Communications de la Société mathématique de Kharkow.
2-ème série, Tome XIII, № 1.

СООБЩЕНІЯ
ХАРЬКОВСКАГО
МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА.

ВТОРАЯ СЕРІЯ.
Томъ XIII.
№ 1.

ХАРЬКОВЪ.
Типографія и Литографія М. Зильбербергъ и С-вья.
Донецъ-Захаржевская ул., с. д. № 6.
1912.

✝

5 (18) іюля 1912 г. скоропостижно скончался въ Парижѣ почетный членъ Харьковскаго Математическаго Общества профессоръ Сорбонны академикъ

Анри Пуанкаре.

Весь ученый міръ оплакиваетъ безвременную утрату одного изъ величайшихъ математическихъ геніевъ всѣхъ временъ и народовъ.

Communications de la Société mathématique de Kharkow.
2-ème série, Tome XIII.

СООБЩЕНІЯ
ХАРЬКОВСКАГО
МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА.

ВТОРАЯ СЕРІЯ.
Томъ XIII.

ХАРЬКОВЪ.
Типографія и Литографія М. Зильберберг и С-вья.
Донецъ-Захаржевская ул., с. д. № 6.
1913.

СОДЕРЖАНІЕ

XIII-го тома.

TABLE DES MATIÈRES

du tome XIII.

СОСТАВЪ
Харьковскаго Математическаго Общества
къ 1-му января 1913 года.

А. Распорядительный комитетъ.

1. Предсѣдатель: проф. Д. М. Синцовъ.
2. Товарищи предсѣдателя: проф. А. П. Грузинцевъ и проф. Ц. К. Руссьянъ.
3. Секретарь: проф. А. П. Пшеборскій.

В. Почетные члены.

1. Андреевъ Константинъ Алексѣевичъ, засл. проф. Московскаго унив.
2. Бобылевъ Дмитрій Константиновичъ, засл. проф. СПБ. унив.
3. Грузинцевъ Алексѣй Петровичъ, проф. Харьк. унив.
4. Ермаковъ Василій Петровичъ, засл. проф. унив. св. Владиміра.
5. Жуковскій Николай Егоровичъ, засл. проф. Московскаго унив.
6. Ляпуновъ Александръ Михайловичъ, академикъ.
7. Марковъ Андрей Андреевичъ, академикъ.
8. Поссе Константинъ Александровичъ, засл. проф. СПБ. элек.-техн. инст.
9. Стекловъ Владиміръ Андреевичъ, проф. СПБ. унив., академикъ.
10. Тихомандрицкій Матвѣй Александровичъ, засл. проф. Харьк. унив.
11. Appel Paul, проф. Парижскаго унив., академикъ.
12. Cantor Georg, проф. университета, Halle.
13. Darboux Gaston, академикъ, Парижъ.
14. Dedekind Richard, проф. Политехн., Карлсруэ.
15. Dini Ulisse, профессоръ университета, Пиза.
16. Hilbert David, проф. университета, Göttingen.
17. Jordan Camille, членъ Института, Парижъ.
18. Klein Felix, проф. университета, Göttingen.
19. Mittag-Leffler, Gösta, проф. университета, Stockholm.
20 Painlevé Paul, членъ Института, Парижъ.
21. Picard Emile, проф. Парижскаго Университета, академикъ.
22. Volterra Vito, профессоръ Университета, Римъ.
23. Zeuthen N. G., профессоръ Университета, Копенгагенъ.

С. Дѣйствительные члены.

1. Аксюкъ Екатерина Павловна, препод-ца 2-й Харьк. женск. гимн.
2. Алексѣевскій Владиміръ Петровичъ, проф. Томскаго техн. инст.
3. Альбицкій Василій Ивановичъ, проф. Харьк. техн. инст.
4. Бернштейнъ Сергѣй Натановичъ, прив.-доц. Харьк. универс.
5. Бураковъ Григорій Ѳедотовичъ, ад.-проф. Харьк. техн. инст.
6. Бутовъ Василій Васильевичъ, преп. гимн. 2-ой гр. препод.
7. Бѣлинскій Александръ Генриховичъ, инж.-техн., препод. частн. гимн.
8. Бѣляевъ Николай Павловичъ, директоръ гимн. Тов. Препод.
9. Веребрюсовъ Александръ Степановичъ, бывш. преп. Староб. гимн.
10. Вольскій Степанъ Петровичъ, преп. Харьк. 3-й гимн.
11. Гохманъ Владиміръ Соломоновичъ, окончившій ф.-м. факультетъ.
12. Граве Дмитрій Александровичъ, проф. унив. св. Владиміра.
13. Гречаниновъ Алексѣй Васильевичъ, б. проф. Харьк. техн. инст.
14. Гриненко Николай Петровичъ, преп. 1-го Харьк. реальн. учил.
15. Грицай Алексѣй Сергѣевичъ, директ. Сумского реальн. учил.
16. Грузинцевъ Григорій Алексѣевичъ, прив.-доцентъ Харьк. унив.
17. Даватцъ Владиміръ Христіановичъ, окончившій ф.-м. факультетъ.
18. Денченко Сергѣй Георгіевичъ, содерж. частн. учебн. завед. 1-го разр.
19. Дробязко Михаилъ Павловичъ, преп. 1-го Харьк. реальн. учил.
20. Евдокимовъ Николай Николаевичъ, прив.-доц. Харьк. унив.
21. Епифановъ Федоръ Филипповичъ, лаборантъ Харьк. университета.
22. Ерохинъ Петръ Михайловичъ, стипендіатъ Харьк. университета.
23. Запорожецъ Леонидъ Григорьевичъ, преп. Харьк. коммерч. учил.
24. Зворыкинъ Константинъ Алексѣевичъ, бывш. дир. Кіев. полит. инст.
25. Зерновъ Дмитрій Степановичъ, проф. СПБ. техн. института.
26. Ивицкій Е. П., преп. частной гимназіи Давыденко.
27. Кирпичевъ Викторъ Львовичъ, проф., СПБ.
28. Кирьяковъ Иванъ Аѳанасьевичъ, инсп. 3-й Харьк. гимн.
29. Киселевъ Андрей Петровичъ. преп. Воронеж. кадет. корпуса.
30. Клюшниковъ Александръ Андреевичъ, преп. 1-й Харьк. гимн.
31. Кнаббе Владиміръ Сергѣевичъ, проф. Харьк. техн. инст.
32. Косенко Михаилъ Семеновичъ, бывш. преп. Харьк. 4-й гимн.
33. Кудревичъ Борисъ Ивановичъ, ассист. Харьк. астр. обсерв.
34. Кутневичъ Дмитрій Андреевичъ, директ. 2-го Харьк. реальн. учил.
35. Лагутинскій Михаилъ Николаевичъ, прив.-доц. Харьк. унив.
36. Латышевъ Григорій Алексѣевичъ, проф. Харьк. техн. инст.
37. Левицкій Григорій Васильевичъ, попеч. Варшавск. учебн. окр.
38. Маевскій Андрей Васильевичъ, б. дир. Курск. реальн. учил.
39. Малышевъ Николай Ивановичъ, преп. гимн. Шиловой.

40. Мартосъ Б. Н.
41. Марчевская Елена Николаевна, преп. высш. женск. курс.
42. Марчевскій Михаилъ Николаевичъ, окончившій ф.-м. факультетъ.
43. Марцелли Александръ Ивановичъ, преп. 1-й Харьк. гимн.
44. Михайловскій Болеславъ Григорьевичъ, б. преп. Харьк. реальн. учил.
45. Мощенко Василій Николаевичъ, преп. Харьк. коммер. учил.
46. Мухачевъ Петръ Матвѣевичъ, директ. Харьк. техн. инст.
47. Назаревскій Яковъ Михайловичъ, преп. частной гимн.
48. Нечаевъ Александръ Ивановичъ, преп. гимн. Шиловой.
49. Педаевъ Дмитрій Кондратьевичъ, ассистентъ метеор. станціи.
50. Петренко Георгій Ивановичъ, прив.-доц. Харьк. унив.
51. Подпрятовъ Николай Михайловичъ.
52. Подтягинъ Николай Евгеньевичъ, стипендіатъ Харьк. университета.
53. Пономаревъ Ростиславъ Дмитріевичъ, преп. 1-й Харьк. гимн.
54. Проскурниковъ Николай Васильевичъ, б. преп. Харьк. реальн. учил.
55. Пшеборскій Антонъ Павловичъ, проф. Харьк. универс.
56. Радцигъ Александръ Александровичъ, проф. Кіевск. полит. инст.
57. Раевскій Сергѣй Александровичъ, б. попеч. Харьк. учебн. округа.
58. Рейнботъ Александръ Евгеньевичъ, б. стипендіатъ Харьк. унив.
59. Речинскій Чеславъ Владиславовичъ, прив.-доц. Харьк. унив.
60. Рудневъ Петръ Матвѣевичъ, б. дир. Урюп. реальн. учил.
61. Руссьянъ Цезарь Карловичъ, проф. Харьк. унив.
62. Салтыковъ Николай Николаевичъ, проф. Харьк. унив.
63. Самецкій Рафаилъ Николаевичъ, дир. Усть-Медвѣдицкаго р. учил.
64. Семилѣтовъ Сергѣй Матвѣевичъ, лабор. и ассист. метеор. обсерв.
65. Сикора Іосифъ Іосифовичъ, астрономъ Пулковской обсерваторіи.
66. Синцовъ Дмитрій Матвѣевичъ, проф. Харьк. универ.
67. Синяковъ Германъ Аѳанасьевичъ, преп. 2-й Харьк. гимн.
68. Сонцевъ Андрей Александровичъ, преп. 2-го Харьк. реальн. учил.
69. Струве Людвигъ Оттовичъ, проф. Харьк. унив.
70. Студенцовъ Веніаминъ Александровичъ, дир. 1-го Харьк. р. учил.
71. Тимоѳеевъ Гавріилъ Ефимовичъ, прив.-доц. Харьк. унив.
72. Фесенко Валерій Михайловичъ, преп. 1-й женск. гимн.
73. Флавицкій Николай Михайловичъ, бывш. лабор. Харьк. унив.
74. Флоровъ Петръ Степановичъ, директ. Урюпин. реальн. учил.
75. Чернушенко Иванъ Семеновичъ, преподаватель гимназіи Домбровской.
76. Шепелевъ Павелъ Васильевичъ, преп. Харьков. технол. инст.
77. Шимковъ Андрей Петровичъ, засл. проф. Харьк. унив.
78. Шиховъ Василій Васильевичъ, окружн. инсп. Харьк. учебн. округа.
79. Штукаревъ Иванъ Дмитріевичъ, бывш. преп. 2-й Харьк. гимн.
80. Эренфестъ Павелъ Сигизмундовичъ, проф. Унив., Лейденъ.

D. Члены корреспонденты:

a) русскіе.

1. Васильевъ Александръ Васильевичъ, засл. проф. Казанскаго унив.
2. Егоровъ Дмитрій Өедоровичъ, проф. Московскаго унив.
3. Колосовъ Гурій Васильевичъ, проф. Юрьевскаго унив.
4. Котельниковъ Александръ Петровичъ, проф. Казанскаго унив.
5. Крыловъ Алексѣй Николаевичъ, проф. Морской Академіи.
6. Лахтинъ Леонидъ Кузьмичъ, проф. Московскаго унив.
7. Мещерскій Иванъ Всеволодовичъ, проф. СПБ. политехн. инст.
8. Млодзѣевскій Болеславъ Корнеліевичъ, засл. проф. Моск. унив.
9. Некрасовъ Павелъ Алексѣевичъ, членъ совѣта М. Н. П.
10. Сомовъ Павелъ Осиповичъ, засл. проф. Варшавскаго унив.
11. Тороповъ Константинъ Александровичъ, дир. Оренбург. реальн. уч.
12. Чаплыгинъ Сергѣй Алексѣевичъ, дир. Моск. высш. женск. курсовъ.

b) иностранные.

1. Borel Emile,проф. унив., Парижъ.
2. Cosserat Eugène, проф. Тулузскаго унив.
3. Enriques Federico, проф., Болонскаго университета.
4. Favaro Antonio, проф., Падуя.
5. Fehr Henri, проф. редакторъ «Enseignement mathématique», Женева.
6. Forsyth Alfred Russel, проф., Кэмбриджъ.
7. Fredholm Ivar, проф., Стокгольмъ.
8. Goursat, Edouard, проф., Парижъ.
9. Greenhill A. G., проф., Лондонъ.
10. Hadamard Joseph, проф. въ Сорбоннѣ, Парижъ.
11. Holmgren Erik, проф., Упсала.
12. Hurwitz Adolf, проф. политехникума въ Цюрихѣ.
13. Kneser Adolf, проф. Бреславскаго унив.
14. Korn Arthur, проф. Берлинъ.
15. Laisant C. A., ред. «Intermèd. des Math.», «Nouv. Annales de Math.» etc.
16. Levi-Civita Tullio, проф. унив. Падуя.
17. Lindelöf Ernst, проф. Гельсингфорсъ.
18. Loria Gino, проф. Генуя.
19. Maggi Gian Antonio, проф. Пиза.
20. Osgood W. F. проф., Кэмбриджъ (Масс.).
21. Runge Carl, проф., Гёттингенъ.
22. Schlesinger Ludwig, проф. унив., Гиссенъ.
23. Teixeira Gomes, проф. и дир. полит. инст., Опорто.
24. Zaremba S. проф. Краковскаго унив.

Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur le calcul des probabilités.

Je me propose d'indiquer une démonstration fort simple du théorème suivant de Weierstrass:

Si $F(x)$ est une fonction continue quelconque dans l'intervalle 01, il est toujours possible, quel que petit que soit ε, de déterminer un polynome $E_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ de degré n assez élevé, tel qu' on ait

$$|F(x) - E_n(x)| < \varepsilon$$

en tout point de l'intervalle considéré.

A cet effet, je considère un évenement A, dont la probabilité est égale à x. Supposons qu'on effectue n expériences et que l'on convienne de payer à un joueur la somme $F\left(\frac{m}{n}\right)$, si l'évenement A se produit m fois. Dans ces conditions, l'espérance mathématique E_n du joueur aura pour valeur

$$E_n = \sum_{m=0}^{m=n} F\left(\frac{m}{n}\right) . C_n^m x^m (1-x)^{n-m}. \tag{1}$$

Or, il résulte de la continuité de la fonction $F(x)$ qu'il est possible de fixer un nombre δ, tel que l'inégalité

$$|x - x_0| \leqq \delta$$

entraine

$$\left| F(x) - F(x_0) \right| < \frac{\varepsilon}{2};$$

de sorte que, si $\overline{F}(x)$ désigne le maximum et $\underline{F}(x)$ le minimum de $F(x)$ dans l'intervalle $(x - \delta, x + \delta)$, on a

$$\overline{F}(x) - F(x) < \frac{\varepsilon}{2}, \; F(x) - \underline{F}(x) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2}$$

Soit de plus η la probabilité de l'inégalité $\left| x - \frac{m}{n} \right| > \delta$, et L le maximum de $|F(x)|$ daus l'intervalle 01.

On aura alors

$$\underline{F}(x).(1-\eta) - L.\eta < E_n < \overline{F}(x).(1-\eta) + L.\eta. \tag{3}$$

Mais, en vertu du théorème de Bernoulli, on pourra prendre n assez grand pour avoir

$$\eta < \frac{\varepsilon}{4L}. \tag{4}$$

L'inégalité (3) se mettra donc sucessivement sous la forme

$$F(x) + (\underline{F}(x) - F(x)) - \eta(L + \underline{F}(x)) < E_n < F(x) + (\overline{F}(x) - F(x)) + \eta(L - \overline{F}(x))$$

et ensuite

$$F(x) - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{2L}{4L}\varepsilon < E_n < F(x) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2L}{4L}\varepsilon;$$

donc

$$|F(x) - E_n| < \varepsilon \tag{5}$$

Or E_n est manifestement un polynome de degré n.

Le théorème est donc démontré.

J'ajouterai seulement deux remarques.

Les polynomes approchés $E_n(x)$ sont surtout commodes, il me semble, lorsqu'on connait exactement ou approximativement les valeurs de $F(x)$ pour $x = \frac{m}{n}$ $(m = 0,\ 1,\ ..n)$.

La formule (1) et l'inégalité (5) montrent que, quelle que soit la fonction continue $F(x)$, on a

$$F(x) = \lim_{n=\infty} \sum_{m=0}^{m=n} F\left(\frac{m}{n}\right).\, C_n^m x^m (1-x)^{n-m}.$$

S. Bernstein.

Объ интегралахъ общихъ многимъ задачамъ механики.

Я. Шохата.

Въ двухъ мемуарахъ, опубликованныхъ въ 1856 и 1858 гг. Бертранъ [1]) показалъ, что при извѣстныхъ условіяхъ относительно силъ существуютъ интегралы, общіе многимъ задачамъ на движеніе точки или системы точекъ, и далъ изящный методъ для разысканія какъ силовыхъ условій необходимыхъ и достаточныхъ, такъ и самыхъ интеграловъ. Методъ этотъ однако приложимъ лишь къ тому частному случаю, когда силы зависятъ только отъ координатъ точекъ.—Коркинъ [2]) свелъ этотъ вопросъ къ интегрированію системы уравненій въ частныхъ производныхъ и, прилагая свою методу, обобщилъ его, введя въ выраженія для силъ и скорость.—Интересны статьи по этому вопросу, принадлежащія г. V. Amato [3]).—Настоящая статья имѣетъ цѣлью съ помощью методы Якоби изучить: 1) движеніе свободной точки въ плоскости при самыхъ общихъ условіяхъ, т. е. когда силы зависятъ явно отъ координатъ, скорости и времени, 2) движеніе на поверхности и 3) движеніе въ пространствѣ—послѣдніе два случая при силахъ Бертрана.

I. Движеніе въ плоскости.

§ 1. Разысканіе интеграловъ, общихъ двумъ механическимъ задачамъ (X, Y) и (X_1, Y_1), можно свести къ интегрированію слѣдующей системы уравненій въ частныхъ производныхъ: [2])

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t}+x'\frac{\partial \phi}{\partial x}+y'\frac{\partial \phi}{\partial y}+X\frac{\partial \phi}{\partial x'}+Y\frac{\partial \phi}{\partial y'}=0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial t}+x'\frac{\partial \phi}{\partial x}+y'\frac{\partial \phi}{\partial y}+X_1\frac{\partial \phi}{\partial x'}+Y_1\frac{\partial \phi}{\partial y'}=0 \end{aligned}\right\} \quad . \ . \ . \ . \quad (\alpha)$$

---

[1]) Journal de Mathématiques.

[2]) О совокупныхъ уравненіяхъ съ частными производными и нѣкоторыхъ вопросахъ механики (Спб. 1867); Mathematische Annalen 1870.

[3]) Atti del Academia Gioenia vol. XIV, XVII; Giornale di Battaglini 1901.

($x'=\frac{dx}{dt}$, $y'=\frac{dy}{dt}$, $\phi=\text{Const}$ — искомое общее рѣшеніе).

$$\left.\begin{aligned} A\phi &= \frac{\partial\phi}{\partial t}+x'\frac{\partial\phi}{\partial x}+y'\frac{\partial\phi}{\partial y}+l\,\frac{\partial\phi}{\partial y'}=0 \\ \text{или}\quad & \\ B\phi &= \qquad\qquad\qquad\quad \frac{\partial\phi}{\partial x'}+k\,\frac{\partial\phi}{\partial y'}=0 \end{aligned}\right\}\;.\;.\;.\;.\;.\;(\beta)$$

$$k=\frac{Y-Y_1}{X-X_1},\; l=\frac{XY_1-YX_1}{X-X_1}=Y-kX=Y_1-kX_1.$$

Можно всегда предположить $\frac{\partial\phi}{\partial x'}\neq 0$, $\frac{\partial\phi}{\partial y'}\neq 0$ *) или, что то же, $X\neq X_1$, $Y\neq Y_1$. Функціи k и l суть, слѣдов., вполнѣ опредѣленныя

---

*) Составимъ, пользуясь системой (α), уравненіе:

$$(X-X_1)\frac{\partial\phi}{\partial x'}+(Y-Y_1)\frac{\partial\phi}{\partial y'}=0,$$

изъ котораго непосредственно заключаемъ, что если одинъ изъ искомыхъ интеграловъ не зависитъ отъ y', наприм., то и всѣ остальные не будутъ зависѣть, и мы будемъ имѣть

$$X=X_1.$$

Далѣе, дифференцированіемъ по x' выводимъ

$$\frac{\partial^2 X}{\partial y'^2}=0,\quad X=X_1=my'+n,$$

гдѣ m и n отъ y' не зависитъ. Поэтому (α) разлагается на два слѣдующихъ уравненія

$$\left.\begin{aligned} X^1\phi &= \frac{\partial\phi}{\partial t}+x'\frac{\partial\phi}{\partial x}+n\,\frac{\partial\phi}{\partial x'}=0 \\ X^2\phi &= \qquad\quad\;\; \frac{\partial\phi}{\partial y}+m\,\frac{\partial\phi}{\partial x'}=0 \end{aligned}\right\}$$

Составивъ уравненіе $(X^1\phi,\, X^2\phi)=0$, мы непосредственно выводимъ

$$m=0,$$
$$\frac{\partial n}{\partial y}=0,$$
$$X=X_1=n(t,\,x,\,x').$$

Вопросъ свелся, слѣдов., къ разысканію интеграловъ уравненія

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}+x'\frac{\partial\phi}{\partial x}+n\frac{\partial\phi}{\partial x'}=0$$

или, что то же, двухъ первыхъ интеграловъ обыкновеннаго уравненія

$$\frac{d^2x}{dt^2}=X(t,\,x,\,x').$$

и конечныя функціи, зависящія отъ t, x, y, x', y', причемъ k *не обращается въ нуль.* Эти функціи, какъ и всѣ другія, которыми намъ придется пользоваться, мы будемъ предполагать непрерывными и имѣющими частныя производныя.

Мы будемъ различать два случая: одного или двухъ общихъ интеграловъ.

а) Случай одного общаго интеграла.

§ 2. Въ этомъ случаѣ система (α) должна свестись къ замкнутой системѣ четырехъ уравненій. Поэтому уравненія

$$\left.\begin{aligned} C\phi &= (B\phi,\ A\phi) = \frac{\partial\phi}{\partial x} + k\frac{\partial\phi}{\partial y} + m\frac{\partial\phi}{\partial y'} = 0 \\ D\phi &= (A\phi,\ C\phi) = (Ak - m)\frac{\partial\phi}{\partial x'} + (Am - Cl)\frac{\partial\phi}{\partial y'} = 0 \\ E\phi &= (B\phi,\ C\phi) = Bk\frac{\partial\phi}{\partial x'} + (Bm - Ck)\frac{\partial\phi}{\partial y'} = 0 \end{aligned}\right\} \ldots (\gamma)$$

$$m = Bl - Ak$$

сводятся къ двумъ только независимымъ, т. е.

$$\frac{Ak - m}{Bk} = \frac{Am - Cl}{Bm - Ck}.$$

Замѣтимъ, что соотношенія

$$Bk = Ak - m = 0$$

не могутъ имѣть мѣста одновременно, ибо изъ нихъ слѣдуетъ

$$Bm - Ck = B(Ak) - B(Ak) + A(Bk) = 0,$$

а, слѣдов., уравненія (α) и (γ) свелись бы къ тремъ независимымъ, а не къ четыремъ, какъ того требуетъ разсматриваемый случай.

Слѣдуя Коркину, остановимся на частномъ случаѣ, когда функція $k = \dfrac{Y - Y_1}{X - X_1}$ удовлетворяетъ уравненію вида $B\phi = 0$, т. е.

$$Ek = \frac{\partial k}{\partial x'} + k\frac{\partial k}{\partial y'} = 0 \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

[Соотношеніе это, очевидно, выполнено для силъ Бертрана].

Обозначивъ чрезъ ψ произвольную функцію, выводимъ

$$\psi(t,\ x,\ y,\ k,\ \omega) = 0,$$

$$\omega = y' - kx'.$$

Въ дальнѣйшемъ будемъ различать два предположенія, соотвѣтственно тому, содержитъ ли ψ перемѣнную k или нѣтъ.

a) $\dfrac{\partial \psi}{\partial k} \neq 0$.

Въ этомъ случаѣ, обозначая черезъ φ произвольную функцію, имѣемъ

$$k = \varphi(t,\ x,\ y,\ \omega).$$

Величины t, x, y, ω, утожествляющія уравненіе $Bf = 0$, мы примемъ за новыя перемѣнныя.

Такъ какъ уравненіе $Ef = 0$ должно удовлетвориться тожественно, разъ $Bk = 0$, то необходимо имѣемъ

$$Bm - Ck = B(m - Ak) = 0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

а слѣдов., если 2λ означаетъ произвольную функцію, то

$$Ak - m = 2\lambda(t,\ x,\ y,\ \omega). \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Замѣтимъ, что λ *не можетъ равняться нулю.*

Развернемъ (3), подставивъ туда $y' = \omega + \varphi x'$. Получимъ

$$\frac{\partial l}{\partial x'} = \frac{2\left[\dfrac{\partial \varphi}{\partial t} + \omega\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} - \lambda + x'\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + \varphi\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} - \lambda\dfrac{\partial \varphi}{\partial \omega}\right) + l\dfrac{\partial \varphi}{\partial \omega}\right]}{1 + x'\dfrac{\partial \varphi}{\partial \omega}}, \quad \ldots \quad (4)$$

обыкновенное дифференціальное уравненіе относительно x', которое легко интегрируется и даетъ:

$$l = Y - \varphi X = Y_1 - \varphi X_1 = P + 2Qx' + Rx'^2, \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

здѣсь P означаетъ произвольную функцію отъ t, x, y, ω, выраженія для Q и R суть слѣдующія:

$$\left.\begin{aligned} Q &= P\frac{\partial \varphi}{\partial \omega} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \omega\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \lambda \\ R &= (Q - \lambda)\frac{\partial \varphi}{\partial \omega} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \varphi\frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Система $Af = Bf = Cf = 0$ легко теперь преобразуется къ новымъ перемѣннымъ въ нижеслѣдующую:

$$\left.\begin{aligned} X^1\phi &= \frac{\partial\phi}{\partial t} + \omega\frac{\partial\phi}{\partial y} + P\frac{\partial\phi}{\partial\omega} = 0 \\ X^2\phi &= \frac{\partial\phi}{\partial x} + \varphi\frac{\partial\phi}{\partial y} + (Q-\lambda)\frac{\partial\phi}{\partial\omega} = 0 \\ X^3\phi &= 2\lambda\frac{\partial\phi}{\partial y} + S\frac{\partial\phi}{\partial\omega} \qquad\qquad = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (\delta)$$

$$S = X^1(Q-\lambda) - X^2P.$$

Такъ какъ эта система необходимо есть замкнутая, то составивъ уравненія $(X^1\phi, X^3\phi) = 0$ и $(X^2\phi, X^3\phi) = 0$, выводимъ

$$\left.\begin{aligned} \frac{2X^1\lambda - S}{2\lambda} &= \frac{X^1S - X^3P}{S} \\ \frac{2X^2\lambda - X^3\varphi}{2\lambda} &= \frac{X^2S - X^3(Q-\lambda)}{S} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (7)$$

уравненія 3-го порядка относительно φ.

Интегралъ, опредѣляемый системой (δ), *даетъ* [*будучи приравненъ постоянной*] *рѣшеніе общее всѣмъ тѣмъ задачамъ, въ которыхъ силы удовлетворяютъ соотношеніямъ* (5), (6), (7).

Изъ полученныхъ результатовъ непосредственно вытекаетъ то, что дано Коркинымъ $\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\partial\varphi}{\partial\omega} = \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial P}{\partial\omega} = 0\right]$ и Бертраномъ $\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\partial\varphi}{\partial\omega} = 0, \; l = P(x, y)\right]$.

Если S обращается тожественно въ нуль, то соотношенія (7) теряютъ смыслъ, но изъ (δ) мы заключаемъ, что тогда должно имѣть

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = 0,$$

и остается интегрировать *нормальную* систему

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\phi}{\partial t} + P\frac{\partial\phi}{\partial\omega} &= 0 \\ \frac{\partial\phi}{\partial x} + (Q-\lambda)\frac{\partial\phi}{\partial\omega} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (\delta')$$

гдѣ очевидно

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial(Q-\lambda)}{\partial y} = 0.$$

Это какъ разъ имѣетъ мѣсто въ случаѣ движенія точки въ сопротивляющейся средѣ, разсмотрѣнномъ Коркинымъ.

b) $\frac{\partial\psi}{\partial k}=0$.

Очевидно можно положить

$$\omega=y'-kx'=f(t,\ x,\ y).$$

Принявъ величины t, x, y, $k=\frac{y'-f(t,\ x,\ y)}{x'}$ за новыя перемѣнныя и разсуждая подобно предыдущему, мы легко получимъ

$$l=Y-\frac{y'-f(t,\ x,\ y)}{x'}X=P+2Qx'+Rx'^2\ .\ .\ .\quad(8)$$

$$\left.\begin{aligned}P&=\frac{\partial f}{\partial t}+f\frac{\partial f}{\partial y}\\ Q&=\frac{\partial f}{\partial x}+k\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda(t,\ x,\ y,\ k)\end{aligned}\right\}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\quad(9)$$

R и λ суть произвольныя функціи отъ t, x, y, k, причемъ $\lambda \neq 0$.

Система (β) преобразовывается къ новымъ перемѣннымъ:

$$\left.\begin{aligned}X^1\phi&=\frac{\partial\phi}{\partial t}+f\frac{\partial\phi}{\partial y}+(Q+\lambda)\frac{\partial\phi}{\partial k}=0\\ X^2\phi&=\frac{\partial\phi}{\partial x}+k\frac{\partial\phi}{\partial y}+R\frac{\partial\phi}{\partial k}=0\\ X^3\phi&=2\lambda\frac{\partial\phi}{\partial y}+S\frac{\partial\phi}{\partial k}\qquad=0\end{aligned}\right\}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\quad(\varepsilon)$$

$$S=X^1R-X^2(Q-\lambda).$$

Отсюда легко вывести соотношенія, аналогичныя (7).

Замѣчаніе.

При силахъ, не зависящихъ явно отъ времени, можно искать одно общее рѣшеніе, не зависящее отъ времени, положивъ въ (δ) или (ε) $\frac{\partial\phi}{\partial t}=0$. Для существованія такого интеграла очевидно необходимо, чтобы

$$\left.\begin{aligned}\frac{2\lambda}{\omega}&=\frac{S}{p}\qquad\text{(для сист. }(\delta))\\ \frac{2\lambda}{f}&=\frac{S}{Q+\lambda}\quad\text{(для сист. }(\varepsilon))\end{aligned}\right\}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\quad(10)$$

b) Случай двухъ общихъ рѣшеній.

§ 3. Въ этомъ случаѣ уравненія $D\phi=E\phi=0$ (см. (γ)) даютъ очевидно тожественный нуль, т. е.

$$Bk = Bm - Ck = Ak - m = Am - Cl = 0 \quad . \; . \; . \; . \quad (11)$$

Первыя три изъ этихъ соотношенiй позволяютъ примѣнить всѣ результаты предыдущаго параграфа, положивъ тамъ $\lambda = 0$, послѣ чего останется соотношенiе

$$Am - Cl = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (12)$$

Пусть будетъ сначала

$$y' - kx' = f(t, \; x, \; y).$$

Сдѣлавъ $\lambda = 0$ въ (ε), (8), (9), получимъ

$$l = Y - \frac{y' - f(t, \, x, \, y)}{x'} = \frac{\partial f}{\partial t} + f \frac{\partial f}{\partial y} + 2\left(\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y}\right)x' + R(t, \, x, \, y, \, k)x'^2 \; . \; . (13)$$

Такъ какъ $\dfrac{\partial \phi}{\partial k} \neq 0$, то необходимо имѣемъ:

$$S = X^1R - X^2\left(\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 0$$

или, развернувъ,

$$\frac{\partial R}{\partial t} + f\frac{\partial R}{\partial y} + \left(\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial R}{\partial k} - R\frac{\partial f}{\partial y} = 2k\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \; . \; . \; . (14)$$

уравненiе, которое равносильно (12), какъ не трудно провѣрить.

Пусть f не зависитъ отъ t (какъ у Бертрана и Коркина). Не трудно убѣдиться, что функцiя

$$\sigma = \frac{2k\dfrac{\partial f}{\partial x}}{f} + k^2\frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}}{f} - f\int\frac{\partial^2\left(\dfrac{1}{f}\right)}{\partial x^2}\,dy$$

есть частное рѣшенiе уравненiя (13).

Полагаемъ поэтому $R = \sigma + \varrho$ и легко находимъ

$$R = \sigma + f\mu(\alpha, \; \beta, \; x) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (15)$$

гдѣ

$$\alpha = \frac{k}{f} + \int\frac{\partial\left(\dfrac{1}{f}\right)}{\partial x}\,dy$$

$$\beta = t - \int\frac{dy}{f},$$

μ есть знакъ произвольной функцiи

Остается теперь интегрировать *нормальную* систему (см. ε),

$$\left.\begin{aligned} X^1\phi &= \frac{\partial\phi}{\partial t} + f\frac{\partial\phi}{\partial y} + \left(\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial\phi}{\partial k} = 0 \\ X^2\phi &= \frac{\partial\phi}{\partial x} + k\frac{\partial\phi}{\partial y} + R\frac{\partial\phi}{\partial k} \qquad\qquad\quad = 0. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \mathrm{I}$$

которая съ помощью (15) сводится къ *одному* уравненію

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} + \mu(\alpha,\ \beta,\ x)\frac{\partial\phi}{\partial\alpha} - \alpha\frac{\partial\phi}{\partial\beta} = 0,$$

или, что тоже, къ обыкновенному уравненію

$$\frac{d^2\beta}{dx^2} = -\mu\left(-\frac{d\beta}{dx},\ \beta,\ x\right).$$

При силахъ, не зависящихъ отъ времени явно, функція μ не зависитъ отъ β, и мы заключаемъ, что *интегралъ, содержащій время, получается изъ другого квадратурой.*

Предположимъ теперь

$$k = \varphi(t,\ x,\ y,\ \omega)$$

$$\omega = y' - kx'.$$

Полагаемъ $\lambda = 0$ въ (5, 6) и (δ), имѣемъ

$$l = Y - \varphi X = P + 2Qx' + Rx'^2 \quad \ldots\ldots\ldots (16)$$

$P(t,\ x,\ y,\ \omega)$ остается произвольной функціей,

$$\left.\begin{aligned} Q &= P\frac{\partial\varphi}{\partial\omega} + \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \omega\frac{\partial\varphi}{\partial y} \\ R &= Q\frac{\partial\varphi}{\partial\omega} + \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \varphi\frac{\partial\varphi}{\partial y} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (16')$$

Общіе интегралы опредѣляются *нормальной* системой (см. δ):

$$\left.\begin{aligned} X^1\phi &= \frac{\partial\phi}{\partial t} + \omega\frac{\partial\phi}{\partial y} + P\frac{\partial\phi}{\partial\omega} = 0 \\ X^2\phi &= \frac{\partial\phi}{\partial x} + \varphi\frac{\partial\phi}{\partial y} + Q\frac{\partial\phi}{\partial\omega} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \mathrm{II}$$

Выраженіе $S = X^1Q - X^2P$ очевидно равно нулю, что приводитъ къ слѣдующему уравненію

$$-\frac{\partial P}{\partial t}\frac{\partial \varphi}{\partial \omega}+\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial P}{\partial y}\left(\varphi-\omega\frac{\partial \varphi}{\partial \omega}\right)+\frac{\partial P}{\partial \omega}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}+\omega\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)=\omega^2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}+$$

$$+2\omega\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y\partial t}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}+P\left(2\omega\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y\partial \omega}+\frac{\partial \varphi}{\partial y}+2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t\partial \omega}\right)+P^2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \omega^2}\ \ldots (17)$$

[замѣнивъ здѣсь P на $P\omega$, получимъ уравненіе, которое разсматривали и интегрировали въ интересной формѣ Коркинъ [1]) и Амато [2]). Уравненіе это при силахъ Бертрана распадается на рядъ другихъ, изъ которыхъ легко получаются результаты Коркина.

Замѣчаніе.

Система (II) показываетъ, что одинъ, по крайней мѣрѣ, изъ искомыхъ интеграловъ содержитъ явно время. Поэтому для разысканія двухъ общихъ рѣшеній, не содержащихъ оба времени, нужно обратиться къ системѣ (I), причемъ очевидно придется положить тамъ $f=0$. Но тогда

$$k=\frac{y'}{x'},$$

и силы удовлетворяютъ условію

$$x'Y-y'X=R\left(x,\ y,\ \frac{y'}{x'}\right).$$

Общія рѣшенія опредѣляются уравненіемъ (см. I)

$$\frac{d^2y}{dx^2}=R\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx}\right).$$

II. Движеніе по поверхности.

Этотъ случай движенія сводится къ предыдущему, если координаты точекъ поверхности выразить, какъ функціи двухъ параметровъ. Слѣдуя Коркину [3]), воспользуемся симметрическими координатами. Обозначивъ ихъ черезъ (u, v), линейный элементъ черезъ ds и черезъ $F(u,\ v)=e^{\rho}$ — нѣкоторую функцію, пока неопредѣленную, имѣемъ

$$ds^2=2F du dv=2e^{\rho}du dv,$$

---

[1]) Mathematische Annalen 1870.

[2]) Atti del Acad. Gioenia vol. XIV; Giornale di Battaglini 1901.

[3]) Mathemat. Annalen. 1870.

Далѣе полагаемъ [1])

$$\sum_{x,y,z} X\frac{\partial x}{\partial u}=M$$

$$\sum_{x,y,z} X\frac{\partial x}{\partial v}=N$$

$$U=\frac{N}{e^{\varrho}}-u'^2\frac{\partial\varrho}{\partial u}$$

$$V=\frac{M}{e^{\varrho}}-v'\frac{\partial\varrho}{\partial v}$$

$$\left.\begin{aligned} &k=\frac{V-V_1}{U-U_1}=\frac{M-M_1}{N-N_1}\\ &l=V-kU=V_1-kU_1=n-\frac{\partial\varrho}{\partial v}v'^2+k\frac{\partial\varrho}{\partial u}u'^2\\ &n=\frac{M-kN}{e^{\varrho}} \end{aligned}\right\}\quad\ldots\quad(18)$$

Вопросъ сведется къ интегрированію системы (β) [1]).

Наиболѣе простой—это случай существованія *двухъ общихъ интеграловъ, независящихъ отъ времени.* Согласно замѣчанію предыдущаго параграфа, имѣемъ для силъ условіе

$$u'M-v'N=u'^3\Pi\left(u,\ v,\ \frac{v'}{u'}\right)F(u,\ v),$$

Π и F остаются вполнѣ произвольными функціями.

Характеръ поверхности здѣсь, слѣдовательно, роли не играетъ.

Остается найти два первыхъ интеграла обыкновеннаго уравненія

$$\frac{d^2v}{du^2}=\Pi\left(u,\ v,\ \frac{dv}{du}\right)-\left(\frac{dv}{du}\right)^2\frac{\partial lgF}{dv}+\frac{dv}{du}\,\frac{\partial lgF}{du};$$

исключивъ изъ нихъ $\frac{dv}{du}$, найдемъ траекторію точки, содержащую двѣ произвольныя постоянныя [2]).

Соотношенія и формулы предыдущихъ параграфовъ вполнѣ сюда примѣнимы, но они много даютъ, если взять силы Бертрана, зависящія только отъ координатъ.

---

[1]) Mathemat. Annalen 1870.

[2]) Коркинъ: О совокупныхъ уравненіяхъ etc.

Тогда очевидно имѣемъ

$$k=\varphi(u,\ v).$$

$$l=p(u,\ v)-\frac{\partial\varrho}{\partial v}\,\omega^2-\varphi\omega\frac{\partial\varrho}{\partial v}\,u'+\varphi\left(\frac{\partial\varrho}{\partial u}-\varphi\,\frac{\partial\varrho}{\partial v}\right)u'^2 \quad \ldots (19)$$

$$\omega=v'-\varphi u'$$

Разсмотримъ послѣдовательно слѣдующіе случаи

а) Случай двухъ общихъ рѣшеній.

§ 5. Уравненіе (17), если туда вставить изъ (19)

$$P=p-\frac{\partial\varrho}{\partial v}\,\omega^2,$$

распадается на рядъ другихъ, которыя легко даютъ:

$$F=e^{\varrho}=a(u)\,.\,b(v)$$

$$\varphi=\frac{Aa}{Bb}$$

$$p=\frac{f(\pi)}{b}\,,\ \pi=A\int adu-B\int bdv,$$

f, a, b — произвольныя функціи, A, B — произвольныя постоянныя.

Силы, слѣдовательно, удовлетворяютъ условію

$$\frac{M}{Aa(u)}-\frac{N}{Bb(v)}=f(A\int adu-B\int bdv)$$

Пользуясь системой (II), найдемъ общія рѣшенія въ формѣ [1])

$$\lambda_1=\frac{1}{2}\left(\frac{d\pi}{dt}\right)^2-\int f(\pi)\,d\pi=\text{Const}=d_1$$

$$\lambda_2=-t+\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{d\pi}{\sqrt{d_1+\int f(\pi)\,d\pi}}=\text{Const.}$$

Второе рѣшеніе выводится изъ перваго квадратурой.

Мы нашли, что

$$ds^2=2a(u)b(v)dudv,$$

а это показываетъ, *что поверхность наша развертывающаяся* [1]).

---

[1]) Коркинъ, Mathem. Annalen, 1870.

b) Случай одного общаго интеграла безъ времени.

На основанiи соотношенiй (5, 6, 19) имѣемъ

$$\left.\begin{aligned} P &= p - \frac{\partial \varrho}{\partial v}\,\omega^2 \\ Q &= \omega\,\frac{\partial \varphi}{\partial v} - \lambda = -\varphi\omega\,\frac{\partial \varrho}{\partial v} \\ \lambda &= \omega\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \varphi\,\frac{\partial \varrho}{\partial v}\right) \\ R &= \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \varphi\,\frac{\partial \varphi}{\partial v} = \varphi\left(\frac{\partial \varrho}{\partial u} - \varphi\,\frac{\partial \varrho}{\partial v}\right). \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (20)$$

Далѣе, примѣняя сюда первое изъ соотношенiй (10), имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial u} + \varphi\,\frac{\partial p}{\partial v} + p\left(3\,\frac{\partial \varphi}{\partial v} + 4\varphi\,\frac{\partial \varrho}{\partial v}\right) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial \varrho}{\partial u} - \varphi\,\frac{\partial \varrho}{\partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial v}\right) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (21)$$

Отсюда найдемъ, называя черезъ $a(u)$, $b(v)$, Π, f произвольныя функцiи,

$$\left.\begin{aligned} F = e^{\varrho} &= \Pi(a+b)\,\frac{da}{du}\cdot\frac{db}{dv} \\ \varphi &= \frac{\frac{da}{du}}{\frac{db}{dv}} \\ p &= \frac{f(a-b)e^{\Pi(a+b)}}{\frac{db}{dv}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (22)$$

Условiе для силъ

$$\frac{M}{\frac{da}{du}} - \frac{N}{\frac{db}{dv}} = f(a-b)e^{\Pi(a+b)}$$

Искомый интегралъ опредѣляется изъ системы (δ)

$$\frac{1}{2}\left[e^{\,\Pi(a+b)}\,\frac{d\pi}{dt}\right]^2 - \int f(\pi)\,d\pi = \text{Const}, \quad \pi = a(u) - b(v).$$

Ясно, что функцiя $\Pi(a+b)$ не приводится къ постоянной (ср. § 5a).

Наша поверхность наложима на поверхность вращенія [1]), ибо положивъ

$$u_1 = a(u), \quad v_1 = b(v),$$

имѣемъ

$$ds^2 = 2F(u_1 + v_1)\, du_1 dv_1$$

Найденный интегралъ принимаетъ интересный видъ для *поверхности развертывающейся.*

Имѣемъ тогда

$$\frac{\partial^2 \varrho}{\partial u \partial v} = 0$$

и, пользуясь предыдущими соотношеніями, находимъ для силъ

$$\frac{[m(u) + C]M}{\frac{dm}{du}} - \frac{[n(v) + B]N}{\frac{dn}{dv}} = \frac{1}{(m+c)^3} f\left(\frac{n+B}{m+C}\right),$$

f, m, n — знаки произвольныхъ функцій, B и C постоянныя.

Общее рѣшеніе представится въ видѣ

$$\frac{1}{2}\left[(m+C)\frac{dn}{dt} - (n+B)\frac{dm}{dt}\right]^2 - \int f(\pi)\, d\pi = \text{Const},$$

$$\pi = \frac{n+B}{m+C}.$$

Мы такимъ образомъ нашли *обобщеніе на поверхности интеграла площадей.*

Замѣчаніе. Не трудно провѣрить, что предположеніе

$$S = X^1(Q - \lambda) - X^2 P = 0$$

входитъ, какъ частный случай, въ разсмотрѣнное нами: нужно лишь положить въ только что полученныхъ формулахъ: $f = 0$, $\frac{dn}{dv} = 1$, что даетъ интегралъ площадей.

c) Случай одного общаго рѣшенія съ временемъ.

§ 6. Это самый сложный случай, который не поддается, какъ увидимъ, полному рѣшенію.

---

[1]) Ср. цитированные мемуары Бертрана (у него иная система координатъ).

Функціи P, Q, λ, выраженія которыхъ даны выше (20), удовлетворяютъ соотношеніямъ (7), причемъ

$$\left.\begin{aligned}-S=M+N\omega^2=\frac{\partial p}{\partial u}+\varphi\frac{\partial p}{\partial v}+p\left(2\psi-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)+\omega^2\left(2\varphi\frac{\partial\varrho}{\partial v}+\frac{\partial\psi}{\partial v}-\frac{\partial^2\varrho}{\partial u\partial v}\right)\\ \psi=\frac{\partial\varphi}{\partial u}+\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial v}\end{aligned}\right\}\ldots(23)$$

Замѣтимъ, что $\psi \mp 0$, ибо мы имѣли (20)

$$\lambda=\psi\omega\mp 0.$$

Развернувъ соотношенія (7), получимъ рядъ уравненій:

$$\left.\begin{aligned}&M(M+2p\psi)=0\\ &M\left(2\frac{\partial\psi}{\partial v}-2\psi\frac{\partial\varrho}{\partial v}+N\right)+N(2p\psi+M)=2\psi\left(\frac{\partial M}{\partial v}+2pN+2M\frac{\partial\varrho}{\partial v}+2\psi\frac{\partial p}{\partial v}\right)\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}\right\}\ldots(24)$$

(остальныя опускаемъ).

Сюда присоединяемъ еще послѣднее изъ уравненій (20)

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}+\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial v}=\varphi\left(\frac{\partial\varrho}{\partial u}-\varphi\frac{\partial\varrho}{\partial v}\right).\ \ldots\ldots\ (24)$$

Прежде всего замѣтимъ, что предположеніе

$$p=0$$

приводитъ къ очень сложнымъ уравненіямъ, мы его поэтому оставимъ въ сторонѣ. Далѣе, не трудно провѣрить, что приравнявъ нулю выраженіе $M+2p\psi$, мы попадаемъ на разсмотрѣнный уже случай одного общаго рѣшенія безъ времени. Остается, слѣдовательно, предположить

$$M=\frac{\partial p}{\partial u}+\varphi\frac{\partial p}{\partial v}+p\left(2\psi-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)=0,$$

$$p\mp 0.$$

Разсмотримъ сначала болѣе частное предположеніе, именно

$$S=0,$$

что приводитъ къ уравненію

$$N=0.$$

Развернувъ выраженіе для N, найдемъ легко

$$\left.\begin{aligned} &\varrho = a(u) + m(u)n(v) \\ &\frac{\partial\varphi}{\partial u} = \varphi\left(\frac{da}{du} + n\frac{dm}{du} - \frac{1}{m}\frac{dm}{du}\right) + \varphi^2 m\frac{dm}{du} \\ &\frac{\partial\varphi}{\partial v} = \frac{1}{m}\frac{dm}{du} - 2m\varphi\frac{dm}{dv}\,. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (25)$$

Ясно, что φ опредѣлится изъ *алгебраическаго уравненія 2-ой степени*. Мы его не приводимъ въ виду его сложности.

Если добавить еще допущеніе, *что наша поверхность развертывающаяся*, мы легко найдемъ общій интегралъ въ видѣ

$$-t + \frac{1}{D}\left[(m+C)\frac{dn}{dt} - (n+B)\frac{dm}{dt}\right] = \mathrm{Const}$$

гдѣ $m(u)$ и $n(v)$ суть произвольныя функціи, B, C, D—постоянныя ($D \neq 0$).

Силы удовлетворяютъ условію

$$\frac{m+C}{\dfrac{dm}{du}}M - \frac{n+B}{\dfrac{dn}{dv}}N = D.$$

Предположимъ теперь $N \neq 0$.

Второе изъ уравненій (24) приводится къ виду

$$Np + 2\psi\frac{\partial p}{\partial v} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

пользуясь которымъ, мы изъ другихъ уравненій (24) выводимъ:

$$\frac{\partial p}{\partial v} + p\frac{\partial\varrho}{\partial v} = a(u) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (26)$$

Представивъ уравненія $M = 0$ подъ видомъ

$$\frac{\partial p}{\partial u} - \varphi\frac{\partial p}{\partial v} + \frac{2a\varphi}{p} + \frac{\partial\varphi}{\partial v} = 0$$

легко докажемъ, что функція $a(u)$ приводится къ постоянной:

$$a(u) = \mathrm{Const} = A.$$

Пользуясь уравненіями (26), (27) и послѣднимъ (24), найдемъ

$$\left.\begin{aligned}\varphi &= \frac{a(u)+A\int e^{\rho}dv}{b(v)-A\int e^{\rho}du}\\ p &= \frac{a(u)+A\int e^{\rho}dv}{e^{\rho}}\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (28)$$

$a(u)$ и $b(v)$ — произвольныя функціи.

Остается лишь подставить найденныя для p и φ выраженія въ послѣднее уравненіе (24). Однако полученное уравненіе намъ удалось проинтегрировать только при допущеніи

$$A=0.$$

Полученные при такомъ допущеніи результаты можно формулировать такъ:

Если силы удовлетворяютъ условію

$$\frac{M}{a(u)}-\frac{N}{b(v)}=0,$$

и если линейный элементъ поверхности выражается черезъ

$$ds^2=2a(u)b(v)e^{\mu\int(adu+bdv)}\,dudv,$$

(μ — знакъ произвольной функціи), то имѣетъ мѣсто интегралъ

$$-t+e^{\mu(\alpha)}\frac{d\beta}{dt}=\mathrm{Const}$$

гдѣ

$$\alpha=\int(adu+bdv)$$

$$\beta=\int(bdv-adu),$$

функція $\mu(\alpha)$ не можетъ привестись къ постоянной (ср. § 5,a).

Наша поверхность наложима на поверхность вращенія.

§ 7. Вышеприведенные результаты легко приложить къ случаю движенія точки по поверхности въ сопротивляющейся средѣ, уже изученному Коркинымъ для плоскости [1]). Предполагая по предыдущему силы зависящими только отъ координатъ точки, полагаемъ

$$\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}=c.$$

Пусть далѣе функція $\varphi(c)$ характеризуетъ сопротивленіе среды.

Положивъ

$$\frac{\varphi(c)}{c}=f(c),$$

---

[1]) Коркинъ „О совокупныхъ уравненіяхъ".

мы напишемъ уравненія движенія точки въ симметрическихъ координатахъ (ср. § 4) такъ:

$$\frac{d^2u}{dt^2} = U = \frac{N}{e^\varrho} - \frac{\partial\varrho}{\partial u} u'^2 - e^\varrho u' f(2e^\varrho u'v')$$

$$\frac{d^2v}{dt^2} = V = \frac{M}{e^\varrho} - \frac{\partial\varrho}{\partial v} v'^2 - e^\varrho v' f(2e^\varrho u'v')$$

Введя по предыдущему функціи ω, k и l и помня полученное для l выраженіе, заключаемъ, что f можетъ содержать степени u' не выше второй, для чего необходимо имѣть

$$f(c) = a_0 + a_1 c,$$

a_0 и a_1 суть постоянныя.

Далѣе, легко показать (съ помощью выраженія для l), что

$$a_1 = 0,$$

$$f(c) = a_0,$$

$$\phi(c) = a_0 c.$$

Сопротивленіе среды, слѣдовательно, пропорціонально первой степени скорости.

Примѣняя теперь разсужденія предыдущихъ параграфовъ, выводимъ слѣдующее.

1⁰) *На поверхности развертывающейся возможны два общихъ интеграла, при чемъ одинъ съ временемъ получается изъ другого квадратурой;* они опредѣляются уравненіемъ

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} - \psi\frac{\partial\phi}{\partial\pi} + [f(\pi) + a_0\psi]\frac{\partial\phi}{\partial\psi} = 0,$$

при этомъ силы должны удовлетворять условію

$$\frac{M}{Aa(u)} - \frac{N}{Bb(v)} = f(\pi),$$

гдѣ

$$\pi = A\int a du - B\int b dv,$$

$$\psi = -\frac{d\pi}{dt},$$

$a(u)$ и $b(v)$ — произвольныя функціи, A и B — постоянныя (ср. § 5, a).

2⁰) *Существованіе двухъ общихъ интеграловъ, оба безъ времени, возможно лишь при отсутствіи сопротивленія* (ср. § 5,*b*).

3⁰) *Одинъ общій интегралъ безъ времени возможенъ:*

α) на поверхности, линейный элементъ которой выражается такъ:

$$ds^2 = e^{m(u)n(v) + a(u)} du dv,$$

или, въ частномъ случаѣ, *на развертывающейся поверхности,* если заданныя силы удовлетворяютъ условію

$$\frac{[m(u) + C]}{\frac{dm}{du}} M - \frac{[n(v) + B]}{\frac{dn}{dv}} N = D,$$

$m(u)$ и $n(v)$ — произвольныя функціи; B, C, D — постоянныя $(D \neq 0)$.

Общій интегралъ въ этомъ случаѣ имѣетъ видъ:

$$-t + \frac{1}{a_0} log \left\{ a_0 \left[(m + C) \frac{dn}{dt} - (n + B) \frac{dm}{dt} \right] + D \right\} = \mathrm{Const}$$

β) *на поверхности, наложимой на поверхность вращенія,* если силы удовлетворяютъ условію

$$\frac{M}{a(u)} - \frac{N}{b(v)} = 1.$$

Искомый интегралъ представляется въ видѣ

$$-t + \frac{1}{a_0} log \left[a_0 e^{\mu(\alpha)} \frac{d\beta}{dt} + 1 \right] = \mathrm{Const},$$

$a(u)$, $b(v)$, $\mu(\alpha)$ — произвольныя функціи, причемъ положено для краткости

$$\alpha = \int (adu + bdv),$$

$$\beta = \int (bdv - adu) \text{ (ср. § 6).}$$

Если положить здѣсь $a_0 = 0$, то по извѣстнымъ правиламъ найдемъ общій интегралъ при отсутствіи сопротивленія, данный выше въ § 6, а именно:

$$-t + e^{\mu(\alpha)} \frac{d\beta}{dt} = \mathrm{Const}$$

III. Движеніе въ пространствѣ.

§ 8. Пусть (X, Y, Z) и (X_1, Y_1, Z_1) обозначаютъ силы, заданныя для двухъ задачъ и *зависящія только отъ координатъ точки*. Разысканіе общихъ этимъ задачамъ рѣшеній сводится къ интегрированію системы

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\phi}{\partial t}+x'\frac{\partial\phi}{\partial x}+y'\frac{\partial\phi}{\partial y}+z'\frac{\partial\phi}{\partial z}+X\frac{\partial\phi}{\partial x'}+Y\frac{\partial\phi}{\partial y'}+Z\frac{\partial\phi}{\partial z'}=0\\ \frac{\partial\phi}{\partial t}+x'\frac{\partial\phi}{\partial x}+y'\frac{\partial\phi}{\partial y}+z'\frac{\partial\phi}{\partial z}+X_1\frac{\partial\phi}{\partial x'}+Y_1\frac{\partial\phi}{\partial y'}+Z_1\frac{\partial\phi}{\partial z'}=0\end{aligned}\right\}\ldots(\alpha)$$

Мы исключаемъ, разумѣется, очевидный интегралъ

$$\phi = \text{постоянной},$$

какъ и предположеніе

$$X = X_1,\ Y = Y_1,\ Z = Z_1.$$

Отсюда вытекаетъ, что ни для одного изъ искомыхъ интеграловъ не могутъ *заразъ* имѣть мѣста соотношенія

$$\frac{\partial\phi}{\partial x'}=\frac{\partial\phi}{\partial y'}=\frac{\partial\phi}{\partial z'}=0.$$

Итакъ, общія рѣшенія зависятъ, по крайней мѣрѣ, отъ одной изъ перемѣнныхъ x', y', z', а слѣдовательно, отъ *всѣхъ* этихъ трехъ (измѣнивъ, если нужно, систему координатъ) [1]). Отсюда заключаемъ, что имѣютъ мѣста два, по крайней мѣрѣ, изъ неравенствъ

---

[1]) Положимъ, напримѣръ,

$$\frac{\partial\phi}{\partial x'}=\frac{\partial\phi}{\partial y'}=0.$$

Система (α) послѣ дифференцированія по x' и y' даетъ:

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=\frac{\partial\phi}{\partial y}=0$$

$$Z = Z_1$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x}=\frac{\partial Z}{\partial y}=0.$$

Поэтому общія рѣшенія найдутся интегрированіемъ уравненія

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}+z'\frac{\partial\phi}{\partial z}+Z\frac{\partial\phi}{\partial z'}=0$$

$$X \neq X_1, \quad Y \neq Y_1, \quad Z \neq Z_1,$$

ибо, допустивъ, напримѣръ,

$$Y = Y_1, \quad Z = Z_1, \quad X \neq X_1,$$

мы изъ уравненій (α) выводимъ невозможное уравненіе

$$(X - X_1)\frac{\partial f}{\partial x'} = 0.$$

Наши обозначенія выбраны такъ, чтобы

$$X \neq X_1, \quad Y \neq Y_1.$$

Введемъ, подобно предыдущему, слѣдующія функціи:

$$\varphi(x, y, z) = \frac{Y - Y_1}{X - X_1}$$

$$\psi(x, y, z) = \frac{Z - Z_1}{X - X_1}$$

$$l(x, y, z) = Y - \varphi X = Y_1 - \varphi X_1$$

$$\lambda(x, y, z) = Z - \psi X = Z_1 - \psi X_1.$$

Онѣ суть вполнѣ опредѣленныя и конечныя функціи, причемъ *функція φ не можетъ равняться нулю.*

Система (α) преобразуется теперь къ виду

$$\left.\begin{aligned} Af &= \frac{\partial f}{\partial t} + x'\frac{\partial f}{\partial x} + y'\frac{\partial f}{\partial y} + l\frac{\partial f}{\partial y'} + \lambda\frac{\partial f}{\partial z'} = 0 \\ Bf &= \qquad\qquad\qquad\qquad \frac{\partial f}{\partial x'} + \varphi\frac{\partial f}{\partial y'} + \psi\frac{\partial f}{\partial z'} = 0 \end{aligned}\right\} \dots (\beta)$$

или, что то же, обыкновеннаго уравненія

$$\frac{d^2z}{dt^2} = Z\left(t, z, \frac{dz}{dt}\right).$$

Положимъ, наконецъ, для примѣра

$$\frac{\partial f}{\partial x'} = 0.$$

Вопросъ непосредственно сводится къ движенію въ плоскости, ибо тогда

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial l}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0.$$

Такъ какъ уравненіе

$$C\phi = -(A\phi,\ B\phi) = \frac{\partial\phi}{\partial x} + \varphi\frac{\partial\phi}{\partial y} + \psi\frac{\partial\phi}{\partial z} + m\frac{\partial\phi}{\partial y'} + \mu\frac{\partial\phi}{\partial z'} = 0$$

$$(m = -A\varphi,\quad \mu = -A\psi)$$

не можетъ уничтожиться ни тожественно, ни какъ слѣдствіе уравненій (β), то мы заключаемъ, что *возможно не болѣе четырехъ общихъ рѣшеній, одно изъ нихъ съ временемъ.* Дѣйствительно, допустивъ противное, имѣемъ

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0;$$

система (β) необходимо есть замкнутая, а потому должно имѣть (обозначивъ черезъ a и b два неопредѣленныхъ множителя):

$$C\phi = aA\phi + bB\phi.$$

Соотношеніе это даетъ рядъ уравненій, изъ которыхъ, по исключеніи a и b, найдемъ φ, ψ, l, λ, а слѣдовательно, условія для силъ:

$$\left.\begin{aligned} x'Y - y'X &= x'^3\phi_1\left(x,\ y,\ z,\ \frac{y'}{x'},\ \frac{z'}{x'}\right) \\ x'Z - z'X &= x'^3\phi_2\left(x,\ y,\ z,\ \frac{y'}{x'},\ \frac{z'}{x'}\right) \end{aligned}\right|$$

(ϕ_1 и ϕ_2 — произвольныя функціи). Очевидно, *это имѣетъ мѣсто только для силъ, зависящихъ и отъ скоростей.*

Самыя рѣшенія найдутся изъ системы (β), которая сводится къ такой:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \phi_1\left(x,\ y,\ z,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{dz}{dx}\right) \\ \frac{d^2z}{dx^2} &= \phi_2\left(x,\ y,\ z,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{dz}{dx}\right) \end{aligned}\right|$$

Четыре первыхъ интеграла этой системы:

$$f_i\left(x,\ y,\ z,\ \frac{dz}{dx},\ \frac{dy}{dx}\right) = \text{Const} = d_i \qquad (i = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

и дадутъ рѣшеніе вопроса. Исключивъ оттуда $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, найдемъ траекторію точки, содержащую четыре постоянныхъ.

[Исключая z и $\frac{dz}{dx}$, приходимъ къ двумъ интеграламъ безъ времени, даннымъ для плоскости Коркинымъ].

Такъ какъ наши силы зависятъ только отъ координатъ, то мы начинаемъ со случая существованія четырехъ общихъ рѣшеній, изъ нихъ одно съ временемъ.

Случай четырехъ общихъ рѣшеній.

§ 9. Такъ какъ система

$$A\phi = B\phi = C\phi = 0$$

необходимо должна быть замкнутой, то уравненія

$$\left.\begin{aligned} D\phi &= (A\phi, C\phi) = (A\varphi - m)\frac{\partial\phi}{\partial y} + (A\psi - \mu)\frac{\partial\phi}{\partial z} + (Am - Cl)\frac{\partial\phi}{\partial y'} + (A\mu - C\lambda)\frac{\partial\phi}{\partial z'} = 0 \\ E\phi &= (B\phi, C\phi) = \qquad\qquad (Bm - C\varphi)\frac{\partial\phi}{\partial y'} + (B\mu - C\psi)\frac{\partial\phi}{\partial z'} = 0 \end{aligned}\right\} (\gamma)$$

уничтожаются тожественно (самый видъ ихъ показываетъ, что онѣ не суть слѣдствіе предыдущихъ уравненій). Имѣемъ поэтому:

$$\left.\begin{aligned} A\varphi - m &= 2A\varphi = 0 \\ Am - Cl &= 0 \\ Am - C\varphi &= 0 \end{aligned}\right\}$$

(то же имѣетъ мѣсто для ψ, μ, λ) или

$$\left.\begin{aligned} m = A\varphi &= 0 \\ C\varphi = 0; \quad Cl &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Такъ какъ выраженіе $B\varphi$ очевидно даетъ тожественный нуль, то второе изъ приведенныхъ соотношеній есть слѣдствіе перваго. Легко теперь находимъ

$$\varphi = \text{Const} = M$$

$$\psi = \text{Const} = N$$

$$l = f(y - Mx,\ z - Nx)$$

$$\lambda = f_1(y - Mx,\ z - Nx)$$

f и f_1 — произвольныя функціи; M и N постоянныя произвольныя. Выбравъ болѣе симметричныя обозначенія для постоянныхъ, представимъ условія для силъ въ видѣ

$$\left.\begin{aligned} aY + bX &= f(ay + bx,\ cz + dx) \\ cZ + dX &= f_1(ay + bx,\ cz + dx) \end{aligned}\right\}$$

a, b, c, d — постоянныя произвольныя.

Введя новыя перемѣнныя

$$t, \quad u = ay + bx, \quad v = cz + dx, \quad u' = \frac{du}{dt}, \quad v' = \frac{dv}{dt}$$

мы легко придемъ къ уравненію

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + u'\frac{\partial\phi}{\partial u} + v'\frac{\partial\phi}{\partial v} + f(u, v)\frac{\partial\phi}{\partial u'} + f_1(u, v)\frac{\partial\phi}{\partial v'} = 0.$$

Три изъ искомыхъ интеграловъ, не содержащіе времени, опредѣляются системой обыкновенныхъ уравненій

$$\frac{du}{u'} = \frac{dv}{v'} = \frac{du'}{f(u, v)} = \frac{dv'}{f_1(u, v)}.$$

Четвертый интегралъ съ временемъ очевидно найдется квадратурой, такъ какъ изъ найденныхъ трехъ интеграловъ можно найти $u' = \frac{du}{dt}$, какъ функцію отъ u и трехъ постоянныхъ.

Случай трехъ общихъ интеграловъ.

§ 10. Интегралы эти должны опредѣляться замкнутой системой четырехъ уравненій, иначе говоря, оба уравненія $D\phi = E\phi = 0$ предыдущаго параграфа должны свестись къ одному. Помня вышеприведенныя относительно μ, ψ, λ, m, φ, l соотношенія и составивъ уравненія

$$(A\phi,\ D\phi) = 0$$

легко вывести, что уравненіе $E\phi = 0$ должно удовлетвориться тожественно, т. е.

$$Bm - C\varphi = B\mu - C\psi = 0.$$

Но мы имѣли

$$m = -A\varphi, \quad \mu = -A\psi$$

$$C\phi = (B\phi,\ A\phi)$$

$$B\varphi = B\psi = 0,$$

а потому предыдущія соотношенія даютъ

$$B(A\varphi) = B(A\psi) = 0.$$

Но уравненіе $B\phi = 0$ удовлетворяется, если подставить вмѣсто ϕ величины

$$x,\ y,\ z,\quad \omega = y' - \varphi x',\quad \omega_1 = z' - \psi x',$$

а потому предыдущія уравненія показываютъ, что

$$\left.\begin{aligned} A\varphi &= v(x,\ y,\ z,\ \omega,\ \omega_1) \\ A\psi &= v_1(x,\ y,\ z,\ \omega,\ \omega_1) \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots (29)$$

(v и v_1 — произвольныя функціи). Развернувъ лѣвыя части, найдемъ

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \varphi\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \psi\frac{\partial\varphi}{\partial z} = C\varphi = 0 \dots\dots\dots (30)$$

$$\omega\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \omega_1\frac{\partial\varphi}{\partial y} = v \dots\dots\dots\dots (31)$$

[аналогичныя уравненія напишутся для ψ и v_1].

Взявъ за новыя перемѣнныя $t,\ x,\ y,\ z,\ \omega,\ \omega_1$, придемъ къ системѣ

$$\left.\begin{aligned} X^1 f &= \frac{\partial f}{\partial t} + \omega\frac{\partial f}{\partial y} + \omega_1\frac{\partial f}{\partial z} + l\frac{\partial f}{\partial \omega} + \lambda\frac{\partial f}{\partial \omega_1} = 0 \\ X^2 f &= \frac{\partial f}{\partial x} + \varphi\frac{\partial f}{\partial y} + \psi\frac{\partial f}{\partial z} - v\frac{\partial f}{\partial \omega} - v_1\frac{\partial f}{\partial \omega_1} = 0 \\ X^3 f &= \qquad 2v\frac{\partial f}{\partial y} + 2v_1\frac{\partial f}{\partial z} - Q\frac{\partial f}{\partial \omega} - q\frac{\partial f}{\partial \omega_1} = 0 \end{aligned}\right\} \dots (A)$$

гдѣ

$$Q = X^1 v + P = X^1 v + X^2 l,$$

$$q = X^1 v_1 + X^2\lambda$$

[преобразовывая систему къ новымъ перемѣннымъ, мы пользовались формулами

$$D\varphi = -Cv,$$

$$Av + x'D\varphi = \omega\frac{\partial v}{\partial y} + \omega_1\frac{\partial v}{\partial z} + l\frac{\partial v}{\partial \omega} + \lambda\frac{\partial v}{\partial \omega_1}$$

(аналогично для ψ и v_1), которыя легко провѣрить].

На основаніи (30) и (31) заключаемъ, что v и v_1 оба заразъ не могутъ обратиться въ нуль (что привело бы къ предыдущему случаю). Соотношенія эти перепишутся такъ:

$$\left.\begin{aligned} X^2\varphi &= X^2\psi = 0 \\ v = X^1\varphi,&\quad v_1 = X^1\psi \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots (32)$$

Замѣтимъ еще, что согласно § 8 мы, не нарушая общности, считаемъ

$$\frac{\partial\phi}{\partial\omega} \neq 0, \quad \frac{\partial\phi}{\partial\omega_1} \neq 0.$$

Въ дальнѣйшемъ различаемъ два случая.

а) Всѣ три общихъ интеграла не зависятъ отъ времени.

Система (A) необходимо сводится къ двумъ независимымъ уравненіямъ, т. е.

$$\frac{2v}{\omega} = \frac{2v_1}{\omega_1} = -\frac{X^1 v + P}{l} = -\frac{X^1 v_1 + p}{\lambda}.$$

Развернувъ эти соотношенія, найдемъ послѣдовательно:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial z}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{\partial\psi}{\partial y} = 0,$$

откуда выводимъ

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial z} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial z} = 0$$

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \frac{y+D}{x+C} \\ \psi &= \frac{z+E}{x+C} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (33)$$

$$\left.\begin{aligned} l &= \frac{1}{(x+C)^3} f\left(\frac{y+D}{x+C}, \frac{z+E}{x+C}\right) \\ \lambda &= \frac{1}{(x+C)^3} f_1\left(\frac{y+D}{x+C}, \frac{z+E}{x+C}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (34)$$

f и f_1 — произвольныя функціи, C. D, E — постоянныя.

Силы, слѣдовательно, удовлетворяютъ условіямъ

$$\left.\begin{aligned} (x+C)Y - (y+D)X &= \frac{1}{(x+C)^2} f\left(\frac{y+D}{x+C}, \frac{z+E}{x+C}\right) \\ (x+C)Z - (z+E)X &= \frac{1}{(x+C)^2} f\left(\frac{y+D}{x+C}, \frac{z+E}{x+C}\right) \end{aligned}\right\}$$

Механическая интерпретація этихъ условій очевидна.

Искомые интегралы найдутся, какъ не трудно видѣть, изъ уравненія.

$$u\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}+v\frac{\partial\phi}{\partial\psi}+f(\varphi,\ \psi)\frac{\partial\phi}{\partial u}+f_1(\varphi,\ \psi)\frac{\partial\phi}{\partial v}=0,$$

гдѣ

$$u=(x+C)y'-(y+D)x'=(x+C)^2\frac{d\varphi}{dt}$$

$$v=(x+C)z'-(z+E)x'=(x+C)^2\frac{d\psi}{dt}$$

Если два интеграла найдены, то третій опредѣлится изъ обыкновеннаго дифференціальнаго уравненія перваго порядка, связывающаго φ и ψ.

Если положить въ вышеприведенныхъ формулахъ

$$f=f_1=0,$$

то искомые интегралы совпадаютъ съ интегралами площадей. Попутно выводимъ извѣстное положеніе механики: если существуетъ два интеграла площадей (при нашихъ обозначеніяхъ они суть: $u=\text{Const}$, $v=\text{Const}$), то существуетъ и третій ($u\psi-v\varphi=\text{Const}$).

b) Одинъ изъ трехъ общихъ интеграловъ содержитъ время.

§ 11. Система (A) необходимо есть замкнутая, поэтому уравненія

$$\left.\begin{aligned}X^4\phi=(X^1\phi,X^3\phi)=(3X^1v+P)\frac{\partial\phi}{\partial y}+(3X^1v_1+p)\frac{\partial\phi}{\partial z}-(X^1Q+X^3l)\frac{\partial\phi}{\partial\omega}-(X^1q+X^3\lambda)\frac{\partial\phi}{\partial\omega_1}=0\\ X^5\phi=(X^2\phi,X^3\phi)=3X^2v\frac{\partial\phi}{\partial y}+3X^2v_1\frac{\partial\phi}{\partial z}-(X^2Q-X^3v)\frac{\partial\phi}{\partial\omega}-(X^2q-X^3v_1)\frac{\partial\phi}{\partial\omega_1}=0\end{aligned}\right\}(\delta)$$

суть слѣдствіе предыдущихъ. Поэтому имѣемъ въ общемъ случаѣ:

$$\left.\begin{aligned}\frac{3X^1v+P}{2v}=\frac{3X^1v_1+p}{2v_1}=\frac{X^1Q+X^3l}{Q}=\frac{X^1q+X^3\lambda}{q}\\ \frac{3X^2v}{2v}=\frac{3X^2v_1}{2v_1}=\frac{X^2Q-X^3v}{Q}=\frac{X^2q-X^3v_1}{q}\end{aligned}\right\}\ .\ .\ .\ (35)$$

Первое изъ соотношеній второй строки даетъ, будучи развернуто:

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{D(\varphi,\psi)}{D(y,z)}=\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}-\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\frac{D(\varphi,\psi)}{D(y,z)}=\frac{\partial\varphi}{\partial z}\cdot\frac{D(\varphi,\psi)}{D(y,z)}=0\ .\ .\ .\ (36)$$

а слѣдовательно,

$$\frac{D(\varphi,\psi)}{D(y,z)}=0,$$

(иное допущеніе привело бы къ случаю предыдущаго параграфа),

т. е.
$$\Xi(\varphi,\ \psi,\ x) = 0,$$
Ξ — знакъ произвольной функціи.

Такъ какъ v и v_1 не могутъ одновременно равняться нулю, то одна по крайней мѣрѣ изъ функцій φ и ψ не приводится къ постоянной. Для опредѣленности положимъ
$$\varphi \neq \text{Const}, \quad v \neq 0.$$

Функція Ξ необходимо содержитъ ψ, откуда выводимъ
$$\psi = \varrho(\varphi,\ \ x)$$
или, пользуясь уравненіями (32),
$$\psi = \varrho(\varphi).$$

Далѣе находимъ
$$v_1 = v\,\frac{\partial\varrho}{\partial\varphi}$$
$$X^1 v_1 = \frac{\partial\varrho}{\partial\varphi}\,X^1 v + v^2\,\frac{\partial^2\varrho}{\partial\varphi^2}\,.$$

Первое изъ равенствъ (35) даетъ
$$\frac{\partial^2\varrho}{\partial\varphi^2} = 0,$$
откуда, обозначая черезъ A и B двѣ постоянныя, имѣемъ:
$$\psi = A\varphi + B.$$

Другія соотношенія (35) приводятъ къ уравненіямъ
$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\lambda}{\partial x} + \varphi\,\frac{\partial\lambda}{\partial y} + (A\varphi + B)\,\frac{\partial\lambda}{\partial z} &= A\left[\frac{\partial l}{\partial x} + \varphi\,\frac{\partial l}{\partial y} + (A\varphi + B)\,\frac{\partial l}{\partial z}\right] \\ \frac{\partial\lambda}{\partial y} + A\,\frac{\partial\lambda}{\partial z} &= A\left[\frac{\partial l}{\partial y} + A\,\frac{\partial l}{\partial z}\right], \end{aligned}\right\} \quad . \ . \ . \ (37)$$
откуда непосредственно слѣдуетъ
$$\lambda - Al = \mu(z - Ay - Bx)$$
(μ — знакъ произвольной функціи). Но
$$\lambda - Al = Z - (A\varphi + B)X - A(Y - \varphi X) = Z - AY - BX,$$

поэтому одно изъ искомыхъ условій для силъ представится такъ

$$Z - AY - BX = \mu(z - Ay - Bx), \quad \ldots\ldots \quad (38)$$

или, болѣе симметрично,

$$aX + bY + cZ = \mu(ax + by + cz),$$

a, b, c — постоянныя произвольныя.

Два изъ искомыхъ интеграловъ уже опредѣляются изъ системы (А), если вставить туда

$$v_1 = Av$$

$$q = AQ$$

$$\lambda = Al + \mu(u)$$

$$u = z - Ay - Bx \text{ (или } ax + by + cz).$$

Каковы бы ни были φ и l, интегралы эти суть:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{2}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 - \int \mu(u)du = \text{Const} = \alpha_1 \\ \lambda_2 &= -t + \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{du}{\sqrt{\alpha_1 + \int u du}} = \text{Const} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (39)$$

(ср. § 13)

Второй получается изъ перваго одной квадратурой.

Итакъ, *условія для силъ (38) достаточны для существованія двухъ общихъ рѣшеній, изъ нихъ одно съ временемъ.*

Третій искомый интегралъ очевидно зависитъ отъ вида функцій φ и l. Ихъ мы будемъ искать изъ соотношеній (35), гдѣ осталось удовлетворить уравненіямъ

$$\left.\begin{aligned} \frac{3X^1 + P}{2v} &= \frac{X^1Q + X^3 l}{Q} \\ \frac{3X^2 v}{2v} &= \frac{X^2 Q - X^3 v}{Q} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (40)$$

Развернувъ, получимъ рядъ уравненій для φ и l (мы выпишемъ изъ нихъ только простѣйшія):

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{\partial l}{\partial x} + \varphi\frac{\partial l}{\partial y} + (A\varphi + B)\frac{\partial l}{\partial z} + l\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial l}{\partial x} + \varphi\frac{\partial l}{\partial y} + (A\varphi + B)\frac{\partial l}{\partial z} + 3l\frac{\partial \varphi}{\partial y} + 3\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right| (41)$$

$$\left.\begin{array}{r}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}+\varphi\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}+(A\varphi+B)\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}=0\\ 2\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\dfrac{\partial^3\varphi}{\partial y^3}=3\left(\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)^2\\ 2\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\dfrac{\partial^3\varphi}{\partial z^3}=3\left(\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right)^2\\ \dots\dots\dots\dots\end{array}\right\}\quad\dots\dots\quad(42)$$

и легко составить еще уравненіе

$$\frac{\partial S}{\partial x}+A\frac{\partial S}{\partial y}=0,$$

гдѣ

$$S=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+A\frac{\partial\varphi}{\partial y}$$

Опредѣляя φ изъ (42), мы можемъ сдѣлать два допущенія.

α) $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0$.

Другія уравненія (42) даютъ

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial z}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0$$

Слѣдовательно, обозначая черезъ $f(x)$ пока неопредѣленную функцію, имѣемъ уравненія:

$$\left.\begin{array}{r}\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}+B\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}+\varphi f(x)=0\\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}+A\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}=f(x)\end{array}\right\}$$

изъ которыхъ нетрудно вывести выраженіе для φ, именно

$$\varphi=\frac{Ku+Dy+N}{Dx+C}\quad\dots\dots\dots\quad(43)$$

C, D, K, N — постоянныя произвольныя.

Будемъ теперь искать l изъ (41).

Приравнявъ нулю перваго множителя, найдемъ

$$l=f(u)-Kx\mu(u)\quad\dots\dots\dots\quad(44')$$

(f — знакъ произвольной функціи). Третій интегралъ найдется изъ (A):

$$\lambda_3 = y'(Dx+C) - x'(Ku+Dy+N) + Kx\frac{du}{dt} - \frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{f(u)du}{\sqrt{\alpha_1 + \int\mu du}} = \text{Const} \quad (45')$$

(ср. 39).

Если приравнять нулю второго множителя (41), то найдемъ

$$l = \frac{f(\varphi)}{(x+C)^3} - K\mu(u) \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \quad (44''),$$

и третій интегралъ приметъ видъ:

$$\lambda_3 = \frac{1}{2}[y'(x+C) - x'(Ku+y+N) + Ku'(x+C)]^2 - \int f(\varphi)d\varphi = \text{Const} \, . \, . \quad (45''),$$

причемъ было предположено $D \neq 0$ или, что то же, $D = 1$.

Если же, приравнявъ нулю второго множителя (41), положить

$$D = 0,$$

то выраженія для l и третьяго интеграла будутъ соотвѣтственно

$$l = f(u) + [y - (Ku+N)x]\frac{d\mu}{du} - 3Kx\mu(u) \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \quad (44''')$$

$$\lambda_3 = [y' - (Ku+N)x']u' + Kxu'^2 + [y - (Ku+N)x]\mu(u) -$$

$$- \int f(u)du = \text{Const} \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \quad (45''')$$

β) $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} \neq 0$.

Интегрируя послѣднее изъ уравненій (42), находимъ

$$S = \frac{\partial\varphi}{\partial y} + A\frac{\partial\varphi}{\partial z} = f(x, \; z - Ay) \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \quad (46)$$

(f — знакъ произвольной функціи). Отсюда мы послѣдовательно найдемъ значенія производныхъ $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial z}$, $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}$... и, подставивъ ихъ въ (42), придемъ къ двумъ уравненіямъ (кромѣ 42_1):

$$\left.\begin{aligned} 2\frac{\partial f}{\partial\xi}\frac{\partial\varphi}{\partial z} - f\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} &= 0 \\ \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial^2 f}{\partial\xi^2} - \frac{\partial f}{\partial\xi}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} &= 0 \end{aligned}\right\} \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \quad (47)$$

$$\xi = z - Ay.$$

Изъ уравненій (47) непосредственно выводится слѣдующее:

$$2\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)^2 - f\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} = 0,$$

интегрированіе котораго не представляетъ затрудненій.

Пользуясь имъ, а также уравненіями (46) и (42), находимъ

$$\varphi = \frac{K(y - Nx) + L}{u + Kx + C} + N \quad \ldots\ldots\ldots (48)$$

C, K, L, N — произвольныя постоянныя.

Что касается l, то разсужденія, аналогичныя предыдущимъ, приводятъ къ одному изъ слѣдующихъ трехъ выраженій:

$$\text{либо} \begin{cases} l = \dfrac{f(u) + \mu(u)(Y - Nx)}{u + Kx + C} \ldots\ldots\ldots (49') \\ l = \dfrac{f(\varphi)}{(u + x + C)^3} + \dfrac{\mu(u)(y - Nx + L)}{u + x + C} \ldots\ldots\ldots (49'') \\ l = \dfrac{f(u) + 3\mu(u)(y - Nx)}{u + C} + (y - \varphi x)\dfrac{d\mu}{du} \ldots\ldots\ldots (49''') \end{cases}$$

(ср. 39)

Соотвѣтственно этому третій общій интегралъ также будетъ представляться въ трехъ видахъ, аналогичныхъ соотвѣтственно приведеннымъ выше ($45'$, $45''$ и $45'''$).

Выбравъ болѣе симметричныя обозначенія для постоянныхъ, резюмируемъ полученные результаты.

Если заданныя силы таковы, что выполняется условіе

$$aX + bY + cZ = \mu(ax + by + cz)$$

(a, b, c, — постоянныя, μ — знакъ произвольной функціи) и *одно какое-либо* изъ трехъ условій, выраженныхъ равенствами:

$$\text{либо} \begin{cases} (Au + Bx + C)Y - (A'u + By + D)X = f(u) + (Ay - A'x)\mu(u) \\ (Au+x+C)Y-(A'u+y+D)X = \dfrac{f\left(\dfrac{A'u+y+D}{Au+x+C}\right)}{(Au+x+C)^2} + \mu(u)\,[A(y+D)-A'(x+C)] \\ (Au+B)Y-(A'u+C)x = f(u)+3\mu(u)(Ay-A'x)+\dfrac{d\mu}{du}[(Ay-A'x)u+By-Cx] \end{cases}$$

$$u = ax + by + cz,$$

(f — знакъ произвольной функціи, A, B, C, D, A' — постоянныя), то имѣютъ мѣсто три интеграла, изъ нихъ одинъ съ временемъ.

Два изъ этихъ интеграловъ, коль скоро выполнено первое изъ приведенныхъ для силъ условій, имѣютъ всегда видъ

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 - \int \mu(u)du = \text{Const} = \alpha_1$$

$$\lambda_2 = -t + \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{du}{\sqrt{\alpha_1 + \int \mu du}} = \text{Const}.$$

(ср. § 13).

Третій интегралъ представляется въ трехъ видахъ, соотвѣтственно тому, какое изъ условій второй группы выполнено:

$$\text{либо}\begin{cases} \lambda_3 = (Au+Bx+C)y' - (A'u+By+D)x' - (Ay-A'x)u' - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\displaystyle\int \frac{f(u)du}{\sqrt{\alpha_1 + \int \mu du}} = \text{Const} \\ \lambda_3 = \dfrac{1}{2}[(Au+x+C)y' - (A'u+y+D)x' - (Ay-A'x)u']^2 - \displaystyle\int f(\varphi)d\varphi = \text{Const} \\ \qquad \varphi = \dfrac{A'u+y+D}{Au+x+C} \\ \lambda_3 = [(Au+B)y' - (A'u+C)x']u' - (Ay-A'x)u'^2 - [(Ay-A'x)u + By - Cx]\mu(u) - \\ \qquad - \displaystyle\int f(u)du = \text{Const} \end{cases}$$

Всѣ эти интегралы легко провѣряются дифференцированіемъ.

Замѣчаніе. Мы предположили въ предыдущихъ разсужденіяхъ

$$\varphi \neq \text{Const}.$$

Можно было бы предположить

$$\psi \neq \text{Const}$$

и разсуждать по предыдущему. Мы бы нашли

$$\varphi = A\psi + B,$$

$$l = A\lambda + \mu(u),$$

и вообще y и z перемѣнились бы мѣстами, какъ видно изъ уравненій

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \varphi\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \psi\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}+\psi\frac{\partial\psi}{\partial z}+\varphi\frac{\partial\psi}{\partial y}=0.$$

Слѣдующій случай это

Случай двухъ общихъ рѣшеній.

§ 12. Система уравненій (β) и (γ)

$$Af=Bf=Cf=Df=Ef=0$$

необходимо должна быть замкнутая. Преобразуемъ ее по предыдущему къ перемѣннымъ

$$t,\quad x,\quad y,\quad z,\quad \omega=y'-\varphi x',\quad \omega_1=z'-\psi x'.$$

Къ прежнимъ функціямъ: v, v_1, P и p добавимъ еще двѣ:

$$\left.\begin{aligned} h&=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\psi\frac{\partial\varphi}{\partial z}\\ h_1&=\frac{\partial\psi}{\partial x}+\varphi\frac{\partial\psi}{\partial y}+\psi\frac{\partial\psi}{\partial z}\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (50)$$

Нетрудно вывести, что преобразованная система содержитъ три уравненія (А), данныя выше, и еще уравненіе

$$X^4f=h\frac{\partial f}{\partial\omega}+h_1\frac{\partial f}{\partial\omega_1}=0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (51)$$

Результатомъ преобразованія будутъ также уравненія

$$\left.\begin{aligned} Gf&=h\frac{\partial f}{\partial y}+h_1\frac{\partial f}{\partial z}-X'h\frac{\partial f}{\partial\omega}-X'h_1\frac{\partial f}{\partial\omega_1}=0\\ Hf&=(X^2h+X^4v)\frac{\partial f}{\partial\omega}+(X^2h_1+X^4v_1)\frac{\partial f}{\partial\omega_1}=0\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (\varepsilon)$$

но нетрудно провѣрить, что

$$(X^1f,\ X^4f)=-Gf$$

$$(X^2f,\ X^4f)=Hf.$$

Уравненіе (51) и второе (ε) показываютъ, что должно имѣть либо

$$h=h_1=0,$$

либо, если

$$h \neq 0, \quad h_1 \neq 0,$$

то

$$\frac{X^2h + X^4v}{h} = \frac{X^2h_1 + X^4v_1}{h_1} \quad \text{. . . . . (52)}$$

Въ дальнѣйшемъ различаемъ два случая:

а) Два общихъ рѣшенія, оба безъ времени.

Въ этомъ случаѣ $\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$, и наши четыре уравненія сводятся къ тремъ независимымъ. Легко показать, что должно имѣть

$$h = h_1 = 0.$$

Дѣйствительно, допустивъ противное, мы будемъ имѣть систему трехъ независимыхъ уравненій

$$X^1\phi = X^2\phi = X^3\phi = 0,$$

остальныя уравненія суть прямое ихъ слѣдствіе, т. е. (ср. ε)

$$\frac{h}{\omega} = \frac{h_1}{\omega_1} = -\frac{X^1h}{l} = -\frac{X^1h_1}{\lambda},$$

что невозможно, ибо h и h_1 отъ ω и ω_1 не зависятъ.

Итакъ, мы доказали, что h и h_1 оба обращаются въ нуль, и намъ остается интегрировать данную выше систему (A), положивъ тамъ

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0.$$

Для упрощенія вычисленій, мы будемъ искать тѣ интегралы этой системы, которые не зависятъ отъ y и z.

Положивъ въ (A)

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0,$$

мы должны притти къ одному лишь уравненію съ перемѣнными x, ω и ω_1. Ясно, что для этого должно имѣть

$$l = \lambda = 0$$

$$X^1v = X^1v_1 = 0,$$

что даетъ

$$\left.\begin{aligned}\varphi &= a + by + cz\\ \psi &= \alpha + \beta y + \gamma z\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots (53)$$

a, b, c, α, β, γ — функціи одного x, причемъ остается искать общіе интегралы изъ уравненія

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} - v\frac{\partial \phi}{\partial \omega} - v_1\frac{\partial \phi}{\partial \omega_1} = 0\ldots\ldots\ldots\ldots (54)$$

Такъ какъ v и v_1 не могутъ равняться нулю ни одновременно, ни порознь (иначе мы имѣли бы четыре или три общихъ интеграла), то заключаемъ, что въ (53) нельзя положить

$$b = c = 0$$

или

$$\beta = \gamma = 0.$$

Соотношенія $h = h_1 = 0$ показываютъ далѣе, что, приравнявъ нулю b или γ, получимъ соотвѣтственно

$$\beta \quad \text{или} \quad C = 0;$$

наконецъ, если φ отъ x не зависитъ, то же имѣетъ мѣсто относительно ψ, и обратно.

Установивъ это, мы всегда можемъ исключить изъ (53) y либо z. Пусть для опредѣленности

$$C \neq 0.$$

Исключая z (ибо γ также не равно 0), полагаемъ

$$\psi = m\varphi + ny + p,$$

(m, n, p — функціи одного x). Тогда φ и ψ легко опредѣляются изъ уравненій

$$h = h_1 = 0.$$

Условія для силъ послѣ упрощенія представятся такъ:

$$\left.\begin{aligned} Z - BY - MX - A(xY - yX) = 0\\ xZ - zX + C(xY - yX) + DY - EX = 0\end{aligned}\right\}$$

A, B, C, D, E, M — постоянныя произвольныя.

Общіе интегралы найдутся изъ (54). Они будутъ

$$\lambda_1 = z' - By' - Mx' - A(xy' - yx') = \text{Const}$$

$$\lambda_2 = xz' - zx' + C(xy' - yx') + Dy' - Ex' = \text{Const}.$$

Совершивъ круговую перестановку буквъ, сдѣлаемъ обобщеніе:

Если силы удовлетворяютъ условію

$$a(xY - yX) + b(yZ - zY) + c(zX - xZ) + dX + eY + fZ = 0$$

(a, b, c, d, e, f—постоянныя), *то имѣетъ мѣсто интегралъ вида*

$$a(xy' - yx') + b(yz' - zy') + c(zx' - xz') + dx' + ey' + fz' = \mathrm{Const},$$

представляющій обобщеніе интеграла площадей.

b) Случай двухъ общихъ рѣшеній, одно съ временемъ.

§ 13. Тутъ возможны два допущенія

α) $h \neq 0$, $\quad h_1 \neq 0$.

Составимъ уравненія $(X^1\phi. X^3\phi) = 0$ и $(X^2\phi, X^3\phi) = 0$. Необходимо имѣемъ

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{h}{2v} = \frac{h_1}{2v_1} = \frac{X^1 h}{Q} = \frac{X^1 h_1}{q} \\
&\frac{X^2 h + X^4 v}{h} = \frac{X^2 h_1 + X^4 v_1}{h_1} \\
&\frac{3X^1 v + P}{2v} = \frac{3X^1 v_1 + p}{2v_1} = \ldots \\
&\frac{3X^2 v - X^1 h}{2v} = \frac{3X^2 v_1 - X^1 h_1}{2v_1} = \ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (55)$$

Уравненіе

$$\frac{h}{2v} = \frac{h_1}{2v_1}$$

даетъ, будучи развернуто,

$$\frac{D(\varphi, \ \psi)}{D(y, \ z)} = 0.$$

Поступая съ другими уравненіями (55) такъ же, какъ выше съ уравненіями (35) [съ небольшими, впрочемъ, измѣненіями], придемъ къ полученнымъ уже выше результатамъ (см. § 11, резюме).

β) $h = h_1 = 0$.

При такомъ допущеніи мы должны имѣть замкнутую систему четырехъ уравненій изъ трехъ уравненій системы (А) и двухъ уравненій. (δ) Для простоты мы изучимъ частный случай, предполагая, что уравненія $X^i\phi = 0$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ составляютъ нужную намъ систему, и что уравненіе $X^5\phi = 0$ есть слѣдствіе уравненія $X^3\phi = 0$, т. е. предположимъ, что имѣютъ мѣсто соотношенія

$$\frac{3X^2 v}{2v} = \frac{3X^2 v_1}{2v_1} = \frac{X^2 Q - X^3 v}{Q} = \frac{X^2 q - X^3 v_1}{q} \quad \ldots . (56)$$

Развернувъ ихъ и предполагая

$$\frac{D(\varphi,\ \psi)}{D(y,\ z)} \neq 0,$$

получимъ, какъ выше (33, § 10),

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \frac{y+D}{x+C} \\ \psi &= \frac{z+E}{x+C} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (57)$$

C, D, E—постоянныя. Далѣе находимъ

$$Q = X_1 v + X^2 l = \frac{f(\varphi,\ \psi)}{(x+C)^4},$$

$$\left.\begin{aligned} l &= \frac{\pi(\varphi,\psi)}{x+C} - \frac{f(\varphi,\ \psi)}{(x+C)^3} \\ \lambda &= \frac{\pi_1(\varphi,\psi)}{x+C} - \frac{f_1(\varphi,\ \psi)}{(x+C)^3} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (58)$$

π, π_1, f, f_1—произвольныя функціи, π и π_1 не обращаются одновременно въ нуль (ср. § 10).

Уравненіе $X^2\phi = 0$ утожествляется величинами

$$t,\ \varphi,\ \psi,\ \sigma = \omega(x+C) = y'(x+C) - x'(y+D),\ \sigma_1 = z'(x+C) - x'(z+E);$$

примемъ ихъ за новыя перемѣнныя. Преобразованная система приметъ слѣдующій видъ:

$$\left.\begin{aligned} X^1\phi &= \frac{\partial\phi}{\partial t} + \pi(\varphi,\ \psi)\frac{\partial\phi}{\partial\sigma} + \pi_1(\varphi,\ \psi)\frac{\partial\phi}{\partial\sigma_1} = 0 \\ X^2\phi &= \sigma\frac{\partial\phi}{\partial\varphi} + \sigma_1\frac{\partial\phi}{\partial\psi} - f(\varphi,\ \psi)\frac{\partial\phi}{\partial\sigma} - f_1(\varphi,\ \psi)\frac{\partial\phi}{\partial\sigma_1} = 0 \\ X^3\phi &= \pi\frac{\partial\phi}{\partial\varphi} + \pi_1\frac{\partial\phi}{\partial\psi} - \left(\sigma\frac{\partial\pi}{\partial\varphi} + \sigma_1\frac{\partial\pi_1}{\partial\psi}\right)\frac{\partial\phi}{\partial\sigma} - \left(\sigma\frac{\partial\pi_1}{\partial\varphi} + \sigma_1\frac{\partial\pi_1}{\partial\psi}\right)\frac{\partial\phi}{\partial\sigma_1} = 0 \end{aligned}\right\} \ldots (B)$$

Такъ какъ это есть замкнутая система, то уравненія

$$\left.\begin{aligned} X^4\phi &= (X^1\phi,\ X^3\phi) = \left(\pi\frac{\partial\pi}{\partial\varphi} + \pi_1\frac{\partial\pi}{\partial\psi}\right)\frac{\partial\phi}{\partial\sigma} + \left(\pi\frac{\partial\pi_1}{\partial\varphi} + \pi_1\frac{\partial\pi_1}{\partial\psi}\right)\frac{\partial\phi}{\partial\sigma_1} = 0 \\ X^5\phi &= (X^2\phi,\ X^3\phi) = 2\left(\sigma\frac{\partial\pi}{\partial\varphi} + \sigma_1\frac{\partial\pi}{\partial\psi}\right)\frac{\partial\phi}{\partial\varphi} + 2\left(\sigma\frac{\partial\pi_1}{\partial\varphi} + \sigma_1\frac{\partial\pi_1}{\partial\psi}\right)\frac{\partial\phi}{\partial\psi} - \\ &- \left(\sigma^2\frac{\partial^2\pi}{\partial\varphi^2} + 2\sigma\sigma_1\frac{\partial^2\pi}{\partial\varphi\partial\psi} + \sigma_1^2\frac{\partial^2\pi}{\partial\psi^2} - f\frac{\partial\pi}{\partial\varphi} - f_1\frac{\partial\pi}{\partial\psi} - \pi\frac{\partial f}{\partial\varphi} - \pi_1\frac{\partial f}{\partial\psi}\right)\frac{\partial\phi}{\partial\sigma} - \\ &- \left(\sigma^2\frac{\partial^2\pi_1}{\partial\varphi^2} + 2\sigma\sigma_1\frac{\partial\varphi\partial\psi}{\partial^2\pi_1} + \sigma_1^2\frac{\partial^2\pi_1}{\partial\psi^2} - f\frac{\partial\pi_1}{\partial\varphi} - f_1\frac{\partial\pi_1}{\partial\psi} - \pi_1\frac{\partial f_1}{\partial\psi} - \pi\frac{\partial f_1}{\partial\varphi}\right)\frac{\partial\phi}{\partial\sigma_1} = 0 \end{aligned}\right\} (3)$$

уничтожаются на основаніи предыдущихъ. Поэтому, обозначая черезъ a и b два неопредѣленныхъ множителя, имѣемъ:

$$X^4 f = aX^2 f + bX^3 f,$$

откуда

$$a\sigma + b\pi = a\sigma_1 + b\pi_1 = 0,$$

уравненія, показывающія, что

$$a = b = 0,$$

ибо иначе мы имѣли бы

$$\pi = \pi_1 = 0.$$

$X^4 f$ даетъ, слѣдовательно, тожественно нуль, а потому

$$\left.\begin{aligned} \pi \frac{\partial \pi}{\partial \varphi} + \pi_1 \frac{\partial \pi}{\partial \psi} = 0 \\ \pi \frac{\partial \pi_1}{\partial \varphi} + \pi_1 \frac{\partial \pi_1}{\partial \psi} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (59)$$

Соотношенія эти очевидно удовлетворяются, если положить

$$\pi = \text{Const} = C_1; \quad \pi_1 = \text{Const} = C_2$$

Нетрудно вывести, что при такомъ допущеніи $X^5 f$ также тожественно обращается въ нуль. Полагая

$$u = C_2\varphi - C_1\psi = \frac{C_2(y+D) - C_1(z+E)}{x+C},$$

легко найдемъ, что данныя выше функціи f и f_1 остаются вполнѣ произвольными функціями отъ u. Силы поэтому удовлетворяютъ условіямъ (ср. 58):

$$\left.\begin{aligned} Y(x+C) - X(y+D) = C_1 + \frac{f\left(\dfrac{C_2(y+D) - C_1(z+E)}{x+C}\right)}{(x+C)^2} \\ Z(x+C) - X(z+E) = C_2 + f_1\left(\frac{C_2(y+D) - C_1(z+E)}{x+C}\right) \end{aligned}\right\}$$

Предполагая для опредѣленности

$$C_1 \neq 0,$$

найдемъ оба искомыхъ интеграла изъ (B):

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\{C_2[y'(x+C) - x'(y+D)] - C_1[z'(x+C) - x'(z+E)]\}^2 -$$

$$- \int [C_2 f(u) - C_1 f_1(u)] du = \text{Const} = \alpha_1$$

$$\lambda_2 = -t + \frac{y'(x+C)-x'(y+D)}{C_1} - \frac{1}{C_1\sqrt{2}}\int\frac{f(u)du}{\sqrt{\alpha_1+\int(C_2f-C_1f_1)du}} = \text{Const.}$$

При $C_2=0$, напримѣръ, упрощенія очевидны.

[Для движенія на плоскости полагаемъ здѣсь

$$C_2 = f_1 = f = 0,$$

что даетъ одно общее рѣшеніе съ временемъ, полученное Коркинымъ].

Положимъ теперь, что одна какая-либо изъ функцій π и π_1, скажемъ для опредѣленности π_1, не приводится къ постоянной. Соотношенія (59) даютъ тогда

$$\frac{D(\pi,\ \pi_1)}{D(\varphi,\ \psi)} = 0$$

$$\pi = \mu(\pi_1).$$

Далѣе имѣемъ (a и b обозначаютъ два неопредѣленныхъ множителя):

$$X^5 f = aX^2 f + bX^3 f,$$

что приводитъ къ ряду уравненій:

$$a\sigma + b\mu = 2\left(\sigma\frac{\partial\pi_1}{\partial\varphi} + \sigma_1\frac{\partial\pi_1}{\partial\psi}\right)\frac{d\mu}{d\pi_1}$$

. . . .

Изъ нихъ легко найдемъ

$$\pi = 0,\quad \pi_1 = \frac{A}{B-\varphi},\quad f = f(\varphi),\quad f_1 = -\psi\frac{f(\varphi)}{B-\varphi} + \overline{\varphi},$$

f и $\overline{\varphi}$ — произвольныя функціи отъ $\varphi = \dfrac{y+D}{x+C}$, A и B — постоянныя ($A \neq 0$).

Общіе интегралы, найденные изъ (B), имѣютъ видъ:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}[y'(x+C)-x'(y+D)]^2 - \int f(\varphi)d\varphi = \text{Const} = \alpha_1$$

$$\lambda_2 = -t + \frac{1}{A}\left\{\frac{[y'(x+C)-x'(y+D)](z+E)-[z'(x+C)-x'(z+E)][B(x+C)-(y+D)]}{x+C} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{\overline{\varphi}.(B-\varphi)d\varphi}{\sqrt{\alpha_1+\int f(\varphi)d\varphi}}\right\} = \text{Const.}$$

[Интегралъ $\lambda_1 = \text{Const}$ очевидно относится и къ движенію на плоскости].

Условія для силъ суть (ср. 58):

$$\left.\begin{aligned}(x+C)Y-(y+D)X &= \frac{f\left(\frac{y+D}{x+C}\right)}{(x+C)^2}\\ (x+C)Z-(z+E)X &= \frac{A(x+C)-f\left(\frac{y+D}{x+C}\right)\cdot\frac{z+E}{(x+C)^2}}{B(x+C)-(y+D)}+\frac{\bar{\varphi}\left(\frac{y+D}{x+C}\right)}{(x+C)^2}\end{aligned}\right\}$$

Перейдемъ теперь къ послѣднему случаю.

Случай одного общаго рѣшенія безъ времени.

§ 14. Мы изучимъ здѣсь только частный случай. Полагая

$$h=h_1=0,$$

возьмемъ систему независимыхъ уравненій предыдущаго параграфа, т. е.

$$X^i \phi = 0; \qquad (i=1,\ 2,\ 3,\ 4);$$

что касается уравненія $X^5\phi=0$, то пусть имѣемъ

$$\frac{3X^2v}{\omega}=\frac{3X^2v_1}{\omega_1}=-\frac{X^2Q-X^3v}{l}=-\frac{X^2q-X^3v_1}{\lambda},$$

выражая этимъ, что $X^5\phi=0$ есть прямое слѣдствіе уравненія $X^1\phi=0$, гдѣ положено

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}=0.$$

Для φ и ψ найдемъ значенія, данныя выше:

$$\varphi=\frac{y+D}{x+C},\ \psi=\frac{z+E}{x+C}$$

Уравненіе

$$\frac{3X^2v}{\omega}=-\frac{X^2Q-X^3v}{l}$$

принимаетъ видъ

$$\frac{\partial S}{\partial x}+\varphi\frac{\partial S}{\partial y}+\psi\frac{\partial S}{\partial z}-\frac{S}{x+C}=0$$

$$S=X^2l+\frac{3l}{x+C}.$$

Интегрированіе не представляетъ затрудненій.

Окончательно найдемъ для l и λ выраженія вида:

$$\left.\begin{aligned}l &= \frac{f_1(\varphi,\ \psi)}{(x+C)^3}+(x+C)^2\pi_1(\varphi,\ \psi)\\ \lambda &= \frac{f_2(\varphi,\ \psi)}{(x+C)^3}+(x+C)^2\pi_2(\varphi,\ \psi)\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ (60)$$

f_1, f_2, π_1, π_2—произвольныя функціи, послѣднія двѣ не обращаются одновременно въ нуль (ср. § 10).

Взявъ тѣ же перемѣнныя, что въ § 13 (t, φ, ψ, σ, σ_1), придемъ къ системѣ, вполнѣ аналогичной (B), гдѣ

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0.$$

Условія замкнутости этой системы приводятъ къ уравненію

$$\frac{\pi_1 \dfrac{\partial \pi_1}{\partial \varphi} + \pi_2 \dfrac{\partial \pi_2}{\partial \psi}}{\pi_1} = \frac{\pi_1 \dfrac{\partial \pi_2}{\partial \varphi} + \pi_2 \dfrac{\partial \pi_2}{\partial \psi}}{\pi_2} \quad \ldots\ldots \quad (61)$$

Такъ какъ $\dfrac{\partial \phi}{\partial \sigma}$ и $\dfrac{\partial \phi}{\partial \sigma_1}$ не равны 0, то

$$\pi_1 \neq 0, \quad \pi_2 \neq 0,$$

а потому, положивъ

$$\frac{\pi_2}{\pi_1} = k,$$

гдѣ k вполнѣ опредѣленная функція отъ φ и ψ, найдемъ изъ (61):

$$\frac{\partial k}{\partial \varphi} + k \frac{\partial k}{\partial \psi} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (62)$$

Преобразованная система имѣетъ слѣдующій видъ:

$$\left.\begin{aligned} X^1\phi &= \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} + k \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_1} = 0 \\ X^2\phi &= \sigma \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} + \sigma_1 \frac{\partial \phi}{\partial \psi} + f_1(\varphi, \psi) \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} + f_2(\varphi, \psi) \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_1} = 0 \\ X^3\phi &= \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} + k \frac{\partial \phi}{\partial \psi} - \left(\sigma \frac{\partial k}{\partial \varphi} + \sigma_1 \frac{\partial k}{\partial \psi} \right) \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_1} = 0 \end{aligned}\right\} \ldots (\mathrm{B}')$$

Называя черезъ a, b, c три неопредѣленныхъ множителя, имѣемъ:

$$(X^2\phi, X^3\phi) = aX^1\phi + bX^2\phi + cX^3\phi.$$

Составивъ уравненіе $(X^2\phi, X^3\phi) = 0$ и исключивъ множителей a, b, c, придемъ къ ряду уравненій:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 k}{\partial \psi^2} = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &2 \frac{\partial k}{\partial \varphi} (f_2 - k f_1) + k^2 \left(\frac{\partial f_1}{\partial \varphi} + k \frac{\partial f_1}{\partial \psi} \right) = k \left(f_1 \frac{\partial k}{\partial \varphi} + f_2 \frac{\partial k}{\partial \psi} + \frac{\partial f_2}{\partial \varphi} + k \frac{\partial f_2}{\partial \psi} \right) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \ldots (63)$$

изъ которыхъ легко выводится еще одно

$$\left.\begin{aligned} k\left(\frac{\partial f}{\partial\varphi}+k\frac{\partial f}{\partial\psi}\right)&=3f\frac{\partial k}{\partial\varphi}\\ f&=f_2-kf_1\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\quad(64)$$

Уравненіямъ этимъ можно удовлетворить двумя допущеніями:

α) $k=\mathrm{Const}=A\neq 0$.

Предыдущія соотношенія легко даютъ

$$\pi_2(\varphi,\ \psi)=A\pi_1(\varphi,\ \psi)$$

$$f_2(\varphi,\ \psi)=Af_1(\varphi,\ \psi)+f\left(\frac{z+E-A(y+D)}{x+C}\right)$$

π_1, f_1, f остаются вполнѣ произвольными функціями.

Подставивъ эти выраженія въ (60), найдемъ, разумѣется *два* условія для силъ. Въ силу одного изъ нихъ необходимо, чтобы общій интегралъ былъ единственнымъ при нашихъ частныхъ предположеніяхъ. Болѣе существенно другое; видъ его (при новыхъ обозначеніяхъ для постоянныхъ):

$$xZ-zX+a(xY-yX)+pZ+qY+rX=\frac{1}{(x+p)^2}f\left(\frac{z+ay-r}{x+p}\right),$$

f — произвольная функція, a, p, q, r — постоянныя, связанныя соотношеніемъ

$$q-ap=0.$$

Общій интегралъ найдется изъ (B′):

$$\frac{1}{2}\,[xz'-zx'+a(xy'-yx')+pz'+qy'+rx']^2-\int f(u)du=\mathrm{Const},\ \ u=\frac{z+ay-r}{x+p}.$$

β) $k=\dfrac{A\psi+\alpha}{A\varphi+\beta}$, A, α, β — постоянныя ($A\neq 0$).

Называя черезъ f произвольную функцію, находимъ изъ (64):

$$f_2=kf_1+\frac{1}{(A\varphi+\beta)^3}f(k).$$

Кромѣ того, имѣемъ, очевидно,

$$\pi_2(\varphi,\ \psi)=\frac{A\psi+\alpha}{A\varphi+\beta}\pi_1(\varphi,\ \psi).$$

Разсуждая по предыдущему, мы найдемъ *существенно важное условіе, опредѣляющее видъ интеграла.* Оно есть

$$A(yZ-zY)+\beta(xZ-zX)-\alpha(xY-yX)+pZ+qY+rX=$$
$$=\frac{1}{(Ay+\beta x+p)^2}f\left(\frac{Az+\alpha x-q}{Ay+\beta x+p}\right)$$

f — знакъ произвольной функціи, A, α, β, p, q, r — постоянныя, связанныя соотношеніемъ

$$rA = p\alpha + q\beta, \quad (A \neq 0).$$

Общій интегралъ, отвѣчающій этому условію, есть:

$$\frac{1}{2}[A(yz' - zy') + \beta(xz' - zx') - \alpha(xy' - yx') + pz' + qy' + rx']^2 -$$

$$-\frac{1}{A}\int f(k)dk = \text{Const}$$

$$k = \frac{Az + dx - q}{Ay + \beta x + p}.$$

Это есть обобщеніе уже полученнаго выше (§ 12) интеграла, если здѣсь положить

$$f(k) = 0,$$

причемъ всѣ шесть постоянныхъ дѣлаются совершенно произвольными.

Sur les intégrales communes aux plusieurs problèmes de Mécanique.

Résumé par l'auteur.

Le problème en question déjà étudié par J. Bertrand [1]) et Korkine [2]), se ramène dans cet article (suivant Korkine) à l'intégration des équations aux dérivées partielles simultanées dont l'intégration s'effectue á l'aide de la méthode de Jacobi. Nous considérons le cas du mouvement plan sous les conditions les plus générales, les forces dépendant non seulement des coordonnées du mobile et de la vitesse, mais encore du temps. Des relations ainsi obtenues on déduit comme des cas particuliers celles de Bertrand et Korkine.—Le cas du mouvement d'un point sur une surface conduit aux résultats obtenus par Bertrand. Nous ājoutons, en outre, le cas du mouvement dans un milieu résistant étudié par Korkine dans le plan.—Enfin je considère le cas du mouvement d'un point dans l'espace en supposant—pour simplifier la question—que les forces ne dépendent que des coordonnées du mobile. Les résultats ainsi obtenus se présentent comme il suit.

1) Si les forces du problème satisfont aux conditions

$$\left.\begin{aligned} x'Y - y'X &= x'^3\varphi_1\left(x,\ y,\ z,\ \frac{y'}{x'},\ \frac{z'}{x'}\right) \\ x'Z - z'X &= x'^3\varphi_2\left(x,\ y,\ z,\ \frac{y'}{x'},\ \frac{z'}{x'}\right) \end{aligned}\right\}$$

---

1) „Journal de Mathématiques" 1856 et 1858.

2) „Mathematische Annalen" 1870.

($x' = \frac{dx}{dt} \ldots$, φ_1, φ_2 désignant des fonctions arbitraires) il existe quatre intégrales ne dépendant pas du temps; elles se déterminent par le système suivant

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \varphi_1\left(x,\ y,\ z,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{dz}{dx}\right) \\ \frac{d^2z}{dx^2} &= \varphi_2\left(x,\ y,\ z,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{dz}{dx}\right) \end{aligned}\right\}$$

2) Si les forces satisfont aux conditions

$$\left.\begin{aligned} aY + bX &= f(ay + bx,\ cz + dx) \\ cZ + dX &= f_1(ay + bx,\ cz + dx) \end{aligned}\right\}$$

(f, f_1 désignant des fonctions arbitraires; a, b, c, d étant des constantes) il existe quatre intégrales, dout l'une dépend du temps et s'obtient par une seule quadrature.

Elles se déterminent par l'équation

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + u'\frac{\partial\varphi}{\partial u} + v'\frac{\partial\varphi}{\partial v} + f(u,\ v)\frac{\partial\varphi}{\partial u'} + f_1(u,\ v)\frac{\partial\varphi}{\partial v'} = 0$$

où l'on a posé

$$u = ay + bx, \quad v = cz + dx, \quad u' = \frac{du}{dt}, \quad v' = \frac{dv}{dt}.$$

3) Si les forces satisfont à la relation

$$aX + bY + cZ = \mu(ax + by + cz)$$

et encore à *l'une* de trois suivantes

$$\left\{\begin{aligned} &(Au + Bx + C)Y - (A'u + By + D)X = f(u) + (Ay - A'x)\mu(u) \\ &(Au+x+C)Y - (A'u+y+D)X = \frac{f\left(\dfrac{A'u+y+D}{Au+x+C}\right)}{(Au+x+C)^2} + [A(y+D) - A'(x+C)]\mu(u) \\ &(Au+B)Y - (A'u+C)X = f(u) + 3(Ay-A'x)\mu(u) + [(Ay-A'x)u + By - Cx]\frac{d\mu}{du} \end{aligned}\right.$$

[f, μ désignant des fonctions arbitraires; A, B, C, D, A', a, b, c, étant des constantes, $u = ax + by + cz$], il existe trois intégrales, dont l'une dépend du temps et s'obtient par une seule quadrature. Deux de ces intégrales ont toujours les expressions suivantes

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 - \int \mu(u)du = \text{Const} = \alpha_1$$

$$\lambda_2 = -t + \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{du}{\sqrt{\alpha_1 + \int \mu du}} = \text{Const.}$$

La troisiéme intégrale se présente respectivement sous trois formes suivantes

$$\left\{\begin{aligned}
\lambda_3 &= (Au + Bx + C)y' - (A'u + By + D)x' - (Ay - A'x)u' - \\
&\qquad - \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{f(u)}{\sqrt{\alpha_1 + \int \mu du}} = \text{Const} \\
\lambda_3 &= \frac{1}{2}[(Au + x + C)y' - (A'u + y + D)x' - (Ay - A'x)u']^2 - \\
&\qquad - \int f(\varphi) d\varphi = \text{Const} \\
&\qquad \varphi = \frac{A'u + y + D}{Au + x + C} \\
\lambda_3 &= [(Au + B)y' - (A'u + C)x']u' - (Ay - A'x)u'^2 \\
&\quad [(Ay - A'x)u + By - Cx]\mu(u) - \int f(u) du = \text{Const.}
\end{aligned}\right.$$

4) Si les forces satisfont aux conditions

$$\left.\begin{aligned}
(x + C)Y - (y + D)X &= C_1 + \frac{f_1\left(\dfrac{C_2(y + D) - C_1(z + E)}{x + C}\right)}{(x + C)^2} \\
(x + C)Z - (z + E)X &= C_2 + \frac{f_2\left(\dfrac{C_2(y + D) - C_1(z + E)}{x + C}\right)}{(x + C)^2},
\end{aligned}\right\}$$

ou

$$\left.\begin{aligned}
(x + C)Y - (y + D)X &= \frac{f\left(\dfrac{y + D}{x + C}\right)}{(x + C)^2} \\
(x + C)Z - (z + E)X &= \frac{A(x + C) - f\left(\dfrac{y + D}{x + C}\right) \dfrac{z + E}{(x + C)^2}}{B(x + C) - (y + D)} + \frac{\bar{\varphi}\left(\dfrac{y + D}{x + C}\right)}{(x + C)^2},
\end{aligned}\right\}$$

il existe respectivement deux intégrales de la forme

$$\left.\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{1}{2}\Big\{C_2[(x + C)y' - (y + D)x'] - C_1[(x + C)z' - (z + E)x']\Big\}^2 - \int (C_2 f_1 - C_1 f_2) du = \text{Const} \\
\lambda_2 &= -t + \frac{(x + C)y' - (y + D)x'}{C_1} - \frac{1}{C_1\sqrt{2}} \int \frac{f_1 du}{\sqrt{\alpha_1 + \int (C_2 f_1 - C_1 f_2) du}} = \text{Const},
\end{aligned}\right\}$$

ou

$$\left.\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{1}{2}[(x + C)y' - (y + D)x']^2 - \int f(\varphi) d\varphi = \text{Const} = \alpha_1 \\
\lambda_2 &= -t + \frac{1}{A}\Bigg\{\frac{[(x + C)y' - (y + D)x'](z + E) + [(x + C)z' - (z + E)x'][B(x + C) - (y + D)]}{x + C} - \\
&\qquad - \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{(B - \varphi) . \bar{\varphi} d\varphi}{\sqrt{\alpha_1 + \int f d\varphi}}\Bigg\} = \text{Const}
\end{aligned}\right\}$$

Dans les formules précédentes A, B, C, D, E, C_1, C_2 sont des constantes, f, f_1, f_2 et φ désignent des fonctions quelconques, et

$$u=\frac{C_2(y+D)-C_1(z+E)}{x+C}; \quad \varphi=\frac{y+D}{x+C}.$$

5) Si les forces satisfont à la relation

$$aX+bY+cZ+d(xZ-zX)+e(yZ-zY)+f(xY-yX)=0$$

(a, b, c, d, e, f étant des constantes arbibraires) ou à la relation

$$xZ-zX+a(xY-yX)+pZ+qY+rX=\frac{1}{(x+p)^2}f\left(\frac{z+ay-r}{x+p}\right),$$

(f désignant une fonction arbitraire, les constantes a, p, q, r sont liées par l'équation $q-ap=0$),
ou enfin à la relation

$$A(yZ-zY)+\beta(xZ-zX)-\alpha(xY-yX)+pZ+qY+rX=$$
$$=\frac{1}{(Ay+\beta x+p)^2}f\left(\frac{Az+\alpha x-q}{Ay+\beta x+p}\right),$$

[la fonction f restant arbitraire, les constantes $A(\neq 0)$, β, α, p, q, r, sont liées par l'équation $rA=p\alpha+q\beta$]

il existe une intégrale ayant respectivement l'expression suivante

$$ax'+by'+cz'+d(xz'-zx')+e(yz'-zy')+f(xy'-yx')=\text{Const}$$

ou: $$\frac{1}{2}[xz'-zx'+a(xy'-yx')+pz'+qy'+rx']^2-\int f(u)du=\text{Const}$$

$$\left(u=\frac{z+ay-r}{x+p}\right)$$

ou enfin:

$$\frac{1}{2}\{A(yz'-zy')+\beta(xz'-zx')-\alpha(xy'-yx')+pz'+qy'+rx'\}^2-$$
$$-\frac{1}{A}\int f(k)dk=\text{Const}$$

$$\left(k=\frac{Az+\alpha x-q}{Ay+\beta x+p}\right).$$

О наилучшемъ приближеніи непрерывныхъ функцій посредствомъ многочленовъ данной степени.

С. Бернштейна.

ВВЕДЕНІЕ.

Вопросъ о приближеніи непрерывныхъ функцій посредствомъ многочленовъ или другихъ простыхъ выраженій опредѣленнаго вида, равнозначный вопросу о разложеніи функцій въ соотвѣтствующіе ряды, является основнымъ въ теоріи функцій вещественной перемѣнной. Я не буду излагать здѣсь исторіи этого вопроса, поучительной во многихъ отношеніяхъ; напомню лишь важнѣйшіе ея моменты.

Теорія разложеній функцій въ ряды обязана своимъ возникновеніемъ задачамъ математической физики, которыя великіе геометры XVIII столѣтія пытались рѣшать при помощи безконечныхъ рядовъ. Разумѣется, въ изслѣдованіяхъ этого времени, когда даже разница между сходящимися и расходящимися рядами была не ясна, о точности въ современномъ смыслѣ этого слова не можетъ быть и рѣчи. Только въ первой половинѣ XIX столѣтія, Дирикле и Коши доказали сходимость нѣкоторыхъ разложеній для весьма обширнаго класса функцій и положили такимъ образомъ основу современной строго математической теоріи функцій вещественной перемѣнной.

Но прошло еще полъ-столѣтія, прежде чѣмъ Вейерштрассъ въ 1885 г. доказалъ, пользуясь однимъ интеграломъ изъ теоріи теплоты, что всякая непрерывная функція можетъ быть разложена въ равномѣрно сходящійся рядъ многочленовъ, и вмѣстѣ съ тѣмъ указалъ пріемъ, хотя и довольно сложный, для построенія многочленовъ, сколь угодно мало отличающихся отъ данной произвольной функціи. Открытіе этой замѣчательной по своей общности теоремы опредѣлило дальнѣйшій ходъ развитія анализа; съ этого момента теорія функцій комплексной перемѣнной, достигшая въ тоже время своего величайшаго расцвѣта, постепенно отходитъ на задній планъ, выдвигая впередъ изученіе функцій вещественной перемѣнной.

Послѣ Вейерштрасса, многими математиками были предложены болѣе или менѣе простыя доказательства его теоремы [1]), дающія возможность, при всякомъ значеніи ε, найти для данной на нѣкоторомъ отрѣзкѣ AB непрерывной функціи $f(x)$ приближенные многочлены $P_n(x)$ достаточно высокой степени n, чтобъ уклоненіе $|f(x)-P_n(x)|$ оставалось не болѣе ε на данномъ отрѣзкѣ.

Сопоставленіе различныхъ методовъ естественно выдвинуло задачу: каково для данной функціи $f(x)$ наилучшее приближеніе, котораго можно достигнуть при помощи многочленовъ данной степени, или точнѣе говоря, каково наименьшее возможное значеніе $E_n[f(x)]$ уклоненія ε при данномъ n?.

Эта задача была поставлена П. Л. Чебышевымъ болѣе пятидесяти лѣтъ тому назадъ, т. е. задолго еще до открытія Вейерштрасса. Оригинальный алгебраическій методъ великаго русскаго математика привелъ его къ весьма замѣчательнымъ свойствамъ многочленовъ, наименѣе уклоняющихся отъ данной функціи $f(x)$, и въ нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ позволилъ ему дать полное рѣшеніе задачи. Однако въ общемъ случаѣ мы не находимъ у Чебышева никакихъ указаній относительно величины наименьшаго уклоненія $E_n[f(x)]$, и этимъ главнымъ образомъ объясняется, почему въ свое время изслѣдованія Чебышева не оказали вліянія на развитіе теоріи функцій.

Настоящее сочиненіе представляетъ собой попытку приближеннаго вычисленія наименьшаго уклоненія $E_n[f(x)]$ и изслѣдованія связи между закономъ убыванія $E_n[f(x)]$ и дифференціальными свойствами разсматриваемой функціи. Чтобъ можно было судить о томъ, насколько простой и глубокой оказывается эта связь, достаточно будетъ указать, напримѣръ, два предложенія [2]): для того, чтобъ функція вещественной

[1]) См. *Borel*. Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en séries de polynomes.

[2]) Эти предложенія и нѣсколько другихъ были мною указаны въ замѣткѣ, представленной Французской Академіи Наукъ 28-го февраля 1911 г. Изъ предшествующихъ этой замѣткѣ работъ въ томъ же направленіи слѣдуетъ указать важныя сочиненія Lebesgue и de la Vallée Poussin, на которыя въ соотвѣтствующихъ мѣстахъ будутъ сдѣланы ссылки. Болѣе подробныя библіографическія указанія читатель найдетъ въ работѣ *D. Jackson*. «Uber die Genauigkeit der Annäherung stetiger Funktionen durch ganze rationale Funktionen». Göttingen. (Preisschrift und Inaugural-Dissertation). Авторъ этой интересной работы, появившейся въ іюлѣ 1911 г., получилъ самостоятельно нѣкоторые изъ результатовъ моей замѣтки, которую онъ цитируетъ на страницахъ 12-й и 15-й. Вмѣстѣ съ тѣмъ считаю нужнымъ замѣтить, что настоящая моя работа, за исключеніемъ трехъ «Добавленій» къ IV и V главѣ, представляетъ, съ незначительными редакціонными измѣненіями, переводъ мемуара подъ тѣмъ же заглавіемъ, удостоеннаго преміи Бельгійской Академіи, куда онъ былъ отправленъ мною въ іюнѣ 1911 года.

перемѣнной $f(x)$ была аналитической на нѣкоторомъ отрѣзкѣ AB, необходимо и достаточно, чтобъ наименьшее уклоненіе $E_n[f(x)]$ на отрѣзкѣ AB убывало съ возрастаніемъ n быстрѣе, чѣмъ члены нѣкоторой убывающей геометрической прогрессіи; для того, чтобъ функція $f(x)$ имѣла производныя всѣхъ порядковъ, необходимо и достаточно, чтобъ, при всякомъ p, $\underset{n=\infty}{\text{пред.}} E_n[f(x)].n^p = 0$. Вообще, чѣмъ проще дифференціальная природа функціи, тѣмъ быстрѣе убываетъ E_n, и наоборотъ.

Такимъ образомъ разсмотрѣніе наименьшей возможной погрѣшности, при приближеніи функціи посредствомъ многочленовъ возрастающихъ степеней, даетъ совершенно общее основаніе для послѣдовательной классификаціи и изслѣдованія всѣхъ непрерывныхъ функцій вещественной перемѣнной.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ.

О нѣкоторыхъ общихъ свойствахъ рядовъ многочленовъ.

Глава I.

Предварительныя теоремы о многочленахъ.

1. Многочлены, наименѣе уклоняющіеся отъ нуля. Въ своихъ знаменитыхъ изслѣдованіяхъ о приближенныхъ многочленахъ Чебышевъ построилъ многочлены, наименѣе уклоняющіеся отъ нуля въ данномъ промежуткѣ; а именно, онъ доказалъ, что изъ всѣхъ многочленовъ вида

$$Ax^n + p_1 x^{n-1} + \ldots + p_n,$$

гдѣ A данная величина, а остальные коэффиціенты произвольны, наименѣе уклоняется отъ нуля въ промежуткѣ $(-h, +h)$ многочленъ

$$\frac{Ah^n}{2^{n-1}} \cdot T_n\left(\frac{x}{h}\right) = \frac{Ah^n \cos n \arccos \frac{x}{h}}{2^{n-1}} = \frac{A}{2^n} \cdot [(x+\sqrt{x^2-h^2})^n + (x-\sqrt{x^2-h^2})^n]. \quad (1)$$

Для краткости мы будемъ въ дальнѣйшемъ называть $c \, . \, T_n(x)$, гдѣ c постоянная величина, *тригонометрическими многочленами*, и выведемъ нѣкоторыя ихъ свойства, аналогичныя свойству, открытому Чебышевымъ.

2. Теорема. *Если многочленъ* $P_n(x) = p_0 x^n + p_1 x^{n-1} + \ldots + p_n$ *обладаетъ свойствомъ, что* $|P_n(x) \, . \sqrt{1-x^2}|$ *достигаетъ въ промежуткѣ* $-1, +1$ *значенія* M, *то* $|P_n(x)|$ *не можетъ въ этомъ промежуткѣ оставаться менѣе* $\frac{M}{n}$; *эта послѣдняя величина не будетъ превзойдена лишь въ случаѣ, когда* $P_n(x)$ *тригонометрическій многочленъ.*

Чебышевъ допускалъ безъ доказательства существованіе многочленовъ данной степени, наименѣе уклоняющихся отъ данной функціи. Но современный анализъ требуетъ этого доказательства, такъ какъ немало есть задачъ о минимумѣ, напримѣръ, въ варіаціонномъ исчисленіи, которыя не имѣютъ рѣшеній. Въ виду этого намъ необходимо сдѣлать нѣсколько предварительныхъ замѣчаній, для того, чтобъ показать, что среди разсматриваемыхъ многочленовъ существуетъ, дѣйствительно, одинъ или нѣсколько такихъ многочленовъ, для которыхъ максимумъ $|P_n(x)|$ *достигаетъ* наименьшаго возможнаго значенія. Разсмотримъ; вообще, произведеніе $|P'_n(x).\varphi(x)|$, гдѣ $\varphi(x)$ какая нибудь непрерывная функція (голоморфная при всѣхъ значеніяхъ x даннаго промежутка, кромѣ тѣхъ, можетъ быть, гдѣ $\varphi(x)=0$). Максимумъ этого произведенія $m(p_0, p_1, \ldots p_{n-1})$ есть непрерывная однородная функція первой степени коэффиціентовъ $p_0, p_1, \ldots p_{n-1}$, т. к., при умноженіи ихъ на одно и тоже число k, m будетъ умножено на то же число k. Значенія коэффиціентовъ, удовлетворяющія уравненію $m=M$, гдѣ M, данная величина, можно раздѣлить на n группъ: въ первой $|p_0| \geqq |p_i|$, во второй $|p_1| \geqq |p_i|$ и т. д. ($i=0, 1, \ldots, n-1$).

Разсмотримъ, напримѣръ, значенія первой группы; въ данномъ случаѣ уравненіе $m=M$ можемъ написать такъ:

$$p_0 \cdot m\left(1, \frac{p_1}{p_0}, \frac{p_2}{p_0}, \ldots, \frac{p_{n-1}}{p_0}\right)=M,$$

или, полагая

$$\frac{p_1}{p_0}=\lambda_1, \quad \frac{p_2}{p_0}=\lambda_2 \text{ и т. д.},$$

$$p_0=\frac{M}{m(1, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1})}.$$

Такимъ образомъ, p_0 есть конечная и непрерывная функція перемѣнныхъ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$, которыя по абсолютному значенію не превышаютъ единицу; поэтому максимумъ $|p_0(x^n+\lambda_1 x^{n-1}+\ldots\lambda_{n-1}x)+p_n|=|P_n(x)|$ есть непрерывная функція $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}, p_n$; при этомъ, очевидно, можно ограничиться разсмотрѣніемъ значеній $|p_n|$, не превышающихъ нѣкотораго числа H. Но непрерывная функція n перемѣнныхъ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$, p_n, принимающихъ всевозможныя значенія нѣкоторой замкнутой области, достигаетъ своего минимума для опредѣленныхъ значеній перемѣнныхъ въ этой области. Аналогичнымъ образомъ можно доказать существованіе многочленовъ, наименѣе уклоняющихся отъ нуля, соотвѣтствующихъ каждой изъ n группъ коэффиціентовъ. Выбирая ту изъ группъ, которая даетъ наименьшее значеніе для максимума $|P_n(x)|$, мы убѣждаемся наконецъ, что среди многочленовъ, для которыхъ $m = M$, дѣйствительно, есть одинъ или нѣсколько такихъ, которыхъ максимумъ $|P_n(x)|$ равенъ наименьшему возможному значенію.

Итакъ пусть $P(x)$ будетъ тотъ изъ подлежащихъ сравненію многочленовъ степени n, который наименѣе уклоняется отъ нуля. Обозначимъ черезъ $x_1, x_2, \ldots x_k$ точки, въ которыхъ модуль $P(x)$ получаетъ наибольшее значеніе L, и черезъ ζ—ту точку, гдѣ $P'(x) . \varphi(x)$ достигаетъ максимума M.

Я говорю, что нельзя найти такого многочлена $F_n(x)$ степени n, который бы удовлетворялъ уравненіямъ

$$F_n(x_1) = P(x_1), \quad F_n(x_2) = P(x_2), \ldots F_n(x_k) = P(x_k), \quad F_n'(\zeta) . \varphi(\zeta) = 0 \quad (2)$$

Въ самомъ дѣлѣ, еслибъ равенства (2) были осуществлены, то можно было бы построить многочленъ $P - \lambda F_n$ степени не выше n, выбравши положительное число λ слѣдующимъ образомъ: окружимъ точки $x_1, x_2, \ldots x_k$ промежутками достаточно малыми, чтобъ $P(x)$ и $F_n(x)$ сохраняли въ каждомъ изъ нихъ тотъ же самый знакъ, и отнимемъ эти промежутки изъ отрѣзка $(-1, +1)$; тогда въ оставшейся части отрѣзка $|P(x)| < L - \delta$, гдѣ δ нѣкоторое опредѣленное положительное число (меньшее, если хотимъ, чѣмъ $\frac{L}{2}$); послѣ этого мы выберемъ положительное количество λ настолько малымъ, чтобы $\lambda |F_n(x)| < \delta$. Въ такомъ случаѣ оказалось бы, что многочленъ $P - \lambda F_n$ по абсолютному значенію всегда менѣе (и никогда не равенъ) L, такъ какъ въ отнятыхъ промежуткахъ $|P - \lambda F_n| < |P| \leqq L$, и въ оставшейся части отрѣзка $|P - \lambda F_n| < (L - \delta) + \delta = L$, при чемъ $[P'(\zeta) - \lambda F_n'(\zeta)] . \varphi(\zeta) = M$. Поэтому обозначая черезъ $M_1 (M_1 \geqq M)$ максимумъ $|[P'(x) - \lambda F_n'(x)] . \varphi(x)|$, убѣждаемся, что многочленъ $[P(x) - \lambda F_n(x)] . \frac{M}{M_1}$ подлежалъ бы сравненію, уклоняясь отъ нуля менѣе, чѣмъ $P(x)$, что противорѣчило бы нашему допущенію, что среди подлежащихъ сравненію многочленовъ нѣтъ такого, который уклоняется отъ нуля менѣе, чѣмъ $P(x)$.

Слѣдовательно, система уравненій (2) не имѣетъ рѣшенія, а потому, либо число уравненій $(k+1)$ больше числа неизвѣстныхъ коэффиціентовъ $(n+1)$, т. е. $k > n$, либо $k \leqq n$ и всѣ опредѣлители $(k+1)$-го порядка матрицы

$$\begin{vmatrix} x_1^n & x_1^{n-1} & \dots & x_1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_k^n & x_k^{n-1} & \dots & x_k & 1 \\ n\zeta^{n-1} & \dots & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

равны нулю (такъ какъ, очевидно, $\varphi(\zeta) \gtrless 0$).

Въ первомъ случаѣ $P(x)$ есть тригонометрическій многочленъ. Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ степень многочлена $P(x)$ равна n, то во всякомъ случаѣ $k \leq n+1$; поэтому при допущеніи, что $k > n$, находимъ $k = n+1$. Такимъ образомъ, изъ значеній $x_1, x_2, \dots x_k$, два равны $+1$ и -1, а остальныя суть $(n-1)$ корень уравненія $P'(x) = 0$. Такъ какъ съ другой стороны всѣ эти значенія обращаютъ въ нуль $P^2(x) - L^2$, то всѣ корни $P'(x) = 0$ суть двойные корни уравненія $P^2(x) - L^2 = 0$, имѣющаго еще всего два простыхъ корня $+1$ и -1. Отсюда выводимъ дифференціальное уравненіе Чебышева

$$P^2(x) - L^2 = \frac{(x^2-1) \cdot [(P'(x)]^2}{n^2}, \tag{3}$$

единственнымъ раціональнымъ рѣшеніемъ котораго служитъ $L \cos n \arccos x$ Слѣдовательно, $P(x) = L \cos n \arccos x$.

Во второмъ случаѣ, $k = n$. Въ самомъ дѣлѣ, еслибъ $k < n$, то $P(x) + (ax+b) R(x)$, гдѣ $R(x) = (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_k)$, былъ бы многочленомъ степени не выше n. Но полагая $F_n(x) = P(x) + (ax+b) . R(x)$, мы можемъ, очевидно выбрать коэффиціенты (a, b) такъ, чтобы всѣ уравненія (2) были удовлетворены; для этого достаточно удовлетворить уравненію

$$P'(\zeta) + aR(\zeta) + (a\zeta + b) . R'(\zeta) = 0, \tag{2^{bis}}$$

къ которому приводится послѣднее изъ уравненій (2), между тѣмъ какъ первыя k уравненій удовлетворены тождественно. Уравненіе же (2^{bis}) всегда разрѣшимо, ибо не можетъ быть одновременно $R'(\zeta) = 0$ и $R(\zeta) = 0$. Но такъ какъ по доказанному уравненія (2) несовмѣстимы, слѣдовательно $k = n$.

Однако, какъ мы увидимъ, для функцій $\varphi(x)$, разсматриваемыхъ нами, второй случай вообще не можетъ представиться. Для этого перейдемъ къ слѣдствіямъ, вытекающимъ изъ предположенія, что $k = n$.

Прежде всего мы замѣчаемъ, полагая $F_n(x) = P(x) + bR(x)$, что уравненія (2) приводятся къ единственному уравненію $P'(\zeta) + bR'(\zeta) = 0$, которое будетъ неразрѣшимо лишь въ случаѣ, когда $R'(\zeta)=0$. Такимъ образомъ ζ есть корень уравненія

$$R'(x)=0.$$

Но

$$R(x)=C\frac{(x^2-1)\,.\,P'(x)}{x-\beta},$$

гдѣ C—постоянный множитель, β—тотъ изъ корней уравненія

$$(x^2-1)\,P'(x)=0,$$

котораго не хватаетъ уравненію $R(x)=(x-x_1)\ldots(x-x_k)=0$. Поэтому ζ удовлетворяетъ одновременно уравненіямъ

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{(x^2-1)\,.\,P'(x)}{x-\beta}\right]=0 \quad \text{и} \quad (x^2-1)\,.\,\frac{d}{dx}\Big[P'(x)\,.\,\varphi(x)\Big]=0 \qquad (4)$$

Легко обнаруживается несовмѣстимость этихъ уравненій, если $\varphi(x)=1-x^2$. Тогда, очевидно, $\zeta^2-1<0$, такъ что второе уравненіе обращается въ

$$\frac{d}{dx}\Big[P'(x)\,.\,(1-x^2)\Big]=0,$$

вслѣдствіе чего первое уравненіе приводится къ $P'(x)=0$, что невозможно, такъ какъ $|P'(x)\,.(1-x^2)|$ при $x=\zeta$, по предположенію, достигаетъ своего наибольшаго значенія M.

Докажемъ, что случай $k=n$ также не представляется, если $\varphi(x)=$ $=\sqrt{1-x^2}$, какъ это имѣетъ мѣсто въ условіи теоремы. Если мы положимъ $P'(x).\sqrt{1-x^2}=P_1(x)$, то уравненія (4) примутъ форму

$$\frac{d}{dx}\left[P_1\,.\,\frac{\sqrt{1-x^2}}{x-\beta}\right]=0, \quad \frac{dP_1}{dx}=0,$$

или

$$\frac{dP_1}{dx}\,.\,(1-x^2)(x-\beta)+P_1\,.\,(\beta x-1)=0, \quad \frac{dP_1}{dx}=0,$$

откуда

$$\beta x-1=0;$$

поэтому $\zeta=\frac{1}{\beta}$. И такъ какъ $|\zeta|<1$, слѣдовательно,

$$|\beta|>1.$$

Съ другой стороны, легко убѣдиться, что $P(x)$ удовлетворяетъ дифференціальному уравненію вида

$$P^2 - L^2 = \frac{(P')^2 \cdot (x^2-1) \cdot (x^2+bx+c)}{n^2 (x-\beta)^2}. \tag{5}$$

Дѣйствительно, многочленъ $P^2 - L^2$ степени $2n$ имѣетъ двойными корнями тѣ изъ значеній $x_1, x_2, \ldots x_n$, которыя отличны отъ ± 1 (такъ какъ онѣ обращаютъ въ нуль P'), и простыми корнями тѣ изъ значеній, которыя равны ± 1. $P^2 - L^2$ дѣлится поэтому на многочленъ $(2n-2)$-ой степени $\frac{P'^2 \cdot (x^2-1)}{(x-\beta)^2}$, и такъ какъ коэффиціентъ перваго члена дѣлимаго въ n^2 разъ меньше коэффиціента перваго члена дѣлителя, то частное имѣетъ форму $\frac{x^2+bx+c}{n^2}$; откуда вытекаетъ уравненіе (5).

Я говорю, что корни уравненія

$$x^2 + bx + c = 0,$$

вещественны, имѣютъ тотъ же знакъ, что β, и больше его по абсолютному значенію. Въ самомъ дѣлѣ, допустимъ для опредѣленности, что $\beta > 0$; въ такомъ случаѣ $\beta > 1$. Если x, возрастая отъ единицы, достигаетъ значенія β, гдѣ P' обращается въ нуль, P^2 возрастаетъ отъ L^2 до нѣкотораго числа L_1^2, затѣмъ P^2 убываетъ; но, такъ какъ P' болѣе не мѣняетъ знака, то P^2, пройдя, при $x = \gamma > \beta$, черезъ значеніе L^2, обращается въ нуль, и послѣ этого возрастаетъ до безконечности, проходя снова черезъ значеніе L^2, при $x = \delta > \gamma > \beta$. Очевидно, что γ и δ суть корни уравненія $x^2 + bx + c = 0$. Итакъ уравненіе (5) можемъ написать въ видѣ

$$P^2 - L^2 = \frac{(x^2-1)(x-\gamma)(x-\delta)}{n^2 \cdot (x-\beta)^2} \cdot (P')^2, \tag{6}$$

при чемъ $\gamma > \beta > 0$ и $\delta > \beta > 0$. (То же самое разсужденіе привело бы, при $\beta < 0$, къ $\gamma < \beta < 0$ и $\delta < \beta < 0$).

Слѣдовательно, для $|x| < 1$, имѣемъ

$$\Theta^2 \cdot (L^2 - P^2) = \frac{(1-x^2) \cdot (P')^2}{n^2}, \tag{6^{\text{bis}}}$$

гдѣ $\Theta < 1$; поэтому

$$\left| P' \cdot \sqrt{1-x^2} \right| \leqq n \Theta L.$$

Такимъ образомъ, если бы $k = n$, то, несомнѣнно, наибольшее значеніе L модуля $P(x)$, удовлетворяло бы неравенству $L \geqq \frac{M}{n\Theta} > \frac{M}{n}$. Напротивъ, при $k = n + 1$, мы нашли, что $P(x) = L \cos n \arccos x$, откуда $|P' . \sqrt{1-x^2}| = Ln |\sin n \arccos x|$; такъ что въ этомъ случаѣ $L = \frac{M}{n}$. Слѣдовательно, только случай, когда $P(x)$ есть тригонометрическій многочленъ, приводитъ къ наименьшему значенію для L, при чемъ $L = \frac{M}{n}$, ч. и. т. д.

3. Слѣдствія. *a) Если на отрѣзкѣ* $(-h, +h)$ *произведеніе* $|P_n(x) . \sqrt{h^2-x^2}|$ *достигаетъ значенія* M. *то, при предположеніи, что* $P_n(x)$ *есть многочленъ степени* n, $|P_n(x)|$ *не можетъ на разсматриваемомъ отрѣзкѣ оставаться менѣе* $\frac{M}{n}$.

Въ самомъ дѣлѣ, положимъ $x = hx_1$. Въ такомъ случаѣ, $P_n(x) = P_n(hx_1) = Q_n(x_1)$, и $P'_n(x) . \sqrt{h^2-x^2} = Q'_n(x_1)\sqrt{1-x_1^2}$. Примѣняя къ $Q_n(x_1)$ только что доказанную теорему, заключаемъ, что, такъ какъ на отрѣзкѣ $(-1, +1)$, $|Q'_n(x) . \sqrt{1-x_1^2}|$ достигаетъ значенія M, слѣдовательно $|Q_n(x_1)|$ на томъ же отрѣзкѣ $(-1, +1)$, а $|P_n(x)|$ на отрѣзкѣ $(-h, +h)$, не можетъ оставаться меньше $\frac{M}{n}$.

b) Если на отрѣзкѣ (a, b) *произведеніе* $|P'_n . \sqrt{(a-x)(x-b)}|$ *достигаетъ значенія* M, *то* $|P_n(x)|$ *на этомъ отрѣзкѣ не остается менѣе* $\frac{M}{n}$.

Это вытекаетъ изъ доказаннаго слѣдствія, если положимъ $x_1 = x - \frac{a+b}{2}$.

c) Если на отрѣзкѣ (a, b) $|P_n(x)| \leqq L$, *то на томъ же отрѣзкѣ* $P'_n(x) . \sqrt{a-x)(x-b)}| \leqq nL$.

Въ самомъ дѣлѣ, еслибъ $|P'_n(x) . \sqrt{(a-x)(x-b)}|$ достигалъ бы значенія $M = nL + \varepsilon$, то $|P_n(x)|$ въ силу предыдущаго слѣдствія получалъ бы значеніе $\frac{M}{n} = L + \frac{\varepsilon}{n}$, что противорѣчитъ условію.

4. Теорема А. А. Маркова [1]). *Многочленъ* n*-ой степени* $P_n(x)$ *на отрѣзкѣ* $(-1, +1)$ *не остается менѣе* $\frac{M}{n^2}$ *по абсолютному значенію, если на томъ же отрѣзкѣ* $|P'_n(x)|$ *достигаетъ* M.

---

[1]) А. Марковъ. Объ одномъ вопросѣ Д. И. Менделѣева. 1889. Изъ доказательства А. А. Маркова вытекаетъ въ сущности также и теорема (2), хотя она и не формулирована въ упомянутой статьѣ.

Очевидно, что вся первая часть доказательства теоремы (2) (до спеціализаціи функціи $\varphi(x)$) остается въ силѣ. Въ данномъ случаѣ мы должны положить въ уравненіяхъ (4) $\varphi(x) = 1$; такимъ образомъ, если многочленъ $P(x)$, дающій наименьшее отклоненіе L, не тригонометрическій многочленъ и достигаетъ максимальнаго отклоненія только въ n точкахъ, то значеніе ζ, при которомъ $|P'(x)|$ достигаетъ максимума M, удовлетворяетъ уравненіямъ

$$\frac{dP'}{dx} \cdot (x^2-1)(x-\beta) + P'\,[2x(x-\beta)-(x^2-1)] = 0, \quad (x^2-1)\frac{dP'}{dx} = 0. \qquad (4^{\text{bis}})$$

Слѣдовательно, либо $\zeta = \pm 1$; тогда $\beta = \zeta$. Либо $|\zeta| < 1$; тогда

$$\zeta^2 - 2\beta\zeta + 1 = 0,$$

такъ что $|\beta| > 1$.

Въ первомъ случаѣ, полагая для опредѣленности $\beta = \zeta = 1$, наибольшее значеніе $|P(x)|$ достигается въ $(n-1)$ внутреннихъ точкахъ, гдѣ $P'(x) = 0$, и въ точкѣ $x = -1$. Поэтому $P(x)$ будетъ удовлетворять дифференціальному уравненію

$$P^2 - L^2 = \frac{(1+x)(x-\alpha)}{n^2} \cdot (P')^2, \qquad (7)$$

причемъ $\alpha > 1$, такъ какъ, при $x = 1$, $P^2 < L^2$. Слѣдовательно,

$$P = L \cos n \arccos \frac{2x + \alpha - 1}{\alpha + 1}.$$

Во второмъ случаѣ, P опять долженъ удовлетворять уравненію (6) съ соблюденіемъ тѣхъ же неравенствъ относительно β, γ, δ. Поэтому, по прежнему,

$$\Theta^2(L^2 - P^2) = \frac{(1-x^2)\,(P')^2}{n^2}, \qquad (6^{\text{bis}})$$

гдѣ $\Theta < 1$.

Наконецъ, въ случаѣ когда $k = n + 1$, $P(x)$ есть тригонометрическій многочленъ, удовлетворяющій, какъ мы видѣли, уравненію (3), которое можно получить изъ уравненія (6^{bis}), полагая въ послѣднемъ $\Theta = 1$.

Введемъ новыя перемѣнныя, опредѣляемыя уравненіями

$$P = \pm L \cos z, \quad x = \cos t;$$

(знакъ $+$ возьмемъ, если при $x = 1$, $P = L$, въ противномъ случаѣ возьмемъ $-$); тогда уравненіе (6^{bis}) преобразуется въ

$$\Theta^2 L^2 \sin^2 z = \frac{L^2 \sin^2 z}{n^2} \cdot \left(\frac{dz}{dt}\right)^2,$$

откуда $\left|\frac{dz}{dt}\right| = n\Theta$. Такъ какъ, при $x=1$, $P=\pm L$, то можно положить $z=0$, при $t=0$. Слѣдовательно, $z=n\Theta_1 t$, гдѣ $|\Theta_1|<1$ для уравненія (6^{bis}), и $\Theta_1=1$ для уравненія (3). Откуда

$$\Theta^2 L^2 \sin^2 n\Theta_1 t = \frac{\sin^2 t}{n^2}.(P')^2;$$

поэтому

$$L = \left|\frac{\sin t}{\Theta n \sin n\Theta_1 t} P'\right| > \frac{M}{n^2},$$

если $\Theta<1$, $|\Theta_1|<1$, и $L=\frac{M}{n^2}$, если $\Theta=\Theta_1=1$, такъ какъ $|P'|$ наибольшее значеніе M, очевидно, принимаетъ, когда $\left|\frac{\sin t}{\Theta n \sin n\Theta_1 t}\right|$ получаетъ наименьшее значеніе (которое больше, чѣмъ $\frac{1}{n^2}$ въ первомъ случаѣ, и равно $\frac{1}{n^2}$ во второмъ случаѣ). Итакъ, отклоненіе L тригонометрическаго многочлена при томъ же M было бы менѣе отклоненія многочлена $P(x)$, удовлетворящаго уравненію (6^{bis}); а потому $P(x)$ не можетъ удовлетворять уравненію (6^{bis}). $P(x)$ не можетъ удовлетворять и уравненію (7), ибо въ этомъ случаѣ $P(x)=L\cos n \arccos\frac{2x+\alpha-1}{\alpha+1}$, а

$$P'(x) = \frac{2nL \sin n \arccos\frac{2x+\alpha-1}{\alpha+1}}{(\alpha+1).\sin\arccos\frac{2x+\alpha-1}{\alpha+1}},$$

откуда $M<n^2L$, такъ какъ $\alpha>1$.

Такимъ образомъ $|P_n(x)|$ остается возможно малымъ, если $P_n(x)$ тригонометрическій многочленъ; но даже въ этомъ случаѣ многочленъ $P(x)$ достигаетъ абсолютнаго значенія $L=\frac{M}{n^2}$, ч. и. т. д.

5. Слѣдствія. *a) Изъ всѣхъ многочленовъ степени n, производная которыхъ достигаетъ даннаго абсолютнаго значенія на отрѣзкѣ $(-1,+1)$ наименѣе уклоняется отъ нуля на этомъ отрѣзкѣ тригонометрическій многочленъ.*

b) Если на отрѣзкѣ (a, b) производная многочлена n-ой степени $P_n(x)$ достигаетъ абсолютнаго значенія M, то $|P_n(x)|$ на этомъ отрѣзкѣ не остается менѣе $\frac{|b-a|.M}{2n^2}$.

Для того, чтобы въ этомъ убѣдиться, достаточно сдѣлать линейное преобразованіе $x = \frac{b-a}{2} x_1 + \frac{b+a}{2}$.

c) Если[1] *на отрѣзкѣ* (a, b) *многочленъ n-ой степени* $P_n(x)$ *не превышаетъ по абсолютному значенію* L, *то* $|P'_n(x)|$ *на томъ же отрѣзкѣ не превышаетъ* $\frac{2n^2L}{b-a}$.

d) Если на отрѣзкѣ (a, b) $|P_n(x)|$ *не превышаетъ* L, *то* $\left|\frac{d^kP_n(x)}{dx^k}\right|$ *не превышаетъ* $\left(\frac{2}{b-a}\right)^k . n^2 . (n-1)^2 \ldots (n-k+1)^2 . L$ *на томъ же отрѣзкѣ*[2].

Это вытекаетъ изъ k — кратнаго повторенія предыдущаго слѣдствія.

6. Теорема. *Изъ всѣхъ многочленовъ степени* n, *принимающихъ въ данной точкѣ, не лежащей на отрѣзкѣ* $(-1, +1)$, *абсолютное значеніе* M, *наименѣе уклоняется отъ нуля на этомъ отрѣзкѣ тригонометрическій многочленъ.*

Въ самомъ дѣлѣ, посредствомъ соображеній, совершенно аналогичныхъ приведеннымъ при доказательствѣ теоремы (2), убѣждаемся, что среди многочленовъ, подлежащихъ разсмотрѣнію, существуетъ такой $P(x)$, который достигаетъ наименьшаго отклоненія L. Обозначая черезъ x_1, $x_2, \ldots x_n$ значенія, гдѣ $|P(x)| = L$, а черезъ ξ данное значеніе, гдѣ $P(\xi) = M$, находимъ подобно предыдущему, что никакой многочленъ $F_n(x)$ степени n не можетъ удовлетворить уравненіямъ

$$F_n(x_1) = P(x_1), \quad F_n(x_2) = P(x_2), \ldots F_n(x_k) = P(x_k), \quad F_n(\xi) = 0,$$

---

[1]) Это есть формулировка теоремы А. А. Маркова, данная имъ въ выше упомянутой статьѣ; къ сожалѣнію, съ этой работой такъ же, какъ и съ сочиненіемъ В. А. Маркова „О функціяхъ наименѣе уклоняющихся отъ нуля" (1892) я познакомился лишь послѣ того, какъ предварительныя алгебраическія теоремы, составляющія содержаніе настоящей главы, были мной самостоятельно найдены и доказаны. Несомнѣнно, болѣе раннее знакомство съ идеями этихъ ученыхъ, упростило бы мою задачу, а также, быть можетъ, и изложеніе этой главы. Но измѣнять уже вполнѣ законченныя доказательства я не счелъ нужнымъ въ виду вспомогательной роли упомянутыхъ теоремъ, и такъ какъ мнѣ казалось, кромѣ того, что примѣненіе общаго метода В. А. Маркова, могущаго дать даже больше того, что намъ здѣсь нужно, не упростило бы изложенія; разсужденія же А. А. Маркова, которыми въ нѣкоторыхъ случаяхъ было бы цѣлесообразно воспользоваться, въ другихъ случаяхъ, повидимому, нуждались-бы въ значительныхъ дополненіяхъ (напр. для доказательства теоремы (8)).

[2]) Въ упомянутой выше работѣ В. Марковъ, подобно тому какъ это уже было сдѣлано для 1-й производной, даетъ максимумъ, котораго k-ая производная дѣйствительно можетъ достигнуть. Мы же указываемъ здѣсь лишь верхнюю границу этого максимума, вполнѣ однако достаточную для тѣхъ выводовъ, которые будутъ сдѣланы въ слѣдующей главѣ.

что будетъ имѣть мѣсто лишь тогда, когда $k > n$. Слѣдовательно, $k = n + 1$, и $P(x)$ есть тригонометрическій многочленъ; ч. и. т. д.

7. Слѣдствія. *a) Если на отрѣзкѣ* $(-1, +1)$, *многочленъ степени n достигаетъ максимума L, то наибольшее абсолютное значеніе, какое онъ можетъ получить въ точкѣ* ξ *(не лежащей на этомъ отрѣзкѣ) есть*

$$M = L\left|\frac{(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})^n + (\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})^n}{2}\right| \tag{8}$$

Въ самомъ дѣлѣ, указанное значеніе M есть абсолютное значеніе получаемое въ точкѣ ξ соотвѣтствующимъ тригонометрическимъ многочленомъ.

b) Если обозначить черезъ R полусумму осей эллипса, проходящаго черезъ точку ξ *и имѣющаго фокусами* $(-1, +1)$, *то имѣетъ мѣсто неравенство*

$$M < LR^n. \tag{9}$$

Въ самомъ дѣлѣ, положимъ

$$\xi = \frac{1}{2}[(e^b + e^{-b})\cos a + i(e^b - e^{-b})\sin a] = \cos(a - bi).$$

Въ такомъ случаѣ, если b получаетъ опредѣленное положительное значеніе, ξ находится на эллипсѣ, имѣющемъ фокусами $(-1, +1)$, а осями $e^b + e^{-b}$ и $e^b - e^{-b}$. Съ другой стороны,

$$M = L\left|\cos n(a - bi)\right| = \frac{L}{2}\left|\cos na \, . (e^{nb} + e^{-nb}) + i \sin na \, . (e^{nb} - e^{-nb})\right| =$$

$$= \frac{L}{2} \, . \sqrt{e^{2nb} + e^{-2nb} + 2\cos 2na}.$$

Слѣдовательно,

$$\frac{L}{2}(e^{nb} - e^{-nb}) \leqq M \leqq \frac{L}{2}(e^{nb} + e^{-nb}) < Le^{nb}.$$

Но

$$e^b = \frac{(e^b + e^{-b}) + (e^b - e^{-b})}{2} = R$$

есть полусумма осей разсматриваемаго эллипса. Откуда

$$M < LR^n.$$

Примѣчаніе. Легко провѣрить, что неравенство (9) останется въ силѣ, если отрѣзокъ $(-1, +1)$ замѣнить любымъ отрѣзкомъ (α, β); только R будетъ тогда обозначать отношеніе суммы осей эллипса, проходящаго черезъ ξ и имѣющаго фокусами (α, β), къ фокусному разстоянію.

8. Теорема. *Если $P_n(x)$ есть многочленъ n-ой степени, и на отрѣзкѣ $(-1, +1)$ существуютъ значенія x, y, для которыхъ*

$$E(x,\ y) = \left|\frac{P_n(x) - P_n(y)}{(x-y)^\alpha}\right| . (1-x^2)^{\frac{\alpha}{2}} (1-y^2)^{\frac{\alpha}{2}} = M,$$

при $0 < \alpha < 1$, *то* $|P_n(x)|$ *не остается менѣе* $\dfrac{M}{n^\alpha\, 2^{1-\alpha}}$ *на этомъ отрѣзкѣ.*

Въ самомъ дѣлѣ, подобно предыдущему, убѣждаемся въ существованіи многочлена $P(x)$, для котораго максимумъ $|P(x)|$ достигаетъ наименьшаго возможнаго значенія. Кромѣ того, если (x, y) суть значенія, для которыхъ $E(x, y)$ максимумъ, $x_1, x_2, \ldots x_k$ — значенія, гдѣ $|P(x)|$ максимумъ, то уравненія

$$F_n(x_1) = P(x_1), \ldots, F_n(x_k) = P(x_k), \quad F_n(x) - F_n(y) = 0 \tag{10}$$

не совмѣстимы. Поэтому, если P не тригонометрическій многочленъ, то $k = n$, и полагая

$$F_n(x) = P(x) + b(x-x_1)(x-x_1)\ldots(x-x_n) = P(x) + bR(x),$$

находимъ, что уравненія (10) приводятся къ

$$P(x) - P(y) + b(R(x) - R(y)) = 0,$$

которое будетъ неразрѣшимо только, если

$$R(x) = R(y),$$

т. е. если

$$\frac{P'(x).(x^2-1)}{x-\beta} = \frac{P'(y).(y^2-1)}{y-\beta}.$$

Но съ другой стороны (x, y) удовлетворяютъ уравненіямъ, выражающимъ, что $|E(x, y)|$ максимумъ:

$$(1-x^2)[P'(x).(x-y) - \alpha(P(x) - P(y))] - \alpha x(x-y)(P(x) - P(y)) = 0,$$

$$(1-y^2)[P'(y).(y-x) - \alpha(P(y) - P(x))] - \alpha y(y-x)(P(y) - P(x)) = 0,$$

или,

$$P'(x).(1-x^2) = \alpha\frac{P(x) - P(y)}{x-y}.(1-xy) = A \gtrless 0$$

и

$$P'(y).(1-y^2) = \alpha\frac{P(x) - P(y)}{x-y}(1-xy) = A \gtrless 0.$$

Такимъ образомъ

$$\frac{A}{x-\beta}=\frac{A}{y-\beta},$$

что невозможно, такъ какъ $x \gtrless y$. Слѣдовательно, P есть тригонометрическій многочленъ, $P = L\cos n \arccos x$.

Остается вычислить максимумъ $|E(x,\ y)|$ для этого многочлена. Съ этой цѣлью, полагаемъ

$$x=\cos\Theta,\quad y=\cos\varphi\,,\quad (0<\Theta<\pi;\quad 0<\varphi<\pi).$$

Въ такомъ случаѣ,

$$E(x,\ y)=L\frac{\cos n\Theta-\cos n\varphi}{(\cos\Theta-\cos\varphi)^\alpha}\,.\,(\sin\Theta\sin\varphi)^\alpha=$$

$$=L\left(\frac{\cos n\Theta-\cos n\varphi}{\cos\Theta-\cos\varphi}\right)^\alpha\cdot(\cos n\Theta-\cos n\varphi)^{1-\alpha}(\sin\Theta\sin\varphi)^\alpha<$$

$$\leqq L\left(\frac{\sin\frac{n}{2}(\Theta-\varphi)}{\sin\frac{1}{2}(\Theta-\varphi)}\right)^\alpha\cdot\left(\frac{\sin\Theta\sin\varphi}{\sin\frac{1}{2}(\Theta+\varphi)}\right)^\alpha\cdot(\cos n\Theta-\cos n\varphi)^{1-\alpha}<2^{1-\alpha}n^\alpha L.$$

Поэтому

$$M<2^{1-\alpha}n^\alpha L,$$

откуда

$$L>\frac{M}{2^{1-\alpha}n^\alpha}\,,\ \text{ч. и т. д.}$$

Примѣчаніе. Аналогичнымъ образомъ получимъ, что наибольшее значеніе

$$\left|\frac{P_n(x)-P_n(y)}{(x-y)^\alpha}\right|\sqrt{(h^2-x^2)^\alpha(h^2-y^2)^\alpha}$$

на отрѣзкѣ $(-h,\ +h)$ менѣе, чѣмъ $L\,.\,2^{1-\alpha}(nh)^\alpha$.

9. Теорема. *Произведеніе* $|P_n(x)\,.\sqrt{1-x^2}|$, *гдѣ* $P_n(x)$ *многочленъ n-ой степени, не можетъ оставаться менѣе* $\dfrac{M}{n+1}$ *на отрѣзкѣ* $(-1,\ +1)$, *если* $\left|\dfrac{d}{dx}\left(P_n\,.\sqrt{1-x^2}\right)\right|.\sqrt{1-x^2}$ *достигаетъ значенія M на этомъ отрѣзкѣ.*

Въ самомъ дѣлѣ, подобно предыдущему, убѣждаемся въ существованіи многочлена P(x), осуществляющаго минимальное отклоненіе, а также и въ томъ, что число k точекъ, гдѣ оно имѣетъ мѣсто, болѣе или равно n. Случай $k=n$, вслѣдствіе несовмѣстимости уравненій

$$F_n(x_1) = P(x_1), \ldots, F_n(x_k) = P(x_k), \ \frac{d}{dx}[F_n(\zeta) . \sqrt{1-\zeta^2}] = 0,$$

приводитъ къ невозможности уравненія

$$\frac{d}{dx}[P(\zeta) . \sqrt{1-\zeta^2}] + b\frac{d}{dx}[R(\zeta) . \sqrt{1-\zeta^2}] = 0,$$

гдѣ

$$R(x) = (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_k),$$

откуда слѣдуетъ, что ζ удовлетворяетъ уравненію

$$\frac{d}{dx}[R(x) . \sqrt{1-x^2}] = 0. \tag{11}$$

При этомъ нужно замѣтить, что $|P(x)\sqrt{1-x^2}|$ достигаетъ максимума лишь во внутреннихъ точкахъ, обращающихъ въ нуль

$$\frac{d}{dx}(P(x) . \sqrt{1-x^2}) = \frac{P'(x) . (1-x^2) - xP(x)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{T(x)}{\sqrt{1-x^2}},$$

т. е. не болѣе чѣмъ въ $(n+1)$ точкахъ, удовлетворяющихъ уравненію $P'(x) . (1-x^2) - xP(x) = 0$; поэтому

$$R(x) = \frac{CT(x)}{x-\beta},$$

такъ что уравненіе (11) превращается въ

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{T(x) . \sqrt{1-x^2}}{x-\beta}\right) = 0, \tag{11^{bis}}$$

Но M, по предположенію, наибольшее значеніе

$$\left[\frac{d}{dx}(P . \sqrt{1-x^2})\right] . \sqrt{1-x^2} = T(x);$$

поэтому ζ удовлетворяетъ также уравненію

$$T'(x) = 0.$$

Слѣдовательно, уравненіе (11^{bis}) приводится (какъ въ теоремѣ 2) къ

$$T(x) . (\beta x - 1) = 0,$$

и такъ какъ $T(\zeta) \gtrless 0$, то $\beta = \frac{1}{\zeta}$, откуда $|\beta| > 1$.

Замѣчая далѣе, что $S=P.\sqrt{1-x^2}$ достигаетъ n разъ наибольшаго абсолютнаго значенія L, заключаемъ, что

$$S^2-L^2=\frac{(S')^2}{(n+1)^2}\cdot\frac{(x^2-1)(x-\gamma)(x-\delta)}{(x-\beta)^2},$$

при чемъ, подобно предыдущему, находимъ, что $|\gamma|>|\beta|$, $|\delta|>|\beta|$ и $\gamma\beta>0$, $\delta\beta>0$.

Поэтому

$$\Theta^2(S^2-L^2)=\frac{S'^2.(x^2-1)}{(n+1)^2},$$

гдѣ $\Theta<1$. Откуда

$$|S'.\sqrt{1-x^2}|=|T(x)|<(n+1)L, \quad \text{т. е.} \quad L>\frac{M}{n+1}.$$

Напротивъ, если $n=k+1$, то

$$S^2-L^2=\frac{(S')^2.(x^2-1)}{(n+1)},$$

такъ что $S=L\sin(n+1)\arccos x$ и

$$P=\frac{L\sin(n+1)\arccos x}{\sqrt{1-x^2}},$$

слѣдовательно $L=\dfrac{M}{n+1}$, ч. и. т. д.

10. Примѣненіе предыдущаго къ тригонометрическимъ суммамъ.

Условимся называть тригонометрической суммой n-го порядка выраженіе вида

$$A_0+A_1\cos t+B_1\sin t+\ldots+A_n\cos nt+B_n\sin nt;$$

если всѣ $B_i=0$, то выраженіе будетъ называться (тригонометрическою) суммою косинусовъ n-го порядка; если же всѣ $A_i=0$, то это будетъ сумма синусовъ того же порядка. Всѣ выше доказанныя теоремы приводятъ къ аналогичнымъ предложеніямъ относительно тригонометрическихъ суммъ, если положить $x=\cos t$, и замѣтить, что всегда возможно съ одной стороны отожествить выраженія

$$a_0+a_1\cos t+\ldots+a_n\cos^n t \quad \text{и} \quad A_0+A_1\cos t+\ldots+A_n\cos nt,$$

и, съ другой стороны, отожествить

$$\sin t[b_0+b_1\cos t+\ldots+b_n\cos^n t] \text{ и } B_0\sin t+\ldots+B_n\sin(n+1)t.$$

Ограничимся лишь формулировкой предложенiй, соотвѣтствующихъ теоремамъ (2) и (9).

Если абсолютное значенiе суммы косинусовъ n-аго порядка

$$w = A_0 + A_1 \cos t + \ldots + A_n \cos nt$$

не превышаетъ L, то абсолютное значенiе ея производной $-(A_1 \sin t + \ldots$ $\ldots + nA_n \sin nt)$ не превышаетъ никогда nL, послѣднее значенiе достигается только при $A_0 = A_1 = \ldots A_{n-1} = 0$.

Дѣйствительно, полагая $x = \cos t$, мы превращаемъ w въ многочленъ n-ой степени $P_n(x)$; при этомъ $\dfrac{dw}{dt} = -P'(x) \,.\, \sqrt{1-x^2}$.

Такимъ же точно образомъ легко вывести изъ теоремы (9) предложенiе:

Если абсолютное значенiе суммы синусовъ n-го порядка

$$B_1 \sin t + B_2 \sin 2t + \ldots + B_n \sin nt$$

не превышаетъ L, то абсолютное значенiе ея производной

$$B_1 \cos t + \ldots + nB_n \cos nt$$

не превышаетъ nL. (Послѣднее значенiе достигается только при $B_1 = B_2 = \ldots = B_{n-1} = 0$).

Эти два предложенiя можно обобщить слѣдующимъ образомъ:
Если абсолютное значенiе тригонометрической суммы n-го порядка

$$A_0 + A_1 \cos t + B_1 \sin t + \ldots + A_n \cos nt + B_n \sin nt$$

не превышаетъ L, то производная ея

$$-A_1 \sin t + B_1 \cos t + \ldots - nA_n \sin nt + nB_n \cos nt$$

остается менье, чѣмъ $2nL$ по абсолютному значенiю.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть L_1 будетъ наибольшее значенiе модуля суммы косинусовъ, а L_2—наибольшее значенiе модуля суммы синусовъ. Ясно, что въ такомъ случаѣ,

$$L \geqq L_1 \quad \text{и} \quad L \geqq L_2,$$

ибо, если, напримѣръ, $\pm t_0$ суть значенiя t, при которыхъ сумма косинусовъ равна L_1, то вся тригонометрическая сумма будетъ при этихъ значеніяхъ t равна $L_1 \pm k$, т. е. по крайней мѣрѣ при одномъ изъ значеній будетъ не менѣе L_1. Но, по доказанному,

$$|A_1 \sin t + \ldots + nA_n \sin nt| \leqq nL_1,$$

$$|B_1 \cos t + \ldots + nB_n \cos nt| \leqq nL_2.$$

Поэтому

$$|-A_1 \sin t + B_1 \cos t + \ldots - nA_n \sin nt + nB_n \cos nt| \leqq n(L_1 + L_2) < 2nL$$

(случай равенства отпадаетъ, потому что всѣ неравенства одновременно не обращаются въ равенства), ч. и. т. д.

11. Производныя высшихъ порядковъ. Изъ первыхъ двухъ предложеній предыдущаго §'а вытекаетъ, что *если L есть наибольшее абсолютное значеніе суммы $A_0 + A_1 \cos t + \ldots + A_n \cos nt$, то наибольшее абсолютное значеніе ея p-ой производной не превышаетъ $n^p L$ (случай равенства имѣетъ мѣсто только при $A_0 = A_1 = \ldots = A_{n-1} = 0$).*

Этотъ результатъ можно преобразовать возвращаясь снова къ многочленамъ. А именно, полагая, что $|P_n(x)| = |a_0 + \ldots + a_n x^n|$ на отрѣзкѣ $(-1, +1)$ менѣе L, мы должны заключить, что

$$\left|\frac{d^k P_n(x)}{(d \arccos x)^k}\right| \leqq n^k L,$$

или

$$|P_n' \sqrt{1-x^2}| \leqq nL,$$

$$|P_n''(1-x^2) - xP_n'| \leqq n^2 L \text{ и т. д.}$$

Однако этими неравенствами мы въ дальнѣйшемъ пользоваться не будемъ, и замѣнимъ ихъ менѣе точными, но болѣе удобными. Съ этой цѣлью, замѣчаемъ, что

$$|P_n'(x)| \leqq \frac{nL}{\sqrt{1-x^2}};$$

но въ такомъ случаѣ P_n' — многочленъ $(n-1)$-ой степени, который въ промежуткѣ $(-x_1, +x_1)$ менѣе, чѣмъ $\frac{nL}{\sqrt{1-x_1^2}}$, а потому

$$|P_n''(x)| < \frac{n(n-1)L}{\sqrt{(x_1^2-x^2)(1-x_1^2)}},$$

и, повторяя то же разсужденіе, найдемъ

$$|P_n^{(k)}| < \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)L}{\sqrt{(x_{k-1}^2-x^2)\ldots(1-x_1^2)}}.$$

Полагая же $1-x_1^2=x_1^2-x_2^2=\ldots=x_{k-1}^2-x^2=\dfrac{1-x^2}{k}$, получимъ наконецъ

$$|P_{(n)}^{(k)}| < \left(\frac{k}{1-x^2}\right)^{\frac{k}{2}} n(n-1)\ldots(n-k+1).L. \tag{12}$$

Аналогичнымъ образомъ можно провѣрить правильность неравенства

$$\left|\frac{P_n^{(k)}(z)-P_n^{(k)}(z_1)}{(z-z_1)^\alpha}\right| < \left(\frac{k+1}{1-x^2}\right)^{\frac{k}{2}+\alpha} 2n(n-1)\ldots(n-k+1)\left(\frac{n-k}{2}\right)^\alpha L, \quad (12^{\text{bis}})$$

при

$$|z| \leq x, \quad |z_1| \leq x.$$

Глава II.

Опредѣленіе низшаго предѣла уклоненія непрерывной функціи отъ многочлена данной степени.

12. Теорема. *Пусть будетъ данъ рядъ*

$$f(x) = u_1 + \ldots + u_n + \ldots, \tag{13}$$

гдѣ $u_n(x)$ *многочленъ степени не выше* n. *Если этотъ рядъ сходится на отрѣзкѣ* $(-1, +1)$, *и при томъ*

$$|u_n + u_{n+1} + \ldots| < \frac{A}{n^p},$$

гдѣ A *постоянная величина, то* $f(x)$ *имѣетъ во всякой точкѣ внутри отрѣзка* $(-1, +1)$ *непрерывную и конечную производную* k*-го порядка, обозначая черезъ* k *наибольшее цѣлое число, меньшее чѣмъ* p; *кромѣ того эта производная удовлетворяетъ условіямъ Липшица степеней* α *сколь угодно близкихъ къ* $p-k$.

Въ самомъ дѣлѣ, полагая

$$R_n = u_n + u_{n+1} + \ldots$$

имѣемъ, по условію,

$$|R_n| < \frac{A}{n^p};$$

поэтому. въ частности,

$$|R_{2^m}| < \frac{A}{2^{mp}}, \quad |R_{2^{m+1}}| < \frac{A}{2^{(m+1)p}}.$$

Слѣдовательно, если обозначимъ черезъ v_m многочленъ степени $2^{m+1}-1$

$$v_m = R_{2^m} - R_{2^{m+1}} = u_{2^m} + u_{2^m+1} + \ldots + u_{2^{m+1}-1},$$

то

$$|v_m| < \frac{A}{2^{mp}} + \frac{A}{2^{(m+1)p}} < \frac{2^{p+1}.A}{2^{(m+1)p}}; \tag{14}$$

такимъ образомъ указанной групировкой членовъ мы превращаемъ рядъ (13) въ абсолютно сходящійся рядъ

$$f(x) = v_0 + v_1 + \dots + v_m + \dots,$$

каждый членъ котораго есть многочленъ степени $2^{m+1} - 1$.

Дифференцируемъ почленно k разъ полученный рядъ, замѣчая, что, вслѣдствіе неравенствъ (12) и (14),

$$|v_m^{(k)}(x)| < \left(\frac{k}{1-x^2}\right)^{\frac{k}{2}} \cdot 2^{(m+1)k} \cdot \frac{2^{p+1}A}{2^{(m+1)p}} = 2^{p+1} \cdot \left(\frac{k}{1-x^2}\right)^{\frac{k}{2}} \cdot A \cdot \left(\frac{1}{2^{p-k}}\right)^{m+1}.$$

Слѣдовательно,

$$\varrho_m^{(k)}| = |v_m^{(k)}(x) + v_{m+1}^{(k)}(x) + \dots| < 2^{p+1}\left(\frac{k}{1-x^2}\right)^{\frac{k}{2}} A \left[\left(\frac{1}{2^{p-k}}\right)^{m+1} + \left(\frac{1}{2^{p-k}}\right)^{m+2} + \dots\right] =$$

$$= \frac{2^{p+1}}{2^{p-k}-1} \cdot \left(\frac{k}{1-x^2}\right)^{\frac{k}{2}} \cdot \frac{A}{2^{(p-k)m}};$$

а потому рядъ

$$f^{(k)} = v_0^{(k)}(x) + \dots + v_m^{(k)}(x) + \dots$$

равномѣрно (и абсолютно) сходится во всякомъ промежуткѣ внутри отрѣзка $(-1 . +1)$. Отсюда вытекаетъ существованіе конечной k-ой производной и ея непрерывность.

Вторая часть теоремы получится, если вмѣсто неравенства (12) мы воспользуемся неравенствомъ (12^{bis}). Полагая $p > k + \alpha$, находимъ

$$\left|\frac{f^{(k)}(z) - f^{(k)}(z_1)}{(z-z_1)^\alpha}\right| < \sum_{m=0}^{m=\infty}\left|\frac{v_m^{(k)}(z) - v_m^{(k)}(z_1)}{(z-z_1)^\alpha}\right| < \left(\frac{k+1}{1-x^2}\right)^{\frac{k}{2}+\alpha} 2^{p+2} A \sum_{m=0}^{m=\infty}\left(\frac{1}{2^{p-k-\alpha}}\right)^{m+1} =$$

$$= \frac{2^{p+2}A}{2^{p-k-\alpha}-1} \cdot \left(\frac{k+1}{1-x^2}\right)^{\frac{k}{2}+\alpha},$$

если $|z| \leq x$ и $|z_1| \leq x$, ч. и. т. д.

Примѣчаніе. Примѣняя слѣдствіе (d) § 5-го, мы такимъ же образомъ убѣдились бы *въ конечности k-ой производной* и въ концахъ отрѣзка, если только $k < \frac{p}{2}$.

13. Слѣдствіе. *Рядъ (13) можетъ быть дифференцируемъ почленно k разъ, если $k < p$.*

Въ самомъ дѣлѣ, изъ предшествующаго доказательства видно, что это дифференцированіе возможно при условіи соединенія въ одну группу членовъ $u_{2^m}+u_{2^m+1}+\ldots+u_{2^{m+1}-1}=v_m$. Но группировка (необходимая вообще для *абсолютной* сходимости) не является необходимой для равномѣрной сходимости, ибо легко видѣть, что при всякомъ $N<2^m$,

$$|u^{(k)}_{2^m}+\ldots u^{(k)}_{2^m+N}|<2^{p+1}.\left(\frac{k}{1-x^2}\right)^{\frac{k}{2}}.A.\left(\frac{1}{2^{p-k}}\right)^{m+1}.$$

14. Теорема. *Если (при прежнихъ обозначеніяхъ)*

$$|u_n+u_{n+1}\ldots|<\frac{A_n}{n^p},$$

и рядъ

$$S=A_1+A_2+A_4+\ldots+A_{2m}+\ldots \tag{15}$$

сходящійся, то, при p цѣломъ, функція $f(x)$ имѣетъ конечную и непрерывную производную p-го порядка во всякой точкѣ внутри отрѣзка $(-1, +1)$; въ случаѣ же, когда $p=k+\alpha$, гдѣ k наибольшее цѣлое число меньшее, чѣмъ p, то k-ая производная удовлетворяетъ во всякомъ промежуткѣ внутри того же отрѣзка условію Липшица степени α.

Ограничимся случаемъ, когда p цѣлое число, такъ какъ вторая часть теоремы доказывается такимъ же образомъ.

Полагая, какъ въ предыдущемъ §'ѣ,

$$v_m=u_{2^m}+\ldots+u_{2^{m+1}-1}$$

находимъ, что

$$|v_m|<\frac{A_{2^{m+1}}}{2^{(m+1)p}}+\frac{A_{2m}}{2^{mp}}.$$

А потому, пользуясь неравенствомъ (12), заключаемъ, что

$$|f^{(p)}(x)|\leq|v_0^{(p)}(x)|+|v_1^{(p)}(x)|+\ldots|v_m^{(p)}(x)|+\ldots<$$
$$<\left(\frac{p}{1-x^2}\right)^{\frac{p}{2}}(2^p+1)(A_1+A_2+A_4+\ldots A^{2m})=\left(\frac{p}{1-x^2}\right)^{\frac{p}{2}}.(2^p+1).S.$$

Ч. и. т. д.

15. Слѣдствія. Въ условіи только что доказанной теоремы не сдѣлано никакихъ предположеній относительно чиселъ A_n, кромѣ сходимости ряда (15).

Однако мы можемъ замѣтить, что группируя, если это понадобится, члены ряда (13) всегда возможно превратить его въ рядъ того же вида, но обладающій свойствомъ, что числа $\frac{A_n}{n^p}$ идутъ *не возрастая* съ возрастаніемъ n; другими словами, разсматривая конечную сумму $u_1 + u_2 + \ldots u_n$, какъ приближенный многочленъ степени n функціи $f(x)$, мы можемъ не вводить $(n+1)$-го члена, если онъ не увеличиваетъ приближенія, тогда $u_{n+1} = 0$ и $\frac{A_{n+1}}{(n+1)^p} = \frac{A_n}{n^p}$, и ввести затѣмъ сразу группу членовъ, дѣйствительно улучшающихъ приближеніе.

Въ такомъ случаѣ, легко убѣдиться въ слѣдующемъ:

Если есть такое число p, *что*

$$\frac{A_{n+1}}{(n+1)^p} \leqq \frac{A_n}{n^p},$$

то ряды

$$S = A_1 + A_2 + A_4 + \ldots A_{2^n} \ldots \text{ и } \Sigma = A_1 + \frac{A_2}{2} + \frac{A_3}{3} + \ldots \frac{A_n}{n} + \ldots$$

или оба сходящіеся или оба расходящіеся.

Дѣйствительно, если $p \geqq 1$, то

$$I_n = \frac{A_n}{n} + \frac{A_{n+1}}{n+1} + \ldots \frac{A_{2n-1}}{2n-1} = \frac{A_n}{n^p} \cdot n^{p-1} + \frac{A_{n+1}}{(n+1)^p} \cdot (n+1)^{p-1} + \ldots \frac{A_{2n-1}}{(2n-1)^p} \cdot (2n-1)^{p-1} =$$

$$= n^{p-1} \left[\frac{A_n}{n^p} + \frac{A_{n+1}}{(n+1)^p} \cdot \left(\frac{n+1}{n} \right)^{p-1} + \ldots + \frac{A_{2n-1}}{(2n-1)^p} \cdot \left(\frac{2n-1}{n} \right)^{p-1} \right] < A_n \cdot 2^{p-1}$$

и, съ другой стороны,

$$I_n = n^{p-1} \left[\frac{A_n}{n} + \ldots \frac{A_{2n-1}}{(2n-1)^p} \cdot \left(\frac{2n-1}{n} \right)^{p-1} \right] > \left(\frac{n}{2n-1} \right)^p A_{2n-1} \geqq n^p \cdot \frac{A_{2n}}{(2n)^p} = \frac{A_{2n}}{2^p}$$

Такимъ образомъ

$$\frac{A_{2n}}{2^p} < \frac{A_n}{n} + \frac{A_{n+1}}{n+1} + \ldots + \frac{A_{2n-1}}{2n-1} < A_n . 2^{p-1},$$

и слѣдовательно,

$$\frac{S}{2^p} - A_1 < \Sigma < 2^{p-1} S; \qquad (p \geqq 1)$$

если же $p \leqq 1$, то подобнымъ же образомъ получимъ

$$\frac{S}{2} - A_1 < \Sigma < S \quad (p \leqq 1).$$

Итакъ при предположеніи, что $\frac{A_{n+1}}{(n+1)^p} \leqq \frac{A_n}{n_p}$, *условіе сходимости ряда S въ теоремѣ (13) можетъ быть замѣнено равнозначнымъ ему условіемъ сходимости ряда*

$$\Sigma = A_1 + \frac{A_2}{2} + \ldots + \frac{A_n}{n} + \ldots \qquad (15^{\text{bis}})$$

Для практическаго примѣненія теоремы (13) можемъ воспользоваться различными достаточными условіями сходимости. Такимъ образомъ условіе сходимости ряда (15) или (15^{bis}), можетъ быть замѣнено болѣе спеціальными условіями (неравнозначными предыдущимъ), а именно, напримѣръ, условіемъ, чтобы

$$A_n < \frac{1}{(\log n)^{1+\varepsilon}} \text{ или } A_n < \frac{1}{\log n \,.\, (\log\log n)^{1+\varepsilon}} \text{ и т. д.}$$

гдѣ ε нѣкоторое положительное число.

16. Теорема. *Пусть по прежнему*

$$f(x) = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \qquad (13)$$

гдѣ u_n многочленъ степени не выше n, и на отрѣзкѣ $(-1, +1)$

$$|u_n + u_{n+1} + \ldots| < \frac{A_n}{n^p},$$

гдѣ числа A_n идутъ не возрастая; въ такомъ случаѣ, для всякаго цѣлаго значенія $p_1 < p$,

$$f^{(p_1)}(x) = w_{p_1} + w_{p_1+1} + \ldots + w_n + \ldots$$

гдѣ w_n многочленъ степени не выше $n - p_1$, при чемъ

$$(1-x^2)^{\frac{p_1}{2}} |w_{2n} + w_{2n+1} + \ldots| < \frac{p_1^{\frac{p_1}{2}} \cdot 2^{p+1}}{2^{p-p_1} - 1} \cdot \frac{A_n}{n^{p-p_1}}, \qquad (16)$$

и, при $2p_1 < p$,

$$|w_{2n} + w_{2n+1} + \ldots| < \frac{2^{p+1}}{2^{p-2p_1} - 1} \cdot \frac{A_n}{n^{p-2p_1}}. \qquad (16^{\text{bis}})$$

Въ самомъ дѣлѣ,

$$f^{(p_1)}(x) = v_0^{(p_1)} + \ldots + v_m^{(p_1)} + \ldots$$

при чемъ, вслѣдствіе неравенства (12),

$$|v_m^{(p_1)}|+|v_{m+1}^{(p_1)}|+\ldots<\left(\frac{p_1}{1-x^2}\right)^{\frac{p_1}{2}}.2^{p+1}[A_{2^m}.2^{(m+1)(p_1-p)}+A_{2^{m+1}}.2^{(m+2)(p_1-p)}+\ldots]$$

$$\leqq\left(\frac{p_1}{1-x^2}\right)^{\frac{p_1}{2}}.\frac{2^{p+1}.2^{(m+1)(p_1-p)}}{1-2^{p_1-p}}A_{2^m}.$$

Поэтому, полагая

$$w_n=v_m^{(p_1)},\quad \text{если}\quad n=2^{m+1}-1,$$

и

$$w_n=0,\quad \text{если}\quad n\gtrless 2^{m+1}-1,$$

находимъ,

$$f^{(p_1)}(x)=w_{p_1}+\ldots w_n+\ldots,$$

гдѣ w_n многочленъ степени не выше $(n-p_1)$, при чемъ

$$(1-x^2)^{\frac{p_1}{2}}|w_{2n}+w_{2n+1}+\ldots|<\frac{p_1^{\frac{p_1}{2}}.2^{p+1}}{2^{p-p_1}-1}\cdot\frac{A_n}{n^{p-p_1}}.$$

Точно также изъ слѣдствія (d) § 5 заключаемъ, что

$$|v_m^{(p_1)}|+|v_{m+1}^{(p_1)}|+\ldots<2^{p+1}[A_{2^m}.2^{(m+1)(2p_1-p)}+A_{2^{m+1}}2^{(m+2)(2p_1-p)}+\ldots]$$

$$\leqq\frac{2^{p+1}.2^{(m+1)(2p_1-p)}}{1-2^{2p_1-p}}.A_{2^m},$$

откуда

$$|w_{2n}+w_{2n+1}+\ldots|<\frac{2^{p+1}}{2^{p-2p_1}-1}\cdot\frac{A_n}{n^{p-2p_1}}$$

Примѣчанія. a. Теорема, въ частности, примѣнима, если $A_n=A$ постоянная величина.

b. Замѣтимъ также, что $|u^{(p_1)}{}_{2n+l}+\ldots|$ удовлетворяютъ тѣмъ же неравенствамъ, что и $|w_{2n}+w_{2n+1}+\ldots|$ при всякомъ $l\geq 0$.

c. Аналогичныя неравенства имѣютъ мѣсто, если вмѣсто производныхъ брать отношенія $\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^p}$, при $p<1$.

17. Тригонометрическіе ряды. Принимая во вниманіе результаты § 10, легко видѣть, что предыдущія теоремы остаются въ силѣ, если въ ряду

$$f(x)=u_1+u_2+\ldots u_n+\ldots \qquad (13^{\text{bis}})$$

функціи u_n будутъ *тригонометрическими суммами n-аго порядка*. Такимъ образомъ:

Если $|u_n + u_{n+1} + \ldots| < \frac{A_n}{n^p}$, *гдѣ* p *цѣлое число, и рядъ* $S = A_1 + A_2 + A_4 + \ldots + A_{2^m} \ldots$ *сходящійся, то p-ая производная* $|f^{(p)}(x)|$ *будетъ непрерывна и* $|f^p(x)| < 2^p . (2^p + 1) . S$. *Въ случаѣ, когда, всѣ* u_n *содержатъ только косинусы, или только синусы, то* $|f^{(p)}(x)| \leqq (2^p + 1) . S$.

Эта теорема, доказывается совершенно такъ же, какъ и теорема (14); и подобно ей mutatis mutandis получаются и другія эквивалентныя теоремы, если многочлены замѣняются тригонометрическими суммами.

18. Теорема. *Если внутри отрѣзка* $(-1, +1)$ *есть по крайней мѣрѣ одна точка, гдѣ p-ая производная* $f^{(p)}(x)$ *нѣкоторой функціи* $f(x)$ *не непрерывна, и наилучшее приближеніе* E_{n-1} *функціи* $f(x)$ *на этомъ отрѣзкѣ при помощи многочлена степени* $n-1$ *равно* $\frac{A_n}{n^p}$, *то рядъ* $\Sigma = A_1 + \frac{A_2}{2} + \ldots \frac{A_n}{n} + \ldots$ *расходящійся. Наоборотъ, каковы бы ни были данныя положительныя числа* $A'_1, A'_2, \ldots A'_n \ldots$, *удовлетворяющія условію* $\frac{A'_n}{n^p} \geqq \frac{A'_{n+1}}{(n+1)^p}$, *если рядъ* $\Sigma' = A'_1 + \ldots + \frac{A'_n}{n} + \ldots$ *расходящійся, то можно построить функцію* $f(x)$, *которой p-ая производная* $f^{(p)}(x)$ *не непрерывна внутри отрѣзка, при чемъ для всякаго n наилучшее приближеніе* $E_{n-1} < \frac{A'_n}{n^p}$. (Аналогичная теорема для тригонометрическихъ суммъ).

Первая часть теоремы непосредственно вытекаетъ изъ формулировки данной въ § 15 теоремѣ (14), такъ какъ, еслибъ рядъ Σ сходился, то $f^{(p)}(x)$ была бы непрерывна и конечна внутри отрѣзка $(-1, +1)$.

Допустимъ далѣе, что рядъ $\Sigma' = A'_1 + \ldots + \frac{A'_n}{n} + \ldots$ расходящійся и разсмотримъ два случая. Пусть во первыхъ, начиная отъ нѣкотораго n_1, всѣ $A'_n \geqq 1$. Въ такомъ случаѣ можно выбрать (см. § 45) численный коэффиціентъ α такъ, чтобъ функція $\varphi(x) = \alpha |x|^p$ удовлетворяла требованію теоремы: а именно, при $n \leqq n_1$, $E_{n-1} < \alpha < \frac{A_n}{n^p}$; и при $n > n_1$ $E_{n-1} < \frac{1}{n^p} \leqq \frac{A_n}{n^p}$.

Во второмъ случаѣ, среди чиселъ A'_{4m+1} есть безчисленное множество удовлетворяющихъ условію $A'_{4m+1} < 1 + \varepsilon$, какъ бы малъ ни былъ ε. Пусть, для опредѣленности, p будетъ нечетно, и построимъ функцію

$$f(x) = \frac{1}{5^p}\sum_{m=1}^{m=\infty}\left[\frac{A'_{4m+1}}{(4m-3)^p} - \frac{A'_{4m+5}}{(4m+1)^p}\right]\cos(4m+1)x = \sum_{n=1}^{n=\infty} u_n(x). \quad (17)$$

Такимъ образомъ тригонометрическая сумма (n_1-1)-го порядка $\sum\limits_{n=1}^{n=n_1-1} u_n(x)$, при $4m-2 \leqq n_1 < 4m+2$, удовлетворяетъ неравенству

$$\left| f(x) - \sum_{n=1}^{n=n_1-1} u_n(x) \right| \leqq \frac{A'_{4m+1}}{(4m+1)^p} \leqq \frac{A'_{n_1}}{n_1{}^p}$$

Слѣдовательно, *тригонометрическое* приближеніе функціи $f(x)$ (отъ котораго мы затѣмъ легко перейдемъ къ многочленамъ) удовлетворяетъ условію теоремы. Поэтому достаточно будетъ показать, что p-ая производная $f^{(p)}(x)$ въ нѣкоторой точкѣ, а именно въ $x=\frac{\pi}{2}$, безгранично возрастаетъ. Въ самомъ дѣлѣ, замѣтивъ, что всѣ коэффиціенты въ рядѣ (17) положительны, дифференцируемъ его почленно; получимъ

$$\pm \frac{1}{5^p}\sum_{m=1}^{m=\infty}\left[A'_{4m+1}\left(1+\frac{4}{4m-3}\right)^p - A'_{4m+5}\right]\sin(4m+1)x,$$

и полагая $x=\frac{\pi}{2}$, находимъ безконечно-возрастающую сумму положительныхъ членовъ

$$\frac{1}{5^p}\sum_{m=1}^{m=\infty}(A'_{4m+1} - A'_{4m+5}) + \left(\frac{4p}{4m-3} + \ldots\right)A'_{4m+1};$$

но этого не могло бы быть, еслибъ въ разсматриваемой точкѣ $f^{(p)}(x)$ была бы непрерывна, ибо въ такомъ случаѣ былъ бы примѣнимъ способъ суммированія тригонометрическихъ рядовъ Фейера [1]), который далъ бы $f^{(p)}\left(\frac{\pi}{2}\right)=\infty$; слѣдовательно, при $x=\frac{\pi}{2}$, $f^{(p)}(x)$ не непрерывна. Для того, чтобъ распространить полученный выводъ на многочлены, полагаемъ $z=\cos x$; тогда $f(x)=\varphi(z)$, и приближеніе E_{n-1} функціи $\varphi(z)$ въ промежуткѣ $(-1, +1)$ удовлетворяетъ условію теоремы. Но ясно, что точкѣ $x=\frac{\pi}{2}$, соотвѣтствуетъ $z=0$, гдѣ $\varphi^{(p)}(z)$ не можетъ также быть непрерывна.

---

[1]) Lebesgue. Leçons sur les séries trigonométriques.

19. Добавленіе къ предшествующей теоремѣ. Методъ, которымъ мы пользуемся въ этой главѣ, не можетъ дать никакихъ указаній относительно верхней границы E_n. Поэтому для полноты картины намъ необходимо упомянуть о нѣкоторыхъ результатахъ, которые будутъ доказаны лишь въ третьей части. А именно, если $f(x)$ *имѣетъ конечную производную p-аго порядка, на отрѣзкѣ $(-1, +1)$, то можно указать опредѣленное число k такъ, чтобы, при всякомъ $n > 0$,*

$$E_n < \frac{k \log (n+1)}{(n+1)^p};$$

если же эта p-ая производная удовлетворяетъ условію Липшица степени α, то, при всякомъ $n > 0$,

$$E_n < \frac{k \log (n+1)}{(n+1)^{p+\alpha}} < \frac{k_1}{(n+1)^{p+\alpha_1}},$$

гдѣ $\alpha_1 (\alpha_1 < \alpha)$ положительное число, сколь угодно близкое къ α.

Отсюда слѣдуетъ, что *если p-ая производная непрерывна и кромѣ того удовлетворяетъ какому-нибудь условію Липшица, то рядъ*

$$\Sigma = A_1 + \frac{A_2}{2} + \ldots + \frac{A_n}{n} + \ldots < \frac{k \log 2}{2^{1+\alpha}} + \ldots + \frac{k \log n}{n^{1+\alpha}} \ldots$$

сходящійся.

Напротивъ, если p-ая производная только непрерывна, то первый изъ упомянутыхъ результатовъ даетъ только [1])

$$\Sigma < \frac{k \log 2}{2} + \ldots + \frac{k \log n}{n} \ldots;$$

и не даетъ такимъ образомъ права заключать о сходимости ряда Σ.

[1]) Изъ работы Jackson'a, упомянутой въ началѣ, вытекаетъ, что

$$E_n < \frac{k}{(n+1)^p}, \quad \text{т. е.} \quad \Sigma < \frac{k}{2} + \ldots + \frac{k}{n} + \ldots;$$

я полагаю, что въ случаѣ *непрерывности* p-ой производной можно даже показать, что

$$E_n < \frac{k_{n+1}}{(n+1)^p},$$

гдѣ k_n стремится къ нулю, но и этого недостаточно для сходимости ряда Σ.

20. Примѣръ функціи, имѣющей непрерывную производную при расходящемся рядѣ Σ. Дѣйствительно, можно указать примѣръ функціи, для которой рядъ Σ расходится, хотя производная вездѣ непрерывна. Этимъ свойствомъ обладаетъ, напримѣръ, функція [1])

$$f(x)=\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\alpha_n \cos nx}{n^2},$$

если выбрать соотвѣтствующимъ образомъ $\alpha_1>\alpha_2>\dots\alpha_n>\dots$, при чемъ $\lim\limits_{n=\infty}\alpha_n=0$. Въ самомъ дѣлѣ, дифференцируя, получимъ равномѣрно сходящійся рядъ

$$f'(x)=-\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\alpha_n \sin nx}{n},$$

ибо можно указать опредѣленную постоянную A такъ, чтобъ, при всякомъ n',

$$\left|\sum_{n=n'}^{n=\infty}\frac{\sin nx}{n}\right|<A.$$

Но съ другой стороны,

$$\sum_{n=n'}^{n=\infty}\frac{\alpha_n}{n^2}=\frac{\alpha_{n'}}{n'^2}+\frac{\alpha_{n'+1}}{(n'+1)^2}+\dots<\frac{\alpha_{2n'}}{4n'}+\frac{\alpha_{4n'}}{8n'}+\dots<\frac{\alpha_{n'}}{2n'},$$

если только $\alpha_n\geqq\frac{\alpha_n}{2}$. Отсюда можно заключить, какъ будетъ доказано въ 3-й части, что

$$E_n[f(x)]<\frac{k\alpha_{n+1}}{(n+1)\log(n+1)},$$

Поэтому, если числа α_n убываютъ достаточно медленно, напримѣръ $\alpha_n=\frac{1}{\log\log(n+1)}$, то рядъ Σ будетъ расходящимся.

Изъ предыдущаго видно, что вообще функціи, имѣющія непрерывную производную, допускаютъ лучшее приближеніе при помощи многочленовъ данной степени, чѣмъ функція, не имѣющія производной; но тѣмъ не менѣе есть среди функцій, имѣющихъ непрерывныя производ-

---

[1]) Подобно предыдущему отъ тригонометрическаго ряда къ строкѣ многочленовъ можно перейти съ помощью подстановки $t=\cos x$.

ныя, особый классъ функцій $f(x)$, для которыхъ, при всякомъ n, $E_n[f(x)] > E_n[\varphi(x)]$, гдѣ $\varphi(x)$ нѣкоторая функція, не имѣющая непрерывной производной.

21. Примѣненіе къ функціи $|x|$. Производная функціи $|x|$ имѣетъ точку разрыва $x = 0$. Отсюда слѣдуетъ, что рядъ

$$\Sigma = A_1 + \frac{A_2}{2} + \ldots + \frac{A_n}{n} \ldots = E_0 + E_1 + \ldots + E_n + \ldots$$

расходящійся, обозначая черезъ $E_n = \frac{A_{n+1}}{n+1}$ наилучшее приближеніе $|x|$ на отрѣзкѣ $(-1, +1)$ при помощи многочлена степени n. Никакихъ заключеній о каждомъ опредѣленномъ E_n отсюда нельзя вывести. Единственное, что можно сказать, что при всякомъ ε будетъ безчисленное множество значеній n, для которыхъ

$$E_{n-1} > \frac{1}{n(\log n)^{1+\varepsilon}}, \quad E_{n-1} > \frac{1}{n \log n (\log\log n)^{1+\varepsilon}} \text{ и т. д.}$$

Напротивъ, одного факта, что производная $|x|$ не непрерывна, *недостаточно* для того, чтобъ утверждать, что будетъ безчисленное множество значеній, для которыхъ $E_{n-1} > \frac{1}{n \log n}$, такъ какъ мы видѣли, что есть функціи, не обладающія непрерывной производной, для которыхъ всѣ E_{n-1} менѣе членовъ любого расходящагося ряда.

22. Теорема. *Условіе необходимое и достаточное для того, чтобъ функція $f(x)$ на всемъ отрѣзкѣ $(-1, +1)$ имѣла конечныя и непрерывныя производныя всѣхъ порядковъ заключается въ томъ, чтобъ при всякомъ p, существовало число α_p, независящее отъ n, обладающее свойствомъ, что для всѣхъ n*

$$E_n \cdot n^p < \alpha_p .$$

Въ самомъ дѣлѣ, условіе достаточно, такъ какъ изъ примѣчанія къ теоремѣ (12) вытекаетъ существованіе конечной производной k-аго порядка, на всемъ отрѣзкѣ, если $k < \frac{p}{2}$. Съ другой стороны, условіе необходимо вслѣдствіе § 19.

23. Примѣръ функціи, для которой E_n убываетъ неправильно. Изъ предыдущаго слѣдуетъ, что, если условіе $E_n < \frac{a_p}{n^p}$ соблюдается для всякаго n, то функція имѣетъ производныя всѣхъ порядковъ. Нельзя того же сказать, если неравенство это соблюдено, хотя и для безчисленнаго множества, но не для всѣхъ значеній n.

Въ самомъ дѣлѣ, разсмотримъ функцію

$$f(x) = \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{\cos 2^{m!} x}{2^{m!}}. \tag{18}$$

Полагая $n = 2^{m!} > 2^{p!}$, находимъ

$$E_n \leqq \left[\frac{1}{2^{(m+1)!}} + \frac{1}{2^{(m+2)!}} + \dots\right] < \frac{2}{2^{(m+1)!}} = \frac{2}{(2^{m!})^{m+1}} = \frac{2}{n^{m+1}} \leqq \frac{1}{n^m} < \frac{1}{n^p}.$$

Однако легко убѣдиться, что функція $f(x)$ не имѣетъ производной.

24. Обобщеніе условій Липшица. Предыдущій примѣръ естественно наводитъ на мысль о выясненіи дифференціальной природы функцій, которыя не для всѣхъ, но для безчисленнаго множества значеній n, допускаютъ приближеніе того же порядка, что и функціи, обладающія производными. Какъ мы увидимъ, эти функціи обладаютъ свойствами, аналогичными условіямъ Липшица.

Пусть $f(x)$ будетъ нѣкоторая непрерывная на отрѣзкѣ (AB) функція. Обозначимъ черезъ $\delta_1(\varepsilon)$ максимумъ колебанія функціи $f(x)$ въ любомъ промежуткѣ длины ε на отрѣзкѣ, или другими словами, максимумъ разности $|f(x+h) - f(x)|$ при $|h| \leqq \varepsilon$. Функція $\delta_1(\varepsilon)$ будетъ, очевидно, непрерывной, не отрицательной и монотонной (т. е. не убывающей, такъ какъ $\delta_1(0) = 0$). Обыкновенное условіе Липшица степени s выражаетъ, что существуетъ такое опредѣленное число k, что при всякомъ ε

$$\delta_1(\varepsilon) < k\varepsilon^s. \tag{19}$$

Мы скажемъ, что функція $f(x)$ удовлетворяетъ обобщенному условію Липшица степени s, если существуетъ безчисленное множество значеній ε, для которыхъ неравенство (19) соблюдено.

Точно также вмѣсто максимума первой разности $|f(x+h) - f(x)|$, при $|h| \leqq \varepsilon$, можно разсматривать максимумы послѣдовательныхъ разностей: $\delta_2(\varepsilon) =$ макс. $|f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)|$, $\delta_3(\varepsilon) =$ макс. $|f(x+3h) - 3f(x+2h) + 3f(x+h) - f(x)|$ и т. д. при $|h| \leqq \varepsilon$.

Если для безчисленнаго множества значеній ε имѣетъ мѣсто неравенство

$$\delta_i(\varepsilon) < k\varepsilon^s, \tag{19bis}$$

то мы будемъ говорить, что функція $f(x)$ удовлетворяетъ на отрѣзкѣ AB обобщенному условію Липшица i-го вида степени s. Легко убѣдиться, что, если $\delta_i(\varepsilon) > 0$, то $s \leqq i$. Замѣтимъ, что въ случаѣ существованія конечной производной i-го порядка на отрѣзкѣ AB, условіе (19[bis]) соблюдается для всѣхъ ε при $s = i$.

25. Теорема. *Если существуетъ безчисленное множество значеній n, для которыхъ наилучшее приближеніе*[1]) *E_n на отрѣзкѣ $(-1, +1)$ удовлетворяетъ неравенству $E_n < \frac{A}{n^p}$, то функція $f(x)$ на всякомъ отрѣзкѣ AB внутри отрѣзка $(-1, +1)$ удовлетворяетъ обобщеннымъ условіямъ Липшица i-го вида степени $s_i = \frac{ip}{i+p}$.*

Разсмотримъ сначала функцію $\delta_1(\varepsilon)$. Обозначая черезъ P_n приближенный многочленъ степени n, удовлетворяющій неравенству

$$|f(x) - P_n(x)| < \frac{A}{n^p}, \tag{20}$$

будемъ, очевидно, имѣть для безчисленнаго множества значеній n,

$$|P_n(x)| < M + \frac{A}{n^p} < 2M,$$

гдѣ M максимумъ $|f(x)|$.

Въ такомъ случаѣ на всякомъ опредѣленномъ отрѣзкѣ AB внутри отрѣзка $(-1, +1)$

$$|P'_n(x)| < RMn,$$

гдѣ R нѣкоторый численный множитель (§ 3).

Поэтому

$$|P_n(x_1) - P_n(x_2)| < RMn\varepsilon,$$

если $|x_1 - x_2| \leqq \varepsilon$. Но значенія x_1 и x_2 можно выбрать такъ, что

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \delta_1(\varepsilon).$$

Слѣдовательно,

$$|f(x_1) - P_n(x_1) + P_n(x_2) - f(x_2)| > \delta_1(\varepsilon) - RMn\varepsilon.$$

---

[1]) При помощи многочленовъ степени n. Та же теорема (см. § 17) остается въ силѣ и для тригонометрическихъ суммъ.

Сопоставляя это неравенство съ неравенствомъ (20), находимъ

$$\frac{2A}{n^p} > \delta_1(\varepsilon) - RMn\varepsilon,$$

или

$$\delta_1(\varepsilon) < \frac{2A}{n^p} + RMn\varepsilon. \tag{21}$$

Положимъ въ этомъ неравенствѣ $\varepsilon = \frac{1}{n^{1+p}}$. Получимъ

$$\delta_1(\varepsilon) < \frac{2A}{n^p} + \frac{RM}{n^p} = (2A + RM)\ \varepsilon^{\frac{p}{1+p}}.$$

Такимъ образомъ, для $i = 1$, теорема заказана.

Достаточно будетъ разсмотрѣть еще случай $i = 2$, чтобъ убѣдиться, что тотъ же пріемъ доказательства примѣнимъ для всякаго i.

На основаніи § 11 имѣемъ $|P''_n(x)| < R_1 Mn^2$, гдѣ R_1 численный коэффиціентъ, зависящій только отъ отрѣзка AB. Поэтому, при $|h| \leqq \varepsilon$

$$|P_n(x + 2h) - 2P_n(x + h) + P_n(x)| < 2R_1 Mn^2\varepsilon^2;$$

но, выбирая x соотвѣтствующимъ образомъ, имѣемъ

$$|f(x + 2h) - 2f(x + h) + f(x)| = \delta_2(\varepsilon).$$

Откуда

$$|f(x + 2h) - P_n(x + 2h) - 2(f(p + h) - P_n(x + h)) +$$
$$+ f(x) - P_n(x)| > \delta_2(\varepsilon) - 2R_1 Mn^2\varepsilon^2.$$

Слѣдовательно,

$$\frac{4A}{n^p} > \delta_2(\varepsilon) - 2R_1 Mn^2\varepsilon^2,$$

или

$$\delta_2(\varepsilon) < \frac{4A}{n^p} + 2R_1 Mn^2\varepsilon^2. \tag{22}$$

Полагая въ неравенствѣ (22)

$$\varepsilon = \frac{1}{n^{1+\frac{p}{2}}},$$

получимъ

$$\delta_2(\varepsilon) < \frac{4A}{n^p} + \frac{2R_1 M}{n^p} = (4A + 2R_1 M)\,\varepsilon^{\frac{2p}{2+p}}$$

Такимъ образомъ теорема доказана также для $i=2$, и ясно, что тоже разсужденіе примѣнимо для всякаго i.

26. Приложенія предшествующей теоремы. Функція, разсмотрѣнная нами въ § 23, обладала свойствомъ, что при всякомъ p есть безчисленное множество значеній n, для которыхъ $E_n < \frac{1}{n^p}$. Такимъ образомъ вслѣдствіе только что доказанной теоремы заключаемъ, что указанная функція удовлетворяетъ обобщенному условію Липшица вида i любой степени $s < i$.

Не останавливаясь на болѣе детальномъ изученіи этихъ своеобразныхъ функцій, примѣнимъ предыдущую теорему къ опредѣленію низшаго предѣла $E_n|x|$. Для этого замѣтимъ, что ни при какомъ i функція $|x|$ не удовлетворяетъ обобщенному условію Липшица степени выше первой. Въ самомъ дѣлѣ, при $x=-h$,

$$|x+nh|-n|x+(n-1)h|+\ldots+(-1)^n|x|=(-1)^n.2h;$$

такъ что $\delta_i(\varepsilon) \geqq 2\varepsilon$.

Слѣдовательно, если есть *безчисленное множество* значеній n, для которыхъ $E_n < \frac{1}{n^p}$, то показатель p долженъ обладать свойствомъ, что, при всякомъ i,

$$s=\frac{ip}{i+p} \leqq 1,$$

откуда

$$p \leqq \frac{i}{i-1}.$$

Такимъ образомъ p *не можетъ быть болѣе единицы.*

27. Условіе Дини и Липшица. Условіемъ Дини и Липшица называютъ свойство, которымъ обладаютъ нѣкоторыя непрерывныя функціи, заключающееся въ томъ, что произведеніе

$$\delta_1(\varepsilon).\log\varepsilon$$

стремится къ нулю вмѣстѣ съ ε. Мы будемъ говорить, что функція удовлетворяетъ обобщенному условію Дини и Липшица, если возможно выбрать безчисленное множество значеній ε такимъ образомъ, чтобъ указанное произведеніе $\delta_1(\varepsilon)\log\varepsilon$ стремилось къ нулю вмѣстѣ съ ε. Принявъ эти опредѣленія, докажемъ, что *функція, для которой* $E_n.\log n$

стремится къ нулю для безчисленнаго множества значеній n, удовлетворяетъ обобщенному условію Дини-Липшица; если $E_n . \log n$ стремится къ нулю при всѣхъ значеніяхъ n, то функція удовлетворяетъ обыкновенному условію Дини и Липшица.

Въ самомъ дѣлѣ, повторяя разсужденіе § 25, приходимъ немедленно къ обобщенію неравенства (21)

$$\delta_1(\varepsilon) < 2E_n + kn\varepsilon, \tag{21^{bis}}$$

гдѣ k постоянная (независимая отъ n). Примѣняя это неравенство къ настоящему случаю, когда $E_n \log n = \beta_n$ стремится къ нулю, и полагая

$$\varepsilon = \frac{\beta_n}{n \log n},$$

получимъ

$$\log n \, . \, \delta_1(\varepsilon) < \beta_n (2 + k);$$

но

$$|\log \varepsilon| < 2 \log n;$$

слѣдовательно

$$|\log \varepsilon| \, . \, \delta_1(\varepsilon) < \beta_n (4 + 2k), \tag{23}$$

для безчисленнаго множества значеній n. Такимъ образомъ, для безчисленнаго множества значеній ε, произведеніе $\log \varepsilon . \delta_1(\varepsilon)$ стремится къ нулю. Если же неравенство (23) соблюдается для всякаго цѣлаго n, то ясно, что $\log \varepsilon . \delta_1(\varepsilon)$ будетъ всегда стремиться къ нулю вмѣстѣ съ ε. Что и требовалось доказать.

28. Теорема Лебега. Въ своей большой работѣ [1]) „Sur les intégrales singulières" Лебегъ доказываетъ слѣдующую теорему: *если разсматривается совокупность всѣхъ непрерывныхъ функцій $f(x)$, для которыхъ $|f(x)| \leq M$, то при всякомъ n, верхнимъ предѣломъ $E_n(f(x))$ является M* (т. е. среди функцій $f(x)$, есть такія для которыхъ $E_n(f(x)) > M - \alpha$, какъ бы мало ни было α и, кромѣ того, для всѣхъ функцій $E_n(f) \leq M$). При помощи неравенства (21^{bis}) эту теорему чрезвычайно легко доказать. Въ самомъ дѣлѣ, какъ бы мало ни было $\varepsilon = \frac{\alpha}{kn}$, среди разсматриваемыхъ функцій можно выбрать такую, что $\delta_1(\varepsilon) = 2M$. Поэтому, вслѣдствіе неравенства (21^{bis}), для этой функціи

$$E_n > M - \alpha, \quad \text{ч. и. т. д.}$$

[1]) Ann. de Toulouse. 1909.

(само собой понятно, что для всѣхъ функцій разсматриваемой совокупности $E_n[f(x)] \leqq M$).

Однако теорема Лебега оставляетъ открытымъ интересный вопросъ: возможно ли указать такой рядъ чиселъ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n, \ldots$, имѣющихъ предѣломъ 0, чтобъ для всякой данной непрерывной функціи можно было указать независимое отъ n число R достаточно большое, чтобъ $E_n < R\alpha_n$.

На основаніи теоремы Лебега можно лишь утверждать, что еслибъ рядъ чиселъ α_n существовалъ, то, для всей совокупности непрерывныхъ функцій $f(x)$, не превышающихъ M по абсолютному значенію, множитель R не имѣлъ бы верхняго предѣла. Дѣйствительно, легко убѣдиться, что теорема Лебега остается справедливой, если совокупность непрерывныхъ функцій замѣнить одними лишь многочленами; а между тѣмъ, каковы бы ни были числа α_n, напримѣръ $\alpha_n = \frac{1}{2^n}$, для всякаго опредѣленнаго многочлена возможно, конечно, указать число R такъ, чтобъ $E_n < R\alpha_n$.

Неравенство (21^{bis}) даетъ немедленно *отрицательный* отвѣтъ на поставленный вопросъ. Въ самомъ дѣлѣ, если для нѣкоторой функціи $E_n < R\alpha_n$, то $\delta_1(\varepsilon) < 2R\alpha_n + kn\varepsilon$. Полагая $\alpha_n > \frac{1}{n}$ (что мы вправѣ сдѣсдѣлать не нарушая общности), беремъ $\varepsilon = \frac{1}{n^2}$; въ такомъ случаѣ, $\delta_1\left(\frac{1}{n^2}\right) < 2R\alpha_n + \frac{k}{n} < (2R+k)\alpha_n$. Но такому неравенству при всякомъ n не можетъ удовлетворить, напримѣръ, ни одна непрерывная функція $f(x)$, которая при $x = \frac{1}{n^2}$ обращается въ $\sqrt{\alpha_n}$, такъ какъ для этой функціи $\delta_1\left(\frac{1}{n^2}\right) \geqq \sqrt{\alpha_n}$.

29. Теорема. *Если для всякаго n наилучшее приближеніе E_n функціи $f(x)$ на отрѣзкѣ $(-1, +1)$ удовлетворяетъ неравенству $E_n < M\varrho^n$, то функція $f(x)$ голоморфна внутри эллипса, фокусами котораго служатъ точки $-1, +1$, а полусумма осей равна $\frac{1}{\varrho}$.*

Въ самомъ дѣлѣ, обозначая черезъ $P_n(x)$ многочленъ степени n, для котораго

$$|f(x) - P_n(x)| < M\varrho^n,$$

можемъ написать

$$f(x) = P_1(x) + [P_2(x) - P_1(x)] + \ldots + [P_n(x) - P_{n-1}(x)] + \ldots; \quad (24)$$

при этомъ

$$|P_n(x) - P_{n-1}(x)| < 2M\varrho^{n-1}$$

на отрѣзкѣ $(-1, +1)$. Поэтому во всякой точкѣ H эллипса, котораго сумма полуосей равна $\frac{1}{\varrho_1} < \frac{1}{\varrho}$, а фокусы находятся въ точкахъ $(-1, +1)$, имѣемъ (§ 7)

$$| P_n(x) - P_{n-1}(x) | < \frac{2M}{\varrho_1} \cdot \left(\frac{\varrho}{\varrho_1}\right)^{n-1}.$$

Слѣдовательно, рядъ (24) равномѣрно сходится во всякой области внутри эллипса, котораго сумма полуосей равна $\frac{1}{\varrho}$, а потому функцiя $f(x)$ голоморфна.

(Обратная теорема будетъ доказана въ 3-й части).

ЧАСТЬ ВТОРАЯ.

Приближенное вычисленіе многочленовъ, наименѣе уклоняющихся въ данномъ промежуткѣ отъ данной функціи.

Глава III.

Общій методъ.

30. Введеніе. Идея метода приближеннаго вычисленія многочленовъ, наименѣе уклоняющихся отъ данной функціи, которому посвящена эта глава, состоитъ въ томъ, чтобъ соотвѣтствующимъ образомъ использовать уже извѣстные многочлены, наименѣе уклоняющіеся отъ нѣкоторыхъ другихъ данныхъ функцій. Иногда вмѣсто другихъ функцій цѣлесообразно будетъ вводить аналогичныя многочленамъ выраженія, наименѣе уклоняющіяся отъ той же самой функціи. И въ томъ, и въ другомъ случаѣ непрерывный переходъ отъ извѣстнаго къ неизвѣстному совершается посредствомъ аналитическаго продолженія; при этомъ, какъ для практическихъ примѣненій, такъ и для теоретическихъ выводовъ, весьма важно выбрать исходный пунктъ такимъ образомъ, чтобъ первыя же приближенія обладали уже значительной точностью.

Напомнимъ сначала классическіе результаты, вытекающіе изъ изслѣдованій Чебышева. (Строгое доказательство этихъ результатовъ читатель найдетъ, напримѣръ, въ книгѣ Borel «Leçons sur les fonctions de variables réelles, p. 88»).

a. Существуетъ одинъ и только одинъ многочленъ P_n степени не выше n, наименѣе уклоняющійся въ промежуткѣ (AB) отъ данной непрерывной функціи $f(x)$.

b. Изъ всѣхъ многочленовъ степени не выше n только многочленъ $P_n(x)$ обладаетъ свойствомъ, что разность $|f(x)-P_n(x)|$ достигаетъ не менѣе, чѣмъ $(n+2)$ раза своего максимума въ разсматриваемомъ промежуткѣ.

Изъ послѣдняго предложенія вытекаетъ, что еслибъ разность $|f(x)-P_n(x)|$ достигала бы своего максимума болѣе, чѣмъ $(n+2)$ раза, а именно $n+2+k$ разъ, то многочленъ $P_n(x)$ былъ бы въ тоже время единственнымъ наименѣе уклоняющимся отъ функціи $f(x)$ среди всѣхъ многочленовъ степени не выше $n+k$. Такимъ образомъ задача опредѣленія многочленовъ $P_n(x)$, по существу, нисколько не суживается, если ограничимся только тѣми значеніями n, для которыхъ разность $|f(x)-P_n(x)|$ достигаетъ своего максимума въ $(n+2)$ точкахъ.

31. Обобщенія. Разсмотримъ рядъ степеней x^{α_0}, $x^{\alpha_1}, \ldots, x^{\alpha_n}$, гдѣ $0 \leqq \alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_n$, и составимъ суммы $A_0 x^{\alpha_0} + \ldots + A_n x^{\alpha_n}$ съ произвольными коэффиціентами $A_0, \ldots A_n$. Если сумма

$$R_n(x) = B_0 x^{\alpha_0} + \ldots B_n x^{\alpha_n},$$

изъ всѣхъ суммъ указаннаго вида наименѣе уклоняется отъ функціи $f(x)$ въ промежуткѣ (AB), то $R_n(x)$ называется суммой вида $\sum\limits_{i=0}^{i=n} A_i x^{\alpha_i}$ наименѣе уклоняющейся отъ функціи $f(x)$ въ промежуткѣ (AB). Относительно отрѣзка (AB) необходимо ввести ограниченіе: а именно, на всемъ отрѣзкѣ $x \geqq 0$. Благодаря этому ограниченію числа x^{α_i} будутъ всегда имѣть вполнѣ опредѣленное ариѳметическое значеніе. Разсужденіями, совершенно подобными тѣмъ, которыя читатель найдетъ въ выше упомянутой книгѣ Borel'я для случая, когда $\alpha_i = i$, можно доказать существованіе суммы $R_n(x)$, наименѣе уклоняющейся отъ данной непрерывной функціи $f(x)$, и въ общемъ случаѣ. Для доказательства же того, что эта сумма единственная, намъ необходимо доказать предварительно слѣдующую лемму, являющуюся обобщеніемъ теоремы Декарта.

32. Лемма. *Число положительныхъ корней уравненія*

$$Q(x) = a_0 x^{\alpha_0} + a_1 x^{\alpha_1} + \ldots + a_n x^{\alpha_n} = 0, \tag{25}$$

гдѣ $0 \leqq \alpha_0 < \alpha_1 \ldots < \alpha_n$, *не можетъ превышать числа перемѣнъ знаковъ ряда* $a_0, a_1, \ldots, a_n$.

Въ случаѣ когда числа α_i цѣлыя, высказанное предложеніе является прямымъ слѣдствіемъ изъ извѣстной теоремы Декарта. Точно также случай, когда числа α_i раціональныя, посредствомъ подстановки $x^{\frac{1}{p}} = y$ приводится къ предшествующему.

Положимъ далѣе, что числа α_i какія угодно, но, что всѣ положительные корни уравненія (25) различны между собой. Если безконечно мало измѣнить показатели уравненія, то безконечно мало измѣнятся и корни; поэтому каждому положительному корню даннаго уравненія будетъ соотвѣтствовать одинъ положительный корень измѣненнаго уравненія, и наоборотъ, ибо комплексные корни вещественнаго уравненія всегда попарно сопряженные. Такимъ образомъ число положительныхъ корней даннаго уравненія то же, что измѣненнаго, но въ этомъ послѣднемъ всегда можно предположить показатели раціональными. Слѣдовательно, число простыхъ положительныхъ корней уравненія (25) не можетъ превышать числа перемѣнъ знаковъ ряда $a_0, a_1, \ldots a_n$.

Тѣмъ же способомъ убѣждаемся, что число различныхъ положительныхъ корней нечетной кратности не можетъ превышать числа перемѣнъ знаковъ ряда $a_0, a_1, \ldots, a_n$. Но намъ остается еще показать, что число корней взятыхъ съ ихъ степенью кратности также не превышаетъ упомянутаго числа. Для этого составляемъ уравненіе

$$\frac{d}{dx}[x^{1-\alpha_0}Q(x)] = 0, \qquad (25^{\text{bis}})$$

и замѣчаемъ, что каждый кратный корень уравненія (25) является въ тоже время корнемъ уравненія (25^{bis}) со степенью кратности на одну единицу меньшею; кромѣ этихъ корней, уравненіе (25^{bis}) имѣетъ еще не менѣе различныхъ положительныхъ корней нечетной кратности, чѣмъ уравненіе (25). Такимъ образомъ число корней уравненія (25^{bis}) взятыхъ съ ихъ степенью кратности не меньше числа корней уравненія (25) взятыхъ съ ихъ степенью кратности; число же различныхъ корней уравненія (25^{bis}) нечетной кратности не менѣе числа всѣхъ различныхъ корней нечетной кратности уравненія (25), увеличеннаго на число различныхъ двойныхъ корней послѣдняго уравненія. Изъ этого слѣдуетъ, что если мы поступимъ съ уравненіемъ (25^{bis}), какъ съ уравненіемъ (25) и т. д., то мы прійдемъ наконецъ къ уравненію, число различныхъ корней котораго нечетной кратности будетъ не менѣе числа корней уравненія (25) взятыхъ съ ихъ степенью кратности. Но это послѣднее уравненіе будетъ того же вида,

$$Q_1(x) = b_0 + b_1 x^{\beta_1} + \ldots + b_n x^{\beta_n} = 0 \qquad (25^{\text{ter}})$$

что и уравненіе (25), при чемъ $b_i . a_i > 0$, такъ что число перемѣнъ знака въ рядѣ $b_0, b_1 \ldots b_n$ то же, что и въ рядѣ $a_0, a_1 \ldots a_n$. Поэтому число различныхъ корней нечетной кратности уравненія (25^{ter}) не превышаетъ числа перемѣнъ знака въ рядѣ $a_0, a_1 \ldots a_n$; тѣмъ болѣе и общее число положительныхъ корней уравненія (25) взятыхъ съ ихъ степенью кратности не можетъ превышать числа перемѣнъ знаковъ ряда $a_0, a_1 \ldots a_n$.

Слѣдствіе. *Число положительныхъ корней уравненія (25) не превышаетъ n.*

33. Теорема. *Существуетъ только одна сумма степеней*

$$R_n(x) = \sum_{i=0}^{i=n} B_n x^{\alpha_n}$$

наименѣе уклоняющая въ промежуткѣ AB *отъ функціи* $f(x)$. *При этомъ разность* $f(x) - R_n(x)$ *достигаетъ не менѣе, чѣмъ* $(n+2)$ *раза своего наибольшаго абсолютнаго значенія, послѣдовательно мѣняя свой знакъ. Исключеніе можетъ представляться лишь, если это наибольшее значеніе равно* $|f(0)|$, *при* $\alpha_0 > 0$.

Въ самомъ дѣлѣ, обозначая черезъ x_1, $x_2 \ldots x_k$ возрастающій рядъ чиселъ, для которыхъ разность $f(x) - R_n(x)$ достигаетъ послѣдовательно наибольшаго абсолютнаго значенія, мѣняя знакъ, находимъ на основаніи соображеній, которыми мы пользовались нѣсколько разъ въ I-й главѣ (стр. 11), что уравненія

$$\left.\begin{aligned}
b_0 x_1^{\alpha_0} + \ldots + b_n x_1^{\alpha_n} &= f(x_1) - R_n(x_1) = \pm L \\
b_0 x_2^{\alpha_0} + \ldots + b_n x_2^{\alpha_n} &= f(x_2) - R_n(x_2) = \mp L \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
b_0 x_k^{\alpha_0} + \ldots + b_n x_k^{\alpha_n} &= f(x_k) - R_n(x_k) = \mp (-1)^k . L
\end{aligned}\right\} \quad (26)$$

должны быть несовмѣстимыми, если $R_n(x)$ представляетъ собой сумму указаннаго вида, наименѣе уклоняющуюся отъ $f(x)$ на отрѣзкѣ AB. Но легко убѣдиться, что уравненія (26) были бы совмѣстимы, если бы $k < n+2$, ибо ни одинъ изъ опредѣлителей

$$\delta_p = \begin{vmatrix} x_1^{\alpha_0} \ldots x_1^{\alpha_p} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ x_{p+1}^{\alpha_0} \ldots x_{p+1}^{\alpha_p} \end{vmatrix} = a_0 x_{p+1}^{\alpha_0} + \ldots + a_p x_{p+1}^{\alpha_p}$$

не можетъ быть равенъ нулю: это справедливо для $p = 0$, но если $\delta_{p-1} \gtrless 0$, то и $\delta_p \gtrless 0$, такъ какъ въ уравненіи

$$a_0 x^{\alpha_0} + \ldots + a_p x^{\alpha_p} = 0$$

коэффиціентъ $a_p = \delta_{p-1} \gtrless 0$, и поэтому это уравненіе не соблюдено тождественно; но оно имѣетъ p положительныхъ [1]) корней $x_1, \ldots x_p$, и слѣдовательно

---

[1]) Если $x_1 = 0$, то коэффиціентъ $a_0 = 0$, и потому сумма δ_p, состоящая только изъ p слагаемыхъ, не имѣетъ болѣе $(p-1)$ корня.

$$\delta_p = a_0 x_{p+1}^{\alpha_0} + \ldots + a_p x_{p+1}^{\alpha_p} \gtreqless 0.$$

Такимъ образомъ 2-я часть теоремы доказана. Допустимъ теперь, что кромѣ $R_n(x)$ существуетъ еще сумма $R'_n(x)$ наименѣе уклоняющаяся отъ данной функціи $f(x)$. Въ такомъ случаѣ, въ силу только что доказаннаго, разность

$$Q(x) = R_n(x) - R'_n(x)$$

въ точкахъ $x_1, x_2, .. x_{n+2}$ будетъ послѣдовательно мѣнять знакъ или равна нулю.

Поэтому, если $Q(x_i) \gtreqless 0$, $Q(x_{i+1}) \gtreqless 0, \ldots Q(x_{i+k+1}) \gtreqless 0$, то между x_i и x_{i+k+1} по крайней мѣрѣ $k+1$ корней; точно также, если $Q(x_{i+1}) = \ldots = Q(x_{i+k}) = 0$, то число корней (взятыхъ съ ихъ степенью кратности) не менѣе $k+1$, такъ какъ это число не менѣе k, и кромѣ того разность между нимъ и $k+1$ должна быть четной. Отсюда вытекаетъ, что общее число положительныхъ корней уравненія

$$Q(x) = 0$$

не менѣе $(n+1)$, что невозможно на основаніи леммы (32). Такимъ образомъ существуетъ только одна сумма $R_n(x)$, наименѣе уклоняющаяся отъ функціи $f(x)$ въ данномъ промежуткѣ.

Примѣчаніе. Необходимо помнить, что примѣненіе доказанной теоремы въ случаѣ $\alpha_0 > 0$ и $x \geqq 0$ законно лишь, если $f(0) = 0$.

34. Обобщенная теорема de la Vallée Poussin [1]). *Отклоненіе $|f(x) - R_n(x)|$ не можетъ въ промежуткѣ AB оставаться постоянно меньше наименьшаго изъ значеній $|f(x) - P_n(x)|$ въ $(n+2)$ точкахъ, гдѣ $f(x) - P_n(x)$ послѣдовательно мѣняетъ знакъ, если $P_n(x)$ сумма того же вида, что $R_n(x)$.*

Въ самомъ дѣлѣ, допустимъ противное. Тогда въ $(n+2)$ точкахъ разность

$$Q(x) = P_n(x) - R_n(x) = (f(x) - R_n(x)) - (f(x) - P_n(x)).$$

послѣдовательно мѣняетъ знакъ, и слѣдовательно, уравненіе $Q(x) = 0$ имѣетъ по крайней мѣрѣ $(n+1)$ положительныхъ корней, что невозможно.

Замѣчаніе. Эта теорема была доказана de la Vallée Poussin въ случаѣ многочленовъ, при чемъ промежутокъ AB тогда можетъ быть какой угодно; очевидно, что данное здѣсь доказательство пригодно и для упомянутаго случая.

---

[1]) *De la Vallée Poussin.* Sur les polynomes d'approximation et la représentation approchée de l'angle. (Bulletin de l'Académie de Belgique, Décembre 1910).

35. Опредѣленія. Точки $x_1, x_2, \ldots, x_k$, гдѣ $|f(x) - R_n(x)|$ достигаетъ наибольшаго значенія, мы будемъ называть *точками отклоненія*.

Слѣдуетъ замѣтить, что расположеніе точекъ отклоненія на отрѣзкѣ AB можетъ быть четырехъ родовъ. А именно: 1-го рода, когда оба конца A и B являются точками отклоненія; 2-го рода, когда только A—точка отклоненія; 3-го рода, когда только B—точка отклоненія; 4-го рода, когда всѣ точки отклоненія находятся внутри отрѣзка AB. Расположеніе 1-го рода является вообще наиболѣе общимъ случаемъ. Однако, если $\alpha_0 > 0$ и $A = 0$ (что̀ большею частью будетъ имѣть мѣсто въ дальнѣйшихъ приложеніяхъ), то расположеніе 1-го рода и 2-го рода будетъ невозможно, такъ какъ вслѣдствіе примѣчанія къ теоремѣ (33) необходимо, чтобъ $f(0) = 0$; въ этомъ случаѣ, обыкновенно представляется расположеніе 3-го рода.

36. Основная теорема А. *Если сумма* $P(x, \lambda) = \sum_0^n a_n x^{\alpha_n}$, *наименѣе уклоняющаяся на отрѣзкѣ AB отъ голоморфной функціи $\lambda f(x) + (1-\lambda)\varphi(x)$, имѣетъ $(n+2)$ точки отклоненія одного и того же рода при всякомъ $\lambda (0 \leqq \lambda \leqq 1)$, то коэффиціенты суммы $P(x, \lambda)$ и абсциссы точекъ отклоненія такъ же, какъ и наименьшее отклоненіе, являются голоморфными функціями параметра λ, при условіи, что во внутреннихъ точкахъ отклоненія $F''_{x^2} \gtrless 0$, полагая*

$$F(x, \lambda) = \lambda f(x) + (1-\lambda)\varphi(x) - P(x, \lambda).$$

Достаточно будетъ разсмотрѣть, напримѣръ, случай 1-го рода расположенія точекъ отклоненія; другими словами, предположимъ, что, при всякомъ λ $(0 \leqq \lambda \leqq 1)$, концы отрѣзка A и B являются точками отклоненія. Въ такомъ случаѣ для опредѣленія $P(x, \lambda)$ мы будемъ имѣть $2n+2$ уравненія: [1])

$$F'_x(x_i, \lambda) = \lambda f'(x_i) + (1-\lambda)\varphi'(x_i) - P'(x_i, \lambda) = 0, \qquad (i=1, \ldots n)$$

$$[F(x_i, \lambda)]^2 = L^2, \tag{27}$$

$$[F(A, \lambda)]^2 = L^2,$$

$$[F(B, \lambda)]^2 = L^2$$

съ $(2n+2)$ неизвѣстными: внутренними точками отклоненія $x_1, x_2, \ldots x_n$, (расположенными въ возрастающемъ порядкѣ), коэффиціентами $a_0, a_1, \ldots, a_n$, и отклоненіемъ L.

---

[1]) Если $\alpha_i = i$, то промежутокъ AB произволенъ; въ общемъ же случаѣ предполагается, что $B > A \geqq 0$.

При всякомъ опредѣленномъ значеніи $\lambda=\lambda_0$, система уравненій (27) имѣетъ одну вполнѣ опредѣленную систему вещественныхъ рѣшеній, соотвѣтствующую единственной суммѣ, наименѣе уклоняющейся отъ функціи $\lambda f(x)+(1-\lambda)\varphi(x)$. Поэтому, если функціональный опредѣлитель уравненій (27) относительно неизвѣстныхъ отличенъ отъ нуля, то всѣ неизвѣстныя будутъ аналитическими функціями параметра λ. Такимъ образомъ для доказательства теоремы достаточно будетъ показать, что выше упомянутый функціональный опредѣлитель не равенъ нулю. Но этотъ опредѣлитель Δ равенъ

$$\pm(2L)^{n+2}\cdot\begin{array}{c}\overbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}^{n+1}\quad\overbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}^{n+1}\\ \begin{vmatrix} +1 & 0 & 0\ldots0 & A^{\alpha_0} & A^{\alpha_1}\ldots A^{\alpha_n}\\ -1 & 0 & 0\ldots0 & x_1^{\alpha_0} & x_1^{\alpha_1}\ldots x_1^{\alpha_n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ (-1)^{n+1} & 0 & 0\ldots0 & B^{\alpha_0} & B^{\alpha_1}\ldots B^{\alpha_n}\\ 0 & F''_{x_1^2} & 0\ldots0 & 0 & 0\ldots0\\ 0 & 0 & F''_{x_2^2}\ldots0 & 0 & 0\ldots0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & 0\ldots F''_{x_n^2} & 0 & 0\ldots0 \end{vmatrix}\end{array}=$$

$$=\pm F''_{x_1^2}.F''_{x_2}\ldots F''_{x_n^2}[\Delta_A+\Delta_x+\ldots\Delta_B].(2L)^{n+2},$$

гдѣ

$$\Delta_A=\begin{vmatrix} x_1^{\alpha_0}x_1^{\alpha_1}\ldots x_1^{\alpha_n}\\ x_2^{\alpha_0}\ldots\ldots x_2^{\alpha_n}\\ \ldots\ldots\ldots\\ \ldots\ldots\ldots\\ B^{\alpha_0}\ldots\ldots B^{\alpha_n}\end{vmatrix}>0,\quad \Delta_{x_1}=\begin{vmatrix} A^{\alpha_0}\ldots A^{\alpha_n}\\ x_2^{\alpha_0}\ldots\ldots x_2^{\alpha_n}\\ \ldots\ldots\ldots\\ \ldots\ldots\ldots\\ B^{\alpha_0}\ldots B^{\alpha_n}\end{vmatrix}>0 \text{ и т. д.}$$

Слѣдовательно, $\Delta_A+\Delta_{x_1}+\ldots+\Delta_B>0$, а потому $\Delta \gtrless 0$, ч. и. т. д.

Примѣчаніе. Можно замѣтить, что при доказательствѣ никакой роли не играло то обстоятельство, что параметръ λ входитъ въ видѣ $\lambda f(x)+(1-\lambda)\varphi(x)$; все разсужденіе остается въ силѣ, если разсматриваемая функція голоморфна относительно λ. Это замѣчаніе приводитъ насъ къ другой полезной для примѣненій формулировкѣ основной теоремы.

37. Основная теорема B. *Если сумма* $P(x,\lambda)=\sum_{i=0}^{i=n}a_i x^{\alpha_i}$, *наименѣе уклоняющаяся на отрѣзкѣ* AB *отъ функціи* $f(x)+(\lambda-1)Q(x)$, *имѣетъ* $(n+2)$ *точки отклоненія одного и того же рода, при всякомъ* λ $(0\leqq\lambda\leqq1)$, *и* $F''_{x^2}=f''_{x^2}+(\lambda-1)Q''_{x^2}-P''_{x^2}\gtrless 0$ *во всѣхъ внутреннихъ точкахъ отклоненія, то, полагая, что* $Q(x)=\sum_{i=0}^{i=n}b_i x^{\beta_i}$ *есть сумма, наименѣе уклоняющаяся отъ* $f(x)$ *на отрѣзкѣ* AB, *коэффиціенты* $P(x,\lambda)$ *такъ же, какъ абсциссы точекъ отклоненія и отклоненіе, суть голоморфныя функціи* λ, *при чемъ* $P(x,0)=0$.

38. Примѣненіе основныхъ теоремъ. Теоремой A слѣдуетъ пользоваться, если хотятъ опредѣлить сумму $\sum_{i=0}^{i=n} a_i x^{\alpha_i}$, наименѣе уклоняющуюся отъ $f(x)$, зная сумму того же вида наименѣе уклоняющуюся отъ другой данной функціи $\varphi(x)$. Теорему B примѣняютъ, когда хотятъ опредѣлить сумму $\sum_{i=0}^{i=n} a_i x^{\alpha_i}$ наименѣе уклоняющуюся отъ $f(x)$, зная сумму $\sum_{i=0}^{i=n} b_i x^{\beta_i}$, составленную изъ другихъ степеней x, наименѣе уклоняющуюся отъ той же функціи.

Не трудно понять общій пріемъ пользованія упомянутыми теоремами, къ изложенію котораго мы сейчасъ перейдемъ, обративъ особое вниманіе на вычисленіе функціи $L(\lambda)$, представляющей наименьшее отклоненіе для различныхъ значеній параметра λ.

Если данная функція $f(x)$ не аналитическая, то предварительно надо будетъ замѣнить ее аналитической, достаточно мало отличающейся отъ данной въ разсматриваемомъ промежуткѣ. Такимъ образомъ въ дальнѣйшемъ мы все время предполагаемъ данную функцію $f(x)$ аналитической. Для примѣненія теоремы A выбираемъ нѣкоторую другую аналитическую функцію $\varphi(x)$, для которой наименѣе уклоняющаяся сумма того же вида $P(x) = P(x, 0) = \sum_{i=0}^{i=n} b_i x^{\alpha_i}$ извѣстна и, кромѣ того, обладающую свойствомъ, что функція $F(x, \lambda) = \lambda f(x) + (1-\lambda)\varphi(x) - P(x, \lambda)$ удовлетворяетъ условію, что во всѣхъ внутреннихъ точкахъ отклоненія $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \gtrless 0$, при чемъ родъ расположенія точекъ отклоненія независимъ отъ λ.

Послѣ этого вычисляемъ послѣдовательныя производныя $\frac{\partial P}{\partial \lambda}, \frac{\partial^2 P}{\partial \lambda^2}$ и т. д. для $\lambda = 0$. Многочленъ или сумма степеней $P(x, \lambda)$ разлагается такимъ образомъ въ строку Тэйлора относительно λ, представляющую голоморфную функцію при всѣхъ значеніяхъ $\lambda (0 \leqq \lambda \leqq 1)$, значеніе которой $P(x, 1)$, при $\lambda = 1$, равно искомой суммѣ, наименѣе уклоняющейся отъ функціи $f(x)$. Если строка Тэйлора имѣетъ радіусъ сходимости меньше единицы, то для вычисленія $P(x, 1)$ можно во всякомъ случаѣ примѣнить способъ суммированія Миттагъ-Леффлера. Послѣдовательныя производныя $\frac{\partial P}{\partial \lambda} = P_1$, $\frac{\partial^2 P}{\partial \lambda^2} = P_2$ и т. д. при $\lambda = 0$, представляющія собой суммы степеней того же вида, что и $P(x)$, послѣдовательно вычисляются слѣдующимъ образомъ.

Прежде всего замѣчаемъ, что въ $n+2$ точкахъ отклоненія x_i, соотвѣтствующихъ $\lambda = 0$, и, по предположенію, извѣстныхъ, имѣемъ

$$\pm L(0) = \varphi(x_i) - P(x_i,\ 0).$$

Затѣмъ, такъ какъ въ этихъ точкахъ, $\frac{\partial F}{\partial x_i} = 0$ или же $\frac{dx_i}{d\lambda} = 0$, то

$$\pm \frac{dL(0)}{d\lambda} = \frac{\partial F(x_i,\ 0)}{\partial \lambda} = f(x_i) - \varphi(x_i) - P_1(x_i), \tag{28}$$

при чемъ знакъ первой части равенства (28) всегда тотъ же для опредѣленнаго i, что и въ предыдущемъ равенствѣ.

Такимъ образомъ для опредѣленія $\frac{dL}{d\lambda}$ и $(n+1)$ коэффиціентовъ суммы P_1 имѣемъ $(n+2)$ линейныхъ уравненія съ $(n+2)$ неизвѣстными; при чемъ опредѣлитель, составленный изъ коэффиціентовъ этихъ уравненій

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & x_0^{\alpha_0} \ldots\ldots x_0^{\alpha_n} \\ -1 & x_1^{\alpha_0} \ldots\ldots x_1^{\alpha_n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ (-1)^{n+1} & x_{n+1}^{\alpha_0} \ldots\ x_{n+1}^{\alpha_n} \end{vmatrix}$$

отличенъ отъ нуля, такъ что для каждаго изъ неизвѣстныхъ получается всегда одно вполнѣ опредѣленное значеніе.

Для опредѣленія $\frac{d^2L}{d\lambda^2}$ и P_2, замѣчаемъ, что, если x_i представляетъ собой неподвижный конецъ отрѣзка (AB), т. е. совпадаетъ съ A или съ B, то

$$\pm \frac{d^2L}{d\lambda^2} = \frac{\partial^2 F(x_i,\ 0)}{\partial \lambda^2} = -P_2(x_i); \tag{29}$$

если же точка x_i внутренняя, то

$$\pm \frac{d^2L}{d\lambda^2} = \frac{\partial^2 F(x_i,\ 0)}{\partial \lambda^2} + 2\frac{\partial^2 F(x_i,\ 0)}{\partial \lambda \partial x} \cdot \frac{dx_i}{d\lambda} + \frac{\partial^2 F(x_i,\ 0)}{\partial x^2} \cdot \left(\frac{dx_i}{d\lambda}\right)^2;$$

и такъ какъ

$$\frac{\partial^2 F(x_i,\ 0)}{\partial x \partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial^2 F(x_i,\ 0)}{\partial x^2} dx_i = 0,$$

слѣдовательно,

$$\pm \frac{d^2L}{d\lambda^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial \lambda^2} - 2\frac{\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \lambda}\right)^2}{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}} + \frac{\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \lambda}\right)^2}{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}} = \frac{\partial^2 F}{\partial \lambda^2} - \frac{\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \lambda}\right)^2}{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}} = -P_2 - \frac{\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \lambda}\right)^2}{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}} \tag{29bis}$$

(замѣчаніе относительно знаковъ то же, что въ равенствахъ (28)).

Уравненія (29) и (29^{bis}) представляютъ снова систему $(n+2)$ линейныхъ уравненій съ $(n+2)$ неизвѣстными: коэффиціентами многочлена P_2 и $\frac{d^2L}{d\lambda^2}$. При этомъ опредѣлителемъ этихъ уравненій служитъ тотъ же опредѣлитель δ, отличный отъ нуля, что и раньше.

Тѣмъ же способомъ можно вычислить и послѣдующія производныя; это вычисленіе всегда приводится къ рѣшенію системы $(n+2)$ линейныхъ уравненій съ $(n+2)$ неизвѣстными, у которыхъ коэффиціенты при неизвѣстныхъ для производныхъ всѣхъ порядковъ одни и тѣже.

При примѣненіи теоремы B, вычисленія совершенно аналогичны; въ частности равенства (29) и (29^{bis}) остаются безъ измѣненій.

39. Выводъ двухъ неравенствъ. Въ приложеніяхъ, составляющихъ содержаніе слѣдующей главы мы будемъ ограничиваться первыми двумя членами строки Тэйлора: а именно, за приближенное значеніе искомаго отклоненія $L(1)$ мы будемъ брать $L(0)$ или $L(0)+\frac{dL(0)}{d\lambda}$. Первымъ изъ этихъ значеній намъ придется пользоваться въ различныхъ частныхъ случаяхъ и въ соотвѣтствующихъ мѣстахъ будутъ указаны его болѣе или менѣе общія свойства. Напротивъ мы остановимся здѣсь же на второмъ значеніи, удовлетворяющемъ во всѣхъ случаяхъ неравенству

$$L(1) \geqq L(0)+\frac{dL(0)}{d\lambda}. \tag{30}$$

Очевидно, что неравенство (30) будетъ доказано, если будетъ обнаружена для всякаго λ справедливость неравенства

$$\frac{d^2L(\lambda)}{d\lambda^2} \geqq 0, \tag{31}$$

ибо

$$L(1)=L(0)+\frac{dL(0)}{d\lambda}+\frac{d^2L(\lambda)}{2d\lambda^2},$$

гдѣ $0 \leqq \lambda \leqq 1$.

Но неравенство (31) вытекаетъ изъ формулъ (29) и (29^{bis}), имѣющихъ мѣсто при всякомъ λ $(0 \leqq \lambda \leqq 1)$.

Въ самомъ дѣлѣ, знакъ $+$ въ выше упомянутыхъ формулахъ берется, когда $L=F$; знакъ $-$ берется, когда $L=-F$. Поэтому, еслибъ неравенство (31) было бы неправильно, то во внѣшнихъ точкахъ отклоненія было бы $\frac{\partial^2F}{\partial\lambda^2}.F<0$; во внутреннихъ же точкахъ отклоненія, гдѣ

$$F > 0,\ \text{т. е.}\ \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} < 0,$$

мы имѣли бы

$$\frac{d^2 L}{d\lambda^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial\lambda^2} - \frac{\left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial\lambda}\right)^2}{\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}} < 0$$

или

$$\frac{\partial^2 F}{\partial\lambda^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial\lambda}\right)^2 > 0,$$

и тѣмъ болѣе

$$\frac{\partial^2 F}{\partial\lambda^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} > 0;$$

а во внутреннихъ точкахъ отклоненія, гдѣ $F < 0$, т. е. $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} > 0$, такимъ же образомъ получили бы

$$\frac{\partial^2 F}{\partial\lambda^2} - \frac{\left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial\lambda}\right)^2}{\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}} > 0,$$

и поэтому также

$$\frac{\partial^2 F}{\partial\lambda^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} > 0.$$

Слѣдовательно, во всѣхъ точкахъ отклоненія имѣло бы мѣсто неравенство

$$\frac{\partial^2 F}{\partial\lambda^2} . F < 0.$$

Такимъ образомъ сумма степеней $\frac{\partial^2 F}{\partial\lambda^2} = \sum_{i=0}^{i=n} c_i x^{\alpha_i}$ должна была бы имѣть по крайней мѣрѣ по одному корню между x_i и x_{i+1}, т. е. имѣла бы не менѣе $(n+1)$ положительныхъ корней, что невозможно.

Итакъ неравенство (31), а вмѣстѣ съ нимъ и неравенство (30), доказаны.

Замѣтимъ, что неравенство (30) можно получить непосредственно изъ теоремы (34).

Въ самомъ дѣлѣ, замѣняя въ формулѣ (28) $\varphi(x_i)$ черезъ $P(x_i) \pm L(0)$, находимъ

$$\pm\left[L(0) + \frac{dL(0)}{d\lambda}\right] = f(x_i) - P(x_i) - P_1(x_i).$$

Такимъ образомъ приближенная сумма $P(x)+P_1(x)$, получающаяся, если въ строкѣ Тэйлора сохранить только первые два члена, отклоняется отъ $f(x)$ во всѣхъ $(n+2)$ точкахъ x_i на $\pm\left(L(0)+\frac{dL(0)}{d\lambda}\right)$; слѣдовательно, на основанiи указанной теоремы можно утверждать, что отклоненiе суммы того же вида, наименѣе уклоняющейся отъ $f(x)$ не менѣе, чѣмъ $L(0)+\frac{dL(0)}{d\lambda}$, т. е.

$$L(1)\geqq L(0)+\frac{dL(0)}{d\lambda}.$$

Примѣчанiе. Согласно терминологiи de la Vallée Poussin (въ упомянутой выше статьѣ),

$$P(x)+P_1(x)$$

есть сумма степеней, наименѣе уклоняющаяся отъ $f(x)$ въ данныхъ $(n+2)$ точкахъ x_i, при чемъ, слѣдовательно,

$$L(0)+\frac{dL(0)}{d\lambda}$$

есть наименьшее уклоненiе въ этихъ точкахъ.

Глава IV.

Приближенное вычисленіе наименьшаго уклоненія $|x|$ отъ многочлена данной степени.

40. Задача. *Опредѣлить среди всѣхъ многочленовъ степени n, у которыхъ коэффиціентъ при $x^p (0 < p \leqq n)$ равенъ 1, тотъ, который наименѣе уклоняется отъ нуля въ промежуткѣ 01.*

Если искомый многочленъ $P_n(x) = x^p - R(x)$, гдѣ $R(x) = \sum_{i=0}^{i=n-1} a_i x^{\alpha_i}$, при чемъ $\alpha_i = i$, когда $i < p$, и $\alpha_i = i + 1$, когда $i \geqq p$, то $R(x)$ есть сумма степеней указаннаго вида наименѣе уклоняющаяся отъ x^p въ промежуткѣ 01. Слѣдовательно, задача будетъ рѣшена, если многочленъ $P_n(x)$ будетъ имѣть $(n+1)$ точки отклоненія (§ 33) на отрѣзкѣ 01. Но для этого достаточно взять многочленъ

$$P_n(x) = \frac{\cos 2n \arccos \sqrt{x}}{A_{2p}},$$

гдѣ

$$\cos 2n \arccos \sqrt{x} = 2^{2n-1}\Big[x^n - \frac{n}{2}x^{n-1} + \frac{n}{2^3}\cdot\frac{2n-3}{2!}x^{n-2} + \dots$$

$$\dots + (-1)^l \frac{n}{2^{2l-1}}\cdot\frac{(2n-l-1)\dots(2n-2l+1)}{l!}x^{n-l} + \dots\Big],$$

и A_{2p} равенъ коэффиціенту при x^p, въ многочленѣ $\cos 2n \arccos \sqrt{x}$ или коэффиціенту при x^{2p} въ $\cos 2n \arccos x$, а именно,

$$A_{2p} = (-1)^{n-p}\frac{2^{2p}.n.(n+p-1)(n+p-2)\dots(2p+1)}{(n-p)!},$$

если $p < n-1$, $A_{2n-2} = -2^{2n-2}n$ и $A_{2n} = 2^{2n-1}$.

Въ самомъ дѣлѣ, многочленъ $P_n(x)$ имѣетъ коэффиціентъ при x^p равный единицѣ и кромѣ того онъ имѣетъ $(n+1)$ точекъ отклоненія $x_i = \cos^2 \frac{i\pi}{2n}$, гдѣ $i = 0, 1, \dots n$, на отрѣзкѣ 01.

Это отклоненіе такимъ образомъ равно $\frac{1}{|A_{2p}|}$; напримѣръ, для $p=1$, оно равно $\frac{1}{2n^2}$; для $p=2$, оно равно $\frac{3}{2n^2(n^2-1)}$ и т. д.

41. Задача [1]). *Опредѣлить среди всѣхъ многочленовъ степени n, имѣющихъ коэффиціентъ при x^p равный единицѣ, гдѣ $0<p\leqq n$, многочленъ наименѣе уклоняющійся отъ нуля въ промежуткѣ* $(-1, +1)$.

Пусть сначала p будетъ числомъ *четнымъ*. Въ такомъ случаѣ, если $x^p+Q(x)$ удовлетворяетъ задачѣ, то тѣмъ же свойствомъ обладаетъ и $x^p+Q(-x)$, и тѣмъ болѣе многочленъ $x^p+\frac{Q(x)+Q(-x)}{2}$ будетъ также наименѣе уклоняющимся отъ нуля въ промежуткѣ $(-1, +1)$; но этотъ послѣдній многочленъ будетъ составленъ изъ однихъ только четныхъ степеней. Поэтому оставляя въ сторонѣ вопросъ, будетъ ли это рѣшеніе единственнымъ (читатель легко убѣдится, что, хотя это и не вытекаетъ непосредственно изъ общей теоріи, но и въ данномъ случаѣ рѣшеніе будетъ только одно), можемъ ограничиться допущеніемъ, что $Q(x)$ составленъ только изъ четныхъ степеней.

Поэтому, полагая $x^2=y$, мы можемъ привести нашу задачу къ предыдущей. Слѣдовательно, искомый многочленъ будетъ

$$x^p+Q(x)=\frac{\cos n\arccos x}{B_p},$$

если n четное число, и

$$x+Q(x)=\frac{\cos(n-1)\arccos x}{B_p},$$

если n нечетное число, гдѣ B_p равенъ коэффиціенту при x^p въ числителѣ.

Иными словами, *наилучшее приближеніе $x^p=x^{2k}$ при помощи многочлена степени $2n$ или $2n+1$ на отрѣзкѣ $(-1, +1)$ то же, что наилучшее приближеніе x^k при помощи многочлена степени n на отрѣзкѣ* $(0, 1)$.

Допустимъ далѣе, что p *нечетное* число, $p=2k+1$. Въ такомъ случаѣ, если многочленъ $x^p+Q(x)$ даетъ рѣшеніе задачи, то тѣмъ же свойствомъ обладаетъ и многочленъ $x^p-Q(-x)$, а тѣмъ болѣе многочленъ $x^p+\frac{Q(x)-Q(-x)}{2}$ будетъ наименѣе уклоняющимся отъ нуля на отрѣзкѣ $(-1, +1)$. Слѣдовательно, можемъ ограничиться предположеніемъ, что искомый многочленъ составленъ изъ однихъ только нечетныхъ степеней. Задача сводится такимъ образомъ къ опредѣленію суммы нечетныхъ степеней $x, x^3,.. x^{2k-1}, x^{2k+3},...x^n$ (или x^{n-1}, если n четное число), наименѣе уклоняющейся на отрѣзкѣ 01 отъ $x^p=x^{2k+1}$;

[1]) Эта задача, какъ я узналъ впослѣдствіи, была уже рѣшена при помощи другихъ разсужденій въ упомянутомъ выше сочиненіи В. Маркова.

число этихъ степеней равно $\frac{n-1}{2}$, если n нечетное число, а если n четное число, оно равно $\frac{n-2}{2}$. Слѣдовательно, задача будетъ рѣшена, если сумма $x^p + Q(x)$ имѣетъ $\frac{n+1}{2}$, а во второмъ случаѣ $\frac{n}{2}$ точки отклоненія на отрѣзкѣ 01. Но этимъ свойствомъ обладаетъ

$$x^p + Q(x) = \frac{\cos n \arccos x}{B_p},$$

при n нечетномъ, и

$$x^p + Q(x) = \frac{\cos (n-1) \arccos x}{B_p},$$

при n четномъ, гдѣ B_p коэффиціентъ при x^p числителя.

Пусть, напримѣръ, $p = 1$. Тогда

$$B_1 = (-1)^{\frac{n-1}{2}} . n$$

(при n нечетномъ), и

$$B_1 = (-1)^{\frac{n-2}{2}} . (n-1)$$

(при n четномъ).

Примѣчаніе. Такимъ образомъ сумма $x + a_1 x^3 + \ldots + a_n x^{2n+1}$ въ промежуткѣ $(0, 1)$ не можетъ оставаться менѣе $\frac{1}{2n+1}$, при этомъ *сумма эта, дѣйствительно, не превышаетъ* $\frac{1}{2n+1}$, *если она равна многочлену* $\frac{(-1)^n}{2n+1} . \cos (2n+1) \arccos x$.

42. Преобразованіе задачи вычисленія уклоненія $|x|$. Въ виду того, что функція $|x|$ четная, мы заключаемъ, какъ въ предыдущемъ §'ѣ, что многочленъ, наименѣе уклоняющійся отъ $|x|$ на отрѣзкѣ $(-1, +1)$ можно предположить состоящимъ только изъ четныхъ степеней. Слѣдовательно, этотъ многочленъ есть ничто иное, какъ сумма $\sum_{i=0}^{n} b_i x^{2i}$, наименѣе уклоняющаяся отъ x въ промежуткѣ 01; но вмѣсто того, чтобъ изслѣдовать эту сумму, мы будемъ разсматривать сумму, составленную только изъ четныхъ степеней: $x^2, x^4, \ldots, x^{2n}$ (безъ нулевой степени). Другими словами, мы будемъ изучать наименѣе уклоняющійся отъ $|x|$ изъ многочленовъ, равныхъ нулю при $x = 0$. Если мы обозначимъ черезъ E'_{2n} наименьшее уклоненіе, соотвѣтствующее суммѣ послѣдняго вида (безъ постояннаго члена), а черезъ E_{2n} наименьшее уклоненіе, соотвѣтствующее первоначальной суммѣ, то легко убѣдиться, что

$$E'_{2n} \geqq E_{2n} \geqq \tfrac{1}{2} E'_{2n}. \qquad (32)$$

Первое изъ этихъ неравенствъ очевидно; второе вытекаетъ изъ того, что, если многочленъ $P_{2n}(x)$ уклоняется на E_{2n} отъ $|x|$, то $P_{2n}(x)—P_{2n}(0)$ обращается въ нуль при $x=0$, и не уклоняется отъ $|x|$ болѣе, чѣмъ на $2E_{2n}$ (не трудно было бы убѣдиться, что знаки равенства въ неравенствахъ (32) можно отбросить).

Примѣчаніе. Если многочленъ $P(x)$ наименѣе уклоняется отъ $|x|$ на отрѣзкѣ $(-1, +1)$, то $hP\left(\frac{x}{h}\right)$ есть многочленъ наименѣе уклоняющійся отъ $|x|$ въ промежуткѣ $(-h, +h)$; слѣдовательно, наименьшее уклоненіе пропорціонально длинѣ промежутка $2h$.

43. Теорема. *Наименьшее уклоненіе на отрѣзкѣ 01 суммы вида* $\sum_{i=1}^{i=n} a_i x^{\alpha_i}$ *отъ x больше наименьшаго уклоненія отъ x суммы вида* $\sum_{i=1}^{i=n} b_i x^{\beta_i}$, *если* $\alpha_1 > \beta_1$, $\alpha_1 \geqq \beta_2, \ldots \alpha_n \geqq \beta_n$, *при чемъ вообще всѣ* $\beta_i > 1$.

Положимъ сначала, что

$$\beta_1 < \alpha_1 \leqq \beta_2 \leqq \alpha_2 \leqq \ldots \leqq \beta_n \leqq \alpha_n.$$

Пусть сумма $Q(x)=B_1x^{\alpha_1}+\ldots+B_nx^{\alpha_n}$ будетъ наименѣе уклоняющейся отъ x на отрѣзкѣ 01. Въ такомъ случаѣ несомнѣнно

$$B_1>0, \quad B_2<0, \quad B_3>0, \text{ и т. д.},$$

ибо уравненіе $x-Q(x)=0$ должно имѣть по крайней мѣрѣ n положительныхъ корней.

Для примѣненія теоремы (37), строимъ функцію

$$F(x, \lambda)=x+(\lambda-1)Q(x)-P(x, \lambda),$$

гдѣ $P(x, \lambda)$ есть сумма вида $\sum_{i=1}^{i=n} a_i x^{\alpha_i}$, наименѣе уклоняющаяся отъ $x+(\lambda-1)Q(x)$. Не трудно убѣдиться, что въ данномъ случаѣ примѣненіе указанной теоремы законно.

Въ самомъ дѣлѣ, коэффиціенты суммы

$$\frac{\partial F}{\partial x}=1+(\lambda-1)Q'(x)-P'_x(x, \lambda),$$

при $\lambda<1$, не могутъ имѣть болѣе чѣмъ n чередованій знаковъ, поэтому $\frac{\partial F}{\partial x}=0$ имѣетъ не болѣе n положительныхъ простыхъ корней, такъ что при всякомъ λ конецъ отрѣзка 1 будетъ точкой отклоненія, и кромѣ того, ни въ одной изъ внутреннихъ точекъ отклоненія не будетъ $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=0$.

Итакъ вычисляемъ производную по параметру λ,

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda}=Q(x)-P'_\lambda(x, \lambda),$$

которая обращается въ нуль не менѣе, чѣмъ при n положительныхъ значеніяхъ x. Отсюда слѣдуетъ, что число чередованій знаковъ коэффиціентовъ не менѣе n, а потому первый коэффиціентъ въ $-P'$ долженъ быть отрицательнымъ. Въ такомъ случаѣ $\frac{\partial F}{\partial \lambda}$ будетъ имѣть ровно n положительныхъ корней, и, при x весьма маломъ, въ частности въ ближайшей къ 0 точкѣ отклоненія, $\frac{\partial F}{\partial \lambda}$ будетъ имѣть знакъ своего перваго члена, т. е.

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} < 0.$$

Но въ этой точкѣ $F(x, \lambda) > 0$; слѣдовательно и

$$\frac{dL}{d\lambda} < 0,$$

откуда заключаемъ, что отклоненіе $L(\lambda)$ идетъ убывая, въ то время какъ λ возрастаетъ отъ 0 до 1. Такимъ образомъ

$$L(1) < L(0).$$

Изъ правильности теоремы въ только что разсмотрѣнномъ случаѣ, легко заключить ея справедливость въ самомъ общемъ случаѣ. Для этого достаточно составить слѣдующую таблицу показателей:

$$\begin{array}{l} \alpha_1, \ \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_n; \\ \frac{(n-2)\alpha_1+\beta_1}{n-1}, \ \beta_1, \ \alpha_3 \ldots \alpha_n; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\alpha_1+(n-2)\beta_1}{n-1}, \ \beta_2, \ldots \beta_{n-1}, \alpha_n; \\ \beta_1, \ \beta_2, \ldots\ldots\ldots \beta_n. \end{array}$$

Сравнивая каждый рядъ показателей съ предыдущимъ, мы видимъ, что они удовлетворяютъ условіямъ только что разсмотрѣннымъ нами. Поэтому беря послѣдовательно суммы степеней, соотвѣтствующія каждому ряду, получимъ a fortiori, что и въ общемъ случаѣ наименьшее уклоненіе x отъ суммы вида $\sum_{i=1}^{i=n} a_i x^{\alpha_i}$ больше наименьшаго уклоненія отъ суммы вида $\sum_{i=1}^{i=n} b_i x^{\beta_i}$.

44. Слѣдствія. А. *Наименьшее уклоненіе на отрѣзкѣ 01 многочлена вида* $A_1 x^2 + A_2 x^4 + \ldots + A_n x^{2n}$ *отъ* x *меньше, чѣмъ* $\frac{1}{2n+1}$.

Въ самомъ дѣлѣ, изъ § 41 мы знаемъ, что наименьшее уклоненіе на отрѣзкѣ 01 суммы нечетныхъ степеней $a_1x^3 + \ldots + a_nx^{2n+1}$ отъ x равно $\frac{1}{2n+1}$.

B. *Наименьшее уклоненіе отъ x многочлена вида* $B_1x^4 + \ldots + B_nx^{2n+2}$ *на отрѣзкѣ* 01 *больше, чѣмъ* $\frac{1}{2n+1}$.

45. Теорема. *Наименьшее уклоненіе* E'_{2n} *многочлена безъ свободнаго члена степени* $2n$ *отъ* $|x|$ *на отрѣзкѣ* $(-1, +1)$, *при* $n > 1$, *удовлетворяетъ неравенствамъ* [1]:

$$\frac{1}{2(1+\sqrt{2})} \cdot \frac{1}{2n-1} < E'_{2n} < \frac{1}{2n+1}. \tag{33}$$

Въ самомъ дѣлѣ, E'_{2n} есть въ тоже время наименьшее отклоненіе отъ x на отрѣзкѣ 01 многочлена вида $A_1x^2 + A_2x^4 + \ldots + A_nx^{2n}$; слѣдовательно, второе изъ неравенствъ равнозначно слѣдствію A предыдущаго §'а. Для доказательства перваго неравенства разсуждаемъ слѣдующимъ образомъ.

По предположенію

$$|x - A_1x^2 - A_2x^4 - \ldots - A_nx^{2n}| \leqq E'_{2n} \tag{34}$$

на отрѣзкѣ 01. Поэтому при всякомъ положительномъ значеніи μ будемъ тѣмъ болѣе имѣть на томъ же отрѣзкѣ

$$\left|\frac{x}{1+\mu} - A_1\left(\frac{x}{1+\mu}\right)^2 - \ldots\ldots\right| \leqq E'_{2n},$$

откуда

$$|(1+\mu)x - A_1x^2 - \ldots\ldots| \leqq E'_{2n}.(1+\mu)^2;$$

но вычитая изъ этого неравенства неравенство (34), получимъ неравенство вида

$$|\mu(x - B_1x^4 - \ldots - B_{n-1}x^{2n})| \leqq E'_{2n}.[(1+\mu)^2 + 1],$$

и наконецъ,

$$|x - B_1x^4 - \ldots - B_{n-1}x^{2n}| \leqq E'_{2n}.\frac{(1+\mu)^2+1}{\mu}.$$

---

[1]) Случай $n = 1$ непосредственно приводится къ рѣшенію квадратнаго уравненія, изъ котораго получается $E_2' = \frac{1}{2(1+\sqrt{2})}$.

Съ другой стороны, изъ слѣдствія B предыдущаго §'а мы знаемъ, что $|x - B_1 x^4 - \ldots - B_{n-1} x^{2n}|$ должна (при $n > 1$) становиться болѣе, чѣмъ $\frac{1}{2n-1}$. Слѣдовательно,

$$\frac{1}{2n-1} < E'_{2n} \cdot \frac{(1+\mu)^2 + 1}{\mu},$$

каково бы ни было положительное число μ.

Но

$$\frac{(1+\mu)^2+1}{\mu}$$

достигаетъ минимума при $\mu = \sqrt{2}$; такимъ образомъ въ частности

$$\frac{1}{2n-1} < E'_{2n} \cdot 2(1+\sqrt{2}),$$

откуда

$$E'_{2n} > \frac{1}{2(1+\sqrt{2})} \cdot \frac{1}{2n-1}.$$

Примѣчаніе. На основаніи неравенствъ (32) и (33) можемъ заключить, что

$$\frac{1}{2n+1} > E_{2n} > \frac{1}{4(1+\sqrt{2})} \cdot \frac{1}{2n-1} \qquad (33^{\text{bis}})$$

46. Примѣненіе неравенства (30). Какъ мы видѣли въ § 43, примѣненіе теоремы (37) является вполнѣ законнымъ, если

$$F(x, \lambda) = x + (\lambda - 1) Q(x) - P(x, \lambda),$$

гдѣ $Q(x)$ многочленъ вида $B_1 x^3 + B_2 x^5 + \ldots + B_n x^{2n+1}$, наименѣе уклоняющійся отъ x въ промежуткѣ 01, а $P(x, \lambda)$ многочленъ вида $A_1 x^2 + A_2 x^4 + \ldots + A_n x^{2n}$, наименѣе уклоняющійся отъ $x + (\lambda - 1) Q(x)$ въ томъ же промежуткѣ. Мы знаемъ, что

$$x - Q(x) = \frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot \cos(2n+1) \arccos x$$

и

$$L(0) = \frac{1}{2n+1},$$

а первоначальными точками отклоненія служатъ

$$x_i = \cos \frac{i\pi}{2n+1}. \qquad (i = 0, 1, \ldots n)$$

Такимъ образомъ

$$1 - Q(1) = (-1)^n L(0),$$

$$\cos\frac{\pi}{2n+1} - Q\left(\cos\frac{\pi}{2n+1}\right) = (-1)^{n-1} L(0),$$

. . . .

. . . .

$$\cos\frac{n\pi}{2n+1} - Q\left(\cos\frac{n\pi}{2n+1}\right) = L(0);$$

а уравненія, соотвѣтствующія уравненіямъ (28), имѣютъ форму

$$Q(1) - P_1(1) = (-1)^n \frac{dL(0)}{d\lambda},$$

. . . .

. . . .

$$Q\left(\cos\frac{n\pi}{2n+1}\right) - P_1\left(\cos\frac{n\pi}{2n+1}\right) = \frac{dL(0)}{d\lambda}.$$

Складывая каждое изъ равенствъ первой группы съ соотвѣтствующимъ уравненіемъ второй группы, получимъ

$$1 - P_1(1) = (-1)^n \left[L(0) + \frac{dL(0)}{d\lambda}\right],$$

$$\cos\frac{\pi}{2n+1} - P_1\left(\cos\frac{\pi}{2n+1}\right) = (-1)^{n-1}\left[L(0) + \frac{dL(0)}{d\lambda}\right], \qquad (35)$$

. . . .

. . . .

$$\cos\frac{n\pi}{2n+1} - P_1\left(\cos\frac{n\pi}{2n+1}\right) = L(0) + \frac{dL(0)}{d\lambda}.$$

Многочленъ $P_1(x)$ имѣетъ форму $A_1x^2 + A_2x^4 + \ldots + A_nx^{2n}$. Слѣдовательно, уравненія (35) вполнѣ опредѣляютъ его коэффиціенты, а также $\varrho = L(0) + \frac{dL(0)}{d\lambda}$. Для удобства рѣшенія этихъ уравненій, замѣтимъ, что къ нимъ можно присоединить уравненія

$$-\cos\frac{(n+1)\pi}{2n+1} - P_1\left(\cos\frac{(n+1)\pi}{2n+1}\right) = \varrho,$$

. . . . (35bis)

. . . .

$$-\cos\frac{(2n+1)\pi}{2n+1} - P_1\left(\cos\frac{(2n+1)\pi}{2n+1}\right) = (-1)^n\varrho.$$

Такимъ образомъ многочленъ $P_1(x)$ есть многочленъ степени не выше $(2n+1)$, который благодаря равенствамъ (35) и (35^{bis}) долженъ въ $(2n+2)$ точкахъ $x_i = \cos\frac{i\pi}{2n+1}$ $(i=0,\ 1,\dots 2n+1)$ принимать значенія $x_i - \varrho(-1)^{n+i}$, если $i<n$, и $-x_i+\varrho(-1)^{n+i}$, если $i>n$, которыя станутъ опредѣленными, если ϱ выбрать такъ, чтобъ $P_1(0)=0$. Поэтому, примѣняя извѣстную формулу для интерполированія, получимъ

$$P_1(x) = S(x)\left[\sum_{i=0}^{i=n}\frac{x_i-\varrho(-1)^{n+i}}{(x-x_i)S'(x_i)} - \sum_{i=n+1}^{i=2n+1}\frac{x_i-\varrho(-1)^{n+i}}{(x-x_i)S'(x_i)}\right], \qquad (36)$$

гдѣ

$$S(x) = \sin(2n+1)\arccos x\,.\sqrt{1-x^2}$$

многочленъ степени $2n+2$, имѣющій корнями $x_i (i=0,\ 1,\dots 2n+1)$.

Условіе, что $P_1(0)=0$, приводитъ насъ къ уравненію

$$\sum_{i=0}^{i=n}\frac{x_i-\varrho(-1)^{n+i}}{x_iS'(x_i)} - \sum_{i=n+1}^{i=2n+1}\frac{x_i-\varrho(-1)^{n+i}}{x_iS'(x_i)} = 0,$$

изъ котораго опредѣляемъ ϱ. Для этого замѣчаемъ, что

$$S'(x) = -(2n+1)\cos(2n+1)\arccos x - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\sin(2n+1)\arccos x,$$

откуда

$$S'(x_i) = -(2n+1).(-1)^i, \text{ если } i=1,\ 2,\dots 2n,$$

и

$$S'(x_i) = -2(2n+1).(-1)^i, \text{ если } i=0 \text{ или } 2n+1.$$

Такимъ образомъ

$$\sum_{i=0}^{i=n}\frac{1}{S'(x_i)} = \frac{-1}{2n+1}\left[\frac{1}{2}-1+1+\dots+(-1)^n\right] = \frac{-(-1)^n}{2(2n+1)},$$

$$\sum_{i=n+1}^{i=2n+1}\frac{1}{S'(x_i)} = \frac{1}{2n+1}\left[\frac{1}{2}-1+\dots+(-1)^n\right] = \frac{(-1)^n}{2(2n+1)}.$$

Слѣдовательно,

$$\varrho\left[\sum_{i=0}^{i=n}\frac{(-1)^i}{x_iS'(x_i)} - \sum_{i=n+1}^{i=2n+1}\frac{(-1)^i}{x_iS'(x_i)}\right] = \frac{-1}{2n+1},$$

или

$$\varrho\left[1+\sum_{i=1}^{i=n}\frac{1}{\cos\frac{i\pi}{2n+1}} - \sum_{i=n+1}^{i=2n}\frac{1}{\cos\frac{i\pi}{2n+1}}\right] = 1,$$

и наконецъ

$$\varrho = \frac{1}{1 + 2\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{\cos\frac{i\pi}{2n+1}}}. \tag{37}$$

Пользуясь неравенствомъ (30), мы получимъ отсюда нижнюю границу для $L(1) = E'_{2n}$, а именно,

$$E'_{2n} > \varrho = \frac{1}{1 + 2\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{\cos\frac{i\pi}{2n+1}}}.$$

Но

$$1 + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{\cos\frac{i\pi}{2n+1}} < \frac{1}{\cos\frac{n\pi}{2n+1}} + \int_0^n \frac{dz}{\cos\frac{z\pi}{2n+1}} = \frac{1}{\cos\frac{n\pi}{2n+1}} +$$

$$+ \frac{2n+1}{\pi}\int_0^{\frac{n\pi}{2n+1}} \frac{du}{\cos u} = \frac{1}{\cos\frac{n\pi}{2n+1}} + \left(\frac{2n+1}{\pi}\right)\log\frac{1+\sin\frac{n\pi}{2n+1}}{\cos\frac{n\pi}{2n+1}} =$$

$$= \frac{1}{\frac{\pi}{4n+2} - \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{4n+2}\right)^3 + \ldots} + \frac{2n+1}{\pi}\log\left(1+\sin\frac{n\pi}{2n+1}\right) -$$

$$- \frac{2n+1}{\pi}\log\left[\frac{\pi}{4n+2} - \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{4n+2}\right)^3 + \ldots\right] = \frac{4n+2}{\pi}\cdot\frac{1}{1 - \frac{\pi^2}{24(2n+1)^2} + \ldots} +$$

$$+ \frac{2n+1}{\pi}\log\left(2 - \frac{\pi^2}{8(2n+1)^2} + \ldots\right) + \frac{2n+1}{\pi}\log\frac{4n+2}{\pi} -$$

$$- \frac{2n+1}{\pi}\log\left(1 - \frac{\pi^2}{24(2n+1)^2} + \ldots\right) = \frac{2n+1}{\pi}\log\frac{8n+4}{\pi} + \frac{4n+2}{\pi} + \varepsilon_n,$$

гдѣ ε_n стремится къ нулю, когда n возрастаетъ безконечно, и, при всякомъ n, $\varepsilon_n < \frac{1}{2}$.

Слѣдовательно, при всякомъ n,

$$E'_{2n} > \varrho > \frac{\pi}{(4n+2)\left[2 + \log\frac{8n+4}{\pi}\right]}. \tag{38}$$

Неравенство (38), какъ мы видимъ, даетъ значительно менѣе близкую къ E'_{2n} нижнюю границу, чѣмъ неравенство (33).

47. Замѣна приближеннаго многочлена $P_1(x)$ другимъ многочленомъ. Вмѣсто того, чтобъ продолжать систематическое примѣненіе общаго метода, разсмотримъ многочленъ $R(x)$ степени $2n$, опредѣляемый условіями, что онъ равенъ $|x|$ въ точкахъ $x_k = \cos\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi}{2n}$ $(k=0,\ 1,\dots 2n-1)$, гдѣ $T(x)=\cos 2n\arccos x = 0$, и кромѣ того равенъ нулю при $x=0$.

Замѣчаемъ, что

$$T'(x)=\frac{2n\sin 2n\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Поэтому

$$T'(x_k)=(-1)^k\frac{2n}{\sin\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi}{2n}}.$$

Слѣдовательно,

$$R(x)=\frac{xT(x)}{2n}\left[\sum_{k=0}^{k=n-1}\frac{(-1)^k\sin\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi}{2n}}{x-\cos\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi}{2n}}-\sum_{k=n}^{k=2n-1}\frac{(-1)^k\sin\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi}{2n}}{x-\cos\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi}{2n}}\right]. \quad (39)$$

Но, съ другой стороны,

$$x=\frac{xT(x)}{2n}\left[\sum_{k=0}^{k=n-1}\frac{(-1)^k\sin\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi}{2n}}{x-\cos\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi}{2n}}+\sum_{k=n}^{k=2n-1}\frac{(-1)^k\sin\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi}{2n}}{x-\cos\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi}{2n}}\right].$$

Откуда

$$x-R(x)=\frac{xT(x)}{n}\sum_{k=n}^{k=2n-1}\frac{(-1)^k\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}}{x-\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}}=\frac{-xT(x)}{n}\sum_{k=0}^{k=n-1}\frac{(-1)^k\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}}{x+\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}}; \quad (40)$$

и такъ какъ многочленъ $R(x)$ представляетъ собой сумму четныхъ степеней, то $|x|-R(x)$, какъ при положительныхъ, такъ и при отрицательныхъ значеніяхъ x, равняется разности $x - R(x)$, взятой только для *положительныхъ* значеній x.

Преобразуемъ сумму

$$H = -\sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{(-1)^k \sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}}{x+\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}} =$$

$$= -\sum_{k=1,\,3,\ldots,n-1} \frac{\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\left[x+\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\right] - \sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\left[x+\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\right]}{\left[x+\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\right]\left[x+\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\right]} =$$

$$= \sum_{k=1,\,3,\ldots,n-1} \frac{2x\sin\frac{\pi}{4n}\cos\frac{k\pi}{2n}+\sin\frac{\pi}{2n}}{\left[x+\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\right]\left[x+\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\right]}, \tag{41}$$

полагая для опредѣленности n четнымъ.

Теперь легко убѣдиться, что для всякаго *опредѣленнаго* положительнаго значенія x,

$$\underset{n=\infty}{\text{пред.}}\; xH(x) = \frac{1}{2}. \tag{42}$$

Дѣйствительно,

$$\underset{n=\infty}{\text{пред.}}\; xH(x) = \underset{n=\infty}{\text{пред.}} \sum_{k=1,3,\ldots} \frac{\pi}{2n} \frac{x^2\cos\frac{k\pi}{2n}+x}{\left(x+\cos\frac{k\pi}{2n}\right)^2} = \frac{x}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\cos\alpha+1}{(x+\cos\alpha)^2}\,d\alpha = \frac{1}{2}.$$

Такимъ образомъ

$$|x| - R(x) = \frac{\cos 2n \arccos x}{2n} + \frac{\varepsilon_n(x)\cos 2n\arccos x}{2n}, \tag{43}$$

при чемъ $\varepsilon_n(0) = -1$, и $\underset{n=\infty}{\text{пред.}}\; \varepsilon_n(x) = 0$, если $|x| > 0$.

48. Опредѣленіе нижней границы E'_{2n}. Многочленомъ $R(x)$ можно воспользоваться для опредѣленія нижней границы E'_{2n} при помощи обобщенной теоремы de la Vallée Poussin.

Для этого покажемъ сначала [1]), что при всякомъ $x > 0$,

$$H(x) > \frac{n}{2n+1}\left[\frac{1}{x+\frac{\pi}{4n}} - \frac{1}{x+\frac{2n+1}{4n}\pi}\right]. \tag{44}$$

---

[1]) Мы предполагаемъ $n \geqq 2$. Случай, когда $n=1$, не представляетъ никакихъ трудностей, какъ это уже было замѣчено ранѣе.

Въ самомъ дѣлѣ,

$$H(x) > \sin\frac{\pi}{2n}\cdot\sum_{1,\,3,\ldots,n-1}\frac{1}{\left[x+\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\right]\left[x+\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\right]}=$$

$$=\sin\frac{\pi}{2n}\cdot\sum_{1,\,3,\ldots}\frac{1}{\left[x+\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\right]\left[x+\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\right]}>$$

$$>\sin\frac{\pi}{2n}\sum_{1,\,3,\ldots}\frac{1}{\left(x+\frac{(2k-1)\pi}{4n}\right)\left(x+\frac{(2k+1)\pi}{4n}\right)}>$$

$$>\frac{\pi}{2n+1}\cdot\sum_{1,\,3,\ldots}\frac{1}{\left[x+\frac{(2k-1)\pi}{4n}\right]\left[x+\frac{(2k+1)\pi}{4n}\right]}>$$

$$>\frac{\pi}{2(2n+1)}\sum_{1,\,2,\ldots n}\frac{1}{\left(x+\frac{2k-1}{4n}\pi\right)\left(x+\frac{2k+1}{4n}\pi\right)}=$$

$$=\frac{n}{2n+1}\left[\frac{1}{x+\frac{\pi}{4n}}-\frac{1}{x+\frac{2n+1}{4n}\pi}\right].$$

Отсюда заключаемъ безъ труда, что при $x \geqq \frac{\pi}{8n}$

$$x\,.\,H(x) > \frac{n}{2n+1}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4n+3}\right);$$

а потому, какъ бы мало ни было ε, можно взять n достаточно большимъ, чтобъ имѣть

$$x\,.\,H(x) > \frac{1-\varepsilon}{6}.$$

Поэтому разность

$$x-R(x)=\frac{x\,.\,H(x)\,.\,T(x)}{n},$$

въ точкахъ

$$Z_i=\cos\frac{i\pi}{2n}, \qquad (i=0,\ 1,\ldots n-1)$$

послѣдовательно мѣняя знакъ, становится по абсолютному значенію больше $\frac{1-\varepsilon}{6n}$ и, наконецъ, снова перемѣнивъ знакъ, въ точкѣ $\frac{\pi}{8n}$ превышаетъ

$$\frac{1-\varepsilon}{6n}\,T\left(\frac{\pi}{8n}\right).$$

Примѣняя обобщенную теорему de la Vallée Poussin, заключаемъ, что

$$E'_{2n} > \frac{1-\varepsilon}{6n} \cdot T\left(\frac{\pi}{8n}\right),$$

или, полагая n достаточно большимъ, находимъ

$$E'_{2n} > \frac{1}{3\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2n}. \tag{45}$$

Примѣчаніе. Легко было бы провѣрить, что $E'_{2n} > \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2n}$ для всякаго n; но это неравенство менѣе точно, чѣмъ неравенство (33), которое получено было уже выше другимъ способомъ.

Въ прилагаемомъ ниже добавленіи къ этой главѣ рѣчь будетъ итти о приближенномъ вычисленіи E_{2n}. Что же касается E'_{2n}, то, пользуясь болѣе точнымъ вычисленіемъ $xH(x)$, для весьма большихъ значеній n, можно получить, пользуясь тѣмъ же многочленомъ $R(x)$,

$$E'_{2n} > \frac{0{,}34}{2n}.$$

Добавленіе [1] къ главѣ IV.

Вычисленіе $E_{2n}\,|x|$ для весьма большихъ значеній n.

49. Преобразованіе разности $|x|-R(x)$ для весьма большихъ значеній n. Согласно обозначеніямъ § 47, равенству (40) можно придать видъ [2])

$$|x|-R(x)=\frac{xT(x).H(x)}{n},\tag{40bis}$$

гдѣ

$$H(x)=\sum_{k=1,3,\ldots n-1}\frac{2x\sin\frac{\pi}{4n}\cos\frac{k\pi}{2n}+\sin\frac{\pi}{2n}}{\left[x+\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\right]\left[x+\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\right]}.\tag{41}$$

Но при безконечномъ возрастаніи n, $xH(x)$ стремится, очевидно, къ тому же предѣлу, что и

$$xH_1(x)=\frac{\pi}{2n}\sum_{k=1,\,3,\ldots}\frac{x^2\cos\frac{k\pi}{2n}+x}{\left[x+\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\right]\left[x+\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\right]},$$

при чемъ разность $xH(x)-xH_1(x)$ равномѣрно стремится къ нулю, если $0\leqq x\leqq 1$. Такимъ образомъ

---

[1]) Важнѣйшіе результаты этого добавленія были сообщены мной Парижской Академіи Наукъ 22-го января 1912 года; замѣчу при этомъ, что неравенства (3) упомянутаго сообщенія должны быть замѣнены неравенствами (59) печатаемаго ниже текста.

[2]) Принимая во вниманіе, что мы имѣемъ въ виду лишь весьма большія значенія n, можно ограничиться разсмотрѣніемъ четныхъ значеній n, благодаря чему $T(x)=$ $=\cos 2n\arccos x=\cos 2n\arcsin x$.

$$|x| - R(x) = \frac{T(x)}{n}[xH_1(x) + \alpha_n],$$

гдѣ α_n *равномѣрно* приближается къ нулю, когда n возрастаетъ безконечно.

Я говорю далѣе, что *разность*

$$\delta_n = xH_1(x) - xH_2(x),$$

гдѣ

$$H_2(x) = \frac{\pi}{2n} \sum_{k=1,\,3,\ldots} \frac{1}{\left(x + \frac{k\pi}{2n}\right)^2 - \frac{\pi^2}{16n^2}}, \tag{46}$$

также равномѣрно стремится къ нулю при безконечномъ возрастаніи n, *если* $0 \leqq x \leqq 1$.

Для того, чтобъ въ этомъ убѣдиться, замѣчаемъ сперва, что

$$xH_1(x) = \frac{\pi}{2n} \cdot \sum_{k=1,\,3,\ldots n-1} \frac{x^2 \sin\frac{k\pi}{2n} + x}{\left[x + \sin\left(k - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\right]\left[x + \sin\left(k + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\right]}.$$

Беремъ далѣе нѣкоторое произвольно малое число x_0. Изъ § 47 мы уже знаемъ, что, при $x \geqq x_0$, $xH(x)$, а поэтому и $xH_1(x)$, при n достаточно большомъ, равномѣрно приближается къ $\frac{1}{2}$; но не трудно видѣть, что къ тому же предѣлу равномѣрно стремится (при $x \geqq x_0$) и

$$F(v) = xH_2(x) = \frac{\pi}{2n} \sum_{1,\,3,\ldots} \frac{x}{\left(x + \frac{k\pi}{2n}\right)^2 - \frac{\pi^2}{16n^2}} = \sum_{1,\,3,\ldots} \frac{v}{(v+k)^2 - \frac{1}{4}}, \tag{46bis}$$

гдѣ $v = \frac{2nx}{\pi}$ безконечно возрастаетъ. Дѣйствительно,

$$\int_1^\infty \frac{vdz}{(v+z)^2 - \frac{1}{4}} < 2 \sum_{1,\,3,\ldots} \frac{v}{(v+k)^2 - \frac{1}{4}} < \int_1^\infty \frac{vdz}{(v+z)^2 - \frac{1}{4}} + 2\frac{v}{(v+1)^2 - \frac{1}{4}};$$

поэтому, при $v = \infty$,

$$\text{пред.} \sum_{1,\,3,\ldots} \frac{v}{(v+k)^2 - \frac{1}{4}} = \text{пред.} \frac{1}{2} \int_1^\infty \frac{vdz}{(v+z)^2 - \frac{1}{4}} = \text{пред.} \frac{v}{2} \log \frac{v + \frac{3}{2}}{v + \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

Разсмотримъ, съ другой стороны, значенія $x < x_0$. Для этихъ значеній разобьемъ на двѣ части сумму

$$xH_1(x) = \frac{\pi}{2n} \sum_{1,\,3,\ldots} \frac{x^2 \sin\dfrac{k\pi}{2n}}{\left[x + \sin\left(k - \dfrac{1}{2}\right)\dfrac{\pi}{2n}\right]\left[x + \sin\left(k + \dfrac{1}{2}\right)\dfrac{\pi}{2n}\right]} +$$

$$+ \frac{\pi}{2n} \sum_{1,\,3,\ldots} \frac{x}{\left[x + \sin\left(k - \dfrac{1}{2}\right)\dfrac{\pi}{2n}\right]\left[x + \sin\left(k + \dfrac{1}{2}\right)\dfrac{\pi}{2n}\right]},$$

и изслѣдуемъ сначала часть

$$xH_1'(x) = \frac{\pi}{2n} \sum_{1,\,3,\ldots} \frac{x}{\left[x + \sin\left(k - \dfrac{1}{2}\right)\dfrac{\pi}{2n}\right]\left[x + \sin\left(k + \dfrac{1}{2}\right)\dfrac{\pi}{2n}\right]}.$$

Здѣсь мы можемъ снова положить $v = \dfrac{2nx}{\pi}$, такъ что

$$xH_1'(x) = \sum_{1,\,3,\ldots} \frac{v}{\left[v + \dfrac{2n}{\pi}\sin\left(k - \dfrac{1}{2}\right)\dfrac{\pi}{2n}\right]\left[v + \dfrac{2n}{\pi}\sin\left(k + \dfrac{1}{2}\right)\dfrac{\pi}{2n}\right]}.$$

Въ этой суммѣ разсматриваемъ во первыхъ члены, у которыхъ

$$k + \frac{1}{2} \leqq \frac{2n}{\pi}\sqrt{x_0}.$$

Каждый изъ этихъ членовъ напишемъ въ видѣ

$$I_k = \frac{v}{\left\{v + \left(k - \dfrac{1}{2}\right)\left[1 - \Theta\left(k - \dfrac{1}{2}\right)^2 \dfrac{\pi^2}{4n^2}\right]\right\}\left\{v + \left(k + \dfrac{1}{2}\right)\left[1 - \Theta_1\left(k + \dfrac{1}{2}\right)^2 \dfrac{\pi^2}{4n^2}\right]\right\}},$$

гдѣ $\Theta < \dfrac{1}{6}$, $\Theta_1 < \dfrac{1}{6}$, или

$$I_k = \frac{v}{\left[v + \left(k - \dfrac{1}{2}\right)\left(1 - \Theta' x_0\right)\right]\left[v + \left(k + \dfrac{1}{2}\right)\left(1 - \Theta_1' x_0\right)\right]},$$

при чемъ также $\Theta' < \dfrac{1}{6}$ и $\Theta_1' < \dfrac{1}{6}$. Откуда находимъ

$$\frac{I_k'}{\left(1 - \dfrac{x_0}{6}\right)^2} > I_k > I_k',$$

обозначая черезъ

$$I'_k = \frac{v}{\left[v+\left(k-\frac{1}{2}\right)\right]\left[v+\left(k+\frac{1}{2}\right)\right]} = \frac{v}{(v+k)^2 - \frac{1}{4}}$$

соотвѣтствующій членъ ряда (46^{bis}). Такимъ образомъ и

$$\frac{1}{\left(1-\frac{x_0}{6}\right)^2} \Sigma I'_k > \Sigma I_k > \Sigma I'_k$$

для значеній k, удовлетворяющихъ неравенству

$$k+\frac{1}{2} \leqq \frac{2n}{\pi}\sqrt{x_0}\,.$$

Перейдемъ теперь къ остальнымъ членамъ. Замѣчаемъ, что вообще $\sin\frac{\pi b}{2} > b$ (если $0 < b < 1$); поэтому

$$I_k < \frac{v}{\left[v+\frac{2}{\pi}\left(k-\frac{1}{2}\right)\right]\left[v+\frac{2}{\pi}\left(k+\frac{1}{2}\right)\right]} = \frac{\frac{\pi}{2}v}{v+\frac{2}{\pi}\left(k-\frac{1}{2}\right)} - \frac{\frac{\pi}{2}v}{v+\frac{2}{\pi}\left(k+\frac{1}{2}\right)}\,.$$

Слѣдовательно,

$$\sum_{k=k_0}^{k=\infty} I_k < \frac{\frac{\pi}{2}v}{v+\frac{2}{\pi}\left(k_0-\frac{1}{2}\right)}\,.$$

Такимъ образомъ сумма всѣхъ членовъ, для которыхъ

$$k+\frac{1}{2} > \frac{2n}{\pi}\sqrt{x_0}\,,$$

меньше, чѣмъ

$$\frac{\frac{\pi}{2}v}{v+\frac{2}{\pi}\left(\frac{2n\sqrt{x_0}}{\pi}-1\right)} \leqq \frac{\pi n x_0}{2nx_0+2\left(\frac{2n\sqrt{x_0}}{\pi}-1\right)} = \frac{\frac{\pi}{2}\sqrt{x_0}}{\frac{2}{\pi}+\sqrt{x_0}-\frac{1}{n\sqrt{x_0}}}\,;$$

поэтому, взявъ n достаточно большимъ $\left(\text{а именно, } n > \frac{1}{x_0}\right)$, мы можемъ сдѣлать указанную сумму меньшею, чѣмъ $\pi\sqrt{x_0}$. Ясно, что послѣднее утвержденіе тѣмъ болѣе будетъ справедливо для суммы соотвѣтствующихъ членовъ ряда (46^{bis}). Отсюда слѣдуетъ, что, при $x < x_0$ и $n > \frac{1}{x_0}$,

$$xH_2(x) < xH_1'(x) < \frac{xH_2(x)}{\left(1-\frac{x_0}{6}\right)^2} + \pi\sqrt{x_0},$$

или, замѣчая, что $xH_2(x) < 1$,

$$xH_2(x) < xH_1'(x) < xH_2(x) + \frac{x_0}{2} + \pi\sqrt{x_0}\,.$$

Остается, наконецъ, еще замѣтить, что первая часть

$$xH_1''(x) = \frac{\pi}{2n}\sum_{1,3,\ldots}\frac{x^2\sin\frac{k\pi}{2n}}{\left[x+\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\right]\left[x+\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\right]}$$

суммы $xH_1(x)$ менѣе, чѣмъ $x^2H_1'(x)$; слѣдовательно,

$$xH_2(x) < xH_1(x) < xH_2(x) + 5x_0 + \pi\sqrt{x_0}.$$

Такимъ образомъ, разность

$$\delta_n(x) = xH_1(x) - xH_2(x),$$

какъ для $x \geqq x_0$, такъ и для $x < x_0$ равномѣрно стремится къ нулю, если n возрастаетъ безконечно.

Поэтому для всѣхъ значенiй x можемъ написать

$$|x| - R(x) = \frac{T(x)}{n}[xH_2(x) + \beta_n], \tag{47}$$

или

$$|x| - R(x) = \frac{T(x)}{n}[F(v) + \beta_n], \tag{47^{bis}}$$

гдѣ β_n *равномѣрно* стремится къ нулю.

Слѣдствiе. *Предѣлъ* $xH_2(x)$ *равенъ* $\frac{1}{2}$, *если* nx *возрастаетъ безконечно.* Такимъ образомъ

$$|x| - R(x) = \frac{T(x)}{2n}[1 + \varepsilon_n(x)],$$

гдѣ $\varepsilon_n(x)$ стремится къ нулю, если nx возрастаетъ безконечно.

50. Опредѣленiе верхней границы E_{2n}. Построимъ многочленъ

$$Q(x) = R(x) + \frac{T(x)}{4n} \tag{48}$$

Я говорю, что максимумъ разности $||x| - Q(x)|$ равенъ $\frac{1+\varepsilon}{4n}$, гдѣ ε стремится къ нулю при $n=\infty$.

Въ самомъ дѣлѣ,

$$|x| - Q(x) = \frac{T(x)}{n}\left[xH_2(x) - \frac{1}{4} + \beta_n\right].$$

Такимъ образомъ, наше утвержденіе будетъ доказано, если мы убѣдимся, что

$$xH_2(x) < \frac{1}{2}, \tag{49}$$

такъ какъ $|T(x)| \leqq 1$.

Преобразуемъ для этого выраженіе

$$xH_2(x) = F(v) = \sum_{k=1,3,\ldots} \frac{v}{(v+k)^2 - \frac{1}{4}} = 2v\left[\frac{1}{2v+1} - \frac{1}{2v+3} + \frac{1}{2v+5} - \frac{1}{2v+7} + \ldots\right], \tag{46bis}$$

воспользовавшись нѣкоторыми классическими результатами изъ теоріи функціи Γ.

Извѣстно, что

$$\psi(a) = \frac{d\log\Gamma(a)}{da} = -\gamma + \left(1 - \frac{1}{a}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{a+1}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{a+n}\right) + \ldots,$$

гдѣ γ есть постоянная (Эйлера). Поэтому

$$F(v) = \frac{v}{2}\left\{(\gamma - \gamma) - \left[\left(1 - \frac{1}{\frac{v}{2} + \frac{1}{4}}\right) - \left(1 - \frac{1}{\frac{v}{2} + \frac{3}{4}}\right)\right] - \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\frac{v}{2} + \frac{5}{4}}\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\frac{v}{2} + \frac{7}{4}}\right)\right] - \ldots\right\} = \frac{v}{2}\left[\psi\left(\frac{v}{2} + \frac{3}{4}\right) - \psi\left(\frac{v}{2} + \frac{1}{4}\right)\right].$$

Кромѣ того, извѣстно [1]) также, что

$$\psi(a+1) = -\gamma + \int_0^1 \frac{y^a - 1}{y - 1}\, dy.$$

Слѣдовательно,

---

[1]) Encyclopedie der mathematischen Wissenschaften. Bd. II (Teil I_2). Brunel „Bestimmte Integrale“ § 12.

$$F(v)=\frac{v}{2}\int_0^1 \frac{y^{\frac{v}{2}-\frac{1}{4}}-y^{\frac{v}{2}-\frac{3}{4}}}{y-1}\,dy=v\int_0^1\frac{z^{v+\frac{1}{2}}-z^{v-\frac{1}{2}}}{z^2-1}\,dz=v\int_0^1\frac{z^{v-\frac{1}{2}}}{z+1}\,dz. \tag{50}$$

Интегрируя по частямъ, получимъ послѣдовательно

$$F(v)=v\left[\frac{1}{2v+1}+\frac{1}{v+\frac{1}{2}}\int_0^1\frac{z^{v+\frac{1}{2}}\,dz}{(z+1)^2}\right]=v\left[\frac{1}{2v+1}+\frac{1}{(2v+1)(2v+3)}+\right.$$

$$\left.+\frac{2}{\left(v+\frac{1}{2}\right)\left(v+\frac{3}{2}\right)}\int_0^1\frac{z^{v+\frac{3}{4}}\,dz}{(z+1)^3}\right]$$

и т. д., наконецъ,

$$xH_2(x)=F(v)=\frac{v}{2v+1}\left[1+\frac{1}{2v+3}+\frac{1.2}{(2v+3)(2v+5)}+\frac{1.2.3}{(2v+3)(2v+5)(2v+7)}+\ldots\right]. \tag{51}$$

Замѣтимъ [1]), хотя мы этимъ свойствомъ и не будемъ пользоваться, что полученный рядъ гипергеометрическій и, согласно общепринятымъ обозначеніямъ (Jordan, Cours d'analyse, t. I, § 379), можно написать

$$F(v)=\frac{v}{2v+1}F\left(1,\ 1,\ v+\frac{3}{2},\ \frac{1}{2}\right). \tag{51$^{\text{bis}}$}$$

Изъ формулы (51) легко вывести, что

$$xH_2(x)=F(v)<\frac{1}{2}. \tag{49}$$

Дѣйствительно, замѣняя въ формулѣ (51) всѣ члены, слѣдующіе за четвертымъ, членами геометрической прогрессіи съ знаменателемъ $\frac{1}{2}$, получимъ

$$F(v)<\frac{v}{2v+1}\left[1+\frac{v}{2v+3}+\frac{1.2}{(2v+3)(2v+5)}+2\frac{1.2.3}{(2v+3)(2v+5)(2v+7)}\right];$$

неравенство же

$$\frac{v}{2v+1}\left[1+\frac{1}{2v+3}+\frac{1.2}{(2v+3)(2v+5)}+\frac{2.1.2.3}{(2v+3)(2v+5)(2v+7)}\right]<\frac{1}{2}$$

---

[1]) Формула (51) можетъ быть также получена непосредственно изъ (46^{bis}) при помощи преобразованія Эйлера.

приведеніемъ къ общему знаменателю приводится къ неравенству

$$2v^2 + 10v + \frac{105}{2} > 0,$$

которое, конечно, соблюдено при $v > 0$, а потому справедливо и неравенство (49).

Итакъ, уклоненіе многочлена $Q(x)$ отъ $|x|$ равно $\frac{1+\varepsilon}{4n}$, гдѣ ε стремится къ нулю при $n = \infty$.

51. Опредѣленіе нижней границы E_{2n}. Простѣйшій пріемъ опредѣленія нижней границы E_{2n} заключается въ построеніи многочлена, аналогичнаго многочлену (48). Я укажу лишь ходъ вычисленій, которыя легко провѣрить, пользуясь таблицей значеній функціи $F(v)$ и, въ частности, замѣчая, что $F\left(\frac{1}{3}\right) > 0{,}282$.

Многочленъ

$$Q_1(x) = R(x) + \frac{F(1) \,.\, T(x)}{2n},$$

при n весьма большомъ, обладаетъ свойствомъ, что разность

$$|x| - Q_1(x)$$

въ точкѣ 0 равна $-\frac{F(1)}{2n}$, и въ точкахъ $\sin\frac{k\pi}{2n}$ имѣетъ знакъ $(-1)^k$, будучи по абсолютному значенію не менѣе, чѣмъ $\frac{0{,}429}{2n}$. Кромѣ того, въ точкѣ $x = \frac{\pi}{6n}$ разность

$$|x| - Q_1(x) = \frac{1}{2n}\left[F\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{2}F(1)\right]$$

положительна и не менѣе [1]), чѣмъ $\frac{0{,}067}{2n}$.

Отсюда слѣдуетъ, что многочленъ

$$Q_1(x) - \frac{0{,}181}{2n}$$

въ указанныхъ точкахъ имѣетъ уклоненія отъ $|x|$, неменьшія, чѣмъ $\frac{0{,}248}{2n}$, и при томъ чередующихся знаковъ; поэтому, на основаніи теоремы de la Vallée Poussin, находимъ

---

[1]) Замѣняя $\frac{\pi}{6n}$ другими близкими къ этому числу значеніями, можно было бы повысить нижнюю границу, но не болѣе, чѣмъ на 2 или 3 тысячныя.

$$E_{2n} > \frac{0,248}{2n}.$$

Эту нижнюю границу можно нѣсколько повысить, примѣняя другой пріемъ.

52. Второй способъ вычисленія нижней и верхней границъ E_{2n}. Построимъ многочленъ

$$Q_2(x) = R(x) + \frac{T(x)}{4n^3} \frac{\pi^2 a}{x^2 - \sin^2 \frac{\pi}{4n}} + \frac{B \,.\, T(x)}{n},$$

гдѣ a и B постоянныя величины, которыя мы постараемся опредѣлить наиболѣе благопріятнымъ образомъ. Для весьма большихъ значеній n, первый изъ добавочныхъ членовъ можетъ быть замѣненъ членомъ

$$\frac{a}{n} \cdot \frac{\cos \pi v}{v^2 - \frac{1}{4}},$$

гдѣ по прежнему $x = \frac{\pi v}{2n}$, такъ какъ, для конечныхъ значеній v, многочленъ $T(x)$ безконечно мало отличается отъ $\cos \pi v$, а при безконечномъ возрастаніи v первый членъ безконечно малъ по сравненію съ вторымъ.

Будемъ снова разсматривать значенія $|x| - Q_2(x)$ въ тѣхъ же точкахъ. Достаточно будетъ ограничиться вычисленіемъ ихъ для $v = 0$, $\frac{1}{3}$, 1, 2, такъ какъ не трудно будетъ убѣдиться, что въ послѣдующихъ точкахъ уклоненіе будетъ итти увеличиваясь. Находимъ, что

$$\left.\begin{aligned} &n \,.\, [|x| - Q_2(x)] = 4a - B, \text{ при } v = 0; \\ &n \,.\, [|x| - Q_2(x)] = \frac{1}{2} F\left(\frac{1}{3}\right) + 3{,}6a - \frac{B}{2}, \text{ при } v = \frac{1}{3}; \\ &n \,.\, [|x| - Q_2(x)] = -F(1) + \frac{4}{3} a + B, \text{ при } v = 1; \\ &n \,.\, [|x| - Q_2(x)] = F(2) - \frac{4}{15} a - B, \text{ при } v = 2. \end{aligned}\right\} \quad (52)$$

Постоянныя a и B опредѣляемъ такъ, чтобъ 1-е и 3-е значеніе были равны между собой, а 2-е и 4-е были равны между собой, т. е.

$$\left.\begin{aligned} &4a - B = -F(1) + \frac{4}{3} a + B, \\ &\frac{1}{2} F\left(\frac{1}{3}\right) + 3{,}6a - \frac{B}{2} = F(2) - \frac{4}{15} a - B; \end{aligned}\right\} \quad (53)$$

исключая B, получимъ

$$a = \frac{15}{272}\left[4F(2) - F(1) - 2F\left(\frac{1}{3}\right)\right],$$

откуда

$$0{,}049 < a < 0{,}0501.$$

Разность между 4-мъ и 1-мъ значеніемъ, равная

$$F(2) - \frac{64a}{15},$$

не менѣе, слѣдовательно, чѣмъ 0,26. Отсюда заключаемъ, какъ въ предыдущемъ §'ѣ, что

$$E_{2n} > \frac{0{,}26}{2n}\,.$$

Можно произвести вычисленія, замѣняя второе значеніе $v = \frac{1}{3}$ другими близкими ему, но значительнаго увеличенія нижней границы такимъ образомъ не получится.

Съ другой стороны, многочленъ $Q_2(x)$ даетъ возможность значительно понизить верхнюю границу E_{2n}. Дѣйствительно, построимъ многочленъ $Q_2(x)$, въ которомъ полагаемъ

$$B = F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \ldots = \frac{1}{2}\log 2,\ a = \frac{1}{8}F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16}\log 2,$$

и разсмотримъ максимумъ модуля разности

$$n.[|x| - Q_2(x)] = T(x)\left[xH(x) - B - \frac{a\pi^2}{4n^2\left(x^2 - \sin^2\frac{\pi}{4n}\right)}\right].$$

Если n безконечно возрастаетъ, эта разность безконечно мало отличается отъ

$$\Phi(v) = \cos\pi v\left[F(v) - B - \frac{a}{v^2 - \frac{1}{4}}\right],$$

при конечныхъ значеніяхъ v; а при безконечномъ возрастаніи v максимумъ этой разности безконечно приближается къ

$$\delta = F(\infty) - B = \frac{1}{2} - B.$$

Такъ какъ

$$B > 4a, \quad \text{то, при} \quad v = 0,$$

$$-\Phi(0) = B - 4a > 0.$$

Въ остальныхъ же n точкахъ, гдѣ $T(x) = \pm 1$, разсматриваемая разность имѣетъ знакъ $T(x)$, и въ точкѣ $x = \sin\frac{\pi}{4n}$, гдѣ $T(x) = 0$, она положительна. Отсюда слѣдуетъ, что всѣ максимумы нашей разности положительны, а всѣ минимумы отрицательны. Поэтому при измѣненіи v отъ 0 до $\frac{1}{2}$, наибольшее значеніе $-\Phi(v)$ будетъ $B - 4a$. Наибольшее значеніе $+\Phi(v)$ въ томъ же промежуткѣ будетъ не болѣе, чѣмъ наибольшее значеніе

$$\frac{a\cos\pi v}{v^2 - \frac{1}{4}},$$

такъ какъ $B - F(v) = F\left(\frac{1}{2}\right) - F(v) > 0$. Такимъ образомъ наибольшее значеніе $+\Phi(v)$ въ этомъ промежуткѣ не болѣе, чѣмъ $4a$. Вслѣдствіе выбранныхъ нами значеній для B и a, находимъ

$$B - 4a = 4a = \frac{1}{2} F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} . 0{,}34657\ldots$$

Если, при $v > \frac{1}{2}$, знакъ $\Phi(v)$ отличенъ отъ знака $\cos\pi v$, то

$$|\Phi(v)| < a \left|\frac{\cos\pi v}{v^2 - \frac{1}{4}}\right|,$$

такъ какъ [1]) $F(v) > B$. Но, при $v > \frac{1}{2}$,

$$a \left|\frac{\cos\pi v}{v^2 - \frac{1}{4}}\right| < a\pi.$$

---

[1]) Легко видѣть, что функція $F(v)$ возрастаетъ, пока $v < \frac{\sqrt{3}}{2}$; но это не очевидно, для большихъ значеній v. Однако не трудно замѣтить, что, при $v > \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$$F(v) > \frac{2v}{2v+1} > \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+2} > 0{,}4 > F\left(\frac{1}{2}\right).$$

(См. приложенную въ концѣ таблицу значеній функціи $F(v)$).

Наконецъ, если $\Phi(v)$ имѣетъ знакъ $\cos\pi v$, то наибольшее значеніе $|\Phi(v)|$ не превышаетъ

$$\frac{1}{2} - B = \frac{1}{2} - F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} . 0{,}307 .$$

Такимъ образомъ, вообще

$$|\Phi(v)| < \frac{1}{2} . 0{,}347,$$

слѣдовательно,

$$||x| - Q_2(x)| < \frac{0{,}347}{2n} .$$

Полученный результатъ можно еще улучшить, сохранивъ значеніе B, но измѣнивъ a, полагая лишь пока $a < \frac{B}{7}$. Пересматривая предыдущее вычисленіе, мы видимъ, что мы несомнѣнно преувеличили значеніе $+\Phi(v)$ въ промежуткѣ 01; опредѣлимъ его точнѣе. $\Phi(v)$ для малыхъ значеній v по прежнему отрицательно; оно можетъ стать болѣе $|\Phi(0)| = B - 4a$ только, если

$$\frac{a}{\frac{1}{4} - v^2} + F(v) - B \geqq B - 4a;$$

такимъ образомъ можемъ ограничиться разсмотрѣніемъ значеній v, достаточно большихъ, чтобъ

$$\frac{a}{\frac{1}{4} - v^2} > 2B - 4a,$$

или

$$v > \sqrt{1 - \frac{2a}{B - 2a}},$$

и такъ какъ $B > 7a$, то $v > \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}$; въ такомъ случаѣ, $\cos\pi v < 0{,}4$. Слѣдовательно, подлежащія разсмотрѣнію значенія v можно еще увеличить, ограничившись лишь удовлетворяющими неравенству

$$0{,}4 \left[\frac{a}{\frac{1}{4} - v^2} + F(v) - B\right] \geqq B - 4a,$$

или

$$0{,}4\left[\frac{a}{\frac{1}{4}-v^2}-B\right]>B-4a.$$

Откуда

$$v>\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{8a}{7B-20a}}.$$

Такъ какъ по прежнему $B>7a$, слѣдовательно,

$$v>\frac{1}{2}\sqrt{\frac{21}{29}}>0{,}425.$$

Итакъ вмѣсто промежутка $\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$, достаточно взять промежутокъ $\left(\frac{425}{1000},\ \frac{1}{2}\right)$; въ этомъ промежуткѣ

$$\Phi(v)<a\frac{\cos\pi v}{\frac{1}{4}-v^2}<a\frac{\cos\frac{42\pi}{100}}{\frac{1}{4}-0{,}1764}<3{,}4a\,.$$

Теперь положимъ

$$B-4a=3{,}4a,$$

откуда

$$a=\frac{B}{7{,}4}=\frac{F\left(\frac{1}{2}\right)}{7{,}4}=0{,}04687.$$

Поэтому

$$B-4a=3{,}4a<0{,}16.$$

Слѣдовательно, наконецъ

$$E_{2n}<\frac{0{,}32}{2n}. \tag{54}$$

53. Третій способъ вычисленія нижней границы E_{2n}. Возьмемъ на отрѣзкѣ $(-1,\ +1)$ точки $\pm\sin\frac{i\pi}{2n}$, при $i=0,\ 1,\ldots n$, и $\pm\beta$, при чемъ пока оставляемъ β произвольнымъ, требуя лишь, чтобъ $\beta<\sin\frac{\pi}{2n}$. Мы знаемъ, на основаніи теоремы (34), что, если уклоненіе нѣкотораго многочлена $f(x)$ степени не выше $2n+1$ отъ $|x|$ въ указанныхъ $2n+3$ точкахъ, послѣдовательно мѣняя знакъ, равно $\pm\varrho$, то $|\varrho|$ будетъ нижней границей $E_{2n+1}=E_{2n}$. Вычисленіемъ числа ϱ мы сейчасъ и займемся.

Полагая

$$S_1(x) = (x^2 - \beta^2) \,.\, \sqrt{1-x^2} \,.\, \sin 2n \arcsin x = (x^2-\beta^2) \,.\, S(x),$$

находимъ, примѣняя формулу интерполированія Лагранжа,

$$f(x) = S_1(x) \,.\, \left[\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\sin\frac{i\pi}{2n} - (-1)^i \varrho}{\left(x - \sin\frac{i\pi}{2n}\right) S_1'\left(\sin\frac{i\pi}{2n}\right)} + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\sin\frac{i\pi}{2n} - (-1)^i \varrho}{\left(x + \sin\frac{i\pi}{2n}\right) S_1'\left(\sin\frac{i\pi}{2n}\right)} + \right.$$

$$\left. + \frac{\varrho}{x S_1'(0)} + \frac{2(\beta-\varrho)x}{(x^2-\beta^2) S_1'(\beta)} \right]. \qquad (55)$$

Но, если степень многочлена $f(x)$ не выше $(2n+1)$, то ϱ опредѣляется уравненіемъ

$$2\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\sin\frac{i\pi}{2n} - (-1)^i \varrho}{S_1'\left(\sin\frac{i\pi}{2n}\right)} + \frac{\varrho}{S_1'(0)} + \frac{2(\beta-\varrho)}{S_1'(\beta)} = 0. \qquad (56)$$

Замѣчая затѣмъ, что

$$S_1'(x) = 2xS(x) + (x^2-\beta^2) S'(x) =$$

$$= 2xS(x) + \left[2n \cos 2n \arcsin x - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \sin 2n \arcsin x \right] . (x^2-\beta^2),$$

имѣемъ

$$S_1'\left(\sin\frac{i\pi}{2n}\right) = 2n(-1)^i \left(\sin^2\frac{i\pi}{2n} - \beta^2\right), \quad \text{при} \quad i = 0,1 \ldots, \; n-1,$$

$$S_1'\left(\sin\frac{\pi}{2}\right) = 4n(-1)^n (1-\beta^2),$$

$$S_1'(\beta) = 2\beta S(\beta).$$

Поэтому уравненіе (56) преобразуется въ

$$\varrho \left[\sum_{i=1}^{i=n-1} \frac{1}{\sin^2\frac{i\pi}{2n} - \beta^2} + \frac{1}{2(1-\beta^2)} + \frac{1}{2\beta^2} + \frac{n}{\beta S(\beta)} \right] =$$

$$= \left[\sum_{i=1}^{i=n-1} \frac{(-1)^i \sin\frac{i\pi}{2n}}{\sin^2\frac{i\pi}{2n} - \beta^2} + \frac{(-1)^n}{2(1-\beta^2)} + \frac{n}{S(\beta)} \right]. \qquad (56^{\text{bis}})$$

Допустимъ теперь, что n возрастаетъ безконечно, при чемъ $\beta = \frac{\lambda\pi}{2n}$, гдѣ $\lambda < 1$. Въ такомъ случаѣ, вторую часть равенства можемъ написать, вынося n за скобки,

$$n\left[\sum_{i=1}^{i=n-1}\frac{(-1)^i n\sin\frac{i\pi}{2n}}{n^2\sin^2\frac{i\pi}{2n}-\frac{\lambda^2\pi^2}{4}}+\frac{1}{\sin\lambda\pi}+\varepsilon\right],$$

гдѣ ε стремится къ нулю вмѣстѣ съ $\frac{1}{n}$. Но

$$\Omega = \sum_{i=1}^{i=n-1}\frac{(-1)^i n\sin\frac{i\pi}{2n}}{n^2\sin^2\frac{i\pi}{2n}-\frac{\lambda^2\pi^2}{4}}$$

представляетъ собой знакоперемѣнный рядъ, въ которомъ, какъ не трудно убѣдиться, члены идутъ послѣдовательно убывая, поэтому

$$\left|\Omega - \sum_{i=1}^{i=i_0-1}\frac{(-1)^i n\sin\frac{i\pi}{2n}}{n^2\sin^2\frac{i\pi}{2n}-\frac{\lambda^2\pi^2}{4}}\right| < \frac{n\sin\frac{i_0\pi}{2n}}{n^2\sin^2\frac{i\pi}{2n}-\frac{\lambda^2\pi^2}{4}} < \frac{\frac{i_0\pi}{2}}{i_0^2-\frac{\lambda^2\pi^2}{4}};$$

слѣдовательно, можно указать, независимое отъ n, число i_0, чтобъ разсматриваемая разность была менѣе всякой данной величины α. Послѣ того какъ i_0 выбрано, можно будетъ n взять достаточно большимъ, чтобъ сумма

$$\sum_{i=1}^{i=i_0-1}\frac{(-1)^i n\sin\frac{i\pi}{2n}}{n^2\sin^2\frac{i\pi}{2n}-\frac{\lambda^2\pi^2}{4}}$$

сколь угодно мало отличалась отъ

$$\sum_{i=1}^{i=i_0-1}\frac{(-1)^i\frac{i\pi}{2}}{\frac{i^2\pi^2}{4}-\frac{\lambda^2\pi^2}{4}} = \frac{2}{\pi}\sum_{i=1}^{i=i_0-1}\frac{(-1)^i i}{i^2-\lambda^2},$$

откуда, наконецъ,

$$\text{пред.}_{n=\infty}\ \Omega = \frac{2}{\pi}\sum_{i=1}^{i=\infty}\frac{(-1)^i i}{i^2-\lambda^2}.$$

Поэтому вторая часть равенства (56^{bis}) получаетъ форму

$$n\left[\frac{1}{\sin\lambda\pi}+\frac{2}{\pi}\sum_{i=1}^{i=\infty}\frac{(-1)^i i}{i^2-\lambda^2}+\alpha\right], \tag{57}$$

гдѣ $\lim\limits_{n=\infty}$ пред. $\alpha=0$.

Аналогичнымъ образомъ коэффиціентъ при ϱ можно написать сначала

$$n^2\left[\sum_{i=1}^{i=n-1}\frac{1}{n^2\sin^2\dfrac{i\pi}{2n}-\dfrac{\lambda^2\pi^2}{4}}+\frac{2}{\pi^2\lambda^2}+\frac{2}{\pi\lambda\sin\lambda\pi}+\gamma\right],$$

гдѣ пред.$_{n=\infty}$ $\gamma=0$.

Затѣмъ мы можемъ опять указать независимое отъ n, достаточно большое число i_0, чтобы сумма

$$\sum_{i=i_0}^{i=n-1}\frac{1}{n^2\sin^2\dfrac{i\pi}{2n}-\dfrac{\lambda^2\pi^2}{4}}<\sum_{i=i_0}^{i=\infty}\frac{1}{i^2-\dfrac{\lambda^2\pi^2}{4}}$$

была сколь угодно мала. Поэтому коэффиціентъ при ϱ будетъ равенъ

$$\frac{4n^2}{\pi^2}\left[\sum_{i=1}^{i=\infty}\frac{1}{i^2-\lambda^2}+\frac{1}{2\lambda^2}+\frac{\pi}{2\lambda\sin\lambda\pi}+\gamma'\right],$$

гдѣ пред.$_{n=\infty}$ $\gamma'=0$.

Такимъ образомъ, обозначая черезъ ϱ' *главную* часть ϱ, т. е. полагая, что $n(\varrho'-\varrho)$ имѣетъ предѣломъ нуль, при $n=\infty$, получимъ

$$2n\varrho'=\lambda\pi.\frac{\dfrac{\pi}{\sin\lambda\pi}+2\displaystyle\sum_{i=1}^{i=\infty}\frac{(-1)^i i}{i^2-\lambda^2}}{\dfrac{\pi}{\sin\lambda\pi}+\dfrac{1}{\lambda}+\displaystyle\sum_{i=1}^{i=\infty}\frac{2\lambda}{i^2-\lambda^2}}. \tag{58}$$

Формулу (58) удобно еще преобразовать слѣдующимъ образомъ.

Замѣтимъ, что

$$\pi\operatorname{cotg}\pi\lambda=\frac{1}{\lambda}+\sum_{i=1}^{i=\infty}\frac{2\lambda}{\lambda^2-i^2}.$$

Поэтому въ знаменателѣ получимъ

$$\frac{\pi}{\sin\lambda\pi}+\frac{2}{\lambda}-\pi\operatorname{cotg}\pi\lambda=\frac{2}{\lambda}+\pi\frac{1-\cos\lambda\pi}{\sin\lambda\pi}=\frac{2}{\lambda}+\pi\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\lambda$$

Съ другой стороны,

$$f(\lambda) = 2\sum_{i=1}^{i=\infty}\frac{(-1)^i i}{i^2-\lambda^2} = \sum_{i=1}^{i=\infty}(-1)^i i\left(\frac{1}{i+\lambda}+\frac{1}{i-\lambda}\right) = -\int_0^1 \frac{z^\lambda + z^{-\lambda}}{z+1}\,dz.$$

Но

$$\int_0^1 \frac{z^{\lambda-1}+z^{-\lambda}}{1+z}\,dz = \frac{\pi}{\sin\pi\lambda},$$

а

$$\int_0^1 \frac{z^\lambda + z^{\lambda-1}}{1+z}\,dz = \frac{1}{\lambda};$$

поэтому

$$\frac{\pi}{\sin\pi\lambda} + f(\lambda) = \frac{1}{\lambda} - 2\int_0^1 \frac{z^\lambda}{1+z}\,dz = \frac{1}{\lambda} - \frac{2}{\lambda+\frac{1}{2}}F\left(\lambda+\frac{1}{2}\right).$$

Такимъ образомъ

$$2n\varrho' = \frac{\lambda\pi}{2}\cdot\frac{1-\frac{4\lambda}{2\lambda+1}F\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}{1+\frac{\lambda\pi}{2}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\lambda}. \qquad (58^{\text{bis}})$$

Для вычисленія ϱ' достаточно слѣдовательно знать ту же функцію F, которой мы уже пользовались въ предыдущихъ §§'ахъ.

Очевидно, нужно выбрать λ такъ, чтобъ ϱ' было возможно большимъ. Не останавливаясь на точномъ рѣшеніи этого вопроса, ограничимся значеніемъ [1] $\lambda = \frac{2}{5}$.

Тогда

$$2n\varrho' = \frac{\pi}{5}\cdot\frac{1-\frac{8}{9}F\left(\frac{9}{10}\right)}{1+\frac{\pi}{5}\operatorname{tg}36^0}.$$

Полагая, съ точностью до 0,00055,

$$F\left(\frac{9}{10}\right) = 0{,}419,$$

находимъ

$$2n\varrho' = \frac{\pi}{5}\cdot\frac{0{,}628}{1+\frac{\pi}{5}.0{,}727} = \frac{1{,}256}{\frac{10}{\pi}+1{,}454} = \frac{1{,}256}{4{,}537} = 0{,}2709.$$

---

[1]) Повидимому, максимумъ ϱ' весьма мало отличается отъ полученнаго ниже значенія.

Такимъ образомъ

$$2n\varrho' > 0{,}27.$$

А потому

$$E_{2n} > \frac{0{,}27}{2n}.$$

Итакъ, наиболѣе тѣсныя границы, которыя мы нашли для E_{2n}, слѣдующія

$$\frac{0{,}32}{2n} > E_{2n} > \frac{0{,}27}{2n}. \tag{59}$$

Послѣ того, какъ для E_{2n} найдены ужъ довольно тѣсныя границы [1]), вопросъ объ опредѣленіи E_{2n}, съ какою угодно точностью, теоретически не представляетъ очень большихъ трудностей.

Однако для систематическаго рѣшенія этого вопроса при помощи соотвѣтствующаго метода послѣдовательныхъ приближеній необходимо еще установить нѣкоторыя общія свойства многочленовъ, наименѣе уклоняющихся отъ $|x|$, къ выводу которыхъ мы сейчасъ перейдемъ.

54. Теорема. *Если* $P(x)$, *при* n *достаточно большомъ, есть многочленъ степени* $2n$, *наименѣе уклоняющійся отъ* $|x|$ *въ промежуткѣ* $(-1, +1)$, *то уравненіе*

$$\eta(x) = P(x) - R(x) = 0$$

имѣетъ одинъ и только одинъ корень въ каждомъ изъ $2n$ *промежутковъ, заключенныхъ между* $\sin\frac{k\pi}{2n}$ *и* $\sin\frac{(k+1)\pi}{2n}$ $(k = -n, -(n-1), \ldots 0, 1, \ldots n)$.

Въ самомъ дѣлѣ, при достаточно большихъ значеніяхъ n,

$$\big||x| - P(x)\big| < \frac{0{,}32}{2n},$$

но въ точкахъ $\sin\frac{k\pi}{2n}$, при всякомъ $k > 0$,

$$\big||x| - R(x)\big| > \frac{0{,}32}{2n},$$

и кромѣ того, для всѣхъ $k \gtrless 0$,

$$(|x| - R(x)) \cdot (-1)^k > 0.$$

[1]) Для практики было бы также интересно установить, начиная отъ какого значенія n неравенства (59) соблюдены. Если они окажутся, напримѣръ, правильны для $2n \geqq 18$, то указанныя неравенства позволяютъ утверждать, что низшая степень многочлена, уклоняющагося отъ $|x|$ менѣе, чѣмъ на 0,015 на отрѣзкѣ $(-1, +1)$, равна 20 или 22.

Слѣдовательно, во всѣхъ этихъ точкахъ

$$P(x) - R(x) = \eta(x)$$

имѣетъ тотъ же знакъ, что $|x| - R(x)$, а потому

$$\eta(x) . (-1)^k > 0,$$

откуда заключаемъ, что между $\sin\frac{k\pi}{2n}$ и $\sin\frac{(k+1)\pi}{2n}$ есть по крайней мѣрѣ одинъ корень уравненія $\eta(x) = 0$.

Но, при $x = 0$, $P(x) > 0$ и $R(x) = 0$; поэтому между $\pm \sin\frac{\pi}{2n}$ и 0 также есть по одному корню уравненія $\eta(x) = 0$.

Такимъ образомъ уравненіе степени $2n$, $\eta(x) = 0$, имѣетъ по крайней мѣрѣ по одному корню въ $2n$ промежуткахъ, а потому въ каждомъ изъ этихъ промежутковъ оно не имѣетъ болѣе одного корня. Ч. и. т. д.

55. Опредѣленіе. *Функціи $Q_n(x)$ называются асимптотическими выраженіями многочленовъ P_n степени n наименѣе уклоняющихся отъ данной функціи $f(x)$, если уклоненія E'_n функціи $Q_n(x)$ отъ функціи $f(x)$ удовлетворяютъ условію, что*

$$\frac{E'_n - E_n}{E_n}$$

стремится къ нулю, при $n = \infty$.

56. Теорема. *Многочленъ $P(x)$, наименѣе уклоняющійся отъ $|x|$ въ промежуткѣ $(-1, +1)$, имѣетъ асимптотическимъ выраженіемъ*

$$Q(x) = R(x) + \left(\frac{1}{2n} - E_{2n}\right) T(x) + \frac{\beta_n(x)}{n}, \tag{70}$$

гдѣ $\beta_n(x)$ стремится къ нулю, если nx^2 возрастаетъ безконечно.

Для доказательства припомнимъ прежде всего формулу (43), которую можемъ написать

$$2n\left[|x| - R(x) - \frac{T(x)}{2n}\right] = \varepsilon_n(x) . T(x).$$

Въ такомъ случаѣ, ясно, что

$$P(x) = R(x) + \frac{1}{2n}\left(T(x) + \Omega(x)\right),$$

гдѣ $\Omega(x)$ есть многочленъ степени $2n$ наименѣе уклоняющійся отъ $\varepsilon_n(x) . T(x)$; при этомъ уклоненіе $\Omega(x)$ отъ $\varepsilon_n(x) . T(x)$ равно $2n . E_{2n}$.

Поэтому наша теорема будетъ доказана, если мы покажемъ, что многочленъ $\Omega(x)$ имѣетъ асимптотическое выраженіе

$$\Omega_1(x) = -2nE_{2n}T(x) + 2\beta_n(x). \tag{60}$$

Для этого замѣчаемъ, что $\varepsilon_n(x)$ становится сколь угодно малымъ, если $n|x| > A$, гдѣ A достаточно большое число. Поэтому, выбирая A соотвѣтствующимъ образомъ, можемъ опредѣлить непрерывную функцію $\delta_n(x)$ условіями

$$\delta_n(x) = \varepsilon_n(x) \,.\, T(x), \text{ при } |x| < \frac{A}{n},$$

$$\delta_n(x) = 0, \qquad \text{ при } |x| \geqq \frac{A}{n},$$

такъ, чтобъ

$$|\delta_n(x) - \varepsilon_n(x) \,.\, T(x)| < \alpha_n,$$

гдѣ α_n стремится къ нулю вмѣстѣ съ $\frac{1}{n}$.

Очевидно, что многочленъ $\Omega_1(x)$ степени $2n$, наименѣе уклоняющійся отъ $\delta_n(x)$, будетъ асимптотическимъ выраженіемъ для $\Omega(x)$, согласно опредѣленію § 55, такъ какъ, обозначая черезъ λ_n уклоненіе $\Omega_1(x)$ отъ $\delta_n(x)$, имѣемъ

$$|\lambda_n - 2nE_{2n}| < \alpha_n\,,$$

и слѣдовательно,

$$\frac{\lambda_n - 2nE_{2n}}{2nE_{2n}}$$

стремится къ нулю.

Такимъ образомъ остается показать, что многочленъ $\Omega_1(x)$, наименѣе уклоняющійся отъ $\delta_n(x)$, имѣетъ форму (60), гдѣ $\beta_n(x)$ стремится къ нулю, если nx^2 возрастаетъ безконечно. Изслѣдованіемъ многочлена

$$\Omega_1(x) = c_0 + c_1x^2 + \ldots + c_nx^{2n}$$

мы теперь и займемся.

Между двумя точками отклоненія многочлена $\Omega_1(x)$ отъ $\delta_n(x)$ долженъ быть по крайней мѣрѣ одинъ корень, какъ уравненія $\Omega_1(x) - \delta_n(x) = 0$, такъ и уравненія $\Omega_1(x) - \varepsilon_n(x)T(x) = 0$. Но это послѣднее уравненіе имѣетъ форму

$$\Omega_1(x) - \varepsilon_n(x)\,T(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^4 + \ldots + A_{n+1}x^{2n} = 0, \tag{61}$$

и потому имѣетъ не болѣе, чѣмъ $(n+1)$ положительныхъ корней. Поэтому, такъ какъ число точекъ отклоненія на отрѣзкѣ 01 не менѣе $n+2$, то оно равно $n+2$, при чемъ концы 0 и 1 также должны быть точками отклоненія. Такимъ образомъ,

$$\Omega_1(0) = -1 + \lambda_n.$$

Докажемъ, что $\Omega_1(x)$ *имѣетъ лишь положительные максимумы* M *и отрицательные минимумы* m; *при этомъ*

$$0{,}5 > M > 0{,}09 \text{ и } -0{,}73 < m < -0{,}09. \tag{65}$$

Прежде всего, замѣчая, что, при $x > \frac{\pi}{4n}$,

$$|\varepsilon_n(x) . T(x)| = |2F(v) - 1| . |\cos \pi v| < 0{,}18,$$

находимъ, что, при этихъ значеніяхъ x,

$$-0{,}18 - \lambda_n < \Omega_1(x) < 0{,}18 + \lambda_n, \tag{62}$$

и между двумя корнями уравненія (61) есть, либо одинъ максимумъ M, либо одинъ минимумъ m, удовлетворяющій неравенствамъ [1])

$$\left.\begin{aligned} 0{,}5 > \lambda_n + 0{,}18 > M > \lambda_n - 0{,}18 > 0{,}09, \\ 0{,}09 > -\lambda_n + 0{,}18 > m > -\lambda_n - 0{,}18 > -0{,}5. \end{aligned}\right\} \tag{62$^{\text{bis}}$}$$

Разсмотримъ два предположенія. Допустимъ сначала (что́, какъ мы покажемъ дальше, имѣетъ мѣсто въ дѣйствительности), что

$$\Omega_1(x)$$

въ точкѣ 0 имѣетъ минимумъ. Слѣдовательно, на всемъ отрѣзкѣ $(-1, +1)$

$$\Omega_1(x) > -1 + \lambda_n;$$

но, такъ какъ, при $x < \frac{\pi}{4n}$,

$$\varepsilon_n(x) T(x) < 0,$$

то, вслѣдствіе неравенства (62), имѣемъ также на всемъ отрѣзкѣ

$$\Omega_1(x) < \lambda_n + 0{,}18.$$

Такимъ образомъ на всемъ отрѣзкѣ,

$$|\Omega_1(x) + 0{,}41 - \lambda_n| < 0{,}59;$$

---

[1]) Такъ какъ $0{,}27 < \lambda_n < 0{,}32$.

и слѣдовательно, на основаніи теоремы (2), вблизи $x=0$, имѣемъ

$$\left|\frac{d\Omega_1}{dx}\right| < 1,2n. \qquad (63)$$

Еслибъ въ промежуткѣ $0 < x < \frac{\pi}{4n}$ было бы не болѣе одной точки отклоненія, то всѣ максимумы и минимумы должны были бы удовлетворять неравенствамъ (62^{bis}). Но положимъ, что точекъ отклоненія въ промежуткѣ $0 < x < \frac{\pi}{4n}$ не менѣе двухъ. Въ ближайшей къ 0 точкѣ отклоненія $x_0 = \frac{\pi v_0}{2n}$ должно быть

$$[2F(v_0)-1]\cos\pi v_0 = \varepsilon_n(x_0).T(x_0) > -1+2\lambda_n > -0,46. \qquad (64)$$

Но функція $[2F(v)-1]\cos\pi v$ идетъ возрастая, и, при $v=0,2$, съ точностью до 0,001,

$$[2F(v)-1]\cos\pi v = -0,466 < -0,46;$$

слѣдовательно, $v_0 > 0,2$, или $x_0 > \frac{0,2\pi}{2n}$.

Я говорю, что въ слѣдующей точкѣ отклоненія x_1, гдѣ $\Omega_1 - \varepsilon_n(x).T(x) > 0$, не только Ω_1 не можетъ быть отрицательнымъ, но, несомнѣнно,

$$\Omega_1 > 0,09.$$

Дѣйствительно, допустимъ обратное; тогда въ точкѣ x_1

$$\varepsilon_n(x_1).T(x_1) < \Omega_1 - 0,27 < -0,18,$$

а потому

$$\frac{2nx_1}{\pi} = v_1 < 0,4, \quad \text{или} \quad x_1 < \frac{0,4\pi}{2n},$$

такъ какъ, съ точностью до 0,001,

$$[2F(0,4)-1]\cos 0,4\pi = -0,115 > -0,18.$$

Но въ такомъ случаѣ, мы имѣли бы

$$x_1 - x_0 < \frac{0,2\pi}{2n},$$

въ то время какъ

$$\Omega_1(x_1) - \Omega_1(x_0) > 2\lambda_n > 0,54,$$

и, слѣдовательно, между x_1 и x_0 существовало бы значеніе x, гдѣ

$$\frac{d\Omega_1}{dx} > \frac{5,4}{\pi} n,$$

что противорѣчитъ неравенству (63).

Такимъ образомъ, начиная отъ x_1, каждой точкѣ отклоненія, гдѣ $\Omega_1 - \varepsilon_n(x) T(x) > 0$, соотвѣтствуетъ по крайней мѣрѣ одинъ положительный максимумъ Ω_1, гдѣ $\Omega_1 > 0,09$, и каждой точкѣ отклоненія, въ которой $\Omega_1 - \varepsilon_n(x) T(x) < 0$, соотвѣтствуетъ отрицательный минимумъ Ω_1, гдѣ $\Omega_1 < -0,09$. Съ точкой 0 число этихъ максимумовъ и минимумовъ составитъ $n+1$, откуда слѣдуетъ, что другихъ максимумовъ и минимумовъ у многочлена Ω_1 быть не можетъ.

Допустимъ далѣе, что Ω_1 имѣлъ бы отрицательный максимумъ при $x = 0$; въ такомъ случаѣ уравненіе

$$\Omega_1 = 0$$

имѣло бы не болѣе $(n-1)$ положительныхъ корней; въ промежуткѣ между 0 и наименьшимъ корнемъ a_1 уравненія $\Omega_1 = 0$ должно было бы быть по крайней мѣрѣ двѣ точки отклоненія (кромѣ 0), такъ какъ между двумя точками отклоненія, лежащими вправо отъ a_1, $\Omega_1 = 0$ имѣетъ не менѣе одного корня.

Слѣдовательно, $\Omega_1 < 0$ во второй точкѣ отклоненія x_1, а потому

$$\varepsilon_n(x_1) . T(x_1) < -0,27,$$

откуда заключаемъ, что $x_1 < \frac{\pi}{6n}$.

Пусть, съ другой стороны,

$$m = -1 + \lambda_n - h$$

будетъ значеніе минимума Ω_1 вблизи 0; въ такомъ случаѣ полное измѣненіе (variation totale) многочлена Ω_1, когда x, измѣняясь отъ 0 до x_1, проходитъ сначала черезъ точку, гдѣ Ω_1 минимумъ, а затѣмъ черезъ первую точку отклоненія x_0, будетъ болѣе, чѣмъ

$$2h + 2\lambda_n > 2h + 0,54.$$

Но, подобно предыдущему, мы замѣчаемъ, что

$$\left| \frac{d\Omega_1}{dx} \right| < (1,2 + h) n, \tag{63^{bis}}$$

такъ какъ

$$-1+\lambda_n-h\leqq\Omega_1<\lambda_n+0,18.$$

Поэтому, x_1 долженъ былъ бы удовлетворять неравенству

$$x_1(1,2+h)n>2h+0,54;$$

и тѣмъ болѣе,

$$\frac{\pi}{6}(1,2+h)>2h+0,54,$$

откуда

$$h<0,06.$$

Но въ такомъ случаѣ, $\varepsilon_n(x_0).T(x_0)>-1+2\lambda_n-h>-0,52$, т. е. $x_0>\frac{0,15\pi}{2n}$, откуда $x_1-x_0<\frac{0,2\pi}{2n}$, что противорѣчитъ, какъ выше, неравенству (63^{bis}) слѣдовательно, Ω_1 не можетъ имѣть минимума вблизи 0, и предположеніе, что $\Omega_1(0)$ есть максимумъ, должно быть отброшено. Итакъ неравенство (65) доказано.

Такимъ образомъ *въ промежуткѣ* $(-1, +1)$ *многочленъ* $\Omega_1(x)$ *имѣетъ* $(2n+1)$ *максимумовъ и минимумовъ; при этомъ, если* $n|x|>A$, *то эти максимумы и минимумы равны* λ_n *по абсолютному значенію; остальные же заключены между* $3\lambda_n$ и $\frac{1}{4}\lambda_n$, какъ это видно изъ неравенствъ (65).

Вслѣдствіе этого, всѣ корни уравненія

$$\Omega_1^2(x)-\lambda_n^2=0 \tag{66}$$

и уравненія

$$\left(\frac{d\Omega_1(x)}{dx}\right)^2(x^2-1)=0 \tag{67}$$

бóльшіе, по абсолютному значенію, чѣмъ $\frac{A}{n}$, будутъ общіе. Кромѣ того, всѣ остальные корни уравненія (67) также вещественны, и, для опредѣленности, разсматривая лишь положительные корни, заключены между положительными корнями $\beta_1<\ldots<\beta_k$ уравненія $\Omega_1(x)=0$, гдѣ β_k наибольшій изъ корней $\Omega_1(x)=0$, который не болѣе $\frac{A}{n}$. Уравненіе (66) также имѣетъ по два вещественныхъ корня между β_i и β_{i+1}, если максимумъ (или минимумъ) Ω_1, заключенный между β_i и β_{i+1}, по абсолютному значенію не менѣе λ_n.

Случай, когда соотвѣтствующій максимумъ (или минимумъ) менѣе λ_n, приводитъ къ комплекснымъ корнямъ уравненія (66), относительно которыхъ докажемъ слѣдующее:

Внутри трапеціи $\beta_i\beta_{i+1}CD$, высота которой равна $\frac{4}{n}$, и которая имѣетъ боковыми сторонами прямыя β_iD и *$\beta_{i+1}C$, образующія съ основаніемъ $\beta_i\beta_{i+1}$ внутренніе углы $D\beta_i\beta_{i+1}$* и *$\beta_i\beta_{i+1}C$ равные $\frac{3\pi}{2}$, есть по крайней мѣрѣ одинъ корень уравненія* (66).

Въ самомъ дѣлѣ, на всякой линіи, соединяющей сторону β_iD съ $\beta_{i+1}C$ должно быть не менѣе одной точки, гдѣ мнимая часть $\Omega_1(x)$ обращается въ нуль, такъ какъ приращеніе аргумента Ω_1 при переходѣ отъ какой нибудь точки на сторонѣ $\beta_{i+1}C$ къ точкѣ, расположенной на β_iD, болѣе π. Такимъ образомъ, кривая S, на которой мнимая часть Ω_1 равна нулю, исходя изъ точки γ_i, расположенной между β_i и β_{i+1}, гдѣ $\frac{d\Omega_1}{dx}=0$, будетъ пересѣкать всякую прямую параллельную CD; и, такъ какъ внутри разсматриваемой трапеціи кривая S не можетъ имѣть двойной точки (потому что всѣ корни $\frac{d\Omega_1}{dx}=0$ вещественные), то вещественная часть Ω_1 будетъ итти, возрастая по абсолютному значенію, если слѣдовать по кривой S отъ точки γ_i до первой точки H пересѣченія S со стороной CD. Поэтому для того, чтобъ убѣдиться, что внутри трапеціи $\beta_i\beta_{i+1}CD$ есть корень уравненія (66), достаточно будетъ доказать, что въ точкѣ H

$$\mu^2=\Omega_1^2(H)>\lambda_n^2.$$

Для этого, беремъ многочленъ $T(x)=\cos 2n \arccos x$; его аргументъ въ точкѣ H обозначимъ буквой φ, и допустимъ, напримѣръ, для опредѣленности, что $0\leqq\varphi\leqq\frac{\pi}{2}$. Затѣмъ изъ точки H проведемъ прямую, параллельную β_iD, до пересѣченія съ вещественной осью въ точкѣ E; пусть x_0 будетъ наибольшій корень уравненія $T(x)=0$, меньшій, чѣмъ E; соединимъ x_0 съ H, и перпендикулярно къ x_0H проведемъ изъ H прямую до пересѣченія съ вещественной осью въ точкѣ E'; въ такомъ случаѣ между E' и x_0 можно выбрать точку y_0 такъ, чтобъ дробь

$$\frac{H-y_0}{H-x_0}$$

имѣла аргументомъ $-\varphi$; при этомъ, модуль этой дроби будетъ не менѣе, чѣмъ $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Поэтому произведеніе

$$\frac{H-y_0}{H-x_0}.\cos 2n \arcsin H$$

будетъ вещественнымъ [1]). Но, полагая $0<\Theta<1$, можемъ написать

$$H=\frac{\Theta A}{n}+\frac{4i}{n}=\sin(a+bi)=a+bi-\frac{(a+bi)^3}{3!}+\ldots;$$

и слѣдовательно, отбрасывая безконечно малыя высшихъ порядковъ, получимъ

$$b=\frac{4}{n};$$

откуда, какъ въ § 7, находимъ

$$|\cos 2n\arccos\sin H|\geqq\frac{1}{2}(e^8-e^{-8})>\frac{1}{2}(e^8-1).$$

Поэтому уравненіе съ вещественными коэффиціентами,

$$\Omega_1(x)=\mu''\cdot\frac{x-y_0}{x-x_0}\cos 2n\arcsin x, \tag{68}$$

въ которомъ

$$\mu''=\frac{H-x_0}{H-y_0}\cdot\frac{\mu}{\cos 2n\arcsin H}<\frac{2\sqrt{2}}{e^8-1}\mu,$$

имѣетъ корень равный H.

Но не трудно замѣтить, съ другой стороны, что, если

$$\mu''<\frac{\lambda_n}{84},$$

то уравненіе (68) не можетъ имѣть комплексныхъ корней.

Дѣйствительно,

$$\frac{x-y_0}{x-x_0}\cos 2n\arcsin x=\cos 2n\arcsin x+\frac{x_0-y_0}{x-x_0}\cos 2n\arcsin x;$$

поэтому, при $-\frac{2A}{n}\leqq x\leqq\frac{2A}{n}$,

$$\left|\frac{x-y_0}{x-x_0}\cos 2n\arcsin x\right|<1+2n(x_0-y_0)<1+2n\left(\frac{8}{n}+\frac{\pi}{2n}\right)<21,$$

такъ какъ разность между двумя сосѣдними корнями уравненія $T(x)=0$ менѣе $\frac{\pi}{2n}$;

---

[1]) Напоминаю, что $\cos 2n\arccos x=\cos 2n\arcsin x$, если n четное число.

на остальной же части отрѣзка $(-1, +1)$, это неравенство тѣмъ болѣе соблюдено, такъ какъ $\left|\frac{x-y_0}{x-x_0}\right| < 2$.

Такимъ образомъ, если $\mu'' < \frac{\lambda_n}{4.21}$, многочленъ

$$\Omega_1(x) - \mu'' \frac{x-y_0}{x-x_0} \cos 2n \arcsin x$$

имѣетъ знакъ $\Omega_1(x)$ въ точкахъ, гдѣ $\Omega_1(x)$ достигаетъ максимума или минимума, и слѣдовательно, всѣ корни уравненія (68) вещественные.

Отсюда заключаемъ, что

$$\mu \frac{2\sqrt{2}}{e^8-1} > \frac{\lambda_n}{84},$$

т. е.

$$\mu > \lambda_n.$$

Такимъ образомъ уравненіе (66) имѣетъ, дѣйствительно, одинъ корень внутри трапеціи $\beta_i\beta_{i+1}CD$.

Слѣдовательно, если симметрично къ $\beta_i\beta_{i+1}CD$ построить трапецію $\beta_i\beta_{i+1}C'D'$, то внутри фигуры $\beta_iD'C'\beta_{i+1}CD$ будетъ всегда не менѣе двухъ комплексныхъ или вещественныхъ корней уравненія (66). Прибавляя еще корень уравненія (66), находящійся между 0 и β_1, замѣчаемъ, что другихъ корней, кромѣ этихъ (и равныхъ имъ, но съ обратнымъ знакомъ), уравненіе (66) имѣть не можетъ.

Такимъ образомъ,

$$4n^2 . [\Omega_1^2(x) - \lambda_n^2] = \left(\frac{d\Omega_1(x)}{dx}\right)^2 . (x^2-1) . Y(x), \tag{69}$$

гдѣ

$$Y(x) = \frac{(x^2-\eta_0^2)[x^2-(\beta_1+\eta_1)^2][x^2-(\beta_1+\eta_2)^2]\ldots[x^2-(\beta_{k-1}+\eta_{2k-2})^2]}{x^2[x^2-(\beta_1+\varepsilon_1)^2]^2\ldots[x^2-(\beta_{k-1}+\varepsilon_{k-1})^2]^2},$$

при чемъ, $|\varepsilon_i| < \beta_{i+1} - \beta_i$, и $|\eta_{2i-1}| < \frac{4}{n} + \beta_{i+1} - \beta_i$, $|\eta_{2i}| < \frac{4}{n} + \beta_{i+1} - \beta_i$.

Слѣдовательно,

$$Y(x) = \frac{\left[1-\left(\frac{\eta_0}{x}\right)^2\right]\left[1-\left(\frac{\beta_1+\eta_1}{x}\right)^2\right]\ldots\left[1-\left(\frac{\beta_{k-1}+\eta_{2k-2}}{x}\right)^2\right]}{\left[1-\left(\frac{\beta_1+\varepsilon_1}{x}\right)^2\right]^2\ldots\left[1-\left(\frac{\beta_{k-1}+\varepsilon_{k-1}}{x}\right)^2\right]^2} =$$

$$=\left[1-\left(\frac{\eta_0}{x}\right)^2\right]\left[1+\frac{2(\varepsilon_1-\eta_1)\beta_1+\varepsilon_1^2-\eta_1^2}{x^2}+\Theta_1\left(\frac{\beta_2}{nx}\right)^4\right]\cdots$$

$$\cdots\left[1+\frac{2(\varepsilon_{k-1}-\eta_{2k-2})\beta_{k-1}+\varepsilon_{k-1}^2-\eta_{2k-2}^2}{x^2}+\Theta_{2k-2}\cdot\left(\frac{\beta_k}{nx}\right)^4\right],$$

гдѣ $|\Theta_i|<3$, если $|nx|\geqq 2A$.

Поэтому

$$Y(x)=1+h(1+\varphi),$$

гдѣ

$$|h|<\left|\frac{\eta_0}{x}\right|^2+\left|\frac{2(\varepsilon_1-\eta_1)\beta_1+\varepsilon_1^2-\eta_1^2}{x^2}\right|+\ldots+\left|\frac{2(\varepsilon_{k-1}-\eta_{2k-2})\beta_{k-1}+\varepsilon_{k-1}^2-\eta_{2k-2}^2}{x^2}\right|+$$

$$+6\sum_{i=2}^{i=k}\left(\frac{\beta_i}{nx}\right)^4,$$

при чемъ φ стремится къ нулю вмѣстѣ съ h.

Но не трудно указать такое опредѣленное число p, чтобы, при всякомъ i,

$$\beta_{i+1}-\beta_i>\frac{p}{n};$$

а потому можно также указать вполнѣ опредѣленное число t такъ, чтобы

$$|h|<\frac{t}{x^2}[\beta_1^2+\beta_2(\beta_2-\beta_1)+\ldots+\beta_k(\beta_k-\beta_{k-1})]+\frac{t}{n^3x^4}[\beta_2^4(\beta_2-\beta_1)+\ldots+\beta_k^4(\beta_k-\beta_{k-1})]<$$

$$<\frac{t}{x^2}\beta_k^2+\frac{t}{n^3x^4}\beta_k^5\leqq\frac{t}{x^2}\left[\frac{A^2}{n^2}+\frac{A^5}{n^8x^2}\right]<2t\left(\frac{A}{nx}\right)^2,$$

если $|nx|\geqq 2A$.

Итакъ, полагая $Y(x)=1+2l\left(\frac{A}{nx}\right)^2$, мы видимъ, что, если $\frac{A}{nx}$ стремится къ нулю, то $|l|$ остается менѣе нѣкотораго опредѣленнаго предѣла.

Но изъ уравненія (69) получаемъ

$$\frac{d\Omega_1}{2n\sqrt{\lambda_n^2-\Omega_1^2}}=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\left[1+l\left(\frac{A}{nx}\right)^2\right].$$

Слѣдовательно,

$$\arccos\frac{\Omega_1(x)}{\pm\lambda_n}=2n\int_x^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\left[1+l\left(\frac{A}{nx}\right)^2\right],$$

и, принимая во вниманіе, что n четное число, передъ λ_n надо взять знакъ —; откуда

$$\arccos \frac{\Omega_1(x)}{-\lambda_n} = 2n(1+\varepsilon)\arccos x,$$

гдѣ

$$|\varepsilon| < l\left(\frac{A}{nx}\right)^2.$$

Поэтому

$$\Omega_1(x) = -\lambda_n \cos 2n(1+\varepsilon)\arccos x. \qquad (60^{\text{bis}})$$

Но $n\varepsilon$ стремится къ нулю, если $\frac{A^2}{nx^2}$ стремится къ нулю; для этого достаточно (послѣ того какъ число A опредѣлено), чтобъ nx^2 возрастало безконечно. Такимъ образомъ

$$\Omega_1(x) = -\lambda_n \cos 2n \arccos x + 2\beta'_n(x),$$

гдѣ $\beta'_n(x)$ стремится къ нулю, если nx^2 возрастаетъ безконечно; и, припоминая, что $\lambda_n - 2nE_{2n}$ стремится къ нулю,

$$\Omega_1(x) = -2nE_{2n}T(x) + 2\beta_n(x); \qquad (60)$$

слѣдовательно, многочленъ $P(x)$ имѣетъ асимптотическимъ выраженіемъ

$$Q(x) = R(x) + \left[\frac{1}{2n} - E_{2n}\right].T(x) + \frac{\beta_n(x)}{n}, \qquad (70)$$

гдѣ $\beta_n(x)$ стремится къ нулю, если nx^2 возрастаетъ безконечно. Ч. и. т. д.

Примѣчаніе. Замѣтимъ, что формула (70), которая, для опредѣленности, доказана, при предположеніи, что n четное число, справедлива для всѣхъ значеній n, если положить $T(x) = (-1)^n \cos 2n \arccos x = \cos 2n \arcsin x$.

57. Теорема. *При безконечномъ возрастаніи n, произведеніе $2n.E_{2n}$ стремится къ вполнѣ опредѣленному предѣлу λ.*

Пусть многочленъ $\Omega(x)$ степени $2n$ имѣетъ асимптотическимъ выраженіемъ

$$\Omega_1^{(n)}(x) = -\lambda_n \cos 2n \arcsin x + 2\beta_n(x);$$

требуется показать, что λ_n не зависитъ отъ n.

Наше утвержденіе будетъ, очевидно, доказано, если мы убѣдимся, что многочленъ степени $2kn$,

$$\Omega_1^{(kn)}(x) = -\lambda_n \cos 2kn \arcsin x + 2\beta_n(kx),$$

гдѣ k произвольное цѣлое число, служитъ асимптотическимъ выраженіемъ для многочлена $\Omega(x)$ степени $2kn$, такъ какъ изъ этого можно будетъ заключить, что $\lambda_{kn} = \lambda_n$.

Возьмемъ, для опредѣленности, $k=2$, и обозначимъ черезъ x_1, $x_2, \ldots x_h$, точки отклоненія (кромѣ 0) $\Omega_1^{(n)}(x)$ отъ $\delta_n(x)$, отстоящія не далѣе отъ 0, чѣмъ $\sqrt{\frac{A}{n}}$, гдѣ A нѣкоторое данное весьма большое число, которое однако обладаетъ свойствомъ, что $n\left(\sqrt{\frac{A}{n}}\right)^3=\sqrt{\frac{A^3}{n}}=\gamma$ есть число весьма малое. Въ такомъ случаѣ, въ точкахъ $\frac{1}{2}x_1, \frac{1}{2}x_2, \ldots, \frac{1}{2}x_h$ отклоненіе $\Omega_1^{(2n)}$ отъ $\delta_{2n}(x)$ будетъ сколь угодно мало отличаться отъ $\pm\lambda_n$, такъ какъ, для разсматриваемыхъ значеній $\frac{x_i}{2}$,

$$\Omega_1^{(2n)}\left(\frac{x_i}{2}\right)=-\lambda_n\cos 4n\arcsin\frac{x_i}{2}+2\beta_n(x_i)=-\lambda_n\cos 2n\left(x_i+\frac{\Theta x_i^3}{3}\right)+$$

$$+2\beta_n(x_i)=\Omega_1^{(n)}(x_i)+\theta'\gamma,$$

гдѣ $|\Theta|<1$, $|\theta'|<1$; и съ другой стороны, вообще,

$$\left|\delta_{2n}\left(\frac{x}{2}\right)-\delta_n(x)\right|<\gamma,$$

при достаточно большихъ значеніяхъ n.

Но, вслѣдствіе предыдущей теоремы, x_h и всѣ слѣдующія за x_h точки отклоненія: x_{h+1}, $x_{h+2}, \ldots$ и т. д. $\Omega_1^{(n)}$ отъ δ_n, должны опредѣляться формулами

$$\arcsin x_h=\frac{\pi(k_1+\alpha_0)}{2n},\ \arcsin x_{h+1}=\frac{\pi(k_1+1+\alpha_1)}{2n},\ldots,$$

$$\arcsin x_{h+i}=\frac{\pi(k_1+i+\alpha_i)}{2n},\ldots,\ \arcsin x_{n+1}=\frac{\pi n}{2n}=\frac{\pi}{2},$$

гдѣ α_i сколь угодно малыя величины (если A взято достаточно большимъ), такъ какъ $\beta_n(x)$ стремится къ нулю. Такимъ образомъ $k_1=h-1$.

Слѣдовательно, полагая

$$\arcsin x_{h+i+1}^1=\frac{\pi(h+i)}{4n}, \qquad (i=0,\ 1,\ldots 2n-h)$$

мы замѣчаемъ, что въ точкахъ x_{h+i+1}^1 разность $\Omega_1^{(2n)}(x)-\delta_{2n}(x)$, послѣдовательно мѣняя знакъ, безконечно мало отличается отъ $\pm\lambda_n$. Вмѣстѣ съ 0 и съ предшествующими h точками $\left(\frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{2}, \ldots \frac{x_h}{2}\right)$ это составляетъ $2n+2$ точки на отрѣзкѣ 01, гдѣ означенная разность получаетъ, послѣдовательно мѣняя знакъ, значенія, сколь угодно мало отличающіяся отъ λ_n, а потому наименьшее уклоненіе многочлена степени $4n$ отъ δ_{2n} безконечно мало отличается отъ λ_n.

Слѣдовательно, $\Omega_1^{(2n)}$ является асимптотическимъ выраженіемъ для многочлена, наименѣе уклоняющагося отъ δ_{2n}, ч. и. т. д.

Примѣчаніе. Мы можемъ теперь придать другую форму неравенству (59), а именно

$$0{,}32 > \lambda > 0{,}27. \qquad (59^{\text{bis}})$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ мы видимъ, что для полученія болѣе тѣсныхъ границъ для λ, можно будетъ послѣдовательно усовершенствовать пріемы § 52 и 53.

Вмѣсто одного добавочнаго члена вида $\dfrac{T(x)}{4n^3}\cdot\dfrac{\pi^2 a}{x^2-\sin^2\dfrac{\pi}{4n}}$, который мы ввели въ § 52, достаточно будетъ ввести нѣсколько членовъ вида $\dfrac{T(x)}{4n^3}\cdot\dfrac{\pi^2 a_i}{x^2-\sin^2\dfrac{\pi i}{4n}}$ $(i=1,\ 2,\ldots)$, чтобъ получить значеніе λ, съ сколь угодно большой точностью.

Точно также, примѣняя методъ § 53, надо будетъ вмѣсто одного произвольнаго значенія β, оставить неопредѣленными нѣсколько, i_0, точекъ отклоненія, сохранивши точки $\pm\sin\dfrac{i\pi}{2n}$ для $i\geqq i_0$.

Я полагаю, что, примѣняя любой изъ указанныхъ методовъ, достаточно будетъ ввести одинъ добавочный членъ, чтобъ уменьшить до 0,01 разность между границами для λ.

ГЛАВА V.

Различныя приложенія основныхъ теоремъ. Обобщенія теоремы Вейерштрасса.

58. Теорема. *Если производныя* $(n+1)$-го *порядка двухъ функцій* $f(x)$ и $\varphi(x)$ *удовлетворяютъ въ промежуткѣ* AB *неравенствамъ*

$$0 < f^{(n+1)}(x) < \varphi^{(n+1)}(x),$$

то наименьшія уклоненія $E_n[f(x)]$ и $E_n[\varphi(x)]$ *разсматриваемыхъ функцій отъ многочленовъ степени* n *на отрѣзкѣ* AB *удовлетворяютъ неравенству*

$$E_n[f(x)] < E_n[\varphi(x)].$$

Въ самомъ дѣлѣ, составляя функцію

$$F(x, \lambda) = \lambda f(x) + (1-\lambda)\varphi(x) - P(x, \lambda),$$

гдѣ $P(x, \lambda)$ многочленъ степени n, наименѣе уклоняющійся отъ $\lambda f(x) + (1-\lambda)\varphi(x)$ на отрѣзкѣ AB, мы видимъ, что при всякомъ λ расположеніе точекъ уклоненія будетъ перваго рода, и во внутреннихъ точкахъ уклоненія $F''_{x^2} \gtrless 0$, такъ какъ на всемъ отрѣзкѣ

$$\frac{\partial^{n+1} F(x, \lambda)}{\partial x^{n+1}} = \lambda f^{(n+1)}(x) + (1-\lambda)\varphi^{(n+1)}(x) > 0,$$

и слѣдовательно, $F'_x = 0$ имѣетъ не болѣе n корней.

Такимъ образомъ мы вправѣ примѣнять теорему (36), и замѣчаемъ вмѣстѣ съ тѣмъ, что въ послѣдней точкѣ уклоненія $F > 0$, т. е. $F = L$. Но уравненіе

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = f - \varphi - P'_\lambda = 0$$

имѣетъ $(n+1)$ корней, такъ какъ

$$\frac{\partial^{n+2} F}{\partial \lambda \partial x^{n+1}} = f^{(n+1)} - \varphi^{(n+1)} < 0;$$

при этомъ, въ послѣдней точкѣ отклоненія

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = \frac{\partial L}{\partial \lambda} < 0.$$

Слѣдовательно,

$$L(1) = E_n[f(x)] < L(0) = E_n[\varphi(x)],$$

ч. и. т. д.

59. Слѣдствія. A. *Если въ промежуткѣ AB*

$$0 < \psi^{(n+1)}(x) < f^{(n+1)}(x) < \varphi^{(n+1)}(x),$$

то

$$E_n[\psi(x)] < E_n[f(x)] < E_n[\varphi(x)].$$

B. *Если въ промежуткѣ AB*

$$|f^{(n+1)}(x)| < \varphi^{(n+1)}(x),$$

то

$$E_n[f(x)] < 2E_n[\varphi(x)].$$

Въ самомъ дѣлѣ,

$$0 < \varphi^{(n+1)}(x) \pm f^{(n+1)}(x) < 2\varphi^{(n+1)}(x);$$

поэтому

$$E_n[\varphi + f] < 2E_n[\varphi], \quad E_n[\varphi - f] < 2E_n[\varphi],$$

и слѣдовательно, тѣмъ болѣе,

$$E_n[f] = E_n\left[\frac{f + \varphi + f - \varphi}{2}\right] < 2E_n[\varphi].$$

C. *Если въ промежуткѣ AB, длина котораго 2h,*

$$0 < N < f^{(n+1)}(x) < M,$$

то

$$\frac{2N}{(n+1)!}\left(\frac{h}{2}\right)^{n+1} < E_n[f(x)] < \frac{2M}{(n+1)!}\left(\frac{h}{2}\right)^{n+1}.$$

Въ самомъ дѣлѣ, на основаніи слѣдствія (A),

$$E_n\left[\frac{Nx^{n+1}}{(n+1)!}\right] < E_n[f(x)] < E_n\left[\frac{Mx^{n+1}}{(n+1)!}\right];$$

а потому, замѣчая, что

$$E_n[Ax^{n+1}] = 2A\left(\frac{h}{2}\right)^{n+1},$$

получаемъ

$$\frac{2N}{(n+1)!}\left(\frac{h}{2}\right)^{n+1} < E_n[f(x)] < \frac{2M}{(n+1)!}\left(\frac{h}{2}\right)^{n+1}.$$

D. *Если въ промежуткѣ* AB *длины* $2h$

$$|f^{(n+1)}(x)| < M,$$

то

$$E_n[f(x)] < \frac{4M}{(n+1)!}\left(\frac{h}{2}\right)^{n+1}.$$

Это вытекаетъ изъ слѣдствія (B).

E. *Если въ промежуткѣ* AB

$$f^{(n+1)}(x) > k\,|f^{(n+2)}(x)|,$$

то

$$2E_n[f(x)] > kE_n[f'(x)];$$

если же

$$|f^{(n+1)}(x)| < kf^{(n+2)}(x),$$

то

$$E_n[f(x)] < 2kE_n[f'(x)].$$

Это вытекаетъ изъ слѣдствія (B).

F. *Если въ промежуткѣ* $AB (x \geqq 0)$

$$f^{(n+1)}(x) > 0, \quad f^{(n+2)}(x) > 0,$$

то

$$E_n[f(x)] < \frac{1}{n+1} E_n[xf'(x)].$$

Въ самомъ дѣлѣ, полагая

$$\varphi(x) = \frac{xf'(x)}{n+1},$$

находимъ

$$\varphi^{(n+1)}(x) = \frac{xf^{(n+2)}(x)}{n+1} + f^{(n+1)}(x) > f^{(n+1)}(x) > 0.$$

60. Примѣры. Предыдущіе результаты, получаемые при помощи общаго метода, если ограничиваться только первымъ членомъ соотвѣтствующей строки Тэйлора, въ нѣкоторыхъ случаяхъ даютъ довольно тѣсныя границы для наилучшаго приближенія E_n.

Разсмотримъ, напримѣръ, наилучшее на отрѣзкѣ ab приближеніе $E_n(e^x)$ функціи e^x при помощи многочлена степени n. Примѣняя слѣдствіе C, находимъ немедленно

$$\frac{2e^a}{(n+1)!}\left(\frac{b-a}{4}\right)^{n+1} < E_n(e^x) < \frac{2e^b}{(n+1)!}\left(\frac{b-a}{4}\right)^{n+1}.$$

Въ частности, на отрѣзкѣ $(-1, +1)$

$$\frac{e^{-1}}{(n+1)!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n < E_n(e^x) < \frac{e}{(n+1)!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Разсмотримъ еще наилучшее приближенiе функцiи $\sin x$ на отрѣзкѣ $(-h, +h)$, гдѣ $h < \frac{\pi}{2}$, при помощи многочленовъ степени $2m$ или $2m-1$ (нетрудно видѣть, что такъ какъ $\sin x$ есть нечетная функцiя, многочлены, наименѣе уклоняющiеся отъ $\sin x$ на отрѣзкѣ $(-h, +h)$, будутъ также нечетными функцiями). На основанiи того же слѣдствiя C, получимъ

$$\frac{2\cos h}{(2m+1)!}\left(\frac{h}{2}\right)^{2m+1} < E_{2m-1}(\sin x) < \frac{2}{(2m+1)!}\left(\frac{h}{2}\right)^{2m+1};$$

напримѣръ, если $h = \frac{\pi}{3}$, то

$$\frac{1}{(2m+1)!}\left(\frac{\pi}{6}\right)^{2m+1} < E_{2m-1}(\sin x) < \frac{2}{(2m+1)!}\left(\frac{\pi}{6}\right)^{2m+1}.$$

Разсмотримъ, наконецъ, наилучшее приближенiе $E_n\left(\frac{1}{b+x}\right)^\alpha$, гдѣ $b > 0$ и $\alpha > 0$, на отрѣзкѣ 01.

Полагая $f(x) = \left(\frac{1}{b+x}\right)^\alpha$ и $\varphi(x) = \left(\frac{1}{b+x}\right)^{\alpha+h}$,

находимъ

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1}\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n)\left(\frac{1}{b+x}\right)^{\alpha+n+1},$$

$$\varphi^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1}(\alpha+h)(\alpha+h+1)\ldots(\alpha+h+n)\left(\frac{1}{b+x}\right)^{\alpha+h+n+1},$$

откуда

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{(\alpha+h)\ldots(\alpha+h+n)}{\alpha\ldots(\alpha+n)}\cdot(b+x)^h\varphi^{(n+1)}(x).$$

Поэтому, примѣняя слѣдствiе (A), получимъ

$$\frac{(\alpha+h)\ldots(\alpha+h+n)}{\alpha\ldots(\alpha+n)}\cdot b^h E_n\left(\frac{1}{b+x}\right)^{\alpha+h} < E_n\left(\frac{1}{b+x}\right)^\alpha,$$

$$E_n\left(\frac{1}{b+x}\right)^\alpha < \frac{(\alpha+h)\ldots(\alpha+h+n)}{\alpha\ldots(\alpha+n)}(b+1)^h E_n\left(\frac{1}{b+x}\right)^{\alpha+h};$$

полагая $h > 0$.

Въ частности, если $h=1$, то

$$\frac{\alpha+n+1}{\alpha}.b.E_n\left(\frac{1}{b+x}\right)^{\alpha+1}<E_n\left(\frac{1}{b+x}\right)^{\alpha}<\frac{\alpha+n+1}{\alpha}.(b+1).E_n\left(\frac{1}{b+x}\right)^{\alpha+1}$$

Упражненіе. Показать, при помощи слѣдствія (С), что на отрѣзкѣ 01

$$E_n(x^{n+1+h})<2\frac{(n+1+1)\ldots(1+h)}{(n+1)!}\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$$

если $h<0$.

60. Примѣненіе теоремы de la Vallée Poussin. Мы можемъ получить нижнюю границу $E_n(f(x))$ на отрѣзкѣ $(-1,+1)$, примѣняя неравенство (30), т. е. беря первые два члена строки Тэйлора, представляющей многочленъ степени n, наименѣе уклоняющійся отъ $\lambda f(x)+(1-\lambda)\varphi(x)$, гдѣ $\varphi(x)=x^{n+1}$.

На основаніи примѣчанія къ § 39, эти первые два члена строки Тэйлора представляютъ вмѣстѣ съ тѣмъ многочленъ $Q(x)$, наименѣе уклоняющійся отъ $f(x)$ въ $(n+2)$ точкахъ x_i, гдѣ разность $|\varphi(x)-P_n(x)|$ достигаетъ максимума (обозначая черезъ $P_n(x)$ многочленъ степени n наименѣе уклоняющійся отъ $\varphi(x)$). Въ данномъ случаѣ, $\varphi(x)=x^{n+1}$, поэтому $x_i=\cos\frac{i\pi}{n+1}$.

Пусть

$$f(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n+\ldots$$

имѣетъ радіусъ сходимости $R>1$.

Многочленъ $Q(x)$ степени n удовлетворяетъ $(n+2)$ уравненіямъ

$$Q(x_i)=f(x_i)+(-1)^i\varrho,$$

причемъ $|\varrho|$, какъ мы видѣли, является нижней границей для $E_n[f(x)]$. Примѣняя формулу интерполированія Лагранжа, находимъ

$$Q(x)=S(x)\sum_{i=0}^{i=n+1}\frac{f(x_i)+(-1)^i\varrho}{(x-x_i)S'(x_i)},$$

гдѣ $S(x)=\sqrt{1-x^2}\sin(n+1)\arccos x$.

Такъ какъ степень $Q(x)$ не выше n, то

$$\sum_{i=0}^{i=n+1}\frac{f(x_i)+(-1)^i\varrho}{S'(x_i)}=0;$$

откуда, вслѣдствіе [1]) равенства $\sum_{i=0}^{i=n+1}\frac{(-1)^i}{S'(x_i)}=\pm 1$, получаемъ

$$\varrho=\pm\sum_{i=0}^{i=n+1}\frac{f(x_i)}{S'(x_i)}.$$

Но

$$\sum_{i=0}^{i=n+1}\frac{f(x_i)}{S'(x_i)}=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(x)dx}{S(x)},$$

гдѣ C какой нибудь контуръ, окружающій отрѣзокъ $(-1,+1)$, но не заключающій ни одной особой точки функціи $f(x)$.

Поэтому, замѣчая, что

$$S(x)=\sqrt{1-x^2}\,.\sin(n+1)\arccos x=-2^n\Big[x^{n+2}-\frac{n+3}{2^2}x^n+$$

$$+\frac{n^2+3n-2}{2^4.2!}x^{n-2}-\frac{(n-3)(n^2+3n-4)}{2^6.3!}x^{n-4}+$$

$$+\frac{(n-4)(n-5)(n^2+3n-6)}{2^8.4!}x^{n-6}-\ldots\Big],$$

получаемъ

$$-\frac{1}{S(x)}=\frac{1}{2^n}\Big[\frac{1}{x^{n+2}}+\frac{n+3}{2^2}\frac{1}{x^{n+4}}+\frac{(n+4)(n+5)}{2^4.2!}\frac{1}{x^{n+6}}+$$

$$+\frac{(n+5)(n+6)(n+7)}{2^6.3!}\frac{1}{x^{n+8}}+\ldots\Big];$$

и слѣдовательно,

$$\pm\varrho=\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{(a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n+\ldots)}{2^n}\cdot\Big[\frac{1}{x^{n+2}}+\frac{n+3}{2^2}\cdot\frac{1}{x^{n+4}}+\ldots\Big]dx=$$

$$=\frac{1}{2^n}\Big[a_{n+1}+\frac{n+3}{2^2}\cdot a_{n+3}+\frac{(n+4)(n+5)}{2^4.2!}a_{n+5}+\ldots\Big].$$

Такимъ образомъ, на отрѣзкѣ $(-1,+1)$

$$E_n[f(x)]>\frac{1}{2^n}\Big|a_{n+1}+\frac{n+3}{2^2}a_{n+3}+\frac{(n+4)(n+5)}{2^4.2!}a_{n+5}+\ldots\Big|. \quad (71)$$

Въ частности, на отрѣзкѣ $(-1,+1)$ имѣемъ

---

[1]) См. § 46.

$$\left.\begin{aligned} &E_n[x^{n+3}] = E_{n-1}[x^{n+3}] > \frac{n+3}{2^{n+2}}, \\ &E_n[x^{n+5}] = E_{n-1}[x^{n+5}] > \frac{(n+4)(n+5)}{2^{n+4}2!}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &E_n[x^{n+2k+1}] = E_{n-1}[x^{n+2k+1}] > \frac{(n+k+2)\dots(n+2k+1)}{2^{n+2k}k!} \end{aligned}\right\} \qquad (72)$$

61. Преобразованіе строкъ Тэйлора въ ряды тригонометрическихъ многочленовъ.

Изъ тождества

$$(\cos t)^m = \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2}\right)^m = \frac{1}{2^{m-1}}\Big[\cos mt + m\cos(m-2)t + \dots +$$

$$+ \frac{m(m-1)\dots(m-l+1)}{l!}\cos(m-2l)t + \dots$$

выводимъ, полагая $x = \cos t$ и $T_n(x) = \cos n \arccos x$,

$$x^m = \frac{1}{2^{m-1}}\left[T_m(x) + mT_{m-2}(x) + \frac{m(m-1)}{2!}T_{m-4}(x) + \dots\right]; \qquad (73)$$

и слѣдовательно,

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + \dots =$$

$$\left.\begin{aligned} &= a_0 + \frac{2}{2^2}a_2 + \frac{4.3}{2^4.2!}a_4 + \dots + \frac{2l(2l-1)\dots(l+1)}{2^{2l}.l!}a_{2l} + \dots \\ &+ T_1(x)\left[a_1 + \frac{3}{2^2}a_3 + \frac{5.4}{2^4.2!}a_5 + \dots + \frac{(2l+1)\dots(l+2)}{2^{2l}.l!}a_{2l+1} + \dots\right] + \\ &+ T_2(x)\left[\frac{a_2}{2} + \frac{4}{2^3}a_4 + \frac{6.5}{2^5.2!}a_6 + \dots + \frac{(2l+2)(2l+1)\dots(l+3)}{2^{2l+1}l!}a_{2l+2} + \dots\right] + \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &+ T_n(x)\left[\frac{a_n}{2^{n-1}} + \frac{n+2}{2^{n+1}}a_{n+2} + \frac{(n+4)(n+3)}{2^{n+3}.2!}a_{n+4} + \dots \frac{(2l+n)\dots(l+n+1)}{2^{2l+n-1}.l!}a^2{}_{l+n} + \dots\right] \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}\right\} (74)$$

Въ частности, изъ формулы (73) видно, что

$$\left.\begin{aligned} &E_n(x^{n+3}) = E_{n-1}(x^{n+3}) < \frac{n+3}{2^{n+2}}\left[1 + \frac{1}{n+3}\right], \\ &E_n(x^{n+5}) = E^{n-1}(x^{n+5}) < \frac{(n+4)(n+5)}{2^{n+4}.2!}\left[1 + \frac{2}{n+4} + \frac{2.1}{(n+4)(n+5)}\right] \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &E_n(x^{n+2k+1}) = E_{n-1}(x^{n+2k+1}) < \frac{(n+2k+1)\dots(n+k+2)}{2^{n+2k}.k!}\Big[1 + \\ &\qquad + \frac{k}{n+k+2} + \frac{k(k-1)}{(n+k+2)(n+k+3)} + \dots\Big]. \end{aligned}\right\} \qquad (75)$$

Сопоставленіе неравенствъ (72) съ неравенствами (75) показываетъ, что каково бы ни было *опредѣленное* цѣлое число k, на отрѣзкѣ $(-1, +1)$

$$\underset{n=\infty}{\text{пред.}} \frac{E_n(x^{n+2k+1}) \,.\, 2^{n+2k} \,.\, k!}{(n+k+2)(n+k+3)\ldots(n+2k+1)} = 1. \tag{76}$$

Вообще, полагая

$$\lambda_n = \frac{1}{2^n}\left[a_{n+1} + \frac{n+3}{2^2}\, a_{n+3} + \frac{(n+4)(n+5)}{2^4 2!}\, a_{n+5} + \ldots\right],$$

замѣчаемъ, что остатокъ, получаемый, если отбросить въ разложеніи (74) члены степени выше n, не болѣе, чѣмъ

$$|\lambda_n| + |\lambda_{n+1}| + \ldots;$$

поэтому

$$|\lambda_n| < E_n[f(x)] < |\lambda_n| + |\lambda_{n+1}| + \ldots \tag{77}$$

(первое изъ неравенствъ (77) есть ничто иное, какъ неравенство (71)).

62. Слѣдствія. А. *Если* $\dfrac{|\lambda_{n+1}| + |\lambda_{n+2}| + \ldots}{\lambda_n}$ *стремится къ нулю, при* $n = \infty$, *то на отрѣзкѣ* $(-1, +1)$

$$\underset{n=\infty}{\text{пред.}} \frac{E_n[f(x)]}{\lambda_n} = 1.$$

В. *На отрѣзкѣ* $(-h, +h)$

$$\underset{n=\infty}{\text{пред.}} \frac{E_n(e^x) \,.\, 2^n (n+1)!}{h^{n+1}} = 1.$$

Въ самомъ дѣлѣ, $E_n(e^x)$ на отрѣзкѣ $(-h, +h)$ равно $E_n(e^{hx})$ на отрѣзкѣ $(-1, +1)$. Но

$$e^{hx} = \Sigma \frac{h^n x^n}{n!},$$

поэтому

$$\lambda_n = \frac{h^{n+1}}{2^n \,.\, (n+1)!}\left[1 + \frac{1}{n+2}\left(\frac{h}{2}\right)^2 + \frac{1}{1\,.\,2\,.\,(n+2)(n+3)}\left(\frac{h}{2}\right)^4 + \ldots\right]$$

$$= \frac{h^{n+1}}{2^n \,.\, (n+1)!}\,[1 + \varepsilon_n],$$

гдѣ ε_n стремится къ нулю при $n = \infty$; и слѣдовательно, $\dfrac{|\lambda_{n+1}| + |\lambda_{n+2}| + \ldots}{\lambda_n}$ также стремится къ нулю.

С. *На отрѣзкѣ* $(-h, +h)$

$$\underset{k=\infty}{\text{пред.}}\ \frac{E_{2k}(\sin x)\,.\,2^{2k}(2k+1)!}{h^{2k+1}} = \underset{}{\text{пред.}}\ \frac{E_{2k-1}(\sin x)\,.\,2^{2k}(2k+1)!}{h^{2k+1}} = 1,$$

и

$$\underset{k=\infty}{\text{пред.}}\ \frac{E_{2k}(\cos x)\,.\,2^{2k+1}(2k+2)!}{h^{2k+2}} = \underset{}{\text{пред.}}\ \frac{E_{2k+1}(\cos x)\,.\,2^{2k+1}(2k+2)!}{h^{2k+2}} = 1\,.$$

Доказательство подобно предыдущему [1]).

D. *Если*

$$\underset{n=\infty}{\text{пред.}}\ \frac{a_n}{R^n} = 1,$$

то на отрѣзкѣ $(-1, +1)$, *при* n *достаточно большомъ*,

$$\frac{R^{n+1}}{2^n} F\left(\frac{n}{2}+1, \frac{n}{2}+\frac{3}{2}, n+2, R^2\right) < E_n[f(x)] < \frac{R^{n+1}}{2^n(1-R)} F\left(\frac{n}{2}+1, \frac{n}{2}+\frac{3}{2}, n+2, R^2\right),$$

гдѣ F *означаетъ гипергеометрическую функцію.*

Для простоты письма, положимъ $a_n = R^n$ (что соотвѣтствуетъ $f(x) = \frac{1}{1-Rx}$). Въ такомъ случаѣ,

$$\lambda_n = \frac{R^{n+1}}{2^n}\left[1 + (n+3)\left(\frac{R}{2}\right)^2 + \frac{(n+4)(n+5)}{2!}\left(\frac{R}{2}\right)^4 + \right.$$

$$\left. + \frac{(n+5)(n+6)(n+7)}{3!}\left(\frac{R}{2}\right)^6 + \ldots\right] = \frac{R^{n+1}}{2^n} F\left(\frac{n}{2}+1 . \frac{n}{2}+\frac{3}{2}, n+2, R^2\right);$$

и слѣдовательно,

$$\lambda_n + \lambda_{n+1} + \ldots = \frac{R^{n+1}}{2^n}\left[F\left(\frac{n}{2}+1, \frac{n}{2}+\frac{3}{2}, n+2, R^2\right) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{R}{2}\right) F\left(\frac{n}{2}+\frac{3}{2}, \frac{n}{2}+2, n+3, R^2\right) + \ldots\right].$$

Но нетрудно убѣдиться, что

$$\frac{F\left(\frac{n}{2}+1, \frac{n}{2}+\frac{3}{2}, n+2, R^2\right)}{F\left(\frac{n}{2}+\frac{3}{2}, \frac{n}{2}+2, n+3, R^2\right)} > \frac{1}{2},$$

---

[1]) Согласно терминологіи, предложенной въ добавленіи къ IV главѣ, преобразованіе § 61 приводитъ во всѣхъ этихъ случаяхъ къ асимптотическимъ выраженіямъ многочленовъ, наименѣе уклоняющихся отъ разсматриваемыхъ функцій.

если замѣтить, что отношеніе $(p+1)$-го члена числителя къ $(p+1)$-му члену знаменателя равно

$$\frac{\left(\frac{n}{2}+1\right)(n+p+2)}{(n+2)\left(\frac{n}{2}+p+1\right)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{n+p+2}{\left(\frac{n}{2}+p+1\right)}>\frac{1}{2};$$

слѣдовательно,

$$\lambda_n+\lambda_{n+1}+\ldots<\frac{R^{n+1}}{2^n}(1+R+R^2+\ldots)\cdot F\left(\frac{n}{2}+1,\frac{n}{2}+\frac{3}{2},\, n+2,\, R^2\right)=$$

$$=\frac{R^{n+1}}{2^n(1-R)}F\left(\frac{n}{2}+1,\frac{n}{2}+\frac{3}{2},\, n+2,\, R^2\right);$$

а потому

$$\frac{R^{n+1}}{2^n}F\left(\frac{n}{2}+1,\frac{n}{2}+\frac{3}{2},\, n+2,\, R^2\right)<E_n[f(x)]<$$

$$<\frac{R^{n+1}}{2^n(1-R)}F\left(\frac{n}{2}+1,\frac{n}{2}+\frac{3}{2},\, n+2,\, R^2\right).$$

Интересно сравнить полученный результатъ съ теоремой (29).

Не останавливаясь на этомъ, перейдемъ къ разсмотрѣнію не аналитическихъ функцій.

62. Теорема Вейерштрасса. Выведемъ нѣкоторыя слѣдствія изъ неравенства

$$E_{2n}|x|<\frac{0{,}32}{2n}, \tag{54}$$

имѣющаго мѣсто на отрѣзкѣ $(-1,+1)$ для достаточно большихъ значеній n.

Хорошо извѣстно, что изъ того, что

$$\underset{n=\infty}{\text{пред.}}\; E_n|x|=0,$$

вытекаетъ теорема Вейерштрасса, т. е.

$$\underset{n=\infty}{\text{пред.}}\; E_n[f(x)]=0,$$

для какой угодно непрерывной функціи [1]. Я хочу замѣтить только, что при помощи формулъ, указанныхъ мной въ 1905 г. въ Bulletin de la

---

[1]) Не безполезно обратить вниманіе на то, что непрерывность функціи $f(x)$ есть условіе необходимое и достаточное для того, чтобъ пред. $E_n[f(x)]=0$.

Société Mathématique de France, изъ неравенства (54) можно вывести въ нѣкоторыхъ случаяхъ довольно точную верхнюю границу для $E_{2n}[f(x)]$.

Пусть $f(x)$ будетъ непрерывная на отрѣзкѣ 01 функція, и пусть $y=f_n(x)$ будетъ уравненіемъ ломанной линіи, имѣющей вершинами точки на линіи $y=f(x)$, съ абсциссами $x_k=\frac{k}{n}(x=0,\ 1,\ldots n)$.

Упомянутыя мною формулы заключаются въ томъ, что

$$f_n(x)=\sum_{k=1}^{k=n-1}A_k|x-x_k|+A+Bx,$$

гдѣ

$$A_k=\frac{n}{2}\left[f\left(\frac{k+1}{n}\right)+f\left(\frac{k-1}{n}\right)-2f\left(\frac{k}{n}\right)\right],$$

$$A=\frac{1}{2}\left[f(0)+nf\left(\frac{n-1}{n}\right)-(n-1)f(1)\right],$$

$$B=\frac{n}{2}\left[f\left(\frac{1}{n}\right)+f(1)-f(0)-f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right].$$

Замѣняя $|x-x_k|$ приближенными многочленами $f_{n,p}(x)$ степени p, получаемъ приближенный многочленъ степени p для $f_n(x)$ и заключаемъ, что, при p достаточно большомъ, ошибка $|f_{n,p}(x)-f_n(x)|$ и, тѣмъ болѣе, $E_p[f_n(x)]$ будетъ удовлетворять неравенству

$$E_p[f_n(x)]<\frac{0{,}32}{p}\sum_{k=1}^{k=n-1}|A_k|. \tag{78}$$

Ограничимся только разсмотрѣніемъ случая, когда функція $f(x)$ удовлетворяетъ условію Дини-Липшица, а именно, пусть

$$|f(x+h)-f(x)|<\frac{\delta(h)}{|\log h|},$$

гдѣ $\delta(h)$ стремится къ нулю вмѣстѣ съ h.

Въ такомъ случаѣ, очевидно,

$$|f(x)-f_n(x)|<\frac{2\delta\left(\frac{1}{n}\right)}{\log n};$$

и, съ другой стороны,

$$\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{k=n-1}|A_k|<\frac{n^2}{p}\cdot\frac{\delta\left(\frac{1}{n}\right)}{\log n},$$

такъ какъ $|A_k| < \dfrac{n\delta\left(\frac{1}{n}\right)}{\log n}$. Поэтому, полагая $p = n^2$, находимъ

$$E_p[f(x)] < |f(x) - f_{n,p}| < 4{,}64\,\frac{\delta\left(\frac{1}{\sqrt{p}}\right)}{\log p}. \tag{79}$$

Аналогичное неравенство далъ Lebesgue въ цитированной выше работѣ изъ Annales de Toulouse. Замѣтимъ, что въ случаѣ существованія обобщеннаго условія Дини-Липшица, неравенство (79) соблюдается не для всѣхъ, но для безчисленнаго множества значеній p. Слѣдовательно, принимая во вниманіе результатъ § 27, находимъ, что *условіе необходимое и достаточное, чтобы функція* $f(x)$ *удовлетворяла обыкновенному условію Дини-Липшица заключается въ томъ, чтобы, при всякомъ* $n > n_0$, пред.$_{n=\infty}$ $E_n[f(x)]\,.\log n = 0$; *условіе необходимое и достаточное, чтобы функція* $f(x)$ *удовлетворяла обобщенному условію Дини-Липшица, заключается въ томъ, чтобы, при безчисленномъ множествѣ значеній* $n > n_0$, пред. $E_n[f(x)]\log n = 0$.

64. Первое обобщеніе теоремы Вейерштрасса. *Если данъ безконечный рядъ чиселъ*

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n < \ldots,$$

обладающій свойствомъ, что $H < \alpha_i < K$, *гдѣ* H *и* K *два независимыхъ отъ* i *положительныхъ числа, то для всякой непрерывной на отрѣзкѣ* 01 *функціи* $f(x)$ *можно составить сумму* $\sum\limits_{i=1}^{i=n} A_i x^{\alpha_i}$ *такъ, чтобы на всемъ отрѣзкѣ*

$$\left| f(x) - \sum_{i=1}^{i=n} A_i x^{\alpha_i} \right| < \varepsilon,$$

какъ бы мало ни было число ε.

(Указаннымъ свойствомъ обладаютъ, напримѣръ, числа $\alpha_i = 1 - \dfrac{1}{2^i}$).

Наша теорема будетъ, очевидно, доказана, если мы покажемъ, что она справедлива для $f(x) = x^p$, гдѣ p произвольное цѣлое число, большее, чѣмъ единица.

Для этого замѣчаемъ сначала, что, на основаніи разсужденія совершенно подобнаго доказательству теоремы (43), можно утверждать, что *наилучшее приближеніе* x^p *на отрѣзкѣ* 01 *при помощи суммы вида* $\sum\limits_{i=1}^{i=n} A_i x^{\alpha_i}$ *всегда меньше наилучшаго приближенія при помощи суммы вида* $\sum\limits_{i=1}^{i=n} B_i x^{\beta_i}$, *если* $p > \alpha_i > \beta_i > 0$.

Съ другой стороны, полагая въ неравенствахъ (75) $x^2 = y$, выводимъ изъ нихъ, что на отрѣзкѣ 01

$$E_{m-1}(x^{m+k}) < \frac{(2m+2k)\ldots(2m+k+1)}{2^{2m+2k-1}k!}\left[1+\frac{k}{2m+k+1}+\right.$$

$$\left.+\frac{k(k-1)}{(2m+k+1)(2m+k+2)}+\ldots\right],$$

и, тѣмъ болѣе, обозначая черезъ $E'_n(x^p)$ наилучшее приближеніе x^p на отрѣзкѣ 01 при помощи суммы $\sum\limits_{i=1}^{i=n} A_i x^i$, имѣемъ

$$E'_n(x^p) < \frac{2p\ldots(p+n+2)}{2^{2p-2}(p-n-1)!}\left[1+\frac{p-n-1}{p+n+2}+\frac{(p-n-1)(p-n-2)}{(p+n+2)(p+n+3)}\ldots\right]=$$

$$= \mathrm{I}_{n+1}+\mathrm{I}_{n+2}+\ldots+\mathrm{I}_p\,,$$

гдѣ

$$\mathrm{I}_s = \frac{2p\ldots(p+s+1)}{2^{2p-2}(p-s)!} = \mathrm{I}_0\frac{p(p-1)\ldots(p-s+1)}{(p+1)\ldots(p+s)}.$$

Поэтому

$$\log \mathrm{I}_s = \log \mathrm{I}_0 + \log\frac{p(p-1)\ldots(p-s+1)}{(p+1)\ldots(p+s)} =$$

$$= \log \mathrm{I}_0 + \left[\log\left(1-\frac{1}{p}\right)-\log\left(1+\frac{1}{p}\right)\right]+\ldots$$

$$+\left[\log\left(1-\frac{s-1}{p}\right)-\log\left(1+\frac{s-1}{p}\right)\right]-\log\left(1+\frac{s}{p}\right) <$$

$$< \log \mathrm{I}_0 - \frac{2}{p}-\frac{4}{p}-\ldots-\frac{2(s-1)}{p}-\frac{s}{p}+\frac{s^2}{2p^2} =$$

$$= \log \mathrm{I}_0 - \frac{s^2}{p}+\frac{s^2}{2p^2}.$$

Откуда

$$\mathrm{I}_s < \mathrm{I}_0 e^{-\frac{s^2}{p}+\frac{s^2}{2p^2}} < \frac{4}{\sqrt{p\pi}}e^{-\frac{s^2}{p}+\frac{s^2}{2p^2}},$$

такъ какъ

$$\mathrm{I}_0 = \frac{2p!}{2^{2p-2}(p!)^2} = \frac{1.3\ldots2p-1}{2.4\ldots2p}.4 < \frac{4}{\sqrt{p\pi}}.$$

Но, при $p > 1$, $s > 0$,

$$e^{-\frac{s^2}{p}+\frac{s^2}{2p^2}} < \frac{1}{2}\left[e^{-\frac{\left(s-\frac{1}{2}\right)^2}{p}} + e^{-\frac{s^2}{p}}\right]. \tag{80}$$

Дѣйствительно, это неравенство равнозначно неравенству

$$e^{\frac{s^2}{2p^2}} < \frac{1}{2}\left[e^{\frac{s}{p}-\frac{1}{4p}} + 1\right],$$

или, полагая $u = \frac{s}{p}$, $\alpha = \frac{1}{4p}$, равнозначно неравенству

$$f(u) = 2e^{\frac{u^2}{2}-u} - e^{-u} < e^{-\alpha},$$

справедливость котораго нужно, слѣдовательно, доказать при предположеніи, что $\alpha \leqq \frac{1}{8}$, $1 \geqq u \geqq 4\alpha$. Но нетрудно видѣть, что, при разсматриваемыхъ значеніяхъ u, $f''(u) > 0$; поэтому наибольшее значеніе $f(u)$ будетъ равно $f(1)$ или $f(4\alpha)$, такъ что достаточно замѣтить, что, при $\alpha \leqq \frac{1}{8}$,

$$f(1) = 2e^{-\frac{1}{2}} - e^{-1} < e^{-\alpha} \quad \text{и} \quad f(4\alpha) = 2e^{8\alpha^2-4\alpha} - e^{-4\alpha} < e^{-\alpha}.$$

Изъ неравенства (80) заключаемъ, что

$$e^{-\frac{s^2}{p}+\frac{s^2}{2p^2}} < \int_{s-1}^{s} e^{-\frac{z^2}{p}}\,dz,$$

а потому

$$\mathrm{I}_s < \frac{4}{\sqrt{p\pi}}\int_{s-1}^{s} e^{-\frac{z^2}{p}}\,dz = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{s-1}{\sqrt{p}}}^{\frac{s}{\sqrt{p}}} e^{-z^2}\,dz.$$

Слѣдовательно [1]), наконецъ,

---

[1]) Указанное здѣсь вычисленіе аналогично тому, которое я сдѣлалъ въ замѣткѣ „Sur le calcul approché des probabilités par la formule de Laplace“ (Сообщ. Х. М. О. T. XII n⁰ 3) и приводитъ къ слѣдующему результату для теоріи вѣроятностей: *если вѣроятность событія равна* $\frac{1}{2}$, *то, при* $2p\,(p > 1)$ *испытаніяхъ, вѣроятность, что число* m *появленій событія удовлетворяетъ неравенству* $|m-p| \leqq z_0\sqrt{p}$, *болѣе, чѣмъ* $\Phi(z_0) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{z_0} e^{-z^2}\,dz$.

$$E'_n(x^p) < \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{n}{\sqrt{p}}}^{\infty} e^{-z^2} dz. \tag{81}$$

Такимъ образомъ $E'_n(x^p)$ *стремится къ нулю, если* $\frac{n}{\sqrt{p}}$ *возрастаетъ безконечно.* Поэтому, въ частности $E'_n(x^{pn})$ стремится къ нулю, если, при данномъ p, n возрастаетъ безконечно. Но, полагая $x^n = y$, мы видимъ, что $E'_n(x^{pn})$ есть вмѣстѣ съ тѣмъ наилучшее приближеніе функціи x^p при помощи суммы $\sum_{i=1}^{i=n} B_i x^{\frac{i}{n}}$ на томъ же отрѣзкѣ 01. Слѣдовательно, благодаря замѣчанію, сдѣланному въ началѣ доказательства, приближеніе x^p при помощи суммы вида $\sum_{i=1}^{i=n} A_i x^{\alpha_i}$ стремится къ нулю вмѣстѣ съ $\frac{1}{n}$, такъ какъ (введя, если понадобится, перемѣнную x^k вмѣсто x) всегда можно предположить, что $1 \leqq H < \alpha_i$, ч. и. т. д.

Примѣчаніе. Отрѣзокъ 01 можетъ быть замѣненъ произвольнымъ отрѣзкомъ AB на положительной оси; и кромѣ того, нетрудно убѣдиться, что, если отрѣзокъ AB не доходитъ до 0, то условіе, чтобы $H > 0$, $K > 0$, можетъ быть отброшено.

65. Второе обобщеніе теоремы Вейерштрасса. *Если показатели α_n возрастаютъ безконечно вмѣстѣ съ n, то наилучшее приближеніе непрерывной функціи $f(x)$ на отрѣзкѣ 01 при помощи $\Sigma A_i x^{\alpha_i}$ стремится къ нулю, если $\frac{\alpha_n}{n \log n}$ стремится къ нулю; напротивъ, наилучшее приближеніе не можетъ стремиться къ нулю, если есть такое число ε, что $\alpha_n \geqq n(\log n)^{2+\varepsilon}$ или $\alpha_n \geqq n(\log n)^2(\log\log n)^{1+\varepsilon}$ и т. д.*

Займемся сначала доказательствомъ первой части теоремы.

Достаточно будетъ разсмотрѣть случай, когда $f(x) = x^p$, гдѣ p произвольное цѣлое положительное число, если брать только тѣ α_i, которые больше p, и, тѣмъ болѣе, достаточно будетъ доказать, что, какъ бы мало ни было число δ, возможно на всемъ отрѣзкѣ 01 удовлетворить неравенству

$$\left| x - \sum_{i=i_0+1}^{i=i_0+n} A_i x^{\alpha_i - p + 1} \right| < \delta, \tag{82}$$

ибо, если это неравенство имѣетъ мѣсто, то, конечно,

$$\left| x^p - \sum_{i=i_0+1}^{i=i_0+n} A_i x^{\alpha_i} \right| < \delta x^{p-1} \leqq \delta .$$

Пусть

$$\alpha_n = \varepsilon_n n \log(n+1);$$

въ такомъ случаѣ, по предположенію, какъ бы мало ни было число γ, можно указать достаточно большое число n_0, чтобы, при $n \geqq n_0$, имѣть $\varepsilon_n < \gamma$,

На основаніи теоремы (43), неравенство (82) можетъ быть осуществленно, если извѣстно, что

$$\left| x - \sum_{k=1}^{h=n} B_h x^{\beta_h} \right| < \delta,$$

гдѣ

$$\beta_h > \alpha_{i_0+h} - p + 1.$$

Положимъ $\beta_h = kh$; тогда

$$\left| x - \sum_{h=1}^{h=n} B_h x^{kh} \right| = \left| y^{\frac{1}{k}} - \sum_{h=1}^{h=n} B_h y^h \right|.$$

Мы увидимъ въ слѣдующей главѣ (и это вытекаетъ также изъ примѣчанія c къ теоремѣ (16)), что эта разность можетъ быть сдѣлана менѣе $\frac{b}{n^{1/k}}$, гдѣ b — независимая отъ n и k постоянная. Такимъ образомъ

$$\delta < \frac{b}{n^{1/k}},$$

если

$$k > \frac{\alpha_{i_0+h} - p + 1}{h} = \frac{\varepsilon_{i_0+h}(i_0+h)\log(i_0+h) - p + 1}{h}. \tag{83}$$

Для значеній h, которыя меньше, чѣмъ i_0, и меньше, чѣмъ $n_0 - i_0$, неравенству (83) можно удовлетворить, взявши для k нѣкоторое вполнѣ опредѣленное число k_0; для остальныхъ же значеній h, неравенство будетъ соблюдено, если взять

$$k = 2\gamma \log 2n.$$

Можно предположить n настолько большимъ, что $2\gamma \log 2n > k_0$.

Слѣдовательно,

$$\delta < \frac{b}{n^{\frac{1}{2\gamma \log 2n}}} = \frac{b}{e^{\frac{\log n}{2\gamma \log 2n}}} < be^{-\frac{1}{4\gamma}};$$

поэтому δ можетъ быть сдѣлано сколь угодно малой, и первая часть теоремы доказана.

Для доказательства второй части теоремы замѣчаемъ, что наилучшее приближеніе x на отрѣзкѣ 01 при помощи суммы [1] $\sum_{i=1}^{i=n} A_i x^{\alpha_i}$ (гдѣ $\alpha_i > 1$), β_n, удовлетворяетъ, при всякомъ положительномъ значеніи μ, неравенству

$$\beta_n > \beta_{n-1} \frac{(1+\mu)^{\alpha_n - 1} - 1}{(1+\mu)^{\alpha_n} + 1}. \tag{84}$$

Дѣйствительно, изъ

$$|x + A_1 x^{\alpha_1} + \ldots + A_n x^{\alpha_n}| < \beta_n$$

заключаемъ, что и

$$\left| \frac{x}{1+\mu} + A_1 \left(\frac{x}{1+\mu}\right)^{\alpha_1} + \ldots + A_n \left(\frac{x}{1+\mu}\right)^{\alpha_n} \right| < \beta_n;$$

а потому

$$|x(1+\mu)^{\alpha_n - 1} + \ldots + A_n x^{\alpha_n}| < \beta_n (1+\mu)^{\alpha_n},$$

откуда

$$|x[(1+\mu)^{\alpha_n - 1} - 1] + \ldots A'_{n-1} x^{\alpha_{n-1}}| < \beta_n [(1+\mu)^{\alpha_n} + 1],$$

и

$$|x + B_1 x^{\alpha_1} + \ldots + B_{n-1} x^{\alpha_{n-1}}| < \beta_n \cdot \frac{(1+\mu)^{\alpha_n} + 1}{(1+\mu)^{\alpha_n - 1} - 1},$$

слѣдовательно,

$$\beta_{n-1} < \beta_n \cdot \frac{(1+\mu)^{\alpha_n} + 1}{(1+\mu)^{\alpha_n - 1} - 1},$$

или

$$\beta_n > \beta_{n-1} \cdot \frac{(1+\mu)^{\alpha_n - 1} - 1}{(1+\mu)^{\alpha_n} + 1}. \tag{84}$$

Изъ неравенства (84) получаемъ немедленно

$$\beta_n > \beta_{n_0} \cdot \prod_{i=n_0+1}^{i=n} \frac{(1+\delta_i)^{\alpha_i - 1} - 1}{(1+\delta_i)^{\alpha_i} + 1}, \tag{85}$$

гдѣ δ_i какія угодно положительныя числа. Достаточно теперь будетъ показать, что при соотвѣтствующемъ выборѣ чиселъ δ_i, произведеніе, стоящее во второй части неравенства, *не* стремится къ нулю, при $n = \infty$, если $\alpha_n \geqq n(\log n)^{2+\varepsilon}$ или $\alpha_n \geqq n(\log n)^2(\log\log n)^{1+\varepsilon}$ и т. д.

---

[1]) Если бы одно изъ чиселъ α_i было бы равно 1, то вмѣсто наилучшаго приближенія x можно было бы разсматривать наилучшее приближеніе x^p, гдѣ $p \gtreqless \alpha_i$.

Но

$$\frac{(1+\delta_i)^{\alpha_i-1}-1}{(1+\delta_i)^{\alpha_i}+1}=\frac{1}{1+\delta_i}\cdot\frac{1-\dfrac{1}{(1+\delta_i)^{\alpha_i-1}}}{1+\dfrac{1}{(1+\delta_i)^{\alpha_i}}}.$$

Поэтому разсматриваемое произведеніе не можетъ стремиться къ нулю, если оба ряда

$$\Sigma\delta_i,\ \Sigma\frac{1}{(1+\delta_i)^{\alpha_i}}$$

будутъ сходящимися. Для сходимости перваго ряда, достаточно взять

$$\delta_n=\frac{2}{n(\log n)^{1+\varepsilon}},\quad \text{или}\quad \delta_n=\frac{2}{n\log n(\log\log n)^{1+\varepsilon}}\ \text{и т. д.};$$

возьмемъ, напримѣръ, первое изъ этихъ значеній. Въ такомъ случаѣ, и рядъ

$$\Sigma\frac{1}{(1+\delta_i)^{\alpha_i}}$$

будетъ сходящимся, если $\alpha_i \geqq i(\log i)^{2+\varepsilon}$.

Въ самомъ дѣлѣ, общій членъ этого ряда меньше, чѣмъ

$$\frac{1}{\left[1+\dfrac{2}{i(\log i)^{1+\varepsilon}}\right]^{i(\log i)^{2+\varepsilon}}},$$

т. е., при i достаточно большомъ, меньше, чѣмъ

$$\frac{1}{e^{2\log i}}=\frac{1}{i^2};$$

а потому рядъ $\Sigma\frac{1}{(1+\delta_i)^{\alpha_i}}$ сходящійся, и слѣдовательно, вторая часть теоремы доказана.

Примѣчаніе. Отрѣзокъ 01 можетъ быть замѣненъ произвольнымъ отрѣзкомъ AB положительной оси.

Добавленіе къ главѣ V.

Разложеніе произвольныхъ функцій въ нормальные ряды.

66. **Нормальные ряды.** Нормальнымъ рядомъ на отрѣзкѣ 01 называется рядъ вида

$$\sum_{p=0}^{p=\infty}\sum_{q=0}^{q=\infty} A_{p,\,q}x^p(1-x)^q,$$

абсолютно и равномѣрно сходящійся на этомъ отрѣзкѣ. Въ моемъ сочиненіи «Изслѣдованіе и интегрированіе дифференціальныхъ уравненій съ частными производными 2-го порядка эллиптическаго типа» дано (во II главѣ) разложеніе въ нормальный рядъ, пригодное для всякой функціи, имѣющей непрерывную производную на отрѣзкѣ 01. Естественно задать себѣ вопросъ, можетъ ли совершенно произвольная непрерывная функція быть разложена въ нормальный рядъ.

Отвѣтъ на этотъ вопросъ, какъ мы увидимъ далѣе, оказывается утвердительнымъ. А именно, мы укажемъ пріемъ для преобразованія произвольнаго, равномѣрно сходящагося ряда многочленовъ въ нормальный рядъ. Съ этой цѣлью разрѣшимъ предварительно слѣдующую алгебраическую задачу.

Задача. *Преобразовать многочленъ*

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$$

въ выраженіе

$$P(x)=\sum_{p=0}^{p+q=m}\sum_{q=0} A_{p,\,q}x^p(1-x)^q,$$

гдѣ $m \geqq n$, *такъ, чтобы максимумъ суммы*

$$\sum_{p=0}^{p+q=m}\sum_{q=0} |A_{p,\,q}|x^p(1-x)^q$$

на отрѣзкѣ 01 *былъ возможно малъ.*

Въ виду того, что число коэффиціентовъ $A_{p,\,q}$ ограничено, задача, очевидно, имѣетъ рѣшеніе, т. е. можно выбрать эти коэффиціенты такъ чтобъ максимумъ суммы

$$\sum_{p=0}^{p+q=m}\sum_{q=0} |A_{p,\,q}|x^p(1-x)^q$$

достигалъ своего низшаго предѣла; этому минимальному значенію максимума мы для краткости дадимъ названіе *нормальнаго максимума степени* m даннаго многочлена на отрѣзкѣ 01.

Весьма замѣчательно, что поставленная задача разрѣшается совершенно элементарно, при чемъ обнаруживается интересный фактъ, что *нормальный максимумъ степени* m *любого многочлена* $P(x)$ *имѣетъ предѣломъ, при* $m=\infty$, *максимумъ* $|P(x)|$ *на данномъ отрѣзкѣ*. Искомое рѣшеніе вытекаетъ изъ простого замѣчанія: допустимъ, что задача рѣшена, и пусть выраженіе

$$P(x)=\sum_{p=0}^{p+q=m}\sum_{q=0} a_{p,\,q}x^p(1-x)^q$$

есть одно изъ возможныхъ рѣшеній. Я говорю, что, если среди членовъ $a_{p,\,q}x^p(1-x)^q$ есть такіе, степень которыхъ $p+q=m-k$, гдѣ $k>0$, то рѣшеніемъ задача будетъ служить и то выраженіе, которое получится отъ замѣны $a_{p,\,q}x^p(1-x)^q$ суммой членовъ степени m,

$$a_{p,\,q}x^p(1-x)^q[x+(1-x)]^k=a_{p,\,q}[x^{p+k}(1-x)^q+kx^{p+k-1}(1-x)^{q+1}+\ldots x^p(1-x)^{q+k}].$$

Въ самомъ дѣлѣ,

$$|a_{p,\,q}|x^p(1-x)^q=|a_{p,\,q}|x^{q+k}(1-x)^q+|ka_{p,\,q}|x^{p+k-1}(1-x)^{q+1}+\ldots|a_{p,\,q}|x^p(1-x)^{q+k};$$

поэтому сумма модулей преобразованнаго выраженія не можетъ превысить суммы модулей даннаго выраженія.

Отсюда слѣдуетъ, что среди рѣшеній задачи всегда есть одно рѣшеніе, въ которомъ сумма показателей $p+q=m$. Другими словами, задача будетъ рѣшена, если представимъ $P(x)$ въ видѣ

$$P(x)=A_mx^m+A_{m-1}x^{m-1}(1-x)+\ldots+A_0(1-x)^m.$$

Остается вычислить коэффиціенты A_i такъ, чтобы имѣть тождественно

$$A_mx^m+A_{m-1}x^{m-1}(1-x)+\ldots+A_0(1-x)^m=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0.$$

Откуда находимъ для опредѣленія $(m+1)$ коэффиціента $(m+1)$ уравненіе

$$
\begin{aligned}
&A_0 = a_0,\\
&A_1 - mA_0 = a_1,\\
&\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots \qquad\qquad (86)\\
&A_k - (m-k+1)A_{k-1} + \ldots + (-1)^k \frac{m(m-1..(m-k+1)}{1.2..k} A_0 = a_k,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&A_m - A_{m-1} \ldots\ldots + (-1)_m A_0 = a_m,
\end{aligned}
$$

гдѣ $a_k = 0$, если $k > n$.

Рѣшеніе уравненій (86) не представляетъ труда и даетъ немедленно

$$
\begin{aligned}
&A_0 = a_0,\\
&A_1 = a_1 + ma_0,\\
&A_2 = a_2 + (m-1)a_1 + \frac{m(m-1)}{2} a_0,\\
&\cdots\cdots\cdots\\
&A_k = a_k + C^1_{m-k+1} a_{k-1} + \ldots + C^k_m a_0, \qquad (87)\\
&\cdots\cdots\cdots\\
&A_m = a_m + a_{m-1} + \ldots\ldots + a_0,
\end{aligned}
$$

гдѣ

$$C^k_m = \frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{1.2\ldots k}.$$

Итакъ поставленная задача рѣшена; *нормальный максимумъ степени m даннаго многочлена равенъ максимуму суммы*

$$\sum_{k=0}^{k=m} |A_k| x^k (1-x)^{m-k},$$

гдѣ коэффиціенты A_k опредѣляются формулами (87).

67. Изслѣдованіе величины нормальнаго максимума. Формулу, опредѣляющую A_k можно преобразовать слѣдующимъ образомъ:

$$A_k = C^k_m \left[a_0 + \frac{C^{k-1}_{m-1}}{C^k_m} a_1 + \frac{C^{k-2}_{m-2}}{C^k_m} a_2 + \ldots \right] = C^k_m \left[a_0 + \frac{k}{m} a_1 + \frac{k(k-1)}{m(m-1)} a_2 + \ldots \right] =$$

$$= C^k_m \left[a_0 + \frac{k}{m} a_1 + \left(\frac{k}{m}\right)^2 a_2 . \frac{1-\frac{1}{k}}{1-\frac{1}{m}} + \ldots + \left(\frac{k}{m}\right)^n a_n . \frac{\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1-\frac{2}{k}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{k}\right)}{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{m}\right)} \right].$$

Изъ полученной формулы видно, что, при безконечномъ возрастаніи m,

$$\text{пред.}\frac{A_k}{C_m^k}=\text{пред. } P\left(\frac{k}{m}\right). \tag{88}$$

Дѣйствительно, если k есть опредѣленное число, то всѣ члены суммы, состоящей изъ даннаго числа $n+1$ слагаемыхъ,

$$\frac{A_k}{C_m^k}=a_0+\frac{k}{m}a_1+\left(\frac{k}{m}\right)^2 a_2\frac{1-\frac{1}{k}}{1-\frac{1}{m}}+\ldots,$$

кромѣ a_0, стремятся къ нулю, поэтому

$$\text{пред. }\frac{A_k}{C_m^k}=a_0=P(0)=\text{пред. } P\left(\frac{k}{m}\right).$$

Если же k также возрастаетъ безконечно, то

$$\text{пред. }\frac{A_k}{C_m^k}=\text{пред.}\left[a_0+a_1\frac{k}{m}+a_2\left(\frac{k}{m}\right)^2+\ldots+a_n\left(\frac{k}{m}\right)^n\right]=\text{пред. } P\left(\frac{k}{m}\right).$$

Слѣдуетъ прибавить, что разность

$$\delta_k=\frac{A_k}{C_m^k}-P\left(\frac{k}{m}\right)$$

равномѣрно стремится къ нулю, при безконечномъ возрастаніи m.

Въ самомъ дѣлѣ,

$$\delta_k=\left(\frac{k}{m}\right)^2 a_2\left[\frac{1-\frac{1}{k}}{1-\frac{1}{m}}-1\right]+\ldots+\left(\frac{k}{m}\right)^n a_n\left[\frac{\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1-\frac{2}{k}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{k}\right)}{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{m}\right)}-1\right];$$

поэтому

$$|\delta_k|<\left(\frac{k}{m}\right)^2|a_2|\left[1-\left(1-\frac{1}{k}\right)\right]+\ldots+\left(\frac{k}{m}\right)^n|a_n|\left[1-\left(1-\frac{1}{k}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{k}\right)\right]<$$

$$<\left(\frac{k}{m}\right)^2|a_2|\cdot\frac{1}{k}+\ldots\left(\frac{k}{m}\right)^n|a_n|.\frac{(n-1)^2}{k}<\frac{B}{m},$$

гдѣ

$$B=|a_2|+4|a_3|+\ldots+(n-1)^2|a_n|;$$

итакъ

$$A_k=C_m^k\left[P\left(\frac{k}{m}\right)+\delta_k\right], \tag{88bis}$$

гдѣ

$$|\delta_k|<\frac{B}{m}.$$

Слѣдовательно,

$$\sum_{k=0}^{k=m} |A_k| x^k(1-x)^{m-k} = \sum_{k=0}^{k=m} \left| P\left(\frac{k}{m}\right) + \delta_k \right| . C_m^k x^k (1-x)^{m-k} <$$

$$< \left(M + \frac{B}{m}\right) \sum_{k=0}^{k=m} C_m^k x^k (1-x)^{m-k} = \left(M + \frac{B}{m}\right) [x + (1-x)]^m = M + \frac{B}{m},$$

обозначая черезъ M максимумъ многочлена $P(x)$ на отрѣзкѣ 01. Такимъ образомъ обозначая черезъ M_m нормальный максимумъ степени m многочлена $P(x)$ на отрѣзкѣ 01, имѣемъ

$$M_m < M + \frac{B}{m}. \tag{89}$$

Слѣдствіе. *Если многочленъ $P(x)$ положителенъ на отрѣзкѣ 01, то, при m достаточно большомъ, всѣ коэффиціенты A_k положительны.*

68. Теорема. *Всякая непрерывная на отрѣзкѣ 01 функція разлагается въ нормальный рядъ на этомъ отрѣзкѣ.*

Въ самомъ дѣлѣ, на основаніи теоремы Вейерштрасса, всякую непрерывную функцію $f(x)$ можно представить въ видѣ равномѣрно сходящагося ряда многочленовъ

$$f(x) = Q_0(x) + Q_1(x) + \ldots + Q_s(x) + \ldots \tag{90}$$

Написанный рядъ можно будетъ преобразовать въ нормальный рядъ слѣдующимъ образомъ: соединяя вмѣстѣ, если это понадобится, по нѣсколько членовъ, рядъ (90) преобразуемъ въ рядъ

$$f(x) = P_0(x) + P_1(x) + \ldots + P_s(x) + \ldots \tag{90$^{\text{bis}}$}$$

въ которомъ всѣ многочлены $P_s(x)$ (при $s > 0$) удовлетворяютъ условію

$$|P_s(x)| < \frac{1}{2^s}.$$

Послѣ этого представимъ всѣ многочлены $P_s(x)$ въ видѣ

$$P_s(x) = \sum_{k=0}^{k=m} A_k^{(s)} x^k (1-x)^{m-k}.$$

Полагая m достаточно большимъ, чтобъ нормальный максимумъ $M_m^{(s)}$ многочлена P_s не превышалъ болѣе, чѣмъ въ 2 раза его обыкновеннаго максимума, получимъ

$$\sum_{k=0}^{k=m} |A_k^{(s)}| x^k (1-x)^{m-k} < \frac{1}{2^{s-1}}.$$

Дѣлая тоже преобразованіе для всѣхъ s, мы, очевидно, преобразуемъ рядъ $f(x)$ въ нормальный рядъ; ч. и. т. д.

Слѣдствіе. *Для всякой непрерывной функціи имѣетъ мѣсто равенство* [1])

$$f(x) = \text{пред.}_{m=\infty} \sum_{k=0}^{k=m} f\left(\frac{k}{m}\right) C_m^k x^k (1-x)^{m-k}.$$

Въ самомъ дѣлѣ, если $f(x) = P(x)$ есть многочленъ, то на основаніи равенства (88^{bis}),

$$\left| P(x) - \sum_{k=0}^{k=m} P\left(\frac{k}{m}\right) C_m^k x^k (1-x)^{m-k} \right| < \frac{B}{m}. \tag{91}$$

Если же $f(x)$ есть произвольная функція (90^{bis}), то, полагая

$$P_0 + P_1 + \ldots P_s = P,$$

имѣемъ

$$|f - P| < \frac{1}{2^s} \tag{92}$$

поэтому, примѣняя къ многочлену $P(x)$ неравенство (91) заключаемъ, что

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{k=m} f\left(\frac{k}{m}\right) C_m^k x^k (1-x)^{m-k} \right| < \frac{1}{2^{s-1}} + \frac{B}{m}.$$

Такимъ образомъ, какъ бы мало ни было число α, выбираемъ s достаточно большимъ, чтобы

$$\frac{1}{2^{s-1}} < \frac{\alpha}{2};$$

послѣ выбора s, многочленъ P и коэффиціентъ B будутъ опредѣлены, и слѣдовательно, выбирая m достаточно большимъ, найдемъ

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{k=m} f\left(\frac{k}{m}\right) C_m^k x^k (1-x)^{m-k} \right| < \alpha,$$

т. е.

$$f(x) = \text{пред.}_{m=\infty} \sum_{k=0}^{k=m} f\left(\frac{k}{m}\right) C_m^k x^k (1-x)^{m-k}.$$

Ч. и. т. д.

---

[1]) Эта формула выведена мною при помощи теоріи вѣроятностей въ маленькой замѣткѣ «Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur le calcul des probabilités», помѣщенной въ Сообщ. Харьк. Математ. Общ. Т. XIII n⁰ 1, 1912 г.

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ.

Разложеніе непрерывныхъ функцій въ ряды тригонометрическихъ многочленовъ.

Глава VI.

О приближеніи, осуществляемомъ посредствомъ разложенія функціи въ рядъ тригонометрическихъ многочленовъ.

69. Средняя квадратичная ошибка. Отысканіе многочлена данной степени, наименѣе уклоняющагося отъ нѣкоторой функціи $f(x)$, представляетъ, какъ это видно изъ предшествующихъ главъ, задачу чрезвычайной трудности. Поэтому интересно выяснить, какую выгоду для рѣшенія этой задачи, можно извлечь изъ рѣшенія другой аналогичной, но несравненно болѣе легкой, задачи отысканія многочлена $R_n(x)$ степени n по условію, чтобы *средняя квадратичная ошибка*

$$\int_a^b p(x) . [f(x) - R_n(x)]^2 dx$$

(при данномъ *вѣсѣ* $p(x) \geqq 0$) была бы возможно малой. Полагая, для опредѣленности, $a = -1$, $b = +1$, мы ограничимся разсмотрѣніемъ случая [1]), когда $p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Но

$$\delta_n^2 = \int_{-1}^{+1} [f(x) - R_n(x)]^2 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^\pi [f(\cos\theta) - R_n(\cos\theta)]^2 d\theta; \quad (93)$$

---

[1]) Обобщеніе результатовъ, которые будутъ получены въ этомъ случаѣ, не представляетъ серьезныхъ трудностей. См. *Haar* „Orthogonale Funktionensysteme“ Mathemat. Annalen B. 69. 1910, и въ Запискахъ Академіи Наукъ, *В. А. Стекловъ* „Sur la théorie de fermeture des systèmes de fonctions orthogonales“, 1911.

и, замѣчая (§ 10), что

$$R_n(\cos\theta) = A_0 + A_1\cos\theta + \ldots + A_n\cos n\theta,$$

находимъ условія необходимыя и достаточныя для минимума δ:

$$A_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(\cos\theta)d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\cos\theta)d\theta \tag{94}$$

и

$$A_p = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(\cos\theta).\cos p\theta d\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\cos\theta).\cos p\theta d\theta.$$

Формулы (94) даютъ ничто иное, какъ хорошо извѣстные коэффиціенты Фурье [1]) разложенія функціи $\varphi(\theta) = f(\cos\theta)$ въ тригонометрическій рядъ. Эти же коэффиціенты мы находимъ и для разложенія $f(x)$ въ рядъ тригонометрическихъ многочленовъ $T_n(x) = \cos n \arccos x$,

$$f(x) = A_0 + A_1T_1(x) + \ldots + A_nT_n(x) + \ldots; \tag{95}$$

а многочленъ

$$R_n(x) = A_0 + A_1T(x) + \ldots + A_nT_n(x), \tag{95$^{\text{bis}}$}$$

обращающій въ минимумъ среднюю квадратичную ошибку, получается, если въ разложеніи (95) отбросить члены степени выше n.

Въ V главѣ (§ 61) мы уже разсматривали приближенные многочлены $R_n(x)$ и видѣли, что въ нѣкоторыхъ рѣдкихъ случаяхъ они даютъ асимптотическія выраженія многочленовъ наименѣе уклоняющихся отъ данной функціи. Во многихъ случаяхъ, какъ будетъ показано дальше,

$$1 < \frac{I_n[f(x)]}{E_n[f(x)]} < k, \tag{96}$$

гдѣ k независимая отъ n постоянная, а $I_n[f(x)]$ есть максимумъ разности $|f(x) - R_n(x)|$. Но уже одинъ тотъ фактъ, что существуютъ непрерывныя функціи, которыя не могутъ быть разложены въ сходящійся тригонометрическій рядъ, показываетъ, что неравенство (96) не всегда имѣетъ мѣсто, такъ какъ возможно, что $E_n[f(x)]$ стремится къ нулю, между тѣмъ какъ $I_n[f(x)]$ возрастаетъ безконечно. Изслѣдованіе условій, какимъ должна удовлетворять функція $f(x)$, чтобы неравенство (96) было соблюдено, является такимъ образомъ непосредственнымъ продолженіемъ классической теоріи разложенія функцій въ тригонометрическій рядъ.

---

[1]) Коэффиціенты при синусахъ равны нулю.

70. Нѣкоторыя слѣдствія изъ теоремы Рисса. Прежде чѣмъ перейти къ изученію наименьшаго уклоненія съ новой точки зрѣнія, на которую мы становимся въ этой главѣ, сдѣлаемъ нѣсколько замѣчаній о минимумѣ средней квадратичной ошибки, не имѣющія прямого отношенія къ дальнѣйшему. Напомню сначала теорему Фридриха Рисса [1]): *для того, чтобы функція $\varphi(\theta)$ была квадратично интегрируема (т. е. чтобы интегралъ $\int_a^b \varphi^2(\theta)d\theta$, при $0 \leqq a < b \leqq 2\pi$, существовалъ въ смыслѣ Лебега [2]) необходимо и достаточно, чтобы рядъ $\sum\limits_{p=0}^{p=\infty} A_p^2$ былъ сходящимся, обозначая черезъ A_p коэффиціенты Фурье (94) функціи $\varphi(\theta)$; при этомъ,*

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi^2(\theta)d\theta = \sum_{p=0}^{p=\infty} A_p^2.$$

Примѣняя теорему Рисса къ функціи

$$-\varphi'(\theta) = f'(\cos\theta) . \sin\theta = f'(x) \sqrt{1-x^2},$$

у которой коэффиціенты Фурье равны pA_p, находимъ, что условіе необходимое и достаточное для того, чтобы интегралъ

$$\int_a^b [f'(x)]^2(1-x^2)dx$$

существовалъ (въ смыслѣ Лебега), при $-1 \leqq a < b \leqq 1$, заключается въ томъ, чтобы рядъ $\sum\limits_{p=1}^{p=\infty} p^2 A_p^2$ былъ сходящимся (коэффиціенты A_p даны формулами (94)), т. е. чтобы сумма

$$\beta_{p_0} = \sum_{p=p_0+1}^{p=\infty} p^2 A_p^2$$

стремилась къ нулю съ возрастаніемъ p_0.

Но

$$\delta_{p_0}^2 = \pi \sum_{p=p_0+1}^{p=\infty} A_p^2; \tag{93bis}$$

поэтому

$$(p_0+1)^2\delta_{p_0}^2 < \pi\beta_{p_0} < (p_0+1)^2\delta_{p_0}^2 + \sum_{p=p_0+1}^{p=\infty} (2p+1)\delta_p^2.$$

---

[1]) *Fr. Riesz* „Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen“ Mathem. Annalen B. 69.

[2]) Lebesgue „Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives“.

Такимъ образомъ, полагая $\delta_p = \frac{\varepsilon_p}{p+1}$, видимъ, что *для существованія интеграла* $\int_a^b [f'(x)]^2(1-x^2)dx$ *необходимо, чтобы* $\varepsilon_p = \delta_p.(p+1)$ *стремилось къ нулю, и достаточно, чтобы рядъ* $\sum_{p=1}^{p=\infty}\frac{\varepsilon_p^2}{p+1} = \sum_{p=1}^{p=\infty}(p+1)\delta_p^2$ *былъ сходящимся.* Послѣднее условіе соблюдается, если $\varepsilon_p \leqq \frac{1}{(\log p)^{\frac{1}{2}+\alpha}}$ или $\leqq \frac{1}{(\log p)^{\frac{1}{2}}(\log\log p)^{\frac{1}{2}+\alpha}}$ и т. д. Аналогичные результаты можно получить и для послѣдующихъ производныхъ; не останавливаясь на этомъ, замѣтимъ только, что величина минимума средней квадратичной ошибки δ_n^2 такъ же тѣсно связана съ *интегрально-дифференціальными* свойствами функціи *на всемъ промежуткѣ*, какъ наименьшее уклоненіе $E_n[f(x)]$ связано съ *дифференціальными* свойствами функціи въ каждой отдѣльной точкѣ (глава II).

Примѣчаніе. Изъ равенствъ (93) и (93^{bis}) видно что $\delta_n < E_n.\sqrt{\pi}$; поэтому

$$\sqrt{A_{n+1}^2 + A_{n+2}^2 + \ldots} < E_n[f(x)] < |A_{n+1}| + |A_{n+2}| + \ldots; \quad (77^{\text{bis}})$$

это неравенство немного точнѣе неравенства (77), если замѣтить, что $A_{n+1} = \lambda_n$.

71. Теорема. *Для всякой непрерывной функціи $f(x)$ имѣетъ мѣсто неравенство (сохраняя обозначенія § 69)*

$$\frac{I_n[f(x)]}{E_n[f(x)]} < k_1 \log(n+1), \quad (97)$$

гдѣ k_1 независимая отъ n и отъ функціи $f(x)$ постоянная.

Эта теорема вытекаетъ изъ аналогичной теоремы, доказанной Лебегомъ въ цитированной уже ранѣе работѣ „Sur les intégrales singulières“ [1]), отличающейся отъ нашей теоремы тѣмъ, что у него I_n есть максимумъ разности $|f(x) - \sum_{p=0}^{p=n} A_p\cos px + B_p \sin px|$, гдѣ A_p и B_p коэффиціенты Фурье, а E_n наилучшее приближеніе $f(x)$ при помощи тригонометрической суммы n-аго порядка. Такимъ образомъ, считая теорему Лебега для тригонометрическихъ суммъ доказанной, мы получимъ неравенство (97), если, какъ въ § 69, сдѣлаемъ подстановку $x = \cos\theta$.

---

[1]) Annales de Toulouse, t. I (1909 г.). См. также упомянутую выше работу *D. Jackson*. Въ работѣ „Lebesguesche Konstanten und divergente Fourierreihe“, Journal für die reine und angewandte Mathematik, t. 138, L. Fejer производитъ вычисленіе, изъ котораго вытекаетъ, что коэффиціентъ k_1 въ формулѣ (97) имѣетъ предѣломъ $\frac{8}{\pi^2}$, при $n=\infty$.

72. Слѣдствія. 1) Лебегъ выводитъ изъ своей теоремы и изъ того, что наилучшее приближеніе E_n функцій, удовлетворяющихъ условію Дини-Липшица, менѣе, чѣмъ $\varepsilon_n \log(n+1)$, гдѣ $\underset{n=\infty}{\text{пред.}}\ \varepsilon_n = 0$, что эти функціи разлагаются въ сходящіеся тригонометрическіе ряды. Мы можемъ, слѣдовательно, также утверждать на основаніи неравенствъ (97) и (79), что *всякая функція, удовлетворяющая условію Дини-Липшица, разлагается въ сходящійся рядъ тригонометрическихъ многочленовъ*. Замѣтимъ кромѣ того, что, вслѣдствіе замѣчанія, заканчивающаго § 63, *функція, удовлетворяющая обобщенному условію Дини-Липшица, разлагается въ рядъ тригонометрическихъ многочленовъ, который можно сдѣлать сходящимся простой группировкой членовъ*.

2) Теорема (71) показываетъ намъ, что, если, вообще, порядокъ убыванія E_n неравенъ I_n, тѣмъ не менѣе онъ всегда опредѣляетъ порядокъ E_n, съ точностью до множителя $\log(n+1)$. Укажемъ, напримѣръ, верхнюю и нижнюю границу для $E_{2n}\,|x|$ въ промежуткѣ $-1, +1$. Для этого, раскладываемъ $|x|$ въ строку тригонометрическихъ многочленовъ. Примѣняя формулы (94), находимъ

$$A_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} |\cos\theta|\, d\theta = \frac{2}{\pi}, \quad A_{2k+1} = 0,$$

$$A_{2k} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} |\cos\theta| \cos 2k\theta\, d\theta = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \cos 2k\theta\, d\theta =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [\cos(2k+1)\theta + \cos(2k-1)\theta]\, d\theta = \frac{4}{\pi}\cdot\frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)(2k+1)}.$$

Слѣдовательно,

$$|x| = \frac{4}{\pi}\left[\frac{1}{2} + \frac{T_2}{1.3} - \frac{T_4}{3.5} + \frac{T_6}{5.7} - \ldots\right]; \tag{98}$$

поэтому

$$I_{2n} = \frac{4}{\pi}\left[\frac{1}{(2n+1)(2n+3)} + \frac{1}{(2n+3)(2n+5)} + \ldots\right] = \frac{2}{\pi(2n+1)}. \tag{99}$$

Такимъ образомъ, на основаніи теоремы (71),

$$\frac{k_1}{(2n+1)\log(2n+1)} < E_{2n} < \frac{2}{\pi(2n+1)}.$$

Первая часть этого неравенства [1]), разумѣется, несравненно менѣе удовлетворительна, чѣмъ результаты, найденные нами ранѣе; но вторая

---

[1]) Это неравенство имѣется и въ упомянутой работѣ Джексона, который, независимо отъ меня, получилъ его аналогичнымъ образомъ.

часть неравенства даетъ довольно точную верхнюю границу $E_{2n} < \frac{0,637}{2n}$. Другими словами, приближеніе $|x|$, которое даетъ столь простое разложеніе (98) лишь незначительно хуже наилучшаго приближенія; а именно, припоминая, неравенства (59), имѣемъ (по крайней мѣрѣ, для весьма большихъ значеній n)

$$1,99 < \frac{I_{2n}|x|}{E_{2n}|x|} < 2,36. \tag{100}$$

73. Теорема. *Если функція $f(x)$ удовлетворяетъ условію Липшица степени $\alpha < 1$, то*

$$E_n[f(x)] < \frac{k}{n^\alpha}, \tag{101}$$

гдѣ k независимый отъ n коэффиціентъ; при этомъ, многочлены степени n, осуществляющіе приближеніе $\frac{k}{n^\alpha}$, получаются посредствомъ примѣненія способа суммированія Фейера къ разложенію разсматриваемой функціи въ рядъ тригонометрическихъ многочленовъ. (То же самое mutatis mutandis имѣетъ мѣсто и для тригонометрическихъ суммъ).

Въ самомъ дѣлѣ, полагая $x = \cos\theta$ и обозначая черезъ

$$S_n = A_0 + A_1 T_1(x) + \ldots + A_n T_n(x) = A_0 + A_1 \cos\theta + \ldots + A_n \cos n\theta$$

сумму $(n+1)$ члена разложенія $f(x) = f(\cos\theta) = \varphi(\theta)$, мы получимъ приближенную сумму Фейера $(n-1)$-го порядка

$$\sigma_n = \frac{s_0 + s_1 + \ldots s_{n-1}}{n};$$

и, при этомъ, остатокъ R_n равенъ [1]).

$$R_n = \sigma_n - \varphi(\theta) = \frac{1}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 [\varphi(\theta + 2t) + \varphi(\theta - 2t) - 2\varphi(\theta)dt.$$

По предположенію,

$$|f(x+h) - f(x)| < Nh^\alpha,$$

гдѣ N данное число; а слѣдовательно и

$$|\varphi(\theta + 2t) - \varphi(\theta)| < N.(2t)^\alpha = Mt^\alpha.$$

Поэтому,

---

[1]) *Lebesgue.* Leçons sur les séries trigonométriques (стр. 94).

$$|R_n| < \frac{2M}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 t^\alpha dt <$$

$$< \frac{2M}{n\pi}\left[\int_0^{\frac{1}{n}} n^2 t^\alpha dt + \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{t^\alpha dt}{\sin^2 t}\right] < \frac{2M}{\pi n^\alpha}\left[\frac{1}{1+\alpha} + \frac{\pi^2}{4}\cdot\frac{1}{1-\alpha}\right].$$

Такимъ образомъ, при $\alpha < 1$,

$$|f(x) - \sigma_n| < \frac{k}{n^\alpha},$$

гдѣ k независимый отъ n коэффиціентъ, ч. и. т. д.

Примѣчаніе. Изъ доказательства видно, что, выводъ не нарушится, если даже N не постоянная величина, а возрастаетъ безконечно при $x = \pm 1$. Съ тѣмъ обстоятельствомъ, что одна и таже особенность функціи внутри отрѣзка и на концахъ его не одинаково вліяетъ на приближеніе функціи при помощи многочленовъ, мы уже встрѣчались во второй главѣ. Не останавливаясь на подробномъ изслѣдованіи этого вопроса, укажемъ лишь одинъ простой примѣръ, на которомъ отчетливо видна сущность этой разницы: изъ доказанной теоремы вытекаетъ, что $E_{2n}|x|^\alpha < \frac{k}{(2n)^\alpha}$, гдѣ $\alpha < 1$; при этомъ, ясно, что многочленъ степени $2n$, наименѣе уклоняющійся отъ $|x|^\alpha$, не содержитъ нечетныхъ степеней x; поэтому, полагая $x^2 = y$, мы видимъ, что наименьшее уклоненіе $E'_n\left(y^{\frac{\alpha}{2}}\right)$ на отрѣзкѣ 01 также удовлетворяетъ неравенству $E'_n\left(y^{\frac{\alpha}{2}}\right) = E_{2n}|x|^\alpha < \frac{k}{(2n)^\alpha}$. Другими словами, условіе Липшица степени α внутри отрѣзка имѣетъ существенно тоже значеніе для наименьшаго уклоненія, что условіе Липшица степени $\frac{\alpha}{2}$ въ концахъ отрѣзка.

74. Результаты Джексона [1]. Нетрудно замѣтить, что остатокъ, получаемый при примѣненіи способа Фейера въ случаѣ, когда $\alpha = 1$, не подчиняется закону, выраженному предшествующей теоремой: въ этомъ случаѣ, можно утверждать только, что

$$R_n < \frac{k \log n}{n}.$$

---

[1] *D. Jackson.* Uber die Genauigkeit der Annähernug stetiger Funktionen durch ganze rationale Funktionen. Этотъ §, разумѣется, не могъ войти въ первоначальную редакцію моего сочиненія, какъ и всѣ ссылки на работу Джексона.

Джексонъ, независимо отъ меня, и при помощи другого метода, получилъ болѣе законченный результатъ: а именно, онъ показалъ, что при $\alpha = 1$,

$$E_n[f(x)] < \frac{k}{n}. \tag{101 bis}$$

Кромѣ того, онъ доказалъ еще, что, если $f(x)$ имѣетъ производную p-аго порядка, удовлетворяющую условію Липшица степени $\alpha \leqq 1$, то

$$E_n[f(x)] < \frac{k}{n^{p+\alpha}}, \tag{102}$$

гдѣ k, какъ всегда, независимая отъ n постоянная.

Слѣдствіе. *Если функція $f(x)$ удовлетворяетъ условію Липшица степени $(\alpha \leqq 1)$, то*

$$I_n[f(x)] < \frac{k_2 \log n}{n^\alpha}. \tag{103}$$

Это вытекаетъ изъ неравенствъ (101) и (101$^{\text{bis}}$), благодаря неравенству (97).

Примѣчаніе. Этотъ результатъ, для тригонометрическихъ суммъ, былъ полученъ непосредственно Лебегомъ [1]), который показалъ также что верхняя граница $I_n[f(x)]$ не можетъ быть понижена, если о функціи $f(x)$ ничего болѣе не извѣстно. Отсюда слѣдуетъ, что и верхняя граница $E_n[f(x)]$, найденная Джексономъ и мной, также не можетъ быть понижена, если взять неопредѣленную функцію, удовлетворяющую данному условію Липшица. Если принять неравенство (102), то изъ него точно также можно получить, что

$$I_n[f(x)] < \frac{k \log n}{n^{p+\alpha}} \tag{103 bis}$$

для функцій, имѣющихъ p-ую производную, удовлетворяющую условію Липшица степени α.

Но я воспроизведу съ небольшимъ упрощеніемъ свой первоначальный выводъ неравенства (103$^{\text{bis}}$), который представляетъ, быть можетъ, нѣкоторый принципіальный интересъ.

75. Доказательство неравенства (103$^{\text{bis}}$). Замѣтимъ прежде всего, что условіе, что $\frac{d^p f(x)}{dx^p}$ удовлетворяетъ условію Липшица степени α, влечетъ за собой существованіе условія Липшица степени α для $\frac{d^p \varphi(\theta)}{d\theta^p}$.

---

[1]) *Lebesgue.* Sur la représentation trigonométrique approchée des fonctions satisfaisant à une condition de Lipschitz. Bullet. de la Société Math. de France. 1910.

Разсмотримъ сперва четныя значенія $p=2\mu$. Пусть

$$\varphi(\theta)=f(\cos\theta)=A_0+A_1\cos\theta+\ldots+A_n\cos n\theta+\ldots;$$

въ такомъ случаѣ,

$$\frac{d^p\varphi(\theta)}{d\theta^p}=\pm\,[A_1\cos\theta+\ldots+n^pA_n\cos n\theta+\ldots].$$

Полагая

$$\varrho_n=(n+1)^pA_{n+1}\cos(n+1)\theta+(n+2)^pA_{n+2}\cos(n+2)\theta+\ldots,$$

мы заключаемъ изъ неравенства (103), что

$$|\varrho_n|<\frac{k\log n}{n^\alpha}.$$

А потому, на основаніи извѣстной леммы Абеля,

$$|R_n|=|A_{n+1}\cos(n+1)\theta+A_{n+2}\cos(n+2)\theta+\ldots|<\frac{|\varrho_n|}{(n+1)^p}<\frac{k\log n}{n^{p+\alpha}}.$$

Для разсмотрѣнія случая, когда $p=2\mu-1$ нечетное число, выведемъ предварительно слѣдующее неравенство, справедливое для всякаго значенія $s>1$: если

$$|R_n|=|A_{n+1}\cos(n+1)\theta+A_{n+2}\cos(n+2)\theta+\ldots|<\frac{k\log n}{n^s},\qquad(104)$$

то

$$|R'_n|=|(n+1)A_{n+1}\sin(n+1)\theta+(n+2)A_{n+2}\sin(n+2)\theta+\ldots|<\frac{2^{s+1}k.\log n}{(2^{s-1}-1)^2.n^{s-1}}.$$

Въ самомъ дѣлѣ, изъ (104) вытекаетъ, что

$$|A_{n+1}\cos(n+1)\theta+\ldots+A_{2n}\cos 2n\theta|<\frac{2k\log n}{n^s},$$

а потому, вслѣдствіе § 10,

$$|(n+1)A_{n+1}\sin(n+1)\theta+\ldots+2nA_{2n}\sin 2n\theta|<\frac{4k\log n}{n^{s-1}}.$$

Слѣдовательно,

$$|R'_n|<\frac{4k}{n^{s-1}}\left[\log n+\frac{\log 2n}{2^{s-1}}+\frac{\log 4n}{4^{s-1}}+\ldots\right]=\frac{4k\log n}{n^{s-1}}.\frac{2^{s-1}}{2^{s-1}-1}+$$

$$+\frac{4k\log 2}{n^{s-1}}.\frac{2^{s-1}}{(2^{s-1}-1)^2}<\frac{2^{s+1}k.\log n}{(2^{s-1}-1)^2.n^{s-1}}.\qquad(105)$$

Само собой понятно, что тоже самое неравенство мы получимъ и въ томъ случаѣ, когда R_n состоитъ изъ синусовъ.

Послѣ этого, беремъ функцію

$$\Phi(\theta) = \int_0^\theta \varphi(\theta) d\theta$$

гдѣ, по прежнему, $\varphi(\theta) = f(\cos\theta)$.

Въ такомъ случаѣ, остатокъ R_n тригонометрическаго разложенія функціи $\Phi(\theta)$, имѣющей производную четнаго порядка $p+1 = 2\mu$, удовлетворяетъ неравенству

$$|R_n| < \frac{k \log n}{n^{p+1+\alpha}},$$

а слѣдовательно, остатокъ $|R_n'|$ въ разложеніи $\varphi(\theta)$, вслѣдствіе (105), будетъ менѣе

$$\frac{2^{p+2} k \log n}{(2^p - 1)^2 . n^{p+\alpha}};$$

такимъ образомъ неравенство (103^{bis}) справедливо, для всякаго p.

Слѣдствія. a) Если функція $f(x)$ въ промежуткѣ $(-1, +1)$ имѣетъ производныя всѣхъ порядковъ, то ея разложеніе въ рядъ тригонометрическихъ многочленовъ равномѣрно сходится, такъ же какъ и ряды, получаемые отъ дифференцированія, какое угодно число разъ, разсматриваемаго разложенія.

b) Если функція $f(x)$ имѣетъ производныя всѣхъ порядковъ въ промежуткѣ $(-1, +1)$, то

$$\underset{n=\infty}{\text{пред.}}\; n^p I_n[f(x)] = \underset{n=\infty}{\text{пред.}}\; n^p E_n[f(x) = 0,$$

при всякомъ p (теорема 22).

76. Теорема [1]. *Если модуль аналитической функціи $f(x)$ менѣе M внутри эллипса E, имѣющаго фокусами точки -1 $+1$ и полусумму осей равную $\frac{1}{\varrho}$, то*

$$E_n[f(x)] < I_n[f(x)] < \frac{2M\varrho^{n+1}}{1-\varrho}$$

на отрѣзкѣ $(-1, +1)$.

Въ самомъ дѣлѣ, согласно формуламъ (94),

$$A_p = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\cos\theta) . \cos p\theta d\theta,$$

или, полагая $z = e^{i\theta}$,

---

[1]) См. теорему 29.

$$A_p = \frac{1}{2\pi i}\int_C f\left(\frac{z^2+1}{2z}\right).\frac{z^p+z^{-p}}{z}\,dz\,,$$

при чемъ послѣднiй интегралъ взятъ по окружности C радiуса равнаго единицѣ. Въ то время, какъ комплексная перемѣнная x описываетъ эллипсъ E, комплексная перемѣнная z описываетъ, либо окружность C_1 радiуса ϱ, либо окружность C_2 радiуса $\frac{1}{\varrho}$, такъ какъ

$$x = \cos\theta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right).$$

Но $f(x)$, по предположенiю, остается голоморфной внутри эллипса E; поэтому $f\left(\frac{z^2+1}{2z}\right)$ также голоморфна между окружностями C_1 и C_2. Слѣдовательно,

$$\left|\int_C f\left(\frac{z^2+1}{2z}\right) z^{p-1}\,dz\right| = \left|\int_{C_1} f\left(\frac{z^2+1}{2z}\right) z^{p-1}\,dz\right| < 2\pi M\varrho^p$$

и

$$\left|\int_C f\left(\frac{z^2+1}{2z}\right).\frac{dz}{z^{p+1}}\right| = \left|\int_{C_2} f\left(\frac{z^2+1}{2z}\right).\frac{dz}{z^{p+1}}\right| < 2\pi M\varrho^p,$$

откуда

$$|A_p| < 2M\varrho^p.$$

И, наконецъ,

$$I_n[f(x)] < [\,|A_{n+1}| + |A_{n+2}| + \ldots] < \frac{2M\varrho^{n+1}}{1-\varrho},$$

ч. и. т. д.

Примѣчанiе. Въ предшествующей теоремѣ, такъ же какъ и въ условiяхъ теоремъ (22) и (29), наименьшее уклоненiе E_n можетъ быть замѣнено минимумомъ средней квадратичной ошибки δ_n.

77. Различныя слѣдствiя и приложенiя.

A) *Если функцiя $f(x)$ въ промежуткѣ $(-1, +1)$ имѣетъ производную порядка k, полное измѣненiе (variation totale) которой ограничено (bornée), то*

$$I_n[f(x)] < \frac{h'}{n^k}\,,$$

гдѣ h' независимая отъ n постоянная.

Въ самомъ дѣлѣ, согласно формулѣ (94),

$$A_p = \int_0^{2\pi} f(\cos\theta)\,.\,\cos p\theta\,d\theta = \frac{1}{\pi p^k}\int_0^{2\pi}\frac{d^k f(\cos\theta)}{d\theta^k}\cos\left(p\theta - \frac{k\pi}{2}\right)d\theta\,,$$

а потому

$$|A_p| < \frac{h}{p^{k+1}},$$

гдѣ h независимый отъ p коэффиціентъ; слѣдовательно,

$$I_n[f(x)] < h\left[\frac{1}{(n+1)^{k+1}} + \frac{1}{(n+2)^{k+1}} + \ldots\right] < \frac{h'}{n^k}$$

B) *Если линія $y=f(x)$ имѣетъ одну или нѣсколько точекъ излома, а между точками излома угловой коэффиціентъ касательной удовлетворяетъ какому нибудь условію Липшица, то*

$$\frac{a}{n} < E_n[f(x)] < I_n[f(x)] < \frac{b}{n}, \tag{96bis}$$

гдѣ a и b два независимыхъ отъ n числа.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть x_0 и x_1 будутъ абсциссы точекъ излома. Въ такомъ случаѣ,

$$f(x) = M|x-x_0| + N|x-x_1| + \varphi(x),$$

гдѣ M и N постоянные коэффиціенты, а $\varphi(x)$ удовлетворяетъ условію Липшица на всемъ промежуткѣ. Поэтому

$$E_n[f(x)] < I_n[f(x)] < MI_n|x-x_0| + NI_n|x-x_1| + I_n[\varphi(x)] < \frac{b}{n}.$$

Съ другой стороны, ясно, что наименьшее уклоненіе E_n на всемъ отрѣзкѣ не меньше, чѣмъ наименьшее уклоненіе E'_n на части его, содержащей лишь одну точку излома, слѣдовательно,

$$E_n[f(x)] > E'_n[f(x)] > ME'_n|x-x_0| - E_n[\varphi(x)] > \frac{a}{n}.$$

C) *Если*

$$\left|\sum_{p=n}^{p=\infty} A_p \cos p\theta\right| < \frac{\lambda_n}{n^\alpha},$$

при чемъ

$$\frac{\lambda_n}{n^\varepsilon} \geqq \frac{\lambda_{n+1}}{(n+1)^\varepsilon},$$

гдѣ $\varepsilon < \alpha$, то

$$\left|\sum_{p=n}^{p=\infty} A_p \sin p\theta\right| < \frac{2^{2+\alpha}}{2^\alpha - 2^\varepsilon}\cdot\frac{\lambda_n}{n^\alpha}.$$

Въ самомъ дѣлѣ, примѣняя лемму Абеля, замѣчаемъ, что

$$\left|\sum_{p=n}^{p=\infty} \frac{A_p}{p} \cos p\theta\right| < \frac{\lambda_n}{n^{1+\alpha}}.$$

Въ такомъ случаѣ,

$$\left|\sum_{p=n}^{p=2n-1} \frac{A_p}{p} \cos p\theta\right| < \frac{2\lambda_n}{n^{1+\alpha}},$$

а потому, вслѣдствіе § 10,

$$\left|\sum_{p=n}^{p=2n-1} A_p \sin p\theta\right| < \frac{4\lambda_n}{n^{\alpha}};$$

откуда

$$\left|\sum_{p=n}^{p=\infty} A_p \sin p\theta\right| < \frac{4}{n^\alpha}\left[\lambda_n + \frac{\lambda_{2n}}{2^\alpha} + \frac{\lambda_{4n}}{4^\alpha} + \ldots\right] < \frac{4\lambda_n}{n^\alpha} \cdot \frac{1}{1-2^{\varepsilon-\alpha}} = \frac{2^{2+\alpha}}{2^\alpha - 2^\varepsilon} \cdot \frac{\lambda_n}{n^\alpha}.$$

Напримѣръ, если $\lambda_n = \log n$, или $\lambda_n = 1$, то $\varepsilon = 0$, (по крайней мѣрѣ, для весьма большихъ значеній n), такъ что изъ неравенства

$$\left|\sum_{p=n}^{p=\infty} A_p \cos p\theta\right| < \frac{\log n}{n}$$

вытекаетъ

$$\left|\sum_{p=n}^{p=\infty} A_p \sin p\theta\right| < \frac{8\log n}{n};$$

а изъ

$$\left|\sum_{p=n}^{p=\infty} A_p \cos p\theta\right| < \frac{1}{n}$$

вытекаетъ

$$\left|\sum_{p=n}^{p=\infty} A_p \sin p\theta\right| < \frac{8}{n}.$$

Само собой понятно, что cos и sin могутъ быть взаимно перемѣщены. Этотъ результатъ заслуживаетъ вниманія потому, что, вообще, изъ сходимости ряда cos нельзя вывести сходимости ряда sin, и наоборотъ. Напримѣръ, сумма

$$\sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{\sin px}{p} = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}$$

конечна, а между тѣмъ, не только $\sum\limits_{p=1}^{p=\infty} \frac{\cos px}{p}$, но $\sum\limits_{p=1}^{p=\infty} \frac{\cos px}{p \log p}$ возрастаетъ безконечно.

Относительно медленно сходящихся рядовъ, при помощи предыдущаго разсужденія, не трудно показать, что, если [1])

$$\left|\sum_{p=n}^{p=\infty} A_p \cos p\theta\right| < \varepsilon_n,$$

гдѣ числа ε_n идутъ не возрастая, то

$$\left|\sum_{p=n}^{p=\infty} A_p \sin p\theta\right| < 4(\varepsilon_n + \varepsilon_{2n} + \ldots);$$

такимъ образомъ, только въ томъ случаѣ изъ сходимости ряды косинусовъ можно вывести сходимость ряда синусовъ, когда рядъ $\varepsilon_n + \varepsilon_{2n} + \ldots$ сходится, т. е., напримѣръ если $\varepsilon_n < \dfrac{1}{(\log n)^{1+\alpha}}$.

Упражненіе. Показать, что рядъ $\sum_{n=3}^{n=\infty} \dfrac{(\log\log n)^\alpha}{n} \sin nx$, при $\alpha > 0$, не можетъ быть сходящимся для всѣхъ значеній x.

---

[1]) Для опредѣленности, мы разсматриваемъ все время всѣ значенія θ; но аналогичныя неравенства могутъ быть даны если вмѣсто всѣхъ значеній θ брать въ данномъ неравенствѣ $a \leqq \theta \leqq b$, а въ томъ, которое изъ него вытекаетъ, предполагать $a < a' \leqq \theta \leqq b' < b$.

Глава VII.

О нѣкоторыхъ свойствахъ функцій двухъ перемѣнныхъ.

78. Введеніе. Въ настоящее время еще весьма мало изученъ вопросъ о томъ, какова зависимость между свойствами функціи $f(x, y)$, разсматриваемой, какъ функція двухъ перемѣнныхъ и свойствами той же функціи, разсматриваемой, какъ функція одного только x и одного только y. Нѣкоторые простые примѣры, вродѣ функціи $z = \frac{xy}{x^2 + y^2}$, дали поводъ преувеличить трудность этого вопроса. Дѣйствительно, функція z вещественной перемѣнной x, голоморфна при всякомъ опредѣленномъ значеніи вещественнаго параметра y, и точно также функція z голоморфна относительно y при всякомъ x, а между тѣмъ таже функція z, разсматриваемая, какъ функція x и y одновременно, при $x = y = 0$, не только не голоморфна, но не стремится ни къ какому предѣлу.

Пользуясь соотношеніями между приближеніемъ функціи посредствомъ многочленовъ или тригонометрическихъ суммъ и ея дифференціальной природой, можно однако указать рядъ теоремъ, которыя во многихъ случаяхъ позволяютъ свести изслѣдованіе функціи двухъ (или n) перемѣнныхъ къ изслѣдованію двухъ (или n) функцій одной перемѣнной.

79. Теорема. *Пусть*

$$f(x, y) = f(\cos u, \cos v) = \sum_{p=0,\, q=0}^{p=\infty,\, q=\infty} A_{p,q} \cos pu \cos qv,$$

и ряды

$$\frac{\partial^k f}{\partial u^k} = \sum_{p=0,\, q=0}^{p=\infty,\, q=\infty} p^k A_{p,q} \cos\left(pu + \frac{k\pi}{2}\right) \cos qv,$$

$$\frac{\partial^k f}{\partial v^k} = \sum_{p=0,\, q=0}^{p=\infty,\, q=\infty} q^k A_{p,q} \cos pu \cos\left(pv + \frac{k\pi}{2}\right)$$

абсолютно сходятся; въ такомъ случаѣ всѣ частныя производныя порядка $\frac{\partial^k f}{\partial u^l \partial v^{k-l}}$ *конечны и непрерывны, и ряды*

$$\frac{\partial^k f}{\partial u^l \partial v^{k-l}} = \sum_{p=0,\, q=0}^{p=\infty,\, q=\infty} p^l q^{k-l} A_{pq} \cos\left(pu + \frac{l\pi}{2}\right) \cos\left(qv + \frac{(k-l)\pi}{2}\right)$$

абсолютно сходятся.

Въ самомъ дѣлѣ, если

$$\sum_{p=0,\; q=0}^{p=\infty, q=\infty} p^k \,|\, A_{p,q} \,| < M, \quad \sum_{p=0,\; q=0}^{p=\infty, q=\infty} q^k \,|\, A_{p,q} \,| < M,$$

то

$$\sum_{p=\infty, q=\infty}^{p=\infty, q=\infty} p^l q^{k-l} \,|\, A_{p,q} \,| < 2M,$$

такъ какъ

$$p^l q^{k-l} < p^k + q^k.$$

80. Теорема. *Если періодическая относительно $(u\,,\,v)$ функція $\varphi(u, v)$, имѣетъ вторыя частныя производныя $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}$ и $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}$ квадратично интегрируемыя, т. е.*

$$\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}\right)^2 du\, dv < M, \quad \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}\right)^2 du dv < M,$$

то она имѣетъ также квадратично интегрируемую частную производную $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u\, \partial v}$, а именно,

$$\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}\right)^2 du dv = \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}\, du dv < M.$$

Въ самомъ дѣлѣ, полагая

$$\begin{aligned} A_{p,q} &= \frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{2\pi} \varphi\,(u,\; v) \cos pu \cos qv\, du\, dv\,, \\ B_{p,q} &= \frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{2\pi} \varphi\,(u,\; v) \cos pu \cos qv\, du\, dv, \end{aligned} \tag{106}$$

и т. д., получаемъ

$$\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}\right)^2 du dv = \pi^2 \sum_{p=\infty,\, q=\infty}^{p=\infty, q=\infty} p^4 \,[A_{p,q}^2 + B_{p,q}^2 + \ldots] < M$$

и

$$\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}\right)^2 du dv = \pi^2 \sum_{p=0.\; q=0}^{p=\infty,\, q=\infty} q^4 \,[A_{p,q}^2 + B_{p,q}^2 + \ldots] < M.$$

На основаніи теоремы Рисса, для того, чтобъ $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u dv}$ была квадратично интегрируема, необходимо и достаточно, чтобъ рядъ

$$S = \pi^2 \sum_{p=0,\, q=0}^{p=\infty, q=\infty} p^2 q^2 [A_{p,q}^2 + B_{p,q}^2 + \ldots]$$

былъ сходящимся, и тогда

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial u \partial v}\right)^2 du dv = S.$$

Но

$$S = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2} du dv < M.$$

81. Теорема. *Если періодическая функція $\varphi(u, v)$, разсматриваемая, какъ функція u, имѣетъ частную производную $\frac{\partial^l\varphi}{\partial u^l}$, удовлетворяющую опредѣленному условію Липшица степени α, и точно также, разсматриваемая, какъ функція v, имѣетъ производную $\frac{\partial^l\varphi}{\partial v^l}$, удовлетворяющую условію Липшица степени α, то функція $\varphi(u, v)$ имѣетъ всѣ частныя производныя порядка l, и эти послѣднія также удовлетворяютъ условіямъ Липшица какой угодно степени $\alpha_1 < \alpha$ (относительно обѣихъ перемѣнныхъ).*

Пусть

$$\varphi(u, v) = \sum_{p=0,\, q=0}^{p=\infty,\, q=\infty} A_{p,\,q} \cos pu \cos qv,$$

гдѣ, для сокращенія письма, мы записываемъ только членъ, составленный изъ косинусовъ.

Припоминая значеніе коэффиціентовъ $A_{p,\,q}$ (106), находимъ

$$S_n = \sum_{p=0,\, q=0}^{p=n,\, q=n} A_{p,\,q} \cos pu \cos qv = \frac{1}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} \cdot \frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin\theta} \cdot [\varphi(u+2t,\ v+2\theta) +$$
$$+ \varphi(u-2t,\ v+2\theta) + \varphi(u+2t,\ v-2\theta) + \varphi(u-2t, v-2\theta)] dt d\theta.$$

Откуда

$$R_n = \varphi(u, v) - S_n = \frac{-1}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} \cdot \frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin\theta} \Big\{[\varphi(u+2t,\ v+2\theta) +$$
$$+ \varphi(u-2t,\ v+2\theta) - 2\varphi(u,\ v+2\theta)] + [\varphi(u+2t,\ v-2\theta) +$$
$$+ \varphi(u-2t,\ v-2\theta) - 2\varphi(u,\ v-2\theta)] + 2[\varphi(u,\ v+2\theta) +$$
$$+ \varphi(u,\ v-2\theta) - 2\varphi(u,\ v)]\Big\} du dv. \tag{107}$$

Но

$$\varphi(u,\, v+2\theta)=\sum_{p=0}^{p=\infty} a_p(v+2\theta)\cos pu,$$

$$\varphi(u,\, v-2\theta)=\sum_{p=0}^{p=\infty} a_p(v-2\theta)\cos pu, \qquad \varphi(u,\, v)=\sum_{p=0}^{p=\infty} b_p(u)\cos pv,$$

гдѣ

$$a_p(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(u,\, z)\cos pu\,du, \quad b_p(u)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(u,\, v)\cos pv\,dv;$$

поэтому

$$\varrho_n(u,\, v+2\theta)=\sum_{p=n+1}^{p=\infty} a_p(v+2\theta)\cos pu=-\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}[\varphi(u+2t,\ v+2\theta)+$$
$$+\varphi(u-2t,\ v+2\theta)-2\varphi(u,\ v+2\theta)]\,dt,$$

$$\varrho_n(u,\, v-2t)=\sum_{p=n+1}^{p=\infty} a_p(v-2\theta)\cos pu=-\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)}{\sin t}[\varphi(u+2t,\ v-2\theta)+$$
$$+\varphi(u-2t,\ v-2\theta)-2\varphi(u,\ v-2\theta)]\,dt,$$

$$\varrho_n'(u,\ v)=\sum_{p=n+1}^{p=\infty} b_p(u)\cos pv=-\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin\theta}[\varphi(u,\ v+2\theta)+$$
$$+\varphi(u,\ v-2\theta)-2\varphi(u,\ v)]\,d\theta.$$

Слѣдовательно, на основанiи неравенства (103^{bis}),

$$|\varrho_n(u,\ v+2\theta)|<\frac{k\log n}{n^{l+\alpha}},\ |\varrho_n(u,\ v-2\theta)|<\frac{k\log n}{n^{l+\alpha}},$$

$$|\varrho_n'(u,\ v)|<\frac{k\log n}{n^{l+\alpha}}.$$

А потому

$$|R_n|<\frac{4k\log n}{\pi n^{l+\alpha}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\right|dt.$$

Послѣднiй интегралъ вычисленъ Фейеромъ [1]); но намъ достаточно замѣтить, что

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\right|dt<\int_0^{\frac{1}{2n+1}}(2n+1)\,dt+\int_{\frac{1}{2n+1}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{\sin t}<1+\frac{\pi}{2}\log(2n+1).$$

---

[1]) См. выноску къ § 71.

Слѣдовательно, (для достаточно большихъ n)

$$|R_n| < \frac{2k\log^2 n}{n^{l+\alpha}};$$

и при всякомъ $\alpha_1 < \alpha$, можно выбрать k_1 такъ, чтобъ

$$|R_n| < \frac{k_1}{n^{l+\alpha_1}(\log n)^2}.$$

Но въ такомъ случаѣ, примѣняя результаты 2-й главы (§§ 15—17), убѣждаемся въ существованіи всѣхъ частныхъ производныхъ $\frac{\partial^l \varphi}{\partial u^i \partial v^{l-i}}$ и въ томъ, что онѣ удовлетворяютъ условію Липшица степени α_1. Ч. и. т. д.

Примѣчаніе. Въ частности, если функція $\varphi(u, v)$ удовлетворяетъ условію Липшица степени α по отношенію къ каждой перемѣнной въ отдѣльности, то она удовлетворяетъ также условію Липшица степени α_1 относительно обѣихъ перемѣнныхъ.

82. Слѣдствія. А. *Если функція $f(x, y)$ (не періодическая), разсматриваемая, какъ функція одного только x и одного только y, имѣетъ внутри нѣкотораго контура C производную порядка l, удовлетворяющую условію Липшица степени α, то функція $f(x, y)$ имѣетъ всѣ частныя производныя порядка l, и эти послѣднія, во всякой области S внутри контура C, удовлетворяютъ условіямъ Липшица любой степени $\alpha_1 < \alpha$.*

Въ самомъ дѣлѣ, всю область S можно помѣстить внутри нѣсколькихъ квадратовъ C_1, стороны которыхъ не выходятъ изъ контура C. Для опредѣленности, положимъ, что прямыя, на которыхъ расположены стороны квадрата C_1, имѣютъ уравненіями: $x = \pm 1$, $y = \pm 1$. Въ такомъ случаѣ, полагая $x = \cos u$, $y = \cos v$,

$$f(x, y) = f(\cos u, \cos v) = \varphi(u, v)$$

есть періодическая функція u, v, которая удовлетворяетъ условіямъ только что доказанной теоремы. А потому частныя производныя $\frac{\partial^l \varphi}{\partial u^i \partial v^{l-i}}$ существуютъ и удовлетворяютъ условіямъ Липшица степени α_1.

Но

$$\frac{\partial^l f}{\partial x^i \partial y^{l-i}} = \sum_{h+k \leq l} A_{h,k} \frac{\partial^{h+k} \varphi}{\partial u^h \partial y^k},$$

гдѣ всѣ коэффиціенты $A_{h,k}$ суть вполнѣ опредѣленныя функціи x, y, которыя голоморфны внутри квадрата C_1, (на сторонахъ квадрата онѣ дѣлаются безконечными). Слѣдовательно, внутри S всѣ частныя производныя $\frac{\partial^l f}{\partial x^i \partial y^{l-i}}$ существуютъ и удовлетворяютъ условію Липшица степени α_1.

B. *Если функція $f(x, y)$ внутри контура S, не имѣющаго острыхъ угловъ*[1]) *разсматриваемая, какъ функція одного только x и одного только y, имѣетъ ограниченныя производныя каждаго порядка, то она имѣетъ также внутри области S ограниченныя частныя производныя любого порядка.*

Изъ предыдущаго слѣдствія вытекаетъ непосредственно существованіе и ограниченность всѣхъ производныхъ внутри всякой области S_1, расположенной внутри S. Чтобъ показать, что производныя ограничены во всякой точкѣ M контура S, строимъ квадратъ C_1, не выходящій изъ S и имѣющій одну изъ вершинъ въ точкѣ M. Для опредѣленности, можно предположить снова, что квадратъ C_1 составленъ прямыми $x = \pm 1$, $y = \pm 1$. Разлагая функцію $f(x, y)$ въ рядъ тригонометрическихъ многочленовъ внутри C_1, и отбрасывая члены степени выше n относительно x или относительно y находимъ, на основаніи формулъ (103^{bis}) и (107) что, для достаточно большихъ значеній n, ошибка

$$|R_n| < \frac{1}{n^p},$$

каково бы ни было число p. А потому наше утвержденіе есть прямое слѣдствіе изъ теоремы (22).

83. Теорема. *Пусть $f(x, y)$ будетъ нѣкоторая функція двухъ вещественныхъ перемѣнныхъ (x, y), данная внутри прямоугольника C_1, образованнаго прямыми $x = \pm h$, $y = \pm k$. Если, при всякомъ вещественномъ $x_0(-h \leqq x_0 \leqq h)$, функція $f(x_0, y)$, голоморфна относительно y, и $|f(x_0, y)| < M$, когда комплексная перемѣнная y находится внутри эллипса E, имѣющаго фокусами $(-k, +k)$ и полусумму осей $\frac{k}{\varrho}$; и, при всякомъ вещественномъ y_0 $(-k \leqq y_0 \leqq k)$, функція $f(x, y_0)$ голоморфна относительно x, и $|f(x, y_0)| < M$, когда комплексная перемѣнная x находится внутри эллипса E_1, имѣющаго фокусами $(-h, +h)$*

[1]) Изъ доказательства будетъ видно, что это условіе вводится для того, чтобъ внутри S можно было помѣстить квадратъ, имѣющій вершину въ любой точкѣ контура S; но, замѣняя прямоугольныя координаты косоугольными, можно квадратъ замѣнить ромбомъ; такимъ образомъ существенно только, чтобъ контуръ S не имѣлъ точекъ возврата.

и полусумму осей $\frac{h}{\varrho_1}$: *то функція двухъ перемѣнныхъ* $f(x, y)$ *голоморфна, и* $|f(x, y)| < \frac{4M}{(1-\lambda)^2}$, $(\lambda < 1)$, *въ то время какъ комплексная перемѣнная* y *находится внутри эллипса* E' *гомофокальнаго съ* E *и имѣющаго полусуммой осей* $\frac{k}{R}$, *а комплексная перемѣнная* x *находится внутри эллипса* E'_1 *гомофокальнаго съ* E_1 *и имѣющаго полусумму осей* $\frac{h}{R_1}$, *причемъ*

$$\frac{\log\lambda R_1}{\log\varrho_1} + \frac{\log\lambda R}{\log\varrho} = 1\,.$$

Въ самомъ дѣлѣ, полагая $x = h\cos u$, $y = k\cos v$, и раскладывая функцію

$$f(x, y) = \sum_{p=0,\, q=0}^{p=\infty,\, q=\infty} A_{p,\,q} T_p\left(\frac{x}{h}\right) T_q\left(\frac{y}{k}\right)$$

въ рядъ тригонометрическихъ многочленовъ, мы выводимъ изъ формулъ (106), при помощи разсужденій § 76, что

$$|A_{p,\,q}| < 4M\varrho_1{}^p,\ |A_{p,\,q}| < 4M\varrho^q.$$

А потому, на основаніи неравенства (9), заключаемъ, что, если y находится внутри эллипса E', а x находится внутри эллипса E'_1, то

$$|f(x, y)| < \sum_{p=0,\, q=0}^{p=\infty,\, q=\infty} \frac{4M\varrho_1^{\frac{ap}{a+b}}\varrho^{\frac{bq}{a+b}}}{R_1^p R^q},$$

каковы бы ни были положительныя числа a и b.

Полагая

$$\frac{\varrho_1^{\frac{a}{a+b}}}{R_1} = \frac{\varrho^{\frac{b}{a+b}}}{R} = \lambda\,,$$

получимъ

$$|f(x, y)| < 4M \sum_{p=0\ q=0}^{p=\infty,\, q=\infty} \lambda^p \lambda^q = \frac{4M}{(1-\lambda)^2};$$

при этомъ, очевидно,

$$\frac{a}{a+b} = \frac{\log\lambda R_1}{\log\varrho_1},\quad \frac{b}{a+b} = \frac{\log\lambda R}{\log\varrho},$$

откуда

$$\frac{\log\lambda R_1}{\log\varrho_1} + \frac{\log\lambda R}{\log\varrho} = 1\,. \tag{108}$$

Слѣдствіе. *Если* $\varrho = \varrho_1$ *то*

$$\lambda^2 = \frac{\varrho}{RR_1}, \tag{108$^{\text{bis}}$}$$

это вытекаетъ изъ формулы (108), въ которой полагаемъ $\varrho = \varrho_1$.

84. Примѣненіе къ уравненіямъ съ частными производными. Результаты предшествующихъ §§ находятся въ тѣсной связи съ теоріей уравненій съ частными производными, и было бы интересно вывести изъ нихъ систематически свойства уравненій эллиптическаго типа. Я ограничусь только двумя замѣчаніями.

1) *Уравненіе эллиптическаго типа*

$$Ar + 2Bs + Ct = 0 \qquad (AC - B^2 > 0)$$

гдѣ A, B, C *какія угодно функціи* x, y, z, p, q *не имѣетъ иныхъ рѣшеній періодическихъ относительно* x, y, *обладающихъ конечными производными первыхъ двухъ порядковъ* [1], *кромѣ постоянной величины.*

Въ самомъ дѣлѣ, изъ теоремы (80) мы знаемъ, что

$$\iint s^2 dxdy = \iint rtdxdy = -\iint \frac{t\,(Ct + 2Bs)}{A}\, dxdy\,,$$

откуда

$$\iint \frac{As^2 + 2Bst + Ct^2}{A}\, dxdy = 0\,,$$

а потому

$$t = s = r = 0\,;$$

слѣдовательно, z есть постоянная величина.

2) *Если производныя функціи* z, *до порядка* k *включительно, удовлетворяютъ въ нѣкоторой области* S *какому нибудь условію Липшица, и кромѣ того, функція* z *удовлетворяетъ двумъ уравненіямъ*

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{k+1} z}{\partial x^{k+1}} &= f\left(x,\ y,\ z,\ \frac{\partial z}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^k z}{\partial y^k}\right), \\ \frac{\partial^{k+1} z}{\partial y^{k+1}} &= \varphi\left(x,\ y,\ z,\ \frac{\partial z}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^k z}{\partial y^k}\right), \end{aligned} \tag{109}$$

гдѣ f *и* φ *имѣютъ конечныя производныя всѣхъ порядковъ при конечныхъ значеніяхъ перемѣнныхъ, то функція* z *имѣетъ также конечныя производныя всѣхъ порядковъ во всякой области* S_1 *внутри* S.

---

[1]) Это вытекаетъ также изъ обобщенной теоремы Ліувилля, указанной мной въ Comptes Rendus, 10-го октября 1910 г.

Дѣйствительно, изъ уравненій (109) выводимъ непосредственно, что $\frac{\partial^{k+1}z}{\partial x^{k+1}}$ и $\frac{\partial^{k+1}z}{\partial y^{k+1}}$ существуютъ и удовлетворяютъ условію Липшица. Поэтому, на основаніи слѣдствія (A) § 82, тѣмъ же свойствомъ обладаютъ всѣ производныя порядка $(k+1)$ во всякой области S_1' внутри S. Дифференцируя первое уравненіе относительно x, а второе относительно y, мы можемъ тоже разсужденіе примѣнить къ производнымъ $(k+2)$-го порядка; послѣдовательное дифференцированіе, оказывающееся возможнымъ, приводитъ такимъ образомъ къ доказательству высказаннаго утвержденія.

Таблица значеній функцій:

$$F(v) = 2v\left[\frac{1}{2v+1} - \frac{1}{2v+3} + \frac{1}{2v+5} - \ldots\right] \quad \text{(съ точностью до 0,00055)}$$

и

$$F'(v) = \frac{2}{(2v+1)^2} - \frac{6}{(2v+3)^2} + \frac{10}{(2v+5)^2} - \ldots \quad \text{(съ точностью до 0,001).}$$

v	$F(v)$	v	$F(v)$	v	$F(v)$	v	$F(v)$
0	0,000	0,45	0,332	1,2	0,445	2,1	0,477
0,05	0,070	0,5	0,347	1,3	0,451	2,2	0,478
0,1	0,127	0,55	0,360	1,4	0,456	2,3	0,480
0,15	0,173	0,6	0,371	1,5	0,460	2,4	0,481
0,2	0,212	0,7	0,391	1,6	0,464	2,5	0,483
0,25	0,244	0,8	0,406	1,7	0,467	3	0,488
0,3	0,271	0,9	0,419	1,8	0,470	4	0,493
0,35	0,294	1	0,429	1,9	0,473	5	0,495
0,4	0,314	1,1	0,438	2	0.475	6	0,497

v	$F'(v)$	v	$F'(v)$
0	1,571	0,46	0,314
0,3	0,502	0,48	0,297
0,32	0,471	0,5	0,282
0,34	0,443	0,52	0,268
0,36	0,417	0,54	0,254
0,38	0,393	0,56	0,241
0,4	0,371	0,58	0,230
0,42	0,350	0,6	0,219
0,44	0,331	1	0,093

ПОПРАВКА.

Доказательство неравенства (54) на стр. 126-й, начиная отъсловъ «Полученный результатъ можно еще улучшить» (стр. 125), должно быть измѣнено слѣдующимъ образомъ:

Сохраняя значеніе $B=F\left(\frac{1}{2}\right)=0{,}34657\ldots$, и полагая $a=0{,}047$, замѣчаемъ, что функція $\Phi(v)$, при измѣненіи v отъ 0 до 0,42, возрастаетъ. Дѣйствительно, функція $\Phi(v)$ не можетъ имѣть больше одного максимума въ промежуткѣ $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, такъ какъ абсолютное значеніе разности $|x|-Q_2(x)$ имѣетъ въ промежуткѣ $\left(\frac{\pi}{4n}, 1\right)$ не менѣе n максимумовъ; поэтому достаточно замѣтить, что, при $v=0{,}42$,

$$\frac{\Phi'(v)}{\Phi(v)}=\frac{F'(v)+\dfrac{2av}{\left(\frac{1}{4}-v^2\right)^2}}{F(v)-B+\dfrac{a}{\frac{1}{4}-v^2}}-\pi tg\pi v>\frac{7{,}637}{0{,}615}-\pi tg 75^0 36'>0{,}18>0.$$

Но, $F(v)<B$, при $v<\frac{1}{2}$; слѣдовательно, при $v<\frac{1}{2}$,

$$\Phi(v)<\frac{a\cos\pi v}{\frac{1}{4}-v^2}<\frac{a\cos\frac{42\pi}{100}}{\frac{1}{4}-0{,}1764}<3{,}38a=3{,}38.0{,}047<0{,}16.$$

А потому

$$E_{2n}<\frac{0{,}32}{2n}. \tag{54}$$

ОПЕЧАТКИ.

Стран.	*Строка.*	*Напечатано:*	*Вмѣсто:*
50	3 снизу	трехъ	двухъ
53	9 сверху	$P_n(x)\|$	$\|P_n(x)\|$
64	послѣднія четыре строки напечатаны курсивомъ вмѣсто обыкновеннаго шрифта		
76	7 снизу	45	77
77	1	Legons	Leçons
79	9	$<$	$>$
—	4	функція	функціи
83	7 сверху	заказана	доказана
93	20	F'_{x^2}	F''_{x^2}
120	4	$z^{v+\frac{3}{4}}$	$z^{v+\frac{3}{2}}$
130	2	$i\left(\frac{1}{i+\lambda}+\frac{1}{i-\lambda}\right)$	$\left(\frac{1}{i+\lambda}+\frac{1}{i-\lambda}\right)$
—	3 снизу	4,537	4,637
—	2	иеравенства	неравенства
132	2	$I(x)$	$T(x)$
142	14	$I(x)$	$T(x)$
147	24	60	59^{bis}
148	4—5	или или	или
151	17	a^2_{l+n}	a_{2l+n}
152	22	$\lambda_{n_=}$	$\lambda_n =$
153	13	62	63
154	12	многочленами $f_{n,p}(x)$ степени	многочленами степени
—	13	многочленъ степени	многочленъ $f_{n,p}(x)$ степени
158	12	$f-P\|$	$\|f-P\|$

Суммированіе вездѣ расходящихся строкъ Тэйлора.

С. Бернштейна.

Задача. *Найти функцію $F(x)$, аналитическую на отрѣзкѣ $\left(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right)$, за исключеніемъ, можетъ быть, точки 0, и удовлетворяющую безконечному числу условій $F(0)=A_0$, $F'(0)=A_1, \ldots$ $\frac{F_n(0)}{n!}=A_n, \ldots$, гдѣ A_n произвольно данныя числа.*

Разумѣется, если поставленная задача имѣетъ одно рѣшеніе $F(x)$, то она должна имѣть безчисленное множество рѣшеній; достаточно будетъ напримѣръ, взять функцію $F(x)+ae^{-\frac{k}{x^2}}$, каковы бы ни были a и k.

Если степенной рядъ

$$A_0 + A_1x + \ldots + A_nx^n + \ldots \tag{1}$$

сходится въ требуемомъ промежуткѣ, то функція $f(x)$, представленная имъ, является наиболѣе важнымъ рѣшеніемъ задачи, будучи единственнымъ аналитическимъ на всемъ отрѣзкѣ рѣшеніемъ ея. Если рядъ (1) сходится только на части отрѣзка, то въ нѣкоторыхъ случаяхъ функція, имъ представленная, все же оказывается аналитической во всемъ промежуткѣ и опять представляетъ единственное аналитическое рѣшеніе задачи. Но возможно также, что она имѣетъ особенности на отрѣзкѣ $\left(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right)$, и тогда аналитическаго на всемъ отрѣзкѣ рѣшенія поставленной задачи не существуетъ.

Тѣмъ не менѣе, какъ въ этомъ случаѣ, такъ и въ болѣе общемъ случаѣ, когда рядъ (1) вездѣ расходящійся, рѣшеніе аналитическое на всемъ отрѣзкѣ, за исключеніемъ 0, существуетъ всегда. Я хочу это доказать и въ частности, построить одно *опредѣленное* рѣшеніе задачи, заслуживающее, можетъ быть, нѣкотораго вниманія вслѣдствіе простоты своей ариѳметической природы; но необходимо замѣтить, что безусловно общій способъ суммированія расходящихся рядовъ, какимъ является указываемый ниже способъ, страдаетъ и долженъ страдать существеннымъ недостаткомъ: въ случаѣ существованія аналитическаго на всемъ отрѣзкѣ рѣшенія задачи, наше рѣшеніе обыкновенно не будетъ съ нимъ совпадать.

Съ этой цѣлью разсмотримъ предварительно рядъ

$$F(x)=\sum_{p=0}^{p=\infty}\varepsilon_p x^p(1-x)^q \tag{2}$$

на отрѣзкѣ $\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$, полагая $\varepsilon_p=\pm 1$; при этомъ, для опредѣленности, въ дальнѣйшемъ положимъ $\varepsilon_p=1$, если $q=0$. Нетрудно убѣдиться, что рядъ (2) такъ же, какъ и всѣ его послѣдовательныя производныя будетъ равномѣрно сходящимся на разсматриваемомъ отрѣзкѣ, каковы бы ни были показатели q.

Въ самомъ дѣлѣ, это очевидно, если $q<2p$, т. к. въ этомъ случаѣ, полагая

$$u_n=\varepsilon_p\, x^p\,(1-x)^q,$$

при $n=3p$, и

$$u_n=0$$

при $n \gtrless 3p$, мы видимъ на основаніи теоремы (29) моей работы «О наилучшемъ приближеніи непрерывныхъ функцій и т. д.», что функція $F(x)$ не только безконечно дифференцируема, но и голоморфна на отрѣзкѣ $\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$. Наоборотъ, если q можетъ получать значенія безконечно большія, чѣмъ p, начало координатъ 0 будетъ обыкновенно особой точкой, а потому необходимо разсмотрѣть k-ую производную нашего ряда, т. е

$$\sum_{p=0}^{p=\infty}\varepsilon_p\frac{d^k\,[x^p\,(1-x)^q]}{dx^k}=\sum_{p=0}^{p=\infty}b_p \tag{3}$$

Слѣдовательно,

$$|b_p|<\sum_{i=0}^{i=k}\frac{k!\,p!\,q!\,x^{p-i}(1-x)^{q-k+i}}{i!\,(k-i)!\,(p-i)!\,(q-k+i)!},$$

и, замѣчая, что

$$\frac{p!\,q!\,x^{p-i}\,(1-x)^{q-k+i}}{(p-i)!\,(q-k+i)!}<p^i q^{k-i}x^{p-i}(1-x)^{q-k+i}\leqq\frac{p^p q^k}{(p+q-k)^{p+q-k}},$$

находимъ

$$|b_p|<\frac{2^k p^p q^q}{(p+q-k)^{p+q-k}}.$$

Далѣе, по предположенію, $q > 2p$; кромѣ того, достаточно разсмотрѣть только значенія $p > 2k$. Въ такомъ случаѣ,

$$|b_p| < \frac{2^k p^p}{(p+q-k)^{p-k}} \cdot \frac{q^q}{(p+q-k)^q} < \frac{(2p)^k}{\left(\frac{5}{2}\right)^{p-k}} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{p-k}{q}\right)^q} <$$

$$< \frac{(2p)^k}{5^{p-k}} = \frac{(10p)^k}{5^p}.$$

Но рядъ

$$\sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{(10p)^k}{5^p},$$

очевидно, сходящійся, такъ какъ отношеніе $(p+1)$-го члена къ p-ому члену, равное

$$\frac{1}{5}\left(1+\frac{1}{p}\right)^k,$$

менѣе единицы, если $p > k$.

Поэтому и рядъ (3) равномѣрно сходится, и представляетъ k-ую производную $F^{(k)}(x)$ функціи $F(x)$. Полагая $x=y^2$, видимъ, что рядъ

$$\Phi(y) = \sum_{p=0}^{p=\infty} \varepsilon_p \, y^p (1-y^2)^q \tag{4}$$

можетъ быть также безконечно дифференцируемъ на отрѣзкѣ $\left(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right)$. Слѣдовательно, для вычисленія $\Phi(0)$, $\Phi'(0), \ldots, \Phi^{(k)}(0)$ достаточно положить въ соотвѣтственныхъ рядахъ $y=0$; другими словами, *строка Тэйлора функціи $\Phi(y)$, для $y=0$, сходящаяся или нѣтъ, можетъ быть получена простымъ приведеніемъ подобныхъ членовъ ряда* (4). Прибавимъ еще, что функція $\Phi(y)$ голоморфна на всякой части отрѣзка $\left(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right)$, лежащей *внѣ точки* 0. (Это вытекаетъ изъ упомянутой выше теоремы 29).

Наконецъ, замѣчаемъ, что функція

$$F(x) = A_0' + A_1'x + \sum_{p=0}^{p=\infty} \varepsilon_p x^p[(1-x^2)^{f(p)} - b_p], \tag{5}$$

обладаетъ тѣми же свойствами, что $\Phi(y)$, если $f(p)$ цѣлое положительное число (или нуль), а коэффиціентъ b_p удовлетворяетъ неравенствамъ $0 < b_p \leq 1$, при $\varepsilon_p = +1$, и $1 \leq b_p < 2$, при $\varepsilon_p = -1$, и кромѣ того $b_0 = b_1 = 1$, а именно, она голоморфна на всякой части отрѣзка $\left(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right)$, не заключающей 0, и строка Тэйлора, для $x=0$, получается приведеніемъ подобныхъ членовъ.

Я говорю, что *среди функцій $F(x)$ всегда есть одна и только одна, которая удовлетворяетъ всѣмъ условіямъ поставленной задачи.*

Въ самомъ дѣлѣ, для этого необходимо и достаточно, чтобы

$$
\begin{aligned}
&A_0' + \varepsilon_0 (1 - b_0) = A_0 , \\
&\varepsilon_2 (1 - b_2) - \varepsilon_0 f(0) = A_2 , \\
&\varepsilon_4 (1 - b_4) - \varepsilon_2 f(2) + \varepsilon_0 \frac{f(0).(f(0)-1)}{2} = A_4 , \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\varepsilon_{2p+2}(1 - b_{2p+2}) - \varepsilon_{2p} f(2p)\, \varepsilon_{2p-2} \frac{f(2p-2).(f(2p-2)-1)}{2} + \ldots = A_{2p+2} ,
\end{aligned}
\tag{6}
$$

и

$$
\begin{aligned}
&A_1' + \varepsilon_1 (1 - b_1) = A_1 , \\
&\varepsilon_3 (1 - b_3) - \varepsilon_1 f(1) = A_3 , \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\varepsilon_{2p+1}(1 - b_{2p+1}) - \varepsilon_{2p-1} f(2p-1) + \varepsilon_{2p-1} \frac{f(2p-3).(f(2p-3)-1)}{2} + \ldots = A_{2p+1} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\tag{6$^{\text{bis}}$}
$$

Откуда, во-первыхъ, получаемъ

$$A_0' = A_0 \quad \text{и} \quad A_1' = A ,$$

такъ какъ $b_0 = b_1 = 1$.

Далѣе, полагаемъ $A_n = a_n + \beta_n$, гдѣ a_n цѣлое число, и $0 \leq \beta_n < 1$, такъ что a_n и β_n суть вполнѣ опредѣленныя данныя величины. Съ другой стороны, вводимъ на мѣсто b_n неизвѣстныя γ_n, опредѣленныя равенствами $\gamma_n = \varepsilon_n (1 - b_n)$, и замѣчаемъ, что условія, которымъ подчинены b_n, равнозначны условію $0 \leq \gamma_n < 1$.

Такимъ образомъ уравненія (6) и (6$^{\text{bis}}$) обратятся въ уравненія

$$
\begin{aligned}
&\gamma_2 - \varepsilon_0 f(0) = a_2 + \beta_2 \\
&\gamma_4 - \varepsilon_2 f(2) + \varepsilon_0 \frac{f(0).(f(0)-1)}{2} = a_4 + \beta_4 , \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\gamma_{2p+2} - \varepsilon_{2p} f(2p) + \varepsilon_{2p-2} \frac{f(2p-2).(f(2p-2)-1)}{2} + \ldots = a_{2p+2} + \beta_{2p+2} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\tag{7}
$$

и

$$
\begin{aligned}
&\gamma_3 - \varepsilon_1 f(1) = a_3 + \beta_3 , \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\gamma_{2p+1} - \varepsilon_{2p-1} f(2p-1) + \varepsilon_{2p-3} \frac{f(2p-3).(f(2p-3)-1)}{2} + \ldots = a_{2p+1} + \beta_{2p+1} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\tag{7$^{\text{bis}}$}
$$

въ которыхъ цѣлыя части и положительныя дробныя части должны быть соотвѣтственно равны. Поэтому, съ одной стороны,

$$\gamma_n = \beta_n \quad (n > 1),$$

откуда

$$b_n = 1 - \varepsilon_n \beta_n,$$

и, съ другой стороны,

$$\begin{aligned}
&-\varepsilon_0 f(0) = a_2 \\
&-\varepsilon_2 f(2) = -\varepsilon_0 \frac{f(0).(f(0)-1)}{2} + a_4. \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&-\varepsilon_{2p} f(2p) = -\varepsilon_{2p-2} \frac{f(2p-2).(f(2p-2)-1)}{2} + \dots + a_{2p+2} \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned} \tag{8}$$

и

$$\begin{aligned}
&-\varepsilon_{2p} f(1) = a_3 \\
&\dots\dots\dots \\
&-\varepsilon_{2p-1} f(2p-1) = -\varepsilon_{2p-1} \frac{f(2p-1).(f(2p-1)-1)}{2} - \dots + a_{2p+1} \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned} \tag{8^{bis}}$$

Полученныя уравненія имѣютъ одну и только одну систему рѣшеній: $f(0)$, $f(2)$ и т. д. представляютъ абсолютныя значенія вторыхъ частей равенствъ, $-\varepsilon_0$, $-\varepsilon_2$ и т. д. опредѣляются ихъ знаками, при чемъ этотъ знакъ считается отрицательнымъ, если вторая часть равенства равна нулю. Аналогичнымъ образомъ находятся $f(1)$, ε_1, $f(3)$ и т. д. Такимъ образомъ задача рѣшена.

Примѣчаніе. Если числа A_i цѣлыя, то всѣ $b_i=1$, и наоборотъ.

О нѣкоторыхъ полиномахъ и связи ихъ съ алгебраическимъ интегрированіемъ обыкновенныхъ дифференціальныхъ алгебраическихъ уравненій.

М. Лагутинскій.

Въ своей работѣ: «Приложеніе полярныхъ операцій къ интегрированію обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій въ конечномъ видѣ» [1]) при изученіи вопроса о полученіи частныхъ алгебраическихъ интеграловъ G. Darboux, я ввожу рядъ полиномовъ, изученіе которыхъ имѣетъ, по моему мнѣнію, особую важность для алгебраическаго интегрированія.

Настоящее изслѣдованіе я посвящаю дальнѣйшему раскрытію ихъ свойствъ.

§ 1. Предварительно я остановлюсь нѣсколько подробнѣе на общности послѣдующихъ заключеній.

Ради теоретической простоты я кладу въ основаніе моихъ изслѣдованій такую дифференціальную систему:

$$\frac{dx_1}{X_1}=\frac{dx_2}{X_2}=\frac{dx_3}{X_3}=\ldots=\frac{dx_p}{X_p}, \tag{1}$$

гдѣ функціи X_i представляютъ собой однородные полиномы въ перемѣнныхъ $x_i \, (i=1, 2, \ldots, p)$ одного и того же измѣренія m.

Возьмемъ теперь самую общую алгебраическую систему:

$$\frac{dy_1}{Y_1}=\frac{dy_2}{Y_2}=\frac{dy_3}{Y_3}=\ldots=\frac{dy_{p-1}}{Y_{p-1}}, \tag{2}$$

гдѣ Y_i можно предположить полиномами относительно перемѣнныхъ y_i и также алгебраическихъ ирраціональныхъ выраженій этихъ перемѣнныхъ. Но согласно классическому пріему Абеля всѣ эти ирраціональ-

---

[1]) Сообщенія Харьковскаго Математическаго Общества (2) т. XII, стр. 111.

ности можно выразить раціонально черезъ одну новую ирраціональность. Поэтому, предположивъ, что она опредѣляется уравненіемъ

$$\Theta(z, y_1, y_2, \ldots y_{p-1}) = 0, \tag{3}$$

гдѣ Θ означаетъ полиномъ относительно перемѣнныхъ z и $y_i (i=1, 2, \ldots p-1)$, можно и функціи Y_i считать полиномами въ тѣхъ же перемѣнныхъ.

Въ своей работѣ «Частные алгебраическіе интегралы» (Харьковъ, 1908 г. стр. 1—11), я показываю, что интегрированіе этой системы эквивалентно интегрированію системы въ полныхъ дифференціалахъ:

$$\begin{vmatrix} dx_1 & dx_2 \ldots dx_p \\ x_1 & x_2 \ldots x_p \\ X_1 & X_2 \ldots X_p \end{vmatrix} = 0, \tag{4}$$

гдѣ знакъ равенства показываетъ, что каждый опредѣлитель написанной матриссы равенъ нулю. Функціи X_i будутъ однородными полиномами относительно перемѣнныхъ x_i и ирраціональности z, которая будетъ опредѣляться уравненіемъ, получающимся изъ уравненія (3) замѣной y_i черезъ $\dfrac{x_i}{x_p}$, а полиномъ $X_i - x_i X_p$ при подстановкѣ $x_i = y_i (i=1, 2, \ldots, p-1)$ и $x_p = 1$ обратится въ полиномъ Y_i.

Съ другой стороны я показалъ въ той же работѣ, что для интегрированія полученной системы въ полныхъ дифференціалахъ достаточно найти $p-2$ однородныхъ интеграловъ нулевого измѣренія слѣдующей системы:

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \frac{dx_3}{X_3} = \ldots = \frac{dx_p}{X_p}. \tag{5}$$

Чтобы получить изъ такихъ интеграловъ интегралы системы (2), достаточно произвести въ нихъ подстановку $x_i = y_i (i=1, 2 \ldots p-1)$ и $x_p = 1$.

Вмѣсто ирраціональности z, входящей въ систему (3) можно ввести новую $x_{p+1} = z x_p$; тогда функціи X_i можно преобразовать въ полиномы, однородные относительно перемѣнныхъ $x_1, x_2, x_3 \ldots x_p, x_{p+1}$. При этомъ сама ирраціональность x_{p+1} будетъ опредѣляться уравненіемъ:

$$\vartheta(x_1, x_2 \ldots x_p, x_{p+1}) = 0, \tag{6}$$

гдѣ функція ϑ будетъ однороднымъ полиномомъ относительно тѣхъ же перемѣнныхъ, который при подстановкѣ $x_i = y_i (i = 1, 2, \ldots, p-1)$,

$x_{p+1} = z$, $x_p = 1$ обращается въ полиномъ $\Theta(z, y_1, y_2, \ldots, y_{p-1})$. Прибавимъ къ системѣ (5) новый членъ такимъ образомъ:

$$\frac{dx_1}{X_1 \dfrac{\partial \vartheta}{\partial x_{p+1}}} = \frac{dx_2}{X_2 \dfrac{\partial \vartheta}{\partial x_{p+1}}} = \frac{dx_3}{X_3 \dfrac{\partial \vartheta}{\partial x_{p+1}}} = \ldots = \frac{dx_p}{X_p \dfrac{\partial \vartheta}{\partial x_{p+1}}} = \frac{dx_{p+1}}{-\sum\limits_{i=1}^{p} X_i \dfrac{\partial \vartheta}{\partial x_i}} \qquad (7)$$

Если положимъ, что степень полиномовъ X_i будетъ равна m_1, а степень полинома ϑ равна m_2, то обозначая черезъ $L_i (i = 1, 2, \ldots, p+1)$ произвольные полиномы порядка $m_1 - 1$, напишемъ рядъ полиномовъ:

$$X_i \frac{\partial \vartheta}{\partial x_{p+1}} - L_i \vartheta \quad (i = 1, 2, \ldots, p), \quad -\sum_{i=1}^{p} X_i \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i} - L_{p+1} \vartheta.$$

Можетъ случиться, что всѣ эти полиномы имѣютъ общаго множителя v порядка $m_1 + m_2 - m - 1$. Тогда мы можемъ написать:

$$\begin{gathered} X_i \frac{\partial \vartheta}{\partial x_{p+1}} - L_i \vartheta = v X_i^{(1)} \\ i = 1, 2, \ldots, p. \\ -\sum_{i=1}^{p} X_i \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i} - L_{p+1} \vartheta = v X_{p+1}^{(1)}, \end{gathered} \qquad (8)$$

гдѣ полиномы $X_i^{(1)}$ будутъ однородными полиномами порядка m. Если предположимъ, что множитель v можетъ быть принятъ и равнымъ единицѣ, то формулы (8) будутъ обнимать всѣ возможные случаи.

Замѣтимъ относительно множителя v слѣдующее: Пусть v_1 его неприводимый множитель. Онъ не можетъ быть дѣлителемъ полинома ϑ, такъ какъ изъ пріема Абеля слѣдуетъ неприводимость послѣдняго; слѣдовательно остается два предположенія, что либо $v_1 \equiv \vartheta$, либо полиномы v_1 и ϑ первые между собой. Но формулы (8) показываютъ, что при первомъ предположеніи всѣ полиномы $X_i (i = 1, 2, \ldots, p)$ будутъ дѣлиться на полиномъ ϑ. Но тогда система (5) въ силу условія (6) пріобрѣтала бы неопредѣленный видъ. Итакъ полиномъ ϑ долженъ быть первымъ съ каждымъ неприводимымъ множителемъ полинома v, а слѣдовательно и съ нимъ самимъ.

Этимъ замѣчаніемъ мы воспользуемся сейчасъ-же.

Возьмемъ систему:

$$\frac{dx_1}{X_1^{(1)}} = \frac{dx_2}{X_2^{(1)}} = \frac{dx_3}{X_3^{(1)}} = \ldots = \frac{dx_{p+1}}{X_{p+1}^{(1)}} \qquad (9)$$

и покажемъ, что полиномъ ϑ будетъ ея частнымъ алгебраическимъ интеграломъ.

Для этого достаточно показать, что сумма

$$\sum_{i=1}^{p+1} X_i^{(1)} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i}$$

дѣлится на полиномъ ϑ.

Умножая обѣ части формулъ (8) соотвѣтственно на $\frac{\partial \vartheta}{\partial x_i}$, складывая полученные результаты и произведя соотвѣтствующія сокращенія, мы получимъ такое тождество:

$$-\vartheta \sum_{i=1}^{p+1} L_i \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i} \equiv v \sum_{i=1}^{p+1} X_i^{(1)} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i}.$$

Но такъ какъ полиномы ϑ и v первые между собою, то сумма $\sum\limits_{i=1}^{p+1} X_i^{(1)} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i}$ дѣлится на полиномъ ϑ. Обозначивъ частное отъ такого дѣленія черезъ K, получимъ такое тождество:

$$\sum_{i=1}^{p+1} X_i^{(1)} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i} = K\vartheta,$$

которое и доказываетъ, что ϑ—частный алгебраическій интегралъ.

§ 2. Сдѣлаемъ небольшое отступленіе для доказательства одной леммы, касающейся частныхъ алгебраическихъ интеграловъ.

Дѣло идетъ о взаимномъ соотношеніи интегральныхъ кривыхъ и частнаго алгебраическаго интеграла.

Возьмемъ систему (1)

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_p}{X_p} \tag{1}$$

Обозначимъ черезъ X дифференціальную операцію, выраженную суммой

$$\sum_{i=1}^{p} X_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Тождество

$$Xf = Kf, \tag{10}$$

гдѣ f нѣкоторой полиномъ, покажетъ, что f частный алгебраическій интегралъ.

Для вычисленія интегральной кривой системы вида (1) удобно брать вспомогательную независимую перемѣнную. Выберемъ ее такъ, чтобы всѣ отношенія, составляющія систему (1), были бы равны ея дифференціалу, т. е. положимъ

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i. \qquad i=1, 2, \ldots, p. \tag{11}$$

Предположимъ, что величины $a_i (i = 1, 2, \ldots, p)$ при подстановкѣ $x_i = a_i$ не обращаютъ въ нуль всѣхъ опредѣлителей матриссы:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \ldots & x_p \\ X_1 & X_2 & X_3 \ldots & X_p \end{vmatrix} \tag{12}$$

Тогда черезъ точку A, опредѣляемую значеніями $a_1, a_2, \ldots, a_p$, проходитъ вполнѣ опредѣленная интегральная кривая.

Безъ вреда для общности можемъ предположить, что точка a_i интегральной кривой будетъ соотвѣтствовать значенію, равному нулю параметра t.

Замѣтивъ это, опредѣляемъ путемъ простого дифференцированія голоморфныя разложенія

$$x_i = \Theta_i(t), \qquad i=1, 2, \ldots, p \tag{13}$$

обращающіяся, какъ сказано, при $t = 0$ соотвѣтственно въ постоянныя a_i.

Въ нѣкоторой области значеній перемѣннаго t вблизи нуля они представятъ извѣстную часть интегральной кривой, проходящей черезъ точку A.

Если мы подставимъ въ полиномъ f, представляющій частный алгебраическій интегралъ, вмѣсто перемѣнныхъ x_i соотвѣтственно функціи $\Theta_i(t)$, то получимъ нѣкоторую новую функцію, точно также голоморѳную вблизи $t = 0$. Разложеніе ея въ рядъ по степенямъ t можно получить непосредственно, не вычисляя предварительно разложеній, данныхъ равенствами (13).

Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ нѣкоторую функцію перемѣнныхъ x_i $F(x_1, x_2, \ldots, x_p)$; предположимъ въ ней перемѣнныя x_i функціями независимой перемѣнной t, опредѣляемыми равенствами (13). Замѣчая кромѣ того, что производная отъ каждой перемѣнной x_i дается равенствами (11), получаемъ:

$$\frac{dF(x_1, x_2, \ldots, x_p)}{dt} = \sum_{i=1}^{p} X_i \frac{\partial F(x_1, x_2, \ldots, x_p)}{\partial x_i},$$

т. е. операція $\frac{d}{dt}$ въ данномъ случаѣ даетъ тотъ же результатъ, что и операція X.

На основаніи этого, воспользовавшись тождествомъ (10), находимъ

$$\frac{df}{dt} = Kf.$$

Отсюда

$$\frac{d^2f}{dt^2} = \frac{d(Kf)}{dt} = f\{XK + K^2\} = fK_1,$$

и вообще

$$\frac{d_gf}{dt^g} = \frac{d(K_{g-1}f)}{dt} = f\{XK_{g-1} + KK_{g-1}\} = fK_g.$$

Итакъ производная g-го порядка отъ f по перемѣнной t будетъ равна ей же самой, умноженной на нѣкоторый полиномъ $g(m-1)$-го порядка K_g.

Чтобы получить значенія этихъ производныхъ для $t=0$, достаточно замѣнить въ этихъ полиномахъ x_i соотвѣтственно черезъ a_i. Условимся брать въ скобки полиномъ, въ которомъ произведена такая замѣна, и мы получимъ искомое разложеніе въ такомъ видѣ:

$$f = (f)\left\{1 + (K)\,t + \sum_{j=2}^{\infty}(K_{j-1})\frac{t^j}{j!}\right\}.$$

Полученное равенство показываетъ:

Если обыкновенная точка системы A обращаетъ въ нуль частный алгебраическій интегралъ f, то обращается въ нуль и результатъ подстановки въ этотъ полиномъ разложеній $\Theta_i(t)$, опредѣляющихъ интегральную кривую, проходящую черезъ точку A.

Такимъ образомъ всѣ точки интегральной кривой, лежащія на достаточно малой дугѣ ея, обращаютъ въ нуль частный алгебраическій интегралъ, если одна изъ этихъ точекъ обращаетъ его въ нуль.

Пользуясь теоріей аналитическаго продолженія, при помощи простыхъ разсужденій приходимъ къ такой теоремѣ:

Если дуга интегральной кривой, проходя черезъ точку A, обращающую въ нуль частный алгебраическій интегралъ, не содержитъ особенныхъ точекъ разсматриваемой дифференціальной системы, то всѣ ея точки обращаютъ полиномъ f въ нуль.

Можно формулировать эту теорему и чисто геометрически.

Если подъ частными алгебраическими интегралами будемъ понимать точечное многообразіе, опредѣляемое уравненіемъ

$$f = 0\,,$$

то наша теорема можетъ быть выражена и такъ: всякій частный алгебраическій интегралъ образуется перемѣщеніемъ интегральной кривой.

§ 3. Вернемся снова къ системѣ (9) § 1:

$$\frac{dx_1}{X_1^{(1)}} = \frac{dx_2}{X_2^{(1)}} = \ldots = \frac{dx_p}{X_p^{(1)}} = \frac{dx_{p+1}}{X_{p+1}^{(1)}}\,, \tag{9}$$

которая согласно доказанному имѣетъ частный алгебраическій интегралъ ϑ.

Возьмемъ какую-нибудь функцію $\Phi(x_1\,,\ x_2, \ldots, x_p)$ и предположимъ, что уравненіе

$$\Phi(x_1\,,\ x_2, \ldots, x_{p+1}) = 0 \tag{14}$$

можетъ быть однимъ изъ уравненій нѣкоторой интегральной кривой b. Тогда дифференціалъ отъ этого уравненія вдоль этой кривой долженъ быть равенъ нулю.

Получимъ

$$d\Phi(x_1\,,\ x_2\,, \ldots, x_{p+1}) = 0$$

или

$$\Phi_1(x_1\,,\ x_2, \ldots, x_{p+1}) \equiv \sum_{i=1}^{p+1} X_i^{(1)} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = 0.$$

Отсюда слѣдуетъ, что вновь полученное уравненіе будетъ также однимъ изъ уравненій этой интегральной кривой.

Если полученное уравненіе не будетъ слѣдствіемъ уравненія (14), то мы можемъ снова примѣнить пріемъ и получимъ такимъ образомъ рядъ уравненій:

$$\begin{gathered}
\Phi_1(x_1\,,\ x_2, \ldots, x_{p+1}) = 0 \\
\Phi_2(x_1\,,\ x_2, \ldots, x_{p+1}) = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\Phi_k(x_1\,,\ x_2, \ldots, x_{p+1}) = 0.
\end{gathered}$$

Такой процессъ полученія уравненій кривой b, закончится при $k < p+1$ тѣмъ, что послѣднее уравненіе будетъ слѣдствіемъ первыхъ k уравненій.

Итакъ мы нашли k уравненій интегральной кривой b:

$$\begin{aligned} &\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}) = 0 \\ &\Phi_i(x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}) = 0 \\ &\quad i = 1, 2, \ldots, k-1. \end{aligned} \tag{15}$$

Если число этихъ уравненій k равно $p-1$, то ими интегральная кривая b опредѣляется вполнѣ. Когда же $k < p-1$, то можно опредѣлить ея недостающія уравненія двумя путями:

Опредѣлить изъ уравненій (15) k перемѣнныхъ и свести систему (9) къ новой системѣ съ $p-k+1$ перемѣнными. Интегрированіе ея даетъ $p-k$ интеграловъ; приравнивая ихъ произвольнымъ постояннымъ получимъ еще $p-k$ уравненій, которыя вмѣстѣ съ уравненіями (15) опредѣлятъ всѣ интегральныя кривыя b.

Можно поступить также иначе. Напишемъ полную систему всѣхъ независимыхъ интеграловъ уравненій (9) и приравняемъ ихъ произвольнымъ постояннымъ. Полученныя уравненія

$$\Psi_i = C_i \qquad i = 1, 2, \ldots, p \tag{16}$$

будутъ разрѣшимыми относительно p перемѣнныхъ.

Разрѣшивъ и подставивъ результатъ въ уравненія (15), убѣждаемся дифференцированіемъ, что полученныя соотношенія не будутъ зависѣть отъ оставшейся перемѣнной и могутъ быть написаны въ видѣ:

$$\sigma_i(C_1, C_2, \ldots, C_p) = 0$$
$$i = 1, 2, \ldots, k.$$

Эти условія оставляютъ $p-k$ постоянныхъ совершенно произвольными. Пусть это будутъ $C_1, C_2, \ldots, C_{p-k}$. Тогда, присоединяя къ уравненіямъ (15) нижеслѣдующія

$$\Psi_i = C_i \qquad i = 1, 2, \ldots, p-k,$$

мы получимъ уравненія, опредѣляющія интегральныя кривыя b. Въ самомъ дѣлѣ, если полученная система уравненій была бы не совмѣстима, то существовало бы соотношеніе между постоянными C_i, которое мы исключили a priori.

Такимъ образомъ видимъ, что по второму способу достаточно для полученія интегральныхъ кривыхъ въ системѣ уравненій (16) замѣнить k надлежащимъ образомъ выбранныхъ уравненій уравненіями (15).

Въ частномъ случаѣ, если мы ищемъ интегральныя кривыя, всѣ точки которыхъ обращаютъ въ нуль частный алгебраическій интегралъ, то уже второе уравненіе будетъ слѣдствіемъ перваго, и система (15) сведется къ одному уравненію, которое получится приравниваніемъ нулю частнаго интеграла.

Напр. приравняемъ ϑ нулю,

$$\vartheta = 0. \tag{17}$$

Если мы примѣнимъ первый способъ, то исключая перемѣнную x_{p+1}, придемъ къ системѣ (5) и слѣдовательно, примѣняя второй способъ, можемъ получить всѣ ея интегральныя кривыя при помощи полной системы интеграловъ уравненій (9), замѣнивъ одинъ изъ нихъ уравненіемъ (17), а потому:

Всѣ вопросы объ алгебраичности рѣшеній системы (5) [а также и (2)] зависятъ отъ рѣшенія этихъ вопросовъ для системы (9), которая отличается отъ системы (1) только числомъ перемѣнныхъ.

§ 4. Въ дальнѣйшемъ наши разсужденія будутъ касаться только системы (1):

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \frac{dx_3}{X_3} = \ldots = \frac{dx_p}{X_p}\,. \tag{1}$$

Предположимъ, что однимъ изъ уравненій нѣкоторой интегральной кривой будетъ однородный полиномъ n-го порядка.

Обозначимъ черезъ B_{1i} всѣ одночлены, составленные изъ перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots, x_p$ измѣренія n, черезъ s ихъ число, равное $\binom{n+p-1}{p-1}$, а черезъ $C_i (i=1, 2, \ldots, s)$ нѣкоторыя постоянныя, тогда $\sum_{i=1}^{s} C_i B_{1i}$ даетъ намъ при произвольномъ выборѣ постоянныхъ C_i самую общую форму полинома n-го порядка.

Условимся затѣмъ, что операція $X \equiv \sum_{i=1}^{p} X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ обращаетъ одночлены B_{1i} въ полиномы B_{2i}, т. е. имѣемъ тождество:

$$XB_{1i} = B_{2i}. \qquad (i=1, 2, \ldots, s).$$

Точно также примемъ вообще

$$XB_{ji} = B_{j+1\,i} \qquad (i=1, 2, \ldots, s), \tag{18}$$
$$j=1, 2, 3, 4, \ldots$$

Положимъ напр., что постоянная C_1 отлична отъ нуля, и пусть уравненіе

$$\sum_{i=1}^{s} C_i B_{1i} = 0 \tag{19}$$

представляетъ то уравненіе интегральной кривой, о которомъ мы говорили.

Дифференцируя его вдоль интегральной кривой, получимъ:

$$\sum_{i=1}^{s} C_i X B_{1i} \equiv \sum_{i=1}^{s} C_i B_{2i} = 0 . \tag{20}$$

Примѣняя изложенный пріемъ еще s—2 раза, получимъ рядъ такихъ уравненій, которыя всѣ обращаются въ нуль для точекъ разсматриваемой нами интегральной кривой:

$$\sum_{i=1}^{s} C_i B_{ji} = 0 . \qquad (j=1,\ 2,\ 3, \ldots, s) \tag{21}$$

Обозначимъ черезъ $\Phi_n(x)$ опредѣлитель

$$\Phi_n(x) \equiv \begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & \ldots & B_{1s} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & \ldots & B_{2s} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & \ldots & B_{3s} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ B_{s1} & B_{s2} & B_{s3} & \ldots & B_{ss} \end{vmatrix} . \tag{22}$$

Умножая уравненія (21) на первые миноры этого опредѣлителя, отвѣчающіе элементамъ его перваго столбца, получимъ такое уравненіе:

$$C_1 \Phi_n(x) = 0 .$$

Такимъ образомъ приходимъ къ такой теоремѣ:

Если одно изъ уравненій нѣкоторой интегральной кривой представляетъ собой нѣкоторый однородный полиномъ n-го порядка, то интегральная кривая будетъ удовлетворять и уравненію

$$\Phi_n(x) = 0 .$$

Слѣдствіе: Если только одно изъ уравненій интегральной кривой можетъ быть алгебраическимъ, то уже уравненіе (20) не можетъ быть новымъ уравненіемъ по сравненію съ уравненіемъ (19), и полиномъ

$\sum_{i=1}^{s} C_i B_{2i}$ долженъ заключать полиномъ $\sum_{i=1}^{s} C_i B_{1i}$ множителемъ, т. е. можно написать тождество:

$$\sum_{i=1}^{s} C_i B_{2i} = K \sum_{i=1}^{s} C_i B_{1i};$$

но, такъ какъ, очевидно,

$$X \sum_{i=1}^{s} C_i B_{1i} = \sum_{i=1}^{s} C_i B_{2i},$$

то получаемъ такую теорему:

Если только одно уравненіе интегральной кривой можетъ быть приведено къ алгебраическому виду, то система обладаетъ по крайней мѣрѣ однимъ частнымъ алгебраическимъ интеграломъ, и приравнявъ его нулю, мы получимъ искомое уравненіе интегральной кривой.

§ 5. Встрѣтившійся въ разсматриваемомъ вопросѣ опредѣлитель, какъ я показалъ въ цитированной уже работѣ «Приложеніе полярныхъ операцій къ интегрированію обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій», представляетъ собой точечный коваріантъ линейнаго коннекса

$$\sum_{i=1}^{p} X_i u_i = 0.$$

Теорема предыдущаго параграфа показываетъ, что за первое уравненіе интегральной кривой, имѣющей въ числѣ своихъ уравненій алгебраическіе, можно взять одинъ изъ этихъ полиномовъ.

Покажемъ, что, если выбрать надлежащимъ образомъ параметръ, въ функціи котораго выразятся интегральныя кривыя, то этотъ опредѣлитель представляетъ собой ничто иное, какъ опредѣлитель Вронскаго.

Въ самомъ дѣлѣ, введемъ тутъ же вспомогательную перемѣнную, какъ и въ § 2 и слѣдовательно форма уравненій будетъ слѣдующая:

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i, \qquad (i=1, 2, 3, \ldots, p), \tag{11}$$

а интегральныя кривыя опредѣлятся уравненіями:

$$x_i = \Theta_i(t). \qquad (i=1, 2, \ldots, p). \tag{13}$$

Тогда операція X и дифференцированіе по перемѣнной t даютъ одинаковые результаты.

Поэтому имѣемъ:

$$\frac{d}{dt}B_{j,i}=B_{j+1,i} \qquad (i=1,\,2,\ldots,s)$$

и вообще

$$\frac{d^{(j)}B_{1i}}{dt^j}=B_{j+1,i}. \qquad (i=1,\,2,\ldots,s)$$

Замѣтимъ это и замѣнимъ въ опредѣлителѣ (22) перемѣнныя x_i функціями $\Theta_i(t)$ на основаніи равенствъ (13). При этомъ всѣ элементы первой строки B_{1i} обратятся въ функціи B_i параметра t и онъ приметъ видъ:

$$\begin{vmatrix} B_1 & B_2 & B_3 & \ldots & B_s \\ \frac{dB_1}{dt} & \frac{dB_2}{dt} & \frac{dB_3}{dt} & \ldots & \frac{dB_s}{dt} \\ \frac{d^{(2)}B_1}{dt^2} & \frac{d^{(2)}B_2}{dt^2} & \frac{d^{(2)}B_3}{dt^2} & \ldots & \frac{d^{(2)}B_s}{dt^2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{d^{(s-1)}B_1}{dt^{s-1}} & \frac{d^{(s-1)}B_2}{dt^{s-1}} & \frac{d^{(s-1)}B_3}{dt^{s-1}} & \ldots & \frac{d^{(s-1)}B_s}{dt^{s-1}} \end{vmatrix}$$

Полученное выраженіе и доказываетъ наше утвержденіе.

Если этотъ опредѣлитель равенъ нулю для какой-нибудь интегральной кривой, то между элементами первой строки должно быть по извѣстному свойству опредѣлителя Вронскаго линейное соотношеніе съ постоянными коэффиціентами, и слѣдовательно всѣ точки интегральной кривой удовлетворяютъ нѣкоторому уравненію, которое получаютъ, приравнивая нулю нѣкоторый полиномъ n-го порядка.

Такимъ образомъ получаемъ теорему: *Если полиномъ $\Phi_n(x)$ обращается въ нуль для всѣхъ точекъ интегральной кривой, то одно изъ ея уравненій будетъ имѣть въ лѣвой части однородный полиномъ n-го порядка, а въ правой нуль.*

§ 6. Дадимъ еще новое доказательство той же теоремы, а кстати и способъ, какъ составлять это уравненіе интегральной кривой по заданной ея точкѣ.

Сначала докажемъ слѣдующее тождество:

Даны нѣкоторыя величины:

$$\begin{array}{lllll}
b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1r} \\
b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2r} \\
b_{31} & b_{32} & b_{33} & \dots & b_{3r} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
b_{r-2,1} & b_{r-2,2} & b_{r-2,3} & \dots & b_{r-2,r} \\
b_{r-1,1} & b_{r-1,2} & b_{r-1,3} & \dots & b_{r-1,r} \\
b_{r,1} & b_{r,2} & b_{r,3} & \dots & b_{r,r} \\
b_{r+1,1} & b_{r+1,2} & b_{r+1,3} & \dots & b_{r+1,r} \\
b_{r+2,1} & b_{r+2,2} & b_{r+2,3} & \dots & b_{r+2,r}
\end{array}$$

Обозначимъ первые миноры первыхъ $r-1$ строкъ, образованныхъ выбрасыванiемъ i-го столбца черезъ z_i. Условимся также обозначать черезъ Δ_{ij} опредѣлитель, полученный черезъ выбрасыванiе i и j строки въ написанной таблицѣ.

Тогда имѣемъ непосредственно такiя тождества:

$$\sum_{i=1}^{r} b_{r,i} z_i - \Delta_{r+1,\, r+2} \equiv 0$$

$$\sum_{i=1}^{r} b_{r+1,i} z_i - \Delta_{r,r+2} \equiv 0$$

$$\sum_{i=1}^{r} b_{r+2,i}\, z_i - \Delta_{r,r+1} \equiv 0$$

$$\sum_{i=1}^{r} b_{ji}\, z_i \equiv 0$$

$$j=1,\ 2,\ 3,\dots,r-2.$$

Исключая же изъ этихъ тождествъ z_i, мы получимъ такое:

$$\Delta_{r+1,\, r+2}\, \Delta_{r-1,r} - \Delta_{r,r+2}\, \Delta_{r-1,\, r+1} + \Delta_{r,r+1}\, \Delta_{r-1,\, r+2} = 0. \qquad (23)$$

Это тождество для случая $r=4$ имѣетъ уже примѣненiе въ наукѣ. Укажу напр. на теорiю бинарныхъ формъ и на изученiе различныхъ значенiй ангармоническаго отношенiя для четырехъ элементовъ.

Прибавимъ къ s строкамъ опредѣлителя $\Phi_n(x)$ двѣ такiя строки:

$$\begin{array}{lllll}
E_{11} & E_{12} & E_{13} & \dots & E_{1s} \\
E_{21} & E_{22} & E_{23} & \dots & E_{2s}
\end{array} \qquad (24)$$

составленныя изъ произвольно взятыхъ постоянныхъ. Обозначимъ черезъ Δ_1 опредѣлитель, который получится изъ $\Phi_n(x)$, когда замѣстимъ всѣ элементы послѣдней строки элементами первой изъ строкъ (24). Точно такая же замѣна въ опредѣлителѣ $\Phi_n(x)$ элементовъ послѣдней строки элементами второй изъ строкъ (24) приведетъ насъ къ опредѣлителю Δ_2. А если замѣнимъ въ опредѣлителѣ $\Phi_n(x)$ элементы предпослѣдней строки соотвѣтственно элементами первой или второй изъ строкъ (24), то получимъ два опредѣлителя Δ_3 и Δ_4. Наконецъ замѣняя въ опредѣлителѣ $\Phi_n(x)$ двѣ послѣднія строки строками (24), получимъ опредѣлитель Δ.

Шесть опредѣлителей Δ, $\Phi_n(x)$, Δ_1, Δ_2, Δ_3 и Δ_4 имѣютъ по $s-2$ строкъ одинаковыхъ, а остальныя двѣ берутся изъ четырехъ данныхъ строкъ. Эти опредѣлители только что разсмотрѣннаго типа, а потому между ними должно быть тождественное соотношеніе типа (23), а именно:

$$\Delta\Phi_n(x) + \Delta_1\Delta_4 - \Delta_2\Delta_3 = 0 \tag{25}$$

Возьмемъ еще и такую таблицу:

$$\begin{array}{lllll}
B_{11} & B_{12} & B_{13} & \ldots & B_{1s} \\
B_{21} & B_{22} & B_{23} & \ldots & B_{2s} \\
\multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\
\multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\
B_{k-1,1} & B_{k-1,2} & B_{k-1,3} & \ldots & B_{k-1,s} \\
B_{k,1} & B_{k,2} & B_{k,3} & \ldots & B_{k,s} \\
E_{11} & E_{12} & E_{13} & \ldots & E_{1,s} \\
E_{21} & E_{22} & E_{23} & \ldots & E_{2s} \\
\multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\
\multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\
E_{s-k,1} & E_{s-k,2} & E_{s-k,3} & \ldots & E_{s-k,s} \\
E_{s-k+1,1} & E_{s-k+1,2} & E_{s-k+1,3} & \ldots & E_{s-k+1,s} \\
E_{s-k+2,1} & E_{s-k+2,2} & E_{s-k+2,3} & \ldots & E_{s-k+2,s}
\end{array} \tag{26}$$

Условимся обозначать опредѣлитель, который составленъ изъ этихъ элементовъ выбрасываніемъ i и j строки, черезъ Δ_{ij}.

Тогда на основаніи разсужденій начала параграфа мы будемъ имѣть между шестью опредѣлителями $\Delta_{k-1,k}$, $\Delta_{k-1,s+1}$, $\Delta_{k-1,s+2}$, $\Delta_{k,s+1}$ $\Delta_{k,s+2}$, $\Delta_{s+1,s+2}$ такое тождественное соотношеніе:

$$\Delta_{k-1,k}\,\Delta_{s+1,s+2} - \Delta_{k-1,s+1}\,\Delta_{k,s+2} + \Delta_{k-1,s+2}\,\Delta_{k,s+1} = 0. \tag{27}$$

§ 7. Пусть уравненіями (13):

$$x_i = \Theta_i(t) \qquad i=1,2,\dots,p \tag{13}$$

при нѣкоторыхъ предположеніяхъ относительно входящихъ въ функціи Θ_i начальныхъ постоянныхъ опредѣляется такая интегральная кривая, всѣ точки которой обращаютъ въ нуль полиномъ $\Phi_n(x)$.

Возьмемъ произвольно два ряда постоянныхъ (24) и разсмотримъ выраженія $\varDelta_1$ и $\varDelta_2$. Подставивъ въ нихъ вмѣсто x_i соотвѣтственно функціи Θ_i, будемъ имѣть двѣ функціи перемѣнной t $\Psi_1(t)$ и $\Psi_2(t)$.

Если функція $\Psi_1(t)$ равна тождественно нулю, то получаемъ сразу уравненіе:

$$\varDelta_1 = 0, \tag{28}$$

которое будетъ слѣдствіемъ уравненій интегральной кривой.

Когда же $\Psi_1(t)$ отлична отъ нуля, то, обозначивъ частное функцій $\Psi_2(t)$ и $\Psi_1(t)$ черезъ $\Psi(t)$, пишемъ выраженіе $\varDelta_2 - \varDelta_1 \Psi(t)$. Очевидно, что уравненіе

$$\varDelta_2 - \varDelta_1 \Psi(t) = 0 \tag{29}$$

будетъ слѣдствіемъ уравненій интегральной кривой.

Беремъ дифференціалъ отъ обѣихъ частей этого уравненія.

На основаніи условій (11) мы получимъ

$$X\varDelta_2 - \Psi(t)\, X\varDelta_1 - \varDelta_1 \frac{d\Psi(t)}{dt} = 0.$$

Если мы примемъ во вниманіе правила дифференцированія опредѣлителя, то, воспользовавшись формулами (18), получимъ, что

$$X\varDelta_2 = -\varDelta_4 \quad \text{и} \quad X\varDelta_1 = -\varDelta_3,$$

и слѣдовательно наше уравненіе принимаетъ видъ:

$$-\varDelta_4 + \varDelta_2 \Psi(t) - \varDelta_1 \frac{d\Psi(t)}{dt} = 0.$$

Исключая изъ полученнаго уравненія и изъ уравненія (29) функцію $\Psi(t)$, получаемъ:

$$\varDelta_2\varDelta_3 - \varDelta_1\varDelta_4 - \varDelta_1^2 \frac{d\Psi(t)}{dt} = 0.$$

Принимая же во вниманіе тождество (25), имѣемъ окончательно такое уравненіе:

$$\Delta\Phi_n(x) = \Delta_1{}^2 \frac{d\Psi(t)}{dt}.$$

Но для всѣхъ точекъ разсматриваемой нами кривой полиномъ $\Phi_n(x)$ обращается въ нуль; поэтому мы должны имѣть либо

$$\Delta_1 = 0,$$

либо

$$\frac{d\Psi(t)}{dt} = 0.$$

Мы уже разсмотрѣли первый случай, второй же показываетъ, что функція $\Psi(t)$ должна быть постоянной, которую обозначимъ черезъ λ.

Если обозначимъ

$$E_i^{(1)} = E_{2i} - \lambda E_{1i}, \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, s,$$

то уравненіе (29) приметъ видъ:

$$\begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & \ldots & B_{1s} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & \ldots & B_{2s} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & \ldots & B_{3s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ B_{s-1,1} & B_{s-1,2} & B_{s-1,3} & \ldots & B_{s-1,s} \\ E_1^{(1)} & E_2^{(1)} & E_3^{(1)} & \ldots & E_s^{(1)} \end{vmatrix} = 0.$$

Мы получаемъ опять опредѣлитель типа Δ_1, но съ другими постоянными, въ которыя входитъ линейно неизвѣстный параметръ λ. Его можно опредѣлить, если задать предварительно точку на этой интегральной кривой. Тогда получимъ линейное уравненіе, которымъ связаны постоянныя $E_i^{(1)}$.

Итакъ приходимъ къ такой теоремѣ: *Если всѣ точки интегральной кривой обращаютъ въ нуль полиномъ $\Phi_n(x)$, то онѣ обращаютъ въ нуль и опредѣлитель, который получится изъ $\Phi_n(x)$, если мы въ послѣдней строкѣ его замѣнимъ всѣ элементы постоянными, связанными линейной зависимостью.*

§ 8. Полученный результатъ можно обобщить слѣдующимъ образомъ: Мы въ предыдущемъ параграфѣ нашли опредѣлитель, который отличенъ отъ полинома $\Phi_n(x)$ тѣмъ, что элементы его послѣдней строки замѣщены нѣкоторыми постоянными.

Предположимъ, что всѣ точки нѣкоторой интегральной кривой обращаютъ въ нуль опредѣлитель, который мы въ § 6 обозначили черезъ $\Delta_{s+1,\, s+2}$.

Аналогично предыдущему прибавляемъ два ряда постоянныхъ:

$$
\begin{array}{ccccc}
E_{s-k+1,1} & E_{s-k+1,2} & E_{s-k+1,3} & \ldots & E_{s-k+1,s} \\
E_{s-k+2,1} & E_{s-k+2,2} & E_{s-k+2,3} & \ldots & E_{s-k+2,s}
\end{array}
$$

Подставляемъ въ опредѣлитель $\Delta_{k,s+3}$ выраженія въ перемѣнной t, опредѣляющія точки интегральной кривой.

Можетъ случиться, что результатъ этой подстановки будетъ нулемъ. Тогда мы приходимъ сразу къ заключенію, что существуетъ опредѣлитель, который обращаютъ въ нуль всѣ точки интегральной кривой и въ которомъ постоянныя занимаютъ еще одну новую строку по сравненію съ исходнымъ.

Предположимъ теперь, что результатъ этой подстановки дастъ нѣкоторую функцію $\psi_1(t)$, а результатомъ такой же подстановки въ опредѣлитель $\Delta_{k,s+1}$ будетъ функція $\psi_2(t)$. Обозначимъ отношеніе функціи $\psi_2(t)$ къ функціи $\psi_1(t)$ черезъ $\psi(t)$. Тогда уравненіе

$$\Delta_{k,s+1} - \Delta_{k,s+2}\psi(t) = 0 \tag{30}$$

будетъ имѣть мѣсто для всѣхъ точекъ разсматриваемой кривой.

Дифференцируя это уравненіе вдоль интегральной кривой, мы получимъ по принятымъ обозначеніямъ:

$$X\Delta_{k,s+1} - \psi(t)X\Delta_{k,s+2} - \Delta_{k,s+2}\frac{d\psi(t)}{dt} = 0.$$

Но нетрудно убѣдиться непосредственнымъ вычисленіемъ, что

$$X\Delta_{k,s+1} = \Delta_{k-1,\, s+1}\,, \quad X\Delta_{k,s+2} = \Delta_{k-1,\, s+2}\,,$$

и слѣдовательно наше уравненіе принимаетъ такой видъ:

$$\Delta_{k-1,\, s+1} - \psi(t)\Delta_{k-1,\, s+2} - \Delta_{k,s+2}\frac{d\psi(t)}{dt} = 0.$$

Исключая изъ этого уравненія и уравненія (30) функцію $\psi(t)$, приходимъ къ такому равенству:

$$\Delta_{k-1,\, s+1}\, \Delta_{k,s+2} - \Delta_{k-1,\, s+2}\, \Delta_{k,s+1} - (\Delta_{k,s+2})^2\frac{d\psi(t)}{dt} = 0\,,$$

или принимая во вниманіе тождество (27), получаемъ:

$$\Delta_{k-1,k}\,\Delta_{s+1,\ s+2} = (\Delta_{k,s+2})^2\,\frac{d\psi(t)}{dt}\,.$$

Но $\Delta_{s+1.\ s+2}$ равно нулю для точекъ интегральной кривой; равенство-же нулю $\Delta_{k,s+2}$ мы разсмотрѣли, и потому теперь остается случай, когда $\dfrac{d\psi(t)}{dt}=0$, т. е. когда $\psi(t)$ будетъ нѣкоторая постоянная λ.

Обозначивъ черезъ

$$E_i^{(1)} = E_{s-k+2,i} - E_{s-k+1,i}\lambda\,,$$
$$i=1,\,2,\,3,\ldots,\,s.$$

получимъ опредѣлитель такого же вида, какъ и $\Delta_{k,s+2}$; только вмѣсто ряда постоянныхъ $E_{s-k+1,i}$ онъ будетъ имѣть рядъ постоянныхъ $E_i^{(1)}$, заключающихъ неизвѣстный параметръ λ.

Онъ можетъ быть опредѣленъ всегда, разъ задана точка интегральной кривой, такъ какъ подставляя въ уравненіе (30) величины, опредѣляющія ее, мы получимъ условіе для опредѣленія λ.

Итакъ, если интегральная кривая удовлетворяетъ уравненію типа:

$$\begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{1s} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & B_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ B_{k1} & B_{k2} & B_{k3} & B_{ks} \\ E_{11} & E_{12} & E_{13} & E_{1s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ E_{s-k,1} & E_{s-k,2} & E_{s-k,3} & E_{s-k,s} \end{vmatrix} = 0\,, \qquad (31)$$

то всѣ ея точки обратятъ въ нуль и опредѣлитель, полученный изъ даннаго замѣщеніемъ строки:

$$B_{k1} \quad B_{k2} \quad B_{k3} \quad \ldots \quad B_{ks}$$

строкой

$$E_1^{(1)} \quad E_2^{(1)} \quad E_3^{(1)} \quad \ldots \quad E_s^{(1)}.$$

Надо замѣтить, что между постоянными $E_i^{(1)}$ существуетъ, говоря вообще, одно линейное соотношеніе.

Мы видимъ изъ предыдущаго, что изъ опредѣлителя $\Phi_n(x)$, если всѣ точки интегральной кривой обращаютъ его въ нуль, можно получить рядъ опредѣлителей, въ которыхъ строки послѣдовательно замѣщаются постоянными. Въ концѣ концовъ придемъ къ опредѣлителю, въ которомъ только первая строка зависитъ отъ перемѣнныхъ x_i, а остальныя составлены изъ постоянныхъ. Такой опредѣлитель будетъ однороднымъ полиномомъ n-го порядка, и мы снова приходимъ къ доказанной уже въ параграфѣ пятомъ теоремѣ.

§ 9. Новое доказательство этой теоремы сложнѣе перваго, даже безъ тѣхъ дополнительныхъ разсужденій, которыя нужно сдѣлать относительно выбора постоянныхъ E_{ij}, чтобы предупредить сомнительные случаи, которые я опустилъ. Но въ немъ указывается рядъ полиномовъ, которые обладаютъ тѣмъ же свойствомъ, какъ и полиномъ $\Phi_n(x)$, обращаться въ нуль для всѣхъ точекъ интегральной кривой. Любопытно, что заданіе одной ея точки можетъ быть достаточнымъ для полнаго последовательнаго опредѣленія этихъ полиномовъ.

Особенно просто опредѣляются эти полиномы, если намъ извѣстно уравненіе (19) интегральной кривой. Тогда по даннымъ коэффиціентамъ этого уравненія составляется рядъ линейныхъ соотношеній между ними. Въ самомъ дѣлѣ, въ соотношеніи

$$\sum_{i=1}^{s} E_i C_i = 0 \tag{32}$$

можно взять постоянныя $E_2, E_3, \ldots, E_s$ совершенно произвольно, а E_1 опредѣлить при помощи этого равенства.

Пусть мы имѣемъ $s-k$ такихъ условій:

$$\sum_{i=1}^{s} E_{ji} C_i = 0. \qquad j=1,2,\ldots,s-k$$

Если замѣнимъ ими послѣднія $s-k$ уравненій изъ числа уравненій (20), то мы придемъ какъ разъ къ уравненію (31).

Съ помощью этого свойства можно пойти дальше, т. е. доказать, что не только, какъ мы показали, среди алгебраическихъ уравненій интегральной кривой находится одинъ изъ неприводимыхъ множителей полиномовъ $\Phi_n(x)$, приравненный нулю, но что можно принять всѣ ея алгебраическія уравненія, составленными изъ множителей полиномовъ $\Phi_m(x)$ m-го же порядка.

Изложеніе этой общей и любопытной теоремы я отлагаю до другой статьи, тѣмъ болѣе, что придется также развить при этомъ нѣкоторое обобщеніе задачи интегрированія дифференціальнаго уравненія

$$Xz = 0.$$

Идея этого обобщенія заключается въ слѣдующемъ:

Исходимъ изъ уравненія

$$f = 0,$$

гдѣ f нѣкоторая функція перемѣнныхъ x_i, и пишемъ рядъ новыхъ уравненій, изъ которыхъ каждое получается при помощи операціи X надъ лѣвой частью предыдущаго

$$Xf = 0, \quad X(Xf) = 0, \quad X\{X(Xf)\} = 0 \ldots$$

Сравнивая полученныя уравненія между собою, мы можемъ встрѣтить различные случаи:

Во-первыхъ всѣ полученныя уравненія не будутъ имѣть ни одного общаго корня, во-вторыхъ всѣ уравненія будутъ обращаться въ нуль для отдѣльныхъ точекъ, для всѣхъ точекъ нѣкоторой кривой и т. д., и наконецъ всѣ уравненія будутъ слѣдствіями перваго изъ нихъ.

Очевидно, что третій случай приводитъ насъ къ интегральной кривой, послѣдній же, если f неприводимый полиномъ, къ частному (алгебраическому) интегралу G. Darboux.

Уже изъ этого обстоятельства, какъ мнѣ кажется, должна слѣдовать важность этой новой задачи.

Очевидно, что при ея изслѣдованіи придется встрѣтиться съ теоріей группъ.

Затѣмъ также придется встрѣтиться съ теоріей исключенія, нѣкоторые пункты которой и для чисто алгебраическихъ уравненій представляютъ собой солидныя трудности.

§ 10. Въ этомъ параграфѣ я попытаюсь сдѣлать сводку тому, что могутъ дать предлагаемыя мной свойства для вычисленія частныхъ алгебраическихъ интеграловъ G. Darboux.

Извѣстно, что нѣкоторыя изъ особенныхъ точекъ системы (1) обращаютъ въ нуль частный алгебраическій интегралъ. Это свойство даетъ рядъ соотношеній между коэффиціентами искомаго частнаго интеграла типа (32).

Затѣмъ въ цитированной уже работѣ [1]) я далъ уравненія для апріорнаго опредѣленія поляръ частныхъ алгебраическихъ интеграловъ по отношенію къ особеннымъ точкамъ дифференціальной системы.

---

[1]) Сообщенія Х. М. О. т. XII стр. 131.

Знаніе такой поляры ведетъ къ нѣсколькимъ соотношеніямъ между коэффиціентами частнаго алгебраическаго интеграла.

Мы можемъ слѣдовательно воспользоваться этими соотношеніями для полученія опредѣлителя типа $\varDelta_{s+1\,,\,s+2}$, который заключаетъ въ себѣ частный интегралъ въ видѣ множителя.

Во всякомъ случаѣ мы можемъ имѣть нѣкоторый полиномъ, который заключаетъ нашъ частный интегралъ въ видѣ множителя. Пусть это будетъ F.

Извѣстно, что и $XF \equiv F_1$ также будетъ имѣть его множителемъ. Покажемъ, что и обратно, если полиномъ v общій дѣлитель полиномовъ F и F_1, а полиномы $v_1 \equiv \frac{F}{v}$ и v первые между собой, то полиномъ v—частный алгебраическій интегралъ. Въ самомъ дѣлѣ, тождество

$$XF = X(vv_1) = v_1 Xv + vXv_1 = F_1$$

показываетъ, что полиномъ v дѣлитъ полиномъ Xv, что и доказываетъ наше утвержденіе.

Опредѣленіе подобнаго множителя двухъ полиномовъ F и F_1 достигается помощью послѣдовательнаго вычисленія общаго наибольшаго дѣлителя двухъ полиномовъ.

Когда мы получимъ полиномъ v, останется разложить его на неприводимые множители, изъ которыхъ каждый будетъ частнымъ интеграломъ.

Ради упрощенія можно воспользоваться полярными операціями. Если особенная точка обращаетъ въ нуль частный алгебраическій интегралъ, то она обратитъ въ нуль оба полинома и F и F_1. Если, слѣдовательно, вычислимъ необращающіяся въ нуль поляры наинизшей степени для полиномовъ F и F_1, то необращающаяся въ нуль поляра наинизшей степени искомаго частнаго интеграла будетъ ихъ общимъ множителемъ. Опредѣленіе такой поляры снова дастъ соотношенія типа (32) между коэффиціентами частнаго интеграла, которыя въ томъ случаѣ, когда F вида $\Phi_n(x)$ или $\varDelta_{s+1\,,\,s+2}$, можно использовать для замѣны перемѣнныхъ элементовъ нѣкоторыхъ строкъ постоянными, заимствованными изъ этихъ отношеній.

Затѣмъ скажемъ нѣсколько словъ о замѣнѣ элементовъ строки опредѣлителей этого типа постоянными, содержащими произвольный параметръ λ.

Въ этомъ случаѣ мы можемъ примѣнить любой изъ разсмотрѣнныхъ способовъ, надо только имѣть въ виду, что разысканіе общихъ дѣлителей можетъ потребовать выполненія нѣкотораго условія для λ.

Такія условія и дадутъ намъ всѣ возможныя значенія для этого параметра.

Полученіе такихъ условій въ общемъ видѣ представляетъ большія трудности, которыя тѣмъ не менѣе не кажутся мнѣ непреодолимыми. Полученіе ихъ можетъ, какъ я надѣюсь, имѣть значеніе и въ самомъ общемъ случаѣ интегрированія.

Изложенные пріемы, какъ и данный мной въ предыдущей работѣ способъ предварительнаго опредѣленія полинома K, даютъ возможность рѣшить задачу *только при заданномъ порядкѣ частнаго алгебраическаго интеграла.*

Но, какъ легко видѣть, эти условія могутъ быть получены полностью изъ сравненія полиномовъ $\Phi_n(x)$ и $X\Phi_n(x)$ и ихъ общихъ множителей. Какъ ни трудна задача найти предѣлъ для числа n, но, какъ мы уже видѣли, полиномы $\Phi_n(x)$ и полиномы вида $\Lambda_{s+1\,,\,s+2}$, обладаютъ такими любопытными свойствами, что утверждать невозможность примѣненія ихъ къ ея рѣшенію было бы рисковано.

§ 11. Перейдемъ теперь къ случаю, когда полиномъ $\Phi_n(x)$ равенъ тождественно нулю. При дальнѣйшемъ изслѣдованіи предположимъ, что не всѣ миноры, отвѣчающіе элементамъ послѣдней строки этого опредѣлителя, равны нулю.

Тогда легко показать, что частное двухъ опредѣлителей, которые получены замѣщеніемъ элементовъ въ послѣдней строкѣ черезъ постоянныя

$$E_{11} \quad E_{12} \quad E_{13} \quad \dots \quad E_{1s} \tag{33}$$

или черезъ постоянныя

$$E_{21} \quad E_{22} \quad E_{23} \quad \dots \quad E_{2s} \tag{34}$$

интегралъ системы (1).

Обозначимъ первый опредѣлитель черезъ D_1, а второй черезъ D_2. Тогда интеграломъ будетъ $\dfrac{D_2}{D_1}$.

Обозначимъ черезъ D_3 и D_4 соотвѣтственно полиномы XD_1 и XD_2. Это какъ нетрудно убѣдиться, будутъ опредѣлители, отличающіеся отъ опредѣлителей D_1 и D_2 элементами предпослѣднихъ строкъ.

Нетрудно убѣдиться, что тождество (23) примѣнимо въ данномъ случаѣ и покажетъ, что

$$D_1 D_4 - D_2 D_3 \equiv 0\,, \tag{35}$$

такъ какъ выраженіе, стоящее въ лѣвой части равно произведенію $\Phi_n(x)$ на нѣкоторый опредѣлитель.

Но въ силу тождества (35)

$$X\,\frac{D_2}{D_1} = \frac{D_1 D_4 - D_2 D_3}{D_1^2} = 0$$

и слѣдовательно $\psi_1 = \frac{D_2}{D_1}$ будетъ интеграломъ системы (1).

Этотъ результатъ уже опубликованъ мной [1]). Я только хочу обратить здѣсь вниманіе на то обстоятельство, что искомый интегралъ будетъ имѣть одну изъ извѣстныхъ заранѣе формъ $\frac{D_2}{D_1}$.

Правда число этихъ формъ—числовая безконечность, но *оно инымъ и не можетъ быть по существу вопроса.* Форма интеграла мѣняется съ измѣненіемъ числа n и во всякомъ случаѣ даетъ возможность черезъ примѣненіе полярныхъ операцій изучить интегралъ вблизи особенныхъ точекъ дифференціальной системы. Пользоваться методами, ведущими начало отъ французскихъ ученыхъ Briot и Bouquet, можетъ быть затруднительно, такъ какъ уже начиная съ $p = 4$, интегральныя кривыя могутъ быть трансцендентными и при существованіи алгебраическаго интеграла. А при рекомендуемыхъ мной пріемахъ мы остаемся въ сферѣ раціональныхъ алгебраическихъ операцій.

Я остановлюсь нѣсколько подробнѣе на задачѣ H. Poincaré [2]) объ опредѣленіи алгебраическаго интеграла уравненія въ полныхъ дифференціалахъ:

$$\begin{vmatrix} dx_1 & dx_2 & dx_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ X_1 & X_2 & X_3 \end{vmatrix} = 0\,,$$

гдѣ X_i— однородные полиномы перемѣнныхъ x_i $(i = 1\,,\ 2\,,\ 3)$ одного и того же измѣренія.

Такъ какъ интегралъ его будетъ также однороднымъ интеграломъ нулевого измѣренія системы

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \frac{dx_3}{X_3}$$

и обратно, то искомый алгебраическій интегралъ будетъ однимъ изъ выраженій $\frac{D_2}{D_1}$. Эти выраженія измѣняются вмѣстѣ съ числомъ n. Если

---

[1]) Сообщенія X. M. O. XII, стр. 175.

[2]) Rendiconti del Circolo di Palermo. 1891, т. V, стр. 161.

обозначимъ общій множитель полиномовъ D_1 и D_2 черезъ Θ, а черезъ ψ_1 и ψ_2 соотвѣтственно частныя отъ дѣленія полиномовъ D_1 и D_2 на полиномъ Θ, то уравненія интегральныхъ кривыхъ напишется такъ:

$$\psi_1 - C\psi_2 = 0. \tag{36}$$

Напомнимъ, что можно предположить полиномъ, находящійся въ лѣвой части этого равенства неприводимымъ кромѣ нѣкотораго конечнаго числа значеній постоянной C.

Теперь воспользуемся теоріей, изложенной въ § 7. А именно, умножая уравненіе (36) на Θ, мы приведемъ его къ виду опредѣлителя разсматриваемаго типа и, примѣняя послѣдовательно пріемъ замѣны элементовъ одной строки постоянными, придемъ къ уравненію нашей интегральной кривой въ видѣ полинома n-го порядка.

Такъ какъ при $p=3$ такое уравненіе можетъ быть только одно, то заключаемъ, что уравненіе (36) (полиномъ $\psi_1 - C\psi_2$ неприводимъ) n-го порядка.

Отсюда слѣдуетъ, что полиномы ψ_1 и ψ_2 также n-го порядка, и мы приходимъ къ такой теоремѣ:

Для того, чтобы система

$$\begin{vmatrix} dx_1 & dx_2 & dx_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ X_1 & X_2 & X_3 \end{vmatrix} = 0$$

имѣла алгебраическій интегралъ n-го порядка, необходимо и достаточно, чтобы полиномъ $\Phi_n(x)$ обращался тождественно въ нуль.

Такимъ образомъ въ этомъ случаѣ намъ дѣлается извѣстнымъ и видъ интеграла, и его порядокъ, соотвѣтствующій данному виду.

Это даетъ возможность предпринять изслѣдованіе кратныхъ точекъ этого интеграла въ зависимости отъ даннаго числа n. При этомъ вводимыя H. Poincaré неизвѣстныя цѣлыя числа, характеризующія кратныя точки, опредѣляются вполнѣ точно. Тѣ ограничивающія предположенія, которыя онъ дѣлаетъ относительно кратныхъ точекъ, могутъ быть провѣрены и установлены точно, если онѣ примѣнимы къ общему случаю, или въ противномъ случаѣ сняты безъ вреда для окончательнаго результата.

Точно также опредѣленіе въ уравненіи (36) такихъ значеній постоянныхъ C (quantités remarquables) [1]), которыя давали бы полиномы

[1]) Rendiconti del Circolo di Palermo. 1891, т. V, стр. 167 и слѣд.

$\psi_1 - C\psi_2$ съ кратными множителями, можетъ быть выполнено предварительно, а это, какъ видно изъ работъ G. Darboux, H. Poincaré и P. Painlevé, представляетъ особую важность.

Къ этому предмету и къ болѣе систематическому примѣненію предлагаемыхъ здѣсь пріемовъ я надѣюсь скоро вернуться.

Объ интегралахъ одной дифференціальной системы.

М. Лагутинскаго.

Въ своей работѣ: «Приложеніе полярныхъ операцій къ интегрированію обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій въ конечномъ видѣ» я между прочимъ изучаю такую систему [1]):

$$\begin{aligned}
\alpha p' &= (\beta-\gamma)\,qr + K(c-b)\,vw + \frac{2Ma(c-b)}{5}\,[c(a-b)\,rv - b(c-a)\,qw] \\
\beta q' &= (\gamma-\alpha)\,pr + K(a-c)\,uw + \frac{2Mb(a-c)}{5}\,[a(b-c)\,pw - c(a-b)\,ru] \qquad (1) \\
\gamma r' &= (\alpha-\beta)\,pq + K(b-a)\,uv + \frac{2Mc(b-a)}{5}\,[b(c-a)\,qu - a(b-c)\,pv],
\end{aligned}$$

гдѣ

$$K = \frac{2Mabc}{5}.$$

$$\begin{aligned}
(c+a)(a+b)\,u' &= a(b-c)\,vw + 2a\,[(a+c)\,rv - (a+b)\,qw] \equiv (c+a)(a+b)\,U \\
(a+b)(b+c)\,v' &= b(c-a)\,uw + 2b\,[(b+a)\,pw - (b+c)\,ru] \equiv (a+b)(b+c)\,V \quad (2) \\
(b+c)(c+a)\,w' &= c(a-b)\,vu + 2c\,[(c+b)\,qu - (c+a)\,pv] \equiv (b+c)(c+a)\,W.
\end{aligned}$$

Она заимствована мной изъ двухъ большихъ мемуаровъ В. А. Стеклова, помѣщенныхъ въ Annales de la Faculté des sciences de Toulouse, 2-e série t. X, p. 271 et 3-e série t. I, p. 145.

Для упрощенія вычисленій я беру въ трехъ первыхъ уравненіяхъ (1) вмѣсто α, β, γ произведенія αK, βK, γK и получаю слѣдующія:

$$\begin{aligned}
\alpha p' &= (\beta-\gamma)\,qr + (c-b)\,vw + (c-b)\left(\frac{a-b}{b}\,rv - \frac{c-a}{c}\,qw\right) \equiv \alpha P \\
\beta q' &= (\gamma-\alpha)\,rp + (a-c)\,uw + (a-c)\left(\frac{b-c}{c}\,pw - \frac{a-b}{a}\,ru\right) \equiv \beta Q \qquad (3) \\
\gamma r' &= (\alpha-\beta)\,pq + (b-a)\,uv + (b-a)\left(\frac{c-a}{a}\,qu - \frac{b-c}{b}\,pv\right) \equiv \gamma R.
\end{aligned}$$

---

[1]) Сообщенія Х. М. О. 2-я серія. Т. XII, стр. 217.

В. А. Стекловъ даетъ въ этой работѣ три интеграла этой системы:

$$f_1 \equiv bcu^2 + acv^2 + abw^2$$

$$f_2 \equiv \frac{au^2 + bv^2 + cw^2}{2} + \alpha p^2 + \beta q^2 + \gamma r^2 \tag{4}$$

$$f_3 \equiv \left[\frac{(a+c)(a+b)}{a} u + \alpha p\right]^2 + \left[\frac{(a+b)(b+c)}{b} v + \beta q\right]^2 + \\ + \left[\frac{(b+c)(a+c)}{c} w + \gamma r\right]^2.$$

Кромѣ того, имъ изученъ вопросъ о четвертомъ интегралѣ 1-го порядка и данъ примѣръ четвертаго интеграла въ видѣ полинома 2-го порядка. Примѣнивъ методъ полярныхъ операцій, я изслѣдовалъ вопросъ о четвертомъ интегралѣ 2-го порядка во всей общности вплоть до мнимыхъ значеній входящихъ въ систему параметровъ. Полученный мной при этомъ добавочный случай, какъ указалъ мнѣ П. В. Воронецъ, не имѣетъ механическаго значенія. Можно предполагать, что этотъ случай, относящійся къ изученной В. А. Стекловымъ формѣ интеграловъ, не остался неизвѣстнымъ для него, и не приведенъ имъ въ его работѣ по отсутствію механическаго значенія.

Въ настоящей работѣ я продолжаю разысканіе подобныхъ интеграловъ въ видѣ полиномовъ, но высшихъ степеней.

Сначала я позволю себѣ изложить самый пріемъ, ограничившись простѣйшими предположеніями.

Дана система:

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, p, \tag{5}$$

гдѣ X_i обозначаютъ однородные полиномы второй степени, не зависящіе отъ перемѣнной t.

Ея интегралы, не зависящіе отъ перемѣнной t, удовлетворяютъ уравненію:

$$\sum X_i \frac{\partial z}{\partial x_i} = 0. \tag{6}$$

Подъ особенной точкой системы (5) будемъ подразумѣвать точку, опредѣляемую значеніями $a_i (i = 1, 2, \ldots, p)$, полученными при рѣшеніи уравненій

$$\lambda x_i = X_i \tag{7}$$
$$i = 1, 2, \ldots, p,$$

Условимся обозначать черезъ A_i результатъ подстановки $x_i = a_i$ въ полиномы X_i, такъ, что будемъ имѣть тождественно

$$\lambda_1 a_i = A_i. \qquad i=1, 2, \dots, p. \tag{8}$$

Предположимъ, что однородный полиномъ f будетъ интеграломъ уравненія (6). Тогда будемъ имѣть тождество:

$$\sum_{i=1}^{p} X_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0. \tag{9}$$

Подвергнемъ его k разъ операціи

$$\sum_{i=1}^{p} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Если обозначимъ результатъ g-кратнаго примѣненія этой операціи къ полиному f черезъ f_g и однократной къ полиному X_i черезъ $X_i^{(1)}$, то, такъ какъ результатъ двукратнаго примѣненія той-же операціи къ полиному X_i равняется $2A_i = 2\lambda_{1i}$, получимъ тождество:

$$\sum_{i=1}^{p} X_i \frac{\partial f_k}{\partial x_i} + k \sum_{i=1}^{p} X_i^{(1)} \frac{\partial f_{k-1}}{\partial x_i} + k(k-1)\lambda_1 \sum_{i=1}^{p} a_i \frac{\partial f_{k-2}}{\partial x_i} = 0$$

или

$$\sum_{i=1}^{p} X_i \frac{\partial f_k}{\partial x_i} + k \sum_{i=1}^{p} X_i^{(1)} \frac{\partial f_{k-1}}{\partial x_i} + k(k-1)\lambda_1 f_{k-1} = 0. \tag{10}$$

Примемъ порядокъ полинома f равнымъ n и сдѣлаемъ въ равенствѣ (10) $k=n$. Тогда первая сумма обратится въ нуль, такъ какъ въ нее войдутъ производныя $n+1$-го порядка отъ полинома f, и мы найдемъ:

$$\sum_{i=1}^{p} X_i^{(1)} \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_i} + (n-1)\lambda_1 f_{n-1} = 0. \tag{11}$$

Это тождество показываетъ, что мы можемъ получить $n-1$-ю поляру искомаго интеграла при помощи написаннаго уравненія.

Давая въ равенствѣ (10) k значеніе $n-1$, получимъ еще такое:

$$\sum_{i=1}^{p} X_i \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_i} + (n-1) \sum_{i=1}^{p} X_i^{(1)} \frac{\partial f_{n-2}}{\partial x_i} + (n-1)(n-2)\lambda_1 f_{n-2} = 0. \tag{12}$$

Это равенство можно разсматривать, какъ уравненіе для полученія поляры f_{n-2} нашего полинома по найденной нами полярѣ f_{n-1}.

Напишемъ уравненія (2) и (3) въ такомъ видѣ

$$\begin{aligned} u' &= l_{12}vw + l_{13}qw + l_{14}rv \equiv U \\ v' &= l_{22}uw + l_{23}pw + l_{24}ru \equiv V \\ w' &= l_{32}uv + l_{33}pv + l_{34}qu \equiv W \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} p' &= l_{41}qr + l_{42}vw + l_{43}qw + l_{44}rv \equiv P \\ q' &= l_{51}pr + l_{52}uw + l_{53}pw + l_{54}ru \equiv Q \\ t' &= l_{61}pq + l_{62}uv + l_{63}pv + l_{64}qu \equiv R. \end{aligned} \tag{14}$$

Нетрудно видѣть, что при

$$\begin{aligned} &p=a_1, \quad u=b_1, \quad v=q=w=r=0, \\ &p=u=r=w=0, \quad v=b_2, \quad q=a_2, \\ &p=u=q=v=0, \quad r=a_3, \quad w=b_3, \end{aligned} \tag{15}$$

гдѣ a_i и b_i совершенно произвольныя постоянныя полиномы, U, V, W, P, Q и R обращаются въ нуль. Слѣдовательно таблица (15) даетъ особенныя точки системы (13) (14) или, что тоже, системы (2) (3) при $\lambda_1 = 0$.

Разсмотримъ сначала операцію $a_1 \dfrac{\partial}{\partial p} + b_1 \dfrac{\partial}{\partial u}$.

Предположимъ, что однородный полиномъ φ n-го порядка относительно перемѣнныхъ p, q, r, u, v, w—интегралъ уравненія:

$$P\frac{\partial z}{\partial p} + Q\frac{\partial z}{\partial q} + R\frac{\partial z}{\partial r} + U\frac{\partial z}{\partial u} + V\frac{\partial z}{\partial v} + W\frac{\partial z}{\partial w} = 0 \tag{16}$$

Условившись обозначать результатъ примѣненія операціи

$$\left(a_1 \frac{\partial}{\partial p} + b_1 \frac{\partial}{\partial u}\right)^k$$

къ функціи Θ черезъ Θ_k, мы можемъ написать уравненіе (11) для даннаго случая слѣдующимъ образомъ:

$$Q_1 \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial q} + R_1 \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial r} + V_1 \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial v} + W_1 \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial w} = 0. \tag{17}$$

Это тождество можно написать въ видѣ двухъ:

$$Q_1 \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial q} + V_1 \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial v} = 0 \tag{18}$$

$$R_1 \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial r} + W_1 \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial w} = 0\,, \tag{19}$$

такъ какъ ихъ лѣвыя части не имѣютъ общихъ подобныхъ членовъ.

Тождества какъ (17), такъ и (18), (19) должны существовать при какихъ-угодно значеніяхъ постоянныхъ a_1, b_1. Они будутъ существовать и при замѣнѣ a_1 черезъ p и b_1 черезъ u. Тогда Q_1, V_1, R_1 и W_1 обратятся въ Q, V, R и W, а производныя $\frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial q}$, $\frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial v}$, $\frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial r}$ и $\frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial w}$ въ нѣкоторые однородные полиномы отъ $L_1\, L_2\, L_3$ и L_4, которые сами суть однородные полиномы n—1-го порядка перемѣнныхъ p, u.

Тождество (18) напишется тогда такъ:

$$QL_1 + VL_2 = 0$$

и покажетъ, что частное $\frac{Q}{V}$ не должно зависѣть отъ перемѣнныхъ r, w.

Для этого необходимо, чтобы мы имѣли тождественно:

$$\frac{l_{51}p + l_{54}u}{l_{24}u} = \frac{l_{53}p + l_{52}u}{l_{23}p + l_{22}u}.$$

Но отсюда видно, что въ этомъ случаѣ долженъ равняться нулю либо коэффиціентъ l_{23}, либо коэффиціентъ l_{51}. Первое предположеніе даетъ:

$$\frac{2b}{b+c} = 0$$

или

$$b = 0.$$

Это приводитъ къ четвертому линейному интегралу, а мы ищемъ интегралы высшихъ степеней.

Второе предположеніе покажетъ, что отношеніе функцій Q и V будетъ постоянной, и слѣдовательно наша система будетъ имѣть линейный интегралъ.

Итакъ, если L_1 и L_2 не равны нулю, то система (2) и (3) имѣетъ четвертый линейный интегралъ. Поэтому, если $n > 1$, то L_1 и L_2 должны равняться нулю, и производныя $\frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial v}$ и $\frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial q}$ равны нулю.

Аналогично заключеніе даетъ и равенство (19). Слѣдовательно получаемъ такую теорему:

Если степень интеграла φ, имѣющаго видъ однороднаго полинома, равна числу $n > 1$, то его n—1-я поляра вида

$$\left(a_1 \frac{\partial}{\partial p} + b_1 \frac{\partial}{\partial u}\right)^{n-1} \varphi$$

не будетъ зависѣть отъ перемѣнныхъ q, r, v, w.

Другими словами:

$$\left(a_1 \frac{\partial}{\partial p} + b_1 \frac{\partial}{\partial u}\right)^{n-1} \varphi = M_{11} p + M_{12} u. \tag{20}$$

Точно также доказываемъ, что

$$\left(a_2 \frac{\partial}{\partial q} + b_2 \frac{\partial}{\partial v}\right)^{n-1} \varphi = M_{21} q + M_{22} v, \tag{21}$$

$$\left(a_3 \frac{\partial}{\partial r} + b_3 \frac{\partial}{\partial w}\right)^{n-1} \varphi = M_{31} r + M_{32} w. \tag{22}$$

Переходимъ къ опредѣленію поляры

$$\varphi_{n-2} \equiv \left(a_1 \frac{\partial}{\partial p} + b_1 \frac{\partial}{\partial v}\right)^{n-2} \varphi.$$

Формула (12) даетъ намъ:

$$P \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial p} + U \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial u} +$$
$$+ (n-1) \left\{ Q_1 \frac{\partial \varphi_{n-2}}{\partial q} + V_1 \frac{\partial \varphi_{n-2}}{\partial v} + R_1 \frac{\partial \varphi_{n-2}}{\partial r} + W_1 \frac{\partial \varphi_{n-2}}{\partial w} \right\} = 0$$

или въ виду равенства (20)

$$(n-1) \left\{ Q_1 \frac{\partial \varphi_{n-2}}{\partial q} + V_1 \frac{\partial \varphi_{n-2}}{\partial v} + R_1 \frac{\partial \varphi_{n-2}}{\partial r} + W_1 \frac{\partial \varphi_{n-2}}{\partial w} \right\} +$$
$$+ M_{11} P + M_{12} U = 0. \tag{23}$$

Дифференцируя тождество (20) по параметрамъ a_1 и b_1, получаемъ:

$$\frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial a_1} = \left(\frac{\partial M_{11}}{\partial a_1} p + \frac{\partial M_{12}}{\partial a_1} u\right). \tag{24}$$

$$\frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial b_1} = \left(\frac{\partial M_{11}}{\partial b_1} p + \frac{\partial M_{12}}{\partial b_1} u\right). \tag{25}$$

Но по свойству поляръ

$$\frac{\partial\varphi_{n-1}}{\partial a_1}=(n-1)\frac{\partial\varphi_{n-2}}{\partial p},\quad \frac{\partial\varphi_{n-1}}{\partial b_1}=(n-1)\frac{\partial\varphi_{n-2}}{\partial u}. \tag{26}$$

Поляра φ_{n-2} можетъ быть написана въ такомъ видѣ:

$$\varphi_{n-2}=\Theta(p^2)+\Theta_1(qr)p+\Theta_2(qr)u+\Theta_3(q^2)+\Theta_4(qr)+\Theta_5(r^2),$$

гдѣ Θ, Θ_3, Θ_5 однородные полиномы второй степени соотвѣтственно трехъ паръ перемѣнныхъ p, u; q, v; r, w; Θ_1 и Θ_2 линейныя однородныя функціи перемѣнныхъ q, v, r, w, а

$$\Theta_4(qr)\equiv L_1qr+L_2qw+L_3rv+L_4vw, \tag{27}$$

т. е. эта функція Θ_4 равна билинейной функціи двухъ паръ перемѣнныхъ q, v; r, w.

Подставляя φ_{n-2} въ равенства (26), мы въ виду формулъ (24) и (25) убѣждаемся, что функціи Θ_1 и Θ_2 равны тождественно нулю, а потому

$$\varphi_{n-2}\equiv\Theta(p^2)+\Theta_3(q^2)+\Theta_5(r^2)+\Theta_4(qr).$$

Обозначимъ черезъ B операцію $\Theta_1\frac{\partial}{\partial q}+V_1\frac{\partial}{\partial v}+R_1\frac{\partial}{\partial r}+W_1\frac{\partial}{\partial w}$.

Разсмотримъ результатъ подстановки въ равенство (25) полинома φ_{n-2}; мы получаемъ

$$(n-1)B\{\Theta(p^2)+\Theta_3(q^2)+\Theta_5(r^2)\}+M_{11}P+M_{12}U+(n-1)B\Theta_4(qr)=0.$$

Лѣвую часть этого тождества можно раздѣлить на двѣ части, въ которыхъ нѣтъ подобныхъ членовъ и которыя должны отдѣльно быть тождественно равны нулю, и потому имѣемъ:

$$(n-1)B\{\Theta+\Theta_3+\Theta_5\}+M_{11}P+M_{12}U=0.$$

$$Q_1\frac{\partial\Theta_4(qr)}{\partial q}+V_1\frac{\partial\Theta_4(qr)}{\partial v}+R_1\frac{\partial\Theta_4(qr)}{\partial r}+W_1\frac{\partial\Theta_4(qr)}{\partial w}=0. \tag{28}$$

Въ этомъ послѣднемъ тождествѣ опять подобные члены будутъ только въ первыхъ двухъ выраженіяхъ и въ двухъ послѣднихъ, а потому имѣемъ отдѣльно:

$$Q_1 \frac{\partial \Theta_4(qr)}{\partial q} + V_1 \frac{\partial \Theta_4(qr)}{\partial v} = 0 \,,$$

$$R_1 \frac{\partial \Theta_4(qr)}{\partial r} + W_1 \frac{\partial \Theta_4(qr)}{\partial w} = 0 .$$

Или, принимая во вниманіе равенство (27),

$$Q_1 (L_1 r + L_2 w) + V_1 (L_3 r + L_4 w) = 0 \,,$$

$$R_1 (L_1 q + L_3 v) + W_1 (L_2 q + L_4 v) = 0 .$$

Такъ какъ частныя $\frac{Q_1}{V_1}$ и $\frac{R_1}{W_1}$ на основаніи предыдущаго равенства (18) и (19), не могутъ быть независимыми отъ перемѣнныхъ q, v, r, w, то мы получимъ:

$$\begin{aligned} L_1 r + L_2 w &= \varrho_1 V_1 \\ L_3 r + L_4 w &= -\varrho_1 Q_1 \\ L_1 q + L_3 v &= \varrho_2 W_1 \\ L_2 q + L_4 v &= -\varrho_2 R_1 \end{aligned}$$

Умножая соотвѣтственно первыя два равенства на q, v, а послѣднія два на r, w, получаемъ:

$$\Theta_4 (qr) = \varrho_1 (V_1 q - Qv) = \varrho_2 (W_1 r - R_1 w). \tag{29}$$

Очевидно по этому равенству, что отношеніе

$$\frac{Vq - Qv}{Wr - Rw}$$

не должно зависѣть отъ перемѣнныхъ q, v, r, w.

Коэффиціенты при qr въ числителѣ и въ знаменателѣ равны соотвѣтственно $l_{24}u$ и $l_{34}u$. Принимая во вниманіе значенія коэффиціентовъ l_{24} и l_{34}, мы получимъ

$$\frac{Vq - Qv}{Wr - Rw} = -\frac{b\,(a + c)}{c\,(a + b)} .$$

Это равенство должно уже быть тождествомъ при всѣхъ значеніяхъ перемѣнныхъ p, u, q, v, r, w, Изъ этого тождества, сравнивая коэффиціенты при членахъ uvw, pvw, мы выведемъ безъ труда, что либо $a = b = c$, либо $\beta = \gamma$, $b = c$. Но эти случаи приводятъ къ уже извѣстнымъ результатамъ.

Наши разсужденія останутся справедливыми только до тѣхъ подъ, пока въ равенствѣ (29) ϱ_1 или ϱ_2 не будутъ равны нулю; въ обратномъ же случаѣ функція $\Theta_4(qr)$ будетъ также равна нулю, и мы получаемъ:

$$\varphi_{n-2} \equiv \left(a\frac{\partial}{\partial p} + b_1\frac{\partial}{\partial u}\right)^{n-2}\varphi = \Theta(p^2) + \Theta_3(q^2) + \Theta_5(r^2), \tag{30}$$

т. е. поляра n—2-го порядка не заключаетъ въ себѣ членовъ линейныхъ относительно перемѣнныхъ двухъ различныхъ паръ изъ трехъ паръ перемѣнныхъ p, u; q, v; r, w.

Совершенно аналогичныя разсужденія приведутъ насъ къ такимъ формуламъ:

$$\left.\begin{aligned}\left(a_2\frac{\partial}{\partial q} + b_2\frac{\partial}{\partial v}\right)^{n-2}\varphi &= \Theta_{10}(p^2) + \Theta_{13}(q^2) + \Theta_{15}(r^2)\\ \left(a_3\frac{\partial}{\partial r} + b_3\frac{\partial}{\partial w}\right)^{n-2}\varphi &= \Theta_{20}(p^2) + \Theta_{23}(q^2) + \Theta_{25}(r^2).\end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Этими формулами устанавливается общее свойство интеграла изучаемой системы въ видѣ полинома n-го порядка.

Всѣ его производныя n—2-го порядка по какой-нибудь изъ паръ перемѣнныхъ p, u; q, v; r, w представятъ собой сумму трехъ полиномовъ, зависящихъ каждый только отъ одной пары.

Полагая прежде всего $n = 2$, мы приходимъ къ заключенію, что интегралъ 2-го порядка можетъ имѣть только ту форму, которая изучена В. А. Стекловымъ.

Принимаемъ затѣмъ n=3. Формулы (30) и (31) показываютъ, что всѣ первыя производныя имѣютъ одинъ и тотъ же видъ. Члены, изъ которыхъ составленъ полиномъ φ, можно раздѣлить на три части; первую часть представятъ тѣ, которые составлены изъ перемѣнныхъ одной-какой нибудь пары перемѣнныхъ, напр. p^2u, вторую часть—тѣ, въ которые перемѣнныя одной пары входятъ во второмъ измѣреніи, а другой линейно, напр. puv, и, наконецъ, третью тѣ, которые линейны относительно перемѣнныхъ каждой пары, напр. pvr.

Члены второй и третьей части должны имѣть въ интегралѣ коэффиціентами нули, такъ какъ иначе въ производныя полинома φ вошли бы такіе члены, которыхъ не должно быть по формуламъ (30) и (31).

Такъ, если бы коэффиціенты при членахъ puv, pvr не были равны нулю, то въ производную $\frac{\partial \varphi}{\partial p}$ вошли бы члены uv, vr.

Слѣдовательно искомый интегралъ будетъ вида:

$$\varphi \equiv \vartheta_1(p^3) + \vartheta_2(q^3) + \vartheta_3(r^3), \tag{32}$$

гдѣ ϑ_i однородные полиномы третьяго порядка одной только пары перемѣнныхъ.

Перейдемъ теперь къ интегралу въ видѣ полинома 4-го порядка. Дѣлимъ всѣ его члены на двѣ части; первую составятъ члены четнаго измѣренія относительно каждой входящей пары перемѣнныхъ, наприм., членъ $puqv$, а вторую—члены, которые будутъ нечетнаго измѣренія по отношенію по крайней мѣрѣ къ одной парѣ перемѣнныхъ.

Коэффиціенты членовъ второй части должны равняться нулю, такъ какъ иначе во второй части формулъ (30) и (31) были бы не надлежащіе члены. Въ самомъ дѣлѣ, положимъ, что членъ составленъ изъ перемѣнныхъ двухъ паръ; тогда перемѣнныя одной пары войдутъ въ третьемъ измѣреніи, напр. при существованіи члена pu^2w во вторую часть формулы (30) войдетъ при постоянной b_1 отличной отъ нуля по крайней мѣрѣ одинъ изъ членовъ pw, uw. Если же войдутъ перемѣнныя всѣхъ трехъ паръ, то одна пара войдетъ во второмъ измѣреніи; напр. при существованіи члена $puvr$ при постоянныхъ a_1, b_1 отличныхъ отъ нуля во вторую часть формулы (30) вошелъ бы членъ vr.

Итакъ интегралъ въ видѣ полинома четвертой степени будетъ имѣть такую форму:

$$\begin{aligned}\varphi = {} & Z_1(p^4) + Z_2(q^4) + Z_3(r^4) + Z_{11}(q^2)p^2 + Z_{12}(q^2)pu + Z_{13}(q^2)u^2 + \\ & + Z_{21}(q^2)r^2 + Z_{22}(q^2)rw + Z_{23}(q^2)w^2 + Z_{31}(r^2)p^2 + Z_{32}(r^2)pu + Z_{33}(r^2)u^2,\end{aligned} \tag{33}$$

гдѣ Z_i однородные полиномы четвертой степени, а Z_{ij} полиномы второй степени отъ соотвѣтственной пары перемѣнныхъ.

Перейдемъ теперь къ изслѣдованію полученныхъ результатовъ.

Начнемъ съ наиболѣе простого случая $n = 3$.

Обозначимъ операцію $P\frac{\partial}{\partial p} + Q\frac{\partial}{\partial q} + R\frac{\partial}{\partial r} + U\frac{\partial}{\partial u} + V\frac{\partial}{\partial v} + W\frac{\partial}{\partial w}$ черезъ X и получимъ для нашего случая по равенству (32)

$$X\varphi \equiv X\vartheta_1(p^3) + X\vartheta_2(q^3) + X\vartheta_3(r^3) \equiv 0. \tag{34}$$

Выраженія $X\vartheta_1(p^3)$, $X\vartheta_2(q^3)$ и $X\vartheta_3(r^3)$ будутъ второго измѣренія относительно перемѣнныхъ одной пары и линейны относительно перемѣнныхъ двухъ другихъ паръ; но такъ какъ они будутъ второго измѣренія, то въ первомъ изъ этихъ выраженій не можетъ быть членовъ, подобныхъ членамъ второго и третьяго выраженій, и во второмъ не можетъ быть членовъ, подобныхъ членамъ третьяго выраженія; а потому тождество (34) ведетъ къ тремъ такимъ тождествамъ:

$$X\vartheta_1(p^3)=0$$

$$X\vartheta_2(q^3)=0$$

$$X\vartheta_3(r^3)=0$$

или

$$P\frac{\partial\vartheta_1(p^3)}{\partial p}+U\frac{\partial\vartheta_1(p^3)}{\partial u}=0\,,$$

$$Q\frac{\partial\vartheta_2(q^3)}{\partial q}+V\frac{\partial\vartheta_2(q^3)}{\partial v}=0$$

$$R\frac{\partial\vartheta_3(r^3)}{\partial r}+W\frac{\partial\vartheta_3(r^3)}{\partial w}=0\,.$$

Сравнивая полученныя тождества съ тождествами (18) и (19), мы убѣждаемся, что они того же характера, какъ и послѣднія; и разсуждая точно также, мы убѣдимся въ существованіи четвертаго линейнаго интеграла. Мы приходимъ къ извѣстному ранѣе случаю.

Слѣдовательно *разсматриваемая система не имѣетъ самостоятельнаго интеграла въ видѣ полинома 3-ей степени.*

Сдѣлаемъ небольшое отступленіе для разысканія особенныхъ точекъ системы (2) (3). Можно написать ее въ такомъ видѣ:

$$\begin{aligned}
\frac{(a+b)(a+c)}{a}u'&=\begin{vmatrix} v-2q & (a+c)v \\ w-2r & (a+b)w \end{vmatrix}\\
\frac{(a+b)(b+c)}{b}v'&=\begin{vmatrix} w-2r & (a+b)w \\ u-2p & (b+c)u \end{vmatrix}\\
\frac{(a+c)(b+c)}{c}w'&=\begin{vmatrix} u-2p & (b+c)u \\ v-2q & (a+c)v \end{vmatrix}
\end{aligned}\qquad(35)$$

$$\alpha p' + \frac{(a+b)(a+c)}{a} u' = \begin{vmatrix} \beta q + \dfrac{(a+b)(b+c)}{b} v & q \\ \gamma r + \dfrac{(a+c)(b+c)}{c} w & r \end{vmatrix}$$

$$\beta p' + \frac{(a+b)(b+c)}{b} v' = \begin{vmatrix} \gamma r + \dfrac{(a+b)(b+c)}{c} w & r \\ \alpha p + \dfrac{(a+b)(a+c)}{a} u & p \end{vmatrix} \qquad (36)$$

$$\gamma r' + \frac{(a+c)(b+c)}{a} w' = \begin{vmatrix} \alpha p + \dfrac{(a+b)(a+c)}{a} u & p \\ \beta q + \dfrac{(a+b)(b+c)}{b} v & q \end{vmatrix}.$$

Для полученія величинъ, опредѣляющихъ особенныя точки, достаточно въ этихъ уравненіяхъ замѣнить производныя p', q', r', u', v', w', черезъ λp, λq, λr, λu, λv, λw. Остается разрѣшить полученныя алгебраическія уравненія.

Надо различать два случая: когда $\lambda = 0$ и когда λ не равно нулю.

Когда $\lambda = 0$, значенія перемѣнныхъ должны обратить въ нуль двѣ матриссы:

$$\begin{vmatrix} u - 2p & v - 2q & w - 2r \\ (b+c)u & (a+c)v & (a+b)w \end{vmatrix} = 0 \qquad (37)$$

$$\begin{vmatrix} \alpha p + \dfrac{(a+b)(a+c)}{a} u & \beta q + \dfrac{(a+b)(b+c)}{b} v & \gamma r + \dfrac{(a+b)(b+c)}{c} w \\ p & q & r \end{vmatrix} = 0 \qquad (38)$$

Если между постоянными задачи нѣтъ особыхъ соотношеній, то мы имѣемъ прежде всего таблицу (15), которую мы использовали для полученія формы интеграла.

Затѣмъ, предполагая только одну пару перемѣнныхъ изъ трехъ паръ равными нулю, мы получаемъ вмѣсто (37) и (38) два опредѣлителя, которые дадутъ намъ отношенія перемѣнныхъ q, v, а также отношенія перемѣнныхъ r, w. Такимъ образомъ, если мы нашли особенную точку, опредѣляемую значеніями 0, 0, l_1, l_2, l_3, l_4, то и значенія 0, 0, $\varrho_1 l_1$, $\varrho_1 l_2$, $\varrho_2 l_3$, $\varrho_2 l_4$ при ϱ_1 или ϱ_2 совершенно произвольныхъ также удовлетворятъ уравненіямъ (37) и (38). Это показываетъ, что черезъ особенную точку 0, 0, l_1, l_2, l_3, l_4, проходитъ прямая особенныхъ точекъ.

$$\frac{p}{0}=\frac{u}{0}=\frac{q}{\varrho_1 l_1}=\frac{v}{\varrho_1 l_2}=\frac{r}{\varrho_2 l_1}=\frac{w}{\varrho_2 l_4}\qquad(39)$$

Такихъ прямыхъ мы найдемъ еще пять, и слѣдовательно всѣ особенныя точки при $\lambda=0$ образуютъ девять прямыхъ, состоящихъ изъ особенныхъ точекъ.

Предполагаемъ теперь, что величина λ отлична отъ нуля.

Прежде всего покажемъ, что всякая особенная точка, отвѣчающая этому случаю, обращаетъ въ нуль интегралъ въ видѣ однороднаго полинома. Въ самомъ дѣлѣ, напишемъ выраженіе:

$$Z\equiv(P-\lambda p)\frac{\partial\varphi}{\partial p}+(Q-\lambda q)\frac{\partial\varphi}{\partial q}+(R-\lambda r)\frac{\partial\varphi}{\partial r}+(U-\lambda u)\frac{\partial\varphi}{\partial u}+(V-\lambda v)\frac{\partial\varphi}{\partial v}+(W-\lambda w)\frac{\partial\varphi}{\partial w}.$$

Предположимъ, что φ интегралъ въ видѣ однороднаго полинома порядка n. Тогда это выраженіе приводится къ такому:

$$-\lambda\left\{p\frac{\partial\varphi}{\partial p}+q\frac{\partial\varphi}{\partial q}+r\frac{\partial\varphi}{\partial r}+u\frac{\partial\varphi}{\partial u}+v\frac{\partial\varphi}{\partial v}+w\frac{\partial\varphi}{\partial w}\right\}\equiv-\lambda n\varphi.$$

Выраженіе Z обратится въ нуль для особенной точки, у которой λ не нуль. Второй же видъ его покажетъ, что для этой точки обратится въ нуль самъ полиномъ.

Согласно этому сразу получаемъ три уравненія для разысканія особенныхъ точекъ этой группы. Для этого беремъ интегралы изъ таблицы (4) f_1, f_2, f_3 и приравниваемъ ихъ нулю:

$$f_1=0,\quad f_2=0,\quad f_3=0.\qquad(40)$$

Предположимъ теперь, что въ равенствахъ (35) и (36) производныя u', v', w', p', q', r' замѣнены соотвѣтственно черезъ λu, λv, λw, λp, λq, λr.

Множимъ три равенства (35) соотвѣтственно на $(b+c)u$, $(a+c)v$, $(a+b)w$ и получаемъ вновь:

$$bcu^2+acv^2+abw^2\equiv f_1=0\qquad(41)$$

Затѣмъ множимъ ихъ же соотвѣтственно на $u-2p$, $v-2q$, $w-2r$ и получаемъ:

$$\frac{u^2-2up}{a(b+c)}+\frac{v^2-2vq}{b(a+c)}+\frac{w^2-2wr}{c(a+b)}\equiv\psi_1=0.\qquad(42)$$

Тѣ же уравненія можно разсматривать, какъ линейныя и однородныя относительно перемѣнныхъ u, v, w. Исключеніе ихъ приведетъ къ такому уравненію, заключающему вводный параметръ λ:

$$\frac{\lambda^2}{abc}+\frac{1}{a}\left(\frac{u-2p}{b+c}\right)^2+\frac{1}{b}\left(\frac{v-2q}{a+c}\right)^2+\frac{1}{c}\left(\frac{w-2r}{a+b}\right)^2=0. \tag{43}$$

Тѣ же самые пріемы относительно равенствъ (36) дадутъ намъ три такихъ уравненія:

$$\left\{\alpha p+\frac{(a+b)(a+c)}{a}u\right\}^2+\left\{\beta q+\frac{(a+b)(b+c)}{b}v\right\}^2+$$
$$+\left\{\gamma r+\frac{(a+c)(b+c)}{c}w\right\}^2\equiv f_3=0 \tag{44}$$

$$\alpha p^2+\beta q^2+\gamma r^2+(a+b)(a+c)(b+c)$$
$$\left\{\frac{pu}{a(b+c)}+\frac{qv}{b(a+c)}+\frac{rw}{c(a+b)}\right\}\equiv\psi_2=0 \tag{45}$$

$$\lambda^2+p^2+q^2+r^2=0. \tag{46}$$

Изъ трехъ равенствъ (45) (42) и (41) мы выводимъ

$$\psi_2+\frac{1}{2}(a+b)(a+c)(b+c)\psi_1-\frac{(ab+ac+bc)}{2abc}f_1\equiv f_2=0. \tag{47}$$

Исключая изъ уравненій (43) и (46) параметръ λ, мы получаемъ:

$$\frac{1}{a}\left(\frac{u-2p}{b+c}\right)^2+\frac{1}{b}\left(\frac{v-2q}{a+c}\right)^2+\frac{1}{c}\left(\frac{w-2r}{a+b}\right)^2-\frac{1}{abc}(p^2+q^2+r^2)\equiv\psi_3=0. \tag{48}$$

Искомыя особенныя точки будутъ опредѣляться пятью уравненіями (41), (42), (44), (47) и (48). Всякій полиномъ 2-го порядка, обращающійся въ нуль для этихъ точекъ, выразится такой формулой:

$$l_1f_1+l_2f_2+l_3f_3+l_4\psi_1+l_5\psi_3, \tag{49}$$

гдѣ l_i нѣкоторыя постоянныя.

Такъ какъ интегралъ въ видѣ полинома 2-го порядка обращается въ нуль для всѣхъ этихъ точекъ, то такой интегралъ имѣетъ форму выраженія (49), и слѣдовательно четвертый интегралъ будетъ имѣть форму $l_4\psi_1+l_5\psi_3$. Остается только подставить его въ уравненіе (16), и приравнивая полученные коэффиціенты нулю, получаемъ уравненіе для опредѣленія отношенія параметровъ l_4 и l_5 и условія существованія этого интеграла.

Мы видимъ, что примѣненіе группы особенныхъ точекъ, для которыхъ λ не нуль, даетъ сразу форму четвертаго интеграла въ видѣ полинома 2-го порядка, зависящую только отъ одного произвольнаго параметра.

Точно также интегралъ φ въ видѣ полинома 4-го порядка, обращаясь въ нуль для этой группы особенныхъ точекъ, долженъ имѣть форму:

$$\varphi\equiv\psi_4 f_1+\psi_5 f_2+\psi_6 f_3+\psi_7\psi_1+\psi_8\psi_3. \tag{50}$$

Кромѣ того, сравнивая это выраженіе для интеграла съ найденнымъ ранѣе (33), мы убѣдимся безъ труда, что полиномы 2-го порядка ψ_4, ψ_5, ψ_6, ψ_7, ψ_8 будутъ всѣ имѣть форму (31), т. е. не будутъ обладать членами, въ которые входятъ произведенія изъ двухъ различныхъ паръ перемѣнныхъ p, u; q, v; r, w.

Можно это выраженіе изслѣдовать непосредственно, можно примѣнить къ его изслѣдованію особенныя точки первой группы, которыя опредѣляются величинами, заключающими произвольный параметръ.

Здѣсь я изложу частный пріемъ, который приведетъ къ цѣли гораздо скорѣе. При этомъ я не буду входить въ детали т. е. опущу здѣсь изложеніе провѣрки путемъ вычисленія тѣхъ условій, при которыхъ справедливы формы (49) и (50).

Всѣ функціи f_i, ψ_i, какъ уже замѣчено, одного и того же типа:

$$F\equiv L_1p^2+L_2pu+L_3u^2+L_4q^2+L_5qv+L_6v^2+L_7r^2+L_8rw+L_9w^2. \tag{51}$$

Функція XF будетъ вида

$$M_1pqr+M_2pqw+M_3pvr+M_4uqr+M_5pvw+M_6uqw+M_7uvr+M_8uvw. \tag{52}$$

Коэффиценты M_i будутъ линейными относительно коэффиціентовъ L_i и функція XF будетъ самаго общаго характера. Въ силу этого можно опредѣлить четыре функцін ψ_9, ψ_{10}, ψ_{11}, ψ_{12} такъ, чтобы эти функціи вмѣстѣ съ функціями f_1, f_2, f_3, ψ_1, ψ_3 образовали полную систему линейно независимыхъ функцій типа (51), и кромѣ того алгебраическія уравненія

$$X\psi_1=0,\ X\psi_3=0,\ X\psi_9=0,\ X\psi_{10}=0,\ X\psi_{11}=0,\ X\psi_{12}=0 \tag{53}$$

не имѣли бы вовсе общихъ рѣшеній, кромѣ очевидныхъ $p=u=0$, $q=v=0$, $r=w=0$.

Послѣднее возможно всегда, разъ только между функціями $X\psi_1$ и $X\psi_3$ нѣтъ линейнаго соотношенія вида

$$l_4 X\psi_1 + l_5 X\psi_3 \equiv 0\,;$$

но это указывало бы, что существуетъ четвертый интегралъ $l_4\psi_1 + l_5\psi_3$, представляющій собой полиномъ второй степени.

Согласно нашему предположенію мы можемъ выразить функціи $\psi_4, \psi_5, \psi_6, \psi_7, \psi_8$, черезъ девять функцій $f_1, f_2, f_3, \psi_1, \psi_9, \psi_3, \psi_{10}, \psi_{11}, \psi_{12}$; такимъ образомъ

$$\psi_i = N_{i1}f_1 + N_{i2}f_2 + N_{i3}f_3 + N_{i4}\psi_1 + N_{i5}\psi_3 + N_{i6}\psi_9 + N_{i7}\psi_{10} + N_{i8}\psi_{11} + N_{i6}\psi_{12}$$
$$i = 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8.$$

Подставляя эти выраженія въ форму (50) и отбрасывая произведенія $f_i\, f_j$, такъ какъ отъ этого все выраженіе φ не перестаетъ быть интеграломъ, получаемъ для нашего интеграла такое выраженіе:

$$\begin{aligned}\varphi \equiv \psi_1\{&(N_{44}+N_{71})f_1 + (N_{54}+N_{72})f_2 + (N_{64}+N_{73})f_3 + N_{74}\psi_1 + (N_{84}+N_{75})\psi_3\} + \\ &+ \psi_3\{(N_{45}+N_{81})f_1 + (N_{55}+N_{82})f_2 + (N_{75}+N_{83})f_3 + N_{85}\psi_3\} + \\ &+ \sum_{i=1}^{4} \psi_{8+i}\{N_{4,5+i}f_i + N_{5,5+i}f_2 + N_{6,5+i}f_3 + N_{7,6+i}\psi_1 + N_{8,5+i}\psi_3\}.\end{aligned}$$

Обозначивъ для краткости коэффиціенты при функціяхъ ψ_1, ψ_3, ψ_9, ψ_{10}, ψ_{11}, ψ_{12} соотвѣтственно черезъ $\varphi_1, \varphi_3, \varphi_9, \varphi_{10}, \varphi_{11}, \varphi_{12}$, получимъ:

$$\varphi = \psi_1\varphi_1 + \psi_3\varphi_3 + \psi_9\varphi_9 + \psi_{10}\varphi_{10} + \psi_{11}\varphi_{11} + \psi_{12}\varphi_{12}.$$

Такъ какъ φ, f_1, f_2, f_3 интегралы, то, примѣняя операцію X, мы получимъ:

$$\begin{aligned}X\varphi \equiv &\left(\varphi_1 + N_{74}\psi_1 + \sum_{i=1}^{4} N_{7,5+i}\,\psi_{8+i}\right) X\psi_1 + \\ &+ \left(\varphi_3 + N_{75}\psi_1 + N_{85}\psi_3 + \sum_{i=1}^{4} N_{8,5+i}\,\psi_{8+i}\right) X\psi_3 + \\ &+ \varphi_9 X\psi_9 + \varphi_{10}X\psi_{10} + \varphi_{11}X\psi_{11} + \varphi_{12}X\psi_{12} \equiv 0.\end{aligned}$$

Полученное тождество типа

$$A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 + A_4B_4 + A_5B_5 + A_6B_6 = 0,$$

гдѣ A_i и B_i однородные полиномы шести перемѣнныхъ, причемъ полиномы A_i 2-го порядка а B_i третьяго. Изучая нули этихъ полиномовъ, приходимъ къ заключенію, что полиномы A_i должны равняться нулю, и слѣдовательно

$$\varphi_9 = \varphi_{10} = \varphi_{11} = \varphi_{12} = 0.$$

Интегралъ φ пріобрѣтаетъ благодаря этому болѣе простой видъ

$$\varphi = \psi_1\varphi_1 + \psi_3\varphi_3,$$

т. е. четвертый интегралъ въ видѣ полинома четвертаго порядка выражается черезъ тѣ пять функцій, которыя мы встрѣтили при опредѣленіи особенныхъ точекъ 2-ой группы.

Изученіе такого выраженія очень просто и приводитъ къ заключенію, что эта форма не можетъ дать новаго интеграла, если его не даетъ форма $l_4\psi_1 + l_5\psi_3$.

Итакъ полиномы ни третьей степени, ни четвертой не даютъ самостоятельнаго четвертаго интеграла.

Изслѣдованіе полиномовъ высшихъ степеней можно вести по тому же плану, и, такъ какъ трудно ожидать встрѣтить при этомъ новый факторъ, благопріятствующій существованію новаго четвертаго интеграла въ видѣ полинома, то существуетъ большая вѣроятность, что среди полиномовъ высшихъ степеней нѣтъ новыхъ интеграловъ по отношенію къ уже извѣстнымъ.

При изложеніи настоящей работы я обратилъ главное вниманіе на примѣненіе метода полярныхъ операцій въ опредѣленіи интеграловъ даннаго вида, и вывожу формы интеграловъ и ихъ поляръ по отношенію къ особеннымъ точкамъ, опредѣляемыя формулами (20), (21), (22), (30), (31), (32) и (33).

Во второй части я примѣняю частные пріемы и потому не излагаю ихъ со всей подробностью, а лишь настолько, чтобы была дана желающему возможность провѣрить вычисленіемъ мои разсужденія.

Проф. Е. А. Роговскій (†).

(1855—1911 г.).

25-го января 1911 г. скончался въ Ялтѣ членъ Харьковскаго Математическаго Общества и. д. э.-о. проф. Харьковскаго Университета по каѳедрѣ Физики и Физической геоорафіи магистръ физики Евгеній Александровичъ Роговскій, послѣ продолжительной болѣзни. Въ теченіе 1909—10 уч. года онъ перенесъ плевритъ и отправленный врачами за границу жилъ въ Кларанѣ и Монтре. Но не покидая и во время пребыванія здѣсь занятій, онъ попробовалъ производить наблюденія солнечной радіаціи, снова простудился и совсѣмъ больной вернулся въ Харьковъ. Послѣ операціи врачи отправили его въ Крымъ, но суровая зима, небывалая на южномъ берегу, погасила слабую искру жизни больного.

Мы перепечатываемъ воспоминанія ближайшаго товарища покойнаго по каѳедрѣ проф. А. П. Грузинцева, помѣщенныя въ Журн. Р. Ф. Х. О. и автобіографическій очеркъ покойнаго, напечатанный въ юбилейномъ изданіи Харьковскаго Университета: «Физико-Математическій Факультетъ Императорскаго Харьковскаго Университета за первыя сто лѣтъ его существованія (1805—1905)». Х. 1908 г., а также и списокъ трудовъ покойнаго, пополненный его работами за послѣдніе годы.

Ред.

Евгеній Александровичъ Роговскій происходилъ изъ потомственныхъ дворянъ. Родился онъ въ 1855 году въ городѣ Кобринѣ, Гродненской губерніи, гдѣ отецъ его былъ городскимъ врачемъ. Окончивъ курсъ Бѣлостокскаго реальнаго училища въ 1874 г., онъ поступилъ въ Петербургскій технологическій институтъ въ 1876 году. Въ 1877 году Е. А. выдержалъ испытаніе зрѣлости при Петербургской 1-ой гимназіи и въ томъ же году перешелъ на математическое отдѣленіе Физико-Математическаго Факультета Петербургскаго Университета, гдѣ слушалъ Менделѣева, Чебышева, Коркина, Савича, Бобылева, Петрушевскаго, Фанъдеръ-Флита, Боргмана, О. Хвольсона. Окончивши курсъ университета въ 1882 г. со степенью кандидата, Е. А. поступилъ на службу въ 1882 г. въ Покровскую женскую гимназію въ Петербургѣ въ качествѣ преподавателя математики, а потомъ физики. Въ томъ же 1882 году Е. А. былъ оставленъ при Петербургскомъ Университетѣ для приготовленія къ профессорскому званію и работалъ тамъ въ Физической Лабораторіи подъ руководствомъ проф. Ѳ. Ѳ. Петрушевскаго и лаборанта В. В. Лермантова. Съ 1891 г. онъ занимался преподаваніемъ физики и (съ 1901 г.) математической географіи въ Введенской мужской гимназіи. Съ 1885 по 1904 г. Е. А. состоялъ помощникомъ редактора физической части журнала Русскаго Физико-Химическаго Общества и въ теченіе нѣсколькихъ лѣтъ руководилъ практическими занятіями студентовъ въ химической лабораторіи Петербургскаго Университета. Въ 1887 г. Е. А. былъ командированъ Русскимъ Физико-Химическимъ Обществомъ на ст. Подсолнечную, Московской губ., для фотометрическихъ измѣреній, въ составѣ коммиссіи для изслѣдованія полнаго солнечнаго затменія 7 августа 1877 года. Въ 1903 году за сочиненія: «О составѣ атмосферъ солнца и планетъ и ихъ температурѣ» и «Еще о температурѣ и составѣ солнца и планетъ» удостоенъ Русскимъ Астрономическимъ Обществомъ преміи и медали Государя Императора Николая Александровича.

После выдержанія экзамена и защиты диссертаціи, 4 мая 1903 г., подъ заглавіемъ: «О внѣшней теплопроводности серебряныхъ проволокъ въ водѣ», покойный Е. А. получилъ степень магистра физики и въ теченіе 1903—1904 г.г. читалъ лекціи по кинетической теоріи газовъ въ Петербургскомъ Университетѣ, въ качествѣ приватъ-доцента, сохраняя службу въ Покровской и Введенской гимназіяхъ. Читалъ, кромѣ того, Е. А. публичныя лекціи «о термоэлектричествѣ» и «о солнцѣ» и публичный курсъ гидростатики. Послѣ избранія Физико-Математическимъ Факультетомъ Харьковскаго Университета и. д. экстраординарнаго профессора по кафедрѣ физики, онъ былъ утвержденъ въ этой должности съ 1 іюля 1904 года и въ осенній семестръ этого года читалъ курсы метеорологіи и механической теоріи тепла. Съ сентября того же года Е. А. читалъ курсъ опытной Физики въ Харьковскомъ Ветеринарномъ Институтѣ. Покойный Е. А. состоялъ пожизненнымъ членомъ Русскаго Физико-Химическаго Общества и дѣйствительнымъ членомъ Русскаго Астрономическаго Общества въ Петербургѣ, Французскаго Физическаго— въ Парижѣ и Харьковскаго Математическаго.

О пребываніи Е. А. Роговскаго въ Харьковскомъ Университетѣ.

Воспоминанія *А. П. Грузинцева.*

Е. А. Роговскій пріѣхалъ въ Харьковъ осенью 1904 г. Въ университетѣ онъ читалъ курсъ метеорологіи и частные курсы физики (семестровые по 3 часа) кинетическую теорію газовъ, термодинамику и одинъ разъ спектральный анализъ. Въ Харьковскомъ Технологическомъ Институтѣ читалъ термодинамику, а въ Харьковскомъ Ветеринарномъ Институтѣ опытную физику.

Былъ Харьковскимъ Университетомъ командированъ три раза:— 1) въ 1906 году въ С.-Петербургъ для участія въ засѣданіяхъ коммиссіи при Императорской Академіи Наукъ по изслѣдованію солнца и представилъ отчетъ [1], 2) въ 1909 году для участія въ засѣданіяхъ магнитной коммиссіи и на второй метеорологическій съѣздъ и представилъ факультету отчетъ [2], 3) въ 1910 году въ магнитную коммиссію, но онъ тогда былъ уже сильно боленъ и жилъ въ Ялтѣ, а потому (по его представленію) факультетъ перевелъ эту командировку на меня, какъ ближайшаго товарища его по кафедрѣ.

За время пребыванія въ Харьковѣ работалъ въ своей лабораторіи по вопросу объ измѣненіи спектра водорода отъ продолжительнаго дѣйствія сильныхъ разрядовъ. Предварительное сообщеніе о своихъ опытахъ онъ прислалъ на 1-ый Менделѣевскій съѣздъ [3]). Подмѣченныя имъ явленія сильно интересовали его, и онъ выработалъ планъ опытовъ и почти все подготовилъ къ ихъ производству; факультетъ отпустилъ ему необходимыя средства для пріобрѣтенія приборовъ (спектрографъ и опредѣлитель длины волнъ Hilger'а и др.), но неожиданная болѣзнь и преждевременная смерть положили предѣлъ его научнымъ начинаніямъ....

Послѣ покойнаго осталась хорошо составленная библіотека книгъ по физикѣ и математикѣ; она пріобрѣтена Правленіемъ Харьковскаго Университета для физическаго и математическаго семинаровъ. Эта библіотека физическаго семинара помѣщается въ отдѣльной комнатѣ, украшенной портретомъ покойнаго товарища.

---

[1]) Отчетъ о командировкѣ въ С.-Петербургъ для участія въ засѣданіи коммиссіи по изслѣдованію солнца при Имп. Академіи Наукъ.

[2]) Отчетъ о командировкѣ на второй метеорологическій съѣздъ при Имп. Акад. Наукъ съ 11 по 17 янв. 1909 г. и засѣданія магнитной коммиссіи 19 и 20 янв.

[3]) Объ измѣненіи спектра водорода отъ продолжительнаго дѣйствія сильныхъ разрядовъ. (Предварительное сообщеніе, сдѣланное на засѣданіи отдѣла физики 1-го Менделѣевскаго съѣзда 27 декабря 1907 г.).

Въ заключеніе, кажется излишне прибавлять, что покойный Е. А. оставилъ о себѣ прекрасную память, какъ среди студенчества, такъ и среди товарищей по факультету, что я могу свидѣтельствовать, какъ его ближайшій товарищъ.

Списокъ печатныхъ работъ Е. А. Роговскаго.

1) О строеніи земной атмосферы и общихъ законахъ теоріи газовъ. Ж. Р. Ф.-Х. О. 14, стр. 276—277, 1882 г.; 16, стр. 25—48, 185—212 и 255, 1884 г. 2) Отвѣтъ на замѣтку г. Станкевича по поводу статьи «О строеніи земной атмосферы и т. д.» Ж. Р. Ф.-Х. О. 16, 1884 г., стр. 314—318 и 321. 3) Замѣтка объ атмосферахъ планетъ, температуры солнца, небеснаго пространства и земной атмосферы. Ж. Р. Ф.-Х. О. 16, 1884 г., стр. 76 и 524—538. 4) Замѣчанія по поводу «Отвѣта» г. Станкевича, Ж. Р. Ф.-Х. О. 16, 1884 г., стр. 552—554. 5) О температурѣ небесныхъ тѣлъ. Ж. Р. Ф-Х, О. 17, 1885 г. стр. 77, 314—325. 6) Отчетъ о фотографическихъ измѣреніяхъ во время полнаго солнечнаго затменія 7 августа 1887 г., приложеніе къ № 7 Ж. Р. Ф.-Х. О. 20, 1888 г., стр. 47—77. 7) Кинетическая теорія газовъ. Энциклопедическій словарь Ефрона-Брокгауза, т. XV, стр. 70—75, 1895 г. 8) Лучистая теплота. Тамд же, т. XVIII; стр. 118—125, 1896 г. 9) О составѣ атмосферъ солнца и планетъ и ихъ температуры. Извѣстія Рус. Астр. Общ., вып. VII, 1898 г., № 1, стр. 2 и 10—34. 10) Еще о температурѣ и составѣ атмосферъ солнца и планетъ. Изв. Рус. Астр. Общ., вып. VII. № 7—9, стр. 8, и вып. VIII, 1899 г., № 1—3, стр. 32—45. 11) О присутствіи воды и возможности органической жизни на Марсѣ. Письмо въ редакцію «Новое Время», № 8932, 1900 г. 12) Замѣтка о новой звѣздѣ Персея (3. 1901 г.) Ив. Рус. Астр. Общ.; вып. IX, 1901, № 1—3; стр. 53—58; № 4—5, стр. 6. 13) Note sur l'étoile nouvelle de Persée (3. 1901 г. Persei) Astronomische Nachrichten № 3724, 1901 г. 14) On the temperature and composition of the atmospheres of the planets and the sun. The Astrophysical Journal XIV, № 4, 1901 г. стр. 234—260. 15) The kinetic theory of planetary atmospheres. «Nature» 1902 г., № 1705, vol. 66, p. 222. 16) Sur la conductibilité extérieure des fils d'argent plongés dans l'eau. Comptes Rendus 136, 1903, p. 1391—1393. 17) О внѣшней теплопроводности серебряныхъ проволокъ въ водѣ. Диссертація 1903 г., стр. 227 и тоже подъ заглавіемъ: Объ отдачѣ теплоты серебряными проволоками, нагрѣваемыми электрическими токами въ водѣ. Ж. Р. Ф.-Х. О. 22, 1900 г., стр. 83; 34, 1902 г., р. 427—494, 35, 1903, 105—147, 175—292; Дневникъ XI Съѣзда Рус. Естеств. и Врачей въ С.-Петербургѣ. 1901 г. стр. 409. 18) Sur la différence de température des corps en contact. Compt. Renduns 137, 1903, p. 1244—1246; 140, 1905. 19) О разности температуръ на границѣ соприкасающихся тѣлъ. Ж. Р. Ф.-Х. О., 35, 1903 г., стр. 607, и «Сборникъ статей по физикѣ, посвященный памяти профессора Ѳ. Ѳ. Петрушевскаго». С.-Петербургъ 1904 г., стр. 149—154. 20) Отзывъ о работахъ Н. Н. Донича: Observations de l'éclipse total du soleil du 28 mai 1900 ets. Изв. Рус. Астр. Общ., вып. X, № 6—7, 1904 г., стр. 221—225. 21) Sur les rayons cathodiques émis par l'anode. Comptes Rendus, 140, 1905, p. 575—576. 22) О значеніи наблюденій надъ солнечной радіаціей. Протоколъ засѣданія Русскаго Отдѣленія Международной Коммиссіи по изслѣдованію солнца при Импер. Академіи Наукъ 3 января 1905 г. Спб. 1905. 23) «Отчятъ о командировкѣ въ СПБ. для участія въ засѣданіядъ коммиссіи по

изслѣдованію солнца при Императорскій Академіи Наукъ». Зап. Имп. Х. Ун. 1905 г. 24) Sur un phénomène de refroidissement observé dans les fils d'argent plongés dans l'eau et parcourus par des courants électriques. Comptes Rendus, 141, 1905, p. 622—624. 25) О строеніи земной и планетныхъ атмосферъ». Изв. Рус. Астрономич. Общ. 1906 г. 26) Исторія преподованія метеорологіи. Физико-математическій факультетъ Харьковскаго Универ. за первыя сто лѣтъ его существованія. Харьк. 1908 г. стр. 249—258. 27) Біографіи: Стойковича, Морозова, Косача и самого Е. А. Роговскаго. Тамъ-же. Ч. VI, стр. 74—75, 78—81, 91—92, 92—95. 28) Изъ воспоминаніи о Дм. Ив. Менделѣевѣ. Труды Общ. Физ.-Хим. Наукъ при Имп. Харьк. Унив. Янв. 1907. 29) Объ измѣненіи спектра водорода при продолжительномъ дѣйствіи сильныхъ разрядовъ. Тамъ-же 1907 г. и Дневникъ I. Менделѣевскаго съѣзда. 30) Профессоръ А. П. Грузинцевъ. По случаю 35-лѣтія его учено-педагогической дѣятельности. Газеты «Южный Край» и «Утро». 31) О температурномъ скачкѣ на границѣ двухъ тѣлъ. Замѣтка по поводу опытовъ г. Коловратъ-Червинскаго. Ж. Р. Ф.-Х. О. Физ. отд. вып. 5. 1908 г. 32) Профессоръ Н. Д. Пильчиковъ. Надгробная рѣчь. Газеты «Южный Край» и «Утро». 33) Профессоръ Н. Д. Пильчиковъ и его труды. Изв. Хар. Технол. Инст., т. IV и Сообщ. Хар. Мат. Общ. (сокращ.) 34) О температурѣ небеснаго пространства. Метеорол. Вѣст. №№ 8—9, 1909 г. и Сооб. Хар. Мат. Общ. XI, № 6, стр. 279. 35) Отчетъ о командировкѣ на 2-ой метеорологическій съѣздъ при Импер. Акад. Наукъ съ 11 по 17 января 1909 г. и засѣданіи Магнитной Коммиссіи 19 и 20 января. Учен. Зап. Хар. Унив. 1910 г. № 2, стр. 1—6. Кромѣ указанныхъ, Е. А. Роговскимъ сдѣланъ еще рядъ другихъ докладовъ въ Русскомъ Физико-Химическомъ Обществѣ и на XI Съѣздѣ Рус. Естеств. и Врачей, отчеты о которыхъ напечатаны въ соотвѣтственныхъ изданіяхъ, а именно: 1) О теплопроводности угольныхъ порошковъ Ж. Р. Ф.-Х. О. 16, 1884 г. стр. 516; 2) О нѣкоторыхъ гипотезахъ всемірнаго тяготѣнія. Тамъ же, 24, 1892 г., стр. 215; 3) О внѣшней теплопроводности и охлажденіи термометровъ въ жидкостяхъ. Там-же, 35, 1893 г., стр. 201; 4) О нормальныхъ элементахъ Кларка. Тамъ-же, 27, 1895 г., стр. 261; 5) О поперечномъ распредѣленіи температуръ въ проволокѣ, нагрѣваемой токомъ въ водѣ, и о гальваническомъ удлинненіи. Тамъ-же, 39, 1897 г., стр. 352; 6) Замѣтка по поводу гальванической деформаціи проволокъ. Тамъ-же, 30, 1897 г., стр. 29; Дневникъ XI Съѣзда Рус. Естеств. и Врачей въ С.-Петербургѣ въ 1901 г., стр. 400; 7) Объ одномъ явленіи при прохожденіи электрическаго тока черезъ проволоки, помѣщенныя въ водѣ. Ж. Р. Ф.-Х. О. 35, 1903 г., стр. 326; 8) О фиксированіи негативовъ. Тамъ-же, стр. 607; 9) Опыты Бьеркнеса надъ гидродинамическими притяженіями и отталкиваніями. Тамъ-же, 35, 1903 г., стр. 703. 10) Опытъ съ Круксовой трубкой. Тамъ-же, 36, 1904 г., стр. 219. Сверхъ того, въ Ж. Р. Ф.-Х. О. и Journal de Physique съ 1882 года по 1903 г. напечатано болѣе 130 рефератовъ Е. А. Роговскаго по разнымъ отдѣламъ физики.

И. Л. ПТАШИЦКІЙ.[1]

(21-го августа 1854 г.—17-го апрѣля 1912).

(НЕКРОЛОГЪ).

17-го апрѣля 1912 г. скончался заслуженный ординарный профессоръ Императорскаго С.-Петербургскаго университета Иванъ Львовичъ Пташицкій на 58-омъ году жизни.

И. Л. Пташицкій родился въ польской семьѣ дворянъ Виленской губерніи, учился въ Виленской гимназіи и по окончаніи гимназическаго курса поступилъ въ 1872 году на математическое отдѣленіе физико-математическаго факультета С.-Петербургскаго университета. Въ 1876 году онъ окончилъ курсъ со степенью кандидата и оставленъ былъ при университетѣ для приготовленія къ магистерскому экзамену, съ назначеніемъ стипендіи, срокомъ на два года.

Въ 1880 году назначенъ преподавателемъ математики въ Петергофскую прогимназію и занималъ это мѣсто въ теченіе десяти лѣтъ, до 1890 года.

Въ 1881 году, по выдержаніи магистерскаго экзамена и защитѣ диссертаціи, утвержденъ въ степени магистра чистой математики.

Въ 1882 году И. Л. Пташицкій утвержденъ въ званіи приватъ-доцента университета; съ этого года начинается его преподавательская дѣятельность въ С.-Петербургскомъ университетѣ, пе прекращавшаяся до самаго конца его жизни.

Въ 1888 году И. Л. Пташицкій защитилъ докторскую диссертацію и утвержденъ въ степени доктора чистой математики.

Въ 1891 году онъ былъ приглашенъ читать лекціи въ Михайловскую артиллерійскую академію и Михайловское артиллерійское училище. Въ послѣднемъ онъ читалъ лекціи только до 1895 года, а въ академіи до самаго конца жизни; съ 1899 года онъ состоялъ также членомъ конференціи въ этой академіи.

---

[1]) Перепечатано изъ „Журнала Мин. Нар. Просв.“ 1912.

Въ 1897 году Пташицкій былъ назначенъ сверхштатнымъ экстраординарнымъ профессоромъ университета, а въ 1899 году зачисленъ въ составъ штатныхъ профессоровъ.

Въ 1901 году назначенъ сверхштатнымъ, а 1902—штатнымъ ординарнымъ профессоромъ университета. Въ 1903 году, по выслугѣ 25 лѣтъ, оставленъ на службѣ въ университетѣ, а въ 1908 году утвержденъ въ званіи заслуженнаго профессора.

Служебная дѣятельность Пташицкаго въ университетѣ не ограничивалась однимъ преподаваніемъ: съ 1901 года онъ исполнялъ обязанности секретаря факультета и, кромѣ того, состоялъ въ теченіе многихъ лѣтъ, до послѣдняго года включительно, членомъ экзаменаціонной коммиссіи на государственныхъ экзаменахъ при университетѣ.

Преподавательская дѣятельность Пташицкаго была посвящена преимущественно университету. Въ Михайловской артиллерійской академіи онъ читалъ всего три лекціи въ недѣлю, да еще въ теченіе пяти лѣтъ двѣ лекціи въ артиллерійскомъ училищѣ. Въ университетѣ онъ читалъ въ разное время аналитическую и начертательную геометріи, приложеніе интегральнаго исчисленія къ геометріи, теорію эллиптическихъ функцій, а въ артиллерійской академіи интегрированіе дифференціальныхъ уравненій и нѣкоторыя дополнительныя статьи изъ различныхъ отдѣловъ математики. Преподавательская дѣятельность Пташицкаго въ Петергофской прогимназіи, конечно, никакой связи съ научными его работами не имѣла, скорѣе задерживала ихъ; поэтому онъ и отказался отъ учительства, какъ только матеріальныя его условія немного улучшились.

Впослѣдствіи онъ никогда не гнался за большимъ числомъ лекцій и ограничилъ его тѣмъ минимумомъ, который опредѣлялся его обязанностями профессора и обязанностями по отношенію къ своей семьѣ.

Образъ его жизни былъ всегда очень скромнымъ, но всѣмъ извѣстно, что условія жизни въ столицѣ не позволяютъ семейному человѣку ограничиться однимъ вознагражденіемъ университетскаго профессора, и принуждаютъ его искать добавочныхъ средствъ на сторонѣ.

Переходя къ обзору ученой дѣятельности Пташицкаго, замѣтимъ, что подготовку къ ней онъ получилъ въ С.-Петербургскомъ университетѣ въ то время, когда кафедра чистой математики имѣла въ немъ такихъ представителей, какъ Чебышевъ, Коркинъ и Золотаревъ. И. Л. Пташицкій всегда вспоминалъ съ благодарностью о своихъ учителяхъ, и въ особенности о безвременно погибшемъ Е. И. Золотаревѣ, оказавшемъ ему дѣятельную поддержку при первыхъ шагахъ его научной дѣятельности [1].

---

[1]) Е. И. Золотаревъ палъ жертвою песчастнаго случая на Александровской станціи Варшавской желѣзной дороги, въ 1878 году, на 31 году жизни.

Имя Птащицкаго въ печати впервые появляется въ 1879 году въ «Nouvelles Annales de mathématiques», гдѣ помѣщена маленькая его замѣтка «Snr un problème de Mécanique». Затѣмъ, въ 1880 году, въ «Mathematische Annalen» T. XVI, помѣщена его замѣтка подъ заглавіемъ «Extrait d'une lettre à M. C. Neumann», въ которой авторъ доказываетъ ошибочность правила L. Koenigsberger'а для рѣшенія слѣдующаго вопроса: узнать, выражается ли данный гиперэллиптическій интегралъ въ конечномъ видѣ черезъ алгебраически-логариѳмическія функціи, или нѣтъ, и найти это выраженіе въ случаѣ его существованія. Указавъ источникъ ошибки, авторъ даетъ и примѣръ, опровергающій правило Koenigsberger'а.

Въ 1881 г. Пташицкій напечаталъ магистерскую диссертацію *«Объ интегрированіи въ конечномъ видѣ ирраціональныхъ дифференціаловъ»*. Въ первой главѣ, основываясь на работахъ Абеля и Чебышева, авторъ показываетъ, что вопросъ объ интегрированіи въ конечномъ видѣ дифференціала, содержащаго раціонально x и $\sqrt[m]{R}$, гдѣ R цѣлый полиномъ, m — цѣлое положительное число, приводится къ вопросу о выраженіи интеграла вида

$$\int \frac{Pdx}{Q\sqrt[m]{R}},$$

гдѣ P, Q и R цѣлые полиномы, однимъ логариѳмическимъ членомъ. Этотъ результатъ былъ высказанъ Чебышевымъ безъ доказательства и затѣмъ доказанъ итальянскимъ математикомъ *Piuma* (Піума), но инымъ путемъ. Послѣдній вопросъ сводится затѣмъ къ нѣкоторому алгебраическому вопросу, рѣшеніемъ котораго для случая m = 2 и занимается авторъ во второй главѣ. Въ прибавленіи онъ даетъ свои пріемы для разысканія алгебраическаго выраженія интеграла отъ алгебраическаго дифференціала, болѣе простые, чѣмъ способъ, данный Ліувиллемъ для рѣшенія того же вопроса.

Въ 1884 году, въ т. I «Сообщеній Харьковскаго математическаго общества» напечатана замѣтка Птащицкаго «О разложеніи въ рядъ Маклорена нѣкоторыхъ функцій со многими перемѣнными», въ которой авторъ даетъ простой пріемъ для полученія нѣкоторыхъ разложеній, данныхъ Эрмитомъ въ его «Cours d'Analyse», на стр. 64, и многихъ другихъ.

Въ 1888 году напечатана докторская диссертація Пташицкаго *«Объ интегрированіи въ конечномъ видѣ эллиптическихъ дифференціаловъ»*. Заимствуемъ рецензію объ этомъ сочиненіи изъ «Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik» B. XX, 1888, стр. 445. «Настоящая работа имѣетъ цѣлью изложить какъ прежнія работы математиковъ, такъ и собственныя изслѣдованія автора, по вопросу объ интегрированіи въ конечномъ видѣ эллиптическихъ дифференціаловъ. Она раздѣлена на пять главъ.

Первая посвящена изслѣдованіямъ Ліувилля и Чебышева, относящимся къ конечному интегрированію и приведенію эллиптическихъ дифференціаловъ къ виду

$$\int\frac{(x+A)dx}{\sqrt{x^4+lx^3+mx^2+nx+p}}.$$

Во второй главѣ излагается, съ нѣкоторыми упрощеніями, методъ Абеля для разысканія конечнаго выраженія въ логариѳмахъ вышеприведеннаго интеграла, если таковое существуетъ. Въ третьей главѣ излагается собственная метода автора. По этой методѣ данный интегралъ приводится къ виду

$$I=\int\left[\frac{\sqrt{s(b)}}{z-b}+B\right]\frac{dz}{\sqrt{s(z)}},$$

гдѣ s полиномъ третьей степени.

Исходя изъ этого интеграла, авторъ составляетъ нѣкоторый рядъ интеграловъ

$$I_1,\ I_2,\ .\ .\ .\ .\ .\ I_{v_1},\ I_i\ .\ .\ .\ .\ .\ (1)$$

и показываетъ, что необходимое и достаточное условіе существованія конечнаго выраженія интеграла I въ логариѳмахъ состоитъ въ томъ, чтобы рядъ (1) былъ конечнымъ или періодическимъ.

Четвертая и пятая главы посвящены изложенію дополненій къ различнымъ признакамъ интегрируемости въ конечномъ видѣ, найденнымъ частью Чебышевымъ и Золотаревымъ, частью самимъ авторомъ».

Въ томъ же 1888 году напечатаны нижеслѣдующія статьи Пташицкаго:

a) «*Extrait d'une lettre à M. Ch. Hermite* (Bull. des sc. math. et astron. G. Darboux, (2) XII, 262—270). Здѣсь дается теорема, состоящая въ томъ, что интегралъ

$$\int F(x,\ \sqrt[m]{R})dx,$$

гдѣ R — цѣлый полиномъ, берется въ конечномъ видѣ тогда и только тогда, когда R имѣетъ видъ:

$$(x-a_1)^{n_1} \text{ или } (x-a_1)^{n_1}\ (x-a_2)^{m-n_1}.$$

Эта теорема встрѣчается уже въ магистерской диссертаціи автора.

b) *Объ алгебраическомъ интегрированіи алгебраическихъ дифференціаловъ,* и

c) *Объ одной теоремѣ относительно алгебраическихъ интеграловъ* (Сообщенія Харьковск. матем. о-ва, 2-я серія, т. I, 61—73, 74—77).

d) *Sur l'intégration algébrique des différentielles algébriques* (Acta mathematica. T. XI, 1888, 395—400). Въ этихъ статьяхъ авторъ даетъ свою методу для рѣшенія вопроса объ алгебраическомъ интегрированіи дифференціаловъ вида ydx, гдѣ *y* алгебраическая функція отъ x, впервые рѣшеннаго Ліувиллемъ, и на примѣрахъ показываетъ преимущества своей методы.

Замѣтка по тому же вопросу помѣщена Пташицкимъ въ журналѣ «Prace mathematyczno-fizyczne I, 81—90», издающемся въ Варшавѣ O całkowaniu algebraiczném różniczek algebraicznych.

Въ статьѣ «Sur la réduction de certaines intégrales abéliennes à la forme normale» (Mat. Annalen, B. 33, 1889 г.) Пташицкій обобщаетъ результаты изслѣдованій Эрмита о гиперэллиптическихъ интегралахъ (Bull. des sc. mat. et astr., 1883) на интегралы отъ дифференціаловъ, зависящихъ отъ корня любой степени изъ цѣлаго полинома.

Тому же вопросу посвящена статья Пташицкаго въ «Prace», II, 57—74. O sprowadzeniu pewnych całek abelowych do postaci normalnéj.

Въ 1900 году напечатаны слѣдующія статьи Пташицкаго:

a) «*Sur la réduction d'un problème algébrique*» (Comptes rendus t. 130, стр. 105—107).

b) «Twierdzenia ogólne o całkowaniu różniczek abelowych w postaci skończonej. (Prace mat-fiz. 11, 23—31).

c) «*Общія изслѣдованія объ интегрированіи Абелевыхъ дифференціаловъ въ конечномъ видѣ*» (Математ. сборникъ, т. 21, 387—430). Въ этихъ статьяхъ авторъ занимается различными алгебраическими вопросами, связанными съ вопросами о приведеніи Абелевыхъ интеграловъ.

Въ Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Verein. за 1909 г. № 1, помѣщена статья И. Л. Пташицкаго подъ заглавіемъ: «Sur un théorème d'Analyse, énoncé par Jacobi».

Теорема Якоби, которую авторъ здѣсь доказываетъ, состоитъ въ слѣдующемъ:

«Дана цѣлая раціональная функція f(x), степени $2n+1$ или $2n+2$. Если при нѣкоторомъ цѣломъ раціональномъ значеніи x радикалъ $\sqrt{f(x)}$ также равенъ цѣлому числу, то существуетъ безчисленное множество уравненій степени n, такихъ, что для *любого* корня уравненія $\sqrt{f(x)}$ выразится раціонально въ x и раціональныхъ числахъ».

Весьма простое доказательство автора основано на разложеніи корня квадратнаго изъ цѣлаго полинома въ непрерывную дробь.

Вся жизнь И. Л. Пташицкаго, какъ мы уже сказали была посвящена научному труду и преподаванію въ двухъ высшихъ учебныхъ заведеніяхъ. Какъ въ томъ, такъ и въ другомъ, онъ оставилъ по себѣ самую лучшую память. Кончина его была полною неожиданностью для всѣхъ знавшихъ его болѣе или менѣе близко. Въ понедѣльникъ 26-го марта, на второй день Пасхи, по издавна установившемуся обычаю, онъ собралъ у себя небольшой кружокъ друзей и знакомыхъ. Никому изъ нихъ и въ голову не приходило, что ихъ гостепріимный хозяинъ, никогда не жаловавшійся на какой-либо серіозный недугъ, на другой же день, 27-го марта, сляжетъ въ постель, а послѣ кратко-временной болѣзни, черезъ три недѣли, скончается въ больницѣ, куда его перевезли, по совѣту врачей, за нѣсколько часовъ до смерти. Характеръ болѣзни, такъ быстро сведшей И. Л. Пташицкаго въ могилу, остался не вполнѣ точно опредѣленнымъ. Предполагали сперва инфлуэнцу, затѣмъ злокачественное малокровіе, въ связи съ болѣзнью селезенки, и намѣревались примѣнить леченіе лучами Рентгена. Примѣнить это леченіе, однако, не пришлось. Въ понедѣльникъ 16-го апрѣля, вечеромъ, больного, уже измученнаго продолжительными страданіями, перевезли въ Александровскую нѣмецкую больницу, а во вторникъ 17-го въ $2^1/_2$ часа онъ уже скончался, какъ говорятъ, отъ паралича сердца. На панихидѣ и на торжественной заупокойной мессѣ въ католическомъ соборѣ св. Екатерины присутствовали почти всѣ его коллеги по факультету и по артиллерійской академіи, бывшіе и настоящіе, и много студентовъ. Студентами былъ возложенъ на гробъ покойнаго вѣнокъ съ надписью «Дорогому учителю и другу». Ученики И. Л. Пташицкаго дѣйствительно потеряли въ немъ учителя и друга, всегда тепло и доброжелательно къ нимъ относившагося. Университетъ потерялъ въ немъ неутомимаго работника, служившаго своей almae matri вѣрою и правдою и твердо хранившаго ея лучшія традиціи. Миръ его праху!

К. Поссе.

Sur un problème hydrodynamique de Bjerknes.

A. Friedmann et M. Peteline.

Soient deux sphères Σ, Σ' dans un liquide incompressible sans frottement, dont les centres O, O' sont fixes et dont les volumes varient suivant une loi quelconque.

Désignons par r la distance OO', par x, y les volumes des sphères Σ, Σ', par ϱ la densité de liquide. Soit $F(F')$ l'action que la sphère $\Sigma'(\Sigma)$ exerce sur $\Sigma(\Sigma')$. Cette action est dirigée suivant la ligne OO'. Si l'on suppose l'action $F(F')$ comptée positivement, quand elle est dirigée de $O(O')$ vers $O'(O)$ et négativement dans le cas contraire, l'action est représentée en grandeur et en signe par les formules:

$$F = -\frac{\varrho}{8\pi r^2}\left[3\frac{d}{dt}\left(x\frac{dy}{dt}\right) - 2\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt}\right],$$

$$F' = -\frac{\varrho}{8\pi r^2}\left[3\frac{d}{dt}\left(y\frac{dx}{dt}\right) - 2\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt}\right],$$

r est supposé très grand par rapport aux dimensions des sphères [1]).

Si la loi de la variation des volumes x, y est celle des vibrations harmoniques, l'action mutuelle *moyenne* des deux sphères Σ, Σ' est en raison inverse du carré de la distance, c'est à dire correspond à la loi de Newton [2]).

Nous nous proposons de résoudre le problème suivant:

Déterminer la loi des variations des volumes de deux sphères de telle manière que l'action mutuelle de ces sphères soit en raison inverse du carré de la distance à chaque instant donné.

---

1) Voir: Bjerknes. Vorlesungen über hydrodynamische Fernkräfte. 1900.

2) Жуковскій. Лекціи по гидродинамикѣ.

Le problème proposé se ramène évidemment à l'intégration du système d'équations différentielles suivant

$$\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt}-\frac{3}{2}\frac{d}{dt}\left(x\frac{dy}{dt}\right)=c\,, \tag{A}$$

$$\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt}-\frac{3}{2}\frac{d}{dt}\left(y\frac{dx}{dt}\right)=c\,, \tag{B}$$

c désignant une constante, positive dans le cas d'attraction, négative dans le cas de répulsion.

§ 1.

Les équations (A), (B) peuvent s'écrire sous la forme:

$$x''=-\frac{x'y'+2c}{3y}. \tag{1}$$

$$y''=-\frac{x'y'+2c}{3x}. \tag{2}$$

Ces équations admettent une intégrale première

$$xy'-yx'=a\,, \tag{3}$$

a étant une constante arbitraire; on peut toujours supposer $a \geqq 0$.

En multipliant respectivement par y', x' les équations (1), (2) et les ajoutant, on aura

$$y'x''+x'y''=-\frac{x'y'+2c}{3}\left(\frac{y'}{y}+\frac{x'}{x}\right),$$

d'où il résulte

$$3\,\frac{d\lg(x'y'+2c)}{dt}+\frac{d\lg xy}{dt}=0\,,$$

on aura donc en intégrant

$$xy\,(x'y'+2c)^3=b^3, \tag{4}$$

b désignant une constante arbitraire.

En résolvant les équations (3), (4) par rapport à x', y' et substituant les valeurs trouvées

$$x'=\frac{\varepsilon R-a}{2y}\,,\quad y'=\frac{\varepsilon R+a}{2x}\,,$$

où

$$\varepsilon=\pm 1\,,\quad R=\sqrt{a^2-8cxy+4b(xy)^{2/3}}\,,$$

dans l'équation

$$y'dx - x'dy = 0,$$

on obtient une équation différentielle entre x et y

$$\frac{\varepsilon R + a}{x} dx - \frac{\varepsilon R - a}{y} dy = 0$$

qui peut être mise encore sous la forme:

$$d \lg \frac{y}{x} = \frac{3adu}{\varepsilon u \sqrt{P(u)}}, \tag{5}$$

en posant

$$xy = u^3, \quad P(u) = a^2 + 4bu^2 - 8cu^3.$$

On trouve aussi sans peine une équation différentielle entre t et u. On a, en effet,

$$xy' + yx' = \frac{d}{dt}(xy) = \varepsilon R,$$

d'où il suit

$$dt = \frac{3\varepsilon u^2 du}{\sqrt{P(u)}}. \tag{6}$$

Soit u_0 la valeur initiale de u. On doit prendre dans les formules précédentes $\varepsilon = +1$ ou $\varepsilon = -1$, suivant que u croît ou décroît à partir de $u = u_0$; ε ne peut changer de signe que pour les valeurs de u, pour lesquelles $\frac{du}{dt}$ s'annule ou devient infini. Les quantités x, y étant essentiellement positives, il en est de même de u; de plus, les équations (5), (6) montrent que u ne peut pas sortir de l'intervalle dans lequel $P(u)$ est positif, car les premiers membres de ces équations sont réels. Si l'on désigne par τ, x_0, y_0 les valeurs de t, x, y correspondant à $u = u_0$, et si l'on pose

$$\varphi(u) = \varepsilon \int_{u_0}^{u} \frac{3du}{u\sqrt{P(u)}}$$

on aura, en vertu des équations (5), (6), les expressions suivantes de t, x, y en fonction de u:

$$\left.\begin{aligned} t - \tau &= \varepsilon \int_{u_0}^{u} \frac{3u^2 du}{\sqrt{P(u)}} \\ x^2 = \frac{x_0}{y_0} u^3 e^{-a\varphi(u)}, &\quad y^2 = \frac{y_0}{x_0} u^3 e^{a\varphi(u)} \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

pour tout intervalle de la variable positive u, dans lequel ε ne change pas de signe et $P(u)$ reste positif, u_0 étant compris dans le meme intervalle.

Examinons maintenant les divers cas du problème proposé.

§ 2.

Considérons d'abord le cas où l'équation $P(u) = 0$ a ses trois racines réelles inégales. Dans ce cas on doit avoir

$$\triangle = 4b^3 + 27a^2c^2 < 0.$$

Il s'ensuit de là

$$b < 0.$$

On s'assure facilement que le polynome $P(u)$ a une racine positive et deux racines négatives dans le cas $c>0$, une racine négative et deux racines positives dans le cas $c<0$. Il suffit, pour le voir, de substituer à u la suite

$$\frac{b}{2c}, \ \frac{b}{3c}, \ 0, \ \infty,$$

si $c>0$ et la suite

$$-\infty, \ 0, \frac{b}{3c}, \ \frac{b}{2c},$$

si $c<0$. On aura pour $P(u)$ les valeurs successives

$$a^2, \ \frac{\triangle}{27c^2}, \ a^2, \ -\infty$$

dans le cas $c>0$, et

$$-\infty, \ a^2, \ \frac{\triangle}{27c^2}, \ a^2$$

dans le cas $c<0$.

Soit d'abord $c>0$. On peut mettre $P(u)$ sous la forme

$$P(u) = -8c(u-u_1)(u+u_2)(u+u_3),$$

u_1, u_2, u_3, étant positifs. On voit que u doit être compris dans l'intervalle $(0, u_1)$.

Supposons, pour fixer les idées, que u aille en croissant à partir de $u=u_0$; il faudra prendre $\varepsilon = +1$ dans la formule (6); u croîtra jusqu'à la valeur $u=u_1$; on aura $\left(\frac{du}{dt}\right)_{u=u_1} = 0$; u devra décroître à partir de $u=u_1$ et l'on prendra $\varepsilon = -1$; en décroissant u atteindra la valeur $u=0$, où l'on aura $\left(\frac{du}{dt}\right)_{u=0} = -\infty$; à partir de $u=0$, u devra croître et l'on prendra $\varepsilon = +1$ et ainsi de suite. Le temps qu'il faut à u pour parcourir de 0 à u_1 ou de u_1 à 0 est égal à

$$T = \int_0^{u_1} \frac{3u^2 du}{\sqrt{P(u)}}.$$

Les considérations qui précèdent nous montrent que u est une fonction périodique, ayant la période $2T$.

Soit $t = 0$ la valeur de t pour laquelle $u = 0$. On aura alors $u = 0$ pour $t = 2T, 4T, \ldots$

Il est évident qu'on peut déterminer les fonctions x, y satisfaisant aux équations (1), (2) et continues dans l'intervalle $(0, 2T)$.

Nous allons démontrer la proposition suivante:

Il n'existe pas des fonctions x, y de t, satisfaisant aux équations (1), (2) et continues dans l'intervalle renfermant une valeur de t pour laquelle $u = 0$.

Considérons, pour fixer les idées, l'intervalle $(T, 3T)$. Soient τ, τ' deux valeurs de t suffisamment voisines de $2T$ et telles que

$$T < \tau < 2T, \quad 2T < \tau' < 3T.$$

Soient u_0, u_0', x_0, x_0', y_0, y_0' les valeurs de u, x, y correspondant respectivement á $t = \tau$, $t = \tau'$.

Les formules (7) nous donnent

$$x^2 = \frac{x_0}{y_0} u^3 e^{-a\varphi(u)}, \quad y^2 = \frac{y_0}{x_0} u^3 e^{a\varphi(u)},$$

$$\varphi(u) = -\int_{u_0}^{u} \frac{3du}{u\sqrt{P(u)}}$$

pour l'intervalle $(T, 2T)$;

$$x^2 = \frac{x_0'}{y_0'} u^3 e^{-a\varphi_1(u)}, \quad y^2 = \frac{y_0'}{x_0'} u^3 e^{a\varphi_1(u)},$$

$$\varphi_1(u) = \int_{u_0'}^{u} \frac{3du}{u\sqrt{P(u)}}$$

pour l'intervalle $(2T, 3T)$.

Considérons les limites vers lesquelles tend x^2, lorsque t tend vers $2T$ par des valeurs croissantes ou décroissantes. On a, dans le voisinage de $u = 0$,

$$\frac{3}{u\sqrt{P(u)}} = \frac{3}{a} \cdot \frac{1}{u} + \alpha_0 + \alpha_1 u + \alpha_2 u^2 + \ldots$$

Il en suit

$$\varphi(u) = \frac{3}{a} \lg \frac{u_0}{u} - \alpha_0 (u - u_0) - \ldots,$$

$$\varphi_1(u) = \frac{3}{a} \lg \frac{u}{u_0'} + \alpha_0 (u - u_0') + \ldots,$$

d'où

$$x^2 = \frac{x_0}{y_0 u_0^3} u^6 F(u),$$

dans l'intervalle $(T, 2T)$.

$$x^2 = \frac{x_0' u_0'^3}{y_0'} F_1(u),$$

dans l'intervalle $(2T, 3T)$.

Les fonctions F, F_1 sont holomorphes dans le voisinage de $u=0$, et ne s'annulent pas au point $u=0$.

En remarquant que $\lim\limits_{t=2T} u = 0$, on a:

$$\lim_{t=2T-0} x^2 = 0, \quad \lim_{t=2T+0} x^2 = \frac{x_0' u_0'^3}{y_0'} F_1(0).$$

On voit ainsi que ces deux limites sont toujours différentes. On s'assure de la même manière que $\lim\limits_{t=2T-0} y$ est diffèrent de $\lim\limits_{t=2T+0} y$

Dans le cas $c<0$, $P(u)$ peut s'écrire:

$$P(u) = -8c(u-u_1)(u-u_2)(u+u_3),$$

u_1, u_2, u_3 étant positifs. Soit $u_1 > u_2$. La variable u peut être comprise dans l'intervalle $(0, u_2)$ ou bien dans l'intervalle (u_1, ∞). Si u est dans l'intervalle $(0, u_2)$ nous avons le cas absolument semblable à celui que nous venons de considérer. Considérons le cas où la variable u est comprise dans l'intervalle (u, ∞). Supposons que la valeur initiale de $\frac{du}{dt}$ soit négative; u ira en décroissant à partir de $u=u_0$ et atteindra la valeur $u=u_1$; à partir de cette valeur u croitra continuellement; l'expression de t [form. (7)] nous prouve que $\lim\limits_{t=\infty} u=\infty$.

Soient τ, τ_1 les valeurs de t correspondant respectivement à $u=u_0$, $u=u_1$. On peut construire deux fonctions x, y satisfaisant aux équations (1), (2) et continues dans tout l'intervalle (τ, ∞). Il suffit pour cela de déterminer x, y par les formules

$$\left.\begin{aligned} x^2 &= \frac{x_0}{y_0} u^3 e^{-a\varphi(u)}, \quad y^2 = \frac{y_0}{x_0} u^3 e^{a\varphi(u)}, \\ \varphi(u) &= -\int_{u_0}^{u} \frac{3du}{u\sqrt{P(u)}} \end{aligned}\right\} \quad (\alpha)$$

dans l'intervalle (τ, τ_1),

$$\left.\begin{aligned} x^2 &= \frac{x_1}{y_1} u^3 e^{-a\varphi_1(u)}, \quad y^2 = \frac{y_1}{x_1} u^3 e^{a\varphi_1(u)} \\ \varphi_1(u) &= \int_{u_1}^{u} \frac{3du}{u\sqrt{P(u)}} \end{aligned}\right\} \quad (\beta)$$

dans l'intervalle (τ_1, ∞).

Dans les formules (β) il faut prendre pour x_1, y_1, les limites vers lesquelles tendent x, y, déterminées par les formules (α), lorsque u tend vers u_1.

L'expression $\varphi_1(\infty)$ ayant un sens déterminé, on voit immédiatement que

$$\lim_{t=\infty} x = \lim_{t=\infty} y = \infty.$$

Si l'on suppose la valeur initiale de $\frac{du}{dt}$ positive, on obtiendra les mêmes résultats.

§ 3.

Considerons le cas où l'équation $P(u) = 0$ a une seule racine réelle. On doit avoir dans ce cas

$$\Delta = 4b^3 + 27a^2c^2 > 0.$$

Soit d'abord $c > 0$. On trouve sans peine que la racine réelle u_1 de $P(u)$ est positive. On peut écrire

$$P(u) = -8c(u - u_1)P_1(u), \quad P_1(u) > 0,$$

d'où il suit que u doit varier dans l'intervalle $(0, u_1)$ et nous avons le cas semblable au premier cas du § 2.

Si $c < 0$, on obtiendra de même

$$P(u) = -8c(u + u_1)P_1(u), \quad P_1(u) > 0, \quad u_1 > 0.$$

La variable u doit varier dans l'intervalle $(0, \infty)$.

Si la valeur initiale de $\frac{du}{dt}$ est négative, u décroîtra de $u=u_0$ jusqu'à la valeur $u=0$; à partir de cette valeur u croîtra à l'infini. En raisonnant comme dans le premier cas du § 2, on démontrera qu'il n'existe pas des fonctions x, y, satisfaisant aux équations (1), (2) et continues dans l'intervalle renfermant la valeur de t pour laquelle $u=0$.

Si la valeur initiale de $\frac{du}{dt}$ est positive, u croitra de u_0 à l'infini. Il existe dans ce cas des fonctions x, y continues dans tout l'intervalle (τ, ∞). On aura

$$\lim_{t=\infty} x = \lim_{t=\infty} y = \infty.$$

Dans tous les cas considérés on peut obtenir sans peine les expressions de t, x, y par les fonctions elliptiques d'un paramètre auxiliaire v pour tout intervalle dans lequel $\frac{du}{dt}$ ne change pas de signe.

§ 4.

Passons au cas où l'on a

$$a \neq 0, \quad 4b^3 + 27a^2c^2 = 0$$

et, par suite

$$b < 0$$

On a dans ce cas

$$P(u) = -8c(u-u_1)^2(u-u_2),$$

où

$$u_1 = \frac{b}{3c}, \quad u_2 = -\frac{b}{6c}.$$

Si $c > 0$, on a $u_1 < 0$, $u_2 > 0$. Pour que $\sqrt{P(u)}$ soit réel, la variable u doit rester dans l'intervalle $(0, u_2)$. Nous aurons donc le cas tout à fait analogue au premier cas du § 2.

Soit $c < 0$; on a alors $u_1 > 0$, $u_2 < 0$. La variable u doit etre comprise dans l'intervalle $(0, \infty)$.

Supposons la valeur initiale de $\frac{du}{dt}$ positive. Soit d'abord $u_0 > u_1$; u croitra constamment avec t au delà de toute limite. Ce cas est semblable au dernier cas du § 3. Soit $u_0 < u_1$. L'expression de t:

$$t - \tau = \int_{u_0}^{u} \frac{3u^2 du}{|u-u_1| \sqrt{-8c(u-u_2)}}$$

nous montre que

$$\lim_{u=u_1} t = \infty,$$

d'où il suit que la variable u ne peut pas sortir de l'intervalle (u_0, u_1). Les fonctions x, y sont évidemment continues dans tout l'intervalle (τ, ∞). La fonction $\varphi(u)$ étant de la forme

$$\varphi(u) = \int_{u_0}^{u} \frac{3du}{u(u_1 - u)\sqrt{-8c(u-u_2)}}$$

on en conclut

$$\lim_{t=\infty} \varphi(u) = \infty, \quad \lim_{t=\infty} x = 0, \quad \lim_{t=\infty} y = \infty.$$

Supposons maintenant la valeur initiale de $\frac{du}{dt}$ négative. Soit $u_0 > u_1$. L'expression de t:

$$t - \tau = -\int_{u_0}^{u} \frac{3u^2du}{|u-u_1|\sqrt{-8c(u-u_1)}} = \int_{u}^{u_0} \frac{3u^2du}{|u-u_1|\sqrt{-8c(u-u_2)}}, \quad (u < u_0)$$

nous montre que

$$\lim_{u=u_1} t = \infty.$$

On obtient comme dans le cas précédent que x, y sont continues dans tout l'intervalle (τ, ∞) et que

$$\lim_{t=\infty} x = 0, \quad \lim_{t=\infty} y = \infty.$$

Soit $u_0 < u_1$; la variable u décroîtra à partir de $u = u_0$ jusqu'à la valeur $u = 0$; à partir de $u = 0$, u croîtra et atteindra la valeur $u = u_1$, pour $t = \infty$. Ce cas est analogue à l'un des cas du § 3.

§ 5.

Considérons maintenant le cas $a = 0$ que nous avons laissé de côté.

L'équation (3) nous donne pour $a = 0$:

$$y = \alpha^3 x,$$

α désignant une constante arbitraire positive.

L'équation (4) se réduit à

$$\alpha^3 x^2 (\alpha^3 x'^2 + 2c)^3 = b^3,$$

d'où l'on tire

$$dt = \varepsilon \frac{3\alpha\sqrt{\alpha}}{2} \cdot \frac{zdz}{\sqrt{2c(z_1 - z)}},$$

en posant

$$\varepsilon = \pm 1, \quad z = x^{2/3}, \quad z_1 = \frac{b}{2c\alpha}.$$

Soit $c > 0$. On a alors $b > 0$, $z_1 > 0$. Pour que $\frac{dz}{dt}$ soit réel il faut que z soit compris dans l'intervalle $(0, z_1)$. On trouvera facilement que z, et par suite x et y, sont des fonctions périodiques de t, dont la démi-période est égale à

$$T = {}^3/_2 . \frac{\alpha\sqrt{\alpha}}{\sqrt{2c}} \int_0^{z_1} \frac{z dz}{\sqrt{z_1 - z}} = \frac{b\sqrt{b}}{2c^2}.$$

Soit $z=0$ pour $t=0$. Les quantités t, z sont liées alors par la relation

$$t = \frac{\alpha\sqrt{\alpha}}{2c}\left[2z_1\sqrt{z_1} - (z + 2z_1)\sqrt{z_1 - z}\right],$$

si t varie dans l'intervalle $(0, T)$, et par la relation

$$t = T + \frac{\alpha\sqrt{\alpha}}{\sqrt{2c}}(z + 2z_1)\sqrt{z_1 - z} = \frac{\alpha\sqrt{\alpha}}{2c}(2z_1\sqrt{z_1} + (z + 2z_1)\sqrt{z_1 - z}),$$

si t varie dans l'intervalle $(T, 2T)$.

Si $c < 0$, on trouvera sans peine que z, et par suite x, y sont continues dans tout l'intervalle (τ, ∞) et que

$$\lim_{t=\infty} z = \lim_{t=\infty} x = \lim_{t=\infty} y = \infty.$$

L'analyse précédente nous montre que l'on peut diviser tous les cas possibles en trois groupes.

1. Les fonctions x, y correspondant à notre problème ne sont pas continues dans tout l'intervalle de la variation de t.

2. Les fonctions x, y sont continues, mais l'une d'elles au moins, peut dépasser toute limite donnée à l'avance.

3. Dans le cas $a=0$, $c>0$ et dans ce cas seulement, les fonctions x, y de t sont bornées, continues et périodiques. Dans le cas considéré les sphères Σ, Σ' s'attirent suivant la loi de Newton et leurs volumes x, y conservent le rapport constant.

Объ асимптотическомъ значеніи наилучшаго приближенія аналитическихъ функцій.

С. Н. Бернштейна.

1. Въ моемъ сочиненіи «О наилучшемъ приближеніи непрерывныхъ функцій и т. д.» указаны общіе принципы для опредѣленія *порядка* безконечнаго убыванія наилучшаго приближенія функціи при помощи многочленовъ безконечно возрастающихъ степеней. Изъ этого изслѣдованія вытекаетъ, между прочимъ, что если намъ дана аналитическая функція

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \tag{1}$$

которой извѣстенъ радіусъ сходимости R, то величина R имѣетъ лишь малое вліяніе на законъ убыванія положительныхъ чиселъ, которыя я обозначаю черезъ $E_n f(x)$, и которыя выражаютъ наилучшее приближеніе $f(x)$ при помощи многочлена степени n на отрѣзкѣ $(-1, +1)$. Для того, чтобъ получить болѣе точныя свѣдѣнія относительно убыванія E_n, слѣдуетъ преобразовать разложеніе $f(x)$ въ строку Тайлора въ рядъ тригонометрическихъ многочленовъ $T_n(x) = \cos n \arccos x$, т. е.

$$f(x) = A_0 + A_1 T_1(x) + A_2 T_2(x) + \ldots + A_n T_n(x) + \ldots \tag{2}$$

гдѣ [1])

$$A_{n+1} = \frac{1}{2^n}\left[a_{n+1} + \frac{n+3}{2^2} a_{n+3} + \frac{(n+4)(n+5)}{2^4 . 2!} a_{n+5} + \ldots\right] =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{+1} f(x) . T_{n+1}(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

[1]) См. § 61 и примѣчаніе къ § 70 упомянутаго сочиненія. Если радіусъ сходимости $R \leq 1$, то ряды, выражающіе коэффиціенты A_{n+1}, могутъ оказаться расходящимися; тогда можно воспользоваться ихъ выраженіемъ въ видѣ интеграла.

Дѣйствительно, на основаніи обобщенной теоремы Лебега (§ 71), мы знаемъ, что

$$I_n \geqq E[f(x)] > \frac{kI_n}{\log(n+1)}, \tag{3}$$

гдѣ k нѣкоторой независящій отъ $f(x)$ и n коэффиціентъ, а

$$I_n = \text{макс.} \left| A_{n+1} T_{n+1}(x) + A_{n+2} T_{n+2}(x) + \ldots \right|$$

есть величина приближенія, осуществляемаго многочленомъ

$$A_0 + A_1 T_1(x) + \ldots + A_n T_n(x).$$

Изъ неравенства (3) видно, что порядокъ E_n почти тотъ же, что порядокъ I_n; кромѣ того, вслѣдствіе теоремы (76),

$$E_n[f(x)] \leqq I_n < \frac{2M\varrho^{n+1}}{1-\varrho}, \tag{4}$$

если на эллипсѣ s, имѣющемъ фокусами $(-1, +1)$ и суммою полуосей $\frac{1}{\varrho}$, внутри котораго функція голоморфна, $|f(x)| < M$. Наоборотъ, если, при всякомъ значеніи n, неравенство (4) соблюдено, то функція голоморфна *внутри* этого эллипса s (§ 29). Такимъ образомъ порядокъ E_n и I_n зависитъ прежде всего отъ числа ϱ, и вмѣстѣ съ тѣмъ не только порядокъ каждой изъ этихъ величинъ, но и асимптотическія значенія зависятъ *только* отъ особенностей функціи на *наименьшемъ* изъ гомофокальныхъ эллипсовъ, ибо, на основаніи только что упомянутой теоремы, прибавленіе къ данной функціи другой функціи голоморфной въ области, заключающей въ себѣ разсматриваемый эллипсъ, не повліяетъ вообще на асимптотическое значеніе E_n и I_n.

Вслѣдствіе выше изложеннаго, особое значеніе пріобрѣтаетъ рѣшеніе слѣдующей задачи:

Найти асимптотическое значеніе

$$E_n\left[\frac{B_1}{x-a} + \ldots + \frac{B_k}{(x-a)^k}\right];$$

этой задачей мы сейчасъ и займемся, полагая число a вещественнымъ; къ случаю a комплекснаго я вернусь въ ближайшемъ будущемъ.

2. *Примѣчаніе.* Въ § 62 среди другихъ примѣровъ, я вычислилъ между прочимъ порядокъ $E_n\left(\frac{1}{1-Rx}\right)$. Пользуюсь случаемъ, чтобъ указать что рядъ

$$1+(n+3)\left(\frac{R}{2}\right)^2+\frac{(n+4)(n+5)}{2}\left(\frac{R}{2}\right)^4+\ldots,$$

который я, для краткости, обозначилъ тамъ, пользуясь обычными обозначеніями гипергеометрическихъ функцій, черезъ

$$F\left(\frac{n}{2}+1,\ \frac{n}{2}+\frac{3}{2},\ n+2,\ R^2\right),$$

легко вычислить, а именно,

$$F\left(\frac{n}{2}+1,\ \frac{n}{2}+\frac{3}{2},\ n+2,\ R^2\right)=\frac{2^{n+1}}{\sqrt{1-R^2}}\cdot\frac{1}{(1+\sqrt{1-R^2})^{n+1}}.$$

Поэтому

$$\frac{1}{1-Rx}=\sum\frac{2R^nT_n(x)}{\sqrt{1-R^2}.\,1+\sqrt{1-R^2})^n},$$

откуда

$$\frac{1}{a-x}=\frac{2}{\sqrt{a^2-1}}\sum\frac{T_n(x)}{(a+\sqrt{a^2-1})^n},$$

и наконецъ

$$I_n\left(\frac{1}{a-x}\right)=\frac{2}{(a+\sqrt{a^2-1})^n.[a^2-1+(a-1)\sqrt{a^2-1}]},\tag{5}$$

гдѣ, для опредѣленности, $a=\frac{1}{R}>0$ (для $a<0$, достаточно въ формулѣ (5) написать $|a|$ вмѣстѣ a). Благодаря тому, что всѣ коэффиціенты въ разложеніи $\frac{1}{a-x}$ положительны, имѣемъ

$$I_n\left(\frac{1}{a-x}\right)^2=\left|\frac{d}{da}\frac{2}{(a+\sqrt{a^2-1})^n[a^2-1+(a-1)\sqrt{a^2-1}]}\right|$$

и вообще

$$k!\,I_n\left(\frac{1}{a-x}\right)^{k+1}=\left|\frac{d^k}{da^k}\frac{2}{(a+\sqrt{a^2-1})^n[a^2-1+(a-1)\sqrt{a^2-1}]}\right|.$$

Поэтому

$$\text{асим. зн. } I_n\left(\frac{1}{a-x}\right)^{k+1}=\frac{2n^k}{k!(a^2-1)^{\frac{k}{2}}[a^2-1+(a-1)\sqrt{a^2-1}].(a+\sqrt{a^2-1})^n}$$

Мы увидимъ дальше, (и это вытекаетъ также изъ § 62), что порядокъ $E_n\left(\frac{1}{a-x}\right)^{k+1}$ тотъ же, что порядокъ $I_n\left(\frac{1}{a-x}\right)^{k+1}$. Полезно замѣтить что въ неравенствѣ (3) нижняя граница въ большинствѣ случаевъ чрезмѣрно низка; и для аналитическихъ функцій множитель $\frac{1}{\log(n+1)}$ можетъ почти всегда быть упраздненнымъ. Дѣйствительно, неравенство (77^{bis}) въ § 70 даетъ для всякой функціи

$$\sqrt{A_{n+1}^2+A_{n+1}^2+\ldots}<E_n[f(x)]\leqq I_n[f(x)]\leqq|A_{n+1}|+|A_{n+2}|+\ldots$$

Изъ доказательства же теоремы (76) слѣдуетъ, что

$$|A_n|<2M\varrho^n.$$

А потому, какъ бы мало ни было число ε, будетъ безчисленное множество значеній n (а обыкновенно этому условію удовлетворятъ *всѣ* достаточно большіе n), такихъ, что, при $k>1$,

$$|A_{n+k}|<|A_{n+1}|\,.(\varrho+\varepsilon)^{k-1}. \tag{6}$$

Для всѣхъ этихъ значеній n,

$$\frac{|A_{n+1}|+|A_{n+2}|+\ldots+|A_{n+k}|+\ldots}{\sqrt{A_{n+1}^2+A_{n+2}^2+\ldots}}<\frac{1}{1-(\varrho+\varepsilon)}.$$

3. Опредѣлимъ многочленъ степени n, $R_n(x)$, наименѣе уклоняющійся отъ

$$\frac{1}{x-a}$$

въ промежуткѣ $(-1, +1)$. Для этого достаточно, чтобъ разность

$$\frac{1}{x-a}-R_n(x)=\frac{P_{n+1}(x)}{x-a}$$

достигала въ $(n+2)$ точкахъ отрѣзка своего абсолютнаго максимума съ послѣдовательно мѣняющимися знаками. Но этому условію удовлетворяетъ многочленъ $R(x)$, если

$$P_{n+1}(x)=\frac{(x+\sqrt{x^2-1})^n[ax-1+\sqrt{(x^2-1)(a^2-1)}]+[x-\sqrt{x^2-1}]^n[ax-1-\sqrt{(x^2-1)(a^2-1)}]}{2(a^2-1)(a+\sqrt{a^2-1})^n},$$

ибо можемъ написать

$$\frac{P_{n+1}(x)}{x-a}=\frac{\cos(n\varphi+\delta)}{(a^2-1)(a+\sqrt{a^2-1})}, \tag{7}$$

гдѣ [1]) $\cos\varphi=x$, $\sin\varphi=\sqrt{1-x^2}$,

$$\cos\delta=\frac{ax-1}{x-a}, \quad \sin\delta=\frac{\sqrt{(a^2-1)(1-x^2)}}{x-a}.$$

Слѣдовательно,

$$E_n\left(\frac{1}{x-a}\right)=\frac{1}{(a^2-1)(a+\sqrt{a^2-1})^n}. \tag{8}$$

4. Точное опредѣленіе $E_n\left(\frac{1}{x-a}\right)^k$, при $k>1$, представляетъ значительныя трудности, возрастающія вмѣстѣ съ числомъ k.

Напротивъ, асимптотическое значеніе $E_n\left(\frac{1}{x-a}\right)^k$ находится весьма легко благодаря слѣдующему замѣчанію.

Дифференцируемъ равенство (7) по a $(k-1)$ разъ, что дастъ намъ

$$\frac{(k-1)!}{(x-a)^k}-R_n^{(k-1)}(x)=\frac{d^{k-1}}{da^{k-1}}\left[\frac{\cos(n\varphi+\delta)}{(a^2-1)(a+\sqrt{a^2-1})^n}\right]. \tag{9}$$

Замѣчаемъ, что вторая часть, въ которой φ не зависитъ отъ a, равна

$$\frac{d^{k-1}}{da^{k-1}}\left[\frac{\cos(n\varphi+\delta)}{(a^2-1)(a+\sqrt{a^2-1})^n}\right]=A\cos(n\varphi+\delta)+B\sin(n\varphi+\delta),$$

гдѣ

$$A=\frac{\pm n^{k\ \ 1}(1+\varepsilon_n)}{(a^2-1)^{\frac{k+1}{2}}(a+\sqrt{a^2-1})^n}, \quad B=\varepsilon'_n A,$$

обозначая черезъ ε_n и ε'_n величины, стремящіяся къ нулю при безконечномъ возрастаніи n. Поэтому разность

$$\frac{1}{(x-a)^k}-\frac{R_n^{(k-1)}(x)}{(k-1)!}$$

---

[1]) См. П. Л. Чебышевъ. «Sur les questions de minima etc.» §§ 29—38. (Полное собраніе сочиненій, т. I) и А. А. Марковъ. «Опредѣленіе нѣкоторой функціи по условію наименѣе отклоняться отъ нуля». (Сообщ. Харьковскаго Матем. Общ. 1884 г.).

достигаетъ въ $(n+2)$ точкахъ максимальнаго абсолютнаго значенія съ противоположными знаками, асимптотически равнаго

$$\frac{n^{k-1}}{(k-a)!\,(a^2-1)^{\frac{k+1}{2}}(a+\sqrt{a^2-1}')^n}$$

Слѣдовательно, асимптотическое значеніе

$$E_n\left(\frac{1}{x-a}\right)^k = \frac{n^{k-1}}{(k-1)!\,(a^2-1)^{\frac{k+1}{2}}.(a+\sqrt{a^2-1})^n}; \tag{10}$$

и асимптотическое значеніе

$$E_n\left(\varphi(x)+\sum_{i=1}^{i=k}\frac{A_i}{(x-a)^i}\right) = \frac{|A_k|\,n^{k-1}}{(k-1)!\,(a^2-1)^{\frac{k+1}{2}}(a+\sqrt{a^2-1})^n}, \tag{11}$$

если $\varphi(x)$ есть какая нибудь функція голоморфная внутри эллипса[1]*, проходящаго черезъ точку a, имѣющаго фокусами $(+1, -1)$.*

5. Аналогичнымъ образомъ вычисляется и асимптотическое значеніе

$$E_n\,[\log(a-x)]$$

Дѣйствительно, интегрируемъ относительно a равенство (7) въ предѣлахъ отъ a до b, гдѣ b нѣкоторое число бо́льшее, чѣмъ a. Находимъ

$$\log(b-x) - \log(a-x) + \int_a^b R_n(x)\,da = \int_a^b \frac{P_{n+1}(x)\,da}{a-x} \tag{12}$$

Обозначая черезъ $S_n(x)$ многочленъ степени n относительно x, кокимъ является $\int_a^b R_n(x)\,da$, изслѣдуемъ разность

$$[\log(a-x)-\log(b-x)] - S_n(x) = -\int_a^b \frac{P_{n+1}(x)\,da}{a-x} =$$

$$= \int_b^a \frac{\cos(n\varphi+\delta)\,da}{(a-1)(a+\sqrt{a^2-1})^n} = \frac{1}{n}\left|\frac{\cos(n\varphi+\delta)}{\sqrt{a^2-1}\,(a+\sqrt{a^2-1})^n}\right|_a^b +$$

$$+\frac{1}{n}\int_b^a \frac{d}{da}\left(\frac{\cos(n\varphi+\delta)}{\sqrt{a^2-1}}\right).\frac{da}{(a+\sqrt{a^2-1})^n}.$$

---

[1]) Замѣтимъ, что этотъ случай въ частности имѣетъ мѣсто, если радіусъ сходимости

$$f(x) = \varphi(x) + \Sigma\,\frac{A_i}{(x-a)^i}$$

равенъ a, при чемъ $f(x)$, кромѣ полюса a, имѣетъ какія угодно особенности на кругѣ сходимости.

Но, интегрируя вторично по частямъ, находимъ, что

$$\int_b^a \frac{d}{da}\left(\frac{\cos(n\varphi+\delta)}{\sqrt{a^2-1}}\right)\cdot\frac{da}{(a+\sqrt{a^2-1})^n}=\frac{1}{n}\left|\frac{d}{da}\left(\frac{\cos(n\varphi+\delta)}{\sqrt{a^2-1}}\right)\cdot\frac{\sqrt{a^2-1}}{(a+\sqrt{a^2-1})^n}\right|_a^b+$$

$$+\frac{1}{n}\int\frac{d}{da}\left[\sqrt{a^2-1}\cdot\frac{d}{da}\left(\frac{\cos(n\varphi+\delta)}{\sqrt{a^2-1}}\right)\right]\frac{da}{(a+\sqrt{a^2-1})^n}=\frac{\lambda}{n(a+\sqrt{a^2-1})^n}.$$

гдѣ λ остается конечнымъ, при $-1\leqq x\leqq 1$.

Такимъ образомъ равенство (12) можемъ замѣнить слѣдующимъ:

$$\log(a-x)-\log(b-x)-S_n(x)=-\frac{\cos(n\varphi+\delta)+\varepsilon_n}{n\sqrt{a^2-1}\,(a+\sqrt{a^2-1})^n}, \qquad (13)$$

гдѣ ε_n стремится къ нулю вмѣстѣ съ $\frac{1}{n}$. Отсюда, какъ въ предыдущемъ §, заключаемъ, что асимптотическое значеніе

$$E_n[\log(a-x)-\log(b-x)]=\frac{1}{n\sqrt{a^2-1}\,(a+\sqrt{a^2-1})^n}$$

и слѣдовательно, асимптотическое значеніе

$$E_n[\log(a-x)]=\frac{1}{n\sqrt{a^2-1}\,(a+\sqrt{a^2-1})^n}, \qquad (14)$$

такъ какъ $\log(b-x)$ есть голоморфная функція внутри элипса, проходящаго черезъ a. Интегрируя еще разъ, найдемъ асимптотическое значеніе

$$E_n[(a-x)\log(a-x)]=\frac{1}{n^2(a+\sqrt{a^2-1})^n} \qquad (15)$$

Примѣчаніе. Еслибъ послѣдняя формула была точной, а не асимптотической, то изъ нея переходомъ къ предѣлу немедленно можно было бы получить и $E_n[(1-x)\log(1-x)]$. Но въ данномъ случаѣ, переходъ къ предѣлу требуетъ новаго анализа, и изъ предшествующихъ вычисленій нельзя получить отвѣта на вопросъ, будетъ ли асимптотическое значеніе

$$E_n[(1-x)\log(1-x)]$$

равно $\frac{1}{n^2}$?

6. Для опредѣленія асимптотическаго значенія $E_nf(x)$ цѣлыхъ трансцендентныхъ функцій въ большинствѣ случаевъ достаточно разсмотрѣнія разложенія (2) функціи въ рядъ тригонометрическихъ многочленовъ.

А именно, не трудно видѣть, что для безчисленнаго множества значеній n (которыя имѣются у всякой цѣлой функціи) удовлетворяющихъ условію, что

$$|A_{n+k}| < |A_{n+1}| \varepsilon^{k-1},$$

при сколь угодно маломъ ε, имѣемъ

$$|A_{n+1}| < E_n[f(x)] < |A_{n+1}| \cdot \frac{1}{1-\varepsilon};$$

это вытекаетъ изъ (6); равнозначный результатъ можно также получить, замѣтивъ, что

$$f(x) - \sum_0^n A_i T_i(x) = A_{n+1}[T_{n+1}(x) + \eta],$$

гдѣ

$$|\eta| < \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon},$$

такъ что наша разность въ $(n+2)$ точкахъ достигаетъ максимума (или минимума) равнаго $A_{n+1}(1+\eta)$; откуда заключаемъ, что

$$\text{Ас. знач. } E_n f(x) = A_{n+1}.$$

Въ моей работѣ «О наилучшемъ приближеніи и т. д.» этотъ результатъ, не формулированный въ общемъ видѣ, примѣненъ къ функціямъ e^x, $\sin x$, $\cos x$. Здѣсь я хочу указать, что послѣдній способъ разсужденій примѣнимъ иногда и къ функціямъ не только не цѣлымъ, но даже не аналитическимъ; весьма интереснымъ примѣромъ этого служитъ извѣстная функція Вейерштрасса, не имѣющая производной, къ изслѣдованію которой мы теперь и перейдемъ.

7. Пусть будетъ

$$f(x) = \sum a^n \cos b^n t = \sum a^n T_{b^n}(x),$$

полагая какъ и раньше $T_i(x) = \cos i \arccos x$. Допустимъ, что b есть цѣлое нечетное число. Какъ извѣстно, если

$$ab > 1,$$

функція $f(x)$ не имѣетъ производной.

Я говорю, что многочленъ

$$R(x) = \sum_0^n a^k T_{b^k}(x) \tag{16}$$

есть многочленъ степени не выше m, наименѣе уклоняющійся отъ $f(x)$ въ промежуткѣ $(-1, +1)$, если $b^n \leqq m < b^{n+1}$, и

$$E_m[f(x)] = \frac{a^{n+1}}{1-a} \tag{17}$$

Въ самомъ дѣлѣ, разность

$$f(x) - R(x) = \sum_{u+1}^{\infty} a^k T_{b^k}(x)$$

въ точкахъ $x_l = \cos\frac{l\pi}{b^{n+1}}$, при $l = 0, 1, \ldots b^{n+1}$, получаетъ свои наибольшія абсолютныя значенія, послѣдовательно равныя

$$\frac{(-1)^l a^{n+1}}{1-a},$$

т. е. не менѣе, чѣмъ въ $(m+2)$ точкахъ, если $b^n \leqq m < b^{n+1}$, а потому $R(x)$ есть, изъ многочленовъ степени не выше m, наименѣе уклоняющійся отъ $f(x)$.

Интересно замѣтить что многочленъ $R(x)$, будучи наименѣе уклоняющимся отъ $f(x)$, обращаетъ также въ минимумъ и квадратичную ошибку

$$\int_{-1}^{+1} \frac{[f(x) - R(x)]^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Такое совпаденіе является, разумѣется, рѣдкимъ исключеніемъ.

Такъ какъ разсматриваемую нами функцію Вейерштрасса можно считать классической, то довольно любопытно опредѣлить, какимъ условіямъ Липшица она удовлетворяетъ, пользуясь общими критеріями, изложенными въ моемъ сочиненіи «О наилучшемъ приближеніи и т. д.» и наглядно резюмированными въ таблицѣ, приложенной къ моему докладу «Sur les recherches recentes и т. д.» на Кембриджскомъ конгрессѣ 1912 г.

Положимъ

$$n + \varepsilon = \log_b m,$$

гдѣ

$$0 \leqq \varepsilon < 1;$$

въ такомъ случаѣ

$$E_m f(x) = \frac{a^{n+1}}{1-a} = \frac{a^{\log_b m + 1 - \varepsilon}}{1-a} = \frac{a^{\log_a m \cdot \log_b a + 1 - \varepsilon}}{1-a} = m^{\log_b a} \cdot \frac{a^{1-\varepsilon}}{1-a}.$$

Поэтому можемъ утверждать, что $f(x)$ удовлетворяетъ условію Липшица любой степени $\alpha < \log_b \frac{1}{a}$, и не можетъ удовлетворять условію Липшица степени $\alpha > \log_b \frac{1}{a}$. Напримѣръ, если $b=9$, и $a=\frac{1}{3}$, то

$$f(x)=\sum\left(\frac{1}{3}\right)^n T_{9n}(x),$$

удовлетворяетъ условіямъ Липшица степени менѣе, чѣмъ $\frac{1}{2}$, но не удовлетворяетъ условіямъ Липшица степени болѣе, чѣмъ $\frac{1}{2}$.

8. Закончу свою статью доказательствомъ слѣдующей общей теоремы.

Теорема. *Если $f(x)$ есть какая угодно функція, голоморфная на отрѣзкѣ $(-1, +1)$, то среди асимптотическихъ выраженій многочленовъ степени n, наименѣе уклоняющихся отъ нея, есть такіе, для которыхъ точки максимальнаго уклоненія β_k удовлетворяютъ условію*

$$\text{пред.}_{n=\infty}\left(\beta_k - \cos\frac{k\pi}{n}\right)=0.$$

Для того, чтобъ убѣдиться въ правильности высказанной теоремы, сдѣлаемъ слѣдующее замѣчаніе. Пусть $P(x)$ будетъ нѣкоторый многочленъ степени $n+s$, который, послѣдовательно мѣняя знакъ, получаетъ въ $(n+1)$ точкахъ $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$ максимальныя отклоненія равныя $\pm A$, и составимъ разность

$$R(x)=AT_n(x)-P(x).$$

Въ такомъ случаѣ, ясно, что въ каждомъ промежуткѣ

$$\left(\cos\frac{k\pi}{n},\ \cos\frac{(k+1)\pi}{n}\right),$$

такъ же какъ и въ каждомъ промежуткѣ (β_k, β_{k+1}),

$$R(x)=0$$

имѣемъ не менѣе одного корня. Поэтому, обозначая черезъ ξ_i послѣдовательные корни уравненія $R(x)=0$, которыхъ не болѣе, чѣмъ $n+s$ на отрѣзкѣ $(-1, +1)$, заключаемъ, что

$$\xi_k < \beta_k \leqq \xi_{k+s+1}$$

и

$$\cos\frac{(k-s-1)\pi}{n} \leqq \xi_k\,, \quad \xi_{k+s+1} \leqq \cos\frac{(k+s+1)\pi}{n}\,;$$

и слѣдовательно, тѣмъ болѣе,

$$\cos\frac{(k-s-1)\pi}{n} \leqq \beta_k \leqq \cos\frac{(k+s+1)\pi}{n}\,. \tag{18}$$

Съ другой стороны, на основанiи (6) для всякой голоморфной функцiи $f(x)$, есть безчисленное множество значенiй n, для которыхъ

$$\frac{E_n f(x)}{E_{n+s} f(x)} < \lambda^s\,,$$

гдѣ λ опредѣленное число большее единицы.

Для указанныхъ значенiй n, выбираемъ s такъ, чтобъ λ^s стремилось къ безконечности, хотя и $\frac{s}{n}$ стремится къ нулю. Въ такомъ случаѣ, многочленъ $P'_n(x)$ степени n, наименѣе уклоняющiйся отъ многочлена $P_{n+s}(x)$ степени $(n+s)$, наименѣе уклоняющагося отъ $f(x)$, будетъ очевидно, асимптотическимъ выраженiемъ для многочлена $P_n(x)$ степени n, наименѣе уклоняющагося отъ $f(x)$.

Но разность

$$P_{n+s}(x) - P'_n(x)$$

является такимъ образомъ многочленомъ степени $n+s$, получающимъ въ $(n+1)$ точкахъ β_k отклоненiя равныя, но съ обратными знаками, а потому β_k удовлетворяютъ неравенству (18), гдѣ $\frac{s}{n}$ стремится къ нулю; откуда

$$\underset{n=\infty}{\text{пред.}}\left(\beta_k - \cos\frac{k\pi}{n}\right) = 0\,.$$

Основная задача опредѣленiя точекъ отклоненiя асимптотическихъ выраженiй многочленовъ, наименѣе уклоняющихся отъ данной функцiи, приводится такимъ образомъ къ опредѣленiю *безконечно малыхъ* измѣненiй, какимъ надо для этого подвергнуть точки отклоненiя $\cos\frac{k\pi}{n}$ многочлена $T_n(x)$, наименѣе уклоняющагося отъ нуля.

Двѣ задачи.

Д. М. Синцова.

1. Какъ извѣстно, эволюта циклоиды есть снова циклоида. Можно поставить себѣ вопросъ: *разыскать всѣ кривыя, эволютами которыхъ являются тѣ же кривыя, только имѣющія иное положеніе въ плоскости.* Здѣсь умѣстно примѣненіе методовъ натуральной геометріи [1]).

Пусть

$$R = \varphi(s), \tag{1}$$

гдѣ R и s суть радіусъ кривизны и дуга, есть натуральное уравненіе кривой. По свойству эволюты ея радіусъ кривизны

$$R_1 = R\frac{dR}{ds} \text{ и } s_1 = R - R_0,$$

гдѣ R_0 — значеніе радіуса кривизны при $s_1 = 0$ и $s = s_0$.

Такимъ образомъ кривая, удовлетворяющая поставленному условію, должна выполнять функціональное уравненіе

$$R_1 = \varphi(s_1)$$

т. е.

$$\varphi(s) \cdot \frac{d\varphi(s)}{ds} = \varphi[\varphi(s) - \varphi(s_0)]. \tag{I}$$

Простѣйшіе извѣстные частные случаи:

a) Логариѳмическая спираль $(R = ks \quad s_0 = 0)$;

b) Циклоида $(R^2 + s^2 = a^2)$, $s_0 = -4a$, $R_0 = 0$, $(s_1)_0 = 0$, $(R_1)_0 = 4a$
$R = \sqrt{16a^2 - s^2} = s_1$, $R_1 = \sqrt{16a^2 - s_1^2} = -s$. (l. c. p. 32)

---

1) *E. Cesàro.* Lezioni di geometria intrinseca. 1896. Литература указана у *G. Loria.* Spezielle algebraische und transzendente Kurven n° 253—254.

2. Можно поставить также вопросъ о *парахъ кривыхъ*, служащихъ эволютами одна другой,—таковы, напр., приводимыя E. Cesàro l. c. *псевдоциклоиды*:

$$s^2 - R^2 = a^2, \quad R^2 - s^2 = a^2.$$

Для такихъ кривыхъ должно быть

$$R = \varphi(s), \quad R_1 = \psi(s_1), \quad R_2 = \varphi(s_2) \quad \text{и т. д.}$$

т. е.

$$R\frac{dR}{ds} = \psi(R - R^0) \quad \text{и} \quad R_1\frac{dR_1}{ds_1} = \varphi(R_1 - R_1{}^0)$$

гдѣ R^0 и $R_1{}^0$ — начальныя значенія R и R_1.

Итакъ должно быть

$$\left.\begin{aligned} \varphi(s)\frac{d\varphi}{dS} &= \psi[\varphi(s) - \varphi(s_0)], \\ \psi(s)\frac{d\psi}{dS} &= \varphi[\psi(s) - \psi(s_1{}^0)]. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(II)}$$

На рѣшеніе функціональныхъ уравненій (I) и (II) сводятся такимъ образомъ двѣ указанныя геометрическія задачи.

Уравненія (I) и (II) упрощаются, если за независимое перемѣнное взять не дугу, а уголъ касательной съ опредѣленнымъ направленіемъ. (Ср. Loria l. c. p. 624) Но Loria принимаетъ начальное значеніе угла для всѣхъ эволютъ равнымъ нулю. Это вноситъ существенное ограниченіе, и въ результатѣ единственными кривыми, удовлетворяющими требованіямъ 2-ой задачи, оказываются псевдоциклоиды.

Интересно поэтому провѣрить, какія рѣшенія получаются, если не налагать ограниченій на начальныя значенія дуги и соотвѣтствующаго радіуса кривизны и, сверхъ того, не предполагать для функціи $\varphi(s)$ существованія производныхъ порядка выше 1-го, resp. 2-го. [1])

---

[1]) Ср. мои «Замѣтки по функціональному исчисленію» Изв. Казан. Физико-Мат. Общества (2) т. XIII n⁰ 2. 1902 г.

Объ одномъ линейномъ функціональномъ уравненіи.

(По поводу задачи объ эволютахъ, предложенной Д. М. Синцовымъ).

Гр. Грузинцева.

I. Линейное разностно-дифференціальное уравненіе, связанное съ задачей объ эволютахъ.

§ 1. Задача: *разыскать кривыя, эволютами которыхъ являются тѣже кривыя, только имѣющія иное положеніе въ плоскости.*

Эта задача, какъ извѣстно, приводится къ нахожденію функціи $\varphi(s)$, удовлетворяющей уравненію

$$\varphi(s)\,\varphi'(s) = \varphi\,[\varphi(s) - a] \tag{1}$$

гдѣ $a = \varphi(s_0)$.

Попытаемся опредѣлить функцію μ такимъ образомъ, чтобы

$$\left.\begin{aligned} \mu(z) &= s + a \\ \mu(z+1) &= \varphi(s) \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

и при этомъ $\varphi(s)$ удовлетворяло уравненію (1). Тогда, очевидно,

$$\mu(z+2) = \varphi\,\{\mu(z+1) - a\} = \varphi\,\{\varphi(s) - a\}$$

$$\varphi'(s) = \frac{\mu'(z+1)}{\mu'(z)}$$

и уравненіе (1) принимаетъ такую форму:

$$\frac{\mu(z+1)\,\mu'(z+1)}{\mu'(z)} = \mu(z+2)\,.$$

Написавъ его немного иначе

$$\frac{\mu'(z)}{\mu(z+1)} = \frac{\mu'(z+1)}{\mu(z+2)}$$

мы замѣчаемъ, что отношеніе

$$\frac{\mu'(z)}{\mu(z+1)} = \sigma$$

есть періодическая функція z съ періодомъ равнымъ единицѣ; въ частномъ случаѣ σ есть постоянная.

Въ дальнѣйшемъ я ограничусь отысканіемъ аналитическихъ рѣшеній уравненія (1).

Легко доказать, что, если $\mu(z)$ есть какое-нибудь аналитическое рѣшеніе уравненія

$$\mu'(z) = \sigma\mu(z+1) \tag{3}$$

то, при нѣкоторыхъ ограниченіяхъ относительно областей перемѣнныхъ z и s, $\varphi(s)$ будетъ аналитической функціей s и будетъ удовлетворять уравненію (1).

Въ самомъ дѣлѣ, допустимъ, что μ есть рѣшеніе уравненія (3), голоморфное въ нѣкоторой односвязной области, внутри которой всегда находится точка $(z+1)$, если точка z принадлежитъ къ этой области; допустимъ также, что, не нарушая односвязности ея и сохраняя указанное, мы можемъ удалить точки, гдѣ $\mu'(z) = 0$.

Тогда, какъ извѣстно, опредѣленныя уравненіями (2) s и $\varphi(s)$ будутъ аналитическими функціями z въ данной области и обратно: z, а слѣдовательно и $\varphi(s)$ будутъ аналитическими-же функціями s въ нѣкоторой области.

Докажемъ теперь, что $\varphi(s)$ удовлетворитъ уравненію (1).

Возведемъ уравненіе (2) въ квадратъ и продифференцируемъ по z

$$\mu(z+1)\,\mu'(z+1) = \varphi(s)\,\varphi'(s)\,\mu'(z)$$

или на основаніи (3)

$$\mu(z+2) = \varphi(s)\,\varphi'(z).$$

Замѣтивъ, что

$$\mu(z+2) = \varphi\,[\varphi(s) - a]$$

мы получаемъ уравненіе (1).

§ 2. Указываемые Д. М. Синцовымъ частные случаи соотвѣтствуютъ: логариѳмическая спираль—рѣшенію

$$\mu(z) = k^z$$

уравненія

$$\mu'(z) = \frac{\log k}{k}\,\mu(z+1)$$

и циклоида—рѣшенію

$$\mu(z) = c.\sin\frac{\pi z}{2}$$

уравненія

$$\mu'(z) = \frac{\pi}{2}.\mu(z+1)$$

§ 3. Прежде чѣмъ заняться уравненіемъ (3), къ которому мы свели рѣшеніе поставленной задачи, мы укажемъ, что тѣмъ же самымъ пріемомъ можно преобразовать уравненія второй задачи Д. М. Синцова и даже въ обобщенномъ видѣ.

Опредѣлимъ $(n+1)$ кривыхъ, обладающихъ свойствомъ, что всякая $(k+1)$'ая кривая есть эволюта k'ой, а *первая—есть эволюта* $(n+1)$'*ой кривой*.

Очевидно, что задача сводится къ рѣшенію системы функціональныхъ уравненій

$$\varphi_0(s)\varphi_0{}'(s) = \varphi_1[\varphi_0(s) - a_0] \qquad (1)$$

$$\varphi_1(s)\varphi_1{}'(s) = \varphi_2[\varphi_1(s) - a_1] \qquad (2)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\varphi_n(s)\varphi_n'(s) = \varphi_0[\varphi_n(s) - a_n] \qquad (n+1)$$

гдѣ $K = \varphi_k(s)$ есть натуральное уравненіе k'ой кривой, а $a_k = \varphi_k(s_{0k})$ начальное значеніе радіуса кривизны k'ой кривой.

Введемъ вспомогательныя функціи.

$$\lambda_1(s) = \varphi_0(s).\varphi_0{}'(s) \qquad [1]$$

$$\lambda_2(s) = \varphi_0(s).\lambda_1{}'(s) \qquad [2]$$

$$\lambda_3(s) = \varphi_0(s).\lambda_2{}'(s) \qquad [3]$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\lambda_n(s) = \varphi_0(s).\lambda_{n-1}'(s) \qquad [n]$$

Тогда (1) приметъ видъ:

$$\lambda_1(s) = \varphi_1[\varphi_0(s) - a_0] \qquad (1)'$$

Возводимъ обѣ части этого уравненія въ квадратъ и дифференцируемъ по s:

$$\lambda_1(s)\lambda_1{}'(s) = \varphi_1[\varphi_0(s) - a_0].\varphi_1{}'[\varphi_0(s) - a_0].\varphi_0{}'(s).$$

Дѣлая во (2) подстановку

$$s \mid \varphi_0(s) - a$$

получаемъ, пользуясь (1) и [1]:

$$\varphi_1[\varphi_0(s)-a_0]=\varphi_1'[\varphi_0(s)-a_0]=\varphi_2\{\varphi_1[\varphi_0(s)-a_0]-a_1\}=\varphi_2[\lambda_1(s)-a_1]$$

или послѣ вставки въ предыдущее уравненіе:

$$\lambda_1(s)\,.\,\lambda_1'(s)=\varphi_2[\lambda_1(s)-a_1]\,\varphi_0'(s).$$

Сокращая на основаніи [1] на $\varphi_0'(s)$, мы находимъ

$$\lambda_2(s)=\varphi_2[\lambda_1(s)-a_1]. \tag{2)'}$$

Дѣйствуя такимъ образомъ далѣе, мы, очевидно, шагъ за шагомъ получимъ:

$$\lambda_3(s)=\varphi_3[\lambda_2(s)-a_2] \tag{3)'}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\lambda_n(s)=\varphi_n[\lambda_{n-1}(s)-a_{n-1}] \tag{n)'}$$

Уравненіе $(n+1)$ приметъ такой видъ

$$\varphi_0(s)\lambda_n'(s)=\varphi_0[\lambda_n(s)-a_n]. \tag{n+1)'}$$

Замѣчу кстати, что это уравненіе содержитъ только φ_0, его производныя и итераціи.

Но для рѣшенія удобнѣе не производить исключеніе λ_k, а разсматривать систему [1], [2],...[n] и $(n+1)'$, очевидно, эквивалентную системѣ (1), (2),...$(n+1)$.

Теперь положимъ такъ же, какъ и въ первой задачѣ:

$$s=\mu(z)+a_n; \qquad \begin{aligned} \lambda_n(s)&=\mu(z+1)\\ \varphi_0(s)&=\mu_1(z)\\ \lambda_1(s)&=\mu_2(z)\\ &\dots\dots\\ \lambda_{n-1}(s)&=\mu_n(z)\end{aligned}$$

Очевидно,

$$\varphi_0'(s)=\frac{\mu_1'(z)}{\mu'(z)}$$

$$\lambda_1'(s)=\frac{\mu_2'(z)}{\mu'(z)}$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\lambda_{n-1}(s)=\frac{\mu_n'(z)}{\mu'(z)}$$

$$\lambda_n'(s)=\frac{\mu'(z+1)}{\mu'(z)}$$

и, наконецъ,

$$\mu_1(z+1)=\varphi_0[\mu(z+1)-a_n]=\varphi_0[\lambda_n(s)-a_n]$$

Тогда уравненія [1], [2],...[n] и $(n+1)'$ принимаютъ слѣдующій простой видъ:

$$\mu_2(z)=\mu_1(z)\cdot\frac{\mu_1'(z)}{\mu'(z)} \qquad [1]'$$

$$\mu_3(z)=\mu_1(z)\cdot\frac{\mu_2'(z)}{\mu'(z)} \qquad [2]'$$

. . . .

$$\mu_{n-1}(z)=\mu_1(z)\cdot\frac{\mu_{n-1}'(z)}{\mu'(z)} \qquad [n-1]'$$

$$\mu(z+1)=\mu_1(z)\cdot\frac{\mu_n'(z)}{\mu'(z)} \qquad [n]'$$

$$\mu_1(z)\frac{\mu'(z+1)}{\mu'(z)}=\mu_1(z+1) \qquad (n+1)'$$

Изъ послѣдняго уравненія мы находимъ

$$\frac{\mu_1(z)}{\mu'(z)}=\frac{\mu_1(z+1)}{\mu'(z+1)}=\sigma$$

гдѣ σ—періодическая функція съ періодомъ, равнымъ единицѣ.

Теперь получаемъ окончательную систему уравненій:

$$\mu_1(z)=\sigma\mu'(z) \qquad \{0\}$$
$$\mu_2(z)=\sigma\mu_1'(z) \qquad \{1\}$$
$$\mu_3(z)=\sigma\mu_2'(z) \qquad \{2\}$$

. . . .

$$\mu_n(z)=\sigma\mu_{n-1}'(z) \qquad \{n-1\}$$
$$\mu(z+1)=\sigma\mu_n'(z) \qquad \{n\}$$

Если мы исключимъ μ_k изъ этихъ уравненій—что сдѣлать очень не трудно,—то получимъ уравненіе для одного $\mu(z)$, аналогичное уравненію (3) въ простѣйшей задачѣ.

Если мы найдемъ рѣшеніе этого уравненія, то уравненіе первой кривой будетъ:

$$s=\mu(z)+a_n$$
$$R=\sigma\mu'(z)$$

§ 4. Если мы будемъ разсматривать случай $\sigma=\text{const.}$, то, какъ извѣстно, перемѣнное z имѣетъ чрезвычайно простой геометрическій смыслъ.

Вычислимъ уголъ θ, который дѣлаетъ касательная къ первой кривой въ точкѣ $z(s, R)$ съ направленіемъ ея въ точкѣ $z=0$;

$$\theta = \int_{s_0}^{s} \frac{ds}{R} = \int_{0}^{z} \frac{\mu'(z)\,dz}{\sigma\mu'(z)} = \frac{z}{\sigma}$$

т. е. $z = \sigma\theta$.

Что касается уравненій $\{0\}, \{1\}, \ldots \{n\}$, то въ случаѣ $\sigma = \text{const.}$ они имѣютъ видъ:

$$\begin{aligned} &\mu_1(z) = \sigma\mu'(v) \\ &\mu_2(z) = \sigma^2\mu''(z) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\mu_n(z) = \sigma^n\mu^{(n)}(z) \\ &\mu(z+1) = \sigma^{n+1}\mu^{(n+1)}(z) \end{aligned}$$

Послѣднее уравненіе въ частномъ случаѣ $n=0$ даетъ уравненіе (3) § 1-го.

II. Доказательство существованія.

§ 5. Обратимся къ уравненію

$$\mu'(z) = \sigma\mu(z+1), \tag{1}$$

гдѣ мы будемъ предполагать σ дѣйствительнымъ и меньшимъ единицы по абсолютной величинѣ [1]).

Задачу—рѣшить уравненіе (1)—мы понимаемъ слѣдующимъ образомъ: найти наиболѣе общій видъ функціи $\mu(z)$, удовлетворяющей этому уравненію и указать всѣ ея особенности.

Такая постановка задачи, очевидно, объясняется ея геометрическимъ происхожденіемъ.

Это уравненіе принадлежитъ къ т. н. однороднымъ, такъ какъ удовлетворяется функціей

$$\mu(z) = c_1\mu_1(z) + c_2\mu_2(z)$$

если μ_1 и μ_2—рѣшенія того-же уравненія, а c_1 и c_2—конечныя постоянныя.

Легко видѣть, что рѣшеніями его не могутъ быть ни многочлены, ни мероморфныя функціи.

Въ самомъ дѣлѣ, уравненіе (1) не можетъ удовлетворяться ни какимъ многочленомъ, такъ какъ послѣ подстановки степень лѣвой части будетъ на единицу меньше степени правой.

---

[1]) Cp. *F. Schürer*. Üb. die Funktional-Differentialgleichung $f'(x+1) = af(x)$ (Leipziger Berichte Bd. 64).

Точно такъ же, мероморфное рѣшеніе, имѣющее полюсъ k'-го порядка въ точкѣ $z=u$, должно имѣть простой полюсъ въ точкѣ $z=u-k+1$, что невозможно, такъ какъ это влечетъ за собой необходимость имѣть въ точкѣ $z=u-k$ логариѳмическую особенность.

Вообще говоря, если $\mu(z)$ имѣетъ въ точкѣ $z=u$ особенность, вблизи которой она можетъ быть представлена разложеніемъ

$$\mu(z)=\frac{A_1}{(z-u)^{\alpha_1}}+\frac{A_2}{(z-u)^{\alpha_2}}+\dots$$

$$\alpha_1>\alpha_2>\dots$$

то въ точкѣ

$$z=u+k$$

гдѣ k есть цѣлое число, она будетъ имѣть особенность:

$$\mu(z)=\frac{A_1'}{(z-u-k)^{\alpha_1+k}}+\frac{A_2'}{(z-u-k)^{\alpha_2+k}}+\dots$$

Очевидно также, что не существуетъ однозначныхъ рѣшеній, имѣющихъ на конечномъ разстояніи существенно-особенныя точки (т. н. quasi-цѣлыя и quasi-мероморфныя функціи). Въ этомъ легко убѣдиться, исходя изъ разложенія такой функціи въ рядъ Laurent'а вблизи одной изъ ея особенныхъ точекъ.

Итакъ, если мы ограничимся функціями, имѣющими только изолированныя особенности, то единственно-возможными *однозначными рѣшеніями уравненія* (1) *являются цѣлыя трансцендентныя.*

§ 6. Возьмемъ функцію $f(z)$, на которую наложимъ слѣдующія ограниченія: она должна быть аналитической во всякой конечной области, заключенной между двумя прямыми $y=\pm l$ и, кромѣ того, въ безконечной области между этими прямыми должны имѣть мѣсто неравенства

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\left|\sqrt[k]{f(z+k)}\right|\leqq a \tag{2}$$

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\left|\sqrt[k]{f^{(k)}(z-k)}\right|\leqq b<\sigma \tag{3}$$

если z находится въ нѣкоторой конечной области S_0, заключающей начало координатъ. Допустимъ еще, что наименьшая изъ окружностей, радіусы которыхъ равны l и $\frac{1}{a\sigma}$, цѣликомъ находится внутри S_0.

Разсмотримъ два уравненія

$$\mu_1'(z)-\sigma\mu_1(z+1)=-\sigma f(z+1) \tag{4}$$

$$\mu_2'(z)-\sigma u_2(z+1)=\sigma f(z+1) \tag{5}$$

Если намъ удастся показать, что этимъ уравненіямъ удовлетворяютъ функціи μ_1 и μ_2, аналитическія въ областяхъ S_1 и S_2, имѣющихъ общую часть S', то, очевидно, уравненіе (1) имѣетъ рѣшеніе

$$\mu(z) = \mu_1(z) + \mu_2(z)$$

аналитическое въ области S, общей областямъ S_0 и S'.

Рядъ

$$\mu_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} Q_k(z) \tag{6}$$

гдѣ Q_k связаны между собой соотношеніями:

$$Q_k'(z) = \sigma Q_{k+1}(z+1) \tag{7}$$

$$Q_0(z) = f(z) \tag{8}$$

очевидно удовлетворяетъ формально уравненію (4):

$$\mu_1'(z) = \sigma \sum_{k=0}^{\infty} Q_{k+1}(z+1) = \sigma\mu_1(z+1) - \sigma f(z+1);$$

значитъ, если-бы онъ сходился абсолютно и равномѣрно въ нѣкоторой области, то онъ представилъ бы рѣшеніе уравненія (4), аналитическое въ этой области.

Изъ уравненія (7) мы находимъ:

$$Q_k(z) = \frac{1}{\sigma^k} f^{(k)}(z-k) \tag{9}$$

и, значитъ, въ рядѣ

$$\sum_{k=0}^{\infty} | Q_k(z) |$$

только конечное число членовъ не будетъ удовлетворять неравенству

$$| Q_k(z) |^{\frac{1}{k}} \leqq \frac{b}{|\sigma|} + \varepsilon < 1.$$

какъ бы мало ни было ε.

Слѣдовательно $\mu_1(z)$ будетъ аналитической функціей во всякой конечной области, лежащей въ разсматриваемой полосѣ.

Подобнымъ-же образомъ рядъ

$$\mu_2(z) = \sum_{k=1}^{\infty} P_k(z) \tag{10}$$

гдѣ $P_k(z)$ связаны уравненіями

$$P_k(z) = \sigma \int_1^{z+1} P_{k-1}(z)\, dz \tag{11}$$

$$P_1(z) = \sigma \int_1^{z+1} f(z)\, dz \tag{12}$$

формально удовлетворяетъ уравненію (5):

$$\mu_2{}'(z) = \sigma \sum_{k=2}^{\infty} P_{k-1}(z+1) + \sigma P_1{}'(z) = \sigma\mu_2(z+1) + \sigma f(z+1).$$

Абсолютную и равномѣрную сходимость его въ нѣкоторой области легко показать, пользуясь неравенствомъ (2).

На основаніи (11):

$$|\, P_k(z) \,| \leqq |\, \sigma \,| \max |\, P_{k-1}(z) \,|_1^{z+1} \,|\, z \,| \leqq |\, \sigma z \,|^k \max |\, f(z+k) \,|$$

и

$$\overline{\lim}\, |\, P_k(z) \,|^{\frac{1}{k}} \leqq |\, \sigma z \,|\, \overline{\lim} \max |\, f(z+k) \,|^{\frac{1}{k}}$$

Въ силу непрерывности $f(z+k)$ для конечныхъ k

$$\overline{\lim} \max |\, f(z+k) |^{\frac{1}{k}} = \overline{\lim}\, |\, f(z+k) \,|^{\frac{1}{k}} \leqq a$$

Итакъ рядъ (10) сходится абсолютно и равномѣрно внутри круга

$$|\, z \,| < r \tag{13}$$

гдѣ r есть меньшее изъ двухъ чиселъ l и $\dfrac{1}{a\,|\,\sigma\,|}$.

Итакъ $\mu(z) = \mu_1(z) + \mu_2(z)$ будетъ рѣшеніемъ уравненія (1) и будетъ голоморфной функціей внутри круга, радіусъ котораго равенъ меньшему изъ чиселъ l и $\dfrac{1}{a\,|\,\sigma\,|}$ [1]).

Продолжая при помощи уравненія (1) функціи $\mu(z)$, мы находимъ, что она будетъ голоморфна во всей полосѣ шириной въ $2h_1$, гдѣ $h_1 < l,\ \dfrac{1}{a\sigma}$.

---

[1]) Пріемъ, при помощи котораго мы доказали существованіе рѣшенія уравненія (1), есть въ сущности способъ послѣдовательныхъ приближеній; какъ извѣстно, онъ даетъ прекрасные результаты при доказательствѣ существованія рѣшеній дифференціальныхъ, интегральныхъ и нѣкоторыхъ другихъ функціональныхъ уравненій.

§ 7. Разсмотримъ два частныхъ случая: во первыхъ $f(z) = 1$, во-вторыхъ $f(z) = (z - h)^{-\alpha}$.

Въ первомъ случаѣ $a = 1$; $b = 0$, l можетъ-быть сколь угодно велико и, слѣдовательно, мы получимъ рѣшеніе уравненія (1):

$$\mu(z) = 1 + \sigma\int_1^{z+1} dz + \sigma^2\int_1^{z+1}\int_1^{z+1} dz^2 + \sigma^3\int_1^{z+1}\int_1^{z+1}\int_1^{z+1} dz^3 + \ldots \qquad (14)$$

причемъ рядъ (14), какъ это слѣдуетъ изъ неравенства (13), сходится внутри круга $|z| = \frac{1}{\sigma} > 1$.

Докажемъ, что опредѣленная рядомъ (14) $\mu(z)$ *есть цѣлая трансцендентная функція.*

Обозначимъ $v_k(z)$ коэффиціентъ при σ^k, такъ что

$$\mu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma^k v_k(z) \qquad (14^{\text{bis}})$$

Очевидно, что $v_k(z)$ — многочлены съ положительными коэффиціентами и поэтому, если рядъ этотъ сходится въ нѣкоторой точкѣ ϱ, лежащей на положительной части дѣйствительной оси, то онъ сходится внутри всего круга радіуса $|x| = \varrho$.

Такимъ образомъ для того. чтобы $\mu(z)$ была цѣлой трансцендентной, достаточно, чтобы рядъ (14) равномѣрно сходился на всей положительной части оси x'овъ за исключеніемъ, быть можетъ, безконечно-удаленной точки. Возьмемъ внутри круга радіуса $\frac{1}{\sigma}$ точку z; опишемъ вокругъ нея окружность радіусомъ $r < \frac{1}{\sigma} - \varrho$; какъ извѣстно, если M_k есть maximum $|v_k(z)|$ на послѣдней окружности, то

$$|v_k'(z)| < \frac{M_k}{r}.$$

Такъ какъ $v_k(z)$ есть многочленъ съ положительными коэффиціентами, то

$$M_k < v_k(\varrho + r)$$

т. е. рядъ

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sigma^{k+1} v_{k+1}(z)$$

сходится абсолютно и равномѣрно внутри круга радіуса

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sigma}\right)$$

и, слѣдовательно, внутри этого круга представлетъ $v'(z)$.

Возьмемъ точку

$$z=\varrho'=\varrho+1>0$$

и пусть

$$\varrho<\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sigma}\right)$$

Такъ какъ

$$v_k(\varrho')=v'_{k+1}(\varrho)$$

то всѣ члены ряда для $v(\varrho')$ будутъ пропорціональны членамъ ряда для $v'(\varrho)$ и, значитъ, рядъ (14) сходится и для $z=\varrho'$. Равномѣрность сходимости очевидна. Разсуждая такимъ образомъ, мы докажемъ сходимость ряда (14) и для $\varrho''=\varrho'+1$ и т. д. и значитъ наше утвержденіе относительно $\mu(z)$ доказано.

III. Многозначныя рѣшенія.

§ 8. Обратимся теперь къ случаю

$$f(z)=(z-h)^{-\alpha}$$

гдѣ h—произвольный параметръ, а α—правильная положительная дробь [1]).

Тогда

$$Q_k(z)=\frac{(-1)^k\sigma^{-k}}{\Gamma(\alpha)}\cdot\frac{\Gamma(\alpha+k)}{(z-h-k)^{\alpha+k}} \tag{15}$$

и

$$P_k(z)=\sigma^k\int_1^{z+1}\dots\int_1^{z+1}(z-h)^{-\alpha}\,dz^k \tag{16}$$

Выше мы доказали, что ряды:

$$\mu_1(z)=\sum_{k=0}^{\infty}Q_k(z) \tag{17}$$

и

$$\mu_2(z)=\sum_{k=1}^{\infty}P_k(z) \tag{18}$$

---

[1]) Какъ увидимъ изъ хода дальнѣйшихъ разсужденій, ограниченіе $|\alpha|<1$ несущественно и введено только для того, чтобы отдѣлить конечную часть функціи $\mu(z)$ отъ части ея, которая обращается въ нѣкоторыхъ точкахъ въ безконечность.

сходятся абсолютно и равномѣрно внутри нѣкотораго круга конечнаго радіуса и

$$\mu(z) = \mu_1(z) + \mu_2(z)$$

есть рѣшеніе нашего уравненія, аналитическое внутри упомянутаго круга.

Докажемъ теперь, что *ряды 17 и 18 сходятся абсолютно и равномѣрно: рядъ 18—на всей плоскости, а рядъ 17—на всей плоскости за исключеніемъ, очевидно, точекъ* $z = h + k$, гдѣ k цѣлое число. То-есть, другими словами $\mu_1(z)$ есть аналитическая функція на всей плоскости, кромѣ искусственнаго сѣченія, которое проходитъ черезъ точки $z = h + k$, а $\mu_2(z)$—аналитическая функція также на всей плоскости за исключеніемъ сѣченія, проходящаго черезъ точки $z = h - k$.

Рядъ для функціи $\mu_1(z)$ обладаетъ очевиднымъ свойствомъ: если онъ сходится абсолютно и равномѣрно въ точкѣ $z = x + yi$, то тоже обстоятельство будетъ имѣть мѣсто во всякой другой точкѣ $z' = x' + y'i$ при условіи $x' < x$.

Въ самомъ дѣлѣ, если $x' < x$, то только для конечнаго числа членовъ ряда 17 не будетъ соблюдаться неравенство

$$|z' - h - k| > |z - h - k|$$

т. е., начиная съ нѣкотораго k, будетъ

$$|Q_k(z')| < |Q_k(z)|$$

и, слѣдовательно, рядъ 17 будетъ сходиться абсолютно и равномѣрно слѣва вертикальной прямой, касательной къ первоначальной области сходимости этого ряда.

Кромѣ того изъ уравненія (4) мы имѣемъ:

$$\mu_1(z+1) = \frac{\mu_1'(z)}{\sigma} + (z - h + 1)^{-\alpha} \tag{4^{\text{bis}}}$$

пользуясь этимъ свойствомъ функціи $\mu_1(z)$, мы можемъ продолжить эту функцію на всю часть плоскости справа упомянутой выше касательной; исключеніемъ будетъ *полу-прямая*, идущая вправо отъ точки $z = h$, параллельно оси x'овъ.

Если-бы пожелали, какъ это намъ понадобится ниже, замѣнить полупрямую произвольной кривой, проходящей черезъ точки $z = h + k$, то эту замѣну легко выполнить.

Въ самомъ дѣлѣ на прямой, на которой лежатъ всѣ особенныя точки $\mu_1(z)$, функція $\mu_1(z)$—дѣйствительна и, кромѣ того, равномѣрно стремится къ своимъ значеніямъ на этой прямой, если z будетъ приближаться къ любой точкѣ между $h+k+\varepsilon$ и $h+k+1-\varepsilon$.

Такимъ образомъ мы можемъ воспользоваться методомъ «зеркальнаго отображенія» («Spiegelung» Schwarz'а) [1]) и, деформируя сѣченія, замѣнить нашу полупрямую любой не имѣющей двойныхъ точекъ кривой, проходящей черезъ особенныя точки функціи $\mu_1(z)$,

§ 9. Прежде, чѣмъ перейти къ изслѣдованію сходимости ряда для $\mu_2(z)$, мы докажемъ одну простую лемму относительно многочленовъ съ положительными коэффиціентами.

Если намъ данъ многочленъ съ положительными коэффиціентами

$$F(z)=\sum_{m=0}^{n} c_m z^m$$

то всегда можно выбрать такое z', чтобы

$$|F(z')|>\sum_{m=0}^{n}|c_m z^m|$$

Пусть

$$\varrho=|z|$$

тогда

$$|F(\varrho)|=\sum_{m=0}^{n} c_m\,\varrho^m=\sum_{m=0}^{n}|c_m\,z^m|$$

Но модуль аналитической функціи имѣетъ максимумъ всегда на контурѣ, а не внутри его; значитъ на любой замкнутой кривой, огибающей точку $z=\varrho$, существуетъ такая точка z', что

$$|F(z')|>F(\varrho)$$

и

$$|F(z')|>\sum_{m=0}^{n}|c_m\,z^m| \tag{19}$$

ч. и т. д.

За точку z' можно взять точку, лежащую на оси x'овъ, правѣе точки $z=\varrho$; тогда, очевидно, неравенство (19) будетъ имѣть мѣсто для *всякаго* многочлена.

---

[1]) См. напр. *G. Darboux.* Leçons s. la th. des surfaces, t. I p. 174 et ss.

§ 10. Преобразуемъ теперь выраженіе (16) для $P_k(z)$, введя вмѣсто комплексныхъ перемѣнныхъ интегрированія—дѣйствительныя, а именно положимъ:

$$z_1 = 1 + t_1 z_2$$
$$z_2 = 1 + t_2 z_3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$z_k = 1 + t_k z$$

тогда

$$P_k(z) = \sigma^k \int_0^1\int_0^1 \ldots \int_0^1 z_2 z_3 \ldots z_k z\,(z_1 - h)^{-\alpha} dt_1 dt_2 \ldots dt_k \tag{20}$$

при этомъ, очевидно, z_1, $z_2, \ldots\ z_k$ будутъ линейными функціями z, съ положительными внутри предѣловъ интегрированія коэффиціентами и z_1 принимаетъ всѣ возможныя значенія, находящіяся внутри параллелограмма π_k съ вершинами: 1, $1+z$, $k+z$ и k.

Итакъ

$$P_k(z) = \sigma^k \int_0^1 \ldots \int_0^1 F_k(z)(z_1 - h)^{-\alpha} dt_1 \ldots dt_k$$

гдѣ $F_k(z)$—многочленъ относительно z съ положительными коэффиціентами; пусть

$$F_k(z) = \sum_{m=1}^{k} c_m(k)\,.\,z^m$$

тогда $P_k(z)$ представится въ видѣ суммы интеграловъ вида:

$$\sigma^k z^m \int_0^1 \ldots \int_0^1 c_m(k)(z_1 - h)^{-\alpha} dt_1 \ldots dt_k$$

Прилагая къ каждому изъ слагаемыхъ k разъ теорему о средней, обобщенную Darboux [1]), получимъ:

$$\sigma^k z^m \int_0^1 \ldots \int_0^1 c_m(k)(z_1 - h)^{-\alpha} dt_1 \ldots dt_k = \sigma^k z^m\, \theta_m (\bar{z} - h)^{-\alpha} \int_0^1 \ldots \int_0^1 c_m(k) dt_1 \ldots dt_k$$

гдѣ $|\,\theta_m\,| < 1$ и $\bar{z}$ находится внутри параллелограмма π_k; если мы обозначимъ ζ точку его ближайшую къ началу координатъ и, очевидно, одну

---

[1]) Сравн. *U. Dini*. Sugli sviluppi in serie per la rappresentazione analitica etc. pp. 68—70.

и туже для всѣхъ параллелограммовъ, то получимъ

$$M_k = |(\zeta - h)^{-\alpha}|.$$

Итакъ

$$|P_k(z)| < |\sigma|^k |(\zeta - h)|^{-\alpha} \sum_{m=0}^{k} \varrho^m \int_0^1 \ldots \int_0^1 c_m(k)\, dt_1 \ldots dt_k$$

или мѣняя порядокъ суммированія и интегрированія:

$$|P_k(z)| < |\sigma|^k |(\zeta - h)|^{-\alpha} \int_0^1 \ldots \int_0^1 F_k(\varrho) dt_1 \ldots dt_k.$$

Но, если мы обозначимъ черезъ $v_k(z)$, коэффиціентъ при σ^k въ разложеніи найденнаго нами выше цѣлаго трансцендентнаго рѣшенія [см. 14], то замѣтимъ, во-первыхъ, что $v_k(z)$, есть многочленъ съ положительными коэффиціентами и, во-вторыхъ, что

$$v_k(z) = \int_0^1 \ldots \int_0^1 F_k(z) dt_1 \ldots dt_k$$

итакъ

$$|P^k(z)| < |\sigma|^k |(\zeta - h)^{-\alpha}| v_k(\varrho).$$

Но по доказанной леммѣ можно выбрать такое независящее отъ k число z', чтобы было

$$v_k(\varrho) < |v_k(z')|.$$

Слѣдовательно

$$|P_k(z)| < |(\zeta - h)^{-\alpha}| \; |\sigma|^k \, |v_k(z')| \tag{21}$$

т. е. каждый членъ разложенія 18 по абсолютной величинѣ меньше умноженнаго на нѣкоторую конечную величину соотвѣтствующаго члена ряда, сходящагося абсолютно и равномѣрно для всякаго z.

Итакъ абсолютная и равномѣрная сходимость ряда 18 на всей плоскости доказана.

Функція $\mu_2(z)$ будетъ, значитъ, аналитической во всякой односвязной области, не заключающей точекъ $z = h - k$; $k = 1, 2, \ldots$

Такую область мы образуемъ, проведя произвольную кривую подобнымъ-же образомъ, какъ и для $\mu_1(z)$.

Итакъ, можно считать доказаннымъ существованіе рѣшенія нашего функціональнаго уравненія, единственными особенностями котораго на конечной плоскости будутъ точки $z = h \pm k$.

§ 11. На основаніи однородности нашего уравненія мы можемъ утверждать, что существуетъ рѣшеніе нашего уравненія $\mu(z)$, соотвѣтствующее функціи

$$f(z) = \sum_{n=1}^{m} A_n (z - h_n)^{-\alpha_n}; \tag{22}$$

рѣшеніе это имѣетъ единственными особенностями точки

$$z = h_n \pm k\,,\ k = 0,\ 1,\ 2, \ldots$$

и выражается рядами, аналогичными рядамъ (17) и (18) и представляющими функцію $\mu(z)$ на всей плоскости.

Въ частномъ случаѣ, если α_n ограничены сверху, то наше утвержденіе остается въ силѣ и при $m = \infty$, если только рядъ (22)—сходится (напр., если онъ представляетъ каноническое разложеніе мероморфной функціи $f(z)$ въ рядъ Mittag-Leffler'a).

Тогда (при помощи интеграла Cauchy это легко доказать) рѣшеніемъ нашего уравненія будетъ

$$\mu(z) = \int_c \mu_0 (z - \alpha) f(\alpha)\, d\alpha$$

гдѣ μ_0—частное рѣшеніе, соотв. $\alpha = 1$ и контуръ C не заключаетъ внутри полюсовъ $f(\alpha)$.

IV. Однозначныя рѣшенія.

§ 12. Пусть намъ дана функція $\varphi(z)$ голоморфная внутри нѣкотораго контура C, внутри котораго находится по крайней мѣрѣ одинъ корень уравненія

$$1 - ze^{-\sigma z} = 0; \tag{1}$$

допустимъ, что начало координатъ находится внѣ этого контура.

Разсмотримъ цѣлую трансцендентную функцію

$$v(z) = \int_c \frac{\varphi(\alpha)\, \alpha^z}{1 - \alpha e^{-\alpha\sigma}}\, d\alpha \tag{2}$$

Какъ легко видѣть

$$v'(z) - \sigma v(z+1) = \int_c \varphi(\alpha)\, \alpha^z\, \frac{\log \alpha - \sigma . \alpha}{1 - \alpha e^{-\alpha\sigma}}\, d\alpha$$

Подъинтегральная функція голоморфна во всей области, ограниченной контуромъ C.

Это очевидно если $\alpha \neq \alpha_k$, гдѣ α_k—корень ур. (1); если же $\alpha = \alpha_k$, то

$$1 - \alpha e^{-\alpha\sigma} = - e^{-\alpha_k\sigma}(1 - \alpha_k\sigma)(\alpha - \alpha_k)(1 + \varepsilon)$$
$$\log\alpha - \alpha\sigma = - \alpha_k^{-1}(1 - \alpha_k\sigma)(\alpha - \alpha_k)(1 + \eta)$$

гдѣ ε и η голоморфныя функціи α вблизи α_k и обращаются въ ноль, если $\alpha = \alpha_k$.

Итакъ
$$v'(z) - \sigma v(z+1) = 0$$

и, слѣдовательно $v(z)$, *представляемая интеграломъ (2), есть цѣлое трансцендентное рѣшеніе нашего уравненія.*

§ 13. Уравненіе
$$1 - ze^{-\sigma z} = 0 \tag{3}$$

играетъ большую роль при нахожденіи частныхъ цѣлыхъ рѣшеній уравненія
$$\mu'(z) = \sigma\mu(z+1) \tag{4}$$

Какъ въ этомъ легко убѣдиться, если $z = \alpha_k$ будетъ корень этого уравненія, то, вообще говоря,
$$v(z) = e^{\alpha_k\sigma z} \tag{5}$$

будетъ рѣшеніемъ уравненія (4).

По аналогіи съ линейными дифференціальными и разностными уравненіями мы назовемъ это уравненіе *характеристическимъ* уравненіемъ.

Въ другомъ сообщеніи, имѣющемъ появиться на страницахъ этого журнала, я доказываю, что, вообще говоря, т. е. если $\sigma \neq e^{-1}$, корни уравненія (3) всѣ различны и даю асимптотическое выраженіе α_k въ зависимости отъ ихъ индекса k. Въ случаѣ, если $\sigma = e^{-1}$, кромѣ экспоненціальныхъ рѣшеній (5), уравненію (4) удовлетворяетъ
$$v(z) = ze^{z} \tag{6}$$

§ 14. Въ заключеніе я позволю себѣ указать на два частныхъ рѣшенія нашего уравненія, особенно интересныхъ съ геометрической стороны; это рѣшеніе (6) съ одной асимптотической точкой и съ одной точкой возврата и—рѣшеніе съ нѣсколькими безконечными вѣтвями, имѣющими асимптоты, которое мы получимъ, полагая $\alpha = \frac{1}{3}$ въ формулахъ (15) и (16) въ § 8. Выбирая σ соотвѣтствующимъ образомъ, можно достигнуть того, чтобы число безконечныхъ вѣтвей кривой, соотвѣтствующей рѣшенію $\mu(z)$ было конечно или безконечно.

ПРОТОКОЛЫ

засѣданій Харьковскаго Математическаго Общества.

Засѣданіе 18 Ноября 1911 г.

Присутствовали: Ц. К. Руссьянъ, А. П. Грузинцевъ, Г. А. Грузинцевъ, М. Н. Лагутинскій, С. Н. Бернштейнъ, А. П. Пшеборскій, Д. А. Рожанскій, Н. Е. Подтягинъ, С. М. Семилѣтовъ, Б. И. Кудревичъ.

Предсѣдательствовалъ: Ц. К. Руссьянъ.

1) *С. Н. Бернштейнъ* сдѣлалъ сообщеніе: а) «О суммированіи вездѣ расходящихся рядовъ Тэйлора». Замѣчанія были сдѣланы А. П. Пшеборскимъ, Г. А. Грузинцевымъ и А. П. Грузинцевымъ и б) «О суммированіи расходящихся степенныхъ рядовъ при помощи нормальныхъ рядовъ». Замѣчанія сдѣланы А. П. Пшеборскимъ, Г. А. Грузинцевымъ и М. Н. Лагутинскимъ.

2) Г. предсѣдательствующій сообщилъ о пріобрѣтенныхъ и полученныхъ книгахъ и изданіяхъ

Засѣданіе 17 Февраля 1912 г.

Присутствовали: Д. М. Синцовъ, С. Н. Бернштейнъ, М. Н. Лагутинскій, Г. А. Грузинцевъ, Н. П. Бѣляевъ, А. П. Пшеборскій, И. С. Чернушенко, Б. И. Кудревичъ, С. М. Семилѣтовъ.

Предсѣдательствовалъ Д. М. Синцовъ.

1) Г. предсѣдатель сдѣлалъ докладъ о полученныхъ книгахъ.

2) Г. предсѣдатель доложилъ о состояніи средствъ Общества.

3) *С. Н. Бернштейнъ*. «О наилучшемъ приближеніи $|x|$ при помощи многочленовъ данной степени». Замѣчанія были сдѣланы А. П. Пшеборскимъ, Г. А. Грузинцевымъ, М. Н. Лагутинскимъ.

4) *М. Н. Лагутинскій* сдѣлалъ сообщеніе: «Объ интегрированіи дифференціальныхъ уравненій». Замѣчанія были сдѣланы Д. М. Синцовымъ и Г. А. Грузинцевымъ.

5) Въ члены Общества избранъ И С. Чернушенко, преподаватель гимназіи Домбровской.

Засѣданіе 1 Марта 1912 г.

Присутствовали: Д. М. Синцовъ, А. П. Грузинцевъ, Д. А. Рожанскій, М. Н. Лагутинскій, П. М. Ерохинъ, В. И. Коврайскій, М. И. Сахаровъ, Н. Е. Подтягинъ, Ч. В. Речинскій, С. Н. Бернштейнъ, А. П. Пшеборскій, П. С. Эренфестъ, Г. А. Грузинцевъ и С. М. Семилѣтовъ.

Предсѣдательствовалъ Д. М. Синцовъ.

1) Предсѣдатель предложилъ въ члены Общества П. С. Эренфеста, который избранъ единогласно par acclamation.

2) *П. С. Эренфестъ* сдѣлалъ сообщеніе «Статистическія основанія теоріи излученія».

Годичное засѣданіе 7 Октября 1912 г.

Присутствовали: Д. М. Синцовъ, А. П. Грузинцевъ, Г. А. Грузинцевъ, Н. Н. Евдокимовъ, В. Х. Даватцъ, М. Н. Марчевскій, В. М. Фесенко, Н. П. Бѣляевъ, С. Н. Бернштейнъ, М. И. Сахаровъ, А. П. Пшеборскій, Ч. В. Речинскій и М. Н. Лагутинскій.

Предсѣдательствовалъ Д. М. Синцовъ.

1) По открытіи засѣданія предсѣдатель послѣ краткой характеристики научной дѣятельности почетнаго члена Общества академика H. Poincaré и членовъ-корреспондентовъ проф. Arzelà и И. Л. Пташицкаго и предложилъ почтить ихъ память вставаніемъ.

2) А. П. Пшеборскій напомнилъ о смерти одного изъ старѣйшихъ русскихъ математиковъ проф. М. Ю. Ващенко-Захарченко и предложилъ почтить память его вставаніемъ.

3) Доложенъ и утвержденъ отчетъ о дѣятельности и состояніи суммъ Общества за 191¹/₂ академ. годъ.

4) Г. предсѣдатель сдѣлалъ нѣкоторыя дополненія къ отчету относительно положенія дѣлъ съ изданіями Общества и о состояніи средствъ Общества на ближайшее время. Въ связи съ послѣднимъ вопросомъ выяснилась необходимость обратиться къ Физико-Математическому Факультету съ просьбой внести въ смѣту на будущій годъ 300 р. на вознагражденіе библіотекаря Общества (по примѣру И.-Ф. О-ва).

Г. Предсѣдатель сообщилъ о предположенномъ 2-мъ всероссійскомъ съѣздѣ преподавателей математики, организуемомъ Московскимъ Математическимъ Кружкомъ и о педагогической секціи XIII Съѣзда естествоиспытателей и врачей въ Тифлисѣ.

Отчетъ о дѣятельности Харьковскаго Математическаго Общества за 191$^1/_2$ акад. годъ.

Занятія Математическаго Общества въ отчетномъ году открылись Общимъ годичнымъ собраніемъ 5 Октября 1911 года.

Послѣ заслушанія и утвержденія отчета за истекшій годъ произведенъ выборъ членовъ распорядительнаго комитета на 191$^1/_2$ ак. годъ. Избраны: предсѣдателемъ проф. Д. М. Синцовъ, товарищами предсѣдателя проф. А. П. Грузинцевъ и проф. Ц. К. Руссьянъ и секретаремъ проф. А. П. Пшеборскій.

Въ теченіе истекшаго года кромѣ годичнаго засѣданія было устроено 7 засѣданій, изъ нихъ 4 научныхъ и 3 педагогическихъ. На этихъ засѣданіяхъ были сдѣланы слѣдующія доклады:

1) *С. Н. Бернштейнъ* «Обобщеніе теоремы Вейерштрасса».
2) » «Объ одномъ преобразованіи многочленовъ».
3) » «О наилучшемъ приближеніи $|x|$ при помощи многочленовъ данной степени».
4) » «О суммированіи вездѣ расходящихся рядовъ Тэйлора».
5) » «О суммированіи расходящихся рядовъ при помощи нормальныхъ рядовъ».
6) *Г. А. Грузинцевъ.* «Пропорціональныя величины въ геометріи».
7) *П. М. Ерохинъ.* «Примѣненіе пластинки $^1/_4$ волны къ опредѣленію оптическихъ постоянныхъ металловъ».
8) *Н. Н. Евдокимовъ.* «О наблюденіяхъ самопишущимъ микрометромъ».
9) *М. Н. Лагутинскій.* «Объ интегрированіи дифференціальныхъ уравненій».
10) *Д. М. Синцовъ* «О съѣздѣ преподавателей математики».
11) » «О Миланскомъ съѣздѣ международной коммиссіи по преподаванію математики».
12) *В. М. Фесенко.* «Объ алгебраическихъ вѣсахъ» (съ демонстраціей прибора).
13) *П. С. Эренфестъ.* «Статистическія основанія теоріи излученія».

Кромѣ того въ засѣданіяхъ Общества были сдѣланы доклады посторонпихъ лицъ:

14) Студентъ *П. А. Соловьевъ.* «Кривыя 3-го порядка, какъ сѣченія конуса 3-го порядка».
15) » » «Демонстрація моделей по аналитической геометріи».

16) *Я. А. Шохатъ.* «Замѣтка о гипергеометрическомъ рядѣ».
17) » «Объ интегралахъ общихъ нѣсколькимъ задачамъ механики» (долож. Д. М. Синцовымъ).

Въ настоящемъ году вышли въ свѣтъ т. XII № 6 и т. XIII № 1—3 «Сообщеній» Общества и кромѣ того №№ 2—3 серіи А и № 1 серіи Б «Харьковской Математической Библіотеки» Общество вмѣстѣ со всѣмъ научнымъ міромъ понесло въ истекшемъ году громадную утрату: умеръ почетный членъ Общества H. Poincaré и члены корреспонденты проф. Arzelà и проф. И. Л. Пташицкій. Въ число почетныхъ членовъ избранъ проф. R. Dedekind, въ число членовъ-корреспондентовъ проф. А. Н. Крыловъ. Въ дѣйствительные члены безъ избранія вступилъ Д. А. Рожанскій избраны П. С. Эренфестъ и И. С. Чернушенко. Такимъ образомъ къ концу истекшаго года Общество состояло изъ 24 почетныхъ, 85 дѣйствительныхъ членовъ и 35 членовъ корреспондентовъ.

По примѣру прошлыхъ лѣтъ «Сообщенія» Общества разсылались различнымъ ученымъ Обществамъ и научнымъ и просвѣтительнымъ учрежденіямъ въ большинствѣ случаевъ въ обмѣнъ на ихъ изданія. Библіотека Общества и главнымъ образомъ педагогическій ея отдѣлъ расширялся путемъ выписки книгъ и полученія таковыхъ въ даръ.

Къ настоящему отчету прилагается кассовой отчетъ секретаря Общества съ оправдатетьнымъ документами и приходо-расходной книжкой, а также и отчетъ относительно расходованія суммъ, принадлежащихъ Обществу и хранящихся въ кассѣ Университета.

Денежный отчетъ секретаря Харьковснаго Математическаго Общества за 191¹/₂ акад. годъ.

ПРИХОДЪ

1. Остатокъ отъ предыдущаго года	33 р.	71 к.
2. Поступило членскихъ взносовъ	45 »	— »
3. За отдѣльные оттиски статей, напеч. въ «Сообщеніяхъ» .	5 »	70 »
4. За продажу 5 экземпляровъ диссертаціи В. А. Стеклова .	11 »	11 »
5. Возвращено Д. М. Синцовымъ за «Книжную Лѣт.» 1910 г.	6 »	05 »
6. Возвращено А. П. Пшеборскимъ за отдѣльные оттиски, «Исторіи Общества»	2 »	50 »
Итого въ приходѣ . . .	104 р.	07 к.

РАСХОДЪ

1. На пріобрѣтеніе книгъ	34 р.	82 к.
2. Почтовые и таможенные расходы	31 »	95 »

3. За переплетъ книгъ	13 р. 95 к.
4. За чай на засѣданіяхъ	11 » 40 »
5. Телеграмма Обществу Физико-Химическихъ Наукъ . .	— » 40 »
Итого въ расходѣ	92 р. 52 к.

Такимъ образомъ къ началу настоящаго академическаго года въ кассѣ Общества остается . . . . 11 р. 55 к.

Отчетъ по средствамъ Общества, находящимся въ кассѣ Харьковскаго Университета.

ПРИХОДЪ

1. Остатокъ на 1 Октября 1911 года	1298 р. 83 к.
2. Пособіе изъ суммъ Минист. Народ. Просв. на 1912 г. .	900 » — »
3. Пособіе изъ спеціальныхъ средствъ Харьк. Универ. .	500 » — »
4. Ассигнованіе Физико-Математическаго Факультета на печатаніе диссертаціи С. Н. Бернштейна	399 » 66 »
Итого въ приходѣ	3098 р. 49 к.

РАСХОДЪ

1. Типографіи Зильберберга за печатаніе «Сообщеній» Общества: т. XII, № 6 и т. XIII № 1—3	843 р. 61 к.
2. Типографіи «Печатное Дѣло» за отдѣльные оттиски «Исторіи» Общества	8 » 75 »
3. За юбилейную брошюру А. П. Грузинцева	22 » — »
4. Печатаніе № 2—3 серіи А и № 1 серіи В «Харьков. Математической Библіотеки»	991 » 60 »
5. Расходы, связанные съ этимъ изданіемъ	75 » — »
6. Расходы по организаціи педагогической библіотеки Общества, выписка книгъ и журналовъ	511 » 92 »
7. Библіотекарю Общества за Октябрь, Ноябрь и Декабрь 1911 года	75 » — »
8. Служителю Общества за годъ	24 » — »
Итого въ расходѣ . . .	2551 р. 88 к.

Въ остаткѣ на 1-ое Октября 1912 г. . . . . 546 р. 61 к.

Засѣданіе 2 Ноября 1912 г.

На засѣданіи присутствуютъ: С. Н. Бернштейнъ, А. П. Грузинцевъ, Г. А. Грузинцевъ, В. Х. Даватцъ Р. Д. Пономаревъ, С. М. Семилѣтовъ и Д. М. Синцовъ.

Предсѣдательствуетъ Д. М. Синцовъ.

Протоколъ засѣданія за отсутствіемъ секретаря Общества ведетъ Р. Д. Пономаревъ.

1) Д. М. Синцовъ сообщаетъ, что имъ получено на имя Харьковскаго Математическаго Общества приглашеніе отъ Чешскаго Математическаго Общества въ Прагѣ на празднованіе 10 Ноября с. г. пятидесятилѣтія этого Общества и что имъ отправлено названному Обществу привѣтствіе.

2) *С. Н. Бернштейнъ* дѣлаетъ сообщеніе: «О наилучшемъ приближеніи аналитическихъ функцій посредствомъ многочленовъ».

Вопросы предлагаютъ докладчику Д. М. Синцовъ и Г А. Грузинцевъ.

3) *Г. А. Грузинцевъ* дѣлаетъ сообщеніе «Обобщеніе понятія угла въ Неевклидовой геометріи».

Вопросы предлагаютъ С. Н. Бернштейнъ, Д. М. Синцовъ, А. П. Грузинцевъ и В. Х. Даватцъ.

4) *В. Х. Даватцъ* читаетъ рефератъ: «О проблемѣ Waring'a». (Сообщеніе I).

5) Д. М. Синцовъ докладываетъ полученную статью *А. А. Фридмана* и *М. Петелина* «Объ одной гидродинамической задачѣ Bjerknes'a».

Замѣчанія дѣлаютъ С. Н. Бернштейнъ и Г. А. Грузинцевъ.

Засѣданіе 21 Ноября 1912 г.

Присутствовали: Д. М. Синцовъ, А. П. Грузинцевъ С. Н. Бернштейнъ, Д. А. Рожанскій, В. М. Фесенко, В. Х. Даватцъ и Н. П. Бѣляевъ.

Предсѣдательствовалъ Д. М. Синцовъ.

1. *В. Х. Даватцъ* сдѣлалъ докладъ: «Проблема Варинга» (окончаніе доклада, сдѣланнаго въ предыдущее засѣданіе).

Математическое общество.

(1879—1904 г.).

Харьковское математическое общество, двадцатипятилѣтіе котораго почти совпало со столѣтнимъ юбилеемъ Харьковскаго Университета, обязано своимъ возникновеніемъ главнымъ образомъ профессору Харьковскаго Университета, а впослѣдствіи академику, В. Г. Имшенецкому. По его иниціативѣ въ концѣ 70-хъ годовъ прошлаго столѣтія начали собираться по вечерамъ профессора и преподаватели математики Харьковскаго Университета для бесѣдъ и сообщенія результатовъ своихъ научныхъ изслѣдованій. Такимъ образомъ мало по малу возникло ядро будущаго математическаго общества, уставъ котораго, выработанный В. Г. Имшенецкимъ и проф. Д. М. Деларю, былъ утвержденъ министерствомъ народнаго просвѣщенія 28 апрѣля 1879 года.

Цѣлью „математическаго общества при Императорскомъ Харьковскомъ Университетѣ“ было „содѣйствовать разработкѣ какъ чисто научныхъ, такъ и педагогическихъ вопросовъ изъ области математическихъ наукъ“. Что касается членовъ общества, то таковыми „безъ избранія имѣютъ право считаться наличные и бывшіе профессора и другіе преподаватели чистой и прикладной математики въ Харьковскомъ Университетѣ и въ другихъ могущихъ открыться въ Харьковѣ высшихъ учебныхъ заведеніяхъ“, всѣ остальные лица, занимающіеся математикой, могутъ быть приняты въ члены общества по баллотировкѣ.

Предварительное собраніе лицъ, имѣвшихъ по уставу право быть членами безъ избранія, т. е. профессоровъ и преподавателей Харьковскаго Университета, состоялось въ университетѣ 8-го сентября 1879 г.; на немъ присутствовали слѣдующіе члены учредители общества: бывш. проф. Харьковскаго Университета Е. И. Бейеръ, проф. В. Г. Имшенецкій, проф. Д. М. Деларю, проф. М. Ѳ. Ковальскій, проф. А. П. Шимковъ, проф. Ю. И. Морозовъ и доцентъ К. А. Андреевъ.

Въ этомъ засѣданіи былъ избранъ первый распорядительный комитетъ, состоявшій изъ предсѣдателя Е. И. Бейера, товарищей его В. Г. Имшенецкаго и Д. М. Деларю и секретаря К. А. Андреева. Здѣсь же обсуждался болѣе подробно планъ будущей дѣятельности общества.

Первое очередное засѣданіе общества состоялось 22 сентября; въ этомъ засѣданіи были избраны новые члены, главнымъ образомъ изъ среды преподавателей среднихъ учебныхъ заведеній г. Харькова. Между прочимъ былъ избранъ теперешній товарищъ предсѣдателя нашего общества проф. А. П. Грузинцевъ, въ то время бывшій преподавателемъ 1-ой гимназіи. Послѣ избранія новыхъ членовъ предсѣдатель общества Е. И. Бейеръ прочелъ первый рефератъ „о теоремѣ Фермата“ и тѣмъ самымъ открылъ научную дѣятельность общества.

Согласно выработанному въ первомъ распорядительномъ засѣданіи плану занятій, въ первые годы существованія общества очередныя засѣданія назначались по одному разу въ мѣсяцъ, исключая вакаціонное время.

Открытіе математическаго общества въ Харьковѣ не прошло незамѣченнымъ въ ученомъ мірѣ; въ этомъ убѣждаетъ насъ между прочимъ то обстоятельство, что въ одномъ изъ первыхъ засѣданій (22 октября 1879 г.) секретаремъ общества было доложено, что распорядительный комитетъ VI съѣзда русскихъ естествоиспытателей и врачей прислалъ приглашеніе, въ которомъ „проситъ членовъ Харьковскаго математическаго общества, какъ своихъ собратій по наукѣ, почтить съѣздъ своимъ личнымъ присутствіемъ и присылкой своихъ трудовъ“.

Въ первый же годъ своего существованія общество проявило очень энергичную дѣятельность: такъ за время отъ 22 сентября 1879 г. по 7-ое апрѣля 1880 г. состоялось 9 очередныхъ засѣданій, на которыхъ было сдѣлано 20 сообщеній въ томъ числѣ сообщеніе профессора въ Лютихѣ J. Graindorge'а. Слѣдуетъ еще отмѣтить, что въ занятіяхъ общества принимали активное участіе и г.г. студенты (Клюшниковъ, Шумигорскій).

Однако для дѣятельности ученаго общества недостаточно однихъ засѣданій, на которыхъ могутъ вести бесѣды по научнымъ вопросамъ сравнительно немногіе лица; дѣятельность подобнаго общества требуетъ болѣе широкаго обмѣна мыслей: она требуетъ изданія своего журнала. Согласно § 9 устава „матеріальныя средства общества могутъ составляться изъ добровольныхъ пожертвованій какъ самихъ членовъ, такъ и постороннихъ лицъ. *На эти средства, въ случаѣ ихъ образованія, по возможности издаются труды общества. Протоколы засѣданій общества печатаются въ Запискахъ Харьковскаго Университета*“. Такъ какъ на первыхъ порахъ у математическаго общества не было никакихъ средствъ, а добровольная подписка не могла дать много, то пришлось обратиться за помощью въ этомъ отношенiи къ Харьковскому Университету. Мы видѣли, что согласно § 9 въ Запискахъ университета можно было печатать только протоколы засѣданiй. Но въ отчетѣ за 1879—80 годъ находимъ слѣдующее: „сообщенiя, представленныя г.г. референтами въ рукописяхъ и неимѣвшiя значительнаго объема, были также напечатаны вмѣстѣ съ протоколами, какъ составляющiя, въ виду краткости послѣднихъ, ихъ естественное и необходимое дополненiе“. И вотъ благодаря этому толкованiю § 9 устава, а также старанiямъ главнымъ образомъ инцiатора общества В. Г. Имшенецкаго начали выходитъ съ 1880 года „Сообщенiя и протоколы засѣданiй математическаго Общества при Императорскомъ Харьковскомъ Университетѣ“ въ видѣ приложенiй къ выходившимъ въ то время „Ученымъ Запискамъ Харьковскаго Университета“. Въ первомъ выпускѣ „Сообщенiй“ было помѣщены двѣ статьи В. Г. Имшенецкаго, и статьи Д. М. Деларю, К. А. Андреева и А. П. Грузинцева.

Въ засѣданiи 8 марта 1880 г. В. Г. Имшенецкимъ было сообщено, что въ письмѣ на его имя проф. Hoüel предлагаетъ Харьковскому математическому обществу отъ имени общества физическихъ и естественныхъ наукъ въ Бордо обмѣнъ изданiями. Такимъ образомъ было положено начало обмѣна изданiями, и вмѣстѣ съ тѣмъ наше общество выступило такъ сказать на западно-европейскую научную арену.

Вскорѣ общество получило новое подтвержденiе признанiя его научнаго значенiя западно-европейскимъ ученымъ мiромъ: извѣстный математикъ J. Graindorge напечаталъ въ „Сообщенiяхъ“ свою статью „Note sur l'intégration de l'équation $y''+2y'\cot gx-y=o$“.

Нужно сознаться, что своей извѣстностью, въ особенности среди иностранныхъ ученыхъ, на первыхъ порахъ общество обязано всецѣло В. Г. Имшенецкому, имѣвшему многихъ друзей въ научномъ мiрѣ какъ въ Россiи, такъ и за границей.

Изъ всего изложеннаго нельзя не замѣтить, что первый годъ существованiя общества прошелъ блестяще: число членовъ достигло 23, число научныхъ засѣданiй было велико, докладовъ тоже; далѣе, за это время было напечатано два выпуска „Сообщенiй“ и, наконецъ, общество начало прiобрѣтать извѣстность въ научномъ мiрѣ, какъ въ Россiи, такъ и за границей. Кромѣ всего этого, общество заинтересовало студентовъ, посѣщавшихъ его засѣданiя въ большомъ количествѣ.

Всѣ эти успѣхи отмѣчены въ первомъ годовомъ отчетѣ, но здѣсь же мы встрѣчаемъ указанiя на то, что одна изъ цѣлей общества, а именно занятія педагогическими вопросами, не была достигнута. „Но можно надѣяться“, говорится въ отчетѣ„ что въ будущее время дѣятельность общества получитъ надлежащее развитіе и въ этомъ направленіи. За осуществленіе такой надежды говоритъ то, что въ числѣ членовъ общества находится большинство г.г. педагоговъ, состоящихъ преподавателями въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ Харькова, изъ которыхъ нѣкоторые уже и въ этотъ году излагали обществу свои „сообщенія“.

Этимъ пожеланіямъ не суждено было сбыться, несмотря на то, что въ одномъ изъ засѣданій (8 сентября 1880 г.) обсуждался вопросъ о мѣрахъ для усиленія занятій общества вопросами педагогическими. Всѣ эти „мѣры“ привели лишь къ разбору нѣсколькихъ учебниковъ, да къ разсмотрѣнію вопроса объ учительскихъ экзаменахъ, о чемъ скажемъ ниже. На этомъ и закончилась педагогическая дѣятельность общества. Участіе г.г. педагоговъ въ занятіяхъ общества все уменьшалось, пока не свелось къ нулю; при этомъ нужно сознаться, что г.г. педагоги, упомянутые въ отчетѣ, не сдѣлали ни одного педагогическаго доклада; это были молодые люди, предназначавшіе себя въ то время къ исключительно ученой карьерѣ (Грузинцевъ, Клюшниковъ, Рейнботъ, а впослѣдствіи Алексѣевскій и Флоровъ), а потому и доклады ихъ не имѣли никакого отношенія къ педагогіи.

Должно замѣтить, что стремленіе къ разработкѣ педагогическихъ вопросовъ особенно характеризуетъ второй годъ дѣятельности общества, когда предсѣдателемъ его былъ уже В. Г. Имшенецкій. Къ этому времени относится разсмотрѣніе единственнаго интереснаго чисто-педагогическаго вопроса, обсуждавшагося въ обществѣ, а именно вопроса „объ улучшеніи въ средствахъ и способахъ къ приготовленію молодыхъ людей къ дѣятельности преподавателей физики и математики въ среднихъучебныхъ заведеніяхъ“.

Вопросъ этотъ, возникшій, какъ кажется, по предложенію физико-математическаго факультета, разсматривался въ двухъ засѣданіяхъ общества (9 февраля и 3 марта 1881 г.), при чемъ на второмъ изъ нихъ обсуждалась записка, составленная по порученію общества Д. М. Деларю и К. А. Андреевымъ. Одобренная обществомъ, записка эта была передана физико-математическому факультету. Какова ея дальнѣйшая судьба, мнѣ неизвѣстно: по всей вѣроятности она лежитъ гдѣ-либо въ архивѣ.

Я позволю себѣ привести здѣсь мнѣніе тогдашнихъ членовъ общества въ виду того, что вопросъ о подготовкѣ учителей въ настоящее время опять выдвигается на сцену и не только у насъ, но и на западѣ, гдѣ, напримѣръ, проф. F. Klein читаетъ цѣлые курсы для готовящихся къ учительской дѣятельности не только въ среднихъ, но и въ низшихъ школахъ.

Мнѣніе Харьковскаго математическаго общества по этому существенно важному вопросу въ то время было таково: „многіе недостатки дѣйствующихъ нынѣ постановленій объ учительскихъ экзаменахъ будутъ устранены, если студенты университета, желающіе впослѣдствіи быть учителями, въ теченіи 2-го, 3-го и 4-го курсовъ, кромѣ обычныхъ университетскихъ занятій, будутъ получать еще спеціальную педагогическую подготовку....

... Упомянутая подготовка, получаемая подъ руководствомъ профессоровъ, должна заключаться въ ознакомленіи съ существующими учебниками для среднихъ учебныхъ заведеній, съ исторіей наукъ и съ педагогикой. Кромѣ того, по опытнымъ наукамъ студенты должны упражняться въ производствѣ демонстративныхъ опытовъ. Такія занятія, будучи распредѣлены на три года, не обременятъ учащихся, дадутъ имъ значительный запасъ свѣдѣній, непосредственно примѣняемыхъ въ учительской дѣятельности, будутъ способствовать успѣшному прохожденію студентами университетскаго курса и, кромѣ того, несравненно болѣе, чѣмъ экзамены и пробныя лекціи, дадутъ университету возможность судить о степени подготовки будущихъ преподавателей. Что касается затѣмъ до лицъ, вовсе не бывшихъ въ университетѣ, и до студентовъ, не участвовавшихъ въ добавочныхъ занятіяхъ, но тѣмъ не менѣе желающихъ получить право на званіе учителя, то такія лица должны подвергаться экзамену по программѣ, соотвѣтствующей курсу добавочныхъ занятій“.

За второй годъ дѣятельности общества было выпущено въ свѣтъ три выпуска „Сообщеній“, число засѣданій было 10, докладовъ было сдѣлано 19, число членовъ достигло 25. Интересъ къ занятіямъ общества со стороны студентовъ не ослабѣвалъ, расширялся также обмѣнъ изданіями, именно, къ концу второго года общество обмѣнивалось изданіями уже съ 11 учрежденіями и учеными обществами: 1) Московскимъ Университетомъ, 2) Кіевскимъ Университетомъ, 3) Казанскимъ Университетомъ, 4) Петербургскимъ технологическимъ институтомъ, 5) Московской астрономической обсерваторіей, 6) Московскимъ обществомъ естествоиспытателей, 7) Московскимъ политехническимъ обществомъ, 8) Société mathématique de France, 9) Société des sciences physiques et mathématiques de Bordeaux, 10) Вашингтонской морской обсерваторіей и 11) редакціей „Математическаго Листка“.

Какъ видимъ изъ этого перечня, „Сообщенія“ общества появляются уже и въ Новомъ Свѣтѣ.

Въ слѣдующемъ академическомъ году предсѣдателемъ общества былъ снова избранъ В. Г. Имшенецкій. И въ этомъ году нѣкоторые члены общества старались оживить интересъ къ педагогическимъ вопросамъ, для чего рѣшено было выписать два журнала по элементарной математикѣ: „Mathesis" и „Journal des mathématiques élémentaires et spéciales".

Въ этомъ году Харьковское математическое общество понесло большую потерю: его иниціаторъ и одинъ изъ наиболѣе дѣятельныхъ членовъ—В. Г. Имшенецкій былъ избранъ академикомъ и въ серединѣ апрѣля 1882 г. покинулъ Харьковъ. Тѣмъ не менѣе связь между Василіемъ Григорьевичемъ и математическимъ обществомъ не порывалась до самой смерти В. Г. Въ слѣдующемъ году общество, высоко цѣня его научную дѣятельность вообще и дѣятельность его въ качествѣ члена и предсѣдателя общества въ частности, вновь избрало его своимъ предсѣдателемъ.

Выше я уже указывалъ на то обстоятельство, что по мѣрѣ распространенія изданій общества, извѣстность его все расширялась. Благодаря этому многіе ученые общества и отдѣльные ученые начали высылать свои труды въ обмѣнъ на изданія общества или въ даръ. Такимъ образомъ постепенно начала составляться библіотека общества, такъ что уже въ 1881 году по предложенію В. Г. Имшенецкаго былъ избранъ библіотекаремъ общества А. А. Клюшниковъ.

Въ то же время расширялся кругъ участниковъ въ трудахъ общества: кромѣ мѣстныхъ ученыхъ въ „Сообщеніяхъ" начали печатать свои труды и иногородніе; такъ въ 1881 г. появилась въ „Сообщеніяхъ" статья профессора университета Св. Владиміра В. П. Ермакова, въ 1882 году напечатана весьма интересная статья академика П. Л. Чебышева „О приближенныхъ выраженіяхъ однихъ интеграловъ черезъ другіе, взятые въ тѣхъ же предѣлахъ". Статья эта вызвала рядъ другихъ статей, помѣщенныхъ въ тѣхъ же „Сообщеніяхъ": проф. СПБ. университета К. А. Поссе, академика В. Г. Имшенецкаго, К. А. Андреева.

Это дальнѣйшее развитіе дѣятельности общества, въ которой по прежнему довольно активную роль играли и студенты, констатируется въ отчетѣ за $188^2/_3$ акад. годъ.

Въ слѣдующемъ году предсѣдателемъ общества былъ опять избранъ ветеранъ-математикъ Е. И. Бейеръ, который однако, какъ кажется, не принималъ по болѣзни участія въ засѣданіяхъ общества. Секретаремъ въ этомъ году былъ избранъ теперешній почетный членъ общества, а тогда доцентъ М. А. Тихомандрицкій, незадолго передъ тѣмъ перешедшій изъ Петербурга въ Харьковъ и принимавшій впослѣдствіи весьма дѣятельное участіе въ трудахъ общества.

Дѣятельность общества къ этому четвертому году его существованія вполнѣ опредѣлилась: она стала чисто научной; педагогическіе вопросы почти уже не появляются въ протоколахъ засѣданій; число преподавателей среднихъ учебныхъ заведеній, посѣщающихъ засѣданія общества, все уменьшается.

Съ 1883 года въ „Сообщеніяхъ" начинаетъ помѣщать свои статьи талантливый ученикъ П. Л. Чебышева, нынѣ академикъ, А. А. Марковъ и доцентъ СПБ. университета И. Л. Пташицкій.

Со слѣдующаго года, согласно постановленію совѣта Харьковскаго Университета, математическое общество начало издавать свои „Сообщенія" отдѣльно отъ другихъ изданій университета на счетъ особой субсидіи изъ спеціальныхъ средствъ университета. Какова была эта субсидія въ первое время, я не могъ опредѣлить; весьма возможно, что эта субсидія выдавалась такъ сказать натурой, такъ какъ до 1887 года „Сообщенія" печатались въ университетской типографіи.

Въ 1884 году предсѣдателемъ общества былъ избранъ проф. К. А. Андреевъ, который оставался безсмѣннымъ предсѣдателемъ до своего перехода въ Москву въ 1899 году.

Возвращаясь къ исторіи общества и подводя итоги его дѣятельности за первое пятилѣтіе его существованія, нельзя не увидѣть, что за все это время дѣятельность общества была крайне интенсивна: засѣданія его происходили аккуратно каждый мѣсяцъ, до 188$^4/_5$ акад. года вышло въ свѣтъ 11 выпусковъ „Сообщеній", которыя заняли почетное мѣсто среди математическихъ журналовъ.

О послѣднемъ обстоятельствѣ можно заключить на томъ основаніи, что ученыя общества и учрежденія сами изъявляли обществу желаніе вступить въ обмѣнъ изданіями; о нѣкоторыхъ изъ этихъ предложеній мы уже говорили выше, теперь же укажемъ на слѣдующія: въ засѣданіи 17 октября 1882 г. членъ общества Г. В. Левицкій заявилъ о желаніи вѣнской и лейденской обсерваторій имѣть изданія общества, въ томъ же засѣданіи доложена была просьба проф. Weyer изъ Вѣны о высылкѣ ему „Сообщеній"; нѣсколько позже, а именно въ засѣданіи 15 февраля 1885 года предсѣдатель доложилъ просьбу проф. Teixeira о высылкѣ ему „Сообщеній" въ обмѣнѣ на издаваемый имъ въ Коимбрѣ журналъ „Jornal de scientias mathematicas e astronomicas"; въ засѣданіи 22 сентября того же года постановлено вступить въ обмѣнъ изданіями, предложенный математическимъ обществомъ въ Палермо и редакціей журнала „American Journal of Mathematics", издающагося въ Бальтиморѣ.

Въ отчетѣ за 188$^4/_5$ годъ мы находимъ, что общее число учрежденій, съ которыми общество находилось въ обмѣнѣ, достигло 26.

Такимъ образомъ первое пятилѣтіе жизни нашего общества установило за нимъ прочную репутацію серіознаго научнаго учежденія, изданія котораго цѣнились не только въ Россіи, но и заграницей, въ Европѣ и Америкѣ. При переходѣ во второе пятилѣтіе число активныхъ членовъ общества значительно увеличилось. Прежде всего я долженъ отмѣтить вступленіе въ число членовъ общества одного изъ его наиболѣе выдающихся впослѣдствіи членовъ А. М. Ляпунова, нынѣ академика и почетнаго члена общества, а тогда приватъ-доцента Харьковскаго университета. Далѣе въ число членовъ общества вступили многіе профессора и преподаватели открытаго въ 1885 году Харьковскаго технологическаго института, въ томъ числѣ директоръ института проф. В. Л. Кирпичевъ. Послѣдній въ теченіи нѣсколькихъ лѣтъ былъ товарищемъ предсѣдателя общества. Вначалѣ г.г. профессора и преподаватели института посѣщали засѣданія, какъ это видно изъ протоколовъ, довольно усердно и принимали даже активное участіе въ его занятіяхъ, дѣлая доклады и печатая свои статьи въ „Сообщеніяхъ“ (А. В. Гречаниновъ „Гидродинамическая теорія тренія хорошо смазанна́го шипа въ подшипникѣ“, Х. С. Головинъ „По вопросу о сложеніи силъ“). Затѣмъ имена г.г. профессоровъ технологическаго института исчезаютъ изъ протоколовъ за исключеніемъ В. Л. Кирпичева, который до самаго своего отъѣзда изъ Харькова посѣщалъ почти всѣ засѣданія математическаго общества.

Какова причина этого явленія мнѣ неизвѣстно, но быть можетъ она кроется въ слишкомъ теоретическомъ характерѣ докладовъ, читаемыхъ въ засѣданіяхъ общества и не соотвѣтствующихъ практическому направленію ученой дѣятельности г.г. профессоровъ технологическаго института.

На ряду съ указаннымъ явленіемъ я долженъ отмѣтить еще одно, наводящее на невеселыя мысли. Въ протоколахъ и отчетахъ общества перестаетъ появляться упоминаніе о посѣщеніи засѣданій общества студентами, а тѣмъ болѣе объ ихъ активномъ участіи въ дѣятельности общества. Можно было бы объяснить первый фактъ трудностью усвоенія докладовъ, но, сравнивая доклады, читанные въ первомъ пятилѣтіи существованія общества съ докладами, дѣлаемыми впослѣдствіи, мы не находимъ разницы въ ихъ характерѣ: и тогда, и теперь они носятъ чисто научный характеръ. Уменьшеніе интереса къ занятіямъ общества, или вѣрнѣе полное его исчезновеніе нельзя объяснить и упадкомъ общества; мы видѣли что хотя нѣкоторые изъ выдающихся членовъ общества оставили его, какъ напримѣръ В. Г. Имшенецкій, К. А. Андреевъ, но имъ на смѣну появились новыя силы, среди которыхъ находятся такіе крупные ученые, какъ А. М. Ляпуновъ и В. А. Стекловъ. Такимъ образомъ для индиферентизма г.г. студентовъ нѣтъ и этой причины. Остается сдѣлать одно допущеніе, на мой взглядъ весьма вѣроятное, это дѣйствіе пресловутаго университетскаго устава 1884 г., приведшаго къ уничтоженію въ учащихся всякаго научнаго интереса.

Возвращаясь къ исторіи общества, я прежде всего долженъ отмѣтить два важныхъ обстоятельства въ его жизни первое изъ которыхъ—измѣненіе устава.

По мѣрѣ развитія дѣятельности общества назрѣвала потребность измѣненія нѣкоторыхъ параграфовъ устава, стѣснявшихъ эту дѣятельность. Въ виду этого въ 1887 году тогдашній распорядительный комитетъ, состоявшій изъ предсѣдателя проф. К. А. Андреева, товарищей предсѣдателя проф. М. А. Тихомандрицкаго и проф. В. Л. Кирпичева и секретаря А. П. Грузинцева, составилъ проектъ новаго устава, который и былъ утвержденъ Министромъ Н. П. 9 октября 1887 года.

Главнымъ отличіемъ новаго устава является право избранія членовъ корреспондентовъ и почетныхъ членовъ общества. Этимъ правомъ общество воспользовалось вскорѣ послѣ утвержденія устава и въ засѣданіи 22 января 1888 г. избрало въ почетные члены академиковъ В. Г. Имшенецкаго, В. Я. Буняковскаго и П. Л. Чебышева, а въ члены корреспонденты академика А. А. Маркова, профессоровъ СПБ. Университета А. Н. Коркина и К. А. Поссе, профессора Университета св. Владиміра В. П. Ермакова, профессора Московскаго Университета Н. Е. Жуковскаго, профессора Варшавскаго Университета П. О. Сомова и приватъ-доцента СПБ. Университета И. Л. Пташицкаго.

Вторымъ явленіемъ въ жизни общества, заслуживающимъ упоминовенія, было перенесеніе въ 1888 году печатанія „Сообщеній“ общества изъ университетской типографіи въ типографію Зильберберга. Благодаря этому, внѣшность „Сообщеній“ значительно выиграла, и съ этой стороны „Сообщенія“ представляютъ чуть-ли не лучшій русскій математическій журналъ. Вмѣстѣ съ перемѣной мѣста печатанія было измѣнено заглавіе самого журнала, носящаго теперь названіе „Сообщенія Харьковскаго математическаго общества“.

Всѣ выпуски „Сообщеній“ числомъ 18, напечатанные въ университетской типографіи, составляютъ 1-ю серію и въ настоящее время представляютъ библіографическую рѣдкость, благодаря тому, что они печатались въ небольшомъ числѣ экземпляровъ; кромѣ того этому способствовалъ крахъ книжнаго магазина Полуехтова, гдѣ находилось много экземпляровъ „Сообщеній“, отданыхъ на комиссію.

Что касается 2-й серіи „Сообщеній“, то до 1906 года ихъ вышло 9 томовъ, при чемъ каждый томъ состоитъ изъ 6 выпусковъ по 3 печатныхъ листа; выпуски эти выходятъ въ свѣтъ въ неопредѣленные сроки по мѣрѣ ихъ отпечатанія.

Въ дальнѣйшемъ я не буду останавливаться на отдѣльныхъ годахъ жизни нашего общества, которая вошла въ опредѣленную колею и которая, какъ жизнь всякаго ученаго общества, не богата внѣшними фактами; отмѣчу здѣсь только нѣкоторыя наиболѣе важныя событія.

24 мая 1892 года въ Москвѣ скончался академикъ В. Г. Имшенецкій; Харьковское математическое общество почтило память своего иниціатора и почетнаго члена экстреннымъ засѣданіемъ 29-го мая. Въ этомъ засѣданіи были посланы письма съ выраженіемъ соболѣзнованія супругѣ В. Г. и въ Академію Наукъ.

Въ томъ же году математическое общество при содѣйствіи университета издало большое сочиненіе проф. А. М. Ляпунова „Общая задача объ устойчивости движенія“.

Въ этомъ же году общество ликвидировало послѣдніе остатки педагогическихъ увлеченій, прекративши выписку журналовъ по элементарной математикѣ „Mathesis“ и Journal des mathématiques élémentaires et spéciales“; въ замѣнъ ихъ были выписаны „Acta mathematica“ и „Bulletin astronomique“, каковыя журналы выписываются и до сихъ поръ. 22 октября слѣдующаго 1893 года общество устроило публичное засѣданіе въ память столѣтія рожденія Н. И. Лобачевскаго, на которомъ А. П. Грузинцевъ прочелъ біографію Лобачевскаго, а К. А. Андреевъ представилъ характеристику его научныхъ заслугъ. Въ заключеніе своей рѣчи К. А. Андреевъ предложилъ, согласно приглашенію Казанскаго распорядительнаго комитета для образованія фонда имени Н. И. Лобачевскаго, подписку на пополненіе этого фонда. Подписка эта въ самомъ засѣданіи дала 106 руб. Сверхъ того по предложенію того же предсѣдателя общества. К. А. Андреева и съ разрѣшенія г. попечителя Харьковскаго учебнаго округа было напечатано воззваніе отъ имени Харьковскаго математическаго общества съ приглашеніемъ принять участіе въ пополненіи капитала имени Н. И. Лобачевскаго и разослано во всѣ среднія учебныя заведенія Харьковкаго учебнаго округа.

До тридцати (изъ 110) мужскихъ и женскихъ учебныхъ заведеній откликнулись на этотъ призывъ и прислали 341 руб., которые и были отправлены въ Казань.

9 января 1894 года Харьковское математическое общество, въ лицѣ своихъ делегатовъ проф. К. А. Андреева, проф. А. М. Ляпунова, и проф. В. А. Стеклова участвовало въ праздновaнiи 25-лѣтiя своего старшаго собрата—Московскаго математическаго общества.

Все увеличивавшаяся научная дѣятельность общества, въ которой принимали участiе все новыя и новыя лица, избираемые въ почетные члены и члены корреспонденты, привела къ тому, что многiе изъ докладовъ не могли печататься за недостаткомъ средствъ, единственнымъ источникомъ которыхъ была субсидiя, выдаваемая изъ спецiальныхъ средствъ Харьковскаго Университета въ размѣрѣ 250 руб. въ годъ.

Въ 1893 году удалось получить отъ университета еще 200 руб. на печатанiе трудовъ общества; благодаря этому обстоятельству общество могло ассигновать 400 руб. на печатанiе большого сочиненiя проф. М. А. Тихомандрицкаго. „Основанiе теорiи Абелевыхъ интеграловъ". Но и эту, сравнительно небольшую, сумму общество не могло удѣлить сразу, а должно было уплачивать постепенно въ теченiи ряда лѣтъ.

Недостатокъ средствъ не далъ возможности напечатать въ „Сообщенiяхъ" магистерскiя диссертацiи В. А. Стеклова и А. П. Грузинцева, хотя содержанiе этихъ диссертацiй было излагаемо въ засѣданiяхъ общества.

Въ виду этихъ затруднительныхъ обстоятельствъ, общество присоединившись въ 1894 году къ общему ходатайству IX съѣзда естествоиспытателей объ увеличенiи субсидiи отъ министерства математическимъ обществомъ, въ свою очередь вошло въ министерство черезъ совѣтъ университета съ ходатайствомъ о выдачѣ ему ежегодной постоянной субсидiи въ размѣрѣ отъ 700 до 1000 руб.

Удовлетворенiя этого ходатайства оно ждетъ и до днесь!

Чтобы покончить съ издательской дѣятельностью общества, я долженъ еще упомянуть объ изданiи при субсидiи со стороны университета въ 1901 году капитальнаго сочиненiя В. А. Стеклова „Основныя задачи математической физики". Что касается „Сообщенiй", то въ нихъ печатаются доклады, читанные въ засѣданiяхъ общества; здѣсь же встрѣчаются и большiя диссертацiи: такъ въ $188^{8}/_{9}$ году была напечатана диссертацiя В. П. Алексѣевскаго. „О функцiяхъ подобныхъ функцiямъ гамма", въ 1901 г. диссертацiя А. П. Пшеборскаго „Нѣкоторыя приложенiя теорiи линейчатыхъ конгруэнцiй", наконецъ въ 1905 году диссертацiя Н. Н. Салтыкова. „Изслѣдованiя по теорiи уравненiй съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функцiи".

Въ концѣ 1898 г. безсмѣнный въ теченiи 15 лѣтъ предсѣдатель общества К. А. Андреевъ, одинъ изъ его учредителей, перешелъ въ

Московскій Университетъ. Высоко цѣня заслуги К. А., математическое общество въ засѣданіи 29 января 1899 года избрало его единогласно (per acclamationem) своимъ почетнымъ членомъ.

Вмѣсто К. А. Андреева въ слѣдующемъ году предсѣдателемъ былъ избранъ проф. А. М. Ляпуновъ, оставившій предсѣдательство съ переходомъ въ Академію Наукъ въ 1902 году; въ маѣ того же года общество избрало А. М. почетнымъ членомъ.

Съ отъѣздомъ А. М. Ляпунова предсѣдателемъ общества былъ избранъ проф. В. А. Стекловъ.

Какъ я уже говорилъ выше, въ трудахъ общества кромѣ Харьковскихъ ученыхъ принимали участіе и иногородніе; въ его „Сообщеніяхъ" мы находимъ статьи слѣдующихъ ученыхъ: акад. П. Л. Чебышева акад. А. А Маркова, проф. А. Н. Коркина, проф. К. А. Поссе, проф. Д. К. Бобылева, проф. Н. В. Бугаева, проф. В. П. Ермакова, проф. Н. Е. Жуковскаго, проф. П. А. Некрасова, проф. П. О. Сомова, проф. И. Л. Пташицкаго, проф. Г. Ѳ. Вороного, проф. И. И. Иванова, В. А. Маркова, К. А. Торопова, А. И. Богуславскаго, Д. Д. Мордухай-Болтовскаго и др.

Съ 1903 года общество устанавливаетъ болѣе тѣсную связь и съ иностранными учеными, слѣдуя въ этомъ началамъ, проводимымъ въ первые годы жизни общества В. Г. Имшенецкимъ.

Въ этомъ году въ почетные члены общества избраны академики H. Poincaré, E. Picard и P. Appell, въ число же членовъ корреспондентовъ проф. Hurwitz, проф. Hadamard, проф. Zaremba, проф. Kneser проф. Korn. Послѣдніе два ученыхъ помѣстили уже свои изслѣдованія въ „Сообщеніяхъ" общества.

Мнѣ остается сказать нѣсколько словъ о бюджетѣ общества. Какъ я уже говорилъ, единственной постоянной статьей дохода служитъ для него пособіе ассигнуемое изъ спеціальныхъ средствъ университета. Размѣръ этого пособія съ первоначальной суммы въ 250 руб. въ годъ возросъ до 450 руб. въ годъ, опускаясь иногда, въ зависимости отъ состоянія спеціальныхъ средствъ университета, и до 300 руб. Всѣ эти деньги расходовались исключительно на печатаніе „Сообщеній".

На текущіе расходы за отсутствіемъ обязательнаго членскаго взноса, средства собирались путемъ добровольной подписки среди членовъ общества. Эта подписка давала въ среднемъ отъ 50 до 75 р. въ годъ. На эти деньги производились текущіе расходы и выписывались два журнала: „Acta „mathematica" и „Bulletin astronomique".

Оглядываясь теперь на путь, пройденный обществомъ за 25 лѣтъ его существованія, нельзя не чувствовать полнаго удовлетворенія.

Основанное въ провинціальномъ городѣ, безъ всякихъ средствъ, общество постепенно завоевало себѣ почетное имя въ математическомъ мірѣ; состоять его членами и участвовать въ его трудахъ не отказываются крупнѣйшіе математики нашего времени; предложенія объ обмѣнѣ изданіями получались и получаются обществомъ со стороны и академій, и ученыхъ обществъ, и издателей научныхъ журналовъ. Число такихъ учрежденій къ началу $190^5/_6$ академическ. года было 42 русскихъ и 24 иностранныхъ.

Если принять во вниманіе, что почти вся дѣятельность общества протекала во времена самой жестокой реакціи, не только не поддерживавшей, но вездѣ душившей свободную научную дѣятельность, то можно съ полнымъ правомъ утверждать, что наше общество не заглохнетъ въ наступающій новый періодъ жизни нашей страны.

Проф. *А. Пшеборскій.*

Приложеніе I.

Указатель статей, помѣщенныхъ въ 1-ой серіи и въ I—IX томахъ „Сообщеній Харьковскаго математическаго общества“.

Такъ какъ лучшей характеристикой дѣятельности ученаго общества служатъ его труды, то я и позволю себѣ привести указатель статей, помѣщенныхъ въ „Сообщеніяхъ общества за все время отъ 1879 по 1906 годъ включительно т. е. статей, напечатанныхъ въ 1-ой серіи и въ 9 томахъ 2-ой серіи „Сообщеній“. Я располагаю списокъ въ алфавитномъ порядкѣ авторовъ. При составленіи списка статей, помѣщенныхъ въ первой серіи я пользуюсь „указателемъ статей“, изданномъ въ 1888 году. При статьяхъ, напечатанныхъ въ 1-ой серіи первая цифра указываетъ годъ выпуска, вторая (римская) № его, слѣдующія двѣ—страницы, т. напр. 83 II 115—126 указываетъ, что данная статья напечатана во II выпускѣ, „Сообщеній“ за 1883 годъ на страницахъ 115—126. Для статей, помѣщенныхъ во 2-й серіи я указываю только томъ и страницу, такъ V 125—135 указываетъ, что статья напечатана въ V томѣ на страницахъ 125—135.

Алексѣевскій В. П. Объ интегрированіи уравненія $x^2y'' + Axy' + By' + Cx^n y = 0$. 83, II, 115—126. Объ интегрированіи уравненія $y^{(n)} + \frac{\alpha \cdot y^{(n-1)}}{z} + \beta y = 0$. 84, I, 41—64. Замѣтка объ обобщеніи уравненія Рикатти, 84, I, 80—82. Объ интегрированіи одного линейнаго дифференціальнаго уравненія n—аго порядка 84, III, 222—232. О функціяхъ подобныхъ функціи гамма I, 169—238. Объ автоморфной функціи, аналогичной экспонентной IV, 253—262. Объ опредѣленіи длины въ не-эвклидовой геометріи VI, 139—153. О законѣ взаимности простыхъ чиселъ VI, 200—202. Зависимость между кинкелиновыми и гамморфными функціями VIII, 123—135.

Андреевъ К. А. О построеніи поляръ относительно плоскихъ геометрическихъ кривыхъ 79, 51—79. Объ изложеніи началъ проективной геометріи 80, II, 139—166. Карлъ-Георгъ-Христіанъ фонъ-Штаудтъ 80, II, 167—172. Мишель Шаль 81, I, 23—77. О многоугольникахъ Понселе 81, II, 91—112. Нѣсколько словъ по поводу теоремы П. Л. Чебышева и В. Г. Имшенецкаго объ опредѣленныхъ интегралахъ отъ произведеній функцій 82, II, 110—123. Нѣкоторыя обобщенія въ вопросѣ о разложеніи опредѣленнаго интеграла по формулѣ, предложенной П. Л. Чебышевымъ 83, I, 19—42. О многоугольникахъ Понселе (статья вторая) 84, II, 123—142. Семиугольники Шрётера I, 277—280. Къ вопросу о конфигураціяхъ II, 95—107. Викторъ Яковлевичъ Буняковскій. Некрологическій очеркъ II, 149—161. Гомоциклическое изображеніе сферы на плоскость III, 35—41. Комментарій къ статьѣ академика В. Г. Имшенецкаго о разысканіи раціональныхъ рѣшеній нелинейныхъ дифференціальныхъ уравненій IV, 150—160. О разысканіи раціональныхъ частныхъ интеграловъ линейныхъ дифференціальныхъ уравненій при помощи интегрирующаго множителя IV, 177—205.

Бобылевъ Д. К. Одна задача механики системы матеріальныхъ точекъ I, 129—138.

Богуславскій А. И. Исчисленіе положенія IV, 86—122.

Бугаевъ Н. В. Моногенность интеграловъ дифференціальныхъ уравненій V, 89—100.

Вороной Г. Θ. О числахъ Бернулли II, 129—148.

Головинъ Х. С. По вопросу о сложеніи силъ II, 162—165.

Граве Д. А. Объ основныхъ предложеніяхъ теоріи функцій двухъ вещественныхъ перемѣнныхъ VI, 251—287. Новое доказательство основной теоремы о неявныхъ функціяхъ VI, 288—293.

Гречаниновъ А. В. Гидродинамическая теорія тренія хорошо смазаннаго шипа въ подшипникѣ 87, I, 11—36.

Graindorge J. Note sur l'intégration de l'équation $y'' + 2y' \cot g x - y = 0$ 80, I, 46—47.

Грузинцевъ А. П. Вычисленіе хода лучей въ двояко преломляющемъ кристаллѣ 79, 32—50. Математическая теорія явленій отраженія и преломленія поляризованнаго свѣта на границахъ изотропныхъ срединъ 80, II, 81—127. Объ одномъ частномъ случаѣ приведенія урав-

нeнія 4-й степени къ биквадратному 81, II, 116—120. О двойномъ лучепреломленіи въ связи съ свѣторазсѣяніемъ 82, I, 3—82. Рѣшеніе основныхъ уравненій теоріи кристаллической поляризаціи 82, II, 124—138. Распространеніе способа Абдулъ-Джуда для опредѣленія сторонъ правильныхъ вписанныхъ многоугольниковъ 84, I, 37—40. Опытъ изученія стаціонарнаго состоянія упругой изотропной среды 84, II, 97—121. О приложеніяхъ закона сохраненія энергіи 84, III, 215—221. Къ электромагнитной теоріи поляризаціи свѣта 84, III, 233—239. Физическія замѣтки 85, I, 59—66. Объ одномъ частномъ законѣ поглощенія свѣта 85, I, 67—81. О теоріи дисперсіи Фойхта 86, I, 17—30. О minimum'ѣ отклоненія свѣтоваго луча призмой 87, I, 53—57. О преломленіи свѣтовыхъ лучей въ срединахъ, ограниченныхъ какими-нибудь поверхностями I, 139—168. Къ теоріи взаимныхъ опредѣлителей III, 94—102. Къ теоріи осмотическаго давленія IV, 165—174. Гипотетическая среда Больтцмана и теорія Герца IV, 209—224. Германъ фонъ-Гельмгольтцъ въ его послѣднихъ произведеніяхъ V, 16—59. Къ геометріи распространенія и поглощенія электромагнитной энергіи VI, 1—34. Теорія капиллярности и гидродинамика VI, 235—250. Къ теоріи дисперсіи: случай многихъ полосъ поглощенія VII, 4—19. Дисперсія металловъ IX, 1—32.

Деларю Д. М. Замѣтка объ одномъ предложеніи изъ теоріи сходимости безконечныхъ рядовъ 79, 19—24.

Ермаковъ В. П. Замѣна перемѣнныхъ, какъ способъ для разысканія интегрирующаго множителя дифференціальнаго уравненія и какъ средство для пониженія порядка системы дифференціальныхъ уравненій 81, I, 3—19. Задача для молодыхъ ученыхъ 87, II, 66—67. Линейныя дифференціальныя уравненія съ частными производными перваго порядка (задача для молодыхъ ученыхъ) I. 104—112. Задача на преобразованіе фигуръ въ пространствѣ I, 249. Полная теорія наибольшихъ и наименьшихъ величинъ функцій съ одной перемѣнной. III, 155—162. Къ теоріи обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій 1-го порядка VIII, 113—122. Періодическія функціи VIII, 196—209. Дифференціальныя уравненія перваго порядка, имѣющія данный интегральный множитель факторіальной формы. IX, 33—50.

Жуковскій Н. Е. О движеніи вязкой жидкости, заключенной между двумя вращающимися эксцентрическими цилиндрическими поверхностями. 87, I, 31—46.

Ивановъ И. И. Объ интерполированіи двухъ произведеній I, 78—81.

Имшенецкій В. Г. Опредѣленіе силы, движущей по коническому сѣченію матеріальную точку, въ функціи ея координатъ 79, 5—15.

Задача: раздѣлить площадь данной трапеціи на n равновеликихъ частей прямыми параллельными двумъ ея параллельнымъ сторонамъ 79, 25—31. Каноническія дифференціальныя уравненія гибкой, нерастяжимой нити и брахистохроны, въ случаѣ потенціала силъ. 80, I, 18—33, 53—74. Линейныя дифференціальныя уравненія 2-го порядка, интегрируемыя посредствомъ множителя 80, I, 48—52. „Начала Евклидасъ пояснительнымъ введеніемъ и толкованіемъ“ М. Е. Ващенко-Захарченко. 80, II, 129—135. Замѣтка о функціяхъ комплекснаго перемѣннаго 80, II, 173—187. О неравенствахъ, ограничивающихъ величину опредѣленнаго интеграла отъ произведенія функцій 82, II, 99—109. Элементарный выводъ закона большихъ чиселъ теоріи вѣроятностей I, 1—6. Новое аналитическое доказательство параллелограмма силъ II, 108—113. Рѣшеніе уравненій четвертой степени на основаніи симметричнаго омографическаго соотношенія, существующаго между его корнями III, 257—262. Сравненіе способа проф. Н. В. Бугаева съ другими пріемами разысканія раціональныхъ дробныхъ рѣшеній дифференціальныхъ уравненій. IV, 60—80.

Клюшниковъ А. А. О приведеніи уравненій относительнаго движенія системы матеріальныхъ точекъ къ каноническому виду 80, I, 3—17.

Kneser A. Die Jacobische Bedingung des Extremums bei einem allgemeinen Typus von Aufgaben der Variationsrechnung. VII, 253—267

Ковальскій М. Θ. Новый способъ интегрированія нелинейныхъ дифференціальныхъ уравненій въ частныхъ производныхъ перваго порядка V, 125—135.

Колосовъ Г. В. Объ одномъ случаѣ движенія твердаго тѣла VI, 194—199.

Коркинъ А. Н. О кривизнѣ поверхностей 87, I, 3—10. По поводу статьи В. П. Ермакова подъ заглавіемъ: „Дифференціальныя уравненія перваго порядка, имѣющія интегральный множитель факторіальной формы“. IX, 51—59.

Korn A. Sur le problème mathématique des vibrations universelles. VIII, 68—112.

Kortazzi. J. Hülfstafeln zur Berechnung örtlicher Ephemeriden für die Zeitbestimmung nach der Zinger'schen Methode. II, 126—134.

Левицкій Г. В. Замѣтка по поводу статьи проф. Гюнтера: „Объ одной задачѣ сферической астрономіи“. 81, I, 80—83. Ueber eine Polhöhenbestimmungsmethode II, 245—301. Способъ Гаусса для измѣренія фокусныхъ разстояній линзъ. III, 273—289. Нѣкоторые результаты наблюденій, произведенныхъ на астрономической обсерваторіи Харьковскаго университета съ маятникомъ Реберъ-Пашвица. IV, 206—208.

Ляпуновъ А. М. Нѣкоторое обобщеніе формулы Лежень-Дирихле для потенціальной функціи эллипсоида на внутреннюю точку 85, II, 120—130. О тѣлѣ наибольшаго потенціала 86, II, 63—73. О постоянныхъ винтовыхъ движеніяхъ твердаго тѣла въ жидкости I, 7—60. Объ устойчивости движенія въ одномъ частномъ случаѣ задачи о трехъ тѣлахъ II, 1—94. Къ вопросу объ устойчивости движенія III, 265—272. Новый случай интегрируемости дифференціальныхъ уравненій движенія твердаго тѣла въ жидкости IV, 81—85. Объ одномъ свойствѣ дифференціальныхъ уравненій задачи о движеніи тяжелаго твердаго тѣла, имѣющаго неподвижную точку IV, 123—140. Пафнутій Львовичъ Чебышевъ, очеркъ IV, 263—273. Списокъ сочиненій акад. П. Л. Чебышева IV, 274—280. Нѣсколько словъ относительно статьи Г. Г. Аппельрота „По поводу параграфа перваго мемуара С. В. Ковалевской Sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe" IV, 292—297. Объ одномъ вопросѣ, касающемся линейныхъ дифференціальныхъ уравненій съ періодическими коэффиціентами V, 190—254. Sur le potentiel de la double couche VI, 129—138. Sur le principe fondamental de la méthode de Neumann dans le problème de Dirichlet. VII, 229—252.

Марковъ В. А. О числѣ классовъ положительныхъ тройничныхъ квадратичныхъ формъ даннаго опредѣлителя IV, 1—59.

Марковъ А. А. Опредѣленіе наибольшаго и наименьшаго значенія нѣкоторой величины 83, II, 95—104. Доказательство нѣкоторыхъ неравенствъ П. Л. Чебышева 83, II, 105—114. Опредѣленіе нѣкоторой функціи по условію наименѣе уклоняться отъ нуля 84, I. 83—92. Доказательство сходимости многихъ непрерывныхъ дробей 85, I, 29—33. О распредѣленіи корней нѣкоторыхъ уравненій 85, II, 89—98. О дифференціальномъ уравненіи гипергеометрическаго ряда 86, II, 51—62, 95—113. Нѣсколько примѣровъ рѣшенія особаго рода задачъ о наибольшихъ и наименьшихъ величинахъ I, 250—276. О цѣлой функціи, равной произведенію двухъ гипергеометрическихъ рядовъ III, 252—256. Извлеченіе изъ письма къ проф. К. А. Андрееву, IV, 146—149. По поводу комментарія проф. К. А. Андреева IV, 175—176. О нуляхъ цѣлой функціи Эрмита и функцій Лямэ. V, 74—80. О вѣроятности a posteriori VII, 23—25.

Мещерскій И. В. Дифференціальныя связи въ случаѣ одной матеріальной точки 87, II, 68—79.

Мордухай—Болтовскій Д. Д. Объ одномъ обобщеніи теоремы Абеля, VII, 268—283. Объ инваріантныхъ преобразованіяхъ ультраэллиптическихъ интеграловъ VIII, 1—67.

Некрасовъ П. А. Нахожденіе раціональныхъ рѣшеній линейныхъ дифференціальныхъ уравненій съ алгебрическими раціональными коэффиціентами IV, 225—252.

Новиковъ П. М. Особенный случай maximum'a и minimum'a функціи со многими перемѣнными 83, I, 43—46. О значеніи, какое можно придать въ динамикѣ второй варіаціи опредѣленныхъ интеграловъ Гамильтона и наименьшаго дѣйствія 84, I, 65—72.

Поссе К. А. О дополнительномъ членѣ въ формулѣ П. Л. Чебышева для приближеннаго выраженія опредѣленнаго интеграла черезъ другіе, взятые въ тѣхъ же предѣлахъ 83, I, 5—17. Къ вопросу о предѣльныхъ значеніяхъ интеграловъ или суммъ 85, I, 35—58. О функціяхъ, подобныхъ функціямъ Лежандра 85, II, 155—169.

Пташицкій И. Л. О разложеніи въ рядъ Маклорена нѣкоторыхъ функцій со многими неизвѣстными 84, I, 73—79. Объ алгебраическомъ интегрированіи алгебраическихъ дифференціаловъ I, 61—73. Объ одной теоремѣ относительно алгебраическихъ интеграловъ I, 74—77.

Пшеборскій А. П. Къ вопросу о безконечно-малыхъ деформаціяхъ поверхности VII, 26—37. Нѣкоторыя приложенія теоріи линейчатыхъ конгруэнцій VII, 49—228.

Радцигъ А. А. Приложеніе теоремы Зилова къ симметрической группѣ V, 1—15.

Рахмановъ П. Н. О высшихъ предѣлахъ корней алгебраическихъ уравненій IV, 141—145.

Салтыковъ Н. Н. Разысканіе интеграловъ, общихъ задачамъ о равновѣсіи гибкой нерастяжимой нити VI, 203—224. Note sur le problème du mouvement d'un point matériel attiré par deux centres fixes en raison inverse du carré de la distance VII, 1—3. Изслѣдованія по теоріи уравненій съ частными производными перваго порядка одной неизвѣстной функціи IX, 60—292.

Сикора І. І. Объ измѣненіи діаметра солнца въ зависимости отъ явленій, наблюдаемыхъ на его поверхности V. 81—88.

Синцовъ Д. М. Къ теоріи коннексовъ. VIII, 210—281.

Сомовъ П. О. О деформаціи коллинеарно-измѣняемой системы трехъ измѣреній. 86, II, 74—94.

Стекловъ В. А. Объ интерполированіи нѣкоторыхъ произведеній I, 239—248. О движеніи тяжелаго твердаго тѣла въ жидкости II, 209—235. О движеніи тяжелаго твердаго тѣла въ жидкости (статья вторая) II, 236—244. Одна задача изъ теоріи упругости III, 1—34. О равновѣсіи упругихъ цилиндровъ III, 42—93. О высшихъ и низшихъ предѣлахъ вещественныхъ корней алгебраическихъ уравненій и ихъ отдѣленіи III, 103—125. О равновѣсіи упругихъ тѣлъ вращенія III, 173—251 О движеніи твердаго тѣла въ жидкости III, 263—264. Дополненіе къ сочиненію „о движеніи твердаго тѣла въ жидкости" IV, 161—164. О разложеніи данной функціи въ рядъ по гармоническимъ функціямъ V, 60—73. Одинъ случай движенія вязкой несжимаемой жидкости V, 101—124. Задача объ охлажденіи неоднороднаго твердаго стержня V, 136—181. Къ вопросу о существованіи конечной и непрерывной внутри данной области функціи координатъ, удовлетворяющей уравненію Лапласа при заданныхъ значеніяхъ ея нормальной производной на поверхности, ограничивающей область. V, 255—286. О разложеніи данной функціи въ рядъ по гармоническимъ функціямъ VI, 57—124. Sur le problème de la distribution de l'éléctricité VI, 154—159. Къ задачѣ о равновѣсіи упругихъ изотропныхъ цилиндровъ VI, 160—193. Remarques relatives aux formules sommatoires d'Euler et de Boole VIII, 136—195.

Тихомандрицкій М. А. Замѣтка о введеніи Θ—функцій въ теорію эллиптическихъ функцій 83, I, 47—67. Выводъ основныхъ предложеній теоріи эллиптическихъ интеграловъ независимо отъ канонической формы подрадикальной функціи 83, II, 79—94. Обращеніе эллиптическихъ интеграловъ 84, III, 187—196. Отчетъ о занятіяхъ въ Лейпцигѣ 85, I, I—XXII (приложеніе). Отдѣленіе алгебраической части гиперэллиптическихъ интеграловъ 85, II, 99—114. Къ теоріи радіуса кривизны 86, I, 33—41. Разность n—аго порядка логариѳмической функціи 86, I, 42—44. Разысканіе особыхъ точекъ плоскихъ алгебрагическихъ кривыхъ II, 114—128. Разложеніе тригонометрическихъ и эллиптическихъ функцій на частныя дроби и въ безконечныя произведенія. II 166—208. О присоединенныхъ функціяхъ третьяго рода V, 182—189. Карлъ Вейерштрассъ, рѣчь, произнесенная въ засѣданіи математическаго общества 28 февраля 1897 года VI, 35—56. Нѣсколько словъ объ Эваристѣ Галуа. VI, 125—128. Е. И. Фонъ-Бейеръ (некрологическій очеркъ) VII, 20—22. Обращеніе въ нуль Θ—функцій многихъ независимыхъ перемѣнныхъ VII, 38—43. Sur la formule de Stokes VII, 284—286.

Торопов К. А. Интегрированіе нѣкоторыхъ обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій 84, III, 199—213. Объ интегрированіи въ конечномъ видѣ одного класса дифференціаловъ 85, I, 3—27. Объ одномъ преобразованіи гиперэллиптическихъ интеграловъ I, 82—103.

Флоровъ П. С. Замѣтка объ уравненіи $y''-(\alpha e^x+2)\ y'+y=0$ 83, II, 127—128. Объ условіяхъ интегрируемости уравненія $u'''+x^m u=0$ 83, II, 129—133. Объ уравненіяхъ Рикатти 84, I, 5—36. Къ интегрированію линейныхъ дифференціальныхъ уравненій 84, II, 143—177.

Объ уравненіи $\frac{d^n u}{dx^n} = x^m u$ 85, II, 131—154. Приложеніе основныхъ формулъ теоріи междупредѣльнаго дифференцированія къ суммованію безконечныхъ рядовъ 86, I, 3—14. Замѣтка о частныхъ интегралахъ одного линейнаго дифференціальнаго уравненія 86, I, 31—32. Объ интегрирующемъ множителѣ линейныхъ дифференціальныхъ уравненій 87, I, 47—51. Объ уравненіи $\frac{d^n \omega}{d\xi^n} = e^{\xi}\omega$. 87, II, 81—140.

Фроловъ О. П. Замѣтка объ одномъ вопросѣ графическаго исчисленія 80, I, 36—43.

Чебышевъ П. Л. О приближенныхъ выраженіяхъ однихъ интеграловъ черезъ другіе, взятые въ тѣхъ же предѣлахъ 82, II, 93—98.

Шиффъ В. І. Объ осяхъ симметріи центральныхъ кривыхъ четвертаго порядка III, 163—172.

Приложеніе II.

Составъ распрядительнаго Комитета Общества.

Предсѣдатели:

Е. И. Бейеръ съ 1879 по 1880 и съ 1883 по 1884
В. Г. Имшенецкій съ 1880 по 1883.
К. А. Андреевъ съ 1884 по 1899.
А. М. Ляпуновъ съ 1899 по 1902.
В. А. Стекловъ съ 1902 по 1906 г.

Товарищи предсѣдателя:

В. Г. Имшенецкій съ 1879 по 1880.
Д. М. Деларю съ 1879 по 1880 и съ 1882 по 1885.
М. Ѳ. Ковальскій съ 1880 по 1882 и съ 1884 по 1885.
К. А. Андреевъ съ 1880 по 1884.
М. А. Тихомандрицкій съ 1885 по 1891 и съ 1896 по 1902.
Г. В. Левицкій съ 1885 по 1886.
В. Л. Кирпичевъ съ 1886 по 1896.
А. М. Ляпуновъ съ 1891 по 1899.
В. А. Стекловъ съ 1899 по 1902.
Л. О. Струве съ 1902 по 1903.
В. П. Алексѣевскій съ 1903 по 1905.

А. П. Грузинцевъ съ 1903.
Д. М. Синцовъ съ 1905.

Секретари:

К. А. Андреевъ съ 1879 по 1880.
Г. В. Левицкій съ 1880 по 1881.
А. П. Грузинцевъ съ 1881 по 1883 и съ 1884 по 1891.
М. А. Тихомандрицкій съ 1883 по 1884.
В. А. Стекловъ съ 1891 по 1899.
А. П. Пшеборскій съ 1899.

Приложеніе III.

Члены учредители математическаго общества.

К. А. Андреевъ.
† Е. И. Бейеръ.
† Д. М. Деларю.
† В. Г. Имшенецкій.
† М. Ѳ. Ковальскій.
† Ю. И. Морозовъ.
А. П. Шимковъ.

Почетные члены общества.

Appell P. академикъ съ 1903 г.
Андреевъ К. А. проф. Моск. унив. съ 1899.
Бобылевъ Д. К. проф. С.П.Б. унив. съ 1897.
† Бредихинъ Ѳ. А. академикъ съ 1891 по 1904.
† Бугаевъ Н. В. проф. Моск. унив. съ 1893 по 1903.
† Буняковскій В. Я. академикъ въ 1888.
Ермаковъ В. П. проф. унив. св. Владиміра съ 1901.
Жуковскій Н. Е. проф. Моск. унив. съ 1897.
† Имшенецкій В. Г. академикъ съ 1888 по 1892.
† Коркинъ А. Н. проф. С.П.Б. унив. съ 1897 по 1908.
Ляпуновъ А. М. академикъ съ 1902.
Марковъ А. А. академикъ съ 1902.
Picard E. академикъ съ 1903.
Poincaré H. академикъ съ 1903.
Поссе К. А. засл. проф. С.П.Б. унив. съ 1902.
Тихомандрицкій М. А. засл. проф. Харьк. унив. съ 1902.
† Чебышевъ П. Л. академикъ съ 1888 по 1894.

Приложеніе IV.

Списокъ обществъ и учрежденій, въ которыя высылаются изданія общества въ даръ или въ обмѣнъ.

А) Русскія.

Варшава:

1) университетъ.
2) политехническій институтъ.
3) редакція журнала „Prace matematyczno—fizyczne".

Владиміръ губернскій:

1) общественная библіотека.

Екатеринославъ:

1) высшее горное училище.

Казань:

1) университетъ.
2) студенческая библіотека университета.
3) физико-математическое общество.

Кіевъ:

1) университетъ.
2) студенческая библіотека университета
3) политехническій институтъ.
4) физико-математическое общество.

Москва:

1) университетъ.
2) студенческая библіотека университета.
3) астрономическая обсерваторія.
4) Императорское общество испытателей природы.
5) физическая секція общества любителей естествознанія.
6) математическое общество.
7) политехническое общество.

Нижній-Новгородъ:

1) кружокъ любителей физики и астрономіи.

Николаевъ, Херсонской губерніи:

1) общественная библіотека.

Новая Александрія:

1) сельско-хозяйственный институтъ.

Одесса:

1) общество естествоиспытателей.

2) редакція журнала „Вѣстникъ опытной физики и элементарной математики“.

С.-Петербургъ:

1) Императорская академія наукъ.
2) университетъ
3) технологическій институтъ.
4) институтъ инженеровъ путей сообщенія.
5) высшіе женскіе курсы.
6) Императорская публичная библіотека.
7) русское физико-химическое общество.
8) русское астрономическое общество.
9) механическій кабинетъ университета.

Полтава:

1) кружокъ любителей физики и математики.

Тифлисъ:

1) канцелярія попечителя учебнаго округа.

Томскъ:

1) технологическій институтъ.

Харьковъ:

1) университетъ.
2) студенческая библіотека университета.
3) технологическій институтъ.
4) общественная библіотека.

Юрьевъ, Лифляндской губерніи.

1) астрономическая обсерваторія.

В) Иностранныя.

Австро-Венгрія:

1) *Вѣна*: редакція журнала „Monatshefte für Mathematik und Physik“.

Бельгія:

1) *Льежъ* Société Royale des sciences.

Великобританія:

1) *Эдинбургъ* Mathematical society.

Германія:

1) *Гёттингенъ* a) Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.
b) Universität, mathematisches Lesezimmer.
2) *Мюнхенъ*: Bayerische Akademie der Wissenschaften.
3) *Штутгартъ*: Mathematisch—naturwissenschaftlicher Verein in Württemberg.

Голландія:

Амстердамъ. Математическое Общество.

Италія:

1) *Болонья* Accademia Reale delle scienze dell'Istituto di Bologna.
2) *Ливорно* редакція журнала „Periodico di matematica".
3) *Неаполь* Accademia delle scienze fisiche e matematiche di Napoli.
4) *Палермо* Circolo matematico di Palermo.
5) *Римъ* Accademia Reale dei Lincei.
6) *Туринъ* Accademia Reale delle scienze di Torino.

Португалія:

1) *Опорто*: редакція журнала „Jornal di sciencias mathematicas e astronomicas".

Сѣверо-Американскіе Соединенные Штаты:

1) *Балтимора* редакція журнала „American journal of mathematics".
2) *Вашингтонъ*: a) Smithsonian Institution.
b) Naval observatory.
3) *Канзасъ* редакція „Kansas University Quarterly".
4) *Кембриджъ* редакція журнала „Annals of mathematics".
5) *Нью-Іоркъ*: American mathematical society.

Франція:

1) *Бордо* Société des sciences physiques et naturelles.
2) *Парижъ* Société mathématique de France.
3) *Тулуза* редакція журнала „Annales de la Faculté des sciences de Toulouse".

Приложеніе Г.

Число членовъ, докладовъ и докладчиковъ съ 1879 по 1904 г.

Акад. года	Число дѣйствит. членовъ	Число поч. членовъ		Число член. корреспонд.		Число докладчиковъ			% активн. член.		Число докладовъ
		Рус.	Иностр.	Рус.	Иностр.	Дѣйс. член.	Член. кор. и поч.	Постор. лицъ.	Дѣйств.	Почетн. и кор.	
$18^{79}/_{80}$	23	—	—	—	—	6	—	5	26,1%	—	19
$18^{80}/_{81}$	25	—	—	—	—	6	—	2	24%	—	19
$18^{81}/_{82}$	27	—	—	—	—	5	—	2	18,5%	—	12
$18^{82}/_{83}$	29	—	—	—	—	5	—	6	17,2%	—	18
$18^{83}/_{84}$	31	—	—	—	—	6	—	7	19,3%	—	26
$18^{84}/_{85}$	33	—	—	—	—	5	—	2	15,2%	—	16
$18^{85}/_{86}$	38	—	—	—	—	6	—	3	15,8%	—	16
$18^{86}/_{87}$	39	—	—	—	—	5	—	6	12,8%	—	13
$18^{87}/_{88}$	38	—	—	—	—	5	—	4	13,2%	—	11
$18^{88}/_{89}$	43	8	—	3	—	6	1	1	13,9%	9%	18
$18^{89}/_{90}$	43	8	—	3	—	6	1	1	13,9%	9%	14
$18^{90}/_{91}$	43	8	1	2	—	6	1	4	13,9%	9%	16
$18^{91}/_{92}$	44	8	1	3	—	4	2	4	9%	16,6%	16
$18^{92}/_{93}$	46	8	1	3	—	5	—	2	10,8%	0%	14
$18^{93}/_{94}$	48	9	1	3	—	5	1	2	10,4%	7,7%	15
$18^{94}/_{95}$	49	10	—	2	—	8	—	2	16,3%	0,%	20
$18^{95}/_{96}$	49	10	—	2	—	4	1	—	8,2%	8,3%	10
$18^{96}/_{97}$	49	8	—	5	—	5	1	1	10,2%	7,7%	15
$18^{97}/_{98}$	50	8	—	5	—	7	2	2	14%	15,4%	14
$18^{98}/_{99}$	50	9	—	6	—	5	—	—	10%	0%	9
$18^{99}/_{900}$	51	9	—	6	—	7	1	1	13,7%	6,7%	12
$190^{0}/_{1}$	50	9	—	6	—	4	—	1	8%	0%	9
$190^{1}/_{2}$	50	7	4	10	—	9	1	1	18%	4,8%	13
$190^{2}/_{3}$	50	7	4	10	—	6	1	—	12%	4,8%	15
$190^{3}/_{4}$	50	7	6	9	3	4	1	—	8%	4%	10

Докладчики и число сдѣланныхъ ими докладовъ располагаются въ слѣдующемъ порядкѣ: В. А. Стекловъ сдѣлалъ 28 докладовъ, А. П. Грузинцевъ—38, К. А. Андреевъ—32, А. М. Ляпуновъ—27, М. А. Тихомандрицкій—24, В. П. Алексѣевскій—21, М. Ѳ. Ковальскій—19, П. С. Флоровъ—15, В. Г. Имшенецкій—13, Г. В. Левицкій—12. А. А. Марковъ—11, I. I. Сикора—9, Н. Н. Салтыковъ и М. Н. Лагутинскій по 8, Д. А. Граве—7, В. П. Ермаковъ и А. П. Пшеборскій по 6, Н. В. Бугаевъ—4; по 3 доклада сдѣлали: Е. И. Бейеръ, А. В. Гречаниновъ, Н. Д. Пильчиковъ, И. Л. Пташицкій, по 2: Аршауловъ, Д. М. Деларю, Н. Н. Евдокимовъ, А. А. Клюшниковъ, М. С. Косенко, Д. Д. Мордухай-Болтовской, П. А. Некрасовъ, П. М. Новиковъ, А. Е. Рейнботъ, О П. Фроловъ, г. Хатпъ; наконецъ по одному докладу сдѣлали: Д. К. Бобылевъ, А. И. Богуславскій, Б. Я. Букрѣевъ, А. С. Веребрюсовъ, С. Ѳ. Влезковъ, Г. Ѳ. Вороной, г. Гинзбургъ, Х. С. Головинъ, проф. J. Graindorge, г. Гусаковскій, Н. Е. Жуковскій, г. Звенигородскій, И. И. Ивановъ, г. Козловъ, Г. В. Колосовъ, A. Kneser, А. Н. Коркинъ. И. Е. Кортацци, М. П. Косачъ, г. Лерхъ, И. В. Мещерскій, г. Муравьевъ, К. А. Поссе, г. Постоевъ, А. А. Радцигъ, П. Н. Рахмановъ, г. Рудановскій, Д. М. Синцовъ, П. О. Сомовъ, К. Стефаносъ, К. А. Тороповъ, П. Л. Чебышевъ, И. К. Шейдтъ, В. I. Шиффъ, г. Шумигорскій.

Проф. А. П. Пшеборскій.

Харьковъ. Тип. „Печатное Дѣло". Конторская, Клещевскій пер.—3.