К-583
НС-53513 уг

Communications de la Société mathématique de Kharkow.
2-ème série, Tome XV, № 5—6.

Український інститут
БІБЛІОТЕКА
583
Математичних наук

СООБЩЕНІЯ
ХАРЬКОВСКАГО
МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА

ВТОРАЯ СЕРІЯ
Томъ XV. 1915-1917
№ 5—6.

ХАРЬКОВЪ.
Типографія и Литографія М. Зильберберга и С-вья.
Донецъ-Захаржевская ул., с. д. № 6.
1917.

92

Communications de la Société mathématique de Kharkow.
2-ème série, Tome XV.

Український Інститут
БІБЛІОТЕКА
Інв. № 583
Математичних Наук

СООБЩЕНІЯ
ХАРЬКОВСКАГО
МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА

№ - 55513/42

ВТОРАЯ СЕРІЯ

Томъ XV.

ХАРЬКОВЪ.
Типографія и Литографія М. Зильбербергъ и С-вья.
Донецъ-Захаржевская ул., с. д. № 6.
1917.

65 П

Український Інститут
БІБЛІОТЕКА
Інв. №
441
Математичних Наук

СОДЕРЖАНІЕ:

XV-го тома.

	Стр.
Къ рѣшенію неопредѣленнаго уравненія $X^3\varrho + Y^3 = 1$, *Б. Н. Делоне*	1— 10
Рѣшеніе неопредѣленнаго уравненія $X^3\varrho + Y^3 = 1$, *Б. Н. Делоне*	11— 16
Объ интенсивности ночного неба, *В. Г. Фесенкова*	17— 37
*Объ одной теоремѣ геометріи и ея приложеніи къ уравненіямъ въ частныхъ производныхъ эллиптическаго типа, *С. Н. Бернштейна*	38— 45
Рѣшеніе неопредѣленнаго уравненія $X^3\varrho + Y^3 = 1$ (окончаніе), *Б. Н. Делоне*	46— 48
* Нѣсколько замѣчаній объ интерполированіи, *С. Н. Бернштейна*	49— 61
О преобразованіи плоскости на плоскость вблизи особыхъ линій, *Н. Ѳ. Спенглера*	62— 74
Рѣшеніе неопредѣленнаго уравненія $X^3\varrho + Y^3 = 1$ (окончательный результатъ), *Б. Н. Делоне*	75— 76
М. Н. Лагутинскій (некрологъ), *А. П. Пшеборскаго*	77— 80
О числѣ представленій чиселъ нѣкоторыми квадратичными формами съ 4 и 6 перемѣнными, *Я. В. Успенскаго*	81—147
О сходимости рядовъ Sturm'a-Liouville'я и Legendre'a, *И. И. Привалова*	148—160
С. В. Ковалевская (въ двадцати-пятилѣтнюю годовщину ея смерти), *Ц. К. Руссьяна*	161—172
О вихряхъ въ жидкости съ мѣняющейся температурой, прим. *А. А. Фридмана*	173—176
Синтетическія основы параболической геометріи, *В. Х. Даватца*	177—192
Обобщенная формула Green'a для пространства n измѣреній, *Н. Ѳ. Спенглера*	193—200
*О причинѣ измѣнчивости блеска η Aquilae, *В. Г. Фесенкова*	201—208
*Поправка, *С. Н. Бернштейна*	208
Опытъ аксіоматическаго обоснованія теоріи вѣроятностей, *С. Н. Бернштейна*	209—274
О моментѣ количества движенія солнечной системы съ точки зрѣнія космогонической гипотезы Laplace'a, *В. Г. Фесенкова*	275—284
О сходимости разложеній по полиномамъ Чебышева-Якоби, *Э. Когбетлянца*	285—287
В. П. Алексѣевскій (†), *Д. М. Синцова*	288—295
Математическій Институтъ Mittag-Leffler'a	296—300
Протоколы засѣданій и отчетъ за 1915—1917 г.г.	301—310

Заглавіе, отмѣченное *, является переводомъ заглавія оригинала.

TABLE DES MATIÈRES

du tome XV.

	Pag.
Sur la résolution de l'équation indéterminée $X^3\varrho+Y^3=1$, Note 1-ière et 2-de, par M. *B. Delaunay*.	1— 16
Sur l'intensité du ciel nocturne, par M. *Fessenkoff* . .	17— 37
Sur un théorème de géométrie et son application aux équations aux dérivées partielles du type elliptique, par M. *S. Bernstein*	38— 45
Résolution de l'équation indéterminée $X^3\varrho+Y^3=1$ (Note 3-ème et dernière), par M. *B. Delaunay*	46— 48
Quelques remarques sur l'interpolation, par M. *S. Bernstein*	49— 61
Sur la transformation d'un plan sur un autre au voisinage des lignes singulières, par M. *N. Spengler*	62— 74
Résolution de l'équation indéterminée $X^3\varrho+Y^3=1$ (résultat final), par M. *B. Delaunay*	75— 76
M. N. Lagoutinsky (nécrologie), par M. *A. Pchéborsky* .	77— 80
Sur le nombre des représantations des nombres par quelques formes quadratiques à 4 et 6 variables, par M. *Ouspensky*	81—147
Sur la convergence des séries de Sturm-Liouville et de Legendre, par M. *Priwalow*	148—160
Sophie Kowalevsky (à la 25-ème anniversaire de son décès), par M. *C. Rusjan*	161—172
Sur les tourbillons dans le liquide à temperature variante, par M. *A. Friedmann*	173—176
Fondements synthétiques de la géométrie parabolique, par M. *W. Da-Vatz*	177—192
Formule de Green généralisée sur l'espace à n dimensions, par M. *N. Spengler*	193—200
Sur la cause de la variabilité d'éclat de η Aquilae, par. M. *B. Fessenkof*	201—208
Essai d'exposition axiomatique des principes du calcul des probabilités, par M. *S. Bernstein*	209—274
Sur le moment de la quantité du mouvement du système solaire au point de vue de l'hypothèse cosmogonique de Laplace, par M. *W. Fessenkof*	275—284
Sur la convergence des développements suivant les polynomes de Tchebichef-Jacobi, par M. *E. Kogbetlianz* . . .	285—287
W. P. Alexeïewsky (†), par. M. *D. Sintsof*	288—295
Institut Mathématique de Mittag-Leffler	296—300
Procès verbaux des séances et comptes rendus pour les années 1915—1916	301—310

Къ рѣшенію неопредѣленнаго уравненія

$$X^3\varrho + Y^3 = 1.$$

Проф. стипенд. Универ. Св. Владиміра ***Бориса Делоне.***

Въ предлагаемой замѣткѣ мы разсматриваемъ свойства рѣшеній въ цѣлыхъ раціональныхъ числахъ X, Y уравненія

$$X^3\varrho + Y^3 = 1 \qquad (1)$$

Мы можемъ предполагать цѣлый раціональный коэффиціентъ ϱ неполнымъ кубомъ и положительнымъ. Изъ тожества

$$X^3\varrho + Y^3 = (X\sqrt[3]{\varrho} + Y)(X\zeta\sqrt[3]{\varrho} + Y)(X\zeta^2\sqrt[3]{\varrho} + Y)$$

гдѣ $\zeta = \sqrt[3]{1} = e^{\frac{2\pi i}{3}}$, мы видимъ, что всякому рѣшенію X, Y уравненія (1) соотвѣтствуетъ въ алгебраической области $\Omega\sqrt[3]{\varrho}$ алгебраическая единица $X\sqrt[3]{\varrho} + Y$, гдѣ X и Y цѣлые, и обратно всякой единицѣ вида $X\sqrt[3]{\varrho} + Y$, гдѣ X и Y цѣлые, соотвѣтствуетъ рѣшеніе уравненія (1). Мы будемъ разсматривать единицы области $\Omega\sqrt[3]{\varrho}$ имѣющія видъ $A(\sqrt[3]{\varrho})^2 + B\sqrt[3]{\varrho} + C$, гдѣ A, B и C цѣлые. Тѣ изъ такихъ единицъ, которыя имѣютъ видъ $B\sqrt[3]{\varrho} + C$, т. е. не содержатъ члена съ $(\sqrt[3]{\varrho})^2$, мы будемъ называть «двучленными». Задача рѣшенія уравненія (1) сводится, такимъ образомъ, къ разысканію всѣхъ двучленныхъ единицъ.

Уравненіе $x^3 - \varrho = 0$ имѣетъ одинъ дѣйствительный корень и два мнимыхъ, и, слѣдовательно, по теоремѣ Dirichlet, всѣ единицы «порядка» $(\sqrt[3]{\varrho})$ (подъ «порядкомъ», Ordnung, $(\sqrt[3]{\varrho})$ мы понимаемъ совокупность всѣхъ чиселъ вида $t_1(\sqrt[3]{\varrho})^2 + t_2\sqrt[3]{\varrho} + t_3$, гдѣ t_1, t_1 и t_3 цѣлые раціональные коэффиціенты) получаются отъ возвышенія во всѣ цѣлыя положительныя степени одной, такъ называемой «основной» единицы $\varepsilon_0 = a(\sqrt[3]{\varrho})^2 + b\sqrt[3]{\varrho} + c$, порядка $(\sqrt[3]{\varrho})$ и обратной ей единицы $\frac{1}{\varepsilon_0}$. А. А. Марковъ далъ таблицу основныхъ единицъ области $\Omega\sqrt[3]{\varrho}$ для всѣхъ ϱ не большихъ 70 (въ статьѣ «Sur les nombres entiers dépendants

d'une racine cubique d'un nombre entier ordinaire», Mémoires de l'Académie de St. Pétersbourg VII-e Série, T. XXXVIII). Въ заключеніе таблицы А. А. Марковъ замѣчаетъ: «Je suis persuadé que *presque* toutes ces unitées sont fondamentales». Мы провѣрили нѣкоторыя изъ единицъ А. А. Маркова. Всѣ единицы нижеслѣдующей таблички (въ которой α обозначаетъ $\sqrt[3]{\varrho}$, безусловно основныя единицы соотвѣтственныхъ порядковъ $(\sqrt[3]{\varrho})$.

$\varrho=2$	$\alpha-1$	17		-7α	$+18$	43	$2\alpha-7$
3	α^2-2	19		3α	-8	58	$2\alpha^2-8\alpha+1$
5	$2\alpha^2-4\alpha+1$	21	$4\alpha^2$	$+6\alpha$	-47	60	$3\alpha^2-12\alpha+1$
6	$3\alpha^2-6\alpha+1$	22	$-4\alpha^2$	$+3\alpha$	$+23$	61	$4\alpha^2-16\alpha+1$
7	$-\alpha+2$	23	$6230\alpha^2$	-3160α	-41399	63	$-\alpha+4$
10	$-3\alpha^2+6\alpha+1$	26		$-\alpha$	$+3$	65	$\alpha-4$
11	$-2\alpha^2+4\alpha+1$	28		α	-3	67	$-4\alpha^2+16\alpha+1$
13	$2\alpha^2-3\alpha-4$	37		-3α	$+10$	68	$-3\alpha^3+12\alpha+1$
14	$-\alpha^2+2\alpha+1$	39	$2\alpha^2$		-23	70	$-2\alpha^2+8\alpha+1$

Русскій математикъ Вороной нашелъ алгоритмъ для вычисленія основныхъ единицъ кубической области, рѣшивъ тѣмъ самымъ для кубической области тотъ же вопросъ, который былъ рѣшенъ Lagrange'мъ для квадратичной; такимъ образомъ для каждаго заданнаго уравненія $X^3\varrho+Y^3=1$ основная единица $\varepsilon_0=a(\sqrt[3]{\varrho})^2+b\sqrt[3]{\varrho}+c$ можетъ быть вычислена.

§ 1. Замѣчаніе. *«У одной изъ двухъ единицъ $A(\sqrt[3]{\varrho})^2+B\sqrt[3]{\varrho}+C$, или ей обратной, коэффиціенты A, B и C не одного знака, и одинъ изъ нихъ можетъ быть равенъ нулю, коэффиціенты же другой всѣ три не равны нулю и одного знака».*

Доказательство.

Норма числа $u(\sqrt[3]{\varrho})^2+v\sqrt[3]{\varrho}+w$ т. е.

$$[u(\sqrt[3]{\varrho})^2+v\sqrt[3]{\varrho}+w][u(\zeta\sqrt[3]{\varrho})^2+v\zeta\sqrt[3]{\varrho}+w][u(\zeta^2\sqrt[3]{\varrho})^2+v\zeta^2\sqrt[3]{\varrho}+w)$$

имѣетъ видъ

$$u^3\varrho^2+v^3\varrho+w^3-3uvw\varrho.$$

Если $A(\sqrt[3]{\varrho})^2+B\sqrt[3]{\varrho}+C$ единица, то ея норма есть $+$или-1, т. е.

$$A^3\varrho^2+B^3\varrho+C^3-3ABC\varrho=1 \qquad (2)$$

(мы пишемъ $+1$, такъ какъ иначе бы помножили нашу единицу на-1).

Легко вычислить, что обратная единица, т. е.

$$A'(\sqrt[3]{\varrho})^2+B'\sqrt[3]{\varrho}+C'=\frac{1}{A(\sqrt[3]{\varrho})^2+B\sqrt[3]{\varrho}+C}$$

имѣетъ коэффиціенты

$$A'=B^2-AC;\quad B'=A^2\varrho-BC;\quad C'=C^2-AB\varrho; \tag{3}$$

изъ (2) легко получить слѣдующее соотношеніе:

$$AB'\varrho+A'B\varrho+CC'=1 \tag{4}$$

Изъ (4) видимъ, такъ какъ $\varrho>0$, что не могутъ быть у обѣихъ единицъ, прямой и обратной, всѣ три коэффиціента одного знака. Предположимъ, что коэффиціенты A, B и C не одного знака и покажемъ, что тогда A', B' и C' не равны нулю и одного знака.

1) Пусть $A=0$; $B>0$; $C<0$ или $A=0$; $B<0$; $C>0$; или $A>0$; $B=0$; $C<0$ или $A<0$; $B=0$; $C>0$; непосредственно изъ (3) мы убѣждаемся что $A'>0$ $B'>0$ $C'>0$.

2) Пусть $A>0$; $B>0$; $C<0$; тогда изъ (3) $A'>0$ и $B'>0$ и слѣдовательно изъ (4) $C'>0$.

3) Пусть $A>0$; $B<0$; $C>0$; тогда изъ (3) $B'>0$ и $C'>0$ и слѣдовательно изъ (4) $A'>0$.

4) Пусть наконецъ $A<0$; $B>0$; $C>0$; тогда изъ (3) $A'>0$ и $C'>0$, и слѣдовательно изъ (4) $B'>0$.

Всѣ остальные возможные случаи сводятся на разсмотренные Ч. и т. д.

Изъ этого замѣчанія слѣдуетъ что лишь степени основной единицы $a(\sqrt[3]{\varrho})^2+b\sqrt[3]{\varrho}+c$, коэффиціенты которой a, b и c не одного знака, могутъ давать двучленныя единицы, такъ какъ въ степеняхъ обратной ей единицы, имѣющей всѣ три коэффиціента a', b' и c' положительные (если бы отрицательные, то мы помножили бы на -1) послѣ замѣны $(\sqrt[3]{\varrho})^3$ на ϱ во всѣхъ членахъ разложенія $[a'(\sqrt[3]{\varrho})^2+b'\sqrt[3]{\varrho}+c')^m$, гдѣ $\sqrt[3]{\varrho}$ входитъ въ болѣе высокой степени нежели второй, т. е. послѣ приведенія $(a(\sqrt[3]{\varrho})^2+b'\sqrt[3]{\varrho}+c')^m$ къ виду $A'(\sqrt[3]{\varrho})^2+B'\sqrt[3]{\varrho}+C'$, ни одинъ изъ коэффиціентовъ A', B' или C' выйти нулемъ не можетъ, такъ какъ числа a', b', c' и ϱ всѣ >0.

Основную единицу $a(\sqrt[3]{\varrho})^2+b\sqrt[3]{\varrho}+c$, у которой a, b и c не одного знака, и всѣ ея степени мы будемъ называть «прямыми» единицами, а всѣ степени обратной «обратными». Въ табличкѣ даны какъ разъ прямыя основныя единицы.

§ 2. Задача рѣшенія уравненія $X^3\varrho + Y^3 = 1$ сводится такимъ образомъ къ разысканію тѣхъ показателей m, при которыхъ

$$[a(\sqrt[3]{\varrho})^2 + b\sqrt[3]{\varrho} + c]^m$$

двучленная единица.

Теорема I. «*Никакая степень единицы вида* $B\sqrt[3]{\varrho} + C$ *или вида* $A(\sqrt[3]{\varrho})^2 + C$ *не можетъ быть двучленной единицей*».

Т. е. мы покажемъ что, при возвышеніи въ степени единицы вида $B\sqrt[3]{\varrho} + C$ или вида $A(\sqrt[3]{\varrho})^2 + C$ будутъ получаться единицы

$$M(\sqrt[3]{\varrho})^2 + P\sqrt[3]{\varrho} + Q$$

гдѣ $M \neq 0$. Дѣйствительно если бы $(B\sqrt[3]{\varrho} + C)^m$ давала $M = 0$, или $[A(\sqrt[3]{\varrho})^2 + C]^m$ давала бы $M = 0$, мы имѣли бы одно изъ слѣдующихъ шести равенствъ

если m вида $m = 3\lambda + 2$,

$$\xi^\lambda + \xi^{\lambda-1}.(C^3)\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + (C^3)^\lambda \frac{m(m-1)}{1.2} = 0;$$

если m вида $m = 3\lambda + 1$

$$\xi^{\lambda-1}\frac{m(m-1)}{1.2} + \xi^{\lambda-1}.(C^3)\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3..4.5} + \ldots + (C^3)^{\lambda-1}\frac{m(m-1)}{1.2} = 0;$$

если m вида $m = 3\lambda$

$$\xi^{\lambda-1}m + \xi^{\lambda-2}.(C^3)\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4} + \ldots\ldots\ldots + (C^3)^{\lambda-1}\frac{m(m-1)}{1.2} = 0;$$

всѣ три для $M = 0$ въ $(B\sqrt[3]{\varrho} + C)^m$; $\xi = B^3\varrho$;

если m вида $m = 3\lambda + 2$

$$\xi^\lambda m + \xi^{\lambda-1}.(C^3)\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4} + \ldots\ldots\ldots\ldots + (C^3)^\lambda m = 0;$$

если m вида $m = 3\lambda + 1$

$$+ \xi^{\lambda-1}.(C^3)\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + (C^3)^\lambda m = 0;$$

если m вида $m = 3\lambda$

$$\xi^{\lambda-1}\frac{m(m-1)}{1.2} + \xi^{\lambda-2}(C^3)\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3.4.5} + \ldots + (C^3)^\lambda m = 0,$$

всѣ три для $M = 0$ въ $[A(\sqrt[3]{\varrho})^2 + C]^m$; $\xi = A^3\varrho^2$

но такъ какъ $B\sqrt[3]{\varrho} + C$ и $A(\sqrt[3]{\varrho})^2 + C$ единицы, имѣемъ уравненія

$$B^3\varrho + C^3 = 1; \quad A^3\varrho + C^3 = 1$$

изъ которыхъ видимъ, что $B^3\varrho$ и $A^3\varrho^2$ взаимно простые съ C, т. е. ξ взаимно простое съ C. Кромѣ того если $\varrho > 2$, $|C| > 1$. Возьмемъ простого дѣлителя C. q; пусть коэффиціентъ при высшей степени ξ дѣлится на q^k. Оставимъ въ каждомъ биноміальномъ коэффиціентѣ слѣдующихъ членовъ нетронутыми въ числителѣ первые два множителя, т. е. $m(m-1)$, а въ знаменателѣ послѣдніе два множителя, и сократимъ остальные множители знаменателя съ оставшимися множителями числителя, пользуясь тѣмъ, что $\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1.2.3\ldots k}$, при всякомъ n и $k < n$, цѣлое число (Gauss Dis. Ar. § 127). Первый членъ дѣлится на q^k, въ остальныхъ же степень q, которая убавится вслѣдствіе содержанія q въ оставшихся множителяхъ знаменателя, меньше степени q, которая прибавится вслѣдствіе содержанія q въ C, такъ какъ даже если $q=2$, то $q^3 > 5$; $q^6 > 8$; $q^9 > 11$ и т. д.; итакъ всѣ члены дѣлятся на q^{k+1}, а первый лишь на q^k, слѣд. равенства невозможны.

Ч. и т. д.

Какъ мы видимъ, для случая $\varrho = 2$ предложенное доказательство теоремы I не годится, такъ какъ $|C| = 1$; но этотъ случай относится къ уравненію $2X^3 + Y^3 = 1$, которое какъ разъ уже рѣшено Эйлеромъ, показавшимъ при помощи способа Fermat «de la descente infinie, ou indéfinie», что это уравненіе, кромѣ рѣшеній $X=0$, $Y=1$; $X=1$, $Y=-1$ не имѣетъ никакихъ другихъ не только цѣлыхъ, но даже и дробныхъ рѣшеній; (Algebra Кар. 15). Такимъ образомъ теорема I оказывается справедливой и для случая $\varrho=2$, и слѣдовательно доказана во всей полнотѣ.

Слѣдствіе. «Если сама основная единица уже вида $b\sqrt[3]{\varrho} + c$, то уравненіе имѣетъ одно и только одно рѣшеніе $X = b$, $Y = c$; если же основная единица вида $a(\sqrt[3]{\varrho})^2 + c$, уравненіе $X^3\varrho + Y^3 = 1$ вовсе не имѣетъ рѣшеній (кромѣ тривіальнаго, конечно, $X = 0$, $Y = 1$)».

Какъ мы видимъ изъ таблички, основная единица имѣетъ видъ $b\sqrt[3]{\varrho} + c$, напр., для $\varrho = 2$; 7; 17; 19; 26; 28; 37; 43; 63...; такъ что, напримѣръ, уравненіе $17.X^3 + Y^3 = 1$ имѣетъ только одно рѣшеніе $X = -7$, $Y = 18$. Между прочимъ, основная единица имѣетъ такой видъ $b\sqrt[3]{\varrho} + c$ для всѣхъ ϱ, которыя формы r^3+1 или r^3-1, такъ какъ въ этихъ случаяхъ $\sqrt[3]{\varrho} - r$ и. соотвѣтственно, $-\sqrt[3]{\varrho} + r$ единицы, и притомъ основныя, такъ какъ коэффиціентъ при $(\sqrt[3]{\varrho})^2$ обратной единицы равенъ 1, и слѣдовательно она не можетъ быть никакою степенью другой единицы, т. к. даже квадратъ единицы $x(\sqrt[3]{\varrho})^2 + y\sqrt[3]{\varrho} + z$ имѣетъ коэф-

фиціентомъ при $(\sqrt[3]{\varrho})^2$ y^2+2xz, что >1, у болѣе же высокихъ степеней, на основаніи § 1, коэффиціенты еще больше. Замѣчаніе § 1 вообще позволяетъ провѣрять, основная ли нѣкоторая заданная единица, и даже находить основную единицу по заданной, если коэффиціенты заданной, числа не слишкомъ большія. Пусть, напримѣръ, задана единица $4\alpha^2+6\alpha-47$, гдѣ $\alpha^3=21$, т. е. $\varrho=21$; мы вычисляемъ обратную единицу $224\alpha^2+618\alpha+1705$, пользуясь формулами (3); четвертой степенью она быть не можетъ, такъ какъ коэффиціентъ при α^2 у четвертой степени уже больше ϱ^2, т. е. больше 441, а $224<441$; кубомъ она тоже быть не можетъ, такъ какъ коэффиціенты при α^2 и α у куба единицы дѣлятся на 3. а 224 не дѣлится на 3; слѣд. она могла бы быть только квадратомъ нѣкоторой единицы $x(\sqrt[3]{\varrho})^2+y\sqrt[3]{\varrho}+z$; тогда имѣли бы

$$1)\ 224=y^2+2xz;\quad 2)\ 618=x^2\cdot 21+2yz;\quad 3)\ 1705=z^2+42xy,$$

изъ 2) заключаемъ, такъ какъ $x>0$, $y>0$, $z>0$, (по § 1), что $x=2$ или 4; но, если $x=2$, то изъ 2) же получаемъ $yz=267=3.89$, т. е. или y или z не меньше 89, что несовмѣстимо съ 3); если же $x=4$, то $yz=141=3.47$ т. е. или y или z не менѣе 47, что тоже несовмѣстимо съ 3); и значитъ единица $4\alpha^2+6\alpha-47$ дѣйствительно основная единица порядка $\sqrt[3]{21}$.

Основная единица имѣетъ видъ $a(\sqrt[3]{\varrho})^2+c$, напр., при $\varrho=3;\ 39;\ldots$

Перейдемъ теперь къ тому случаю, когда основная единица трехчленная, т. е. ни a ни b не равны нулю.

§ 3. Легко замѣтить, что если коэффиціентъ при $(\sqrt[3]{\varrho})^2$ въ $(a(\sqrt[3]{\varrho})^2+b\sqrt[3]{\varrho}+c)^m$ равенъ нулю, то имѣютъ мѣсто уравненія:

1) если m вида $3.\gamma+2$

$$\begin{aligned}(\zeta^2a(\sqrt[3]{\varrho})^2+b\sqrt[3]{\varrho}+\zeta c)^m+(\zeta a(\sqrt[3]{\varrho})^2+b\sqrt[3]{\varrho}+\zeta^2c)^m+\\+(a(\sqrt[3]{\varrho})^2+b\sqrt[3]{\varrho}+c)^m=0\end{aligned}\qquad(6)$$

2) если m вида $3.\gamma+1$

$$\begin{aligned}(a(\sqrt[3]{\varrho})^2+\zeta b\sqrt[3]{\varrho}+\zeta^2c)^m+(a(\sqrt[3]{\varrho})^2+\zeta^2b\sqrt[3]{\varrho}+\zeta c)^m+\\+(a(\sqrt[3]{\varrho})^2+b\sqrt[3]{\varrho}+c)^m=0\end{aligned}\qquad(7)$$

3) если m вида $3.\gamma$

$$\begin{aligned}\zeta^2(\zeta a(\sqrt[3]{\varrho})^2+\zeta^2b\sqrt[3]{\varrho}+c)^m+\zeta(\zeta^2a(\sqrt[3]{\varrho})^2+\zeta b\sqrt[3]{\varrho}+c)^m+\\+(a(\sqrt[3]{\varrho})^2+b\sqrt[3]{\varrho}+c)^m=0\end{aligned}\qquad(8)$$

гдѣ ζ обозначаетъ $\sqrt[3]{1}=e^{\frac{2\pi i}{3}}$.

§ 4. Теорема II. «*Если* $(a(\sqrt[3]{\varrho})^2+b\sqrt[3]{\varrho}+c)^m$ *двучленная единица, и* m *не дѣлится ни на* 2 *ни на* 3, *то* m *можетъ быть только простымъ числомъ дѣлителемъ* $ab\varrho$».

Доказательство. Пусть 1) m вида $3.\gamma+2$.

Изъ уравненія (6) мы видимъ что, если m_1 дѣлитель m, то $(\zeta^2 a(\sqrt[3]{\varrho})^2+b\sqrt[3]{\varrho}+\zeta c)^{m_1}+(\zeta a(\sqrt[3]{\varrho})^2+b\sqrt[3]{\varrho}+\zeta^2 c)^{m_1}$, какъ дѣлитель $(a(\sqrt[3]{\varrho})^2+b\sqrt[3]{\varrho}+c)^m$ (m нечетное) есть алгебраическая единица; m имѣетъ хоть одного простого дѣлителя q вида $3.\gamma+2$. Слѣдовательно имѣемъ $(\zeta^2 a(\sqrt[3]{\varrho})^2+b\sqrt[3]{\varrho}+\zeta c)^q+(\zeta a(\sqrt[3]{\varrho})^2+b\sqrt[3]{\varrho}+\zeta^2 c)^q$, алгебраическая единица; разсмотримъ сумму нормъ

$$N[(\zeta^2 a(\sqrt[3]{\varrho})^2+b\sqrt[3]{\varrho}+\zeta c)^q+(\zeta a(\sqrt[3]{\varrho})^2+b\sqrt[3]{\varrho}+\zeta^2 c)^q]+ \\ +N(a(\sqrt[3]{\varrho})^2+b\sqrt[3]{\varrho}+c)^q \qquad (9)$$

эта сумма нормъ, такъ какъ каждая N, какъ норма единицы есть $+1$ или -1, равна ± 2 или 0. Нетрудно видѣть что если

$$(a(\sqrt[3]{\varrho})^2+b\sqrt[3]{\varrho}+c)^q=M(\sqrt[3]{\varrho})^2+P\sqrt[3]{\varrho}+Q$$

то

$$[(\zeta^2 a(\sqrt[3]{\varrho})^2+b\sqrt[3]{\varrho}+\zeta c)^q+(\zeta a(\sqrt[3]{\varrho})^2+b\sqrt[3]{\varrho}+\zeta^2 c)^q]= \\ =2M(\sqrt[3]{\varrho})^2-P\sqrt[3]{\varrho}-Q$$

откуда разсматриваемая сумма нормъ (9) будетъ

$$[M^3\varrho^2+P^3\varrho+Q^3-3MPQ\varrho]+[8M^3\varrho^2-P^3\varrho-Q^3-6MPQ\varrho]= \\ =9M\varrho(M^2\varrho-PQ)$$

мы видимъ, что эта сумма дѣлится на 9 и слѣдовательно не можетъ $=\pm 2$, и значитъ она$=0$; но $9\varrho\neq 0$; изъ замѣчанія же § 1 видимъ что $M^2\varrho-PQ$ тоже $\neq 0$ такъ какъ $M^2\varrho-PQ$ есть коэффиціентъ при $\sqrt[3]{\varrho}$ обратной единицы, см. (3), слѣд.

$$M=0$$

то есть $(a(\sqrt[3]{\varrho})^2+b\sqrt[3]{\varrho}+c)^q$ двучленная единица. Если $m>q$ то $(a(\sqrt[3]{\varrho})^2+b\sqrt[3]{\varrho}+c)^m$ есть степень $(a(\sqrt[3]{\varrho})^2+b\sqrt[3]{\varrho})+c)^q$, такъ какъ q дѣлитель m, что противорѣчило бы теоремѣ I, такъ какъ мы предположили, что $(a(\sqrt[3]{\varrho})^2+b\sqrt[3]{\varrho})^2+c)^m$ двучленная единица; значитъ $m=q$, m простое число.

Разсмотримъ $M=0$. M коэффиціентъ при $(\sqrt[3]{\varrho})^2$ въ $(a(\sqrt[3]{\varrho})^2+b\sqrt[3]{\varrho}+c)^q$, всѣ его слагаемыя, кромѣ $\frac{(b\sqrt[3]{\varrho})^q}{(\sqrt[3]{\varrho})^2}$, дѣлятся на q, такъ какъ всѣ биноміальные коэффиціенты дѣлятся на q (q простое), слѣдовательно q дѣлитель $b\varrho$.

2) m вида $3.\gamma+1$

Въ этомъ случаѣ m могло бы состоять исключительно изъ множителей вида $3.\gamma+1$, а также и исключительно изъ множителей вида $3\gamma+2$, поэтому надо разсматривать два случая:

1. q простой дѣлитель m, причемъ q вида $3.\gamma+1$. Опять получаемъ, что если $(a(\sqrt[3]{\varrho})^2+b\sqrt[3]{\varrho}+c)^q=M(\sqrt[3]{\varrho})^2+P\sqrt[3]{\varrho}+Q$, то, см. (7),

$$[(a(\sqrt[3]{\varrho})^2+\zeta b\sqrt[3]{\varrho}+\zeta^2 c)^q+(a(\sqrt[3]{\varrho})^2+\zeta^2 b\sqrt[3]{\varrho}+\zeta c)^q]=2M(\sqrt[3]{\varrho})^2-P\sqrt[3]{\varrho}-Q$$

и слѣдовательно разсматриваемая сумма нормъ (9) опять равна

$$9M\varrho(M^2\varrho-PQ)$$

откуда, какъ раньше, заключаемъ что m простое число, именно $m=q$; разсматривая снова $M=0$, видимъ что q есть дѣлитель $a\varrho$.

2. q простой дѣлитель m, причемъ q вида $3.\gamma+2$.

Въ этомъ случаѣ убѣждаемся, что если

$$(a(\sqrt[3]{\varrho})^2+b\sqrt[3]{\varrho}+c)^q=M(\sqrt[3]{\varrho})^2+P\sqrt[3]{\varrho}+Q,$$

то

$$[(a(\sqrt[3]{\varrho})^2+\zeta b\sqrt[3]{\varrho}+\zeta^2 c)^q+(a(\sqrt[3]{\varrho})^2+\zeta^2 b\sqrt[3]{\varrho}+\zeta c)^q]=-M(\sqrt[3]{\varrho})^2+2P\sqrt[3]{\varrho}-Q$$

и слѣдовательно разсматриваемая сумма нормъ (9) будетъ

$$[M^3\varrho^2+P^3\varrho+Q^3-3MPQ\varrho]+[M^3\varrho^2+8P^3\varrho-Q^3-6MPQ\varrho]=$$
$$=9P\varrho(P^2-MQ)$$

мы видимъ что эта сумма дѣлится на 9 и слѣд. $\neq\pm 2$, слѣд. она $=0$; но $9\varrho\neq 0$, P^2-MQ тоже $\neq 0$, такъ какъ это, см. (3), коэффиціентъ обратной единицы, и слѣд. по § 1 не равенъ нулю, такимъ образомъ получаемъ $P=0$, т. е. $(a\sqrt[3]{\varrho})^2+b\sqrt[3]{\varrho}+c)^q$ единица вида $A(\sqrt[3]{\varrho})^2+C$. Если $m>q$, то $(a(\sqrt[3]{\varrho})^2+b\sqrt[3]{\varrho}+c)^m$ есть степень $(a(\sqrt[3]{\varrho})^2+b\sqrt[3]{\varrho}+c)^q$, такъ какъ q дѣлитель m, а это противорѣчило бы теоремѣ I, такъ какъ мы предположили, что $(a(\sqrt[3]{\varrho})^2+b\sqrt[3]{\varrho}+c)^m$ двучленная единица; значитъ $m=q$, простое число.

Разсматривая $P=0$ совершенно аналогично предыдущему пользуемся тѣмъ, что разъ q простое, то всѣ биномiальные коэффиціенты $(a\sqrt[3]{\varrho})^2+b\sqrt[3]{\varrho}+c)^q$ дѣлятся на q, и получаемъ что q дѣлитель $\alpha\varrho$ ч. и т. д.

§ 5. Теорема III. *Если* $(a\sqrt[3]{\varrho})^2+b\sqrt[3]{\varrho}+c)^m$ *единица вида* $B\sqrt[3]{\varrho}+C$, *и* m *дѣлится на 2 или 3, то* m *можетъ имѣть только видъ* $m=2^k.3^l$.

Доказательство. Пусть

1) $m=2^k.3^l.\mu$, гдѣ μ уже не дѣлится ни на 2 ни на 3, и μ вида $3.\gamma+1$; тогда, какъ легко видѣть, формулу (8) можно переписать въ такомъ видѣ:

$$[\zeta^2(\zeta a(\sqrt[3]{\varrho})^2+\zeta^2 b\sqrt[3]{\varrho}+c)^{2^k\cdot 3^l}]^{\mu}+[\zeta(\zeta^2 a(\sqrt[3]{\varrho})^2+\zeta b\sqrt[3]{\varrho}+c)^{2^k\cdot 3^l}]^{\mu}+$$
$$=-(a(\sqrt[3]{\varrho})^2+b\sqrt[3]{\varrho}+c)^m \qquad (10)$$

такъ какъ μ нечетное, то

$$\zeta^2(\zeta a(\sqrt[3]{\varrho})^2+\zeta^2 b\sqrt[3]{\varrho}+c)^{2^k\cdot 3^l}+\zeta(\zeta^2 a(\sqrt[3]{\varrho})^2+\zeta b\sqrt[3]{\varrho}+c)^{2^k\cdot 3^l}$$

дѣлитель лѣвой части (10), слѣд. дѣлитель $(a(\sqrt[3]{\varrho})^2+b\sqrt[3]{\varrho}+c)^m$ т. е. единица. Разсмотримъ сумму нормъ

$$N[\zeta^2(\zeta a(\sqrt[3]{\varrho})^2+\zeta^2 b\sqrt[3]{\varrho}+c)^{2^k\cdot 3^l}+\zeta(\zeta^2 a\sqrt[3]{\varrho})^2+\zeta b\sqrt[3]{\varrho}+c)^{2^k 3^l}]+$$
$$+N(a(\sqrt[3]{\varrho})^2+b\sqrt[3]{\varrho}+c)^{2^k 3^l} \qquad (11)$$

и замѣтимъ что если $(a(\sqrt[3]{\varrho})^2+b\sqrt[3]{\varrho}+c)^{2^k 3^l}=M(\sqrt[3]{\varrho})^2+P\sqrt[3]{\varrho}+Q$ то

$$\zeta^2(\zeta a(\sqrt[3]{\varrho})^2+\zeta^2 b\sqrt[3]{\varrho}+c)^{2^k 3^l}+\zeta(\zeta^2 a(\sqrt[3]{\varrho})^2+\zeta b\sqrt[3]{\varrho}+c)^{2^k 3^l}=$$
$$=2M(\sqrt[3]{\varrho})^2-P\sqrt[3]{\varrho}-Q$$

и слѣдовательно разсматриваемая сумма нормъ (11) равна

$$9M\varrho(M^2\varrho-PQ)$$

откуда, какъ раньше, получаемъ $M=0$, т. е. $(a(\sqrt[3]{\varrho})^2+b\sqrt[3]{\varrho}+c)^{2^k.3}$ двучленная единица, и слѣдовательно на основаніи теоремы I, m не можетъ быть больше $2^k.3^l$, такъ какъ $2^k.3^l$ дѣлитель m, и тогда бы двучленная единица $(a(\sqrt[3]{\varrho})^2+b\sqrt[3]{\varrho}+c)^m$ была степенью двучленной единицы $(a(\sqrt[3]{\varrho})^2+\sqrt[3]{\varrho}+c)^{2^k 3^l}$; слѣдовательно $m=2^k.3^l$.

2) $m=2^k.3_l.\mu$, гдѣ μ уже не дѣлится ни на 2 ни на 3, и μ вида $3.\gamma+2$; тогда, какъ легко видѣть, можно переписать формулу (8) въ такомъ видѣ:

$$[\zeta(\zeta a(\sqrt[3]{\varrho})^2+\zeta^2 b\sqrt[3]{\varrho}+c)^{2^k 3^l}]^{\mu}+[\zeta^2(\zeta^2 a(\sqrt[3]{\varrho})^2+\zeta b\sqrt[3]{\varrho}+c)^{2^k\cdot 3^l}]^{\mu}=$$
$$=-(a(\sqrt[3]{\varrho})^2+b\sqrt[3]{\varrho}+c)^m$$

какъ раньше заключаемъ что

$$\zeta(\zeta a(\sqrt[3]{\varrho})^2+\zeta^2 b\sqrt[3]{\varrho}+c)^{2^k\cdot 3^l}+\zeta^2(\zeta^2 a(\sqrt[3]{\varrho})^2+\zeta b\sqrt[3]{\varrho}+c)^{2^k.3^l}$$

единица. Разсматриваемъ опять сумму нормъ этой единицы и единицы $(a(\sqrt[3]{\varrho})^2+b\sqrt[3]{\varrho}+c)^{2^k\cdot 3^l}$; и, ввиду того что, если

$$(a(\sqrt[3]{\varrho})^2+b\sqrt[3]{\varrho}+c)^{2^k\cdot 3^l}=M(\sqrt[3]{\varrho})^2+P\sqrt[3]{\varrho}+Q, \quad \text{то}$$

$$(\zeta\zeta a(\sqrt[3]{\varrho})^2+\zeta^2 b\sqrt[3]{\varrho}+c)^{2^k\cdot 3^l}+\zeta^2(\zeta^2 a\sqrt[3]{\varrho})^2+\zeta b\sqrt[3]{\varrho}+c)^{2^k\cdot 3^l}=M(\sqrt[3]{\varrho})^2+2P\sqrt[3]{\varrho}-Q,$$

находимъ что эта сумма нормъ, которая $=\pm 2$ или 0, равна

$$9P\varrho(P^2-MQ)$$

откуда $P=0$ т. е. $(a(\sqrt[3]{\varrho}+c)^{2^k\cdot 3^l}$ вида $A(\sqrt[3]{\varrho})^2+C$, и, на основаніи теоремы I, мы заключаемъ что $\mu=1$, т. е. $m=2^k.3^l$. Если бы $l=0$, то мы вели бы доказательство какъ въ § 4, положивъ $q=2^k$

Ч. и т. д.

§ 6. Въ настоящее время мы не можемъ указать способа вычислять показатели m вида $2^k.3^l$, для которыхъ $(a(\sqrt[3]{\varrho})^3+b\sqrt[3]{\varrho}+c)^{2^k\cdot 3^l}$ двучленная единица, такъ, какъ это было сдѣлано для всѣхъ остальныхъ показателей, которые суть простыя числа дѣлители $ab\varrho$, и слѣдовательно могутъ быть найдены, либо можетъ быть показано что такихъ показателей нѣтъ. Несмотря на всѣ попытки, намъ не удалось найти даже отдѣльныхъ случаевъ ϱ съ трехчленной основной единицей, въ которыхъ можно было бы найти всѣ показатели m вида $2^k.3^l$, соотвѣтствующіе рѣшеніямъ уравненія (1). Закончимъ слѣдующимъ замѣчаніемъ. Пусть $(a(\sqrt[3]{\varrho})^2+b\sqrt[3]{\varrho}+c)^{2^{k_i}\cdot 3^{l_i}}$ двучленная единица; тогда никакой другой показатель m вида $2^{k_j}.3^{l_j}$, для котораго $(a(\sqrt[3]{\varrho})^2+b\sqrt[3]{\varrho}+c)^{2^{k_j}.3^{l_j}}$ двучленная единица, не можетъ быть кратнымъ $2^{k_j}.3^{l_j}$, такъ какъ иначе имѣли бы случай противорѣчащій теоремѣ I, всѣхъ же возможныхъ чиселъ вида $2^{k_\lambda}.3^{l_\lambda}$, изъ которыхъ ни одно не есть кратное другого, если одно изъ такихъ чиселъ $2^k.3^l$, не больше чѣмъ $k+l$. Такимъ образомъ мы видимъ что уравненіе (1) имѣетъ во всякомъ случаѣ конечное число рѣшеній.

Рѣшеніе неопредѣленнаго уравненія

$$X^3\varrho + Y^3 = 1.$$

Проф. стипенд. Универ. Св. Владиміра ***Бориса Делоне.***

Въ замѣткѣ „Къ рѣшенію неопредѣленнаго уравненія $X\varrho^3 + Y^3 = 1$“. мы разсматривали показатели m, при которыхъ $(a(\sqrt[3]{\varrho})^2 + b\sqrt[3]{\varrho} + c)^m$, гдѣ $a(\sqrt[3]{\varrho})^2 + b\sqrt[3]{\varrho} + c$ основная единица „порядка“ $(\sqrt[3]{\varrho})$, можетъ быть двучленной единицей. Мы получили слѣдующія двѣ теоремы:

Теорема I. „*Никакая степень двучленной единицы не можетъ быть двучленной единицей*“.

Теорема II. „*Если бы* $(a(\sqrt[3]{\varrho})^2 + b\sqrt[3]{\varrho} + c)^m$ *была двучленной единицей, то* m *могло бы быть только либо простымъ числомъ дѣлителемъ* $ab\varrho$ *либо вида* $2^k.3^l$.“

Здѣсь мы понимаемъ подъ двучленной единицей единицу вида $A(\sqrt[3]{\varrho})^2 + C$ или вида $B\sqrt[3]{\varrho} + c$; въ указанной замѣткѣ мы считали двучленными только единицы вида $B\sqrt[3]{\varrho} + C$. Доказательства теоремъ въ такой болѣе общей формулировкѣ однако совершенно авалогичны прежнимъ.

Въ упомянутой замѣткѣ мы не дали окончательнаго рѣшенія уравненія $X^3\varrho + Y^3 = 1$, такъ какъ намъ не удалось найти способа вычислять показатели m вида $2^k.3^l$, для которыхъ $(a(\sqrt[3]{\varrho})^2 + b\sqrt[3]{\varrho} + c)^m$ двучленная единица, хотя мы и показали что такихъ показателей не болѣе чѣмъ $k+l$.

Въ настоящей замѣткѣ мы предлагаемъ слѣдующія двѣ новыя теоремы, которыя присоединенныя къ теоремамъ I и II, исчерпываютъ вопросъ объ вычисленіи всѣхъ рѣшеній нашего уравненія, когда ϱ простое число. Когда же ϱ не простое число, мы можемъ найти всѣ рѣшенія кромѣ одного. Нахожденіе этого рѣшенія требуетъ дальнѣйшаго изслѣдованія.

Теорема III. *„Кубъ единицы не можетъ быть двучленной единицей“*

Доказательство: Пусть $M(\sqrt[3]{\varrho})^2 + P\sqrt[3]{\varrho} + Q$ единица т. е.

$$M^3\varrho^2 + P^3\varrho + Q^3 - 3MPQ\varrho = 1 \qquad (1)$$

и пусть $(M(\sqrt[3]{\varrho})^2 + P\sqrt[3]{\varrho} + Q)^3$ двучленная единица вида $B\sqrt[3]{\varrho} + C$, т. е. коэффиціентъ при $(\sqrt[3]{\varrho})^2$ т. е.

$$M^2P\varrho + P^2Q + MQ^2 = 0 \qquad (2)$$

Покажемъ невозможность одновременнаго существованія (1) и (2). Пусть общій наибольшій дѣлитель M и P есть δ; Q взаимно простое съ ϱ и съ δ, это слѣдуетъ изъ (1). Изъ (2) мы видимъ что $M = \delta^2.m$; $P = \delta.p$, гдѣ уже p и m взаимно простые, такъ какъ иначе δ не былъ бы наибольшимъ общимъ дѣлителемъ M и P. Перепишемъ (2) такъ: $-M^2P\varrho = Q(P^2 + MQ)$ или $-m\delta^4p\delta\varrho = Q(p^2\delta^2 + m\delta^2Q)$; т. е $-m^2\delta^3p\varrho = Q(p^2 + mQ)$; m взаимно простое съ p, а слѣд. и съ $p^2 + mQ$; слѣд.. $Q = m^2.q$ т. е. $-m^2\delta^3p\varrho = m^2q(p^2 + m^3q)$ или $-p\delta^3\varrho = q(p^2 + m^3q)$; q взаимно простое съ δ и ϱ (какъ дѣлитель Q), слѣд. $p = q.s$ откуда $-qs\delta^3\varrho = q(q^2s^2 + m^3q)$ или $-s\delta^3\varrho = q(qs^2 + m^3)$; q взаимно простое съ δ и ϱ, слѣд. $s = q.e$, откуда $-qe\delta^3\varrho = q(q^3e^2 + m^3)$ или $-e\delta^3\varrho = q^3e^2 + m^3$, но e дѣлитель s и слѣдовательно дѣлитель p, слѣд. e взаимно простое съ m, и значитъ $e = \pm 1$, т. е. мы получаемъ

$$\mp\delta^3\varrho = q^3 + m^3;\ \delta^3 = \mp\frac{q^3 + m^3}{\varrho}$$

$$M = m\delta^2;\ P = \pm q^2\delta;\ Q = m^2q;\ MPQ = \pm m^3q^3\delta^3$$

подставляя эти выраженія въ (1), получимъ

$$m^3\delta^6\varrho^2 \pm q^6\delta^3\varrho + m^6q^3 \mp 3m^3q^3\delta^3\varrho = 1$$

но $\delta^3 = \mp\frac{q^3 + m^3}{\varrho}$; подставивъ это получимъ

$$m^3(m^3 + q^3)^2 - (m^3 + q^3)q^6 + m^6q^3 + 3m^3q^3(m^3 + q^3) = 1$$

или если положить $m^3 = x$; $q^3 = y$, то

$$x(x + y)^2 - (x + y)y^2 + x^2y + 3xy(x + y) = 1$$

или

$$(x - y)^3 + 9x^2y = 1$$

что если положить $m^2q = \lambda$, $m^3 - q^3 = \mu$ переходитъ въ

$$9\lambda^3 + \mu^3 = 1 \qquad (3)$$

Основная единица области $\Omega\sqrt[3]{9}$ есть $\sqrt[3]{9} - 2$ т. е. она двучленная, а слѣдовательно уравненіе (3) имѣетъ по теоремѣ I только одно не тривіальное рѣшеніе $\lambda = 1$, $\mu = -2$ и имѣетъ еще тривіальное рѣшеніе $\lambda = 0$, $\mu = 1$. Но случай $\lambda = 1$, $\mu = -2$ несовмѣстимъ съ $m^2q = \lambda$, $m^3 - q^3 = \mu$; случай же $\lambda = 0$, $\mu = 1$ приводитъ къ $m = 0$ или $q = 0$, т. е. или M или P равны нулю, въ каковомъ случаѣ не только кубъ, но даже никакая степень $M\sqrt[3]{\varrho})^2 + P\sqrt[3]{\varrho} + Q$ не можетъ быть двучленной единицей (теорема I).

Ч. и т. д.

Сопоставляя все сказанное въ теоремахъ I, II и III мы получаемъ слѣдующій способъ рѣшенія уравненія $X^3\varrho + Y^3 = 1$.

Прежде всего надо вычислить основную единицу кубической области $\Omega\sqrt[3]{\varrho}$, что можно сдѣлать либо по способу, данному Воронымъ, либо пользуясь принципомъ Hermite'a по способу Charwe'a. Если основная единица $O(\sqrt[3]{\varrho})$ сразу двучленная вида $B\sqrt[3]{\varrho} + C$, то она даетъ единственное рѣшеніе $X = B$, $Y = C$ уравненія $X^3\varrho + Y^3 = 1$, если же она двучленная вида $A(\sqrt[3]{\varrho})^2 + C$, то уравненіе $X^3\varrho + Y^3 = 1$ рѣшеній вовсе не имѣетъ (теорема I). Если же основная единица трехчленная $a(\sqrt[3]{\varrho})^2 + b\sqrt[3]{\varrho} + c$, то надо попробовать возвышать ее въ степени съ простыми показателями, дѣлителями a, b или ϱ (по теоремѣ II); среди этихъ степеней могутъ встрѣтиться двучленныя единицы вида $B\sqrt[3]{\varrho} + C$, т. е. рѣшенія уравненія $X^3\varrho + Y^3 = 1$. Наконецъ можетъ еще существовать одно рѣшеніе съ показателемъ вида 2^k, одно, такъ какъ если бы такихъ рѣшеній было два, то одно изъ нихъ было бы степенью другого, что противорѣчило бы теоремѣ I.

Никакихъ другихъ рѣшеній уравненіе $X^3\varrho + Y^3 = 1$ не имѣетъ. Такимъ образомъ въ случаѣ ϱ составного мы можемъ найти всѣ рѣшенія уравненія $X^3\varrho + Y^3 = 1$ за исключеніемъ одного,—именно того, которому соотвѣтствовалъ бы показатель m вида 2^k. Въ случаѣ же ϱ простого, мы на основаніи слѣдующей теоремы можемъ найти и это рѣшеніе, если оно существуетъ, т. е. найти всѣ рѣшенія.

Теорема IV. „*Если* ϱ *степень простого числа и* $X^3\varrho + Y^3 = 1$ *имѣетъ рѣшеніе съ четнымъ показателемъ, то и* $X^3\varrho^2 + Y^3 = 1$ *имѣетъ рѣшеніе, по которому можно найти рѣшеніе уравненія* $X^3\varrho + Y^3 = 1$“.

Доказательство. Пусть $M(\sqrt[3]{\varrho})^2 + P\sqrt[3]{\varrho} + Q$ единица, т. е.

$$M^3\varrho^2 + P^3\varrho + Q^3 - 3MPQ\varrho = 1 \tag{4}$$

и $(M(\sqrt[3]{\varrho})^2 + P\sqrt[3]{\varrho} + Q)^2$ двучленная единица вида $B\sqrt[3]{\varrho} + C$, т. е.

$$P^2 = -2MQ. \tag{5}$$

Изъ (5) слѣдуетъ

или 1) $Q = \gamma^2$, $M = -2\alpha^2$, $P = \pm 2\alpha\gamma$
или 2) $Q = -\gamma^2$, $M = 2\alpha^2$, $P = \pm 2\alpha\gamma$
или 3) $Q = 2\gamma^2$, $M = -\alpha^2$ $P = \pm 2\alpha\gamma$
или 4) $Q = -2\gamma^2$, $M = \alpha^2$, $P = \pm 2\alpha\gamma$

подставляя это въ $M^3\varrho^2 + P^3\varrho + Q^3 - 3MPQ\varrho = 1$, получаемъ

1) $-8\varrho^2x^2 \pm 20\varrho xy + y^2 = 1$
2) $8\varrho^2x^2 \pm 20\varrho xy - y^2 = 1$
3) $-\varrho^2x^2 \pm 20\varrho xy + 8y^2 = 1$
4) $\varrho^2x^2 \pm 20\varrho xy - 8y^2 = 1$ гдѣ $x = \alpha^3$; $y\gamma^3$.

Формы 1) и 2) тожественны слѣдующей формѣ Пеллева вида

$$x^2 - Dy^2 = 1 \tag{6}$$

гдѣ $D = 4.27.\varrho^2$ и гдѣ $x = \gamma^3 + 10\varrho\alpha^3$; $y = \alpha^3$.

Изъ (6) получаемъ $x^2 - 1 = 4\varrho^2\sigma^3$, гдѣ $\sigma = 3\alpha^2$, и наконецъ

$$\frac{x-1}{2} \cdot \frac{x+1}{2} = \varrho^2\sigma^3 \tag{7}$$

x нечетное (изъ (6)), и слѣдовательно $\frac{x-1}{2}$ и $\frac{x+1}{2}$ послѣдовательныя цѣлыя числа; если ϱ степень простого числа, то на ϱ^2 дѣлится либо только $\frac{x-1}{2}$ либо только $\frac{x+1}{2}$; пусть $\frac{x+1}{2\varrho^2}$ цѣлое число тогда; такъ какъ $\frac{x+1}{2\varrho^2}$ и $\frac{x-1}{2}$ взаимно простые, получаемъ изъ (7) $\frac{x+1}{2} = \lambda^3\varrho^2$; $\frac{x-1}{2} = \mu^3$, гдѣ $\lambda\mu = \sigma$; вычитая получаемъ

$$\lambda^3\varrho^2 - \mu^3 = 1;$$

пусть $\frac{x-1}{2\rho^2}$ цѣлое число, тогда аналогично получаемъ

$$-\mu^3\rho^2+\lambda^3=1.$$

Квадратичныя же формы 3) и 4) переписываемъ такъ

$$-x^2\pm 20xy+8y^2=1$$
$$x^2\pm 20xy-8y^2=1$$

гдѣ

$$x=\rho\alpha^3;\ y=\gamma^3;$$

соотвѣтствующая имъ Пеллева форма

$$x^2-4.27y^2=1,\ \text{гдѣ}\quad y=\gamma^3$$

т. е.

$$\frac{x+1}{2}.\frac{x-1}{2}=v^3\quad\text{гдѣ}\quad v=3\gamma^2$$

т. е. $\frac{x+1}{2}$ и $\frac{x-1}{2}$ кубы, что можетъ быть только если $\frac{x+1}{2}=1$; $\frac{x-1}{2}=0$, откуда $v=0$, $\gamma=0$, $Q=0$, $P=0$, чего быть не можетъ.

Ч. и т. д.

Будемъ обозначать основную единицу порядка $O(\sqrt[3]{\rho^n})$ черезъ $\varepsilon_\rho{}^n$.

Если $\varepsilon_\rho=a(\sqrt[3]{\rho})^2+b\sqrt[3]{\rho}+c$

то

$$\varepsilon_\rho^\rho=(a(\sqrt[3]{\rho})^2+b\sqrt[3]{\rho}+c)^\rho=a'\rho(\sqrt[3]{\rho})^2+b'\rho\sqrt[3]{\rho}+c'=a_1(\sqrt[3]{\rho})^2+b_1\sqrt[3]{\rho^2}+c_1$$
$$\text{гдѣ}\quad a_2=b';\ b_2=a'\rho.$$

есть единица изъ $O(\sqrt[3]{\rho})^2$ и притомъ основная, такъ какъ если бы она была степенью ε_{ρ^2}, то она была бы сложною степенью ε_ρ, а ρ простое число; исключеніе представляетъ случай $\varepsilon_\rho=\varepsilon_{\rho^2}$; слѣд. или $\varepsilon_{\rho^2}=\varepsilon_\rho{}^\rho$, или $\varepsilon_{\rho^2}=\varepsilon_\rho$

Аналогично если $\varepsilon_\rho{}^2=a_1(\sqrt[3]{\rho})^2=b_1\sqrt[3]{\rho^2}+c_1$ то

$$\varepsilon_{\rho^2}^\rho=(a_1(\sqrt[3]{\rho^2})^2+b_1\sqrt[3]{\rho^2}+c_1)^\rho=a''\rho(\sqrt[3]{\rho^2})^2+b''\rho\sqrt[3]{\rho^2}+c''=$$
$$=a_2(\sqrt[3]{\rho^4})^2+b_2\sqrt[3]{\rho^4}+c_2$$
$$\text{гдѣ}\quad a_2=b'';\ b_2=a''\rho$$

есть единица изъ $O\sqrt[3]{\rho^4}$ и притомъ основная, такъ какъ если бы она была степенью ε_{ρ^4}, то она была бы сложною степенью ε_{ρ^2}, а ρ простое число; слѣд. или $\varepsilon_{\rho^4}=\varepsilon_{\rho^2}{}^\rho$ или $\varepsilon_{\rho^4}=\varepsilon_{\rho^2}$ и т. д.

Пусть теперь $X^3\varrho+Y^3=1$ имѣетъ рѣшеніе X_1, Y_1, соотвѣтствующее показателю $m=2^k$; тогда по теоремѣ IV, имѣетъ рѣшеніе λ, μ уравненіе $X^3\varrho^2+Y^3=1$, причемъ по λ и μ можно найти X_1 и Y_1 такъ какъ $X_1=M^2\varrho+2PQ$, $Y_1=Q^2+2MP\varrho$. Если $\varepsilon_{\rho^2}\neq\varepsilon_\rho$ то рѣшеніе λ, μ уравненія $X^3\varrho^2+Y^3=1$ можетъ быть только ε_ρ^ρ, такъ какъ оно должно соотвѣтствовать $\varepsilon_{\rho^2}^{m_1}=\varepsilon_\rho^{\rho\cdot m_1}$, т. е., если $\varrho\neq 2$, то по теоремѣ II, $m_1=1$, тогда мы его найдемъ, если оно существуетъ, и по нему найдемъ X_1 и Y_1.

Если же $\varepsilon_{\rho^2}=\varepsilon_\rho$, то λ, μ соотвѣтствуетъ либо $m=q$, гдѣ q простое число, дѣлитель $a.b.\varrho$; всѣ такія рѣшенія можно найти, и по нимъ, вычислить X_1, Y_1; или же λ, μ соотвѣтствуетъ $m=2^k$. Тогда по теоремѣ IV имѣетъ рѣшеніе λ_1, μ_1 уравненіе $X^3\varrho^4+Y^3=1$ и т. д.

Это разсужденіе однако оборвется, такъ какъ для того чтобы $\varepsilon_\rho^n=\varepsilon_\rho$, необходимо, чтобы ab дѣлилось на ϱ^{n-1}. На примѣрахъ $\varepsilon_{\rho^2}\neq\varepsilon_\rho$ (до $\varrho=61$) и слѣдовательно разсужденіе обрывается уже на уравненіи $X^3\varrho^2+Y^3=1$.

3 марта 1915 г.

Объ интенсивности ночного неба.

В. Г. Фесенкова.

Интенсивность ночного неба измѣрялась S. Newcomb'омъ визуальнымъ и Townley'емъ фотографическимъ методами. Newcomb, который считалъ эту величину одной изъ основныхъ постоянныхъ астрофизики, употребилъ для ея опредѣленія нѣсколько различныхъ, какъ качественныхъ, такъ и количественныхъ способовъ. Идея метода, на которомъ главнымъ образомъ базируется его опредѣленіе, заключается въ слѣдующемъ [1]).

Вогнутая линза, покрытая нейтральнымъ свѣтофильтромъ, пропускающимъ 0,16 всего количества свѣта, давала изображеніе звѣзды въ видѣ маленькаго кружка. Рядомъ съ линзой помѣщался другой точно такой же свѣтофильтръ, имѣющій небольшое круглое отверстіе. На темномъ фонѣ перваго свѣтофильтра наблюдатель, смотря черезъ линзу, могъ видѣть ослабленное изображеніе звѣзды въ видѣ кружка и сравнивать его съ фономъ неба, видимымъ непосредственно черезъ отверстіе во второмъ свѣтофильтрѣ. Видимая величина этого отверстія была сдѣлана почти одинаковой съ изображеніемъ звѣзды. Такимъ образомъ оба объекта сравнивались при одинаковыхъ условіяхъ. Нетрудно понять, какъ изъ такихъ наблюденій, зная коэффиціентъ прозрачности свѣтофильтровъ, можно вывести значеніе интенсивности ночного неба. Изложеннымъ способомъ Newcomb наблюдалъ звѣзды α Pegasi, γ Draconis, α Ophiuchi, γ Pegasi, и α Andromedae.

Онъ нашелъ, что вблизи галактическаго полюса площадь неба въ 0,9 кв. градусовъ даетъ количество свѣта, эквивалентное звѣздѣ пятой величины. Яркія звѣздныя скопленія въ Млечномъ Пути дали въ той же шкалѣ отъ 1,9 до 2,4.

Кромѣ того, наблюденія Newcomb'а показали, что интенсивность ночного неба приблизительно одинакова на всемъ небесномъ сводѣ за

---

[1]) Astrophysical Journal. 1901. II, p. 298.

исключеніемъ галактической зоны. Никакихъ земныхъ источниковъ свѣта не было на разстояніи многихъ миль. Луна находилась достаточно низко подъ горизонтомъ.

Окончательное заключеніе Newcomb'a есть то, что одинъ квадратный градусъ ночного неба около галактическаго полюса испускаетъ тоже количество свѣта, какъ и звѣзда 4,9 величины.

Townley [1]) примѣнилъ для опредѣленія этой постоянной фотографическій методъ. Звѣздою сравненія служила Вега, изображеніе которой въ видѣ кружка достаточной величины получалось на фотографической пластинкѣ. Измѣряя интенсивность клише, онъ нашелъ, что площадь неба въ $7^0\ 16',4$ въ діаметрѣ между γ Pegasi и β Ceti оказываетъ одинаковое съ Вегой дѣйствіе на фотографическую пластинку. Отсюда слѣдуетъ, что 1 кв. градусъ ночного неба обладаетъ актинической способностью, эквивалентной звѣздѣ 4,5 величины.

Таковы установленные факты. Теперь надлежитъ изслѣдовать, чѣмъ можетъ быть объяснена такая значительная интенсивность ночного неба.

Высказывалось предположеніе, что разсматриваемое явленіе зависитъ отъ множества спорадическихъ метеоровъ, держащихъ земную атмосферу въ состояніи постояннаго свѣченія. Число падающихъ звѣздъ, видимыхъ простымъ глазомъ, слишкомъ мало, чтобы оказать въ данномъ случаѣ замѣтное вліяніе. Однако, если вообразить, что количество телескопическихъ метеоровъ необычайно велико, такъ что наша атмосфера постоянно пронизывается ихъ свѣтящимися слѣдами, то можно допустить ихъ роль въ этомъ вопросѣ. Видимое количество этихъ метеоритовъ должно зависѣть отъ положенія апекса земного движенія, какъ это имѣетъ мѣсто для всѣхъ падающихъ звѣздъ вообще. Слѣдовательно, интенсивность ночного неба, зависящая отъ этой причины, должна быть минимальной вскорѣ послѣ захода солнца и достигать максимума не задолго до его восхода.

Желая провѣрить это, я предпринялъ фотометрическія наблюденія надъ фономъ ночного неба въ часы симметричные относительно полуночи, именно между 9—10 часами вечера и 2—3 часами утра. Въ обоихъ случаяхъ опредѣлялась яркость участковъ неба, находившихся на томъ же зенитномъ разстояніи. Въ результатѣ ни малѣйшаго увеличенія интенсивности въ утренніе часы замѣчено не было. Это показываетъ, что падающія звѣзды, если и производятъ нѣкоторое свѣченіе атмосферы, то ихъ роль все же совершенно ничтожна, и ею можно пренебречь.

---

[1]) Astronomical Society of the Pacific. Vol. 15 p. 13. «The Total Light of the Stars». by Sidney D. Townley.

Съ другой стороны можно думать, что интенсивность ночного неба зависитъ отъ полярныхъ сіяній. Однако, въ данномъ случаѣ мы имѣемъ вѣрный критерій для сужденія о степени ихъ участія въ общей интенсивности неба. Какъ извѣстно, спектръ сѣверныхъ сіяній состоитъ изъ немногихъ свѣтлыхъ линій. Вслѣдствіе этого спектроскопъ можетъ дать вѣрное указаніе о присутствіи полярныхъ сіяній даже тогда, когда невооруженный глазъ не въ состояніи открыть ни малѣйшихъ признаковъ этого явленія. Линія сѣвернаго сіянія дѣйствительно часто наблюдается на всемъ небѣ и подъ всѣми широтами, но все же далеко не всегда. Отсюда слѣдуетъ, что интенсивность ночного неба можетъ быть только возмущенной присутствіемъ сѣверныхъ сіяній, но не болѣе.

Прямой свѣтъ звѣздъ играетъ безъ сомнѣнія важную роль; Newcomb думалъ, что даже единственную. Всѣ слабыя звѣзды, находящіяся за предѣломъ видимости для простого глаза (ниже 6-ой величины), въ совокупности производятъ впечатлѣніе свѣтящейся поверхности, какъ это болѣе рѣзко выражено въ Млечномъ Пути.

Послѣднія изысканія относительно строенія нашей вселенной позволяютъ учесть интенсивность ночного неба, зависящую отъ совокупнаго свѣта звѣздъ. Я имѣю въ виду подсчеты звѣздъ по фотографическимъ клише, содержащимъ всѣ звѣзды до 17-ой величины включительно, которые были начаты Franclin Adams'омъ на его обсерваторіи въ Mervel Hill, Surrey (England) и закончены Melotte'омъ и Chapman'омъ на обсерваторіи въ Greenwich'ѣ [1]).

Въ этихъ подсчетахъ все небо раздѣляется на восемь зонъ. Первая зона занимаетъ площадь отъ 0^0 до 10^0 галактической широты, вторая отъ 10^0 до 20^0 и т. д. и наконецъ, восьмая отъ 70^0 до 90^0. Для каждой изъ этихъ зонъ были сосчитаны всѣ звѣзды отъ 12,0 до 17,0 зв. величинъ. Звѣздныя величины ихъ были тщательно опредѣлены при помощи Гарвардской North Polar Sequence. Что касается болѣе яркихъ звѣздъ, то онѣ были сосчитаны по слѣдующимъ каталогамъ:

звѣзды отъ 9 до 12,5 величинъ по Greenwich Astrographic Catalogue;
» » 6,5 » 9,0 по Greenwich Catalogue of Photographic Magnitudes of stars brighter than 9,0 ^{m};

звѣзды отъ 5 до 7,5 величинъ по каталогу Schwarzschild'а, и, наконецъ, звѣзды отъ 2 до 4,5 величины по каталогу Harvard College Observatory (Harvard Annals, LXXI, I).

Всѣ эти матеріалы позволяютъ вывести интересныя заключенія о протяженіи нашей звѣздной вселенной въ пространствѣ. Количество

[1]) Memoirs of the Royal Astr. Society, Vol. LX Part IV. The number of the stars of each photographic magnitude down to 17,0 ^{m} in different galactic latitudes. by S. Chapman and P. J. Melotte.

звѣздъ не неограничено. Кривыя, дающія для каждой зоны неба число звѣздъ ярче извѣстной величины, наглядно показываютъ, что приращеніе числа звѣздъ съ каждой новой величиной идетъ все медленнѣе. Посредствомъ экстраполяціи можно приблизительно опредѣлить звѣздную величину, которая соотвѣтствуетъ приращенію количества звѣздъ равному нулю т. е. предѣльную звѣздную величину нашей вселенной. Разумѣется подобное опредѣленіе очень неточно, но для нашей цѣли это не имѣетъ никакого значенія, такъ какъ наиболѣе удаленныя отъ насъ звѣзды крайне слабы. Общая интенсивность всѣхъ звѣздъ можетъ быть получена несравненно точнѣе. Всѣ звѣзды въ совокупности эквивалентны 690 звѣздамъ первой величины, и этотъ результатъ долженъ довольно близко соотвѣтствовать дѣйствительности.

Называя черезъ N_m количество всѣхъ звѣздъ ярче m-ой величины, приходящееся на одинъ кв. градусъ, мы имѣемъ слѣдующее выраженіе, выведенное эмпирическимъ путемъ:

$$\log_{10} N_m = a + b\,(m - 11) - c\,(m - 11)^2,$$

гдѣ a, b и c суть постоянныя, приведенныя въ нижеслѣдующей табличкѣ:

	Зона	a	b	c
±	I	1,404	0,409	0,0139
	II	1,345	0.407	0,0147
	III	1,300	0,411	0,0193
	IV	1,177	0,403	0,0186
	V	1,029	0,391	0,0168
	VI	1,008	0,399	0,0160
	VII	0,941	0,389	0,0135
	VIII	0,901	0,380	0,0130

Эту формулу я примѣнилъ къ опредѣленію интенсивности фона ночного неба. Въ виду того, что проф. Newcomb производилъ свои наблюденія невооруженнымъ глазомъ, мы должны отбросить всѣ звѣзды ярче 6-ой величины, такъ какъ будучи видимы въ отдѣльности онѣ не могутъ непосредственно увеличить интенсивность неба. Съ другой стороны звѣзды 6—7 величины настолько еще рѣдки, что маловѣроятно ожидать присутствія этихъ звѣздъ на небольшихъ площадяхъ неба, изслѣдованныхъ проф. Newcomb'омъ. Поэтому я принимаю $m = 7$.

$$\frac{dN_m}{N_m}\log e = [b - 2c\,(m - 11)]\,dm$$

откуда

$$\frac{dN_m}{dm} = \frac{1}{\log e}[b - 2c(m - 11)]\,10^{a + b(m-11) - c(m-11)^2}.$$

Пусть J яркость звѣзды 1-ой величины J_m, яркость звѣзды m-ой величины, есть:

$$J_m = J.10^{-0,4(m-1)}.$$

Яркость звѣздъ, заключающихся между m и $m+dm$ звѣздныхъ величинъ, есть:

$$J.10^{-0,4(m-1)}\frac{1}{\log e}[b-2c(m-11)]\,10^{a+b(m-11)-c(m-11)^2}dm.$$

Отсюда для интенсивности ночного неба, происходящей отъ прямого свѣта звѣздъ, имѣемъ слѣдующее выраженіе:

$$I=\frac{J}{\log e}\int_{m_0}^{\infty}[b-2c(m-11)]\,10^{a-4+(b-0,4)m-c(m-11)^2}dm.$$

Положимъ

$$m-11=t+\frac{b-0,4}{2c} \quad \text{и} \quad \alpha=a-4+\frac{(b-0,4)^2}{4c}.$$

Имѣемъ:

$$I=\frac{J}{\log e}\left[0,4\int_{t_0}^{\infty}10^{\alpha-ct^2}dt-2c\int_{t_0}^{\infty}t10^{\alpha-ct^2}dt\right].$$

Первый интегралъ можно преобразовать слѣдующимъ образомъ:

$$\int_{t_0}^{\infty}10^{\alpha-ct^2}\,dt=\int_{0}^{\infty}10^{\alpha-ct^2}\,dt-\int_{0}^{t_0}10^{\alpha-ct^2}\,dt;$$

но

$$\int_{0}^{\infty}10^{\alpha-ct^2}\,dt=\frac{10^{\alpha}\sqrt{\pi}}{2\sqrt{c}}\sqrt{\log e},$$

и

$$\int_{0}^{t_0}10^{\alpha-ct^2}dt=\frac{\sqrt{\log e}}{\sqrt{c}}10^{\alpha}\int_{0}^{\sqrt{\frac{c}{\log e}}t_0}e^{-s^2}ds.$$

Интегрируя, наконецъ, второй интегралъ въ выраженіи I, мы находимъ окончательно:

$$I=J10^{\alpha}\left[\frac{0,2\sqrt{\pi}}{\sqrt{c}\sqrt{\log e}}-10^{-ct_0^2}-\frac{0,4}{\sqrt{\log e}\sqrt{c}}\int_{0}^{\sqrt{\frac{c}{\log e}}t_0}e^{-s^2}ds\right],$$

при чемъ послѣдній интегралъ вычисляется при помощи извѣстныхъ таблицъ.

Принимая яркость звѣзды пятой величины за единицу, я вычислилъ это выраженіе для всѣхъ зонъ неба, полагая, какъ сказано выше, $m = 7$.

Результатъ:

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
0,742	0,631	0,521	0,387	0,277	0,274	0,248	0.229.

Какъ и слѣдовало ожидать, интенсивность возрастаетъ съ уменьшеніемъ галактической широты и достигаетъ максимума въ зонѣ Млечнаго Пути. Первое число смысла не имѣетъ, такъ какъ въ Млечномъ Пути распредѣленіе звѣздъ слишкомъ неравномѣрно, чтобы можно было примѣнить нашу формулу, основанную на предположеніи, что количество звѣздъ мѣняется только съ галактической широтой. На основаніи сказаннаго выше, интенсивность ночного неба около галактическаго полюса можно принять эквивалентной звѣздѣ 4,8 величины на одинъ кв. градусъ, что въ нашихъ единицахъ составитъ *1,2*. Мы видимъ, что прямой свѣтъ звѣздъ далеко не въ состояніи объяснить всего явленія.

Кромѣ прямого вліянія на интенсивность ночного неба, звѣзды оказываютъ еще косвенное. Ихъ свѣтъ разсѣивается въ атмосферѣ подобно тому, какъ это имѣетъ мѣсто днемъ для солнечнаго свѣта. Разумѣется количество свѣта разсѣянное отъ каждой звѣзды въ отдѣльности ничтожно, но à priori нельзя думать, что вся совокупность свѣтилъ надъ горизонтомъ не можетъ дать замѣтной интенсивности небеснаго свода.

Въ настоящее время доказано, что солнечный свѣтъ разсѣивается въ атмосферѣ не пылинками, но, главнымъ образомъ, самими молекулами воздуха.

Достаточно напомнить, что изъ фотометрическихъ наблюденій надъ интенсивностью дневного небеснаго свода было получено тоже значеніе для граммъ-молекулы воздуха, какъ и по другимъ методамъ [1]).

Lord Rayleigh получилъ слѣдующую формулу для количества свѣта, разсѣяннаго частицами матеріи малыми по сравненію съ длиной свѣтовой волны, какими, безъ сомнѣнія, являются молекулы.

$$i = A^2 \left(\frac{D' - D}{D} \right)^2 (1 + \cos^2 \beta) \frac{\pi V^2}{\lambda^4 r^2},$$

гдѣ A, амплитуда волны свѣта, падающаго на частицу; A^2 можетъ быть замѣнено интенсивностью свѣта J. D, плотность частицы, D' плотность, окружающей среды. Въ данномъ случаѣ $D' = 0$ и $\left(\frac{D' - D}{D} \right)^2 = 1$. β, уголъ

[1]) Jean Perrin. „Les preuves de la réalité moléculaire“ (Les idées modernes sur la constitution de la matière).

между падающимъ и разсѣяннымъ лучами; V, объемъ частицы, λ, длина свѣтовой волны и r, разстояніе разсматриваемой частицы отъ наблюдателя [1]).

Пусть N_0, количество молекулъ въ единицѣ объема воздуха при давленіи въ 760 mm (p_0) и температурѣ 0° C (T_0). Предположимъ, что мы разсматриваемъ нѣкоторую часть неба подъ тѣлеснымъ угломъ ω при зенитномъ разстояніи z. Элементарный объемъ, соотвѣтствующій высотѣ h надъ поверхностью земли, есть $r^2 dr . \omega$. Пусть на этой высотѣ давленіе равно p и температура T. Количество молекулъ въ разсматриваемомъ объемѣ будетъ:

$$N_0 \omega r^2 dr \frac{p}{p_0} \frac{T_0}{T}.$$

Слѣдовательно:

$$i = J(1 + \cos^2\beta) N_0 \omega \frac{\pi V^2}{\lambda^4} \frac{p}{p_0} \frac{T_0}{T} dr.$$

Въ виду того, что мы ищемъ только поправку къ найденной интенсивности неба, зависящей отъ прямого свѣта звѣздъ, примемъ для простоты гипотезу Newton'a о распредѣленіи плотностей въ атмосферѣ т. е. положимъ:

$$\varrho = \varrho_0^{-\frac{h}{h_1}}; \quad d\varrho = -\varrho \frac{dh}{h_1},$$

гдѣ h_1 есть высота однородной атмосферы (8,28 klm.).

Кромѣ того имѣемъ:

$$r = h\sec z - \frac{h^2}{2a} \sec z tg^2 z + \ldots,$$

гдѣ a, радіусъ земного шара.

Замѣняя dh и h въ выраженіи

$$dr = (\sec z - \frac{h}{a} \sec z \operatorname{tang}^2 z + \ldots) dh$$

черезъ ϱ и $d\varrho$, и замѣчая, что

$$\frac{\varrho}{\varrho_0} = \frac{p}{p_0} \frac{T_0}{T},$$

мы получимъ:

$$i = -J(1 + \cos^2\beta) \frac{\pi V^2}{\lambda^4} N_0 \omega \left[\frac{\sec z}{\varrho_0} h_1 d\varrho + \frac{\sec z tg^2 z}{\varrho_0 a} \frac{\log \varrho}{\log \varrho_0} d\varrho + \ldots \right].$$

---

[1]) Philosophical Magazine. Vol. 41. 1871. „On the Light from the Sky, its Polarization and Colour", by H. J. Strutt.

Строго говоря J и β суть нѣкоторыя функціи отъ ϱ, при чемъ β зависитъ отъ искривленія лучей, а J отъ поглощенія свѣта въ атмосферѣ. Однако при интеграціи этаго выраженія мы можемъ безъ замѣтной погрѣшности разсматривать β какъ постоянную величину. Вмѣсто того, чтобы искать J въ функціи ϱ, что сильно усложнило бы формулы, я буду вести дальнѣйшее вычисленіе, полагая J постояннымъ для всѣхъ слоевъ воздуха, но въ одномъ случаѣ принимая для J значеніе его на верхней границѣ атмосферы, а въ другомъ значеніе его у поверхности земли въ зависимости отъ зенитнаго разстоянія звѣзды и зенитальнаго поглощенія. Такимъ образомъ, не рѣшая точно проблему, я ограничиваюсь вычисленіемъ верхняго и нижняго предѣла для интенсивности разсѣяннаго звѣзднаго свѣта.

Интегрируя найденное выше выраженіе въ предѣлахъ отъ ϱ_0 до 0, имѣемъ:

$$i = J(1+\cos^2\beta)\,N_0\omega\pi\,\frac{V^2}{\lambda^4}\left[h_1\sec z_0 + \frac{\sec z_0\,\mathrm{tg}^2 z_0}{a}\left(1-\frac{M}{\log_{10}\varrho_0}\right)\right],$$

гдѣ M есть модуль логариѳмовъ $\log e$. Второй членъ, стоящій въ скобкахъ, настолько малъ, что имъ можно пренебречь.

Это выраженіе даетъ количество разсѣяннаго свѣта отъ звѣзды, интенсивность которой J, посылаемаго наблюдателю площадью неба ω. Какъ видно, оно зависитъ отъ зенитнаго разстоянія z_0 разсматриваемой части неба и отъ углового разстоянія ея отъ источника свѣта.

Пусть координаты площади ω суть z_0 и A_0, координаты звѣзды z и A. Тогда

$$\cos\beta = \cos z\cos z_0 + \sin z\sin z_0\cos(A-A_0).$$

Предположимъ, что звѣзды распредѣлены на небѣ равномѣрно и имѣютъ одну и ту же интенсивность. Пусть количество всѣхъ звѣздъ нѣкоторой средней величины на единицѣ поверхности небеснаго свода есть n. На элементѣ поверхности $\sin z\,dz\,dA$ ихъ будетъ

$$n\sin z\,dz\,dA.$$

Интегрируя выраженіе для i, гдѣ вмѣсто β подставляется его значеніе, мы получимъ, считая атмосферу совершенно прозрачной:

$$i = nJ_0\cdot\frac{8\pi^2}{3}N_0\omega h_1\sec z_0\,\frac{V^2}{\lambda^4}$$

Эта формула даетъ верхній предѣлъ для искомой величины. Примемъ теперь во вниманіе поглощеніе свѣта въ земной атмосферѣ. Теорія Bouguer'a даетъ:

$$\log\frac{i^0}{i} = \log p\,(\sec z - 1 - \frac{h_1}{2a}\operatorname{tg}^2 z\sec z + \ldots) = \log p\,\Phi(z),$$

гдѣ i^0, интенсивность свѣтила приведенная къ зениту, i, наблюдаемая при зенитномъ разстояніи z и гдѣ p, коэффиціентъ прозрачности атмосферы $= 0{,}83$. Имѣемъ:

$$i = i_0\; e^{\frac{\log p}{M}\Phi(z)}, \quad (M, \text{ модуль логариѳмовъ})$$

Проинтегрируемъ выраженіе

$$e^{\frac{\log p}{M}\Phi(z)} \sin z\,[1 + (\cos z\cos z_0 + \sin z\sin z\cos(A - A))^2]\,dz\,dA.$$

Интеграція по A въ предѣлахъ отъ 0 до 2π даетъ:

$$2\pi e^{\frac{\log p}{M}\Phi(z)} \sin z\,[1 + \cos^2 z\cos^2 z_0 + \frac{1}{2}\sin^2 z\sin^2 z_0]\,dz.$$

Положимъ $-\dfrac{\log p}{M} = \alpha$ и вмѣсто $\Phi(z)$ возьмемъ просто $\sec z - 1$.

Точная интеграція послѣдняго выраженія произведена быть не можетъ. Дѣйствительно, уже наиболѣе простой членъ $\int e^{-\alpha\sec z}\sin z\,dz$ представляется въ видѣ

$$\int e^{-\alpha\sec z}\sin z\,dz = \int e^{-\alpha x}\frac{dx}{x^2} = \frac{e^{-\alpha x}}{x} - \alpha\int e^{-\alpha x}\frac{dx}{x},$$

при чемъ послѣдній интегралъ подстановкой $-\alpha x = \log y$ преобразовывается къ виду $\displaystyle\int\frac{dy}{\log y}$.

Разложимъ поэтому $e^{-\alpha\sec z}$ въ рядъ. Написавъ этотъ рядъ въ видѣ

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!}\left(1 - \frac{x}{3}\right) + \frac{x^4}{4!}\left(1 - \frac{x}{5}\right) + \ldots$$

и примѣняя признакъ Delambre'a

$$\lim\frac{x^{n+2}\left(1 - \dfrac{x}{n+3}\right)n!}{x^n\left(1 - \dfrac{x}{n+1}\right)(n+2)!} = \lim\left(\frac{x}{n}\right)^2 = 0 < 1,$$

мы видимъ, что рядъ сходится для всѣхъ конечныхъ значеній x.

Возьмемъ $p = 0{,}83$ т. е. $\alpha = 0{,}186$ и проинтегрируемъ по z найденное выше выраженіе, гдѣ

$$e^{\frac{\log p}{M}\Phi(z)} = e^{\alpha}\left[1 - \alpha\sec z + \frac{\alpha^2\sec^2 z}{2!} - \frac{\alpha^3\sec^3 z}{3!} + \frac{\alpha^4\sec^4 z}{4!} - \frac{\alpha^5\sec^5 z}{5!} + \ldots\right]$$

Интеграція между предѣлами 0 и $\frac{\pi}{2} - \varepsilon$ даетъ слѣдующія выраженія, соотвѣтствующія каждому члену разложенія $e^{-\alpha\sec z}$:

$$\mathrm{I} = 2\pi\left[1 - \sin\varepsilon + \cos^2 z_0\left(\frac{1}{3} - \frac{\sin^3\varepsilon}{3}\right) + \frac{1}{2}\sin^2 z_0\left(\frac{2}{3} - \sin\varepsilon + \frac{\sin^3\varepsilon}{3}\right)\right]$$

$$\mathrm{II} = 2\pi\alpha\left[\frac{\log\sin\varepsilon}{M} - \frac{1}{2}\cos^2 z_0 + \frac{\sin^2 z_0}{2}\left(\frac{\log\sin\varepsilon}{M} + \frac{1}{2}\right)\right]$$

$$\mathrm{III} = 2\pi\frac{\alpha^2}{2!}\left[\frac{1}{\sin\varepsilon} - 1 + \cos^2 z_0 + \frac{\sin^2 z_0}{2}\left(\frac{1}{\sin\varepsilon} - 2\right)\right]$$

$$\mathrm{IV} = -2\pi\frac{\alpha^3}{3!}\left[\frac{\operatorname{ctg}^2\varepsilon}{2} - \cos^2 z_0\frac{\log\sin\varepsilon}{M} + \sin^2 z_0\left(\frac{\operatorname{ctg}^2\varepsilon}{2} + \frac{\log\sin\varepsilon}{M}\right)\right]$$

$$\mathrm{V} = 2\pi\frac{\alpha^4}{4!}\left[\frac{1}{3\sin^3\varepsilon} - \frac{1}{3} + \cos^2 z_0\left(\frac{1}{\sin\varepsilon} - 1\right) + \frac{\sin^2 z_0}{2}\left(\frac{1}{3\sin^3\varepsilon} - \frac{1}{\sin\varepsilon} + \frac{2}{3}\right)\right]$$

$$\mathrm{VI} = -2\pi\frac{\alpha^5}{5!}\left[\frac{1}{4\sin^4\varepsilon} - \frac{1}{4} + \cos^2 z_0\frac{\operatorname{ctg}^2\varepsilon}{2} + \frac{\sin^2 z_0}{2}\left(\frac{1}{4\sin^4\varepsilon} - \frac{1}{4} - \frac{\operatorname{ctg}^2\varepsilon}{2}\right)\right].$$

Слѣдовательно для всѣхъ звѣздъ между зенитомъ и $\frac{\pi}{2} - \varepsilon$ зенитнаго разстоянія имѣемъ:

$$i = nJN_0\omega h_1\sec z_0\frac{\pi V^2}{\lambda^4}(\mathrm{I} + \mathrm{II} + \ldots + \mathrm{VI})\,e^{\alpha}.$$

Мы можемъ пренебречь вліяніемъ звѣздъ, высота которыхъ менѣе 5^0.

Полагая поэтому $\varepsilon = 5$, мы имѣемъ для частнаго случая $z_0 = 0$ слѣдующее выраженіе:

$$i = nJN_0\omega h_1\sec z_0\frac{\pi V^2}{\lambda^4}e^{\alpha}.2\pi[1{,}246 - 0{,}361 + 0{,}185 - 0{,}067 + 0{,}026 - 0{,}008]$$

или же

$$i = nJ.1{,}2295.2\pi^2 N_0\omega h_1\frac{V^2}{\lambda^4}. \qquad (z_0 = 0).$$

Въ этой формулѣ принято во вниманіе приведеніе къ зениту, но не зенитальное поглощеніе свѣта; чтобы учесть послѣднее надо только выраженіе для i умножить на p. Полученное значеніе даетъ нижній предѣлъ для искомой величины.

Если положить $J = 1$, то за n надо взять количество звѣздъ пятой величины эквивалентныхъ всѣмъ звѣздамъ неба, находящимся на высотѣ болѣе 5^0 надъ горизонтомъ. Пользуясь изложенными ранѣе результатами Chapman'a и Melotte'a, мы легко находимъ, что $n = 12095$, что соотвѣтствуетъ 0,66 звѣздъ пятой величины на одинъ кв. градусъ. Это число больше средняго изъ чиселъ, выражающихъ прямую яркость неба, которую мы нашли раньше. Само собой разумѣется, что эта разница происходитъ отъ того, что при прежнихъ вычисленіяхъ мы принимали во вниманіе только звѣзды слабѣе седьмой величины, тогда какъ въ данномъ случаѣ должны быть взяты всѣ вообще звѣзды на небѣ.

Діаметръ молекулы воздуха $= 2{,}86 . 10^{-8}$ cm. [1]). Количество молекулъ въ одномъ куб. сант. при 760 mm давленія и 0^0 C равно $2{,}77 . 10^{19}$ по Rutherford'y и $2{,}80^{19}$ по Planck'y. Я принялъ значеніе $2{,}70 . 10^{19}$, данное въ послѣднее время Millican'омъ и J. Perrin'омъ [2]). Далѣе $h_1 = 8{,}28$ klm. или $8{,}28 . 10^5$ cm.; λ, длина волны, соотвѣтствующая максимуму интенсивности въ спектрѣ, промежуточномъ между солнечнымъ спектромъ и спектромъ разсѣяннаго свѣта, равна $5{,}6 . 10^{-5}$ cm. (какъ будетъ показано позже); ω равно одному квадратному градусу.

Съ этими данными я получилъ

для нижнаго предѣла интенсивности разсѣяннаго свѣта . . . 0,0271
и для верхняго предѣла 0,0355

при чемъ при выводѣ послѣдняго количества, я равнымъ образомъ отбрасывалъ звѣзды, зенитное разстояніе которыхъ больше 85^0.

Мы видимъ, что прямой свѣтъ звѣздъ въ совокупности со звѣзднымъ свѣтомъ, разсѣяннымъ въ атмосферѣ, составляютъ въ частяхъ неба, удаленныхъ отъ Млечнаго Пути не болѣе 0,3, что гораздо менѣе значенія найденнаго Newcomb'омъ.

Формула, выведенная Rayleigh'емъ, можетъ быть примѣнена только для угловъ β не очень малыхъ; при малыхъ же β она совершенно не соотвѣтствуетъ дѣйствительности. Насколько мнѣ извѣстно, не существуетъ выраженія, дающаго количество разсѣяннаго свѣта при очень малыхъ угловыхъ разстояніяхъ между источникомъ свѣта и наблюдаемымъ участкомъ неба. Яркость фона неба въ этомъ случаѣ нетрудно учесть

---

[1]) Philosophical Magazine. 1910. 19 p. 25. Sutherland «Molecular Diameters».
[2]) J. Perrin. Die Atome. p. 164.

экспериментальнымъ путемъ. Стоитъ только измѣрить измѣненіе интенсивности фона неба въ функціи разстоянія отъ края солнца или луны и затѣмъ вычислить кривую интенсивности, соотвѣтствующую свѣтящейся точкѣ, какъ это пришлось мнѣ сдѣлать при опредѣленіи альбедо земного шара. Но эта кривая интенсивности падаетъ такъ быстро по мѣрѣ удаленія отъ источника свѣта, начинаетъ такъ хорошо согласоваться уже на небольшомъ разстояніи отъ источника свѣта съ формулой Rayleigh'я, что въ данномъ случаѣ нѣтъ надобности заниматься ея разсмотрѣніемъ.

Итакъ, всѣ возможныя причины интенсивности ночного неба оказались далеко недостаточными для объясненія всего явленія. Остается еще одна, по-моему мнѣнію, единственная причина, именно зодіакальный свѣтъ. Въ своихъ частяхъ наиболѣе близкихъ къ Солнцу онъ далеко превосходитъ по яркости наиболѣе плотныя скопленія Млечнаго Пути. По мѣрѣ удаленія отъ Солнца интенсивность его быстро уменьшается и, наконецъ, незамѣтно переходитъ въ общую интенсивность неба. Несомнѣнно, что зодіакальный свѣтъ распространяется на весь небесный сводъ, придавая ему нѣкоторое равномѣрное освѣщеніе, которое нѣсколько усиливается по мѣрѣ приближенія къ зодіакальному поясу и, въ особенности, по мѣрѣ приближенія къ Солнцу. Абсолютная яркость зодіакальной матеріи намъ совершенно неизвѣстна. Мы можемъ измѣрять только интенсивность ночного неба, которая слагается изъ многихъ компонентовъ. Пренебрегая сравнительно рѣдкимъ присутствіемъ въ нашей атмосферѣ падающихъ звѣздъ, отбрасывая случайныя возмущенія интенсивности неба полярными сіяніями и учитывая вліяніе прямого свѣта звѣздъ и ихъ свѣта разсѣяннаго атмосферой, мы, въ концѣ концовъ, выдѣляемъ интенсивность принадлежащую зодіакальному свѣту.

Для частей неба удаленныхъ отъ Млечнаго Пути, гдѣ общая яркость выражается числомъ 1,2, а вліяніе упомянутыхъ причинъ составляетъ 0,3, необходимо принять на долю зодіакальнаго свѣта 0,9 нашихъ единицъ.

Какъ и раньше, необходимо на ряду съ прямымъ свѣтомъ этого космическаго явленія изслѣдовать его свѣтъ, разсѣянный атмосферой. Это послѣднее изслѣдованіе можетъ быть произведено совершенно также, какъ было только что показано. Небольшое различіе заключается въ томъ, что въ данномъ случаѣ желательно принять во вниманіе усиленіе интенсивности зодіакальнаго свѣта къ Солнцу, а также и то, что длина наиболѣе активной волны, равно какъ и поглощательная способность атмосферы для зодіакальнаго свѣта нѣсколько иныя, чѣмъ для звѣздъ. Однако эти различія, какъ будетъ видно позже, очень малы.

Въ соотвѣтствіи съ ранѣе полученными результатами я, сохраняя лишь первый десятичный знакъ, принялъ 0,8 для интенсивности собственно зодіакальнаго свѣта внѣ зодіакальной полосы.

Ограничиваясь плоскостью эклиптики и угловымъ разстояніемъ (ω) отъ Солнца отъ 34° до 50°, я приведу слѣдующія значенія интенсивности (i) зодіакальнаго свѣта, полученныя мною изъ наблюденій [1]):

ω	i	j
34°	27,5	2,9
38°	23,8	2,5
42°	20,6	2,1
46°	17,9	1,7
50°	15,6	1,3

общая интенсивность неба въ моихъ наблюденіяхъ принималась мною равной 10. Въ нашихъ единицахъ абсолютная интенсивность зодіакальнаго свѣта (j) выражается формулой:

$$j = (i - 10)\,0{,}12 + 0{,}8\,,$$

что даетъ числа, находящіяся въ послѣднемъ столбцѣ.

Имѣя абсолютную яркость зодіакальнаго свѣта для различныхъ угловыхъ разстояній отъ Солнца, было бы нетрудно перейти къ распредѣленію въ немъ плотности, если форма и размѣры частицъ зодіакальной матеріи были бы извѣстны. Покажемъ, что форма космическихъ пылинокъ не оказываетъ въ извѣстныхъ случаяхъ вліянія на распредѣленіе интенсивности въ зодіакальномъ свѣтѣ.

Предположимъ, что пылинки распредѣлены въ пространствѣ настолько рѣдко, что для наблюдателя, находящагося на Землѣ, не могутъ ни накладываться одна на другую, ни затмѣвать другъ друга. Другими словами, предположимъ, что всѣ пылинки безъ исключенія освѣщаются солнцемъ и что свѣтъ отъ всѣхъ космическихъ частицъ матеріи достигаетъ глаза наблюдателя. Это является вполнѣ законнымъ допущеніемъ, такъ какъ черезъ зодіакальный свѣтъ легко можно видѣть даже слабыя звѣзды. Допустимъ далѣе, что всѣ пылинки имѣютъ форму выпуклую во всѣхъ своихъ точкахъ и при томъ оріентированную въ пространствѣ совершенно произвольнымъ образомъ. Выражаясь точнѣе допустимъ, что если изъ нѣкоторой точки пространства описать сферу произвольнымъ радіусомъ и изъ центра ея провести линіи, параллельныя нѣкоторой прямой, связанной опредѣленнымъ образомъ съ данной формой при всевозможныхъ ея положеніяхъ, то точки пересѣченія этихъ линій съ поверхностью сферы расположены на послѣдней одинаково густо.

---

[1]) B. Fessenkoff. „La Lumière Zodiacale“ p. 102.

Количество свѣта, отражаемое къ наблюдателю элементомъ поверхности $d\sigma$, представляется, если придерживаться закона Lambert'a, слѣдующимъ выраженіемъ:

$$dJ = \frac{A_1}{\pi} \cos i \cos \varepsilon d\sigma ,$$

гдѣ A_1 альбедо по опредѣленію Lambert'a, а i и ε суть углы паденія и отраженія. Вычислимъ совокупное количество свѣта J, отражаемое этимъ элементомъ при всевозможныхъ положеніяхъ тѣла, которому онъ принадлежитъ. Нетрудно видѣть, что

$$J = \frac{A_1}{\pi} \int_{\varphi=-\frac{\pi}{2}}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} \int_{\lambda=\alpha-\frac{\pi}{2}}^{\lambda=\frac{\pi}{2}} \cos i \cos \varepsilon \cos \varphi \, d\varphi \, d\lambda$$

гдѣ φ и λ представляютъ сферическія координаты даннаго элемента. Введенное нами условіе относительно формы пылинокъ позволяетъ намъ найти предѣлы интеграціи, которые въ общемъ случаѣ совершенно неопредѣленны.

Называя α уголъ фазы, одинаковой для всѣхъ пылинокъ, заключенныхъ въ данномъ объемѣ, мы имѣемъ:

$$\cos i = \cos \varphi \cos (\lambda - \alpha)$$

$$\cos \varepsilon = \cos \varphi \cos \lambda$$

и, слѣдовательно,

$$J = \frac{A_1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\alpha-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \varphi \cos (\lambda - \alpha) \cos \lambda \, d\varphi \, d\lambda ,$$

т. е.

$$J = \frac{2}{3} \frac{A_1}{\pi} [\sin \alpha + (\pi - \alpha) \cos \alpha] .$$

Подобное же выраженіе мы получимъ для всякаго другого элемента въ предположеніи, что онъ оріентированъ совершенно произвольно.

Очевидно для всего тѣла, выпуклаго во всѣхъ точкахъ, должно получиться выраженіе того же типа

$$J = k (\sin \alpha + (\pi - \alpha) \cos \alpha)$$

гдѣ k можно предположить постояннымъ во всемъ пространствѣ.

Примѣнимъ эту формулу для вычисленія интенсивности космической пыли, наблюдаемой съ Земли подъ тѣлеснымъ угломъ σ. Пусть μ—плотность космической пыли, ω—угловое разстояніе отъ Солнца, ϱ—линейное разстояніе отъ Солнца, r—разстояніе отъ Земли. Принимая разстояніе между Солнцемъ и Землей за единицу, имѣемъ слѣдующую интенсивность

$$k\sigma \int_0^\infty \frac{\mu f(\alpha)\, dr}{\varrho^2}$$

или

$$k\sigma \sin\omega \int_0^{\pi-\omega} \frac{\mu f(\alpha)\, d\alpha}{\varrho^2 \sin^2\alpha},$$

такъ какъ

$$\varrho = \frac{\sin\omega}{\sin\alpha} \quad \text{и} \quad dr = -\frac{\sin\omega}{\sin^2\alpha}\, d\alpha.$$

μ есть нѣкоторая неизвѣстная намъ функція отъ ϱ.

Я вычислялъ это выраженіе, дѣлая различныя предположенія относительно вида этой функціи. Здѣсь я возьму сразу

$$\mu = \frac{c}{\varrho},$$

такъ какъ эта простая зависимость наилучшимъ образомъ представляетъ наблюденія. Вводя вмѣсто $f(\alpha)$ полученное только что выраженіе, имѣемъ:

$$\frac{\sigma}{\sin^2\omega} \int_0^{\pi-\omega} \sin\alpha\,[\sin\alpha + (\pi-\alpha)\cos\alpha]\, d\alpha$$

Интегрируя и отбрасывая постоянные коэффиціенты находимъ:

$$\frac{\sigma}{\sin^2\omega}\left[\pi - \omega + \sin\omega\cos\omega + \frac{2}{3}\omega\sin^2\omega\right].$$

Вычисляя это выраженіе для различныхъ значеній ω мы получаемъ:

$\omega = 34^0$	1,000
38^0	0,807
42^0	0,690
46^0	0,600
50^0	0,523

Во всѣхъ этихъ вычисленіяхъ примѣнялись обыкновенные законы отраженія свѣта. Однако, если отдѣльныя пылинки сравнимы по своей величинѣ съ длиной свѣтовой волны, то простое отраженіе свѣта уже не имѣетъ мѣста. Въ этомъ случаѣ надо употребить формулу Rayleigh'я, примѣнимую ко всѣмъ частицамъ, размѣры которыхъ не превышаютъ $\frac{1}{4}$ длины наиболѣе преломляемой волны свѣта. При такой ничтожной величинѣ пылинокъ ихъ форма совершенно не оказываетъ вліянія на количество разсѣяннаго свѣта. Если же размѣры частицъ превосходятъ $\frac{1}{4}$ свѣтовой волны, то форма ихъ начинаетъ оказывать нѣкоторое вліяніе, выражающееся въ поправочныхъ членахъ къ главному, приведенному нами выше. Съ другой стороны характеръ распредѣленія интенсивности въ спектрѣ также начинаетъ мѣняться; приращеніе интенсивности идетъ медленнѣе соотвѣтственнаго приращенія объема, что сказывается прежде всего на болѣе преломляемой части спектра.

Примѣняя формулу Rayleigh'я (гдѣ надо положить $\beta = \pi - \alpha$) къ вычисленію относительной интенсивности космической пыли, я получилъ слѣдующее выраженіе:

$$\frac{k\sigma}{\sin^2\omega}\left(\frac{4}{3} + \cos\omega + \frac{1}{3}\cos^3\omega\right).$$

Это выраженіе даетъ для частицъ пыли малыхъ по сравненію съ длиной свѣтовой волны:

(3)

ω	j
34^0	1,000
38^0	0,796
42^0	0,652
46^0	0,545
50^0	0,459

Въ дѣйствительности космическая пыль состоитъ какъ изъ мельчайшихъ пылинокъ, которыя производятъ диффузію свѣта, такъ и изъ частицъ матеріи, могущихъ отражать свѣтъ. Падающія звѣзды, среди которыхъ встрѣчаются и болиды въ сотни килограммовъ вѣсомъ и едва замѣтныя телескопическіе метеоры, масса которыхъ не превышаетъ малую долю грамма, не говоря о множествѣ другихъ падающихъ звѣздъ, остающихся по слабости своего блеска внѣ предѣловъ непосредственнаго наблюденія, служатъ наглядным подтвержденіемъ этому. Отсюда слѣдуетъ, что дѣйствительная кривая интенсивности, представляемая всей совокупностью космической пыли, лежитъ, вообще говоря, гдѣ-либо посерединѣ между найденными крайними кривыми.

Полученные результаты указываютъ степень неопредѣленности, каковая имѣетъ мѣсто при вычисленіи интенсивности космической пыли $\left(\text{въ предположеніи } \mu = \frac{c}{\varrho}\right)$, вслѣдствіе полнаго незнанія формы и величины отдѣльныхъ пылинокъ. Однако въ частномъ случаѣ, когда размѣры пылинокъ не очень разнятся отъ длины свѣтовой волны, можно предложить способъ, позволяющій опредѣлить ихъ величину. Идея этого способа очень проста. Если космическія пылинки достаточно малы, онѣ произведутъ замѣтное разсѣяніе солнечнаго свѣта преимущественно въ области болѣе преломляющей части спектра.

Вслѣдствіе этого максимумъ интенсивности въ спектрѣ зодіакальнаго свѣта долженъ лежать ближе къ фіолетовому концу и тѣмъ ближе, чѣмъ меньше размѣры разсматриваемыхъ матеріальныхъ частицъ. Надо замѣтить однако, что возможное перемѣщеніе максимума интенсивности не велико и поэтому опредѣленіе положенія его довольно затруднительно, въ особенности по причинѣ крайней слабости всего явленія. Чтобы опредѣлить это перемѣщеніе максимума, я воспользовался результатами Abney'я и Festing'а, изслѣдовавшими визуальнымъ путемъ распредѣленіе интенсивности въ солнечномъ спектрѣ [1]).

Сдѣлавъ приведеніе за поглощеніе свѣта въ атмосферѣ для каждаго рода излученія въ отдѣльности и вычисливъ затѣмъ распредѣленіе интенсивности въ спектрѣ разсѣяннаго свѣта частицами очень малыми $\left(< \frac{1}{4}\lambda\right)$, я нашелъ для положенія максимумовъ интенсивности

въ спектрѣ солнечнаго свѣта внѣ атмосферы .	570 $\mu\mu$.
» » разсѣяннаго » » » .	550 $\mu\mu$.

Въ этихъ тѣсныхъ предѣлахъ заключается все возможное перемѣщеніе максимума. Коэффиціенты прозрачности атмосферы для свѣта, разсѣяннаго частицами матеріи различной величины, колеблются еще въ болѣе тѣсныхъ предѣлахъ. Изъ упомянутыхъ наблюденій Abney'я и Festing'а я получилъ для солнечнаго свѣта $p = 0{,}83$, тогда какъ для свѣта, разсѣяннаго очень маленькими частицами, у меня получилось $p = 0{,}80$, почти та же самая величина.

Болѣе удовлетворительные результаты можно получить измѣряя фотометрическимъ путемъ распредѣленіе интенсивности въ спектрѣ зодіакальнаго свѣта.

---

[1]) Philosophical Transactions, Vol. 174. 1886. p. 723. Abney and Festing. Colour Photometry.

Исходя изъ изслѣдованій Abney'я, я получилъ слѣдующія значенія для интенсивности въ обоихъ спектрахъ, при чемъ какъ солнечный свѣтъ, такъ и свѣтъ, разсѣянный пылинками, разсматриваются внѣ земной атмосферы (для удобства сравненія максимумъ въ обоихъ спектрахъ принятъ = 1):

$\mu\mu$	Разсѣянный солнечный свѣтъ	Солнечный свѣтъ
460	0,07	0,034
480	0,18	0,10
500	0,42	0,26
520	0,82	0,55
540	0,98	0,83
560	0,98	0,97
580	0,89	0,98
600	0,71	0,86
620	0,46	0,66
640	0,21	0,37
660	0,05	0,10

Дѣйствительная кривая интенсивности въ спектрѣ зодіакальнаго свѣта должна лежать между кривыми, представляемыми этими числами. Изслѣдовавъ фотометрически спектръ этого явленія и найдя въ немъ распредѣленіе интенсивности, можно искать, каковы должны быть размѣры космическихъ пылинокъ, чтобы разсѣянный ими солнечный свѣтъ обладалъ наблюдаемыми особенностями.

Къ сожалѣнію, вслѣдствіе крайней слабости зодіакальнаго свѣта детальное изслѣдованіе его спектра пока еще невозможно. Все, что дали спектроскопическія наблюденія, заключается въ слѣдующемъ: спектръ зодіакальнаго свѣта совершенно непрерывенъ, не имѣетъ никакихъ свѣтлыхъ линій, но при очень продолжительной экспозиціи обнаруживаетъ темныя линіи, совпадающія съ главными Фраунгоферовыми линіями солнечнаго спектра. Для насъ важнѣе всего тотъ фактъ, что максимумъ интенсивности находится не въ желтой части спектра, какъ для солнца, но въ зеленой.

Если это не можетъ быть объяснено явленіемъ Purkinje, то необходимо заключить, что космическая пыль способна производить замѣтную диффузію свѣта, т. е. что космическія пылинки въ среднемъ приближаются по своимъ размѣрамъ къ длинѣ свѣтовой волны.

Отсюда слѣдуетъ, что послѣдняя табличка (3), полученная именно въ предположеніи малости космическихъ пылинокъ, должна ближе всего согласоваться съ наблюденіями, если наша гипотеза о распредѣленіи плотностей $\left(\mu = \frac{c}{\varrho}\right)$ справедлива. Дѣйствительно имѣемъ:

ω	наблюденная интенсивность	вычисленная интенсивность
34	2,9	2,90
38	2,5	2,31
42	2,1	1,90
46	1,7	1,58
50	1,3	1,33

Это согласіе можно считать удовлетворительнымъ, а потому въ дальнѣйшемъ мы будемъ предполагать, что плотность въ средѣ космической пыли (въ плоскости эклиптики) измѣняется обратно пропорціонально разстоянію отъ солнца.

Назовемъ черезъ i абсолютную интенсивность зодіакальнаго свѣта, соотвѣтствующую угловому разстоянію отъ солнца ω.

Формула Rayleigh'я, уже приведенная нами раньше, имѣетъ видъ

$$J(1+\cos^2\alpha)\frac{\pi V^2}{\lambda^4 r^2}.$$

Пусть N, количество пылинокъ въ единицѣ объема пространства на разстояніи отъ солнца ϱ_0, равномъ радіусу земной орбиты. Количество пылинокъ, находящихся въ элементарномъ объемѣ $r^2 dr\sigma$, видномъ подъ тѣлеснымъ угломъ σ, есть:

$$n = N\frac{\varrho_0}{\varrho} r^2 \sigma dr,$$

Вводя J_0, интенсивность солнца, наблюдаемаго съ земли, имѣемъ:

$$J = J_0 \frac{{\varrho_0}^2}{\varrho^2}.$$

Такимъ образомъ для интенсивности всей совокупности космической пыли имѣемъ:

$$i = J_0 {\varrho_0}^3 \frac{\pi V^2}{\lambda^4} \sigma N \int_0^\infty \frac{(1+\cos^2\alpha)\,dr}{\varrho^3}.$$

Вводя, какъ новую перемѣнную, уголъ фазы α и замѣчая, что

$$\frac{\varrho_0}{\varrho} = \frac{\sin\alpha}{\sin\omega} \quad \text{и} \quad dr = -\frac{\sin\omega}{\sin^2\alpha}\,d\alpha,$$

получимъ:

$$i = J_0\varrho_0 \frac{\pi V^2}{\sin^2\omega}\frac{\sigma N}{\lambda^4}\int_0^{\pi-\alpha} \sin\alpha\,(1+\cos^2\alpha)\,d\alpha,$$

или

$$i = J_0\varrho_0 \frac{\pi V^2\sigma N}{\sin^2\omega\lambda^4}\left[\frac{4}{3}+\cos\omega+\frac{1}{3}\cos^3\omega\right],$$

Мы имѣемъ $i = 2{,}9$ при $\omega = 34^0$. По изслѣдованіямъ Ch. Fabry [1]) звѣздная величина солнца равняется $-26{,}7$. Выражая J_0 въ яркости звѣзды пятой величины и принимая за λ длину волны, соотвѣтствующей максимуму интенсивности въ солнечномъ спектрѣ ($\lambda = 560\ \mu\mu$.), мы имѣемъ:

$$\log(\alpha^6 N) = 20{,}5634,$$

гдѣ $\alpha = \frac{R}{\lambda}$ (R, радіусъ космической пылинки). За единицу длины въ этой формулѣ принятъ 1 mm.

Это все, что можно вывести изъ даннаго значенія интенсивности зодіакальнаго свѣта. Дѣлая предположеніе относительно одной изъ величинъ, входящихъ въ выраженіе $\alpha^6 N$, мы получаемъ другую. Но порядокъ α извѣстенъ, такъ какъ мы видѣли раньше, что космическія пылинки сравнимы по своимъ размѣрамъ съ длиной свѣтовой волны. Принимая, $\alpha = \frac{1}{2}$, мы получимъ что

$$N = 2{,}3.10^{-18}$$

количество пылинокъ въ одномъ кубическомъ миллиметрѣ. Отсюда слѣдуетъ что на одинъ куб. километръ пространства въ плоскости эклиптики и на разстояніи ϱ_0 отъ солнца приходится 2,3 космическихъ пылинокъ.

Такимъ образомъ загадочное явленіе интенсивности ночного неба можетъ быть объяснено, если предположить, что междупланетное пространство заполнено мельчайшими частицами матеріи, каждая изъ которыхъ при указанныхъ размѣрахъ приходится на 0,43 куб. километровъ.

---

[1]) Ch. Fabry. Comparaison de la lumière du soleil avec celle des étoiles. Recherches de photométrie solaire et stellaire.

Можно отмѣтить, что этотъ результатъ находится въ согласіи съ изслѣдованіями проф. H. Newton'a, который, какъ извѣстно, нашелъ, что каждыя сутки на земную поверхность падаетъ не менѣе 10.000,000 метеоритовъ. При этомъ онъ принималъ во вниманіе только падающія звѣзды, видимыя простымъ глазомъ. Если же можно было бы учесть количество всѣхъ метеоритовъ, проникающихъ въ земную атмосферу вплоть до мельчайшихъ космическихъ пылинокъ, то, безъ сомнѣнія, пришлось бы увеличить это число во много разъ.

Въ заключеніе я долженъ подчеркнуть, что число полученное для $\alpha^6 N$, а также для количества пылинокъ въ куб. километрѣ при указанномъ предположеніи относительно ихъ размѣровъ, основано на допущеніи, что въ выше изложенномъ разборѣ приняты во вниманіе всѣ источники свѣта, могущіе оказать вліяніе на интенсивность ночного неба.

Это допущеніе нельзя считать законнымъ. Вполнѣ возможно, что существуютъ какія-нибудь неизвѣстныя намъ причины, вліяющія на интенсивность неба помимо зодіакальнаго свѣта. Однако, даже значительная погрѣшность въ этомъ отношеніи не повліяетъ очень замѣтно на окончательные результаты. Если, напримѣръ, принять вдвое меньшее значеніе для интенсивности зодіакальнаго свѣта около полюса Млечнаго Пути, то въ i (при $\omega = 34^0$), послужившемъ исходнымъ даннымъ въ послѣднихъ вычисленіяхъ, получилась бы относительная погрѣшность только въ 0,14.

Sur un théorème de géométrie et son application aux équations aux dérivées partielles du type elliptique.

par Serge Bernstein.

1. Le présent travail contient la démonstration et le développement de quelques conséquences d'un des théorèmes de ma Note [1]) «Sur une généralisation des théorèmes de Liouville et de M. Picard».

Le théorème de géométrie que je veux démontrer ici est le suivant:

Une surface $z = f(x, y)$ admettant des dérivées continues des deux premiers ordres, dont la courbure totale n'est ni positive, ni identiquement nulle, ne peut rester constamment comprise entre deux plans fixes $z = \pm h$.

De ce théorème on déduit facilement une proposition très générale concernant les équations du type elliptique qui contient comme un cas particulier une proprieté fondamentale des fonctions harmoniques connue sous le nom du théorème de Liouville:

Si z est une fonction bornée admettant des dérivées continues des deux premiers ordres et satisfaisant à une équation de la forme

$$Ar + 2Bs + Ct = 0 \qquad (1)$$

où A, B, C sont des fonctions finies de x, y, z, p, q, r, s, t, avec l'inégalité $AC - B^2 > 0$, la fonction z est une constante.

Notre généralisation du théorème de Liouville s'applique evidemment aussi aux surfaces *minima*; mais, grâce à un petit artifice de calcul qui tient à la forme particulière de l'équation de ces surfaces, j'établis, en outre, une propriété spéciale des surfaces minima qui les distingue essentiellement des surfaces harmoniques. Voila cette propriété:

Une surface minima réelle $z = f(x, y)$ admettant des dérivées continues des deux premiers ordres pour toutes les valeurs réelles finies de x, y est un plan. En d'autres termes, la fonction z qui comme on sait,

[1]) Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, 10 Octobre 1910.

est analytique, doit avoir, en général des singularités réelles à distance finie; ainsi, tandis que la variété des fonctions harmoniques entières rationnelles ou transcendentes est si grande, la seule fonction entière satisfaisant à l'équation des surfaces minima

$$(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t = 0$$

est la fonction linéaire $z = Ax + By + C$.

2. Commençons par la démonstration d'un lemme que nous aurons souvent l'occasion d'utiliser:

Lemme. *Soit $z = f(x, y)$ une fonction des variables réelles x, y, admettant des dérivées continues des deux premiers ordres, et soit B une région, où $z < 0$, ayant pour frontière l'ensemble de points $z = 0$. La région B ne peut être bornée, si on a $rt - s^2 \leq 0$ en tous les points, où $p^2 + q^2 < N$, le nombre positif fixe N étant aussi petit qu'on veut.*

En effet, si l'on suppose la région B bornée, cela entraine comme conséquence que la fonction z atteint un minimum absolu $m < 0$ en un point intérieur à B, où $p = q = 0$. En prenant ce point 0 pour origine, on pourra poser

$$z = m + (ax + \beta y)^2 + \frac{1}{2}(\varepsilon_1 x^2 + 2\varepsilon_2 xy + \varepsilon_3 y^2),$$

où α, β sont des constantes (qui peuvent être nulles) et ε_1, ε_2, ε_3 tendent vers zéro avec $x^2 + y^2$, puisque $rt - s^2 = 0$ en 0. D'autre part, considérons la fonction

$$z_1 = m + \frac{h}{2}(x^2 + y^2),$$

où nous pouvons fixer le nombre positif h assez petit pour avoir $z_1 < 0$ et $h^2(x^2 + y^2) < N$ en tous les points de B.

Dans ces conditions, en tous les points de la frontière de B on aura

$$\delta = z - z_1 > 0.$$

Or, h étant choisi, on pourra entourer le point 0 d'un cercle assez petit tel qu'il y ait au moins un point à son intérieur, où

$$\delta = (\alpha x + \beta y)^2 + \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - h)x^2 + \varepsilon_2 xy + \frac{1}{2}(\varepsilon_3 - h)y^2 < 0 \qquad (2)$$

La fonction δ aura donc également un minimum absolu à l'intérieur de B, et au point A, où ce minimum a lieu, on a

$$\frac{\partial^2\delta}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2\delta}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2\delta}{\partial x\partial y}\right)^2\geqq 0\,,\quad \frac{\partial\delta}{\partial x}=\frac{\partial\delta}{\partial y}=0\,,\quad \frac{\partial^2\delta}{\partial x^2}\geqq 0\,,\quad \frac{\partial^2\delta}{dy^2}\geqq 0\,;$$

d'où

$$rt-s^2=\left[h+\frac{\partial^2\delta}{\partial x^2}\right]\left[h+\frac{\partial^2\delta}{\partial y^2}\right]-\left(\frac{\partial^2\delta}{\partial x\partial y}\right)^2=h^2+h\left(\frac{\partial^2\delta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\delta}{\partial y^2}\right)+$$
$$+\left[\frac{\partial^2\partial}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2\delta}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2\delta}{\partial x\partial y}\right)^2\right]\geqq h^2>0$$

et

$$p^2+q^2=\left(\frac{\partial z_1}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z_1}{\partial y}\right)^2=h^2(x^2+y^2)<N.$$

Mais, ces deux inégalités sont en contradiction avec nos hypothèses. Le lemme est donc démontré.

3. Nous pouvons passer à présent à la démonstration du théorème.

Théorème. *Une surface, représentée par la fonction* $z=f(x,\,y)$, *admetant des dérivées continues des deux premiers ordres, dont la courbure n'est ni positive ni identiquement nulle, ne peut rester pour toutes les valeurs de* x, y *comprise entre deux plans fixes* $z=\pm h$.

En effet, imaginons que notre surface reste comprise entre les plans $z=\pm h$. Nous pouvons admettre, en faisant un changement convenable de coordonnées, qu'on a à l'origine $p_0=0$, $q_0>0$, $r_0t_0-s_0{}^2<0$. Dans ces conditions, le plan tangent à la surface

$$z=f(x,\,y)$$

au point $x=y=0$ aura pour équation

$$z_1=q_0y,$$

il coupera cette surface suivant quatre branches distinctes qui déterminent dans le voisinage de l'origine quatre régions distinctes Ω_1, Ω_2, Ω_3, Ω_4 du plan (x, y) telles que dans Ω_1, Ω_3 on a $\delta=z-z_1<0$, et dans Ω_2, Ω_4 on aura $\delta>0$. D'après le lemme (2) aucune de ces régions (prolongés jusqu'à la frontière $\delta=0$) ne peut être bornée.

D'autre part, les régions Ω_1 et Ω_3 du plan $(x,\,y)$ sont nécessairement situées audessus de la droite $y=-\dfrac{h}{q_0}$, car l'hypothèse que $z>-h$ entraine $\delta=z-q_0y>0$, si $y\leqq-\dfrac{h}{q_0}$; et de même, les régions Ω_2 et Ω_4

seront situées audessous de la droite $y = \frac{h}{q_0}$ à cause de l'inégalité $z < h$. Je dis de plus que l'une au moins des régions Ω_1 et Ω_3 reste également au dessous de la droite $y = \frac{h}{q_0}$. En effet, les régions Ω_1 et Ω_3 ne peuvent pas avoir de points communs, car, si un tel point M existait, on pourrait le joindre à l'origine par deux lignes différentes, l'une appartenant à Ω_1 et l'autre à Ω_3; le contour fermé ainsi obtenu contiendrait alors à son intérieur l'une des régions Ω_2 ou Ω_4, ce qui est impossible, puisque ces régions ne sont pas bornées. Par conséquent, si les deux régions Ω_1 et Ω_3 contenaient des points sur la droite $y = \frac{h}{q_0}$, leurs frontières auraient également des points sur cette droite; mais cela n'est pas possible, car sur la frontière on a $\delta = z - q_0 y = 0$.

Nous arrivons donc à cette conclusion que l'une au moins des regions paires et l'une au moins des régions impaires se prolonge indéfiniment en restant constamment entre les deux droites $y = \pm \frac{h}{q_0}$. Il est essentiel de remarquer encore que l'une au moins de ces régions ne s'étend à l'infini que dans une seule direction. En effet, soient Ω_1 et Ω_2 les deux régions situées entre nos droites qui s'étendent à l'infini dans les deux sens; on pourra tracer dans chacune d'elles une ligne S_1 et S_2 respectivement qui se prolongeront à l'infini dans les deux directions, et puisque l'orgine est un point-frontière pour Ω_1 et Ω_2, elle sera située entre ces deux lignes, de sorte qu'il n'est pas possible qu'une troisième région s'étende à l'infini dans les deux sens. Or, les deux régions Ω_3 et Ω_4 devant être situées entre S_1 et S_2, elles seront à fortiori comprises entre les droites $y = \pm \frac{h}{q_0}$, et par conséquent elles ne s'étenderont à l'infini que dans une seule direction.

Ce point étant établi, nous pouvons donc admettre que la région Ω_1 entièrement comprise entre les droites $y = \pm \frac{h}{q_0}$ s'étend à l'infini dans la direction des x positifs seulement. Considérons alors une droite $x = x_0$ du plan des x, y; sur ses points contenus dans Ω_1 on a $\delta < 0$. Soit $u(x_0) = \delta(x_0, y_0) \leqq \delta(x_0, y)$ le minimum absolu de δ atteint en un des points considérés.

Examinons cette fonction $u(x)$ définie pour les valeurs croissantes de x. Nous remarquons que $u(x) < 0$, mais pour des valeurs suffisamment petites de x, $u(x)$ est aussi voisin de 0 que l'on veut; par conséquent, on peut fixer deux valeurs x_0, x_0', telles que $x_0 > x_0'$ et $u(x_0) - u(x'_0) < 0$.

Dans ces conditions, nous pouvons démontrer que pour $x_1 > x_0 > x_0'$ l'inégalité

$$|u(x_1)| \geqq \frac{x_1 - x_0'}{x^0 - x_0'} [u(x_0') - u(x_0)] \tag{3}$$

doit être vérifiée.

En effet, en tenant compte de ce que $u(x) < 0$, l'inégalité (3) est équivalente à

$$-u(x_1) \geqq \frac{x_1 - x_0'}{x_0 - x_0'} [u(x_0') - u(x_0)];$$

Par conséquent si elle n'est pas remplie, on devra avoir

$$-\frac{x_0 - x_0'}{x_1 - x_0'} u(x_1) + u(x_0) - u(x_0') < 0.$$

Ainsi la fonction

$$v(x, y) = -\frac{x - x_0'}{x_1 - x_0'} u(x_1) + \delta(x, y) - u(x_0') \tag{4}$$

devient négative pour $x = x_0$, $y = y_0$; il existe donc une région B, où $v < 0$, et cette région est bornée, car $v \geqq 0$ pour $x = x_0'$, pour $x_0' < x < x_1$ avec $\delta = 0$, et pour $x = x_1$.

Or ceci est en contradiction avec le lemme (2), puisque

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right)^2 = rt - s^2 \leqq 0.$$

Donc, l'inégalité (3) doit être exacte. Mais, pour x_1 suffisamment grand cette inégalité deviendrait incompatible avec l'hypothèse $|z| < h$.

Le théorème est par conséquent démontré.

En utilisant le lemme (2) sous sa forme générale nous pouvons généraliser notre théorème de la façon suivante.

4. Généralisation. *Une surface représentée par la fonction $z = f(x, y)$ admettant des dérivées continues des deux dremiers ordres, dont la courbure est négative en un point déterminé, où l'inclinaison du plan tangent $p^2 + q^2 = q_0^2 < 0$, ne peut rester pour toutes les valeurs de x, y comprise entre deux plans fixes $z = \pm h$, si sa courbure ne devient positive* [1]) *qu'en des points, où $p^2 + q^2 > N > q_0^2$.*

En effet, tout le raisonnement de la démonstration précedente jusqu'à la discussion de la fonction $v(x, y)$, donnée par la formule (4), subsiste

[1]) Il suffirait par exemple, que la courbure ne soit jamais positive dans le voisinage des points, où $p = q = 0$, et que dans le voisinage d'un au moins de ces points la courbure devienne négative.

sans modification. Seulement nous ne pouvons plus affirmer l'impossibilité du fait que la région B, où $v<0$, soit bornée. Cette région pourrait être bornée, si elle contenait des points, où

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{x_1 - x_0'} u(x_1) + p = 0\,, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = q - q_0 = 0$$

avec $rt - s^2 > 0$. Or, en ces points on aurait, par hypothèse,

$$p^2 + q^2 = \left[\frac{u(x_1)}{x_1 - x_0'}\right]^2 + q_0^2 > N;$$

donc

$$|u(x_1)| > (x_1 - x_0')\sqrt{N - q_0^2} \tag{5}$$

Ainsi, au lieu de l'inégalité (3) on est amené à l'inégalité (5); mais cette dernière est également incompatible avec le fait $|z| < h$. Notre généralisation est, par conséquent démontrée.

Remarque. Il importe de remarquer que les fonctions que nous venons de considérer et au sujet desquelles nous venons de démontrer l'impossibilité de l'inégalité $|z| < h$, peuvent parfaitement satisfaire à la condition $z < h$. Pour s'en convaincre il suffit de considérer la surface représentée par la fonction

$$z = h - e^{x - y^2}$$

On vérifie immédiatement que

$$rt - s^2 = -2e^{2x - 2y^2} < 0\,,$$

pour toute valeur de x et y, et en même temps on a bien

$$z < h.$$

Observons aussi que notre théorème cesserait d'être vrai pour les surfaces dont la courbure serait identiquement nulle, puisque la surface cylindrique $z = e^{-x^2}$ satisfait à la condition $|z| < 1$.

5. Théorème. *Si une fonction z admettant des dérivées continues des deux premiers ordres et satisfaisant à l'équation*

$$Ar + 2Bs + Ct = 0, \qquad (AC - B^2 > 0)$$

où A, B, C sont des fonctions finies quelconques de x, y, z, p, q, r, s, t, est bornée, elle est constante.

En effet, posons $rt - s^2 = \lambda$. Notre équation diviendra

$$Ar + 2Bs + C\frac{s^2 + \lambda}{r} = 0\,;$$

il en résulte que $\lambda \leqq 0$, et d'ailleurs, l'égalité $\lambda = 0$ entraine $r = s = t = 0$. Par conséquent, si on n'avait jamais $\lambda < 0$, cela prouverait que p et q sont des constantes qui doivent être nulles, si z qui se réduit à un plan reste bornée; z serait donc une constante. Mais, en vertu du théorème précédent, si l'inégalité $\lambda < 0$ a lieu au moins en un point, la fonction z ne peut pas être bornée.

Le théorème que nous venons de démontrer est la généralisation du théorème de Liouville que j'ai énoncée il y a quatre ans.

Nous allons déduire de ce théorème une proposition relative aux surfaces minima.

6. Théorème. *Si une surface minima S est représentée par l'équation*

$$z = f(x, y),$$

où f admet des dérivées continues des deux premiers ordres pour toute valeur réelle de (x, y), la surface S se réduit à un plan.

En effet, formons l'équation différentielle, à laquelle satisfait $u = \operatorname{arctg} p$, en supposant que

$$(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t = 0. \tag{6}$$

En différentiant [1]) par rapport à x l'équation (6), on a

$$(1 + q^2)\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - 2pq\frac{\partial^2 p}{\partial x\,\partial y} + (1 + p^2)\frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + 2p(rt - s^2) = 0$$

où, en éliminant t,

$$(1 + q^2)\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{2pr^2}{1 + p^2}\right) - 2pq\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x\,\partial y} - \frac{2prs}{1 + p^2}\right) + (1 + p^2)\left(\frac{\partial^2 p}{\partial y^2} - \frac{2ps^2}{1 + p^2}\right) = 0.$$

Or, on a manifestement,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\dfrac{\partial^2 p}{\partial x^2}}{1 + p^2} - \frac{2pr^2}{(1 + p^2)^2}; \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \frac{\dfrac{\partial^2 p}{\partial x\,\partial y}}{1 + p^2} - \frac{2psr}{(1 + p^2)^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\dfrac{\partial^2 p}{\partial y^2}}{1 + p^2} - \frac{2ps^2}{(1 + p^2)^2}.$$

---

[1]) Ici nous admettons l'existence des derivées troisièmes; mais cela résulte du fais que l'existenee des dérivées secondes entraine même l'analyticité de la fonction (on consultera à ce sujet mes travaux sur le problème de Dirichlet: Mathem. Ann. t. 69 p. 132 et Ann. de l'Ec. Normale, t. 29, p. 482).

Donc, u satisfait à l'équation

$$(1+q^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2pq\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + (1+p^2)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\,,$$

et, par conséquent, $u = \operatorname{arctg} p$ ne peut pas être borné dans tout le plan, sans se réduire à une constante. Or, d'après notre hypothèse, p ne devient infini pour aucunes valeurs finies de (x, y); donc, pour toute valeur finie de (x, y), on a $-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$, ce qui prouve que u est constant. On reconnait ainsi que p et q sont des constantes, et, par conséquent, la surface z est un plan.

Рѣшеніе неопредѣленнаго уравненія

$$X^3\varrho + Y^3 = 1.$$

(Окончаніе).

Проф. стипенд. Универ. Св. Владиміра ***Бориса Делоне.***

Въ замѣткѣ «Рѣшеніе неопредѣленнаго уравненія $X\varrho^3 + Y^3 = 1$» было указано на затрудненіе, встрѣтившееся при вычисленіи четныхъ показателей m, при которыхъ $(a\sqrt[3]{(\varrho)^2} + b\sqrt[3]{\varrho} + c)^m$ имѣетъ видъ $B\sqrt[3]{\varrho} + C$, отъ насъ почему-то ускользнуло доказательство слѣдующей теоремы:

Теорема. *«Квадратъ единицы не можетъ быть вида* $B\sqrt[3]{\varrho} + C$» хотя доказательство ея и не представляетъ затрудненія. Послѣ этой теоремы становится, конечно, ненужной теорема IV упомянутой замѣтки, а также и основанный на ней способъ вычисленія четныхъ m, при ϱ простомъ, помѣщенный въ самомъ концѣ упомянутой замѣтки, и мы получаемъ возможность вычислить всѣ рѣшенія уравненія $X^3\varrho + Y^3 = 1$, при произвольномъ ϱ.

Такимъ образомъ наша задача оказывается законченной.

Доказательство. Пусть $M(\sqrt[3]{\varrho})^2 + P\sqrt[3]{\varrho} + Q$ единица, и ея квадратъ вида $B\sqrt[3]{\varrho} + C$, тогда

$$M^3\varrho^2 + P^3\varrho + Q^3 - 3MPQ\varrho = 1 \qquad (1)$$

и

$$P^2 + 2MQ = 0 \qquad (2)$$

Покажемъ что уравненія (1) и (2) несовмѣстимы ни въ какихъ цѣлыхъ числахъ M, P, Q и ϱ. Изъ (2) слѣдуетъ или 1) $Q = \gamma^2$, $M = -2\alpha^2$, $P = \pm 2\alpha\gamma$; или 2) $Q = -\gamma^2$, $M = 2\alpha^2$, $P = \pm 2\alpha\gamma$; или 3) $Q = 2\gamma^2$, $M = -\alpha^2$, $P = \pm 2\alpha\gamma$; или 4) $Q = -2\gamma^2$, $M = \alpha^2$, $P = \pm 2\alpha\gamma$, подставивъ это въ (1) получимъ

или $$-\gamma t^2 \pm 20t\gamma^3 + \gamma^6 = +1 \qquad (3)$$

или $$-\gamma t^2 \pm 20t\gamma^3 + \gamma^6 = -1 \qquad (4)$$

или $$t^2 \pm 20t\gamma^3 - 8\gamma^6 = +1 \qquad (5)$$

или $$t^2 \pm 20t\gamma^3 - 8\gamma^6 = -1 \qquad (6)$$

если обозначимъ $\varrho\alpha^3$ черезъ t.

Найдемъ t изъ уравненія (3) $t = \dfrac{\pm 20\gamma^3 \pm \sqrt{400\gamma^6 + 32\gamma^6 - 32}}{16}$

слѣдовательно $27\gamma^6 - 2$ полный квадратъ. напримѣръ z^2 т. е. $z^2 + 2 = \sigma^3$, гдѣ $\sigma = 3\gamma^2$; разложимъ $z^2 + 2$ на множители $(z + \sqrt{-2})(z - \sqrt{-2}) = \sigma^3$;

$(z+\sqrt{-2})$ и $(z-\sqrt{-2})$ не могутъ имѣть общимъ дѣлителемъ число взаимно простое съ 2, но σ нечетное число, слѣдоват. эти числа взаимно простыя, и слѣд. какъ $z+\sqrt{-2}$, такъ и $z-\sqrt{-2}$ въ области $\Omega\sqrt{-2}$ кубы цѣлыхъ алгебраическихъ чиселъ, т. к. въ этой области только одинъ классъ главныхъ идеаловъ, и единицы только $+1$ и -1; пусть $z+\sqrt{-2}=(p+q\sqrt{-2})^3=p^3+3p^2q\sqrt{-2}-6pq^2-2q^3\sqrt{-2}$, т. е. $3p^2q-2q^3=q(3p^2-2q^2)=1$, т. е. $q=\pm 1$, и слѣд. $3p^2-2=\pm 1$, т. е. $p=\pm 1$, слѣд., $z=p^3-6pq^2=p(p^2-6q^2)=\pm 5$, откуда $\gamma=\pm 1$, и слѣд. $t=\frac{\pm 20\pm 20}{16}=0$ или $\pm\frac{5}{2}$, но если $t=0$, то $\alpha=0$, т. е. $M=0$, $P=0$, чего быть не можетъ; слѣд. уравненіе (3) невозможно.

Найдя t изъ уравненія (4), мы получимъ аналогично, что $27\gamma^6+2$ полный квадратъ, т. е. $z^2-2=27\gamma^6$, что невозможно, т. к. сравненіи $z^2-2\equiv 0$ (мод. 3) невозможно.

Уравненіе (5) перепишемъ иначе такъ:

$$u^2-4.27\gamma^6=1,$$

или если положимъ $t\pm 10\gamma^3=u$

$$\frac{(u-1)}{2}\cdot\frac{(u+1)}{2}=\sigma^3 \qquad (7)$$

гдѣ $\sigma=3\gamma^2$.

u нечетное, слѣд. $\frac{u-1}{2}$ и $\frac{u+1}{2}$ два послѣдовательныхъ цѣлыхъ числа, оба они по (7) должны быть кубами, слѣд. одно изъ нихъ 0, откуда $\sigma=0$, т. е. $\gamma=0$, что невозможно.

Уравненіе (6), наконецъ, аналогично приводитъ къ $u^2+1=4.27.\gamma^6$, что невозможно, т. к. невозможпо сравненіе $u^2+1\equiv 0$ (мод. 4),

Такимъ образомъ всѣ 4 уравненія (3), (4), (5) и (6), къ которымъ приводятъ (1) и (2), невозможны, а слѣд. (1) и (2) несовмѣстимы.

Ч. и т. д.

Пусть задано уравненіе $X^3\varrho+Y^3=1$. Для того чтобы найти всѣ его рѣшенія въ цѣлыхъ числахъ, надо вычислить основную единицу $a(\sqrt[3]{\varrho})^2+b\sqrt[3]{\varrho}+c$, напр. способомъ Вороного; если она вида $A(\sqrt[3]{\varrho})^2+C$, рѣшеній нѣтъ; если она вида $B\sqrt[3]{\varrho}+C$, то рѣшеніе только одно $X=B$, $Y=C$; если она трехчленная, то рѣшенія могутъ быть только среди ея степеней $(a(\sqrt[3]{\varrho})^2+b\sqrt[3]{\varrho}+c)^q$ съ простыми показателями $q\neq 2$ и 3, дѣлителями $ab\varrho$, которыхъ и надо испробовать; при этомъ можно воспользоваться еще слѣдующими замѣчаніями:

1) если q дѣлитель b, то q вида $3\gamma+2$
2) если q дѣлитель a, то q вида $3\gamma+1$
3) если $q>5$ и дѣлитель ϱ, то

$$\frac{q(q-1)}{2} b^2 c^{q-2} + qac^{q-1} \equiv 0 \pmod{q^2}$$

$$(q-1) b^2 c^{q-1} + 2ac^q \equiv 0 \pmod{q}$$

откуда $$b^2 - 2ac \equiv 0 \pmod{q} \qquad (8)$$

Пусть, напримѣръ, $\varrho = 23$. Основная единица $6230(\sqrt[3]{\varrho})^2 - 3160\sqrt[3]{\varrho} - 41399$, т. е. $a = 6230 = 2.5.7.89$, $b = 3160 = 2.2.2.5.79$; единственный простой дѣлитель a вида $3\gamma + 1$ есть 7, но $(a(\sqrt[3]{\varrho})^2 + b\sqrt[3]{\varrho} + c)^7$ не имѣетъ вида $B\sqrt[3]{\varrho} + C$, въ чемъ можно убѣдиться уже (мод. 49); единственный простой дѣлитель b вида $3.\gamma + 2$, есть 5, но $(a(\sqrt[3]{\varrho})^2 + b\sqrt[3]{\varrho} + c)^5$ не имѣетъ вида $B\sqrt[3]{\varrho} + C$; сравненіе (8) не удовлетворяется; такимъ образомъ уравненіе $23X^3 + Y^3 = 1$ рѣшеній не имѣетъ. Совершенно аналогично мы обслѣдовали уравненіе $X^3\varrho + Y^3 = 1$ для $\varrho = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 25, 26, 28, 30, 35, 36, 37, 39, 45, 58, 60, 61, 63, 65, 67, 68, 70$. Во всѣхъ случаяхъ оказалось, что, если основная единица трехчленная, рѣшеній нѣтъ.

Основная же единица имѣетъ видъ $B\sqrt[3]{\varrho} + C$ у слѣдующихъ изъ этихъ ϱ, вотъ соотвѣтственные X, Y,

$\varrho = 2$	7	9	17	19	20	26	28	37	43	63	65
$B = X = 1$	−1	1	−7	3	7	−1	1	−3	2	−1	1
$C = Y = -1$	2	−2	18	−8	−19	3	−3	10	−7	4	−4

Хотя мы и дали исчерпывающее рѣшеніе уравненій $X^3\varrho + Y^3 = 1$, однако въ заключеніе отмѣтимъ слѣдующее. Можно подозрѣвать, что существуетъ слѣдующая простая и изящная теорема: «уравненіе $X^3\varrho + Y^3 = 1$ не имѣетъ ни одного рѣшенія, если основная единица $a(\sqrt[3]{\varrho})^2 + b\sqrt[3]{\varrho} + c$ не имѣетъ вида $B\sqrt[3]{\varrho} + C$, и одно $X = B$, $Y = C$, если она имѣетъ видъ $B\sqrt[3]{\varrho} + C$». Для этого достаточно было бы показать, что никакая степень трехчленной единицы не можетъ быть вида $B\sqrt[3]{\varrho} + C$. Мы уже доказали это для второй степени (въ настоящей замѣткѣ), для куба (т. III предыдущей замѣтки); для того чтобы доказать то же относительно пятой степени, пришлось бы показать несовмѣстимость ни въ какихъ цѣлыхъ числахъ M, P, Q и ϱ уравненій $M^3\varrho^2 + P^3\varrho + Q^3 - 3MPQ\varrho = 1$ и $5M^4Q\varrho^2 + 10M^3P^2\varrho^2 + 30M^2PQ^2\varrho + 20MP^3Q\varrho + 5MQ^4 + P^5\varrho + 10P^2Q^3 = 0$, что уже очень сложно, и мы не видимъ, какимъ бы способомъ это можно было сдѣлать.

16/VIII—1915.

Quelques remarques sur l'interpolation.

Par Serge Bernstein.

1. On doit à M. Runge [1]) la démonstration du théorème fondamental suivant:

Soit $f(x)$ une fonction analytique régulière sur le segment AB de l'axe réel; le polynome de Lagrange $P_n(x)$ de degré n, qui se confond avec $f(x)$ en $n+1$ points (nœuds) *divisant le segment AB en n intervalles égaux, tend nécessairement, pour n très grand, vers la fonction $f(x)$ sur une partie $A'B'$ de AB, mais, en général, près des extrémités A et B il ne tend vers aucune limite.*

La méthode de M. Runge ne parait pas applicable aux fonctions non-analytiques, cependant elle rend vraisemblable qu'en général dans ce cas, les polynomes de Lagrange (Newton) ne tendront vers la fonction sur aucune partie du segment AB. Cette conclusion n'est pas tout à fait exacte, et la discussion de cette question va nous donner un exemple de l'application des principes indiqués dans mon mémoire [2]) «Sur les propriétés des fonctions analytiques réelles».

Nous pouvons d'abord établir la proposition suivante:

Soient $P_{n_0-1}(x)$, $P_{n_1-1}(x)$ ..., $P_{n_k-1}(x)$, ... des polynomes de Lagrange de la fonction $f(x)$ sur le segment AB, correspondant respectivement à $n_0 < n_1 < \ldots < n_k < \ldots$ nœuds équidistants; soient, de plus, $P_{n_0}(x, \alpha)$, $P_{n_1}(x, \alpha)$, ..., $P_{n_k}(x, \alpha)$, ... les polynomes de Lagrange qu'on obtient en ajoutant aux nœuds équidistants encore un seul nœud arbitraire α du segment AB; si tous les polynomes $P_{n_k-1}(x)$ et $P_{n_k}(x, \alpha)$ restent bornés sur le segment AB, la fonction $f(x)$ est analytique à l'intérieur de AB, quand le rapport $\frac{n_{k+1}}{n_k}$ est borné, elle est quasi-analytique [3]) quand le rapport $\frac{n_{k+1}}{n_k}$ n'est pas borné.

[1]) Zeitschrift für Math. und Physik, t. XLVI, 1902.

[2]) Mathem. Ann., t. LXXV, 1914.

[3]) On trouvera la définition des fonctions quasi-analytiques dans mon mémoire cité.

En effet, pour fixer les idées, réduisons le segment AB à 01. On aura alors évidemment

$$P_{n_k}(x, \alpha) - P_{n_k-1}(x) = \frac{(f(\alpha) - P_{n_k-1}(\alpha))x(x-b_1)\ldots(x-b_{n_k-1})}{\alpha(\alpha-b_1)\ldots(\alpha-b_{n_k-1})},$$

où $b_i = \frac{i}{n_{k-1}}$. Cette différence étant bornée et par exemple de valeur absolue moindre que un sur le segment AB, on a

$$|f(\alpha) - P_{n_k-1}(\alpha)| < \frac{\left|\alpha\left(\alpha - \frac{1}{n_k-1}\right)\cdots(\alpha-1)\right|}{\left[\frac{1}{2(n_k-1)}\right]^2 \cdot \frac{3}{2(n_k-1)} \cdots \frac{(2n_k-3)}{2(n_k-1)}},$$

ou bien, en supposant $\left|\alpha - \frac{1}{2}\right| < \frac{\lambda}{2(n_k-1)} = c < \frac{1}{2}$ ($n_k - \lambda$ étant un entier pair),

$$|f(\alpha) - P_{n_k-1}(\alpha)| < \frac{1.3\ldots(n_k+\lambda-1).1.3\ldots(n_k-\lambda-1)}{1.3\ldots(2n_k-3)}$$

$$= \frac{1.3\ldots(n_k-\lambda-1)}{(n_k+\lambda+1)\ldots(2n_k-3)}$$

$$< \left(\frac{n_k-\lambda}{3n_k+\lambda-2}\right)^{\frac{n_k-\lambda}{2}} = \left[\frac{1}{1+\frac{2n_k+2\lambda-2}{n_k-\lambda}}\right]^{\frac{n_k-\lambda}{2}}$$

$$< \left(\frac{1}{1+\frac{1+2c}{\frac{1}{2}-c}}\right)^{\left(\frac{1}{2}-c\right)(n_k-1)} = \varrho^{n_k-1},$$

où $\varrho = \left(\frac{1-2c}{3+2c}\right)^{\frac{1}{2}-c} < 1$. Pour achever la démonstration il suffit de se rapporter aux définitions du mémoire cité [1]).

2. Il est naturel de se demander à présent, si l'introduction des polynomes $P_{n_k}(x, \alpha)$ dans l'énoncé du théorème est vraiment essentielle. Pour répondre à cette question, nous allons établir un lemme préliminaire [2]):

---

[1]) Voir le théorème 29 de mon Mémoire «О наилучшемъ приближеніи непрерывныхъ функцій и т. д.».

[2]) On a évidemment une proposition analogue (mutatis mutandis) pour les fonctions quasi-analytiques.

Si $f(x)$ est une fonction continue sur 01, *analytique sur une partie* $\left(\frac{1}{2}-c, \frac{1}{2}+c\right)$ *de ce segment, les polynomes interpolateurs* $P_{n_k}(x)$ *correspondant à* (n_k+1) *nœuds équidistants, fournissent dans un intervalle fixe, assez petit* $\left(\frac{1}{2}-\delta, \frac{1}{2}+\delta\right)$ *une approximation égale à* ϱ^{n_k}, *où* $\varrho<1$.

On reconnait facilement qu'il existe des polynomes $R_{n_k}(x)$ de degré n_k, tels que sur tout le segment 01 on ait $|f(x)-R_{n_k}(x)|<\varepsilon_{n_k}$, ε_{n_k} tendant vers 0 avec $\frac{1}{n_k}$ et de plus dans un intervalle $\left(\frac{1}{2}-c', \frac{1}{2}+c'\right)$, où $c'<c$; $|f(x)-R_{n_k}(x)|<\varrho_1^{n_k}$ avec $\varrho_1<1$.

Par conséquent, si $P_{n_k}(x)$ est le polynome interpolateur en question, on a

$$P_{n_k}(x)-R_{n_k}(x)=S(x)\sum_{i=0}^{i=n_k}\frac{A}{\left(x-\frac{i}{n_k}\right)S'\left(\frac{i}{n_k}\right)},$$

où $S(x)=x\left(x-\frac{1}{n_k}\right)\cdots\left(x-\frac{n_k}{n_k}\right)$, $|A_i|<\varepsilon_{n_k}$ et de plus $|A_i|<\varrho_1^{n_k}$ lorsque $\left|\frac{1}{2}-\frac{i}{n_k}\right|<c'$. Or, posons $\left|x-\frac{1}{2}\right|<\delta=\frac{\lambda}{2n_k}<c'$ ($n_k-\lambda$ étant un entier impair); dans ces conditions

$$H_i=\left|\frac{S(x)}{\left(x-\frac{i}{n_k}\right)S'\left(\frac{i}{n_k}\right)}\right|<\frac{1.3\ldots(n_k+\lambda).3\ldots(n_k-\lambda)}{i!\,(n_k-i)!\,2^{n_k}}$$

$$=\frac{(n_k+\lambda)!\,(n_k-\lambda)!}{i!\,(n_k-i)!\left(\frac{n_k+\lambda-1}{2}\right)!\left(\frac{n_k-\lambda-1}{2}\right)!\,2^{2n_k-1}}$$

$$<n_k\frac{\left(\frac{n_k+\lambda}{2}\right)^{\frac{n_k+\lambda}{2}}\left(\frac{n_k-\lambda}{2}\right)^{\frac{n_k-\lambda}{2}}}{i^i(n_k-i)^{n_k-i}}=n_k\left[\frac{(n_k+\lambda)^{n_k+\lambda}(n_k-\lambda)^{n_k-\lambda}}{(n_k+h)^{n_k+h}(n_k-h)^{n_k-h}}\right]^{\frac{1}{2}},$$

si $\left|\frac{1}{2}-\frac{i}{n_k}\right|=\frac{h}{2n_k}$. Donc, pour $\frac{h}{2n_k}\geq c'$,

$$\frac{H_i}{n_k}<\left[\frac{(1+2\delta)^{1+2\delta}(1-2\delta)^{1-2\delta}}{(1+2c')^{1+2c'}(1-2c')^{1-2c'}}\right]^{\frac{n_k}{2}},$$

et, pour toute valeur i,

$$\frac{H_i}{n_k} < \left[(1+2\delta)^{1+2\delta}(1-2\delta)^{1-2\delta}\right]^{\frac{n}{2}k}.$$

Faisons ensuite δ assez petit pour avoir

$$\varrho_1\left[(1+2\delta)^{1+2\delta}(1-2\delta)^{1-2\delta}\right]^{\frac{1}{2}} < \varrho' < 1,$$

$$\left[\frac{(1+2\delta)^{1+2\delta}(1-2\delta)^{1-2\delta}}{(1+2c')^{1+2c'}(1-2c')^{1-2c'}}\right]^{\frac{1}{2}} < \varrho'.$$

Par conséquent, dans l'intervalle $\left(\frac{1}{2}-\delta, \frac{1}{2}+\delta\right)$ on a

$$|P_{n_k}(x) - f(x)| < (n_k^2 + n_k)\varrho'^{n_k} + \varrho_1^n < \varrho^n, \qquad (\varrho < 1)$$

c. q. f. d.

Il résulte de ce lemme que si nous construisons *une fonction $f(x)$ pour la quelle les polynomes considérés $P_n(x)$ de Lagrange tendent vers $f(x)$, sans fournir une approximation de l'ordre ϱ^n ($\varrho < 1$) près du milieu du segment, la fonction $f(x)$ ne sera pas analytique* (*ni quasi-analytique*) au milieu du segment. Or, il n'est pas difficile de construire une telle fonction. A cet effet, posons

$$S_n(x) = x\left(x-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(x-\frac{n}{n}\right),$$

$$Q_n(x) = \frac{(4e)^n}{n^3} S_n(x) \cdot x^{\frac{n}{2}}(1-x)^{\frac{n}{2}-1}.$$

et

$$f(x) = Q_2(x) + Q_4(x) + Q_8(x) + \ldots. \qquad (1)$$

Il est clair que les polynomes

$$Q_2(x),\ Q_2(x)+Q_4(x),\ Q_2(x)+Q_4(x)+Q_8(x) \text{ etc.}$$

seront les polynomes interpolateurs de Lagrange, correspondant à la subdivision successive du segment 0 1 en 4, 8, 16 etc. parties égales. Il suffit de montrer que la série (1) converge sur tout le segment 0 1, sans satisfaire à la condition du lemme. Or,

$$|S_n(x)| < 2\pi n e^{-n}\left[x^x(1-x)^{1-x}\right]^n x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}},$$

d'où

$$|Q_n(x)| < \frac{2^{2n+1}\pi}{n^2}\left[x^{x+\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{3}{2}-x}\right]^{n-1}.$$

Mais $x^{x+\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{3}{2}-x}$ atteint son maximum pour $x=\frac{1}{2}$, puisqu'en posant $2x-1=y$, on a

$$\log\left[x^{x+\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{3}{2}-x}\right]=\left(1+\frac{y}{2}\right)\log(1+y)+\left(1-\frac{y}{2}\right)\log(1-y)-2\log 2$$

$$=-2\log 2-\frac{y^4}{6}-\frac{2y^6}{15}-\ldots-\frac{(n-1)y^{2n}}{n(2n-1)}\ldots,$$

ce qui prouve que le maximum est atteint pour $y=0$.

Par conséquent, $|Q_n(x)|<\frac{8\pi}{n^2}$, et la série $f(x)$ est absolument et uniformément convergente sur tout le segment $[0\,1]$. D'autre part, pour $x=\frac{1}{2n}+\frac{1}{2}$

$$|Q_n(x)+Q_{2n}(x)+Q_{4n}(x)+\ldots|=|Q_n(x)|>\frac{k}{n^3}$$

où k est un nombre positif qui ne tend pas vers 0. Donc, pour $x=\frac{1}{2}$, la fonction $f(x)$ n'est pas analytique.

On voit ainsi que la restriction que nous avons dûe introduire dans l'énoncé du théorème (1) est vraiment essentielle.

Il serait intéressant d'étudier ces fonctions qu'on pourrait appeler *newtoniennes* à cause de la convergence de l'interpolation entre coordonnées équidistantes qui les rapproche des fonctions analytiques ou *tayloriennes*.

3. Sans nous arrêter plus longtemps sur les conditions de convergence de la formule d'interpolation entre coordonnées èquidistantes, bornons nous à la considération d'un exemple tout à fait élémentaire de *divergence en tout intervalle du segment considéré.* C'est le cas de la fonction $|x|$ sur un segment $(-h,+h)$. Prenons, par exemple, le segment $(-1,+1)$. Construisons le polynome de Newton $P_{2n}(x)$ de degré $2n$. On aura, évidemment,

$$(2)\quad P_{2n}(x)=1+\frac{-\frac{1}{n}(x+1)}{\frac{1}{n}}+\sum_{i=1}^{i=n}\frac{\Delta_{n+i}(x+1)\ldots x\left(x-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(x-\frac{i-1}{n}\right)}{(n+i)!\left(\frac{1}{n}\right)^{n+i}},$$

où Δ_{n+i} est la différence d'ordre $(n+i)$ de $|x|$; pour $x=-1$, les accroissements finis étant égaux à $\frac{1}{n}$. Donc, d'après la formule connue

pour le calcul des différences successives, on a

$$\Delta_{n+i} = \frac{i}{n} - \frac{i-1}{n}(n+i) + \frac{i-2}{n}\frac{(n+i)(n+i-1)}{2} - \dots$$

$$= 2\left[\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n}(n+i)\dots\right]$$

et, après quelques transformations élémentaires,

$$\Delta_{n+i} = (-1)^{i-1}\frac{2.(n+i-2)!}{(i-1)!\,n!}.$$

Par conséquent,

$$P_{2n}(x) = -x + 2\sum_{i=1}^{i=n}\frac{(-1)^{i-1}n^{n+i}}{(n+i)(n+i-1).n!(i-1)!}.(x+1)\dots x\left(x-\frac{1}{n}\right)\dots\left(x-\frac{i-1}{n}\right).$$

A cause de la symmétrie de $|x|$ nous pouvons nous borner à considérer les valeurs négatives de x et nous remarquons alors que tous les termes sous la somme sont de même signe. Donc, pour reconnaitre que $|P_{2n}(x)|$ croît au dela de toute limite dans tout intervalle, il suffit de constater que le seul terme

$$I_n(x) = \frac{2n^{2n}(x+1)\dots x\left(x-\frac{1}{n}\right)\dots\left(x-\frac{n-1}{n}\right)}{2n(2n-1)\,n!\,(n-1)!}$$

croît indéfiniment avec n. Or, en posant $x = -\frac{\lambda}{n} - \frac{1}{2n}$, on a

$$|I_n(x)| = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\dots\left(n-\lambda-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\dots\left(n+\lambda-\frac{1}{2}\right)}{(2n-1).(n!)^2}$$

$$> \frac{(n-\lambda-1)!\,(n+\lambda-1)!}{8n.(n!)^2} > \frac{e^{\frac{\lambda^2}{n}}}{8n^3}$$

ou bien

$$|I_n(x)| > \frac{e^{nx^2}}{8n^3}$$

ce qui démontre notre assertion.

4. On doit également à M. Runge la remarque importante qui si l'on condense convenablement les nœuds près des extrémités du segment, l'interpolation converge sur tout le segment pour toutes les fonctions analytiques.

Pour des fonctions quelconques le problème de la convergence peut être abordé comme il suit: soit $f(x)$ la fonction donnée et $P_n(x)$ son polynome d'approximation de degré n sur le segment considéré: on a

$$E_n = \text{Max} \mid f(x) - P_n(x) \mid .$$

Si $R_n(x)$ est le polynome de Lagrange, correspondant aux nœuds $a_0, a_1, \ldots, a_n$, et $A_{n+1}(x) = (x - a_0) \ldots (x - a_n)$, on aura

$$R_n(x) = A_{n+1}(x) \sum_{i=0}^{i=n} \frac{f(a_i) - P(a_i)}{(x - a) A'_{n+1}(a_i)} + P_n(x).$$

Donc,

$$\mid f(x) - R_n(x) \mid < E_n \sum_{i=0}^{i=n} \left| \frac{A_{n+1}(x)}{(x - a_i) A'_{n+1}(a_i)} \right| + E_n .$$

Il s'agit de déterminer le polynome $A_{n+1}(x)$, pour lequel

$$\sum_{i=0}^{i=n} \left| \frac{A_{n+1}(x)}{(x - a_i) A'_{n+1}(a_i)} \right|$$

soit aussi petit que possible pour toute valeur de x sur le segment considéré. Sans résoudre la question, nous remarquerons que *ce minimum est de l'ordre de* log$n$ et que, en particulier, *cette somme est de l'ordre de log$n$ pour* $A_{n+1}(x) = \cos\ (n+1)\arccos x$.

On a donc

$$\mid f(x) - R_n(x) \mid < k E_n \log n,$$

où k est une constante fixe, si $A_{n+1}(x) = \cos(n+1)\, arc\cos x$.

Pour la démonstration on pourra consulter [1]) les pages 54—56 de mon Mémoire «Sur l'ordre de la meilleure approximation etc.» (Publié par l'Académie de Belgique, t. IV, 1912).

Remarquons ainsi qu'il *est possible de distribuer les nœuds de la sorte que l'interpolation converge pour toute fonction satisfaisant à une condition de Dini-Lipschitz, mais il n'est pas possible de donner une distribution valable pour l'ensemble de toutes les fonctions continues.*

5. Examinons encore la question de la convergence des polynomes de Lagrange *à l'extérieur* des points d'interpolation ou, en d'autres termes, la question de *l'extrapolation.*

Il est toujours possible de prolonger la fonction $f(x)$ à l'extérieur du segment $(-1, +1)$ et de supposer que $f(x) - P_n(x) = \varepsilon_n(x)$ tend encore

[1]) Voir aussi D. Jackson, «On the accuracy of trigonometric interpolation». Transactions of the American Mathematical Society 1913.

vers 0 sur une partie extérieure à ce segment. Pour que l'extrapolation soit possible, c'est-à-dire, en conservant les notations du § précédent, pour que $f(x) - R_n(x)$ tende vers 0 à l'extérieur du segment $(-1, +1)$ il sera nécessaire et suffisant que

$$B_n(x) = A_{n+1}(x) \sum \frac{\varepsilon_n(a_i)}{(x-a)A'_{n+1}(a_i)}$$

tende vers 0 à l'extérieur du segment. Pour être dans les conditions les plus favorables d'extrapolation, il faudra déterminer le polynome $A_{n+1}(x)$ par la condition suivante: il faut choisir *les racines* $a_0, a_1, \ldots, a_n$ *de* $A_{n+1}(x)$ *par la condition que si on considère tous les polynomes* $H_n(x)$ *pour lesquels* $|H_n(a_i)| \leqq 1$, *la plus grande valeur* M *qu'ils peuvent atteindre en un point extérieur* x *soit aussi petite que possible.* Il est aisé de voir qu'on *devra prendre* $A_{n+1}(x) = \sqrt{1-x^2}.\ \sin n \arccos x$.

En effet, les points a_i étant donnés, on voit que le polynome $H_n(x)$ qui en un point extérieur x prend la plus grande valeur M sera donné par l'expression

$$H_n(x) = A_{n+1}(x) \sum \frac{(-1)^i}{(x-a_i)A'_{n+1}(a_i)} \tag{3}$$

Par conséquent, si $A_{n+1}(x) = \sqrt{1-x^2}.\ \sin n \arccos x$, on aura

$$H_n(x) = \cos\ n\ \arccos\ x;$$

donc, en des points a_i de $(-1, +1)$ différents des racines de

$$\sqrt{1-x^2}.\ \sin n \arccos x = 0.$$

$|H_n(a_i)|$ resterait inférieur à 1, de sorte que le polynome (3) relatif à ces points a_i conduirait au point x à une valeur supérieure à M.

Les nœuds étant ainsi choisis, on a, par conséquent,

$$|B_n(x)| \leqq \frac{E_n}{2}\left[(x+\sqrt{x^2-1})^n + (x-\sqrt{x^2-1})^n\right],$$

si $|f(x) - P_n(x)| \leqq E_n$ sur $(-1, +1)$.

Donc, *pour qu'une fonction* $f(x)$ *soit extrapolable à l'extérieur de* $(-1, +1)$, *quelque soit* n, *il suffit qu'elle soit analytique; pour qu'elle soit extrapolable pour une infinité de valeurs de* n, *il suffit qu'elle soit quasi-analytique.* Naturellement, pour ces fonctions, l'extrapolation pourrait se faire également avec d'autres nœuds [1]), et *on retrouverait nécessairement la même fonction, à cause de l'unicité du prolongement analytique et quasi-analytique* [2]).

[1]) Les nœuds indiqués auraient seulement l'avantage de fournir une extrapolation dans des points de l'axe réel aussi éloignés que possible.

[2]) D'après mon mémoire «Sur les propriétés des fonctions analytiques réelles».

6. Mais il est intéressant de rechercher, s'il existe d'autres fonctions extrapolables que les fonctions analytiques et quasi-analytiques. On a, à cet égard, une première proposition que voici:

Si les polynomes interpolateurs de Lagrange $R_{n_0}(x)$, $R_{n_1}(x), \ldots, R_{n_k}(x)$ *de la fonction* $f(x)$ *relatifs respectivement à des nœuds*

$$(a_0^0,\ a_1^0, \ldots, a_{n_0}^0),\ (a_0^1,\ a_1^1, \ldots,\ a_{n_1}^1)\ \textit{etc.}$$

du segment $(-1, +1)$, *restent bornés dans une certaine partie extérieure au segment; s'il en est de même des polynomes* $R_{n_k}(x, \alpha)$ *qu'on obtient en ajoutant un nœud arbitraire* α *du segment* $(-1, +1)$, *la fonction* $f(x)$ *se prolonge analytiquement ou quasi-analytiquement dans cette partie extérieure suivant que* $\frac{n_k+1}{n_k}$ *reste borné ou non.*

En effet,

$$R_{n_k}(x, \alpha) - R_{n_k}(x) = (f(\alpha) - R_{n_k}(\alpha)) \frac{(x - a_0^{(k)})(x - a_1^{(k)}) \ldots (x - a_{n_k}^{(k)})}{(\alpha - a_0^{(k)})(\alpha - a_1^{(k)}) \ldots (\alpha - a_{n_k}^{(k)})}.$$

Par conséquent, en supposant, pour fixer les idées, $x > 1$, on a

$$|f(\alpha) - R_{n_k}(\alpha)| < \varrho^{n_k},$$

si l'on prend $\frac{1-\alpha}{x-1} \leqq \varrho$ et $\frac{2}{x+1} \leqq \varrho$; donc $f(\alpha)$ est analytique dans le voisinage de $x = 1$.

Ici, comme dans le cas de l'interpolation équidistante, nous sommes amenés à introduire les polynomes $R_{n_k}(x, \alpha)$, si nous voulons retrouver les fonctions analytiques. En rejetant ces polynomes $R_k(x, \alpha)$ additionnels nous nous trouvons devant la question suivante: *quelles sont les fonctions* $f(x)$ *jouissant de la propriété de pouvoir être indéfiniment approchées sur un segment* ABC *par des polynomes* $P_n(x)$ *de degré* n *qui se confondent en* $(n+1)$ *points de l'intervalle* AB *du segment* ABC *avec la fonction* $f(x)$.

Les fonctions analytiques, nous l'avons vu, jouissent de cette propriété (pourvu que la partie BC ne soit trop grande); de plus, cette propriété disparait, en général, si la fonction n'est pas analytique ou admet une singularité au point B. Il est certain néanmoins que cette propriété peut se rencontrer chez certaines fonctions non-analytiques qui forment ainsi une nouvelle classe de fonctions qu'on pourrait appeler *extrapolables*. En voici un exemple. Soit une série convergente pour $|x| \leqq 1$

$$f(x) = \sum A_n S_n(x)$$

où $S_n(x) = \frac{\sin 2^n \arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$ (A_n sont des constantes). La somme $\sum_0^n A_n S_n(x)$ est un polynome de degré $2^n - 1$ qui se confond avec $f(x)$ en 2^n points:

$$\cos\frac{k\pi}{2^n+1},\quad \cos\frac{(k+1)\pi}{2^n+1},\ \ldots,\ \cos\frac{k+2^n-1}{2^n+1}\pi$$

qui, par un choix convenable de k, peuvent toujours être placés dans un intervalle arbitraire de longueur 1 du segment $(-1,+1)$. Parmi les exemples des fonctions extrapolables nous pourrions indiquer aussi la fonction de Weierstrass [1]) sans dérivées. Mais il sera impossible, en général, de faire tendre vers 0 la partie du segment où se trouvent tous les nœuds donnés. En effet, si le polynome de Lagrange de degré donné n_k tendait dans ce cas vers un polynome limite, ce serait nécessairement le polynome de Taylor, et la fonction serait analytique [2]) (si les degrés de ces polynomes n_k sont tels que $\frac{n_k+1}{n_k}$ reste borné), ou tout au moins indéfiniment dérivable et développable en série de Taylor, dont la sommation pourrait être faite par grouppement de termes (si $\frac{n_{k+1}}{n_k}$ n'est pas borné).

7. Abordons, enfin, une question connexe aux précédentes, celle du calcul approché des *intégrales définies*. Les géomètres qni se sont occupés de cette question supposent, en général, *analytique* la fonction sous l'intégrale, et c'est en partant de cette hypothèse et en faisant intervenir les dérivées successives qu'ils obtiennent des bornes supérieures de l'erreur commise. Or, on peut dans la méthode de Gauss et ses diverses généralisations rejeter cette restriction et obtenir très simplement une borne supérieure de l'erreur qui même pour les fonctions analytiques sera, en général, plus précise que la borne qu'on obtient en faisant intervenir les dérivées successives. En effet, soit

$$I=\int_a^b f(x)\,dx$$

l'intégrale à calculer, où $f(x)$ est une fonction continue, et soit $E_n f(x)$ la meilleure approximation de $f(x)$ au moyen d'un polynome de degré n sur ab. Ecrivons $f(x)=P_{2n+1}(x)+[f(x)-P_{2n+1}(x)]$, ou $P_{2n+1}(x)$ est le polynome d'approximation de degré $(2n+1)$ de $f(x)$. Ceci posé, pour cal-

---

[1]) Voir le § 7 de mon article «Sur la valeur asymptotique de la mellieure approximation des fonctions analytiques» (en russe). Communications de la Soc. Math. de Kharkow, t. XIII.

[2]) Cela résulte de la proposition suivante qui est une coséquence immédiate de mes recherehes citées sur les fonctions analytiques réelles: *Si la série* $f(x)=\Sigma x^n P_n(x)$, *ou* $P_n(x)$ *est un polynome de degré non supérieur à* kn, k *étant fixe, converge en un point différent de l'origine,* $f(x)$ *est analytique à l'origine.*

culer l'intégrale I, appliquons le procédé de Gauss, en désignant par I_{n+1} la valeur approchée

$$I_{n+1} = \sum_{i=0}^{i=n} A_i f(a_i),$$

où a_i sont les racines du polynome de Legendre de degrè $(n+1)$ et A les coefficients de Gauss jouissant de la propriété fondamentale que

$$\sum_{i=0}^{i=n} A_i a_i^k = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1} \qquad (\text{si } 0 \leqq k \leqq 2n+1).$$

Donc,

$$\sum_{i=0}^{i=n+1} A_i P_{2n+1}(a_i) = \int_a^b P_{2n+1}(x)\,dx,$$

et par conséquent

$$I - I_{n+1} = \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{i=0}^{i=n} A_i f(a_i)$$

$$= \int_a^b [f(x) - P_{2n+1}(x)]\,dx - \sum_{i=0}^{i=n} A_i [f(a_i) - P_{2n+1}(a)].$$

D'où

$$|I - I_{n+1}| < 2(b-a)\,E_{2n+1} f(x), \tag{4}$$

car

$$\sum_{i=0}^{i=n} |A_i| = b - a.$$

Notre inégalité (4) montre que *le procédé de Gauss est applicable à toutes les fonctions continues.* Appliquons aussi l'inégalité (4) à une fonction analytique. Soit

$$I = \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{3-x} = \log 2.$$

D'après la formule (6) de mon article «Sur la valeur asymptotique de la meilleure approximation etc.» (Bull. de l'Académie de Belgique, 1913, No. 2), on a

$$E_n\left(\frac{1}{3-x}\right) = \frac{1}{8(3+2\sqrt{2})^n}.$$

Donc, ici

$$|I - I_{n+1}| < \frac{1}{2(3+2\sqrt{2})^{2n+1}}. \tag{5}$$

L'évaluation bien connue de l'erreur d'après M. A. Markoff [1]) donnerait

$$I - I_{n+1} = \frac{2^{2n+3}}{(2n+3)!}\left\{\frac{1.2\ldots(n+1)}{(n+2)\ldots(2n+2)}\right\}^2 [\log(3-x)]^{(2n+2)},$$

où $|x| < 1$. On aurait donc

$$(6) \quad |I - I_{n+1}| < \frac{2}{(2n+2)(2n+3)}\left\{\frac{1.2\ldots(n+1)}{(n+2)\ldots(2n+2)}\right\}^2 \sim \frac{\pi}{2n \cdot 4^{2n+2}}$$

et on voit immédiatement que le second membre de (5) est beaucoup plus petit que celui de (6). L'inégalité (5) montre, en particulier, qu'il suffit de prendre $n = 5$ dans la formule de Gauss pour avoir déjà une erreur inférieure à $\frac{2}{10^9}$ (l'inégalité (6) donnerait dans les mêmes conditions $\frac{2}{10^8}$).

On arrive à une inégalité équivalente pour la méthode de Hermite-Tchebychef dans le cas de l'intégrale

$$H = \int_{-1}^{+1} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

On a, d'après Hermite, la valeur approchée de H,

$$H_n = \frac{\pi}{n}\sum_{i=1}^{i=n} f(a_i) \qquad \left(a_i = \cos\frac{2i-1}{2n}\pi\right);$$

et par un raisonnement analogue au précédent on obtient

$$H - H_n = \int_{-1}^{+1} \frac{[f(x) - P_{2n-1}(x)]\,dx}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{\pi}{n}\sum_{i=1}^{i=n} [f(a_i) - P_{2n-1}(a_i)],$$

d'où

$$(7) \quad |H - H_n| < 2\pi E_{2n-1} f(x).$$

8. Les conclusions sont moins satisfaisantes pour le calcul des intégrales par la méthode de Cotes. En effet, soit

$$C_{n+1} = A_0 f(0) + A_1 f\left(\frac{1}{n}\right) + \ldots + A_n f(1)$$

la valeur approchée de l'intégrale

$$C = \int_0^1 f(x)dx,$$

---

[1]) Voir, p. ex., Encyklop. der math. Wissenschaften II A 2, p. 125.

où A_i sont les coefficients de Cotes. En vertu de la propriété de ces coefficients, on a $C_{n+1} = C$, si $f(x)$ est un polynome de degré non supérieur à n. Par conséquent,

$$C - C_{n+1} = \int_0^1 [f(x) - P_n(x)]dx - \sum_{i=1}^{i=n} A_i [f(a_i) - P_n(a_i)],$$

donc

$$|C - C_{n+1}| < E_n f(x) \left[\sum_{i=1}^{i=n} |A_i| + 1 \right]. \tag{8}$$

Tant que n n'est pas très grand, on a $A_i > 0$, et par conséquent, $\sum |A_i| = 1$. Dans ce cas la formule de Cotes qui est d'un emploi facile n'est pas à dédaigner, car on a alors ($n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9$)

$$|C - C_{n+1}| < 2 E_n (f(x)). \tag{8(bis)}$$

Ainsi, en faisant $n = 9$, pour calculer l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{3-x} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \log 2$$

on commet une erreur inférieure à $\frac{4}{8[3+2\sqrt{2}]^9} = \frac{1}{2(3+2\sqrt{2})^9} < \frac{1}{10^7}$.

Mais, si n croît indéfiniment, il est probable que $\sum |A_i|$ croît indéfiniment; il peut donc exister des fonctions pour lesquelles la formule de Cotes serait inapplicable pour n très grand. Il ne serait pas sans intérêt d'étudier d'une façon détaillée cette question qui est étroitement liée à la question de la convergence des polynomes de Newton.

О преобразованіи плоскости на плоскость вблизи особыхъ линій.

Н. Ѳ. Спенглеръ.

Положимъ, что преобразованіе плоскости (A, B) на плоскость (X, Y) задано уравненіями

$$\begin{aligned} x &= f(\alpha, \beta), \\ y &= \varphi(\alpha, \beta), \end{aligned} \tag{1}$$

при чемъ f и φ однозначны и непрерывны вмѣстѣ со своими частными производными перваго порядка.

Если якобіевскій опредѣлитель системы (1) не равенъ нулю въ нѣкоторой точкѣ (α_0, β_0), то область Γ, достаточно близкая къ этой точкѣ, преобразуется взаимно однозначно на область Z плоскости (X, Y). Если же область Γ недостаточно близка къ точкѣ (α_0, β_0), то, хотя бы въ этой области якобіевскій опредѣлитель и не обращался въ нуль, преобразованіе области Γ на область Z могло бы быть и не взаимно однозначнымъ. Напримѣръ, если $x=\alpha^3+3\beta$, $y=\beta^3+3\alpha$, то точки

$$\alpha=\frac{3}{2},\ \beta=\frac{\sqrt{21}-3}{4} \quad \text{и} \quad \alpha=-\frac{\sqrt{21}-3}{4},\ \beta=\frac{3}{2},$$

лежащія въ односвязной области, въ которой якобіевскій опредѣлитель не равенъ нулю, соотвѣтствуютъ одной и той же точкѣ плоскости (X, Y).

Назовемъ особыми точками тѣ, для которыхъ якобіанъ системы (1) обращается въ нуль. Соотвѣтствующія имъ точки на плоскости (X, Y) также будемъ называть особыми. Легко доказать теорему: *если область Z плоскости (X, Y) односвязна и не заключаетъ особыхъ точекъ, то въ ней α, β можно опредѣлить, какъ однозначныя функціи отъ x, y.*

Якобіевскій опредѣлитель преобразованія (1), вообще говоря, обращается въ нуль вдоль нѣкоторой кривой $\triangle$.

Уравненіе этой кривой будетъ

$$\frac{D(f, \varphi)}{D(\alpha, \beta)}=0. \tag{2}$$

При помощи преобразованія (1) кривая $\triangle$ переходитъ на плоскости (X, Y), положимъ, въ кривую D. Уравненіями послѣдней являются уравненія (1) и (2).

Нашей задачей является изслѣдованіе преобразованія (1) вблизи линіи $\triangle$.

Пусть линія $\triangle$ пересѣкается нѣкоторой кривой

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha(\tau), \\ \alpha &= \beta(\tau) \end{aligned} \tag{3}$$

въ точкѣ $[\alpha_0 = \alpha(\tau_0), \beta_0 = \beta(\tau_0)]$, при чемъ предполагаемъ, что $\alpha'(\tau_0)$ и $\beta'(\tau_0)$ не обращаются одновременно въ нуль. Кривая (3) преобразуется на плоскости (X, Y) въ

$$\begin{aligned} x &= f[\alpha(\tau), \beta(\tau)], \\ y &= \varphi[\alpha(\tau), \beta(\tau)]. \end{aligned} \tag{4}$$

Угловой коэффиціентъ касательной къ послѣдней въ точкѣ пересѣченія съ кривой D будетъ

$$m = \left[\frac{\varphi_\alpha'\alpha' + \varphi_\beta'\beta'}{f_\alpha'\alpha' + f_\beta'\beta'}\right]_{\tau=\tau_0}.$$

Въ силу (2) этотъ коэффиціентъ не зависитъ отъ отношенія $\frac{\beta'}{\alpha'}$, т. е. отъ направленія кривой (3) въ точкѣ пересѣченія ея съ кривой $\triangle$, если только одно изъ выраженій $\varphi_\alpha'\alpha' + \varphi_\beta'\beta'$, $f_\alpha'\alpha' + f_\beta'\beta'$, а слѣдовательно, вслѣдствіе (2), и оба не обращаются въ нуль въ точкѣ (α_0, β_0). Въ послѣднемъ случаѣ кривая (4) имѣетъ, вообще говоря, точку возврата въ точкѣ

$$x_0 = f[\alpha(\tau_0), \beta(\tau_0)], \; y_0 = \varphi[\alpha(\tau_0), \beta(\tau_0)].$$

Направленіе касательной въ этой точкѣ кривой (4) будетъ въ послѣднемъ случаѣ, вообще говоря, зависѣть отъ вторыхъ производныхъ $\alpha''(\tau)$, $\beta''(\tau)$, т. е. отъ кривизны кривой (3) въ точкѣ (α_0, β_0). Въ общемъ же случаѣ кривыя (4) при любомъ отношеніи $\frac{\beta'}{\alpha'}$ будутъ касаться кривой D въ точкѣ $(x_0\ y_0)$. Возникаетъ вопросъ, будутъ ли при этомъ кривыя (4) пересѣкать въ точкѣ (x_0, y_0) кривую D или нѣтъ, т. е. преобразуется ли область, лежащая по обѣ стороны кривой $\triangle$, въ область, лежащую также по обѣ стороны кривой D или только по одну. Этимъ вопросомъ мы и займемся.

Ограничимся тѣми участками кривыхъ $\triangle$ и D, которые не пересѣкаютъ сами себя. Относительно нихъ мы сдѣлаемъ еще слѣдующія предположенія. Положимъ, что кривая $\triangle$ выражается въ параметрической формѣ

$$\begin{aligned} \alpha &= g(\sigma), \\ \beta &= h(\sigma), \end{aligned} \tag{5}$$

при чемъ

$$\sigma_0 \leq \sigma \leq \sigma_1.$$

Тогда кривая D при помощи (1) также выразится въ параметрической формѣ, положимъ, слѣдующей

$$\begin{aligned} x &= k(\sigma), \\ y &= l(\sigma). \end{aligned} \tag{6}$$

Предположимъ еще, что функціи g, h, k, l такъ же, какъ f, φ аналитическія и, кромѣ того, для нашихъ кривыхъ

$$\begin{aligned} [g'(\sigma)]^2 + [h'(\sigma)]^2 &\neq 0, \\ [k'(\sigma)]^2 + [l'(\sigma)]^2 &\neq 0. \end{aligned} \tag{7}$$

При этихъ предположеніяхъ координаты любой точки, лежащей достаточно близко отъ кривой $\triangle$, можно выразить черезъ длину τ нормали, опущенной изъ этой точки на кривую, и черезъ значеніе σ, соотвѣтствующее основанію нормали [1]). Поэтому, взявъ область Γ на плоскости (A, B), достаточно близкую къ кривой (5), можемъ при помощи формулъ

$$\begin{aligned} \alpha &= g(\sigma) - h'(\sigma)\tau, \\ \beta &= h(\sigma) + g'(\sigma)\tau, \end{aligned} \tag{8}$$

преобразовать ее взаимно-однозначно на область P плоскости (Σ, T), при чемъ область P опредѣляется условіями

$$\sigma_0 \leq \sigma \leq \sigma_1, \quad |\tau| < \varepsilon, \tag{P}$$

гдѣ ε достаточно мало. Перемѣнныя σ и τ, выраженныя въ функціяхъ отъ α, β, будутъ однозначными аналитическими функціями.

Точно также область Z, достаточно близкую къ кривой (6), при помощи формулъ

$$\begin{aligned} x &= k(s) - l'(s)t, \\ y &= l(s) + k'(s)t \end{aligned} \tag{9}$$

---

[1]) Bliss. Transactions of the American Mathematical Society T. V, стр. 487.

можно преобразовать взаимно-однозначно на область плоскости (S, T), опредѣляемую условіями

$$\sigma_0 \leq s \leq \sigma_1, \quad |t| < \eta. \tag{10}$$

Разрѣшая уравненія (9) относительно s, t, причемъ беремъ тѣ вѣтви, которыя обращаются въ σ, 0 на кривой D, и подставляя въ полученныя формулы вмѣсто x, y ихъ значенія изъ (1), а затѣмъ значенія α, β изъ (8), получимъ

$$\begin{aligned} s &= s(\sigma, \tau), \\ t &= t(\sigma, \tau). \end{aligned} \tag{11}$$

Послѣднія формулы опредѣляютъ преобразованіе области P плоскости (Σ, T) на область U плоскости (S, T), причемъ мы должны предполагать, что ε выбрано достаточно малымъ и предѣлы σ_0 и σ_1 замѣнены болѣе узкими σ_0' и σ_1' такъ, что область U лежитъ внутри области (10).

Кривая $\triangle$ соотвѣтствуетъ значенію $\tau = 0$, т. е. кооординатной оси Σ въ плоскости (Σ, T). Также и кривая D соотвѣтствуетъ значенію $t = 0$, т. е. координатной оси S въ плоскости (S, T).

Слѣдовательно,

$$\begin{aligned} s(\sigma, 0) &\equiv \sigma, \\ t(\sigma, 0) &\equiv 0, \end{aligned} \tag{12}$$

откуда имѣемъ

$$\frac{\partial s(\sigma, 0)}{\partial \sigma} = 1, \quad \frac{\partial t(\sigma, 0)}{\partial \sigma} = 0. \tag{13}$$

До сихъ поръ мы не пользовались тѣмъ обстоятельствомъ, что на кривой $\triangle$ якобіевскій опредѣлитель $\dfrac{D(x, y)}{D(\alpha, \beta)}$ обращается въ нуль, и потому предыдущіе результаты справедливы для любыхъ кривыхъ $\triangle$ и D, удовлетворяющихъ перечисленнымъ выше условіямъ.

Воспользуемся теперь условіемъ (1). Имѣемъ

$$\frac{D(x, y)}{D(s, t)} \frac{D(s, t)}{D(\sigma, \tau)} = \frac{D(x, y)}{D(\alpha, \beta)} \frac{D(\alpha, \beta)}{D(\sigma, \tau)}. \tag{14}$$

Такъ какъ въ силу условій (7) опредѣлители $\dfrac{D(x, y)}{D(s, t)}$ и $\dfrac{D(\alpha, \beta)}{D(\sigma, \tau)}$ не обращаются въ нуль, то, вслѣдствіе (2), имѣемъ

$$\frac{D(s, t)}{D(\sigma, \tau)} = 0 \tag{15}$$

для $\tau = 0$.

Подставляя въ $\frac{D(s,\ t)}{D(\sigma,\ \tau)}$ значенія частныхъ производныхъ при $\tau = 0$, получимъ

$$\left.\frac{\partial t(\sigma,\ \tau)}{\partial \tau}\right|_{\tau=0} = 0. \tag{16}$$

Очевидно, что $s(\sigma,\ \tau)$ и $t(\sigma,\ \tau)$ аналитическія функціи отъ σ, τ, такъ какъ f, φ, g, h аналитическія функціи. Въ силу (12) будемъ имѣть

$$t = t(\sigma,\ \tau) = \tau^p \varphi(\sigma,\ \tau), \tag{17}$$

при чемъ вблизи $\tau = 0$ $\psi(\sigma,\ \tau)$ не обращается въ нуль. Отсюда заключаемъ, что производная $\frac{\partial t(\sigma,\ \tau)}{\partial \sigma}$ высшаго порядка малости относительно τ, чѣмъ $\frac{\partial t(\sigma,\ \tau)}{\partial \tau}$, и потому вблизи $\tau = 0$ знакъ опредѣлителя $\frac{D(s,\ t)}{D(\sigma,\ \tau)}$ опредѣляется знакомъ производной $\frac{\partial t(\sigma,\ \tau)}{\partial \tau}$.

Такъ какъ $\frac{\partial s(\sigma,\ 0)}{\partial \sigma} = 1$, то изъ уравненія $s = s(\sigma, \tau)$ вблизи $\tau = 0$ σ опредѣлится, какъ аналитическая функція отъ s и τ. Подставляя это значеніе σ въ (17), мы найдемъ для τ разложеніе по дробнымъ степенямъ t съ коэффиціентами-аналитическими функціями отъ s, а затѣмъ найдемъ и σ въ функціи отъ s, t. Подставляя найденныя значенія для σ, τ въ (8) и затѣмъ значенія для s, t, опредѣленныя изъ (9) черезъ x, y, получимъ α, β въ функціяхъ отъ x, y, вообще говоря, неоднозначныхъ.

Замѣтимъ, что такъ какъ мы разсматриваемъ только вещественныя значенія перемѣнныхъ, то полученнымъ нами дробнымъ степенямъ t мы должны давать только вещественныя значенія. Поэтому, если опредѣлитель (2), а слѣдовательно, и производная $\frac{\partial t(\sigma,\ \tau)}{\partial \tau}$ не мѣняютъ знака то p въ (17) будетъ нечетнымъ числомъ и значенія дробныхъ степеней будутъ вполнѣ опредѣленны. Въ этомъ случаѣ α, β будутъ однозначными функціями отъ x, y вблизи любой точки кривой D, а такъ какъ точки кривыхъ D и $\triangle$ соотвѣтствуютъ другъ другу взаимно-однозначно, то легко доказать, что α, β будутъ однозначными функціями отъ x, y во всей области Z, достаточно близкой къ D.

Итакъ, *если опредѣлитель* $\frac{D(x,\ y)}{D(\alpha,\ \beta)}$ *на кривой* $\triangle$ *обращается въ нуль, но при переходѣ черезъ эту кривую знака не мѣняетъ, и если кривая* $\triangle$ *и соотвѣтствующая ей кривая* D *удовлетворяютъ вышеприведеннымъ условіямъ, то* α, β *являются однозначными функціями отъ* x, y *вблизи кривой* D.

Разсмотримъ теперь случай, когда $\frac{D(x, y)}{D(\alpha, \beta)}$ мѣняетъ знакъ при переходѣ черезъ кривую $\triangle$. Тогда изъ (14) заключаемъ, что $\frac{D(s, t)}{D(\sigma, \tau)}$, а слѣдовательно, и $\frac{\partial t(\sigma, \tau)}{\partial \tau}$ мѣняетъ знакъ при переходѣ τ черезъ значеніе $\tau = 0$.

Имѣемъ

$$t(\sigma, \tau) = t(\sigma, \tau) - t(\sigma, 0) = \tau \frac{\partial t(\sigma, \theta\tau)}{\partial \tau}, \qquad (18)$$

откуда видимъ, что такъ какъ τ и $\frac{\partial t}{\partial \tau}$ мѣняютъ одновременно знакъ, то $t(\sigma, \tau)$ знака не мѣняетъ при переходѣ τ черезъ значеніе 0. Это значитъ, что область P, расположенная по обѣ стороны оси Σ, преобразуется въ область U, расположенную только по одну сторону оси S. Въ этомъ случаѣ въ (17) p есть четное число, а потому въ разложеніи τ по дробнымъ степенямъ t показатели будутъ имѣть четные знаменатели, и слѣдовательно, каждому значенію t будетъ соотвѣтствовать два значенія τ. Если t достаточно мало, то эти значенія τ будутъ различныхъ знаковъ.

Вернемся теперь къ плоскостямъ (A, B) и (X, Y). Очевидно, что область Γ, расположенная по обѣ стороны кривой $\triangle$, въ разсматриваемомъ случаѣ преобразуется въ область Z, расположенную только по одну сторону кривой D. Это слѣдуетъ изъ того, что для всѣхъ точекъ области Z нормали t, опущенныя изъ этихъ точекъ на кривую D, имѣютъ одинаковые знаки. Иначе можно въ этомъ убѣдиться при помощи слѣдующихъ разсужденій. Положимъ, что имѣемъ точку (x_0, y_0), не лежащую на кривой D, и положимъ что мы соединили эту точку съ точкой (x_1, y_1) кривой D и слѣдующей за ней по кривой (x_2, y_2) отрѣзками прямыхъ, не пересѣкающими кривой, въ другихъ точкахъ. Площадь треугольника съ вершинами (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2) будетъ

$$\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Будемъ приближать точку (x_2, y_2) къ точкѣ (x_1, y_1). Тогда, начиная съ нѣкотораго момента, опредѣлитель будетъ сохранять одинъ и тотъ же знакъ. Въ зависимости отъ того, будетъ ли этотъ знакъ положителенъ или отрицателенъ, скажемъ, что точка (x_0, y_0) находится съ лѣвой или съ правой стороны кривой D. Возьмемъ точку (x_0, y_0) изъ области Z, а за точку (x_1, y_1) выберемъ основаніе нормали, опущенной

изъ точки (x_0, y_0) на кривую D. Тогда, изслѣдуя преобразованіе взятыхъ точекъ въ области U, легко убѣдимся, что точки области Z всѣ лежатъ по одну сторону кривой D.

Итакъ, *если опредѣлитель* $\frac{D(x, y)}{D(\alpha, \beta)}$ *на кривой* $\triangle$ *обращается въ нуль и при переходѣ черезъ эту кривую мѣняетъ знакъ, и если кривая* $\triangle$ *и соотвѣтствующая ей кривая* D *удовлетворяютъ приведеннымъ выше условіямъ, то область* Γ, *расположенная по обѣ стороны кривой* $\triangle$, *преобразовывается въ область* Z, *расположенную только по одну сторону кривой* D, *и перемѣнныя* α, β *являются двузначными функціями отъ* x, y, *вблизи кривой* D.

Замѣтимъ, что если область Γ расположена только по одну сторону кривой $\triangle$, то между областями Γ и Z будетъ существовать взаимно однозначное соотвѣтствіе.

Легко доказать обратную теорему. *Если преоброзованіе (1) таково, что нѣкоторая кривая* $\triangle$ *въ плоскости* (A, B) *преобразуется въ кривую* D *на плоскости* (X, Y), *при чемъ* $\triangle$ *и* D *обладаютъ перечисленными выше свойствами, и кромѣ того нѣкоторая область* Γ, *расположенная по обѣ стороны кривой* $\triangle$, *преобразуется въ область* Z, *расположенную по одну сторону отъ кривой* D, *то якобіевскій опредѣлитель* $\frac{D(x, y)}{D(\alpha, \beta)}$ *обращается въ нуль на кривой* $\triangle$ *и при переходѣ черезъ нее мѣняетъ знакъ.*

Дѣйствительно, мы опять можемъ выполнить преобразованія (8) и (9). Тогда кривыя $\triangle$ и D преобразуются соотвѣтственно въ оси Σ и S, а области Γ и Z въ области P и U, при чемъ область P расположена по обѣ стороны оси Σ, а область U только по одну сторону оси Z. Будутъ и здѣсь имѣть мѣсто формулы (12), (13), (14). При переходѣ τ черезъ значеніе нуль t обращается въ нуль, а знака не мѣняетъ, слѣдовательно,

$$\frac{\partial t(\sigma, 0)}{\partial \tau} = 0. \qquad (16)$$

Кромѣ того, производная $\frac{\partial t(\sigma, \tau)}{\partial \tau}$ при переходѣ τ черезъ значеніе нуль должна измѣнить знакъ. Отсюда при помощи формулы (14) мы и убѣждаемся въ справедливости теоремы.

Примѣры. При помощи формулъ

$$x = \alpha\beta,$$
$$y = \alpha + \beta$$

плоскость (A, B) преобразуется въ часть плоскости (X, Y), лежащую внѣ параболы $y^2 = 4x$.

Возьмемъ болѣе сложный случай преобразованія

$$\begin{aligned} x &= 2\alpha\beta + 2\alpha, \\ y &= \alpha^2 - \beta^2 + 2\beta. \end{aligned} \tag{19}$$

Опредѣлитель этого преобразованія

$$\begin{vmatrix} 2\beta + 2 & 2\alpha \\ 2\alpha & -2\beta + 2 \end{vmatrix} = 4(1 - \alpha^2 - \beta^2)$$

обращается въ нуль на окружности $\alpha^2 + \beta^2 - 1 = 0$ и мѣняетъ знакъ при переходѣ черезъ эту окружность. Уравненіе окружности

$$\alpha^2 + \beta^2 - 1 = 0 \tag{$\triangle$}$$

можемъ замѣнить слѣдующими уравненіями

$$\begin{aligned} \alpha &= \cos\varphi, \\ \beta &= \sin\varphi, \end{aligned}$$

и тогда уравненія кривой D получимъ изъ (19)

$$\begin{aligned} x &= \sin 2\varphi + 2\cos\varphi, \\ y &= \cos 2\varphi + 2\sin\varphi. \end{aligned} \tag{D}$$

Это, какъ не трудно видѣть, есть гипоциклоида съ тремя точками возврата, соотвѣтствующими значеніямъ $\varphi = 30^0$, $\varphi = 150^0$, $\varphi = 270^0$.

Пусть точка (α_0, β_0) есть точка окружности $\triangle$. Тогда прямая

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_0 + \alpha_0 t, \\ \beta &= \beta_0 - (1 + \beta_0)\, t \end{aligned} \tag{20}$$

преобразуется въ

$$\begin{aligned} x &= 2\alpha_0(1 + \beta_0) - 2\alpha_0(1 + \beta_0)\, t^2, \\ y &= \alpha_0{}^2 - \beta_0{}^2 + 2\beta_0 - 2\beta_0(1 + \beta_0)\, t^2, \end{aligned} \tag{21}$$

т. е. также въ прямую. Такимъ образомъ, когда точка (α, β) описываетъ прямую (20), точка (x, y) двигается также по прямой, но дойдя до точки, соотвѣтствующей (α_0, β_0), возвращается обратно, и при томъ значеніямъ $\pm t$ соотвѣтствуетъ одна и та же точка (x, y). Мы предполагали, что α_0 и $1 + \beta_0$ не равны одновременно нулю. Въ противномъ случаѣ можемъ взять прямую

$$\begin{aligned} \alpha &= t, \\ \beta &= 0. \end{aligned}$$

Замѣтимъ, что участки кривой D вблизи точекъ возврата не подчиняются условіямъ, при которыхъ мы доказывали предыдущія теоремы, и какъ разъ для этихъ участковъ полученные результаты невѣрны. Дѣйствительно, возьмемъ, напримѣръ, точку (0, —1) на кривой $\triangle$, и проведемъ черезъ нее прямую $\alpha = 0$. На плоскости (X, Y) взятой точкѣ соотвѣтствуетъ точка (0,—3), а прямая изображается точками, координаты которыхъ опредѣляются уравненіями

$$x = 0\,,$$
$$y = -\beta^2 + 2\beta\,,$$

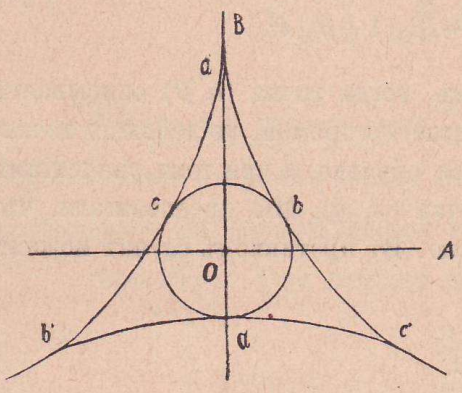
т. е. полупрямой, пересѣкающей кривую D въ точкѣ (0, —3).

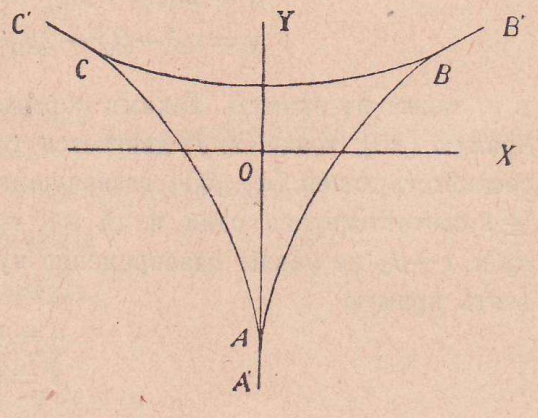
Такимъ образомъ точки плоскости (X, Y), которыя при переходѣ (α, β) черезъ $\triangle$ не могутъ на остальныхъ участкахъ кривой D выйти за предѣлы этой кривой, черезъ точку (0, —3) выходятъ изнутри кривой D наружу. Это относится и къ двумъ другимъ точкамъ возврата кривой D.

Прямая (20) пересѣкаетъ окружность $\triangle$, кромѣ точки (α_0, β_0), еще въ другой точкѣ, положимъ

$$\alpha_1 = \beta_0 + \alpha_0 t_1\,,$$
$$\beta_1 = \beta_0 - (1 + \beta_0)\, t_1.$$

Для всѣхъ значеній t отъ 0 до t_1 формулы (21) будутъ давать точки, лежащія внутри кривой D. Эти же точки мы получимъ, и давая t значенія отъ 0 до $-t_1$. Слѣдовательно, внѣ окружности $\triangle$ существуютъ области, преобразовывающіяся опять въ область лежащую внутри кривой D. Вычисляя значеніе $-t_1$ и подставляя его вмѣсто t въ (21), найдемъ уравненіе кривой, ограничивающей эти области. Это будетъ гипоциклоида, тождественная съ D, но повернутая около начала на 60^0.





Кругъ $\triangle$ и каждый изъ криволинейныхъ треугольниковъ abc', bca', cab' преобразуются въ область, ограниченную кривой D. Для α, β, разсматриваемыхъ, какъ функціи отъ x, y, легко построить поверхность, аналогичную поверхности Риманна. Для этого вырѣжемъ изъ плоскости фигуру ABC, и затѣмъ три равныя между собой части плоскости, ограниченныя линіей $A'ABB'$ и расположенныя по лѣвую сторону этой линіи. Первую часть присоединимъ къ ABC по кривой AB, вторую по кривой BC и полупрямой BB' и третью по кривой CA и полупрямыми CC' и AA'.

Предыдущіе результаты легко распространить на пространство n измѣреній. Положимъ, что преобразованіе пространства $(A_1, A_2, \ldots A_n)$ на пространство $(X_1, X_2, \ldots X_n)$ задано уравненіями

$$\begin{aligned} x_1 &= f_2(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n), \\ x_2 &= f_2(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= f_n(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n), \end{aligned} \tag{22}$$

гдѣ $f_1, f_2, \ldots f_n$—аналитическія функціи отъ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$.

Возьмемъ въ пространствѣ $(A_1, A_2, \ldots A_n)$ протяженіе n—1-го измѣренія $\triangle$, заданное уравненіями

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= g_1(\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_{n-1}), \\ \alpha_2 &= g_2(\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_{n-1}), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_n &= g_n(\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_{n-1}), \end{aligned} \tag{23}$$

при чемъ точки $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_{n-1})$ лежатъ въ нѣкоторой области T.

Протяженіе $\triangle$ при помощи формулъ (22) преобразуется въ протяженіе D, заданное, положимъ, уравненіями

$$\begin{aligned} x_1 &= k_1(\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_{n-1}), \\ x_2 &= k_2(\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_{n-1}), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= k_n(\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_{n-1}). \end{aligned} \tag{24}$$

Предположимъ, что протяженія $\triangle$ и D не пересѣкаютъ сами себя, что функціи g и k аналитическія и что

$$\begin{aligned} \sum_i \left[\frac{D(g_1, \ldots g_{i-1}, g_{i+1}, \ldots g_n)}{D(\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_{n-1})}\right]^2 &\neq 0, \qquad i = 1, 2, \ldots n \\ \sum_i \left[\frac{D(k_1, \ldots k_{i-1}, k_{i+1}, \ldots k_n)}{D(\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_{n-1})}\right]^2 &\neq 0. \end{aligned} \tag{25}$$

Преобразуемъ область Γ пространства $(A_2, A_2, \ldots A_n)$, достаточно близкую къ $\triangle$, при помощи формулъ

$$\alpha_i = g_i(\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_{n-1}) + (-1)^i \frac{D(g_1, \ldots g_{i-1}, g_{i+1}, \ldots g_n)}{D(\sigma_2, \sigma_2, \ldots \sigma_{n-1})} \sigma_n \quad i=1, 2, \ldots, n \qquad (26)$$

на область P пространства $(\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots \Sigma_n)$. Если $|\sigma_n|$ достаточно мало, то преобразованіе (26) устанавливаетъ взаимно однозначную зависимость между областями Γ и P, при чемъ σ опредѣляются, какъ аналитическія функціи отъ α. Дѣйствительно, якобіевскій опредѣлитель системы (26) при $\sigma_n = 0$, какъ не трудно видѣть, будетъ

$$(-1)^{n+1} \sum \left[\frac{D(g_1, \ldots g_{i-1}, g_{i+1}, \ldots g_n)}{D(\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_{n-1})} \right]^2,$$

и слѣдовательно, въ силу (25) отличенъ отъ нуля.

Остается доказать, что σ будутъ однозначны относительно α. Положимъ обратное, т. е., что, какъ бы мало ни было по абсолютной величинѣ σ_n, всегда одной точкѣ α области Γ соотвѣтствуютъ двѣ точки σ' и σ'' области P. Можемъ выдѣлить два ряда точекъ σ' и σ'' стремящихся къ предѣламъ σ_0' и σ_0'', при чемъ въ послѣднихъ $\sigma_n = 0$. Эти предѣлы не могутъ быть различны, ибо тогда двумъ различнымъ точкамъ $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_{n-1})$ соотвѣтствовала бы одна и таже точка протяженія $\triangle$, что противорѣчитъ условію о томъ, что $\triangle$ не пересѣкаетъ само себя. Но также σ_0' и σ_0'' не могутъ быть и равны, ибо тогда вблизи соотвѣтствующей точки α перемѣнныя $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ были бы двузначными функціями, что противорѣчитъ тому, что якобіевскій опредѣлитель системы (26) въ этой точкѣ не равенъ нулю.

Точно также область Z пространства $(X_1, X_2, \ldots X_n)$, достаточно близкую къ D, можемъ преобразовать при помощи формулъ

$$x_i = k_i(s_1, s_2 \ldots s_{n-1}) + (-1)^i \frac{D(k_1, \ldots k_{i-1}, k_{i+1}, \ldots k_n)}{D(s_1, s_2, \ldots s_n)} s_n \quad i=1, 2, \ldots n \qquad (27)$$

на нѣкоторую область пространства $(S_1, S_2, \ldots S_n)$, если только

$$|s_n| < \eta.$$

Разрѣшая уравненія (27) относительно s, беря тѣ вѣтви, которыя обращаются соотвѣтственно въ $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_{n-1}$, 0 на кривой D, и под-

ставляя въ полученныя выраженія вмѣсто x ихъ значенія изъ (22), а вмѣсто α ихъ значенія изъ (26), получимъ

$$\begin{aligned} s_1 &= s_1(\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n), \\ s_2 &= s_2(\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ s_n &= s_n(\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n). \end{aligned} \tag{28}$$

Послѣднія формулы опредѣляютъ преобразованіе области P пространства $(\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots \Sigma_n)$ на область U пространства $(S_1, S_2, \ldots S_n)$. При этомъ мы должны предполагать, что область P на столько сужена, что область U лежитъ въ области, которая опредѣляется формулами (27).

Протяженіе $\triangle$ соотвѣтствуетъ значенію $\sigma_n = 0$, т. е. координатному протяженію $n-1$-го измѣренія $(\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots \Sigma_{n-1})$ въ пространствѣ $(\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots \Sigma_n)$. Также и протяженіе D соотвѣтствуетъ значенію $s_n = 0$, т. е. координатному протяженію $n-1$-го измѣренія $(S_1, S_2, \ldots S_{n-1})$ въ пространствѣ $(S_1, S_2, \ldots S_n)$. Слѣдовательно,

$$\begin{aligned} &s_i(\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_{n-1}, 0) = \sigma_i, \qquad i = 1, 2 \ldots, n-1 \\ &s_n(\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_{n-1}, 0) = 0, \end{aligned} \tag{29}$$

откуда имѣемъ

$$\begin{aligned} &\frac{D(s_1, s_2, \ldots s_{n-1})}{D(\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_{n-1})}\Bigg|_{\sigma_n=0} = 1, \\ &\frac{\partial s_n(\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_{n-1}, 0)}{\partial \sigma_i} = 0. \qquad i = 1, 2, \ldots n-1 \end{aligned} \tag{30}$$

Отсюда аналогично тому, какъ изъ формулъ (13), (14), мы найдемъ, что въ случаѣ, когда якобіевскій опредѣлитель $\dfrac{D(x_1, x_2, \ldots x_n)}{D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)}$ обращается въ нуль на $\triangle$, но не мѣняетъ знака при переходѣ черезъ $\triangle$, то $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ являются однозначными функціями отъ $x_1, x_2, \ldots x_n$ въ области Z, достаточно близкой къ D. Если же нашъ опредѣлитель мѣняетъ знакъ, то α являются двузначными функціями отъ x.

Какъ мы видѣли, при условіи (25) координаты любой точки $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)$, достаточно близкой къ $\triangle$, можемъ выразить при помощи формулъ (26). Условимся говорить, что точка $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)$ лежитъ слѣва или справа отъ $\triangle$ смотря по тому, будетъ ли для нея σ_n положительно или отрицательно.

Итакъ, можемъ формулировать слѣдующія теоремы.

Пусть выполнены условія, наложенныя на функціи f и на протяженія $\triangle$ и D. *Тогда, если якобіевскій опредѣлитель системы (22) обращается въ нуль на* $\triangle$, *но при переходѣ черезъ* $\triangle$ *знака не мѣняетъ, то* α *являются однозначными функціями отъ* x *вблизи* D, *и область* Γ, *расположенная достаточно близко по обѣ стороны* $\triangle$, *преобразуется взаимно однозначно на область* Z, *расположенную также по обѣ стороны* D. *Если же якобіевскій опредѣлитель при переходѣ черезъ* $\triangle$ *мѣняетъ знакъ, то* α *являются двузначными функціями отъ* x *вблизи* D, *и область* Γ, *расположенная достаточно близко по обѣ стороны* $\triangle$, *преобразуется въ область* Z, *расположенную только по одну сторону* D. *Если же въ послѣднемъ случаѣ* Γ *расположена только по одну сторону* $\triangle$, *то между* Γ *и* Z *существуетъ взаимно однозначное соотвѣтствіе.*

Обратно, *если преобразованіе (22) таково, что нѣкоторое протяженіе* $\triangle$ n*—1-го измѣренія въ пространствѣ* $(A_1, A_2, \ldots A_n)$ *преобразуется въ протяженіи* D *въ пространствѣ* $(X_1, X_2, \ldots X_n)$, *при чемъ нѣкоторая область* Γ, *расположенная по обѣ стороны* $\triangle$, *преобразуется въ область* Z, *расположенную только по одну сторону* D, *то якобіевскій опредѣлитель системы (22) обращается въ нуль на* $\triangle$ *и при переходѣ черезъ* $\triangle$ *мѣняетъ знакъ.*

Рѣшеніе неопредѣленнаго уравненія $X^3\varrho+Y^3=1$.

(Окончательный результатъ).

Проф. стипенд. Универ. Св. Владиміра ***Бориса Делоне.***

Въ концѣ послѣдней замѣтки, посвященной этому уравненію, я высказалъ предположительно слѣдующую простую теорему:

«*Уравненіе* $X^3\varrho + Y^3 = 1$ *не имѣетъ ни одного рѣшенія, если основная единица порядка* $0(\sqrt[3]{\varrho})$ *не имѣетъ вида* $B\sqrt[3]{\varrho}+C$, *и одно рѣшеніе* $X=B$, $Y=C$, *если она имѣетъ видъ* $B\sqrt[3]{\varrho}+C$».

Эта теорема оказывается вѣрной. Дѣйствительно, въ моихъ замѣткахъ заключались доказательства слѣдующихъ положеній:

Замѣчаніе: «У одной изъ двухъ единицъ $M(\sqrt[3]{\varrho})^2+P\sqrt[3]{\varrho}+Q$, или ей обратной, коэффиціенты M, P и Q не одного знака, и одинъ изъ нихъ можетъ быть нулемъ, коэффиціенты же другой всѣ три не равны 0 и одного знака».

Теорема I: «Никакая степень двучленной единицы не можетъ быть опять двучленной единицей».

Теорема II: «Квадратъ единицы не можетъ быть вида $B\sqrt[3]{\varrho}+C$».

Теорема III: «Кубъ единицы не можетъ быть вида $B\sqrt[3]{\varrho}+C$».

Доказательство этой послѣдней теоремы довольно сложное.

И, наконецъ, теорема IV: «Если $(a(\sqrt[3]{\varrho})+b\sqrt[3]{\varrho}+c)^m$, вида $(B\sqrt[3]{\varrho}+C)$, то m простое число, дѣлитель $ab\varrho$». Эта послѣдняя теорема тоже вѣрная, но она должна быть замѣнена слѣдующей новой:

Теорема IV. «Никакая степень единицы, кромѣ первой, не можетъ быть вида $B\sqrt[3]{\varrho}+C$».

Доказательство этой теоремы слѣдующее:

Пусть $[a(\sqrt[3]{\varrho})^2+b\sqrt[3]{\varrho}+c]^m=M(\sqrt[3]{\varrho})^2+P\sqrt[3]{\varrho}+Q$, тогда, какъ легко убѣдиться,

$$M=\frac{(a(\sqrt[3]{\varrho})^2+b\sqrt[3]{\varrho}+c)^m+\zeta(a\zeta^2(\sqrt[3]{\varrho})^2+b\zeta\sqrt[3]{\varrho}+c)^m+\zeta^2(a\zeta^4(\sqrt[3]{\varrho})^2+b\zeta^2\sqrt[3]{\varrho}+c)^m}{3(\sqrt[3]{\varrho})^2}$$

(т. е.$=(\zeta,\ \varepsilon_0)$)

Предположимъ что $M=0$. Разсмотримъ отдѣльно случаи m вида $3.\gamma+2$, и m вида $3.\gamma+1$, m же вида $3.\gamma$ разсматривать не нужно, на основаніи теоремы III.

1) $M=0$, $m=3.\gamma+2$, тогда

$$(\zeta^2a(\sqrt[3]{\varrho})^2+b\sqrt[3]{\varrho}+\zeta c)^m+(\zeta a(\sqrt[3]{\varrho})^2+b\sqrt[3]{\varrho}+\zeta^2c)^m=-(a(\sqrt[3]{\varrho})^2+b\sqrt[3]{\varrho}+c)^m.$$

На основаніи теоремы II можно предполагать m нечетнымъ, и тогда $(\zeta^2a(\sqrt[3]{\varrho})^2+b\sqrt[3]{\varrho}+\zeta c)+(\zeta a(\sqrt[3]{\varrho})^2+b\sqrt[3]{\varrho}+\zeta^2c)$ дѣлитель $-(a(\sqrt[3]{\varrho})^2+b\sqrt[3]{\varrho}+c)^m$, т. е. единица, т. е.$-a(\sqrt[3]{\varrho})^2+2b\sqrt[3]{\varrho}-c$ есть единица

т. е. $$-a^3\varrho^2+8b^3\varrho-c^3-6abc\varrho=\pm 1$$

но $$a^3\varrho^2+b^3\varrho+c^3-3abc\varrho=1$$

откуда сложеніемъ получаемъ $9b\varrho(b^2-ac)=2$ или 0; слѣд.

$$b^2-ac=0,\quad \text{или}\quad b=0,$$

но b^2-ac есть коэффиціентъ «обратной» единицы и слѣд., по «замѣчанію» $\neq 0$, слѣдовательно $b=0$, т. е. основная единица двучленная, и не только m-тая, но и никакая ея степень, по теоремѣ I, не можетъ быть вида $B\sqrt[3]{\varrho}+Q$.

2) $M=0$, $m=3.\gamma+1$, тогда

$$(a(\sqrt[3]{\varrho})^2+\zeta b\sqrt[3]{\varrho}+\zeta^2c)^m+(a(\sqrt[3]{\varrho})^2+\zeta^2b\sqrt[3]{\varrho}+\zeta c)^m=-((a(\sqrt[3]{\varrho^2}+b(\sqrt[3]{\varrho}+c)^m,$$

откуда, аналогично предыдущему, получаемъ, что $a=0$, т. е., что основная единица двучленная; примѣняемъ теорему I, ч. и д. т.

Такимъ образомъ мы получили неожиданно простое рѣшеніе вопроса. Рѣшеніемъ можетъ быть только одна основная единица, которую легко вычислить.

20 ноября 1915 г.

Михаилъ Николаевичъ Лагутинскій.

(Некрологъ).

17 Января 1915 г. въ Геттингенѣ скоропостижно скончался дѣятельный членъ Харьковскаго математическаго общества приватъ-доцентъ Харьковскаго университета Михаилъ Николаевичъ Лагутинскій.

Біографія М. Н. несложна: родился въ 1871 году; послѣ окончанія Харьковской 3-ьей гимназіи поступилъ въ Харьковскій университетъ, который и окончилъ съ дипломомъ 1-ой степени въ 1894 году. Въ университетѣ за сочиненіе «О плоскихъ алгебраическихъ кривыхъ 3-го порядка» получилъ серебряную медаль. Послѣ окончанія университета былъ оставленъ для приготовленія къ профессурѣ; выдержалъ въ 1901 г. магистерскій экзаменъ и съ 1902 года вступилъ въ число приватъ-доцентовъ Харьковскаго университета. Въ томъ же году онъ былъ приглашенъ въ Харьковскій технологическій институтъ въ качествѣ руководителя практическими занятіями по математикѣ.

Покойный М. Н. нѣсколько разъ былъ въ заграничныхъ командировкахъ въ Геттингенѣ; тамъ же былъ онъ и лѣтомъ 1914 года, тамъ его застигла война, и оттуда онъ уже не вернулся.

Вся жизнь М. Н. была посвящена наукѣ и только наукѣ, которую онъ страстно любилъ. Скромный и страшно строгій по отношенію къ самому себѣ, вѣчно сомнѣвающійся въ цѣнности своихъ результатовъ, М Н. былъ удивительно снисходителенъ къ другимъ. Его мягкость и скромность много вредили ему и были причиной многихъ огорченій. Но ко всѣмъ терніямъ нашъ покойный товарищъ относился чрезвычайно добродушно. Мнѣ, какъ одному изъ наиболѣе близкихъ товарищей М. Н., очень часто приходилось журить его за это излишнее добродушіе, но это не помогало. И вотъ почему этотъ человѣкъ, несомнѣнно талантливый, несомнѣнно обладавшій огромной эрудиціей, оставался въ тѣни. Не гонялся М. Н. и за матеріальными благами. Ему дважды представлялась возможность хорошо устроиться внѣ Харькова, но М. Н. предпочиталъ оставаться въ родномъ университетѣ и тянуть тяжелую лямку приватъ-доцента.

Послѣ М. Н. остался цѣлый рядъ научныхъ работъ, среди которыхъ находятся два большихъ сочиненія: «Частные алгебраическіе интегралы» и «Приложеніе полярныхъ операцій къ интегрированію обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій въ конечномъ видѣ». Послѣднее сочиненіе было уже принято въ качествѣ магистерской диссертаціи. Диспутъ предполагался по возвращеніи М. Н. изъ заграницы.

М. Н. по своимъ склонностямъ и по складу своего ума былъ по преимуществу геометръ и алгебраистъ. Всякаго, болѣе близко знакомаго съ нимъ, не могло не поражать его богатое геометрическое воображеніе и особое искусство въ различныхъ формальныхъ, чисто алгебраическихъ вычисленіяхъ. Благодаря этимъ особенностямъ своего таланта, М. Н. стоялъ какъ-то въ сторонѣ отъ большой дороги, по которой идетъ въ настоящее время большинство математиковъ; вотъ главная причина того, что работы М. Н. оцѣнивались иногда значительно ниже ихъ дѣйствительной цѣнности. Въ эти работы нужно было вникнуть глубже, что сопряжено было нерѣдко съ большими трудностями, такъ какъ изложеніе у М. Н. бывало часто тяжелымъ.

Главныя работы М. Н., о которыхъ я упоминалъ выше, посвящены разработкѣ и обобщенію идей Darboux, изложенныхъ въ его извѣстномъ мемуарѣ «Mémoire sur les équations différentielles algébriques du premier ordre et du premier degré».

Методъ Darboux распространяется М. Н. на системы дифференціальныхъ уравненій. Къ этимъ работамъ примыкаетъ рядъ статей М. Н., посвященныхъ разработкѣ тѣхъ либо другихъ спеціальныхъ вопросовъ. Между прочимъ въ небольшой статьѣ «Нѣсколько словъ о методѣ частныхъ интеграловъ G. Darboux» М. Н. особенно подчеркиваетъ ту связь, какая существуетъ между изслѣдованіями въ духѣ G. Darboux и рядомъ другихъ задачъ, изъ которыхъ особенно важной является задача объ опредѣленіи интегральныхъ кривыхъ, проходящихъ черезъ особенныя точки; задача эта, разсмотрѣнная впервые Briot и Bouquet, послужила темой извѣстныхъ работъ Poincaré. Насколько мнѣ извѣстно, покойный М. Н. интересовался главнымъ образомъ, этимъ вопросомъ, и указанныя мною работы являлись необходимымъ, по его мнѣнію, предварительнымъ изслѣдованіемъ.

При рѣшеніи поставленныхъ себѣ задачъ М. Н. натолкнулся на цѣлый рядъ чисто алгебраическихъ трудностей; между прочимъ онъ столкнулся съ вопросомъ, относящимся къ теоріи элиминаціи, какъ извѣстно, чрезвычайно трудной и неблагодарной. О трудности, встрѣчающихся здѣсь проблемъ, говорить не приходится, а о неблагодарности темъ, взятыхъ изъ этой области, можно судить, напримѣръ, по тому, что въ мою бытность въ 1904 году въ Геттингенѣ цѣлый рядъ учениковъ Гильберта занимался этими вопросами, и ни одинъ изъ нихъ ни къ какимъ результатамъ не пришелъ. Отлично сознавая все это, М. Н. тѣмъ не менѣе взялся за эту тему, и, насколько мнѣ извѣстно, получилъ уже нѣкоторые интересные результаты. Нѣкоторыя изъ нихъ онъ опубликовалъ въ статьѣ «Объ измѣреніи алгебраическихъ формъ», большинство же ихъ осталось неопубликованными. Что станется съ рукописями М. Н.,

не знаю: онѣ остались въ Геттингенѣ. Здѣсь, въ выборѣ темы, сказались отчетливо черты характера покойнаго М. Н.: ни трудность задачи, ни ея немодность его не остановили, такъ какъ для него важнѣе всего и прежде всего стояли интересы науки, въ томъ смыслѣ, какъ онъ ихъ понималъ. И во имя этихъ интересовъ онъ взялся за работу.

Я не могу не остановиться здѣсь на одной интересной небольшой статьѣ М. Н. «Къ вопросу о простѣйшей формѣ системы обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій». Возникла эта статья подъ вліяніемъ статей проф. Г. Г. Аппельрота и заключаетъ очень интересное приведеніе къ простѣйшей формѣ системъ алгебраическихъ дифференціальныхъ уравненій. Въ статьѣ, помѣщенной въ XXIX т. Математическаго Сборника, проф. Г. Г. Аппельротъ указываетъ на важность результата, полученнаго М. Н. Интересные результаты получены были М. Н. и въ статьѣ «О формѣ интеграла алгебраической системы обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій, выраженнаго въ конечномъ видѣ». Очень изящны двѣ небольшихъ статьи: «О преобразованіи развертывающихся поверхностей самихъ въ себя» и «Объ уравненіи $(s^2 - rt) f(x, y) = 1$ или $s^2 - rt = f(p, q)$». Въ первой статьѣ М. Н. изслѣдуетъ для развертывающихся поверхностей задачу, аналогичную рѣшенной Lie для поверхностей съ постоянной, отличной отъ нуля кривизной. М. Н. находитъ, что для развертывающихся поверхностей, кромѣ точечныхъ преобразованій поверхности въ себя, зависящихъ отъ конечнаго числа параметровъ, существуютъ и касательныя, зависящія отъ трехъ произвольныхъ функцій съ тремя аргументами. Вторая статья посвящена обобщенію одной задачи Serret. Задача, поставленная и рѣшенная М. Н., такова: опредѣлить, при какихъ видахъ функціи $f(p, q)$ уравненіе $s^2 - rt = f(p, q)$ представляетъ вмѣстѣ съ дифференціальнымъ уравненіемъ линейчатыхъ поверхностей интегрирующуюся систему. Я не упомянулъ цѣлаго ряда другихъ статей М. Н. Какъ и упомянутыя мною, всѣ онѣ носятъ слѣдующій характеръ: ставится опредѣленная, иногда и не особенно широкая, задача и дается, по возможности, полное ея рѣшеніе. При этомъ характерно, что М. Н. никогда не занимался Existenzbeweis'ами, а всегда стремился дать алгоріемъ для рѣшенія задачи. Въ этомъ отношеніи онъ тоже шелъ не по моднымъ путямъ, а скорѣе примыкалъ къ старымъ классикамъ. Я не могу не упомянуть еще о послѣдней статьѣ М. Н., которую онъ уже не увидѣлъ въ печати: «Пріемъ Даламбера въ теоріи линейныхъ уравненій съ постоянными коэффиціентами и его обобщеніе». Цѣлью статьи является реабилитація классическаго метода Даламбера, противъ котораго выступилъ проф. Г. В. Пфейфферъ. Это статья вдвойнѣ характерна для М. Н.: и по постановкѣ, опять таки вполнѣ опредѣленной,

конкретной задачи, и по своему тону. Въ то время какъ другой авторъ почти навѣрно придалъ бы ей полемическій характеръ, М. Н. написалъ чисто объективную научную статью съ одной только дѣловой ссылкой на статью, противъ которой направлена работа М. Н. И такъ всегда и вездѣ: личное «я» въ вопросахъ научныхъ для М. Н. не играло роли, такъ какъ онъ жилъ для науки и только для нея.

Такимъ былъ этотъ несомнѣнно талантливый, безконечно-добрый, кристаллически чистый человѣкъ.

Сочиненія М. Н. Лагутинскаго.

1. Sur une intégrale d'un problème sur l'équilibre d'un fil flexible et inextensible (Nouvelles annales des mathématiques).

2. Объ опредѣленіи уравненія асимптотъ алгебраической кривой (Математ. Сборн. т. XXIV).

3. О преобразованіи развертывающихся поверхностей самихъ въ себя (Извѣстія Харьк. Техн. Института т. III).

4. Объ уравненіи $(s^2 - rt) f(x, y) = 1$ или $s^2 - rt = f(p, q)$ (Сообщенія Харьк. Матем. Общ. 2 сер. т. X).

5. О формѣ интеграла алгебраической системы обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій, выраженнаго въ конечномъ видѣ. (Изв. Харьк. Технолог. Института т. IV).

6. Частные алгебраическіе интегралы. Харьковъ 1908.

7. Приложеніе полярныхъ операцій къ интегрированію обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій въ конечномъ видѣ. (Сообщенія Харьк. Матем. О-ва сер. 2 т. XII).

8. Къ вопросу о простѣйшей формѣ системы обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій. (Матем. Сборн. т. XXVII).

9. Нѣсколько словъ о методѣ частныхъ интегралovъ G. Darboux. (Записки Харьк. Универ. за 1912 г.).

10. О нѣкоторыхъ полиномахъ и связи ихъ съ алгебраическимъ интегрированіемъ обыкновенныхъ дифференціальныхъ алгебраическихъ уравненій. (Сообщенія Харьк. Матем. О-ва серія 2 т. XIII).

11. Объ интегралахъ одной дифференціальной системы (ibidem).

12. Объ измѣреніи алгебраическихъ формъ (Сообщ. Харьк. Матем. Общества серія 2. т. XIV).

13. Пріемъ Даламбера въ теоріи линейныхъ дифференціальныхъ уравненій съ постоянными коэффиціентами и его обобщеніе (ibidem).

Кромѣ того, подъ его редакціей вышелъ въ Харьковѣ сдѣланный его слушателями переводъ «Проективной геометріи въ синтетическомъ изложеніи» Делемана, какъ пособіе къ курсу проективной геометріи, которую онъ читалъ въ университетѣ съ 1906 года.

А. Пшеборскій.

О числѣ представленій чиселъ нѣкоторыми квадратичными формами съ четырьмя и шестью перемѣнными.

Я. Успенскаго.

Настоящая работа тѣсно примыкаетъ къ тѣмъ, которыя были напечатаны въ «Сообщеніяхъ Харьковскаго Математическаго Общества» [1]), и только по случайнымъ обстоятельствамъ не была своевременно опубликована. Цѣлью ея является доказательство результатовъ Ліувилля, касающихся опредѣленія числа представленій чиселъ нѣкоторыми квадратичными формами съ четырьмя и шестью перемѣнными. Изъ другихъ работъ въ томъ же направленіи я могу указать на работу Pepin «Sur quelques formes quadratiques quaternaires» (Journal de Mathématiques, 1890), въ которой однако разсмотрѣны только простѣйшіе случаи, а наиболѣе интересные не разобраны. Равнымъ образомъ въ диссертаціи Назимова «О приложеніяхъ эллиптическихъ функцій къ теоріи чиселъ» (Москва 1885) даны доказательства нѣкоторыхъ результатовъ Ліувилля, основанныя на примѣненіи эллиптическихъ функцій. Ліувиллемъ разсмотрѣно такое множество отдѣльныхъ квадратичныхъ формъ, что было бы крайне утомительно останавливаться на каждой изъ нихъ; поэтому я ограничусь доказательствомъ основныхъ результатовъ, изъ которыхъ другіе могутъ быть безъ труда выведены. Чтобы не повторять того, что находится въ указанной выше работѣ Pepin, я выведу результаты, уже доказанные въ этой работѣ, совершенно особымъ путемъ. Въ заключеніе замѣчу, что главный интересъ такой работы, какъ эта, заключается не столько въ доказываемыхъ результатахъ, сколько въ своеобразныхъ пріемахъ доказательства, позволяющихъ хотя бы на частныхъ примѣрахъ обнаружить обстоятельства, ускользающія отъ общей теоріи квадратичныхъ формъ со многими перемѣнными въ современномъ ея состояніи.

---

[1]) О нѣкоторыхъ ариѳметическихъ теоремахъ Stieltjes'a Т. XIV стр. 7—30. О представленіи чиселъ суммами квадратовъ. Ib. стр. 31—64. О нѣкоторыхъ ариѳметическихъ теоремахъ. Ib. 88—99.

§ 1. Основныя формулы.

Въ этомъ параграфѣ я приведу тѣ общія ариѳметическія формулы, на которыя придется постоянно ссылаться въ дальнѣйшемъ.

Пусть $F(x, y, z)$ обозначаетъ произвольную функцію аргументовъ x, y, z, удовлетворяющую слѣдующимъ условіямъ

$$F(-x, y, z) = -F(x, y, z); \quad F(0, y, z) = 0$$
$$F(x, -y, -z) = F(x, y, z)$$

Обозначимъ черезъ S сумму

$$\sum F(\Delta + \Delta', h, \Delta - \Delta'),$$

распространенную на всѣ представленія даннаго положительнаго цѣлаго числа m въ формѣ

$$m = h^2 + \Delta\Delta',$$

гдѣ Δ и Δ' положительныя цѣлыя числа, а h произвольное цѣлое число. Обозначимъ также черезъ S' сумму

$$\sum F(\delta - 2i, d + i, 2d + 2i - \delta),$$

распространенную на всѣ представленія m въ формѣ

$$m = i^2 + d\delta,$$

гдѣ d и δ положительныя цѣлыя числа, а i произвольное цѣлое число. Между суммами S и S' всегда имѣется такое соотношеніе

$$S = 2S' + T,$$

гдѣ $T = 0$, если m не квадратъ, и

$$T = \sum F(2s, s - j, 2s - 2j) - 2\sum_{j=1, 2, 3, \ldots 2s-1} F(2s - j, s, 2s - j)$$

если $m = s^2$. Предыдущее равенство подробнѣе перепишемъ такъ

$$\sum F(\Delta + \Delta', h, \Delta - \Delta') = 2\sum F(\delta - 2i, d + i, 2d + 2i - \delta) + T \qquad (I)$$

Для доказательства этого важнаго равенства замѣтимъ, что всякому рѣшенію i, d, δ уравненія

$$m = i^2 + d\delta,$$

для котораго $2i + d - \delta > 0$, соотвѣтствуетъ рѣшеніе

$$i' = \delta - i, \quad d' = 2i + d - \delta, \quad \delta' = \delta,$$

для котораго

$$2i'+d'-\delta'=d>0.$$

Новое рѣшеніе будетъ отлично отъ прежняго, если $\delta-2i$ не $=0$. Въ суммѣ S' исчезаютъ въ силу свойствъ функціи $F(x, y, z)$ члены, соотвѣтствующіе рѣшеніямъ, для которыхъ $\delta-2i=0$. Но члену $F(\delta-2i, d+i, 2d+2i-\delta)$, соотвѣтствующему всякому другому рѣшенію, для котораго $2i+d-\delta>0$, отвѣчаетъ членъ $F(\delta'-2i', d'+i', 2d'+2i'-\delta')$, дающій съ первымъ въ суммѣ 0, такъ какъ

$$\begin{aligned}\delta'-2i'&=-\delta+2i\\ d'+i'&=d+i\\ 2d'+2i'-\delta'&=2d+2i-\delta\end{aligned}$$

Слѣдовательно въ суммѣ S' остаются только члены, соотвѣтствующіе рѣшеніямъ, для которыхъ

$$2i+d-\delta<0 \quad \text{или} \quad 2i+d-\delta=0$$

Рѣшенія послѣдней категоріи возможны только при m равномъ квадрату s^2, и соотвѣтствующая имъ часть суммы S' будетъ

$$\sum F(2s-j,\ s,\ 2s-j), \qquad {\scriptstyle j=1,\ 2,\ \ldots\ 2s-1}$$

Выбросивъ эти члены, если они имѣются, изъ суммы S', получаемъ сумму σ'

$$\sigma'=\sum F(\delta-2i,\ d+i,\ 2d+2i-\delta)$$

распространенную на всѣ рѣшенія уравненія

$$m=i^2+d\delta,$$

для которыхъ

$$2i+d-\delta<0.$$

Но всякому такому рѣшенію соотвѣтствуетъ рѣшеніе

$$h=d+i,\quad \Delta=d,\quad \Delta'=\delta-d-2i$$

уравненія

$$m=h^2+\Delta\Delta',$$

удовлетворяющее условію $\Delta'-\Delta+2h>0$ и обратно. Отсюда видно, что сумма σ' будетъ равна суммѣ

$$\sigma=\sum F(\Delta+\Delta',\ h,\ \Delta-\Delta'),$$

распространенной на всѣ рѣшенія, для которыхъ $\Delta' - \Delta + 2h > 0$. Нетрудно установить связь между суммами σ и S. Всякому рѣшенію h, Δ, Δ', для котораго

$$\Delta - \Delta' + 2h > 0$$

соотвѣтствуетъ другое рѣшеніе

$$h_1 = -h;\ \Delta_1 = \Delta',\ \Delta_1' = \Delta,$$

для котораго

$$\Delta_1 - \Delta_1' + 2h_1 < 0$$

Двумъ этимъ рѣшеніямъ соотвѣтствуютъ въ суммѣ S равные члены

$$F(\Delta + \Delta',\ h,\ \Delta - \Delta') \text{ и } F(\Delta' + \Delta,\ -h,\ \Delta' - \Delta).$$

Слѣдовательно, часть суммы S, соотвѣтствующая рѣшеніямъ, для которыхъ

$$\Delta - \Delta' + 2h \neq 0,$$

равна $2\sigma = 2\sigma'$. Что же касается рѣшеній, для которыхъ $\Delta' - \Delta + 2h = 0$, то соотвѣтствующая имъ часть суммы S будетъ

$$\sum F(2s,\ s-j,\ 2s-2j); \qquad j=1,\ 2,\ldots 2s-1,$$

если $m = s^2$.

Отсюда уже сразу убѣждаемся въ справедливости формулы (I). Изъ нея выводимъ другія формулы, ограничивая извѣстнымъ образомъ выборъ функціи $F(x,\ y,\ z)$. Положимъ, что

$$F(x,\ y,\ z) = 0, \text{ если } x \text{ нечетное}$$
$$F(x,\ y,\ z) = 0, \text{ если } y \text{ нечетное}$$

и будемъ предполагать m нечетнымъ числомъ. Тогда въ (I) можно считать h четнымъ, δ четнымъ, а d нечетнымъ; послѣ небольшой перемѣны въ обозначеніяхъ получимъ новую формулу

$$\sum F\left(\frac{\Delta + \Delta'}{2},\ 2h,\ \frac{\Delta - \Delta'}{2}\right) = 2\sum F(d-i,\ \delta+i,\ \delta+i-d) + T \qquad \text{(II)}$$

Здѣсь сумма въ лѣвой части распространена на рѣшенія уравненія

$$m = 4h^2 + \Delta\Delta',$$

сумма въ правой части—на рѣшенія уравненія

$$m = i^2 + 2d\delta;\ \delta \text{ нечетное},$$

а величина T будетъ $=0$, если m не квадратъ и

$$T=\sum F(s,\ s-j,\ s-j); \qquad j=1,\ 3,\ 5,\ldots\ 2s-1$$

если $m=s^2$.

Предположивъ, что

$$F(x,\ y,\ z)=0, \text{ если } y \text{ четное}$$
$$F(x,\ y,\ z)=0, \text{ если } x \text{ нечетное}$$

и взявъ $m=4n$, получимъ послѣ перемѣны въ обозначеніяхъ новую формулу

$$\sum F\left(\frac{\Delta+\Delta'}{4},\ \lambda,\ \frac{\Delta-\Delta'}{2}\right)=2\sum F(d+i,\ \delta-2i,\ \delta-2i-2d)+T \qquad \text{(III)}$$

Сумма въ лѣвой части распространяется на рѣшенія уравненія

$$4n=\lambda^2+\Delta\Delta',\ \lambda \text{ нечетное},$$

сумма въ правой части—на рѣшенія уравненія

$$n=i^2+d\delta,\ \delta \text{ нечетное},$$

а величина $T=0$, если n не квадратъ и

$$T=2\sum F(s,\ j,\ j); \qquad j=1,\ 3,\ 5,\ldots 2s-1,$$

если $n=s^2$.

Пусть $\Phi(x,\ y,\ z)$—функція, удовлетворяющая условіямъ

$$\Phi(-x,\ y,\ z)=-\Phi(x,\ y,\ z)$$
$$\Phi(x,\ -y,\ z)=-\Phi(x,\ y,\ z)$$
$$\Phi(x,\ y,\ -z)=-\Phi(x,\ y,\ z)$$

Беря въ формулѣ (III) одинъ разъ

$$F(x,\ y,\ z)=\Phi(x,\ y,\ z),$$

другой разъ

$$F(x,\ y,\ z)=(-1)^{\frac{y-z}{2}}\Phi(x,\ y,\ z)$$

и составляя разность результатовъ, получимъ при n нечетномъ еще одну полезную формулу

$$\sum\Phi\left(\frac{\Delta+\Delta'}{4},\ \lambda,\ \frac{\Delta-\Delta'}{2}\right)=4\sum\Phi(d+2i,\ \delta-4i,\ \delta-4i-2d). \qquad \text{(IV)}$$

Здѣсь сумма въ правой части распространяется на рѣшенія уравненія

$$n=4i^2+d\delta,$$

а въ лѣвой части на тѣ же значенія, какъ въ формулѣ (III).

Если m нечетное число и функція $F(x, y, z)$ удовлетворяетъ тѣмъ же условіямъ, какъ выше, то будетъ имѣть мѣсто слѣдующая формула

$$\sum F\left(\frac{\Delta+\Delta'}{2},\ \lambda,\ \frac{\Delta-\Delta'}{2}\right) = 2\sum F(d+2h,\ \delta-2h,\ 2h+d-\delta) \qquad (V)$$

Здѣсь сумма слѣва распространяется на рѣшенія уравненія

$$2m = \lambda^2 + \Delta\Delta',\ \lambda \text{ нечетное},$$

а сумма справа—на рѣшенія уравненія

$$m = 2h^2 + d\delta.$$

Доказательство этой формулы совершенно подобно доказательству формулы (I).

Если $\Phi(x, y, z)$ функція, удовлетворяющая тѣмъ же условіямъ, какъ въ формулѣ (IV), то справедливо равенство

$$\sum\Phi\left(\frac{\Delta'+\Delta}{3},\ h,\ \Delta'-\Delta\right) = 4\sum\Phi(d+2\lambda,\ 3\lambda-\delta,\ 3d+6\lambda-2\delta)+T \qquad (VI)$$

Здѣсь сумма справа распространяется на всѣ рѣшенія уравненія

$$n = 3\lambda^2 + d\delta;\ d,\ \delta \text{ положительны, } \delta \text{ на 3 не дѣлится,}$$

сумма же слѣва—на рѣшенія уравненія

$$3n = h^2+\Delta\Delta',\ h \text{ не дѣлится на 3;}$$

величина $T=0$, если n не утроенный квадратъ и

$$T = 2\sum\Phi(2\sigma,\ 3\sigma-j,\ 6\sigma-2j); \qquad j=1, 2, \ldots 6\sigma,$$

если $n=3\sigma^2$. На доказательствѣ этой формулы нѣтъ нужды останавливаться.

Наконецъ, слѣдуетъ привести еще одну формулу, которой приходилось пользоваться въ ранѣе напечатанныхъ работахъ. Если функція $F(x)$ такова, что

$$F(-x) = -F(x),\ F(0) = 0$$

то

$$\sum(-1)^s F(d+s) = 0, \text{ если } m \text{ не кв., и} = (-1)^{s-1}sF(s), \text{ если } m=s^2; \qquad (VII)$$

здѣсь сумма распространяется на рѣшенія уравненія

$$m = s^2 + d\delta,$$

въ которомъ d и δ положительныя числа и притомъ δ нечетное.

§ 2. Число представленій формами x^2+y^2 и x^2+2y^2.

Можно было бы предполагать извѣстнымъ, какъ выражается число представленій какого-либо числа формою x^2+y^2 или x^2+2y^2; но представляется интереснымъ получить хотя бы хорошо извѣстные результаты совершенно инымъ путемъ, тѣмъ болѣе, что такимъ же образомъ въ дальнѣйшемъ будутъ выведены гораздо болѣе трудныя вещи.

Въ формулѣ (V) § 1 положимъ $F(x, y, z) = \sin\frac{\pi x}{2}$; это дастъ намъ такое равенство

$$\sum \sin\frac{\pi}{4}\Delta\cos\frac{\pi}{4}\Delta' = \sum (-1)^h \sin\frac{\pi d}{2}$$

Но это равенство можно представить проще, если замѣтить, что

$$\sin\frac{\pi}{4}\Delta = \left(\frac{-2}{\Delta}\right)\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \cos\frac{\pi}{4}\Delta' = \left(\frac{2}{\Delta'}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}$$

и, слѣдовательно,

$$\sin\frac{\pi}{4}\Delta\cos\frac{\pi}{4}\Delta' = \frac{1}{2}(-1)^{\frac{\Delta-1}{2}}\left(\frac{2}{\Delta\Delta'}\right) = \frac{1}{2}(-1)^{\frac{\Delta-1}{2}}\left(\frac{2}{2m-\lambda^2}\right) = \frac{1}{2}(-1)^{\frac{\Delta-1}{2}+\frac{m-1}{2}}$$

Вводя ариѳметическую функцію $\varrho(m)$, опредѣляемую равенствомъ

$$\varrho(m) = \sum (-1)^{\frac{\delta-1}{2}};\quad m = d\delta,\ \delta \text{ неч.}$$

и выполнивъ одно суммированіе (соотвѣтственно при данныхъ λ и h), получимъ

$$2\sum_{h=0,\ \pm1,\ \pm2,\ldots}(-1)^h\varrho(m-2h^2) = (-1)^{\frac{m-1}{2}}\sum_{\lambda=\pm1,\ \pm3,\ \pm5,\ldots}\varrho(2m-\lambda^2) \qquad (1)$$

Но нетрудно видѣть, что $\varrho(m) = 0$, если $m \equiv 3 \pmod 4$; на этомъ основаніи

$$\sum \varrho(m-2h^2) = 0,$$

если суммированіе производить по нечетнымъ h, когда $m \equiv 1 \pmod 4$, и по четнымъ h, когда $m \equiv 3 \pmod 4$. Комбинируя послѣднее равенство съ (1), получимъ

$$2\sum_{h=0,\ \pm1,\ \pm2,\ldots}\varrho(m-2h^2) = \sum_{\lambda=\pm1,\ \pm3,\ \pm5,\ldots}\varrho(2m-\lambda^2) \qquad (2)$$

Обозначимъ теперь черезъ $N(n)$ число рѣшеній уравненія

$$n = x^2 + y^2.$$

Если будемъ разсматривать уравненіе

$$m = 2h^2 + k^2 + l^2 \qquad \text{(a)}$$

то число рѣшеній его P выразится суммой

$$P = \sum_{h=0,\ \pm1,\ \pm2,\ldots} N(m - 2h^2)$$

Подобно этому число рѣшеній Q уравненія

$$2m = 4h^2 + \lambda^2 + \mu^2 \qquad \text{(b)}$$

выразится суммой

$$Q = \frac{1}{2} \sum_{\lambda=\pm1,\ \pm3,\ \pm5,\ldots} N(2m - \lambda^2)$$

Но легко обнаружить, что $P = Q$, такъ какъ каждому рѣшенію $(h,\ k,\ l)$ уравненія (a) соотвѣтствуетъ рѣшеніе $(h,\ \lambda = k + l,\ \mu = k - l)$ уравненія (b) и наоборотъ, рѣшенію $(h,\ \lambda,\ \mu)$ послѣдняго уравненія соотвѣтствуетъ рѣшеніе $\left(h,\ k = \frac{\lambda+\mu}{2},\ l = \frac{\lambda-\mu}{2}\right)$ перваго.

Равенство $P = Q$ переписываемъ такъ

$$2\sum N(m - 2h^2) = \sum N(2m - \lambda^2) \qquad (2^*)$$

и, полагая $N(n) - 4\varrho(n) = \Omega(n)$, отсюда и изъ (2) найдемъ

$$\sum \Omega(2m - \lambda^2) = 2\sum \Omega(m - 2h^2). \qquad (3)$$

Непосредственно убѣждаемся, что $\Omega(1) = 0$, $\Omega(3) = 0$ и т. д. и если допустимъ

$$\Omega(n) = 0$$

для всѣхъ нечетныхъ $n < 2m - 1$, то изъ (3) выведемъ $\Omega(2m - 1) = 0$, слѣдовательно будемъ имѣть

$$N(m) = 4\varrho(m)$$

для всѣхъ нечетныхъ m [1]). Послѣ того, какъ установлено это равенство для нечетныхъ m, уже весьма легко подтвердить его и для всякихъ четныхъ m.

---

[1]) Для нечетныхъ n формы $4\mu + 3$ очевидно $N(n) = 0$ и $\varrho(n) = 0$; слѣдовательно равенство $\Omega(n) = 0$ нужно провѣрить только для такихъ n, которыя представляется въ видѣ $n = 2m - 1$ съ нечетнымъ m.

Чтобы подобнымъ же образомъ вывести число представленій формой x^2+2y^2, вновь обращаемся къ формулѣ (V) § 1, въ которой полагаемъ

$$F(x,\ y,\ z)=f(x,\ y+z),$$

считая, что функція $f(x,y)$ удовлетворяетъ условіямъ

$$f(-x,y)=-f(x,y);\ f(x,-y)=f(x,y).$$

Получаемъ слѣдующую полезную формулу

$$\sum f\left(\frac{\Delta+\Delta'}{2},\ \lambda+\frac{\Delta-\Delta'}{2}\right)=2\sum f(d+2h,\ d) \qquad (I)$$

Полагая въ ней $f(x,\ y)=\sin\frac{\pi}{2}x\cos\frac{\pi}{4}y$, получимъ

$$\sum(-1)^{\frac{\lambda^2-1}{8}}\sin\frac{\pi}{4}(\Delta+\Delta')\cos\frac{\pi}{8}(\Delta-\Delta')=2\sum(-1)^{h+\frac{d-1}{2}+\frac{d^2-1}{8}}$$

Если предположимъ $m\equiv 3 \pmod 4$, то изъ уравненія

$$2m=\lambda^2+\Delta\Delta'$$

выведемъ $\Delta\Delta'\equiv 5 \pmod 8$, слѣдовательно число $\frac{\Delta+\Delta'}{4}$ цѣлое и нечетное; поэтому въ случаѣ $m\equiv 3 \pmod 4$

$$\sum(-1)^{h+\frac{d-1}{2}+\frac{d^2-1}{8}}=0. \qquad (c)$$

Если $m\equiv 1 \pmod 4$, то $\Delta\Delta'\equiv 1 \pmod 8$, поэтому будемъ имѣть

$$\frac{\Delta+\Delta'}{2}\equiv 1,\ 3,\ 1,\ 3 \pmod 4$$

при $\Delta\equiv 1,\ 3,\ 5,\ 7 \pmod 8$

слѣдовательно

$$\sin\frac{\pi}{4}(\Delta+\Delta')=(-1)^{\frac{\Delta-1}{2}}$$

Полагая $m\equiv 1 \pmod 8$ и считая $\lambda\equiv\pm 1 \pmod 8$, изъ сравненія $\Delta\Delta'\equiv 1 \pmod{16}$, имѣющаго мѣсто въ этомъ случаѣ, выведемъ, что

$$\frac{\Delta-\Delta'}{8}\equiv 0,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 0 \pmod 2$$

при $\Delta\equiv 1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ 15 \pmod{16}$.

Если $m \equiv 5 \pmod 8$ и опять $\lambda \equiv \pm 1 \pmod 8$, то будемъ имѣть

$$\frac{\Delta - \Delta'}{8} \equiv 1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1 \pmod 2$$

при $\Delta \equiv 1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ 15 \pmod{16}$.

Въ обоихъ случаяхъ

$$\cos\frac{\pi}{8}(\Delta - \Delta') = (-1)^{\frac{\Delta^2-1}{8}+\frac{\lambda^2-1}{8}+\frac{m^2-1}{8}},$$

и эта формула имѣетъ мѣсто также при $\lambda \equiv \pm 3 \pmod 8$. Такимъ образомъ въ случаѣ $m \equiv 1 \pmod 4$ получаемъ

$$\sum (-1)^{\frac{m^2-1}{8}+\frac{\Delta-1}{2}+\frac{\Delta^2-1}{8}} = 2\sum (-1)^{h+\frac{d-1}{2}+\frac{d^2-1}{8}} \qquad (d)$$

Полагая

$$\varphi(n) = \sum\left(\frac{-2}{\delta}\right),$$

гдѣ суммированіе распространено на всѣ нечетные дѣлители δ числа n, мы можемъ представить равенства (c) и (d) такъ

$$\sum_{h=0,\ \pm1,\ \pm2,\ldots} (-1)^h \varphi(m - 2h^2) = 0; \quad m \equiv 3 \pmod 4 \qquad (4)$$

$$(-1)^{\frac{m^2-1}{8}} \sum_{\lambda=\pm1,\ \pm3,\ldots} \varphi(2m - \lambda^2) = 2\sum_{h=0,\ \pm1,\ \pm2,\ldots} (-1)^h \varphi(m - 2h^2); \quad m \equiv 1 \pmod 4 \qquad (5)$$

Обозначимъ черезъ $N(n)$ число рѣшеній уравненія

$$n = x^2 + 2y^2.$$

Легко убѣдиться, что $N(n) = 0$, когда $n \equiv 5,7 \pmod 8$; въ этомъ случаѣ также будетъ $\varphi(n) = 0$. Предполагая, что $m \equiv 3 \pmod 8$, разсмотримъ уравненіе

$$m = 2h^2 + 2k^2 + l^2,$$

въ которомъ одно изъ чиселъ h и k будетъ четнымъ, а другое нечетнымъ. Число рѣшеній, гдѣ h четное, будетъ, очевидно, равно числу рѣшеній, гдѣ h нечетное, откуда

$$\sum (-1)^h N(m - 2h^2) = 0, \quad m \equiv 3 \pmod 8 \qquad (4^*)$$

Если $m \equiv 1 \pmod 4$, то въ уравненіи

$$m = 2h^2 + 2k^2 + l^2$$

оба числа h и k одинаковой четности, именно четныя, когда $m \equiv 1 \pmod 8$ и нечетныя, когда $m \equiv 5 \pmod 8$. Число рѣшеній P этого уравненія можно представить въ видѣ

$$P = (-1)^{\frac{m^2-1}{8}} \sum (-1)^h N(m-2h^2)$$

Каждому рѣшенію h, k, l соотвѣтствуетъ рѣшеніе

$$\lambda = l+h+k, \quad \mu = l-h-k, \quad \nu = h-k$$

уравненія

$$2m = \lambda^2 + \mu^2 + 2\nu^2,$$

удовлетворяющее условію $\lambda \equiv \mu \pmod 4$. Обратно, каждому такому рѣшенію λ, μ, ν, соотвѣтствуетъ рѣшеніе

$$h = \frac{\lambda-\mu}{4} + \frac{\nu}{2}, \quad k = \frac{\lambda-\mu}{4} - \frac{\nu}{2}, \quad l = \frac{\lambda+\mu}{2}$$

Если Q есть число рѣшеній уравненія

$$2m = \lambda^2 + \mu^2 + 2\nu^2,$$

то изъ сказаннаго ясно, что $P = \frac{1}{2} Q$; но такъ какъ

$$Q = \sum N(2m-\lambda^2),$$

то будемъ имѣть

$$\frac{1}{2} \sum N(2m-\lambda^2) = (-1)^{\frac{m^2-1}{8}} \sum (-1)^h N(m-2h^2); \quad m \equiv 1 \pmod 4 \qquad (5^*)$$

Положивъ

$$\Omega(n) = N(n) - 2\varphi(n)$$

изъ (4), (4*), (5) и (5*) получимъ

$$\sum (-1)^h \Omega(m-2h^2) = 0, \qquad m \equiv 3 \pmod 4 \qquad (6)$$

$$2\sum (-1)^h \Omega(m-2h^2) = (-1)^{\frac{m^2-1}{8}} \sum \Omega(2m-\lambda^2), \quad m \equiv 1 \pmod 4 \qquad (7)$$

При малыхъ нечетныхъ n непосредственно находимъ $\Omega(n) = 0$. То же равенство мы докажемъ вообще, если, допустивъ его для всѣхъ нечетныхъ $n < N$, покажемъ, что $\Omega(N) = 0$. Но это равенство очевидно, если $n \equiv 5$ или $\equiv 7 \pmod 8$; если $N \equiv 3 \pmod 8$, то оно получается изъ (6), гдѣ слѣдуетъ взять $m = N$; если, наконецъ, $N \equiv 1 \pmod 8$, то оно получается изъ (7), когда возьмемъ $m = \frac{N+1}{2}$. Такимъ образомъ имѣемъ вообще

$$N(n) = 2\varphi(n).$$

§ 3. Число представленій формой x^2+3y^2.

Чтобы такимъ же образомъ опредѣлить число представленій формой x^2+3y^2, положимъ въ равенствѣ (V) § 1

$$F(x,\ y,\ z)=\sin\frac{2\pi x}{3}\cos\frac{2\pi z}{3};$$

получимъ

$$\frac{1}{2}\sum\left(\sin\frac{2\pi\Delta}{3}+\sin\frac{2\pi\Delta'}{3}\right)=\sum\left\{\sin\frac{2\pi}{3}(2d-\delta+4h)+\sin\frac{2\pi\delta}{3}\right\}$$

Но если m не дѣлится на 3, то легко видѣть, что

$$\sum\left\{\sin\frac{2\pi}{3}(2d-\delta+4h)+\sin\frac{2\pi\delta}{3}\right\}=\sum\left(\frac{3}{2}\sin\frac{2\pi\delta}{3}+\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi d}{3}\right)=2\sum\sin\frac{2\pi d}{3}$$

такъ что будетъ

$$\sum\sin\frac{2\pi\Delta}{3}=2\sum\sin\frac{2\pi d}{3} \qquad (a)$$

Полагая

$$\psi(n)=\sum\left(\frac{-3}{\delta}\right),$$

гдѣ сумма берется по всѣмъ нечетнымъ дѣлителямъ δ числа n, и замѣчая, что

$$\sin\frac{2\pi n}{3}=\left(\frac{-3}{n}\right)\frac{\sqrt{3}}{2},$$

вмѣсто (a) можемъ написать

$$\sum_{\lambda=\pm1,\ \pm3,\ \pm5,\ldots}\psi(2m-\lambda^2)=2\sum_{h=0,\ \pm1,\ \pm2,\ldots}\psi(m-2h^2) \qquad (1)$$

Разсмотримъ теперь уравненія

$$m=\xi^2+2\eta^2+3\zeta^2 \qquad (b)$$

$$6m=h^2+k^2+l^2,\quad h \text{ четное и не дѣл. на } 3 \qquad (c)$$

и, обозначивъ числа ихъ рѣшеній черезъ P и R, докажемъ, что

$$P=\frac{1}{4}R.$$

Число рѣшеній уравненія (c) будетъ равно числу рѣшеній уравненіе

$$6m=h^2+2p^2+2q^2$$

или числу рѣшеній уравненія

$$3m = 2i^2 + p^2 + q^2,$$

гдѣ i на 3 не дѣлится. Изъ двухъ чиселъ p и q одно дѣлится на 3, откуда видно, что уравненіе

$$3m = 2i^2 + p^2 + 9r^2 \qquad (d)$$

имѣетъ $\frac{1}{2}R$ рѣшеній. Если-же разсматривать только рѣшенія, для которыхъ $i \equiv p \pmod 3$, то число такихъ рѣшеній будетъ $\frac{1}{4}R$. Между этими рѣшеніями и рѣшеніями уравненія (b) устанавливается взаимно—однозначное соотвѣтствіе по формуламъ

$$\xi = \frac{p+2i}{3},\ \eta = \frac{p-i}{3},\ \zeta = r$$

$$p = \xi + 2\eta,\quad i = \xi - \eta,\quad r = \zeta,$$

откуда видно, что $P = \frac{1}{4}R$. Обозначимъ черезъ Q число рѣшеній уравненія

$$2m = 3x^2 + y^2 + z^2$$

и докажемъ, что $R = 2Q$. Для этого обращаемся къ формулѣ (VI) § 1 и полагаемъ въ ней

$$\Phi(x,\ y,\ z) = \sin\frac{3\pi x}{2};$$

получимъ послѣ упрощеній

$$-2\sum(-1)^{\lambda}\varrho(n-3\lambda^2) = \sum(-1)^{\sigma}(-1)^{\frac{\varrho-1}{2}}, \qquad (2)$$

причемъ первая сумма распространяется на всѣ значенія λ, для которыхъ $3\lambda^2 < n$, а вторая сумма на всѣ представленія $3n$ въ видѣ

$$3n = h^2 + 2\varrho\sigma,\quad h \equiv n \pmod 2 \text{ и } h \text{ не дѣл. на } 3$$

При $n = 2m$ число h четное, σ нечетное и при нечетномъ λ

$$\varrho(2m - 3\lambda^2) = 0;$$

это даетъ возможность переписать (2) такъ

$$\sum_{h \text{ четн. не дѣл. на 3.}} \varrho(6m-h^2) = 2\sum_{x=0,\ \pm1,\ \pm2,\ldots} \varrho(2m - 3x^2)$$

Но послѣднее равенство равносильно $R = 2Q$. Такъ какъ уже доказано, что $R = 4P$, то

$$Q = 2P.$$

Обозначая черезъ $N(n)$ число рѣшеній уравненія

$$n = x^2 + 3y^2$$

будемъ, слѣдовательно, имѣть

$$\sum N(2m - \lambda^2) = 2 \sum N(m - 2h^2) \qquad (4)$$

Если положимъ

$$\Omega(n) = N(n) - 2\psi(n),$$

то изъ (1) и (4) найдемъ

$$\sum \Omega(2m - \lambda^2) = 2 \sum \Omega(m - 2h^2). \qquad (5)$$

Нужно помнить, что здѣсь m — нечетное число, не дѣлящееся на 3. Для малыхъ нечетныхъ n находимъ непосредственно $\Omega(n) = 0$. Для того, чтобы оправдать это равенство вообще, замѣтимъ прежде всего, что $\Omega(3n) = \Omega(n)$ и что $\Omega(n) = 0$, если $n \equiv 5, 11 \pmod{12}$, ибо для такихъ n очевидно $N(n) = 0$ и $\psi(n) = 0$. Положимъ теперь, что равенство

$$\Omega(n) = 0$$

провѣрено для всѣхъ нечетныхъ чиселъ $n' \equiv 1 \pmod 4$, которыя $< 12k+1$, и для всѣхъ нечетныхъ чиселъ $n'' \equiv 3 \pmod 4$, которыя $< 6k+1$. Докажемъ, что тоже равенство будетъ справедливо для всѣхъ $n' < 12(k+1)+1$ и для всѣхъ $n'' < 6(k+1)+1$, а это уже дастъ возможность утверждать, что вообще $\Omega(n) = 0$. Положимъ въ (5) $m = 6k+5$, тогда получимъ

$$\Omega(12k+9) + \Omega(12k+1) + \ldots = \Omega(6k+5) + 2\Omega(6k+3) + 2\Omega(6k-3) + \ldots;$$

но $\Omega(12k+9) = \Omega(4k+3) = 0$ по предположенію (ибо $4k+3 < 6k+1$, что можно предполагать), $\Omega(6k+5) = 0$, $\Omega(6k+3) = \Omega(2k+1) = 0$ и т. д., слѣдовательно $\Omega(12k+1) = 0$. А такъ какъ $\Omega(12k+5) = 0$, $\Omega(12k+9) = 0$, то будемъ имѣть $\Omega(n') = 0$ для всѣхъ $n' < 12(k+1)+1$. Положимъ въ (5) $m = 6k+1$; лѣвая часть будетъ равна 0, такъ какъ уже доказано, что $\Omega(12k+1) = 0$, правая же часть будетъ

$$\Omega(6k+1) + 2\Omega(6k-1) + \ldots = 0,$$

откуда $\Omega(6k+1) = 0$. А такъ какъ $\Omega(6k+3) = 0$, $\Omega(6k+5) = 0$, то будемъ имѣть $\Omega(n'') = 0$ для всѣхъ $n'' < 6(k+1)+1$. Такимъ образомъ доказано, что для нечетнаго n

$$N(n) = 2\psi(n).$$

Если n четное и дѣлится только на 2, но не на 4, то очевидно $N(n) = 0$. То же будетъ имѣть мѣсто, когда вообще высшая степень 2, дѣлящая n, нечетная.

Если же высшая степень 2, дѣлящая n, четная, то нетрудно убѣдиться, что

$$N(n) = 6\psi(n).$$

Отсюда видно, что уравненіе

$$4m = x^2 + 3y^2, \quad m \text{ неч.}$$

въ нечетныхъ числахъ x и y имѣетъ $4\psi(m)$ рѣшеній, т. е. въ два раза больше, чѣмъ уравненіе

$$m = x^2 + 3y^2.$$

§ 4. Число представленій формой $x^2+y^2+z^2+t^2$ и другими формами, съ ней тѣсно связанными.

Чтобы получить число представленій нечетнаго числа m формой $x^2+y^2+z^2+t^2$, мы положимъ въ формулѣ (II) § 1

$$F(x, y, z) = x(-1)^{\frac{y}{2}};$$

получимъ равенство

$$\sum(-1)^h \frac{\Delta+\Delta'}{2} = 2\sum(-1)^{\frac{\delta-i}{2}}(d+i) + \{(-1)^{\frac{s-1}{2}}s\}; \qquad \text{(a)}$$

здѣсь заключенный въ скобки $\{\}$ членъ нужно вообще считать равнымъ 0 и только, когда $n = s^2$, полагать его равнымъ $(-1)^{\frac{s-1}{2}}s$. Если будемъ обозначать черезъ $\zeta(n)$ сумму дѣлителей n, то лѣвую часть можно представить суммой

$$\sum(-1)^h \zeta(m-4h^2);$$

что же касается суммы

$$2\sum(-1)^{\frac{\delta-i}{2}}(d+i) = 2\sum(-1)^{\frac{i-1}{2}} i (-1)^{\frac{\delta-1}{2}}; \qquad m = i^2 + 2d\delta,$$

то въ силу сказаннаго въ § 2 ее можно представить въ видѣ суммы

$$\frac{1}{2}\sum(-1)^{\frac{i-1}{2}} i$$

распространенной на рѣшенія уравненія

$$n = i^2 + i'^2 + i''^2, \quad i' \equiv i'' \pmod 2$$

гдѣ i' и i'' не равны 0 заразъ. Прибавляя членъ $\{(-1)^{\frac{s-1}{2}} s\}$ въ случаѣ $n=s^2$, мы получимъ такую же сумму, но уже распространенную на всѣ рѣшенія. Равенство (a) представляется теперь въ слѣдующемъ видѣ

$$2\sum(-1)^h\zeta(m-4h^2)=\sum(-1)^{\frac{i-1}{2}}i;\ m=i^2+i'^2+i''^2\ldots \qquad (1)$$

Полагая въ формулѣ (VII) § 1 $F(x)=\sin\frac{\pi x}{2}$, мы извлечемъ изъ нея слѣдующее равенство

$$\sum(-1)^h=2\sum(-1)^{\frac{i-1}{2}}i;\quad m=i^2+i'^2+i'^2;\quad i'\equiv i''\pmod 2 \qquad (b)$$

гдѣ первая сумма распространяется на всѣ рѣшенія уравненія

$$m=4h^2+x^2+y^2+z^2+t^2;\quad x\equiv y\pmod 2$$

Если обозначимъ черезъ $N(n)$ число представленій n формой $x^2+y^2+z^2+t^2$, то нетрудно видѣть, что для нечетнаго n число представленій той же формой, но удовлетворяющихъ условію $x\equiv y\pmod 2$, будетъ $\frac{1}{2}N(n)$. На этомъ основаніи равенство (b) можно написать такъ

$$\sum(-1)^hN(m-4h^2)=4\sum(-1)^{\frac{i-1}{2}}i \qquad (2)$$

Сравненіе (1) и (2) даетъ

$$\sum(-1)^hN(m-4h^2)=8\sum(-1)^h\zeta(m-4h^2)$$

Для малыхъ значеній m непосредственно провѣряется, что $N(m)=8\zeta(m)$; предыдущее равенство подтверждаетъ эту индукцію для всякихъ нечетныхъ m. Такимъ образомъ имѣемъ

$$N(m)=8\zeta(m),\quad m\equiv 1\pmod 2$$

Отсюда уже нетрудно вывести, что для четныхъ $n=2^sm$, m неч.

$$N(2^sm)=24\zeta(m)$$

Въ дальнѣйшемъ, когда придется разсматривать сразу нѣсколько квадратичныхъ формъ, удобно будетъ ввести для обозначенія числа представленій n формой $\varphi(x, y, z,\ldots)$ знакъ

$$N(n=\varphi(x, y, z,\ldots)).$$

При такомъ обозначеніи только что выведенныя равенства представятся такъ

$$N(m=x^2+y^2+z^2+t^2)=8\zeta(m) \text{ при } m \text{ нечет.}$$
$$N(2^s m=x^2+y^2+z^2+t^2)=24\zeta(m) \text{ при } s>0$$

или безъ различенія случаевъ нечетнаго и четнаго n

$$N(n=x^2+y^2+z^2+t^2)=8(2+(-1)^n)\zeta(m);\ n=2^s m;\ s\geqq 0$$

Если m нечетное, то число рѣшеній уравненія

$$m=x^2+y^2+z^2+t^2,$$

удовлетворяющихъ условію $y\equiv z \pmod 2$, будетъ $4\zeta(m)$; а такъ какъ при этомъ одно изъ чиселъ x и t нечетное, а другое четное, то число рѣшеній уравненія

$$m=x^2+y^2+z^2+4t^2, \qquad (c)$$

удовлетворяющихъ условію $y\equiv z \pmod 2$, будетъ $2\zeta(m)$. Если $m\equiv 3 \pmod 4$, то въ (c) числа x, y, z нечетныя, если же $m\equiv 1 \pmod 4$, то y и z четныя; отсюда сразу находится, что

$$N(m=x^2+y^2+z^2+4t^2)=2\zeta(m), \quad m\equiv 3 \pmod 4$$
$$N(m=x^2+y^2+z^2+4t^2)=6\zeta(m), \quad m\equiv 1 \pmod 4$$

и, сверхъ того,

$$N(m=x^2+4y^2+4z^2+4t^2)=2\zeta(m); \quad m\equiv 1 \pmod 4$$

Число рѣшеній уравненія (c), удовлетворяющихъ условію $y\equiv z \pmod 2$, будетъ вмѣстѣ съ тѣмъ числомъ рѣшеній уравненія

$$m=x^2+2y^2+2z^2+4t^2 \qquad (d)$$

такъ что

$$N(m=x^2+2y^2+2z^2+4t^2)=2\zeta(m).$$

Въ уравненіи (d) при $m\equiv 3 \pmod 4$ числа y и z разной четности, откуда найдемъ

$$N(m=x^2+2y^2+8z^2+4t^2)=\zeta(m) \quad \text{при} \quad m\equiv 3 \pmod 4$$

Если $m\equiv 1 \pmod 4$, то y и z въ уравненіи (d) одинаковой четности, именно оба четныя, когда при $m\equiv 1 \pmod 8$ t четное, а при $m\equiv 5 \pmod 8$ t нечетное. Но въ (d) t будетъ четнымъ или нечетнымъ тогда, когда въ уравненіи

$$m=x^2+4y^2+4z^2+4t^2$$

t будетъ четнымъ или нечетнымъ. Полное число рѣшеній этого уравненія уже опредѣлено; чтобы опредѣлить число рѣшеній съ четнымъ и нечетнымъ t, обратимся къ равенству (b) настоящаго §. Такъ какъ теперь предполагается $m \equiv 1 \pmod 4$, то въ уравненіи

$$m = i^2 + i'^2 + i''^2,$$

гдѣ i нечетное, оба числа i' и i'' будутъ четными; пусть $i' = 2s$, $i'' = 2t$. Обозначивъ черезъ $g(m)$ числовую функцію

$$g(m) = \sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i,$$

гдѣ сумма распространена на всѣ представленія

$$m = i^2 + 4s^2$$

съ нечетнымъ положительнымъ i, мы можемъ правую часть равенства (b) написать въ видѣ суммы

$$4 \sum g(m - 4t^2) \qquad t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Сумма $\sum (-1)^h$ лѣвой части того же равенства распространяется на всѣ рѣшенія уравненія

$$m = 4h^2 + x^2 + y^2 + z^2 + t^2; \qquad x \equiv y \pmod 2.$$

Въ случаѣ $m \equiv 1 \pmod 4$ оба числа x и y четныя, а изъ чиселъ z и t—одно четное, другое нечетное. Предполагая t четнымъ, замѣняемъ лѣвую часть равенства (b) суммой $2\sum(-1)^h$, распространенной на всѣ рѣшенія уравненія

$$m = 4h^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2 + x^2$$

или суммой

$$2 \sum \varphi(m - 4t^2),$$

если условимся черезъ $\varphi(m)$ обозначать разность между числами рѣшеній уравненія

$$m = x^2 + y^2 + z^2 + 4t^2,$$

въ которыхъ t четное и нечетное. Представивъ теперь уравненіе (b) въ видѣ

$$\sum \varphi(m - 4t^2) = 2 \sum g(m - 4t^2),$$

найдемъ

$$\varphi(m) = 2g(m),$$

откуда на основаніи предыдущаго выведемъ

$$N(m = x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2) = \zeta(m) + \sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i, \quad t \text{ четное}$$

$$N(m = x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2) = \zeta(m) - \sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i, \quad t \text{ нечетное}$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ получимъ

$$N(m=x^2+2y^2+4z^2+8t^2)=\zeta(m)+(-1)^{\frac{m^2-1}{8}}\sum(-1)^{\frac{i-1}{2}}i;\ m\equiv 1 \pmod 4$$

Изъ доказанныхъ результатовъ можно вывести числа представленій многими другими формами, встрѣчающимися у Ліувилля; но это уже не можетъ представить никакихъ новыхъ трудностей. Характерно въ послѣднихъ формулахъ появленіе особой числовой функціи $\sum(-1)^{\frac{i-1}{2}}i$, которая при нашемъ способѣ разсужденія вводится вполнѣ естественно и просто.

§ 5. Число представленій формой $x^2+y^2+3z^2+3t^2$.

Число представленій формой $x^2+y^2+3z^2+3t^2$ можно опредѣлить на основаніи доказаннаго въ предыдущемъ § относительно формы $x^2+y^2+z^2+t^2$. Выведемъ предварительно нѣкоторыя вспомогательныя формулы, для чего обращаемся къ равенству (VII) § 1, которое представимъ такъ

$$\sum(-1)^s F(d+s)=\{(-1)^{s-1}sF(s)\};\ m=s^2+d\delta,\ \delta \text{ неч.} \qquad (VI)$$

придавая знаку $\{\ \}$ тотъ же смыслъ, какъ въ § 4. Взявъ здѣсь $F(x)=\sin\frac{2\pi x}{3}$ и $m=3n$ получимъ

$$\sum(-1)^s\sin\frac{2\pi d}{3}\cos\frac{2\pi s}{3}=0;\quad 3n=s^2+d\delta,\quad \delta \text{ неч.} \qquad (a)$$

Если $s\equiv n+1 \pmod 2$, то d будетъ нечетнымъ; если $s\equiv n \pmod 2$, то d будетъ четнымъ. На этомъ основаніи при $s\equiv n+1 \pmod 2$

$$\sum_d\sin\frac{2\pi d}{3}=\psi(3n-s^2).\frac{\sqrt{3}}{2},$$

а при $s\equiv n \pmod 2$

$$\sum_d\sin\frac{2\pi d}{3}=\pm\psi(3n-s^2).\frac{\sqrt{3}}{2},$$

причемъ знакъ $+$ будетъ въ томъ случаѣ, когда высшая степень 2, дѣлящая d, четная, и знакъ $-$ въ случаѣ, когда эта степень нечетная; подъ $\psi(n)$ подразумѣвается та-же функція, какъ § 3. Припоминая связь этой функціи съ числомъ представленій формой x^2+3y^2, нетрудно дать

равенству (a) такое ариѳметическое толкованіе. Обозначимъ черезъ P, Q, R, S соотвѣтственно числа рѣшеній уравненій

$$3n = 9\sigma^2 + \varrho^2 + 3\tau^2; \quad \varrho + \tau \text{ неч.}$$
$$3n = 9\sigma^2 + \varrho^2 + 3\tau^2; \quad \varrho + \tau \text{ четн.}$$
$$3n = 9\sigma^2 + 2\varrho^2 + 6\tau^2$$
$$3n = \sigma^2 + 2\varrho^2 + 6\tau^2; \quad \sigma \text{ не дѣл. на 3.}$$

Тогда при $n \equiv 1$ или $\equiv 2 \pmod 4$ изъ (a) выведемъ

$$P + R = \frac{1}{2} S \tag{b}$$

а при $n \equiv 3$ или $\equiv 0 \pmod 4$ получимъ

$$3P - Q + R = \frac{1}{2} S \tag{c}$$

Можно разсматривать P, Q и R также, какъ числа рѣшеній уравненій

$$n = 3\sigma^2 + 3\varrho^2 + \tau^2; \quad \varrho + \tau \text{ неч.}$$
$$n = 3\sigma^2 + 3\varrho^2 + \tau^2; \quad \varrho + \tau \text{ четн.}$$
$$n = 3\sigma^2 + 6\varrho^2 + 2\tau^2.$$

Сумму $R + \frac{1}{2} S$ можно разсматривать, какъ число рѣшеній уравненія

$$3n = \sigma^2 + 2\varrho^2 + 6\tau^2,$$

удовлетворяющихъ условію $\sigma \equiv \varrho \pmod 3$. Но число такихъ рѣшеній будетъ равно числу рѣшеній уравненія

$$n = \xi^2 + 2\eta^2 + 2\zeta^2,$$

что видно изъ формулъ

$$\xi + 2\eta = \sigma, \ \xi - \eta = \varrho, \ \zeta = \tau,$$

однозначно связывающихъ σ, ϱ, τ съ ξ, η, ζ. Такимъ образомъ

$$R + \frac{1}{2} S = N(n = \xi^2 + 2\eta^2 + 2\zeta^2)$$

Съ помощью этого соотношенія равенства (b) и (c) напишутся такъ

$$P + 2R = N(n = \xi^2 + 2\eta^2 + 2\zeta^2), \tag{b*}$$
$$3P - Q + 2R = N(n = \xi^2 + 2\eta^2 + 2\zeta^2), \tag{c*}$$

Это тѣ вспомогательныя формулы, которыя нужно было вывести. Перейдемъ теперь къ разсмотрѣнію формы $x^2+y^2+3z^2+3t^2$. При отысканіи числа рѣшеній уравненія

$$n = x^2+y^2+3z^2+3t^2$$

очевидно достаточно ограничиться предположеніемъ, что n на 3 не дѣлится. Мы предположимъ сначала, что n удвоенное нечетное число: $n = 2m$. Если $m \equiv 1 \pmod 3$, то въ уравненіи

$$2m = x^2+y^2+3z^2+3t^2 \qquad \text{(d)}$$

оба числа x и y не дѣлятся на 3; число $2m-x^2$ будетъ $\equiv 1 \pmod 3$ и $\equiv 1$ или $\equiv 2 \pmod 4$. Если въ равенствѣ (b*) положимъ $n \equiv 1 \pmod 3$, то $R = 0$ и потому

$$N(n = 3y^2+3z^2+t^2) = N(n = \xi^2+2\eta^2+2\zeta^2);$$
$$n \equiv 1 \pmod 3 \text{ и } n \equiv 1 \text{ или } \equiv 2 \pmod 4.$$

Въ силу замѣченнаго выше и съ помощью этого соотношенія найдемъ

$$N(2m = x^2+y^2+3z^2+3t^2) = N(2m = x^2+\xi^2+2\eta^2+2\zeta^2);\ x \text{ не дѣл. на } 3.$$

Но число рѣшеній уравненія

$$2m = x^2+\xi^2+2\eta^2+2\zeta^2, \quad x \text{ не дѣл. на } 3.$$

равно трети числа рѣшеній уравненія

$$2m = x^2+y^2+z^2+t^2, \quad x \text{ не дѣл. на } 3.$$

или одной шестой числа всѣхъ рѣшеній этого уравненія, такъ какъ изъ чиселъ y, z, t одно и только одно не дѣлится на 3. Такимъ образомъ получимъ

$$N(2m = x^2+y^2+3z^2+3t^2) = 4\zeta(m); \quad m \equiv 1 \pmod 3$$

Если $m \equiv 2 \pmod 3$, то въ уравненіи (d) одно изъ чиселъ x и y дѣлится на 3, другое не дѣлится; число рѣшеній, для которыхъ x дѣлится на 3, будетъ

$$\frac{1}{2} N(2m = x^2+y^2+3z^2+3t^2).$$

Если $x \equiv 0 \pmod 3$, то $2m-x^2 \equiv 1 \pmod 3$, слѣдовательно по предыдущему будетъ

$$\frac{1}{2} N(2m = x^2+y^2+3z^2+3t^2) = N(2m = x^2+\xi^2+2\eta^2+2\zeta^2) =$$
$$= \frac{1}{3} N(2m = x^2+y^2+z^2+t^2); \quad x \equiv 0 \pmod 3$$

Если x дѣлится на 3, то въ уравненіи

$$2m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$$

среди чиселъ y, z, t одно и только одно на 3 не дѣлится. Если положить, что t на 3 не дѣлится и обозначить соотвѣтствующее число рѣшеній черезъ M, то число всѣхъ рѣшеній, гдѣ $x \equiv 0 \pmod 3$, будетъ $3M$. Для опредѣленія же M разсмотримъ уравненіе

$$4m = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 + \theta^2,$$

въ которомъ мы считаемъ ξ и η дѣлящимися на 3, а ζ и θ не дѣлящимся на 3 и сверхъ того $\zeta + \theta \equiv 0 \pmod 3$. Число рѣшеній при такихъ условіяхъ будетъ $2\zeta(m)$; но то же число будетъ равно M. Въ самомъ дѣлѣ, между x, y, z, t и ξ, η, ζ, ϑ можно установить однозначное и взаимное соотвѣтствіе по формуламъ

$$x = \frac{\xi + \eta}{2},\ y = \frac{\xi - \eta}{2},\ z = \frac{\zeta + \theta}{2},\ t = \frac{\zeta - \theta}{2},$$

въ силу котораго системѣ значеній $\xi, \eta, \zeta, \vartheta$, удовлетворяющихъ условіямъ

$$\xi \equiv \eta \equiv 0 \pmod 3;\quad \zeta \equiv -\theta \equiv \pm 1 \pmod 3,$$

соотвѣтствуетъ система значеній x, y, z, t, удовлетворяющихъ условіямъ

$$x \equiv y \equiv z \equiv 0 \pmod 3;\quad t \equiv \pm 1 \pmod 3$$

и наоборотъ. Найдя такимъ образомъ число рѣшеній уравненія

$$2m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2,$$

гдѣ $x \equiv 0 \pmod 3$, равнымъ $3M = 6\zeta(m)$, мы, имѣя въ виду ранѣе доказанное, опять получимъ

$$N(2m = x^2 + y^2 + 3z^2 + 3t^2) = 4\zeta(m);\quad m \equiv 2 \pmod 3$$

Слѣдовательно вообще для всякаго нечетнаго m, недѣлящагося на 3.

$$N(2m = x^2 + y^2 + 3z^2 + 3t^2) = 4\zeta(m).$$

Отсюда, замѣтивъ что x и y, а также z и t одной четности, легко получить

$$N(m = x^2 + y^2 + 3z^2 + 3t^2) = 4\zeta(m),$$

Остается опредѣлить число представленій четнаго числа $2^h m$, гдѣ $h \geqq 2$. Для этого обозначимъ черезъ $F(h)$ полное число рѣшеній уравненія

$$2^h m = x^2 + y^2 + 3z^2 + 3t^2,$$

черезъ $\Phi(h)$ и $\Psi(h)$ — числа рѣшеній, удовлетворющихъ условіямъ $x \equiv y \pmod 2$ и $x \equiv y+1 \pmod 2$. Безъ труда находимъ $\Phi(h) = F(h-1)$, откуда

$$F(h) - F(h-1) = \Psi(h) \qquad (e)$$

При принятыхъ обозначеніяхъ ясно, что число рѣшеній уравненія

$$2^h m = x^2 + 3z^2 + y^2 + 3t^2$$

съ нечетными x и z и съ четными y и t будетъ $\frac{1}{4}\Psi(h)$. Такъ какъ при нечетномъ n уравненіе

$$4n = x^2 + 3z^2$$

въ нечетныхъ числахъ имѣемъ въ два раза больше рѣшеній, чѣмъ уравненіе

$$n = \xi^2 + 3\eta^2,$$

то $\frac{1}{8}\Psi(h)$ будетъ числомъ рѣшеній уравненія

$$2^{h-2} m = \xi^2 + 3\eta^2 + \zeta^2 + 3\theta^2,$$

гдѣ ξ и η разной четности. Если $h - 2 \geqq 2$, то то же число будетъ $\frac{1}{2}\Psi(h-2)$, такъ что получимъ

$$\Psi(h) = 4\Psi(h-2) \text{ при } h \geqq 4$$

Если же $h = 3$ или $h = 2$, то будетъ

$$\frac{1}{8}\Psi(2) = 2\zeta(m) \quad \text{и} \quad \frac{1}{8}\Psi(3) = 4\zeta(m)$$

Отсюда уже нетрудно вывести

$$\Psi(h) = 2^{h+2}\zeta(m) \text{ при } h \geqq 2$$

и, наконецъ, въ силу равенства (e)

$$F(h) = 4(2^{h+1} - 3)\zeta(m),$$

или

$$N(2^h m = x^2 + y^2 + 3z^2 + 3t^2) = 4(2^{h+1} - 3)\zeta(m).$$

Изъ сказаннаго также легко выводится, что число рѣшеній уравненія

$$2^{h+3}m = x^2+y^2+3z^2+3t^2; \quad h \geqq 0$$

въ нечетныхъ и положительныхъ числахъ x, y, z, t, равно

$$\frac{1}{16}\,\Psi(h+2) = 2^h\zeta(m).$$

§ 6. Число представленій формой $x^2+2y^2+3z^2+6t^2$.

Установленные въ предыдущемъ § результаты позволяютъ очень просто опредѣлить число представленій четныхъ чиселъ формой

$$x^2+2y^2+3z^2+6t^2;$$

для нечетныхъ чиселъ удается опредѣлить только нижній предѣлъ числа представленій

Если $n=2m$—удвоенное нечетное число, то изъ равенства (b*) § 5 сразу получаемъ

$$2N(n=x^2+2y^2+3z^2+6t^2)+N(n=x^2+y^2+3z^2+3t^2)= \\ =N(n=x^2+y^2+2z^2+2t^2)$$

Выдѣлимъ высшую степень 3, дѣлящую n, для чего положимъ $m=3^\beta p$; тогда будемъ имѣть

$$N(n=x^2+y^2+3z^2+3t^2)=4\zeta(p)$$
$$N(n=x^2+y^2+2z^2+2t^2)=4(3^{\beta+1}-1)\,\zeta(p),$$

откуда

$$N(2.3^\beta p=x+2y^2+3z^2+6t^2)=2\,(3^{\beta+1}-2)\,\zeta(p).$$

Если $n=2^h m$ дѣлится на 4, то изъ равенства (c*) § 5 получаемъ

$$3N(n=x^2+y^2+3z^2+3t^2)-N(n=x^2+y^2+3z^2+3t^2)+$$
$$x \text{ и } z \text{ разн. четн.} \qquad\qquad x \text{ и } z \text{ одной четн.}$$
$$+2N(n=x^2+y^2+3z^2+6t^2)=24\zeta(m).$$

Но при обозначеніяхъ предыдущаго §

$$N(n=x^2+y^2+3z^2+3t^2)=\frac{1}{2}\,\Psi(h)=2^{h+1}\zeta(p)$$
$$x \text{ и } z \text{ разн. четн.}$$

$$N(n=x^2+y^2+3z^2+3t^2)=F(h)-\frac{1}{2}\,\Psi(h)$$
$$x \text{ и } z \text{ одной четн.}$$

слѣдовательно будемъ имѣть

$$N(2^h 3^\beta p=x^2+2y^2+3z^2+6t^2)=6\,(3^{\beta+1}-2)\,\zeta(p);\ h>1.$$

Переходя къ нечетнымъ числамъ и останавливаясь на случаѣ $n \equiv 1 \pmod 4$, мы получимъ изъ тѣхъ же равенствъ (b*) и (c*)

$$\left.\begin{aligned} &N\underset{x\text{ четн.}}{(n = x^2+3y^2+z^2+3t^2)} + 2N\underset{x\text{ четн.}}{(n = x^2+2y^2+3z^2+6t^2)} = 2\zeta(n) \\ &3N\underset{x\text{ и }y\text{ неч.}}{(n = x^2+3y^2+z^2+3t^2)} - N\underset{x\text{ неч., }y\text{ чет.}}{(n = x^2+3y^2+z^2+3t^2)} + \\ &\qquad + 2N\underset{x\text{ неч.}}{(n = x^2+2y^2+3z^2+6t^2)} = 2\zeta(n). \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Обозначимъ черезъ A и B числа рѣшеній уравненій

$$n = x^2+3y^2+z^2+3t^2; \quad x \text{ и } y \text{ нечетн.}$$
$$n = x^2+3y^2+z^2+3t^2; \quad x \text{ и } y \text{ четн.}$$

Тогда изъ уравненій (1) легко найдемъ послѣ сложенія

$$A + N(n = x^2+2y^2+3z^2+6t^2) = 2\zeta(n)$$

Примѣнивъ равенства (b*) и (c*) къ случаю $n \equiv 3 \pmod 4$, получимъ

$$\left.\begin{aligned} &N\underset{x\text{ неч.}}{(n = x^2+3y^2+z^2+3t^2)} + 2N\underset{x\text{ неч.}}{(n = x^2+2y^2+3z^2+6t^2)} = 2\zeta(n) \\ &3N\underset{x\text{ и }y\text{ четн.}}{(n = x^2+3y^2+z^2+3t^2)} - N\underset{x\text{ четн. }y\text{ неч.}}{(n = x^2+3y^2+z^2+3t^2)} + \\ &\qquad + 2N\underset{x\text{ четн.}}{(n = x^2+2y^2+3z^2+6t^2)} = 2\zeta(n) \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

откуда найдемъ

$$B + N(n = x^2+2y^2+3z^2+6t^2) = 2\zeta(n)$$

Второе изъ равенствъ (2) показываетъ, что для случая $n \equiv 3 \pmod 4$

$$2B - A \leqq 2\zeta(n)$$

Если n не дѣлится на 3, то между A и B существуетъ зависимость

$$A - B = 2\zeta(n).$$

Сверхъ того, если C обозначаетъ число рѣшеній уравненія

$$n = x^2+3y^2+z^2+3t^2,$$

удовлетворяющихъ условію $x^2+3y^2 \equiv 0 \pmod 8$, то

$$B = \frac{1}{2}A + C.$$

Принявъ это во вниманіе, имѣемъ для случая $n \equiv 1 \pmod 4$:

$$N(n = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2) = \frac{2}{3}\zeta(n) + \frac{2}{3}C,$$

а для случая $n \equiv 3 \pmod 4$

$$N(n = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2) = \frac{4}{3}\zeta(n) - \frac{2}{3}C.$$

Но всегда $C \geqq 0$, а при $n \equiv 3 \pmod 4$, какъ уже замѣчено, $C \leqq \zeta(n)$; слѣдовательно для всякаго нечетнаго n, не дѣлящагося на 3

$$N(n = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2) \geqq \frac{2}{3}\zeta(n).$$

Было бы интересно найти простое выраженіе для C, но это сопряжено, какъ кажется, съ большими трудностями.

§ 7. Число представленій формой $x^2 + y^2 + 5z^2 + 5t^2$.

Форма $x^2 + y^2 + 5z^2 + 5t^2$ находится также въ связи съ формой $x^2 + y^2 + z^2 + t^2$. Хотя представляется повидимому труднымъ найти число представленій нечетнаго числа этой формой, но для четнаго числа эта задача рѣшается просто. Обозначимъ черезъ n четное число, дѣлящееся на 5. Рѣшенія уравненія

$$n = x^2 + y^2 + z^2 + t^2, \qquad \text{(a)}$$

гдѣ не всѣ числа x, y, z, t дѣлятся на 5, разбиваются на двѣ категоріи: для рѣшеній первой категоріи ни одно изъ чиселъ x, y, z, t не дѣлится на 5, для рѣшеній второй категоріи два и только два числа дѣлятся на 5. Обозначимъ число рѣшеній, удовлетворяющихъ условіямъ $x^2 \equiv 1$, $y^2 \equiv 1$, $z^2 \equiv -1$, $t^2 \equiv -1 \pmod 5$ черезъ Q, а чпсло рѣшеній удовлетворяющихъ условіямъ $x \equiv 0, y \equiv 0, z^2 \equiv +1, t^2 \equiv -1 \pmod 5$ черезъ R. Полное число рѣшеній обѣихъ категорій будетъ

$$P = 6Q + 12R.$$

Докажемъ теперь, что $R = \frac{1}{4}Q$. Для этого разсмотримъ уравненіе

$$2m = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 + \theta^2 \qquad \text{(b)}$$

и обозначимъ черезъ G число рѣшеній его, удовлетворяющихъ условіямъ

$$\zeta \equiv \eta \equiv 0 \quad \zeta^2 \equiv -\theta^2 \equiv 1 \pmod 5.$$

Число рѣшеній уравненія (a), которыя подчинены условіямъ

$$x^2 \equiv y^2 \equiv 1,\ z^2 \equiv t^2 \equiv -1 \pmod 5; \quad x + y \equiv 0,\ z + t \equiv 0 \pmod 5$$

будетъ $\frac{1}{4}Q$. Но эти рѣшенія связаны съ ξ, η, ζ, θ однозначно формулами

$$\xi = x+y,\ \eta = z+t,\ \zeta = z-t,\ \theta = x-y;$$

дѣйствительно изъ этихъ формулъ слѣдуетъ, во-первыхъ, $\xi \equiv 0$, $\eta \equiv 0$ и, во-вторыхъ, $\xi^2+\theta^2 \equiv 2(x^2+y^2) \equiv 4$, $\eta^2+\zeta^2 \equiv 2(z^2+t^2) \equiv -4 \pmod 5$, т. е. $\theta^2 \equiv -1, \zeta^2 \equiv 1 \pmod 5$; наоборотъ, если предположимъ, что ξ, η, ζ, θ удовлетворяютъ этимъ сравненіямъ, то x, y, z, t будутъ удовлетворять поставленнымъ для нихъ сравненіямъ. Поэтому $G = \frac{1}{4}Q$. Если разсматривать рѣшенія уравненія (a), удовлетворяющія условіямъ

$$x \equiv y \equiv 0,\quad z^2+t^2 \equiv 0 \pmod 5.$$

то число ихъ будетъ $2R$. Число рѣшеній уравненія (b), удовлетворяющихъ условіямъ

$$\xi \equiv \eta \equiv 0,\quad \zeta^2+\theta^2 \equiv 0 \pmod 5$$

будетъ $2G$. Изъ формулъ, связывающихъ x, y, z, t съ ξ, η, ζ, θ:

$$\xi = x+y,\ \eta = x-y,\ \zeta = z+t,\ \theta = z-t$$

видно, что когда удовлетворена одна система сравненій, то будетъ удовлетворена и другая; отсюда получаемъ $2R = 2G$, $R = G$. Наконецъ находимъ $R = \frac{1}{4}Q$ и $Q = \frac{1}{9}P$.

Число рѣшеній уравненія (a), гдѣ x на 5 не дѣлится, будетъ

$$M = 6Q+6R = \frac{5}{6}P$$

Обозначивъ черезъ $\overline{\zeta}(n)$ сумму нечетныхъ дѣлителей n и согласившись полагать $\overline{\zeta}(n) = 0$ при n дробномъ, будемъ имѣть

$$P = 24\left[\overline{\zeta}(n) - \overline{\zeta}\left(\frac{n}{5^2}\right)\right]$$

и

$$M = 20\left[\overline{\zeta}(n) - \overline{\zeta}\left(\frac{n}{5^2}\right)\right] \qquad (c)$$

Докажемъ теперь слѣдующее равенство

$$N(m = \xi^2+5\eta^2+5\zeta^2) = \frac{1}{3}N(m = \xi^2+\eta^2+\zeta^2);\quad m \equiv \pm 1 \pmod 5 \qquad (d)$$

Для этого разсмотримъ уравненіе

$$25m = x^2+y^2+z^2 \qquad (d)$$

и обозначимъ число рѣшеній его, гдѣ x, y, z, дѣлятся на 5 черезъ Q, а число рѣшеній, гдѣ x и y не дѣлятся на 5, а z дѣлится, черезъ R. Среди послѣднихъ рѣшеній будетъ $\frac{1}{2}R$ рѣшеній, удовлетворяющихъ сравненію $x \equiv 2y \pmod 5$. Но таково же будетъ число рѣшеній уравненія

$$5m = \xi^2 + \eta^2 + 5\zeta^2, \tag{e}$$

для которыхъ $\xi + 2\eta$ не дѣлится на 5; это видно изъ формулъ

$$\xi = \frac{x - 2y}{5}, \quad \eta = \frac{2x + y}{5}, \quad \zeta = z.$$

Число рѣшеній, для которыхъ $\xi - 2\eta$ дѣлится на 5, будетъ также $\frac{1}{2}R$. Таково же будетъ число рѣшеній уравненія

$$m = u^2 + v^2 + w^2 \tag{f}$$

гдѣ $u + 2v$ не дѣлится на 5. Если $m \equiv +1 \pmod 5$, то или всѣ три числа u, v, w не дѣлятся на 5 или два дѣлятся, а одно не дѣлится; въ послѣднемъ случаѣ одно и только одно изъ нихъ будетъ $\equiv \pm 2 \pmod 5$. Если V—число рѣшеній, удовлетворяющихъ условіямъ $u \equiv v \equiv 0 \pmod 5$, w не дѣлится на 5, и W—число рѣшеній, удовлетворяющихъ условіямъ $u^2 \equiv v^2 \equiv 1$, $w^2 \equiv -1 \pmod 5$, то полное число рѣшеній, равное Q, будетъ

$$Q = 3V + 3W,$$

число же рѣшеній, для которыхъ $u + 2v$ не дѣлитсся на 5, находится равнымъ

$$\frac{1}{2}R = 2V + 2W,$$

откуда $R = \frac{4}{3}Q$. Такой же результатъ получается въ случаѣ $m \equiv -1 \pmod 5$

Обращаясь вновь къ уравненію (d), находимъ, что число рѣшеній его, гдѣ $x \equiv 2y \pmod 5$ и $z \equiv 0 \pmod 5$ есть $Q + \frac{1}{2}R = \frac{5}{3}Q$; таково же будетъ число рѣшеній уравненія (e). Пусть N число рѣшеній этого уравненія, гдѣ ξ и η дѣлятся на 5, а N'—число рѣшеній, гдѣ ξ и η не дѣлятся на 5. Тогда

$$N + N' = \frac{5}{3}Q$$

и

$$N + \frac{1}{2}N' = Q,$$

такъ какъ $N+\frac{1}{2}N'$ равно числу всѣхъ рѣшеній уравненія (f). Теперь уже имѣемъ

$$N=\frac{1}{3}Q$$

или

$$N(m=\xi^2+5\eta^2+5\zeta^2)=\frac{1}{3}N(m=\xi^2+\eta^2+\zeta^2);\ m\equiv\pm 1 \pmod 5$$

Переходимъ наконецъ къ разсмотрѣнію уравненія

$$n=x^2+y^2+5z^2+5t^2$$

въ которомъ n четное, дѣлящееся на 5. Если положимъ $n=5^h m$, гдѣ m уже на 5 не дѣлится, то обозначимъ число рѣшеній, гдѣ x и y не дѣлятся на 5, черезъ $\Phi(h)$, а число всѣхъ рѣшеній черезъ $F(h)$. Сумма $\frac{1}{2}\Phi(h)+F(h-1)$ будетъ

$$\frac{1}{2}\Phi(h)+F(h-1)=N\left(\frac{n}{5}=x^2+y^2+z^2+t^2\right)=24\bar{\zeta}\left(\frac{n}{5}\right);$$

съ другой стороны въ силу равенства (d)

$$\Phi(h)=\frac{1}{3}N(n=x^2+y^2+z^2+t^2)=\frac{1}{3}M=\frac{20}{3}\left[\zeta(n)-\zeta\left(\frac{n}{5^2}\right)\right],$$

x не дѣл. на 5.

слѣдовательно

$$F(h-1)=2(5^h-3)\bar{\zeta}(m)\quad\text{при}\quad h\geqq 1$$

или наконецъ

$$N(5^h 2^k p=x^2+y^2+5z^2+5t^2)=2(5^{h+1}-3)\zeta(p);\ h\geqq 0,\ k\geqq 1.$$

§ 8. О числѣ представленій формой $x^2+y^2+z^2+t^2+u^2+v^2$ и другими, съ ней связанными.

Послѣ разсмотрѣнія простѣйшей формы съ четырьмя перемѣнными $x^2+y^2+z^2+t^2$ и другихъ формъ, къ ней близкихъ, обратимся къ простѣйшей формѣ съ шестью перемѣнными $x^2+y^2+z^2+t^2+u^2+v^2$ и опредѣлимъ число представленій этой формой тѣмъ же способомъ, которымъ мы до сихъ поръ пользовались. Въ силу формулы (VII) § 1 имѣемъ

$$\sum(-1)^s F(d+s)=\frac{1}{2}\sum(-1)^{s-1}sF(s)\qquad(a)$$

здѣсь сумма слѣва распространена на всѣ рѣшенія уравненія

$$\nu=s^2+2t^2+2u^2+2v^2+2w^2+d\delta,\quad\delta\text{ нечет.},$$

сумма справа на всѣ рѣшенія уравненія $n = s^2 + 2t^2 + 2u^2 + 2v^2 + 2w^2$, а число n предполагается нечетнымъ. Полагая въ (a) $F(x) = \sin\frac{\pi x}{2}$, получимъ соотношеніе между двумя суммами, которое можно представить такъ

$$\sum (-1)^h G(n-4h^2) = \sum (-1)^{\frac{s-1}{2}} s;\ n = s^2 + 2t^2 + 2u^2 + 2v^2 + 2w^2, \quad (1)$$

обозначивъ черезъ $G(n)$ число рѣшеній уравненія

$$n = y + 4z^2 + 2t^2 + 2u^2 + 2v^2 + 2w^2.$$

Съ другой стороны въ формулѣ (II) § 1 въ случаѣ $n \equiv 3 \pmod 4$ возьмемъ $F(x, y, z) = xz \sin\frac{\pi z}{2}$; замѣтивъ, что

$$\sin\frac{\pi}{4}(\Delta' - \Delta) = (-1)^{\frac{m-1}{2} + \frac{m^2-1}{8} + \frac{\Delta-1}{2} + h}$$

послѣ простого изслѣдованія получимъ

$$\sum (-1)^{\frac{\Delta-1}{2}} \Delta'^2 (-1)^h = 4 \sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i \ (2d - \delta)$$

или

$$\sum (-1)^h \varphi(n-4h^2) = \frac{1}{2} \sum (-1)^{\frac{s-1}{2}} s;\ n = s^2 + 2t^2 + 2u^2 + 2v^2 + 2w^2, \quad (2)$$

обозначивъ черезъ $\varphi(n)$ числовую функцію

$$\varphi(n) = \sum (-1)^{\frac{\delta-1}{2}} d^2;\ n = d\delta.$$

Такое же равенство получимъ и въ случаѣ $n \equiv 1 \pmod 4$, если въ формулѣ (II) § 1 возьмемъ

$$F(x, y, z) = (x + z(y+z)) \sin\frac{\pi x}{2}$$

Изъ сравненія (1) и (2) найдемъ

$$G(n) = 2\varphi(n)$$

или

$$N(n = x^2 + 4y^2 + 2z^2 + 2t^2 + 2u^2 + 2v^2) = 2 \sum (-1)^{\frac{\delta-1}{2}} d^2$$

Съ помощью этого результата уже нетрудно вывести, что

$$N(n = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2) = 12 \sum (-1)^{\frac{\delta-1}{2}} d^2, \quad n \equiv 1 \pmod 4$$

$$N(n = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2) = 20 \sum (-1)^{\frac{\delta-1}{2}} d^2, \quad n \equiv 3 \pmod 4$$

Эти равенства являются основными въ теоріи формы

$$x^2+y^2+z^2+t^2+u^2+v^2;$$

пользуясь ими можно безъ труда опредѣлить число представленій четнаго числа, но для краткости на этомъ останавливаться не будемъ. Переходя къ болѣе труднымъ вопросамъ, остановимся на уравненіи

$$n=x^2+y^2+z^2+t^2+u^2+v^2 \qquad (b)$$

для случая $n\equiv 1 \pmod 4$. Среди чиселъ $x, y, \ldots v$ будетъ или одно нечетное или пять; соотвѣтственно этому обозначимъ черезъ $I(n)$ число рѣшеній, гдѣ x нечетное, а y, z, t, u, v четныя, и черезъ $I'(n)$ число рѣшеній, гдѣ x, y, z, t и нечетныя, а v четное. Полное число рѣшеній будетъ $6[I(n)+I'(n)]$, откуда найдемъ одно соотношеніе между $I(n)$ и $I'(n)$:

$$I(n)+I'(n)=2\sum(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}d^2; \quad n=d\delta \qquad (3)$$

Чтобы получить другое соотношеніе, положимъ опять въ формулѣ (II) § 1 $F(x, y, z)=(-1)^{\frac{x-1}{2}+\frac{y}{2}}x^2$; получимъ

$$\sum\frac{\Delta^2+\Delta'^2}{4}(-1)^{\frac{\Delta-1}{2}}+\frac{1}{2}\sum(-1)^{\frac{\Delta-1}{2}}\Delta\Delta'=2\sum(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}d^2+2\sum i^2(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}+\{s^2\}. \qquad (c)$$

Лѣвая часть этого равенства представляется такъ

$$\frac{1}{4}\sum\{I(n-4h^2)+I'(n-4h^2)\}+\frac{1}{4}\sum_{u=i^2+4s^2+4h^2}(i^2+4s^2)$$

Послѣдніе два члена въ правой части могутъ быть замѣнены суммой

$$\frac{1}{2}\sum i^2; \quad n=i^2+4s^2+4h^2;$$

что же касается до перваго члена $2\sum(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}d^2$; $n=i^2+2d\delta$, то нужно выяснить его ариѳметическій смыслъ. Съ этой цѣлью разсматриваемъ уравненіе

$$2^\alpha m=x^2+y^2+z^2+t^2+4u^2+4v^2 \qquad (d)$$

при $\alpha\geq 2$ и, предполагая x, y, z, t нечетными, обозначаемъ число рѣшеній его черезъ $F(\alpha)$.

Легко понять, что $\frac{1}{4}F(\alpha)$ есть число рѣшеній уравненія

$$2^{\alpha-1}m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 4u^2 + 4v^2,$$

гдѣ x и y нечетныя, а $z \equiv t \pmod 2$; если $\alpha - 1 \geqq 2$, то это число будетъ $F(\alpha-1)$. Такимъ образомъ

$$F(\alpha) = 4F(\alpha-1) \quad \text{при} \quad \alpha \geqq 3 \tag{e}$$

Но если $\alpha = 2$, то $\frac{1}{4}F(2)$ будетъ также числомъ рѣшеній уравненія

$$m = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2t^2 + 2u^2 + 2v^2,$$

гдѣ x и y разной четности, т. е. по предыдущему $4\sum(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}d^2$; $m = d\delta$. Отсюда и изъ равенства (e) найдемъ

$$F(\alpha) = 4^{\alpha}\sum(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}d^2; \quad m = d\delta.$$

На основаніи этого равенства уже нетрудно видѣть, что сумма

$$2\sum(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}d^2, \quad n = i^2 + 2d\delta$$

равна половинѣ числа рѣшеній уравненія

$$n = i^2 + h^2 + k^2 + l^2 + m^2 + 4p^2 + 4q^2,$$

гдѣ i, h, k, l, m нечетныя т. е. выражается суммой

$$\frac{1}{2}\sum\Gamma'(n - 4h^2).$$

Сообразивъ все сказанное, равенство (c) представимъ такъ

$$\sum\{\Gamma(n-4h^2) - \Gamma'(n-4h^2)\} = \sum(i^2 - 4s^2); \quad n = i^2 + 4s^2 + 4h^2$$

или

$$\sum\{\Gamma(n-4h^2) - \Gamma'(n-4h^2)\} = 2\sum g(n-4h^2)$$

если положимъ

$$g(n) = \sum(i^2 - 4s^2); \quad n = i^2 + 4s^2, \; i > 0$$

Изъ выведеннаго равенства имѣемъ

$$\Gamma(n) - \Gamma'(n) = 2g(n) \tag{4}$$

что въ связи съ (3) даетъ

$$\Gamma(n) = \sum(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}d^2 + g(n)$$

или

$$N(n=x^2+4y^2+4z^2+4t^2+4u^2+4v^2)=\sum(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}d^2+$$
$$+\sum_{n=i^2+4s^2;\ i>0}(i^2-4s^2);\quad n\equiv 1\pmod 4$$

Выведенныя равенства являются основными; изъ нихъ можно получить много другихъ результатовъ, но на этомъ не будемъ останавливаться.

§ 9. О числѣ представленій формой $x^2+y^2+z^2+2t^2$.

Для вывода числа представленій формой $x^2+y^2+z^2+2t^2$ обращаемся къ формулѣ (I) § 2. Въ случаѣ $m\equiv 3 \pmod 4$ возьмемъ въ ней $f(x,\ y)=x\cos\frac{\pi y}{4}$; если воспользуемся замѣчаніями, сдѣланными въ этомъ §, то найдемъ

$$\sum(-1)^h\left(\frac{2}{\delta}\right)d=0;\quad m=2h^2+d\delta$$

или

$$\sum(-1)^h\psi(m-2h^2)=0;\ m\equiv 3\pmod 4,$$

если положимъ

$$\psi(n)=\sum\left(\frac{2}{\delta}\right)d;\ n=d\delta.$$

Разсматривая уравненіе

$$m=2x^2+y^2+4z^2+4t^2+2u^2, \qquad (a)$$

замѣчаемъ, что при $m\equiv 3 \pmod 4$ числа x и u разной четности; слѣдовательно, называя черезъ $\chi(n)$ число рѣшеній уравненія

$$n=x^2+2y^2+4z^2+4t^2, \qquad (b)$$

будемъ имѣть

$$\sum(-1)^h\chi(m-2h^2)=0$$

Въ случаѣ $m\equiv 1 \pmod 4$ полагаемъ опять въ формулѣ (I) § 2 $f(x,\ y)=(-1)^{\frac{x-1}{2}}y\sin\frac{\pi}{4}y$; принимая во вниманіе сказанное въ томъ же §, получимъ такое соотношеніе

$$2\sum(-1)^h\left(\frac{2}{\delta}\right)d=\sum(-1)^{\frac{\lambda-1}{2}}\lambda\,.\,(-1)^{\frac{\Delta-1}{2}+\frac{\Delta^2-1}{8}}$$

или

$$2\sum(-1)^h\psi(m-2h^2)=\frac{1}{2}\sum(-1)^{\frac{\lambda-1}{2}}\lambda,\ 2m=\lambda^2+\mu^2+8\nu^2$$

Положивъ $\lambda=\xi+\eta$, $\mu=\xi-\eta$, замѣнимъ сумму въ правой части суммой

$$\sum \xi \sin\frac{\pi}{2}\xi \cos\frac{\pi}{2}\eta\,; \quad m=\xi^2+\eta^2+4\zeta^2$$

которую въ свою очередь представимъ такъ

$$\sum (-1)^{\frac{\sigma-1}{2}+\rho}\sigma\,; \quad m=\sigma^2+4\rho^2+4\tau^2$$

Слѣдовательно

$$2\sum (-1)^h \psi(m-2h^2)=\sum (-1)^{\frac{\sigma-1}{2}+\rho}\sigma \qquad (c)$$

Въ уравненіи (a) въ случаѣ $m\equiv 1 \pmod 4$ x и u одинаковой четности, но нетрудно видѣть, что x будетъ четнымъ или нечетнымъ въ зависимости отъ того, будутъ-ли въ уравненіи

$$m=4\tau^2+4t^2+4u^2+v^2+4w^2$$

τ и t одной четности или нѣтъ. На этомъ основаніи

$$\sum (-1)^h \chi(m-2h^2)=\sum (-1)^{\tau+t};\ m=4\tau^2+4t^2+4u^2+v^2+4w^2.$$

Что же касается суммы $\sum (-1)^{\tau+t}$, то по формулѣ (VII) § 1 при $F(x)=\sin\frac{\pi x}{2}$ найдемъ

$$\sum (-1)^{\tau+t}=\sum (-1)^{\frac{\sigma-1}{2}+\rho};\ m=\sigma^2+4\rho^2+4\tau^2.$$

Отсюда и изъ равенства (c) выводимъ

$$2\sum (-1)^h \psi(m-2h^2)=\sum (-1)^h \chi(m-2h^2). \qquad (1)$$

Въ силу сказаннаго раньше это равенство будетъ справедливо и для $m\equiv 3 \pmod 4$. Такъ какъ (1) справедливо при всякомъ m (нечетномъ), то необходимо будетъ

$$\chi(m)=2\psi(m),$$

т. е.

$$N(m=x^2+2y^2+4z^2+4t^2)=2\sum\left(\frac{2}{\delta}\right)d;\ m\equiv 1 \pmod 2 \qquad (2)$$

Число всѣхъ рѣшеній уравненія

$$m=x^2+2y^2+4z^2+4t^2$$

равно числу рѣшеній уравненія

$$m=x^2+2y^2+2z^2+2t^2,$$

гдѣ z и t одинаковой четности. Если $m \equiv 1 \pmod 8$, то y, z, t четныя; если $m \equiv 7 \pmod 8$, то y, z, t нечетныя. Слѣдовательно для $m \equiv \pm 1 \pmod 8$

$$N(m = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2t^2) = 2\psi(m).$$

Если $m \equiv 3 \pmod 8$, то только одно изъ чиселъ y, z, t нечетное, при $m \equiv 5 \pmod 8$ только одно изъ этихъ чиселъ четное. На этомъ основаніи для $m \equiv \pm 3 \pmod 8$

$$N(m = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2t^2) = 6\psi(m).$$

Число рѣшеній уравненія

$$m = x^2 + y^2 + z^2 + 2t^2$$

съ нечетнымъ x будетъ $N(m = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2t^2)$. Соображая, сколько въ разныхъ случаяхъ будетъ четныхъ и нечетныхъ чиселъ среди x, y, z, нетрудно установить общее равенство

$$N(m = x^2 + y^2 + z^2 + 2t^2) = 2\left[4 - (-1)^{\frac{m^2-1}{8}}\right]\psi(m).$$

Чтобы опредѣлить число представленій четнаго числа $2^h m$ той же формой, обозначимъ черезъ $Q(\alpha)$ число рѣшеній уравненія

$$2^\alpha m = x^2 + y^2 + z^2 + 2t^2, \qquad (d)$$

гдѣ x четное, y нечетное. Такъ какъ при $\alpha > 0$ z также нечетное, то $\frac{1}{2}Q(\alpha)$ будетъ числомъ рѣшеній уравненія

$$2^{\alpha-1} m = x^2 + y^2 + z^2 + 2t^2,$$

гдѣ опять x четное, y нечетное; поэтому

$$Q(\alpha) = 2Q(\alpha - 1).$$

По предыдущему

$$Q(0) = N(m = x^2 + 2y^2 + 4z^2 + 4t^2) = 2\psi(m),$$

слѣдовательно

$$Q(\alpha) = 2^{\alpha+1}\psi(m).$$

Если $P(\alpha)$ число рѣшеній уравненія (d), гдѣ x, y, z четныя, а $F(\alpha)$ полное число рѣшеній, то

$$F(\alpha) = P(\alpha) + 3Q(\alpha).$$

Съ другой стороны сумма $P(\alpha) + Q(\alpha)$ будетъ числомъ рѣшеній уравненія

$$2^\alpha m = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2t^2,$$

т. е. $F(\alpha-1)$, такъ что

$$F(\alpha-1)=P(\alpha)+Q(\alpha).$$

По исключеніи $P(\alpha)$ имѣемъ

$$F(\alpha)-F(\alpha-1)=2^{\alpha+2}\psi(m),$$

откуда наконецъ найдемъ

$$N(2^{\alpha}m=x^2+y^2+z^2+2t^2)=2\left[2^{\alpha+2}-(-1)^{\frac{m^2-1}{8}}\right]\psi(m).$$

§ 10. Формы $x^2+2y^2+8z^2+8t^2$, $x^2+2y^2+16z^2+16t^2$ и проч.

Въ уравненіи

$$m=x^2+2y^2+4z^2+4t^2 \qquad (a)$$

числа z и t будутъ одной четности, если $m\equiv 1$ или $\equiv 3 \pmod 8$; если же $m\equiv 5$ или $\equiv 7 \pmod 8$, то z и t будутъ разной четности; на этомъ основаніи

$$N(m=x^2+2y^2+8z^2+8t^2)=2\psi(m);\quad m\equiv 1,\ 3 \pmod 8$$
$$N(m=x^2+2y^2+4z^2+16t^2)=\psi(m);\quad m\equiv 5,\ 7 \pmod 8.$$

Можно опредѣлить число представленій послѣдней формой и для случаевъ $m\equiv 1$ или $\equiv 3 \pmod 8$, для чего достаточно опредѣлить число рѣшеній уравненія (a), гдѣ z и t четныя числа.

Изъ формулы (VII) § 1, которой мы уже столько разъ пользовались, полагая $F(x)=\sin\frac{\pi x}{2}$, нетрудно извлечь такое слѣдствіе

$$\sum(-1)^s=2\sum(-1)^{\frac{s-1}{2}}s;\quad m=s^2+2t^2,\ s>0,$$

гдѣ первая сумма распространяется на всѣ рѣшенія уравненія

$$m=4s^2+4t^2+u^2+2v^2$$

и представляетъ собою разность между числами рѣшеній уравненія (a) съ четными и нечетными t.

Отсюда находится

$$N(m=x^2+2y^2+4z^2+16t^2)=\psi(m)+\sum(-1)^{\frac{s-1}{2}}s;\ m=s^2+2t^2,\ s>0$$

или все равно

$$N(m=x^2+2y^2+16z^2+16t^2)=\psi(m)+\sum(-1)^{\frac{s-1}{2}}s;\ m\equiv 1 \text{ или } \equiv 3 \pmod 8.$$

Изъ этихъ основныхъ результатовъ безъ новыхъ соображеній могутъ быть выведены многіе другіе, на чемъ однако мы не останавливаемся.

Предполагая $m \equiv 1 \pmod 8$, разсмотримъ теперь представленіе m формой $x^2 + 8y^2 + 16z^2 + 64t^2$:

$$m = x^2 + 8y^2 + 16z^2 + 64t^2$$

Положивъ въ тождествѣ

$$\sum_{m = s^2 + 16t^2 + d\delta,\ \delta \text{ неч.}} (-1)^s F(d + s) = \sum_{m = i^2 + 16s^2,\ i > 0} iF(i)$$

вытекающемъ изъ формулы (VII) § 1 $F(x) = \sin \frac{\pi x}{4}$, получимъ

$$\sum (-1)^t = 2 \sum (-1)^{\frac{i-1}{2} + \frac{i^2-1}{8}} i;\ m = i^2 + 16s^2,$$

гдѣ сумма слѣва распространяется на рѣшенія уравненія

$$m = 16t^2 + 16z^2 + x^2 + 8y^2,$$

Отсюда находимъ

$$N(m = x^2 + 8y^2 + 16z^2 + 64t^2) = \frac{1}{2}[\psi(m) + \sum (-1)^{\frac{s-1}{2}} s] + \sum (-1)^{\frac{i-1}{2} + \frac{i^2-1}{8}} i;$$
$$m = i^2 + 16s^2,\ i > 0.$$

А изъ этого равенства совершенно аналогичнымъ способомъ выведемъ

$$N(m = x^2 + 8y^2 + 64z^2 + 64t^2) = \frac{1}{4}\psi(m) + \frac{1}{4}\sum (-1)^{\frac{s-1}{2}} s +$$
$$+ \frac{1}{2}\sum (-1)^{\frac{i-1}{2} + \frac{i^2-1}{8}} i + \sum (-1)^{\frac{q-1}{2} + \frac{q^2-1}{8}} q;\ m = q^2 + 64v^2\ q > 0.$$

Точно такимъ же образомъ изъ установленнаго въ § 4 равенства

$$N(m = x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 16t^2) = \zeta(m) + \sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i;\ m = i^2 + 4s^2$$

выведемъ

$$N(m = x^2 + 8y^2 + 8z^2 + 64t^2) = \frac{1}{2}[\zeta(m) + \sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i] +$$
$$+ \sum (-1)^{\frac{s-1}{2} + \frac{s^2-1}{8}} s;\quad m = s^2 + 8t^2,\ s > 0.$$

Опредѣлимъ наконецъ число рѣшеній уравненія

$$m = x^2 + 2y^2 + 32z^2 + 32t^2,$$

предполагая $m \equiv 3 \pmod 8$; для случая $m \equiv 1 \pmod 8$ намъ неизвѣстно никакого простого результата. Разсматривая уравненіе

$$m = x^2 + 2y^2 + 8\xi^2 + 8\eta^2,$$

обозначимъ соотвѣтственно черезъ P, Q, P', Q' числа рѣшеній, удовлетворяющихъ условіямъ

$$\begin{array}{ll} \xi \equiv & \eta \equiv 0 \\ \xi \equiv 1, & \eta \equiv 0 \\ \xi \equiv & \eta \equiv 1 \\ \xi \equiv 0, & \eta \equiv 1 \end{array} \pmod 2$$

На основаніи предыдущаго

$$P + P' = \psi(m) + \sum (-1)^{\frac{s-1}{2}} s; \quad m = s^2 + 2t^2; \quad s > 0.$$

Кромѣ того очевидно $Q = Q'$; слѣдовательно, если обозначимъ черезъ R и R' числа рѣшеній, гдѣ ξ четное и нечетное, то получимъ $P - P' = R - R'$. Но получаемое изъ формулы (VII) § 1 тождество

$$\sum_{m = 2x^2 + y^2 + 2d\delta;\ \delta \text{ неч.}} (-1)^x F(d + x) = \sum_{m = 2t^2 + s^2,\ t > 0} (-1)^{t-1} t F(t)$$

при $F(x) = \sin \frac{\pi x}{2}$ даетъ

$$P - P' = 2 \sum (-1)^{\frac{t-1}{2}} t, \quad m = 2t^2 + s^2, \quad t > 0,$$

откуда въ связи съ предыдущимъ имѣемъ

$$N(m = x^2 + 2y^2 + 32z^2 + 32t^2) = \frac{1}{2}\psi(m) + \frac{1}{2} \sum (-1)^{\frac{s-1}{2}} s + \\ + \sum (-1)^{\frac{t-1}{2}} t; \quad m \equiv 3 \pmod 8.$$

§ 11. О числѣ представленій формой $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2$.

Вопросъ о числѣ представленій формой $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2$ рѣшается на основаніи соображеній, сходныхъ съ соображеніями § 9. Предполагая $m \equiv 3 \pmod 4$, возьмемъ въ формулѣ (I) § 2

$$f(x, y) = (-1)^{\frac{x-1}{2}} y^2 \cos \frac{\pi y}{4}.$$

Послѣ простого изслѣдованія получимъ

$$2 \sum (-1)^n \left(\frac{-2}{\delta}\right) d^2 = 2 \sum (-1)^{\frac{\lambda-1}{2}} \lambda \left(\frac{2}{\Delta'}\right) \Delta,$$

что можно представить въ такой формѣ, принявъ во вниманіе сказанное въ § 9

$$2\sum(-1)^h\left(\frac{-2}{\delta}\right)d^2=\sum(-1^{\frac{\lambda-1}{2}}\lambda;\ 2m=\lambda^2+\mu^2+4\nu^2+4\varrho^2+8\sigma^2$$

или окончательно

$$2\sum(-1)^h\varphi(m-2h^2)=2\sum(-1)^{\frac{\xi-1}{2}+\eta}\xi;$$
$$m=\xi^2+4\eta^2+\zeta^2+\theta^2+4\sigma^2;\ \zeta\text{ и }\theta\text{ неч.,}\qquad(1)$$

согласившись ввести обозначеніе

$$\varphi(n)=\sum\left(\frac{-2}{\delta}\right)d^2;\ n=d\delta.$$

Если въ той же формулѣ (I) § 2 въ случаѣ $m\equiv 1\pmod 4$ возьмемъ $f(x,\ y)=xy\sin\frac{\pi y}{4}$, то найдемъ

$$2\sum(-1)^h\varphi(m-2h^2)=\sum(-1)^{\frac{\xi-1}{2}+\eta}\xi;$$
$$m=\xi^2+4\eta^2+\zeta^2+\theta^2+4\sigma^2;\ \zeta\text{ и }\theta\text{ чет,}\qquad(2)$$

Разсмотримъ теперь уравненіе

$$n=p^2+q^2+r^2+4s^2+4t^2+2u^2,$$

въ которомъ $q\equiv r\pmod 2$. Обозначимъ черезъ $P(n)$ число рѣшеній съ четными q и r и черезъ $Q(n)$ число рѣшеній съ нечетными q и r. Не трудно доказать, что

$$\sum(-1)^hP(m-2h^2)=0,\text{ если }m\equiv 3\pmod 4$$
$$\sum(-1)^hQ(m-2h^2)=0,\text{ если }m\equiv 1\pmod 4.$$

Въ самомъ дѣлѣ, въ уравненіи

$$m=2h^2+p^2+q^2+r^2+4s^2+4t^2+2u^2\qquad(a)$$

при четныхъ q и r и $m\equiv 3\pmod 4$ числа h и u разной четности; тѣ же числа разной четности при нечетныхъ q и r въ случаѣ $m\equiv 1\pmod 4$; отсюда написанныя выше равенства вытекаютъ непосредственно. Предполагая, что h и u въ уравненіи (a) одинаковой четности, можно безъ труда убѣдиться въ томъ, что въ уравненіи

$$m=4u^2+4v^2+p^2+q^2+r^2+4s^2+4t^2;\ q\equiv r\pmod 2\qquad(b)$$

числа u и v одинаковой четности, когда h и u четныя, и разной четности, когда h и u нечетныя. Но изъ формулы (VII) § 1 можно вывести,

что распространенная на рѣшенія уравненія (b) сумма $\sum(-1)^{u+v}$ равна суммѣ

$$\sum(-1)^{\frac{\xi-1}{2}+\eta}\xi,$$

распространенной на рѣшенія уравненія $m=\xi^2+4\eta^2+\zeta^2+6^2+4\sigma^2$; $\xi\equiv 1 \pmod 2$, т. е.

$$\sum(-1)^h Q(m-2h^2)=\sum(-1)^{\frac{\xi-1}{2}+\eta}\xi \text{ при } m\equiv 3 \pmod 4 \qquad (3)$$

$$\sum(-1)^h P(m-2h^2)=\sum(-1)^{\frac{\xi-1}{2}+\eta}\xi \text{ при } m\equiv 1 \pmod 4 \qquad (4)$$

Изъ (1) и (3), (2) и (4), положивъ

$$\chi(n)=P(n)+2Q(n),$$

выведемъ

$$\sum(-1)^h\chi(m-2h^2)=2\sum(-1)^h\varphi(m-2h^2)$$

для всякаго нечетнаго m, а отсюда получимъ

$$\chi(m)=P(m)+2Q(m)=2\varphi(m) \qquad (5)$$

Чтобы вывести изъ этого равенства число рѣшеній уравненія

$$m=x^2+y^2+z^2+t^2+u^2+2v^2, \qquad (c)$$

разсмотримъ отдѣльно случаи $m\equiv 1$ или $\equiv 3 \pmod 8$, $m\equiv 5 \pmod 8$ и $m\equiv 7 \pmod 8$.

Въ случаѣ $m\equiv 1 \pmod 8$ при v четномъ изъ чиселъ x, y, z, t, u только одно нечетное, а при v нечетномъ среди тѣхъ же чиселъ 3 нечетныхъ. Легко сообразить, что первая категорія содержитъ $5P(m)$ рѣшеній, а вторая—$10Q(m)$ рѣшеній; слѣдовательно полное число рѣшеній есть $5(P(m)+2Q(m))=10\varphi(m)$. Такой же результатъ получается въ случаѣ $m\equiv 3 \pmod 8$, слѣдовательно

$$N(m=x^2+y^2+z^2+t^2+u^2+2v^2)=10\varphi(m) \text{ при } m\equiv 1 \text{ или } \equiv 3 \pmod 8.$$

Случаи $m\equiv 5$ или $\equiv 7 \pmod 8$ трактуются одинаково; остановимся поэтому на предположеніи $m\equiv 7 \pmod 8$. Будемъ считать x нечетнымъ; тогда при v четномъ среди чиселъ y, z, t, u два нечетныхъ. Число рѣшеній такого рода, содержащихъ три нечетныхъ квадрата, есть $10Q(m)$. Если v нечетное, то или y, z, t, u всѣ четныя, причемъ $y^2+z^2+t^2+u^2\equiv 4 \pmod 8$, или y, z, t, u всѣ нечетныя.

Если число рѣшеній 1-го рода A, а второго рода B, то нетрудно видѣть, что $B = 2A$.

Кромѣ того ясно, что

$$A = P(m) \quad \text{и} \quad B = 2Q(m),$$

откуда

$$P(m) = Q(m) = \frac{2}{3}\varphi(m).$$

Полное число рѣшеній будетъ

$$10Q(m) + 2P(m) + 5P(m) = 17P(m) = \frac{34}{3}\varphi(m),$$

и такой же результатъ получается въ случаѣ $m \equiv 5 \pmod 8$. Нетрудно видѣть, что всѣ случаи обнимаются формулой

$$N(m = x^2+y^2+z^2+t^2+u^2+2v^2) = \frac{2}{3}\left[16 - \left(\frac{-2}{m}\right)\right]\Sigma\left(\frac{-2}{\delta}\right)d^2; \quad m \equiv 1 \pmod 2.$$

Также легко на основаніи сказаннаго найти, что въ случаѣ $m \equiv 7 \pmod 8$ число рѣшеній уравненія (c) въ нечетныхъ положительныхъ числахъ будетъ

$$\frac{1}{48}\Sigma\left(\frac{-2}{\delta}\right)d^2.$$

Переходя къ случаю четнаго числа $2^h m$, обозначимъ черезъ $F(h)$ полное число рѣшеній уравненія

$$2^h m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2.$$

Обозначимъ сверхъ того число рѣшеній этого уравненія, гдѣ x и y оба четныя, равно какъ и z, а t и u нечетныя, черезъ $B(h)$; а число рѣшеній, гдѣ x, y, t, u нечетныя, черезъ $C(h)$.

Полное число рѣшеній, гдѣ z четное, а $x \equiv y \pmod 2$, будетъ $F(h-2) + C(h) + 2B(h)$; но легко понять, что то же число будетъ $F(h-1)$, предполагая $h \geqq 2$; слѣдовательно

$$F(h-1) - F(h-2) = C(h) + 2B(h) = f(h)$$

или, увеличивая h на 1,

$$F(h) - F(h-1) = f(h+1) \quad \text{при} \quad h \geqq 1 \qquad \text{(d)}$$

Остается опредѣлить $f(h)$. Для этого разсмотримъ рѣшенія уравненія

$$2^h m = x^2 + y^2 + t^2 + u^2 + 2v^2 + 4z^2, \qquad \text{(e)}$$

въ которыхъ x и y четныя, а t и u нечетныя. Число такихъ рѣшеній будетъ $B(h)$; и нетрудно понять, что $\frac{1}{2}B(h)$ будетъ равна числу рѣшеній уравненія

$$2^{h-1}m = x^2+y^2+t^2+4u^2+v^2+2z^2,$$

гдѣ $x \equiv y \pmod 2$ и t нечетное. При $h=1$ это число будетъ $P(m)+Q(m)$, а при $h>1$ оно равно $B(h-1)+C(h-1)$; слѣдовательно

$$B(h)=2B(h-1)+2C(h-1) \text{ при } h>1 \text{ и } B(1)=2P(m)+2Q(m) \quad \text{(f)}$$

Если въ уравненіи (e) будемъ предполагать x, y, t, u нечетными, то число такихъ рѣшеній будетъ $C(h)$; легко понять, что $\frac{1}{4}C(h)$ будетъ равна числу рѣшеній уравненія

$$2^{h-1}m = x^2+y^2+z^2+4t^2+4u^2+2v^2,$$

гдѣ x, y, z нечетныя; такъ что будемъ имѣть

$$C(h)=4B(h-1) \text{ при } h>1 \text{ и } C(1)=4Q(m) \quad \text{(g)}$$

Изъ (f) и (g) найдемъ

$$f(h)=4f(h-1); \quad f(1)=4(P(m)+2Q(m))=8\varphi(m),$$

далѣе

$$f(h)=4^h.2\varphi(m)$$

и наконецъ на основаніи (d)

$$F(h)=\frac{2}{3}\left[4^{h+2}-\left(\frac{-2}{m}\right)\right]\varphi(m)$$

или

$$N(2^h m = x^2+y^2+z^2+t^2+u^2+2v^2)=\frac{2}{3}\left[4^{h+2}-\left(\frac{-2}{m}\right)\right]\Sigma\left(\frac{-2}{\delta}\right)d^2.$$

Замѣтимъ въ заключеніе, что изъ полученныхъ результатовъ весьма легко вывести число представленій формой $x^2+2y^2+2z^2+2t^2+2u^2+2v^2$; не останавливаясь на этомъ вопросѣ, перейдемъ къ болѣе интересному, именно къ опредѣленію функцій $B(h)$ и $C(h)$ въ отдѣльности, что составитъ предметъ слѣдующаго §.

§ 12. Число представленій формой $x^2+y^2+z^2+2t^2+2u^2+2v^2$.

Равенства (f) и (g) предыдущаго § даютъ возможность найти $B(h)$ и $C(h)$ при всякомъ h, если только будутъ извѣстны $P(m)$ и $Q(m)$.

Въ случаяхъ $m \equiv 5$ или $\equiv 7 \pmod 8$ имѣемъ $P(m) = Q(m) = \frac{2}{3}\varphi(m)$. Для $m \equiv 1$ или $\equiv 3 \pmod 8$ мы имѣемъ только одно соотношеніе $P(m) + 2Q(m) = 2\varphi(m)$.

Чтобы найти другое, прибѣгнемъ опять къ формулѣ (VII) § 1; полагая $F(x) = x$, извлечемъ изъ нея такое слѣдствіе:

$$\sum (-1)^z d = \frac{1}{2}\sum s^2, \qquad \text{(a)}$$

здѣсь сумма слѣва распространяется на всѣ рѣшенія уравненія $m = z^2 + 2t^2 + d\delta$, δ нечетное, t по произволу четное или нечетное; сумма справа—на всѣ представленія $m = s^2 + 2t^2$.

Подобнымъ же образомъ получается другая формула

$$\sum (-1)^t d = \mp \frac{1}{2}\sum t^2, \qquad \text{(b)}$$

въ которой сумма слѣва распространяется на всѣ рѣшенія уравненія $m = z^2 + 2t^2 + 2d\delta$, δ неч., а сумма справа на всѣ представленія $m = s^2 + 2t^2$. Случаи $m \equiv 1$ или $m \equiv 3 \pmod 8$ трактуются аналогично; поэтому достаточно разсмотрѣть, напр., случай $m \equiv 1 \pmod 8$. Въ этомъ случаѣ будемъ считать, что сумма въ лѣвой части равенства (a) распространяется на рѣшенія уравненія $m = z^2 + 2t^2 + d\delta$ съ четнымъ t. Изъ (a) и (b) получимъ

$$\sum_{z\equiv 0,\ t\equiv 0} d - \sum_{z\equiv 1,\ t\equiv 1} d = \frac{1}{2}\sum (s^2 - 2t^2), \quad m = s^2 + 2t^2. \qquad \text{(c)}$$

Здѣсь обѣ суммы въ лѣвой части распространяются на рѣшенія уравненія

$$m = z^2 + 2t^2 + d\delta, \quad \delta \text{ неч.},$$

причемъ первая на рѣшенія, гдѣ z и t четныя, вторая—на рѣшенія, гдѣ z и t нечетныя. Припоминая, какъ выражается число представленій суммою четырехъ квадратовъ, мы можемъ написать

$$\sum_{z\equiv 0,\ t\equiv 0} d = \frac{1}{8} N(m = z^2 + 2t^2 + x^2 + y^2 + u^2 + v^2); \quad z \text{ и } t \text{ четныя}$$

$$\sum_{z\equiv 1,\ t\equiv 1} d = \frac{2}{8} N(m = z^2 + 2t^2 + 2x^2 + 2y^2 + 2u^2 + 2v^2); \quad z \text{ и } t \text{ нечетныя.}$$

Но нетрудно видѣть, что

$$N(m = \underset{z\equiv 0,\ t\equiv 0}{z^2 + 2t^2} + x^2 + y^2 + u^2 + v^2) = 4P(m)$$

$$N(m = \underset{z\equiv 1,\ t\equiv 1}{z^2 + 2t^2} + 2x^2 + 2y^2 + 2u^2 + 2v^2) = 2Q(m),$$

слѣдовательно въ силу равенства (c) будемъ имѣть

$$P(m) - Q(m) = \sum (s^2 - 2t^2); \quad m = s^2 + 2t^2$$

или

$$P(m) - Q(m) = 2\sigma,$$

если положимъ

$$\sigma = \sum (s^2 - 2t^2); \quad m = s^2 + 2t^2, \quad s > 0$$

Такая же формула имѣетъ мѣсто и въ случаѣ $m \equiv 3 \pmod 8$. Теперь находимъ

$$\left.\begin{aligned} P(m) &= \frac{2}{3}\varphi(m) + \frac{4}{3}\sigma \\ Q(m) &= \frac{2}{3}\varphi(m) - \frac{2}{3}\sigma \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Эти формулы годятся и въ случаяхъ $m \equiv 5$ или $\equiv 7 \pmod 8$, такъ какъ тогда $\sigma = 0$.

Изъ равенствъ (f) и (g) предыдущаго § слѣдуетъ

$$B(h) - C(h) = -2(B(h-1) - C(h-1)) \text{ при } h > 1,$$

поэтому

$$B(h) - C(h) = (-1)^{h-1} 2^{h+1} \sigma.$$

Съ другой стороны

$$2B(h) + C(h) = 2 . 4^h \varphi(m),$$

слѣдовательно

$$\left.\begin{aligned} B(h) &= \frac{2}{3}[4^h\varphi(m) + (-1)^{h-1}2^h\sigma] \\ C(h) &= \frac{2}{3}[4^h\varphi(m) - (-1)^{h-1}2^{h+1}\sigma] \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Разсмотримъ теперь уравненіе

$$2^{h+1}m = 4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + t^2 + u^2 + 2v^2; \quad h \geqq 0.$$

Число рѣшеній его, гдѣ t и u нечетныя есть $B(h+1)$, число рѣшеній, гдѣ t и u четныя равно числу рѣшеній $\Phi(h)$ уравненія

$2^h m = x^2+2y^2+2z^2+2t^2+2u^2+v^2$; число рѣшеній, гдѣ $t \equiv u \pmod 2$ равно $B(h+1)+\Phi(h)$. Но это число равно числу рѣшеній уравненія

$$2^h m = x^2+y^2+z^2+2t^2+2u^2+2v^2.$$

Слѣдовательно

$$N(2^h m = x^2+y^2+z^2+2t^2+2u^2+2v^2) =$$
$$= \frac{2}{3}[4^{h+1}\varphi(m) - (-2)^{h+1}\sigma] + N(2^h m = x^2+2y^2+2z^2+2t^2+2u^2+2v^2).$$

Послѣдній членъ въ правой части, какъ уже было замѣчено, находится безъ труда. Именно

$$N(2^h m = x^2+2y^2+2z^2+2t^2+2u^2+2v^2) = \frac{4}{3}\left[4^{h+1} - \left(\frac{-2}{m}\right)\right]\varphi(m) \text{ при } h \geqq 0,$$

поэтому окончательно

$$N(2^h m = x^2+y^2+z^2+2t^2+2u^2+2v^2) =$$
$$= \frac{2}{3}\left[2^{2h+3} - \left(\frac{-2}{m}\right)\right]\varphi(m) + \frac{(-2)^{h+2}}{3}\sum(s^2-2t^2); \quad m = s^2+2t^2, \quad s>0.$$

Установленные результаты позволяютъ также опредѣлить число представленій формой

$$x^2+y^2+z^2+t^2+u^2+8v^2.$$

Дѣйствительно, легко найти, что для нечетнаго числа m число представленій этой формой N будетъ

$$N = 5P(m) = \frac{10}{3}\varphi(m) + \frac{20}{3}\sigma, \quad m \equiv 1 \pmod 8$$

$$N = 10Q(m) = \frac{20}{3}\varphi(m) - \frac{20}{3}\sigma, \quad m \equiv 3 \pmod 8$$

$$N = 7P(m) = \frac{14}{3}\varphi(m), \quad m \equiv 5 \pmod 8$$

$$N = 10Q(m) = \frac{20}{3}\varphi(m), \quad m \equiv 7 \pmod 8.$$

Для удвоеннаго нечетнаго числа $2m$ число представленій всегда будетъ $10B(1)$, т. е.

$$N(2m = x^2+y^2+z^2+t^2+u^2+8v^2) = \frac{80}{3}\varphi(m) + \frac{40\sigma}{3}.$$

Наконецъ, для числа $2^h m$, $h > 1$ число представленій будетъ $5C(h) + F(h-2)$, т. е.

$$N(2^h m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 8v^2) =$$
$$= \frac{2}{3}\left[6 \cdot 4^h - \left(\frac{-2}{m}\right)\right]\varphi(m) + (-1)^h \frac{5 \cdot 2^{h+2}}{3}\sigma \text{ при } h > 1.$$

Мы нашли нужнымъ остановиться на этихъ результатахъ, потому что они, повидимому, ускользнули отъ Ліувилля.

§ 13. Число представленій формой $x^2 + y^2 + z^2 + 3t^2$.

Способъ индукціи, которымъ мы до сихъ поръ исключительно пользовались, въ примѣненіи къ формѣ $x^2 + y^2 + z^2 + 3t^2$ оказывается слишкомъ громоздкимъ. Для этой формы проще будетъ вести изслѣдованіе, опираясь на слѣдующую формулу, приводимую здѣсь безъ доказательства, которое не представляетъ трудностей.

Если $F(x)$ нечетная функція, то имѣетъ мѣсто слѣдующее равенство:

$$\sum (-1)^{\frac{\delta'-1}{2}} [F(d+d') + F(d-d')] = 2^{\alpha-1} \sum (-1)^{\frac{\delta-1}{2}} dF(2^{\alpha+1}d); \quad (1)$$

здѣсь сумма слѣва распространяется на всѣ представленія четнаго числа $2^\alpha m$ въ формѣ

$$2^\alpha m = d\delta + d'\delta'$$

съ нечетными d, d', δ, δ', а сумма справа на всѣ представленія m въ формѣ $m = d\delta$.

Полагая въ (1) $F(x) = \sin\frac{2\pi x}{3}$, получимъ

$$\sum (-1)^{\frac{\delta'-1}{2}} \cos\frac{2\pi d'}{3} \cdot \left(\frac{-3}{d}\right) = (-1)^\alpha 2^{\alpha-2} \sum (-1)^{\frac{\delta-1}{2}} \left(\frac{-3}{d}\right) d. \quad (a)$$

Если $m = 3^\beta n$, гдѣ n на 3 недѣлится, то правую часть можно изобразить такъ

$$(-1)^{\alpha+\beta} 2^{\alpha-2} \sum (-1)^{\frac{\delta-1}{2}} \left(\frac{-3}{d}\right) d; \quad n = d\delta$$

или

$$(-1)^{\alpha+\beta} \left(\frac{n}{3}\right) 2^{\alpha-2} \sum \left(\frac{3}{\delta}\right) d; \quad n = d\delta.$$

Въ лѣвой части сумма

$$\sum (-1)^{\frac{\delta'-1}{2}} \cos\frac{2\pi d'}{3},$$

взятая по дѣлителямъ числа $m''=d'\delta'$ будетъ $-\frac{1}{2}\varrho(m'')$ (гдѣ $\varrho(m'')$ извѣстная числовая функція, связанная съ числомъ представленій суммой двухъ квадратовъ), если высшая степень 3, дѣлящая m'', четная (включая и нулевую), и $\frac{3}{2}\varrho\left(\frac{m''}{3}\right)$, если эта степень нечетная. Сумма $\sum\left(\frac{-3}{d}\right)$, взятая по дѣлителямъ нечетнаго числа $m'=d\delta$, равна половинѣ числа представленій m' формой x^2+3y^2. Нетрудно послѣ этого понять, что лѣвая часть равенства (а) имѣетъ слѣдующее ариѳметическое значеніе. Если обозначить знаками $\bar{N}(n=x^2+3y^2+z^2+t^2)$ и $\bar{N}(n=x^2+3y^2+3z^2+3t^2)$ числа представленій соотвѣтствующими формами, но такія, гдѣ x и y разной четности, то лѣвая часть равенства (а) будетъ

$$\frac{3}{16}\bar{N}(2^\alpha m=x^2+3y^2+3z^2+3t^2)-\frac{1}{16}\bar{N}(2^\alpha m=x^2+3y^2+z^2+t^2);$$

сравнивая ее съ правой частью, получаемъ первое основное равенство

$$3\bar{N}(2^\alpha m=x^2+3y^2+3z^2+3t^2)-\bar{N}(2^\alpha m=x^2+3y^2+z^2+t^2)=$$
$$=(-1)^{\alpha+\beta}\left(\frac{n}{3}\right)2^{\alpha+2}S. \qquad (2)$$

$$m=3^\beta n;\quad \beta\geqq 0;\quad S=\sum\left(\frac{3}{\delta}\right)d;\quad n=d\delta.$$

Сейчасъ покажемъ, что это равенство, выведенное для $\alpha>0$, будетъ справедливо и для $\alpha=0$.

Мы установили въ § 5 для случая $\nu\equiv 2 \pmod 4$ такое равенство

$$N(\nu=x^2+y^2+z^2)=N(\nu=x^2+3y^2+3z^2)+2N(\nu=3x^2+2y^2+6z^2),$$
$$y\equiv z \pmod 2$$

изъ котораго, какъ простое слѣдствіе, вытекаетъ второе основное соотношеніе:

$$\bar{N}(2m=x^2+3y^2+z^2+t^2)=\bar{N}(2m=x^2+3y^2+3z^2+3t^2)+$$
$$+4\bar{N}(m=x^2+3y^2+3z^2+3t^2) \qquad (3)$$

Замѣнивъ здѣсь m на $3m$, получимъ

$$\bar{N}(6m=x^2+3y^2+z^2+t^2)=\bar{N}(2m=x^2+3y^2+z^2+t^2)+$$
$$+4\bar{N}(m=x^2+3y^2+z^2+t^2) \qquad (4)$$

Отсюда и изъ (2)

$$3\bar{N}(2m=x^2+3y^2+z^2+t^2)-\bar{N}(6m=x^2+3y^2+z^2+t^2)=$$
$$=(-1)^{\beta+1}\left(\frac{n}{3}\right)8S+4\{3\bar{N}(m=x^2+3y^2+3z^2+3t^2)-\bar{N}(m=x^2+3y^2+z^2+t^2)\}.$$

Замѣнивъ въ равенствѣ (2) m на $3m$ и взявъ $\alpha=1$, имѣемъ

$$3\bar{N}(2m=x^2+3y^2+z^2+t^2)-\bar{N}(6m=x^2+3y^2+z^2+t^2)=(-1)^{\beta}\left(\frac{n}{3}\right)8S,$$

что въ связи съ предыдущимъ даетъ

$$3\bar{N}(m=x^2+3y^2+3z^2+3t^2)-\bar{N}(m=x^2+3y^2+z^2+t^2)=(-1)^{\beta}\left(\frac{n}{3}\right)4S. \quad (5)$$

Этимъ доказано равенство (2) и для $\alpha=0$. —Замѣтимъ, что уравненіе

$$n=x^2+3y^2+3z^2+3t^2$$

не имѣетъ рѣшеній, если $n\equiv 2 \pmod 3$. На этомъ основаніи въ случаѣ $m\equiv 2 \pmod 3$ изъ (5) сразу получаемъ

$$\bar{N}(m=x^2+3y^2+z^2+t^2)=4S; \quad m\equiv 2 \pmod 3.$$

Въ томъ же предположеніи изъ (3) и (2) найдемъ

$$\bar{N}(2m=x^2+3y^2+z^2+t^2)=4S; \qquad m\equiv 2 \pmod 3$$
$$\bar{N}(2m=x^2+3y^2+3z^2+3t^2)=4S; \quad m\equiv 2 \pmod 3.$$

Если $m\equiv 1 \pmod 3$, то изъ (2) получимъ

$$\bar{N}(2m=x^2+3y^2+z^2+t^2)=8S, \quad m\equiv 1 \pmod 3.$$

Затѣмъ изъ (3) и (5) найдемъ

$$\bar{N}(m=x^2+3y^2+3z^2+3t^2)=2S, \quad m\equiv 1 \pmod 3$$
$$\bar{N}(m=x^2+3y^2+z^2+t^2)=2S, \qquad m\equiv 1 \pmod 3.$$

Всѣ эти случаи обнимаются формулами

$$\left.\begin{aligned}\bar{N}(m=x^2+3y^2+z^2+t^2)&=\left[3-\left(\frac{m}{3}\right)\right]S\\ \bar{N}(2m=x^2+3y^2+z^2+t^2)&=2\left[3+\left(\frac{m}{3}\right)\right]S\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Если m дѣлится на 3, такъ что $m=3^{\beta}n$, $n\equiv\pm 1 \pmod 3$, то положивъ для сокращенія письма

$$\bar{N}(2^{\alpha}3^{\beta}n=x^2+3y^2+z^2+t^2)=\psi(\alpha,\ \beta),$$

изъ равенства (a) найдемъ

$$3\psi(\alpha,\ \beta-1)-\psi(\alpha,\ \beta)=(-1)^{\alpha+\beta}\left(\frac{n}{3}\right)2^{\alpha+\beta}S \quad \text{при} \quad \alpha\geqq 0$$

и отсюда легко выведемъ

$$\psi(\alpha,\ \beta) = 3^{\beta}\psi(\alpha,\ 0) + (3^{\beta} - (-1)^{\beta})\,(-1)^{\alpha}\left(\frac{n}{3}\right)2^{\alpha}S. \qquad (7)$$

Если $\alpha \geqq 2$, то въ уравненіи

$$2^{\alpha}n = x^2 + 3y^2 + z^2 + t^2$$

при условіи, что x и y разной четности, необходимо будетъ x четнымъ, y нечетнымъ; отсюда легко вывести, что

$$\psi(\alpha,\ 0) = 4\psi(\alpha - 2,0)$$

и далѣе въ силу равенствъ (6)

$$\psi(\alpha,\ 0) = 2^{\alpha}\left[3 - (-1)^{\alpha}\left(\frac{n}{3}\right)\right]S.$$

Подставляя это значеніе въ (7), получимъ общее выраженіе

$$\psi(\alpha,\ \beta) = 2^{\alpha}\left[3^{\beta+1} - (-1)^{\alpha+\beta}\left(\frac{n}{3}\right)\right]S. \qquad (8)$$

Остается теперь опредѣлить полное число представленій формой $x^2 + 3y^2 + z^2 + t^2$, которое для числа $2^{\alpha}3^{\beta}n$, гдѣ n нечетное и на 3 не дѣлится, обозначимъ черезъ $\varphi(\alpha,\ \beta)$.

Если m нечетное, то въ уравненіи

$$m = x^2 + 3y^2 + z^2 + t^2$$

при y четномъ, въ случаѣ $m \equiv 1 \pmod 4$, среди чиселъ x, z, t одно нечетное, а при y нечетномъ, среди тѣхъ же чиселъ одно четное; въ случаѣ $m \equiv 3 \pmod 4$ всѣ три числа x, z, t одинаковой четности. Отсюда нетрудно заключить, что вообще

$$\varphi(0,\ \beta) = \left[2 + (-1)^{\beta + \frac{n-1}{2}}\right]\psi(0,\ \beta).$$

Въ уравненіи

$$2m = x^2 + 3y^2 + z^2 + t^2$$

при y четномъ среди чиселъ x, z, t два нечетныхъ; число рѣшеній съ четнымъ y будетъ $\frac{3}{2}\psi(1,\ \beta)$. При y нечетномъ всѣ числа x, z, t нечетныя; число рѣшеній съ нечетнымъ y будетъ равно удвоенному числу рѣшеній уравненія

$$m = 2x^2 + 6y^2 + z^2 + t^2,$$

гдѣ x и y разной четности. Нетрудно видѣть, что полное число рѣшеній этого уравненія есть $\frac{1}{2}\psi(1,\ \beta)$. Это число совпадаетъ съ искомымъ, если $m \equiv 3 \pmod 4$, а при $m \equiv 1 \pmod 4$ искомое число равно 0. Въ виду этого нетрудно вывести, что

$$\varphi(1,\ \beta) = \frac{1}{2}\left[4 + (-1)^{\beta+\frac{n-1}{2}+1}\right]\psi(1,\ \beta).$$

Равнымъ образомъ легко показать, что при $\alpha \geqq 2$

$$\varphi(\alpha,\ \beta) - \varphi(\alpha-2,\ \beta) = \frac{3}{2}\psi(\alpha,\ \beta)$$

и въ связи съ предыдущимъ вывести общее выраженіе

$$\varphi(\alpha,\ \beta) = \left[3^{\beta+1} - (-1)^{\alpha+\beta}\left(\frac{n}{3}\right)\right]\left[2^{\alpha+1} + (-1)^{\alpha+\beta+\frac{n-1}{2}}\right]S.$$

Полученные результаты даютъ возможность опредѣлить число представленій многими другими формами, напр. формой $x^2+3y^2+3z^2+3t^2$, на чемъ, однако, не будемъ останавливаться. Ограничимся лишь указаніемъ на то, что

$$N(m = x^2+3y^2+3z^2+3t^2) = 2\left[2-(-1)^{\frac{m-1}{2}}\right]S.$$

для нечетнаго числа $\equiv 1 \pmod 3$.

§ 14. Число представленій формами $x^2+y^2+z^2+12t^2$ и $4x^2+3y^2+3z^2+3t^2$.

Ограничиваясь наиболѣе интереснымъ случаемъ нечетнаго m, разсмотримъ уравненіе

$$4m = s^2+t^2+u^2+3v^2 \qquad \text{(a)}$$

гдѣ u и v предполагаются нечетными. Полное число рѣшеній этого уравненія M слагается изъ числа M_1 рѣшеній, гдѣ $\frac{s}{2}$ четное и числа M_2 рѣшеній, гдѣ $\frac{s}{2}$ нечетное. По доказанному въ предыдущемъ §

$$M = M_1+M_2 = 2\left[3-\left(\frac{m}{3}\right)\right]S.$$

Съ другой стороны, примѣня формулу (VII) § 1, можно установить, что

$$M_1 - M_2 = 4\sum(-1)^{\frac{i-1}{2}}i;$$

гдѣ сумма распространяется на всѣ рѣшенія уравненія $4m = i^2 + 3j^2$ въ нечетныхъ и положительныхъ числахъ. Если число всѣхъ рѣшеній уравненія

$$m = x^2 + y^2 + z^2 + 3t^2,$$

гдѣ z и t разной четности, обозначить черезъ P; затѣмъ черезъ P_1 и P_2 числа тѣхъ рѣшеній, гдѣ при $z + t \equiv 1 \pmod 2$ x четное и нечетное, то будетъ

$$M = 2P, \quad M_1 = 2P_1, \quad M_2 = 2P_2.$$

Отсюда и на основаніи предыдущаго найдемъ

$$P_1 = \frac{1}{2}P + \sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i; \quad 4m = i^2 + 3j^2 \quad (i \text{ и } j \text{ нечет. полож.})$$

$$P_2 = \frac{1}{2}P - \sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i.$$

Послѣ этого безъ труда находится число рѣшеній уравненія

$$m = x^2 + y^2 + z^2 + 12t^2;$$

именно получается

$$N(m = x^2 + y^2 + z^2 + 12t^2) = \frac{3}{2}P + 3\sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i; \quad m \equiv 1 \pmod 4$$

$$N(m = x^2 + y^2 + z^2 + 12t^2) = \frac{1}{2}P - \sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i; \quad m \equiv 3 \pmod 4.$$

Предполагая m нечетнымъ $\equiv 1 \pmod 3$, разсмотримъ уравненіе

$$4m = x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 3t^2,$$

гдѣ x и y нечетныя. Пусть N полное число такихъ рѣшеній, N_1—число рѣшеній, гдѣ $\frac{t}{2}$ четное, N_2—число рѣшеній, гдѣ $\frac{t}{2}$ нечетное. Опять примѣненіемъ формулы (VII) § 1 можно установить, что

$$N_1 - N_2 = 4\sum (-1)^{\frac{j-1}{2}} j; \quad 4m = i^2 + 3j^2; \quad i \text{ и } j \text{ неч. полож.}$$

Если Q число рѣшеній уравненія

$$m = x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 3t^2,$$

гдѣ x и y разной четности, слагающееся изъ Q_1 рѣшеній, гдѣ t четное, и Q_2 рѣшеній, гдѣ t нечетное, то

$$N = 2Q, \quad N_1 = 2Q_1, \quad N_2 = 2Q_2.$$

Отсюда и на основаніи ранѣе доказаннаго

$$Q_1 = \frac{1}{2} Q + \sum (-1)^{\frac{j-1}{2}} j$$

$$Q_2 = \frac{1}{2} Q - \sum (-1)^{\frac{j-1}{2}} j.$$

Послѣ этого находится слѣдующее выраженіе для числа рѣшеній уравненія $m = 4x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 3t^2$:

$$N(m = 4x^2+3y^2+3z^2+3t^2) = \frac{1}{2} Q - \sum (-1)^{\frac{j-1}{2}} j; \quad m \equiv 1 \pmod 4$$

$$N(m = 4x^2+3y^2+3z^2+3t^2) = \frac{3}{2} Q + 3 \sum (-1)^{\frac{j-1}{2}} j; \quad m \equiv 3 \pmod 4.$$

Не представляется труднымъ изъ доказанныхъ въ этомъ § основныхъ результатовъ вывести числа представленій многими другими формами, разсмотрѣнными Ліувиллемъ. Возьмемъ для примѣра двѣ формы: $x^2 + 4y^2 + 16z^2 + 12t^2$ и $4x^2 + 3y^2 + 12z^2 + 48t^2$.

Полное число рѣшеній R уравненія

$$m = x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 12t^2; \quad m \equiv 1 \pmod 4$$

составляется изъ числа рѣшеній R', гдѣ z четное, и числа рѣшеній R'', гдѣ z нечетное. По доказанному

$$R' + R'' = \frac{1}{2} P + \sigma; \quad \sigma = \sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i.$$

Но примѣненіе формулы (VII) § 1 даетъ

$$R' - R'' = 2 \sum (-1)^{\frac{s-1}{2}} s; \quad m = s^2 + 12t^2, \quad s > 0,$$

и легко убѣдиться, что

$$\sum (-1)^{\frac{s-1}{2}} s = (-1)^{\frac{m^2-1}{8}} \sigma,$$

замѣтивъ, что всѣ рѣшенія уравненія $4m = i^2 + 3j^2$, гдѣ $i \equiv j \pmod 4$, получаются изъ рѣшеній уравненія $m = x^2 + 3y^2$ по формуламъ

$$i = x + 3y, \quad j = x - y.$$

Изъ сказаннаго слѣдуетъ

$$N(m = x^2+4y^2+16z^2+12t^2) = \frac{1}{4}P + \left[\frac{1}{2} + \left(\frac{2}{m}\right)\right]\sigma; \quad m \equiv 1 \pmod 4.$$

Полное число рѣшеній S уравненія

$$m = 4x^2+3y^2+12z^2+12t^2; \quad m \equiv 3 \pmod 4$$

слагается изъ S' рѣшеній, гдѣ t четное, и S'' рѣшеній, гдѣ t нечетное. По доказанному

$$S'+S'' = \frac{1}{2}Q + \tau; \quad \tau = \sum(-1)^{\frac{j-1}{2}} j; \quad 4m = i^2+3j^2.$$

Съ другой стороны примѣненіе формулы (VII) § 1 даетъ

$$S'-S'' = 2\sum(-1)^{\frac{t-1}{2}} t; \quad m = 3t^2+4x^2; \quad t>0$$

и легко убѣдиться, что

$$\sum(-1)^{\frac{t-1}{2}} t = -(-1)^{\frac{m^2-1}{8}} \tau.$$

На основаніи сказаннаго получимъ

$$N(m = 4x^2+3y^2+12z^2+48t^2) = \frac{1}{4}Q + \left[\frac{1}{2} - \left(\frac{2}{m}\right)\right]\tau; \quad m \equiv 3 \pmod 4.$$

§ 15. Число представленій формой $x^2+y^2+z^2+t^2+u^2+3v^2$.

Вмѣстѣ съ этой формой придется разсматривать форму

$$x^2+3y^2+3z^2+3t^2+3u^2+3v^2.$$

Обозначимъ черезъ $N(n)$ число всѣхъ рѣшеній уравненія

$$n = x^2+y^2+z^2+t^2+u^2+3v^2. \qquad \text{(a)}$$

и черезъ $N_0(n)$ число рѣшеній, гдѣ u и v разной четности. Обозначимъ также черезъ $M(n)$ и $M_0(n)$ соотвѣтственно число всѣхъ рѣшеній уравненія

$$n = x^2+3y^2+3z^2+3t^2+3u^2+3v^2. \qquad \text{(b)}$$

и число тѣхъ рѣшеній, гдѣ x и y разной четности. Докажемъ, что для всякаго недѣлящагося на 3 числа n

$$M(n) = \frac{1+\left(\frac{n}{3}\right)}{10} N(n),$$

т. е. $M(n)=0$, если $n\equiv 2 \pmod 3$, что очевидно, и $M(n)=\frac{1}{5}N(n)$, если $n\equiv 1 \pmod 3$. Въ случаѣ $n\equiv 1 \pmod 3$ въ уравненіи (a) изъ чиселъ x, y, z, t, u или только одно не дѣлится на 3 или четыре. Если P есть число всѣхъ рѣшеній, гдѣ x не дѣлится на 3, а y, z, t, u дѣлятся, и равнымъ образомъ P' число рѣшеній, гдѣ x не дѣлится на 3, y, z, t, не дѣлятся, а u дѣлится, то $N(n)=5P+5P'$. Докажемъ, что $P+P'=M(n)$. Если обозначимъ черезъ $\overline{\zeta}(s)$ сумму нечетныхъ дѣлителей $s=3^\beta\sigma$, то имѣемъ

$$\overline{\zeta}(s)+3\overline{\zeta}\left(\frac{s}{9}\right)=4\overline{\zeta}\left(\frac{s}{3}\right). \qquad (c)$$

Число всѣхъ рѣшеній уравненія (a), гдѣ x не дѣлится на 3, равное $4P'+P$, выражается суммой

$$4P'+P=8\sum\{2+(-1)^{n+x+v}\}\overline{\zeta}(n-x^2-3v^2).$$

Для P тоже получается выраженіе въ видѣ суммы

$$P=8\sum\{2+(-1)^{n+x+v}\}\overline{\zeta}\left(\frac{n-x^2-3v^2}{9}\right).$$

Изъ этихъ выраженій, принявъ во вниманіе тождество (c), находимъ

$$4(P'+P)=32\sum\{2+(-1)^{n+x+v}\}\overline{\zeta}\left(\frac{n-x^2-3v^2}{3}\right)=4M(n).$$

Докажемъ теперь, что для четнаго n

$$M_0(n)=\frac{1+\left(\frac{n}{3}\right)}{10}N_0(n).$$

Разсмотримъ уравненіе

$$2^\alpha m=x^2+y^2+z^2+t^2+u^2+3v^2;\quad \alpha\geqq 3,\quad m \text{ неч.}$$

Если v четное, то или всѣ остальныя числа четныя или только одно; если v нечетное, то или всѣ остальныя числа нечетныя или только одно. На этомъ основаніи, если обозначимъ черезъ

R число рѣшеній, гдѣ x, y, z, t неч., u четн. v четн.
S » » » x, y, z, t четн., u неч. v неч.
T » » » x, y, z, t неч., u неч. v неч.
U » » » x, y, z, t четн., u четн. v четн.

то

$$N(2^\alpha m)=N(2^{\alpha-2}m)+5R+5S+T.$$

Но $T=2R$ и $S=R$, поэтому

$$N(2^\alpha m) - N(2^{\alpha-2}m) = 12R.$$

Съ другой стороны $\frac{1}{2}R = N_0(2^{\alpha-2}m)$, слѣдовательно

$$N(2^\alpha m) - N(2^{\alpha-2}m) = 24N_0(2^{\alpha-2}m). \qquad (d)$$

Подобнымъ же образомъ устанавливается равенство

$$M(2^\alpha m) - M(2^{\alpha-2}m) = 24M_0(2^{\alpha-2}m).$$

Изъ совокупности же выведенныхъ равенствъ требуемое доказательство получается непосредственно.

До сихъ поръ предполагалось $\alpha \geqq 3$: если $\alpha=2$, то $T=0$ и кромѣ того R и S соотвѣтственно представляютъ удвоенныя числа рѣшеній уравненія

$$m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 3v^2,$$

гдѣ $u+v$ четное и $u+v$ нечетное. Вслѣдствіе этого $R+S=2N(m)$ и

$$N(4m) = 11N(m). \qquad (e)$$

Кромѣ того

$$N_0(4m) = 4R + 4S = 8N(m). \qquad (f)$$

Подобнымъ же образомъ устанавливается равенство

$$N(2m) = \frac{5}{2}N_0(m). \qquad (g)$$

Найдемъ теперь связь между $N(3^\beta m)$ и $N(m)$, предполагая, что m на 3 не дѣлится.

Уравненіе

$$3^{\beta+1}m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 3v^2$$

имѣетъ рѣшенія двоякаго рода: къ первому роду относятся тѣ рѣшенія, гдѣ всѣ числа x, y, z, t, u дѣлятся на 3, ко второму роду—рѣшенія, гдѣ только два числа дѣлятся на 3. Пусть число рѣшеній 1-го рода P, а второго рода, гдѣ x и y дѣлятся на 3, Q; тогда полное число рѣшеній будетъ

$$N(3^{\beta+1}m) = P + 10Q.$$

Съ другой стороны можно доказать, какъ выше, что

$$P + Q = M(3^{\beta+1}m) = N(3^\beta m);$$

кромѣ того ясно, что $P = M(3^\beta m) = N(3^{\beta-1}m)$, если $\beta \geqq 1$. Такимъ образомъ получимъ

$$N(3^{\beta+1}m) - N(3^\beta m) = 9\{N(3^\beta m) - N(3^{\beta-1}m)\} \text{ при } \beta \geqq 1,$$

откуда далѣе найдемъ

$$N(3^{\beta+1}m) - N(3^\beta m) = 9^\beta (N(3m) - N(m))$$

или, мѣняя β на $\beta - 1$,

$$N(3^\beta m) - N(3^{\beta-1}m) = 9^{\beta-1}(N(3m) - N(m)); \quad \beta \geqq 1.$$

Въ случаѣ $\beta = 0$ имѣемъ

$$P = M(m) = \frac{1 + \left(\frac{m}{3}\right)}{10} N(m), \quad Q = N(m) - P$$

и

$$N(3m) = P + 10Q = 10N(m) - 9P$$

$$N(3m) - N(m) = \frac{9}{10}\left(9 - \left(\frac{m}{3}\right)\right) N(m);$$

поэтому

$$N(3^\beta m) - N(3^{\beta-1}m) = \frac{9^\beta}{10}\left[9 - \left(\frac{m}{3}\right)\right] N(m).$$

Отсюда находимъ окончательно

$$N(3^\beta m) = \frac{9^{\beta+1} + \left(\frac{m}{3}\right)}{9 + \left(\frac{m}{3}\right)} N(m). \tag{1}$$

Послѣ этихъ предварительныхъ соображеній обращаемся къ слѣдующей важной формулѣ Ліувилля

$$\sum [f(d' - d'') - f(d' + d'')] = 2^{\alpha-1} \sum d(f(0) - f(2^\alpha d)), \tag{2}$$

гдѣ $f(x)$ обозначаетъ произвольную четную функцію, сумма слѣва распространяется на всѣ представленія четнаго числа $2^\alpha m$ въ формѣ

$$2^\alpha m = d'\delta' + d''\delta'',$$

съ нечетными d', δ', d'', δ''; сумма справа берется по дѣлителямъ m. Полагая $f(x) = x \sin \frac{2\pi x}{3}$, получимъ

$$2 \sum \left(\frac{-3}{d'}\right) d'' \cos \frac{2\pi d''}{3} = (-1)^\alpha 2^{2\alpha-2} \left(\frac{m}{3}\right) \sum \left(\frac{\delta}{3}\right) d^2; \quad m = d\delta. \tag{h}$$

Но на основаніи установленнаго въ § 5 легко убѣдиться, что сумма

$$\sum d \cos \frac{2\pi d}{3},$$

взятая по дѣлителямъ нечетнаго числа n равна

$$\frac{1}{8} N(n = x^2 + y^2 + z^2 + t^2) - \frac{3}{8} N(n = x^2 + y^2 + 3z^2 + 3t^2),$$

что даетъ возможность истолковать равенство (h) такъ: обозначая черезъ $N_0(n)$, $M_0(n)$ то же, что выше, и черезъ $P_0(n)$ число рѣшеній уравненія

$$n = x^2 + y^2 + 3z^2 + 3t^2 + u^2 + 3v^2,$$

гдѣ u и v разной четности, будемъ имѣть

$$N_0(2^\alpha m) - 3P_0(2^\alpha m) = (-1)^\alpha 2^{2\alpha+1} \left(\frac{m}{3}\right) \sum \left(\frac{\delta}{3}\right) d^2. \qquad (3)$$

Чтобы получить второе соотношеніе, замѣнимъ въ формулѣ (2) $f(x)$ черезъ $(-1)^{\frac{x}{2}} f(x)$; затѣмъ въ полученномъ равенствѣ

$$\sum (-1)^{\frac{\delta'-1}{2}} (-1)^{\frac{\delta''-1}{2}} [f(d' - d'') + f(d' + d'')] = 2^{\alpha-1} \sum d(f(0) + f(2^\alpha d)). \qquad (4)$$

положимъ опять $f(x) = x \sin \frac{2\pi x}{3}$. Въ результатѣ получимъ

$$16 \sum (-1)^{\frac{\delta'-1}{2}} \left(\frac{d'}{3}\right) d' . (-1)^{\frac{\delta''-1}{2}} \cos \frac{2\pi d''}{3} = 2^{2\alpha+1} . (-1)^{\alpha-1} \left(\frac{m}{3}\right) \sum \left(\frac{\delta}{3}\right) d^2; \; m = d\delta. \qquad (i)$$

Но сумма

$$\sum (-1)^{\frac{\delta-1}{2}} \left(\frac{d}{3}\right) d,$$

взятая по дѣлителямъ нечетнаго числа n, на основаніи доказаннаго въ § 13, равна

$$\frac{3}{4} \overline{N}(n = x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 3t^2) - \frac{1}{4} \overline{N}(n = x^2 + 3y^2 + z^2 + t^2),$$

что даетъ возможность изъ (i) вывести

$$6P_0(2^\alpha m) - 9M_0(2^\alpha m) - N_0(2^\alpha m) = (-1)^{\alpha-1} 2^{2\alpha+3} \left(\frac{m}{3}\right) \sum \left(\frac{\delta}{3}\right) d^2. \qquad (5)$$

Прибавляя къ равенствамъ (3) и (5) ранѣе доказанное соотношеніе

$$10M_0(2^\alpha m) = \left[1 + \left(\frac{2^\alpha m}{3}\right)\right] N_0(2^\alpha m),$$

найдемъ

$$N_0(2^\alpha m) = 2^{2\alpha-1}\left(9 + (-1)^\alpha\left(\frac{m}{3}\right)\right)\sigma; \quad \sigma = \sum\left(\frac{\delta}{3}\right)d^2; \quad m = d\delta.$$

Обращаясь затѣмъ къ равенствамъ (f) и (g), получимъ

$$N(m) = \left[9 + \left(\frac{m}{3}\right)\right]\sigma; \quad N(2m) = 5\left[9 - \left(\frac{m}{3}\right)\right]\sigma$$

и далѣе на основаніи соотношенія (d) найдемъ

$$N(2^\alpha m) = \frac{1}{5}\left\{9 + (-1)^\alpha\left(\frac{m}{3}\right)\right\}\left\{4^{\alpha+1} - (-1)^\alpha . 9\right\}\sigma; \quad \alpha > 0.$$

Здѣсь предполагается, что m не дѣлится на 3; для опредѣленія числа представленій чиселъ, дѣлящихся на 3, служитъ формула (1).

§ 16. Число представленій формой $x^2+y^2+z^2+3t^2+3u^2+3v^2$.

Въ предыдущемъ § мы встрѣтили форму $x^2+y^2+z^2+3t^2+3u^2+3v^2$, не разсмотрѣнную у Ліувилля.

Въ виду интересныхъ особенностей этой формы не лишне будетъ, хотя бы кратко, коснуться ея теоріи. Полное число представленій этой формой обозначимъ черезъ $P(n)$, сохраняя за знакомъ $P_0(n)$ то же значеніе, какъ въ предыдущемъ §. Для недѣлящагося на 3 числа $2^\alpha m$ ($\alpha > 0$) мы нашли

$$N_0(2^\alpha m) - 3P_0(2^\alpha m) = (-1)^\alpha 2^{2\alpha+1}\left(\frac{m}{3}\right)\sum\left(\frac{\delta}{3}\right)d^2. \qquad (1)$$

Если же $m = 3^\beta n$, то это соотношеніе замѣнится такимъ

$$N_0(2^\alpha m) - 3P_0(2^\alpha m) = (-1)^\alpha 2^{2\alpha+1}\left(\frac{n}{3}\right)\sum\left(\frac{\delta}{3}\right)d^2; \quad d\delta = n. \qquad (1^*)$$

На основаніи равенства

$$N(2^\alpha m) - N(2^{\alpha-2}m) = 24N_0(2^{\alpha-2}m); \quad \alpha \geqq 3$$

можно считать величину $N_0(2^\alpha m)$ извѣстной во всѣхъ случаяхъ; поэтому будетъ считаться извѣстной также и величина $P_0(2^\alpha m)$ для $\alpha > 0$. Чтобы получить $P(2^\alpha m)$ будемъ разсуждать такъ. Въ уравненіи

$$2^\alpha m = x^2 + 3y^2 + z^2 + 3t^2 + u^2 + 3v^2; \quad \alpha \geqq 3$$

можно различать три категоріи рѣшеній: для рѣшеній 1-ой категоріи не всѣ числа x^2+3y^2, z^2+3t^2, u^2+3v^2 числа четныя; для рѣшеній 2-ой категоріи, хотя эти числа четныя (дѣлящіяся на 4), но не всѣ дѣлятся на 8; для рѣшеній 3-ей категоріи всѣ упомянутыя числа дѣлятся на 8. Первая категорія содержитъ $\frac{3}{2}P_0(2^\alpha m)$ рѣшеній, вторая $\frac{27}{2}P_0(2^{\alpha-2}m)$ рѣшеній и третья $P(2^{\alpha-2}m)$ рѣшеній. Такимъ образомъ

$$P(2^\alpha m)=P(2^{\alpha-2}m)+\frac{3}{2}P_0(2^\alpha m)+\frac{27}{2}P_0(2^{\alpha-2}m);\quad \alpha\geqq 3. \qquad (2)$$

Это равенство приводитъ всю задачу къ опредѣленію $P(m)$, $P(2m)$, $P(4m)$. Что касается $P(2m)$, то

$$P(2m)=\frac{3}{2}P_0(2m),$$

такъ какъ нѣтъ рѣшеній 2-ой и третьей категоріи. Въ частности для m не дѣлящагося на 3 будетъ

$$P(2m)=3\left[3+\left(\frac{m}{3}\right)\right]\sum\left(\frac{\delta}{3}\right)d^2;\quad m=d\delta.$$

Для опредѣленія $P(m)$ разсмотримъ уравненіе

$$4m=x^2+3y^2+z^2+3t^2+u^2+3v^2.$$

Число рѣшеній его, гдѣ x^2+3y^2 и z^2+3t^2 нечетныя, есть $\frac{1}{2}P_0(4m)$; отсюда нетрудно заключить, что число рѣшеній, гдѣ x и y нечетныя, а z и t четныя, равно $\frac{1}{4}P_0(4m)$. Пусть среди этихъ рѣшеній будетъ S такихъ, гдѣ $z^2+3t^2\equiv 4 \pmod 8$, и T такихъ, гдѣ $z^2+3t^2\equiv 0 \pmod 8$, такъ что

$$S+T=\frac{1}{4}P_0(4m). \qquad (a)$$

Нетрудно видѣть, что $\frac{1}{6}S$ есть число рѣшеній уравненія

$$m=x^2+3y^2+z^2+3t^2+u^2+3v^2,$$

гдѣ x^2+3y^2 и z^2+3t^2 нечетныя, и $\frac{1}{2}T$ число рѣшеній того же уравненія, гдѣ x^2+3y^2 нечетное, а z^2+3t^2 четное. Полное число рѣшеній $P(m)$ будетъ

$$P(m)=\frac{3}{2}T+\frac{1}{6}S.$$

Для полнаго опредѣленія S и T недостаетъ одного уравненія; чтобы получить его, обращаемся къ формулѣ (VII) § 1. Беря въ ней $F(x)=x$ выведемъ, во-первыхъ, соотношеніе

$$\sum(-1)^{s+t}d=\frac{1}{2}\sum i^2; \qquad \text{(b)}$$

здѣсь первая сумма распространяется на всѣ представленія m въ формѣ

$$m=s^2+3t^2+d\delta; \quad \delta \text{ неч.},$$

вторая же—на всѣ рѣшенія уравненія $m=i^2+3j^2$. Во-вторыхъ, выведемъ соотношеніе

$$\sum(-1)^{s+t}d=\frac{1}{2}\sum j^2, \qquad \text{(c)}$$

гдѣ первая сумма распространяется на всѣ рѣшенія уравненія

$$m=3t^2+s^2+3d\delta; \quad \delta \text{ неч.},$$

вторая—на всѣ рѣшенія уравненія $m=i^2+3j^2$. Обозначивъ черезъ $\overline{\zeta}(n)$ сумму нечетныхъ дѣлителей n и черезъ 2^α наивысшую степень 2, дѣлящую d (въ обоихъ случаяхъ), напишемъ равенства (b) и (c) такъ

$$\sum(-1)^{s+t}2^\alpha\overline{\zeta}(m-s^2-3t^2)=\frac{1}{2}\sum i^2\ldots(\text{b}^*); \quad s^2+3t^2<m$$

$$\sum(-1)^{s+t}2^\alpha\overline{\zeta}\left(\frac{m-s^2-3t^2}{3}\right)=\frac{1}{2}\sum j^2\ldots(\text{c}^*); \quad s^2+3t^2<m,$$

если согласимся полагать $\overline{\zeta}\left(\frac{n}{3}\right)=0$, когда n на 3 не дѣлится. Замѣтимъ теперь, что при всякомъ n разность $\overline{\zeta}(n)-3\overline{\zeta}\left(\frac{n}{3}\right)$ равна суммѣ нечетныхъ дѣлителей n, не дѣлящихся на 3; обозначивъ эту сумму черезъ $\varphi(n)$, изъ (b*) и (c*) получимъ

$$\sum(-1)^{s+t}2^\alpha\varphi(m-s^2-3t^2)=\frac{1}{2}\sum(i^2-3j^2) \qquad \text{(d)}$$

На основаніи доказаннаго въ § 5 $\varphi(n)$ равно $\frac{1}{4}$ числа рѣшеній уравненія

$$n=x^2+3y^2+z^2+3t^2,$$

если n нечетное, и $2^\alpha\varphi(n)$ равно $\frac{1}{2}$ числа рѣшеній уравненія

$$2^\alpha n=x^2+3y^2+z^2+3t^2; \quad n \text{ неч.},$$

гдѣ x и y разной четности. Послѣ этого ясно, что при выше принятыхъ обозначеніяхъ равенство (d) можетъ быть написано такъ:

$$\frac{1}{2}T-\frac{1}{6}S=\sum(i^2-3j^2). \qquad (e)$$

Изъ (a) и (e) найдемъ S и T:

$$S=\frac{3}{16}P_0(4m)-\frac{3}{2}\tau;\quad T=\frac{1}{16}P_0(4m)+\frac{3}{2}\tau;$$
$$\tau=\sum(i^2-3j^2);\quad m=i^2+3j^2$$

и потомъ получимъ

$$P(m)=\frac{1}{8}P_0(4m)+2\tau.$$

Для недѣлящагося на 3 числа m

$$P(m)=\left[3-\left(\frac{m}{3}\right)\right]\sum\left(\frac{\delta}{3}\right)d^2+2\tau.$$

Остается опредѣлить $P(4m)$. Третьей категоріи рѣшеній въ этомъ случаѣ нѣтъ; число же рѣшеній 2-й категоріи будетъ, какъ легко видѣть,

$$\frac{9}{2}T+\frac{9}{2}S=\frac{9}{8}P_0(4m)$$

и потому полное число рѣшеній есть

$$P(4m)=\frac{21}{8}P_0(4m).$$

Въ случаѣ не дѣлящагося на 3 числа m

$$P(4m)=21\left[3-\left(\frac{m}{3}\right)\right]\sum\left(\frac{\delta}{3}\right)d^2.$$

§ 17. Число представленій формой $x^2+y^2+z^2+5t^2$.

Для опредѣленія числа представленій формой $x^2+y^2+z^2+5t^2$ слѣдуетъ прежде всего опредѣлить число представленій какого угодно числа совокупностью двухъ формъ x^2+5y^2 и $2x^2+2xy+3y^2$ опредѣлителя—5. Этого мы достигнемъ частью на основаніи доказанныхъ въ § 7 результатовъ, частью воспользовавшись равенствомъ (4) § 15. Введемъ предварительно слѣдующее обозначеніе:

$$g(m)=\sum(-1)^{\frac{d-1}{2}}\left(\frac{d}{5}\right)=\sum\left(\frac{-5}{d}\right),$$

гдѣ сумма берется по дѣлителямъ нечетнаго числа m. Затѣмъ въ упомянутомъ выше равенствѣ, считая m не дѣлящимся на 5, положимъ

$$f(x) = 1 + 4\cos\frac{2\pi x}{5};$$

если примемъ во вниманіе, что $f(x) = 5$, когда x дѣлится на 5 и $f(x) = \sqrt{5}\left(\frac{x}{5}\right)$, когда x не дѣлится на 5, и что для всякаго нечетнаго n

$$\sum(-1)^{\frac{d-1}{2}} f(d) = 5\varrho\left(\frac{n}{5}\right) + \sqrt{5}\, g(n); \quad n = d\delta,$$

то послѣ отдѣленія раціональныхъ и ирраціональныхъ членовъ получимъ:

$$\sum\varrho(m')\varrho(m'') + \sum g(m')g(m'') - 2\sum\varrho(m'')\varrho\left(\frac{m'}{5}\right) = 2^{\alpha}\zeta(m). \qquad (1)$$

$$5\sum g(m')\varrho\left(\frac{m''}{5}\right) - \sum g(m')\varrho(m'') = (-1)^{\alpha}2^{\alpha-1}\sum d\left(\frac{d}{5}\right); \quad m = d\delta. \qquad (2)$$

$$2^{\alpha}m = m' + m''; \quad m' \text{ и } m'' \text{ нечетныя} > 0.$$

Если въ равенствѣ (1) будемъ считать $\alpha = 1$ и замѣтимъ, что

$$\sum\varrho(m')\varrho(m'') = \zeta(m),$$

то получимъ

$$\sum g(m')g(m'') = \zeta(m) + 2\sum\varrho(m')\varrho\left(\frac{m''}{5}\right). \qquad (a)$$

Здѣсь сумма $\sum\varrho(m')\varrho\left(\frac{m''}{5}\right)$ равна $\frac{1}{16}$ числа рѣшеній уравненія

$$2m = x^2 + y^2 + 5z^2 + 5t^2,$$

гдѣ x и y разной четности. Если это число обозначимъ черезъ P, то

$$8\sum g(m')g(m'') = 8\zeta(m) + P \qquad (a^*)$$

То-же число P будетъ числомъ рѣшеній уравненія

$$4m = \xi^2 + 5\eta^2 + \zeta^2 + 5\theta^2,$$

гдѣ ξ, η, ζ, θ нечетныя, а это число въ свою очередь равно числу рѣшеній уравненія

$$2m = 2x^2 + 2xy + 3y^2 + 2z^2 + 2zt + 3t^2,$$

гдѣ y и t нечетныя, въ чемъ убѣждаемся, положивъ $\xi+\eta=2m$, $\xi-\eta=2p$, $\zeta+\theta=2q$, $\zeta-\theta=2r$ и замѣтивъ, что форма (3,—4, 3) эквивалентна формѣ (2, 1, 3). Нетрудно также видѣть, что $\frac{1}{2}P$ есть число рѣшеній уравненія

$$2m=x^2+y^2+5z^2+5t^2,$$

гдѣ x и z одной четности. Въ § 7 было доказано, что полное число рѣшеній этого уравненія есть $4\zeta(m)$; поэтому сумма $4\zeta(m)+\frac{1}{2}P$ можетъ быть изображена такъ

$$4\zeta(m)+\frac{1}{2}P=N(2m=\underset{x+y\text{ неч.}}{x^2+5y^2}+z^2+5t^2)+$$
$$+N(2m=\underset{y\text{ неч.}}{2x^2+2xy+3y^2}+2z^2+2zt+3t^2),$$

что даетъ возможность истолковать равенство (a*) такъ. Если для нечетнаго m обозначимъ черезъ $G(m)$ число представленій совокупностью формъ (1, 0, 5) и (2, 1, 3), то

$$4\sum g(m')g(m'')=\sum G(m')G(m'');\quad 2m=m'+m''.$$

Это равенство позволяетъ по индукціи заключить, что

$$G(m)=2g(m).$$

Замѣтимъ, что формы x^2+5y^2 и $2x^2+xy+y^2$ способны представлять числа только одной изъ слѣдующихъ линейныхъ формъ: $20h+1$, $20h+9$, $20h+3$, $20h+7$. Среди этихъ чиселъ числа вида $20h+1$, $20h+9$ могутъ представляться только формой x^2+5y^2, а числа вида $20h+3$, $20h+7$—только формой $2x^2+2xy+3y^2$.

Имѣя въ виду ариѳметическое значеніе числовой функціи $g(m)$, нетрудно будетъ вывести изъ равенства (2) полезныя для насъ слѣдствія. Именно, если въ случаѣ $\alpha=1$ обозначимъ черезъ R и S числа рѣшеній уравненій

$$2m=x^2+y^2+z^2+5t^2 \qquad (b)$$

$$2m=x^2+5y^2+5z^2+5t^2 \qquad (c)$$

гдѣ $x+y$ нечетное, то изъ (2) получимъ

$$5S-R=-8\sum d\left(\frac{d}{5}\right)=-8\left(\frac{m}{5}\right)\sum\left(\frac{\delta}{5}\right)d,\quad m=d\delta. \qquad (d)$$

Нетрудно убѣдится, что полныя числа рѣшеній $N(2m)$ и $M(2m)$ тѣхъ же уравненій (b) и (c) будутъ:

$$N(2m) = \frac{3}{2} R, \quad M(2m) = \frac{3}{2} S,$$

такъ что получится

$$5M(2m) - N(m) = -12 \left(\frac{m}{5}\right) \sum \left(\frac{\delta}{5}\right) d. \qquad (d^*)$$

Если $m \equiv \pm 1 \pmod{10}$, то очевидно $M(2m) = 0$ и

$$N(2m) = 12 \sum \left(\frac{\delta}{5}\right) d.$$

Въ случаѣ $m \equiv \pm 2 \pmod{10}$ изъ доказаннаго въ § 7 равенства

$$N(n = x^2 + 5y^2 + 5z^2) = \frac{1}{3} N(n = x^2 + y^2 + z^2); \quad n \equiv \pm 1 \pmod{5}$$

сразу получается $M(2m) = \frac{1}{3} N(2m)$ и

$$N(2m) = 18 \sum \left(\frac{\delta}{5}\right) d.$$

Въ обоихъ случаяхъ можно написать

$$N(2m) = 3 \left[5 - \left(\frac{m}{5}\right)\right] \sum \left(\frac{\delta}{5}\right) d. \qquad (3)$$

Если при $\alpha > 1$ обозначимъ черезъ R и S числа рѣшеній уравненій

$$2^\alpha m = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2zt + 3t^2$$

$$2^\alpha m = 5x^2 + 5y^2 + 2z^2 + 2zt + 3t^2$$

гдѣ $x + y$ нечетное, то изъ (2) получимъ

$$5S - R = (-1)^\alpha 2^{\alpha+2} \sum \left(\frac{d}{5}\right) d. \qquad (e)$$

Но R и S будутъ также числами рѣшеній уравненій

$$2^{\alpha+1} m = x^2 + y^2 + z^2 + 5t^2$$

$$2^{\alpha+1} m = x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 5t^2,$$

гдѣ x, y, z, t нечетныя. Отсюда можно вывести, что $S=0$, когда въ случаѣ $m\equiv\pm 1 \pmod{10}$ α четное, а въ случаѣ $m\equiv\pm 3 \pmod{10}$ α нечетное; въ другихъ же случаяхъ $S=\frac{1}{3}R$. Вслѣдствіе этого изъ (e) найдемъ

$$R=2^{\alpha}\left\{5+(-1)^{\alpha-1}\left(\frac{m}{5}\right)\right\}\sum\left(\frac{\delta}{5}\right)d. \qquad (4)$$

Въ уравненіи

$$2^{\alpha}m=x^2+y^2+z^2+5t^2,$$

полное число рѣшеній котораго пусть будетъ $N(2^{\alpha}m)$, при $\alpha>2$ всѣ числа x, y, z, t четныя или нечетныя; имѣя это въ виду, мы получимъ на основаніи формулы (4)

$$N(2^{\alpha}m)-N(2^{\alpha-2}m)=2^{\alpha-1}\left\{5+(-1)^{\alpha}\left(\frac{m}{5}\right)\right\}\sum\left(\frac{\delta}{5}\right)d. \qquad (5)$$

Это соотношеніе позволяетъ найти $N(2^{\alpha}m)$, если только будутъ извѣстны $N(4m)$ и $N(2m)$. Послѣднее число уже опредѣлено, и остается найти лишь $N(4m)$. Но можно сразу замѣтить, что $N(4m)=N(m)$. Для опредѣленія же числа рѣшеній уравненія

$$m=x^2+y^2+z^2+5t^2$$

придется прибѣгнуть къ общей формулѣ Ліувилля, которой еще не приходилось пользоваться.

Если $f(x)$ четная функція, то

$$2\sum(-1)^{\frac{d'-1}{2}}(-1)^{\frac{d''-1}{2}}\{f(d'-d'')+f(d'+d'')\}+$$

$$+\sum\{f(0)-2f(2)+2f(4)-\ldots+2(-1)^{\frac{d-1}{2}}f(d-1)\}=f(0)\zeta(m); \qquad (6)$$

здѣсь первая сумма распространяется на всѣ представленія m въ формѣ

$$m=d'\delta'+2^{\alpha}d''\delta'',$$

гдѣ d', δ', d'', δ'' нечетныя и показатель $\alpha>0$, вторая сумма берется по дѣлителямъ m. Полагая опять $f(x)=1+4\cos\frac{2\pi x}{5}$ и отдѣляя раціональную и ирраціональную части, получимъ

$$5\sum g(m')\varrho\left(\frac{m''}{5}\right)+5\sum g(m'')\varrho\left(\frac{m'}{5}\right)-$$

$$-\sum\varrho(m')g(m'')-\sum\varrho(m'')g(m')+g(m)-\varrho(m)=0. \qquad (7)$$

Это равенство можетъ быть истолковано такъ. Если обозначимъ черезъ P, Q, R, S числа всѣхъ рѣшеній уравненій

$$m = x^2 + y^2 + z^2 + 5t^2$$
$$m = 5x^2 + 5y^2 + 5z^2 + t^2$$
$$m = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2zt + 3t^2$$
$$m = 5x^2 + 5y^2 + 2z^2 + 2zt + 3t^2$$

то

$$5Q + 5S - P - R = 0. \qquad (f)$$

Значенія R и S опредѣлить нетрудно; именно ясно что

$$R = N(2m = x^2 + y^2 + z^2 + 5t^2); \qquad x \equiv y \pmod 2$$
$$S = N(2m = 5x^2 + 5y^2 + 5z^2 + t^2); \quad x \equiv y \pmod 2$$

или на основаніи ранѣе доказаннаго

$$R = \left[5 - \left(\frac{m}{5}\right)\right] \sum \left(\frac{\delta}{5}\right) d, \quad S = \frac{1 - \left(\frac{m}{5}\right)}{6} R$$

и кромѣ того

$$Q = \frac{1 + \left(\frac{m}{5}\right)}{6} P.$$

Послѣ этого изъ (f) найдемъ

$$P = N(m) = \left[5 + \left(\frac{m}{5}\right)\right] \sum \left(\frac{\delta}{5}\right) d.$$

Опредѣливъ $N(m) = N(4m)$, можно на основаніи формулы (5) получить общее выраженіе

$$N(2^\alpha m) = \frac{2^{\alpha+1} + (-1)^{\alpha-1} 5}{3} \left[5 + (-1)^\alpha \left(\frac{m}{5}\right)\right] \sum \left(\frac{\delta}{5}\right) d \qquad (8)$$

годное для $\alpha > 0$ и m не дѣлящагося на 5. Остается теперь найти соотношеніе между $N(5^\beta n)$ и $N(n)$, гдѣ n четное или нечетное число, не дѣлящееся на 5. Въ уравненіи

$$5^\beta n = x^2 + y^2 + z^2 + 5t^2 \qquad (g)$$

можно различать рѣшенія (число ихъ пусть будетъ P), гдѣ x, y, z дѣлятся на 5, и рѣшенія (число ихъ пусть будетъ Q), гдѣ только одно изъ чиселъ x, y, z дѣлится на 5. Среди послѣднихъ будетъ $\frac{1}{6} Q$ такихъ, гдѣ $z \equiv 0 \pmod 5$ и $x + 2y \equiv 0 \pmod 5$. Всего рѣшеній уравненія (g),

удовлетворяющихъ тѣмъ же условіямъ будетъ $\frac{1}{6}Q+P$; но это число будетъ также числомъ рѣшеній уравненія

$$5^{\beta-1}n = x^2+y^2+z^2+5t^2.$$

Такимъ образомъ

$$N(5^{\beta-1}n) = \frac{1}{6}Q+P.$$

Но P будетъ числомъ рѣшеній уравненія $5^{\beta-1}m = 5x^2+5y^2+5z^2+t^2$, т. е. $P = N(5^{\beta-2}n)$ при $\beta \geqq 2$ и $P = \frac{1}{6}\left[1+\left(\frac{n}{5}\right)\right]N(n)$ при $\beta = 1$, слѣдовательно

$$N(5^{\beta-1}n) = \frac{1}{6}Q+N(5^{\beta-2}n) \text{ при } \beta \geqq 2$$

$$N(5n) = \frac{1}{6}Q+\frac{1}{6}\left[1+\left(\frac{n}{5}\right)\right]N(n).$$

Такъ какъ съ другой стороны

$$N(5^{\beta}n) = P+Q,$$

то будемъ имѣть

$$N(5^{\beta}n) = 6N(5^{\beta-1}n) - 5N(5^{\beta-2}n) \text{ при } \beta \geqq 2$$

и

$$N(5n) = \frac{5^2+\left(\frac{n}{5}\right)}{5+\left(\frac{n}{5}\right)}N(n).$$

Затѣмъ найдемъ вообще

$$N(5^{\beta}n) = \frac{5^{\beta+1}+\left(\frac{n}{5}\right)}{5+\left(\frac{n}{5}\right)}N(n)$$

и, на основаніи формулы (8),

$$N(5^{\beta}2^{\alpha}m) = \frac{2^{\alpha+1}+(-1)^{\alpha-1}5}{3}\left[5^{\beta+1}+(-1)^{\alpha}\left(\frac{m}{5}\right)\right]\Sigma\left(\frac{\delta}{5}\right)d; \quad m = d\delta, \quad (9)$$

гдѣ $\beta \geqq 0$, $\alpha > 0$ и m нечетное число, не дѣлящееся на 5. Для случая $\alpha = 0$ имѣемъ

$$N(5^{\beta}m) = \left[5^{\beta+1}+\left(\frac{m}{5}\right)\right]\Sigma\left(\frac{\delta}{5}\right)d. \quad (10)$$

Равенства (9) и (10) вполнѣ разрѣшаютъ поставленный вопросъ.

О сходимости рядовъ Sturm'a-Liouville'я и Legendre'a.

И. И. Привалова.

Въ послѣдніе годы для рядовъ по ортогональнымъ функціямъ установленъ рядъ достаточныхъ признаковъ сходимости почти всюду [1]), болѣе и болѣе общихъ. Самый общій изъ нихъ далъ Planckerel въ 1913 г. въ своемъ сообщеніи Французской Академіи [2]).

Теорема Planckerel'я: если функціи $\varphi_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ образуютъ нормально-ортогональную систему въ интервалѣ (a, b), т. е.

$$\int_v^b \varphi_n^2(\alpha)\, d\alpha = 1\,; \qquad \int_a^b \varphi_n(\alpha)\, \varphi_m(\alpha)\, d\alpha = 0 \quad (n \neq m)$$

если далѣе, дѣйствительныя постоянныя C_n таковы, что

$$\sum_1^\infty C_n^2 (\log n)^3$$

сходится, то рядъ

$$\sum_1^\infty C_n\, \varphi_n(x)$$

сходится почти всюду въ интервалѣ (a, b).

Въ частности для тригонометрическихъ рядовъ

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^\infty (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

Hardy [3]) обобщилъ признакъ Planckerel'я, показавъ, что для сходимости почти всюду такого ряда достаточно сходимости

$$\sum_1^\infty (a_n^2 + b_n^2).(\log n)^2.$$

---

[1]) Presque partout (за исключеніемъ, быть можетъ, точекъ множества мѣры 0).

[2]) Comptes Rendus t. 156.

[3]) Proc. Lond. Math. Soc. t. 12.

Цѣль настоящей статьи въ томъ, чтобы распространить признакъ Hardy на ряды Sturm'a-Liouville'я и Legendre'a. Сначала мы установимъ одно вспомогательное предложеніе.

Лемма. *Рядъ* $\sum_1^\infty \frac{a_n}{\varphi(n)}$, *гдѣ* $\varphi(n)$ *какая нибудь возрастающая до безконечности положительная функція, сходится, если онъ суммируется процессомъ среднихъ ариѳметическихъ, при условіи*

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 0(\varphi(n))\ ^1).$$

Доказательство. Называя черезъ σ_n, Σ_n простую и средне-ариѳметическую суммы первыхъ n членовъ ряда $\sum_1^\infty \frac{a_n}{\varphi(n)}$, имѣемъ тождественно:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right).\sigma_n - \Sigma_n = \frac{\sum_1^n \frac{ka_k}{\varphi(k)}}{n}.$$

Отсюда ясно, что достаточно показать справедливость соотношенія:

$$\sum_1^n \frac{ka_k}{\varphi(k)} = 0(n),$$

въ чемъ мы убѣдимся слѣдующимъ образомъ [2]):

$$\sum_1^n \frac{ka_k}{\varphi(k)} = \sum_1^{n-1} S_k.\Delta\frac{k}{\varphi(k)} + \frac{nS_n}{\varphi(n)} = \sum_1^{n-1} 0(\varphi(n)).O\left(\frac{1}{\varphi(n)}\right) + 0(n) =$$
$$= \sum_1^{n-1} 0(1) + 0(n) = 0(n), \qquad \text{что и нужно.}$$

Къ системѣ функцій Sturm'a-Liouville'я мы приходимъ изъ такъ называемой проблемы собственныхъ значеній дифференціальныхъ уравненій. Эта проблема заключается въ томъ, чтобы опредѣлить тѣ значенія параметра λ, при которыхъ дифференціальное уравненіе:

$$\frac{d}{dx}\left(p(x).\frac{du}{dx}\right) + q(x).u + \lambda u = 0 \qquad [p(x)>0] \quad (1)$$

имѣетъ единственное рѣшеніе, выполняющее на концахъ однородныя условія, напр. $\frac{du}{dx} - hu = 0$ для $x=a$; $\frac{du}{dx} + Hu = 0$ для $x=b$.

---

[1]) Условно обозначаемъ черезъ $0(A)$ количество, удовлетворяющее равенству: $\frac{0(A)}{A} \to 0$, когда $n \to \infty$

[2]) Обозначаемъ черезъ $O(A)$ количество, удовлетворяющее условію: $O|(A)| < C.A$, каково бы ни было n, гдѣ C не зависитъ отъ n.

Доказывается, что если функціи $p(x)$ и $q(x)$ удовлетворяютъ опредѣленнымъ условіямъ непрерывности, то существуетъ всегда счетное множество значеній λ_n параметра и что соотвѣтствующія рѣшенія $u_n(x)$ дифференціальнаго уравненія (1) образуютъ полную нормально-ортогональную систему функцій въ интервалѣ (a, b).

Разсмотримъ рядъ Sturm'a-Liouville'я

$$\sum_1^\infty C_n u_n(x), \tag{I}$$

гдѣ

$$C_n = \int_a^b f(\alpha)\, u_n(\alpha)\, (d\alpha) \quad (n=1,\ 2,\ 3, \ldots),$$

при чемъ $f(x)$ любая ф-ція, интегрируемая по Lebesgue'у въ интервалѣ (a, b).

Приложимъ обычное въ теоріи этой системы преобразованіе Liouville'я:

$$z = \int_a^x [p(\alpha)]^{-\frac{1}{2}} d\alpha; \qquad v(z) = [p(x)]^{\frac{1}{4}} u(x).$$

Дифференціальное уравненіе (1) переходитъ въ новое дифференціальное уравненіе:

$$\frac{d^2v}{dz^2} + Q(z).v + \lambda v = 0 \tag{1'}$$

гдѣ $Q(z)$ означаетъ функцію, просто выражаемую черезъ $p(x)$ и $q(x)$.

Новыя граничныя условія будутъ:

$$\frac{dv}{dz} - h'v = 0 \qquad \text{для } z = 0;$$

$$\frac{dv}{dz} + H'v = 0 \qquad \text{для } z = \pi,$$

если для простоты примемъ

$$\int_a^b [p(\alpha)]^{-\frac{1}{2}} d\alpha = \pi,$$

что всегда можетъ быть достигнуто умноженіемъ независимаго перемѣннаго на постоянное; h' и H' суть два постоянныя, получающіяся изъ первоначальныхъ h и H.

Обозначимъ функціи Sturm'a-Liouville'я для дифференціальнаго уравненія (1') черезъ $v_1(z)$, $v_2(z), \ldots, v_n(z) \ldots$ и воспользуемся извѣстнымъ ихъ асимптотическимъ выраженіемъ, предполагая, что

$$\int_0^\pi v_n^2(z)\, dz = 1.$$

Согласно этимъ формуламъ въ каждой точкѣ интервала $(0, \pi)$ имѣемъ:

$$v_n(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos nz \left\{1 + \frac{\alpha_n(z)}{n^2}\right\} + \sin nz \left\{\frac{\beta(z)}{n} + \frac{\gamma_n(z)}{n^2}\right\}, \qquad (2)$$

гдѣ функціи $\alpha_n(z)$, $\gamma_n(z)$ и $\beta(z)$ по абсолютному значенію меньше постояннаго A, не зависящаго отъ n и z.

Вопросъ изученія ряда (I) сводится къ изученію преобразованнаго ряда

$$\sum_1^\infty C_n' v_n(z), \qquad (I')$$

гдѣ

$$C_n' = \int_0^\pi F(\alpha) v_n(\alpha)\, d\alpha,$$

при чемъ

$$F(z) = [p(x)]^{\frac{1}{4}} \cdot f(x).$$

Полагая $v_1(z)\, v_1(\alpha) + v_2(z)\ v_2(\alpha) + \ldots + v_n(z)\, v_n(\alpha) = K_n(z, \alpha)$, для суммы $S_n(z)$ первыхъ n членовъ ряда (I') будемъ имѣть:

$$S_n(z) = \int_0^\pi K_n(z,\ \alpha)\, F(\alpha)\, d\alpha.$$

Пользуясь формулой (2), положимъ:

$$K_n(z,\ \alpha) = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{2} + \sum_1^n \cos pz \cos p\alpha\right] + \Phi_n(z, \alpha), \qquad (3)$$

гдѣ $|\Phi_n(z,\ \alpha)| < C$, не зависящаго отъ α, z, и n.

Докажемъ, что въ каждой точкѣ z интервала $(0, \pi)$ имѣетъ мѣсто равенство:

$$\lim_{n=\infty} \int_0^\pi \Phi_n(z,\ \alpha)\, F(\alpha)\, d\alpha = 0, \qquad (4)$$

гдѣ $F(\alpha)$ любая функція интегрируемая по Lebesgue'у [1].

Сначала легко видѣть, что равенство (4) справедливо, если предположить функцію $F(z)$ аналитической. Въ самомъ дѣлѣ въ этомъ случаѣ функція $F(z)$ разлагается въ равномѣрно сходящійся рядъ какъ по системѣ 1, $\cos z$, $\cos 2z$, .., такъ и по системѣ $v_1(z)$, $v_2(z)$, .. Вслѣдствіе этого получаемъ желаемое, переходя къ предѣлу при $n = \infty$ въ равенствѣ:

$$\int_0^\pi \Phi_n(z,\ \alpha) F(\alpha)\, d\alpha = \int_0^\pi K_n(z,\ \alpha) F(\alpha)\, d\alpha - \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left[\frac{1}{2} + \sum_1^\infty \cos pz \cos p\alpha\right] F(\alpha)\, d\alpha.$$

---

[1]) Haar, Math. Ann. t. 69.

Пусть теперь $F(z)$ любая функція интегрируемая по Lebesgue'y. Возможно построить послѣдовательность аналитическихъ функцій $F_1(z), F_2(z), \ldots$ такую, чтобы

$$\lim_{p=\infty} \int_0^{\pi} |F(\alpha) - F_p(\alpha)|\, d\alpha = 0.$$

Тогда для каждаго p будетъ

$$\left|\int_0^{\pi} \Phi_n(z, \alpha) F(\alpha) d\alpha\right| \leq C \int_0^{\pi} |F(\alpha) - F_p(\alpha)|\, d\alpha + \left|\int_0^{\pi} \Phi_n(z, \alpha) F_p(\alpha)\, d\alpha\right|$$

откуда очевидно равенство (4).

Изъ тождества (3) въ силу теоремы Lebesgue'a о тригонометрическихъ рядахъ и только что установленнаго равенства (4) вытекаетъ:

Теорема I. *Рядъ (I) Sturm'a-Liouville'я суммируется процессомъ среднихъ ариѳметическихъ почти всюду въ интервалѣ* (a, b) *къ* $f(x)$.

Hardy въ цитированной выше работѣ доказалъ для тригонометрическаго ряда Fourier-Lebesgue'a справедливость соотношенія:

$$S_n(x) = 0(\log n), \qquad \text{почти всюду,}$$

гдѣ $S_n(x)$ сумма первыхъ $n+1$ членовъ тригонометрическаго ряда. Вслѣдствіе тождества (3), установленнаго равенства (4) и только что упомянутаго результата Hardy имѣемъ:

$$S_n(x) = 0(\log n), \qquad \text{почти всюду въ } (a, b),$$

обозначая черезъ $S_n(x)$ сумму первыхъ n членовъ ряда (I).

Отсюда, пользуясь леммой, беря $\varphi(n) = \log n$, и теоремой I, получаемъ:

Теорема II. *Рядъ* $\sum_2^{\infty} \frac{C_n}{\log n} . U_n(x)$ *сходится почти всюду въ* (a, b).

Слѣдствіе. *Если* $\sum_1^{\infty} C_n^2 (\log n)^2$ *сходится, то рядъ Sturm'a-Liouville'я* $\sum_1^{\infty} C_n U_n(x)$ *сходится почти всюду въ интервалѣ* (a, b) *къ* $f(x)$.

Въ самомъ дѣлѣ рядъ $\sum_1^{\infty} C_n . \log . U_n(x)$ по условію есть рядъ Fourier отъ функціи интегрируемой вмѣстѣ съ квадратомъ [1]), а потому вслѣдствіе теоремы II рядъ $\sum_1^{\infty} C_n U_n(x)$ сходится почти всюду въ (a, b). Далѣе такъ какъ система $U_n(x)$ полная, то послѣдній рядъ изображаетъ функцію $f(x)$.

---

[1]) Теорема Fischer'a-Riesz'a.

Обратимся теперь къ изслѣдованію ряда Legendre'a [1]):

$$\sum_0^\infty \frac{2n+1}{2} C_n P_n(x)\,, \tag{II}$$

гдѣ

$$C_n = \int_1^\pi f(\alpha)\, P(x)\, d\alpha \quad (n = 0,\ 1,\ 2, \ldots)$$

при чемъ ф-ція $f(\alpha)$ интегрируема по Lebesgue'у въ интервалѣ $(-1, +1)$.

Теорема III. *Если* $\sum_1^\infty \frac{2n+1}{2} C_n^2 (\log n)^2$ *сходится, то рядъ (II) Legendre'a* $\sum_0^\infty \frac{2n+1}{2} C_n P_n(x)$ *сходится почти всюду въ интервалѣ* $(-1, +1)$ *къ* $f(x)$.

Полагая

$$\sqrt{\frac{2n+1}{2}} \cdot P_n(x) = \Pi_n(x)$$

и

$$\sqrt{\frac{2n+1}{2}} \cdot C_n = C'_n$$

рядъ (II) преобразуетъ въ рядъ

$$\sum_0^\infty C'_n \cdot \Pi_n(x), \tag{II'}$$

гдѣ

$$C'_n = \int_{-1}^{+1} f(\alpha) \cdot \Pi_n(\alpha)\, d\alpha$$

и система ф-цій $\Pi_n(x)$ нормально ортогональная въ интервалѣ $(-1, +1)$.

Рядъ (II'), а слѣдовательно рядъ (II), будетъ суммироваться процессомъ среднихъ ариѳметическихъ почти всюду въ области $(-1, +1)$, вслѣдствіе признака Weyl'я [2]). Въ силу леммы для теоремы III достаточно доказать, что $S_n(x) = 0(\log n)$, почти всюду въ $(-1, +1)$, гдѣ $S_n(x)$ сумма первыхъ n членовъ ряда

$$\sum_1^\infty C'_n \log n \cdot \Pi_n(x)\,.$$

Такъ какъ, далѣе,

$$\sum_1^\infty C'^2_n (\log n)^2$$

---

[1]) $\int_{-1}^{+1} P_n(\alpha)\, P_m(\alpha)\, d\alpha = 0 \ \ (m \neq n) \qquad \int_{-1}^{+1} P_n^2(\alpha)\, d\alpha = \frac{2}{2n+1}$.

[2]) Признакъ Weyl'я: если рядъ $\sum_1^\infty C_n^2 \cdot \log n$ сходится, то рядъ по нормально ортогональной системѣ $\sum_1^\infty C_n \varphi_n(x)$ суммируется процессомъ среднихъ ариѳметическихъ почти всюду.

по условію теоремы сходится, то (по теоремѣ Fischer-Riesz'a) рядъ

$$\sum_{1}^{\infty} C_n' \log . H_n(x)$$

есть рядъ Fourier отъ функціи съ интегрируемымъ квадратомъ. Итакъ теорема III будетъ доказана, если установимъ соотношеніе:

$$S_n(x) = 0\,(\log n)\,,$$

почти всюду въ $(-1, +1)$, обозначая черезъ $S_n(x)$ сумму первыхъ $n+1$ членовъ любого ряда (II) Legendre'a отъ ф-ціи съ интегрируемымъ квадратомъ. Дальнѣйшее будетъ посвящено доказательству этого равенства.

Представимъ

$$S_n(x) = \int_{-1}^{+1} S_n(x,\ \alpha)\, f(\alpha)\, d\alpha\,,$$

гдѣ

$$S_n(x,\ \alpha) = \sum_{0}^{n} \frac{2k+1}{2} P_k(x)\, P_k(\alpha),$$

въ видѣ суммы трехъ слагаемыхъ

$$\int_{-1}^{x-\varepsilon} + \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} + \int_{x+\varepsilon}^{1},$$

при чемъ $\varepsilon > 0$, малое по желанію постоянное число. Въ дальнѣйшемъ будемъ разсматривать значенія x подъ условіемъ $-1+a \leq x \leq 1-a$ $(a>0)$. Прежде всего покажемъ, что

$$\int_{-1}^{x-\varepsilon} f(\alpha)\, S_n(x,\ \alpha)\, d\alpha = O(1)$$

и

$$\int_{x+\varepsilon}^{1} f(\alpha)\, S_n(x,\ \alpha)\, d\alpha = O\,(1) \tag{5}$$

Съ этой цѣлью приложимъ извѣстную формулу Christoffel'я:

$$S_n(x,\ \alpha) = \frac{n+1}{2} \frac{P_{n+1}(x) P_n(\alpha) - P_n(x) P_{n+1}(\alpha)}{\alpha - x} \tag{6}$$

Такъ какъ въ интервалахъ $(-1\,,\ x-\varepsilon)$ и $(x+\varepsilon,\ 1)$ разность $|\alpha - x| \geq \varepsilon$, то находимъ:

$$\int_{-1}^{x-\varepsilon} |f(\alpha)\, S_n(x,\ \alpha)|\, d\alpha \leq$$

$$\leq \frac{1}{\varepsilon} \frac{n+1}{2} \left\{ |P_{n+1}(x)| \int_{-1}^{x-\varepsilon} |f(\alpha)\, P_n(\alpha)|\, d\alpha + |P_n(x)| \cdot \int_{-1}^{x-\varepsilon} |f(\alpha) P_{n+1}(\alpha)|\, d\alpha \right\} \tag{7}$$

и аналогичное неравенство для $\int_{x+\varepsilon}^{1}$.

Такимъ образомъ оба интеграла (7) при каждомъ n меньше

$$\frac{n+1}{2\varepsilon}\left\{|P_{n+1}(x)|.\int_{-1}^{+1}|f(\alpha)P_n(\alpha)|d\alpha+|P_n(x)|\int_{-1}^{+1}f(\alpha)P_{n+1}(\alpha)|d\alpha\right\}$$

Изъ неравенства Schwarz'a заключаемъ

$$\int_{-1}^{+1}|f(\alpha)P_n(\alpha)|d\alpha\leq\sqrt{\int_{-1}^{+1}f^2(\alpha)d\alpha.\int_{-1}^{+1}P_n^2(\alpha)d\alpha}=\sqrt{k.\frac{2}{2n+1}}.$$

обозначая

$$\int_{-1}^{+1}f^2(\alpha)d\alpha$$

черезъ k.

Приложимъ, далѣе хорошо извѣстную асимптотическую формулу полиномовъ Legendre'a, гдѣ x замѣняемъ черезъ $\cos t$

$$P_n(x)=\sqrt{\frac{2}{n\pi\sin t}}\left[\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\beta_n(t)}{n}\right] \tag{8}$$

которая справедлива для каждой внутренней точки x интервала $(-1, +1)$. Числа $\beta_n(t)$ для любого n по абсолютному значенію остаются меньше β; слѣдовательно

$$|P_n(x)|\leq\sqrt{\frac{2}{n\pi\sin t}}\left[1+\frac{\beta}{n}\right]$$

и поэтому оба интеграла (7) меньше

$$\frac{n+1}{2\varepsilon}\sqrt{\frac{2}{\pi\sin t}}\left\{\sqrt{\frac{1}{n+1}}\left(1+\frac{\beta}{n+1}\right)\sqrt{\frac{2k}{2n+1}}+\sqrt{\frac{1}{n}}\left(1+\frac{\beta}{n}\right)\sqrt{\frac{2k}{2n+3}}\right\}$$

Это же послѣднее выраженіе ограничено, каково бы ни было n, такъ какъ въ силу условія $-1+a\leq\cos t\leq 1-a$, $\sin t$ не можетъ быть нулемъ. Итакъ равенства (5) установлены. Остается изслѣдовать

$$\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}S_n(x,\ \alpha)f(\alpha)d\alpha=\int_{t-\varepsilon'}^{t+\varepsilon''}S_n(\cos t,\ \cos u).f(\cos u)\sin u\,du, \tag{9}$$

при чемъ t удовлетворяетъ условію $\eta\leq t\leq\pi-\eta$, а η опредѣлено уравненіемъ: $\cos\eta=1-a\left(0<\eta<\frac{\pi}{2}\right)$.

Такъ какъ ε' и ε'' стремятся къ нулю вмѣстѣ съ ε, то можно ихъ предположить меньше $\frac{\eta}{2}$ и значить $t-\varepsilon'>t-\frac{\eta}{2}$, $t+\varepsilon'<t+\frac{\eta}{2}\leq\pi-\frac{\eta}{2}$; аналогичныя неравенства справедливы съ замѣной ε' черезъ ε''.

Разбивая въ интегралѣ (9) интервалъ интеграціи на части $\left(t-\varepsilon',\ t-\frac{1}{n}\right)$, $\left(t-\frac{1}{n},\ t+\frac{1}{n}\right)$, $\left(t+\frac{1}{n}, t+\varepsilon''\right)$, представимъ его въ видѣ суммы трехъ слагаемыхъ

$$\int_{t-\varepsilon'}^{t-\frac{1}{n}} + \int_{t-\frac{1}{n}}^{t+\frac{1}{n}} + \int_{t+\frac{1}{n}}^{t+\varepsilon''} \qquad (9')$$

$\left(\frac{1}{n} < \varepsilon',\ \varepsilon''\right.$, считая n достаточно большимъ).

При оцѣнкѣ интеграловъ (9′) воспользуемся снова формулой (8).

Легко получаемъ:

$$P_n(\cos t)\,P_{n+1}(\cos u) - P_{n+1}(\cos t)\,P_n(\cos u) =$$
$$= \frac{2}{(n+1)\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{\sin t \sin u}}\left[\cos\left(\frac{2n+1}{2}t-\frac{\pi}{4}\right).\cos\left(\frac{2n+3}{2}u-\frac{\pi}{4}\right)-\right.$$
$$\left.-\cos\left(\frac{2n+3}{2}t-\frac{\pi}{4}\right).\cos\left(\frac{2n+1}{2}u-\frac{\pi}{4}\right)\right]+\frac{M_n}{(n+1)^2\sqrt{\sin t \sin u}}.$$

гдѣ M_n для $\eta \leq t \leq \pi-\eta$, $\frac{\eta}{2} \leq u \leq \pi-\frac{\eta}{2}$ и каждаго n ограничено по абсолютному значенію ($|M_n| < M$).

Черезъ разложеніе тригонометрическихъ произведеній въ суммы легко оправдываемъ тождество:

$$\cos\left(\frac{2n+1}{2}t-\frac{\pi}{4}\right).\cos\left(\frac{2n+3}{2}u-\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(\frac{2n+3}{2}t-\frac{\pi}{4}\right).\cos\left(\frac{2n+1}{2}u-\frac{\pi}{4}\right)$$
$$= \sin(n+1)(t-u).\sin\frac{t+u}{2}-\cos(n+1)(t+u)\ \sin\frac{t-u}{2}$$

и вслѣдствіе этого будетъ

$$\frac{n+1}{2}\left[P_n(\cos t)\,P_{n+1}(\cos u) - P_{n+1}(\cos t)\,P_n(\cos u)\right] =$$
$$= \frac{1}{\pi\sqrt{\sin t \sin u}}\left[\sin(n+1)(t-u).\sin\frac{t+u}{2}-\cos(n+1)(t+u).\sin\frac{t-u}{2}\right]+$$
$$+\frac{M_n}{2(n+1)\sqrt{\sin t \sin u}}.$$

Принимая во вниманіе формулу Christoffel'я (6), находимъ далѣе

$$S_n(\cos t,\ \cos u) = \frac{n+1}{2}\,\frac{P_n(\cos t)\,P_{n+1}(\cos u) - P_{n+1}(\cos t)\,P_n(\cos u)}{\cos t - \cos u} =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{\sin t \sin u}}\left[\frac{\cos(n+1)(t+u)}{\sin\frac{t+u}{2}} - \frac{\sin(n+1)(t-u)}{\sin\frac{t-u}{2}}\right] -$$

$$- \frac{M_n}{4(n+1)\sin\frac{t-u}{2}\sin\frac{t+u}{2}\sqrt{\sin t.\sin u}} \qquad (10)$$

Замѣтивъ, что имѣемъ неравенство:

$$\left|\frac{1}{2\pi\sqrt{\sin t.\sin u}}\cdot\frac{\cos(n+1)(t+u)}{\sin\frac{t+u}{2}}\right| \leq \frac{1}{2\pi\sqrt{\sin\eta\sin u}.\sin\frac{\eta}{2}},$$

такъ какъ $\eta \leq t \leq \pi - \eta$, видимъ, что абсолютное значеніе перваго интеграла (9′) отъ перваго члена формулы (10) меньше

$$\frac{1}{2\pi\sin\frac{\eta}{2}\sqrt{\sin\eta}}\int_{t-\varepsilon'}^{t-\frac{1}{n}}\sqrt{\sin u}\,|f_1(u)|\,du = O(1) \quad [f_1(u) = f(\cos u)] \qquad (11)$$

Абсолютное значеніе того же интеграла отъ третьяго члена формулы (10) меньше

$$\frac{M}{4(n+1)\sin\frac{\eta}{2}\sqrt{\sin\eta}}\int_{t-\varepsilon'}^{t-\frac{1}{n}}\frac{\sqrt{\sin u}\,|f_1(u)|\,du}{\sin\frac{t-u}{2}} < \frac{M}{4(n+1)\sqrt{\sin\eta}}\int_{t-\varepsilon'}^{t-\frac{1}{n}}\frac{|f_1(u)|\,du}{\sin\frac{t-u}{2}} \qquad (12)$$

Измѣняя въ послѣднемъ интегралѣ формулы (12) u на $t-u$, видимъ, что онъ меньше

$$\int_{\frac{1}{n}}^{t'}\frac{|f_1(t-u)|\,du}{\sin\frac{u}{2}} < \frac{1}{\sin\frac{1}{2n}}\cdot\int_0^{\varepsilon'}|f_1(t-u)|\,du.$$

Подставляя въ формулу (12), получаемъ въ правой части количество вида $O(1).(12')$.

Наконецъ значеніе перваго изъ интеграловъ (9′) отъ второго члена формулы (10) будетъ

$$\frac{1}{2n\sqrt{\sin t}}\int_{t-\varepsilon'}^{t-\frac{1}{n}} \frac{f_1(u)\cdot\sqrt{\sin u}\cdot\sin(n+1)(t-u)}{\sin\frac{t-u}{2}}\,du =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{\sin t}}\int_{\frac{1}{n}}^{\varepsilon'} \varphi(t-u)\frac{\sin(n+1)u}{\sin\frac{u}{2}}\,du \qquad (13)$$

гдѣ положено для сокращенія $f_1(t-u)\sqrt{\sin(t-u)} = \varphi(t-u)$.

Послѣдній интегралъ (13) представимъ въ видѣ суммы

$$\int_{\frac{1}{n}}^{\varepsilon'} \psi(u)\frac{\sin(n+1)u}{\sin\frac{u}{2}}\,du + \varphi(t)\int_{\frac{1}{n}}^{\varepsilon'} \frac{\sin(n+1)u}{\sin\frac{u}{2}}\,du \qquad (14)$$

$$[\psi(u) = \varphi(t-u) - \varphi(t)].$$

Положимъ $\Psi(\lambda) = \int_0^{\lambda} |\psi(u)|\,du$ и предположимъ для разсматриваемаго значенія t условіе: $\frac{\Psi(\lambda)}{\lambda} \to 0$, когда $\lambda \to 0$ (A).

Это условіе выполняется, какъ извѣстно, для значеній t почти всюду въ области $\eta \leq t \leq \pi - \eta$. Тогда

$$\int_{\frac{1}{n}}^{\varepsilon'} \left|\psi(u)\frac{\sin(n+1)u}{\sin\frac{u}{2}}\right| du < \int_{\frac{1}{n}}^{\varepsilon'} \frac{|\psi(u)|}{\sin\frac{u}{2}}\,du = \left(\Psi(u)\frac{1}{\sin\frac{u}{2}}\right)_{\frac{1}{n}}^{\varepsilon'} +$$

$$+ \int_{\frac{1}{n}}^{\varepsilon'} \frac{\Psi(u)\cos\frac{u}{2}}{2\sin\frac{u}{2}}\cdot\frac{du}{\sin\frac{u}{2}} = 0(\log n)$$

въ каждой точкѣ, гдѣ выполнено условіе (A). Обращаясь къ (14), видимъ, что это выраженіе будетъ вида $0(\log n)$ для всѣхъ значеній t интервала $\eta \leq t \leq \pi - \eta$, кромѣ, быть можетъ, точекъ множества мѣры 0.

Итакъ, комбинируя (11, 12′, 13, 14), заключаемъ, что первый изъ интеграловъ (9′) вида $0(\log n)$ для всѣхъ значеній t области $\eta \leq t \leq \pi - \eta$, кромѣ, быть можетъ, точекъ множества мѣры нуль.

Совершенно также можно доказать то же самое и для третьяго изъ интеграловъ (9′).

Итакъ

$$S_n(x) = S_n(\cos t) = O(\log n) + \int_{t-\frac{1}{n}}^{t+\frac{1}{n}} S_n(\cos t,\ \cos u)\, f_1(u) \sin u\, du \qquad (15)$$

Покажемъ теперь, что послѣдній интегралъ вида $O(1)$, почти всюду для $\eta \leq t \leq \pi - \eta$.

Вслѣдствіе формулы (8) для $\eta \leq t \leq \pi - \eta$ и $\frac{\eta}{2} \leq u \leq \pi - \frac{\eta}{2}$

$$P_n(\cos t) = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \quad P_n(\cos u) = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

а потому

$$S_n(\cos t,\ \cos u) = \sum_0^n \frac{2k+1}{2} P_k(\cos t)\, P_k(\cos u) = O(n).$$

$$\left| \int_{t-\frac{1}{n}}^{t+\frac{1}{n}} (\cos t,\ \cos u)\, f_1(u) \sin u\, du \right| < O(n) \int_{t-\frac{1}{n}}^{t+\frac{1}{n}} |f_1(u)|\, du$$

Такъ какъ функція $|f_1(u)|$ измѣримая, то существуетъ совершенное множество P мѣры сколь угодно близкой къ π, на которомъ она непрерывна. Пусть t какая либо точка этого множества, удовлетворяющая условію $\eta \leq t \leq \pi - \eta$. Называя черезъ p отрѣзокъ, отсѣкаемый отъ P неравенствомъ $t - \frac{1}{n} \leq u \leq \frac{1}{n}$, а черезъ σ дополнительное къ p множество на области $t - \frac{1}{n} \leq u \leq t + \frac{1}{n}$, имѣемъ:

$$O(n) \int_{t-\frac{1}{n}}^{t+\frac{1}{n}} |f_1(u)|\, du = O(n) \int_p |f_1(u)|\, du + O(n) \int_\sigma |f_1(u)|\, du \qquad (16)$$

Введемъ вспомогательную функцію $\varphi(u)$ по условіямъ:

1°. $\varphi(u) = |f_1(u)|$, когда u принадлежитъ P.

2°. $\varphi(u) = 0$, когда u находится внѣ P.

Вслѣдствіе теоремы Lebesgue'a о неопредѣленномъ интегралѣ, найдемъ:

$$\lim_{\rho=0} \frac{1}{\rho} \int_t^{1+\frac{1}{\rho}} (|f_1(u)| - \varphi(u))\, du = 0, \quad \text{почти всюду} \qquad (17)$$

для $\eta \leq t \leq \pi - \eta$ на множествѣ P.

Пусть t точка множества P, въ которой выполнено равенство (17). Формула (16) представится такъ:

$$O(n) \int_p |f_1(u)|\, du + O(n) \int_{t-\frac{1}{n}}^{t+\frac{1}{n}} (|f_1(u)| - \varphi(u)|\, du$$

Замѣтивъ, что $\int_P |f_1 u)|\,du < K.\frac{2}{n}$, гдѣ $|f_1(u)| < K$ на P, и принимая во вниманіе равенство (17), видимъ, что формула (16) вида $O(1)$, когда t $(\eta \leq t \leq \pi - \eta)$ принадлежитъ P и выполнено условіе (17). Такъ какъ множество P мѣры сколь угодно близкой къ π, то значитъ наше утвержденіе имѣетъ мѣсто для всѣхъ значеній t, удовлетворяющихъ условію $\eta \leq t \leq \pi - \eta$, кромѣ, быть можетъ, множества точекъ мѣры нуль.

Наконецъ изъ (15) получаемъ:

$$S_n(x) = S_n(\cos t) = 0\,(\log n), \qquad \text{почти всюду}$$

для $-1 + a \leq x \leq 1 - a$. Заставляя a стремиться къ нулю, видимъ, что $S_n(x) = 0\,(\log n)$, почти всюду въ интервалѣ $(-1, +1)$. (ч. т. д.).

Résumé. Le but de ce travail est de démontrer les propositions suivantes:

Theorème I. Si les fonctions $u_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ forment un système de Sturm-Liouville dans l'intervalle (a, b), si, de plus, les constantes reelles c_n sont telles, que $\sum_1^\infty c_n^2 (\log n)^2$ est convergente, la série $\sum_1^\infty c_n u_n(x)$ est convergente presque partout dans l'intervalle (a, b).

Theorème II. Si les fonctions $P_n(x)$ forment un systeme de Legendre si, de plus, les constantes reelles c_n sont telles que $\sum_1^\infty \frac{2n+1}{2} c_n^2 (\log n)^2$ est convergente, la série $\sum_1^\infty \frac{2n+1}{2} c_n P_n(x)$ est convergente presque partout dans l'intervalle considéré $(-1, +1)$.

С. В. Ковалевская

(въ двадцатипятилѣтнюю годовщину смерти).

Ц. К. Руссьянъ.

Сегодня исполняется печальная двадцатипятилѣтняя годовщина со дня смерти выдающейся, первой среди женщинъ-математиковъ, ученой С. В. Ковалевской.

Хотя научныя заслуги ея давно оцѣнены, припомнимъ однако ихъ еще разъ и воздадимъ должное памяти женщины, вступившей изъ чистой любви къ наукѣ на трудный, тернистый путь ученаго изслѣдователя и пріобрѣтшей себѣ почетную извѣстность въ области столь трудной и столь мало гармонирующей съ женской натурой, какъ математика.

С. В. Ковалевская принадлежитъ къ числу математиковъ, все болѣе и болѣе рѣдко встрѣчающихся, которые чувствуютъ одинаковую склонность какъ къ чистой, такъ и къ прикладной математикѣ: на ряду съ трудными вопросами чистой математики, она занимается сложными задачами физики, механики. Научная слава ея основывается на трудахъ ея по механикѣ, написанныхъ въ позднѣйшій періодъ; но своими открытіями въ этой области она въ значительной мѣрѣ обязана своимъ превосходнымъ познаніямъ въ чистой математикѣ, работы по которой относятся къ болѣе раннему періоду ея научной дѣятельности.

Этихъ работъ двѣ: «Ueber die Reduction einer bestimmten Klasse Abel'scher Integrale 3-en Ranges auf elliptische Integrale» (Acta matematica, t. 4; p. 392) и «Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen» (J. Crelle, Bd. 80, 1874). Первая—частнаго характера и представляетъ рѣшеніе задачи, предложенное ей Weierstrass'омъ. Вторая относится къ теоріи интегрированія дифференціальныхъ ураненій съ частными производными при помощи безконечныхъ рядовъ. Чтобы лучше выяснить заслугу С. В. Ковалевской въ этой области и значеніе этого сочиненія въ ряду иныхъ, посвященныхъ тому же вопросу, я войду въ нѣкоторыя подробности историческаго характера.

Математики, занимавшіеся со временъ открытія интегральнаго исчисленія интегрированіемъ дифференціальныхъ уравненій, скоро за-

мѣтили, что случаи, когда возможно ихъ проинтегрировать помощью конечнаго числа извѣстныхъ фонкцій, сравнительно рѣдки; поэтому они прибѣгали къ способу интегрированія помощью безконечныхъ рядовъ, полагая, что искомый интегралъ разлагается въ безконечный рядъ, расположенный по цѣлымъ положительнымъ восходящимъ степенямъ перемѣнныхъ независимыхъ. Но вслѣдствіе отсутствія теоріи безконечныхъ рядовъ математики стараго времени ограничивались только вычисленіемъ коэффиціентовъ безконечнаго ряда, не касаясь вопроса о его сходимости, ни того, дѣйствительно ли онъ представляетъ искомую функцію.

Геніальный французскій математикъ Cauchy первый далъ этому методу прочное основаніе. Въ мемуарѣ «Mémoire sur l'intégration des équations différentielles», литографированномъ въ Прагѣ въ 1835 году (Oeuvres, t. XI, série II) онъ далъ методъ, названный имъ «calcul des limites». Cauchy занимается въ немъ интегрированіемъ системы обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \ldots = \frac{dt}{T}, \tag{1}$$

гдѣ $X, Y, \ldots T$ суть голоморфныя [1]) функціи $x, y, \ldots t$ въ области нѣкоторой точки $(a, b \ldots \tau)$ и приводитъ его къ интегрированію одного линейнаго однороднаго дифференціальнаго уравненія въ частныхъ производныхъ перваго порядка

$$X\frac{\partial f}{\partial t} + Y\frac{\partial f}{\partial y} + \ldots + T\frac{\partial f}{\partial t} = 0. \tag{2}$$

Пользуясь символомъ операціи

$$\nabla s = -\int_\tau^t \left(\frac{X}{T}\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{Y}{T}\frac{\partial s}{\partial y} + \ldots\right) dt$$

онъ даетъ сначала формальное разложеніе въ безконечный рядъ какого либо рѣшенія этого уравненія, а изъ него получаются формальныя разложенія для той системы интеграловъ $x, y \ldots$ данной системы уравненій (1), которые при $t = \tau$ обращаются въ $x = a$, $y = b, \ldots$ Чтобы доказать существованіе области сходимости каждаго изъ полученныхъ рядовъ, Cauchy строитъ новый рядъ, общій членъ котораго больше по модулю общаго члена разсматриваемаго ряда. Этотъ новый рядъ пред-

[1]) Cauchy называетъ ихъ въ этомъ мемуарѣ и въ слѣдующихъ «finies et continues».

ставляетъ геометрическую прогрессію; поставивъ условіе, что ея знаменатель по модулю меньше единицы, находимъ область сходимости этого, а, слѣдовательно, и разсматриваемаго ряда. Въ случаѣ, если функціи X, $Y\ldots$ не заключаютъ t, ряды расположены непосредственно по цѣлымъ положительнымъ восходящимъ степенямъ разности $t-\tau$. Этотъ методъ доказательства сходимости разсматриваемыхъ рядовъ путемъ сравненія его съ вспомогательнымъ рядомъ, имѣющимъ упомянутыя выше свойства, и есть «calcul des limites». Cauchy заканчиваетъ этотъ мемуаръ словами: «En résumé les formules, qui précèdent, transforment en une théorie completement rigoureuse l'intégration par séries d'un système quelconque d'équations différentielles. Dans les nouveaux mémoires je montrerai comment on peut déduire du calcul des limites diverses méthodes analogues à celle que je viens d'exposer».

Въ четырехъ мемуарехъ, представленныхъ въ 1842 г. Парижской Академіи Наукъ, Cauchy совершенствуетъ свой методъ и обобщаетъ его на случай дифференціальныхъ уравненій въ частныхъ производныхъ.

Въ первомъ изъ нихъ: «Mémoire sur l'emploi du nouveau calcul, appelé calcul des limites, dans l'intégration d'un système d'équations différentielles» (C. R., t. XV, p. 14) Cauchy разсматриваетъ тотъ же вопросъ объ интегрированіи системы (1), но уже непосредственно, не пользуясь уравненіемъ (2); и разсматриваемые ряды, однозначно вычисляемые по начальнымъ условіямъ и коэффиціентамъ рядовъ X, $Y\ldots$ расположены уже по цѣлымъ положительнымъ степенямъ разности $t-\tau$, а самый методъ «calcul des limites» примѣненъ въ усовершенствованной формѣ: именно, вспомогательные безконечные ряды являются, mutatis mutandis, голоморфными интегралами вспомогательныхъ дифференціальныхъ уравненій вида

$$\frac{dx}{dt}=\frac{M_1}{\left(1-\frac{x-a}{r_1}\right)\left(1-\frac{y-b}{r_2}\right)\ldots},\ldots\ \frac{dz}{dt}=\frac{M_n}{\left(1-\frac{x-a}{r_1}\right)\left(1-\frac{y-a}{r_2}\right)\ldots} \qquad (3)$$

гдѣ $M_1,\ldots M_n$ maximum'ы модулей коэффиціентовъ $X,\ldots Z$ данныхъ дифференціальныхъ уравненій $\frac{dx}{dt}=X,\ldots\frac{dz}{dt}=Z$ на контурахъ областей сходимости ихъ. Вопросъ о существованіи области сходимости этихъ вспомогательныхъ рядовъ, построенныхъ однозначно и аналогично разсматриваемымъ рядамъ, рѣшается опредѣленіемъ области сходимости безконечнаго ряда, представляющаго корень нѣкотораго конечнаго уравненія $n+1$-ой степени.

Въ слѣдующемъ мемуарѣ: «Mémoire sur l'emploi du calcul des limites dans l'intégration des équations aux dérivées partielles» (ib., p. 44) Cauchy обобщаетъ свой методъ на случай одного линейнаго дифференціальнаго уравненія съ частными производными перваго порядка вида:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sum_1^n{}_k X(x,\ x_1 \ldots x_n,\ u)\frac{\partial u}{\partial x_k} + X(x,\ x_1 \ldots x_n,\ u),$$

гдѣ X_k, X голоморфныя функціи въ нѣкоторой области точки $(a, a_1, \ldots a_n, b)$, и ищетъ голоморфный интегралъ, обращающійся при $x = a$ въ данную голоморфную функціи $\varphi(x_1 \ldots x_n)$, обращающуюся въ b въ точкѣ $(a_1 \ldots a_n)$.

Сначала Cauchy полагаетъ, что $\varphi(x_1 \ldots x_n) \equiv b$ и примѣняетъ свой методъ въ той формѣ, какую онъ далъ ему въ предшествующемъ мемуарѣ: рядъ, построенный однозначно и долженствующій представлять искомый интегралъ, сравнивается съ рядомъ, представляющимъ голоморфный интегралъ вспомогательнаго дифференціальнаго уравненія

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{M_1\frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + M_n\frac{\partial u}{\partial x_n} + M}{\left(1 - \frac{x-a}{r}\right)\left(1 - \frac{x_1 - a_1}{r_1}\right)\ldots},$$

гдѣ $M_1, \ldots M$ maximum'ы модулей коэффиціентовъ $X_1, \ldots X$ на контурахъ областей сходимости ихъ. Вопросъ о существованіи области этого послѣдняго ряда, а, слѣдовательно, и даннаго рѣшается опредѣленіемъ области сходимости безконечнаго ряда, представляющаго корень нѣкотораго конечнаго уравненія $n+1$ степени. Если $\varphi(x_1 \ldots x_n) \neq b$, то полагая $u - \varphi = v$ придемъ къ разобранному случаю.

Этотъ пріемъ Cauchy обобщаетъ на случай системы дифференціальныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка съ такимъ же числомъ искомыхъ функцій въ мемуарѣ: «Mémoire sur l'application du calcul des limites à l'intégration d'un système d'équations aux dérivées partielles» (ib., p. 86). Данныя дифференціальныя уравненія предполагаются разрѣшенными относительно частныхъ производныхъ искомыхъ функцій по одному и тому же перемѣнному независимому въ формѣ:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x} = \sum_1^m{}_\varkappa \sum_1^n{}_\lambda X^i_{\varkappa\lambda}(x,\ x_1 \ldots x_n\ u_1 \ldots u_m)\frac{\partial u_\varkappa}{\partial x_\lambda} + X_i(x,\ x_1 \ldots u_m),$$
$$i = 1, 2, \ldots m$$

гдѣ $X_{\varkappa\lambda}$, X_i — голоморфныя функціи въ области точки $(a, a_1 \ldots b_m)$; ищется система голоморфныхъ интеграловъ, обращающихся при $x = a$ въ данныя голоморфныя функціи $\varphi_1(x_1 \ldots x_n), \ldots \varphi_m(x_1 \ldots x_n)$, обра-

щающіяся въ точкѣ $(a_1 \ldots a_n)$ въ $b_1, \ldots b_m$. Вспомогательные ряды предполагаются голоморфными интегралами системы дифференціальныхъ уравненій

$$\frac{\partial u_i}{\partial x} = \lambda_i \frac{\sum_1^m \varkappa \sum_1^n \lambda M_{\varkappa\lambda} \frac{\partial u_\varkappa}{\partial x_\lambda} + M}{\left(1 - \frac{x-a}{r}\right)\left(1 - \frac{x_1 - a_1}{r_1}\right)\ldots} \qquad i=1, 2 \ldots m$$

гдѣ λ_i какія нибудь постоянныя, а $M_{\varkappa\lambda}$, M maximum'ы на контурахъ областей сходимости функцій $\frac{X_{\varkappa\lambda}}{\lambda_i}, \frac{X_i}{\lambda_i}$. Cauchy полагаетъ сначала $\varphi_i(x_1 \ldots x_n) \equiv b_i$. $\quad i=1, 2 \ldots m$

Вопросъ о сходимости вспомогательныхъ рядовъ рѣшается опредѣленіемъ области сходности безконечнаго ряда, представляющаго корень нѣкотораго конечнаго уравненія. Въ томъ же мемуарѣ Cauchy дѣлаетъ указаніе, какъ свести къ этому случаю случай отысканія голоморфныхъ интеграловъ системы нелинейныхъ уравненій перваго порядка съ тѣмъ же числомъ искомыхъ функцій:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x} = F_i\left((x,\ x_1 \ldots x_n\ \ u_1 \ldots u_m \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \ldots \frac{\partial u_m}{\partial x_n}\right), \qquad i=1\ldots,2,\ldots,m$$

обращающихся при $x=a$ въ данныя голоморфныя функціи $\varphi_i(x_1 \ldots x_n) \ldots \varphi_m(x_1 \ldots x_n)$; именно, должно интегрировать линейную систему:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x} = F_i(x, x_1 \ldots x_n\ \ u_1 \ldots u_m,\ \ \varrho_{1,1}, \ldots \varrho_{m,n})$$

$$\frac{\partial \varrho_{i\varkappa}}{\partial x} = \frac{\partial F_i}{\partial x_\varkappa} + \sum_1^m \lambda \frac{\partial F_i}{\partial u_\lambda} \frac{\partial u_\lambda}{\partial x_\varkappa} + \sum \alpha,\beta \frac{\partial F_i}{\partial \varrho_{\alpha,\beta}} \frac{\partial \varrho_{\alpha,\beta}}{\partial x_\varkappa}. \qquad i=1.2.m,\quad \varkappa=1,2\ldots n$$

Наконецъ, въ послѣднемъ мемуарѣ «Mémoire sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles d'ordres quelconques et sur leur reduction à des systèmes d'équations linéaires du premier ordre» (ib., p. 131) Cauchy даетъ указанія, какъ привести къ тому же вопросу вопросъ объ опредѣленіи системы голоморфныхъ интеграловъ системы m дифференціальныхъ уравненій въ частныхъ производныхъ какого угодно порядка съ m неизвѣстными функціями, полагая, что они разрѣшимы относи-

тельно производныхъ найвысшихъ порядковъ, взятыхъ по одному и тому же перемѣнному, т. е. уравненій вида

$$\frac{\partial^{n_i} u_i}{\partial x^{n_i}} = F_i\left(x, x_1, \ldots x_n, u_1 \ldots u_m, \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \ldots \frac{\partial^{\alpha_0+\alpha_1+\ldots+\alpha_n} u_i}{\partial x^{\alpha_0} \partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}, \ldots\right),$$

$$\alpha_0 \leq n_i - 1, \quad \alpha_0+\alpha_1+\ldots+\alpha_n \leq u_i,$$

$$i = 1, 2, \ldots m.$$

обращающихся при $x = a$ вмѣстѣ съ производными $\frac{\partial u_i}{\partial x}, \ldots \frac{\partial^{n_i-1} u_i}{\partial x^{n_i-1}}$ въ данныя голоморфныя функціи $\varphi_i(x_1 \ldots x_n)$, $\varphi_i^{(1)}(x_1 \ldots x_n), \ldots \varphi_i^{(n_i-1)}(x_1 \ldots x_n)$. Для этого должно принять всѣ функціи, входящія въ правыя части, за искомыя: $u_1 \ldots u_m$, $\varrho_{1,1} \ldots \varrho_{i\alpha_0\alpha_1 \ldots \alpha_n} \ldots$ Эта редукція была имъ показана на случаѣ одного уравненія второго порядка.

Оставалось такимъ образомъ въ однихъ случаяхъ упростить, если возможно, методъ Cauchy, а въ другихъ примѣнить его во всѣхъ подробностяхъ.

Это было сдѣлано Briot и Bouquet и, почти независимо отъ Cauchy, С. В. Ковалевской.

Briot и Bouquet въ мемуарѣ: «Sur les fonctions définies par les équations différentielles», представленномъ Парижской Академіи Наукъ въ 1854 г. [1]) и напечатанномъ въ 1856 г. въ Jour. de l'Ec. Pol. (t. 31), доказываютъ, между прочимъ, существованіе голоморфныхъ интеграловъ одного и системы совокупныхъ обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій $\frac{du_i}{dx} = F_i(x, u_1 \ldots u_m)$ помощью метода Cauchy въ той формѣ, какую онъ далъ ему въ первомъ изъ упомянутыхъ мемуаровъ 1842 г., т. е. путемъ сравненія ихъ съ уравненіями вышеприведеннаго вида, но изложеніе отличается бо́льшей простотой.

Оставалось упростить методъ Cauchy въ случаѣ системы линейныхъ дифференціальныхъ уравноній перваго порядка и примѣнить его въ случаѣ уравненій нелинейныхъ какого угодно порядка. Это сдѣлала и, какъ я выше замѣтилъ, почти независимо отъ Cauchy, С. В. Ковалевская въ вышеприведенномъ мемуарѣ, представленномъ Геттингенскому университету на степень доктора философіи.

---

[1]) Отзывъ объ этомъ мемуарѣ представленъ Cauchy въ мартѣ 1855 г. (C. R. XL; Oeuvres, t. XII, I série).

На второй страницѣ своего труда С. В. указываетъ, какъ на автора теоремы о существованіи голоморфнаго интеграла обыкновеннаго дифференціальнаго уравненія n-аго порядка, на Weierstrass'а, совершенно не упоминая Cauchy; именно, въ примѣчаніи мы читаемъ: «Dieser Satz findet sich zuerst in der Weierstrass'schen Abhandlung «Zur Theorie der analytischen Facultäten» (Crelle's Journal, Bd 51, s. 43) ausgesprochen und ist bald darauf auch von den Herrn Briot und Bouquet bewiesen worden (J. de l'Ec Pol, cah 36)». Но, какъ мы видѣли выше, Cauchy доказалъ её уже въ 1835 г., а мемуаръ Weierstrass'а появился въ 1856 г.; что же касается указанія на работу Briot и Bouquet, то едва ли справедливо утвержденіе «bald darauf», такъ какъ хотя мемуаръ Weierstrass'а, опубликованный въ 1856 г., помѣченъ маемъ 1854 г., но и работа Briot и Bouquet, напечатанная тоже въ 1856 г. представлена была Парижской Академіи Наукъ въ августѣ того же 1854 года; вѣрнѣе сказать: «gleichzeitig». Отсутствіе указанія на Cauchy и указаніе при ссылкѣ на работу Briot и Bouquet только на Jour. de l'Ec. Pol. заставляютъ думать, что С. В. въ то время не была достаточно ознакомлена съ французской литературой вопроса, что и весьма понятно, если обратить вниманіе на то, что она писала эту работу 23-хъ лѣтъ отъ роду, когда она была еще новичкомъ въ наукѣ, и на то, что она была подъ несомнѣннымъ вліяніемъ Weierstrass'а [1]). Правда, въ работѣ Briot и Bouquet есть ссылка на Cauchy, но очень скудная, съ лаконическимъ указаніемъ только на уравненіе $\frac{du}{dx} = f(x,u)$ (ib., p. 133).

Прежде всего С. В. разсматриваетъ систему линейныхъ однородныхъ дифференціальныхъ уравненій перваго порядка вида

$$\frac{\partial u_i}{\partial x} = \sum_{1}^{m}{}_{\varkappa} \sum_{1}^{n}{}_{\lambda} G^i_{\varkappa\lambda}(u_1, \ldots u_m) \frac{\partial u_\varkappa}{\partial x_\lambda} \qquad i = 1.2 \ldots m, \qquad (4)$$

гдѣ $G^i_{\varkappa\lambda}(u_1 \ldots u_m)$ суть голоморфныя функціи въ нѣкоторой области точки $(0, \ldots 0)$. Показавши существованіе формальныхъ рядовъ, распо-

[1]) Въ одномъ изъ писемъ Wierstrass'а къ L. Fuchs'у по поводу присужденія ей in absentia степени доктора философіи (Jahrbr. d. M.-Ver., 1909, Bd 18, Heft 2), именно въ первомъ, опубликованномъ M. Wentscher'омъ, Weierstrass пишетъ: «Eine dieser Abhandlungen beschäftigt sich mit der Frage, ob und wie weit sich die Sätze über die Integration eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen durch Potenzreihen, welche ich zuerst in meiner Abhandlung über die analytischen Facultäten (Crelle's Journal, 51, s. [43, 44]) aufgestellt habe und die bald darauf auch von den Herrn Briot und Bouquet bewiesen worden sind, auf den Fall ausdehnen lassen, wo zur Bestimmung von Functionen mehrerer Veränderlichen die erforderliche Anzahl von partiellen Differentialgleichungen gegeben ist». Такимъ образомъ, С. В. повторяла въ этомъ случаѣ мнѣніе Weierstrass'а.

ложенныхъ по цѣлымъ положительнымъ восходящимъ степенямъ перемѣнныхъ независимыхъ x, $x_1 \ldots x_n$, однозначно опредѣленныхъ, формально удовлетворяющихъ системѣ уравненій (4) и обращающихся при $x = 0$ въ данныя напередъ функціи $\varphi_1(x_1 \ldots x_n), \ldots \varphi_m(x_1 \ldots x_n)$, голоморфныя въ области точки $(0, \ldots 0)$ и обращающіяся въ послѣдней въ нуль, С. В. доказываетъ существованіе области сходимости точки $(0 \ldots 0)$ этихъ рядовъ, представляющихъ такимъ образомъ въ этой области голоморфные интегралы дифференціальныхъ уравненій (4), путемъ сравненія ихъ съ другими рядами, формально удовлетворяющими дифференціальнымъ уравненіямъ

$$\frac{dv_i}{dx} = \frac{G}{1 - \frac{v_1 + \ldots + v_n}{g}} \sum_{\varkappa\lambda} \frac{dv_\varkappa}{dx_\lambda}$$

гдѣ g есть общій радіусъ области сходимости рядовъ $G^i_{\varkappa\lambda}(u_1 \ldots u_m)$, а положительное число G выбрано такъ, чтобы въ разложеніи перваго множителя по цѣлымъ положительнымъ степенямъ $v_1 \ldots v_m$ положительный коэффиціентъ каждаго члена былъ больше модуля соотвѣтствующаго члена каждаго изъ рядовъ $G^i_{\varkappa\lambda}(u_1 \ldots u_m)$; при чемъ эти ряды при $x = 0$ обращаются въ голоморфную функцію

$$\varphi(x_1 \ldots x_n) = \frac{g'(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)}{1 - \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{\varrho}},$$

гдѣ g' и ϱ — положительныя числа и выбраны такъ, чтобы положительный коэффиціентъ каждаго члена въ ея разложеніи былъ больше модуля коэффиціента такого же члена въ каждомъ изъ рядовъ $\varphi_1(x_1 \ldots x_n), \ldots \varphi_n(x_1 \ldots x_n)$. Вспомогательные ряды опредѣляются также однозначно.

Тогда положительный коэффиціентъ каждаго члена всякаго ряда $v_i(x, x_1 \ldots x_n)$, будетъ больше модуля коэффиціента соотвѣтствующаго члена ряда $u_i(x_1, \ldots x_n)$. Остается доказать существованіе области точки $(0, \ldots 0)$, въ которой сходятся вспомогательные ряды.

Что касается интегралovъ вспомогательныхъ дифференціальныхъ уравненій, обращающихся при $x = 0$ въ $\varphi(x_1 \ldots x_n)$, то въ виду того, что $\frac{\partial(v_i - v_\varkappa)}{\partial x} = 0$, разность $v_i - v_\varkappa$ независитъ отъ x; а такъ какъ она обращается при $x = 0$ въ нуль, ибо тогда $v_i = v_\varkappa = \varphi(x_1 \ldots x_n)$, находимъ, что $v_1(x, x_1 \ldots x_n) = \ldots = v_m(x, x_1 \ldots x_n) = v(x, x_1, \ldots x_n)$,

и

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{mG}{1 - \frac{m}{g} v.} \sum_1^n \lambda \frac{\partial v}{\partial x_\lambda}.$$

С. В. ищетъ v, какъ функцію x и $\frac{x_1 + \ldots + x_n}{\varrho}$; полагая $t = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{\varrho}$, $\frac{mv}{g} = \psi(x, t)$, $a = \frac{mnG}{\varrho}$, $b = \frac{mg'}{g}\varrho$, находимъ простой интеграціей, что $ax + t - t\psi = \Theta(\psi)$; а такъ какъ при $x = 0$, $\psi(0,t) = \frac{bt}{1-t}$, находимъ что $\Theta(\psi) \equiv \frac{1-\psi}{b+\psi}\psi$; и такимъ образомъ $\psi(x,t)$ опредѣляется изъ конечнаго уравненія

$$ax + t(1 - \psi) = \frac{1 - \psi}{b + \psi}\psi,$$

откуда

$$\psi(x, t) = \frac{1 - (1-b)t - ax - \sqrt{[1 - (1-b)t - ax]^2 - 4abx}}{2(1-t)},$$

гдѣ при разложеніи въ безконечный рядъ второй части свободный членъ разложенія корня квадратнаго долженъ быть взятымъ равнымъ 1; полученный рядъ имѣетъ нѣкоторую область сходимости; въ ней сходятся ряды $v = v_i(x, x_1 \ldots x_n)$, а, слѣдовательно, и ряды $u_1(x, x_1 \ldots x_n), \ldots u_n(x, x_1 \ldots x_n)$, представляющіе въ ней искомые голоморфные интегралы системы дифференціальныхъ уравненій (4).

Если функціи $\varphi_1(x_1 \ldots x_n) \ldots \varphi_m(x_1 \ldots x_n)$ обращаются въ точкѣ $(0, \ldots 0)$ не въ нуль, а въ $b_1, \ldots b_m$, то если только точка $(b_1 \ldots b_m)$ лежитъ въ области голоморфности функцій $G^i_{\varkappa\lambda}(u_1 \ldots u_m)$, этотъ случай приводится къ предыдущему преобразованіемъ искомыхъ функцій $u_1 \ldots u_m$ къ новымъ $v_1 \ldots v_m$ формулами $u_1 = v_1 + b_1, \ldots n_m = v_m + b_m$.

Случай системы дифференціальныхъ уравненій неоднородныхъ

$$\frac{\partial u_i}{\partial x} = \sum_1^m \varkappa \sum_1^n \lambda G^i_{\varkappa\lambda}(u_1, \ldots u_m) \frac{\partial u_\varkappa}{\partial x_\lambda} + G_i(u_1 \ldots u_m) \qquad i = 1.2 \ldots m$$

гдѣ $G^i_{\varkappa\lambda}$, G_i — голоморфныя функціи въ нѣкоторой области точки $(0, \ldots 0)$ приводится къ предыдущему введеніемъ новой функціи $u(x, x_1, \ldots x_n)$, удовлетворяющей вмѣстѣ съ данными однороднымъ дифференціальнымъ уравненіямъ

$$\frac{du_i}{dx} = \sum_1^m \varkappa \sum_1^n \lambda G^i_{\varkappa\lambda}(u_1, \ldots u_m)\frac{du_\varkappa}{dx_\lambda} + G_i(u_1 \ldots u_m)\frac{du}{dx_1}$$

$$\frac{du}{dx} = 0$$

при условіи, что $u(0, x_1 \ldots x_n) \equiv x_1$; тогда $u \equiv x_1$.

Такимъ образомъ, С. В. Ковалевская примѣнила при этомъ изслѣдованіи методъ Cauchy, его «calcul des limites» и при томъ въ той формѣ, въ какой примѣнили его Briot и Bouquet и на какой окончательно остановился самъ Cauchy, но въ значительно упрощенной формѣ, благодаря спеціальному выбору вспомогательныхъ дифференціальныхъ уравненій и начальныхъ значеній ихъ интеграловъ.

Наконецъ, переходя къ самому общему случаю системы нелинейныхъ дифференціальныхъ уравненій какого угодно порядка, съ такимъ же членомъ неизвѣстныхъ функцій, С. В. Ковалевская полагаетъ, что эта система представлена въ т. н. нормальной формѣ, именно, что уравненія разрѣшены относительно производныхъ найвысшаго порядка отъ каждой функціи, взятыхъ по одному и тому же перемѣнному и, слѣдовательно, могутъ быть представлены въ формѣ:

$$\frac{\partial^{n_i} u_i}{\partial x^{n_i}} = F_i\left(x,\ x_1, \ldots x_n,\ u_1, \ldots u_m, \ldots \frac{\partial^{\alpha_0} u_\varkappa}{\partial x^{\alpha_0}}, \ldots \frac{\partial^{\alpha_0+\alpha_1+\ldots+\alpha_n} u_\varkappa}{\partial x^{\alpha_0}\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}, \ldots\right),$$

$$\alpha_0 < n_\varkappa,\ \alpha_0+\alpha_1+\ldots+\alpha_n \leq n_\varkappa$$
$$\varkappa,\ i = 1,\ 2 \ldots m.$$

Если она этимъ свойствомъ не обладаетъ, можно дать ей этотъ видъ послѣ нѣкотораго линейнаго преобразованія перемѣнныхъ независимыхъ. С. В. Ковалевская разсматриваетъ случай, когда лѣвыя части — алгебраической формы, но, какъ сама замѣчаетъ въ концѣ мемуара, теорема остается вѣрной, если они суть вообще голоморфныя функціи.

Полагая функціи $F_i(x,\ x_1, \ldots x_m,\ u_1, \ldots u_m \ldots, \varrho_{\varkappa,\ \alpha_0,\ 0\ldots0}, \ldots \varrho_{\varkappa,\ \alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_n}, \ldots)$ функціями голоморфными перемѣнныхъ независимыхъ $x,\ x_1 \ldots x_n$, $u_1 \ldots u_m,\ \varrho_{\varkappa,\ \alpha_0,\ 0\ldots0}, \ldots \varrho_{\varkappa,\ \alpha_0,\ \alpha_1\ldots\alpha_n}$ въ области точки $x = a$, $x_1 = a_1 \ldots u_1 = b_1, \ldots u_m = b_m, \ldots \varrho_{\varkappa,\ \alpha_0,\ \alpha_1\ldots\alpha_n} = b_{\varkappa\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_n} \ldots$, отысканіе системы голоморфныхъ интеграловъ $u_i(x,\ x_1 \ldots x_n)$, обращающихся при $x = a$ вмѣстѣ съ производными $\frac{\partial^{\alpha_0} u_i}{\partial x^{\alpha_0}}$ $(\alpha_0 \leq n_i - 1)$ въ данныя функціи $\varphi_i(x_1 \ldots x_n)$, $\varphi_i^{(\alpha_0)}(x_1 \ldots x_n)$, голоморфныя въ области точки $(a_1 \ldots a_n)$ и обращающіяся въ послѣдней вмѣстѣ съ производными $\frac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n}\varphi_i}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}$, $\frac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n}\varphi_i^{(\alpha_0)}}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}$ въ b_i, $b_{i_1,\ \alpha_0,\ 0\ldots0}$, $b_{i,\ 0,\ \alpha_1,\ldots\alpha_n}$, $b_{i\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_n}$, сво-

дится къ рѣшенію предыдущей задачи слѣдующимъ образомъ: вводя новыя независимыя перемѣнныя t, $t_1, \ldots t_n$ по формуламъ: $x=a+t$, $x_i=a_i+t_i$, $i=1, 2, \ldots n$ и означая $u_\varkappa$, $\frac{\partial^{\alpha_0+\alpha_1+\ldots+\alpha_n} u_\varkappa}{\partial x^{\alpha_0} \partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$ чрезъ $v_\varkappa$, $q_{\varkappa,\ \alpha_0,\ \alpha_1 \ldots \alpha_n}$ $(\varkappa=1, 2 \ldots m)$ ищемъ систему голоморфныхъ интегралovъ въ области точки $(0_1 \ldots 0)$, системы линейныхъ дифференціальныхъ уравненій предыдущаго типа:

$$\frac{\partial x}{\partial t}=1, \quad \frac{\partial x_1}{\partial t}=\ldots=\frac{\partial x_n}{\partial t}=0; \quad \frac{\partial v_i}{\partial t}=q_{i,\ 1,\ 0 \ldots 0};$$

$$\frac{\partial q_{i,\ \alpha_0,\ 0 \ldots 0}}{\partial t}=q_{i,\ \alpha_0+1,\ 0 \ldots 0} (0<\alpha_0 \leq n_i-1),$$

$$\frac{\partial q_{i,\ \alpha_0,\ \alpha_1,\ 0 \ldots 0}}{\partial t}=\frac{\partial q_{i,\ \alpha_0+1,\ \alpha_1-1,\ 0 \ldots 0}}{\partial t_1} (\alpha_0+\alpha_1 \leq n_i,\ 0<\alpha_1)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\partial q_{i,\ \alpha_0,\ \alpha_1 \ldots \alpha_n}}{\partial t}=\frac{\partial q_{i,\ \alpha_0+1,\ \alpha_1 \ldots \alpha_n-1}}{\partial t_n} (\alpha_0+\alpha_1+\ldots+\alpha_n \leq n_i,\ 0<\alpha_n),$$

$$\frac{\partial q_{i,\ n_i,\ 0 \ldots 0}}{\partial t}=\frac{\partial F_i}{\partial x}+\ldots+\frac{\partial F_i}{\partial v_\varkappa} q_{\varkappa,\ 1,\ 0 \ldots 0}+\ldots+\frac{\partial F_i}{\partial q_{\varkappa,\ \alpha_0,\ 0,\ \ldots 0}} q_{\varkappa,\ \alpha_0+1,\ 0 \ldots 0}+$$
$$+\ldots+\frac{\partial F_i}{\partial q_{\varkappa \alpha_0 \alpha_1 0 \ldots 0}} \frac{\partial q_{\varkappa,\ \alpha_0+1,\ \alpha_1-1,\ 0 \ldots 0}}{\partial t_1}+\ldots+$$
$$+\frac{\partial F_i}{\partial q_{\varkappa,\ \alpha_0,\ \alpha_1, \ldots \alpha_n}} \frac{\partial q_{\varkappa,\ \alpha_0+1,\ \alpha_1 \ldots \alpha_n-1}}{\partial t_n}+\ldots$$

и обращающихся при $t=0$ въ функціи: $x=a$, $x_1=a_1+t_1 \ldots x_n=a_n+t_n$;

$$v_i=\varphi_i(a_1+t_1, \ldots a_n+t_n); \quad q_{i,\ \alpha_0,\ 0 \ldots 0}=\varphi_i^{(\alpha_0)}(a_1+t_1 \ldots a_n+t_n);$$

$$q_{i,\ \alpha_0,\ \alpha_1,\ 0 \ldots 0}=\frac{\partial^{\alpha_1} \varphi_i^{(\alpha_0)}}{\partial t_1^{\alpha_1}}; \ldots q_{i,\ \alpha_0,\ \alpha_1,\ \ldots \alpha_n}=\frac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n} \varphi_i^{(\alpha_0)}}{\partial t_1^{\alpha_1} \ldots \partial t_n^{\alpha_n}};$$

$$q_{i,\ n_i,\ 0 \ldots 0}=F_i[a,\ a_1+t_1, \ldots a_n+t_n, \ldots \varphi_\varkappa, \ldots \varphi_\varkappa^{(\alpha_0)}, \ldots \frac{\partial^{\alpha_1} \varphi_\varkappa^{(\alpha_0)}}{\partial t_1^{\alpha_1}}, \ldots$$
$$\ldots \frac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n} \varphi_i^{(\alpha_0)}}{\partial t_1^{\alpha_1} \ldots \partial t_n^{\alpha_n}}, \ldots],$$

обращающіяся въ точкѣ $(0, \ldots 0)$ въ : b_i, $b_{i,\ \alpha_0,\ 0 \ldots 0}, \ldots b_{i,\ \alpha_0,\ \alpha_1 \ldots \alpha_n}$, $F_i(a, a_1, \ldots a_n, \ldots b_\varkappa, \ldots b_{\varkappa,\ \alpha_0,\ 0 \ldots 0}, \ldots b_{\varkappa,\ \alpha_0 \alpha_1 \alpha_n})$.

Тогда $x=a+t, \ldots x_n=a_n+t_n$; $q_{i,\ \alpha_0,\ \alpha_1 \ldots \alpha_n} \equiv \frac{\partial^{\alpha_0+\alpha_1+\ldots+\alpha_n} v_i}{\partial t^{\alpha_0} \partial t_1^{\alpha_1} \ldots \partial t_n^{\alpha_n}}$

и

$$\frac{\partial^{n_i} v_i}{\partial t_i^{n_i}} \equiv F_i[a+t,\ a_1+t_1,\ \ldots a_n+t_n, \ldots v_\varkappa, \ldots$$
$$\ldots \frac{\partial^{\alpha_0} v_\varkappa}{\partial t^{\alpha_0}} \ldots \frac{\partial^{\alpha_0+\alpha_1+\ldots+\alpha_n} v_i}{\partial t^{\alpha_0} \partial t^{\alpha_1} \ldots \partial t_n^{\alpha_n}}, \ldots].$$

Если, наконецъ, преобразуемъ перемѣнныя независимыя $t_0, t_1, \ldots t_n$ къ $x, x_1, \ldots x_n$, получимъ систему m интегралов $u_i(x, x_1 \ldots x_n)$, данныхъ дифференціальныхъ уравненій, голоморфныхъ въ области точки $(a, a_1 \ldots a_n)$ и обращающихся при $x = a$ съ своими производными $\frac{\partial^{\alpha_0} u_i}{\partial x^{\alpha_0}}$ $(\alpha_0 \leq n_i - 1)$ въ данныя голоморфныя функціи $\varphi_i(x_1 \ldots x_n)$, $\varphi_i^{(\alpha_0)}(x_1 \ldots x_n)$.

Мы видимъ, что и въ этомъ случаѣ С. В. Ковалевская поступала такъ, какъ если бы хотѣла выполнить указанія Cauchy.

Я полагаю, что чтобы произвести правильную оцѣнку достоинства этого труда и математическаго таланта С. В. Ковалевской, по сколько послѣдній обнаружился въ немъ, должно стать на ту точку зрѣнія, что ей не были извѣстны труды Cauchy, развѣ по работѣ Briot и Bouquet; и если она шла по тому же совершенно пути, что и Cauchy, упрощала и обобщала съ такой легкостью его методъ, то это потому, что по этому пути вела ея собственная интуиція.

Если мы обратимъ вниманіе на сложность вопроса[1]), очевидную даже изъ этого бѣглаго очерка, на простоту и стройность доказательства, заставившихъ Poincaré признать, что С. В. Ковалевская дала методу Cauchy «sa forme définitive»; что, наконецъ. ей было тогда только 23 года отъ роду, мы должны признать за ней крупный математическій талантъ, сильный и ясный умъ, давшій ей возможность не только не потеряться среди массы подробностей, но привести ихъ въ стройное цѣлое, и, что еще важнѣе, недюжинную интуицію. Среди мужчинъ-математиковъ она занимаетъ почетное мѣсто, а среди женщинъ—первое, показавши, что женщина можетъ не уступить мужчинѣ даже въ такой трудной, отвлеченной области, какъ математика.

---

[1]) Въ вышеприведенномъ письмѣ Weierstrass говоритъ про этотъ вопросъ такъ: «Die Frage musste unbedingt einmal gründlich erörtert werden; ich selbst habe, offen gestanden, Scheu gehabt mich darauf einzulassen,... Schwierigkeiten die sich zunächst darboten... sind durch Scharfsinn der Verfasserin auf die einfachste und befriedigenste Weise beseitigt werden». Итакъ, самъ Weierstrass считалъ труднымъ этотъ вопросъ, который съ такой легкостью былъ рѣшенъ С. В. Ковалевской.

О вихряхъ въ жидкости съ мѣняющейся температурой.

Прапорщикъ **Фридманъ.**

---

1. Условія, полученныя Гельмгольтцемъ для вихрей, можно разсматривать, какъ результатъ исключенія изъ уравненій гидродинамики давленія p. При этомъ предполагается, что давленіе p есть функція удѣльнаго объема ω. Мы покажемъ, что и въ томъ случаѣ, когда p не есть функція ω, когда, слѣдовательно, въ общемъ случаѣ при движеніи жидкости мѣняется температура,—исключеніе функцій p и ω изъ уравненій гидродинамики приводитъ къ ряду условій, содержащихъ только составляющія внѣшнихъ силъ X, Y, Z, дѣйствующихъ на единицу массы, и составляющія скоростей u, v, w съ ихъ частными производными разныхъ порядковъ по времени t и координатамъ x, y, z.

Эти условія необходимы при разысканіи различныхъ частныхъ случаевъ движенія жидкости съ мѣняющейся температурой и позволяютъ рѣшить, въ случаѣ ея возможности, задачу объ опредѣленіи p и ω по скоростямъ u, v, w при условіи удовлетворенія уравненій гидродинамики.

2. При сдѣланныхъ выше предположеніяхъ уравненія гидродинамики будутъ:

$$(1)\qquad \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{X - \frac{du}{dt}}{\omega}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{Y - \frac{dv}{dt}}{\omega}, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{Z - \frac{dw}{dt}}{\omega}$$

$$\Theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{d \lg \omega}{dt}.$$

Введемъ обозначенія:

$$G_1 = X - \frac{du}{dt}, \quad G_2 = Y - \frac{dv}{dt}, \quad G_3 = Z - \frac{dw}{dt}$$

$$H_1 = \frac{d\xi}{dt} + \Theta\xi - \left(\xi\frac{\partial u}{\partial x} + \eta\frac{\partial u}{\partial y} + \zeta\frac{\partial u}{\partial z}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right)$$

$$H_2 = \frac{d\eta}{dt} + \Theta\eta - \left(\xi\frac{\partial v}{\partial x} + \eta\frac{\partial v}{\partial y} + \zeta\frac{\partial v}{\partial z}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right)$$

$$H_3 = \frac{d\zeta}{dt} + \Theta\zeta - \left(\xi\frac{\partial w}{\partial x} + \eta\frac{\partial w}{\partial y} + \zeta\frac{\partial w}{\partial z}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)$$

$$\alpha_1 = \frac{\frac{\Theta}{2}G_1 + H_2 w - H_3 v}{G_1 u + G_2 v + G_3 w}, \quad \beta_1 = -\frac{G_1}{G_1 u + G_2 v + G_3 w}$$

$$\alpha_2 = \frac{\frac{\Theta}{2}G_2 + H_3 u - H_1 w}{G_1 u + G_2 v + G_3 w}, \quad \beta_2 = -\frac{G_2}{G_1 u + G_2 v + G_3 w}$$

$$\alpha_3 = \frac{\frac{\Theta}{2}G_3 + H_1 v - H_2 u}{G_1 u + G_2 v + G_3 w}, \quad \beta_3 = -\frac{G_3}{G_1 u + G_2 v + G_3 w}$$

$$\gamma_1 = \frac{\partial\alpha_2}{\partial z} - \frac{\partial\alpha_3}{\partial y} + \beta_2\frac{\partial\alpha_3}{\partial t} - \beta_3\frac{\partial\alpha_2}{\partial t}, \quad \delta_1 = \frac{\partial\beta_2}{\partial z} - \frac{\partial\beta_3}{\partial y} + \beta_2\frac{\partial\beta_3}{\partial t} - \beta_3\frac{\partial\beta_2}{\partial t}$$

$$\gamma_2 = \frac{\partial\alpha_3}{\partial x} - \frac{\partial\alpha_1}{\partial z} + \beta_3\frac{\partial\alpha_1}{\partial t} - \beta_1\frac{\partial\alpha_3}{\partial t}, \quad \delta_2 = \frac{\partial\beta_3}{\partial x} - \frac{\partial\beta_1}{\partial z} + \beta_3\frac{\partial\beta_1}{\partial t} - \beta_1\frac{\partial\beta_3}{\partial t}$$

$$\gamma_3 = \frac{\partial\alpha_1}{\partial y} - \frac{\partial\alpha_2}{\partial x} + \beta_1\frac{\partial\alpha_2}{\partial t} - \beta_2\frac{\partial\alpha_1}{\partial t}, \quad \delta_3 = \frac{\partial\beta_1}{\partial y} - \frac{\partial\beta_2}{\partial x} + \beta_1\frac{\partial\beta_2}{\partial t} - \beta_2\frac{\partial\beta_1}{\partial t}$$

$$\lambda = -\frac{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3}{\delta_1 + \delta_2 + \delta_3}, \quad \omega_i = \frac{\alpha_i\delta_i - \beta_i\gamma_i}{\delta_i} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

Въ этихъ формулахъ

$$\xi = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right), \quad \eta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right), \quad \zeta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

суть составляющія вихрей въ жидкости.

При этихъ обозначеніяхъ условія возможности опредѣленія p и ω изъ уравненій гидродинамики (1) будутъ:

$$G_1 H_1 + G_2 H_2 + G_3 H_3 = 0$$

(2)

$$\frac{\gamma_1}{\delta_1} = \frac{\gamma_2}{\delta_2} = \frac{\gamma_3}{\delta_3}$$

$$\frac{\partial\omega_1}{\partial y}=\frac{\partial\omega_2}{\partial x},\quad \frac{\partial\omega_1}{\partial z}=\frac{\partial\omega_3}{\partial x},\quad \frac{\partial\omega_2}{\partial z}=\frac{\partial\omega_3}{\partial y}$$

(2)

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x}=\frac{\partial\omega_1}{\partial t},\quad \frac{\partial\lambda}{\partial y}=\frac{\partial\omega_2}{\partial t},\quad \frac{\partial\lambda}{\partial z}=\frac{\partial\omega_3}{\partial t}$$

если условія (2) выполнены, то ω и p опредѣляются квадратурами.

$$\omega = e^{2\int \omega_1 dx+\omega_2 dy+\omega_3 dz+\lambda dt}$$

(3)

$$p=\int\frac{G_1dx+G_2dy+G_3dz}{\omega}$$

Формулы (2) справедливы въ общемъ случаѣ, когда ни одинъ изъ знаменателей, входящихъ въ нихъ, не обращаются въ 0; тѣ случаи, когда это обстоятельство встрѣчается, приводятъ къ условіямъ, аналогичнымъ условіямъ (2), но при этомъ ω опредѣляется не квадратурой, а линейнымъ уравненіемъ съ частными производными перваго порядка.

Введенныя нами обозначенія и условія (2) принимаютъ весьма простой видъ, если ихъ выразить въ векторіальной формѣ.

Какъ слѣдствіе одного изъ условій (2), мы получимъ предложеніе:

Векторъ G съ составляющими G_1, G_2, G_3 есть векторъ незакручивающійся, т. е. онъ ортогоналенъ своему вихрю.

Какъ частный случай, мы получаемъ условія Гельмгольтца, выражающіяся тѣмъ, что вихрь вектора G равенъ 0.

3. Укажемъ нѣсколько приложеній условій (2). Положимъ, что мы разсматриваемъ движеніе тяжелой жидкости, скорости частицъ которой параллельны между собой, ортогональны направленію силы тяжести и зависятъ только отъ t и z, причемъ ось z'овъ направлена противоположно дѣйствующей силѣ тяжести.

Рѣшеніе вопроса о движеніи жидкости при указанныхъ предположеніяхъ распадается на слѣдующіе частные случаи:

I. v удовлетворяетъ уравненію:

$$g\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+\frac{g}{2c}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial z\partial t}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}-\frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial^3 v}{\partial z\partial t^3}\right)=\frac{\partial v}{\partial z}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2$$

гдѣ c постоянная, g ускореніе силы тяжести;

$$\omega_1=0,\quad \omega_2=\frac{c}{g},\quad \omega_3=\frac{c+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial z\partial t}}{\frac{\partial v}{\partial t}},\quad \lambda=-\frac{c}{g}v$$

p и ω опредѣляются уравненіями (3). Слѣдующій случай можетъ имѣть приложенія въ динамикѣ атмосферы.

$$v = -\frac{g}{c} F(t+z)$$

$$\omega = e^{\frac{2c}{g}y + 2\int_0^{t+z} F(m)dm}$$

$$p = -\frac{g^2}{2c^2}\frac{F'(t+z)}{\omega}$$

гдѣ F выражается черезъ дробную Бесселеву функцію и опредѣляется уравненіемъ:

$$F'' = 2FF' + \frac{2c^2}{g}$$

II. $$v = \sqrt{c_1 z + c_2} f(t) + c$$

$$\omega = \sqrt{c_1 z + c_2}\,\phi\left(k(y - \sqrt{c_1 z + c_2}\int_0^t f dt - ct) + \frac{2}{c_1}\sqrt{c_1 z + c_2}\right)$$

здѣсь c_1, c_2, c произвольныя постоянныя, изъ коихъ c_1 не=0, ϕ произвольная функція своего аргумента, $f(t)$ опредѣляется соотношеніемъ:

$$\vartheta\left(\sqrt{\frac{c_1}{4g}} f\right) = c_3 t + c_4$$

гдѣ

$$\vartheta(x) = \int_0^x e^{-x^2} dx,$$

c_3, c_4 — произвольныя постоянныя; величина k опредѣляется равенствомъ $k = \frac{f'(0)}{g}$.

Также просто рѣшается задача и въ остальныхъ случаяхъ, въ коихъ v есть функція одной только перемѣнной t и z или въ коихъ $v = c_1 z - \frac{g}{c_1}\lg(c_2 t + c_3)$, гдѣ c_1, c_2, c_3 произвольныя постоянныя и c_1 не=0.

Дѣйствующая Армія.
10 сентября 1915.

Синтетическія основы плоской параболической геометріи.

В. Даватцъ.

§ 1.

Послѣ работъ *Cayley* [1]) и *Klein*'а [2]) является вполнѣ обоснованной точка зрѣнія, что метрическая геометрія можетъ быть разсматриваема, какъ спеціальный случай проективной: это осуществляется путемъ выдѣленія опредѣленнаго геометрическаго образа, такъ называемаго «*абсолюта*». Благодаря изслѣдованіямъ *v. Staudt*'а [3]) является полная возможность синтетическаго обоснованія «проективной метрики», что проведено даже въ элементарныхъ курсахъ проективной геометріи, примыкающихъ къ воззрѣніямъ *Staudt*'а [4]). Въ этомъ направленіи можно указать на работы *Grossmann*'а [5]), а также на опытъ изложенія плоской параболической геометріи у *Wellstein*'а [6]).

Въ настоящей статьѣ мы задались цѣлью дать такое изложеніе плоской параболической геометріи, при которомъ указанное взаимоотношеніе метрической и проективной геометріи выступало бы съ наибольшей очевидностью. Обычно показывается, что введеніе метрическихъ представленій вызываетъ существованіе нѣкоторой эллиптической инволюціи на безконечно-удаленной прямой; при этомъ затушевывается самое существенное — что метрическія соотношенія могутъ быть введены не какъ нѣчто по существу новое, а какъ слѣдствіе нѣкоторой спеціализаціи введенныхъ ранѣе геометрическихъ проективныхъ образовъ. Это становится еще болѣе очевиднымъ, если выдѣлить не ту прямую, которую мы обычно выдѣляемъ вслѣдствіе нашихъ интуитивныхъ пред-

---

[1]) *Cayley.* Sixth Memoir upon Quantics, 1859 (Mathematical Papers, V. II).

[2]) *Klein.* Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie (Math. An. B. IV).

[3]) *v. Staudt.* Geometrie der Lage.

[4]) *Enriques.* Vorlesungen über projective Geometrie 1915.

[5]) *Grossmann.* Die fundamentalen Konstruktionen der nichteuklidischen Geometrie, Beilage zum Programm der thurgauischen Kantonsschule auf das Jahr. 1903/04. *Онъ-же.* Die Konstruktion des geradlinigen Dreiecks der nichteuklidischen Geometrie aus den drei Winkeln (Math. Ann. B. 58), 1904.

[6]) *Веберъ* и *Веллыштейнъ.* «Энциклопедія элементарной математики». Т. II, кн. 1, стр. 229. Тамъ-же богатая литература.

ставленій — безконечно-удаленную прямую, — но вообще любую прямую плоскости.

При такомъ методѣ изложенія мы меньше всего зависимъ отъ нашей интуиціи, и само изложеніе дѣлается по своему характеру догматическимъ. Отсюда вполнѣ естественно сравнить полученную геометрическую систему съ системой геометрическихъ аксіомъ *Hilbert*'а [1]), показать, что всѣ эти аксіомы удовлетворяются и что полученная такимъ образомъ плоская параболическая геометрія съ логической стороны равноправна съ геометрической системой *Евклида*. Такая геометрія по своей сущности будетъ проективной, такъ какъ метрическія соотношенія останутся неизмѣнными при любомъ проективномъ преобразованіи (по отношенію къ новому преобразованному абсолюту).

§ 2.

Основныя опредѣленія. *На плоскости мы выдѣляемъ произвольную прямую p, на которой устанавливаемъ произвольную инволюцію эллиптическаго типа* **I.**

Прямую p будемъ называть **абсолютной прямой;** *всѣ ея точки—* **абсолютными точками;** *инволюцію* **I**—**абсолютной инволюціей;** *прямую p, вмѣстѣ съ инволюціей* **I**—**абсолютомъ плоскости.**

Какъ видно изъ опредѣленія, абсолютъ плоскости совершенно произволенъ; однако, разъ принятъ абсолютъ, мы будемъ предполагать его неизмѣннымъ и постояннымъ.

«Выдѣленіе» абсолюта придаетъ плоскости характеръ незамкнутой совокупности. Точки плоскости — это всѣ точки, не лежащія на абсолютной прямой; прямыя—всѣ за исключеніемъ абсолютной прямой. Поэтому, когда мы говоримъ объ абсолютной точкѣ и абсолютной прямой, то эти понятія будутъ лишены прежняго содержанія: сохраненіе термина эквивалентно введенію въ геометрію «несобственныхъ» элементовъ. Вслѣдствіе этого пересѣченіе двухъ прямыхъ въ абсолютной точкѣ соотвѣтствуетъ понятію о «непересѣченіи» прямыхъ въ собственной точкѣ. По аналогіи съ обычной терминологіей, *назовемъ прямыя, встрѣчающіяся въ абсолютной точкѣ,* **параллельными.**

Всякое проективное соотвѣтствіе **K** *на абсолютной прямой, имѣющее тѣ-же двойныя точки, что и абсолютная инволюція* **I**, *мы будемъ называть* **абсолютной конгруэнціей.**

Двойныя точки абсолютной конгруэнціи **K** установлены при заданіи абсолюта; поэтому для опредѣленія абсолютной конгруэнціи достаточно знать пару соотвѣтственныхъ точекъ конгруэнціи. Такимъ образомъ, *абсолютная конгруэнція опредѣляется парой соотвѣтственныхъ элементовъ.*

[1]) *Hilbert.* Grundlagen der Geometrie. 1909. Мы будемъ цитировать эту книгу сокращенно: «H».

Очевидно, что абсолютная инволюція есть частный видъ абсолютныхъ конгруэнцій.

Совокупность точекъ на абсолютной прямой между двумя абсолютными точками опредѣляетъ нѣкоторый **абсолютный отрѣзокъ** l. *Совокупность прямыхъ, проектирующихъ абсолютный отрѣзокъ изъ нѣкоторой точки, опредѣляетъ* **уголъ, принадлежащій отрѣзку** l.

Такимъ образомъ, принадлежность угла α нѣкоторому абсолютному отрѣзку l обусловлена не только тѣмъ обстоятельствомъ, что стороны угла α проходятъ черезъ концы отрѣзка l. При нашемъ опредѣленіи вертикальные углы всегда принадлежатъ одному и тому же абсолютному отрѣзку; напротивъ, смежные углы вообще принадлежатъ различнымъ абсолютнымъ отрѣзкамъ.

Два абсолютныхъ отрѣзка AA' *и* BB' *назовемъ* **конгруэнтными**, *если точкамъ* A *и* B *соотвѣтствуютъ точки* A' *и* B' *по одной и той же абсолютной конгруэнціи* **K**.

Отрѣзокъ AA' (если конгруэнція **K** не дана) и точка B могутъ быть даны по произволу. Тогда точка B' опредѣлится вообще двузначно: одно опредѣленіе соотвѣтствуетъ направленію AA', другое—противоположному направленію.

Если отрѣзокъ AA' *опредѣляется двумя соотвѣтственными точками абсолютной инволюціи, мы будемъ называть его* **инволюціоннымъ отрѣзкомъ.**

Изъ самого опредѣленія слѣдуетъ, что *абсолютная прямая распадается на два смежныхъ инволюціонныхъ отрѣзка.*

§ 3.

Мѣроопредѣленіе угловъ. *Мы называемъ* **равными** *углы, принадлежащіе двумъ конгруэтнымъ отрѣзкамъ. Мы называемъ* **прямыми** *углы, принадлежащіе инволюціоннымъ отрѣзкамъ.*

Изъ введенныхъ опредѣленій слѣдуетъ, что величина угла тѣсно связана съ абсолютной конгруэнціей: каждая абсолютная конгруэнція **K** (въ томъ числѣ и абсолютная инволюція **I**) опредѣляетъ совокупность равныхъ между собою угловъ. Неравные углы соотвѣтствуютъ различнымъ абсолютнымъ конгруэнціямъ. Прямые углы соотвѣтствуютъ абсолютной инволюціи, а потому всѣ прямые углы равны между собою.

§ 4.

Дальнѣйшія опредѣленія. *Мы называемъ* **кругомъ** *геометрическое мѣсто точекъ, изъ которыхъ отрѣзокъ* AB *виденъ подъ однимъ и тѣмъ же угломъ.*

Основываясь на этомъ опредѣленіи, докажемъ слѣдующія предложенія.

Теорема I. *Три точки, не лежащія на одной прямой, вполнѣ опредѣляютъ кругъ, проходящій черезъ нихъ.*

Пусть даны точки A, B, C, не лежащія на одной прямой. Лучи AC и BC опредѣляютъ абсолютный отрѣзокъ MM'. Всѣ лучи, выходящіе изъ A и B и пересѣкающіеся подъ однимъ и тѣмъ же угломъ, должны опредѣлять на абсолютной прямой отрѣзки, конгруэнтные отрѣзку MM'. Такъ какъ пара точекъ M и M' вполнѣ опредѣляютъ абсолютную конгруэнцію **K**, то для каждаго направленія луча, выходящаго изъ, A, найдется одно и только одно направленіе луча, выходящаго изъ B [1]), точка пересѣченія которыхъ будетъ принадлежать искомому геометрическому мѣсту.

Теорема II. *Кругъ есть кривая второго порядка.* Пучки прямыхъ, опредѣляющіе кругъ. проективны, ибо всякій разъ проектируются соотвѣтственныя точки абсолютной конгруэнціи **K**. По теоремѣ *Steiner*'а, точки пересѣченія соотвѣтственныхъ лучей принадлежатъ коническому сѣченію.

Мы называемъ **центромъ** *круга его полюсъ по отношенію къ абсолютной прямой;* **радіусомъ**—*любой отрѣзокъ, соединяющій точку круга съ его центромъ;* **діаметромъ**—*любой отрѣзокъ, соединяющій двѣ точки круга и проходящій черезъ центръ.*

Введенныя опредѣленія вполнѣ законны послѣ доказательства теоремы II; пользуясь ими мы докажемъ слѣдующее предложеніе:

Теорема III. *Діаметръ круга виденъ изъ любой его точки подъ прямымъ угломъ.*

Пусть AB—діаметръ круга, C—его центръ, O—пересѣченіе продолженнаго діаметра съ абсолютной прямой. Проведемъ въ точкахъ A и B пару касательныхъ, пересѣкающихся въ точкѣ O'. Такъ какъ точка O' будетъ полюсомъ для AB, то она должна лежать на полярѣ точки C, т. е. на абсолютной прямой. Итакъ точки O и O' будутъ двумя абсолютными точками.

Пусть D—нѣкоторая движущаяся точка на окружности. Лучи AD и BD будутъ проектировать соотвѣтственныя точки абсолютной конгруэнціи, слѣдовательно будутъ проективны. Но въ этой абсолютной конгруэнціи точки O и O' будутъ соотвѣтствовать другъ другу взаимно, откуда заключаемъ, что абсолютная конгруэнція, опредѣляющая величину угла ADB имѣетъ инволюціонный характеръ, является слѣдовательно абсолютной инволюціей, и всѣ углы, подъ которыми виденъ діаметръ изъ точекъ круга, будутъ прямыми.

---

[1]) Мы имѣемъ въ виду вполнѣ опредѣленное *направленіе* конгруэнтныхъ отрѣзковъ.

Георема IV. *Центръ и радіусъ вполнѣ опредѣляютъ кругъ.*

Пусть данъ центръ C и радіусъ AC. Точка B, принадлежащая кругу и лежащая по направленію даннаго радіуса, будетъ, по опредѣленію центра, четвертой гармонической между сопряженной парой O, C и точкой A, если O — точка встрѣчи продолженнаго радіуса AC съ абсолютной прямой. Такимъ образомъ діаметръ AB будетъ однозначно опредѣленъ. Проведя два луча изъ A и изъ B, пересѣкающіеся подъ прямымъ угломъ, получимъ точку C, лежащую на искомомъ кругѣ, согласно теоремѣ III. Но три точки A, B, C, по теоремѣ I, вполнѣ опредѣляютъ кругъ.

§ 5.

Мѣроопредѣленіе отрѣзковъ. Мы будемъ различать здѣсь два случая, въ зависимости отъ того, будутъ-ли сравниваемые отрѣзки параллельны, или нѣтъ. Въ соотвѣтствіи съ этимъ мы даемъ слѣдующія опредѣленія:

Два отрѣзка AB и $A'B'$ на двухъ параллельныхъ прямыхъ **равны** *между собою, если прямыя AA' и BB' параллельны.*

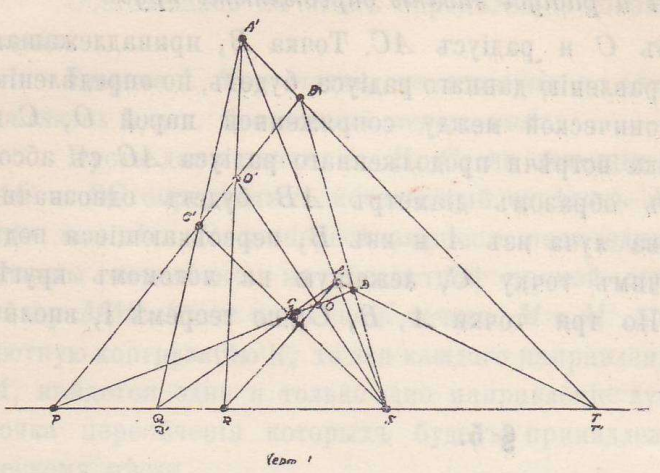
Два отрѣзка AB и $A'B'$ **равны** *между собою, если взявъ точки A и A' за центры круговъ съ радіусами AB и $A'B'$, получимъ два круга* **C** *и* **C'**, *въ которыхъ найдется пара параллельныхъ между собою равныхъ радіусовъ.*

Покажемъ, что общее опредѣленіе равенства отрѣзковъ не противорѣчитъ опредѣленію равенства въ случаѣ параллельности. Для этого достаточно показать: 1^0 что всѣ радіусы круговъ **C** и **C'** опредѣлятся вполнѣ единственнымъ образомъ; 2^0 что въ случаѣ существованія въ кругахъ **C** и **C'** пары параллельныхъ равныхъ радіусовъ, всѣ другіе радіусы, соотвѣтственно параллельные, будучи равными по второму опредѣленію, будутъ равны и по первому опредѣленію.

Положеніе 1^0 вытекаетъ непосредственно изъ теоремы IV. Второе положеніе становится очевиднымъ послѣ доказательства слѣдующаго предложенія:

Теорема V. *Даны два круга* **C** *и* **C'** *съ центрами O, O', въ которыхъ проведены радіусы OA, OB и $O'A'$, $O'B'$, причемъ OA и OB соотвѣтственно параллельны радіусамъ $O'A'$ и $O'B'$. Если отрѣзки OO' и AA' параллельны, то будутъ параллельными и отрѣзки OO' и BB'.*

По условію $OA \parallel O'A'$ и $OO' \parallel AA'$; слѣдовательно, точка встрѣчи прямыхъ OA и $O'A'$ (точка R) и прямыхъ OO' и AA' (точка S) лежатъ на абсолютной прямой. Точно также изъ условія $OB \parallel O'B'$



Черт. 1

слѣдуетъ, что ихъ точка встрѣчи (точка P) лежитъ также на абсолютной прямой. Проведемъ діаметры BC и $B'C'$; точки C и C' опредѣлятся изъ условія, что $(POCB)$ и $(PO'C'B')$ составляютъ гармоническія группы; очевидно, что точки C, C' и S будутъ лежать на одной прямой.

Изъ точекъ A и A' спроектируемъ діаметры BC и $B'C'$ на абсолютную прямую. Согласно теор. III абсолютные отрѣзки QT и $Q'T'$ должны быть инволюціонными отрѣзками. Такъ какъ

$$(POCB) \overline{\wedge} (PRQT)$$
$$(PO'C'B') \overline{\wedge} (PRQ'T')$$

то $(PRQT)$ и $(PRQ'T')$ составляютъ гармоническія группы. Итакъ, *точки Q, T и Q', T' принадлежатъ къ соотвѣтственнымъ точкамъ инволюціи* **I** *и гармонически раздѣляютъ точки P и R.*

Легко показать, что пары QT и $Q'T'$ совпадаютъ Въ самомъ дѣлѣ, какъ раздѣляющія гармонически точки P и R, онѣ принадлежатъ къ нѣкоторому инволюціонному соотвѣтствію гиперболическаго типа $\mathbf{I}'$ (съ двойными точками P и R). Такъ какъ кромѣ того пары эти принадлежатъ къ абсолютной инволюціи **I**, то онѣ являются общими парами двухъ инволюціонныхъ соотвѣтствій **I** и $\mathbf{I}'$, изъ которыхъ одно эллиптическаго типа. Какъ извѣстно, существуетъ единственная пара точекъ, удовлетворяющихъ этимъ условіямъ [1]).

Итакъ, точки Q и T соотвѣтственно совпадаютъ съ точками Q' и T'. Но тогда треугольники ABC и $A'B'C'$ будутъ гомологическими, а потому прямыя AA', BB' и CC' пересѣкутся въ одной точкѣ S. Слѣдовательно прямыя OO' и BB' будутъ параллельны, что и требовалось доказать.

Въ связи съ этимъ докажемъ слѣдующее предложеніе:

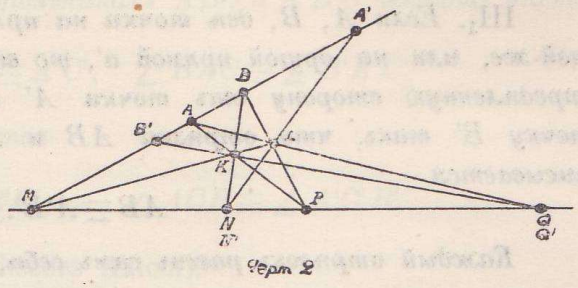
Теорема VI. *Концы отрѣзка AB примемъ за центры двухъ круговъ, радіусы которыхъ равны самому отрѣзку AB, и проведемъ пару параллельныхъ радіусовъ AK и BL. Прямая KL будетъ параллельна линіи центровъ AB* [2]).

---

[1]) *Enriques.* Vorles. über project. Geometrie. S. 118.

[2]) Отсюда вытекаетъ, что два смежныхъ равныхъ отрѣзка на прямой AB и BC обладаютъ тѣмъ свойствомъ, что $(OBAC)$ составляютъ гармоническую группу, если O — абсолютная точка прямой.

Построимъ діаметры нашихъ круговъ AA' и BB'; очевидно, что группы $(MAB'B)$ и $(MBAA')$ будутъ гармоническими. Спроектировавъ изъ K группу $(MAB'B)$ получимъ гармоническую группу $(MPQN)$; спроектировавъ изъ L группу $(MBAA')$ получимъ гармоническую группу $(MPQ'N')$, т. е. NQ и $N'Q'$ гармонически дѣлятъ отрѣзокъ MP. Такъ какъ по теоремѣ III § 4 оба эти отрѣзка инволюціонны, то примѣняя разсужденія доказательства теоремы V § 5, заключаемъ, что NQ и $N'Q'$ совпадаютъ.



Черт. 2

Прямая KL должна быть осью коллинеаціи при построеніи проективныхъ рядовъ по соотвѣтственнымъ элементамъ ABA' и NPQ; такъ какъ, далѣе, $(MNPQ) \overline{\wedge} (MA'BA)$ (центръ проекціи L) и $(MA'BA) \overline{\wedge} (MABA')$ (т. к. эти точки составляютъ гармоническую группу), то

$$(MNPQ) \overline{\wedge} (MABA')$$

т. е. въ данной проективности точка M соотвѣтствуетъ сама себѣ, что возможно только тогда, когда черезъ нее проходитъ ось коллинеаціи. Такимъ образомъ KL и AB пересѣкаются въ абсолютной точкѣ, что доказываетъ предложеніе.

§ 6.

Установивъ такимъ образомъ мѣроопредѣленія угловъ и отрѣзковъ, мы изслѣдуемъ полученную систему съ точки зрѣнія *Hilbert*'овскихъ аксіомъ геометріи.

Аксіомы *Hilbert*'а распадаются, какъ извѣстно, на пять группъ (Axiome der Verknüpfung, der Anordnung, der Kongruenz, der Parallelen, der Stetigkeit). Такъ какъ наша система построена на основѣ проективной геометріи, безъ привнесенія новыхъ понятій, но лишь путемъ спеціализаціи нѣкоторыхъ геометрическихъ образовъ и соотвѣтствующихъ опредѣленій, то ясно, что всѣ аксіомы, лежащія въ основѣ проективной геометріи, будутъ сохраняться при введеніи проективной метрики. Таковыми будетъ: 1°. Вся первая группа аксіомъ (A. der Verknüpfung). 2°. Вся вторая группа аксіомъ (A. der Anordnung). 3°. Аксіома «замкнутости» пятой группы (A. der Vollständigkeit, V_2) [1].

[1]) H. S. 22. Послѣднее обстоятельство тѣмъ болѣе очевидно, что мы не только не *добавляемъ* «новыхъ» элементовъ въ проективную геометрію, но какъ разъ наоборотъ, *устраняемъ* несобственные элементы.

Остается, слѣдовательно, провѣрить справедливость слѣдующихъ аксіомъ:

Третья группа. (Axiome der Kongruenz).

III_1. *Если A, B, двѣ точки на прямой a и далѣе A' точка на той-же, или на другой прямой a', то всегда можно на прямой a' по опредѣленную сторону отъ точки A' найти одну и только одну точку B' такъ, что отрѣзки AB и $A'B'$ будутъ равны, что записывается*

$$AB \equiv A'B'.$$

Каждый отрѣзокъ равенъ самъ себѣ, т. е. всегда

$$AB \equiv AB \quad и \quad AB \equiv BA.$$

III_2. *Если отрѣзокъ AB равенъ какъ отрѣзку $A'B'$ такъ и отрѣзку $A''B''$, то отрѣзокъ $A'B'$ равенъ отрѣзку $A''B''$, т. е. если*

$$AB \equiv A'B' \quad и \quad AB \equiv A''B''$$

то

$$A'B' \equiv A''B''.$$

III_3. *Если AB и BC два отрѣзка безъ общихъ точекъ на прямой a и $A'B'$ и $B'C'$ два отрѣзка на той-же или на другой прямой тоже безъ общихъ точекъ; если далѣе*

$$AB \equiv A'B' \quad и \quad BC \equiv B'C'$$

то всегда

$$AC \equiv A'C'.$$

III_4. *Пусть данъ уголъ $\angle (h, k)$ на плоскости α и прямая a' на той-же плоскости, равнымъ образомъ опредѣленная сторона прямой a'* [1]). *Пусть h' — полупрямая на α, исходящая изъ точки O': тогда на плоскости α будетъ существовать одна и только одна полупрямая k' такая, что уголъ $\angle (h, k)$ будетъ равенъ углу $\angle (h', k')$ и кромѣ того всѣ внутреннія точки угла $\angle (h', k')$ будутъ лежать по заданной сторонѣ a', что записывается:*

$$\angle (h, k) \equiv \angle (h', k.);$$

каждый уголъ равенъ самому себѣ, т. е.

$$\angle (h, k) \equiv \angle (h, k) \quad и \quad \angle (h, k) \equiv \angle (k, h).$$

III_5. *Если уголъ $\angle (h, k)$ равенъ какъ углу $\angle (h', k')$, такъ и углу $\angle (h'', k'')$, то уголъ $\angle (h', k')$ равенъ углу $\angle (h'', k'')$, т. е. если*

$$\angle (h, k) \equiv \angle (h', k') \quad и \quad \angle (h, k) \equiv \angle (h'', k'')$$

[1]) Мы модифицируемъ эту аксіому на случай плоской геометріи, т. к. у *Hilbert'a* она формулирована по отношенію къ пространству 3-хъ измѣреній. (H. S. 11).

то всегда

$$\angle (h', k') \equiv \angle (h'', k'')$$

III_6. *Если въ двухъ треугольникахъ ABC и $A'B'C'$ имѣютъ мѣсто равенства*

$$AB \equiv A'B', \quad AC \equiv A'C', \quad \angle BAC \equiv \angle B'A'C'$$

то удовлетворяются и равенства

$$\angle ABC \equiv \angle A'B'C' \quad и \quad \angle ACB \equiv \angle A'C'B'.$$

Четвертая группа. (Euklidisches Axiom).

IV. *Пусть a произвольная прямая и A точка внѣ a: тогда существуетъ только одна прямая b, проходящая черезъ A и не пересѣкающая a* [1]).

Пятая группа. (Axiome der Stetigkeit).

V_1. *Пусть A_1 произвольная точка на прямой между произвольно выбранными точками A и B; мы строимъ точки A_2, A_3 A_4... такъ, чтобы A_1 была между A и A_2, A_2 — между A_1 и A_3, A_3 — между A_2 и A_4 и т. д. кромѣ того, чтобы отрѣзки*

$$AA_1, \quad A_1A_2, \quad A_2A_3, \quad A_3A_4 \ldots$$

были равны другъ другу: тогда въ ряду точекъ A_2, A_3, A_4... всегда найдется такая точка A_n, что B будетъ лежать между A и A_n [2]).

Справедливость всѣхъ этихъ аксіомъ для нашей геометрической системы мы покажемъ въ той же послѣдовательности, которая здѣсь указана, т. е. въ порядкѣ III_{1-6}; IV; V_1.

§ 7.

Аксіома III_1. Въ справедливости первой части аксіомы убѣждаемся путемъ *возможности однозначнаго построенія равныхъ данному отрѣзковъ, на основаніи введенныхъ въ § 5 опредѣленій.*

Пусть AB — данный отрѣзокъ. Мы строимъ отрѣзокъ CD, равный AB, — 1^0 на прямой, полученной путемъ продолженія AB; 2^0 на прямой, параллельной AB; 3^0 на прямой, не параллельной AB.

---

[1]) *Hilbert* излагая эту аксіому опредѣляетъ существованіе b въ плоскости (A, a), что при изложеніи плоской геометріи излишне; кромѣ того, въ формулировку аксіомы онъ вводитъ опредѣленіе параллельности, что мы сдѣлали раньше въ § 2. (H. S. 20).

[2]) *Hilbert* называетъ эту аксіому «Axiom des Messens oder Archimedisches Axiom» (H. S. 22).

Построеніе 1°. Назовемъ черезъ O абсолютную точку на прямой AB и изъ точки B проведемъ произвольную прямую, абсолютная точка которой пусть будетъ O'. Примемъ B за центръ круга съ радіусомъ AB; кругъ этотъ пересѣчется съ прямой BO' въ точкѣ K. Прямыя OK и CO' пересѣкутся въ нѣкоторой точкѣ K'.

Примемъ C за центръ круга съ радіусомъ CK'; прямую AB онъ пересѣчетъ (если, какъ требуется въ аксіомѣ, дается направленіе прямой отъ точки C) въ единственной точкѣ D. Отрѣзокъ CD будетъ искомымъ.

Дѣйствительно, отрѣзки AB и CD будутъ служить радіусами двухъ круговъ, въ которыхъ имѣются два параллельныхъ радіуса BK, CK', равныхъ между собою. Согласно опредѣленію § 5, $AB = CD$.

Единственность построенія вытекаетъ изъ слѣдующихъ соображеній. Если-бы изъ точки B мы провели другую прямую BO'', то мы получили-бы тотъ-же самый кругъ съ центромъ B (теорема IV, § 4), а потому въ направленіи BO' мы получили-бы въ пересѣченіи ту-же точку K. Такъ какъ новый кругъ съ центромъ C будетъ имѣть съ кругомъ съ центромъ B по равному и параллельному радіусу (въ направленіи CO''), то всякая пара параллельныхъ радіусовъ въ этихъ двухъ кругахъ будетъ равна другъ другу (теорема V, § 5); слѣдовательно, въ направленіи CO' мы получимъ тотъ-же радіусъ CK', т. е. новый кругъ съ центромъ C будетъ тождественъ съ прежнимъ, а потому точка D опредѣлится однозначно.

Если вмѣсто того, чтобы проводить линію BO', мы провели-бы прямую AO' и построили-бы кругъ съ центромъ A, опредѣляющій на направленіи AO' радіусъ AK'', то мы могли-бы замѣнить это построеніе прежнимъ, на основаніи теоремы VI § 5. И въ этомъ случаѣ однозначность опредѣленія D доказана.

Построеніе 2°. Пусть AB — отрѣзокъ на прямой p и точка C находятся на прямой p', ей параллельной. Пусть O' — абсолютная точка прямой AC. Пересѣченіе BO' и прямой p' опредѣлитъ точку D.

Правильность такого построенія вытекаетъ изъ опредѣленія. Однозначность — очевидна. Если вмѣсто AC мы взяли-бы прямую BC съ абсолютной точкой на ней O'', то мы получили-бы отрѣзокъ CD, отвѣчающій другому направленію полупрямой p'. При заданномъ направленіи, какъ это требуется аксіомой, опредѣленіе D однозначно.

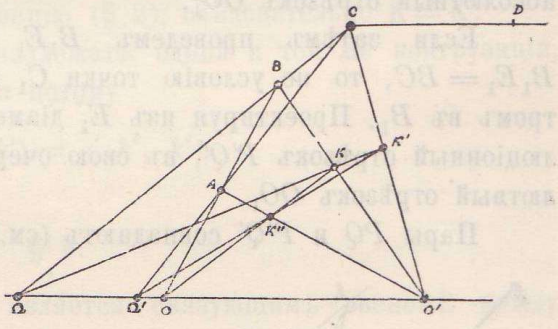
Построеніе 3°. Назовемъ черезъ O абсолютную точку на прямой AB и отъ точки B проведемъ произвольную прямую, абсолютная точка которой пусть будетъ O'. Примемъ B за центръ круга съ радіусомъ AB; кругъ этотъ пересѣчется съ прямой BO' въ точкѣ K. Пусть далѣе Ω абсолютная точка прямой BC. Прямыя ΩK и CO' пересѣкутся въ нѣкоторой точкѣ K'.

Примемъ C за центръ круга съ радіусомъ CK'; прямую, въ которой дана точка C, онъ пересѣчетъ (если, какъ требуется въ аксіомѣ, дается направленіе прямой отъ точки C) въ единственной точкѣ D. Отрѣзокъ CD будетъ искомымъ.

Доказательство правильности построенія то же, что при построеніи 1-мъ.

Единственность построенія вытекаетъ изъ слѣдующихъ соображеній. Если бы изъ точки B мы провели другую прямую BO'' и въ соотвѣтствіи съ этимъ модифицировали бы построеніе, то въ силу тѣхъ же обстоятельствъ, которыя указаны въ построеніи 1^0, мы должны были бы придти къ прежнему результату.

Мы пришли-бы къ прежнему построенію, если бы вмѣсто прямой BO' и круга съ центромъ B взяли бы прямую AO' и кругъ съ центромъ A. Соотвѣтственный радіусъ AK' по теоремѣ VI § 5 былъ бы равенъ BK, т. е. AB и KK'' пересѣкались бы въ точкѣ O. Радіусъ круга съ центромъ C въ направленіи CO', какъ равный AK'', опредѣлился бы проектированіемъ AK'' изъ абсолютной точки Ω_1, лежащей на прямой AC. Вершины треугольниковъ ABC и $K''KK'$ лежали бы на трехъ лучахъ, выходящихъ отъ O', причемъ стороны AB, $K''K$ и AC, $K''K'$ пересѣкались бы въ двухъ точкахъ O и Ω_1 на абсолютной прямой; эти треугольники были бы гомологическими, а потому BC и KK' пересѣклись бы въ точкѣ Ω. Такимъ образомъ новый кругъ съ центромъ C имѣлъ бы въ направленіи CO' тотъ же самый радіусъ, что и старый, а потому точка D опредѣлилась-бы однозначно.



Черт. 5

Вторая часть аксіомы, что всякій отрѣзокъ равенъ самому себѣ, вытекаетъ непосредственно изъ теоремы VI § 5. Въ самомъ дѣлѣ, описавъ изъ концовъ отрѣзка два круга, съ радіусами, равными длинѣ отрѣзка, мы получимъ въ любыхъ параллельныхъ направленіяхъ по равному радіусу, что согласно опредѣленіямъ § 5 достаточно для признанія аксіомы справедливой.

Аксіома III_2. Справедливость аксіомы III_2 установимъ слѣдующимъ образомъ.

На отрѣзкахъ AB, $A'B'$ и $A''B''$ построимъ три круга съ центрами A, A' и A'' и съ радіусами, равными соотвѣтствующимъ отрѣзкамъ; назовемъ соотвѣтствующіе круги **C**, **C'** и **C''**. Проведемъ въ кругѣ **C'** радіусъ $A'K'$, параллельный AB. Такъ какъ $AB = A'B'$, то оче-

видно $AB = A'K'$ (по теоремѣ V § 5). Въ кругѣ $\mathbf{C}''$ проведемъ радіусъ $A''K''$, также параллельный AB; по тѣмъ же причинамъ, $A''K'' = AB$.

Мы получимъ три параллельныхъ отрѣзка AB, $A'K'$ и $A''K''$, причемъ

$$AB = A'K' \quad \text{и} \quad AB = A''K''.$$

Легко доказать, что въ этомъ случаѣ $A'K' = A''K''$. Пусть абсолютная точка прямыхъ AB, $A'K'$ и $A''K''$ будетъ O. По условію, прямыя BK' и AA' имѣютъ общую абсолютную точку O''. Треугольники $AA'A''$ и $BK'K''$ будутъ гомологическими, ибо вершины ихъ находятся на трехъ прямыхъ, выходящихъ отъ точки O, а стороны AA' и BK', AA'' и BK'' пересѣкаются на абсолютной прямой. Слѣдовательно $A'A''$ и $K'K''$ также пересѣкаются на абсолютной прямой, т. е. $A'K' = A''K''$.

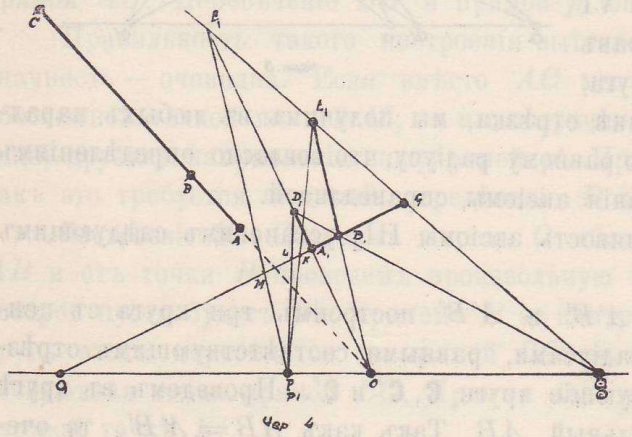
Изъ послѣдняго равенства обнаруживается, что круги $\mathbf{C}'$ и $\mathbf{C}''$ имѣютъ пару равныхъ параллельныхъ радіусовъ, а потому, въ силу опредѣленія, $A'B' = A''B''$, что и требовалось доказать.

Аксіома III_3. Справедливость аксіомы III_3 въ случаѣ параллельныхъ направленій слѣдуетъ изъ самаго опредѣленія. *Остается доказать справедливость аксіомы, если прямыя, на которыхъ даны отрѣзки, не параллельны.*

Пусть $AB = A_1B_1$ и $BC = B_1C_1$. Проведемъ A_1D_1 параллельно AB и отложимъ $A_1D_1 = AB$. По условію точки B_1 и D_1 должны лежать на кругѣ съ центромъ A_1. Поэтому проектируя изъ D_1 діаметръ LB_1, мы получимъ инволюціонный отрѣзокъ PQ, гармонически дѣлящій абсолютный отрѣзокъ OO_1.

Если затѣмъ проведемъ B_1E_1 параллельно BC и отложимъ $B_1E_1 = BC$, то по условію точки C_1 и E_1 лежатъ на кругѣ съ центромъ въ B_1. Проектируя изъ E_1 діаметръ KC_1, получимъ новый инволюціонный отрѣзокъ $P'Q'$, въ свою очередь дѣлящій гармонически абсолютный отрѣзокъ OO_1.

Пары PQ и $P'Q'$ совпадаютъ (см. доказ. теор. V, § 5).



Чер. 4

Продолжимъ теперь E_1C_1 до пересѣченія съ A_1D_1 въ точкѣ F_1 и соединимъ F_1 съ P. Точки

$$(O_1A_1MC_1) \barwedge (O_1OPQ),$$

т. е. $(O_1A_1MC_1)$ составляютъ гармоническую группу, а потому

$$A_1M = A_1C_1.$$

Уголъ MF_1C_1, какъ

соотвѣтствующій инволюціонному отрѣзку PQ,—прямой, а потому точки M, F_1, C_1 лежатъ на одномъ и томъ же кругѣ и

$$A_1C_1 = A_1F_1.$$

Такъ какъ радіусъ A_1F_1, параллельный AC, оказался равнымъ A_1C_1, то по опредѣленію

$$AC = A_1C_1.$$

что и требовалось доказать.

§ 8.

Аксіома III_4. Пусть уголъ $\angle(h, k)$ принадлежитъ абсолютному отрѣзку HK, который опредѣляетъ абсолютную конгруэнцію **K** (§ 2), и пусть лучъ h' имѣетъ абсолютной точкой H'. Для построенія угла $\angle(h', k')$, равнаго $\angle(h, k)$, мы должны построить отрѣзокъ $H'K'$, конгруэнтный HK. Для точки H' найдется по данной конгруэнціи **K** единственная соотвѣтствующая ей точка K' (если, какъ требуется аксіомой, дается направленіе), а потому *первая часть аксіомы III_4 имѣетъ мѣсто.*

Вторая часть аксіомы III_4 очевидна.

Аксіома III_5. Если $\angle(h, k) = \angle(h', k')$, то принадлежащіе имъ абсолютные отрѣзки HK и $H'K'$ конгруэнтны, т. е. опредѣляются одной и той же абсолютной конгруэнціей **K**. Если $\angle(h, k) = \angle(h'', k'')$, то принадлежащіе имъ абсолютные отрѣзки HK и $H''K''$ принадлежатъ нѣкоторой конгруэнціи **K'**. Но пара соотвѣтственныхъ элементовъ вполнѣ опредѣляетъ абсолютную конгруэнцію (§ 2); слѣдовательно $\mathbf{K} = \mathbf{K'}$.

Итакъ, $H'K'$ и $H''K''$ принадлежатъ одной и той же конгруэнціи, т. е. являются конгруэнтными, а потому

$$\angle(h', k') = \angle(h'', k''),$$

что и требовалось доказать.

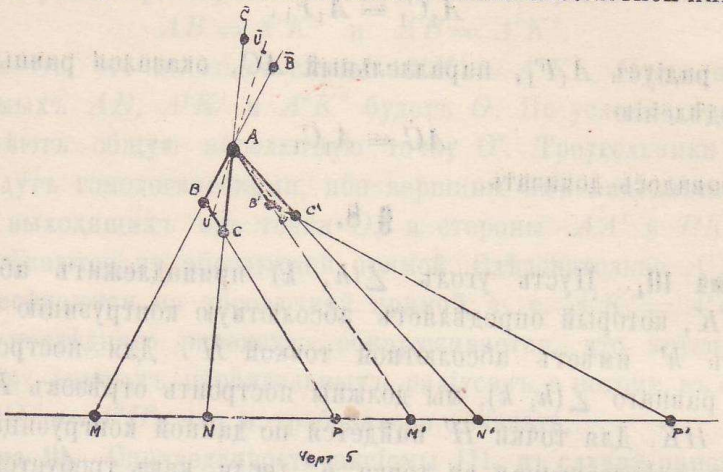
§ 9.

Аксіома III_6. Аксіома эта является связующимъ звеномъ между аксіомами III_{1-3} и III_{4-5}.

Для доказательства предположимъ сперва, что оба треугольника имѣютъ общую вершину A.

Каждому лучу, выходящему изъ A и образующему нѣкоторый отрѣзокъ AU можно поставить въ соотвѣтствіе лучъ AU_1 такой, что $AU = AU_1$: тогда, если $AU = A\overline{U}$, то лучи UU_1 и $\overline{U}U_1$ пересѣкутъ абсолютную прямую въ двухъ точкахъ абсолютной инволюціи. Поэтому, если изъ точекъ U и $\overline{U}$ проектировать соотвѣтственныя точки абсолютной инволюціи, получимъ на прямой $B'C'$ проективность π, причемъ U_1 будетъ одной изъ двойныхъ ея точекъ.

Если точка U занимаетъ послѣдовательныя положенія на прямой BC, то $\overline{U}$ двигается по прямой $P\overline{B'}$. Если изъ новыхъ положеній точекъ U и $\overline{U}$ спроектировать соотвѣтственныя точки абсолютной инволюціи, то



Черт 5

они спроектируются теперь на $B'C'$ въ другую проективность π', отличную отъ π, трансформированную изъ π при помощи нѣкоторой проективности Ω [1]). Двойныя точки подвергнуты въ этомъ случаѣ тому же проективному преобразованію Ω, которое создается перемѣщеніемъ точки U по прямой BC: другими словами ряды U и U_1 проективны.

Такъ какъ длина $AP = AP' = \infty$, то въ этихъ проективныхъ рядахъ точки P и P' являются соотвѣтствующими другъ другу въ абсолютной конгруэнціи, въ которой точкамъ M, N, P... соотвѣтствуютъ M', N', P', откуда по опредѣленію

$$\left.\begin{aligned} \angle ACB &= \angle AC'B' \\ \angle ABC &= \angle AB'C' \end{aligned}\right\} \text{I.}$$

Если два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$, удовлетворяющіе условіямъ теоремы, расположены какъ угодно, то при вершинѣ A строимъ $\triangle AB'C'$ такъ, чтобы $AB' \parallel A_1B_1$ и $AC' \parallel A_1C_1$, причемъ $AB' = A_1B_1$ и $AC' = A_1C_1$. Такъ какъ треугольники эти гомологичны, то на абсолютной прямой пересѣкутся попарно стороны AB' и A_1B_1, AC' и A_1C_1, $B'C'$ и B_1C_1, т. е. въ треугольникахъ $AB'C'$ и $A_1B_1C_1$ углы будутъ соотвѣтственно равны.

Но, какъ показано выше, въ этомъ случаѣ имѣютъ мѣсто равенства (I), которыя, въ силу сказаннаго дадутъ намъ

$$\left.\begin{aligned} \angle ACB &= \angle A_1C_1B_1 \\ \angle ABC &= \angle A_1B_1C_1 \end{aligned}\right\} \text{II},$$

что и является содержаніемъ аксіомы III_6.

---

[1]) *Enriques.* Project. G. S. 113.

§ 10.

Аксіома IV. Построеніе прямой черезъ точку A, которая не пересѣкалась бы съ a, сводится къ построенію прямой, проходящей черезъ точку A и абсолютную точку O на прямой a: т. е. къ задачѣ проведенія прямой черезъ двѣ данныхъ точки.

Такая задача, какъ извѣстно, разрѣшается однозначно, что *подтверждаетъ справедливость аксіомы IV.*

§ 11.

Аксіома V_1. Прежде всего замѣтимъ, что построеніе равныхъ другъ другу и смежныхъ отрѣзковъ

$$AA_1,\ A_1A_2,\ A_2A_3,\ A_3A_4\ldots$$

сводится къ послѣдовательному нахожденію четвертой гармонической по отношенію къ абсолютной точкѣ на прямой, O: [1])

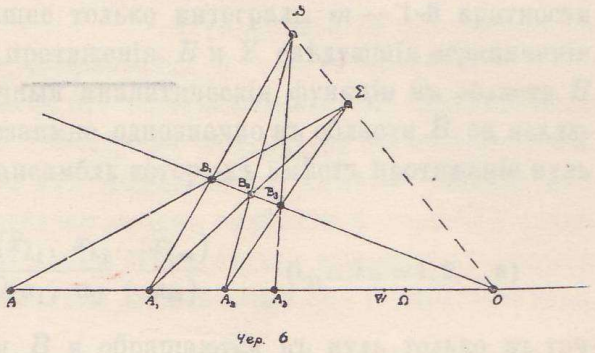
$$(OA_1AA_2)\overline{\wedge}(OA_2A_1A_3)\overline{\wedge}(OA_3A_2A_4)\ldots \text{ и т. д.}$$

Разсмотримъ два ряда: $(AA_1A_2A_3\ldots)$ и $(A_1A_2A_3A_4\ldots)$. Такъ какъ $(A_{k-1}A_{k+1}A_kO)$ и $(A_kA_{k+2}A_{k+1}O)$ при всякомъ k составляютъ гармоническія группы, то ясно, что ряды

$$AA_1A_2\ldots \ (\mathbf{A})$$
$$A_1A_2A_3\ldots \ (\mathbf{A'})$$

проективны и имѣютъ двойной точкой точки O. Проективные ряды опредѣляются тремя парами соотвѣтственныхъ элементовъ: за таковые примемъ A, A_1, A_2 и $A_1A_2A_3$.

Спроектируемъ $A_1A_2A_3$ изъ произвольной точки S на прямую, проходящую черезъ O; рядъ $B_1B_2B_3\ldots$ (**B**) будетъ проективенъ ряду (**A'**), а потому и (**A**) и даже перспективенъ, вслѣдствіе того, что общая имъ точка O соотвѣтствуетъ сама себѣ. Отсюда заключаемъ, что лучи AB_1, A_1B_2 и A_2B_3 пересѣкутся въ общей точкѣ Σ. Изъ разсмо-



Чер. 6

[1]) См. примѣчаніе къ теор. VI § 5.

трѣнія четыреугольника $B_1S\Sigma B_2$ и условія, что (AA_2A_1O) есть гармоническая группа, слѣдуетъ, что *точки S, Σ и O лежатъ на одной прямой.*

Возьмемъ теперь любую точку A ряда (**A**). Чтобы построить ей соотвѣтственную въ ряду (**A**′), строимъ сперва точку, соотвѣтствующую ей въ ряду (**B**), для чего проектируемъ A изъ центра Σ; полученную точку B проектируемъ изъ центра S, послѣ чего получаемъ точку A' въ ряду (**A**′). Изъ конструкціи построенія видно, что для любой точки A, не совпадающей съ O, мы получимъ соотвѣтственную точку A', отличную отъ A; другими словами *соотвѣтствія* (**A**) *и* (**A**′) *принадлежатъ къ параболическому типу.*

Допущеніе, что аксіома V_1 не имѣетъ мѣста, сводится къ тому, что сколько бы мы ни продолжали рядъ $AA_1A_2\ldots$, всѣ точки этого ряда окажутся лѣвѣе точки Ω, находящейся между A и O. Тогда въ этомъ ряду окажется точка сгущенія W, или совпадающая съ Ω, или лежащая между A и Ω. Точкѣ W, какъ точкѣ ряда **A** (если разсматривать его какъ непрерывный рядъ точекъ) не можетъ соотвѣтствовать точка W', правѣе W, или лѣвѣе W: и то, и другое противорѣчило бы опредѣленію точки W. Такимъ образомъ, точка W должна соотвѣтствовать сама себѣ, т. е. является двойной; а такъ какъ W не совпадаетъ съ O, то *проективность была бы гиперболическаго типа,* что противно доказанному.

Итакъ, точки W, обладающей указанными свойствами, не существуетъ, что доказываетъ предложеніе.

Харьковъ. 26 февраля 1916 г.

Обобщенная формула Green'a для пространства n измѣреній.

Н. Ѳ. Спенглеръ.

Положимъ, что мы имѣемъ въ пространствѣ m измѣреній $(A_1, A_2 \ldots A_m)$ нѣкоторую ограниченную область B точекъ $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m)$. Положимъ, что эта область преобразуется при помощи формулъ

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m), \\ x_2 &= x_2(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= x_n(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m), \end{aligned} \tag{1}$$

на протяженіе m-аго измѣренія Y въ пространствѣ n измѣреній $(X_1, X_2, \ldots X_n)$.

Пусть $A_{\lambda_1 \ldots \lambda_{m-1}}$ будутъ непрерывными функціями отъ перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots x_n$, имѣющими непрерывныя частныя производныя перваго порядка по всѣмъ перемѣннымъ. Составимъ m-кратный интегралъ въ области B

$$S_{B\lambda_1 \ldots \lambda_m} \sum \frac{\partial A_{\lambda_1 \ldots \lambda_{m-1}}}{\partial x_{\lambda_m}} \frac{D(x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2} \ldots x_{\lambda_m})}{D(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_m)} d\alpha_1 \ldots d\alpha_m. \quad (\lambda_1 \ldots \lambda_m = 1, 2, \ldots n) \tag{2}$$

Наша задача состоитъ въ томъ, чтобы преобразовать этотъ интегралъ въ выраженіе, содержащее только интегралы $m-1$-й кратности. При этомъ мы наложимъ на протяженія B и Y слѣдующія ограниченія.

1. Функціи x_i—однозначныя аналитическія функціи въ области B.

2. Преобразованіе (1) взаимно однозначно въ области B, за исключеніемъ нѣкоторыхъ точекъ, ансамбль которыхъ имѣетъ протяженіе нуль.

3. Опредѣлители

$$\frac{D(x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2} \ldots x_{\lambda_m})}{D(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_m)} \qquad (\lambda_1, \ldots, \lambda_m = 1, 2, \ldots n)$$

сохраняютъ знакъ въ области B и обращаются въ нуль только въ точкахъ, ансамбль которыхъ имѣетъ протяженіе нуль.

4. Область B точекъ $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m)$ составлена такимъ образомъ, что къ элементамъ точекъ $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{m-1})$ односвязной области P въ пространствѣ $m-1$-го измѣренія $(A_1, A_2, \ldots A_{m-1})$ присоединяется элементъ α_m, получающій для каждой точки $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{m-1})$ всѣ значенія изъ промежутка (β_1, β_2).

Если въ формулахъ (1) положимъ $\alpha_m = \beta_1$, то эти формулы опредѣлятъ преобразованіе области P на протяженіе $m-1$-аго измѣренія R въ пространствѣ $(X_1, X_2, \ldots X_n)$. Проэкціи протяженія R на координатныя протяженія $m-1$-го измѣренія $(X_{\lambda_1}, X_{\lambda_2}, \ldots X_{\lambda_{m-1}})$ являются также областями, которыя обозначимъ черезъ $Q_{\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_{m-1}}$. Границу области $Q_{\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_{m-1}}$ обозначимъ черезъ $G_{\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_{m-1}}$.

5. Точки, лежащія внутри области P, соотвѣтствуютъ взаимно однозначно точкамъ протяженія R. Различнымъ же точкамъ, лежащимъ на границѣ области P, можетъ соотвѣтствовать одна точка протяженія R.

6. Въ точкахъ границы области P, которыя соотвѣтствуютъ одной точкѣ протяженія R, совпадаютъ также первыя частныя производныя функцій x_i по перемѣннымъ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$.

7. Среди точекъ границы области P, соотвѣтствующихъ одной точкѣ протяженія R, существуютъ по крайней мѣрѣ двѣ $(\alpha_1', \alpha_2', \ldots \alpha_{m-1}')$ и $(\alpha_1'', \alpha_2'', \ldots \alpha_{m-1}'')$ такихъ, что въ области P можно къ нимъ провести полупрямыя

$$\alpha_1 = \alpha_1' + l_1 t, \qquad \alpha_1 = \alpha_1'' + l_1 t,$$
$$\alpha_2 = \alpha_2' + l_2 t, \qquad \alpha_2 = \alpha_2'' + l_2 t.$$

и

$$\alpha_{m-1} = \alpha_{m-1}' + l_{m-1} t \qquad \alpha_{m-1} = \alpha_{m-1}'' + l_{m-1} t,$$

при чемъ параметръ t измѣняется отъ отрицательныхъ значеній до нуля для одной изъ этихъ полупрямыхъ и отъ нуля до положительныхъ значеній для другой. Такихъ прямыхъ можно провести по меньшей мѣрѣ $m-1$, при чемъ опредѣлитель, составленный изъ ихъ угловыхъ коэффиціентовъ l, не равенъ нулю.

Для случая $m=2$ и односвязной области P это условіе всегда выполняется. Изъ этого слѣдуетъ, что проэкціи x_i могутъ принять экстремальное значеніе внутри или на границѣ области P только тогда, когда всѣ первыя частныя производныя отъ x_i по $\alpha_1, \ldots \alpha_{m-1}$ обратятся въ нуль. Для насъ необходимо только послѣднее свойство, и потому послѣдующія разсужденія будутъ имѣть мѣсто, когда это свойство существуетъ, хотя бы условіе 7 и не выполнялось, какъ напр. для шара $x_1 = \alpha_3 \mathrm{Cos}\alpha_1 \mathrm{Cos}\alpha_2$, $x_2 = \alpha_3 \mathrm{Cos}\alpha_1 \mathrm{Sin}\alpha_2$, $x_3 = \alpha_3 \mathrm{Sin}\alpha_1$ на прямыхъ $\alpha_1 = \pm\frac{\pi}{2}$, $\alpha_3 = \beta_1$.

8. На протяженіи R первыя производныя отъ функцій x_i по $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ не могутъ одновременно обращаться въ нуль.

9. Каждой точкѣ $(x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, \ldots x_{\lambda_{m-1}})$ внутри области $Q_{\lambda_1 \ldots \lambda_{m-1}}$ соотвѣтствуютъ двѣ и только двѣ различныхъ точки $(x'_1 \ldots x_{\lambda_1 - 1}, x_{\lambda_1}, x'_{\lambda_1+1}, \ldots x_{\lambda_2}, \ldots x'_n)$ и $(x''_1, \ldots x''_{\lambda_1-1}, x_{\lambda_1}, x''_{\lambda_1+1}, \ldots x_{\lambda_2}, \ldots x''_n)$ протяженія R. Каждой же точкѣ границы $G_{\lambda_1 \ldots \lambda_{m-1}}$ соотвѣтствуетъ только одна точка протяженія R.

Совокупность точекъ области P, соотвѣтствующихъ протяженію $G_{\lambda_1, \ldots \lambda_{m-1}}$, обозначимъ черезъ $\Gamma_{\lambda_1, \ldots \lambda_{m-1}}$.

10. Если фиксируемъ $m-1$ элементовъ $x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, \ldots x_{\lambda_{m-1}}$ точекъ $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ протяженія Y, то значенія каждаго изъ остальныхъ элементовъ x_μ образуютъ промежутки (x'_μ, x''_μ).

Выведемъ нѣкоторыя слѣдствія изъ перечисленныхъ условій. Условимся значенія функціи x_i, соотвѣтствующія точкѣ $(x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, \ldots x_{\lambda_{m-1}})$, лежащей внутри области $Q_{\lambda_1, \ldots \lambda_{m-1}}$, обозначать черезъ x'_i и x''_i такъ, что $x'_i < x''_i$. Тогда x'_i и x''_i являются однозначными функціями отъ $x_{\lambda_1}, \ldots x_{\lambda_{m-1}}$ внутри области $Q_{\lambda_1, \ldots \lambda_{m-1}}$. Докажемъ, что x'_i и x''_i являются также и непрерывными функціями внутри области $Q_{\lambda_1, \ldots \lambda_{m-1}}$. Условимся всѣ точки $(\alpha_1, \ldots \alpha_{m-1})$ границы области P, которыя соотвѣтствуютъ одной точкѣ протяженія R, считать за одну, а точки, лежащія вблизи одной изъ упомянутыхъ точекъ, условимся считать за точки, лежащія вблизи послѣдней точки. Тогда всякой точкѣ $(x^0_{\lambda_1}, \ldots x^0_{\lambda_{m-1}})$ внутри области $Q_{\lambda_1, \ldots \lambda_{m-1}}$ соотвѣтствуютъ двѣ точки $(\alpha'_1, \ldots \alpha'_{m-1})$ и $(\alpha''_1, \ldots \alpha''_{m-1})$ области P, изъ которыхъ первая даетъ значеніе $(x'_i)_0$, а вторая значеніе $(x''_i)_0$ функціи x_i. Окружимъ точку $(x^0_{\lambda_1}, \ldots x^0_{\lambda_{m-1}})$ областью (q), содержащей внутри себя эту точку и лежащей на столько близко къ ней, что (q) лежитъ внутри области $Q_{\lambda_1, \ldots \lambda_{m-1}}$. Тогда нижняя граница разности $x''_i - x'_i$ въ области (q) будетъ больше нуля. Если бы функція x'_i не была непрерывна вблизи разсматриваемой точки, то существовалъ бы рядъ точекъ $(x_{\lambda_1}, \ldots x_{\lambda_{m-1}})$, расположенныхъ внутри (q) и стремящихся къ предѣльной точкѣ $(x^0_{\lambda_1}, \ldots x^0_{\lambda_{m-1}})$, такихъ, что значенія функціи x'_i стремились бы къ предѣлу, отличному отъ $(x'_i)_0$, т. е., въ силу условія 5, къ предѣлу $(x''_i)_0$. Этотъ рядъ точекъ можно выбрать такъ, что соотвѣтствующія точки $(\alpha_1, \ldots \alpha_{m-1})$ стремились бы также къ предѣльной точкѣ, которой можетъ быть только точка $(\alpha''_1, \ldots \alpha''_{m-1})$. Отсюда слѣдуетъ, что существуютъ точки вблизи точки $(x^0_{\lambda_1}, \ldots x^0_{\lambda_{m-1}})$, для которыхъ значенія функціи x'_i какъ угодно мало отличаются отъ $(x''_i)_0$. Разсматриваемому ряду точекъ $(x_{\lambda_1}, \ldots x_{\lambda_{m-1}})$ соотвѣтствуютъ еще другія точки $(\alpha_1, \ldots \alpha_{m-1})$, дающія функціи x_i значенія x''_i, и имѣющія предѣльной точкой точку $(\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots \alpha'_{m-1})$. Слѣдовательно, въ разсматри-

ваемомъ ряду точекъ можно найти такія точки, въ которыхъ значенія функцій x_i' и x_i'' будутъ какъ угодно мало отличаться, соотвѣтственно, отъ $(x_i'')_0$ и $(x_i')_0$, что противорѣчитъ тому, что нижняя граница разности $x_i'' - x_i'$ для этихъ точекъ больше нуля и $(x_i'')_0 > (x_i')_0$. Изъ предыдущихъ разсужденій вытекаетъ, что и $\alpha_1, \ldots \alpha_{m-1}$ являются непрерывными функціями отъ $x_{\lambda_1}, \ldots x_{\lambda_{m-1}}$ внутри области $Q_{\lambda_1, \ldots \lambda_{m-1}}$.

Докажемъ теперь, что протяженіе $\Gamma_{\lambda_1, \ldots \lambda_{m-1}}$ раздѣляетъ область P на двѣ группы областей такъ, что точки первой группы областей даютъ значенія x_i' для функціи $x_i(\alpha_1, \ldots \alpha_{m-1}, \beta_1)$, а точки второй группы даютъ значенія x_i'' для этой функціи. Дѣйствительно, въ противномъ случаѣ можно было бы двѣ точки области P, дающія одна значеніе x_i', а другая значеніе x_i'' для функціи x_i, соединить непрерывнымъ рядомъ точекъ, не пересѣкающимъ протяженія $\Gamma_{\lambda_1, \ldots \lambda_{m-1}}$. Точки протяженія R, соотвѣтствующія этому ряду, проэктируются на координатное протяженіе $(X_{\lambda_1}, \ldots X_{\lambda_{m-1}})$ непрерывнымъ рядомъ точекъ, расположенныхъ внутри области $Q_{\lambda_1, \ldots \lambda_{m-1}}$. Для этого ряда точекъ нижняя граница разности $x_i'' - x_i'$ больше нуля. Если точка $(x_{\lambda_1}, \ldots x_{\lambda_{m-1}})$ пробѣгаетъ предыдущій рядъ значеній, то функція x_i измѣняется непрерывно и, выйдя изъ начальной точки со значеніемъ x_i', приходитъ въ конечную точку со значеніемъ x_i''. Слѣдовательно, въ нашемъ ряду точекъ существуетъ такая точка, въ которой функція x_i переходитъ сразу отъ значенія x_i' къ значенію x_i'', т. е. претерпѣваетъ разрывъ, что не возможно.

Обозначимъ области первой группы черезъ $P'_{\lambda_1, \ldots \lambda_{m-1}}$, а области второй черезъ $P''_{\lambda_1, \ldots \lambda_{m-1}}$.

Возьмемъ какую либо точку α_0 протяженія $\Gamma_{\lambda_1, \ldots \lambda_{m-1}}$, лежащую внутри P. Въ этой точкѣ должно быть

$$\frac{D(x_{\lambda_1}, \ldots x_{\lambda_{m-1}})}{D(\alpha_1, \ldots \alpha_{m-1})} = 0, \qquad (3)$$

ибо иначе область достаточно малая, заключающая внутри точку α_0, преобразовывалась бы въ область координатнаго протяженія $(X_{\lambda_1}, \ldots X_{\lambda_{m-1}})$, заключающую также внутри точку $(x^0{}_{\lambda_1}, \ldots x^0{}_{\lambda_{m-1}})$, соотвѣтствующую точкѣ α_0, что не возможно. Ансамбль $G_{\lambda_1 \ldots \lambda_{m-1}}$, а слѣдовательно, и $\Gamma_{\lambda_1 \ldots \lambda_{m-1}}$ являются замкнутыми ансамблями и не содержатъ изолированныхъ точекъ, а потому вблизи точки α_0 расположены непрерывнымъ образомъ еще и другія точки границы $\Gamma_{\lambda_1 \ldots \lambda_{m-1}}$. Всѣ эти точки лежатъ на протяженіи Δ, опредѣляемомъ уравненіемъ (3). Среди нихъ можно выбрать такую, вблизи которой $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{m-1}$ являются голоморфными функціями отъ нѣкоторыхъ параметровъ $\sigma_1, \ldots \sigma_{m-2}$:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha_1(\sigma_1, \ldots \sigma_{m-1}), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{m-1} &= \alpha_{m-1}(\sigma_1, \ldots \sigma_{m-1}), \end{aligned} \tag{4}$$

и вблизи которой нѣтъ точекъ пересѣченія Δ съ самимъ собою, а также выполняются условія

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{i=m-1} \left[\frac{D(\alpha_1 \ldots \alpha_{i-1} \alpha_{i+1} \ldots \alpha_{m-1})}{D(\sigma_1 \ldots\ldots\ldots\ldots \sigma_{m-2})} \right]^2 &\neq 0, \\ \sum_{i=1}^{i=m-1} \left[\frac{(Dx_{\lambda_1} \ldots x_{\lambda_{i-1}} x_{\lambda_{i+1}} \ldots x_{\lambda_{m-1}})}{D(\sigma_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \sigma_{m-2})} \right]^2 &\neq 0, \end{aligned} \tag{5}$$

гдѣ $x_{\lambda_1} \ldots x_{\lambda_{m-1}}$ являются функціями отъ $\sigma_1 \ldots \sigma_{m-2}$ черезъ посредство функцій (4).

Обозначимъ черезъ (δ) часть протяженія Δ, лежащую вблизи выбранной точки, опредѣляемую формулами (4) и на столько малую, что для всѣхъ точекъ ея выполняются условія (5), а также и условіе, что какъ (δ), такъ и соотвѣтствующее протяженіе пространства $(X_{\lambda_1}, X_2, \ldots X_{\lambda_{m-1}})$ не пересѣкаютъ сами себя. Протяженіе (δ) можно окружить областью (γ) на столько близкой къ (δ), что внутри (γ) не будетъ другихъ точекъ протяженія Δ кромѣ точекъ, принадлежащихъ (δ). Очевидно, что всѣ точки (δ) принадлежатъ протяженію $\Gamma_{\lambda_1 \ldots \lambda_{m-1}}$, ибо иначе двѣ точки, одна изъ области $P'_{\lambda_1 \ldots \lambda_{m-1}}$, а другая изъ области $P''_{\lambda_1 \ldots \lambda_{m-1}}$, лежащія внутри (γ) можно было бы соединить непрерывной линіей, не пересѣкающей протяженія $\Gamma_{\lambda_1 \ldots \lambda_{m-1}}$.

Область, расположенная по обѣ стороны протяженія (δ), преобразуется при помощи формулъ

$$\begin{aligned} x_{\lambda_1} &= x_{\lambda_1}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{m-1}, \beta_1) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{\lambda_{m-1}} &= x_{\lambda_{m-1}}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{m-1}, \beta_1) \end{aligned} \tag{6}$$

въ область, расположенную только по одну сторону протяженія, соотвѣтствующаго протяженію (δ), а потому, благодаря ограниченіямъ, наложеннымъ на (δ), заключаемъ, что при переходѣ черезъ (δ) опредѣлитель

$$\frac{D(x_{\lambda_1} \ldots x_{\lambda_{m-1}})}{D(\alpha_1 \ldots \alpha_{m-1})} \tag{7}$$

мѣняетъ знакъ [1]).

---

[1]) См. «О преобразованіи плоскости на плоскость вблизи особыхъ линій». Сообщенія Х. М. Общ. (2) XIV.

Внутри каждой изъ областей $P_{\lambda_1 \ldots \lambda_{m-1}}$, $P''_{\lambda_1 \ldots \lambda_{m-1}}$ этотъ опредѣлитель не можетъ мѣнять знака. Дѣйствительно, пусть въ одной изъ нихъ, напр. въ $P'_{\lambda_1 \ldots \lambda_{m-1}}$, существуютъ двѣ точки α' и α'', въ которыхъ опредѣлитель (7) имѣетъ различные знаки. На любой кривой, соединяющей эти двѣ точки и расположенной внутри области $P'_{\lambda_1 \ldots \lambda_{m-1}}$, существуетъ точка, въ которой опредѣлитель (7) обращается въ нуль и мѣняетъ знакъ. Ансамбль этихъ точекъ образуетъ протяженіе, раздѣляющее разсматриваемую область, по меньшей мѣрѣ, на двѣ части. На этомъ протяженіи можно найти участокъ (δ) такъ же, какъ было сдѣлано выше. Вблизи этого участка $\alpha_1, \ldots \alpha_{m-1}$ являются двузначными функціями отъ $x_{\lambda_1}, \ldots x_{\lambda_{m-1}}$ [1]), и, такъ какъ въ области $P''_{\lambda_1 \ldots \lambda_{m-1}}$ существуетъ точка, дающая тѣ же значенія $x_{\lambda_1}, \ldots x_{\lambda_{m-1}}$, что и въ области $P'_{\lambda_1 \ldots \lambda_{m-1}}$, то точкѣ $(x_{\lambda_1} \ldots x_{\lambda_{m-1}})$ соотвѣтствуютъ, по меньшей мѣрѣ, три точки $(\alpha_1, \ldots \alpha_{m-1})$, а слѣдовательно, и три точки на протяженіи R, что противорѣчитъ условію (9).

Легко видѣть, что въ каждой точкѣ границы $\Gamma_{\lambda_1 \ldots \lambda_{m-1}}$ опредѣлитель (7) мѣняетъ знакъ. Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ двѣ смежныя области $P'_{\lambda_1 \ldots \lambda_{m-1}}$ и $P''_{\lambda_1 \ldots \lambda_{m-1}}$. Въ этихъ областяхъ, какъ видѣли, существуютъ точки, соотвѣтственно, α' и α'', въ которыхъ опредѣлитель (7) имѣетъ противоположные знаки. Соединимъ эти точки съ любой точкой границы $\Gamma_{\lambda_1 \ldots \lambda_{m-1}}$, принадлежащей обѣимъ областямъ, кривыми, расположенными внутри этихъ областей. Мы получимъ кривую, соединяющую точки α' и α''. На этой кривой опредѣлитель (7) долженъ обратиться въ нуль и перемѣнить знакъ. Такъ какъ это не можетъ произойти внутри разсматриваемыхъ областей, то должно произойти на ихъ границѣ.

Изъ предыдущаго вытекаетъ, что во всѣхъ областяхъ $P'_{\lambda_1 \ldots \lambda_{m-1}}$ опредѣлитель (7) сохраняетъ знакъ такъ же, какъ и въ областяхъ $P''_{\lambda_1 \ldots \lambda_{m-1}}$, и при томъ знаки этого опредѣлителя въ первыхъ и вторыхъ областяхъ противоположны.

Теперь мы можемъ приступить къ преобразованію интеграла (2). Возьмемъ сначала интегралъ

$$J_{\lambda_1 \ldots \lambda_{m-1}} = S_B \sum_{\lambda_m} \frac{\partial A_{\lambda_1 \ldots \lambda_{m-1}}}{\partial x_{\lambda_m}} \frac{D(x_{\lambda_1} \ldots x_{\lambda_m})}{D(\alpha_1 \ldots \alpha_m)} d\alpha_1 \ldots d\alpha_m, \qquad (8)$$

гдѣ указатели $\lambda_1, \ldots \lambda_{m-1}$ фиксированы, а λ_m пробѣгаетъ всѣ значенія отъ 1 до n, кромѣ значеній $\lambda_1, \ldots \lambda_{m-1}$. Пусть одно изъ значеній λ_m будетъ μ. Преобразуемъ интегралъ (8) къ новымъ перемѣннымъ при помощи формулъ

[1]) Тамъ же.

$$\begin{aligned} x_{\lambda_1} &= x_{\lambda_1}(\alpha_1, \ldots \alpha_m) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{\lambda_{m-1}} &= x_{\lambda_{m-1}}(\alpha_1, \ldots \alpha_m) \\ x_\mu &= x_\mu(\alpha_1, \ldots \alpha_m), \end{aligned} \tag{9}$$

что въ силу сдѣланныхъ ограниченій возможно. Получимъ

$$J_{\lambda_1 \ldots \lambda_{m-1}} = S_{Y_1} \sum_{\lambda_m} \frac{\partial A_{\lambda_1 \ldots \lambda_{m-1}}}{\partial x_{\lambda_m}} \frac{D(x_{\lambda_1} \ldots x_{\lambda_m})}{D(\alpha_1 \ldots \alpha_m)} \left| \frac{D(\alpha_1 \ldots \alpha_{m-1} \alpha_m)}{D(x_{\lambda_1} \ldots x_{\lambda_{m-1}} x_\mu)} \right| dx_{\lambda_1} \ldots dx_{\lambda_{m-1}} dx_\mu$$

или

$$J_{\lambda_1 \ldots \lambda_{m-1}} = \eta S_{Y_1} \sum_{\lambda_m} \frac{\partial A_{\lambda_1 \ldots \lambda_{m-1}}}{\partial x_{\lambda_m}} \frac{dx_{\lambda_m}}{dx_\mu} dx_{\lambda_1} \ldots dx_{\lambda_{m-1}} dx_\mu,$$

гдѣ η есть единица со знакомъ опредѣлителя $\dfrac{D(\alpha_1 \ldots \alpha_{m-1} \alpha_m)}{D(x_{\lambda_1} \ldots x_{\lambda_{m-1}} x_\mu)}$, а Y_1 проэкція протяженія Y, опредѣленнаго формулами (1), на координатное протяженіе $(X_{\lambda_1}, \ldots X_{\lambda_{m-1}}, X_\mu)$.

Въ послѣднемъ интегралѣ подъинтегральная функція есть частная производная по перемѣнному x_μ отъ функціи $A_{\lambda_1 \ldots \lambda_{m-1}}$, разсматриваемой, какъ функція отъ независимыхъ перемѣнныхъ $x_{\lambda_1}, \ldots x_{\lambda_{m-1}}, x_\mu$, а потому имѣемъ

$$J_{\lambda_1 \ldots \lambda_{m-1}} = \eta S_{Q_{\lambda_1 \ldots \lambda_{m-1}}} \left(\int_{x'_\mu}^{x''_\mu} \frac{\partial A_{\lambda_1 \ldots \lambda_{m-1}}}{\partial x_\mu} dx_\mu \right) dx_{\lambda_1} \ldots dx_{\lambda_{m-1}} =$$

$$= \eta S_{Q_{\lambda_1 \ldots \lambda_{m-1}}} (A_{\lambda_1 \ldots \lambda_{m-1}})'' dx_{\lambda_1} \ldots dx_{\lambda_{m-1}} -$$

$$- \eta S_{Q_{\lambda_1 \ldots \lambda_{m-1}}} (A_{\lambda_1 \ldots \lambda_{m-1}})' dx_{\lambda_1} \ldots dx_{\lambda_{m-1}},$$

гдѣ выраженія $(A_{\lambda_1 \ldots \lambda_{m-1}})''$ и $(A_{\lambda_1 \ldots \lambda_{m-1}})'$ показываютъ, что въ функцію $A_{\lambda_1 \ldots \lambda_{m-1}}$, разсматриваемую, какъ функція отъ независимыхъ перемѣнныхъ $x_{\lambda_1} \ldots x_{\lambda_{m-1}}, x_\mu$, вмѣсто x_μ подставлены, соотвѣтственно, значенія x''_μ и x'_μ, являющіяся однозначными функціями отъ $x_{\lambda_1}, \ldots x_{\lambda_{m-1}}$ внутри области $Q_{\lambda_1 \ldots \lambda_{m-1}}$.

Преобразуемъ два послѣдніе интеграла къ перемѣннымъ $\alpha_1, \ldots \alpha_{m-1}$ при помощи формулъ (6), опредѣленныхъ для перваго интеграла въ области $P''_{\lambda_1 \ldots \lambda_{m-1}}$, для второго въ области $P'_{\lambda_1 \ldots \lambda_{m-1}}$. При этомъ x''_μ и x_μ перейдутъ въ функцію $x_\mu(\alpha_1, \ldots \alpha_{m-1}, \beta_1)$, опредѣленную, соотвѣтственно, въ тѣхъ же областяхъ. Будемъ имѣть

$$J_{\lambda_1 \ldots \lambda_{m-1}} = \eta S_{P''_{\lambda_1 \ldots \lambda_{m-1}}} A_{\lambda_1 \ldots \lambda_{m-1}} \left| \frac{D(x_{\lambda_1} \ldots x_{\lambda_{m-1}})}{D(\alpha_1 \ldots \alpha_{m-1})} \right| d\alpha_1 \ldots d\alpha_{m-1} -$$

$$- \eta S_{P'_{\lambda_1 \ldots \lambda_{m-1}}} A_{\lambda_1 \ldots \lambda_{m-1}} \left| \frac{D(x_{\lambda_1} \ldots x_{\lambda_{m-1}})}{D(\alpha_1 \ldots \alpha_{m-1})} \right| d\alpha_1 \ldots d\alpha_{m-1},$$

гдѣ $A_{\lambda_1 \dots \lambda_{m-1}}$ выражено въ функціи отъ $x_1, \dots x_n$, а послѣднія выражены въ функціяхъ $\alpha_1, \dots \alpha_m$, при чемъ положено $\alpha_m = \beta_1$.

Если обозначимъ черезъ ε единицу со знакомъ опредѣлителя (7) въ области $P''_{\lambda_1 \dots \lambda_{m-1}}$, то получимъ

$$J_{\lambda_1 \dots \lambda_{m-1}} = \varepsilon\eta \sum\nolimits'_P A_{\lambda_1 \dots \lambda_{m-1}} \frac{D(x_{\lambda_1} \dots x_{\lambda_{m-1}})}{D(\alpha_1 \dots \alpha_{m-1})} d\alpha_1 \dots d\alpha_{m-1},$$

гдѣ положено $\alpha_m = \beta_1$.

Остается опредѣлить произведеніе $\varepsilon\eta$. Функція $x_\mu(\alpha_1, \dots \alpha_{m-1}, \beta_1)$ имѣетъ максимумъ. Этотъ максимумъ она получаетъ въ области $P''_{\lambda_1 \dots \lambda_{m-1}}$. Въ точкахъ, въ которыхъ x_μ получаетъ максимальныя значенія, въ силу условій 7 и 8 имѣемъ

$$\frac{\partial x_\mu}{\partial \alpha_1} = 0, \dots \frac{\partial x_\mu}{\partial \alpha_{m-1}} = 0, \quad \frac{\partial x_\mu}{\partial \alpha_m} \neq 0,$$

а потому въ этихъ точкахъ

$$\frac{D(x_{\lambda_1} \dots x_{\lambda_{m-1}} x_\mu)}{D(\alpha_1 \dots \alpha_{m-1}\alpha_m)} = \frac{D(x_{\lambda_1} \dots x_{\lambda_{m-1}})}{D(\alpha_1 \dots \alpha_{m-1})} \frac{\partial x_\mu}{\partial \alpha_m}.$$

Такъ какъ въ разсматриваемыхъ точкахъ $\alpha_m = \beta_1$ и при измѣненіи α_m отъ β_1 къ β_2 функція x_μ вначалѣ уменьшается, то знакъ производной $\frac{\partial x_\mu}{\partial \alpha_m}$ тождественъ со знакомъ разности $\beta_1 - \beta_2$, а слѣдовательно,

$$\eta = \frac{\beta_1 - \beta_2}{|\beta_1 - \beta_2|} \varepsilon$$

или

$$\varepsilon\eta = \frac{\beta_1 - \beta_2}{|\beta_1 - \beta_2|}.$$

Итакъ,

$$J_{\lambda_1 \dots \lambda_{m-1}} = \frac{\beta_1 - \beta_2}{|\beta_1 - \beta_2|} \sum\nolimits_P A_{\lambda_1 \dots \lambda_{m-1}} \frac{D(x_{\lambda_1} \dots x_{\lambda_{m-1}})}{D(\alpha_1 \dots \alpha_{m-1})} d\alpha_1 \dots d\alpha_{m-1}.$$

Суммируя полученное выраженіе для $J_{\lambda_1 \dots \lambda_{m-1}}$ по $\lambda_1, \dots \lambda_{m-1}$, получимъ

$$\sum\nolimits_{B\lambda_1 \dots \lambda_m} \frac{\partial A_{\lambda_1 \dots \lambda_{m-1}}}{\partial \lambda_m} \frac{D(x_{\lambda_1} \dots x_{\lambda_m})}{D(\alpha_1 \dots \alpha_m)} d\alpha_1 \dots d\alpha_m =$$

$$= \frac{\beta_1 - \beta_2}{|\beta_1 - \beta_2|} \sum\nolimits_{P\lambda_1 \dots \lambda_{m-1}} A_{\lambda_1 \dots \lambda_{m-1}} \frac{D(x_{\lambda_1} \dots x_{\lambda_{m-1}})}{D(\alpha_1 \dots \alpha_{m-1})} d\alpha_1 \dots d\alpha_{m-1},$$

при чемъ въ правой части положено $\alpha_m = \beta_1$, а λ какъ въ лѣвой, такъ и въ правой части получаютъ всѣ различныя значенія отъ 1 до n.

Sur la cause de la variabilité d'éclat de η Aquilae.

par. B. Fessenkoff.

Parmi les étoiles variables à courte période dont la variabilité ne peut pas être expliquée par les éclipses dues au satellite invisible, il faut particulièrement noter l'étoile variable typique η Aquilae. Le caractère de la variation d'éclat de cette étoile est bien connu depuis les recherches de Schmidt, Argelander, Schönfeld, Lockyer, Stratonow et des autres. L'amplitude visuelle d'intensité est 0,61 de la grandeur stellaire. Les grandeurs limites dans le système de Potsdam sont 3,81—4,42.

L'étude photographique de cette variable montre que l'amplitude photographique est considérablement plus grande que l'amplitude visuelle. D'après Schwarzschild [1]) le rapport $\frac{\text{ampl. photograph.}}{\text{ampl. visuelle}} = 1{,}9$ pour η Aquilae. Cette particularité peut être considérée comme générale pour toutes les variables à courte période. Ainsi C. W. Wirtz [2]) a trouvé pour δ Cephei et ζ Geminorum 2,4 et 1,7 respectivement. Wilkens donne pour le même rapport dans le cas de S V Cygni—1,4; dans le cas de X Cygni—1,8, T Vulpeculae—1,5, S Sagittae—1,7 et enfin dans le cas de V Vulpeculae—1,6. Ces différences dans les amplitudes de la variation d'éclat entraînent nécessairemeut les variations des couleurs des variables. Les changements de couleur étaient découverts indépendamment des observations photométriques proprement dites et on a reconnu que leur période coïncide avec celle de la variation d'éclat.

La période de η Aquilae est égale à $7^j4^h13^m59^s{,}3$. L'intensité de l'étoile augmente assez rapidement après le minimum et atteint le maximum dans 2^j6^h. Ensuite elle s'abaisse plus lentement avec quelques maxima secondaires. D'après M. Stratonow [3]) la courbe de la variation d'éclat est très agitée pendant deux jours qui suivent le minimum, ce qui rend très difficile son tracé. Au contraire sur toute étendue restante le tracé

---

[1]) Publicat. der Kuffner'schen Sternwarte in Wien. V Band; 125, 1900.

[2]) Astr. Nachr. 3689 - 90—91. 1901.

[3]) Publication de l'observatoire de Taschkent. 5.

de cette courbe est assez facile. Les maxima secondaires arrivent, selon Lockyer [1]), aux moments suivants après le maximum principal:

$$0^j15^h \quad 2^j10^h \quad 4^j5^h \quad 6^j0^h$$

D'après la courbe de M. Stratonow ces maxima secondaires qui sont tout clairement visibles ont lieu aux moments:

$$0^j10^h \quad 2^j10^h \quad 4^j15^h \quad 6^j1^h.$$

M. Stratonow remarque qu'il existe encore un maximum qui ne se trouve pas parmis ceux signalés par Lockyer. Ce maximum est bien marqué dans les observations de Stratonow. Il arrive à 3^j10^h après le maximum principal. Ce maximum peut être reconnu sur les courbes de Schmidt, Argelander et Schönfeld.

Quant à l'importance relative de ces maxima secondaires il faut noter ce qui suit. Le premier maximum secondaire á 0^j10^h est très peu prononcé. Les observations de Stratonow ne le montrent même pas d'une façon certaine. Je ne sais pas si l'on peut considérer son existence vraiment prouvée. Les autres maxima se suivent dans l'ordre décroissant. Celui qui arrive à 2^j10^h est très bien marqué et se trouve sur la plupart des courbes de cette variable. En général la courbe de la variation d'éclat après le maximum principal semble montrer les ondes dont l'amplitude diminue de plus en plus.

En 1895 M. Belopolsky [2]) a annoncé que la vitesse de η Aquilae suivant le rayon de la vision est variable. Depuis ce temps cette étoile était observée par M. Campbell à l'aide de Mills spectrographe. L'orbite du satellite spéctroscopique était déterminée par M. Wright [3]). Les éléments qu'il a obtenus sont les suivants:

$V = -14{,}16$ klm. la vitesse du système suivant la ligne de la vision
$e = 0{,}489 \qquad \omega = 68^0{,}91 \qquad K = 20{,}59$ klm. $\qquad T = 6^j{,}120$
$U = 7^j{,}173$ la période de révolution
$a \sin i = 1545000$ klm.

Il semble à premier abord qu'il n'existe aucun rapport entre la courbe des vitesses radiales et celle de l'intensité de l'étoile. Mais on peut montrer tout de même que la variabilité de l'étoile depend de son satellite.

---

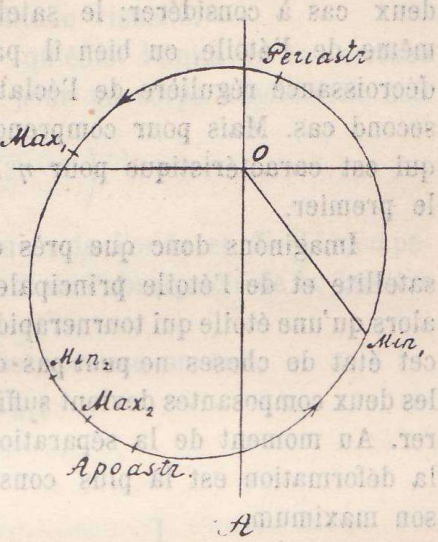
[1]) Lockyer. Resultate aus den Beobachtungen des veränderlichen Sternes η Aquilae. Göttingen. 1897.

[2]) Astroph. Journal. Vol. 6.

[3]) Astrophys. Journal. February 1899.

Le dessin ci-joint présente la projection de l'orbite du satellite sur le plan passant par l'observateur. Celui-ci se trouve dans la direction de A, mais non dans le plan de l'orbite, de sorte que les éclipses mutuelles des deux composantes ne peuvent pas avoir lieu.

On peut se figurer que les deux corps sont suffisamment rapprochés l'un de l'autre pour provoquer des marées énormes qui peuvent les déformer considérablement.



Pour justifier cette supposition je rappelerai seulement que les recherches du Prof. Meyer sur le système double de β Lyrae ont donné pour le demi-grand axe de l'orbite du satellite 1,94 de rayon de l'étoile principale [1]).

Pour que l'éclat de η Aquilae puisse être minimum, il faut que la surface apparente de l'étoile soit minimum aussi, c'est à dire il faut que la déformation du satellite soit dirigée vers l'observateur dans la direction OA.

Cependant par suite de la viscosité, la déformation en question doit former un certain angle de décalage avec la direction sur le satellite. Si le coefficient de viscosité est très grand, cet angle est voisin de 90°; si ce coefficient est petit il se rapproche de 0°. Dans le cas de η Aquilae l'angle de décalage est $\widehat{\text{Min}_1\, OA}$. Nous voyons donc que la combinaison des observations spéctroscopiques et photomètriques peut donner quelques renseignements sur la viscosité des étoiles variables.

Mais continuons à suivre la marche du satellite sur son orbite. Nous constatons que la distance entre les composantes devient de plus en plus petite; par conséquent la déformation augmente en même temps qu'elle tourne, comme ceci est indiqué par la flèche. L'éclat total de l'étoile de même que sa surface apparente augmentent, et nous voyons la courbe d'intensité monter rapidement vers maximum.

Il est tout naturel de supposer que η Aquilae est entouré par une atmosphère plus ou moins étendue. A cause des déformations décrites tout à l'heure, la surface de l'étoile varie et, par suite, la hauteur de l'atmosphère et son pouvoir absorbant doivent varier aussi. Comme ce sont les rayons bleus et violets qui sont le plus absorbés, il est clair qu'au

[1]) André. Traité d'astronomie stellaire. Vol. II p. 295.

temps de minimum la variable doit paraître plus rougeâtre que pendant le maximum, ou en d'autres termes, que l'amplitude photographique de la variation d'éclat doit être plus grande que l'amplitude visuelle. C'est en effet ce qu'on observe pour toutes les étoiles variables à courtes périodes.

Ensuite le satellite s'approche du periastrion. En somme nous avons deux cas à considérer: le satellite pénètre en partie dans la substance même de l'étoile, ou bien il passe sans la toucher. Pour expliquer la décroissance régulière de l'éclat après le maximum il faut considérer le second cas. Mais pour comprendre la présence du maximum secondaire qui est caractéristique pour η Aquilae nous sommes obligés d'éxaminer le premier.

Imaginons donc que près du périastrion les couches supérieures du satellite et de l'étoile principale se penètrent mutuellement. Nous n'avons alors qu'une étoile qui tournerapidement autour de son centre de gravité. Mais cet état de choses ne peut pas durer longtemps. Dès que la distance entre les deux composantes devient suffisamment grande, celles—ci doivent se séparer. Au moment de la séparation qui arrive dans un point tel que Max_1 la déformation est la plus considérable et l'éclat de la variable atteint son maximum.

Comme après la rupture les deux masses tendent à adopter la figure d'équilibre stable, leurs couches superficielles allongées dans la direction de leur rayon-vecteur commun, tombent plus ou moins rapidement vers les centres respectifs de gravité. Ceci se traduit par la diminution rapide de l'intensité de l'étoile. Ces ondes dépassent les niveaux des surfaces de l'équilibre en faisant d'abord les corps moins aplatis qu'ils ne doivent être en raison de leur attraction mutuelle. Donc le minimum secondaire (Min_2) doit se trouver au dessous de la courbe moyenne de la variation d'éclat. Comme les corps doivent tout de même prendre la forme d'équilibre, ils deviennent ensuite un peu plus aplatis et cela produit le maximum secondaire dans un certain point de l'orbite tel que Max_2.

Après cette onde principale se forment quelques autres oscillations normales à la surface, mais naturellement bien plus faibles que la première. Ceci produit les ondulations signalées plus haut de la courbe photomètrique de cette variable. Cependant la distance entre les composantes continue à augmenter; la déformation due à l'attraction mutuelle doit donc diminuer de plus en plus, et nous arrivons enfin vers le minimum principal Min_1, à partir de quoi le phènomène se répète de la même façon.

Comme on voit, j'explique la différence entre l'amplitude photographique et l'amplitude visuelle de la variation d'éclat par l'extension plus ou moins grande de la surface de l'étoile, ce qui rend la couche atmos-

phérique plus ou moins épaisse. L'absorption de la lumière dans cette couche qui est plus sensible pour les rayons à courtes longueurs d'ondes, produit le phénomène en question.

Cherchons maintenant dans quelle mésure il faut se figurer l'augmentation de la surface de l'étoile pour expliquer les différences observées entre l'amplitude photographique et l'amplitude visuelle.

Soit $f(\lambda,T)$ la quantité de l'énergie qu'émet l'unité de la surface de l'astre. D'après la loi de Planck on a pour un corps absolument noir

$$f(\lambda,T) = C\lambda^{-5}\left(e^{\frac{c}{\lambda T}} - 1\right)^{-1}$$

où c et C sont les constantes, λ—la longueur de l'onde et T—la température absolue. Soit de plus k_λ le coefficient de l'absorption de la lumière dans l'atmosphère entourant l'étoile.

La quantité de l'énergie transmise est, comme on sait,

$$(*) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots f(\lambda,T)e^{-k_\lambda l}$$

l est donné par expression suivante:

$$l = l_0\left[\sec z - \frac{l_0}{2R}\,\mathrm{tg}^2 z \sec z + \ldots\right]$$

où l_0 est la hauteur de l'atmosphère homogène, z—l'angle entre le rayon de la vision et la normale à la surface et R—le rayon de la courbure qui est grand par rapport à l_0.

La quantité

$$e^{-k_\lambda} = p_\lambda$$

est le coefficient de la transmission.

Pour obtenir l'intensité visuelle il faut multiplier l'expression (*) par le coefficient ε_λ, exprimant la sensibilité de la retine pour la radiation de longueur d'onde λ.

L'intégrale

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \varepsilon_\lambda f(\lambda,T)\, p_\lambda^{\,l} d\lambda$$

donne l'intensité visuelle de l'unité de la surface, observée à travers l'atmosphère de l'astre. L'éclat apparent de l'étoile est proportionnel à

$$\int_\Sigma ds \cos z \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \varepsilon_\lambda f(\lambda, T) p_\lambda^{\,l} d\lambda,$$

où la première intégration est étendue à toute la surface qui peut être visible à l'observateur.

Si la forme de la surface et la constitution de l'atmosphère sont connues, on peut évidemment calculer la formule précédente. Dans notre cas c'est impossible, parce que la masse déformée est d'une forme difficile à préciser. Pour faire un calcul approximatif prenons pour l une constante et remplaçons alors

$$\int ds \cos z$$

par la surface *apparente* de l'astre.

Soient l_{max}, l_{min} les valeurs de l correspondant au maximum et au minimum d'éclat de la variable et S_1, S_2 les surfaces apparentes correspondantes.

Le rapport d'intensité max. à l'intensité min. c'est à dire l'amplitude visuelle est

$$\frac{S_1 \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \varepsilon_\lambda f(\lambda, T) p_\lambda^{l_{max}} d\lambda}{S_2 \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \varepsilon_\lambda f(\lambda, T) p_\lambda^{l_{min}} d\lambda}$$

Pour obtenir l'intensité photographique il faut prendre les coefficients $\varepsilon'\lambda$ exprimant la sensibilité de la plaque pour les différentes λ. L'amplitude photographique est donnée par l'expression tout à fait semblable à la précédente.

Soit maintenant n le rapport des amplitudes en question. Nous avons:

$$\frac{S_1 \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \varepsilon'_\lambda f(\lambda, T) p_\lambda^{l_{max}} d\lambda}{S_2 \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \varepsilon'_\lambda f(\lambda, T) p_\lambda^{l_{min}} d\lambda} = n \frac{S_1 \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \varepsilon_\lambda f(\lambda, T) p_\lambda^{l_{max}} d\lambda}{S_2 \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \varepsilon_\lambda f(\lambda, T) p_\lambda^{l_{min}} d\lambda}$$

Le coefficient de la transmission dans l'atmosphère de l'astre $p_\lambda^{l_0}$ est également inconnu. Mais les étoiles variables à courte période appartiennent pour la plupart des cas au même type spectral que le Soleil. Par conséquent nous pouvons assimiler avec un certain droit l'atmosphère de l'étoile à celle du Soleil.

Les observations de Vogel sur la distribution d'intensité sur le disque solaire aux distances différentes du centre ont permis à Seeliger [1]) de calculer les valeurs suivantes de $p_\lambda^{l_0}$:

λ	662 $\mu\mu$	579 $\mu\mu$	513 $\mu\mu$	470 $\mu\mu$	443 $\mu\mu$	409 $\mu\mu$
$p_\lambda^{l_0}$	0,77	0,66	0,63	0,64	0,57	0,54

[1]) Sitzber. der math.-phys. Classe d. K. Bayer. Akad. d. Wiss. Bd. 21 p, 264.

Si, au lieu de prendre le spectre total nous ne considérons que sa partie correspondante au maximum d'intensité, la dernière formule se réduit à l'expression

$$p_\lambda{}'^{l_{max.}-l_{min.}} = np_\lambda{}^{l_{max.}-l_{min.}}$$

Dans le spectre visuel le maximum d'intensité se trouve à $\lambda = 570\ \mu\mu$, tandis que dans le spectre photographique à $\lambda' = 430\ \mu\mu$ [1]). Les résultats de Seeliger nous montrent que dans le premier cas $p_\lambda^{l_0} = 0{,}70$ et dans le second cas à 0,56.

Prenons pour l la valeur moyenne pour toute la surface du Soleil:

$$l_m = \frac{1}{\pi r^2}\int_0^r\int_0^{2\pi} l\varrho d\varrho d\varphi$$

Comme

$$l = l_0\left[secz - \frac{l_0}{2r}tg^2zsecz + \ldots\right]$$

et

$$\varrho = r\,Sin\,z$$

nous avons approximativement

$$l_m = \frac{l_0 r^2}{\pi r^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi} Sinz\,dz\,d\varphi = 2lo.$$

Les propriétés de l'atmosphère de l'étoile nous sont inconnues. Supposons qu'au temps de minimum quand l'étoile s'approche le plus de la forme sphérique, son atmosphère peut être assimilée, comme j'ai déjà dit, à celle du Soleil. Prenons par suite

$$p_\lambda{}'^{l_{min}} = 0{,}314 \text{ et } p_\lambda{}^{l_{min}} = 0{,}490.$$

En se servant de ces valeurs on peut calculer la petite table suivante

$\frac{l_{max}}{l_{min}}$	n
1,00	1,00
0,75	1,12
0,50	1,25
0,25	1,40
0,00	1,56

On voit que si la hauteur moyenne de l'atmosphère devient, par exemple, deux fois plus petite, le rapport $\frac{\text{ampl photograph.}}{\text{ampl. visuelle}}$ est égal à 1,25.

[1]) Scheiner. Photographie der Gestirne p. 16.

Mais ces variations de la hauteur sont proportionnelles aux changements de la surface de l'étoile. On voit done comment il faut se figurer la variation de la surface pour expliquer le rapport mentionné des amplitudes.

Ces résultats sont obtenus dans l'hypothèse que l'atmosphère est de la même hauteur dans tous les points de la surface. Mais il est extrêmement probable que lors de grandes déformations il se produit des irregularités dans la distribution de l'atmosphère. Il est facile de voir que ceci augmente le rapport des amplitudes qui peut atteindre 1,56 à la limite. Enfin je dois remarquer qu'en réalité la lumière est émise par la substance même de l'étoile jusqu'à une certaine profondeur. Par conséquent, dans l'exposition rigoureuse du problème il faut prendre en considération non seulement l'absorption de lumière dans l'atmosphère de l'astre, mais aussi celle dans les couches supérieures. Cette circonstance doit augmenter davantage la différence des amplitudes.

Nous pouvons en conclure que dans l'état actuel de cette question on a le droit de considérer la différence des amplitudes provenant de la cause signalée. Nous voyons de plus que le problème d'étoiles variables est extrêmement compliqué. Il ne suffit pas de trouver les surfaces de niveau des masses fluides très rapprochées l'une de l'autre et d'évaluer leur portions visibles à l'observateur. Il faut traiter la question au point de vue de la théorie dynamique des marées en l'associant aux recherches les plus délicates de l'astrophotométrie.

Il est inutile de dire combien ce problème surpasse les moyens actuels de l'analyse. Il ne peut donc pas être resolu d'une façon quantitative. Tout au plus on peut donner l'explication purement qualitative des cas particuliers.

Correction au mémoire de M. *S. Bernstein.* «Quelques remarques sur l'interpôlation» (Comm. t. XV').

Dans mon article «Quelques remarques sur l'interpôlation» (t. XV') il s'est glissé une inexactitude dans l'énoncé d'une proposition qui se trouve en note à la page 58: il faut lire «Si la série $f(x) = \sum x^n P_n(x)$, où $P_n(x)$ est un polynome de degré non supérieur à kn, k étant fixe, converge *sur un certain segment extérieur* à l'origine, $f(x)$ est analytique à l'origine», au lieu de «Si la série $f(x) = \sum x^n P_n(x)\ldots$, converge en un point différent de l'origine, $f(x)$ est analytique à l'origine».

S. Bernstein.

Опытъ аксіоматическаго обоснованія теоріи вѣроятностей.

L'esprit humain éprouve moins (de difficultés) à se porter en avant, qu'à se replier sur lui-même.

Laplace. Théorie analytique des probabilités.

Вычисленіе вѣроятностей опирается на нѣсколько аксіомъ и опредѣленій. Однако эти основныя аксіомы обыкновенно не формулируются достаточно отчетливо, и вмѣстѣ съ тѣмъ вопросъ о томъ, какія допущенія необходимы и не находятся ли они въ противорѣчіи между собой, остается открытымъ.

Само опредѣленіе математической вѣроятности неявно содержитъ въ себѣ допущеніе [1]), эквивалентное, по существу, теоремѣ сложенія вѣроятностей, которая нѣкоторыми авторами [2]) принимается за аксіому. Поэтому я считаю не безполезнымъ изложить здѣсь свою попытку аксіоматическаго обоснованія теоріи вѣроятностей. Я буду стоять на чисто математической точкѣ зрѣнія, требующей только точной исчерпывающей формулировки независимыхъ и не противорѣчащихъ другъ другу правилъ, на основаніи которыхъ должны строиться всѣ выводы теоріи вѣроятностей, какъ абстрактной математической дисциплины. Разумѣется, эти правила диктуются намъ потребностями нашего духа, познающаго внѣшній міръ. Но, чтобы не нарушать строго логическаго характера изложенія, я предпочитаю лишь въ концѣ статьи, въ особомъ добавленіи, коснуться вопроса о философскомъ и практическомъ значеніи принциповъ теоріи вѣроятностей.

---

[1]) См. *Лапласъ* «Опытъ философіи теоріи вѣроятностей», стран. 12 русскаго перевода А. К. Власова.

[2]) *Bohlmann* «Technique de l'assurance sur la vie», Encyclopédie des sciences mathématiques, t. I, vol. 4, p. 497.

Глава I.

Конечныя совокупности предложеній.

§ 1.

Предварительныя опредѣленія и аксіомы.

---

1. Равнозначныя и неравнозначныя предложенія.

Разсмотримъ конечную или безконечную совокупность символовъ A, B, C и т. д. Эти символы будемъ называть предложеніями. Мы будемъ писать $M=N$ ($N=M$), и будемъ называть предложенія M и N *равнозначными*, если условимся, что, при всѣхъ далѣе опредѣленныхъ дѣйствіяхъ надъ нашими символами, всегда возможно символъ M замѣнить черезъ N, и наоборотъ. Въ частности, если $M=N$ и $M=L$, то $N=L$.

Допустимъ, что не всѣ данныя предложенія равнозначны, т. е. что *существуетъ два предложенія A и B такія, что $A \neq B$. Если число неравнозначныхъ предложеній конечно, то данную совокупность предложеній мы называемъ конечною.* Въ противномъ случаѣ, совокупность предложеній называется безконечной.

Въ этой главѣ мы разсматриваемъ только *конечныя* совокупности.

2. Аксіомы, характеризующія операцію (раздѣленія), выражаемую знакомъ „или“.

a) *Конструктивный принципъ: если существуютъ (въ данной совокупности) предложеніе A и предложеніе B, то существуетъ предложеніе $C=(A$ или $B)$.*

b) *Коммутативный принципъ:* A или $B=B$ или A.

c) *Ассоціативный принципъ:* A или (B или C)$=$(A или B) или $C=A$ или B или C.

d) *Принципъ тожественности:* A или $A=A$.

Примѣняя первые три принципа мы можемъ, вообще, утверждать существованіе вполнѣ опредѣленнаго предложенія $H=(A$ или B или $\ldots E)$, которое назовемъ *объединеніемъ* предложеній A, B,$\ldots E$. Каждое изъ предложеній A, B,$\ldots E$ называется *частнымъ случаемъ* H.

Слѣдствіе 1. *Если* y *есть частный случай* A, *т. е.* (x или y)$=A$, *то* (A или y)$=A$.

Въ самомъ дѣлѣ, изъ x или $y=A$, заключаемъ, что

$$x \text{ или } [y \text{ или } y]=A \text{ или } y,$$

откуда x или $y=A$ или $y=A$, ч. и т. д.

Слѣдствіе 2. *Если* y *есть частный случай* A, *гдѣ* A *есть частный случай* B, *то* y *есть частный случай* B.

Слѣдствіе 3. *Условіе необходимое и достаточное для того, чтобы* H *было объединеніемъ предложеній* $A_1, A_2, \ldots, A_n$, *состоитъ въ томъ, что* 1) *если для нѣкотораго* i ($i=1, 2, \ldots n$), *имѣемъ* A_i или $y=A_i$, *то* H или $y=H$, 2) *если для всякаго* i, A_i или $M=M$, *то* H или $M=M$.

Въ самомъ дѣлѣ, если $H=(A_1$ или $A_2 \ldots$ или $A_n)$, то изъ A_1 или $y=A_1$, выводимъ немедленно $H=H$ или y, точно также изъ A_1 или $M=M$, A_2 или $M=M$ и т. д. находимъ [A или M или A_2 или M или $\ldots A_n$ или $M]=M$, откуда H или $M=M$.

Допустимъ теперь, что кромѣ объединенія H существуетъ предложеніе H_1, обладающее тѣми же двумя свойствами. Въ такомъ случаѣ, т. к. A_i или $A_i=A_i$, то для всякаго i имѣемъ

$$H_1 \text{ или } A_i=H_1,$$

откуда

$$H_1 \text{ или } H=H_1.$$

Но такъ какъ, съ другой стороны, для всякаго i, A_i или $H=H$, то по второму условію, H_1 или $H=H$; слѣдовательно, $H_1=H$, ч. и т. д.

Слѣдствіе 4. *Если* A *есть частный случай* B, *а* B*—частный случай* A, *то* $A=B$.

Въ самомъ дѣлѣ, по условію: A или $x=B$, B или $y=A$. Слѣдовательно, по слѣдствію 1, A или $B=B=A$, ч. и т. д.

Слѣдствіе 5. *Всякое предложеніе равнозначно объединенію всѣхъ своихъ частныхъ случаевъ.*

3. Теорема существованія достовѣрнаго (истиннаго) предложенія.

Въ данной совокупности всегда существуетъ предложеніе Ω, *обладающее свойствомъ, что, каково бы ни было предложеніе* A,

$$\Omega \text{ или } A=\Omega; \qquad (I)$$

предложеніе Ω *называется истиннымъ или достовѣрнымъ.*

Дѣйствительно, составимъ объединеніе Ω всѣхъ предложеній совокупности: согласно опредѣленію понятія объединенія, Ω удовлетворяетъ условію (I).

Данное опредѣленіе истиннаго предложенія означаетъ, что утверждать правильность истиннаго предложенія или другого, тоже самое, что утверждать истинное предложеніе.

Слѣдствіе 6. *Всѣ истинныя предложенія равнозначны.*

4. Аксіома существованія невозможнаго (ложнаго) предложенія.

Въ данной совокупности существуетъ предложеніе O, *называемое ложнымъ* или *невозможнымъ, удовлетворяющее условію, что для всякаго* A,

$$A \text{ или } O = A \qquad \text{(II)}$$

Такимъ образомъ утвержденіе ложнаго предложенія или предложенія A, равнозначно утвержденію A.

Слѣдствіе 7. *Всѣ ложныя предложенія равнозначны.*

Въ самомъ дѣлѣ, если O и O' два ложныхъ предложенія, то

$$O \text{ или } O' = O = O'.$$

Слѣдствіе 8. *Истинное предложеніе не можетъ быть равнозначно ложному.*

Дѣйствительно, еслибы мы имѣли $\Omega = O$, то, для всякаго A, (A или O)=(A или Ω)=A=Ω=O, т. е. всѣ предложенія совокупности были бы равнозначны.

5. Совмѣщеніе предложеній.

Если даны два предложенія A и B, то всегда существуетъ предложеніе x, удовлетворяющее условію, что

$$x \text{ или } A = A, \quad x \text{ или } B = B; \qquad \text{(III)}$$

дѣйствительно, этому условію удовлетворяетъ во всякомъ случаѣ невозможное предложеніе O.

Предложенія A и B называются *несовмѣстимыми*, если O является единственнымъ предложеніемъ, удовлетворяющимъ условію (III). Предложенія A и B называются *совмѣстимыми*, если, кромѣ O, есть другія предложенія, удовлетворяющія условію (III).

Всякое предложеніе x, удовлетворяющее (III), можно назвать *частнымъ совмѣстнымъ случаемъ* предложеній A и B.

Объединеніе H *всѣхъ частныхъ совмѣстныхъ случаевъ* A *и* B, *т. е. всѣхъ предложеній* x, *удовлетворяющихъ условію (III), называется совмѣщеніемъ предложеній* A и B, что̀ выражается символомъ $H = (A \text{ и } B)$. Формально $H = (A \text{ и } B)$ опредѣляется условіями: H или $A = A$, H или $B = B$, при чемъ, если x или $A = A$, x или $B = B$, то x или $H = H$.

Слѣдствіе 9. *Операція (совмѣщенія), выражаемая символомъ* «и» *коммутативна*: $(A \text{ и } B) = (B \text{ и } A)$.

Слѣдствіе 10. *Операція, выражаемая символомъ* «и», *ассоціативна*: $A \text{ и } (B \text{ и } C) = (A \text{ и } B) \text{ и } C$.

Въ самомъ дѣлѣ, если z удовлетворяетъ условіямъ

$$z \text{ или } A = A, \quad z \text{ или } B = B, \quad z \text{ или } C = C,$$

то это означаетъ, что

$$z \text{ или } (A \text{ и } B) = (A \text{ и } B), \quad z \text{ или } C = C.$$

Поэтому объединеніемъ H всѣхъ z будетъ

$$H = (A \text{ и } B) \text{ и } C,$$

но такимъ же точно образомъ убѣждаемся, что

$$H = A \text{ и } (B \text{ и } C), \text{ ч. и т. д.}$$

Слѣдствіе 11. *Если* A или $B = A$, *то* A и $B = B$, *и наоборотъ*.

Дѣйствительно, если A или $B = A$, то условія

$$z \text{ или } A = A, \quad z \text{ или } B = B,$$

равнозначны условію z или $B = B$, поэтому A и $B = B$.

Обратно, если A и $B = B$, это означаетъ, что равенство z или $B = B$ всегда имѣетъ слѣдствіемъ z или $A = A$, т. е., въ частности, B или $A = A$.

Слѣдствіе 12. A и $O = O$, A и $\Omega = A$.

Слѣдствіе 13. *Операція, выражаемая символомъ* «и», *удовлетворяетъ принципу тожественности*: A и $A = A$.

6. Ограничительный принципъ (ограничительная аксіома).

Всякій частный случай (A или B) *есть объединеніе нѣкотораго частнаго случая* A *и нѣкотораго частнаго случая* B.

Первая теорема распредѣлительности.

$$A \text{ и } (B \text{ или } C) = (A \text{ и } B) \text{ или } (A \text{ и } C).$$

Въ самомъ дѣлѣ, изъ равенствъ

$$(A \text{ и } B) \text{ или } A = A, \quad (A \text{ и } C) \text{ или } A = A,$$

заключаемъ, что

$$[(A \text{ и } B) \text{ или } (A \text{ и } C)] \text{ или } A = A.$$

Точно также изъ

$$(A \text{ и } B) \text{ или } B = B,\ (A \text{ и } C) \text{ или } C = C,$$

выводимъ

$$[(A \text{ и } B) \text{ или } (A \text{ и } C)] \text{ или } (B \text{ или } C) = B \text{ или } C.$$

Такимъ образомъ $[(A \text{ и } B) \text{ или } (A \text{ и } C)]$ есть совмѣстный частный случай предложенія A и предложенія $(B \text{ или } C)$.

Теперь нужно еще показать, что и наоборотъ, если

$$z \text{ или } A = A,\quad z \text{ или } (B \text{ или } C) = B \text{ или } C,$$

то

$$z \text{ или } [(A \text{ и } B) \text{ или } (A \text{ и } C)] = (A \text{ и } B) \text{ или } (A \text{ и } C).$$

Для этого замѣчаемъ, что, на основаніи ограничительнаго принципа,

$$z = x \text{ или } y,$$

гдѣ x есть частный случай B, а y есть частный случай C. Тогда x или $A = A$, x или $B = B$, откуда

$$x \text{ или } (A \text{ и } B) = A \text{ и } B.$$

Точно также

$$y \text{ или } (A \text{ и } C) = A \text{ и } C.$$

Слѣдовательно

$$x \text{ или } y \text{ или } (A \text{ и } B) \text{ или } (A \text{ и } C) = (A \text{ и } B) \text{ или } (A \text{ и } C),$$

т. е.

$$z \text{ или } [(A \text{ и } B) \text{ или } (A \text{ и } C)] = (A \text{ и } B) \text{ или } (A \text{ и } C), \text{ ч. и т. д.}$$

Вторая теорема распредѣлительности.

$$A \text{ или } (B \text{ и } C) = (A \text{ или } B) \text{ и } (A \text{ или } C).$$

Въ самомъ дѣлѣ,

$$(A \text{ или } B) \text{ и } (A \text{ или } C) = \{[A \text{ или } B] \text{ и } A\} \text{ или } \{[A \text{ или } B] \text{ и } C\} =$$
$$= A \text{ или } [(A \text{ или } B) \text{ и } C] = A \text{ или } [(A \text{ и } C) \text{ или } (B \text{ и } C)] =$$
$$= A \text{ или } (B \text{ и } C), \text{ ч. и т. д.}$$

7. Этими теоремами вмѣстѣ съ принципами ассоціативности и коммутативности, относящимися къ операціямъ «или» и «и», исчерпываются всѣ правила вычисленій съ этими символами.

Важно отмѣтить, что *всѣ правила, касающіяся совмѣщенія предложеній* (символа «и»), *являются необходимымъ слѣдствіемъ правилъ, относящихся къ объединенію предложеній* (символъ «или»). При этомъ весьма замѣчательнымъ является наблюдаемый здѣсь дуализмъ: *правила, относящіяся къ символамъ* «или» и «и» *совершенно тождественны, такъ что всѣ формулы остаются въ силѣ, если эти символы взаимно*

перемѣстить, при условіи одновременной взаимной замѣны невозможнаго предложенія O и истиннаго предложенія Ω. Дѣйствительно, достаточно обозрѣть все вышеизложенное, чтобы замѣтить, что единственная разница между правилами, опредѣляющими объединеніе предложеній и ихъ совмѣщеніе та, что A и $\Omega = A$, A и $O = O$, между тѣмъ какъ A или $\Omega = \Omega$, A или $O = A$.

8. Принципъ (аксіома) единственности.

Для завершенія нашей системы мы введемъ еще одинъ принципъ, лежащій въ основѣ понятія *отрицанія.* Этому принципу, который мы назовемъ *принципомъ единственности,* можно придать слѣдующую форму:

Если предложеніе α совмѣстимо со всѣми предложеніями совокупности (кромѣ O), оно истинно: $\alpha = \Omega$.

Опредѣленіе отрицанія. *Объединеніе $\overline{A}$ всѣхъ несовмѣстимыхъ съ A предложеній называется отрицаніемъ A.*

Слѣдствіе 14. $\overline{\Omega} = O$.

Слѣдствіе 15. $\overline{O} = \Omega$.

Слѣдствіе 16. *Если* $\overline{x} = O$, *то* $x = \Omega$.

Дѣйствительно, всѣ предложенія (кромѣ O) совмѣстимы съ x, слѣдовательно, на основаніи принципа единственности, $x = \Omega$.

Слѣдствіе 17. *Если* $\overline{x} = \Omega$, *то* $x = o$.

Въ самомъ дѣлѣ, т. к. Ω есть объединеніе несовмѣстимыхъ съ x предложеній, то и Ω (вслѣдствіе ограничительнаго принципа) несовмѣстимо съ x; слѣдовательно, $x = O$.

Назовемъ *единственно возможными* всякія нѣсколько предложеній, объединеніе которыхъ есть Ω.

Теорема. *Предложенія A и $\overline{A}$ единственно возможны и несовмѣстимы, т. е.* A или $\overline{A} = \Omega$, A и $\overline{A} = O$.

Дѣйствительно, всякое предложеніе есть либо частный случай $\overline{A}$, либо совмѣстимо съ A; поэтому, на основаніи принципа единственности [1]) A или $\overline{A} = \Omega$. Съ другой стороны, т. к. $\overline{A}$ есть объединеніе несовмѣстимыхъ съ A предложеній, то A и $\overline{A} = O$.

Теорема. *Отрицаніе предложенія $\overline{A}$ равнозначно A, т. е.* $\overline{\overline{A}} = A$.

Для этого достаточно показать, что изъ условій

$$A \text{ или } B = A_1 \text{ или } B, \quad A \text{ и } B = A_1 \text{ и } B$$

вообще вытекаетъ $A = A_1$.

---

[1]) Обратно, если мы примемъ, что A или $\overline{A} = \Omega$, т. е., что предложеніе и его отрицаніе единственно возможны, то отсюда вытекаетъ принципъ единственности. Дѣйствительно, если α совмѣстимо со всякимъ предложеніемъ (кромѣ O), то $\overline{\alpha} = O$; откуда α или $O = \Omega$; слѣдовательно, $\alpha = \Omega$.

Дѣйствительно,

$$A_1 = [A_1 \text{ и } (B \text{ или } A_1)] = [A_1 \text{ и } (B \text{ или } A)] =$$
$$= [(A_1 \text{ и } B) \text{ или } (A_1 \text{ и } A)] = [(A \text{ и } B) \text{ или } (A_1 \text{ и } A)] =$$
$$= [A \text{ и } (B \text{ или } A_1) = [A \text{ и } (B \text{ или } A)] = A.$$

Опредѣленіе. Если (A или B) $= B$, *то объединеніе* C *всѣхъ предложеній, несовмѣстимыхъ съ* A *и являющихся частными случаями* B, *называется дополненіемъ* A до B. Такимъ образомъ $C = (B \text{ и } \overline{A})$. Обратно, A есть дополненіе C до B. Дѣйствительно, A или $C = B$, A и $C = O$. Еслибы дополненіемъ C до B было A_1 то мы имѣли бы тоже A_1 или $C = B$, A_1 и $C = O$, откуда $A = A_1$. Поэтому $A = (B \text{ и } \overline{C})$.

Слѣдствіе 18. $(\overline{A \text{ и } B}) = \overline{A}$ или $\overline{B}$.

Дѣйствительно,

$$[(A \text{ и } B) \text{ или } \overline{A}] \text{ или } \overline{B} = [\Omega \text{ и } B] \text{ или } \overline{B} = \Omega;$$
$$(A \text{ и } B) \text{ и } (\overline{A} \text{ или } \overline{B}) = (A \text{ и } B \text{ и } \overline{A}) \text{ или } (A \text{ и } B \text{ и } \overline{B}) = O.$$

9. Рѣшеніе символическихъ уравненій.

Вышеизложенные принципы позволяютъ рѣшать или убѣждаться въ неразрѣшимости соотношеній между предложеніями, связанными при помощи символовъ «или» и «и».

Легко убѣдиться, что всякое выраженіе, въ которое входятъ предложенія x и $\overline{x}$, приводится, на основаніи предыдущихъ правилъ, къ формѣ

$$A \text{ или } (a \text{ и } x) \text{ или } (b \text{ и } \overline{x}).$$

Мы называемъ символическимъ уравненіемъ съ однимъ неизвѣстнымъ x утвержденіе равнозначности двухъ выраженій, изъ которыхъ одно по крайней мѣрѣ зависитъ отъ x. Такимъ образомъ всякое уравненіе приводится къ виду

$$A \text{ или } (a \text{ и } x) \text{ или } (b \text{ и } \overline{x}) = A' \text{ или } (a' \text{ и } x) \text{ или } (b' \text{ и } \overline{x}). \quad (1)$$

Это уравненіе равнозначно, вообще, двумъ различнымъ уравненіямъ, которыя должны быть одновременно удовлетворены:

$$[A \text{ или } (a \text{ и } x) \text{ или } (b \text{ и } \overline{x})] \text{ или } [\overline{A'} \text{ и } \overline{(a' \text{ и } x)} \text{ и } \overline{(b' \text{ и } \overline{x})}] = \Omega \quad (2)$$

и

$$[A' \text{ или } (a' \text{ и } x) \text{ или } (b' \text{ и } \overline{x})] \text{ или } [\overline{A} \text{ и } \overline{(a \text{ и } x)} \text{ и } \overline{(b \text{ и } \overline{x})}] = \Omega \quad (3)$$

т. к. уравненіе (2) выражаетъ, что въ уравненіи (1) вторая часть есть частный случай первой части; уравненіе же (3) выражаетъ, что первая

часть уравненія (1) есть частный случай второй части. При помощи теоремы распредѣлительности уравненіе (2) преобразуемъ въ

$$[A \text{ или } (\overline{A'} \text{ и } \overline{a'} \text{ и } \overline{b'})] \text{ или } \{[a \text{ или } (\overline{A'} \text{ и } \overline{a'})] \text{ и } x\} \text{ или}$$
$$\text{или } \{[b \text{ или } (\overline{A'} \text{ и } \overline{b'})] \text{ и } \overline{x}\} = \Omega. \qquad (2 \text{ bis})$$

Такимъ образомъ каждое изъ уравненій (2) и (3) приведется къ виду

$$B \text{ или } (C \text{ и } x) \text{ или } (D \text{ и } \overline{x}) = \Omega, \qquad (4)$$

т. е.

$$[B \text{ или } C \text{ или } D] \text{ и } [B \text{ или } x \text{ или } D] \text{ и } [B \text{ или } C \text{ или } \overline{x}] = \Omega,$$

откуда

$$B \text{ или } C \text{ или } D = \Omega, \; B \text{ или } D \text{ или } x = \Omega, \; B \text{ или } C \text{ или } \overline{x} = \Omega. \qquad (5)$$

Равенство

$$B \text{ или } C \text{ или } D = \Omega \qquad (6)$$

есть необходимое и достаточное условіе [1]) разрѣшимости уравненія (4). Дѣйствительно, равенство

$$B \text{ или } D \text{ или } x = \Omega$$

означаетъ, что

$$x \text{ или } (\overline{B} \text{ и } \overline{D}) = x. \qquad (7)$$

Точно также равенство B или C или $\overline{x} = \Omega$ означаетъ, что

$$x \text{ или } (B \text{ или } C) = B \text{ или } C; \qquad (8)$$

но для одновременнаго осуществленія (7) и (8) необходимо и достаточно, чтобы

$$(\overline{B} \text{ и } \overline{D}) \text{ или } (B \text{ или } C) = B \text{ или } C;$$

т. е.

$$\overline{D} \text{ или } (B \text{ или } C) = B \text{ или } C, \qquad (9)$$

что̀ эквивалентно условію (6).

Если условіе (9), эквивалентное условію (6), соблюдено, то уравненія (7) и (8) означаютъ, что x есть частный случай (B или C), включающій въ себѣ ($\overline{B}$ и $\overline{D}$), т. е. общее рѣшеніе уравненія (4) есть

$$x = (\overline{B} \text{ и } \overline{D}) \text{ или } [(B \text{ или } C) \text{ и } \delta], \qquad (10)$$

гдѣ δ есть произвольное предложеніе.

---

[1]) Примѣняя это условіе къ данному уравненію (1), находимъ, что для его разрѣшимости необходимо и достаточно, чтобы были соблюдены условія:

$$[A \text{ или } a \text{ или } b] \text{ или } [\overline{A'} \text{ и } (\overline{a'} \text{ или } \overline{b'})] = \Omega,$$
$$[A' \text{ или } a' \text{ или } b'] \text{ или } [\overline{A} \text{ и } (\overline{a} \text{ или } \overline{b})] = \Omega.$$

Въ частности, условіе (6) соблюдено, если B или $D = \Omega$, тогда уравненіе (4) обращается въ $[B$ или $(C$ и $x)$ или $\overline{x}] = \Omega$, имѣющее рѣшеніемъ $x = [(B$ или $C)$ и $\delta]$.

Равенство (4) будетъ тождествомъ въ томъ и только въ томъ случаѣ, когда: B или $D = \Omega$, B или $C = \Omega$. Напротивъ уравненіе (4) допускаетъ только одно рѣшеніе лишь при условіи, что $\overline{B}$ и $\overline{D} = B$ или C, откуда $B = O$, $C = \overline{D}$; такимъ образомъ получимъ:

Слѣдствіе 19. *Уравненіе*

$$(C \text{ и } x) \text{ или } (\overline{C} \text{ и } \overline{x}) = \Omega$$

имѣетъ единственнымъ рѣшеніемъ $x = C$.

Мы не будемъ останавливаться на дальнѣйшемъ изложеніи примѣненія выше указанныхъ правилъ символическаго счисленія [1]). Для насъ теперь болѣе важно перейти къ доказательству независимости и отсутствія противорѣчій между этими правилами.

§ 2.

Непротиворѣчивость и независимость аксіомъ.

10. Система чиселъ, соотвѣтствующая совокупности предложеній.

Въ настоящей статьѣ я не ставлю себѣ цѣлью обоснованіе ариѳметики; напротивъ, цѣлое число и его основныя свойства являются для насъ здѣсь простыми понятіями, лишенными противорѣчія. Поэтому для установленія непротиворѣчивости предлагаемой нами системы опредѣленій и аксіомъ, достаточно будетъ построить систему чиселъ, удовлетворяющихъ всѣмъ аксіомамъ, а для доказательства независимости, мы построимъ системы чиселъ, удовлетворяющихъ однимъ аксіомамъ, но нарушающихъ другія.

Съ этою цѣлью положимъ, что наши символы A, B,... означаютъ какія-нибудь цѣлыя числа, знакъ равнозначности $(=)$ означаетъ равенство; объединеніе $(A$ или $B)$ общій наибольшій (среди разсматриваемыхъ чиселъ) дѣлитель чиселъ A и B. Изъ свойства наибольшаго дѣлителя вытекаетъ, что принципы *ассоціативный*, *коммутативный* и принципъ *тожественности* соблюдены. Ничто не мѣшаетъ намъ выбрать такъ наши числа, чтобы общій дѣлитель двухъ данныхъ чиселъ всегда находился среди данныхъ чиселъ: напр., 1, 2, 3; такимъ образомъ мы осуществляемъ и *конструктивный* принципъ. Напротивъ, мы нарушимъ конструктивный принципъ, если возьмемъ систему чиселъ: 2, 3, 4;

---

[1]) См. также «Algebra der Logik» Schröder.

(сюда необходимо было бы прибавить число 1, еслибъ мы хотѣли возстановить конструктивный принципъ). Существованіе истиннаго предложенія, т. е. общаго дѣлителя всѣхъ данныхъ чиселъ вытекаетъ, какъ мы видѣли, изъ конструктивнаго принципа [1]). Но существованіе ложнаго предложенія налагаетъ новое ограниченіе на нашу систему чиселъ, ибо ложному предложенію должно соотвѣтствовать число, кратное всѣмъ даннымъ; такимъ образомъ въ системѣ чиселъ: 1, 2, 3, мы не имѣемъ числа, представляющаго ложное предложеніе, и для осуществленія аксіомы существованія ложнаго предложенія нужно добавить число 6 или любое число кратное 6.

11. Независимость ограничительнаго принципа.

Совмѣщенію (A и B) двухъ предложеній соотвѣтствуетъ наименьшее изъ чиселъ кратныхъ числамъ A и B, принадлежащихъ данной системѣ чиселъ. Въ виду существованія ложнаго предложенія, т. е. числа, кратнаго всѣмъ даннымъ числамъ, совмѣщеніе (A и B) всегда существуетъ въ данной системѣ и удовлетворяетъ, какъ было установлено, коммутативному и ассоціативному принципу. Но для доказательства теоремъ дистрибутивности, мы ввели еще одну аксіому, подъ названіемъ ограничительнаго принципа: *если β есть частный случай (A или B), то онъ долженъ быть объединеніемъ нѣкотораго частнаго случая A съ нѣкоторымъ частнымъ случаемъ B.* Въ нашей системѣ чиселъ этотъ принципъ гласитъ: *если β есть число, кратное общему наибольшему дѣлителю A и B, то оно представляетъ собой общаго наибольшаго дѣлителя нѣкоторыхъ двухъ чиселъ, соотвѣтственно кратныхъ A и B.*

Этому условію удовлетворитъ система чиселъ: $p_1^{k_1}p_2^{k_2}\ldots p_n^{k_n}$, гдѣ p_i суть какія-нибудь простыя числа, а показатели k_i суть *всѣ* цѣлыя не отрицательныя числа, не превышающія нѣкоторыхъ данныхъ чиселъ c_i. Напротивъ, если напримѣръ, мы возьмемъ систему, удовлетворяющую всѣмъ предшествующимъ условіямъ, кромѣ послѣдняго: 1, p_1, $p_2\ldots$, p_n, $p_1p_2\ldots p_n$, гдѣ $n \geq 3$, то ограничительный принципъ не будетъ соблюденъ, ибо общій наибольшій дѣлитель p_1 и p_2 есть 1, но p_3 не является общимъ наибольшимъ дѣлителемъ чиселъ вида x_1p_1 и x_2p_2, принадлежащихъ нашей системѣ.

12. Принципъ единственности и совершеннныя совокупности.

Остается, наконецъ, разсмотрѣть принципъ единственности, посредствомъ котораго мы установили понятіе отрицанія. Для осуществленія

[1]) Можно было бы доказать, что и обратно, допущеніе существованія истиннаго предложенія имѣетъ слѣдствіемъ конструктивный принципъ; поэтому въ конечной совокупности конструктивный принципъ и аксіома существованія истиннаго предложенія являются эквивалентными.

этого принципа, (выражающаго, что 1 есть единственное число, имѣющее со всякимъ числомъ наименьшее кратное, отличное отъ общаго кратнаго всѣхъ чиселъ) вмѣстѣ со всѣми предыдущими, необходимо и достаточно взять въ предшествующей системѣ чиселъ всѣ $c_i = 1$. Дѣйствительно, наименьшее кратное чиселъ $N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_n^{\alpha_n}$ и $L = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_n^{k_n}$ есть $p_1^{h_1} p_2^{h_2} \ldots p_n^{h_n}$, гдѣ h_i равно наибольшему изъ чиселъ α_i и k_i. Нашъ принципъ означаетъ, что всѣ $\alpha_i = 0$, если изъ неравенства $\sum_1^n (c_i - k_i) > 0$ вытекаетъ $\sum_1^n (c_i - h_i) > 0$; такимъ образомъ, онъ будетъ соблюденъ, если всѣ $c_i = 1$, и не будетъ соблюденъ, если хоть одно $c_i > 1$. (Напримѣръ, въ системѣ: 1, 2, 3, 4, 6, 12 принципъ единственности не соблюденъ— предложеніе, соотвѣтствующее числу 2, было бы совмѣстимо со всѣми предложеніями, поэтому его отрицаніемъ служило бы только ложное предложеніе, и не будучи истиннымъ, оно обладало бы однако важнѣйшимъ аттрибутомъ истиннаго предложенія).

Необходимо замѣтить, что *ограничительный принципъ также независимъ и отъ принципа единственности*, какъ это видно изъ примѣра: $1, p_1, p_2, \ldots p_n, p_1 p_2 \ldots p_n$, гдѣ принципъ единственности, очевидно, осуществленъ, между тѣмъ какъ мы видѣли, что ограничительный принципъ здѣсь нарушенъ.

Итакъ мы видимъ, что *принятыя нами послѣдовательно аксіомы независимы и другъ другу не противорѣчатъ*, ибо системѣ предложеній, подчиненной имъ, соотвѣтствуетъ система цѣлыхъ чиселъ, лишенныхъ квадратныхъ дѣлителей: $1; p_1; p_2 \ldots; p_k; p_1 p_2; \ldots; p_1 p_2 p_3; \ldots; p_1 p_2 \ldots p_k$, представляющихъ всевозможныя произведенія изъ простыхъ чиселъ $p_1, p_2, \ldots, p_k$.

Совокупность предложеній, удовлетворяющихъ всѣмъ нашимъ аксіомамъ, мы назовемъ совершенною совокупностью, и только съ такого рода совокупностями мы и будемъ имѣть дѣло въ дальнѣйшемъ.

Примѣчаніе. Наше доказательство независимости аксіомъ, т. е. невозможности получить послѣдовательно вводимыя аксіомы, какъ слѣдствіе изъ остальныхъ, не должно, мнѣ кажется, вызвать никакихъ принципіальныхъ возраженій. Вопросъ о непротиворѣчивости аксіомъ, напротивъ, требуетъ разъясненія. Если мы беремъ, напримѣръ, систему чиселъ: 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30 и выражаемъ словесно всѣ соотношенія дѣлимости между этими числами, то, какъ можно провѣрить непосредственно, мы получаемъ рядъ не противорѣчащихъ другъ другу словесныхъ утвержденій, (т. е. мы не приходимъ къ равенствамъ не равныхъ чиселъ) при чемъ для насъ не имѣетъ значенія смыслъ словъ наименьшее

кратное, наибольшій дѣлитель и тѣ общіе разсужденія, изъ которыхъ наши утвержденія вытекаютъ; важно лишь то, что мы имѣемъ здѣсь опредѣленную систему объектовъ, взаимоотношенія между которыми удовлетворяютъ всѣмъ аксіомамъ. Такимъ образомъ числа являются для насъ только удобнымъ и наглядным пріемомъ для осуществленія системы символовъ, удовлетворяющихъ всѣмъ аксіомамъ. Чтобы убѣдиться въ существованіи системы съ сколь угодно большимъ числомъ предложеній, нужно лишь понятіе о счетѣ, какъ взаимно однозначномъ соотвѣтствіи между элементами двухъ конечныхъ совокупностей, и принципъ математической индукціи.

Слѣдуетъ также отмѣтить независимость аксіомъ b, c, d. Не останавливаясь на этомъ вопросѣ, который для дальнѣйшаго не имѣетъ значенія, ограничимся лишь слѣдующими указаніями. Принципъ тожественности (d) въ *конечной* совокупности занимаетъ особое мѣсто, потому что необходимо, чтобы всякая операція, произведенная конечное число разъ надъ каждымъ даннымъ символомъ, снова возвращала насъ къ тому же символу. Вслѣдствіе этого всегда возможно операцію «или» замѣнить операціей $(\text{или})^n$, т. е. повтореніемъ операціи «или» n разъ такъ, чтобъ принципъ былъ соблюденъ. Это замѣчаніе въ то же время даетъ возможность легко построить систему чиселъ, для которыхъ принципъ (d) не соблюдается. Дѣйствительно, возьмемъ числа: 1, 2, —2, 3, —3, 6. Пусть операція «или» для положительныхъ чиселъ сохраняетъ прежнее значеніе; съ другой стороны, если оба числа отрицательны, то операція «или» приводитъ къ ихъ наибольшему дѣлителю со знакомъ +, если же числа имѣютъ разные знаки, то наибольшій дѣлитель берется со знакомъ —, при чемъ, т. к. въ нашей совокупности нѣтъ числа -1, мы условливаемся замѣнять -1 черезъ $+1$. Принципъ тожественности при этомъ нарушается $(-2 \text{ или } -2) = 2$, но всѣ остальные принципы соблюдены безъ противорѣчій. Разумѣется, цѣлый рядъ теоремъ, при этомъ нарушается, и въ частности, изъ принципа единственности не вытекаетъ уже единственность отрицанія всякаго предложенія.

§ 3.

Структура и преобразованіе конечныхъ совершенныхъ совокупностей предложеній.

13. Элементарныя предложенія.

Всякое предложеніе совокупности отличное отъ O, не имѣющее иныхъ частныхъ случаевъ кромѣ себя и O, называется *элементарнымъ* предложеніемъ.

Слѣдствіе 1. *Въ совершенной совокупности каждое предложеніе имѣетъ частнымъ случаемъ по крайней мѣрѣ одно элементарное предложеніе.*

Дѣйствительно, если $A \neq O$ не элементарное предложеніе, то оно имѣетъ частный случай $B \neq O$, отличный отъ A; если B не элементарное предложеніе, то оно имѣетъ частный случай C и т. д.

Такъ какъ число предложеній ограничено, то такимъ путемъ мы должны наконецъ дойти до элементарнаго предложенія.

Слѣдствіе 2. *Если въ совершенной совокупности есть два различныхъ элементарныхъ предложенія, то они несовмѣстимы.*

Теорема. *Всякое предложеніе (кромѣ O) представляетъ объединеніе элементарныхъ предложеній.*

Въ самомъ дѣлѣ, если α есть элементарное предложеніе, являющееся частнымъ случаемъ нѣкотораго предложенія A, то $A=(\alpha$ или $A_\alpha)$, гдѣ A_α есть дополненіе α до A; если A_α элементарное предложеніе, то для A теорема справедлива; въ противномъ случаѣ A_α имѣетъ элементарное предложеніе β, и $A=(\alpha$ или β или $A_{\alpha\beta})$, гдѣ $A_{\alpha\beta}$ есть дополненіе β до A_α; продолжая тоже разсужденіе, мы дойдемъ наконецъ до послѣдняго элементарнаго предложенія A, такъ что $A=(\alpha$ или β или ... ... или $\lambda)$, гдѣ $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ — элементарныя предложенія.

Слѣдствіе 3. *Если въ совокупности n элементарныхъ предложеній, то общее число неравнозначныхъ предложеній равно* 2^n.

Дѣйствительно, если A содержитъ по крайней мѣрѣ одно элементарное предложеніе, не входящее въ B, то $A \neq B$. Слѣдовательно, число различныхъ предложеній (не считая O) равно $C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n - 1$; если же сюда присоединить O, то получимъ [1]) общее число предложеній 2^n.

Теорема. *Существуютъ совершенныя совокупности со всякимъ числомъ n элементарныхъ предложеній.*

Въ самомъ дѣлѣ, если имѣемъ невозможное предложеніе O и n несовмѣстимыхъ предложеній: $a_1, a_2, \ldots a_n$, то, составляя всевозможныя объединенія по 2, по 3 и т. д., можемъ считать ихъ предложеніями, при чемъ всѣ аксіомы тогда будутъ соблюдены: въ частности, отрицаніе каждаго есть объединеніе изъ остальныхъ данныхъ предложеній.

Примѣчаніе. Непосредственное введеніе элементарныхъ предложеній могло бы упростить обоснованіе теоріи *конечныхъ* совершенныхъ совокупностей; но такой порядокъ изложенія, какъ будетъ видно изъ дальнѣйшаго, долженъ быть отвергнутъ, имѣя въ виду *безконечныя* совокупности.

---

[1]) Можно условиться для того, чтобы не исключать ложнаго предложенія, говорить, что оно есть объединеніе изъ O элементарныхъ предложеній, т. е. ложное предложеніе не содержитъ ни одного элементарнаго предложенія.

14. Разложеніе и соединеніе совершенныхъ совокупностей.

Если изъ данной совершенной совокупности H выдѣлить какія-нибудь k несовмѣстимыхъ и единственно возможныхъ предложеній B_1, B_2, $\ldots B_k$ и ихъ всевозможныя объединенія, число которыхъ (включая O и Ω) равно 2^k, то мы составимъ новую совершенную совокупность G, которую назовемъ частью H. Предложенія B_1, B_2, $\ldots$, B_k будутъ элементарными предложеніями G.

Возьмемъ какой-нибудь другой рядъ несовмѣстимыхъ и единственно возможныхъ предложеній B_1', B_2', $\ldots B_\ell'$, изъ которыхъ составимъ новую совокупность G_1. *Совокупности* G_1 и G *называются связанными, если существуетъ по крайней мѣрѣ одна пара предложеній* B_i и B_j' *несовмѣстимыхъ между собой* $(B_i \text{ и } B_j')=0$. Напротивъ, если $(B_i \text{ и } B_j')\neq 0$, для всѣхъ значеній i и j, то совокупности G_1 и G называются *не связанными* или *отдѣльными*.

Если въ H не входитъ иныхъ предложеній, кромѣ тѣхъ, которыя получаются отъ совмѣщенія предложеній совокупностей G_1 и G, то совокупность H называется *соединеніемъ* совокупностей G и G_1. Точно также H можетъ быть разложено и на 3, 4 и т. д. части, и H будетъ называться соединеніемъ этихъ частей.

Замѣтимъ, что совокупность H можетъ быть разложена на отдѣльныя (не связанныя) части тогда и только тогда, когда число n ея элементарныхъ предложеній есть число не простое, а составное. Дѣйствительно, если k элементарныхъ предложеній B_i совокупности G всегда совмѣстимы со всякимъ изъ l элементарныхъ предложеній B_j' совокупностности G_1, то $(B_i \text{ и } B_j')$ составятъ $k.l$ элементарныхъ предложеній соединенія G и G_1.

Напримѣръ, если (какъ при бросаніи игральной кости) мы имѣемъ 6 элементарныхъ предложеній A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, то мы можемъ составить двѣ отдѣльныя части: совокупность G, у которой элементарными предложеніями служитъ $(A_1 \text{ или } A_2)$, $(A_3 \text{ или } A_4)$, $(A_5 \text{ или } A_6)$, и совокупность G_1, для которой элементарными предложеніями явятся $(A_1 \text{ или } A_3 \text{ или } A_5)$ и $(A_2 \text{ или } A_4 \text{ или } A_6)$. Еслибы вмѣсто G_1 мы составили бы совокупность G_2 изъ предложеній: $(A_1 \text{ или } A_2 \text{ или } A_3)$ и $(A_4 \text{ или } A_5 \text{ или } A_6)$, то G и G_2 окажутся связанными, и ихъ соединеніемъ будетъ не H, а только часть H, у которой элементарными предложеніями будутъ: $(A_1 \text{ или } A_2)$, A_3, A_4, $(A_5 \text{ или } A_6)$.

Вообще, изъ двухъ совершенныхъ совокупностей предложеній G и G_1 можно составить совершенную совокупность H, у которой элементарными предложеніями будутъ всѣ совмѣщенія $(B_i \text{ и } B_j')$ элементарныхъ предложеній B_i совокупности G съ элементарными предложеніями B_j' со-

вокупности G_1. При этомъ нѣкоторыя изъ предложеній (B_i и B'_j) могутъ быть приняты равнозначными O; тогда совокупности G и G_1 будутъ связаны; необходимо только, чтобы по крайней мѣрѣ одно изъ совмѣщеній (B_i и B'_j), содержащихъ опредѣленное предложеніе B_i, не было O, такъ же какъ и одно совмѣщеніе, содержащее опредѣленное B'_j, ибо $[(B_i$ и $B'_1)$ или $(B_i$ и $B'_2)$ или $\ldots(B_i$ и $B'_e)] = B_i$.

Пусть, напр., G составлено изъ 3 элементарныхъ предложеній B_1, B_2, B_3, а G_1 — изъ 3 предложеній B'_1, B'_2, B'_3; положимъ, что среди совмѣщеній этихъ предложеній $(B_1$ и $B'_1) = 0$, $(B_2$ и $B'_2) = 0$. Тогда соединеніе H совокупностей G и G_1 будетъ составлено изъ 7 остальныхъ $(3.3 - 2)$ элементарныхъ предложеній отличныхъ отъ O.

Обозначая эти 7 предложеній черезъ $A_1 = (B_1$ и $B'_2)$, $A_2 = (B_1$ и $B'_3)$, $A_3 = (B_2$ и $B'_1)$, $A_4 = (B_2$ и $B'_3)$, $A_5 = (B_3$ и $B'_1)$, $A_6 = (B_3$ и $B'_2)$, $A_7 = (B_3$ и $B'_3)$, видимъ, что элементами G служатъ: $B_1 = (A_1$ или $A_2)$, $B_2 = (A_3$ или $A_4)$, $B_3 = (A_5$ или A_6 или $A_7)$; элементами же G_1 являются: $B'_1 = (A_3$ или $A_5)$, $B'_2 = (A_1$ или $A_6)$, $B'_3 = (A_2$ или A_4 или $A_7)$.

15. Преобразованіе совершенныхъ совокупностей. Осуществленіе предложенія.

Теорема. *Данная совершенная совокупность можетъ быть преобразована въ новую совершенную совокупность предложеній введеніемъ условія, что опредѣленное, не равнозначное O, предложеніе $A = \Omega$. Такое преобразованіе называютъ осуществленіемъ предложенія A (или наступленіемъ событія A).*

Въ самомъ дѣлѣ, если $A = \Omega$, то $\overline{A}$ и всѣ его частные случаи равнозначны O; поэтому два предложенія B и C, бывшія взаимно дополнительными до A, дѣлаются взаимными отрицаніями; слѣдовательно, полученная совокупность совершена. Это преобразованіе было бы невозможно только, если $A = O$, ибо тогда всѣ предложенія стали бы равнозначны одному и тому же предложенію $O = \Omega$, что̀ противорѣчитъ сдѣланному въ самомъ началѣ допущенію.

Это преобразованіе, очевидно, не обратимо, т. к. совокупность не можетъ быть лишена достовѣрнаго предложенія Ω.

Теорема. *Всякое преобразованіе совокупности предложеній, заключающееся въ введеніи условія $A = B$, есть ничто иное, какъ осуществленіе нѣкотораго предложенія C. Это преобразованіе возможно тогда и только тогда, когда A и B не служатъ взаимными отрицаніями.*

Въ самомъ дѣлѣ, для выполненія условія $A = B$ необходимо и достаточно, чтобы (§ 1, слѣдствіе 19)

$$C = (A \text{ и } B) \text{ или } (\overline{A} \text{ и } \overline{B}) = \Omega, \quad \text{ч. и т. д.}$$

Замѣчаніе. *Если предложенія* $A = B$ *несовмѣстимы, то* $C = (\overline{A}$ и $\overline{B}) = \Omega$, *т. е.* $\overline{A} = \overline{B} = \Omega$; *потому* $A = B = 0$.

Необходимо обратить вниманіе на существенную разницу между соединеніемъ двухъ совокупностей и преобразованіемъ, называемымъ осуществленіемъ. Соединеніе совокупностей (связанныхъ или несвязанныхъ) не вводитъ никакихъ измѣненій въ содержаніе *данныхъ* предложеній. Напротивъ, осуществленіе предложенія измѣняетъ его содержаніе, а именно, вводитъ новое условіе равнозначности.

Въ случаѣ связанныхъ совокупностей, связь между ними, выражающаяся условіями вида $(B_i$ и $B'_k) = 0$, не должна имѣть слѣдствіемъ, что какое-нибудь изъ *данныхъ* предложеній B_i мѣняетъ содержаніе (поэтому невозможно, чтобы $(B_i$ и $B'_k) = 0$ при всякомъ k). Установленіе условія $(B_i$ и $B'_k) = 0$ можно однако также разсматривать, какъ преобразованіе совокупности, полученной отъ соединенія несвязанныхъ совокупностей. Такимъ образомъ та или иная связь между соединяемыми совокупностями приводитъ къ различнымъ по содержанію сложнымъ совокупностямъ, при чемъ первоначальныя составныя части у нихъ одинаковы.

Глава II.

Вѣроятности предложеній конечныхъ совокупностей.

§ 4.

Аксіомы и основныя теоремы теоріи вѣроятностей.

---

16. Аксіомы.

Какъ мы видѣли, равнозначныя предложенія могутъ быть представлены однимъ и тѣмъ же символомъ или численнымъ коэффиціентомъ. Такимъ образомъ мы получили своего рода исчисленіе предложеній, которое можетъ найти себѣ примѣненіе въ чистой логикѣ.

Основнымъ новымъ допущеніемъ теоріи вѣроятностей является положеніе, что *одинъ и тотъ же численный коэффиціентъ, называемый математической вѣроятностью, можетъ быть иногда приписываемъ и неравнозначнымъ предложеніямъ.* Этотъ коэффиціентъ не долженъ измѣняться отъ того, что мы присоединяемъ къ данной совокупности [1]) предложеній другую совокупность. Вѣроятности предложеній данной совокупности могутъ измѣняться только при преобразованіи совокупности, разсмотрѣнномъ въ § 3, состоящемъ въ осуществленіи нѣкотораго предложенія.

Утвержденіе, что вѣроятность предложенія A равна вѣроятности предложенія B (вѣр. $A =$ вѣр. B), или, что A и B *равновозможны*, мы будемъ выражать краткой формулой:

$$A \backsim B,$$

изъ $A \backsim B$ и $A \backsim C$ вытекаетъ, слѣдовательно, $B \backsim C$.

Если $A = B$, *то, тѣмъ болѣе,* $A \backsim B$; поэтому, въ частности, *всѣ достовѣрныя предложенія имѣютъ одну и ту же вѣроятность* (достовѣрность), *всѣ невозможныя предложенія также имѣютъ одну и ту же вѣроятность* (невозможность).

---

[1]) Теорія вѣроятностей разсматриваемъ только *совершенныя* совокупности предложеній.

Совокупность предложеній, въ которой каждому предложенію приписана опредѣленная математическая вѣроятность, называется *ариѳметизованной*. Если численный коэффиціентъ, являющійся математической вѣроятностью A, не равенъ численному коэффиціенту—вѣроятности B, то одинъ изъ нихъ больше другого, что̀ мы, для краткости, будемъ выражать неравенствами $A > B$ или $B > A$.

Слѣдующія аксіомы являются единственными правилами, которыя должны соблюдаться при ариѳметизаціи конечной совокупности предложеній.

Аксіома 1 (о достовѣрномъ предложеніи). Если $A \neq \Omega$, то $\Omega > A$.

Слѣдствіе 1. $\Omega > O$.

Аксіома 2 (о несовмѣстимыхъ предложеніяхъ). a) Если $A \backsim A_1$, $B \backsim B_1$, и кромѣ того, $(A \text{ и } B) = (A_1 \text{ и } B_1) = O$, то $(A \text{ или } B) \backsim (A_1 \text{ или } B_1)$; b) если же $A \backsim A_1$, $B > B_1$, то $(A \text{ или } B) > (A_1 \text{ или } B_1)$.

Слѣдствіе 2. Если $A \neq O$, то $A > O$.

Въ самомъ дѣлѣ, $\overline{A}$ или $A = \Omega$, $\overline{A}$ или $O = \overline{A}$; но $\Omega > \overline{A}$, поэтому $A > O$.

Слѣдствіе 3. Если A есть частный случай B, при чемъ $(\overline{A} \text{ и } B) \neq O$, то $B > A$.

Дѣйствительно, $B = [A \text{ или } (\overline{A} \text{ и } B)]$, $A = (A \text{ или } O)$, и такъ какъ $(\overline{A} \text{ и } B) > O$, то $B > A$.

17. Независимость и непротиворѣчивость аксіомъ.

Очевидно, эти аксіомы не могутъ быть слѣдствіемъ ранѣе установленныхъ предварительныхъ аксіомъ, т. к. ничто не мѣшало бы намъ, напр., принять, вопреки аксіомѣ 1, всѣ предложенія равновозможными, или напротивъ, только одну пару не равнозначныхъ предложеній признать равновозможными (такъ что, при $A \backsim A_1$, $B = B_1$ будемъ имѣть $(A \text{ или } B) \gtrless (A_1 \text{ или } B)$, (вопреки аксіомѣ 2). Покажемъ, что аксіома 1 не является также слѣдствіемъ изъ обѣихъ частей аксіомы 2. Для этого, возьмемъ какую-нибудь совокупность, составленную при помощи 3 элементарныхъ предложеній; положимъ, вѣроятности этихъ предложеній соотвѣтственно равными 1,—1,—2, а невозможному предложенію дадимъ вѣроятность 0. Мы получимъ вполнѣ опредѣленныя значенія для вѣроятности каждаго предложенія совокупности, если соблюдая аксіому 2, допустимъ, въ частности, что $(A \text{ или } B) \backsim$ вѣр. $A +$ вѣр. B, когда $(A \text{ и } B) = 0$. При этомъ, окажется, что $(a \text{ или } b) \backsim 0$, $c \backsim \Omega \backsim -2$, $(a \text{ или } c) \backsim b \backsim -1$, $(b \text{ или } c) \backsim -3$. Ясно, что первая часть аксіомы 2 также не можетъ быть слѣдствіемъ изъ аксіомы 1 и второй части аксіомы 2, ибо изъ конечнаго числа неравенствъ нельзя получить равенства.

Но и вторая часть аксіомы 2 не является слѣдствіемъ аксіомы 1 и первой части аксіомы 2. Дѣйствительно, возьмемъ какую-нибудь совершенную совокупность, составленную изъ n элементарныхъ предложеній A_1, A_2, ..., A_n. Условимся считать ихъ равновозможными: тогда равновозможными будутъ также всѣ ихъ объединенія по 2, и вообще всѣ объединенія, составленныя изъ k элементарныхъ предложеній, будутъ между собой равновозможны. Это заключеніе вытекаетъ только изъ аксіомы 2(a). Допуская, что соблюдается также аксіома 1, мы должны будемъ прибавить, что объединеніе изъ k предложеній не можетъ быть равновозможно объединенію изъ l предложеній, если $k \neq l$. Всякая функція $f(k)$, удовлетворяющая условію, что $f(k) \gtrless f(l)$, если цѣлыя числа k и l не равны, и $f(n) > f(k)[k = n-1, \ldots, 1, 0]$ можетъ служить значеніемъ вѣроятности объединенія изъ k предложеній. Мы можемъ допустить, напр., не противорѣча нашимъ допущеніямъ, что $f(1) < f(2) < \ldots < f(n-1) < f(0) < f(n)$. Но въ такомъ случаѣ, не будетъ соблюдена аксіома 2(b), т. к., въ силу этой послѣдней аксіомы, мы должны были бы имѣть (A_1 или A_2) $< (A_1$ или $O) = A_1$, т. к. $A_2 < O$ (потому что $f(1) < f(0)$), а между тѣмъ $f(2) > f(1)$, т. е. (A_1 или A_2) $> A_1$.

Напротивъ, если положимъ $f(0) < f(1) < f(2) \ldots < f(n)$, то окажутся выполнены и аксіома 1 и обѣ части аксіомы 2. Отсюда заключаемъ, что наши новыя аксіомы не только независимы между собой, но и не противорѣчатъ другъ другу.

Изъ принятыхъ нами аксіомъ вытекаетъ слѣдующая основная теорема теоріи вѣроятности.

18. Основная теорема.

Если предложеніе A есть объединеніе какихъ-нибудь m предложеній изъ нѣкоторыхъ n несовмѣстимыхъ единственно возможныхъ и равновозможныхъ предложеній, а предложеніе B есть объединеніе какихъ-нибудь m_1 предложеній изъ нѣкоторыхъ n_1 несовмѣстимыхъ, единственно и равновозможныхъ предложеній, то $A \backsim B$, когда $\frac{m}{n} = \frac{m_1}{n_1}$.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть $\frac{m}{n} = \frac{m_1}{n_1} = \frac{\mu}{\nu}$, гдѣ $\frac{\mu}{\nu}$ есть несократимая дробь. Въ такомъ случаѣ $m = k\mu$, $n = k\nu$, $m_1 = k_1\mu$, $n_1 = k_1\nu$, гдѣ k и k_1 цѣлыя числа. Обозначаемъ черезъ c_1, c_2, ..., c_m, ..., c_n, несовмѣстимыя единственно и равновозможныя предложенія, изъ которыхъ первыя m имѣютъ объединеніемъ A. Полагая далѣе $d_1 = (c_1$ или c_2 или $\ldots c_k)$, $d_2 = (c_{k+1}$ или $\ldots c_{2k})$ и т. д., мы составимъ ν несовмѣстимыхъ единственно- и равновозможныхъ (аксіома 2(a)) предложеній d_1,

$d_2, \ldots, d_\nu$, при чемъ первыя μ изъ нихъ имѣютъ объединеніемъ A. Точно также, обозначая черезъ $c'_1, c'_2, \ldots c'_{n_1}$, не совмѣстимыя, равно и единственно возможныя предложенія, изъ которыхъ m_1 имѣютъ объединеніемъ B, составимъ ν предложеній $d'_1, d'_2, \ldots d'_\mu$, несовмѣстимыхъ, единственно- и равновозможныхъ, изъ которыхъ μ имѣютъ объединеніемъ B. Но ясно, что $d_i \leqslant d'_k$, ибо, допустивши, напримѣръ, что $d_1 > d'_1$, мы имѣли бы вообще $d_i > d'_i$, а потому, примѣняя аксіому 2(b), $\Omega > \Omega$, что̀ невозможно; такимъ образомъ, $d_1 \leqslant d'_1$, $d_2 \leqslant d'_2$ и т. д., откуда

$$(d_1 \text{ или } d_2 \text{ или } \ldots d_\mu) \leqslant (d'_1 \text{ или } d'_2 \text{ или } \ldots d'_\mu),$$

т. е.

$$A \leqslant B \quad \text{ч. и т. д.}$$

19. Опредѣленіе математической вѣроятности.

Такимъ образомъ, коэффиціентъ, названный нами математической вѣроятностью A, вполнѣ опредѣленъ дробью $\frac{m}{n}$, гдѣ n есть число единственно- и равновозможныхъ несовмѣстимыхъ предложеній, изъ коихъ m имѣютъ объединеніемъ A. Этотъ коэффиціентъ является, слѣдовательно, функціей $\frac{m}{n}$, которую обозначимъ черезъ $\varphi\left(\frac{m}{n}\right)$. Функція $\varphi\left(\frac{m}{n}\right)$, на основаніи предыдущаго, должна быть *возрастающей*, и это необходимое условіе вмѣстѣ съ тѣмъ и достаточно для соблюденія всѣхъ принятыхъ нами аксіомъ, лишь бы функція $\varphi\left(\frac{m}{n}\right)$ была бы зафиксирована разъ на всегда для всѣхъ совокупностей, которыя могутъ быть присоединены къ данной. Такъ какъ возрастающую функцію $\varphi\left(\frac{m}{n}\right)$, которую нужно зафиксировать, можно выбрать произвольно, то для нея принимаютъ наиболѣе простое значеніе $\varphi\left(\frac{m}{n}\right) = \left(\frac{m}{n}\right)$, т. е. *математическою вѣроятностью A называютъ* $\frac{m}{n}$. Однако въ согласіи съ основными аксіомами, мы съ одинаковымъ правомъ могли бы также назвать вѣроятностью $\frac{m^2}{n^2}$, $\frac{m}{n-m}$ и т. д. Очевидно, что принятіе того или иного словеснаго опредѣленія также мало повліяло бы на выводы теоріи вѣроятностей, какъ измѣненіе единицы мѣры на выводы геометріи или механики. Измѣнилась бы только форма теоремъ, а не ихъ содержаніе; мы получили бы не новую теорію вѣроятностей, а изложеніе той же теоріи въ новой терминологіи. Такимъ образомъ соглашеніе, которое мы

вводимъ здѣсь, носитъ чисто технической характеръ [1]), въ противоположность основнымъ аксіомамъ, принятымъ выше, характеризующимъ сущность понятья вѣроятности: нарушеніе этихъ основныхъ аксіомъ, напротивъ, совершенно измѣнило бы содержаніе теоріи вѣроятностей.

Примѣчаніе. Дробь $\frac{m}{n-m}$, т. е. отношеніе числа благопріятныхъ случаевъ къ числу неблагопріятныхъ, или $\frac{\frac{m}{n}}{\frac{n-m}{n}}$, т. е. отношеніе вѣроятности предложенія къ вѣроятности его отрицанія, можно было бы вмѣстѣ съ Борелемъ (Le hasard, p. 58) назвать относительной вѣроятностью предложенія.

Замѣчаніе. Замѣтимъ, что, присоединяя къ данной совокупности новую, мы всегда должны и можемъ такъ распредѣлить, въ согласіи съ аксіомами, значенія вѣроятностей вновь вводимыхъ предложеній, чтобы въ соединенной совокупности данныя предложенія сохранили ту же вѣроятность, что и въ первоначальной. Дѣйствительно, пусть въ данной совокупности элементарныя предложенія A_1, A_2, $\ldots A_n$, равновозможны; слѣдовательно, всѣ предложенія этой совокупности послѣ выбора функціи $\varphi\left(\frac{m}{n}\right)$ имѣютъ вполнѣ опредѣленныя значенія. Присоединимъ вторую совокупность, построенную изъ элементарныхъ предложеній $B_1, B_2, \ldots B_k$. Условимся, напримѣръ, считать равновозможными въ соединенной совокупности всѣ совмѣщенія (A_i и B_j); въ такомъ случаѣ всѣ предложенія соединенной совокупности, при сохраненіи той же функціи φ, получатъ опредѣленныя вѣроятности, при чемъ всякое объединеніе вида (A_1 или A_2 или $\ldots A_m$), имѣвшее прежде вѣроятность, равную $\varphi\left(\frac{m}{n}\right)$, разсматриваемое, какъ объединеніе [(A_1 и B_1) или (A_1 и B_2) или $\ldots$ или (A_m и B_k)], должно получить вѣроятность $\varphi\left(\frac{km}{kn}\right) = \varphi\left(\frac{m}{n}\right)$; т. е. не измѣняетъ своего значенія. При этомъ всѣ предложенія B_j также окажутся равновозможными.

---

[1]) Если бы мы назвали вѣроятностью $\frac{m}{n-m}$, то напр., въ теоремѣ Бернулли, нужно было бы замѣнить отношеніе числа появленій событія къ общему числу опытовъ отношеніемъ числа появленій къ числу непоявленій. Соотвѣтствующее измѣненіе получила бы и формулировка теоремы сложенія вѣроятности: вѣроятность (A или B) была бы равна не суммѣ вѣроятностей $p+p_1$, а выраженію $\frac{p+p_1+2pp_1}{1-pp_1}$.

Такимъ образомъ въ данной совокупности предложеній можно условиться считать равновозможными любыя несовмѣстимыя и единственно возможныя предложенія A_1, A_2, $\ldots A_k$. Послѣ такого соглашенія опредѣленныя значенія получатъ вѣроятности тѣхъ и только тѣхъ предложеній, которыя являются объединеніями предложеній A_1, A_2, $\ldots$, A_k, или иными словами, которыя входятъ въ совокупность G, имѣющую элементарными предложеніями A_1, A_2, $\ldots A_k$. Послѣ этого другую группу единственно возможныхъ и несовмѣстимыхъ предложеній B_1, B_2, $\ldots$, B_l можно будетъ также принять за равновозможныя, если совокупность G_1, составленная изъ нихъ, *не* связана съ совокупностью G и т. д.

Дѣйствительно, никакое предложеніе α (кромѣ Ω) не является одновременно объединеніемъ элементарныхъ предложеній G и G_1. Если же α и β суть два несовмѣстимыя между собой предложенія G, и α_1 и β_1— два несовмѣстимыя предложенія G_1, то, благодаря принятому опредѣленію вѣроятности, соглашеніе, что $\alpha \leqslant \alpha_1$, $\beta \leqslant \beta_1$ повлечетъ (α или β) $\leqslant$ (α_1 или β_1), и $\alpha \leqslant \alpha_1$, $\beta > \beta_1$ повлечетъ (α или β) $>$ (α_1 или β_1), т. е. наши аксіомы не будутъ нарушены.

Что касается совмѣщеній и объединеній совмѣстимыхъ предложеній, то ихъ вѣроятности не вполнѣ опредѣлены, и для ихъ опредѣленія нужно будетъ новое соглашеніе, о которомъ рѣчь будетъ впереди. Во всякомъ случаѣ выше была отмѣчена возможность такого соглашенія.

20. Теорема сложенія.

Аксіома 2(а) можетъ быть формулирована иначе: если p есть вѣроятность A, p_1—вѣроятность B, то вѣроятность (A или B) есть функція $f(p, p_1)$, при A и B несовмѣстимыхъ между собой. Видъ функціи $f(p, p_1)$ зависитъ отъ выбора функціи $\varphi\left(\frac{m}{n}\right)$; не трудно вывести общую связь между этими функціями, но, послѣ выше сказаннаго, для насъ вполнѣ достаточно ограничиться случаемъ, когда $\varphi\left(\frac{m}{n}\right)=\frac{m}{n}$, что приводитъ, какъ увидимъ, къ $f(p, p_1)=p+p_1$. Обратно, если бы мы зафиксировали функцію f, которая, въ силу аксіомъ, должна быть только возрастающей, симметричной и удовлетворять уравненію $f[p, f(p_1, p_2)]=f(p_1, f(p, p_2))$, мы бы получили соотвѣтствующую функцію φ, и въ частности, изъ $f(p, p_1)=p+p_1$, можно бы также вывести $\varphi\left(\frac{m}{n}\right)=\frac{m}{n}H$, гдѣ H произвольное положительное число.

Теорема. *Если два несовмѣстимыя предложенія* A и B *имѣютъ соотвѣтственно вѣроятности* p и p_1, *то предложеніе* (A или B) *имѣетъ вѣроятность* $p+p_1$.

Эта теорема доказывается обыкновенно (см. А. А. Марковъ «Исчисленіе вѣроятностей» стр. 11 и 172) для случая, когда A и B представляютъ несовмѣстимыя объединенія единственно- и равновозможныхъ несовмѣстимыхъ предложеній, т. е. для того случая, когда непосредственное примѣненіе опредѣленія вѣроятности дѣлаетъ ее почти излишней. Въ дѣйствительности же теорема важна именно въ тѣхъ случаяхъ, для которыхъ она не доказывается. Для полноты доказательства необходима только новая ссылка на аксіому (2): на первую часть, если оба числа p и p_1 раціональны, и на вторую часть, если эти числа нераціональны.

Въ самомъ дѣлѣ, допустимъ сначала, что числа p и p_1 раціональны, такъ что $p=\frac{m}{n}$, $p_1=\frac{m_1}{n_1}$. Если мы присоединимъ къ нашей совокупности какую нибудь совокупность, несвязанную съ ней и содержащую nn_1 равновозможныхъ элементарныхъ предложеній, то предложеніе A', являющееся объединеніемъ какихъ-нибудь mn_1 изъ этихъ элементарныхъ предложеній, будетъ имѣть ту же вѣроятность $\frac{mn_1}{nn_1}=\frac{m}{n}=p$, что и A, предложеніе же B', являющееся объединеніемъ другихъ [1]) какихъ-нибудь m_1n изъ элементарныхъ предложеній, имѣетъ ту же вѣроятность $\frac{m_1n}{n_1n}=\frac{m_1}{n_1}=p_1$, что B. Въ такомъ случаѣ, (A' или B') будетъ объединеніемъ m_1n+n_1m изъ nn_1 элементарныхъ предложеній, а потому, согласно опредѣленію вѣроятности, $\frac{m_1n+n_1m}{nn_1}=\frac{m_1}{n_1}+\frac{m}{n}=p_1+p$ будетъ вѣроятностью (A' или B'), и въ силу аксіомы 2(а), будетъ также вѣроятностью (A или B), ч. и т. д.

Положимъ теперь, что числа p и p_1 (или только одно изъ нихъ) ирраціональны. Въ такомъ случаѣ, число p является предѣломъ раціональныхъ чиселъ: $\lambda_1<\lambda_2<\ldots<\lambda_n<\ldots$ и $\mu_1>\mu_2>\ldots>\mu_n>\ldots$, а число p_1—предѣломъ раціональныхъ чиселъ $\lambda'_1<\lambda'_2<\ldots<\lambda'_n<\ldots$, и $\mu'_1>\mu'_2>\ldots>\mu'_n>\ldots$

Обозначимъ черезъ A_n нѣкоторое предложеніе, имѣющее вѣроятность λ_n, и черезъ B_n—несовмѣстимое съ нимъ предложеніе, имѣющее

[1]) Если бы $p_1+p>1$, то вмѣсто B' пришлось бы взять предложеніе $\overline{A'}$, и такимъ образомъ мы убѣдились бы въ недопустимости такого предположенія.

вѣроятность [1]) λ'_n. Тогда, благодаря аксіомѣ 2(b), имѣемъ (A_n или B_n)$<$ $<$(A или B), т. е. $\lambda_n + \lambda'_n < (A$ или $B)$. Точно также обозначаемъ черезъ A'_n и B'_n предложенія, имѣющія соотвѣтственно вѣроятностью μ_n и μ'_n; въ такомъ случаѣ получимъ, по той же аксіомѣ, (A или B)$<$ $< \mu_n + \mu'_n$. А потому, на основаніи извѣстной теоремы о предѣлахъ, находимъ (A или B)$\leqslant p + p_1$, ч. и т. д.

21. Слѣдствіе. Изъ предыдущаго вытекаетъ, что

Условіе необходимое и достаточное для того, чтобы числа $p_1, p_2, \ldots$ *могли быть соотвѣтственными вѣроятностями предложеній* $A_1, A_2, \ldots$ *данной конечной совокупности, заключается въ томъ, чтобы вѣроятность объединенія двухъ или нѣсколькихъ несовмѣстимыхъ предложеній была равна суммѣ вѣроятностей этихъ послѣднихъ, чтобы достовѣрное предложеніе имѣло вѣроятность* 1 (а слѣдовательно, невозможное — вѣроятность 0), *остальныя же предложенія — вѣроятности, заключенныя между* O и 1 ($0 < p < 1$).

Отсюда слѣдуетъ, въ частности, что, если двѣ совокупности G и G_1 не связаны, то вѣроятности, приписываемыя предложеніямъ G, не связаны логически съ вѣроятностями предложеній G_1, т. е. *ариѳметизація* одной совокупности не зависитъ отъ ариѳметизаціи другой. Напротивъ, если совокупности G и G_1 связаны, то предложеніямъ G_1 нельзя давать вполнѣ произвольныя вѣроятности послѣ того, какъ вѣроятности предложеній G установлены.

Въ нѣкоторыхъ случаяхъ даются вѣроятности не всѣхъ предложеній совокупности. Тогда необходимо только, чтобы оставалась возможность располагать неопредѣленными еще вѣроятностями такъ, чтобы соблюсти указанное выше основное условіе [2]).

§ 5.

Совмѣщеніе и осуществленіе предложеній.

22. Совмѣщеніе предложеній.

Очевидно, что вѣроятность (A и B), вообще, не можетъ быть опредѣленной функціей вѣроятности A и вѣроятности B; достаточно

---

[1]) Два такія предложенія только въ томъ случаѣ не могутъ быть конструированы, если $\lambda_n + \lambda'_n > 1$. Замѣняя тогда предложеніе B_n черезъ $\overline{A}_n$ (т. е. отрицаніе A_n), мы нашли бы, примѣняя аксіому 2, что предложеніе (A или B) имѣетъ вѣроятность больше единицы, т. е. больше Ω, что противорѣчитъ аксіомѣ 1; слѣдовательно, числа p и p_1 не могутъ въ этомъ случаѣ быть вѣроятностями несовмѣстимыхъ предложеній.

[2]) Замѣтимъ, что аксіомы 1 и 2(b), вмѣстѣ взятыя, равнозначны слѣдующей одной аксіомѣ: *неравенство* $A > B$ *означаетъ, что существуетъ* (или можетъ быть присоединено) *предложеніе* $B_1 \leqslant B$, *являющееся частнымъ случаемъ* A.

замѣтить, что, если A и B несовмѣстимы, то (A и B) $\backsim O$, напротивъ, если $A = B$, то (A и B) $\backsim A$. Единственное общее положеніе, которое можно высказать это то, что вѣр. (A и B) $+$ вѣр. (A и $\overline{B}$) $=$ вѣр. A, а потому, въ частности, вѣр. (A и B) $\leqq$ вѣр. A.

Вообще можно принять, что

$$\text{вѣр. } (A \text{ и } B) = \lambda p p_1,$$

гдѣ p и p_1 представляютъ соотвѣтственно вѣроятности A и B, а λ называется *коэффиціентомъ совмѣстимости* A съ B. Въ частности, $\lambda = 0$ въ томъ случаѣ, когда предложенія A и B несовмѣстимы.

Допустимъ, что мы имѣемъ ариѳметизованную совокупность, составленную изъ элементарныхъ предложеній A_1, A_2, ..., A_n, вѣроятности которыхъ p_1, p_2, p_n, ... удовлетворяютъ условію $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$. Присоединяя къ этой совокупности совокупность O, C, $\overline{C}$, Ω, въ которой вѣр. $C = p$, вѣр. $\overline{C} = q$ $(p + q = 1)$, мы ариѳметизуемъ соединенную совокупность, полагая

$$\text{вѣр. } (A_1 \text{ и } C) = \lambda_1 p_1 p, \text{ вѣр. } (A_2 \text{ и } C) = \lambda_2 p_2 p, \ldots$$
$$\ldots \text{ вѣр. } (A_n \text{ и } C) = \lambda_n p_n p,$$

гдѣ

$$0 \leqq \lambda_i \leqq \frac{1}{p}$$

и

$$\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 \ldots + \lambda_n p_n = 1;$$

въ такомъ случаѣ

$$\text{вѣр. } (A_i \text{ и } \overline{C}) = p_i - \lambda_i p_i p = p_i (1 - \lambda_i p).$$

Поэтому, обозначая черезъ μ_i коэффиціентъ совмѣстимости A_i съ $\overline{C}$, имѣемъ

$$\lambda_i p + \mu_i q = 1.$$

Обстоятельство, что данныя совокупности не связаны между собой, выражалось бы тѣмъ, что $\lambda_i > 0$, $\mu_i > 0$. Особаго вниманія заслуживаетъ случай, когда совокупности *независимы*.

23. Независимыя предложенія.

Предложеніе A называется *независимымъ* отъ B, если коэффиціентъ совмѣстимости A съ B равенъ коэффиціенту совмѣстимости A съ $\overline{B}$.

Теорема. *Если предложеніе A независимо отъ B, то предложеніе B независимо отъ A, и коэффиціентъ совмѣстимости A съ B равенъ единицѣ.*

Дѣйствительно, если

$$\text{вѣр. } (A \text{ и } B) = \lambda p_1 p, \quad \text{вѣр. } (A \text{ и } \overline{B}) = \lambda p_1 q,$$

гдѣ $p + q = 1$, то

$$\text{вѣр. } (A \text{ и } B) + \text{вѣр. } (A \text{ и } \overline{B}) = \lambda p_1 = p_1,$$

откуда $\lambda = 1$. Но, если $\lambda = 1$, то

$$\text{вѣр. } (\overline{A} \text{ и } B) = p - p_1 p = q_1 p,$$

т. е. B независимо отъ A.

Слѣдствіе. *Если несовмѣстимыя между собой предложенія A и A_1 оба независимы отъ B, то (A или A_1) также независимо отъ B.* Вообще, если коэффиціенты совмѣстимости A и A_1 съ B оба равны λ, то коэффиціентъ совмѣстимости (A или A_1) съ B также равенъ λ. Если всѣ элементарныя предложенія совокупности H независимы отъ элементарныхъ предложеній совокупности H_1, то вообще каждое предложеніе H независимо отъ каждаго предложенія H_1. Такія двѣ совокупности называютъ независимыми между собой. Очевидно, независимыми могутъ быть только не связанныя совокупности; но, разумѣется, не связанныя совокупности не всегда независимы.

Не останавливаясь на дальнѣйшемъ развитіи этихъ соображеній, укажемъ лишь вкратцѣ, какъ опредѣляется независимость n предложеній $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Предложенія $A_1, A_2, \ldots, A_n$, вѣроятности которыхъ соотвѣтственно равны $p_1, p_2, \ldots, p_n$, называются *попарно* независимыми, если совмѣщеніе (A_i и A_k) имѣетъ вѣроятность $p_i p_k$; они называются независимыми *по три*, если каждое совмѣщеніе (A_i и A_k и A_l) имѣетъ вѣроятность $p_i p_k p_l$ и т. д. Если данныя предложенія независимы попарно, по три, ... и по n, то они называются (совершенно) независимыми. Для совершенной независимости n предложеній требуется, слѣдовательно, $C_n^2 + C_n^3 + \ldots + C_n^n = 2^n - n - 1$ условій; при этомъ можно показать, что ни одно изъ этихъ условій не является слѣдствіемъ изъ остальныхъ [1]) (напр., если 3 предложенія попарно независимы, то изъ этого не вытекаетъ, что они совершенно независимы).

---

[1]) Исходя изъ понятія осуществленія одного или нѣсколькихъ предложеній, А. А. Марковъ въ «Исчисленіи вѣроятностей» (стр. 19) даетъ другое опредѣленіе: «нѣсколько событій $E_1, E_2, \ldots E_n$ мы называемъ независимыми другъ отъ друга, если

24. Осуществленіе предложенія.

Изъ предыдущаго слѣдуетъ, что для вычисленія вѣроятности совмѣщенія предложеній нѣтъ необходимости вводить новыя допущенія; потому важнѣйшіе отдѣлы теоріи вѣроятностей (теорема Бернулли и всѣ ея обобщенія, извѣстныя подъ названіемъ закона большихъ чиселъ) вытекаютъ исключительно изъ принятыхъ нами аксіомъ. Однако на практикѣ вмѣсто *коэффиціента совмѣстимости* часто бываетъ удобнѣе пользоваться другимъ понятіемъ—понятіемъ вѣроятности одного предложенія при условіи осуществленія другого, существенно необходимымъ только для построенія отдѣла вѣроятностей гипотезъ. Для этого мы введемъ новое допущеніе, которое дополнитъ данное ранѣе (§ 3) опредѣленіе преобразованія совокупности, которое мы назвали *осуществленіемъ предложенія*.

Аксіома осуществленія.

При осуществленіи предложенія A данной совокупности H, всякое предложеніе α, бывшее частнымъ случаемъ A, въ преобразованной совокупности получаетъ вѣроятность, которая зависитъ только отъ вѣроятностей A и α въ данной совокупности H.

Такимъ образомъ, по опредѣленію, вѣроятность α_A предложенія α послѣ осуществленія A есть

$$\alpha_A = f(\text{вѣр. } \alpha,\ \text{вѣр. } A). \qquad (11)$$

Данное нами въ § 3 опредѣленіе осуществленія предложенія A опредѣляетъ только логическую структуру преобразованной совокупности; а, такъ какъ вѣроятности предложеній не вполнѣ опредѣляются логи-

---

вѣроятность каждаго изъ нихъ не зависитъ отъ существованія или несуществованія остальныхъ, такъ что никакое указаніе на существованіе или несуществованіе какихъ нибудь изъ событій E_1, E_2, ..., E_n не мѣняетъ вѣроятности прочихъ». Не трудно убѣдиться въ равнозначности обоихъ опредѣленій; но слѣдуетъ замѣтить, что въ послѣднемъ опредѣленіи нѣкоторыя условія являются необходимымъ слѣдствіемъ изъ остальныхъ, какъ это видно изъ того, что число этихъ условій равно $n(2^{n-1}-1)$; такимъ образомъ, сопоставляя это число съ найденнымъ ранѣе, видимъ, что $(n-2)2^{n-1}+1$ условій являются здѣсь слѣдствіями изъ остальныхъ; напр., для $n=2$ независимость B отъ A есть слѣдствіе независимости A отъ B. Замѣтимъ, что во многихъ случаяхъ, (напр., въ неравенствѣ Чебышева) существенно расчленить понятіе независимости, и особо важную роль играетъ *попарная* зависимость или независимость.

ческой структурой совокупности, которой онѣ принадлежатъ, то наше новое допущеніе [1]) не можетъ быть слѣдствіемъ изъ предыдущихъ.

Покажемъ теперь, что аксіома осуществленія не противорѣчитъ ранѣе принятымъ аксіомамъ, если только функція f въ формулѣ (11) имѣетъ значеніе

$$\alpha_A = \frac{\text{вѣр.}\,\alpha}{\text{вѣр.}\,A} \tag{12}$$

Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ структура остающихся въ преобразованной совокупности предложеній та же, что въ данной, то

$$f(\text{вѣр.}\,\alpha + \text{вѣр.}\,\beta,\ \text{вѣр.}\,A) = f(\text{вѣр.}\,\alpha,\ \text{вѣр.}\,A) + f(\text{вѣр.}\,\beta,\ \text{вѣр.}\,A)$$

Но, какъ извѣстно, [2]) для этого необходимо, чтобы

$$f(\text{вѣр.}\,\alpha,\ \text{вѣр.}\,A) = \text{вѣр.}\,\alpha \,.\, F(\text{вѣр.}\,A).$$

Съ другой стороны, по условію, $A_A = 1$; слѣдовательно, $(\text{вѣр.}\,A).F(\text{вѣр.}\,A) = 1$, а потому

$$\alpha_A = \frac{\text{вѣр.}\,\alpha}{\text{вѣр.}\,A}. \tag{12}$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ мы видимъ, что опредѣленная нами функція α_A даетъ всѣмъ предложеніямъ преобразованной совокупности вѣроятности,

---

[1]) Аналогичную аксіому, относящуюся только къ совокупностямъ, въ которыхъ элементарныя предложенія равновозможны, мы находимъ въ «Исчисленіи вѣроятностей» А. А. Маркова (стр. 10). Разъяснимъ нашу аксіому на примѣрѣ. Если всякое размѣщеніе изъ двухъ картъ въ полной колодѣ имѣетъ одну и ту же вѣроятность $\left(\frac{1.}{52.51}\right)$, то, по теоремѣ сложенія, вѣроятность, что 1-я (или 2-я) изъ вынутыхъ картъ есть червонный валетъ, равна $\frac{51}{52.51} = \frac{1}{52}$; когда становится извѣстнымъ, что первая карта есть червонная дама, то лишь, благодаря аксіомѣ осуществленія, всѣ размѣщенія, содержащія эту даму, остаются равновозможны, а потому вѣроятность второй картѣ оказаться червоннымъ валетомъ становится равной $\frac{1}{51}$. Если бы мы исходили только изъ предположенія, что, при вынимании одной карты, всѣ карты равновозможны, то аксіома осуществленія была бы не достаточна, чтобы признать всѣ размѣщенія по 2 карты равновозможными, что̀ является естественнымъ, если замѣтить, что легко осуществить опытъ, при которомъ эти размѣщенія не оказались бы равновозможны.

[2]) Изъ функціональнаго уравненія $f(x+y) = f(x) + f(y)$ выводятъ сначала, что $f(nx) = nf(x)$, для всякаго цѣлаго n. Полагая затѣмъ $nx = my$, гдѣ m также цѣлое число, получаютъ $nf(x) = mf(y)$, откуда $f\left(\frac{n}{m}x\right) = \frac{n}{m}f(x)$. Т. к. функція $f(x)$ конечна ($|f(x)| \leqq 1$, при $0 \leqq x \leqq 1$), то изъ равенства $f(nx) = nf(x)$ мы заключаемъ, что $f(x)$ стремится къ нулю вмѣстѣ съ x, откуда слѣдуетъ, что функція $f(x)$ непрерывна, а потому равенство $f(tx) = tf(x)$, доказанное для всякаго раціональнаго значенія t, справедливо всегда. Слѣдовательно, $f(t) = tf(1)$.

удовлетворяющія условію ариѳметизаціи (21), если только вѣроятности предложеній первоначальной совокупности этому условію удовлетворяли, и слѣдовательно, не противорѣчитъ основнымъ аксіомамъ.

25. Теорема умноженія вѣроятностей.

Вѣроятность (A и B) равна вѣроятности A, умноженной на вѣроятность B послѣ осуществленія A.

Въ самомъ дѣлѣ, предложеніе (A и B) послѣ осуществленія A равнозначно (Ω и B) $= B$. Поэтому вѣроятность (A и B) послѣ осуществленія A

$$(A \text{ и } B)_A = B_A = \frac{\text{вѣр.}(A \text{ и } B)}{\text{вѣр.}A}.$$

Слѣдовательно, вѣр. (A и B) $=$ (вѣр. A).B_A, ч. и т. д.

Примѣчаніе. Изъ теоремы умноженія вѣроятностей, въ частности, вытекаетъ положеніе: *если α есть частный случай A, то вѣроятность α зависитъ только отъ вѣроятности A и отъ вѣроятности α послѣ осуществленія A.* Это положеніе равнозначно такому: *если α есть частный случай A, β есть частный случай B, то вѣроятности α и β равны между собой, коль скоро A и B равновѣроятны, и вѣроятность α послѣ осуществленія A равна вѣроятности β послѣ осуществленія B.*

Это предложеніе можетъ замѣнить данную выше аксіому осуществленія, т. к. изъ него можно вывести, подобно предыдущему, теорему умноженія.

Введеніе понятія вѣроятности одного предложенія послѣ осуществленія другого позволяетъ дать другое опредѣленіе независимости:

Если вѣроятность B_A послѣ осуществленія A равна первоначальной вѣроятности B, то B независимо отъ A.

Слѣдствіе. Если B независимо отъ A, то A независимо отъ B и вѣр. (A и B) $=$ (вѣр. A).(вѣр. B).

26. Теорема Байеса.

Вѣроятность A_B послѣ осуществленія B равна

$$A_B = \frac{(\text{вѣр.}A).B_A}{\text{вѣр.}B}.$$

Въ самомъ дѣлѣ,

$$A_B = \frac{\text{вѣр.}(A \text{ и } B)}{\text{вѣр.}B} = \frac{(\text{вѣр.}A).B_A}{\text{вѣр.}B}.$$

Допущеніе (24) является единственнымъ основаніемъ теоремы Байеса и ея слѣдствій, выводъ которыхъ не представляетъ принципіальныхъ трудностей.

Глава III.

Безконечныя совокупности предложеній.

§ 6.

Распространеніе предварительныхъ аксіомъ на безконечныя совокупности.

27. Совершенныя совокупности. Основное требованіе, которое мы должны поставить при разсмотрѣніи безконечныхъ совокупностей предложеній, заключается въ томъ, чтобы правила символическаго счисленія, которыя мы установили въ § 1 для конечныхъ совокупностей, не измѣнились бы отъ того, что мы тѣ же самыя предложенія будемъ считать принадлежащими нѣкоторой безконечной совокупности. *Совокупность предложеній (конечную или безконечную), къ которымъ примѣнимы всѣ выше упомянутыя правила мы называемъ совершенной.* Однако, нѣкоторыя изъ допущеній, которыя для конечныхъ совокупностей являлись слѣдствіями изъ другихъ, для безконечныхъ совокупностей дѣлаются новыми самостоятельными аксіомами.

Дѣйствительно, *существованіе истиннаго предложенія*, которое для конечной совокупности было слѣдствіемъ изъ аксіомъ $(a — d)$, въ безконечной совокупности является новымъ допущеніемъ. Въ самомъ дѣлѣ, разсмотримъ совокупность правильныхъ дробей $\frac{p}{2^n}$, написанныхъ въ бинарной системѣ (0,101; 0,011 и т. п.); подъ операціей «или» будемъ подразумѣвать составленіе новой дроби изъ двухъ данныхъ дробей такъ, что на каждомъ мѣстѣ ставится наибольшая изъ цифръ, стоящихъ на соотвѣтствующемъ мѣстѣ въ данныхъ дробяхъ (0,101 или 0,011=0,111). Въ этой совокупности не будетъ числа, соотвѣтствующаго истинному предложенію, которое должно было бы быть представлено безконечною дробью $0{,}111\ldots = 1$. Но мы можемъ присоединить къ нашимъ дробямъ 1, чтобы осуществить аксіому истиннаго предложенія; если же присоединимъ 0, то получимъ также и невозможное предложеніе.

Второе новое допущеніе, которое здѣсь должно быть сдѣлано, между тѣмъ какъ въ конечной совокупности оно было слѣдствіемъ изъ предыдущихъ, это *существованіе совмѣщенія двухъ предложеній* (A и B).

Наконецъ, третье и послѣднее дополнительное допущеніе — *распространеніе ограничительнаго принципа на безконечныя объединенія предложеній.*

Въ примѣрѣ бинарныхъ дробей (включая 0 и 1), который мы только что ввели, совмѣщеніе двухъ предложеній существуетъ и представлено дробью, имѣющей на каждомъ мѣстѣ меньшее изъ двухъ значеній (0 и 1), стоящихъ на томъ же мѣстѣ въ данныхъ дробяхъ. Вмѣстѣ съ тѣмъ ко всякой парѣ предложеній здѣсь примѣнимъ и *ограничительный принципъ*, такъ что всѣ свойства совмѣщеній и, въ частности, теоремы распредѣлительности остаются въ силѣ. Кромѣ того, въ нашемъ примѣрѣ соблюденъ также и *принципъ единственности*, однако разсматриваемая совокупность не будетъ совершенной.

Дѣйствительно, согласно данному въ § 1 (8) опредѣленію отрицанія, отрицаніемъ всякаго предложенія A называется объединеніе всѣхъ несовмѣстимыхъ съ нимъ предложеній. Но несовмѣстимыхъ предложеній будетъ безконечное множество, и мы должны прежде всего обобщить данное въ § 1 опредѣленіе *объединенія.*

Объединеніемъ $H=(A$ или B или $C\ldots)$ *безконечнаго множества предложеній* A, B, C, ... *называется предложеніе* H, *удовлетворяющее условіямъ* [1]): 1) *если* y *есть частный случай какого-нибудь предложеній* A, B, $C\ldots$, *то* y *есть частный случай* H; 2) *если каждое изъ предложеній* A, B, C, ... *есть частный случай* M, *то и* H *есть частный случай* M.

Согласно этому опредѣленію, принципы перемѣстительный и ассоціативный распространены на безконечныя объединенія, какъ и принципъ тожественности. Но остается открытымъ вопросъ о распространеніи *принципа ограничительнаго.* Въ разсмотрѣнномъ примѣрѣ это распространеніе не осуществляется. Въ самомъ дѣлѣ, объединеніемъ всякой безконечной совокупности различныхъ предложеній будетъ истина, напримѣръ, объединеніемъ дробей: 0,01; 0,001; 0,0001 и т. д., а между тѣмъ предложеніе 0,1 не представляетъ собой объединенія изъ частныхъ случаевъ этихъ дробей, ибо каждая изъ послѣднихъ не имѣетъ иныхъ частныхъ случаевъ, кромѣ O и самой себя. Благодаря нарушенію

[1]) Ясно, что, если объединеніе H существуетъ, то оно единственно. Дѣйствительно, если H_1 также удовлетворяетъ первому условію, то $(A$ или $H_1)=H_1$, $(B$ или $H_1)=H_1$, и т. д., поэтому H или $H_1=H_1$; но, такъ какъ H_1 удовлетворяетъ и второму условію, то H или $H_1=H$; слѣдовательно, $H=H_1$.

обобщеннаго ограничительнаго принципа, нарушается слѣдствіе 17: *Если* $\overline{x} = \Omega$, *то* $x = 0$, такъ какъ безконечное объединеніе несовмѣстимыхъ съ x предложеній можетъ оказаться совмѣстимо съ x.

Итакъ для того, чтобы сдѣлать безконечную совокупность *совершенною*, нужно прибавить послѣднее допущеніе—*обобщеніе ограничительнаго принципа:*

Объединеніе $\alpha = (A$ или B или $C \ldots)$ *безконечной совокупности предложеній не содержитъ иныхъ частныхъ случаевъ, кромѣ объединеній изъ частныхъ случаевъ* A, B, C, ...

28. Совмѣщеніе предложеній и отрицаніе.

Слѣдствіе 18 въ § 1 устанавливаетъ связь между совмѣщеніемъ и отрицаніемъ предложеній. Въ силу этого возможно опредѣлить совмѣщеніе на основаніи формулы

$$(A \text{ и } B) = \overline{(\overline{A} \text{ или } \overline{B})}. \qquad (13)$$

Поэтому введенное нами дополнительное допущеніе существованія совмѣщенія двухъ предложеній можетъ быть замѣнено слѣдующимъ:

Если A *есть предложеніе совокупности, то существуетъ и объединеніе всѣхъ несовмѣстимыхъ* [1]) *съ* A *предложеній, которое и называется* $\overline{A}$, *т. е. отрицаніемъ* A.

Вслѣдствіе обобщеннаго ограничительнаго принципа, A и $\overline{A}$ несовмѣстимы; вслѣдствіе принципа единственности, A или $\overline{A} = \Omega$. Кромѣ того, $A = \overline{\overline{A}}$; дѣйствительно, если α или $A = A$, то α и $\overline{A} = 0$, поэтому α или $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{A}}$, откуда A или $\overline{A} = \overline{A}$; съ другой стороны, если α или $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$, то α и $\overline{A} = 0$, но, такъ какъ α есть частный случай $\Omega = A$ или $\overline{A}$, то α (вслѣдствіе ограничительнаго принципа) есть объединеніе изъ частнаго случая A и частнаго случая $\overline{A}$, поэтому α есть частный случай A.

Докажемъ теперь, что предложеніе

$$z = \overline{(\overline{A} \text{ или } \overline{B})}$$

соотвѣтствуетъ опредѣленію, данному въ § 1 (5).

Для этого замѣтимъ сначала, что изъ $(C$ или $D) = D$ вытекаетъ $\overline{C}$ или $\overline{D} = \overline{C}$, т. к. предложеніе, не совмѣстимое съ D, т. е. принадлежащее $\overline{D}$, не совмѣстимо и съ C, а потому принадлежитъ также $\overline{C}$.

---

[1]) Опредѣленіе *несовмѣстимости* двухъ предложеній можетъ быть сохранено прежнее.

Итакъ намъ нужно показать вопервыхъ, что z есть частный случай A и частный случай B, и вовторыхъ, что всякій совмѣстный частный случай A и B есть частный случай z. Въ самомъ дѣлѣ, $\overline{A}$ есть частный случай ($\overline{A}$ или $\overline{B}$), поэтому $z = \overline{(\overline{A} \text{ или } \overline{B})}$ есть, въ силу только что доказаннаго, частный случай A; по этой же причинѣ z есть частный случай B.

Пусть, съ другой стороны, x есть частный совмѣстный случай A и B, тогда $\overline{A}$ есть частный случай $\overline{x}$, и $\overline{B}$ есть также частный случай $\overline{x}$, а потому ($\overline{A}$ или $\overline{B}$) есть частный случай $\overline{x}$; слѣдовательно, наконецъ, x есть частный случай $z = \overline{(\overline{A} \text{ или } \overline{B})}$, что и требовалось доказать.

Изъ формулы (13) мы выводимъ также опредѣленіе совмѣщенія безконечнаго множества предложеній

$$(A \text{ и } B \text{ и } C\ldots) = \overline{(\overline{A} \text{ или } \overline{B} \text{ или } \overline{C}\ldots)}. \qquad (14)$$

Такимъ образомъ ассоціативность и коммутативность распространяются и на безконечныя совмѣщенія.

Покажемъ, что и теоремы распредѣлительности распространяются на безконечныя объединенія. Покажемъ сначала, что

$$h \text{ и } [A \text{ или } B\ldots] = [(h \text{ и } A) \text{ или } (h \text{ и } B)\ldots]. \qquad (15)$$

Въ самомъ дѣлѣ,

$$[A \text{ или } B \text{ или } C\ldots] = [(h \text{ и } A) \text{ или } (\overline{h} \text{ и } A) \text{ или } (h \text{ и } B) \text{ или } \ldots] =$$
$$= \{[(h \text{ и } A) \text{ или } (h \text{ и } B) \text{ или } \ldots] \text{ или } [(\overline{h} \text{ и } A) \text{ или } (\overline{h} \text{ и } B) \text{ или } \ldots]\}.$$

Поэтому

$$h \text{ и } [A \text{ или } B \text{ или } C\ldots] =$$
$$= \{h \text{ и } [(h \text{ и } A) \text{ или } (h \text{ и } B) \text{ или } \ldots]\} \text{ или } \{[h \text{ и } [(\overline{h} \text{ и } A) \text{ или } \ldots]\} =$$
$$= [(h \text{ и } A) \text{ или } (h \text{ и } B) \text{ или } \ldots], \text{ ч. и т. д.}$$

Примѣчаніе. Въ этомъ доказательствѣ предполагается, что обѣ части равенства (15) имѣютъ смыслъ. Но можно убѣдиться, что, если (A или $B\ldots$) существуетъ, то существуетъ и вторая часть равенства (15). Дѣйствительно, $z = h$ и $[A$ или $B\ldots]$ имѣетъ частнымъ случаемъ всякое изъ совмѣщеній (h и A), (h и B) и т. д., поэтому $[(h$ и $A)$ или $(h$ и $B)\ldots]$ будетъ имѣть смыслъ и окажется равнымъ z, если только мы покажемъ, что всякое предложеніе M, отличное отъ z, имѣющее частнымъ случаемъ (h и A), (h и B) и т. д., включаетъ въ себя z; но, если бы z не было частнымъ случаемъ M, то z включало

бы въ себя $z_1 = (z \text{ и } M)$, которое имѣло бы тѣ же частные случаи (h и A) и т. д., такъ что $(z \text{ и } \overline{z_1}) \neq 0$ было бы не совмѣстимо ни съ однимъ изъ предложеній (h и A), (h и B) и т. д., между тѣмъ какъ всякій частный случай z долженъ быть совмѣстимъ съ h и, по крайней мѣрѣ, съ однимъ изъ предложеній A, B и т. д.; слѣдовательно, z есть частный случай M.

Полагая $\overline{h} = h_1$, $\overline{A} = A_1$, $\overline{B} = B_1$ и т. д. и беря отрицанія обѣихъ частей равенства (15), получимъ вторую теорему распредѣлительности

$$h_1 \text{ или } [A_1 \text{ и } B_1 \text{ и } \ldots] = [(h_1 \text{ или } A_1) \text{ и } (h_1 \text{ или } B_1) \text{ и } \ldots]. \quad (15^{\text{bis}})$$

29. Обобщенный конструктивный принципъ.

Изъ сдѣланныхъ нами допущеній отнюдь не вытекаетъ существованіе безконечнаго объединенія изъ какихъ-угодно предложеній. Допущеніе, что *существуетъ всякое безконечное объединеніе изъ предложеній данной совокупности*, т. е. *обобщеніе конструктивнаго принципа* не является обязательнымъ для совершенной совокупности [1]). Если мы примемъ этотъ общій принципъ, то изъ него, въ частности, будутъ вытекать и существованіе истиннаго предложенія, и существованіе совмѣщенія.

Примѣръ совершенной совокупности, въ которой соблюденъ обобщенный конструктивный принципъ, мы получили бы, если бы дополнили только что разсмотрѣнную систему конечныхъ бинарныхъ дробей совокупностью всѣхъ безконечныхъ дробей, при условіи, что дроби, имѣющія въ періодѣ 1, не будутъ считаться равнозначными тѣмъ конечнымъ дробямъ, которымъ онѣ должны быть равны, какъ предѣлы безконечной суммы членовъ геометрической прогрессіи. Для того, чтобы избѣжать этого противорѣчія съ общепринятыми ариѳметическими допущеніями, достаточно разсматривать наши дроби, какъ написанныя не въ бинарной, а въ какой-нибудь другой, напримѣръ, десятичной системѣ.

---

[1]) Обобщенный конструктивный принципъ (вмѣстѣ съ ограничительнымъ) осуществляется въ схемѣ § 2, если мы распространимъ ее на безконечное множество простыхъ чиселъ и ихъ всевозможныхъ произведеній, лишенныхъ квадратныхъ множителей. Истинному предложенію, по прежнему, соотвѣтствуетъ 1, ложному—будетъ соотвѣтствовать 0, который мы опредѣлимъ, какъ число, кратное всѣмъ цѣлымъ числамъ. Однако составленная система, въ которой всегда существуетъ и совмѣщеніе двухъ предложеній (наименьшее кратное), не будетъ совершенной, ибо въ ней нарушенъ принципъ единственности—всякая пара предложеній (кромѣ 0) здѣсь совмѣстима; поэтому отрицаніемъ всякаго предложенія былъ бы 0. Замѣтимъ, что теоремы распредѣлительности остаются тѣмъ не менѣе въ силѣ.

Примѣръ совершенной совокупности, гдѣ обобщенный конструктивный принципъ нарушенъ, мы получимъ, разсматривая, кромѣ конечныхъ дробей, только тѣ безконечныя дроби, которыя имѣютъ періодомъ 1. Дѣйствительно, какъ и въ предыдущемъ случаѣ, здѣсь соблюдены всѣ необходимыя условія совершенной совокупности, а между тѣмъ нѣкоторыя объединенія, какъ напримѣръ, объединеніе всѣхъ дробей, имѣющихъ 1 только на четныхъ мѣстахъ, лишены смысла, т. к. всякая дробь вида: 0,01111...; 0,010111...; 0,0101011..., должна была бы имѣть частнымъ случаемъ это объединеніе, но безконечная дробь 0,01(01)... не включена въ нашу совокупность.

Примѣчаніе. Когда мы, кромѣ 0,111..., разсматриваемъ только конечныя дроби, то мы могли бы сказать, что эта безконечная дробь 0,111..., соотвѣтствующая истинѣ, является объединеніемъ всякаго безконечнаго множества предложенія. Однако, во избѣжаніе недоразумѣній, въ виду того, что мы всегда должны оперировать только съ совершенными совокупностями, мы будемъ включать уже въ самое понятіе *объединенія* допущеніе ограничительнаго принципа, поэтому объединеніе, не удовлетворяющее этому принципу, слѣдуетъ считать лишеннымъ смысла, и необходимо помнить, въ частности, что обобщенный конструктивный принципъ постулируетъ существованіе именно тѣхъ объединеній, которыя присущи совершеннымъ совокупностямъ, т. е. подразумѣваетъ обобщенный ограничительный принципъ.

Изъ формулы (14) видно, что изъ обобщеннаго конструктивнаго принципа вытекаетъ существованіе совмѣщенія всякаго безконечнаго множества предложеній.

30. Классификація безконечныхъ совершенныхъ совокупностей.

Въ § 3 мы показали, что всѣ конечныя совершенныя совокупности имѣютъ одну и ту же структуру, а именно, составляются при помощи элементарныхъ предложеній. Напротивъ, существованіе элементарныхъ предложеній отнюдь не обязательно для безконечныхъ совершенныхъ совокупностей, и такимъ образомъ отнюдь не является необходимымъ условіемъ примѣнимости всѣхъ установленныхъ выше правилъ логическаго счисленія.

Мы можемъ поэтому совершенныя совокупности раздѣлить на четыре типа:

I. *Совокупности 1-го типа*, для которыхъ

a) Не всякое предложеніе представляетъ собой объединеніе элементарныхъ предложеній,

b) Обобщенный конструктивный принципъ не соблюденъ.

II. *Совокупности 2-го типа*, для которыхъ

a) Не всякое предложеніе представляетъ собой объединеніе элементарныхъ предложеній,

b) Обобщенный конструктивный принципъ соблюденъ.

III. *Совокупности 3-го типа*, для которыхъ

a) Всякое предложеніе есть объединеніе элементарныхъ предложеній,

b) Обобщенный конструктивный принципъ не соблюденъ.

IV. *Совокупности 4-го типа*, для которыхъ

a) Всякое предложеніе есть объединеніе элементарныхъ предложеній,

b) Обобщенный конструктивный принципъ соблюденъ.

Разсмотрѣнные выше оба примѣра совершенныхъ совокупностей относятся къ 3-му и 4-му типу, для которыхъ принципъ существованія элементарныхъ предложеній соблюденъ: дроби, содержащія лишь одну единицу, соотвѣтствуютъ элементарнымъ предложеніямъ. Построимъ примѣры совокупностей первыхъ двухъ типовъ.

Разсмотримъ совокупность всѣхъ *чистыхъ* періодическихъ дробей, составленныхъ изъ 0 и 1 (можно даже предположить ихъ написанными въ бинарной системѣ—тогда это будутъ раціональныя числа вида $\frac{a}{2^n-1}\Big)$. Придавая прежній смыслъ операціи «или», мы убѣждаемся, что совокупность *совершенна*; но объединеніе безконечнаго множества различныхъ дробей будетъ, либо истиной (0,111...), либо не будетъ имѣть смысла. Такимъ образомъ обобщенный конструктивный принципъ нарушенъ, но кромѣ того, никакая изъ разсматриваемыхъ дробей не представляетъ элементарнаго предложенія, т. к., взявши двойной періодъ и замѣнивъ одну изъ единицъ нулемъ, мы получимъ частный случай этой дроби. Слѣдовательно, построенная совокупность принадлежитъ 1-му типу.

Для построенія совокупности 2-го типа, вернемся къ совокупности всѣхъ дробей, соотвѣтствующей 4-му типу, но вмѣсто каждой дроби x беремъ функцію $f(x)$, опредѣленную условіемъ, что $f(x)=0$, если x содержитъ лишь конечное число единицъ, т. е. представленъ конечною дробью; $f(x)=0{,}111\ldots$, если x содержитъ конечное число нулей; и наконецъ, $f(x)=x$ для остальныхъ значеній x. Пусть $f(x)$ представляетъ каждое предложеніе, а $[f(x)$ или $f(x_1)]=f(y)$, гдѣ y имѣетъ наибольшую изъ цифръ $f(x)$ и $f(x_1)$ на каждомъ мѣстѣ. Наша совокупность будетъ совершенной, и кромѣ того,

$$[f(x) \text{ или } f(x_1) \text{ или } \ldots f(x_n) \text{ или } \ldots]=f(y)$$

всегда имѣетъ смыслъ [1]), т. е. обобщенный конструктивный принципъ соблюденъ, При этомъ, элементарныхъ предложеній не будетъ, т. к. дробь, имѣющая безчисленное множество единицъ, всегда можетъ быть разложена на двѣ аналогичныя дроби. Мы построили, слѣдовательно, совокупность 2-го типа.

Примѣчаніе. Соединеніе совокупностей того же типа приводитъ къ совокупности того же типа. Напротивъ, послѣ осуществленія нѣкоторыхъ предложеній, типъ совокупности можетъ измѣниться, какъ мы въ этомъ сейчасъ убѣдимся.

31. Совокупности 2-го и 4-го типа и теорема Кантора.

Если мы какую нибудь совершенную совокупность разложимъ всѣми возможными способами на простыя конечныя совокупности O, A, $\overline{A}$, Ω; 0, B, $\overline{B}$, Ω; и т. д., то для совокупности 2-го и 4-го типа совмѣщенія (A и $B\ldots$) будутъ всегда имѣть смыслъ, и слѣдовательно, будутъ представлять либо невозможное предложеніе, либо элементарное предложеніе. Пусть α, β, γ и т. д. будутъ всѣ элементарныя предложенія, и пусть A будетъ какое-нибудь не элементарное предложеніе; въ такомъ случаѣ, если α', β', $\gamma'\ldots$ представляютъ всѣ входящія въ A элементарныя предложенія, и $A'=(\alpha'$ или β' или $\gamma'\ldots)$, то $A''=(A$ и $\overline{A'})$ будетъ лишено элементарныхъ предложеній.

Если мы положимъ всѣ предложенія A'' равнозначными O, то наша совокупность будетъ совокупностью 4-го типа. Если же всѣ $A'=O$, то совокупность будетъ лишена элементарныхъ предложеній и назовется простой совокупностью 2-го типа. Такимъ образомъ въ самой общей совокупности 2-го типа любое предложеніе является объединеніемъ одного предложенія простой совокупности 2-го типа съ однимъ предложеніемъ совокупности 4-го типа. Обозначая черезъ Ω' объединеніе всѣхъ A' и черезъ Ω''—объединеніе всѣхъ A'', мы замѣчаемъ, что $\overline{\Omega'}=\Omega''$. Отсюда мы заключаемъ, что, осуществляя Ω'', т. е. *полагая $\Omega''=\Omega$, мы превращаемъ всякую совокупность 2-го типа въ простую совокупность того же типа; наоборотъ, полагая $\Omega'=\Omega$, мы превратимъ нашу совокупность въ совокупность 4-го типа.*

Къ совокупностямъ 2-го и 4-го типа примѣнима слѣдующая теорема Кантора:

Мощность совокупности 2-го и 4-го типа выше мощности совокупности ея элементарныхъ предложеній.

---

[1]) y на каждомъ мѣстѣ имѣетъ наибольшую изъ цифръ $f(x)$, $f(x_1)$, …, $f(x_n)$, …, такъ что, если x, x_1, … конечныя дроби, то $f(x)=f(x_1)=\ldots=0$, а потому и $f(y)=0$.

Это вытекаетъ изъ того, что, составляя всевозможныя объединенія элементарныхъ предложеній, мы получаемъ предложенія, которыя различны, если только они отличаются хотя бы однимъ элементарнымъ предложеніемъ.

Слѣдствіе 1. *Совокупность 4-го типа конечна или же имѣетъ мощность не меньшую, чѣмъ continuum.*

Слѣдствіе 2. *Исчислимая совокупность 2-го типа либо вовсе лишена элементарныхъ предложеній, либо имѣетъ ихъ только конечное число.*

Послѣ того, какъ нами доказано существованіе совершенныхъ совокупностей четырехъ типовъ, намъ остается показать возможность ихъ ариѳметизаціи, въ соотвѣтствіи съ принципами, установленными во 2-й главѣ.

Такимъ образомъ, въ частности, *при установленіи вѣроятностей предложеній безконечной совокупности, мы не можемъ придавать значеніе 1 вѣроятности не достовѣрнаго предложенія* A, ибо, беря конечную часть нашей совокупности (O, A, $\overline{A}$, Ω), мы пришли бы къ противорѣчію. Я потому подчеркиваю это очевидное замѣчаніе, что, благодаря не достаточной отчетливости формулировки принциповъ теоріи вѣроятностей, всѣ математики, повидимому, примирялись съ этимъ противорѣчіемъ.

§ 7.

Ариѳметизація безконечныхъ совокупностей.

32. Ариѳметизація совокупностей 1-го типа.

Наиболѣе важный и характерный образецъ совершенной совокупности 1-го типа, которымъ мы можемъ ограничиться, получается слѣдующимъ образомъ.

Возьмемъ исчислимую совокупность конечныхъ несвязанныхъ между собой совокупностей: (O, $\overline{A}$, A, Ω), (0, A_1, $\overline{A}_1$, Ω), (0, A_2, $\overline{A}_2$, Ω) и т. д., которыя мы послѣдовательно присоединяемъ. Совокупность H разсматриваемыхъ нами предложеній составляется изъ предложеній, входящихъ въ какую-нибудь изъ получающихся такимъ образомъ конечныхъ совокупностей.

Совокупность H исчислима и совершенна 1-го типа; въ ней имѣются, кромѣ конечныхъ объединеній, лишь тѣ безконечныя объединенія (α_1 или α_2...), которыя обладаютъ свойствомъ, что только ограниченное число изъ входящихъ въ нихъ элементовъ не являются частными случаями предыдущихъ, т. е. такія объединенія, которыя непосредственно приводятся къ конечнымъ.

Конкретный примѣръ совокупности H даетъ нами неограниченное повтореніе опыта бросанія монеты. Всякое предложеніе, относящееся къ конечному числу бросаній, имѣетъ опредѣленный смыслъ, но предложенія, не входящія ни въ какую конечную совокупность, (напримѣръ: «число выпаденій орла при неограниченномъ повтореніи опыта равно числу выпаданій рѣшетки» или «орелъ выпадаетъ не менѣе 10 разъ») лишены смысла.

Изъ выше сказаннаго ясно, что вѣроятности всѣхъ предложеній совокупности H опредѣляются послѣдовательно, на основаніи соглашеній и теоремъ, установленныхъ для конечныхъ совокупностей, безъ противорѣчій, и не вводя никакихъ новыхъ допущеній.

О вѣроятностяхъ предложеній, не имѣющихъ смысла, конечно, не можетъ быть рѣчи; но вмѣсто этого часто можетъ представлять интересъ вычисленіе *предѣла* вѣроятностей нѣкоторыхъ перемѣнныхъ имѣющихъ смыслъ предложеній, когда число повтореній опыта неограниченно возрастаетъ.

Напримѣръ, вѣроятность, что орелъ выпадаетъ не менѣе 10 разъ при k бросаніяхъ стремится къ предѣлу 1, если k безконечно возрастаетъ, но это отнюдь не означаетъ, что мы *обязаны* придавать смыслъ предложенію, орелъ выпадаетъ не менѣе 10 разъ при безконечномъ числѣ бросаній, ибо возможно, что какъ бы долго мы ни повторяли опытъ, нельзя будетъ установить, осуществилось ли предложеніе или нѣтъ.

Точно также вѣроятность, что отношеніе числа выпаданій орла и рѣшетки будетъ, послѣ достаточно большого числа бросаній монеты, сколь угодно мало отличаться отъ единицы, имѣетъ предѣломъ 1, если вѣроятность выпаденія орла равна $\frac{1}{2}$.

Съ той же самой точки зрѣнія, которую можно назвать *финитистской*, не вводя никакихъ особыхъ допущеній, мы можемъ обосновать и такъ называемыя *геометрическія вѣроятности*. Замѣтимъ сейчасъ же, что, съ логической стороны, финитистская точка зрѣнія, разсматривающая только совокупности 1-го типа, вполнѣ допустима, но въ примѣненіи къ геометріи, она является нѣсколько искусственной, т. к. выдѣленіе особой категоріи предложеній, имѣющихъ смыслъ, является условнымъ и не находитъ себѣ достаточнаго интуитивно-геометрическаго основанія.

33. Геометрическія вѣроятности.

Основной задачей на вычисленіе вѣроятностей въ геометріи, къ которой приводятся всѣ остальныя, является опредѣленіе вѣроятности, что нѣкоторая точка M, находящаяся на отрѣзкѣ AB, помѣщается на нѣкоторой части его PQ.

Для разрѣшенія этой основной задачи можно поступить слѣдующимъ образомъ: полагая, для простоты письма, отрѣзокъ AB равнымъ 1 и точку A совпадающей съ началомъ O, возьмемъ выше приведенную схему совокупности перваго типа и условимся составлять бинарную дробь, въ которой на первомъ мѣстѣ 1 соотвѣтствуетъ предложенію A, 0 соотвѣтствуетъ $\overline{A}$, точно также на второмъ мѣстѣ цифра 1 соотвѣтствуетъ A_1, цифра 0 — $\overline{A}_1$ и т. д. Въ такомъ случаѣ каждому предложенію нашей совершенной совокупности H перваго типа соотвѣтствуютъ всѣ конечныя или безконечныя бинарныя дроби, у которыхъ на одномъ или нѣсколькихъ данныхъ мѣстахъ стоятъ опредѣленныя цифры. Такимъ образомъ, напримѣръ, предложенію ($\overline{A}$ и A_1) соотвѣтствуютъ всѣ дроби, которыя начинаются цифрами 0,01, т. е. всѣ числа x, удовлетворяющія условію $0{,}01 < x < 0{,}1$. При этомъ знаки $<$ и $>$ можно замѣнить также соотвѣтственно знаками $\leqq$ и $\geqq$, т. к. предложенія $x = a$, гдѣ a естьданная конечная или безконечная дробь, слѣдуетъ разсматривать, какъ лишенныя смысла, ибо они соотвѣтствуютъ совмѣщенію безконечнаго множества предложеній.

Изъ выше сказаннаго вытекаетъ, что, если P и Q суть двѣ точки отрѣзка 01, абсциссы которыхъ выражаются конечными бинарными дробями a и b ($a < b$), то вѣроятность неравенства $a < x < b$, т. е. того, что x находится на отрѣзкѣ PQ, получится непосредственнымъ примѣненіемъ теоремъ умноженія и сложенія вѣроятностей, коль скоро нами приняты опредѣленныя значенія для вѣроятностей предложеній A, A_1, A_2, ... Не трудно видѣть, что при полной произвольности (въ соотвѣтствіи лишь съ основными допущеніями) этихъ послѣднихъ вѣроятностей мы приходимъ къ выраженію

$$F(b) - F(a)$$

для вѣроятности $a < x < b$, гдѣ $F(z)$ произвольная, не убывающая функція, опредѣленная лишь для конечныхъ бинарныхъ значеній z, при чемъ для указанныхъ значеній

$$F(b) - F(0) \leqq 1;$$

и, кромѣ того, для $b = 1$,

$$F(1) - F(0) = 1.$$

Въ частности, если предложенія A, A_1 и т. д. независимы между собой и имѣютъ всѣ вѣроятности равныя $\frac{1}{2}$, то мы прійдемъ къ принимаемому обыкновенно значенію функціи $F(z) = z$.

Какъ было сказано выше, предложеніе $x = a$, съ финитистской точки зрѣнія, лишено смысла. Тѣмъ не менѣе, можно говорить о *предѣлѣ* вѣроятности неравенствъ

$$a < x < a + h \text{ или } a - h < x < a,$$

когда h стремится къ нулю. Вѣроятность перваго изъ этихъ неравенствъ имѣетъ предѣломъ

$$\text{пред.}_{h=0} [F(a+h) - F(a)],$$

второго —

$$\text{пред.}_{h=0} [F(a) - F(a-h)].$$

Какъ извѣстно, эти предѣлы существуютъ, и въ частности, для непрерывной функціи равны 0.

Аналогичнымъ образомъ мы не имѣемъ права, оставаясь на финитистской точкѣ зрѣнія, говорить о предложеніи

$$\alpha < x < \beta,$$

если α и β не конечныя бинарныя дроби, а должны вмѣсто этого разсматривать предѣлъ вѣроятности неравенства

$$a_n < x < b_n,$$

гдѣ a_n и b_n представляютъ конечныя дроби, имѣющія соотвѣтственно предѣломъ α и β.

Если $F(z)$ функція непрерывная, то предѣлъ разсматриваемыхъ вѣроятностей не зависитъ отъ того будетъ ли $\alpha \gtrless a_n$ и $\beta \gtrless b_n$, и будетъ равенъ $F(\beta) - F(\alpha)$. Въ общемъ же случаѣ, можно, согласно обычнымъ обозначеніямъ, положить $F(\beta + 0) = \text{пред.}\, F(b_n)$, если $b_n > \beta$, и $F(\beta - 0) = \text{пред.}\, F(b_n)$, если $b_n < \beta$.

Такимъ образомъ, неравенства $a_n < x < b_n$ имѣютъ вѣроятности, предѣлъ которыхъ равенъ

$$F(\beta \pm 0) - F(\alpha \pm 0)$$

въ зависимости отъ того, справа-ли или слѣва a_n и b_n приближаются къ своимъ предѣламъ α и β.

Примѣняя извѣстныя теоремы теоріи предѣловъ, можно въ большинствѣ случаевъ съ предѣлами вѣроятностей оперировать такъ же, какъ съ вѣроятностями. Напримѣръ, если отрѣзки $\alpha\beta$ и $\alpha'\beta'$ не имѣютъ

общей части, то вѣроятность соблюденія одного или другого изъ неравенствъ

$$\alpha < x < \beta, \quad \alpha' < x < \beta',$$

при предположеніи, что оба они имѣютъ смыслъ, равна суммѣ вѣроятностей каждаго изъ нихъ. Если же оба или одно изъ нашихъ неравенствъ должно быть разсматриваемо, какъ лишенное смысла, то нужно сказать, что предѣлъ вѣроятности, что будетъ соблюдено одно изъ неравенствъ

$$a_n < x < b_n; \quad a'_n < x < b'_n$$

равенъ суммѣ предѣловъ вѣроятностей каждаго изъ нихъ, гдѣ a_n, b_n, a'_n b'_n имѣютъ соотвѣтственно предѣлами α, β, α', β'.

Изъ предыдущаго достаточно ясно, что, если предѣлъ вѣроятностей нѣкоторыхъ предложеній равенъ нулю, то это не означаетъ, что существуетъ, т. е. имѣетъ смыслъ, при данной постановкѣ вопроса, и предѣльное предложеніе, но, если окажется, что оно имѣетъ смыслъ, то оно невозможно. Аналогичное утвержденіе относится и къ предѣлу вѣроятностей равному 1.

Примѣчаніе. Вмѣсто бинарныхъ дробей можно было бы совершенно также разсматривать десятичныя или другія дроби. Въ каждомъ случаѣ опредѣленный смыслъ придается только предложеніямъ, утверждающимъ, что на опредѣленныхъ мѣстахъ стоятъ опредѣленныя цифры. Поэтому неравенства, имѣющія смыслъ въ одной системѣ, въ другой системѣ оказываются лишенными смысла, и наоборотъ.

34. Ариѳметизація совокупностей 2-го типа.

Разсматривая ту же исчислимую совокупность предложеній H, которую мы получили выше присоединеніемъ совокупностей $(O, \overline{A}, A, \Omega)$, $(O, A_1, \overline{A}_1, \Omega)$ и т. д., мы можемъ условиться считать невозможнымъ всякое безконечное совмѣщеніе (A и A_1 и ...) или, что то же самое, считать достовѣрнымъ всякое безконечное объединеніе [1]) вида (A или A_1 или A_2 ...). Такимъ образомъ мы составимъ *простую совершенную совокупность 2-го типа* (т. е. совокупность, лишенную элементарныхъ предложеній, но подчиняющуюся обобщенному конструктивному принципу).

Изслѣдуемъ геометрическія вѣроятности съ этой новой точки зрѣнія, логически столь же пріемлемой, какъ и финитистская. Мы приходимъ при помощи той же системы бинарныхъ дробей къ заключенію, что

[1]) Что касается всѣхъ безконечныхъ объединеній вида (A_{k_1} или A_{k_2} или ...), то они могутъ представлять собой новыя предложенія, въ противномъ случаѣ они всѣ будутъ истинными, какъ совмѣстныя со всякимъ предложеніемъ совокупности.

всякое опредѣленное равенство $a = x$ слѣдуетъ считать невозможнымъ, т. е. такимъ, что оно не можетъ быть никогда точно осуществлено [1]) или установлено, а потому знаки $\leq$ и $<$ равнозначны.

Нужно замѣтить, что утвержденіе, что x есть нѣкоторое число, заключенное между 0 и 1, отнюдь не означаетъ того, что x можетъ быть опредѣлено съ абсолютною точностью, и этимъ объясняется кажущійся парадоксъ, будто бы истинное предложеніе является объединеніемъ безчисленнаго множества невозможныхъ. Намъ необходимо однако болѣе детально изслѣдовать вѣроятности геометрическихъ предложеній, какъ предложеній, принадлежащихъ къ совершеннымъ совокупностямъ 2-го типа, и дополнить соотвѣтствующимъ образомъ принципы исчисленія вѣроятностей при распространеніи ихъ на безконечныя совокупности.

35. Обобщеніе теоремы сложенія вѣроятностей.

До сихъ поръ, при вычисленіи вѣроятностей предложеній безконечныхъ совокупностей, какъ 1-го, такъ и 2-го типа, мы пользовались тѣмъ, что каждое изъ разсматриваемыхъ нами предложеній принадлежало также нѣкоторой конечной совокупности, а потому, примѣняя принципы теоріи вѣроятностей конечныхъ совокупностей, возможно было вычислить требуемыя вѣроятности. Благодаря этому, наши вычисленія не зависятъ отъ того, допускаемъ мы или нѣтъ, что аксіома 2 (§ 4) распространяется на объединенія безконечнаго множества несовмѣстимыхъ предложеній, или, что то же самое, распространяется ли теорема сложенія на безконечныя объединенія или нѣтъ.

Дѣйствителѣно, изъ того, что теорема сложенія справедлива для конечнаго числа предложеній, мы можемъ заключить только, что, если A есть объединеніе исчислимой совокупности несовмѣстимыхъ предложеній $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, имѣющихъ соотвѣтственными вѣроятностями $p_1, p_2, \ldots$, то вѣроятность P предложенія A болѣе или равна суммѣ ряда

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n + \ldots,$$

который, слѣдовательно, долженъ быть сходящимся.

Въ совокупностяхъ 1-го типа вопросъ о распространеніи или нераспространеніи теоремы сложенія вовсе не можетъ представиться, т. к. тамъ, по существу дѣла, безконечное объединеніе лишь тогда имѣетъ смыслъ, когда оно приводится къ конечному. Иначе обстоитъ дѣло съ совокупностями 2-го типа. Вводя ту же монотонную функцію

---

[1]) Въ 1-й главѣ (§ 3) мы разъяснили, что невозможное предложеніе характеризуется тѣмъ, что оно не можетъ стать истиннымъ или достовѣрнымъ, т. е. осуществиться.

$F(z)$, которую мы опредѣлили выше, и разсматривая предложеніе

$$\alpha < x < \beta,$$

мы видимъ, что на этотъ разъ оно имѣетъ смыслъ для всякихъ α и β, и вѣроятность его w будетъ подчинена только двумъ условіямъ:

$$w \leqq F(\beta + 0) - F(\alpha - 0),$$
$$w \geqq F(\beta - 0) - F(\alpha + 0).$$

Если, по крайней мѣрѣ, одна изъ точекъ α и β есть точка разрыва функціи F, то знакъ равенства не можетъ имѣть мѣста въ обоихъ условіяхъ. Въ такомъ случаѣ, если мы положимъ, что

$$w > F(\beta - 0) - F(\alpha + 0),$$

обобщенная теорема сложенія будетъ непримѣнима къ предложенію, что x находится на отрѣзкѣ $\alpha\beta$, разсматриваемомъ, какъ предѣлъ суммы отрѣзковъ: $(a_1 b_1)$, $(a_1 a_2)$, $(b_1 b_2)$, $(a_2 a_3)$, $(b_2 b_3)\ldots$, входящихъ въ $\alpha\beta$. Если же

$$w < F(\beta + 0) - F(\alpha - 0),$$

то теорема сложенія непримѣнима къ отрицанію этого предложенія. И въ томъ, и въ другомъ случаѣ возможно достовѣрное предложеніе

$$0 < x < 1$$

разсматривать, какъ безконечное объединеніе такихъ предложеній, сумма вѣроятностей которыхъ имѣетъ предѣлъ меньшій, чѣмъ единица.

Примѣчаніе. Такъ какъ всѣ точки не могутъ быть точками разрыва для монотонной функціи F, то всегда будутъ и такія безконечныя объединенія, къ которымъ обобщенная теорема сложенія примѣнима. Отсюда мы заключаемъ, что допущеніе или нарушеніе обобщенной теоремы сложенія равносильно распространенію или нераспространенію аксіомы 2 на безконечныя объединенія.

Нарушеніе теоремы сложенія или аксіомы 2 для безконечныхъ объединеній влечетъ за собой нарушеніе [1]) теоремы умноженія для безконечныхъ совмѣщеній, а также нѣкоторыхъ свойствъ математиче-

---

[1]) Обобщеніе теоремы умноженія вѣроятностей является слѣдствіемъ изъ обобщенной теоремы сложенія. Дѣйствительно, вѣр. (A и B и…и L и…)=1—вѣр. ($\overline{A}$ или $\overline{B}$ или… …или $\overline{L}$ или …)=1—пред. вѣр. ($\overline{A}$ или $\overline{B}$ … или $\overline{L}$)=пред. вѣр. (A и B … и L).

скихъ ожиданій. Это нарушеніе представляло бы значительныя неудобства, потому что, даже придавая опредѣленный смыслъ предѣльнымъ предложеніямъ, какъ напримѣръ, предложенію $x = a$, или предложенію «при безграничномъ повтореніи опыта событіе A произойдетъ по крайней мѣрѣ одинъ разъ», мы обыкновенно болѣе интересуемся вѣроятностями перемѣнныхъ предложеній, для которыхъ разсматриваемое предложеніе является предѣломъ, и хотимъ поэтому, чтобы вѣроятность послѣдняго была въ свою очередь предѣломъ этихъ вѣроятностей [1]). Эта непрерывность зависимости между предложеніями и ихъ вѣроятностями приводитъ къ необходимости распространить аксіому 2, а вмѣстѣ съ ней и теорему сложенія и умноженія на безконечное множество предложеній.

Итакъ обобщеніе аксіомы 2 есть единственное новое допущеніе, какое присоединяется къ прежнимъ, и такимъ образомъ мы получаемъ основной общій принципъ теоріи вѣроятностей безконечныхъ или конечныхъ совокупностей:

Условіе необходимое и достаточное для того, чтобы $p_1, p_2, \ldots$ *могли быть, соотвѣтственно, вѣроятностями предложеній* $A_1, A_2, \ldots$ *данной безконечной совершенной совокупности, заключается въ томъ, чтобы вѣроятность всякаго предложенія, входящаго въ совокупность и являющагося объединеніемъ конечнаго или безконечнаго числа предложеній этой совокупности, была равна суммѣ (предѣлу суммы) вѣроятностей послѣднихъ, чтобы достовѣрное предложеніе имѣло вѣроятность 1 (слѣдовательно, невозможное—вѣроятность 0), остальныя же предложенія—вѣроятности, заключенныя между* 0 и 1 ($0 < p < 1$).

Что касается понятія вѣроятности одного предложенія послѣ осуществленія другого, и коэффиціента совмѣстимости предложеній, то намъ здѣсь нечего прибавить, по существу, къ тому, что было сказано во 2-й главѣ (§ 5).

---

[1]) Если, напримѣръ, событіе A при первомъ опытѣ имѣетъ вѣроятность $\frac{1}{2}$, при второмъ $\frac{1}{4}$, при третьемъ $\frac{1}{8}$ и т. д., то, независимо отъ этихъ значеній вѣроятностей, мы вправѣ были бы утверждать, что наступленіе событія A по крайней мѣрѣ одинъ разъ достовѣрно, потому что наше утвержденіе совмѣстимо со всякимъ результатомъ конечнаго числа опытовъ. Однако предѣлъ вѣроятности, что событіе A произойдетъ при k опытахъ, гдѣ k безгранично возрастаетъ, будетъ $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{1}{16}+\ldots<\frac{3}{4}<1$. Нарушеніе теоремы сложенія имѣетъ послѣдствіемъ въ данномъ случаѣ, что оно замаскировываетъ тотъ фактъ, что осуществленіе предложенія A въ какомъ-нибудь конечномъ опытѣ становится съ теченіемъ времени все болѣе невѣроятнымъ.

36. Изслѣдованіе функціи F(z).

Наше допущеніе, что совокупность H есть простая совокупность 2-го типа, т. е. предположеніе, что безконечныя совмѣщенія подобныя (A и A_1 и ...) невозможны, въ связи съ обобщенной теоремой сложенія, означаетъ, что предѣлъ вѣроятности неравенствъ $a-h<x<a+h$, гдѣ h стремится къ 0, есть 0, а потому функція $F(z)$ *непрерывна*. Обратно, если функція $F(z)$ непрерывна, то совокупность предложеній $a<x<b$ (гдѣ $0\leqq a\leqq b\leqq 1$), и ихъ всевозможныхъ объединеній есть совокупность 2-го типа, т. е. лишенная элементарныхъ предложеній.

Обыкновенно, на функцію $F(z)$ налагается еще бо́льшее ограниченіе: ее предполагаютъ дифференцируемой, такъ что $F(z)=\int_0^z f(z)dz$. Это ограниченіе связано со слѣдующимъ свойствомъ:

Теорема. *Если* $\left(\frac{1}{2}+\alpha_n\right)$ и $\left(\frac{1}{2}-\alpha_n\right)$ *представляютъ собой, соотвѣтственно, вѣроятности n-ой цифры бинарной дроби быть единицей и нулемъ, то условіе необходимое и достаточное для того, чтобы* $F(z)=\int_0^z f(x)dx$, *гдѣ* $f(x)$ *ограничена, непрерывна при* $x\gtrless\frac{k}{2^n}$, *и* $\left[f\left(\frac{k}{2^n}+0\right)-f\left(\frac{k}{2^n}-0\right)\right]$ *стремится къ 0 съ возрастаніемъ n, состоитъ въ томъ, что рядъ* $\sum\alpha_n$ *долженъ быть абсолютно сходящимся*[1]).

Въ самомъ дѣлѣ, абсолютная сходимость ряда $\sum\alpha_n$ равнозначна равномѣрной сходимости всевозможныхъ произведеній

$$\prod_{i=1}^{\infty}(1\pm 2\alpha_i). \tag{16}$$

Произведеніе вида

$$\prod_{i=1}^{i=n}\left(\frac{1}{2}\pm\alpha_i\right)=F\left(\frac{k+1}{2^n}\right)-F\left(\frac{k}{2^n}\right)$$

представляетъ вѣроятность неравенствъ

$$\frac{k}{2^n}<x<\frac{k+1}{2^n}. \tag{17}$$

Изъ сходимости произведеній (16) вытекаетъ, слѣдовательно, существо-

[1]) Если послѣдующія цифры не независимы отъ предыдущихъ, то на мѣсто абсолютной сходимости $\Sigma\alpha_n$, нужно поставить равномѣрную сходимость всѣхъ различныхъ произведеній $\prod(1+2\alpha_n)$.

ваніе конечнаго положительнаго предѣла

$$\text{пред. } 2^n\left[F\left(\frac{k+1}{2^n}\right)-F\left(\frac{k}{2^n}\right)\right]=f(x), \tag{18}$$

гдѣ x опредѣляется неравенствами (17), при безконечномъ возрастаніи n. Вслѣдствіе равномѣрной сходимости произведеній (16), функція $f(x)$ непрерывна для x отличныхъ отъ $\frac{k}{2^n}$, и кромѣ того величина $f\left(\frac{k}{2^n}+0\right)-f\left(\frac{k}{2^n}-0\right)$, которая, вообще, отлична отъ нуля, при n достаточно большомъ (и k нечетномъ), можетъ быть сдѣлана сколь угодно малой. Поэтому функція $f(x)$ интегрируема (въ смыслѣ Римана).

Равенство (18) можемъ представить въ видѣ

$$F\left(\frac{k+1}{2^n}\right)-F\left(\frac{k}{2^n}\right)=\left(f(x)+\varepsilon_k\right)\delta, \tag{18 bis}$$

гдѣ $\delta=\frac{1}{2^n}$, и ε_k равномѣрно стремится къ 0, при возрастаніи n. Слѣдовательно,

$$F\left(\frac{k+1}{2^n}\right)=\sum_0^k\left[f(x)+\varepsilon_k\right]\delta;$$

откуда

$$F(x)=\int_0^x f(x)dx, \tag{19}$$

или

$$F'(x)=f(x)$$

въ точкахъ непрерывности $f(x)$ (т. е. при $x\gtrless\frac{k}{2^n}$), въ точкахъ же $x=\frac{k}{2^n}$ правая производная функціи $F(x)$ равна $f(x+0)$, а лѣвая производная ея равна $f(x-0)$.

Обратно, изъ равенства (19) вытекаетъ (18) для значеній x, при которыхъ $f(x)$ непрерывна; а потому всѣ произведенія (16) сходятся, ч. и т. д.

Аналогичная теорема можетъ быть такимъ же образомъ доказана и для другихъ системъ счисленія. Отсюда вытекаетъ

Слѣдствіе. *Условіе необходимое и достаточное, чтобы функція* $F(x)$ *имѣла вездѣ непрерывную производную* [1]) *заключается въ томъ, чтобы въ двухъ системахъ (напримѣръ, въ бинарной и тернарной) счисленія вѣроятность* n*-ой цифры получить одно изъ* h *возможныхъ значеній была равна* $\frac{1}{h}+\alpha_n^{(h)}$, *гдѣ всѣ произведенія* $\prod_{n=1}^{\infty}(1+h\alpha_n^{(h)})$ *сходятся.*

Примѣчаніе. Изъ доказанной теоремы видно, что всѣ разнообразные законы распредѣленія вѣроятностей, опредѣляемые произвольной функціей $f(x)$, отличаются лишь значеніями вѣроятностей первыхъ бинарныхъ (или, что то же самое, десятичныхъ) знаковъ, послѣдующія же цифры во всякомъ случаѣ стремятся стать равновозможными. Такимъ образомъ всякіе опредѣленные законы послѣдовательности цифръ разсматриваемыхъ дробей, какъ напримѣръ, періодичность, ни при какой

---

[1]) Замѣтимъ, что для существованія конечной производной $F(x)$ въ данной точкѣ x достаточно, чтобы

$$\text{пред.}_{h=0}\frac{F(x+\lambda h)-F(x)}{F(x+h)-F(x)}=\lambda.$$

Дѣйствительно, замѣтимъ, что, при ε сколь угодно маломъ, можно выбрать x настолько малымъ, чтобы имѣть

$$\frac{F(x+\lambda h)-F(x)}{F(x+h)-F(x)}=\lambda(1+\varepsilon'),$$

гдѣ $|\varepsilon'|<\varepsilon$, какъ только $|\lambda h|<\alpha$, $|h|<\alpha$. Выбирая такимъ образомъ нѣкоторое опредѣленное значеніе h, получимъ $F(x+h)-F(x)=Mh$; поэтому

$$F(x+\lambda h)-F(x)=M\lambda h(1+\varepsilon'),$$

откуда

$$\frac{F(x+\lambda h)-F(x)}{\lambda h}=M(1+\varepsilon').$$

Но такъ какъ ε можно было взять сколь угодно малымъ, то

$$\frac{F(x+\lambda h)-F(x)}{\lambda h}$$

сколь угодно мало отличается отъ нѣкотораго конечнаго числа M, если λh стремится къ 0, ч. и т. д.

Въ большинствѣ случаевъ, при примѣненіи теоріи вѣроятностей, это условіе явно выполняется. Можно доказать, что приведенное условіе является также необходимымъ для существованія конечной производной (отличной отъ 0).

функціи $f(x)$ не могутъ быть осуществлены. Ариѳметизація геометрической совокупности при помощи какой бы то ни было непрерывной функціи $f(x)$ исключаетъ возможность опредѣленныхъ равенствъ $x = a$, и наоборотъ, если по характеру задачи опредѣленныя равенства $x = a$ могутъ быть осуществлены, то это не только исключаетъ возможность существованія непрерывной функціи $f(x)$, но даже дѣлаетъ невозможною непрерывность $F(x)$.

Опредѣленіе. Мы называемъ функцію $F(x)$ *непрерывной въ узкомъ смыслѣ слова, если* $\sum|F(\beta_n) - F(\alpha_n)|$ *всегда стремится къ нулю вмѣстѣ съ* $\sum|\beta_n - \alpha_n|$. Очевидно, въ частности, что существованіе конечной производной [1]) является достаточнымъ условіемъ для того, чтобы $F(x)$ была непрерывна въ узкомъ смыслѣ слова. *Для того, чтобы функція* $F(x)$ *была непрерывна въ узкомъ смыслѣ слова, необходимо, чтобы вѣроятности различныхъ цифръ на всѣхъ мѣстахъ безконечной дроби имѣли нижній предѣлъ отличный отъ нуля (т. е. верхній предѣлъ, отличный отъ 1).*

Дѣйствительно, еслибъ этотъ нижній предѣлъ не былъ отличенъ отъ нуля, то нашлось бы совмѣщеніе (A_{k_0} и $A_{k_1}\ldots$) безконечнаго числа цифръ, имѣющее вѣроятность, отличную отъ нуля; такимъ образомъ, сумма промежутковъ, соотвѣтствующая даннымъ цифрамъ на k_0-мъ, k_1-мъ, ..., k_n-мъ мѣстахъ, общая длина которыхъ равна $\frac{1}{2^{n+1}}$, т. е. стремится къ 0 вмѣстѣ съ n, была бы отлична отъ нуля, т. е. функція $F(x)$, вопреки требованію, не была бы непрерывна въ узкомъ смыслѣ слова.

Не останавливаясь на болѣе подробномъ изслѣдованіи связи между свойствами функціи $F(x)$ въ случаѣ ея непрерывности съ вѣроятностями различныхъ бинарныхъ (десятичныхъ) цифръ числа x, перейдемъ къ разсмотрѣнію случая, когда функція $F(x)$ не непрерывна.

37. Ариѳметизація совокупности 4-го типа при помощи прерывной функціи F(z).

Мы видѣли, что функція $F(z)$ есть произвольная монотонная функція, подчиненная условію $F(1) - F(0) = 1$. Изъ теоріи функцій извѣстно, что, если она имѣетъ точки разрыва, т. е. точки, гдѣ $F(a+0) - F(a-0) > 0$, то совокупность этихъ точекъ *исчислима*.

Мы показали, что $F(a+0) - F(a-0)$ есть предѣлъ вѣроятности неравенствъ $a - h < x < a + h$, гдѣ h стремится къ 0. Такъ какъ предложеніе $x = a$ есть совмѣщеніе всѣхъ предложеній $a - h < x < a + h$,

[1]) Для непрерывности въ узкомъ смыслѣ слова достаточно, чтобы было соблюдено условіе Липшица на всемъ промежуткѣ, за исключеніемъ ограниченнаго числа точекъ, гдѣ функція можетъ быть просто непрерывной.

то вслѣдствіе обобщенной теоремы сложенія (умноженія), предложеніе $x = a$ будетъ имѣть вѣроятностью $h_0 = F(a+0) - F(a-0)$. Выдѣлимъ всю исчислимую совокупность точекъ разрыва: $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, обозначимъ

$$h_n = F(a_n + 0) - F(a_n - 0),$$

и составимъ функцію $F_1(z)$, обладающую свойствомъ, что

$$F_1(a_n + 0) - F_1(a_n - 0) = h_n;$$

сумма же всѣхъ ея измѣненій въ остальныхъ точкахъ пусть будетъ равна нулю. Тогда функція

$$F_2(x) = F(x) - F_1(x)$$

будетъ непрерывна. (Обозначая черезъ $\psi(x)$ функцію равную 0, при $x < 0$, и равную 1, при $x > 0$, можемъ представить $F_1(x)$ въ видѣ абсолютно сходящагося ряда $F_1(x) = \sum_1^\infty h_n \psi(x - a_n)$).

Разсмотримъ сначала предположеніе, что

$$F_2(x) = 0,$$

т. е.

$$\sum_1^\infty h_n = 1.$$

Въ такомъ случаѣ, мы имѣемъ только конечную или исчислимую совокупность элементарныхъ предложеній: $x = a_1$, $x = a_2$, ..., и ихъ всевозможныя объединенія, т. е. мы получаемъ совокупность *четвертаго типа*. Всякое предложеніе

$$a < x < b \tag{20}$$

имѣетъ вѣроятность равную суммѣ вѣроятностей всѣхъ элементарныхъ равенствъ $x = a_n$, удовлетворяющихъ неравенству (20). Само собой понятно, что теперь знаки $<$ и $\leq$ равнозначны лишь въ томъ случаѣ, когда они примѣняются къ значеніямъ, отличнымъ отъ точекъ разрыва.

Этотъ случай самымъ существеннымъ образомъ отличается отъ того, когда функція $F(x)$ непрерывна. Теперь послѣдовательныя цифры, вообще, не только не независимы, но послѣ того, какъ дано конечное число цифръ, все безконечное множество остальныхъ цифръ опредѣляется съ вѣроятностью, приближающейся къ достовѣрности, т. к. вѣро-

ятность всякаго значенія выражается сходящимся безконечнымъ произведеніемъ, всѣ послѣдовательные множители котораго быстро приближаются къ единицѣ. Мы видимъ такимъ образомъ, что *та или иная ариѳметизація геометрическихъ совокупностей превращаетъ ихъ то въ совокупности 2-го типа, то въ совокупности 4-го типа. Если* $F_1(x)$ и $F_2(x)$ *обѣ отличны отъ нуля, то мы имѣемъ смѣшанный или общій случай совокупности 2-го типа, разсмотрѣнный выше (31), который легко приводится къ совокупности 4-го типа и къ простой совокупности 2-го типа.*

Въ Добавленіи мы еще вернемся къ вопросу о соображеніяхъ, которыми руководствуются при ариѳметизаціи совокупностей. Но здѣсь умѣстно будетъ замѣтить, что затрудненія и противорѣчія возникаютъ отъ того, что, установивъ одну опредѣленную ариѳметизирующую функцію $F(z)$, пользуются въ то же время интуитивнымъ представленіемъ, несовмѣстимымъ съ принятой функціей. Напримѣръ, признавая функцію $F(z)$ непрерывной, мы затрудняемся представить себѣ, что съ этимъ допущеніемъ несовмѣстима возможность опредѣленнаго предложенія $x=a$, и что поэтому, допуская возможность точнаго равенства $x=a$, мы должны сдѣлать точку a точкой разрыва для $F(z)$. Но врядъ-ли нужно говорить, что подобныя противорѣчія между интуитивными и логическими выводами въ математикѣ довольно обычны и не могутъ разрѣшаться какимъ-нибудь компромиссомъ вродѣ того, что не всякое предложеніе безконечной совокупности, имѣющее вѣроятность нуль, невозможно; такъ, въ теоріи функціи мы не смущаемся тѣмъ, что нашему интуитивному представленію о кривой линіи противорѣчитъ существованіе непрерывныхъ функцій, лишенныхъ производной, и никому, конечно, не прійдетъ въ голову одновременно предполагать непрерывную функцію совершенно произвольной и разсматривать касательную въ какой нибудь точкѣ кривой, ее изображающей.

Если мы имѣемъ какую бы то ни было совокупность 4-го типа любой мощности, какъ совокупность всѣхъ точекъ отрѣзка и ихъ всевозможныхъ объединеній, то, послѣ ея ариѳметизаціи, мы сохранимъ всегда только исчислимую совокупность элементарныхъ предложеній, остальныя же элементарныя предложенія должны будемъ признать невозможными. Дѣйствительно, не можетъ быть болѣе одного элементарнаго предложенія съ вѣроятностью бо́льшей, чѣмъ $\frac{1}{2}$, не можетъ быть болѣе двухъ элементарныхъ предложеній съ вѣроятностью, превышающей $\frac{1}{3}$, и т. д.

Выборъ тѣхъ элементарныхъ предложеній, которыя слѣдуетъ считать возможными, во многихъ случаяхъ представляетъ задачу неразрѣшимую. Въ самомъ дѣлѣ, кто можетъ напримѣръ, назвать ту исчислимую совокупность точекъ отрѣзка, которыя въ прошедшемъ и будущемъ были или будутъ кѣмъ бы то ни было индивидуально указаны или задуманы $\left(\text{какъ } \frac{1}{2},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ \log 2 \text{ и т. д.}\right)$? Однако ясно, что эта совокупность исчислима, (она была бы конечна, еслибъ мы допустили, что міръ ограниченъ во времени), всѣ же остальныя числа слѣдуетъ считать невозможными, т. к. они фактически никогда не были и не будутъ, а слѣдовательно, не могутъ быть осуществлены. Это неумѣніе правильно, т. е. въ соотвѣтствіи съ требованіями опыта, ариѳметизовать совокупность 4-го типа на практикѣ въ большинствѣ случаевъ заставляетъ отказываться отъ этой ариѳметизаціи, замѣняя эти совокупности совокупностями 2-го типа, но, разумѣется, при этомъ нельзя нарушать принциповъ теоріи. Обыкновенно разсуждаютъ такимъ образомъ: если мы возьмемъ два равныхъ конечныхъ отрѣзка, то вѣроятности разсматриваемому опредѣленному числу находиться внутри одного или другого отрѣзка равны. Но это утвержденіе не вполнѣ точно; чѣмъ длина промежутковъ менѣе, тѣмъ болѣе значительна неточность этого допущенія, которое не можетъ быть принято абсолютно, т. к. оно привело бы насъ къ ариѳметизующей функціи $F(z) = z$, которая, какъ было показано выше, несовмѣстима съ осуществленіемъ опредѣленныхъ равенствъ $x = a$. Напротивъ, если мы будемъ считать нашу ариѳметизацію только *приближенной*, а именно, будемъ считать вѣроятности равныхъ отрѣзковъ не равными, вообще, а лишь отличающимися менѣе, чѣмъ на нѣкоторое весьма малое, но точно неизвѣстное число ε, то мы должны будемъ помнить, что наша ариѳметизація *относительно* тѣмъ менѣе удовлетворительна, чѣмъ разсматриваемые отрѣзки меньше (такъ что, въ частности, вѣроятность равенства $x = a$ не всегда точно равна 0).

Такимъ образомъ мы получаемъ рѣшеніе парадокса, что вся совокупность никогда не осуществляющихся [1]) (невозможныхъ) чиселъ, имѣющая мѣру 1, имѣла бы вѣроятность 1 (равную достовѣрности), еслибъ ариѳметизующая функція $F(z)$ точно была бы равна z.

При ариѳметизаціи совокупности 4-го типа слѣдуетъ еще отмѣтить вопросъ объ опредѣленіи вѣроятностей такъ называемыхъ неизмѣримыхъ совокупностей точекъ. Для насъ этотъ вопросъ не представляетъ труд-

---

[1]) Т. к. совокупность осуществляющихся чиселъ исчислима, а потому, даже будучи вездѣ густой, имѣетъ мѣру 0.

ности, такъ какъ послѣ выбора ариѳметизующей функціи, т. е. послѣ выбора исчислимой совокупности элементарныхъ предложеній, всякая совокупность точекъ, будь она измѣримой или нѣтъ, получаемъ вѣроятность на основаніи обобщенной теоремы сложенія, въ зависимости отъ входящихъ въ нее точекъ, соотвѣтствующихъ элементарнымъ предложеніямъ.

Что же касается разсмотрѣнныхъ ранѣе совокупностей 2-го типа, то, по самой своей структурѣ, онѣ включаютъ въ себя только такія объединенія [1]), которыя приводятся къ конечнымъ или исчислимымъ, а потому о неизмѣримыхъ совокупностяхъ говорить не приходится, и слѣдовательно, всѣ предложенія совокупностей, какъ 4-го, такъ и 2-го типа, получаютъ вполнѣ опредѣленныя вѣроятности послѣ выбора ариѳметизующей функціи $F(z)$.

38. Ариѳметизація совокупности 3-го типа.

На основаніи того, что было сказано относительно совокупностей 4-го типа, мы уже знаемъ, что послѣ ариѳметизаціи совокупности въ ней можетъ остаться лишь исчислимая совокупность возможныхъ элементарныхъ предложеній. Разница между ариѳметизованной совокупностью 3-го и 4-го типа заключается лишь въ томъ, что существуютъ безконечныя объединенія, имѣющія смыслъ въ совокупности 4-го типа, но не имѣющія смысла въ совокупности 3-го типа; о вѣроятностяхъ этихъ объединеній слѣдовательно говорить не прійдется, всѣ же другія объединенія будутъ имѣть тѣ же самыя вѣроятности въ обѣихъ совокупностяхъ.

Резюмируя все сказанное относительно ариѳметизаціи безконечныхъ совокупностей, мы видимъ, что, къ какому бы типу онѣ не принадлежали, эта ариѳметизація всецѣло опредѣляется функціей $F(z)$ (въ болѣе сложныхъ случаяхъ одной или нѣсколькими функціями нѣсколькихъ перемѣнныхъ), отъ выбора которой зависитъ и самый типъ совокупности, ибо каждому элементарному предложенію соотвѣтствуетъ точка разрыва функціи $F(z)$, и наоборотъ. Если мы принимаемъ обобщенный

---

[1]) Можно, конечно, взять произвольную совокупность точекъ S и опредѣлить предложеніе A, какъ совмѣщеніе всѣхъ предложеній, т. е. суммъ отрѣзковъ, включающихъ въ себя эти точки. Предложеніе A будетъ соотвѣтствовать верхней мѣрѣ совокупности S, которая существуетъ всегда. Но нижняя мѣра S можетъ приводить къ другому предложенію $B \neq A$ (если совокупность S неизмѣрима). Предложенія A и B будутъ всегда имѣть опредѣленныя вѣроятности, совокупность же S не представляетъ собой предложенія.

конструктивный принципъ, то въ зависимости отъ характера нашей функціи $F(z)$, мы имѣемъ совокупность 2-го или 4-го типа; если же мы затрудняемся придать смыслъ нѣкоторымъ безконечнымъ объединеніямъ (и совмѣщеніямъ), то наши совокупности должны быть отнесены къ 1-му или 3-му типу.

39. Ариѳметизація совокупности цѣлыхъ чиселъ.

Цѣлыя числа и ихъ конечныя объединенія даютъ намъ примѣръ совокупности 3-го типа; если мы присоединимъ къ нимъ всевозможныя безконечныя объединенія, то получимъ совокупность 4-го типа съ исчислимой совокупностью элементарныхъ предложеній. Ариѳметизація этой совокупности 4-го типа обыкновенно производится на основаніи допущенія, что всѣ числа равновозможны. *Но это допущеніе явно не допустимо, т. к. оно влекло бы за собой то, что вѣроятность каждаго числа равна нулю, т. е. никакое число не можетъ осуществиться, и кромѣ того была бы нарушена обобщенная теорема сложенія, такъ какъ сумма вѣроятностей исчислимой совокупности предложеній, имѣющихъ вѣроятность 0, была бы равна единицѣ.* Затруднительность выбора закона вѣроятностей чиселъ, зависящаго, вообще, въ каждомъ частномъ случаѣ отъ постановки вопроса, не можетъ служить оправданіемъ того, чтобы остановиться на законѣ, хотя и простомъ, но противорѣчащемъ основнымъ принципамъ теоріи вѣроятностей. Можно говорить о предѣлѣ вѣроятностей тѣхъ или иныхъ предложеній, соотвѣтствующемъ постепенному увеличенію ограниченной совокупности чиселъ, при предположеніи, что въ этихъ ограниченныхъ совокупностяхъ числа равновозможны между собой, но этотъ предѣлъ не будетъ вѣроятностью опредѣленнаго предложенія нашей безконечной совокупности.

Съ указаннымъ недопустимымъ предположеніемъ о равновозможности всѣхъ чиселъ связано другое столь же часто дѣлаемое *непріемлемое допущеніе:* вѣроятность числу N при дѣленіи на простое число a дать въ остаткѣ α независима отъ того, какой остатокъ полученъ при дѣленіи N на простое число b. Въ самомъ дѣлѣ, пусть $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = 1$ будутъ оба возможные остатка отъ дѣленія на 2; $\beta_0 = 0$, $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 2$,— остатки отъ дѣленія на 3 и т. д. Тогда, согласно допущенію, вѣроятности всѣхъ безконечныхъ совмѣщеній (α и β и ...) были бы равны; но бо́льшая часть этихъ совмѣщеній невозможна, ибо, при дѣленіи на числа $> N$, всѣ остатки отъ дѣленія на N становятся равны N, такъ что, напримѣръ, совмѣщеніе остатковъ (0, 1, 0, 1, ...) невозможно. Отсюда слѣдовало бы, что и тѣ совмѣщенія, которыя соотвѣтствуютъ цѣлымъ числамъ, также невозможны. Можно, кромѣ того, придать иной

смыслъ всѣмъ совмѣщеніямъ, если связать каждое изъ нихъ съ рядомъ

$$x=\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2.3}+\ldots+\frac{\lambda}{2.3\ldots p_n}+\ldots,$$

гдѣ p_n есть n-ое простое число и $\lambda<p_n$; тогда всякія совмѣщенія остатковъ соотвѣтствуютъ всѣмъ значеніямъ x, заключеннымъ между 0 и 1 (въ частности, $1=\frac{1}{2}+\frac{2}{2.3}+\ldots+\frac{p_n-1}{2.3\ldots p_n}+\ldots$). Значенія x, соотвѣтствующія цѣлымъ числамъ (единственно возможнымъ, по условію), характеризуются отмѣченною выше *періодичностью* и, очевидно, исчислимы, въ то время, какъ остальныя значенія x не исчислимы; поэтому совершенно неправильно было бы при равной возможности всѣхъ численныхъ значеній [1]) $\lambda<p_n$, считать достовѣрнымъ, что x принадлежитъ къ первой, исчислимой, совокупности, и невозможнымъ его принадлежность ко второй.

Въ силу выше сказаннаго нужно признать, что примѣненіе термина вѣроятности въ теоріи чиселъ (напримѣръ, «вѣроятность числу быть простымъ равна 0») большею частью не законно и не соотвѣтствуетъ тому значенію, которое ему придается въ теоріи вѣроятностей.

---

[1]) На основаніи ранѣе сказаннаго, это предположеніе, приводящее къ ариѳметизирующей функціи $F(z)=z$, вообще, исключаетъ возможность всякаго точнаго равенства $x=a$, и въ частности, всякаго цѣлаго числа.

ДОБАВЛЕНІЕ.

Нѣсколько общихъ замѣчаній о теоріи вѣроятностей, какъ методѣ научнаго изслѣдованія.

Возможность различныхъ ариѳметизацій данной совокупности предложеній.

На предыдущихъ страницахъ мы попытались установить формально-логическія основы теоріи вѣроятностей, какъ математической дисциплины. До сихъ поръ предложенія для насъ были лишь отвлеченными символами, которымъ мы не придавали никакого конкретнаго содержанія, устанавливая лишь опредѣленныя правила для операцій надъ ними и связанными съ ними численными коэффиціентами, которые мы назвали вѣроятностями. Эти правила, какъ было доказано, другъ другу не противорѣчатъ и позволяютъ при извѣстныхъ условіяхъ посредствомъ математическихъ вычисленій изъ вѣроятностей однихъ предложеній выводить вѣроятности другихъ.

Однако, если намъ дана только логическая структура разсматриваемой совокупности предложеній, которая для конечныхъ совокупностей, по крайней мѣрѣ, усматривается обыкновенно въ каждомъ конкретномъ случаѣ безъ всякихъ затрудненій, то этого недостаточно для ариѳметизаціи совокупностей, и необходимы еще нѣкоторыя добавочныя условія для того, чтобы при помощи принциповъ теоріи вѣроятностей, стало возможнымъ вычислить всѣ вѣроятности. Дѣйствительно, если мы бросаемъ игральную кость и останавливаемъ свое вниманіе на двухъ возможныхъ исходахъ опыта: выпаденіе или невыпаденіе 6 очковъ, мы имѣемъ простую схему O, A, $\overline{A}$, Ω; но ту же схему мы получаемъ и при бросаніи монеты, а также, если въ томъ же опытѣ съ костью разсмотримъ, какъ различные случаи, выпаденіе четнаго (2, 4, 6) или нечетнаго (1, 3, 5) числа очковъ. Въ послѣднемъ случаѣ мы получимъ ту же схему O, B, $\overline{B}$, Ω, хотя A есть частный случай B; отсюда нетрудно заключить, что одинаковая ариѳметизація (напримѣръ, допущеніе, что всѣ элементарныя предложенія равновозможны) всѣхъ логически тожественныхъ совокупностей привела бы къ неизбѣжному противорѣчію.

Итакъ не всѣ необходимыя условія, нужныя для ариѳметизаціи совокупности, вытекаютъ изъ ея формально логической структуры; только реальное значеніе, которое мы придаемъ вѣроятности, приноситъ дополнительныя данныя для предварительныхъ соглашеній, произвольныхъ съ математической точки зрѣнія. Съ другой стороны, наши вычисленія потому только представляютъ практическій и философскій интересъ, что вычисленные нами коэффиціенты соотвѣтствуютъ нѣкоторымъ реальностямъ. А именно, этотъ коэффиціентъ—математическая вѣроятность—долженъ дать намъ возможно болѣе точную характеристику того, въ какой степени, на основаніи имѣющихся данныхъ, слѣдуетъ ожидать наступленія нѣкотораго событія, т. е. другими словами, въ какой мѣрѣ объективныя данныя предопредѣляютъ это наступленіе. Если мы утверждаемъ равенство математическихъ вѣроятностей событій A и B (т. е. ихъ равновозможность), то это означаетъ, что совокупность имѣющихся объективныхъ данныхъ такова, что всякій здравомыслящій человѣкъ долженъ совершенно въ равной мѣрѣ ожидать наступленія A, какъ и наступленія B.

Происхожденіе и значеніе аксіомъ теоріи вѣроятностей.

Оставляя пока въ сторонѣ вопросъ о томъ, есть ли такія объективныя данныя, относительно которыхъ всякій согласится, что они въ равной мѣрѣ предопредѣляютъ событія A и A_1, такъ что ихъ равнымъ образомъ слѣдуетъ ожидать, т. е. считать A и A_1 равновозможными, мы видимъ, что даже, если бы мы стали отрицать универсальную возможность такихъ данныхъ, во всякомъ случаѣ, для всякаго субъекта, пытающагося уяснить себѣ, въ какой мѣрѣ онъ можетъ разсчитывать на появленіе того или другого событія, обязательны будутъ аксіомы § 4:

1) *На достовѣрное событіе слѣдуетъ болѣе расчитывать, чѣмъ на недостовѣрное;*

2) *Если мы ожидаемъ въ одинаковой мѣрѣ A и A_1, и съ другой стороны въ одинаковой мѣрѣ ожидаемъ B и B_1, при чемъ A не совмѣстимо съ B, а A_1 несовмѣстимо съ B_1, то мы въ такой же мѣрѣ должны ожидать наступленія (A или B), какъ наступленія (A_1 или B_1); напротивъ, если мы скорѣе ожидаемъ наступленія B, чѣмъ наступленія B_1, то мы также болѣе расчитываемъ на наступленіе (A или B), чѣмъ на наступленіе (A_1 или B_1).*

Столь же очевидной явится и аксіома осуществленія § 5 (24), если мы ее формулируемъ, придавая выше указанный смыслъ понятію вѣроятности: *если α есть частный случай A, а β частный случай B, то мы въ равной мѣрѣ должны ожидать наступленіе α и наступленіе β, коль скоро мы на A расчитываемъ такъ же, какъ и на B, а въ*

случаѣ наступленія A такъ же ожидаемъ α, какъ въ случаѣ наступленія B ожидаемъ β.

Въ зависимости отъ того, имѣютъ-ли объективное или только субъективное значеніе наши допущенія о равной вѣроятности разсматриваемыхъ событій, и выводы, вытекающіе изъ нихъ на основаніи нашихъ объективно (т. е. для нормальной психики) обязательныхъ аксіомъ и теоремъ, будутъ имѣть объективное или болѣе или менѣе субъективное значеніе.

Намъ нужно теперь показать, что допущенія о равной возможности двухъ явленій могутъ имѣть столь же объективный характеръ, какъ допущенія равенства двухъ какихъ-бы то ни было конкретныхъ величинъ, и обнаружить такимъ образомъ научное значеніе теоріи вѣроятностей.

Равновозможность.

Съ этой цѣлью, возьмемъ примѣръ: на цилиндръ вращенія съ горизонтальными образующими ставятъ однородный шаръ такъ, чтобы его центръ находился на одной вертикали съ точкой касанія. Еслибы опытъ былъ осуществленъ идеально, шаръ оказался бы въ положеніи равновѣсія; однако изъ механики и изъ практики извѣстно, что это равновѣсіе неустойчиво, а именно, достаточно не поддающагося измѣренію уклоненія отъ условій идеальнаго опыта, чтобы шаръ скатился въ ту или другую сторону. Если экспериментаторъ со всей доступной ему точностью осуществляетъ указанный опытъ, такъ что, по условію, имъ приняты всѣ мѣры къ тому, чтобы уклоненія въ одну сторону не могли взять перевѣса надъ уклоненіями въ другую, онъ устанавливаетъ опытъ, исходъ котораго для него, по условію, долженъ остаться неизвѣстнымъ. Разумѣется, возможно, что другой экспериментаторъ, обладающій болѣе точными инструментами, могъ бы предсказать исходъ упомянутаго опыта, подведя его подъ другую схему, гдѣ было бы установлено, правыя ли или лѣвыя уклоненія имѣютъ перевѣсъ; но тогда онъ долженъ будетъ снова видоизмѣнить опытъ, для того, чтобы имѣть право приравнять его вышеупомянутой неустойчивой схемѣ, и тогда исходъ этого новаго опыта будетъ для него столь же неизвѣстенъ, какъ и для его предшественника.

Устанавливая второй, по возможности, тожественный опытъ, нашъ экспериментаторъ будетъ имѣть тѣ же основанія, чтобы ожидать аналогичнаго исхода. *Еслибы опытъ былъ устойчивъ, такъ что неподлежащія учету различія въ его постановкѣ не вліяли бы на его исходъ, то мы могли бы предсказать, что исходы обоихъ опытовъ будутъ одинаковы; но благодаря механической неустойчивости осуществляемой схемы, мы ограничиваемся утвержденіемъ, что опредѣленный*

результатъ второго опыта (паденіе шара направо) имѣетъ ту же вѣроятность, что и въ первомъ опытѣ.

Вообще, *если разница между причинами, вызывающими появленіе событія A и событія B, столь ничтожна, что не поддается учету и измѣренію, то событія A и B признаются равно вѣроятными.*

Если принять данное нами здѣсь опредѣленіе равно вѣроятныхъ событій, то изъ него вытекаютъ непосредственно и допущенныя ранѣе аксіомы. Однако наше аксіоматическое построеніе теоріи вѣроятностей не связано съ принятіемъ или непринятіемъ этого опредѣленія.

Абсолютное равенство вѣроятностей представляетъ, конечно, лишь математическую абстракцію, совершенно такъ же, какъ и равенство отрѣзковъ, и для установленія того, что паденіе данной игральной кости на любую изъ ея сторонъ имѣетъ одну и ту же вѣроятность, мы можемъ пользоваться только тѣми объективными, но не абсолютно точными, методами измѣренія, которыя обычно примѣняются въ геометріи и въ физикѣ.

Поэтому такъ же, какъ и при примѣненіи всѣхъ математическихъ теорій къ практикѣ, гдѣ точныя равенства приходится замѣнять приближенными, весьма существенно изслѣдовать, какъ измѣнятся теоремы теоріи вѣроятностей, если данныя въ нихъ вѣроятности получатъ произвольныя незначительныя измѣненія. Въ этомъ отношеніи чрезвычайно важна, напримѣръ, теорема Пуассона, безъ которой теорема Бернулли была бы лишена практическаго значенія.

Вѣроятность и достовѣрность.

Математическая вѣроятность, въ силу выше сказаннаго, представляетъ собой численный коэффиціентъ, являющійся мѣрой ожиданія появленія событія при наличности нѣкоторыхъ конкретныхъ данныхъ, характеризующій, слѣдовательно, объективную связь между наблюдаемыми данными и ожидаемымъ событіемъ.

Въ частности, зависимость между данными и будущимъ событіемъ можетъ быть такова, что изъ нихъ вытекаетъ увѣренность въ его появленіи: наблюдаемыя данныя служатъ причиной событія. Тогда мы говоримъ, что событіе достовѣрно—вѣроятность его равна 1. Нужно имѣть въ виду, что достовѣрность, какъ и вѣроятность, всегда теоретическая, ибо всегда возможно, что неполное соотвѣтствіе между дѣйствительностью и нашей теоретической схемой нарушаетъ или видоизмѣняетъ ожидаемое дѣйствіе причины.

Безусловно достовѣрнымъ, по опредѣленію, можетъ быть только результатъ соглашенія или логическаго вывода, всякое же предвидѣніе новаго факта всегда основано на индукціи, т. е., въ конечномъ счетѣ,

на прямомъ или косвенномъ допущеніи, что фактъ, при извѣстныхъ условіяхъ постоянно наступавшій, снова наступитъ при сходныхъ обстоятельствахъ. Примѣняя принципы теоріи вѣроятностей, можно показать, что такое предвидѣніе имѣетъ вѣроятность весьма близкую къ единицѣ, т. е. къ достовѣрности. Вслѣдствіе этого и другія утвержденія теоріи вѣроятностей, имѣющія столь же высокую степень вѣроятности, слѣдуетъ разсматривать, какъ практически достовѣрныя, имѣя въ виду, что ошибка, которая проистекаетъ отъ неполнаго соотвѣтствія предварительныхъ допущеній съ дѣйствительностью, имѣетъ не менѣе шансовъ подорвать правильность всякаго утвержденія, чѣмъ то обстоятельство, что вѣроятность его не абсолютно совпадаетъ съ достовѣрностью.

Разсмотрѣніе многочисленныхъ опытовъ, изъ которыхъ каждый представляется при помощи нѣкоторой неустойчивой схемы указаннаго выше типа, гдѣ характеръ подлежащихъ учету условій заставляетъ насъ приписать ихъ исходамъ опредѣленныя вѣроятности, приводитъ на основаніи вычисленій теоріи вѣроятностей къ утвержденіямъ, извѣстнымъ подъ названіемъ закона большихъ чиселъ, имѣющимъ приблизительно столь же большую вѣроятность, что и наши индуктивные выводы. При примѣненіи закона большихъ чиселъ, какъ и при примѣненіи индуктивныхъ законовъ природы, мы должны считаться съ возможностью, что конкретныя условія опыта не вполнѣ соотвѣтствуютъ теоретической схемѣ. Поэтому опредѣленный результатъ опыта въ обоихъ случаяхъ имѣетъ лишь большую вѣроятность, но не безусловную достовѣрность. Ошибка, т. е. неосуществленіе нашего предвидѣнія, не невозможна, а является лишь весьма невѣроятной. Но для закона большихъ чиселъ характерно то, что наступленіе невѣроятнаго факта не служитъ безусловнымъ показателемъ неправильности нашихъ теоретическихъ предпосылокъ, ибо законъ большихъ чиселъ допускаетъ исключенія. Подробное изслѣдованіе вопроса о томъ, какъ слѣдуетъ относиться къ принятой гипотезѣ, если предвидѣнія, основанныя на ней, нерѣдко оказываются ошибочными, выходитъ изъ рамокъ настоящей статьи. Теорія вѣроятностей гипотезъ, къ которой относится этотъ вопросъ, основана, исключительно, на аксіомѣ осуществленія. Не выходя изъ предѣловъ общихъ соображеній, мы можемъ только замѣтить, что оцѣнка a priori вѣроятности той или иной схемы носитъ обыкновенно очень произвольный характеръ, а потому особый интересъ представляютъ лишь тѣ выводы этого отдѣла теоріи вѣроятностей, которые болѣе или менѣе независимы отъ упомянутой оцѣнки.

Осуществленіе невѣроятнаго факта само по себѣ не опровергаетъ гипотезы, но является лишь новымъ даннымъ, которое можетъ измѣнить

вѣроятность гипотезы, ибо нѣтъ такой схемы, при которой всѣ происходящія явленія имѣли бы значительную вѣроятность [1]). Единственное, чего мы должны требовать отъ принятой гипотезы, чтобы бо́льшая часть изъ осуществляющихся фактовъ имѣла бы высокую степень вѣроятности и лишь, сравнительно, немногіе изъ нихъ были мало вѣроятны. Неопредѣленность послѣдняго замѣчанія лежитъ въ существѣ дѣла, такъ какъ невозможность учесть всю неограниченную совокупность причинъ, вліяющихъ на единичное конкретное явленіе, исключаетъ непогрѣшимость въ предвидѣніи будущаго: на мѣсто достовѣрнаго, представляющаго теоретическую абстракцію, намъ приходится поставить вѣроятное (практически достовѣрное), и мы должны лишь стремиться къ тому, чтобы эта замѣна возможно рѣже приводила насъ къ ошибкамъ.

Изъ выше сказаннаго видно, что примѣненіе теоріи вѣроятностей содержитъ нѣкоторую долю субъективнаго, но лишь ту долю, которая въ извѣстной мѣрѣ присуща всякому методу познанія, дающему интерпретацію фактовъ и связывающему ихъ опредѣленными абстрактными взаимоотношеніями. Эти взаимоотношенія, которыя въ нашей теоріи характеризуются коэффиціентомъ—математическая вѣроятность, могутъ

---

[1]) Можно считать, напримѣръ, практически достовѣрнымъ, что первоклассный шахматистъ, играющій съ полнымъ вниманіемъ, обыграетъ новичка, которому только что сообщили правила игры. Однако ничего нѣтъ абсолютно невозможнаго въ томъ, чтобы всѣ ходы начинающаго игрока случайно удовлетворяли требованіямъ шахматнаго искусства и привели бы его къ побѣдѣ. Совмѣщеніе подобнаго рода единичныхъ мало вѣроятныхъ фактовъ можетъ въ дѣйствительности произойти. Послѣ такого результата игры (и особенно, еслибы онъ повторился 2—3 раза) мы были бы поставлены въ большое затрудненіе относительно предполагаемаго результата слѣдующей партіи. Можемъ ли мы быть увѣрены, что нашъ новичекъ, дѣйствительно, согласно утвержденіямъ всѣхъ знающихъ его лицъ, никогда не прикасался къ шахматамъ, можемъ ли мы отрицать возможность такихъ невиданныхъ еще до сего времени дарованій, которыя бы обнаружились такъ блестяще съ первой же игры? Но если абсолютнаго отвѣта мы на эти вопросы дать не можемъ, то тѣмъ не менѣе сыгранныя партіи представятъ собой образцы остроумнѣйшихъ шахматныхъ комбинацій, анализъ которыхъ обнаружитъ глубокую цѣлесообразность отдѣльныхъ ходовъ. Поэтому, какъ бы мы ни были склонны отстаивать свою a priori увѣренность, что игра нашего новичка не могла быть сознательной, мы все же должны будемъ признать, что связь между ходами цѣлесообразна и закономѣрна. Подобное же замѣчаніе примѣнимо къ гипотезѣ о закономѣрности явленій природы. Для объясненія имѣющагося наблюденнаго матеріала мы неизбѣжно должны признать эту закономѣрность, какъ бы намъ ни хотѣлось вѣрить въ чудеса, но никого нельзя разубѣдить въ томъ, что внѣ сферы точныхъ наблюденій чудеса бываютъ, и, быть можетъ, законы, которые были до сихъ поръ непреложны, окажутся игрою случая.

болѣе или менѣе точно интерпретировать дѣйствительность; соотвѣтствующую степень точности въ интерпретаціи дѣйствительности должны тогда имѣть и выводы, вытекающіе изъ примѣненія теоріи вѣроятностей: ибо тѣ нѣсколько аксіомъ, на которыхъ строится эта математическая дисциплина, представляютъ собой необходимый аттрибутъ понятія вѣроятности—какъ мѣры ожиданія, независимо отъ объективнаго значенія данныхъ, на которыхъ основано это ожиданіе, въ томъ или иномъ случаѣ.

Безконечныя совокупности.

Если мы разсматриваемъ какой-нибудь опытъ, допускающій конечное число исходовъ, то, когда мы говоримъ, что исходъ A возможенъ, это означаетъ, что, имѣя въ виду всѣ опыты, соотвѣтствующіе той же теоретической схемѣ, мы считаемъ, что въ нѣкоторыхъ изъ нихъ исходъ, дѣйствительно, имѣетъ мѣсто. Еслибы мы имѣли возможность охватить однимъ взглядомъ всѣ прошлые и будущіе опыты этой схемы, и констатировали бы, что A не происходило никогда, то мы должны были бы сказать, что при правильной схемѣ этихъ опытовъ, A является невозможнымъ. Въ соотвѣтствіи съ этимъ находятся и обычные индуктивные выводы, которые на основаніи ненаступленія A при большомъ числѣ опытовъ также заключаютъ о невозможности A. Аналогичное замѣчаніе примѣнимо и къ безконечнымъ совокупностямъ. Если совокупность логически возможныхъ несовмѣстимыхъ исходовъ не исчислима, какъ напримѣръ, число точекъ отрѣзка 01 (т. е. совокупность значеній x, удовлетворяющихъ неравенству $0 < x < 1$), то фактически возможными при этомъ можетъ оказаться только исчислимая совокупность исходовъ, а потому всякая ариѳметизація такой совокупности, въ согласіи съ установленными въ 3-й главѣ теоретическими принципами, должна была бы всѣ эти фактически (или мысленно) никогда не осуществляющіеся исходы признать невозможными. Совокупность осуществимыхъ исходовъ намъ неизвѣстна, и еще менѣе есть у насъ a priori'ныхъ основаній для того, чтобы, сообразуясь съ тѣмъ, что выше было сказано объ объективныхъ признакахъ равновозможности, полагать столь же вѣроятнымъ, что задуманное кѣмъ-нибудь число есть $\frac{1}{2}$, какъ то, что онъ представляетъ собой результатъ вычисленія невыполнимаго при современныхъ средствахъ анализа [1]).

Такимъ образомъ необходимо дѣлать различіе между произвольными числами неопредѣлимыми и опредѣлимыми тѣми или иными способами. Слѣдуетъ замѣтить однако, что только въ томъ случаѣ, если эти способы

[1]) Напримѣръ, $\log 2$, до того, какъ была открыта теорія логариѳмовъ.

указаны, мы получаемъ *опредѣленную* совокупность опредѣлимыхъ чиселъ (напримѣръ, совокупность алгебраическихъ чиселъ); поэтому мы можемъ только констатировать, что должны существовать числа, которыя никогда не будутъ опредѣлены, самую же грань между этими двумя категоріями чиселъ точно указать невозможно.

Если мы беремъ произвольное число, написанное въ видѣ безконечной десятичной дроби, и задаемъ себѣ, напримѣръ, вопросъ, какова вѣроятность, что цифра 0 не встрѣтится ни разу, то отвѣтъ будетъ зависѣть отъ того, къ какой категоріи относится число. Допустимъ, что вѣроятность быть любой цифрѣ на каждомъ мѣстѣ равна [1]) $\frac{1}{10}$, ибо можно допустить, что не существуетъ объективно уловимыхъ причинъ, чтобы въ каждомъ частномъ случаѣ одна цифра имѣла преимущества передъ другой. При такихъ условіяхъ вѣроятность непоявленія 0 будетъ равна пред. $\left(\frac{9}{10}\right)^n = 0$.
$n = \infty$

Но наше допущеніе, очевидно, относится только къ совершенно произвольнымъ *неопредѣлимымъ* числамъ, составленіе которыхъ не подчиняется никакому закону, такъ что въ каждомъ числѣ можетъ быть указано лишь то или иное конечное число знаковъ, но вполнѣ это число никогда не опредѣлено, т. к. всегда остается еще безконечное число зависящихъ только отъ случайности знаковъ, а потому непоявленіе 0 и въ дальнѣйшемъ не можетъ быть установлено никакимъ опытомъ, напротивъ появленіе 0 совмѣстимо со всякимъ наблюденнымъ результатомъ, т. е. достовѣрно (по принципу единственности). Иначе дѣло обстоитъ, если мы полагаемъ, что составленіе нашей десятичной дроби подчинено какому-нибудь закону. Если мы точно укажемъ этотъ законъ, напримѣръ, беремъ раціональныя дроби, у которыхъ знаменатели не имѣютъ иныхъ множителей кромѣ 2 и 5, то для отвѣта на поставленный вопросъ нужно будетъ прежде всего изслѣдовать, нѣтъ-ли прямой причинной связи между закономъ и появленіемъ цифры 0: въ данномъ случаѣ изъ ариѳметики извѣстно, что непоявленіе 0 невозможно; но, если бы мы взяли дроби вида $\frac{10^n - 2}{10^n - 1}$, то напротивъ появленіе 0 было бы достовѣрно. Если же прямой причинной связи мы не усматриваемъ, необходимо всетаки помнить, что нашъ законъ связываетъ извѣстнымъ образомъ послѣдовательность цифръ, а потому полной

---

[1]) Т. е. $F(z) = z$.

независимости и равной вѣроятности ихъ допустить нельзя. Чѣмъ менѣе опредѣленъ законъ, тѣмъ труднѣе a priori указать точное значеніе вѣроятности каждой цифры на опредѣленномъ мѣстѣ, но въ такихъ случаяхъ, правильнѣе было бы вычислять вѣроятности a posteriori, и хотя слѣдуетъ думать, что по большей части значеніе этой вѣроятности будетъ весьма близко къ $\frac{1}{10}$, но весьма возможно, что при разнохарактерности совокупности чиселъ въ нѣкоторыхъ случаяхъ обнаружится сверхъ-нормальная дисперсія, свидѣтельствующая объ отсутствіи постоянной вѣроятности.

Разсмотрѣніе совокупностей (всегда исчислимыхъ) тѣхъ или иныхъ категорій опредѣлимыхъ чиселъ для практики имѣетъ мало значенія. Напротивъ, при примѣненіи къ экспериментальнымъ наукамъ, обычно приходится пользоваться безконечными совокупностями 2-го и отчасти 1-го типа, лишенными элементарныхъ предложеній, т. е. совокупностями неопредѣлимыхъ чиселъ, ибо никакой опытъ не можетъ точно опредѣлить числа (не цѣлаго); результатомъ опыта устанавливается лишь нѣсколько десятичныхъ знаковъ неизвѣстнаго и недопускающаго экспериментальнаго опредѣленія числа. Сообразно съ этимъ, ариѳметизирующую функцію $F(z)$ нужно брать непрерывной, и, принимая во вниманіе, соображенія § 7 (36), можно почти всегда полагать $F(z) = \int f(z)dz$, гдѣ $f(z)$ нѣкоторая положительная непрерывная функція, значеніе которой опредѣляется a priori условіями постановки опыта или же a posteriori результатами его многократныхъ повтореній.

Съ безконечными совокупностями мы встрѣчаемся также при примѣненіи закона большихъ чиселъ къ какому-нибудь опыту, повторяющемуся неограниченное число разъ. По большей части, число опытовъ предполагается конечнымъ, хотя и весьма большимъ; поэтому законъ большихъ чиселъ сохраняетъ присущую ему практическую, но не логическую достовѣрность, и какъ было отмѣчено выше, допускаетъ исключенія. Однако, если бы для интерпретаціи нѣкотораго явленія, мы создали схему, осуществляющую, по условію, предѣльный случай безконечнаго числа повтореній, то можно было бы прійти къ выводамъ, имѣющимъ логическую достовѣрность. Если бы, напримѣръ, мы допустили возможность постепеннаго ускоренія производства опыта бросанія монеты или другого опыта, гдѣ вѣроятность событія равна $\frac{1}{2}$ такъ, что первый опытъ происходитъ въ теченіи одной минуты, второй — $\frac{1}{2}$ минуты, третій — $\frac{1}{4}$ минуты и т. д., тогда общее число опытовъ, произведенныхъ

въ теченіе 2 минутъ будетъ безконечно велико. Но, предположивши, что существуетъ какой-нибудь устойчивый механическій приборъ, который послѣдовательно зарегистровываетъ отношеніе появленій событія къ числу опытовъ (хотя регистрація результата каждаго отдѣльнаго опыта становится невозможной), мы до конца 2-й минуты будемъ замѣчать нѣкоторыя его колебанія, но, по истеченіи 2 минутъ, стрѣлка нашего механизма займетъ вполнѣ опредѣленное положеніе, соотвѣтствующее со всей доступной прибору точностью числу $\frac{1}{2}$. Этотъ выводъ теоретически достовѣренъ, и неосуществленіе его на опытѣ могло бы произойти только вслѣдствіе неполнаго соотвѣтствія между фактическими условіями и нашей теоретической схемой. Такимъ образомъ, если мы составляемъ опредѣленную безконечную бинарную дробь, напримѣръ, $\frac{8}{15} = 0,\ 10001\ldots$, гдѣ предѣлъ отношенія числа единицъ къ числу цифръ равенъ $\frac{1}{4}$, то мы должны утверждать несовмѣстимость составленія этой дроби съ предположеніемъ, что на каждомъ бинарномъ мѣстѣ появленіе 1 и 0 равновѣроятно.

Вообще, невозможно указать способа составленія безконечной бинарной дроби, въ которой послѣдовательность единицъ и нулей подчинялась бы безконечному числу условій, вытекающихъ изъ закона большихъ чиселъ. Безконечные ряды, составленные совершенно произвольно, случайно (такъ что каждое число индивидуально произвольно), существенно отличны отъ рядовъ, составленныхъ по опредѣленному математическому закону, какъ бы произволенъ ни былъ разсматриваемый законъ. Смѣшеніе этихъ двухъ понятій, происходящее отъ того, что для конечныхъ рядовъ подобнаго разграниченія между случайными и закономѣрными рядами не существуетъ, является однимъ изъ главныхъ источниковъ парадоксовъ, къ которымъ приводитъ теорія вѣроятностей безконечныхъ совокупностей.

С. Н. Бернштейнъ.

О сходимости разложеній по полиномамъ Чебышева-Якоби.

Эрванда Когбетлянца.

Результатъ И. И. Привалова [1]), распространившаго признакъ Hardy [2]) равномѣрной сходимости почти всюду (presque partout) тригонометрическаго ряда на разложенія по полиномамъ Legendre'a, поддается дальнѣйшему распространенію на наиболѣе общія разложенія по гипергеометрическимъ ортогональнымъ полиномамъ Чебышева-Якоби $T_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, частными случаями которыхъ являются ряды тригонометрическіе и Legendre'a.

Какъ извѣстно, эти полиномы опредѣляются производящей функціей:

$$\frac{(1+z+\sqrt{1-2xz+z^2})^{\alpha}.(1-z+\sqrt{1-2xz+z^2})^{\beta}}{\sqrt{1-2xz+z^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n.T_n^{(\alpha,\beta)}(x);$$

при равенствѣ параметровъ $\alpha=\beta$ мы получаемъ болѣе узкій классъ ортогональныхъ полиномовъ $T_n^{(\alpha)}(x)\equiv T_n^{(\alpha,\alpha)}(x)$, связанныхъ весьма просто, какъ это показалъ Г. Орловъ [3]), съ ультрасферическими функціями $p_n^{(\lambda)}(x)$, опредѣляемыми обычно производящей функціей $(1-2zx+z^2)^{-\lambda}$:

$$\frac{1}{(1-2xz+z^2)^{\lambda}}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n.p_n^{(\lambda)}(x);$$

а именно:

$$T_n^{(\frac{1}{2}-\lambda)}(x)\equiv\frac{\Gamma(\lambda).\Gamma(n+\lambda+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}.\Gamma(n+2\lambda)}.p_n^{(\lambda)}(x).$$

Такъ какъ $p_n^{(\lambda)}(\mathrm{Cos}\,\theta)=\dfrac{\mathrm{Sin}(n+1)\theta}{\mathrm{Sin}\,\theta}$ при $\lambda=1$, при $\lambda=\dfrac{1}{2}$ $p_n^{(\lambda)}(x)$ есть

---

[1]) Сообщенія Хар. Мат. О-ва (2) XV.

[2]) Proceedings Lond. Math. Soc. t. 12 (ser. 2).

[3]) Диссертація. 1881 г. СПБ. Стр. 16.

полиномъ Legendre'a $p_n(x)$, а $\lim \frac{1}{\lambda} p_n^{(\lambda)}(\mathrm{Cos}\theta) = \frac{2\mathrm{Cos}n\theta}{n}$, то ясно, что

$$\mathrm{Sin}\,(n+1)\theta = \frac{\mathrm{Sin}\,\theta \,.\, \sqrt{\pi} \,.\, \Gamma(n+2)}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)} \,.\, T_n^{\left(-\frac{1}{2}\right)}(\mathrm{Cos}\theta)$$

$$\mathrm{Cos}\,n\theta = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(n+1)}{2\,.\,\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)} \,.\, T_n^{\left(\frac{1}{2}\right)}(\mathrm{Cos}\,\theta) \text{ и } p_n(\mathrm{Cos}\,\theta) = T_n^{(0)}(\mathrm{Cos}\theta).$$

Сопоставленіе результатовъ Hardy и Привалова естественно наводитъ на вопросъ о пригодности разсматриваемаго признака для общаго случая разложеній по $T_n^{(\alpha,\,\beta)}(x)$ при любыхъ α и β.

Пусть

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} C_n \,.\, T_n^{(\alpha,\,\beta)}(x) \qquad \text{(I)}$$

гдѣ

$$C_n = \frac{1}{k_n} \,.\, \int_{-1}^{+1} \frac{T_n^{(\alpha,\,\beta)}(u) \,.\, f(u) \,.\, du}{(1+u)^{\alpha} \,.\, (1-u)^{\beta}},$$

а k_n опредѣляется такъ:

$$k_n = \int_{-1}^{+1} \frac{[T_n^{(\alpha,\,\beta)}u]^2 \,.\, du}{(1+u)^{\alpha} \,.\, (1-u)^{\beta}} = \frac{2^{1+\alpha+\beta}}{2n+1-\alpha-\beta} \cdot \frac{\Gamma(n-\alpha+1) \,.\, \Gamma(n-\beta+1)}{\Gamma(n+1-\alpha-\beta) \,.\, \Gamma(n+1)}$$

Дѣйствительно, пользуясь формулами Christoffel'я и асимптотической:

$$\frac{1}{2} \,.\, \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{k_m} \,.\, T_m^{(\alpha,\,\beta)}(x) \,.\, T_m^{(\alpha,\,\beta)}(u) = \frac{(n+1-\alpha-\beta)(n+1)}{(2n+1-\alpha-\beta)(2n+2-\alpha-\beta)} \cdot \frac{T_n^{(\alpha,\,\beta)}(u) \,.\, T_{n+1}^{(\alpha,\,\beta)}(x) - T_n^{(\alpha,\,\beta)}(x) \,.\, T_{n+1}^{(\alpha,\,\beta)}(u)}{k_n \,.\, (x-u)}$$

$$(0<\theta<\pi)\ T_n^{(\alpha,\,\beta)}(\mathrm{Cos}\theta) = \left(2\mathrm{Cos}\frac{\theta}{2}\right)^{\alpha} \cdot \left(2\,\mathrm{Sin}\frac{\theta}{2}\right)^{\beta} \cdot \sqrt{\frac{2}{n\pi \,.\, \mathrm{Sin}\,\theta}} \cdot \left\{\mathrm{Cos}\left[\left(n+\frac{1-\alpha-\beta}{2}\right)\theta + \left(\beta-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right] + \frac{M_n(\theta)}{n}\right\}$$

и въ точности слѣдуя при любыхъ α и β анализу И. И. Привалова для случая $\alpha = \beta = 0$, мы легко устанавливаемъ почти всюду въ ин-

тервалле $(-1, +1)$ для любой функціи $f(x)$ съ интегрируемымъ $(1+x)^{-\alpha}.(1-x)^{-\beta}.f^2(x)$ соотношеніе

$$S_n(x) = 0(\lg n)$$

почти всюду, гдѣ черезъ $S_n(x)$ обозначена сумма первыхъ $n+1$ членовъ ея разложенія (I) по полиномамъ $T_n^{(\alpha, \beta)}(x)$; а это вполнѣ достаточно [1]) для доказательства слѣдующей общей теоремы: «*Если постоянныя* $c_0, c_1, \ldots c_n, \ldots$ *таковы, что рядъ* $\sum_1^\infty k_n . c_n^2 (\log n)^2$ *сходится, то рядъ* $\sum_0^\infty c_n . T_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ *сходится почти всюду въ* $(-1, +1)$ *равномѣрно къ функціи* $f(x)$, *опредѣляемой, какъ сумма этого ряда, и есть ея рядъ Fourier*».

Москва.

---

[1]) Ср. И. И. Приваловъ l. c.

О моментѣ количества движенія солнечной системы съ точки зрѣнія космогонической гипотезы Laplace'a.

В. Фесенковъ.

Гипотеза Laplace'a удовлетворительно объясняетъ различныя особенности солнечной системы. Малыя наклонности, малые эксцентриситеты орбитъ, прямое движеніе планетъ находятъ въ этой гипотезѣ простое и естественное объясненіе. Но существуетъ нѣсколько затруднительныхъ пунктовъ. Нѣсколько десятковъ лѣтъ тому назадъ Faye высказалъ мнѣніе, что существованіе нѣсколькихъ спутниковъ съ обратнымъ движеніемъ противорѣчатъ кореннымъ образомъ гипотезѣ Laplace'a. Однако эта особенность, неизвѣстная во время Laplace'a, объясняется теперь вліяніемъ приливовъ, возникавшихъ подъ вліяніемъ Солнца въ массахъ планетныхъ туманностей. Всѣ планеты имѣли раньше обратное направленіе вращенія. Тамъ, гдѣ приливы были достаточно сильны, вращеніе измѣнилось въ прямое. Для самыхъ отдаленныхъ планетъ оно осталось обратнымъ.

Другая особенность нашей системы состоитъ въ томъ, что первый спутникъ Марса—Фобосъ, дѣлаетъ полный оборотъ вокругъ планеты скорѣе, чѣмъ послѣдняя успѣваетъ повернуться вокругъ своей оси. По существу этотъ фактъ эквивалентенъ тому извѣстному свойству солнечной системы, что среднія скорости планетъ, являющіяся показателями скорости вращенія первоначальной туманности, даютъ для ея момента количества движенія въ предположеніи ея однородности значеніе безъ всякаго сравненія большее момента количества движенія теперешняго Солнца. Это свойство, извѣстное уже давно и особенно ясно представленное Fouché [1]), находило свое объясненіе въ предположеніи, что солнечная туманность съ самаго начала обладала рѣзко выраженнымъ и значительно уплотненнымъ ядромъ, что планеты образовались лишь изъ своего рода атмосферы первоначальнаго туманнаго

[1]) C. R. Vol. 99. p. 903.

тѣла. Напримѣръ, André[1]) въ своей репликѣ See находитъ возможнымъ удовлетвориться такимъ объясненіемъ.

Проф. Moulton[2]) изслѣдовалъ этотъ вопросъ теоретически. Предполагая, что плотности внутри туманности распредѣляются согласно Ritter'y[3]) онъ получилъ слѣдующія значенія для момента количества движенія солнечной системы въ различныя стадіи ея развитія.

$M =$	32,176	туманность	простирается	до орбиты	Нептуна
	13,250	»	»	»	Юпитера
	5,690	»	»	»	Земли
	3,400	»	»	»	Меркурія
	0,151	солнечная система въ настоящее время.			

Послѣ этого дѣлались попытки опредѣлить моментъ количества движенія въ предположеніи, что плотность представляется въ видѣ ряда, расположеннаго по степенямъ $\frac{1}{r}$, гдѣ r есть разстояніе отъ центра. Туманность принималась сферической и вращающейся равномѣрно вокругъ оси. Въ результатѣ получилось, что никакія значенія коэфиціентовъ, т. е. другими словами никакое центральное уплотненіе, не могутъ даже приблизительно удовлетворить требованію постоянства момента количества движенія, такъ называемому «критерію Babinet». Это обстоятельство является однимъ изъ самыхъ сильныхъ аргументовъ въ рукахъ противниковъ теоріи Laplace'a. Въ частности особенность движенія спутниковъ Марса всегда считалась слабымъ пунктомъ этой теоріи. Roche, много работавшій въ области космогоніи, построилъ свою теорію «внутреннихъ колецъ» для объясненія упомянутаго явленія. Но, не говоря уже о нѣкоторой искусственности такого объясненія, оно страдаетъ тѣмъ недостаткомъ, что нуждается для образованія колецъ внутри туманности въ другомъ матеріалѣ, чѣмъ для внѣшнихъ колецъ. По мнѣнію Poincaré[4]), внутреннія кольца должны состоять не изъ молекулъ газа, а изъ метеорной пыли, т. к. въ противномъ случаѣ въ силу внутренней диффузіи, онѣ не могли-бы существовать индивидуально. Этимъ предположеніемъ Roche значительно отдаляется отъ первоначальной концепціи Laplace'a. Однако и такое существенное измѣненіе не спасаетъ положенія, т. к. остается въ силѣ общій фактъ непостоянства моментовъ

[1]) Scientia. 1912. I. p. 153.
[2]) Astrophysical Journal. 1900. vol. XI.
[3]) Wiedemann Annalen. vol. XVI. 1882. p. 166.
[4]) Poincaré. Leçons sur les hypothèses cosmogoniques. p. 28.

количества движенія во всей системѣ; особенность движенія спутниковъ Марса есть, какъ я уже замѣтилъ, только частное проявленіе этой общей особенности. На основаніи изложеннаго въ послѣднее время возникло теченіе, совершенно отвергающее старую теорію Laplace'a и выдвигающее ей на смѣну рядъ новыхъ теорій, свободныхъ отъ указаннаго недостатка. Въ дальнѣйшемъ я постараюсь показать, что, въ противность распространенному мнѣнію, упомянутая особенность солнечной системы не только не несовмѣстима съ теоріей Laplace'a, но, наоборотъ, получаетъ въ этой теоріи простое и естественное объясненіе.

Согласно изслѣдованіямъ Lane'a, W. Thomson'a, See и др. внутри Солнца царятъ громадныя температуры и давленія.

Разсматривая Солнце, какъ состоящее изъ одноатомнаго газа и предполагая, что температура его поверхности равняется 12000 °C, что должно быть недалеко отъ истины, See [1]) пришелъ къ слѣдующимъ результатамъ:

Разстояніе отъ центра Солнца въ частяхъ солн. рад.	Давленіе въ атмосферахъ	Температура
1,00	—	12000 °C
0,95	3376805	3520293
0,90	21636565	7407160
0,70	536137160	26723100
0,50	2639437700	50556970
0,30	6759055500	73642880
0,10	10607851000	88191620
0,00	11215403000	90178370 °C

Эти числа, конечно, не отвѣчаютъ дѣйствительности, но тѣмъ не менѣе даютъ понятіе о порядкѣ давленій и температуръ внутри солнечной массы.

Согласно общепринятымъ воззрѣніямъ, я предполагаю, что солнце, постепенно охлаждаясь, сокращается въ объемѣ. Однако невозможно себѣ представить, что газы, находящіеся подъ давленіемъ въ милліарды атмосферъ, еще сохраняютъ способность къ сжатію. Съ другой стороны внутреннее треніе увеличивается, какъ извѣстно, съ температурой, а при большихъ давленіяхъ, быть можетъ и съ давленіемъ. Вслѣдствіе этого трудно допустить, чтобы въ средѣ солнечной массы были возможны конвекціонные потоки. Итакъ, мы можемъ заключить, что солнечныя центральныя части, находящіяся подъ огромнымъ давленіемъ и предохраненныя отъ охлажденія всей толщей выше лежащихъ слоевъ, остаются чувствительно безъ измѣненія. Уменьшеніе солнечнаго объема

[1]) Astr. Nachr. № 4053.

должно происходить главнымъ образомъ за счетъ поверхностныхъ слоевъ, подверженныхъ непосредственному охлажденію.

Отсюда слѣдуетъ, что, отступая въ прошлое, мы должны наоборотъ увеличивать объемъ Солнца главнымъ образомъ за счетъ его поверхностныхъ частей, оставляя центральныя части почти безъ измѣненія. Углубившись достаточно далеко въ прошлое, мы должны найти вмѣсто Солнца туманность съ рѣзко выраженнымъ центральнымъ сгущеніемъ и съ крайне разрѣженными поверхностными слоями. Мы приходимъ такимъ образомъ къ туманности Laplace'a.

Предположимъ, что эта туманность весьма медленно вращается вокругъ своей оси. Какимъ-бы образомъ въ ней ни распредѣлялись угловыя скорости, въ концѣ концовъ поверхностныя части станутъ вращаться скорѣе внутреннихъ. Дѣйствительно, мы уже видѣли, что сжатіе происходитъ главнымъ образомъ за счетъ поверхностныхъ слоевъ. Такъ какъ для каждой частицы туманности долженъ имѣть мѣсто въ плоскости экватора интегралъ площадей (если не принимать во вниманіе тренія), то угловая скорость поверхностныхъ частицъ должна увеличиваться въ большей мѣрѣ, чѣмъ скорость центральныхъ. Такимъ образомъ туманность, взятая въ извѣстной стадіи своей эволюціи, не будетъ вращаться равномѣрно вокругъ своей оси, но угловая скорость будетъ уменьшаться по мѣрѣ приближенія къ оси вращенія. Laplace, предполагая, что туманность вращается равномѣрно вокругъ оси, долженъ былъ допустить вмѣстѣ съ тѣмъ, что внутреннее треніе выравниваетъ разницу въ угловыхъ скоростяхъ. Однако это воззрѣніе недопустимо. Одинъ фактъ существованія экваторіальнаго ускоренія солнца и верхнихъ планетъ достаточно краснорѣчиво говоритъ противъ этого. Кромѣ того, теоретическое изслѣдованіе приводитъ къ тому же результату. Еще Helmholtz показалъ, насколько медленное дѣйствіе оказываетъ треніе на значительныя газовыя массы. Такъ напримѣръ для того, чтобы внутреннее треніе уменьшило на половину разность скоростей въ атмосферѣ высотой въ 8 klm., требуется 42747 лѣтъ [1]).

Съ увеличеніемъ газовой массы вліяніе внутренняго тренія быстро уменьшается. Къ подобнымъ же результатамъ приходятъ Wilsing, Sampson и Wilczynski. Указанное выше распредѣленіе угловыхъ скоростей въ туманности Laplace'a подтверждается наблюденіями надъ скоростью вращенія различныхъ оболочекъ Солнца. Хорошо извѣстно, что время вращенія фотосферы, опредѣленное по пятнамъ, измѣняется отъ 25 дней на экваторѣ до 27 дней подъ широтой въ 40°. (У полюсовъ время вращенія доходитъ, возможно, до 30 дней). Флокуллы водорода между

[1]) H. v. Helmholtz. Sitzungsber. Preuss. Akad. 1888 p. 647.

широтами -45 $+45^0$ не показываютъ экваторіальнаго ускоренія. Ихъ среднее время обращенія равно, по измѣреніямъ miss Ware, 24,7 дней. Такимъ образомъ хромосфера, въ которой плаваютъ флоккулы водорода, имѣетъ бо́льшую угловую скорость, чѣмъ ниже лежащая фотосфера Солнца.

Спектроскопическимъ путемъ также найдено нѣкоторое уменьшеніе угловой скорости въ низкихъ слояхъ обращающагося слоя, производящаго фраунгоферовы линіи, несмотря на его ничтожную толщину по сравненію съ радіусомъ солнца[1]). Наконецъ изученіе поверхности Юпитера, въ массѣ котораго еще не сравнялись угловыя скорости, приводитъ къ подобнымъ же результатамъ.

Хорошо извѣстно, что угловая скорость краснаго пятна, принадлежащаго къ наиболѣе низкимъ образованіямъ, меньше угловой скорости облаковъ, находящихся подъ той-же самой широтой, но на болѣе высокомъ уровнѣ. Такимъ образомъ указанное распредѣленіе угловыхъ скоростей вполнѣ подтверждается наблюденіями.

Какъ извѣстно, возможность отдѣленія колецъ отъ первоначальной туманности тѣсно связана съ формой уровенныхъ поверхностей. Необходимо, чтобы крайнее меридіанное сѣченіе уровенной поверхности имѣло на экваторѣ двойную точку, въ которой сила притяженія уравновѣшивалась бы съ центробѣжной силой. Черезъ эту точку, какъ показалъ Roche, въ каждой меридіанной плоскости происходитъ истеченіе матеріи туманности, образующей кольцо. Покажемъ, что и при нашемъ распредѣленіи угловыхъ скоростей поверхности уровня будутъ имѣть тотъ же характеръ и что, слѣдовательно, всѣ слѣдствія гипотезы Laplace'а могутъ быть приложены и къ данному случаю.

Возьмемъ уравненія гидродинамики Euler'а

$$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x} = X - u\frac{\partial u}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial y} - w\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial t}$$
$$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y} = Y - u\frac{\partial v}{\partial x} - v\frac{\partial v}{\partial y} - w\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial t}$$
$$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z} = Z - u\frac{\partial w}{\partial x} - v\frac{\partial w}{\partial y} - w\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial t},$$

гдѣ p — давленіе, ϱ — плотность, X, Y, Z — проэкціи на координатныя оси равнодѣйствующей всѣхъ силъ, приложенныхъ къ данной точкѣ, u, v, w — проэкціи скорости. Предположимъ, что p есть функція ϱ и что, слѣдовательно, $\frac{dp}{\varrho}$ есть точный дифференціалъ.

[1]) St. John. Astroph. J. Vol. 38.

Каждая молекула обращается вокругъ оси съ угловою скоростью ω. Примемъ ось x-овъ за ось вращенія. Имѣемъ:

$$u = 0; \quad v = -\omega z; \quad w = \omega y.$$

Предположимъ далѣе, что сила, приложенная къ молекулѣ, есть притяженіе ядра туманности. Взаимными притяженіями молекулъ, принадлежащихъ къ атмосферѣ туманности, мы пренебрегаемъ.

Силовая функція есть, слѣд.

$$V = \frac{M}{r}.$$

Уравненія движенія принимаютъ видъ:

$$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial x} = 0$$
$$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial y} = \omega^2 y$$
$$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial V}{\partial z} = \omega^2 z.$$

Полагая

$$\frac{dp}{\varrho} = d\Pi,$$

мы получаемъ

$$d\Pi - dV = \omega^2(ydy + zdz)$$

или

$$d(\Pi - V) = \omega^2 R dR,$$

гдѣ $R = \sqrt{y^2 + z^2}$ есть разстояніе точки отъ оси вращенія. Лѣвая часть есть полный дифференціалъ; правая часть должна быть также полнымъ дифференціаломъ. Отсюда слѣдуетъ, что ω^2 есть функція только R.

Мы можемъ поэтому положить

$$\omega^2 R = \varphi'(R).$$

Предыдущее уравненіе даетъ послѣ интеграціи

$$\Pi - V - \varphi(R) = \text{const.}$$

Поверхности одинаковаго давленія или поверхности уровня получатся, если положить $\Pi = \text{const.}$

Мы имѣемъ:

$$\varphi + V = C$$

или

$$\varphi + \frac{M}{r} = C.$$

Меридіанныя кривыя получатся, если положить $z = 0$.

$$\varphi(y) + \frac{M}{\sqrt{x^2 + y^2}} = C.$$

Это уравненіе меридіаннаго сѣченія въ случаѣ, когда угловая скорость представляется выраженіемъ

$$\omega^2 R = \varphi'(R),$$

было выведено Poincaré.

Положимъ теперь, что ω^2 можетъ быть представлено въ видѣ ряда съ постоянными коэффиціентами, расположеннаго по степенямъ R.

$$\omega^2 = a + bR + cR^2 + \ldots$$

Въ случаѣ, разобранномъ Roche'емъ, $b = c = \ldots = 0$.

Въ данномъ случаѣ имѣемъ:

$$\varphi(R) = \int_0^R (aR + bR^2 + cR^3 + \ldots) dR = \frac{aR^2}{2} + \frac{bR^3}{3} + \frac{cR^4}{4} + \ldots$$

Слѣдовательно, меридіанное сѣченіе есть:

1) $$\frac{ay^2}{2} + \frac{by^3}{3} + \frac{cy^4}{4} + \ldots + \frac{M}{\sqrt{x^2 + y^2}} = C.$$

Изслѣдуемъ форму меридіанныхъ кривыхъ различныхъ поверхностей уровня. Предположимъ, что x и y очень малы. Имѣемъ приблизительно:

$$\frac{M}{\sqrt{x^2 + y^2}} = C,$$

т. е. уравненіе круга. Обозначимъ черезъ R и R' экваторіальный и полярный радіусы меридіаннаго сѣченія въ общемъ случаѣ.

R дается уравненіемъ:

$$\frac{aR^2}{2} + \frac{bR^3}{3} + \frac{cR^4}{4} + \ldots + \frac{M}{R} = C$$

R' опредѣляется изъ выраженія:

$$\frac{M}{R'} = C.$$

Отсюда слѣдуетъ:

$$2) \qquad \frac{R-R'}{R}C = \frac{aR^2}{2} + \frac{bR^3}{3} + \dots$$

Въ центрѣ туманности $(x=y=0)\,C=\infty$. Съ разстояніемъ отъ центра C постепенно уменьшается. Слѣдовательно, сжатіе меридіаннаго сѣченія т. е. величина $\frac{R-R'}{R}$ увеличивается съ R.

Если мы будемъ искать поверхность уровня, для которой $C=\min.$, то придемъ къ уравненію

$$3) \qquad aR + bR^2 + cR^3 + \dots - \frac{M}{R^2} = 0.$$

За этой поверхностью C увеличивается и снова достигаетъ ∞ на безконечно-большомъ разстояніи отъ начала координатъ.

Продифференцируемъ уравненіе 1), предполагая C постояннымъ. Имѣемъ

$$ay + by^2 + cy^3 + \dots - \frac{M\left(y + x\frac{dx}{dy}\right)}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}} = 0.$$

Если $x=0$ и $y \neq 0$, то должно быть $\frac{dx}{dy}=\infty$, т. е. уровенная поверхность пересѣкаетъ ось y-овъ подъ прямымъ угломъ. Если же $\frac{dx}{dy} \neq \infty$, то y долженъ удовлетворять уравненію:

$$ay + by^2 + cy^3 + \dots - \frac{M}{y^2} = 0.$$

Это уравненіе тождественно съ 3). Въ этой точкѣ меридіанное сѣченіе пересѣкаетъ ось y-овъ не подъ прямымъ угломъ. Такъ какъ ось y-овъ есть ось симметріи, то разсматриваемая точка должна быть двойной. Если $y=0$ и $x \neq 0$, то $\frac{dx}{dy}=0$ при всѣхъ значеніяхъ x-а. Всѣ поверхности уровня пересѣкаютъ ось x-овъ подъ прямымъ угломъ.

Найдемъ, наконецъ, точку на оси y-овъ, въ которой центробѣжная сила уравновѣшивается силой центростремительной. Поверхность уровня, на которой находится эта точка, является предѣльной поверхностью туманности.

Центробѣжная сила представляется выраженіемъ:

$$\omega^2 y = ay + by^2 + cy^3 + \ldots$$

Центростремительная же есть

$$-\frac{M}{y^2}.$$

Такъ какъ равнодѣйствующая обѣихъ силъ въ искомой точкѣ равна нулю, то

$$ay + by^2 + cy^3 + \ldots - \frac{M}{y^2} = 0.$$

Мы опять получили уравненіе 3). Такимъ образомъ меридіанное сѣченіе обладаетъ двойной точкой, лежащей на той поверхности уровня, для которой C имѣетъ минимальное значеніе. Въ этой точкѣ центробѣжная сила уравновѣшивается съ силой притяженія.

Всѣ эти свойства поверхностей уровня являются существенными въ гипотезѣ Laplace'a. Roche первый указалъ на нихъ для случая постоянной угловой скорости. Но мы видимъ, что они остаются и въ томъ случаѣ, когда угловая скорость уменьшается по какому либо закону съ приближеніемъ къ оси вращенія. Слѣдовательно и въ этомъ случаѣ образованіе колецъ можетъ происходить въ силу механизма, уже описаннаго Laplace'омъ.

Доказавъ, что я имѣлъ право принять упомянутое выше распредѣленіе угловыхъ скоростей, я перейду къ объясненію особенности системы Марса.

Наблюдаемая скорость спутниковъ Марса опредѣлилась скоростью вращенія поверхностныхъ слоевъ первоначальной планетной туманности, находившихся въ плоскости экватора вблизи двойной точки. Послѣ отдѣленія колецъ планетная туманность продолжала сжиматься, причемъ ея скорость вращенія постепенно увеличивалась. Въ концѣ концовъ планета пришла въ свое теперешнее состояніе. Ея поверхностные слои отвердѣли, и вся масса, несмотря на медленность дѣйствія тренія, стала вращаться вокругъ оси съ одинаковою угловою скоростью. Такимъ образомъ наблюдаемая угловая скорость Марса есть средняя скорость всей его массы, которая на основаніи вышеизложеннаго должна быть меньше и можетъ быть значительно меньше, чѣмъ соотвѣтствующая скорость поверхностныхъ слоевъ.

Если образованіе спутника происходитъ недалеко отъ окончательной поверхности центральнаго свѣтила, то легко представить себѣ, что

средняя скорость вращенія послѣдняго можетъ быть меньше скорости спутника. Это дѣйствительно имѣетъ мѣсто для перваго спутника Марса—Фобоса, который вращается вокругъ планеты на разстояніи всего 2,77 діаметровъ послѣдней.

Солнце не вращается вокругъ оси съ постоянной угловой скоростью. Процессъ замедленія скорости поверхностныхъ слоевъ для него еще далеко не кончился. Наблюдаемая угловая скорость Солнца еще ничего не говоритъ о моментѣ количества движенія всей его массы. Тѣмъ менѣе возможно опредѣлять моментъ количества движенія первичной туманности по наблюдаемымъ въ настоящее время скоростямъ планетъ.

Съ изложенной здѣсь точки зрѣнія подобныя попытки должны необходимо приводить къ непомѣрно большимъ значеніямъ, какое бы распредѣленіе плотностей ни было принято.

Итакъ мы видимъ, что гипотеза Laplace'a способна объяснить упомянутую выше особенность солнечной системы. Она несомнѣнно является наиболѣе удовлетворительной изъ всѣхъ космогоническихъ гипотезъ.

Астрономическая Обсерваторія.
Харьковъ. 23 IV 1916.

В. П. Алексѣевскій (†).

(1858—1916).

Въ апрѣлѣ 1916 г. скончался въ Томскѣ отъ зараженія крови дѣйствительный членъ Харьковскаго Математическаго Общества, бывшій студентъ, приватъ-доцентъ и профессоръ математики Харьковскаго университета Владимиръ Петровичъ Алексѣевскій.

Значительная часть его активной научной дѣятельности связана съ Харьковскимъ университетомъ и Харьковскимъ Математическимъ Обществомъ, и на насъ лежитъ долгъ почтить память покойнаго.

В. П., сынъ военнаго инженера, родился въ 1858 г. 7 апрѣля въ Новгородской губерніи и крещенъ въ сельской церкви с. Перетенки Крестецкаго уѣзда.

Среднее образованіе получилъ въ гимназіи въ Нижнемъ-Новгородѣ, который т. о. былъ мѣстомъ перваго обученія математикѣ трехъ профессоровъ математики Харьковскаго университета,—нынѣ академиковъ А. М. Ляпунова и В. А. Стеклова и нынѣ покойнаго В. П. Алексѣевскаго.

По окончаніи въ 1877 г. гимназіи В. П. поступилъ на естественное отдѣленіе физико-математическаго факультета Харьковскаго университета, черезъ два года перешелъ на математическое отдѣленіе, но года черезъ полтора (въ 1881 г.) по домашнимъ обстоятельствамъ вышелъ изъ университета.

Въ 1884 г., по выдержаніи экзаменовъ въ качествѣ экстерна получилъ степень кандидата математическихъ наукъ. Въ это время онъ уже имѣлъ нѣсколько печатныхъ трудовъ (списокъ №№ 1, 2, 3), которыя и были ему засчитаны въ качествѣ кандидатской диссертаціи (фак. зас. 8. XI. 1884 г.).

Спустя годъ В. П. поступилъ на службу учителемъ, сначала временно въ 1-ую Харьковскую гимназію замѣстителемъ заболѣвшаго преподавателя (А. П. Грузинцева, ученикомъ котораго онъ былъ въ Н.-Новгородѣ), а черезъ мѣсяцъ—на постоянное мѣсто преподавателя математики и механики въ Харьковское реальное училище (теперь 1-ое реальное училище), а затѣмъ сверхъ того математики и

физики въ 2-ой женской гимназіи. Послѣднее мѣсто онъ оставилъ въ 1887 г. получивши стипендію для приготовленія къ профессорскому званію, а въ 1891 г. прекратилъ преподаваніе и въ реальномъ училищѣ. Будучи стипендіатомъ, онъ получилъ отъ факультета порученіе вести въ качествѣ ассистента практическія занятія со студентами по курсамъ проф. М. А. Тихомандрицкаго. Въ 1892 г. онъ выдержалъ экзаменъ на степень магистра чистой математики и въ томъ же году представилъ въ факультетъ въ качествѣ диссертаціи работу «О функціяхъ подобныхъ функціи Гамма» (спис. № 5), и былъ принятъ въ число приватъ-доцентовъ. Въ весеннее полугодіе 1893 г. онъ читалъ теорію опредѣленныхъ интеграловъ 3 ч. и теорію функцій комплекснаго перемѣннаго 2 ч. Защита диссертаціи происходила 21 февраля 1893 г. Отчетъ о диспутѣ напечатанъ въ только что начавшихъ выходить «Запискахъ Х. У.» 1893 г. кн. I. Въ осеннемъ полугодіи 1893 г. онъ читалъ снова теорію функцій комплекснаго перемѣннаго и велъ практическія занятія по аналитической геометріи и геометрическимъ приложеніямъ дифференціальнаго исчисленія. Въ тоже время матеріальная необходимость заставляла его искать заработка и онъ даже чуть не промѣнялъ университета на службу на Варшавской ж. д. Только во время выхлопотанная заграничная командировка избавила его отъ этой печальной необходимости. По той же причинѣ онъ занялъ въ это время должность помощника библіотекаря университета. Съ начала слѣдующаго 1894 г. онъ отправился въ заграничную командировку, и пробылъ заграницей съ марта 1894 г. по ноябрь 1895 г. Согласно выработанной для него проф. К. А. Андреевымъ и М. А. Тихомандрицкимъ инструкціи. В. П. слушалъ лекціи въ Лейпцигѣ, гдѣ читалъ тогда въ расцвѣтѣ своихъ силъ проф. S. Lie и гдѣ В. П. ознакомился съ теоріей группъ преобразованій, въ Геттингенѣ, гдѣ онъ прослушалъ курсъ проф. F. Klein'a по теоріи чиселъ въ связи съ теоріей аугоморфныхъ функцій, затѣмъ въ Парижѣ, гдѣ В. П. слушалъ лекціи Ш. Эрмита по теоріи опредѣленныхъ интеграловъ и Э. Пикара по теоріи дифференціальныхъ уравненій. Ко времени его пребыванія въ Лейпцигѣ относится опубликованіе имъ въ Berichte d. Kgl. Sächsischen Ges. d. Wissensch. работы Ueber eine Classe von Functionen die der Gamma funktion analog sind, доложенной S. Lie и представляющей резюме математической диссертаціи В. П. и послѣдующихъ его изслѣдованій въ этой области.

По возвращеніи изъ-за границы В. П. пришлось снова разстаться съ университетомъ и принять мѣсто преподавателя гимназіи въ уѣздномъ городкѣ Харьковской губерніи Старобѣльскѣ, такъ какъ университетъ, какъ указывалъ въ своемъ рапортѣ 1902 г. проф. В. А. Стекловъ,

при тогдашнихъ порядкахъ ничѣмъ не могъ поддержать ученаго, которымъ дорожилъ. Только черезъ годъ удалось вернуть В. П. Алексѣевскаго въ университетъ. Профессора-математики К. А. Андреевъ, А. М. Ляпуновъ и М. А. Тихомандрицкій не могли примириться съ уходомъ молодого талантливаго ученаго и возбудили ходатайство о назначеніи В. П. и. д. э.-о. профессора. Мотивируя свое ходатайство, они указывали въ своемъ рапортѣ, что В. П. давно уже извѣстенъ факультету, какъ своими глубокими научными познаніями, такъ и талантами университетскаго преподавателя, обращали вниманіе на результаты, добытые В. П. изъ его заграничной командировки, послѣ которой онъ «возвратился глубоко проникнутый интересами науки и высшаго преподаванія». Желая обезпечить правильный ходъ этого преподаванія въ Харьковскомъ университетѣ и «сохранить въ лицѣ г. Алексѣевскаго серьезную научную силу, изощренную продолжительными научными трудами», проф. Андреевъ, Ляпуновъ и Тихомандрицкій и возбудили свое ходатайство, но принятое въ факультетѣ и совѣтѣ оно не встрѣтило поддержки въ ректорѣ. Въ препроводительной бумагѣ попечителю ректоръ М. М. Алексѣенко писалъ, что онъ «съ своей стороны вполнѣ раздѣляетъ мнѣніе проф. Андреева, Ляпунова и Тихомандрицкаго, какъ о необходимости усиленія преподаванія по каѳедрѣ математики, такъ и достоинствѣ лица, рекомендуемаго ими на эту каѳедру, тѣмъ не менѣе въ виду 99 ст. унив. устава и при наличности двухъ штатныхъ и одного сверхштатнаго, получающаго по ст. 105, затрудняется ходатайствовать объ утвержденіи г. Алексѣевскаго, не имѣющаго степени доктора и. д. профессора; но ему кажется, впрочемъ, что можно было бы и безъ нарушенія приведеннаго закона достичь той же цѣли, къ которой стремится факультетъ,—ходатайствовать согласно мнѣнію декана факультета (А. С. Бріо) о порученіи магистру Алексѣевскому чтенія лекцій въ университетѣ по каѳедрѣ математики съ вознагражденіемъ по 1200 р.» Такое заключеніе ректора легло, надо думать, и въ основу заключенія попечителя округа, и было санкціонировано министерствомъ. Не лишнее прибавить, что въ это самое время на томъ же физико-математическомъ факультетѣ состояли и. д. э.-о. профессора магистры А. Е. Зайкевичъ (агрономія), Н. Д. Пильчиковъ (физика) и В. Ѳ. Тимоѳеевъ (технич. химія).

Черезъ годъ тѣже профессора повторили свое ходатайство, указывая, что В. П. «вполнѣ оправдалъ довѣріе факультета», выразившееся въ порученіи ему чтенія нѣкоторыхъ обязательныхъ курсовъ, «обнаруживъ свою давно извѣстную педагогическую опытность и свое обширное знакомство съ дѣломъ высшаго преподаванія, пріобрѣтенное имъ въ послѣднее двухлѣтнее пребываніе за границею». Хотя въ это время

уже два профессора по каѳедрѣ математики состояли внѣ штата, и ректоръ въ своемъ заключеніи уже не настаивалъ на недостаткѣ средствъ, В. П. снова былъ оставленъ приватъ-доцентомъ, но содержаніе было ему увеличено до 2000 р., по особому высочайшему повелѣнію по ходатайству министра народнаго просвѣщенія. Такое порученіе повторялось изъ года въ годъ, но возведеніе въ и. д. э.-о. проф. встрѣчало какія-то препятствія, внѣ университета лежащія, хотя тѣже лица и В. А. Стекловъ возбуждали новое ходатайство въ 1901 г., а 23. XI. 1902 г. проф. В. А. Стекловъ, Л. О. Струве и И. П. Осиповъ. На послѣднее ходатайство послѣдовало въ 1903 г. предложеніе объявить конкурсъ. На этомъ конкурсѣ В. П., предложенный сначала факультету кандидатомъ профессорами В. А. Стекловымъ и пишущимъ эти строки, вошедшимъ незадолго передъ тѣмъ въ составъ факультета, подалъ въ послѣдній день заявленіе и самъ, явился единственнымъ кандидатомъ, былъ избранъ факультетомъ и совѣтомъ и утвержденъ въ февралѣ 1904 г. и. д. э.-о. проф., черезъ восемь лѣтъ послѣ перваго ходатайства факультета. Каѳедра математики въ Харьковскомъ университетѣ за это время пережила тяжелый кризисъ. Въ 1898 г. перешелъ въ Москву на мѣсто В. Я. Цингера проф. К. А. Андреевъ, въ 1900 г. скончался М. Ѳ. Ковальскій. Въ апрѣлѣ 1902 г. уѣхалъ въ полугодичный заграничный отпускъ проф. М. А. Тихомандрицкій. Въ томъ же году перешелъ въ Кіевъ замѣстившій проф. К. А. Андреева проф. Д. А. Граве.

Вмѣстѣ съ А. П. Пшеборскимъ, съ января 1899 г. вступившимъ въ число приватъ-доцентовъ университета, В. П. Алексѣевскому пришлось выносить на себѣ все преподаваніе математики и въ университетѣ и въ Технологическомъ институтѣ, гдѣ В. П. съ 1898 г. читалъ курсъ анализа.—За время до перехода въ 1906 г. въ Томскъ, имъ прочитанъ рядъ основныхъ и спеціальныхъ курсовъ: дифференціальное исчисленіе (6 разъ), неопредѣленные интегралы (3 раза), теорія опредѣленныхъ интеграловъ (3 раза), интегрированіе обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій, варіаціонное исчисленіе (7 разъ), исчисленіе конечныхъ разностей (6 разъ), теорія функцій комплекснаго перемѣннаго (2 раза), теорія эллиптическихъ функцій, теорія линейныхъ уравненій съ перемѣнными коэффиціентами (2 раза), теорія Эйлеровыхъ интеграловъ, высшая алгебра, теорія чиселъ, теорія поверхностей. Такая напряженная преподавательская дѣятельность подрывала силы и мѣшала В. П. работать надъ докторской диссертаціей, которую онъ собирался посвятить предмету, связанному съ темою его магистерской диссертаціи, теоріей гаммаморфныхъ функцій,—по которой у него уже были получены

интересные результаты, составившіе предметъ сообщеній въ Харьковскомъ Математическомъ Обществѣ.

Поэтому онъ стремился получить болѣе спокойное и лучше вознаграждаемое мѣсто, чѣмъ экстраординатура въ университетѣ, требовавшая пополненія добавочнымъ заработкомъ. Предполагалось созданіе для В. П. каѳедры механики въ Харьковскомъ Технологическомъ институтѣ. Но прежде чѣмъ это осуществилось, В. П. получилъ приглашеніе на каѳедру механики въ Томскій Технологическій институтъ, и. д. ординарнаго профессера, и перешелъ туда въ 1906 г. Въ средѣ новыхъ товарищей его скоро оцѣнили; вскорѣ онъ былъ избранъ директоромъ и пробылъ нѣсколько лѣтъ на этомъ трудномъ въ переходное время посту.

Подробная характеристика научной дѣятельности В. П. Алексѣевскаго дана проф. В. А. Стекловымъ и мною въ нашемъ отзывѣ при выборѣ В. П. по конкурсу въ 1904 г. Этотъ отзывъ напечатанъ въ «Запискахъ Харьковскаго Университета» 1904 г. кн. I. Чтобы не повторяться, я приведу нѣсколько болѣе краткую, но обстоятельную характеристику, данную В. А. Стекловымъ въ его представленіи 1902 г.

«Первыя изслѣдованія В. П. относятся къ вопросу объ интегрированіи дифференціальныхъ уравненій и посвящены главнымъ образомъ, вопросу объ интегрированіи линейныхъ уравненій разныхъ порядковъ въ конечномъ видѣ. Эти работы написаны въ 1883, 1884 годахъ. Около того времени многіе ученые занимались рѣшеніемъ такого рода задачъ; упомянемъ проф. Лѣтникова, акад. Имшенецкаго и отчасти проф. В. П. Ермакова. Въ своихъ работахъ В. П., разсматривая наиболѣе типическіе виды уравненій, обобщаетъ между прочимъ различные результаты, полученные раньше его другими учеными, напримѣръ, Вейлеромъ и Лѣтниковымъ. Слѣдуетъ обратить вниманіе на одну изъ этихъ работъ В. П.: «Замѣтка объ обобщеніи уравненія Риккати». Здѣсь на двухъ небольшихъ страничкахъ авторъ весьма просто получаетъ извѣстное уравненіе Лѣтникова, которое заключаетъ въ себѣ какъ частные случаи уравненія Риккати, Мальмстена, Кокля и др., причемъ самая метода вывода приводитъ сразу и къ способу интегрированія этого уравненія.

«На этихъ первыхъ работахъ уже отчетливо видны находчивость и остроуміе автора. Слѣдующія работы В. П. посвящены преимущественно теоріи функцій.—Въ этомъ отношеніи интересна его магистерская диссертація, написнная въ 1892 г. Еще Heine обратилъ вниманіе на особый классъ періодическихъ функцій, аналогичныхъ извѣстнымъ функціямъ «Гамма» и изучилъ нѣкоторыя ихъ свойства. E. Picard ввелъ другія функціи, подобныя только что указаннымъ. Впослѣдствіи этимъ вопросомъ занялся P. Appele и нашелъ цѣлый классъ функцій,

аналогичныхъ только что указаннымъ, къ которому принадлежатъ и функціи Heine и Picard'a. Уже одни имена названныхъ первоклассныхъ ученыхъ указываютъ на интересъ задачи, о которой идетъ рѣчь. Дѣйствительно, Эйлеровскія функціи «Гамма» и имъ подобныя играютъ первостепенную роль въ анализѣ и изученіе ихъ свойствъ составляетъ одну изъ важныхъ задачъ. Въ вышеупомянутомъ изслѣдованіи В. П. обстоятельно изучилъ другой классъ функцій, подобныхъ функціи «Гамма». Онъ далъ выраженіе логариѳма этихъ функцій въ видѣ опредѣленнаго интеграла, вывелъ различныя формы безконечныхъ произведеній и разложеній въ строки, формулу удвоенія аргумента, вывелъ интегралы, подобные интеграламъ Raabe и Cauchy, формулу, подобную классической формулѣ Стирлинга и т. д. Въ слѣдующей своей статьѣ Ueber eine Classe etc. (спис. № 6), В. П. Алексѣевскій, воспроизводя нѣкоторые изъ результатовъ предыдущаго изслѣдованія, показываетъ, что функція Heine, Jacobi и всѣ двояко-періодическія функціи можно построить при помощи его функціи H; тоже самое относится и къ модулярной функціи Hermite'a. Наконецъ, функціи Appel'я, о которыхъ нарочно было упомянуто выше, представляются произведеніями изъ функцій «аналогичныхъ функцій Гамма». Изъ этого краткаго обзора видна значительность результатовъ, полученныхъ В. П. Алексѣевскимъ. Къ сожалѣнію всѣ эти результаты (особенно послѣдніе), часто дается лишь въ нѣсколькихъ словахъ намекъ на общій характеръ разсужденій.

«Изслѣдованіе В. П. Алексѣевскаго возбудило въ послѣднее время [1]) интересъ среди заграничныхъ ученыхъ. Англійскій математикъ Barnes въ нѣсколькихъ обширныхъ мемуарахъ въ Quarterly Journal of pure a. appl. Math. и въ Philosophical Transactions разсматриваетъ ту же задачу и приводитъ рядъ доказательствъ нѣкоторыхъ теоремъ В. П. Алексѣевскаго, которымъ и даетъ названіе «теоремъ Алексѣевскаго». Подробное развитіе и расширеніе полученныхъ В. П. Алексѣевскимъ интересныхъ результатовъ могло бы составить самостоятельное сочиненіе [2]). Въ этихъ своихъ изслѣдованіяхъ В. П. Алексѣевскій выступилъ уже, какъ видимъ, серьезнымъ ученымъ, установившимъ прочно свое научное достоинство. Слѣдующія работы Алексѣевскаго также относятся къ области теоріи функцій и также представляютъ интересные результаты самостоятельныхъ изслѣдованій автора. Упомяну о статьѣ Объ автоморфной функціи,

---

[1]) Написано въ 1902 г.

[2]) Продолженіемъ этихъ работъ явилось Сообщеніе о римановской функціи $\zeta(s)$ и статья Зависимость между Кинкелиновымъ и гаммаморфными функціями (сп. № 10). О связи работъ В. П. и Кинкелина см. нашъ Отзывъ «Зап. Х. У.» за 1904 г. № 1.

аналогичной экспонентной (сп. № 7), о сообщеніи его «О римановской функціи ζ (зита)», которое скоро появится въ сообщеніяхъ нашего общества». [Послѣдняя работа осталась ненапечатанной, и можетъ быть окажется среди бумагъ В. П. Алексѣевскаго].

В. А. Стекловъ дѣлаетъ на основаніи предыдущаго обзора работъ В. П. характеристику его, какъ ученаго, объясняетъ, почему докторская диссертація В. П. задержалась,—доказываетъ, что «при желаніи онъ могъ бы составить изъ имѣющихся въ его распоряженіи научныхъ результатовъ вполнѣ удовлетворительную для диссертаціи работы», и высказываетъ убѣжденіе, что «если В. П. не позаботился пріобрѣсти формальныя права, имѣя въ своемъ распоряженіи всѣ научные матеріалы, то едва ли это обстоятельство можетъ умалять научныя достоинства В. П. Алексѣевскаго по существу». «Но мы должны сказать еще больше. Къ настоящему времени В. П. Алексѣевскій приготовилъ къ печати и уже печатаетъ обширный курсъ дифференціальнаго и интегральнаго исчисленій. Я лично знаю», пишетъ В. А. Стекловъ, «содержаніе первыхъ главъ этого курса и общій его характеръ и могу сказать, что эта обширная работа, обнимающая болѣе 40 печатныхъ листовъ (2 тома), представляетъ плодъ серьезныхъ и продолжительныхъ занятій автора. Курсъ В. П. Алексѣевскаго не представляетъ собой шаблоннаго курса, приспособленнаго къ обычнымъ программамъ высшихъ учебныхъ заведеній. Онъ представляетъ самостоятельную ученую работу, гдѣ вмѣстѣ съ требованіями педагогическаго характера, соединяется строгая современная научность».

Списокъ сочиненій В. П. Алексѣевскаго.

1) Объ интегрированіи уравненія $x^2y''' + Axy'' + By' + Cx^{\mu}y = 0$ (1884) Сооб. Харьк. М. О. 1883. II. 115—126.

2) Объ интегрированіи уравненія $\frac{d^ny}{dz^n} + \frac{\alpha}{z}\frac{d^{n-1}y}{dz^{n-1}} + \beta y = 0$ (1884) тамъ же 1884. I с. 41—64.

3) Замѣтка объ обобщеніи уравненія Риккати. (1884) тамъ же 1884. I с. 80—82.

4) Объ интегрированіи одного линейнаго дифференціальнаго уравненія n-го порядка (1885) тамъ же 1884. III с. 222—232.

5) О функціяхъ подобныхъ, функціи Гамма. 1888. Сообщ. Харьк. М. О. 2-я сер. т. I с. 169—238.

6) Ueber eine Klasse von Functionen die der Gamma—function analog sind. Leipz. Ber. XLVI. 268—275 (1894).

7) Объ автоморфной функціи аналогичной экспонентной. Сообщ. Харьк. М. О. (2) т. IV. с. 253—262. (1895).

8) Объ опредѣленіи длины въ неэвклидовой геометріи. Тамъ же (2) VI с. 139—153 (1897).

9) О законѣ взаимности простыхъ чиселъ. Тамъ же с. 200—202 (1898).

10) Зависимость между Кинкелиновыми и гаммаморфными функціями. Тамъ же VIII. 23—135 1903.

Кромѣ того, рядъ курсовъ В. П. былъ литографированъ; таковы университетскія лекціи по теоріи чиселъ, дифференціальному исчисленію, по теоріи обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій и кратнымъ интеграламъ и технологическаго института дифференціальное и интегральное исчисленіе съ началами высшей алгебры. Послѣдній курсъ [1]) на средства технологическаго института начатъ былъ печатаніемъ подъ названіемъ Курсъ анализа. Дифференціальное исчисленіе, и въ спискѣ трудовъ В. П., помѣщенномъ въ юбилейномъ томѣ Харьковскаго университета въ слѣдъ за его автобіографіей обозначенъ, какъ заканчивающійся печатаніемъ. Но за переходомъ В. П. въ Томскъ этотъ курсъ такъ и остался незаконченнымъ и повидимому былъ уничтоженъ.

Проф. *Д. М. Синцовъ.*

---

[1]) О немъ и говорилъ В. А. Стекловъ въ своемъ представленіи 1902 г.

Математическій Институтъ имени супруговъ Mittag-Leffler.

$^{3}/_{16}$ марта 1916 г. скандинавскіе математики чествовали 70-ти лѣтіе главы шведскихъ математиковъ G. Mittag-Leffler'a. Выдающійся ученый, профессоръ и одно время ректоръ Стокгольмскаго университета, редакторъ Acta Mathematica, одного изъ крупнѣйшихъ научныхъ математическихъ журналовъ, Миттагъ-Леффлеръ широко извѣстенъ далеко за предѣлами своей родины. Имя его связано и съ исторіей русской математики,—именно онъ далъ возможность нашей соотечественницѣ С. В. Ковалевской занять каѳедру математики въ Швеціи,—что было неосуществимо въ ея родной странѣ. Со всѣхъ концовъ научнаго міра юбиляръ получилъ привѣтствія отъ ученыхъ обществъ, учрежденій и отдѣльныхъ ученыхъ. Юбиляръ связалъ съ этимъ днемъ крупное научное дѣло—подписавши въ этотъ день вмѣстѣ со своей женой завѣщаніе, которымъ они все свое состояніе жертвуютъ послѣ своей смерти на основаніе *Математическаго Института имени супруговъ Миттагъ-Леффлеръ*. Цѣли и задачи этого учрежденія формулируются въ завѣщаніи слѣдующимъ образомъ. «Этотъ институтъ имѣетъ своею задачею сохранить *чистой* математикѣ въ четырехъ скандинавскихъ странахъ Швеціи, Даніи, Финляндіи и Норвегіи, но въ особенности въ Швеціи, то положеніе, которое она имѣетъ, и содѣйствовать его упроченію, а также сдѣлать широко извѣстнымъ въ его истинномъ значеніи содѣйствіе этихъ странъ въ сферѣ высшей жизни духа.

При выполненіи этой задачи мы воспрещаемъ какія бы то ни было соображенія, отличныя отъ указанныхъ. Не должно принимать поэтому во вниманіе ни личныхъ дружественныхъ отношеній, ни желанія оказать кому бы то нибыло денежную поддержку. Не должно принимать въ соображеніе требованій или нуждъ практическихъ, вопросовъ экзаменныхъ, политическихъ убѣжденій или соображеній, вытекающихъ изъ прочихъ наукъ, кромѣ *чистой* математики.

Институтъ будетъ выполнять свою задачу:

1) Посвящая заботы и вниманіе поддержанію и обогащенію математической библіотеки завѣщ. Миттагъ-Леффлера, со всѣмъ къ ней относящимся,—рукописями, портретами, семейными коллекціями, фамильными сувенирами и др.

Библіотека должна продолжать оставаться въ большой каменной виллѣ, въ участкѣ кв. № 16, наз. Midgård, въ Дьюрсхольмѣ, и не должна быть включаема въ составъ никакой другой коллекціи книгъ. Вилла была выстроена и оборудована съ цѣлью служить помѣщеніемъ для библіотеки и содержитъ для этого нѣсколько рабочихъ комнатъ, гдѣ изслѣдователи могутъ пользоваться въ полномъ спокойствіи средствами библіотеки. Небольшая часть виллы, служащая въ настоящее время квартирой, будетъ—послѣ смерти завѣщателей—также отдана подъ библіотеку.

Библіотека будетъ открыта для всѣхъ математиковъ, но во избѣжаніе злоупотребленій, съ разрѣшенія предсѣдателя дирекціоннаго комитета или директора института. Книги не должны быть уносимы изъ библіотеки и могутъ быть утилизируемы только въ помѣщеніяхъ библіотеки.

2) Предоставляя стипендіи для занятій на родинѣ или внѣ ея молодымъ людямъ обоего пола принадлежащимъ четыремъ названнымъ странамъ и давшимъ доказательства дѣйствительныхъ способностей къ изслѣдованіямъ и открытіямъ въ области *чистой* математики.

Кромѣ того, сочиненія признанныя имѣющими значеніе выше средняго уровня, и принадлежащія авторамъ—уроженцамъ этихъ четырехъ странъ, могутъ быть предметомъ отличія, которое будетъ состоять изъ золотой медали, той же модели и того же титула, что малая медаль Нобеля и, пока будутъ въ распоряженіи экземпляры, въ возможно полной коллекціи Acta Mathematica, томы которые въ хорошемъ переплетѣ, будутъ носить имя увѣнчаннаго автора.

3) Присуждая преміи за открытія, дѣйствительно достойныя этого имени, въ области *чистой* математики. Эти преміи должны присуждаться независимо отъ національности лавреата. Послѣдній можетъ принадлежать любой странѣ, и уроженцы четырехъ скандинавскихъ странъ не будутъ пользоваться въ этомъ отношеніи никакой привилегіей. Премія можетъ быть присуждена только за открытіе, вносящее новыя идеи такой важности, что наука получитъ отъ нихъ новый импульсъ. Желательно все же, чтобы премія могла быть присуждаема по крайней мѣрѣ разъ въ каждыя шесть лѣтъ. Эта премія будетъ состоять изъ золотой медали большого размѣра, художественно выполненной, и изъ диплома

также художественнаго характера, мотивирующаго научное присужденіе преміи, и наконецъ изъ возможно полной серіи Acta Mathematica, томы которой въ солидныхъ и хорошихъ переплетахъ будутъ носить имя лавреата. Послѣдній будетъ приглашенъ явиться лично въ Двюрсхольмъ для полученія преміи. Онъ получитъ для этого возмѣщеніе расходовъ путешествія, размѣры котораго устанавливаются каждый разъ. Премія вручается ему въ торжественной церемоніи, устраиваемой въ большой залѣ библіотеки.

4) Когда годичный доходъ института превыситъ нижеуказанную цифру, можно будетъ, кромѣ поста директора, установить другія платныя должности, носители которыхъ будетъ имѣть своею задачей проявлять дѣятельность перомъ и обученіемъ, исключительно научную, въ области *чистой* математики.

Къ предыдущимъ распоряженіямъ присоединяются слѣдующія.

A. Дирекціонный комитетъ института слагается изъ Шведскихъ членовъ перваго отдѣленія (чистой математики) Корол. Академіи Наукъ и, пожизненно, профессоровъ Ivar Fredholm'a и N. E. Nörlund'a. Кромѣ того въ составъ входитъ ex officio директоръ, ниже называемый. Комитетъ можетъ кооптировать себѣ также, на болѣе или менѣе долгій срокъ, такого шведскаго математика, дѣйствительно выдающагося, который раздѣлялъ бы вполнѣ идеи, руководившія завѣщателями, но еще не принадлежалъ бы къ первому отдѣленію Академіи Наукъ, а также удовлетворялъ тѣмъ же условіямъ математика 3-хъ другихъ сканднавскихъ странъ.

B. Какъ только будетъ возможно, будетъ приглашенъ на постъ научнаго и административнаго руководителя (директора) института математикъ выдающійся по рангу и представляющійся особенно подходящимъ къ этой обязанности, дѣятельность котораго должна происходить всецѣло въ предѣлахъ его личныхъ научныхъ изслѣдованій и стремиться въ то же время къ цѣли, преслѣдуемой институтомъ. Онъ долженъ, слѣдовательно, помогать своими совѣтами всѣмъ, кто захочетъ отдаться научнымъ занятіямъ въ институтѣ. Онъ долженъ будетъ, равнымъ образомъ, когда будетъ полезно, но всегда въ чисто-научныхъ цѣляхъ, прочитывать курсы для ограниченнаго числа слушателей, дѣйствительно одаренныхъ и питающихъ живой интересъ къ его лекціямъ.

Съ матеріальной стороны ему должно быть создано положеніе болѣе благопріятное чѣмъ какого бы то нибыло профессора математики въ университетахъ четырехъ скандинавскихъ странъ. Онъ долженъ имѣть жительство въ Дьюрсхольмѣ и, если возможно, въ непосредственной

близости библіотеки. Впредь до постройки для него спеціальнаго жилища, ему должны быть присвоены квартирныя. Назначеніе его состоится, по представленію дирекціоннаго комитета, Его Величествомъ Королемъ (шведскимъ), если, какъ завѣщатели надѣются, Его Величеству будетъ это угодно.

...E. По крайней мѣрѣ каждыя шесть лѣтъ институтъ будетъ устраивать торжественное засѣданіе. Математики четырехъ скандинавскихъ странъ получаютъ личное приглашеніе на немъ присутствовать. Завѣщатели надѣются, что въ виду важности института для этихъ странъ, всѣ постараются послѣдовать приглашенію, если не помѣшаетъ force majeure. Желательно, чтобы день церемоніи былъ выбранъ такъ, чтобы совпадалъ съ временемъ съѣзда въ Стокгольмѣ конгресса скандинавскихъ математиковъ. При этомъ будетъ сообщенъ отчетъ о дѣятельности института со времени предшествующаго торжественнаго засѣданія. Церемонія должна носить характеръ торжественности, долженствующій выставить въ полномъ свѣтѣ возвышенную миссію математическихъ наукъ и цѣль, поставленную дѣятельности института.

Въ заключеніе завѣщатель Mittag-Leffler отмѣчаетъ, что образцомъ, который онъ имѣлъ передъ глазами при основаніи женою и имъ института, былъ институтъ Pasteur'a въ Парижѣ. Лучше чѣмъ какой-либо университетъ и какая-либо изъ существующихъ академій, исполняетъ этотъ институтъ миссію учрежденія, призваннаго быть исключительно очагомъ научныхъ изслѣдованій. Университеты имѣютъ вездѣ наряду съ научною задачею еще и другую, которая часто очень существенно вредитъ первой—образовывать учителей и чиновниковъ. Что касается академій, лучше отвѣчавшихъ когда-то требованіямъ чисто научнымъ, то онѣ страдаютъ двумя недостатками: собственная дѣятельность ихъ членовъ выполняется вообще внѣ ихъ и съ другой стороны, даже въ тѣхъ исключительныхъ случаяхъ, когда дѣло стоитъ иначе, членамъ ихъ не достаетъ того стимула, который находитъ ученый для своихъ изслѣдованій въ необходимости руководить или помогать другимъ изслѣдователямъ. Институтъ завѣщателей не связанъ съ учрежденіемъ, гдѣ бы могли происходить экспериментальныя изслѣдованія, но со спеціальной очень богатой библіотекой—что и соотвѣтствуетъ потребностямъ чистой математики.

При доброй волѣ, полагаетъ завѣщатель, въ Швеціи найдется достаточно возможностей для созданія и организаціи институтовъ для естественныхъ наукъ, но очень мало людей, кромѣ спеціалистовъ, понимаютъ значеніе и миссію чистой математики. Вотъ причина почему завѣщатель, Миттагъ-Леффлеръ, всегда желалъ имѣть возможность осно-

вать такой институтъ, который они надѣются создать этимъ завѣщаніемъ. Оно проистекаетъ изъ живого убѣжденія, что народъ, не придающій математикѣ высокаго мѣста въ своемъ уваженіи, никогда не въ состояніи будетъ выполнять высокія цивилизующія задачи, и потому пользоваться интернаціональнымъ признаніемъ, которое въ свою очередь составляетъ à la longue дѣйствительное средство сохранить наше положеніе въ мірѣ и сохранить наше право жить своею собственною жизнью.—

Завѣщаніе предусматриваетъ наконецъ распоряженія по которымъ институтъ долженъ открыть свои дѣйствія послѣ смерти G. Mittag-Leffler'a при сохраненіи за M-me Signe Mittag-Leffler извѣстной пожизненной ренты.—

Д. С.

ПРОТОКОЛЫ

засѣданій Харьковскаго Математическаго Общества за $19^{15}/_{16}$ и $19^{16}/_{17}$ академическіе годы.

Годичное засѣданіе 16 октября 1915 г.

Присутствовали: Д. М. Синцовъ, С. Н. Бернштейнъ, Т. П. Кравецъ, В. Г. Фесенковъ, Н. Н. Евдокимовъ, А. П. Пшеборскій, Н. Ф. Спенглеръ, И. С. Чернушенко, Г. С. Голубъ.

Предсѣдательствовалъ Д. М. Синцовъ.

Д. М. Синцовъ доложилъ отчетъ о дѣятельности Общества за истекшій годъ.

А. П. Пшеборскій доложилъ статью проф. Я. В. Успенскаго «Къ теоріи квадратичныхъ вычетовъ».

Д. М. Синцовъ предложилъ избрать проф. Я. В. Успенскаго въ члены-корреспонденты. Предложеніе принято единогласно.

Постановлено пригласить Н. В. Лагутинскую библіотекаремъ О-ва.

Постановлено ассигновать до 500 р. на покупку книгъ изъ библіотеки акад. Н. Я. Сонина.

Вновь избранъ прежній Распорядительный Комитетъ: Предсѣдатель—проф. Д. М. Синцовъ; товарищи предсѣдателя—проф. А. П. Пшеборскій и Ц. К. Руссьянъ; секретарь—прив.-доц. С. Н. Бернштейнъ.

Избраны дѣйствительными членами Е. В. Столярова и А. Ф. Спенглеръ.

Н. Ф. Спенглеръ сдѣлалъ докладъ «Объ особенныхъ линіяхъ преобразованія плоскости въ плоскость».

Засѣданіе 14 ноября 1915 г.

Присутствовали: Д. М. Синцовъ, А. П. Грузинцевъ, Т. П. Кравецъ, А. П. Пшеборскій, С. Н. Бернштейнъ, В. Х. Даватцъ, Н. Н. Евдокимовъ, К. Ю. Кухарская, Н. Е. Подтягинъ, А. В. Маевскій, Г. С. Голубъ,

Е. П. Аксюкъ, Я. М. Назаревскій, П. М. Ерохинъ, Е. Н. Марчевская, И. Б. Вольфсонъ.

Предсѣдательствовалъ Д. М. Синцовъ.

Заслушанъ докладъ Д. М. Синцова «О преподаваніи математики для физиковъ». Въ преніяхъ по поводу доклада приняли участье А. П. Грузинцевъ, Т. П. Кравецъ, С. Н. Бернштейнъ, П. М. Ерохинъ, И. Б. Вольфсонъ.

Заслушанъ отзывъ А. П. Грузинцева о книгѣ Мостовича «Основы современной термодинамики» и С. Г. Петровича «Основы механики сплошного тѣла».

Засѣданіе 21 ноября 1915 г. (педагогическое).

Присутствовали: Д. М. Синцовъ, Е. П. Аксюкъ, С. Адамовичъ, Н. Е. Подтягинъ, С. Токаревъ, С. Борисоглѣбскій, М. И. Сахаровъ, З. В. Кибальчичъ, Е. Н. Марчевская, А. А. Сонцевъ, М. Н. Марчевскій, И. С. Чернушенко, В. Х. Даватцъ, К. Г. Гинце, Н. П. Бѣляевъ, С. М. Семилѣтовъ, Б. П. Герасимовичъ, С. Н. Бернштейнъ, Г. С. Голубъ.

Предсѣдательствовалъ Д. М. Синцовъ.

Избраны въ дѣйствительные члены Х. М. О-ва К. Г. Гинце и З. В. Кибальчичъ.

Заслушаны доклады Н. П. Бѣляева, А. А. Сонцова и И. С. Чернушенко «Къ пересмотру программъ по математикѣ въ средней школѣ». Въ преніяхъ приняли участіе Д. М. Синцовъ, В. Х. Даватцъ, Н. П. Бѣляевъ, Г. С. Голубъ, А. А. Сонцовъ, И. С. Чернушенко.

Засѣданіе 23 января 1916 г.

Присутствовали: Д. М. Синцовъ, А. П. Пшеборскій, А. П. Грузинцевъ, Н. Н. Салтыковъ, С. Н. Бернштейнъ, Т. П. Кравецъ, Д. А. Рожанскій, Ц. К. Руссьянъ, Г. С. Голубъ, Н. Ф. Спенглеръ, А. В. Желиховскій, Н. Е. Подтягинъ, Е. В. Столярова, А. А. Сонцовъ, В. Х. Даватцъ, студенты и курсистки.

Предсѣдательствовалъ Д. М. Синцовъ.

Заслушаны доклады Д. М. Синцова, Ц. К. Руссьяна и Н. Н. Салтыкова «О Софіи Васильевнѣ Ковалевской и ея научныхъ трудахъ».

Высказано пожеланіе о томъ, чтобы Х. М. О-во взяло на себя иниціативу изданія трудовъ С. В. Ковалевской, обратившись для этой цѣли къ содѣйствію другихъ научныхъ обществъ.

С. Н. Бернштейнъ доложилъ статью И. И. Привалова «О сходимости почти всюду строкъ Штурмъ-Ліувилля».

Засѣданіе 4 марта 1916 г.

Присутствовали: Д. М. Синцовъ, В. Х. Даватцъ, С. Н. Бернштейнъ, Т. П. Кравецъ, А. А. Сонцевъ, Н. Е. Подтягинъ, А. П. Пшеборскій.

Предсѣдательствовалъ Д. М. Синцовъ.

Заслушанъ докладъ В. Х. Даватца «Синтетическія основы плоской параболической геометріи».

Заслушанъ докладъ А. А. Сонцева «О наглядномъ преподаваніи геометріи (программа, пособія)».

Засѣданіе 25 марта 1916 г.

Предсѣдатель Д. М. Синцовъ.

Присутствовали: Д. М. Синцовъ, Т. П. Кравецъ, А. В. Желиховскій, С. Н. Бернштейнъ, А. П. Пшеборскій, Е. В. Столярова, Е. В. Златоверховникова, И. Б. Вольфсонъ, Д. А. Рожанскій, Н. Ф. Спенглеръ.

1. Заслушанъ отчетъ г. предсѣдателя о финансовомъ состояніи кассы О-ва.

2. Постановлено послать привѣтствіе Mittag-Leffler'у по случаю его 70-лѣтняго юбилея.

3. Заслушанъ докладъ Н. Ф. Спенглера «О формулѣ Стокса въ пространствѣ n измѣреній».

4. Заслушанъ докладъ С. Н. Бернштейна о статьѣ П. С. Флорова «Обобщеніе опыта Якова Бернулли». Докладчикъ сообщаетъ результаты П. С. Флорова и, указавши на существенную неправильность его доказательства, устанавливаетъ эти результаты, какъ прямое слѣдствіе изъ теоремы Бернулли. Заключенія докладчика принимаются единогласно, о чемъ постановлено сообщить автору.

5. Заслушанъ докладъ А. П. Пшеборскаго о статьѣ о. Ис. Максимова по теоріи чиселъ. Сообщая результаты статьи, которые представляютъ нѣкоторый интересъ, докладчикъ считаетъ ихъ слишкомъ элементарными для напечатанія въ Сообщ. Харьк. Мат. О-ва. Заключенія докладчика принимаются единогласно.

6. Заслушана 1-я часть доклада С. Н. Бернштейна «Объ основахъ теоріи вѣроятностей». Въ преніяхъ по поводу доклада приняли участье Д. М. Синцовъ, А. П. Пшеборскій, И. Б. Вольфсонъ, Т. П. Кравецъ.

Засѣданіе 29 апрѣля 1916 г.

Присутствовали: Д. М. Синцовъ, А. Ф. Спенглеръ, В. Г. Фесенковъ, Н. Ф. Спенглеръ, Н. Е. Подтягинъ, Т. П. Кравецъ, С. Н. Бернштейнъ, А. П. Пшеборскій, А. П. Грузинцевъ, В. Х. Даватцъ, Н. Н. Евдокимовъ.

Предсѣдательствовалъ Д. М. Синцовъ.

Заслушана 2-я часть статьи С. Н. Бернштейна «Объ основахъ теоріи вѣроятностей». Въ преніяхъ участвовали Д. М. Синцовъ, А. П. Грузинцевъ, А. П. Пшеборскій и Т. П. Кравецъ.

Заслушанъ докладъ съ демонстраціями Д. М. Синцова «Объ алгебраическихъ кривыхъ».

Засѣданіе 14 мая 1916 г.

Присутствовали: Д. М. Синцовъ, А. П. Пшеборскій, В. Х. Даватцъ, М. Н. Марчевскій, А. А. Сонцевъ, Е. В. Златоверховникова, В. Г. Фесенковъ, Т. П. Кравецъ, И. С. Чернушенко, Н. Ф. Спенглеръ, А. П. Грузинцевъ, Н. Н. Евдокимовъ.

За отсутствіемъ докладчика П. С. Флорова, которому о днѣ засѣданія было сообщено письмомъ, отправленнымъ 2 мая, собраніе переходитъ къ разсмотрѣнію текущихъ дѣлъ.

Постановлено привѣтствовать Русское Астрономическое О-во по поводу 25-лѣтняго юбилея.

Постановлено пріобрѣсти на средства полученныя отъ изданія Харьк. Мат. Библіотеки, облигацію на 1000 р. $5^1/_2\%$ военнаго займа.

Заслушанъ докладъ В. Х. Даватца объ «Аналитической геометріи» М. А. Тихомандрицкаго. Заключенія докладчика о принципіальныхъ ошибкахъ автора принимаются собраніемъ.

А. П. Пшеборскій доложилъ работу А. А. Фридмана «О вихряхъ въ жидкости съ мѣняющейся температурой».

В. Х. Даватцъ доложилъ статью Е. Когбетлянца «О разложеніи числовыхъ функцій въ ряды, аналогичные тригонометрическимъ».

В. Г. Фесенковъ сдѣлалъ два доклада: 1) О гипотезѣ Лапласа и 2) О причинѣ измѣнчивости η aquilae.

Годичное засѣданіе 15 сентября 1916 г.

Предсѣдательствовалъ Д. М. Синцовъ.

Присутствовали: Г. А. Грузинцевъ, С. Н. Бернштейнъ, В. Х. Даватцъ, Е. В. Златоверховникова, Н. Н. Евдокимовъ, Д. М. Синцовъ, И. Б. Вольфсонъ, А. К. Сушкевичъ, Т. П. Кравецъ, Н. Ф. Спенглеръ, І. Я. Гросманъ, Н. Е. Подтягинъ.

Д. М. Синцовъ сообщилъ о кончинѣ проф. В. П. Алексѣевскаго и предложилъ почтить его память вставаніемъ.

Д. М. Синцовъ и С. Н. Бернштейнъ представили отчетъ о дѣятельности Х. М. О-ва.

Д. М. Синцовъ сообщилъ о затрудненіяхъ, связанныхъ съ печатаніемъ «Сообщеній».

С. Н. Бернштейнъ предложилъ, въ виду упомянутыхъ затрудненій, вызвавшихъ большое накопленіе матерьяла для печатанія, временно прекратить пріемъ статей отъ лицъ, не состоящихъ членами О-ва. Предложеніе принимается.

В. Х. Даватцъ доложилъ статью И. М. Виноградова «О среднемъ числѣ классовъ формъ отрицательнаго опредѣлителя».

Д. М. Синцовъ сообщилъ завѣщаніе Миттагъ-Леффлера. Постановлено напечатать его на русскомъ языкѣ.

Г. А. Грузинцевъ слѣлалъ докладъ «Обобщеніе теоремы Миттагъ-Леффлера».

Произведены выборы президіума, который переизбранъ въ прежнемъ составѣ.

Постановлено принять участіе въ празднованіи юбилея предсѣдателя Физико-Химическаго О-ва проф. И. П. Осипова.

Избранъ въ дѣйствительные члены dr phil. І. Я. Гройсманъ.

Отчетъ о дѣятельности Харьковскаго Математическаго О-ва за $19^{15}/_{16}$ академическій годъ.

Засѣданія Мат. О-ва открылись въ истекшемъ году годичнымъ засѣданіемъ 16 октября 1915 г. На этомъ засѣданіи былъ вновь избранъ прежній распорядительный комитетъ: Предсѣдатель—проф. Д. М. Синцовъ; тов. предсѣд.—проф. А. П. Пшеборскій и Ц. К. Руссьянъ; секретарь—прив.-доц. С. Н. Бернштейнъ.

Избранъ въ члены-корреспонденты Я. В. Успенскій и въ дѣйствительные члены А. Ф. Спенглеръ, Е. В. Столярова, К. Г. Гинце, З. В. Кибальчичъ, Е. В. Златоверховникова, А. К. Сушкевичъ.

Библіотекаремъ О-ва приглашена Н. В. Лагутинская.

Въ теченіе года, кромѣ годичнаго засѣданія, состоялось еще семь засѣданій, на которыхъ были сдѣланы доклады.

1. *Н. Ф. Спенглеръ.* Объ особенныхъ линіяхъ преобразованія плоскости въ плоскость.

2. *Я. В. Успенскій.* Къ теоріи квадратичныхъ формъ (сообщ. А. П. Пшеборскій).

3. *Д. М. Синцовъ.* Вопросъ о преподаваніи математики для физиковъ.

4. *А. П. Грузинцевъ.* Рецензія о книгѣ Мостовича «Основа современной термодинамики» и Петровича «Основы механики сплошного тѣла».

5. *Н. П. Бѣляевъ, А. А. Сонцевъ, И. С. Чернушенко.* Къ пересмотру программъ по математикѣ въ средней школѣ.

6. *Д. М. Синцовъ.* С. В. Ковалевская (біографія).

7. *Ц. К. Руссьянъ.* О работахъ С. В. Ковалевской по уравненіямъ въ частныхъ производныхъ.

8. *Н. Н. Салтыковъ.* О работахъ С. В. Ковалевской по механикѣ.

9. *И. И. Привaловъ.* О сходимости почти всюду строкъ Штурмъ-Ліувилля (сообщ, С. Н. Бернштейнъ).

10. *Н. Ф. Спенглеръ.* О формулѣ Стокса въ пространствѣ и измѣреніи.

11. *П. С. Флоровъ.* Обобщеніе опыта Якова Бернулли (сообщ. С. Н. Бернштейнъ).

12. *С. Н. Бернштейнъ.* Объ основахъ теоріи вѣроятностей.

13. *И. С. Максимовъ.* О дѣлимости чиселъ (сообщ. А. П. Пшеборскій).

14. *В. Х. Даватцъ.* Рецензія объ «Аналитической геометріи» М. А. Тихомандрицкаго.

15. *Д. М. Синцовъ.* Демонстрированіе алгебраическихъ кривыхъ.

16. *Э. Когбетліевъ.* Разложеніе числовыхъ функцій въ ряды, подобные тригонометрическимъ (сообщ. В. Х. Даватцъ).

17. *В. Х. Даватцъ.* Синтетическія основы плоской параболической геометріи.

18. *А. А. Фридманъ.* О вихряхъ въ жидкости (сообщ. А. П. Пшеборскій).

19. *В. Г. Фесенковъ.* О причинѣ измѣнчивости η Aquilae.

20. *В. Г. Фесенковъ.* О космогонической гипотезѣ Лапласа.

За истекшій акад. годъ напечатаны 2-й и 3-й выпуски 15-го тома.

Научное засѣданіе 6 октября 1916 г.

Предсѣдательствовалъ Д. М. Синцовъ.

Присутствовали: Д. М. Синцовъ, Ц. К. Руссьянъ, А. П. Грузинцевъ, А. П. Пшеборскій, Г. А. Грузинцевъ, И. Б. Вольфсонъ, А. К. Сушкевичъ, І. Я. Гройсманъ, В. Х. Даватцъ, С. Н. Бернштейнъ, Н. Е. Подтягинъ, Т. П. Кравецъ, Н. Ф. Спенглеръ, И. С. Чернушенко.

Заслушанъ докладъ Г. А. Грузинцева «Объ одной прерывной функціи». Въ преніяхъ по поводу доклада приняли участіе С. Н. Бернштейнъ, Ц. К. Руссьянъ, А. П. Пшеборскій и В. Х. Даватцъ.

Заслушанъ докладъ І. Я. Гройсмана «Объ открытіи Hardy относительно функціи ζ».

А. П. Пшеборскій доложилъ статью В. И. Смирнова (Петроградъ) «Объ униформизаціи функцій».

Педагогическое засѣданіе 6 ноября 1916 г.

Предсѣдательствовалъ Д. М. Синцовъ.

Присутствовали: Д. М. Синцовъ, А. П. Пшеборскій, Н. Н. Салтыковъ, С. Н. Бернштейнъ, В. Х. Даватцъ, І. Я. Гройсманъ, К. Ю. Кухарская, И. С. Чернушенко, В. А. Желиховскій, Р. Д. Пономаревъ, Н. Ф. Спенглеръ, А. К. Сушкевичъ, З. В. Кибальчичъ, Я. Б. Диманштейнъ, В. В. Каврайскій и студенты.

Избраны въ члены общества Я. Б. Диманштейнъ и В. К. Каврайскій.

Заслушанъ мнемоническій сеансъ Н. С. Липовскаго,

Произведенъ сборъ пожертвованій въ пользу Краснаго Креста.

Заслушанъ докладъ П. И. Курилко «О гоніометрическихъ уравненіяхъ». Въ преніяхъ приняли участіе Д. М. Синцовъ, С. Н. Бернштейнъ и А. П. Пшеборскій.

Заслушанъ докладъ Д. М. Синцова «Нѣсколько замѣчаній по поводу письменныхъ испытаній по тригонометріи и высшей математикѣ въ реальныхъ училищахъ».

Научное засѣданіе 2 декабря 1916 года.

Предсѣдательствовалъ Д. М. Синцовъ.

Присутствовали: Д. М. Синцовъ, А. П. Пшеборскій, В. Х. Даватцъ, А. К. Сушкевичъ, Н. Н. Евдокимовъ, И. С. Чернушенко, Г. С. Голубъ, М. Н. Марчевскій, І. Я. Гройсманъ, Я. Б. Диманштейнъ, Н. Е. Подтягинъ, В. В. Каврайскій, Помазановъ, Г. А. Грузинцевъ, З. В. Кибальчичъ, Шиловъ.

Предсѣдатель сообщилъ письмо А. А. Маркова. Постановлено отмѣтить, что утвержденіе П. А. Некрасова въ статьѣ «Средняя школа, математика и научная подготовка учителей» на стр. 60, относящееся къ Х. М. О-ву, не соотвѣтствуетъ истинѣ.

Заслушанъ докладъ В. Х. Даватца «О двухъ теоремахъ Н. И. Лобачевскаго».

Заслушанъ докладъ С. Н. Бернштейна «Объ одномъ видоизмѣненіи неравенства Чебышева».

Заслушана замѣтка Э. Когбетліева, доложенная С. Н. Бернштейномъ «О сходимости разложеній по полиномамъ Чебышева-Якоби».

Научное засѣданіе 19 февраля 1917 г.

Предсѣдательствовалъ Д. М. Синцовъ.

Присутствовали: Д. М. Синцовъ, С. Н. Бернштейнъ, В. Х. Даватцъ, І. Я. Гройсманъ, Н. Е. Подтягинъ, И. М. Бабаковъ, Г. А. Грузинцевъ, А. П. Грузинцевъ, Я. Б. Диманштейнъ, Г. В. Джонсъ.

Д. М. Синцовъ сообщилъ о кончинѣ М. М. Алексѣенко и G. Darboux, память которыхъ была почтена вставаніемъ.

Заслушанъ и утвержденъ финансовый отчетъ секретаря.

Принято предложеніе объ увеличеніи вознагражденія библіотекаршѣ до 30 рублей въ мѣсяцъ и служительницѣ до 5 рублей.

Заслушанъ докладъ В. Х. Даватца «Объ одной формулѣ теоріи чиселъ».

Заслушана статья Н. М. Крылова, доложенная Д. М. Синцовымъ, «О нѣкоторыхъ важныхъ формулахъ теоріи рядовъ».

Заслушанъ докладъ С. Н. Бернштейна «О законѣ большихъ чиселъ».

Денежный отчетъ Харьковскаго Математическаго Общества отъ 1-го января 1915 г. по 1-е января 1916 г.

(Составленный секретаремъ О-ва С. Н. Бернштейномъ).

1. Отчетъ объ израсходованіи субсидіи изъ спеціальныхъ средствъ университета.

П Р И Х О Д Ъ.

Остатокъ на 1-е января 1915 г.	146 р. 20 к.
Субсидія на 1915 г.	500 » —
Итого	646 р. 20 к.

Р А С Х О Д Ъ.

Уплата тип. Зильберберга за № 5 т. XIV	146 р. 20 к.
» » » за № 6 т. XIV	298 » 25 »
» » » за № 1 т. XV	165 » 55 »
» » » за бланки	12 » 20 »
Уплата служительницѣ	24 » —
	646 р. 20 к.

2. Отчетъ о состояніи кассы Математическаго О-ва.

ПРИХОДЪ.

Остатокъ на текущемъ счету въ Международномъ банкѣ № 3544 къ 1 января 1915 г.	1428 р. 49 к.
% за 1915 г.	37 » 27 »
Остатокъ у секретаря къ 1-му января 1915 г.	3 » 93 »
Членскіе взносы	38 » —
Пособіе изъ Министерства Нар. Просв. на 1915 г.	1000 » —
Продажа Сообщеній	33 » —
Продажа изданій О-ва	12 » 50 »
	2553 р. 19 к.

РАСХОДЪ.

Жалованіе библіотекарю Гребенову (январь—май)	100 р. — к.
Жалованіе библіотекаршѣ Лагутинской (ноябрь—декабрь).	40 » — »
Жалованіе служительницѣ	4 » — »
Пріобрѣтеніе книгъ	61 » — »
Чай на засѣданіяхъ	12 » 56 »
Почтовые и канцелярскіе расходы	17 » 38 »
	235 р. 94 к.

Въ кассѣ Общества остается 2317 р. 25 к. (Изъ нихъ на текущемъ счету въ Международномъ банкѣ 2265 р. 76 к.+у секретаря О-ва 51 р. 49 к.).

Финансовый отчетъ Секретаря Математическаго Общества при Харьковскомъ университетѣ за 1916 годъ.

Остатокъ къ 1-му января 1916 г.

По текущему счету № 3544 въ Международномъ банкѣ: капиталъ	2265 р. 76 к.
% за 1916 г.	58 » 39 »
Наличными у секретаря	51 » 49 »
Итого	2375 р. 64 к.

ПРИХОДЪ.

Отъ Министерства Народнаго Просвѣщенія	1000 р.	— к.
Членскіе взносы	36 »	— »
Подписка на «Сообщенія» и продажа изд. О-ва	46 »	30 »
Итого. . . .	1082 р.	30 к.
Общій итогъ прихода. . .	3457 р.	94 к.

Остатокъ къ 1-му января 1917 г. 2636 р. 37 к. (На текущемъ счету 2620 р.+наличность кассы 16 р. 37 к.).

РАСХОДЫ.

Печатаніе 2-го и 3-го выпуска Сообщеній	483 р.	85 к.
Клише къ статьямъ Даватца, Виноградова и Фесенкова .	25 »	— »
Библіотекаршѣ.	240 »	— »
Служительницѣ (за вечернее дежурство)	18 »	— »
Чай на засѣданіяхъ	14 »	64 »
Посуда	3 »	— »
Почтовые и канцелярскіе расходы	15 »	75 »
Гр. А. Грузинцеву остатокъ гонорара за переводъ . . .	21 »	33 »
Общій итогъ расходовъ . .	821 р.	57 к.

Кромѣ того по смѣтѣ спеціальныхъ средствъ ассигновано было 500 руб., за счетъ коихъ было израсходовано 36 руб. платы служительницѣ Маринѣ Шуличенко.

Науково-Дослідний Інститут
БІБЛІОТЕКА
Інв. № 583
Математики і механіки ХДУ