Communications de la Société mathématique de Kharkow.
2-ème série, Tome XIV, № 1—2.

СООБЩЕНІЯ
ХАРЬКОВСКАГО
МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА

ВТОРАЯ СЕРІЯ

84 **Томъ XIV** 1913/1915

~~№ 1—2~~

92

ХАРЬКОВЪ.
Типографія и Литографія М. Зильбербергъ и С-вья.
Донецъ-Захаржевская ул., с. д. № 6.
1913 5

Communications de la Société mathématique de Kharkow.
2-ème série, Tome XIV.

СООБЩЕНІЯ
ХАРЬКОВСКАГО
МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА

ВТОРАЯ СЕРІЯ
Томъ XIV

ХАРЬКОВЪ.
Типографія и Литографія М. Зильбербергъ и С-вья.
Донецъ-Захаржевская ул., с. д. № 6.
1915.

СОДЕРЖАНІЕ

XIV-го тома.

Стр.

TABLE DES MATIÈRES

du tome XIV.

Приглашенiе

къ объединенiю обозначенiй и терминологiи въ теорiи потенцiала и въ теорiи упругости посредствомъ международнаго соглашенiя.

Излишне настаивать на большой важности соглашенiя между работниками различныхъ нацiональностей относительно терминовъ и обозначенiй, примѣняемыхъ къ какой бы то ни было области чистой или прикладной науки.

Среди различныхъ отраслей математики и теоретической физики несомнѣнно теорiя потенцiала и упругости могла бы уже въ настоящее время стать объектомъ соглашенiя такого рода, лишь бы, только попытка была сдѣлана по соотвѣтствующей достаточно широкой программѣ.

A. Область, которою пока ограничилось бы объединенiе терминовъ и обозначенiй.

1. Въ виду невозможности принятiя одного и того же термина на различныхъ языкахъ для одного и того же понятiя, слѣдовало бы установить эти термины такъ, чтобы сдѣлать ихъ переводъ съ одного языка на другой возможно болѣе легкимъ.

2. Объединенiе терминологiи и обозначенiй—въ предполагаемомъ проектѣ—охватитъ только теорiю потенцiала, и упругихъ изотропныхъ срединъ въ равновѣсiи. Что касается распространенiя соглашенiй на общую теорiю уравненiй эллиптическаго типа, то оно будетъ только принято въ соображенiе.

Принятые термины и обозначенiя должны будутъ возможно мало отклоняться отъ наиболѣе общеупотребительныхъ.

B. Выполненiе программы.

Организацiонный Комитетъ посредствомъ этого перваго циркуляра обращается къ астрономамъ, математикамъ и физикамъ съ просьбой отвѣтить сначала на слѣдующiй вопросъ:

Каковы понятiя и обозначенiя, относительно которыхъ необходимо объединенiе?

Отвѣты, полученные въ теченiе текущаго года, будутъ классифицированы возможно скорѣе; въ теченiе 1914 посредствомъ второго циркуляра будетъ выражена просьба о томъ, чтобы были сдѣланы предложенiя относительно терминовъ и обозначенiй, которыя должны быть приняты. Такъ какъ полное согласiе между предложенiями, которыя будутъ сдѣланы, не можетъ быть достигнуто, Организацiонный Комитетъ предполагаетъ сообщить при помощи третьяго циркуляра (весной 1916 г.), какiе пункты привели къ разногласiямъ, и вызвать на ближайшемъ Международномъ математическомъ конгрессѣ (1916 г.) обмѣнъ мнѣнiй по этимъ пунктамъ. Четвертый циркуляръ (1917 г.) дастъ отчетъ объ этомъ обмѣнѣ мнѣнiями и вмѣстѣ съ тѣмъ пригласитъ ученыхъ, которые не могли присутствовать на конгрессѣ, сообщить ихъ мнѣнiя.

Послѣ изученiя и разбора предложенiй и мнѣнiй, Организацiонный Комитетъ сообщитъ, при помощи пятаго циркуляра (1919 г.), въ какихъ пунктахъ соглашенiе будетъ вѣроятно, и поставитъ на голосованiе тѣ, относительно которыхъ могли бы оставаться разногласiя. Голосованiе произойдетъ въ 1920 г. на Международномъ математическомъ конгрессѣ, который будетъ какъ разъ въ этомъ году, и даже тѣ ученые, которые не будутъ на немъ присутствовать, будутъ имѣть возможность голосовать письменно. Посредствомъ шестого циркуляра (1921 г.) Организацiонный Комитетъ сообщитъ о результатахъ голосованiя, и немного погодя предполагаетъ опубликовать международныя соглашенiя достигнутыя такимъ образомъ.

Просятъ всѣ письма на нѣмецкомъ, французскомъ, англiйскомъ и италiанскомъ языкахъ направлять по адресу:

Herrn ***Arthur Korn,***
Charlottenburg, Schlüterstrasse, 25.

Организацiонный Комитетъ

для объединенiя терминологiи въ теорiи потенцiала и упругости.

М. Абраамъ (Миланъ), *А. Акерманъ-Тейбнеръ* (Лейпцигъ). *Р. д'Адемаръ* (Лилль), *П. Аппелль* (Парижъ), *С. Бернштейнъ* (Харьковъ), *К. Биркеляндъ* (Христiанiя), *В. Бьеркнесъ* (Лейпцигъ), *М. Бриллюэнъ* (Парижъ), *О. Хвольсонъ* (С.-Петербургъ), *Е. Коссера* (Тулуза), *Ф. Коссера* (Парижъ), *Г. Дарбу* (Парижъ), *П. Эренфестъ* (Лейденъ), *Г. Феръ* (Женева), *Л. Фейеръ* (Будапештъ), *Р. Гансъ* (Лаплата), *Г. Графъ* (Бернъ), *Г. Гринхиллъ* (Лондонъ), *Я. Адамаръ* (Парижъ), *В. Галльваксъ* (Дрезденъ), *Ф. Газенöрль* (Вѣна), *Т. Гайяши* (Сендай), *П. де-Геенъ* (Люттихъ), *Д. Гильбертъ* (Гöттингенъ), *Г. Iегеръ* (Вѣна), *Е Янке* (Берлинъ), *П. Кёбе* (Лейпцигъ). *В. Кёнигъ* (Гиссенъ), *А. Корнъ* (Шарлотенбургъ), *Г. Ламбъ* (Манчестеръ), *Э. Лампе* (Берлинъ). *I. Ларморъ* (Кембриджъ), *О. Леманнъ* (Карльсруэ), *Е. Леви* (Генуя), *Т. Леви-Чивита* (Падуя), *Л. Лихтенштейнъ* (Берлинъ), *А. Лове* (Оксфордъ), *Р. Марколонго* (Неаполь), *М Мäзонъ* (Мадизонъ), *Р. Майеръ* (Кёнигсбергъ), *А. Майкельсонъ* (Чикаго) *Г. Миттагъ-Леффлеръ* (Стокгольмъ), *Э. Нейманнъ* (Марбургъ), *И. Нильсенъ* (Копенгагенъ), *В. Озеенъ* (Упсала), *М. Петровичъ* (Бѣлградъ), *Э. Пикаръ* (Парижъ), *Ф. Покельсъ* (Гейдельбергъ), *Д. Помпейю* (Букарестъ), *Г. Ремундосъ* (Аѳины), *К. Шварцшильдъ* (Потсдамъ), *К. Сомильяна* (Туринъ), *В. Стекловъ* (С.-Петербургъ), *О. Тедонэ* (Генуя), *Ф. Техейра* (Порто), *Е. Террадасъ* (Барселона), *В. Вольтерра* (Римъ), *А. Вангеринъ* (Галле), *О. Винеръ* (Лейпцигъ), *С. Заремба* (Краковъ).

Sur une propriété des polynômes.

Serge Bernstein.

J'ai établi l'inégalité suivante 1): *si L est la plus grande valeur absolue d'un polynôme de degré n à coefficients réels, sur le segment $(-1, +1)$, et M son module en un point ξ extérieur à ce segment, on a*

$$M < LR^n, \tag{9}$$

où R est la demi-somme des axes de l'ellipse passant par le point ξ et ayant -1 et $+1$ pour foyers.

La démonstration s'appuie sur un théorème 2) qui n'est démontré que pour ξ réel et qui doit être modifié si ξ est un point complexe quelconque. Il convient donc de reprendre la démonstration de cette inégalité.

A cet effet, désignons par $P(x)$ le polynôme de degré n à coefficients réels qui reçoit le module M au point ξ et s'écarte le moins possible de zéro sur le segment $(-1, +1)$; soit L cet écart.

Je dis que le nombre de points $x_1, x_2, \dots x_k$, où l'écart maximum L est atteint avec des signes succéssivement contraires n'est pas inférieur à n. En effet, si on avait $k<n$, on pourrait former le polynome de degré n

$$Q(x) = P(x) + \lambda(x-\xi_1)(x-\xi)(x-y_1)\dots(x-y_{k-1}),$$

où ξ_1 est le point conjugué de ξ, et $y_1, y_2, \dots y_{k-1}$ sont des points quelconques séparant les points $x_1, x_2, \dots x_k$. Dans ces conditions, en attribuant à λ une valeur assez petite de signe convenable, on verrait que $Q(x)$ s'écarte moins de zéro que $P(x)$ sur le segment considéré et d'autre part

$$Q(\xi) = P(\xi).$$

---

1) Page 15 du mémoire «Sur l'ordre de la meilleure approximation etc.» (publié par l'Academie Royale de Belgique) et page 18 (13) du mémoire «О наилучшемъ приближенiи непрерывныхъ функцiй» (Сообщенiя Харьковскаго Мат. О-ва т. XIII. 1912 г.).

2) § 6.

Cela étant, en reprenant la partie correspondante du raisonnement fait pour démontrer le théorème (2), on trouve que le polynôme $P(x)$ satisfait nécessairement à une équation différentielle de la forme

$$L^2 - P^2 = \frac{(1-x^2)(\gamma-x)(\delta-x)}{n^2(\beta-x)^2} . [P'(x)]^2, \tag{1}$$

où les nombres réels β, γ, δ, satisfont à l'une des deux inégalités: $-1 \leqq \beta \leqq \gamma < \delta$, ou bien $1 \geqq \beta \geqq \gamma > \delta$, à moins que $P(x)$ ne soit un polynome trigonométrique, au quel cas $\beta = \gamma = \delta$.

Admettons d'abord que le point ξ n'est pas intérieur au cercle C construit sur le segment $(-1, +1)$ comme diamètre; c'est alors le dernier cas qui se présente, $P(x)$ se reduit nécessairement au polynôme trigonometrique. En effet, supposons le contraire, et soit $Q(x)$ un polynôme à coefficients réels qui a le même module M au point ξ et qui reste constamment inférieur, en valeur absolue, à L sur le segment $(-1, +1)$. Dans ces conditions les polynômes $P(x)-Q(x)$ et $P(x)+Q(x)$ auront le signe de $P(x)$ en tous les points, où $P(x)$ atteint son écart maximum, de sorte que, si l'on désigne par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ les racines de $P(x)-Q(x)=0$, et par $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ celles de $P(x)+Q(x)=0$, on aura

$$-1 < \alpha_1 < \cos\frac{n-1}{n}\pi < \alpha_2 < \ldots < \cos\frac{\pi}{n} < \alpha_n < 1$$

et $$\tag{2}$$

$$-1 < \beta_1 < \cos\frac{n-1}{n}\pi < \beta_2 < \ldots < \cos\frac{\pi}{n} < \beta_n < 1.$$

D'autre part, le fait que $P(\xi)$ et $Q(\xi)$ ont le même module, a comme conséquence que les vecteurs $P(\xi)+Q(\xi)$ et $P(\xi)-Q(\xi)$ forment entre eux un angle droit. Il s'agit de faire voir que ceci est impossible avec la distribution des racines exprimée par les inégalités (2). Or, l'angle entre ces vecteurs est nécessairement plus petit que celui qu'on obtiendrait, en déplaçant autant que possible vers la droite les racines d'un des polynomes, et vers la gauche celles de l'autre. Donc l'argument de

$$\frac{P(\xi)+Q(\xi)}{P(\xi)-Q(\xi)}$$

est inférieur à celui de $\frac{\xi+1}{\xi-1}$, c'est à dire est inférieur à un angle droit, puisque ξ n'est pas à l'intérieur du cercle C.

Ainsi, avec cette restriction au sujet de ξ, le théorème (6) est exact, et l'inégalité (9) en résulte.

Il reste donc à examiner le cas, où ξ est intérieur au cercle C. Soit, pour fixer les idées, $1 < \beta < \gamma < \delta$, et posons

$$P = L\cos z, \quad x = \cos t.$$

L'équation (2) devient

$$L^2 \sin^2 z = \frac{(\gamma - x)(\delta - x)}{n^2(\beta - x)^2} L^2 \sin^2 z . \left(\frac{dz}{dt}\right)^2$$

ou

$$\frac{dz}{dt} = n \frac{\beta - x}{\sqrt{(\gamma - x)(\delta - x)}} = n \frac{\beta - \cos t}{\sqrt{(\gamma - \cos t)(\delta - \cos t)}},$$

et, puisqu'on peut prendre $z = 0$, pour $t = 0$, on a

$$z = n \int_0^t \frac{(\beta - \cos t)\, dt}{\sqrt{(\gamma - \cos t)(\delta - \cos t)}}. \tag{3}$$

Posons

$$\xi = \cos(a - bi) = \frac{1}{2}[(e^b + e^{-b})\cos a + i(e^b - e^{-b})\sin a],$$

b étant un nombre positif, ce qui signifie que ξ se trouve sur une ellipse E ayant -1, $+1$ comme foyers, et $R = e^b$ pour demi-somme des axes.

Il s'agit donc de donner une limite supérieure du module M de

$$P(\xi) = L\cos\zeta = \frac{L}{2}(e^{i\zeta} + e^{-i\zeta}),$$

où

$$\zeta = n \int_0^{a-bi} \frac{(\beta - \cos t)\, dt}{\sqrt{(\gamma - \cos t)(\delta - \cos t)}}.$$

En désignant par ϱ la valeur absolue de la partie imaginaire de ζ, on a évidemment

$$M = |P(\xi)| < Le^{\varrho}.$$

Mais pour calculer la partie imaginaire de ζ, nous pouvons prendre l'intégrale depuis 0 à a, et ensuite depuis a jusqu'à $a - bi$, en remarquant que la première intégrale ne contient pas de partie imaginaire. Ainsi, on a

$$\varrho = \pm \text{ part. im.} \int_a^{a-bi} \frac{n(\beta - \cos t)\, dt}{\sqrt{(\gamma - \cos t)(\delta - \cos t)}}. \tag{4}$$

Or, le module de

$$\frac{\beta - \cos t}{\sqrt{(\gamma - \cos t)(\delta - \cos t)}} = \frac{\beta - x}{\sqrt{(\gamma - x)(\delta - x)}}$$

reste sur tout le chemin d'intégration inférieur à 1, et à fortiori sa partie réelle est aussi inférieure à 1.

Donc,

$$\varrho < nb$$

et, enfin,

$$M < Le^{nb} = LR^n \tag{9}$$

c. q. f. d.

Remarque. Il résulte de ce qui précède que le polynôme de degré n, pour lequel $|P(\xi)| = M$, et qui s'écarte le moins possible de zéro sur le segment $(-1, +1)$ a comme expression asymptotique (en adoptant la définition que j'ai donnée ailleurs) le polynôme trigonométrique, si, ξ étant fixe, n croît indéfiniment. On a de plus la relation *asymptotique*

$$M \backsim \frac{L}{2} R^n.$$

L'inégalité (9) est donc éxacte sans restriction. Mais le théorème (6) n'est vrai qu'asymptotiquement, si on ne fait aucune restriction au sujet de ξ.

J'ajouterai encore la réflexion suivante.

Il est facile de montrer que si les polynômes à coéfficients complexes sont admis au concours, le polynôme qui s'écarte le moins de zéro atteindra son module maximum au moins en $(n+1)$ points du segment $(-1, +1)$. Et puisqu'un polynôme (qui n'est pas une constante) de degré n n'atteint pas son module maximum en plus de $(n+1)$ points du segment, le polynôme à coefficients complexes qui réaliserait le minimum, aurait donc nécessairement $(n+1)$ points d'écart maximum. On se rend compte sans peine que ça n'entraine pas du tout que le polynôme en question doive être un polynôme trigonométrique. Ainsi, parmi les polynômes du 1-er degré, à *coefficients réels*, qui au point $\xi = bi$, ont leur module égal à b, c'est le polynôme $P(x) = x$ ou la constante b, qui s'écarte le moins possible de zero sur le segment $(-1, +1)$. Mais, quel que soit le nombre réel ε, les polynômes *complexes*

$$x + \varepsilon(x - bi)$$

du premier degré auront également deux points $(x_1 = -1 \ x_2 = +1)$, où le module maximum

$$\sqrt{(1+\varepsilon)^2 + \varepsilon^2 b^2}$$

est atteint. Parmi tous ces polynômes il y en a un qui correspond à $\varepsilon = -\frac{1}{1+b^2}$, pour lequel ce module maximum, égal à

$$\lambda = \frac{b}{\sqrt{1+b^2}},$$

est le plus petit. On voit par cet exemple que si l'on admet au concours les polynômes à coefficients *complexes* c'est le polynôme

$$R(x) = x - \frac{x-bi}{1+b^2} = \frac{b^2x+bi}{1+b^2}$$

qui réalisera le minimum.

Sans insister sur l'étude générale de ces polynômes qui viennent remplacer les polynômes trigonométriques, lorsqu'on considère les coefficients complexes, je me bornerai à établir l'inégalité suivante:

Si L et λ sont respectivement les modules maxima, du polynôme réel $P(x)$ et du polynôme complexe $R(x)$ de degré n, qui s'écartent le moins de zero sur le segment $(-1, +1)$, en recevant le module M au même point ξ, on a

$$\frac{L}{2} \leqq \lambda \leqq L. \tag{5}$$

L'inégalité $\lambda \leqq L$ est évidente. Pour montrer que $\frac{L}{2} \leqq \lambda$, posons

$$R(x) = A(x) + iB(x),$$

les coefficients de $A(x)$ et de $B(x)$ étant réels. Si λ_1 et λ_2 sont respectivement les maxima de $|A(x)|$ et de $|B(x)|$ sur le segment, on a

$$\lambda \geqq \lambda_1, \quad \lambda \geqq \lambda_2.$$

D'autre part,

$$\lambda_1 \geqq |A(\xi)| . \frac{L}{M}, \quad \lambda_2 \geqq |B(\xi)| . \frac{L}{M},$$

et

$$|A(\xi)| + |B(\xi)| \geqq |R(\xi)| = M;$$

donc

$$\lambda_1 + \lambda_2 \geqq L.$$

Par conséquent,

$$\lambda \geqq \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \geqq \frac{L}{2},$$

c. q. f. d.

L'inégalité (5) montre que l'inégalité établie plus haut

$$M < LR^n, \tag{9}$$

où R est la demi-somme des axes de l'ellipse passant par le point ξ et ayant pour foyers $(-1 +1)$, qui a lieu, lorsque les coefficients sont réels, peut être remplacée par

$$M < 2\lambda R^n, \tag{9^{\text{bis}}}$$

si les coefficients du polynôme sont complexes.

On voit ainsi que toutes les conséquences que nous avons tirées de l'inégalité (9) dans les mémoires cités, subsistent dans le cas, où les coefficients du polynôme sont complexes.

О нѣкоторыхъ ариѳметическихъ теоремахъ Stieltjes'a.

Я. Успенскаго.

§ 1. Въ двухъ замѣткахъ: «Sur un théorème de Liouville» (Comptes rendus, t. XCVIII, 1883) Stieltjes опубликовалъ нѣсколько особаго характера соотношеній между числами классовъ бинарныхъ квадратичныхъ формъ отрицательнаго опредѣлителя, аналогичныхъ соотношенію, данному Ліувиллемъ въ 14-мъ томѣ 2-ой серіи своего журнала. Stieltjes указываетъ на то, что всѣ эти соотношенія были имъ получены изъ соображеній ариѳметическихъ. Размышляя надъ ариѳметическими источниками подобнаго рода теоремъ, я замѣтилъ, что всѣ онѣ могутъ быть доказаны очень просто.

При доказательствѣ теоремъ Stieltjes'a мы будемъ пользоваться нѣкоторыми общими числовыми тождествами. Пусть $F(x)$ нечетная функція x, т. е. такая, что

$$F(-x) = -F(x); \quad F(0) = 0.$$

Въ такомъ случаѣ имѣетъ мѣсто тождество:

$$\sum_{m=\lambda s^2+\mu t^2+\ldots+\rho w^2+\lambda d\delta} (-1)^s F(d+s) = \sum_{m=\lambda s^2+\mu t^2+\ldots+\rho w^2;\, s>0} (-1)^{s-1} s F(s) \qquad \text{(I)}$$

Здѣсь черезъ $m, \lambda, \mu, \ldots \varrho$ обозначены *данныя* положительныя числа; сумма въ лѣвой части распространяется на всѣ представленія m въ видѣ

$$m = \lambda s^2 + \mu t^2 + \ldots + \varrho w^2 + \lambda d\delta,$$

гдѣ $s, t, \ldots w$ произвольныя цѣлыя числа (положительныя, равныя нулю или отрицательныя), d и δ положительныя цѣлыя числа и притомъ δ нечетное; сумма въ правой части распространяется на всѣ рѣшенія уравненія

$$m = \lambda s^2 + \mu t^2 + \ldots + \varrho w^2, \quad \text{гдѣ } s > 0$$

Если таковыхъ рѣшеній нѣтъ, то правая часть замѣняется нулемъ.

Доказательство тождества (I) не представляетъ затрудненій. Въ суммѣ лѣвой части этого тождества взаимно сокращаются всѣ члены, соотвѣтствующіе такимъ рѣшеніямъ уравненія

$$m = \lambda s^2 + \mu t^2 + \ldots + \varrho w^2 + \lambda d\delta \,, \tag{A}$$

для которыхъ $d - \delta + 2s \neq 0$. Въ самомъ дѣлѣ, пусть имѣемъ рѣшеніе

$$s,\ t, \ldots w,\ d,\ \delta \tag{B}$$

этого уравненія, для котораго $d - \delta + 2s \gtrless 0$. Если $d - \delta + 2s > 0$, то выбранному рѣшенію соотвѣтствуетъ отличное отъ него рѣшеніе

$$s' = -s + \delta;\quad d' = d - \delta + 2s;\quad \delta' = \delta;\quad t' = t; \ldots w' = w\,, \tag{C}$$

для котораго $d' - \delta' + 2s' = d > 0$ и $d' + s' = d + s$. Вслѣдствіе нечетности δ члены суммы

$$\sum (-1)^s F(d+s)\,,$$

соотвѣтствующіе рѣшеніямъ (B) и (C), сокращаются. Если для рѣшенія (B)

$$d - \delta + 2s < 0, \quad \text{но} \quad -\delta + 4d + 4s > 0,$$

то въ соотвѣтствіи съ этимъ рѣшеніемъ имѣемъ рѣшеніе

$$s' = 2d - \delta + 3s;\ d' = -d + \delta - 2s;\ \delta' = -\delta + 4d + 4s;\ t' = t; \ldots w' = w, \tag{D}$$

для котораго

$$-d' + \delta' - 2s' = d > 0;\quad s' + d' = s + d;\quad -\delta' + 4d' + 4s' = \delta.$$

Члены суммы

$$\sum (-1)^s F(d+s),$$

соотвѣтствующіе рѣшеніямъ (B) и (D) сокращаются. Если наконецъ

$$d - \delta + 2s < 0 \quad \text{и} \quad \delta - 4d - 4s > 0\,,$$

то мы имѣемъ рѣшеніе

$$s' = -s - 2d;\ d' = d;\ \delta' = \delta - 4d - 4s;\ t' = t; \ldots w' = w \tag{E}$$

для котораго

$$\delta' - 4d' - 4s' = \delta > 0;\quad s' + d' = -s - d.$$

Такъ какъ $F(-x) = -F(x)$ и $F(0) = 0$, то ясно, что члены, соотвѣтствующіе рѣшеніямъ (B) и (E), сокращаются. Такимъ образомъ въ суммѣ

$$\sum (-1)^s F(d+s)$$

останутся только члены, соотвѣтствующіе такимъ рѣшеніямъ уравненія (A), гдѣ

$$2s = \delta - d$$

Положимъ

$$d + \delta = 2\sigma, \quad \sigma > 0;$$

тогда

$$s = \delta - \sigma; \quad d + s = \sigma$$

и

$$m = \lambda\sigma^2 + \mu t^2 + \ldots + \varrho w^2, \quad \text{гдѣ} \quad \sigma > 0 \qquad \text{(F)}$$

Каждому рѣшенію уравненія (A), для котораго $2s + d - \delta = 0$, соотвѣтствуетъ рѣшеніе $\sigma > 0$, $t, u, \ldots w$ уравненія (F). Но каждое такое рѣшеніе получится изъ нѣсколькихъ рѣшеній уравненія (A), а именно изъ тѣхъ, гдѣ

$$\delta = 1,\ 3,\ 5, \ldots 2\sigma - 1.$$

Для всѣхъ такихъ рѣшеній

$$(-1)^s F(d+s) = (-1)^{\sigma-1} F(\sigma),$$

слѣдовательно всякому рѣшенію уравненія (F) въ суммѣ

$$\sum_{m=\lambda s^2+\mu t^2+\ldots+\varrho w^2+d\delta} (-1)^s F(d+s)$$

соотвѣтствуетъ членъ

$$(-1)^{\sigma-1} \sigma F(\sigma),$$

откуда видно, что упомянутая сумма равна суммѣ

$$\sum (-1)^{\sigma-1} \sigma F(\sigma),$$

распространенной на всѣ рѣшенія уравненія

$$m = \lambda\sigma^2 + \mu t^2 + \ldots + \varrho w^2, \quad \text{гдѣ } \sigma > 0.$$

Изъ этого доказательства видно, что числа $t, u, \ldots w$ (число которыхъ произвольно) можно подчинить какимъ угодно ограниченіямъ; напр. считать какія угодно изъ нихъ по произволу четными или нечетными.

§ 2. Разсмотримъ частный случай тождества (I). Пусть N нечетное число; будемъ разсматривать всѣ представленія $4N$ въ видѣ

$$4N = s^2 + t^2 + u^2 + v^2 + d\delta, \tag{G}$$

гдѣ s произвольное цѣлое число, t, u, v—нечетныя числа, d и δ числа положительныя и притомъ δ нечетное. На всѣ представленія (G) распространимъ сумму

$$\sum (-1)^s F(d+s);$$

тогда въ силу тождества (I) имѣемъ

$$\sum_{4N=s^2+t^2+u^2+v^2+d\delta} (-1)^s F(d+s) = \sum_{4N=s^2+t^2+u^2+v^2;\, s>0} (-1)^{s-1} s F(s) \tag{II}$$

Если здѣсь положимъ

$$F(x) = \sin \frac{\pi x}{2},$$

то послѣ нѣкоторыхъ упрощеній получимъ

$$\sum_{4N=s^2+t^2+u^2+v^2+d\delta} (-1)^s \sin \frac{\pi d}{2} \cos \frac{\pi s}{2} = \frac{1}{2} \sum_{4N=s^2+t^2+u^2+v^2} (-1)^{\frac{s-1}{2}} s; \tag{II*}$$

сумма справа распространяется на всѣ рѣшенія уравненія

$$4N = s^2 + t^2 + u^2 + v^2$$

въ нечетныхъ числахъ s, t, u, v. Въ суммѣ же слѣва останутся только такіе члены, гдѣ s четное число $2g$; но тогда d будетъ нечетнымъ числомъ. Извѣстно, что сумма

$$4 \sum_{d\delta=k} (-1)^{\frac{d-1}{2}}$$

равна числу представленій нечетнаго числа k суммою двухъ квадратовъ. Принявъ это во вниманіе и обозначивъ

черезъ R_1 число рѣшеній уравн. $4N = 4g^2 + t^2 + u^2 + v^2 + w^2 + z^2$,
гдѣ $g \equiv 0$, $t \equiv u \equiv v \equiv w \equiv 1$; $z \equiv 0 \pmod{2}$

черезъ R_2 число рѣшеній уравн. $4N = 4g^2 + t^2 + u^2 + v^2 + w^2 + z^2$,
гдѣ $g \equiv 1$, $t \equiv u \equiv v \equiv w \equiv 1$; $z \equiv 0 \pmod{2}$

изъ равенства (II*) получимъ

$$R_1 - R_2 = 16 \sum_{4N=s^2+t^2+u^2+v^2;\ s,\,t,\,u,\,v \text{ неч. полож.}} (-1)^{\frac{s-1}{2}} s.$$

Очевидно, что R_1 равно также числу рѣшеній уравненія

$$4N = 4g^2 + 4h^2 + t^2 + u^2 + v^2 + w^2,$$

гдѣ g четное, а t, u, v, w нечетныя; и что R_2 равно числу рѣшеній того же уравненія, гдѣ g нечетное, равно какъ и t, u, v, w. Примемъ теперь во вниманіе слѣдующій извѣстный фактъ: число представленій учетвереннаго нечетнаго числа суммою четырехъ нечетныхъ квадратовъ въ два раза больше числа представленій того же числа суммою четырехъ четныхъ квадратовъ. Отсюда ясно, что обозначивъ

черезъ Ω_1 число рѣшеній уравненія $N = g^2 + h^2 + k^2 + l^2 + m^2 + n^2$,
гдѣ $g \equiv 0$, $k^2 + l^2 + m^2 + n^2 \equiv 1$ (Mod. 2)

черезъ Ω_2 число рѣшеній уравненія $N = g^2 + h^2 + k^2 + l^2 + m^2 + n^2$,
гдѣ $g \equiv 1$, $k^2 + l^2 + m^2 + n^2 \equiv 1$ (Mod. 2)

будемъ имѣть

$$\Omega_1 = \frac{1}{2} R_1; \quad \Omega_2 = \frac{1}{2} R_2$$

и

$$\Omega_1 - \Omega_2 = 8 \sum_{4N=s^2+t^2+u^2+v^2;\ s,\,t,\,u,\,v \text{ неч. полож.}} (-1)^{\frac{s-1}{2}} s$$

Положимъ въ тождествѣ

$$\sum_{N=s^2+t^2+d\delta} (-1)^s F(d+s) = \sum_{s^2+t^2=N,\ s>0} (-1)^{s-1} s F(s) \qquad \text{(II**)}$$

$F(x) = x$ и будемъ считать одинъ разъ t числомъ четнымъ, а другой разъ нечетнымъ; тогда получимъ:

$$\text{I} \quad t \equiv 0 \ (\text{Mod. } 2) \quad \sum_{s\equiv 0,\ t\equiv 0} d - \sum_{s\equiv 1,\ t\equiv 0} d = \frac{1}{2} \sum_{s^2+t^2=N,\ s \text{ неч.}} s^2$$

$$\text{II} \quad t \equiv 1 \ (\text{Mod. } 2) \quad \sum_{s\equiv 0,\ t\equiv 1} d - \sum_{s\equiv 1,\ t\equiv 1} d = -\frac{1}{2} \sum_{s^2+t^2=N,\ s \text{ чет.}} s^2.$$

Всѣ указанныя здѣсь слѣва суммы распространяются на рѣшенія уравненія

$$N = s^2 + t^2 + d\delta$$

ограниченныя нѣкоторыми условіями; эти ограниченія указаны снизу суммъ. Принявъ во вниманіе, что

$$\sum_{s\equiv 1,\, t\equiv 0} d \;=\; \sum_{s\equiv 0,\, t\equiv 1} d$$

получимъ

$$\sum_{s\equiv 0,\, t\equiv 0} d \;-\; \sum_{s\equiv 1,\, t\equiv 1} d \;=\frac{1}{2}\sum_{s^2+t^2=N,\, s \text{ нечетн.}} (s^2-t^2)$$

При $s\equiv t\equiv 0$ или $s\equiv t\equiv 1$ (Mod 2) число d всегда нечетное. Принимая во вниманіе, что сумма

$$8\sum_{d\delta=k} d$$

равна числу представленій нечетнаго числа k суммою 4-хъ квадратовъ и обозначая черезъ

P_1 число рѣш. ур. $N=s^2+t^2+u^2+v^2+w^2+z^2$, гдѣ $s\equiv t\equiv 0$ (Mod 2),
P_2 число рѣш. ур. $N=s^2+t^2+u^2+v^2+w^2+z^2$, гдѣ $s\equiv t\equiv 1$ (Mod 2),

изъ раньше выведеннаго равенства получимъ

$$P_1-P_2=8\sum_{s^2+t^2=N,\text{ гдѣ } s \text{ неч. полож.}} (s^2-t^2)$$

Но съ помощью простыхъ разсужденій, которыя мы позволимъ себѣ опустить, легко убѣждаемся, что

$$\Omega_1=8P_1 \quad \text{и} \quad \Omega_2=8P_2\,;$$

слѣдовательно

$$\sum_{4N=s^2+t^2+u^2+v^2;\; s,\, t,\, u,\, v \text{ неч. полож.}} (-1)^{\frac{s-1}{2}} s \;=\; \sum_{N=s^2+t^2,\; s \text{ неч. полож.}} (s^2-t^2) \tag{1}$$

Обозначимъ черезъ $F(n)$ число классовъ квадратичныхъ формъ опредѣлителя — n, у которыхъ по крайней мѣрѣ одинъ изъ крайнихъ коэффиціентовъ нечетный. Извѣстно, что число представленій числа $n\equiv 3$ (Mod 8) суммою трехъ квадратовъ нечетныхъ положительныхъ чиселъ равно $F(n)$; откуда слѣдуетъ, что сумму

$$\sum_{4N=s^2+t^2+u^2+v^2;\; s,\, t,\, u,\, v \text{ неч. полож.}} (-1)^{\frac{s-1}{2}} s$$

можно представить такъ

$$\sum_{s^2<4N}(-1)^{\frac{s-1}{2}}sF(4N-s^2)$$

и переписать равенство (1) въ видѣ

$$\sum_{s=1,\,3,\,5,\ldots}(-1)^{\frac{s-1}{2}}sF(4N-s^2)=\sum_{N=s^2+t^2,\ s\ \text{неч. полож.}}(s^2-t^2) \tag{1*}$$

Равенство (1*) представляетъ теорему Ліувилля, о которой мы говорили въ началѣ.

§ 3. Имѣя въ виду послѣдующее мы изложимъ другое доказательство той же теоремы.

Въ тождествѣ (II**) § 2 будемъ считать $t=0$; тогда получимъ

$$\sum_{m=s^2+d\delta;\ m\ \text{неч.}}(-1)^sF(d+s)=\left\{\begin{matrix}0, & \text{если } m \text{ не квадратъ}\\ (-1)^{s-1}sF(s), & \text{если } m=s^2,\ s>0\end{matrix}\right\} \tag{III}$$

Взявъ здѣсь

$$F(x)=\text{Sin}\,\frac{\pi x}{2}$$

и введя числовую функцію

$$\varrho(n)=\sum_{d\delta=n;\ n\ \text{неч.}}(-1)^{\frac{d-1}{2}},$$

послѣ должныхъ упрощеній лѣвой части получимъ

$$\sum_{g=0,\pm1,\pm2,\ldots}(-1)^g\varrho(m-4g^2)=\begin{cases}0, & \text{если } m \text{ не квадратъ}\\ (-1)^{\frac{s-1}{2}}s, & \text{если } m=s^2,\ s>0\end{cases}$$

Отсюда нетрудно вывести такую теорему: если m нечетное число $\equiv 1$ (Mod 4), то сумма

$$\sum(-1)^g,$$

распространенная на всѣ представленія m въ видѣ

$$m=4g^2+4h^2+k^2$$

равна 0, если m не квадратъ, и равна $2\sqrt{m}(-1)^{\frac{\sqrt{m}-1}{2}}$, если m квадратъ.

Обозначивъ черезъ N нечетное число, будемъ разсматривать представленія $2N$ въ видѣ

$$2N=\lambda^2+\mu^2+\nu^2+\varrho^2 \tag{H}$$

гдѣ λ и ϱ нечетныя, а μ и ν четныя. На всѣ представленія (H) распространимъ сумму

$$S = \sum (-1)^{\frac{\lambda-1}{2}+\frac{\mu}{2}}$$

Въ этой суммѣ соберемъ сперва члены, соотвѣтствующіе данному λ; совокупность этихъ членовъ будетъ равна суммѣ

$$(-1)^{\frac{\lambda-1}{2}} \sum (-1)^{\frac{\mu}{2}},$$

распространенной на всѣ представленія $2N - \lambda^2$ въ видѣ

$$2N - \lambda^2 = \mu^2 + \nu^2 + \varrho^2,$$

т. е. будетъ равна 0, если $2N - \lambda^2$ не квадратъ, и равна $2(-1)^{\frac{\sigma-1}{2}}\sigma$, если $2N - \lambda^2$ квадратъ, равный σ^2, $\sigma > 0$. Суммируя отдѣльныя найденныя части суммы при измѣняющемся λ, получимъ слѣдующій результатъ

$$S = \sum_{\lambda^2+\mu^2=2N} (-1)^{\frac{\lambda-1}{2}} \lambda . (-1)^{\frac{\mu-1}{2}} \mu,$$

глѣ суммированіе распространяется на *всѣ* числа (нечетныя) λ и μ, удовлетворяющія уравненію

$$\lambda^2 + \mu^2 = 2N$$

Всѣ рѣшенія этого уравненія получаются изъ рѣшеній уравненія

$$s^2 + t^2 = N,$$

гдѣ s нечетное, t четное, съ помощью равенствъ

$$\lambda = s + t; \quad \mu = \pm (s - t);$$

вслѣдствіе чего оказывается

$$S = 2 \sum_{N=s^2+t^2;\, s \text{ неч.}} (s^2 - t^2)$$

Съ другой стороны всѣ представленія $4N$ въ видѣ суммы четырехъ нечетныхъ квадратовъ

$$4N = \sigma^2 + \sigma'^2 + \sigma''^2 + \sigma'''^2$$

получаются изъ представленій $2N$ въ видѣ

$$2N = \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \varrho^2; \quad \lambda \equiv 1, \ \mu \equiv 0, \ \nu \equiv 0, \ \varrho \equiv 1 \ (\mathrm{Mod}\ 2)$$

съ помощью равенствъ

$$\sigma = \lambda + \mu; \quad \sigma' = \pm(\lambda - \mu); \quad \sigma'' = \nu + \varrho; \quad \sigma''' = \pm(\nu - \varrho),$$

откуда легко найти, что

$$\sum_{4N=\sigma^2+\sigma'^2+\sigma''^2+\sigma'''^2} (-1)^{\frac{\sigma-1}{2}} \sigma = 4 \sum_{2N=\lambda^2+\mu^2+\nu^2+\rho^2} (-1)^{\frac{\lambda-1}{2}+\frac{\mu}{2}} (\lambda + \mu) = 4S$$

Сравнивая два найденныя выраженія для S, получимъ окончательно равенство (1) § 2:

$$\sum_{4N=s^2+t^2+u^2+v^2;\ s,\ t,\ u,\ v,\ \text{неч. полож.}} (-1)^{\frac{s-1}{2}} s \qquad = \qquad \sum_{N=s^2+t^2;\ s\ \text{неч. полож.}} (s^2 - t^2). \tag{1}$$

§ 4. Перейдемъ теперь къ доказательству теоремъ Stieltjes'a и начнемъ съ той, провѣрка которой съ помощью эллиптическихъ функцій требуетъ примѣненія преобразованія 3-й степени и приводитъ къ довольно сложнымъ вычисленіямъ. По этому поводу самъ Stieltjes въ перепискѣ съ Эрмитомъ говоритъ: «J'ai été, d'abord, un peu effrayé des calculs que demandait la vérification du théorème IV" [1]).—Обозначимъ черезъ m произвольное положительное цѣлое число и будемъ разсматривать всѣ представленія $4m$ въ формѣ

$$4m = 3\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \varrho^2,$$

гдѣ λ и ϱ нечетныя, а μ и ν четныя числа. На всѣ такія представленія распространимъ сумму

$$S = \sum (-1)^{\frac{\lambda-1}{2}+\frac{\mu}{2}} \lambda$$

Съ помощью разсужденій, совершенно аналогичныхъ разсужденіямъ предыдущаго §, убѣждаемся въ томъ, что

$$S = \sum_{3\lambda^2+\mu^2=4m} (-1)^{\frac{\lambda-1}{2}} \lambda . (-1)^{\frac{\mu-1}{2}} \mu,$$

---

[1]) Correspondance d'Hermite et de Stieltjes, t. I, lettre 37.

гдѣ суммированіе распространяется на всѣ рѣшенія уравненія

$$3\lambda^2 + \mu^2 = 4m$$

съ *нечетнымъ* λ. Отсюда видно, что $S = 0$, если m четное число. Если же m нечетное число, то всѣ требуемыя значенія λ и μ найдутся изъ равенствъ

$$\lambda = z + 3t$$
$$\mu = \pm (z - t),$$

если вмѣсто z и t брать всѣ рѣшенія уравненія:

$$z^2 + 3t^2 = m.$$

Отсюда нетрудно найти, что

$$S = 2 \sum_{s^2 + 3t^2 = m} (z^2 - 3t^2)$$

при m нечетномъ; при m четномъ $S = 0$. Съ другой стороны всѣ рѣшенія уравненія

$$16m = 3\sigma^2 + \tau^2 + 4s^2 + 4t^2,$$

гдѣ σ, τ и t нечетныя числа, получаются изъ рѣшеній уравненія

$$4m = 3\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \varrho^2;\ \lambda \equiv 1,\ \mu \equiv \nu \equiv 0,\ \varrho \equiv 1 \ (\mathrm{Mod}\ 2)$$

съ помощью равенствъ

$$\sigma = \mu - \lambda;\ \tau = \pm (\mu + 3\lambda);\ s = \nu;\ t = \varrho;$$

откуда легко найти, что

$$\sum_{16m=3\sigma^2+\tau^2+4s^2+4t^2} (-1)^{\frac{\sigma-1}{2}} \sigma = 2 \sum_{4m=3\lambda^2+\mu^2+\nu^2+\rho^2} (-1)^{\frac{\lambda-1}{2}+\frac{\mu}{2}} (\lambda - \mu) = 2S.$$

Слѣдовательно

$$\sum_{16m=3\sigma^2+\tau^2+4s^2+4t^2;\ \sigma>0} (-1)^{\frac{\sigma-1}{2}} \sigma \quad = \quad 2 \sum_{z^2+3t^2=m} (z^2 - 3t^2). \tag{2}$$

Въ этомъ равенствѣ вторую часть слѣдуетъ замѣнить нулемъ, если m четное или если уравненіе $z^2 + 3t^2 = m$ невозможно; но легко убѣдиться, что при четномъ m даже въ случаѣ возможности уравненія

$$z^2+3t^2=m$$

всегда

$$\sum_{z^2+3t^2=m}(z^2-3t^2)=0\,.$$

Примемъ теперь во вниманіе, что число представленій $k\equiv 5$ (Mod 8) въ видѣ

$$k=\tau^2+4t^2+4s^2;\ \ \tau\equiv t\equiv 1\ (\text{Mod } 2);\ \ s\equiv 0\ (\text{Mod } 2)$$

равно $2F(k)$; тогда равенство (2) можетъ быть переписано такъ:

$$\sum_{\sigma=m=1,3,5,\ldots}(-1)^{\frac{\sigma-1}{2}}\sigma F(16m-3\sigma^2)=\sum_{z^2+3t^2=m}(z^2-3t^2) \tag{2*}$$

и въ такомъ видѣ выражаетъ одну изъ теоремъ Stieltjes'a.

§ 5. Обозначимъ черезъ m какое-либо цѣлое число и будемъ разсматривать всѣ представленія m въ видѣ

$$m=s^2+2t^2+d\delta,$$

гдѣ s какое нибудь цѣлое число, t по произволу четное или нечетное, d и δ положительныя и притомъ δ нечетное. При $s\equiv m$ (Mod 2) число d четное, а при $s\equiv m-1$ (Mod 2)—нечетное. Принимая $t\equiv 0$ (Mod 2) будемъ имѣть въ силу тождества § 1

$$\sum_{m=s^2+2t^2+d\delta;\,t\equiv 0}(-1)^sF(d+s)=\sum_{m=s^2+2t^2;\,s>0,\,t\equiv 0}(-1)^{s-1}sF(s) \tag{IV}$$

Точно также въ случаѣ $t\equiv 1$ (Mod 2) имѣемъ

$$\sum_{m=s^2+2t^2+d\delta;\,t\equiv 1}(-1)^sF(d+s)=\sum_{m=s^2+2t^2;\,s>0,\,t\equiv 1}(-1)^{s-1}sF(s) \tag{IV*}$$

Положимъ теперь въ (IV) и (IV*)

$$F(x)=x\,;$$

тогда получимъ послѣ должныхъ упрощеній

$$\sum_{s\equiv m;\,t\equiv 0}d-\sum_{s\equiv m-1;\,t\equiv 0}d=-\frac{1}{2}\sum_{s^2+2t^2=m;\,t\equiv 0}s^2 \tag{α}$$

$$\sum_{s\equiv m;\, t\equiv 1} d - \sum_{s\equiv m-1,\ t\equiv 1} d = -\frac{1}{2} \sum_{s^2+2t^2=m;\, t\equiv 1} s^2 \tag{β}$$

Будемъ далѣе разсматривать представленія того же числа m въ видѣ

$$m = 2t^2 + s^2 + 2d'\delta',$$

гдѣ $s \equiv m \pmod{2}$; тогда въ силу тождества (I)

$$\sum_{m=2t^2+s^2+2d'\delta';\ s\equiv m} (-1)^t F(d'+t) = \sum_{m=2t^2+s^2;\ t>0,\ s\equiv m} (-1)^{t-1}\, t F(t) \tag{V}$$

Положивъ здѣсь

$$F(x) = x,$$

получимъ

$$2\sum_{t\equiv 0,\, s\equiv m} d' - 2\sum_{t\equiv 1,\, s\equiv m} d' = \sum_{m=s^2+2t^2} (-1)^{t-1} t^2 \tag{γ}$$

Но очевидно, что

$$2\sum_{t\equiv 0,\, s\equiv m} d' = \sum_{s\equiv m,\, t\equiv 0} d\,; \qquad 2\sum_{t\equiv 1,\, s\equiv m} d' = \sum_{s\equiv m,\, t\equiv 1} d\,;$$

принявъ это во вниманіе получимъ изъ (α), (β), (γ) равенство

$$\sum_{t\equiv 0,\, s\equiv m-1} d - \sum_{t\equiv 1,\, s\equiv m-1} d = \sum_{m=s^2+2t^2} (-1)^{t-1} t^2 + \frac{1}{2} \sum_{s^2+2t^2=m;\, t\equiv 0} s^2 - \frac{1}{2} \sum_{s^2+2t^2=m;\, t=1} s^2,$$

правая часть котораго можетъ быть упрощена. Въ самомъ дѣлѣ, легко видѣть, что въ уравненіи

$$s^2 + t^2 = m$$

необходимо

$$t \equiv \frac{m(m-1)}{2} \pmod{2};$$

вслѣдствіе чего одна изъ суммъ

$$\sum_{s^2+2t^2=m;\, t\equiv 0} s^2 \quad \text{и} \quad \sum_{s^2+2t^2=m;\, t\equiv 1} s^2$$

всегда приводится къ нулю. Принявъ въ разсчетъ эти обстоятельства, получаемъ

$$\sum_{t\equiv 0,\, s\equiv m-1} d - \sum_{t\equiv 1,\, s\equiv m-1} d = \frac{1}{2} (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} \sum_{m=s^2+2t^2} (s^2 - 2t^2)$$

Полученное равенство можетъ быть истолковано такъ. Разсмотримъ всѣ представленія $4m$ въ видѣ

$$4m = 8t^2 + 4s^2 + \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \varrho^2,$$

гдѣ $s \equiv m-1$ (Mod. 2) и $\lambda, \mu, \nu, \varrho$ числа нечетныя положительныя. Обозначимъ черезъ P_1 число такихъ представленій, гдѣ t четное; а черезъ P_2 число такихъ, гдѣ t нечетное. Тогда можемъ написать равенство

$$2(P_1 - P_2) = (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} \sum_{m=s^2+2t^2} (s^2 - 2t^2) \qquad (\delta)$$

Теперь въ тождествѣ

$$\sum_{4m=2t^2+4s^2+\lambda^2+\mu^2+2d\delta} (-1)^t F(d+t) = \sum_{4m=2t^2+4s^2+\lambda^2+\mu^2;\, t>0} (-1)^{t-1} t F(t),$$

гдѣ

$$s \equiv m-1; \quad \lambda \equiv \mu \equiv 1 \text{ (Mod. 2)} \quad \text{и} \quad \lambda > 0,\ \mu > 0,$$

положимъ $F(x) = \sin\frac{\pi x}{2}$; полученный результатъ можетъ быть представленъ такъ

$$P_1 - P_2 = \sum_{4m=2s^2+4t^2+\lambda^2+\mu^2;\, s>0} (-1)^{\frac{s-1}{2}} s \qquad (\delta)$$

Сравненіе (δ) съ (δ') даетъ равенство

$$2 \sum_{4m=2s^2+4t^2+\lambda^2+\mu^2;\, s>0, \mu>0} (-1)^{\frac{s-1}{2}} s = (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} \sum_{m=s^2+2t^2} (s^2 - 2t^2) \qquad (3)$$

изъ котораго получается еще одна теорема Stieltjes'a

$$2 \sum_{s=1,3,5,\ldots} (-1)^{\frac{s-1}{2}} s F(4m - 2s^2) = (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} \sum_{m=s^2+2t^2} (s^2 - 2t^2) \qquad (3^*)$$

§ 6. Въ дальнѣйшемъ намъ придется пользоваться одной теоремой, выведенной Якоби изъ теоріи эллиптическихъ функцій; но мы предложимъ здѣсь новое ея доказательство, вытекающее изъ тѣхъ же началъ, какъ и все предыдущее. Теорема эта читается такъ: если m нечетное число вида $8h+1$, то разность между числомъ рѣшеній уравненія

$$m = \alpha^2 + 16\beta^2,$$

гдѣ β четное и гдѣ β нечетное, равна разности между числомъ рѣшеній уравненія

$$m=\gamma^2+8\delta^2,$$

гдѣ $\gamma\equiv\pm1$ и гдѣ $\gamma\equiv\pm3$ (Mod 8).

При принятыхъ нами обозначеніяхъ эту теорему можно представить такъ: если черезъ $g(m)$ и $G(m)$ обозначить числовыя функціи

$$g(m)=\sum_{m=\alpha^2+16\beta^2}(-1)^{\beta}$$

$$G(m)=\sum_{m=\gamma^2+8\delta^2}(-1)^{\frac{\gamma^2-1}{8}}$$

то всегда

$$g(m)=G(m).$$

Въ § 3 мы доказали слѣдующую теорему: разность между числомъ рѣшеній уравненія

$$m=\gamma^2+4\delta^2+4\varepsilon^2,$$

гдѣ δ четное, и числомъ рѣшеній, гдѣ δ нечетное, вообще равна 0; она отлична отъ нуля только тогда, когда m есть квадратъ ($=s^2$), и въ этомъ случаѣ равна

$$2(-1)^{\frac{s-1}{2}}.$$

Мы считаемъ $m\equiv1$ (Mod 8); поэтому числа δ и ε или четныя, или нечетныя. Число δ будетъ четнымъ, если $\gamma^2\equiv m$ (Mod 16), и нечетнымъ, если $\gamma^2\equiv m+8$ (Mod 16); слѣдовательно при четномъ δ

$$(-1)^{\frac{\gamma^2-1}{8}}=(-1)^{\frac{m-1}{8}}$$

а при нечетномъ δ

$$(-1)^{\frac{\gamma^2-1}{8}}=-(-1)^{\frac{m-1}{8}};$$

изъ чего легко усмотрѣть (принявъ еще во вниманіе, что сумму $4\delta^2+4\varepsilon^2$ можно представить въ формѣ $8u^2+8v^2$), что предыдущая теорема равносильна такой: сумма

$$\sum(-1)^{\frac{\gamma^2-1}{8}},$$

распространенная на всѣ рѣшенія уравненія

$$m=\gamma^2+8u^2+8v^2,$$

вообще равна нулю и только въ томъ случаѣ равна

$$2s(-1)^{\frac{s-1}{2}+\frac{s^2-1}{8}},$$

когда $m=s^2$. Предыдущую сумму можно представить подъ видомъ:

$$\sum_{v=0,\pm1,\pm2,\ldots} G(m-8v^2);$$

слѣдовательно

$$\sum_{v=0,\pm1,\pm2\ldots;8v^2<m} G(m-8v^2)=\left\{\begin{matrix}0, \text{ если } m \text{ не квадратъ} \\ 2s(-1)^{\frac{s-1}{2}+\frac{s^2-1}{8}}, \text{ если } m=s^2\end{matrix}\right\} \qquad \text{(A)}$$

Положимъ въ тождествѣ

$$\sum_{m=s^2+d\delta}(-1)^s F(d+s)=\begin{cases}0, \text{ если } m \text{ не квадратъ} \\ (-1)^{s-1} sF(s), \text{ если } m=s^2\end{cases}$$

функцію $F(x)$ равной

$$F(x)=\sin\frac{\pi x}{4};$$

тогда послѣ должныхъ упрощеній и принявъ во вниманіе, что

$$\sin\frac{\pi x}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{-2}{x}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1)^{\frac{x-1}{2}+\frac{x^2-1}{8}}$$

при x нечетномъ, получимъ

$$2\sum_{m=16g^2+d\delta}(-1)^g\left(\frac{-2}{d}\right)=\begin{cases}0, \text{ если } m \text{ не квадратъ} \\ 2s(-1)^{\frac{s-1}{2}+\frac{s^2-1}{8}}, \text{ если } m=s^2\end{cases}$$

Изъ послѣдняго равенства, взвѣсивъ, что сумма

$$2\sum_{d\delta=k}\left(\frac{-2}{d}\right)$$

распространенная по дѣлителямъ нечетнаго числа k, равна числу представленій k въ формѣ

$$k=x^2+2y^2,$$

найдемъ:

$$\sum_{m=16g^2+u^2+8v^2}(-1)^g=\begin{cases}0, \text{ если } m \text{ не квадратъ} \\ 2s(-1)^{\frac{s-1}{2}+\frac{s^2-1}{8}}, \text{ если } m=s^2\end{cases}$$

или

$$\sum_{v=0,\pm1,\pm2,\ldots} g(m-8v^2) = \left\{\begin{array}{l} 0\,,\ \text{если}\ m\ \text{не квадратъ} \\ 2s(-1)^{\frac{s-1}{2}+\frac{s^2-1}{8}},\ \text{если}\ m=s^2 \end{array}\right\} \qquad (B)$$

Сравненіе равенствъ (A) и (B) показываетъ, что при всякомъ $m \equiv 1$ (Mod 8)

$$\sum_{v=0,\pm1,\pm2,\ldots} G(m-8v^2) = \sum_{v=0,\pm1,\pm2,\ldots} g(m-8v^2)$$

Но $G(1) = g(1)$; поэтому изъ послѣдняго равенства при $m = 9$ найдемъ $G(9) = g(9)$, затѣмъ $G(17) = g(17)$ и т. д., вообще

$$G(m) = g(m), \quad \text{если} \quad m \equiv 1 \ (\text{Mod } 8).$$

Изъ теоремы, выражаемой послѣднимъ равенствомъ, выведемъ одно слѣдствіе. Будемъ разсматривать уравненіе

$$2m = s^2 + t^2,$$

предполагая по прежнему $m \equiv 1$ (Mod 8). Обозначимъ черезъ R_1 число рѣшеній, гдѣ

$$s \text{ и } t \equiv \pm 1 \ (\text{Mod } 8);$$

и черезъ R_2 число рѣшеній, гдѣ

$$s \text{ и } t \equiv \pm 3 \ (\text{Mod } 8).$$

Всякое рѣшеніе уравненія

$$2m = s^2 + t^2$$

можетъ быть получено изъ рѣшеній уравненія

$$m = \xi^2 + 16\eta^2$$

съ помощью равенствъ

$$s = \xi + 4\eta; \quad t = \pm(\xi - 4\eta);$$

откуда легко усматриваемъ, что

$$\text{при } m \equiv 1 \quad (\text{Mod } 16) \quad \text{и} \quad \left\{\begin{array}{lll} \eta \text{ четномъ} & s \text{ и } t \equiv \pm 1 & (\text{Mod } 8) \\ \eta \text{ нечетномъ} & s \text{ и } t \equiv \pm 3 & (\text{Mod } 8) \end{array}\right.$$

$$\text{при } m \equiv 9 \quad (\text{Mod } 16) \quad \text{и} \quad \left\{\begin{array}{lll} \eta \text{ четномъ} & s \text{ и } t \equiv \pm 3 & (\text{Mod } 8) \\ \eta \text{ нечетномъ} & s \text{ и } t \equiv \pm 1 & (\text{Mod } 8) \end{array}\right.$$

Слѣдовательно

$$R_1 - R_2 = 2(-1)^{\frac{m-1}{8}} g(m).$$

Съ другой стороны легко убѣдиться изъ разсмотрѣнія уравненія

$$m = \sigma^2 + 8h^2,$$

что

$$\text{при } m \equiv 1 \text{ (Mod 16) и } \begin{cases} \sigma \equiv \pm 1 \text{ (Mod 8) } h \text{ четное} \\ \sigma \equiv \pm 3 \text{ (Mod 8) } h \text{ нечетное} \end{cases}$$

$$\text{при } m \equiv 9 \text{ (Mod 16) и } \begin{cases} \sigma \equiv \pm 1 \text{ (Mod 8) } h \text{ нечетное} \\ \sigma \equiv \pm 3 \text{ (Mod 8) } h \text{ четное} \end{cases}$$

Обозначая поэтому черезъ P_1 и P_2 числа рѣшеній, гдѣ h четное и гдѣ h нечетное, будемъ имѣть

$$P_1 - P_2 = (-1)^{\frac{m-1}{8}} G(m)$$

Слѣдовательно

$$R_1 - R_2 = 2(P_1 - P_2) \tag{C}$$

§ 7. Пусть $F(x)$ нечетная функція и $m \equiv 5$ (Mod 8). Будемъ разсматривать всѣ представленія $2m$ въ формѣ

$$2m = t^2 + s^2 + 8d\delta,$$

гдѣ t и s нечетныя числа ($\gtrless 0$), причемъ послѣднее можетъ подлежать произвольнымъ ограниченіямъ, а d и δ положительныя цѣлыя числа. Тогда имѣетъ мѣсто тождество

$$\sum_{2m=t^2+s^2+8d\delta} (-1)^d F(2d+t) =$$

$$= \sum_{2m=t^2+s^2;\ t>0} \left\{ (-1)^{\frac{t-1}{2}} (F(1) - F(3) + \ldots + (-1)^{\frac{t-3}{2}} F(t-2)) - \frac{t-1}{2} F(t) \right\}, \tag{V}$$

которое доказывается подобно тождеству (I) § 1.—Въ этомъ тождествѣ положимъ

$$F(x) = x$$

и будемъ считать одинъ разъ $s^2 \equiv 1$ (Mod 16), а другой разъ $s^2 \equiv 9$ (Mod 16); тогда получимъ

$$\sum_{t^2\equiv 1,\ s^2\equiv 1} d - \sum_{t^2\equiv 9,\ s^2\equiv 1} d = + \frac{1}{2} \sum_{2m=t^2+s^2;\ s^2\equiv 1 \text{ (Mod 16)};\ t>0,\ s>0} (t^2 - 1) \tag{a}$$

$$\sum_{t^2\equiv 1,\ s^2\equiv 9,} d - \sum_{t^2\equiv 9,\ s^2\equiv 9} d = - \frac{1}{2} \sum_{2m=t^2+s^2;\ s^2\equiv 9 \text{ (Mod 16)};\ t>0,\ s>0} (t^2 - 1) \tag{b}$$

Отсюда уже легко найти, что

$$\sum_{t^2\equiv 1,\ s^2\equiv 1} d - \sum_{t^2\equiv 9,\ s^2\equiv 9} d = \frac{1}{2}\sum_{2m=\xi^2+\eta^2;\ \xi^2\equiv 9,\ \eta^2\equiv 1\ (\mathrm{Mod}\ 16);\ \xi\ \text{и}\ \eta>0} (\xi^2-\eta^2) \qquad (\mathrm{c})$$

Лѣвая часть этого равенства можетъ быть истолкована такъ. Будемъ разсматривать уравненіе

$$2m = t^2 + s^2 + 2(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \varrho^2),$$

гдѣ λ, μ, ν, ϱ нечетныя и положительныя числа, и обозначимъ черезъ

S_1 число рѣшеній, гдѣ $t^2 \equiv s^2 \equiv 1$ (Mod 16)

S_2 число рѣшеній, гдѣ $t^2 \equiv s^2 \equiv 9$ (Mod 16).

Тогда равенство (c) дастъ

$$S_1 - S_2 = \frac{1}{2}\sum_{2m=\xi^2+\eta^2;\ \xi^2\equiv 9,\ \eta^2\equiv 1\ (\mathrm{Mod}\ 16);\ \xi\ \text{и}\ \eta>0} (\xi^2-\eta^2) \qquad (\mathrm{d})$$

Примемъ теперь во вниманіе теорему, выражаемую равенствомъ (c) предыдущаго §; по этой теоремѣ оказывается, что положивъ Q_1 и Q_2 равными числамъ рѣшеній уравненія

$$m = 8h^2 + \sigma^2 + \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \varrho^2;\ \lambda,\ \mu,\ \nu,\ \varrho\ \text{неч.} > 0$$

гдѣ соотвѣтственно h четное и нечетное, будемъ имѣть

$$S_1 - S_2 = 2(Q_1 - Q_2)$$

или

$$Q_1 - Q_2 = \frac{1}{4}\sum_{2m=\xi^2+\eta^2;\ \xi^2\equiv 9,\ \eta^2\equiv 1\ (\mathrm{Mod}\ 16);\ \eta>0,\ \xi>0} (\xi^2-\eta^2) \qquad (\mathrm{e})$$

Положимъ теперь въ тождествѣ

$$\sum_{m=2s^2+\sigma^2+\lambda^2+\mu^2+2d\delta} (-1)^s F(d+s) = \sum_{m=2s^2+\sigma^2+\lambda^2+\mu^2,\ s>0} (-1)^{s-1} s F(s),$$

гдѣ въ обѣихъ частяхъ σ, λ, μ нечетныя числа и $\lambda > 0$, $\mu > 0$, функцію $F(x)$ равной $\sin\frac{\pi x}{2}$; въ результатѣ найдемъ

$$Q_1 - Q_2 = 2\sum_{m=2s^2+\sigma^2+\lambda^2+\mu^2,\ s,\ \sigma,\ \lambda,\ \mu\ \text{неч.} >0} (-1)^{\frac{s-1}{2}} s \qquad (f)$$

и изъ сравненія (e) съ (f) выведемъ сначала равенство

$$8 \sum_{m=2s^2+\sigma^2+\lambda^2+\mu^2;\ s,\ \sigma,\ \lambda,\ \mu \text{ неч. } >0} (-1)^{\frac{s-1}{2}} s = \sum_{2m=\xi^2+\eta^2;\ \xi^2\equiv 9\ \eta^2\equiv 1 \ (\mathrm{Mod}\ 16);\ \xi,\ \eta>0} (\xi^2-\eta^2) \qquad \text{(IV)}$$

а изъ него новое соотношеніе Stieltjes'a

$$m \equiv 5\ (\mathrm{Mod}\ 8);\ 8 \sum_{s=1,\ 3,\ 5 \ldots} (-1)^{\frac{s-1}{2}} sF(m-2s^2) = \sum_{2m=\xi^2+\eta^2;\ \xi^2\equiv 9,\ \eta\equiv 1\ (\mathrm{Mod}\ 16);\ \xi,\ \eta>0} (\xi^2-\eta^2). \qquad \text{(IV)}$$

§ 8. Еще одна теорема Stieltjes'a можетъ быть легко получена изъ предыдущаго.

Пусть опять $m \equiv 5$ (Mod 8). Положимъ

$$F(x) = \sin \frac{\pi x}{4}$$

въ тождествѣ

$$\sum_{2m=s^2+t^2+4u^2+4v^2+d\delta;\ t\equiv 1\ (\mathrm{Mod}\ 2)} (-1)^s F(d+s) = \sum_{2m=s^2+4u^2+4v^2;\ s>0;\ t \text{ неч.}} (-1)^{s-1} sF(s)$$

Послѣ простого изслѣдованія придемъ къ слѣдующему результату. Если обозначимъ черезъ V_1 и V_2 числа рѣшеній уравненія

$$2m = 16g^2 + t^2 + 4u^2 + 4v^2 + w^2 + 8z^2;\ t \text{ неч.}, \qquad \text{(A)}$$

гдѣ соотвѣтственно g четное и g нечетное, то

$$V_1 - V_2 = 2 \sum_{2m=s^2+t^2+4u^2+4v^2;\ s>0,\ t \text{ неч.}} (-1)^{\frac{s-1}{2}+\frac{s^2-1}{8}} s \qquad \text{(a)}$$

Въ уравненіи (A) числа t и w нечетныя, а числа u и v одинаковой четности; отсюда легко вывести, что число рѣшеній уравненія

$$2m = 16g^2 + 2p^2 + 8q^2 + 8r^2 + 8s^2 + 8z^2, \text{ гдѣ } p \text{ нечетное,}$$

или, что все равно, уравненія

$$m = 8g^2 + p^2 + 4q^2 + 4r^2 + 4s^2 + 4z^2,$$

гдѣ $g \equiv 0$, равно $\frac{1}{2} V_1$ и число рѣшеній, гдѣ $g \equiv 1$, равно $\frac{1}{2} V_2$. Но въ свою очередь ясно, что

$$\frac{1}{2} V_1 = 8Q_1;\ \frac{1}{2} V_2 = 8Q_2,$$

слѣдовательно равенство (a) этого § и равенство (e) § 7 дадутъ результатъ:

$$\sum_{2m=s^2+t^2+4u^2+4v^2;\, s \text{ и } t>0} (-1)^{\frac{s-1}{2}+\frac{s^2-1}{8}} s = \sum_{2m=\xi^2+\eta^2;\ \xi^2\equiv 9,\ \eta^2\equiv 1 \ (\mathrm{Mod}\ 16);\ \xi,\ \eta>0} (\xi^2-\eta^2) \tag{V}$$

откуда, вводя функцію Кронекера $F(n)$, получимъ

$$2\sum_{s=1,\ 3,\ 5,\ldots} (-1)^{\frac{s-1}{2}+\frac{s^2-1}{8}} F(2m-s^2) = \sum_{2m=\xi^2+\eta^2;\ \xi^2\equiv 9,\ \eta^2\equiv 1 \ (\mathrm{Mod}\ 16);\ \xi,\ \eta>0} (\xi^2-\eta^2). \tag{V*}$$

§ 9. Пусть m нечетное число $\equiv 1$ (Mod 8). Обозначимъ черезъ R число рѣшеній уравненія

$$m = 8g^2 + \sigma^2 + 4\lambda^2 + 4\mu^2 + 4\nu^2 + 4\varrho^2;\ \sigma \text{ неч.},$$

гдѣ g четное, и черезъ R_2—число рѣшеній, гдѣ g нечетное. Совершенно такимъ же образомъ, какъ въ предыдущемъ § для случая $m \equiv 5$ (Mod 8), убѣждаемся въ справедливости равенства

$$R_1 - R_2 = \sum_{s^2+t^2+4u^2+4v^2=2m;\ s>0,\ t \text{ неч.}} (-1)^{\frac{s-1}{2}+\frac{s^2-1}{8}} s. \tag{a}$$

Чтобы найти другое выраженіе для разности $R_1 - R_2$, мы будемъ исходить изъ представленій m въ видѣ

$$m = x^2 + 8y^2 + d\delta;\ \delta \text{ неч.}$$

Въ тождествѣ

$$\sum_{m=x^2+8y^2+d\delta} (-1)^{x+y} F(d+x) = \sum_{x^2+8y^2=m;\ x>0} (-1)^{x+y-1} x F(x)$$

положимъ

$$F(x) = x;$$

тогда найдемъ

$$\sum_{x\equiv 0} (-1)^y d - \sum_{x\equiv 1} (-1)^y d = \frac{1}{2} \sum_{x^2+8y^2=m} (-1)^y x^2. \tag{b}$$

Съ другой стороны, разсматривая представленія m въ видѣ

$$m = 8y^2 + x^2 + 8d'\delta';\ x \text{ неч.}$$

и полагая

$$F(x) = x$$

въ тождествѣ

$$\sum_{m=8y^2+x^2+8d'\delta';\ \delta'\ \text{неч.}} (-1)^{y+x} F(d'+y) = \sum_{m=8y^2+x^2;\ y>0} (-1)^{y+x-1} y F(y)$$

найдемъ

$$\sum_{m=8y^2+x^2+8d'\delta';\ \delta'\ \text{неч.}} (-1)^y d' = -\frac{1}{2} \sum_{m=8y^2+x^2} (-1)^y y^2. \tag{c}$$

Но очевидно, что

$$8 \sum_{x\equiv 1} (-1)^y d' = \sum_{x\equiv 1} (--1)^y d,$$

слѣдовательно изъ (b) и (c) получимъ

$$\sum_{m=x^2+8y^2+d\delta;\ x\ \text{чет.}} (-1)^y d = \sum_{x^2+8y^2=m;\ x>0} (-1)^y (x^2-8y^2) \tag{d}$$

Сумма въ правой части послѣдняго равенства равна половинѣ разности числа рѣшенiй уравненiя

$$m = 4\xi^2 + 8y^2 + 4\eta^2 + 4\zeta^2 + 4\vartheta^2 + \lambda^2,$$

гдѣ y четное, и числа рѣшенiй, гдѣ y нечетное; слѣдовательно

$$R_1 - R_2 = 2 \sum_{x^2+8y^2=m;\ x>0} (-1)^y (x^2-8y^2),$$

откуда послѣ сравненiя съ равенствомъ (a):

$$\sum_{2m=s^2+t^2+4u^2+4v^2,\ s>0,\ t\ \text{неч.}} (-1)^{\frac{s-1}{2}+\frac{s^2-1}{8}} s = 2 \sum_{x^2+8y^2=m;\ v>0} (-1)^y (x^2-8y^2). \tag{VI}$$

Принявъ во вниманiе, что число рѣшенiй уравненiя

$$2m - s^2 = t^2 + 4u^2 + 4v^2$$

съ нечетнымъ t равно

$$4F(2m-s^2),$$

найдемъ окончательно

$$2 \sum_{s=1,\ 3,\ 5,\dots} (-1)^{\frac{s-1}{2}+\frac{s^2-1}{8}} s\, F(2m-s^2) = \sum_{x^2+8y^2=m;\ x>0} (-1)^y (x^2-8y^2). \tag{VI*}$$

§ 10. Намъ остается доказать послѣднюю изъ теоремъ Stieltjes'а, ариѳметическое доказательство которой нѣсколько труднѣе, чѣмъ для другихъ теоремъ.

Пусть $f(x)$ какая угодно *четная* функція, т. е. такая, что

$$f(-x) = f(x).$$

Обозначимъ черезъ m нечетное вида $8k+3$ и будемъ разсматривать всѣ представленія m въ видѣ

$$m = s^2 + 2t^2 + 8d\delta,$$

гдѣ s и t нечетныя числа (послѣднее можетъ подлежать произвольнымъ ограниченіямъ), а d и δ какія-либо положительныя числа. Распространивъ на всѣ такія представленія сумму

$$\sum (-1)^{\frac{s-1}{2}} f(s-2\delta)$$

разсужденіями, подобными изложеннымъ въ § 1, мы убѣдимся легко въ справедливости тождества

$$\sum_{m=s^2+2t^2+8d\delta} (-1)^{\frac{s-1}{2}} f(s--2\delta) = \sum_{m=s^2+2t^2;\ s>0} (-1)^{\frac{s-1}{2}} \left\{\frac{s-1}{2} f(s) - f(1) - f(3) - \ldots - f(s-2)\right\} \quad \text{(A)}$$

Въ этомъ тождествѣ мы положимъ

$$f(x) = x \sin\frac{\pi x}{4};$$

послѣ упрощенія получимъ

$$\sum (-1)^{\frac{s-1}{2}+\frac{s^2-1}{8}} s \sin\frac{\pi\delta}{2} + 2\sum (-1)^{\frac{s^2-1}{8}} \delta \cos\frac{\pi\delta}{2} =$$
$$= -\frac{1}{4} \sum_{m=s^2+2t^2;\ s>0} (-1)^{\frac{s^2-1}{8}} \left(s^2 - 2 + s(-1)^{\frac{s-1}{2}}\right) \quad \text{(a)}$$

гдѣ первыя двѣ суммы распространяются на всѣ рѣшенія уравненія

$$m = s^2 + 2t^2 + 8d\delta$$

указаннаго выше вида. Въ суммѣ

$$S = \sum (-1)^{\frac{s-1}{2}+\frac{s^2-1}{8}} s \sin\frac{\pi\delta}{2}$$

обращаются въ нуль всѣ члены, соотвѣтствующіе четному δ; сумма остающихся членовъ будетъ равна одной четверти суммы

$$\sum (-1)^{\frac{s-1}{2}+\frac{s^2-1}{8}} s,$$

распространенной на всѣ рѣшенія уравненія

$$m = s^2 + 2t^2 + u^2 + v^2; \quad s \text{ и } t \text{ неч.}$$

гдѣ u и v не равны нулю заразъ. Поэтому можно написать

$$S = \frac{1}{4} \sum_{m=s^2+2t^2+u^2+v^2;\, s \text{ и } t \text{неч.}} (-1)^{\frac{s-1}{2}+\frac{s^2-1}{8}} s - \frac{1}{4} \sum_{m=s^2+2t^2} (-1)^{\frac{s-1}{2}+\frac{s^2-1}{8}} s$$

и благодаря этому упростить равенство (a) слѣдующимъ образомъ:

$$\sum_{m=s^2+2t^2+u^2+v^2;\, s \text{ и } t \text{ неч.}} (-1)^{\frac{s-1}{2}+\frac{s^2-1}{8}} s = -8 \sum_{m=s^2+8t^2+8d\delta} (-1)^{\frac{s^2-1}{8}} \delta \cos \frac{\pi\delta}{2} - \sum_{m=s^2+2t^2} (-1)^{\frac{s^2-1}{8}} (s^2-2). \quad \text{(b)}$$

Въ суммѣ

$$T = \sum_{m=s^2+2t^2+8d\delta} (-1)^{\frac{s^2-1}{8}} \delta \cos \frac{\pi\delta}{2}$$

исчезаютъ члены, соотвѣтствующіе нечетному δ; эта сумма можетъ быть поэтому представлена такъ

$$T = 2 \sum (-1)^{\frac{s^2-1}{8}+\Delta} \Delta,$$

причемъ суммированіе распространяется на всѣ представленія m въ формѣ

$$m = s^2 + 2t^2 + 16d\Delta.$$

Изъ этого уравненія слѣдуетъ

$$\frac{s^2-1}{8} \equiv \frac{m-3}{8} \pmod 2,$$

что даетъ возможность написать

$$T = 2(-1)^{\frac{m-3}{8}} \sum_{m=s^2+2t^2+16d\Delta} (-1)^{\Delta} \Delta$$

Теперь возьмемъ тождество (ср. тождество (V) § 7)

$$\sum_{m=2t^2+s^2+16d\Delta}(-1)^{\Delta}F(2\Delta+t)=$$

$$=\sum_{m=2t^2+s^2;\, t>0}(-1)^{\frac{t-1}{2}}[F(1)-F(3)+\ldots+(-1)^{\frac{t-3}{2}}F(t-2)-\frac{t-1}{2}F(t)\}$$

и положимъ въ немъ

$$F(x)=x;$$

тогда получимъ

$$2\sum_{m=2t^2+s^2+16d\Delta}(-1)^{\Delta}\Delta=-\frac{1}{4}\sum_{m=s^2+2t^2}(t^2-1)$$

и

$$T=\frac{(-1)^{\frac{m+5}{8}}}{4}\sum_{m=s^2+2t^2}(t^2-1)$$

Внося это значеніе въ равенство (b) и принимая во вниманіе что въ силу уравненія

$$m=s^2+2t^2$$

въ послѣдней суммѣ правой части равенства (b)

$$(-1)^{\frac{s^2-1}{8}}=-(-1)^{\frac{m+5}{8}}$$

получимъ окончательно

$$\sum_{m=s^2+2t^2+u^2+v^2;\, s \text{ и } t \text{ неч.}>0}(-1)^{\frac{s-1}{2}+\frac{s^2-1}{8}}s=(-1)^{\frac{m+5}{8}}\sum_{s^2+2t^2=m;\, s \text{ и } t>0}(s^2-2t^2) \qquad \text{(VII)}$$

Послѣднее равенство Stieltjes сообщилъ въ формѣ:

$$2\sum_{s=1,3,5,\ldots}(-1)^{\frac{s-1}{2}+\frac{s^2-1}{8}}sF\left(\frac{m-s^2}{2}\right)=(-1)^{\frac{m+5}{8}}\sum_{s^2+2t^2=m;\, s \text{ и } t>0}(s^2-2t^2); \qquad \text{(VII*)}$$

Настоящее изслѣдованіе имѣло совершенно спеціальную цѣль: ариѳметическое доказательство интересныхъ теоремъ Stieltjes'a; поэтому я не указывалъ на многочисленныя ариѳметическія слѣдствія, которыя могутъ быть выведены изъ указанныхъ здѣсь общихъ тождествъ. Эти тождества являются частными случаями другихъ, относящихся до числовыхъ функцій съ тремя перемѣнными; я надѣюсь опубликовать ихъ въ другой работѣ. Замѣчу, что они имѣютъ много общаго съ тождествами Ліувилля, изъ которыхъ знаменитый ученый извлекъ такое огромное количество интересныхъ ариѳметическихъ результатовъ.

14 августа 1912 г.

О представленіи чиселъ суммами квадратовъ.

Я. Успенскаго.

§ 1. Въ настоящей статьѣ я имѣю въ виду, главнымъ образомъ, дать ариѳметическое доказательство результатовъ Ліувилля, относящихся до числа представленій чиселъ суммами 10 и 12 квадратовъ. Эти результаты, опубликованные въ 1864 и 1866 годахъ 1), оставались долгое время недоказанными. Общая теорія квадратичныхъ формъ со многими перемѣнными, развитая въ работахъ Эйзенштейна, Смита и Минковскаго, не могла дать рѣшенія вопросовъ о представленіи чиселъ суммою квадратовъ, число которыхъ превышаетъ 8, хотя, повидимому, именно эта теорія должна была бы дать надежныя средства для рѣшенія подобныхъ вопросовъ. Результаты Ліувилля были полностью доказаны только въ 1907 г. Петромъ 2) съ помощью теоріи эллиптическихъ функцій. Несомнѣнно однако, что самъ Ліувилль пользовался ариѳметическими методами, основанными на примѣненіи нѣкоторыхъ весьма общихъ числовыхъ тождествъ. Занимаясь съ своей стороны этимъ вопросомъ я нашелъ ариѳметическія доказательства утвержденій Ліувилля и вѣроятно тѣ самыя, которыя составляли его секретъ. Въ моихъ доказательствахъ мнѣ необходимо опираться на хорошо уже извѣстные результаты относительно числа представленій чиселъ суммами 2, 4, 6 и 8 квадратовъ. Поэтому я бы могъ для краткости просто ссылаться на эти результаты; но замѣчательно, что и они получаются изъ тѣхъ же методовъ, которыя я примѣняю къ изслѣдованію случаевъ 10 и 12 квадратовъ. Вслѣдствіе этого я нашелъ наиболѣе удобнымъ извлечь всѣ извѣстные результаты изъ одного общаго источника, каковымъ являются общія числовыя тождества Ліувилля и нѣкоторыя другія, имъ подобныя. Случаи 2, 4, 6 и 8 квадратовъ будутъ изучены двумя различными способами, изъ которыхъ первый весьма простой и безъискусственный.

---

1) Liouville, Journ. de Math. T. IX p. 296 и T. XI p. 1, 2-e série.

2) K. Petr, Archiv für Math. u. Phys. Bd. II. 1907. Ср. также: Назимовъ «О приложеніяхъ эллиптическихъ функцій къ теоріи чиселъ». Москва 1884.

§ 2. Мы будемъ въ дальнѣйшемъ знакомъ $N_p(m)$ обозначать число всѣхъ представленій m суммою p квадратовъ, т. е. число всевозможныхъ рѣшеній уравненія

$$m = \lambda^2 + \mu^2 + \ldots + \tau^2,$$

гдѣ λ, $\mu, \ldots \tau$ (число этихъ величинъ $= p$) цѣлыя числа, не подлежащія никакимъ ограниченіямъ. Число всѣхъ представленій m суммою квадратовъ p нечетныхъ положительныхъ чиселъ (или просто суммою p нечетныхъ и положительныхъ квадратовъ) мы будемъ обозначать знакомъ $R_p(m)$. Изъ самаго понятія о представленіи числа суммою квадратовъ вытекаетъ слѣдующая весьма простая лемма.

Лемма I. Сумма

$$\Sigma(m - (p+1)\lambda^2)N_p(m - \lambda^2) = 0,$$

гдѣ суммированіе распространено на всѣ цѣлыя числа λ $(\gtreqqless 0)$, *квадраты коихъ не превышаютъ* m, *равна нулю.* Или короче:

$$\sum_{\lambda=0,\, +1,\, +2, \ldots} (m - (p+1)\lambda^2)N_p(m - \lambda^2) = 0. \tag{A}$$

Доказательство этой леммы чрезвычайно просто. Будемъ разсматривать всѣ представленія m суммою $p+1$ квадратовъ и выпишемъ ихъ въ таблицу:

$$\left.\begin{aligned} m &= \lambda_1^2 + \mu_1^2 + \ldots + \tau_1^2 + v_1^2 \\ m &= \lambda_2^2 + \mu_2^2 + \ldots + \tau_2^2 + v_2^2 \\ m &= \lambda_k^2 + \mu_k^2 + \ldots + \tau_k^2 + v_k^2 \end{aligned}\right\} k = N_{p+1}(m).$$

Въ этой табличкѣ число строкъ очевидно равно $N_{p+1}(m)$. Сложимъ теперь всѣ предыдущія равенства; сумма лѣвыхъ частей будетъ

$$mN_{p+1}(m)$$

или, что очевидно,

$$m\sum_{\lambda=0,\, +1,\, +2, \ldots} N_p(m - \lambda^2), \quad \lambda^2 \leqq m.$$

Сумма правыхъ частей представится такъ

$$\Sigma\lambda_i^2 + \Sigma\mu_i^2 + \ldots + \Sigma\tau_i^2 + \Sigma v_i^2.$$

Но съ одной стороны очевидно, что

$$\Sigma\lambda_i^2 = \Sigma\mu_i^2 = \ldots = \Sigma\tau_i^2 = \Sigma v_i^2,$$

а съ другой не менѣе ясно, что

$$\sum \lambda_i^2 = \sum_{\lambda=0,\pm1,\pm2,\dots} \lambda^2 N_p(m-\lambda^2);\quad \lambda^2 \leqq m.$$

Слѣдовательно сумма правыхъ частей равенствъ нашей таблички будетъ

$$(p+1)\sum_{\lambda=0,\pm1,\pm2,\dots} \lambda^2 N_p(m-\lambda^2)$$

и потому

$$m\sum_{\lambda=0,\pm1,\pm2,\dots} N_p(m-\lambda^2) = \sum_{\lambda=0,\pm1,\pm2,\dots} (p+1)\lambda^2 N_p(m-\lambda^2).$$

Совершенно такимъ же образомъ доказывается другая лемма

Лемма II. *Сумма*

$$\sum (m-(p+1)\lambda^2) R_p(m-\lambda^2),$$

распространенная на всѣ нечетныя и положительныя числа λ, *коихъ квадраты не превышаютъ* m, *равна нулю*, т. е.

$$\sum_{\lambda=1,3,5,\dots} (m-(p+1)\lambda^2) R_p(m-\lambda^2) = 0 \tag{B}$$

Слѣдуетъ добавить, что въ этомъ равенствѣ должно считать $m \equiv p+1 \pmod 8$ и полагать $R_p(0)=0$.

Выведенныя двѣ простыя леммы позволятъ намъ опредѣлить число представленій чиселъ суммою 2, 4, 6, 8 квадратовъ. Положимъ, что мы какимъ-нибудь образомъ нашли числовую функцію $\chi(m)$, опредѣленную при $m \geqq 0$, и притомъ такую, что

$$\chi(0)=1$$

$$\sum_{\lambda=0,\pm1,\pm2,\dots} (m-(p+1)\lambda^2)\chi(m-\lambda^2) = 0,$$

при чемъ послѣдняя сумма распространяется на всѣ числа λ, коихъ квадраты $\leqq m$. Тогда, въ силу леммы I, можно утверждать, что

$$N_p(m) = \chi(m).$$

Въ самомъ дѣлѣ при всякомъ m имѣемъ

$$\sum_{\lambda=0,\pm1,\pm2,\dots} (m-(p+1)\lambda^2) N_p(m-\lambda^2) = \sum_{\lambda=0,\pm1,\pm2,\dots} (m-(p+1)\lambda^2)\chi(m-\lambda^2).$$

Полагая здѣсь $m=1$ и принимая во вниманіе, что

$$\chi(0)=N_p(0)=1,$$

найдемъ $\chi(1)=N_p(1)$; полагая затѣмъ $m=2, 3, 4, \ldots$ послѣдовательно найдемъ

$$\chi(2)=N_p(2)\,; \quad \chi(3)=N_p(3)\,; \quad \chi(4)=N_p(4)\,; \text{ и т. д.}$$

Подобное же замѣчаніе можно сдѣлать и относительно леммы (В). Весь вопросъ, какъ видно, приводится къ надлежащему выбору функціи $\chi(m)$. Мы рѣшимъ этотъ вопросъ для случаевъ $p=2, 4, 6, 8$, опираясь на нѣкоторыя тождества Ліувилля и имъ подобныя. Доказательствъ этихъ тождествъ мы приводить не будемъ, такъ какъ они общеизвѣстны и къ тому же очень просты [1]).

§ 3. Мы сначала разсмотримъ случаи двухъ и шести квадратовъ. Пусть $F(x, y, z)$ нечетная функція по отношенію къ каждому изъ перемѣнныхъ и обращается въ нуль вмѣстѣ съ x; т. е.

$$F(-x, y, z)=-F(x, y, z); \quad F(x,-y, z)=-F(x, y, z);$$
$$F(x, y,-z)=-F(x, y, z)\,; \quad F(0,\ y,\ z)=0\,.$$

Будемъ разсматривать всѣ представленія какого либо числа m въ видѣ

$$m=\lambda^2+d\delta\,,$$

гдѣ λ произвольное цѣлое число, числа же d и δ положительныя и притомъ δ *нечетное*; на всѣ таковыя представленія распространимъ сумму

$$\Sigma F(d+\lambda,\ \delta-2\lambda,\ 2d+2\lambda-\delta)\,;$$

тогда имѣемъ тождество

$$\left.\begin{array}{l} \sum F(d+\lambda,\, \delta-2\lambda,\, 2d+2\lambda-\delta)=0, \text{ если } m \text{ не квадратъ} \\ \sum F(d+\lambda,\, \delta-2\lambda,\, 2d+2\lambda-\delta)=\sum\limits_{s=1}^{\sqrt{m}} F(\sqrt{m}, 2s-1, 2s-1) \text{ если } m \text{ квадратъ} \end{array}\right\}(C)$$

Изъ этого тождества сначала извлечемъ одно частное слѣдствіе, полагая (что̀ допустимо вслѣдствіе нечетности третьяго аргумента):

$$F(x,\ y,\ z)=(-1)^{\frac{z-1}{2}}\,\psi(x,\ y)\,,$$

---

[1]) Piuma. Dimostrazione di alcune formule di sig. Liouville. Genova 1866.

Pepin. Sur quelques formules d'analyse qui peuvent être utiles dans la théorie des nombres Journal de math. 1888.

Баскаковъ. Объ одномъ изъ способовъ полученія числовыхъ тожествъ. Математ. Сборникъ, т. 10.

гдѣ $\psi(x, y)$ удовлетворяетъ при всѣхъ разсматриваемыхъ значеніяхъ аргументовъ условіямъ:

$$\psi(-x, y) = -\psi(x, y); \quad \psi(x, -y) = -\psi(x, y); \quad \psi(0, y) = 0;$$

послѣ упрощеній получимъ

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{m=\lambda^2+d\delta;\ \delta \text{ неч.}} (-1)^{\frac{\delta-1}{2}} \psi(d+\lambda, \delta-2\lambda) = 0, \text{ если } m \text{ не квадратъ}\\ &\sum_{m=\lambda^2+d\delta;\ \delta \text{ неч.}} (-1)^{\frac{\delta-1}{2}} \psi(d+\lambda, \delta-2\lambda) = (-1)^{m-1} \sum_{s=1}^{\sqrt{m}} (-1)^{s-1} \psi(\sqrt{m}, 2s-1), \text{ если } m \text{ квадратъ}\end{aligned}\right\} (C')$$

Положимъ теперь въ послѣднемъ тождествѣ

$$\psi(x, y) = xy;$$

послѣ упрощенія суммы лѣвой части получимъ

$$\sum_{m=\lambda^2+d\delta;\ \delta \text{ неч.}} (m-3\lambda^2)(-1)^{\frac{\delta-1}{2}} = \begin{cases} 0, \text{ если } m \text{ не квадратъ} \\ m, \text{ если } m \text{ квадратъ} \end{cases} \qquad (a)$$

Вводя вмѣстѣ съ Ліувиллемъ въ разсмотрѣніе числовую функцію

$$\varrho(k) = \sum_{k=d\delta;\ \delta \text{ неч.}} (-1)^{\frac{\delta-1}{2}},$$

гдѣ сумма распространяется на всѣ представленія k въ видѣ

$$k = d\delta$$

съ нечетнымъ δ, можемъ равенство (a) представить такъ:

$$\sum_{\lambda^2 < m} (m-3\lambda^2)\varrho(m-\lambda^2) = \begin{cases} 0, \text{ если } m \text{ не квадратъ} \\ m, \text{ если } m \text{ квадратъ} \end{cases}$$

или еще такъ

$$\sum_{\lambda^2 \leqq m} (m-3\lambda^2)\chi(m-\lambda^2) = 0,$$

положивъ

$$\chi(0) = 1, \quad \chi(m) = 4\varrho(m) \quad \text{при } m > 0.$$

Но съ другой стороны

$$\sum_{\lambda^2 \leqq m} (m-3\lambda^2) N_2(m-\lambda^2) = 0; \quad N_2(0) = 1,$$

слѣдовательно по замѣченному выше

$$N_2(m) = 4\varrho(m).$$

Такимъ образомъ очень просто получился всѣмъ извѣстный результатъ: число представленій какого угодно числа m суммою 2 квадратовъ равно учетверенной разности между числомъ его дѣлителей формы $4k+1$ и числомъ дѣлителей формы $4k-1$.

Очевидно, что только удвоенное нечетное число можетъ быть представлено суммою двухъ нечетныхъ квадратовъ. Путемъ простѣйшихъ ариѳметическихъ соображеній легко найти, что число рѣшеній уравненія

$$2m = \lambda^2 + \mu^2$$

гдѣ m, λ, μ нечетныя и положительныя числа, равно $\varrho(m)$; иначе говоря

$$R_2(2m) = \varrho(m)\,, \text{ если } m \text{ нечетное.}$$

§ 4. Въ тождествѣ (C′) § 3 положимъ одинъ разъ

$$\psi(x,\ y) = x^3y\,,$$

другой разъ

$$\psi(x\,,\ y) = xy^3\,.$$

Послѣ должныхъ упрощеній получимъ

$$\sum_{m=\lambda^2+d\delta;\ \delta\ \text{неч.}}(m-7\lambda^2)(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}d^2+\sum_{m=\lambda^2+d\delta;\ \delta\ \text{неч.}}(3m\lambda^2-5\lambda^4)(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}=\begin{cases}0, \text{ если } m \text{ не квадратъ}\\ m^2, \text{ если } m \text{ квадратъ}\end{cases}\qquad\text{(b)}$$

$$\sum_{m=\lambda^2+d\delta;\ \delta\ \text{неч.}}(m-7\lambda^2)(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}\delta^2+4\sum_{m=\lambda^2+d\delta;\ \delta\ \text{неч.}}(3m\lambda^2-5\lambda^4)(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}=\begin{cases}0, \text{ если } m \text{ не квадратъ}\\ 4m^2-3m, \text{ если } m \text{ квадратъ}\end{cases}\qquad\text{(b*)}$$

Изъ этихъ равенствъ находимъ

$$\sum_{m=\lambda^2+d\delta;\ \delta\ \text{неч.}}(m-7\lambda^2)(4d^2-\delta^2)(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}=\begin{cases}0, \text{ если } m \text{ не квадратъ}\\ 3m, \text{ если } m \text{ квадратъ,}\end{cases}\qquad\text{(c)}$$

каковое равенство можно представить еще подъ видомъ

$$\sum_{\lambda^2\leqq m}(m-7\lambda^2)\,\chi(m-\lambda^2)=0\qquad\text{(c*)}$$

положивъ

$$\chi(m)=4\sum_{m=d\delta;\ \delta\ \text{неч.}}(4d^2-\delta^2)(-1)^{\frac{\delta-1}{2}} \text{ при } m>0$$

$$\chi(0)=1.$$

Изъ (c^*) заключаемъ, что

$$N_6(m) = 4 \sum_{m=d\delta;\ \delta\ \text{неч.}} (4d^2 - \delta^2)(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}$$

Введемъ вмѣстѣ съ Ліувиллемъ числовую функцію

$$\varrho_2(m) = \sum_{m=d\delta;\ \delta\ \text{неч.}} (-1)^{\frac{\delta-1}{2}} d^2;$$

тогда, положивъ $m = 2^\alpha n$, гдѣ n нечетное, легко найдемъ

$$N_6(2^\alpha n) = 4\,[2^{2\alpha+2} - (-1)^{\frac{n-1}{2}}]\,\varrho_2(n); \quad \alpha \geqq 0,\ n\ \text{нечетное.}$$

Такою формулою опредѣляется число представленій всякаго числа суммою 6-ти квадратовъ. Этотъ результатъ содержится implicite въ формулахъ Fundamenta nova Якоби, но опредѣленно былъ впервые высказанъ Эйзенштейномъ.

Перейдемъ теперь къ опредѣленію числа представленій m суммою квадратовъ шести нечетныхъ и положительныхъ чиселъ. Ясно, что для возможности таковыхъ представленій m должно быть вида $8n+6$, т. е. должно быть удвоеннымъ нечетнымъ числомъ вида $4n+3$. Подобно тому, какъ въ предыдущемъ изслѣдованіи мы опирались на тождество (C) Ліувилля, такъ точно въ новомъ изслѣдованіи мы будемъ опираться на другое тождество, котораго правда, нѣтъ у Ліувилля; однако оно вытекаетъ изъ тѣхъ же источниковъ, какъ и Ліувиллевы тождества. Пусть нечетное число n всѣми возможными способами представляется въ видѣ

$$n = \lambda^2 + 2d\delta,$$

гдѣ λ произвольное нечетное число, d и δ положительныя числа и притомъ δ нечетное. Обозначая черезъ $F(x, y, z)$ нечетную по каждому изъ перемѣнныхъ функцію и притомъ такую, что

$$F(0, y, z) = 0, \quad F(x, 0, z) = 0, \quad F(x, y, 0) = 0,$$

если только соотвѣтствующій аргументъ можетъ обращаться въ нуль, распространимъ на всѣ упомянутыя выше представленія сумму

$$\Sigma F(\lambda + d,\ \delta - \lambda,\ \lambda + d - \delta);$$

тогда имѣемъ тождество

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{n=\lambda^2+2d\delta;\ \delta\ \text{неч.}} F(\lambda+d,\ \delta-\lambda,\ \lambda+d-\delta) = 0,\ \text{если } n \text{ не квадратъ} \\ &\sum_{n=\lambda^2+2d\delta;\ \delta\ \text{неч.}} F(\lambda+d,\ \delta-\lambda,\ \lambda+d-\delta) = \sum_{s=1}^{\frac{\sqrt{n}-1}{2}} F(\sqrt{n}\ 2s,\ 2s),\ \text{если } n \text{ квадратъ} \end{aligned}\right\} \quad \text{(D)}$$

Если $n \equiv 3 \pmod 4$, то $\lambda + d$, $\delta - \lambda$ четныя, а $\lambda + d - \delta$ нечетное; въ этомъ случаѣ условіе $F(x, y, 0) = 0$ излишне. Полагаемъ

$$F(x, y, z) = (-1)^{\frac{x-z-1}{2}} \psi(x, y),$$

причемъ

$$\psi(-x, y) = -\psi(x, y); \quad \psi(x, -y) = -\psi(x, y)$$

$$\psi(0, y) = \psi(x, 0) = 0;$$

тогда имѣемъ тождество

$$\sum_{n=\lambda^2+2d\delta;\; n\equiv 3 \pmod 4} (-1)^{\frac{\delta-1}{2}} \psi(\lambda + d, \delta - \lambda) = 0 \tag{D'}$$

Взявъ здѣсь одинъ разъ

$$\psi(x, y) = x^3 y,$$

другой разъ

$$\psi(x, y) = xy^3,$$

послѣ должныхъ упрощеній получимъ:

$$\sum_{n=\lambda^2+2d\delta} (n - 7\lambda^2)(-1)^{\frac{\delta-1}{2}} d^2 + \sum_{n=\lambda^2+2d\delta} (3n\lambda^2 - 5\lambda^4)(-1)^{\frac{\delta-1}{2}} = 0$$

$$\sum_{n=\lambda^2+2d\delta} (n - 7\lambda^2)(-1)^{\frac{\delta-1}{2}} \delta^2 + \sum_{n=\lambda^2+2d\delta} (3n\lambda^2 - 5\lambda^4)(-1)^{\frac{\delta-1}{2}} = 0$$

откуда

$$\sum_{n=\lambda^2+2d\delta} (n - 7\lambda^2)(-1)^{\frac{\delta-1}{2}} (d^2 - \delta^2) = 0 \tag{d}$$

Здѣсь n обозначаетъ нечетное число $\equiv 3 \pmod 4$. Возьмемъ $n = 8k + 7$; тогда изъ равенства

$$n = \lambda^2 + 2d\delta$$

увидимъ, что $d\delta \equiv 3 \pmod 4$; а это позволитъ намъ написать равенство (d) въ такомъ видѣ

$$\sum_{\lambda=1,\,3,\,5,\dots} (n - 7\lambda^2)\, \varrho_2\left(\frac{n - \lambda^2}{2}\right) = 0 \tag{d*}$$

или

$$\sum_{\lambda=1,\,3,\,5,\dots} (n - 7\lambda^2)\, \chi(n - \lambda^2) = 0 \tag{d**}$$

если положимъ

$$\chi(n) = \varrho_2\left(\frac{n}{2}\right).$$

Съ другой стороны имѣемъ для всякаго числа вида $n = 8k + 7$

$$\sum_{\lambda=1,\,3,\,5,\dots} (n - 7\lambda^2)\, R_6(n - \lambda^2) = 0 \tag{e}$$

Вслѣдствіе равенствъ (e) и (d**) и принимая во вниманіе, что

$$R_6(6) = 1; \quad \varrho_2(3) = 8$$

находимъ окончательный результатъ

$$R_6(8k+6)=\frac{1}{8}\varrho_2(4k+3)$$

§ 5. Примѣнимъ тотъ же методъ къ случаю четырехъ и восьми квадратовъ. Приступая къ изслѣдованію перваго, положимъ въ тождествѣ (C) § 3

$$F(x,\ y,\ z)=xyz$$

Послѣ должныхъ упрощеній найдемъ:

$$\sum_{m=\lambda^2+d\delta,\ \delta\ \text{неч.}}(m-5\lambda^2)(2d-\delta)=\left\{\begin{array}{l}0,\ \text{если } m \text{ не квадратъ}\\ \dfrac{m(4m-1)}{3},\ \text{если } m \text{ квадратъ}\end{array}\right\}\quad(\text{f})$$

Легко усмотрѣть, что сумма

$$\sum_{m-\lambda^2=d\delta;\ \delta\ \text{неч.}}(2d-\delta)$$

равна суммѣ всѣхъ дѣлителей $m-\lambda^2$, такъ что при знакоположеніяхъ Ліувилля

$$\sum_{m-\lambda^2=d\delta;\ \delta\ \text{неч.}}(2d-\delta)=\zeta_1(m-\lambda^2)$$

Принявъ это во вниманіе, вмѣсто (f) получаемъ:

$$\sum(m-5\lambda^2)\,\zeta_1(m-\lambda^2)=\left\{\begin{array}{l}0,\ \text{если } m \text{ не квадратъ}\\ \dfrac{m(4m-1)}{3},\ \text{если } m \text{ квадратъ}\end{array}\right\}\quad(\text{f}^*)$$

Тождество (D) предыдущаго § 4 остается въ силѣ и при n четномъ; только въ этомъ случаѣ должно, очевидно, считать λ четнымъ ¹)

Полагая въ немъ

$$F(x,\ y,\ z)=xyz\,,$$

получимъ по замѣнѣ n на m и $2d$ на $\varDelta$:

$$\sum_{m=\lambda^2+\Delta\delta;\ \delta\ \text{неч.},\ \lambda\equiv m(\text{Mod } 2)}(m-5\lambda^2)(\varDelta-2\delta)=\left\{\begin{array}{l}0,\ \text{если } m \text{ не квадратъ}\\ \dfrac{2m(m-1)}{3},\ \text{если } m \text{ квадратъ}\end{array}\right\}\quad(\text{g})$$

Обозначивъ черезъ $\overline{\zeta_1}(m)$ сумму *нечетныхъ* дѣлителей m, послѣднее равенство можемъ представить такъ

$$\sum_{\lambda\equiv m(\text{Mod } 2)}(m-5\lambda^2)\left\{\zeta_1(m-\lambda^2)-3\overline{\zeta_1}(m-\lambda^2)\right\}=\left\{\begin{array}{l}0,\ \text{если } m \text{ не квадратъ}\\ \dfrac{4m(m-1)}{3},\ \text{если } m \text{ квадр.}\end{array}\right\}\quad(\text{g}^*)$$

---

¹) Сверхъ того правая часть при n четномъ и равномъ квадрату будетъ равна

$$\sum_{s-1}^{\frac{1}{2}\sqrt{n}}F(\sqrt{n},\ 2s-1,\ 2s-1).$$

Здѣсь суммированіе распространяется на всѣ числа λ, удовлетворяющія неравенству: $\lambda^2 < m$ и сравнимыя съ m по модулю 2. Сличеніе равенствъ (f*) и (g*) легко приводитъ къ слѣдующему результату:

$$\sum_{\lambda=0,\pm1,\pm2,\ldots}(m-5\lambda^2)(2+(-1)^{m-\lambda^2})\,\overline{\zeta_1}(m-\lambda^2)=\begin{cases}0, & \text{если } m \text{ не квадратъ}\\ m, & \text{если } m \text{ квадратъ}\end{cases}$$

Положимъ

$$\chi(m)=8\,(2+(-1)^m)\,\overline{\zeta_1}(m) \quad \text{при} \quad m>0$$
$$\chi(0)=1\,;$$

тогда предыдущее равенство можетъ быть представлено такъ

$$\sum_{\lambda^2\leqq m}(m-5\lambda^2)\,\chi(m-\lambda^2)=0,$$

откуда получаемъ

$$N_4(m)=8(2+(-1)^m)\overline{\zeta_1}(m).$$

Это равенство выражаетъ знаменитую теорему Якоби (Fund. nova, § 40): число представленій числа суммою 4-хъ квадратовъ равняется: для нечетнаго числа—восьмикратной суммѣ его дѣлителей, а для четнаго двадцатичетырехкратной суммѣ его *нечетныхъ* дѣлителей.

Въ равенствѣ (g) будемъ считать m нечетнымъ числомъ вида $8k+5$; тогда легко его представить въ формѣ

$$\sum_{\lambda=1,3,5,\ldots}(m-5\lambda^2)\,\zeta_1\left(\frac{m-\lambda^2}{4}\right)=0$$

или еще въ формѣ

$$\sum_{\lambda=1,\,3,\,5,\ldots}(m-5\lambda^2)\,\chi(m-\lambda^2)=0, \text{ положивъ } \chi(k)=\zeta_1\left(\frac{k}{4}\right) \text{ при } k\equiv 0\,(\mathrm{Mod}\ 4)$$

Но съ другой стороны

$$\sum_{\lambda=1,\,3,\,5,\ldots}(m-5\lambda^2)\,R_4(m-\lambda^2)=0$$

и

$$R_4(4)=1\,;\quad \chi(4)=1$$

Сличеніе обоихъ равенствъ позволитъ намъ заключить, что вообще

$$R_4(8k+4)=\chi(8k+4)$$

или въ другой формѣ

$$R_4(4m)=\zeta_1(m)$$

при m нечетномъ. Очевидно, что только учетверенныя нечетныя числа могутъ быть представлены въ видѣ суммы 4 нечетныхъ квадратовъ.

§ 6. Въ случаѣ 8 квадратовъ вопросъ о представленіи чиселъ можетъ быть рѣшенъ съ помощью тѣхъ же соображеній; только, къ сожалѣнію, относящіяся сюда вычисленія нѣсколько сложны. Въ тождествѣ (c) § 3 возьмемъ

$$F(x,\ y,\ z) = (-1)^{\frac{y-1}{2}+\frac{z-1}{2}}\,\psi(x,\ y),$$

гдѣ функція $\psi(x,\ y)$ нечетна по отношенію къ x и четна по отношенію къ y, т. е.

$$\psi(-x,\ y) = -\psi(x,\ y);\quad \psi(x, -y) = \psi(x,\ y);$$

получимъ слѣдующее тождество

$$\sum_{m=\lambda^2+d\delta;\ \delta\ \text{неч.}} (-1)^\lambda \psi(d+\lambda,\ \delta-2\lambda) = \left\{\begin{matrix} 0\text{, если } m \text{ не квадратъ} \\ (-1)^{m-1}\sum\limits_{s=1}^{\sqrt{m}} \psi(\sqrt{m},\ 2s-1)\text{, если } m \text{ квадратъ} \end{matrix}\right\} \quad (c^{**})$$

Положимъ въ немъ, во-первыхъ, $\psi(x,\ y) = x$; обозначивъ черезъ 2^σ наивысшую степень двухъ, дѣлящую $m-\lambda^2$, получимъ слѣдующій результатъ

$$\sum_{\lambda=0,\ \pm1,\ \pm2,\ldots} (-1)^\lambda 2^\sigma \overline{\zeta_1}(m-\lambda^2) = \left\{\begin{matrix} 0\text{, есть } m \text{ не квадратъ} \\ (-1)^{m-1}\ m\text{, если } m \text{ квадратъ} \end{matrix}\right\} \quad (a)$$

Полагая, во-вторыхъ, $\psi(x,\ y) = xy^2$, найдемъ

$$m\sum(-1)^\lambda \overline{\zeta_1}(m-\lambda^2) + \sum_{\lambda=0,\ \pm1,\ \pm2,\ldots}(-1)^\lambda \lambda^2(2^{\sigma+2}-5)\overline{\zeta_1}(m-\lambda^2) =$$

$$= \left\{\begin{matrix} 0\text{, если } m \text{ не квадратъ} \\ (-1)^{m-1}\dfrac{m(4m-1)}{3}\text{, если } m \text{ квадратъ} \end{matrix}\right\}. \quad (b)$$

Положимъ, наконецъ, въ томъ же тождествѣ

$$\psi(x,\ y) = 8mx^3 - 18x^3y^2 - 15xy^4;$$

послѣ довольно длиннаго вычисленія получимъ слѣдующій результатъ

$$\Sigma(-1)^\lambda(m-9\lambda^2)(2^{3\sigma+3}-15)\overline{\zeta_3}(m-\lambda^2) +$$
$$+138\{\Sigma(-1)^\lambda\lambda^4(7-5.2^\sigma)\overline{\zeta_1}(m-\lambda^2) + m\Sigma(-1)^\lambda\lambda^2(2^{\sigma+1}-3)\overline{\zeta_1}(m-\lambda^2)\} -$$
$$-18m^2\Sigma(-1)^\lambda 2^\sigma\overline{\zeta_1}(m-\lambda^2) = 0 \text{ или } (-1)^{m-1}m(--64m^2+46m-7)$$

Здѣсь мы обозначили черезъ $\overline{\zeta_3}(m-\lambda^2)$ сумму кубовъ нечетныхъ дѣлителей $m-\lambda^2$. Послѣднее равенство упрощается, если принять во вниманіе равенство (a); получается окончательный результатъ вида

$$P + 138Q = \left\{\begin{matrix} 0\text{, если } m \text{ не квадратъ} \\ (-1)^m(46m^2-46m+7) \end{matrix}\right\} \quad (c)$$

гдѣ положено

$$P = \Sigma(-1)^{\lambda}(m-9\lambda^2)(2^{3\sigma+3}-15)\overline{\zeta}_3(m-\lambda^2)$$

$$Q = \Sigma(-1)^{\lambda}\lambda^4(7-5.2^{\sigma})\overline{\zeta}_1(m-\lambda^2)+m\Sigma(-1)^{\lambda}\lambda^2(2^{\sigma+1}-3)\overline{\zeta}_1(m-\lambda^2)$$

$$\lambda = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots$$

Для полученія второго соотношенія между P и Q обратимся къ тождеству

$$\sum_{m=\lambda^2+d\delta} F(d+\lambda,\ \delta-2\lambda,\ 2d+2\lambda-\delta) =$$

$$= \left\{\begin{array}{l} \sum\limits_{s=1}^{2\sqrt{m}-1} F(\sqrt{m}, s, s) - \sum\limits_{t=1}^{\sqrt{m}-1} F(t, 2\sqrt{m}, 2t), \text{ если } m \text{ квадратъ} \\ 0, \text{ если } m \text{ не квадратъ} \end{array}\right\} \qquad \text{(E)}$$

въ которомъ $F(x, y, z)$ нечетная функція, обращающаяся въ нуль всякій разъ, какъ $x=0$, или $y=0$, или $z=0$; суммированіе въ лѣвой части распространяется на всѣ представленія m въ видѣ:

$$m = \lambda^2 + d\delta,$$

гдѣ λ произвольное цѣлое число, а d и δ положительныя числа (*δ не обязательно нечетное*). Полагая въ (E) функцію $F(x, y, z)$ равной

$$F(x, y, z) = (-1)^x x^3 yz$$

получимъ такое равенство

$$\Sigma(-1)^{\lambda}(m--9\lambda^2)(2^{3\sigma+3}-15)\overline{\zeta}_3(m-\lambda^2)+49\Sigma(-1)^{\lambda}\lambda^4(7-5.2^{\sigma})\overline{\zeta}_1(m-\lambda^2)+$$

$$+\frac{7}{2}m\,\Sigma(-1)^{\lambda}\lambda^2(40.2^{\sigma}-57)\overline{\zeta}_1(m-\lambda^2)-$$

$$-\frac{7}{2}m^2\Sigma(-1)^{\lambda}(2^{\sigma+1}-3)\overline{\zeta}_1(m-\lambda^2) = 0 \text{ или } (-1)^m\frac{7m(8m^2-11m+6)}{6}$$

которое съ помощью равенствъ (a) и (b) приводится къ виду

$$P+49Q = \left\{\begin{array}{l} 0, \text{ если } m \text{ не квадратъ} \\ (-1)^m\dfrac{7m(14m^2-14m+6)}{6}, \text{ если } m \text{ квадратъ} \end{array}\right\} \qquad \text{(d)}$$

Изъ (c) и (d) находимъ

$$P = \left\{\begin{array}{l} 0, \text{ если } m \text{ не квадратъ} \\ (-1)^m 7m, \text{ если } m \text{ квадратъ} \end{array}\right.$$

или иначе

$$\sum(-1)^{\lambda}(m-9\lambda^2)(2^{3\sigma+3}-15)\overline{\zeta}_1(m-\lambda^2) = \left\{\begin{array}{l} 0, \text{ если } m \text{ не квадратъ} \\ (-1)^m 7m, \text{ если } m \text{ квадр.} \end{array}\right\} \qquad \text{(e)}$$

Вводя числовую функцію

$$\chi(m) = 16(-1)^m \sum_{d\delta=m} (-1)^d d^3 \quad \text{при } m > 0$$

$$\chi(0) = 1\,,$$

вмѣсто (е) легко получимъ

$$\sum_{\lambda^2 \leqq m} (m - 9\lambda^2)\, \chi(m - \lambda^2) = 0\,,$$

откуда уже заключимъ, что

$$N_8(m) = (-1)^m\, 16 \sum_{d\delta=m} (-1)^d d^3;$$

здѣсь сумма берется по всѣмъ дѣлителямъ m. Если m нечетное число и $\zeta_3(m)$ обозначаетъ сумму кубовъ его дѣлителей, то

$$N_8(m) = 16\zeta_3(m)$$

Если же m четное число $=2^\sigma n$, гдѣ n нечетное, то

$$N_8(m) = 16 \,.\, \frac{2^{3\sigma+3} - 15}{7}\, \zeta_3(n)$$

Эти результаты впервые формулированы Эйзенштейномъ, хотя они легко получаются изъ формулъ Fundamenta. Можно было бы такимъ же образомъ разсмотрѣть вопросъ о числѣ представленій числа кратнаго 8 суммою 8-и нечетныхъ квадратовъ; но вслѣдствіе сложности связанныхъ съ этимъ вычисленій мы предпочитаемъ пока отложить разсмотрѣніе этого вопроса. Во всякомъ случаѣ ясно, что по причинѣ возрастающей сложности вычисленій едва-ли возможно надѣяться на успѣхъ разсмотрѣннаго способа въ примѣненіи къ 10 и 12 квадратамъ. Поэтому мы избираемъ другой путь и разсмотримъ вновь уже разобранные случаи 4, 6 и 8 квадратовъ, а затѣмъ аналогичными пріемами изслѣдуемъ случаи 10 и 12 квадратовъ.

§ 7. Второй способъ для рѣшенія вопросовъ о представленіи чиселъ суммою квадратовъ основанъ на примѣненіи тождествъ Ліувилля другого характера. Намъ постоянно придется ссылаться на одни и тѣже тождества; для удобства мы соберемъ ихъ вмѣстѣ въ этомъ §. Во всѣ эти тождества входитъ четная функція $f(x)$, т. е. такая, которая при разсматриваемыхъ значеніяхъ аргумента удовлетворяетъ условію

$$f(-x) = f(x).$$

Пусть m нечетное число и $\alpha > 0$. Четное число $2^\alpha m$ всѣми возможными способами представляется въ видѣ суммы

$$2^\alpha m = r + s$$

двухъ нечетныхъ положительныхъ слагаемыхъ r и s; каждое изъ этихъ слагаемыхъ всѣми возможными способами представляется въ видѣ произведенія двухъ множителей:

$$r = \lambda\mu\,; \quad s = \nu\varrho$$

Такимъ образомъ получаются всѣ представленія $2^\alpha m$ въ формѣ

$$2^\alpha m = \lambda\mu + \nu\varrho$$

Распространивъ на всѣ такія представленія сумму

$$\Sigma[f(\lambda-\nu) - f(\lambda+\nu)]$$

получаемъ тождество

$$\sum_{2^\alpha m=\lambda\mu+\nu\rho}[f(\lambda-\nu) - f(\lambda+\nu)] = 2^{\alpha-1}\sum_{m=d\delta} d\,[f(0) - f(2^\alpha d)] \tag{I}$$

Обозначимъ по прежнему черезъ m нечетное число и положимъ $\alpha \geq 0$. Число $2^\alpha m$ (четное или нечетное) всѣми возможными способами представимъ въ видѣ суммы

$$2^\alpha m = 2^\sigma r + 2^\tau s$$

двухъ положительныхъ слагаемыхъ $2^\sigma r$ и $2^\tau s$, гдѣ r и s нечетныя числа, которыя всѣми возможными способами представляются въ видѣ произведенія двухъ множителей

$$r = \lambda\mu\,; \quad s = \nu\varrho$$

Такимъ образомъ получаются всѣ представленія $2^\alpha m$ въ формѣ

$$2^\alpha m = 2^\sigma \lambda\mu + 2^\tau \nu\varrho$$

Соотвѣтственно такимъ представленіямъ имѣемъ два тождества:

$$\sum_{2^\alpha m=2^\sigma\lambda\mu+2^\tau\nu\rho}[f(\lambda-\nu)-f(\lambda+\nu)]+\sum_{m=d\delta}[f(0)+2f(2)+\ldots+2f(d-1)]+S=2^\alpha f(0)\zeta_1(m), \tag{II}$$

гдѣ слѣдуетъ полагать $S=0$ въ случаѣ $\alpha=0$ и

$$S = \sum_{m=d\delta} d\,[f(2d) + 2f(4d) + \ldots + 2^{\alpha-1} f(2^\alpha d)]$$

въ случаѣ $\alpha > 0$. Другое тождество будетъ такое:

$$\sum_{2^\alpha m=2^\sigma\lambda\mu+2^\tau\nu\rho}(-1)^{\frac{\mu-1}{2}}(-1)^{\frac{\rho-1}{2}}[f(2^\sigma\lambda-2^\tau\nu)+f(2^\sigma\lambda+2^\tau\nu)] = (3-2^\alpha)\,f(0)\,\zeta_1(m) +$$

$$+\sum_{m=d\delta}[2^\alpha d-(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}]\,f(2^\alpha d) \tag{III}$$

Въ случѣ $\alpha=0$ одно изъ чиселъ σ, τ равно нулю, а другое больше нуля; не безполезно будетъ въ этомъ случаѣ тождество (II) представить такъ:

$$2\sum_{m=\lambda\mu+2^\tau\nu\rho}[f(\lambda-v)-f(\lambda+v)]+\sum_{m=d\delta}[f(0)+2f(2)+\ldots+2f(d-1)]=f(0)\zeta_1(m) \quad \text{(IV)}$$

Наконецъ слѣдуетъ привести еще одно тождество, котораго Ліувилль не даетъ, но которое является очень важнымъ для дальнѣйшаго. Пусть M какое угодно число и $F(x)$ нечетная функція отъ x, равная 0 при $x=0$. Будемъ разсматривать всѣ представленія M въ видѣ

$$M=s^2+t^2+u^2+\ldots+w^2+d\delta \quad \text{(a)}$$

гдѣ s произвольное цѣлое число, $t, u, \ldots w$ (число этихъ чиселъ произвольно) по произволу четныя или нечетныя числа, d и δ числа положительныя и притомъ δ нечетное. Сумма

$$\Sigma(-1)^{s+t}F(d+s+\lambda t),$$

гдѣ λ произвольный параметръ, распространенная на всѣ представленія (a), будетъ всегда равна суммѣ

$$\Sigma(-1)^{s+t-1}sF(s+\lambda t),$$

распространенной на всѣ рѣшенія уравненія

$$M=s^2+t^2+u^2+\ldots+w^2 \quad \text{(b)}$$

гдѣ $t, u, \ldots w$ подлежатъ тѣмъ же ограниченіямъ, какъ въ равенствѣ (a) (напр., если въ (a) мы предполагаемъ t четнымъ, то и въ (b) должны будемъ предполагать t четнымъ). Такимъ образомъ имѣемъ тождество

$$\sum_{M=s^2+t^2+u^2+\ldots+w^2+d\delta;\ \delta \text{ неч.}}(-1)^{s+t}F(d+s+\lambda t)=\sum_{M=s^2+t^2+u^2+\ldots+w^2;\ s>0}(-1)^{s+t-1}sF(s+\lambda t) \quad \text{(V)}$$

Доказательство его не представляетъ никакихъ затрудненій и потому мы его опускаемъ. Наконецъ, условимся еще употреблять слѣдующія обозначенія. Если разсматриваются такія представленія числа m суммою p квадратовъ, въ коихъ q первыхъ квадратовъ нечетные съ положительными корнями, а остальные четные ($\gtreqless 0$), то число ихъ будемъ обозначать знакомъ

$$N_p(m, q)$$

При такомъ обозначеніи имѣемъ очевидно

$$N_p(m)=N_p(4m, 0)$$
$$R_p(m)=N_p(m, p),$$

гдѣ $N_p(m)$ и $R_p(m)$ имѣютъ прежній смыслъ.

§ 8. Въ тождествѣ (I) § 7 будемъ считать $\alpha=1$ и положимъ

$$f(x)=(-1)^{\frac{x}{2}},$$

что возможно, такъ какъ всѣ аргументы подъ знакомъ функціи $f(x)$ въ этомъ тождествѣ четные.

Тогда послѣ простыхъ преобразованій получимъ

$$\sum_{2m=r+s}\varrho(r)\,\varrho(s)=\zeta_1(m)$$

Такъ какъ $\varrho(r)$ и $\varrho(s)$ равны числамъ представленій $2r$ и $2s$ суммами двухъ квадратовъ нечетныхъ положительныхъ чиселъ, то нетрудно сообразить, что предыдущее равенство рѣшаетъ вопросъ о представленіи числа $4m$ суммою четырехъ нечетныхъ квадратовъ съ положительными корнями; получается прежній результатъ:

$$R_4(4m)=\zeta_1(m).$$

Полагая $f(x)=(-1)^{\frac{x}{2}}$ въ тождествѣ (IV) § 7, очень просто получимъ такое равенство

$$4\sum_{m=r+2^\tau s}\varrho(r)\varrho(s)+\varrho(m)=\zeta_1(m)$$

или

$$\sum_{m=r+2^\tau s}4\varrho(r)\,.\,4\varrho(s)+4\varrho(m)=4\zeta_1(m)$$

Принявъ во вниманіе, что $4\varrho(r)$ и $4\varrho(s)$ соотвѣтственно равны числамъ представленій r и $2^\tau s$ суммами двухъ квадратовъ, легко сообразимъ, что сумма $\Sigma 4\varrho(r)\,.\,4\varrho(s)$ равна числу такихъ рѣшеній уравненія

$$m=x^2+y^2+z^2+t^2,$$

гдѣ $x+y$ нечетное число и z^2+t^2 не$=0$. Но $4\varrho(m)$ выражаетъ число рѣшеній того же уравненія, гдѣ $z=0$ и $t=0$. Слѣдовательно, число всѣхъ рѣшеній предыдущаго уравненія, гдѣ x и y разной четности, равно $4\zeta_1(m)$, но легко убѣдиться, что число такихъ рѣшеній равно половинѣ числа всѣхъ представленій m суммою 4-хъ квадратовъ. Поэтому

$$N_4(m)=8\zeta_1(m).$$

Наконецъ, въ тождествѣ (II) § 7 будемъ считать $\alpha>0$ и опять положимъ $f(x)=(-1)^{\frac{x}{2}}$; получимъ такое равенство

$$2\sum_{2^\alpha m=2^\sigma r+2^\tau s}\varrho(r)\,\varrho(s)+\varrho(m)=3\zeta_1(m)$$

или
$$\sum_{2^\alpha m=2^\sigma r+2^\tau s} 4\varrho(r).4\varrho(s)+8\varrho(m)=24\zeta_1(m)$$

Сумма въ лѣвой части этого равенства равна, очевидно, числу такихъ рѣшеній уравненія
$$2^\alpha m=x^2+y^2+z^2+t^2,$$
гдѣ x^2+y^2 не$=0$ и z^2+t^2 не$=0$; но $8\varrho(m)$ равно числу всѣхъ остальныхъ. Слѣдовательно
$$N_4(2^\alpha m)=24\zeta_1(m)\,,\ \text{если}\ \alpha>0$$

§ 9. Перейдемъ къ случаю 8-и квадратовъ. Въ тождествѣ (I) § 7 положимъ $f(x)=x^2$; получимъ послѣ должныхъ упрощеній
$$4\sum_{2^\alpha m=r+s}\zeta_1(r)\,\zeta_1(s)=2^{3\alpha-1}\zeta_3(m)$$

Это равенство можно истолковать двояко. Замѣчая, по предыдущему, что $\zeta_1(r)$ и $\zeta_1(s)$—числа представленій $4r$ и $4s$ суммами четырехъ нечетныхъ положительныхъ квадратовъ, легко убѣждаемся, что $\Sigma\zeta_1(r)\zeta_1(s)$ есть число представленій $2^{\alpha+2}m$ $(=4r+4s)$ суммою восьми квадратовъ нечетныхъ положительныхъ чиселъ; слѣдовательно
$$R_8(2^{\alpha+2}m)=2^{3\alpha-3}\zeta_3(m)\,;\quad \alpha\geqq 1\,.$$

Представимъ себѣ теперь, что ищутся представленія $2^{\alpha+2}m$ суммою 8-и квадратовъ, изъ коихъ 4 первыхъ нечетны съ положительными корнями, а остальные четны ($\gtreqless 0$). Всѣ такія представленія могутъ быть найдены, если мы всѣми возможными способами положимъ
$$2^{\alpha+2}m=4r+4s\,,$$
гдѣ r неч. число >0 (а потому и s неч. при $\alpha>0$), но $<2^\alpha m$, и затѣмъ соотвѣтственно каждому такому представленію разложимъ $4r$ на сумму четырехъ нечетныхъ положительныхъ квадратовъ (число такихъ разложеній $=\zeta_1(r)$), а $4s$ на сумму четырехъ четныхъ квадратовъ (число такихъ разложеній $=8\zeta_1(s)$). Полное число искомыхъ представленій $N_8(2^{\alpha+2}m,\ 4)$ будетъ равно $\sum\limits_{2^\alpha m=r+s}\zeta_1(r).8\zeta_1(s)$, такъ что, вслѣдствіе предыдущаго равенства,
$$N_8(2^{\alpha+2}m,\ 4)=2^{3\alpha}\zeta_3(m)$$

При выводѣ предполагалось $\alpha>0$; но равенство, какъ видно изъ послѣдующаго, справедливо и при $\alpha=0$. Теперь въ тождествѣ (IV) § 7 опять положимъ $f(x)=x^2$; получимъ
$$24\sum_{m=r+2^\tau s}\zeta_1(r).\zeta_1(s)+\zeta_1(m)=\zeta_3(m)$$

Это равенство вновь можно истолковать двояко. Во-первыхъ, сумму $\Sigma\zeta_1(r).24\zeta_1(s)$ можно истолковать, какъ число представленій $4m$ суммою 8 квадратовъ, изъ коихъ первые 4 нечетны съ положительными корнями, а остальные четны, но не всѣ равны нулю; число же такихъ представленій, гдѣ всѣ четные квадраты равны 0, будетъ $\zeta_1(m)$. Отсюда и изъ выведеннаго равенства находимъ

$$N_8(4m,\ 4)=\zeta_3(m).$$

Во-вторыхъ, сумму $\Sigma 8\zeta_1(r).24\zeta_1(s)+8\zeta_1(m)$ можно истолковать, какъ число представленій нечетнаго числа m суммою 8 квадратовъ, изъ которыхъ первые четыре имѣютъ нечетную сумму; а это число, очевидно, равно $\frac{1}{2}N_8(m)$. Слѣдовательно

$$N_8(m)=16\zeta_3(m).$$

Положимъ, наконецъ, $f(x)=x^2$ въ равенствѣ (II) § 7, гдѣ мы предполагаемъ $\alpha>0$, т. е. число $2^\alpha m$ четнымъ; получимъ въ результатѣ простыхъ вычисленій равенство

$$24\sum_{2^\alpha m=2^\sigma r+2^\tau s}\zeta_1(r)\zeta_1(s)=2(\zeta_3(m)-\zeta_1(m))+24.\frac{2^{3\alpha}-1}{7}\zeta_1(m)$$

Лѣвую часть этого равенства можно истолковать такимъ образомъ. Обратимъ вниманіе на тѣ представленія $2^\alpha m=2^\sigma r+2^\tau s$, гдѣ σ и τ равны 0; соотвѣтствующая такимъ представленіямъ часть суммы $24\Sigma\zeta_1(r)\zeta_1(s)$ равна $\frac{3}{8}$ числа P представленій $2^\alpha m$ суммою 8-и квадратовъ, гдѣ сумма четырехъ первыхъ квадратовъ нечетная. Часть же суммы $24\Sigma\zeta_1(r)\zeta_1(s)$, соотвѣтствующая представленіямъ $2^\alpha m=2^\sigma r+2^\tau s$, гдѣ $\sigma>0$, $\tau>0$, равна $\frac{1}{24}$ числа представленій $2^\alpha m$ суммою 8-и квадратовъ, гдѣ сумма четырехъ первыхъ квадратовъ четная, равно какъ и сумма четырехъ послѣднихъ; при чемъ ни одна изъ этихъ суммъ не равна нулю. Число представленій, гдѣ одна изъ этихъ суммъ равна 0 будетъ по предыдущему $48\zeta_1(m)$. Обозначая черезъ Q число всѣхъ представленій $2^\alpha m$ суммою 8-и квадратовъ, гдѣ четыре первые имѣютъ четную сумму, получимъ на основаніи предыдущаго равенства

$$9P+Q=\left(48+24^2.\frac{2^{3\alpha}-1}{7}\right)\zeta_3(m).$$

Но очевидно, что

$$N_8(2^\alpha m) = P + Q;$$

съ другой же стороны легко убѣдиться въ справедливости равенства

$$P = 8N_8(2^{\alpha+2}m,\ 4) = 2^{3\alpha+3}\zeta_3(m).$$

Принявъ это во вниманіе, получимъ окончательно

$$N_8(2^\alpha m) = 16.\frac{2^{3\alpha+3}-15}{7}\zeta_3(m) \text{ при } \alpha>0.$$

Отмѣтимъ еще простое слѣдствіе выведенныхъ равенствъ

$$\zeta_3(m) = \frac{8}{15}N_8(2^{\alpha+2}m,\ 4) - \frac{7}{16.15}N_8(2^{\alpha+2}m,\ 0) \text{ при } \alpha>0.$$

§ 10. Разсмотримъ теперь случай 6 квадратовъ. Въ равенствѣ (III) § 7, гдѣ мы считаемъ $\alpha \geqq 0$, не исключая знака равенства, положимъ $f(x) = x^2$; получается результатъ вида

$$2\sum_{2^\alpha m=2^\sigma\lambda\mu+2^\tau\nu\rho}(-1)^{\frac{\mu-1}{2}}2^{2\sigma}\lambda^2(-1)^{\frac{\rho-1}{2}} + 2\sum_{2^\alpha m=2^\sigma\lambda\mu+2^\tau\nu\rho}(-1)^{\frac{\rho-1}{2}}2^{2\tau}\nu^2(-1)^{\frac{\mu-1}{2}} + \sum_{d\delta=m}(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}2^{2\alpha}d^2 = 2^{3\alpha}\zeta_3(m),$$

который можно очевидно проще представить такъ:

$$4\sum_{2^\alpha m=2^\sigma r+2^\tau s}2^{2\sigma}\varrho_2(r)\varrho(s) + 2^{2\alpha}\varrho_2(m) = 2^{3\alpha}\zeta_3(m) \qquad \text{(a)}$$

Будемъ разсматривать теперь представленія числа $2^{\alpha+2}m$ суммою 8-и квадратовъ, изъ которыхъ первые 4 нечетны съ положительными корнями, а остальные четны ($\gtreqless 0$).

Всѣ эти представленія можно представить происшедшими такимъ образомъ. Число $2^{\alpha+2}m$ всѣми способами представляется въ видѣ суммы

$$2^{\alpha+2}m = 4m' + 4m'',$$

гдѣ m' *положительное* цѣлое число, а $m'' \geqq 0$; затѣмъ при каждомъ изъ такихъ представленій $4m'$ всѣми возможными способами представляется въ видѣ суммы шести квадратовъ, изъ коихъ первые 4 нечетны съ положительными корнями, а остающіеся два четны; $4m''$ всѣми возможными способами представляется въ видѣ суммы двухъ четныхъ квадратовъ. Число представленій, соотвѣтствующихъ даннымъ m' и m'', будетъ $N_6(4m',\ 4).N_2(4m'',\ 0)$; слѣдовательно полное число изобразится въ видѣ суммы

$$\sum_{2^{\alpha+2}m=4m'+4m'';\ m'>0;\ m''\geqq 0;}N_6(4m',\ 4)\,N_2(4m'',\ 0) = N_8(2^{\alpha+2}m,\ 4)$$

которую можно представить такъ

$$4\sum_{2^\alpha m=2^\sigma r+2^\tau s;\ r \text{ и } s \text{ неч.} >0} \varrho(s)\, N_6(2^{\sigma+2}r,\ 4)+N_6(2^{\alpha+2}m,\ 4)=N_8(2^{\alpha+2}m,\ 4) \qquad \text{(b)}$$

Принявъ во вниманіе, что

$$N_8(2^{\alpha+2}m,\ 4)=2^{3\alpha}\zeta_3(m)\,,$$

изъ сравненія равенствъ (a) и (b) выведемъ

$$4\sum_{2^\alpha m=2^\sigma r+2^\tau s} \varrho(s)\,.\,2^{2\sigma}\varrho_2(r)+2^{2\alpha}\varrho_2(m)=4\sum_{2^\alpha m=2^\sigma r+2^\tau s}\varrho(s)\,N_6(2^{\sigma+2}r,\ 4)+N_6(2^{\alpha+2}m,\ 4) \qquad \text{(c)}$$

Это равенство приводитъ къ заключенію: если мы предположимъ, что для всѣхъ чиселъ вида $2^{\sigma+2}r$, гдѣ r нечетное, *меньшихъ* числа $2^{\alpha+2}m$ справедливо равенство

$$N_6(2^{\sigma+2}r,\ 4)=2^{2\sigma}\varrho_2(r)\,,$$

то будемъ имѣть и $N_6(2^{\alpha+2}m,\ 4)=2^{2\alpha}\varrho_2(m)$. Но для наименьшаго числа вида $2^{\alpha+2}m$, именно 4-хъ, непосредственная провѣрка даетъ результатъ $N_6(4,4)=2^0\varrho_2(1)$; слѣдовательно изъ (c) по индукціи выводимъ общее равенство

$$N_6(2^{\alpha+2}m,\ 4)=2^{2\alpha}\varrho_2(m) \qquad \text{(A)}$$

Положимъ теперь въ равенствѣ (II) § 7 функцію $f(x)$ равной

$$f(x)=(-1)^{\frac{x}{2}}x^2;$$

получается результатъ вида

$$4\sum_{2^\alpha m=2^\sigma\lambda\mu+2^\tau\nu\rho}(-1)^{\frac{\lambda-1}{2}}.\lambda^2(-1)^{\frac{\nu-1}{2}}+\sum_{m=d\delta}(-1)^{\frac{d-1}{2}}d^2-\sum_{m=d\delta}(-1)^{\frac{d-1}{2}}+$$

$$+\left\{\begin{matrix} 0,\ \text{если}\ \alpha=0 \\ \dfrac{2^{3\alpha+2}-60}{7}\zeta_3(m),\ \text{если}\ \alpha>0 \end{matrix}\right\}=0. \qquad \text{(d)}$$

Полагая

$$\Omega=\frac{1}{4}N_8(2^{\alpha+2}m,\ 0)-4N_8(2^{\alpha+2},\ 4)$$

легко находимъ

$$\Omega=4.\frac{2^{3\alpha}-15}{7}\zeta_3(m)\ \text{при}\ \alpha>0$$

и

$$\Omega=0\ \text{при}\ \alpha=0$$

Слѣдовательно вмѣсто (d) можемъ написать

$$4\sum_{2^\alpha m=2^\sigma r+2^\tau s}(-1)^{\frac{r-1}{2}}\varrho_2(r)\,.\,\varrho(s)+(-1)^{\frac{m-1}{2}}\varrho_2(m)=4N_8(2^{\alpha+2}m,4)-\frac{1}{4}N(2^{\alpha+2}m,0)+\varrho(m) \qquad (e)$$

такъ какъ для всякаго нечетнаго числа k

$$\sum_{d\delta=k}(-1)^{\frac{d-1}{2}}d^2=(-1)^{\frac{k-1}{2}}\varrho_2(k)\,.\quad.$$

Для удобства введемъ въ разсмотрѣніе слѣдующую числовую функцію. Разсматривая число $4a$ и называя черезъ 2^γ наивысшую степень 2, дѣлящую a, а частное отъ этого дѣленія черезъ b, положимъ

$$\chi(4a)=\sum_{d\delta=b}(-1)^{\frac{d-1}{2}}d^2=(-1)^{\frac{b-1}{2}}\varrho_2(b)$$

при $a>0$; согласимся также считать $\chi(0)=-\frac{1}{4}$. Равнымъ образомъ будемъ считать $\varrho(0)=\frac{1}{4}$. Тогда равенство (e) можно написать такъ

$$4\sum_{4p=4m'+4m'';\ m'\geqq 0;\ m''\geqq 0}\chi(4m')\,\varrho(4m'')=4N_8(4p,4)-\frac{1}{4}N_8(4p,0)\,, \qquad (e^*)$$

гдѣ мы положили

$$p=2^\alpha m.$$

Съ другой стороны по предыдущему имѣемъ

$$N_8(4p,\ 4)=4\sum_{4p=4m'+4m'';\ m'\geqq 0;\ m''\geqq 0}N_6(4m',\ 4)\,\varrho(4m'')$$

Разсуждая подобнымъ же образомъ, получаемъ

$$N_8(4p,\ 0)=4\sum_{4p=4m'+4m'';\ m'>0;\ m''>0}N_6(4m',\ 0)\,\varrho(4m'')+N_6(4p,\ 0)+4\varrho(4p).$$

Слѣдовательно можемъ написать

$$4N_8(4p,\ 4)-\frac{1}{4}N_8(4p,\ 0)=4\sum_{4p=4m'+4m'';\ m'\geqq 0;\ m''\geqq 0}\left\{4N_6(4m',\ 4)-\frac{1}{4}N_6(4m',\ 0)\right\}\varrho(4m''),$$

согласившись полагать

$$4N_6(0,\ 4)-\frac{1}{4}N_6(0,\ 0)=-\frac{1}{4}\,;\ \varrho(0)=\frac{1}{4}$$

Если еще для краткости положимъ

$$\psi(4n)=4N_6(4n,\ 4)-\frac{1}{4}N_6(4n,\ 0)$$

то вмѣсто (e*) можемъ написать равенство

$$\sum_{4p=4m'+4m''; \; m'\geqq 0; \; m''\geqq 0} \chi(4m')\,\varrho(4m'') = \sum \psi(4m')\,\varrho(4m'').$$

Изъ этого равенства, предварительно непосредственно провѣривъ, что

$$\psi(4) = \chi(4); \quad \psi(0) = \chi(0),$$

по индукціи выведемъ общій результатъ: $\chi(4p) = \psi(4p)$ или

$$4N_6(2^{\alpha+2}m,\ 4) - \frac{1}{4}N_6(2^\alpha m) = (-1)^{\frac{m-1}{2}})\varrho_2(m). \qquad \text{(B)}$$

Изъ равенствъ (A) и (B) получаемъ:

$$N_6(2^\alpha m) = 4(2^{2\alpha+2} - (-1)^{\frac{m-1}{2}})\,\varrho_2(m).$$

§ 11. Способъ, которымъ мы будемъ рѣшать вопросъ о представленіи чиселъ суммою 12-ти квадратовъ, аналогиченъ употребленному при разсмотрѣніи случая 8-и квадратовъ. Предполагая $\alpha > 0$, положимъ въ тождествѣ (I) § 7

$$f(x) = x^4;$$

получимъ результатъ

$$16 \sum_{2^\alpha m = r+s} \zeta_1(r)\,\zeta_3(s) = 2^{5\alpha-1}\zeta_5(m),$$

гдѣ черезъ $\zeta_5(m)$ обозначена сумма пятыхъ степеней дѣлителей m. Этотъ результатъ можетъ быть истолкованъ двоякимъ способомъ. Будемъ разсматривать представленія числа $2^{\alpha+2}m$ суммой 12 квадратовъ, среди которыхъ первые 4 нечетны съ положительными корнями, а остальные 8 четны. Очевидно, что для числа такихъ представленій имѣемъ равенство

$$N_{12}(2^{\alpha+2}m,\ 4) = \sum_{2^\alpha m = r+s; \; r \text{ и } s \text{ неч.}} N_4(4r,\ 4)\,N_8(4s,\ 0);$$

но

$$N_4(4r,\ 4) = \zeta_1(r); \quad N_8(4s,\ 0) = 16\zeta_3(s),$$

слѣдовательно по предыдущему равенству

$$N_{12}(2^{\alpha+2}m,\ 4) = 2^{5\alpha-1}\zeta_5(m).$$

Равнымъ образомъ для числа такихъ представленій, гдѣ первые 8 квадратовъ нечетны съ положительными корнями, а остальные 4 четны, имѣемъ выраженіе

$$N_{12}(2^{\alpha+2}m,\ 8) = \sum_{2^\alpha m = r+s; \; r \text{ и } s \text{ неч.} > 0} N_4(4r,\ 4)\,N_8(4s,\ 4);$$

но

$$N_4(4r,\ 4) = \zeta_1(r); \quad N_8(4s,\ 8) = \zeta_1(s),$$

слѣдовательно

$$N_{12}(2^{\alpha+2}m,\ 8) = 2^{5\alpha-5}\zeta_5(m).$$

Отмѣтимъ слѣдующія равенства, какъ слѣдствія выведенныхъ,

$$N_{12}(2^{\alpha+2}m,\ 4) - 16N_{12}(2^{\alpha+2}m,\ 8) = 0 \text{ при } \alpha>0 \tag{a}$$

$$N_{12}(2^{\alpha+2}m,\ 4) + 16N_{12}(2^{\alpha+2}m,\ 8) = 2^{5\alpha}\zeta_5(m). \tag{b}$$

Послѣднее изъ этихъ равенствъ справедливо и при $\alpha=0$, какъ мы сейчасъ докажемъ. Въ равенствѣ (IV) § 7 положимъ $f(x) = x^4$; послѣ всѣхъ упрощеній получится слѣдующій результатъ

$$16\sum_{m=r+2^\tau s;\ r \text{ и } s>0} \zeta_3(r)\,\zeta_1(s) + 16\sum_{m=r+2^\tau s;\ r \text{ и } s>0} \zeta_1(r)\zeta_3(s) + \frac{2}{3}\,\zeta_3(m) - \frac{7}{15}\,\zeta_1(m) = \frac{1}{5}\,\zeta_5(m) \tag{c}$$

который мы можемъ истолковать двоякимъ образомъ. По доказанному выше имѣемъ равенства

$$\zeta_3(s) = \frac{8}{15}\,N_8(2^{\tau+2}s,\, 4) - \frac{7}{16\,.\,15}N_8(2^{\tau+2}s,\, 0);\ \zeta_1(r) = N_4(4r,\, 4) = \frac{1}{8}N_4(4r{,}0);$$

$$\zeta_3(r) = N_8(4r,\ 4) = \frac{1}{16}\,N_8(4r,\, 0);$$

слѣдовательно согласно равенству (c) имѣемъ

$$\frac{2}{3}\sum N_8(4r,\, 4)\, N_4(2^{\tau+2}s,\, 0) + \frac{128}{15}\sum N_4(4r,\ 4)\, N_8(2^{\tau+2}s,\ 4) -$$

$$- \frac{7}{15}\sum N_4(4r,\, 4)\, N_8(2^{\tau+2}s,\, 0) + \frac{2}{3}\,\zeta_3(m) - \frac{7}{15}\,\zeta_1(m) = \frac{1}{5}\,\zeta_5(m); \tag{d}$$

$$\frac{1}{24}\sum N_8(4r{,}0)\, N_4(2^{\tau+2}s,\, 0) - \frac{7}{15}\sum N_4(4r,\, 4)\, N_8(2^{\tau+2}s,\, 0) +$$

$$+ \frac{128}{15}\sum N_4(4r{,}\,4)\, N_8(2^{\tau+2}s,\, 4) + \frac{2}{3}\,\zeta_3(m) - \frac{7}{15}\,\zeta_1(m) = \frac{1}{5}\,\zeta_5(m). \tag{d*}$$

Сумма

$$\sum_{m=r+2^\tau s;\ r \text{ и } s \text{ неч.}>0} N_8(4r,\ 4)\, N_4(2^{\tau+2}s,\ 0) + \zeta_3(m),$$

какъ легко убѣдиться, равна

$$N_{12}(4m,\ 4) - 8N_{12}(4m,\ 8)$$

Равнымъ образомъ

$$\sum_{m=r+2^\tau s;\ r \text{ и } s>0} N_4(4r,\, 4)\, N_8(2^{\tau+2}s,\, 0) + \zeta_1(m) = N_{12}(4m,\, 4)$$

и

$$\sum_{m=r+2^\tau s;\ r \text{ и } s>0} N_4(4r,\ 4)\, N_8(2^{\tau+2}s,\ 4) = N_{12}(4m,\ 8).$$

Подставляя эти значенія суммъ въ равенство (d), найдемъ послѣ упрощеній

$$N_{12}(4m,\ 4) + 16 N_{12}(4m,\ 8) = \zeta_5(m). \tag{b*}$$

Точно такъ же легко найти, что

$$\sum_{m=r+2^\tau s;\ r \text{ и } s>0} N_8(4r,\ 0)\, N_4(2^{\tau+2}s,\ 0) + 16\zeta_3(m) = N_{12}(m) - 8N_{12}(4m,\ 4);$$

вслѣдствіе этого изъ равенства (d*) получимъ

$$\frac{5}{24} N_{12}(m) - 4N_{12}(4m,\ 4) + \frac{128}{3} N_{12}(4m,\ 8) = \zeta_5(m)$$

и изъ сравненія этого равенства съ (b*) выведемъ еще, что

$$N_{12}(m) = 24N_{12}(4m,\ 4) - 128N_{12}(4m,\ 8). \tag{e}$$

Положимъ, наконецъ, въ равенствѣ (II) § 7, предполагая $\alpha > 0$,

$$f(x) = x^4;$$

послѣ упрощеній получимъ

$$16\sum_{2^\alpha m = 2^\sigma r + 2^\tau s;\ r \text{ и } s \text{ неч.}>0} \zeta_1(r)\,\zeta_3(s) + \frac{2}{3}\zeta_3(m) - \frac{7}{15}\zeta_1(m) = \left\{\frac{2^{5\alpha+4} - 2^4}{31} + \frac{1}{5}\right\}\zeta_5(m). \tag{f}$$

Сумма

$$16\sum \zeta_1(r)\,\zeta_3(s),$$

соотвѣтствующая такимъ представленіямъ $2^\alpha m = 2^\sigma r + 2^\tau s$, гдѣ $\sigma = \tau = 0$, была выше найдена равной $N_{12}(2^{\alpha+2}m, 4) = 16\, N_{12}(2^{\alpha+2}m,\ 8) = 2^{5\alpha-1}\zeta_5(m)$. Остается разсмотрѣть сумму

$$16\sum{}' \zeta_1(r)\,\zeta_3(s),$$

соотвѣтствующую представленіямъ $2^\alpha m = 2^\sigma r + 2^\tau s$, гдѣ σ и τ больше 0. Эту сумму можно представить въ видѣ:

$$\frac{16}{45} P - \frac{7}{45.8} Q,$$

гдѣ положено для краткости

$$P = \Sigma N_4(2^{\sigma+2}r,\ 0)\, N_8(2^{\tau+2}s,\ 4);\quad 2^\alpha m = 2^\sigma r + 2^\tau s;\ \sigma \text{ и } \tau > 0;\ r \text{ и } s > 0$$

$$Q = \Sigma N_4(2^{\sigma+2}r,\ 0)\, N_8(2^{\tau+2}s,\ 0);\quad 2^\alpha m = 2^\sigma r + 2^\tau s;\ \sigma \text{ и } \tau > 0;\ r \text{ и } s > 0$$

Но легко убѣдиться въ справедливости равенствъ

$$P = N_{12}(2^{\alpha+2}m,\ 4) - 8N_{12}(2^{\alpha+2}m,\ 8) - N_8({}^{\alpha+2}m, 4),$$

$$Q = N_{12}(2^{\alpha+2}m,\ 0) - 8N_{12}(2^{\alpha+2}m,\ 4) - N_8(2^{\alpha+2}m,\ 0) - N_4(2^{\alpha+2}m,\ 0).$$

Пользуясь найденными результатами, послѣ всѣхъ упрощеній представляемъ равенство (f) въ видѣ

$$\frac{7}{8}N_{12}(2^\alpha m) = 68N_{12}(2^{\alpha+2}m, 4) - 128N_{12}(2^{\alpha+2}m, 8) - 45\left\{\frac{2^{5\alpha+4}-16}{31}+\frac{1}{5}\right\}\zeta_5(m),$$

откуда уже окончательно находимъ

$$N_{12}\,(2^\alpha m) = \frac{24}{31}(21+5\,.\,2^{5\alpha+1})\,\zeta_5(m) \text{ при } \alpha>0.$$

Вопросъ объ опредѣленіи числа представленій *четнаго* числа суммой 12-ти квадратовъ рѣшается этой формулой. Случай нечетнаго числа разсмотримъ въ слѣдующемъ §.

§ 12. Въ выраженіе для числа представленій нечетнаго числа суммою 12-ти квадратовъ входитъ совершенно особенная числовая функція, происхожденіе которой выяснится изъ слѣдующихъ соображеній. Въ § 7 было указано тождество (V); для нашего случая мы перепишемъ это тождество такъ:

$$\sum_{4m=s^2+t^2+u^2+v^2+d\delta;\ \delta \text{ неч.}} (-1)^{s+t}F(d+s+\lambda t) = \sum_{4m=s^2+t^2+u^2+v^2;\ s>0} (-1)^{s+t-1}sF(s+\lambda t). \tag{A}$$

Здѣсь подъ m мы понимаемъ произвольное цѣлое число, четное или нечетное. Будемъ считать u и v четными числами. Положимъ сначала $\lambda=0$ и за нечетную функцію $F(x)$ возьмемъ

$$F(x) = x^3;$$

послѣ упрощеній получимъ

$$\sum_{4m=s^2+t^2+u^2+v^2+d\delta} (-1)^{s+t}(d^3+3ds^2) = -\sum_{4m=s^2+t^2+u^2+v^2;\ s>0} s^4. \tag{α}$$

Положимъ затѣмъ $\lambda=1$, оставляя функцію $F(x)$ безъ измѣненія; получимъ

$$\sum_{4m^2=s^2+t^2+u^2+v^2+d\delta} (-1)^{s+t}(d^3+3ds^2+3dt^2) = -\sum_{4m=s^2+t^2+u^2+v^2;\ s>0} s\,(s^3+3st^2). \tag{β}$$

Изъ (α) и (β) найдемъ

$$\sum(-1)^{s+t}(-d^3+3dt^2-3ds^2) = \sum(s^4-3s^2t^2)$$

или еще проще

$$\sum_{4m=s^2+t^2+u^2+v^2+d\delta;\ \delta \text{ неч.}} (-1)^{s+t} d^3 = -\sum_{4m=s^2+t^2+u^2+v^2;\ s>0} (s^4-3s^2t^2). \tag{B}$$

Сообразимъ теперь, какое значеніе имѣетъ сумма

$$\sum_{4m=s^2+t^2+u^2+v^2+d\delta} (-1)^{s+t} d^3$$

Собирая въ этой суммѣ члены, соотвѣтствующіе опредѣленной системѣ значеній чиселъ s, t, u, v, получаемъ сумму этихъ членовъ равной

$$(-1)^{s+t} \sum_{4m-s^2-t^2-u^2-v^2=d\delta} d^3$$

при чемъ суммированіе распространяется на всѣ представленія числа $4m^2 - s^2 - t^2 - u^2 - v^2$ въ видѣ

$$\Omega = 4m - s^2 - t^2 - u^2 - v^2 = d\delta$$

съ нечетнымъ δ. Если $s \equiv 0$, $t \equiv 0$ (Mod 2), то $d \equiv 0$ (Mod 4); въ этомъ случаѣ

$$\sum d^3 = 2^6 N_8(\Omega,\ 4).$$

Если $s \equiv 1$, $t \equiv 1$ (Mod 2), то $d \equiv 2$ (Mod 4) и Ω есть удвоенное нечетное число. При представленіи Ω суммой 8 квадратовъ мы можемъ получить или 2 нечетныхъ квадрата или 6 нечетныхъ квадратовъ; отсюда легко вывести, что въ настоящемъ случаѣ

$$\sum d^3 = 8\{N_8(\Omega,\ 2) + 16 N_8(\Omega,\ 6)\}.$$

Если $s + t \equiv 1$ (Mod 2), то $\Omega \equiv -1$ (Mod 4). Въ представленіяхъ Ω суммою 8 квадратовъ число нечетныхъ квадратовъ будетъ или 3 или 7; откуда легко вывести, что въ этомъ случаѣ

$$\sum d^3 = 28 N_8(\Omega,\ 3) + 64 N_8(\Omega,\ 7).$$

Принимая все это во вниманіе, безъ труда убѣждаемся, что лѣвую часть равенства (B) можно представить въ видѣ

$$2^6 N_{12}(4m,\ 4) + 32 N_{12}(4m,\ 4) + 512 N_{12}(4m,\ 8) -$$
$$- 112 N_{12}(4m,\ 4) - 256 N_{12}(4m,\ 8) = 256 N_{12}(4m,\ 8) - 16 N_{12}(4m,\ 4);$$

слѣдовательно

$$16\,(N_{12}(4m,\ 4) - 16 N_{12}(4m,\ 8)\,) = \frac{1}{2} \sum_{4m=s^2+t^2+u^2+v^2} (s^4 - 3s^2t^2).$$

Но при u и v четныхъ числа s и t должны быть четными; полагая

$$s=2\lambda,\ t=2\mu;\ u=2\nu;\ v=2\varrho$$

получаемъ окончательно

$$N_{12}(4m,\ 4)-16N_{12}(4m,\ 8)=\frac{1}{2}\sum(\lambda^4-3\lambda^2\mu^2)\,, \tag{C}$$

причемъ суммированіе распространяется на *всѣ* рѣшенія уравненія

$$m=\lambda^2+\mu^2+\nu^2+\varrho^2.$$

Выписавъ всѣ подобныя уравненія, возвысивъ ихъ въ квадратъ и складывая, найдемъ

$$4\sum\lambda^4+12\sum\lambda^2\mu^2=m^2N_4(m),$$

откуда уже легко получимъ

$$\frac{1}{2}\sum(\lambda^4-3\lambda^2\mu^2)=\sum_{m=\lambda^2+\mu^2+\nu^2+\rho^2}\lambda^4-\frac{1}{8}m^2N_4(m).$$

Слѣдовательно

$$N_{12}(4m,\ 4)-16N_{12}(4m,\ 8)=-\frac{1}{8}m^2N_4(m)+\sum_{m=\lambda^2+\mu^2+\nu^2+\rho^2}\lambda^4. \tag{D}$$

Для четнаго m мы убѣдились непосредственно, что

$$N_{12}(4m,\ 4)=16N_{12}(4m,\ 8),$$

слѣдовательно *для четнаго m* имѣемъ замѣчательный результатъ

$$\sum_{m=\lambda^2+\mu^2+\nu^2+\rho^2}\lambda^4=\frac{1}{8}m^2N_4(m).$$

Этотъ результатъ высказанъ Ліувиллемъ ¹) и былъ впервые доказанъ Штерномъ элементарными, но очень сложными разсужденіями ²). При *нечетномъ m* равенство (D) есть новое уравненіе, которое вмѣстѣ съ ранѣе доказанными:

$$N_{12}(4m,\ 4)+16N_{12}(4m,\ 8)=\zeta_5(m)$$
$$N_{12}(m)=24N_{12}(4m,\ 4)-128N_{12}(4m,\ 8)$$

---

¹) Journ. de Math. 1858 p. 357.

²) Stern. Journ. für Math. Bd. 105 (1889).

даетъ

$$\left.\begin{aligned} N_{12}(4m,\ 4) &= -\frac{1}{2}m^2\zeta_1(m)+\frac{1}{2}\zeta_5(m)+\frac{1}{2}\sum\lambda^4 \\ 16N_{12}(4m,\ 8) &= +\frac{1}{2}m^2\zeta_1(m)+\frac{1}{2}\zeta_5(m)-\frac{1}{2}\sum\lambda^4 \\ N_{12}(m) &= 8\zeta_5(m)-16m^2\zeta_1(m)+16\sum\lambda^4 \end{aligned}\right\}\lambda^2+\mu^2+\nu^2+\varrho^2=m.$$

Послѣднее равенство вполнѣ согласуется съ даннымъ Ліувиллемъ [1]). Суммой 12 нечетныхъ квадратовъ можетъ представляться только учетверенное нечетное число. Простыми ариѳметическими разсужденіями, основанными на результатахъ § 8, легко придти къ такому равенству

$$N_{12}(4m,\ 12)=\frac{1}{8}N_{12}(4m,\ 8),$$

правая часть котораго извѣстна на основаніи предыдущаго.

§ 13. Вопросъ о представленіи чиселъ суммою 10-ти квадратовъ мы разсмотримъ совершенно такъ же, какъ выше разсмотрѣли случай 6-ти квадратовъ. Въ тождествѣ (III) § 7 возьмемъ

$$f(x)=x^4;$$

полученный результатъ можно представить въ видѣ

$$4\sum(-1)^{\frac{\mu-1}{2}}2^{4\sigma}\lambda^4(-1)^{\frac{\rho-1}{2}}+12\sum_{2^\alpha m=2^\sigma\lambda\mu+2^\tau\nu\rho}2^{2\sigma}(-1)^{\frac{\mu-1}{2}}\lambda^2.2^{2\tau}(-1)^{\frac{\rho-1}{2}}\nu^2+$$

$$+\sum_{d\delta=m}2^{4\alpha}(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}d^4=2^{5\alpha}\zeta_5(m). \tag{A}$$

Правая часть этого равенства равна, какъ мы убѣдились въ § 11,

$$N_{12}(2^{\alpha+2}m,\ 4)+16N_{12}(2^{\alpha+2}m,\ 8);$$

кромѣ того сумма

$$\sum_{2^\alpha m=2^\sigma\lambda\mu+2^\tau\nu\rho}2^{2\sigma}(-1)^{\frac{\mu-1}{2}}\lambda^2.2^{2\tau}(-1)^{\frac{\rho-1}{2}}\nu^2$$

равна суммѣ

$$\sum_{2^\alpha m=2^\sigma r+2^\tau s}2^{2\sigma}\varrho_2(r).2^{2\tau}\varrho_2(s),$$

которая легко находится равной

$$N_{12}(2^{\alpha+2}m,\ 8).$$

---

[1]) Journ. de Math. 1861 p. 237.

Вслѣдствіе этого равенство (A) можетъ быть написано такъ

$$4\sum_{4p=4m'+4m'';\ m'>0,\ m''\geqq 0}\chi(4m')\,\varrho(4m'')=N_{12}(2^{\alpha+2}m,\ 4)+4N_{12}(2^{\alpha+2}m,\ 8),\qquad (A^*)$$

если мы введемъ числовую функцію

$$\chi(4a)=\sum_{d\delta=a,\ \delta\text{ неч.}}(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}d^4,$$

положимъ $2^{\alpha}m=p$ и согласимся считать $\varrho(0)=\frac{1}{4}$. Но путемъ простыхъ ариѳметическихъ разсужденій легко убѣждаемся, что

$$N_{12}(2^{\alpha+2}m,\ 4)=4\sum_{4p=4m'+4m'';\ m'>0;\ m''\geqq 0}N_{10}(4m',\ 4)\,\varrho(4m'')$$

$$N_{12}(2^{\alpha+2}m,\ 8)=4\sum_{4p=4m'+4m'';\ m'>0;\ m''\geqq 0}N_{10}(4m',\ 8)\,\varrho(4m'')$$

Слѣдовательно, положивъ вообще

$$\psi(4n)=N_{10}(4n,\ 4)+4N_{10}(4n,\ 8),$$

будемъ имѣть

$$N_{12}(2^{\alpha+2}m,\ 4)+4N_{12}(2^{\alpha+2}m,\ 8)=4\sum_{4p=4m'+4m'';\ m'>0;\ m''\geqq 0}\psi(4m')\,\varrho(4m'').\qquad (B)$$

Сравнивая (B) съ (A) получаемъ

$$\sum\chi(4m')\,\varrho(4m'')=\sum_{4p=4m'+4m'';\ m'>0;\ m''\geqq 0}\psi(4m')\,\varrho(4m''),$$

откуда, замѣчая что

$$\chi(4)=\psi(4),$$

разсужденіемъ по индукціи выведемъ общее равенство

$$N_{10}(2^{\alpha+2}m,\ 4)+4N_{10}(2^{\alpha+2}m,\ 8)=\chi(2^{\alpha+2}m);$$

это равенство перепишемъ такъ

$$N_{10}(2^{\alpha+2}m,\ 4)+4N_{10}(2^{\alpha+2}m,\ 8)=2^{4\alpha}\varrho_4(m),\qquad (P)$$

полагая

$$\varrho_4(m)=\sum_{m=d\delta}(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}d^4.$$

Возьмемъ теперь въ равенствѣ (II) § 7 функцію $f(x)$ равной

$$f(x)=(-1)^{\frac{x}{2}}x^4;$$

послѣ небольшихъ вычисленій получимъ

$$4\sum(-1)^{\frac{\lambda-1}{2}}\lambda^4(-1)^{\frac{\nu-1}{2}}+12\sum(-1)^{\frac{\lambda-1}{2}}\lambda^2(-1)^{\frac{\nu-1}{2}}\nu^2+\sum_{d\delta=m}(-1)^{\frac{d-1}{2}}d^4-$$

$$-6\sum_{d\delta=m}(-1)^{\frac{d-1}{2}}d^2+5\sum_{d\delta=m}(-1)^{\frac{d-1}{2}}+\left\{\begin{matrix} 0,\ \text{если}\ \alpha=0 \\ \left(\frac{2^{5\alpha+4}-2^4}{31}-32\right)\zeta_5(m),\ \text{если}\ \alpha>0 \end{matrix}\right\}=0. \qquad \text{(C)}$$

Положимъ

$$-\Omega=2N_{12}(2^{\alpha+2}m,\ 0)-48N_{12}(2^{\alpha+2}m,\ 4)+256N_{12}(2^{\alpha+2}m,\ 8);$$

тогда на основаніи результатовъ, полученныхъ при изслѣдованіи случая 12-ти квадратовъ, будемъ имѣть при $\alpha>0$

$$\Omega=-\left(\frac{2^{5\alpha+4}-2^4}{31}-32\right)\zeta_5(m),$$

а при $\alpha=0$

$$\Omega=0.$$

Затѣмъ, припомнивъ равенство

$$(-1)^{\frac{m-1}{2}}\varrho_2(m)=4N_6(2^{\alpha+2}m,\ 4)-\frac{1}{4}N_6(2^{\alpha+2}m,\ 0),$$

можемъ представить сумму

$$12\sum_{2^\alpha m=2^\sigma\lambda\mu+2^\tau\nu\rho}(-1)^{\frac{\lambda-1}{2}}\lambda^2.(-1)^{\frac{\nu-1}{2}}\nu^2-6\sum_{d\delta=m}(-1)^{\frac{d-1}{2}}d^2$$

въ такомъ видѣ

$$192\sum N_6(2^{\sigma+2}r,\ 4)\,N_6(2^{\tau+2}s,\ 4)-24\sum N_6(2^{\sigma+2}r,\ 4)\,N_6(2^{\tau+2}s,\ 0)+$$

$$+\frac{3}{4}\sum N_6(2^{\sigma+2}r,\ 0)\,N_6(2^{\tau+2}s,\ 0)-24N_6(2^{\alpha+2}m,\ 4)+\frac{3}{2}N_6(2^{\alpha+2}m,\ 0).$$

Но легко видѣть, что

$$\Sigma N_6(2^{\sigma+2}r,\ 4)\,N_6(2^{\tau+2}s,\ 4)=N_{12}(2^{\alpha+2}m,\ 8)$$

$$\Sigma N_6(2^{\sigma+2}r,\ 4)\,N_6(2^{\tau+2}s,\ 0)=N_{12}(2^{\alpha+2}m,\ 4)-N_6(2^{\alpha+2}m,\ 4)$$

$$\Sigma N_6(2^{\sigma+2}r,\ 0)\,N_6(2^{\tau+2}s,\ 0)=N_{12}(2^{\alpha+2}m,\ 0)-2N_6(2^{\alpha+2}m,\ 0),$$

вслѣдствіе чего получимъ

$$12\sum_{2^\alpha m=2^\sigma\lambda\mu+2^\tau\nu\rho}(-1)^{\frac{\lambda-1}{2}}\lambda^2(-1)^{\frac{\nu-1}{2}}\nu^2-6\sum_{d\delta=m}(-1)^{\frac{d-1}{2}}d^2=$$

$$=192N_{12}(2^{\alpha+2}m,\ 8)-24N_{12}(2^{\alpha+2}m,\ 4)+\frac{3}{4}N_{12}(2^{\alpha+2}m,\ 0)$$

Принимая во вниманіе этотъ результатъ и данное выше выраженіе для Ω, мы можемъ переписать равенство (C) проще въ такой формѣ:

$$4\sum(-1)^{\frac{\lambda-1}{2}}\lambda^4(-1)^{\frac{\nu-1}{2}}+\sum(-1)^{\frac{d-1}{2}}d^4+5\sum(-1)^{\frac{d-1}{2}}=$$

$$=\frac{5}{4}N_{12}(2^{\alpha+2}m,\ 0)-24N_{12}(2^{\alpha+2}m,\ 4)+64N_{12}(2^{\alpha+2}m,\ 8). \qquad (C^*)$$

Введемъ теперь въ разсмотрѣніе числовую функцію, опредѣляемую равенствомъ

$$\chi(n)=\sum_{n=d\delta;\ \delta \text{ неч.}}(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}\delta^4 \text{ при } n>0$$

и согласимся полагать

$$\chi(0)=\frac{5}{4}.$$

Принявъ для краткости обозначеніе: $2^\alpha m=p$, мы можемъ при сдѣланныхъ соглашеніяхъ переписать равенство (C*) такъ

$$4\sum_{4p=4m'+4m'';\ m'\geqq0;\ m''\geqq0}\chi(4m')\varrho(4m'')=\frac{5}{4}N_{12}(2^{\alpha+2}m,0)-24\,N_{12}(2^{\alpha+2}m,4)+64\,N_{12}(2^{\alpha+2}m,8) \quad (C^{**})$$

Если мы положимъ

$$\psi(4n)=\frac{5}{4}N_{10}(4n,0)-24N_{10}(4n,4)+64N_{10}(4n,8)$$

при всякомъ $n\geqq0$, то легко убѣдимся, что правая часть равенства (C**) равна

$$4\sum_{4p=4m'+4m'';\ m'\geqq0,\ m''\geqq0}\psi(4m')\varrho(4m'')$$

Слѣдовательно имѣемъ при всякомъ p равенство

$$\sum\chi(4m')\varrho(4m'')=\sum\psi(4m')\varrho(4m'');\ 4p=4m'+4m'';\ m'\geqq0,\ m''\geqq0,$$

откуда, принявъ во вниманіе, что

$$\chi(4)=\psi(4p),$$

выводимъ по индукціи общее равенство

$$\chi(4p)=\psi(4p)$$

или въ другой формѣ

$$5N_{10}(2^{\alpha+2}m,\ 0)-96N_{10}(2^{\alpha+2}m,\ 4)+256N_{10}(2^{\alpha+2}m,\ 8)=4(-1)^{\frac{m-1}{2}}\varrho_4(m). \ (Q)$$

Между тремя неизвѣстными

$$N_{10}(2^{\alpha}m);\ N_{10}(2^{\alpha+2}m,\ 4);\ N_{10}(2^{\alpha+2}m,\ 8)$$

мы имѣемъ два уравненія: (P) и (Q). Третье уравненіе мы получимъ совершенно такимъ же образомъ, какъ мы получили уравненіе (c) въ § 12. Достаточно будетъ, исходя изъ общаго тождества

$$\sum_{2^{\alpha+2}m=s^2+t^2+d\delta;\ \delta\ \text{неч.}}(-1)^{s+t}F(d+s+\lambda t)=\sum_{2^{\alpha+2}m=s^2+t^2;\ s>0}(-1)^{s+t-1}sF(s+\lambda t)$$

вывести тождество

$$\sum_{2^{\alpha+2}m=s^2+t^2+d\delta;\ \delta\ \text{неч.}}(-1)^{s+t}d^3=-\sum_{2^{\alpha+2}m=s^2+t^2;\ s>0}(s^4-3s^2t^2)$$

а затѣмъ, разсуждая буквально такъ же, какъ въ упомянутомъ §, получить равенство

$$N_{10}(2^{\alpha+2}m,\ 4)-16N_{10}(2^{\alpha+2}m,\ 8)=\frac{1}{2}\sum_{2^{\alpha}m=s^2+t^2}(s^4-3s^2t^2) \qquad \text{(R)}$$

гдѣ сумма распространяется на *всѣ* рѣшенія уравненія:

$$2^{\alpha}m=s^2+t^2.$$

Изъ уравненій (P), (*Q*), (R) находимъ

$$\left.\begin{aligned}
N_{10}(2^{\alpha+2}m,\ 8)&=\frac{1}{20}\,2^{4\alpha}\varrho_4(m)-\frac{1}{40}\sum(s^4-3s^2t^2)\\
N_{10}(2^{\alpha+2}m,\ 4)&=\frac{4}{5}\,2^{4\alpha}\varrho_4(m)+\frac{1}{10}\sum(s^4-3s^2t^2)\\
N_{10}(2^{\alpha}m)&=\frac{4}{5}\left(2^{4\alpha+4}+(-1)^{\frac{m-1}{2}}\right)\varrho_4(m)+\frac{16}{5}\sum(s^4-3s^2t^2)
\end{aligned}\right\}\ 2^{\gamma}m=\gamma^2+t^2;\ \alpha\geqq 0.$$

Такимъ образомъ знаменитый результатъ Ліувилля доказанъ изъ соображеній ариѳметическаго характера. Для полноты изслѣдованія остается еще рѣшить вопросъ о числѣ представленій чиселъ суммою 10-ти квадратовъ нечетныхъ положительныхъ чиселъ. Очевидно, что только числа вида $2m$, гдѣ $m\equiv 1$ (Mod 4) могутъ допускать такія представленія. Обозначая пока черезъ m произвольное нечетное число, въ тождествѣ

$$\sum_{2m=d'\delta'+d''\delta'';\ d',\ \delta',\ d'',\ \delta''\ \text{неч.}>0}[f(d'-d'')-f(d'+d'']=\sum_{m=d\delta}d(f(0)-f(2d))$$

положимъ

$$f(x)=(-1)^{\frac{x}{2}}x^4;$$

по упрощеніи получимъ:

$$\sum(-1)^{\frac{d'-1}{2}} d'^4(-1)^{\frac{\delta''-1}{2}} + 3\sum_{2m=d'\delta'+d''\delta''}(-1)^{\frac{\delta'-1}{2}} d'^2.(-1)^{\frac{\delta''-1}{2}} d''^2 = 4\zeta_5(m),$$

который, принявъ во вниманіе, что

$$N_2(2m,\ 2) = \varrho(m);\ \ N_6(2m,\ 2) = \varrho_2(m)$$
$$\zeta_5(m) = N_{12}(4m,\ 4) + 16N_{12}(4m,\ 8),$$

можемъ представить иначе такимъ образомъ

$$\sum_{4m=2m'+2m'';\ m' \text{ и } m'' \text{ неч.}>0} \varrho_4(m')\varrho(m'') = \mathrm{N}_{12}(4m,\ 4) + 64N_{12}(4m,\ 8).$$

Но легко убѣдиться въ томъ, что положивъ

$$\psi(m) = N_{10}(2m,\ 2) + 64N_{10}(2m,\ 6)$$

будемъ имѣть

$$\sum_{4m=2m'+2m'';\ m' \text{ и } m'' \text{ неч.}>0} \psi(m')\varrho(m'') = N_{12}(4m,\ 4) + 64N_{12}(4m,\ 8),$$

такъ что

$$\sum \varrho_4(m')\varrho(m'') = \sum_{4m=2m'+2m''} \psi(m')\varrho(m'').$$

Отсюда вслѣдствіе равенства

$$\psi(1) = \varrho_4(1)$$

найдемъ вообще

$$N_{10}(2m,\ 2) + 64N_{10}(2m,\ 6) = \varrho_4(m);\ m \text{ нечетное.} \qquad \text{(S)}$$

Здѣсь m обозначаетъ любое нечетное число. Будемъ теперь считать $m \equiv 1$ (Mod 4). Тогда представленія $2m$ суммами 10-ти квадратовъ будутъ заключать 2, 6 или 10 нечетныхъ квадратовъ. Отсюда нетрудно вывести равенство

$$N_{10}(2m) = 180N_{10}(2m,\ 2) + 210.2^6N_{10}(2m,\ 6) + 2^{10}N_{10}(2m,\ 10),$$

которое можно написать такъ

$$N_{10}(2m) = 180\,N_{10}(2m,\ 2) + 106.2^{10}N_{10}(2m,\ 10) \qquad \text{(T)}$$

обративъ вниманіе на легко доказываемое равенство

$$N_{10}(2m,\ 6) = 8N_{10}(2m,\ 10). \qquad \text{(U)}$$

Съ помощью равенствъ (S), (T), (U) можно выразить $N_{10}(2m,\ 10)$ черезъ $N_{10}(2m)$; получается окончательно слѣдующій результатъ

$$2^7N_{10}(2m,\ 10) = \frac{1}{5}\,\varrho_4(m) + \frac{1}{10}\sum_{2m=s^2+t^2;\ s \text{ и } t>0}(s^4 - 3s^2t^2)$$

гдѣ сумма распространяется на всѣ рѣшенія уравненія $2m = s^2 + t^2$ *въ положительныхъ числахъ.*

§ 14. Сравнивая между собою два метода, изложенныхъ въ этой работѣ для полученія числа представленій чиселъ суммами 4, 6, 8 квадратовъ, мы, безъ сомнѣнія, должны будемъ отдать предпочтеніе второму методу. Въ самомъ дѣлѣ, удачное примѣненіе перваго метода связано со случайнымъ счастливымъ выборомъ надлежащихъ тождествъ и входящихъ въ нихъ функцій; между тѣмъ какъ второй методъ, исходя изъ небольшаго числа основныхъ тождествъ, рѣшаетъ всѣ вопросы совершенно однообразно. Второй методъ, который по справедливости слѣдуетъ назвать Ліувиллевскимъ, должно также предпочесть примѣненію эллиптическихъ функцій. Примѣненіе эллиптическихъ функцій къ интересующимъ насъ вопросамъ основано на разсмотрѣніи различныхъ степеней ряда

$$\Theta = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} q^{n^2}$$

и на двоякомъ выраженіи получающихся коэффиціентовъ при различныхъ степеняхъ количества q. Но примѣняющіеся для этого пріемы, по нашему мнѣнію, носятъ случайный характеръ. Этимъ, вѣроятно, объясняется то обстоятельство, что послѣ Якоби, давшаго выраженія для

$$\Theta^2,\ \Theta^4,\ \Theta^6,\ \Theta^8$$

только въ 1907 году Петръ въ упомянутой выше работѣ вывелъ съ помощью различныхъ вычислительныхъ ухищреній выраженіе для Θ^{10}. Большимъ преимуществомъ второго метода является также и то, что онъ вполнѣ выясняетъ происхожденіе болѣе сложныхъ ариѳметическихъ функцій, входящихъ въ выраженія для чиселъ представленій суммами 10 и 12 квадратовъ. Замѣчательно, что общая теорія квадратичныхъ формъ со многими перемѣнными, располагающая вообще гораздо болѣе могущественными средствами для рѣшенія вопросовъ, подобныхъ разобраннымъ, не приводитъ къ упомянутымъ ариѳметическимъ функціямъ и не даетъ возможности рѣшить вопросъ о представленіи чиселъ суммами 10 и 12 квадратовъ. Повидимому эта теорія нуждается въ нѣкоторыхъ дополненіяхъ. Въ чемъ должны заключаться таковыя—вопросъ весьма интересный и трудный.

20 Іюля 1912.

О нѣкоторыхъ полиномахъ, наименѣе уклоняющихся отъ нуля въ данномъ промежуткѣ.

А. Пшеборскаго.

---

1. Будемъ разсматривать полиномы

$$h(x)=p_0x^n+p_1x^{n-1}+\ldots+p_n, \tag{1}$$

степени не выше n, коэффиціенты которыхъ связаны соотношеніями

$$\begin{aligned}\omega(h)&=\alpha_0p_0+\alpha_1p_1+\ldots+\alpha_np_n=\alpha\\ \omega_1(h)&=\beta_0p_0+\beta_1p_1+\ldots+\beta_np_n=\beta,\end{aligned} \tag{2}$$

гдѣ числа

$$\alpha_0,\ \alpha_1,\ldots\alpha_n,\ \alpha,\ \beta_0,\ \beta_1\ldots\beta_n,\ \beta$$

вещественны точно такъ же, какъ и коэффиціенты

$$p_0,\ p_1,\ \ldots\ p_n.$$

Будемъ при этомъ предполагать, что по крайней мѣрѣ два опредѣлителя

$$\begin{vmatrix}\alpha_i & \alpha_k\\ \beta_i & \beta_k\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix}\alpha & \alpha_k\\ \beta & \beta_k\end{vmatrix}$$

отличны отъ нуля.

Подобные полиномы для краткости назовемъ *полиномами (Z)*.

Частнымъ случаемъ подобныхъ полиномовъ являются полиномы вида

$$x^n-\sigma x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\ldots+p_n \tag{3}$$

гдѣ σ данное число.

Вопросъ о наименьшемъ уклоненіи отъ нуля въ данномъ промежуткѣ этихъ послѣднихъ полиномовъ былъ разсмотрѣнъ впервые П. Л. Чебышевымъ для случая

$$\sigma=0$$

въ мемуарѣ «Théorie des mécanismes connus sous le nom de parallélogrammes» [1]).

Изученію въ томъ же направленіи полиномовъ вида (3) при какомъ-угодно данномъ значеніи σ Е. И. Золотаревъ посвятилъ свой замѣчательный мемуаръ «Приложеніе эллиптическихъ функцій къ вопросамъ о функціяхъ, наименѣе и наиболѣе отклоняющихся отъ нуля» [2]).

Въ нашемъ изслѣдованіи полиномовъ (Z) мы попытаемся обобщить методъ, данный для рѣшенія аналогичныхъ вопросовъ, относящихся къ полиномамъ (1), коэффиціенты которыхъ связаны только *однимъ* изъ соотношеній (2), покойнымъ В. А. Марковымъ въ его прекрасномъ, но, къ сожалѣнію, мало извѣстномъ сочиненіи «О функціяхъ наименѣе уклоняющихся отъ нуля въ данномъ промежуткѣ» СПБ. 1892 г.

Настоящая статья посвящена обобщенію результатовъ 1-ой главы указаннаго сочиненія В. А. Маркова.

2. Наибольшимъ уклоненіемъ отъ нуля въ данномъ замкнутомъ промежуткѣ (a, b) *даннаго* полинома $h(x)$ назовемъ положительное число L_h удовлетворяющее условію, что для всѣхъ точекъ этого промежутка

$$h^2(x) \leqq L_h^2,$$

при чемъ хоть для одного изъ разсматриваемыхъ значеній x имѣетъ мѣсто знакъ равенства.

Предположимъ, что $h(x)$ принадлежитъ къ полиномамъ (Z), и обозначимъ черезъ L нижнюю границу всѣхъ чиселъ L_h для всѣхъ подобныхъ полиномовъ, коэффиціенты которыхъ связаны соотношеніями (2).

Это число L назовемъ *наименьшимъ отклоненіемъ полиномовъ (Z) отъ нуля въ данномъ промежуткѣ.*

Прежде всего покажемъ, что существуетъ по крайней мѣрѣ одинъ полиномъ $h(x)$, для котораго

$$L_h = L.$$

Всѣ полиномы, для которыхъ имѣетъ мѣсто послѣднее равенство, назовемъ *полиномами (Z) наименѣе уклоняющимися отъ нуля въ данномъ промежуткѣ* или короче, *наименѣе уклоняющимися полиномами.*

3. Какъ нетрудно видѣть, числа L_h представляютъ непрерывныя функціи отъ

$$p_0, \; p_1, \; \dots \; p_n,$$

---

[1]) Сочиненія т. I стр. 111—143.

[2]) Приложеніе къ XXX тому Записокъ Академіи Наукъ за 1877 годъ.

а потому, если намъ удастся показать, что существуютъ такія положительныя числа

$$k_0\,,\ k_1\,,\ldots\ k_n\,,$$

что нижняя граница чиселъ L_h, соотвѣтствующихъ полиномамъ $h(x)$, у которыхъ

$$|p_0|<k_0\,,\ |p_1|<k_1\,,\ldots\ |p_h|<k_h\,,$$

тоже равна L, то тѣмъ самымъ мы докажемъ существованіе полинома $h(x)$, для котораго

$$L_h=L\,.$$

Разсмотримъ полиномъ $h_1(x)$, для котораго

$$p_0=p_1=\ldots=p_{i-1}=p_{i+1}=\ldots=p_{k-1}=p_{k+1}=\ldots=p_n=0\,;$$

для него

$$p_i=\frac{\alpha\beta_k-\beta\alpha_k}{\alpha_i\beta_k-\alpha_k\beta_i}\,,\quad p_k=\frac{\alpha_i\beta-\beta_i\alpha}{\alpha_i\beta_k-\alpha_k\beta_i}\,,$$

и слѣдовательно при сдѣланныхъ нами въ самомъ началѣ предположеніяхъ, существуютъ положительныя числа δ, γ, ε такія, что

$$\delta<|p_i|<\gamma,\ \ |p_k|<\varepsilon.$$

Обозначая черезъ η положительное число, удовлетворяющее условіямъ

$$\eta>|a|,\ \ \eta>|b|,$$

найдемъ, что для промежутка $(a,\ b)$

$$|h_1(x)|<\gamma\eta^{n-i}+\varepsilon\eta^{n-k}=P,$$

гдѣ P конечное число. По свойству нижней границы имѣемъ:

$$L\leqq L_{h_1}<P,$$

а потому при отысканіи нижней границы L_h мы можемъ ограничиться такими полиномами, для которыхъ

$$|h(x)|<P$$

во всемъ промежуткѣ $(a,\ b)$.

Какъ показалъ Borel[1]), коэффиціенты подобныхъ полиномовъ ограничены и сверху и снизу, т. е. подчиняются условіямъ

$$|p_0|<k_0\,,\ \ |p_1|<k_1\,,\ldots|p_n|<k_n\,,$$

гдѣ k_0, k_1, … k_n положительныя числа.

---

[1]) Leçons sur les fonctions des variables réelles p.p. 83—84.

Отсюда и слѣдуетъ существованіе полиномовъ (Z), наименѣе отклоняющихся отъ нуля въ промежуткѣ $(a,\ b)$.

4. Изъ элементарныхъ соображеній вытекаетъ, что всѣ значенія, для которыхъ въ промежуткѣ $(a,\ b)$

$$L_h^2 - h^2(x) = 0\,, \tag{4}$$

представляютъ рѣшенія уравненія

$$(x-a)(x-b)\,h'(x) = 0\,. \tag{5}$$

Поэтому въ промежуткѣ $(a,\ b)$ уравненія (4) и (5) имѣютъ maximum $n+1$ различныхъ общихъ рѣшеній. Пусть эти различныя рѣшенія, лежащія въ разсматриваемомъ замкнутомъ промежуткѣ и расположенныя въ возрастающемъ порядкѣ, будутъ

$$x_1\,,\ x_2\,,\ \ldots\ x_p\,,$$

гдѣ

$$p \leqq n+1\,.$$

Если x_k отлично отъ a и b, то, какъ нетрудно видѣть, оно будетъ кратнымъ корнемъ уравненія (4).

Слѣдуя В. А. Маркову, легко доказать слѣдующую теорему:

Теорема I. *Необходимымъ и достаточнымъ условіемъ для того, чтобы полиномъ $h(x)$ наименѣе отклонялся отъ нуля въ данномъ промежуткѣ, является несуществованіе полинома $g(x)$ степени не выше n, для котораго*

$$\omega(g) = \omega_1(g) = 0$$

и всѣ числа

$$\tau_i = h(x_i)\,g(x_i)$$
$$i=1,\ 2,\ldots\ p$$

одного и того-же знака.

Покажемъ сперва, что несуществованіе полиномовъ $g(x)$ представляетъ необходимое условіе для того, чтобы $h(x)$ наименѣе отклонялся отъ нуля въ промежуткѣ $(a,\ b)$.

Для этого положимъ, что полиномъ $g(x)$, для котораго всѣ τ_i положительны и

$$\omega(g) = \omega_1(g) = 0\,,$$

существуетъ.

Замѣтимъ, что условіе $\tau_i > 0$ можетъ быть замѣнено условіемъ $\tau_i < 0$ $(i = 1,\ 2,\ldots p)$, что не измѣняетъ существенно доказательства.

Разсмотримъ полиномъ

$$m(x) = h(x) + \varrho g(x)\,.$$

Каково-бы ни было число ϱ, полиномъ $m(x)$ принадлежитъ къ числу полиномовъ (Z), ибо

$$\omega(m) = \omega(h) + \varrho\omega(g) = \omega(h) = \alpha,$$
$$\omega_1(m) = \omega_1(h) + \varrho\omega_1(g) = \omega_1(h) = \beta.$$

Покажемъ, что можно такъ подобрать *отрицательное* число ϱ, чтобы имѣло мѣсто неравенство

$$L_m < L_h,$$

изъ котораго слѣдуетъ, что $h(x)$ не есть наименѣе уклоняющійся отъ нуля въ промежуткѣ (a, b) полиномъ (Z). Въ самомъ дѣлѣ, пусть въ замкнутомъ промежуткѣ (a, b) имѣется p различныхъ корней уравненія

$$L_h^2 - h^2(x) = 0,$$

именно

$$x_1, x_2, \dots x_p.$$

Мы можемъ всегда выбрать такое число ε, чтобы для всѣхъ значеній x, удовлетворяющихъ условіямъ

$$\underset{i=1,\,2,\dots\,p}{x_i - \varepsilon < x < x_i + \varepsilon}, \tag{6}$$

имѣло мѣсто неравенство

$$h(x)g(x) > 0.$$

Назовемъ всю совокупность интервалловъ (6) черезъ J. Внѣ интервалловъ J, но въ замкнутомъ промежуткѣ (a, b) имѣемъ,

$$|h(x)| < L_1,$$

гдѣ $L_1 < L$. Пусть кромѣ того G положительное число такое, что для замкнутаго промежутка (a, b)

$$|g(x)| < G.$$

Наконецъ выберемъ отрицательное число ϱ такъ, чтобы

$$-\varrho < \frac{L - L_1}{G}.$$

При этихъ условіяхъ, для всѣхъ точекъ замкнутаго промежутка (a, b), лежащаго внѣ J, имѣемъ

$$|m(x)| = |h(x) + \varrho g(x)| \leqq |h(x)| - \varrho\,|g(x)| < L,$$

а для точекъ промежутковъ (J), въ которыхъ $g(x)h(x) > 0$,

$$|m(x)| = |h(x) + \varrho g(x)| < L,$$

ибо $h(x)$ и $\varrho g(x)$ въ (J) различныхъ знаковъ и при томъ

$$|h(x)| \leqq L, \quad -\varrho\, |g(x)| < L - L_1 < L.$$

Такимъ образомъ *необходимость* условія В. А. Маркова доказана.

Покажемъ теперь, что несуществованіе полиномовъ типа $g(x)$ *достаточно* для того, чтобы $h(x)$ наименѣе уклонялся отъ нуля.

Дѣйствительно пусть $H(x)$ какой либо другой полиномъ (Z), тогда

$$\omega\,(H) = \alpha$$

$$\omega_1(H) = \beta\,,$$

а потому полиномъ

$$g(x) = h(x) - H(x)$$

будетъ удовлетворять условіямъ

$$\omega\,(g) = \omega_1(g) = 0.$$

По только что сдѣланному предположенію, хотя бы для одного x_i имѣемъ,

$$h(x_i)\, g(x_i) \leqq 0\,,$$

а потому

$$|H(x_i)| = |h(x_i) - g(x_i)| \geqq L_h\,,$$

ибо $h(x_i)$ и $-g(x_i)$ одного и того же знака и при томъ

$$|h(x_i)| = L_h.$$

5. Такимъ образомъ нами найденъ критерій, дающій возможность судить о томъ, будетъ-ли данный полиномъ $h(x)$ наименѣе уклоняющимся.

Но, очевидно, на практикѣ этотъ критерій совершенно не годится, такъ какъ въ той формулировкѣ, въ которой онъ данъ, не указаны условія, при которыхъ полиномъ $g(x)$ существуетъ или не существуетъ.

Для вывода послѣднихъ условій мы опять прибѣгнемъ къ тому пріему, который былъ указанъ В. А. Марковымъ въ упомянутомъ выше мемуарѣ.

Прежде однако, чѣмъ приступить къ выводу этого критерія, займемся рѣшеніемъ одного алгебраическаго вопроса.

6. *Даны два линейныхъ однородныхъ уравненія*

$$\begin{aligned} a_1\tau_1 + a_2\tau_2 + \ldots + a_n\tau_n &= 0 \\ b_1\tau_1 + b_2\tau_2 + \ldots + b_n\tau_n &= 0 \end{aligned} \qquad (7)$$

съ $n > 2$ *перемѣнными и съ дѣйствительными коэффиціентами. Найти необходимыя и достаточныя условія, при которыхъ разсматриваемая система не имѣетъ рѣшеній одного и того же знака.*

Такъ какъ уравненія (7) различны, то рангъ матрицы

$$\left| \begin{matrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{matrix} \right|$$

равенъ 2.

Обозначимъ черезъ A_{ik} опредѣлитель $a_i b_k - a_k b_i$.

Нетрудно видѣть, что *достаточнымъ* условіемъ будетъ одно изъ условій: 1) всѣ a_i одного и того-же знака, 2) всѣ b_k одного знака, 3) для нѣкотораго опредѣленнаго i всѣ A_{ik} $(k=1, 2, \dots i-1, i+1, \dots n)$ отличные отъ нуля, одного и того же знака.

Покажемъ, что выполненіе одного изъ этихъ трехъ условій является и условіемъ *необходимымъ*.

Пусть не всѣ a_i и не всѣ b_k одного и того-же знака.

Не нарушая общности, положимъ, что

$$A_{12} = a_1 b_2 - a_2 b_1 > 0 .$$

Систему уравненій (7) можемъ замѣнить эквивалентной съ ней системой

$$\begin{aligned} A_{12}\tau_1 + A_{32}\tau_3 + \dots + A_{k2}\tau_k + A_{k+1,2}\, \tau_{k+1} + \dots + A_{n2}\tau_n = 0 \\ A_{12}\tau_2 + A_{13}\tau_3 + \dots + A_{1k}\tau_k + A_{1k+1}\tau_{k+1} + \dots + A_{1n}\tau_n = 0 \end{aligned} \tag{8}$$

Если-бы всѣ числа A_{k2} или A_{1k} были одного и того же знака, то уравненія (8), а слѣдовательно и уравненія (7), не допускали бы рѣшеній одного и того же знака относительно τ_k. Для опредѣленности будемъ разсматривать положительныя рѣшенія.

Итакъ положимъ, что

$$A_{12} > 0,\ A_{32} \geqq 0, \dots A_{k2} \geqq 0;\ A_{k+12} < 0, \dots A_{n2} < 0$$

Нетрудно видѣть, что всякому отрицательному коэффипіенту A_{i2} долженъ соотвѣтствовать положительный коэффиціентъ A_{1i}. Дѣйствительно пусть имѣемъ одновременно

$$A_{i2} < 0 \quad A_{1i} < 0 ,$$

тогда давая въ уравненіяхъ (8) всѣмъ перемѣннымъ $\tau_3, \tau_4, \dots \tau_{i-1}, \tau_{i+1}, \dots \tau_n$

какія угодно положительныя значенія, мы сможемъ дать τ_i настолько большое положительное значеніе, чтобы суммы

$$A_{32}\tau_3+A_{42}\tau_4+\ldots+A_{n2}\tau_n$$

$$A_{13}\tau_3+A_{14}\tau_4+\ldots+A_{1n}\tau_n$$

стали отрицательны, а тогда изъ уравненій (8) найдемъ для τ_1 и τ_2 положительныя значенія.

Точно также отрицательному значенію A_{i2} не можетъ соотвѣтствовать значеніе $A_{1i}=0$. Дѣйствительно, такъ какъ мы предположили, что не всѣ A_{1h} положительны, то найдемъ хоть одно значеніе h для котораго $A_{1h}<0$, а слѣдовательно выбравъ положительныя значенія для $\tau_3, \tau_4, \ldots \tau_{i-1}, \tau_{i+1}, \ldots \tau_h, \ldots \tau_n,$ при чемъ для τ_h достаточно большое, сможемъ найти положительное значеніе для τ_2, далѣе выбравъ τ_i достаточно большимъ и положительнымъ, найдемъ положительное значеніе для τ_1.

Итакъ, каждому отрицательному коэффиціенту въ одномъ изъ уравненій (8) необходимо соотвѣтствуетъ положительный коэффиціентъ въ другомъ уравненіи, если только эти уравненія не допускаютъ положительныхъ рѣшеній.

Отсюда заключаемъ, что второе изъ разсматриваемыхъ уравненій, имѣетъ maximum k—1 отрицательныхъ коэффиціентовъ, а слѣдовательно уравненіе, которое получимъ изъ него, измѣняя знаки у всѣхъ членовъ на обратные, т. е. уравненіе

$$A_{31}\tau_{13}+A_{21}\tau_2+\ldots+A_{k1}\tau_k+A_{k+11}\tau_{k+1}+\ldots+A_{n1}\tau_n=0\,,$$

имѣетъ maximum $k-1$ положительныхъ коэффиціентовъ. Полагая, что $A_{31}>0$, подобнымъ же образомъ покажемъ, что уравненіе

$$A_{13}\tau_3+A_{23}\tau_2+A_{43}\tau_4+\ldots+A_{n3}\tau_n=0$$

будетъ имѣть maximum k—2 положительныхъ коэффиціентовъ. Разсуждая далѣе подобнымъ же образомъ, мы необходимо придемъ къ уравненію вида

$$A_{h1}\tau_1+A_{h2}\tau_2+\ldots+A_{hh-1}\tau_{h-1}+A_{hh+1}\tau_{h\;1}+\ldots+A_{hn}\tau_n=0\,,$$

у котораго всѣ коэффиціенты, отличные отъ нуля, имѣютъ одинъ и тотъ же знакъ.

7. Послѣ этихъ предварительныхъ изслѣдованій перейдемъ къ доказательству ряда теоремъ, являющихся обобщеніемъ соотвѣтствующихъ теоремъ В. А. Маркова.

Обозначимъ черезъ

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_p$$

всѣ различныя рѣшенія уравненія

$$L_h{}^2 - h^2(x) = 0,$$

лежащія въ промежуткѣ (a, b).

Замѣтимъ, что и здѣсь, и вездѣ въ дальнѣйшемъ будемъ предполагать промежутокъ (a, b) замкнутымъ.

Какъ мы уже знаемъ, $p \leqq n + 1$.

Обозначимъ черезъ $F(x)$ многочленъ

$$F(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_p),$$

а черезъ $F_i(x)$ многочленъ

$$F_i(x) = \frac{F(x)}{x - x_i}.$$

Всякій полиномъ степени, не превышающей n, можетъ быть представленъ въ видѣ

$$g(x) = AF(x)R(x) + \sum_{i=1}^{p} \frac{g(x_i)}{F'(x_i)} F_i(x),$$

гдѣ въ случаѣ, когда $p = n + 1$, постоянная A равна нулю, а въ случаѣ, когда $p \leqq n$, многочленъ $R(x)$ представляетъ многочленъ степени не выше $n - p$.

Посмотримъ, при какихъ условіяхъ нельзя будетъ подобрать постоянныя

$$A\,,\ g(x_1)\,,\ g(x_2)\,, \ldots\ g(x_p)\,,$$

и полиномъ $R(x)$ такъ, чтобы имѣли мѣсто соотношенія

$$\omega(g) = \omega_1(g) = 0$$

и при томъ, чтобы всѣ числа

$$g(x_1)\,h(x_1)\,,\quad g(x_2)\,h(x_2)\,, \ldots\ g(x_p)\,h(x_p)$$

были одного знака.

На основаніи предыдущей теоремы, эти условія будутъ необходимыми и достаточными для того, чтобы полиномъ $h(x)$ былъ наименѣе уклоняющимся полиномомъ (Z).

8. Разсмотримъ сперва случай, когда $p=n+1$; тогда $A=0$ и условія

$$\omega(g)=\omega_1(g)=0$$

напишутся такъ

$$\begin{aligned}\omega(g)&=\sum_{i=1}^{n+1}\frac{g(x_i)}{F'(x_i)}\omega(F_i)=0\\ \omega_1(g)&=\sum_{i=1}^{n+1}\frac{g(x_i)}{F'(x_i)}\omega_1(F_i)=0.\end{aligned}\tag{9}$$

Замѣтимъ, что знакъ $F'(x_i)$ тождественъ со знакомъ $(-1)^{p+i}$, а потому можетъ положить

$$F'(x_i)=\frac{(-1)^{p+i}}{q_i},$$

гдѣ $q_i>0$.

Вводя теперь обозначенія

$$q_i\,g(x_i)=\tau_i\,h(x_i),$$

видимъ, что τ_i имѣетъ знакъ $g(x_i)\,h(x_i)$.

При нашихъ обозначеніяхъ уравненія (9) напишутся въ видѣ

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^i\,\omega(F_i)\,h(x_i)\,\tau_i=0\\ &\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^i\,\omega_1(F_i)\,h(x_i)\,\tau_i=0.\end{aligned}\tag{10}$$

Въ случаѣ, когда полиномъ $h(x)$ наименѣе уклоняющійся отъ нуля, числа $g(x_i)\,h(x_i)$, а слѣдовательно и τ_i не могутъ быть всѣ положительны, а потому, на основаніи предыдущаго, приходимъ къ слѣдующей теоремѣ:

Теорема II. *Для того, чтобы полиномъ $h(x)$ степени n былъ бы полиномомъ (Z) наименѣе уклоняющимся въ интервалѣ (a, b) при условіи, что $p=n+1$, необходимо и достаточно выполненіе одного изъ трехъ условій: 1) всѣ числа*

$$(-1)\,\omega(F_1)\,h(x_1),\ (-1)^2\,\omega(F_2)\,h(x_2),\ldots(-1)^{n+1}\omega(F_{n+1})\,h(x_{n+1})$$

имѣютъ одинъ и тотъ же знакъ; 2) всѣ числа

$$(-1)\,\omega_1(F)\,h(x_1),\ (-1)^2\,\omega_1(F_2)\,h(x_2),\ldots(-1)^{n+1}\omega_1(F_{n+1})\,h(x_{n+1})$$

имѣютъ одинъ и тотъ же знакъ и 3) существуетъ цѣлое положительное число $0<j\leqq n+1$, *для котораго всѣ числа*

$$(-1)^i\,[\omega(F_i)\,\omega_1(F_j)-\omega(F_j)\,\omega_1(F_i)]\,h(x_i)$$
$$i=1,\,2,\ldots\,j-1,\,j+1,\ldots\,n+1$$

имѣютъ одинъ и тотъ же знакъ.

9. Переходимъ къ случаю, когда $p\leqq n$. Въ этомъ случаѣ условія

$$\omega(g)=\omega_1(g)=0$$

примутъ видъ

$$\begin{aligned} A\omega(FR)+(-1)^p\sum_{i=1}^{p}(-1)^i\omega(F_i)\,h(x_i)\,\tau_i=0\\ A\omega_1(FR)+(-1)^p\sum_{i=1}^{p}(-1)^i\omega_1(F_i)h(x_i)\,\tau_i=0\,,\end{aligned}\tag{11}$$

гдѣ удержаны прежнія обозначенія и гдѣ $R(x)$ полиномъ степени не выше $n-p$.

Замѣчая, что символы ω и ω_1 обладаютъ свойствомъ:

$$\begin{aligned}\omega\,[\varphi.(\psi+\chi)]=\omega(\varphi\psi)+\omega(\varphi\chi)\\ \omega_1[\varphi.(\psi+\chi)]=\omega_1(\varphi\psi)+\omega_1(\varphi\chi)\,,\end{aligned}$$

гдѣ φ, ψ, χ любые полиномы, мы можемъ положить

$$\begin{aligned}A\omega(FR)=\mu_0\omega(Fx^{n-p})+\mu_1\omega(Fx^{n-p-1})+\ldots+\mu_{n-p}\omega(F)\,,\\ A\omega_1(FR)=\mu_0\omega_1(Fx^{n-p})+\mu_1\omega_1(Fx^{n-p-1})+\ldots+\mu_{n-p}\omega_1(F),\end{aligned}$$

и весь вопросъ сводится къ слѣдующему: при какихъ условіяхъ нельзя подобрать положительныя числа

$$\tau_1\,,\ \tau_2\,,\ \ldots\ \tau_p\,,$$

и какія угодно конечныя числа

$$\mu_0\,,\ \mu_1\,,\ \ldots\ \mu_{n-p}\,,$$

такъ, чтобы удовлетворялись уравненія:

$$\begin{aligned}\mu_0\omega(Fx^{n-p})+\mu_1\omega(Fx^{n-p-1})+\ldots+\mu_{n-p}\omega(F)+\\ +(-1)^p\sum_{i=1}^{p}(-1)^i\omega(F_i)\cdot h(x_i)\,\tau_i=0\\ \mu_0\omega_1(Fx^{n-p})+\mu_1\omega(Fx^{n-p-1})+\ldots+\mu_{n-p}\omega_1(F)+\\ +(-1)^p\sum_{i=1}^{p}(-1)^i\omega_1(F_i)h(x_i)\tau_i=0\,.\end{aligned}\tag{12}$$

Прежде всего замѣтимъ, что, если рангъ матрицы

$$\left|\begin{matrix} \omega(Fx^{n-p}), & \omega(Fx^{n-p-1}), \ldots \omega(F) \\ \omega_1(Fx^{n-p}), & \omega_1(Fx^{n-p-1}), \ldots \omega_1(F) \end{matrix}\right| \qquad (13)$$

будетъ равенъ двумъ, мы всегда сможемъ удовлетворить уравненіямъ (12), давши всѣмъ τ_i положительныя значенія; такимъ образомъ приходимъ къ слѣдующей теоремѣ:

Теорема III. *Для того чтобы полиномъ $h(x)$ былъ наименѣе уклоняющимся полиномомъ (Z) въ промежуткѣ (a, b) при условіи $p \leqq n$, необходимо, чтобы рангъ матрицы (13) былъ равенъ нулю или единицѣ.*

Разсмотримъ оба эти предположенія отдѣльно.

10. Пусть рангъ матрицы (13) равенъ нулю, т. е. пусть всѣ числа $\omega(Fx^{n-i})$ и $\omega_1(Fx^{n-i})$ равны нулю. Тогда уравненія (12) напишутся такъ:

$$\sum_{i=1}^{p} (-1)^i \omega(F_i) h(x_i) \tau_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{p} (-1)^i \omega_1(F_i) h(x_i) \tau_i = 0 ,$$

и мы приходимъ къ слѣдующей теоремѣ:

Теорема IV. *Для того, чтобы полиномъ $h(x)$ былъ наименѣе уклоняющимся полиномомъ (Z) въ промежуткѣ (a, b) при условіи $p \leqq n$ и при предположеніи, что рангъ матрицы (13) равенъ нулю, необходимо и достаточно выполненіе одного изъ трехъ условій: 1) всѣ числа*

$$(-1)\,\omega(F_1)\,h(x_1),\ (-1)^2\omega(F_2)\,h(x_2), \ldots (-1)^p\omega(F_p)\,h(x_p)$$

имѣютъ одинъ и тотъ-же знакъ; 2) всѣ числа

$$(-1)\,\omega_1(F_1)\,h(x_1),\ (-1)^2\omega_1(F_2)\,h(x_2), \ldots (-1)^p\,\omega_1(F_p)\,h(x_p)$$

имѣютъ одинъ и тотъ-же знакъ и 3) существуетъ цѣлое положительное число $0 < j \leqq p$, для котораго всѣ числа

$$\underset{i=1,\,2,\ldots j-1,\, j+1,\ldots p}{(-1)^i[\omega(F_i)\,\omega_1(F_j) - \omega(F_j)\,\omega_1(F_i)]\,h(x_i)}$$

имѣютъ одинъ и тотъ-же знакъ.

11. Переходимъ къ разсмотрѣнію случая, когда рангъ матрицы (13) равенъ единицѣ.

Здѣсь мы можемъ сдѣлать два предположенія: во-первыхъ, можетъ случиться, что всѣ числа

$$\omega_1(Fx^{n-p})\,,\ \omega_1(Fx^{n-p-1}),\ldots\omega_1(F)$$

равны нулю, и тогда хоть одно изъ чиселъ $\omega(Fx^{n-i})$ отлично отъ нуля; во-вторыхъ, можетъ случиться, что для одного и того-же значенія k одновременно

$$\omega\,(Fx^{n-k})\neq 0\,,\quad \omega_1(Fx^{n-k})\neq 0\,.$$

Въ первомъ случаѣ уравненія (12) примутъ видъ:

$$\mu_0\omega\,(Fx^{n-p})+\ldots+\mu_{i-p}\omega\,(Fx^{n-i})+\ldots+\mu_{n-p}\omega\,(F)+$$
$$+(-1)^p\sum_{i=1}^{p}(-1)^i\,\omega\,(F_i)\,h\,(x_i)\,\tau_i=0$$
$$\sum_{i=1}^{p}(-1)^i\,\omega_1(F_i)\,h\,(xi)\,\tau_i=0\,,$$

откуда заключаемъ, что имѣетъ мѣсто теорема:

Теорема V. *Для того, чтобы полиномъ $h(x)$ былъ наименѣе уклоняющимся полиномомъ (Z) въ промежуткѣ $(a,\ b)$ при условіи $p\leqq n$ и при выполненіи условій*

$$\omega_1(Fx^{n-p})=\omega_1(Fx^{n-p-1})=\ldots=\omega_1(F)=0$$

и $\omega\,(Fx^{n-i})\neq 0$ хоть для одного значенія $0\leqq i\leqq p$, необходимо и достаточно, чтобы всѣ числа $(-1)^i\,h\,(x_i)\,\omega_1(F_i)$ были одного и того-же знака.

Наконецъ, при второмъ предположеніи, такъ какъ для любого значенія i

$$\frac{\omega\,(Fx^{n-i})}{\omega_1(Fx^{n-i})}=\frac{\omega\,(Fx^{n-k})}{\omega_1(Fx^{n-k})}\,,$$

то изъ уравненій (12) видимъ, что числа τ_i должны удовлетворять уравненію

$$\sum_{i=1}^{p}(-1)^i\,[\omega\,(F_i)\,\omega_1(Fx^{n-k})-\omega_1(F_i)\,\omega\,(Fx^{n-k})]\,h(x_i)\,\tau_i=0\,,$$

а потому справедлива слѣдующая теорема:

Теорема VI. *Для того, чтобы полиномъ $h(x)$ былъ наименѣе уклоняющимся полиномомъ (Z) въ промсжуткѣ $(a\,,\ b)$ при условіяхъ: 1) что $p\leqq n$ 2), что рангъ матрицы (13) равенъ единицѣ и 3) что* *для нѣкотораго* $0 \leqq k \leqq p$ *числа* $\omega(Fx^{n-k})$, $\omega_1(Fx^{n-k})$, *отличны отъ нуля, необходимо и достаточно, чтобы всѣ числа*

$$(-1)^i \left[\omega(F_i)\,\omega_1(Fx^{n-k}) - \omega_1(F_i)\,\omega(Fx^{n-k})\right] h(x_i)$$
$$i=1,\ 2, \ldots p$$

имѣли одинъ и тотъ-же знакъ.

12. Займемся теперь, разсмотрѣніемъ вопроса о числѣ наименѣе уклоняющихся полиномовъ (Z) данной степени n въ данномъ промежуткѣ (a, b). Пусть $y(x)$ одинъ изъ подобныхъ полиномовъ, L его наибольшее уклоненіе отъ нуля въ промежуткѣ (a, b) и

$$x_1,\ x_2, \ldots\ x_p \tag{14}$$

всѣ различные между собою корни уравненія

$$L^2 - y^2 = 0\,,$$

лежащіе въ этомъ промежуткѣ.

Пусть $\eta(x)$ другой такой же полиномъ (Z) въ промежуткѣ (a, b) той-же степени n.

Нетрудно видѣть, что уравненіе

$$v(x) = \eta(x) - y(x) = 0 \tag{15}$$

въ промежуткѣ (a, b) можетъ имѣть корни только совпадающіе съ числами ряда (14).

Дѣйствительно, если корни уравненія (15), лежащіе въ промежуткѣ (a, b), не совпадаютъ съ числами (14), то, построивши полиномъ

$$w(x) = y(x) + \varrho v(x)\,,$$

гдѣ ϱ любая правильная положительная дробь, получимъ для значеній равныхъ корнямъ уравненія (15), неравенство

$$|\,w(x)\,| = |\,y(x)\,| < L\,,$$

а для значеній x, въ которыхъ $v(x)$ не равно нулю, замѣчая, что

$$w(x) = (1-\varrho)\,y(x) + \varrho\eta(x)\,,$$

при выполненіи условія $|\,\eta(x)\,| > |\,y(x)\,|$, имѣемъ

$$|\,w(x)\,| \leqq (1-\varrho)\,|\,y(x)\,| + \varrho\,|\,\eta(x)\,| < |\,\eta(x)\,| \leqq L\,,$$

для значеній же x, для которыхъ $|\,y(x)\,| > |\,\eta(x)\,|$,

$$|\,w(x)\,| \leqq (1-\varrho)\,|\,y(x)\,| + \varrho\,|\,\eta(x)\,| < |\,y(x)\,| \leqq L.$$

Такимъ образомъ полиномъ $w(x)$ во всемъ промежуткѣ удовлетворяетъ условію

$$|w(x)| < L,$$

а слѣдовательно полиномы $y(x)$ и $\eta(x)$ не будутъ наименѣе уклоняющимися полиномами (Z) въ промежуткѣ (a, b).

Послѣ этого предварительнаго замѣчанія переходимъ къ интересующему насъ вопросу.

Итакъ уравненіе (15) въ промежуткѣ (a, b) можетъ имѣть корни только совпадающіе съ числами ряда (14). Если ξ одно изъ этихъ чиселъ, отличныхъ отъ a и b, то оно непремѣнно удовлетворяетъ условіямъ

$$y'(\xi) = \eta'(\xi) = 0,$$

а слѣдовательно и условію

$$v'(\xi) = 0,$$

т. е. представляетъ кратный корень уравненія (15). Обозначая поэтому черезъ μ' число кратныхъ корней уравненія (15) въ промежуткѣ (a, b), имѣемъ ,что

$$\mu' \leqq E\left(\frac{n}{2}\right).$$

Разсмотримъ случай, когда $n = 2q + 1$, т. е. нечетно; тогда

$$\mu' \leqq E\left(\frac{2q+1}{2}\right) = q,$$

а потому, если $\mu' = q$, то въ промежуткѣ (a, b) уравненіе (15) можетъ имѣть еще только одинъ простой корень, который необходимо долженъ совпадать либо съ a, либо съ b. Такимъ образомъ maximum различныхъ корней уравненія (15) въ промежуткѣ (a, b) при нечетномъ n равно

$$\mu = \frac{n+1}{2},$$

при чемъ въ числѣ этихъ корней, въ случаѣ достиженія maximum'а, непремѣнно должно заключаться одно изъ чиселъ a или b.

Положимъ теперь $n = 2q$, т. е. четнымъ; тогда, сохраняя прежнія обозначенія, найдемъ, что

$$\mu' \leqq q,$$

а потому, если $\mu' = q$, то простыхъ корней въ промежуткѣ (a, b) уравненіе (15) имѣть уже не будетъ.

Если же

$$\mu' = q - j,$$

то уравненіе (15) можетъ допускать въ этомъ промежуткѣ два простыхъ корня a и b, т. е. число различныхъ корней уравненія (15) въ разсматриваемомъ промежуткѣ будетъ

$$q-j+2,$$

при чемъ наибольшее возможное число этихъ корней получимъ при $j=1$, когда оно будетъ

$$\mu=q-1+2=\frac{n+2}{2}.$$

Если теперь опять составимъ полиномъ

$$w(x)=y(x)+\varrho v(x),$$

гдѣ $0<\varrho<1$, то увидимъ, что для всѣхъ значеній ряда (14), для которыхъ $v(x)$ обращается въ нуль,

$$|w(x)|=|y(x)|=L,$$

для всѣхъ же остальныхъ значеній, лежащихъ въ промежуткѣ (a, b), по предыдущему $|w(x)|<L$.

Отсюда заключаемъ, что наибольшее уклоненіе $w(x)$ отъ нуля въ промежуткѣ (a, b) равно L; а такъ какъ

$$\omega(v)=\omega_1(v)=0$$

и слѣдовательно

$$\omega(w)=\alpha, \quad \omega_1(w)=\beta,$$

то слѣдовательно $w(x)$ тоже наименѣе уклоняющійся полиномъ (Z) для промежутка (a, b).

Такимъ образомъ приходимъ къ слѣдующей теоремѣ, доказанной впервые В. А. Марковымъ для полиномовъ, коэффиціенты которыхъ связаны одной линейной зависимостью:

Теорема VII. *Если существуетъ болѣе одного полинома (Z) наименѣе уклоняющагося отъ нуля въ промежуткѣ (a, b), то между подобными полиномами найдется такой, численное значеніе котораго достигаетъ своей наибольшей величины не болѣе чѣмъ для μ значеній x, гдѣ*

$$\mu=\frac{n+1}{2} \quad \textit{при } n \textit{ нечетномъ}$$

$$\mu=\frac{n+2}{2} \quad \textit{при } n \textit{ четномъ},$$

и если число этихъ значеній x равно μ, то при n нечетномъ между ними заключается по крайней мѣрѣ одно изъ чиселъ a, b, а при n четномъ между ними заключаются оба эти числа.

Remarques sur l'inégalité de Wladimir Markoff.

Serge Bernstein.

1. Dans son Mémoire [1]) «Sur les fonctions qui s'écartent le moins de zéro» W. Markoff démontre l'inégalité suivante: *Si $P(x)$ est un polynome de degré n qui sur le segment (a, b) ne dépasse pas L, en valeur absolue, on a*

$$|P^{(k)}(x)| \leqq \frac{n^2(n^2-1)\ldots[n^2-(k-1)^2]}{1.3\ldots 2k-1}\left(\frac{2}{b-a}\right)^k . L = M, \qquad (1)$$

quel que soit x sur le segment (a, b).

De plus, on a effectivement,

$$|P^{(k)}(a)| = |P^{(k)}(b)| = M,$$

si [2])

$$P(x) = L \cos n \arccos \frac{2x-a-b}{b-a}.$$

---

[1]) Publié par l'Université St.-Petersbourg. 1892. Il serait utile de traduire ce travail important qu'il est difficile de se procurer même en russe. (Voir la note de la page 48 de mon mémoire de l'Académie Royale de Belgique). Pour $k=1$, l'inégalité (1) a été démontrée dans l'article de M. A. Markoff «Sur une question de Mendeleieff» présenté le 24 Octobre 1889 à l'Académie de St.-Pétersbourg (voir la page 11 de mon mémoire cité).

[2]) Pour vérifier ceci, il suffit d'envisager le cas, oú le segment (a, b) se reduit à $(-1, +1)$. Or, $T_n(x) = L \cos n \arccos x$ satisfait à l'équation

$$(x^2-1)\,T_n'' + xT_n' - n^2 T_n = 0.$$

Donc, en différentiant successivement, et en posant $x=1$, on a

$$T_n'(1) = n^2 T_n(1),\quad 3T_n''(1) = (n^2-1)\,T_n'(1), \ldots, (2k-1)\,T_n^{(k)}(1) = [n^2-(k-1)^2]\,T_n^{(k-1)}(1).$$

D'où

$$T_n^{(k)}(1) = \frac{n^2(n^2-1)\ldots[n^2-(k-1)^2]}{1.3\ldots(2k-1)}\,T_n(1) = M.$$

La démonstration, qui présente un réel intérêt, est longue et compliquée, et il ne semble pas facile de la simplifier considérablement. C'est pour ça que j'ai pensé qu'il ne serait pas inutile de remarquer qu'on peut obtenir très simplement l'inégalité suivante qui est asymptotique à inégalité de W. Markoff

$$| P^{(k)}(x) | < M(1+\varepsilon_n), \qquad (1^{\text{bis}})$$

où ε_n tend vers 0, comme $\frac{1}{n^2}$.

D'abord, on reconnait immédiatement que

$$| P^{(k)}(a) | \leqq M, \quad | P^{(k)}(b) | \leqq M. \qquad (2)$$

En effet, il suffit de remarquer que parmi les polynomes tels que $P^{(k)}(b)=M$, aucun ne peut rester dans l'intervalle (a, b) infériur à L, si

$$M = \frac{d^k}{dx^k}\left(L\cos n\arccos\frac{2x-a-b}{b-a}\right)_{x=b} = \frac{n^2(n^2-1)\ldots[n^2-(k-1)^2]}{1.3\ldots(2k-1)}\left(\frac{2}{b-a}\right)^k.L,$$

car autrement l'équation

$$P(x) - L\cos n\arccos\frac{2x-a-b}{b-a} = 0$$

aurait toutes ses n racines à l'intérieur de l'intervalle (a, b), tandis que sa dérivée d'ordre k s'annullerait au bord b, ce qui est manifestement impossible.

Ainsi, en appliquant l'inégalité (2) au segment (a, x), où $a<x<b$, on a

$$| P^{(k)}(x) | \leqq \frac{n^2(n^2-1)\ldots[n^2-(k-1)^2]}{1.3\ldots(2k-1)} \cdot \left(\frac{2}{x-a}\right)^k.L, \qquad (3)$$

ou bien, en réduisant, pour fixer les idées, le segment (a, b) au segment $(-1, +1)$, on aura

$$| P^{(k)}(x) | \leqq \frac{n^2(n^2-1)\ldots[n^2-(k-1)^2]}{1.3\ldots(2k-1)} \cdot \left(\frac{2}{1+x}\right)^k.L. \qquad (4)$$

Pour tirer de là (on peut supposer $x>0$) la conclusion voulue, nous n'avons qu'à comparer cette inégalité à celle que j'ai obtenue par des considérations également élémentaires dans le premier chapitre [1]) de mon Mémoire «Sur l'ordre de la meilleure approximation etc»:

$$| P^{(k)}(x) | < \left(\frac{k}{1-x^2}\right)^{\frac{k}{2}} n(n-1)\dots[n-(k-1)]\,L. \qquad (5)$$

Puisque la fonction qui se trouve dans le second membre de (5) est croissante, tandisque celle du second membre de (4) est décroissante, pour $0<x<1$, on aura une limite supérieure générale de $| P^{(k)}(x) |$, en attribuant à x la valeur, pour laquelle ces deux fonctions sont égales, c'est à dire, x satisfaisant à l'équation

$$\frac{n(n+1)\dots(n+k+1)}{1.3\dots(2k-1)}\cdot\left(\frac{2}{1+x}\right)^{k} = \left(\frac{k}{1-x^2}\right)^{\frac{k}{2}},$$

ou bien

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{4}{k}\left[\frac{n(n+1)\dots(n+k+1)}{1.3\dots(2k-1)}\right]^{\frac{2}{k}}.$$

Donc,

$$\frac{2}{1+x} = 1 + \frac{k}{4}\left[\frac{1.3\dots(2k-1)}{n.(n+1)\dots(n+k-1)}\right]^{\frac{2}{k}}.$$

En substituant cette valeur de $\frac{2}{1+x}$ dans l'inégalifé (4) on obtient finalement

$$| P^{(k)}(x) | < (1+\varepsilon_n)\frac{n^2(n^2-1)\dots[n^2-(k-1)^2]}{1.3\dots(2k-1)}.L, \qquad (1^{\text{bis}})$$

où

$$1+\varepsilon_n = \left\{1+\frac{k}{4}\left[\frac{1.3\dots(2k-1)}{n(n+1)\dots(n+k-1)}\right]^{\frac{2}{k}}\right\}^{k},$$

de sorte que, k étant fixe, ε_n tend vers 0 comme $\frac{1}{n^2}$ c. q. f. d.

2. W. Markoff a également recherché le maximum exact que peut atteindre la dérivée $P^{(k)}(x)$ en un point déterminé x intérieur au segment. Sans résoudre la question qui, en général, se ramène à une équation algebrique non résoluble élémentairement, il en a fait une discussion approfondie qui avait pour but principal la démonstration de l'inégalité (1). Mais n'ayant pas tiré de cette discussion une inégalité analogue à l'inégalité (5), il n'a pas signalé la différence essentielle entre l'ordre de croissance du maximum de la dérivée en un point intérieur et au bord du segment— différence qui résulte de la comparaison des inégalités (1) et (5) et dont

---

[1]) C'est l'inégalité (12) de ce Mémoire.

les conséquences importantes sont mises en évidence par les théorèmes du second chapitre de mon Mémoire cité, qui ne sauraient être déduits de l'inégalité (1).

Je me propose ici de préciser l'inégalité (5), pour n très grand, et de donner la valeur *asymptotique du maximum* $M(x)$ *de la dérivée* $P^{(k)}(x)$ *en un point donné* x, intérieur au segment $(-1, +1)$.

Je vais établir l'égalité asymptotique suivante

$$M(x) \backsim \left(\frac{n^2}{1-x^2}\right)^{\frac{k}{2}}. L, \tag{6}$$

à laquelle d'ailleurs on pourrait aussi arriver en utilisant les résultats de W. Markoff.

En effet, en appliquant un raisonnement bien connu, on reconnait que le polynome $P(x)$ qui réalise le maximum de $P^{(k)}(x)$ au point considéré devra atteindre son écart maximum sur le segment $(-1, +1)$ au moins n fois en changeant successivement de signe. Donc, si nous formons tous les polynomes de la forme

$$P(x) = cx^n + \sigma x^{n-1} + p_1 x^{n-2} + \ldots + p_{n-1} \tag{7}$$

qui s'écartent le moins possible de zéro sur notre segment, c et σ étant deux paramètres donnés, il ne faudra choisir qu'entre ces derniers polynomes celui qui réalise le maximum. E. Zolotareff [1]) a ramené la détermination des polynomes (7) aux fonctions elliptiques, mais nous n'allons pas utiliser ses formules qui sont très compliquées. Nous allons procéder autrement: au lieu de rechercher le polynome d'approximation

$$R(x) = -(p_1 x^{n-2} + \ldots + p_{n-1})$$

de degré $n-2$ de la fonction $cx^n + \sigma x^{n-1}$, nous formerons le polynome d'approximation $R_1(x)$ d'une fonction de la forme

$$\varphi(x) = cx^n + \sigma x^{n-1} + \frac{A}{x-a},$$

où A sera assujetti seulement à tendre vers o avec $\frac{1}{n}$ infiniment plus rapidement que la meilleure approximation de $\varphi(x)$, a étant un nombre réel quelconque tel que $|a| > 1$.

---

[1]) Bull. de l'Académie de St. Petersbourg. 1877.

La détermination de $R_1(x)$, qui sera alors naturellement une expression asymptotique de $R(x)$, est immédiate. En effet, considérons la fonction

$$\lambda \cos(n\varphi - \delta) = \frac{\lambda}{2}\left[\frac{(x+\sqrt{x^2-1})^n(ax-1-\sqrt{(x^2-1)(a^2-1)})}{x-a} + \right.$$

$$\left. + \frac{(x-\sqrt{x^2-1})^n(ax-1+\sqrt{(x^2-1)(a^2-1)}}{x-a}\right] = \frac{Q(x)}{x-a},$$

où $\cos\varphi = x$, $\cos\delta = \frac{ax-1}{x-a}$; on voit facilement que $\frac{Q(x)}{x-a}$ atteint n fois son écart maximum $\pm\lambda$ dans l'intervalle $(-1, +1)$. Or, on a d'autre part

$$\frac{Q(x)}{x-a} = cx^n + \sigma x^{n-1} + \frac{A}{x-a} - R_1(x),$$

où

$c = \lambda 2^{n-1}(a-\sqrt{a^2-1})$, $\sigma = \lambda 2^{n-1}[a^2-1-a\sqrt{a^2-1}]$ et $A = \lambda(a^2-1)(a-\sqrt{a^2-1})^n$, $R_1(x)$ étant un polynome de degré $n-2$. Donc,

$$\frac{\sigma}{c} = -\sqrt{a^2-1},$$

d'où

$$a = \sqrt{1+\frac{\sigma^2}{c^2}}, \quad \lambda = \frac{\sigma+\sqrt{\sigma^2+c^2}}{2^{n-1}},$$

(a sera positif, si $\frac{\sigma}{c} < 0$, et négatif pour $\frac{\sigma}{c} > 0$; au numérateur de λ le radical aura le signe σ).

Ainsi $R_1(x)$ est bien le polynome d'approximation de $\varphi(x)$, et de plus, la meilleure approximation L de $cx^n + \sigma x^{n-1}$ satisfera aux inégalités

$$|\lambda| - \frac{|A|}{|a|-1} < L < |\lambda| + \frac{|A|}{|a|-1},$$

ou

$$\left|\frac{|\sigma|+\sqrt{\sigma^2+c^2}}{2^{n-1}}\right| \cdot \left[1 - \frac{\sigma^2.(\sqrt{\sigma^2+c^2}-|\sigma|)^n}{|c|^{n+1}(\sqrt{\sigma^2+c^2}-|c|)}\right] <$$

$$< L < \left|\frac{|\sigma|+\sqrt{\sigma^2+c^2}}{2^{n-1}}\right| \cdot \left[1 + \frac{\sigma^2.(\sqrt{\sigma^2+c^2}-|\sigma|)^n}{|c|^{n+1}(\sqrt{\sigma^2+c^2}-|c|)}\right].$$

Supposons d'abord que le rapport $\frac{\sigma}{c}$ ne tend pas vers 0.

Donc

$$L \backsim \frac{|\sigma| + \sqrt{\sigma^2 + c^2}}{2^{n-1}} \tag{8}$$

et $R_1(x)$ est une expression asymptotique de $R(x)$, conformément à la définition que j'ai adoptée dans mes travaux antérieurs. Nous pouvons dire également que le polynome

$$P_1(x) = cx^n + \sigma x^{n-1} - R_1(x) = \frac{Q(x) - A}{x - a} = L\cos(n\varphi - \delta) - \frac{A}{x - a} \tag{7^{bis}}$$

est asymptotique au polynome correspondant de Zolotareff

$$P(x) = cx^n + \sigma x^{n-1} - R(x) \tag{7}$$

que nous avons à considérer ici pour toutes les valeurs de c et σ qui satisfont à l'égalité (8).

Dans ce cas, en différentiant successivement $P_1(x)$, on a

$$P_1'(x) = \frac{nL\sin(n\varphi - \delta)}{\sqrt{1 - x^2}} + \varepsilon,$$

$$P_1''(x) = \frac{n^2 L\cos(n\varphi - \delta)}{1 - x^2} + \varepsilon',$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

où les termes additifs $\varepsilon, \varepsilon', \dots$ sont respectivement infiniment petits par rapport aux premiers termes, x étant un point fixe quelconque *intérieur* au segment. D'où on conclut que suivant que k est pair on impair, on déterminera δ par la condition que $\cos(n\varphi - \delta)$ ou $\sin(n\varphi - \delta)$ soit égal à ± 1 au point considéré. Donc le *maximum* de $|P_1^{(k)}(x)|$ au point x est *asymptotique* à

$$\frac{n^k L}{(1 - x^2)^{\frac{k}{2}}}.$$

Par conséquent, cette quantité sera également asymptotique au maximum de $|P^{(k)}(x)|$.

Pour achever la démonstration, il ne reste plus qu'a considérer le cas, où $\frac{\sigma}{c}$ tend vers 0. Or, dans cette hypothèse, les polynomes $P(x)$ de

Zolotareff ont, évidemment, pour expression asymptotique le polynome de Tchebychef $\frac{c}{2^{n-1}} \cos n \arccos x$, puisque la meilleure approximation de σx^{n-1} est alors infiniment petite par rapport à la meilleure approximation de cx^n, et l'égalité (8) subsiste. Par conséquent, la valeur asymptotique du maximum de $|P^{(k)}(x)|$ ne pourra pas dans ce cas également dépasser le nombre $\frac{n^k L}{(1-x^2)^{\frac{k}{2}}}$.

Donc,

$$\frac{n^k L}{(1-x^2)^{\frac{k}{2}}}$$

est précisément la valeur asymptotique du maximum de $|P^{(k)}(x)|$ *en un point fixe intérieur au segment* $(-1, +1)$, *si sur tout ce segment on a* $|P(x)| \leq L$, *où* $P(x)$ *est un polynome quelconque de degré* n.

О нѣкоторыхъ ариѳметическихъ теоремахъ.

Я. Успенскаго.

§ 1. Въ настоящей замѣткѣ я имѣю въ виду вывести изъ одного общаго источника рядъ классическихъ теоремъ ариѳметики, которыя въ разное время и различными пріемами были выведены изъ теоріи эллиптическихъ функцій. Часть этихъ теоремъ была доказана изъ соображеній ариѳметическихъ 1), совершенно отличныхъ отъ тѣхъ, которыми мы пользуемся; притомъ извѣстныя ариѳметическія доказательства, на нашъ взглядъ, сложны и мало изящны.

Почти всѣ результаты, о которыхъ мы говоримъ, а равно много другихъ болѣе сложныхъ и потому менѣе интересныхъ, могутъ быть получены изъ одного общаго ариѳметическаго тождества, похожаго на тождества, опубликованныя безъ доказательства Ліувиллемъ 2).

Пусть $F(x, y, z)$ произвольная функція, нечетная по каждому изъ перемѣнныхъ, т. е. такая, которая для разсматриваемыхъ значеній x, y, z удовлетворяетъ условіямъ:

$$F(-x, y, z) = F(x, -y, z) = F(x, y, -z) = -F(x, y, z).$$

Обозначивъ черезъ n нечетное число $\equiv 1$ (Mod 8), будемъ разсматривать всѣ представленія этого числа въ видѣ

$$n = \lambda^2 + 8d\delta,$$

гдѣ λ нечетное число ($\gtrless 0$), а d и δ числа положительныя цѣлыя; на всѣ такія представленія распространимъ сумму

$$S = \Sigma F(\lambda - 2\delta, \lambda + 2d, 2d - 2\delta + \lambda);$$

тогда будемъ имѣть

$$S = 0, \text{ если } n \text{ не квадратъ}$$

---

1) K. Th. Vahlen. Beiträge zu einer additiven Zahlentheorie. Crelle's Journal, Bd. 112.

2) Liouville. Sur quelques formules générales qui peuvent être utiles dans la théorie des nombres. Douzième article, Journal de Mathématiques 1860.

и

$$S = \sum_{j=1,\,3,\,5,\ldots\sqrt{n}-2} \{F(\sqrt{n},\, j,\, j) - F(j,\, \sqrt{n},\, j)\}, \text{ если } n \text{ квадратъ.}$$

Подробнѣе этотъ результатъ можно представить такъ:

$$\sum_{n=\lambda^2+8d\delta} F(\lambda-2\delta, \lambda+2d, 2d-2\delta+\lambda) = \left\{ \begin{array}{l} 0, \text{ если } n \text{ не квадратъ} \\ \sum\limits_{j=1,\,3,\ldots s-2} \{F(s,j,j) - F(j,s,j)\}, \text{ если } n = s^2 \end{array} \right\} \quad \text{(A)}$$

Доказательство этого равенства очень просто. Въ суммѣ слѣва взаимно уничтожаются всѣ члены, соотвѣтствующіе такимъ рѣшеніямъ уравненія

$$n = \lambda^2 + 8d\delta$$

для которыхъ $\lambda + d - 2\delta \neq 0$ и $\lambda + 2d - \delta \neq 0$. Всякому рѣшенію, гдѣ $\lambda + d - 2\delta > 0$, соотвѣтствуетъ рѣшеніе: $\lambda' = -\lambda + 4\delta$, $d' = \lambda + d - 2\delta$, $\delta' = \delta$, при чемъ

$$\lambda' - 2\delta' = -\lambda + 2\delta; \; \lambda' + 2d' = \lambda + 2d; \; \lambda' + 2d' - 2\delta' = \lambda + 2d - 2\delta.$$

Члены суммы S, соотвѣтствующіе такимъ двумъ рѣшеніямъ, поглощаются. Рѣшенію, гдѣ $\lambda + d - 2\delta < 0$ и $\lambda + 2d - \delta > 0$ соотвѣтствуетъ рѣшеніе

$$\lambda' = 3\lambda + 4d - 4\delta; \; d' = -\lambda - d + 2\delta; \; \delta' = \lambda + 2d - \delta,$$

при чемъ

$$\lambda' - 2\delta' = \lambda - 2\delta; \; \lambda' + 2d' = \lambda + 2d; \; \lambda' + 2d' - 2\delta' = -\lambda - 2d + 2\delta.$$

Соотвѣтствующіе такимъ рѣшеніямъ члены суммы S поглощаются. Рѣшенію, гдѣ $\lambda + d - 2\delta < 0$ и $\lambda + 2d - \delta < 0$, соотвѣтствуетъ рѣшеніе

$$\lambda' = -\lambda - 4d; \; d' = d; \; \delta' = -\lambda - 2d + \delta;$$

соотвѣтствующіе члены суммы S опять поглощаются. Остаются, слѣдовательно, въ суммѣ S только такіе члены, которые получаются изъ рѣшеній, удовлетворяющихъ условію

$$\lambda + 2d - \delta = 0 \text{ и } \lambda + d - 2\delta < 0$$

или

$$\lambda + d - 2\delta = 0 \text{ и } \lambda + 2d - \delta < 0.$$

Но легко убѣдиться, что такія рѣшенія возможны только при n равномъ квадрату, и что тогда сумма S приводится къ суммѣ правой части равенства (A).

Изъ этого равенства мы выведемъ очень полезную для насъ формулу, если положимъ

$$F(x, y, z) = (-1)^{\frac{x+y+z-1}{2}} \varphi(x, y),$$

гдѣ функція $\varphi(x, y)$ *четная* по обоимъ перемѣннымъ; тогда получимъ слѣдующее изящное тождество:

$$\sum_{n=\lambda^2+8d\delta} (-1)^{\frac{\lambda-1}{2}} \varphi(\lambda-2\delta, \lambda+2d) = \left\{ \begin{array}{l} 0, \text{ если } n \text{ не квадратъ} \\ (-1)^{\frac{s-1}{2}} \sum\limits_{j=1,\ 3,\ 5, \ldots s-2} \{\varphi(s, j) - \varphi(j, s)\}, \text{ если } n = s^2 \end{array} \right\} \text{(B)}$$

§ 2. Положимъ въ тождествѣ (B)

$$\varphi(x, y) = (-1)^{\frac{y-1}{2}} y;$$

послѣ небольшого вычисленія получимъ

$$\sum_{n=\lambda^2+8d\delta} (-1)^d d = \left\{ \begin{array}{l} 0, \text{ если } n \text{ не квадратъ} \\ -\dfrac{n-1}{4}, \text{ если } n \text{ квадратъ.} \end{array} \right\}$$

Если обозначить вообще черезъ $\Delta(m)$ разность между суммой четныхъ дѣлителей m и суммой нечетныхъ, то предыдущій результатъ можно представить такъ:

$$\sum_{\lambda=1,\ 3,\ 5, \ldots} \Delta\left(\frac{n-\lambda^2}{8}\right) = \left\{ \begin{array}{l} 0, \text{ если } n \text{ не квадратъ} \\ -\dfrac{n-1}{8}, \text{ если } n \text{ квадратъ} \end{array} \right\} \qquad \text{(I)}$$

Здѣсь сумма распространяется на всѣ нечетныя числа 1, 3, 5,... меньшія $\sqrt{n}$. Полагая $n = 8h + 1$, $\lambda = 2k + 1$, вмѣсто равенства (I) получимъ:

$$\sum_{k=0,\ 1,\ 2, \ldots} \Delta\left(h - \frac{k(k+1)}{2}\right) = \left\{ \begin{array}{l} 0, \text{ если } h \text{ не тригональное число} \\ -h, \text{ если } h \text{ тригональное число} \end{array} \right\} \qquad \text{(I*)}$$

Положимъ затѣмъ въ тождествѣ (8)

$$\varphi(x, y) = y^2;$$

получимъ результатъ:

$$4 \sum_{n=\lambda^2+8d\delta} (-1^{\frac{\lambda-1}{2}} \lambda . d = \left\{ \begin{array}{l} 0, \text{ если } n \text{ не квадратъ} \\ (-1)^{\frac{s-3}{2}} \dfrac{s(s^2-1)}{3}, \text{ если } n = s^2 \end{array} \right|$$

который можемъ представить такъ

$$\sum_{\lambda=1,\ 3,\ 5\ldots;\ \lambda^2<n}(-1)^{\frac{\lambda-1}{2}}\lambda\zeta_1\left(\frac{n-\lambda^2}{8}\right)=\left|\begin{array}{l}0,\ \text{если } n \text{ не квадратъ}\\ -(-1)^{\frac{\sqrt{n}-1}{2}}\frac{\sqrt{n}(n-1)}{24},\ \text{если } n \text{ квадратъ}\end{array}\right\} \quad (\mathrm{II})$$

обозначая вмѣстѣ съ Ліувиллемъ черезъ

$$\zeta_1(m)$$

сумму всѣхъ дѣлителей m. Полагая $n=8h+1$ и $\lambda=2k+1$, вмѣсто равенства (II) получимъ

$$\sum_{k=0,\ 1,\ 2,\ldots}(-1)^k(2k+1)\zeta_1\left(h-\frac{k(k+1)}{2}\right)=\left\{\begin{array}{l}0,\ \text{если } h \text{ не тригональное число}\\ (-1)^{m-1}\frac{m(m+1)(2m+1)}{6},\ \text{если } h=\frac{m(m+1)}{2}\end{array}\right\}(\mathrm{II}^*)$$

Равенства (I*) и (II*) даны Гальфеномъ [1]). Принимая $ф(x, y)=y^{2s}$ получимъ болѣе сложныя соотношенія Глешера [2]). Полагая, наконецъ,

$$ф(x,\ y)=\cos\frac{\pi}{4}x$$

и обозначая черезъ $\varrho(m)$ разность между числомъ дѣлителей m формы $4k+1$ и числомъ дѣлителей формы $4k-1$, получимъ результатъ Stieltjes'a [3]):

$$4\sum_{\lambda=\pm1,\pm3,\ldots}(-1)^{\frac{\lambda^2-1}{8}}\varrho\left(\frac{n-\lambda^2}{8}\right)=\left\{\begin{array}{l}0,\ \text{если } n \text{ не квадратъ}\\ (-1)^{\frac{s-1}{2}+\frac{s^2-1}{8}}s-(-1)^{\frac{s^2-1}{8}},\ \text{если } n=s^2\end{array}\right\} \quad (\mathrm{III})$$

изъ котораго можно вывести интересныя слѣдствія относительно представленія квадратнаго числа суммою трехъ квадратовъ.

§ 3. Возвращаясь вновь къ тождеству (B) § 2, положимъ

$$ф(x,\ y)=x\sin\frac{2\pi x}{3}\left(2+\cos\frac{2\pi y}{3}\right)$$

и будемъ считать $n=24h+1$. Послѣ небольшого вычисленія и сокращенія очевидно уничтожающихся членовъ можно представить лѣвую часть въ упомянутомъ тождествѣ въ видѣ суммы двухъ суммъ:

---

[1]) Halphen. Bull. de la Soc. math. de France 5 (1876/7) p. 158.

[2]) Glaisher. Quart. j. of pure and appl. math. 19 (1883) p. 220.

[3]) Correspondance d'Hermite et de Stieltjes. t. I, lettre 45.

$$S=\sum(-1)^{\frac{\lambda-1}{2}}\lambda\left(2\cos\frac{2\pi\lambda}{3}+\cos\frac{2\pi d}{3}\right)\sin\frac{2\pi\delta}{3}$$

$$T=\sum(-1)^{\frac{\lambda-1}{2}}\sin\frac{2\pi\lambda}{3}.\delta\cos\frac{2\pi\delta}{3}\left(\cos\frac{2\pi d}{3}-4\right),$$

распространенныхъ на всѣ рѣшенія уравненія

$$n=24h+1=\lambda^2+8d\delta$$

съ положительными d и δ. Въ суммѣ S исчезнутъ всѣ члены, гдѣ $\lambda\equiv\pm 1(\mathrm{Mod}\,3)$; ибо въ этомъ случаѣ навѣрно одно изъ чиселъ d или δ дѣлится на 3; если $\delta\equiv 0$ (Mod 3), то $\sin\frac{2\pi\delta}{3}=0$, если же $d\equiv 0$, то $2\cos\frac{2\pi\lambda}{3}+\cos\frac{2\pi d}{3}=0$. Въ случаѣ $\lambda\equiv 0$ ни одно изъ чиселъ d и δ не дѣлится на 3 и потому $2\cos\frac{2\pi\lambda}{3}+\cos\frac{2\pi d}{3}=\frac{3}{2}$, такъ что S будетъ равна суммѣ

$$S=\frac{3}{2}\sum(-1)^{\frac{\lambda-1}{2}}\lambda\sin\frac{2\pi\delta}{3},$$

распространенной на всѣ рѣшенія уравненія $n=\lambda^2+8d\delta$, гдѣ λ дѣлится на 3. Собирая въ послѣдней суммѣ члены, отвѣчающіе одному и тому же значенію λ, найдемъ совокупность этихъ членовъ равной

$$\frac{3}{2}(-1)^{\frac{\lambda-1}{2}}\lambda\sum\sin\frac{2\pi\delta}{3},$$

гдѣ суммированіе распространяется на всѣ дѣлители δ числа $\frac{n-\lambda^2}{8}$. Если наивысшая степень 2, дѣлящая это число, четная, то нетрудно видѣть, что сумма

$$\sum\sin\frac{2\pi\delta}{3}$$

равна разности между числомъ дѣлителей $\frac{n-\lambda^2}{8}$ формы $6k+1$ и числомъ дѣлителей формы $6k-1$. Если же наивысшая степень 2, дѣлящая $\frac{n-\lambda^2}{8}$, нечетная, то разсматриваемая сумма равна 0. Отсюда на основаніи извѣстныхъ результатовъ изъ теоріи квадратичныхъ формъ легко вывести, что сумма S равна суммѣ

$$\frac{\sqrt{3}}{8}\sum(-1)^{\frac{\lambda-1}{2}}\lambda,$$

распространенной на всѣ рѣшенія уравненія

$$24h+1=\lambda^2+2u^2+6v^2,$$

гдѣ $\lambda\equiv 0$ (Mod 3); но, очевидно, такихъ рѣшеній нѣтъ, слѣдовательно $S=0$. Въ суммѣ T исчезаютъ всѣ члены, гдѣ $\lambda\equiv 0$ (Mod 3); совокупность же остальныхъ послѣ простого изслѣдованія находится равной суммѣ

$$T=-12\sum(-1)^{\frac{\lambda-1}{2}}\sin\frac{2\pi\lambda}{3}\zeta_1\left(\frac{n-\lambda^2}{24}\right),$$

распространенной на всѣ числа $\lambda\equiv\pm 1$ (Mod 3), квадраты которыхъ $<n$. Изъ двухъ же чиселъ: λ и $-\lambda$ всегда одно вида $6\tau-1$; откуда нетрудно заключить, что

$$\frac{2}{\sqrt{3}}T=-24\sum(-1)^\tau\zeta_1\left(\frac{n-(6\tau-1)^2}{24}\right),$$

при чемъ суммированіе распространяется на всѣ числа вида $6\tau-1$, квадраты которыхъ $<n$. Правая часть тождества (B) равна 0, если n не квадратъ; если же $n=s^2$, гдѣ $s=6\sigma-1$, то она послѣ небольшого вычисленія находится равной

$$\frac{\sqrt{3}}{2}(-1)^\sigma\{(6\sigma-1)^2-1\}.$$

Такимъ образомъ получается

$$\sum_{(6\tau-1)^2<n}(-1)^\tau\zeta_1\left(\frac{n-(6\tau-1)^2}{24}\right)=\left\{\begin{matrix}0,\ \text{если } n \text{ не квадратъ}\\ (-1)^{\sigma-1}\dfrac{(6\sigma-1)^2-1}{24},\ \text{если } n=(6\sigma-1)^2\end{matrix}\right\}\text{(IV)}$$

Полагая здѣсь $n=24h+1$, найдемъ знаменитое соотношеніе Эйлера

$$\sum_{\frac{3\tau^2\quad\tau}{2}<h}(-1)^\tau\zeta_1\left(h-\frac{3\tau^2-\tau}{2}\right)=\left\{\begin{matrix}0,\ \text{если } h \text{ не пентагональное число}\\ (-1)^{\sigma-1}\dfrac{3\sigma^2-\sigma}{2},\ \text{если } h=\dfrac{3\sigma^2-\sigma}{2}\end{matrix}\right\}\text{(IV*)}$$

Vahlen въ упомянутой выше работѣ показалъ, какъ можно вывести это равенство Эйлера, если исходить изъ другой замѣчательной теоремы Эйлера-Лежандра: число представленій цѣлаго числа суммой четнаго числа различныхъ между собою положительныхъ слагаемыхъ равно числу представленій суммой нечетнаго числа такихъ же слагаемыхъ, если разсматриваемое число не пентагональное; если же это число пентагональное $\frac{3\sigma^2-\sigma}{2}$, то первое число превосходитъ второе на $(-1)^\sigma$.

Получивъ равенство (IV*), мы можемъ наоборотъ изъ него вывести эту теорему. Обозначимъ черезъ $g(p)$ разность между числомъ представленій p въ видѣ суммы различныхъ слагаемыхъ съ четнымъ числомъ слагаемыхъ и числомъ представленій съ нечетнымъ числомъ слагаемыхъ и будемъ считать $g(0)=1$. Тогда разсужденіемъ Vahlen'а устанавливаемъ равенство

$$\sum_{p=0}^{h-1} g(p)\,\zeta_1(h-p) = -hg(h) \tag{A}$$

Съ другой стороны, положивъ

$$\chi(p)=0\,,\text{ если } p \text{ не пентагональное число}$$
$$\chi(p)=(-1)^\sigma,\text{ если } p=\frac{3\sigma^2-\sigma}{2}\,,$$

будемъ имѣть въ силу равенства (IV*)

$$\sum_{p=0}^{h-1} \chi(p)\,\zeta_1(h-p) = -h\chi(h) \tag{B}$$

Сличеніе равенствъ (A) и (B) позволяетъ заключить, что изъ условій

$$\chi(0)=g(0)\,;\ \chi(1)=g(1);\ldots\chi(h-1)=g(h-1)$$

вытекаетъ равенство $\chi(h)=g(h)$. Слѣдовательно, убѣдившись непосредственно въ томъ, что $\chi(0)=g(0)$; $\chi(1)=g(1)$, можемъ по индукціи вывести общее равенство

$$g(h)=\chi(h)=\left\{\begin{array}{l} 0,\text{ если } h \text{ не пентагональное число} \\ (-1)^\sigma,\quad \text{если } h=\dfrac{3\sigma^2-\sigma}{2} \end{array}\right\} \tag{V}$$

§ 4. Положимъ теперь въ равенствѣ (B) § 2.

$$\phi\,(x,\ y)=\cos\frac{2\pi x}{3}\ ;$$

получимъ результатъ вида

$$\sum_{n=\lambda^2+8d\delta}(-1)^{\frac{\lambda-1}{2}}\sin\frac{2\pi\lambda}{3}\sin\frac{2\pi\delta}{3}=\left\{\begin{array}{l} 0,\text{ если } n \text{ не квадратъ} \\ (-1)^{\frac{s-1}{2}}\left\{-\dfrac{s-1}{2}\cos\dfrac{2\pi s}{3}+\dfrac{\sin\dfrac{2\pi(s-1)}{3}}{2\sin\dfrac{2\pi}{3}}\right\},\text{ если } n=s^2 \end{array}\right\} \tag{C}$$

Совершенно такъ же, какъ въ предыдущемъ §, найдемъ, что сумма лѣвой части этого равенства равна суммѣ

$$\frac{1}{8}\sum(-1)^{\frac{\lambda-1}{2}}\left(\frac{\lambda}{3}\right),$$

распространенной на всѣ рѣшенія уравненія

$$n=\lambda^2+2u^2+6v^2,$$

гдѣ $\lambda\equiv\pm1$ (Mod 3), а u и v не равны нулю заразъ. Правая часть равенства (C) равна нулю, если n не квадратъ; если же $n=s^2$, то она будетъ

$$\frac{1}{4}\left\{(-1)^{\frac{s-1}{2}}s-(-1)^{\frac{s-1}{2}}\left(\frac{s}{3}\right)\right\},\text{ если } s\equiv\pm1\,(\text{Mod } 3)$$

и

$$-\frac{1}{2}(-1)^{\frac{s-1}{2}}s,\text{ если } s\equiv0\ (\text{Mod } 3).$$

Отсюда нетрудно вывести такіе результаты

$$\sum_{n=\lambda^2+2u^2+6v^2}(-1)^{\frac{\lambda-1}{2}}\left(\frac{\lambda}{3}\right)=\left\{\begin{matrix}0,\text{ если } n \text{ не квадратъ}\\ 2(-1)^{\frac{s-1}{2}}s,\text{ если } n=s^2 \text{ и } s \text{ на 3 не дѣлится}\end{matrix}\right\}\qquad(\text{D})$$

$$\sum_{n=\lambda^2+2u^2+6v^2}(-1)^{\frac{\lambda-1}{2}}\left(\frac{\lambda}{3}\right)=\left\{\begin{matrix}0,\text{ если } n \text{ не квадратъ}\\ -4(-1)^{\frac{s-1}{2}}s,\text{ если } n=s^2 \text{ и } s \text{ дѣлится на 3}\end{matrix}\right\}\qquad(\text{D}^*)$$

Здѣсь обѣ суммы распространяются на *всѣ* рѣшенія уравненія

$$n=\lambda^2+2u^2+6v^2,$$

гдѣ $\lambda\equiv\pm1$ (Mod 3).

Изъ полученныхъ равенствъ (D) и (D*) мы выведемъ одну теорему Якоби. Будемъ разсматривать всѣ рѣшенія уравненія

$$n=8\tau+1=\lambda^2+2u^2+6v^2,\qquad(\text{a})$$

удовлетворяющія условію

$$\lambda-u+1\equiv0\ \ (\text{Mod } 3)\qquad(\text{b})$$

Обозначимъ число такихъ рѣшеній,

гдѣ $\lambda\equiv-1$ (Mod 4) черезъ P_1

гдѣ $\lambda\equiv+1$ (Mod 4) черезъ P_2

Если $n\equiv2$ (Mod 3), то необходимо $\lambda\equiv0$ (Mod 3); откуда легко видѣть, что въ этомъ случаѣ $P_1-P_2=0$. Если $n\equiv1$ (Mod 3), то $u\equiv0$ (Mod 3) и $\lambda\equiv-1$ (Mod 3). Поэтому P_1 равно числу рѣшеній уравненія (a), гдѣ $\lambda \equiv -1 \pmod{12}$; а P_2 равно числу рѣшеній, гдѣ $\lambda \equiv 5 \pmod{12}$. Принимая во вниманіе равенство (D), легко сообразить, что въ разсматриваемомъ случаѣ

$$P_1 - P_2 = \begin{cases} 0, \text{ если } n \text{ не квадратъ} \\ (-1)^{\frac{s-1}{2}} s, \text{ если } n \text{ квадратъ } = s^2 \end{cases}$$

Если $n \equiv 0 \pmod 3$, то должно быть $\lambda \equiv +1$, $u \equiv -1 \pmod 3$; въ этомъ случаѣ изъ равенства (D*) можно вывести, что

$$P_1 - P_2 = \begin{cases} 0, \text{ если } n \text{ не квадратъ} \\ (-1)^{\frac{s-1}{2}} s, \text{ если } n = s^2 \end{cases}$$

Разность $P_1 - P_2$ можно изобразить въ видѣ суммы

$$S = \sum (-1)^{\frac{\lambda+1}{2}},$$

распространенной на всѣ рѣшенія уравненія

$$n = 8\tau + 1 = \lambda^2 + 2u^2 + 6v^2,$$

удовлетворяющія условію: $\lambda - u + 1 \equiv 0 \pmod 3$. Всѣ полученные результаты могутъ быть соединены въ одномъ равенствѣ

$$S = \sum (-1)^{\frac{\lambda+1}{2}} = \left\{ \begin{array}{l} 0, \text{ если } n \text{ не квадратъ} \\ (-1)^{\frac{s-1}{2}} s, \text{ если } n = s^2 \end{array} \right\} \qquad \text{(VI)}$$

лѣвая часть котораго можетъ быть истолкована иначе. Будетъ разсматривать представленія числа $24\tau + 3 = 3n$ въ видѣ

$$24\tau + 3 = (6\alpha - 1)^2 + (6\beta - 1)^2 + (6\gamma - 1)^2. \qquad \text{(c)}$$

Равенство

$$8\tau + 1 = (2\alpha + 2\beta + 2\gamma - 1)^2 + 2(2\alpha - \beta - \gamma)^2 + 6(\beta - \gamma)^2$$

показываетъ, что изъ каждаго представленія (c) получается рѣшеніе

$$\lambda = 2\alpha + 2\beta + 2\gamma - 1; \quad \alpha = 2\alpha - \beta - \gamma; \quad v = \beta - \gamma$$

уравненія (a), удовлетворяющее условію

$$\lambda - u + 1 \equiv 0 \pmod 3;$$

притомъ

если $\alpha + \beta + \gamma$ четное, то $\lambda \equiv -1 \pmod 4$

если $\alpha + \beta + \gamma$ нечетное, то $\lambda \equiv 1 \pmod 4$

Наоборотъ изъ каждаго рѣшенія уравненія (a), удовлетворяющаго условію (b), получается одно рѣшеніе (c); при чемъ

если $\lambda \equiv -1 \,(\mathrm{Mod}\ 4)$, то $\alpha+\beta+\gamma$ четное

если $\lambda \equiv +1 \,(\mathrm{Mod}\ 4)$, то $\alpha+\beta+\gamma$ нечетное

Отсюда ясно, что равенство (VI) можно представить въ видѣ

$$\sum_{4\tau+3=(6\alpha-1)^2+(6\beta-1)^2+(6\gamma-1)^2} (-1)^{\alpha+\beta+\gamma} = \left\{ \begin{array}{l} 0,\ \text{если}\ 8\tau+1\ \text{не квадратъ} \\ (-1)^{\frac{s-1}{2}} s,\ \text{если}\ 8\tau+1=s^2 \end{array} \right\} \qquad \text{(VI*)}$$

и тогда ясно, что оно выражаетъ извѣстную теорему Якоби[1], изъ которой знаменитый геометръ вывелъ возможность представленія всякаго числа суммою четырехъ квадратовъ.

§ 5. Въ заключеніе мы предложимъ еще ариѳметическое доказательство замѣчательной теоремы Гаусса и Якоби[2], вытекающее изъ тѣхъ же началъ, какъ все предыдущее. Теорема эта состоитъ въ слѣдующемъ: если m нечетное число вида $8h+1$, то разность между числами рѣшеній уравненія

$$m = \alpha^2 + 16\beta^2,$$

гдѣ β четное и гдѣ β нечетное, равна разности между числами рѣшеній уравненія

$$m = \gamma^2 + 8\delta^2,$$

гдѣ $\gamma \equiv \pm 1$ и гдѣ $\gamma \equiv \pm 3$ (Mod 8).

Если введемъ числовыя функціи

$$g(m) = \sum_{m=\alpha^2+16\beta^2} (-1)^\beta$$

$$G(m) = \sum_{m=\gamma^2+8\delta^2} (-1)^{\frac{\gamma^2-1}{8}},$$

то содержаніе предыдущей теоремы можемъ выразить равенствомъ

$$g(m) = G(m).$$

---

[1] Jacobi, Werke, Bd. 6, p. 281.

[2] Gauss. Theoria residuorum biquadraticorum I Werke Bd. II, p. 67. Jacobi, Werke Bd. 2, p. 224—225.

При доказательствѣ мы будемъ исходить изъ слѣдующаго тождества Ліувилля: если $F(x)$ нечетная функція по отношенію къ x, то

$$\sum_{m=s^2+d\delta}(-1)^s F(d+s)=\left\{\begin{array}{l}0, \text{ если } m \text{ не квадратъ}\\ (-1)^{s-1}sF(s), \text{ если } m=s^2\end{array}\right\} \qquad (C)$$

Здѣсь сумма распространяется на всѣ представленія m въ видѣ

$$m=s^2+d\delta,$$

гдѣ s произвольное цѣлое число, d и δ положительныя (т. е. >0) числа и притомъ δ нечетное [1]). Положимъ здѣсь $F(x)=\sin\frac{\pi x}{4}$; тогда послѣ должныхъ упрощеній и принявъ во вниманіе, что

$$\sin\frac{\pi x}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1)^{\frac{x-1}{2}+\frac{x^2-1}{8}}$$

при x нечетномъ, получимъ

$$2\sum_{m=16g^2+d\delta}(-1)^g\left(\frac{-2}{d}\right)=\left\{\begin{array}{l}0, \text{ если } m \text{ не квадратъ}\\ 2\left(\frac{-2}{s}\right)s, \text{ если } m=s^2\end{array}\right\} \qquad (a)$$

Но извѣстно что сумма

$$2\sum\left(\frac{-2}{d}\right),$$

распространенная по дѣлителямъ нечетнаго числа k, равна числу представленій k въ формѣ

$$k=x^2+2y^2;$$

поэтому изъ равенства (a) найдемъ

$$\sum_{m=16g^2+u^2+8v^2}(-1)^g=\left\{\begin{array}{l}0, \text{ если } m \text{ не квадратъ}\\ 2\left(\frac{-2}{s}\right)s, \text{ если } m=s^2\end{array}\right.$$

или

$$\sum_{v=0,\pm1,\pm2,\ldots} g\,(m-8v^2)=\left\{\begin{array}{l}0, \text{ если } m \text{ не квадратъ}\\ 2\left(\frac{-2}{s}\right)s, \text{ если } m=s^2\end{array}\right\} \qquad (b)$$

Теперь положимъ въ равенствѣ (C) $F(x)=\sin\frac{\pi x}{2}$; получимъ результатъ

$$\sum_{\delta=0,\pm1,\pm2,\ldots;\ 4\delta^2<m}(-1)^\delta\varrho(m-4\delta^2)=\left\{\begin{array}{l}0, \text{ если } m \text{ не квадратъ}\\ (-1)^{\frac{s-1}{2}}s, \text{ если } m=s^2\end{array}\right\},$$

---

[1]) Liouville. Journal de math. t. 5 (1860) p. 1.

согласившись полагать для нечетнаго n

$$\varrho(n) = \sum_{d\delta=n} (-1)^{\frac{d-1}{2}}$$

При нечетномъ n число представленій n видѣ

$$n = \gamma^2 + 4\varepsilon^2$$

равно $2\varrho(n)$. Принявъ это во вниманіе, получимъ

$$\sum_{m=\gamma^2+4\delta^2+4\varepsilon^2} (-1)^{\delta} = \left\{ \begin{array}{l} 0, \text{ если } m \text{ не квадратъ} \\ 2(-1)^{\frac{s-1}{2}} s, \text{ если } m \text{ квадратъ} \end{array} \right\} \tag{c}$$

Мы считаемъ $m \equiv 1$ (Mod 8); поэтому числа δ и ε одинаковой четности. Если $\gamma^2 \equiv m$ (Mod 16), то $\delta \equiv 0$ (Mod 2); если же $\gamma^2 \equiv m + 8$ (Mod 16), то $\delta \equiv 1$ (Mod 2). Слѣдовательно

$$(-1)^{\frac{\gamma^2-1}{8}} = (-1)^{\frac{m-1}{8}}, \text{ если } \delta \equiv 0 \text{ Mod } 2)$$

$$(-1)^{\frac{\gamma^2-1}{8}} = -(-1)^{\frac{m-1}{8}}, \text{ если } \delta \equiv 1 \text{ (Mod 2)}$$

изъ чего легко усмотрѣть (принявъ еще во вниманіе, что сумму $4\delta^2 + 4\varepsilon^2$ можно представить въ формѣ $8u^2 + 8v^2$), что равенство (c) можно замѣнить такимъ

$$\sum_{m=\gamma^2+8u^2+8v^2} (-1)^{\frac{\gamma^2-1}{8}} = \left\{ \begin{array}{l} 0, \text{ если } m \text{ не квадратъ} \\ 2\left(\frac{-2}{s}\right) s. \text{ если } m = s^2 \end{array} \right.$$

или иначе

$$\sum_{v=0,\,\pm1,\,\pm2\ldots} G(m - 8v^2) = \left\{ \begin{array}{l} 0, \text{ если } m \text{ не квадратъ} \\ 2\left(\frac{-2}{s}\right) s, \text{ если } m = s^2 \end{array} \right\} \tag{d}$$

Сличеніе (a) и (d) показываетъ, что при всякомъ m:

$$\sum_{v=0,\,\pm1,\,\pm2,\ldots} G(m - 8v^2) = \sum_{v=0,\,\pm1,\,\pm2,\ldots} g(m - 8v^2)$$

Но $G(1) = g(1)$; поэтому изъ послѣдняго равенства при $m = 9$ найдемъ $G(9) = g(9)$, затѣмъ $G(17) = g(17)$ и т. д.; вообще

$$G(m) = g(m), \text{ если } m \equiv 1 \text{ (Mod 8)}.$$

25/I—1913.

Новый способъ интегрированія уравненій движенія планеты около солнца.

В. Ермаковъ.

Уравненія движенія точки подъ дѣйствіемъ силы обратно пропорціональной квадрату разстоянія суть:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{mx}{r^3}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{my}{r^3}, \tag{1}$$

$$r^2 = x^2 + y^2.$$

Введу новое перемѣнное s и прибавлю новое уравненіе:

$$dt = rds. \tag{2}$$

Интегралы этихъ уравненій суть:

$$\begin{gathered} x = (a \operatorname{Cos} \alpha s + b \operatorname{Sin} \alpha s)^2 - (c \operatorname{Cos} \alpha s + \partial \operatorname{Sin} \alpha s)^2, \\ y = 2\,(a \operatorname{Cos} \alpha s + b \operatorname{Sin} \alpha s) \quad (c \operatorname{Cos} \alpha s + \partial \operatorname{Sin} \alpha s), \\ r = (a \operatorname{Cos} \alpha s + b \operatorname{Sin} \alpha s)^2 + (c \operatorname{Cos} \alpha s + \partial \operatorname{Sin} \alpha s)^2, \\ t = \int rds. \end{gathered} \tag{3}$$

Между пятью постоянными существуетъ слѣдующая зависимость:

$$m = 2\alpha^2\,(a^2 + b^2 + c^2 + \partial^2). \tag{4}$$

Въ случаѣ гиперболическаго движенія тригонометрическіе косинусъ и синусъ должны быть замѣнены гиперболическими. Въ такомъ случаѣ зависимость между постоянными будетъ:

$$m = 2\alpha^2\,(b^2 + \partial^2 - a^2 - c^2).$$

Подставивъ въ уравненіяхъ (3) $\frac{b}{\alpha}, \frac{\partial}{\alpha}$ вмѣсто b и ∂ и положивъ $\alpha = 0$, получимъ интегралы для параболическаго движенія:

$$
\begin{gathered}
x = (a + bs)^2 - (c + \partial s)^2, \\
y = 2\,(a + bs)\,(c + \partial s), \\
r = (a + bs)^2 + (c + \partial s)^2, \\
t = \int r ds.
\end{gathered}
$$

Между постоянными будетъ зависимость:

$$m = 2\,(b^2 + \partial^2).$$

Мнѣ кажется, что къ сказанному нечего добавить. Желающіе могутъ провѣрить, дѣйствительно ли написанные интегралы удовлетворяютъ уравненіямъ (1) и (2).

Но если такая повѣрка кому нибудь покажется затруднительною, то я покажу, какъ это сдѣлать.

Изъ уравненій (1) и (2) можно получить такое уравненіе:

$$r\frac{d^2x}{ds^2} - \frac{dr}{ds}\frac{dx}{ds} = -mx. \tag{5}$$

Подставимъ сюда вмѣсто x и r ихъ выраженія (3). Чтобы не затруднять себя большими выкладками, въ результатѣ положимъ $s = 0$. При такомъ ограниченіи легко можно найти результатъ; получимъ равенство (4).

Въ формулахъ (3) измѣнимъ s въ $s + h$, гдѣ h произвольное постоянное. Тогда измѣнятся коэффиціенты a, b, c и ∂, но $a^2 + b^2$ и $c^2 + \partial^2$ не измѣнятъ своей величины. Отсюда вытекаетъ, что уравненіе (5) удовлетворяется не только при $s = 0$, но и при всякомъ значеніи s.

1913 года 24 Ноября.

Одна задача на огибающія.

Д. Синцова.

За исключеніемъ поверхностей развертывающихся довольно трудно получить въ достаточно наглядной формѣ ребро возврата семьи поверхностей, зависящихъ отъ одного параметра. Поэтому представляетъ, можетъ быть, извѣстный интересъ разысканіе огибающей одного частнаго случая системы шаровъ, зависящихъ отъ одного параметра, именно— *системы соприкасающихся шаровъ* кривой двоякой кривизны. Если послѣдняя задана уравненіями

$$x = \varphi(s), \quad y = \psi(s), \quad z = \chi(s) \tag{1}$$

и означимъ ξ, η, ζ, R — координаты центра и радіусъ соприкасающагося шара, а черезъ α, β, γ; l, m, n и λ, μ, ν — косинусы угловъ съ осями координатъ касательной, главной нормали и бинормали, то ξ, η, ζ и R опредѣляются, какъ извѣстно, уравненіями

$$\left.\begin{aligned} &(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2-R^2=0,\\ &\alpha(x-\xi)+\beta(y-\eta)+\gamma(z-\zeta)=0,\\ &l(x-\xi)+m(y-\eta)+n(z-\zeta)+r=0,\\ &\lambda(x-\xi)+\mu(y-\eta)+\nu(z-\zeta)-\varrho r'=0, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

откуда

$$\xi - x = lr - \lambda\varrho r', \quad \eta - y = mr - \mu\varrho r', \quad \zeta - z = nr - \nu\varrho r' \tag{3}$$

Слѣд.

$$\left.\begin{aligned} &\xi' = -\lambda\left[\frac{r}{\varrho}+(\varrho r')'\right],\ \eta' = -\mu\left[\frac{r}{\varrho}+(\varrho r')'\right],\ \zeta' = -\nu\left[\frac{r}{\varrho}+(\varrho r')'\right]\\ &\qquad\qquad (R^2)' = 2(\varrho r')\left[\frac{r}{\varrho}+(\varrho r')'\right]. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Будемъ искать огибающую семьи шаровъ

$$(X-\xi)^2+(Y-\eta)^2+(Z-\zeta)^2-R^2=0 \tag{5}$$

гдѣ ξ, η, ζ имѣютъ эти значенія.

Производная по параметру s, приравненная нулю, даетъ

$$-\xi'(X-\xi)-\eta'(Y-\eta)-\zeta'(Z-\zeta)-(R^2)'=0$$

или съ помощью (4) $\left[\left(\frac{r}{\varrho}+(\varrho r')'\right)\neq 0\right]$

$$\lambda(X-\xi)+\mu(Y-\eta)+\nu(Z-z)-\varrho r'=0$$

или еще съ помощью (2_4)

$$\lambda(X-x)+\mu(Y-y)+\nu(Z-z)=0 \tag{6}$$

т. е. *характеристиками являются круги кривизны кривой.*

Дифференцируя (6) еще разъ по s, получаемъ для опредѣленія ребра возврата:

$$l(X-x)+m(Y-y)+n(Z-z)=0 \tag{7}$$

т. е. *уравненіе выпрямляющей плоскости.*

Она пересѣкается съ соприкасающеюся плоскостью и шаромъ въ точкѣ прикосновенія.

Итакъ, *периферическая* 1) *поверхность—огибающая соприкасающихся шаровъ нѣкоторой кривой двоякой кривизны имѣетъ эту кривую ребромъ возврата, а ея круги кривизны—характеристиками.*

Если беремъ косые круги, то получается каналообразная поверхность.

Задача невозможна, если $\frac{r}{\varrho}+(\varrho r')'=0$, — т. е. когда кривая сферическая.

Такимъ образомъ каждая кривая двоякой кривизны связывается, кромѣ развертывающейся, огибаемой соприкасающимися плоскостями и

---

1) См. напр., *G. Demartres.* Cours de géométrie infinitésimale, p. 302. *G. Scheffers.* Geometrische Anwendungen d. Diff. u. Integralrechnung, B. 2—придаетъ имъ названіе Canalflächen, даваемое обычно поверхностямъ, огибаемымъ сферами *постояннаго* радіуса.

линейчатой поверхности, образуемой бинормалями еще и съ периферической поверхностью, огибаемой соприкасающимися шарами.

Но въ отличіе отъ связи кривой двоякой кривизны съ развертывающейся обратно не всякую периферическую поверхность можно разсматривать, какъ огибающую соприкасающихся шаровъ нѣкоторой кривой двоякой кривизны. Дѣйствительно, хотя характеристики будутъ и въ общемъ случаѣ круги, которые по общему свойству огибающихъ касаются ребра возврата, но это будетъ прикосновеніе перваго, а не второго порядка.

Д. Синцовъ.

О вѣроятности a posteriori.

(Вторая замѣтка).

А. Маркова.

Въ первой замѣткѣ съ тѣмъ же заглавіемъ, помѣщенной въ Сообщ. Харьк. Мат. Общ. за 1900 г. (2 сер. т. VII n^0 1, с. 23), изъ общепринятаго выраженія вѣроятности, что въ n испытаній событіе появится k разъ, если въ n_0 испытаній оно появилось k_0 разъ,

$$P_k = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1.2\ldots k} \frac{\int_0^1 x^{k_0+k}(1-x)^{n_0+n-k_0-k}\,dx}{\int_0^1 x^{k_0}(1-x)^{n_0-k_0}\,dx}$$

я вывелъ очень простое неравенство

$$\sum P_k \left(\frac{k}{n} - \frac{k_0}{n_0}\right)^2 < \frac{1}{4}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n_0}\right);$$

откуда тотчасъ слѣдуетъ, что вѣроятность неравенствъ

$$-\frac{t}{2}\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n_0}} < \frac{k}{n} - \frac{k_0}{n_0} < \frac{t}{2}\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n_0}},$$

при любомъ положительномъ t, больше $1 - \frac{1}{t^2}$. Интересно отмѣтить, что подобный же выводъ можно сдѣлать относительно разности

$$\frac{k}{n} - \frac{k_0}{n_0},$$

когда обѣ дроби $\frac{k}{n}$ и $\frac{k_0}{n_0}$ остаются неопредѣленными, и разсматривается вѣроятность a priori при любой постоянной вѣроятности событія; ибо въ этомъ случаѣ имѣемъ

$$\text{м. о.}\left(\frac{k}{n}-\frac{k_0}{n_0}\right)^2=\text{м. о.}\left(\frac{k}{n}-p-\frac{k_0}{n_0}+p\right)^2=\text{м. о.}\left(\frac{k}{n}-p\right)^2+\text{м. о.}\left(\frac{k_0}{n_0}-p\right)^2=$$

$$=p\,(1-p)\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n_0}\right)<\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n_0}\right),$$

гдѣ p означаетъ вѣроятность событія при всѣхъ испытаніяхъ.

Между нашими выводами существуетъ, конечно, нѣкоторая связь; но необходимо отличать ихъ другъ отъ друга и помнить, что первый изъ нихъ, относящійся къ вѣроятности a posteriori, установленъ только при общепринятомъ предположеніи, что до наблюденія всѣ значенія вѣроятности событія равновозможны.

Впрочемъ, если въ общей формулѣ

$$P_k=\frac{n\,(n-1)\ldots(n-k+1)}{1.2\ldots k}\,\frac{\int_0^1 x^{k_0+k}\,(1-x)^{n_0+n-k_0-k}\,f(x)\,dx}{\int_0^1 x^{k_0}\,(1-x)^{n_0-k_0}\,f(x)\,dx}$$

предположить [1], что $f(x)$ заключается между двумя постоянными положительными числами

$$0<D\leqq f(x)\leqq C,$$

то на основаніи уже доказаннаго нами не трудно установить неравенство

$$\sum P_k\left(\frac{k}{n}-\frac{k_0}{n_0}\right)^2<\frac{C}{4D}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n_0}\right);$$

откуда также слѣдуетъ, что при достаточно большихъ n и n_0 вѣроятность неравенствъ

$$-\varepsilon<\frac{k}{n}-\frac{k_0}{n_0}<\varepsilon$$

сколь угодно близка къ единицѣ, какъ бы ни было мало неизмѣнное положительное число ε.

Остановимся теперь на вопросѣ о замѣнѣ вышеприведеннаго выраженія P_k, при $f(x)=1$ [2], извѣстнымъ другимъ выраженіемъ, при

---

[1] Подобное же предположеніе принялъ П. А. Некрасовъ въ своихъ лекціяхъ по „Теоріи вѣроятностей“ (1896 года) при доказательствѣ теоремы обратной теоремѣ Я. Бернулли.

[2] Возможность распространенія тѣхъ же заключеній на случаи, когда $f(x)$ не сохраняетъ постоянной величины, остается подъ вопросомъ.

большихъ величинахъ, k_0, n_0-k_0, k, $n-k$. Я имѣю въ виду дополнить обычный выводъ этого приближеннаго выраженія, который можно найти, напримѣръ, въ «Теоріи вѣроятностей» (1898 г.) М. А. Тихомандрицкаго и въ «Ученіи о вѣроятностяхъ» (1912 г.) М. Волкова (у послѣдняго, впрочемъ, допущена крупная обмолвка), чтобы получилась предѣльная теорема при разнообразныхъ предположеніяхъ о порядкѣ возрастанія k_0, n_0-k_0, $\frac{nk_0}{n_0}$, $\frac{n(n_0-k_0)}{n_0}$.

Напомню вкратцѣ этотъ выводъ, принаровленный къ случаю, когда n, n_0, k_0, n_0-k_0 безконечно большія числа одного порядка. Во-первыхъ, оба интеграла

$$\int_0^1 x^{k_0+k}(1-x)^{n_0+n-k_0-k}dx \quad \text{и} \quad \int_0^1 x^{k_0}(1-x)^{n_0-k_0}dx$$

и множитель $\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1.2\ldots k}$, передъ ихъ отношеніемъ выражаемъ черезъ произведенія вида $1.2.3\ldots N$, гдѣ N получаетъ значенія

$$k,\ n-k=l,\ n,\ k_0,\ n_0-k_0=l_0,\ n_0+1,\ k_0+k,\ l_0+l,\ n+n_0+1.$$

Примѣняя къ полученнымъ произведеніямъ формулу Стирлинга и отбрасывая единицу въ множителяхъ n_0+1 и $n+n_0+1$, получаемъ вмѣсто P_k выраженіе

$$P'_k=\sqrt{\frac{nn_0{}^3(k+k_0)(l+l_0)}{2\pi klk_0l_0(n+n_0)^3}}\,W_k$$

при

$$W_k=\left(\frac{n_0k}{nk_0}\right)^{-k}\left(\frac{n_0l}{nl_0}\right)^{-l}\left(\frac{n_0(k+k_0)}{(n_0+n)k_0}\right)^{k+k_0}\left(\frac{n_0(l+l_0)}{(n_0+n)l_0}\right)^{l+l_0}.$$

Затѣмъ полагаемъ

$$k=n\frac{k_0}{n_0}+z=n\frac{k_0}{n_0}+t\sqrt{\frac{2k_0l_0n(n+n_0)}{n_0{}^3}}$$

и ограничиваемъ t неравенствами

$$t_1<t<t_2,$$

гдѣ t_1 и t_2 какія-нибудь опредѣленныя числа и $t_2>t_1$.

Если теперь числа

$$k_0,\ l_0,\ \frac{nk_0}{n_0}\ \text{и}\ \frac{nl_0}{n_0}$$

возрастаютъ безпредѣльно, то отношенія

$$\frac{n_0k}{nk_0},\ \frac{n_0l}{nl_0},\ \frac{n_0(k_0+k)}{(n_0+n)k_0},\ \frac{n_0(l_0+l)}{(n_0+n)l_0},$$

равныя

$$1+\frac{n_0z}{nk_0},\ 1-\frac{n_0z}{nl_0},\ 1+\frac{n_0z}{(n_0+n)k_0},\ 1-\frac{n_0z}{(n_0+n)l_0},$$

стремятся къ единицѣ; ибо

$$\left(\frac{n_0z}{nk_0}\right)^2=\frac{2l_0(n+n_0)t^2}{nn_0k_0},\quad \left(\frac{n_0z}{nl_0}\right)^2=\frac{2k_0(n+n_0)t^2}{nn_0l_0},$$

$$\left(\frac{n_0z}{(n+n_0)k_0}\right)^2=\frac{2l_0nt^2}{(n+n_0)n_0k_0},\quad \left(\frac{n_0z}{(n+n_0)l_0}\right)^2=\frac{2k_0nt^2}{(n+n_0)n_0l_0},$$

$$\frac{l_0n}{(n+n_0)n_0k_0}<\frac{l_0(n+n_0)}{nn_0k_0}<\frac{n+n_0}{nk_0}=\frac{1}{k_0}+\frac{n_0}{nk_0},$$

$$\frac{k_0n}{(n+n_0)n_0l_0}<\frac{k_0(n+n_0)}{nn_0l_0}<\frac{n+n_0}{nl_0}=\frac{1}{l_0}+\frac{n_0}{nl_0}.$$

Отсюда нетрудно заключить, что вмѣсто P_k' можно взять выраженіе

$$P_k''=\sqrt{\frac{n^3{}_0}{2\pi k_0l_0n(n+n_0)}}\,W_k$$

и отношеніе

$$P_k'' : P_k,$$

при сдѣланномъ нами предположеніи о безпредѣльномъ возрастаніи чиселъ k_0, l_0, $\frac{nk_0}{n_0}$ и $\frac{nl_0}{n_0}$, должно стремиться къ единицѣ.

Установивъ это, переходимъ къ разсмотрѣнію $\log W_k$, для чего разлагаемъ логарифмы вышеприведенныхъ выраженій

$$1+\frac{n_0z}{nk_0},\ 1-\frac{n_0z}{nl_0},\ 1+\frac{n_0z}{(n+n_0)k_0},\ 1-\frac{n_0z}{(n+n_0)l_0}$$

въ ряды по возрастающимъ степенямъ дробей

$$\frac{n_0z}{nk_0},\ \frac{n_0z}{nl_0},\ \frac{n_0z}{(n+n_0)k_0},\ \frac{n_0z}{(n+n_0)l_0},$$

которыя, какъ только-что было выяснено, становятся у насъ безконечно малыми.

Въ основномъ случаѣ, когда всѣ числа

$$n_0, \quad k_0, \quad l_0, \quad n$$

безконечно большія одного и того же порядка, можно признать достаточнымъ тѣхъ разсужденій, которыя приведены въ книгѣ М. А. Тихомандрицкаго и согласуются съ лекціями П. Л. Чебышева; такъ какъ въ разложеніяхъ всѣхъ четырехъ логарифмовъ

$$-k\log\frac{n_0 k}{nk_0}, \quad -l\log\frac{n_0 l}{nl_0}, \ (k_0+k)\log\frac{n_0(k_0+k)}{(n_0+n)\,k_0}, \ (l_0+l)\log\frac{n_0(l_0+l)}{(n_0+n)\,l_0},$$

члены съ третьими и высшими степенями z будутъ тогда безконечно малыми величинами. Въ другихъ же случаяхъ, которые мы имѣемъ въ виду, члены со степенями z выше второй въ отдѣльныхъ рядахъ могутъ не быть безконечно малыми и становятся таковыми только въ общей суммѣ четырехъ рядовъ, равной логарифму W_k.

Первая степень z въ логарифмѣ W_k исчезаетъ совершенно; вторая даетъ $-t^2$. Общій же членъ, гдѣ z входитъ въ степени выше второй, разбивается на такія двѣ части:

$$\frac{(-1)^{i-1}z^i {n_0}^{i-1}}{{k_0}^{i-1}}\left(\frac{1}{i-1}-\frac{1}{i}\right)\left(\frac{1}{n^{i-1}}-\frac{1}{(n+n_0)^{i-1}}\right)$$
$$-\frac{z^i {n_0}^{i-1}}{{l_0}^{i-1}}\left(\frac{1}{i-1}-\frac{1}{i}\right)\left(\frac{1}{n^{i-1}}-\frac{1}{(n+n_0)^{i-1}}\right).$$

Здѣсь разность

$$\frac{1}{n^{i-1}}-\frac{1}{(n+n_0)^{i-1}}$$

число положительное и меньше обѣихъ дробей

$$\frac{1}{n^{i-1}} \quad \text{и} \quad \frac{(i-1)\,n_0}{n^i},$$

а разность $\frac{1}{i-1}-\frac{1}{i}$ равна $\frac{1}{i\,(i-1)}$; наконецъ, что касается z, то его числовая величина меньше числа

$$a=\tau\sqrt{\frac{2k_0\,l_0\,n\,(n+n_0)}{{n_0}^3}},$$

гдѣ τ означаетъ наибольшее изъ чиселъ $-t_1$, t_2.

На этомъ основанiи мы можемъ утверждать, что числовая величина разности

$$\log W_k - t^2$$

меньше обѣихъ суммъ

$$\sum \frac{a^i}{i(i-1)n^{i-1}} \left\{ \frac{n_0{}^{i-1}}{k_0{}^{i-1}} + \frac{n_0{}^{i-1}}{l_0{}^{i-1}} \right\} \quad \text{и} \quad \sum \frac{a^i}{in^i} \left\{ \frac{n_{0i}}{k_0{}^{i-1}} + \frac{n_0{}^i}{l_0{}^{i-1}} \right\},$$

гдѣ $i = 3,\ 4,\ 5, \ldots$ Суммы же эти соотвѣтственно меньше

$$\frac{\dfrac{a^3n_0{}^2}{6n^2k_0{}^2}}{1 - \dfrac{an_0}{nk_0}} + \frac{\dfrac{a^3n_0{}^2}{6n^2l_0{}^2}}{1 - \dfrac{an_0}{nl_0}} \quad \text{и} \quad \frac{\dfrac{a^3n_0{}^3}{3n^3k_0{}^2}}{1 - \dfrac{an_0}{nk_0}} + \frac{\dfrac{a^3n_0{}^3}{3n^3l_0{}^2}}{1 - \dfrac{an_0}{nl_0}}.$$

Наконецъ надо вспомнить, что дроби $\frac{an_0}{nk_0}$ и $\frac{an_0}{nl_0}$ стремятся къ нулю, когда k_0, l_0, $\frac{nk_0}{n_0}$ и $\frac{nl_0}{n_0}$ возрастаютъ безпредѣльно, и убѣдиться въ томъ же относительно дробей

$$\frac{a^3n_0{}^2}{n^2k_0{}^2} \quad \text{и} \quad \frac{a^3n_0{}^2}{n^2l_0{}^2}$$

или относительно дробей

$$\frac{a^3n_0{}^3}{n^3k_0{}^2} \quad \text{и} \quad \frac{a^3n_0{}^3}{n^3l_0{}^2}.$$

Для указанной цѣли различаемъ два случая

$$n \leqq n_0 \quad \text{и} \quad n > n_0$$

При $n \leqq n_0$ разсматриваемъ дроби

$$\frac{a^3n_0{}^2}{n^2k_0{}^2} \quad \text{и} \quad \frac{a^3n^2{}_0}{n^2l_0{}^2}$$

и для ихъ квадратовъ легко получаемъ слѣдующiя неравенства

$$\left(\frac{a^3n_0{}^2}{n^2k_0{}^2}\right)^2 \leqq \frac{8\tau^6 k_0{}^3 l_0{}^3 n^3 8 n_0{}^3 n_0{}^4}{n_0{}^9 n^4 k_0{}^4} < \frac{64\tau^6 n_0}{nk_0},\ \left(\frac{a^3n_0{}^2}{n^2l_0{}^2}\right)^2 < \frac{64\tau^6 n_0}{nl_0}.$$

А при $n > n_0$ разсматриваемъ дроби

$$\frac{a^3n_0{}^3}{n^3k_0{}^2} \quad \text{и} \quad \frac{a^3n_0{}^3}{n^3l_0{}^2}$$

и устанавливаемъ неравенства

$$\left(\frac{a^3n_0{}^3}{n^3k_0{}^2}\right)^2 < \frac{8\tau^6 k_0{}^3 l_0{}^3 n^3 8 n^3 n_0{}^6}{n_0{}^9 n^6 k_0{}^4} < \frac{64\tau^6}{k_0},\ \left(\frac{a^3n_0{}^3}{n^3l_0{}^2}\right)^2 < \frac{64\tau^6}{l_0}.$$

Можно и сразу разсматривать оба случая $n \leqq n_0$ и $n > n_0$ Для этого нужно только принять во вниманіе неравенство

$$\frac{1}{n^{i-1}} - \frac{1}{(n+n_0)^{i-1}} < \frac{(i-1)n_0}{(n+n_0)n^{i-1}},$$

на основаніи котораго находимъ, что числовая величина разности

$$\log W_k - t^2$$

меньше суммы

$$\sum \frac{a^i}{i(n+n_0)n^{i-1}} \left\{ \frac{{n_0}^i}{{k_0}^{i-1}} + \frac{{n_0}^i}{{l_0}^{i-1}} \right\},$$

гдѣ i по прежнему получаетъ значенія 3, 4, 5,...

Послѣдняя же сумма, очевидно, меньше

$$\frac{1}{3} \left\{ \frac{\dfrac{a^3{n_0}^3}{(n+n_0)n^2{k_0}^2}}{1-\dfrac{an_0}{nk_0}} + \frac{\dfrac{a^3{n_0}^3}{(n+n_0)n^2{l_0}^2}}{1-\dfrac{an_0}{nl_0}} \right\}.$$

Съ другой стороны находимъ

$$\left\{ \frac{a^3{n_0}^3}{(n+n_0)n^2{k_0}^2} \right\}^2 < \frac{8\tau^6(n+n_0)}{nk_0} = \frac{8\tau^6}{k_0} + \frac{8\tau^6 n_0}{nk_0},$$

$$\left\{ \frac{a^3{n_0}^3}{(n+n_0)n^2{l_0}^2} \right\}^2 < \frac{8\tau^6(n+n_0)}{nl_0} = \frac{8\tau^6}{l_0} + \frac{8\tau^6 n_0}{nl_0}.$$

Такимъ образомъ мы доказываемъ, что отношеніе

$$P_k : \sqrt{\frac{{n_0}^3}{2\pi k_0 l_0 n(n+n_0)}}\, e^{-t^2},$$

при всѣхъ разсматриваемыхъ нами значеніяхъ

$$k = n\frac{k_0}{n_0} + t\sqrt{\frac{2k_0 l_0 n(n+n_0)}{{n_0}^3}},$$

будетъ сколь угодно близко къ единицѣ, когда всѣ числа

$$k_0,\ l_0,\ n\frac{k_0}{n_0} \text{ и } n\frac{l_0}{n_0}$$

будутъ достаточно велики. А отсюда уже непосредственно вытекаетъ для вѣроятности неравенствъ

$$t_1\sqrt{\frac{2k_0 l_0 n(n+n_0)}{{n_0}^3}} < k - n\frac{k_0}{n_0} < t_2\sqrt{\frac{2k_0 l_0 n(n+n_0)}{{n_0}^3}}$$

извѣстное предѣльное выраженіе

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{t_1}^{t_2} e^{-t^2}\,dt$$

и вытекаетъ оно, какъ видно, для всѣхъ возможныхъ случаевъ, когда числа

$$k_0,\ n_0,\ n\frac{k_0}{n_0},\ .\ n\ \frac{l_0}{n_0}$$

возрастаютъ безпредѣльно. Къ другимъ же случаямъ нашъ выводъ, конечно, не относится.

Подобное же вычисленіе можно провести и при рѣшеніи другой задачи Лапласа, въ которой число появленій событія дано, а неопредѣленнымъ остается число испытаній [1]), при чемъ вѣроятность каждаго значенія n, при условіяхъ Лапласа, выражается такъ

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1.2\ldots k}\,\frac{\int_0^1 x^{k_0+k}(1-x)^{n_0+n-k_0-k}\,dx}{\int_0^1 x^{k_0-1}(1-x)^{n_0-k_0}dx},$$

гдѣ k_0, k, n_0, n сохраняютъ вышеуказанный смыслъ, только k разсматривается какъ данное число, а n можетъ получать значенія k, $k+1$, $k+2$, $k+3, \ldots$

Относительно послѣдней задачи слѣдуетъ замѣтить, что рѣшеніе ея по необходимости соединено съ невозможнымъ предположеніемъ равенства первоначальныхъ (до наблюденія) вѣроятностей для всѣхъ значеній n, число коихъ безконечно.

При большихъ значеніяхъ k_0, n_0, k эта невозможность затушевывается, но она ясно проявляется при $k_0=0$, когда интегралъ

$$\int_0^1 x^{k_0-1}(1-x)^{n_0-k_0}\,dx,$$

входящій въ знаменатель выраженія вѣроятности, обращается въ ∞ и сама вѣроятность становится поэтому нулемъ.

4-го марта 1914 г.

---

[1]) *Laplace.* Théorie analytique des probabilités. Livre II. Chapitre VI, § 31. (1814 г.). *Буняковскій.* Основанія математической теоріи вѣроятностей. Глава 8, § 69 (1846 г.).

Объ измѣреніи алгебраическихъ формъ.

М. Н. Лагутинскаго.

§ 1. Подъ алгебраической формой разумѣютъ однородный полиномъ нѣсколькихъ перемѣнныхъ.

Такъ:

$$x_1^m + x_2^m \text{ и } (x_1+x_2+x_3)^m + x_4^m$$

будутъ формами m-ой степени.

Между первой и второй по отношенію къ линейному преобразованію есть существенная разница.

Какимъ бы обратимымъ преобразованіемъ мы не преобразовывали первую форму, она всегда будетъ зависѣть отъ двухъ перемѣнныхъ. Но если бы мы положили

$$x_1 = y_1 - y_2 - y_3\,, \quad x_2 = y_2\,,$$
$$x_3 = y_3\,, \quad x_4 = y_4\,,$$

то вторая форма перейдетъ въ первую, т. е. будетъ зависѣть только отъ двухъ перемѣнныхъ вмѣсто прежнихъ четырехъ.

Условимся называть такія формы отъ p перемѣнныхъ, которыя при помощи необратимаго линейнаго преобразованія переходятъ въ формы отъ q перемѣнныхъ, въ которыхъ уже невозможно произвести дальнѣйшаго уменьшенія числа перемѣнныхъ, формами $q-1$-го измѣренія.

Изъ этого опредѣленія непосредственно слѣдуетъ, что всѣ линейныя формы—нулевого измѣренія.

Чтобы получить возможность аналитически опредѣлять измѣреніе данной формы, докажемъ теорему:

Если форма m-го порядка $f(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ $q-1$-го измѣренія, то между ея первыми производными существуетъ $p-q$ и только $p-q$ линейныхъ соотношеній съ постоянными коэффиціентами.

Согласно опредѣленію существуетъ преобразованіе

$$x_i = \sum_{j=1}^{p} a_{ij}\, y_j\,, \qquad (i=1,\ 2,\ 3,\dots,p) \qquad (1)$$

которое преобразуетъ форму f въ форму $\varphi(y_1\,,\ y_2\,,\dots,\ y_q)$, которая зависитъ только отъ q перемѣнныхъ.

Если условимся обозначать выраженія $\sum\limits_{j=1}^{p} a_{ij} y_j$ соотвѣтственно черезъ $\overline{x}_i$, то преобразованная форма можетъ быть представлена черезъ $f(\overline{x}_1\,,\ \overline{x}_2\,,\dots,\ \overline{x}_p)$.

Такъ какъ она по условію не зависитъ отъ персмѣнныхъ $y_{q+1}\,,\ y_{q+2}\,,\dots,y_p$, то ея частныя производныя по этимъ перемѣннымъ должны быть тождественно равными нулю, и слѣдовательно мы, выполнивъ эти операціи, получимъ слѣдующія тождества:

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial \overline{x}_i}\, a_{ij} = 0. \qquad (j=q+1,\ q+2,\dots,,\ p)$$

Такъ какъ преобразованіе (1) по предположенію обратимое, то, возвращаясь въ полученныхъ тождествахъ къ прежнимъ перемѣннымъ x_i, мы получаемъ такія:

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i}\, a_{ij} = 0\,, \qquad (j=q+1,\ q+2,\dots,\ p) \qquad (2)$$

которыя даютъ $p-q$ линейныхъ соотношеній между первыми производными формы f.

Легко видѣть, что всѣ эти линейныя соотношенія не могутъ сводиться къ меньшему числу.

Допустивъ это, мы должны принять, что всѣ опредѣлители матриссы

$$\begin{vmatrix} a_{1,q+1} & a_{2,q+1} & a_{3,q+1} & \dots & a_{p,q+1} \\ a_{1,q+2} & a_{2,q+2} & a_{3,q+2} & \dots & a_{p,q+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1,p} & a_{2,p} & a_{3,p} & \dots & a_{p,p} \end{vmatrix}$$

равны нулю. Но тогда и опредѣлитель преобразованія (1) также равнялся бы нулю, и оно перестало бы быть обратимымъ, что противъ предположенія.

Но точно также, кромѣ тождествъ (2), не можетъ существовать ни одного тождества такого же характера, которое не было бы ихъ слѣдствіемъ.

Предположимъ обратное, и пусть

$$\sum_{i=1}^{p} b_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \qquad (3)$$

такое новое тождество.

Можно разсматривать совокупность равенствъ (2) и (3) какъ систему дифференціальныхъ уравненій въ частныхъ производныхъ перваго порядка. Эта система замкнутая, и ея $q-1$ интегралъ будутъ линейными функціями перемѣнныхъ x_i.

Пусть

$$z_i \equiv \sum_{j=1}^{p} c_{ij} x_j \qquad (i=1,\ 2,\ldots,\ q-1) \qquad (4)$$

полная система ея $q-1$ интеграловъ. Тогда можно предположить безъ вреда для общности, что опредѣлитель $\sum \pm c_{11} c_{22} \ldots c_{q-1,\ q-1}$ отличенъ отъ нуля.

Форма f, которая также представляетъ интегралъ разсматриваемой системы, будетъ на основаніи общихъ свойствъ интеграловъ подобныхъ системъ функціей $q-1$ интеграловъ z_i. Это будетъ, очевидно, однородный полиномъ m-го порядка отъ этихъ интеграловъ. Такимъ образомъ, обозначивъ получаемый полиномъ черезъ φ, придемъ къ тождеству:

$$f(x_1,\ x_2, \ldots, x_p) \equiv \varphi(z_1,\ z_2, \ldots, z_{q-1}). \qquad (5)$$

Напишемъ линейное преобразованіе:

$$\begin{aligned} y_i &= z_i & (i=1,\ 2,\ldots,\ q-1) \\ y_i &= x_i. & (i=q,\ q+1,\ldots,p) \end{aligned} \qquad (6)$$

Оно будетъ обратимымъ, такъ какъ опредѣлитель его приведется къ опредѣлителю $\sum \pm c_{11} c_{22} \ldots c_{q-1,\ q-1}$ и слѣдовательно будетъ отличнымъ отъ нуля.

Пользуясь этимъ преобразованіемъ, замѣняемъ въ формѣ f перемѣнныя x_i перемѣнными y_i и получаемъ въ виду тождества (5) и формулъ преобразованія изъ формы f форму $\varphi(y_1,\ y_2, \ldots, y_{q-1})$.

Отсюда видно, что обратимое линейное преобразованіе преобразуетъ нашу форму f въ форму, зависящую только отъ $q-1$ перемѣнныхъ; а въ этомъ случаѣ она была бы противъ предположенія формой меньшаго измѣренія, чѣмъ $q-1$-го.

Итакъ, предположеніе, что тождество (3) не представляетъ слѣдствія тождествъ (2), приводитъ къ противорѣчію, заключающемуся въ томъ, что форма f не могла бы быть при этомъ условіи q — 1-го измѣренія.

А потому *измѣреніе формы f на единицу меньше числа линейно-независимыхъ среди ея p первыхъ производныхъ.*

Тождества (2) можно найти, не зная преобразованія (1). Для этого достаточно примѣненія теоріи детерминантовъ.

Но разъ эти тождества найдены, нетрудно опредѣлить и одно изъ преобразованій, которое превращаетъ данную форму отъ p перемѣнныхъ въ форму, зависящую отъ q перемѣнныхъ.

Для этого поступаемъ совершенно также, какъ для полученія преобразованій (6), т. е. разсматриваемъ тождества (2), какъ систему дифференціальныхъ уравненій въ частныхъ производныхъ 1-го порядка. Найдя полную систему q линейныхъ интеграловъ, обозначимъ ихъ черезъ z_i:

$$z_i \equiv \sum_{j=1}^{p} c_{ij} x_j. \qquad (i=1, 2, 3, \dots, q) \tag{7}$$

Такъ какъ они независимы, то одинъ изъ опредѣлителей матриссы:

$$\left| \begin{array}{cccc} c_{11} & c_{12} & \cdot\cdot & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \cdot\cdot & c_{2p} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ c_{q1} & c_{q2} & \cdot\cdot & c_{qp} \end{array} \right| \tag{8}$$

долженъ быть отличенъ отъ нуля. Предположимъ для простоты, что опредѣлитель $\sum \pm c_{11} c_{22} \dots c_{qq}$ отличенъ отъ нуля (въ противномъ случаѣ достаточно перемѣнить нумерацію перемѣнныхъ); тогда полагаемъ:

$$\begin{array}{ll} y_i = z_i & (i=1, 2, 3, \dots, q) \\ y_i = x_i. & (i=q+1, q+2, \dots, p) \end{array} \tag{9}$$

Легко показать, что это преобразованіе искомое. Въ самомъ дѣлѣ, на основаніи свойствъ дифференціальныхъ системъ въ частныхъ производныхъ форма f выразится въ функціи интеграловъ z_i.

Можно получить это выраженіе напр. такимъ образомъ: разрѣшимъ тождества (7) относительно перемѣнныхъ $x_1, x_2, \dots, x_q$ и, подставивъ полученный результатъ въ полиномъ $f(x_1, x_2, \dots, x_p)$, получимъ функцію однихъ только z_i $(i=1,\ 2, \dots, q)$ и слѣдовательно будемъ имѣть тождественно

$$f(x_1,\ x_1, \dots, x_p) \equiv \varphi(z_1,\ z_2, \dots, z_q), \tag{10}$$

гдѣ φ нѣкоторый однородный полиномъ m-го порядка относительно линейныхъ выраженій z_i.

Примѣнивъ преобразованіе (9), получаемъ на основаніи тождества (10) вмѣсто данной формы f форму $\varphi(y_1, y_2, \dots, y_q)$, зависящую только отъ q перемѣнныхъ.

Тождество (10) приводитъ къ новой теоремѣ: *форма:* $f(x_1, x_2, \dots, x_p)$ $q-1$*-го измѣренія представляетъ собой функцію q независимыхъ линейныхъ функцій перемѣнныхъ* x_i.

Въ предыдущемъ мы показали, какъ опредѣлить измѣреніе функціи и найдти по крайней мѣрѣ одно преобразованіе, при помощи котораго мы можемъ привести форму къ виду, въ которомъ она содержитъ наименьшее число перемѣнныхъ.

Очевидно, что число такихъ преобразованій не одно.

Разсмотримъ два такихъ преобразованія. Первое, опредѣляемое формулами (9), обозначимъ черезъ A, а второе, новое, черезъ B.

Такъ какъ всякое обратимое линейное преобразованіе можно разложить на два, изъ которыхъ первое будетъ даннымъ, то второе преобразованіе B можно предположить составленнымъ изъ преобразованія A и другого, опредѣляемаго слѣдующими формулами:

$$y_i \equiv \sum_{j=1}^{p} b_{ij} u_j. \qquad (i=1, 2, 3, \dots, p) \tag{11}$$

Первое преобразованіе, какъ мы уже выяснили, превратитъ форму f въ форму $\varphi(y_1,\ y_2, \dots, y_q)$. Обозначивъ для сокращенія черезъ $\overline{y}_i$ линейное выраженіе $\sum\limits_{j=1}^{p} b_{ij} u_j$, найдемъ окончательный результатъ преобразованія B въ видѣ формы $\varphi(\overline{y}_1,\ \overline{y}_2, \dots, \overline{y}_q)$.

Такъ какъ эта форма по предположенію въ свою очередь зависитъ только отъ q изъ перемѣнныхъ u_i, то можемъ предположить, что она не зависитъ напр. отъ перемѣнныхъ $u_{q+1},\ u_{q+2}, \dots, u_p$.

Тогда производныя отъ формы $\varphi(\overline{y}_1,\ \overline{y}_2, \dots, \overline{y}_q)$ по перемѣннымъ $u_{q+1},\ u_{q+2}, \dots, u_p$ будутъ равны нулю, и мы должны имѣть тождественно:

$$\sum_{j=1}^{q} \frac{\partial \varphi}{\partial \overline{y}_i} \frac{\partial \overline{y}_i}{\partial u_j} \equiv \sum_{i=1}^{q} \frac{\partial \varphi}{\partial \overline{y}_i} b_{ij} = 0.$$

$$(j = q+1,\ q+2, \dots, p)$$

Если хотя бы одна изъ постоянныхъ b_{ij} была бы отличной отъ нуля, только что написанныя равенства показали бы, что между первыми производными формы $\varphi(y_1, y_2, \dots, y_q)$ не всѣ независимы; измѣренiе формы φ было бы меньше $q-1$; а слѣдовательно форма f не была бы формой $q-1$-го измѣренiя, а это—противъ предположенiя.

Поэтому мы должны принять, что всѣ постоянныя b_{ij} въ полученныхъ равенствахъ равны нулю, и, слѣдовательно, q первыхъ формулъ преобразованiя (11) примутъ такой видъ:

$$y_i = \sum_{j=1}^{q} b_{ij} u_j. \qquad (i=1, 2, \dots, q)$$

Это преобразованiе производитъ въ формѣ $\varphi(y_1, y_2, \cdots, y_q)$ самое общее обратимое преобразованiе перемѣнныхъ y_i къ новымъ q перемѣннымъ u_j.

Такимъ образомъ мы приходимъ къ заключенiю, что *мы преобразуемъ форму f самымъ общимъ преобразованiемъ къ наименьшему числу перемѣнныхъ, если, преобразовавъ ее какимъ нибудь способомъ къ наименьшему числу перемѣнныхъ, преобразуемъ полученную форму $\varphi(y_1, y_2, \dots, y_q)$ самымъ общимъ линейнымъ преобразованiемъ къ новымъ q перемѣннымъ.*

Мы видѣли, что форма f $q-1$-го измѣренiя выражается черезъ q линейныхъ выраженiй z_i. Если бы намъ удалось найти другое выраженiе формы f черезъ новыхъ q линейныхъ выраженiй v_i отъ p перемѣнныхъ x_i, то, на основанiи послѣдней теоремы, любое выраженiе z_i представляло бы собой линейную функцiю выраженiй v_i, и, наоборотъ, каждое выраженiе v_i должно было бы быть линейной функцiей выраженiей z_i.

Мы прибѣгали для опредѣленiя преобразованiя, преобразующаго данную форму къ наименьшему числу перемѣнныхъ, къ интегрированiю уравненiй въ частныхъ производныхъ перваго порядка. Но можно получить это преобразованiе и при помощи простого дифференцированiя.

Форма f имѣетъ $t = \binom{p+m-2}{p-1}$ частныхъ производныхъ $m-1$-го порядка.

Обозначимъ производную

$$\frac{\partial^{(m-1)} f}{\partial x_1^{k_{1l}} \partial x_2^{k_{2l}} \partial x_3^{k_{3l}} \dots \partial x_p^{k_{pl}}},$$

гдѣ k_{1l}, k_{2l}, $k_{3l}, \dots, k_{pl}$ представляетъ собой одну изъ системъ цѣлыхъ неотрицательныхъ чиселъ, дающихъ въ суммѣ $m-1$ черезъ u_l, а одночленъ $x_1^{k_{1l}} x_2^{k_{2l}} x_3^{k_{3l}} \dots x_p^{k_{pl}} \binom{m-1}{k_{1l} k_{2l} k_{3l} \dots k_{pl}}$ черезъ B_l.

Такимъ образомъ будемъ имѣть t производныхъ $u_1, u_2, \dots, u_t$. Это будутъ линейныя функціи перемѣнныхъ x_i. Производныя отъ функціи u_l по x_i условимся обозначать черезъ u_{il}.

Предполагаемъ, какъ и прежде, форму fq — 1-го измѣренія, и, слѣдовательно, для нея существуютъ тождества (2) въ числѣ $p-q$ и тождество (10).

Если отъ обѣихъ частей тождествъ (2) возьмемъ $m-1$-я производныя, то получаемъ слѣдующія:

$$\sum_{i=1}^{p} a_{ij} u_{il} = 0. \qquad (12)$$

$$(j = q+1,\ q+2, \dots,\ p) \quad (l = 1,\ 2, \dots,\ t).$$

Такъ какъ функціи u_l линейныя, то полученныя тождества показываютъ, что результатъ подстановки $x_i = a_{ij}\,(i = 1, 2, \dots, p)$ равняется нулю для $j = q+1,\ q+2, \dots, p$; другими словами уравненія

$$u_l = 0 \quad (l = 1,\ 2,\ 3, \dots,\ t) \qquad (13)$$

допускаютъ $p-q$ различныхъ рѣшеній a_{ij} $(i = 1,\ 2, \dots,\ p)$.

Но тогда между линейными функціями u_l независимыхъ можетъ быть не больше q.

Предположимъ, что ихъ меньше; тогда уравненія (13) допустятъ по крайней мѣрѣ еще одно новое рѣшеніе, независимое отъ прежнихъ.

Пусть это будетъ $b_1, b_2, \dots, b_p$. Результатъ подстановки $x_i = b_i$ въ производную u_l можно написать такъ:

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial u_l}{\partial x_i} b_i\ .$$

Такъ какъ этотъ результатъ равенъ нулю, мы имѣемъ рядъ тождествъ

$$\sum_{i=1}^{p} b_i \frac{\partial u_l}{\partial x_i} = 0\ . \qquad (l=1,\ 2, \dots,\ t)$$

Унножаемъ ихъ на B_l и суммируемъ по l отъ 1 до t и получаемъ въ результатѣ:

$$\sum_{i=1}^{p} b_i \sum_{l=1}^{t} B_l \frac{\partial u_l}{\partial x_i} = 0.$$

Но по свойству однородныхъ функцій мы имѣемъ:

$$\sum_{l=1}^{l} B_l \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \equiv m! \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

и наше тождество получаетъ видъ:

$$\sum_{i=1}^{p} b_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0.$$

Такимъ образомъ наше предположеніе, что между производными u_l независимыхъ меньше q, привело къ существованію новаго линейнаго тождества между первыми производными независимаго отъ прежнихъ тождествъ (2) и показало этимъ, что форма f измѣренія меньшаго $q-1$.

Мы должны, слѣдовательно, отбросить и это предположеніе. Остается принять, что среди производныхъ u_i какъ разъ q независимыхъ.

Итакъ измѣреніе формы f на единицу меньше числа независимыхъ между ея $m-1$-ми производными.

Предположимъ, что какъ разъ первыя u_1, $u_2, \ldots, u_q$ независимы между собою.

Беремъ отъ обѣихъ частей тождества (10) такія производныя $m-1$-го порядка, чтобы въ его лѣвой части получились производныя u_1, $u_2, \ldots, u_q$.

Въ правой же части получимъ линейныя выраженія отъ $z_1, z_2, \ldots, z_q$, и, слѣдовательно, можно написать ихъ слѣдующимъ образомъ:

$$u_i = \sum_{j=1}^{q} b_{ij} z_j. \qquad (i=1, 2, 3, \ldots, q) \qquad (14)$$

Опредѣлитель $\sum \pm b_{11}\, b_{22} \ldots b_{qq}$ не можетъ равняться нулю, такъ какъ тогда изъ полученныхъ равенствъ мы могли бы исключить всѣ z_j и получили бы линейное соотношеніе между независимыми функціями u_1, $u_2, \ldots, u_q$.

А разъ этотъ опредѣлитель отличенъ онъ нуля, то, разрѣшпвъ равенства (14) относительно z_j, выразимъ ихъ черезъ производныя u_i и, вставивъ полученный результатъ въ тождество (10), получимъ выраженіе формы f черезъ ея линейныя производныя.

Этого можно достичь и непосредственно, положивъ формулы

$$y_i = u_i \qquad (i=1, 2, \ldots, q)$$

$$y_i = x_i \qquad (i=q+1, q+2, \ldots, p)$$

вмѣсто формулъ (9) и выполнивъ преобразованіе.

Конечно, если функціи u_i, разсматриваемыя какъ функціи перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots, x_q$, зависимы, то придется измѣнить эти формулы надлежащихъ образомъ.

§ 2. Можно обобщить введенное понятіе объ измѣреніи алгебраическихъ формъ въ самыхъ различныхъ направленіяхъ и пойти дальше въ изученіи находящихся въ связи съ нимъ свойствъ формъ. Я не буду въ настоящей статьѣ касаться этихъ вопросовъ, а постараюсь выяснить на примѣрахъ важность введенія этого понятія.

Прежде всего замѣчу, что мы встрѣтимся съ этимъ вопросомъ при общей задачѣ канонизаціи формъ, т. е. въ задачѣ приведенія формъ при помощи линейнаго преобразованія къ простѣйшему виду.

Вопросъ объ измѣреніи, разсмотрѣнный въ предыдущемъ параграфѣ, ставитъ, собственно говоря, самую первую и самую простую задачу въ этой теоріи, а именно приведеніе данной формы при помощи надлежаще выбраннаго линейнаго преобразованія къ формѣ, зависящей отъ наименьшаго числа перемѣнныхъ. Какъ видно изъ предыдущаго, такая задача рѣшается во всей общности и притомъ при помощи однихъ раціональныхъ дѣйствій.

Отсюда ясно, что мы натолкнемся на этотъ случай чуть ли не въ каждомъ математическомъ вопросѣ, въ которомъ встрѣчаются алгебраическія формы. Я ограничусь въ настоящей работѣ двумя приложеніямъ.

Одно будетъ касаться теоріи исключенія, въ частности изображенія аналитически алгебраическихъ многообразій меньшаго измѣренія. Другое коснется приложенія алгебраическихъ формъ къ интегрированію обыкновенныхъ линейныхъ дифференціальныхъ уравненій.

Этотъ параграфъ я посвящу первому вопросу, а слѣдующій второму.

Сначала разсмотримъ уравненія, заключающія въ себѣ произвольные параметры.

Возьмемъ уравненіе

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_p, a_1, a_2, \ldots, a_r) = 0, \qquad (1)$$

гдѣ $x_1, x_2, \ldots, x_p$ — перемѣнныя, а величины $a_1, a_2, \ldots, a_r$ — произвольные параметры.

Система рѣшеній $x_i = b_i$ можетъ удовлетворять уравненію (1) при какихъ угодно значеніяхъ параметровъ $a_1, a_2, \ldots, a_r$.

Величины $b_1, b_2, \ldots, b_p$ могутъ при этомъ быть постоянными, или нѣкоторыя изъ нихъ произвольными, а остальныя ихъ функціями.

Возьмемъ для примѣра два уравненія:

$$a_1 f(x_1, x_2, x_3) + a_2 f_2(x_1, x_2, x_3) = 0$$

и

$$a_1 f_1(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4) + a_2 f_2(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4) = 0.$$

Первое дастъ при произвольныхъ параметрахъ a_1 и a_2 нѣкоторое число точекъ пересѣченія двухъ кривыхъ:

$$f_1(x_1,\ x_2,\ x_3) = 0,\quad f_2(x_1,\ x_2,\ x_3) = 0,$$

а второе—безконечное число точекъ, составляющихъ линію пересѣченія двухъ поверхностей,

$$f_1(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4) = 0,\quad f_2(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4) = 0.$$

Поэтому видимъ, что въ этомъ случаѣ одна изъ величинъ x_1, x_2, x_3, x_4 можетъ имѣть совершенно произвольное значеніе.

Какъ видно изъ этихъ примѣровъ, въ виду произвольности параметровъ a_j уравненіе (1) эквивалентно нѣсколькимъ.

Въ самомъ дѣлѣ, разсматриваемыя значенія перемѣнныхъ должны удовлетворять на ряду съ уравненіемъ (1) и уравненію

$$f(x_1,\ x_2, \ldots,\ x_p,\ c_1,\ c_2, \ldots,\ c_r) = 0, \tag{2}$$

гдѣ c_i — новыя значенія параметровъ a_i, внесенныя вмѣсто нихъ въ уравненіе (1). Можно составить подобнымъ образомъ сколько-угодно уравненій.

Предположимъ, что мы составили такимъ образомъ k уравненій и убѣдились въ ихъ независимости. Составляемъ $k+1$-е такимъ-же образомъ. Если оно не слѣдствіе прежнихъ k уравненій, то мы будетъ имѣть опять систему прежняго характера, но уже въ числѣ $k+1$ уравненій. Эта новая система можетъ оказаться несовмѣстимой, тогда наше уравненіе (1) не будетъ имѣть рѣшеній при произвольныхъ значеніяхъ постоянныхъ a_i, и процессъ полученія новыхъ уравненій, дополняющихъ уравненіе (1), будетъ законченъ. Точно также процессъ будетъ законченъ, если вновь написанное уравненіе окажется слѣдствіемъ прежнихъ k уравненій. Въ этомъ случаѣ прибавленіе новыхъ станетъ также безполезнымъ, такъ какъ эти уравненія будутъ точно также слѣдствіемъ уже найденныхъ k.

Итакъ, прибавляя къ уравненію (1) уравненія типа (2), т. е. полученныя изъ уравненій (1) замѣной произвольныхъ параметровъ a_i новыми, независимыми отъ нихъ c_i, мы либо придемъ къ системѣ несовмѣстныхъ уравненій, либо къ такой системѣ уравненій, что всякое новое будетъ слѣдствіемъ этой системы.

Такимъ образомъ уравненіе (1) при условіи, чтобы его рѣшенія не зависили отъ произвольныхъ параметровъ, которые въ него входятъ, эквивалентно системѣ уравненій.

Это обстоятельство позволяетъ представить при помощи одного уравненія линію, поверхность и далѣе въ пространствѣ p-го измѣренія.

Прежде чѣмъ изложить этотъ вопросъ во всей его общности, разберемъ частный случай кривыхъ въ трехмѣрномъ пространствѣ.

Пусть уравненія

$$\left.\begin{aligned} f_0(x_1\,,\ x_2,\ x_3,\ x_4) &= 0 \\ \varphi_0(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4) &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

$$\psi_0(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4) = 0\,, \qquad (4)$$

гдѣ всѣ три функціи f_0, φ_0, ψ_0 представляютъ собой однородные полиномы перемѣнныхъ x_1, x_2, x_3, x_4, опредѣляютъ неразлагаемую кривую A.

Дѣло происходитъ слѣдующимъ образомъ: уравненія (3) опредѣляютъ въ пересѣченіи нѣкоторую кривую, которая состоитъ изъ двухъ частей, одна часть будетъ кривая A, а другая кривая B, дополняющая ее до полнаго пересѣченія поверхностей, опредѣляемыхъ уравненіями (3). Третья же поверхность, опредѣляемая уравненіемъ (4), проходитъ черезъ кривую A, но ни кривая B и никакая ея часть не находится на этой поверхности. Такимъ образомъ роль третьей поверхности ограничивающая,—она исключаетъ дополнительную кривую B. Въ томъ-же случаѣ, когда кривая A представляетъ полное пересѣченіе поверхностей, опредѣляемыхъ первыми двумя уравненіями, третье уравненіе перестаетъ играть существенную роль и можетъ быть отброшено по желанію, но можетъ быть и оставлено, чтобы не разсматривать отдѣльно этого случая.

Возьмемъ теперь произвольную точку пространства $(a_1\ a_2\ a_3\ a_4)$ и найдемъ уравненіе конуса, имѣющаго точку a_i за вершину, а кривую A за направляющую.

Сначала найдемъ уравненіе конуса, имѣющаго вершину въ точкѣ a_i и проходящаго черезъ полное пересѣченіе двухъ первыхъ поверхностей.

Возьмемъ точку x_i на этомъ пересѣченіи. Послѣдняя совмѣстно съ точкой a_i опредѣлитъ образующую искомаго конуса. Обозначимъ координаты какой нибудь точки на этой образующей черезъ y_1, y_2, y_3, y_4. Тогда онѣ удовлетворятъ слѣдующимъ условіямъ:

$$\left|\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{array}\right| = 0, \qquad (5)$$

гдѣ написанное равенство надо понимать такъ, что каждый опредѣлитель этой матриссы равенъ нулю. Равенство (5) эквивалентно двумъ условіямъ. Координаты x_i удовлетворяютъ кромѣ того уравненіямъ (3). Такъ какъ всѣ эти уравненія однородны относительно поремѣнныхъ x_i, то изъ уравненій (3) и (5) можно ихъ исключить.

Получимъ результатъ въ видѣ полинома однороднаго относительно перемѣнныхъ y_i, приравненнаго нулю:

$$\Phi(y_i,\ a_i) = 0. \tag{6}$$

Это и будетъ уравненіе искомаго конуса, проходящаго черезъ полное пересѣченіе первыхъ двухъ поверхностей.

Если мы помножимъ всѣ элементы средней строки матриссы (5) на a_4 и вычтемъ изъ нихъ соотвѣтственно всѣ элементы третьей строки, помноженные на y_4, то мы дадимъ ей слѣдующій видъ:

$$\left|\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ a_4y_1 - a_1y_4 & a_4y_2 - a_2y_4 & a_4y_3 - a_3y_4 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{array}\right| = 0. \tag{7}$$

Этотъ видъ матриссы покажетъ, что результатъ исключенія (6) будетъ зависѣть только отъ выраженій $z_1 \equiv a_4y_1 - a_1y_4$, $z_2 \equiv a_4y_2 - a_2y_4$, $z_3 \equiv a_4y_3 - a_3y_4$, и, слѣдовательно, полиномъ $\Phi(y_i, a\ )$ будетъ второго измѣренія, такъ какъ существуетъ линейное преобразованіе, которое превращаетъ его въ форму, зависяшую только отъ перемѣнныхъ z_1, z_2, z_3.

По той же причинѣ полиномъ $\Phi(y_i, a_i)$ будетъ удовлетворять уравненію въ частныхъ производныхъ:

$$a_1 \frac{\partial\Phi}{\partial y_1} + a_2 \frac{\partial\Phi}{\partial y_2} + a_3 \frac{\partial\Phi}{\partial y_3} + a_4 \frac{\partial\Phi}{\partial y_4} = 0. \tag{8}$$

Въ самомъ дѣлѣ, онъ представляетъ функцію трехъ выраженій z_1, z_2, z_3, а каждое изъ этихъ послѣднихъ удовлетворяетъ ему.

Полиномъ $\Phi(y_i,\ a_i)$ можно представить, какъ произведеніе неприводимыхъ полиномовъ $\Phi_j(y_i, a_i)$ $(j = 1,\ 2,\ 3, \ldots,\ l)$ въ надлежащихъ степеняхъ.

Легко убѣдиться, что каждый изъ этихъ полиномовъ удовлетворяетъ уравненію (8).

Разсмотримъ, напр. полиномъ Φ_1. Можно представить полиномъ $\Phi(y_i,\ a_i)$ въ видѣ произведенія $\Phi_1^k U$, гдѣ множитель U представляетъ собой полиномъ, не дѣлящійся на Φ_1.

Обозначимъ операцію

$$a_1\frac{\partial}{\partial y_1}+a_2\frac{\partial}{\partial y_2}+a_3\frac{\partial}{\partial y_3}+a_4\frac{\partial}{\partial y_4}$$

символомъ D, написаннымъ передъ обозначеніемъ функціи. Тогда тождество (8) перепишется въ новомъ видѣ:

$$Uk\Phi_1^{k-1}D\Phi_1+\Phi_1^kDU=0$$

или

$$kUD\Phi_1+\Phi_1DU=0.$$

Такъ какъ полиномъ U не дѣлится на полиномъ Φ_1 по предположенію, то для возможности существованія нашего тождества необходимо, чтобы полиномъ $D\Phi_1$ дѣлился на полиномъ Φ_1, а это невозможно, если только полиномъ $D\Phi_1$ не обращается тождественно въ нуль.

Итакъ, каждый изъ неприводимыхъ множителей Φ_i полинома $\Phi(y_i, a_i)$ будетъ удовлетворять уравненію (8), т. е. будемъ имѣть тождественно

$$D\Phi_j(y_i,\ a_i)=0. \qquad (j=1,\ 2,\ldots,\ l) \qquad (10)$$

Отсюда слѣдуетъ, что каждый полиномъ Φ_j будетъ второго измѣренія, какъ функція только трехъ линейныхъ выраженій z_i, и слѣдовательно, уравненіе

$$\Phi_j(y_i,\ a_i)=0 \qquad (11)$$

представитъ собой уравненіе конуса съ вершиной въ точкѣ a_i.

Съ другой стороны кривая пересѣченія поверхностей, опредѣляемыхъ уравненіями (3), состоитъ изъ ряда неразлагаемыхъ кривыхъ S_1, S_2, $S_3,\ldots,$ S_l.

На основаніи предыдущаго всѣ точки напр. кривой S_1 обращаютъ въ нуль полиномъ $\Phi(y_i,\ a_i)$ при какихъ-угодно значеніяхъ параметровъ a_i.

Пусть кривая S_1 опредѣляется двумя алгебраическими функціями Θ_1 и Θ_2, такъ что для координатъ всѣхъ ея точекъ имѣемъ слѣдующія соотношенія:

$$y_1=y_4\,\Theta_1\left(\frac{y_3}{y_4}\right),\quad y_2=y_4\Theta_2\left(\frac{y_3}{y_4}\right). \qquad (12)$$

Подставляемъ значенія координатъ y_1 и y_2 по формуламъ (12) въ полиномъ $\Phi(y_i\,,\ a_i)$ и получимъ тождественный нуль.

Но результатъ этой подстановки равняется произведенію результатовъ той же подстановки въ полиномы Φ_j.

Очевидно, что, если ни одинъ изъ этихъ множителей не обращается тождественно въ нуль при какихъ-угодно значеніяхъ величинъ $\frac{y_3}{y_4}$, a_1, a_2, a_3, a_4, то не можетъ обратиться въ нуль и ихъ произведеніе.

Итакъ, для всѣхъ точекъ кривой S_1 долженъ обращаться въ нуль одинъ изъ полиномовъ Φ_j при какихъ угодно значеніяхъ параметровъ a_i.

Пусть это будетъ Φ_1.

Найдемъ сѣченіе этого конуса съ плоскостью $y_4=0$. Для этого достаточно положить въ уравиеніи

$$\Phi_1(y_i,\ a_i)=0$$

y_4 равнымъ нулю, и полиномъ Φ_1 обратится въ полиномъ Φ'_1, зависящій только отъ трехъ перемѣнныхъ y_1, y_2, y_3.

Такъ какъ полиномъ Φ_1 есть функція выраженій z_1, z_2, z_3, то для обратнаго полученія полинома Φ_1 четырехъ перемѣнныхъ изъ полинома Φ'_1 достаточно замѣстить въ послѣднемъ перемѣнныя y_1, y_2, y_3 черезъ $\frac{z_1}{a_4}$, $\frac{z_2}{a_4}$, $\frac{z_3}{a_4}$.

Если точка a_i не занимаетъ въ пространствѣ спеціальнаго положенія относительно кривой S_1, то число прямыхъ, проходящихъ черезъ точку a_i и встрѣчающихъ кривую S_1 не менѣе двухъ разъ—конечно.

Поэтому, если мы проведемъ черезъ точку a_i такую плоскость K, которая не проходитъ ни черезъ одну подобную прямую, то она пересѣчетъ кривую въ столькихъ точкахъ, каковъ ея порядокъ. Соединяя эти точки пересѣченія съ точкой a_i, получимъ столько прямыхъ, каковъ порядокъ кривой S_1. Но пересѣченіе этихъ прямыхъ съ плоскостью $y_4=0$ даетъ намъ точки пересѣченія плоскости K съ проекціей кривой S_1 изъ точки a_i на плоскость $y_4=0$. Отсюда слѣдуетъ, что эта проекція того же порядка, какъ и кривая S_1 и, слѣдовательно, выражается въ плоскости $y_4=0$ уравненіемъ $P=0$, гдѣ подъ обозначеніемъ P подразумѣваемъ однородный полиномъ отъ перемѣнныхъ y_1, y_2, y_3 порядка одинаковаго съ порядкомъ кривой S_1.

Этотъ полиномъ P долженъ дѣлить полиномъ Φ'_1; но, такъ какъ послѣдній неприводимъ (иначе и полиномъ Φ_1 былъ бы приводимымъ), то они могутъ различаться лишь постояннымъ множителемъ, и мы приходимъ къ заключенію, что порядокъ полинома Φ_1 долженъ быть равенъ порядку кривой S_1.

На основаніи разсужденій, аналогичныхъ только—что написаннымъ, мы можемъ убѣдиться, что, если бы полиномъ Φ_1 обращался въ нуль при какихъ угодно значеніяхъ параметровъ a_i не только для всѣхъ точекъ кривой S_1, но и для всѣхъ безъ исключенія точекъ какой-нибудь другой кривой S, то порядокъ полинома Φ_1 былъ бы не ниже суммы порядковъ кривыхъ S_1 и S.

Отсюда слѣдуетъ, что каждый неприводимый множитель полинома $\Phi(y_i, a_i)$, приравненный нулю, дастъ уравненіе конуса, проходящаго черезъ неразлагаемую кривую пересѣченія поверхностей, опредѣляемыхъ уравненіями (3) съ вершиной въ точкѣ a_i и, слѣдовательно, при произвольности параметровъ a_i опредѣлитъ соотвѣтствующую неразлагаемую кривую вполнѣ.

Въ числѣ этихъ множителей найдется и такой, при помощи котораго опредѣляется и кривая A.

Точно такому же изслѣдованію подвергнемъ пересѣченіе двухъ поверхностей: 1) опредѣляемой первымъ изъ уравненій (3) и 2) опредѣляемой уравненіемъ (4).

Согласно предыдущему, мы найдемъ уравненіе конуса съ вершиной въ точкѣ a_i, если исключимъ перемѣнныя x_i изъ уравненій обѣихъ только что выбранныхъ нами поверхностей и изъ уравненій (5).

Уравненіе это получится въ такомъ видѣ:

$$\psi(y_i, a_i) = 0,$$

гдѣ функція $\psi(y_i, a_i)$—нѣкоторый полиномъ, удовлетворяющій тѣмъ-же условіямъ, что и полиномъ $\Phi(y_i, a_i)$.

Полиномъ $\psi(y_i, a_i)$ разлагается на неприводимые множители, которые соотвѣтствуютъ неразлагаемымъ кривымъ, составляющимъ полное пересѣченіе двухъ новыхъ поверхностей. Въ числѣ этихъ кривыхъ находится и кривая A. Если мы приравняемъ нулю полиномъ, отвѣчающій кривой A, то получимъ уравненіе конуса съ вершиной a_i, проходящаго черезъ кривую A. Уравненіе этого конуса мы уже получили въ такой формѣ:

$$F(y_i, a_i) = 0.$$

Слѣдовательно, полиномъ F будетъ дѣлить и полиномъ $\psi(y_i, a_i)$ и представитъ такимъ образомъ общій наибольшій дѣлитель полиномовъ $\Phi(y_i, a_i)$ и $\psi(y_i, a_i)$ и можетъ быть найденъ при помощи однихъ раціональныхъ дѣйствій.

(Замѣтимъ, что опредѣленіе полиномовъ $\psi(y_i, a_i)$ и $\Phi(y_i, a_i)$ станетъ затруднительнымъ, если полиномы f_0, φ_0, ψ_0 будутъ имѣть общихъ дѣлителей. Но измѣненія, которыя необходимо сдѣлать въ этомъ случаѣ, настолько просты, что я не буду на этомъ останавливаться).

Тогда уравненіе

$$F(y_i,\ a_i) = 0$$

будетъ того же порядка, какъ и кривая A. Оно представитъ конусъ того же порядка съ вершиной въ точкѣ a_i, проходящій черезъ кривую A и при произвольности параметровъ a_i опредѣлитъ ее вполнѣ. Другими словами, если мы въ этомъ уравненіи будемъ давать произвольнымъ постояннымъ a_i новыя значенія и присоединять полученныя уравненія до тѣхъ поръ, пока это дополненіе не перестанетъ измѣнять полученной системы уравненій, то найденная система уравненій будетъ эквивалентна системѣ уравненій (3) и (4).

Такое аналитическое представленіе кривыхъ въ пространствѣ важно тѣмъ, что ставитъ ихъ изученіе въ зависимость отъ полинома одного и того же характера. Обращаю вниманіе на то обстоятельство, что полиномъ $F(y_i,\ a_i)$, зависящій отъ четырехъ перемѣнныхъ 2-го измѣренія.

Подобное представленіе кривой можетъ быть примѣнено напр. для опредѣленія числа существенныхъ параметровъ отъ которыхъ зависитъ самая общая кривая двойной кривизны даннаго порядка.

Ради этого нетрудно показать, что полиномъ $F(y_i,\ a_i)$ будетъ цѣлой функціей миноровъ, составленныхъ изъ элементовъ двухъ нижнихъ строкъ матриссы (5).

Но такъ какъ эти шесть миноровъ можно разсматривать, какъ координаты произвольной прямой, то уравненіе

$$F(y_i,\ a_i) = 0$$

по замѣнѣ величинъ y_i, a_i этими минорами дастъ уравненіе комплекса прямыхъ, встрѣчающихъ кривую A. Онъ будетъ того же порядка, какъ и сама кривая A.

Этотъ комплексъ будетъ частнаго вида, и разность между числомъ его коэффиціентовъ и числомъ независимыхъ условій между ними, уменьшенная на единицу, дастъ намъ число существенныхъ параметровъ, отъ которыхъ зависитъ кривая.

То, что изложено здѣсь о кривой, можетъ быть совершенно аналогично распространено на всѣ алгебраическія многообразія въ пространствѣ высшаго измѣренія.

Такъ какъ полное изложеніе со всѣми доказательствами, излишне увеличило бы размѣръ настоящей статьи, особенно въ виду того, что потребовалось бы предварительное изложеніе нѣкоторыхъ тонкихъ вопросовъ алгебраическаго исключенія, то я ограничусь изложеніемъ однихъ результатовъ, исходя изъ наиболѣе простого опредѣленія алгебраическаго многообразія.

Пусть уравненія:

$$f_i(x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots , x_{p+1}) = 0\ , \qquad (i=1,\ 2,\ 3, \ldots,\ q+1) \qquad (13)$$

гдѣ подъ обозначеніемъ f_i подразумѣваемъ однородные полиномы въ перемѣнныхъ x_i, опредѣляютъ неразлагающееся многообразіе $p - q$-го измѣренія A.

Предполагаемъ, кромѣ того, что каждыя q уравненій изъ $q+1$ уравненій (13) не удовлетворяются всѣми точками алгебраическаго многообразія измѣренія порядка большаго $p - q$. Тогда какія-нибудь q изъ этихъ уравненій опредѣлятъ многообразіе $p - q$-го измѣренія, составной частью котораго будетъ многообразіе A, и $q+1$-е уравненіе будетъ играть ограничивающую роль, выдѣляя изъ этого многообразія, многообразіе A.

Разсмотримъ q первыхъ уравненій въ системѣ (13) и многообразіе B $p-q$-го порядка, опредѣляемое ими.

Мы можемъ превратить это многообразіе въ многообразіе $p-1$-го измѣренія, замѣщая каждую точку его элементарнымъ многообразіемъ $q-1$-го измѣренія.

Обозначимъ координаты произвольной точки X многообразія B черезъ x_i, координаты $q-1$ произвольно расположенныхъ точекъ C_j черезъ a_{ji} $(j=1,\ 2,\ 3, \ldots , q-1)$, а текущія координаты точки элементарнаго многообразія $q-1$-го измѣренія C, опредѣляемаго q точками X и $C_1,\ C_2,\ C_3, \ldots , C_{q-1}$ черезъ y_i

Тогда между этими величинами будутъ имѣть мѣсто соотношенія, которыя мы получимъ, приравнявъ нулю каждый опредѣлитель слѣдующей матриссы

$$\left|\begin{array}{ccccc}
x_1 & x_2 & x_3 & \ldots & x_{p+1} \\
y_1 & y_2 & y_3 & \ldots & y_{p+1} \\
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1,p+1} \\
\multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\
\multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\
\multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\
a_{q-1,1} & a_{q-1,2} & a_{q-1,3} & \ldots & a_{q-1,\ p+1}
\end{array}\right| \qquad (14)$$

Полученныя соотношенія будутъ заключать только $p - q + 1$ независимыхъ.

Изъ q уравненій многообразія B и изъ $p - q + 1$ уравненій элементарнаго многообразія C можно исключить перемѣнныя x_i, и получимъ одно уравненіе, заключающее только перемѣнныя y_i и произвольныя постоянныя a_{ji} :

$$\Phi(y_i\ ,\ a_{ji}) = 0\ ,$$

причемъ $\Phi(y_i, a_{ji})$ — однородный полиномъ въ перемѣнныхъ y_i, удовлетворяющій $q-1$ уравненіямъ въ частныхъ производныхъ:

$$\sum_{i=1}^{p+1} a_{ji} \frac{\partial \Phi}{\partial y_i} \equiv 0 \qquad (j=1,\ 2, \ldots, q-1) \qquad (15)$$

и слѣдовательно $p-q+1$-го измѣренія.

Выбросивъ изъ системы уравненій вмѣсто уравненія $f_{q+1}=0$ уравненіе $f_q=0$, получаемъ новое многообразіе B_1 $p-q$-го измѣренія.

Изъ уравненій многообразія B_1 и изъ $p-q+1$ уравненій элементарнаго многообразія C исключаемъ перемѣнныя x_i и получаемъ въ результатѣ уравненіе:

$$\Psi(y_i, a_{ji}) = 0,$$

гдѣ полиномъ $\Psi(y_i, a_{ji})$ обладаетъ тѣми же свойствами, что и полиномъ $\Phi(y_i, a_{ji})$.

Разыскиваемъ общій наибольшій дѣлитель этихъ двухъ полиномовъ. Пусть это будетъ полиномъ $F(y_i, a_{ji})$. Оказывается, что онъ будетъ неприводимъ, его порядокъ будетъ равенъ порядку многообразія A и онъ удовлетворитъ условіямъ (15), и, слѣдовательно, будетъ, какъ алгебраическая форма, $p-q+1$-го измѣренія.

Уравненіе

$$F(y_i, a_{ji}) = 0 \qquad (16)$$

будетъ удовлетворяться всѣми точками многообразія A, каковы бы ни были значенія постоянныхъ a_{ji}, и, кромѣ того, давая въ уравненіи (16) произвольнымъ параметрамъ a_{ji} различныя значенія достаточное число разъ, получимъ систему, эквивалентную системѣ (13), т. е. вполнѣ опредѣляющую многообразіе A.

Можно продолжить изслѣдованіе аналогично изслѣдованію кривой двоякой кривизны и показать, что полиномъ $F(y_i, a_i)$ — цѣлая раціональная функція миноровъ матриссы (14), составленныхъ изъ q ея строкъ, т. е. зависитъ отъ перемѣнныхъ y_i и постоянныхъ a_{ji} только черезъ посредство означенныхъ миноровъ.

Но такъ какъ эти миноры можно разсматривать какъ кординаты элементарнаго многообразія $q-1$-го измѣренія въ пространствѣ p-го измѣренія, то уравненіе (16) можно разсматривать, какъ соотношенія между этими минорами.

Такимъ образомъ, если введемъ въ уравненіе (16) эти координаты, то получимъ уравненіе собранія элементарныхъ многообразій $q-1$-го измѣренія, пересѣкающихся съ многообразіемъ A. Порядокъ этого уравненія будетъ равенъ порядку многообразія A.

§ 3. Въ предыдущемъ параграфѣ мы видѣли, что важные вопросы алгебры и геометрiи находятся въ связи съ понятiемъ объ измѣренiи формъ. Настоящiй же параграфъ я посвящу той роли, которую это понятiе играетъ въ интегрированiи линейныхъ дифференцiальныхъ уравненiй.

Знаменитый французскiй математикъ G. Darboux въ двухъ замѣткахъ [1]) подъ заглавiемъ «Sur les systèmes formés d'équations linéaires à une seule variable indépendante» положилъ основанiе примѣненiю теорiи алгебраическихъ формъ къ интегрированiю обыкновенныхъ линейныхъ дифференцiональныхъ уравненiй однороднаго типа. Развитiе идей G. Darboux привело G. H. Halphen'a въ его работѣ: «Sur un problème concernant les équations différentielles linéaires» [2]) къ новой постановкѣ этого вопроса, и онъ далъ главные основы примѣненiя теорiи алгебраическихъ формъ. Этому вопросу посвященъ цѣлый рядъ работъ, занимающихся либо примѣненiемъ идей G. Darboux и G. Halphen'a къ частнымъ случаямъ, либо дальнѣйшимъ усовершенствованiемъ этихъ методовъ. Въ диссертацiи Н. М. Гюнтера подъ заглавiемъ: «О приложенiяхъ теорiи алгебраическихъ формъ къ интегрированiю линейныхъ дифференцiальныхъ уравненiй» можно найти подробное изложенiе этой теорiи и литературу по этому вопросу до 1903-го года.

Въ настоящей работѣ я стремлюсь показать, какiя упрощенiя и выгоды вноситъ въ эту теорiю понятiе объ измѣренiи формъ.

Возьмемъ вмѣстѣ съ G. Darboux систему линейныхъ дифференцiальныхъ уравненiй однороднаго типа

$$\frac{dx_j}{dt}=\sum_{i=1}^{p} a_{ji}x_i \qquad (j=1,\,2,\,3,\ldots,p) \tag{1}$$

и предположимъ, что нѣкоторая форма перемѣнныхъ $x_i\,(i=1,\,2,\ldots,p)$ съ коэффицiентами, которые могутъ зависѣть отъ перемѣнной t, будетъ первымъ интеграломъ системы.

Обозначимъ эту форму черезъ $f(x_1,\,x_2,\ldots,\,x_p)$ и будемъ, слѣдовательно, имѣть тождественно:

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\sum_{j=1}^{p}\frac{\partial f}{\partial x_j}\sum_{i=1}^{p}a_{ji}x_i=0. \tag{2}$$

Замѣтимъ, что, какъ извѣстно, система (1) будетъ имѣть p различныхъ линейныхъ интеграловъ типа

$$\sum_{i=1}^{p}\alpha_{ji}x_i=C_j\,, \qquad (j=1,2,3,\ldots,p) \tag{3}$$

---

[1]) Comptes rendus T. XC. p. 524 et 594.

[2]) Journal de Mathématiques (de Liouville) 4-ème série. 1885 p. 11.

гдѣ, слѣдовательно, опредѣлитель, составленный изъ функцій α_{ji} $\sum \pm \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33}\ldots\alpha_{pp}$ будетъ отличенъ отъ нуля.

По теоремѣ G. Darboux каждая коваріанта формы f, умноженная на нѣкоторой множитель, въ видѣ функціи независимой перемѣнной t, будетъ также интеграломъ системы (1).

Нетрудно показатъ на примѣрахъ, что могутъ существовать формы p перемѣнныхъ, но измѣренія меньшаго $p-1$, которыя не имѣютъ ни одной коваріанты, отличной отъ нуля. Поэтому въ этомъ случаѣ теорема G. Darboux не даетъ новаго интеграла.

Поэтому я предлагаю слѣдующій пріемъ: опредѣлить предварительно измѣреніе формы f и вычислить преобразованіе, которое приводитъ ее къ наименьшему числу перемѣнныхъ.

Пусть это преобразованіе дается напр. такими формулами:

$$\begin{aligned} y_j &= \sum_{i=1}^{p} b_{ji} x_i && (j=1,\ 2,\ 3,\ldots,\ p) \\ y_j &= x_j\,, && (j=q+1,\ q+2,\ldots,\ p) \end{aligned} \tag{4}$$

и, слѣдовательно, форма f въ силу этого преобразованія переходитъ въ форму $\varphi(y_1, y_2, \ldots, y_q)$ q перемѣнныхъ, коэффиціенты которой само собой разумѣется, могутъ зависѣть отъ независимой перемѣнной t.

Если теперь мы преобразуемъ систему (1) къ новымъ перемѣннымъ y_j, то получимъ снова систему линейныхъ дифференціальныхъ уравненій однороднаго типа.

$$\frac{dy_j}{dt} = \sum_{i=1}^{p} c_{ji} y_i\,. \qquad (j=1,\ 2,\ 3,\ldots,\ p) \tag{5}$$

Форма будетъ интеграломъ этой вновь полученной системы, и мы должны имѣть тождественно:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \sum_{j=1}^{q} \frac{\partial\varphi}{\partial y_j} \sum_{i=1}^{p} c_{ji} y_i = 0\,. \tag{6}$$

Такъ какъ форма φ не зависитъ отъ перемѣнныхъ $y_{q+1}, y_{q+2}, \ldots, y_p$, то полученное тождество зависитъ отъ этихъ перемѣнныхъ линейно, и мы должны имѣть отдѣльно:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \sum_{j=1}^{q} \frac{\partial\varphi}{\partial y_j} \sum_{i=1}^{q} c_{ji} y_i = 0\,,$$

$$\sum_{j=1}^{q} \frac{\partial\varphi}{\partial y_j} c_{ji} = 0\,. \qquad (i=q+1,\ q+2,\ldots,\ p).$$

Въ противномъ случаѣ можно было бы опредѣлить одну изъ перемѣнныхъ $y_{q+1}, y_{q+2}, \ldots, y_p$ въ функціи остальныхъ, не заключающей произвольной постоянной.

Затѣмъ, если хотя бы одна изъ функцій c_{ji} была бы отлична отъ нуля, на основаніи изслѣдованій § 1-го форма φ была бы порядка ниже $q-1$. Отсюда слѣдуетъ, что уравненія (5) должны имѣть видъ:

$$\frac{dy_j}{dt} = \sum_{i=1}^{q} c_{ji} y_i \qquad (j=1, 2, 3, \ldots, q)$$

$$\frac{dy_j}{dt} = \sum_{i=1}^{p} c_{ji} y_i \,. \qquad (j=q+1, q+2,, \ldots, p)$$

Мы видимъ, что система (1) по преобразованіи разбилась на двѣ части: первая представляетъ собой самостоятельную систему меньшаго порядка q съ извѣстнымъ интеграломъ φ, а интегрированіе второй, если намъ удастся проинтегрировать первую, сводится къ интегрированію системы:

$$\frac{dy_j}{dt} = \sum_{i=q+1}^{p} c_{ji} y_i \qquad (j=q+1, q+2, \ldots, p).$$

порядка $p-q$ и квадратурамъ.

Такимъ образомъ, если даже форма φ также не будетъ имѣть коваріанты, отличный отъ нуля, и, слѣдовательно, этотъ пріемъ не дастъ новаго интеграла, все таки онъ сводитъ интегрированіе системы къ послѣдовательному интегрированію двухъ линейныхъ системъ болѣе низкаго порядка, изъ которыхъ одна съ извѣстнымъ интеграломъ.

Къ этому должно прибавить, что для полученія того же результата нѣтъ необходимости, чтобы форма f удовлетворяла уравненію (2) тождественно. Достаточно, чтобы оно обращалось въ нуль, какъ слѣдствіе уравненія:

$$f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_p) = 0, \tag{7}$$

т. е. достаточно, чтобы форма f была бы частнымъ интеграломъ G. Darboux.

Покажемъ, что въ данномъ случаѣ форма f, умноженная на нѣкоторую функцію независимой перемѣнной t, будетъ первымъ интеграломъ системы (1).

Достаточно ограничиться случаемъ, когда функція f—неприводимый полиномъ. Тогда для того, чтобы уравненіе (2) было бы слѣдствіемъ уравненія (7), достаточно, если полиномъ, находящійся въ лѣвой части уравненія (2), отличается только множителемъ отъ полинома $f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_p)$. Этотъ множитель будетъ нѣкоторой функціей перемѣнной t и вычисляется легко: достаточно раздѣлить какой-нибудь коэффиціентъ перваго полинома на соотвѣтствующій коэффиціентъ второго; т. е. этотъ множитель равенъ отношенію коэффиціентовъ при одинаковыхъ членахъ въ обоихъ полиномахъ. Обозначивъ его λ, мы можемъ написать тождество:

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\sum_{j=1}^{p}\frac{\partial f}{\partial x_i}\sum_{i=1}^{p}a_{ji}x_i-\lambda f=0\,,$$

которое покажетъ, что форма

$$f(x_1,\ x_2,\ x_3,\ldots,x_p)\,e^{-\int\lambda dt}$$

первый интегралъ системы (1).

По общему свойству первыхъ интеграловъ всякій интегралъ представляетъ собой функцію полнаго комплекта независимыхъ интеграловъ.

Въ настоящемъ случаѣ кромѣ полинома $f(x_1,\ x_2,\ x_3,\ldots,\ x_p)$ существуетъ p линейныхъ независимыхъ интеграловъ (3). На основаніи предыдущаго мы вправѣ предположить, что форма f будетъ измѣренія $p-1$, т. е. не можетъ быть выражена черезъ число меньшее p независимыхъ линейныхъ выраженій. Поэтому полиномъ f можетъ быть выраженъ черезъ интегралы (3). Кромѣ того въ это выраженіе войдутъ всѣ эти интегралы полностью.

Выраженіе это можно получить слѣдующимъ образомъ:

Обозначаемъ интегралъ $\sum_{i=1}^{p}a_{ji}x_i$ черезъ z_i и получаемъ рядъ равенствъ:

$$z_j=\sum_{i=1}^{p}a_{ji}\,x_i.\qquad (j=1,\ 2.\ 3,\ldots,\ p)\qquad(8)$$

Разрѣшаемъ эти равенства относительно перемѣнныхъ x_i и вставимъ полученныя выраженія въ интегралъ f. На основаніи вышесказаннаго онъ долженъ обратиться въ полиномъ отъ z_i съ *постоянными* коэффиціентами. Такимъ образомъ по G. H. Halphen'у задача сводится къ опредѣленію такого линейнаго преобразованія перемѣнныхъ x_i, которое преобразовало бы форму $f(x_1,\ x_2,\ x_3,\ldots,\ x_p)$ въ форму, зависящую только отъ перемѣнныхъ z_i, коэффиціенты которой уже не будутъ зависѣть отъ перемѣнной t.

Эта задача всегда возможна, только при нѣкоторыхъ частныхъ предположеніяхъ относительно полинома $f(x_1,\ x_2,\ x_3,\ldots,\ x_p)$ въ рѣшеніе войдутъ неопредѣленныя величины. По роду задачи ихъ надо считать за неизвѣстныя функціи перемѣнной t.

Разрѣшивъ полученныя преобразованія относительно перемѣнныхъ z_i, мы получимъ формулы (8). Если въ нихъ не будетъ заключаться неизвѣстныхъ функцій независимой перемѣнной t, то интегралы нашей системы будутъ найдены. Въ томъ же случаѣ, когда въ нихъ войдутъ неизвѣстныя функціи, можно образовать систему дифференціальныхъ уравненій порядка равнаго числу этихъ неизвѣстныхъ функцій.

Итакъ окончательное рѣшеніе изучаемой задачи зависитъ отъ опредѣленія указаннаго преобразованія. Рѣшенію этой задачи я надѣюсь посвятить другую статью. А теперь перейдемъ къ задачѣ, которую изслѣдованія G. H. Halphen'а тѣсно связали съ только что изложенной.

Дано дифференціальное уравненіе:

$$y^{(m)} + p_1 y^{(m-1)} + p_2 y^{(m-2)} + \ldots + p_{m-1} y' + p_m y = 0. \qquad (9)$$

Французскій ученый ставитъ такую задачу:

Извѣстно значеніе цѣлой и однородной функціи $f(y_1, y_2, y_3, \ldots, y_m)$ n-го порядка съ постоянными коэффиціентами отъ частныхъ интеграловъ уравненія (9). Опредѣлить значенія частныхъ интеграловъ y_i?

Оказывается, что эта задача всегда разрѣшима, если не существуетъ цѣлой и однородной функціи тѣхъ же частныхъ интеграловъ и того же порядка, которая равнялась бы нулю.

Для ознакомленія съ общей теоріей я позволю себѣ отослать читателя къ уже цитированнымъ работамъ G. H. Halphen'а и Н. М. Гюнтера и посвятить остальную часть предлагаемымъ мною дополненіямъ.

При этомъ выяснится степень трудности задачи и обстоятельства, отъ которыхъ зависитъ рѣшеніе. Мы увидимъ между прочимъ, что можно использовать въ цѣляхъ интегрированія не только ту форму, значеніе которой намъ дано, но и ту, значеніе которой равно нулю.

G. H. Halphen на ряду съ формой $f(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ разсматриваетъ всѣ поляры, полученныя изъ нея при помощи дифференціальныхъ операцій типа $\sum\limits_{j=1}^{m} y_j^{(i)} \dfrac{\partial}{\partial y_j}$, гдѣ i число, обозначающее порядокъ производныхъ $y_j^{(i)}$, будетъ меньше m.

Такимъ образомъ у насъ составится $N = \binom{m+n-1}{m-1}$ функцій отъ частныхъ интеграловъ и ихъ производныхъ до m—1-го порядка включительно. Расположимъ эти функціи въ какомъ-нибудь порядкѣ и пронумеруемъ, въ результатѣ чего функція $f(y_1, y_2, y_3, \ldots, y_m)$ у насъ будетъ обозначена черезъ f_0, а всѣ остальныя черезъ f_g, гдѣ индексу g будемъ давать всѣ цѣлыя значенія отъ 1 до N—1.

Эти функціи f_g обладаютъ тѣмъ свойствомъ, что ихъ производныя выражаются черезъ нихъ линейно.

Въ самомъ дѣлѣ, это очевидно для всѣхъ функцій f_g, которыя не заключаютъ m—1-хъ производныхъ отъ частныхъ рѣшеній y_i,

По свойству полярныхъ операцій функція f_g, зависящая отъ производныхъ $y_j^{(m-1)}$ можетъ быть получена при помощи операціи $\sum\limits_{j=1}^{m} y_j^{(m-1)} \dfrac{\partial}{\partial y_j}$ изъ другой функціи типа f_g, напр. f_h, такъ что имѣемъ:

$$\left\{\sum_{j=1}^{m} y_j^{(m-1)} \frac{\partial}{\partial y_j}\right\}^l f_h \equiv \alpha f_g\,,$$

гдѣ α нѣкоторое раціональное число.

Тогда производная отъ функціи f_g будетъ имѣть слагаемое новаго типа:

$$\frac{l}{\alpha}\left\{\sum_{j=1}^{m} y_j^{(m)} \frac{\partial}{\partial y_j}\right\}\left\{\sum_{j=1}^{m} y_j^{(m-1)} \frac{\partial}{\partial y_j}\right\}^{l-1} f_h.$$

Но въ силу уравненія (9) мы имѣемъ

$$y_j^{(m)} = -\sum_{i=1}^{m} p_i y_j^{(m-i)}, \qquad (j=1,\, 2,\, 3,\ldots,\, m),$$

и, слѣдовательно, это слагаемое представится въ видѣ такой суммы:

$$-\frac{l}{\alpha}\sum_{i=1}^{m} p_i \left\{\sum_{j=1}^{m} y_j^{(m-i)} \frac{\partial}{\partial y_j}\right\}\left\{\sum_{j=1}^{m} y_j^{(m-1)} \frac{\partial}{\sigma y_j}\right\}^{l-1} f_h.$$

Изъ выраженія этой суммы видно, что коэффиціенты уравненія (9) p_i умножаются на одну изъ функцій $f(g=0,\ 1,\ 2,\ldots,\ N-1)$, и, слѣдовательно, предложеніе, что производная каждой изъ функцій f_g выражается черезъ нихъ линейно, справедливо во всѣхъ случаяхъ.

Обозначимъ значеніе функціи, которое она пріобрѣтаетъ по подстановкѣ вмѣсто частныхъ рѣшеній y_i ихъ выраженій черезъ перемѣнную t, черезъ $\psi(t)$ и выводимъ помощью послѣдовательнаго дифференцированія и принимая во вниманіе только-что выясненное предложеніе, изъ равенства

$$\psi(t) = f_0$$

новыя:

$$\psi^{(k)}(t) = \sum_{g=0}^{N-1} e_{gk} f_g\,, \qquad (k=1,\, 2,\, 3,\ldots,\, N) \tag{10}$$

гдѣ коэффиціенты e_{gk}—цѣлыя функціи съ цѣлыми коэффиціентами отъ функцій p_i и ихъ производныхъ.

Изъ уравненій (10) можно исключить функціи f_g и получить соотношеніе, которому должна удовлетворять функція $\psi(t)$. Полученное соотношеніе можно разсматривать также, какъ дифференціальное уравненіе для опредѣленія функціи $\psi(t)$. N его частныхъ интеграловъ будутъ, очевидно, одночлены n-го порядка, составленные изъ частныхъ интеграловъ уравненія (9), и также всякій однородный полиномъ съ постоянными коэффиціентами, составленный изъ частныхъ рѣшеній y_i.

Но уравненія (10) могутъ составлять такую систему, что уже $N+1-s$-ое уравненіе будетъ слѣдствіемъ предыдущихъ. Тогда изъ $N-s+1$ уравненій можно исключить всѣ функціи f_g, и потому получимъ, что уравненіе, которому удовлетворяютъ всѣ одночлены n-го порядка, будетъ порядка $N-s$. Отсюда слѣдуетъ, что между этими одночленами должно существовать s соотношеній съ постоянными коэффиціентами. Эти соотношенія выразятся въ видѣ равенства нулю однородныхъ полиномовъ отъ частныхъ интеграловъ $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_m$, которые мы назовемъ $B_1, B_2, \ldots, B_s$.

Такимъ образомъ можно всегда установить число s этихъ линейныхъ соотношеній. $N+1$ равенствъ (10), разсматриваемыя, какъ линейныя алгебраическія уравненія относительно функцій f_g, могутъ быть не всѣ различны, и въ этомъ случаѣ онѣ могутъ привести къ меньшему, чѣмъ N числу соотношеній. Пусть между ними независимыхъ $N-s_1$. Тогда $N-s_1$ изъ функцій f_g, напр., $f_0, f_{s_1+1}, f_{s_1+2}, \ldots, f_{N-1}$, могутъ быть выражены черезъ остальныя $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_{s_1}$. Каждая изъ производныхъ этихъ s_1 функцій на основаніи предыдущаго выражается линейной функціей $f_0, f_1, f_2, \ldots, f_{N-1}$. Очевидно $s \geqq s_1$.

Изъ этихъ выраженій съ помощью уравненій (10) мы можемъ исключить всѣ функціи f_g, кромѣ $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_{s_1}$ и слѣдовательно получимъ:

$$\frac{df_i}{dt} = \sum_{j=1}^{s_1} E_{ij} f_j + E_i. \qquad (i=1, 2, 3, \ldots, s_1) \qquad (11)$$

Проинтегрировавъ полученную систему, мы найдемъ:

$$f_j = A_j + \sum_{i=1}^{s_1} A_{ji} C_i. \qquad (j=1, 2, 3, \ldots, s_1)$$

Въ виду-же того, что всѣ остальныя функціи f_g выражаются черезъ $f_1, f_2, \ldots, f_{s_1}$ мы будемъ имѣть для всѣхъ функцій f_g слѣдующія выраженія:

$$f_g = A_g + \sum_{i=1}^{s_1} A_{gi} C_i, \qquad (g=0, 1, 2, \ldots, N-1)$$

заключающія въ себѣ s_1 произвольныхъ постоянныхъ C_i.

Появленіе этихъ произвольныхъ постоянныхъ объясняется слѣдующимъ образомъ:

Полиномъ f_0 замѣняемъ полиномомъ:

$$f_0 + C_1B_1 + C_2B_2 + \ldots + C_sB_s.$$

Такъ какъ полиномы B_i по подстановкѣ въ нихъ значеній частныхъ рѣшеній обращаются въ нуль, то этотъ новый полиномъ обратится при этомъ въ функцію $\psi(t)$.

Съ другой стороны, если будемъ составлять поляры этого полинома при помощи полярныхъ операцій типа $\sum y_j^{(i)} \frac{\partial}{\partial y_i}$, то результаты той же подстановки будутъ обязательно заключать всѣ произвольныя постоянныя C_i. Въ противномъ случаѣ частные интегралы $y_1, y_2, \ldots, y_m$ не могли бы быть различны.

Среди полученныхъ поляръ будутъ и интегралы системы (11), а потому $s \leqq s_1$. Сравнивя это неравенство съ прежнимъ, мы убѣждаемся, что $s = s_1$.

Примѣняя къ новымъ, заключающимъ въ себѣ s произвольныхъ постоянныхъ, функціямъ f_g пріемъ G. H. Halphen'a, мы найдемъ въ виду присутствія въ нихъ произвольныхъ постоянныхъ, s интеграловъ въ видѣ частнаго двухъ полиномовъ n-го порядка для линейнаго дифференціальнаго уравненія союзнаго съ (9).

Такъ какъ числитель и знаменатель будутъ частными интегралами типа G. Darboux для союзнаго уравненія, то на основаніи предложенной мной теоремы мы будемъ имѣть $s + 1$ интеграловъ въ видѣ полиномовъ.

Можно на мѣсто полинома f взять одинъ изъ полиномовъ B_i, для котораго функція $\psi(t)$ станетъ равной нулю, а уравненія (11) однороднаго типа. Въ этомъ случаѣ число вновь найденныхъ интеграловъ будетъ s.

Конечно, если s равно единицѣ, то вопросъ рѣшается въ квадратурахъ.

Важно замѣтить, что пріемъ G. H. Halphen'a не требуетъ предварительнаго знанія коэффиціентовъ полиномовъ f, B_i. Они могутъ быть опредѣлены послѣ изъ условія, что полученный полиномъ представляетъ собой дѣйствительно интегралъ линейнаго дифференціальнаго уравненія, союзнаго съ даннымъ (9).

Объ абсолютной сходимости тригонометрическихъ рядовъ.

С. Бернштейна.

1. Какъ извѣстно, сходимость тригонометрическаго ряда Фурье

$$f(x)=a_0+a_1\cos x+b_1\sin x+\ldots+a_n\cos nx+b_n\sin nx+\ldots \qquad (1)$$

для всѣхъ значеній перемѣнной x отнюдь не влечетъ за собою абсолютную сходимость ряда, или, что тоже самое, не является достаточной для сходимости ряда

$$S=|a_0|+|a_1|+|b_1|+\ldots+|a_n|+|b_n|+\ldots \qquad (2)$$

Однако абсолютная сходимость (т. е. сходимость ряда S) имѣетъ мѣсто для широкаго класса функцій. А именно, мы докажемъ такую теорему:

Если функція $f(x)$ удовлетворяетъ условію Липшица

$$|f(x+h)-f(x)|<kh^\alpha$$

степени $\alpha>\frac{1}{2}$, то ея разложеніе въ тригонометрическій рядъ сходится абсолютно; напротивъ, если $\alpha<\frac{1}{2}$, сходимость тригонометрическаго ряда можетъ не быть абсолютной.

Для доказательства первой части теоремы, мы припомнимъ вопервыхъ результатъ, доказанный впервые Lebesgu'емъ, что для функціи $f(x)$, удовлетворяющей условію Липшица степени α, можно указать независимый отъ m коэффиціентъ λ такой, что остатокъ ея строки Фурье

$$\left|\sum_{n=m}^{n=\infty} a_n\cos nx+b_n\sin nx\right|=\left|R_m(x)\right|<\frac{\lambda\log m}{m^{\alpha}} \quad {\scriptstyle (m>1)} \qquad (3)$$

Кромѣ того, намъ понадобится слѣдующая лемма:

Пусть тригонометрическая сумма

$$P(x)=A_1\cos k_1x+A_2\cos k_2x+\ldots A_h\cos k_hx+A_{h+1}\sin k_{h+1}x+\ldots A_n\sin k_nx_i\,,$$

состоящая изъ n членовъ, гдѣ k_1, k_2,... какія угодно цѣлыя числа, остается по численному значенію менѣе 1, т. е. $|P_n(x)|<1$, въ такомъ случаѣ

$$|A_1|+|A_2|+\ldots+|A_n|<\sqrt{2n}. \qquad (4)$$

Въ самомъ дѣлѣ,

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} P_n^2(x)\,dx = A_1^2 + A_2^2 + \ldots + A_n^2 < 2.$$

Но, если $A_1^2 + A_2^2 + \ldots + A_n^2 = M$, то $|A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|$ достигаетъ своего наибольшаго значенія, когда $A_1 = A_2 = \ldots = A_n$, т. е. не превышаетъ $n\sqrt{\frac{M}{n}} = \sqrt{Mn}$. Поэтому въ данномъ случаѣ

$$|A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n| < \sqrt{2n}.$$

Соединяя эти два результата, получимъ первую часть нашей теоремы. Для этого группируемъ члены нашего ряда Фурье такимъ образомъ:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{n=m} a_n \cos nx + b_n \sin nx + \sum_{n=2m+1}^{n=2m} a_n \cos nx + b_n \sin nx +$$
$$+ \sum_{n+2m+1}^{n=4m} a_n \cos nx + b_n \sin nx + \ldots,$$

гдѣ m произвольное цѣлое число (напр., $m=2$). Тогда, вслѣдствіе неравенства (3),

$$\left|\sum_{n=2m+1}^{n=2m} a_n \cos nx + b_n \sin nx\right| \leqq \left|\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx\right| +$$
$$+ \left|\sum_{n=2m+1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx\right| < \frac{2\lambda \log m}{m^{\alpha}},$$
$$\left|\sum_{n=2m+1}^{n=4m} a_n \cos nx + b_n \sin nx\right| < \frac{2\lambda \log 2m}{(2m)^{\alpha}} \text{ и т. д.}$$

Поэтому на основаніи доказанной леммы,

$$\sum_{n=m+1}^{n=2m} |a_n| + |b_n| < \frac{4\lambda \log m}{m^{\alpha - \frac{1}{2}}}, \quad \sum_{n=2m+1}^{n=4m} |a_n| + |b_n| < \frac{4\lambda \log 2m}{(2m)^{\alpha - \frac{1}{2}}} \text{ и т. д.},$$

откуда

$$\sum_{n=m+1}^{n=\infty} |a_n| + |b_n| < \frac{4\lambda}{m^{\alpha-\frac{1}{2}}}\left[\log m + \frac{\log 2m}{2^{\alpha-\frac{1}{2}}} + \frac{\log 4m}{4^{\alpha-\frac{1}{2}}} + \ldots\right] =$$
$$= \frac{4\lambda}{m^{\alpha-\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{1}{2^{\alpha-\frac{1}{2}}}\right)}\left[\log m + \frac{\log 2}{2^{\alpha-\frac{1}{2}} - 1}\right].$$

Такимъ образомъ первая часть теоремы доказана.

2. Для доказательства второй части нашего утвержденія, очевидно, достаточно построить функціи $f(x)$, удовлетворяющія условію Липшица

степени $\alpha < \frac{1}{2}$, сколь угодно близкой къ $\frac{1}{2}$, для которыхъ однако рядъ Фурье абсолютно *не* сходится.

Съ этой цѣлью, для всякаго простого числа $p > 2$, строимъ тригонометрическую сумму порядка $p-1$

$$f_p(x) = \frac{1}{2}a_0 + a_1\cos x + b_1\sin x + \ldots + a_{p-1}\cos(p-1)x + b_{p-1}\sin(p-1)x, \qquad (5)$$

опредѣляемую условіями, что $f_p\left(\frac{2k\pi}{p}\right) = \left(\frac{k}{p}\right)$, $f_p'\left(\frac{2k\pi}{p}\right) = 0$, при $x = 0$, $1, \ldots p-1$, гдѣ $\left(\frac{k}{p}\right)$ есть символъ Лежандра, равный $+1$ или -1, въ зависимости отъ того, является ли число k квадратичнымъ вычетомъ p или нѣтъ [при $k = 0$, символъ $\left(\frac{k}{p}\right) = 0$]. Эту сумму мы получимъ воспользовавшись формулой Jackson'a:

$$F(x) = \sum_{k=0}^{k=p-1} f\left(\frac{2k\pi}{p}\right) \frac{\sin^2\left[\frac{1}{2}p\left(x - \frac{2k\pi}{p}\right)\right]}{p^2\sin^2\left[\frac{1}{2}\left(x - \frac{2k\pi}{p}\right)\right]} = \qquad (6)$$

$$= \frac{1}{2}a_0 + a_1\cos x + b_1\sin x + \ldots + a_{p-1}\cos(p-1)x + b_{p-1}\sin(p-x)x,$$

гдѣ

$$a_l = \frac{2(p-b)}{p^2}\sum_{k=0}^{k=p-1} f\left(\frac{2k\pi}{p}\right)\cos\frac{2kl\pi}{p}, \quad b_l = \frac{2(p-l)}{p^2}\sum_{k=0}^{k=p-1} f\left(\frac{2k\pi}{p}\right)\sin\frac{2kl\pi}{p}.$$

Jackson [1]) приходитъ къ этой весьма интересной формулѣ, исходя изъ разсмотрѣнія интеграла Fejer'a, и замѣчаетъ, что, при $k = 0, 1, \ldots p-1$, $F\left(\frac{2k\pi}{p}\right) = f\left(\frac{2k\pi}{p}\right)$. Но эти p равенствъ были бы недостаточны для опредѣленія $(2p-1)$ коэффиціентовъ a_l, b_l, еслибы функція $F(x)$ не обладала еще важнымъ свойствомъ, которое нетрудно провѣрить, а именно, $F'\left(\frac{2k\pi}{p}\right) = 0$, (при $k = 0, 1, \ldots p-1$); это доставляетъ еще $(p-1)$ условія, которыя связываютъ a_l и b_l равенствами $la - (p-l)a_{p-l} = 0$, $lb_l + (p-l)b_{p-l} = 0$.

Такимъ образомъ формула Jackson'a есть не что иное, какъ точная интерполяціонная формула для опредѣленія тригонометрической суммы

---

[1]) *Jackson.* A formula of trigonometric interpolation. (Rendiconti del Circolo Mathematico di Palermo, 1914).

$F(x)$ порядка $(p-1)$ по условіямъ $F\left(\frac{2k\pi}{p}\right)=f\left(\frac{2k\pi}{p}\right)$, $F'\left(\frac{2k\pi}{p}\right)=0$. Существенное свойство формулы (6), указанное Jackson'омъ и которое вытекаетъ изъ тождества

$$\sum_{k=0}^{k=p-1} \frac{\sin^2\left[\frac{1}{2}p\left(x-\frac{2k\pi}{p}\right)\right]}{p^2\sin^2\left[\frac{1}{2}\left(x-\frac{2k\pi}{p}\right)\right]}=1\,,$$

заключается въ томъ, что, при всякомъ x

$$|F(x)|\leqq M\,,$$

гдѣ M наибольшее изъ значеній $F\left(\frac{2k\pi}{p}\right)$ при $k=0,\ 1,\dots\ p-1$.

Примѣняя все это къ интересующему насъ случаю, находимъ, что функція $f_p(x)$, опредѣленная вышеуказанными условіями, равна

$$f_p(x)=\frac{2}{p^{3/2}}\sum_{l=1}^{l=p-1}\left(\frac{l}{p}\right)(p-l)\cos lx \qquad \text{(при } p=4\mu+1) \tag{7}$$

и

$$f_p(x)=\frac{2}{p^{3/2}}\sum_{l=1}^{l=p-1}\left(\frac{l}{p}\right)(p-l)\sin lx \qquad \text{(при } p=4\mu+3) \tag{7$^{\text{bis}}$}$$

Въ самомъ дѣлѣ, на основаніи извѣстныхъ изъ теоріи квадратичныхъ вычетовъ свойствъ суммъ Гаусса,

$$a_l=\frac{2(p-l)}{p^2}\sum_{h=0}^{k=p-1}\left(\frac{k}{p}\right)\cos\frac{2kl\pi}{p}=\frac{2(p-l)}{p^{3/2}}\left(\frac{l}{p}\right), \qquad b_l=0\,,$$

если $p=4\mu+1$, и

$$a_l=0,\quad b_l=\frac{2(p-l)}{p^2}\sum_{k=1}^{k=p-1}\left(\frac{k}{p}\right)\sin\frac{2kl\pi}{p}=\frac{2(p-l)}{p^{3/2}}\left(\frac{l}{p}\right),$$

если $p=4\mu+3$. Итакъ, въ обоихъ случаяхъ,

$$\sum_{l=1}^{l=p-1}|a_l|+|b_l|=\frac{2}{p^{3/2}}[1+2+\dots(p-1)]=\frac{p-1}{\sqrt{p}}\,.$$

Сопоставляя этотъ результатъ съ доказанной выше леммой заключаемъ, что, *если* p *есть число простое вида* $4\mu+1$, *то наибольшее возможное значеніе* S *суммы модулей коэффиціентовъ въ* $P(x)=\sum_{k=1}^{k=p-1}a_k\cos kx$ *удовлетворяетъ неравенству* [1])

$$\frac{p-1}{\sqrt{p}}\leqq S\leqq\sqrt{2(p-1)}\,, \tag{8}$$

---

[1]) Весьма вѣроятно, что въ дѣйствительности $S=\frac{p-1}{\sqrt{p}}$; однако доказательство представляетъ нѣкоторыя трудности, которыя я еще не преодолѣлъ вполнѣ. (См. мою замѣтку въ Comptes Rendus, іюнь 1914 г.).

при условіи, что $|P(x)| \leqq 1$; *если же* $p=4\mu+3$, *то соотвѣтствующее утвержденіе относится къ выраженію* $P(x)=\sum\limits_{k=1}^{k=p-1} b_k \sin kx$.

Выбравъ указаннымъ выше образомъ $f_p(x)$, строимъ тригонометрическій рядъ

$$F(x)=\frac{\cos 2px}{\sqrt{p}} f_p(x)+\frac{\cos 2p_1 x}{\sqrt{p_1}} f_{p_1}(x)+\ldots+\frac{\cos 2p_n x}{\sqrt{p_n}} f_{p_n}(x)+\ldots \quad (9)$$

гдѣ $p, p_1, \ldots, p_n, \ldots$ суть какія-нибудь простыя числа, удовлетворяющія неравенствамъ $3p_n < p_{n+1} < 6p_n - 2$, возможность которыхъ вытекаетъ изъ постулата Бертрана, доказаннаго Чебышевымъ.

Замѣчая, что сумма модулей коэффиціентовъ въ $\frac{\cos 2p_n x}{\sqrt{p_n}} f_{p_n}(x)$ равна $\frac{p_n-1}{p_n}$, убѣждаемся, вопервыхъ, что сумма абсолютныхъ значеній коэффиціентовъ тригонометрическаго ряда $F(x)$ безконечно возрастаетъ. Между тѣмъ

$$\left|\sum_{n=n_0}^{n=\infty} \frac{\cos 2p_n x}{\sqrt{p_n}} f_{p_n}(x)\right| \leqq \sum_{n=n_0+1}^{n=\infty} \frac{1}{\sqrt{p_{n_0}}} < \frac{1}{\sqrt{3p_{n_0}}}+\frac{1}{\sqrt{9p_{n_0}}}+\ldots=\frac{1}{\sqrt{3}-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{p_{n_0}}}.$$

Слѣдовательно, функція $F(x)$ допускаетъ приближеніе равное $\frac{1}{\sqrt{3}-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{p_n}}$ при помощи тригонометрической суммы любого порядка m не выше $3p_{n_0+1}-2 < 18p_{n_0}-14$; а потому на основаніи теоремы 12 (и § 17) моей книги «О наилучшемъ приближеніи непрерывныхъ функцій и т. д.» можемъ утверждать, что $F(x)$ удовлетворяетъ условію Липшица степени $\alpha < \frac{1}{2}$, сколь угодно близкой къ $\frac{1}{2}$, что и требовалось доказать.

3. Закончу свою статью новымъ доказательствомъ теоремы, *что условіе абсолютной сходимости тригонометрическаго ряда*

$$f(x)=\sum_{n=0}^{n=\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \quad (1)$$

для всѣхъ значеній x равнозначно [1]) *сходимости*

$$S=\sum_{n=0}^{n=\infty} |a_n|+|b_n|. \quad (2)$$

---

[1]) Эта теорема впервые доказана въ работѣ *Fatou* «Séries trigonométriques et séries de Taylor» (Acta Mathematica, t. XXX, 1906 г.); затѣмъ она была обобщена Н. Н. Лузинымъ въ статьѣ «Къ абсолютной сходимости тригонометрическихъ рядовъ» (Мат. Сборн., т. XXVIII). Поэтому я не могу согласиться съ замѣчаніемъ проф. А. П. Пшеборскаго въ его отзывѣ о моей докторской диссертаціи, что въ теоремѣ 79 я ошибочно смѣшиваю оба эти условія. Быть можетъ, при случаѣ, мнѣ прійдется остановиться еще на нѣкоторыхъ разногласіяхъ съ моимъ глубокоуважаемымъ оппонентомъ.

Очевидно, вопервыхъ, что изъ абсолютной сходимости ряда (1) при $x=0$ вытекаетъ абсолютная сходимость $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n|$; такимъ образомъ нужно только доказать, что изъ сходимости ряда $\sum|b_n\sin nx|$ вытекаетъ сходимость ряда $\Sigma|b_n|$. Для этого, очевидно, достаточно доказать теорему:

Если

$$\sum_{n=0}^{n=m+1}\left|b_n\sin\frac{2\pi nk}{2m+1}\right|\leqq M,$$

при $k=1\,,\ 2\,,\ldots\ 2m$, *то*

$$\sum_{n=1}^{n=2m+1}|b_n|\leqq 2mM\operatorname{tg}\frac{\pi}{4m+2},$$

при предположеніи, что $2m+1$ *есть число простое.*

Въ самомъ дѣлѣ, складывая неравенства, соотвѣтствующія всѣмъ значеніямъ k, получимъ

$$\sum_{n=1}^{n=2m+1}\ \sum_{k=1}^{k=2m}\left|b_n\sin\frac{2\pi nk}{2m+1}\right|\leqq 2mM\,;$$

но

$$\sum_{k=1}^{k=2m}\left|\sin\frac{2\pi nk}{2m+1}\right|=2\sum_{k=1}^{k=m}\sin\frac{2\pi nk}{2m+1}=\frac{1+\cos\dfrac{\pi}{2m+1}}{\sin\dfrac{\pi}{2m+1}}.$$

Слѣдовательно [1]),

$$\frac{1+\cos\dfrac{\pi}{2m+1}}{\sin\dfrac{\pi}{2m+1}}\sum_{n=1}^{n=2m+1}|b_n|\leqq 2mM,$$

т. е.

$$\sum_{n=1}^{n=2m+1}|b_n|\leqq\frac{2mM\sin\dfrac{\pi}{2m+1}}{1+\cos\dfrac{\pi}{2m+1}}=2mM\operatorname{tg}\frac{\pi}{4m+2}.$$

Такимъ образомъ, полагая m безконечно возрастающимъ, находимъ что *неравенство* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n\sin nx|\leqq M$, *при всякомъ* x, *влечетъ за собой* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n|\leqq\frac{\pi}{2}M$. Весьма вѣроятно, что численный коэффиціентъ $\frac{\pi}{2}$ не можетъ быть болѣе уменьшенъ.

---

[1]) Не трудно видѣть, что знакъ равенства имѣетъ мѣсто тогда и только тогда, когда $|b_1|=|b_2|=\ldots=|b_{2m+1}|$.

Sur certaines fonctions périodiques qui s'écartent le moins possible de zéro.

Serge Bernstein.

En étudiant les conditions de convergence absolue des séries trigonométriques [1]), j'ai établi la proposition suivante fondamentale pour cette étude:

Si

$$\left|\sum_{n=1}^{n=N} a_n \cos nx + b_n \sin nx\right| \leqq 1\,,$$

le maximum M de

$$\sum_{n=1}^{n=N} |a_n| + |b_n|$$

est de l'ordre de $\sqrt{N}$.

La démonstration s'appuie essentiellement sur la considération des fonctions

$$f_p(x) = \frac{2}{p^{3/2}} \sum_{n=1}^{n=p-1} \left(\frac{n}{p}\right)(p-n)\sin nx \qquad \text{(pour } p=4\mu+3\text{)},$$

$$f_p(x) = \frac{2}{p^{3/2}} \sum_{n=1}^{n=p-1} \left(\frac{n}{p}\right)(p-n)\cos nx \qquad \text{(ponr } p=4\mu+1\text{)},$$

où $\left(\frac{n}{p}\right)$ représente le symbole de Legendre.

Je me propose de démontrer ici quelques propriétés remarquables de ces fonctions, en supposant toujours p un nombre *premier:*

Soit d'abord $p=4\mu+3$. Nous allons établir le théorème que voici:

Théorème. *Entre toutes les fonctions de la forme*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{n=p-1} a_n \sin nx$$

---

[1]) Comptes Rendus, Juin 1914, et Communicat. de le Société Math. de Kharkow, t. XIV.

qui satisfont à la condition

$$\sum_{n=1}^{n=p-1} \left| a_n - a_{p-n} \right| = 1 \tag{1}$$

c'est la fonction

$$\frac{\sqrt{p}}{p-1} f_p(x) = \frac{2}{p(p-1)} \sum_{n=1}^{n=p-1} \left(\frac{n}{p}\right)(p-n)\sin nx$$

qui s'écarte le moins possible de zéro. Si la condition (1) est remplacée par

$$\sum_{n=1}^{n=\frac{p-1}{2}} \left| a_n + a_{p-n} \right| = 1\,, \tag{1^{\text{bis}}}$$

c'est la fonction

$$\frac{\sqrt{p}}{p-1} f_p(x+\pi) = \frac{2}{p\,(p--1)} \sum_{n=1}^{n=p-1} (-1)^n \left(\frac{n}{p}\right)(n-p)\sin nx$$

qui s'écarte le moins possible de zéro.

A cet effet, vérfions d'abord le lemme suivant:

Pour toutes les fonctions

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{n=\frac{p-1}{2}} \alpha_n \sin nx\,,$$

telles que

$$\left| \varphi\left(\frac{2h\pi}{p}\right) \right| \leqq 1 \qquad \left(h = 1,\ 2, \ldots, \frac{p-1}{2}\right),$$

on a

$$\sum_{n=1}^{n=\frac{p-1}{2}} |\alpha_n| \leqq \frac{p-1}{\sqrt{p}},$$

le signe $=$ *ayant lieu, lorsque* $\alpha_n = \dfrac{2}{\sqrt{p}}\left(\dfrac{n}{p}\right)$, *si* p *est un nombre premier de la forme* $4\mu + 3$.

En effet, on a

$$\sum_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}} \varphi^2\left(\frac{2h\pi}{p}\right) = \sum_{n=1}^{n=\frac{p-1}{2}} \alpha_n^2 \cdot \sum_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}} \sin^2 \frac{2nh\pi}{p} = \frac{p}{4} \sum_{n=1}^{n=\frac{p-1}{2}} \alpha_n^2\,.$$

Donc,

$$\sum_{n=1}^{n=\frac{p-1}{2}} \alpha_n^2 \leqq \frac{4}{p} \cdot \frac{p-1}{2} = 2\,\frac{p-1}{p}\,.$$

Ainsi,

$$\sum_{n=1}^{n=\frac{p-1}{2}} |\alpha_n|$$

atteint son maximum, si

$$|\alpha_1| = |\alpha_2| = \ldots = |\alpha_{\frac{p-1}{2}}| = \frac{2}{\sqrt{p}}.$$

D'où

$$\sum_{n=1}^{n=\frac{p-1}{2}} |\alpha_n| \leqq \frac{p-1}{\sqrt{p}}.$$

On reconnait, d'autre part, que, si l'on pose $\alpha_n = \frac{2}{\sqrt{p}}\left(\frac{n}{p}\right)$, on a

$$\sum_{n=1}^{n=\frac{p-1}{2}} |\alpha_n| = \frac{p-1}{\sqrt{p}} \quad \text{et} \quad \varphi\left(\frac{2h\pi}{p}\right) = \left(\frac{h}{p}\right) = \pm 1,$$

p étant un nombre premier de la forme $4\mu + 3$. C. q. f. d.

Cela étant, considérons une fonction quelconque

$$f(x) = \sum_{n=1}^{n=p-1} a_n \sin nx.$$

On voit sans peine que

$$a_n = \frac{2}{p} \sum_{h=1}^{h=p-1} f\left(\frac{\pi h}{p}\right) \sin \frac{\pi n h}{p}. \tag{2}$$

Par conséquent,

$$\alpha_n = a_n - a_{p-n} = \frac{2}{p} \sum_{h=1}^{h=p-1} f\left(\frac{\pi h}{p}\right) \left(\sin \frac{\pi n h}{p} - \sin \frac{\pi(p-n)h}{p}\right) =$$

$$= \frac{4}{p} \sum_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}} f\left(\frac{2\pi h}{p}\right) \sin \frac{2\pi n h}{p}. \tag{3}$$

Or, la fonction

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{n=\frac{p-1}{2}} \alpha_n \sin nx,$$

où α_n est donné par la formule (3), satisfait évidemment aux équations

$$\varphi\left(\frac{2\pi h}{p}\right) = f\left(\frac{2\pi h}{p}\right) \qquad \left(h = 1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}\right)$$

Donc, si

$$\sum_{n=1}^{n=\frac{p-1}{2}} |\alpha_n| = \sum_{n=1}^{n=\frac{p-1}{1}} |a_n - a_{p-n}| = 1\,, \tag{1}$$

on a, en vertu du lemme qui vient d'être démontré, au moins pour une valeur de h,

$$\left| f\left(\frac{2\pi h}{p}\right) \right| = \left| \varphi\left(\frac{2\pi h}{p}\right) \right| \geqq \frac{\sqrt{p}}{p-1}.$$

Ainsi, a fortiori, aucune des fonctions $f(x)$ qui satisfait à la condition (1) ne peut rester constamment inférieure à $\frac{\sqrt{p}}{p-1}$. Or, la fonction

$$\frac{\sqrt{p}}{p-1}\, f_p(x) = \frac{2}{p(p-1)} \sum_{n=1}^{n=p-1} \left(\frac{n}{p}\right)(p-n)\sin nx$$

qui satisfait aussi à la condition (1) jouit précisément de la propriété que

$$\left| \frac{\sqrt{p}}{p-1}\, f_p(x) \right| \leqq \frac{\sqrt{p}}{p-1}\,,$$

le signe d'égalité ayant lieu pour $x = \frac{2h\pi}{p}\left(h = 1,\ 2, \ldots,\ \frac{p-1}{2}\right)$.

Donc, la fonction $\frac{\sqrt{p}}{p-1} f_p(x)$ s'écarte le moins possible de zéro pour toutes les valeurs de x, *et l'écart minimum de zéro des fonctions satisfaisant à (1) est précisément* $\frac{\sqrt{p}}{p-1}$.

Pour obtenir le résultat énoncé dans le cas, où la condition (1) se trouve remplacée par (1^{bis}), il suffit de remarquer que, si $f(x)$ satisfait à la condition (1), $f(x+\pi)$ satisfait à la condition (1^{bis}); par conséquent, si $\frac{\sqrt{p}}{p-1} f_p(x)$ fournit la solution dans le premier cas, c'est $\frac{\sqrt{p}}{p-1} f_p(x+\pi)$ qui résout la question dans le second cas.

Notre théorème est donc entièrement démontré.

Corollaire. *Si* $a_k a_m a_{p-k} a_{p-m} \geqq 0$ *et*

$$\sum_{k=1}^{k=p-1} |a_k| = M\,,$$

la fonction

$$f(x) = \sum_{n=1}^{n=p-1} a_n \sin nx \qquad (p=4\mu+3, \text{ premier})$$

ne peut rester moindre en valeur absolue que $\dfrac{M\sqrt{p}}{p-1}$; *cette valeur ne sera pas dépassée, seulement si*

$$\pm f(x) = \frac{M\sqrt{p}}{p-1} f_p(x+k\pi).$$

Démontrons à présent une propriété analogue de $f_p(x)$ dans le cas, où $p=4\mu+1$.

Théorème. *Entre toutes les fonctions de la forme*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{n=p-1} a_n \cos nx$$

qui satisfont aux conditions $f(0) = a_0\sqrt{p}$ *et*

$$\sum_{n=1}^{n=\frac{p-1}{2}} |a_n + a_{p-n}| = 1,$$

c'est la fonction

$$\frac{\sqrt{p}}{p-1} f_p(x) = \frac{2}{p(p-1)} \sum_{n=1}^{n=p-1} \left(\frac{n}{p}\right)(p-n)\cos nx$$

qui s'écarte le moins possible de zéro ($p=4\mu+1$).

Remarquons d'abord que notre fonction satisfait bien aux conditions du théorème, puisque $f_p(0) = a_0 = 0$.

Démontrons ensuite le lemme suivant:

Si la fonction

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{n=\frac{p-1}{2}} \alpha_n \cos nx$$

satisfait aux conditions $\varphi(0) = \alpha_0\sqrt{p}$ *et*

$$\left|\varphi\left(\frac{2h\pi}{p}\right)\right| \leqq 1 \qquad \left(h=1,\ 2,\dots,\ \frac{p-1}{2}\right),$$

on a

$$\sum_{n=1}^{n=\frac{p-1}{2}} |\alpha_n| \leqq \frac{p-1}{\sqrt{p}},$$

le signe=ayant lieu, lorsque $\alpha_0 = 0$, $\alpha_n = \frac{2}{\sqrt{p}}\left(\frac{n}{p}\right)$, *pour* $p = 4\mu + 1$ *premier.*

En effet, on a

$$\frac{1}{2}\varphi^2(0) + \sum_{n=1}^{n=\frac{p-1}{2}} \varphi^2\left(\frac{2n\pi}{p}\right) = \frac{p}{2}\alpha_0{}^2 + \frac{p}{4}\sum_{n=1}^{n=\frac{p-1}{2}} \alpha_n{}^2$$

et, puisqu'on a $\varphi(0) = \alpha_0\sqrt{p}$, donc

$$\sum_{n=1}^{n=\frac{p-1}{2}} \varphi^2\left(\frac{2n\pi}{p}\right) = \frac{p}{4}\sum_{n=1}^{n=\frac{p-1}{2}} \alpha_n{}^2,$$

Par conséquent, on a, comme plus haut,

$$\sum_{n=1}^{n=\frac{p-1}{2}} |\,\alpha_n\,| \leqq \frac{p-1}{\sqrt{p}},$$

le signe=ne pouvant avoir lieu que, lorsqu'on a en même temps

$$\left|\varphi\left(\frac{2\pi}{p}\right)\right| = \ldots = \left|\varphi\left(\frac{p-1}{p}\pi\right)\right| \text{ et } |\,\alpha_1\,| = \ldots = |\,\alpha_{\frac{p-1}{2}}\,|\,;$$

or cette circonstance se présente précisément, si $\alpha_n = \frac{2}{\sqrt{p}}\left(\frac{n}{p}\right)$, la fonction

$$\varphi_p(x) = \frac{2}{\sqrt{p}}\sum_{n=1}^{n=\frac{p-1}{2}} \left(\frac{n}{p}\right)\cos nx$$

satisfaisant à toutes les conditions du lemme.

Cela étant, considérons la fonction

$$f(x) = \sum_{n=0}^{n=p-1} a_n \cos nx.$$

On aura

$$a_n = \frac{1}{p}[f(0) + (-1)^n f(\pi)] + \frac{2}{p}\sum_{h=1}^{h=p-1} f\left(\frac{\pi h}{p}\right)\cos\frac{\pi nh}{p},$$

$$a_0 = \frac{1}{2p}[f(0) + f(\pi)] + \frac{1}{p}\sum_{h=1}^{h=p-1} f\left(\frac{\pi h}{p}\right) = \frac{1}{p}f(0) + \frac{2}{p}\sum_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}} f\left(\frac{2\pi h}{p}\right).$$

Donc,

$$a_n + a_{p-n} = \frac{2}{p}f(0) + \frac{4}{p}\sum_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}} f\left(\frac{2\pi h}{p}\right)\cos\frac{2\pi nh}{p}.$$

Or, construisons la fonction

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{n=\frac{p-1}{2}} \alpha_n \cos nx\,,$$

définie par les conditions

$$\varphi\left(\frac{2\pi h}{p}\right) = f\left(\frac{2\pi h}{p}\right) \qquad \left(h=0,\, 1, \ldots, \frac{p-1}{2}\right);$$

nous aurons

$$\alpha_0 = \frac{1}{p}\,\varphi\,(0) + \frac{2}{p} \sum_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}} \varphi\left(\frac{2\pi h}{p}\right) = a_0$$

$$\alpha_n = \frac{2}{p}\,\varphi(0) + \frac{4}{p} \sum_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}} \varphi\left(\frac{2\pi h}{p}\right) \cos\frac{2\pi n h}{p} = a_n + a_{p-n} \qquad (4)$$

Mais la condition $a_0 = \frac{1}{\sqrt{p}} f(0)$ donne $\alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{p}}\,\varphi\,(0)$ et, d'autre part,

$$\sum_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}} |\,\alpha_h\,| = \sum_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}} |\,a_h + a_{p-h}\,|.$$

Par conséquent, en vertu de notre lemme, il y aura au moins une valeur de $h\left(h = 1, \ldots, \frac{p-1}{2}\right)$, pour la quelle

$$\left|\,f\left(\frac{2\pi h}{p}\right)\right| \geqq \frac{\sqrt{p}}{p-1}\,,$$

si

$$\sum_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}} |\,a_h + a_{p-h}\,| = 1\,;$$

donc la fonction $\frac{\sqrt{p}}{p-1} f_p(x)$, dont le module ne dépasse jamais $\frac{\sqrt{p}}{p-1}$, est bien celle qui s'écarte le moins possible de zéro.

A fortiori, pouvons nous affirmer la conséquence suivante:

Théorème. *Entre toutes les fonctions*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{n=p-1} a_n \cos nx \qquad (p = 4\mu + 1)$$

telles que $f(0)=0$ *et*

$$\sum_{n=1}^{n=\frac{p-1}{2}} |a_n + a_{p-n}| = 1$$

c'est la fonction $\frac{\sqrt{p}}{p-1} f_p(x)$ *qui s'écarte le moins possible de zéro et cet écart minimum est* $\frac{\sqrt{p}}{p-1}$.

On obtient un résultat analogue et le même écart minimum en remplaçant $f(0)$ par $f(\pi)$ et $|a_n + a_{p-n}|$ par $|a_n - a_{p-n}|$.

Je ne sais pas, si dans les énoncés précédents (pour $p=4\mu+1$) on peut rejeter la condition $f(0)=0$ (ou $f(\pi)=0$). Il est certain en tout cas (comme je l'ai vérifié pour $p=5$) que cette restriction est nécessaire, si l'on veut considérer tout l'ensemble de fonctions pour lesquelles

$$\sum_{n=1}^{n=p-1} |a_n| \leqq 1$$

au lieu de l'ensemble partiel qui satisfait aux conditions

$$\sum_{n=1}^{n=\frac{p-1}{2}} |a_n + a_{p-n}| \leqq 1, \quad \sum_{n=1}^{n=\frac{p-1}{2}} |a_n - a_{p-n}| \leqq 1$$

que nous nous sommes bornés d'envisager ici.

Формула Stokes'а для пространства n измѣреній.

Н. Ѳ. Спенглера.

Положимъ, что имѣемъ n функцій двухъ независимыхъ перемѣнныхъ u, v

$$x_1 = x_1(u, v),\ x_2 = x_2(u, v), \dots x_n = x_n(u, v). \tag{1}$$

Пусть эти функціи опредѣлены въ области (U) перемѣнныхъ независимыхъ u, v. Возьмемъ выраженіе

$$\iint_{(U)} \sum_{i,\,k} \frac{\partial A_i}{\partial x_k} \frac{D(x_i,\, x_k)}{D(u,\, v)}\, du dv \qquad i,\, k = 1,\, 2,\, \dots\, n,$$

гдѣ значки i, k принимаютъ всѣ значенія отъ 1 до n, исключая $i = k$.

Наша задача состоитъ въ преобразованіи этого выраженія въ такое, которое содержало бы только простые интегралы.

Относительно функцій (1) и области (U) мы сдѣлаемъ слѣдующія предположенія.

1) Пусть функціи $x_1, x_2, \dots x_n$ непрерывны, ограничены и имѣютъ непрерывныя частныя производныя перваго порядка въ области (U). Пусть эта область ограничена замкнутой кривой

$$\varphi(u,\, v) = 0. \tag{2}$$

Если $x_1, x_2, \dots x_n$ примемъ за координаты точки въ пространствѣ n измѣреній, то уравненія (1) опредѣлятъ кусокъ поверхности S въ этомъ пространствѣ, а система уравненій (1) и (2) опредѣлитъ кривую (C), принадлежащую куску поверхности S.

Мы ограничимся случаемъ, когда

2) каждый якобіевскій опредѣлитель

$$\frac{D(x_i,\, x_k)}{D(u,\, v)},\ \text{гдѣ}\ i,\, k = 1,\, 2, \dots n$$

не мѣняетъ знака и не обращается въ нуль въ области (U).

Любое x_i въ силу перваго условія имѣетъ верхнюю границу G_i и нижнюю g_i и достигаетъ ихъ. Также и на кривой (C) x_i имѣютъ верхнюю и нижнюю границу G_i' и g_i'. Докажемъ, что эти послѣднія границы совпадаютъ соотвѣтственно съ первыми.

Дѣйствительно пусть, напр., $g_i < g_i'$. Тогда значеніе g_i функція x_i принимаетъ *внутри* области (U). Это значеніе является минимумомъ этой функціи, и потому въ той точкѣ, для которой $x_i = g_i$, будетъ

$$\frac{\partial x_i}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial x_i}{\partial v} = 0, \text{ а слѣдовательно,}$$

$$\frac{D(x_i, x_k)}{D(u, v)} = 0,$$

что противорѣчитъ условію 2).

Положимъ еще, что

3) уравненіе $x_i(u, v) = a$, гдѣ $g_i < a < G_i$, для любого i совмѣстно съ уравненіемъ (2) даетъ двѣ системы значеній u, v, такъ что на кривой (C) координатѣ $x_i = a$ соотвѣтствуютъ двѣ различныя точки, если только a не совпадаетъ съ g_i или G_i. Въ послѣднемъ случаѣ двѣ точки сливаются въ одну.

Сдѣлаемъ наконецъ послѣднее предположеніе.

4) Существуетъ такое вообще однозначное и однозначно обратимое преобразованіе

$$u = u(\alpha, \beta), \quad v = v(\alpha, \beta), \tag{3}$$

гдѣ $u(\alpha, \beta)$ и $v(\alpha, \beta)$ функціи отъ α, β съ непрерывными частными производными перваго порядка, что u, v получаютъ всѣ значенія изъ области (U), когда α и β получаютъ значенія изъ области (A), удовлетворяющей условіямъ

$$\alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_1, \quad \beta_0 \leq \beta \leq \beta_1,$$

при чемъ опредѣлитель $\dfrac{D(u, v)}{D(\alpha, \beta)}$ не мѣняетъ знака въ области (A) и можетъ обращаться въ нуль только въ изолированныхъ точкахъ и линіяхъ[1]), а для $\beta = \beta_1$ совсѣмъ не обращается въ нуль. Предположимъ, что параметры α, β таковы, что при $\beta = \beta_1$ и измѣняющемся α въ предѣлахъ (α_0, α_1) точка $(x_1, x_2, \ldots x_u)$ описываетъ кривую (C). Тогда точки этой кривой соотвѣтствуютъ взаимно однозначно точкамъ промежутка (α_0, α_1).

Преобразованіе (3) особенно просто, напримѣръ, въ томъ случаѣ, когда кривая φ конвексна Тогда внутри кривой φ можно найти такую точку M, что полупрямыя, исходящія изъ этой точки къ любой точкѣ

---

[1]) Въ этихъ точкахъ обратная однозначность можетъ нарушаться.

кривой φ, не встрѣчаютъ эту кривую въ другихъ точкахъ. Дѣйствительно, если координаты u, v точекъ кривой φ выразить въ параметрической формѣ въ функціяхъ отъ параметра α, то положеніе любой точки A внутри кривой φ опредѣлится значеніемъ α, соотвѣтствующимъ точкѣ пересѣченія B кривой съ полупрямой MA, и затѣмъ значеніемъ

$$\beta = \frac{MA}{MB}.$$

Пусть на кривой φ

$$u = \mu(\alpha),\ v = \nu(\alpha)$$

и координаты точки M будутъ ξ, η. Тогда координаты a, b точки A будутъ

$$a = \xi + \beta\,[\mu(\alpha) - \xi],\ b = \mu + \beta\,[\nu(\alpha) - \eta].$$

Итакъ, за преобразованіе (3) въ этомъ случаѣ можетъ быть взято слѣдующее

$$u = \xi + \beta\,[\mu(\alpha) - \xi],\ v = \eta + \beta\,[\nu(\alpha) - \eta].$$

Кривая φ, очевидно, соотвѣтствуетъ значенію $\beta = 1$. Опредѣлитель этого преобразованія есть

$$\frac{D(u,\ v)}{D(\alpha,\ \beta)} = \beta \begin{vmatrix} \mu'(\alpha) & \nu'(\alpha) \\ \mu(\alpha) - \xi & \nu(\alpha) - \eta \end{vmatrix}.$$

Правая часть, очевидно, равна произведенію

$$\pm\,\beta \sqrt{\mu'^2 + \nu'^2}\ \sqrt{(\mu - \xi)^2 + (\nu - \eta)^2}$$

на синусъ угла между касательной къ кривой въ точкѣ B и прямой MB. Вслѣдствіе конвексности кривой φ этотъ синусъ никогда не мѣняетъ знака и никогда не обращается въ нуль. Слѣдовательно, разсматриваемый опредѣлитель обращается въ нуль только при $\beta = 0$ и не мѣняетъ знака.

Мы хотимъ преобразовать двойной интегралъ, взятый по поверхности S, къ простому, взятому по кривой (C). Для этого преобразованія необходимо вывести нѣкоторыя свойства куска поверхности S и кривой (C).

Пусть

$$x_i(u,\ v) = a, \tag{4}$$

гдѣ

$$g_i < a < G_i.$$

Тогда по условію 3) какое либо другое $x_k(u, v)$ на кривой (C) получаетъ два различныхъ значенія x'_k и x''_k, при чемъ пусть

$$x'_k < x''_k.$$

Докажемъ, что при условіи (4) функція $x_k(u, v)$ въ области (U) измѣняется въ промежуткѣ (x'_k, x''_k) и получаетъ всѣ значенія изъ этого промежутка. Дѣйствительно, если бы x_k могло получить значеніе, напр., большее чѣмъ x''_k, то вслѣдствіе условія 1) существовалъ бы максимумъ функціи $x_k(u, v)$, который соотвѣтствовалъ бы точкѣ (u, v), лежащей внутри области (U). Этотъ максимумъ былъ бы условнымъ, ибо u, v связаны условіемъ (4), и потому должно существовать такое λ, что

$$\frac{\partial x_k}{\partial u} - \lambda \frac{\partial x_i}{\partial u} = 0$$

$$\frac{\partial x_k}{\partial v} - \lambda \frac{\partial x_i}{\partial v} = 0,$$

откуда вытекаетъ

$$\frac{D(x_i, x_k)}{D(u, v)} = 0$$

внутри области (U), что противорѣчитъ условію 2).

Если бы x_k не получало какихъ либо значеній изъ промежутка (x'_k, x''_k), то существовало бы такое l, удовлетворяющее условію $x'_k < l < x''_k$, что x_k получало бы всѣ значенія между x'_k и l, но не получало бы значеній бо̀льшихъ, чѣмъ l, но меньшихъ, чѣмъ $l + \varepsilon$, гдѣ ε нѣкоторое положительное число. Слѣдовательно, l было бы условнымъ максимумомъ функціи $x_k(u, v)$ внутри области (U), и опять пришли бы къ выводу, не совмѣстному съ условіемъ 2). Такимъ образомъ высказанное утвержденіе доказано.

Если точка (u, v) описываетъ въ плоскости U, V замкнутую кривую φ, то точка (x_i, x_k) опишетъ въ плоскости $X_i X_k$ также замкнутую кривую S_{ik}, расположенную между параллельными прямыми $x_i = g_i$, $x_i = G_i$, $x_k = g_k$, $x_k = G_k$. Каждая прямая $x_i = a$, гдѣ $g_i < a < G_i$ встрѣчаетъ эту кривую въ двухъ точкахъ, не совпадающихъ другъ съ другомъ. Такимъ образомъ, если будемъ двигаться по этой кривой, то x_i будетъ измѣняться сначала отъ g_i до G_i, а потомъ обратно отъ G_i до g_i. Замѣтимъ, что при каждомъ изъ этихъ двухъ измѣненій x_i не можетъ пріобрѣсти экстремальнаго значенія, заключеннаго между g_i и G_i. Дѣйствительно, если бы такое значеніе существовало, напр., при первомъ измѣненіи, то x_i сначала увеличивалось бы до этого значенія, потомъ бы уменьшалось, а потомъ опять бы увеличивалось до G_i, т. е. три раза получило бы нѣкоторое опредѣленное значеніе. Каждому изъ этихъ значеній соотвѣтствовало бы три[1]) значенія x_k, что противорѣчитъ условію 3).

Сдѣлаемъ теперь преобразованіе (3). Функціи $x_i(u, v)$ и $x_k(u, v)$ перейдутъ въ новыя функціи $x_i(\alpha, \beta)$ и $x_k(\alpha, \beta)$. Кривую S_{ik} въ плоскости $X_i X_k$ получимъ, если положимъ $\beta = \beta_1$ и будемъ измѣнять α въ промежуткѣ (α_0, α_1). Пусть значенія g_i и G_i функція $x_i(\alpha, \beta_1)$ получаетъ, соотвѣтственно, при $\alpha = \alpha'$ и $\alpha = \alpha''$. Тогда при измѣненіи α отъ α' до α'' x_i измѣняется отъ g_i до G_i, а при измѣненіи отъ α'' до соотвѣтствующаго предѣла и отъ другого предѣла до α' измѣняется отъ G_i до g_i. При обоихъ этихъ измѣненіяхъ производная $\frac{\partial x_i(\alpha, \beta_1)}{\partial \alpha}$ сохраняетъ знакъ, ибо x_i не можетъ имѣть экстремальныхъ значеній между g_i и G_i.

Составимъ два ансамбля точекъ α. Одинъ пусть состоитъ изъ всѣхъ точекъ промежутка $\alpha'\alpha''$, а другой изъ остальныхъ точекъ промежутка (α_0, α_1), включая еще точки α' и α''. Одинъ изъ этихъ ансамблей обозначимъ черезъ σ_1, а другой черезъ σ_2. Очевидно, что въ этихъ ансамбляхъ производная $\frac{\partial x_i(\alpha, \beta_1)}{\partial \alpha}$ имѣетъ противоположные знаки.

По условію 3) каждому значенію $x_i = a$ между g_i и G_i соотвѣтствуютъ два значенія x_k' и x_k'' функціи x_k. Пусть $x_k' < x_k''$. Каждое изъ этихъ значеній получаетъ функція $x_k(\alpha, \beta)$ при $\beta = \beta_1$ и нѣкоторомъ значеніи a. При этомъ значеніе x_k' функція x_k получаетъ, когда α измѣняется въ одномъ изъ ансамблей σ_1 и σ_2, а значеніе x_k'', когда α измѣняется въ другомъ. Въ самомъ дѣлѣ, предположимъ обратное. Уравненіе

$$x_i(\alpha, \beta_1) = a \tag{5}$$

имѣетъ два рѣшенія относительно α. Пусть эти рѣшенія будутъ $\alpha = \gamma_1$ и $\alpha = \gamma_2$ и пусть $x_k(\gamma_1, \beta_1) = x_k'$ и $x_k(\gamma_2, \beta_1) = x_k''$. Тогда разность

$$x_k(\gamma_2, \beta_1) - x_k(\gamma_1, \beta_1) > 0.$$

Пусть γ_1 принадлежитъ ансамблю σ_1, а γ_2 ансамблю σ_2 (оба γ одному ансамблю, очевидно, принадлежать не могутъ, ибо тогда уравне-

---

[1]) Если бы x_k получало при этомъ одинаковыя значенія, то оно имѣло бы экстремумъ въ той же точкѣ, что и x_i, и тогда имѣли бы $\frac{D(x_i, x_k)}{D(u, v)} = 0$ въ этой точкѣ.

ніе (5) имѣло бы болѣе двухъ корней). По предположенію существуетъ такое a', заключенное между g_i и G_i, что уравненіе

$$x_i(\alpha,\ \beta_1) = a'$$

даетъ два рѣшенія $\alpha = \gamma_1{}'$ и $\alpha = \gamma_2{}'$ такихъ, что $\gamma_1{}'$ принадлежитъ ансамблю σ_1, а $\gamma_2{}'$ — ансамблю σ_2, но разность

$$x_k(\gamma_2{}',\ \beta_1) - x_k(\gamma_1{}',\ \beta_1) < 0.$$

Такъ какъ разсматриваемая разность измѣняется непрерывно, то существуетъ такое значеніе a, заключенное методу g_i и G_i, что эта разность обратится въ нуль, а это противорѣчитъ условію 3).

Дальше будемъ обозначать черезъ σ_1 тотъ ансамбль, въ которомъ $x_k(\alpha,\ \beta_1)$ получаетъ значенія x_k', а черезъ σ_2 тотъ, въ которомъ $x_k(\alpha,\ \beta_1)$ получаетъ значенія x_k''.

Теперь мы можемъ приступить къ рѣшенію нашей задачи. Возьмемъ ее въ болѣе простой формѣ, когда независимыми перемѣнными являются непосредственно перемѣнныя α, β, т. е. будемъ преобразовывать выраженіе

$$I = \iint_{(A)} \sum_{\lambda\mu} \frac{\partial A_\lambda}{\partial x_\mu} \frac{D(x_\lambda,\ x_\mu)}{D(\alpha,\ \beta)}\, d\alpha d\beta, \quad \text{гдѣ } \lambda,\ \mu = 1,\ 2 \ldots n;\ \lambda \neq \mu. \tag{6}$$

Отберемъ тѣ слагаемыя, въ которыхъ значекъ λ имѣетъ постоянное значеніе i и пусть

$$I_i = \iint_{(A)} \sum_{\mu} \frac{\partial A_i}{\partial x_\mu} \frac{D(x_i,\ x_\mu)}{D(\alpha,\ \beta)}\, d\alpha d\beta, \tag{7}$$

гдѣ μ получаетъ всѣ значенія $1,\ 2 \ldots n$, кромѣ $\mu = i$.

Пусть одно изъ этихъ значеній будетъ k. Преобразуемъ интегралъ I_i къ новымъ перемѣннымъ x_i, x_k по формуламъ

$$\begin{aligned} x_i &= x_i(\alpha,\ \beta), \\ x_k &= x_k(\alpha,\ \beta). \end{aligned} \tag{8}$$

Это возможно, ибо опредѣлитель $\dfrac{D(x_i,\ x_k)}{D(\alpha,\ \beta)}$ по условію 4) можетъ обращаться въ нуль только въ изолированныхъ точкахъ области (A).

Выраженіе (7) перейдетъ въ

$$I_i = \iint_{(U_{ik})} \sum_{\mu} \frac{\partial A_i}{\partial x_\mu} \frac{D(x_k,\ x_\mu)}{D(\alpha,\ \beta)} \left| \frac{D(\alpha,\ \beta)}{D(x_i,\ x_k)} \right| dx_i dx_k,$$

гдѣ (U_{ik}) есть область перемѣнныхъ x_i, x_k, ограниченная кривой S_{ik}.

Пусть ε_{ik} будетъ единица со знакомъ опредѣлителя $\dfrac{D(\alpha,\ \beta)}{D(x_i,\ x_k)}$ или, что то же, опредѣлителя $\dfrac{D(x_i,\ x_k)}{D(\alpha,\ \beta)}$. Тогда будемъ имѣть

$$I_i = \varepsilon_{ik} \iint_{(U_{ik})} \sum_{\mu} \frac{\partial A_i}{\partial x_\mu} \frac{\partial x_\mu}{\partial x_k} \partial x_i \partial x_k, \quad \text{гдѣ } \mu = 1, 2 \ldots n;\ \mu \neq i.$$

Замѣчая, что $\sum\limits_{\mu} \dfrac{\partial A_i}{\partial x_\mu} \dfrac{\partial x_\mu}{\partial x_k}$ есть частная производная функціи A_i по независимому перемѣнному x_k, можемъ написать

$$I_i = \varepsilon_{ik} \int_{g_i}^{G_i} \Big[A_i(x_k'') - A_i(x_k') \Big] dx_i =$$

$$= \varepsilon_{ik} \int_{g_i}^{G_i} A_i(x_k'')\, dx_i - \varepsilon_{ik} \int_{g_i}^{G_i} A_i(x_k') dx_i, \tag{9}$$

гдѣ выраженія $A_i(x_k'')$ и $A_i(x_k')$ означаютъ, что въ функціи $A_i(x_1,\ x_2 \ldots x_n)$ всѣ x выражены въ функціяхъ отъ x_i и x_k, а затѣмъ вмѣсто x_k подставлено x_k'' и x_k'.

Преобразуемъ первый интегралъ, стоящій въ правой части равенства (9), къ перемѣнному α по формулѣ

$$x_i = x_i(\alpha,\ \beta_1),$$

опредѣленной въ ансамблѣ σ_2, а второй интегралъ преобразуемъ къ тому же перемѣнному и по той же формулѣ, но опредѣленной въ ансамблѣ σ_1. Это преобразованіе возможно, ибо въ обоихъ ансамбляхъ x_i получаетъ всѣ значенія отъ g_i до G_i и производная $\dfrac{\partial x_i(\alpha,\ \beta_1)}{\partial \alpha}$ не мѣняетъ знака. Пусть η_i будетъ единица со знакомъ производной $\dfrac{\partial x_i(\alpha,\ \beta_1)}{\partial \alpha}$ въ ансамблѣ σ_2. Въ ансамблѣ σ_1 эта производная имѣетъ противоположный знакъ, и потому будемъ имѣть

$$I_i = \varepsilon_{ik}\eta_i \int_{\sigma_2} A_i \frac{\partial x_i}{\partial \alpha} d\alpha + \varepsilon_{ik}\eta_i \int_{\sigma_1} A_i \frac{\partial x_i}{\partial \alpha} d\alpha = \varepsilon_{ik}\eta_i \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} A_i \frac{\partial x_i}{\partial \alpha} d\alpha,$$

гдѣ въ функціи $A_i(x_1,\ x_2 \ldots x_n)$ всѣ x выражены въ функціяхъ отъ α и β и положено $\beta = \beta_1$.

Опредѣлимъ теперь произведеніе $\varepsilon_{ik}\eta_i$. Возьмемъ какую нибудь изъ точекъ (α', β_1) и (α'', β_1), напр., первую. Въ ней опредѣлитель $\triangle = \frac{D(x_i x_k)}{D(\alpha, \beta)}$ обращается въ

$$\triangle = -\frac{\partial x_i}{\partial \beta}\frac{\partial x_k}{\partial \alpha}.$$

Такъ какъ въ точкѣ (α', β_1) x_i получаетъ наименьшее значеніе на поверхности S, то при уменьшеніи β и постоянномъ $\alpha = \alpha'$ x_i должно увеличиваться, и потому производная $\frac{\partial x_i}{\partial \beta}$ въ точкѣ (α', β_1) отрицательна (не равна нулю, ибо иначе $\triangle = 0$). Отсюда видимъ, что знакъ производной $\frac{\partial x_k}{\partial \alpha}$ въ точкѣ (α', β_1) тождественен со знакомъ опредѣлителя $\triangle$ или ε_{ik}. Если $\varepsilon_{ik} = 1$, то $\frac{\partial x_k}{\partial \alpha} > 0$, и слѣдовательно x_k получаетъ значенія x_k'' для $\alpha > \alpha'$. Но для этихъ значеній α вблизи $\alpha = \alpha'$ и при $\beta = \beta_1$ $\frac{\partial x_i}{\partial \alpha} > 0$, ибо x_i должно увеличиваться при всякомъ отклоненіи α и β отъ α' и β_1. Итакъ, $\eta_i = 1$ и $\varepsilon_{ik}\eta_i = 1$. Если $\varepsilon_{ik} = -1$, то найдемъ, что $\frac{\partial x_k}{\partial \alpha} < 0$ и x_k получаетъ значенія x_k'' для $\alpha < \alpha'$. Для этихъ значеній α производная $\frac{\partial x_i}{\partial \alpha} < 0$, и потому опять $\varepsilon_{ik}\eta_i = 1$.

Итакъ имѣемъ

$$\iint_{(A)} \sum_{\mu} \frac{\partial A_i}{\partial x_{\mu}} \frac{D(x_i, x_{\mu})}{D(\alpha, \beta)}\, d\alpha d\beta = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} A_i \frac{\partial x_i}{\partial \alpha}\, d\alpha. \tag{10}$$

Предыдущія разсужденія можемъ повторить относительно любого $\lambda = i$, и потому, суммируя (10) по λ, получимъ

$$\iint_{(A)} \sum_{\lambda\mu} \frac{\partial A_\lambda}{\partial x_\mu} \frac{D(x_\lambda, x_\mu)}{D(\alpha, \beta)}\, d\alpha d\beta = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} A_x \frac{\partial x_\lambda}{\partial \alpha}\, d\alpha, \tag{11}$$

гдѣ въ лѣвой части суммированіе распространено на всѣ λ и μ отъ 1 до n, исключая случаевъ равенства $\lambda = \mu$; въ правой части положено $\beta = \beta_1$.

Если бы точки кривой C соотвѣтствовали нижнему предѣлу для β, т. е. $\beta = \beta_0$, то при помощи аналогичныхъ разсужденій нашли бы, что въ формулѣ (11) передъ правой частью надо поставить знакъ минусъ.

Въ общемъ случаѣ, когда всѣ x выражены въ функціяхъ отъ u, v и удовлетворяются перечисленныя выше условія, а кривая C выражена въ параметрѣ s, будемъ имѣть

$$\iint_{(U)} \sum_{\lambda,\ \mu} \frac{\partial A_\lambda}{\partial x_\mu} \frac{D(x_\lambda,\ x_\mu)}{D(u,\ v)}\, du dv = \pm \int_{s_0}^{s_1} \sum_{\lambda=}^{\mu} A_\lambda \frac{\partial x_\lambda}{\partial s}\, ds,$$

гдѣ + или — берется смотря по тому, будутъ ли знаки выраженій

$$\frac{D(u,\ v)}{D(\alpha,\ \beta)},\ \frac{d\alpha}{ds}$$

одинаковы или различны.

Каждый изъ слагаемыхъ интеграловъ въ лѣвой части формулы (11) мы можемъ преобразовать къ новымъ перемѣннымъ x_λ и x_μ, а въ правой части къ перемѣнному x_λ. Получимъ

$$\iint_{(S)} \sum_{\lambda,\ \mu} \frac{\partial A_\lambda}{\partial x_\mu}\, dx_\lambda dx_\mu = \int_C A_\lambda dx_\lambda, \tag{12}$$

гдѣ знаки произведенія $dx_\lambda dx_\mu$ и dx_λ тождественны со знаками $\frac{D(x_\lambda,\ x_\mu)}{D(\alpha,\ \beta)}$ и $\frac{dx_\lambda(\alpha,\ \beta_1)}{d\alpha}$. Можемъ сказать, что двойные интегралы взяты по опредѣленной сторонѣ куска поверхности S, а простые—въ опредѣленномъ направленіи по кривой C.

Посмотримъ теперь, какъ можно геометрически опредѣлить эти сторону и направленіе при $n = 3$. Пусть

$$x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = z,\ A_1 = P,\ A_2 = Q,\ A_3 = R.$$

Формула (11) перепишется

$$\iint_{(A)} \left[\sum_{\lambda,\ \mu} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) \frac{D(x,\ y)}{D(\alpha,\ \beta)} + \left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) \frac{D(y,\ z)}{D(\alpha,\ \beta)} + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) \frac{D(z,\ x)}{D(\alpha,\ \beta)} \right] d\alpha d\beta = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \left(P \frac{\partial x}{\partial \alpha} + Q \frac{\partial y}{\partial \alpha} + R \frac{\partial z}{\partial \alpha}\right) d\alpha.$$

Пусть система координатъ взята, напр., лѣвовращающая и пусть кривая C будетъ $\alpha' MN \alpha''$, при чемъ точки α' и α'' соотвѣтствуютъ минимуму и максимуму x на кривой C.

Пусть, напр., $\frac{D(x,\ y)}{D(\alpha,\ \beta)} < 0$. Если возьмемъ формулу (12), то для той стороны поверхности, по которой берется двойной интегралъ, косинусъ угла, образованнаго полунормалью съ осью Z-овъ, будетъ также отрицателенъ, и полунормаль въ какой либо точкѣ A поверхности будетъ составлять съ осью Z-овъ уголъ больше 90^0.

По предыдущему вблизи точки α' на кривой C будетъ $\frac{\partial y}{\partial \alpha} < 0$. Такъ какъ при нашемъ выборѣ координатъ y больше на дугѣ $\alpha' M \alpha''$, чѣмъ на дугѣ $\alpha' N \alpha''$, то на первой дугѣ $\alpha < \alpha'$, а на второй $\alpha > \alpha'$. Простые интегралы въ формулѣ (12) берутся по кривой въ сторону увеличенія α. Такимъ образомъ направленіе интегрированія по кривой C таково, что соотвѣтствующіе двойные интегралы въ формулѣ

$$\iint\left[\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) dxdy + \left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) dydz + \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) dxdz\right] =$$

$$= \int (Pdx + Qdy + Rdz)$$

оказываются взятыми по правой сторонѣ поверхности. Для случая $\frac{D(x,\ y)}{D(\alpha,\ \beta)} > 0$ получимъ тотъ же результатъ.

Если бы взяли систему координатъ правовращающую, то двойные интегралы были бы взяты по лѣвой сторонѣ поверхности.

О группахъ перестановочныхъ матрицъ 1).

Студ. Университета Св. Влад. ***Кравчука.***

(Представлено проф. Д. А. Граве).

Въ журналѣ Crelle'я за 1905 годъ помѣщена статья Schur'a „Zur Theorie der vertauschbaren Matrizen", въ которой доказывается теорема, что *число t линейно независимыхъ матрицъ перестановочной группы n-го порядка есть maximum* $\left[\frac{n^2}{4}\right]+1$, и указываются единственно возможные типы перестановочныхъ группъ, для которыхъ $t=\left[\frac{n^2}{4}\right]+1$.

§ 1 настоящей статьи посвященъ болѣе простому доказательству этой теоремы; въ §§ 2-мъ и 3-мъ дается ея обобщеніе.

Предварительно замѣтимъ, что если матрица A n-го порядка распадается на рядъ матрицъ A_i порядковъ n_i, т. е.

$$A=\left\|\begin{matrix}A_1&&\\&A_2&\\&&\ddots\end{matrix}\right\|,$$

при чемъ характеристическія уравненія матрицъ A_i попарно не имѣютъ общихъ корней, то всякая перестановочная съ ней матрица B имѣетъ подобный же видъ:

$$B=\left\|\begin{matrix}B_1&&\\&B_2&\\&&\ddots\end{matrix}\right\|,$$

гдѣ B_i—перестановочная съ A_i матрица n_i-го порядка. А такъ какъ всякую матрицу A контрагредіентнымъ преобразованіемъ 2) можно разбить

---

1) «*Группой перестановочныхъ матрицъ*» будемъ называть совокупность перестановочныхъ матрицъ, удовлетворяющихъ двумъ условіямъ: 1) произведеніе двухъ матрицъ совокупности есть матрица той же совокупности и 2) нѣтъ матрицы, которая, не принадлежа къ совокупности, была бы перестановочна со всѣми ея матрицами.

Порядкомъ группы матрицъ будемъ называть порядокъ всякаго ея элемента, т. е. число строкъ (или колоннъ) всякой матрицы, входящей въ группу.

2) Контрагредіентно преобразованной изъ A называется матрица $X^{-1}AX$, гдѣ X—любая, очевидно, не особенная матрица.

на такія матрицы A_i, что характеристическія ихъ уравненія будутъ всѣ вида

$$(x - \alpha_i)^{n_i} = 0,$$

то легко понять, что отъ разсмотрѣнія любыхъ группъ перестановочныхъ матрицъ можно перейти къ разсмотрѣнію такихъ группъ, каждая матрица которыхъ удовлетворяетъ уравненію указаннаго вида. Такая группа содержитъ, очевидно, элементъ

$$J = \begin{Vmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{Vmatrix},$$

и базисъ ея можно выбрать такъ, чтобы онъ содержалъ J, а всѣ прочія его матрицы $M_k \, (k = 1, 2, \ldots, t - t)$ удовлетворяли бы уравненіямъ:

$$M_k^{n_k} = 0.$$

Всѣ линейныя комбинаціи вида $\sum\limits_k \lambda_k M_k$ удовлетворяютъ уравненіямъ подобнаго же вида. Совокупность этихъ комбинацій Frobenius называетъ Wurzelgruppe. Итакъ, будемъ разсматривать перестановочныя Wurzelgruppen.

§ 1.

Непосредственно можемъ построить перестановочную Wurzelgruppe n-го порядка, содержащую $\left[\frac{n^2}{4}\right]$ линейно независимыхъ матрицъ. Это будетъ совокупность матрицъ

$$\mathrm{W} = \| a_{\mu\lambda} \|, \qquad (\mu, \lambda = 1, \ldots, n)$$

гдѣ всѣ коэффиціенты $a_{\mu\lambda}$ съ четными значками μ и нечетными λ — равны нулю, а прочіе $a_{\mu\lambda}$ — произвольны, — либо наоборотъ — всѣ $a_{\mu\lambda}$ съ нечетными μ и съ четными λ равны нулю, а прочіе $a_{\mu\lambda}$ — произвольны; т. е. наша W имѣетъ одинъ изъ двухъ видовъ:

$$\mathrm{W}_\alpha = \begin{Vmatrix} 0 & a_{12} & 0 & a_{14} & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & a_{32} & 0 & a_{34} & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{Vmatrix} \quad \text{или:} \quad \mathrm{W}_\beta = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ a_{21} & 0 & a_{23} & 0 & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \ldots \\ a_{41} & 0 & a_{43} & 0 & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{Vmatrix} \qquad \text{(I)}$$

Легко показать, что при n нечетномъ они не эквивалентны, т. е. нѣтъ контрагредіентнаго преобразованія, которое бы переводило W_α въ W_β, а при n четномъ—эквивалентны.

Покажемъ, что не существуетъ перестановочной Wurzelgruppe n-го порядка съ бо̀льшимъ числомъ линейно независимыхъ матрицъ, и что, кромѣ случая $n=3$, указанные типы (I)—единственные, для которыхъ это число равно $\left[\frac{n^2}{4}\right]$.

Для $n=1$ теорема очевидна; для $n=2{,}5$ ее легко доказать.

Итакъ, пусть она доказана для матрицъ n-го порядка; покажемъ, что она вѣрна и для матрицъ порядка $n+2$.

Извѣстно, что всякая Wurzelgruppe M содержитъ такую неравную нулю матрицу M, что

$$M.\mathrm{M}=0 \qquad (1);$$

а тогда M съ помощью контрагредіентнаго преобразованія можно представить въ видѣ:

$$M=\begin{array}{c}\left\|\begin{array}{c:c} 0 & 0 \\ \hdashline J & 0 \end{array}\right\| \\ \begin{array}{cc} \underbrace{\quad}_{n_1} & \underbrace{\quad}_{n_2} \end{array}\end{array}\begin{array}{l} \}\,n_2 \\ \}\,n_1 \\ \end{array} \qquad (n_2 \geq n_1),$$

гдѣ знаки 0 — обозначаютъ матрицы, всѣ коэффиціенты которыхъ—нули,—и Wurzelgruppe M символически изобразится такъ:

$$\mathrm{M}=\begin{array}{c}\left\|\begin{array}{c:c} 0 & 0 \\ \hdashline \mathrm{M}' & 0 \end{array}\right\| \\ \begin{array}{cc} \underbrace{\quad}_{n_1} & \underbrace{\quad}_{n_2} \end{array}\end{array}\begin{array}{l} \}\,n_2 \\ \}\,n_1 \\ \end{array}$$

Но въ такомъ случаѣ и матрица

$$M_0=\begin{array}{c}\left\|\begin{array}{c:c} 0 & 0 \\ \hdashline \begin{matrix} 00...0 \\ 00...0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 00...0 \\ 10...0 \end{matrix} & 0 \end{array}\right\| \\ \begin{array}{cc} \underbrace{\qquad}_{n_1} & \underbrace{\qquad}_{n_2} \end{array}\end{array}\begin{array}{l} \}\,n_2 \\ \}\,n_1 \\ \end{array}$$

удовлетворяетъ уравненію (1) и принадлежитъ къ M.

Переставивъ въ M_0 первый съ предпослѣднимъ столбецъ и первую съ предпослѣдней строку, преобразуемъ ее въ эквивалентную матрицу

$$M_0'=\left\|\begin{array}{c:c} 0 & 0 \\ \hdashline 0 & \begin{matrix} 00 \\ 10 \end{matrix} \end{array}\right\|.$$

А тогда, ввиду равенствъ

$$M_0'\mathrm{M}=0,\quad \mathrm{M}M_0'=0,$$

матрицы совокупности М будутъ имѣть видъ:

$$\mathrm{M}=\left\|\begin{array}{c:cc} & a_1 & 0 \\ & a_2 & 0 \\ \mathrm{M}_1 & \vdots & \vdots \\ & a_n & 0 \\ \hdashline 0\;0\ldots0 & 0 & 0 \\ b_1b_2\ldots b_n & m & 0 \end{array}\right\|$$

Выдѣлимъ изъ нихъ всѣ тѣ, въ которыхъ

$$m=0,\ a_i=0,\ b_k=0 \qquad (i,\ k=1,\ \ldots,\ n);$$

получимъ совокупность съ базисомъ вида

$$\mathrm{M}_\alpha^{(j)}=\left\|\begin{array}{c:c} \mathrm{M}_{1\alpha}^{(j)} & 0 \\ \hdashline 0 & 0 \end{array}\right\| \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ q);$$

всѣ ея матрицы перестановочны, и линейно независимыхъ среди нихъ, по предыдущему, есть $q\leqslant\left[\frac{n^2}{4}\right]$.

Оставшаяся часть членовъ совокупности М имѣетъ видъ:

$$\mathrm{M}_\beta=\left\|\begin{array}{c:cc} & a_1 & 0 \\ & a_2 & 0 \\ \mathrm{M}_{1\beta} & \vdots & \vdots \\ & a_n & 0 \\ \hdashline 0\;0\ldots0 & 0 & 0 \\ b_1b_2\ldots b_n & m & 0 \end{array}\right\|=\left\|\begin{array}{c:c} \mathrm{M}_{1\beta} & A \\ \hdashline & 0\;0 \\ B & \\ & m\;0 \end{array}\right\|$$

Выдѣлимъ изъ нея, въ свою очередь, всѣ матрицы, для которыхъ $A\neq 0$ или $m\neq 0$; линейно независимыхъ среди нихъ будетъ $p+1\leqslant n+1$ итакъ, M_β разобьется на двѣ совокупности

$$\mathrm{M}_\gamma=\left\|\begin{array}{c:c} \mathrm{M}_{1\gamma} & A \\ \hdashline B_1 & \begin{matrix} 0 & 0 \\ m & 0 \end{matrix} \end{array}\right\| \quad \text{и} \quad \mathrm{M}_\delta=\left\|\begin{array}{c:c} \mathrm{M}_{1\delta} & 0 \\ \hdashline B_2 & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \end{array}\right\|$$

Ввиду равенства

$$M_\gamma \,.\, M_\delta = M_\delta \,.\, M_\gamma$$

получимъ

$$B_2 A = 0\,,$$

откуда заключаемъ, что линейно независимыхъ среди матрицъ B_2, а значитъ и среди M_δ есть maximum $n - p$.

Поэтому число всѣхъ линейно независимыхъ матрицъ M_β есть

$$s \leq n + 1\,,$$

а линейно-независимыхъ матрицъ M — всего

$$t - 1 = q + s \leq \left[\frac{n^2}{4}\right] + n + 1 = \left[\frac{(n+2)^2}{4}\right]$$

Далѣе: $t - 1$ можетъ быть равно $\left[\frac{(n+2)^2}{4}\right]$ лишь въ томъ случаѣ, если

$$q = \left[\frac{n^2}{4}\right] \text{ и } s = n + 1\,;$$

а тогда, *во-первыхъ*, совокупность $M_{1\alpha}^{(i)}$ можетъ быть приведена къ одному изъ видовъ (I), и значитъ, *во-вторыхъ*, равенства

$$M_\alpha M_\beta = M_\beta M_\alpha$$

показываютъ, что

$$\text{либо}\quad M_\beta = \left\Vert\begin{array}{c|c} & a_1\;0 \\ & 0\;\;0 \\ 0 & a_3\;0 \\ & 0\;\;0 \\ & \vdots\;\;\vdots \\ & 0 \\ \hline 0\,0\,0\ldots0 & 0\;\;0 \\ 0b_2 0b_4\ldots0 & m\;\;0 \end{array}\right\Vert,\quad \text{либо}\quad M_\beta = \left\Vert\begin{array}{c|c} & 0\;\;0 \\ & a_2\;0 \\ 0 & 0\;\;0 \\ & a_4\;0 \\ & \vdots\;\;\vdots \\ & 0 \\ \hline 0\,0\ldots0 & 0\;\;0 \\ b_1 0 b_3 0\ldots & m\;\;0 \end{array}\right\Vert,$$

гдѣ, очевидно, всѣ a_i и b_k можно считать совершенно произвольными.

Переставляя теперь въ одномъ (подходяще выбранномъ) изъ этихъ двухъ видовъ M_β $n+2$-ую строку съ $n+1$-ой и $n+2$-ой столбецъ съ $n+1$-мъ, мы и получимъ, что типы (I)—единственные, которымъ можетъ быть эквивалентна перестановочная Wurzelgruppe n-го порядка, заключающая $\left[\frac{n^2}{4}\right]$ линейно независимыхъ элементовъ.

Итакъ, можно считать доказанной *теорему:*

Наибольшее число линейно независимыхъ матрицъ перестановочной группы n-го порядка есть $t=\left[\frac{n^2}{4}\right]+1$; *при* $n \neq 2, 3$ *группа, для которой* $t=\left[\frac{n^2}{4}\right]+1$, *эквивалентна совокупности линейныхъ комбинацій вида* $x.\mathrm{W}+y.J$; *при* $n=2, 3$ *къ этимъ типамъ присоединяются еще совокупности матрицъ видовъ:*

$$1)\ \begin{Vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{Vmatrix},\quad 2)\ \begin{Vmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ c & b & a \end{Vmatrix},\quad 3)\ \begin{Vmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{Vmatrix}\quad \text{и}\quad 4)\ \begin{Vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{Vmatrix}.$$

Теорема доказана лишь для группъ матрицъ, удовлетворяющихъ уравненіямъ вида

$$(x-\alpha)^n=0;$$

но легко видѣть, что она справедлива и вообще, потому что всегда

$$\left[\frac{n^2}{4}\right]+1>\left[\frac{u^2}{4}\right]+1+\left[\frac{(n-u)^2}{4}\right]+1,$$

за исключеніемъ случаевъ $n=2, 3$, которые и приводятъ къ типамъ 1), 3) и 4). Типъ 2) получается, очевидно, оттого, что при $n=3$ существуетъ равенство $\left[\frac{n^2}{4}\right]+1=n$.

Формулировка этой теоремы въ упомянутой статьѣ J. Schur'а отличается отъ предложенной тѣмъ, что вмѣсто Wurzelgruppen видовъ (I) онъ получаетъ: 1) для n четнаго $(n=2m)$ совокупность W въ видѣ

$$\mathrm{W}_1=\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ \mathrm{W}_1' & 0 \end{Vmatrix}\begin{matrix}\}\,m\\ \}\,m\end{matrix}\qquad \text{(II)}$$
$$\underbrace{\quad}_{m}\ \underbrace{\quad}_{m}$$

гдѣ всѣ коэффиціенты матрицъ W_1' произвольны, 2) для n нечетнаго $(n=2m+1)$ въ двухъ разныхъ видахъ:

$$W_2 = \left\| \begin{array}{c:c:c} 0 & 0 & 0 \\ \hdashline \alpha_1\ldots\alpha_m & 0 & 0 \\ \hdashline \underbrace{W_2'}_{m} & & \underbrace{0}_{m} \end{array} \right\| \begin{array}{l} \}\,m \\ \\ \}\,m \end{array}, \quad W_3 = \left\| \begin{array}{c:c:c} 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 \\ \hdashline \underbrace{W_3'}_{m} & \begin{array}{c} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{array} & \underbrace{0}_{m} \end{array} \right\| \begin{array}{l} \}\,m \\ \\ \}\,m \end{array}, \quad (\mathrm{II}a, \mathrm{II}b)$$

гдѣ

$$W_2', \ W_3', \ \alpha_i, \ \beta_k \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

тоже совершенно произвольны.

Легко показать, что Wurzelgruppen (I) симметричной перестановкой строкъ и столбцовъ переходятъ въ Wurzelgruppen (II), т.-е. что W всегда эквивалентна одной изъ трехъ совокупностей:

$$W_1, \ W_2, \ W_3.$$

§ 2.

Изъ матрицъ перестановочной Wurzelgruppe M, удовлетворяющихъ уравненію (I) §-а 1, выберемъ матрицу M наивысшаго ранга r.

Извѣстно, что $2r \leq n$; пусть M представлена въ видѣ:

$$M = \left\| \begin{array}{c:c:c} 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 \\ \hdashline \underbrace{J}_{r} & 0 & \underbrace{0}_{r} \end{array} \right\| \begin{array}{l} \}\,r \\ \\ \}\,r \end{array}$$

Тогда M представится такъ:

$$M = \left\| \begin{array}{c:c:c} 0 & 0 & 0 \\ \hdashline A & B & 0 \\ \hdashline \underbrace{C}_{r} & D & \underbrace{0}_{r} \end{array} \right\| \begin{array}{l} \}\,r \\ \\ \}\,r \end{array}$$

Выдѣлимъ изъ нея совокупность M_1 элементовъ, удовлетворяющихъ равенству

$$M_1 M = 0;$$

пусть

$$\mathrm{M}_1 = \left\| \begin{array}{c:c:c} 0 & 0 & 0 \\ \hdashline A_1 & B_1 & 0 \\ \hdashline \underbrace{C_1}_{r} & D_1 & \underbrace{0}_{r} \end{array} \right\| \begin{array}{l} \}r \\ \\ \}r \end{array} = \left\| \begin{array}{c:c:c} 0 & 0 & 0 \\ \hdashline a_{11} \dots a_{1r} & b_{11} \dots b_{n-2r,\, n-2r} & \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots & 0 \\ a_{n-2r,\, 1} \dots a_{n-2r,\, r} & b_{n-2r,\, 1} \dots & \\ \hdashline c_{11} \dots c_{1r} & d_{11} \dots d_{1,\, n-2r} & \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots & 0 \\ c_{r,\, 1} \dots c_{rr} & d_{r,\, 1} \dots d_{r,\, n-2r} & \end{array} \right\|.$$

А такъ какъ рангъ матрицъ M_1 не можетъ бытъ больше r, то для всѣхъ ихъ должны удовлетворяться либо равенства

$$A_1 = 0, \; B_1 = 0 \tag{1}$$

либо равенства

$$B_1 = 0, \; D_1 = 0 \tag{2}$$

Дѣйствительно, составимъ для какой-нибудь матрицы изъ M_1 миноръ $r+1$-го порядка вида

$$K_{\lambda\mu} = \left\| \begin{array}{c:c} a_{\lambda 1} a_{\lambda 2} \dots a_{\lambda r} & b_{\lambda\mu} \\ \hdashline & d_{1\mu} \\ & d_{2\mu} \\ C_1 & \vdots \\ & d_{r\mu} \end{array} \right\|$$

и разложимъ его по элементамъ первой строки и послѣдняго столбца:

$$K_{\lambda\mu} = b_{\lambda\mu} \cdot |C_1| - \sum_{i=1}^{r} \sum_{k=1}^{r} \frac{\partial |C_1|}{\partial c_{ik}} \cdot a_{\lambda i} d_{k\mu};$$

чтобы онъ былъ равенъ нулю, необходимо (ввиду произвольности коэффиціентовъ c_{ik}) должны выполняться равенства

$$b_{\lambda\mu} = 0$$

$$a_{\lambda i} \cdot d_{k\mu} = 0$$

для всѣхъ возможныхъ комбинацій значковъ λ, μ, i, k; а эти равенства и равносильны одному изъ условій (1), (2).

Итакъ, совокупность M_1 имѣетъ одинъ изъ видовъ:

$$M_{1a} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ A_1 & 0 & 0 \\ C_1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad M_{1d} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ C_1 & D_1 & 0 \end{Vmatrix},$$

Въ дальнѣйшемъ будемъ разсматривать лишь видъ M_{1a}, потому что разсужденія относительно M_{1d} были бы совершенно тѣ же.

Очевидно, базисъ совокупности M_{1a} можетъ быть представленъ матрицами двухъ видовъ:

$$M'_{1a} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ C_1 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \quad \text{и} \quad M''_{1a} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ A_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

Для приведенія M''_{1a} къ простѣйшему виду воспользуемся пріемомъ, который указанъ J. Schur'омъ въ упомянутой статьѣ.

Вообразимъ всѣ матрицы A_1 написанными въ рядъ:

$$A = \| A_1^{(1)} A_1^{(2)} A_1^{(3)} \ldots \|,$$

Пусть рангъ матрицы А есть r_1; подходящей симметричной перестановкой строкъ и столбцовъ въ М достигнемъ того, что r_1 послѣднихъ строкъ матрицы А будутъ имѣть тотъ же рангъ r_1; пусть A послѣ этой перестановки имѣетъ видъ:

$$A = \left\| \begin{array}{c} \ldots\ldots\ldots\ldots a_{1,\rho} \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots a_{2,\rho} \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \vdots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots a_{n-2r-r_1,\ \rho} \ldots\ldots \\ \hline \ldots\ldots\ldots\ldots a'_{1,\rho} \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots a'_{2,\rho} \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \vdots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots a'_{r_1,\rho} \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right\|$$

Изъ разсужденій, подобныхъ тѣмъ, какими мы пользовались для полученія M_{1a} и M_{1d}, слѣдуетъ, что можно найти такую матрицу T, что въ произведеніи

$$UA_1 = \begin{array}{r} \\ r\{ \end{array} \left\| \begin{array}{c:c} J & \overbrace{T}^{r_1} \\ \hdashline 0 & J \end{array} \right\| . A_1$$

первыя $n-2r-r_1$ строкъ будутъ сплошь состоять изъ нулей; а въ такомъ случаѣ, преобразовавъ М къ эквивалентному виду:

$$V.\mathrm{M}.V^{-1}=\begin{array}{r} r\{ \\ \\ r\{ \end{array}\left\|\begin{array}{ccc} J & 0 & 0\\ 0 & U & 0\\ 0 & 0 & J \end{array}\right\| . \,\mathrm{M}\, . \left\|\begin{array}{ccc} J & 0 & 0\\ 0 & U^{-1} & 0\\ 0 & 0 & J \end{array}\right\|$$

и обозначивъ преобразованныя совокупности М и M_1 опять черезъ М и M_1, получимъ:

$$\mathrm{M}_{1a}=\left\|\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0\\ UA_1 & 0 & 0\\ C_1 & 0 & 0 \end{array}\right\|$$

Итакъ, лишь r_1 нижнихъ строкъ въ матрицахъ UA_1 содержатъ неравные нулю коэффиціенты; а тогда, ввиду равенства

$$\mathrm{M}.\mathrm{M}_{1a}=0,$$

легко понять, что r_1 послѣднихъ столбцовъ во всѣхъ матрицахъ B и D состоятъ изъ нулей, и значитъ M_{1a} имѣетъ видъ:

$$\mathrm{M}_{1a}=\begin{array}{r} \\ \\ r+r_1\{ \end{array}\left\|\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ \underbrace{M}_{r} & 0 & 0 \end{array}\right\|$$

гдѣ матрицы M — совершенно произвольны. *Итакъ, число линейно независимыхъ матрицъ* M_{1a} *есть* $r(r+r_1)$.

§ 3.

Всѣ прочія матрицы М, на основаніи равенствъ

$$\mathrm{M}_{1a}\mathrm{M}=\mathrm{M}\mathrm{M}_{1a}=0,$$

будутъ имѣть видъ:

$$\mathrm{M}=\left\|\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0\\ N & P & 0\\ \underbrace{M}_{r} & \underbrace{Q}_{n-2r-r_1} & \underbrace{0}_{r+r_1} \end{array}\right\|\begin{array}{l} \}r\\ \}n-2r-r_1\\ \}r+r_1 \end{array}\tag{3}$$

Очевидно, всегда можемъ базисъ нашей Wurzelgruppe представить матрицами двухъ родовъ:

$$\mathrm{M}_{\mathrm{I}}=\mathrm{M}_{1a}=\begin{array}{r} \\ \\ r+r_1\{ \end{array}\left\|\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ \underbrace{M}_{r} & 0 & 0 \end{array}\right\| \quad \text{и} \quad \mathrm{M}_{\mathrm{II}}^{(i)}=\left\|\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0\\ N^{(i)} & P^{(i)} & 0\\ \underbrace{\qquad}_{r} & \underbrace{Q^{(i)}}_{n-2r-r_1} & \underbrace{0}_{r+r_1} \end{array}\right\|\begin{array}{l} \}r\\ \\ \}r+r_1 \end{array} \qquad (i=1,\,2,\,\ldots,\,s)$$

Докажемъ, что рангъ матрицы

$$\mathrm{N}=\| N^{(1)}N^{(2)}N^{(3)}\dots N^{(s)}\|$$

есть $S=n-2r-2r_1$. Дѣйствительно, пусть онъ есть $s_1 \leqslant S$; тогда совершенно подобно тому, какъ мы сдѣлали это для A_1, можемъ преобразовать М такъ, чтобы первыя $S-s_1$ строкъ матрицъ $N^{(i)}$ состояли изъ нулей:

$$N^{(i)}=\left\|\begin{array}{c} 0 \\ \hdashline \mathrm{N}^{(i)} \end{array}\right\|\begin{array}{l}\}S-s_1\\ \}s_1\end{array},$$

а тогда, ввиду символическаго соотношенія

$$\mathrm{M}^2 \succ \mathrm{M}\ ^{1}),$$

послѣдніе s_1 столбцовъ въ первыхъ $S-s_1$ строкахъ матрицъ P тоже будутъ состоять изъ нулей, и М можно будетъ переписать такъ:

$$\mathrm{M}=\begin{array}{r||c:c:c||} & \overbrace{\qquad}^{r} & & \\ r\{ & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline S-s_1\{ & 0 & P_1 & 0 \\ \hdashline r+r_1+s_1\{ & \multicolumn{2}{c:}{L} & 0 \\ & \multicolumn{2}{c}{\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{n-r-r_1}} & \end{array},$$

гдѣ, очевидно, P_1 — совокупность перестановочныхъ матрицъ.

Выберемъ (что всегда возможно) квадратную матрицу X такъ, чтобы первая строка каждой изъ матрицъ совокупности

$$X^{-1}P_1X=P$$

состояла сплошь изъ нулей, и преобразуемъ М къ виду

$$\mathbf{M}=Y^{-1}\mathrm{M}Y,$$

---

[1]) Знакъ $\succ$ обозначаетъ, что всѣ матрицы совокупности M^2 заключаются въ совокупности М.

гдѣ

$$Y=\begin{array}{r||c:c:c||} r\{ & \overbrace{J}^{r} & 0 & \\ \cdashline{2-3} S-s_1\{ & 0 & X & 0 \\ \hdashline r+r_1+s_1\{ & \multicolumn{2}{c:}{\underbrace{\qquad 0 \qquad}_{n-r-r_1-s_1}} & J \end{array};$$

получимъ эквивалентную Wurzelgruppe вида

$$\mathbf{M}=\begin{array}{r||c:c:c||} r\{ & \overbrace{0}^{r} & 0 & \\ \cdashline{2-3} S-s_1\{ & 0 & \mathbf{P} & 0 \\ \hdashline r+r_1+s_1\{ & \multicolumn{2}{c:}{\underbrace{\qquad \mathbf{L} \qquad}_{n-r-r_1}} & 0 \end{array},$$

Но она заключаетъ въ себѣ уже по крайней мѣрѣ $(r+1)(r+r_1)$ линейно независимыхъ матрицъ $\mathbf{M}_1$, удовлетворяющихъ уравненію

$$\mathbf{M}_1\mathbf{M}=0,$$

что противорѣчитъ выводу §-а 2.

Итакъ, дѣйствительно,

$$s_1=S.$$

Отсюда получаемъ, что такъ какъ Wurzelgruppe M въ (3) тогда и только тогда удовлетворяетъ символическому равенству

$$\mathrm{M}^2=0,$$

когда

$$PN=0,\ QN=0,\ P^2=0,\ QP=0;$$

а рангъ матрицы N есть S, то

$$P=0,\ Q=0,$$

а послѣднія равенства возможны лишь при $S=0$.

Присоединяя относительно M_{1d} тѣ же разсужденія, которыя были примѣнены относительно M_{1a}, получаемъ такую теорему:

I. *Всякая Wurzelgruppe* M, *удовлетворяющая символическому уравненію*

$$\mathrm{M}^2=0,$$

эквивалентна одной изъ совокупностей матрицъ вида

$$\begin{Vmatrix} m_{11}m_{12}\ldots m_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ m_{n1}m_{n2}\ldots m_{nn} \end{Vmatrix},$$

гдѣ, для нѣкотораго опредѣленнаго r *между* 0 *и* n, *всѣ коэффиціенты*

$$m_{n-r-\lambda,\,k},\quad m_{i,\,r+\mu}$$

$$(i,\ k=1,\ 2,\ldots,\ n,\ \mu=1,\ 2,\ldots,\ n-r,\ \lambda=1,\ 2,\ldots,\ n-r-1)$$

суть нули, а прочіе m_{ik} *— произвольны.*

Значитъ, если рангъ группы перестановочныхъ матрицъ, удовлетворяющихъ уравненіямъ

$$(z-\alpha_j)^2=0,$$

есть r, то число линейно независимыхъ среди нихъ есть

$$r(n-r)+1$$

Далѣе: всегда въ (3) число линейно независимыхъ матрицъ $\mathrm{M}^{(i)}_{\mathrm{II}}$ совпадаетъ съ числомъ линейно независимыхъ $N^{(i)}$; дѣйствительно, разобьемъ совокупность M_{II} надвѣ:

$$\mathrm{M}'_{\mathrm{II}}=\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ N & P' & 0 \\ 0 & Q' & 0 \end{Vmatrix} \quad \text{и} \quad \mathrm{M}''_{\mathrm{II}}=\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & P'' & 0 \\ 0 & Q'' & 0 \end{Vmatrix},$$

изъ которыхъ первая заключаетъ всѣ матрицы M_{II}, для которыхъ

$$N \neq 0,$$

а вторая — всѣ прочія; изъ перестановочности матрицъ $\mathrm{M}'_{\mathrm{II}}$ съ $\mathrm{M}''_{\mathrm{II}}$ слѣдуетъ:

$$P''N=0;\quad Q''N=0,$$

откуда

$$P''=Q''=0,$$

и значитъ

$$\mathrm{M}''_{\mathrm{II}}=0,$$

что и требовалось.

Итакъ число линейно независимыхъ матрицъ M_{II} не превышаетъ $S.r$, а общее число линейно независимыхъ матрицъ группы М не превышаетъ $r(r+r_1)+Sr=r(n-r)$. Мы получили число, наибольшее значеніе котораго есть $\left[\frac{n^2}{4}\right]$ и достигается при $r=\left[\frac{n}{2}\right]$.

Равенство $t-1=r(n-r)$ существуетъ лишь въ томъ случаѣ, если всѣ элементы матрицъ N совершенно произвольны; а тогда для $r \neq 1$ легко получается:

$$P=0,\quad Q=0,\ \text{и значитъ}\ S=0,$$

откуда

$$\mathrm{M}^2=0$$

Получаемъ теорему:

II. *Если наивысшій рангъ матрицъ* M *перестановочной Wurzelgruppe* М, *удовлетворяющихъ равенству*

$$M\mathrm{M}=0,$$

есть $r \neq 1$, *то наибольшее значеніе числа линейно независимыхъ матрицъ этой группы есть*

$$n(n-r);$$

это число равно $n(n-r)$ *тогда и только тогда, когда*

$$\mathrm{M}^2=0.$$

Видъ всѣхъ группъ М, удовлетворяющихъ послѣднему уравненію дается теоремой I.

Пріемъ Даламбера въ теоріи линейныхъ дифференціальныхъ уравненій съ постоянными коэффиціентами и его обобщенія.

М. Н. Лагутинскаго.

Когда система линейныхъ дифференціальныхъ уравненій съ постоянными коэффиціентами перестаетъ быть общей, т. е. когда характеристическое уравненіе этой системы перестаетъ имѣть различные корни, нѣкоторые изъ ея интеграловъ совпадаютъ, и такимъ образомъ число интеграловъ оказывается недостаточнымъ. Даламберъ для ихъ полученія предложилъ пріемъ, который состоитъ во введеніи безконечно-малаго параметра и послѣдующаго перехода къ предѣлу.

Я не имѣю намѣренія поставить эту задачу во всей общности, а только попытаюсь выяснить значеніе этого метода и потому ограничусь его примѣненіемъ къ нѣкоторымъ вопросамъ интегрированія уравненій. Болѣе послѣдовательно я остановлюсь на приведеніи системы линейныхъ дифференціальныхъ уравненій къ канонической формѣ Вейерштрасса и воспользуюсь имъ для опредѣленія формъ, допускающихъ безконечное число линейныхъ преобразованій самихъ въ себя.

§ 1. Пусть

$$\frac{dx_1}{X_1}=\frac{dx_2}{X_2}=\frac{dx_3}{X_3}=\ldots=\frac{dx_p}{X_p} \tag{1}$$

нѣкоторая дифференціальная система уравненій. Предположимъ функціи X_i для простоты голоморфными, какъ относительно перемѣнныхъ x_i, такъ и относительно параметровъ $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_q$.

Положимъ, что намъ удалось найти интегралъ f этой системы, голоморфный относительно перемѣнныхъ x_i и параметровъ b_i, и допустимъ, что въ томъ случаѣ, когда постоянныя b_i связаны соотношеніями

$$\Theta_j(b_1, b_2, \ldots, b_q)=0, \qquad (j=1,\ 2,\ 3,\ldots,l) \tag{2}$$

интегралъ f обращается въ постоянную.

Такимъ образомъ, въ этомъ случаѣ болѣе общая система будетъ обладать интеграломъ, а когда она станетъ частной и параметры ея пріобрѣтутъ значенія b_{01}, b_{02}, $b_{03}, \dots, b_{0q}$, находящіяся внутри области голоморфности и удовлетворяющія условіямъ (2), этотъ интегралъ обратится въ постоянную.

Можно примѣнить къ этому случаю пріемъ Даламбера. Для этого надо ввести прежде всего новый параметръ, по которому позже мы будемъ дифференцировать.

Въ области измѣненія перемѣнныхъ b_i уравненія (2) представятъ многообразіе нѣкотораго измѣренія, проходящее черезъ точку $A\,(b_{01}, b_{02}, \dots, b_{0q})$. Возьмемъ внутри вышеупомянутой области голоморфности параметровъ b_i точку $B\,(b_{11}, b_{12}, \dots, b_{1q})$ такъ, чтобы всѣ точки отрѣзка AB, за исключеніемъ точки A, находились внѣ многообразія, опредѣляемаго уравненіями (2).

Замѣщаемъ въ системѣ (1) и въ интегралѣ f параметры b_i соотвѣтственно черезъ $b_{0i} + h\,(b_{1i} - b_{0i})$. Тогда для всѣхъ значеній h большихъ нуля и не большихъ единицы функція f будетъ интеграломъ системы (1).

Обозначимъ результатъ подстановки $b_i = b_{0i}\,(i = 1, 2, 3, \dots, q)$ въ тѣ же функціи въ слѣдующемъ видѣ:

$$X_i = X_{0i} + h^k X_{1i} \qquad (i=1, 2, 3, \dots, p)$$
$$f = F_0 + hF_1 + h^2F_2 + \dots + h^{k_1}F_{k_1} + h^{k_1+1}F_{k_1+1}, \tag{3}$$

гдѣ $F_0, F_1, F_2, \dots, F_{k_1-1}$ — нѣкоторыя постоянныя, $X_{1i}(i = 1, 2, 3, \dots, p)$ и F_{k_1+1} — функціи, которыя для $h = 0$ остаются конечными, и, наконецъ, F_{k_1} — функція, зависящая отъ перемѣнныхъ x_i, но независящая отъ h.

Теперь покажемъ, что функція F_{k_1} — интегралъ системы:

$$\frac{dx_1}{X_{01}} = \frac{dx_2}{X_{02}} = \frac{dx_3}{X_{03}} = \dots = \frac{dx_p}{X_{0p}}, \tag{4}$$

т. е. система, которую мы получимъ изъ системы (1), если выполнимъ въ ней подстановку $b_i = b_{0i}$ $(i = 1, 2, 3, \dots, q)$.

Такъ какъ f будетъ интегралъ системы (1), мы можемъ написать тождество:

$$\sum_{i=1}^{p} X_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$$

или принимая во вниманіе равенство (3):

$$\sum_{i=1}^{p}\{X_{0i}+h^k X_{1i}\}\frac{\partial}{\partial x_i}\left\{\sum_{j=0}^{k_1+1} h^j F_j\right\}=0.$$

Но функціи $F_0, F_1, F_2, \ldots, F_{k_1-1}$ — постоянныя и производныя отъ нихъ равны нулю, и мы должны имѣть:

$$h^{k_1}\sum_{i=1}^{p} X_{0i}\frac{\partial F_{k_1}}{\partial x_i}+h^{k_1+1}\sum_{i=1}^{p} X_{0i}\frac{\partial F_{k_1+1}}{\partial x_i}+h^{k+k_1+1}\sum_{i=1}^{p} X_{1i}\frac{\partial F_{k_1}}{\partial x_i}+$$
$$+h^{k+k_1+1}\sum_{i=1}^{p} X_{1i}\frac{\partial F_{k_1+1}}{\partial x_i}=0.$$

Если мы раздѣлимъ это тождество на h^{k_1} и перейдемъ къ предѣлу $h=0$, то получимъ тождественно:

$$\sum_{i=1}^{p} X_{0i}\frac{\partial F_{k_1}}{\partial x_i}=0,$$

откуда и слѣдуетъ наше утвержденіе.

Отсюда слѣдуетъ такое правило для опредѣленія интеграла въ томъ случаѣ, когда въ силу соотношеній между параметрами, входящими въ систему (1), интегралъ, найденный для болѣе общаго случая, обращается въ постоянную.

Опредѣливъ подстановку $b_i=b_{0i}+h(b_{1i}-b_{0i})$ $(i=1, 2, 3, \ldots, q)$, *производимъ ее въ интегралъ* f *и, такъ какъ онъ представляетъ по предположенію голоморфную функцію параметровъ* b_i, *то всѣ производныя отъ интеграла* f *по параметру* h *будутъ имѣть вполнѣ опредѣленное значеніе. Будемъ послѣдовательно опредѣлять значенія этихъ производныхъ для значенія параметра* h, *равнаго нулю, и первая изъ этихъ послѣднихъ производныхъ, не обращающаяся въ постоянную, и будетъ искомымъ интеграломъ системы (4).*

Очевидно, конечно, что можно снять условія голоморфности; но я не останавливаюсь на этомъ, чтобы введеніемъ ряда сложныхъ условій не затемнить основной идеи.

Приведемъ простой примѣръ на только-что изложенную теорію.

Разсмотримъ уравненіе:

$$\frac{dy}{x^{n-1}\log x}=\frac{dx}{1}. \tag{5}$$

Его интегралъ равенъ

$$n^2y+x^n-nx^n\log x.$$

При $n=0$ этотъ послѣдній обращается въ постоянную равную единицѣ. Согласно только что изложенному, беремъ производную по параметру n и получаемъ:

$$2ny - nx^n \log^2 x$$

интегралъ дифференціальнаго уравненія

$$\frac{dy}{\log x} = \frac{dx}{x},$$

которое получимъ изъ уравненія (5), если примемъ въ немъ $n=0$.

§ 2. Предположимъ, что извѣстны два интеграла системы (1), но при выполненіи условій (2) они оба обращаются въ постоянныя. Соглано предыдущему вводимъ параметръ h и опредѣляемъ по обоимъ интеграламъ два новыхъ для случая $h=0$. Но можетъ случиться, что эти два интеграла не будутъ различны, и одинъ будетъ функціей другого.

Въ этомъ случаѣ опять можно примѣнить переходъ къ предѣлу, чтобы найти второй интегралъ. Предположимъ оба интеграла f_1 и f_2 разложенными въ рядъ по степенямъ h, т. е. положимъ:

$$f_1 = \sum_{l=1}^{\infty} \varphi_{1l} h^l, \qquad f_2 = \sum_{l=1}^{\infty} \varphi_{2l} h^l, \tag{6}$$

гдѣ $\varphi_{11}\ \varphi_{12} \ldots, \varphi_{1k_1}$ и $\varphi_{21}\ \varphi_{22} \ldots \varphi_{2k_2}$—нѣкоторыя постоянныя.

Можно написать равенства (6) и въ такомъ видѣ:

$$f_1 = \sum_{l=1}^{k_1} \varphi_{1l} h^l + h^{k_1+1} \sum_{l=1}^{\infty} \varphi_{1,\,k_1+l} h^{l-1}$$

$$f_2 = \sum_{l=1}^{\infty} \varphi_{2\,l} h^l + h^{k_2+1} \sum_{l=1}^{\infty} \varphi_{1,\ k_2+l}\, h^{l-1}$$

Обозначимъ суммы

$$\sum_{l=1}^{k_1} \varphi_{1l} h^l, \sum_{l=1}^{k_2} \varphi_{1l} h^l, \sum_{l=1}^{\infty} \varphi_{1,\ k_1+l}\, h^{l-1} \quad \text{и} \quad \sum_{l=1}^{\infty} \varphi_{2,\ k_2+1}\, h^{l-1}$$

соотвѣтственно черезъ A_1, A_2, f_{11}: f_{12}. Тогда интегралы f_1 и f_2 могутъ быть написаны въ видѣ: $A_1 + h^{k_1+1} f_{11}$, $A_2 + h^{k_2+1} f_{22}$. Такъ какъ A_1, A_2 и h—постоянныя, то эти выраженія показываютъ, что функціи f_{11} и f_{22} будутъ интегралами системы

$$\frac{dx_1}{X_{01} + h^k X_{11}} = \frac{dx_2}{X_{02} + h^k X_{12}} = \frac{dx_3}{X_{03} + h^k X_{13}} = \ldots = \frac{dx_p}{X_{0p} + h^k X_{1p}}, \tag{7}$$

которую мы получили изъ системы (1) подстановкой

$$b_i = b_{0i} + h(b_{1i} - b_{0i}). \qquad (i=1, 2, 3, \ldots p) \qquad (8)$$

Эти два интеграла будутъ, какъ и f_1 и f_2, независимы, и, слѣдовательно, по крайней мѣрѣ одинъ изъ опредѣлителей матриссы

$$\left| \begin{array}{ccccc} \frac{\partial f_{11}}{\partial x_1} & \frac{\partial f_{11}}{\partial x_2} & \frac{\partial f_{11}}{\partial x_3} & \ldots & \frac{\partial f_{11}}{\partial x_p} \\ \\ \frac{\partial f_{22}}{\partial x_1} & \frac{\partial f_{22}}{\partial x_2} & \frac{\partial f_{22}}{\partial x_3} & \ldots & \frac{\partial f_{22}}{\partial x_p} \end{array} \right| \qquad (9)$$

будетъ отличенъ отъ нуля.

Пусть это будетъ $B = \frac{D(f_{11}, f_{22})}{D(x_1, x_2)}$.

Полагая въ функціяхъ f_{11} и f_{22} $h=0$, мы получаемъ непосредственно интегралы Φ_{1, k_1+1} и Φ_{2, k_2+1} для системы (4). Но мы разсматриваемъ на этотъ разъ предположеніе, что эти интегралы связаны функціональной зависимостью и, слѣдовательно, въ частности опредѣлитель $\frac{D(\Phi_{1, k_1+1} \Phi_{2, k_2+1})}{D(x_1, x_2)}$ равенъ нулю. Но онъ составляетъ первый членъ разложенія опредѣлителя B по степенямъ параметра h, и потому можно представить его въ видѣ $h^{k_3}\psi$, гдѣ k_3 — цѣлое положительное число, а ψ—функція необращающаяся въ нуль вмѣстѣ съ h.

Пусть

$$\Phi_{2_1, k+1} = \Theta(\Phi_{1, k_1+1}).$$

Если мы исключимъ изъ области голоморфности перемѣнныхъ $x_i (i=1, 2, 3, \ldots, p)$ тѣ значенія системы, которыя обращаютъ въ нуль одновременно первыя производныя функція Φ_{1, k_1+1}, то изъ тождества (10) мы послѣдовательнымъ дифференцированіемъ можемъ получить значеніе производной $\Theta^{(n)}(\Phi_{1, k_1+1})$ при сколь угодно большомъ значеніи порядка производной n.

Возьмемъ интегралъ:

$$f_{22} - \Theta(f_{11}).$$

При $h=0$ въ силу тождества (10) онъ обращается въ нуль; слѣдовательно, если разложить его въ строку Маклореня, то мы можемъ написать:

$$f_{22} - \Theta(f_{11}) = h\Phi_{3,2} + h^2\Phi_{3,3} + h^3\Phi_{3,4} + \ldots + h^{k_4}\Phi_{3, k_4} + h^{k_4+1}\Phi_{3, k_4+1},$$

гдѣ число k_4 можетъ быть сколь угодно большимъ, а функція $\Phi_{3,\,k_4+1}$ не теряетъ непрерывности при $h=0$.

Если $\Phi_{3,\,2}$ не представляетъ собой функцію отъ $\Phi_{1,\,k_1+1}$, то, очевидно, эта функція будетъ вторымъ интеграломъ для системы (4). Если же существуетъ тождество:

$$\Phi_{3,2}=\Theta_1\left(\Phi_{1,k_1+1}\right), \tag{11}$$

то, пользуясь имъ, мы безъ труда находимъ новый интегралъ системы (7):

$$f_{22}-\Theta(f_{11})-h\,\Theta_1(f_{11})=h^2\Phi_{4,3}+h^3\Phi_{4,4}+h^4\Phi_{4,5}+\ldots+h^{k_4}\Phi_{4,\,k_4}+h^{k_4+1}\,\Phi_{4,k_4+1},$$

гдѣ функція Φ_{4,k_4+1} не теряетъ непрерывности при $h=0$.

Продолжая разсуждать точно такъ же, мы либо придемъ къ новому интегралу $\Phi_{l,\,l-1}$, либо къ тождеству типа:

$$\Phi_{l,\,l-1}=\Theta_{l-2}(\Phi_{1,k_1+1}), \tag{12}$$

которое приведетъ къ новому:

$$\begin{aligned}f_{22}-\Theta(f_{11})-h\Theta_1(f_{11})-h^2\Theta_2(f_{11})-\ldots-h^{l-2}\,\Theta_{l-2}(f_{11})=\\=h^{l-1}\Phi_{l+1,\,l}+h^l\Phi_{l+1,l+1}+\ldots+h^{k_4}\,\Phi_{l+1,\,k_4}+h^{k_4+1}\,\Phi_{l+1,\,k_4+1}\,.\end{aligned}$$

Нетрудно показать, что тождество (12) станетъ въ противорѣчіе съ нашими предположеніями относительно опредѣлителя B, если мы предположимъ l большимъ k_3+1. Примемъ въ самомъ дѣлѣ, что всѣ функціи $\Phi_{l+1,\,l}$ при l какомъ угодно будутъ функціями $\Phi_{1,\,k_1+1}$; мы будемъ имѣть въ частности для $l=k_3+2$:

$$\begin{aligned}f_{22}-\Theta\,(f_{11})-h\Theta_1(f_{11})-h^2\Theta_2(f_{11})-\ldots-h^{k_3}\,\Theta_{k_3}(f_{11})=\\=h^{k_3+1}\,\Phi_{k_3+3,\,k_3+2}+h^{k_3+2}\,\Phi_{k_3+3,\,k_3+3}+\ldots+h^{k_4}\,\Phi_{k_3+3,\,k_4}+h^{k_4+1}\,\Phi_{k_3+3,\,k_4+1}\,,\end{aligned}$$

гдѣ $\Phi_{k_3+3,\,k_4+1}$ при $h=0$ не теряетъ непрерывности.

Подвергнемъ это тождество операціи:

$$\frac{\partial f_{11}}{\partial x_1}\,\frac{\partial}{\partial x_2}-\frac{\partial f_{11}}{\partial x_2}\,\frac{\partial}{\partial x_1}$$

и получимъ тождество:

$$B=h^{k_3}\psi=h^{k_3+1}\,\Psi,$$

которое показываетъ, что функція ψ противъ предположенія обращается въ нуль вмѣстѣ съ параметромъ h, и, слѣдовательно, одна изъ функцій $F_{l+1,\,l}$ при $l<k_3+2$ дастъ новый интегралъ для системы (4).

Итакъ, когда два интеграла системы (1) обращаются въ постоянныя при существованіи условій (2), всегда можно дать имъ такую форму:

$$\begin{aligned} f &= F_0 + hF_{01} + h^2F_{02} + \ldots + h^kF_{0k} \\ f_1 &= F_1 + hF_{11} + h^2F_{12} + \ldots + h^{k_1}F_{1k_1}, \end{aligned} \tag{13}$$

гдѣ функціи F_0 и F_1 будутъ функціонально независимы, функція $F_{0,k}$ голоморфная въ области измѣненія перемѣнныхъ x_i и h, а функція $F_{1,k}$, непрерывная и имѣющая всѣ производныя въ области, которую получимъ, исключивъ системы значеній перемѣнныхъ x_i, обращающихъ всѣ первыя производныя функціи F_0 въ нуль.

Попутно мы рѣшили задачу, какъ найти дополнительный интегралъ, если два независимыхъ интеграла системы (1) при условіяхъ (2) становятся функціей одинъ другого.

§ 3. Мы можемъ воспользоваться рѣшеніемъ, даннымъ для случаевъ одного и двухъ интеграловъ для самаго общаго случая n интеграловъ, При наличности условій (2) число независимыхъ интеграловъ можетъ уменьшиться. Каждый интегралъ можетъ въ силу этихъ условій обратиться въ постоянную, а когда содержитъ перемѣнныя, можетъ стать функціей другихъ.

Предположимъ, что часть изъ этихъ n интеграловъ обращается въ постоянныя, а остальные связаны тоже нѣсколькими зависимостями.

Согласно предыдущему, вводимъ параметръ h при помощи формулъ (8). Тогда согласно предыдущему параграфу, каждый интегралъ, обращающійся въ постоянную, можно замѣнить такимъ, который не обращается уже въ постоянную, и, слѣдовательно, задача приводится къ тому случаю, когда при $h=0$ нѣкоторые изъ интеграловъ системы (7) перестанутъ быть независимыми другъ отъ друга.

Мы уже видѣли въ предыдущемъ параграфѣ, что эта задача рѣшается въ случаѣ двухъ интеграловъ вполнѣ. Покажемъ, что эта задача рѣшается послѣдовательно сначала для двухъ, потомъ для трехъ и такъ далѣе. Поэтому предположимъ, что мы можемъ преобразовать систему $n-1$ интеграловъ такъ, чтобы они и при $h=0$ оставались независимыми другъ отъ друга и покажемъ, что можно преобразовать n-ый интегралъ, который и при h, равномъ нулю, оставался бы независимымъ.

Итакъ, положимъ, что система (7) имѣетъ n интеграловъ

$$f_i = \sum_{j=0}^{k_1} F_{ij}h^j + h^{k_1+1} F_{i,\,k_1+1} \qquad (i=1,\,2,\,3,\ldots,\,n) \tag{14}$$

О функціяхъ F_{i0} мы сдѣлаемъ слѣдующія предположенія:

Функціи $F_{ij} (i=1, 2, 3, \ldots, n-1)$ *считаемъ независимыми между собою. Функція же* F_{n0} *выражается черезъ нихъ, такъ что имѣемъ тождество:*

$$F_{n0}= \Theta_0 \{F_{10}, F_{20} \ldots, F_{n-1,0}\}. \tag{15}$$

Функціи $F_{1,\, k_1+1}, F_{n,\, k_1+1}$ *— голоморфныя въ соотвѣтственной области, а* $F_{i,\, k_1+1} (i=1, 2, 3, \ldots, n-1)$ *имѣютъ въ этой области производныя какого-угодно порядка и для* $h=0$ *не обращаются въ безконечность.*

И, наконецъ, цѣлое число k_1 *можно сдѣлать сколь-угодно большимъ.*

Интегралы f_i системы (7) независимы, и потому по крайней мѣрѣ одинъ изъ опредѣлителей матриссы:

$$\left|\begin{matrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial x_p} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial x_3}{\partial x_3} & \ldots & \frac{\partial f_3}{\partial x_p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \frac{\partial f_n}{\partial x_3} & \ldots & \frac{\partial f_\nu}{\partial x_p} \end{matrix}\right| \tag{16}$$

не равенъ нулю. Мы можемъ предположить, что, этотъ миноръ—B, равный опредѣлителю

$$\frac{D(f_1, f_2, f_3, \ldots f_n)}{D(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)}.$$

Онъ будетъ обладать тѣми же свойствами, что и интегралы f_i и потому можетъ быть расположенъ въ рядъ по степенямъ параметра h съ остаточнымъ членомъ.

Пусть это разложеніе напишется такъ:

$$\sum_0^k B_i h^i + h^{k+1} \Psi,$$

гдѣ функція Ψ не обращается въ безконечность при $h=0$ и имѣетъ въ разсматриваемой области производныя какого-угодно порядка.

При h равномъ нулю въ силу тождества (15) вся матрисса (16) должна обратиться въ нуль, и, слѣдовательно, B_0 тоже должно обратиться въ нуль. Можетъ быть, также и B_1 равно нулю, и т. д., но во всякомъ случаѣ будетъ существовать такое цѣлое число k, при которомъ членъ разложенія минора B съ индексомъ k будетъ отличенъ отъ нуля, и, слѣдовательно, мы можемъ положить:

$$B \equiv \frac{D(f_1,\ f_2,\ f_3, \ldots, f_n)}{D_1(x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots, x_p)} = B_k h^k + h^{k+1} \Psi \tag{17}$$

Число k—вполнѣ опредѣленное, зависящее отъ свойствъ взятыхъ интеграловъ f_i, тогда какъ k_1 можетъ быть выбрано сколь-угодно большимъ; и поэтому мы можемъ предположить, что $k_1 > k$.

Разсмотримъ интегралъ:

$$f_n - \Theta_0 \{f_1\,,\ f_2\,,\ f_3\,, \ldots,\ f_{n-1}\}.$$

Его можно разложить по степенямъ h въ области измѣненія перемѣнныхъ x_i, если изъ прежней области исключимъ тѣ значенія перемѣнныхъ, которыя обращаютъ въ нуль всѣ опредѣлители матриссы:

$$\left|\begin{matrix} \frac{\partial F_{10}}{\partial x_1} & \frac{\partial F_{10}}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial F_{10}}{\partial x_p} \\ \frac{\partial F_{20}}{\partial x_1} & \frac{\partial F_{20}}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial F_{20}}{\partial x_p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial F_{n-1,0}}{\partial x_1} & \frac{\partial F_{n-1,0}}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial F_{n-1,0}}{\partial x_p} \end{matrix}\right| \tag{18}$$

Само собой разумѣется, что полученное разложеніе должно дополняться членомъ, состоящимъ изъ произведенія цѣлой степени параметра h на функцію, не обращающуюся въ безконечность при $h = 0$. Разложеніе будетъ, слѣдовательно, того же типа, какъ и разложеніе интеграловъ f_2, $f_3, \ldots,$ f_{n-1}.

Для того, чтобы получить всѣ члены разложенія, достаточно найти всѣ производныя отъ этого новаго интеграла по параметру h для его значенія, равнаго нулю. Очевидно, что эти послѣднія будутъ функціями коэффиціентовъ разложеній интеграловъ f_i и значеніями функціи Θ_0 и ея производныхъ для аргументовъ F_{10}, F_{20}, $F_{30}, \ldots,$ $F_{n-1,0}$.

Нетрудно найти эти производныя съ помощью тождества (15).

Такъ какъ по предположенію мы ограничились лишь тою областью значеній, которая не обращаетъ въ нуль по крайней мѣрѣ одного изъ опредѣлителей матриссы (18), то можемъ принять, что отличенъ отъ нуля опредѣлитель:

$$C \equiv \frac{D(F_{10}\,,\ F_{20}\,, \ldots,\ F_{n-1,0})}{D(x_1\,,\ x_2\,, \ldots,\ x_{n-1})}.$$

Составимъ операцію;

$$D_i \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial F_{10}}{\partial x_1} & \frac{\partial F_{10}}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_{10}}{\partial x_{n-1}} \\ \frac{\partial F_{20}}{\partial x_1} & \frac{\partial F_{20}}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_{20}}{\partial x_{n-1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_{i-1,0}}{\partial x_1} & \frac{\partial F_{i-1,0}}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_{i-1,0}}{\partial x_{n-1}} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_{n-1}} \\ \frac{\partial F_{i+1,0}}{\partial x_1} & \frac{\partial F_{i+1,0}}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_{i+1,0}}{\partial x_{n-1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_{n-1,0}}{\partial x_1} & \frac{\partial F_{n-1,0}}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_{n-1,0}}{\partial x_{n-1}} \end{vmatrix}$$

которую получимъ, если замѣстимъ въ i-ой строкѣ опредѣлителя C элементы $\frac{\partial F_{i,0}}{\partial x_j}$ соотвѣтственно черезъ операціи $\frac{\partial}{\partial x_j}$.

Подвергнемъ обѣ части тождества (15) операціи D_i, тогда получаемъ тождество:

$$\frac{D(F_{10}, F_{20}, \ldots, F_{i-1,0}, F_{n,0}, F_{i+1,0}, \ldots, F_{n-1,0})}{D(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{n-1})} = \frac{\partial \Theta_0}{\partial F_{i,0}} C, \qquad (19)$$

которое дастъ возможность опредѣлить всѣ первыя производныя функціи Θ_0 для вышеупомянутыхъ аргументовъ.

Подвергая обѣ части тождествъ (19) операціямъ D_i и D_j, опредѣлимъ всѣ производныя второго порядка отъ функціи Θ_0. Продолжая такимъ образомъ, мы можемъ, очевидно, опредѣлить для функціи Θ_0 производныя какого-угодно порядка.

Такимъ образомъ, мы получимъ всѣ элементы для опредѣленія членовъ разложенія интеграла $f_n - \Theta_0\{f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}\}$. Опредѣляя $k_1 + 1$ членовъ разложенія и вычитая полученную сумму изъ этого интеграла, найдемъ дополнительный членъ разложенія и можемъ написать:

$$f_n - \Theta_0\{f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}\} = \sum_{j=1}^{k_1} h^j F_j^{(1)} + h^{k_1+1} F_{k_1+1}^{(1)},$$

гдѣ функція $F_{k+1}^{(1)}$ не обращается въ безконечность для $h=0$.

Очевидно, что $F_1^{(1)}$ будетъ интеграломъ системы (4), но можетъ случиться, что и онъ будетъ функціей прежнихъ интеграловъ, если будемъ имѣть тождество:

$$F_1^{(1)} = \Theta\{F_{10}, F_{20}, \ldots, F_{n-1,0}\}. \tag{20}$$

Тогда вмѣсто предыдущаго интеграла возьмемъ интегралъ:

$$f_n - \Theta_0\{f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}\} - h\Theta_1\{f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}\}.$$

Воспользовавшись тождествомъ (20) совершенно аналогично тождеству (15) и операціями D_i, можемъ найти разложеніе новаго интеграла по степенямъ параметра:

$$\sum_{i=2}^{k_1} h^j F_j^{(2)} + h^{k_1+1} F_{k_1+1}^{(2)},$$

гдѣ опять $F_j^{(2)}$ — функція, необращающаяся въ нуль для $h = 0$.

Функція $F_2^{(2)}$ будетъ интеграломъ системы (14). Если это будетъ интегралъ, независимый отъ прежнихъ, то процессъ будетъ законченъ. Въ противномъ случаѣ составляемъ функціональную зависимость и продолжаемъ аналогично прежнему.

Мы преобразовывали интегралъ f_n, прибавляя къ нему функціи отъ остальныхъ интеграловъ такимъ образомъ, чтобы разложеніе начиналось съ болѣе высокой степени параметра h.

Покажемъ, что такой процессъ не можетъ быть безконечнымъ.

Предположимъ, что, продолжая нашъ пріемъ, мы пришли къ разложенію интеграла.

$$f_n - \sum_{j=0}^{l-1} h^j \Theta_j\{f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}\} \equiv \sum_{j=l}^{k_1} F_j^{(l)} h^j + h^{k_1+1} F_{k_1+1}^{(l)} \tag{21}$$

гдѣ относительно F_{k_1+1} справедливы наши обычныя предположенія, и покажемъ, что l не можетъ быть больше опредѣленнаго числа k, извѣстнаго по разложенію опредѣлителя B, минора матриссы (18). Допустимъ противное. Замѣнимъ въ опредѣлителѣ B элементы послѣдней строки $\frac{\partial f_n}{\partial x_i}$ соотвѣтственно черезъ $\frac{\partial}{\partial x_i}$ и подвергнемъ полученной операціи обѣ части тождества (21). Въ результатѣ получимъ новое:

$$B \equiv \sum_{j=l}^{k_1} F_j h^j + h^{k_1+1} F_{k_1+1},$$

гдѣ F_{k_1+1} не обращается въ безконечность при $h = 0$, и при помощи условія (17) найдемъ:

$$B_k h^k + h^{k+1} \Psi \equiv \sum_{j=i}^{k_1} F_j h^j + h^{k_1+1} F_{k_1+1},$$

гдѣ F_{k_1+1} не обращается въ безконечность при $h=0$, и при помощи условія (17) найдемъ:

$$B_k h^k + h^{k+1}\Psi \equiv \sum_{j=1}^{k_1} F_j h^j + h^{k_1+1} F_{k_1+1}.$$

Отсюда принимая $l>k$, мы должны получить $B_k=0$, а это было бы противъ предположенія.

Итакъ, мы всегда можемъ замѣнить интегралъ f_n интеграломъ

$$f_n - \sum_{j=0}^{l-1} h^j \Theta_j \{f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}\},$$

который раскладывается въ рядъ по степенямъ параметра h согласно равенству (21), и функція $F_l^{(l)}$ будетъ недостающимъ n-ымъ интеграломъ системы (4), независимымъ отъ прежнихъ интеграловъ.

§ 4. Въ предыдущихъ параграфахъ мы показали, что, если намъ извѣстны n независимыхъ интеграловъ системы (1), заключающихъ произвольные параметры, и они при существованіи условій (2) перестаютъ быть независимыми, то, вводя опредѣленнымъ образомъ новый параметръ и дифференцированіе по послѣднему, мы получимъ и для частной системы полную систему n независимыхъ интеграловъ.

При этомъ мы предположили, что наши интегралы будутъ голоморфными въ извѣстной области, какъ относительно перемѣнныхъ x_i, такъ и относительно параметровъ b_i. Эти условія для приложенія предложенной теоріи не являются необходимыми, а лишь достаточными.

Я позволю себѣ резюмировать процессъ полученія недостающихъ интеграловъ.

Прежде всего мы преобразуемъ систему (1) къ системѣ болѣе частнаго вида (7), введя параметръ h при помощи формулъ (8). Конечно, интегралы преобразуются соотвѣтственнымъ образомъ.

Затѣмъ отбираемъ интегралы, которые при $h=0$ обращаются въ постоянныя и опредѣляемъ для каждаго послѣдовательнымъ дифференцированіемъ и подстановкой $h=0$ ту часть ихъ разложенія по степенямъ параметра h, которая не зависитъ отъ перемѣнныхъ x_i. Вычитая изъ этихъ интеграловъ ихъ постоянныя части и дѣля на соотвѣтственныя степени параметра h, мы получимъ взятые интегралы въ новой формѣ, при которой они уже не обращаются въ нуль при $h=0$.

Такимъ образомъ мы приведемъ всю систему интеграловъ къ одному и тому же типу. Всѣ они будутъ разлагаться въ голоморфный рядъ по степенямъ параметра h, и первый членъ разложенія каждаго изъ нихъ не будетъ постояннымъ относительно перемѣнныхъ x_i.

Если первые члены системы всѣхъ n интеграловъ окажутся независимыми, то задача уже рѣшена, и интегралы для системы (4), получающейся изъ системы (7) подстановкой $h=0$, найдены.

Если же этого нѣтъ, то независимость взятыхъ интеграловъ имѣетъ источникомъ послѣдующіе члены разложенія.

Составимъ въ этомъ случаѣ для всѣхъ данныхъ интеграловъ матриссу (16) предыдущаго параграфа. Одинъ изъ ея миноровъ не можетъ обратиться въ нуль, и потому его разложеніе по степенямъ параметра h дастъ намъ число k. Это число представитъ собой показатель наименьшей степени параметра h въ разложеніи этого минора по его степенямъ.

Вычислимъ сначала первые члены всѣхъ интеграловъ. Провѣряемъ ихъ функціональную независимость. Положимъ, что окажется между ними n_1 такихъ, которые будутъ функціями остальныхъ $n-n_1$. Затѣмъ ищемъ разложеніе всѣхъ n интеграловъ по степенямъ параметра h. Достаточно для нашей цѣли найти n_1k+1 членовъ разложенія каждаго интеграла. Для полученія ихъ достаточно найти соотвѣтствующее число производныхъ по параметру h для его значенія равнаго нулю. Такимъ образомъ представимъ каждый интегралъ въ видѣ полинома kn_1-ой степени смѣшаннаго съ остаточнымъ членомъ, представляющимъ собой произведеніе (kn_1-1)-ой степени параметра h на функцію, голоморфную въ разсматриваемой области.

Затѣмъ беремъ одинъ изъ первой группы n_1 интеграловъ и вычитаемъ изъ него такую функцію $n-n_1$ интеграловъ второй группы, разложеніе которой по степенямъ параметра h начиналось бы съ члена, содержащаго h въ первой степени. Разложеніе продолжимъ до члена, содержащаго n_1k-ую степень параметра h и, конечно, присоединимъ остаточный членъ. Если коэффиціентъ при первой степени параметра h не будетъ функціей первыхъ членовъ разложенія интеграловъ второй группы, то полученный интегралъ по раздѣленіи его на h останется независимымъ отъ интеграловъ второй группы и по принятіи параметра h равнымъ нулю. Въ противномъ случаѣ мы можемъ изъ полученнаго интеграла вычесть такую функцію интеграловъ 2-ой группы, умноженную на h, что разложеніе новаго интеграла будетъ начинаться уже съ члена, содержащаго h^2. Продолжая такимъ образомъ, мы придемъ къ такому интегралу, разложеніе котораго будетъ начинаться съ члена функціонально независимаго отъ первыхъ членовъ интеграловъ второй группы. Такой членъ будетъ вида $h^{k_1}\Phi$, гдѣ k_1 не можетъ быть больше k, такъ какъ тогда разложеніе всѣхъ опредѣлителей матриссы (16) начиналось бы съ члена, порядокъ котораго относительно параметра h былъ бы больше k. Раздѣливъ полученный интегралъ на h^{k_1}, мы уменьшимъ на единицу первую группу интеграловъ и увеличимъ вторую.

Новый интегралъ уже не будетъ непремѣнно голоморфнымъ, но онъ будетъ имѣть производныя какого-угодно порядка и, слѣдовательно, разлагается въ рядъ Маклореня съ остаточнымъ членомъ и потому можетъ быть употребленъ для преобразованія интеграла первой группы наравнѣ съ другими интегралами второй группы.

Переводя такимъ образомъ интегралы первой группы во вторую, мы придемъ къ системѣ n интеграловъ, которые при $h=0$ остаются независимыми.

Еще разъ замѣчаю, что способъ примѣнимъ при болѣе широкихъ предположеніяхъ.

Разсмотримъ еще два примѣра.

Пусть намъ дана система:

$$\frac{dx_1}{dt}=\alpha x_1+x_2+x_3+x_4 \qquad \frac{dx_2}{dt}=x_1+\alpha x_2+x_3+x_4$$
$$\frac{dx_3}{dt}=x_1+x_2+\beta x_3+x_4 \qquad \frac{dx_4}{dt}=x_1+x_2+x_3+\beta x_4.$$

Ея интеграламъ можно дать слѣдующій видъ:

$$(x_1-x_2)\,e^{-(\alpha-1)t}, \quad (x_3-x_4)\,e^{-(\beta-1)t},$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & \alpha-\lambda_3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \beta-\lambda_3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \beta-\lambda_3 \end{vmatrix} e^{-\lambda_3 t}$$

и

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & \alpha-\lambda_4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \beta-\lambda_4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \beta-\lambda_4 \end{vmatrix} e^{-\lambda t} \qquad (2)$$

гдѣ

$$\lambda_3=\frac{\alpha+\beta+2+\sqrt{(\alpha-\beta)^2+16}}{2}, \quad \lambda_4=\frac{\alpha+\beta+2-\sqrt{(\alpha-\beta)^2+16}}{2}.$$

Если мы въ нашей системѣ положимъ $\alpha=\beta=0$, то получимъ вмѣсто системы (1) новую [1]):

$$\frac{dx_1}{dt}=x_2+x_3+x_4 \qquad \frac{dx_2}{dt}=x_1+x_3+x_4$$
$$\frac{dx_3}{dt}=x_1+x_2+x_4 \qquad \frac{dx_4}{dt}=x_1+x_2+x_3.$$

---

[1]) Кіевъ. Университетскія Извѣстія 1912 г. № 1, статья проф. Пфейфера.

Полагая въ интегралахъ прежней системы α и β равными нулю, найдемъ только три интеграла новой:

$$(x_1-x_2)\,e^t,\quad (x_3-x_4)\,e^t,\quad (x_1+x_2+x_3+x_4)\,e^{-3t}$$

Что же касается интеграла (2), то онъ при этой подстановкѣ обращается тождественно въ нуль. Чтобы все-таки получить четвертый интегралъ для новой системы, положимъ въ интегралѣ (2) $\alpha=2h$ и $\beta=h$, продифференцируемъ его выраженіе два раза по параметру h и положимъ $h=0$. Тогда найдемъ интегралъ:

$$\left\{(x_1-x_2)\frac{1}{4}-(x_1-x_3)\frac{1}{4}-(x_1-x_4)\frac{1}{4}\right\}e^t,$$

который будетъ независимымъ отъ первыхъ трехъ.

Какъ второй примѣръ возьму систему, которую я изучалъ въ своей работѣ: Приложеніе полярныхъ операцій къ интегрированію обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій въ конечномъ видѣ» [1]).

$$\begin{aligned}
\alpha p'&=(\beta-\gamma)qr+K(c-b)vw+\frac{2Ma\,(c-b)}{5}[c(a-b)rv-b(c-a)qw]\\
\beta q'&=(\gamma-\alpha)pr+K(a-c)uw+\frac{2Mb\,(a-c)}{5}[a(b-c)pw-c(a-b)ru]\qquad(4)\\
\gamma r'&=(\alpha-\beta)pq+K(b-a)uv+\frac{2Mc\,(b-a)}{5}[b(c-a)qu-a(b-c)pv].
\end{aligned}$$

гдѣ

$$K=\frac{2Mabc}{5}.$$

$$\begin{aligned}
(c+a)(a+b)u'&=a(b-c)vw+2a[(a+c)rv-(a+b)qw]\equiv(c+a)(a+b)\,U\\
(a+b)(b+c)v'&=b(c-a)uw+2b[(b+a)pw-(b+c)ru]\equiv(a+b)(b+c)V\ (5)\\
(b+c)(c+a)w'&=c(a-b)vu+2c[(c+b)qu-(c+a)pv]\equiv(b+c)(c+a)\,W.
\end{aligned}$$

Она заимствована мной изъ двухъ большихъ мемуаровъ В. А. Стеклова, помѣщенныхъ въ Annales de la Faculté des sciences de Toulouse, 2-e série t. X, p. 271 и 3-e série t. I, p. 145.

Для упрощенія вычисленій я беру въ трехъ первыхъ уравненіяхъ (1) вмѣсто α, β, γ произведенія αK, βK, γK и получаю слѣдующія:

$$\begin{aligned}
\alpha p'&=(\beta-\gamma)qr+(c-b)vw+(c-b)\left(\frac{a-b}{b}rv-\frac{c-a}{c}qw\right)\equiv\alpha P\\
\beta q'&=(\gamma-\alpha)rp+(a-c)uw+(a-c)\left(\frac{b-c}{c}pw-\frac{a-b}{c}ru\right)\equiv\beta Q\qquad(6)\\
\gamma r'&=(\alpha-\beta)pq+(b-a)uv+(b-\mathrm{a})\left(\frac{c-a}{a}qu-\frac{b-c}{b}pr\right)\equiv\gamma R.
\end{aligned}$$

---

[1]) Сообщенія Х. М. О. 2-я серія. Т. XII, стр. 217.

В. А. Стекловъ даетъ въ этой работѣ три интеграла этой системы:

$$f_1 \equiv bcu^2 + acv^2 + abw^2$$

$$f_2 \equiv \frac{au^2 + bv^2 + cw^2}{2} + \alpha p^2 + \beta q^2 + \gamma r^2$$

$$f_3 \equiv \left[\frac{(a+c)(a+b)}{a} u + \alpha p\right]^2 + \left[\frac{(a+b)(b+c)}{b} v + \beta q\right]^2 +$$

$$+ \left[\frac{(b+c)(a+c)}{c} w + \gamma r\right]^2.$$

Кромѣ того, имъ изученъ вопросъ о четвертомъ интегралѣ 1-го и 2-го порядка и опубликованъ примѣръ послѣдняго. Примѣняя методъ полярныхъ операцій, я вновь изслѣдовалъ, ограничиваясь аналитической стороной дѣла этотъ вопросъ. Не получивъ ничего существенно новаго, я нашелъ два четвертыхъ интеграла: одинъ типа:

$$\nu_1 pu + \nu_2 qv + \nu_3 rw + \varrho_1 u^2 + \varrho_2 v^2 + \varrho_3 w^2 \tag{8}$$

съ тремя условіями и другой типа:

$$\mu_1 p^2 + \mu_2 q^2 + \mu_3 r^2 + \nu_1 pu + \nu_2 qv + \nu_3 rw + \varrho_1 u^2 + \varrho_2 v^2 + \varrho_3 w^2 \tag{9}$$

съ четырьмя условіями.

Оказывается, что, если прибавить къ тремъ условіямъ, необходимымъ для существованія интеграла типа (8), условія

$$\alpha = \beta = \gamma, \tag{10}$$

то интегралъ (8) становится функціей трехъ интеграловъ (7).

Согласно изложенной теоріи мы должны получить четвертый интегралъ и для этого случая; и дѣйствительно, три прежнія условія и условія (10) оказываются эквивалентными четыремъ условіямъ, при которыхъ существуетъ интегралъ (9), и, слѣдовательно, можно получить его не только тѣмъ алгебраическимъ путемъ, который примѣненъ мной въ моей цитированной выше работѣ, но также и при помощи пріема Даламбера.

Sur l'application de la méthode de W. Ritz au problème des oscillations contraintes.

par ***Nikolas Kryloff.***

En 1908 W. Ritz a proposé, comme on sait, un procédé remarquable pour l'intégration des équations différentielles de la physique mathématique. Voici en peu de mots la marche des raisonnements de l'illustre physicien suisse: au lieu de l'équation différentielle et des conditions au contour données, Ritz considère une certaine intégrale, correspondant au problème, de sorte que l'équation donnée sera l'équation d'Euler de cette intégrale et interviendra comme la condition nécessaire pour la rendre minimum (stationnaire); ce premier étape de la pensée de Ritz est donc identique à celui sur lequel répose le fameux «principe de Dirichlet», tel que Riemann l'a conçu; la partie essentielle des mémoires de Ritz consiste dans la démonstration, par la voie du calcul effectif, de l'existance de la solution du problème de minimum posé, qui vérifie l'équation différentielle donnée.

Sans entrer dans les détails, remarquons néanmoins, que le succès de la méthode tient à ce que la forme quadratique, qui intervient dans le raisonnement était positive dans les problèmes traités rigoureusement par W. Ritz et *il n'existait* pas de solutions, dites fondamentales; ce fait n'ayant pas lieu dans les problèmes de Fourier (comme par ex. ceux des cordes et des plaques vibrantes) Ritz remarque ¹), que l'application de son procédé de calcul donne pourtant des resultats satisfaisants au point de vue pratique; depuis lors un certain nombre de calculs ont été faits dans cette direction sans s'occuper tout de même de la convergence des approximations; divers savants, entre autres et surtout M. le Prof. Timochenko (pour les diverses questions de la science d'ingénieur) et M. le Prof. Love (pour les problèmes de la mécanique céleste), en appliquant le procédé de Ritz, ont obtenu d'après leur attestation des résultats très satis-

---

¹) En calculant par sa méthode la fonction fondamentale dans le cas par ex. où elle est d'avance exactement connue.

faisants au point de vue pratique, quoique la question de la démonstration rigoureuse reste ouverte.

Laissant de côté ce problème d'une extrême difficulté, proposons nous dans cette note de montrer par des exemples simples, pour plus de netteté, quelle liaison intime existe entre la méthode de Ritz et celle de Schwarz—Poincaré—Stekloff *dans le cas* où les fonctions suivant lesquelles Ritz développe sa solution seront les fonctions fondamentales de l'équation fonctionnelle, correspondant à l'équation différentielle et les conditions au contour données.

Bref, l'idée, qui nous a guidé dans cette étude consiste en ceci: la résolution de l'équation fonctionnelle, correspondant au problème, par la méthode connue, ci dessus mentionnée, donne la solution *exacte* du problème; donc si nous parvenons à établir l'identité du développement de la solution de l'équation fonctionnelle avec celui, donné par la méthode de Ritz, nous démontrons en même temps *en toute rigueur* la validité du procédé de Ritz; ceci constitue à notre avis un autre moyen de démontrer la convergence des approximations de Ritz et dans les cas où les fonctions fondamentales du problème se prètent facilement au calcul (par ex. les fonctions trigonométriques dans les cas de l'équation différentielle aux coëfficients constants) on obtient les résultats dignes d'attention au point de vue pratique, sil'on admet la facilité de l'application du procédé de Ritz. En nous bornant, pour plus de brièveté, au cas d'une dimension, considérons l'équation différentielle corespondant au problème des oscillations contraintes d'une corde vibrante *hétérogène:*

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\lambda A(x)\,u=-f(x)\,,\left\{\begin{array}{l}\text{ou } A(x) \text{ d'après les considérations d'ordre}\\ \text{physique ne change pas le signe entre } a \text{ et } b\end{array}\right\}\quad(1)$$

ici λ est donné, puisqu'il s'agit des oscillations contraintes.

Pour former l'équation fonctionnelle correspondant à (1), procédons d'après la méthode bien connue, comme il suit: soit $K(x, y)$ la fonction de Green rélative à l'équation $\frac{d^2u}{dx^2}=0$ avec les conditions aux frontières a et b: $u(a)=0$; $u(b)=0$; alors en se souvenant, que $K''(x, y)=0$, d'après les propriétés de la fonction de Green, on reçoit immédiatement:

$$u(y)=\lambda\int_a^b K(x,\ y)\,A(x)\,u(x)\,dx+\int_a^b K(x,\ y)\ f(x)\,dx, \qquad (2)$$

multipliant tous les termes de (2) par $\sqrt{A(y)}$, représentons la sous la forme suivante:

$$u(y)\sqrt{A(y)} = \lambda \int_a^b K(x,\ y)\sqrt{A(x)}\sqrt{A(y)}\,u(x)\sqrt{A(x)}\,dx + \\ + \int_a^b K(x,y)\sqrt{A(y)}\sqrt{A(x)}.\frac{f(x)}{\sqrt{A(x)}}dx\,; \qquad (3)$$

à présent le noyau de l'équation fonctionnelle est symétrique et par conséquent en appliquant le développement donné par la méthode de Schwarz—Poincaré—Stekloff, et en appelant le second terme de la seconde partie de (3) par $F(y)$, on obtient:

$$u(y)\sqrt{A(y)} = F(y) + \lambda \sum_n^{1,\infty} \frac{U_n(y)\int_a^b F(y)\,U_n(y)\,dy}{\lambda_n - \lambda}\,, \qquad (4)$$

où $U_n(y)$ sont les fonctions fondamentales, rélatives au noyau symétrique $K(x,\ y)\ \sqrt{A(x)}\ \sqrt{A(y)}$ et les λ_n sont les valeurs singulières correspondantes.

Remarquons à présent, et ceci est essentiel pour notre raisonnement, que d'après *la forme même de* $F(y)$ telle que l'on voit dans la formule (3) on peut affirmer la possibilité de son développement en série des fonctions fondamentales du noyau susdit; donc la formule (4) peut être présentée sous la forme suivante:

$$u(y)\sqrt{A(y)} = \sum_n^{1,\infty} U_n(y)\int_a^b F(y)\,U_n(y)\,dy + \lambda \sum_n^{1,\infty} \frac{U_n(y)\int_a^b F(y)\,U_n(y)\,dy}{\lambda_n - \lambda} = \\ = \sum_n^{1,\infty} \frac{\lambda_n\,U_n(y)\int_a^b F(y)U_n(y)\,dy}{\lambda_n - \lambda}. \qquad (5)$$

Traitons à présent le même problème par la méthode de Ritz, en remarquant pour cela, que la question revient au point de vue de «principe de Dirichlet» à la recherche du minimum de l'intégrale:

$$\int_a^b \left[\left(\frac{du}{dx}\right)^2 - \lambda\,A(x)\,u^2 - 2fu\right]dx = \mathrm{I} \qquad (6)$$

dont l'équation d'Euler sera précisement l'équation differentielle donnée.

En suivant le procédé de Ritz nous substituons dans l'intégrale (1) le développement fini (c. à d. série limitée) de u:

$$u(x) = \alpha_1 v_1(x) + \alpha_2 v_2(x) + \ldots + \alpha_n v_n(x), \tag{7}$$

où $v_i(x)$ sont les fonctions vérifiant les conditions au contour données,— dans le cas que nous envisageons ce sera (7') $v_i(a) = 0$; $v_i(b) = 0$; pour atteindre notre but final nous choisirons, comme il a été mentionné plus haut, pour les $v_i(x)$ les fonctions fondamentales de l'équation:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \lambda\, A(x)\, u = 0\,, \tag{8}$$

vérifiant les mêmes conditions à la frontière (7').

Pour calculer les coëfficients inconnus α_i, substituons l'expression (7) dans (6), ceci nous donne:

$$\sum_{i,\,k} \alpha_i \alpha_k \left[\int_a^b v_i'(x)\, v_k'(x)\, dx - \lambda \int_a^b A(x)\, v_i(x)\, v_k(x)\, dx \right] - 2 \sum_i \alpha_i \int_a^b f(x)\, v\ (x)\, dx,$$

d'où les α_n se déterminent *individuellement* (dans notre cas), d'après la condition à rendre stationnaire l'intégrale (6), par les équations suivantes:

$$\frac{\partial I}{\partial \alpha_i} = 2\alpha_i \left[\int_a^b v_i'(x)^2\, dx - \lambda \int_a^b A(x)\, v_i^2(x)\, dx \right] - 2 \int_a^b f(x)\, v_i(x)\, dx = 0, \tag{9}$$

car évidemment:

$$\int_a^b A(x)\, v_i(x)\, v_k(x)\, dx = 0; \quad \int_a^b v_i'(x)\, v_k'(x)\, dx = 0, \text{ si } i \neq k;$$

donc de (9) on obtient;

$$\alpha_i = \frac{\int_a^b f(x)\, v_i(x)\, dx}{\lambda_i - \lambda},$$

car il est connu, et du reste facile à vérifier, que:

$$\int_a^b A(x)\, v_i^2(x)\, dx = 1\,; \quad \int_a^b v_i'^2(x)\, dx = \lambda_i.$$

Pour s'assurer que les développements (5) et (7) sont identiques, il suffira de montrer, que:

$$\int_a^b f(x)\, v_n(x)\, dx = \lambda_n \int_a^b F(x)\, U_n(x)\, dx; \tag{10}$$

or

$$F(x) = \int_a^b K(x, z) \sqrt{A(x)} \sqrt{A(x)} \frac{f(z)}{\sqrt{A(z)}} dz,$$

donc

$$\lambda_n \int_a^b F(x) U_n(x)\, dx = \lambda_n \int_a^b \int_a^b K(x, z) \sqrt{A(z)} \sqrt{A(x)} U_n(x) \frac{f(z)}{\sqrt{A(z)}} dx\, dz =$$

$$= \int_a^b U_n(z) \frac{f(z)}{\sqrt{A(z)}} dz = \int_a^b f(x)\, v_n(x)\, dx \text{ c. q. f. d.}$$

Puisque le procédé de Ritz présente ses avantages au point de vue du calcul numérique de la solution, d'après l'opinion des savants, qui l'ont appliqué, il est nécessaire donc d'avoir la certitude, que les approximations de Ritz convergent et les considérations, ci-dessus développées, nous la donnent dans le cas que nous envisageons, en établissant l'identité des coëfficients de Ritz avec ceux de la solution de l'équation fonctionnelle, donnée par la méthode de Schwarz—Poincaré—Stekloff. Il va sans dire, que dans le cas $A(x) = \text{const.}$ on peut obtenir les résultats de la portée pratique.

Il serait intéressant de poursuivre plus loin l'étude de la liaison, qui existe entre la méthode de Ritz et la méthode fondamentale, celle de Schwarz—Poincaré—Stekloff, de la physique mathématique, ainsi que d'appliquer les considérations qui précèdent au problème des oscillations contraintes de l'océan sous l'influence du potentiel perturbateur des astres, quand en employant l'artifice analogue à celui de Prof. Love on évite les difficultés, liées à l'existence des latitudes critiques.

Petrograd. ^{17}/IX 1914.

Къ вопросу о функціяхъ наименѣе уклоняющихся отъ нуля.

А. Маркова.

Въ первомъ выпускѣ тома XXIX «Математическаго Сборника» помѣщена статья Б. К. Млодзѣевскаго «О многочленахъ наименѣе уклоняющихся отъ нуля».

Не касаясь содержанія ея, я не могу оставить безъ вниманія, что Б. К. Млодзѣевскій рядомъ съ русскими математиками, занимавшимися вопросомъ о функціяхъ наименѣе уклоняющихся отъ нуля, поставилъ Либманна.

Упоминаніе о замѣткѣ Либманна «Vereinfachte Behandlung einiger Minimalprobleme von Tschebyscheff (Jahresbericht der deutschen Mathematiker Vereinigung, Band 18.) встрѣчаю я въ русской литературѣ впервые. Оно сдѣлано безъ указанія на ошибку Либманна, которому даже приписанъ особый методъ рѣшенія задачи о такихъ функціяхъ.

Такъ какъ ошибка Либманна имѣетъ важное принципіальное значеніе и, какъ видно, остается незамѣченной, то я считаю нужнымъ на ней остановиться, тѣмъ болѣе, что поводомъ для этой ошибки могутъ служить нѣкоторые мемуары Чебышева о механизмахъ, содержащіе вмѣсто ясной постановки вопросовъ и полнаго ихъ изслѣдованія только окончательные выводы. Для простѣйшей задачи о полиномѣ

$$x^n + p_1 x^{n-1} + \ldots + p_{n-1} x + p_n$$

наименѣе уклоняющемся отъ нуля Либманнъ, дѣйствительно, немного видоизмѣнилъ извѣстное доказательство правильности рѣшенія даннаго Чебышевымъ, но ничего болѣе не сдѣлалъ.

Для рѣшенія же общей задачи о функціи

$$F(x, p_1, p_2, \ldots, p_n)$$

наименѣе уклоняющейся отъ нуля онъ далъ невѣрное предложеніе: «Es zeigt sich, dass man die Parameter so zu wählen hat, dass der (vorläufig noch unbekannte) Extremwert $\pm L$ *möglichst oft* erreicht wird..,».

Я прерываю здѣсь цитату изъ статьи Либманна, такъ какъ невѣрное предложеніе выражается словами möglichst oft, которыя онъ самъ отмѣтилъ курсивомъ.

За строгимъ доказательствомъ такого важнаго, если бы оно было справедливымъ, предложенія онъ отсылаетъ къ статьямъ Кирхенбергера и Буркхардта, но конечно напрасно.

Несуществованіе такого общаго предложенія можно обнаружить простымъ примѣромъ.

Такъ, если возьмемъ функцію съ однимъ параметромъ

$$F(x, p) = 1 + p^2 + \left(p - \frac{1}{2}\right) x^2 + \left(p^3 - \frac{1}{8}\right) x^3$$

и для перемѣннаго x возьмемъ обычные предѣлы -1 и $+1$; то наименѣе уклоняющейся отъ нуля она будетъ при $p=0$, когда она приводится къ

$$1 - \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{8} x^3$$

и достигаетъ своего наибольшаго отклоненія отъ нуля только одинъ разъ, т. е. наименьшее число разъ, а именно при $x=0$.

Напротивъ, при $p = \frac{1}{2}$ наша функція приводится къ постоянному

$$1 + \frac{1}{4}$$

и слѣдовательно достигаетъ своего наибольшаго уклоненія отъ нуля для всѣхъ величинъ x; однако ея отклоненіе отъ нуля не будетъ, какъ мы видимъ, въ этомъ случаѣ наименьшимъ.

Итакъ одно указаніе на то, что при извѣстной совокупности значеній параметровъ функція достигаетъ своего наибольшаго уклоненія отъ нуля наибольшее число разъ, не можетъ служить, вообще говоря, доказательствомъ, что при этой совокупности функція наименѣе уклоняется отъ нуля.

27 октября 1914 г.

ДОБАВЛЕНІЕ КЪ СТАТЬѢ:

„Объ абсолютной сходимости тригонометрическихъ рядовъ“.

С. Бернштейна.

Въ концѣ моей статьи «Объ абсолютной сходимости тригонометрическихъ рядовъ» предложено элементарное доказательство теоремы Fatou:

Если рядъ

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} | b_n \sin nx |$$

сходящійся для всякаго $x\,(0 \leqq x \leqq \pi)$, *то сходится также и рядъ*

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} | b_n | .$$

Однако одинъ пунктъ въ этомъ доказательствѣ остался не разъясненнымъ [1]). Я доказалъ, что

Если

$$\sum_{n=1}^{n=2m} \left| b_n \sin \frac{2\pi n k}{2m+1} \right| \leqq M, \quad {\scriptstyle (k=1,\ 2, \dots,\ 2m)}$$

то

$$\sum_{n=1}^{n=2m} | b_n | \leqq 2m\, M \operatorname{tg} \frac{\pi}{4m+2} < \frac{\pi}{2} M ,$$

гдѣ $2m+1$ *простое число.*

Отсюда непосредственно вытекаетъ теорема Fatou, если M не возрастаетъ безгранично вмѣстѣ съ m. Но въ моей статьѣ опущено доказательство существованія верхней границы M, которое, какъ сейчасъ увидимъ, не представляетъ труда. Въ самомъ дѣлѣ, изъ формулы

$$\sin (x + x_1) = \sin x \cos x_1 + \cos x \sin x_1$$

слѣдуетъ, что

$$\sum_{n=1}^{n=2m} | b_n \sin n\,(x + x_1) | \leqq \sum_{n=1}^{n=2m} | b_n \sin nx | + \sum_{n=1}^{n=2m} | b_n \sin nx_1 | ; \qquad (1)$$

---

[1]) На это было обращено вниманіе ак. А. Марковымъ. *Прим. ред.*

поэтому, *если есть хоть одна точка* x_0, *гдѣ*

$$\sum_{n=1}^{n=2m} | b_n \sin nx_0 | = M,$$

то общая длина всѣхъ промежутковъ (внутри $0, \pi$*), гдѣ*

$$\sum_{n=1}^{n=2m} | b_n \sin nx | < \frac{M}{2} \tag{2}$$

не можетъ превышать $\frac{\pi}{2}$, ибо, если неравенство (2) справедливо для нѣкотораго значенія x, то оно невозможно для $x_0 - x$ и для $\pi + x_0 - x$.

Но, съ другой стороны, рядъ

$$\sum_{n=1}^{\infty} | b_n \sin nx |$$

сходится для всѣхъ точекъ отрѣзка $(0, \pi)$, поэтому всѣ точки этого отрѣзка принадлежатъ одной изъ совокупностей $s_1, s_2, \ldots, s_k, \ldots$, опредѣляя точки совокупности s_k, условіемъ, что

$$k - 1 \leqq \sum_{n=}^{\infty} | b_n \sin nx | < k;$$

при этомъ, обозначая черезъ λ_k нижній предѣлъ суммы[1]) промежутковъ, въ которые возможно вмѣстить точки s_k, мы должны признать, что

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_k + \ldots \geqq \pi.$$

Слѣдовательно, существуетъ опредѣленное значеніе k, для котораго

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_k > \frac{\pi}{2}.$$

или, иными словами, *если* k *выбрать достаточно большимъ, то совокупность точекъ, гдѣ*

$$\sum_{n=1}^{\infty} | b_n \sin nx | < k,$$

не можетъ вмѣститься въ промежутки, общая длина которыхъ не превышаетъ $\frac{\pi}{2}$, между тѣмъ, вслѣдствіе предыдущаго, это было бы возможно, еслибы для m достаточно большого, мы имѣли бы $\frac{M}{2} \geqq k$; а потому мы и заключаемъ, что для всякаго m, $M < 2k$, ч. и т. д.

---

[1]) По терминологіи Lebesgue'а, λ_k есть внѣшняя мѣра совокупности s_k.

Sur les sommes de Gauss.

par ***Démétrius Gravé.***

1. Nous avons en vue d'étudier la somme

$$\psi(2\mu,\ n) = \sum_{s=0}^{s=n-1} e^{s^2 \frac{2\mu\pi i}{n}}$$

où n est un nombre entier, impair et positif, arbitrairement choisi, μ étant un entier premier avec n.

2. Dans le cas du nombre n premier on a

$$\psi(2\mu,\ n) = \sum_{\sigma=1}^{\sigma=n-1} \left(\frac{\sigma}{n}\right) e^{\sigma \frac{2\mu\pi i}{n}}$$

où $\left(\frac{\sigma}{n}\right)$ est le symbole de Legendre.

Il est remarquable que la formule (1) reste vraie pour le cas de n impair composé, qui n'a pas des diviseurs carrés. Il faut naturellement comprendre le symbole $\left(\frac{\sigma}{n}\right)$ dans le sens de Jacobi avec la condition $\left(\frac{\sigma}{n}\right) = 0$ quand σ n'est plus premier avec n.

Soit, en effet,

$$n = pp_1p_2 \ldots p_k = pP = p_1P_1 = p_2P_2 = \ldots = p_kP_k$$

on aura [1])

$$\psi(2\mu,\ n) = \Pi\, \psi(2\mu P,\ p) = \Pi \sum \left(\frac{\sigma}{p}\right) s^{\sigma \frac{2\mu P\pi i}{p}}$$

$$= \sum \left(\frac{\sigma}{p}\right) \left(\frac{\sigma_1}{p_1}\right) \ldots \left(\frac{\sigma_k}{p_k}\right) e^{\tau \frac{2\mu\pi i}{n}}$$

où

$$\tau \equiv \sigma P^2 + \sigma_1 P_1^2 + \ldots + \sigma_k P_k^2 \pmod{n}.$$

---

[1]) Bachmann. Die analytische Zahlentheorie p. 154.

On aura

$$\left(\frac{\tau}{p}\right)=\left(\frac{\sigma}{p}\right),\ \left(\frac{\tau}{p_1}\right)=\left(\frac{\sigma_1}{p_1}\right),\ldots$$

d'où

$$\left(\frac{\sigma}{p}\right)\left(\frac{\sigma_1}{p_1}\right)\cdots\left(\frac{\sigma_k}{p_k}\right)=\left(\frac{\tau}{n}\right)$$

et la formule (1) reste vraie pour le cas, où le nombre impair n n'a pas des diviseurs multiples.

Daus le même cas on obtient

$$\left(\frac{\mu}{n}\right).\psi(2\mu,\ n)=\sum\left(\frac{\mu\sigma}{n}\right)e^{(\mu.\sigma)\frac{2\pi i}{n}}=\psi(2,\ n)$$

ou

$$\psi(2\mu,\ n)=\left(\frac{\mu}{n}\right)\psi(2,\ n) \tag{2}$$

3. La formule (2) reste vraie dans le cas générale du nombre impair n arbitrairement choisi.

Posons, en effet,

$$n=p^{\omega}p_1{}^{\omega_1}p_2{}^{\omega_2}\ldots=p^{\omega}P=p_1{}^{\omega_1}P_1=\ldots$$

Nous aurons deux formules suivantes

$$\psi(2,\ n)=\prod\psi(2P,\ p^{\omega}),\quad \psi(2\mu,\ n)=\prod\psi(2\mu P,\ p^{\omega}) \tag{3}$$

Si ω est pair, on a

$$\psi(2P,\ p^{\omega})=\psi(2\mu P,\ p^{\omega})=p^{\frac{\omega}{2}}$$

Si ω est impair, on a

$$\psi(2P,\ p^{\omega})=p^{\frac{\omega-1}{2}}\psi(2P,\ p);\quad \psi(2\mu P,\ p^{\omega})=p^{\frac{\omega-1}{2}}\psi(2\mu P,\ p)$$

en outre

$$\psi(2\mu P,\ p)=\left(\frac{\mu}{p}\right)\psi(2P,\ p)$$

$\left(\frac{\mu}{p^{\omega}}\right)=1$ si ω est pair; $\left(\frac{\mu}{p^{\omega}}\right)=\left(\frac{\mu}{p}\right)$ si ω est impair

Alors on peut écrire toujours

$$\psi(2\mu P,\ p^{\omega})=\left(\frac{\mu}{p^{\omega}}\right)\psi(2P,\ p^{\omega}).$$

Les formules (3) donnent

$$\psi(2\mu,\ n) = \psi(2,\ n)\ \mathbf{\Pi}\left(\frac{\mu}{p^{\varpi}}\right) = \left(\frac{\mu}{n}\right)\psi(2,\ n)$$

ce qu'il fallait démontrer.

4. En posant dans la formule (2) $\mu = -1$ on obtient

$$\psi(-2,\ n) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\psi(2,\ n). \tag{4}$$

Calculons à présent le produit

$$\psi(2,\ n)\,\psi(-2,\ n)$$

qu'on pourra écrire

$$\sum e^{(s^2-s'^2)\frac{2\pi i}{n}} = \sum e^{\tau\rho\frac{2\pi i}{n}}$$

τ et ϱ parcourant le système complet de résidus par rapport au module n. Si τ n'est pas égal à zéro et ϱ parcourt le système complet de résidus la somme deviendra nulle. Dans le cas $\tau = 0$, chaque membre de la somme est égal à l'unité et l'on aura

$$\psi(2,\ n)\,\psi(-2,\ n) = n.$$

En combinant avec la formule (4) on aura

$$[\psi(2,\ n)]^2 = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\,n. \tag{5}$$

5. Si le nombre n a des diviseurs carrés, on aura

$$\sum_{\sigma=0}^{\sigma=n-1}\left(\frac{\sigma}{n}\right)e^{\frac{2\mu\pi i}{n}} = 0 \tag{6}$$

Pour démontrer la formule (6) entrons dans quelques détails sur les *caractères* des groupes abéliens.

La somme (6) est un cas particulier de la formule plus générale

$$(\chi(\sigma),\ r) = \sum \chi(\sigma)\, r^{\sigma}, \qquad r = e^{\frac{2\pi i}{n}}$$

qu'on nomme *résolvente généralisée.*

La sommation s'étend sur les classes σ premiers avec le module n. La fonction $\chi(\tau)$ représente le caractère [1] du nombre σ comme élément du groupe de ces classes.

---

[1] Weber. Algebra T. II, p. 82.

Si l'on a

$$n = p^{\omega} p_1^{\omega_1} p_2^{\omega_2} \dots p_k^{\omega_k}$$

$$q = \varphi(p^{\omega}), \quad q_1 = \varphi(p_1^{\omega_1}), \dots q_k = \varphi(p_k^{\omega_k})$$

on aura

$$\chi(\sigma) = \varepsilon^{\tau} \ \varepsilon_1^{\tau_1} \dots \varepsilon_k^{\tau_k}$$

ε, ε_1, ε_2, ... ε_k étant les racines de l'unité des degrée q, q_1, q_2, ... q_k. Les exposants τ, τ_1, ... τ_k forment le système d'indices par rapport au module composé n.

En introduisant les racines primitives des degrés q, q_1, ... q_k on pourra poser

$$\varepsilon = \zeta^{\beta}, \quad \varepsilon_1 = \zeta_1^{\beta_1}, \dots \ \varepsilon_k = \zeta_k^{\beta_k}.$$

Les τ_i sont les indices des nombres μ_i définie par la congruence

$$\sigma \equiv \mu P + \mu_1 P_1 + \dots + \mu_k P_k. \quad (\text{mod. } n)$$

Si l'on pose

$$(\zeta^{\beta}, \ r) = \sum \zeta^{\beta\tau} e^{\mu \cdot \frac{2\pi i}{p^{\omega}}},$$

le produit

$$\boldsymbol{\Pi}(\zeta^{\beta}, \ r) = \sum \varepsilon^{\tau} \ \varepsilon_1^{\tau_1} \dots \varepsilon_k^{\tau_k} e^{\sigma \frac{2\pi i}{n}} = \sum \chi(\sigma) e^{\sigma \frac{2\pi i}{n}}$$

n'est autre chose que la résolvente généralisée.

Les caractères $\chi(\sigma)$ peuvent devenir égals à ± 1 seulement dans le cas ou tous les nombres β, β_1, ... β_k prennent les valeurs suivantes: q ou $\frac{q}{2}$, q_1 ou $\frac{q_1}{2}$, q_2 ou $\frac{q_2}{2}$, ... q_k ou $\frac{q_k}{2}$.

Il est aisé de démontrer [1]) que la résolvente (ζ^{β}, r) s'annule seulement dans le cas du nombre β divisible par p. C'est le cas même de $\omega > 1$, par ce que

$$q = p^{\omega-1}(p-1), \quad \frac{q}{2} = p^{\omega-1} \cdot \frac{p-1}{2}$$

Nous voyons ainsi que la résolvente généralisée

$$[\chi(\sigma), \ r]$$

s'annule chaque fois quand un des exposants β est divisible par le nombre correspondent p. C'est toujours le cas des valeurs principales ± 1 des caractères, si le nombre n a un diviseur carré, et la formule (6) devient vraie dans ce dernier cas.

---

[1]) Weber. Algebra T. II, p. 72.

6. Revenons au cas $\omega = \omega_1 = \omega_2 = \ldots = \omega_k = 1$.

Dans ce cas la somme de Gauss est le cas particulier d'une résolvente généralisée, correspondente aux valeurs principales des caractères. La résolvente devient égale au produit

$$(\pm 1\,,\ r)(\pm 1\,,\ r_1),\ldots \tag{7}$$

chaque fois quand les caractères ont leurs valeurs principales. Les facteurs du produit (7) correspondent aux nombres premiers $p\,,\ p_1\,,\ldots$

Pour calculer (7) il ne faut qu'à remarquer, que $(1\,,\ r) = -1$, et la résolvente $(-1\,,\ r)$ n'est autre chose que la somme de Gauss.

7. La formule (5) donne

$$\psi(2\,,\ n) = i^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}\sqrt{n}$$

Il ne reste qu'à trouver le signe du radical $\sqrt{n}$. C'est le problème fameux résolu par Gauss; il est en liaison intime avec la loi de réciprocité quadratique.

Parmi les démonstrations différentes du théorême de Gauss une des plus simples et élégantes appartient à Mertens [1]. Elle consiste dans la considération de la formule

$$(1 + i^n)\,\psi(2,\ n) = \sum_{s=0}^{s=2n-1} e^{s^2 \frac{\pi i}{2n}} \tag{8}$$

On peut simplifier encore d'avantage la démonstration de l'illustre géomètre.

En effet Mr Mertens transforme la formule (8) de la sorte

$$(1 + i^n)\,\psi(2,\ n) = \sum_{s=0}^{s=4n-1} e^{s^2 \frac{\pi i}{8n}}$$

La transformation est un peu compliquée et l'auteur ne remarque pas que sa méthode s'applique immédiattement à la forme initiale (8).

Je vais montrer comment il faut simplifier la méthode de Mertens.

Posons

$$\psi(2\,,\ n) = i^{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2} R$$

où

$$R^2 = n$$

---

[1] Mertens, Über die Gaussischen Summen. Sitzungsber. d. Berlin. Acad. 1896 I. 217.

D'après le théorème de Gauss R doit être positif. Pour le démontrer prenons la formule (8) qui prend la forme

$$(1+i)\,R = \sum_{0}^{2n-1} e^{s^2\frac{\pi i}{2n}}$$

d'où l'on a

$$\frac{1}{2}R = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{1}{2} + \sum_{1}^{n-1}\sin 8s^2\omega = \frac{1}{2} + \sum_{1}^{n-1}\cos 8s^2\omega$$

où

$$\omega = \frac{\pi}{16n}.$$

Appliquons avec Mr Mertens la formule

$$\sin^2(2s+1)^2\omega - \sin^2(2s-1)^2\omega = \sin 8s\omega\,\sin(8s^2+2)\,\omega$$

d'où

$$\sin(8s^2+2)\,\omega = \sin 8s^2\omega\cos 2\omega + \cos 8s^2\omega\sin 2\omega =$$

$$= \frac{\sin^2(2s+1)^2\omega - \sin^2(2s-1)^2\omega}{\sin 8s\omega}.$$

En posant $s=1,\ 2,\ 3,\ldots n-1$ et en prenant la somme des résultats, on obtient

$$\cos 2\omega\left[\frac{1}{2}R - \left(\frac{-1}{n}\right)\frac{1}{2}\right] + \sin 2\omega\left[\frac{1}{2}R - \frac{1}{2}\right] = \frac{\sin^2 3^2\omega - \sin^2\omega}{\sin 8\omega} +$$

$$+ \frac{\sin^2 5^2\omega - \sin^2 3^2\omega}{\sin 16\omega} + \ldots + \frac{\sin^2(2n-1)^2\omega - \sin^2(2n-3)^2\omega}{\sin 8(n-1)\omega}.$$

Cette équation prend la forme

$$\frac{1}{2}R(\cos 2\omega + \sin 2\omega) = \sin\omega\left[\frac{\sin 2\omega}{\sin\omega} - \frac{\sin\omega}{\sin 8\omega}\right] + \sin^2 3^2\omega\left[\frac{1}{\sin 8\omega} - \frac{1}{\sin 16\omega}\right] +$$

$$+ \sin^2 5^2\omega\left[\frac{1}{\sin 16\omega} - \frac{1}{\sin 24\omega}\right] + \ldots + \sin^2(2\mathrm{n}-3)^2\omega\left[\frac{1}{\sin 8(n-2)\omega} -\right.$$

$$\left. - \frac{1}{\sin 8(n-1)\omega}\right] + \frac{\sin^2(2n-1)^2\,\omega}{\sin 8\,(n-)\,\omega} + \frac{\cos 2\omega\left(\frac{-1}{n}\right) - \sin 2\omega}{2}$$

Si l'on démontre, que la somme de deux derniers membres de la partie droite de l'équation est positive le théorème de Gauss sera démontré, parce que

$$\frac{\sin 2\omega}{\sin\omega} > 1 > \frac{\sin\omega}{\sin 8\omega}$$

$$\frac{1}{\sin 8\omega} > \frac{1}{\sin 16\omega} > \frac{1}{\sin 24\omega} > \ldots > \frac{1}{\sin 8(n-1)\omega} > 0.$$

Il est évident que la somme des deux derniers membres est positive dans le cas $\left(\frac{-1}{n}\right) = 1$, parce que $\cos 2\omega > \sin 2\omega$.

Si $\left(\frac{-1}{n}\right) = -1$, la somme de deux derniers membres est encore positive, car elle est plus grande que

$$\frac{\sin^2 (2n-1)^2\omega}{\sin 8\,(n-1)\,\omega} - \cos 2\omega = \frac{\cos^2\omega}{\cos 8\omega} - \cos 2\omega =$$

$$= \cos\omega \left\{\frac{\cos\omega}{\cos 8\omega} - \frac{\cos 2\omega}{\cos\omega}\right\} > 0.$$

Le théorème de Gauss est démontré.

28 Janvier 1915.
Kieff.

Выводъ нѣкоторыхъ асимптотическихъ разложеній.

Н. Кошлякова.

Во II томѣ Exercices de calcul intégral Legendre'а находится рядъ опредѣленныхъ интеграловъ, съ помощью которыхъ можно установить для нѣкоторыхъ функцій асимптотическія разложенія въ полусходящіеся ряды, подобные извѣстному разложенію Stirling'а.

Пусть n означаетъ любое цѣлое положительное число.

1⁰. Пользуясь интеграломъ

$$\int_0^\infty e^{-ax}dx = \frac{1}{a}, \qquad a > 0 \tag{a}$$

находимъ

$$\sum_1^n \frac{(-1)^{\nu-1}}{2\nu-1} = \int_0^\infty \sum_1^n (-1)^{\nu-1} e^{-(2\nu-1)x}\,dx = \int_0^\infty \frac{1+(-1)^{n-1}e^{-2nx}}{e^x+e^{-x}}\,dx.$$

Вычитая это выраженіе изъ очевиднаго равенства

$$\frac{\pi}{4} = \sum_1^\infty \frac{(-1)^{\nu-1}}{2\nu-1} = \int_0^\infty \frac{dx}{e^x+e^{-x}},$$

получаемъ

$$\frac{\pi}{4} = \sum_1^n \frac{(-1)^{\nu-1}}{2\nu-1} + (-1)^n \int_0^\infty \frac{e^{-2nx}}{e^x+e^{-x}}\,dx.$$

Далѣе, на основаніи интеграла Legendre'а

$$\frac{1}{e^\theta+e^{-\theta}} = 2\int_0^\infty \frac{\cos 2\theta x}{e^{\pi x}+e^{-\pi x}}\,dx, \tag{b}$$

имѣемъ

$$\int_0^\infty \frac{e^{-2n\theta}}{e^{\theta}+e^{-\theta}}d\theta=2\int_0^\infty d\theta\int_0^\infty\frac{e^{-2n\theta}\cos 2\theta x}{e^{\pi x}+e^{-\pi x}}\,dx=2\int_0^\infty dx\int_0^\infty\frac{e^{-2n\theta}\cos 2x\theta}{e^{\pi x}+e^{-\pi x}}d\theta=n\int_0^\infty\frac{1}{n^2+x^2}\,\frac{dx}{e^{\pi x}+e^{-\pi x}},$$

причемъ здѣсь, какъ и во всѣхъ послѣдующихъ случаяхъ, измѣненіе порядка интегрированія (при безконечныхъ предѣлахъ) законно, такъ какъ выполняются всѣ условія соотвѣтствующей теоремы, приведенной у C. Jordan'a въ Cours d'analyse 3-e éd., t. II, § 74—75, 1913.

Итакъ,

$$\frac{\pi}{4}=\sum_1^n\frac{(-1)^{\nu-1}}{2v-1}+(-1)^n\,n\int_0^\infty\frac{1}{n^2+x^2}\,\frac{dx}{e^{\pi x}+e^{-\pi x}} \tag{1}$$

Умножая на $\frac{1}{e^{\pi x}+e^{-\pi x}}$ и интегрируя отъ $x=0$ до $x=\infty$ легко доказуемое равенство

$$\frac{1}{n^2+x^2}=\sum_1^k(-1)^{\nu-1}\frac{x^{2\nu-2}}{n^{2\nu}}+(-1)^k\theta_0(x)\,\frac{x^{2k}}{n^{2k+2}}, \tag{c}$$

гдѣ

$$0<\theta_0(x)=\frac{1}{1+\left(\frac{x}{n}\right)^2}<1,$$

находимъ

$$\int_0^\infty\frac{1}{n^2+x^2}\,\frac{dx}{e^{\pi x}+e^{-\pi x}}=\sum_1^k\frac{(-1)^{\nu-1}}{n^{2\nu}}\int_0^\infty\frac{x^{2\nu-2}}{e^{\pi x}+e^{-\pi x}}\,dx+\frac{(-1)^k}{n^{2k+2}}\int_0^\infty\frac{\theta_0(x)\,x^{2k}}{e^{\pi x}+e^{-\pi x}}dx.$$

Интегралъ, стоящій подъ знакомъ суммы, выражается черезъ Эйлеровы числа съ помощью формулы Catalan'a [1])

$$\int_0^\infty\frac{x^{2p}}{e^{\pi x}+e^{-\pi x}}\,dx=\frac{E_p}{4^{p+1}};$$

далѣе, замѣчая, что функція $f(x)=\frac{x^{2k}}{e^{\pi x}+e^{-\pi x}}$ знакопостоянна при $0<x<\infty$ и функція $\theta_0(x)=\frac{1}{1+\left(\frac{x}{n}\right)^2}$ конечна и непрерывна въ тѣхъ

---

[1]) Mémoires de la Société des Sciences de Liège, s. II, t. XII, p. 110.

же предѣлахъ, примѣнимъ къ интегралу $\int\limits_0^\infty f(x)\,\theta_0(x)\,dx$ теорему о среднихъ значеніяхъ, въ силу которой

$$\int\limits_0^\infty f(x)\,\theta_0(x)\,dx = \theta_0(\xi)\int\limits_0^\infty f(x)\,dx,$$

гдѣ $0 < \xi < \infty$, т. е.

$$0 < \theta_0(\xi) = \frac{1}{1+\left(\frac{\xi}{n}\right)^2} = \theta < 1.$$

Итакъ,

$$\int\limits_0^\infty \frac{1}{n^2+x^2}\,\frac{dx}{e^{\pi x}+e^{-\pi x}} = \sum_1^k \frac{(-1)^{\nu-1}}{n^{2\nu}}\,\frac{E_{\nu-1}}{n^{2\nu}} + \theta\,\frac{(-1)^k}{n^{2k+2}}\,\frac{E_k}{2^{2k+2}},$$

и окончательно

$$\frac{\pi}{4} = \sum_1^n \frac{(-1)^{\nu-1}}{2v-1} + \sum_1^k \frac{(-1)^{n+\nu-1}}{2^{2\nu}}\,\frac{E_{\nu-1}}{n^{2\nu-1}} + \theta\,\frac{(-1)^{n+k}}{2^{2k+2}}\,\frac{E_k}{n^{2k+1}},\quad 0<\theta<1 \qquad (2)$$

2⁰. Обращаясь снова къ интегралу (a), имѣемъ

$$\sum_1^n \frac{(-1)^{\nu-1}}{v} = \int\limits_0^\infty \frac{1-(-1)^n e^{-nx}}{1+e^x}\,dx,$$

но съ другой стороны

$$\log 2 = \sum_1^\infty \frac{(-1)^{\nu-1}}{v} = \int\limits_0^\infty \frac{dx}{1+e^x},$$

слѣдовательно

$$\log 2 = \sum_1^n \frac{(-1)^{\nu-1}}{v} + (-1)^n \int\limits_0^\infty \frac{e^{-nx}}{1+e^x}\,dx;$$

прибавляя и вычитая въ правой части этого равенства выраженіе:

$$\frac{(-1)^n}{2n} = \frac{(-1)^n}{2}\int\limits_0^\infty e^{-nx}\,dx,$$

находимъ

$$\log 2 = \sum_1^n \frac{(-1)^{\nu-1}}{v} + \frac{(-1)^n}{2n} + \frac{(-1)^{n+1}}{2} \int_0^\infty e^{-nx} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx,$$

а такъ какъ по Legendre'y

$$\frac{e^\theta - 1}{e^\theta + 1} = 4 \int_0^\infty \frac{\sin\theta x}{e^{\pi x} - e^{-\pi x}} dx \tag{d}$$

то

$$\int_0^\infty e^{-n\theta} \frac{e^\theta - 1}{e^\theta + 1} d\theta = 4 \int_0^\infty d\theta \int_0^\infty \frac{e^{-n\theta} \sin\theta x}{e^{\pi x} - e^{-\pi x}} dx = 4 \int_0^\infty dx \int_0^\infty \frac{e^{-n\theta} \sin x\theta}{e^{\pi x} - e^{-\pi x}} d\theta =$$

$$= 4 \int_0^\infty \frac{x}{n^2 + x^2} \frac{dx}{e^{\pi x} - e^{-\pi x}}$$

и такимъ образомъ

$$\log 2 = \sum_1^n \frac{(-1)^{\nu-1}}{v} + \frac{(-1)^n}{2n} + (-1)^{n+1} 2 \int_0^\infty \frac{x}{n^2 + x^2} \frac{dx}{e^{\pi x} - e^{-\pi x}} \tag{3}$$

Принимая во вниманіе разложеніе (c), имѣемъ

$$\int_0^\infty \frac{x}{n^2 + x^2} \frac{dx}{e^{\pi x} - e^{-\pi x}} = \sum_1^k \frac{(-1)^{\nu-1}}{n^{2\nu}} \int_0^\infty \frac{x^{2\nu-1}}{e^{\pi x} - e^{-\pi x}} dx + (-1)^k \int_0^\infty \frac{\theta_0(x) x^{2k+1}}{e^{\pi x} - e^{-\pi x}} dx ,$$

но

$$\int_0^\infty \frac{x^{2\nu-1}}{e^{\pi x} - e^{-\pi x}} dx = \frac{T_\nu}{2^{2\nu+1}}$$

и

$$\int_0^\infty \frac{\theta_0(x) x^{2k+1}}{e^{\pi x} - e^{-\pi x}} dx = \theta \frac{T_{k+1}}{2^{2k+3}} , \quad 0 < \theta < 1 ,$$

гдѣ T_ν означаютъ коэффиціенты въ разложеніи тангенса, связанные съ Бернулліевыми числами соотношеніемъ

$$\frac{2^{2n} - 1}{n} B_n = \frac{T_n}{2^{2n-1}}$$

Окончательно,

$$\log 2 = \sum_{1}^{n} \frac{(-1)^{\nu-1}}{v} + \frac{(-1)^{n}}{2n} + \sum_{1}^{k} \frac{(-1)^{n+\nu}}{2^{2\nu}} \frac{T_{\nu}}{n^{2\nu}} + \theta \frac{(-1)^{n+k+1}}{2^{2k+2}} \frac{T_{k+1}}{n^{2k+2}}, \quad 0<\theta<1 \quad (4)$$

3⁰. Пользуясь хорошо извѣстнымъ интеграломъ

$$\int_{0}^{\infty} e^{-ax} \sin bx dx = \frac{b}{a^2+b^2}, \qquad a>0 \qquad (e)$$

находимъ

$$n \sum_{1}^{n} \frac{1}{v^2+n^2} = \int_{0}^{\infty} \sum_{1}^{n} e^{-\nu x} \sin nx dx = \int_{0}^{\infty} \frac{1-e^{-nx}}{e^{x}-1} \sin nx dx;$$

далѣе, умножая на $\sin nx$ и интегрируя отъ $x=0$ до $x=\infty$ равенство

$$\frac{1}{e^{x}-1} = \sum_{1}^{h} e^{-\nu x} + \frac{e^{-hx}}{e^{x}-1}.$$

имѣемъ

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\sin nx}{e^{x}-1} dx = \sum_{1}^{h} \int_{0}^{\infty} e^{-\nu x} \sin nx dx + R_h = \sum_{1}^{h} \frac{n}{n^2+v^2} + R_h,$$

гдѣ

$$R_h = \int_{0}^{\infty} e^{-hx} \frac{\sin nx}{e^{x}-1} dx,$$

Этотъ послѣднiй интегралъ при $h=\infty$ обращается въ ноль, въ чемъ убѣждаемся, примѣняя къ данному случаю теорему Du Bois Reymond'a [1]), опредѣляющую условiя, при которыхъ имѣетъ мѣсто равенство

$$\lim_{h=\infty} \int_{a}^{b} f(x) \varphi(x, h) dx = 0.$$

Равенство

$$\lim_{h=\infty} R_h = 0$$

---

[1]) Borchardt's Journal, Bd. 79. Эту теорему, равно какъ и замѣчанiе на случай безконечныхъ предѣловъ, можно найти въ диссертацiи А. А. Адамова «О разложенiяхъ произвольной функцiи одной вещественной перемѣнной въ ряды, расположенные по функцiямъ опредѣленнаго рода»—подъ именемъ теоремы *A* (стр. 17) и замѣчанiя 3 (стр. 19).

имѣетъ мѣсто и во всѣхъ остальныхъ случаяхъ, когда мы будемъ перемѣщать знаки интеграла и безконечной суммы.

Итакъ,

$$n\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{\nu^2+n^2}=\int_{0}^{\infty}\frac{\sin nx}{e^x-1}\,dx,$$

но по Legendre'у

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\sin\theta x}{e^{2\pi x}-1}\,dx=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{e^\theta-1}-\frac{1}{\theta}+\frac{1}{2}\right\},\ \theta>0 \qquad (f)$$

и такимъ образомъ

$$2n\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{\nu^2+n^2}=\pi cth n\pi-\frac{1}{n}\ ;$$

дѣлая теперь преобразованія, подобныя предыдущимъ, получаемъ

$$\pi cth n\pi=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2n}+2n\sum_{1}^{n}\frac{1}{\nu^2+n^2}+2\left\{-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4n}+\int_{0}^{\infty}\frac{e^{-nx}\sin nx}{e^x-1}\,dx\right\},$$

но

$$\frac{\pi}{4}=\int_{0}^{\infty}e^{-nx}\frac{\sin nx}{x}\,dx\,,\quad \frac{1}{2n}=\int_{0}^{\infty}e^{-nx}\sin nx dx\,,$$

слѣдовательно

$$\pi cth n\pi=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2n}+2n\sum_{1}^{n}\frac{1}{\nu^2+n^2}+2\int_{0}^{\infty}\left\{\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right\}e^{-nx}\sin nx dx\,.$$

Далѣе, пользуясь интеграломъ (f), находимъ

$$\int_{0}^{\infty}\left\{\frac{1}{e^\theta-1}-\frac{1}{\theta}+\frac{1}{2}\right\}e^{-n\theta}\sin n\theta d\theta=2\int_{0}^{\infty}d\theta\int_{0}^{\infty}\frac{e^{-n\theta}\sin n\theta\sin\theta x}{e^{2\pi x}-1}\,dx=$$

$$=2\int_{0}^{\infty}dx\int_{0}^{\infty}\frac{e^{-n\theta}\sin n\theta\sin x\theta}{e^{2\pi x}-1}\,d\theta=4n^2\int_{0}^{\infty}\frac{x}{x^4+4n^4}\,\frac{dx}{e^{2\pi x}-1}.$$

и окончательно

$$\pi cth n\pi=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2n}+2n\sum_{1}^{n}\frac{1}{\nu^2+n^2}+8n^2\int_{0}^{\infty}\frac{x}{x^4+4n^4}\,\frac{dx}{e^{2\pi x}-1} \qquad (5)$$

Принимая во вниманіе разложеніе (c), имѣемъ

$$\int_0^\infty \frac{x}{x^4+4n^4}\frac{dx}{e^{2\pi x}-1}=\sum_1^k \frac{(-1)^{\nu-1}}{2^{2\nu}.n^{4\nu}}\int_0^\infty \frac{x^{4\nu-3}}{e^{2\pi x}-1}dx+\frac{(-1)^k}{2^{2k+2}n^{4k+4}}\int_0^\infty \frac{\theta_0(x)x^{4k+1}}{e^{2\pi x}-1}dx,$$

но

$$\int_0^\infty \frac{x^{4\nu-3}}{e^{2\pi x}-1}dx=\frac{1}{4}\frac{B_{2\nu-1}}{2v-1}$$

и

$$\int_0^\infty \frac{\theta_0(x)\,x^{4k+1}}{e^{2\pi x}-1}dx=\frac{\theta}{4}\frac{B_{2k+1}}{2k+1}, \qquad 0<\theta<1,$$

гдѣ B_n означаютъ Бернулліевы числа.

Итакъ,

$$\pi c t h n \pi=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2n}+2n\sum_1^n \frac{1}{v^2+n^2}+\sum_1^k \frac{(-1)^{\nu-1}}{2^{2\nu-1}.n^{4\nu-2}}\frac{B_{2\nu-1}}{2v-1}+$$

$$+\theta\frac{(-1)^k}{2^{2k+1}.n^{4k+2}}\frac{B_{2k+1}}{2k+1}, \quad 0<\theta<1, \tag{6}$$

Это разложеніе, переписанное въ формѣ

$$\pi=4n\sum_1^n \frac{1}{v^2+n^2}-\frac{4\pi}{e^{2n\pi}-1}+\frac{1}{n}+\sum_1^k \frac{(-1)^{\nu-1}}{2^{2\nu-2}.n^{4\nu-2}}\frac{B_{2\nu-1}}{2v-1}+$$

$$+\theta\frac{(-1)^k}{2^{2k}.n^{4k+2}}\frac{B_{2k+1}}{2k+1}, \quad 0<\theta<1 \tag{7}$$

было указано Euler'омъ въ одномъ изъ писемъ къ N. Bernoulli [1]), но въ видѣ безконечнаго ряда, безусловно расходящагося. Разложеніе же (7) съ указаніемъ остаточнаго члена дано Я. В. Успенскимъ [2]).

4⁰. Обращаясь снова къ интегралу (e), имѣемъ

$$n\sum_1^m \frac{(-1)^\nu}{v^2+n^2}=\int_0^\infty \sum_1^m (-1)^\nu e^{-\nu x}\sin nx\,dx+\int_0^\infty \frac{(-1)^m e^{-mx}-1}{e^x+1}\sin nx dx,$$

---

[1]) Corresp. t. II p. 690.

[2]) Сборникъ задачъ по высшей математикѣ препод. Инст. Инж. Путей Сообщенія 1912 г. отд. XI зад. № 245.

откуда, полагая послѣдовательно $m=n$ и $m=\infty$, находимъ

$$n\sum_{1}^{n}\frac{(-1)^{\nu}}{\nu^2+n^2}=\int_{0}^{\infty}\sum_{1}^{n}(-1)^{\nu}e^{-\nu x}\sin nx dx=\int_{0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}\,e^{-nx}-1}{e^{x}+1}\sin nx dx$$

и

$$n\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu}}{\nu^2+n^2}=\int_{0}^{\infty}\sum_{1}^{\infty}(-1)^{\nu}e^{-\nu x}\sin nx dx=-\int_{0}^{\infty}\frac{\sin nx}{e^{x}+1}\,dx;$$

но какъ извѣстно [1])

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\sin nx}{e^{x}+1}\,dx=\frac{1}{2n}-\frac{\pi}{2sh n\pi}\,, \qquad \text{(g)}$$

слѣдовательно

$$n\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu}}{\nu^2+n^2}=\frac{\pi}{2sh n\pi}-\frac{1}{2n}$$

и, поступая подобно предыдущему случаю, имѣемъ

$$\frac{\pi}{Shn\pi}=\frac{1}{n}-\frac{1}{2}\frac{(-1)^{n}}{n}+2n\sum_{1}^{n}\frac{(-1)^{\nu}}{\nu^2+n^2}+(-1)^{n}\left\{\frac{1}{2n}-2\int_{0}^{\infty}\frac{e^{-nx}}{e^{x}+1}\sin nx\,dx\right\}$$

откуда

$$\frac{\pi}{Shn\pi}=\frac{1}{n}-\frac{1}{2}\frac{(-1)^{n}}{n}+2n\sum_{1}^{n}\frac{(-1)^{n}}{\nu^2+n^2}+(-1)^{n}\left.\int_{0}^{\infty}e^{-nx}\frac{e^{x}-1}{e^{x}+1}\sin nx\,dx\right\}$$

Далѣе на основаніи интеграла (d), получаемъ

$$\int_{0}^{\infty}e^{-n\theta}\frac{e^{\theta}-1}{e^{\theta}+1}\sin n\theta\, d\theta=4\int_{0}^{\infty}d\theta\int_{0}^{\infty}e^{-n\theta}\frac{\sin n\theta\sin\theta x}{e^{\pi x}-e^{\pi x}}\,dx=$$

$$=4\int_{0}^{\infty}dx\int_{0}^{\infty}e^{-n\theta}\frac{\sin n\theta\sin x\theta}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}}\,d\theta=8n^2\int_{0}^{\infty}\frac{x}{x^4+4n^4}\frac{dx}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}}$$

---

[1]) См. напр. J. Bertrand. Traité de calcul intégral.

и такимъ образомъ

$$\frac{\pi}{sh n\pi}=\frac{1}{n}-\frac{1}{2}\frac{(-1)^n}{n}+2n\sum_{1}^{n}\frac{(-1)^\nu}{v^2+n^2}+(-1)^n 8n^2\int_0^\infty\frac{x}{x^4+4n^4}\frac{dx}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}} \quad (8)$$

Пользуясь теперь соотношеніемъ (c), получаемъ

$$\int_0^\infty\frac{x}{x^4+4n^4}\frac{dx}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}}=\sum_{1}^{k}\frac{(-1)^{\nu-1}}{2^{6\nu-1}}\frac{T_{2\nu-1}}{n^{4\nu}}+\theta\frac{(-1)^k}{2^{6k+5}}\frac{T_{2k+1}}{n^{4k+4}}, \qquad 0<\theta<1$$

и окончательно

$$\frac{\pi}{sh n\pi}=\frac{1}{n}-\frac{1}{2}\frac{(-1)^n}{n}+2n\sum_{1}^{n}\frac{(-1)^\nu}{v^2+n^2}+\sum_{1}^{k}\frac{(-1)^{n+\nu-1}}{2^{6\nu-4}}\frac{T_{2\nu-1}}{n^{4\nu-2}}+$$

$$+\theta\frac{(-1)^{n+k}}{2^{6k+2}}\frac{T_{2k+1}}{n^{4k+2}}. \qquad 0<\theta<1 \qquad (9)$$

5^0. Полагая въ интегралѣ (e) $a=2v-1$ и $b=2n$, имѣемъ

$$2n\sum_{1}^{m}\frac{1}{(2v-1)^2+(2n)^2}=\int_0^\infty\sum_{1}^{m}e^{-(2\nu-1)}\sin 2nx dx=\int_0^\infty\frac{1-e^{-2mx}}{e^x-e^{-x}}\sin 2nx dx$$

откуда, полагая послѣдовательно $m=n$ и $m=\infty$, получаемъ

$$2n\sum_{1}^{n}\frac{1}{(2v-1)^2+(2n)^2}=\int_0^\infty\sum_{1}^{n}e^{-(2\nu-1)}\sin 2nx dx=\int_0^\infty\frac{1-e^{-2nx}}{e^x-e^{-x}}\sin 2nx dx$$

и

$$2n\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{(2v-1)^2+(2n)^2}=\int_0^\infty\sum_{1}^{\infty}e^{-(2\nu-1)}\sin 2nx dx=\int_0^\infty\frac{\sin 2nx}{e^x-e^{-x}}dx$$

или на основаніи формулы (d):

$$2n\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{(2v-1)^2+(2n)^2}=\frac{\pi}{4}th n\pi ,$$

и такимъ образомъ

$$\frac{\pi}{4}\, th n\pi = 2n\sum_{1}^{n}\frac{1}{(2v-1)^2+(2n)^2}+\int_{0}^{\infty} e^{-2nx}\,\frac{\sin 2nx}{e^x-e^{-x}}\,dx$$

Далѣе, съ помощью интеграла (g), находимъ

$$\int_{0}^{\infty} e^{-2n\theta}\,\frac{\sin 2n\theta}{e^{\theta}-e^{-\theta}}\,d\theta=\frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-2n\theta}\,\frac{\sin 2n\theta}{\theta}\,d\theta-2\int_{0}^{\infty} d\theta\int_{0}^{\infty} e^{-2n\theta}\,\frac{\sin 2n\theta \sin 2\theta x}{e^{2\pi x}+1}\,dx=$$

$$=\frac{\pi}{8}-2\int_{0}^{\infty} dx\int_{0}^{\infty} e^{-2n\theta}\,\frac{\sin 2n\theta \sin 2x\theta}{e^{2\pi x}+1}\,d\theta=\frac{\pi}{8}-2n^2\int_{0}^{\infty}\frac{x}{x^4+4n^4}\,\frac{dx}{e^{2\pi x}+1}$$

и слѣдовательно

$$\frac{\pi}{4}\, th n\pi=\frac{\pi}{8}+2n\sum_{1}^{n}\frac{1}{(2v-1)^2+(2n)^2}-2n^2\int_{0}^{\infty}\frac{x}{x^4+4n^4}\,\frac{dx}{e^{2\pi x}+1} \qquad (10)$$

Вспоминая разложеніе (c) и замѣчая, что

$$\int_{0}^{\infty}\frac{x^{4\nu-3}}{e^{2\pi x}+1}\,dx=\frac{B'_{2\nu-1}}{2v-1}$$

и

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\theta_0(x)\,x^{4k+1}}{e^{2\pi x}+1}\,dx=\theta\,\frac{B'_{2k+1}}{2k+1}, \qquad 0<\theta<1,$$

гдѣ

$$B'_{\nu}=\frac{2^{2\nu-1}-1}{2^{2\nu+1}}\,B_{\nu}$$

и B_{ν} означаютъ Бернулліевы числа, получаемъ

$$\int_{0}^{\infty}\frac{x}{x^4+4n^4}\,\frac{dx}{e^{2\pi x}+1}=\sum_{1}^{k}\frac{(-1)^{\nu-1}}{2^{2\nu}.\,n^{4\nu}}\,\frac{B'_{2\nu-1}}{2v-1}+\theta\,\frac{(-1)^k}{2^{2k+2}.\,n^{4k+4}}\,\frac{B'_{2k+1}}{2k+1}$$

и окончательно

$$\frac{\pi}{4}\, th n\pi=\frac{\pi}{8}+2n\sum_{1}^{n}\frac{1}{(2v-1)^2+(2n)^2}+\sum_{1}^{k}\frac{(-1)^{\nu}}{2^{2\nu-1}.\,n^{4\nu-2}}\,\frac{B'_{2\nu-1}}{2v-1}+$$

$$+\theta\,\frac{(-1)^{k+1}}{2^{2k+1}.\,n^{4k+2}}\,\frac{B'_{2k+1}}{2k+1}. \qquad 0<\theta<1 \qquad (11)$$

6⁰. Пользуясь интеграломъ

$$\int_0^\infty e^{-ax}\frac{\sin bx}{x}\,dx=\operatorname{arctg}\frac{b}{a},\qquad a>0 \tag{h}$$

имѣемъ

$$\sum_1^m(-1)^{\nu-1}\operatorname{arctg}\frac{2n}{2v-1}=\int_0^\infty\sum_1^m(-1)^{\nu-1}e^{-(2\nu-1)x}\frac{\sin 2nx}{x}\,dx=$$

$$=\int_0^\infty\frac{1-(-1)^m e^{-2mx}}{e^x+e^{-x}}\,\frac{\sin 2nx}{x}\,dx,$$

откуда, полагая послѣдовательно $m=n$ и $m=\infty$, находимъ

$$\sum_1^n(-1)^{\nu-1}\operatorname{arctg}\frac{2n}{2v-1}=\int_0^\infty\sum_1^n(-1)^{\nu-1}e^{-(2\nu-1)x}\frac{\sin 2nx}{x}\,dx=$$

$$=\int_0^\infty\frac{1-(-1)^n e^{-2nx}}{e^x+e^{-x}}\,\frac{\sin 2nx}{x}\,dx$$

и

$$\sum_1^\infty(-1)^{\nu-1}\operatorname{arctg}\frac{2n}{2v-1}=\int_0^\infty\sum_1^\infty(-1)^{\nu-1}e^{-(2\nu-1)x}\frac{\sin 2nx}{x}\,dx=\int_0^\infty\frac{\sin 2nx}{e^x+e^{-x}}\,\frac{dx}{x},$$

но какъ извѣстно

$$\int_0^\infty\frac{\sin 2nx}{e^x+e^{-x}}\,\frac{dx}{x}=\operatorname{arctg}\frac{e^{n\pi}-1}{e^{n\pi}+1} \tag{i}$$

и такимъ образомъ

$$\operatorname{arctg}\frac{e^{n\pi}-1}{e^{n\pi}+1}=\sum_1^n(-1)^{\nu-1}\operatorname{arctg}\frac{2n}{2v-1}+(-1)^n\int_0^\infty\frac{e^{-2nx}}{e^x+e^{-x}}\,\frac{\sin 2nx}{x}\,dx.$$

Далѣе,

$$\int_0^\infty\frac{e^{-2n\theta}}{e^\theta+e^{-\theta}}\,\frac{\sin 2n\theta}{\theta}\,d\theta=2\int_0^\infty d\theta\int_0^\infty e^{-2n\theta}\frac{\sin 2n\theta}{\theta}\,\frac{\cos 2\theta x}{e^{\pi x}+e^{-\pi x}}\,dx=$$

$$=2\int_0^\infty dx\int_0^\infty e^{-2n\theta}\frac{\sin 2n\theta}{\theta}\,\frac{\cos 2x\theta}{e^{\pi x}+e^{-\pi x}}\,d\theta=\int_0^\infty\operatorname{arctg}2\left(\frac{n}{x}\right)^2\frac{dx}{e^{\pi x}+e^{-\pi x}}=$$

$$=\frac{\pi}{8}-\int_0^\infty\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\left(\frac{x}{n}\right)^2\frac{dx}{e^{\pi x}+e^{-\pi x}}$$

и слѣдовательно

$$\frac{\pi}{8}=(-1)^n \operatorname{arctg}\frac{e^{n\pi}-1}{e^{n\pi}+1}+\sum_1^n(-1)^{n+\nu}\operatorname{arctg}\frac{2n}{2v-1}+$$

$$+\int_0^\infty \operatorname{arctg}\frac{1}{2}\left(\frac{x}{n}\right)^2\frac{dx}{e^{\pi x}+e^{-\pi x}}. \tag{12}$$

Взявъ разложеніе $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\left(\frac{x}{n}\right)^2$ въ рядъ Маклорена, получаемъ

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\left(\frac{x}{n}\right)^2=\sum_1^k\frac{(-1)^{\nu-1}}{2^{2\nu-1}.n^{4\nu-2}}\frac{x^{4\nu-2}}{2v-1}+\frac{(-1)^k}{2^{2k+1}.n^{4k+2}}\frac{x^{4k+2}}{2k+1}\theta_0(x),$$

гдѣ

$$\theta_0(x)=(2k+1)\int_0^1\frac{u^{2k}du}{1+\frac{1}{4}\left(\frac{x}{n}\right)^4u^2}=\frac{1}{1+\frac{1}{4}\left(\frac{x}{n}\right)^4\xi^2},\quad 0<\xi<1$$

т. е.

$$0<\theta_0(x)<1.$$

Отсюда имѣемъ

$$\int_0^\infty \operatorname{arctg}\frac{1}{2}\left(\frac{x}{n}\right)^2\frac{dx}{e^{\pi x}+e^{-\pi x}}=\sum_1^k\frac{(-1)^{\nu-1}}{2^{6\nu-1}.n^{4\nu-2}}\frac{E_{2\nu-1}}{2v-1}+\theta\frac{(-1)^k}{2^{6k+5}.n^{4k+2}}\frac{E_{2k+1}}{2k+1},$$

гдѣ

$$0<\theta=\frac{1}{1+\frac{1}{4}\left(\frac{\eta}{n}\right)^4\xi^2}<1;\qquad (0<\eta<\infty)$$

окончательно

$$\frac{\pi}{8}=(-1)^n \operatorname{arctg}\frac{e^{n\pi}-1}{e^{n\pi}+1}+\sum_1^n(-1)^{n+\nu}\operatorname{arctg}\frac{2n}{2v-1}+$$

$$+\sum_1^k\frac{(-1)^{\nu-1}}{2^{6\nu-1}.n^{4\nu-2}}\frac{E_{2\nu-1}}{2v-1}+\theta\frac{(-1)^k}{2^{6k+5}.n^{4k+2}}\frac{E_{2k+1}}{2k+1},\quad 0<\theta<1 \tag{13}$$

Въ заключеніе замѣтимъ, что выраженія (1), (3), (5), (8), (10), (12) могутъ быть выведены изъ сумматорныхъ формулъ, приведенныхъ въ III главѣ книги проф. E. Lindelöf'a: „Le calcul des résidus et ses applications à la théorie des fonctions“. Paris, Gautier-Villars, 1905.

Примѣчаніе. *Стр. 210 стр. 5 сверху.*

Теорема, на которую я ссылаюсь, формулирована у C. Jordan'a, l. c. на стр. 75 и сл. (§ 74—75).

Въ данномъ случаѣ имѣемъ

$$\int_B^\infty \frac{e^{-2n\theta}\cos 2x\theta}{e^{\pi x}+e^{-\pi x}}\,dx = e^{-2n\theta}\int_B^\infty \frac{\cos 2\theta x}{e^{\pi x}+e^{-\pi x}}\,dx,$$

и для функціи $\varphi(\theta)=e^{-2n\theta}(n>0)$ выполнены всѣ условія предыдущей теоремы; съ другой стороны

$$\int_B^\infty \frac{\cos 2\theta x}{e^{\pi x}+e^{-\pi x}}\,dx < \int_B^\infty \frac{dx}{e^{\pi x}+e^{-\pi x}}$$

т. е. интегралъ

$$\int_B^\infty \frac{\cos 2\theta x}{e^{\pi x}+e^{-\pi x}}\,dx$$

съ увеличеніемъ B до ∞ стремится къ нулю независимо отъ θ, такъ какъ интегралъ

$$\int_B^\infty \frac{dx}{e^{\pi x}+e^{-\pi x}},$$

будучи меньше постоянной величины

$$\int_0^\infty \frac{dx}{e^{\pi x}+e^{-\pi x}}=\frac{1}{4},$$

стремится къ нулю равномѣрно при возразстаніи B до ∞.

Далѣе,

$$\int_A^\infty \frac{e^{-2n\theta}\cos 2x\theta}{e^{\pi x}+e^{-\pi x}}\,d\theta < \frac{1}{e^{\pi x}+e^{-\pi x}}\int_A^\infty e^{-2n\theta}\,d\theta = \frac{e^{-2nA}}{2n(e^{\pi x}+e^{-\pi x})}$$

и для функціи $\psi(x)=\frac{1}{e^{\pi x}+e^{-\pi x}}$ выполнены условія предыдущей теоремы; функція же e^{-2nA} стремится къ 0, при возрастаніи A до ∞, независимо отъ x.

Остальные случаи доказываются аналогичными разсужденіями.

Стр. 218 стр. 2—1 снизу.

Теорема и замѣчаніе, на которыя я здѣсь ссылаюсь, слѣдующія:

«**Теорема A.** Пусть функція отъ x и параметра h : $\varphi(x, h)$ остается конечной (меньше Φ по абсолютному значенію) для всѣхъ достаточно большихъ значеній h и для значеній x, заключенныхъ въ конечномъ промежуткѣ (a, b); кромѣ того, пусть интегралъ

$$\int_{a'}^{b'} \varphi(x, h)\,dx$$

при всѣхъ достаточно большихъ h имѣетъ опредѣленное значеніе и

$$\text{пред.}_{h=\infty}\int_{a'}^{b'}\varphi(x,\ h)=0\,,$$

каковы бы ни были числа a', b', удовлетворяющія неравенствамъ

$$a\leq a'<b'\leq b.$$

Пусть другая функція $f(x)$ при

$$a\leq x\leq b$$

остается конечной и можетъ быть интегрируема. При такихъ условіяхъ имѣетъ мѣсто формула

$$\text{пред.}_{h=\infty}\int_{a'}^{b'}f(x)\,\varphi(x,\ h)\,dx=0.$$

...**Замѣчаніе 3.** Предыдущее доказательство теоремы A предполагаетъ промежутокъ $(a,\ b)$ конечнымъ, такъ какъ иначе число n не можетъ быть конечнымъ. Если же промежутокъ $(a,\ b)$ дѣлается безконечнымъ, то нужно, чтобы имѣть право распространить теорему A и на этотъ случай, убѣдиться такъ или иначе въ томъ, что интегралъ

$$\int_{-\infty}^{x_0}f(x)\,\varphi(x,\ h)\,da\quad\text{при }a=-\infty$$

или интегралъ

$$\int_{x_0}^{\infty}f(x)\,\varphi(x,\ h)\,dx\quad\text{при}\quad b=+\infty$$

имѣетъ предѣломъ нуль при $h=\infty$ и при значеніяхъ x_0—(отрицательныхъ при $a=-\infty$ и положительныхъ при $b=+\infty$)—достаточно большихъ по численной величинѣ».

Въ нашемъ случаѣ

$$a'=a=0,\ \ b'=b=\infty,\ \ \varphi(x,\ h)=e^{-hx},\ \ f(x)=\frac{\sin nx}{e^x-1}.$$

Равенство

$$\text{пред.}_{h=\infty}\int_0^{\infty}e^{-hx}\,dx=0$$

очевидно имѣетъ мѣсто, въ чемъ убѣждаемся взявъ квадратуру $\int e^{-hx}dx$; функція же $f(x)$ также удовлетворяетъ условіямъ, перечисленнымъ въ теоремѣ. Остается только показать, что интегралъ

$$\int_{x_0}^{\infty}e^{-hx}\frac{\sin nx}{e^x-1}\,dx$$

можетъ быть сдѣланъ какъ угодно малымъ при $h=\infty$ и при положительныхъ значеніяхъ x_0 достаточно большихъ по численной величинѣ.

Такъ какъ функція $f_1(x)=\frac{1}{e^x-1}$ остается конечною, знакопостоянною и по абсолютному значенію невозрастающей въ промежуткѣ (x_0, ∞), то, пользуясь извѣстной теоремой

$$\int_{x_0}^{\infty} f_1(x)\varphi(x) = f_1(x_0+0)\int_{x_0}^{\xi}\varphi(x)\,dx,$$

гдѣ $x_0 \leq \xi \leq \infty$, имѣемъ

$$\int_{x_0}^{\infty} e^{-hx}\frac{\sin nx}{e^x-1}\,dx = \frac{1}{e^{x_0}-1}\int_{x_0}^{\xi} e^{-hx}\sin nx dx,$$

откуда

$$\left|\int_{x_0}^{\infty} e^{-hx}\frac{\sin nx}{e^x-1}\,dx\right| < \frac{1}{e^{x_0}-1}\int_{x_0}^{\xi} e^{-hx}dx,$$

но

$$\int_{x_0}^{\xi} e^{-hx}dx = \frac{e^{-hx_0}-e^{-h\xi}}{h}.$$

откуда видно, что интегралъ $\int_{x_0}^{\infty} e^{-hx}\frac{\sin nx}{e^x-1}\,dx$ имѣетъ предѣломъ 0 при $h=\infty$ и при положительныхъ значеніяхъ x_0, достаточно большихъ по численной величинѣ.

Съ помощью этой теоремы A (P. Du Bois Reymond'a—Borchardt's Journal, Bd. 79) и замѣчанія 3 доказываются и остальные случаи.

Замѣтка по варіаціонному исчисленію.

А. Пшеборскаго.

Какъ извѣстно, въ различныхъ приложеніяхъ варіаціоннаго исчисленія къ геометріи на плоскости приходится, слѣдуя Weierstrass'у, разсматривать extremum интеграла

$$\int_{t_0}^{t_1} f(x,\ y,\ x',\ y')\, dt\,,$$

причемъ функція f тождественно удовлетворяетъ соотношенію

$$f = x' f_{x'} + y' f_{y'}.$$

Благодаря послѣднему обстоятельству и тому, что f не зависитъ отъ t, оба уравненія Эйлера

$$\frac{d}{dt} f_{x'} - f_x = 0, \quad \frac{d}{dt} f_{y'} - f_y = 0$$

въ этомъ случаѣ совпадаютъ.

Мы займемся изслѣдованіемъ общихъ условій, при которыхъ уравненія Эйлера для интеграла

$$\int_{t_0}^{t_1} f(x,\ y,\ x',\ y',\ t)\, dx$$

совпадаютъ. Положимъ для краткости

$$x' = p, \quad y' = q;$$

тогда дифференціальныя уравненія Эйлера будутъ

$$f_{pp} p' + f_{pq} q' + f_{px} p + f_{py} q + f_{pt} - f_x = 0,$$
$$f_{pq} p' + f_{qq} q' + f_{qx} p + f_{qy} q + f_{qt} - f_y = 0.$$

Эти уравненія будутъ тождественны при выполненіи двухъ условій:

$$\begin{vmatrix} f_{pp}, & f_{pq} \\ f_{pq}, & f_{qq} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} f_{pp}, & f_{px}p + f_{py}q + f_{pt} - f_x \\ f_{pq}, & f_{qx}p + f_{qy}q + f_{qt} - f_y \end{vmatrix} = 0. \tag{1}$$

Изъ условія

$$f_{pp}f_{qq} - (f_{pq})^2 = 0$$

заключаемъ, что функція f, разсматриваемая какъ функція отъ p и q, будетъ вида

$$f = \alpha p + \varphi(\alpha, t, x, y)q + \psi(\alpha, t, x, y), \tag{2}$$

гдѣ φ и ψ произвольныя функціи, а α опредѣляется изъ условія

$$p + \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}q + \frac{\partial\psi}{\partial\alpha} = 0. \tag{3}$$

Изъ (2) на основаніи (3) имѣемъ

$$\begin{gathered} f_p = \alpha, \quad f_q = \varphi(\alpha, t, x, y), \\ f_{pp} = \frac{\partial\alpha}{\partial p}, \quad f_{pq} = f_{qp} = \frac{\partial\alpha}{\partial q} = \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial p}, \quad f_{qq} = \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial q}, \end{gathered} \tag{4}$$

и, далѣе, если z представляетъ одну изъ перемѣнныхъ t, x, y, то

$$f_z = \frac{\partial\varphi}{\partial z}q + \frac{\partial\psi}{\partial z}, \quad f_{pz} = \frac{\partial\alpha}{\partial z}, \quad f_{qz} = \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial z} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}. \tag{5}$$

Пользуясь соотношеніями (4) и (5), напишемъ второе изъ равенствъ (1) въ видѣ

$$\begin{vmatrix} 1, & \frac{\partial\alpha}{\partial x}p + \frac{\partial\alpha}{\partial y}q + \frac{\partial\alpha}{\partial t} - \frac{\partial\varphi}{\partial x}q - \frac{\partial\psi}{\partial x} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}; & \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}p + \frac{\partial\alpha}{\partial y}q + \frac{\partial\alpha}{\partial t}\right) + \frac{\partial\varphi}{\partial x}p + \frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{\partial\psi}{\partial y} \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда имѣемъ

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\left(p + q\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\right) + \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} + \frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{\partial\psi}{\partial y} = 0$$

или, на основаніи (3),

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}-\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}+\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\frac{\partial\psi}{\partial y}=0. \qquad (6)$$

Такимъ образомъ, стоитъ намъ, задавши произвольно одну изъ функцій $\varphi(\alpha, t, x, y)$ или $\psi(\alpha, t, x, y)$, проинтегрировать уравненіе (6), опредѣлить изъ (3) соотвѣтствующее значеніе α и вставить это значеніе въ (2), и мы найдемъ искомую функцію f.

Замѣтимъ, что f удовлетворяетъ тождественно соотношенію

$$f=f_p p+f_q q+\psi(f_p, t, x, y). \qquad (7)$$

Въ частномъ случаѣ, полагая $\psi\equiv 0$, получимъ изъ (6)

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}\equiv 0,$$

откуда на основаніи (3) заключаемъ, что α, а слѣдовательно и f, не зависитъ отъ t. Въ этомъ случаѣ соотношеніе (7) обращается въ

$$f=f_p p+f_q q.$$

Такимъ образомъ, приходимъ къ случаю Weierstrass'a.

Sur la représentation des polynômes positifs.

par Serge Bernstein.

Dans ma Note [1]) «Sur les séries normales» inserée à la fin du t. II des «Principes d'analyse» de M. d'Adhémar je me suis proposé, en particulier, un certain problème de minimum qui m'a amené à effectuer la transformation d'un polynome arbitraire

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

à la forme

$$P(x) = A_0(1-x)^m + A_1 x(1-x)^{m-1} + \ldots + A_m x^m, \tag{1}$$

où $m \geqq n$. L'identification de ces deux expressions donne

$$\begin{aligned} &A_0 = a_0\,, \\ &A_1 = a_1 + m a_0\,, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &A_k = a_k + C^1_{m-k+1} a_{k-1} + \ldots + C_m{}^k a_0\,, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &A_m = a_m + a_{m-1} + \ldots + a_0 \end{aligned} \tag{2}$$

(pour $k > n$, on pose $a_k = 0$),
et j'ai montré que

$$\lim_{m=\infty} \frac{A_k}{C_m^k} = P\left(\frac{k}{m}\right). \tag{3}$$

Il en résulte, entre autres, la conséquence suivante:

La condition nécessaire et suffisante pour que le polynome $P(x)$ n'admette pas de racines dans l'intervalle 0,1 *est que $P(x)$ soit susceptible, pour m assez grand, d'être mis sous la forme d'une somme de termes de même signe*

$$\sum_{i=0}^{i=m} A_i x^i (1-x)^{m-i}.$$

---

[1]) Voir aussi mon Mèmoire russe «О наилучшемъ приближенiи непрерывныхъ функцiй» pp. 120—125.

Il est facile de tlrer de cette proposition le théorème suivant de Laguerre[1]: *si le polynome* $P(x)$ *reste positif (non nul) pour* $x \geqq 0$, *on peut le mettre sous la forme* $P(x) = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$, *où* $f(x)$ *et* $\varphi(x)$ *sont deux polynômes à coefficients positifs.*

Nous pouvons même donner à ce théorème une forme plus précise: *dans la représentation indiquée on peut toujours poser* $\varphi(x) = (1+x)^{\alpha}$, *à condition de prendre* α *assez grand.* Autrement dit, si le polynome $P(x)$ reste positif pour $x \geqq 0$, on peut toujours choisir α assez grand pour que tous les cofficients de $f(x) = P(x).(1+x)^{\alpha}$ soient positifs.

En effet, posons $x = \frac{y}{1-y}$.

Donc

$$P(x) = \frac{R(y)}{(1-y)^n},$$

où $R(y) > 0$, pour $0 \leqq y \leqq 1$. Par conséquent,

$$R(y) = \sum_{i=0}^{i=m} A_i y^i (1-y)^{m-i},$$

où tous les A sont *positifs* pour m assez grand. Mais

$$y = \frac{x}{1+x}, \quad 1 - y = \frac{1}{1+x};$$

donc

$$P(x) = \sum_{i=0}^{i=m} A_i y^i (1-y)^{m-n-i} = \sum_{i=0}^{i=m} A_i x^i \left(\frac{1}{1+x}\right)^{m-n} = \frac{\sum_{i=0}^{i=m} A_i x^i}{(1+x)^{m-n}}.$$

C. q. f. d.

---

[1] Voir E. Meissner «Über positive Darstellungen von Polynomen». Mathematische Annalen; Bd. 70. La démonstration de Laguerre lui-même ne semble pas avoir été publiée.

Détermination de l'albedo de la Terre.

par B. Fessenkoff.

A ma connaissance le seul moyen de trouver l'albedo du globe terrestre est de déterminer l'intensité de la lumière cendrée par rapport à celle de la surface lunaire directement éclairée par le Soleil. Cette méthode étant déjà bien développée, par exemple dans le traité connu du Prof. Dr. Müller (Photometrie der Gestirne p. 82), je ne donne ici que la formule définitive.

Appellons par

h, intensité de la surface lunaire éclairée directement par le Soleil
h', celle de la lumière cendrée
ω, ψ, longitude et latitude de l'élément observé dans la partie éclairée de la Lune
ω', ψ', celles de l'élément dans la lumière cendrée.
σ, rayon apparent de la Terre vu de la Lune
α, angle de la phase et
A, albedo de la Terre d'après la définition de Lambert.

Nous avons entre ces quantités la relation suivante:

$$\frac{h}{h'} = \frac{3\pi}{2A\sin^2\sigma} \cdot \frac{\cos(\omega-\alpha)\cos\psi}{(\sin\alpha-\alpha\cos\alpha)\cos\psi'\cos\omega'}. \tag{1}$$

On peut donner encore les formules basées sur la loi d'Euler et sur celle de Lommel-Seeliger. Mais je préfère d'employer uniquement la formule donnée plus haut, parceque les lois mentionnées ne sont pas justifiées par les considérations théoriques et ne possèdent aucune vérification suffisante.

On voit de la formule (1) que le point cardinal de la question est de connaître le rapport d'intensité de la surface lunaire directement éclairée par le Soleil à celle de la lumière cendrée. C'est cela ce qu'on doit trouver par les observations photométriques.

J'ai entrepris ces observations à l'observatoire de Paris grâce à l'aimable autorisation de M. Baillaud, directeur de l'Observatoire. L'astrophotomètre dont la description et l'examen j'ai déjà donnée dans ma thèse («Lumière Zodiacale», Annales de l'Observatoire de Paris) était attaché à l'équatorial photographique de la Sorbonne installé dans les jardins de l'Observatoire. Je comparais une partie de la lune éclairée directement par le Soleil avec celle dans la lumière cendrée; la dernière était choisie près de l'équateur dans le voisinage du bord de la lune pour pouvoir la trouver facilement dans le champ de la vision malgré l'absence de details dans ce région de disque. Enfin j'étais obligé à examiner chaque fois l'intensité du fond du ciel aux environs de la lumière cendrée, afin de pouvoir tenir compte de l'éclairement provenant de l'atmosphère terrestre. Sans doute cette correction est trop faible pour le disque éclairé de la lune, mais pour la lumière cendrée se détachant faiblement sur le fond du ciel elle peut jouer un rôle assez considérable.

La principale difficulté des semblables observations est que le rapport des intensités qu'on veut mesurer est extrêmement grand. Aucun photomètre n'est capable le mesurer directement sans un dispositif auxiliaire. Dans le cas actuel j'ai employé un diaphragme placé devant l'objectif du photomètre. L'ouverture de ce diaphragme était mesurée avec une exactidude suffisante à l'aide d'un coin dont les côtés portaient une échelle divisée en millimètres.

On peut admettre que l'affaiblissement de l'intensité obtenu par ce procédé est égale au rapport de la surface libre de l'objectif à celle de l'ouverture du diaphragme. Sans doute pour les étoiles ce n'est pas vrai à cause de la diffraction, mais pour les surfaces lumineuses cette proposition conserve toute son exactitude.

Dans la suite je donne mes observatons photométriques sur la lune (le diaphragme étant introduit), sur la lumière cendrée et sur le fond du ciel (sans diaphragme).

1. 20—XII. 1913.	$2^{h}4^{m}$	$2^{h}23^{m}$	$2^{h}49^{m}$	$3^{h}15{,}5^{m}$	$3^{h}46{,}5^{m}$	$4^{h}24^{m}$	$4^{h}54^{m}$
Oceanus Procellarum (au sud de l'Aristarque)	54,3	58,8	51,0	52,5	61,5	54,3	31,9
lumière cendrée ...	0,741	0,685	0,641	0,636	0,559	0,636	0,384
fond du ciel	0,137	0,204	0,111	0,211	0,167	0,089	0,062

2. 31—XII. 1913.	$5^{h}11^{m}$	$5^{h}37^{m}$	$6^{h}8^{m}$
Mare Crisium	7,9	11,3	14,8
lumière cendrée ...	0,330	0,672	0,702
fond du ciel	0,066	0,088	0,134

3. 11—I. 1914.	$6^h2,5^m$	6^h60^m	$6^h49,5^m$
Mare Foecunditatis.	38,8	33,1	31,6
lumière cendrée ...	0,334	0,399	0,364
fond du ciel	0,036	0,043	0,046

4. 1—II. 1914.	$5^h57,5^m$	6^h18^m	6^h41^m	6^h57^m
Près de Mare Foecundit. (région montagneux près du bord).	31,3	30,7	30,8	32,0
lumière cendrée....	0,160	0,124	0,148	0,178
fond du ciel	0,024	0,023	0,023	0,032

5. 2—II 1914.	6^h2^m	6^h31^m
Mare Tranquilitatis.	32,0	42,1
lumière cendrée....	0,500	0,685
fond du ciel.......	0,140	0,157

Chaque nombre de cette Table est la moyenne de quatre évaluations d'éclat qui étaient toujours disposées symétriquement (dans l'ordre: lune, lumière cendrée, fond du ciel, fond du ciel, lumière cendrée, lune) pour éliminer l'effet du changement de la hauteur de la lune. Il est à remarquer que ces observations sont purement relatives. Les différentes séries ne sont pas, par conséquent, comparables.

Il faut maintenant reduire l'intensité du fond du ciel au point où la lumière cendrée était observée. Ce point se trouve à peu près à la distance de 0,8 du centre du disque lunaire, le rayon de la lune étant pris pour unité. A cet effet on peut employer la méthode suivante. Déterminons la variation de l'intensité du fond du ciel dans le voisinage du bord de la pleine lune. Cette variation de l'intensité est représentée d'après mes observations spéciales, par la courbe ci-après. Il faut en déduire la variation de l'intensité pour les différentes phases de la lune.

A l'intérieur du disque de la pleine lune prenons une aire élémentaire $d\sigma$. Supposons que l'éclairement produit par l'aire dans un point A à la distance δ du centre est donné par une fonction $f(r)$, r étant la distance de A à $d\sigma$.

En supposant que la lune a la même intensité dans tous ses points, nous avons pour l'intensité totale dans A

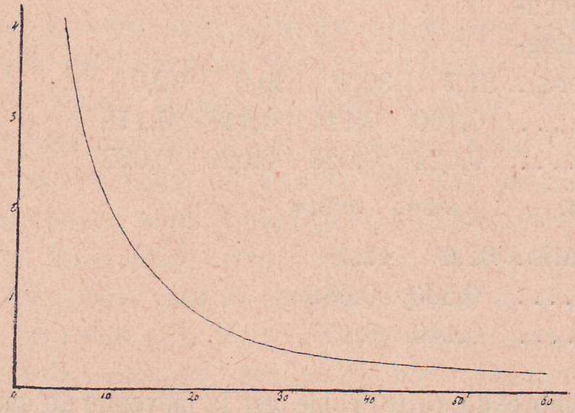
$$J = \iint_{\Sigma} f(r)\, d\sigma$$

intégrale étant étendue à tout le domaine Σ.

C'est une équation intégrale de première espèce qui doit être résolue par rapport à $f(r)$. Sans pouvoir résoudre cette équation j'ai pris pour $f(r)$ une certaine fonction contenant les paramètres indeterminés. On peut, en effet, supposer que $f(r)$ est du même caractère que la courbe integrale représentée sur la figure ci-jointe. Après quelques recherches j'ai adopté pour $f(r)$ l'expression suivante:

$$\frac{1}{f(r)} = a + br^2.$$

Courbe de la variation d'intensité du fond du ciel en fonction de distance du bord de la pleine lune exprimée en minutes d'arc.



Soit ϱ, φ les coordonnées polaires de $d\sigma$, l'origine étant supposée dans le centre de la lune et l'axe de référence passant par le point A. Comme

$$r^2 = \varrho^2 + \delta^2 - 2\varrho\delta\cos\varphi$$

nous avons à intégrer l'expression

$$J = \int_0^R \int_0^\pi \frac{\varrho d\varrho d\varphi}{a + b(\varrho^2 + \delta^2 - 2\varrho\delta\cos\varphi)}.$$

Prenons d'abord l'intégrale

$$\int_0^\pi \frac{d\varphi}{a^2 + b\varrho^2 + b\delta^2 - 2b\varrho\delta\cos\varphi}$$

et posons

$$a_1 = a + b\varrho^2 + b\delta^2 \quad \text{et} \quad b_1 = -2b\varrho\delta.$$

On voit que

$$b_1^2 - a_1^2 < 0.$$

En effet

$$b_1 - a_1 = -2b\varrho\delta - a - b\varrho^2 - b\delta^2 = -a - b(\varrho + \delta)^2$$

est une quantité négative, parce que a et b sont les nombres essentiellement positifs.

D'autre part

$$b_1 + a_1 = a + b\varrho^2 + b\delta^2 - 2b\varrho\delta = a + b\,(\varrho - \delta)^2 > 0.$$

Nous avons, donc,

$$\int_0^\pi \frac{d\varphi}{a_1 + b_1 \cos\varphi} = \frac{2}{\sqrt{a_1^2 - b_1^2}} \left[\operatorname{arctg} \frac{(a_1 - b_1)\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{a_1^2 - b_1^2}} \right]_0^\pi = \frac{\pi}{\sqrt{a_1^2 - b_1^2}}.$$

Il reste à calculer l'intégrale

$$J = \pi \int_0^R \frac{\varrho d\varrho}{\sqrt{b^2\varrho^4 + 2\varrho^2(ab - b^2\delta^2) + (a + b\delta^2)^2}}.$$

Posons

$$\alpha = b^2; \quad \beta = b\,(a - b\delta^2); \quad \gamma = (a + b\delta^2)^2.$$

Nous avons

$$J = \frac{\pi}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \log(\beta + \alpha\varrho^2 + \sqrt{\alpha}\,.\sqrt{\alpha\varrho^4 + 2\beta\varrho^2 + \gamma}) \right]_{\varrho=0}^{\varrho=R}$$

ou

$$J = \frac{\pi}{2b} \log \left[\frac{a - b\delta^2}{2a} + \frac{b}{2a} R^2 + \frac{\sqrt{b^2R^4 + 2b(a - b\delta^2)R^2 + (a + b^2\delta^2)^2}}{2a} \right].$$

En posant enfin

$$k = \frac{b}{a}, \ R = 1,$$

nous avons

$$J = \frac{\pi}{2b} [\log(1 + k(1 - \delta^2) + \sqrt{k^2(1 - \delta^2)^2 + 2k(1 + \delta^2) + 1}) - \log 2]$$

Notre graphique donne

1.	$\delta = 1{,}00$	$J = 1{,}32$
2.	1,33	0,86
3.	1,66	0,60
4.	2,00	0,45

Ces quatre quantités suffisent pour calculer un paramètre k.

En améliorant la valeur primitive de k à l'aide d'une formule différentielle facile à déduire, j'ai obtenu définitivement

$$k = 2,$$

ce que représente lcs observations de la façon suivante:

1,32	0,86	0,60	0,45	observé
1,32	0,93	0,59	0,46	calculé

On ne saurait obtenir une meilleure concordance en conservant la forme simple de $f(r)$ qui était adoptée pour le calcul.

Nons avons donc

$$f(r)=\frac{1}{a(1+2r^2)}, \qquad (r=1{,}0-2{,}0)$$

a restant naturellement indéterminé.

Imaginons maintenant la lune dans une de ses phases, α étant l'angle de la phase. Cherchons l'éclat de l'atmosphère dans un point à la distance δ du centre (le point en question se trouve sur l'équateur d'intensité) en supposant toujours que le disque de la lune possède une intensité uniforme. En appliquant les résultats obtenus, nous voyons, qu'il faut calculer l'intégrale

$$i=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{\varrho_0}^{R}\frac{\varrho d\varrho d\varphi}{1+2(\delta^2+\varrho^2+2\delta\varrho\cos\varphi)}.$$

Il est facile de déterminer ϱ_0, la limite inférieure de l'intégration. En effet l'équation de l'ellipse limitant intérieurement la partie eclairée de la lune est

$$x^2+y^2\sin^2(\alpha-90^0)=R^2\sin^2(\alpha-90^0),$$

α étant toujours supposé supérieur à 90^0. En posant

$$x=\varrho\cos\varphi,\quad y=\varrho\sin\varphi,$$

nous avons

$$\varrho_0{}^2=\frac{R^2\sin^2(\alpha-90^0)}{1-\sin^2\varphi\cos^2(\alpha-90^0)}.$$

Intégrons d'abord l'intégrale

$$\int_{\varrho_0}^{R}\frac{\varrho d\varrho}{1+2\delta^2+4\delta\cos\varphi\,.\,\varrho+2\varrho^2}. \qquad (R=1)$$

Posons

$$\varrho=t+\delta\cos\varphi.$$

Le coefficient de t dans le dénominateur devient nul et nous avons facilement:

$$\int\frac{\varrho d\varrho}{1+2\delta^2+4\delta\varrho\cos\varphi+2\varrho^2}=\frac{1}{4}\log(1+2\delta^2+4\delta\cos\varphi+2\varrho^2)-$$

$$-\frac{\delta\cos\varphi}{\sqrt{2+4\delta^2\sin^2\varphi}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}(\varrho+\delta\cos\varphi)}{\sqrt{1+2\delta^2\sin^2\varphi}}.$$

Il faut maintenant calculer

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Bigg[\frac{1}{4}\log(1+2\delta^2+4\delta\cos\varphi+2) - \frac{\delta\cos\varphi}{\sqrt{2+4\delta^2\sin^2\varphi}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{2}\,(1+\delta\cos\varphi)}{\sqrt{1+2\delta^2\sin^2\varphi}} -$$

$$-\frac{1}{4}\log(1+2\delta^2+4\delta\varrho_0\cos\varphi+2\varrho_0{}^2) + \frac{\delta\cos\varphi}{\sqrt{2+4\delta^2\sin^2\varphi}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{2}(\varrho_0+\delta\cos\varphi)}{\sqrt{1+2\delta^2\sin^2\varphi}}\Bigg]d\varphi$$

où

$$\varrho_0{}^2 = \frac{\sin^2(\alpha - 90^0)}{1 - \sin^2\varphi\,\cos^2(\alpha - 90^0)}.$$

On ne peut calculer cette intégrale qu'à l'aide de l'intégration mécanique.

Posons d'abord $\delta = 1{,}0$;

l'expression à calculer prend la forme suivante:

$$(9{,}760)\log\frac{5+4\cos\varphi}{3+4\varrho_0\cos\varphi+2\varrho_0{}^2} -$$

$$-\frac{\cos\varphi}{\sqrt{2+4\sin^2\varphi}}\left[\mathrm{arctang}\,\frac{2(1+\cos\varphi)}{\sqrt{2+4\sin^2\varphi}} - \mathrm{arctang}\,\frac{2(\varrho_0+\cos\varphi)}{\sqrt{2+4\sin^2\varphi}}\right]$$

où log est le logarithme vulgaire.

En posant $\delta = 0{,}8$ nous avons de la même façon

$$(9{,}760)\log\frac{4{,}28+3{,}2\cos\varphi}{2{,}28+3{,}2\varrho_0\cos\varphi+2\varrho_0{}^2} -$$

$$-\frac{0{,}8\cos\varphi}{\sqrt{2+2{,}56\sin^2\varphi}}\left[\mathrm{arctang}\,\frac{2(1+0{,}8\cos\varphi)}{\sqrt{2+2{,}56\sin\varphi}} - \mathrm{arctang}\,\frac{2(\varrho_0+0{,}8\cos\varphi)}{\sqrt{2+2{,}56\sin^2\varphi}}\right].$$

Il suffit de calculer ces expressions pour les valeurs suivantes de φ et de α:

$\varphi = 0^0 \quad 30^0 \quad 60^0 \quad 90^0$
$\alpha = 90^0 \quad 120^0 \quad 150^0 \quad 180^0.$

Le calcul donne

$\delta = 1{,}0$	$\varphi = 0^0$	30^0	60^0	90^0
$\alpha = 90^0$	0,082	0,083	0,097	0,128
120^0	0,052	0,048	0,0343	0,000
150^0	0,0137	0,0116	0,0052	0,000
180^0	0,000	0,000	0,000	0,000
$\delta = 0{,}8$				
$\alpha = 90^0$	0,099	0,104	0,121	0,157
120^0	0,064	0,0610	0,0407	0,000
150^0	0,0174	0,0156	0,0066	0,000
180^0	0,000	0,000	0,000	0,000

En effectuant l'intégration à l'aide de ces quantités nous obtiendrons facilement les résultats suivants:

		$\delta = 1,0$	$\delta = 0,8$
$\alpha =$	90^0	1,000	1,245
	120	0,390	0,471
	150	0,083	0,109
	180	0,000	0,000

On peut construire d'après ces nombres les courbes pour tous les angles des phases entre 90^0 ct 180^0; le rapport des ordonnées donne le coefficient de réduction en question.

Pour trouver les angles des phases, on peut utiliser les formules suivantes:

$$\cos v = \cos\beta \cos(\lambda -- \lambda')$$

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\sin v}{\cos v - \frac{\tilde{\omega}'}{\tilde{\omega}}},$$

λ, β, $\tilde{\omega}$ étant longitude, latitude et parallaxe de la lune et λ', $\tilde{\omega}'$, longitude et parallaxe du soleil.

Nous avons:

	1	2	3	4	5
α	$97^0,1$	$131,3^0$	$118,9^0$	$108,4^0$	$97,3^0$

d'où le coefficient de réduction est dans chaque cas

1,24	1,26	1,24	1,24	1,24

Après avoir corrigé l'intensité du fond du ciel, nous calculons celle de la lumière cendrée proprement dite. Dès lors on peut former le rapport cherché $\frac{h}{h'}$:

1	2	3	4	5
$117k_1$	$26,8k_2$	$103k_3$	$263k_4$	$92k_5$,

où k_i exprime l'affaiblissement de l'intensité de la surface de la lune à cause de l'emploi du diaphragme.

En mesurant soigneusement le diamètre de l'ouverture du diaphragme et celui de l'objectif chaque fois immédiatement après les observations j'ai trouvé lcs valeurs suivantes:

$\log k_1$	$\log k_2$	$\log k_3$	$\log k_4$	$\log k_5$
2,0476	2,0168	2,0152	2,0086	2,0086

Il en résulte pour le rapport d'intensité cherché

1	2	3	4	5
13100	2790	10670	26900	9400

Ces nombres ne sont pas encore utilisables pour le calcul. En effet la théorie suppose que toutes les parties de la lune possèdent le même pouvoir de réflechir la lumière. En réalité la surface lunaire est loin d'être homogène. Il faut, par conséquent, examiner le disque de la lune et surtout les régions qui étaient observés precédemment.

En observant la lune quand celle-ci était pleine, j'ai obtenue les résultats suivants:

	lecture du micrometre	nombre d'observations	log. de l'intensité
région montagneux près de Mare Foecunditatis (près du bord de la lune)	$11^t,80$	8	1,873
Mare Crisium	$5^t,43$	6	1,328
Mare Tranquilitatis	$6^t,44$	6	1,457
Oceanus Procellarum (au sud de l'Aristarque) .	$6^t,50$	6	1,461
Mare Foecunditatis	$8^t,67$	6	1,670
région montagneux prés de l'oceanus Procellarum (au bord de la lune)	$12^t,36$	6	1,902

On peut en conclure que les rapports précédents doivent être multipliés par les facteurs dont les logarithmes sont:

1	2	3	4	4
0,412	0,574	0,232	0,029	0,445

Cela donne définitivement pour $\log \frac{h}{h'}$

1	2	3	4	5
4,528	4,019	4,260	4,458	4,418

Il ne reste maintenant qu'appliquer directement la formule (1). Dans cette formule j'ai pris pour les coordonnées des différents points de la lune, les valeurs que voici:

	1	2	3	4	5
ω	50^0	58^0	50^0	70^0	30^0
ψ	-15^0	-15^0	0^0	10^0	-5^0
ω'	70^0	70^0	70^0	70^0	70^0
ψ'	0^0	0^0	0^0	0^0	0^0

Ceci donne pour l'albedo d'après la définition de Lambert

1.	0,74
2.	0,62
3.	0,57
4.	0,73
5.	0,67

en moyenne 0,67 ± 0,032 (err. moyenne).

J'ai déduit la moyenne en attribuant le même poids à toutes ces quantités quoique le nombre d'observations n'était pas le même dans tous les cas. Cela tient à ce que la discordance entre les déterminations séparées est due plutôt á l'inexactitude de la loi de Lambert, mise au fond de ces recherches, qu'aux erreurs des observations photomètriques. Quoi qu'il en soit, la première décimale, au moins, peut etre considérée comme exacte.

Il serait peut etre intéressant de confronter les albedos des autres planètes avec celui de la Terre. Les voici:

Lune	0,13
Mercure	0,14
Venus	0,76
Terre	0,67
Mars	0,22
Jupiter	0,62
Saturne	0,72
Uranus	0,60
Neptune	0,52

On voit que la Terre occupe une place intermédiaire entre Venus et Mars, comme il fallait s'y attendre.

О періодическихъ непрерывныхъ дробяхъ.

Димитрія Граве.

1. Ариѳметическая теорія періодическихъ непрерывныхъ дробей, созданная Lagrange'омъ и вылившаяся далѣе въ Gauss'ову теорію квадратичныхъ формъ, была основой, изъ которой развилась современная теорія алгебраическихъ чиселъ. Черезъ все XIX столѣтіе проходитъ желаніе обобщить алгориѳмъ непрерывныхъ дробей для алгебраическихъ чиселъ, опредѣляемыхъ уравненіями выше второй степени. Наука обязана нашему соотечественнику Г. Ѳ. Вороному первой удачной попыткой обобщенія теоріи Lagrange'а на уравненія третьей степени.

2. Въ настоящей статьѣ я хочу обратить вниманіе на обобщеніе теоріи Lagrange'а другого характера, а именно, показать, что можетъ получиться теорія, аналогичная для разложенія въ непрерывную дробь корня квадратнаго уравненія съ цѣлыми алгебраическими коэффиціентами.

Оставляя до болѣе подробнаго мемуара детальное изложеніе предмета, я разсмотрю въ настоящей предварительной статьѣ нѣсколько наиболѣе характерныхъ примѣровъ.

3. Возьмемъ какое нибудь алгебраическое поле Ω степени n.

Пусть фундаментальный базисъ будетъ

$$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots \omega_n.$$

Возьмемъ число D поля Ω, относительно котораго справедлива формула

$$\sqrt{D} = \alpha_1\omega_1 + \alpha_2\omega_2 + \ldots + \alpha_n\omega_n, \qquad (1)$$

причемъ всѣ числа $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ вещественныя, но не всѣ раціональныя.

Пусть кромѣ того число D будетъ дискриминантомъ уравненія

$$Ax^2 - 2Bx + C = 0, \qquad (2)$$

съ коэффиціентами цѣлыми алгебраическими изъ поля Ω, такъ что

$$x = \frac{B \pm \sqrt{D}}{A}, \quad \text{гдѣ } D = B^2 - AC. \qquad (3)$$

Выбирая въ формулѣ (3) какой нибудь опредѣленный знакъ у радикала, получаемъ

$$x=\beta_1\omega_1+\beta_2\omega_2+\ldots+\beta_n\omega_n, \tag{4}$$

гдѣ β_1, $\beta_2, \ldots \beta_n$ числа вещественныя и не всѣ раціональныя.

Дѣло идетъ о нахожденіи цѣлаго числа a_1 поля Ω, возможно близкаго къ числу x.

Когда число a_1 найдено, полагаемъ $x=a_1+\frac{1}{x_1}$ и продолжаемъ подобное же разсужденіе относительно числа x_1. Получается разложеніе корня квадратнаго уравненія (2) въ непрерывную дробь

$$x=a_1+\frac{1}{a_2+\ldots},$$

у которой неполныя частныя a_1, $a_2, \ldots$ цѣлыя числа поля Ω.

Правила указанія числа a_1, ближайшаго къ x, должны быть даны такъ, чтобы съ одной стороны получался всегда единственный результатъ, а съ другой стороны, чтобы мы приходили къ періодической непрерывной дроби.

4. Разсмотримъ Gauss'ово поле Ω комплексныхъ чиселъ вида $a+bi$, гдѣ $i=\sqrt{-1}$, а числа a, b числа раціональныя. Въ этомъ случаѣ фундаментальный базисъ есть $(1, i)$.

Если корень

$$\sqrt{A+iB}$$

не извлекается въ полѣ Ω, то будетъ

$$\sqrt{A+iB}=\alpha_1+\alpha_2 i,$$

гдѣ вещественныя ирраціональныя числа α_1 и α_2 вычисляются по формуламъ

$$\alpha_1=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2+B^2}}{2}}, \quad \alpha_2=\sqrt{\frac{-A+\sqrt{A^2+B^2}}{2}},$$

причемъ радикалъ $\sqrt{A^2+B^2}$ берется со знакомъ $+$.

Пусть въ этомъ случаѣ цѣлая часть a_1 числа x берется по обычному правилу замѣны дробныхъ координатъ ближайшими цѣлыми числами.

5. Пояснимъ способъ на примѣрѣ произвольно взятаго числа

$$\sqrt{D}=\sqrt{357+i216}=\alpha_1+i\alpha_2,$$

гдѣ

$$\alpha_1=19{,}675\ldots, \ \alpha_2=5{,}495\ldots$$

Получаемъ очевидно

$$\sqrt{D} = 20 + 5i + \frac{1}{x_1}.$$

Откуда

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{D} - (20+5i)} = \frac{\sqrt{D} + 20 + 5i}{-18 + 16i} = \frac{(-18-16i)(\sqrt{D}+20+5i)}{580} =$$

$$= -\frac{546,23\ldots}{580} - i\,\frac{823,72\ldots}{580} = -1 - i + \frac{1}{x_2}.$$

Далѣе

$$x_2 = \frac{-18 + 16i}{\sqrt{D} - (14-3i)} = \frac{(-18+16i)(\sqrt{D} + 14 - 3i)}{357 + 216i - (14-3i)^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{D} + 14 - 3i}{3 - 14i} = \frac{(3+14i)(\sqrt{D} + 14 - 3i)}{205} =$$

$$= \frac{66,095}{205} + i\,\frac{478,93\ldots}{205} = 2i + \frac{1}{x_3}$$

Продолжая далѣе, мы приходимъ къ періодической непрерывной дроби

$$\sqrt{D} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ldots}}$$

причемъ

$$x_i = a_i + \frac{1}{x_{i+1}}$$

Обозначимъ подходящія дроби знакомъ $\frac{P_i}{Q_i}$ при условіи

$$\frac{P_0}{Q_0} = a_0\,, \quad \frac{P_1}{Q_1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1}.$$

Всякое полное частное x_i будетъ выражаться формулой

$$x_i = \frac{\sqrt{D} + \tau_i}{\sigma_i}\,,$$

гдѣ τ_i и σ_i суть цѣлыя комплексныя числа. Результатъ разложенія въ непрерывную дробь можетъ быть представленъ въ видѣ таблицы

i	σ_i	a_i	P_i	Q_i
0	—	$20+5i$	$20+5i$	1
1	$-18+16i$	$-1-i$	$-14-25i$	$-1-i$
2	$3-14i$	$2i$	$70-23i$	$3-2i$
3	$6+16i$	$1-2i$	$10-188i$	$-2-9i$
4	$21+20i$	$1-i$	$-108-221i$	$-8-9i$
5	4	$9+2i$	$-520-2393i$	$-56-106i$
6	$3+16i$	$1-2i$	$-5414-1574i$	$-276-3i$
7	$3-8i$	$4i$	$5776-24049i$	$-44-1210i$
8	$3+16i$	$1-2i$	$-47736-37175i$	$-2740-1125i$
9	4	$10+2i$	$-397234-491271i$	$-25194-17940i$
10	$-17+12i$	$-1-2i$	$-633044+1248564i$	$-13426+67204i$
11	$-25+12i$	$-1-i$	$1484374-1106791i$	$55435-71717i$
12	$3-14i$	$1+2i$	$3064912+3110521i$	$185443+106356i$
13	$-18+16i$	$-1-i$	$1529983-7282224i$	$-23652-363516i$
14	1	$40+10i$	. . . .	. . . .
15	σ_1	a_1	. . . .	. . . .

Всегда будетъ имѣть мѣсто

$$P_i^2-(357+216i)\,Q_i^2=(-1)^{i+1}\,\sigma_{i+1}\,,$$

слѣдовательно, при

$$i=4\,,\ 8\,,\ 13$$

мы получаемъ рѣшеніе Pell'ева уравненія.

6. Второй примѣръ возьмемъ изъ дѣленія круга, а именно, изъ поля, зависящаго отъ корня изъ единицы 8-ой степени.

Базисъ поля есть

$$1\,,\ i\,,\ \theta\,,\ \theta i\,,$$

гдѣ $\theta^2=i$.

Если A и B суть цѣлыя Gauss'овы комплексныя числа, то

$$\sqrt{A+\theta B}=\xi+\theta\eta\,,$$

гдѣ ξ и η имѣютъ видъ $a+bi$ съ вещественными a, b. Въ самомъ дѣлѣ, получаемъ

$$\xi^2+i\eta^2=A\,,\quad 2\xi\eta=B\,,$$

откуда

$$\xi=\sqrt{\frac{A\pm\sqrt{A^2+iB^2}}{2}}\,,\quad \eta=\frac{1+i}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{A\mp\sqrt{A^2+iB^2}}{2}}\,.$$

Примѣняя къ случаю $\sqrt{\theta}$, получимъ

$$\sqrt{\theta} = a + bi + c\theta + дi\theta$$

гдѣ

$$a = c = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}} = 0{,}6533\ldots$$

$$-b = д = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}} = 0{,}2706\ldots$$

Мы получимъ, примѣняя тотъ же самый способъ приближенія къ вещественнымъ ирраціональнымъ координатамъ,

$$\sqrt{\theta} = 1 + \theta + \frac{1}{x_1}$$

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{\theta} - (1+\theta)} = \frac{\sqrt{\theta}+1+\theta}{-1-i-\theta} = \frac{(-1-i+\theta)(\sqrt{\theta}+1+\theta)}{i} =$$

$$= (i-1-\theta i)(\sqrt{\theta}+1+\theta) = c-a-b+i(a+1-b+д)+\theta(b-1-c-д)+$$

$$+ i\theta(c-д-a) = 2i-2\theta+\frac{1}{x_2}.$$

Далѣе

$$\frac{1}{x_2} = \frac{\sqrt{\theta}-(1+\theta)}{-1-i-\theta}, \quad x_2 = \sqrt{\theta}+1+\theta = 2+2\theta+\frac{1}{x_1}$$

и мы приходимъ къ періодической непрерывной дроби съ двумя звеньями въ періодѣ

$$\sqrt{\theta} = 1+\theta+\cfrac{1}{2(i-\theta)+\cfrac{1}{2(i+\theta)+\cfrac{1}{2(i-\theta)+\ldots}}}$$

Получается простѣйшее рѣшеніе Pell'ева уравненія

$$x^2 - \theta y^2 = 1$$

въ видѣ

$$x = 1 - 2\theta - 2\theta i, \quad y = 2(i-\theta).$$

7. Какъ послѣдній примѣръ возьмемъ кубическое поле, зависящее отъ корня уравненія

$$\theta^3 = 2.$$

Будемъ раскладывать корень квадратный

$$\sqrt{\theta}=x+\theta y+\theta^2 z$$

Можетъ произойти одно изъ двухъ

$$x=\pm\frac{2\sqrt[6]{2}}{3},\quad y=\pm\frac{\sqrt[6]{32}}{3},\quad z=\mp\frac{1}{\sqrt{18}}$$

$$x=0,\quad y=0,\quad z=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Ограничиваясь верхними знаками, получимъ въ первомъ случаѣ

$$x=0{,}748\ldots,\quad y=0{,}564\ldots,\quad z=-0{,}236\ldots,$$

то есть

$$\sqrt{\theta}=1+\theta+\frac{1}{x_1}$$

$$x_1=\frac{1}{\sqrt{\theta}-(1+\theta)}=\frac{\sqrt{\theta}+1+\theta}{-1-\theta-\theta^2}.$$

Дѣля x^3-2 на x^2+x+1 получаемъ въ частномъ $x-1$ и остатокъ -1, то есть

$$x^3-2=(x^2+x+1)(x-1)-1.$$

Подставляя сюда θ, получимъ

$$0=(\theta^2+\theta+1)(\theta-1)-1,$$

откуда

$$\frac{1}{-1-\theta-\theta^2}=1-\theta.$$

Итакъ

$$x_1=(1-\theta)(\sqrt{\theta}+1+\theta)=(1-\theta)[x+1+\theta(y+1)+z\theta^2]=1+x-2z+$$
$$+(y-x)\theta+(z-1-y)\theta^2=2-2\theta^2+\frac{1}{x_2}$$

Далѣе

$$\frac{1}{x_2}=\frac{\sqrt{D}-(1+\theta)}{1-\theta-\theta^2}$$

$$x_2=\sqrt{\theta}+1+\theta=2(1+\theta)+\frac{1}{x_1}$$

Періодъ уже обнаружился и состоитъ изъ двухъ звеньевъ.

Мы пришли къ дроби

$$\sqrt{\theta} = 1 + \theta + \cfrac{1}{2(1-\theta^2) + \cfrac{1}{2(1+\theta) + \cfrac{1}{2(1-\theta^2) + \dots}}} \tag{5}$$

Во второмъ случаѣ

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0{,}707\dots,$$

слѣдовательно, получаемъ

$$\sqrt{\theta} = \theta^2 + \frac{1}{x_1}.$$

Поступая подобно изложенному, приходимъ къ дроби

$$\sqrt{\theta} = \theta^2 + \cfrac{1}{-2\theta + \cfrac{1}{2\theta^2 + \cfrac{1}{-2\theta + \dots}}} \tag{6}$$

періодъ опять состоитъ изъ двухъ звеньевъ.

Мы получимъ два простѣйшихъ рѣшенія Pell'ева уравненія

$$x^2 - \theta y^2 = 1,$$

одно изъ первой дроби (5)

$$x = -1 - 2\theta + 2\theta^2, \quad y = 2(1 - \theta^2),$$

другое изъ второй дроби (6)

$$x = +3, \quad y = 2\theta.$$

8. Въ заключеніе я замѣчу, что обобщеніе идетъ также и на трансцендентныя поля съ одной независимой перемѣнной. Если коэффиціенты произвольныя дѣйствительныя или мнимыя числа, то разложеніе корня квадратнаго изъ цѣлыхъ элементовъ такого поля въ непрерывную дробь даетъ алгориѳмъ, имѣющій большое значеніе въ интегральномъ

исчисленіи. Эти приложенія указаны въ знаменитомъ мемуарѣ Abel'я Sur l'intégration de la formule différentielle $\frac{\varrho dx}{\sqrt{R}}$, R et ϱ étant des fonctions entières.

Къ болѣе опредѣленнымъ выводамъ можно придти, если ограничить коэффиціенты элементовъ трансцендентнаго поля. Таковы изслѣдованія Чебышева, когда коэффиціенты раціональные, а также изслѣдованія Золотарева при коэффиціентахъ алгебраическихъ.

Мы видимъ что теорія ультра-эллиптическихъ функцій сближается все болѣе съ высшими частями теоріи чиселъ.

8 февраля 1915 г.
Кіевъ.

Объ одномъ функціональномъ уравненіи.

Д. М. Синцова.

Поставимъ себѣ такую задачу:

«Какова должна быть функція $f(x)$ для того, чтобы при всякомъ x (можетъ быть, ограниченномъ извѣстнымъ интерваломъ) можно было найти двѣ такія независящія отъ x постоянныя m и v, чтобы при данныхъ m_1, v_1, m_2, v_2, не равныхъ соотвѣтственно между собою, выполнялось тожество

$$mf(vx) \equiv m_1 f(v_1 x) + m_2 f(v_2 x). \qquad (1)$$

Ограничимъ задачу: будемъ разыскивать *аналитическую* функцію, которая выполняла бы указанныя условія.

Прежде всего разсмотримъ случай, когда

$$1) \quad f(0) \neq 0 \qquad (a)$$

Предполагая что значеніе $x = 0$ принадлежитъ къ допустимымъ для x значеніямъ, положимъ въ (1) $x = 0$. Получимъ

$$mf(0) = m_1 f(0) + m_2 f(0)$$

Въ силу допущенія (a) должно быть

$$m = m_1 + m_2 \qquad (2)$$

Мы можемъ отбросить случай $m_1 + m_2 = 0$, потому что при $f(x)$ конечной это обращаетъ (1) въ силу (2) въ тожество

$$m_1 [f(v_1 x) - f(v_2 x)] = 0$$

что при $v_1 \neq v_2$ даетъ $f(x) = 0$, а при $v_1 = v_2$ ничего не говоритъ о видѣ функціи $f(x)$.

Итакъ $m_1 + m_2 \neq 0$.

Въ дальнѣйшемъ можно снова сдѣлать два предположенія:

$$\alpha) \; f'(0) \neq 0 \quad \text{и} \quad \beta) \; f'(0) = 0$$

Продифференцировавъ (1) одинъ разъ по x, получимъ:

$$mvf'(vx) \equiv m_1v_1f'(v_1x) + m_2v_2f'(v_2x).$$

Полагая здѣсь $x = 0$, получимъ въ первомъ предположенiи

$$mv = m_1v_1 + m_2v_2 \tag{3}$$

т. е. въ связи съ (2):

$$v = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2};$$

этимъ уже m и v опредѣлены.

Новое дифференцированiе даетъ

$$mv^2f''(vx) \equiv m_1v_1{}^2f''(v_1x) + m_2v_2{}^2f''(v_2x)$$

Отсюда при $x = 0$ должно быть уже непремѣнно $f''(0) = 0$, а также и всѣ дальнѣйшiя производныя при $x = 0$ обращаются въ 0.

Дѣйствительно, при $f^{(k)}(0) \neq 0$ имѣли бы одновременно

$$(m_1 + m_2)\, v = m_1v_1 + m_2v_2$$

$$(m_1 + m_2)\, v^k = m_1v_1{}^k + m_2v_2{}^k$$

или

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{v_2 - v}{v - v_1} = \frac{v_2{}^k - v^k}{v^k - \tau_1{}^k}$$

Такъ какъ v не равно v_1 или v_2 при $v_1 \neq v_2$, то при $k = 2$ отсюда заключаемъ $f''(0) = 0$, при $k = 3 : f'''(0) = 0$ и т. д.

Итакъ при сдѣланныхъ предположенiяхъ

$$f(x) = A + Bx. \tag{Iα}$$

Пусть теперь $f'(0) = 0$. Тогда должно быть одно изъ двухъ: или всѣ дальнѣйшiя производныя также равны нулю при $x = 0$, т. е.

$$f(x) = A \tag{Iβ_1}$$

или же есть такая производная $f^{(k)}(x)$, которая первая не обращается въ 0 при $x = 0$: $f^{(k)}(0) \neq 0$.

Тогда дифференцируя k разъ находимъ

$$mv^kf^{(k)}(vx) \equiv m_1v_1{}^kf^{(k)}(v_1x) + m_2v_2{}^kf^{(k)}(v_2x)$$

и полагая $x = 0$, заключаемъ

$$mv^k = m_1v_1{}^k + m_2v_2{}^k \tag{3$_1$}$$

Изъ уравненiй (2) и (3$_1$) найдемъ m и v.

Отсюда уже $f^{(k+1)}(0) = 0$ и всѣ дальнѣйшія производныя также обращаются въ 0 при $x = 0$. Иначе одновременно съ (2) и (3_1) должно бы быть

$$mv^{k+1} = m_1 v_1^{k+1} + m_2 v_2^{k+1}$$

и т. д.

Итакъ въ этомъ случаѣ

$$f(x) = A + Bx^k \qquad (\mathrm{I}\beta_2)$$

Не трудно провѣрить, что тожество (1) выполнено.

2) Остается случай $f(0) = 0$. Но при этомъ одно изъ двухъ: или *всѣ производныя* $f(x)$ *при* $x = 0$ *обращаются въ* 0, и аналитическою функціей удовлетворяющей поставленнымъ условіямъ, является

$$f(x) = 0 \qquad (\mathrm{II}\alpha)$$

или же существуетъ такая производная конечнаго порядка l, которая при $x = 0$ въ нуль не обращается: $f^{(l)}(0) \neq 0$. Но тогда разложеніе $f(x)$ въ степенную строку начинается съ члена

$$\frac{x^l}{l!} f^{(l)}(0),$$

и мы можемъ положить

$$f(x) = x^l \varphi(x) \qquad (4)$$

гдѣ уже

$$\varphi(0) \neq 0 \quad \left(= \frac{f^{(l)}(0)}{l!}\right)$$

Тожество (1) при подстановкѣ (4) даетъ

$$m' \varphi(vx) \equiv m_1' \varphi(v_1 x) + m_2' \varphi(v_2 x), \qquad (1')$$

если сократить на x^l и положить

$$mv^l = m', \quad m_1 v_1^l = m_1', \quad m_2 v_2^l = m_2'.$$

Такимъ образомъ $\varphi(x)$ опредѣляется такимъ же тожествомъ, что и $f(x)$, но уже $\varphi(0) \neq 0$. Итакъ снова $\varphi(x)$ должно быть вида $A + Bx^k$, и слѣдовательно, въ этомъ случаѣ

$$f(x) = x^l (A + Bx^k) \qquad (\mathrm{II}\beta)$$

Всѣ эти случаи объединяются въ одной формѣ

$$f(x) = Ax^l + Bx^k \tag{5}$$

гдѣ k и l цѣлыя числа, неравныя между собою, одно изъ коихъ можетъ быть нулемъ.

Такія и только такія могутъ быть *аналитическія* функціи, удовлетворяющія тожеству (1).

[Можно замѣтить, что k и l могутъ быть и не цѣлыми числами, и (5) все же будетъ удовлетворять (1). Къ этому можно прійти, предполагая, что $f(x)$ разлагается въ сходящуюся строку вида

$$A_0 + A_1 x^\alpha + A_2 x^\beta + \ldots].$$

Если поэтому возьмемъ какую-нибудь аналитическую функцію, отличную отъ (5), то хотя при каждомъ данномъ x можно найти m и v такъ, чтобы равенство (1) соблюдалось, но эти m и v будутъ различны для различныхъ x,—т. е. будутъ оба или одно,—функціями x.

Объ однократно суммируемыхъ рядахъ Sturm-Liouville'я.

Эрванда Когбетлянца.

Послѣ обобщенія классическихъ теоремъ Cantor'a и Du-Bois-Reymond'a, относящихся къ *сходящимся тригонометрическимъ* рядамъ, въ одномъ направленіи A. Haar'омъ [1]) на *сходящіеся Sturm-Liouville'вскіе*, въ другомъ — M. Riesz'омъ [2]) на *однократно суммируемые* методомъ среднихъ ариѳметическихъ *тригонометрическіе* ряды, естественно возникаетъ вопросъ: нельзя-ли попытаться слить эти результаты обобщеніемъ теоремъ Cantor'a и Du-Bois-Reymond'a на *однократно суммируемые Sturm-Liouville'вскіе* ряды?

Разрѣшеніе этого вопроса и составляетъ содержаніе настоящей работы: вышеупомянутыя теоремы M. Riesz'a, A. Haar'a равно какъ и исходныя классическія теоремы Cantor'a и Du-Bois-Reymond'a являются частными случаями доказанныхъ въ ней теоремъ. Методъ доказательства тотъ же, которымъ пользуются A. Haar и M. Riesz; онъ данъ H. Lebesgue'омъ при доказательствѣ теоремъ Cantor'a и Du-Bois-Reymond'a въ его книгѣ «Leçons sur les séries trigonométriques». Въ дальнѣйшемъ всюду слова «суммируемый», «суммируемость» и т. п. употребляются въ смыслѣ: суммируемый однократно методомъ среднихъ ариѳметическихъ и т. п.

Изъ дифференціальнаго уравненія съ аналитическими коэффиціентами $p(x)$ и $q(x)$

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\cdot\frac{du}{dx}\right]+q(x)\,u+\lambda u=0 \qquad {\scriptstyle (p(x)>0)} \qquad (1)$$

возникаетъ при удовлетвореніи пограничныхъ условій

$$\frac{du}{dx}-h'.u=0 \quad \text{при} \quad x=\alpha \quad \text{и} \quad \frac{du}{dx}+H'.u=0 \quad \text{при} \; x=\beta \quad (2)$$

---

[1]) *A. Haar.* Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme II. Mathem. Ann. B. 71. стр. 38.

[2]) *M. Riesz.* Ueber summierbare trigonometrische Reihen. Mathem. Ann. B. 71 стр. 54.

Sturm-Liouville'вская ортогональная система функцій

$$u_1(x)\,,\quad u_2(x)\,,\quad u_3(x)\ldots u_n(x)\,,\ldots \qquad (1)$$

Разсмотримъ рядъ

$$a_1 . u_1(x) + a_2 . u_2(x) + \ldots + a_n . u_n(x) + \ldots \qquad (3)$$

и, обозначивъ значеніе параметра λ соотвѣтствующее функціи $u_n(x)$ черезъ λ_n, составимъ вспомогательный рядъ:

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n . u_n(x)}{\lambda_n} = -\frac{a_1 . u_1(x)}{\lambda_1} - \frac{a_2 . u_2(x)}{\lambda_2} - \ldots - \frac{a_n . u_n(x)}{\lambda_n} - \ldots \qquad (4)$$

Мы утверждаемъ справедливость слѣдующихъ теоремъ:

Теорема I. *«Пусть Sturm-Liouville'вскій рядъ (3) повсюду въ интервалѣ* (α, β) *суммируемъ съ суммой равной нулю. Если рядъ (4) сходится равномѣрно, то*

$$a_n = 0 \quad (n = 1\,,\ 2\,,\ 3\,,\ldots)».$$

Эта теорема остается справедливой и при существованіи въ интервалѣ (α, β) приводимаго (reductible) множества точекъ, въ которыхъ рядъ (3) или не былъ бы суммируемъ или, оставаясь суммируемымъ, обладалъ-бы суммой отличной отъ нуля, если притомъ наложить на его коэффиціенты ограниченіе, заключающееся въ томъ, чтобы съ возрастаніемъ индекса они стремились къ нулю, т. е. чтобы $\lim\limits_{n=\infty} a_n = 0$. Такимъ образомъ получается:

Теорема II. *«Пусть рядъ* (3) *суммируемъ съ суммой равной нулю во всемъ интервалѣ* (α, β) *за исключеніемъ нѣкотораго приводимаго множества точекъ. Если* $\lim\limits_{n=\infty} a_n = 0$, *то всѣ его коэффиціенты равны нулю»*.

Эти двѣ теоремы представляютъ обобщеніе теоремы Cantor'а; слѣдующія-же двѣ обобщаютъ теорему Du-Bois-Reymond'а:

Теорема III. *«Пусть рядъ (3) суммируемъ съ суммой* $f(x)$ *повсюду въ интервалѣ* (α, β). *Если рядъ (4) сходится равномѣрно и если* $f(x)$ *ограниченная функція, то для нея рядъ (3) будетъ рядомъ Fourier, т. е.*

$$a_n = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) . u_n(x) . dx \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ldots)».$$

И въ этомъ случаѣ, если въ нѣкоторомъ приводимомъ множествѣ точекъ рядъ (3) не суммируемъ или, оставаясь суммируемымъ, не обладаетъ суммой, заключенной въ конечныхъ предѣлахъ, то при добавочномъ условіи $\lim\limits_{n=\infty} a_n = 0$ теорема III остается справедливой:

Теорема IV. «*Пусть рядъ* (*3*) *суммируемъ и обладаетъ суммой* $f(x)$ *всюду въ интервалѣ* (α, β) *за исключеніемъ нѣкотораго приводимаго множества точекъ, причемъ* $\lim\limits_{n=\infty} a_n = 0$. *Если функція* $f(x)$ *ограниченная, то*

$$a_n = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x) . u_n(x) . dx \quad (n = 1,\ 2,\ 3, \ldots)».$$

Эти четыре теоремы будутъ доказаны сперва для Sturm-Liouville'вской системы функцій

$$v_1(z),\ v_2(z),\ v_3(z), \ldots\ v_n(z) \ldots, \tag{II}$$

получаемой изъ (I) подстановкой

$$z = \int\limits^{x} [p(x)]^{-\frac{1}{2}} . \, dx \qquad v(z) = u(x) . \sqrt[4]{p(x)} \tag{5}$$

и нормированной такъ, что $\int\limits_0^1 v_n{}^2(z) . dz = 1$, а затѣмъ ихъ легко перенести на систему (I). При подстановкѣ (5) дифференціальное уравненіе (1) переходитъ въ

$$\frac{d^2 v}{dz} + Q(z) . v + \lambda v = 0 \tag{6}$$

и пограничныя условія (2) въ

$$\frac{dv}{dz} - h . v = 0 \text{ при } z = 0 \text{ и } \frac{dv}{dz} + H . v = 0 \text{ при } z = \pi. \tag{7}$$

Для упрощенія принято $\int\limits_{\alpha}^{\beta} [p(x)]^{-\frac{1}{2}} . dx = \pi$, что впрочемъ легко достигается умноженіемъ независимаго перемѣннаго; постоянныя h и H легко выразить черезъ h' и H'. Функція $Q(z)$, выражающаяся легко черезъ $p(x)$, $p'(x)$, $p''(x)$ и $q(x)$, также аналитическая.

§ 1.

Доказательство этихъ теоремъ для системы функцій (II) опирается на слѣдующую лемму, представляющую обобщеніе относящейся къ суммируемымъ тригонометрическимъ рядамъ леммы Fejér'a [1]):

Лемма «*Если рядъ*

$$a_1 v_1(z) + a_2 v_2(z) + \dots + a_n v_n(z) + \dots \qquad (1)$$

суммируемъ съ суммой $f(z)$ *повсюду въ интервалѣ* (z_0, z_1), *то непрерывная функція* $\Phi(z)$, *опредѣляемая рядомъ*

$$\Phi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n . v_n(z)}{\lambda_n^2} = \frac{a_1 . v_1(z)}{\lambda_1^2} + \frac{a_2 . v_2(z)}{\lambda_2^2} + \dots + \frac{a_n . v_n(z)}{\lambda_n^2} + \dots \qquad (2)$$

сходящимся абсолютно и равномѣрно, обладаетъ во всемъ интервалѣ (z_0, z_1) *свойствомъ*:

$$\lim_{\delta=0} \frac{\Delta_\delta^4 \Phi(z)}{\delta^4} = \lim_{\delta=0} \frac{\Phi(z+2\delta) - 4\Phi(z+\delta) + 6\Phi(z) - 4\Phi(z-\delta) + \Phi(z-2\delta)}{\delta^4} =$$

$$= f(z) - \{Q''(z) - [Q(z)]^2\} . \Phi(z) - 2Q'(z) . \Phi''(z) - 2Q(z) . F(z) \quad z_0 \leq z \leq z_1\text{»} \qquad (3)$$

причемъ $F(z)$ обозначаетъ сумму сходящагося ряда

$$F(z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n . v_n(z)}{\lambda_n} = -\frac{a_1 . v_1(z)}{\lambda_1} - \dots - \frac{a_n . v_n(z)}{\lambda_n} - \dots \qquad (4)$$

Изъ суммируемости ряда (1) слѣдуетъ [2]), что во всемъ интервалѣ (z_0, z_1)

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_n . v_n(z)}{n} = 0$$

и слѣдовательно [3])

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_n}{n} = 0 . \qquad (5)$$

---

[1]) *L. Fejér*. Untersuchungen über Fouriersche Reihen. Math. Ann. B. 58, c. 68-69.

[2]) *L. Fejér*, l. c. стр. 63.

[3]) См. *A. Haar*, l. c. § 2 стр. 47.

Сходимость въ интервалѣ (z_0, z_1) ряда

$$\sum_1^\infty \frac{a_n . v_n(z)}{n} = \frac{a_1 . v_1(z)}{1} + \frac{a_2 . v_2(z)}{2} + \ldots + \frac{a_n . v_n(z)}{n} + \ldots$$

также является слѣдствіемъ [1]) суммируемости ряда (1), изъ чего съ помощью асимптотической формулы [2])

$$\lambda_n = \left(n + \frac{\gamma}{n} + \frac{\gamma'_n}{n^2}\right)^2, \tag{6}$$

въ которой числа γ и γ'_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ по абсолютной величинѣ меньше нѣкотораго постояннаго положительнаго числа, слѣдуетъ a fortiori сходимость ряда (4). Изъ той-же формулы (6) вытекаетъ сходимость ряда $\sum_1^\infty \frac{1}{\lambda_n}$ и слѣдовательно, принимая во вниманіе асимптотическую формулу [2])

$$v_n(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} . \cos nz . \left(1 + \frac{\alpha_n(z)}{n^2}\right) + \sin nz \left(\frac{\beta(z)}{n} + \frac{\gamma_n(z)}{n^2}\right) \tag{7}$$

въ которой функціи $\alpha_n(z)$, $\beta(z)$ и $\gamma_n(z)$ по абсолютной величинѣ при всякомъ значеніи индекса n и для любого z въ интервалѣ $(0, \pi)$ меньше нѣкоторой постоянной величины, мы съ помощью (5) легко убѣждаемся въ абсолютной и равномѣрной сходимости ряда (2).

Составивъ теперь по формулѣ

$$\begin{aligned}
\Delta_\delta^4[f(z) . \varphi(z)] = f(z) . \Delta_\delta^4 \varphi(z) + 2 . [f(z+\delta) - f(z)] . [\Delta_\delta^2 \varphi(z+\delta) - \Delta_\delta^2 \varphi(z)] + \\
+ 2 . [f(z) - f(z-\delta)] . [\Delta_\delta^2 \varphi(z) - \Delta_\delta^2 \varphi(z-\delta)] + \Delta_\delta^2 f(z+\delta) . \Delta_\delta^2 \varphi(z+\delta) + \\
+ 4 \Delta_\delta^2 f(z) . \Delta_\delta^2 \varphi(z) + \Delta_\delta^2 f(z-\delta) . \Delta_\delta^2 \varphi(z-\delta) + \\
+ 2 . [\varphi(z) - \varphi(z-\delta)] . [\Delta_\delta^2 f(z) - \Delta_\delta^2 f(z-\delta)] + \\
+ 2[\varphi(z+\delta) - \varphi(z)] . [\Delta_\delta^2 f(z+\delta) - \Delta_\delta^2 f(z)] + \varphi(z) . \Delta_\delta^4 f(z)
\end{aligned}$$

выраженіе

$$\begin{aligned}
\frac{a_n}{\lambda_n^2} . \frac{\Delta_\delta^4 v_n(\zeta)}{\delta^4} = \frac{a_n}{\lambda_n^2} . \sqrt{\frac{2}{\pi}} . \frac{\Delta_\delta^4\left[\cos n\zeta . \left(1 + \frac{\alpha_n(\zeta)}{n^2}\right)\right]}{\delta^4} + \\
+ \frac{a_n}{\lambda_n^2} . \frac{\Delta_\delta^4\left[\sin n\zeta . \left(\frac{\beta(\zeta)}{n} + \frac{\gamma_n(\zeta)}{n^2}\right)\right]}{\delta^4}
\end{aligned}$$

---

[1]) См. *M. Riesz*, l. c. стр. 74.

[2]) *Hobson*. Proceedings of the London Mathem. Soc. Ser. 2. Vol. 6 p. 378.

гдѣ ζ обозначаетъ какую-нибудь опредѣленную точку интервала (z_0, z_1), мы легко получимъ:

$$\frac{a_n}{\lambda_n^2} \cdot \frac{\Delta_\delta^4 v_n(\zeta)}{\delta^4} = a_n \,.\, v_n(\zeta) \,.\, \left(\frac{\sin\frac{n\delta}{2}}{\frac{n\delta}{2}}\right)^4 + a_n \,.\, \Psi_n(\zeta, \delta) \tag{8}$$

гдѣ

$$\Psi_n(\zeta, \delta) = \left(\frac{n^4}{\lambda_n^2} - 1\right) . v_n(\zeta) . \left(\frac{\sin\frac{n\delta}{2}}{\frac{n\delta}{2}}\right)^4 - \frac{4n}{\lambda_n^2} . \left[n . \cos n\zeta . \frac{\beta(\zeta+\delta) - \beta(\zeta-\delta)}{2\delta} - \right.$$

$$\left. - \sqrt{\frac{2}{\pi}} . \sin n\zeta . \frac{\alpha_n(\zeta+\delta) - \alpha_n(\zeta-\delta)}{2\delta} + \cos n\zeta . \frac{\gamma_n(\zeta+\delta) - \gamma_n(\zeta-\delta)}{2\delta} \right] . \cos\frac{n\delta}{2} . \left(\frac{\sin\frac{n\delta}{2}}{\frac{n\delta}{2}}\right)^3 -$$

$$- \frac{2(1 + 2\cos n\delta)}{\lambda_n^2} \left[\sqrt{\frac{2}{\pi}} . \cos n\zeta \frac{\Delta_\delta^2 \alpha_n(\zeta)}{\delta^2} + \sin n\zeta . \left(n . \frac{\Delta_\delta^2 \beta(\zeta)}{\delta^2} + \frac{\Delta_\delta^2 \gamma_n(\zeta)}{\delta^2} \right) \right] . \left(\frac{\sin\frac{n\delta}{2}}{\frac{n\delta}{2}}\right)^2 -$$

$$- \frac{4}{n\lambda_n^2} . \left[\sqrt{\frac{2}{\pi}} . \sin n\zeta . \frac{\Delta_\delta^2 \alpha_n(\zeta+\delta) - \Delta_\delta^2 \alpha_n(\zeta-\delta)}{2\delta^3} - \right.$$

$$\left. - \cos n\zeta . \left(n . \frac{\Delta_\delta^2 \beta(\zeta+\delta) - \Delta_\delta^2 \beta(\zeta-\delta)}{2\delta^3} + \frac{\Delta_\delta^2 \gamma_n(\zeta+\delta) - \Delta_\delta^2 \gamma_n(\zeta-\delta)}{2\delta^3} \right) \right] . \left(\frac{\sin 2n\delta}{2n\delta}\right) +$$

$$+ \frac{\cos 2n\delta}{n^2 . \lambda_n^2} . \left[\sqrt{\frac{2}{\pi}} . \cos n\zeta . \frac{\Delta_\delta^4 \alpha_n(\zeta)}{\delta^4} + \sin n\zeta . \left(n . \frac{\Delta_\delta^4 \beta(\zeta)}{\delta^4} + \frac{\Delta_\delta^4 \gamma_n(\zeta)}{\delta^4} \right) \right].$$

Рядъ $\sum\limits_1^\infty a_n \,.\, \Psi_n(\zeta, \delta)$ сходится при всякомъ отличномъ отъ нуля δ т. к. въ этомъ случаѣ (см. (8)) сходятся ряды

$$\sum_1^\infty \frac{a_n}{\lambda_n^2} . \frac{\Delta_\delta^4 v_n(\zeta)}{\delta^4} \quad \text{и} \quad \sum_1^\infty a_n . v_n(\zeta) . \left(\frac{\sin\frac{n\delta}{2}}{\frac{n\delta}{2}}\right)^4$$

(послѣдній по леммѣ Fejér'a) [1]).

---

[1]) Fejér. l. c. § 2.

Обозначимъ теперь

$$\lim_{\delta=0} \Psi_n(\zeta, \delta) = \psi_n(\zeta) = \left(\frac{n^4}{\lambda_n^2} - 1\right) v_n(\zeta) - \frac{4n}{\lambda_n^2}\left[n.\cos n\zeta.\beta'(\zeta) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin n\zeta.\alpha_n'(\zeta) + \right.$$

$$\left. + \cos n\zeta.\gamma_n'(\zeta)\right] - \frac{6}{\lambda_n^2}\cdot\left[\sqrt{\frac{2}{\pi}}.\cos n\zeta \alpha_n''(\zeta) + \sin n\zeta.[n\beta''(\zeta) + \gamma_n''(\zeta)]\right] -$$

$$- \frac{4}{n\lambda_n^2}\cdot\left[\sqrt{\frac{2}{\pi}}.\sin n\zeta.\alpha_n'''(\zeta) - \cos n\zeta.[n\beta'''(\zeta) + \gamma_n'''(\zeta)]\right] +$$

$$+ \frac{1}{n^2.\lambda_n^2}\cdot\left[\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos n\zeta.\alpha_n^{(\mathrm{IV})}(\zeta) + \sin n\zeta.[n\beta^{(\mathrm{IV})}(\zeta) + \gamma_n^{(\mathrm{IV})}(\zeta)]\right]$$

и докажемъ сходимость ряда $\sum_1^\infty a_n.\psi_n(\zeta)$. Составимъ съ этой цѣлью выраженіе $\frac{1}{\lambda_n^2}\cdot\frac{d^4 v_n(z)}{dz^4}$, пользуясь асимптотической формулой (7):

$$\frac{1}{\lambda_n^2}\cdot\frac{d^4 v_n(z)}{dz^4} = v_n(z) + \psi_n(z).$$

Изъ дифференціальнаго уравненія мы имѣемъ:

$$\frac{d^2 v_n(z)}{dz^2} = -[Q(z) + \lambda_n].v_n(z)$$

слѣдовательно

$$\psi_n(z) = -\frac{1}{\lambda_n^2}\frac{d^2}{dz^2}\{[Q(z)+\lambda_n].v_n(z)\} - v_n(z) = \frac{2Q(z).v_n(z)}{\lambda_n} - \frac{2Q'(z).v_n'(z)}{\lambda_n{}^2} +$$

$$+ [(Q(z))^2 - Q''(z)].\frac{v_n(z)}{\lambda_n^2} \quad . \qquad (9)$$

Далѣе разсмотримъ рядъ $\sum_1^\infty \frac{a_n v_n'(z)}{\lambda_n^2}$; съ помощью асимптотической формулы [1])

$$v_n'(z) = \frac{dv_n(z)}{dz} = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nz.\left(n + \frac{\delta_n(z)}{n}\right) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos nz.\left(h - az + \frac{\varepsilon_n(z)}{n}\right)$$

мы, принимая во вниманіе (5), убѣждаемся въ абсолютной и равномѣрной сходимости ряда $\sum_1^\infty \frac{a_n.v_n'(z)}{\lambda_n^2}$ и такимъ образомъ:

$$\Phi'(z) = \frac{d}{dz}\left(\sum_1^\infty \frac{a_n v_n(z)}{\lambda_n^2}\right) = \sum_1^\infty \frac{a_n v_n'(z)}{\lambda_n^2}$$

---

[1]) *Hobson.* l. c. стр. 378.

Теперь изъ (9) ясно, что рядъ $\sum\limits_1^\infty a_n \psi_n(z)$ сходится и поэтому

$$\lim_{\delta=0} \sum_1^\infty a_n \Psi_n(\zeta,\ \delta) = \sum_1^\infty a_n . \psi_n(\zeta) = 2 . Q(\zeta) \sum_1^\infty \frac{a_n \ v_n(\zeta)}{\lambda_n} -$$

$$-2 Q'(\zeta) . \sum_1^\infty \frac{a_n \ v'_n(\zeta)}{\lambda_n{}^2} + [(Q(\zeta))^2 - Q''(\zeta)] . \sum_1^\infty \frac{a_n \cdot v_n(\zeta)}{\lambda_n{}^2} = \qquad (10($$

$$= -2 . Q(\zeta) . F(\zeta) - 2Q'(\zeta) . \Phi'(\zeta) + [(Q(\zeta))^2 - Q''(\zeta)] . \Phi(\zeta).$$

Составивъ по (8) выраженіе

$$\sum_1^\infty \frac{a_n}{\lambda_n^2} . \frac{\Delta_\delta^4 v_n(\zeta)}{\delta^4} = \sum_1^\infty a_n . v_n(\zeta) . \left(\frac{\sin \frac{n\delta}{2}}{\frac{n\delta}{2}} \right)^4 + \sum_1^\infty a_n \Psi_n(\zeta,\ \delta)$$

мы замѣчаемъ, что по леммѣ Fejèr'a ¹)

$$\lim_{\delta=0} \sum_1^\infty a_u . \ (\zeta) \left(\frac{\sin \frac{n\delta}{2}}{\frac{n\delta}{2}} \right)^4 = f(\zeta) \qquad (11)$$

слѣдовательно существуетъ и $\lim\limits_{\delta=0} \dfrac{\Delta_\delta^4 \Phi(\zeta)}{\delta^4}$, равный по (10) и (11):

$$\lim_{\delta=0} \frac{\Delta_\delta^4 \Phi(\zeta)}{\delta^4} = \lim_{\delta=0} \sum_1^\infty \frac{a_n}{\lambda_n^2} . \frac{\Delta_\delta^4 v_n(\zeta)}{\delta^4} = \lim_{\delta=0} \sum_1^\infty a_n . v_n(\zeta) \left(\frac{\sin \frac{n\delta}{2}}{\frac{n\delta}{2}} \right)^4 +$$

$$+ \lim_{\delta=0} \sum_1^\infty a_n . \Psi_n(\zeta, \delta) = f(\zeta) - 2.Q(\zeta).F(\zeta) - 2Q'(\zeta).\Phi'(\zeta) - [Q''(\zeta) - (Q(\zeta))^2].\Phi(\zeta).$$

и такъ какъ ζ любая точка интервала суммируемости (z_0, z_1), то очевидно

$$\lim_{\delta=0} \frac{\Delta_\delta^4 \Phi(z)}{\delta^4} = f(z) - 2Q(z).F(z) - 2Q'(z).\Phi'(z) - [Q''(z) - (Q(z))^2].\Phi(z) \quad {\scriptstyle z_0 \leq z \leq z_1} \qquad (12)$$

Выведемъ теперь изъ доказанной нами леммы формулу необходимую намъ въ дальнѣйшемъ: лемма предполагаетъ лишь суммируемость ряда (1) съ суммой $f(z)$, прибавимъ къ этому допущеніе равномѣрной

---

¹) *L. Fejèr*. l. c. § 2 стр. 62.

сходимости ряда (4) и предположеніе, что $f(z)$—функція ограниченная; въ такомъ случаѣ $\Phi(z)$ удовлетворяетъ условіямъ слѣдующей теоремы M. Riesz'a 1).

«*Если* $\Phi(z)$ *имѣетъ повсюду въ нѣкоторомъ интервалѣ обобщенную четвертую производную* $\varphi(z)$ *и непрерывную вторую производную* $\Phi''(z)$, *причемъ* $\varphi(z)$ *всегда остается въ конечныхъ границахъ, то*

$$\Phi''(z) = \int_0^z\int_0^\vartheta \varphi(t)\,.\,dt\,.\,d\vartheta + Az + B$$

причемъ A *и* B *въ этомъ интервалѣ постоянны*».

Въ нашемъ случаѣ $\Phi(z)$ въ интервалѣ (z_0, z_1) суммируемости ряда (1) отвѣчаетъ первому требованію теоремы; далѣе благодаря предположенію равномѣрной сходимости ряда (4) ея вторая производная непрерывна:

$$\Phi''(z) = \frac{d^2}{dz^2}\left(\sum_1^\infty \frac{a_n v_n(z)}{\lambda_n^2}\right) = \sum_1^\infty \frac{a_n}{\lambda_n^2}\,.\,\frac{d^2\, v_n(z)}{dz^2} = -\sum_1^\infty \frac{a_n v_n(z)}{\lambda_n} - Q(z)\,.\sum_1^\infty \frac{a_n v_n(z)}{\lambda_n^2}$$

т. е.

$$\Phi''(z) = F(z) - Q(z)\,.\,\Phi(z) \tag{13}$$

и наконецъ послѣднее требованіе теоремы M. Riesz'a удовлетворяется предположеніемъ, что $f(z)$—функція ограниченная, т. к. въ данномъ случаѣ:

$$\lim_{\delta=0} \frac{\Delta_\delta^4 \Phi(z)}{\delta^4} = \varphi(z) = f(z) - 2Q(z).F(z) - 2.Q'(z).\Phi'(z) - [Q''(z) - (Q(z))^2].\,\Phi(z)$$

что, пользуясь (13), мы перепишемъ такъ

$$\varphi(z) = f(z) - Q(z)\,.\,F(z) - \frac{d^2}{dz^2}\,[\Phi(z)\,.\,Q(z)]$$

Такимъ образомъ, примѣняя эту теорему, мы получаемъ:

$$\Phi''(z) = F(z) - Q(z)\,.\,\Phi(z) = \int_0^z\int_0^\vartheta \left\{ f(t) - Q(t)\,.\,F(t) - \frac{d^2}{dt^2}\,[\Phi(t)\,.\,Q(t)] \right\} dt\,.\,d\vartheta + az + b$$

т. е.

$$F(z) = \int_0^z\int_0^\vartheta [f(t) - Q(t)\,.\,F(t)]\; dt\,.\,d\vartheta + Az + B. \tag{14}$$

---

1) *M. Riesz.* l. c. стр. 67.

Подготовимъ еще обобщеніе 2-ой теоремы Riemann'a [1]) на Sturm-Liouville'вскіе ряды; оно формулируется такъ:

«*Если коэффиціенты ряда* $\sum\limits_{1}^{\infty} a_n \,.\, v_n(z)$ *стремятся съ возрастаніемъ индекса n къ нулю т. е.* $\lim\limits_{n=\infty} a_n = 0$, *то рядъ*

$$F(z) = -\frac{a_1 \,.\, v_1(z)}{\lambda_1} - \frac{a_2 \,.\, v_2(z)}{\lambda_2} - \ldots - \frac{a_n \cdot v_n(z)}{\lambda_n} - \ldots \tag{4}$$

сходится равномѣрно и

$$\lim_{\delta=0} \frac{\Delta_\delta^2 F(z)}{\delta} = \lim_{\delta=0} \frac{F(z+\delta) - 2F(z) + F(z-\delta)}{\delta} = 0».$$

Возьмемъ асимптотическую формулу (7) въ упрощенномъ видѣ

$$v_n(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \,.\, \cos nz + \frac{\beta(z) \,.\, \sin nz}{n} + \frac{\omega_n(z)}{n^2} \tag{15}$$

причемъ функціи $\omega_n(z)$ по абсолютной величинѣ при всякомъ значеніи n и для любого z меньше нѣкоторой постоянной величины.

Ряды

$$f_1(z) = -\sum_{1}^{n} \frac{a_n \,.\, \cos nz}{\lambda_n}, \quad f_2(z) = -\sum_{1}^{\infty} \frac{a_n \,.\, \sin nz}{n\lambda_n} \quad \text{и} \quad f_3(z) = -\sum_{1}^{\infty} \frac{a_n \,.\, \omega_n(z)}{n^2 \lambda_n}$$

сходятся благодаря $\lim\limits_{n=\infty} a_n = 0$ абсолютно и равномѣрно т. к. рядъ $\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n}$ какъ извѣстно сходится; слѣдовательно сходится равномѣрно и рядъ (4) и мы имѣемъ:

$$F(z) = f_1(z) \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} + \beta(z) \,.\, f_2(z) + f_3(z)$$

По 2-ой теоремѣ Riemann'a мы заключаемъ:

$$\lim_{\delta=0} \frac{\Delta_\delta^2 f_1(z)}{\delta} = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{\delta=0} \frac{\Delta_\delta^2 f_2(z)}{\delta} = 0 \tag{16}$$

---

[1]) *Riemann* Ueber die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe; Gesammelte Werke (1892) стр. 227.

Составимъ далѣе выраженіе

$$\frac{\Delta_\delta^2[\beta(z).f_2(z)]}{\delta}=\beta(z+\delta).\frac{\Delta_\delta^2 f_2(z)}{\delta}+f_2(z).\frac{\Delta_\delta^2\beta(z)}{\delta}+$$

$$+2\,[f_2(z)-f_2(z-\delta)].\frac{\beta(z+\delta)-\beta(z-\delta)}{2\delta}$$

т. к. $\beta(z)$ дважды непрерывно дифференцируемая функція, то

$$\lim_{\delta=0}\frac{\Delta_\delta^2\beta(z)}{\delta}=0$$

и благодаря непрерывности $f_2(z)$ ясно, что

$$\lim_{\delta=0}\frac{\Delta_\delta^2[\beta(z).f_2(z)]}{\delta}=0 \tag{17}$$

Вставивъ теперь въ дифференціальное уравненіе

$$\frac{d^2 v_n(z)}{dz^2}+[Q(z)+\lambda_n].v_n(z)=0$$

вмѣсто $v_n(z)$ асимптотическое выраженіе (15), мы получаемъ

$$\frac{1}{n^2}.\frac{d^2\omega_n(z)}{dz^2}=v_n(z).[n^2-\lambda_n-Q(z)]-\frac{\beta''(z).\sin nz}{n}-2\beta'(z).\cos nz-\omega_n(z)\,;$$

т. к. по формулѣ (6) $n^2-\lambda_n=-2\gamma-\frac{\gamma_n'}{n}$ (числа γ и γ_n' по абсолютной величинѣ меньше постояннаго числа), то изъ этого выраженія мы выводимъ слѣдствіе:

$$\left|\frac{1}{n^2}.\frac{d^2\omega_n(z)}{dz^2}\right|<\mu$$

гдѣ μ—постоянное число, а изъ этого по теоремѣ Hölder'а [1]) вытекаетъ, что и

$$\left|\frac{1}{n^2}.\frac{\Delta_\delta^2\omega_n(z)}{\delta^2}\right|<\mu \quad \text{т. е.} \quad \left|\frac{\Delta_\delta^2\omega_n(z)}{n^2\delta}\right|<\mu\delta. \tag{18}$$

Рядъ

$$\sum_1^\infty\frac{a_n.\Delta_\delta^2\omega_n(z)}{n^2.\lambda_n}$$

---

[1]) *Hölder.* Zur Theorie der trigonometrischen Reihen. Mathem. Ann. B. 24 стр. 183.

сходится абсолютно и равномѣрно и поэтому, примѣняя (18):

$$\left|\frac{\Delta_\delta^2 f_3(z)}{\delta}\right| \leqq \sum_1^\infty \frac{|a_n|}{\lambda_n} \cdot \left|\frac{\Delta_\delta^2 \omega_n(z)}{n^2 . \delta}\right| < \mu . \delta . \sum_1^\infty \frac{|a_n|}{\lambda_n}$$

Рядъ $\sum_1^\infty \frac{|a_n|}{\lambda_n}$ сходится, т. к. $\lim\limits_{n=\infty} a_n = 0$, и рядъ $\sum_1^\infty \frac{1}{\lambda_n}$ сходится, и поэтому

$$\lim_{\delta=0} \frac{\Delta_\delta^2 f_\varepsilon(z)}{\delta} = 0. \tag{19}$$

Складывая (16), (17) и (19), мы и получаемъ

$$\lim_{\delta=0} \frac{\Delta_\delta^2 F(z)}{\delta} = 0. \qquad \text{q. e. d.}$$

§ 2.

Обобщеніе теоремы Cantor'a.

$$a_1 v_1(z) + a_2 v_2(z) + \ldots + a_n v_n(z) + \ldots \tag{1}$$

$$F(z) = -\sum_1^\infty \frac{a_n v_n(z)}{\lambda_n} = -\frac{a_1 v_1(z)}{\lambda_1} - \frac{a_2 v_2(z)}{\lambda_2} - \ldots - \frac{a_n v_n(z)}{\lambda_n} - \ldots \tag{2}$$

Теорема I. «*Пусть рядъ (1) суммируемъ повсюду въ интервалѣ $(0, \pi)$ съ суммой равной нулю, если рядъ (2) сходится равномѣрно, то всѣ коэффиціенты ряда (1) равны нулю*».

Теорема II. «*При допущеніи нѣкотораго приводимаго множества точекъ въ интервалѣ $(0, \pi)$, въ которыхъ рядъ (1) или не былъ бы суммируемъ или оставаясь суммируемымъ, обладалъ бы суммой отличной отъ нуля теор. I остается справедливой, если притомъ* $\lim a_n = 0$».

Доказательство теор. I. Примѣнимъ формулу (14) § 1-го; въ нашемъ случаѣ $f(z) \equiv 0$ и потому

$$F(z) = -\int_0^z\!\!\int_0^\vartheta Q(t) . F(t) dt . d\vartheta + Az + B$$

гдѣ A и B постоянны во всемъ интервалѣ $(0, \pi)$. Такъ какъ $Q(t)$ непрерывна, то изъ этого мы заключаемъ, что $\frac{d^2 F(z)}{dz^2}$ непрерывна и $F(z)$ удовлетворяетъ дифференціальному уравненію:

$$\frac{d^2 F(z)}{dz^2} + Q(z) . F(z) = 0. \tag{3}$$

По предположенію рядъ (2) сходится равномѣрно и слѣдовательно

$$-\frac{a_n}{\lambda_n} = \int_0^\pi F(z).v_n(z).dz. \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ldots)$$

Изъ дифференціальнаго уравненія мы имѣемъ:

$$-\lambda_n.v_n(z) = \frac{d^2 v_n(z)}{dz} + Q(z).v_n(z)$$

и такимъ образомъ

$$a_n = \int_0^\pi F(z).\left[\frac{d^2 v_n(z)}{dz^2} + Q(z).v_n(z)\right].dz$$

Это выраженіе съ помощью (3) и пограничныхъ условій

$$v'_n(0) - h.v_n(0) = 0 \quad \text{и} \quad v'_n(\pi) + H.v_n(\pi) = 0 \quad (n=1,\ 2,\ 3\ldots.)$$

преобразуется въ

$$a_n = \int_0^\pi \left[F(z).\frac{d^2 v_n(z)}{dz^2} - v_n(z).\frac{d^2 F(z)}{dz^2}\right] dz = \left[F(z).\frac{dv_n(z)}{dz} - v_n(z)\frac{dF(z)}{dz}\right]_0^\pi$$

и далѣе

$$a_n = -C.v_n(\pi) + D.v_n(0) \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ldots)$$

причемъ

$$C = F'(\pi) + H.F(\pi) \text{ и } D = F'(0) + h.F(0).$$

Асимптотическая формула (7) § 1 даетъ намъ:

$$v_n(0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}.\left(1 + \frac{\alpha_n(0)}{n^2}\right) \quad \text{и} \quad v_n(\pi) = (-1)^n.\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(1 + \frac{\alpha_n(\pi)}{n^2}\right) \quad (4)$$

и значитъ

$$a_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[(D - (-1)^n.C) + \frac{1}{n^2}.(D.\alpha_n(0) - (-1)^n.C.\alpha_n(\pi))\right] \quad (n=1,\ 2,\ 3\ldots) \quad (5)$$

По (4) и (5) мы имѣемъ:

$$\sum_1^\infty a_n \cdot v_n(0) = \frac{2}{\pi}.\sum_1^\infty [D - (-1)^n.C] + \frac{2}{\pi}\sum_1^\infty \frac{\varepsilon_n}{n^2}$$

причемъ числа ε_n по абсолютной величинѣ меньше нѣкотораго положительнаго числа. Рядъ $\sum\limits_1^\infty \frac{\varepsilon_n}{n^2}$ сходится и значитъ суммируемъ, поэтому изъ суммируемости ряда (1) въ точкѣ $z=0$ вытекаетъ, что рядъ

$$\sum_1^\infty [D - (-1)^n.C]$$

долженъ также быть суммируемымъ и слѣдовательно [1]) для него $\lim\limits_{n=\infty}\frac{s_n}{n} = 0$. Вычисляя мы получаемъ $\lim\limits_{n=\infty}\frac{s_n}{n} = D$ и значитъ необходимо $D = 0$ иначе рядъ (1) не былъ-бы суммируемъ въ точкѣ $z = 0$. Если $D = 0$, то (5) даетъ намъ:

$$a_n = (-1)^{n+1}C.\sqrt{\frac{2}{\pi}}.\left(1+\frac{\alpha_n(\pi)}{n^2}\right) \qquad (n=1, 2, 3,\ldots) \qquad (6)$$

и изъ (4) и (6) мы имѣемъ:

$$\sum_1^\infty a_n\cdot v_n(\pi) = -\frac{2}{\pi}\cdot C\sum_1^\infty\left(1+\frac{\alpha_n(\pi)}{n^2}\right)^2$$ и, т. к. рядъ $\sum\limits_1^\infty\left(1+\frac{\alpha_n(\pi)}{n^2}\right)^2$

существенно расходящійся, ясно, что для суммируемости ряда (1) въ точкѣ $z=\pi$ необходимо должно быть $C=0$ и такимъ образомъ доказано, что

$$a_n = 0 \qquad (n=1, 2. 3,\ldots,) \qquad \text{q. e. d.}$$

Доказательство теор. II. Во всякомъ частномъ интервалѣ, не содержащемъ исключительныхъ точекъ, въ которыхъ рядъ (1) не былъ-бы суммируемъ съ суммой равной нулю, мы можемъ примѣнить нашу лемму и имѣемъ для такого интервала

$$F(z) = -\int_0^z\int_0^\vartheta Q(t).F(t).dt\;d\vartheta + A'z + B'$$

но въ другомъ такомъ интервалѣ, сосѣднемъ съ первымъ, мы имѣемъ

$$F(z) = -\int_0^z\int_0^\vartheta Q(t).F(t).dt.d\vartheta + A''z + B''$$

т. е. постоянныя уже другія; но $\lim\limits_{n=\infty} a_n = 0$ и потому

$$\lim_{\delta=0}\frac{\Delta_\delta^2 F(z)}{\delta} = 0$$

а изъ этого и изъ непрерывности функціи $F(z)$ (въ случаѣ $\lim a_n = 0$ рядъ (2) сходится равномѣрно) слѣдуетъ, что $A' = A''$ и $B' = B''$. Разсуждая такимъ образомъ, мы убѣждаемся, что числа A и B въ формулѣ

$$F(z) = -\int_0^z\int_0^\vartheta Q(t).F(t).dt.d\vartheta + Az + B$$

---

[1]) *L. Fejèr*. l. c. стр. 63.

постоянны для всего интервала $(0, \pi)$. Теперь уже примѣнимо то разсужденіе, путемъ котораго при доказательствѣ теор. I мы получили формулу (5). Итакъ возьмемъ формулу (5); но теперь $\lim\limits_{n=\infty} a_n = 0$ и кромѣ того ясно, что

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n^2}[D.\alpha_n(0) - (-1)^n.C.\alpha_n(\pi)] = 0$$

и такимъ образомъ изъ формулы (5) получаемъ

$$\lim_{n=\infty}[D - (-1)^n.C] = 0 \quad \text{т. е.} \quad D = C = 0$$

и поэтому

$$a_n = 0 \quad {\scriptstyle (n=1,\, 2,\, 3\ldots,)} \qquad \text{q. e. d.}$$

§ 3.

Обобщеніе теоремы Du-Bois-Reymond'a.

$$a_1.v_1(z) + a_2.v_2(z) + \ldots + a_n.v_n(z) + \ldots \tag{1}$$

$$F(z) = -\sum_1^\infty \frac{a_n.v_n(z)}{\lambda_n} = -\frac{a_1.v_1(z)}{\lambda_1} - \frac{a_2.v_2(z)}{\lambda_2} - \ldots - \frac{a_n.v_n(z)}{\lambda_n} - \ldots \tag{2}$$

Теорема III. «*Пусть рядъ (1) суммируемъ повсюду* въ интервалѣ (0, π) съ суммой f(z), а рядъ (2) сходится равномѣрно. Если f(z)— ограниченная функція, то рядъ (1) будетъ ея рядомъ Fourier т. е.*

$$a_n = \int_0^\pi f(z).v_n(z).dz» \quad {\scriptstyle (n=1,\, 2,\, 3,\ldots)}$$

Теорема IV. «*Если* $\lim\limits_{n=\infty} a_n = 0$, *то теор. III остается справедливой и при допущеніи нѣкотораго приводимаго множества точекъ, въ которыхъ или рядъ (1) не былъ-бы суммируемъ, или его сумма не лежала бы въ конечныхъ границахъ*».

Доказательство теор. III. Изъ равномѣрной сходимости ряда (2) слѣдуетъ:

$$-\frac{a_n}{\lambda_n} = \int_0^\pi F(z).v_n(z)\, dz \qquad {\scriptstyle (n=1,\, 2,\, 3,\ldots,)}$$

т. е,, принимая во вниманіе дифференціальное уравненіе для $v_n(z)$,

$$a_n = \int_0^\pi F(z).Q(z).v_n(z).dz + \int_0^\pi F(z).\frac{d^2v_n(z)}{dz^2}.dz. \tag{3}$$

Примѣнимъ формулу (14) § 1

$$F(z)=\int_0^z\int_0^\vartheta[f(t)-Q(t).F(t)].dt.d\vartheta+Az+B \qquad (0\leq z\leq\pi)$$

и такимъ образомъ:

$$\int_0^\pi F(z)\frac{d^2 v_n(z)}{dz^2}dz=\int_0^\pi\int_0^z\int_0^\vartheta[f(t)-Q(t).F(t)].\frac{d^2 v_n(z)}{dz^2}.dt.d\vartheta.dz+$$

$$+\int_0^\pi(Az+B)\frac{d^2 v_n(z)}{dz^2}.dz\,;$$

т. к. всѣ подъинтегральныя функціи ограничены, то въ тройномъ интегралѣ можно [1]) измѣнить порядокъ интегрированія, и интегрируя сперва по z потомъ по ϑ, мы получаемъ:

$$\int_0^\pi\int_0^z\int_0^\vartheta[f(t)-Q(t).F(t)].\frac{d^2 v_n(z)}{dz^2}.dt.d\vartheta.dz=$$

$$=\int_0^\pi[f(t)-Q(t).F(t)]\,dt.\int_t^\pi d\vartheta\int_\vartheta^\pi\frac{d^2 v_n(z)}{dz^2}.dz=v_n'(\pi).\int_0^\pi\int_0^\vartheta[f(t)-Q(t).F(t)].dtd\vartheta-$$

$$-\int_0^\pi[f(t)-Q(t).F(t)]dt\int_t^\pi\frac{dv_n(\vartheta)}{d\vartheta}\,d\vartheta=\int_0^\pi f(t).v_n(t).dt-\int_0^\pi F(t).Q(t).v_n(t).dt+$$

$$+\,a.v_n'(\pi)-bv_n(\pi)$$

мы обозначили

$$a=\int_0^\pi\int_0^\vartheta[f(l)-Q(t).F(t)].dt.d\vartheta\,,\quad b=\int_0^\pi[f(t)-Q(t).f(t)]\,dt.$$

Кромѣ того

$$\int_0^\pi(Az+B)\,\frac{d^2 v_n(z)}{dz^2}\,dz=(A\pi+B).v_n'(\pi)-B.v_n'(0)-Av_n(\pi)+Av_n(0)\,;$$

благодаря

$$v_n'(0)-h.v_n(0)=0 \quad \text{и} \quad v_n'(\pi)+Hv_n(\pi)=0$$

формула (3) принимаетъ видъ:

$$a_n=\int_0^\pi f(z).v_n(z).dz+C.v_n(\pi)+D.v_n(0)$$

---

[1]) *Lebesgue.* Intégrale, Aire, Longueur. (Ann. di mat. 1902).

постоянныя C и D легко выражаются черезъ a, b, h, H, A и B. Примѣняя формулы (4) § 2 мы окончательно имѣемъ:

$$a_n = \int_0^\pi f(z).v_n(z).dz + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \left[(D + (-1)^n . C) + \frac{1}{n^2} (D.\alpha_n(0) + (-1)^n . C.\alpha_n(\pi) \right] \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{4}$$

Разсмотримъ теперь суммируемый рядъ $\sum\limits_1^\infty a_n . v_n(0)$ и представимъ его съ помощью полученнаго для a_n выраженія и формулъ (4) § 2 въ видѣ:

$$\sum_1^\infty a_n v_n . (0) = \frac{2}{\pi} \sum_1^\infty \left[\sqrt{\frac{\pi}{2}} . \int_0^\pi f(z).v_n(z).dz + D + (-1)^n . C \right] + \sum_1^\infty \frac{\omega_n}{n^2}$$

причемъ числа ω_n по абсолютной величинѣ при всякомъ n меньше постояннаго числа. Рядъ $\sum\limits_1^\infty \frac{\omega_n}{n^2}$, какъ сходящійся, суммируемъ; слѣдовательно изъ суммируемости ряда $\sum\limits_1^\infty a_n v_n(0)$ вытекаетъ суммируемость ряда

$$\sum_1^\infty \left[\sqrt{\frac{\pi}{2}} . \int_0^\pi f(z) . v_n(z) \, dz + D + (-1)^n . C \right]$$

и поэтому для него необходимо должно быть $\lim\limits_{n=\infty} \frac{s_n}{n} = 0$. Вычислимъ же $\lim\limits_{n=\infty} \frac{s_n}{n}$; т. к.

$$\lim_{n=\infty} \int_0^\pi f(z).v_n(z) \, dz = 0 \quad {}^{1}),$$

то, обозначивъ

$$\varepsilon_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}} . \int_0^\pi f(z).v_n(z).dz$$

мы можемъ для сколь угодно малаго ε подобрать такое N, чтобы при $n > N$ имѣло мѣсто неравенство $|\varepsilon_n| < \frac{\varepsilon}{2}$; и такъ

$$s_n = s_N + \varepsilon_{N+1} + \varepsilon_{N+2} + \ldots + \varepsilon_n + (n - N) . D + \frac{(-1)^n - (-1)^N}{2} C \qquad (n > N)$$

значитъ

$$\left| \frac{s_n}{n} - D \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{|s_N| + N . |D| + |C|}{n}$$

---

1) *A. Haar.* l. c. стр. 52.

и ясно, что при достаточно большомъ n

$$\left|\frac{s_n}{n} - D\right| < \varepsilon \quad \text{итакъ} \quad \lim_{n=\infty} \frac{s_n}{n} = D$$

Такимъ образомъ выяснилось, что для суммируемости ряда (1) въ точкѣ $z = 0$ необходимо должно быть $D = 0$. Чтобы доказать, что для суммируемости ряда (1) въ точкѣ $z = \pi$ необходимо должно быть $C = 0$, достаточно примѣнить аналогичное разсужденіе къ ряду

$$\sum_1^\infty a_n v_n(\pi) = \frac{2}{\pi} \sum_1^\infty \left[(-1)^n . \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^\pi f(z) . v_n(z) . dz + (-1)^n . D + C \right] + \sum_1^\infty \frac{\omega'_n}{n^2},$$

замѣтивъ, что теперь C и D помѣнялись ролями. Такимъ образомъ, доказавъ, что $C = D = 0$, мы изъ (4) получаемъ

$$a_n = \int_0^\pi f(z) . v_n(z) . dz \qquad (n = 1. 2, 3, \ldots) \qquad \text{q. e. d.}$$

Доказательство теор. IV. Точно также какъ въ доказательствѣ теоремы II-ой мы убѣждаемся въ томъ, что благодаря $\lim\limits_{n=\infty} a_n = 0$ въ

$$F(z) = \int_0^z \int_0^\vartheta [f(t) - Q(t) . F(t)] . dt . d\vartheta + Az + B$$

A и B постоянны во всемъ интервалѣ $(0, \pi)$ несмотря на допущеніе приводимаго множества исключительныхъ точекъ.

Рядъ (2) сходится равномѣрно, т. к. $\lim\limits_{n=\infty} a_n = 0$ и, примѣняя то-же разсужденіе какъ въ доказательствѣ теор. III, мы приходимъ къ выраженію (4) для a_n:

$$a_n = \int_0^\pi f(z) . v_n(z) . dz + \sqrt{\frac{2}{\pi}} . \left[(D + (-1)^n . C) + \frac{1}{n^2} (D . \alpha_n(0) + (-1)^n . C . \alpha_n(\pi)) \right]$$

въ этомъ выраженіи

$$\lim_{n=\infty} a_n = \lim_{n=\infty} \int_0^\pi f(z) . v_n(z) . dz = \lim_{n=\infty} \frac{1}{n^2} [D . \alpha_n(0) + (-1)^n . C . \alpha_n(\pi)] = 0$$

слѣдовательно и

$$\lim_{n=\infty} [D + (-1)^n . C] = 0 \qquad \text{т. е.} \quad D = C = 0$$

и такимъ образомъ:

$$a_n = \int_0^\pi f(z) . v_n(z) . dz \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \qquad \text{q. e. d.}$$

Всѣ вышедоказанныя теоремы теперь легко перенести на наиболѣе общую Sturm-Liouville'вскую систему функцій (I).

Итакъ пусть рядъ

$$a_1 . u_1(x) + a_2 . u_2(x) + \ldots + a_n . u_n(x) + \ldots \qquad (5)$$

суммируемъ съ суммой равной нулю повсюду въ интервалѣ (α, β), причемъ рядъ

$$F(x) = -\frac{a_1 u_1(x)}{\lambda_1} - \frac{a_2 u_2(x)}{\lambda_2} - \ldots - \frac{a_n u_n(x)}{\lambda_n} - \ldots \qquad (6)$$

сходится равномѣрно. Умноживъ каждый членъ этихъ рядовъ на $[p(x)]^{\frac{1}{4}}$ и совершивъ подстановку

$$z = \int\limits_{\alpha}^{x} [p(x)]^{-\frac{1}{2}} dx \quad v_n(z) = u_n(x) . [p(x)]^{\frac{1}{4}} \qquad (7)$$

мы получаемъ ряды

$$a_1 . v_1(z) + a_2 v_2(z) + \ldots + a_n v_n(z) + \ldots \qquad (8)$$

$$F_1(z) = -\frac{a_1 v_1(z)}{\lambda_1} - \frac{a_2 v_2(z)}{\lambda_2} - \ldots - \frac{a_n v_n(z)}{\lambda_n} - \ldots \qquad (9)$$

отличающіеся отъ рядовъ (5) и (6) лишь множителемъ $[p(x)]^{\frac{1}{4}}$, слѣдовательно рядъ (8) повсюду въ интервалѣ $(0, \pi)$ суммируемъ съ суммой равной нулю, и рядъ (9) сходится равномѣрно; по теоремѣ I-ой изъ этого слѣдуетъ

$$a_n = 0 \qquad \text{q. e. d.}$$

Пусть далѣе рядъ (5) суммируемъ съ суммой равной нулю во всемъ интервалѣ (α, β) за исключеніемъ нѣкотораго приводимаго множества точекъ и $\lim\limits_{n=\infty} a_n = 0$; теперь къ ряду (8) примѣнима теор. II и опять

$$a_n = 0 \qquad \text{q. e. d.}$$

Пусть рядъ (5) суммируемъ повсюду въ итервалѣ (α, β) съ суммой $f(x)$ причемъ $f(x)$ — ограниченная функція, а рядъ (6) сходится равномѣрно; опять таки мы строимъ ряды (8) и (9), изъ которыхъ первый суммируемъ повсюду въ интервалѣ $(0, \pi)$ съ суммой $f_1(z) = f(x) . [p(x)]^{1/4}$ и второй $F_1(z)$ сходится равномѣрно.

Функція $f_1(z)$ ограниченная и потому по теор. III:

$$a_n = \int\limits_0^{\pi} f_1(z) . v_n(z) . dz \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

т. к. $f_1(z)=f(x).[p(x)]^{1/4}$, то съ помощью (7) мы получаемъ

$$a_n=\int_\alpha^\beta f(x).u_n(x).dx \quad {\scriptstyle (n=1,\ 2,\ 3,\ldots)} \text{ q. e. d.}$$

Если-же $\lim\limits_{n=\infty} a_n=0$ и рядъ (5) имѣетъ въ интервалѣ суммируемости (α, β) нѣкоторое приводимое множество исключительныхъ точекъ, то къ ряду (8) примѣнима теор. IV и опять

$$a_n=\int_0^\pi f_1(z).v_n(z)dz=\int_\alpha^\beta f(x).u_n(x).dx \quad {\scriptstyle (n=1,\ 2,\ 3,\ldots)} \text{ q. e. d.}$$

Къ этимъ теоремамъ добавимъ слѣдующее: если рядъ (5) суммируемъ методомъ среднихъ ариѳметическихъ k аго порядка[1], то изъ этого вытекаетъ[2], вопервыхъ его суммируемость методомъ среднихъ ариѳметическихъ любого большаго чѣмъ k порядка и вовторыхъ $\lim\limits_{n=\infty}\dfrac{a_n.u_n(x)}{n^k}=0$ т. е. слѣдовательно $\lim\limits_{n=\infty}\dfrac{a_n}{n^k}=0$. Изъ этого ясно, что при $0\leq k<1$ рядъ (5) суммируемъ и однократно, и рядъ (6) сходится равномѣрно, значитъ теоремы I и III примѣнимы и мы получаемъ полное обобщенiе теоремы Cantor'а и Du-Bois-Reymond'а безъ всякихъ добавочныхъ условiй:

«Если рядъ (5) всюду въ интервалѣ (α, β) суммируемъ методомъ среднихъ ариѳметическихъ k-аго порядка, $0\leq k<1$, то при суммѣ равной нулю всѣ его коэффицiенты равны нулю, а при суммѣ, равной ограниченной функцiи $f(x)$, рядъ (5) есть ея рядъ Фурье т. е.

$$a_n=\int_\alpha^\beta f(x).u_n(x)\,dx».$$

Какъ и для тригонометрическихъ рядовъ[3] при $k=1$, т. е. въ случаѣ однократной суммируемости ряда (5), остается открытымъ вопросъ о необходимости равномѣрной сходимости ряда (6), являющейся достаточнымъ условiемъ теоремъ I и III.

Москва

---

[1] k—любое положительное число. См. опредѣленiе метода у Cesàro. Sur la multiplication des séries. Bull. de la Soc. Math. 14 (1890).

[2] *Knopp.* Grenzwerthe von Reihen bei der Annäherung an die Konvergenzgrenze. Inauguraldissertation. Berlin 1907.

[3] *M. Riesz.* l. c. стр. 73. III.

Къ опредѣленію алгебраической области при помощи сравненій (съ приложеніемъ къ Абелевымъ уравненіямъ).

Проф. стипенд. Универ. Св. Владиміра ***Бориса Делоне.***

Въ 1880 году въ Извѣстіяхъ Берлинской Академіи появилась замѣтка Кронекера «Ueber die Irreducibilität von Gleichungen», въ которой Кронекеръ ставитъ вопросъ относительно плотностей простыхъ чиселъ, для которыхъ заданное сравненіе имѣетъ данное число раціональныхъ корней; онъ замѣтилъ, что если двѣ цѣлыя функціи имѣютъ одинаковое число рѣшеній, по всѣмъ простымъ числамъ, какъ по модулямъ, то онѣ, какъ уравненія, относятся къ одной и той же области Галуа. И Кронекеръ дѣлаетъ слѣдующее весьма важное замѣчаніе: ...«und es ist also (in ähnlicher Weise wie nach dem Cauchy'schen Satze eine Function durch ihre Randwerte bestimmt wird) mit blossen Congruenzbestimmungen der ganze Inbegriff der durch die Gleichung definierten algebraischen Irrationalitäten bestimmt.».

Вслѣдъ за тѣмъ, по указаніямъ Кронекера, Frobenius (Sitzb. der Berl. Akad. (1896) S. 688) вполнѣ разобралъ вопросъ о плотностяхъ и пришелъ къ слѣдующему результату: каждой циклической подгруппѣ группы области Галуа принадлежитъ въ этой области безконечно много простыхъ идеаловъ. Эту теорему можно доказать разсматривая выраженіе $\lim\limits_{s=1}[(s-1).\zeta_{\Omega}(s)]=h.\varkappa$ въ Дедекиндовской теоріи идеаловъ областей Галуа. Воспользовавшись этимъ результатомъ Frobenius'a, можно доказать слѣдующую лемму, которая открываетъ путь къ приложеніямъ приведенной замѣчательной мысли Кронекера.

Лемма. Норма области Ω_β тогда и только тогда заключается въ нормѣ области Ω_α, когда для всѣхъ тѣхъ простыхъ чиселъ q, для которыхъ имѣетъ мѣсто сравненіе $\alpha^q\equiv\alpha$ (мод. q), имѣетъ также мѣсто и сравненіе $\beta^q\equiv\beta$ (мод. q). Подъ нормой области мы понимаемъ область составленную присоединеніемъ къ заданной всѣхъ ея сопряженныхъ; норма области всегда область Галуа.

Цѣль настоящей замѣтки, отложивъ изложенiе намѣченныхъ теорiй до болѣе удобнаго случая и воспользовавшись указанной общей леммой, дать приложенiе приведенной выше замѣчательной мысли Кронекера объ опредѣленiи области при помощи сравненiй; а именно мы выведемъ знаменитую теорему Кронекера объ Абелевыхъ уравненiяхъ, состоящую въ томъ, что всякiй корень Абелева уравненiя (т. е. уравненiя съ коммутативной группой) выражается рацiонально черезъ нѣкоторый корень изъ единицы, воспользовавшись закономъ взаимности Ейзенштейна. Въ настоящей замѣткѣ мы выведемъ эту теорему лишь для того случая, когда степень n Абелева уравненiя простое число.

Абель далъ [Oeuvres p. 489, (34)] слѣдующее выраженiе корня циклическаго уравненiя n-той степени

$$x=\frac{1}{n}\left[A+\sqrt[n]{\omega_1}+\sqrt[n]{\omega_2}+\sqrt[n]{\omega_3}+\ldots+\sqrt[n]{\omega_{n-1}}\right]$$

причемъ тутъ ω цѣлыя числа области Ω_ζ, гдѣ $\zeta=e^{\frac{2\pi i}{u}}$.

Эти числа ω удовлетворяютъ уравненiямъ

$$\omega_{/_1}^{\nu}\lambda_1^{\,n}=\omega_{/\nu}\lambda_2^{\,n}\qquad(\nu=1.\ 2,\ 3,\ldots\ n-1)\qquad(1)$$

(дальше, какъ и здѣсь, значкомъ $/_i$ мы будемъ обозначать, что въ числѣ изъ области Ω_ζ, ζ замѣнено ζ^i) причемъ λ_1 и λ_2 тоже цѣлыя числа изъ Ω_ζ. Теорема Кронекера будетъ доказана, если удастся показать, что $\sqrt[n]{\omega/_1}$ выражается рацiонально черезъ нѣкоторый корень изъ единицы $e^{\frac{2\pi i}{m}}$. Но $\left(e^{\frac{2\pi i}{m}}\right)^q\equiv\left(e^{\frac{2\pi i}{m}}\right)$ (мод. q), для тѣхъ и только тѣхъ простыхъ чиселъ, которыя заключаются въ прогрессiи $mx+1$ и слѣдовательно, по леммѣ, достаточно показать что для всѣхъ q такой прогрессiи $(\sqrt[n]{\omega})^q\equiv\sqrt[n]{\omega}$ (мод, q), или, что то же самое, что $\omega^{\frac{q-1}{n}}\equiv1$ (мод. q).

Простой идеалъ $1-\zeta$ области Ω_ζ, какъ легко видѣть изъ (1), если напримѣръ положить $v=2$, входитъ въ ω съ показателемъ, дѣлящимся на n. Положимъ поэтому $\omega=\overline{\omega}\,(1-\zeta)^{n.\nu}$, гдѣ $\overline{\omega}$ уже не дѣлится на $1-\zeta$; $\overline{\omega}$ опять удовлетворяетъ уравненiю вида

$$\omega_{/_1}^{\nu}\mu_1^{\,n}=\omega_{/\nu}\mu_2^{\,n}\qquad(\nu=1,\ 2.\ 3,\ldots n-1)\qquad(1')$$

Пусть

$$\bar{\omega}_{/_1}^{\frac{q-1}{n}} \equiv \zeta^{b_1} \text{ (мод. } \varrho_{/_1}) \tag{2}$$

$$\bar{\omega}_{/_1}^{\frac{q-1}{n}} \equiv \zeta^{b_\nu} \text{ (мод. } \varrho_{/\nu}) \tag{3}$$

гдѣ ϱ простой идеалъ дѣлитель q (перваго порядка, т. к. q вида $nx+1$); изъ (3) получимъ

$$\bar{\omega}_{/\theta}^{\frac{q-1}{n}} \equiv \zeta^{b_\nu \theta} \text{ (мод. } \varrho_{/_1}) \tag{4}$$

гдѣ θ наименьшій положительный корень сравненія $\nu.\theta \equiv 1$ (мод. n) но изъ (1´); $\bar{\omega}^{\theta}_{/_1}\mu^n_1 = \bar{\omega}_{/\theta}\mu^n_2$, или, если возвысить въ $\frac{q-1}{n}$ степень и принять во вниманіе теорему Ферма, получимъ $\bar{\omega}^{\theta} \cdot {}^{\frac{q-1}{n}} \equiv \bar{\omega}_{\theta}^{\frac{q-1}{n}}$ (мод. ϱ_1), такимъ образомъ (4) замѣняемъ

$$\bar{\omega}_{/_1}^{\theta \cdot \frac{q-1}{n}} \equiv \zeta^{b_\nu \theta} \qquad \text{(мод. } \varrho_{/_1}) \tag{5}$$

а изъ (2) возвышая въ θ степень получаемъ

$$\bar{\omega}_{/_1}^{\theta \cdot \frac{q-1}{n}} \equiv \zeta^{b_1 . \theta} \qquad \text{(мод. } \varrho_{/_1}) \tag{6}$$

сравнивая (5) и (6) мы видимъ что $b_1 = b_\nu$; такимъ образомъ мы видимъ что символъ $\left\{\frac{\omega}{\varrho_\nu}\right\}$ имѣетъ одно и то же значеніе для всѣхъ простыхъ идеаловъ ϱ_ν дѣлителей одного и того же простого числа q.

Всякое [1]) число области Ω_ζ можно превратить въ т. н. семипримарное умноженіемъ на соотвѣтственно подобранную степень ζ. Пусть $\bar{\bar{\omega}} = \bar{\omega} . \zeta^k$ семипримарное число. Пусть q вида $n^2 . x+1$ тогда $\left\{\frac{\bar{\bar{\omega}}}{\varrho_{/\nu}}\right\} = \left\{\frac{\bar{\omega}}{\varrho_{/\nu}}\right\}$

Если $\left\{\frac{\bar{\bar{\omega}}}{q}\right\} = \left\{\frac{\bar{\bar{\omega}}}{\varrho_{/_1}}\right\}\left\{\frac{\bar{\bar{\omega}}}{\varrho_{/_2}}\right\} \dots \left\{\frac{\bar{\bar{\omega}}}{{}_{/n-1}}\right\} = \left\{\frac{\bar{\bar{\omega}}}{\varrho_{/_1}}\right\}^{n-1} = +1$, то $\left\{\frac{\bar{\bar{\omega}}}{\varrho_{/_1}}\right\} = +1$.

---

[1]) Всякое число взаимно простое съ $1-\zeta$; см. Hilbert, Bericht über die Theorie der algebraischen Zahlkörper S. 369.

Но по закону взаимности Эйзенштейна между семипримарнымъ числомъ области Ω_ζ и раціональнымъ простымъ числомъ имѣетъ мѣсто соотношеніе $\left\{\frac{\overline{\overline{\omega}}}{q}\right\}=\left\{\frac{q}{\overline{\overline{\omega}}}\right\}$; для всѣхъ же q вида $N(\overline{\omega}).x+1$, $\left\{\frac{q}{\overline{\overline{\omega}}}\right\}=+1$, и слѣдовательно $\left\{\frac{\overline{\overline{\omega}}}{q}\right\}=+1$, и слѣд. по доказанному и $\left\{\frac{\overline{\overline{\omega}}}{q}\right\}=+1.$, или иначе $\overline{\overline{\omega}}^{\frac{q-1}{n}}\equiv 1$ (мод. ρ_ν) $(v=1,\ 2,\ 3,\ldots n-1)$ т. е. $\overline{\overline{\omega}}^{\frac{q-1}{n}}\equiv 1$ (мод. q) для всѣхъ простыхъ чиселъ q прогрессіи $N(\overline{\overline{\omega}})\,n^2.x+1$; и такимъ образомъ $\sqrt[n]{\overline{\overline{\omega}}}$ выражается раціонально черезъ корень изъ единицы, а слѣдовательно и $\sqrt[n]{\overline{\omega}}$, а слѣдовательно и $\sqrt[n]{\omega}$ тоже. Ч. и т. д.

Н. Я. СОНИНЪ.

(10-го февраля 1849 г.—14-го февраля 1915 г.).

(НЕКРОЛОГЪ) [1].

14-го февраля 1915 г. скончался ординарный академикъ Императорской Академіи Наукъ и предсѣдатель Ученаго Комитета министерства народнаго просвѣщенія, Николай Яковлевичъ Сонинъ. Его кончина — тяжелая утрата для науки, для учрежденій, въ которыхъ онъ работалъ, и для всѣхъ сотрудниковъ этого неутомимо-дѣятельнаго, многосторонне образованнаго и талантливаго человѣка.

Нижеслѣдующія краткія біографическія о немъ свѣдѣнія составлены имъ самимъ для сборника, издаваемаго Академіею Наукъ, по случаю 25-лѣтія со дня назначенія Его Императорскаго Высочества Великаго Князя Константина Константиновича ея президентомъ.

Николай Яковлевичъ *Сонинъ* потомокъ стариннаго дворянскаго рода Тульской губерніи; родился 10-го февраля 1849 года въ г. Тулѣ. Въ раннемъ дѣтствѣ былъ перевезенъ въ Москву, гдѣ его отецъ сначала состоялъ на государственной службѣ, а затѣмъ занимался адвокатурой въ судахъ стараго устройства. Въ 1860 г. Сонинъ поступилъ въ III классъ четвертой Московской гимназіи, гдѣ преподавали математику извѣстные педагоги *А. Ѳ. Малининъ* и *В. П. Буренинъ.* Товарищемъ по классу и соперникомъ по успѣхамъ Сонинъ имѣлъ извѣстнаго впослѣдствіи поэта графа *А. А. Голенищева-Кутузова.* Окончивъ курсъ гимназіи съ золотою медалью въ 1865 г., Сонинъ тогда же поступилъ на физико-математическій факультетъ Московскаго университета, гдѣ слушалъ лекціи у профессоровъ *М. Ѳ. Хандрикова* (нынѣ въ Кіевѣ) и нынѣ покойныхъ *А. Ю. Давидова, В. Я. Цингера, Н. В. Бугаева, Ѳ. А. Слудскаго, Ѳ. А. Бредихина, Б. Я. Швейцера, А. Г. Столѣтова* и *Н. А. Любимова.* 12-го января 1869 г. Сонинъ получилъ золотую медаль за сочиненіе на тему: «Теорія функцій мнимаго перемѣннаго», въ маѣ получилъ степень кандидата и въ октябрѣ того же года былъ оставленъ на два года при университетѣ для приготовленія къ магистерскому

---

[1] Перепечатано изъ «Журнала Министерства Народнаго Просвѣщенія».

экзамену. Всѣ экзамены на степень магистра математики онъ сдалъ весною 1871 г. и въ декабрѣ того же года защитилъ магистерскую диссертацію, а въ сентябрѣ 1874 г. защитилъ диссертацію на степень доктора математики. Въ 1871 г. Сонинъ былъ приглашенъ преподавать математику на существовавшіе съ 1869 г. при Московской III мужской гимназіи женскіе курсы, гдѣ и преподавалъ въ теченіе года элементарную алгебру на двухъ первыхъ курсахъ и аналитическую геометрію на третьемъ курсѣ. Съ 1-го апрѣля 1872 г. былъ командированъ на два года за границу, но командировкой не воспользовался, такъ какъ съ 1-го іюня того же года былъ назначенъ доцентомъ въ Варшавскій университетъ. Въ заграничной командировкѣ провелъ 1873—4 учебный годъ, большую часть котораго прожилъ въ Парижѣ, гдѣ слушалъ лекціи въ Сорбоннѣ и Collège de France у *Ліувилля, Эрмита, Бертрана, Серре* и *Дарбу;* четыре мѣсяца посвятилъ путешествію по Италіи. За отсутствіемъ вакансій, званіе экстраординарнаго профессора получилъ только въ 1877 г., а званіе ординарнаго профессора—въ 1879 г. Съ 1876 г. въ теченіе семи лѣтъ читалъ по особому порученію факультета лекціи по математической физикѣ. Въ октябрѣ 1885 г. и, повторно, въ 1888 г. былъ избранъ деканомъ физико-математическаго факультета и пробылъ въ этой должности всего шесть лѣтъ. По утвержденіи министерствомъ выработаннаго имъ, совмѣстно съ профессоромъ химіи *А. Л. Потылицынымъ,* устава Варшавскаго общества естествоиспытателей, состоящаго изъ двухъ отдѣленій—біологическаго и физико-химическаго, единогласно былъ избранъ предсѣдателемъ физико-химическаго отдѣленія, послѣ чего предсѣдатель общества ex officio, попечитель учебнаго округа, назначилъ его вице-предсѣдателемъ общества. Выслуживъ въ 1891 г. полную пенсію, которая по Варшавскому учебному округу назначается за двадцать лѣтъ учебной службы, вышелъ въ отставку, но продолжалъ чтеніе лекцій по вольному найму. Въ 1890 г. получилъ отъ Академіи Наукъ премію имени *В. Я. Буняковскаго,* въ 1891 г. былъ избранъ ею въ число членовъ-корреспондентовъ, а 1-го мая 1893 г. былъ избранъ въ ординарные академики. Переселившись въ 1894 г. въ Петербургъ, Сонинъ въ томъ же году приглашенъ читать лекціи на высшихъ женскихъ курсахъ, а также открылъ курсъ въ университетѣ на правахъ приватъ-доцента.

Въ теченіе восьми лѣтъ (1892—1899) Сонинъ былъ назначаемъ министерствомъ предсѣдательствовать въ университетскихъ испытательныхъ комиссіяхъ (въ Петербургѣ, Москвѣ, Кіевѣ и Одессѣ), а въ 1899 г., по настойчивому предложенію министра *Н. П. Боголѣпова,* занялъ постъ попечителя С.-Петербургскаго учебнаго округа. Въ 1901 г., въ министерство *П. С. Ванновскаго,* перешелъ на постъ предсѣдателя Ученаго Комитета министерства народнаго просвѣщенія и вмѣстѣ съ тѣмъ члена совѣта министра.

I.

Ученая дѣятельность Сонина началась очень рано. Будучи еще только 20-лѣтнимъ юношей, онъ дѣлаетъ научное сообщеніе «О дифференцированіи съ произвольнымъ указателемъ» на второмъ съѣздѣ русскихъ естествоиспытателей и врачей въ Москвѣ, въ 1869 г., напечатанное въ Протоколахъ Съѣзда. Это же сообщеніе напечатано было затѣмъ въ Московскомъ Математическомъ Сборникѣ, т. VI за 1872 годъ. Въ томѣ V того же сборника за 1871 годъ напечатана магистерская диссертація Сонина «О разложеніи функцій въ безконечные ряды». Черезъ три года, въ 1874 году онъ представилъ въ физико-математическій факультетъ Московскаго университета, докторскую диссертацію: «Объ интегрированіи уравненій въ частныхъ производныхъ второго порядка», напечатанную въ VII т. того же сборника. Эта диссертація была впослѣдствіи переведена на нѣмецкій языкъ Ф. Энгелемъ (F. Engel) и помѣщена, съ нѣкоторыми добавленіями автора, въ 49 т. Mathematischer Annalen. Затѣмъ почти каждый годъ въ различныхъ ученыхъ журналахъ появляются статьи Сонина, иногда нѣсколько статей въ одинъ и тотъ же годъ.

Особенною извѣстностью пользуется за границей его мемуаръ «Sur les fonctions cylindriques et le développement des fonctions continues en séries», помѣщенный въ XVI томѣ журнала Mathematische Annalen за 1889 годъ.

Въ этой работѣ мы находимъ не только важныя обобщенія результатовъ, полученныхъ раньше другими математиками, но и совершенно новыя формулы, особенно въ томъ отдѣлѣ, который посвященъ разысканію опредѣленныхъ интеграловъ, содержащихъ цилиндрическія функціи. Въ 1904 году появилась въ свѣтъ обширная монографія о цилиндрическихъ функціяхъ датскаго ученаго N. Nielsen'а «Handbuch der Theorie der Cylinderfunctionen». Авторъ этой монографіи неоднократно цитируетъ работу Сонина и придаетъ ей большое значеніе. Ознакомленіе съ сочиненіемъ Nielsen'а навело Сонина на новыя соображенія, относящіяся къ теоріи цилиндрическихъ функцій, которыя онъ и опубликовалъ въ формѣ письма къ Nielsen'у подъ заглавіемъ «Sur les fonctions cylindriques» въ Mathematische Annalen, t. 59.

Обѣ эти работы Сонина займутъ видное мѣсто въ литературѣ по теоріи цилиндрическихъ функцій и ихъ приложеніямъ. Другою, также весьма важною работою Сонина является его мемуаръ «О Бернулліевыхъ полиномахъ и ихъ приложеніяхъ», напечатанный на русскомъ языкѣ въ Варшавскихъ Университетскихъ Извѣстіяхъ за 1888 годъ. Эта работа послужила поводомъ къ интересной перепискѣ Сонина съ знаменитымъ французскимъ математикомъ Эрмитомъ (Ch. Hermite), напечатанной въ «Journal für die reine und angewandte Mathematik» *B. 116,* 1895 г., издававшемся въ то время *L. Fuchs*'омъ.

Дѣло въ томъ, что въ 115 т. того же журнала была напечатана статья Эрмита, подъ заглавіемъ «Sur la fonction logΓ(a)», конечный результатъ которой совпалъ съ одною изъ формулъ, найденныхъ Сонинымъ въ вышеупомянутой его статьѣ, напечатанной только на русскомъ языкѣ, и, конечно, неизвѣстной Эрмиту. Это обстоятельство побудило Сонина обратиться къ Эрмиту съ письмомъ, въ которомъ онъ сообщаетъ свой выводъ упомянутой формулы, приложивъ къ письму и самый мемуаръ. Это письмо и было напечатано въ 116 т. журнала Fuchs'a, вмѣстѣ съ отвѣтомъ Эрмита и новымъ сообщеніемъ Сонина, по поводу этого отвѣта. Мы позволимъ себѣ привести здѣсь буквально начало и конецъ отвѣта Эрмита, такъ какъ они очень характерны, какъ для нашего математика, такъ и для его знаменитаго корреспондента. Вотъ что пишетъ Эрмитъ (l. c.): «La lettre que vous m'avez fait l'honneur de m'adresser m'a interessé au plus haut point, ainsi que ce que j'ai pu saisir de votre mèmoire sur les polynômes de *Bernoulli*, qui est écrit en russe, et où il ne m'a été permis de comprendre qu'au moyen des formules les résultats aux quels vous êtes parvenu. Je me suis empressé d'informer *M. Fuchs* de mon devoir de reconnâitre que vous avez déjà publié les series infinies qui représentent avec leurs termes complémentaires les quantités

$$\log \frac{\Gamma\,(y+\frac{1}{2})}{\Gamma\,(y)} \quad \text{et} \quad \log \frac{\Gamma\,(y+x)}{\Gamma\,(y)},$$

en les tirant comme conséquence d'un théorème général de développement des fonctions suivant les polynômes de *Bernoulli.* Mais nos recherches se sont si étroitement liées qu' après vous j'ai aussi obtenu cette formule de développement dont j'ai donné communication à *M. Lerch* dans le mois d' août dernier; voici comment j'y suis arrivé».

Изложивъ упомянутый здѣсь свой выводъ со многими интересными замѣчаніями, Эрмитъ заканчиваетъ свое письмо слѣдующими словами: «Ces généralisations, Monsieur, ne me font pas perdre de vue les belles et importantes applications de la formule *d'Euler* et de *Maclaurin* que vous avez traitées dans votre mémoire avec une entière rigueur; et sans être jusqu'ici dans cet ordre de questions, je ne puis m'empécher de vous exprimer encore tout l'interêt que j'y ai pris. En particulier j'attache un grand prix à l'expression asymptotique pour h très petit, de la série $\sum\limits_{(n)} \frac{e^{-n^2h^2}}{nh}$, que vous avez donnée sous la forme $\frac{C}{2h} - \frac{\log h}{h}$, où C est la constante *d'Euler*. Elle se place à côté de l'expression obtenue par *M. Schlömilch* pour la série de *Lambert*, et d'autres semblables s'ofriraient encore dans la théorie des fonctions elliptiques».

Мы привели эти выдержки изъ письма Эрмита, потому что онѣ прекрасно выражаютъ значеніе результатовъ, полученныхъ Сонинымъ и заключаютъ въ себѣ надлежащую ихъ оцѣнку со стороны его знаменитаго корреспондента, занимавшагося тѣми же вопросами.

Вслѣдъ за отвѣтомъ Эрмита Сонинъ помѣстилъ второе письмо къ Эрмиту, въ которомъ сообщаетъ дальнѣйшее развитіе своихъ изысканій по теоріи Бернулліевыхъ полиномовъ и нѣкоторые результаты, опубликованные имъ въ 1892 г. въ Mémoires de l'Académie des sciences de St. Pétersbourg въ статьѣ подъ заглавіемъ «Sur l'intégrale

$$\int_a^b F(x) \frac{dx}{z-x}»$$

которою онъ и сопроводилъ это второе письмо, имѣя въ виду, что изданія нашей академіи наукъ, даже на французскомъ языкѣ, вообще мало распространены за границей.

Только что упомянутый мемуаръ есть одна изъ самыхъ изящныхъ работъ Сонина. Въ ней онъ даетъ весьма общую формулу для приближеннаго вычисленія интеграла

$$\int_a^b F(x) \frac{dx}{z-x},$$

въ видѣ суммы раціональныхъ дробей съ дополнительнымъ членомъ, выражающимся опредѣленнымъ интеграломъ:

$$\int_a^b F\ (x)\ \frac{dx}{z-x} = \frac{\psi_1\ (z)}{\varphi_1\ (z)} + \frac{\psi_2\ (z)}{\varphi_1\ (z)\ \varphi_2\ (z)} + \ .\ .\ .\ . -$$

$$+ \frac{\psi_m\ (z)}{\varphi_1\ (z)\ \varphi_2\ (z)\ .\ .\ .\ .\ .\ \varphi_m\ (z)} + R_m,$$

гдѣ $R_m = \frac{1}{\Phi_m\ (z)} \int_a^b F\ (x)\ \Phi_m\ (x)\ \frac{dx}{z-x},\ \ \Phi_m(z) = \varphi_1\ (z)\ \ \varphi_2\ (z)\ .\ .\ .\ \varphi_m\ (z),$

и полиномы $\varphi_1\ (z),\ \varphi_2\ (z),\ .\ \ .\ \ .\ \varphi_m\ \ (z)$ могутъ быть выбираемы по произволу.

Распоряжаясь этимъ выборомъ, Сонинъ получаетъ различныя формулы для приближеннаго вычисленія разсматриваемаго интеграла, а изслѣдованіе дополнительнаго члена даетъ предѣлы погрѣшности при вычисленіи по этимъ формуламъ. Кромѣ упомянутыхъ крупныхъ работъ, Сонинъ опубликовалъ на французскомъ языкѣ еще нѣсколько небольшихъ статей.

Напечатанная въ 9 томѣ Bull. de la soc. math. de France за 1880 г. замѣтка «Sur une formele de Gauss» заключаетъ въ себѣ весьма простое доказательства извѣстной формулы Гаусса изъ теоріи функціи Γ, именно:

$$\Gamma\ \left(\frac{x}{n}\right)\ \Gamma\left(\frac{x+1}{n}\right)\ .\ .\ .\ \Gamma\ \left(\frac{x+n-1}{n}\right) = (\sqrt{2\ \pi})^{\ n-1}\ \ n^{\frac{1}{2}-x}\ \Gamma\ (x),$$

и выраженіе *дополнительнаго множителя* въ извѣстномъ Эйлеровомъ выраженіи $\Gamma\ (x+1)$ въ видѣ безконечнаго произведенія.

Въ небольшой статьѣ «Sur la généralisation d'une formule d'Abel» въ Acta mathematica, t. IV. 1884 (а также въ Зап. Новор. Об. Естествоисп. за 1883 г.) мы находимъ первое, на сколько мнѣ извѣстно, значительное обобщеніе формулы Абеля, относящейся къ мало разработанной въ то время области такъ называемаго обратнаго исчисленія опредѣленныхъ интеграловъ, а нынѣ разросшейся въ цѣлую теорію такъ называемыхъ *интегральныхъ уравненій*. Формулу Абеля Сонинъ пишетъ въ слѣдующемъ видѣ:

$$\int_a^x f\ (\xi)\ d\ \xi = \frac{1}{\Pi\ (n-1)} \int_a^x \frac{F\ (\lambda)\ d\lambda}{(x-\lambda)^{\ 1-n}},$$

гдѣ

$$F\ (\lambda) = \frac{1}{\Pi\ (-n)} \int_a^\lambda \frac{f\ (\xi)\ d\xi}{(\lambda-\xi)^{\,n}},\ \ 0 < n < 1;$$

и показываетъ, что ее можно обобщить такъ:

$$\int_a^x f(\xi)\, d\xi = \int_a^x F(\lambda)\, \psi\, (x-\lambda)\, d\lambda, \text{ гдѣ } F(\lambda) = \int_a^x f(\xi)\, \varphi\, (\lambda-\xi)\, d\xi,$$

а функціи $\varphi\,(x)$ и $\psi\,(x)$ изображаютъ суммы безконечныхъ рядовъ, составленныхъ извѣстнымъ образомъ при помощи совершенно произвольнаго сходящагося ряда

$$s\,(y) = 1 + c_1\, y + c_2\, y^2 + \ldots$$

Въ 1889 г. въ *Annales de l'Ecole normale supérieure* напечатана статья Сонина, подъ заглавіемъ «*Sur les termes complémentaires de la formule sommatoire d'Euler et de celle de Stirling*».

Здѣсь дается выраженіе дополнительнаго члена въ формулѣ суммированія Эйлера-Маклорена, которое, какъ по способу его вывода, такъ и въ отношеніи практическихъ приложеній, съ выгодою можетъ замѣнить выраженіе, данное Якоби затѣмъ выводится выраженіе дополнительнаго члена въ рядѣ Стирлинга, откуда для $\Gamma\,(1+x)$ получается выраженіе

$$\Gamma\,(1+x) = \sqrt{2\,\pi}.\, x^{x+\frac{1}{2}}\, e^{-x+\frac{(x+\theta)^{-1}}{12}}, \qquad 0 < \theta < \tfrac{1}{2},$$

взамѣнъ обыкновенно употребляемаго

$$\Gamma\,(1+x) = \sqrt{2\,\pi}\, x^{x+\frac{1}{2}}\, e^{-x+\frac{\theta}{21\,x}}, \qquad 0 < \theta < 1.$$

Всѣ остальные работы Сонина публикованы были только на русскомъ языкѣ и потому получили меньшую извѣстность. Между тѣмъ и въ нихъ находятся интересные и важные результаты.

Въ 1886 году въ Извѣстіяхъ Варшавскаго Университета напечатана статья, относящаяся въ варіаціонному исчисленію: «Объ опредѣленіи максимальныхъ и минимальныхъ свойствъ плоскихъ кривыхъ».

Въ этой статьѣ прежде всего дается рѣшеніе слѣдующей задачи, которую проф. В. Анисимовъ въ своемъ курсѣ варіаціоннаго исчисленія (Варшава 1904 г.) называетъ задачей Сонина: «По данному дифференціальному уравненію 2-го порядка

$$y'' = \varphi\,(x,\ y,\ y') \qquad (1)$$

опредѣлить видъ функціи F подъ знакомъ интеграла

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F\,(x,\ y,\ y')\, dx$$

для которой этотъ интегралъ, взятый вдоль кривой изъ семейства, опредѣляемаго уравненіемъ (1), можетъ быть maximum или minimum, по отношенію къ интеграламъ, взятымъ по смежнымъ кривымъ».

Бо̀льшая часть разсматриваемой статьи посвящена вопросу о возможности построенія кривой, удовлетворяющей дифференціальному уравненію вида $yy'' = \psi(y')$, и обладающей максимальнымъ или минимальнымъ свойствамъ вышеупомянутаго рода, черезъ двѣ произвольно заданныя точки на плоскости. Съ подобнымъ вопросомъ мы встрѣчаемся, какъ извѣстно, при рѣшеніи вопроса о наименьшей поверхности вращенія, гдѣ соотвѣтствующая кривая есть цѣпная линія.

Въ 1891 г. въ Варш. Унив. Изв. напечатана интересная замѣтка «Объ остаткѣ формулы Тэлёра» (Taylor). Здѣсь даются выраженія этого остатка въ формѣ, отличной отъ общепринятыхъ формъ, данныхъ Лагранжемъ и Коши; новая форма имѣетъ то преимущество, что во многихъ случаяхъ и, въ частности, во всѣхъ классическихъ примѣрахъ, она даетъ возможность найти весьма близкіе между собой предѣлы остатка въ очень простомъ видѣ, что и подтверждается многими примѣрами, приведенными въ самой статьѣ.

Выведенными выраженіями дополнительнаго члена Сонинъ съ успѣхомъ воспользовался въ упомянутомъ выше мемуарѣ «Sur l'intègrale

$$\int_a^b F(x)\,\frac{dx}{z-x}.$$

Въ промежутокъ времени отъ 1887 до 1891 г. Сонинъ напечаталъ цѣлый рядъ статей въ Варшавскихъ Университетскихъ Извѣстіяхъ, по теоріи простыхъ и кратныхъ опредѣленныхъ интеграловъ. Съ 1892 г. его работы печатаются въ Запискахъ и Извѣстіяхъ Императорской Академіи Наукъ, членомъ корреспондентомъ которой онъ состоялъ съ 1891 г. Важнѣйшія изъ этихъ работъ находятся въ тѣсной связи съ работами знаменитаго математика Чебышева.

Напечатанная въ LXIX томѣ Записокъ Императ. Академіи Наукъ въ 1892 г. статья «О точности опредѣленія предѣльныхъ величинъ интеграловъ» посвящена вопросу, впервые поставленному Чебышевымъ, состоящему въ опредѣленіи степени точности, съ которою можно судить о величинѣ интеграла

$$\int_a^v f(x)\,dx, \text{ при } a < v < b,$$

по даннымъ значеніямъ интеграловъ

$$\int_a^b x^k\, f(x)\,dx, \text{ для } k = 0,\ 1,\ 2,\ .\ .\ .\ 2\,m-1,$$

понимая подъ $f(x)$ функцію, остающуюся $\geqq 0$ въ промежуткѣ (a, b). См. сочиненія Чебышева, т. II. №№ 22 и 23, а также т. I, стр. 733). Въ разсматриваемой статьѣ Сонинъ занимается главнымъ образомъ изслѣдованіемъ двухъ частныхъ случаевъ:

$$1)\ a = -\infty,\ b = +\infty,\ f(x) = \frac{q}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{q^2 x^2}{2}}$$

$$\text{и } 2)\ a = -b,\ f(x) = (b^2 - x^2)^{\lambda},\ \text{при } \lambda > -1.$$

Первый случай былъ разсмотрѣнъ самимъ Чебышевымъ, но Сонину удалось получить окончательный результатъ въ болѣе простой формѣ, чѣмъ та, въ которой онъ выраженъ у Чебышева. Этотъ результатъ Сонинъ формулируетъ въ видѣ слѣдующей теоремы:

«Если $F_1(x) \geqq 0$ для всѣхъ значеній x, и извѣстны интегралы

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F_1(x)\,dx = 1,\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2k} F_1(x)\,dx = \frac{1.\ 3\ .\ .\ .\ (2k-1)}{q^{2k}},\ k = 1, 2, .\ .\ : (m-1)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2k-1} F_1(x)\,dx = 0,\ k = 1,\ 2, .\ .\ .\ m,$$

то величина интеграла

$$\int_{-\infty}^{v} F_1(x)\,dx$$

заключается между предѣлами

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{qv}{\sqrt{2}}} e^{-x^2}\,dx - \sqrt{\frac{\pi}{2m \pm 1}}$$

$$\text{и } \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{qv}{\sqrt{2}}} e^{-x^2}\,dx + \sqrt{\frac{\pi}{2m \pm 1}},$$

гдѣ $2\mathrm{m} + 1$ надо писать при m нечетномъ, а $2\mathrm{m} - 1$ при какомъ угодно m».

Отличіе этой теоремы отъ аналогичной ей въ мемуарѣ Чебышева состоитъ въ томъ, что у Чебышева, вмѣсто простого выраженія

$\sqrt{\frac{\pi}{2m \mp 1}}$ находится гораздо болѣе сложное

$$\frac{3\sqrt{3}\ (m^2-2m+3)^{3/2}\ (q^2v^2+1)^2}{2\,(m-3)^3\sqrt{m-1}}.$$

Неравенствомъ, вытекающимъ изъ приведенной выше теоремы Сонина, академикъ А. А. Марковъ воспользовался при доказательствѣ одной изъ важныхъ теоремъ теоріи вѣроятностей, чѣмъ и подтвердилъ важное значеніе полученнаго Сонинымъ результата. (См. А. Марковъ «Исчисленіе вѣроятностей», 3-е изд. стр. 319 и слѣд.).

Въ тѣсной связи съ предыдущей статьею находится «Замѣтка по поводу письма П. Л. Чебышева къ С. Ковалевской», помѣщенная въ Извѣстіяхъ Императорской Академіи Наукъ за 1895 г. Здѣсь Сонинъ показываетъ, что вопросъ, поставленный Чебышевымъ въ этомъ письмѣ, а именно, —вопросъ о предѣлахъ, въ которыхъ содержится сумма даннаго числа первыхъ коэффиціентовъ рядовъ вида

$$A_0 + A_1\,x + A_2\,x^2 + \ldots\ldots$$

$$\text{или}\ \frac{B_1}{1^x}+\frac{B_2}{2^x}+\frac{B_3}{3^x}+\ldots\ldots$$

рѣшается при помощи весьма простыхъ соображеній.

Къ той же категоріи вопросовъ, т. е. вопросовъ о приближенныхъ вычисленіяхъ, можно отнести и мемуаръ Сонина «О нѣкоторыхъ неравенствахъ, относящихся къ опредѣленнымъ интеграламъ» въ Запискахъ Императорской Академіи Наукъ за 1898 г. Здѣсь выведены общія формулы для приближеннаго вычисленія интеграловъ вида

$$\int_a^b \theta(x)\,\varphi(x)^2\,dx,\ \int_a^b \frac{\theta(x)}{\varphi(x)}\,dx,\ \int_a^b \theta(x)\,\varphi(x)\,\psi(x)\,dx$$

гдѣ $\theta(x)$ обозначаетъ положительную въ предѣлахъ интегрированія функцію, а $\varphi(x)$ и $\psi(x)$—какія угодно интегрируемыя функціи. Общія формулы прилагаются затѣмъ къ частнымъ случаямъ особенно замѣчательнымъ. Въ этомъ же мемуарѣ мы находимъ очень интересное доказательство весьма важной теоремы, извѣстной подъ названіемъ неравенства Чебышева, которую можно представить въ видѣ

$$\int_a^b \theta(x)\,dx.\int_c^b \theta(x)\,\varphi(x)\,\psi(x)\,dx - \int_a^b \theta(x)\,\varphi(x)\,dx.\int_a^b \theta(x)\,\psi(x)\,dx > 0, \quad (1)$$

при условіи, что $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ обѣ возрастающія или обѣ убывающія въ промежуткѣ (a, b). Основанное на первой теоремѣ о средней величинѣ интеграла, что доказательство дало Сонину поводъ называть эту теорему *третьею* теоремою о средней, и возможность показать, что въ правой части неравенства вмѣсто нуля можно поставить нѣкоторую положительную величину.

Статья подъ заглавіемъ «Дополненіе къ статьѣ П. Л. Чебышева: «Объ интегрированіи простѣйшихъ дифференціаловъ, содержащихъ кубическій корень» (Изв. И. А. Н., 1900 г.) и «О параллелограмахъ, состоящихъ изъ трехъ элементовъ и симметричныхъ относительно одной оси» (ibidem, 1903 г.), опубликованы были тогда, когда Н. Я. Сонинъ въ сотрудничествѣ съ А. А. Марковымъ былъ занятъ разборомъ работъ Чебышева и подготовленіемъ изданія полнаго собранія сочиненій знаменитаго нашего геометра на русскомъ и французскомъ языкахъ. Обѣ эти статьи заключаютъ въ себѣ дополненія и разъясненія нѣкоторыхъ результатовъ Чебышева, данныхъ имъ либо вовсе безъ доказательства, либо съ доказательствами, требующими болѣе подробнаго обоснованія.

Изданіемъ полнаго собранія сочиненій Чебышева академики Н. Я. Сонинъ и А. А. Марковъ оказали ученому міру неоцѣнимую услугу.

Сочиненія Чебышева, изданіе которыхъ закончено въ 1907 г., должны сдѣлаться настольною книгою тѣхъ ученыхъ, которые занимаются вопросами приближеннаго вычисленія, для которыхъ Чебышевъ, этотъ «Approximation's Mathematiker par excellence», какъ его называетъ *F. Klein*, далъ совершенно новыя методы и поставилъ совершенно новыя задачи. Рѣшеніемъ этихъ задачъ и развитіемъ этихъ методъ въ настоящее время занимаются многіе видные математики. При редактированіи французскаго изданія трудовъ Чебышева, Сонину много помогало его знакомство съ французскимъ языкомъ, которымъ онъ прекрасно владѣлъ.

Изъ числа работъ Сонина, напечатанныхъ въ Извѣстіяхъ И. А. Н. упомянемъ еще о статьѣ «Рядъ Ивана Бернулли» (эпизоды изъ исторіи математики). С.-Пб., 1897 г.

Здѣсь Сонинъ обнаруживаетъ широкую эрудицію по исторіи математики, которою онъ съ любовью занимался въ часы досуга отъ самостоятельныхъ ученыхъ трудовъ. Съ большимъ остроуміемъ Сонинъ выступаетъ въ концѣ своей статьи въ защиту Ивана Бернулли противъ нападокъ *Морица Кантора,* автора капитальнаго труда по исторіи математики, по поводу способа, примѣняемаго Бернулли къ интегрированію одного дифференціальнаго уравненія.

Послѣднею изъ печатныхъ работъ Сонина были его «Этюды по элементарной алгебрѣ», напечатанныя сперва въ Вѣстникѣ опытной физики и элементарной математики» за 1913 г., а потомъ и въ видѣ отдѣльной брошюры, подъ псевдонимомъ *Н. Ниносъ*. Эта брошюра служитъ нагляднымъ доказательствомъ того, что талантливый человѣкъ найдетъ случай сказать новое даже въ области, повидимому вполнѣ исчерпанной. Написанная доступно для пониманія даже учениковъ старшихъ классовъ средней школы, она содержитъ въ себѣ много интересныхъ результатовъ, какъ напримѣръ: алгориѳмы для вычисленія корней любой степени отъ положительныхъ чиселъ, оригинальный выводъ формулы бинома Ньютона и распространеніе его на случай цѣлаго отрицательнаго показателя степени и, въ особенности, необыкновенно быстро сходящійся рядъ для вычисленія натуральныхъ логариѳмовъ:

$$\log \frac{1+u}{1-u} = 2\ (v+v_1+v_2+\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ ),\ (u<1)$$

гдѣ по данному u, первый членъ v приближенно выражается формулою $v = \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + \frac{u^7}{7}$ съ погрѣшностью, меньшею $\frac{1}{3} u^9$, v_1 такъ ж связано съ v, къ v съ u и т. д., а быстрота сходимости опредѣляется неравенствомъ

$$v_{s-1} < u^{3^s}.$$

Знакомство съ этой брошюрой можно рекомендовать какъ учителямъ, такъ и ученикамъ старшихъ классовъ средней школы.

Списокъ сочиненій Н. Я. Сонина.

1. О дифференцированіи съ произвольнымъ указателемъ. Краткое сообщеніе, сдѣланное 27-го августа 1869 г. на второмъ съѣздѣ русскихъ естествоиспытателей и врачей въ Москвѣ и напечатанное въ протоколахъ.

2. О разложеніи функцій въ безконечные ряды. Магистерская диссертація—Матем. Сб., т. V, 1871.

3. О дифференцированіи съ произвольнымъ указателемъ (ibid., т. VI, 1872).

4. Объ интегрированіи полнаго уравненія

$$(A+Cz)\ dx+(B+Dy)\ dy+Edz=0.$$

(по поводу одной статьи)—ibid., т. VII, 1873.

5. Объ интегрированіи уравненій съ частными производными второго порядка. Докторская диссертація—(ibid., т. VII, 1874).

6. Объ интегрируемости выраженій, содержащихъ неопредѣленныя функціи—Варшавск. Университетск. Извѣстія. 1875.

7. Обобщеніе принципа послѣдняго множителя—ibid.

8. Замѣтка о выводѣ уравненій распространенія теплоты въ кристаллахъ—ibid., 1878.

9. Recherches sur les fonctions cylindriques et le développement des fonctions continues en séries—Mathem. Ann., B. XVI. 1879.

10. Sur un théorème de Gauss — Bull. Soc. Mathém. de France, t. IX, 1881.

11. Sur la généralisation d'une formule d'Abel — Acta mathem., t. IV, 1884.

12. Обобщеніе одной формулы Абеля—Зап. В. О. Е. 1885. (отт. 1883).

13—14. Объ одной задачѣ варіаціоннаго исчисленія. Статья первая и вторая—ibidem (отт. 1884).

15. Объ одномъ опредѣленномъ интегралѣ, содержащемъ числовую функцію $[x]$.—Варшав. Университет. Извѣстія. 1885.

16. О числовыхъ тожествахъ и ихъ приложеніи къ ученію о безконечныхъ рядахъ—ibid.

17. Объ опредѣленіи максимальныхъ и минимальныхъ свойствъ плоскихъ кривыхъ—ibid. 1886.

18. О приближенномъ вычисленіи опредѣленныхъ интеграловъ и входящихъ при этомъ вычисленіи цѣлыхъ функціяхъ—ibid. 1887.

19. Sur les fonctions cylindriques (Extrait d'une littre a dressée à la védaction) Math. Ann. 30 1887. 2 стр.

20. О Бернулліевыхъ полиномахъ и ихъ приложеніяхъ—ibid. 1888.

21. Объ одной формулѣ приведенія кратныхъ интеграловъ—ibid. 1889. Извлеченіе изъ этой статьи—Прот. Варш. Общ. Естеств. 15/27 апр. 1889.

22. Объ остаточныхъ членахъ формулъ *Эйлера* и *Стирлинга*— Прот. Варш. Общ. Ест. 4/16 марта 1889.

23. Sur les termes complémentaires de la formule d'*Euler* et de celle de *Stirling*—CR., 108 № 14, 8 avril 1889.

24. Sur les termes complémentaires de la formule d'*Euler* et de celle de *Stirling*—Ann. Ecole Norm. Sup. (3) t. VI. 1889.

25. Объ остаткѣ формулы *Стирлинга*—Прот. Варш. О. Ест. 15/27 апр. 1889.

26. О приведеніи одного кратнаго интеграла. Варш. Ун. Изв. 1889.

27. Тоже съ дополненіемъ. Матем. Сборн., т. XIV.

28. О прерывной функціи [x] и ея примѣненіяхъ—Варшав. Унив. Извѣст., 1889.

29. О прерывной функціи [x] и ея примѣненіяхъ. В. У. И., 1889.

30. О такъ называемомъ физическомъ законѣ *фанъ-деръ Ваальса*—Прот. Варшав. Общ. Ест., №№ 5 и 6, 1889.

31. О примѣненіи уравненія виріала къ кинетической теоріи газовъ —ibid., № 7, 1889.

32. Объ остаткѣ формулы *Тэлёра*—Варш. Унив. Изв. 1891.

33. Объ одномъ полусходящемся разложеніи—Прот. Варш. Общ. Ест. 25 мая 1891.

34. Объ одномъ полусходящемся разложеніи общаго вида—ibid. 23 сент. 1891.

35. Объ одномъ опредѣленномъ интегралѣ—ibid., № 7, 1892.

36. О точности опредѣленія предѣльныхъ величинъ интеграловъ—Запис. Императорской Академіи Наукъ, т. LXIX, 1892, стр. 1—30.

37. Sur l'intégrale $\int_a^b F(x)\frac{dx}{z-x}$ — Mém. de l'Ac. des sciences, VII sér., t. XXXVII, 1892.

38. О производныхъ функціяхъ высшихъ порядковъ — Извѣстія Императорской Академіи Наукъ, 1894, № 4.

39. Замѣтка по поводу письма *П. Л. Чебышева* къ *С. В. Ковалевской*—ibid., 1895, № 1.

40—41. О дифференціальномъ уравненіи $\frac{dy}{dx}=1+\frac{R(x)}{y}$ ibid. 1895, ст. 1 и 2 № 2 и 3.

42. Рядъ Ивана Бернулли (эпизодъ изъ исторіи математики)—Изв. Импер. Ак. Наукъ., т. VII, 1897.

43. Ueber die Integration der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, aus dem Russischen übersetzt von Fr. Engel—Mathem. Ann., Bd. 49. 1897.

44. О нѣкоторыхъ неравенствахъ, относящихся къ опредѣленнымъ интеграламъ—Записки И. А. Н. Ф.-М. О., VIII сер., т. VI, 1898.

45. Дополненіе къ статьѣ *П. Л. Чебышева:* объ интегрированіи простѣйшихъ дифференціаловъ, содержащихъ кубичный корень—Изв. Имп. Академіи Наукъ, т. X, 1900.

46. О параллелограммахъ, состоящихъ изъ трехъ элементовъ и симметричныхъ около одной оси—ibid., т. XVIII, 1903.

47. Sur les fonctions cylindriques.—Mathem. Ann., B. LIX, 1904.

48. Этюды по элементарной алгебрѣ. Вѣстникъ опытной физики и

элементарной математики, 1913 г. (отд. изд. подъ псевдонимомъ: *Н. Ниносъ*) [1].

II.

Дѣятельность Н. Я. Сонина, какъ это видно изъ вышеприведенныхъ біографическихъ свѣдѣній, не исчерпывалось однѣми учеными его работами. Въ тѣсной связи съ ними была его профессорская дѣятельность въ теченіе 20 лѣтъ въ Варшавскомъ университетѣ, гдѣ онъ поставилъ преподаваніе математики на должную высоту, а затѣмъ, по переѣздѣ въ С.-Петербургъ, въ теченіе еще нѣсколькихъ лѣтъ, на высшихъ женскихъ курсахъ и въ С.-Петербургскомъ университетѣ на правахъ приватъ-доцента. Достойнымъ его преемникомъ въ Варшавскомъ университетѣ былъ безвременно скончавшійся, талантливый ученый Г. Ѳ. Вороной.

Оригинальный талантъ Н. Я. Сонина, проявленный имъ въ ученыхъ его трудахъ, замѣчается и въ его лекціяхъ. Собственноручно имъ написанный и затѣмъ отлитографированный его курсъ интегральнаго исчисленія, читанный на высшихъ женскихъ курсахъ, отличается строго-научнымъ, изящнымъ и совершенно оригинальнымъ изложеніемъ. Написавъ этотъ курсъ, Н. Я. Сонинъ пользовался имъ для преподаванія въ несовсѣмъ обычной формѣ: онъ не читалъ, собственно говоря, лекцій, а предлагалъ слушательницамъ послѣдовательно изучать его литографированный курсъ и реферировать прочитанное, а самъ комментировалъ и разъяснялъ заслушанные рефераты. Къ своей аудиторіи на высшихъ женскихъ курсахъ, равно какъ и ко всему этому учрежденію, Н. Я. всегда относился съ большимъ сочувствіемъ и оставилъ по себѣ у своихъ бывшихъ слушательницъ, изъ которыхъ нѣкоторыя нынѣ состоятъ преподавателями на курсахъ, самыя лучшія воспоминанія.

Послѣ кратковременной административной дѣятельности (1899—1901 г.) въ качествѣ попечителя С.-Петербургскаго учебнаго округа, Н. Я. Сонинъ занялъ въ 1901 г. важный и отвѣтственный постъ предсѣдателя ученаго комитета при министерствѣ народнаго просвѣщенія, на которомъ оставался 14 лѣтъ до самой смерти. При вступленіи на этотъ постъ Н. Я. нашелъ огромное количество незаконченныхъ, вслѣдствіе болѣзни своего предшественника, дѣлъ. Съ присущею ему энергіею и дѣловитостью, Н. Я. быстро привелъ всѣ эти дѣла въ порядокъ, привлекъ въ ученый комитетъ компетентныхъ лицъ по всѣмъ спеціальностямъ, изъ профессорской и преподавательской среды и твердою рукою руководилъ работами комитета по

---

[1] Кромѣ того, перу Н. Я. Сонина принадлежатъ некрологіи Ш. Эрмита и Л. Л. Линделёфа въ Извѣстіяхъ Акад. Наукъ 1901 и 1908 г., рядъ рецензій въ Ж. М. Н. Пр. и т. д.

всѣмъ разнообразнымъ вопросамъ, входившимъ въ кругъ его вѣдѣнія. Многостороннее его образованіе, знаніе законовъ, огромная память и твердо установившіеся педагогическіе принципы получили благодарную почву для своего проявленія на новомъ занятомъ имъ посту. Какъ извѣстно, одною изъ задачъ ученаго комитета является разсмотрѣніе учебныхъ руководствъ по разнымъ предметамъ низшей и средней школы. Будучи спеціалистомъ по математикѣ, Н. Я. однако одинаково внимательно прислушивался къ отзывамъ членовъ комитета по всѣмъ спеціальностямъ. Его замѣчанія по поводу этихъ отзывовъ, дѣлаемыя во время засѣданій, были всегда весьма содержательны и интересны и, за рѣдкими исключеніями, всегда признавались справедливыми самими рецензентами, а затѣмъ и всѣмъ комитетомъ. Самъ онъ рѣдко выступалъ въ качествѣ рецензента руководствъ по математикѣ и въ этихъ случаяхъ относился очень строго къ авторамъ этихъ руководствъ, иногда даже съ излишнею рѣзкостью. Но, по существу, его критика почти всегда была справедлива, и не мало плохихъ учебниковъ не получило допущенія въ качествѣ руководствъ, благодаря его отзывамъ, напечатаннымъ въ *Журналѣ Министерства Народнаго Просвѣщенія,* или отзывамъ другихъ членовъ комитета энергично поддержаннымъ предсѣдателемъ.

Наиболѣе крупными дѣлами, проведенными Н. Я. въ комитетѣ было: 1) составленіе проекта новаго устава гимназій, прогимназій и приготовительныхъ школъ министерства народнаго просвѣщенія и 2) реформа преподаванія въ реальныхъ училищахъ. Первая работа, къ сожалѣнію, не получила до сихъ поръ дальнѣйшаго хода, вѣроятно потому, что она была окончена передъ наступленіемъ смутнаго времени въ жизни государства; вторая же была осуществлена въ 1907 г. и до сихъ поръ остается въ силѣ безъ измѣненія.

Выработка проекта новаго устава гимназій и т. д. начата была 31-го марта 1903 г. и закончена 1-го іюня 1904 г. Ей были посвящены тридцать три засѣданія комиссіи, въ составъ которой входили всѣ члены основного отдѣла ученаго комитета, одинъ членъ особаго отдѣла того же комитета (по начальному образованію), два академика, одинъ профессоръ университета, два окружныхъ инспектора и девять директоровъ гимназій и реальныхъ училищъ С.-Петербурга.

Предсѣдательствовалъ во всѣхъ засѣданіяхъ Н. Я. Сонинъ. Результаты этой огромной работы напечатаны на правахъ рукописи и составляютъ томъ въ 459 страницъ большого фармата. Она, вѣроятно, будетъ положена въ основу предстоящей реформы средней школы, на ряду съ другими матеріалами, какъ-то работами комиссій, занимавшимися тѣмъ же вопросомъ при министрахъ Боголѣповѣ и Ванновскомъ.

Реформа учебныхъ плановъ въ реальныхъ училищахъ, начатая по инициативѣ Н. Я. Сонина въ 1905 г. съ разрѣшенія тогдашняго министра В. П. Глазова, окончательно введена была въ дѣйствіе лишь съ начала 1907—8 учебнаго года. Эта реформа, главнымъ образомъ, коснулась преподаванія математики и естествознанія. Программы этихъ предметовъ, выработанныя въ особыхъ комиссіяхъ при ученомъ комитетѣ, обсуждались въ засѣданіи ученаго комитета 29-го мая 1906 г. и послѣ нѣкоторыхъ измѣненій были министерствомъ утверждены.

Главнымъ нововведеніемъ въ учебныхъ планахъ реальныхъ училищъ надо считать введеніе началъ аналитической геометріи и основаній высшаго анализа въ курсъ VII дополнительнаго класса реальныхъ училищъ. Программу этихъ предметовъ, въ составленіи которой большое участіе принималъ Н. Я. Сонинъ, конечно нельзя считать послѣднимъ словомъ въ такомъ важномъ вопросѣ, какъ введеніе началъ высшей математики въ курсъ средней школы, но она представляетъ первый шагъ въ рѣшеніи этого вопроса, и этотъ шагъ былъ сдѣланъ благодаря глубокому убѣжденію Н. Я. Сонина въ своевременности такого введенія и энергіи съ которою онъ это убѣжденіе проводилъ.

Къ дѣятельности Н. Я. Сонина, какъ предсѣдателя ученаго комитета, надо еще отнести его участіе въ работѣ международной комиссіи по преподаванію математики, основанной, по инициативѣ проф. Smith, на конгрессѣ въ Римѣ, въ 1908 г. Главная цѣль этой комиссіи, какъ она формулирована въ предварительномъ докладѣ центральнаго комитета, должна заключаться въ томъ, чтобы «разслѣдовать современныя направленія въ преподаваніи математики въ различныхъ странахъ и опубликовать общій о нихъ отчетъ». Постепенно расширяясь, программа занятій международной комиссіи охватила всевозможные вопросы, касающіеся преподаванія математики въ учебныхъ заведеніяхъ всѣхъ типовъ и ступеней, во всѣхъ странахъ образованнаго міра. Работы ея составляютъ въ настоящее время огромную литературу, опубликованную центральнымъ комитетомъ и національными подкомиссіями.

«Въ январѣ 1909 года предсѣдатель центральнаго комитета, проф. Клейнъ обратился отъ имени комитета къ академику Н. Я. Сонину съ приглашеніемъ взять въ свои руки все дѣло, поскольку оно касается Россіи. Сознавая всю трудность и обременительность поставленной международнымъ конгрессомъ математиковъ задачи, Н. Я. Сонинъ, въ виду особаго положенія, занимаемаго имъ въ центральномъ управленіи министерства народнаго просвѣщенія по должности предсѣдателя ученаго комитета, равно какъ и приглашенные имъ къ участію въ делегаціи професоръ математики въ С.-Петербургскомъ технологическомъ институтѣ Б. М. Кояловичъ и директоръ 2-го Петроградскаго реальнаго училища К. В. Фохтъ, какъ члены ученнаго комитета, признали себя нравственно обязанными посвятить свое время и трудъ наилучшему выполненію того, что падаетъ на долю Россіи въ международномъ предпріятіи».

Первымъ дѣломъ русской делегаціи было издать русскій переводъ предварительнаго доклада центральнаго комитета, составленнаго на французскомъ языкѣ секретаремъ комитета, проф. H. Fehr (Женева), и разослать этотъ переводъ различнымъ лицамъ, которыхъ делегація намѣревалась привлечь къ работѣ къ русской національной подкомиссіи. Приведенныя выше строки въ «», заимствованы нами изъ добавленія къ русскому изданію упомянутого доклада. Исходатайствовавъ у министра народнаго просвѣщенія необходимыя средства для организаціи русской подкомиссіи и изданія ея будущихъ трудовъ, Н. Я. Сонинъ созвалъ 21-го ноября 1909 г. собраніе участниковъ этой подкомиссіи, въ которую вошли и провинціальные профессора и педагоги, и, изложивъ свой взглядъ на характеръ и направленіе предстоящей работы, предложилъ присутствующимъ распредѣлить между собою составленіе отчетовъ о преподаваніи математики въ тѣхъ учебныхъ заведеніяхъ, съ которыми каждый изъ членовъ всего ближе соприкасается.

Въ настояще время опубликовано на французскомъ и нѣмецкомъ языкахъ 10 докладовъ русской подкомиссіи и переводятся еще два, представленные на русскомъ языкѣ. Этими организаціонными работами и ограничилось участіе Н. Я. Сонина въ трудахъ международной комиссіи. Независимо отъ недостатка времени, занятого другими обязанностями его, какъ предсѣдателя ученаго комитета, нѣсколько безучастное отношеніе его къ дѣлу международной комиссіи объяснялось, по собственному его признанію, тѣмъ, что онъ сомнѣвался въ возможности использовать труды этой комиссіи для нуждъ математическаго образованія въ Россіи. Это сомнѣніе, въ свою очередь, вызывалось его пессимистическимъ взглядомъ на условія, въ которыхъ въ то время находилось дѣло школьнаго образованія въ Россіи, а также недостаткомъ педагогическаго персонала, достаточно подготовленнаго для осуществленія широкой реформы преподаванія математики. Этотъ недостатокъ ощущается, впрочемъ, не только у насъ, но и въ другихъ странахъ Европы. Такой взглядъ на дѣло международной комиссіи не мѣшалъ, однако, Сонину интересоваться результатами занятій комиссіи, публикуемыми въ многочисленныхъ докладахъ ея членовъ и въ отчетахъ о конгрессахъ и съѣздахъ, организуемыхъ ею въ различныхъ городахъ Западной Европы, и способствовалъ командировкамъ членовъ русской делегаціи на эти съѣзды.

III.

Первые признаки болѣзни, которая свела Н. Я. Сонина въ могилу, появились лѣтомъ 1914 г. Когда опредѣлилось, что болѣзнь эта требуетъ оперативнаго лѣченія, Н. Я. безъ всякихъ колебаній согласился на операцію, рѣшивъ бороться съ болѣзнью всѣми средствами, которыми располагаетъ медицина. Операція была произведена въ августѣ 1914 г., при чемъ обнаружилось, что предположеніе врачей о томъ, что причиною болѣзни былъ ракъ желудка, оправдалось, но удалить злокачественное новообразованіе не удалось, отчасти вслѣдствіе слабой дѣятельности сердца больного, отчасти вслѣдствіе сильно разлитой формы опухоли.

Въ первый разъ въ жизни Сонинъ далъ себя обмануть; врачи не сказали ему истины, а приведя его въ чувство послѣ хлороформированія, увѣрили его, что опухоль удалена. Неизвѣстно, долго ли онъ жилъ въ этой увѣренности послѣ операціи; во всякомъ случаѣ, мѣсяца черезъ два послѣ нея, симптомы прежней болѣзни возобновились, и Н. Я. прибѣгъ къ иному способу лѣченія, рекомендованному ему нѣкоторыми близкими къ нему людьми, а именно лѣченію лучами Рентгена у д-ра Яновскаго, давшаго будто бы благопріятные результаты у другого больного. Нѣкоторое улчшеніе дѣйствительно послѣдовало послѣ нѣсколькихъ сенсовъ и Н. Я. воспользовался имъ, чтобы въ декабрѣ 1914 г. снова вступить въ исполненіе обязанностей предсѣдателя ученаго комитета. Нужно было удивляться той силѣ волѣ и тому стоицизму, съ которыми онъ переносилъ свою тяжкую и неизлѣчимую болѣзнь, и той свѣжести умственныхъ способностей, которая его не покидала до самаго послѣдняго дня жизни. Дѣлами комитета онъ все время не переставалъ интересоваться и, когда уже не былъ въ состояніи выходить изъ дома, распоряжался доставленіемъ этихъ дѣлъ къ себѣ на квартиру, знакомился съ ними и давалъ необходимыя указанія. Лишь за два дня до кончины Н. Я. Сонинъ обратился къ министру съ прошеніемъ объ освобожденіи его отъ должности предсѣдателя ученаго комитета, но этому прошенію уже не пришлось дать хода, и утромъ 14-го февраля 1915 г. Н. Я. Сонинъ тихо скончался, оставаясь на томъ посту, который онъ съ честью занималъ въ теченіе цѣлыхъ 14 лѣтъ. Въ средѣ сотрудниковъ и подчиненныхъ онъ оставилъ по себѣ самую лучшую память.

К. Поссе.

ПРОТОКОЛЫ

засѣданій Харьковскаго Математическаго Общества.

Очередное засѣданіе 1 февраля 1913 г.

Присутствовали: Д. М. Синцовъ, С. Н. Бернштейнъ, Н. П. Бѣляевъ, Г. А. Грузинцевъ, Д. А. Рожанскій, А. П. Пшеборскій, Ч. В. Речинскій, А. П. Грузинцевъ.

Предсѣдательствовалъ Д. М. Синцовъ.

1. Г. предсѣдатель напомнилъ о смерти почетнаго члена Общества G. H. Darwin'a и предложилъ почтить память его вставаніемъ.

2. Г. предсѣдатель доложилъ заявленіе Коммиссіи «Répertoire bibliographique». Сочувствуя принципіально предпріятію, Общество не имѣетъ возможности прійти на помощь въ матеріальномъ отношеніи.

3. Г. предсѣдатель сообщилъ о чествованіи 50-лѣтія существованія Чешскаго Общества «Jednota Ceskych Matemat.»; своевременно г. предсѣдатель послалъ привѣтственную телеграмму.

4. Г. предсѣдатель сообщилъ о состояніи печатанія «Сообщеній Общества».

5. Г. предсѣдатель доложилъ о присланной статьѣ Я. В. Успенскаго съ рекомендаціей В. А. Стеклова «О нѣкоторыхъ теоремахъ Ліувилля».

6. Математическій кружокъ въ Москвѣ прислалъ свой журналъ «Математическое Образованіе» съ просьбой высылать изданія Общества. Постановлено выслать съ XIII тома.

7. Г. А. Грузинцевъ сдѣлалъ сообщеніе «Объ одномъ функціональномъ уравненіи».

Замѣчанія были сдѣланы С. Н. Бернштейномъ, А. П. Пшеборскимъ, А. П. Грузинцевымъ.

Педагогическое засѣданіе 1 марта 1913 г.

Присутствовали: Д. М. Синцовъ, Г. А. Грузинцевъ, М. Н. Лагутинскій, Я. М. Назаревскій, Ч. В. Речинскій, А П. Пшеборскій, А. П. Грузинцевъ.

Предсѣдательствовалъ Д. М. Синцовъ.

1. Предсѣдатель сообщилъ, что библіотека Университета въ Упсалѣ проситъ высылать ей «Сообщенія» Общества въ обмѣнъ на диссертаціи. Постановлено высылать.

2. Предсѣдатель доложилъ о благодарности R. Dedekind'a за избраніе почетнымъ членомъ Общества.

3. Предсѣдатель напомнилъ о смерти P. Gordan'а, Kinkelin'а и Lauricella и предложилъ почтить ихъ память вставаніемъ.

4. М. Н. Лагутинскій сдѣлалъ сообщеніе «О безконечно-удаленныхъ элементахъ». Замѣчанія сдѣлали Г. А. Грузинцевъ и Д. М. Синцовъ.

5. *Г. А. Грузинцевъ* сдѣлалъ сообщеніе: «Объ одной задачѣ на построеніе».

6. *Д. М. Синцовъ* сдѣлалъ сообщеніе: «Объ одной задачѣ элементарной геометріи». Замѣчанія сдѣлали А. П. Грузинцевъ, Г. А. Грузинцевъ, А. П. Пшеборскій, М. Н. Лагутинскій.

Засѣданіе 22 марта 1913 г.

Присутствовали: Д. М. Синцовъ, Д. А. Рожанскій, С. Н. Бернштейнъ, А. П. Грузинцевъ, В. Х. Даватцъ, Г. А. Грузинцевъ, П. М. Ерохинъ, Н. Л. Орлицкій, М. Н. Лагутинскій, Н. П. Бѣляевъ, М. Н. Марчевскій.

Предсѣдательствовалъ Д. М. Синцовъ.

1. Избирается въ члены Общества окончившій Московскій Университетъ Николай Людвиговичъ Орлицкій.

2. Предсѣдатель доложилъ о предстоящихъ съѣздахъ въ Тифлисѣ и Москвѣ. Въ связи съ Московскимъ съѣздомъ преподавателей математики предсѣдатель напоминаетъ о резолюціяхъ бывшаго Петербургскаго съѣзда преподавателей математики. Высказываются пожеланія имѣть представителей отъ Харькова на этомъ съѣздѣ. Для обсужденія этого вопроса рѣшено созвать особое собраніе.

3. Г. А. Грузинцевъ сдѣлалъ докладъ: «Рѣшеніе одного трансцендентнаго уравненія».

Замѣчанія были сдѣланы: Д. М. Синцовымъ, С. Н. Бернштейномъ, М. Н. Лагутинскимъ и А. П. Грузинцевымъ.

4. М. Н. Марчевскій сдѣлалъ докладъ: «Къ вопросу о суммируемости рядовъ въ смыслѣ Hölder'a и Cesàro».

Замѣчанія сдѣланы: Г. А. Грузинцевымъ, М. Н. Лагутинскимъ, Д. М. Синцовымъ, В. Х. Даватцемъ и С. Н. Бернштейномъ,

5. Д. М. Синцовъ доложилъ статью Я. В. Успенскаго: «Объ одной теоремѣ Stieltjes'a».

Засѣданіе 3 мая 1913 г.

Присутствовали: Д. М. Синцовъ, Б. И. Кудревичъ, М. Н. Марчевскій, Г. А. Грузинцевъ, В. Х. Даватцъ С. Н. Бернштейнъ, А. П. Пшеборскій, П. М. Ерохинъ, А. П. Грузинцевъ, Ч. В. Речинскій и Н. Л. Орлицкій.

Предсѣдательствовалъ Д. М. Синцовъ.

1. Г. предсѣдатель предложилъ почтить вставаніемъ недавно скончавшагося проф. P. Schoute'a.

2. Г. предсѣдатель сообщилъ письмо, полученное проф. Н. Н. Салтыковымъ отъ проф. De-la-Vallée-Poussin'a о согласіи Бельгійской Академіи на обмѣнъ изданіями.

3. Г. предсѣдатель предложилъ обратиться къ Морской Академіи съ просьбой объ обмѣнѣ изданіями.

4. Г. предсѣдатель сообщилъ свѣдѣнія о предстоящемъ съѣздѣ естествоиспытателей въ Тифлисѣ.

5. Г. предсѣдатель сообщилъ о книгахъ изъ библіотеки проф. Н. Д. Пильчикова, поступившихъ въ Математическое Общество, и о другихъ книгахъ.

6. По предложенію г. предсѣдателя постановлено ходатайствовать передъ Министерствомъ Народнаго Просвѣщенія о субсидіи до 1200 руб.

7. Студ. *И. Б. Вольфсонъ* сдѣлалъ сообщеніе «Объ ординальныхъ свойствахъ комплексныхъ чиселъ».

Педагогическое засѣданіе 13 сентября 1913 г.

Присутствовали: Д. М. Синцовъ, А. П. Грузинцевъ, Г. А. Грузинцевъ, В. М. Фесенко, Н. Н. Евдокимовъ, В. Н. Мощенко, А. П. Пшеборскій, Н. Ѳ. Спенглеръ, М. Н. Марчевскій.

Предсѣдательствовалъ Д. М. Синцовъ.

1. Г. предсѣдатель сообщилъ о поступившихъ за лѣто книгахъ, главнымъ образомъ, о книгахъ изъ библіотеки проф. Н. Д. Пильчикова.

2. Г. предсѣдатель сообщилъ о Тифлисскомъ съѣздѣ, именно о секціи преподаванія и о предстоящемъ 2-мъ съѣздѣ Преподавателей Математики и о предполагаемыхъ на немъ докладахъ. По предложенію г. предсѣдателя признано желательнымъ, чтобы Математическое Общество являлось центральнымъ учрежденіемъ для мѣстныхъ преподавателей, желающихъ участвовать въ предстоящемъ съѣздѣ при подготовкѣ и обсужденіи докладовъ.

3. Г. предсѣдатель доложилъ два письма гг. преподавателей, касающихся нѣкоторыхъ вопросовъ преподованія тригонометріи и алгебры въ средней школѣ.

4. Г. предсѣдатель сообщилъ о пожертвованіи Т-вомъ И. Д. Сытина книгъ для педагогической библіотеки. Постановлено выразить благодарность Т-ву И. Д. Сытина и А. А. Волкову, благодаря содѣйствію котораго полученъ этотъ даръ.

5. Въ члены Общества избраны по предложенію Д. М. Синцова и А. П. Пшеборскаго Н. Ѳ. Спенглеръ, К. Ю. Кухарская и Г. С. Голубъ.

Годичное засѣданіе 29 сентября 1913 г.

Присутствовали: Д. М. Синцовъ, Н. Н. Евдокимовъ, С. Н. Бернштейнъ, Н. П. Бѣляевъ, М. И. Сахаровъ, В. Х. Даватцъ, В. М. Фесенко, А. В. Желеховскій, А. П. Пшеборскій.

Предсѣдательствовалъ Д. М. Синцовъ.

1. Г. предсѣдатель доложилъ о полученныхъ изданіяхъ.

2. Доложенъ и утвержденъ отчетъ за $191^{2}/_{3}$ ак. годъ.

3. Г. предсѣдатель сдѣлалъ сообщеніе о состояніи печатанія «Сообщеній» Общества и объ издательской дѣятельности Общества и предложилъ выбрать коммиссію для разсмотрѣнія отчета по продажѣ изданій «Харьковской Математической Библіотеки».

4. По заявленію предсѣдателя и секретаря постановлено на будущее время денежный отчетъ составлять на гражданскій годъ.

5. По предложенію предсѣдателя постановлено держать пособіе изъ суммъ Министерства Народнаго Просвѣщенія не въ кассѣ Университета, а въ одномъ изъ кредитныхъ учрежденій, при чемъ выборъ этого послѣдняго постановлено предоставить распорядительному комитету.

6. Г. предсѣдатель предложилъ пригласить библіотекаря Общества съ платой по 20 руб. въ мѣсяцъ въ учебное время. Кромѣ того постановлено платить по 5 коп. за карточку на прежде полученныя книги. Предложеніе принято.

7. По предложенію г. предсѣдателя постановлено ассигновать 300 руб. на печатаніе 3-го и 4-го выпуска «Русской Математической Библіографіи».

8. Произведены выборы распорядительнаго Комитета на $191^{3}/_{4}$ ак. г. избраны: предсѣдателемъ проф. Д. М. Синцовъ, товарищами предсѣдателя проф. А. П. Грузинцевъ и проф. А. П. Пшеборскій, секретаремъ прив.-доц. С. Н. Бернштейнъ.

Засѣданіе 18 октября 1913 г.

Присутствовали: Д. М. Синцовъ А. П. Грузинцевъ, Г. А. Грузинцевъ, Д. А. Рожанскій, В. Х. Даватцъ, А. П. Пшеборскій, М. Н. Лагутинскій, А. В. Желеховскій, С. М. Семилѣтовъ и С. Н. Бернштейнъ.

Предсѣдательствовалъ проф. Д. М. Синцовъ.

1. Заслушанъ докладъ М. Н. Марчевскаго «Объ условно сходящихся комплексныхъ рядахъ». Въ преніяхъ приняли участіе Д. М. Синцовъ, А. П. Пшеборскій, Г. А. Грузинцевъ и С. Н. Бернштейнъ.

2. Докладъ А. П. Грузинцева «Теорія движенія электроновъ въ срединахъ съ дисперсіей». Замѣчанія были сдѣланы Д. А. Рожанскимъ.

3. Заслушанъ докладъ М. Н. Лагутинскаго. «Объ измѣреніи алгебраическихъ формъ». Замѣчанія сдѣланы Д. М. Синцовымъ.

Засѣданіе 24 октября 1913 г.

Присутствовали: Д. М. Синцовъ, А. П. Грузинцевъ, Г. А. Грузинцевъ, А. П. Пшеборскій, В. Х. Даватцъ, Н. Н. Евдокимовъ, С. Н. Бернштейнъ, М. Н. Марчевскій.

Предсѣдательствовалъ Д. М. Синцовъ.

1. М. Н. Марчевскій сдѣлалъ докладъ «Объ условно сходящихся рядахъ». Замѣчанія были сдѣланы Д. М. Синцовымъ, А. П. Пшеборскимъ и С. Н. Бернштейномъ.

2. С. Н. Бернштейнъ сдѣлалъ докладъ «О неравенствѣ В. А. Маркова». Замѣчанія были сдѣланы А. П. Пшеборскимъ.

Засѣданіе (педагогическое) 22 ноября 1913 г.

Присутствовали: Д. М. Синцовъ, А. П. Грузинцевъ, Г. А. Грузинцевъ, А. П. Пшеборскій, М. Н. Лагутинскій, В. Х. Даватцъ, М. Н. Марчевскій, П. М. Ерохинъ, М. И. Сахаровъ, А. В. Желеховскій, В. М. Фесенко, И. С. Чернушенко, С. Н. Бернштейнъ, Д. А. Рожанскій.

Предсѣдательствовалъ Д. М. Синцовъ.

1. Д. М. Синцовъ сдѣлалъ докладъ «О 2-мъ Съѣздѣ преподавателей математики въ Москвѣ» и

2. «Объ одной задачѣ на огибающія».

3. И. С. Чернушенко сдѣлалъ докладъ «Нули и безконечности на первыхъ 3-хъ ступеняхъ счисленія». Докладъ вызвалъ продолжительныя пренія, въ которыхъ приняли участіе Д. М. Синцовъ, А. П. Пшеборскій, С. Н. Бернштейнъ, Г. А. Грузинцевъ и В. Х. Даватцъ.

Отчетъ о дѣятельности Харьковскаго Математическаго Общества за $191^2/_3$ акад. годъ.

Занятія Математическаго Общества въ отчетномъ году открылись Общимъ годичнымъ собраніемъ 7 октября 1912 года.

Послѣ заслушанія и утвержденія отчета за истекшій годъ произведенъ выборъ членовъ распорядительнаго комитета на $191^2/_3$ ак. годъ. Избраны предсѣдателемъ проф. Д. М. Синцовъ, товарищами предсѣдателя: проф. А. П. Грузинцевъ и проф. Ц. К. Русьянъ и секретаремъ проф. А. П. Пшеборскій.

Въ теченіе истекшаго года кромѣ годичнаго засѣданія было устроено 5 засѣданій, изъ нихъ 4 научныхъ и 1 педагогическое. На этихъ засѣданіяхъ были сдѣланны слѣдующіе доклады:

Бернштейнъ С. Н. «О наилучшемъ приближеніи аналитическихъ функцій посредствомъ многочленовъ».
Вольфсонъ И. Б. «Ординальныя свойства комплексныхъ чиселъ».
Грузинцевъ Г. А. «Объ одномъ функціональномъ уравненіи».
— «Обобщеніе понятія угла въ Неевклидовой геометріи».
— «Рѣшеніе одного трансцендентнаго уравненія».
— «Объ одной задачѣ на построеніе».
Даватцъ В. Х. «Доказательство теоремъ Waring'а по Гильберту».
Лагутинскій М. Н. «О безконечно удаленныхъ элементахъ».
Марчевскій М. Н. «Къ вопросу о суммируемости рядовъ въ смыслѣ Hölder'а и Cesàro».
Синцовъ Д. М. «Объ одной задачѣ элементарной геометріи».
Успенскій Я. В. «Объ одной теоремѣ Stieltjes'а».
— «О нѣкоторыхъ теоремахъ Ліувилля».

Въ настоящемъ году вышли въ свѣтъ т. XIII №№ 4—6 «Сообщеній» Общества и въ настоящее время печатается XIV т. №№ 1—2.

Въ истекшемъ году Общество понесло потерю въ лицѣ скончавшагося почетнаго члена Общества G. Darwin'а. Въ число членовъ Общества по баллотировкѣ вступилъ Н. Л. Орлицкій. Такимъ образомъ къ концу истекшаго года Общество состояло изъ 23 почетныхъ, 85 дѣйствительныхъ членовъ и 35 членовъ корреспондентовъ.

По примѣру прошлаго лѣта «Сообщенія Общества» разсылались различнымъ ученымъ Обществамъ и научнымъ и просвѣтительнымъ учрежденіямъ, въ большинствѣ случаевъ въ обмѣнъ на ихъ изданія. Библіотека Общества расширялась путемъ выписки книгъ и полученія таковыхъ въ даръ. Такъ между прочимъ библіотекой полученъ рядъ книгъ изъ библіотеки проф. Н. Д. Пильчикова.

Должно отмѣтить еще о возбужденіи Обществомъ ходатайства передъ Министерствомъ Народнаго Просвѣщенія о выдачѣ Обществу ежегодной субсидіи.

Къ настоящему отчету прилагается кассовой отчетъ секретаря Общества съ оправдательными документами а также и отчетъ относительно расходованіи суммъ принадлежащихъ Обществу и хранящихся въ кассѣ университета.

I. Денежный отчетъ отъ 1-го октября 1912 г. по 1-е октября 1913 г.

(Составленный Секретаремъ О-ва проф. А. П. Пшеборскимъ).

1) Отчетъ о средствахъ Математическаго Общества, находящихся въ кассѣ Университета.

ПРИХОДЪ

Остатокъ на 1-е октября 1912 г.	546 р. 61 к.
Пособіе изъ Министерства Нар. Просв.	1000 » — »
Пособіе изъ спеціал. средствъ Университета	500 » — »
Итого	2046 р. 61 к.

РАСХОДЪ

Типографіи Зильберберга	547 р. 78 к.
На покупку книгъ	49 » 92 »
В. Х. Даватцу за работу въ библіотекѣ О-ва	100 » — »
Жалованіе служителю Шуличенко	24 » — »
Итого	721 р. 70 к.

Въ кассѣ Университета на 1-е октября 1913 г.
остается суммъ Математическаго О-ва . . . . . . 1324 р. 91 к.
(Спеціальныхъ средствъ 345 р. 31 к.+Штатныя суммы 979 р. 60 к.).

2) Отчетъ о денежныхъ средствахъ О-ва, находящихся у Секретаря Общества.

ПРИХОДЪ

Остатокъ отъ предыдущаго года	11 р. 55 к.
Поступило членскихъ взносовъ и за отдѣльные оттиски	68 » 40 »
Отъ продажи изданій О-ва	42 » 91 »
Итого	122 р. 86 к.

РАСХОДЪ

Почтовые расходы	25 р. 96 к.
Чай на засѣданіяхъ	7 » 60 »
Покупка книгъ	6 » 17 »
Мелкіе расходы	2 » 44 »
Итого	42 р. 17 к.

Къ 1-му октября 1913 г. у Секретаря Мат. О-ва
оставалось средствъ Математичекаго О-ва . . . . 80 р. 69 к.

Педагогическое засѣданіе 19 января 1914 г.

Присутствовали: Н. П. Бѣляевъ. А. П. Грузинцевъ, Г. А. Грузинцевъ, В. Х. Даватцъ, Н. Н. Евдокимовъ, Л. Г. Запорожецъ, М. Н. Лагутинскій, Е. Н. Марчевская, М. Н. Марчевскій. А. П. Пшеборскій, Ц. К. Русьянъ, Я. М. Назаревскій, М. И. Сахаровъ, Н. Н. Салтыковъ, И. С. Чернушенко, С. Н. Бернштейнъ, Р. Д. Пономаревъ П. М. Ерохинъ и постороннія лица съ разрѣшенія предсѣдателя.

Предсѣдательствовалъ проф. Д. М. Синцовъ.

1. Заслушано письмо академика А. А. Маркова по поводу его полемики съ П. А. Некрасовымъ. Харьковское Математическое Общество, заслушавъ и обсудивъ означенное письмо, постановило, руководствуясь принципомъ, что диспутирующія стороны должны быть поставлены, по возможности, въ одинаковое положеніе, открыть страницы «Сообщеній», для отвѣтной статьи А. А. Маркова, буде онъ пожелаетъ.

2. Заслушано письмо П. С. Фролова объ изданіи краткаго курса теоріи вѣроятностей. Г. предсѣдатель сообщилъ свой отвѣтъ на это письмо.

3. Заслушано письмо О. П. Фролова.

4. Заслушаны резолюціи 2-го Създа Преподавателей Математики, письмо Б. К. Млодзѣевскаго и докладъ проф. Н. Н. Салтыкова: Итоги 2-го Всероссійскаго Съѣзда преподавателей математики и задача Харьковскаго Математическаго Общества по организаціи 3-го Съѣзда преподавателей математики.

Предсѣдатель объявилъ пяти минутный перерывъ. Послѣ перерыва въ преніяхъ по вопросу объ организаціи 3-го Съѣзда преподавателей математики приняли участіе А. П. Грузинцевъ, А. П. Пшеборскій, М. Н. Лагутинскій, С. Н. Бернштейнъ, Н. Н. Салтыковъ, Ц. К. Русьянъ, Л. Г. Запорожецъ, Н. П. Бѣляевъ, Р. Д. Пономаревъ, И. С. Чернушенко, В. Х. Даватцъ и Д. М. Синцовъ.

Постановлено всѣми голосами противъ одного: Въ виду предстоящаго въ Харьковѣ въ 1916 году XII-го Съѣзда Естествоиспытателей, Х. Мат. О-во не находитъ возможнымъ взять на себя, согласно предложенію 2-го Съѣзда, организацію 3-го Съѣзда преподавателей математики. Н. Н. Салтыковъ выразилъ свое мнѣніе о томъ, что считаетъ возможнымъ устройство Съѣзда преподавателей математики въ Харьковѣ, независимо отъ предстоящаго Съѣзда Естествоиспытателей и врачей въ виду того, что силы Хар. Мат. О-ва могутъ раздѣлиться на устройство обоихъ съѣздовъ.

Научное засѣданіе 31 января 1914 г.

Присутствовали: А. П. Пшеборскій, А. П. Грузинцевъ, Г. А. Грузинцевъ, С. М. Семилѣтовъ, М. И. Сахаровъ, Д. А. Рожанскій, Н. Ѳ. Спенглеръ, Н. Н. Евдокимовъ, С. Н. Бернштейнъ.

Предсѣдательствовалъ проф. Д. М. Синцовъ.

1. Заслушано отвѣтное письмо академика А. А. Маркова на сообщеніе ему постановленія Математич. О-ва, состоявшагося на засѣданіи 19 января.

2. Въ связи съ юбилеемъ «Вѣстника Опытной Физики» предложенъ и единогласно выбранъ въ члены-корреспонденты В. Ф. Коганъ.

3. Заслушано предложеніе принять участіе въ празднованіи 300 лѣтняго юбилея Непера. Постановлено послать поздравленіе и 1 ф. ст. въ фондъ по организаціи юбилея.

4. Заслушанъ докладъ М. Н. Лагутинскаго «Объ алгебраическомъ интегрированіи». Предложены вопросы Д. М. Синцовымъ и С. Н. Бернштейномъ.

5. Заслушанъ докладъ Д. М. Синцова «Объ одномъ уравненіи, встрѣчающемся въ термодинамической теоріи химическихъ явленій». Въ преніяхъ приняли участіе А. П. Грузинцевъ, Г. А. Грузинцевъ, Д. А. Рожанскій, С. Н. Бернштейнъ.

6. Д. М. Синцовъ демонстрировалъ вновь полученныя геометрическимъ кабинетомъ модели.

Соединенное засѣданіе Х. М. О. съ Хар, отд. И. Р. Т. О. 12 февраля 1914 г.

Присутствовали: А. П. Пшеборскій Н. Н. Салтыковъ, С. Н. Бернштейнъ, Н. Н. Евдокимовъ, В. Х. Даватцъ, М. Н. Марчевскій, П. М. Ерохинъ, Д. А. Кутневичъ, Л. Г. Запорожецъ, К. Ю. Кухарская, Р. Д. Пономаревъ и члены Техническаго Общества.

Предсѣдательствовалъ проф. А. П. Пшеборскій.

Н. Ф. фонъ-Дитмаръ сдѣлалъ докладъ «О преподаваніи высшей математики въ средней школѣ».

Изъ членовъ Мат. О-ва въ преніяхъ приняли участіе Н. Н. Салтыковъ, А. П. Пшеборскій, В. Х. Даватцъ, Д. А. Кутневичъ. Со стороны представителей обоихъ Обществъ высказано пожеланіе объ организаціи и впредь совмѣстныхъ засѣданій обоихъ Обществъ.

Засѣданіе 21 марта 1914 г.

Присутствовали: А. П. Грузинцевъ, М. Н. Лагутинскій, Н. Н. Евдокимовъ, М. И. Сахаровъ, А. В. Желиховскій, Г. А. Грузинцевъ, В. Х. Даватцъ, В. М. Фесенко, Е. П. Аксюкъ, С. Н. Бернштейнъ, П. М. Ерохинъ, М. Н. Марчевскій, Н. Ѳ. Спенглеръ, Д. М. Синцовъ.

Предсѣдательствовалъ проф. Д. М. Синцовъ.

1. Постановлено просить проф. В. А. Стеклова быть представителемъ Хар. Мат. О-ва на юбилеѣ Napier Tercentery Celebration, 1914.

2. Постановлено привѣтствовать проф. Guccia предсѣдателя Circolo Mathematico di Palermo по случаю юбилея.

3. Заслушанъ денежный отчетъ секретаря и утвержденъ.

4. *Н. Ѳ. Спенглеръ* сдѣлалъ докладъ «Теорема Стокса». Сдѣланы замѣчанія, Д. М. Синцовымъ, М. Н. Лагутинскимъ, С. Н. Бернштейномъ, Г. А. Грузинцевымъ.

5. Заслушанъ протоколъ соединеннаго засѣданія Математическаго и Техническаго Обществъ.

6. С. Н. Бернштейнъ сдѣлалъ докладъ «Объ интерполированіи» и

7. Сообщилъ статью А. А. Маркова «О вѣроятности a posteriori».

Педагогическое засѣданіе 25 апрѣля 1914 г.

Присутствовали: Д. А. Граве, Д. М. Синцовъ, А. П. Пшеборскій, М. Н. Лагутинскій, И. С. Чернушенко, В. Х. Даватцъ, М. Н. Марчевскій, Н. Н. Евдокимовъ, С. Н. Бернштейнъ, Л. Г. Запорожецъ.

Предсѣдательствовалъ Д. А. Граве.

1. В. Х. Даватцъ сдѣлалъ докладъ «О правильныхъ сѣченіяхъ куба». Были сдѣланы замѣчанія Д. А. Граве и С. Н. Бернштейномъ, которые отмѣтили возможность болѣе простого геометрическаго рѣшенія вопроса.

2. М. Н. Лагутинскій сдѣлалъ докладъ «Рѣшеніе одной системы алгебраическихъ уравненій». Были сдѣланы замѣчанія Д. А. Граве.

3. И. С. Чернушенко сдѣлалъ докладъ «Къ теоріи предѣловъ».

Засѣданіе 9 мая 1914 г.

Присутствовали: Д. А. Граве, А. П. Грузинцевъ, Г. А. Грузинцевъ, Н. Н. Салтыковъ, Н. Ѳ. Спенглеръ, С. Н. Бернштейнъ, В. Х. Даватцъ, М. Н. Марчевскій, Д. А. Рожанскій, М. Н. Лагутинскій, студенты и гости съ разрѣшенія предсѣдателя.

Предсѣдательствовалъ проф. Д. М. Синцовъ.

1. Заслушанъ докладъ «О группахъ перестановочныхъ матрицъ» студ. Кравчука, сдѣланный проф. Д. А. Граве.

2. Заслушанъ докладъ проф. Д. А. Граве «О рѣшеніи уравненій въ радикалахъ». Были предложены вопросы В. Х. Даватцемъ, на которые докладчикъ далъ пространныя объясненія.

3. Заслушанъ докладъ С. Н. Бернштейна «Объ абсолютной сходимости тригонометрическихъ рядовъ». Были сдѣланы нѣкоторыя замѣчанія проф. Д. А. Граве.

4. Заслушанъ докладъ М. Н. Лагутинскаго «О пріемѣ Даламбера въ интегрированіи дифференціальныхъ уравненій».

Годичное засѣданіе 21 сентября 1914 г.

Присутствовали: Д. М. Синцовъ, А. П. Пшеборскій, Н. Н. Салтыковъ, Н. Н. Евдокимовъ, В. Х. Даватцъ, М. Н. Марчевскій, С. Н. Бернштейнъ, Н. Ѳ. Спенглеръ.

Предсѣдательствовалъ проф. Д. М. Синцовъ.

1. Заслушанъ отчетъ о дѣятельности Общества за 191$^{3}/_{4}$ ак. г.

2. Постановлено всѣ деньги О-ва держать на текущемъ счету въ Банкѣ.

3. Предсѣдатель доложилъ полученную О-вомъ корреспонденцію.

4. Избраны въ почетные члены Ник. Як. Сонинъ; въ члены Общества И. Н. Блюмштейнъ, Н. П. Голубенко и Н. Ф. фонъ-Дитмаръ и въ члены-корреспонденты Charles de la Vallée Poussin,

5. Утвержденъ прежній библіотекарь И. М. Гребеновъ.

6. Избраны предсѣдателемъ проф. Д. М. Синцовъ, товарищами предсѣдателя проф. А. П. Пшеборскій и Ц. К. Русьянъ и секретаремъ О-ва пр.-доц. С. Н. Бернштейнъ.

Отчетъ о дѣятельности Харьковскаго Математическаго Общества за 191$^{3}/_{4}$ годъ.

Въ теченіе истекшаго года кромѣ годичнаго засѣданія было устроено 8 засѣданій, изъ которыхъ 4 научныхъ и 4 педагогическихъ, а также одно засѣданіе совмѣстно съ Харьковскимъ отдѣл. Императорск. Техн. О-ва. На этихъ засѣданіяхъ были заслушаны слѣдующіе доклады:

1) *Бернштейнъ С. Н.* «Нѣсколько замѣчаній по поводу неравенства В. А. Маркова».
2) — «Объ интерполированіи».
3) — «Объ абсолютной сходимости тригонометрическихъ рядовъ».
4) *Граве Д. А.* «О рѣшеніи уравненій въ радикалахъ».
5) — Статья студ. Кравчука «о группахъ перестановочныхъ матрицъ».

6) *Даватцъ В. Х.* «О правильныхъ сѣченіяхъ куба».
7) *Марковъ А. А.* «О вѣроятности a posteriori» (сообщилъ С. Н. Бернштейнъ).
8) *Марчевскій М. Н.* «Объ условно сходящихся рядахъ».
9) *Лагутинскій М. Н.* «О пріемѣ Даламбера интегрированія дифференціальныхъ уравненій».
10) — «О рѣшеніи одной системы алгебраическихъ уравненій».
11) — «Объ алгебраическомъ интегрированіи».
12) *Салтыковъ Н. Н.* «Итоги 2-го Всероссійскаго Съѣзда преподавателей математики и задача X. Мат. О-ва.
13) *Синцовъ Д. М.* «Объ одной задачѣ на огибающія».
14) — «Объ одномъ уравненіи, встрѣчающемся въ термодинамической теоріи химическихъ явленій».
15) — «О 2 Съѣздѣ Преподавателей матем. въ Москвѣ».
16) *Спенглеръ, Н. Ф.* «Обобщеніе формулы Стокса».
17) *Чернушенко И. С.* «Нули и безконечности на первыхъ трехъ ступеняхъ счисленія».
18) — «Къ теоріи предѣловъ».

Кромѣ того, на соединенномъ засѣданіи Хар. отд. Импер. О-ва и Хар. Мат. О-ва былъ заслушанъ докладъ Н. Ф. фонъ-Дитмара «О преподаваніи основаній высшей математики въ средней школѣ».

На годичномъ засѣданіи 29 сентября 1913 г. были избраны члены распорядительнаго комитета: предсѣдатель проф. Д. М. Синцовъ, товарищи предсѣдателя: проф. А. П. Грузинцевъ и проф. А. П. Пшеборскій и секретарь пр.-доц. С. Н. Бернштейнъ.

Въ истекшемъ году вышли въ свѣтъ №№ 1—3 и печат. № 4 XIV т.

Общество потеряло членовъ: Кнаббе Влад. Серг., проф. Харьк. Технолог. Института и Кирпичевъ Вик. Л., б. проф. и дир. X. Т. И.

Въ число членовъ О-ва вступили: дѣйствительные члены проф. Т. П. Кравецъ и по избранію Н. Ѳ. Спенглеръ, К. Ю. Кухарская, и Г. С. Голубъ, члены корреспонденты В. Ф. Каганъ.

Такимъ образомъ въ настоящее время О-во состоитъ изъ 23 почетныхъ членовъ, 87 дѣйствительныхъ и 36 членовъ-корреспондентовъ.

На основаніи постановленія Матем. О-ва на годичномъ засѣданіи 1913 г. денежный отчетъ о состояніи О-ва долженъ быть представленъ къ началу каждаго гражданскаго года. Въ виду этого денежный отчетъ по 1-е января 1914 г. былъ представленъ и утвержденъ на засѣданіи 21 марта 1914 года.

II. Денежный отчетъ отъ 1-го октября 1913 г. по 1-е января 1914 г.

(Составленный Секретаремъ О-ва С. Н. Бернштейномъ).

1) Отчетъ объ израсходованіи Спеціальныхъ средствъ Мат. О-ва.

Остатокъ къ 1-му октября 1913 г.	345 р. 31 к.

РАСХОДЪ

Типографіи Зильбербергъ	326 р. — к.
Жалованіе служителю Шуличенко	4 » — »
Перерасходъ по смѣтѣ 1912 г.	8 » — »
Итого	338 р. — к.
Къ 1-му января 1914 г. въ кассѣ Университета остается изъ спеціальн. средствъ О-ва	7 р. 31 к.

2) Отчетъ объ израсходованіи штатныхъ суммъ, получаемыхъ О-вомъ изъ Министерства Народнаго Просвѣщенія.

Остатокъ къ 1-му октября 1913 г.	979 р. 60 к.

РАСХОДЪ

Недогинскому за переплетъ книгъ	50 р. — к.
Авансъ за переводъ С. Н. Бернштейну	50 » — »
Почтовые расходы	10 » 34 »
Расходы по библіотекѣ	55 » — »
Выписка книгъ	34 » 66 »
Итого	200 р. — »
Остатокъ къ 1-му января 1914 г. (хранится на текущемъ счету О-ва)	779 р. 60 к.

Состояніе Кассы Математическаго О-ва

ПРИХОДЪ

Остатокъ къ 1-му октября 1913 г.	80 р. 69 к.
Членскіе взносы	45 » — »
Продажа книгъ	6 » — »
Возмѣщеніе почтовыхъ и типограф. расходовъ отъ Я. В. Успенскаго	3 » 30 »
Итого	134 р. 99 к.

РАСХОДЪ

Почтовые и телеграфные расходы	4 р. 48 к.
Чай на засѣданіяхъ	2 » 60 »
Канцелярскіе расходы	1 » 5 »
Мелкіе расходы	1 » 24 »
Итого	9 р. 37 к.
Остатокъ къ 1-му января	125 р. 62 к.

(100 руб. хранится на текущемъ счету + 25 руб. 62 коп. на рукахъ у Секретаря О-ва).

Денежный отчетъ отъ 1-го января 1914 г. по 1-е января 1915 г.

(Составленный Секретаремъ О-ва пр.-доц. С. Бернштейномъ).

1) Отчетъ объ израсходованіи субсидіи изъ специальныхъ средствъ Университета.

ПРИХОДЪ

Остатокъ къ 1-му января 1914 г.	7 р. 31 к.
Субсидія на 1914 годъ	500 « — »
Итого	507 р. 31 к.

РАСХОДЪ

Уплата «Новому Времени» за книги	7 р. 29 к.
Перечислено въ доходъ Университета	— » 2 »
Тип. Зильберберга за печ. Сообщ. т. XIV (3) .	169 » 95 »
» » » » » т. XIV (4) .	159 » 85 »
Служителю Шуличенко	24 » — »
Итого	361 р. 11 к.
Остатокъ въ кассѣ Университета	146 р. 20 к.

2) Состояніе кассы Математическаго Общества.

ПРИХОДЪ

Остатокъ на текущемъ счету въ Международномъ Банкѣ № 3544 къ 1 января 1914 г. . .	879 р. 60 к.
Остатокъ на рук. у Секр. О-ва къ 1 января 1914 г.	25 » 62 »
Пособіе изъ Мин. Народ. Просв. на 1914 г. . .	1000 » — »
Членскіе взносы	20 » 50 »
Продажа Сообщеній Хар. Математ. О-ва . .	9 » — »
Продажа изданій Математическаго О-ва . . .	11 » 86 »
Отъ Н. М. Крылова за отдѣльные оттиски . .	3 » — »
% съ текущаго счета по 1-е января 1914 г. .	3 р. 89 к.
Итого	1953 р. 47 к.

РАСХОДЪ

Жалованіе биліотекарю за февраль, мартъ, апрѣль, май, октябрь, ноябрь, декабрь, . .	140 р. — к.
Выписка книгъ	69 р. 20 к.
Уплачено въ счетъ гонорара за переводъ Римана — С. Н. Бернштейну	6 » — »
Уплачено въ счетъ гонорара за переводъ Дирикле — Г. А. Грузинцеву	12 » — »
Почтовые расходы	25 » 45 «
Уплачено Зильбербергу за напечатаніе № 2 серіи В. Харьк. Математ. Библіотеки . . .	260 » 30 »
Мелкіе расходы	8 » 10 »
Итого	521 р. 05 к.
Къ 1 января 1915 г. въ кассѣ Математ. О-ва остается	1432 р. 42 к.

(на текущемъ счету 1428 р. 49 к.+на рукахъ у секретаря 3 р. 93 к.).

Отчетъ по изданію и продажѣ „Харьковской Математической Библіотеки“

Сер. А. Вып. 1, 2—3 и сер. В. Вып. 1, 2 на 1 января 1915 г.

1. *Штейнеръ.* Геометрическія построенія, выполняемыя помощью прямой линіи и неподвижнаго круга. Х. 1910 г. с. XVI+96 и 2 таб. черт. 12°. Печатано 1000 экз.

Расходы по изданію . . . . 330 р. 25 к.

Доставлено типографіей 908 экз. и 92 безъ чертежей. Выдано переводчикамъ (по 5 экз.) и редактору для раздачи и разсылки . . . . . . 35 экз.

Сдано книгопрод. на комиссію (скид. 25%) 605 экз.; изъ нихъ продано . . . . 475 »

Продано на 1 Съѣздѣ преп. мат., XIII Тифл. Съѣздѣ и Петрогр. Высш. Жен. Курс. . . . . 47 »

Разнымъ лицамъ и магазин. (высылка нал. пл.) . 16 »

Всего выручено . 204 р. 19 к.

Остается у комиссіонер. 130 экз., на складѣ 210 и 89 экз. безъ табл.

2. *Лобачевскій.* Новыя начала геометріи съ полной теоріей параллельныхъ.—Х. 1912. 12°. XXXIII+235 стр. съ 4 табл. ц. 1 р.

Печатано 1500 экз. (и получено). Стоимость изданія . 801 р. 60 к.

Редактору для раздачи . . . . 25 экз.

Сдано на комиссію книгопрод. отъ прод. . 441 »

На Съѣздахъ: Тифлисск. и II Съѣздѣ преподавателей матем. и въ Моск. Мат. Кружкѣ . 95 »

Разнымъ лицамъ и магаз. (наложн. плат.) . 23 »

584 выруч. 442 р. 25 к.

Остается у комиссіонер. 192 и на складѣ 724 экз.

3. Сер. В. № 1 *Пикаръ.* О развитіи нѣкоторыхъ основныхъ теорій математическаго анализа. III+99. 12°. 1912. Ц. 50. Печатано 600 экз.

Стоимость изданія . . . . 287 р. — к.

Для раздачи и переводчику (2 экз.) . . 24 экз.

Сдано на комиссію 408 . . . . продано . 208 »

На Тифлисск. Съѣздѣ, II Съѣздѣ преподав. математики и Московск. Математ. Кружку . . . 54 »

Наложеннымъ платежомъ . . . . 18 »

Остается . . . 304 выруч. 111 р. 67 к.

На складѣ 56 экз. и у коммиссіонеровъ 240 экз.

4. *Леженъ-Дирикле, Риманъ и Липшицъ.* Тригонометрич. строки. 12⁰. VIII+116 стр. X. 1914. Ц. 50 к. Печатано 1000 экз.

Стоимость изданія		353 р. 30 к.
Роздано и разослано	12 экз.	
Продано	2 » выруч.	90 к.
Остается 866 экз. на складѣ и 120 экз. у комиссіонеровъ.		
Общая выручка		759 р. 01 к.
% на капиталъ Сберегательной кассы		13 » 39 »
		772 р. 40 к.
Расходы (объявленія, гербовый сборъ, пересылка книгъ книгопродавцамъ, пересылка и пр.)		13 р. 59 к.
Въ Сберегательной кассѣ		760 р.

Засѣданіе 27 февраля 1915 г.

Присутствовали: А. П. Грузинцевъ, Н. Н. Салтыковъ, А. П. Пшеборскій, В. М. Фесенко, И. С. Чернушенко, Н. Θ. Спенглеръ, Н. Е Подтягинъ, А. В Желеховскій, Г. С. Голубъ, Д. М. Синцовъ, С. Н. Бернштейнъ и П. М. Ерохинъ.

Предсѣдательствовалъ проф. Д. М. Синцовъ.

1. Д. М. Синцовъ и А. П. Пшеборскій сообщили о потеряхъ, понесенныхъ О-мъ въ лицѣ почетнаго члена акад. Н. Я. Сонина и дѣйствительнаго члена пр.-доц. М. Н. Лагутинскаго, память которыхъ была почтена вставаніемъ.

2. Заслушанъ и утвержденъ отчетъ О-ва за 1914 годъ, а также отчетъ объ изданіи Харьковской математической библіотеки.

3. Сообщены статьи, присланныя въ Матем. О-во А. А. Марковымъ, Н. М. Крыловымъ, Н. С. Кошляковымъ, Д. А. Граве, Б. Н. Делоне и Е. Когбетліанцемъ.

4. А. К. Сушкевичъ, И. Б. Вольфсонъ, Б. П. Герасимовичъ, В. Г. Фесенковъ избраны въ дѣйствительные члены.

5. Н. Θ. Спенглеръ сдѣлалъ докладъ «О циклометріи г. Охитовича».

6. С. Н. Бернштейнъ сдѣлалъ доклады «О абсолютной сходимости тригонометрическхъ рядовъ» и «О положительномъ изображеніи многочленовъ».

7. А. П. Пшеборскій сдѣлалъ докладъ «Замѣтка по варіаціонному исчисленію».

Засѣданіе 17 апрѣля 1915 г.

Присутствовали: Д. М. Синцовъ, А. П. Пшеборскій, Д. А. Рожанскій, Т. П. Кравецъ, В. М. Фесенко, В. Г. Фесенковъ, И. Б. Вольфсонъ, В. Х. Даватцъ, М. Н. Марчевскій, А. П. Грузинцевъ, Р. Д. Пономаревъ, Н. Н. Евдокимовъ, П. М. Ерохинъ, С. М. Семилѣтовъ, Б. П. Герасимовичъ, С. Н. Бернштейнъ и Н. П. Голубенко.

Предсѣдательствовалъ проф. Д. М. Синцовъ.

1. Д. М. Синцовъ доложилъ статью Н. С. Кошлякова «О дифференціальномъ уравненіи $ydy+(p+qy)\,dy=0$ и статью Б. Н. Делоне «О рѣшеніи въ цѣлыхъ числахъ уравненія $x^3\varrho+y^3=1$.

2. Заслушано сообщеніе В. Г. Фесенкова «Опредѣленіе альбедо земли». Сдѣланы замѣчанія Т. П. Кравцемъ, А. П. Грузинцевымъ, В. В. Каврайскимъ, Д. М. Синцовымъ, Д. А. Рожанскимъ и С. Н. Бернштейномъ.

3. Заслушано сообщеніе С. Н. Бернштейна «О поверхностяхъ отрицательной кривизны».

4. Заслушанъ докладъ П. М. Ерохина «Приложенія комплексныхъ перемѣнныхъ къ нѣкоторымъ преобразованіямъ». Были сдѣланы замѣчанія И. Б. Вольфсономъ и А. П. Пшеборскимъ.

Засѣданіе 14 мая 1915 г.

Присутствовали: Д. М. Синцовъ, Т. П. Кравецъ, А. П. Грузинцевъ, В. Г. Фесенковъ, В. Х. Даватцъ, М. Н. Марчевскій, Н. Н. Евдокимовъ, С. Н. Бернштейнъ.

Предсѣдательствовалъ Д. М. Синцовъ.

1. В. Г. Фесенковъ сдѣлалъ докладъ «О яркости ночного неба». Замѣчанія сдѣлали А. П. Грузинцевъ и Т. П. Кравецъ.