac{\partial P_1}{\partial z}$ обратится въ предѣлѣ въ то, что мы называемъ значеніемъ нормальной производной функціи P въ точкѣ s поверхности (S), а выраженіе $\frac{\partial P_2}{\partial z}$ въ $2\pi\mu_s$.

Предѣломъ же $\frac{\partial P}{\partial z}$ будетъ, согласно принятому обозначенію, выраженіе $\frac{\partial P_{is}}{\partial z}$.

Замѣняя z черезъ n, получаемъ вообще

$$\frac{\partial P_{is}}{\partial n} = \frac{\partial P_s}{\partial n} + 2\pi\mu_s. \tag{22}$$

Подобнымъ же путемъ находимъ

$$\frac{\partial P_{es}}{\partial n} = \frac{\partial P_s}{\partial n} - 2\pi\mu_s. \tag{23}$$

Отсюда извѣстное равенство

$$\frac{\partial P_{is}}{\partial n} - \frac{\partial P_{es}}{\partial n} = 4\pi\mu_s.$$

$\frac{\partial P_s}{\partial n}$ есть, какъ извѣстно, конечная и непрерывная функція точекъ поверхности (S).

Можемъ писать

$$\frac{\partial P_s}{\partial n} = \int \mu \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} ds.$$

Дифференцированіе подъ знакомъ интеграла производится по перемѣннымъ x, y и z.

Но

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} = -\frac{1}{r^2}\left(\frac{x-\xi}{r}\cos(n,x) + \frac{y-\eta}{r}\cos(n,y) + \frac{z-\zeta}{r}\cos(n,z)\right).$$

Называя черезъ ψ уголъ, составляемый направленіемъ r, идущимъ отъ точки ξ, η, ζ поверхности (S) къ точкѣ x, y, z, съ внѣшней нормалью къ (S) въ этой послѣдней точкѣ, получаемъ

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} = -\frac{\cos\psi}{r^2}.$$

Такимъ образомъ

$$\frac{\partial P_s}{\partial n} = -\int \mu \frac{\cos\psi}{r^2} ds.$$

9. Лемма I. *Если поверхность* (S) *конвексна и функція* μ *удовлетворяетъ условію*

$$\int \mu ds = 0,$$

то

$$\int \frac{\partial P}{\partial n} ds = 0.$$

Такъ какъ функція P удовлетворяетъ внутри области (D) уравненію Лапласа, то

$$\int \frac{\partial P_i}{\partial n} ds = 0.$$

Поэтому, интегрируя уравненіе (22) по всей поверхности (S), получаемъ

$$\int \frac{\partial P}{\partial n} ds + 2\pi \int \mu ds = 0.$$

Если же

$$\int \mu ds = 0,$$

то и

$$\int \frac{\partial P}{\partial n} ds = 0.$$

10. Разсмотримъ интегралъ вида

$$\int \frac{\cos\psi}{r^2} ds.$$

Этотъ интегралъ вообще будемъ обозначать черезъ I.

Значеніе его въ какой либо опредѣленной точкѣ s поверхности (S) будемъ обозначать черезъ

$$I_s.$$

Лемма II. *Если поверхность* (S) *есть сфера, то для любой ея точки* s

$$I_s = 2\pi.$$

Черезъ ψ обозначенъ уголъ, составляемый направленіемъ r, идущимъ отъ точки ξ, η, ζ къ точкѣ s, съ внѣшней нормалью къ (S) въ этой послѣдней точкѣ.

Называя по прежнему (см. § 3) черезъ φ уголъ, составляемый направленіемъ r съ направленіемъ внутренней нормали къ (S) въ точкѣ ξ, η, ζ, получаемъ для сферы

$$\cos\psi = \cos\varphi.$$

Слѣдовательно, въ любой точкѣ сферы

$$\int \frac{\cos\psi}{r^2}\, ds = \int \frac{\cos\varphi}{r^2}\, ds.$$

По теоремѣ Гаусса

$$\int \frac{\cos\varphi}{r^2}\, ds = 2\pi.$$

Слѣдовательно,

$$I_s = 2\pi$$

въ любой точкѣ s сферы.

Этой леммой мы пользовались уже при разборѣ методы Neumann'a (см. § 5).

Лемма III. *Въ любой точкѣ s конвексной поверхности (S) интегралъ I_s удовлетворяетъ неравенству*

$$I_s \leqq 2\pi \frac{D_1}{D_0},$$

гдѣ D_1 и D_0 суть наибольшій и наименьшій изъ діаметровъ круговъ, проходящихъ черезъ двѣ точки поверхности (S) и имѣющихъ центры на нормали къ (S) въ одной изъ этихъ точекъ.

Возьмемъ на поверхности (S) двѣ точки s и s'. Пусть r есть разстояніе между этими точками.

Проводимъ нормаль къ (S) въ точкѣ s.

Пусть m есть точка пересѣченія этой нормали съ перпендикуляромъ, возстановленнымъ къ r въ точкѣ s'.

Отрѣзокъ sm обозначимъ черезъ D.

Имѣемъ

$$D = \frac{r}{\cos\psi}.$$

Если поверхность (S) конвексна, то

$$\psi \leqq \frac{\pi}{2}.$$

Знакъ равенства соотвѣтствуетъ случаю, когда точки s и s' совпадаютъ.

Несомнѣнно, что D есть величина конечная, неравная нулю для всякой пары точекъ s и s', несовпадающихъ другъ съ другомъ.

Если s' стремится къ совпаденію съ s, то уголъ ψ стремится къ $\frac{\pi}{2}$, r къ нулю, D стремится къ конечному, отличному отъ нуля предѣлу, а именно къ діаметру круга кривизны въ точкѣ s линіи сѣченія поверхности (S) плоскостью, проходящей черезъ нормаль n и точку s'.

Такъ какъ поверхность (S) по условію имѣетъ конечную и опредѣленную кривизну въ каждой точкѣ, то предѣлъ D есть величина конечная и опредѣленная для любой точки s поверхности (S).

При нѣкоторомъ положеніи точекъ s и s' (или рядѣ положеній) D получитъ наибольшее значеніе, при нѣкоторомъ другомъ положеніи этихъ точекъ (или рядѣ положеній) наименьшее.

Наибольшую величину D назовемъ черезъ D_1, наименьшую черезъ D_0.

Имѣемъ тождество

$$I = \int \frac{\cos\psi}{r^2}\, ds = \int \frac{\cos\psi}{r} \cdot \frac{r}{\cos\varphi} \cdot \frac{\cos\varphi}{r^2}\, ds.$$

Назовемъ черезъ $\varDelta$ діаметръ круга, проходящаго черезъ точки s и s' и имѣющаго центръ на нормали къ поверхности (S) въ точкѣ s'.

Такъ какъ

$$\varDelta = \frac{r}{\cos\varphi},$$

то

$$I = \int \frac{\varDelta}{D} \frac{\cos\varphi}{r^2}\, ds.$$

Наибольшее значеніе $\varDelta$ очевидно равно наибольшему значенію D. Поэтому въ любой точкѣ s поверхности (S)

$$I_s \leqq 2\pi \frac{D_1}{D_0},$$

что и требовалось показать.

11. Обозначимъ интегралъ вида

$$\int \frac{\cos\psi}{r^2}\, ds,$$

распространенный на какую либо часть (c) поверхности (S), черезъ

$$\int\limits_{(c)} \frac{\cos\psi}{r^2}\, ds = I^{(c)}.$$

$I^{(c)}$ есть функція координатъ x, y, z точекъ поверхности (S).

Значеніе интеграла $I^{(c)}$ въ какой либо точкѣ s будемъ обозначать черезъ $I_s^{(c)}$.

Раздѣлимъ поверхность (S) на какія либо двѣ части (α) и (β) и возьмемъ на ней двѣ какія либо точки s и s'.

Лемма IV. *Сумма интеграловъ* $I_s^{(\alpha)}$ *и* $I_{s'}^{(\beta)}$ *удовлетворяетъ неравенству*

$$I_s^{(\alpha)} + I_{s'}^{(\beta)} \geqq \frac{S}{D_1^2},$$

гдѣ S есть величина поверхности (S), а D_1 есть наибольшій изъ діаметровъ круговъ, проходящихъ черезъ двѣ точки поверхности (S) и имѣющихъ центры на нормали къ послѣдней въ одной изъ этихъ точекъ.

По предыдущему

$$I^{(\alpha)} = \int\limits_{(\alpha)} \frac{\cos\psi}{r^2}\,ds = \int \frac{1}{Dr}\,ds.$$

Такъ какъ въ любой точкѣ s поверхности (S)

$$r < D,$$

то

$$I_s^{(\alpha)} \geqq \int \frac{1}{D^2}\,ds \geqq \frac{\alpha}{D_1^2},$$

гдѣ α есть величина поверхности части (α).

Точно также получимъ неравенство

$$I_{s'}^{(\beta)} \geqq \frac{\beta}{D_1^2},$$

гдѣ β есть величина поверхности части (β).

Назовемъ черезъ S величину поверхности (S).

Такъ какъ

$$\alpha + \beta = S,$$

то

$$I_s^{(\alpha)} + I_{s'}^{(\beta)} \geqq \frac{S}{D^2}.$$

Лемма доказана.

Это неравенство справедливо, каковы бы ни были части (α) и (β) и гдѣ бы ни находились точки s и s' на поверхности (S).

Возьмемъ отношеніе

$$\frac{I_s^{(\alpha)} + I_{s'}^{(\beta)}}{4\pi}.$$

При нѣкоторомъ положеніи точекъ s и s' и нѣкоторомъ опредѣленномъ дѣленіи (S) на части (α) и (β) это отношеніе получитъ наименьшее значеніе.

Величина послѣдняго во всякомъ случаѣ болѣе или равна числу

$$\lambda = \frac{S}{4\pi D_1^2}. \tag{24}$$

Каждой конвексной поверхности (S) соотвѣтствуетъ опредѣленная постоянная λ, совпадающая, очевидно, съ постоянной конфигураціи Neumann'a.

Для сферы радіуса R

$$D_1 = 2R, \qquad S = 4\pi R^2$$

и

$$\lambda = \frac{1}{4}.$$

12. Построимъ сферу (Σ), касательную къ поверхности (S) въ какой либо точкѣ s.

Эта сфера, вообще говоря, пересѣчетъ поверхность (S) по нѣкоторымъ кривымъ.

Уменьшая радіусъ сферы (Σ) и оставляя ее постоянно касательной къ (S) въ точкѣ s, мы дойдемъ до такого предѣльнаго положенія этой сферы, когда она не будетъ имѣть никакихъ точекъ, общихъ съ поверхностью (S), кромѣ точекъ соприкосновенія и будетъ притомъ цѣликомъ лежать внутри (S).

При дальнѣйшемъ уменьшеніи радіуса сферы (Σ) послѣдняя не будетъ имѣть никакихъ другихъ точекъ, общихъ съ поверхностью (S), кромѣ точки s.

Только что упомянутую предѣльную сферу, соотвѣтствующую точкѣ s, обозначимъ черезъ (σ_{is}), а радіусъ ея черезъ ϱ_{is}.

При измѣненіи положенія точки s на поверхности (S) радіусъ ϱ_{is} будетъ измѣнять свою величину, оставаясь всегда конечнымъ.

Наименьшее значеніе ϱ_{is} обозначимъ черезъ ϱ.

Точно также, увеличивая радіусъ сферы (Σ), мы дойдемъ до такого ея предѣльнаго положенія, что она не будетъ имѣть никакихъ другихъ общихъ точекъ съ поверхностью (S) кромѣ точекъ соприкосновенія и будетъ при этомъ цѣликомъ лежать внѣ поверхности (S).

При дальнѣйшемъ увеличеніи радіуса сферы (Σ), она не будетъ имѣть другихъ точекъ, общихъ съ (S), кромѣ точки s.

Такую предѣльную сферу обозначимъ черезъ (σ_{es}), а радіусъ ея черезъ ϱ_{es}.

При любомъ положеніи точки s на конвексной поверхности (S) радіусъ ϱ_{es} будетъ величиной конечной.

Наибольшее значеніе ϱ_{es} назовемъ черезъ ϱ_1.

Если поверхность (S) есть сфера радіуса R, то

$$\varrho = \varrho_1 = R$$

и

$$\frac{\varrho_1}{\varrho} = 1.$$

Для всякой другой поверхности, отличной отъ сферы,

$$\frac{\varrho_1}{\varrho} = 1 + \varepsilon,$$

гдѣ ε есть нѣкоторое положительное число, которое будетъ тѣмъ болѣе, чѣмъ болѣе поверхность (S) уклоняется отъ сферы, и наоборотъ.

Величину отношенія $\frac{\varrho_1}{\varrho}$ можно принять за мѣру уклоненія конвексной поверхности (S) отъ сферы.

Обозначимъ это отношеніе черезъ σ.

Очевидно, что величина D (см. предыд. §) для точки s заключается между предѣлами ϱ_{is} и ϱ_{es}.

Слѣдовательно,

$$D_1 \leqq 2\varrho_1, \qquad D_0 \geqq 2\varrho \tag{25}$$

и

$$\frac{D_1}{D_0} \leqq \frac{\varrho_1}{\varrho} = \sigma. \tag{26}$$

13. Лемма V. *Въ любой точкѣ s конвексной поверхности (S), величина уклоненія которой*

$$\sigma \leqq 1{,}15\ldots,$$

разность

$$\tau_s = \frac{I_0}{2\pi} - \frac{I_s^{(\alpha)} + I_{s'}^{(\beta)}}{4\pi},$$

гдѣ I_0 есть наибольшее значеніе интеграла I на поверхности (S), положительна и менѣе единицы.

Такъ какъ каждый изъ интеграловъ $I_s^{(\alpha)}$ и $I_{s'}^{(\beta)}$ менѣе I_0, то

$$\tau_s > 0.$$

Остается доказать, что

$$\tau_s < 1\,,$$

если

$$\sigma \leqq 1{,}15\ldots\,.$$

Такъ какъ

$$S \geqq 4\pi\rho^2\,,$$

то [рав. (24) и нерав. (25)]

$$\lambda \geqq \frac{1}{4\sigma^2}.$$

Вслѣдствіе этого, по леммѣ IV-ой,

$$\frac{I_s^{(\alpha)} + I_{s'}^{(\beta)}}{4\pi} \geqq \frac{1}{4\sigma^2}.$$

Съ другой стороны, на основаніи леммы III-ьей и неравенства (26),

$$\frac{I_0}{2\pi} \leqq \sigma.$$

Слѣдовательно,

$$\tau_s \leqq \sigma - \frac{1}{4\sigma^2}.$$

Если

$$\sigma - \frac{1}{4\sigma^2} < 1\,, \tag{27}$$

то и подавно

$$\tau_s < 1. \tag{28}$$

Неравенство (27) навѣрно удовлетворится, если

$$\sigma \leqq 1{,}15\ldots\,,$$

причемъ для любой точки s поверхности (S) будетъ имѣть мѣсто неравенство (28).

Наибольшее значеніе τ_s обозначимъ черезъ $\tau (\tau < 1)$.

Разсмотримъ для примѣра случай трехоснаго эллипсоида съ полуосями

$$a > b > c.$$

Покажемъ, что для эллипсоида

$$\tau < 1\,,$$

если

$$a \leqq c \cdot 1{,}15\ldots\ .$$

Не трудно убѣдиться, что при всякомъ положенiи двухъ точекъ s s' на поверхности эллипсоида

$$\frac{\cos\psi}{\cos\varphi} = \frac{\delta_0}{\delta_1}\,,$$

гдѣ δ_0 и δ_1 суть длины перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ центра на плоскости, касательныя къ эллипсоиду въ точкахъ s и s'.

Слѣдовательно,

$$\frac{\cos\psi}{\cos\varphi} \leqq \frac{a}{c}$$

и въ любой точкѣ s

$$\frac{I_s}{2\pi} \leqq \frac{a}{c} = k.$$

Дiаметръ D принимаетъ наибольшее значенiе D_1 въ томъ случаѣ, когда точки s и s' совпадаютъ и находятся въ вершинѣ, соотвѣтствующей наименьшей изъ осей эллипсоида.

При этомъ

$$D_1 \leqq 2\,\frac{a^2}{c}.$$

Такъ какъ

$$S > 4\pi c^2,$$

то

$$\lambda \geqq \frac{1}{4k^4}.$$

Поэтому неравенство

$$\tau < 1$$

навѣрно удовлетворится, коль скоро

$$k - \frac{1}{4k^4} - 1 < 0\,,$$

т. е. если

$$k = \frac{a}{c} \leqq 1{,}15\ldots\ .$$

14. Положимъ

$$V=\frac{1}{2\pi}\int\mu\frac{\cos\psi}{r^2}\,ds\,,$$

гдѣ μ есть конечная и непрерывная функція координатъ ξ, η, ζ точекъ поверхности (S).

Допустимъ, что μ мѣняетъ знакъ на поверхности (S).

Назовемъ черезъ M наибольшее значеніе μ, черезъ m наименьшее.

По условію

$$M>0\,,\qquad m<0\,. \tag{29}$$

Лемма VI. *Если функція μ мѣняетъ знакъ на поверхности (S), оставаясь конечной и непрерывной, то разность значеній функціи*

$$V=\frac{1}{2\pi}\int\mu\frac{\cos\psi}{r^2}\,ds$$

въ двухъ какихъ либо точкахъ s и s' конвексной поверхности (S) удовлетворяетъ неравенству

$$V_s-V_{s'}\leqq(M-m)\left(\frac{I_0}{2\pi}-\frac{I_s^{(\beta)}+I_{s'}^{(\alpha)}}{4\pi}\right).$$

Для доказательства этой леммы воспользуемся методой ариѳметическихъ среднихъ C. Neumann'a.

Раздѣлимъ поверхность (S) на двѣ части (α) и (β) такія, что въ первой изъ нихъ μ удовлетворяетъ условію

$$\frac{m+M}{2}\leqq\mu\leqq M\,,$$

во второй условію

$$m\leqq\mu\leqq\frac{M+m}{2}.$$

Можемъ писать

$$2\pi V_s\leqq MI_s^{(\alpha)}+\frac{M+m}{2}I_s^{(\beta)}\,,$$

$$2\pi V_s\geqq mI_s^{(\beta)}+\frac{M+m}{2}I_s^{(\alpha)}.$$

Каждое изъ этихъ равенствъ справедливо для любой точки s поверхности (S).

Такъ какъ

$$I_s^{(\alpha)} + I_s^{(\beta)} = I_s,$$

то

$$2\pi V_s \leqq M I_s - \frac{M-m}{2} I_s^{(\beta)},$$

$$2\pi V_s \geqq m I_s + \frac{M-m}{2} I_s^{(\alpha)}.$$

Примѣнимъ первое изъ этихъ неравенствъ къ какой либо точкѣ s, второе къ нѣкоторой другой точкѣ s'.

Вычтя первое изъ такимъ образомъ составленныхъ неравенствъ изъ второго, найдемъ

$$2\pi(V_s - V_{s'}) \leqq M I_s - m I_{s'} - \frac{M-m}{2}(I_s^{(\beta)} + I_{s'}^{(\alpha)}).$$

Отсюда, въ силу (29),

$$2\pi(V_s - V_{s'}) \leqq (M-m)\left(I_0 - \frac{I_s^{(\beta)} + I_{s'}^{(\alpha)}}{2}\right),$$

или

$$V_s - V_{s'} \leqq (M-m)\left(\frac{I_0}{2\pi} - \frac{I_s^{(\beta)} + I_{s'}^{(\alpha)}}{4\pi}\right). \qquad \textbf{(30)}$$

Слѣдствіе. *Для всякой конвексной поверхности, величина уклоненія которой отъ сферы*

$$\sigma \leqq 1{,}15\ldots,$$

разность значеній функціи V въ двухъ какихъ либо точкахъ s и s' этой поверхности удовлетворяетъ неравенству

$$V_s - V_{s'} \leqq (M-m)\tau,$$

гдѣ τ есть правильная дробь.

Если

$$\sigma \leqq 1{,}15\ldots,$$

то, по леммѣ V-ой,

$$\tau_s = \frac{I_0}{2\pi} - \frac{I_s^{(\beta)} + I_{s'}^{(\alpha)}}{4\pi} < 1.$$

Вслѣдствіе этого, по только что доказанной леммѣ,

$$V_s - V_{s'} \leqq (M-m)\tau\,,$$

гдѣ

$$\tau < 1\,.$$

Для сферы лемма VI-ая справедлива, какова бы ни была функція μ, ибо въ этомъ случаѣ (лемма II) $I_s = 2\pi$.

15. Пусть f есть заданная конечная и непрерывная функція координатъ точекъ поверхности (S).

Составимъ рядъ функцій

$$V_1 = -\frac{1}{2\pi}\int f'\frac{1}{r}\,ds\,,$$

$$V_2 = -\frac{1}{2\pi}\int \frac{\partial V_1'}{\partial n}\frac{1}{r}\,ds\,,$$

$$V_3 = -\frac{1}{2\pi}\int \frac{\partial V_2'}{\partial n}\frac{1}{r}\,ds\,,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$V_n = -\frac{1}{2\pi}\int \frac{\partial V_{n-1}'}{\partial n}\frac{1}{r}\,ds\ ^{*)}\,,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

и положимъ

$$V = \frac{1}{2\pi}\int\left(f' + \frac{\partial V_1'}{\partial n} + \frac{\partial V_2'}{\partial n} + \ldots + \frac{\partial V_n'}{\partial n} + \ldots\right)\frac{1}{r}\,ds\,.$$

Теорема I. *Рядъ*

$$f_s + \frac{\partial V_{1s}}{\partial n} + \frac{\partial V_{2s}}{\partial n} + \ldots + \frac{\partial V_{ns}}{\partial n} + \ldots$$

сходится абсолютно и равномѣрно въ любой точкѣ s поверхности (S), если послѣдняя конвексна и величина σ уклоненія ея отъ сферы не болѣе числа 1,15..., а функція f удовлетворяетъ условію

$$\int f\,ds = 0\,.$$

---

*) Напомнимъ, $\dfrac{\partial V_n'}{\partial n}$ есть выраженіе функціи $\dfrac{\partial V_n}{\partial n}$ послѣ замѣны перемѣнныхъ x, y, z черезъ ξ, η, ζ. Интеграція совершается по перемѣннымъ ξ, η, ζ и распространяется на всю поверхность (S).

Имѣемъ

$$\frac{\partial V_1}{\partial n}=\frac{1}{2\pi}\int f'\frac{\cos\psi}{r^2}\,ds\,,$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial n}=\frac{1}{2\pi}\int \frac{\partial V_1'}{\partial n}\frac{\cos\psi}{r^2}\,ds\,,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial V_n}{\partial n}=\frac{1}{2\pi}\int \frac{\partial V_{n-1}'}{\partial n}\frac{\cos\psi}{r^2}\,ds\,,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Если

$$\int \frac{\partial V_{n-1}'}{\partial n}\,ds=0\,,$$

то, въ силу леммы I-ой, и

$$\int \frac{\partial V_n'}{\partial n}\,ds=0\,. \tag{31}$$

Такъ какъ по условію теоремы

$$\int f'ds=0\,,$$

то равенство (31) справедливо при всякомъ $n=1\,,\;2\,,\ldots$.

Каждая изъ функцій

$$\frac{\partial V_n}{\partial n} \qquad {\scriptstyle (n=1,\,2,\,\ldots)}$$

мѣняетъ свой знакъ на поверхности (S).

Назовемъ наибольшее и наименьшее значенія $\dfrac{\partial V_n}{\partial n}$ на этой поверхности черезъ M_n и m_n.

Въ силу только что сказаннаго

$$M_n>0\,,\qquad m_n<0\,. \qquad {\scriptstyle (n=1,\,2,\ldots)}$$

Если

$$\sigma\leqq 1{,}15\ldots\,,$$

то

$$M_n-m_n\leqq(M_{n-1}-m_{n-1})\tau\,, \qquad {\scriptstyle (n=1,\,2,\ldots)} \tag{32}$$

гдѣ τ есть правильная дробь, зависящая отъ свойствъ поверхности (S).

Неравенства (32) даютъ

$$M_n - m_n \leqq (M_0 - m_0)\tau^n, \qquad (n=1, 2, \dots) \qquad \mathbf{(33)}$$

гдѣ M_0 и m_0 суть наибольшее и наименьшее значенія функціи f на поверхности (S).

Съ другой стороны очевидно, что

$$\left|\frac{\partial V_{ns}}{\partial n}\right| \leqq M_n - m_n$$

при всякомъ $n=1, 2, \dots$ и для любой точки s.

Отсюда, въ силу (33), получаемъ

$$\left|\frac{\partial V_{ns}}{\partial n}\right| \leqq (M_0 - m_0)\tau^n = K\tau^n,$$

гдѣ

$$K = (M_0 - m_0)$$

есть конечная, положительная, неравная нулю постоянная.

Модуль каждаго члена ряда

$$\frac{\partial V_{1s}}{\partial n} + \frac{\partial V_{2s}}{\partial n} + \dots + \frac{\partial V_{ns}}{\partial n} + \dots$$

менѣе соотвѣтствующаго члена ряда

$$\tau K(1 + \tau + \tau^2 + \dots + \tau^n + \dots) = \frac{K\tau}{1-\tau}.$$

Отсюда слѣдуетъ, что рядъ

$$f + \frac{\partial V_{1s}}{\partial n} + \frac{\partial V_{2s}}{\partial n} + \dots + \frac{\partial V_{ns}}{\partial n} + \dots$$

сходится абсолютно и равномѣрно во всѣхъ точкахъ поверхности (S), если только величина σ уклоненія этой поверхности отъ сферы не болѣе числа 1,15... .

Слѣдствіе. *Выраженіе*

$$V = \frac{1}{2\pi}\int\left(f' + \frac{\partial V_1'}{\partial n} + \frac{\partial V_2'}{\partial n} + \dots + \frac{\partial V_n'}{\partial n} + \dots\right)\frac{1}{r}\,ds$$

представляетъ конечную и непрерывную функцію координатъ, если поверхность (S), на которую распространяется интегралъ, конвексна и величина уклоненія ея отъ сферы не болѣе числа 1,15... .

16. Такимъ образомъ составленная функція V удовлетворяетъ, очевидно, внутри и внѣ области (D) уравненію

$$\Delta V = 0.$$

Теорема II. *Если поверхность* (S) *конвексна и уклоненіе ея отъ сферы не болье числа* $1{,}15\cdots$, *то функція*

$$V = \frac{1}{2\pi}\int\left(f' + \frac{\partial V_1'}{\partial n} + \frac{\partial V_2'}{\partial n} + \ldots + \frac{\partial V_n'}{\partial n} + \ldots\right)\frac{1}{r}\,ds$$

удовлетворяетъ условію

$$\frac{\partial V_{is}}{\partial n} = f_s$$

въ любой точкѣ s *поверхности* (S).

Функція V при условіяхъ теоремы представляетъ потенціалъ простого слоя, распредѣленнаго по поверхности (S) съ плотностью

$$f + \frac{\partial V_1}{\partial n} + \frac{\partial V_2}{\partial n} + \ldots + \frac{\partial V_n}{\partial n} + \ldots.$$

Примѣняя къ V равенство (22), получаемъ

$$\frac{\partial V_{is}}{\partial n} = \frac{\partial V_s}{\partial n} + f_s + \frac{\partial V_{1s}}{\partial n} + \frac{\partial V_{2s}}{\partial n} + \ldots + \frac{\partial V_{ns}}{\partial n} + \ldots. \qquad (34)$$

Съ другой стороны

$$V = -V_1 - V_2 - \ldots - V_n - \ldots.$$

Отсюда

$$\frac{\partial V_s}{\partial n} = -\frac{\partial V_{1s}}{\partial n} - \frac{\partial V_{2s}}{\partial n} - \ldots - \frac{\partial V_{ns}}{\partial n} - \ldots \qquad (35)$$

для любой точки s поверхности (S).

Сравнивая это равенство съ (34), получаемъ

$$\frac{\partial V_{is}}{\partial n} = f_s.$$

Это справедливо, если ряды равенствъ (34) и (35) сходятся во всѣхъ точкахъ поверхности (S).

По теоремѣ же I-ой эти ряды сходятся для конвексныхъ поверхностей, уклоненіе которыхъ отъ сферы не болѣе числа 1,15… .

Теорема доказана.

17. Сопоставляя эту теорему съ I-ой выводимъ слѣдующую:

Теорема III. *Для всякой конвексной поверхности, уклоненіе которой отъ сферы не болѣе числа 1,15..., существуетъ конечная и непрерывная внутри этой поверхности функція V, удовлетворяющая уравненію*

$$\Delta V = 0 \quad \textit{внутри } (S)$$

и условію

$$\frac{\partial V}{\partial n} = f \quad \textit{на поверхности } (S),$$

гдѣ f есть заданная конечная и непрерывная функція координатъ точекъ поверхности (S), удовлетворяющая условію

$$\int f ds = 0.$$

Функція V представляется подъ видомъ

$$V = \frac{1}{2\pi} \int \left(f' + \frac{\partial V_1'}{\partial n} + \frac{\partial V_2'}{\partial n} + \ldots + \frac{\partial V_n'}{\partial n} + \ldots \right) \frac{1}{r} ds,$$

а функціи $V_n (n = 1, 2, \ldots)$ вычисляются послѣдовательно по формуламъ

$$V_1 = -\frac{1}{2\pi} \int f' \frac{1}{r} ds,$$

$$V_n = -\frac{1}{2\pi} \int \frac{\partial V_{n-1}'}{\partial n} \frac{1}{r} ds. \qquad (n = 2, 3, \ldots)$$

Такимъ образомъ задачу Neumann'а можно считать разрѣшенной для конвексныхъ поверхностей, достаточно мало уклоняющихся отъ сферы.

Въ случаѣ эллипсоида указанная метода примѣнима, когда отношеніе между наибольшей и наименьшей изъ его осей не болѣе числа 1,15... .

Вообще эта метода примѣнима во всѣхъ случаяхъ, когда рядъ

$$f + \frac{\partial V_{1s}}{\partial n} + \frac{\partial V_{2s}}{\partial n} + \ldots + \frac{\partial V_{ns}}{\partial n} + \ldots \tag{36}$$

сходится абсолютно и равномѣрно во всѣхъ точкахъ поверхности (S).

Намъ удалось доказать сходимость этого ряда только для поверхностей, величина уклоненія которыхъ отъ сферы не болѣе числа 1,15... .

Но въ самыхъ разсужденіяхъ мы пользовались слишкомъ грубыми высшими и низшими предѣлами, вслѣдствіе чего получился слишкомъ низкій предѣлъ для числа σ.

Въ дѣйствительности рядъ (36) сходится и въ случаѣ поверхностей, гораздо значительнѣе уклоняющихся отъ сферы; быть можетъ даже для всѣхъ конвексныхъ поверхностей, имѣющихъ опредѣленную касательную плоскость и конечную кривизну въ каждой точкѣ.

Но мнѣ не удалось строго подтвердить это предположеніе.

ИЗВЛЕЧЕНІЕ ИЗЪ ПРОТОКОЛОВЪ ЗАСѢДАНІЙ.

Засѣданіе 27-го Января 1895 года.

1. М. А. Тихомандрицкій доложилъ статью В. П. Алексѣевскаго: „Объ аутоморфной функціи, аналогичной показательной“.

2. Въ этомъ засѣданіи получены въ даръ отъ авторовъ слѣдующія сочиненія: 1) Соколовъ Н. Н. „Значеніе изслѣдованій Н. И. Лобачевскаго въ геометріи и ихъ вліяніе на ея дальнѣйшее развитіе“. Кіевъ, 1894 г. 2) Соколовъ Н. „Основныя дѣйствія надъ періодическими десятичными дробями“. С.П.Б., 1894 г. 3) Щербаковъ, С. В. „Историческій очеркъ развитія ученія о движеніи небесныхъ тѣлъ“. С.П.Б. 1894.

Засѣданіе 3-го Марта.

1. А. П. Грузинцевъ сдѣлалъ сообщеніе: „Германъ фонъ-Гельмгольтцъ въ его послѣднихъ произведеніяхъ“.

2. В. А. Стекловъ сдѣлалъ сообщеніе: „По поводу одного мемуара H. Poincaré, относящагося къ дифференціальнымъ уравненіямъ Математической Физики“.

3. Въ этомъ засѣданіи получено въ даръ отъ И. В. Мещерскаго его сочиненіе: „Преподаваніе механики и механическія коллекціи въ нѣкоторыхъ высшихъ учебныхъ заведеніяхъ Италіи, Франціи, Швейцаріи и Германіи“. С.П.Б., 1894.

Засѣданіе 7-го Апрѣля.

1. А. М. Ляпуновъ прочелъ замѣтку: „Нѣкоторыя свѣдѣнія о жизни и ученой дѣятельности акад. П. Л. Чебышева“.

2. В. А. Стекловъ сдѣлалъ сообщеніе: „Объ одномъ дифференціальномъ уравненіи второго порядка съ произвольнымъ параметромъ“.

3. Въ этомъ засѣданіи получены въ даръ отъ авторовъ слѣдующія сочиненія: Марковъ, А. А. 1) „О псевдо-эллиптическихъ интегралахъ $\int \frac{xdx}{(x^3+c)\sqrt{x^3+\partial}}$". 2) „О предѣльныхъ величинахъ интеграловъ". 3) „О наивыгоднѣйшихъ изображеніяхъ нѣкоторой части данной поверхности вращенія на плоскости". 4) „Deux démonstrations de la convergence de certaines fractions continues". 5) „Note sur les fractions continues". Отъ М. А. Тихомандрицкаго: П. Л. Чебышевъ. „О функціяхъ, наименѣе уклоняющихся отъ нуля". С.П.Б., 1873.

Засѣданіе 5-го Мая.

1. Н. В. Бугаевъ сдѣлалъ сообщеніе: „Способъ послѣдовательныхъ приближеній".

2. А. М. Ляпуновъ сдѣлалъ сообщеніе: „Объ инваріантахъ одного линейнаго уравненія съ періодическими коэффиціентами".

3. Въ этомъ засѣданіи получены въ даръ отъ авторовъ слѣдующія сочиненія: 1) Schwarz, H. A. „Ueber ein die Flächen kleinsten Flächeninhalts betreffendes Problem der Variationsrechnung" Helsingfors, 1885. 2) A. Radzig. „Die Anwendung des Sylow'schen Satzes auf die symmetrische und die alternirende Gruppe". Berlin, 1895.

Засѣданіе 19-го Мая.

1. Предсѣдатель доложилъ о просьбѣ Правленія Одесской Обществ. Библіотеки о доставленіи ей „Сообщеній Х. М. О.". Постановлено выслать по возможности полное собраніе трудовъ Общества.

2. Избраны: a) проф. Московскаго университета П. А. Некрасовъ въ въ члены корреспонденты и b) А. А. Радцигъ въ дѣйствительные члены Общества.

3. Н В. Бугаевъ сдѣлалъ сообщеніе: „Къ вопросу о моногенности интеграловъ дифференціальныхъ уравненій".

4. А. П. Грузинцевъ сдѣлалъ сообщеніе: „Отвѣтъ проф. А. П. Соколову на его рецензію моей книги „Электромагнитная теорія свѣта".

5. А. А. Радцигъ сдѣлалъ сообщеніе: „Примѣненіе теоремы Зилова къ симметрической группѣ".

6. А. П. Грузинцевъ сообщилъ: „О началѣ Д'Аламбера въ Математической Физикѣ".

7. Въ этомъ засѣданіи получены въ даръ отъ авторовъ слѣдующія сочиненія: 1) Бугаевъ, Н. В. „Алгебраическіе частные интегралы диф-

ференціальныхъ уравненій". Москва, 1893. 2) Его же: „Опредѣленные числовые интегралы по дѣлителямъ". Москва, 1895. 3) Его-же: „Сергѣй Алексѣевичъ Усовъ". Москва, 1886.

ГОДИЧНОЕ СОБРАНІЕ ОБЩЕСТВА

1-го Октября 1895 года.

1. Доложенъ отчетъ о состояніи и дѣятельности Общества за 1894—95 академическій годъ.

2. Предсѣдатель доложилъ письмо проф. П. А. Некрасова, содержащее выраженіе благодарности за избраніе его въ члены корреспонденты Общества.

3. Предсѣдатель доложилъ о пожертвованіи М. А. Тихомандрицкимъ въ библіотеку Общества его послѣдняго соч. „Теорія эллиптическихъ интеграловъ и функцій".

4. Произведенъ выборъ членовъ распорядительнаго комитета на предстоящій 1895—96 академическій годъ.

Избраны: Предсѣдателемъ К. А. Андреевъ, профессоръ университета.

Товарищами предсѣдателя А. М. Ляпуновъ, проф. университета и В. Л. Кирпичевъ, директоръ технологическаго института.

Секретаремъ Общества В. А. Стекловъ, приватъ-доцентъ университета.

Засѣданіе 13-го Октября.

1. I. I. Сикора сдѣлалъ сообщеніе: „Объ измѣненіи діаметра солнца въ зависимости отъ явленій, наблюдаемыхъ на его поверхности".

2. В. А. Стекловъ сдѣлалъ сообщеніе: „О разложеніи данной функціи въ рядъ по гармоническимъ функціямъ".

3. Въ этомъ засѣданіи получены въ даръ отъ авторовъ слѣдующія сочиненія: 1) Тихомандрицкій, М. А. „Теорія эллиптическихъ интеграловъ и эллиптическихъ функцій". Харьковъ, 1895. 2) Андреевъ, К. А. „Василій Григорьевичъ Имшенецкій (біографическій очеркъ)". Харьковъ, 1895. 3) Некрасовъ, П. А. „Аналитическое изслѣдованіе одного случая движенія тяжелаго твердаго тѣла около неподвижной точки". Москва, 1895. 4) Его-же: „Способъ В. П. Ермакова для нахожденія раціональныхъ интеграловъ линейныхъ дифференціальныхъ уравненій". Москва, 1895.

Засѣданіе 26-го Января 1896 года.

1. Предсѣдатель доложилъ письмо отъ редакціи журнала: „Monatshefte für Mathematik und Physik", издаваемаго въ Вѣнѣ, съ предложеніемъ обмѣна изданіями. Постановлено принять предложеніе и выслать всю вторую серію „Сообщеній Х. М. Общества".

2. А. М. Ляпуновъ доложилъ статью акад. А. А. Маркова: „О нуляхъ цѣлой функціи Эрмита и функцій Ляме".

3. В. А. Стекловъ сдѣлалъ сообщеніе: „Къ вопросу объ интегрированіи дифференціальныхъ уравненій движенія матеріальной точки въ плоскости".

4. А. П. Грузинцевъ сдѣлалъ сообщеніе: „Электромагнитная теорія проводниковъ".

5. Въ этомъ засѣданіи получены въ даръ отъ авторовъ слѣдующія сочиненія: 1) Сомовъ, П. О. „О нѣкоторыхъ системахъ винтовыхъ скоростей". Варшава, 1895. 2) Чистяковъ, І. Н. „Бернулліевы числа". Москва, 1895. 3) Piltschikoff. N. „Nouvelles photographies de l'éclair". 4) Бугаевъ, Н. В. „Способъ послѣдовательныхъ приближеній; его приложеніе къ численному рѣшенію алгебраическихъ уравненій". 5) Его-же: „Способъ послѣдовательныхъ приближеній; его приложеніе къ разложенію функцій въ непрерывные ряды". Москва, 1896.

Засѣданіе 9-го Февраля.

1. Предсѣдатель доложилъ о полученіи черезъ Правленіе университета предложенія отъ Ново-Александрійскаго сельско-хозяйственнаго института вступить въ обмѣнъ изданіями. Постановлено принять къ свѣдѣнію.

2. Предсѣдатель доложилъ о полученномъ черезъ члена Парижской Академіи Наукъ P. Appell'я предложенія чествовать 50-ти лѣтіе дня рожденія редактора журнала „Acta Mathematica", проф. Миттагъ-Лефлера, адресомъ съ поднесеніемъ портрета. Постановлено присоединиться къ адресу.

3. М. Ф. Ковальскій сдѣлалъ сообщеніе: „Видоизмѣненіе способа Коши интегрированія частныхъ дифференціальныхъ уравненій перваго порядка".

4. В. А. Стекловъ сдѣлалъ сообщеніе: „Одинъ случай движенія вязкой несжимаемой жидкости".

5. А. П. Грузинцевъ сдѣлалъ сообщеніе: „Геометрія поглощенія".

6. Въ этомъ засѣданіи получены въ даръ отъ авторовъ слѣдующія сочиненія: 1) Бугаевъ, Н. В. „Способъ послѣдовательныхъ приближеній; его приложеніе къ выводу теоремъ Тейлора и Лагранжа въ преобра-

зованной формѣ". Москва, 1896. 2) Шапошниковъ, Н. А. „Опытъ математическаго выраженія понятій и выводовъ этики". Москва, 1896.

Засѣданіе 28-го Мая.

1. К. А. Андреевъ напомнилъ Обществу о тяжелой утратѣ, понесенной русской наукой въ лицѣ скончавшагося проф. Московскаго университета А. Г. Столѣтова.

Присутствовавшіе почтили память покойнаго вставаніемъ съ своихъ мѣстъ.

2. В. А. Стекловъ сдѣлалъ сообщеніе: „Задача объ охлажденіи неоднороднаго твердаго стержня".

3. К. А. Андреевъ сдѣлалъ сообщеніе: „Къ вопросу о разысканіи алгебраическихъ интеграловъ линейныхъ дифференціальныхъ уравненій съ раціональными коэффиціентами".

4. Въ этомъ засѣданіи получены въ даръ отъ авторовъ слѣдующія сочиненія: 1) Марковъ, А. А. „Новыя приложенія непрерывныхъ дробей". С.П.Б., 1896. 2) Его-же: „О простыхъ дѣлителяхъ чиселъ вида $1+4x^2$". С.П.Б., 1895. 3) Ляпуновъ, А. М. „О рядахъ, предложенныхъ Hill'емъ для представленія движенія луны". Москва, 1896. 4) Зерновъ, Д. С. „Экспертиза керосиновыхъ двигателей". Москва, 1896. 5) Ed. Weyr. „Oslava Stoleté dne narozeni N. I. Lobačevského". V Praze, 1895.

ГОДИЧНОЕ СОБРАНІЕ ОБЩЕСТВА.

13-го Октября 1896 года.

1. Доложенъ отчетъ о состояніи и дѣятельности Общества за истекшій 1895—96 акад. годъ.

2. К. А. Андреевъ предложилъ высылать труды Общества въ библіотеку астрономической обсерваторіи Юрьевскаго университета.

Постановлено выслать, начиная съ 1-го тома II-й серіи.

3. Предсѣдатель доложилъ о пожертвованіи въ библіотеку Общества проф. М. А. Тихомандрицкимъ нѣсколькихъ сочиненій изъ его собственной библіотеки.

4. Произведенъ выборъ членовъ распорядительнаго комитета на предстоящій 1896—97 акад. годъ.

Избраны: Предсѣдателемъ К. А. Андреевъ, проф. университета.

Товарищами Предсѣдателя: А. М. Ляпуновъ, проф. университета и М. А. Тихомандрицкій, проф. университета.

Секретаремъ Общества В. А. Стекловъ, проф. университета.

Засѣданіе 18-го Октября.

1. Предсѣдатель доложилъ о полученіи благодарности отъ редакціи журнала „Acta Mathematica“ за участіе Х. М. Общества въ адресѣ, поднесенномъ редактору этого журнала, проф. Миттагъ-Лефлеру, по случаю пятидесятилѣтія дня его рожденія.

2. Предсѣдатель доложилъ о полученіи отъ Высочайше утвержденнаго комитета листа для сбора пожертвованій на сооруженіе памятника французскому ученому Лавуазье.

3. Избранъ въ члены корреспонденты Общества проф. Казанскаго университета Александръ Васильевичъ Васильевъ.

4. I. I. Сикора сдѣлалъ сообщеніе: „Экспедиція къ верховьямъ рѣки Муоньо для наблюденія полнаго солнечнаго затмѣнія 28 іюля 1896 г.“.

5. А. М. Ляпуновъ сдѣлалъ сообщеніе: „О наибольшихъ величинахъ нѣкоторыхъ интеграловъ“.

6. Въ этомъ засѣданіи получены въ даръ отъ авторовъ слѣдующія сочиненія: 1) Некрасовъ, П. А. „О совмѣстныхъ каноническихъ дифференціальныхъ уравненіяхъ, находящихся въ связи съ комплексными количествами, зависящими отъ корней неприводимаго алгабраическаго уравненія“. 2) Шапошниковъ, Н. А. „Опытъ математическаго выраженія понятій и выводовъ этики“. Москва, 1896. 3) Отъ проф. М. А. Тихомандрицкаго получены слѣдующія сочиненія: a) Буняковскій, В. Я. „О соединеніяхъ особаго рода, встрѣчающихся въ вопросахъ о дефектахъ“. СПБ., 1871. b) Золотаревъ, Е. И. „Объ ученыхъ трудахъ академика О. И. Сомова“. СПБ., 1877. c) Сохоцкій, Ю. В. „Теорія интегральныхъ вычетовъ съ нѣкоторыми приложеніями“. СПБ., 1868. d) Преображенскій, В. В. „О началѣ наименьшаго дѣйствія“. СПБ., 1882. e) Сабининъ, Е. Ѳ. „О началѣ наименьшаго дѣйствія“. Одесса, 1881. f) Его-же. „Объ интегралѣ, обращающемся въ minimum при тѣхъ-же условіяхъ, при какихъ имѣетъ мѣсто minimum интеграла дѣйствія“. Одесса, 1883. g) Его-же. „Développements analytiques pour servir à compléter la discussion de la variation seconde des intégrales définies multiples“. h) Его-же: „Sur la méthode de distinguer les maxima et les minima des intégrales définies multiples“. S-Pet., 1869.

Засѣданіе 15-го Ноября.

1. В. П. Алексѣевскій сдѣлалъ сообщеніе: „О мѣрѣ въ неэвклидовой геометріи“.

2. В. А. Стекловъ сдѣлалъ сообщеніе: „Объ одной методѣ C. Neumann'а“.

Засѣданіе 13-го Декабря.

1. Предсѣдатель доложилъ о полученіи отъ проф. А. В. Васильева письма съ выраженіемъ благодарности за избраніе его въ члены корреспонденты Общества.

2. Предсѣдатель доложилъ о предложеніи редакціи журнала: „Annales de la Faculté des Scinces de Toulouse“ объ обмѣнѣ изданіями.

Постановлено принять предложеніе и выслать всѣ изданія Х. М. Общества, начиная съ 1-го тома II-ой серіи.

3. Предсѣдатель доложилъ письмо отъ Лондонскаго Королевскаго Общества съ просьбой доставить нѣкоторыя свѣдѣнія объ изданіи трудовъ Х. М. Общества для внесенія ихъ въ „Catalogue of scientific Papers“ и, если можно, нѣсколькихъ экземпляровъ „Сообщеній Общества“ для просмотра.

Постановлено выслать въ Лондонское Королевское Общество указатель статей I-ой серіи и всю вторую серію „Сообщеній“.

4. В. А. Стекловъ сдѣлалъ сообщеніе: „О наименьшихъ величинахъ нѣкоторыхъ опредѣленныхъ интеграловъ“.

5. А. М. Ляпуновъ сдѣлалъ сообщеніе: „О нѣкоторыхъ неравенствахъ“.

6. Въ этомъ засѣданіи получены въ даръ отъ авторовъ слѣдующія сочиненія: 1) Васильевъ, А. В. „Значеніе Н. И. Лобачевскаго для Императорскаго Казанскаго университета“. Казань, 1896. 2) Сомовъ, П. О. „О винтовыхъ перемѣщеніяхъ твердаго тѣла, связи котораго выражаются неравенствами“. Варшава, 1896.

Премія имени Н. И. Лобачевскаго.

19-го декабря 1895 г. по всеподданнѣйшему докладу министра народнаго просвѣщенія состоялось Высочайшее соизволеніе на учрежденіе преміи имени профессора Н. И. Лобачевскаго изъ процентовъ съ собраннаго Физико-Математическимъ Обществомъ, состоящимъ при Казанскомъ университетѣ, капитала 6000 руб. Вслѣдъ за тѣмъ, 24 декабря, графомъ Деляновымъ, на основаніи предоставленнаго ему Высочайшимъ повелѣніемъ права, утверждено положеніе о преміи Лобачевскаго. Согласно этому положенію премія будетъ присуждаться черезъ каждые три года въ размѣрѣ 500 р., при чемъ первое присужденіе должно состояться 22 октября 1897 года. Премія назначается за сочиненія по геометріи, преимущественно неэвклидовой. На соисканіе преміи допускаются сочиненія на языкахъ: русскомъ, французскомъ, нѣмецкомъ, англійскомъ, итальянскомъ и латинскомъ, напечатанныя въ теченіе шести лѣтъ, предшествовавшихъ присужденію преміи. Право полученія преміи принадлежитъ только самому автору сочиненія, но отнюдь не издателю.

Для составленія капитала имени Н. И. Лобачевскаго Казанскимъ Физико-Математическимъ Обществомъ было, какъ извѣстно, исходатайствовано разрѣшеніе на повсемѣстную подписку *). Въ видахъ болѣе успѣшнаго распространенія приглашеній къ подпискѣ, пріуроченой къ чествованію знаменитаго геометра по случаю столѣтія со дня его рожденія (22 октября 1893 г.), Общество составило особый комитетъ изъ русскихъ и иностранныхъ ученыхъ. Согласіе на вступленіе въ этотъ комитетъ было получено почти отъ всѣхъ профессоровъ математики русскихъ университетовъ и другихъ высшихъ учебныхъ заведеній. Такой-же сочувственный откликъ встрѣтило Общество и у иностранныхъ ученыхъ.

---

*) Нижеизложенныя свѣдѣнія заимствованы изъ „Отчета мѣстнаго распорядительнаго комитета, организованнаго Физико-Математическимъ Обществомъ для составленія капитала имени Н. И. Лобачевскаго". Казань, 1895.

Многіе изъ ученыхъ не ограничились выраженіемъ согласія на вступленіе въ члены комитета, но прислали письма, въ которыхъ выражали свое уваженіе къ памяти Лобачевскаго и сочувствіе къ мысли о созданіи преміи его имени.

Hermite писалъ: J'accepte avec le plus grand empressement de faire partie comme membre honoraire du Comité de la Société Physico-mathématique de Kazan, qui s'est proposé en fondant un capital du nom de Lobatcheffsky d'honorer la mémoire d'un savant, dont les travaux ont jété un vif éclat sur la science de la Russie et m'associe dans cette circonstance à l'admiration de tous les géomètres pour le génie de Votre illustre compatriote".

Sylvester писалъ: „I cordialey join with you in the hope that our english mathematicians may not be wanting in the manifestation of a honor due to Your illustrious compatriot, the Copernicus of Geometry".

Cremona писалъ: „Je suis heureux d'adhérer a Votre invitation et de rendre hommage à Votre illustre compatriote, le géomètre de Kasen qui, comme Vous dites parfaitement, a ouvert de voies à la science, en fondant la géomètrie non Euclidienne. Je Vous remercie, Mensieur et vos collègues, de m'avoir fait l'honneur de m'appeler à une oeuvre internationale de fraternité scientifique".

Battaglini писалъ: „Certamente tutti i geometri accoglieranno questa notizia col piu gran piacere porche il suddetto geometra ha portato una vera rivoluzione negli studj geometriche".

Такіе-же сочувственные отзывы находятся и въ письмахъ Дарбу, Ньюкомба, Цейтена, Бенно Ердмана, Лампе, Гуччія, Либмана, Стрингама и др.

Въ подпискѣ на составленіе капитала Н. И. Лобачевскаго принимали участіе не только ученые всего свѣта, близкіе по своей спеціальности къ направленію научной дѣятельности Лобачевскаго, но также многія учрежденія и общества въ Россіи и заграницей и большое число частныхъ лицъ. Особенно значительное число коллективныхъ пожертвованій поступило отъ учащихъ и учащихся въ учебныхъ заведеніяхъ. Дѣятельное участіе въ сборѣ приношеній принимали ученыя Общества.

Общая сумма поступленій въ капиталъ Лобачевскаго къ 1-му мая 1895 г. составляетъ **9071 р. 86 к.**

Изъ этой суммы произведены слѣдующіе расходы:

A) Типографскіе расходы	161 р.	40 к.
B) Почтовые расходы	17 „	35 „
C) Храненіе бумагъ	8 „	90 „
D) Мелкіе расходы	3 „	26 „
Итого	190 р.	91 к.

Кромѣ того изъ суммы фонда мѣстный распорядительный Комитетъ истратилъ на возобновленіе пришедшаго въ полный упадокъ могильнаго памятника Лобачевскаго 40 р.

За исключеніемъ произведенныхъ расходовъ въ капиталѣ Лобачевскаго къ 1 мая 1895 г. состоитъ **8840 р. 95 к.**

Изъ этихъ денегъ на сумму **7627 р. 81 к.** пріобрѣтены въ разное время $4^1/_2$%-ные закладные листы Государственнаго дворянскаго земельнаго банка (тысячныхъ листовъ—5 и сотенныхъ 26), которые и хранятся въ Казанскомъ отдѣленіи Государственнаго Банка.

Затѣмъ **965 р. 59 к.** хранятся въ сберегательной кассѣ Государственнаго Банка; остальныя деньги хранятся въ серіяхъ у казначея.

Въ засѣданіи 15 октября 1894 года Казанское Физико-Математическое Общество пришло, послѣ предварительнаго обсужденія въ мѣстномъ распорядительномъ Комитетѣ, къ слѣдующимъ рѣшеніямъ относительно распредѣленія собранной въ капиталъ Лобачевскаго суммы. Оно постановило:

1) отчислить изъ собранныхъ денегъ сумму въ 6000 руб. и считать ее неприкосновеннымъ капиталомъ преміи имени Н. И. Лобачевскаго;

2) отчислить въ виду спеціальной цѣли пожертвованія 2000 р. на бюстъ въ скверѣ Лобачевскаго, предоставивъ мѣстному распорядительному Комитету право производить изъ этой суммы выдачи по мѣрѣ надобности;

3) сумму въ 255 р. съ присоединеніемъ къ ней процентовъ, имѣющихъ поступить 1 ноября 1894 г., а также и пожертвованій, которыя поступятъ до дня утвержденія устава, передать въ распоряженіе Комитета для ликвидаціи остающихся расходовъ и для составленія и печатанія подробнаго отчета о дѣлѣ составленія капитала имени Н. И. Лобачевскаго; могущій быть остатокъ въ размѣрѣ не свыше 200 р. можетъ быть употребленъ на расходъ по постановкѣ бюста Лобачевскаго въ зданіи университета, если на это послѣдуетъ желаніе Совѣта университета.

Въ томъ-же засѣданіи былъ утвержденъ составленный мѣстнымъ распорядительнымъ Комитетомъ проектъ положенія о преміи имени Н. И. Лобачевскаго.

Осенью 1896 г. будетъ открытъ въ Казани бюстъ Лобачевскаго, въ скверѣ его имени. Коммиссія, составленная подъ предсѣдательствомъ Казанскаго городского головы С. В. Дьяченко изъ представителей Казанской городской думы и Физико-Математическаго Общества, послѣ обсужденія въ нѣсколькихъ засѣданіяхъ вопроса о бюстѣ Лобачевскаго, заключила 20 мая 1895 г. съ художницею М. Л. Диллонъ договоръ, по которому М. Л. Диллонъ обязуется за сумму 3300 р. исполнить бюстъ Лобачевскаго и гранитный пьедесталъ къ нему.

Бюстъ долженъ быть изъ лучшей бронзы, размѣромъ въ $1^1/_2$ аршина; онъ будетъ поставленъ на колоннѣ изъ чернаго полированнаго гранита высотою не менѣе 2 аршинъ и въ діаметрѣ $^3/_4$ аршина; постаментъ для этого пьедестала долженъ быть изъ сѣраго неполированнаго гранита въ 2 ступени; общая вышина памятника съ бюстомъ должна быть не менѣе 4 аршинъ 6 вершковъ.

Памятникъ Лобачевскому, одинъ изъ немногихъ памятниковъ, воздвигнутыхъ героямъ мысли, будетъ стоять на площади передъ однимъ изъ зданій университета; въ этомъ зданіи въ помѣщеніи, выходящемъ на скверъ Лобачевскаго, будутъ съ осени 1895 г. помѣщаться геометрическій и чертежный кабинеты, библіотека Физико-Математическаго Общества, математическая аудиторія. Будущій „математическій институтъ“ Казанскаго университета, изъ оконъ котораго будетъ прекрасно виденъ бюстъ великаго геометра и философа, будетъ почерпать въ его обликѣ энергію и настойчивость въ выполненіи своей ученой и педагогической цѣли. Съ именемъ Лобачевскаго будетъ связано и его существованіе.

Въ одной изъ залъ этого института будетъ помѣщаться „библіотека имени Лобачевскаго“, образованная по постановленію Физико-Математическаго Общества 23 октября 1893 г. Въ составъ этой библіотеки входитъ съ одной стороны собраніе сочиненій Лобачевскаго и нѣкоторыя рукописи, представляющія большой интересъ для исторіи его работъ, съ другой книги и статьи, посвященныя Лобачевскому и той отрасли знанія, которой онъ положилъ начало. Полагая основаніе этой библіотекѣ, Физико-Математитечкое Общество желало сгруппировать по возможности написанное о Лобачевскомъ и его геометріи и сдѣлать возможно болѣе доступною литературу лицамъ, желающимъ работать въ направленіи имъ указанномъ. Въ настоящее время, библіотека Лобачевскаго заключаетъ до 90 заглавій книгъ и статей.

ОБЪЯВЛЕНІЯ.

ОБЪ ИЗДАНІИ

УНИВЕРСИТЕТСКИХЪ ИЗВѢСТІЙ

(Императорскаго Университета Св. Владиміра въ Кіевѣ)

въ 1896 г.

Цѣль настоящаго изданія остается прежнею: доставлять членамъ университетскаго сословія свѣдѣнія, необходимыя имъ по отношеніямъ ихъ къ Университету, и знакомить публику съ состояніемъ и дѣятельностью Университета и различныхъ его частей.

Согласно съ этою цѣлью, въ **Университетскихъ Извѣстіяхъ** печатаются:

1. Протоколы засѣданій университетскаго Совѣта.
2. Новыя постановленія и распоряженія по Университету.
3. Свѣдѣнія о преподавателяхъ и учащихся, списки студентовъ и постороннихъ слушателей.
4. Обозрѣнія преподаванія по полугодіямъ.
5. Программы, конспекты и библіографическіе указатели для учащихся.
6. Библіографическіе указатели книгъ, поступающихъ въ университетскую библіотеку и въ студенческій ея отдѣлъ.
7. Свѣдѣнія и изслѣдованія, относящіяся къ устройству и состоянію ученой, учебной, административной и хозяйственной части Университета.
8. Свѣдѣнія о состояніи коллекцій, кабинетовъ, музеевъ и другихъ учебно-вспомогательныхъ заведеній Университета.
9. Годичные отчеты по Университету.
10. Отчеты о путешествіяхъ преподавателей съ учеными цѣлями.
11. Разборы диссертацій, представляемыхъ для полученія ученыхъ степеней, соисканія наградъ, pro venia legendi и т. п., а также и самыя диссертаціи.
12. Рѣчи, произносимыя на годичномъ актѣ и въ другихъ торжественныхъ собраніяхъ.
13. Вступительныя, пробныя, публичныя лекціи и полные курсы преподавателей.
14. Ученые труды преподавателей и учащихся.
15. Матеріалы и переводы научныхъ сочиненій.

Указанныя статьи распредѣляются на двѣ части: 1) - оффиціальную и протоколы, отчеты и т. п. 2)—неоффиціальную (статьи научнаго содержанія) съ отдѣлами—*критико-библіографическимъ*, посвященнымъ критическому обозрѣнію выдающихся явленій ученой литературы (русской и иностранной), и *научной хроники*, заключающими въ себѣ извѣстія о дѣятельности ученыхъ обществъ, состоящихъ при Университетѣ, и т. п. свѣдѣнія. Въ *прибавленіяхъ* печатаются матеріалы, указатели библіотеки, списки, таблицы метеорологическихъ наблюденій и т. п.

Университетскія Извѣстія въ 1896 году будутъ выходить въ концѣ каждаго мѣсяца, книжками, содержащими въ себѣ до 20 печатныхъ листовъ. Цѣна за 12 книжекъ **Извѣстій** безъ пересылки **шесть рублей пятьдесятъ копѣекъ**, а съ пересылкой **семь рублей**, Въ случаѣ выхода приложеній (большихъ сочиненій), о нихъ будетъ объявлено особо. Подписчики **Извѣстій**, при выпискѣ приложеній, пользуются уступкою 20%.

Подписка и заявленія объ обмѣнѣ изданіями принимаются въ канцеляріи Правленія Университета.

Студенты Университета Св. Владиміра платятъ за годовое изданіе **Университетскихъ Извѣстій** 3 руб. сер., а студенты прочихъ Университетовъ—4 руб.; продажа отдѣльныхъ книжекъ не допускается.

Гг. Иногородніе могутъ обращаться съ требованіями своими къ коммиссіонеру Университета Н. Я. Оглобину въ С-Петербургѣ, на Малую Садовую, № 4-й и въ Кіевѣ на Крещатикѣ, въ книжный магазинъ его же, или непосредственно въ Правленіе Университета Св. Владиміра.

Редакторъ *В. Иконниковъ*.

„ИЗВѢСТІЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА

ПРИ ИМПЕРАТОРСКОМЪ КАЗАНСКОМЪ УНИВЕРСИТЕТѢ".

„Извѣстія", издаваемыя подъ редакціей Совѣта Общества, выходятъ выпусками отъ четырехъ до шести въ годъ, изъ которыхъ къ концу года составляется томъ не менѣе 20-ти листовъ.

„Извѣстія" раздѣляются на два отдѣла.

1) Въ первомъ отдѣлѣ помѣщаются научныя и педагогическія статьи изъ области физико-математическихъ наукъ, читанныя въ засѣданіяхъ Общества.

2) Второй отдѣлъ содержитъ:

a. Лѣтопись Физико-Математическаго Общества (протоколы засѣданій, извлеченія изъ протоколовъ засѣданій Совѣта Общества, годичные отчеты, списки книгъ и періодическихъ изданій, поступившихъ въ библіотеку Общества и т. п.).

b. Библіографическіе отзывы и замѣтки о вновь появляющихся въ Россіи и заграницею сочиненіяхъ по физико-математическимъ наукамъ. Научныя новости.

c. Задачи и вопросы, предлагаемые для рѣшенія, и рѣшенія ихъ.

Въ „Извѣстіяхъ" могутъ быть съ разрѣшенія Совѣта помѣщаемы объявленія библіографическія и другія, имѣющія отношеніе къ физико-математическимъ наукамъ.

Члены Физико-Математическаго Общества пожизненные, а равно и уплатившіе установленный членскій взносъ за предъидущій годъ, получаютъ Извѣстія безплатно.

Для постороннихъ лицъ подписная цѣна на „ИЗВѢСТІЯ" въ годъ 3 р. (съ доставкою и пересылкою).

Подписка принимается предсѣдателемъ Физико-Математическаго Общества проф. **А. В. Васильевымъ**, секретаремъ Общества **П. П. Граве** (Университетъ) и казначеемъ Общества **А. П. Котельниковымъ** (Поперечно-Лядская соб. домъ), въ Казани книжными магазинами **А. А. Дубровина** (Гостинный дворъ № 1) и **Н. Я. Башмакова** (Воскресенская, городской пассажъ), а также всѣми извѣстными книжными магазинами.

Первую серію „Извѣстій" составляютъ восемь томовъ собранія протоколовъ засѣданій секціи Физико-Математическихъ Наукъ Общества Естествоиспытателей при Императорскомъ Казанскомъ Университетѣ.

ПОПУЛЯРНО-НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛЪ

„ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ“

И

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ

Въ теченіе каждаго учебнаго полугодія (семестра) выходитъ 12 номеровъ формата брошюръ, съ чертежами въ текстѣ.

ПРОГРАММА ЖУРНАЛА:

Популярныя статьи изъ области физико-математическихъ наукъ. Педагогическія статьи, касающіяся преподаванія тѣхъ же наукъ. Научная хроника. Открытія и изобрѣтенія. Физическіе опыты и приборы. Математическія мелочи. Рецензіи новыхъ книгъ и учебниковъ. Полная русская физико-математическая библіографія. Отчеты о засѣданіяхъ физико-математическихъ обществъ. Разныя извѣстія. Задачи, предлагаемыя читателямъ для рѣшенія, и рѣшенія за подписью лицъ, приславшихъ таковыя. Задачи на премію. Задачи на испытаніяхъ зрѣлости въ гимназіяхъ и на окончательныхъ испытаніяхъ въ реальныхъ училищахъ. Упражненія для учениковъ. Открытые вопросы и отвѣты. Справочныя таблицы. Отвѣты редакціи. Объявленія.

Журналъ былъ рекомендованъ Ученымъ Комитетомъ Министерства Народнаго Просвѣщенія для гимназій мужскихъ и женскихъ, реальныхъ училищъ, прогимназій, учительскихъ институтовъ и семинарій и городскихъ училищъ; Главнымъ Управленіемъ Военно-Учебныхъ Заведеній—для военно-учебныхъ заведеній. Ученымъ Комитетомъ при Святѣйшемъ Синодѣ журналъ былъ одобренъ для духовныхъ семинарій и училищъ.

Для поддержки изданія журнала, Министерствомъ Народнаго Просвѣщенія были выданы 4 раза единовременныя субсидіи (въ 1888, 1890, 1892, 1893 гг.).

Въ журналѣ сотрудничаютъ многіе профессора, преподаватели и любители физико-математическихъ наукъ.

ПОДПИСНАЯ ЦѢНА СЪ ПЕРЕСЫЛКОЮ:

На годъ всего 24 №№—6 руб. ⋇ На полугодіе—всего 12 №№ 3 руб.

Книжнымъ магазинамъ 5% уступки.

Менѣе чѣмъ на одно полугодіе подписка не принимается.

Комплекты №№ за истекшія полугодія (отъ I до XV вкл.), сброшюрованные въ книги, продаются по **2** руб. **50** коп. каждый.

Всѣ учащіе и учащіеся, затрудняющіеся вносить полную подписную плату, могутъ при непосредственныхъ сношеніяхъ съ конторою редакціи подписываться на журналъ на льготныхъ условіяхъ, а именно:

На годъ . . . 4 руб. ⋇ На полугодіе . 2 рубля.

Льготная подписка черезъ посредство книжныхъ магазиновъ не принимается.

Редакторъ-издатель *Э. К. Шпачинскій.*

NB. При редакціи имѣется Книжный Складъ собственныхъ изданій и книгъ, сдаваемыхъ для коммисіонной продажи.

Адресъ: г. Одесса, Редакція „ВѢСТНИКА ОП. ФИЗИКИ“.