ЖС-55507уг К-583
91

Communications de la Société mathématique de Kharkow.
2-ème série, Tome XII, № 1.

СООБЩЕНІЯ
ХАРЬКОВСКАГО
МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА.

ВТОРАЯ СЕРІЯ.

Томъ XII.

№ 1.

ХАРЬКОВЪ.
Типографія и Литографія М. Зильбербергъ и С-вья.
Донецъ-Захаржевская ул., с. д. № 6.
1910.

92
58

Communications de la Société mathématique de Kharkow.
2-ème série, Tome XII,

СООБЩЕНІЯ
ХАРЬКОВСКАГО
МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА.

ВТОРАЯ СЕРІЯ.

Томъ XII.

ne-635042

K-583

Науково-Дослідний Інститут
БІБЛІОТЕКА
Інв. № 579
Математики і Механіки ХДУ

65
Н

ХАРЬКОВЪ.
Типографія и Литографія М. Зильбербергъ и С-вья.
Донецъ-Захаржевская ул., с. д. № 6.
1911.

СОДЕРЖАНІЕ:

XII-го тома.

Стр.

Составъ Харьковскаго Математическаго Общества на 1-е октября 1911 года.

* *Бернштейнъ, С. Н.* О приближенномъ вычисленіи вѣроятностей по формулѣ Лапласа . . . . . 106—110

Грузинцевъ, А. П. Электронная теорія въ оптикѣ . . . 47—64

Грузинцевъ, А. П. Преобразованіе Лоренца и принципъ относительности . . . . . 269—288

* *Грузинцевъ, Г. А.* Теорема относительно непрерывныхъ функцій . . . . . 70—73

Лагутинскій, М. Н. Приложеніе полярныхъ операцій къ интегрированію обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій въ конечномъ видѣ . . . . . 111—243

Синцовъ, Д. М. Къ вопросу объ особенныхъ элементахъ коннекса. Ст. III и IV . . . . . 1—18 и 74—105

* *Тамаркинъ, І. Д.* Приложеніе методы фундаментальныхъ функцій къ изслѣдованію дифференц. уравненія колебанія упругихъ стержней . . . . . 19—46

* *Тамаркинъ, І. Д.* Прибавленіе къ статьѣ «Приложеніе методы и проч.» . . . . . 65—69

* *Фридманъ, А. А.* О разысканіи частныхъ рѣшеній уравненія Лапласа . . . . . 244—268

Протоколы засѣданій Харьковскаго Матем. Общества 1909—1911 гг. и отчетъ за $190^{9}/_{10}$ и $19^{10}/_{11}$ гг. . . . . 289—301

Приложенія: *Б. И. Кудревичъ*: Результаты наблюденій надъ горизонтальными маятниками на Харьковской астрономической обсерваторіи въ 1909 году (Конспектъ доклада) . . 301—302

Г. А. Грузинцевъ. О преподаваніи тригонометріи въ средней школѣ . . . . . 302—306

Заглавіе, отмѣченное *, является переводомъ заглавія оригинала.

TABLE DES MATIÈRES

du tome XII.

Pag.

Liste des membres de la Société Mathématique de Kharkow au 1. X. 1911 . . . . . 307—311

* Etudes sur les éléments singuliers du connexe. III. par M. *D. Sintsof* . . . . . 1—18

Application de la méthode des fonctions fondamentales à l'étude de l'équation différentielle des verges vibrantes élastiques, par M. *I. Tamarkine* . . . . . 19—46

* Les électrons dans l'optique, par M. *A. Grousinzeff* . 47—64

Addition à l'article intitulé: «Application de la méthode etc». par M. *I. Tamarkine* . . . . . 65—69

Un théorème sur les fonctions continues par M. *G. Grousinzeff* . . . . . 70—73

* Etudes sur les éléments singuliers du connexe IV. Théorie du connexe conjugué, par M. *D. Sintsof* . . . . . 74—105

Sur le calcul approché des probabilités par la formule de Laplace par M. *S. Bernstein* . . . . . 106—110

* Application des opérations polaires à l'intégration des équations différ. ordinaires sous forme finie par M. *M. Lagoutinsky* . . . . . 111—243

Sur la recherche des solutions particulières de l'équation de Laplace, par M. *A. Friedman* . . . . . 244—268

* Sur le principe de relativité et la transformation de H. Lorentz, par M. *A. Grousinzeff* . . . . . 269—288

* Procès verbaux des séances de la Société Mathématique de Kharkow en $19^{9}/_{10}$—$19^{10}/_{11}$ et les comptes rendus pour ces années . . . . . 289—301

* *Appendice*. Résultats des observations sur les pendules horizontaux à l'observatoire astronomique de Kharkow en 1909, par M. *B. Koudrewitch* (résumé) . . . . . 301—302

Sur l'enseignement de la trigonométrie, par M. *G. Grousinzeff* . . . . . 302—306

Les titres marqués d'un astérisque présentent la traduction des titres originaux.

СОСТАВЪ

Харьковскаго Математическаго Общества

къ 1-му Октября 1911 года.

A. Распорядительный комитетъ.

1. Предсѣдатель: проф. Д. М. Синцовъ.
2. Товарищи предсѣдателя: проф. А. П. Грузинцевъ и проф. Ц. К. Руссьянъ.
3. Секретарь: проф. А. П. Пшеборскій.

B. Почетные члены.

1. Андреевъ Константинъ Алексѣевичъ, засл. проф. Московскаго унив.
2. Бобылевъ Дмитрій Константиновичъ, проф. СПБ. унив.
3. Грузинцевъ Алексѣй Петровичъ, проф. Харьк. унив.
4. Ермаковъ Василій Петровичъ, засл. проф. унив. св. Владиміра.
5. Жуковскій Николай Егоровичъ, засл. проф. Московскаго унив.
6. Ляпуновъ Александръ Михайловичъ, академикъ.
7. Марковъ Андрей Андреевичъ, академикъ.
8. Поссе Константинъ Александровичъ, засл. проф. СПБ. элек.-техн. инст.
9. Стекловъ Владиміръ Андреевичъ, проф. СПБ. унив., адъюнктъ академіи.
10. Тихомандрицкій Матвѣй Александровичъ, засл. проф. Харьк. унив.
11. Appel Paul, проф. Парижскаго унив., академикъ.
12. Cantor Georg, проф. университета Halle.
13. Darboux Gaston, академикъ Парижъ.
14. Darwin G. H., профессоръ Университета, Кембриджъ.
15. Dini Ulisse, профессоръ Университета, Пиза.
16. Hilbert David, проф. университета Göttingen.
17. Jordan Camille, членъ Института, Парижъ.
18. Klein Felix, проф. университета Göttingen,
19. Mittag-Leffler, Gösta, проф. университета Stockholm.
20. Painlevé Paul, членъ Института, Парижъ,
21. Picard Emile, проф. Парижскаго Университета, академикъ.
22. Poincaré Henri, проф. Парижскаго Университета, академикъ.
23. Volterra Vito, профессоръ Университета, Римъ.
24. Zeuthen N. G., профессоръ Университета, Копенгагенъ.

С. Дѣйствительные члены.

1. Аксюкъ Екатерина Павловна, препод-ца 2-й Харьк. женск. гимн.
2. Алексѣевскій Владиміръ Петровичъ, проф. Томскаго техн. инст.
3. Альбицкій Василій Ивановичъ, проф. Харьк. техн. инст.
4. Бернштейнъ Сергѣй Натановичъ, прив-доц. Харьк. универс.
5. Бураковъ Григорій Ѳедотовичъ, ад.-проф. Харьк. техн. инст.
6. Бутовъ Василій Васильевичъ, преп. гимн. 2-ой гр. препод.
7. Бѣляевъ Николай Павловичъ, стипендіатъ универс.
8. Веребрюсовъ Александръ Степановичъ, бывш. преп. Староб. гимн.
9. Виноградовъ Иванъ Александровичъ, бывш. дир. Харьк. ком. учил.
10. Вольскій Степанъ Петровичъ, преп. Харьк. 3-й гимн.
11. Гохманъ Владиміръ Соломоновичъ, окончившій ф.-м. факультетъ.
12. Граве Дмитрій Александровичъ, проф. унив. св. Владиміра.
13. Гречаниновъ Алексѣй Васильевичъ, б. проф. Харьк. техн. инст.
14. Гриненко Ник. Петровичъ, преп. 1-го Харьк. реальн. учил.
15. Грицай Алексѣй Сергѣевичъ, директ. Сумского реальн учил.
16. Грузинцевъ Григорій Алексѣевичъ, стипендіатъ университета.
17. Даватцъ Владиміръ Христіановичъ, окончившій ф.-м. факультетъ.
18. Денченко Сергѣй Георгіевичъ, содерж. частн. учебн. завед. 1-го разр.
19. Дробязко Михаилъ Павловичъ, преп. 1-го Харьк. реальн. учил.
20. Евдокимовъ Николай Николаевичъ, прив.-доц. Харьк. унив.
21. Епифановъ Федоръ Филипповичъ, лаборантъ университета.
22. Ерохинъ Петръ Михайловичъ, стипендіатъ университета.
23. Запорожецъ Леонидъ Григорьевичъ, преп. Харьк. коммерч. учил.
24. Зворыкинъ Константинъ Алексѣевичъ, бывш. дир. Кіев. полит. инст.
25. Зерновъ Дмитрій Степановичъ, дир. СПБ. техн. института.
26. Ивицкій Е. П., преп. частной гимн. Давыдсенко.
27. Кирпичевъ Викторъ Львовичъ, проф., СПБ.
28. Кирьяковъ Иванъ Аѳанасьевичъ, преп. 3-й Харьк. гимн.
29. Киселевъ Андрей Петровичъ, преп. Воронж. кадет. корпуса.
30. Клюшниковъ Александръ Андреевичъ, преп. 1-й Харьк. гимн.
31. Кнаббе Владиміръ Сергѣевичъ, проф. Харьк. техн. инст.
32. Косенко Михаилъ Семеновичъ, бывш. преп. Харьк. 4-й гимн.
33. Кудревичъ Борисъ Ивановичъ, ассист. Харьк. астр. обсерв.
34. Кутневичъ Дмитрій Андреевичъ, директ. 2-го Харьк. реальн. учил.
35. Лагутинскій Михаилъ Николаевичъ, прив.-доц. Харьк. унив.
36. Латышевъ Григорій Алексѣевичъ, проф. Харьк. техн. инст.
37. Левицкій Григорій Васильевичъ, попеч. Варшавск. учебн. окр.
38. Маевскій Андрей Васильевичъ, дир. Курск. реальн. учил.
39. Малышевъ Николай Ивановичъ, преп. гимн. Шиловой.
40. Мартосъ Б. Н.

41. Марчевская Елена Николаевна, преп. женск. коммер. уч. Орловской.
42. Марчевскій Михаилъ Николаевичъ, окончившій ф.-м. факультетъ.
43. Марцелли Александръ Ивановичъ, преп. 1-й Харьк. гимн.
44. Михайловскій Болеславъ Григорьевичъ, б. преп. Харьк. реальн. учич.
45. Мощенко Василій Николаевичъ, преп. Харьк. коммер. учил.
46. Мухачевъ Петръ Матвѣевичъ, директ. Харьк. техн. инст.
47. Назаревскій Яковъ Михайловичъ, преп. частной гимн.
48. Нечаевъ Александръ Ивановичъ, преп. гимн. Шиловой.
49. Педаевъ Дмитрій Кондратьевичъ, ассистентъ метеор. станціи.
50. Петренко Георгій Ивановичъ, прив.-доц. Харьк. унив.
51. Погорѣлко Александръ Константиновичъ, б. проф. Харьк. техн. инст.
52. Подпрятовъ Николай Михайловичъ.
53. Подтягинъ Николай Евгеньевичъ, стипендіатъ Харьк. университета.
54. Пономаревъ Ростиславъ Дмитріевичъ, преп. 1-й Харьк. гимн.
55. Проскурниковъ Николай Васильевичъ, б. преп. Харьк. реальн. учил.
56. Пшеборскій Антонъ Павловичъ, проф. Харьк. универс.
57. Радцигъ Александръ Александровичъ, проф. Кіевск. полит. инст.
58. Раевскій Сергѣй Александровичъ, б. попеч. Харьк. учебн. округа.
59. Рейнботъ Александръ Евгеньевичъ, б. стипендіатъ Харьк. унив.
60. Речинскій Чеславъ Владиславовичъ, преп. частн. реальн.уч.Буракова.
61. Рудневъ Петръ Матвѣевичъ, б. дир. Урюп. реальн. учил.
62. Руссьянъ Цезарь Карловичъ, проф. Харьк. унив.
63. Салтыковъ Николай Николаевичъ, проф. Харьк. унив.
64. Самецкій Рафаилъ Николаевичъ, дир. Усть-Медвѣдицкаго р. учил.
65. Семилѣтовъ Сергѣй Матвѣевичъ, лабор. и ассист. метеор. обсерв.
66. Сикора Іосифъ Іосифовичъ, астрономъ Пулковской обсерваторіи.
67. Синцовъ Дмитрій Матвѣевичъ, проф. Харьк. универ.
68. Синяковъ Германъ Аѳанасьевичъ, преп. 2-й Харьк. гимн.
69. Сонцевъ Андрей Александровичъ, преп. 2-го Харьк. реальн. учил.
70. Струве Людвигъ Оттовичъ, проф. Харьк. унив.
71. Студенцовъ Веніаминъ Александровичъ, дир. 1-го Харьк. р. учил.
72. Тимоѳеевъ Гавріилъ Ефимовичъ, прив.-доц. Харьк. унив.
73. Фесенко Валерій Михайловичъ, преп. 1-й женск. гимн.
74. Флавицкій Николай Михайловичъ, бывш. лабор. Харьк. унив.
75. Флоровъ Петръ Степановичъ, директ. Урюпин. реальн. учич.
76. Шепелевъ Павелъ Васильевичъ, преп. Харьк. технол. инст.
77. Шимковъ Андрей Петровичъ, засл. проф. Харьк. унив.
78. Шиховъ Василій Васильевичъ, окружн. инсп. Харьк. учебн. округа.
79. Штукаревъ Иванъ Дмитріевичъ, бывш. преп. 2-й Харьк. гимн.
80. Чернай Николай Андреевичъ, проф. Харьк. техн. инст.

D. Члены корреспонденты:

a) русскіе.

1. Васильевъ Александръ Васильевичъ, засл. проф. Казанскаго унив.
2. Егоровъ Дмитрій Өеодоровичъ, проф. Московскаго унив.
3. Колосовъ Гурій Васильевичъ, проф. Юрьевскаго унив.
4. Котельниковъ Александръ Петровичъ, проф. Казанскаго унив.
5. Лахтинъ Леонидъ Кузьмичъ, проф. Московскаго унив.
6. Мещерскій Иванъ Всеволодовичъ, проф. СПБ. политехн. инст.
7. Млодзѣевскій Болеславъ Корнеліевичъ, засл. проф. Моск. унив.
8. Некрасовъ Павелъ Алексѣевичъ, членъ совѣта М. Н. П.
9. Пташицкій Иванъ Львовичъ, проф. СПБ. унив.
10. Сомовъ Павелъ Осиповичъ, бывш. проф. Варшавскаго унив.
11. Тороповъ Константинъ Александровичъ, преп. Таганр. техн. учил.
12. Чаплыгинъ Сергѣй Алексѣевичъ, дир. Моск. высш. женск. курсовъ.

b) иностранные.

1. Arzelà, Cesare, проф. унив., Болонья.
2. Borel, Emile, проф. унив., Парижъ.
3. Cosserat Eugène, проф. Тулузскаго унив.
4. Enriques Federico, проф., Болонья.
5. Favaro Antonio, проф., Падуя.
6. Fehr Henri, проф., редакторъ „Enseignement mathématique“, Женева.
7. Forsyth Alfred Russel, проф., Кэмбриджъ.
8. Fredholm Ivar, проф., Стокгольмъ.
9. Goursat, Edouard, проф., Парижъ.
10. Greenhill A. G., проф., Лондонъ.
11. Hadamard Joseph, проф. въ Сорбоннѣ, Парижъ.
12. Holmgren Erik, проф., Упсала.
13. Hurwitz Adolf, проф. политехникума въ Цюрихѣ.
14. Kneser Adolf, проф. Бреславскаго унив.
15. Korn Arthur, проф. Мюнхенскаго унив.
16. Laisant, C. A., редакторъ „Intermédiaire des Math.“, „Nouv. Annales de Math.“ etc.
17. Levi-Civita Tullio, проф. унив. Падуя.
18. Lindelöf Ernst, проф. Гельсингфорсъ.
19. Loria Gino, проф. Генуя.
20. Maggi Gian Antonio, проф., Пиза.
21. Osgood W. F. проф., Кембриджъ (Масс.).
22. Runge Carl, проф., Гётингенъ.
23. Schlesinger Ludwig, проф. унив., Гиссенъ.
24. Teixeira, Gomes, проф. и дир. полит. инст., Опорто.
25. Zaremba S. проф. Краковскаго унив.

Къ вопросу объ особенныхъ элементахъ коннекса.[1]

III. Пониженіе порядка и класса сопряженнаго пространственнаго коннекса благодаря наличности нѣкоторыхъ особенностей.

Д. М. Синцова.

1. Полученные для плоскостного коннекса (См. Сообщ. Х. М. О. (2) X n⁰ 5—6) результаты непосредственно распространяются на пространственный коннексъ съ элементомъ (точка, плоскость).

Чтобы опредѣлить *порядокъ* коннекса, сопряженнаго коннексу:

$$f(x,\ u) = 0 \tag{1}$$

должны найти число элементовъ его, которыхъ точки лежатъ на данной прямой $(U,\ U')$ и которыхъ плоскости даны (или проходятъ черезъ три данныя точки: $X,\ X',\ X''$).

Это даетъ, что уравненіе $\sum y_i f'_x = 0$ должно удовлетвориться при замѣнѣ y черезъ $X,\ X',\ X''$:

$$\sum X f'_x = 0 \quad \sum X' f'_x = 0 \quad \sum X'' f'_x = 0 \tag{$2_{1,2,3}$}$$

и уравненіе $\sum v f'_u = 0$ (3) при замѣнѣ v на U и U':

$$\sum U f'_u = 0 \quad \sum U' f'_u = 0 \tag{$3_{1,2}$}$$

Но при этомъ совмѣстность (1) и $(2_{1,2,3})$ требуетъ, чтобы выполнялось условіе

$$(x X X' X'') = 0$$

и такимъ образомъ число искомыхъ элементовъ сопряженнаго коннекса равно числу элементовъ $(x,\ u)$ даннаго, которые выполняютъ уравненія (2), (3) и (4). По извѣстной формулѣ число элементовъ пересѣченія трехъ коннексовъ $(m-1,\ n)$, двухъ $(m,\ n-1)$ и одного $(1,\ 0)$ будетъ

[1]) Доложено на XII съѣздѣ Р. Ест. въ Москвѣ 31. XII. 1909 г.

$$3(m-1)^2n(n-1)^2+6m(m-1)n^2(n-1)+m^2n^3=n[m^2n^2+$$
$$+6nm(m-1)(n-1)+3(m-1)^2(n-1)^2],$$

формула, полученная мною въ 1894 г. [1]) и M. Stuyvaert'омъ [2]) въ 1900.

Двойственнымъ образомъ, чтобы опредѣлить *классъ* сопряженнаго коннекса мы будемъ искать число тѣхъ его элементовъ, которыхъ точка дана, а плоскость проходитъ черезъ данную прямую. Такъ какъ точка сопряженнаго коннекса, принадлежащая элементу, соотвѣтствующему (x, u), опредѣляется уравненіемъ (3), то должны быть даны *три* плоскости U, U', U'', которыя черезъ нее проходятъ, что даетъ:

$$\sum Uf'_u=0,\ \sum U'f'_u=0,\ \sum U''f'_u=0 \qquad (5_{1,2,3})$$

Совмѣстность этихъ уравненій съ (1) требуетъ чтобы было выполнено уравненіе

$$(uUU'U'')=0 \qquad (6)$$

которое показываетъ что точка элемента сопряженнаго коннекса лежитъ въ плоскости u соотвѣтственнаго элемента исходнаго коннекса.

Плоскость элемента опредѣляется уравненіемъ

$$\sum yf'_x=0 \qquad (7)$$

она проходитъ черезъ данную прямую, если она проходитъ черезъ двѣ данныя точки X, X':

$$\sum X'f'_x=0,\ \sum X'f'_x=0. \qquad (7_{1,2})$$

Принимая въ уравненіяхъ $(5_{1,2,3})$, (6), $(7_{1,2})$ данными X, X', U, U', U'' получимъ шесть уравненій, опредѣляющихъ тѣ элементы коннекса (1), которымъ соотвѣтствуютъ элементы сопряженнаго, удовлетворяющіе требуемымъ условіемъ; число ихъ:

$$m^3n^2+6m^2(m-1)n(n-1)+3m(m-1)^2(n-1)^2=$$
$$=m[m^2n^2+6mn(m-1)(n-1)+3(m-1)^2(n-1)^2].$$

2. Мы можемъ оцѣнить теперь вліяніе на порядокъ и классъ сопряженнаго коннекса наличности въ исходномъ коннексѣ основной точки или плоскости.

Напомнимъ опредѣленіе: мы называемъ основною точкою такую точку $x_{осн}$, подстановка координатъ которой въ уравненіе коннекса обра-

---

[1]) Теорія коннексовъ въ пространствѣ. Уч. Зап. Казан. Унив. 1894.

[2]) Recherches relatives aux connexes de l'espace. Belg. Mém. t. 61. 1902.

щаетъ его въ тожество, независимо отъ значеній u. Въ силу этого не только

$$f(x_{\text{осн}}, u) = 0,$$

но и

$$f'_{u_i}(x_{\text{осн}}, u) = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Поэтому, если въ уравненія, опредѣляющія *классъ* сопряженнаго коннекса, подставить $x = x_{\text{осн}}$, то $(5_{1,2,3})$ обратятся въ тожество, и останутся уравненія (6) и $(7_{1,2})$:

$$(uUU'U'') = 0, \ \sum Xf'_x(x_{\text{осн}}, u) = 0, \ \sum X'f(x_{\text{осн}}, u) = 0$$

которыя даютъ n^2 значеній u, зависящихъ отъ U, U' и U'' только тѣмъ, что онѣ проходятъ черезъ точку (U, U', U''). Слѣдовательно, какія бы плоскости этой связки ни брать, всегда эти значенія u будутъ одинаковы, поэтому эти рѣшенія суть постороннія и должны быть отброшены. Напротивъ подставляя координаты основной точки въ систему $(2_{1,2,3})$, $(3_{1,2})$ и (4), получимъ:

$$\sum Xf'_x(x_{\text{осн}}, u) = 0, \ \sum X'f'_x(x_{\text{осн}}, u) = 0, \ \sum X''f'_x(x_{\text{осн}}, u) = 0$$

$$(x_{\text{осн}}XX'X'') = 0$$

послѣднее вообще невозможно, и эта система такимъ образомъ неудовлетворяется при произвольно выбранныхъ $XX'X''$ никакими значеніями u.

Итакъ: *I. Основная точка понижаетъ классъ сопряженнаго коннекса на n^2 единицъ и не оказываетъ вліянія на его порядокъ.*

Двойственно, предполагая, что коннексъ (1) имѣетъ *основную* плоскость $u_{\text{осн}}$ и подставляя въ тѣ же системы, изъ (2), (3), (4) получимъ—такъ какъ для основной плоскости не только $f(x, u_{\text{осн}}) = 0$, но и $f'_{x_i}(x, u_{\text{осн}}) = 0$ $(i = 1, 2, 3, 4)$:

$$(xXX'X'') = 0, \ \sum Uf'_u(x, u_{\text{осн}}) = 0, \ \sum U'f'_u(x, u_{\text{осн}}) = 0$$

—три уравненія, имѣющія m^2 общихъ рѣшеній; подставляя въ (5) (6) $(7_{1,2})$ получимъ пять уравненій:

$$\sum Uf'_u(x, u_{\text{осн}}) = 0, \ \sum U'f'_u(x, u_{\text{осн}}) = 0, \ \sum U''f'_u(x, u_{\text{осн}}) = 0, \ (uUU'U') = 0$$

вообще несовмѣстныхъ (4-е не выполняется).

Итакъ: *II. Основная плоскость понижаетъ порядокъ сопряженнаго коннекса на m^2 единицъ, а классъ оставляетъ безъ измѣненія.*

3. Собственно—особенныхъ элементовъ коннексъ (1) вообще не имѣетъ. Для этого должно быть выполнено восемь уравненій

$$\left.\begin{aligned} f'_{x_i} &= 0 \ (i = 1,\ 2,\ 3,\ 4) \\ f'_{u_k} &= 0 \ (k = 1,\ 2,\ 3,\ 4) \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

независимыхъ между которыми только *семь*, ибо $mf \equiv \sum x_i f'_{x_i}$ и $nf \equiv \sum u_u f'_{u_k}$ и такимъ образомъ если первые четыре уравненія выполнены, то и $\sum u_k f'_{u_k} = 0$, такъ что необходимо ввести еще лишь три уравненія $f'_{u_k} = 0$. Исключеніе 6 неизвѣстныхъ изъ 7 уравненій даетъ одно соотношеніе между коэффиціентами (1).

Пусть (1) имѣетъ одинъ собственно—особенный элементъ. Обращаясь снова къ системамъ $(2_{1,2,3})$, $(3_{1,2})$, (4) и $(5_{1,2,3})$, (6), $(7_{1,2})$ подставимъ въ тѣ и другія уравненія координаты этого собственно-особеннаго элемента. Тогда замѣтимъ, что $(2_{1,2,3})$, $(3_{1,2})$, (5) и $(7_{1.2})$ удовлетворятся, но (4) и (6) примутъ видъ

$$(x_{\text{с.о.}} XX'X'') = 0, \ (u_{\text{с.о.}} UU'U'') = 0$$

и вообще говоря не удовлетворяются.

Такимъ образомъ нельзя произвольно задаться плоскостью или точкою элемента сопряженнаго коннекса, такъ чтобы при существованіи собственно-особеннаго элемента этотъ послѣдній находился въ числѣ тѣхъ элементовъ даннаго коннекса, которые при этомъ даютъ соотвѣтственные элементы сопряженнаго.

Отсюда: *III. Существованіе въ данномъ коннексѣ одного* (или нѣсколькихъ) *собственно-особенныхъ элементовъ не оказываетъ вліянія на порядокъ и классъ сопряженнаго ему коннекса.*

3. Пусть далѣе 8 уравненій (8) имѣютъ ∞^1 общихъ рѣшеній, т. е. коннексъ (1) имѣетъ пару (кривая дв. кр., развертывающаяся пов.) собственно-особенныхъ элементовъ. Тогда мы можемъ доказать теорему:

IV. Если коннексъ (1) обладаетъ парою (кривая дв. кривизны, развертывающаяся поверхность) собственно особенныхъ элементовъ порядка μ и класса ν, то порядокъ его понижается на μ единицъ, а классъ на ν единицъ.

Дѣйствительно система (2), (3), (4) при этомъ удовлетворяется μ элементами собственно-особенными, коихъ точки лежатъ въ плоскости $(XX'X'')$, а система (5), (6), $(7_{1,2})$ — ν элементами, коихъ плоскости проходятъ черезъ точку $(UU'U'')$ и которые, какъ несобственные элементы пересѣченія, должны быть отброшены.

4. Пусть коннексъ (1) имѣетъ пару поверхностей собственно-особенныхъ элементовъ, которая пусть является, какъ пересѣченіе четырехъ коннексовъ

$$\varphi_j = 0 \ (j = 1,\ 2,\ 3,\ 4) \ldots (k_j,\ \varkappa_j)$$

$$f'_{x_i} = \sum_{j=1}^{j=4} A_j^{(i)} \varphi_j,\ f'_{u_i} = \sum B_j^{(i)} \varphi_j$$

здѣсь:

$A_j^{(i)}$ — порядка $m - k_i - 1$ и класса $n - \varkappa_i$

$B_j^{(i)}$ „ $m - k_i$ „ $n - \varkappa_i - 1$

Порядокъ, рангъ и классъ пары поверхностей выразятся:

$$\mu' = \sum k_1 \varkappa_2 \varkappa_3 \varkappa_4,\ \varrho' = \sum k_1 k_2 \varkappa_3 \varkappa_4 \text{ и } \nu' = \sum k_1 k_2 k_3 \varkappa_4$$

Четыре коннекса изъ пяти [(2), (3) или (5), ($7_{1,2}$)] напр. $\sum X f'_x = 0$ $\sum X' f'_x = 0$ $\sum U f'_u = 0$ $\sum U' f'_u = 0$ имѣютъ, кромѣ этой пары, еще дополнительную общую пару поверхностей, которой порядокъ, рангъ и классъ суть:

$$\mu'_1 - \mu' = 2(m-1)n(n-1)^2 + 2mn^2(n-1) - \mu' = 2n(n-1)\{mn + (m-1)(n-1)\} - \mu'$$

$$\varrho'_1 - \varrho' = (m-1)^2(n-1)^2 + 4m(m-1)n(n-1) + m^2n^2 - \varrho'$$

$$\nu'_1 - \nu' = 2m(m-1)\{mn + (m-1)(n-1)\} - \nu'.$$

Опредѣляя порядокъ сопряженнаго коннекса, мы къ четыремъ выписаннымъ коннексамъ добавляемъ пятый $\sum X'' f'_x = 0$, а опредѣляя классъ—добавляемъ $\sum U'' f'_u = 0$.

Порядокъ 1-й пары: $(\varrho'_1 - \varrho')n + (\mu'_1 - \mu')(m-1)$,

классъ ея $(\nu'_1 - \nu')n + (\varrho'_1 - \varrho')(m-1)$.

Для 2-й порядокъ $(\varrho'_1 - \varrho')(n-1) + (\mu'_1 - \mu')m$,

классъ: $(\mu'_1 - \mu')(n-1) + (\varrho'_1 - \varrho')m$.

Но въ составъ этой пары входятъ еще лишніе элементы, которые должны быть отброшены,—а именно пересѣченіе дополнительной пары поверхностей съ парою собственно особенныхъ элементовъ,—которая представляетъ также пару (кривая дв. кр., разверт. пов.) и опредѣляется уравненіями:

$$\varphi_1 = 0, \varphi_2 = 0, \varphi_3 = 0, \varphi_4 = 0, \begin{vmatrix} A_X^{(1)} & A_X^{(2)} & A_X^{(3)} & A_X^{(4)} \\ A_{X'}^{(1)} & A_{X'}^{(2)} & A_{X'}^{(3)} & A_{X'}^{(4)} \\ U_{B^{(1)}} & U_{B^{(2)}} & U_{B^{(3)}} & U_{B^{(4)}} \\ U'_{B^{(1)}} & U'_{B^{(2)}} & U'_{B^{(3)}} & U'_{B^{(4)}} \end{vmatrix} \equiv (A_X^{(1)} A_{X'}^{(2)} U_{B^{(3)}}\ U_{B^{(4)}}) = 0$$

какъ пересѣченіе коннексовъ $(k_1, \varkappa_1)$, $(k_2, \varkappa_2)$, $(k_3, \varkappa_3)$, $(k_4, \varkappa_4)$ и $(4m - 2 - \sum k,\ 4n - 2 - \sum \varkappa)$, эта пара имѣетъ порядокъ и классъ соотв. равные:

$$(4m - 2 - \sum k)\mu' + (4n - 2 - \sum \varkappa)\varrho',$$

$$(4m - 2 - \sum k)\varrho' + (4n - 2 - \sum \varkappa)\nu'.$$

Отнимая эти числа, мы получимъ порядокъ и классъ искомой пары:

$$\mu'' = (\varrho'_1 - \varrho')n + (\mu'_1 - \mu')(m-1) - (4m - 2 - \sum k)\mu' - (4n - 2 - \sum \varkappa)\varrho',$$

$$\nu'' = (\nu'_1 - \nu')(n-1) + (\varrho'_1 - \varrho')m - (4m - 2 - \sum k)\varrho' - (4n - 2 - \sum \varkappa)\nu'.$$

Такимъ образомъ окончательно, порядокъ сопряженнаго коннекса:

$$m'' = n\{(m-1)^2(n-1)^2 + 4m(m-1)n(n-1) + m^2n^2 - \varrho'\}$$

$$+ (m-1)[2n(n-1)\{mn + (m-1)(n-1)\} - \mu']$$

$$- (4m-2)\mu' - (4n-2)\varrho' + \mu'\sum k + \varrho'\sum \varkappa =$$

$$= n\{m^2n^2 + 6m(m-1)n(n-1) + 3(n-1)^2(m-1)^2\}$$

$$- (5n-2)\varrho' - (5m-3)\mu' + \mu'\sum k + \varrho'\sum \varkappa$$

и подобнымъ образомъ, классъ его:

$$n' = m\{m^2n^2 + 6m(m-1)n(n-1) + 3(m-1)^2(n-1)^2\}$$

$$- (5m-2)\varrho' - (5n-3)\nu' + \varrho'\sum k + \nu'\sum \varkappa.$$

Итакъ: *V. Если коннексъ (1) имѣетъ* ∞^2 *собственно особенныхъ элементовъ, образующихъ пару поверхностей, которую можно разсматривать какъ полное пересѣченіе 4 коннексовъ* $(k_1, \varkappa_1)\ldots(k_4, \varkappa_4)$ *то пониженіе порядка сопряженнаго коннекса выразится:*

$$\Delta m' = (5m-3)\mu' + (5n-2)\varrho' - \mu'\sum k - \varrho'\sum \varkappa$$

и

$$\Delta n' = (5m-2)\varrho' + (5n-3)\nu' - \varrho'\sum k - \nu\sum \varkappa$$

5. Пусть коннексъ (1) имѣетъ ∞^3 собственно-особенныхъ элементовъ, образующихъ бикоинциденцію, которую можно разсматривать какъ пересѣченіе трехъ коннексовъ

$\varphi = 0$, $\psi = 0$, $\chi = 0$ соотв. порядковъ и классовъ $(k_1, \varkappa_1)$, $(k_2, \varkappa_2)$ и $(k_3, \varkappa_3)$ такъ, что

$$f'_{x_i} = A_i\varphi + B_i\psi + C_i\chi,$$

$$f'_{u_i} = A'_i\varphi + B'_i\psi + C'_i\chi;$$

въ дальнѣйшемъ поэтому:

A_X и $A_{X'}$ суть формы $(m-k_1-1, n-\varkappa_1)$; $U_{A'}$ и $U'_{A'}$—$(m-k_1, n-\varkappa_1-1)$

B_X и $B_{X'}$ „ „ $(m-k_2-1, n-\varkappa_2)$; $U_{B'}$ и $U'_{B'}$—$(m-k_2, n-\varkappa_2-1)$

C_X и $C_{X'}$ „ „ $(m-k_3-1, n-\varkappa_3)$; $U_{C'}$ и $U'_{C'}$—$(m-k_3, n-\varkappa_3-1)$

Чтобы вычислить проистекающее отсюда пониженіе порядка сопряженнаго коннекса, разсмотримъ сначала четыре коннекса

$$(A)\quad \begin{cases} \sum Xf'_x \equiv A_X\varphi + B_X\psi + C_X\chi = 0 & (m-1,\ n) \\ \sum X'f'_x \equiv A_{X'}.B + \varphi_{X'}.\psi + C_{X'}.\chi = 0 & (m-1,\ n) \\ \sum Uf'_u \equiv U_{A'}\varphi + U_{B'}.\psi + U_{C'}\chi = 0 & (m,\ n-1) \\ \sum U'f'_u \equiv U'_{A'}\varphi + U'_{B'}.\psi + U'_{C'}\chi = 0 & (m,\ n-1) \end{cases}$$

Эти коннексы, кромѣ общей бикоинциденціи, имѣютъ еще общую пару поверхностей.

Порядокъ этой послѣдней опредѣлится такъ: первые три коннекса имѣютъ кромѣ ($\varphi = 0,\ \psi = 0,\ \chi = 0$) еще дополнительную общую бикоинциденцію съ характеристиками, которыя мы изобразимъ обычной символикой (см. моя Теорія коннексовъ въ пространствѣ гл. I) въ видѣ одной формулы

$$[m(m-1)^2 - k_1k_2k_3]p^3 +$$
$$\{[(m-1)^2(n-1) + 2(m-1)mn] - [k_1k_2\varkappa_3 + k_1\varkappa_2k_3 + \varkappa_1k_2k_3]\}p_2e +$$
$$\{[mn^2 + 2(m-1)n(n-1)] - k_1\varkappa_2\varkappa_3 + k_2\varkappa_3\varkappa_1 + k_3\varkappa_1\varkappa_2]\}pe^2 +$$
$$+ [n^2(n-1) - \varkappa_1\varkappa_2\varkappa_3]e^3.$$

Двѣ эти бикоинциденціи имѣютъ общую пару поверхностей, опредѣляемую уравненіями

$$\varphi = 0,\ \psi = 0,\ \chi = 0,\ (A_XB_{X'}U_{C'}) = 0,$$

гдѣ послѣдній коннексъ—$(3m - 2 - \sum k,\ 3n - 1 - \sum \varkappa)$. Эта пара опредѣлится характеристическимъ выраженіемъ:

$$p^3e[k_1k_2k_3(3n - 1 - \sum\varkappa) + (3m - 2 - \sum k)\sum k_1k_2\varkappa_3] +$$
$$+ p^2e^2[(3n - 1 - \sum\varkappa)\sum k_1k_2\varkappa_3 + (3n - 2 - \sum k)\sum k_1\varkappa_2\varkappa_3] +$$
$$+ pe^3[(3n - 1 - \sum\varkappa)\sum k_1\varkappa_2\varkappa_3 + (3m - 2 - \sum k)\varkappa_1\varkappa_2\varkappa_3].$$

четвертый коннексъ пересѣкаетъ вышеупомянутую бикоинциденцію по парѣ съ характеристиками

$$\{(m(m-1)^2 - k_1k_2k_3)(n-1) + [(m-1)^2(n-1) + 2mn(m-1) - \sum k_1k_2\varkappa_3]m\}p^3e$$
$$+ \{[mn^2 + 2n(n-1)(m-1) - \sum k_1\varkappa_2\varkappa_3]m + [(m-1)^2(n-1) + 2mn(m-1) -$$
$$- \sum k_1k_2\varkappa_3](n-1)\}p^2e^2 +$$
$$+ \{[mn^2 + 2n(n-1)(m-1) - \sum k_1\varkappa_2\varkappa_3](n-1) + [n^2(n-1) - \varkappa_1\varkappa_2\varkappa_3]m\}pe^3,$$

въ составъ которой входитъ указанная выше общая пара двухъ бикоинциденцій.

Взявъ разность соотвѣтствующихъ характеристическихъ чиселъ, получимъ характерическія числа для пары

$$\xi_2 e^2 = [m(m-1)^2 - k_1k_2k_3](n-1) + [(m-1)^2(n-1) + 2mn(m-1) -$$
$$-\sum k_1k_2\varkappa_3]m - (3m-1-\sum\varkappa)k_1k_2k_3 - (3m-2-\sum k)\sum k_1k_2\varkappa_3 =$$
$$= 2m(m-1)\{mn + (m-1)(n-1)\} - 2(2n-1)k_1k_2k_3 -$$
$$2(2m-1)\sum k_1k_2\varkappa_3 + k_1k_2k_3\sum\varkappa + \sum k.\sum k_1\varkappa_2\varkappa_3;$$
$$\xi_2.pe = [m^2n^2 + 4m(m-1)n(n-1) + (m-1)^2(n-1)^2] -$$
$$-2(2n-1)\sum k_1k_2\varkappa_3 - 2(2m-1)\sum k_1\varkappa_2\varkappa_3 + \sum\varkappa.\sum k_1k_2\varkappa_3 + \sum k.\sum k_1\varkappa_2\varkappa_3;$$
$$\xi_2.p^2 = 2n(n-1)\{mn + (m-1)(n-1)\} - 2(2n-1)\sum k_1\varkappa_2\varkappa_3 -$$
$$-2(2m-1)\varkappa_1\varkappa_2\varkappa_3 + \sum\varkappa.\sum k_1\varkappa_2\varkappa_3 + \varkappa_1\varkappa_2\varkappa_3\sum k.$$

Пересѣченіе этой пары съ коннексомъ

$$0 = \sum X''f'_x \equiv A_{X''}.\varphi + B_{X''}.\psi + C_{X''}\chi$$

или съ коннексомъ

$$0 = \sum U''f'_u \equiv U''_{A'}.\varphi + U''_{B'}.\psi + U''_{C'}.\chi$$

слагается во первыхъ изъ пересѣченія съ этою парою бикоинциденціи $\varphi = 0$, $\psi = 0$, $\chi = 0$ собственно-особенныхъ элементовъ, что̀ даетъ пару (кривая дв. кр., развертывающаяся пов.), и во вторыхъ изъ остаточной такой же пары, которая и есть собственно главное, что̀ намъ нужно.

Для первой опредѣлимъ характеристическія числа такъ. Беремъ пересѣченіе бикоинциденціи собственно-особенныхъ элементовъ $\varphi = 0, \psi = 0, \chi = 0$

съ конициденціею $(A_XB_{X'}U_{C'}) = 0$, $(A_XB_{X'}U'_{C'}) = 0$

—пересѣченія двухъ коннексовъ $(3m-2-\sum k,\ 3n-1\sum\varkappa)$.

При этомъ въ послѣднюю однако дважды входитъ и потому должна быть одинъ разъ отброшена коинциденція

$$A_XB'_X - B_XA_{X'} = 0 \quad A_XC_{X'} - C_XA_{X'} = 0$$

—ибо для ея элементовъ $\frac{A_X}{A_{X'}} = \frac{B_X}{B_{X'}} = \frac{C_X}{C_{X'}}$ и оба опредѣлителя 3-го порядка обращаются въ нуль; нужно однако еще добавить дважды приэтомъ отброшенную коинциденцію

$$A_X = 0,\ A_{X'} = 0$$

— пересѣченіе двухъ коннексовъ $(m-k_1-1,\ n-\varkappa_1)$. Характеристическая формула первой коинциденціи

$$[(3m-2-\sum k)p+(3n-1-\sum\varkappa)e]^2\equiv p^2(3m-2-\sum k)^2+$$
$$+2(3m-2-\sum k)(3n-1-\sum\varkappa)pe+(3n-1-\sum\varkappa)^2)e^2$$

для второй (отбрасываемой):

$$(2m-1-k_1-k_2)(2m-2-k_1-k_3)p^2+$$
$$+[(2m-2-k_1-k_2)(2n-\varkappa_1-\varkappa_3)+(2m-2-k_1-k_3)(2n-\varkappa_1-\varkappa_2)]pe$$
$$+(2n-\varkappa_1-\varkappa_2)(2n-\varkappa_1-\varkappa_3)e^2,$$

для третьей—прибавляемой—

$$(m-k_1-1)^2p^2+2(m-k_1-1)(n-\varkappa_1)pe+(n-\varkappa_1)^2e^2.$$

Въ итогѣ надо искать пару пересѣченія бикоинциденціи собственно-особенныхъ элементовъ съ коинциденціей, которой характеристическія числа суть:

$$\alpha=(3m-2-\sum k)^2-(2m-2-k_1-k_2)(2m-2-k_1-k_3)+$$
$$+(m-k_1-1)^2=(6m^2-6m+1)-2(2m-1)\sum k+(\sum k)^2-\sum k_1k_2;$$
$$\beta=2(3m-2-\sum k)(3n-1-\sum\varkappa)-(2m-2-k_1-k_2)(2n-\varkappa_1-\varkappa_3)-$$
$$-(2m-2-k_1-k_3)(2n-\varkappa_1-\varkappa_2)+2(m-k_1-1)(n-\varkappa_1)=$$
$$=2(6mn-3m-3n+2)-2(2n-1)\sum k-2(2m-1)\sum\varkappa$$
$$+\sum k.\sum\varkappa+\sum k\varkappa;$$
$$\gamma=(3n-1-\sum\varkappa)^2-(2n-\varkappa_1-\varkappa_2)(2n-\varkappa_1-\varkappa_3)+(n-\varkappa_1)^2$$
$$=6n^2-6n+1-2(2n-1)\sum\varkappa+(\sum\varkappa)^2-\sum\varkappa_1\varkappa_2.$$

характеристическое выраженіе этой коинциденціи поэтому

$$\xi_1=\alpha.p^2+\beta.pe+\gamma.e^2$$

характеристическая же формула для бикоинциденціи собственно-особенныхъ элементовъ

$$p^3k_1k_2k_3+p^2e.\sum k_1k_2\varkappa_3+pe^2.\sum k_1\varkappa_2\varkappa_3+e^3x_1x_2\varkappa_3$$

Перемноживъ ихъ получимъ характеристическую формулу искомой пары (кривая дв. кр., разверт. пов.):

$$\xi_3=p^3e^2[\alpha\sum k_1\varkappa_2\varkappa_3+\beta.\sum k_1k_2\varkappa_3+\gamma k_1k_2k_3]+$$
$$+p^2e^3[\alpha\varkappa_1\varkappa_2\varkappa_3+\beta\sum k_1\varkappa_2\varkappa_3+\gamma.\sum k_1k_2\varkappa_3].$$

Теперь мы можемъ уже приступить къ опредѣленію порядка и класса сопряженнаго коннекса; для этого пару (A) нужно пересѣчь коннексомъ $(m-1, n)$: $\sum X''f'_x = 0$ и для опредѣленія его остаточной пары отнять только что вычисленную; добавивъ сюда уравненіе $(xXX'X'') = 0$ и получимъ искомый порядокъ. Это доставитъ

$$\xi_2.[(m-1)p + n.e].p = \xi_2.p^2.(m-1) + \xi_2.pe.n =$$
$$= (m-1)[2n(n-1)\{mn + (m-1)(n-1)\} - 2(2n-1)\sum k_1\varkappa_2\varkappa_3 -$$
$$- 2(2m-1)\varkappa_1\varkappa_2\varkappa_3 + \sum\varkappa.\sum k_1\varkappa_2\varkappa_3 + \varkappa_1\varkappa_2\varkappa_3\sum k] + n[m^2n^2 + 4mn(m-1)(n-1) +$$
$$+ (m-1)^2(n-1)^2 - 2(2n-1)\sum k_1k_2\varkappa_3 - 2(2m-1)\sum k_1\varkappa_2\varkappa_3 + \sum k_1k_2\varkappa_3\sum\varkappa +$$
$$+ \sum k.\sum k_1\varkappa_2\varkappa_3]$$

и отсюда надо отнять только что найденное число

$$\alpha\varkappa_1\varkappa_2\varkappa_3 + \beta\sum k_1\varkappa_2\varkappa_3 + \gamma\sum k_1k_1\varkappa_3;$$

это доставитъ

$$m' = n[m^2n^2 + 6m(m-1)n(n-1) + 3(m-1)^2(n-1)^2]$$
$$-(10m^2 - 12m + 3)\varkappa_1\varkappa_2\varkappa_3 - 2(10mn - 4m - 6n + 3)\sum k_1\varkappa_2\varkappa_3$$
$$-(10n^2 - 8n + 1)\sum k_1k_2\varkappa_3 + (5m-3)(\varkappa_1\varkappa_2\varkappa_3\sum k + \sum k_1\varkappa_2\varkappa_3\sum\varkappa)$$
$$+ (5n-2)(\sum k\sum k_1\varkappa_2\varkappa_3 + \sum\varkappa.\sum k_1k_2\varkappa_3)$$
$$-\sum k_1k_2\varkappa_3(\sum\varkappa^2 + \sum\varkappa_1\varkappa_2) - \sum k_1\varkappa_2\varkappa_3(\sum k.\sum\varkappa + \sum k\varkappa)$$
$$-(\sum k^2 + \sum k_1k_2)\varkappa_1\varkappa_2\varkappa_3.$$

Сюда можно было бы ввести сокращенныя обозначенія для характеристическихъ чиселъ бикоинциденціи собственно особенныхъ элементовъ:

VI. Если

$$\mu_1 = k_1k_2k_3,\ \varrho_1 = \sum k_1k_2\varkappa_3,\ \lambda_1 = \sum k_1\varkappa_2\varkappa_3,\ \nu_1 = \varkappa_1\varkappa_2\varkappa_3,$$

то пониженіе порядка сопряженнаго коннекса благодаря наличности въ данномъ такой бикоинциденціи собственно-особенныхъ элементовъ, которая можетъ быть опредѣлена, какъ полное пересѣченіе трехъ коннексовъ $(k_1, \varkappa_1)$, $(k_2, \varkappa_2)$, $(k_3, \varkappa_3)$, *таково:*

$$-\Delta m' = (10m^2 - 12m - 3)\nu_1 + 2(10mn - 6n - 4m + 3)\lambda_1 +$$
$$+ (10n^2 - 8n + 1)\varrho_1 - (5m-3)(\nu_1\sum k + \lambda_1\sum\varkappa)$$
$$-(5n-2)(\lambda_1\sum k + \varrho_1\sum\varkappa) + \varrho_1(\sum\varkappa^2 + \sum\varkappa_1\varkappa_2)$$
$$+ \lambda_1(\sum k.\sum\varkappa + \sum k\varkappa) + \nu_1(\sum k^2 + \sum k_1k_2).$$

Для опредѣленія *класса* сопряженнаго коннекса къ уравненіямъ (A) этого параграфа присоединяемъ уравненіе $(m, n-1)$: $\sum U''f'_u = 0$ и ищемъ

затѣмъ тѣ элементы полученной такимъ образомъ пары (кривая дв. кр., разв. пов.), уменьшенной на выше вычисленную лишнюю пару, которыхъ плоскости выполняютъ условіе $(uUU'U'') = 0$.

Имѣемъ такимъ образомъ во-первыхъ

$$\xi_2(m.p + (n-1)e)e = \xi_2 pe.m + \xi_2 e^2(n-1)$$

и отсюда отнимаемъ

$$\alpha\sum k_1\varkappa_2\varkappa_3 + \beta\sum k_1k_2\varkappa_3 + \gamma k_1k_2k_3.$$

Такимъ образомъ получимъ

$$\begin{aligned} n' = [&m^2n^2 + 4mn(m-1)(n-1) + (m-1)^2(n-1)^2 - 2(2n-1)\sum k_1k_2\varkappa_3 \\ &- 2(2m-1)\sum k_1\varkappa_2\varkappa_3 + \sum\varkappa.\sum k_1k_2\varkappa_3 + \sum k\sum k_1\varkappa_2\varkappa_3]m + \\ &+ [2m(m-1)\{mn + (m-1)(n-1)\} - 2(2n-1)k_1k_2k_3 - 2(2m-1)\sum k_1k_2\varkappa_3 \\ &+ k_1k_2k_3\sum\varkappa + \sum k.\sum k_1\varkappa_2\varkappa_3].(n-1) \\ &- \alpha\sum k_1\varkappa_2\varkappa_3 - \beta\sum k_1k_2\varkappa_3 - \gamma k_1k_2k_3 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} n' = m[&m^2n^2 + 6m(m-1)n(n-1) + 3(m-1)^2(n-1)^2] \\ &- (10mn - 4n - 6m + 3)\varrho_1 - (10m^2 - 8m + 1)\lambda_1 - (10n^2 - 12n + 3)\mu_1 \\ &+ (5m-2)(\lambda_1\sum k + \varrho_1\sum\varkappa) + (5n-3)(\mu_1\sum\varkappa + \varrho_1\sum k) \\ &- \lambda_1(\sum k^2 + \sum k_1k_2) - \varrho_1(\sum k.\sum\varkappa + \sum\varkappa k) - \mu_1(\sum\varkappa^2 + \sum\varkappa_1\varkappa_2) \end{aligned}$$

Такимъ образомъ: *VII. Пониженіе класса выразится:*

$$\begin{aligned} -\Delta n' = &(10m^2 - 8m + 1)\lambda_1 + (10mn - 4n - 6m + 3)\varrho_1 + (10n^2 - 12n + 3)\mu_1 \\ &- (5m-2)(\lambda_1\sum k + \varrho_1\sum\varkappa) - (5n-3)(\mu_1\sum\varkappa + \varrho_1\sum k) \\ &+ \lambda_1(\sum k^2 + \sum k_1k_2) + \varrho_1(\sum k\sum\varkappa + \sum k\varkappa) + \mu_1(\sum\varkappa^2 + \sum\varkappa_1\varkappa_2). \end{aligned}$$

6. Пусть теперь коннексъ имѣетъ ∞^4 собственно-особенныхъ элементовъ, образующихъ коинциденцію, которую можно разсматривать какъ полное пересѣченіе двухъ коннексовъ $\varphi = 0$, $\psi = 0$ (a)
соотв. $(k, \varkappa)$, $(k', \varkappa')$. Тогда пусть

$$(i = 1, 2, 3, 4) \quad \begin{aligned} f'_{xi} &= A_i\varphi + B_i\psi \\ f'_{ui} &= C_i\varphi + D_i\psi \end{aligned} \qquad \text{(b)}$$

Здѣсь A_i суть $(m-1-k, n-\varkappa)$, B_i суть $(m-1-k', n-\varkappa')$, C_i суть $(m-k, n-\varkappa-1)$, D_i суть $(m-k', n-\varkappa'-1)$

Составляемъ снова сначала

$$(A_1)\begin{cases} \sum Xf'_x \equiv A_X\varphi + B_X\psi = 0 & (m-1,\ n) \\ \sum X'f'_x \equiv A_{X'}\varphi + B_{X'}\psi = 0 & (m-1,\ n) \\ \sum Uf'_u \equiv U_C\varphi + U_D\psi = 0 & (m,\ n-1) \\ \sum U'f'_u \equiv U'_C\varphi + U'_D\psi = 0 & (m,\ n-1) \end{cases}$$

Эти четыре коннекса, кромѣ коинциденціи $\varphi=0$, $\psi=0$ имѣютъ еще общую пару поверхностей. Для опредѣленія ея порядка и класса замѣтимъ, что два первые, кромѣ коинциденціи $\varphi=0$, $\psi=0$ порядка kk'_1, класса $\varkappa\varkappa'$ и ранга $k\varkappa'+k'\varkappa$, имѣютъ еще добавочную коинциденцію общую—порядка $(m-1)^2-kk'$, ранга $2(m-1)n-(k\varkappa'+k'\varkappa)$ и класса $n^2-\varkappa\varkappa'$. Съ коинциденціей $\varphi=0, \psi=0$ эта коинциденція имѣетъ общую бикоинциденцію

$$\varphi=0,\ \psi=0,\ A_XB_{X'}-A_{X'}B_X=0\ (c).$$

Послѣдній коннексъ порядка $2m-k-k'-2$, класса $2n-\varkappa-\varkappa'$, и потому характеристическое выраженіе для этой бикоинциденціи:

$$\begin{gathered}\xi_3=(2m-2-k-k')kk'p^3+\\ +[(2m-2-k-k')(k\varkappa'+k'\varkappa)+(2n-\varkappa-\varkappa')kk']p^2e+\\ +[(2m-2-k-k')\varkappa\varkappa'+(2n-\varkappa-\varkappa'+(k\varkappa'+k'\varkappa)]pe^2+\\ +(2n-\varkappa-\varkappa')\varkappa\varkappa'e^3\end{gathered}$$

Если возьмемъ еще третій коннексъ, то его пересѣченіе съ двумя первыми, кромѣ общей коинциденціи, слагается изъ бикоинциденціи, которую получимъ, какъ пересѣченіе вышеуказанной дополнительной коинциденціи и этого 3-го коннекса, безъ бикоинциденціи (c).

Итакъ характеристическое выраженіе для остаточной бикоинциденціи

$$\begin{gathered}\xi'_3=\{[(m-1)^2-kk']p^2+[2(m-1)n-(k\varkappa'+k'\varkappa)]pe+\\ +(n^2-\varkappa\varkappa')e^2\}(mp+(n-1)e)-\xi_3.\end{gathered}$$

Произведя перемноженія, получимъ по приведеніи

$$\begin{gathered}\xi'_3=\{m(m-1)^2-(3m-2)kk'+(k+k')kk'\}p^3+\\ +\{(m-1)[(m-1)(n-1)+2mn]-(3n-1)kk'-(3m-2)(k\varkappa'+k'\varkappa)+\\ +(k+k')(k\varkappa'+k\varkappa')+(\varkappa+\varkappa')kk'\}p^2e+\{n[2(m-1)(n-1)+mn]-\\ -(3n-1)(k\varkappa'+k'\varkappa)-(3m-2)\varkappa\varkappa'+(k+k')\varkappa\varkappa'+(\varkappa+\varkappa')(k\varkappa'+k'\varkappa)\}pe^2\\ +\{n^2(n-1)-(3n-1)\varkappa\varkappa'+(\varkappa+\varkappa')\varkappa\varkappa'\}e^3 \qquad (d)\end{gathered}$$

Добавляемъ четвертый коннексъ $\sum U'f'_u=0$ порядка m и класса $n-1$. Кромѣ коинциденціи (a), онъ имѣетъ съ первыми тремя общую пару по-

верхностей, въ которую, какъ лишнее и подлежащее исключенію, входитъ пересѣченіе только что разсмотрѣнной остаточной бикоинцидеиціи (d) съ коинциденціей (a): эта пара поверхностей опредѣляется уравненіями

$$\varphi = 0,\ \psi = 0,\ A_X B_{X'} - A_{X'} B_X = 0,\ A_X U_D - B_X U_C = 0 \qquad \text{(e)}$$

но изъ нея надо отбросить еще пару:

$$\varphi = 0,\ \psi = 0,\ A_X = 0,\ B_X = 0 \qquad \text{(f)}$$

Такимъ образомъ эта пара опредѣляется, какъ пересѣченіе коинциденціи (a) съ характеристическимъ выраженіемъ:

$$\xi_1 = kk'.p^2 + (k\varkappa' + k'\varkappa).pe + \varkappa\varkappa'.e^2$$

и коинциденціи съ характеристическимъ выраженіемъ

$$\xi_1' = [(3m-1)(m-1) - (3m-2)(k+k') + (k^2 + kk' + k'^2)].p^2 +$$
$$+ [6mn - 2m - 4n + 2 - (3n-1)(k+k') - (3m-2)(\varkappa+\varkappa') +$$
$$+ 2(k+k')(\varkappa+\varkappa') - (k\varkappa' + k'\varkappa)]pe + [n(3n-2) - (3n-1)(\varkappa+\varkappa') +$$
$$+ \varkappa^2 + \varkappa\varkappa' + \varkappa'^2].e^2$$

Выраженіе характеристическое остаточной пары, о которой идетъ рѣчь, будетъ поэтому таково (пару (e)—(f] мы уже исключили):

$$\text{(g)}\ \xi_4 = p^3 e[2m(m-1)\{mn + (m-1)(n-1)\} - kk'(12mn - 6m - 6n + 4) -$$
$$- (k\varkappa' + k'\varkappa)(6m^2 - 6m + 1) + (4n-2)kk'(k+k') +$$
$$(4m-2)\{(k+k')(k\varkappa' + k'\varkappa) + kk'(\varkappa+\varkappa')\} - (k^2 + k'^2)(k\varkappa' + k'\varkappa) - 2kk'(\varkappa+\varkappa')(k+k')] +$$
$$p^2 e^2[m^2 n^2 + 4mn(m-1)(n-1) + (m-1)^2(n-1)^2 - kk'(6n^2 - 6n + 1) -$$
$$- (k\varkappa' + k'\varkappa)(12mn - 6m - 6n + 4) - \varkappa\varkappa'(6m^2 - 6m + 1) +$$
$$(4m-2)\{(k+k')\varkappa\varkappa' + (\varkappa+\varkappa')(k\varkappa' + k'\varkappa)\} + (4n-2)\{(k+k')(k\varkappa' + k'\varkappa) + kk'(\varkappa+\varkappa')\}$$
$$- kk'(\varkappa^2 + \varkappa\varkappa' + \varkappa'^2) - 2(k\varkappa' + k'\varkappa)(k+k')(\varkappa+\varkappa') - \varkappa\varkappa'(k' + kk' + k'^2) -$$
$$(k\varkappa' + k'\varkappa)^2] + pe^3[2m(n-1)\{mn + (m-1)(n-1)\} - \varkappa\varkappa'(12mn - 6m - 6n + 4)$$
$$- (k\varkappa' + k'\varkappa)(6n^2 - 6n + 1) + (4m-2)(\varkappa+\varkappa')\varkappa\varkappa' +$$
$$(4n-2)\{(k+k')\varkappa\varkappa' + (k\varkappa' + k'\varkappa)(\varkappa+\varkappa')\} - (k\varkappa' + k'\varkappa)(\varkappa^2 + \varkappa'^2) - 2\varkappa\varkappa'(\varkappa+\varkappa')(k+k')].$$

Для опредѣленія порядка и класса сопряженнаго коннекса нужно найти пересѣченіе этой остаточной пары съ характеристическимъ выраженіемъ (g) въ первомъ случаѣ съ коннексомъ $0 = \sum X'' f'_x \equiv A_{X''}.\varphi + B_{X''}.\psi$ и найти элементы, коихъ точки удовлетворяютъ условію $(xXX'X'') = 0$, а во второмъ—съ коннексомъ $0 = \sum U'' f_u \equiv U''_C.\varphi + U''_D.\varphi$ и найти тѣ эле-

менты, коихъ плоскости выполняютъ условію $(uUU'U'')=0$. Мы должны только при этомъ отъ получаемой пары (кривая дв. крив., развертыв. пов.) отбросить въ обоихъ случаяхъ такую же пару, по которой коинциденція $\varphi=0$, $\psi=0$ пересѣкается съ остаточной парой.

Послѣднее пересѣченіе мы опредѣляемъ основываясь на томъ соображеніи, что исключеніе φ и ψ изъ четырехъ уравненій (A_1) приводитъ къ шести уравненіямъ:

$$A_X B_{X'} - B_X A_{X'} = 0 \ldots (2m-k-k'-2,\ 2n-\varkappa-\varkappa')$$

$$A_X U_D - B_X U_C = 0 \ldots (2m-k-k'-1,\ 2n-\varkappa-\varkappa'-1)$$

$$A_X U'_D - B_X U'_C = 0 \ldots (2m-k-k'-1,\ 2n-\varkappa-\varkappa'-1)$$

$$A_{X'} U_D - B_{X'} U_C = 0 \ldots (2m-k-k'-1,\ 2n-\varkappa-\varkappa'-1)$$

$$A_{X'} U'_D - B_{X'} U'_C = 0 \ldots (2m-k-k'-1,\ 2n-\varkappa-\varkappa'-1)$$

$$U_C U'_D - U_D U'_C = 0 \ldots (2m-k-k,\ 2n-\varkappa-\varkappa'-1)$$

Независимыхъ между ними три. Возьмемъ 1-ое, 2-ое и 6-ое. Эти уравненія удовлетворятся при

$$A_X = 0 \quad B_X = 0, \quad U_C U'_D - U'_C U_D = 0$$

и при

$$A_X B_{X'} - B_X A_{X'} = 0, \quad U_C = 0, \quad U_D = 0$$

которые не обращаютъ въ тожества остальныя три уравненія; такимъ образомъ отъ бикоинциденціи, общей коннексамъ

$$(2m-k-k'-2,\ 2n-\varkappa-\varkappa'),\ (2m-k-k'-1,\ 2n-\varkappa-\varkappa'-1),$$
$$(2m-k-k',\ 2n-\varkappa-\varkappa'-2),$$

надо отнять бикоинциденцію, общую коннексамъ

$$(m-k-1,\ n-\varkappa),\ (m-k'-1,\ n-\varkappa'),\ (2m-k-k',\ 2n-\varkappa-\varkappa'-2)$$

и бикоинциденцію, общую коннексамъ

$$(m-k,\ n-\varkappa-1),\ (m-k',\ n-\varkappa'-1),\ (2m-k-k'-2,\ 2n-\varkappa-\varkappa').$$

Такимъ путемъ получимъ для пересѣченія коинциденціи (a) съ остаточной парой характеристическое уравненіе:

$$\xi'_5 = (kk'.p^2 + (k\varkappa' + k'\varkappa)pe + \varkappa\varkappa'.e^2) \times$$
$$[\{(2m-2-k-k')p + (2n-\varkappa-\varkappa').e\} \times$$

$$\{(2m-1-\varkappa-\varkappa')p+(2n-1-\varkappa-\varkappa')e\}.\{(2m-k-k')p+(2n-2-\varkappa-\varkappa')e\}$$
$$-\{(m-1-k).p-(n-\varkappa)e\}\{(m-1-k').p+(n-\varkappa')e\}\{(2m-k-k')p+$$
$$+(2n-2-\varkappa-\varkappa')e\}-\{(m-k)p+(n-1-\varkappa)e\}\{(m-k')p+(n-1-\varkappa')e\}$$
$$\times\{(2m-2-k-k')p+(2n-\varkappa-\varkappa')e\}]=$$
$$=\{kk'.p^2+(k\varkappa'+k'\varkappa).pe+\varkappa\varkappa'.e^2\}(\mu_2'.p^3+\lambda_2'p^2e+\varrho_2'.pe^2+\nu_2'.e^3)$$

гдѣ

$$\mu_2'=2m(m-1)(2m-1)-(k+k')(6m^2-6m+1)+$$
$$+(4m-2)(k^2+kk'+k'^2)-(k+k')(k^2+k'^2),$$

$$\lambda_2'=2n(6m^2-6m+1)-6m^2+8m-2-2(k+k')(6mn-3m-3n+2)$$
$$-(\varkappa+\varkappa')(6m^2-6m+1)+\{2(k+k')(\varkappa+\varkappa')-(k\varkappa'+k'\varkappa)\}(4m-2)+$$
$$(k^2+kk'+k'^2)(4n-2)-2(k+k')(k\varkappa+k'\varkappa')-(\varkappa+\varkappa')(k^2+k'^2).$$

$$\varrho_2'=2m(6n^2-6n+1)-6n^2+8n-2-(k+k')(6n^2-6n+1)-$$
$$-2(\varkappa+\varkappa')(6mn-3m-3n+2)+[2(k+k')(\varkappa+\varkappa')-(k\varkappa'+k'\varkappa)](4n-2)+$$
$$+(\varkappa^2+\varkappa\varkappa'+\varkappa'^2)(4m-2)-2(\varkappa+\varkappa')(k\varkappa+k'\varkappa)-(k+k')(\varkappa^2+\varkappa'^2)$$

$$\nu_2'=2n(n-1)(2n-1)-(\varkappa+\varkappa')(6n^2-6n+1)+$$
$$(\varkappa^2+\varkappa\varkappa'+\varkappa'^2)(4n-2)-(\varkappa+\varkappa')(\varkappa^2+\varkappa'^2).$$

Такимъ образомъ характеристическое выраженіе для подлежащей вычитанію пары

$$\xi_5'=p^3e^2[\mu_2'\varkappa\varkappa'+\lambda_2'(k\varkappa'+k'\varkappa)+\varrho_2'kk']+p^2e^3[\lambda_2'\varkappa\varkappa'+\varrho_2'(k\varkappa'+k'\varkappa)+\nu_2'kk']$$

здѣсь

$$\mu_2'\varkappa\varkappa'+\lambda_2'(k\varkappa'+k'\varkappa)+\varrho_2'kk'=\{2m(6n^2-6n+1)-(6n^2-8n+2)\}kk'+$$
$$+(k\varkappa'+k'\varkappa)\{2n(6m^2-6m+1)-(6m^2-8m+2)\}+2m(m-1)(2m-1)\varkappa\varkappa'$$
$$-(6m^2-6m+1)[(k+k')\varkappa\varkappa'+(k\varkappa'+k'\varkappa)(\varkappa+\varkappa')]-$$
$$(6n^2-6n+1)(k+k')kk'-2(6mn-3m-3n+2)[(k+k')(k\varkappa'+k'\varkappa)+kk'(\varkappa+\varkappa')]+$$
$$+(4m-2)[3(k\varkappa'+k'\varkappa)(k\varkappa+k'\varkappa')+(k\varkappa'+k'\varkappa)^2+2kk'\varkappa\varkappa']+$$
$$+(4n-2)[(k+k')^2(k\varkappa'+k'\varkappa)+2kk'(k\varkappa+k'\varkappa')]-$$
$$-[\{(k\varkappa'+k'\varkappa)(\varkappa+\varkappa')+(k+k')\varkappa\varkappa'\}(k^2+kk'+k'^2)+3kk'(k\varkappa^2+k'\varkappa'^2)].$$

$$\lambda_2\varkappa\varkappa'+\varrho_2'(k\varkappa'+k'\varkappa)+\nu_2'kk'=[2n(6m^2-6m+1)-6m^2+8m-2]\varkappa\varkappa'$$
$$+[2m(6n^2-6n+1)-6n^2+8n-2](k\varkappa'+k'\varkappa)+2n(n-1)(2n-1)kk'$$
$$-2(6mn-3m-3n+2)\{(k+k')\varkappa\varkappa'+(\varkappa+\varkappa')(k\varkappa'+k'\varkappa)\}-$$
$$-(6n^2-6n+1)((k\varkappa'+k'\varkappa)(k+k')+kk'(\varkappa+\varkappa'))-(6m^2-6m+1)(\varkappa+\varkappa')\varkappa\varkappa'+$$

$$+(4m-2)(k\varkappa'+k'\varkappa)(\varkappa+\varkappa')^2+2\varkappa\varkappa'(k\varkappa+k'\varkappa')\}+$$
$$+(4n-2)\{3(k\varkappa'+k'\varkappa)(k\varkappa+k'\varkappa')+(k\varkappa'+k'\varkappa)^2+2kk'.\varkappa\varkappa')$$
$$-[(k\varkappa'+k'\varkappa)\{(k+k')(\varkappa+\varkappa')^2+2(k\varkappa^2+k'\varkappa'^2)\}$$
$$+\varkappa\varkappa'(\{\varkappa+\varkappa')(k+k')^2+2(k^2\varkappa+k'^2\varkappa')\}+kk'(\varkappa+\varkappa')(\varkappa'+\varkappa'^2)].$$

Пересѣченіе остаточной пары съ характеристическимъ выраженіемъ

$$(g)\quad \xi_2=p^3e.\mu_2+p^2e^2.\varrho_2+pe^3.\nu_2$$

съ коннексомъ $(m-1,\ n)$ имѣетъ характеристическое выраженіе

$$\xi_1=p^3e^2\{\mu_2n+\varrho_2(m-1)\}+p^2e^3\{\varrho_2n+\nu_2(m-1)\}.$$

Намъ нужно знать собственно только порядокъ этой пары, т. е. вычислить нужно только:

$$\varrho_2n+\nu_2(m-1)=n[m^2n^2+4mn(m-1)(n-1)+(m-1)^2(n-1)^2]$$
$$+2(m-1)n(n-1)\{mn+(m-1)(n-1)\}-kk'.n(6n^2-6n+1)$$
$$-(k\varkappa'+k'\varkappa)\{12mn^2-6mn-6n^2+4n+6(m-1)n^2-6(m-1)n+(m-1)\}$$
$$-\varkappa\varkappa'\{(6m^2-6m+1)n+(m-1)(12mn-6m-6n+4)\}+$$
$$\{\varkappa\varkappa'(k+k')+(\varkappa+\varkappa')(k\varkappa'+k'\varkappa)\}\{(4m-2)n+(4n-2)(m-1)\}+$$
$$+(4n-2)n\{(k+k')(k\varkappa'+k'\varkappa)+kk'(\varkappa+\varkappa')\}+$$
$$+(4m-2)(m-1)\varkappa\varkappa'(\varkappa+\varkappa')-$$
$$n[kk'(\varkappa^2+\varkappa\varkappa'+\varkappa'^2)+\varkappa\varkappa'(k^2+kk'+k'^2)+2(k+k')(\varkappa+\varkappa')(k\varkappa'+k'\varkappa)-(k\varkappa'+k'\varkappa)^2]$$
$$-(m-1)\{(k\varkappa'+k'\varkappa)(\varkappa^2+\varkappa'^2)+2\varkappa\varkappa'(k+k')(\varkappa+\varkappa')\}.$$

Отнимая отсюда $\varkappa\varkappa'\lambda_2'+(k\varkappa'+k'\varkappa)\varrho_2'+kk'\nu_2'$, въ разности получимъ искомый порядокъ сопряженнаго коннекса:

$$n[m^2n^2+6mn(m-1)(n-1)+3(m-1)^2(n-1)^2]-kk'.n(10n^2-12n+3)$$
$$-(k\varkappa'+k'\varkappa)\{(m(30n^2-24n+3)-(18n^2-18n+3)\}-\varkappa\varkappa'\{3n(10m^2-18m+3)$$
$$-6(2m^2-3m+1)\}+[\varkappa\varkappa'(k+k')+(\varkappa+\varkappa')(k\varkappa'+k'\varkappa)(20mn-12n-8m+6)$$
$$+\{(k+k')(k\varkappa'+k'\varkappa)+kk'(\varkappa+\varkappa')\}(10n^2-8n+1)+$$
$$\varkappa\varkappa'(\varkappa+\varkappa')(10m^2-12m+3)-(5m-3)\{(2\varkappa\varkappa'(\varkappa+\varkappa')(k+k')+(\varkappa^2+\varkappa'^2)(k\varkappa'+k'\varkappa)\}$$
$$-(5n-2)[kk'(\varkappa^2+\varkappa\varkappa'+\varkappa'^2)+\varkappa\varkappa'(k^2+kk'+k'^2)+2(k+k')(\varkappa+\varkappa')(k\varkappa'+k'\varkappa)$$
$$-(k\varkappa'+k'\varkappa)^2]+$$
$$+[kk'(\varkappa+\varkappa')^3+3(\varkappa+\varkappa')(k+k')\{\varkappa\varkappa'(k+k')+(k\varkappa'+k'\varkappa)(\varkappa+\varkappa')\}-$$
$$-4\varkappa\varkappa'\{kk'(\varkappa+\varkappa')+(k\varkappa'+k'\varkappa)(k+k')\}-2(\varkappa+\varkappa')(k\varkappa'+k'\varkappa)^2].$$

Такимъ образомъ *VIII. Пониженіе порядка сопряженнаго коннекса благодаря существованію коинциденціи собственно-особенныхъ элементовъ, опредѣленной, какъ полное пересѣченіе двухъ коннексовъ* $(k, \varkappa)$ и $(k', \varkappa')$ *таково:*

$$
\begin{gathered}
-\Delta m' = kk'n(10n^2 - 12n + 3) + \\
+(k\varkappa' + k'\varkappa)[m(30n^2 - 24n + 3) - (18n^2 - 18n + 3)] \\
+ \varkappa\varkappa'(3n(10m^2 - 18m + 3) - 6(2m^2 - 3m + 1)) - \\
-[\varkappa\varkappa'(k + k') + (\varkappa + \varkappa')(k\varkappa' + \varkappa' k)](20mn - 12n - 8m + 6) - \\
-\{(k + k')(k\varkappa' + k'\varkappa) + kk'(\varkappa + \varkappa')\}(10n^2 - 8n + 1) - \\
-\varkappa\varkappa'(\varkappa + \varkappa')(10m^2 - 12m + 3) + \\
(5m - 3)[2\varkappa\varkappa'\{(\varkappa + \varkappa')(k + k') - (k\varkappa' + k'\varkappa)\} + (\varkappa + \varkappa')^2(k\varkappa' + k'\varkappa)] + \\
+ (5n - 2)[kk'(\varkappa + \varkappa')^2 + \varkappa\varkappa'(k + k')^2 - 2\varkappa\varkappa' kk' + \\
+ 2(k + k')(\varkappa + \varkappa')(k\varkappa' + k\varkappa') - (k\varkappa' + k'\varkappa)^2] \\
-[kk'(\varkappa + \varkappa')^3 + 3(\varkappa + \varkappa')(k + k')\{\varkappa\varkappa'(k + k') + (k\varkappa' + k'\varkappa)(\varkappa + \varkappa')\} - \\
- 4\varkappa\varkappa'\{kk'(\varkappa + \varkappa') + (k\varkappa' + k'\varkappa)(k + k')\} - 2(\varkappa + \varkappa')(k\varkappa' + k'\varkappa)^2].
\end{gathered}
$$

Намъ остается еще опредѣлить пониженіе *класса* сопряженнаго коннекса. Мы имѣемъ (при тѣхъ же обозначеніяхъ).

$$
\begin{gathered}
n' = \mu_2(n - 1) + \varrho_2 m - (\mu_2'\varkappa\varkappa' + \lambda_2(k\varkappa' + k'\varkappa) + kk'\varrho_2') \\
= m[m^2n^2 + 6mn(m - 1)(n - 1) + 3(m - 1)^2(n - 1)^2] \\
-\varkappa\varkappa' m(10m^2 - 12m + 3) - (k\varkappa' + k'\varkappa)[n(30m^2 - 24m + 3) - (18m^2 - 18m + 3)] \\
-kk'[3m(10n^2 - 12n + 3) - 6(2n^2 - 3n + 1)] + kk'(k + k')(10n^2 - 12n + 3) + \\
+[(k + k')(k\varkappa' + k'\varkappa) + kk'(\varkappa + \varkappa')](20mn - 8n - 12m + 6) \\
+[(k + k')\varkappa\varkappa' + (\varkappa + \varkappa')(k\varkappa' + k'\varkappa)](10m^2 - 8m + 1) \\
+(5m - 2)[\varkappa\varkappa'(k + k')^2 - 4\varkappa\varkappa' kk' + kk'(\varkappa + \varkappa')^2 + \\
+ 2(k + k')(\varkappa + \varkappa')(k\varkappa' + k'\varkappa) - (k\varkappa' + k'\varkappa)^2] - \\
-(5n - 3)[(k + k')^2(k\varkappa' + k'\varkappa) + 2kk'\{(k + k')(\varkappa + \varkappa') - (k\varkappa' + k'\varkappa\}) \\
+[(k + k')^3\varkappa\varkappa' + 3(k + k')(\varkappa + \varkappa')\{((\varkappa + \varkappa')kk' + (k + k')(k\varkappa' + k'\varkappa)\} \\
- 4kk'\{(\varkappa + \varkappa')(k\varkappa' + k'\varkappa) + (k + k')\varkappa\varkappa'\} \\
- 2(k + k')(k\varkappa' + k'\varkappa)^2].
\end{gathered}
$$

Такимъ образомъ *IX. Пониженіе класса сопряженнаго коннекса благодаря наличности коинциденціи собственно-особенныхъ элементовъ, опредѣленной, какъ полное пересѣченіе двухъ коннексовъ* $(k, \varkappa)$ и $(k', \varkappa')$, *выражается формулою:*

ис 55501/2

$$
\begin{gathered}
-\Delta n' = \varkappa\varkappa' m(10m^2 - 12m + 3) + \\
+ (k\varkappa' + k'\varkappa)\{(3n(10m^2 - 8m + 1) - 3(6m^2 - 6m + 1)\} \\
+ kk'\{(3m(10n^2 - 12n + 3) - 6(2n^2 - 3n + 1)\} \\
- kk'(k + k')(10n^2 - 12n + 3) \\
- \{(k + k')(k\varkappa' + k'\varkappa) + kk'(\varkappa + \varkappa')\}(20mn - 8n - 12m + 6) \\
- \{(k + k')\varkappa\varkappa' + (\varkappa + \varkappa')(k\varkappa' + k'\varkappa)\}(10m^2 - 8m + 1) \\
+ (5m - 2)[\varkappa\varkappa'(k + k')^2 - 4kk'\varkappa\varkappa' + kk'(\varkappa + \varkappa')^2 + \\
2(k + k')(\varkappa + \varkappa')(k\varkappa' + k'\varkappa) - (k\varkappa' + k'\varkappa)^2] \\
+ (5n - 3)[(k + k')^2\varkappa\varkappa' + 2kk'\{(k + k')(\varkappa + \varkappa') - (k\varkappa' + k'\varkappa)\}] \\
- [(k + k')^3\varkappa\varkappa' + 3(k + k')(\varkappa + \varkappa')\{kk'(\varkappa + \varkappa') + (k + k')(k\varkappa' + k'\varkappa)\} \\
- 4kk'\{(\varkappa + \varkappa')(k\varkappa' + k'\varkappa) + (k + k')\varkappa\varkappa'\} \\
- 2(k + k')(k\varkappa' + k'\varkappa)^2].
\end{gathered}
$$

Въ предыдущемъ разсмотрѣны лишь простѣйшія особенности. Такъ я не останавливался на вліяніи особенныхъ основныхъ точекъ и плоскостей, а также на томъ случаѣ, когда основныя точки образуютъ кривую двоякой кривизны или плоскости основныя огибаютъ развертывающуюся поверхность.

При томъ самый пріемъ, которымъ получены всѣ результаты, обусловилъ то ограниченіе, что всѣ разсмотрѣнныя многообразія собственно-особенныхъ элементовъ—за исключеніемъ многообразія одного измѣренія (теорема II)—предполагаются опредѣленными, какъ полное пересѣченіе соотвѣтствующаго числа коннексовъ.

Равнымъ образомъ я не привожу примѣровъ, хотя не трудно было бы построить примѣры, аналогичные тѣмъ, которые даны въ предыдущей моей статьѣ (Сообщ. Хар. Мат. Общ. (2) X n⁰ 5 и 6).

Application de la méthode des fonctions fondamentales à l'étude de l'équation différentielle des verges vibrantes élastiques.

par J. D. Tamarkine.

L'étude des vibrations transversales d'une verge élastique nous ramène tout d'abord à l'intégration de l'équation différentielle

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[r(x)\frac{d^2V}{dx^2}\right]=\lambda p(x)\,V(x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(\alpha)$$

où $r(x)$ et $p(x)$ sont les fonctions données dans l'intervalle (a, b) correspondant à la longueur totale de la verge considérée; λ est un paramètre indépendant. La fonction $V(x)$ doit encore remplire certaines conditions aux limites dont la forme est distincte selon que la verge sera *encastrée* ou seulement *appuyée* dans a et b.

Cette étude conduit ensuite au problème de développement d'une fonction donnée $f(x)$ suivant les intégrales particulières de l'équation (α). Les pages qui vont suivre seront consacrées à l'etude de ces deux questions.

Au lieu de l'équation (α) nous allons étudier l'équation plus générale

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[r(x)\frac{d^2V}{dx^2}\right]=[\lambda p(x)-q(x)]\,V(x) \ldots\ldots\ldots\ldots(\beta)$$

$q(x)$ étant de même une fonction donnée de x.

§ 1. Considérons d'abord un problème auxiliaire:

Déterminer la fonction $W(x)$ finie et continue avec ses dérivées de quatre premiers ordres satisfaisant à l'équation différentielle

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[r(x)\frac{d^2W}{dx^2}\right] = [\lambda p(x) - q(x)]\,W(x) + f(x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(I)}$$

jointe aux conditions aux limites

$$W(a) = W(b) = W'(a) = W'(b) = 0 \;\; ^{1)}; \ldots\ldots\ldots \text{(Ia)}$$

dans cette équation $r(x)$ est une fonction continue avec ses dérivées de deux premiers ordres dans (a, b) satisfaisant à la condition

$$r(x) > r_0 > 0 \quad \textit{dans} \quad (a, b) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(Ib)}$$

r_0 étant une constante positive;

$q(x)$ est une fonction continue satisfaisant à la condition

$$q(x) \geq 0 \quad \textit{dans} \quad (a, b) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(Ic)}$$

$p(x)$ et $f(x)$ sont les fonctions continues données dans (a, b).

Enfin λ est un paramètre indépendant.

Dans tout ce qui va suivre nous écrirons simplement

$$\Omega(\varphi)$$

au lieu de l'expression

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[r(x)\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right].$$

Appliquons la méthode de la „variation des constantes" à l'équation linéaire (I). En désignant par

$$v_1(x), \quad v_2(x), \quad v_3(x), \quad v_4(x) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(1)}$$

les quatres intégrales particulières distinctes de l'équation

$$\Omega(v) = (\lambda p - q)\,v, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(1a)}$$

---

[1]) Ces conditions correspondent au cas, où la verge est *encastrée* dans (a, b). On désigne par $F(x)$, $F'(x)$, $F''(x)$, $F'''(x)$, $F^{IV}(x)$ les dérivées de quatre premiers ordres d'une fonction arbitraire $F(x)$.

l'intégrale générale de l'équation (I) sera:

$$W(x) = \sum_{k=1}^{4} C_k v_k(x) + \sum_{k=1}^{4} v_k(x) \int_a^x \frac{f X_k}{D} dx, \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

où l'on a:

$$D = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ v_1' & v_2' & v_3' & v_4' \\ v_1'' & v_2'' & v_3'' & v_4'' \\ v_1''' & v_2''' & v_3''' & v_4''' \end{vmatrix}$$

les X_k étant les mineurs de ce déterminant relatifs à la dernière ligne. On sait bien que la fonction D ne dépend pas de λ [1]). Pour obtenir la solution du problème proposé on doit encore satisfaire aux conditions (Ia):

$$\left.\begin{aligned} W(a) &= \sum_{k=1}^{4} C_k v_k(a) = 0 \\ W(b) &= \sum_{k=1}^{4} C_k v_k(b) + m(b) = 0 \\ W'(a) &= \sum_{k=1}^{4} C_k v_k'(a) = 0 \\ W'(b) &= \sum_{k=1}^{4} C_k v_k'(b) + m'(b) = 0, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (2a)$$

$m(x)$ désignant l'expression

$$\sum_{k=1}^{4} v_k(x) \int_a^x \frac{f X_k}{D} dx.$$

Il faut remarquer que les fonctions (1) sont des fonctions entières du paramètre λ (ce qu'on peut démontrer immédiatement). Il en sera de même de la fonction $m(x)$ et du déterminant $\omega(\lambda)$ du système des équations (2a) rélatif aux constantes C_k. Le système (2a) peut être résolu par rapport aux C_k, pourvu que $\omega(\lambda)$ soit différent de zéro; chacune de ces constantes sera représentée par une fraction dont le numérateur et le dénominateur sont des fonctions entières de λ.

Nous aurons, par conséquent,

$$W(x) = \frac{U(x, \lambda)}{\omega(\lambda)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

$U(x, \lambda)$ et $\omega(\lambda)$ étant des fonction entières de λ.

---

[1]) Voir p. ex. *Goursat*, «Cours d'Analyse», t. II pag. 413—418.

Le second membre de la formule (3) cesse d'avoir un sens pour $\lambda = \lambda_0$, où λ_0 est une racine de l'équation

$$\omega(\lambda) = 0.$$

Le point $\lambda = \lambda_0$ représente une singularité de la fonction $W(x)$. Il est évident que toutes les singularités possibles de la fonction $W(x)$, considérée comme fonction de λ, sont des pôles. Nous verrons plus tard que $W(x)$ ne peut être holomorphe dans tout le plan de la variable complexe λ que lorsque $f(x)$ est nulle identiquement dans (a, b) [on aura alors $W(x) \equiv 0$ dans (a, b)]; — par conséquent $W(x)$ aura des pôles effectifs toutes les fois quand $f(x)$ n'est pas nulle identiquement dans (a, b).

Nous démontrerons maintenant qne tous les *pôles possibles de la fonction $W(x)$ sont toujours simples et réels.*

Soit

$$\lambda = \lambda_0$$

un de ces pôles, d'ordre $m\,(m > 1)$. On peut écrire:

$$W(x) = \frac{u_m(x)}{(\lambda - \lambda_0)^m} + \frac{u_{m-1}(x)}{(\lambda - \lambda_0)^{m-1}} + \ldots + \frac{u_1(x)}{(\lambda - \lambda_0)} + u(x, \lambda) \ldots (3a)$$

la fonction $u(x, \lambda)$ étant holomorphe pour $\lambda - \lambda_0$. Substituons cette expression au lieu de $W(x)$ dans les équations (I) et (Ia); on trouve, après un calcul simple,

$$\left.\begin{array}{r} \Omega(u_m) = (\lambda_0 p - q)\, u_m \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Omega(u_{m-s}) = (\lambda_0 p - q)\, u_{m-s} + p u_{m-s+1} \quad (s=1, 2 \ldots, m-1) \\ u_{m-s}(a) = u_{m-s}(b) = u_{m-s}(a) = u_{m-s}(b) = 0 \quad (s=0, 1\ 2 \ldots, m-1) \end{array}\right\} \ldots (3b)$$

Les deux premières des équations (3b) nous donnent:

$$\int_a^b p u_m^2\, dx = \int_a^b \Big[\, u_{m-1}\, \Omega(u_m) - u_m\, \Omega(u_{m-1}) \,\Big]\, dx = 0.$$

D'une manière analogue on trouve

$$\lambda_0 \int_a^b p u_m^2 dx = \int_a^b u_m\, \Omega(u_m)\, dx + \int_a^b q u_m^2 dx = \int_a^b r\,(u_m'')^2 dx + \int_a^b q u_m^2 dx.$$

Pour que ces deux égalités soient compatibles, il faut et il suffit que la fonction $u_m(x)$ soit nulle identiquement dans (a, b).

Nous démontrerons de même que

$$u_{m-s}(x) \equiv 0 \quad \text{dans } (a, b) \qquad (s=1, 2, \ldots m-2),$$

c'est à dire que le pôle λ_0 de la fonction $W(x)$ ne peut être qu'un pôle simple, s'il existe en général. *Il est évident aussi que tous les pôles possibles de la fonction $W(x)$ sont distincts de zéro.*

Montrons maintenant que le *pôle λ_0 est réel.* Désignons par $U_0(x)$ le résidu correspondant de $W(x)$; c'est une fonction non nulle identiquement dans (a, b), si λ_0 est un pôle effectif de $W(x)$. On trouve sans peine

$$\left.\begin{aligned} \Omega(U_0) &= (\lambda_0 p - q)\, U_0 \\ U_0(a) = U_0(b) = U_0'(a) &= U_0'(b) = 0 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Soit λ_0 un nombre complexe

$$\lambda_0 = \lambda_0' + i\,\lambda_0''$$

et

$$U_0(x) = U_{01}(x) + i\, U_{02}(x).$$

On déduit de (4)

$$\begin{gathered} \Omega(U_{01}) = \lambda_0' p U_{01} - \lambda_0'' p U_{02} - q U_{01} \\ \Omega(U_{02}) = \lambda_0'' p U_{01} + \lambda_0' p U_{02} - q U_{02} \\ U_{01}(a) = U_{01}(b) = U'_{01}(a) = U'_{01}(b) = U_{02}(a) = U_{02}(b) = \\ = U'_{02}(a) = U'_{02}(b) = 0. \end{gathered}$$

De ces équations on tire

$$\lambda''_0 \int_a^b p\,(U_{01}^2 + U_{02}^2)\, dx = 0$$

$$\lambda_0' \int_a^b p\,(U_{01}^2 + U_{02}^2)\, dx = \int_a^b q\,(U_{01}^2 - U_{02}^2)\, dx + \int_a^b r\,[(U''_{01})^2 + (U''_{02})^2]\, dx$$

ce qui exige que l'on ait

$$\lambda''_0 = 0,$$

car $U_0(x)$ est différent de zéro, d'après l'hypothèse faite.

§ 2. Nous allons démontrer maintenant la proposition fondamentale que *la fonction $W(x)$ ne peut être holomorphe pour toute valeur de λ, x étant quelconque dans (a, b), que lorsque $f(x)$ est identiquement nulle dans (a, b).*

En appliquant la méthode classique des approximations successives, nous nous proposons de développer $W(x)$ suivant les puissances croissantes de λ:

$$W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n w_n(x). \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

On trouve

$$\Omega(w_0) = -qw_0 + f$$

$$\Omega(w_s) = -qw_s + pw_{s-1} \qquad (s=1, 2\ldots) \quad \ldots\ldots (5a)$$

$$w_s(a) = w_s(b) = w_s'(a) = w_s'(b) = 0 \qquad (s=0, 1, 2\ldots)$$

On doit remarquer d'abord que la somme de la série (5) vérifie en effet les équations (I) et (Ia) et présente la solution du problème proposé toutes les fois, quand elle converge uniformément dans (a, b). Pour nous en assurer, admettons la convergence uniforme de la série (5) pour une valeur de λ. En désignant pour un moment par $W(x)$ sa somme, la fonction $W(x)$ sera une fonction de x continue dans (a, b); nous pouvons donc déterminer une fonction $w(x)$ satisfaisant à l'équation

$$\Omega(w) = -qw + f(x) + \lambda p W(x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5b)$$

avec les conditions aux limites:

$$w(a) = w(b) = w'(a) = w'(b) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5c)$$

On peut calculer cette fonction $w(x)$ [qui sera unique] à l'aide de la méthode de la „variation des constantes". Désignons par

$$y_1(x),\ y_2(x),\ y_3(x),\ y_4(x)$$

les quatre intégrales distinctes de l'équation différentielle

$$\Omega(y) = -q.y.$$

L'intégrale générale de (5b) sera

$$w(x) = \sum_{k=1}^{4} C_k y_k(x) + n(x),$$

où

$$n(x) = \sum_{k=1}^{4} y_k(x) \int_a^x \frac{(f + \lambda p W)\, Y_k}{\Delta}\, dx,$$

Δ désignant le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ y_1' & y_2' & y_3' & y_4' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' & y_4'' \\ y_1''' & y_2''' & y_3''' & y_4''' \end{vmatrix}$$

et Y_k ses mineurs relatifs à la dernière ligne. Il ne nous reste qu'à satisfaire aux conditions

$$w(a) = \sum_{k=1}^{4} C_k y_k(a) = 0$$

$$w(b) = \sum_{k=1}^{4} C_k y_k(b) + n(b) = 0,$$

$$w'(a) = \sum_{k=1}^{4} C_k y_k'(a) = 0,$$

$$w'(b) = \sum_{k=1}^{4} C_k y_k'(b) + n'(b) = 0.$$

Cela est toujours possible, si nous choisissons les intégrales y_k d'une manière convenable. D'une manière tout à fait analogue on calculera successivement les fonctions $w_s(x)$ définies par les équations (5a). Substituons maintenant dans l'expression trouvée ci-dessus de $w(x)$ la série (5) au lieu de $W(x)$ et intégrons membre par membre; en comparant le résultat ainsi obtenu avec les expressions analogues pour $w_s(x)$, on s'assure, après quelques calculs simples, que la fonction $w(x)$ est identique à la fonction $W(x)$. Nous aurons alors:

$$\Omega(W) = (\lambda p - q)\, W + f$$
$$W(a) = W(b) = W'(a) = W'(b) = 0$$

c. q. f. d.

Tout est ramené ainsi à l'étude de la convergence uniforme de la série (5). Nous avons déja vu que les pôles possibles de la fonction $W(x)$ sont distincts de zéro. Cela nous affirme l'existence d'un nombre $\lambda' > 0$ tel que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n w_n(x)$$

soit convergent et représente la fonction $W(x)$ pour toute valeur de x dans (a, b), pourvu qu'on ait

$$|\lambda| < \lambda'.$$

On peut démontrer sans peine que cette série est *uniformément convergente*, pourvu que $|\lambda| < \lambda'$. Désignons maintenant par λ_1 la plus grande de valeurs de $|\lambda|$, pour lesquelles la série (5) est uniformément convergente dans (a, b) [plus exactement: λ_1 est la limite supérieure précise de dites valeurs]. Il est évident que

$$\lambda_1 \geq \lambda' > 0.$$

Nous dirons que λ_1 est le «rayon de convergene uniforme» de la série (5). Il est clair que λ_1 sera en même temps le rayon de convergence uniforme de la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-\lambda)^n w_n(x)$$

et, par suite, λ_1 ne peut pas surpasser le rayon de convergence uniforme de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{2n-1} w_{2n-1}(x).$$

Multiplions celle-ci par $p(x)\, w_0(x)$ et intégrons membre par membre entre a et b. Il en résultera la série

$$\sum_{n-1}^{\infty} \lambda^{2n-1} W_n, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

W_n désignant l'intégrale

$$W_n = \int_a^b p w_0 w_{2n-1}\, dx \qquad (n = 1, 2 \ldots)$$

Le rayon de convergence λ'' de cette série ne peut pas surpasser λ_1. Calculons λ''. Intégrons pour cela W_n par parties en tenant compte des équations (5a); on trouve

$$W_n = \int_a^b p w_0 w_{2n-1}\, dx = \int_a^b p w_1 w_{2n-2}\, dx = \ldots =$$
$$= \int_a^b p w_{n-1} w_n dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6a)$$

et de même:

$$W_n = \int_a^b p w_{n-1} w_n dx = \int_a^b w_n [\Omega(w_n) + q w_n]\, dx =$$
$$= \int_a^b r (w_n'')^2\, dx + \int_a q w_n^2\, dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6b)$$

d'où il suit

$$W_n > 0.$$

On a enfin

$$W_n = \int_a^b p w_{n-2} w_{n+1} dx = \int_a^b w_{n+1} [\Omega(u_{n-1}) + q w_{n-1}] dx =$$
$$= \int_a^b r w''_{n-1} w''_{n+1} dx + \int_a^b q w_{n-1} w_{n+1} dx.$$

Moyenant les inégalités connues de *Schwarz* [plus exactement celles de *Bouniakowsky* [1])] on trouve sans peine

$$W_n^2 < W_{n-1} W_{n+1}$$

et

$$\frac{W_1}{W_2} > \frac{W_2}{W_3} > \ldots > \frac{W_{n-1}}{W_u} > \ldots \qquad \ldots\ldots\ldots (6c)$$

Les inégalités (6c) nous affirment l'existence de la limite

$$\lim_{n=\infty} \sqrt{\frac{W_{n-1}}{W_n}} \geq 0.$$

Or cette limite, quand elle existe, est égale exactement au rayon de convergence de la série (6), donc

$$\lim_{n=\infty} \sqrt{\frac{W_{n-1}}{W_n}} = \lambda'' > 0.$$

Nous avons enfin

$$\lambda_1 \leq \lambda'' < \frac{W_1}{W_2}.$$

Le rapport $\frac{W_1}{W_2}$ a une valeur déterminée et finie quand $f(x)$ n'est pas nulle identiquement dans (a, b); donc le rayon de convergence uniforme de la série (5) est fini. On en conclut immédiatement que la fonction $W(x)$ ne peut pas être holomorphe dans tout le plan de la variable complexe λ, si $f(x)$ n'est pas nulle identiquement dans (a, b). L'existence des pôles de la fonction $W(x)$ est ainsi établie. Ces pôles sont tous simples et réels, et le plus petit entre eux est égal à $\pm \lambda_1$.

---

[1]) Voir *Bouniakowsky*, «Sur quelques inégalités concern. les intégr. ordinaires etc.» Mémoires de l'Acad. de S.-Pétersbourg, Sér. VII, t. 1. (1853).

§ 3. Désignons par

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_s \ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

les pôles consécutifs de la fonction $W(x)$, rangés par l'ordre croissant de grandeur de leurs modules. Soient

$$U_1(x), \quad U_2(x), \ldots, \quad U_3(x) \ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (7a)$$

les résidus correspondants de $W(x)$. On trouve sans peine

$$\begin{gathered} \Omega(U_s) = (\lambda_s p - q)\, U_s \\ U_s(a) = U_s(b) = U'_s(a) = U'_s(b) = 0. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (7b) \end{gathered}$$

Ces formules nous donnent d'un côté:

$$\int_a^b p U_s U_{s_1} dx = 0, \qquad \text{si } s \neq s_1, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (7c)$$

et de l'autre:

$$\begin{aligned} \lambda_s \int_a^b p U_s^2\, dx &= \int_a^b \Omega(U_s)\, U_s\, dx + \int_a^b q U_s^2\, dx = \\ &= \int_a^b r\, (U''_s)^2\, dx + \int_a^b q U_s^2\, dx. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (7d) \end{aligned}$$

La fonction $U_s(x)$ étant différente de zéro dans (a, b), nous pouvons conclure de cela que l'intégrale

$$\int_a^b p U_s^2\, dx,$$

est toujours différente de zéro et qu'elle a le même signe que λ_s. Nous pouvons donc toujours construire les fonctions $V_s(x)$ ne différant de $U_s(x)$ que par des facteurs constants, et vérifiant non seulement les équations de la forme (7b), (7c), mais encore l'équation

$$\int_a^b p V_s^2\, dx = \pm 1,$$

où le signe $\pm$ est pris selon que λ_s soit positif ou négatif.

La formule (7d) nous donne alors

$$\int_a^b r\, (V''_s)^2\, dx + \int_a^b q V_s^2\, dx = |\lambda_s|$$

ce qui nous permet d'établir une propriété remarquable des fonctions $V_s(x)$. En effet, la formule précédente nous montre que

$$\int_a^b (V_s'')^2\, dx < \frac{|\lambda_s|}{r_0}.$$

On peut donc écrire

$$\left[V_s(x)\right]^2 = \left[\int_a^x V_s' dx\right]^2 < (b-a)\int_a^b (V_s')^2\, dx,$$

$$\int_a^b (V_s')^2\, dx = -\int_a^b V_s V_s''\, dx < \sqrt{\int_a^b V_s^2 dx \int_a^b (V_s'')^2 dx}.$$

Par conséquent, on a

$$\left[V_s(x)\right]^2 < \frac{b-a}{\sqrt{r_0}}\sqrt{|\lambda_s|}\sqrt{\int_a^b V_s^2 dx}.$$

Intégrons les deux membres de cette inégalité entre a et b et divisons ensuite par

$$\sqrt{\int_a^b V_s^2 dx}.$$

On trouve

$$\sqrt{\int_a^b V_s^2\, dx} < \frac{(b-a)^2}{\sqrt{r_0}}\sqrt{|\lambda_s|}$$

ce qui nous donne enfin

$$|V_s(x)| < N\sqrt{|\lambda_s|} \qquad \text{dans } (a, b),$$

où N est une constante ne dépendant que de la forme de la fonction $r(x)$.

À chaque fonction donnée $f(x)$ on peut faire correspondre un ensemble déterminé de „fonctions fondamentales" $V_s(x)$ et de „nombres caractéristiques" correspondants λ_s. Nous allons démontrer qu'il existe une *infinité* de fonctions fondamentales linéairement distinctes et de nombres caractéristiques. Supposons pour cela que le nombre de fonctions $V_s(x)$ linéairement distinctes correspondant à une fonction donnée $f(x)$ soit fini et égale à m. On pourra toujours construire une fonction $\varphi(x)$, non nulle identiquement dans (a, b), vérifiant les conditions

$$\int_a^b \varphi V_s dx = 0 \qquad (s=1, 2 \ldots m) \qquad \ldots\ldots\ldots (8)$$

Désignons par W_1 la fonction analogue à $W(x)$ vérifiant les équations

$$\Omega(W_1) = (\lambda p - q)\, W_1 + \varphi$$
$$W_1(a) = W_1(b) = W_1'(a) = W_1'(b) = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8a)$$

La fonction $W_1(x)$ est une fonction méromorphe de λ, parce que $\varphi(x)$ n'est pas nulle identiquement dans (a, b). Soit μ_0 un de ses pôles effectifs et $U_0(x)$ le résidu correspondant. C'est une fonction non-nulle identiquement dans (a, b), et l'intégrale

$$\int_a^b p\, U_0^2\, dx\,,$$

est différent de zéro, ce qu'on peut démontrer par des considérations identiques à celles des pages précédentes. On a en outre

$$\Omega(U_0) = (\mu_0 p - q)\, U_0$$
$$U_0(a) = U_0(b) = U_0'(a) = U_0'(b) = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8b)$$

Les équations (8b) et (8a) nous montrent:

$$\int_a^b \varphi U_0 dx + (\lambda - \mu_0) \int_a^b p U_0 W_1\, dx = 0.$$

Or en voisinage du point $\lambda = \mu_0$ on peut poser

$$W_1 = \frac{U_0}{\lambda - \mu_0} + u(x, \lambda)$$

$u(x, \lambda)$ étant une fonction holomorphe de λ pour $\lambda = \mu_0$. Substituons cette expression au lieu de $W_1(x)$ dans la formule précédente et passons à la limite pour $\lambda = \mu_0$; on trouve sans peine

$$\int_a^b \varphi U_0 dx + \int_a^b p U_0^2\, dx = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8c)$$

Supposons maintenant qu'on peut présenter la fonction $U_0(x)$ comme une combinaison linéaire des fonctions $V_s(x)$. On peut écrire alors

$$U_0(x) = \sum_{s=1}^{m} a_s V_s(x)\,,$$

a_s étant des constantes. Les formules (8c) et (8) nous donnent

$$\int_a^b p U_0^2 dx = 0,$$

ce qui est absurde, d'après les considérations précédentes.

Nous pouvons donc toujours obtenir une fonction fondamentale $V_0(x)$, qui sera linéairement distincte de $V_s(x)$ $(s=1,\ldots m)$, en multipliant $U_0(x)$ par un facteur constant convenablement choisi. On peut déduire de cela l'existence d'une infinité de fonctions fondamentales linéairement distinctes.

Construisons maintenant toutes les fonctions fondamentales possibles correspondant aux diverses fonctions $f(x)$. Nous les désignerons par

$$\ldots V_{-s}(x), \ldots V_{-1}(x),\ V_1(x),\ V_2(x)\ldots,\ V_s(x)\ldots.$$

Les fonctions fondamentales

$$V_{-1}(x),\quad V_{-2}(x),\ldots\ V_{-s}(x)\ldots$$

correspondent ici aux nombres caractéristiques

$$\lambda_{-1},\quad \lambda_{-2},\ldots\ \lambda_{-s},\ldots$$

négatifs, rangés par l'ordre croissant de leurs modules, de même les fonctions fondamentales

$$V_1(x),\quad V_2(x),\ldots\ V_s(x),\ldots.$$

correspondent aux nombres caractéristiques

$$\lambda_1,\quad \lambda_2,\ldots\ \lambda_s,\ldots$$

rangés de la manière analogue.

Nous allons établir l'inégalité importante

$$|\lambda_{\pm s}| < \Lambda s^4$$

Λ étant une constante positive ne dépendant pas de s. Il nous faudra démontrer d'abord deux lemmes préliminaires,

Lemme 1. *Si une fonction continue $\omega(x)$ a les dérivées intégrables de deux prémiers ordres dans (a, b) et en outre satisfait aux conditions*

$$\omega(a)=\omega(b);\quad \int_a^b \omega(x)\,dx=0, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(9)$$

on aura toujours

$$\frac{\int_a^b (\omega'')^2\,dx}{\int_a^b \omega^2\,dx} \geq \frac{\pi^4}{(b-a)^4} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(9a)$$

M. *W. Stekloff* a montré dans son mémoire important [1]), qu'on a

$$\frac{\int_a^b (\Theta')^2\,dx}{\int_a^b \Theta^2\,dx} \geqq \frac{\pi^2}{(b-a)^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

pour chaque fonction $\Theta(x)$ ayant la dérivée première intégrable dans (a, b), si elle vérifie en outre la condition

$$\int_a^b \Theta(x)\,dx = 0.$$

Cette condition est satisfaite par les deux fonctions $\omega(x)$ et $\omega'(x)$. En les substituant au lieu de $\Theta(x)$ dans (10), on déduit:

$$\frac{\int_a^b (\omega')^2\,dx}{\int_a^b \omega^2\,dx} \geqq \frac{\pi^2}{(b-a)^2},$$

$$\frac{\int_a^b (\omega'')^2\,dx}{\int_a^b (\omega')^2\,dx} \geqq \frac{\pi^2}{(b-a)^2}.$$

En multipliant membre par membre ces deux formules, on trouve (9a), c. q. f. d.

Lemme 2. *Si les fonctions données*

$$\varphi_1(x), \ldots \varphi_{2m+3}(x)$$

non-nulles identiquement dans (a, b) *ont les dérivées intégrables de deux premiers ordres dans* (a, b), *on peut toujours choisir les constantes*

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \ldots \quad \alpha_{2m+3}$$

dans l'expression

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{2m+3} \alpha_k \varphi_k(x)$$

---

[1]) Voir: «Problème de refroidissement d'une barre hétérogène». Ann. de la fac. des sciences de Toulouse, 1901, pag. 295—296.

de la manière qu'on ait

$$\frac{\int_a^b (\varphi'')^2\,dx}{\int_a^b \varphi^2\,dx} > Lm^4$$

L étant une constante ne dépendante pas de m et de la forme de $\varphi_k(x)$.

Divisons l'intervalle (a, b) en $(m+1)$ parties

$$(a, a_1),\quad (a_1, a_2), \ldots (a_{m-1}, a_m),\quad (a_m, b), \quad \ldots\ldots\ldots (11)$$

dont chacune a la longueur totale moindre que $\frac{b-a}{m}$.

Déterminons ensuite les constantes

$$\alpha_1,\quad \alpha_2, \ldots\ \alpha_{2m+3}$$

[ou, plus exactement, leurs rapports] de la manière suivante:

$$\int_a^{a_1} \varphi(x)\,dx = \sum_{k=1}^{2m+3} \alpha_k \int_a^{a_1} \varphi_k(x)\,dx = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\int_{a_m}^{b} \varphi(x)\,dx = \sum_{k=1}^{2m+1} \alpha_k \int_{a_m}^{b} \varphi_k(x)\,dx = 0,$$

$$\varphi(a_1) - \varphi(a) = \sum_{k=1}^{2m+3} \alpha_k [\varphi_k(a_1) - \varphi_k(a)] = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\varphi(b) - \varphi(a_m) = \sum_{k=1}^{2m+3} \alpha_k [\varphi_k(b) - \varphi_k(a_m)] = 0,$$

ce qui sera toujours possible. Posons pour la symétrie

$$a_0 = a;\quad a_{m+1} = b.$$

Le lemme 1. nous apprend que

$$\frac{\int_{a_s}^{a_{s+1}} (\varphi'')\,dx^2}{\int_{a_s}^{a_{s+1}} \varphi^2\,dx} \geq \frac{\pi^4}{(a_{s+1} - a_s)^4} \qquad (s = 0, 1, 2, \ldots m),$$

par ce que la fonction $\varphi(x)$ satisfait aux conditions du lemme 1, quand

les α_k sont choisies de la manière indiquée. Or on a, d'après la supposition faite,

$$a_{s+1} - a_s < \frac{b-a}{m} \qquad (s=0, 1, \ldots m),$$

donc on aura

$$\frac{\int_{a_s}^{a_{s+1}} (\varphi'')^2\, dx}{\int_{a_s}^{a_{s+1}} \varphi^2\, dx} > \frac{\pi^4 . m^4}{(b-a)^4}.$$

D'un autre côté

$$\frac{\int_a^b (\varphi'')^2\, dx}{\int_a^b \varphi^2\, dx} = \frac{\sum_{s=0}^{m} \int_{a_s}^{a_{s+1}} (\varphi'')^2\, dx}{\sum_{s=0}^{m} \int_{a_s}^{a_{s+1}} \varphi^2\, dx},$$

ce qui nous montre immédiatement que

$$\frac{\int_a^b (\varphi'')^2\, dx}{\int_a^b \varphi^2\, dx} > \frac{\pi^4 . m^4}{(b-a)^4} = Lm^4.$$

c. q. f. d.

Revenons maintenant aux nombres λ_s. Posons:

$$V(x) = \sum_{k=1}^{2s+3} \alpha_k V_k(x),$$

$$I = \int_a^b V^2\, dx; \quad I' = \int_a^b r (V'')^2\, dx.$$

Choisissons les α_k de la manière qu'on ait

$$\frac{I'}{I} > \frac{1}{r_0} \cdot \frac{\int_a^b (V'')^2\, dx}{\int_a^b V^2\, dx} > \frac{L}{r_0} s^4,$$

ce qui est possible en vertu du lemme 2. Nous aurons

$$I' = \sum_{k=1}^{2s+3} \alpha_k^2 \int_a^b r (V_k'')^2\, dx + 2 \sum_{k,j} \alpha_k \alpha_j \int_a^b r V_k'' V_j''\, dx =$$
$$= \sum_{k=1}^{2s+3} \lambda_k \alpha_k^2 - \int_a^b q \left[\sum_{k=1}^{2s+3} \alpha_k V_k \right]^2 dx < \sum_{k=1}^{2s+3} \lambda_k \alpha_k^2.$$

On trouve de même

$$I > \frac{1}{P}\int_a^b V^2 dx = \frac{1}{P}\sum_{k=1}^{2s+3} \alpha_k^2$$

P désignant max $|p|$ dans (a, b). On a donc, en remarquant que λ_k sont rangés par l'ordre croissant de leurs grandeurs,

$$\frac{I'}{I} < P\,\frac{\sum\limits_{k=1}^{2s+3} \lambda_k \alpha_k^2}{\sum\limits_{k=1}^{2s+3} \alpha_k^2} \leq \lambda_{2s+3}\,.$$

Par un calcul simple on déduit ensuite

$$\lambda_s > \Lambda s^4,$$

Λ étant une constante positive ne dépendante pas de s, c. q. f. d. Les mêmes conclusions subsistent aussi dans le cas de s négatif. Les considérations précedentes nous affirment cette proposition fondamentale:

Théorème 1. *Tout intervalle (a, b) donne lieu à une infinité de nombres caractéristiques négatifs et positifs*

$$\lambda_{-s}, \ldots \lambda_{-2}, \lambda_{-1}, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda \ldots \qquad \ldots\ldots\ldots \text{(II)}$$

[rangés par l'ordre indiqué sur la page 28] et de fonctions fondamentales correspondantes

$$V_{-s}(x), \ldots V_{-2}(x),\ V_{-1}(x),\ V_1(x),\ V_2(x), \ldots V_s(x) \qquad \ldots \text{(IIa)}$$

vérifiant les équations différentielles

$$\Omega(V_s) = [\lambda_s p(x) - q(x)]\, V_s(x) \qquad (s = \pm 1, \pm 2, \ldots) \qquad \ldots \text{(IIb)}$$

jointes aux conditions aux limites

$$V_s(a) = V_s(b) = V_s'(a) = V_s'(b) = 0. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(IIc)}$$

Chacune des fonctions $V_s(x)$ sera bien déterminée, si nous ajoutons encore la condition suivante

$$\int_a^b p V_s^2\, dx = \pm 1\,,$$

le signe $\pm$ étant pris selon que λ_s soit positif ou négatif. Les fonctions $V_s(x)$ satisfont en outre aux conditions

$$\int_a^b p V_s V_{s_1} dx = 0 \quad si \quad s \neq s_1 ,$$

$$| V_s(x) | < N \sqrt{|\lambda_s|} \quad (s = \pm 1, \pm 2, \ldots), \quad \ldots\ldots\ldots (\text{IId})$$

N étant une constante positive ne dépendante pas de s; les nombres λ satisfont aux inégalités

$$| \lambda_s | < A s^4 \quad (s = \pm 1, \pm 2, \ldots). \quad \ldots\ldots\ldots (\text{IIg})$$

La solution de l'équation différentielle

$$\Omega(W) = [\lambda p(x) - q(x)]\, W(x) + f(x), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\text{I})$$

jointe aux conditions

$$W(a) = W(b) = W'(a) = W'(b) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\text{Ia})$$

$f(x)$ étant une fonction continue dans (a, b),— est une fonction méromorphe de λ dont tous les pôles font partie de la suite (II) *et tous les résidus ne diffèrent des termes correspondants de la suite* (IIa) *que par des facteurs constants. Pour qu'un nombre λ_s ne soit pas pôle de $W(x)$ il faut et il suffit que l'on ait:*

$$\int_a^b f V_s(x)\, dx = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\text{IIk})$$

Rémarquons que les propositions analogues rélatives au problème de refroidissement d'une barre hétérogène (l'équation différentielle du 2me ordre) sont établies récemment par M. M. *Mauro Picone* et *Sanielevici* [1]), à l'aide des méthodes tout à fait différentes des nôtres ayant pour base la théorie des équations intégrales. Dans l'application au problème des verges vibrantes élastiques les propositions analogues au théorème 1 sont obtenues par M. *A. Davidoglou* [2]) dans les conditions beaucoup moins générales $[p(x) \geq 0$ dans $(a\ b)$, $q(x) \equiv 0]$ et par les méthodes différentes des notres. Les méthodes exposées plus haut sont analogues à celles de M. *W. Stekloff,* qui les a introduit dans l'étude du problème de refroidissement d'une barre hétérogène depuis l'année 1896, dans une série de travaux [3]).

---

[1]) Voir: *M. Picone,* «Sui valori eccezionali di un parametro» etc., Pisa 1909. *S. Sanielevici* «Sur les équations différent.» etc. Ann. de l'Ec. Norm. Ser. 3. t. 25 (1909).

[2]) *A. Davidoglou.* Sur les équat. de vibrat. des verges élast. Annales de l'Éc. Norm. Sup. 3 Sér., t. 17 (1901) ainsi que «Étude de l'équat. différent.» etc. Ibidem, 3 Sér., t. 22 (1905).

[3]) Voir C. R. depuis 1896 et surtout le Mémoire cité plus haut.

La démonstration précédente peut être divisée en deux parties essentielles: 1) on doit établir que la fonction $W(x)$ est une fonction méromorphe de λ; 2) on doit montrer que cette fonction aura des pôles effectifs toutes les fois que $f(x)$ ne sera pas nulle identiquement dans (a, b). La première partie peut être établie aussi par la méthode classique de M. *H. Poincaré,* si l'on y fait une modification que M. *W. Stekloff* nous a indiquée quelque temps auparavant, relativement au problème de refroidissement d'une barre hétérogène. Cette modification peut être appliquée aussi à notre problème. Nous l'exposerons et déduirons en même temps l'expression pour la valeur absolue du premier pôle de la fonction $W(x)$.

Nous avons montré plus haut que

$$|\lambda_1| \leq \lambda'' = \lim_{n=\infty} \sqrt{\frac{W_{n-1}}{W_n}}$$

[voir les pages 7—8]. Montrons maintenant qu'on a en même temps

$$\lim_{n=\infty} \sqrt{\frac{W_{n-1}}{W_n}} \leq |\lambda_1| \quad ^{1)}.$$

Les équations (5a) nous donneut

$$w_n(x) = \int_a^x w_n'(x)\, dx$$

d'où

$$[w_n(x)]^2 < (b-a) \int_a^x (w_n')^2\, dx.$$

On a de même

$$\int_a^b (w_n')^2\, dx = -\int_a^b w_n\, w_n''\, dx < \sqrt{\int_a^b w_n^2\, dx \int_a^b (w_n'')^2 dx}.$$

Or la formule (6b) nous montre que

$$\int_a^b (w_n'')^2\, dx < \frac{1}{r_0} W_n,$$

donc

$$[w_n(x)]^2 < \frac{b-a}{\sqrt{r_0}} \sqrt{\int_a^b w_n^2\, dx} \sqrt{W_n}.$$

On en déduit:

$$\sqrt{\int_a^b w_n^2 dx} < \frac{b-a}{r_0} \sqrt{W_n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

---

[1]) λ_1 désigne ici *le premier pôle de* $W(x)$ qui peut être différent du premier terme dans la suite (II) de nombres caractéristiques.

et finalement:

$$|w_n(x)| < Q.\sqrt{W_n}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12a)$$

Q étant une constante positive ne dépendante pas de n et de la forme de la fonction $f(x)$.

Les considérations précédentes nous montrent que le rayon de convergence uniforme de la série (5) est au moins égal au rayon de convergence de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \sqrt{W_n}.$$

Donc on a

$$|\lambda_1| \geq \lim_{n=\infty} \sqrt{\frac{W_{n-1}}{W_n}},$$

c. q. f. d. On en peut conclure que

$$|\lambda_1| = \lim_{n=\infty} \sqrt{\frac{W_{n-1}}{W_n}}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12b)$$

La formule (12) nous donne

$$\int_a^b w_n^2\, dx < Q_1\, W_n$$

Q_1 étant une constante analogue à Q. Or les formules (6a) nous montrent que

$$W_n^2 = \left[\int_a^b p w_{n-1} w_n\, dx\right]^2 < P^2 \int_a^b w_{n-1}^2 dx \int_a^b w_n^2\, dx < Q_2 W_n \int_a^b w_{n-1} dx$$

P désignant max $|p|$ dans (a, b) et Q_2 étant la constante analogue à Q et Q_1. Donc

$$W_n < Q_2 \int_a^b w_{n-1}^2\, dx.$$

On déduit des formules (6b)

$$W_{n-1} > r_0 \int_a^b (w_n'')^2\, dx,$$

et on trouve finalemen :

$$\sqrt{\frac{W_{n-1}}{W_n}} > L_1 \frac{\sqrt{\int_a^b (w_n'')^2\, dx}}{\sqrt{\int_a^b w_n^2\, dx}}$$

L_1 étant une constante analogue à Q_2.

Posons maintenant

$$f(x) = \sum_{k=1}^{2m+3} \alpha_k f_k(x)$$

$f_k(x)$ étant des fonctions données quelconques continues dans (a, b). Toutes les fonctions $w_n(x)$ correspondant à cette fonction $f(x)$ seront de même les formes linéaires homogènes des constantes α_k. Or en vertu du lemme 2 on peut toujours choisir ces constantes de la manière qu'on ait pour chaque valeur de n:

$$\frac{\int_a^b (w_n'')^2 \, dx}{\int_a^b w_n^2 \, dx} > L_2 m^4,$$

L_2 étant une constante analogue à L_1. On en conclut, comme l'a fait *M. H. Poincaré*[1]), que

$$\sqrt{\frac{W_1}{W_2}} > \ldots > \sqrt{\frac{W_{n-1}}{W_n}} > \ldots > \lim_{n=\infty} \sqrt{\frac{W_{n-1}}{W_n}} > Lm^2,$$

L étant une costante ne dépendante pas de la forme des fonctions $f_k(x)$ et de m. En comparant avec (12b) on trouve

$$\lambda_1 > Lm^2.$$

Nous pouvons donc choisir les constantes α_k ou, ce qui est la même chose, la fonction $f(x)$ de la manière que la fonction $W(x)$ reste holomorphe dans l'interieur d'un cercle du rayon aussi grand que l'on voudra (pour m suffisamment grand). La méthode de *M. H. Poincaré*[2]) nous assurera alors que la fonction $W(x)$ est en effet une fonction méromorphe de λ.

Nous achevons ici les considérations concernant le théorème d'existence des fonctions fondamentales et commençons l'étude du problème de développement d'une fonction donnée $f(x)$ suivant les fonctions fondamentales.

§ 4. Dans tout ce qui va suivre nous ajouterons aux conditions de la page 2 rélatives aux fonctions $r(x)$, $q(x)$, et $p(x)$ encore la condition suivante

$$p(x) \geq p_0 > 0 \quad \text{dans } (a, b) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

---

[1]) Voir *H. Poincaré* «Sur les équat. de la phys. mathém.», Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo, t. (1894).

[2]) Ibidem.

p_0 étant une constante positive. Cette condition est essentielle pour toute la théorie, et dans son absence la possibilité même du développement dévient douteuse.

Nous allons établir maintenant ce théorème important:

Théorème 2. *Quelle que soit la fonction $f(x)$, bornée et intégrable dans (a, b) on a toujours le développement suivant*

$$\int_a^b pf^2\,dx = \sum_{s=1}^{\infty} A_s^2; \quad A_s = \int_a^b pfV_s\,dx \qquad \text{.....(III)}$$

Posons

$$f(x) = \sum_{s=1}^{n} A_s V_s(x) + R_n(x), \text{ [1]}$$
$$S_n = \int_a^b pR_n^2\,dx. \qquad \text{.....(14)}$$

En utilisant les propriétés des fonctions $V_s(x)$ énoncées dans le théorème 1 on trouve

$$S_n = \int_a^b pf^2\,dx - \sum_{s=1}^{n} A_s^2. \qquad \text{.....(15)}$$

Par conséquent le théorème 2 est équivalent à la formule suivante

$$\lim_{n=\infty} S_n = 0,$$

que nous démontrerons d'abord en faisant une supposition particulière sur la fonction $f(x)$.

En premier lieu nous allons établir le lemme suivant:

Lemme 3. *Si la fonction $f(x)$ admet les dérivées de deux premiers ordres intégrables dans (a, b) et vérifie les conditions aux limites*

$$f(a) = f(b) = f'(a) = f'(b) = 0,$$

la quantité positive

$$T_n = \int_a^b r(R_n'')^2\,dx + \int_a^b qR_n^2\,dx \qquad \text{.....(16)}$$

ne surpasse pas un nombre positif G ne dépendant que de la fonction $f(x)$.

---

[1]) Les considérations du § 3 nous montrent que tous les nombres caractéristiques λ_s sont positifs, parce que l'intégrale

$$\int_a^b p\,V_s^2\,dx$$

est évidemment positive sous la condition (13). La suite (II) se réduit à la suite: $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_s, \ldots$, et de même la suite (IIa) — à la suite: $V_1(x), \ldots V_s(x), \ldots$

Les formules (14) nous donnent

$$\int_a^b r\,(R_n'')^2 dx = \int_a^b r\,(f'')^2\,dx - 2\sum_{s=1}^{n} A_s \int_a^b r\,f''\,V_s''\,dx +$$
$$+ 2\sum_{s,\,t} A_s A_t \int_a^b r\,V_s''\,V_t''\,dx + \sum_{s=1}^{n} A_s^2 \int_a^b r\,(V_s'')^2\,dx\,.$$

En intégrant par parties on trouve

$$T_n = \int_a^b r\,(f'')^2\,dx + \int_a^b q f^2\,dx - \sum_{s=1}^{n} \lambda_s A_s^2 <$$
$$< \int_a^b r\,(f'')\,dx + \int_a^b q f^2\,dx = G$$

c. q. f. d.

Considérons maintenant l'équation différentielle

$$\Omega(W) = (\lambda p - q)\,W(x) + p R_n(x)$$

jointe aux conditions aux limites

$$W(a) = W(b) = W'(a) = W'(b) = 0\,.$$

En vertu du théorème 1, la fonction $W(x)$ est une fonction méromophe de λ dont tous les pôles font partie de la suite

$$\lambda_1\,,\quad \lambda_2\,,\ldots\quad \lambda_s\,,\ldots$$

Or il est évident que la fonction $pR_n(x)$ remplit les conditions (IIk) $(s = 1\,,\ 2\ldots n)$. Donc le plus petit des pôles de $W(x)$ est nécessairement plus grand que λ_n, parce qu'en raison du même théorème 1 le rayon de convergence uniforme de la série

$$W(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \lambda^s w_s(x)$$

est plus grand que λ_n. Les fonctions $w_s(x)$ sont définies par les équations

$$\Omega(w_0) = -q w_0 + p R_n$$
$$\Omega(w_s) = -q w_s + p w_{s-1} \quad (s = 1\,,\ 2\ldots)$$

jointes aux conditions

$$w_s(a) = w_s(b) = w_s'(a) = w_s'(b) = 0 \quad (s = 0,\ 1,\ldots).$$

Introduisons les intégrales

$$W_0 = \int_a^b p w_0 R_n dx\,; \quad W_s = \int_a^b p w_0 w_{2s-1} dx \quad (s = 1,\ 2, \ldots).$$

On trouve sans peine

$$\sqrt{\frac{W_0}{W_1}} > \sqrt{\frac{W_1}{W_2}} > \ldots > \lim_{s=\infty} \sqrt{\frac{W_{s-1}}{W_s}} > \lambda_n$$

On a ensuite

$$S_n = \int_a^b p\, R_n^2\, dx = \int_a^b r w_0'' R_n'' dx + \int_a^b q w_0 R_n dx$$

$$\int_a^b p\, w_0^2\, dx = \int_a^b r w_1'' w_0'' dx + \int_a^b q w_1 w_0 dx\,,$$

d'où

$$S_n^2 < W_0 \left[\int_a^b r\,(R_n'')^2\, dx + \int_a^b q\, R_n^2\, dx \right] = W_0 I_n$$

$$\int_a^b p\, w_0^2\, dx < \sqrt{W_0 W_1}.$$

Or on a

$$W_0^2 < S_n \cdot \int_a^b p w_0^2 dx\,,$$

donc

$$\frac{S_n}{T_n} < \frac{W_0}{S_n} < \frac{\int_a^b p w_0^2 dx}{W_0} < \sqrt{\frac{W_1}{W_0}} < \frac{1}{\lambda_n}.$$

En vertu du lemme 3 on a pour n quelconque

$$T_n < G\,;$$

on a, en outre,

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{\lambda_n} = 0.$$

On peut donc affirmer que

$$\lim_{n=\infty} S_n = 0,$$

si la fonction $f(x)$ vérifie les conditions du lemme 3.

Mais on s'assure sans peine d'abord que les conditions

$$f(a)=f(b)=f'(a)=f'(b)=0$$

sont superflues,— en introduisant la fonction auxiliaire $\psi(x)$ définie de la manière suivante:

Désignons par (a', b') un intervalle situé dans l'intérieur de (a, b) [c'est à dire, on a : $a<a'<b'<b$]. Soit

$$\psi(x)\equiv f(x) \quad \text{dans} \quad (a', b'),$$

$$\psi(a)=\psi(b)=\psi'(a)=\psi'(b)=0.$$

On suppose enfin que la fonction $\psi(x)$ admet les dérivées de deux premiers ordres intégrables dans (a, b) et que la différence $[f(x)-\psi(x)]$ a une limite supérieure ne dépendante que de la nature de $f(x)$. On peut construire une infinité de fonctions $\psi(x)$ jouissant de propriétés indiquées. Pour une telle foncton $\psi(x)$ on peut reproduire textuellement le raisonnement de M. *W. Stekloff* exposé dans son mémoire «*Sur les fonctions harmoniques de M. H. Poincaré*» [1]), et nous pouvons affirmer l'exactitude du théorème 2 pour la fonction quelconque $f(x)$ ayant seulement les dérivées intégrables de deux premiers ordres dans (a, b),— en particuler pour un polynôme quelconque. Mais alors les fonctions $V_s(x)$ vérifient les conditions d'un théorème générale de M. *W. Stekloff* [2]), qui nous apprend que le théorème 2 a lieu por une fonction quelconque $f(x)$, bornée et intégrable dans (a, b). À l'aide du même théorème de M. *W. Stekloff* on peut établir une proposition dont le théorème 2 n'est qu'un cas particulier:

Théorème 2a. *Soit $f(x)$ une fonction, bornée et intégrable dans (a, b); soit $\varphi(x)$ une autre fonction pouvant devenir infinie aux environs de certains points isolés d'un intervalle (a', b') intérieur à (a, b), mais tel que les intégrales*

$$\int_{a'}^{b'} pf\varphi\, dx\,; \quad \int_{a'}^{b'} p\varphi V_s dx\,; \quad \int_{a'}^{b'} p\varphi^2 dx$$

aient un sens bien déterminé.

---

[1]) Voir «Annales de la fac. des Sciences de Toulouse», 1900, pag. 282—284.

[2]) «Sur quelques égalités générales» etc., Mém. de l'Acad. des Sc. de S.-Pétersb., t. 15 (1904), pag. 14.

Ces conditions étant remplies, on a toujours

$$\int_{a'}^{b'} pf\varphi dx = \sum_{s=1}^{\infty} A_s B_s$$

$$A_s = \int_a^b pfV_s dx; \qquad B_s = \int_{a'}^{b'} p\varphi V_s dx. \text{ [1]}$$

Le théorème 2 et le lemme 3 étant établies nous pouvons en déduire sans peine certaines conditions assez générales pour la possibilité du développement d'une fonction donnée $f(x)$ suivant les fonctions $V_s(x)$.

Soit $f(x)$ une fonction vérifiant les conditions du lemme 3. La formule (14) nous donne

$$R_n(a) = R_n(b) = R'_n(a) = R'_n(b) = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(17)$$

On a donc

$$\left[R_n(x)\right]^2 = \left[\int_a^x R'_n dx\right]^2 < (b-a)\int_a^b (R'_n)^2 dx. \text{ [2]} \quad \ldots\ldots(18)$$

On a aussi

$$\int_a^b (R'_n)^2 dx = -\int_a^b R_n R''_n dx < \sqrt{\int_a^b R_n^2 dx \int_a^b (R''_n)^2 dx},$$

ce qui nous donne, en vertu de (18),

$$\left[R_n(x)\right]^2 < (b-a)\sqrt{\int_a^b R_n^2 dx \int_a^b (R''_n)^2 dx}. \quad \ldots\ldots(18a)$$

Or l'inégalité (13) et le lemme 3 nous donnent

$$\int_a^b R_n^2 dx < \frac{1}{p_0}\int_a^b pR_n^2 dx = \frac{S_n}{p_0}; \quad \int_a^b (R''_n)^2 dx < \frac{I_n}{r_0} < \frac{G}{r_0}.$$

On déduit donc de (18a):

$$|R_n(x)| < FS_n^{1/4} \text{ dans } (a, b),$$

F étant une constante ne dépendante pas de n. Nous avons, d'après le théorème 2,

$$\lim_{n=\infty} S_n = 0.$$

---

[1]) Ibidem, pag. 16.

[2]) Comp. *W. Stekloff*. «Sur un problème d'Analyse» etc. C. R. 1907.

On peut donc trouver toujours un tel nombre N qu'on ait pour chaque valeur de x dans (a, b)

$$|R_n(x)| < \varepsilon,$$

à seule condition

$$n > N,$$

ε étant arbitrairement petit. Cela nous assure que la série

$$\sum_{s=1}^{\infty} A_s V_s$$

est uniformement convergente dans (a, b) et y représente la fonction $f(x)$. On a donc la proposition suivante:

Théorème 3. *Si la fonction $f(x)$ admet les dérivées de deux premiers ordres intégrables dans (a, b) et vérifie en outre les conditions aux limites*

$$f(a) = f(b) = f'(a) = f'(b) = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (19)$$

on peut développer la fonction $f(x)$ en une série uniformement convergente dans (a, b):

$$f(x) = \sum_{s=1}^{\infty} V_s(x) . \int_a^b p f V_s dx. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\mathrm{IV})$$

Cette proposition n'a pas été encore établie jusqu'à present. Les propositions analogues des M. M. *Davidoglou* et *Myller* [1]) sont beaucoup moins générales que le théorème 3. Ces auteurs supposent en effet que la fonction $f(x)$ non seulement vérifie les conditions aux limites (19), mais possède encore les dérivées de *quatre* premiers ordres dans (a, b).

§ 5. Dans les §§ 1—4 nous avons étudié le cas où la verge vibrante est *encastrée dans a et b*. Nous allons considérer ici les deux autres cas où la verge est 1) *encastrée dans a et appuyée dans b* et 2) *appuyée dans a et b*. Nous arrivons à la même équation différentielle

$$\Omega(V) = (\lambda p - q) V,$$

mais jointe aux autres conditions aux limites, à savoir:

$$V(a) = V(b) = V'(a) = V''(b) = 0$$

dans le cas 1) et

$$V(a) = V(b) = V''(a) = V''(b) = 0$$

---

[1]) Voir *A. Davidoglou*, mém. cité plus haut, pag. 406—421.

A. Myller, «Gewöhnliche Diff-Gleich. höh. Ordnung in ihrer Beziehung zu den Integral-Gleich.» Göttingen, Dissertation (1906), s. 15—16.

dans le cas 2). Tous les raisonnements des §§ 1—3 peuvent être transportés textuellement à ces deux cas nouveaux, et *nous pouvons affirmer l'exactitude du théorème 1 aussi pour les conditions aux limites transformées.*

La possibilité du développement de la fonction donnée $f(x)$ suivant les nouvelles fonctions $V_s(x)$ peut être établie dans les conditions même un peu plus générales qu'auparavant. On s'assure sans peine que le lemme 3 est le fondement de tous les raisonnements du § 4. Etudions ce lemme dans l'application aux nouvelles fonctions $V_s(x)$. On aura, en employant les notations du § 4,

$$T_n = \int_a^b r(R_n'')^2\,dx + \int_a^b qR_n^2\,dx = \int_a^b r(f'')^2\,dx + \int_a^b qf^2\,dx - \sum_{s=1}^{\infty} \lambda_s A_s^2$$

l'égalité qui est vraie toutes les fois que la fonction $f(x)$ admettant les dérivées de deux premiers ordres intégrables dans (a, b) vérifie encore les conditions aux limites

$$f(a) = f(b) = f'(a) = 0 \qquad \text{[dans le cas 1)]}$$

ou

$$f(a) = f(b) = 0 \qquad \text{[dans le cas 2)]}$$

Il ne nous reste qu'à répéter presque textuellement les raisonnements du § 4 pour établir la proposition suivante:

Théorème 4. *La série*

$$\sum_{s=1}^{\infty} V_s(x) \cdot \int_a^b pfV_s\,dx \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\mathrm{V})$$

converge uniformément et représente la fonction donnée $f(x)$ dans (a, b), si celle-ci vérifie les conditions

$$f(a) = f(b) = f'(a) = 0\,,$$

ou

$$f(a) = f(b) = 0\,,$$

correspondant aux deux cas divers des fonctions $V_s(x)$. On suppose, en outre, que $f(x)$ admet les dérivées de deux premiers ordres intégrables dans (a, b).

Il est évident que les théorèmes 2 et 2a subsistent aussi pour les nouvelles fonctions $V_s(x)$.

S.-Pétersbourg, Décembre 1909.

Электронная теорія въ оптикѣ.

I.

Электронная теорія разрабатывалась въ двухъ направленіяхъ. Въ одномъ, къ которому принадлежатъ работы П. Друде и Дж. Дж. Томсона, эта теорія разрабатывалась такъ сказать непосредственно, путемъ совершенно частныхъ и элементарныхъ соображеній, не связанныхъ съ общими методами изслѣдованія въ математической физикѣ, въ другомъ-же направленіи, представителями котораго должны считаться Г. А. Лоренцъ и Ларморъ, задача ставится уже на общую точку зрѣнія, но ихъ анализъ сложенъ и труденъ, да къ тому-же у Лоренца связанъ съ старыми представленіями о поляризаціи электроновъ, что дѣлаетъ его теорію искуственной. Поэтому не безинтересно попытаться дать электронную теорію хотя и простую, но совершенно общую. Мы и хотимъ изложить въ настоящей статьѣ подобную теорію. Разсмотримъ проводникъ, въ которомъ происходятъ электрическіе токи, на которые мы будемъ смотрѣть съ точки зрѣнія Максвелла, т. е. какъ на нѣкоторое *кинетическое состояніе эфира* среды, *періодическаго характера*; сверхъ того внутри среды движутся *электроны*, т. е. матеріальныя частицы, масса которыхъ (не болѣе) $\frac{1}{2000}$ доля массы атома водорода, заряженныя отрицательнымъ электричествомъ и движущіяся съ большой скоростью, примѣрно до $1/10$ или $1/3$ скорости свѣта.

Въ основу теоріи положимъ принципъ сохраненія энергіи и фактъ развитія магнитнаго поля электрическимъ токомъ.

Пусть

$$E \text{ и } H$$

будутъ энергіи электрическая и магнитная, расчитанныя на весь объемъ среды; затѣмъ пусть

$$R$$

будетъ работа диссипативныхъ силъ, приложенныхъ къ точкамъ разсматриваемой средины, тогда принципъ сохраненія энергіи представится въ видѣ:

$$\frac{d(E+H)}{dt}+R=0 \tag{1}$$

причемъ буквой t обозначимъ время.

Выразимъ теперь введенныя величины въ функціи другихъ, а именно электрическихъ силъ и перемѣщеній, а также и магнитныхъ силъ и перемѣщеній электрона. Пусть

$$E_x,\ E_y,\ E_z$$

будутъ составляющія электрической силы въ точкѣ $(x,\ y,\ z)$ среды, тогда будемъ имѣть

$$E=\int\frac{K}{8\pi}(E_x^2+E_y^2+E_z^2)d\tau \tag{2}$$

причемъ $d\tau$ есть элементъ объема и интегралъ распространенъ на весь объемъ, занимаемый разсматриваемой средой; количество K есть діэлектрическая постоянная среды (ея эфира, какъ думаютъ нѣкоторые физики). Но если $f,\ g,\ h$ суть проекціи такъ называемой Максвелломъ электрической пертурбаціи, т. е. перемѣщенія точки $(x,\ y,\ z)$ эфира, то по опредѣленію имѣемъ:

$$f=\frac{K}{4\pi}\ E_x,\ g=\frac{K}{4\pi}E_y,\ h=\frac{K}{4\pi}E_z \tag{3}$$

Подставляя отсюда значенія $E_x,\ E_y,\ E_z$, въ равенство (2) найдемъ для электрической энергіи выраженіе:

$$E=\int\frac{2\pi}{K}(f^2+g^2+h^2)d\tau \tag{4}$$

Затѣмъ, если обозначимъ $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ составляющія магнитной силы въ точкѣ $(x,\ y,\ z)$, то магнитная энергія среды будетъ выражаться формулой:

$$H=\int\frac{\mu}{8\pi}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)d\tau \tag{5}$$

и μ здѣсь есть коэффиціентъ магнитной проницаемости среды.

Работу диссипативныхъ силъ представимъ въ слѣдующемъ видѣ:

$$R=\int\frac{2\pi}{K_0}(f_0^2+g_0^2+h_0^2)d\tau-\int\frac{4\pi}{K}(ff_0+gg_0+hh_0)d\tau+$$
$$+\int\frac{4\pi}{K}(fp+gq+hr)d\tau-\int\frac{m_0d\tau}{2}\left((\frac{df_0}{dt})^2+(\frac{dg_0}{dt})^2+(\frac{dh_0}{dt})^2\right)+$$
$$+\int(r_1f_0+r_2g_0+r_3h_0)d\tau \tag{6}$$

Здѣсь $f_0,\ g_0,\ h_0$ суть составляющія перемѣщенія электрона, m_0 масса единицы объема электрона, $p,\ q,\ r$ составляющія тока проводимости,

r_1, r_2, r_3 составляющія силы тренія, которое встрѣчаетъ электронъ со стороны среды; они выражаются такъ:

$$r_1 = k_0 \frac{df_0}{dt},\ r_2 = k_0 \frac{dg_0}{dt},\ r_3 = k_0 \frac{dh_0}{dt} \tag{7}$$

количество K_0 есть коэффиціентъ, аналогичный K. Первые два члена R аналогичны работѣ *quasi*—упругихъ силъ, третій членъ даетъ теплоту Джоула, а четвертый есть живая сила электрона, и вмѣсто него можно взять слѣдующій:

$$+\int \frac{m_0 d\tau}{2}\left(f_0 \frac{d^2 f_0}{dt^2} + g_0 \frac{d^2 g_0}{dt^2} + h_0 \frac{d^2 h_0}{dt^2}\right) \tag{8}$$

Дѣйствительно, стоитъ только уравненіе (1) умножить на dt и взять интегралъ за все время существованія изучаемаго явленія, т. е. отъ $t = t_1$ до $t = t_2$, тогда, не измѣняя ничего въ остальныхъ членахъ, получимъ:

$$-\int\int \frac{m_0 d\tau}{2}\left((\frac{df_0}{dt})^2 + (\frac{dg_0}{dt})^2 + (\frac{dh_0}{dt})^2\right)dt = -\int \frac{m_0 d\tau}{2}\int dt\left(\frac{df_0}{dt}\cdot\frac{df_0}{dt} + \right.$$

$$\left. + \frac{dg_0}{dt}\cdot\frac{dg_0}{dt} + \frac{dh_0}{dt}\cdot\frac{dh_0}{dt}\right) = +\int \frac{m_0 d\tau}{2}\int\left(f_0 \frac{d^2 f_0}{dt^2} + g_0 \frac{d^2 g_0}{dt^2} + h_0 \frac{d^2 h_0}{dt^9}\right),$$

ибо проинтегрированная часть обращается въ ноль, такъ какъ для $t = t_1$ и $t = t_2$ должно быть:

$$f_0 = g_0 = h_0 = 0.$$

Теперь мы займемся выводомъ основнаго соотношенія между электрическимъ токомъ и развиваемымъ имъ магнитнымъ полемъ.

Пусть J будетъ сила тока, выраженнаго въ электромагнитныхъ единицахъ, тогда работа затрачиваемая токомъ на перемѣщеніе единицы положительной магнитной массы вдоль замкнутаго контура (силовой линіи) представится такъ:

$$4\pi A J = \int(\alpha dx + \beta dy + \gamma dz) \tag{9}$$

Но если $J_x dS$, $J_y dS$, $J_z dS$ будутъ составляющія электрическаго тока черезъ элементъ сѣченія проводника dS, то легко видѣть, что

$$J = \int\left((J_x \cos(nx) + J_y \cos(ny) + J_z \cos(nz)\right)dS \tag{10}$$

гдѣ n направленіе нормали къ элементу dS, проведенной въ сторону тока. Сравнивая (9) и (10) и примѣняя къ линейному интегралу теорему Стокса, найдемъ:

$$4\pi A\int\Big(J_x\cos(nx)+J_y\cos(ny)+J_z\cos(nz)\Big)dS=\int\Big((\frac{d\beta}{dz}-\frac{d\gamma}{dy})\cos(nx)+$$

$$+(\frac{d\gamma}{dx}-\frac{d\alpha}{dz})\cos(ny)+(\frac{d\alpha}{dy}-\frac{d\beta}{dx})\cos(nz)\Big)dS.$$

Такъ какъ это равенство справедливо при всякомъ контурѣ, на который опирается поверхность S, то заключаемъ, что

$$\left.\begin{aligned}4\pi AJ_x&=\frac{d\beta}{dz}-\frac{d\gamma}{dy}\\4\pi AJ_y&=\frac{d\gamma}{dx}-\frac{d\alpha}{dz}\\4\pi AJ_z&=\frac{d\alpha}{dy}-\frac{d\beta}{dx}\end{aligned}\right\}\qquad(11)$$

причемъ $A=\frac{1}{\omega_0}$ и ω_0 есть скорость свѣта въ пустотѣ, т. е. въ міровомъ эфирѣ.

Съ другой стороны съ точки зрѣнія теоріи Максвелла мы должны имѣть:

$$J_x=\frac{df}{dt}+p,\ J_y=\frac{dg}{dt}+q,\ J_z=\frac{dh}{dt}+r\qquad(12)$$

Смыслъ этихъ равенствъ ясенъ: первые члены ихъ правыхъ частей суть максвелловскіе пертурбаціонные токи или токи перемѣщенія.

Пользуясь равенствами (12), мы преобразуемъ выраженіе $\frac{dE}{dt}$.

Изъ равенствъ (11) и (12) получаемъ:

$$\frac{df}{dt}=\frac{1}{4\pi A}\Big(\frac{d\beta}{dz}-\frac{d\gamma}{dy}\Big)-p,$$

$$\frac{dg}{dt}=\frac{1}{4\pi A}\Big(\frac{d\gamma}{dx}-\frac{d\alpha}{dz}\Big)-q,$$

$$\frac{dh}{dt}=\frac{1}{4\pi A}\Big(\frac{d\alpha}{dy}-\frac{d\beta}{dx}\Big)-r;$$

поэтому, подставивъ эти значенія въ формулу (4) для $\frac{dE}{dt}$, найдемъ:

$$\frac{dE}{dt}=\int\frac{d\tau}{AK}\Big[f\Big(\frac{d\beta}{dz}-\frac{d\gamma}{dy}\Big)+g\Big(\frac{d\gamma}{dx}-\frac{d\alpha}{dz}\Big)+h\Big(\frac{d\alpha}{dy}-\frac{d\beta}{dx}\Big)\Big]-$$

$$-\int\frac{4\pi d\tau}{K}\Big(fp+gq+hr\Big).$$

Или примѣняя къ первому интегралу теорему Грина, найдемъ:

$$\frac{dE}{dt}=\frac{1}{AK}\int d\tau\left[\alpha\left(\frac{dg}{dz}-\frac{dh}{dy}\right)+\beta\left(\frac{dh}{dx}-\frac{df}{dz}\right)+\gamma\left(\frac{df}{dy}-\frac{dg}{dx}\right)\right]-$$

$$-\frac{4\pi}{K}\int d\tau\left(fp+gq+hr\right)+\frac{1}{AK}\int dS\left[f\left(\beta\cos(nz)-\gamma\cos(ny)\right)+\right.$$

$$\left.+g\left(\gamma\cos(nx)-\alpha\cos(nz)\right)+h\left(\alpha\cos(ny)-\beta\cos(nx)\right)\right] \qquad (13)$$

причемъ dS элементъ поверхности, ограничивающей разсматриваемую средину, а n направленіе внѣшней нормали къ нему.

Подставляя теперь въ равенство (1) значеніе найденныхъ и приведенныхъ его частей, получимъ слѣдующее выраженіе:

$$\int d\tau\left\{\alpha\left[\frac{\mu}{4\pi}\frac{d\alpha}{dt}-\frac{1}{AK}\left(\frac{dh}{dy}-\frac{dg}{dz}\right)\right]+\beta\left[\frac{\mu}{4\pi}\frac{\lambda\beta}{dt}-\frac{1}{AK}\left(\frac{df}{dz}-\frac{dh}{dx}\right)\right]+\right.$$

$$+\gamma\left[\frac{\mu}{4\pi}\frac{d\gamma}{dt}-\frac{1}{AK}\left(\frac{dg}{dx}-\frac{df}{dy}\right)\right]+f_0\left[\frac{m_0}{2}\frac{d^2f_0}{dt^2}+\frac{2\pi}{K_0}f_0+r_1-\frac{4\pi}{K}f\right]+$$

$$\left.+g_0\left[\frac{m_0}{2}\frac{d^2g_0}{dt^2}+\frac{2\pi}{K_0}g_0+r_2-\frac{4\pi}{K}g\right]+h_0\left[\frac{m_0}{2}\frac{d^2h_0}{dt^2}+\frac{2\pi}{K_0}h_0+r_3-\frac{4\pi}{K}h\right]\right\}+$$

$$+\frac{1}{A}\int\frac{dS}{K}\left[f\left(\beta\cos(nz)-\gamma\cos(ny)\right)+g\left(\gamma\cos(nx)-\alpha\cos(nz)\right)+\right.$$

$$\left.+h\left(\alpha\cos(ny)-\beta\cos(nx)\right)\right]=0 \qquad (14).$$

Такъ какъ это равенство имѣетъ мѣсто для всякаго объема средины, какъ-бы онъ малъ ни былъ, то заключаемъ, что коэффиціенты при α, β, γ и f_0, g_0, h_0 должны быть равны нулю, а потому получаемъ слѣдующія двѣ системы уравненій: первую

$$\left.\begin{aligned}AK\mu\frac{d\alpha}{dt}&=4\pi\left(\frac{dh}{dy}-\frac{dg}{dz}\right)\\AK\mu\frac{d\beta}{dt}&=4\pi\left(\frac{df}{dz}-\frac{dh}{dx}\right)\\AK\mu\frac{d\gamma}{dt}&=4\pi\left(\frac{dg}{dx}-\frac{df}{dy}\right)\end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{I})$$

и затѣмъ вторую:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2f_0}{dt^2}+k\frac{df_0}{dt}+\eta f_0=f \\ m\frac{d^2g_0}{dt^2}+k\frac{dg_0}{dt}+\eta g_0=g \\ m\frac{d^2h_0}{dt^2}+k\frac{dh_0}{dt}+\eta h_0=h \end{aligned}\right\} \qquad \text{(II)}$$

гдѣ положено:

$$\frac{Km_0}{8\pi}=m,\ \frac{Kk_0}{4\pi}=k,\ \frac{K}{K_0}=\eta \qquad (15)$$

причемъ мы пользовались равенствами (7).

Къ этимъ уравненіямъ надо присоединить еще систему, которую мы можемъ получить изъ уравненій (11) и (12) и которая представляетъ связь, устанавливаемую опытомъ, между электрическимъ токомъ и магнитной силой; эта система будетъ:

$$\left.\begin{aligned} 4\pi A\frac{df}{dt}+4\pi Ap=\frac{d\beta}{dz}-\frac{d\gamma}{dy} \\ 4\pi A\frac{dg}{dt}+4\pi Aq=\frac{d\gamma}{dx}-\frac{d\alpha}{dz} \\ 4\pi A\frac{dh}{dt}+4\pi Ar=\frac{d\alpha}{dy}-\frac{d\beta}{dx} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(III)}$$

Система (I) и система (III) представляютъ Герцъ-Максвелловскія уравненія; система-же (II), дающая движеніе электрона, есть дополнительная и дана была сначала Гельмгольцемъ [1]), затѣмъ Друде и Г. Лоренцомъ.

Въ системѣ (III) для токовъ проводимости Г. А. Лоренцъ [2]) беретъ:

$$p=\varrho\frac{df_0}{dt},\ q=\varrho\frac{dg_0}{dt},\ r=\varrho\frac{dh_0}{dt} \qquad \text{(L)}$$

гдѣ ϱ объемная электрическая плотность въ точкѣ (x, y, z). Дж. Дж. Томсонъ полагаетъ [3]), что электроны противодѣйствуютъ токамъ проводимости, понимаемымъ въ обычномъ смыслѣ этого слова, поэтому мы можемъ представить токи p, q, r въ видѣ:

$$p=\frac{4\pi C}{K}\left(f-\gamma\frac{df_0}{dt}\right),\ q=\frac{4\pi C}{K}\left(g-\gamma\frac{dg_0}{dt}\right),\ r=\frac{4\pi C}{K}\left(h-\gamma\frac{dh_0}{dt}\right) \qquad \text{(G)}$$

---

[1]) См. «Электромагнитная теорія проводниковъ» автора, стр. 33, уравненія (1).

[2]) Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften. BdV2. S. 156.

[3]) *J. J. Thomson.* Die Corpusculartheorie der Materie. S. 47.

гдѣ C коэффиціентъ электропроводности средины, а γ постоянное. Дѣйствительно, прежде всего мы имѣемъ:

$$p = CE_x - C'\frac{df_0}{dt} \text{ и т. п. уравненія для } q \text{ и } r.$$

Но можно взять:

$$C' = \frac{4\pi}{K_0} C_0,$$

да сверхъ того извѣстно, что $E_x = \frac{4\pi}{K} f$, а потому, если положимъ, что

$$\gamma = \frac{C_0}{C} \eta, \tag{16}$$

то и получимъ равенства (G).

Въ обычной теоріи $C_0 = 0$.

Мы здѣсь разработаемъ точку зрѣнія Дж. Дж. Томсона, которая намъ кажется болѣе пріемлемой, чѣмъ точка зрѣнія Г. А. Лоренца на токи проводимости.

Но прежде чѣмъ приступить къ этой разработкѣ, мы докончимъ выводъ слѣдствій изъ равенства (14). Въ немъ еще остается условіе на границахъ, а именно: должно быть удовлетворено условіе:

$$\int \frac{dS}{K}\Big[\int f\Big(\beta\cos(nz) - \gamma\cos(ny)\Big) + g\Big(\gamma\cos(nx) - \alpha\cos(nz)\Big) + h\Big(\alpha\cos(ny) - \\ - \beta\cos(nx)\Big)\Big] = 0 \qquad \text{(IV)}$$

Этому уравненію обыкновенно удовлетворяютъ, полагая, что если n взять за ось z-овъ, а оси x, y въ плоскости границы срединъ, тогда будетъ:

$$\cos(nx) = \cos(ny) = 0, \ \cos(nz) = \pm 1,$$

причемъ для верхней среды надо взять, напр., знакъ $+$, а для нижней знакъ $-$. Итакъ (IV) даетъ теперь болѣе простое условіе:

$$\int \frac{dS}{K}\Big[f(\beta) - g(\alpha)\Big] = 0$$

гдѣ $(\alpha) = \alpha + \alpha' - \alpha_1$, $(\beta) = \beta + \beta' - \beta_1$, и количества α, β относятся къ падающему лучу; α', β' къ отраженному, а α_1, β_1 къ преломленному. Теперь получаемъ:

$$\alpha + \alpha' = \alpha_1, \ \beta + \beta' = \beta_1 \tag{17}$$

и затѣмъ обыкновенно берутъ еще:

$$\frac{f}{K} + \frac{f'}{K'} = \frac{f_1}{K_1}, \ \frac{g}{K} + \frac{g'}{K'} = \frac{g_1}{K_1} \tag{18}$$

Мы и возьмемъ эти условія, хотя можно пользоваться условіемъ (IV) непосредственно, какъ показано мной въ 1893 году [1]). Надо замѣтить, что вмѣсто (18) можно взять другія. Условія (17) и (18) суть обычныя условія равенства электрическихъ и магнитныхъ силъ, параллельныхъ поверхности раздѣла срединъ, и даны были еще Г. Герцомъ.

II.

Займемся теперь выводомъ слѣдствій изъ системъ уравненій (I), (II) и (III).

Пусть частными рѣшеніями уравненій для f, g, h будутъ выраженія:

$$f = Me^{Q},\ g = Ne^{Q},\ h = Pe^{Q} \tag{19}$$

гдѣ M, N, P комплексныя постоянныя, и количество Q опредѣляется уравненіемъ:

$$Q = pt\sqrt{-1} + ax + by + cz \tag{20}$$

причемъ a, b, c тоже комплексныя постоянныя, а

$$p = \frac{2\pi}{\tau} \tag{21}$$

есть частота перемѣнъ кинетическаго состоянія эфира. Подставимъ эти значенія f, g, h въ уравненія (I) и интегрируя ихъ по t, получимъ:

$$\left.\begin{aligned} A\mu\alpha &= -\frac{4\pi\sqrt{-1}}{Kp}(Pb - Mc)e^{Q}, \\ A\mu\beta &= -\frac{4\pi\sqrt{-1}}{Kp}(Mc - Pa)e^{Q}, \\ A\mu\gamma &= -\frac{4\pi\sqrt{-1}}{Kp}(Na - Mb)e^{Q} \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

постоянныя интегрированія для $t = t_1$ равны нулю по положенію.

Подставимъ теперь значенія α, β, γ изъ (22) въ систему (III), но замѣтивъ предварительно, что по уравненіямъ (G) получаемъ:

$$p = \frac{4\pi C}{K}(1 - \gamma pu\sqrt{-1})f,\ q = \frac{4\pi C}{K}(1 - \gamma pu\sqrt{-1})g,\ r = \frac{4\pi C}{K}(1 - \gamma pu\sqrt{-1})h,$$

гдѣ положено:

$$f = uf,\ g_0 = ug,\ h_0 = uh\ ^{2)}; \tag{24}$$

---

[1]) *А. П. Грузинцевъ.* Электромагнитная теорія свѣта, стр. 89, § 60.

[2]) См. VI въ концѣ настоящей статьи.

Сдѣлавъ теперь указанную подстановку и полагая $\frac{4\pi C}{p} = 2C\tau = \mathrm{D}$, находимъ:

$$M[K\mu - D\mu\sqrt{-1}(1-\gamma p u\sqrt{-1})] = -\frac{1}{A^2p^2}[M(a^2+b^2+c^2) - a(Ma+Nb+Pc)],$$

$$N[K\mu - D\mu\sqrt{-1}(1-\gamma p u\sqrt{-1})] = -\frac{1}{A^2p^2}[N(a^2+b^2+c^2) - b(Ma+Nb+Pc)],$$

$$P[K\mu - D\mu\sqrt{-1}(1-\gamma p u\sqrt{-1})] = -\frac{1}{A^2p^2}P(a^2+b^2+c^2) - c(Ma+Nb+Pc)].$$

Умножая эти уравненія на порядку на a, b, c и складывая результаты, найдемъ:

$$(Ma + Mb + Pc)[K\mu - D\mu\sqrt{-1}(1-\gamma p u\sqrt{-1})] = 0$$

Отсюда заключаемъ, что

$$Ma + Nb + Pc = 0 \tag{25}$$

а потому предыдущая система обращается въ одно уравненіе:

$$K\mu - D\mu\sqrt{-1}(1-\gamma p u\sqrt{-1}) = -\frac{a^2+b^2+c^2}{A^2p^2}$$

Положимъ здѣсь:

$$a^2 + b^2 + c^2 = -A^2p^2V^2e^{2v\sqrt{-1}}; \tag{26}$$

получимъ такъ называемое *дисперсіонное соотношеніе*

$$K\mu - D\mu(\sqrt{-1} + \gamma p u) = V^2e^{2v\sqrt{-1}} \tag{A}$$

Здѣсь V и v суть оптическія постоянныя и связаны съ показателемъ преломленія n_0 и коэффиціентомъ поглощенія $\varkappa_0$ при нормальномъ паденіи, какъ будетъ показано ниже, слѣдующими соотношеніями:

$$V^2e^{2v\sqrt{-1}} = n_0^2(1 - \varkappa_0\sqrt{-1})^2 \tag{27}$$

Количество u, входящее въ равенство (A), есть функція періода τ или длины волны. Дѣйствительно, уравненія (II) даютъ такъ называемое *электронное соотношеніе* (см. стр. 17):

$$\frac{1}{u} = \eta - mp^2 + kp\sqrt{-1} \tag{B}$$

Подставляя это значеніе u въ (A), получимъ слѣдующее соотношеніе:

$$A + B\sqrt{-1} = K\mu - D\mu\sqrt{-1} - D\mu p\gamma[(\eta - mp^2) - kp\sqrt{-1}]:[(\eta - mp^2)^2 + k^2p^2],$$

гдѣ положено для простоты письма:

$$V^2 e^{2v\sqrt{-1}} = A + B\sqrt{-1}, \tag{28}$$

т. е.

$$A = n_0^2(1 - \varkappa_0^2), \quad B = -2n_0^2\varkappa \tag{29}$$

Положимъ теперь:

$$\lambda_m = 2\pi\omega_0\sqrt{\frac{m}{\eta}};\ g_m = \frac{2\pi\omega_0 k}{\eta};\ P_m = 4\pi C_0\mu \tag{30}$$

въ такомъ случаѣ предыдущее равенство распадается на два слѣдующія:

$$\left.\begin{aligned} A &= K\mu - \frac{P_m(\lambda_0^2 - \lambda_m^2)\lambda_0^2}{(\lambda_0^2 - \lambda_m^2)^2 + g_m^2\lambda_0^2} \\ B &= -D\mu + \frac{P_m g_m \lambda_0^3}{(\lambda_0^2 - \lambda_m^2)^2 + g_m^2\lambda_0^2} \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

причемъ пользовались соотношеніемъ:

$$p = \frac{2\pi}{\tau} = \frac{2\pi\omega_0}{\lambda_0} \tag{32}$$

Остановимся нѣсколько на соотношеніяхъ (31).

По теоріи самого Максвелла, который не принималъ, да и не могъ принимать въ расчетъ дѣйствіе электроновъ (т. II, § 798, уравненія (3) и (4)), имѣли-бы вмѣсто (31) слѣдующія соотношенія при условіи $C_0 = 0$:

$$A = K\mu,\ B = -D\mu$$

Такимъ образомъ равенства (31) даютъ законы *дисперсіи* въ случаѣ, разумѣется, существованія одной полосы поглощенія въ спектрѣ тѣла.

Замѣтимъ, что по равенству (B) имѣемъ:

$$u = \frac{1}{\eta}\frac{(\lambda_0^2 - \lambda_m^2)\lambda_0^2 - g_m\lambda_0^3\sqrt{-1}}{(\lambda_0^2 - \lambda_m^2)^2 + g_m^2\lambda_0^2} \tag{B bis}$$

или

$$u = u' - u''\sqrt{-1} \tag{33}$$

гдѣ положено:

$$\eta u' = \frac{(\lambda_0^2 - \lambda_m^2)\lambda_0^2}{(\lambda_0^2 - \lambda_m^2)^2 + g_m^2\lambda_0^2},\ \eta u'' = \frac{g_m\lambda_0^3}{(\lambda_0^2 - \lambda_m^2)^2 + g_m^2\lambda_0^2} \tag{34}$$

Если введемъ (33) въ дисперсіонное соотношеніе (A), то по сравненіи дѣйствительныхъ и мнимыхъ частей получимъ слѣдующія двѣ формулы:

$$\left.\begin{aligned} A &= K\mu - D_0\mu\gamma u' \\ B &= -D\mu + D_0\mu\gamma u'' \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

причемъ положено $Dp = D_0 = 4\pi C$ (36)

Такъ какъ по равенству (16)

$$\gamma = \frac{C_0}{C}\eta,$$

то по (36)

$$D_0\gamma = 4\pi C_0\eta \tag{37}$$

слѣдовательно для діэлектриковъ, т. е. когда $C = 0$, $D_0\gamma$ не равно нулю. Формула (A) даетъ намъ двѣ слѣдующія:

$$K\mu - D_0\mu\gamma u' = A, -D\mu - D_0\mu\gamma u' = B,$$

если вспомнимъ, что $Dp = D_0$. (a)

Первая формула даетъ:

$$\frac{A - K\mu}{A + D_0\mu\gamma} = \frac{D_0\mu\gamma u'}{K\mu + D_0\mu\gamma(1 - u')} \tag{b}$$

Пусть $\mu = 1$, что всегда можно допустить для малыхъ періодовъ и кромѣ того согласно H. A. Lorentz'у можно положить $K = 1$; въ такомъ случаѣ формула (b) даетъ:

$$\frac{A - 1}{A + D_0\gamma} = \frac{D_0\gamma u'}{1 + D_0\gamma - D_0\gamma u'}. \tag{c}$$

Вспомнивъ значеніе $D_0\gamma$, имѣемъ:

$$D_0\gamma = 4\pi C\gamma = 4\pi\frac{C_0}{K_0}.$$

Если положимъ, что

$$K_0 = 2\pi C_0, \tag{d}$$

то получимъ:

$$D_0\gamma = 2 \tag{e}$$

и формула (c) будетъ:

$$\frac{A - 1}{A + 2} = \frac{u'}{3 - 2u'}$$

или, приближенно, если g_m очень мало,

$$\frac{A - 1}{A + 2} = \frac{u'}{3} \tag{f}$$

Но (формула (34)):

$$u' = \frac{K_0\lambda_0^2}{\lambda_0^2 - \lambda_m^2},$$

а потому (f) будетъ:

$$\frac{A+2}{A-1}=\frac{3}{K_0}\left(1-\frac{\lambda_m^2}{\lambda_0^2}\right) \tag{g}$$

Здѣсь можно взять n_0 вмѣсто A и тогда получится формула Лоренцовъ, данная *H. A. Lorentz*'омъ [1]) въ Лейденѣ и *Lorenz*'омъ въ Копенгагенѣ еще въ 1880 г.

III.

Если мы имѣемъ не одинъ родъ электроновъ, а нѣсколько, тогда обозначивъ m_i, C_i, K_i; f_i, g_i, h_i [2]) количества относящіяся къ i-му электрону, т. е. къ электрону i-го рода, тогда въ нашей теоріи взойдутъ измѣненія лишь въ величины R и p, q, r, которыя будетъ имѣть другой видъ, а именно: по формулѣ (6) имѣемъ для R:

$$R=\int 2\pi\sum_1^n\frac{1}{K_i}(f_i^2+g_i^2+h_i^2)d\tau-\int\frac{4\pi}{K}\sum_1^n(ff_i+gg_i+hh_i)d\tau+$$

$$+\int\frac{4\pi}{K}(fp+gq+hr)d\tau+\int d\tau\sum_1^n\frac{m_i}{2}\left[f_i\frac{d^2f_i}{dt^2}+g_i\frac{d^2g_i}{dt^2}+h_i\frac{d^2h_i}{dt^2}\right]+$$

$$+\int d\tau\sum_1^n(r_if_i+r_2g_i+r_3h_i),$$

причемъ съ живой силой уже произведено преобразованіе, указанное формулой (8).

Затѣмъ для p, q, r будемъ имѣть:

$$p=\frac{4\pi C}{K}\left(f-\sum\gamma_i\frac{df_i}{dt}\right),\ q=\frac{4\pi C}{K}\left(g-\sum\gamma_i\frac{dg_i}{dt}\right),\ r=\frac{4\pi C}{K}\left(h-\sum\gamma_i\frac{dh_i}{dt}\right),$$

причемъ

$$\gamma_i=\frac{C_i}{C}\eta_i,\ \eta_i=\frac{K}{K_i} \tag{38}$$

и затѣмъ въ выраженіи для R:

$$r_1=k_i\frac{df_i}{dt},\ r_2=k_i\frac{dg_i}{dt},\ r_3=k_i\frac{dh_i}{dt} \tag{39}$$

Въ такомъ случаѣ система (I) вполнѣ сохранитъ свой видъ; система (II) будетъ имѣть видъ сначала

---

[1]) *H. A. Lorentz*: The theory of electrons. § 123 (1909).

[2]) Здѣсь теперь вводится указатель i вмѣсто o.

$$\frac{m_i}{2}\frac{d^2 f_i}{dt^2}+r_1+\frac{2\pi}{K_i}f_i-\frac{4\pi}{K}f=0$$

или:

$$m^{(i)}\frac{d^2 f_i}{dt^2}+k^{(i)}\frac{df_i}{dt}+\eta_i f_i=f \qquad \text{(II bis)}$$

и подобные уравненія для g_i и h_i, причемъ положено:

$$\frac{Km_i}{8\pi}=m^{(i)};\ \frac{Kk_i}{4\pi}=k^{(i)};\ \frac{K}{K_i}=\eta_i. \qquad (40)$$

Система (III) сохранитъ свой видъ, но въ ней будетъ:

$$p=\frac{4\pi C}{K}\left(1-\sum\gamma_i p u_i\sqrt{-1}\right)f;\ q=\frac{4\pi C}{K}\left(1-\sum\gamma_i p u_i\sqrt{-1}\right)g;$$

$$r=\frac{4\pi C}{K}\left(1-\sum\gamma_i p u_i\right)h.$$

гдѣ положено:

$$f_i=u_i f,\ g_i=u_i g,\ h_i=u_i h \qquad (41)$$

и для u_i имѣемъ выраженіе:

$$u_i=\frac{1}{\eta_i-m^{(i)}p^2+k^{(i)}p\sqrt{-1}} \qquad (42)$$

или

$$u_i=\frac{(\eta_i-m^{(i)}p^2)-k^{(i)}p\sqrt{-1}}{(\eta_i-m^{(i)}p^2)^2+k^{(i)2}p^2} \qquad (43)$$

Поэтому дисперсіонное уравненіе будетъ:

$$K\mu-D\mu(\sqrt{-1}+p\sum\gamma_i u_i)=V^2e^{2v\sqrt{-1}} \qquad \text{(A bis)}$$

Если теперь положимъ:

$$\lambda_i=2\pi\omega_0\sqrt{\frac{m^{(i)}}{\eta_i}};\ g_i=\frac{2\pi\omega_0 k^{(i)}}{\eta_i};\ P_i=4\pi C_i\mu, \qquad (44)$$

то (A bis) превратится въ слѣдующее уравненіе:

$$K\mu-D\mu\sqrt{-1}-\sum_{i=1}^{i=n}\frac{P_i[(\lambda_0^2-\lambda_i^2)\lambda_0^2-g_i\lambda_0^3\sqrt{-1}]}{(\lambda_0^2-\lambda_i^2)^2+g_i^2\lambda_0^2}=A+B\sqrt{-1}.$$

Отсюда находимъ:

$$\left.\begin{aligned} A &= K\mu - \sum_1^n{}_i \frac{P_i(\lambda_0^2 - \lambda_i^2)\lambda_0^2}{(\lambda_0^2 - \lambda_i^2)^2 + g_i^2\lambda_0^2} \\ B &= -D\mu + \sum_1^n{}_i \frac{P_i g_i \lambda_0^3}{(\lambda_0^2 - \lambda_i^2)^2 + g_i^2\lambda_0^2} \end{aligned}\right\} \qquad (45)$$

Выдѣляя въ первой формулѣ цѣлую часть, получимъ:

$$A = K\mu - \sum_1^n{}_i P_i - \sum_1^n{}_i \frac{A_i\lambda_0^2 - B}{(\lambda_0^2 - \lambda_i^2)^2 + g_i^2\lambda_0^2},$$

гдѣ положено:

$$A_i = P_i(\lambda_i^2 - g_i^2),\ B_i = P_i\lambda_i^4$$

Количество $K\mu - \sum_1^n{}_i P_i$ можетъ считаться діэлектрической постоянной среды.

IV.

Обратимся теперь къ условіямъ на границѣ средины.

За пограничныя условія возмемъ (17) и (18). Для преломленнаго луча получимъ, отмѣчая величины относящіяся къ нему указателемъ *1*:

$$\alpha_1 = -\frac{4\pi\sqrt{-1}}{A\mu_1 K_1 p}(P_1 b_1 - N_1 c_1)e^{\varrho_1};\ \beta_1 = -\frac{4\pi\sqrt{-1}}{AK_1\mu_1 p}(M_1 c_1 - P_1 a_1)e^{\varrho_1}$$

Изъ условій: $Q = Q' = Q_1$ находимъ:

$p_1 = p' = p$; $a_1 = a' = a$; $b_1 = b' = b$ и если примемъ за плоскость xz плоскость паденія, то: $b' = 0$, $b_1 = 0$, $b = 0$ и условія (17) теперь дадутъ:

$$\frac{Nc + N'c'}{K\mu} = \frac{N_1 c_1}{K_1\mu_1},\ \frac{(Mc - Pa) + (M'c' - P'a)}{K\mu} = \frac{M_1 c_1 - P_1 a}{K_1\mu_1} \qquad (46)$$

При этомъ имѣемъ условіе (25), которое будетъ здѣсь имѣть видъ:

$$Ma + Pc = 0,\ M'a + P'c' = 0,\ M_1 a + P_1 c_1 = 0 \qquad (47)$$

Опредѣляя отсюда P, P' и P_1 и подставляя во второе системы (46), получимъ:

$$\frac{M(a^2 + c^2)}{c} + \frac{M'(a^2 + c'^2)}{c'} = \frac{M_1(a^2 + c_1^2)}{c_1}\frac{K\mu}{K_1\mu_1} \qquad (47)$$

Условія (18) дадутъ:

$$M + M' = \frac{K}{K_1}M_1,\ N + N' = \frac{K}{K_1}N_1 \qquad (48)$$

Для рѣшенія этихъ уравненій положимъ [1]) въ (47):

$$a^2 + c_1^2 = -A^2p^2V^2e^{2v\sqrt{-1}},\ c_1 = -Ap\sqrt{-1}Ue^{u\sqrt{-1}};\ a = -Apn\sin i\sqrt{-1},$$

$$c = -Apn\cos i\sqrt{-1};\ c' = Apn\cos i\sqrt{-1} \text{ и } n\sin i = n_1\sin\sigma,$$

тогда уравненія (47) дадутъ:

$$(M-M')\frac{n}{\cos i} = \frac{K\mu}{K_1\mu_1}\frac{V^{2(2v-u)\sqrt{-1}}}{U}M_1;\ (N-N')n\cos i = \frac{K\mu}{K_1\mu_1}Ue^{u\sqrt{-1}}N_1 \quad (49)$$

Рѣшеніе этихъ уравненій дано нами въ цитированномъ выше сочиненіи (стр. 95 и слѣдующія), стоитъ только положить тамъ $u = u_1 = 0$.

V.

Если имѣемъ внѣшнее магнитное поле, то легко ввести его дѣйствіе въ общее уравненіе (*1*). Стоитъ только въ R ввести работу магнитныхъ силъ въ видѣ, обозначивъ зарядъ электрона буквой e:

$$+\int\frac{Ae}{2}\left[\left(\gamma\frac{dg_0}{dt}-\beta\frac{dh_0}{dt}\right)f_0+\left(\alpha\frac{dh_0}{dt}-\gamma\frac{df_0}{dt}\right)g_0+\left(\beta\frac{df_0}{dt}-\alpha\frac{dg_0}{dt}\right)h_0\right]d\tau. \quad (50)$$

Тогда въ уравненіяхъ для f_0, g_0, h_0, т. е. въ уравненіяхъ (II), взойдутъ члены, которые дадутъ возможность объяснить явленіе Земана.

VI.

Докажемъ теперь соотношенія (24) стр. 8.

Съ этой цѣлью намъ надо проинтегрировать уравненія (II) стр. 6.

Такъ какъ у насъ взято (фор. 19, стр. 8):

$$f = Me^{\varrho},\ g = Ne^{\varrho},\ h = Pe^{\varrho}$$

и

$$Q = pt\sqrt{-1} + ax + by + cz,$$

то слѣдовательно намъ надо проинтегрировать уравненія вида:

$$m\frac{d^2f_0}{dt^2} + k\frac{df_0}{dt} + \eta f_0 = Me^{\varrho}.$$

Проинтегрируемъ сначала уравненіе безъ второй части, а именно:

$$m\frac{d^2f_0}{dt_0} + k\frac{df_0}{dt} + \eta f_0 = 0. \quad (a)$$

Пусть

$$f_0 = ce^{st}$$

---

[1]) Ср. «Электромагнитная теорія проводниковъ» автора, стр. 93—94.

будетъ частнымъ рѣшеніемъ уравненія (a).

Для опредѣленія s имѣемъ уравненіе:

$$ms^2 + ks + \eta = 0,$$

откуда находимъ:

$$s = -s_0 \pm p_0\sqrt{-1},$$

гдѣ положено:

$$s_0 = \frac{k}{2m},\ p_0 = \frac{\sqrt{4m\eta - k^2}}{2m} \tag{b}$$

причемъ k^2 вообще мало и меньше $4m\eta$.

Такимъ образомъ полное рѣшеніе уравненія (a) будетъ:

$$f_0 = c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t} \tag{c}$$

гдѣ положено:

$$s_1 = -s_0 + p_0\sqrt{-1},\ s_2 = -s_0 - p_0\sqrt{-1} \tag{d}$$

Подставляя теперь значеніе f_0 изъ (c) въ первоначальное уравненіе для f_0, получимъ для опредѣленія c_1 и c_2 слѣдующія уравненія:

$$e^{s_1 t}\frac{dc_1}{dt} + e^{s_2 t}\frac{dc_2}{dt} = 0$$

$$ms_1 e^{s_1 t}\frac{dc_1}{dt} + ms_2 e^{s_2 t}\frac{dc_2}{dt} = Me^{\varrho}.$$

Отсюда находимъ:

$$m(s_1 - s_2)e^{s_1 t}\frac{dc_1}{dt} = Me^{\varrho}$$

$$m(s_1 - s_2)e^{s_2 t}\frac{dc_2}{dt} = -Me^{\varrho}$$

Интегрируя эти уравненія, находимъ:

$$c_1 = \frac{Me^{-s_1 t}}{m(s_1 - s_2)(p\sqrt{-1} - s_1)}e^{\varrho} + f_0'$$

$$c_2 = -\frac{Me^{-s_2 t}}{m(s_1 - s_2)(p\sqrt{-1} - s_2)}e^{\varrho} + f_0''$$

гдѣ f_0, f_0'' окончательныя постоянныя интегрированія и суть функціи x, y, z.

Подставляя эти значенія c_1 и c_2 въ равенство (c), находимъ по приведеніи и сокращеніи на $(s_1 - s_2)$:

$$f_0 = \frac{Me^{\varrho}}{[ms_1 s_2 - p^2 - p(s_1 + s_2)\sqrt{-1}]} + f_0' e^{s_1 t} + f_0'' e^{s_2 t}.$$

Но формулы (d) даютъ:

$$s_1 s_2 = s_0^2 + p_0^2;\ s_1 + s_2 = -2s_0,$$

а потому

$$s_1 s_2 - p^2 - p(s_1 + s_2)\sqrt{-1} = s_0^2 + p_0^2 - p^2 + 2s_0 p\sqrt{-1},$$

или, подставляя значенія s_0 и p_0 изъ равенствъ (b), получимъ окончательно:

$$s_1 s_2 - p^2 - p(s_1 + s_2)\sqrt{-1} = \frac{\eta - mp^2 + kp\sqrt{-1}}{m},$$

а затѣмъ f_0 и слѣдовательно, g_0 и h_0 будутъ опредѣляться формулами:

$$\left.\begin{aligned} f_0 &= uf + f_0' e^{s_1 t} + f_0'' e^{s_2 t} \\ g_0 &= ug + g_0' e^{s_1 t} + g_0'' e^{s_2 t} \\ h_0 &= uh + h_0' e^{s_1 t} + h_0'' e^{s_2 t} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(A)}$$

гдѣ f_0', f_0'', ... h_0'' суть нѣкоторыя функціи x, y, z и сверхъ того положено:

$$\frac{1}{\eta - mp^2 + kp\sqrt{-1}} = u \qquad \text{(B)}$$

Опредѣливъ f_0, g_0, h_0, найдемъ выраженія для составляющихъ полнаго электрическаго тока; для этого воспользуемся уравненіями (G) стр. 6. Находимъ при помощи уравненій (A) слѣдующія формулы:

$$p = \frac{4\pi C}{K}(1 - \gamma pu\sqrt{-1})f - \frac{4\pi C\gamma}{K}\left(s_1 f_0' e^{s_1 t} + s_2 f_0'' e^{s_2 t}\right),$$

$$q = \frac{4\pi C}{K}(1 - \gamma pu\sqrt{-1})g - \frac{4\pi C\gamma}{K}\left(s_1 g_0' e^{s_1 t} + s_2 g_0'' e^{s_2 t}\right),$$

$$r = \frac{4\pi C}{K}(1 - \gamma pu\sqrt{-1}h - \frac{4\pi C\gamma}{K}\left(s_1 h_0' e^{s_1 t} + s_2 h_0'' e^{s_2 t}\right),$$

Подставимъ теперь эти значенія p, q и r, а также значенія α, β, γ изъ уравненій (22) въ систему (III) стр. 6, получимъ:

$$[K\mu - D\mu(\sqrt{-1} + \gamma pu)]Me^{\varrho} + D\mu\gamma\sqrt{-1}\left(s_1 f_0' e^{s_1 t} + s_2 f_0'' e^{s_2 t}\right) =$$

$$= -\frac{e^{\varrho}}{A^2 p^2}\Big[M(a^2 + b^2 + c^2) - a(Ma + Nb + Pc)\Big]$$

и подобныя уравненія для g и h.

Положимъ для простоты письма и удобства вычисленій:

$$K\mu - D\mu(\sqrt{-1} + \gamma p u) = U,$$

$$Ma + Nb + Pc = A^2p^2S,$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = -A^2p^2V^2e^{2v\sqrt{-1}}$$

тогда получимъ слѣдующую систему уравненій:

$$(U - V^2e^{2v\sqrt{-1}})Me^{\varrho} - aSe^{\varrho} = -D\mu\gamma\sqrt{-1}\left(s_1f_0'e^{s_1t} + s_2f_0''e^{s_2t}\right)$$

и подобныя уравненія для осей y и z.

Но лѣвыя части суть періодическія функціи времени, между тѣмъ какъ правыя, заключая общій множитель e^{s_0t}, измѣняются со временемъ въ одномъ направленіи, а потому заключаемъ, что функціи f_0', g_0', h_0', а также f_0'', g_0'', h_0'' должны быть нулями.

Итакъ имѣемъ (форм. (A)):

$$f_0 = uf,\ g_0 = ug,\ h_0 = uh,$$

что мы и хотѣли доказать.

Такимъ образомъ у насъ останутся уравненія:

$$(U - V^2e^{2v\sqrt{-1}})M - aS = 0$$

$$(U - V^2e^{2v\sqrt{-1}})N - bS = 0$$

$$(U - V^2e^{2v\sqrt{-1}})P - cS = 0.$$

Отсюда безъ труда заключаемъ, что

$$S = 0,\ U - V^2e^{2v\sqrt{-1}} = 0,$$

а это суть уравненія (25) и (A) стр. 9.

23 марта 1910.

Addition à l'article intitulé „Application de la méthode des fonctions fondamentales à l'équation différentielle des verges vibrantes élastiques“ [1])

par J. D. Tamarkine.

Le théorème 3 (pag. 45) peut être complété de la manière suivante:

Théorème. *Si la fonction $f(x)$ admet les dérivées de deux premiers ordres intégrables dans (a, b) et vérifie en outre les conditions aux limites*

$$f(a) = f(b) = f'(a) = f'(b) = 0\,, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

on a

$$f(x) = \sum_{s=1}^{\infty} A_s V_s(x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(IV)}$$

$$f'(x) = \sum_{s=1}^{\infty} A_s V'_s(x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(IVa)}$$

$$A_s = \int_b^a pfV_s dx\,,$$

les deux séries

$$\sum_{s=1}^{\infty} A_s V_s(x)\,, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$$\sum_{s=1}^{\infty} A_s V_s(x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

étant uniformément convergentes dans (a, b)

Le développement (IV) est déja établi dans notre article indiqué ci-devant (Décembre 1909). Dans un article plus récent [2]) (Avril 1910) *M. N. Kryloff* a déduit la même formule (IV), ainsi que la formule (IVa). Il montre en premier lieu que le système de fonctions $V_s(x)$ est

---

[1]) Voir: Communications de la Société mathématique de Kharkow, 2-ème Série, t. XII, № 1 (1910), pag. 19.

[2]) Voir: *N. Kryloff*, «Sur les développements en séries des fonctions etc.», Annales de l'Université de Kieff, 1910.

«fermé». On doit remarquer que *M. W. Stekloff* a déja indiqué [1]) que la condition nécessaire et suffisante pour qu'un système quelconque de fonctions orthogonales $V_s(x)$ $(s = 1, 2 \ldots)$ soit «fermé» est donnée par l'égalité

$$\int_a^b pf^2 dx = \sum_{s=1}^{\infty} A_s^2; \quad A_s = \int_a^b pfV_s dx,$$

$f(x)$ étant une fonction quelconque, bornée et intégrable dans (a, b); or cette égalité est établie dans notre article (théorème 2, pag. 40) pour les fonctions $V_s(x)$ considérées ici; donc il est évident sans démonstrations que le système de fonctions $V_s(x)$ est «fermé». *M. Kryloff* établit ensuite la convergence uniforme de la série (3), ce qui donne immédiatement la convergence uniforme de la série (2). Conformément aux méthodes générales de *M. W. Stekloff* [2]) on peut alors supprimer toutes les considérations ultérieures de *M. Kryloff*, parce que le système de $V_s(x)$ étant «fermé» la convergence uniforme de la série (2) est la seule condition qui suffit pour établir la formule (IV).

Dans cette «Addition» nous voulons montrer en quelques mots que la formule (IVa) n'est qu'une simple conséquence immédiate d'une inégalité de notre article mentionné plus haut.

Posons

$$f(x) = \sum_{s=1}^{n} A_s V_z(x) + R_n(x)$$

On a

$$f'(x) = \sum_{s=1}^{n} A_s V_s'(x) + R_n'(x).$$

On a évidemment

$$[R_n'(x)]^2 = 2\int_a^x R_n' R_n'' dx < G\int_a^b (R_n')^2 dx$$

G étant une constante ne dépendant pas de n et de x [3]). Or nous avons établi

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b (R_n')^2 dx = 0, \text{ [4])}$$

---

[1]) Voir: Bulletin du XII Congrès de Mathématiciens russes. (Moscou, 28 Déc. 1909—6 Janv. 1910), № 10, pp. 425—426; idem: C. R. 7 Mars 1910.

[2]) Comp. *W. Stekloff*, «Sur quelques égalités générales etc., Mém. de l'Acad. de Sciences de S. Pétersb. 1904.

[3]) Voir notre article, pag. 44.

[4]) Ibidem, pag. 44. Cela résulte de l'inégalité:

$$\int_a^b (R_n')^2 dx < \sqrt{\int_a^b R_n^2 dx \int_a^b (R_n'')^2 dx}.$$

ce qui nous donne finalement

$$\lim_{n=\infty} R'_n(x) = 0 ,$$

cette égalité ayant lieu *uniformément* dans (a, b). La formule (IVa) est ainsi démontrée, en même temps que la convergence uniforme de la série (3). Il en est de même avec la série (2) et la formule (IV), c. q. f. d.

On peut montrer sans peine que les séries (2) et (3) sont *absolument* convergentes. Considérons d'abord la série (3). On a évidemment:

$$|A_s V'_s| < \frac{\lambda_s A_s^2 + \frac{V'^2_s}{\lambda_s}}{2} .$$

La fonction $f(x)$ vérifiant les conditions (1) nous avons établi la convergence de la série

$$\sum_{s=1}^{\infty} \lambda_s A_s^2 \text{ [1]}.$$

Il ne nous reste qu'à considérer la série

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{V'^2_s}{\lambda_s} .$$

Soit maintenant $F(x)$ une fonction quelconque, bornée et intégrable dans (a, b). Posons:

$$F(x) = \sum_{s=1}^{n} B_s \frac{V''_s(x)}{\sqrt{\lambda_s}} + \varrho_n(x) ; \quad B_s = \int_a^b rF \frac{V''_s}{\sqrt{\lambda_s}} dx.$$

Par un calcul simple on trouve

$$\int_a^b r\varrho_n^2 dx = \int_a^b rF^2 dx - \sum_{s=1}^{n} B_s^2 - \int_a^b q \left(\sum_{s=1}^{n} B_s \frac{V_s}{\sqrt{\lambda_s}} \right)^2 dx \geq 0 ,$$

ce qui nous montre que la série

$$\sum_{s=1}^{\infty} B_s^2$$

est convergente dans (a, b). Si l'on pose

$$F(z) = \frac{1}{r(z)} \quad \text{pour} \quad a \leq z \leq x$$

$$F(z) = 0 \quad \text{pour} \quad x < z \leq b ,$$

[1]) Ibidem, pag. 41.

on a

$$B_s = \int_a^x \frac{V_s''}{\sqrt{\lambda_s}}\, dx = \frac{V_s'(x)}{\sqrt{\lambda_s}},$$

ce qui nous affirme la convergence absolue de la série

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{V_s'^2}{\lambda_s}.$$

Donc la série (3) est absolument convergente. En intégrant membre par membre on trouve la série (2) qui est alors de même absolument convergente, c. q. f. d.

On peut compléter les considération précédentes par la proposition suivante:

La fonction $f(x)$ ayant les dérivées de deux premiers ordres, intégrables dans (a, b), les conditions (1) sont non seulement suffisantes, mais encore nécessaires pour qu'on ait toujours

$$\int_a^b (R_n'')^2\, dx < G. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\alpha)$$

Soit, en effet, $f(x)$ une fonction ayant les dérivées de deux premiers ordres, intégrables dans (a, b), et telle encore que l'inégalité (α) soit satisfaite. On trouve

$$R_n(a) = f(a); \quad R_n'(a) = f'(a); \quad R_n(b) = f(b); \quad R_n'(b) = f'(b)$$

$$\int_a^b (R_n')^2 dx = [f(b)f'(b) - f(a)f'(a)] - \int_a^b R_n R_n'' dx < F, \ldots\ldots (\beta)$$

F étant une constante ne dépendant pas de n [parce qu'on a

$$\lim_{n=\infty} \int_v^b R_n R'' dx \leq \lim_{n=\infty} \sqrt{G \int_a^b R_n^2\, dx} = 0,$$

en vertu de (α)]. L'inegalité (18) de notre article mentionné plus haut (pag. 44) nous donne alors immédiatement

$$\lim_{n=\infty} R_n(x) = f(a) = f(b) = 0.$$

On aura alors

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b (R_n')^2 dx = 0,$$

d'où l'on déduit de la manière analogue

$$\lim_{n=\infty} R'_n(x) = f'(a) = f'(b) = 0,$$

c. q. f. d. Rémarquons enfin que toutes les considérations précédentes restent encore valables, quand la fonction $f(x)$ admet la dérivée unique dans (a, b) qui peut être présentée sous la forme $\int \varphi(x)\,dx$, $\varphi(x)$ étant une fonction intégrable dans (a, b), comme nous l'a indiqué *M. Stekloff.*

S. Pétersbourg, 20 Septembre 1910.

Un théorème sur les fonctions continues

par G. Grousinzeff.

Considérons une fonction réelle uniforme

$$y = f(x)$$

bornée et définie pour toutes les valeurs d'une variable réelle x dans l'intervalle quelconque borné (a, b), extremités comprises.

Soit A l'affixe d'une valeur de x dans cet intervalle et soient $M(f, A)$, $m(f, A)$ et

$$\omega(f, A) = M(f, A) - m(f, A)$$

le maximum, le minimum et l'oscillation de f *au point* A [1]).

La fonction $f(x)$ est dite continue dans l'intervalle (a, b), si partout dans cet intervalle ω est égal à zéro.

Au point de vue de la théorie des ensembles les fonctions continues jouissent d'une propriété remarquable:

Étant donné dans l'intervalle (a, b) un ensemble fermé quelconque, l'ensemble des valeurs correspondantes d'une fonction continue sera auss fermé.

Je n'ai pas à démontrer ici ce beau théorème, dû à M. Jordan [2]).

Nous allons nous poser la question, si cette propriété est caractéristique pour les fonctions continues?

Un exemple très simple nous montrera que le théorème réciproque de celui de M. Jordan n'est pas vrai.

Soit

$$y = 1 \quad \text{pour} \quad \frac{1}{2} < x \leq 1$$

$$y = \frac{1}{2} \quad \text{pour} \quad \frac{1}{3} < x \leq \frac{1}{2}$$

---

[1]) V. par ex. *Baire.* Leçons sur les fonctions discontinues, pp. 70—71.

[2]) Cours d'analyse. t. I. 2-e éd. pp. 51—53.

et en général

$$y = \frac{1}{n} \quad \text{pour} \quad \frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}$$

soit enfin

$$y = 0 \quad \text{pour} \quad x = 0.$$

La fonction est évidemment discontinue, mais aux ensembles fermés des x correspondent toujours les ensembles fermés des y.

En effet, à chaque ensemble fermé des x dans l'intervalle (0, 1) contenant le zéro comme point limite correspond un ensemble fermé des y, ayant le zéro pour point limite unique; à un ensemble fermé des x n'ayant pas zéro comme point limite correspond évidemment un ensemble fini c'est à dire fermé des y.

Démontrons que, *si à chaque ensemble* **infini et fermé** *des valeurs de la variable indépendente correspond toujours un ensemble* **infini et fermé** *des valeurs de la fonction, la fonction est continue.*

Nous devons dans ce but entrer dans quelques détails sur les façons dont la fonction discontinue se comporte au voisinage d'un point.

Considérons sur l'axe des y l'ensemble E qui consiste de point $f(A)$ et de limites vers lesquelles tendent les valeurs de la fonction $f(x)$ auprès $x = A$ et dont $M(f, A)$ et $m(f, A)$ sont la borne supérieure et la borne inférieure.

Remarquons, en passant, que l'ensemble E est fermé, le mode de démonstration étant le même que pour les ensembles dérivés; en particulier E peut se réduire à un point—c'est le cas de continuité [1]).

Désignons par G l'ensemble des points d'un intervalle suffisamment petit CD contenu dans (a, b) et dont A est un point intérieur et par H l'ensemble des valeurs de $f(x)$ correspondantes; tous deux sont évidemment bornés.

Désignons enfin par H' l'ensemble limite pour $CD = 0$ de l'ensemble dérivé de H et par H_1 l'ensemble des points de E non contenus dans H'.

Ce sont les y des points infiniment voisins de notre point qui sont situés seulement sur les droites parallèles à l'axe des x.

---

[1]) E ne doit pas être necéssairement fini.

Voici un exemple d'une telle fonction dans l'intervalle (0,1).

Écrivons la variable indépendente x en système décimal.

Soit $y = 1$, si x est une fraction infinie. Lisons x, s'il est une fraction finie, de la main droite à gauche et faisons y égal à la fraction ainsi obtenue. Si par ex., $x = 0{,}231$, $y = 0{,}132$.

Soit enfin $y = 1$, si $x = 1$ et si $x = 0$.

Il est évident que y sera toujours compris entre 0,1 et 1 et que, quelque soit x, y peut s'approcher autant que l'on veut de chaque nombre compris entre 0,1 et 1. C'est à dire que l'ensemble E pour x quelconque contient *tous* les points de l'intervalle de 0,1 à 1.

Chaque point de H', soit e_1, est au contraire caracterisé par la propriété d'avoir dans ses environs un nombre infini de points de H non égaux à e_1.

S'il en était autrement, on pourrait prendre CD assez petit, pour que H ne contienne près de e_1 que des points égaux à e_1, donc e_1 serait un point de H_1, mais non de H'.

Si $f(A)$ n'appartient pas à H', joignons le à H_1.

Alors E, qui est l'ensemble limite de H pour $CD = 0$.

$$E = H' + H_1.$$

En général H' contient des points non égaux à $f(A)$.

Il nous est important de considérer les cas particuliers suivants:

1) $$H' = 0 \qquad H_1 \neq 0.$$

Telle est la fonction du premier exemple dans tous les points ou $x = \frac{1}{n}$, n etant un entier.

2) H' ne contient qu'un seul point $f(A)$; $H_1 \neq 0$.

Puisque dans ces deux cas $H_1 \neq 0$, il y a aux environs du point $x = A$ une infinité de valeurs de la fonction égales entre elles; autrement dit il existe un ensemble des x, infini et ayant A comme point limite, auquel correspond *une* valeur de $f(x)$.

Prenons de cet ensemble un ensemble particulier à point limite unique A et ajoutons y le point A. Nous aurons un ensemble infini et fermé des x, auquel correspond l'ensemble des y, qui contient deux points au plus.

Donc, *si la fonction $f(x)$ a au moins dans un point des singularités de ces deux espèces particulières nous pouvons toujours choisir un ensemble infini et fermé des x, l'ensemble des y correspondants étant fini.*

Revenons au cas général.

H_1 différant de zéro ou non H' doit contenir alors au moins un point distinct de $f(A)$, soit e_1.

L'ensemble G de points de l'intervalle CD, auquel correspond H entier, a entre autres points limites le point A.

Rejetons de l'ensemble G tous les points dont les ordonnées sont précisément égales à e_1. Comme nous avons dit, l'ensemble des x ne se reduira pas alors à un nombre fini de points.

De cet ensemble resté des x nous prenons un ensemble infini particulier G_0, fermé et à point limite unique A.

Quant à l'ensemble correspondant des y, soit H_0, il ne le sera pas car e_1, qui est un de ses points limites, ne lui appartient pas.

Donc, *si la fonction $f(x)$ a au moins dans un point, la singularité d'espèce que j'ai appelée générale, nous savons toujours prendre un ensemble fermé des x, tel que l'ensemble correspondant des y ne soit pas fermé.*

En résumé si à chaque ensemble *infini et fermé* de valeurs de la variable indépendente correspond toujours un ensemble de valeurs de la fonction qui est aussi *infini et fermé*, la fonction est *continue*.

Donc le théorème réciproque à celui de M. Jordan n'est vrai que sous la restriction indiquée ci-dessus.

Il est évident qu'une telle fonction ne sera pas la fonction continue générale: quelques fonctions continues avec une infinité des maxima et minima (par ex., $x \sin \frac{1}{x}$) et les fonctions qui sont constantes dans quelques intervalles ne jouissent pas de cette propriété.

Considérons la classe de fonctions continues caractérisées par cette propriété.

Je dis que c'est la classe des fonctions dont la fonction inverse a partout *un nombre fini* des valeurs.

En effet c'est dans ce cas seulement que nous ne pouvons pas choisir un ensemble infini des x, l'ensemble correspondant des y étant fini.

Donc, ce sont les seules fonctions continues telles qu'à chaque ensemble infini et fermé des x correspond un ensemble infini et fermé des y.

Къ вопросу объ особенныхъ элементахъ коннекса.

IV. Основанія теоріи сопряженнаго коннекса.

Д. М. Синцова.

Въ развитіи теоріи коннексовъ важную роль сыграла статья K. Stephanos. Sur la théorie des connexes conjugués (Bull. des Sc. math. et astr (2) IV. 1880. P. 1-ère, p. 318—328). Къ ней примыкаютъ нѣкоторыя новѣйшія изслѣдованія, напр., Stuyvaert. Recherches relatives aux connexes de l'espace. Belg. Mém Cour. 8⁰ t. 61.

Небольшая по объему, она не содержитъ доказательствъ, а перечисляетъ лишь рядъ теоремъ, воспроизводя ходъ мысли автора. Представляетъ поэтому интересъ дать аналитическія доказательства всѣхъ разсматриваемыхъ свойствъ коннексовъ. Такія доказательства, только для случая коннекса кватернарнаго и были приведены частію въ моей работѣ: «Теорія коннексовъ въ пространствѣ etc.» Казань 1895. (Ученыя Записки Казан. Унив. 1894—5 гг.).

Въ настоящее время я намѣреваюсь дать систематическое изложеніе такихъ доказательствъ именно для тернарнаго коннекса. Такое изложеніе представляется мнѣ желательнымъ по связи съ другими моими изслѣдованіями по теоріи коннексовъ, часть которыхъ уже опубликована, въ статьяхъ подъ заглавіемъ «Къ вопросу объ особенныхъ элементахъ коннекса» ст. I, II. III. Изв. Каз. Физ.-Мат. Общ. (2) т. XI n⁰ 4. 1901 г. и Сообщенія Харьк. Мат. Общ. (2) т. X n⁰ 6 и XII n⁰ 1.

Замѣчу, что существенная часть нижеслѣдующаго была мною получена и изложена еще въ 1900 г., при обработкѣ первой изъ указанныхъ выше статей. По тѣсной связи съ нею я и остановился на томъ же заглавіи, чтобы тѣмъ подчеркнуть внутреннюю связь всѣхъ этихъ работъ.

§ 1.

Конфигурацію, опредѣленную уравненіемъ

$$f(x_1x_2x_3;\ u_1u_2u_3)=0, \tag{1}$$

однороднымъ въ отношеніи точечныхъ координатъ x и въ отношеніи координатъ прямой u, Клебшъ назвалъ, какъ извѣстно, *коннексомъ*.

Это конфигурація трехъ измѣреній. Каждой точкѣ плоскости въ ней принадлежитъ кривая U_x, касательныя къ которой образуютъ вмѣстѣ съ точкою x элементы коннекса (1), и каждой прямой u—кривая X_u, точки которой дополняютъ ее до элемента коннекса.

Если возьмемъ какой-нибудь элементъ (x, u), принадлежащій коннексу, то x есть точка кривой X_u, и прямая u—касательная U_x. Пусть v есть касательная X_u въ точкѣ x, и y—точка прикосновенія u къ U_x. Когда переберемъ всѣ элементы (x, u) даннаго коннекса (1), элементы (y, v), такимъ образомъ опредѣленные, опишутъ новый коннексъ, которому Клебшъ придалъ названіе *сопряженнаго*. K. Stephanos предлагаетъ изучать *двойную связь* или двойное соотвѣтствіе, которое такимъ образомъ устанавливается между x и y, между u и v. Эти соотвѣтствія устанавливаются первое уравненіями:

$$\varrho y_i=\frac{\partial f(x;\ u)}{\partial u_i} \qquad (i=1,\ 2,\ 3) \tag{2}$$

опредѣляющими точку y, второе—уравненіями

$$\sigma v_k=\frac{\partial f(x;\ u)}{\partial x_k} \qquad (k=1,\ 2,\ 3) \tag{3}$$

опредѣляющими прямую v.

Необходимо отмѣтить, что въ уравненіи (1) можно считать x и u точками и прямыми одной плоскости или разныхъ и сообразно этому коваріантныя образованія одни сохраняются неизмѣнными лишь тогда когда u и x подвергаются взаимнымъ проэктивнымъ преобразованіямъ, другія—и тогда, когда x и u подвергаемъ независимымъ между собою проэктивнымъ преобразованіямъ. K. Stephanos придаетъ особенное значеніе послѣднимъ. Двойная связь, устанавливаемая уравненіями (1), (2), (4) между коннексомъ и ему сопряженнымъ, между x, y и между u, v, принадлежитъ къ числу послѣднихъ. Дѣйствительно, кривая X_u, въ плоскости x-овъ принадлежащая прямой u плоскости u-овъ, имѣетъ въ точкѣ x касательною v и точно также кривая U_x, огибаемая прямыми u, имѣетъ точкою прикосновенія той-же прямой u точку y, и какъ X_u можетъ

быть разсматриваема, какъ огибаемая прямыми v, такъ и U_x можетъ быть разсматриваема, какъ геометрическое мѣсто точекъ y. Въ дальнѣйшемъ мы будемъ однако постоянно разсматривать плоскости x-овъ и u-овъ совмѣщенными.

Двойное соотвѣтствіе, опредѣляемое уравненіями (1), (2), (3), при этомъ геометрически можетъ быть описано такъ.

Возьмемъ точку y и пучекъ прямыхъ u, черезъ нее проходящихъ. Существуетъ ∞^1 кривыхъ U_x коннекса, которыя касаются прямыхъ пучка въ точкѣ y. Эти кривыя опредѣляются уравненіями (1) и (2), гдѣ y считаемъ данными. Каждая изъ этихъ кривыхъ принадлежитъ въ коннексѣ нѣкоторой точкѣ x плоскости. Всѣмъ ∞^1 кривымъ такого пучка отвѣчаютъ ∞^1 точекъ, образующихъ нѣкоторую кривую $\boldsymbol{X}_y$. Кривая эта представляетъ собою фигуру, преобразованную изъ точки y соотвѣтствіемъ (2) при посредствѣ (1), и обладаетъ прежде всего свойствами:

I. *Геометрическое мѣсто $\boldsymbol{X}_y$ точекъ x, соотвѣтствующія коимъ кривыя U_x коннекса (1) проходятъ черезъ неизмѣнную точку y, есть въ тоже время огибающая кривыхъ X_u, соотвѣтствующихъ прямымъ u, проходящимъ черезъ точку y.*

Прямой u, касательной въ y къ одной изъ кривыхъ U_x пучка принадлежитъ въ коннексѣ кривая X_u, проходящая черезъ точку x; безконечно-близкой прямой $u+du$ пучка принадлежитъ кривая X_{u+du}, содержащая точку $x+dx$, безконечно-близкую къ x. Когда du стремятся къ нулю, dx также, а прямая, соединяющая точки x и $x+dx$, обращается въ предѣлѣ въ касательную къ кривой, геометрическому мѣсту предѣльныхъ точекъ пересѣченія кривыхъ X_u и X_{u+du}, которыми и будетъ кривая $\boldsymbol{X}_y$. Аналитически это получится такъ: всѣ X_u опредѣляются уравненіемъ (1), гдѣ параметры u связаны уравненіемъ

$$u_y = 0 \ (\equiv \Sigma u_i y_i). \tag{4}$$

Чтобы получить огибающую, надо по извѣстному правилу исключить λ и u изъ уравненій:

$$f'_{u_i} + \lambda y_i = 0, \qquad (i=1,2,3) \tag{5}$$

при помощи (1) и (4). Но уравненія (5) только обозначеніемъ множителя пропорціональности отличаются отъ (2), и при ихъ существованіи (4) есть слѣдствіе (1).

Точно также обнаруживается двойственная теорема:

II. *Огибающая $\boldsymbol{U}_v$ прямыхъ u, соотвѣтствующія которымъ кривыя X_u касаются одной и той же прямой v, есть въ тоже время огибающая кривыхъ U_x, соотвѣтствующихъ точкамъ x прямой v.*

Кривая U_v опредѣляется уравненіями (1) и (3) при данныхъ v. Кривыя U_x, соотвѣтствующія точкамъ x прямой v, опредѣляются (1) при условіи

$$v_x = 0. \tag{6}$$

Ихъ огибающая опредѣлится уравненіями

$$f'_{x_i} + \mu v_i = 0, \tag{7}$$

которыя только обозначеніемъ отличаются отъ (3).

III. *Кривыя X_u, принадлежащія прямымъ u пучка (4), касаются X_y въ m^2 точкахъ каждая; этимъ точкамъ принадлежатъ кривыя U_x, касающіяся въ точкѣ y прямыхъ пучка (4).*

Дѣйств., сосѣднія кривыя X_u и X_{u+du}, принадлежащія двумъ безконечно-близкимъ прямымъ пучка $u_y = 0$, пересѣкаются въ m^2 точкахъ; на каждой X_u предѣльныхъ точекъ будетъ m^2; въ нихъ по свойству огибающихъ и касаются X_u и X_y.

Иначе: изъ уравненій $f(x; u) = 0$ и $f(x; u + du) = 0$ кривыхъ X_u и X_{u+du} заключаемъ:

$$\sum f'_u du = 0;$$

кромѣ того, въ силу $u_y = 0$ и $(u + du)_y = 0$ имѣемъ $\sum y_i du_i = 0$.

Изъ уравненія (1), которое можемъ переписать $\sum u_i f'_u = 0$, и изъ $\sum f'_u du = 0$ слѣдуетъ, что f'_{u_i} пропорціональны минорамъ матрицы

$$\begin{Vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ du_1 & du_2 & du_3 \end{Vmatrix}$$

Тѣмъ же минорамъ въ силу $u_y = 0$ и $\sum y_i du_i = 0$ пропорціональны и y_i. Отсюда

$$\frac{1}{y_1} f'_{u_1} = \frac{1}{y_2} f'_{u_2} = \frac{1}{y_3} f'_{u_3}, —$$

уравненія, равносильныя (2), имѣющія m^2 общихъ рѣшеній и выражающія при условіи (4), что y есть точка прикосновенія прямой u пучка (4) съ кривой U_x, соотвѣтствующей какой-нибудь предѣльной точкѣ кривой X_u.

Также обнаруживаемъ и двойственную теорему:

IV. *Кривыя U_x, принадлежащія точкамъ x прямой $v_x = 0$, имѣютъ съ U_v n^2 общихъ касательныхъ каждая; этимъ прямымъ принадлежатъ кривыя X_u, которыя касаются прямой v.*

Предѣльныя точки опредѣляются въ пересѣченіи U_x и U_{x+dx}, гдѣ $v_x = 0$ и $v_{x+dx} = 0$ (или $v_{dx} = 0$ т. е. уравненіями

$$f(x; u) = 0\,(1), \quad v_x = 0,$$

$$\sum f'_x dx = 0, \qquad v_{dx} = 0.$$

Переписавъ (1) подъ видомъ $\sum x f'_x = 0$, видимъ, что f'_{x_i} пропорціональны минорамъ матрицы:

$$\left\| \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ dx_1 & dx_2 & dx_3 \end{matrix} \right\|$$

Тѣмъ же минорамъ пропорціональны въ силу двухъ другихъ уравненій и v_i. Поэтому

$$\frac{f'_{x_1}}{v_1} = \frac{f'_{x_2}}{v_2} = \frac{f'_{x_3}}{v_3}.$$

Два эти уравненія при данныхъ x_i, выполняющихъ $v_x = 0$, имѣютъ n^2 общихъ рѣшеній. Пусть w одно изъ нихъ. Тогда въ силу $v_x = 0$ эти уравненія даютъ $f(x; w) = 0$, а также $f'_{x_i}(x; w) = \sigma . v_i$ т. е. v есть касательная къ X_w въ точкѣ x.

V. *Кривая U_x, принадлежащая въ коннексѣ (1) точкѣ x кривой $\boldsymbol{X}_y$, имѣетъ въ точкѣ y своею касательною прямую u, которой соотвѣтствуетъ кривая X_u, касающаяся $\boldsymbol{X}_y$ въ точкѣ x.*

Кривая U_x опредѣляется уравненіемъ (1), при чемъ x удовлетворяетъ уравненіямъ кривой $\boldsymbol{X}_y$, т. е. (1) и (2). Ея касательная въ точкѣ y есть одна изъ проходящихъ черезъ y прямыхъ u, которой въ коннексѣ (1) принадлежитъ кривая X_u. Уравненіе послѣдней $f(X; u) = 0$ въ силу (1)—(2) удовлетворяется при $X \equiv x$. Соотвѣтственная касательная

$$\sum X f'_x(x;\ u) = 0.$$

Касательная же въ этой точкѣ къ $\boldsymbol{X}_y$ имѣетъ уравненіе

$$\sum_j X_j \left(f'_{x_j} + \sum f'_{u_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) = 0. \tag{8}$$

Дифференцируя (2), имѣемъ

$$\sum_1^3{}_k\, f''_{u_i u_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} + f''_{u_i x_j} = 0 \qquad (j,\ i = 1,\ 2,\ 3)$$

Умножая на u_j и суммируя, найдемъ по свойству однородныхъ функцій

$$(n-1)\sum_k f'_{u_k}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}+nf'_{x_j}=0\,.$$

Подставляя значеніе суммы отсюда въ (8), приведемъ уравненіе касательной къ $\boldsymbol{X}_y$ къ виду

$$-\frac{1}{n-1}\sum X_i f'_{x_i}=0$$

т. е. касательныя X_u и $\boldsymbol{X}_y$ въ точкѣ x послѣдней будутъ общія.

Двойственно: VI. *Кривая X_u, принадлежащая касательной и кривой $\boldsymbol{U}_v$, касается v въ точкѣ x, принадлежащая которой кривая U_x касается $\boldsymbol{U}_v$, и ихъ общею касательною является прямая u.*

Кривая X_u опредѣляется уравненіемъ (1), причемъ u удовлетворяетъ (1) и (3), т. е. касается $\boldsymbol{U}_v$ и $v_x=0$,—т. о. при данныхъ u точка x лежитъ на X_u и на $\boldsymbol{U}_v$, и касательная къ X_u въ точкѣ x есть v. Принадлежащая такой точкѣ кривая U_x касается прямой u въ точкѣ $\sum Uf'_u=0$, а кривой $\boldsymbol{U}_v$ — въ точкѣ

$$\sum\left(f'_{u_k}+\sum_j f'_{x_j}\frac{\partial x_j}{\partial u_k}\right)U_k=0\,.$$

Но дифференцируя (3) находимъ:

$$\sum_j f''_{x_j x_i}\frac{\partial x_j}{\partial u_k}+f''_{x_j u_k}=0,$$

или умножая на x_i и суммируя по i, имѣемъ по свойству однородныхъ функцій:

$$(m-1)\sum_j f'_{x_j}\frac{\partial x_j}{\partial u_k}+mf'_{u_k}=0 \qquad (k=1,\,2\,,\,3)$$

Подставляя въ уравненіе точки прикосновенія $\boldsymbol{U}_v$ приводимъ это уравненіе къ виду:

$$-\frac{1}{(m-1)}\sum f'_{u_k}U_k=0\,,$$

т. е. X_u и $\boldsymbol{U}_v$ имѣютъ общую точку прикосновенія на прямой u, т. е. имѣютъ эту прямую своею общею касательною.

Основною теоремою въ изложеніи K. Stephanos'а является теорема

VII. *Геометрическое мѣсто $\boldsymbol{X}_y$ точекъ x, которымъ въ коннексѣ (1) соотвѣтствуютъ кривыя U_x, проходящія черезъ y, совпадаетъ съ кривою U_y, принадлежащей точкѣ y въ сопряженномъ коннексѣ.*

Уравненія (1) и (2) даютъ по исключеніи u уравненіе $\boldsymbol{X}_y$ въ точечныхъ координатахъ. Чтобы получить уравненіе $\boldsymbol{X}_y$ въ тангенціальныхъ координатахъ v, дифференцируемъ (1), считая u функціями x, опредѣленными уравненіями (2). Имѣемъ:

$$\sigma v_k = f'_{x_k} + \sum_i f'_{u_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_k}$$

или въ силу (2):

$$\sigma v_k = f'_{x_k} + \varrho \sum_i y_i \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \tag{9}$$

Но въ силу $u_y = 0$ имѣемъ

$$\sum y_i \frac{\partial u_i}{\partial x_u} = -\sum u_i \frac{\partial y_i}{\partial x_k}$$

или съ помощью (2):

$$= \sum_i u_i \frac{\partial \left(\frac{1}{\varrho} f'_{u_i} \right)}{\partial x_k}$$

$$= \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial \varrho}{\partial x_k} \sum u_i f'_{u_i} - \frac{1}{\varrho} \sum u_i f''_{u_i x_k}$$

$$= \frac{n}{\varrho^2} \frac{\partial \varrho}{\partial x_k} f(x, u) - \frac{n}{\varrho} f'_{x_k}$$

или съ помощью (1) для всѣхъ (x, u), его выполняющихъ:

$$\sum y_i \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = -\frac{n}{\varrho} f'_{x_k}$$

Подставляя въ (9) находимъ:

$$\sigma v_k = (1 - n) f'_{x_k}, -$$

что и требовалось доказать. Подобнымъ образомъ докажемъ двойственную теорему:

VIII. *Огибающая $\boldsymbol{U}_v$ прямыхъ u, коимъ въ коннексѣ (1) соотвѣтствуютъ кривыя X_u, касающіяся прямой v, совпадаетъ съ кривой Y_v соотвѣтствующей v въ коннексѣ сопряженномъ.*

Тангенціальное уравненіе U_v получается исключеніемъ $x_1 x_2 x_3$ изъ уравненій (1) и (3),—причемъ отсюда $v_x = 0$. Ищемъ точечное уравненіе $\boldsymbol{U}_v$; его найдемъ извѣстнымъ пріемомъ:

$$\varrho y_i = f'_{u_i} + \sum_k f'_{x_k} \frac{\partial x_k}{\partial u_i} \equiv f'_{u_i} + \sigma \sum_k v_k \frac{\partial x_k}{\partial u_i}$$

Но дифференцируя $v_x = 0$ имѣемъ:

$$\sum v_k \frac{\partial x_k}{\partial u_i} = - \sum x_k \frac{\partial v_k}{\partial u_i}$$

а

$$\frac{\partial v_k}{\partial u_i} = \frac{\partial}{\partial u_i}\left(\frac{1}{\sigma} f'_{x_k}\right) = -\frac{1}{\sigma^2}\frac{\partial \sigma}{\partial u_i} f'_{x_k} + \frac{1}{\sigma} f''_{u_i x_k}.$$

Отсюда

$$-\sum_k x_k \frac{\partial v_k}{\partial u_i} \equiv \frac{1}{\sigma^2}\frac{\partial \sigma}{\partial u_i} \sum x_k f'_{x_k} - \frac{1}{\sigma} \sum x_k f''_{u_i x_k} =$$

$$= \frac{m}{\sigma^2}\frac{\partial \sigma}{\partial u_i} f(x; u) - \frac{m}{\sigma} f'_{u_i}$$

и слѣдовательно,

$$\varrho y_i = (1 - m) f'_{u_i} + \frac{m}{\sigma} f(x; u),$$

и въ силу уравненія (1) для элементовъ коннекса (1)

$$\varrho y_i = (1 - m) f'_{u_i}$$

ч. и т. д.

Итакъ кривыя $\boldsymbol{X}_y$ и $\boldsymbol{U}_v$ совпадаютъ съ кривыми V_y и Y_v, соотвѣтствующими точкѣ y, соотв. прямой v въ сопряженномъ коннексѣ.

По доказанному (теор. III) кривыя X_u и V_y касаются прямой v въ точкѣ x, и кривыя U_x и Y_v — прямой u въ точкѣ y. Такимъ образомъ между ними связь взаимная, и отсюда вытекаетъ результатъ Клебша:

IX. *Коннексомъ, сопряженнымъ сопряженному, является данный коннексъ*, и связи (x, y) и (v, u) также сопряженны одна другой.

Каждые два элемента (y, v) и (x, u) совершенно симметричны относительно проходящихъ черезъ нихъ соотвѣтствующихъ кривыхъ и т. о. если для сопряженнаго коннекса построимъ кривую $\boldsymbol{Y}_x$, гомологичную $\boldsymbol{X}_y$, то она совпадаетъ съ U_x и кривая $\boldsymbol{V}_u$, гомологичная $\boldsymbol{U}_v$, совпадаетъ съ X_u.

У K. Stephanos'а это является однако, какъ слѣдствіе основной теоремы (теорема VII и VIII), и значительно ниже приводится теор. IX. Можно поэтому поставить себѣ задачу доказать это независимо отъ теор. IX. Мы можемъ прійти къ этому путемъ нижеслѣдующихъ разсужденій.

Сопряженный коннексъ, какъ было уже упомянуто, опредѣляется уравненіемъ

$$f(x; u) = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial u_i} = \varrho y_i \quad (2), \qquad \frac{\partial f}{\partial x_k} = \sigma v_k \quad (3), \qquad (i = 1 . 2 . 3)$$

причемъ (1) съ помощью (2) можетъ быть замѣнено черезъ $u_y = 0$, а съ помощью (3) черезъ $v_x = 0$.

Попробуемъ составить для него кривую $\boldsymbol{Y}_{x'}$ т. е. геометрическое мѣсто такихъ точекъ y, которымъ въ (сопряженномъ) коннексѣ принадлежатъ кривыя V_y, проходящія черезъ данную точку x'.

Мы должны такимъ образомъ составить точечное уравненіе кривой V_y, опредѣленной (1), (2) и (3) при *данныхъ* y_i. Дифференцируя (1) въ предположеніи (2) и (3), имѣемъ

$$\tau z_k = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial v_k} + \frac{\partial f}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial u_i}{\partial v_k} \right)$$

или

$$\tau . z_k = \sum_i \left(\frac{1}{\sigma} v_i \frac{\partial x_i}{\partial v_k} + \frac{1}{\varrho} y_i \frac{\partial u_i}{\partial v_k} \right)$$

Но въ силу $u_y = 0$ и $v_x = 0$

$$\sum y_i \frac{\partial u_i}{\partial v_k} = - \sum u_i \frac{\partial y_i}{\partial v_k} = 0 ,$$

ибо y_i данныя

$$\sum v_i \frac{\partial x_i}{\partial v_k} = - \sum x_i \frac{\partial v_i}{\partial v_k} = - x_k$$

Итакъ

$$\tau . z_k = - \frac{1}{\varrho} x_k .$$

Сюда мы и должны подставить $z_i = x'_i$; такимъ образомъ $x'_i = k . x_i$, т. е. для полученія кривой $\boldsymbol{Y}_{x'}$ нужно взять уравненія

$$f(x'; u) = 0 \qquad (1')$$

$$\varrho y_i = \frac{\partial f(x'; u)}{\partial u_i} \qquad (2')$$

$$\sigma . v_k = \frac{\partial f(x'; u)}{\partial x'_k} \qquad (3')$$

три послѣднихъ уравненія отпадаютъ, (2′) даютъ переходъ къ точечнымъ координатамъ для кривой $U_{x'}$ и т. о. уравненіе кривой $\boldsymbol{Y}_{x'}$ совпадаетъ съ уравненіемъ кривой $U_{x'}$.

Значительный интересъ представляютъ далѣе теоремы относительно кривыхъ, соотвѣтствующихъ особеннымъ точкамъ.

X. *Кривая V_y, соотвѣтствующая въ сопряженномъ коннексѣ двойной точкѣ y кривой U_x, имѣетъ точку x двойною.*

Дѣйствительно, пусть въ коннексѣ (1) точкѣ x принадлежитъ кривая U_x, имѣющая двойную точку y. Въ этой точкѣ U_x имѣетъ двѣ различныхъ касательныхъ u, дѣйствительныхъ или мнимыхъ, каждой изъ которыхъ принадлежитъ по кривой X_u, проходящей черезъ точку x. Та и другая кривая имѣютъ въ точкѣ x касательную v, въ общемъ двѣ, которыя и суть касательныя къ кривой V_y сопряженнаго коннекса, принадлежащей точкѣ y. Такимъ образомъ V_y имѣетъ въ точкѣ x двѣ касательныхъ и слѣдовательно x есть ея двойная точка.

Пусть теперь двѣ касательныя u въ точкѣ y къ U_x сливаются (т. е. y есть точка возврата); тогда сливаются и соотвѣтствующія имъ кривыя X_u, а стало быть совпадаютъ и касательныя къ нимъ въ точкѣ x,—такимъ образомъ въ этой точкѣ V_y имѣетъ двѣ слившихся касательныхъ, т. е. въ этомъ случаѣ x есть точка возврата на V_y.

Итакъ: XI. *Кривая V_y, соотвѣтствующая точкѣ возврата y кривой U_x, имѣетъ точку x также точкою возврата.*

Двойственными разсужденіями докажемъ:

XII. *Кривая Y_v, соотвѣтствующая двойной касательной v кривой X_u, имѣетъ u двойною же касательной, и если v есть возвратная касательная (касательная въ точкѣ перегиба) X_u, то соотвѣтствующая Y_v имѣетъ прямую u также касательною возвратною.*

Въ дополненіе къ предыдущему остановимся на случаѣ основной точки и прямой, которыя K. Stephanos не разсматриваетъ.

Пусть $x_{осн}$ — основная точка, для которой $f(x_{осн.};\ u) \equiv 0$ при всякихъ u. Всѣ X_u проходятъ черезъ основную точку. $U_{x_{осн.}}$ есть $0 = 0$, и каждая проходящая черезъ произвольно взятую точку y прямая u можетъ быть разсматриваема, какъ касательная къ $U_{x_{осн}}$. Каждой принадлежитъ кривая X_u, проходящая черезъ $x_{осн.}$ и слѣдовательно, V_y проходитъ черезъ $x_{осн.}$ и имѣетъ въ этой точкѣ пучекъ касательныхъ $v_{x_{осн.}} = 0$, и слѣдовательно, $v_{x_{осн.}}$ войдетъ въ нѣкоторой степени λ множителемъ въ ураавненіе V_y. Такъ какъ при томъ производныя до n—1-го порядка включительно по u отъ (1) для основной точки уничтожаются, а производныя n-го порядка уже не заключаютъ u, то имѣемъ право считать каждую прямую $(x_{осн.};\ y)$ n-кратною касательною, и потому $\lambda = n$, къ чему мы въ другомъ мѣстѣ пришли инымъ путемъ:

XIII. *Если коннексъ (1) имѣетъ основную точку, изъ уравненія сопряженнаго коннекса выдѣляется множитель $v^n_{x_{осн.}}$, и такимъ образомъ классъ его понижается на n единицъ.*

Двойственно: Если $f(x;\, u) = 0$ имѣетъ основную прямую $u_{\text{осн.}}$, то каждой точкѣ x плоскости принадлежитъ кривая U_x, касательная къ $u_{\text{осн.}}$. Съ другой стороны $X_{u_{\text{осн.}}}$ сводится къ $0 = 0$, и каждая точка произвольно взятой прямой v можетъ быть разсматриваема, какъ точка прикосновенія съ $X_{u_{\text{осн.}}}$. Каждой точкѣ принадлежитъ кривая U_x, касательная къ $u_{\text{осн.}}$ и слѣдовательно, Y_v, принадлежащая произвольно взятой прямой въ сопряженномъ коннексѣ, касается $u_{\text{осн.}}$ и при томъ въ каждой ея точкѣ; для этого изъ уравненія Y_v долженъ выдѣляться множитель $u_{x_{\text{осн.}}}$ въ нѣкоторой степени μ. Такъ какъ другими соображеніями мы убѣдились въ томъ, что основная прямая понижаетъ *порядокъ* сопряженнаго коннекса на m единицъ, то $\mu = m$.

XIV. *Если коннексъ (1) имѣетъ основную прямую w, то въ уравненіи сопряженнаго коннекса выдѣляется множитель w_y^m, и порядокъ его понижается на m единицъ.*

§ 2.

Связь между $x_1 x_2 x_3$ и $y_1 y_2 y_3$ устанавливается уравненіями

$$f(x;\, u) = 0 \tag{1}$$

$$\frac{1}{y_1} f'_{u_1} = \frac{1}{y_2} f'_{u_2} = \frac{1}{y_3} f'_{u_3}\,;$$

вмѣсто (1) можно взять $u_y = 0$.

Исключая отсюда u_i, возьмемъ уравненія

$$u_y = 0$$

$$y_1 f'_{u_2} - y_2 f'_{u_1} = 0\,, \quad y_1 f'_{u_3} - y_3 f'_{u_1} = 0$$

результатъ исключенія будетъ степени $(n-1)^2$ относительно коэффиціентовъ 1-го уравненія и степени $1.(n-1)$ относительно коэффиціентовъ 2-го и 3-го. Стало быть его степень относительно x_i равна

$$0.(n-1)^2 + 2m(n-1) = 2m(n-1),$$

относительно y_i:

$$1.(n-1)^2 + 2(n-1) = n^2 - 1.$$

Но при этой оцѣнкѣ у насъ вошли лишніе множители, именно: наша 2-я система удовлетворяется при

$$u_y = 0\,, \quad y_1 = 0\,, \quad f'_{u_1} = 0\,,$$

не удовлетворяющихъ 1-ой. Поэтому надо отбросить лишніе множители, которые будутъ относительно коэффиціентовъ 1-го степени 0-й, относительно коэффиціентовъ 2-го $(n-1)$-ой и относительно коэффиціентовъ 3-го 0-ой; поэтому относительно x_i степень ихъ будетъ 0, относительно y_i— степень $(n-1)$. Окончательно поэтому степень искомой связи — взаимной f относительно u будетъ: относительно x степени $2m(n-1)$, относительно y— степени $n^2-1-(n-1)=n(n-1)$. Двойственное разсужденіе показываетъ, что связь между u и v будетъ въ отношеніи u степени $m(m-1)$, а относительно v—степени $2n(m-1)$.

Итакъ связь (x, y) выражается уравненіемъ вида

$$R_u f \equiv (x_1 x_2 x_3)^{2m(n-1)} \ (y_1 y_2 y_3)^{n(n-1)} = 0.$$

Степень относительно y можно показать еще такимъ разсужденіемъ: чтобы опредѣлить степень $R_u f$ относительно y, нужно знать число значеній y, соотвѣтствующихъ данному значенію x и удовлетворяющихъ нѣкоторому линейному условію, наприм., лежать на данной прямой U. Мы найдемъ это такъ. При данныхъ x каждому значенію u отвѣчаетъ одно значеніе y. Слѣдовательно, мы можемъ искать вмѣсто числа значеній y число значеній u, удовлетворяющихъ соотвѣтственнымъ условіямъ, а это мы найдемъ при данныхъ x изъ уравненій

$$f(x; u) = 0, \quad \sum U f'_u = 0$$

т. е. получимъ $n(n-1)$ рѣшеній u и столько же рѣшеній для y.

Еще можно проще сказать такъ: мы ищемъ *порядокъ* кривой U_x класса n; онъ, какъ извѣстно, опредѣляется, какъ число рѣшеній уравненій

$$f(x; u) = 0 \quad \varrho y_i = \frac{\partial f}{\partial u_i} \text{ при данныхъ } x, \text{—и будетъ } n(n-1).$$

Точно также, разыскивая степень связи (u, v) т. е. $R_x f = 0$ въ отношеніи v, мы ищемъ при данныхъ u уравненіе въ тангенціальныхъ координатахъ кривой X_u, т. е. исключаемъ x изъ уравненій

$$f(x; u) = 0, \quad \sigma v_k = \frac{\partial f}{\partial x_k};$$

результатъ относительно v—степени $m(m-1)$; степень $R_x f$ относительно u найдемъ прежнимъ способомъ равною $2n(m-1)$.

$$R_x f = (v_1 v_2 v_3)^{m(m-1)} \quad (u_1 u_2 u_3)^{2n(m-1)}.$$

Обратимъ вниманіе на то, какъ относится $R_u f$ (соотвѣт. $R_x f$) къ уравненію $F(y; v) = 0$ сопряженнаго коннекса.

$R_u f$, какъ уже указано, получается исключеніемъ u_i изъ уравненій:

$$f(x;\ u) = 0, \quad \varrho y_i = \frac{\partial f}{\partial u_i}.$$

Чтобы получить $F(y;\ v) = 0$, нужно еще добавить уравненія

$$\sigma v_k = \frac{\partial f}{\partial x_k},$$

т. е. $R_u f = 0$ есть выраженное въ точечныхъ координатахъ уравненіе кривой V_y, принадлежащей точкѣ y въ сопряженномъ коннексѣ. Означимъ его $F(x;\ y) = 0$. Оно, какъ видѣли, степени $2m(n-1)$ относительно x, т. е. V_y вообще кривая порядка $2m(n-1)$ и классъ V_y (т. е. степень $F(y;\ v)$ относительно v) будетъ поэтому

$$2m(n-1)[2m(n-1)-1] - 2d - 3r,$$

гдѣ d и r число точекъ двойныхъ и возврата кривой V_y.

Эти послѣднія числа опредѣлены F. Lindemann'омъ, Vorlesungen über Geometrie von Alfred Clebsch B. I. 1876, s. 970 и 971. Франц. пер. Benoist. III. p. 393.

Опредѣленіе это выполняется у Линдеманна, l. c., такъ.

По формуламъ Плюккера число двойныхъ точекъ кривой n-го класса, не имѣющей двойныхъ и возвратныхъ касательныхъ, равно

$$\frac{1}{2} n(n^2-9)(n-2).$$

Таково будетъ вообще число указанныхъ элементарныхъ тангенціальныхъ особенностей кривой U_x, принадлежащей точкѣ x. Но V_y совпадаетъ съ $\boldsymbol{X}_y$, геометрическомъ мѣстомъ точекъ x, коимъ соотвѣтствуютъ кривыя U_x, проходящія черезъ данную точку y. Если x—двойная точка $\boldsymbol{X}_y$, значитъ U_x дважды проходитъ черезъ y, т. е. имѣетъ y—двойною точкою (теорема X).

Итакъ: XV. *Число двойныхъ точекъ кривой V_y равно числу кривыхъ U_x, имѣющихъ точку y двойною.* И обратно: *число двойныхъ точекъ кривой U_x равно числу кривыхъ V_y, имѣющихъ точку x двойною точкою.*

Тоже самое относится и къ точкамъ возврата. Число кривыхъ U_x имѣющихъ y двойною точкою Lindemann опредѣляетъ такъ: число касающихся u и проходящихъ черезъ y кривыхъ U_x есть $2(n-1)m^2$,—въ томъ числѣ m^2 касаются u въ самой точкѣ y, какъ видѣли выше; эти m^2 касаній поглощаютъ $2m^2$ прохожденій, поэтому имѣется $2(n-2)m^2$ кривыхъ U_x, касающихся u не въ точкѣ y и проходящихъ черезъ эту точку.

Число касательныхъ, которыя можно провести къ каждой изъ этихъ U_x черезъ точку y, равно $n-2-1=n-3$ (двѣ поглощаются касательною въ y и еще одна—прямая u). Всего слѣдовательно черезъ y получается $2m^2(n-2)(n-3)$ лучей v, касательныхъ къ кривымъ U_x, проходящимъ черезъ y и касательнымъ къ прямой u; стало быть если взять одинъ изъ такихъ лучей v, проходящихъ, черезъ y, то ему соотвѣтствуетъ $2m^2(n-2)(n-3)$ прямыхъ u, касательныхъ къ кривымъ U_x, проходящимъ черезъ y и касательнымъ къ v не въ точкѣ y. Такимъ образомъ установилось соотвѣтствіе

$$[2m^2(n-2)(n-3),\quad 2m^2(n-2)(n-3)],$$

число совпаденій соотвѣтственныхъ лучей u и v будетъ поэтому

$$2m^2(n-2)(n-3)\,.\,2\times\frac{1}{2}.$$

При каждомъ изъ такихъ совпаденій U_x снова пройдетъ черезъ y, т. е. будетъ имѣть въ y двойную точку; найденное число $2m^2(n-2)(n-3)$ и есть искомое число двойныхъ точекъ.

Что касается числа точекъ возврата, то F. Lindemann l. c. 970 указываетъ лишь, что число это получается разсмотрѣніемъ соотвѣтствія $[m^2(n-2),\ 2m^2(n-2)]$ между лучами произвольнаго пучка и равно $3m^2(n-2)$.

Можно примѣнить къ нахожденію его и такой однако методъ.

Число точекъ возврата кривой n-го класса, не имѣющей двойныхъ и возвратныхъ касательныхъ, равно $3n(n-2)$; оно т. о. конечно.

Для кривой V_y, тожественной съ X_y— геометрическимъ мѣстомъ точекъ, которыхъ кривыя коннекса U_x проходятъ черезъ y,— какъ уже указано, число это совпадаетъ съ числомъ кривыхъ U_x, имѣющихъ въ y точку возврата. Касательныя въ точкахъ возврата кривой U_x выдѣляются на ней уравненіемъ.

$$\left|\ f''_{ik}\ \right|=0,$$

гдѣ вторыя производныя берутся по перемѣннымъ u; эти касательныя пройдутъ черезъ точку y, лежащую на U_x, при условіяхъ

$$\frac{f'_{u_1}}{y_1}=\frac{f'_{u_2}}{y_2}=\frac{f'_{u_3}}{y_3}$$

Такимъ образомъ имѣемъ уравненія

$$\left|\ f''_{ik}\ \right|=0,\quad y_1f'_{u_2}-y_2f'_{u_1}=0,\quad y_2f'_{u_3}-y_3f'_{u_2}=0,\quad u_x=0.$$

Но въ этомъ числѣ лишнія суть
a) рѣшенія системы

$$f'_{u_2}=0\,,\quad u_2=0\,,\quad u_y=0\quad \left|\; f''_{ik}\;\right|=0$$

b) тангенціально-особенные элементы, коихъ прямыя проходятъ черезъ y:

$$f'_{u_1}=0\quad f'_{u_2}=0\quad f'_{u_3}=0\quad u_y=0\,,$$

и полученное такимъ образомъ число будетъ вдвое больше дѣйствительнаго, ибо каждая касательная, какъ совпаденіе двухъ, получается дважды; число элементовъ пересѣченія коннексовъ

$$[3m,\ 3(n-2)],\quad (m,\ n-1),\quad (m,\ n-1)\ \text{и}\ (0,1)$$

есть

$$3m^2(3n-4)\,;$$

отсюда исключается

$$\text{a)}\ 3m^2\quad \text{и}\quad \text{b)}\ 3m^2(n-1)$$

искомое число поэтому равно:

$$\frac{1}{2}\left[3m^2(3n-4)-3m^2-3m^2(n-1)\right]=3m^2(n-2).$$

Такимъ образомъ

$$d=2m^2(n-2)(n-3)$$

и

$$r=3m^2(n-2)$$

Отсюда и получается у K. Stephanos'a классъ V_y, а слѣдовательно и классъ сопряженнаго коннекса:

$$2m(n-1)\{2m(n-1)-1\}-2\,.\,2m^2(n-2)(n-3)-3\,.\,3m^2(n-2)$$
$$=m\left[mn+2(m-1)(n-1)\right].$$

Двойственныя разсужденія покажутъ, что кривая Y_v — класса $2n(m-1)$. Число ея двойныхъ касательныхъ равно

$$2n^2(m-2)(m-3)\,;$$

число ея возвратныхъ касательныхъ равно

$$3n^2(m-2).$$

Поэтому ея порядокъ и въ тоже время порядокъ сопряженнаго коннекса:

$$2n(m-1)\left[2n(m-1)-1\right]-2\,.\,2n^2(m-2)(n-3)$$
$$-3\,.\,3n^2(m-2)=n\left[mn+2(m-1)(n-1)\right].$$

§ 3.

Уже въ предыдущемъ приходилось разсматривать уравненіе

$$\sum U f'_u = 0. \tag{10}$$

При (x, u) данномъ и U перемѣнныхъ это уравненіе выражаетъ точку прикосновенія u къ кривой U_x коннекса. K. Stephanos разсматриваетъ такія кривыя при U, безконечно близкихъ къ u, и говоритъ, что тогда это уравненіе выражаетъ сѣть (réseau) кривыхъ, соотвѣтствующую прямымъ, безконечно-близкимъ къ u. Такое опредѣленіе не совсѣмъ правильно. Вѣрнѣе будетъ сказать такъ. Пусть u' — прямая безконечно-близкая къ u. Можемъ положить $u' = u + \varepsilon U$, гдѣ U—прямая, которая проходитъ черезъ точку пересѣченія u и u'.

Тогда съ точностью до безконечно-малыхъ 1 порядка уравненіе $X_{u'}$ принимаетъ видъ: $f(x; u) + \varepsilon \,.\, \sum U f'_u = 0$. Вотъ собственно уравненіе пучка кривыхъ $X_{u'}$, — при всевозможныхъ ε получаемъ кривыя, проходящія черезъ точки пересѣченія $f = 0$ и $\sum U f'_u = 0$.

Сѣть кривыхъ $\sum U f'_u = 0$ — это кривыя 1-ыя поляры X_u въ отношеніи прямыхъ U. Если y — точка пересѣченія u и U, т. е. $y = (u, U)$ и слѣдовательно y_i пропорціональны минорамъ митрицы

$$\left\| \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ U_1 & U_2 & U_3 \end{matrix} \right\|,$$

то изъ уравненій (1) и (10) имѣемъ, что и f'_{u_i} пропорціональны тѣмъ же минорамъ и слѣдовательно, $\varrho y_i = f'_{u_i}$, т. е. точки пересѣченія (1) и (10) суть (по теоремѣ III) точки прикосновенія X_u и V_y, соотвѣтствующей точкѣ $y = (u, U)$ (въ числѣ m^2).

При всевозможныхъ значеніяхъ U получимъ безчисленное множество (∞^1) группъ по m^2 точекъ, того свойства, что каждая точка кривой X_u принадлежитъ только къ одной изъ этихъ группъ. Дѣйствительно, уравненія

$$f(x; u) = 0 \quad \text{или} \quad \sum u f'_u = 0$$

$$\sum U f'_u = 0 \quad \sum U' f'_u = 0$$

совмѣстны при $(uUU') = 0$, т. е. если U' проходитъ черезъ точку пересѣченія u и U, — т. е. каждая группа точекъ принадлежитъ опредѣленной точкѣ прямой u, какова бы ни была прямая U, проходящая черезъ эту точку. Если же U' не проходитъ черезъ эту точку, то три уравненія несовмѣстны.

Исключеніе составляютъ тѣ случаи, когда всѣ частныя производныя по u_i 1-го порядка обращаются въ 0:

$$f'_{u_i} = 0 \quad (i = 1,\ 2,\ 3);$$

черезъ такія точки проходятъ всѣ кривыя сѣти (10).

XVI. *Если кривыя X_u, соотвѣтствующія прямымъ u', безконечно-близкимъ къ u, встрѣчаютъ всѣ кривую X_u въ одной и той же точкѣ x, кривая U_x имѣетъ эту точку двойною касательной.*

Иными словами: если первыя поляры $\sum U f'_u = 0$ независимо отъ U встрѣчаютъ X_u въ одной и той же точкѣ x, то для этого необходимо, чтобы уравненіе 1-ой поляры удовлетворялось независимо отъ U, т. е. должны быть выполнены $f'_{u_1} = 0$ $f'_{u_2} = 0$ $f'_{u_3} = 0$,—т. е. прямая u должна быть особенной касательной къ $f(x; u) = 0$. Дѣйствительно, изъ

$$\frac{1}{x_1} f'_{u_1} = \frac{1}{x_2} f'_{u_2} = \frac{1}{x_3} f'_{u_3},$$

подстановка въ $f(x; u) = 0$ даетъ $u_x = 0$.

Но u не проходитъ чрезъ точку x, слѣдовательно должны обращаться въ 0 частныя производныя f по u_i.

Такіе элементы, которые выполняютъ выписанныя выше уравненія степени m относительно $x_1 x_2 x_3$ и степени $n-1$ относительно $u_1 u_2 u_3$, я называю тангенціально-особенными элементами коннекса (1). Они образуютъ многообразіе $\infty^{4-3} = \infty^1$ измѣренія,—*пару кривыхъ*: точки этихъ элементовъ образуютъ кривую (*геометрическое мѣсто точекъ x, принадлежащія которымъ кривыя U_x имѣютъ двойную касательную*), порядокъ которой равенъ $3m(n-1)^2$,—ибо ея уравненіе, какъ результатъ исключенія u изъ трехъ уравненій степени $n-1$, будетъ степени $(n-1)^2$ относительно коэффиціентовъ каждаго уравненія, которые степени m относительно x_i. *Вторая кривая пары*, уравненіе коей получимъ, исключая изъ трехъ уравненій $x_1 x_2 x_3$, *есть огибающая двойныхъ касательныхъ кривыхъ U_x; это кривая класса $3m^2(n-1)$.*

Означимъ вслѣдъ за K. Stephanos'омъ вторую кривую Σ, первую S. Онѣ находятся въ однозначномъ соотвѣтствіи: точкѣ одной соотвѣтствуетъ касательная другой и обратно. Кривая X_u, принадлежащая въ коннексѣ касательной u кривой Σ, проходитъ черезъ соотвѣтствующую этой касательной точку x кривой S. Но можно показать, что X_u *и S въ этой точкѣ касаются.*

Дѣйствительно, мы можемъ одно изъ трехъ уравненій $f'_{u_i} = 0$ замѣнить черезъ $f(x; u) = 0$ и считать здѣсь u выраженными въ функціи x

изъ остальныхъ двухъ (или трехъ). Пусть $\Omega(x_1x_2x_3)=0$ т. о. получаемое уравненіе; тогда

$$\frac{\partial\Omega}{\partial x_i}=\frac{\partial f}{\partial x_i}+\sum\frac{\partial f}{\partial u_k}\frac{\partial u_k}{\partial x_i}=\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

въ силу уравненій кривой S.

Итакъ касательная къ S въ точкѣ x выразится уравненіемъ $\sum Xf'_x=0$. Эта есть въ тоже время первая поляра точки X. Классъ кривой S есть число ея касательныхъ, проходящихъ черезъ точку X, не лежащую на кривой, т. е. число элементовъ, общихъ четыремъ коннексамъ

$$f'_{u_i}=0\ (i=1,\ 2,\ 3)\quad\text{и}\quad\sum Xf'_x=0;$$

т. е.

$$(m,\ n-1),\quad(m,\ n-1),\quad(m,\ n-1)\quad\text{и}\quad(m-1,\ n)$$

по общей формулѣ это число равно .

$$3m(n-1)[mn+(m-1)(n-1)].$$

Двойственныя разсужденія даютъ слѣдующее:

Кривая X_u имѣетъ двойную точку, если выполнены уравненія

$$f'_{x_1}=0\quad f'_{x_2}=0\quad f'_{x_3}=0 \tag{11}$$

исключая отсюда u, получаемъ кривую S' — геометрическое мѣсто двойныхъ точекъ кривыхъ X_u, а исключая x — огибающую Σ' тѣхъ прямыхъ u, принадлежащія которымъ кривыя X_u имѣютъ двойную точку. Кривая Σ' класса $3n(m-1)^2$, кривая S' — порядка $3n^2(m-1)$.

Кривая U_x, принадлежащая въ коннексѣ точкѣ x кривой S', касается соотвѣтствующей касательной u кривой Σ'. Но можно убѣдиться, что точка прикосновенія U_x и Σ' къ u будетъ общею, т. е. онѣ касаются въ этой точкѣ между собою. Дѣйствительно, уравненія Σ' суть (11). Одно мы можемъ замѣнить черезъ $f(x;\ u)=0$, считая здѣсь x замѣненными по (11). Пусть это $\omega(u_1u_2u_3)=0$. Ищемъ точку прикосновенія

$$\frac{\partial\omega}{\partial u_i}=\frac{\partial f}{\partial u_i}+\sum_k\frac{\partial f}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial u_i}=\frac{\partial f}{\partial u_i}$$

въ силу (11). Итакъ точка прикосновенія u къ Σ' выразится $\sum Uf'_u=0$, а это и будетъ точка прикосновенія u съ U_x.

Въ тоже время при данныхъ U уравненіе

$$\sum Uf'_u=0 \tag{10}$$

есть уравненіе 1-ой поляры Σ' въ отношеніи u, и порядокъ кривой Σ' есть число точекъ, общихъ ей и ея 1-ой полярѣ, т. е. число элементовъ, общихъ уравненіямъ (11) и (10). Итакъ порядокъ Σ' есть

$$3(m-1)n[mn+(m-1)(n-1)].$$

Возвращаемся снова къ кривымъ S и Σ'.

XVII. *Всякой двойной точкѣ x кривой S соотвѣтствуетъ кривая U_x, имѣющая двѣ двойныхъ касательныхъ.*

Дѣйствительно, каждой точкѣ x кривой S соотвѣтствуетъ кривая U_x, имѣющая двойную касательную. При непрерывномъ измѣненіи x вдоль кривой S кривая U_x измѣняется также непрерывно, измѣняется и двойная касательная. Если S имѣетъ двойную точку, значитъ послѣ обхода мы возвращаемся снова въ ту же точку x, снова получаемъ туже кривую U_x, но двойная касательная, измѣнявшаяся также непрерывно, вообще говоря придетъ къ другому значенію, т. е. U_x, соотвѣтствующая двойной точкѣ S, будетъ имѣть вообще двѣ двойныхъ касательныхъ.

Допустимъ теперь, что S имѣетъ *точку возврата.*

XVIII. *Точкѣ возврата S соотвѣтствуетъ въ коннексѣ (1) кривая U_x, имѣющая одну возвратную касательную.*

Точка прикосновенія возвратной касательной кривой U_x выражается уравненіемъ

$$\sum f''_{u_i u_k} U_i U_k = 0. \tag{12}$$

которое должно обращаться въ точный квадратъ. Для этого должно быть

$$f''_{11} = \gamma\omega_1^2, \quad f''_{12} = \gamma\omega_1\omega_2, \quad f''_{13} = \gamma\omega_1\omega_3$$
$$f''_{22} = \gamma\omega_2^2, \quad f''_{23} = \gamma\omega_2\omega_3, \quad f''_{33} = \gamma\omega_3^2,$$

если для краткости писать $f''_{ik} = f''_{u_i u_k}$; такимъ образомъ должны быть выполнены условія

$$f''_{ik} f''_{jl} - f''_{ij} f''_{kl} = 0, \qquad (i, j, k, l = 1, 2, 3)$$

т. е. не только опредѣлитель

$$\begin{vmatrix} f''_{ik} \end{vmatrix} = 0,$$

но и всѣ его миноры 2-го порядка обращаются въ 0; независимыхъ между ними три; беремъ

$$f_{11} f_{23} - f_{12} f_{13} = 0$$
$$f_{12} f_{23} - f_{13} f_{22} = 0$$
$$f_{12} f_{33} - f_{13} f_{23} = 0.$$

Дѣйствительно, въ силу ихъ не только

$$\frac{f_{11}}{f_{12}}=\frac{f_{12}}{f_{22}}=\frac{f_{13}}{f_{23}};$$

но и

$$\frac{f_{12}}{f_{13}}=\frac{f_{22}}{f_{23}}=\frac{f_{23}}{f_{33}};$$

а слѣдовательно и

$$\frac{f_{11}}{f_{13}}=\frac{f_{12}}{f_{13}}=\frac{f_{23}}{f_{33}}.$$

Пара, общая тремъ этимъ коннексамъ $(2m, 2n-4)$, имѣетъ характеристики $24m(n-2)^2$, $24m^2(n-2)$. Но въ эти числа входятъ лишнія слагаемыя—характеристики четырехъ паръ

$$\begin{array}{lll} f_{11}=0 & f_{12}=0 & f_{13}=0 \\ f_{12}=0 & f_{22}=0 & f_{23}=0 \\ f_{13}=0 & f_{23}=0 & f_{33}=0 \\ f_{12}=0 & f_{23}=0 & f_{13}=0 \end{array}$$

каждая опредѣляемая пересѣченіемъ трехъ коннексовъ $(m, n-2)$. Ихъ характеристики поэтому $3m(n-2)^2$, $3m^2(n-2)$ каждой. Отбрасывая эти пары, получимъ какъ остаточную, пару съ характеристиками

$$12m(n-2)^2, \quad 12m^2(n-2).$$

Съ коннексомъ (m, n) эта пара имѣетъ

$$12m(n-2)^2 \cdot m + 12m^2(n-2)n \equiv 24m^2(n-1)(n-2).$$

общихъ элементовъ. Но такъ какъ $\sum f''_{ik}U_iU_k=0$ обращается въ точный квадратъ, то и самый коннексъ въ элементѣ (x, u) разсматриваемаго типа имѣетъ квадратичный характеръ, и каждый элементъ пересѣченія является поэтому вдвойнѣ,— а потому искомое число касательныхъ въ точкахъ возврата оказывается равнымъ

$$\frac{1}{2}24m^2(n-1)(n-2)=12m^2(n-1)(n-2).$$

Нѣкоторый интересъ представляетъ другой способъ подсчета того же числа, основанный на нѣсколько иныхъ соображеніяхъ. Тангенціально-особенные элементы опредѣляются уравненіями

$$f'_{u_1}=0 \quad f'_{u_2}=0 \quad f'_{u_3}=0.$$

Добавочное условіе, чтобы прямая была возвратною касательною, еще одно; беремъ за таковое

$$f''_{11} f''_{33} - f''^2_{13} = 0 \tag{13}$$

но при этомъ излишними оказываются опредѣляемыя уравненіями

$$u_2 = 0 \quad f'_{u_1} = 0 \quad f'_{u_2} = 0 \quad f''_{11} f''_{33} - f''^2_{13} = 0\,;$$

первыя четыре имѣютъ

$$6m^2 (n-1)(2n-3)$$

общихъ элементовъ, но отброшены отсюда должны быть элементы общіе вторымъ четыремъ коннексамъ,—въ числѣ

$$2m^2 (n-2) + 4m^2 (n-1)$$

по исключеніи ихъ, имѣемъ

$$12m^2 (n-1)(n-2) + 2m^2,—$$

полученный результатъ отличается отъ предыдущаго.

Мы получимъ требуемое пониженіе, если отъ совокупности тангенціально-особенныхъ элементовъ, удовлетворяющихъ добавочному условію (13), отбросимъ тѣ, которые выполняютъ уравненія

$$u_2 = 0 \quad f'_{u_1} = 0 \quad f = 0 \quad f''_{11} f''_{33} - f''^2_{13} = 0\,.$$

Элементовъ, общихъ этимъ коннексамъ $(0,1)$, $(m, n-2)$, $[2m, 2(n-1)]$ будетъ

$$2m^2 + 2m^2 (n-1) + m^2 .\, 2(n-2) \equiv 6m^2 (n-1)\,,$$

вычитая которые изъ $6m^2 (n-1)(2n-3)n$, получимъ какъ разъ

$$12m^2 (n-1)(n-2)$$

искомыхъ элементовъ. Такая обратная замѣна $f'_{u_1} = 0$ или $f'_{u_2} = 0$ черезъ $f = 0$ можетъ быть мотивирована тѣмъ, что только три уравненія тангенціально-особенныхъ элементовъ могутъ замѣнить $f = 0$, но когда отбрасываемъ одно изъ нихъ, однимъ изъ двухъ остальныхъ непремѣнно должно быть само уравненіе коннекса $f = 0$.

Такимъ образомъ для кривой S опредѣлены

порядокъ: $m' = 3m(n-1)^2$
классъ: $n' = 3m(n-1)[mn + (m-1)(n-1)]$

и число точекъ возврата

$$r' = 12m^2(n-1)(n-2);$$

отсюда по извѣстной формулѣ находимъ число двойныхъ точекъ S:

$$d' = \frac{3}{2}m^2(n-1)(n-2)(3n^2-3n-11).$$

Можемъ опредѣлить и *родъ* кривой S,— онъ оказывается равнымъ

$$p' = \frac{9}{2}m(n-1)\{2mn-3m-n+1\}+1,$$

или если означить $\tau = mn+(m-1)(n-1)$,

$$p' = \frac{9}{2}m(n-1)\{\tau-2m\}+1.$$

Если кривая Σ имѣетъ двойную касательную u, это значитъ, что соотвѣтствующія двумъ различнымъ точкамъ x и x' кривыя U_x и $U_{x'}$ имѣютъ двойною касательною одну и ту же прямую u. Поэтому уже не одну общую точку имѣютъ всѣ кривыя $X_{u'}$ принадлежащія въ коннексѣ (1) прямымъ u', безконечно-близкимъ къ u, а двѣ точки x и x' будутъ общими всѣмъ этимъ кривымъ. Если двойная касательная обращается въ касательную въ точкѣ перегиба, то и соотвѣтственная точки x и x' кривой S сливаются, и всѣ кривыя $X_{u'}$ въ этой точкѣ касаются между собою и касаются кривой S.

Послѣднее требуетъ выполненія добавочныхъ условій, и кривыя Σ касательныхъ возвратныхъ вообще не имѣютъ.

Такимъ образомъ для Σ извѣстны классъ $n' = 3m^2(n-1)$ родъ равный роду S вслѣдствіе однозначнаго между ними соотвѣтствія, такъ что

$$2p'-2 = 9m(n-1)\{\tau-2m\},$$

и число возвратныхъ касательныхъ ($\equiv$ точекъ перегиба) $\varrho'=0$. Отсюда порядокъ

$$m' = 3m(n-1)\{3\tau-4m\}.$$

Число двойныхъ касательныхъ

$$\delta = \frac{9}{2}m(n-1)\{\tau-3m+m^3(n-1)\},$$

Число двойныхъ точекъ

$$d = m'^2-20(p'-1)$$

и число точекъ возврата

$$r' = 9m(n-1)\{3\tau-5m\}.$$

Для кривыхъ S' и Σ' мы можемъ доказывать аналогичныя свойства.

Каждой двойной точкѣ кривой S' соотвѣтствуетъ кривая U_x, имѣющая со всѣми безконечно-близкими кривыми $U_{x'}$ двѣ неизмѣнныя общія касательныя. И если S' имѣетъ точку возврата, двѣ эти общія касательныя сливаются, и кривая U_x, принадлежащая такой точкѣ S', имѣетъ общую касательную со всѣми безконечно-близкими кривыми.

Но такихъ точекъ вообще не существуетъ: $r''=0$. Такимъ образомъ для кривой S' знаемъ слѣдующія Плюккеровы числа

$$m''=3(m-1)n^2; \qquad r''=0$$
$$\varrho''=\frac{9}{2}n(m-1)\{\tau-2m\}+1,$$

такъ что

$$2(p''-1)=9n(m-1)\{\tau-2n\};$$

отсюда найдемъ далѣе классъ

$$n''=3n(m-1)\{3\tau-4n\}.$$

число двойныхъ касательныхъ

$$d''=\frac{9}{2}n(m-1)[\tau-3n+n^3(m-1)]$$
$$\varrho''=9n(m-1)\{3\tau-5n\}$$
$$\delta''=3n(m-1)\{3n(m-1)(3\tau-4n)^2-30(\tau-2n)\}$$
$$=n''^2-20(p''-1).$$

Для кривой Σ' подобнымъ образомъ находимъ:

классъ $n_1''=3n(m-1)^2$

порядокъ $m_1''=3n(m-1)\tau=3n(m-1)[mn+(m-1)(n-1)]$

число возвратныхъ касательныхъ $r''_1=12n^2(m-1)(m-2)$

число касательныхъ двойныхъ:

$$d_1''=2n^2(m-1)(m-2)[3m^2-3m-11].$$

Переходимъ къ свойствамъ кривыхъ сопряженнаго коннекса по отношенію къ парамъ кривыхъ тангенціально- и точечно-особенныхъ элементовъ.

Кривыя U_y, принадлежащія въ сопряженномъ коннексѣ различнымъ точкамъ прямой u, огибаютъ кривую X_u, принадлежащую въ данномъ коннексѣ этой прямой. Если прямая u есть касательная къ Σ, т. е. двойная касательная нѣкоторой кривой U_x, то безконечно-близкимъ къ такой прямой прямымъ u' принадлежатъ кривыя $X_{u'}$, проходящія черезъ точку x,— которая соотвѣтствуетъ въ парѣ тангенціально-особенныхъ элементовъ прямой u, и слѣдовательно, лежитъ на кривой S. Въ этой точкѣ кривыя $X_{u'}$ касаются съ кривыми V_y, и такъ

какъ эти кривыя должны касаться и S въ той же точкѣ, то всѣ онѣ касаются въ этой точкѣ между собою.

Отсюда: XIX. *Если возьмемъ произвольно точку y, то ей принадлежитъ въ сопряженномъ коннексѣ кривая V_y, которая касается кривой S въ $3m^2(n-1)$ точкахъ, соотвѣтствующихъ $3m^2(n-1)$ касательнымъ кривой Σ, проходящимъ черезъ точку y.*

Двойственно кривыя Y_v, соотвѣтствующія различнымъ прямымъ v пучка, имѣющаго точку x своимъ центромъ, огибаютъ кривую U_x, принадлежащую въ коннексѣ этой точкѣ. Если точка x принадлежитъ кривой S' пары кривыхъ точечно-особенныхъ элементовъ, т. е. является двойною точкою на одной изъ кривыхъ X_u, то безконечно-близкимъ къ такой точкѣ точкамъ x' принадлежатъ въ коннексѣ кривыя $U_{x'}$, касательныя къ прямой u,—дополняющей x до элемента пары кривыхъ точечно-особенныхъ элементовъ и слѣдовательно касающейся кривой Σ'. Эту прямую имѣютъ касательною кривыя $U_{x'}$ и кривыя Y_v, соотвѣтствующія прямымъ пучка съ центромъ въ x, и такъ какъ эти кривыя должны имѣть съ Σ' туже общую касательную, то всѣ эти кривыя касаются между собою и касаются Σ', и u ихъ общая касательная.

Отсюда: XIX. *Если возьмемъ произвольно прямую v, то ей принадлежитъ въ сопряженномъ коннексѣ кривая Y_v, которая имѣетъ съ кривою Σ' $3n^2(m-1)$ общихъ касательныхъ, соотвѣтствующихъ $3n^2(m-1)$ точкамъ кривой S', лежащимъ на прямой v.*

§ 4.

Въ статьѣ A. Cayley: Recherches sur l'élimination et sur la théorie des courbes (Crelle's Journal B. 30 p. 30—45. 1847 [1]), которую цитируетъ K. Stephanos, приводится рядъ любопытныхъ для нашихъ цѣлей результатовъ.

Прежде всего заслуживаетъ быть отмѣченнымъ дѣлаемое Cayley различіе между полнымъ и приведеннымъ результантомъ: если результантъ разлагается на множители, то нѣкоторые могутъ быть излишними при рѣшеніи нѣкотораго вопроса и при этомъ могутъ быть отброшены. Напротивъ съ другой точки зрѣнія именно отброшенные въ первомъ случаѣ множители и даютъ *приведенный* результантъ.

---

[1]) Статья эта перепечатана въ его Collected mathematical Papers Vol I. c. 337—351, но безъ исправленія довольно многочисленныхъ опечатокъ:

Crelle's J. B. 34	Coll. math pap.	Напечатано	Должно быть
стр. 36 с. 17 св.	343 стр. 5 св.	D	∂
„ — „ 18 „	343 „ 6 „	$\alpha(M\partial x - N\partial y) + ..$	$\alpha(M\partial z - N\partial y) + ..$
„ 37 „ 8 „	343 „ 7 сн.	$n^2 - n - 6$	$n^2 - 5n + 6$
„ — „ 9 „	343 „ 7 сн.	$n^2 - 5n - 6$	$n^2 - n - 6$
„ — „ 11 „ и 13 сн.	343 „ 5 сн. и 344 с. 8 св.	$n^3 - 2n^2 - 10n + 12$	$n^3 - n^2 - 10n + 12$

Въ частности, Cayley указываетъ, что поляра поляры кривой $f=0$ имѣетъ своимъ полнымъ выраженіемъ

$$FFf=(Kf).(Pf)^2(Qf)^3.f,$$

гдѣ $Kf=0$ условіе существованія кратной точки, $Pf=0$—уравненіе системы двойныхъ касательныхъ, $Qf=0$ — уравненіе системы касательныхъ въ точкахъ перегиба.

Примѣняя этотъ результатъ къ теоріи коннексовъ, замѣтимъ, что при составленіи формы $R_u f=0$, выражающей связь между x и y и взаимной f въ отношеніи u, мы брали уравненія

$$\sum Uf'_u=0 \quad \sum U'f'_u=0 \quad (uUU')=0;$$

относительно u результантъ при этомъ получался степени $n-1$ относительно коэффиціентовъ 1-го и 2-го уравненія и степени $(n-1)^2$ относительно коэффиціентовъ 3-го, т. е. относительно x степени $2m(n-1)$ и степени

$$(n-1)^2+n-1=n(n-1)$$

относительно U и U', слѣдовательно той же степени относительно $(UU')_i=y_i$.

Но если бы мы взяли уравненія

$$f=0, \quad \sum Uf'_u=0, \quad \sum U'f'_u=0,$$

то результантъ относительно u получился бы степени $(n-1)^2$ относительно коэффиціентовъ 1-го, и степеней $n(n-1)$ относительно коэффиціентовъ 2-го и 3-го т. е. относительно x_i степени

$$m(n-1)^2+2mn(n-1)=3m(n-1)^2+2m(n-1);$$

лишнимъ множителемъ здѣсь является результатъ исключенія u изъ уравненій

$$f'_{x_i}=0 \quad (i=1, 2, 3)$$

какъ это и было сдѣлано мною въ свое время (Къ вопросу объ особенныхъ элементахъ коннекса I. Извѣст. Казан. Физ.-Мат. Общ. (2) т. XI. 1902).

Не останавливаясь на этомъ дольше, укажемъ только, что когда для $R_u f$ ищемъ форму, взаимную въ отношеніи 2-го ряда прежнихъ перемѣнныхъ x, или наоборотъ для $R_x f$ ищемъ форму, взаимную въ отношеніи u, то результантъ, кромѣ $F(y;\ v)$—лѣвой части уравненія сопряженнаго коннекса, долженъ содержать еще добавочные множители. Но сначала необходимо остановиться на результатахъ, приводимыхъ K. Stephanos'омъ въ n⁰ 7 его статьи.

Прежде всего если составить тангенціальное уравненіе $U_2 = 0$ двойныхъ точекъ кривыхъ U_x, то оно будетъ степени

$$\frac{1}{2} n (n-2)(n^2-9)$$

относительно тангенціальныхъ координатъ u, ибо таково по Cayley и Plücker'у число двойныхъ точекъ кривой класса n; по Cayley же оно степени $2n(n-2)(n-3)$ относительно коэффиціентовъ уравненія кривой U_x, т. е. степени $2mn(n-2)(n-3)$ относительно x.

Уравненіе $U_2 = 0$ получается исключеніемъ u_i изъ уравненій

$$f(x;\, u) = 0 \quad \sum U f'_u = 0 \quad \text{и} \quad \Pi f = 0;$$

послѣднее изображаетъ ту кривую, которая вырѣзаетъ на U_x ея двойныя точки.

Если припомнимъ, что по теоремѣ X каждой двойной точкѣ y кривой U_x соотвѣтствуетъ кривая V_y, имѣющая x двойною точкою, то предполагая, что въ $U_2 = 0$ перемѣннымъ u_i дадимъ опредѣленныя значенія U_i, получимъ лишь тѣ двойныя точки y, которыя лежатъ на опредѣленной прямой U. Слѣдовательно, уравненіе $U_2 = 0$ изобразитъ теперь въ перемѣнныхъ x геометрическое мѣсто двойныхъ точекъ кривыхъ V_y, принадлежащихъ точкамъ прямой U.

Тангенціальное уравненіе $U_3 = 0$ точекъ возврата кривыхъ U_x будетъ (Cayley l. c.) степени $3n(n-2)$ относительно U и той же степени относительно коэффиціентовъ, т. е. степени $3mn(n-2)$ относительно x.

Оно получается исключеніемъ u изъ уравненій

$$f = 0, \quad Hf \equiv \begin{vmatrix} f''_{u_i u_k} \end{vmatrix} = 0, \quad \sum U f'_u = 0$$

степеней n, $3(n-2)$ и $n-1$ относительно u_i; 0, 0 и 1 относительно U_i и степеней m, $3m$ и m относительно x_i по выдѣленіи изъ результанта множителя $(Kf)^2$, выражающаго условіе двойныхъ касательныхъ, при которомъ также выполняются всѣ эти уравненія и который будетъ степени $6m(n-1)^2$ относительно x.

Но если припомнимъ теорему XI, то замѣтимъ, что фигурирующія въ этомъ уравненіи x_i суть координаты точки возврата кривой V_y, соотвѣтствующей y, точкѣ возврата кривой U_x, и слѣдовательно, если примемъ U_i данными, а x_i перемѣнными, то $U_3 = 0$ выразитъ геометрическое мѣсто точекъ возврата кривыхъ V_y, соотвѣтствующихъ въ сопряженномъ коннексѣ точкамъ y прямой U.

Тѣже разсужденія примѣнимы и къ кривымъ V_y. Тангенціальное уравненіе точекъ возврата кривыхъ V_y — означимъ его $\boldsymbol{V}_3 = 0$,— если въ немъ разсматривать перемѣнными y, а v_i данными, представляетъ геометрическое мѣсто точекъ возврата тѣхъ кривыхъ U_x, которыя принадлежатъ точкамъ x прямой v. Порядокъ этой кривой есть число лежащихъ на нѣкоторой прямой точекъ y, которыя суть точки возврата кривыхъ U_x, принадлежащихъ точкамъ x прямой v.

Порядокъ $\boldsymbol{U}_3 = 0$ есть число лежащихъ на нѣкоторой прямой точекъ x, которыя суть точки возврата кривыхъ V_y, принадлежащихъ точкамъ y прямой u. Оба числа поэтому въ силу теоремы XI тожественны и равны $3mn(n-3)$.

Также и порядокъ кривой $\boldsymbol{Y}_2 = 0$, уравненіе которой въ перемѣнныхъ v_i есть тангенціальное уравненіе двойныхъ точекъ V_y и при перемѣнныхъ y_i— геометрическое мѣсто двойныхъ точекъ y кривыхъ U_x, принадлежащихъ точкамъ x прямой v, равенъ порядку

$$2mn(n-2)(n-3) \quad \text{кривой} \quad \boldsymbol{U}_2 = 0.$$

Для взаимныхъ кривыхъ можно высказать аналогичныя теоремы:

Точечное уравненіе $\boldsymbol{X}_2 = 0$ двойныхъ касательныхъ кривыхъ X_u (то, что Cayley означаетъ $Pf = 0$) степени $2m(m-2)(m-3)$ относительно коэффиціентовъ въ уравненіи X_u, т. е. степени $2mn(m-2)(m-3)$ относительно u_i; относительно X_i оно степени

$$\frac{1}{2} m(m-2)(m^2-9).$$

Если X_i разсматривать данными, а u перемѣнными, оно представитъ, въ силу теоремы XII, огибающую двойныхъ касательныхъ u кривыхъ Y_v, принадлежащихъ прямымъ v, проходящимъ черезъ точку X.

И далѣе: точечное уравненіе $\boldsymbol{Y}_2 = 0$ двойныхъ касательныхъ кривыхъ Y_v степени $2n^2(m-2)(m-3)$ представляетъ также огибающую двойныхъ касательныхъ v кривыхъ X_u, соотвѣтствующихъ прямымъ u, проходящимъ черезъ точку y. Эта огибающая будетъ также класса

$$2mn(m-2)(m-3).$$

Точечное уравненіе $\boldsymbol{X}_3 = 0$ возвратныхъ касательныхъ кривыхъ X_u степени $3m(m-2)$ относительно коэффиціентовъ при x въ $f = 0$, слѣдовательно, степени $3mn(m-2)$ относительно u и степени $3m(m-2)$ относительно X_i; оно представляетъ огибающую возвратныхъ касательныхъ (или геометрическое мѣсто точекъ перегиба) кривыхъ Y_v, принадлежащихъ прямымъ v, проходящимъ черезъ точку X. Классъ этой кривой равенъ $3nm(m-2)$.

Аналогичное можно сказать и относительно возвратныхъ касательныхъ кривыхъ Y_v: точечное ихъ уравненіе степени $3n^2(m-2)$ представляетъ, если въ немъ разсматривать перемѣнными v, а y—данными, кривую,—огибающую возвратныхъ касательныхъ кривыхъ X_u, принадлежащихъ прямымъ, проходящимъ черезъ точку Y. Она одного класса съ предыдущею кривою,—т. е. класса $3nm(m-2)$

Выведенная зависимость между двойными точками кривыхъ U_x и кривыхъ V_y, а также между двойными касательными кривыхъ X_u и Y_v позволяетъ утверждать, что ни одна изъ кривыхъ V_y, соотвѣтствующихъ точкамъ y произвольной прямой u, не представляетъ новой касательной двойной или возвратной, и ни одна изъ кривыхъ Y_v, соотвѣтствующихъ прямымъ v изъ пучка, имѣющаго центромъ точку x_i, не представляетъ новой точки двойной или возврата (K. Stephanos l. c. n⁰ 9).

Послѣ всѣхъ этихъ результатовъ мы можемъ обратиться къ опредѣленію состава формы взаимной $\varphi = R_u f$ въ отношеніи x, и формы взаимной $\psi = R_x f$ въ отношеніи u.

Первая получается исключеніемъ σ и x_i изъ уравненій:

$$\sigma . v_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \quad v_x = 0.$$

Эту систему мы замѣняемъ уравненіями

$$1)\ v_1\varphi'_{x_2} - v_2\varphi'_{x_1} = 0 \quad 2)\ v_1\varphi'_{x_3} - v_3\varphi'_{x_1} = 0 \quad 3)\ v_x = 0$$

и должны отбросить лишніе множители,—удовлетворяющіе 1), 2), 3), но неудовлетворяющіе первой системѣ:

$$3)\ v_x = 0, \quad 4)\ v_1 = 0, \quad 5)\ \varphi'_{x_1} = 0.$$

Уравненіе 1), 2), 3) относительно x_i степеней $2m(n-1)-1$, $2m(n-1)-1$ и 1, относительно y_i — степеней $n(n-1)$, $n(n-1)$ и 0, относительно v_i — степеней 1, 1 и 1. Уравненія 3), 4) и 5) — относительно x_i степени 1,0 и $2m(n-1)-1$, относительно y_i — степеней 0,0 и $n(n-1)$, относительно v_i — степеней 1,1 и 0.

Поэтому искомый результантъ относительно v_i будетъ степени $2m(n-1)[2m(n-1)-1]$, относительно y_i степени $2n(n-1)[2m(n-1)-1]$, но въ этотъ результантъ войдутъ еще множители дважды $\boldsymbol{V}_2$ и трижды $\boldsymbol{V}_3$, т. е.

$$R_x y \equiv R_x(R_u f \equiv F(y;\ v) . \boldsymbol{V}_2^2 . \boldsymbol{V}_3^3.$$

Дѣйствительно, отнимая ихъ, найдемъ степени

$$R_x R_u f : \boldsymbol{V}_2^2 \boldsymbol{V}_3^3$$

относительно v_i :

$$2m(n-1)(2m(n-1)-1)-4m^2(n-2)(n-3)$$
$$-9m^2(n-2)=m[mn+2(m-1)(n-1)],$$

а относительно y_i :

$$2n(n-1)[2m(n-1)-1]-4mn(n-2)(n-3)-9mn(n-2)=$$
$$=n[mn+2(m-1)(n-1)].$$

Подобнымъ образомъ форма, взаимная $\psi=R_x f$ относительно u:

$$R_u\psi\equiv R_u.R_x f=F.\,\mathbf{Y}_2^2\mathbf{Y}_3^3$$

гдѣ F означаетъ снова лѣвую часть уравненія сопряженнаго коннекса, $\mathbf{Y}_2=0$ и $\mathbf{Y}_3=0$ выше уже упомянутыя точечныя уравненія касательныхъ двойныхъ и возвратныхъ кривыхъ Y_v .

Дѣйствительно уравненіе $\psi=0$, какъ мы видѣли степени $m(m-1)$ относительно v_i и степени $2n(m-1)$ относительно u_i ; чтобы получить $R_u\psi=0$, исключаемъ ϱ и u_i изъ уравненій

$$\varrho\cdot y_i=\frac{\partial\psi}{\partial u_i},\quad u_y=0$$

причемъ эту систему можемъ замѣнить такою:

$$1)\ \ y_1\frac{\partial\psi}{\partial u_2}-y_2\frac{\partial\psi}{\partial u_1}=0\quad 2)\ \ y_1\frac{\partial\psi}{\partial u_3}-y_3\frac{\partial\psi}{\partial u_1}=0\quad 3)\ \ u_y=0,$$

эти уравненія степеней 1, 1 и 1 относительно y_i , степеней $m(m-1)$, $m(m-1)$ и 0 относительно v_i и степеней $2n(m-1)-1$, $2n(m-1)-1$ и 1 относительно u_i . Слѣдовательно результантъ этой системы степени

$$2n(m-1)-1+2n(m-1)-1+(2n(m-1)-1)^2$$

относительно y_i и степени

$$2[2m-1)-1]m(m-1)$$

относительно v_i . Но въ этотъ результантъ вошли множители лишніе, не удовлетворяющіе 1-й системѣ, а именно результатъ исключенія u_i изъ уравненій

$$y_1=0,\ \frac{\partial\psi}{\partial u_i}=0,\quad u_y=0$$

степеней 1, 0, 1 относительно y_i , степеней 0, $2n(m-1)-1$ и 1 относительно u_i и степеней 0, $m(m-1)$ и 0 относительно v_i , этотъ результантъ—степени $2n(m-1)-1$ относительно y_i и степени 0 относительно v_i.

Такимъ образомъ $R_u\psi = 0$ оказывается степени

$$2n(m-1)\{2n(m-1)-1\}$$

относительно y_i и степени

$$2m(m-1)\{2n(m-1)-1\}$$

относительно v_i.

Выключая отсюда Y_2^2— множитель степени $4n^2(m-2)(m-3)$ относительно y и $4mn(m-2)(m-3)$ относительно v, и Y_3^3 — степени $9n^2(m-2)$ относительно y_i и $9nm(m-2)$ относительно v_i, получимъ остаточный результантъ степени $n[mn+2(m-1)(n-1)]$ относительно y_i и степени $m[mn+2(m-1)(m-1]$ относительно v_i.

Если же мы станемъ искать формы, взаимныя $R_u f$ и $R_x f$ въ отношеніи второго ряда входящихъ въ нихъ перемѣнныхъ, то придемъ къ такимъ результатамъ. Для полученія формы, взаимной $\varphi = R_u f$ въ отношеніи y, исключаемъ y_i изъ уравненій

$$\sigma . u_i = \frac{\partial\varphi}{\partial y_i} \quad u_y = 0$$

или

$$u_1\frac{\partial\varphi}{\partial y_2} - u_2\frac{\partial\varphi}{\partial y_1} = 0, \quad u_1\frac{\partial\varphi}{\partial y_3} - u_3\frac{\partial\varphi}{\partial y_1} = 0, \quad u_y = 0;$$

отсюда надо отбросить результатъ исключенія y_i изъ уравненій

$$u_1 = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y_1} = 0, \quad u_y = 0.$$

Первыя три уравненія степеней $2m(n-1)$, $2m(n-1)$ и 0 относительно x_i, $n(n-1)-1$, $n(n-1)-1$ и 1 относительно y_i и степеней 1, 1 и 1 относительно u_i; вторыя три—степеней 0, $2m(n-1)$ и 0 относительно x_i, степеней 0, $n(n-1)-1$ и 1 относительно y_i и степеней 1, 0, 1 относительно u_i. Поэтому результантъ степени

$$4m(n-1)[n(n-1)-1]$$

относительно x_i и степени

$$(n(n-1)-1)+(n(n-1)-1)^2 = n(n-1)(n(n-1)-1).$$

относительно u_i.

Согласно вышеуказанной теоремѣ Cayley должно быть

$$R_y R_u f = S . U_2^2 . U_3^2 . f,$$

и нетрудно провѣрить, что степени лѣвой и правой части одинаковы какъ въ отношеніи x_i, такъ и въ отношеніи u_i, — дѣйствительно

$$4m(n-1)[n(n-1)-1] \equiv 3m(n-1)^2 + \\ + 2.2mn(n-2)(n-3) + 3.3mn(n-2) + m$$

и

$$n(n-1)[n(n-1)-1] \equiv 0 + \\ + 2.\frac{1}{2}n(n-2)(n^2-9) + 3.3n(n-2) + n.$$

Для того чтобы получить форму, взаимную $\psi = R_x f$ въ отношеніи v, исключаемъ v_i изъ уравненій

$$\varrho x_i = \frac{\partial \psi}{\partial v_i}, \quad v_x = 0$$

или изъ системы

$$x_1 \frac{\partial \psi}{\partial v_2} - x_2 \frac{\partial \psi}{\partial v_1} = 0, \quad x_1 \frac{\partial \psi}{\partial v_3} - x_3 \frac{\partial \psi}{\partial v_1} = 0, \quad v_x = 0.$$

степеней $2n(m-1)$, $2n(m-1)$ и 0 относительно u_i, степеней $m(m-1)-1$, $m(m-1)-1$ и 1 относительно v_i и степеней 1, 1, 1 относительно x_i, отъ которой должно отбросить лишнюю систему рѣшеній уравненій

$$x_i = 0 \quad \frac{\partial \psi}{\partial v_i} = 0, \quad v_x = 0$$

степеней 0, $2n(m-1)$ и 0 относительно u_i, степеней 0, $m(m-1)-1$ и 1 относительно v_i и степеней 1, 1 и 1 относительно x_i, не удовлетворяющую первой въ системѣ. Это доставитъ результантъ степени

$$m(m-1)(m(m-1)-1)$$

относительно x_i и степени

$$4n(m-1)(m(m-1)-1)$$

относительно u_i.

Не трудно провѣрить, что согласно теоремѣ Cayley составъ этого результанта таковъ:

$$R_u R_x f = \Sigma' . X_2^2 X_3^3 . f \text{ [1]}$$

гдѣ Σ', X_2, X_3 имѣютъ вышеприведенное значеніе.

Дѣйствительно,

$$m(m-1)(m(m-1)-1) \equiv 2 . \frac{1}{2} m(m-2)(m^2-9) + 3.3m(m-2) + m$$

$$4n(m-1)(m(m-1)-1) \equiv 3n(m-1)^2 + \\ + 2.2mn(m-2)(m-3) + 3.3mn(m-3) + n.$$

---

[1]) Въ мемуарѣ K. Stephanos'a въ этой формулѣ стоитъ буква, соотвѣтствующая S', но это очевидно описка.

Присматриваясь къ полученнымъ результатамъ и способу ихъ полученія и сопоставляя ихъ съ доказательствами теоремъ I и II, можемъ сказать:

XXI. *Огибающая кривыхъ V_y, соотвѣтствующихъ точкамъ y прямой u, состоитъ изъ кривой X_u, соотвѣтствующей этой прямой, и изъ кривой S.*

И далѣе:

XXII. *Огибающая кривыхъ Y_v, соотвѣтствующихъ въ сопряженномъ коннексѣ прямымъ v, проходящимъ черезъ точку x, состоитъ изъ кривой U_x, принадлежащей этой точкѣ, и изъ кривой Σ'.*

Въ предыдущемъ разсмотрѣны всѣ результаты, приводимые въ статьѣ K. Stephanos'a, за исключеніемъ послѣдняго ея параграфа (n⁰ 19). Въ этомъ параграфѣ затрагивается въ сущности вопросъ о необходимыхъ особенностяхъ коннекса, сопряженнаго данному коннексу (1) общаго вида.

Дѣйствительно, такъ какъ сопряженный сопряженнаго есть данный коннексъ, то порядокъ и классъ при этомъ переходѣ должны испытывать пониженіе соотвѣтственно на

$$m\{\tau[mn\tau^2+2(m\tau-1)(n\tau-1)]-1\}$$

и

$$n\{\tau[mn\tau^2+2(m\tau-1)(n\tau-1)]-1\},$$

если означить

$$\tau=mn+2(m-1)(n-1).$$

Поэтому коннексъ, сопряженный коннексу (m, n), долженъ имѣть такія особенности, которыя ведутъ за собою пониженіе его порядка и класса.

K. Stephanos приводитъ результатъ, равносильный утвержденію, что сопряженный коннексъ имѣетъ ∞^1 собственно-особенныхъ элементовъ.

Но это я откладываю до отдѣльной статьи, гдѣ остановлюсь также на однозначномъ преобразованіи коннекса, къ которому могутъ быть приложены такія же разсужденія, какими я пользовался въ статьѣ: «Къ вопросу объ особенныхъ элементахъ коннекса, ст. II. Сообщ. Хар. Математ. Общ. (2) X n⁰ 5—6.

Ноябрь 1910.

Sur le calcul approché des probabilités par la formule de Laplace.

par Serge Bernstein.

On trouve dans tous les Traités de calcul des probabilités la démonstration du théorème suivant, dû à Laplace:

Si p est la probabilité d'un événement A dans une expérience unique, la probabilité que le nombre m d'apparitions de l'événement A pendant n expériences satisfera à l'inégalité

$$|m - np| < z\sqrt{2np(1-p)}$$

a pour limite

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-\lambda^2}\,d\lambda\,,$$

lorsque n augmente indéfiniment.

Cette démonstration fait entrevoir que pour des valeurs de n relativement peu considérables la formule énoncée peut être appliquée sans inquiétude, mais je n'ai nulle part rencontré de calcul rigoureux de l'erreur commise. C'est cette lacune que je me propose de combler dans une certaine mesure, en me bornant au cas simple de $p=\frac{1}{2}$, le cas général pouvant être traité d'une façon analogue, mais un peu plus compliquée. Pour fixer les idées je supposerai le nombre d'expériences n impair

$$n = 2\mu - 1\,.$$

Il est clair que d'une façon générale la probabilité de l'égalité

$$m - \frac{n}{2} = E,$$

est la même que la probabilité de l'égalité

$$m - \frac{n}{2} = -E.$$

On peut donc se borner à envisager les E positifs.

La plus petite valeur positive de E correspondera à $m=\mu$; on a alors

$$\mu-\frac{2\mu-1}{2}=\frac{1}{2};$$

et la probabilité pour que le nombre d'apparitions de l'événement soit exactement égal à μ, a pour valeur

$$I_\mu=\frac{1}{2^n}C_n^\mu=\frac{1.3\ldots(2\mu-1)}{2.4\ldots2\mu}$$

D'une façon générale la probabilité que

$$m-\frac{n}{2}=\frac{1}{2}+k$$

a pour valeur

$$I_{\mu+k}=\frac{1}{2^n}C_n^{\mu+k}=I_\mu\frac{(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-k)}{(\mu+1)(\mu+2)\ldots(\mu+k)}$$

Donc,

$$\log I_{\mu+k}=\log I_\mu+[\log(\mu-1)-\log(\mu+1)]+$$
$$+[\log(\mu-2)-\log(\mu+2)]+\ldots+[\log(\mu-k)-\log(\mu+k)]=$$
$$=\log I_\mu+\left[\log\left(1-\frac{1}{\mu}\right)-\log\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\right]+\left[\log\left(1-\frac{2}{\mu}\right)-\log\left(1+\frac{2}{\mu}\right)\right]+\ldots$$
$$\ldots+\left[\log\left(1-\frac{k}{\mu}\right)-\log\left(1+\frac{k}{\mu}\right)\right].$$

D'ailleurs, k est toujours inférieur à μ; de sorte que

$$\log\left(1-\frac{k}{\mu}\right)<-\frac{k}{\mu}-\frac{k^2}{2\mu^2},\quad \log\left(1+\frac{k}{\mu}\right)>\frac{k}{\mu}-\frac{k^2}{2\mu^2}$$

Par conséquent,

$$\log I_{\mu+k}<\log I_\mu-\frac{2}{\mu}-\frac{4}{\mu}-\frac{6}{\mu}-\ldots-\frac{2k}{\mu}$$

ou

$$\log I_{\mu+k}<\log I_\mu-\frac{k(k+1)}{\mu}$$

et

$$I_{\mu+k}<I_\mu e^{-\frac{k(k+1)}{\mu}}$$

Prenons ensuite la somme des termes $I_{\mu+k}$ qui correspondent à toutes les valeurs de k supérieures à un nombre donné k_0

$$\sum_{\mu+k_0+1}^{2\mu-1}I_m<I_\mu\sum_{k_0+1}^{\mu-1}e^{-\frac{k(k+1)}{\mu}}=I_\mu e^{\frac{1}{4\mu}}\sum_{k_0+1}^{\mu-1}e^{-\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2}{\mu}}\qquad(1)$$

Mais, il est clair que l'on a

$$e^{\frac{1}{4\mu}} e^{-\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2}{\mu}} < \frac{1}{2}\left(e^{-\frac{k^2}{\mu}} + e^{-\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2}{\mu}}\right)$$

pour toute valeur de $k \geqq 1$, et d'autre part, en vertu de la décroissance de la fonction $e^{-\frac{k^2}{\mu}}$, on a

$$\frac{1}{2}\left(e^{-\frac{k^2}{4\mu}} + e^{-\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2}{\mu}}\right) < \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} e^{-\frac{k^2}{\mu}} dk$$

Donc,

$$I_\mu \sum_{k_0+1}^{\mu-1} e^{\frac{1}{4\mu}} - e^{-\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2}{\mu}} < I_\mu \int_{k_0+\frac{1}{2}}^{\infty} e^{-\frac{k^2}{\mu}} dk,$$

et finalement,

$$\sum_{m=\mu+k_0+1}^{m=2\mu-1} I_m < I_\mu \int_{k_0+\frac{1}{2}}^{\infty} e^{-\frac{k^2}{\mu}} dk, \tag{2}$$

En faisant sous le signe d'intégrale le changement de variables $\lambda = \frac{k}{\sqrt{\mu}}$, on donne à l'inégalité (2) la forme

$$\sum_{\mu+k_0+1}^{2\mu-1} I_m < I_\mu \sqrt{\mu} \int_z^{\infty} e^{-\lambda^2} d\lambda, \tag{3}$$

où

$$z = \frac{k_0 + \frac{1}{2}}{\sqrt{\mu}}$$

On sait que le produit

$$P_\mu = I_\mu \,.\, \sqrt{\mu} = \frac{1.3\ldots.2\mu-1}{2.4\ldots.2\mu}\sqrt{\mu}$$

a pour limite $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$. De plus en tendant vers cette limite P_μ lui reste toujours inférieur.

On a ainsi

$$P_\mu < \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

Il est possible donc de transformer l'inégalité (3) dans la suivante

$$\sum_{\mu+k_0+1}^{2\mu-1} I_m < \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_z^{\infty} e^{-\lambda^2} d\lambda. \tag{4}$$

On en tire que

$$\sum_{\mu}^{\mu+k_0} I_m > \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_z^{\infty} e^{-\lambda^2} d\lambda = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_z^{\infty} e^{-\lambda^2} d\lambda - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_z^{\infty} e^{-\lambda^2} d\lambda =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\lambda^2} d\lambda = \frac{1}{2} \Phi(z)$$

Et, à cause de la symétrie que nous avons remarqué au debut, on a aussi

$$\sum_{\mu-1}^{\mu-k_0-1} I_m > \frac{1}{2} \Phi(z).$$

Donc, finalement

$$\sum_{\mu-k_0-1}^{\mu+k_0} I_m = \sum_{\frac{n}{2}-\left(k_0+\frac{1}{2}\right)}^{\frac{n}{2}+\left(k_0+\frac{1}{2}\right)} I_m > \Phi(z) \tag{5}$$

où

$$z = \frac{k_0 + \frac{1}{2}}{\sqrt{\mu}} = \frac{k_0 + \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{n+1}{2}}}$$

En d'autres termes, *la probabilité pour que*

$$\left| m - \frac{n}{2} \right| \leq z \sqrt{\frac{n+1}{2}}$$

est (pour toute valeur impaire de n) supérieure [1]) *à*

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\lambda^2} d\lambda$$

Telle est l'inégalité exacte par laquelle il faut remplacer la formule limite de Laplace et qui montre en même temps le haut degré de précision de cette formule classique. Ainsi, par exemple, pour $n = 199$, en

---

[1]) Il ne faut pas oublier d'ailleurs que

$$\frac{1}{2} + z \sqrt{\frac{n+1}{2}}$$

est supposé être un nombre entier.

prenant $z = 2{,}25$ l'inégalité obtenue prouve que la probabilité pour que le nombre m d'apparitions de l'événement, dont la probabilité est $p = \frac{1}{2}$, soit compris entre les limites

$$122 \geqq m \geqq 77$$

est supérieure à $\Phi(2{,}25) = 0{,}9985373$, tandis que la formule de Laplace nous conduirait à attribuer la même probabilité 0,9985373 à l'inégalité

$$121{,}9 > m > 77{,}1$$

ou, ce qui revient au même, à l'inégalité

$$121 \geqq m \geqq 78$$

La comparaison de notre inégalité et de la formule de Laplace montre que c'est là un fait général:

L'écart maximum qu'on peut effectivement affirmer $\left(\text{pour } p = \frac{1}{2}\right)$ *avec la probabilité* $\Phi(z)$ *dépasse, en général, au plus d'une unité l'écart fourni par l'application de la formule classique de Laplace.*

Приложеніе полярныхъ операцій къ интегрированію обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій въ конечномъ видѣ.

М. Лагутинскаго.

§ 1. Свойства полярныхъ операцій.

Чисто геометрическія соображенія побудили геометровъ ввести понятіе поляры и слѣдовательно полярной операціи. Изученіе линейнаго преобразованія выяснило важность этой операціи для многихъ вопросовъ алгебры и въ недавно появившемся курсѣ [1]) итальянскаго ученаго A. Capelli уже находятся элементарныя свѣдѣнія объ этой операціи. Къ сожалѣнію этихъ свѣдѣній слишкомъ мало, и я изложу въ этомъ параграфѣ свойства этой операціи, которыя оказываются необходимыми въ дальнѣйшихъ изысканіяхъ.

Назовемъ операцію

$$\sum_{i=1}^{p} y_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

полярной операціей перваго порядка и условимся обозначать ее символомъ $A^{(1)}$, такъ что

$$A^{(1)} f(x) = \sum_{i=1}^{p} y_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

Въ этомъ равенствѣ я подразумѣваю подъ функціей $f(x)$ нѣкоторую функцію перемѣнныхъ x_i и y_i $(i=1, 2, \ldots, p)$.

Можно подвергнуть функцію $f(x)$ операціи $A^{(1)}$ послѣдовательно k разъ.

Условимся обозначать такую сложную операцію символомъ $A^{(k)}$ и назовемъ ее полярной операціей k-го порядка.

---

[1]) *A. Capelli.* Istituzioni di Analisi algebrica. Napoli. 1909.

Такъ напримѣръ,

$$A^{(3)}f(x) = A^{(1)}\{A^{(1)}[A^{(1)}f(x)]\}.$$

Изъ только что сдѣланнаго опредѣленія слѣдуетъ, что выполнивъ полярную операцію перваго порядка надъ результатомъ полярной операціи k-го порядка, получимъ результатъ полярной операціи $k+1$-го порядка.

Согласно принятому нами обозначенію такое свойство можетъ быть выражено такой формулой

$$A^{(1)}\{A^{(k)}f(x)\} = A^{(k+1)}f(x) \tag{1}$$

Ради упрощенія формулъ вводимъ также тождественную полярную операцію $A^{(0)}$, удовлетворяющую условію

$$A^{(0)}f(x) = f(x).$$

Можно свести полярную операцію какого угодно порядка къ дифференцированію по одной перемѣнной.

Для этого я предложу два способа.

1-й способъ. Произведемъ въ функціи $f(x)$ линейную замѣну перемѣнныхъ:

$$x_i = y_i z + \sum_{j=2}^{p} a_{ij} z_j \tag{2}$$

$$i = 1, 2, \ldots, p.$$

Тогда функція $f(x)$ станетъ сложной функціей перемѣнныхъ $z, z_2, z_3, \ldots, z_p$ черезъ посредство линейныхъ функцій x_i этихъ перемѣнныхъ. Беремъ отъ нея производную по z. Результатъ по общему свойству производныхъ сложныхъ функцій напишется такъ:

$$\sum_{i=1}^{p} y_i \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}.$$

Если мы теперь вернемся къ прежнимъ перемѣннымъ, то получимъ результатъ операціи $A^{(1)}$ надъ функціей $f(x)$.

Итакъ для выполненія полярной операціи перваго порядка надъ функціей $f(x)$ можно сначала произвести въ ней замѣну перемѣнныхъ съ помощью формулъ (2), взять отъ результата первую производную по z и затѣмъ произвести обратную замѣну перемѣнныхъ.

Можно распространить этотъ способъ на полученіе полярной операціи k-го порядка отъ функціи $f(x)$, а именно для этого достаточно

произвести въ ней замѣну перемѣнныхъ по формуламъ (2), взять затѣмъ k-ю производную по z и наконецъ вернуться къ прежнимъ перемѣннымъ.

Мы выяснимъ общую пріемлемость такого пріема, если, принявъ его справедливымъ для указателя k, докажемъ пріемлемость его и для указателя $k+1$.

Обозначимъ черезъ $f_k(x)$ результатъ полярной операціи k-го порядка надъ функціей $f(x)$, и слѣдовательно сможемъ написать:

$$A^{(k)} f(x) = f_k(x).$$

Отсюда согласно равенству (1) выводимъ

$$A^{(k+1)} f(x) = A^{(1)} f_k(x)$$

Выполняемъ затѣмъ въ функціяхъ $f(x)$ и $f_k(x)$ замѣну перемѣнныхъ по формуламъ (2) и обозначимъ выполненіе этой замѣны прибавкой къ функціи индекса $^{(1)}$. Тогда на основаніи нашего предположенія относительно выполненія полярной операціи k-го порядка, функція $f_k^{(1)}(x)$ будетъ производной k-го порядка отъ функціи $f^{(1)}(x)$ по перемѣнной z, такъ что можно написать

$$\frac{\partial^k f^{(1)}(x)}{\partial z^k} = f_k^{(1)}(x).$$

Беремъ первую производную отъ обѣихъ частей этого равенства по перемѣнной z и получаемъ

$$\frac{\partial^{k+1} f^{(1)}(x)}{\partial z^{k+1}} = \frac{\partial f_k^{(1)}(x)}{\partial z}$$

Если мы въ этомъ равенствѣ вернемся къ прежнимъ перемѣннымъ x_i, то его правая часть обратится въ $A^{(1)} f_k(x)$, или на основаніи равенства (3) сдѣлается равной $A^{(k+1)} f(x)$, т. е. результату полярной операціи $k+1$-го порядка надъ функціей $f(x)$. Обративъ вниманіе на способъ полученія лѣвой части, убѣждаемся въ томъ, что полярная операція $k+1$-го порядка можетъ быть получена помощью линейнаго преобразованія, дифференцированія $k+1$-го порядка по одной перемѣнной и линейнаго преобразованія, обратнаго предыдущему, точно также, какъ и полярная операція k-го порядка.

Предыдущее позволяетъ такимъ образомъ перенести новое опредѣленіе полярной операціи съ выясненнаго перваго порядка на второй, со второго на третій и т. д., т. е. доказывается общность новаго опредѣленія полярныхъ операцій.

2-й способъ. Второй способъ не отличается существенно отъ перваго, только вмѣсто замѣны перемѣнныхъ x_i по формуламъ (2), онѣ замѣняются въ функціи $f(x)$ выраженіями $x_i + ty_i$, затѣмъ берется k-я производная по t, послѣ чего вмѣсто выраженій $x_i + ty_i$ ставятся просто перемѣнныя x_i.

Разсужденія, доказывающія законность такого пріема, настолько аналогичны употребленнымъ для обоснованія предыдущаго способа, что было бы утомительнымъ повтореніемъ приводить ихъ здѣсь.

Вмѣсто второй замѣны $x_i + ty_i$ на x_i, можно, очевидно, ничего не мѣняя по существу, полагать $t = 0$. Тогда второй способъ вычисленія полярныхъ операцій можно формулировать слѣдующимъ образомъ:

Для полученія результата полярной операціи k-го порядка надъ функціей $f(x)$ надо замѣнить въ ней перемѣнныя x_i на выраженія $x_i + ty_i$, взять k-ю производную по t и затѣмъ положить эту перемѣнную равной нулю.

Помощью этихъ двухъ новыхъ опредѣленій можно распространить нѣкоторыя свойства производныхъ и на полярныя операціи.

Возьмемъ произведеніе двухъ функцій $f(x)$ и $\varphi(x)$ и найдемъ результатъ полярной операціи k-го порядка надъ этимъ произведеніемъ.

Можно получить его, примѣняя, какъ первый, такъ и второй способъ.

Слѣдуя напримѣръ первому способу замѣняемъ въ этомъ произведеніи перемѣнныя x_i ихъ выраженіями по формуламъ (2), отмѣтивъ это прибавкой черты надъ x, и затѣмъ беремъ производную k-го порядка по перемѣнной z. На основаніи теоремы Лейбница имѣемъ:

$$\frac{\partial^k \{ f(\bar{x})\, \varphi(\bar{x}) \}}{\partial z^k} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \frac{\partial^j f(\bar{x})}{\partial z^j} \frac{\partial^{(k-j)} \varphi(\bar{x})}{\partial z^{k-j}}$$

гдѣ обозначенія

$$\frac{\partial^{(0)} f(\bar{x})}{\partial z^0} \quad \text{и} \quad \frac{\partial^{(0)} \varphi(\bar{x})}{\partial z^0}$$

равносильны самимъ функціямъ $f(\bar{x})$ и $\varphi(\bar{x})$.

Переходимъ теперь къ прежнимъ перемѣннымъ. Тогда лѣвая часть обратится въ $A^{(k)}\{ f(x)\, \varphi(x) \}$, а каждый изъ множителей

$$\frac{\partial^{(j)} f(\bar{x})}{\partial z^j} \quad \text{и} \quad \frac{\partial^{(k-j)} \varphi(\bar{x})}{\partial z^{k-j}}$$

второй части соотвѣтственно въ $A^{(j)} f(x)$ и $A^{(k-j)} \varphi(x)$, и мы будемъ имѣть такую формулу

$$A^{(k)}\{ f(x)\, \varphi(x) \} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} A^{(j)} f(x)\, A^{(k-j)} \varphi(x). \qquad \text{(I)}$$

Предположимъ теперь функцію $f(x)$ независящей отъ перемѣнныхъ y_i и обозначимъ производную отъ $f(x)$ по перемѣнной x_i черезъ $f_i(x)$, такъ что

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = f_i(x).$$

Обозначая какъ и прежде чертой надъ x замѣну перемѣнныхъ по формуламъ (2), беремъ производную отъ функціи $f(\bar{x})$ по перемѣнной y_i. Согласно только что введенному обозначенію получаемъ:

$$\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial y_i} = z f_i(\bar{x}).$$

Производная j-го порядка отъ обѣихъ частей этого равенства по перемѣнной z дастъ такой результатъ:

$$\frac{\partial^{(j+1)} f(\bar{x})}{\partial z^j \partial y_i} = z \frac{\partial^j f_i(\bar{x})}{\partial z^j} + j \frac{\partial^{(j-1)} f_i(\bar{x})}{\partial z^{j-1}} \tag{3}$$

По опредѣленію, перейдя въ производной $\frac{\partial^j f(\bar{x})}{\partial z^j}$ къ прежнимъ перемѣннымъ, получимъ $A^{(j)} f(x)$ и слѣдовательно имѣемъ

$$\frac{\partial^j f(\bar{x})}{\partial z^j} = A^{(j)} f(\bar{x}), \tag{4}$$

гдѣ черта надъ x обозначаетъ, что въ выраженіи $A^{(j)} f(x)$ перемѣнныя x_i замѣнены ихъ выраженіями (2).

Беремъ теперь производную по перемѣнной y_i отъ обѣихъ частей. Вторая часть зависитъ отъ перемѣнной y_i явно и черезъ посредство перемѣнной x_i; въ силу этого она будетъ состоять изъ двухъ слагаемыхъ, пишемъ поэтому

$$\frac{\partial^{(j+1)} f(\bar{x})}{\partial z^j \partial y_i} = \frac{\partial A^{(j)} f(\bar{x})}{\partial y_i} + z \frac{\partial A^{(j)} f(\bar{x})}{\partial \bar{x}_i}$$

Второй членъ второй части можно написать въ другомъ видѣ.

Прежде всего замѣчаемъ, что операціи $A^{(1)}$ и $\frac{\partial}{\partial x_1}$ можно производить надъ функціей въ какомъ угодно порядкѣ. Отсюда просто выводится свойство операцій $A^{(j)}$ и $\frac{\partial}{\partial x_i}$, по которому результатъ не зависитъ отъ измѣненія порядка ихъ примѣненія. Поэтому имѣемъ

$$\frac{\partial A^{(j)} f(\bar{x})}{\partial \bar{x}_i} = A^{(j)} f_i(\bar{x}),$$

или если мы воспользуемся формулой (4), въ которой мы примемъ вмѣсто функціи $f(x)$ функцію $f_i(x)$,

$$\frac{\partial A^{(j)} f(\bar{x})}{\partial \bar{x}_i} = \frac{\partial^j f_i(\bar{x})}{\partial z^j}$$

и слѣдовательно мы можемъ нашей производной дать такой видъ:

$$\frac{\partial^{(j+1)} f(\bar{x})}{\partial z^j \partial y_i} = \frac{\partial A^{(j)} f(\bar{x})}{\partial y_i} + z \frac{\partial^{(j)} f_i(\bar{x})}{\partial z^j}$$

Сравнивая полученный результатъ съ находящимся въ формулѣ (3) видимъ, что правыя части, состоя каждая изъ двухъ слагаемыхъ, имѣютъ по одинаковому слагаемому, слѣдовательно, другія два слагаемыхъ также равны, и получаемъ:

$$j \frac{\partial^{(j-1)} f_i(\bar{x})}{\partial z^{j-1}} = \frac{\partial A^{(j)} f(\bar{x})}{\partial y_i}$$

Возвращаясь въ этой формулѣ къ прежнимъ перемѣннымъ, получаемъ такое равенство:

$$A^{(j-1)} f_i(x) = \frac{1}{j} \frac{\partial A^{(j)} f(x)}{\partial y_i}$$

Но очевидно

$$f_i(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial A^{(1)} f(x)}{\partial y_i},$$

и мы можемъ написать такую окончательную формулу:

$$A^{(j-1)} \frac{\partial A^{(1)} f(x)}{\partial y_i} = \frac{1}{j} \frac{\partial A^{(j)} f(x)}{\partial y_i} \qquad \text{(II)}$$

Можно доказать эту формулу и при помощи второго способа опредѣленія полярной операціи.

Но мы не будемъ останавливаться на этомъ доказательствѣ и выведемъ еще одну теорему относительно полярныхъ операцій.

Предположимъ независящую отъ перемѣнныхъ y_i функцію $f(x)$ однороднымъ полиномомъ въ перемѣнныхъ x_i порядка n.

Подставимъ въ нее вмѣсто перемѣнныхъ x_i выраженія $x_i + ty_i$ и $t\left(y_i + \frac{1}{t} x_i\right)$, тогда на основаніи свойства однородности будемъ имѣть:

$$f(x + ty) = t^n f\left(y + \frac{1}{t} x\right).$$

Разложимъ лѣвую часть этого равенства по степенямъ перемѣнной t. По формулѣ Маклореня коэффиціентъ при j-ой степени перемѣнной t будетъ равенъ производной j-го порядка отъ функціи $f(x + ty)$ по пере-

мѣнной t для ея значенія равнаго нулю, раздѣленной на число $j!$, т. е. согласно предыдущему равенъ $\frac{A^{(j)}f(x)}{j!}$ и мы можемъ написать

$$f(x+ty)=\sum_{j=0}^{n}\frac{t^j}{j!}A^{(j)}f(x).$$

Введемъ новую полярную операцію, въ которой роль перемѣнныхъ x_i и y_i взаимно измѣнена,

$$B^{(1)}\equiv\sum_{i=1}^{p}x_i\frac{\partial}{\partial y_i}$$

и также полярныя операціи j-го порядка $B^{(j)}$, состоящія изъ j—кратнаго повторенія операціи $B^{(1)}$.

Благодаря введенію такой операціи разложеніе функціи $f\left(y+\frac{1}{t}x\right)$ по отрицательнымъ степенямъ перемѣнной t будетъ по аналогіи съ предыдущимъ такого вида:

$$f\left(y+\frac{1}{t}x\right)=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j!\,t^j}B^{(j)}f(y),$$

и слѣдовательно будемъ имѣть такое тождество, справедливое при какихъ угодно значеніяхъ перемѣнной t:

$$\sum_{j=0}^{n}\frac{t^j}{j!}A^{(j)}f(x)=t^n\left\{\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{j!\,t^j}B^{(j)}f(y)\right\}.$$

Сравнивая коэффиціенты при одинаковыхъ степеняхъ перемѣнной t въ обѣихъ частяхъ этого тождества, придемъ къ такимъ формуламъ:

$$(n-j)!\;A^{(j)}f(x)=j!\;B^{(n-j)}f(y), \qquad \text{(III)}$$

устанавливающимъ соотношеніе между взаимными операціями $A^{(j)}$ и $B^{(k)}$.

Въ частномъ случаѣ при $j=n$ получаемъ

$$A^{(n)}f(x)=n!\;f(y)$$

т. е. результатъ полярной операціи n-го порядка надъ однороднымъ полиномомъ n-го же порядка равенъ результату замѣны въ немъ перемѣнныхъ x_i на перемѣнныя y_i, умноженному на произведеніе $n!$.

§ 2. Объ одномъ свойствѣ системы обыкновенныхъ линейныхъ дифференціальныхъ уравненій.

Система:

$$\frac{dx_1}{X_1}=\frac{dx_2}{X_2}=\frac{dx_3}{X_3}=\ldots=\frac{dx_p}{X_p}, \tag{1}$$

гдѣ

$$X_i=\sum_{j=1}^{p} a_{ij}\, x_j$$
$$i=1,\ 2,\ldots,\ p,$$

будетъ обладать частнымъ алгебраическимъ интеграломъ, если имѣетъ мѣсто тождество:

$$Xf=Kf, \tag{2}$$

гдѣ X обозначаетъ операцію

$$\sum_{i=1}^{p} X_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

f однородный полиномъ n-ой степени въ перемѣнныхъ x_i, а K нѣкоторая постоянная.

Займемся изученіемъ вида этой постоянной.

Начнемъ со случая $n=1$. Какъ извѣстно тогда K будетъ равно одному изъ корней характеристическаго уравненія. Выведемъ это, такъ какъ матеріалъ необходимый для вывода, пригодится намъ для послѣдующихъ разсужденій.

Положивъ, что

$$f\equiv\sum_{i=1}^{p} l_i\, x_i,$$

подставляемъ выраженіе для функціи f въ уравненіе (2) и находимъ:

$$\sum_{i=1}^{p} X_i l_i = K\sum_{j=1}^{p} l_j x_j.$$

Подставляя сюда значенія функцій X_i, приходимъ къ такому результату:

$$\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{p} a_{ij} l_i\, x_j = K\sum_{j=1}^{p} l_j x_j.$$

Полученное равенство должно быть тождествомъ при какихъ угодно

значеніяхъ перемѣнныхъ x_j, а потому мы имѣемъ слѣдующія p уравненій для опредѣленія коэффиціентовъ l_i

$$\sum_{i=1}^{p} a_{ij}\, l_i = K l_j$$
$$j = 1, 2, \ldots, p.$$

Эти уравненія однородны относительно искомыхъ коэффиціентовъ и число ихъ равно числу уравненій, а потому они всегда будутъ имѣть рѣшеніе, если ихъ дискриминантъ равенъ нулю. Въ данномъ случаѣ этотъ дискриминантъ можетъ быть представленъ въ видѣ слѣдующаго опредѣлителя p-го порядка:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-K & a_{21} & a_{31} & \ldots & a_{p1} \\ a_{12} & a_{22}-K & a_{32} & \ldots & a_{p2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33}-K & \ldots & a_{p3} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1p} & a_{2p} & a_{3p} & \ldots & a_{pp}-K \end{vmatrix} \equiv \Delta(K).$$

Итакъ въ случаѣ $n = 1$ постоянная K можетъ быть только однимъ изъ корней уравненія

$$\Delta(K) = 0,$$

извѣстнаго подъ именемъ характеристическаго. Обозначимъ черезъ $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_q$ $q \leqq p$ его корни и сможемъ тогда формулировать слѣдующую теорему.

Если система (1) обладаетъ частнымъ алгебраическимъ интеграломъ степени n, то соотвѣтствующая ему постоянная K равна суммѣ произведеній корней характеристическаго уравненія на неотрицательныя цѣлыя числа, а сумма этихъ послѣднихъ равна n.

Обозначимъ эти числа черезъ $k_1, k_2, \ldots, k_q$ и по только что высказанной теоремѣ будемъ имѣть два равенства:

$$K = \sum_{i=1}^{q} k_i\, \lambda_i$$
$$n = \sum_{i=1}^{q} k_i. \tag{3}$$

Предыдущую теорему можно формулировать также иначе.

Если уравненіе (2) имѣетъ интеграломъ полиномъ n-ой степени, то K имѣетъ видъ, указанный формулами (3).

Разница между этой формулировкой и предыдущей заключается въ томъ, что въ первомъ случаѣ p не можетъ быть меньше двухъ, тогда какъ во второмъ p можетъ равняться и единицѣ.

Мы начнемъ провѣрку этой теоремы именно съ этого простѣйшаго случая. Уравненіе (2) принимаетъ тогда такой простой видъ:

$$a_{11}x_1\frac{\partial f}{\partial x_1}=Kf.$$

Въ этомъ случаѣ можно положить f равнымъ x_1^n. Выполнивъ подстановку, получимъ такое равенство:

$$a_{11}nx_1^n=Kx_1^n.$$

Отсюда $K=na_{11}$.

Но характеристическое уравненіе сведется въ данномъ случаѣ къ такому:

$$a_{11}-K=0\,,$$

и слѣдовательно въ случаѣ $p=1$ наша теорема справедлива.

Чтобы провѣрить ея общность, предположимъ ея справедливость для числа перемѣнныхъ $p=r-1$ и убѣдимся въ ея справедливости для $p=r$.

Находимъ частный линейный интегралъ, соотвѣтствующій одному изъ корней характеристическаго уравненія, напр. корню λ_1 и пусть мы получимъ его въ видѣ линейной функціи

$$\sum_{i=1}^{r} l_i\,x_i\,.$$

Одинъ изъ коэффиціентовъ l_i долженъ быть отличенъ отъ нуля, и его можно принять равнымъ единицѣ. Кромѣ того, нумерація перемѣнныхъ зависитъ въ данномъ случаѣ вполнѣ отъ нашего произвола и потому мы можемъ предположить, что отличенъ отъ нуля именно коэффиціентъ l_1. Такъ какъ умноженіе этой функціи на постоянную не измѣнитъ свойства ея быть частнымъ интеграломъ, то можно принять $l_1=1$ и написать ее въ видѣ

$$x_1+\sum_{i=2}^{r} l_i\,x_i\,.$$

Въ качествѣ частнаго интеграла она удовлетворитъ условію

$$X\left\{x_1+\sum_{i=2}^{r} l_i\,x_i\right\}=\lambda_1\left\{x_1+\sum_{i=2}^{p} l_ix_i\right\}, \qquad (4)$$

которое эквивалентно r слѣдующимъ:

$$a_{11}+\sum_{i=2}^{r} a_{i1}\, l_i = \lambda_1$$
$$a_{1j}+\sum_{i=2}^{r} a_{ij} l_i = \lambda_1\, l_j \qquad (5)$$
$$j=2,\ 3,\ldots,\ r$$

Произведемъ въ уравненіи (2) такую замѣну перемѣнныхъ:

$$x_1 = y_1 - \sum_{i=2}^{r} l_i\, y_i \qquad (6)$$
$$x_j = y_j \qquad j=2,\ 3,\ldots,r$$

Сначала находимъ обратныя формулы для выраженія перемѣнныхъ y_i въ функціи перемѣнныхъ x_i :

$$y_1 = x_1 + \sum_{i=2}^{r} l_i\, x_i \qquad (7)$$
$$y_j = x_j \qquad j=2,\ 3,\ldots,\ r$$

Если мы подставимъ въ разсматриваемый нами интегралъ уравненія (2) $f(x)$ вмѣсто перемѣнныхъ x_i ихъ выраженія (6) черезъ перемѣнныя y_i, то получимъ новую функцію $\varphi(y)$, и равенство:

$$f(x) = \varphi(y) \qquad (8)$$

будетъ справедливо на основаніи формулъ (6). Оно обратится въ тождество, если въ полиномъ $\varphi(y)$ внесемъ вмѣсто перемѣнныхъ y_i ихъ выраженія (7) черезъ перемѣнныя x_i .

Подвергая обѣ части полученнаго такимъ образомъ тождества операціи X, получаемъ равенство:

$$Xf(x) = \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial\varphi(y)}{\partial y_i} Xy_i .$$

Но, принимая во вниманіе уравненіе (2), даемъ сначала ему такой видъ:

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{\partial\varphi(y)}{\partial y_i} Xy_i = Kf(x),$$

или по равенству (8) слѣдующій:

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{\partial \varphi(y)}{\partial y_i} X y_i = K\varphi(y), \tag{9}$$

Для окончанія преобразованія остается замѣнить въ функціяхъ Xy_i перемѣнныя x_i перемѣнными y_i при помощи формулъ (6).

Прежде всего

$$Xy_1 = X\left(x_1 + \sum_{i=2}^{r} l_i\, x_i\right)$$

Но, принимая во вниманіе условіе (5), имѣемъ:

$$Xy_1 = \lambda_1\left(x_1 + \sum_{i=2}^{r} l_i\, x_i\right) = \lambda_1 y_1.$$

Затѣмъ получаемъ:

$$Xx_i = X_i \qquad i=2, 3, \ldots, r$$

Подставляя въ выраженіе

$$X_i = \sum_{j=1}^{r} a_{ij} x_j$$

значенія перемѣнныхъ x_i по формуламъ (6), находимъ:

$$X_i = a_{i1}\, y_1 + \sum_{j=2}^{r} (a_{ij} - l_j\, a_{i1})\, y_j$$

$$i=2, 3, \ldots, r.$$

Обозначивъ для краткости буквой y_i сумму

$$\sum_{j=2}^{r} (a_{ij} - l_j a_{i1})\, y_j\ ,$$

можемъ написать уравненіе (2), преобразованное къ новымъ перемѣннымъ y_i въ такомъ видѣ:

$$\lambda_1 y_1 \frac{\partial \varphi(y)}{\partial y_1} + \sum_{i=2}^{r} (a_{i1}\, y_1 + Y_i) \frac{\partial \varphi(y)}{\partial y_i} = K\varphi(y) \tag{10}$$

Входящій въ это равенство полиномъ $\varphi(y)$ можетъ дѣлиться на нѣкоторую степень k_1' перемѣнной y_1; другими словами можно положить $\varphi(y)$ тождественно равнымъ $y_1^{k_1'}\varphi_1(y)$. Полиномъ $\varphi_1(y)$ степени $n - k_1'$ уже не будетъ дѣлиться на y_1. Выраженіе $y_1^{k_1'}\varphi_1(y)$ для полинома $\varphi(y)$ будетъ самымъ общимъ, если допустимъ, что цѣлое число k_1' можетъ быть и нулемъ.

Подставляя это новое выраженіе для полинома $\varphi(y)$ въ уравненіе (8), получимъ такое уравненіе для полинома $\varphi_1(y)$.

$$\lambda_1 y_1 \frac{\partial \varphi_1(y)}{\partial y_1} + \sum_{i=2}^{r} (a_{i1} y_1 + Y_i) \frac{\partial \varphi_1(y)}{\partial y_i} = (K - k_1' \lambda) \varphi_1(y) \qquad (11)$$

Такъ какъ полиномъ $\varphi_1(y)$, не дѣлясь на y_1, не обращается въ нуль при $y_1 = 0$, то онъ можетъ быть представленъ въ видѣ суммы $\varphi_2(y) + y_1 \varphi_3(y)$, гдѣ полиномъ $\varphi_2(y)$ не зависитъ совсѣмъ отъ перемѣнной y_1.

Замѣтивъ это, даемъ въ равенствѣ (11) перемѣнной y_1 значеніе равное нулю. Тогда производная $\frac{\partial \varphi_1(y)}{\partial y_i}$ равная $\frac{\partial \varphi_2(y)}{\partial y_i} + y_1 \frac{\partial \varphi_3(y)}{\partial y_i}$ обратится въ $\frac{\partial \varphi_2(y)}{\partial y_i}$, и вмѣсто него мы будемъ имѣть слѣдующее:

$$\sum_{i=2}^{r} Y_i \frac{\partial \varphi_2(y)}{\partial y_i} = (K - k_1' \lambda_1) \varphi_2(y). \qquad (12)$$

Полученное равенство можно истолковать въ томъ смыслѣ, что нѣкоторый полиномъ $\varphi_2(y)$ степени $n - k_1'$ удовлетворяетъ дифференціальному уравненію типа уравненія (2), но съ $r-1$ независимыми перемѣнными. По предположенію можно выразить постоянную $K - k_1' \lambda_1$ черезъ корни соотвѣтствующаго характеристическаго уравненія.

Это новое характеристическое уравненіе получается изъ уравненія $\Delta(k) = 0$ очень просто дѣленіемъ на входящій въ лѣвую часть множитель $\lambda_1 - k$.

Чтобы доказать это, множимъ каждый j-ый столбецъ опредѣлителя $\Delta(k)$ на l_j и складываемъ съ первымъ столбцемъ, тогда первый элементъ перваго столбца представитъ такую сумму

$$a_{11} + \sum_{i=2}^{r} a_{i1} l_i - K,$$

каждый-же j-ый элементъ перваго столбца представится въ видѣ такого выраженія:

$$a_{1j} + \sum_{i=2}^{r} a_{ij} l_i - K l_j.$$

Сравнивая полученныя суммы съ лѣвыми частями условій (5), найдемъ, что первый элементъ перваго столбца обратится въ $\lambda_1 - K$, а каждый j-ый въ $l_j(\lambda_1 - K)$. Умножая первую строку послѣдовательно на l_j

и вычитая изъ j-ой строки, сдѣлаемъ всѣ элементы перваго столбца за исключеніемъ перваго элемента нулями и получимъ въ результатѣ нашъ опредѣлитель $\Delta(K)$ въ видѣ произведенія $\lambda_1 - K$ на опредѣлитель:

$$\begin{vmatrix} a_{22} - l_2 a_{21} - K & a_{32} - l_2 a_{31} & \dots & a_{p2} - l_2 a_{p1} \\ a_{23} - l_3 a_{21} & a_{33} - l_3 a_{31} - K & \dots & a_{p3} - l_3 a_{p1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{2p} - l_p a_{21} & a_{3p} - l_p a_{31} & \dots & a_{pp} - l_p a_{p1} - K \end{vmatrix}$$

гдѣ $p = r$.

Если обратимъ вниманіе на значенія функціи Y_i, то убѣдимся, что полученный опредѣлитель, приравненный нулю, даетъ характеристическое уравненіе для уравненія (12). Отсюда слѣдуетъ, что корни его будутъ тѣ-же, что и уравненія $\Delta(K) = 0$, т. е. $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q$ съ тѣмъ различіемъ, что краткость корня λ_1 будетъ въ новомъ характеристическомъ уравненіи на единицу меньше.

Теперь на основаніи нашего предположенія примѣняемъ формулу (3) и получаемъ:

$$K - k_1' \lambda_1 = k_1'' \lambda_1 + \sum_2^r k_i \lambda_i ,$$

$$n - k_1' = k_1'' + \sum_2^r k_i .$$

Положивъ $k_1' + k_1'' = k_1$, получимъ окончательно:

$$K = \sum_{i=1}^r k_i \lambda_i$$

$$n = \sum_{i=1}^r k_i .$$

Эти равенства подтверждаютъ сдѣланныя нами утвержденія и справедливость формулированной нами теоремы.

§ 3. Объ аналогичномъ свойствѣ обыкновенныхъ алгебраическихъ нелинейныхъ дифференціальныхъ уравненій.

На сей разъ предположимъ въ системѣ

$$\frac{dx_1}{X_1}=\frac{dx_2}{X_2}=\frac{dx_3}{X_3}=\ldots=\frac{dx_p}{X_p} \tag{1}$$

однородные полиномы X_i всѣ одного и того же измѣренія равнаго m. Тогда въ уравненіи

$$\sum_{i=1}^{p} X_i \frac{\partial f}{\partial x_i}=Kf \tag{2}$$

полиномъ K будетъ $m-1$-го измѣренія.

Какъ и въ разсмотрѣнномъ нами случаѣ постоянной K, можно этотъ полиномъ опредѣлить въ функціи корней нѣкоторыхъ алгебраическихъ уравненій и цѣлыхъ чиселъ.

Эти уравненія уже извѣстны въ наукѣ и примѣнялись въ цѣляхъ интегрированія.

Первыя получаются, если приравнять нулю всѣ опредѣлители матриссы:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \ldots & x_p \\ X_1 & X_2 & X_3 & \ldots & X_p \end{vmatrix} \tag{3}$$

Система значеній, удовлетворяющихъ этимъ уравненіямъ, опредѣляетъ то, что называютъ особенной (критической) точкой системы обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій (1).

Обозначимъ одну изъ такихъ системъ черезъ a_{ji} $i=1, 2, \ldots, p$ и результатъ подстановки $x_i=a_{ji}$ $i=1, 2, 3, \ldots, p$ въ полиномъ X_l черезъ A_{jl}. Такъ какъ величины A_{jl} $l=1, 2, \ldots, p$ будутъ въ силу равенства нулю всѣхъ опредѣлителей матриссы (3) пропорціональны величинамъ a_{jl} $l=1, 2, \ldots, p$, то будетъ существовать такая величина λ_j, для которой справедливы слѣдующія p равенствъ:

$$A_{jl}=\lambda_j a_{jl} \qquad l=1, 2, \ldots, p. \tag{4}$$

Изученіе этихъ точекъ составляетъ предметъ многочисленныхъ работъ. Но такъ какъ ими мнѣ не придется пользоваться, и кромѣ того онѣ слишкомъ общеизвѣстны, то я не буду останавливаться на нихъ подробнѣе. Гораздо важнѣе для меня слѣдующая линейная система:

$$\frac{dy_1}{(A^{(1)}X_1)_j}=\frac{dy_2}{(A^{(1)}X_2)_j}=\ldots=\frac{dy_p}{(A^{(1)}X_p)_j} \tag{5}$$

гдѣ $A^{(1)}$ обозначаетъ полярную операцію, свойства которой мы разсматривали въ первомъ параграфѣ, а скобки, въ которыя заключенъ результатъ операціи $A^{(1)}$ надъ полиномомъ X_l, означаютъ, что въ этомъ результатѣ произведена подстановка $x_i = a_{ji}$ $i = 1, 2, \ldots, p$.

Почти всѣ изслѣдованія, касающіяся проведенія интегральной кривой черезъ особенную точку, пользуются системой (3), но подъ другой формой.

Если же изученіе системы (1) связать съ соотвѣтствующимъ коннексомъ $(m, 1)$ въ пространствѣ $p-1$ измѣреній, то система (5) поведетъ къ коннексу (1,1), который будетъ касательнымъ въ данной особенной точкѣ для перваго.

Д. М. Синцовъ, введя понятіе касательнаго коннекса, (Теорія коннексовъ въ пространствѣ. Казань. 1895 г. стр. 152 и слѣдующія, и Къ вопросу объ особенныхъ элементахъ коннекса. Изв. Казан. Физико-Матем. Общ. (2) т. XI n⁰ 4. 1901 г.) впервые далъ уравненіе замѣняющее данное вблизи особенной точки съ извѣстнымъ приближеніемъ. Это позволило ему получить геометрически тѣ результаты, которые были другимъ путемъ получены французскимъ ученымъ H. Poincaré.

Я приведу здѣсь два свойства системъ (1) и (5), полученныя Д. М. Синцовымъ, которыми мнѣ придется воспользоваться.

Первое состоитъ въ томъ, что точка a_{ji}, $i = 1, 2, \ldots, p$ будетъ особенной и для системы (5).

Въ самомъ дѣлѣ, для доказательства этого свойства достаточно выяснить, что подстановка $y_i = a_{ji}$ $i = 1, 2, \ldots, p$ обратитъ въ нуль каждый изъ опредѣлителей матриссы:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & \ldots & y_p \\ (A^{(1)}X_1)_j & (A^{(1)}X_2)_j & (A^{(1)}X_3)_j & \ldots & (A^{(1)}X_p)_j \end{vmatrix}$$

Выполнимъ эту подстановку.

Прежде всего можемъ написать:

$$(A^{(1)}X_l)_j = \sum_{i=1}^{p} y_i \left(\frac{\partial X_l}{\partial x_i}\right)_j$$

Наша подстановка обратитъ это выраженіе въ слѣдующую сумму:

$$\sum_{i=1}^{p} a_{ji} \left(\frac{\partial X_l}{\partial x_i}\right)_j,$$

которую можно разсматривать, какъ результатъ подстановки $x_i = a_{ji}$ $i = 1, 2, \ldots, p$ въ сумму

$$\sum_{i=1}^{p} x_i \frac{\partial X_l}{\partial x_i},$$

равную по теоремѣ Ейлера для однородныхъ функцій полиному mX_l, и слѣдовательно результатъ подстановки $x_i = a_{ji}$ $i = 1, 2, \ldots, p$ въ этотъ полиномъ и $y_i = a_{ji}$ $i = 1, 2, \ldots, p$ въ линейную функцію $(A^{(1)}X_l)_j$ будетъ равенъ mA_{jl}. Въ силу этого разсматриваемая матрисса по подстановкѣ приметъ такой видъ

$$\begin{vmatrix} a_{j1} & a_{j2} & a_{j3} & \ldots & a_{jp} \\ mA_{j1} & mA_{j2} & mA_{j3} & \ldots & mA_{jp} \end{vmatrix},$$

который показываетъ, что каждый изъ ея опредѣлителей будетъ нулемъ на основаніи равенствъ (4).

Другое свойство заключается въ томъ, что одинъ изъ корней характеристическаго уравненія системы (5) будетъ равенъ $m\lambda_j$.

Въ самомъ дѣлѣ, это характеристическое уравненіе напишется въ такомъ видѣ:

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1}\right)_j - \lambda & \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_2}\right)_j & \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_3}\right)_j & \ldots & \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_p}\right)_j \\ \left(\frac{\partial X_2}{\partial x_1}\right)_j & \left(\frac{\partial X_2}{\partial x_2}\right)_j - \lambda & \left(\frac{\partial X_2}{\partial x_3}\right)_j & \ldots & \left(\frac{\partial X_2}{\partial x_p}\right)_j \\ \left(\frac{\partial X_3}{\partial x_1}\right)_j & \left(\frac{\partial X_3}{\partial x_2}\right)_j & \left(\frac{\partial X_3}{\partial x_3}\right)_j - \lambda \ldots & & \left(\frac{\partial X_3}{\partial x_p}\right)_j \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \left(\frac{\partial X_p}{\partial x_1}\right)_j & \left(\frac{\partial X_p}{\partial x_2}\right)_j & \left(\frac{\partial X_p}{\partial x_3}\right)_j & \ldots & \left(\frac{\partial X_p}{\partial x_p}\right)_j - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Замѣтимъ сначала, что одна изъ величинъ a_{ji} $i = 1, 2, \ldots, p$ отлична отъ нуля, и, такъ какъ выборъ нумераціи зависитъ отъ насъ, то положимъ, что a_{j1} не равно нулю. Множимъ въ этомъ предположеніи первый столбецъ только-что написаннаго опредѣлителя на a_{j1} и складываемъ съ его элементами элементы всѣхъ остальныхъ столбцовъ, умноживъ предварительно всѣ элементы i-го столбца на a_{ji}. Тогда всѣ элементы въ первомъ столбцѣ выразятся такой суммой:

$$\sum_{i=1}^{p} a_{ji} \left(\frac{\partial X_l}{\partial x_i}\right)_j - \lambda a_{jl}.$$

Но мы только что видѣли, что

$$\sum_{i+1}^{p} a_{ji} \left(\frac{\partial X_l}{\partial x_i}\right)_j$$

равняется mA_{jl}, или вслѣдствіе равенства (4) $m\lambda_j a_{jl}$. Такимъ образомъ каждый элементъ перваго столбца и l-ой строки напишется въ видѣ $a_{jl}(m\lambda_j - \lambda)$ и слѣдовательно каждый элементъ перваго столбца, а потому и лѣвая часть разсматриваемаго нами характеристическаго уравненія будетъ имѣть множителемъ $m\lambda_j - \lambda$. Отсюда слѣдуетъ, что одинъ изъ корней его будетъ равенъ $m\lambda_j$.

Остальные $p-1$ корней обозначимъ черезъ λ_{ji} $i = 2, 3, \ldots, p$.

Теперь мы имѣемъ весь необходимый матеріалъ для формулировки основной теоремы этого параграфа.

Она содержитъ въ себѣ слѣдующее утвержденіе:

Результатъ подстановки $x_i = a_{ji}$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$ въ полиномъ K равенъ суммѣ величинъ λ_j и λ_{ji} $i = 2, 3, \ldots, p$, умноженныхъ соотвѣтственно на нѣкоторыя цѣлыя неотрицательныя числа.

Для доказательства преобразуемъ тождество

$$\sum_{i=1}^{p} X_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = Kf, \tag{6}$$

въ которомъ f полиномъ n-ой степени, и тождество

$$\sum_{i=1}^{p} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = nf, \tag{7}$$

получаемое на основаніи теоремы Ейлера, въ новыя помощью примѣненія полярной операціи $A^{(k)}$.

Пользуясь тождествами

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial A^{(1)} f}{\partial y_i}$$

$$i = 1, 2, \ldots, p,$$

измѣняемъ наши тождества въ слѣдующія:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{p} X_i \frac{\partial A^{(1)} f}{\partial y_i} &= Kf \\ \sum_{i=1}^{p} x_i \frac{\partial A^{(1)} f}{\partial y_i} &= nf. \end{aligned} \tag{8}$$

Затѣмъ подвергаемъ обѣ части обоихъ тождествъ операціи $A^{(k)}$ и слѣдовательно можемъ написать:

$$\sum_{i=1}^{p} A^{(k)} \left\{ X_i \frac{\partial A^{(1)} f}{\partial y_i} \right\} = A^{(k)} \{Kf\}$$

$$\sum_{i=1}^{p} A^{(k)} \left\{ x_i \frac{\partial A^{(1)} f}{\partial y_i} \right\} = n A^{(k)} f.$$

Пользуясь формулой (I) для произведенія двухъ функцій, даемъ имъ такой видъ:

$$\sum_{i=1}^{p} \sum_{g=0}^{k} \binom{k}{g} A^{(g)} X_i A^{(k-g)} \frac{\partial A^{(1)} f}{\partial y_i} = \sum_{g=0}^{k} \binom{k}{g} A^{(g)} K A^{(k-g)} f \tag{9}$$

$$\sum_{i=1}^{p} \sum_{g=0}^{k} \binom{k}{g} A^{(g)} x_i A^{(k-g)} \frac{\partial A^{(1)} f}{\partial y_i} = n A^{(k)} f.$$

Второе значительно упрощается, если примемъ во вниманіе, что

$$A^{(g)} x_i = 0 \text{ при } g > 1$$

и

$$A^{(1)} x_i = y_i \ .$$

Въ виду этого получаемъ:

$$\sum_{i=1}^{p} x_i A^{(k)} \frac{\partial A^{(1)} f}{\partial y_i} + \sum_{i=1}^{p} k y_i A^{(k-1)} \frac{\partial A^{(1)} f}{\partial y_i} = n A^{(k)} f.$$

Затѣмъ на основаніи формулы (II) можно замѣнить въ тождествѣ (9) $A^{(k-g)} \frac{\partial A^{(1)} f}{\partial y_i}$ черезъ $\frac{1}{k-g+1} \frac{\partial A^{(k-g+1)} f}{\partial y_i}$ и слѣдовательно получить

$$\sum_{i=1}^{p} \sum_{g=0}^{k} \binom{k}{g} \frac{1}{k-g+1} A^{(g)} X_i \frac{\partial A^{(k-g+1)} f}{\partial y_i} = \sum_{j=0}^{k} A^{(g)} K A^{(k-g)} f \tag{10}$$

и

$$\sum_{i=1}^{p} x_i \frac{1}{k+1} \frac{\partial A^{(k+1)} f}{\partial y_i} + \sum_{i=1}^{p} y_i \frac{\partial A^{(k)} f}{\partial y_i} = n A^{(k)} f.$$

Но надо имѣть въ виду, что функція $A^{(k)}$ есть однородный полиномъ k-го измѣренія относительно перемѣнныхъ $y_i (i = 1, 2, \ldots, p)$ и

что слѣдовательно вторая сумма въ послѣднемъ равенствѣ равна по теоремѣ Ейлера $kA^{(k)}f$, найдемъ окончательно

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{x_i}{k+1} \frac{\partial A^{(k+1)}f}{\partial y_i} = (n-k)\, A^{(k)}f. \tag{11}$$

Условимся, какъ и раньше, обозначать скобками со значкомъ j результатъ подстановки $x_i = a_{ji}$ $i = 1, 2, \ldots, p$ въ какую либо функцію; такъ наприм. $(U)_j$ будетъ результатомъ этой подстановки въ функцію U.

Предположимъ сначала, что величина $(f)_j$ отлична отъ нуля и тогда послѣ подстановки тождества (8) обратятся въ слѣдующія:

$$\sum_{i=1}^{p} A_{ji} \left(\frac{\partial A^{(1)}f}{\partial y_i}\right)_j = (K)_j (f)_j$$

и

$$\sum_{i=1}^{p} a_{ji} \left(\frac{\partial A^{(1)}f}{\partial y_i}\right)_j = n\,(f)_j\ .$$

Умножая обѣ части второго равенства на λ_j и вычитая результатъ изъ обѣихъ частей перваго, получаемъ

$$\sum_{i=1}^{p} \left(A_{ji} - \lambda_j a_{ji}\right) \left(\frac{\partial A^{(1)}f}{\partial y_i}\right)_j = \{(K)_j - n\lambda_j\}\,(f)_j\,.$$

Но въ силу равенствъ (4) лѣвая часть обращается въ нуль, а второй множитель правой части $(f)_j$ по предположенію не нуль, поэтому равенъ нулю первый множитель $(K)_j - n\lambda_j$, или

$$(K)_j = \lambda_j n\,. \tag{12}$$

Затѣмъ предполагаемъ, что при той же подстановкѣ обращается въ нуль не только самъ полиномъ f, но и всѣ его производныя до порядка $k_j - 1$-го включительно. Тогда будутъ равны нулю и выраженія $(A^{(g)}f)_j$ при $g < k_j$, такъ какъ коэффиціенты полинома въ перемѣнныхъ y_i $i = 1, 2, \ldots, p$ $A^{(g)}f$ будутъ производныя отъ f порядка g.

Замѣтивъ это, примемъ въ тождествахъ (10) и (11) $k = k_j$ и выполнимъ въ нихъ нашу подстановку. Такъ какъ послѣ подстановки сумма $\sum\limits_{g=0}^{k}$ въ лѣвой части тождества (10) будетъ заключать только два отличныхъ отъ нуля члена, то мы пишемъ:

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{A_{ji}}{k_j+1} \frac{\partial\,(A^{(k_j+1)}f)_j}{\partial y_i} + \sum_{i=1}^{p} (A^{(1)}X_i)_j \frac{\partial\,(A^{(k_j)}f)_j}{\partial y_i} = (K)_j\,(A^{(k_j)}f)_j$$

и

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{a_{ji}}{k_j+1} \frac{\partial (A^{(k_j+1)}f)_j}{\partial y_i} = (n-k_j)(A^{(k_j)}f)_j$$

Умножаемъ обѣ части второго равенства изъ только что полученныхъ на λ_j и вычитаемъ изъ перваго; тогда въ виду равенствъ (4) въ лѣвой части вновь полученнаго равенства исчезнутъ $\frac{\partial (A^{(k+1)}f)_j}{\partial y_i}$, и мы получаемъ:

$$\sum_{i=1}^{p} (A^{(1)}X_i)_j \frac{\partial (A^{(k_j)}f)_j}{\partial y_i} = \{(K)_j - (n-k_j)\lambda_j\}(A^{(k_j)}f)_j \tag{13}$$

Полученное тождество показываетъ, что уравненіе

$$\sum_{i=1}^{p} (A^{(1)}X_i)_j \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} = K\varphi \tag{14}$$

имѣетъ интеграломъ однородный полиномъ степени k_j. Прилагая къ этому случаю формулы (3) предыдущаго параграфа и замѣчая, что корни характеристическаго уравненія согласно принятымъ обозначеніямъ будутъ $m\lambda_j$ и λ_{ji} $i=2, 3, \ldots, q$ $q \leq p$, пишемъ:

$$(K)_j - (n-k_j)\lambda_j = k_{j1} m\lambda_j + \sum_{i=2}^{q} k_{ji}\lambda_{ji}$$

$$k_j = \sum_{i=1}^{q} k_{ji}$$

Или

$$(K)_j = (n-k_j)\lambda_j + k_{j1} m\lambda_j + \sum_{i=2}^{q} k_{ji}\lambda_{ji} \tag{15}$$

Полученное равенство заключаетъ въ себѣ равенство (12) въ видѣ частнаго случая, стоитъ только принять k_j равнымъ нулю, такъ какъ тогда и каждое изъ чиселъ k_{ji} также будетъ равно нулю, иначе сумма неотрицательныхъ чиселъ не могла бы равняться нулю.

Равенство (15) вполнѣ рѣшаетъ вопросъ о результатѣ подстановки въ полиномъ K $x_i = a_{ji}$ $i=1, 2, \ldots, p$.

§ 4. Опредѣленіе полиномовъ K.

Особенныя точки, какъ мы видѣли въ предыдущемъ параграфѣ, обращаютъ въ нуль всѣ опредѣлители матриссы:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \ldots x_p \\ X_1 & X_2 & X_3 \ldots X_p \end{vmatrix}$$

т. е. удовлетворяютъ такому ряду уравненій:

$$x_j X_i - x_i X_j = 0\,, \tag{1}$$

гдѣ значки j и i принимаютъ значеніе всѣхъ цѣлыхъ чиселъ не меньшихъ единицы и не большихъ p.

Въ общемъ случаѣ всѣ особенныя точки различны.

Покажемъ это.

Какъ извѣстно изъ алгебры, для того, чтобы данное рѣшеніе было кратнымъ, необходимо и достаточно условіе обращать въ нуль всѣ Якобіевскіе опредѣлители любой группы $p-1$ изъ уравненій (1) по любымъ $p-1$ перемѣннымъ.

Всегда можно замѣнить равенство нулю опредѣлителя совмѣстимостью ряда линейныхъ уравненій.

Мы получимъ такія уравненія для даннаго случая, подвергнувъ лѣвыя части уравненій (1) операціи $A^{(1)}$ и поставивъ условіе, чтобы среди этихъ линейныхъ относительно перемѣнныхъ y_i уравненій было бы не болѣе $p-2$ независимыхъ.

Эти уравненія будутъ вида:

$$y_j X_i - y_i X_j + x_j A^{(1)} X_i - x_i A^{(1)} X_j = 0\,, \tag{2}$$

гдѣ значки j и i имѣютъ то же значеніе, что и въ уравненіяхъ (1).

Замѣчая, что одну изъ перемѣнныхъ напримѣръ x_1 можно считать отличной отъ нуля, добавимъ къ уравненіямъ (1) еще уравненіе $X_1 - \lambda x_1 = 0$ съ новой перемѣнной λ, которая для каждой особенной точки будетъ имѣть одно опредѣленное значеніе.

Тогда система уравненій (1) совмѣстно съ добавленнымъ приметъ болѣе простой видъ:

$$X_i - \lambda x_i = 0 \qquad {\scriptstyle i=1,\,2,\ldots,p} \tag{3}$$

Внося отсюда значеніе X_i въ уравненія (2), даемъ имъ такой видъ:

$$x_j (A^{(1)} X_i - \lambda y_i) - x_i (A^{(1)} X_j - \lambda y_j) = 0\,.$$

Вводимъ новую перемѣнную μ и присоединяемъ къ этимъ уравненіямъ новое:

$$A^{(1)}X_1 - \lambda y_1 - \mu x_1 = 0\,, \tag{4}$$

которое связываетъ перемѣнную μ линейно съ перемѣнными y_i.

Тогда система (2) совмѣстно съ добавленнымъ уравненіемъ (4) обратится въ p такихъ уравненій:

$$A^{(1)}X_i - \lambda y_i - \mu x_i = 0$$
$$i = 1, 2, \ldots, p.$$

Мы къ системѣ, въ которой было не болѣе $p-2$ линейно независимыхъ, прибавили еще одно съ перемѣнной, которая не входила въ прежнія уравненія, а потому среди полученной не можетъ быть больше $p-1$ линейно независимыхъ, и во всякомъ случаѣ опредѣлители матриссы

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} - \lambda & \frac{\partial X_1}{\partial x_2} & \frac{\partial X_1}{\partial x_3} & \ldots & \frac{\partial X_1}{\partial x_p} & x_1 \\ \frac{\partial X_2}{\partial x_1} & \frac{\partial X_2}{\partial x_2} - \lambda & \frac{\partial X_2}{\partial x_3} & \ldots & \frac{\partial X_2}{\partial x_p} & x_2 \\ \frac{\partial X_3}{\partial x_1} & \frac{\partial X_3}{\partial x_2} & \frac{\partial X_3}{\partial x_3} - \lambda & \ldots & \frac{\partial X_3}{\partial x_p} & x_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & . \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & . \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & . \\ \frac{\partial X_p}{\partial x_1} & \frac{\partial X_p}{\partial x_2} & \frac{\partial X_p}{\partial x_3} & \ldots & \frac{\partial X_p}{\partial x_p} - \lambda & x_p \end{vmatrix} \tag{5}$$

всѣ равны нулю.

Нетрудно убѣдиться въ томъ, что полученныя условія не будутъ въ общемъ случаѣ слѣдствіемъ уравненій (3). Приравняемъ, наприм., опредѣлитель, составленный изъ p послѣднихъ столбцовъ матриссы (5), нулю. Положивъ $X_i = c_i x_1^m + X_i'$, гдѣ c_i въ общемъ случаѣ совершенно произвольныя постоянныя, увидимъ, что полученное уравненіе не зависитъ ни отъ одной постоянной c_i. Если бы оно было слѣдствіемъ уравненій (3), то оно было бы результатомъ исключенія постоянныхъ c_i изъ этихъ уравненій, но это невозможно, такъ какъ опредѣлитель Якоби этихъ уравненій по постояннымъ c_i равенъ x_1^{pm}.

Извѣстно, что если число N особенныхъ точекъ конечно (и всѣ онѣ различны), то оно равно $\frac{m^p - 1}{m - 1}$ [1]).

---

[1]) См. напр., Д. М. Синцовъ. Теорія коннексовъ въ пространствѣ, стр. 253.

Условимся понимать подъ выраженіемъ «точка обращаетъ въ нуль данный полиномъ» свойство даннаго полинома обращаться въ нуль по подстановкѣ въ него значеній перемѣнныхъ, опредѣляющихъ точку, и формулируемъ такую теорему:

Всѣ особенныя точки не могутъ обращать въ нуль одного и того же полинома m—1-ой степени.

Ради ясности изложенія доказательства мнѣ придется прибѣгнуть къ геометрической терминологіи.

Если данная система алгебраическихъ уравненій такова, что мы можемъ задать k перемѣннымъ произвольныя значенія, то она будетъ опредѣлять точечное многообразіе k—1-го измѣренія. Если по добавленіи k произвольныхъ линейныхъ уравненій число рѣшеній будетъ равно n, то многообразіе будетъ n-го порядка. Оно можетъ разлагаться на нѣсколько многообразій низшаго порядка.

Такое разложеніе можетъ быть достигнуто добавленіемъ ограничивающихъ уравненій. Само собою разумѣется, можно предполагать эти уравненія независящими ни отъ какихъ новыхъ, (т. е. входившихъ въ прежнія уравненія) постоянныхъ.

Для поясненія приведемъ примѣръ:

Если къ двумъ уравненіямъ

$$x_1(x_1 + a_1x_3) + x_2(x_2 + a_1x_3) = 0$$

$$x_1(x_2 + a_2x_4) + x_2(x_1 + a_2x_4) = 0,$$

представляющимъ совокупность прямой и кривой 3-го порядка, прибавимъ уравненіе

$$x_1 - x_2 = 0,$$

то выдѣлимъ прямую.

Добавленіе же уравненія

$$(x_1 + a_1x_3)(x_1 + a_2x_4) - (x_2 + a_1x_3)(x_2 + a_2x_4) = 0$$

выдѣлитъ кривую третьяго порядка.

Предположимъ въ дальнѣйшемъ $p > 2$.

Пусть L неприводимый полиномъ n—го порядка и пусть въ выраженіи $\sum_{j=1}^{p} b_{1j}x_j$ постоянныя b_{1j} выбраны такимъ образомъ, что уравненіе

$$L = 0 \tag{6}$$

не есть слѣдствіе уравненія

$$\sum_{j=1}^{p} b_{1j}x_j = 0, \tag{7}$$

и слѣдовательно число точекъ, обращающихъ въ нуль уравненіе (6) и необращающихъ въ нуль уравненія (7), безконечно велико.

Затѣмъ всегда можно составить матриссу изъ постоянныхъ b_{ij}

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} & \dots & \dots & b_{M1} \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} & \dots & \dots & b_{M2} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} & \dots & \dots & b_{M3} \\ . & . & . & \dots & \dots & . \\ . & . & . & \dots & \dots & . \\ . & . & . & \dots & \dots & . \\ b_{1p} & b_{2p} & b_{3p} & \dots & \dots & b_{Mp} \end{vmatrix} \tag{8}$$

имѣющую сколь угодно большое число M столбцовъ, каждый опредѣлитель которой отличенъ отъ нуля.

Обозначимъ черезъ y_i выраженіе $\sum\limits_{j=1}^{p} b_{ij}\, x_j$ и черезъ Y_i полиномъ $\sum\limits_{j=1}^{p} b_{ij}\, X_j$ и покажемъ, что можно всегда выбрать опредѣлитель $y_1 Y_i - y_i Y_1$ такимъ образомъ, что уравненіе

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_i \\ Y_1 & Y_i \end{vmatrix} = 0 \tag{9}$$

и уравненіе (6) опредѣлятъ многообразіе p—3-го измѣренія.

Допустимъ, что это невѣрно и что слѣдовательно уравненіе (9) для всѣхъ значеній i отъ 2 до p включительно есть слѣдствіе уравненія (6), Возьмемъ какую-нибудь точку, обращающую въ нуль полиномъ L и необращающую въ нуль выраженіе y_1. Можно тогда опредѣлить λ такимъ образомъ, чтобы уравненіе

$$Y_1 - \lambda y_1 = 0$$

удовлетворялось для этой точки. Но тогда въ силу уравненій (9) будутъ удовлетворяться для этой точки и уравненія

$$Y_i - \lambda y_i = 0$$
$$i = 2, 3, \dots, p.$$

Но эти новыя p уравненій можно написать въ видѣ

$$\sum_{j=1}^{p} b_{ij}\,(X_j - \lambda x_j) = 0.$$
$$i = 1, 2, 3, \dots, p$$

Опредѣлитель, составленный изъ постоянныхъ b_{ij}, по предположенію отличенъ отъ нуля, а потому эти уравненія эквивалентны такимъ:

$$X_j - \lambda x_j = 0 \qquad j = 1, 2, 3, \dots, p.$$

А это указывало бы, что любая точка, обращающая въ нуль полиномъ L и не обращающая въ нуль выраженіе y_1, была бы особенной точкой, и слѣдовательно ихъ было бы противъ предположенія безконечное число.

На основаніи выше изложеннаго мы можемъ предположить, что напримѣръ, уравненіе

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ Y_1 & Y_2 \end{vmatrix} = 0,$$

совмѣстно съ уравненіемъ (6) опредѣляютъ многообразіе $p-3$-го измѣренія.

Предположимъ намъ удалось убѣдиться въ томъ, что приравнивая нулю всѣ опредѣлители матриссы

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & \dots & y_k \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 & \dots & Y_k \end{vmatrix} \tag{10}$$

получимъ систему уравненій, которая совмѣстно съ уравненіемъ (6) опредѣляетъ точечное многообразіе U $p-k-1$-го измѣренія, и покажемъ, что можно выбрать указатель $i > k$ такимъ, что всѣ уравненія, полученныя приравниваніемъ нулю всѣхъ опредѣлителей матриссы

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & \dots & y_k & y_i \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 & \dots & Y_k & Y_i \end{vmatrix} \tag{11}$$

совмѣстно съ уравненіемъ (6) опредѣлятъ точечное многообразіе $p-k-2$-го измѣренія.

Допустимъ, что это невѣрно и новыя уравненія опредѣляютъ точечное многообразіе V_i $p-k-1$-го измѣренія. Такъ какъ послѣднее получено путемъ прибавленія новыхъ уравненій къ прежнимъ, опредѣляющимъ многообразіе U, то оно можетъ либо быть имъ самимъ, либо въ томъ случаѣ, когда многообразіе U разлагается, составлять хотя бы часть его.

Предположимъ для общности, что многообразіе U разлагается на l частей $U_1, U_2, \dots, U_j, \dots, U_l$. Подставляя вмѣсто указателя i значенія $k+1, k+2, \dots, M$, получимъ $M-k$ уравненій, обращающихся въ нуль для точекъ одного изъ многообразій $U_1, U_2, \dots, U_j, \dots, U_l$. Легко показать, что только $p-k-1$ изъ нихъ могутъ обращаться въ нуль для всѣхъ точекъ одного и того же многообразія, напр., U_j. Допустимъ противное, и пусть первая $p-k$ изъ нихъ даютъ такія системы, которыя обращаются въ нуль для любой точки многообразія U_j. Тогда опредѣляемъ множитель λ такимъ образомъ, что для какой-нибудь произвольно

взятой точки, принадлежащей многообразію U_j, будетъ обращаться въ нуль уравненіе

$$Y_g - \lambda y_g = 0.$$

Тогда изъ имѣющихся $p-k$ системъ будетъ слѣдовать, что для той же точки будутъ обращаться въ нуль уравненія

$$Y_i - \lambda y_i = 0 \qquad i=1, 2, \ldots, p$$

которыя можно написать въ видѣ

$$\sum_{j=1}^{p} b_{ij}(X_j - \lambda x_j) = 0,$$

и которыя подобно предыдущему эквивалентны системѣ уравненій

$$X_j - \lambda x_j = 0 \qquad j=1, 2, \ldots, p$$

Эти послѣднія показываютъ, что всѣ точки многообразія U_j особенныя и что слѣдовательно особенныхъ точекъ противъ предположенія безчисленное множество. Поэтому, если мы положимъ M равнымъ $k+l(p-k-1)+1$, то между $l(p-k-1)+1$ системами будетъ по крайней мѣрѣ одна, не обращающаяся въ нуль для всѣхъ точекъ хотя бы одного изъ многообразій $U_1\ U_2\ U_3 \ldots U_l$.

Итакъ будетъ существовать по крайней мѣрѣ одна система, полученная приравниваніемъ нулю всѣхъ опредѣлителей матриссы вида

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & \ldots & y_{k+1} \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 & \ldots & Y_{k+1} \end{vmatrix}$$

и уравненія (6) и опредѣляющая многообразіе $p-k-2$-го измѣренія.

Въ предыдущемъ мы провѣрили теорему для $k=2$ и указали соображенія, которыя устанавливаютъ справедливость предложенія для случая $k+1$, коль скоро оно справедливо для k. Слѣдовательно оно справедливо для k какого угодно.

Положивъ $k=p-1$, получимъ въ частности, что система, образованная приравниваніемъ нулю всѣхъ опредѣлителей матриссы

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_{p-1} \\ Y_1 & Y_2 & \ldots & Y_{p-1} \end{vmatrix} \tag{12}$$

и уравненія (6), опредѣлитъ многообразіе нулевого измѣренія, т. е. конечное число точекъ.

Число этихъ точекъ опредѣлить нетрудно. Въ самомъ дѣлѣ, приравнивая нулю всѣ опредѣлители матриссы (12), получимъ уравненіе кривой порядка $\frac{m^{p-1}-1}{m-1}$ и слѣдовательно по общему принципу алгебры число точекъ этой кривой, обращающихъ въ нуль полиномъ L равно $\frac{m^{p-1}-1}{m-1}n$.

Мы предполагали полиномъ L неприводимымъ. Предположимъ теперь, что онъ представляетъ произведеніе неприводимыхъ полиномовъ $L_1, L_2, \ldots, L_l$ соотвѣтственно степеней $n_1, n_2, \ldots, n_l$, сумма которыхъ $n_1+n_2+\ldots+n_l$ равна n. Тогда, разсуждая въ отдѣльности для каждаго полинома L_g, получимъ для него $\frac{m^{p-1}-1}{m-1}n_g$ точекъ. Значитъ всего точекъ будетъ $\sum_{g=1}^{l}\frac{m^{p-1}-1}{m-1}n_g=\frac{m^{p-1}-1}{m-1}n$, тоже самое число, что и для неприводимаго полинома.

Отсюда легко получить верхній предѣлъ числа особенныхъ точекъ обращающихъ въ нуль данный полиномъ n-го порядка.

Въ самомъ дѣлѣ, съ одной стороны какъ бы мы ни выбирали постоянныя b_{ij}, особенныя точки удовлетворяютъ всѣмъ уравненіямъ, полученнымъ приравниваніемъ нулю всѣхъ опредѣлителей матриссы (12), а съ другой стороны при надлежащемъ выборѣ этихъ постоянныхъ число точекъ, обращающихъ въ нуль полиномъ L и всѣ опредѣлители матриссы (12), будетъ равно $\frac{m^{p-1}-1}{m-1}n$. Среди этихъ точекъ находятся слѣдовательно всѣ особенныя точки, обращающія въ нуль полиномъ L, и потому ихъ не можетъ быть больше $\frac{m^{p-1}-1}{m-1}n$.

Въ частномъ случаѣ $n=m-1$, получаемъ $m^{p-1}-1$.

Такъ какъ число особенныхъ точекъ, когда онѣ различны равно $\frac{m^p-1}{m-1}$, то остается по крайней мѣрѣ $\frac{m_p-1}{m-1}-m^{p-1}+1=\frac{m^{p-1}-1}{m-1}+1$.

Другими словами какъ бы мы ни выбирали коэффиціенты полинома $m-1$-ой степени, всегда останется по крайней мѣрѣ $\frac{m^{p-1}-1}{m-1}+1$ особеннныхъ точекъ, не обращающихъ его въ нуль, и слѣдовательно всегда можно выбрать среди N особенныхъ точекъ такую группу $P=\binom{m+p-2}{p-1}$ точекъ, которыя не обращаютъ въ нуль одновременно одного и того же полинома $m-1$-ой степени.

Пусть всѣ особенныя точки a_{ji} $i=1, 2, \ldots, p$ со значкомъ j, принимающимъ всѣ значенія отъ 1 до P включительно, составляютъ такую группу. Мы можемъ воспользоваться ей на основаніи основной теоремы предыдущаго параграфа для опредѣленія полинома K.

Мы знаемъ, что результатъ подстановки въ этотъ полиномъ $x_i = a_{ij}$ $i = 1, 2, \ldots, p$ равенъ $(K)_j$ линейному выраженію, данному въ предыдущемъ параграфѣ формулой (15).

Возьмемъ полиномъ L m—1-го порядка съ неопредѣленными коэффиціентами и обозначимъ черезъ L_j результатъ подстановки $x_i = a_{ij}$ $i = 1, 2, \ldots, p$ въ полиномъ L.

Пишемъ равенство:

$$L_j = (K)_j$$

Если въ лѣвую часть этого равенства подставимъ вмѣсто неопредѣленныхъ коэффиціентовъ коэффиціенты полинома K, то получимъ тождество; слѣдовательно это равенство можно разсматривать, какъ уравненіе для коэффиціентовъ полинома K.

Давая указателю j всѣ значенія, начиная отъ 1 до P включительно, получимъ число уравненій равное числу искомыхъ коэффиціентовъ. Эти уравненія разрѣшимы. Въ самомъ дѣлѣ если бы этого не было, то уравненія

$$L_j = 0 \quad j = 1, 2, \ldots, P$$

были бы совмѣстимы, и выбранная группа точекъ обращала бы въ нуль одинъ и тотъ же полиномъ m—1-го порядка, что противорѣчитъ нашему предположенію.

Итакъ, рѣшая наши уравненія, получимъ искомые коэффиціенты полинома K и слѣдовательно получимъ выраженіе для этого полинома.

Это выраженіе будетъ зависѣть отъ степени частнаго интеграла и отъ цѣлыхъ чиселъ k_j и k_{ji}, характеризующихъ частный интегралъ въ данной особенной точкѣ, опредѣляемой постоянными a_{ji}.

Этотъ методъ опредѣленія полинома K можетъ быть примѣненъ всякій разъ, когда среди особенныхъ точекъ, находятся ли онѣ въ конечномъ, или безконечномъ числѣ, есть группа P точекъ, не обращающихъ въ нуль одного и того же полинома m—1-го порядка.

Тотъ же случай, когда такой группы нѣтъ, рѣшается переходомъ къ предѣлу, того-же характера, какъ и переходъ къ предѣлу, примѣненный Д'Аламберомъ для опредѣленія интеграловъ линейныхъ уравненій въ случаѣ кратныхъ корней.

Но конечно выясненію всѣхъ могущихъ встрѣтиться при этомъ обстоятельствъ должно быть посвящено особое изслѣдованіе.

§ 5. Опредѣленіе частныхъ алгебраическихъ интеграловъ даннаго порядка.

Предложенный въ предыдущемъ способъ опредѣленія полиномовъ K позволяетъ упростить рѣшеніе слѣдующей задачи: опредѣлить всѣ частные алгебраическіе интегралы даннаго порядка n.

Для этого, какъ извѣстно, надо въ уравненіи

$$\sum_{i=1}^{p} X_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = Kf, \tag{1}$$

опредѣлить полиномъ f порядка n, причемъ данными являются только полиномы m-го порядка X_i, а полиномъ K долженъ быть выбранъ соотвѣтственнымъ образомъ.

Покажемъ на основаніи вышесказаннаго, что число возможныхъ значеній полиномовъ K при данномъ n конечно.

Беремъ группу особенныхъ точекъ, необращающихъ въ нуль одного и того же полинома $m-1$-ой степени. Результатъ подстановки въ полиномъ K какой нибудь особенной точки дастъ по § 3 такой результатъ

$$(K)_j = (n-k_j)\,\lambda_j + k_{j1} m\lambda_j + \sum_{i=1}^{q} k_{ji}\,\lambda_{ji} \tag{2}$$

при условіи

$$k_j = \sum_{i=1}^{q} k_{ji}\,.$$

Коэффиціенты полинома K опредѣлятся тогда по § 4 уравненіями

$$L_j = (K)_j$$
$$j = 1, 2, 3, \ldots, P,$$

гдѣ L_j результатъ подстановки одной изъ особенныхъ точекъ выбранной нами группы въ полиномъ $m-1$-го порядка съ неопредѣленными коэффиціентоми.

Можно непосредственно опредѣлить полиномъ K, стоитъ только прибавить къ вышенаписаннымъ уравненіямъ такое

$$L = K\,,$$

и произвести изъ полученныхъ $P+1$ линейныхъ уравненій исключеніе P неопредѣленныхъ коэффиціентовъ полинома L.

Можно написать результатъ этого исключенія въ такомъ видѣ:

$$K \equiv \sum_{j=1}^{P} (K)_j M_j \,, \tag{3}$$

гдѣ M_j будутъ полиномы $m-1$-го порядка, зависящіе только отъ значеній, опредѣляющихъ особенныя точки и слѣдовательно неизмѣняющіеся для всѣхъ полиномовъ K. Аналитически они опредѣляются тѣмъ свойствомъ, что они обращаются въ нуль для $P-1$ особенныхъ точекъ выбранной нами группы и въ единицу для оставшейся точки.

Чтобы получить всѣ полиномы K, отвѣчающіе случаю частныхъ алгебраическихъ интеграловъ данной степени n, достаточно дать числамъ $k_j k_{ij}$ всѣ возможныя для нихъ значенія; но такъ какъ они не могутъ быть отрицательными и каждое изъ нихъ меньше $n+1$, то число возможныхъ значеній полинома K конечно.

Предположимъ, что мы составили всѣ полиномы K для случая $n=1$. Для этого очевидно надо только положить для каждаго указателя j одно изъ чиселъ $n-k_j$, k_{ji} $(i=1, 2, \ldots, q)$ равнымъ единицѣ, а остальныя нулями.

Пусть $K^{(g)}$ $(g=1, 2, \ldots, R)$ эти полиномы, гдѣ R ихъ число.

Введемъ слѣдующія новыя обозначенія: положимъ,

$$\lambda_j = \mu_{j1} = \mu_{j2} = \ldots = \mu_{j,\,n-k_j}$$

$$m\lambda_j = \mu_{j,\,n-k_j+1} = \mu_{j,\,n-k_j+2} = \ldots = \mu_{j,\,n-k_j+k_{j1}}$$

и затѣмъ

$$\lambda_{ij} = \mu_{jg}$$

гдѣ g принимаетъ всѣ значенія

$$\text{отъ } n - \sum_{h=i}^{q} k_{jh} + 1 \quad \text{до} \quad n - \sum_{h=i+1}^{q} k_{jh}$$

Тогда результатъ подстановки $(K)_j$ напишется въ такомъ простомъ видѣ:

$$(K)_j = \sum_{g=1}^{n} \mu_{jg} \,. \tag{4}$$

Внося это выраженіе въ формулу (3), получимъ:

$$K = \sum_{j=1}^{P} \sum_{g=1}^{n} \mu_{jg} M_g \tag{5}$$

Мѣняя порядокъ этой двойной суммы мы получимъ:

$$K = \sum_{g=1}^{n} \left\{ \sum_{j=1}^{P} \mu_{jg} M_j \right\}.$$

Но сумма, заключенная въ скобки, представляетъ собой ничто иное, какъ одинъ изъ полиномовъ $K^{(g)}$ $(g=1, 2, \ldots, R)$ и слѣдовательно полиномъ K ничто иное какъ сумма, составленная изъ полиномовъ $K^{(g)}$. Нѣкоторые изъ полиномовъ могутъ не входить вовсе, другіе могутъ войти по нѣскольку разъ, и мы приходимъ къ новой формулѣ, опредѣляющей полиномъ K:

$$K = \sum_{g=1}^{R} \nu_g K^{(g)}, \tag{6}$$

гдѣ ν_g неотрицательныя цѣлыя числа, удовлетворяющія условію:

$$\sum_{g=1}^{R} \nu_g = n.$$

Такимъ образомъ, опредѣливъ всѣ R полиномовъ для случая $n=1$, мы легко составимъ полиномы K для какой угодно степени n.

Необходимо замѣтить, что разложеніе не будетъ единственнымъ. Мы получимъ всѣ различныя разложенія, мѣняя предварительно всѣми возможными способами порядокъ суммы (4).

Опредѣливъ полиномъ K, переходимъ къ изслѣдованію частныхъ алгебраическихъ интеграловъ, отвѣчающихъ этому полиному. Подставимъ это значеніе полинома K, обозначивъ его черезъ K_1, въ уравненіе (1) и получимъ:

$$\sum_{i=1}^{p} X_i \frac{\partial f}{\partial x_i} - K_1 f = 0. \tag{7}$$

Подставляемъ въ лѣвую часть этого равенства вмѣсто неизвѣстнаго намъ полинома f полиномъ n-ой степени съ произвольными коэффиціентами B_i, получимъ полиномъ $n+m-1$-го порядка. Коэффиціенты его N_i числомъ $\binom{n+m+p-2}{p-1}$ будутъ линейными и однородными функціями постоянныхъ B_i. Если мы внесемъ въ эти выраженія N_i вмѣсто постоянныхъ B_i значенія коэффиціентовъ частнаго интеграла f, опредѣляемаго уравненіемъ (7), то они обратятся тождественно въ нуль. Поэтому, положивъ

$$N_i = 0,$$

будемъ имѣть $\binom{m+n+p-2}{p-1}$ уравненій для опредѣленія коэффиціентовъ частныхъ алгебраическихъ интеграловъ n-го порядка, удовлетворяющихъ уравненію (1).

Число полученныхъ уравненій будетъ больше числа $\binom{n+p-1}{p-1}$ неизвѣстныхъ. Надо поэтому различать три случая:

1. Эти уравненія несовмѣстимы. Тогда не будетъ существовать частнаго интеграла, соотвѣтствующаго найденному значенію K_1 полинома K.

2. Число линейно независимыхъ между ними на единицу меньше числа неизвѣстныхъ B_i. Тогда эти уравненія даютъ для нихъ одно опредѣленное рѣшеніе, и ему будетъ отвѣчать вполнѣ опредѣленный частный алгебраическій интегралъ.

3. Число независимыхъ между ними меньше на число $r>1$. Тогда число рѣшеній, удовлетворяющихъ этимъ уравненіямъ будетъ безконечно большое. Но во всякомъ случаѣ среди нихъ можетъ существовать группа r линейно независимыхъ между собой рѣшеній. Всѣ остальныя выразятся черезъ нихъ и черезъ r совершенно произвольныхъ величинъ; при этомъ послѣднія войдутъ въ рѣшеніе линейно и однородно.

Положимъ, что мы нашли эту группу. Тогда эти r рѣшеній дадутъ r линейно независимыхъ частныхъ интеграловъ. Обозначимъ ихъ черезъ f_j $(j=1, 2, \ldots, r)$ и будемъ имѣть r тождествъ:

$$\sum_{i=1}^{p} X_i \frac{\partial f_j}{\partial x_i} = K_1 f_j, \qquad (8)$$
$$j=1, 2, \ldots, r,$$

Возьмемъ r совершенно произвольныхъ постоянныхъ C_j $(j=1, 2, \ldots, r)$, помножимъ тождество (8) на C_j и просуммируемъ обѣ части отъ 1 до r. Получимъ:

$$\sum_{i=1}^{p} X_i \frac{\partial \sum_{j=1}^{r} C_j f_j}{\partial x_i} = K_1 \sum_{j=1}^{r} C_j f_j$$

Это тождество показываетъ, что и полиномъ $\sum_{j=1}^{r} C_j f_j$ также частный интегралъ разсматриваемой системы.

Этотъ случай замѣчателенъ тѣмъ, что можно получить отсюда $r-1$ интеграловъ уравненія

$$\sum_{i=1}^{p} X_i \frac{\partial z}{\partial x_i} = 0.$$

Въ самомъ дѣлѣ, положивъ въ немъ $z = \frac{f_j}{f_i} (j = 2, 3, \ldots, r)$, убѣждаемся на основаніи тождествъ (8) при помощи непосредственнаго вычисленія, что результатъ этой подстановки будетъ нуль. Конечно число функціонально независимыхъ между ними можетъ быть и меньше $r - 1$.

Такимъ образомъ задача опредѣленія частныхъ алгебраическихъ интеграловъ порядка n, разъ извѣстны полиномы K для случая $n = 1$, сводится къ линейной.

§ 6. Выдѣленіе частныхъ алгебраическихъ интеграловъ, заключающихся въ данномъ полиномѣ.

Въ дальнѣйшемъ мы увидимъ, что могутъ встрѣтиться такіе полиномы, которые заключаютъ въ себѣ частный алгебраическій интегралъ въ видѣ множителя.

Пусть данный полиномъ $F(x)$ представляетъ собой произведеніе двухъ полиномовъ $\Phi(x)$ и $f(x)$, изъ которыхъ второй есть частный алгебраическій интегралъ, удовлетворяющій тождеству:

$$\sum_{i=1}^{p} X_i \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = Kf(x). \tag{1}$$

Обозначимъ для краткости черезъ X операцію

$$\sum_{i=1}^{p} X_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

такъ что

$$Xf(x) \equiv \sum_{i=1}^{p} X_i \frac{\partial f(x)}{\partial x_i},$$

и подвергнемъ ей обѣ части тождества

$$F(x) = \Phi(x)\, f(x).$$

Въ результатѣ получаемъ:

$$XF(x) = f(x)\, X\Phi(x) + \Phi(x)\, Xf(x),$$

или, принимая во вниманіе тождество (1), пишемъ:

$$XF(x) = f(x) X\Phi(x) + f(x)\Phi(x)K.$$

Это послѣднее тождество показываетъ, что, если полиномъ $F(x)$ имѣетъ въ видѣ множителя частный алгебраическій интегралъ $f(x)$, то и общій наибольшій дѣлитель полиномовъ $F(x)$ и $XF(x)$ также заключаетъ полиномъ $f(x)$ въ видѣ множителя.

Отсюда выводимъ такое правило для выдѣленія частнаго алгебраическаго интеграла изъ полинома $F(x)$:

Подвергаемъ его операціи X. Полученный въ результатѣ полиномъ $XF(x)$ можетъ дѣлиться нацѣло на полиномъ $F(x)$, и слѣдовательно можно положить для этого случая

$$XF(x) = K_1 F(x).$$

Изъ полученнаго тождества слѣдуетъ, что полиномъ $F(x)$—частный алгебраическій интегралъ.

Если же полиномъ $XF(x)$ не дѣлится нацѣло на полиномъ $F(x)$, то ищемъ ихъ общій наибольшій дѣлитель. Когда онъ приводится къ постоянной, заключаемъ, что полиномъ $F(x)$ не заключаетъ частнаго алгебраическаго интеграла въ видѣ множителя. Когда же это будетъ полиномъ $F_1(x)$, то искомый частный алгебраическій интегралъ будетъ заключаться въ этомъ полиномѣ. Примѣняя къ нему тотъ же самый пріемъ, мы либо убѣдимся, что полиномъ $F_1(x)$—частный алгебраическій интегралъ, либо получимъ новый полиномъ $F_2(x)$ степени низшей, чѣмъ степень полинома $F_1(x)$. Продолжая такимъ образомъ, мы либо получимъ частный алгебраическій интегралъ $F_k(x)$, либо убѣдимся, что среди множителей полинома $F(x)$ нѣтъ частнаго алгебраическаго интеграла.

Полученный такимъ образомъ частный алгебраическій интегралъ можетъ быть разложенъ на множители, и легко убѣдиться, что каждый множитель будетъ въ свою очередь частнымъ алгебраическимъ интеграломъ.

Предположимъ, что частный алгебраическій интегралъ $f(x)$, удовлетворяющій тождеству (1), которое мы можемъ представить въ видѣ

$$X \log f = K, \tag{2}$$

состоитъ изъ нѣсколькихъ множителей.

Раскладываемъ полиномъ $f(x)$ на неприводимые множители и слѣдовательно представимъ его въ такомъ видѣ:

$$\prod_{j=1}^{s} f_j^{\alpha_j}.$$

Отсюда

$$\log f = \sum_{j=1}^{s} \alpha_j \log f_j.$$

Внося полученный результатъ въ тождество (2), даемъ ему такой видъ:

$$\sum_{j=1}^{s} \alpha_j X \log f_j = \sum_{j=1}^{s} \frac{\alpha_j X f_j}{f_j} = K.$$

Такъ какъ всѣ полиномы f_j неприводимы и различны между собою, то это тождество невозможно безъ того, чтобы каждый полиномъ Xf_j не дѣлился на соотвѣтствующій полиномъ f_j. Обозначивъ частное отъ дѣленія этихъ полиномовъ черезъ K_j, пишемъ рядъ тождествъ:

$$Xf_j = K_j f_j$$
$$j = 1, 2, \ldots, s.$$

гдѣ K_j— полиномы m—1-го порядка.

Эти тождества и доказываютъ наше утвержденіе [1]).

Аналогичный способъ выдѣленія частныхъ алгебраическихъ интеграловъ примѣнимъ и къ болѣе общему случаю.

Предположимъ, что полиномъ $F(x)$, заключающій частные алгебраическіе интегралы, зависитъ линейно отъ постоянныхъ, значеніе которыхъ a priori неизвѣстно; т. е. требуется найти всѣ частные алгебраическіе интегралы, заключающіеся въ выраженіи:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{s} B_i C_i, \tag{3}$$

гдѣ B_i данные полиномы одного и того-же порядка, а C_i нѣкоторыя постоянныя.

Прежде всего находимъ общаго наибольшаго дѣлителя полиномовъ B_i; обозначимъ его черезъ B и положимъ:

$$B_i \equiv B B_{1i}$$
$$i = 1, 2, \ldots, s,$$

Тогда $F(x)$ можно представить въ видѣ произведенія:

$$F(x) \equiv B \left\{ \sum_{i=1}^{s} B_{1i} C_i \right\}.$$

Частные алгебраическіе интегралы могутъ содержаться, какъ въ первомъ, такъ и во второмъ множителяхъ. Какъ поступить съ первымъ множителемъ, мы уже знаемъ, а второй одинаковъ съ полиномомъ (3), съ тою разницею, что въ немъ полиномы B_{1i} не имѣютъ общаго дѣлителя. Такимъ образомъ задача сводится къ тому случаю, когда полиномы B_i не имѣютъ общаго множителя. Предположимъ это и подвергнемъ обѣ части равенства (3) операціи X; получаемъ въ результатѣ:

$$XF(x) = \sum_{i=1}^{s} C_i XB_i.$$

---

[1]) Моя работа: Частные алгебраическіе интегралы. Стр. 90.

Разсмотримъ отдѣльно два случая:

1. Имѣютъ мѣсто тождественно слѣдующія соотношенія

$$\frac{XB_1}{B_1} = \frac{XB_2}{B_2} = \ldots = \frac{XB_s}{B_s}, \tag{4}$$

выражающія обстоятельство, что отношеніе полинома $XF(x)$ къ полиному $F(x)$ не будетъ зависѣть отъ постоянныхъ C_i, каковы бы они ни были.

Найдемъ общаго наибольшаго дѣлителя полиномовъ XB_1 и B_1 и обозначимъ результатъ дѣленія этихъ полиномовъ на ихъ общаго наибольшаго дѣлителя соотвѣтственно черезъ E_2 и E_1. Тогда получимъ такія равенства:

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{XB_i}{B_i}$$
$$i = 1, 2, 3, \ldots, s.$$

или

$$E_1 XB_i = E_2 B_i$$

Такъ какъ E_1 и E_2 первые между собою, полученныя равенства показываютъ, что полиномъ E_1 — общій дѣлитель полиномовъ B_i; но такъ какъ они по предположенію не имѣютъ его, то можно принять E_1 за единицу, и мы получимъ

$$XB_i = E_2 B_i$$
$$i = 1, 2, \ldots, s.$$

Множимъ каждое равенство на C_i и суммируемъ по значку i отъ единицы до s включительно. Результатъ напишется въ такомъ видѣ:

$$\sum_{i=1}^{s} C_i XB_i = E_2 \sum_{i=1}^{s} C_i B_i$$

или

$$X \left\{ \sum_{i=1}^{s} C_i B_i \right\} = E_2 \sum_{i=1}^{s} C_i B_i$$

или наконецъ

$$XF(x) = E_2 F(x)$$

т. е. полиномъ $F(x)$ будетъ частнымъ алгебраическимъ интеграломъ, каково бы ни было значеніе постоянныхъ C_i.

2. Соотношенія (4) не имѣютъ мѣста, по крайней мѣрѣ полностью. Тогда полиномъ

$$\Phi(x) \equiv F(x) XB_s - B_s XF(x) \equiv \left\{ \sum_{i=1}^{s-1} C_i B_i \right\} XB_s - B_s \sum_{i=1}^{s-1} C_i XB_i,$$

будетъ проще, чѣмъ самъ полиномъ $F(x)$, такъ какъ заключаетъ по крайней мѣрѣ одной неизвѣстной постоянной меньше. Съ другой стороны онъ заключаетъ въ себѣ всѣ частные алгебраическіе интегралы, которые заключаетъ полиномъ $F(x)$, и можно воспользоваться имъ для ихъ опредѣленія вмѣсто полинома $F(x)$, конечно, если онъ не обращается тождественно въ нуль.

Это обстоятельство не можетъ случиться при произвольныхъ значеніяхъ постоянныхъ C_i. Въ самомъ дѣлѣ, приравняемъ нулю всѣ коэффиціенты полинома $\Phi(x)$; получимъ рядъ линейныхъ уравненій, связывающихъ постоянныя C_i. Изслѣдуя ихъ, мы либо убѣдимся, что такихъ значеній не существуетъ вовсе, либо выразимъ ихъ всѣ въ видѣ линейныхъ и однородныхъ функцій новыхъ постоянныхъ $C_{1i}(i=1, 2, \ldots, s)$ гдѣ $s_1 < s-1$. Хотя мы въ этомъ случаѣ не можемъ воспользоваться полиномомъ $\Phi(x)$ непосредственно, зато, внося полученныя выраженія для постоянныхъ $C_i(i=1, 2, \ldots, s-1)$ въ полиномъ $F(x)$, уменьшимъ въ немъ число неизвѣстныхъ постоянныхъ. Слѣдовательно, повторяя этотъ пріемъ, мы либо рѣшимъ вопросъ, либо придемъ къ случаю, когда неизвѣстная постоянная будетъ одна и войдетъ въ полиномъ въ видѣ множителя. Она не будетъ имѣть значенія; отбрасываемъ ее и приходимъ къ разсмотрѣнному нами случаю выдѣленія частныхъ алгебраическихъ интеграловъ изъ даннаго полинома.

Какъ мы видѣли, при этомъ пріемѣ могутъ получаться частные алгебраическіе интегралы, зависящіе отъ нѣсколькихъ произвольныхъ постоянныхъ. Можетъ случиться, что такой интегралъ разлагается на произведеніе нѣсколькихъ множителей. Каждый множитель будетъ также зависѣть линейно отъ произвольныхъ постоянныхъ. Въ случаѣ неприводимости его при произвольныхъ значеніяхъ постоянныхъ могутъ существовать такія соотношенія, что онъ дѣлается приводимымъ, и мы можемъ получить изъ него частные алгебраическіе интегралы низшаго порядка.

Только что изложенный процессъ полученія частныхъ алгебраическихъ интеграловъ найдетъ себѣ примѣненіе въ вопросѣ полученія частныхъ алгебраическихъ интеграловъ даннаго порядка n.

Напишемъ въ какомъ нибудь порядкѣ всѣ одночлены измѣренія n, составленные изъ перемѣнныхъ x_i. Обозначимъ ихъ послѣдовательно черезъ B_{1i} $(i=1, 2, \ldots, s)$, гдѣ s будетъ равно $\binom{p+n-1}{p-1}$, и составимъ полиномъ

$$F(x) \equiv \sum_{i=1}^{s} C_i B_{1i}, \tag{5}$$

гдѣ C_i произвольныя постоянныя. Это будетъ, очевидно, общій полиномъ n-го порядка и при частныхъ значеніяхъ постоянныхъ C_i можетъ пред-

ставить какой угодно полиномъ n-го порядка, въ частности любой изъ частныхъ алгебраическихъ интеграловъ порядка n изучаемой нами системы.

Слѣдовательно мы можемъ примѣнить къ этому полиному $F(x)$ только что изложенный процессъ и получимъ всѣ частные алгебраическіе интегралы порядка n.

Обратимъ вниманіе на слѣдующее свойство частныхъ алгебраическихъ интеграловъ, вытекающее изъ только что изложеннаго. Всѣ они получаются разложеніемъ на множители частныхъ же алгебраическихъ интеграловъ, коэффиціенты которыхъ раціональны относительно коэффиціентовъ полиномовъ X_i. Это слѣдуетъ изъ того обстоятельства, что всѣ операціи для ихъ полученія носятъ раціональный характеръ. Соотвѣтствующій имъ полиномъ K будетъ также раціональнымъ относительно тѣхъ-же коэффиціентовъ.

Этимъ обстоятельствомъ можно воспользоваться для полученія этихъ полиномовъ K.

Полиномы $K^{(g)}$, о которыхъ говорилось въ предыдущемъ параграфѣ, зависятъ вообще отъ ирраціональности, происходящей отъ опредѣленія особенныхъ точекъ и величинъ λ_{ij}. Опредѣливъ всѣ цѣлыя неотрицательныя числа v_g, для которыхъ суммма $\sum_{g=1}^{R} v_g K^{(g)}$ представитъ собой полиномъ, всѣ коэффиціенты котораго раціональны въ коэффиціентахъ полиномовъ X_i, мы получимъ рядъ полиномовъ m—1-го порядка, среди которыхъ будутъ находиться всѣ искомые полиномы K. При этомъ важно то обстоятельство, что порядокъ соотвѣтствующаго частнаго интеграла дается суммой $\sum_{g=1}^{R} v_g$.

Изложенный нами пріемъ важенъ еще въ другомъ отношеніи. Онъ приводитъ къ ряду полиномовъ, обладающихъ свойствомъ заключать въ себѣ въ видѣ множителя частные алгебраическіе интегралы.

Слѣдовательно эти полиномы даютъ всѣ элементы интеграла системы, если она имѣетъ интегралъ типа G. Darboux, и даже самый интегралъ, если онъ алгебраическій.

Отсюда видна важность изученія подобныхъ полиномовъ и несомнѣнна ихъ связь съ интегрированіемъ системы въ общемъ случаѣ.

Дадимъ примѣръ полученія такихъ полиномовъ.

Обозначимъ результатъ операціи X надъ полиномомъ B_{1i} черезъ B_{2i}, результатъ той-же операціи надъ полиномомъ B_{2i} черезъ B_{3i} и вообще XB_{ki} черезъ $B_{k+1,\,i}$.

Даемъ въ полиномѣ $F(x)$ постояннымъ C_i значенія коэффиціентовъ частнаго алгебраическаго интеграла $f(x)$ порядка n и пишемъ тождество:

$$\sum_{i=1}^{s} C_i B_{1i} = f(x). \tag{6}$$

На основаніи предыдущаго мы знаемъ, что и любой полиномъ $\sum_{i=1}^{s} C_i B_{ki}$ будетъ дѣлиться на него, каково бы ни было цѣлое число k, такъ какъ каждый получается изъ предыдущаго, какъ результатъ выполненной надъ нимъ операціи X. Обозначая частное отъ дѣленія полинома $\sum_{i=1}^{s} C_i B_{ki}$ на полиномъ $f(x)$ черезъ U_k, получаемъ рядъ тождествъ:

$$\sum_{i=1}^{s} C_i B_{ki} = U_k f. \tag{7}$$

Даемъ въ этихъ тождествахъ индексу k $s-1$ значеній: $2, 3, \ldots, s$.

По крайней мѣрѣ одинъ изъ коэффиціентовъ C_i отличенъ отъ нуля. Можно предположить безъ вреда для общности, что коэффиціентъ C_1 отличенъ отъ нуля.

Исключаемъ изъ s линейныхъ тождествъ (6) и (7) $s-1$ величинъ C_i $(i = 2, 3, \ldots, s)$. Результатъ напишется такъ:

$$C_1 \Phi_n(x) = V_k f,$$

гдѣ полиномъ $\Phi_n(x)$ есть ничто иное, какъ опредѣлитель

$$\sum \pm B_{11} B_{22} B_{33} \ldots B_{ss}.$$

Во всѣхъ случаяхъ, когда онъ неравенъ нулю, въ этомъ полиномѣ заключается произведеніе всѣхъ частныхъ алгебраическихъ интеграловъ порядка n.

Замѣтимъ между прочимъ, что этотъ полиномъ обращается тождественно въ нуль, если существуетъ частный алгебраическій интегралъ порядка n, зависящій отъ произвольной постоянной, т. е. исчезновеніе этого полинома есть одно изъ условій существованія интеграла n-го порядка для системы

$$\sum_{i=1}^{p} X_i \frac{\partial z}{\partial x_i} = 0.$$

Такіе полиномы $\Phi_n(x)$ принадлежатъ къ типу точечныхъ коваріантовъ коннекса

$$\sum_{i=1}^{p} X_i u_i = 0. \tag{8}$$

Такъ какъ извѣстно, что и въ этомъ случаѣ всѣ эти полиномы, какъ бы ни было велико число n, выражаются раціонально черезъ конечное число наиболѣе простыхъ точечныхъ коваріантовъ коннекса (8), то изученіе подобныхъ полиномовъ пріобрѣтаетъ большой интересъ въ видахъ конечнаго, въ частности алгебраическаго интегрированія.

Съ этими полиномами связаны также разныя проективныя свойства интегральныхъ кривыхъ.

Приведу примѣръ:

Положимъ $p = 3$ и опредѣлимъ полиномъ $\Phi_1(x)$. Нетрудно видѣть, что его можно представить въ видѣ опредѣлителя

$$\Phi_1(x) \equiv \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ X_1 & X_2 & X_3 \\ XX_1 & XX_2 & XX_3 \end{vmatrix}$$

гдѣ X обозначаетъ операцію

$$\sum_{i=1}^{3} X_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Обозначимъ теперь черезъ $\varphi(x)$ однородный интегралъ нулевого измѣренія уравненія:

$$X_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + X_3 \frac{\partial z}{\partial x_3} = 0.$$

Тогда уравненіе

$$\Phi_1(x) = 0$$

представитъ собой геометрическое мѣсто всѣхъ точекъ перегиба семейства кривыхъ

$$\varphi(x) = C,$$

гдѣ C произвольная постоянная.

§ 7. Опредѣленіе линейныхъ частныхъ интеграловъ.

Предположимъ въ тождествѣ

$$\sum_{i=1}^{p} X_i \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = Kf(x) \tag{1}$$

полиномъ $f(x)$ линейнымъ.

Замѣтивъ, что тогда его вторыя производныя тождественно равны нулю, подвергаемъ обѣ части этого тождества операціи $A^{(1)}$ и получаемъ такое:

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} A^{(1)} X_i = fA^{(1)}K + KA^{(1)}f \tag{2}$$

Такъ какъ оно должно имѣть мѣсто при какихъ угодно значеніяхъ перемѣнныхъ y_i, то оно эквивалентно p слѣдующимъ тождествамъ:

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \frac{\partial X_i}{\partial x_j} - K \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} = f(x) \frac{\partial K}{\partial x_j}. \quad {\scriptstyle j=1,\,2,\ldots,p} \tag{3}$$

Кромѣ того, теорема объ однородныхъ функціяхъ Ейлера даетъ тождество:

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} x_i = f_i. \tag{4}$$

Обозначимъ первый опредѣлитель матриссы:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} - K, & \frac{\partial X_1}{\partial x_2} & \frac{\partial X_1}{\partial x_3} & \ldots & \frac{\partial X_1}{\partial x_p} & x_1 \\ \frac{\partial X_2}{\partial x_1} & \frac{\partial X_2}{\partial x_2} - K, & \frac{\partial X_2}{\partial x_3} & \ldots & \frac{\partial X_2}{\partial x_p} & x_2 \\ \frac{\partial X_3}{\partial x_1} & \frac{\partial X_3}{\partial x_2} & \frac{\partial X_3}{\partial x_3} - K & \ldots & \frac{\partial X_3}{\partial x_p} & x_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & . \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & . \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & . \\ \frac{\partial X_p}{\partial x_1} & \frac{\partial X_p}{\partial x_2} & \frac{\partial X_p}{\partial x_3} & \ldots & \frac{\partial X_p}{\partial x_p} - K, & x_p \end{vmatrix} \tag{5}$$

черезъ Δ, а опредѣлители, полученные выбрасываніемъ i-го столбца изъ p первыхъ, черезъ Δ_i.

Замѣтивъ, что можемъ предположить производную $\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}$ безъ вреда для общности отличной отъ нуля, исключаемъ изъ тождествъ (3) остальныя производныя $\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$ $(i = 2, 3, \ldots, p)$ и получаемъ тождество типа

$$\Delta \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = Uf, \tag{6}$$

гдѣ U нѣкоторый полиномъ.

Это тождество показываетъ, что Δ дѣлится на полиномъ $f(x)$.

Замѣнивъ q-е тождество изъ числа тождествъ (3) посредствомъ тождества (4) и произведя тоже исключеніе, получимъ тождество типа:

$$\Delta_q \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = U_q f(x), \quad q = 1, 2, \ldots, p. \tag{7}$$

которое показываетъ, что и остальные опредѣлители матриссы (5) дѣлятся на полиномъ $f(x)$.

Итакъ, если въ матриссѣ (5) полиномъ K будетъ извѣстенъ и не обратитъ въ нуль всѣхъ ея опредѣлителей, то соотвѣтствующій частный линейный интегралъ найдется, какъ множитель одного изъ нихъ.

Развернемъ опредѣлитель Δ по степенямъ полинома K. Получаемъ:

$$\Delta \equiv K^p + \sum_{i=1}^{p} V_i K^{p-i}.$$

Развертывая Δ_q, находимъ:

$$\Delta_q \equiv x_q K^{p-1} + \sum_{i=1}^{p-1} V_{qi} K^{p-1-i}, \tag{8}$$

гдѣ V_i и V_{qi} полиномы $(m-1)\, i + 1$-го порядка относительно перемѣнныхъ x_i.

Полиномъ Δ можетъ оказаться приводимымъ при какомъ угодно значеніи полинома K.

Тогда полиномъ $f(x)$ раздѣлитъ одинъ изъ этихъ множителей.

Разсмотримъ сначала случай, когда полиномъ $f(x)$ дѣлитъ линейный множитель, т. е. множитель вида $K - S$, гдѣ S вполнѣ опредѣленный полиномъ m—1-го порядка.

Представимъ полиномы Δ_q въ такомъ видѣ:

$$(K-S)\left[\frac{K^{p-1} - S^{p-1}}{K-S} x_q + \sum_{i=1}^{p-2} V_{qi} \frac{K^{p-1-i} - S^{p-1-i}}{K-S}\right] +$$

$$+ x_q S^{p-1} + \sum_{i=1}^{p-1} V_{qi} S^{p-i-1}.$$

Мы видимъ, что первая сумма, имѣя множителемъ полиномъ $K-S$, дѣлится на полиномъ $f(x)$ и слѣдовательно вторая сумма, представляющая результатъ подстановки $K=S$ въ полиномы Δ_q, также дѣлится на полиномъ $f(x)$ и въ томъ случаѣ, когда по крайней мѣрѣ одинъ изъ результатовъ такой подстановки не обращается въ нуль. Тогда изъ этого вполнѣ опредѣленнаго полинома выдѣляемъ полиномъ $f(x)$ по способу, предложенному въ предыдущемъ параграфѣ.

Если же всѣ полиномы

$$x_q S^{p-1} + \sum_{i=1}^{p-1} V_{qi} S^{p-i-1}$$

тождественно равны нулю, т. е. если полиномъ S будетъ такого свойства, что послѣ подстановки его вмѣсто полинома K въ матриссу (5) обращаются въ нуль всѣ ея опредѣлители, необходимо прибѣгнуть къ другому способу.

Тотъ же случай можно изслѣдовать слѣдующимъ образомъ:

Положимъ, что $K-S=Pf(x)$, и подставляемъ вмѣсто полинома K въ уравненіяхъ (3) $S+Pf(x)$. Въ результатѣ получаемъ:

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} - S \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} = \left(P + \frac{\partial K}{\partial x_j}\right) f$$

$$j=1, 2, \ldots, p.$$

Эти тождества показываютъ, что полиномъ $f(x)$ есть частный линейный интегралъ любого изъ уравненій:

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \frac{\partial z}{\partial x_i} - S \frac{\partial z}{\partial x_j} = 0 \tag{9}$$

Такъ какъ степени новыхъ коэффиціентовъ на единицу меньше, чѣмъ прежнихъ коэффиціентовъ X_i, то наша задача приведена къ болѣе простой, къ которой можно примѣнить вновь любой изъ пріемовъ для опредѣленія частныхъ линейныхъ интеграловъ.

Разсмотримъ теперь неприводимый множитель полинома Δ, нелинейный относительно полинома K.

Пусть это будетъ

$$\Phi(x) \equiv K^l + \sum_{i=1}^{l} E_i K^{l-i}.$$

Предполагаемъ теперь, что онъ дѣлится на полиномъ $f(x)$.

Будемъ разсматривать въ полиномахъ $\Phi(x)$ и Δ_q $(q=1, 2, \ldots, p)$ полиномъ K, какъ простую перемѣнную и въ этомъ предположеніи дѣлимъ всѣ полиномы Δ_q на полиномъ $\Phi(x)$ и предположимъ сначала, что по крайней мѣрѣ одинъ изъ полиномовъ Δ_q, напр. Δ_1, не дѣлится безъ остатка на полиномъ $\Phi(x)$. Тогда результанта двухъ уравненій

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= 0 \\ \Delta_1 &= 0 \end{aligned} \tag{10}$$

относительно перемѣнной K будетъ отлична отъ нуля, и мы можемъ показать, что она будетъ дѣлиться на полиномъ $f(x)$.

Множимъ полиномъ $\Phi(x)$ на $I, K, K^2, \ldots, K^{p-2}$, а полиномъ Δ_1 на $I, K, K^2, \ldots, K^{l-1}$ и получаемъ $p+l-1$ полиномовъ, дѣлящихся на полиномъ $f(x)$, и слѣдовательно можемъ написать рядъ такихъ равенствъ:

$$\Phi(x) K^j = f M_j$$
$$j=0, 1, 2, \ldots p-2.$$

$$\Delta_1 K^g = f M_{p-1+g}$$
$$g=0, 1, 2, \ldots, l-1.$$

Можно разсматривать полученныя равенства, какъ линейныя уравненія относительно степеней K^i $(i=0, 1, 2, \ldots, p+l-2)$ полинома K. Вторыя части ихъ дѣлятся всѣ на полиномъ $f(x)$, поэтому долженъ дѣлиться на него и опредѣлитель этихъ уравненій, а послѣдній— ничто иное, какъ результанта уравненій (10), представленная въ видѣ опредѣлителя по діалитической методѣ Сильвестра.

Заключенные въ этой результантѣ въ видѣ множителей частные интегралы могутъ быть выдѣлены по способу предыдущаго параграфа.

Въ томъ же случаѣ, когда полиномъ Δ_1 дѣлится безъ остатка на полиномъ $\Phi(x)$, каковъ бы ни былъ полиномъ K, эта результанта будетъ нулемъ, и тогда надо прибѣгнуть къ другому способу.

И въ этомъ случаѣ неприводимаго множителя $\Phi(x)$ можно преобразовать уравненія (3) такъ, что коэффиціенты при частныхъ производныхъ $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ будутъ зависѣть только отъ полиномовъ $\frac{\partial X_i}{\partial x_j}$ и также извѣстныхъ намъ полиномовъ E_i; но эти коэффиціенты будутъ уже порядка $l(m-1)$-го. Ими также можно воспользоваться для полученія частнаго интеграла $f(x)$, но въ виду сравнительной сложности я не буду на этомъ останавливаться.

Наконецъ замѣтимъ, что если полиномъ Δ будетъ неприводимъ при какомъ угодно значеніи полинома K, то результанта уравненія

$$\Delta = 0$$

и любого изъ уравненій

$$\Delta_q = 0 \qquad q = 1, 2, \ldots, p$$

относительно полинома K будетъ отлична отъ нуля и слѣдовательно будетъ заключать въ себѣ всѣ частные линейные интегралы изучаемой системы.

Перейдемъ къ случаю, когда существуетъ безконечное число частныхъ линейныхъ интеграловъ. Это будетъ всякій разъ, какъ мы видѣли, если одному и тому же полиному K соотвѣтствуютъ два частныхъ линейныхъ интеграла.

Предположимъ поэтому, что линейный полиномъ $f_1(x)$ удовлетворяетъ, какъ и полиномъ $f(x)$, тождеству

$$\sum_{i=1}^{p} X_i \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_i} = K f_1.$$

Сверхъ того имѣемъ также:

$$\sum_{i=1}^{p} x_i \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_i} = f,$$

и

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_i} \frac{\partial X_i}{\partial x_j} - K \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_j} = f_1(x) \frac{\partial K}{\partial x_j}$$

$$j = 1, 2, \ldots, p.$$

Изъ совокупности этихъ уравненій, какъ и для полинома $f(x)$, получаемъ такія тождества:

$$\Delta \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} = U f_1(x)$$

и

$$\Delta_q \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} = U_q f_1(x)$$

$$q = 1, 2, \ldots, p.$$

Исключая изъ полученныхъ равенствъ и равенствъ (6) и (7) полиномы U и U_q, находимъ такія:

$$\Delta \left[f_1(x) \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} - f(x) \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} \right] = 0$$

и

$$\Delta_q \left[f_1(x) \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} - f(x) \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} \right] = 0.$$

Но имѣя въ виду, что полиномы $f(x)$ и $f_1(x)$ только тогда могутъ быть линейно зависимы, когда они представляютъ собой одинъ и тотъ же частный линейный интегралъ, убѣждаемся, что второй множитель не равенъ нулю, а потому имѣемъ:

$$\Delta = 0$$

$$\Delta_q = 0 \qquad q = 1, 2, \ldots, p.$$

Отсюда слѣдуетъ, что если полиному K соотвѣтствуетъ болѣе одного частнаго линейнаго интеграла, онъ—общій корень $p+1$ уравненій, получаемыхъ приравниваніемъ нулю всѣхъ опредѣлителей матриссы (5).

Это предложеніе даетъ возможность найти полиномъ K. Соотвѣтствующіе ему частные линейные интегралы могутъ быть найдены по пріемамъ 5-го параграфа.

Тождество (2) можно использовать еще другимъ способомъ. Замѣняемъ сначала производныя $\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$ на основаніи равенства:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = \frac{\partial A^{(1)} f(x)}{\partial y_i}$$

и получаемъ равенство:

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial A^{(1)} f(x)}{\partial y_i} A^{(1)} X_i = f(x) A^{(1)} K + K A^{(1)} f(x).$$

Давая затѣмъ въ немъ перемѣннымъ x_i $(i = 1, 2, \ldots, p)$ значенія, обращающія въ нуль полиномъ $f(x)$, и замѣчая, что по формулѣ (III) перваго параграфа $A^{(1)} f(x) = f(y)$, приходимъ къ такому равенству:

$$\sum_{i=1}^{p} (A^{(1)} X_i) \frac{\partial f(y)}{\partial x_i} = (K) f(y), \tag{11}$$

гдѣ скобки, въ которыхъ поставлены полиномы $A^{(1)} X_i$ и K, обозначаютъ, что для перемѣнныхъ x_i взяты такія значенія, которыя обращаютъ въ нуль полиномъ $f(x)$, другими словами, эти перемѣнныя связаны соотношеніемъ

$$f(x) = 0.$$

Можно разсматривать это равенство, какъ уравненіе, опредѣляющее линейный полиномъ $f(y)$, другими словами, полиномъ $f(y)$ будетъ частнымъ интеграломъ системы:

$$\frac{dy_1}{(A^{(1)} X_1)} = \frac{dy_2}{(A^{(1)} X_2)} = \ldots = \frac{dy_p}{(A^{(1)} X_p)} \tag{12}$$

Задача опредѣленія частныхъ линейныхъ интеграловъ для этой системы уже рѣшена, и значитъ достаточно только знать одну изъ точекъ искомаго интеграла, чтобы получить его при помощи уравненія (11).

Остановимся сначала на нѣкоторыхъ деталяхъ рѣшенія.

По теоремѣ Эйлера имѣемъ:

$$\sum_{i=1}^{p} y_i \frac{\partial f}{\partial y_i} = f(y). \tag{13}$$

Вносимъ это разложеніе полинома $f(y)$ въ тождество (11) и, замѣчая, что оно справедливо при какихъ угодно значеніяхъ перемѣнныхъ y_i, находимъ:

$$\sum_{i=1}^{p} \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_j}\right) \frac{\partial f(y)}{\partial y_i} - (K) \frac{\partial f(y)}{\partial y_j} = 0. \tag{14}$$

Кромѣ того, такъ какъ подстановка $y_i = x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$ обращаетъ полиномъ $f(y)$ въ нуль, имѣемъ

$$\sum_{i=1}^{p} x_i \frac{\partial f}{\partial y_i} = 0. \tag{15}$$

Только что полученное уравненіе (15) и уравненія (14) линейны и однородны относительно производныхъ $\frac{\partial f(y)}{\partial y_i}$, а потому всѣ опредѣлители матриссы

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1} - K\right) & \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_2}\right) & \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_3}\right) & \ldots & \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_p}\right) & x_1 \\ \left(\frac{\partial X_2}{\partial x_1}\right) & \left(\frac{\partial X_2}{\partial x_2} - K\right) & \left(\frac{\partial X_2}{\partial x_3}\right) & \ldots & \left(\frac{\partial X_2}{\partial x_p}\right) & x_2 \\ \left(\frac{\partial X_3}{\partial x_1}\right) & \left(\frac{\partial X_3}{\partial x_2}\right) & \left(\frac{\partial X_3}{\partial x_3} - K\right) & \ldots & \left(\frac{\partial X_3}{\partial x_p}\right) & x_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & . \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & . \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & . \\ \left(\frac{\partial X_p}{\partial x_1}\right) & \left(\frac{\partial X_p}{\partial x_2}\right) & \left(\frac{\partial X_p}{\partial x_3}\right) & \ldots & \left(\frac{\partial X_p}{\partial x_p} - K\right) & x_p \end{vmatrix} \tag{16}$$

равны нулю.

Сравнивая эту матриссу съ матриссой (5), мы видимъ, что перемѣнныя x_i имѣютъ въ ней спеціальныя значенія, а именно тѣ, которыя обращаютъ въ нуль частный линейный интегралъ.

Это свойство опредѣлителей только что написанной матриссы обращаться въ нуль для всѣхъ точекъ частнаго линейнаго интеграла— эквивалентно, очевидно, полученному уже нами свойству опредѣлителей матриссы (5) дѣлиться на частный линейный интегралъ $f(x)$.

Если выбранная точка такова, что по крайней мѣрѣ одинъ изъ первыхъ миноровъ матриссы (16) не равенъ нулю, то $p-1$ изъ уравненій (14) и (15) будутъ независимы и дадутъ опредѣленныя значенія для коэффиціентовъ частнаго линейнаго интеграла. Мы можемъ представить его въ видѣ опредѣлителя; для этого поступаемъ слѣдующимъ образомъ. Беремъ такой изъ опредѣлителей матриссы (16), который заключаетъ въ себѣ необращающійся въ нуль миноръ, и всѣ элементы того столбца, который не заключаетъ элементовъ необращающагося въ нуль минора, замѣнимъ черезъ $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_p$.

Если же взятая нами точка x_i такова, что всѣ миноры до k-го порядка матриссы (16) обращаются въ нуль, то въ соотвѣтствующее выраженіе частнаго линейнаго интеграла войдетъ извѣстное число произвольныхъ постоянныхъ.

Перейдемъ теперь къ опредѣленію точекъ, обращающихъ въ нуль частный линейный интегралъ.

Легко убѣдиться, что существуютъ особенныя точки, которыя обращаютъ въ нуль частный алгебраическій интегралъ $f(x)$ любой степени [1]).

Какъ мы видѣли въ § 4, особенныя точки опредѣляются уравненіями:

$$X_i = \lambda x_i \qquad i=1, 2, \ldots, p \tag{17}$$

Множимъ обѣ части написанныхъ уравненій на $\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$ и суммируемъ по индексу i отъ 1 до p включительно. Въ результатѣ получаемъ:

$$\sum_{i=1}^{p} X_i \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = \lambda \sum_{i=1}^{p} x_i \frac{\partial f(x)}{\partial x_i},$$

или, принимая во вниманіе, что $f(x)$ частный алгебраическій интегралъ:

$$Kf(x) = n\lambda f(x).$$

Изъ послѣдняго равенства слѣдуетъ, что всѣ особенныя точки, не обращающія въ нуль полинома $f(x)$, удовлетворяютъ условію

$$K = n\lambda,$$

[1]) Ср. Д. М. Синцовъ. Теорія коннексовъ въ пространствѣ, стр. 253.

и слѣдовательно такимъ уравненіямъ:

$$nX_i = Kx_i$$
$$i=1, 2, \ldots, p.$$

Если всѣ особенныя точки различны, то число особенныхъ точекъ, удовлетворяющихъ только что написаннымъ уравненіямъ не можетъ быть больше m^{p-1} и слѣдовательно общее число особенныхъ точекъ, обращающихъ въ нуль данный частный алгебраическій интегралъ, не можетъ быть меньше $\frac{m^{p-1}-1}{m-1}$.

Въ случаѣ совпаденія особенныхъ точекъ и также безконечнаго числа ихъ, доказательство будетъ много сложнѣе и мы не будемъ останавливаться на выводѣ его для общаго случая. Что же касается случая $n=1$, то благодаря отсутствію кратныхъ точекъ у линейнаго полинома, доказательство упрощается.

Прежде всего мы можемъ предположить, что производная $\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}$ не равна нулю.

Уравненія:

$$f(x) = 0$$
$$X_i = \lambda x_i \qquad i=2, 3, \ldots, p.$$

допустятъ по крайней мѣрѣ одно рѣшеніе $x_i = a_i$ $(i=1, 2, \ldots, p)$. Покажемъ, что это рѣшеніе даетъ особенную точку. Обозначимъ результатъ подстановки $x_i = a_i$ $(i=1, 2, \ldots, p)$ въ полиномы K, $f(x)$, X_i соотвѣтственно черезъ $K(a)$, $f(a)$, и A_i.

Прежде всего имѣемъ:

$$A_i = \lambda a_i \qquad i=2, 3, \ldots, p. \tag{18}$$

Умножая эти равенства на $\frac{\partial f(a)}{\partial a_i}$ и суммируя по индексу i отъ 2 до p включительно, находимъ:

$$\sum_{i=2}^{p} A_i \frac{\partial f(a)}{\partial a_i} = \lambda \sum_{i=2}^{p} a_i \frac{\partial f(a)}{\partial a_i} \tag{19}$$

Но съ другой стороны

$$\sum_{i=1}^{p} A_i \frac{\partial f(a)}{\partial a_i} = K(a) f(a) = 0,$$

и

$$\sum_{i=1}^{p} a_i \frac{\partial f(a)}{\partial a_i} = f(a) = 0.$$

Отсюда

$$\sum_{i=2}^{p} A_i \frac{\partial f(a)}{\partial y_i} = -A_1 \frac{\partial f(a)}{\partial a_1}$$

$$\sum_{i=2}^{p} a_i \frac{\partial f(a)}{\partial a_i} = -a_1 \frac{\partial f(a)}{\partial a_1}.$$

Внеся полученныя выраженія суммъ въ равенство (19), получаемъ равенство:

$$-A_1 \frac{\partial f(a)}{\partial a_1} = -\lambda a_1 \frac{\partial f(a)}{\partial a_1},$$

или, такъ какъ величина $\frac{\partial f(a)}{\partial a_1}$ равная $\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}$ — не нуль, то

$$A_1 = \lambda a_1,$$

которое совмѣстно съ равенствами (18) показываетъ, что точка a_i $(i = 1, 2, \ldots, p)$ особенная.

Итакъ мы убѣдились, что по крайней мѣрѣ одна изъ особенныхъ точекъ системы обратитъ въ нуль данный частный линейный интегралъ. Отсюда слѣдуетъ, что, если мы будемъ подставлять значенія, опредѣляющія особенныя точки, въ только что полученныя выраженія, мы обязательно найдемъ среди нихъ и искомый частный линейный интегралъ. Слѣдовательно получимъ рядъ линейныхъ выраженій, среди которыхъ находятся всѣ частные линейные интегралы. Конечно нѣкоторыя изъ этихъ выраженій, а можетъ быть и всѣ могутъ не быть частными интегралами. Провѣрка этого обстоятельства, а также дальнѣйшее изслѣдованіе линейныхъ выраженій, заключающихъ произвольныя постоянныя, не представляютъ новыхъ трудностей, и на этомъ мы не будемъ останавливаться.

Этотъ способъ замѣчателенъ тѣмъ, что онъ представляетъ собой прямое обобщеніе примѣняемаго теперь способа опредѣленія частныхъ линейныхъ интеграловъ для случая $m = 1$.

Затѣмъ онъ даетъ возможность судить объ ирраціональности, отъ которой могутъ зависѣть коэффиціенты частнаго линейнаго интеграла, и указываетъ на связь между корнями характеристическихъ уравненій, дающихъ величины λ_{ij} для каждой особенной точки, а также позволяетъ изучать a priori тѣ группы, которыя могутъ составлять частные линейные интегралы.

§ 8. Система съ линейными интегралами. Общія заключенія.

Допустимъ, что уравненіе:

$$\sum_{i=1}^{p} X_i \frac{\partial z}{\partial x_i} = 0, \tag{1}$$

обладаетъ частнымъ алгебраическимъ интеграломъ, удовлетворяющимъ тождеству:

$$\sum_{i=1}^{p} X_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = Kf. \tag{2}$$

Общее линейное преобразованіе однородныхъ перемѣнныхъ можетъ быть разбито на рядъ преобразованій слѣдующаго типа [1]):

$$\begin{gathered} y_j = x_j \\ {\scriptstyle j=1,\,2,\ldots,\,p-1,} \\ y_p = x_p + \sum_{i=1}^{p-1} l_i x_i. \end{gathered} \tag{3}$$

Поэтому для доказательства нѣкоторыхъ инваріантныхъ свойствъ достаточно пользоваться только имъ: доказанное будетъ справедливо и для самаго общаго преобразованія.

Разрѣшая взятыя нами формулы относительно перемѣнныхъ x_i, получимъ слѣдующія обратныя формулы преобразованія:

$$\begin{gathered} x_j = y_j \\ {\scriptstyle j=1,\,2,\ldots,\,p-1,} \\ x_p = y_p - \sum_{i=1}^{p-1} l_i y_i. \end{gathered} \tag{4}$$

Преобразуемъ оба уравненія (1) и (2) къ новымъ перемѣннымъ.

Ради этого произведемъ въ полиномѣ f и функціи z замѣну перемѣнныхъ x_i на новыя y_i помощью формулъ (4) и обозначимъ это скобками, такъ что символы (f) и (z) представятъ собой результаты этой замѣны. Можно символы (f) и (z) разсматривать, какъ неявныя функціи перемѣнныхъ x_i черезъ посредство формулъ (3), тогда онѣ станутъ равными $f(x)$ и z.

Обозначивъ, какъ прежде, черезъ X операцію

$$\sum_{i=1}^{p} X_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

---

[1]) Ср. мою работу. Частные алгебраическіе интегралы, стр. 1—6.

подвергаемъ ей полиномъ f и функцію (z) въ этомъ предположеніи; тогда получаемъ:

$$\sum_{i=1}^{p} X_i \frac{\partial z}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial (z)}{\partial y_i} X y_i = 0$$

и

$$\sum_{i=1}^{p} X_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial (f)}{\partial y_i} X y_i = Kf.$$

y_i, какъ функціи перемѣнныхъ x_i, даются формулами (3); поэтому Xy_i результаты операціи X будутъ слѣдующіе:

$$Xy_i = X_i$$
$$i = 1, 2, \ldots, p-1$$
$$Xy_p = \sum_{i=1}^{p-1} X_i l_i + X_p \tag{5}$$

Произведемъ во вторыхъ частяхъ этихъ формулъ замѣну перемѣнныхъ x_i на перемѣнныя y_i помощью формулъ (4) и обозначимъ ее снова скобками, такъ что

$$Xy_i = Y_i = (X_i)$$
$$i = 1, 2, \ldots, p-1$$
$$Xy_p = Y_p = \sum_{i=1}^{p-1} (X_i) l_i + (X_p)$$

и получимъ наши уравненія (1) и (2) окончательно преобразованными въ такой формѣ:

$$\sum_{i=1}^{p} Y_i \frac{\partial (z)}{\partial y_i} = 0 \tag{6}$$

и

$$\sum_{i=1}^{p} Y_i \frac{\partial (f)}{\partial y_i} = (K)(f).$$

Сравнивая эти два равенства между собою и съ первоначальными (1) и (2), убѣждаемся въ томъ, что линейное преобразованіе преобразуетъ частный алгебраическій интегралъ уравненія (1) въ частный же алгебраическій интегралъ преобразованнаго уравненія (6).

Прибавимъ теперь къ выбранному нами линейному преобразованію условіе, что сумма $\sum_{i=1}^{p-1} l_i x_i + x_p$ будетъ частнымъ алгебраическимъ интеграломъ уравненія (1), т. е. будетъ удовлетворять тождеству:

$$X\left(\sum_{i=1}^{p-1} l_i x_i + x_p\right) = K_1\left(\sum_{i=1}^{p} l_i x_i + x_p\right).$$

Принимая во вниманіе формулу (5) и послѣднюю изъ формулъ (3), пишемъ.

$$Xy_p = \sum_{i=1}^{p-1} X_i l_i + X_p = K_1 y_p.$$

Отсюда окончательно получаемъ

$$Y_p = \sum_{i=1}^{p-1} (X_i) l_i + (X_p) = (K_1) y_p.$$

Полученная формула показываетъ, что, если уравненіе (1) имѣетъ частный линейный интегралъ, то его всегда можно преобразовать помощью линейнаго преобразованія, такъ что коэффиціентъ при производной по одной изъ перемѣнныхъ будетъ дѣлиться на эту перемѣнную.

Можно воспользоваться этимъ обстоятельствомъ для упрощенія полученія частныхъ алгебраическихъ интеграловъ.

Въ самомъ дѣлѣ, предполагаемъ, что наша система такова и уже приведена къ виду, при которомъ коэффиціентъ $X_p = x_p X_p^{(2)}$.

Прежде всего группа особенныхъ точекъ становится приводимой.

При нашемъ новомъ предположеніи напишемъ полиномы X_i въ такомъ видѣ:

$$X_i = X_i^{(1)} + x_p X_i^{(2)}$$
$$i = 1, 2, \ldots, p-1$$
$$X_p = x_p X_p^{(2)},$$

гдѣ $X_i^{(1)}$ полиномы однихъ перемѣнныхъ x_i $(i = 1, 2, \ldots, p-1)$.

Уравненія, опредѣляющія особенныя точки будутъ слѣдующія:

$$X_i^{(1)} + x_p X_i^{(2)} = \lambda x_i$$
$$i = 1, 2, \ldots, p-1 \qquad (7)$$
$$x_p X_p^{(2)} = \lambda x_p.$$

Послѣднее произведеніе можно представить въ такомъ видѣ:

$$x_p (X_p^{(2)} - \lambda) = 0.$$

Отсюда слѣдуетъ, что особенныя точки разбиваются на двѣ группы: для одной

$$x_p = 0,$$

для другой

$$\lambda = X_p^{(2)};$$

и слѣдовательно одна группа дается уравненіями

$$X_i^{(1)} = \lambda x_i$$
$$i = 1, 2, \ldots, p-1,$$
$$x_p = 0, \tag{8}$$

а другая уравненіями

$$X_i^{(1)} + x_p X_i^{(2)} = X_p^{(2)} x_i$$
$$i = 1, 2, \ldots, p-1$$

Мы примѣняли особенныя точки для полученія полинома K. Представляемъ его въ видѣ $K^{(1)} + x_p K_2$, гдѣ $K^{(1)}$ полиномъ однихъ перемѣнныхъ x_i $(i = 1, 2, \ldots, p-1)$. Покажемъ, что для опредѣленія полинома $K^{(1)}$ достаточно первой группы особенныхъ точекъ.

Представляемъ частный алгебраическій интегралъ въ видѣ $f^{(1)} + x_p f_2$, гдѣ полиномъ $f^{(1)}$ не зависитъ отъ перемѣнной x_p. Тогда условіе, что этотъ полиномъ—частный интегралъ, напишется въ такомъ видѣ:

$$\sum_{i=1}^{p-1} X_i^{(1)} \frac{\partial (f^{(1)} + x_p f_2)}{\partial x_i} + x_p \sum_{i=1}^{p} X_i^{(2)} \frac{\partial (f^{(1)} + x_p f_2)}{\partial x_i} = \tag{9}$$
$$= (K^{(1)} + x_p K_2)(f^{(1)} + x_p f_2)$$

Полагая въ этомъ тождествѣ перемѣнную x_p равной нулю, получаемъ тождество:

$$\sum_{i=1}^{p-1} X_i^{(1)} \frac{\partial f^{(1)}}{\partial x_i} = K^{(1)} f^{(1)}, \tag{10}$$

которое опредѣляетъ, какъ полиномъ $K^{(1)}$, такъ и полиномъ $f^{(1)}$.

Но полиномъ $K^{(1)}$, можно опредѣлить при помощи особенныхъ точекъ, опредѣляемыхъ уравненіями:

$$X_i^{(1)} = \lambda x_i$$
$$i = 1, 2, \ldots, p-1.$$

Если прибавимъ къ нимъ уравненіе $x_p = 0$, то получимъ какъ разъ уравненія (8), чѣмъ и доказывается наше утвержденіе.

Если задана степень частнаго алгебраическаго интеграла n, то можно ограничиться опредѣленіемъ одного полинома $K^{(1)}$.

Прежде чѣмъ показать это, замѣнимъ уравненіе

$$\sum_{i=1}^{p-1} X_i \frac{\partial z}{\partial x_i} + x_p X_p^{(2)} \frac{\partial z}{\partial x_p} = 0 \tag{11}$$

инымъ, которое тѣмъ не менѣе имѣетъ всѣ тѣ же частные алгебраическіе интегралы.

Беремъ сначала уравненіе самымъ общимъ. Частный алгебраическій интегралъ f порядка n удовлетворяетъ двумъ тождествамъ:

$$\sum_{i=1}^{p} X_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = Kf$$

$$\sum_{i=1}^{p} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = nf.$$

Они эквивалентны двумъ слѣдующимъ:

$$\sum_{i=1}^{p} (X_i - x_i L) \frac{\partial f}{\partial x_i} = (K - nL) f$$

$$\sum_{i=1}^{P} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = nf,$$

гдѣ L обозначаетъ данный, но совершенно произвольный полиномъ m—1-го порядка.

Эти два тождества доказываютъ, что оба уравненія

$$\sum_{i=1}^{p} X_i \frac{\partial z}{\partial x_i} = 0$$

и

$$\sum_{i=1}^{p} (X_i - x_i L) \frac{\partial z}{\partial x_i} = 0$$

имѣютъ одни и тѣ же частные алгебраическіе интегралы.

Очевидно, что особенныя точки будутъ тѣ же для обѣихъ уравненій. Измѣняются только величины λ_j и λ_{ij}, а въ зависимости отъ нихъ и полиномъ K.

Можно воспользоваться введеніемъ полинома L такимъ образомъ, чтобы дать полиномамъ X_i наиболѣе удобный для насъ видъ. Можно напр. опредѣлить его такимъ образомъ, чтобы сумма $\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial X_i}{\partial x_i}$ была бы равна нулю.

Что же касается разсматриваемаго нами уравненія (11), то можно принять $L = X_p^{(2)}$ и уравненіе приведется къ виду

$$\sum_{i=1}^{p-1} X_i \frac{\partial z}{\partial x_i} = 0,$$

въ которомъ перемѣнная x_p входитъ уже въ видѣ простого параметра. Полагая $x_i = x_p\, y_i$ $(i = 1, 2, \ldots, p-1)$, мы приведемъ это уравненіе къ раціональному линейному уравненію въ частныхъ производныхъ безъ правой части съ $p-1$ неоднородными перемѣнными.

Такимъ образомъ приходимъ къ заключенію, что опредѣленіе частныхъ алгебраическихъ интеграловъ для уравненія въ p однородныхъ неизвѣстныхъ съ линейнымъ частнымъ интеграломъ эквивалентно задачѣ опредѣленія частныхъ алгебраическихъ интеграловъ съ $p-1$ неоднородными перемѣнными и обратно.

Точно также можно показать безъ особаго труда, что если уравненіе

$$\sum_{i=1}^{p} X_i \frac{\partial z}{\partial x_i} = 0,$$

имѣетъ k линейныхъ частныхъ интеграловъ, то оно приводится къ формѣ:

$$\sum_{i=1}^{k} x_i X_i^{(1)} \frac{\partial z}{\partial x_i} + \sum_{i=k+1}^{p} X_i \frac{\partial z}{\partial x_i} = 0.$$

Кромѣ того, когда ϱ независимыхъ частныхъ линейныхъ интеграловъ отвѣчаютъ одному и тому же полиному K, этому уравненію можно дать видъ

$$\sum_{i=1}^{p-\varrho} X_i \frac{\partial z}{\partial x_i} = 0,$$

гдѣ перемѣнныя x_i $(i = p-\varrho+1, p-\varrho+2, \ldots, p)$ будутъ играть роль параметровъ.

Во всѣхъ этихъ случаяхъ опредѣленіе частнаго интеграла даннаго порядка n значительно упрощается тѣмъ обстоятельствомъ, что рѣшеніе линейныхъ уравненій сводится къ послѣдовательному рѣшенію такихъ же уравненій, но съ меньшимъ числомъ перемѣнныхъ.

Для примѣра разберемъ въ общихъ чертахъ самый простой случай.

Положимъ:

$$X_i = \sum_{g=0}^{m} X_i^{(g)} x_p^g \qquad (12)$$

$$i = 1, 2, \ldots, p-1.$$

$$X_p = 0.$$

Очевидно, что для такого уравненія всякій частный алгебраическій интегралъ порядка $n_1 < n$, приведетъ къ частному алгебраическому интегралу $x_p^{n-n_1} f$ n-го порядка. Конечно достаточно ограничиться разысканіемъ тѣхъ, которые при $x_p = 0$ обращаются тождественно въ отличный отъ нуля полиномъ $f^{(0)}$, опредѣляемый, какъ мы раньше видѣли, уравненіемъ:

$$\sum_{i=1}^{p-1} X_i^{(0)} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial x_i} = K^{(0)} f^{(0)}. \qquad (13)$$

По способу, изложенному въ 1—4 параграфахъ, мы сможемъ опредѣлить полиномъ $K^{(0)}$.

Беремъ одно изъ полученныхъ для него значеній и опредѣляемъ полиномъ $f^{(0)}$ по способу пятаго параграфа.

Мы предположимъ, что при выбранномъ значеніи полинома $K^{(0)}$ не существуетъ полинома $f^{(0)}$ порядка меньше n, удовлетворяющаго тождеству (12), и существуетъ только одинъ полиномъ $f^{(0)}$ порядка n.

Не трудно убѣдиться, что при этомъ условіи (я не стану останавливаться на доказательствѣ) существуетъ только конечное число полиномовъ K и f, удовлетворяющихъ тождеству:

$$\sum_{i=1}^{p-1} X_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = Kf,$$

гдѣ полиномы X_i имѣютъ значенія, данныя равенствами (12), а полиномъ K при $x_p = 0$ обращается въ полиномъ $K^{(0)}$.

Мы можемъ предположить искомые полиномы f и K въ такомъ видѣ:

$$K = \sum_{g=0}^{m-1} K^{(g)} x_p^g$$

$$f = \sum_{h=0}^{n} f^{(h)} x_p^h$$

Тогда тождество, которому они удовлетворяютъ, напишется такъ:

$$\sum_{i=1}^{p-1}\left\{\sum_{g=0}^{m} X_i^{(g)} x_p^g\right\}\left\{\sum_{h=0}^{n} \frac{\partial f^{(h)}}{\partial x_i} x_p^h\right\} = \sum_{h=0}^{m-1} K^{(g)} x_p^g \sum_{h=0}^{n} f^{(h)} x_p^h.$$

Это тождество распадается на $m+n$ отдѣльныхъ, такъ какъ всѣ коэффиціенты при степеняхъ перемѣнной x_p должны равняться нулю по отдѣльности.

Можно написать ихъ всѣ въ такомъ видѣ:

$$\sum_{i=1}^{p-1}\sum_{g=0}^{r} X_i^{(g)} \frac{\partial f^{(r-g)}}{\partial x_i} = \sum_{g=0}^{r} K^{(g)} f^{(r-g)}, \tag{14}$$

гдѣ r должно принимать всѣ значенія отъ 0 до $m+n-1$ включительно, и при $g>m$ полиномы $X^{(g)}$ должны равняться нулю, точно также при $g>m-1$ полиномы $K^{(g)}$ равны нулю и наконецъ полиномы $f^{(h)}$ при $h>n$.

Первое изъ полученныхъ равенствъ (14) совпадаетъ съ уравненіемъ (12) и даетъ намъ по 5-му параграфу рядъ линейныхъ уравненій для опредѣленія коэффиціентовъ полинома $f^{(0)}$.

Второе напишется такъ:

$$\sum_{i=1}^{p-1} X_i^{(0)} \frac{\partial f^{(1)}}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{p-1} X_i^{(1)} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial x_i} = K^{(0)} f^{(1)} + K^{(1)} f^{(0)}$$

и дастъ меньшее число зависимостей между искомыми коэффиціентами, чѣмъ равенство (13). Эти зависимости будутъ линейны относительно коэффиціентовъ полиномовъ $f^{(1)}$ и $K^{(1)}$. Въ ихъ выраженія черезъ данныя задачи могутъ войти линейно и произвольныя постоянныя $C_j^{(1)}$.

Третье изъ равенствъ (14) напишется въ такомъ видѣ:

$$\sum_{i=1}^{p-1} X_i^{(0)} \frac{\partial f^{(2)}}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{p-1} X_i^{(1)} \frac{\partial f^{(1)}}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{p-1} X_i^{(2)} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial x_i} = K^{(0)} f^{(2)} + K^{(1)} f^{(1)} + K^{(2)} f^{(0)}$$

Оно даетъ еще меньше соотношеній. Они будутъ линейными относительно коэффиціентовъ полиномовъ $f^{(2)}$ и $K^{(2)}$, а произвольныя постоянныя $C_j^{(1)}$, которыя могутъ заключаться въ выраженіи коэффиціентовъ полиномовъ $f^{(1)}$ и $K^{(1)}$, войдутъ уже въ такомъ случаѣ во второй степени. Рѣшеніе дастъ, говоря вообще, нѣсколько соотношеній между постоянными $C_j^{(1)}$, получаемыхъ путемъ исключенія всѣхъ неизвѣстныхъ коэффиціентовъ полиномовъ $f^{(2)}$ и $K^{(2)}$ и выразитъ послѣдніе черезъ прежнія постоянныя $C_j^{(1)}$, и можетъ случиться, новыя $C_j^{(2)}$, которыя войдутъ линейно.

Продолжая такъ, выразимъ всѣ коэффиціенты полиномовъ K и f черезъ новыя неизвѣстныя постоянныя $C_j^{(1)}$, $C_j^{(2)}$, $C_j^{(3)}$ и т. д. и получимъ рядъ условій для ихъ опредѣленія. Въ виду принятыхъ нами предположеній полученныя условія могутъ быть либо несовмѣстны, либо дадутъ конечное число значеній для постоянныхъ $C_j^{(g)}$.

Опредѣленіе этихъ постоянныхъ потребуетъ рѣшенія уравненій высшихъ степеней, но въ данномъ случаѣ вопросъ облегчается тѣмъ, что корни этихъ уравненій выражаются раціонально черезъ значенія, опредѣляющія особенныя точки и черезъ величины λ_j и λ_{ij}.

Можно также не рѣшать этихъ уравненій, а примѣнить для окончательнаго опредѣленія полинома f пріемъ, указанный въ § 6.

Возможны и другія упрощенія.

Перейдемъ теперь къ общимъ заключеніямъ.

Въ тождество

$$Xf = Kf$$

входятъ при порядкѣ полинома f равномъ n неизвѣстные коэффиціенты полиномовъ f и K въ числѣ равномъ $\binom{n+p-1}{p-1} + \binom{m+p-1}{p-1}$, образуя произведенія по два.

Если бы мы составили уравненіе для опредѣленія какого-нибудь изъ коэффиціентовъ полинома K, то могли бы получить въ зависимости отъ числа n степень этого уравненія сколь угодно большой.

Теорія предварительнаго опредѣленія полинома K, изложенная въ первыхъ четырехъ параграфахъ и части пятаго, показываетъ, что такія уравненія приводимы, если мы къ области раціональности коэффиціентовъ полиномовъ X_i прибавимъ ирраціональности, которыя вводятся при опредѣленіи особенныхъ точекъ, т. е. при рѣшеніи уравненій

$$X_i = \lambda x_i$$
$$i = 1, 2, \ldots, p.$$

и при вычисленіи корней характеристическихъ уравненій, составленныхъ для линейныхъ касательныхъ коннексовъ въ особенныхъ точкахъ.

Сверхъ того дано выраженіе этихъ полиномовъ. Эти выраженія показываютъ, что число возможныхъ гипотезъ для полиномовъ K, отвѣчающихъ частнымъ алгебраическимъ интеграламъ порядка n *конечно* и кромѣ того опредѣленіе полиномовъ K можно считать законченнымъ, разъ они опредѣлены для случая $n = 1$.

При этихъ условіяхъ задача опредѣлить всѣ частные алгебраическіе интегралы даннаго порядка n сводится къ рѣшенію ряда линейныхъ алгебраическихъ уравненій. При этомъ оказывается между прочимъ, что одному полиному K можетъ отвѣчать безконечное число частныхъ алге-

браическихъ интеграловъ n-го порядка. Этотъ интересный случай связанъ непосредственно съ алгебраическими интегралами разсматриваемой системы.

Въ параграфѣ шестомъ я даю другой методъ для опредѣленія частныхъ алгебраическихъ интеграловъ даннаго порядка. Онъ приводитъ къ опредѣленію такихъ полиномовъ $\Phi_n(x)$, которые содержатъ искомыя интегралы въ видѣ множителей.

Изъ этого полинома можетъ быть выдѣленъ множитель, который самъ будетъ частнымъ интеграломъ.

Такъ какъ обѣ эти операціи, какъ составленіе полинома $\Phi_n(x)$, такъ и выдѣленіе изъ него множителя, частнаго интеграла,—раціональны, заключаемъ, что, если разсматриваемая нами система обладаетъ частнымъ алгебраическимъ интеграломъ, то она обладаетъ и такимъ, коэффиціенты котораго выражаются *раціонально* черезъ коэффиціенты полиномовъ X_i. Слѣдовательно и соотвѣтствующій ему полиномъ K также раціоналенъ относительно тѣхъ-же коэффиціентовъ. Такое свойство, между прочимъ, можетъ быть полезно, когда ищутся всѣ частные алгебраическіе интегралы, которыми обладаетъ система.

Въ настоящемъ параграфѣ показано, что существованіе линейнаго частнаго интеграла упрощаетъ задачу опредѣленія частнаго алгебраическаго интеграла даннаго порядка, поэтому въ предыдущемъ параграфѣ я даю два спеціальныхъ метода для опредѣленія линейныхъ частныхъ интеграловъ.

§ 9. Объ условіяхъ существованія алгебраическаго интеграла.

Займемся въ этомъ параграфѣ изученіемъ условій, при которыхъ система:

$$\frac{dx_1}{X_1}=\frac{dx_2}{X_2}=\frac{dx_3}{X_3}=\ldots=\frac{dx_p}{X_p} \tag{1}$$

или уравненіе

$$\sum_{i=1}^{p} X_i \frac{\partial z}{\partial x_i}=0\,, \tag{2}$$

гдѣ функціи X_i— однородные полиномы m-го порядка въ перемѣнныхъ x_i $(i=1\,,\,2\,,\ldots,p)$, обладаютъ интеграломъ въ видѣ частнаго двухъ однородныхъ же полиномовъ n-го порядка.

Условившись обозначать операцію

$$\sum_{i=1}^{p} X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

черезъ X, числитель интеграла черезъ f_1, а знаменатель черезъ f_2, можемъ написать условіе, что дробь $\frac{f_1}{f_2}$ — интегралъ системы (1) или уравненія (2) въ такомъ видѣ:

$$X\frac{f_1}{f_2}=\frac{f_2Xf_1-f_1Xf_2}{f_2^2}=0.$$

Отсюда

$$\frac{Xf_1}{f_1}=\frac{Xf_2}{f_2} \tag{3}$$

Но мы всегда можемъ предположить дробь $\frac{f_1}{f_2}$ приведенной къ простѣйшему виду и слѣдовательно полиномы f_1 и f_2 не имѣющими общаго дѣлителя; тогда тождество (3) возможно только при условіи, что обѣ дроби равны одному и тому же полиному, который мы обозначимъ черезъ K_1, и слѣдовательно получимъ два такихъ тождества:

$$\begin{aligned} Xf_1&=K_1f_1\\ Xf_2&=K_1f_2. \end{aligned} \tag{4}$$

Они показываютъ, что оба полинома f_1 и f_2 ничто иное, какъ два частныхъ алгебраическихъ интеграла одного и того же порядка, отвѣчающіе одному и тому-же полиному K.

Мы уже видѣли въ параграфѣ пятомъ, что и обратно два частныхъ алгебраическихъ интеграла такого типа приводятъ къ алгебраическому интегралу уравненія (2).

Замѣтивъ это, найдемъ условіе, чтобы существовалъ такой интегралъ, принимая порядокъ n полиномовъ f_1 и f_2 за данное число.

Напишемъ въ рядъ всѣ одночлены, составленные изъ перемѣнныхъ $x_i\,(i=1,\,2,\ldots,p)$ измѣренія n и обозначимъ ихъ послѣдовательно черезъ B_{1i} $(i=1,\,2,\ldots,s)$, гдѣ цѣлое число s представляетъ собой число всѣхъ такихъ одночленовъ, равное, какъ извѣстно, $\binom{p+n-1}{p-1}$.

Обозначимъ результатъ операціи X надъ одночленомъ B_{1i} черезъ B_{2i} и вообще результатъ операціи X надъ полиномомъ B_{ji} черезъ $B_{j+1,i}$.

При помощи операціи X изъ s одночленовъ B_{1i} $(i=1,\,2,\ldots,s)$ получимъ новый рядъ полиномовъ B_{2i}, изъ этого ряда тѣмъ же пріемомъ получимъ рядъ полиномовъ B_{3i}. Продолжая такимъ образомъ, получимъ s рядовъ полиномовъ.

Составимъ изъ нихъ такой опредѣлитель:

$$\begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & \dots & B_{1s} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & \dots & B_{2s} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & \dots & B_{3s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{s1} & B_{s2} & B_{s3} & \dots & B_{ss} \end{vmatrix}$$

Обозначимъ этотъ полиномъ черезъ $\Phi_{np}(x)$. Эти полиномы будутъ играть главную роль въ послѣдующемъ.

Давая въ суммѣ $\sum_{i=1}^{s} C_i B_i$ постояннымъ C_i опредѣленныя числовыя значенія, мы можемъ сдѣлать ее равной любому полиному n-го порядка.

Въ виду этого можемъ положить:

$$\sum_{i=1}^{s} C_i^{(1)} B_{1i} = f_1$$

и

$$\sum_{i=1}^{s} C_i^{(2)} B_{1i} = f_2$$

Умножая второе равенство на f_1 и вычитая результатъ изъ перваго, помноженнаго на f_2, получаемъ такое:

$$\sum_{i=1}^{s} (C_i^{(1)} f_2 - C_i^{(2)} f_1) B_{1i} = 0. \tag{5}$$

Подвергаемъ эту сумму операціи X и получаемъ въ результатѣ:

$$\sum_{i=1}^{s} (C_i^{(1)} X f_2 - C_i^{(2)} X f_1) B_{1i} + \sum_{i=1}^{s} (C_i^{(1)} f_2 - C_i^{(2)} f_1) X B_{1i} = 0.$$

На основаніи равенствъ (4) полиномы Xf_1, Xf_2 замѣняются произведеніями Kf_1, Kf_2, а полиномъ XB_{1i} выбраннымъ для него обозначеніемъ B_{2i}, и мы можемъ написать:

$$K \sum_{i=1}^{s} (C_i^{(1)} X f_2 - C_i^{(2)} f_1) B_{1i} + \sum_{i=1}^{s} (C_i^{(1)} f_2 - C_i^{(2)} f_1) B_{2i} = 0,$$

или въ силу равенства (5) просто:

$$\sum_{i=1}^{s}(C_i^{(1)}f_2 - C_i^{(2)}f_1)\,B_{2i} = 0.$$

Можно доказать, что и вообще

$$\sum_{i=1}^{s}(C_i^{(1)}f_2 - C_i^{(2)}f_1)\,B_{ji} = 0 \tag{6}$$

при j какомъ угодно цѣломъ.

Такъ какъ такое условіе, какъ мы уже убѣдились, имѣетъ мѣсто для $j = 1, 2$, то мы докажемъ общность нашего утвержденія, когда, исходя изъ справедливости его для индекса j, сумѣемъ доказать его существованіе и для индекса $j+1$.

Въ самомъ дѣлѣ, подвергнемъ равенство (6) операціи X и найдемъ сначала:

$$\sum_{i=1}^{s}(C_i^{(1)}Xf_2 - C_i^{(2)}Xf_1)\,B_{ji} + \sum_{i=1}^{s}(C_i^{(1)}f_2 - C_i^{(2)}f_1)\,XB_{ji} = 0.$$

Принимая снова во вниманіе равенства (4) и выбранное обозначеніе для полинома XB_{ji}, получаемъ:

$$K\sum_{i=1}^{s}(C_i^{(1)}f_2 - C_i^{(2)}f_1)\,B_{ji} + \sum_{i=1}^{s}(C_i^{(1)}f_2 - C_i^{(2)}f_1)\,B_{j+1,i} = 0,$$

или въ виду уравненія (6), находимъ окончательно:

$$\sum_{i=1}^{s}(C_i^{(1)}f_2 - C_i^{(2)}f_1)\,B_{j+1,i} = 0.$$

Итакъ можно давать въ равенствѣ (6) индексу j какое угодно цѣлое значеніе. Возьмемъ первыя s такихъ равенствъ:

$$\sum_{i=1}^{s}(C_i^{(1)}f_2 - C_i^{(2)}f_1)\,B_{ji} = 0 \cdot$$

$$j = 1, 2, 3, \ldots, s.$$

Можно ихъ разсматривать, какъ рядъ линейныхъ однородныхъ уравненій относительно выраженій $C_i^{(1)}f_2 - C_i^{(2)}f_1$. Но такъ какъ по крайней мѣрѣ одно изъ послѣднихъ отлично отъ нуля (иначе полиномъ f_2 представлялъ бы тотъ же самый частный интегралъ, что и полиномъ f_1)

опредѣлитель, составленный изъ коэффиціентовъ B_{ji}, долженъ равняться нулю. Этотъ опредѣлитель—ничто иное, какъ разсмотрѣнный выше полиномъ $\Phi_{np}(x)$ и онъ по только что доказанному долженъ обращаться въ нуль, если система (1) или уравненіе (2) имѣютъ интегралъ въ видѣ частнаго двухъ полиномовъ n-го порядка.

Какъ слѣдствіе только что приведенныхъ разсужденій, получаемъ мы такую теорему:

Для того, чтобы система (1) или уравненіе (2) имѣли интегралъ въ видѣ частнаго двухъ однородныхъ полиномовъ одного и того же порядка необходимо, чтобы одинъ изъ безконечнаго ряда полиномовъ $\Phi_{np}(x)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots, \infty)$ *обращался бы въ нуль.*

Необходимость такого условія слѣдуетъ изъ предыдущаго, но можно доказать, что оно *достаточное.*

Это будетъ слѣдовать изъ справедливости обратной теоремы.

Если одинъ изъ безконечнаго ряда полиномовъ $\Phi_{np}(x)$ $(n=1, 2, 3, \ldots, \infty)$ *обращается тождественно въ нуль, то система (1) или уравненіе (2) имѣютъ интегралъ въ видѣ частнаго двухъ полиномовъ одного и того же порядка.*

Возьмемъ рядъ, состоящій изъ r функцій Q_{1i} $(i = 1, 2, \ldots, r)$. Предположимъ эти функціи линейно независимыми, т. е. такими, что между ними не существуетъ линейной зависимости вида:

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i Q_{1i} = 0, \tag{7}$$

гдѣ α_i постоянная.

Условимся обозначать результатъ операціи X надъ функціей Q_{1i} XQ_{1i} черезъ Q_{2i} и вообще результатъ операціи XQ_{ji} черезъ $Q_{j+1,i}$ и разсмотримъ опредѣлитель:

$$\begin{vmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & \ldots & Q_{1r} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} & \ldots & Q_{2r} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} & \ldots & Q_{3r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ Q_{r1} & Q_{r2} & Q_{r3} & \ldots & Q_{rr} \end{vmatrix} \tag{8}$$

Этотъ опредѣлитель составленъ при помощи ряда функцій Q_{1i}, которыя образуютъ первую строку. Подвергая каждый элементъ ея операціи X, получаемъ всѣ элементы второй строки, и вообще всякій элементъ этого опредѣлителя получается помощью операціи X, произведенной надъ элементомъ, находящимся въ томъ же столбцѣ, но въ предыдущей строкѣ.

Благодаря такому образованію получается очень просто результатъ операціи надъ этимъ опредѣлителемъ, который назовемъ Δ.

Мы получимъ этотъ результатъ, если выполнимъ въ немъ операцію X надъ всѣми элементами одной строки, оставляя всѣ остальныя строки безъ измѣненія и возьмемъ сумму r полученныхъ такимъ образомъ опредѣлителей, соотвѣтствующихъ измѣненію каждой строки.

Что же касается даннаго опредѣлителя Δ, то $r-1$ изъ такихъ опредѣлителей обратятся въ нуль, такъ какъ, произведя операцію X надъ элементами одной изъ первыхъ $r-1$ строкъ, придемъ къ опредѣлителю, имѣющему двѣ одинаковыя строки. Останется только тотъ опредѣлитель, въ которомъ первыя $r-1$ строкъ оставлены безъ измѣненія, а надъ элементами послѣдней строки выполнена операція X.

Такимъ образомъ получаемъ:

$$X\Delta = \begin{vmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & \dots & Q_{1r} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} & \dots & Q_{2r} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} & \dots & Q_{3r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ Q_{r-1,1} & Q_{r-1,2} & Q_{r-1,3} & \dots & Q_{r-1,r} \\ Q_{r+1,1} & Q_{r+1,2} & Q_{r+1,3} & \dots & Q_{r+1,r} \end{vmatrix}$$

Условимся обозначать первые миноры опредѣлителя Δ черезъ Δ_{hj}, гдѣ индексъ h обозначаетъ выброшенную строку, а индексъ j выброшенный столбецъ.

Легко видѣть, что каждый миноръ Δ_{rj} составленъ по такому же закону, какъ и самъ Δ. Результатъ операціи X надъ нимъ будетъ аналогиченъ операціи $X\Delta$, и легко видѣть, что полученный опредѣлитель будетъ ничто иное, какъ миноръ $\Delta_{r-1,j}$, взятый съ обратнымъ знакомъ.

Итакъ получаемъ:

$$X\Delta_{r,j} = -\Delta_{r-1,j}. \tag{9}$$

Предположимъ теперь

$$\Delta = 0$$

и покажемъ, что при этомъ условіи можно всегда получить по крайней мѣрѣ одинъ интегралъ уравненія (2), или системы (1).

Предположимъ сначала, что ни миноръ Δ_{rg}, ни миноръ Δ_{ri} не равны нулю, ни наконецъ ихъ отношеніе $\frac{\Delta_{ri}}{\Delta_{rg}}$ не равно постоянной.

Покажемъ, что въ такомъ случаѣ это послѣднее отношеніе—интегралъ системы (1) или уравненія (2).

Въ самомъ дѣлѣ,

$$X\frac{\Delta_{ri}}{\Delta_{rg}}=\frac{\Delta_{rg}X\Delta_{ri}-\Delta_{ri}X\Delta_{rg}}{\Delta_{rg}^2}$$

Принимая во вниманіе формулу (9), мы находимъ:

$$X\frac{\Delta_{ri}}{\Delta_{rg}}=\frac{-\Delta_{rg}\Delta_{r-1,i}+\Delta_{ri}\Delta_{r-1,g}}{\Delta_{rg}^2}$$

Но въ числителѣ второй части находится миноръ опредѣлителя взаимнаго съ опредѣлителемъ, обращающимся въ нуль, и слѣдовательно вторая часть вмѣстѣ съ этимъ миноромъ будетъ нулемъ, а потому дробь $\frac{\Delta_{ri}}{\Delta_{rg}}$ будетъ искомымъ интеграломъ.

Итакъ въ этомъ случаѣ мы найдемъ интегралъ.

Разсмотримъ теперь исключенные нами случаи.

Если наприм. Δ_{ri} равенъ нулю, то онъ обладаетъ такими же особенностями, что и опредѣлитель Δ, но порядокъ его на единицу меньше.

Такимъ образомъ въ этомъ случаѣ задача упростилась.

То же самое будетъ и въ томъ случаѣ, когда

$$\frac{\Delta_{ri}}{\Delta_{rg}}=\alpha,$$

гдѣ α обозначаетъ величину постоянную.

Можно представить это равенство сначала въ видѣ

$$\Delta_{ri}-\alpha\Delta_{rg}=0,$$

а потомъ въ видѣ такого опредѣлителя:

$$\begin{vmatrix}
Q_{11} & \dots & Q_{1,i-1} & Q_{1,i+1} & \dots & Q_{1,g-1} & Q_{1,g+1} & \dots & Q_{1,r} & Q_{1i}-\alpha(-1)^{g-i} & Q_{1g}\\
Q_{21} & \dots & Q_{2,i-1} & Q_{2,i+1} & \dots & Q_{2,g-1} & Q_{2,g+1} & \dots & Q_{2,r} & Q_{2i}-\alpha(-1)^{g-i} & Q_{2g}\\
Q_{31} & \dots & Q_{3,i-1} & Q_{3,i+1} & \dots & Q_{3,g-1} & Q_{3,g+1} & \dots & Q_{3,r} & Q_{3i}-\alpha(-1)^{g-i} & Q_{3g}\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\
Q_{r-1,1} & \dots & Q_{r-1,i-1} & Q_{r-1,i+1} & \dots & Q_{r-1,g-1} & Q_{r-1,g+1} & \dots & Q_{r-1,r} & Q_{r-1,i}-\alpha(-1)^{g-i} & Q_{r-1,g}
\end{vmatrix}$$

Полученный опредѣлитель обладаетъ тѣми же характерными свойствами, что и опредѣлитель Δ. Во первыхъ между функціями первой строки не можетъ быть линейнаго соотношенія съ постоянными коэффиціентами, такъ какъ такое соотношеніе было бы вида (7). Во вторыхъ, такъ какъ результатъ операціи X надъ элементомъ послѣдней строки $Q_{hi}-\alpha(-1)^{g-i}Q_{hg}$ равенъ очевидно $Q_{h+1,i}-\alpha(-1)^{g-i}Q_{h+1,g}$ и слѣдовательно

послѣдній столбецъ полученъ изъ перваго элемента такимъ же путемъ, какъ и остальные столбцы разсматриваемаго и всѣ столбцы опредѣлителя Δ.

Такимъ образомъ въ обоихъ этихъ случаяхъ мы, не получая интеграла, получаемъ опредѣлитель, составленный по тому же закону и точно также равный нулю, но порядка на единицу меньшаго.

Примѣняя тотъ же пріемъ, мы либо получимъ интегралъ системы (1) и уравненія (2), либо придемъ къ опредѣлителю, обладающему тѣми же свойствами.

Такой процессъ не можетъ продолжаться безконечно, и мы въ самомъ неблагопріятномъ случаѣ придемъ, не получая интеграла, къ опредѣлителю второго порядка вида:

$$\begin{vmatrix} Q_{11}' & Q_{12}' \\ Q_{21}' & Q_{22}' \end{vmatrix} = 0. \tag{10}$$

Прежде всего въ немъ ни одна изъ функцій Q_{11}', Q_{12}' не можетъ быть равна нулю, такъ какъ это, либо какія нибудь двѣ изъ ряда функцій Q_{1i} $(i=1, 2, \ldots, r)$, либо какія нибудь линейныя комбинаціи ихъ съ постоянными коэффиціентами. Поэтому же частное $\frac{Q_{11}'}{Q_{12}'}$ не можетъ быть постоянной, иначе между функціями Q_{1i} существовало бы соотношеніе вида (7).

Подвергнувъ же дробь $\frac{Q_{11}'}{Q_{12}'}$ операціи X, убѣждаемся, что этотъ результатъ въ силу равенства (10) тождественно равенъ нулю и слѣдовательно она—искомый интегралъ.

Итакъ, если опредѣлитель типа (8) равенъ нулю, то всегда можно получить раціонально при помощи функцій, его составляющихъ, интегралъ системы (1) или уравненія (2).

Положимъ теперь, что полиномъ $\Phi_{np}(x)$ равенъ нулю.

Полиномъ $\Phi_{np}(x)$ составляется изъ одночленовъ B_{1i} точно такъ же, какъ и опредѣлитель Δ изъ функцій Q_{1i}; затѣмъ, очевидно, что между одночленами B_{1i} не можетъ быть линейнаго соотношенія съ постоянными коэффиціентами.

Въ виду всего этого мы должны придти къ заключенію, что можно найти изъ условія

$$\Phi_{np}(x) = 0$$

по крайней мѣрѣ одинъ интегралъ системы (1) или уравненія (2). Такъ какъ послѣдній составляется раціонально изъ полиномовъ B_{ji}, то онъ будетъ частнымъ двухъ полиномовъ; а такъ какъ всѣ B_{ji} $(i=1, 2, \ldots, s)$ при любомъ значеніи индекса j одного и того же порядка, то эти два полинома будутъ также одного и того же порядка.

Итакъ равенство нулю одного изъ безконечнаго ряда полиномовъ $\Phi_{np}(x)$ представляетъ собой необходимое и достаточное условіе, чтобы уравненіе (2) или система (1) имѣли бы интегралъ въ видѣ частнаго двухъ однородныхъ полиномовъ одной и той же степени, т. е. въ видѣ однородной раціональной функціи нулевого измѣренія.

§ 10. О свойствахъ полиномовъ $\Phi_{np}(x)$.

Найденныя въ предыдущемъ параграфѣ необходимыя и достаточныя условія для существованія алгебраическаго интеграла уравненія

$$\sum_{i=1}^{p} X_i \frac{\partial z}{\partial x_i} = 0. \qquad (1)$$

вида $\frac{f_1}{f_2}$ имѣютъ главнымъ образомъ теоретическій интересъ.

Условимся для краткости называть порядокъ n полиномовъ f_1 и f_2 порядкомъ интеграла.

Можно практически использовать полученный результатъ въ двухъ направленіяхъ: или найдя высшій предѣлъ для порядка интеграла какимъ либо другимъ пріемомъ, или замѣнивъ найденныя условія эквивалентными имъ, но выраженными въ конечномъ числѣ.

Въ самомъ дѣлѣ, если мы знаемъ верхній предѣлъ N для порядка n, достаточно вычислить полиномы $\Phi_{np}(x)$ для всѣхъ значеній числа n меньшихъ даннаго предѣла N.

Если ни одинъ изъ полученныхъ такимъ образомъ полиномовъ $\Phi_{pn}(x)$ не окажется равнымъ тождественно нулю, то алгебраическаго интеграла не существуетъ.

Въ обратномъ случаѣ интегралъ будетъ существовать, и онъ можетъ быть найденъ при помощи раціональныхъ дѣйствій по элементамъ B_{ij} составляющихъ этотъ полиномъ.

H. Poincaré въ своихъ изысканіяхъ [1]) объ опредѣленіи алгебраическихъ интеграловъ занимается какъ разъ этимъ вопросомъ, ограничиваясь случаемъ $p = 3$.

Прежде всего необходимо замѣтить, что невозможно безъ особаго предположенія относительно природы полиномовъ f_1 и f_2 найти верхній предѣлъ порядка n.

---

[1]) Rendiconti del circolo matematico di Palermo. 1891. стр. 14.

Въ самомъ дѣлѣ, произвольная функція интеграла будетъ также интеграломъ уравненія (1), и если мы возьмемъ за такую функцію раціональную дробь

$$\frac{\sum_{i=1}^{l} M_i z^i}{\sum_{i=1}^{l} P_i z^i}$$

Подставляя вмѣсто z отношеніе $\frac{f_1}{f_2}$, получаемъ частное двухъ полиномовъ nl-го порядка. Слѣдовательно, если существуетъ интегралъ n-го порядка, то существуетъ и интегралъ nl-го порядка, гдѣ l можетъ быть какимъ угодно цѣлымъ положительнымъ числомъ. Отсюда слѣдуетъ такое свойство полиномовъ $\Phi_{np}(x)$.

Если существуетъ интегралъ n-го порядка, обращается въ нуль не только полиномъ $\Phi_{np}(x)$, но и всѣ полиномы $\Phi_{nl,p}(x)$, при l произвольномъ цѣломъ положительномъ числѣ.

Съ другой стороны важно опредѣлить по данному интегралу

$$\frac{F_1(x)}{F_2(x)}$$

не существуетъ ли интеграла болѣе низкаго порядка, чѣмъ данный.

Рѣшеніе можетъ быть основано на слѣдующей леммѣ, доказанной H. Poincaré [1]).

Если полиномъ $F_1(x) + CF_2(x)$ трехъ однородныхъ перемѣнныхъ приводимъ при всѣхъ значеніяхъ постоянной C, а полиномы $F_1(x)$ и $F_2(x)$ простые между собою, то существуетъ два такихъ полинома v_1 и v_2 одного и того же порядка, черезъ которые полиномы $F_1(x)$ и $F_2(x)$ выражаются въ видѣ цѣлой однородной функціи отъ нихъ.

Другими словами полиномъ $F_1(x) + CF_2(x)$ будетъ представлять собой произведеніе множителей вида $v_1 + \alpha v_2$ и слѣдовательно частное $\frac{F_1}{F_2}$ будетъ раціональной функціей дроби $\frac{v_1}{v_2}$.

H. Poincaré доказалъ эту лемму только для числа перемѣнныхъ $p = 3$, но въ данномъ имъ доказательствѣ число перемѣнныхъ не играетъ никакой роли, а потому оно справедливо для какого угодно значенія числа p.

Исходя изъ этой леммы можно утверждать, что если изъ двухъ полиномовъ $F_1(x)$ и $F_2(x)$ по крайней мѣрѣ одинъ неприводимъ, то интегралъ $\frac{F_1(x)}{F_2(x)}$ не будетъ раціональной функціей интеграла меньшаго порядка $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$, такъ какъ въ противномъ случаѣ оба полинома $F_1(x)$ и $F_2(x)$ были бы произведеніемъ множителей типа $f_1(x) + \alpha_i f_2(x)$.

---

[1]) Rendiconti del Circolo Matematico del Palermo. 1891 г., стр. 183.

Итакъ можно придти къ такому заключенію, что долженъ существовать высшій предѣлъ порядка интеграла типа $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$, если по крайней мѣрѣ одинъ изъ полиномовъ $f_1(x)+Cf_2(x)$ при нѣкоторомъ значеніи постоянной C будетъ неприводимымъ.

Благодаря методу изученія пути интегральной кривой вблизи особенной точки, ведущему начало отъ Briot и Bouquet, оказывается возможнымъ установить для случая $p=3$ характеръ кратныхъ точекъ семейства кривыхъ

$$f_1(x)+Cf_2(x)=0,$$

и благодаря этому судить о родѣ (genre) этихъ кривыхъ, который находится въ извѣстной зависимости отъ порядка кривой и ея кратныхъ точекъ.

Кромѣ того только извѣстныя (points dicritiques) особенныя точки могутъ служить точками пересѣченія двухъ кривыхъ

$$f_1(x)=0$$
$$f_2(x)=0.$$

Число этихъ точекъ, принимая во вниманіе кратность точекъ пересѣченія, должно быть n^2 [1]).

Отсюда французскій ученый въ только что цитированной работѣ выводитъ рядъ равенствъ и неравенствъ, которыя въ нѣкоторыхъ случаяхъ достигаютъ цѣли—указать высшій предѣлъ порядка n.

Если принять во вниманіе, что трудности этого пути для рѣшенія этого вопроса остановили даже H. Poincaré, что распространеніе этихъ пріемовъ на большее число перемѣнныхъ, какъ мнѣ кажется, находится на границѣ возможнаго, то предложенный мною въ этой работѣ путь изученія полиномовъ $\Phi_{np}(x)$ долженъ представлять интересъ уже потому, что онъ общій для какого угодно числа перемѣнныхъ.

Я уже оговорилъ вначалѣ, что желательно замѣнить найденныя мной условія эквивалентными, но въ конечномъ числѣ.

Въ самомъ дѣлѣ, приравнивая нулю всѣ коэффиціенты полинома $\Phi_{np}(x)$, получимъ большее число условій, чѣмъ число заключающихся въ нихъ коэффиціентовъ уравненія (1). Можно выбрать изъ нихъ не-

---

[1]) Можно получить тѣ же результаты болѣе простымъ путемъ при помощи послѣдовательнаго опредѣленія поляръ полинома $f_1(x)+Cf_2(x)$. Для этой цѣли можно воспользоваться уравненіями (10) и (11) параграфа 3-го. Въ самомъ дѣлѣ, входящіе въ нихъ полиномы $A^{(k)}f$ по подстановкѣ $x_i=a_{ji}$ представятъ собой такія поляры, какъ это слѣдуетъ изъ формулы (III) перваго параграфа. Возможно, что при этомъ получатся дальнѣйшія упрощенія и обобщенія. Къ болѣе обстоятельному изслѣдованію въ этой области я надѣюсь вернуться позже.

зависимыя, которыя будутъ въ числѣ не большемъ числа этихъ коэффиціентовъ. Всѣ остальныя будутъ либо слѣдствіемъ выбранныхъ независимыхъ, либо играть ограничивающую роль, т. е. будутъ исключать лишнія рѣшенія. Такимъ образомъ существованіе такихъ условій выясняется a priori.

Задача эта принадлежитъ, какъ мнѣ кажется, къ числу трудныхъ, но непреоборимыхъ.

Дальнѣйшія изслѣдованія я думаю обосновать на слѣдующихъ любопытныхъ свойствахъ полиномовъ $\Phi_{np}(x)$.

1) Когда полиномы X_i имѣютъ общій множитель ϱ, то онъ войдетъ въ полиномъ $\Phi_{np}(x)$ въ степени $\frac{(s-1)(s-2)}{1.2}$, гдѣ $s=\binom{n+p-1}{p-1}$.

2) Если полиномы X_i замѣнимъ полиномами $X_i - Lx_i$, гдѣ L совершенно произвольный полиномъ m—1-го порядка, то полиномы $\Phi_{np}(x)$ не измѣняются отъ подобной замѣны.

3) Каждая особенная точка уравненія (1) будетъ кратной для полинома $\Phi_{np}(x)$ и порядокъ ея кратности будетъ не ниже $s-1$.

4) Если вмѣсто уравненія (1) будемъ разсматривать коннексъ

$$\sum_{i=1}^{p} X_i u_i = 0$$

по отношенію къ линейному преобразованію, то полиномы $\Phi_{np}(x)$ будутъ его точечными коваріантами.

Это послѣднее свойство я считаю особенно важнымъ для дальнѣйшаго изслѣдованія полученныхъ условій и я дамъ въ концѣ текущаго параграфа его доказательство.

D. Hilbert въ своей работѣ: über Theorie der algebraischen Formen [1]) доказалъ, что число всѣхъ инваріантныхъ образованій конечно. Это надо понимать въ томъ смыслѣ, что напр. всѣ коваріанты будутъ цѣлыми, раціональными, съ цѣлыми коэффиціентами функціями конечнаго числа коваріантовъ и инваріантовъ.

Въ виду справедливости такой теоремы можно указать путь къ рѣшенію задачи и отдать ясный отчетъ въ трудности этого пути.

Предположимъ, что намъ нужно провѣрить существованіе алгебраическаго интеграла и опредѣлить порядокъ послѣдняго для уравненія

$$\sum X_i^{(1)} \frac{\partial z}{\partial x_i} = 0\,, \tag{2}$$

въ которомъ полиномы $X_i^{(1)}$ полиномы m-го порядка съ коэффиціентами, зависящими отъ произвольныхъ постоянныхъ $C_1, C_2, \ldots, C_\varrho$ и ирра-

---

[1]) Mathematische Annalen. B. 36, s. 473.

ціональныхъ чиселъ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\sigma$. Между послѣдними можетъ существовать извѣстное число независимыхъ между собою цѣлыхъ раціональныхъ соотношеній съ цѣлыми коэффиціентами. Эти соотношенія мы можемъ написать въ слѣдующемъ видѣ:

$$\Theta_i(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\sigma) = 0 \qquad (3)$$
$$i = 1, 2, \ldots, \tau.$$

Вычисляемъ сначала основные коваріанты и инваріанты для уравненія (1). Пусть это будутъ функціи $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_t$. Тогда на основаніи теоремы D. Hilbert'a можемъ найти выраженіе полиномовъ $\Phi_{np}(x)$ черезъ $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_t$ и слѣдовательно написать

$$\Phi_{np}(x) = \Psi_{np}(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_t).$$

гдѣ можно, умноживъ полиномъ $\Phi_{np}(x)$ на нѣкоторое число, сдѣлать въ полиномахъ $\Psi_{np}(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_t)$ относительно $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_t$ коэффиціенты цѣлыми.

Если теперь дадимъ въ полиномахъ φ_i коэффиціентамъ уравненія (1) значенія коэффиціентовъ уравненія (2), то получимъ частныя значенія этихъ коваріантовъ для даннаго случая. Обозначимъ такую замѣну постановкой черты надъ функціями φ_i и потому

$$\Psi_{np}(\overline{\varphi}_1, \overline{\varphi}_2, \ldots, \overline{\varphi}_t)$$

будетъ значеніемъ полинома $\Phi_{np}(x)$ для новаго уравненія (2). Въ томъ случаѣ, когда наше уравненіе имѣетъ алгебраическій интегралъ порядка n, этотъ полиномъ долженъ обратиться въ нуль. Ясно, что условіе

$$\Psi_{np}(\overline{\varphi}_1, \overline{\varphi}_2, \ldots, \overline{\varphi}_t) = 0 \qquad (4)$$

будетъ справедливо при какихъ угодно значеніяхъ перемѣнныхъ x_i и постоянныхъ $C_1, C_2, \ldots, C_\rho$ въ силу соотношеній (3).

Условіе (4) показываетъ, что уравненіе (2) не можетъ обладать алгебраическимъ интеграломъ, если между основными коваріантами нѣтъ тождественнаго соотношенія съ цѣлыми коэффиціентами. Можно составить такія соотношенія слѣдующимъ образомъ. Пишемъ рядъ равенствъ:

$$\overline{\varphi}_i = \varphi_i$$
$$i = 1, 2, \ldots, t$$

Если изъ этихъ равенствъ нельзя исключить всѣхъ величинъ x_i, C_i, и α_i, то между коваріантами не будетъ и алгебраическаго интеграла. Положимъ, что такія соотношенія получатся: можемъ написать ихъ въ такомъ видѣ:

$$\omega_i(\overline{\varphi}_1, \overline{\varphi}_2, \ldots, \overline{\varphi}_t) = 0 \qquad (5)$$
$$i = 1, 2, \ldots, \eta.$$

Обращаемъ вниманіе, что полученіе послѣднихъ соотношеній— задача конечнаго характера и всегда можетъ быть выполнена.

Условіе (4) должно быть слѣдствіемъ только что полученныхъ условій. Между ними могутъ быть не всѣ независимы; выбираемъ поэтому среди нихъ группу независимыхъ и рѣшаемъ относительно соотвѣтствующаго числа коваріантовъ $\overline{\varphi}_i$ и вносимъ полученныя значенія въ условіе (4). Въ полученномъ результатѣ можно считать остальные полиномы φ_i совершенно произвольными величинами. Приведя полученное условіе къ раціональному виду, придемъ къ полиному относительно оставшихся коваріантовъ φ_i съ цѣлыми коэффиціентами. Эти коэффиціенты должны зависѣть отъ порядка n интеграла. Приравнивая ихъ нулю, получимъ уравненія для опредѣленія этого порядка.

Такимъ образомъ эти разсужденія выясняютъ возможность полученія уравненій для опредѣленія порядка n при помощи однихъ раціональныхъ дѣйствій.

Какъ ни обща изложенная схема, какъ ни важны опущенныя, необходимыя для строгости изложенія детали, все-таки она указываетъ на возможность рѣшенія задачи въ самомъ общемъ случаѣ при заданныхъ значеніяхъ коэффиціентовъ уравненія (1), каковы бы ни были числа m и p.

Кромѣ того, полезно указать, что она можетъ быть примѣнена безъ труда въ простѣйшихъ случаяхъ наприм. 1) $p=2$, $m=2, 3, \ldots$; 2) $p=3$, $m=2$.

Въ этихъ случаяхъ она можетъ быть и провѣрена. Въ самомъ дѣлѣ, первый случай содержитъ въ себѣ обыкновенныя однородныя диффиренціальныя уравненія 1-го порядка, интеграція которыхъ общеизвѣстна. Что же касается второго случая, то онъ изслѣдованъ французскимъ ученымъ G. Darboux [1]), который далъ рядъ интереснѣйшихъ примѣровъ алгебраическихъ интеграловъ.

Полученный при этомъ фактическій матеріалъ можетъ выяснить извѣстную закономѣрность и нѣкоторыя особенности, которыя послужатъ для упрощенія дальнѣйшихъ изслѣдованій.

Выяснивъ важное значеніе свойства полиномовъ $\Phi_{np}(x)$ быть коваріантами коннекса

$$\sum_{i=1}^{p} X_i u_i = 0\,, \tag{6}$$

попытаемся доказать его, воспользовавшись для этого символическимъ обозначеніемъ Аронгольда, т. е. предположимъ нашъ коннексъ написаннымъ въ такой формѣ:

$$\alpha_x^m a_u = 0\,. \tag{7}$$

[1]) Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques. 1878.

Замѣтимъ прежде всего, что символы $\alpha_1\ \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ преобразуются линейнымъ преобразованіемъ, какъ перемѣнныя $u_1, u_2, \ldots, u_p$ символы же $a_1, a_2, \ldots, a_p$, какъ перемѣнныя $x_1, x_2, \ldots, x_p$.

Операція X будетъ изображена при этомъ черезъ

$$\alpha_x^m \sum_{i=1}^{p} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

т. е. представитъ собой произведеніе символическаго множителя на полярную операцію

$$\sum_{i=1}^{p} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Подобныхъ символовъ намъ придется взять столько, каковъ порядокъ полинома $\Phi_{np}(x)$ въ коэффиціентахъ уравненія (1). Замѣчая, что элементы опредѣлителя, представляющаго $\Phi_{np}(x)$ въ k-ой строкѣ однородны относительно ихъ измѣренія $k-1$, и слѣдовательно весь полиномъ будетъ однороднымъ относительно ихъ измѣренія $t = \binom{s}{2}$.

Вводимъ слѣдовательно t символовъ $\alpha_x^{(g)^m}\ a_u^{(g)}$ $(g = 1, 2, \ldots, t)$. Операцію же

$$\sum_{i=1}^{p} a_i^{(g)} \frac{\partial}{\partial x_i}$$

обозначимъ черезъ A_g. Точно также операцію

$$\sum_{i=1}^{p} a_i^{(g)} \frac{\partial}{\partial x_i^{(k)}}$$

обозначимъ черезъ A_{gk}.

Условившись въ обозначеніяхъ, переходимъ къ вычисленію полиномовъ B_{ki}.

Прежде всего имѣемъ:

$$B_{2i} = \alpha_x^{(1)^m} A_1 B_{1i}$$

$$i = 1, 2, \ldots, p.$$

или, обозначивъ инваріантный множитель $\alpha_x^{(1)^m}$ черезъ Q_1,

$$B_{2i} = Q_1 \{A_1 B_{1i}\}.$$

Для полученія B_{2i} замѣняемъ въ полученномъ равенствѣ въ символахъ α и a индексъ 1 на 2 и подвергаемъ обѣ части его операціи $X \equiv \alpha^{(3)m} A_3$ и получаемъ:

$$B_{3i} = \alpha_x^{(3)m} (A_3 Q_2)(A_2 B_{1i}) + \alpha_x^{(3)m} Q_2 \{A_3 A_2 B_{1i}\} = Q_3 A_2 B_{1i} + Q_4 \{A_3 A_2 B_{1i}\},$$

гдѣ Q_3 и Q_4 обозначаютъ произведенія инваріантныхъ символовъ типа

$$\alpha_x^{(g)} \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{p} \alpha_i^{(g)} a_i^{(g)},$$

а вторые множители представляютъ собой полярныя образованія отъ одночленовъ B_{1i}.

По такому закону составляются всѣ полиномы B_{ki}.

Въ самомъ дѣлѣ, предположимъ, что

$$B_{ki} = \sum_g Q_g B_{1i}^{(g)}, \tag{8}$$

гдѣ Q_g представляетъ собой сумму произведеній символическихъ множителей типа

$$\alpha_x^{(g)} \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{p} \alpha_i^{(g)} a_i^{(g)},$$

а $B_{1i}^{(g)}$ результатъ ряда полярныхъ операцій типа A_h, произведенныхъ надъ одночленомъ B_{1i}.

Для полученія $B_{k+1,i}$ мѣняемъ сначала всѣ индексы у символовъ α и a въ равенствѣ (8) на слѣдующіе по порядку и производимъ операцію X. Если въ дѣло вошли всѣ символы съ индексами до числа l, то представляемъ операцію X черезъ $\alpha_x^{(l)m} A_l$.

Тогда

$$B_{k+1,i} = \sum_g \left[\alpha_x^{(l)^m} (A_l Q_l) B_{1i}^{(g)} + \alpha_x^{(l)^m} Q_g \{A_l B_{1i}^{(g)}\} \right].$$

Такъ какъ $A_l Q_l$ вводитъ новые символы только типа

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i^{(g)} a_i^{(l)},$$

то мы убѣждаемся, что изъ каждаго слагаемаго полинома B_{ki} указаннаго характера получается въ полиномѣ $B_{k+1,i}$ два слагаемыхъ того же типа.

Такимъ образомъ мы можемъ послѣдовательно разложить всѣ полиномы B_{ki} $(k = 1, 2, \ldots, s)$ на сумму слагаемыхъ означеннаго типа.

Внеся эти разложенія въ опредѣлитель, представляющій полиномъ $\Phi_{np}(x)$, можемъ разложить и его на сумму полиномовъ, которые состоятъ изъ суммы произведеній инваріантныхъ множителей типа $a_x^{(g)}$ и $\sum a_i^{(g)} a_i^{(h)}$ на опредѣлитель:

$$\begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & \dots & B_{1s} \\ B_{21}^{(g_2)} & B_{22}^{(g_2)} & B_{23}^{(g_2)} & \dots & B_{2s}^{(g_2)} \\ B_{31}^{(g_3)} & B_{32}^{(g_3)} & B_{33}^{(g_3)} & \dots & B_{3s}^{(g_3)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ B_{s1}^{(g_s)} & B_{s2}^{(g_s)} & B_{s3}^{(g_s)} & \dots & B_{ss}^{(g_s)} \end{vmatrix} \tag{9}$$

Остается доказать инваріантность этого множителя. Тогда и все произведеніе будетъ коваріантомъ, а такъ какъ полиномъ $\Phi_{np}(x)$ представляетъ сумму ихъ, то онъ и самъ принадлежитъ къ числу коваріантныхъ образованій.

Обозначимъ черезъ $\overline{B_{ki}}$ результатъ подстановки $x_i = x_i^{(k)} (i=1, 2, \dots, p)$ въ одночленъ B_{1i} и составляемъ опредѣлитель:

$$\begin{vmatrix} \overline{B_{11}} & \overline{B_{12}} & \overline{B_{13}} & \dots & \overline{B_{1s}} \\ \overline{B_{21}} & \overline{B_{22}} & \overline{B_{23}} & \dots & \overline{B_{2s}} \\ \overline{B_{31}} & \overline{B_{32}} & \overline{B_{33}} & \dots & \overline{B_{3s}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \overline{B_{s1}} & \overline{B_{s2}} & \overline{B_{s3}} & \dots & \overline{B_{ss}} \end{vmatrix} \tag{10}$$

Исчезновеніе его показываетъ, что точки $x_i^{(k)}$ $(k = 1, 2, \dots, s)$ обращаютъ въ нуль одинъ и тотъ же полиномъ n-го порядка. Отсюда слѣдуетъ инваріантный характеръ этого опредѣлителя.

Пользуясь свойствомъ, что полярная операція, замѣняющая въ инваріантномъ образованіи одни элементы другими, но преобразуемыми тѣмъ же линейнымъ преобразованіемъ, можемъ доказать, что и опредѣлитель (9) обладаетъ инваріантными свойствами. Для этого достаточно указать рядъ полярныхъ операцій, превращающихъ опредѣлитель (10) въ опредѣлитель (9) до постояннаго множителя включительно.

Пусть выраженія $B_{ki}^{(g_k)}$ получены изъ одночленовъ B_{ki} помощью ряда полярныхъ операцій $A_{h_1}, A_{h_2}, A_{h_3}, \dots, A_{h_k}$. Подвергая опредѣлитель (10) ряду операцій $A_{h_1 k}, A_{h_2 k}, A_{h_3 k}, \dots, A_{h_k k}$. Онѣ измѣнятъ въ немъ лишь элементы k-ой строки, и послѣдніе станутъ отличаться отъ элементовъ k-ой строки опредѣлителя (9) лишь тѣмъ, что перемѣнныя $x_i^{(k)}$ замѣщены перемѣнными x_i.

Пусть степень этихъ полиномовъ относительно перемѣнныхъ $x_i^{(k)}$ равна l. Подвергая опредѣлитель (10) кромѣ указанныхъ выше полярныхъ операцій еще l разъ операціи

$$\sum_{i=1}^{p} x_i \frac{\partial}{\partial x_i^{(k)}},$$

превратимъ всѣ элементы k-ой строки опредѣлителя (10) на основаніи теоремы (III) параграфа перваго въ элементы k-ой строки опредѣлителя (9), умноженные на $l!$

Поступая такъ со всѣми строками опредѣлителя (10), мы превратимъ его въ опредѣлитель (9), умноженный на нѣкоторое число. Значитъ и опредѣлитель (9) обладаетъ инваріантными свойствами. А это, какъ мы уже видѣли, доказываетъ, что полиномъ $\Phi_{np}(x)$ принадлежитъ къ коваріантнымъ образованіямъ.

§ 11. О приведеніи одного эллиптическаго интеграла.

Дѣло идетъ объ эллиптическомъ интегралѣ

$$\int \frac{x+A}{\sqrt{x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta}}\,dx.$$

Требуется узнать условія, при которыхъ онъ можетъ быть выраженъ при помощи алгебраическихъ и логариѳмическихъ символовъ. Эта задача впервые была поставлена Абелемъ [1]). Имъ-же дано первое рѣшеніе, а именно онъ установилъ самъ по себѣ интересный фактъ возможности при нѣкоторыхъ частныхъ значеніяхъ постоянныхъ α, β, γ, δ разложить корень $\sqrt{x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta}$ въ періодическую дробь и прямой связи такого разложенія съ приведеніемъ разсматриваемаго эллиптическаго интеграла.

П. Л. Чебышевъ [2]) обратилъ вниманіе на то обстоятельство, что пріемъ разложенія въ непрерывную дробь можетъ дать практическіе результаты лишь тогда, когда мы знаемъ предѣлъ числа членовъ періода. Ему удалось рѣшить этотъ послѣдній вопросъ, предположивъ величины α, β, γ, δ раціональными числами.

Развивая идеи П. Л. Чебышева, Е. Золотаревъ [2]) далъ способы рѣшить эту задачу и въ томъ случаѣ, когда эти числа алгебраическія и, наконецъ, когда эти числа болѣе общаго характера.

---

[1]) Abel. Oeuvres complètes 1881. T. I, стр. 104. T. II, стр. 87 и др.

[2]) П. Л. Чебышевъ. Сочиненія, С.-Петербургъ. 1899. Е. Золотаревъ. Теорія цѣлыхъ комплексныхъ чиселъ С.-Петербургъ 1874. Прекрасное и вполнѣ строгое изложеніе этого вопроса дано И. Пташицкимъ въ книгѣ «Объ интегрированіи въ конечномъ видѣ эллиптическихъ дифференціаловъ. С.-Петербургъ. 1888.

Такимъ образомъ единая по существу задача разбилась на три, смотря по природѣ величинъ α, β, γ, δ. Требуется ли это ея сущностью? Думаю, что нѣтъ. Въ виду этого я даю новое изложеніе нѣкоторымъ сторонамъ этого вопроса, надѣясь, что оно послужитъ къ дальнѣйшему усовершенствованію этого рѣшенія. Кстати мнѣ будетъ возможно указать на тѣсную связь этого вопроса съ разсмотрѣнными ранѣе и на нѣкоторыя аналогіи съ тѣми общими вопросами, которые были предметомъ предыдущихъ изслѣдованій.

За исходный пунктъ я возьму теорему Абеля, по которой разсматриваемый неопредѣленный интегралъ въ томъ случаѣ, когда онъ выражается въ конечномъ видѣ, можетъ быть приведенъ къ виду:

$$B \log \frac{p+q\sqrt{R}}{p-q\sqrt{R}} + C,$$

гдѣ p и q обозначаютъ полиномы относительно перемѣнной x, а R полиномъ $x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$.

Замѣтимъ, что линейнымъ преобразованіемъ независимой перемѣнной можно упростить нашъ интегралъ. Слѣдуя примѣру П. Л. Чебышева, сдѣлаемъ коэффиціентъ при x^3 въ полиномѣ R равнымъ нулю. Можно также сдѣлать одинъ изъ остальныхъ коэффиціентовъ равнымъ единицѣ, но особенной выгоды отъ этого не будетъ.

Итакъ положимъ:

$$R \equiv x^4 + \beta x^2 + \gamma x + \delta \tag{1}$$

$$y \equiv \sqrt{R}$$

и станемъ изслѣдовать условія существованія равенства

$$\int \frac{x+A}{y}\, dx = B \log \frac{p+qy}{p-qy} + C, \tag{2}$$

гдѣ C—произвольная постоянная, введенная интегрированіемъ.

Прежде всего мы видимъ, что можно предположить полиномы p и q неимѣющими общаго множителя.

Кромѣ того, можно всегда привести его къ такому виду, при которомъ p и R не имѣютъ общаго множителя.

Въ самомъ дѣлѣ, положимъ $p = R_1 p_1$ и $R = R_1 R_2$, гдѣ R_1 общій множитель полиномовъ p и R, а p_1 и R_2 соотвѣтствующія частныя отъ дѣленія полиномовъ p и R на общаго множителя.

Можно написать равенство (2) въ такомъ видѣ:

$$\int \frac{x+A}{y}\, dx = \frac{B}{2} \log \frac{(p+qy)^2}{(p-qy)^2} + C;$$

но $$(p+qy)^2 = R_1 \{p_1{}^2 R_1 + R_2 q^2\} + 2R_1 p_1 qy$$

и $$(p-qy)^2 = R_1 \{p_1{}^2 R_1 + R_2 q^2\} - 2R_1 p_1 qy.$$

Полиномы $p_1{}^2R_1 + R_2q^2$ и $2p_1q$ не могутъ имѣть общихъ множителей, иначе и полиномы p и q ихъ имѣли бы. Обозначивъ ихъ черезъ p_2 и q_2, можемъ написать равенство:

$$\int \frac{x+A}{y}\,dx = \frac{B}{2}\log\frac{p_2+q_2y}{p_2-q_2y} + C,$$

которое уже удовлетворитъ требуемому условію.

Итакъ мы предполагаемъ, что ни одинъ изъ корней полинома p въ равенствѣ (2) не обращаетъ въ нуль ни полинома q, ни полинома R, а слѣдовательно полиномы p и $p^2 - q^2R$ не могутъ имѣть общаго корня.

Обозначимъ черезъ φ отношеніе $\frac{p}{q}$ и перепишемъ равенство (2) въ такомъ видѣ:

$$\int \frac{x+A}{y}\,dx = B\log\frac{\varphi+y}{\varphi-y} + C,$$

Беремъ производную отъ обѣихъ частей полученнаго равенства и находимъ въ результатѣ:

$$\frac{x+A}{y} = B\,\frac{2\varphi y' - 2y\varphi'}{\varphi^2 - y^2}.$$

Но, замѣчая изъ равенства (1), что

$$y^2 = R$$
$$2yy' = R',$$

получаемъ:

$$x + A = B\,\frac{\varphi R' - 2R\varphi'}{\varphi^2 - R}. \qquad (3)$$

Такъ какъ $\varphi = \frac{p}{q}$, то можно дать полученному равенству такой видъ:

$$\frac{(x+A)q}{p} = \frac{B}{\varphi}\,\frac{\varphi R' - 2R\varphi'}{\varphi^2 - R} = \frac{B}{\varphi}\,\frac{\varphi R' - 2\varphi^2\varphi' + 2\varphi^2\varphi' - 2\varphi' R}{\varphi^2 - R} =$$
$$= 2B\,\frac{\varphi'}{\varphi} - B\,\frac{2\varphi\varphi' - R'}{\varphi^2 - R}.$$

Умножая крайнія части этихъ равенствъ на dx и интегрируя, получимъ:

$$\int \frac{(x+A)q}{p}\,dx = 2B\log\varphi - B\log(\varphi^2 - R) + C.$$

или, въ силу равенства $\varphi = \frac{p}{q}$,

$$\int \frac{(x+A)q}{p}\,dx = 2B\log p - B\log(p^2 - Rq^2) + C. \qquad (4)$$

Это равенство показываетъ, что интегралъ отъ раціональной функціи выражается черезъ одни логариѳмы; слѣдовательно знаменатель раціональной функціи не имѣетъ кратныхъ корней и степень ея знаменателя больше степени ея числителя.

Кромѣ того, этотъ интегралъ можетъ имѣть полюсами только нули знаменателя p. Поэтому полиномъ $p^2 - Rq^2$ не можетъ имѣть корней и слѣдовательно представляетъ собой постоянную. Въ самомъ дѣлѣ, пусть величина b будетъ корнемъ полинома $p^2 - Rq^2$; такъ какъ этотъ полиномъ и полиномъ p не имѣютъ на основаніи сдѣланныхъ предположеній общихъ корней, то результатъ подстановки $x=b$ въ равенство (4) обратитъ въ безконечность только одинъ членъ $\log(p^2 - Rq^2)$; а это очевидно не возможно безъ нарушенія равенства.

Слѣдовательно можно положить

$$p^2 - Rq^2 = L, \qquad (5)$$

гдѣ L постоянная.

Итакъ мы нашли, что если интегралъ, стоящій въ лѣвой части равенства (2), приводимъ, то полиномъ R такого характера, что для него возможно тождество (5). Покажемъ, что это условіе необходимое и достаточное.

Предположимъ слѣдовательно существованіе тождества (5).

Обозначимъ черезъ n степень полинома p. Тогда, какъ показываетъ равенство (5), q должно быть полиномомъ степени $n-2$.

Можно принять коэффиціенты при x^n въ полиномѣ p и при x^{n-2} въ полиномѣ q равными единицѣ. Тогда, если a будетъ коэффиціентомъ при x^{n-1} въ полиномѣ p, то благодаря отсутствію члена съ x^3 въ полиномѣ R, и коэффиціентъ при x^{n-3} въ полиномѣ q также будетъ равенъ a.

Беремъ производную отъ обѣихъ частей тождества (5) и получаемъ такой результатъ:

$$2pp' - R'q^2 - 2Rqq' = 0, \qquad (6)$$

изъ котораго видно, что полиномъ q дѣлитъ произведеніе полиномовъ pp'. Но полиномы p и q не имѣютъ общихъ множителей, слѣдовательно полиномъ p' дѣлится на полиномъ q нацѣло. Частнымъ отъ этого дѣленія будетъ линейная функція, такъ какъ порядокъ полинома p' будетъ на единицу больше порядка полинома q. Это частное легко опредѣлить,

такъ какъ первые два старшихъ члена полиномовъ p и q намъ извѣстны, и оно равно $nx - a$. Итакъ имѣемъ

$$p' = n\left(x - \frac{a}{n}\right) q \tag{7}$$

Подставляя значеніе полинома (1) въ равенство (6), получаемъ:

$$2n\left(x - \frac{a}{n}\right) p = R'q + 2Rq'. \tag{8}$$

Изъ тождества (5) получаемъ такое равенство:

$$\frac{1}{y} = \frac{q}{\sqrt{p^2 - L}}.$$

Умножая обѣ части этого равенства на $\left(x - \frac{a}{n}\right) dx$ и принимая во вниманіе равенство (7), получаемъ:

$$\frac{\left(x - \frac{a}{n}\right) dx}{y} = \frac{p'dx}{n\sqrt{p^2 - L}}.$$

Интегрируя обѣ части, приходимъ къ равенству:

$$\int \frac{\left(x - \frac{a}{n}\right) dx}{y} = \frac{1}{n} \log\left(p + \sqrt{p^2 - L}\right) + C,$$

которое и доказываетъ наше утвержденіе.

Можно, пользуясь тождествомъ (5) видоизмѣнить лѣвую часть полученнаго равенства и привести ее къ виду лѣвой части равенства (2), а именно:

$$\int \frac{\left(x - \frac{a}{n}\right) dx}{y} = \frac{1}{2n} \log \frac{p + qy}{p - qy} + C.$$

Изъ предыдущаго дѣлаемъ такое заключеніе:

Эллиптическій интегралъ типа

$$\int \frac{(x + A)\, dx}{\sqrt{R}}$$

приводится къ алгебраико-логариѳмическому выраженію, если для полинома R возможно тождество (5).

Тогда постоянная B станетъ равной $\frac{1}{2n}$, гдѣ n степень полинома p, и постоянная A равняется $-\frac{a}{n}$, гдѣ a коэффиціентъ при членѣ x^{n-1} въ полиномѣ p при условіи, что коэффиціентъ при членѣ x^n равенъ единицѣ.

Съ помощью любого изъ равенствъ (5), (7) или (8) убѣдимся, что и коэффиціентъ при степени x^{n-3} полинома q также равняется a.

Полагаемъ полиномъ q въ видѣ ряда:

$$q \equiv x^{n-2} + ax^{n-3} + \sum_{i=2}^{n-2} a_i x^{n-i-2}.$$

Подставляя это значеніе полинома q въ равенство (7), находимъ такое выраженіе для полинома p:

$$p \equiv x^n + ax^{n-1} + \frac{na_2 - a^2}{n-2} x^{n-2} + \sum_{i=3}^{n-2} \frac{na_i - aa_{i-1}}{n-i} x^{n-i} - aa_{n-2}x + a_n,$$

гдѣ a_n постоянный членъ полинома p.

Эти полиномы должны удовлетворять кромѣ того тождественно условію (8).

Подставивъ ихъ выраженія въ это равенство и собравъ всѣ члены въ одну часть, получимъ полиномъ n—1-го порядка. Коэффиціенты этого полинома линейны относительно коэффиціентовъ $a_j (j=2, 3, 4, \ldots, n-2, n)$.

Обозначимъ черезъ P_{n-i+1} тотъ коэффиціентъ, который находится при степени x^i. Чтобы удовлетворить условію (8), надо, если возможно, выбрать для $n-1$ величинъ такія значенія, при которыхъ всѣ эти коэффиціенты P_{n-i+1} обратятся въ нуль. Поэтому, приравнивая ихъ нулю, получимъ уравненія для опредѣленія величинъ $a, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_{n-3}, a_{n-2}, a_n$ черезъ данныя величины задачи β, γ, δ.

Полученныя уравненія:

$$P_j = 0 \tag{9}$$

$$j = 2, 3, \ldots, n+1,$$

обладаютъ нѣкоторыми особенностями. О линейности ихъ относительно величинъ a_i уже извѣстно.

Примемъ затѣмъ вѣсъ величинъ a, β, γ, δ соотвѣтственно равнымъ 1, 2, 3, 4, и величинъ a_j равнымъ указателю j. Тогда вѣсъ любого коэффиціента P_i будетъ равенъ показателю i. Отсюда слѣдуетъ, что въ коэффиціентъ P_i не можетъ войти величина a_j, коль скоро $j > i$. Что же касается величины a_i, то она можетъ войти въ P_i умноженной только на постоянный множитель.

Нетрудно опредѣлить его по условію (8). Послѣ простыхъ вычисленій мы получимъ:

$$P_i = 2.i\frac{2n-i}{n-i}a_i + Q_i,$$

$$i=2,\ 3,\ldots,\ n-2,$$

гдѣ Q_i обозначаетъ выраженіе, въ которое входятъ только тѣ a_j, у которыхъ указатель $j < i$.

Приравнивая эти коэффиціенты нулю, получимъ рядъ уравненій:

$$2.i\frac{2n-i}{n-i}a_i + Q_i = 0 \tag{10}$$

$$i=2,\ 3,\ldots,\ n-2.$$

Такъ какъ

$$Q_2 = -2\frac{2n-2}{n-2}a^2 - (2n-2)\beta,$$

то первое изъ уравненій (10) сразу даетъ значеніе для a_2 черезъ a и β. Но ясно, что эти уравненія дадутъ выраженія для любой величины a_k, $(k = 2, 3, \ldots, n-2)$. Въ самомъ дѣлѣ, опредѣлитель этихъ уравненій въ виду того, что всѣ его элементы по одну сторону діагонали равны нулю, приводится къ произведенію всѣхъ ея элементовъ, т. е. къ числу

$$2^{n-3}.2.3.4.5\ldots(n-2)\frac{(2n-2)(2n-3)\ldots\{n-(n-3)\}}{(n-2)(n-3)\ldots\{n-(n-2)\}}$$

отличному отъ нуля, и потому они разрѣшимы, и a_k $(k=2,\ 3,\ldots,n-2)$ выразятся въ видѣ полиномовъ относительно величинъ a, β, γ и δ соотвѣтствующаго вѣса k.

Коэффиціентъ P_{n-1} будетъ линейной функціей величинъ a_2, $a_3, \ldots, a_{n-2}$. Если мы подставимъ въ уравненіе

$$P_{n-1} = 0,$$

найденныя для нихъ выраженія, получимъ соотношеніе между величинами a, β, γ, δ. Вѣсъ этого соотношенія будетъ равенъ $n-1$ и его можно написать въ видѣ:

$$\Psi_1(a,\ \beta,\ \gamma,\ \delta) = 0. \tag{11}$$

Величина a_n войдетъ линейно въ два остальные коэффиціента P_n и P_{n+1}. Легко убѣдиться въ справедливости равенствъ:

$$P_n = 2na_n + Q_n$$

$$P_{n+1} = -2aa_n + Q_{n+1},$$

гдѣ выраженія Q_n и Q_{n+1} будутъ содержать величины $a_2, a_3, \ldots, a_{n-2}$ линейно. Приравнявъ ихъ нулю, найдемъ безъ труда два условія:

$$a_n = -\frac{1}{2n} Q_n$$

$$aQ_n + nQ_{n+1} = 0.$$

Внося въ эти равенства выраженія величинъ $a_i (i = 2, 3, \ldots, n-2)$ черезъ a, β, γ, δ, получимъ такое-же выраженіе для a_n и еще одно соотношеніе между величинами a, β, γ, δ, которое мы обозначимъ черезъ:

$$\Psi_2(a, \beta, \gamma, \delta) = 0; \tag{12}$$

вѣсъ его равенъ $n+1$.

Итакъ мы напишемъ:

$$a_i = Q_i(a, \beta, \gamma, \delta) \tag{13}$$

$$i = 2, 3, \ldots, n-3, n-2, n,$$

гдѣ Q_i полиномы относительно величинъ a, β, γ, δ вѣса i. Мы слѣдовательно замѣнили условіе (8) двумя условіями (11) и (12) и формулами (13). Два условія (11) и (12) заключаютъ неизвѣстную величину a. Исключая ее изъ нихъ, получимъ *одно* между данными величинами β, γ, δ. Напишемъ его въ видѣ

$$\Theta_n(\beta, \gamma, \delta) = 0. \tag{14}$$

Такъ какъ вѣса равенствъ (11) и (12) равны соотвѣтственно числамъ $n-1$ и $n+1$, то вѣсъ полученнаго не можетъ быть больше числа n^2-1.

Полученное условіе будетъ достаточнымъ, чтобы существовало тождество (5). Въ самомъ дѣлѣ, при его выполненіи мы найдемъ по крайней мѣрѣ одно значеніе для величины a, которое удовлетворяло бы обоимъ условіямъ (11) и (12). Затѣмъ, вставивъ это значеніе въ формулы (13), найдемъ безъ затрудненія полиномы p и q по значеніямъ величинъ a_i.

Найденные такимъ образомъ полиномы p и q удовлетворятъ уравненіямъ (7) и (8). Легко показать, что можно опредѣлить въ равенствѣ (5) постоянную L такимъ образомъ, что эти полиномы будутъ удовлетворять и ему.

Множимъ равенство (8) на q и въ полученномъ равенствѣ замѣняемъ произведеніе $n(x - \frac{a}{n})q$ черезъ p' согласно условію (7). Получаемъ какъ разъ равенство (6), изъ котораго слѣдуетъ, что производная отъ выраженія $p^2 - Rq^2$ по перемѣнной x равна нулю, и слѣдова-

тельно наши полиномы таковы, что это выраженіе представляетъ собой постоянную. Для ея опредѣленія достаточно, напр., подстановки $x=0$, и получимъ $L=a_n^2-\delta a_{n-2}^2$.

Такимъ образомъ условіе (14) будетъ достаточнымъ, чтобы существовало тождество (5) и чтобы слѣдовательно разсматриваемый нами интегралъ выражался въ конечномъ видѣ.

Замѣтимъ теперь, что нельзя найти болѣе одного значенія для величины a изъ условій (11) и (12), если полиномъ R не имѣетъ кратнаго корня. Въ самомъ дѣлѣ, пусть b_1 и b_2 будутъ два значенія для величины a. Тогда оба интеграла

$$\int \frac{x-\frac{b_1}{n}}{y}\,dx$$

$$\int \frac{x-\frac{b_2}{n}}{y}\,dx$$

будутъ приводимы, а слѣдовательно и ихъ разность; но интегралъ

$$\int \frac{dx}{y}$$

можетъ быть приводимымъ лишь при существованіи кратнаго корня y полинома R.

Если же уравненія (11) и (12), разсматриваемыя, какъ уравненія для величины a, имѣютъ одно рѣшеніе, то по извѣстному свойству алгебраическихъ уравненій общій корень выражается раціонально черезъ ихъ коэффиціенты и въ данномъ случаѣ при ихъ посредствѣ также и черезъ величины β, γ, δ. Другими словами, если разсматриваемый нами интегралъ выражается въ конечномъ видѣ, то величина a выражается раціонально черезъ данныя β, γ, δ, въ видѣ частнаго двухъ полиномовъ, въ которомъ вѣсъ числителя будетъ на единицу больше вѣса знаменателя.

Если числитель и знаменатель обратятся въ нуль, то для a не будетъ опредѣленнаго значенія, и полиномъ R долженъ при этомъ имѣть кратный корень. Это замѣчаніе можетъ служить провѣркой правильности опредѣленія величины a черезъ данныя величины β, γ, δ.

Въ предыдущемъ мы изложили алгебраическій пріемъ для вычисленія постоянной $\Theta_n(\beta, \gamma, \delta)$ по данному цѣлому числу n и даннымъ постояннымъ β, γ, δ. Равенство такой постоянной нулю обозначаетъ, какъ мы видѣли, достаточное условіе, чтобы изучаемый нами интегралъ былъ приводимымъ.

Такъ какъ съ другой стороны очевидно, что для того, чтобы разсматриваемый нами интегралъ былъ приводимымъ, необходимо, чтобы по крайней мѣрѣ одна изъ этихъ постоянныхъ обращалась бы въ нуль, то приходимъ къ такой теоремѣ:

Для того, чтобы интегралъ

$$\int \frac{x+A}{y}\,dx$$

при надлежащемъ выборѣ постоянной A былъ бы приводимъ, необходимо и достаточно равенство нулю одного изъ выраженій $\Theta_n(\beta, \gamma, \delta)$ $(n = 2, 3, \ldots, \infty)$.

Сравнивая эту теорему съ основной теоремой параграфа 9-го касательно алгебраическаго интегрированія, мы видимъ, что формулировка обѣихъ теоремъ совершенно аналогична; только въ данномъ случаѣ приравнивается нулю одна постоянная, а тамъ рядъ ихъ, представляющихъ собой коэффиціенты одного полинома $\Phi_{np}(x)$.

Разсматриваемый нами случай даетъ поэтому основаніе предполагать, что расчитывать на упрощеніе данныхъ мною необходимыхъ и достаточныхъ условій для существованія алгебраическаго интеграла *по существу* весьма трудно, и можно только надѣяться на ихъ болѣе простое выраженіе и на изслѣдованія условій, при которыхъ обращаются въ нуль постоянныя типа $\Theta_n(\beta, \gamma, \delta)$ и коэффиціентовъ полиномовъ $\Phi_{np}(x)$.

Выводъ необходимаго и достаточнаго условія для приводимости разсматриваемаго интеграла былъ полученъ мною сначала приложеніемъ общей теоріи для разысканія частнаго алгебраическаго интеграла порядка n. Въ самомъ дѣлѣ, равенство (3) представляетъ собой ничто иное, какъ алгебраическое уравненіе (типа обобщеннаго уравненія Рикати), обладающее частнымъ алгебраическимъ интеграломъ

$$q\varphi - p = 0$$

Я преобразовалъ уравненіе (3) къ однороднымъ перемѣннымъ и опредѣлялъ соотвѣтствующее значеніе полинома K, а отсюда и самый частный интегралъ, принимая во вниманіе, что онъ линейный относительно перемѣнной φ.

Я позволилъ себѣ замѣнить здѣсь этотъ выводъ только—что изложеннымъ, такъ какъ тѣ-же результаты, но полученные другимъ путемъ больше могутъ поддержать значеніе выдвинутой теоріи, чѣмъ перевычисленіе примѣра.

Замѣчу, что возможно дальнѣйшее изслѣдованіе выраженія $\Theta_n(\beta, \gamma, \delta)$.

Въ самомъ дѣлѣ, взявъ въ равенствѣ

$$\int \frac{x+A}{y}\,dx = \frac{1}{2n}\log\frac{p+qy}{p-qy} + C$$

вмѣсто неопредѣленнаго интеграла исчезающій, мы получимъ тождество, въ правой части котораго постоянная C пріобрѣтаетъ опредѣленное значеніе.

Само собой разумѣется, что въ этомъ тождествѣ $A = -\frac{a}{n}$ и постоянныя a, β, γ, δ связаны условіями (11) и (12). Двѣ изъ этихъ величинъ можно считать совершенно произвольными, остальныя двѣ можно разсматривать, какъ ихъ функціи. Предположимъ поэтому напр., что помощью условія (14) δ выражено въ видѣ функціи величинъ β и γ. (Предположеніе, что въ это условіе не входитъ величина δ, надо разсматривать особо). Тогда и величина a, и слѣдовательно и A, и всѣ коэффиціенты полиномовъ p и q выразятся въ функціи величинъ β и γ.

Если возьмемъ производную отъ обѣихъ частей полученнаго тождества послѣдовательно по β и γ, разсматривая ихъ, какъ независимыя перемѣнныя, получимъ два новыхъ:

$$\int_b^x \frac{2\frac{\partial A}{\partial \beta}R - (x+A)\left(x^2 + \frac{\partial \delta}{\partial \beta}\right)}{2Ry}\,dx = S$$

и

$$\int_b^x \frac{2\frac{\partial A}{\partial \gamma}R - (x+A)\left(x + \frac{\partial \delta}{\partial \gamma}\right)}{2Ry}\,dx = S_1,$$

гдѣ вторыя части представляютъ алгебраическія функціи x. Это показываетъ, что интегралы, находящіеся въ лѣвой части, приводятся къ алгебраическимъ функціямъ. Для этого необходимо и достаточно, чтобы между

$$\frac{\partial A}{\partial \beta},\ A,\ \frac{\partial \delta}{\partial \beta},\ \beta,\ \gamma,\ \delta$$

въ первомъ случаѣ существовало два простыхъ алгебраическихъ соотношенія. Точно также подобныя соотношенія должны существовать и во второмъ случаѣ между

$$\frac{\partial A}{\partial \gamma},\ \frac{\partial \delta}{\partial \gamma},\ A,\ \beta,\ \gamma,\ \delta.$$

Полученныя условія можно разсматривать какъ дифференціальныя уравненія, опредѣляющія A и δ въ функціи величинъ β и γ.

Обратимъ вниманіе на то, что эти уравненія не зависятъ отъ числа n, и слѣдовательно оно можетъ войти только при посредствѣ постоянныхъ интеграціи. Поэтому же условія (11) и (12) дадутъ рядъ частныхъ интеграловъ этихъ уравненій, что конечно облегчитъ интегрированіе. А разъ дано будетъ общее выраженіе δ въ функціи величинъ β и γ, весь вопросъ сведется къ изслѣдованію числовыхъ функцій, которыя представляютъ собой постоянныя интеграціи.

Съ приведеніемъ разсматриваемаго интеграла связаны и другія важныя задачи.

Представимъ тождество (5) въ такомъ видѣ:

$$(p+\sqrt{L})(p-\sqrt{L})=Rq^2$$

и предположимъ, что не существуетъ такого тождества съ порядкомъ полинома p меньшимъ n.

Два полинома $p+\sqrt{L}$ и $p-\sqrt{L}$ не имѣютъ общихъ множителей: поэтому можно написать:

$$\begin{aligned} p+\sqrt{L}&=R_1 q_1^2 \\ p-\sqrt{L}&=R_2 q_2^2, \end{aligned} \tag{15}$$

гдѣ $R_1R_2=R$, а $q_1q_2=q$.

Ни одинъ изъ множителей R_1 и R_2 не можетъ приводиться къ постоянной. Пусть, напр., R_1 постоянная, можно принять ее равной единицѣ, и получимъ:

$$2\sqrt{L}=q_1^2-Rq_2^2,$$

тождество, которое по предположенію не можетъ существовать.

Слѣдовательно по условіямъ (15) полиномы $p+\sqrt{L}$ и R будутъ имѣть общаго множителя степени меньше 4. Полиномъ R оказывается приводимымъ [1]), если къ области раціональности его коэффиціентовъ β, γ, δ прибавить квадратный радикалъ $\sqrt{a_n^2-\delta a_{n-2}^2}$.

Здѣсь не достаетъ обратнаго изслѣдованія, которое отвѣтило бы на вопросъ, влечетъ ли за собой приводимость полинома R при помощи извлеченія квадратнаго корня существованіе тождества (5).

Съ вопросомъ о подобной приводимости можетъ быть связана задача о возможности построить точки пересѣченія двухъ коническихъ сѣченій помощью циркуля и линейки. Сюда же относится особенно важное для практики *приближенное* построеніе ихъ помощью циркуля и линейки.

Сюда же относится любопытный вопросъ о приближенномъ вычисленіи эллиптическихъ интеграловъ съ помощью логариѳмовъ.

---

[1]) И. Пташицкій. Объ интегрированіи въ конечномъ видѣ эллиптическихъ дифференціаловъ, стр. 62.

§ 12. О системѣ, всѣ особенныя точки которой опредѣляются раціонально.

Дѣло идетъ о системѣ:

$$\frac{dx_1}{x_1X_1}=\frac{dx_2}{x_2X_2}=\frac{dx_3}{x_3X_3}=\ldots=\frac{dx_p}{x_pX_p} \tag{1}$$

въ которой функціи X_j линейныя, однородныя выраженія въ перемѣнныхъ x_i $(i=1, 2, 3,\ldots,p)$ и независящія отъ перемѣнной x_j.

Можно слѣдовательно положить:

$$X_j=\sum_{i=1}^{p} b_{ji}\,x_i$$
$$j=1, 2, 3,\ldots, p$$

при добавочномъ условіи

$$b_{ii}=0$$
$$i=1, 2, 3,\ldots, p.$$

Такимъ образомъ эти уравненія будутъ зависѣть отъ $p(p-1)$ параметровъ.

Особенныя точки системы опредѣляются слѣдующими уравненіями:

$$x_j X_j=\lambda x_j,$$
$$j=1, 2,\ldots,p.$$

которымъ можно дать слѣдующій видъ:

$$x_j(X_j-\lambda)=0 \tag{2}$$
$$j=1, 2,\ldots, p.$$

Такъ какъ для существованія равенства (2) достаточно, чтобы только одинъ изъ множителей каждаго равенства обращался въ нуль, то эта алгебраическая система уравненій распадается на 2^p линейныхъ системъ, которыя получимъ, приравнявъ нулю въ $k\,(k=1, 2,\ldots,p)$ изъ этихъ равенствъ первые множители, а въ остальныхъ вторые множители.

Изъ этихъ системъ только одна

$$x_1=x_2=x_3=\ldots=x_p=0$$

не даетъ особенной точки. Слѣдовательно въ томъ случаѣ когда всѣ особенныя точки различны, ихъ будетъ 2^p-1, такъ какъ каждая система линейныхъ уравненій опредѣлитъ только одну особенную точку.

Вопросъ о совпаденіи этихъ точекъ можетъ быть рѣшенъ при помощи матриссы (5) параграфа 4.

Во всякомъ случаѣ p точекъ $B_j (j=1, 2, \ldots, p)$, опредѣляемыхъ значеніями

$$\begin{gathered} x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_{j-1} = 0 \\ x_j = 1 \\ x_{j+1} = x_{j+2} = \ldots = x_p = 0 \\ j=1, 2, \ldots, p. \end{gathered} \tag{3}$$

будутъ существовать для любой дифференціальной системы разсматриваемаго типа, и можно выбрать эту группу точекъ для опредѣленія полинома K.

Если обозначимъ, какъ и прежде, операцію

$$\sum_{i=1}^{p} x_i X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

черезъ X, то тождество, опредѣляющее частный алгебраическій интегралъ, напишется такъ:

$$Xf = Kf. \tag{4}$$

Полиномы X_i — второй степени, поэтому полиномъ K будетъ линейнымъ и будетъ заключать только p неизвѣстныхъ коэффиціентовъ. Слѣдовательно по теоріи, изложенной въ первыхъ четырехъ параграфахъ, достаточно взять группу p различныхъ особенныхъ точекъ.
Только что разсмотрѣнныя точки B_j не могутъ всѣ обращать въ нуль одну и ту-же линейную функцію. Беремъ ихъ поэтому для опредѣленія этого полинома.

Положимъ сначала

$$K = \sum_{i=1}^{p} b_i x_i.$$

Результатъ непосредственной подстановки въ этотъ полиномъ вмѣсто перемѣнныхъ x_i значеній, опредѣляющихъ точку B_j, будетъ равенъ b_j, т. е. коэффиціенту при перемѣнной x_j. Съ другой стороны, по параграфу 3-му, этотъ результатъ выразится черезъ величины λ_j, λ_{ji} и цѣлыя числа по формулѣ:

$$(K)_j = (n - k_j)\lambda_j + k_{j1} m \lambda_j + \sum_{i=2}^{q} k_{ji} \lambda_{ji}. \tag{5}$$

Найдемъ сначала λ_j.

Подстановка значеній перемѣнныхъ, опредѣляющихъ особенную точку B_j, въ уравненія (2) обратитъ ихъ всѣ въ нуль кромѣ одного, которое приметъ видъ:

$$\lambda = 0.$$

Отсюда заключаемъ, что λ_j равно нулю для любого значенія индекса j.

Для опредѣленія же величинъ λ_{ji} надо составить характеристическое уравненіе для касательнаго коннекса въ особенной точкѣ B_j.

Сначала напишемъ его въ общемъ видѣ:

$$\begin{vmatrix} X_1-\lambda & b_{12}x_1 & \dots & b_{1j}x_1 & \dots & b_{1p}x_1 \\ b_{21}x_2 & X_2-\lambda & \dots & b_{2j}x_2 & \dots & b_{2p}x_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{j1}x_j & b_{j2}x_j & \dots & X_j-\lambda & \dots & b_{jp}x_j \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{p1}x_p & b_{p2}x_p & \dots & b_{pj}x_p & \dots & X_p-\lambda \end{vmatrix} = 0. \qquad (6)$$

Подстановка же, о которой мы только что говорили, превратитъ его въ виду значенія полиномовъ X_j въ такое:

$$(b_{1j}-\lambda)(b_{2j}-\lambda)(b_{3j}-\lambda)\dots(b_{jj}-\lambda)\dots(b_{p-1,j}-\lambda)(b_{p,j}-\lambda) = 0, \qquad (7)$$

при этомъ не надо забывать, что b_{jj} величина равная нулю и введена лишь ради упрощенія формулъ. Полученное уравненіе показываетъ, что искомыя величины λ_{ji} — коэффиціенты въ полиномахъ X_i при перемѣнной x_j. Такъ какъ λ_j равно нулю, то первые два члена въ формулѣ (5) будутъ въ данномъ случаѣ равны нулю, а остальную часть мы получимъ, умноживъ корни уравненія (7) на цѣлыя и неотрицательныя числа и сложивъ результаты. Такимъ образомъ получаемъ:

$$(K)_j = \sum_{i=1}^{p} k_{ji}\, b_{ij},$$

гдѣ k_{ji} обозначаютъ цѣлыя неотрицательныя числа, а числа k_{jj} всегда равны нулю. Вмѣсто этой формулы можемъ написать:

$$b_j = \sum_{i=1}^{p} k_{ji}\, b_{ij}.$$

Умноживъ эту формулу на x_j и суммируя отъ 1 до p включительно обѣ части полученнаго равенства, найдемъ такое выраженіе для полинома K:

$$K = \sum_{i=}^{p} b_j x_j = \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{p} k_{ji}\, b_{ij}\, x_j. \tag{8}$$

Напомнимъ, что согласно параграфу (3) неотрицательныя числа k_{ji} удовлетворяютъ нѣкоторымъ условіямъ, которыя въ данномъ случаѣ можно выразить слѣдующими неравенствами:

$$\sum_{i=1}^{p} k_{ji} \leq k_j$$

$$j = 1, 2, 3, \ldots, p.$$

и

$$k_j \leq n$$

$$j = 1, 2, 3, \ldots, p,$$

гдѣ n—порядокъ частнаго алгебраическаго интеграла, для котораго опредѣляется полиномъ K.

Такимъ образомъ, взятая нами система (1) обладаетъ тѣмъ замѣчательнымъ свойствомъ, что полиномы K, отвѣчающіе частнымъ интеграламъ этой системы, составляются линейно изъ коэффиціентовъ этой системы.

Такъ какъ изъ разсужденій параграфа 5-го слѣдуетъ, что коэффиціенты частнаго алгебраическаго интеграла выражаются раціонально черезъ коэффиціенты системы и ирраціональности λ и λ_{ji}, то въ данномъ случаѣ всѣ коэффиціенты любого частнаго интеграла выражаются раціонально черезъ коэффиціенты системы (1).

Эта система обладаетъ p очевидными частными линейными интегралами x_j $(j = 1, 2, \ldots, p)$. Соотвѣтствующими имъ полиномами K будутъ функціи X_j $(j = 1, 2, 3, \ldots, p)$, которыя заключаются, какъ и слѣдовало ожидать, въ формулѣ (8).

Кромѣ того она имѣетъ упомянутый въ параграфѣ 8-мъ видъ, даваемый системѣ для упрощенія вычисленія частныхъ алгебраическихъ интеграловъ n-го порядка. Въ данномъ случаѣ каждый изъ знаменателей, на которые въ системѣ (1) дѣлятся дифференціалы, имѣетъ множителемъ соотвѣтствующую перемѣнную, и слѣдовательно по изложеннымъ въ параграфѣ 8-мъ пріемамъ можно, не зная всего частнаго интеграла, вычислять ту его часть, которая зависитъ отъ любой данной группы перемѣнныхъ, т. е. можно разыскивать ту часть частнаго интеграла, которая останется, если положить въ ней всѣ остальныя перемѣнныя равными нулю. Можно начать съ опредѣленія частнаго интеграла только

для системы двухъ перемѣнныхъ и увеличивать число перемѣнныхъ послѣдовательно, пока не дойдемъ до полнаго числа перемѣнныхъ.

Прежде чѣмъ примѣнить сдѣланныя замѣчанія, остановимся на слѣдующей задачѣ.

Дано уравненіе

$$\sum_{i=1}^{p} X_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = Kf + U, \tag{9}$$

гдѣ X_i, K и U обозначаютъ собой данные полиномы соотвѣтственно m-го, $m-1$-го и $n+m-1$-го порядка. Требуется найти полиномъ f n-го порядка, удовлетворяющій этому уравненію.

Общее теоретическое рѣшеніе этого вопроса очень просто: стоитъ только подставить въ это уравненіе вмѣсто полинома f самый общій полиномъ f n-го порядка съ неопредѣленными коэффиціентами. Произведя указанныя дѣйствія и собравъ всѣ члены въ одну часть, получимъ полиномъ; приравнивая коэффиціенты его нулю, получимъ рядъ линейныхъ уравненій для опредѣленія искомыхъ коэффиціентовъ полинома f. Число такихъ уравненій будетъ вообще больше, чѣмъ перемѣнныхъ, и слѣдовательно данныя въ задачѣ должны удовлетворять нѣкоторымъ условіямъ.

Употребимъ слѣдующій пріемъ, чтобы выяснить характеръ и число этихъ условій.

Обозначимъ черезъ B_{1i} $(i=1, 2, 3, \ldots, s)$, какъ мы это дѣлали въ параграфѣ 9-мъ, одночлены n-го измѣренія, и слѣдовательно полиномъ f можетъ быть представленъ суммой:

$$f = \sum_{j=1}^{s} C_j B_{1j},$$

гдѣ C_j будутъ обозначать коэффиціенты полинома f.

Подставляя это выраженіе для полинома f въ уравненіе (9) и полагая для краткости

$$\sum_{i=1}^{p} X_i \frac{\partial B_{1j}}{\partial x_i} - KB_{1j} = E_j, \tag{10}$$

находимъ равенство:

$$\sum_{j=1}^{s} C_j E_j = U. \tag{11}$$

Оно показываетъ, что полиномъ U представляетъ собой линейную комбинацію полиномовъ E_j, полученныхъ изъ одночленовъ B_{1j} помощью операціи, выраженной равенствомъ (10).

Предположимъ сначала, что между этими полиномами нѣтъ линейной зависимости съ постоянными коэффиціентами. Тогда мы видимъ,

что полиномъ U порядка $n+m-1$ представляетъ собой линейную комбинацію $s=\binom{p+n-1}{p-1}$ полиномовъ и слѣдовательно можно взять только s коэффиціентовъ его совершенно произвольными; другими словами, между коэффиціентами полинома U должно существовать $\binom{p+m+n-2}{p-1}-\binom{p+n-1}{p-1}$ зависимостей. Очевидно эти зависимости будутъ имѣть линейный характеръ.

Но можетъ случиться, что не всѣ полиномы E_j линейно независимы. Пусть существуетъ между ними q линейныхъ зависимостей. Тогда можно выразить q изъ полиномовъ E_j черезъ всѣ остальные. Внеся эти выраженія въ равенство (11), убѣдимся, что полиномъ U выражается въ видѣ линейной функціи $s-q$ полиномовъ линейно независимыхъ. Слѣдовательно его коэффиціенты для возможности рѣшенія должны быть подчинены $\binom{m+n+p-2}{p-1}+q-\binom{n+p-1}{p-1}$ условіямъ.

Это можно формулировать иначе. Разсмотримъ для этого, къ чему ведетъ существованіе линейнаго соотношенія между полиномами E_j.

Пусть

$$\sum_{j=1}^{s} C_j^{(1)} E_j = 0. \tag{12}$$

одно изъ этихъ соотношеній. Обозначимъ черезъ f_1 полиномъ:

$$\sum_{j=1}^{s} C_j^{(1)} B_{1j}.$$

Множимъ обѣ части равенства (10) на $C_j^{(1)}$ и суммируемъ по j отъ 1 до s включительно. Легко видѣть, что результатъ можно написать въ виду соотношенія (12) въ такой формѣ:

$$\sum_{i=1}^{p} X_i \frac{\partial f_1}{\partial x_i} = K f_1.$$

Полученное равенство показываетъ, что полиномъ f_1 — частный алгебраическій интегралъ n-го порядка для уравненія

$$\sum X_i \frac{\partial z}{\partial x_i} = 0, \tag{13}$$

съ даннымъ полиномомъ K.

Значитъ существованіе q условій типа (12) показываетъ, что уравненіе (13) при данномъ полиномѣ K имѣетъ q линейно независимыхъ частныхъ алгебраическихъ интеграловъ порядка n.

Замѣтимъ кромѣ того, что, имѣя полиномъ f_0 рѣшеніемъ уравненія (9), а полиномъ f_1 частнымъ алгебраическимъ интеграломъ указаннаго типа, можемъ составить болѣе общее рѣшеніе уравненія, положивъ $f = f_0 + Cf_1$, гдѣ C совершенно произвольная постоянная.

Этимъ убѣждаемся окончательно, что для возможности рѣшенія вопроса коэффиціенты полинома U должны быть подчинены $\binom{m+n+p-2}{p-1} + q - \binom{n+p-1}{p-1}$ линейнымъ условіямъ, при чемъ q обозначаетъ число частныхъ алгебраическихъ интеграловъ съ даннымъ полиномомъ K, и тогда рѣшеніе будетъ зависѣть линейно отъ q произвольныхъ постоянныхъ.

Особенно интересный результатъ получается для случая $m=1$.

Въ этомъ случаѣ K будетъ постоянной величиной, и всякій разъ, когда она не будетъ имѣть вида, указаннаго формулой (3) параграфа 2-го, наша задача будетъ имѣть *одно опредѣленное рѣшеніе*.

Вернемся теперь къ примѣненію способовъ параграфа 8-го къ интересующей насъ системѣ (1).

Мы не будемъ приводить систему къ виду, при которомъ полиномъ X_p равенъ нулю, и слѣдовательно не можемъ непосредственно воспользоваться формулами (14) параграфа 8; мы имъ дадимъ, разыскивая ихъ непосредственно изъ равенства (4), болѣе удобную для насъ форму.

Сначала разбиваемъ операцію X на сумму слѣдующихъ трехъ:

$$X_p^{(1)} \equiv \sum_{i=1}^{p-1} x_i (X_i - b_{ip} x_p) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$x_p X_p^{(2)} \equiv x_p \sum_{i=1}^{p-1} b_{ip}\, x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

и

$$x_p X_p \frac{\partial}{\partial x_p}.$$

Будемъ, какъ прежде, различать два случая: когда особенная точка B_j не обращаетъ въ нуль полинома f, и когда она представляетъ его k-кратную точку.

Въ первомъ случаѣ надо положить полиномъ f въ видѣ ряда

$$\sum_{i=1}^{p} f_i x^i,$$

гдѣ f_i обозначаетъ однородный полиномъ $n-i$-го порядка въ перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}$, а постоянная f_n не равна нулю. Результатъ подстановки значеній, опредѣляющихъ особенную точку B_p, въ поли-

номъ K равенъ $n\lambda_p$, т. е. нулю, такъ какъ всѣ λ_j равны нулю. Коэффиціентъ b_p будетъ нулемъ, и слѣдовательно K будетъ линейной функціей однихъ перемѣнныхъ $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{p-1}$.

Подставляемъ взятыя нами выраженія въ равенство (4). Оно приметъ слѣдующій видъ:

$$\left\{X_p^{(1)} + x_p X_p^{(2)} + x_p X_p \frac{\partial}{\partial x_p}\right\} \sum_{i=0}^{n} f_i x_p^i = K \sum_{i=0}^{n} f_i x_p^i .$$

Это равенство должно быть справедливо при всѣхъ значеніяхъ перемѣнной x_p и слѣдовательно приводится къ $n+1$ равенствамъ:

$$\begin{aligned} X_p^{(1)} f_0 &= K f_0 \\ X_p^{(1)} f_g &= (K - g X_g) f_g - X_p^{(2)} f_{g-1} \\ &\quad g = 1, 2, \ldots, n-1 \\ 0 &= (K - n X_p) f_n - X_p^{(2)} f_{n-1} \end{aligned} \tag{15}$$

Въ полученныя равенства входятъ двѣ дифференціальныя операціи $X_p^{(1)}$ и $X_p^{(2)}$. Первая изъ нихъ отличается совершенно такимъ же характеромъ, какъ и операція X, только зависитъ отъ числа коэффиціентовъ на единицу меньшаго. Порядокъ же ихъ относительно перемѣнныхъ x_i соотвѣтственно равняется 2 и 1.

Можно разсматривать полученный рядъ равенствъ относительно какъ первой, такъ и второй операціи, какъ рядъ послѣдовательныхъ уравненій типа (9).

Въ самомъ дѣлѣ, положимъ, что намъ удалось опредѣлить по первому изъ уравненій (15) полиномы K и f_0. Тогда, подставивъ полученное значеніе этихъ полиномовъ въ слѣдующее уравненіе, получимъ равенство.

$$X_p^{(1)} f_1 = (K - X_p) f_1 - X_p^{(2)} f_0 .$$

Въ немъ будетъ оставаться неизвѣстнымъ лишь полиномъ f_1. Слѣдовательно это уравненіе—типа уравненія (9) относительно операціи $X_p^{(1)}$. Опредѣляемъ отсюда полиномъ f_1 и находимъ условія, которымъ долженъ быть подчиненъ полиномъ $X_p^{(2)} f_0$. Подставляемъ полученное значеніе для полинома f_1 въ слѣдующее равенство:

$$X_p^{(1)} f_2 = (K - 2X_p) f_2 - X_p^{(2)} f_1 .$$

Въ немъ опять остается неизвѣстной только одна функція f_2. Это уравненіе также типа (9). Получаемъ изъ него тѣмъ-же порядкомъ полиномъ f_2 и условія, которымъ подчинены коэффиціенты полинома $X_p^{(2)} f_1$.

Продолжая такимъ образомъ, найдемъ весь намъ нужный рядъ полиномовъ f_i и рядъ условій, которымъ подчинены полиномы $X_p^{(1)} f_i$ $(i=1, 2, \ldots, n-1)$. Въ эти условія будутъ входить цѣлыя неотрицательныя числа, при помощи которыхъ былъ опредѣленъ полиномъ K, коэффиціенты системы (1) и линейно произвольныя постоянныя, входящія при интегрированіи уравненій типа (9).

Предпочтительнѣе однако въ виду большей простоты обратный путь, а именно, разсматривать всѣ уравненія (15) за исключеніемъ перваго, какъ уравненія типа (9), но относительно операціи $X_p^{(2)}$.

Опредѣляемъ сначала по формулѣ (8) полиномъ K. О постоянной f_n мы знаемъ, что она отлична отъ нуля. Можно дать ей безъ вреда для общности значеніе равное единицѣ, и тогда послѣднее уравненіе изъ числа уравненій (15) напишется такъ:

$$X_p^{(2)} f_{n-1} = -nX_p + K.$$

Въ немъ неизвѣстенъ только линейный полиномъ f_{n-1}. Сравнивая его съ уравненіемъ (9), мы видимъ, что оно принадлежитъ къ его типу, но относительно операціи $X_p^{(2)}$. Отсюда мы можемъ опредѣлить полиномъ f_{n-1} и получить въ извѣстныхъ случаяхъ соотношенія между коэффиціентами полинома $nX_p - K$.

Разсмотримъ затѣмъ общій случай. Напишемъ одно изъ уравненій (15) въ слѣдующемъ видѣ:

$$X_p^{(2)} f_{g-1} = (-gX_p + K) f_g - X_p^{(1)} f_g. \tag{16}$$

Если намъ извѣстенъ полиномъ f_g, мы, подставивъ его въ это уравненіе, будемъ имѣть въ немъ неизвѣстнымъ только одинъ полиномъ f_{g-1}. Это уравненіе войдетъ тогда въ типъ уравненій (9) относительно операціи $X_p^{(2)}$. Мы уже видѣли, что возможно опредѣлить полиномъ f_{n-1}. Положивъ въ уравненіи (16) $g=n-1$, мы опредѣлимъ полиномъ f_{n-2}. Принявъ же $g=n-2$, найдемъ полиномъ f_{n-3}. Продолжая такимъ образомъ, получимъ наконецъ и полиномъ f_0.

Такимъ образомъ всѣ уравненія (15) безъ перваго даютъ возможность опредѣлить всѣ полиномы f_i при помощи операціи $X_p^{(2)}$.

При выполненіи этого опредѣленія въ эти полиномы можетъ войти извѣстное число произвольныхъ постоянныхъ, и мы получимъ столько же соотношеній между ними, неотрицательными числами, послужившими для опредѣленія полинома K, и коэффиціентами системы (1). Надо замѣтить что произвольныя постоянныя, вошедшія въ полиномъ f_0 при интеграціи послѣдняго уравненія

$$X_p^{(2)} f_0 = (-X_p + K) f_1 - X_p^{(1)} f_1$$

не войдутъ въ эти соотношенія.

Теперь остается только подставить полиномъ f_0 въ первое изъ уравненій (15)

$$X_p^{(1)} f_0 = K f_0 .$$

Оно дастъ намъ остальныя условія, которыя окончательно разрѣшатъ вопросъ.

Къ этому нужно добавить, что интегрировать уравненіе

$$X_p^{(2)} \varphi = U$$

очень просто.

Пусть B_{1i} $(i=1, 2, \ldots, s_1)$ тѣ изъ одночленовъ n-го измѣренія, которые не зависятъ отъ перемѣнной x_p.

Положимъ

$$U = \sum_{i=1}^{s_1} C_i B_{1i} \tag{17}$$

Рѣшимъ сначала рядъ уравненій:

$$X_p^{(2)} \varphi_i = B_{1i}$$
$$i=1, 2, 3, \ldots, s_1.$$

Станемъ рѣшать эти уравненія общимъ путемъ, который указанъ для уравненій типа (9). Беремъ одночленъ B_{1i} и опредѣляемъ при помощи операціи $X_p^{(2)}$ соотвѣтствующій полиномъ E_i. Представляемъ его въ слѣдующемъ видѣ:

$$B_{1i} \equiv \prod_{g=1}^{p-1} x_g^{k_{ig}},$$

гдѣ k_{ig} — цѣлыя неотрицательныя числа, удовлетворяющія условію:

$$\sum_{g=1}^{p-1} k_{ig} = n .$$

Беремъ отъ него производную по перемѣнной x_j, получаемъ въ результатѣ:

$$\frac{\partial B_{1i}}{\partial x_j} = \frac{k_{ij}}{x_j} \prod_{g=1}^{p-1} x_g^{k_{ig}} = \frac{k_{ij}}{x_j} B_{1i} .$$

Множимъ обѣ части этого равенства на $b_{jp} x_j$ и суммируемъ отъ 1 до $p-1$ включительно; въ результатѣ получаемъ равенство:

$$\sum_{j=1}^{p-1} b_{jp} x_j \frac{\partial B_{1i}}{\partial x_j} = B_{1i} \sum_{j=1}^{p-1} k_{ij} b_{jp} ,$$

или

$$X_p^{(2)} B_{1i} = B_{1i}\, l_i\,,$$

гдѣ мы положимъ

$$l_i = \sum_{j=1}^{p-1} k_{ij}\, b_{jp}.$$

Итакъ результатъ операціи $X_p^{(2)}$ надъ одночленомъ B_{1i} равенъ этому же одночлену, умноженному на постоянную l_i. Предположимъ сначала, что ни одно изъ выраженій l_i не равно нулю. Тогда можно написать:

$$X_p^{(2)} \frac{B_{1i}}{l_i} = B_{1i}\,.$$

Множимъ обѣ части этого равенства на C_i, суммируемъ отъ 1 до s_1 включительно и находимъ въ результатѣ:

$$X_p^{(2)} \sum_{i=1}^{s_1} C_i \frac{B_{1i}}{l_i} = \sum_{i=1}^{s_1} C_i\, B_{1i} \tag{18}$$

Эта формула опредѣляетъ вполнѣ полиномъ φ по данному U, когда ни одно изъ выраженій l_i не равно нулю.

Если же l_i равно нулю, то

$$X_p^{(2)} B_{1i} = 0\,;$$

т. е. одночленъ B_{1i} будетъ интеграломъ дифференціальнаго уравненія въ частныхъ производныхъ

$$X_p^{(2)}\, z = 0\,, \tag{19}$$

Очевидно, что, если въ полиномѣ U коэффиціентъ при такомъ одночленѣ не равенъ нулю, то нельзя опредѣлить соотвѣтствующаго полинома φ. Итакъ для возможности задачи необходимо и достаточно, чтобы полиномъ U не имѣлъ такихъ одночленовъ, которые были бы интегралами уравненія (19). Рѣшеніе же получится по формулѣ (18), надо только добавить къ нему всѣ одночлены, которые будутъ интегралами уравненія (19), съ совершенно произвольными коэффиціентами.

Если напр. всѣ величины b_{ip} одного знака, то послѣдовательное опредѣленіе полиномовъ f_j будетъ всегда давать опредѣленный результатъ, не заключающій произвольной постоянной.

Переходимъ теперь ко второму случаю, когда точка B_p представляетъ собой k-кратную точку полинома f. Въ этомъ случаѣ его можно

написать въ видѣ такой суммы

$$f \equiv \sum_{i=1}^{n-k} f_i x_p^i,$$

гдѣ f_i обозначаютъ однородные полиномы однихъ перемѣнныхъ x_i $(i=1, 2, \ldots, p-1)$ порядка $n-k$.

На этотъ разъ коэффиціентъ при x_p въ полиномѣ K можетъ быть отличенъ отъ нуля, и мы должны написать $K_0 + b_p x_p$, подразумѣвая, что полиномъ K_0 не зависитъ отъ перемѣнной x_p.

Представляемъ операцію X, какъ и прежде, въ видѣ суммы трехъ и получаемъ вмѣсто равенства (4) слѣдующее

$$\left\{X_p^{(1)} + x_p X_p^{(2)} + x_p X_p \frac{\partial}{\partial x_p}\right\} \sum_{i=0}^{n-k} f_i x_p^i = (K_0 + b_p x_p) \sum_{i=0}^{n-k} f_i x_p^i.$$

Это равенство должно быть справедливо при всѣхъ значеніяхъ перемѣнной x_p, и потому имѣемъ такой рядъ равенствъ:

$$\begin{gathered} X_p^{(1)} f_0 = K_0 f_0 \\ X_p^{(1)} f_g = (K_0 - g X_p) f_g - X_p^{(2)} f_{g-1} + b_p f_{g-1} \\ g = 1, 2, \ldots, n-k \\ X_p^{(2)} f_{n-k} = b_p f_{n-k} \end{gathered} \tag{20}$$

Полученныя уравненія аналогичны уравненіямъ (15). Они—типа уравненій (9) для обѣихъ операцій $X_p^{(1)}$ и $X_p^{(2)}$. Если мы начнемъ съ перваго уравненія, то наши вычисленія будутъ совершенно аналогичны прежнимъ.

Но при примѣненіи второго пріема необходимо дополненіе въ видѣ интегрированія послѣдняго уравненія.

Выпишемъ его здѣсь отдѣльно:

$$X_p^{(2)} f_{n-k} = b_p f_{n-k}.$$

Оно показываетъ, что полиномъ f_{n-k} k-го порядка—частный алгебраическій интегралъ уравненія (19).

Для рѣшенія этого вопроса мы воспользуемся теоріей полиномовъ, заключающихъ въ видѣ множителя частные алгебраическіе интегралы, изложенной въ параграфѣ 6-мъ.

Обозначимъ черезъ G_j $(j = 1, 2, \ldots, s_2)$ одночлены k-го измѣренія, составленные изъ перемѣнныхъ x_i $(i=1, 2, \ldots, p-1)$, гдѣ $s_2 = \binom{p+k-2}{p-2}$.

Мы только что видѣли, что результатъ операціи $X_p^{(2)}$ надъ одночленомъ равенъ ему же, но умноженному на постоянный множитель, составленный при помощи показателей перемѣнныхъ въ этомъ одночленѣ и величинъ b_{ip}. Обозначимъ такую постоянную, соотвѣтстствующую одночлену G_{1j} черезъ l_j и слѣдовательно пишемъ:

$$X_p^{(2)} G_j = l_j G_j \tag{21}$$

Примѣняя операцію $X_p^{(2)}$ еще разъ, получимъ $l_j G_{1j}$ и вообще послѣ r-кратнаго примѣненія операціи $X_p^{(2)}$ надъ одночленомъ G_j получимъ $l_j^r G_j$.

Принявъ все это во вниманіе, мы можемъ написать полиномъ, заключающій всѣ частные алгебраическіе интегралы k-го порядка въ видѣ опредѣлителя:

$$\begin{vmatrix} G_1 & G_2 & G_3 & \dots & G_{s_2} \\ l_1 G_1 & l_2 G_2 & l_3 G_3 & \dots & l_{s_2} G_{s_2} \\ l_1^2 G_1 & l_2^2 G_2 & l_3^2 G_3 & \dots & l_{s_2}^2 G_{s_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_1^{s_2-1} G_1 & l_2^{s_2-1} G_2 & l_3^{s_2-1} G_3 & \dots & l_2^{s_2-1} G_{s_2} \end{vmatrix}$$

Полученный опредѣлитель равенъ произведенію всѣхъ одночленовъ G_j на опредѣлитель Вандермонда, составленный изъ величинъ l_j $(j = 1, 2, \dots, s_2)$. Поэтому всякій разъ, когда между этими величинами нѣтъ двухъ равныхъ, этотъ полиномъ не можетъ заключать иныхъ множителей, кромѣ произведенія этихъ перемѣнныхъ. Итакъ, если между l_j нѣтъ равныхъ, то частнымъ алгебраическимъ интеграломъ k-го порядка можетъ быть только одночленъ и притомъ любой G_j. Соотвѣтствующимъ значеніемъ для постоянной b_p будетъ l_j. Если же между постоянными l_j есть по нѣскольку равныхъ, то прежде всего убѣждаемся по параграфу 9-му, что существуетъ алгебраическій интегралъ въ видѣ частнаго (въ данномъ случаѣ) двухъ одночленовъ. Простой анализъ выясняетъ, что при равенствѣ ϱ постоянныхъ l_j, отвѣчающихъ ϱ одночленамъ, уравненіе

$$X_p^{(2)} f_{n-k} = l_j f_{n-k}$$

будетъ имѣть интеграломъ сумму этихъ одночленовъ, умноженныхъ на произвольные множители.

Мы остановились нѣсколько дольше, чѣмъ слѣдуетъ, на интегрированіи послѣдняго изъ уравненій (20), чтобы дать примѣръ на непосредственное примѣненіе теоріи полиномовъ $\Phi_{np}(x)$.

Дальнѣйшее опредѣленіе полиномовъ f_{n-k-1}, $f_{n-k-2}, \dots, f_0$ производится, какъ и въ первомъ случаѣ.

Въ томъ и другомъ случаѣ полиномы f_n, $f_{n-1}, \ldots, f_0$ — ничто иное, какъ поляры различныхъ порядковъ отъ полинома f, если мы возьмемъ за полюсъ особенную точку B_p.

Подобный способъ опредѣленія послѣдовательныхъ поляръ представляетъ собой способъ общаго характера, какъ я уже указывалъ въ подстрочномъ примѣчаніи параграфа 10-го. Отсюда, правда, нѣсколько сложнымъ путемъ можно вывести нѣсколько слѣдствій, которыя по меньшей мѣрѣ любопытны.

Такъ, мы видѣли въ параграфѣ 9-мъ, что для существованія алгебраическаго интеграла порядка n, необходимо существованіе частнаго алгебраическаго интеграла порядка n, заключающаго линейно произвольную постоянную.

Съ другой стороны, при вычисленіи полинома f по уравненіямъ (15) или (20) произвольная постоянная можетъ войти въ рѣшеніе только въ силу особенностей уравненія:

$$X_p^{(2)} z = 0.$$

Поэтому приходимъ къ такой теоремѣ:

Система (1) не можетъ имѣть алгебраическаго интеграла порядка n безъ того, чтобы каждое изъ уравненій

$$\sum_{i=1}^{p} b_{ij} \frac{\partial z}{\partial x_i} = 0,$$

$$j = 1, 2, 3, \ldots, p,$$

имѣло либо интегралъ въ видѣ одночлена измѣренія не большаго n, либо частный алгебраическій интегралъ порядка n, зависящій линейно отъ произвольной постоянной.

Эта теорема отличается впрочемъ общимъ характеромъ и можетъ быть распространена и на остальныя уравненія касательныхъ коннексовъ въ остальныхъ особенныхъ точкахъ системы (1).

Эта же теорема годится для касательныхъ линейныхъ коннексовъ въ особенныхъ точкахъ любой системы. Но я не буду останавливаться на доказательствѣ, такъ какъ для этого потребовались бы предварительныя изслѣдованія случая кратныхъ корней характеристическаго уравненія касательнаго коннекса и вліянія ихъ на интегрированіе уравненій типа (9).

Какъ ни элементарны указанные пріемы, но при надлежащемъ примѣненіи они могутъ дать любопытные результаты.

Остановимся нѣсколько подробнѣе на слѣдующемъ примѣрѣ:

Требуется найти всѣ частные алгебраическіе интегралы для системы (1) при $p = 3$, не обращающіеся въ нуль для особенныхъ точекъ B_1, B_2, B_3.

Положимъ степень такого полинома равной n. Обозначимъ коэффиціенты при степеняхъ x_i^n соотвѣтственно черезъ l_i.

Вычисляемъ сначала полиномъ K. Мы знаемъ, что по параграфу 3-му подстановка въ этотъ полиномъ значеній, опредѣляющихъ особенную точку B_j, дастъ $n\lambda_j$; но величина λ_j, какъ мы видѣли раньше, равна нулю, и слѣдовательно въ этомъ случаѣ и самъ полиномъ K равенъ нулю.

Поэтому искомый полиномъ f тождественно удовлетворяетъ условію:

$$\sum_{i=1}^{3} x_i X_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0, \tag{22}$$

Положивъ въ немъ одну изъ перемѣнныхъ напримѣръ x_3 равной нулю, придемъ къ такому уравненію:

$$x_1 x_2 \left(b_{12} \frac{\partial f}{\partial x_1} + b_{21} \frac{\partial f}{\partial x_2} \right) = 0.$$

Отсюда мы видимъ, что

$$f_0 = l\,(b_{12} x_2 - b_{21} x_1)^n,$$

гдѣ f_0 обозначаетъ результатъ подстановки $x_3 = 0$.

Коэффиціенты $l(-b_{21})^n$ и lb_{12}^n представятъ поэтому ничто иное, какъ коэффиціенты l_1 и l_2, и слѣдовательно получаемъ:

$$\frac{(-b_{21})^n}{l_1} = \frac{b_{12}^n}{l_2}.$$

Полагая въ уравненіи (22) послѣдовательно x_1 и x_2 равными нулю, получимъ еще два такихъ равенства:

$$\frac{b_{32}^n}{l_2} = \frac{(-b_{23})^n}{l_3}, \quad \frac{b_{13}^n}{l_3} = \frac{(-b_{31})^n}{l_2}.$$

Исключая изъ трехъ равенствъ l_1, l_2 и l_3, найдемъ

$$(-b_{21} b_{13} b_{32})^n = (b_{12} b_{23} b_{31})^n$$

или

$$b_{21} b_{13} b_{32} = \alpha b_{12} b_{23} b_{31}, \tag{23}$$

гдѣ α удовлетворяетъ уравненію:

$$\alpha^n = (-1)^n.$$

Напишемъ второе изъ уравненій (15) для этого случая:

$$x_1x_2\left(b_{12}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}+b_{21}\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)=-(b_{31}x_1+b_{32}x_2)f_1+ln\,u^{n-1}(b_{12}b_{23}x_2-b_{21}b_{13}x_1), \tag{24}$$

гдѣ положено для краткости $u\equiv b_{12}x_2-b_{21}x_1$.

Это уравненіе согласно теоріи уравненій типа (9) должно дать одно условіе между постоянными b_{ji}.

Предположимъ сначала, что $f_1=au^{n-1}$. Тогда уравненіе (24) по подстановкѣ этого значенія для полинома f_1 приведется къ такому

$$u^{n-1}\{-a(b_{31}x_1+b_{32}x_2)+ln(b_{12}b_{23}x_2-b_{21}b_{13}x_1)\}=0.$$

Это равенство заключаетъ единственную постоянную, которую мы можемъ выбрать подходящимъ образомъ. Слѣдовательно между постоянными b_{ji} въ данномъ случаѣ должно имѣть мѣсто соотношеніе:

$$b_{12}b_{23}b_{31}+b_{21}b_{13}b_{32}=0. \tag{25}$$

Легко убѣдиться при помощи непосредственной подстановки, что линейная функція

$$v\equiv b_{31}b_{21}x_1-b_{31}b_{12}x_2-b_{13}b_{21}x_3$$

будетъ частнымъ алгебраическимъ интеграломъ, соотвѣтствующій полиномъ K котораго будетъ равенъ нулю.

Слѣдовательно условіе (25) влечетъ за собой и существованіе частнаго алгебраическаго интеграла искомаго типа, а именно онъ будетъ равняться v^n.

Положимъ теперь

$$f_1=ax_1^{k_3}u^{n-k_3-1}+u^{n-k_3}\varphi,$$

гдѣ φ нѣкоторый полиномъ k_3—1-го порядка.

По подстановкѣ уравненіе (24) принимаетъ видъ

$$ak_3b_{12}x_1^{k_3}x_2u^{n-k_3-1}=-ax_1^{k_3}(b_{31}x_1+b_{32}x_2)u^{n-k_3-1}+u^{n-k_3}\varphi,$$

гдѣ φ нѣкоторый полиномъ k_3-го порядка.

Полученное равенство показываетъ, что линейная функція $b_{31}x_1+(b_{32}+k_3b_{12})x_2$ дѣлится на u. Отсюда получаемъ условіе:

$$k_3b_{12}b_{21}+b_{32}b_{21}+b_{31}b_{12}=0. \tag{26}$$

Предполагая, что условіе (25) не имѣетъ мѣста, находимъ еще два аналогичныхъ:

$$\begin{aligned} k_2 b_{13} b_{31} + b_{13} b_{21} + b_{31} b_{23} = 0 \\ k_1 b_{23} b_{32} + b_{23} b_{12} + b_{32} b_{13} = 0 . \end{aligned} \tag{27}$$

Въ четыре условія (23), (26), (27) каждая пара постоянныхъ $b_{ij} b_{gj}$ входитъ однородно, поэтому можно исключить ихъ изъ этихъ четырехъ условій, и получимъ соотношеніе между величиной α и цѣлыми положительными числами k_i такого вида:

$$\alpha^2 - (k_1 + k_2 + k_3 - k_1 k_2 k_3)\, \alpha + 1 = 0 . \tag{28}$$

Случай $\alpha = -1$ можно исключить, такъ какъ при этомъ условіе (23) совпадаетъ съ условіемъ (25).

Остается только одно дѣйствительное значеніе для α равное 1. Тогда уравненіе (28) дастъ слѣдующее въ цѣлыхъ числахъ большихъ нуля:

$$k_1 k_2 k_3 - k_1 - k_2 - k_3 + 2 = 0 .$$

Безъ труда можемъ убѣдиться, что по крайней мѣрѣ одно изъ чиселъ k_i равно 1. Тогда при всѣхъ b_{ij} отличныхъ отъ нуля будемъ имѣть $k_1 = k_2 = k_3 = 1$.

Въ этомъ случаѣ будетъ существовать частный алгебраическій интегралъ въ видѣ степени частнаго же алгебраическаго интеграла 2-го порядка.

Этотъ интегралъ въ иной формѣ, также какъ и отвѣчающій условію (25) даны G. Darboux въ цитированной выше работѣ.

Кромѣ того условіе (28) показываетъ, что α можетъ имѣть только пять мнимыхъ значеній, опредѣляемыхъ уравненіями:

$$\alpha^2 \pm \alpha + 1 = 0$$

$$\alpha^2 + 1 = 0 .$$

Не будемъ останавливаться на дальнѣйшемъ изслѣдованіи системы (1).

Въ заключеніе добавимъ только, что прилагаемый методъ позволяетъ между прочимъ доказать и другія интересныя свойства этихъ уравненій.

Въ видѣ примѣра приведу слѣдующую теорему:

Если въ системѣ (1) ни одинъ изъ коэффиціентовъ b_{ij} не равенъ нулю при индексѣ j не равномъ индексу i, то она не можетъ имѣть частнаго алгебраическаго *неодночленнаго* интеграла степени выше второй безъ того, чтобы для любого индекса j всѣ коэффиціенты b_{ij} $(i = 1, 2, 3, \ldots, p)$ не были бы пропорціональны величинамъ, составленнымъ раціонально изъ цѣлыхъ чиселъ и квадратныхъ корней изъ нихъ.

§ 13. Объ одной системѣ дифференціальныхъ уравненій твердаго тѣла, наполненнаго жидкостью.

Въ Annales de la Faculté des sciences de Toulouse, 2-e série, t. X, p. 271, et 3-e série t. I, p. 1. В. А. Стекловымъ помѣщены два большихъ мемуара, въ которыхъ онъ занимается между прочимъ разыскиваніемъ алгебраическихъ интеграловъ такой дифференціальной системы:

$$\begin{aligned}
\alpha p' &= (\beta-\gamma)qr + K(c-b)vw + \frac{2Ma(c-b)}{5}[c(a-b)rv - b(c-a)qw] \\
\beta q' &= (\gamma-\alpha)pr + K(a-c)uw + \frac{2Mb(a-c)}{5}[a(b-c)pw - c(a-b)ru] \quad (1) \\
\gamma r' &= (\alpha-\beta)pq + K(b-a)uv + \frac{2Mc(b-a)}{5}[b(c-a)qu - a(b-c)pv],
\end{aligned}$$

гдѣ

$$K = \frac{2Mabc}{5}.$$

$$\begin{aligned}
(c+a)(a+b)u' &= a(b-c)vw + 2a[(a+c)rv - (a+b)qw] \equiv (c+a)(a+b)U \\
(a+b)(b+c)v' &= b(c-a)uw + 2b[(b+a)pw - (b+c)ru] \equiv (a+b)(b+c)V \quad (2) \\
(b+c)(c+a)w' &= c(a-b)vu + 2c[(c+b)qu - (c+a)pv] \equiv (b+c)(c+a)W.
\end{aligned}$$

Безъ всякаго вреда для общности послѣдующихъ разсужденій можемъ взять въ первыхъ трехъ уравненіяхъ вмѣсто α, β, γ произведенія αK, βK, γK и получить вмѣсто нихъ слѣдующія:

$$\begin{aligned}
\alpha p' &= (\beta-\gamma)qr + (c-b)vw + (c-b)\left(\frac{a-b}{b}rv - \frac{c-a}{c}qw\right) \equiv \alpha P \\
\beta q' &= (\gamma-\alpha)rp + (a-c)uw + (a-c)\left(\frac{b-c}{c}pw - \frac{a-b}{a}ru\right) \equiv \beta Q \quad (3) \\
\gamma r' &= (\alpha-\beta)pq + (b-a)uv + (b-a)\left(\frac{c-a}{a}qu - \frac{b-c}{b}pv\right) \equiv \gamma R
\end{aligned}$$

Произведя такую замѣну, мы исключили, конечно, случай, когда одна изъ постоянныхъ a, b, c равна нулю. Но онъ аналитически простъ, и кромѣ того при немъ утрачивается механическое значеніе разсматриваемыхъ дифференціальныхъ уравненій.

Точно также принимаемъ, что каждая изъ величинъ $a+b$, $b+c$, $c+a$ отлична отъ нуля. Сверхъ того предполагаемъ, что не имѣемъ одновременно

$$a = b \quad \alpha = \beta,$$

или

$$a = c \quad \alpha = \gamma,$$

или
$$b = c \quad \beta = \gamma,$$

такъ какъ эти случаи разобраны съ достаточной полнотой Н. Е. Жуковскимъ [1]), и
$$a = b = c,$$

такъ какъ этотъ случай разобранъ В. А. Стекловымъ [2]).

Мы будемъ исключать изъ послѣдующихъ изслѣдованій всѣ подобные случаи.

Интегралы, не зависящіе отъ времени, будутъ удовлетворять слѣдующему уравненію въ частныхъ производныхъ 1-го порядка:

$$P\frac{\partial z}{\partial p} + Q\frac{\partial z}{\partial q} + R\frac{\partial z}{\partial r} + U\frac{\partial z}{\partial u} + V\frac{\partial z}{\partial v} + W\frac{\partial z}{\partial w} = 0 \tag{4}$$

В. А. Стекловъ на страницѣ 4 цитированной уже нами работы въ I томѣ журнала Annales de Toulouse даетъ три слѣдующихъ интеграла 2-го порядка, которые мы напишемъ въ новомъ обозначеніи:

$$\begin{gathered} f \equiv bcu^2 + acv^2 + abw^2 \\ f_2 \equiv \frac{au^2 + bv^2 + cw^2}{2} + \alpha p^2 + \beta q^2 + \gamma r^2 \\ f_3 \equiv \left[\frac{(a+c)(a+b)}{a}u + \alpha p\right]^2 + \left[\frac{(a+b)(b+c)}{b}v + \beta q\right]^2 + \\ + \left[\frac{(b+c)(a+c)}{c}w + \gamma r\right]^2. \end{gathered} \tag{5}$$

Чтобы получить интегралы въ прежнемъ обозначеніи, достаточно замѣнить постоянныя α, β, γ ихъ прежними значеніями.

Затѣмъ на страницѣ 54 того же мемуара В. А. Стекловъ ставитъ вопросъ, не допускаютъ ли дифференціальныя уравненія (2) и (3) четвертаго интеграла 2-го порядка, независящаго отъ времени.

Не давая точнаго отвѣта на этотъ вопросъ, онъ даетъ примѣръ такого интеграла при существованіи извѣстныхъ условій между постоянными задачи.

Приложимъ къ этой задачѣ методъ полярныхъ операцій.

Прежде всего мы замѣчаемъ, что искомый интегралъ можно разсматривать, какъ частный алгебраическій интегралъ съ заранѣе извѣстнымъ полиномомъ K. Въ данномъ случаѣ этотъ полиномъ долженъ быть равенъ нулю.

---

[1]) Труды Физико-Химическаго Общества 1885 г. стр. 81, 145, 231.

[2]) Journal de Toulouse. Série 3-e, T. I, p. 44.

Замѣтивъ это, перейдемъ къ опредѣленію особенныхъ точекъ системы. Для этого достаточно въ уравненіяхъ (2) и (3) замѣстить производныя p', q', ..., w' соотвѣтственно черезъ λp, λq, ..., λw и найти изъ полученныхъ шести однородныхъ уравненій

$$\lambda p = P, \quad \lambda q = Q, \quad \lambda r = R$$
$$\lambda u = U, \quad \lambda v = V, \quad \lambda w = W$$

значенія для перемѣнныхъ λ, p, q, ..., w.

Для нашей цѣли достаточно будетъ ограничиться частными случаями. Попробуемъ напримѣръ дать неизвѣстной величинѣ λ значеніе равное нулю. Тогда непосредственной подстановкой убѣдимся, что полученныя уравненія удовлетворятся, если изъ трехъ паръ перемѣнныхъ

$$p, u; \quad q, v; \quad r, w$$

въ двухъ возьмемъ перемѣнныя равными нулю, а въ третьей какимиугодно. Такимъ образомъ эта система имѣетъ *безконечное* число особенныхъ точекъ.

Мы воспользуемся изъ нихъ только слѣдующими шестью, данными таблицей:

p	q	r	u	v	w
1	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	1

(6)

Замѣтимъ между прочимъ, что этихъ точекъ вполнѣ достаточно, чтобы опредѣлить полиномъ K для какого угодно частнаго алгебраическаго интеграла, такъ какъ въ данномъ случаѣ этотъ полиномъ линейный, а группа этихъ точекъ не можетъ обращать въ нуль одного и того же линейнаго полинома. Для этого вполнѣ достаточно пріемовъ указанныхъ въ первыхъ четырехъ параграфахъ.

Мы воспользуемся этими шестью точками иначе. Въ параграфѣ 3-мъ мы вывели рядъ уравненій, въ которыя входили поляры отъ особенныхъ точекъ по отношенію къ частному алгебраическому интегралу.

Тѣ же самые результаты, которые получены тамъ, можно вывести, подвергая тождество, въ которое входитъ частный алгебраическій интегралъ, взаимной полярной операціи. Мы должны тогда на основаніи выведеннаго въ параграфѣ 1-мъ тождества III получить тѣ же соотношенія, но въ иной по внѣшности формѣ.

Если мы выберемъ для примѣненія полярныхъ операцій одну изъ особенныхъ точекъ, данныхъ таблицей (6), то взаимная полярная операція сведется къ дифференцированію по соотвѣтственной перемѣнной.

Внесемъ согласно этому въ уравненіе (4) искомый интегралъ φ и получимъ тождество:

$$P\frac{\partial\varphi}{\partial p}+Q\frac{\partial\varphi}{\partial q}+R\frac{\partial\varphi}{\partial r}+U\frac{\partial\varphi}{\partial u}+V\frac{\partial\varphi}{\partial v}+W\frac{\partial\varphi}{\partial w}=0 \qquad (7)$$

Обозначимъ одну изъ перемѣнныхъ $p, q, \ldots, w$ черезъ s, а черезъ φ_s производную отъ полинома φ по перемѣнной s, и беремъ вторую производную отъ обѣихъ частей тождества (7) по этой перемѣнной.

Замѣчая, что полиномы $P, Q, \ldots, W$ и $\frac{\partial\varphi}{\partial p}, \frac{\partial\varphi}{\partial q}, \ldots, \frac{\partial\varphi}{\partial w}$ линейны относительно любой перемѣнной, получимъ въ результатѣ, отбросивъ общій множитель 2, слѣдующее равенство:

$$\frac{\partial P}{\partial s}\frac{\partial\varphi_s}{\partial p}+\frac{\partial Q}{\partial s}\frac{\partial\varphi_s}{\partial q}+\frac{\partial R}{\partial s}\frac{\partial\varphi_s}{\partial r}+\frac{\partial U}{\partial s}\frac{\partial\varphi_s}{\partial u}+\frac{\partial V}{\partial s}\frac{\partial\varphi_s}{\partial v}+\frac{\partial W}{\partial s}\frac{\partial\varphi_s}{\partial w}=0. \qquad (8)$$

Полагаемъ сначала въ этомъ тождествѣ $s=u$. Послѣ простыхъ вычисленій получаемъ такое уравненіе въ частныхъ производныхъ для производной φ_u:

$$\begin{gathered}\left(\frac{a-c}{\beta}w-\frac{a-c}{\beta}\frac{a-b}{a}r\right)\frac{\partial\varphi_u}{\partial q}+\left(\frac{b-a}{\gamma}v+\frac{b-a}{\gamma}\frac{c-a}{a}q\right)\frac{\partial\varphi_u}{\partial r}+\\+\left(\frac{b}{a+b}\frac{c-a}{c+b}w-\frac{2b}{a+b}r\right)\frac{\partial\varphi_u}{\partial v}+\left(\frac{c}{b+c}\frac{a-b}{a+c}v+\frac{2c}{a+c}q\right)\frac{\partial\varphi_u}{\partial w}=0.\end{gathered} \qquad (9)$$

Предположимъ сначала, что между величинами a, b, c нѣтъ двухъ равныхъ. Тогда наше равенство въ виду того, что производныя отъ полинома φ $\frac{\partial\varphi_u}{\partial q}, \frac{\partial\varphi_u}{\partial r}, \frac{\partial\varphi_u}{\partial v}, \frac{\partial\varphi_u}{\partial w}$ представляютъ собой нѣкоторыя постоянныя, повлечетъ за собой два слѣдующихъ:

$$\left(w-\frac{a-b}{a}r\right)\frac{a-c}{\beta}\frac{\partial\varphi_u}{\partial q}+\left(w-2\frac{b+c}{c-a}r\right)\frac{b}{a+b}\frac{c-a}{c+b}\frac{\partial\varphi_u}{\partial v}=0.$$

и

$$\left(v+\frac{c-a}{a}q\right)\frac{b-a}{\gamma}\frac{\partial\varphi_u}{\partial r}+\left(v+2\frac{b+c}{a-b}q\right)\frac{c}{a+c}\frac{a-b}{b+c}\frac{\partial\varphi_u}{\partial w}=0. \qquad (10)$$

Полагая въ тождествѣ (8) $s = v$, получаемъ слѣдовательно равенство, аналогичное (9):

$$\left(\frac{c-b}{a}w + \frac{c-b}{a}\frac{a-b}{b}r\right)\frac{\partial\varphi_v}{\partial p} + \left(\frac{b-a}{\gamma}u - \frac{b-a}{\gamma}\frac{b-c}{b}p\right)\frac{\partial\varphi_v}{\partial r} + \tag{11}$$
$$+\left(\frac{a}{a+b}\frac{b-c}{a+c}w + 2\frac{a}{a+b}r\right)\frac{\partial\varphi_v}{\partial u} + \left(\frac{c}{b+c}\frac{a-b}{a+c}u - 2\frac{c}{b+c}p\right)\frac{\partial\varphi_v}{\partial w} = 0.$$

Отсюда получаемъ также:

$$\left(w + \frac{a-b}{b}r\right)\frac{c-b}{a}\frac{\partial\varphi_v}{\partial p} + \left(w + 2\frac{a+c}{b-c}r\right)\frac{a}{a+b}\frac{b-c}{a+c}\frac{\partial\varphi_v}{\partial u} = 0. \tag{12}$$

Такъ какъ во всѣхъ полученныхъ тождествахъ перемѣнныя $p, q, \ldots, w$ совершенно произвольны, то можемъ подставить вмѣсто w въ равенствѣ (10) $\frac{a-b}{a}r$, а въ равенствѣ (12) $\frac{b-a}{b}r$, и получимъ:

$$\frac{ab+bc+ac+a^2}{a(c+a)}\frac{b}{a+b}\frac{\partial\varphi_u}{\partial v} = 0$$

и

$$\frac{ab+bc+ac+b^2}{b(a+c)}\frac{a}{b+a}\frac{\partial\varphi_v}{\partial u} = 0.$$

Но $\frac{\partial\varphi_u}{\partial v}$ и $\frac{\partial\varphi_v}{\partial u}$ представляютъ собой разныя обозначенія одной и той же производной $\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}$; поэтому видимъ, что она равна нулю, такъ какъ иначе выраженія $ab+ac+bc+a^2$ и $ab+bc+ac+b^2$ обращались бы въ нуль совмѣстно съ ихъ разностью, равной $(a+b)(a-b)$, что невозможно.

Точно такимъ же путемъ доказываемъ, что производная $\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial w}$ и $\frac{\partial^2\varphi}{\partial v\partial w}$ равны нулю.

Давая имъ эти значенія въ тождествахъ (9) (10) и третьемъ, получаемомъ принятіемъ $s \equiv w$, найдемъ безъ труда, что равны нулю и производныя $\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial q}$, $\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial r}$, $\frac{\partial^2\varphi}{\partial v\partial p}$, $\frac{\partial^2\varphi}{\partial v\partial r}$, $\frac{\partial^2\varphi}{\partial w\partial p}$, $\frac{\partial^2\varphi}{\partial w\partial q}$.

Итакъ, если между постоянными a, b, c нѣтъ равныхъ, то искомый интегралъ не заключаетъ членовъ uv, uw, vw, uq, ur, vp, vr, wp, wq.

Теперь положимъ, что $a = b$.

Тогда изъ тождества (9) будетъ слѣдовать равенство нулю производныхъ $\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial w}$, $\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}$ и $\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial q}$.

Что же касается тождества (11), то оно дастъ кромѣ того $\frac{\partial^2\varphi}{\partial v\partial w}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial v\partial p}=0$.

Наконецъ, если примемъ въ тождествѣ (8) $s=w$, сдѣлаемъ въ немъ $a=b$ и производныя $\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial w}$, $\frac{\partial^2\varphi}{\partial v\partial w}$ нулями, то получаемъ:

$$\left(\frac{c-a}{\alpha}v-\frac{c-a}{\alpha}\frac{c-a}{c}q\right)\frac{\partial\varphi_w}{\partial p}+\left(\frac{a-c}{\beta}u+\frac{a-c}{\beta}\frac{a-c}{c}r\right)\frac{\partial\varphi_w}{\partial q}=0.$$

Отсюда слѣдуетъ, что и

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial p\partial w}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial q\partial w}=0.$$

Теперь дадимъ въ тождествѣ (8) s значеніе равное p, получаемъ послѣ простыхъ вычисленій:

$$\left(\frac{\gamma-\alpha}{\beta}r+\frac{a-c}{\beta}\frac{b-c}{c}w\right)\frac{\partial\varphi_p}{\partial q}+\left(\frac{\alpha-\beta}{\gamma}q-\frac{b-a}{\beta}\frac{b-c}{b}v\right)\frac{\partial\varphi_p}{\partial r}+$$
$$+2\frac{b}{b+c}w\frac{\partial\varphi_p}{\partial v}-2\frac{c}{b+c}v\frac{\partial\varphi_p}{\partial w}=0. \qquad (13)$$

Предположимъ сначала, что между величинами a, b и c нѣтъ двухъ равныхъ. Тогда, такъ какъ производныя $\frac{\partial^2\varphi}{\partial p\partial v}$ и $\frac{\partial^2\varphi}{\partial p\partial w}$ равны нулю, находимъ безъ труда изъ тождества (13), что и $\frac{\partial^2\varphi}{\partial p\partial q}$, и $\frac{\partial^2\varphi}{\partial p\partial r}=0$.

Выпишемъ еще тождество (8) для случая $s=q$:

$$\left(\frac{\beta-\gamma}{\alpha}r-\frac{c-b}{\alpha}\frac{c-a}{c}w\right)\frac{\partial\varphi_q}{\partial p}+\left(\frac{\alpha-\beta}{\gamma}p+\frac{b-a}{\gamma}\frac{c-a}{a}u\right)\frac{\partial\varphi_q}{\partial r}+$$
$$-2\frac{a}{a+c}w\frac{\partial\varphi_q}{\partial u}+2\frac{c}{a+c}u\frac{\partial\varphi_q}{\partial w}=0. \qquad (14)$$

Это равенство дастъ намъ, такъ какъ

$$\frac{\partial\varphi_q}{\partial p}=\frac{\partial\varphi_q}{\partial u}=\frac{\partial\varphi_q}{\partial w}=0,\ \text{еще и}\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial q\partial r}=0.$$

Теперь предположимъ, что $a=b$. Тождества (13) и (14) примутъ видъ:

$$\left(\frac{\gamma-\alpha}{\beta}r+\frac{a-c}{\beta}\frac{a-c}{c}w\right)\frac{\partial\varphi_p}{\partial q}+\frac{\alpha-\beta}{\gamma}q\frac{\partial\varphi_p}{\partial r}=0$$
$$\left(\frac{\beta-\gamma}{\alpha}r-\frac{c-a}{\alpha}\frac{c-a}{c}w\right)\frac{\partial\varphi_q}{\partial p}+\frac{\alpha-\beta}{\gamma}p\frac{\partial\varphi_q}{\partial r}=0.$$

Такъ какъ случай $\alpha = \beta$, $a = b$ нами исключенъ, то мы получимъ изъ этихъ равенствъ:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial p \partial q} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial p \partial r} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial q \partial r} = 0.$$

Принявъ во вниманіе эти равенства и равенство $a = b$, вычисляемъ, во что обратится тождество (8) при $s = r$; получаемъ:

$$v\frac{\partial\varphi_r}{\partial u} - u\frac{\partial\varphi_r}{\partial v} = 0,$$

откуда слѣдуетъ, что и

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial u \partial r} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial v \partial r} = 0.$$

Просматривая снова рядъ производныхъ, равенство которыхъ нулю мы доказали, мы убѣждаемся, что, будутъ-ли существовать между величинами a, b, c двѣ равныхъ или нѣтъ, въ искомомъ интегралѣ 2-го порядка будутъ отсутствовать члены pq, pr, qr, pv, pw, qu, qw, ru, rv, uv, uw, vw и слѣдовательно искомый интегралъ можетъ быть написанъ въ видѣ:

$$\varphi \equiv \mu_1 p^2 + \mu_2 q^2 + \mu_3 r^2 + \nu_1 pu + \nu_2 qv + \nu_3 rw + \varrho_1 u^2 + \varrho_2 v^2 + \varrho_3 w^2,$$

гдѣ μ_i, ν_i, ϱ_i $(i = 1, 2, 3)$ нѣкоторыя постоянныя.

Дѣйствительно всѣ найденные В. А. Стекловымъ интегралы заключаются въ этой формѣ. Въ дальнѣйшемъ займемся опредѣленіемъ постоянныхъ μ_i, ν_i, ϱ_i для четвертаго алгебраическаго интеграла.

Очевидно, что вмѣсто φ можно разыскивать $\varphi + \sigma_1 f_1 + \sigma_2 f_2 + \sigma_3 f_3$, такъ какъ это выраженіе при σ_1, σ_2, σ_3 постоянныхъ будетъ снова интеграломъ системы. Величины σ_i совершенно произвольны, и можно ими воспользоваться, чтобы уменьшить число постоянныхъ въ интегралѣ φ и, это особенно важно, дать ему такой видъ, при которомъ онъ не можетъ обратиться при частныхъ значеніяхъ входящихъ постоянныхъ въ одинъ изъ интеграловъ f_1, f_2, f_3.

Предполагаемъ сначала, что между величинами a, b, c нѣтъ двухъ равныхъ, а между величинами α, β, γ существуетъ не меньше двухъ неравныхъ.

Затѣмъ полагаемъ въ тождествѣ (7) перемѣнныя u, v, w равными нулю, тогда оно принимаетъ слѣдующій видъ:

$$\frac{\beta - \gamma}{\alpha} qr \frac{\partial\varphi_0}{\partial p} + \frac{\gamma - \alpha}{\beta} rp \frac{\partial\varphi_0}{\partial q} + \frac{\alpha - \beta}{\gamma} pq \frac{\partial\varphi_0}{\partial \gamma} = 0,$$

гдѣ φ_0 представляетъ собой результатъ подстановки въ полиномъ φ $u = v = w = 0$, т. е. будетъ вида:

$$\mu_1 p^2 + \mu_2 q^2 + \mu_3 r^2.$$

Подставляя это значеніе φ_0 въ только что написанное тождество, получаемъ:

$$pqr \left\{ \frac{\beta - \gamma}{\alpha} \mu_1 + \frac{\gamma - \alpha}{\beta} \mu_2 + \frac{\alpha - \beta}{\gamma} \mu_3 \right\} = 0.$$

Отсюда, такъ какъ между величинами α, β, γ существуетъ по крайней мѣрѣ двѣ неравныхъ, значенія для величинъ μ_1, μ_2, μ_3 могутъ быть выражены черезъ посредство двухъ произвольныхъ величинъ μ_4, μ_5 слѣдующимъ образомъ:

$$\mu_1 = \alpha\mu_4 + \alpha^2\mu_5$$

$$\mu_2 = \beta\mu_4 + \beta^2\mu_5$$

$$\mu_3 = \gamma\mu_4 + \gamma^2\mu_5.$$

Если мы положимъ въ выраженіи $\varphi + \sigma_1 f_1 + \sigma_2 f_2 + \sigma_3 f_3$ $\sigma_2 = -\mu_4$ и $\sigma_3 = -\mu_5$, то дадимъ этому интегралу такой видъ, что въ него не войдутъ члены p^2, q^2, r^2. Ясно, что эта форма четвертаго интеграла уже не будетъ заключать въ себѣ интеграловъ f_2 и f_3.

Такъ какъ всегда можно опредѣлить σ_1 такимъ образомъ, что будемъ имѣть тождественно

$$a\varrho_1 + b\varrho_2 + c\varrho_3 + 3\sigma_1 abc = 0,$$

то получаемъ окончательно слѣдующую форму для четвертаго алгебраическаго интеграла 2-го порядка:

$$\varphi \equiv v_1 pu + v_2 qv + v_3 rw + \varrho_1 u^2 + \varrho_2 v^2 + \varrho_3 w^2,$$

при условіи:

$$a\varrho_1 + b\varrho_2 + c\varrho_3 = 0 \tag{15}$$

Если мы внесемъ это выраженіе для φ въ лѣвую часть равенства (7), то получимъ полиномъ третьяго порядка съ членами uvw, uvr, uqw, pvw, uqr, pvr, pqw. Коэффиціенты этихъ членовъ должны равняться нулю. Слѣдовательно получимъ для опредѣленія величинъ v_i, ϱ_i еще 7 уравненій:

$$2\varrho_1 \frac{a}{c+a}\frac{b-c}{b+a} + 2\varrho_2 \frac{b}{a+b}\frac{c-a}{c+b} + 2\varrho_3 \frac{c}{b+c}\frac{a-b}{a+c} +$$
$$+ v_1 \frac{c-b}{\alpha} + v_2 \frac{a-c}{\beta} + v_3 \frac{b-a}{\gamma} = 0. \tag{16}$$

$$\left.\begin{aligned}
&4\varrho_1 \frac{a}{a+b} - 4\varrho_2 \frac{b}{a+b} + v_1 \frac{c-b}{\alpha}\frac{a-b}{b} - v_2 \frac{a-c}{\beta}\frac{a-b}{a} + v_3 \frac{c}{b+c}\frac{a-b}{a+c} = 0\\
&-4\varrho_1 \frac{a}{a+c} + 4\varrho_3 \frac{c}{a+c} - v_1 \frac{c-b}{\alpha}\frac{c-a}{c} + v_2 \frac{b}{a+b}\frac{c-a}{b+c} + v_3 \frac{b-a}{\gamma}\frac{c-a}{a} = 0\\
&4\varrho_2 \frac{b}{b+c} - 4\varrho_3 \frac{c}{b+c} + v_1 \frac{a}{a+c}\frac{b-c}{b+a} + v_2 \frac{a-c}{\beta}\frac{b-c}{c} - v_3 \frac{b-a}{\gamma}\frac{b-c}{b} = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

$$\left.\begin{aligned}
&v_1 \frac{\beta-\gamma}{\alpha} - v_2 \frac{2b}{a+b} + v_3 \frac{2c}{a+c} = 0\\
&v_1 \frac{2a}{a+b} + v_2 \frac{\gamma-\alpha}{\beta} - v_3 \frac{2c}{b+c} = 0\\
&-v_1 \frac{2a}{a+c} + v_2 \frac{2b}{b+c} + v_3 \frac{\alpha-\beta}{\gamma} = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Уравненія (15), (16), (17) и (18) въ числѣ восьми опредѣляютъ шесть коэффиціентовъ искомаго интеграла, входящихъ въ нихъ однородно. Слѣдовательно между данными задачи должны существовать извѣстныя соотношенія, чтобы имѣлся четвертый алгебраическій интегралъ въ видѣ полинома 2-го порядка.

Перейдемъ теперь къ изслѣдованію полученной системы. Прежде всего нетрудно убѣдиться, что искомый интегралъ φ будетъ заключать по крайней мѣрѣ одинъ изъ членовъ up, vq, wr. Въ самомъ дѣлѣ, если положимъ

$$v_1 = v_2 = v_3 = 0,$$

то уравненія (17) принимаютъ видъ:

$$4\varrho_1 \frac{a}{a+b} - 4\varrho_2 \frac{b}{a+b} = 0; \qquad -4\varrho_1 \frac{a}{a+c} + 4\varrho_3 \frac{c}{a+c} = 0;$$
$$4\varrho_2 \frac{b}{b+c} - 4\varrho_3 \frac{c}{b+c} = 0.$$

Отсюда получаемъ:

$$\varrho_1 a = \varrho_2 b = \varrho_3 c.$$

Сравнивая полученныя равенства съ равенствомъ (15), убѣждаемся, что и

$$\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho_3 = 0.$$

Итакъ между коэффиціентами v_1, v_2 и v_3 должны существовать величины, отличныя отъ нуля. Такимъ образомъ получаемъ первое соотношеніе между данными задачи, необходимое для существованія интеграла разсматриваемаго типа, въ такомъ видѣ:

$$\begin{vmatrix} \frac{\beta-\gamma}{\alpha}, & -\frac{2b}{a+b} & \frac{2c}{a+c} \\ \frac{2a}{a+b} & \frac{\gamma-\alpha}{\beta}, & -\frac{2c}{b+c} \\ -\frac{2a}{a+c} & \frac{2b}{b+c} & \frac{\alpha-\beta}{\gamma} \end{vmatrix} = 0. \qquad (19)$$

Это условіе показываетъ, что уравненія (18) совмѣстимы. Покажемъ, что эти уравненія даютъ вполнѣ опредѣленныя значенія для v_1, v_2, v_3, т. е. что между этими тремя уравненіями всегда существуетъ два независимыхъ.

Въ самомъ дѣлѣ, если всѣ они—слѣдствія одного изъ нихъ, то каждый миноръ опредѣлителя (19) обратится въ нуль. Покажемъ, что этого не можетъ быть. Выбрасывая второй столбецъ и третью строку, получимъ

$$J_1 \equiv -\frac{\beta-\gamma}{\alpha}\frac{2c}{b+c} - \frac{2a}{a+b}\frac{2c}{a+c};$$

а выбрасывая вторую строку и третій столбецъ:

$$J_2 \equiv \frac{\beta-\gamma}{\alpha}\frac{2b}{b+c} - \frac{2a}{a+c}\frac{2b}{a+b}.$$

Два полученные минора не могутъ одновременно обращаться въ нуль. Въ самомъ дѣлѣ, тогда равнялось бы нулю и выраженіе $bJ_1 + cJ_2$, но оно равно величинѣ

$$-8\frac{abc}{(a+b)(a+c)},$$

отличной отъ нуля по предположенію.

Итакъ уравненія (18) опредѣлятъ вполнѣ отношенія постоянныхъ v_1, v_2 и v_3. Мы окончимъ ихъ опредѣленіе, если возьмемъ одно изъ нихъ за единицу. Тогда коэффиціенты v_1, v_2, v_3 искомаго интеграла выразятся вполнѣ опредѣленно въ функціи постоянныхъ задачи.

Подставляемъ эти значенія напримѣръ въ первыя два изъ равенствъ (17) и получаемъ:

$$4\varrho_1 \frac{a}{a+b} - 4\varrho_2 \frac{b}{a+b} + C_3 = 0$$

$$-4\varrho_1 \frac{a}{a+c} + 4\varrho_3 \frac{c}{a+c} + C_2 = 0\,,$$

гдѣ C_1 и C_2 будутъ вполнѣ опредѣленными функціями постоянныхъ задачи. Полученныя уравненія совмѣстно съ уравненіемъ (15) дадутъ

$$\varrho_1 = \frac{-C_3(a+b) + C_2(a+c)}{12a}$$

$$\varrho_2 = \frac{2C_3(a+b) + C_2(a+c)}{12b}$$

$$\varrho_3 = \frac{-C_3(a+b) - 2C_2(a+c)}{12c}.$$

Такимъ образомъ, если выполнено условіе (19), то коэффиціенты искомаго четвертаго интеграла опредѣляются вполнѣ по даннымъ задачи. Остается только убѣдиться, дѣйствительно-ли полученный полиномъ представляетъ собой интегралъ нашей системы. Мы достигнемъ той-же цѣли, если подставимъ полученныя выраженія въ уравненіе (16) и въ третье изъ уравненій (17).

Такимъ образомъ въ этомъ случаѣ для существованія четвертаго интеграла необходимы три условія.

Мы исключили изъ разсмотрѣнія случай, когда между величинами a, b, c существуютъ равныя. Простыя разсужденія покажутъ, что четвертый интегралъ можетъ быть приведенъ и въ этомъ случаѣ къ той же самой формѣ $v_1up + v_2vq + v_3wr + \varrho_1u^2 + \varrho_2v^2 + \varrho_3w^2$, а потому окончательное рѣшеніе вопроса будетъ зависить отъ тѣхъ же уравненій (15), (16), (17) и (18).

Положимъ въ этихъ уравненіяхъ наприм. $a = b$. Тогда первое изъ уравненій (17) покажетъ, что $\varrho_1 = \varrho_2$. Въ силу этого уравненіе (16) дастъ намъ равенство:

$$v_1\beta = v_2\alpha.$$

Но остальные изъ уравненій (17) показываютъ, что $v_1 = v_2$, поэтому получаемъ $\alpha = \beta$. Такимъ образомъ при этомъ предположеніи мы пришли къ исключенному нами случаю $a = b$, $\alpha = \beta$. Разсмотрѣнный только

что случай данъ въ другой формѣ В. А. Стекловымъ въ Annales de Toulouse 3-e série t. I, на стр. 54. Въ виду большой сложности формулъ я не буду останавливаться на доказательствѣ тождественности этихъ интеграловъ и перейду къ изученію случая, когда между величинами a, b и c нѣтъ равныхъ, но

$$\alpha = \beta = \gamma. \tag{20}$$

Найденная нами общая форма для интеграла въ видѣ полинома 2-ой степени такова

$$\varphi' \equiv \mu_1' p^2 + \mu_2' q^2 + \mu_3' r^2 + \nu_1' up + \nu_2' vq + \nu_3' wr + \varrho_1' u^2 + \varrho_2' v^2 + \varrho_3' w^2.$$

Въ предыдущемъ случаѣ намъ удалось при помощи интеграловъ f_2 и f_3 сдѣлать коэффиціенты при членахъ p^2, q^2, r^2 равными нулю. Въ этомъ случаѣ этотъ пріемъ перестаетъ быть возможнымъ. Поэтому мы воспользуемся извѣстными намъ тремя интегралами иначе. Беремъ сначала вмѣсто интеграла φ' интегралъ $\varphi'' \equiv \varphi' + \sigma_3 f_3$ и опредѣляемъ σ_3 такимъ образомъ, чтобы

$$\nu_1' a(b+c) + \nu_2' b(a+c) + \nu_3' c(a+b) + 6\alpha(a+b)(a+c)(c+b)\sigma_3 = 0.$$

Тогда нашъ интегралъ приметъ форму:

$$\varphi'' \equiv \mu_1'' p^2 + \mu_2'' q^2 + \mu_3'' r^2 + \nu_1 up + \nu_2 vq + \nu_3 wr + \varrho_1'' u^2 + \varrho_2'' v^2 + \varrho_3'' w^2,$$

при чемъ

$$\nu_1 a(b+c) + \nu_2 b(a+c) + \nu_3 c(a+b) = 0. \tag{21}$$

Затѣмъ беремъ интегралъ $\varphi''' \equiv \varphi'' + \sigma_2 f_2$, выбирая σ_2 такъ, чтобы

$$\mu_1'' + \mu_2'' + \mu_3'' + 3\sigma_2 \alpha = 0.$$

Тогда получаемъ интегралъ въ формѣ:

$$\varphi''' \equiv \mu_1 p^2 + \mu_2 q^2 + \mu_3 r^2 + \nu_1 pu + \nu_2 qv + \nu_3 rw + \varrho_1''' u^2 + \varrho_2''' v^2 + \varrho_3''' w^2,$$

съ дополнительнымъ условіемъ

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 0. \tag{22}$$

Добавивъ наконецъ къ этому полиному φ''' $\sigma_1 f_1$ и опредѣливъ σ_1 такимъ образомъ, чтобы

$$a\varrho_1''' + b\varrho_2''' + c\varrho_3''' + 3\sigma_1 abc = 0,$$

приведемъ интегралъ къ формѣ:

$$\varphi \equiv \mu_1 p^2 + \mu_2 q^2 + \mu_3 r^2 + \nu_1 pu + \nu_2 qv + \nu_3 rw + \varrho_1 u^2 + \varrho_2 v^2 + \varrho_3 w^2,$$

гдѣ коэффиціенты μ_i, ν_i, ϱ_i удовлетворяютъ условіямъ (21), (22) и (15).

Полиномъ φ не можетъ представлять собой одного изъ интеграловъ f_1, f_2, f_3, такъ какъ они не удовлетворяютъ по крайней мѣрѣ одному изъ условій (21), (22) и (15).

Подставляя полученный полиномъ въ лѣвую часть равенства (7), получимъ полиномъ 3-го порядка съ членами uvw, uvr, uqw, pvw, uqr, pvr и pqw. Приравнивая нулю коэффиціенты при этихъ членахъ, мы получимъ еще семь условій, которымъ должны удовлетворять коэффиціенты полинома φ, чтобы онъ былъ интеграломъ разсматриваемой системы. Такимъ образомъ получаемъ:

$$\begin{gathered} 2\varrho_1 \frac{a}{a+c}\frac{b-c}{b+a} + 2\varrho_2 \frac{b}{a+b}\frac{c-a}{c+b} + 2\varrho_3 \frac{c}{b+c}\frac{a-b}{a+c} + \\ + \nu_1 \frac{c-b}{\alpha} + \nu_2 \frac{a-c}{\alpha} + \nu_3 \frac{b-a}{\alpha} = 0. \end{gathered} \tag{23}$$

$$\left.\begin{aligned} 4\varrho_1 \frac{a}{a+b} - 4\varrho_2 \frac{b}{a+b} + 2\mu_3 \frac{b-a}{\alpha} + \nu_1 \frac{c-b}{\alpha}\frac{a-b}{b} - \nu_2 \frac{a-c}{\alpha}\frac{a-b}{a} + \nu_3 \frac{c}{b+c}\frac{a-b}{a+c} = 0 \\ -4\varrho_1 \frac{a}{a+c} + 4\varrho_3 \frac{c}{a+c} + 2\mu_2 \frac{a-c}{\alpha} - \nu_1 \frac{c-b}{\alpha}\frac{c-a}{c} + \nu_2 \frac{b}{a+b}\frac{c-a}{c+b} + \nu_3 \frac{b-a}{\alpha}\frac{c-a}{a} = 0 \\ 4\varrho_2 \frac{b}{b+c} - 4\varrho_3 \frac{c}{b+c} + 2\mu_1 \frac{c-b}{\alpha} + \nu_1 \frac{a}{a+c}\frac{b-c}{a+b} + \nu_2 \frac{a-c}{\alpha}\frac{b-c}{c} - \nu_3 \frac{b-a}{\alpha}\frac{b-c}{b} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

$$\left.\begin{aligned} -2\mu_1 \frac{c-b}{\alpha}\frac{c-a}{c} + 2\mu_2 \frac{a-c}{\alpha}\frac{b-c}{c} - \nu_1 \frac{2a}{a+c} + \nu_2 \frac{2b}{b+c} = 0 \\ 2\mu_1 \frac{c-b}{\alpha}\frac{a-b}{b} - 2\mu_3 \frac{b-a}{\alpha}\frac{b-c}{b} + \nu_1 \frac{2a}{a+b} - \nu_3 \frac{2c}{b+c} = 0 \\ -2\mu_2 \frac{a-c}{\alpha}\frac{a-b}{a} + 2\mu_3 \frac{b-a}{\alpha}\frac{c-a}{a} - \nu_2 \frac{2b}{a+b} + \nu_3 \frac{2c}{a+c} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Итакъ мы имѣемъ рядъ уравненій (15), (21), (22), (23), (24) и (25) въ числѣ десяти для опредѣленія девяти величинъ μ_i, ν_i, ϱ_i, входящихъ въ нихъ линейно и однородно. Надо значитъ найти соотношенія между коэффиціентами, которыя обусловливали бы возможность опредѣленія этихъ величинъ.

Переходя къ этому, покажемъ сначала, что коэффиціенты v_1, v_2, v_3 не могутъ обращаться одновременно въ нуль. Въ самомъ дѣлѣ, если мы положимъ въ уравненіяхъ (25) $v_1 = v_2 = v_3 = 0$, то получимъ изъ нихъ, что $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$. Тогда уравненіе (22) покажетъ, что и всѣ μ_i также равны нулю. Полагая v_i, μ_i равными нулю въ уравненіяхъ (24), находимъ, что $a\varrho_1 = b\varrho_2 = c\varrho_3$; а это въ связи съ уравненіемъ (15) даетъ $\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho_3 = 0$, а слѣдовательно и полиномъ φ равнялся бы нулю.

Точно также не могутъ равняться нулю одновременно всѣ постоянныя μ_i. Въ самомъ дѣлѣ, положивъ въ уравненіяхъ (25) $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0$, получимъ изъ нихъ $v_1 a(b+c) = v_2 b(a+c) = v_3 c(a+b)$. Сравнивая это, придемъ къ только что исключенному нами случаю $v_1 = v_2 = v_3 = 0$.

Замѣтивъ это, перейдемъ къ изученію нашей системы. Сначала введемъ для сокращенія письма слѣдующія обозначенія:

$$d \equiv a+b+c \quad e \equiv ab+ac+be \quad f \equiv abc.$$

Умножая послѣдовательно три уравненія (25) на множители $(a-b)c$, $(c-a)b$, $(b-c)a$ и складывая, найдемъ послѣ простыхъ преобразованій:

$$v_1 a(b+c)^2(e-ad) + v_2 b(a+c)^2(e-bd) + v_3 c(a+b)^2(e-cd) = 0. \quad (26)$$

А умножая ихъ послѣдовательно на $\frac{1}{a+b}$, $\frac{1}{a+c}$ и $\frac{1}{b+c}$, получимъ такое уравненіе:

$$\mu_1 a(b+c)^2(c-b)(e-ad) + \mu_2 b(a+c)^2(a-c)(e-bd) + \\ + \mu_3 c(a+b)^2(b-a)(e-cd) = 0. \quad (27)$$

Такимъ образомъ мы замѣнили два изъ уравненій (25) уравненіями (26) и (27).

Разсмотримъ сначала случай, когда уравненіе (26) представляетъ слѣдствіе уравненія (21). Для этого необходимо и достаточно соблюденія такихъ условій:

$$(b+c)(e-ad) = (a+c)(e-bd) = (a+b)(e-cd).$$

Отсюда, такъ какъ мы предполагаемъ, что между величинами a, b, c нѣтъ равныхъ, то мы должны получить

$$a+b+c=0, \quad ab+ac+bc=0. \quad (28)$$

Но при этомъ условіи обратится въ нуль также и уравненіе (27). Среди трехъ уравненій (25) будетъ два независимыхъ. Девять уравненій: два только что упомянутыхъ и уравненія (15), (21), (22), (23) и (24)

будутъ несовмѣстимы, такъ какъ ихъ опредѣлитель не можетъ быть сдѣланъ выборомъ значеній постоянныхъ задачи равнымъ нулю. Слѣдовательно уравненіе (26) не можетъ быть слѣдствіемъ уравненія (21).

Точно также уравненіе (27) не можетъ быть слѣдствіемъ уравненія (22), такъ какъ такое предположеніе ведетъ снова къ условіямъ (28).

Итакъ мы можемъ опредѣлить изъ уравненій (21) и (26) съ одной стороны и изъ уравненій (22) и (27) съ другой стороны отношенія постоянныхъ ν_i и μ_i.

Такимъ образомъ получимъ слѣдующія формулы:

$$\nu_1 = \sigma \frac{e+ad}{a} \frac{b-c}{b+c}, \quad \nu_2 = \sigma \frac{e+bd}{b} \frac{c-a}{c+a}, \quad \nu_3 = \sigma \frac{e+cd}{e} \frac{a-b}{a+b} \tag{29}$$

Положивъ для краткости:

$$A = \frac{c-a}{a} \frac{b-a}{b+c}, \quad B = \frac{a-b}{b} \frac{c-b}{c+a}, \quad C = \frac{b-c}{c} \frac{a-c}{a+b},$$

найдемъ также, что

$$\mu_1 = \frac{\varrho}{3}(-2A+B+C), \quad \mu_2 = \frac{\varrho}{3}(A-2B+C), \quad \mu_3 = \frac{\varrho}{3}(A+B-2C). \tag{30}$$

Подставивъ найденныя значенія для μ_i, ν_i въ любое изъ уравненій (27), мы убѣдимся, что они удовлетворятъ имъ всѣмъ, если принять

$$\sigma = (b-a)(c-b)(a-c)$$
$$\varrho = 3f\alpha.$$

Такимъ образомъ убѣждаемся, что въ томъ случаѣ, когда отлична отъ нуля по крайней мѣрѣ одна изъ величинъ d и e, уравненія (21) (22) и (27) дадутъ для коэффиціентовъ ν_i, μ_i совершенно опредѣленныя величины.

Подставляя найденныя значенія напр. въ первыя два изъ уравненій (24), мы получимъ такія:

$$\varrho_1 a - \varrho_2 b = C_1$$
$$-\varrho_1 a + \varrho_3 c = B_1,$$

гдѣ C_1 и B_1—вполнѣ опредѣленныя функціи постоянныхъ α, a, b, c, которыя нетрудно вычислить.

Изъ этихъ уравненій совмѣстно съ уравненіемъ (15) получаемъ:

$$\varrho_1 = \frac{C_1 - B_1}{3a}, \quad \varrho_2 = \frac{-2C_1 - B_1}{3b}, \quad \varrho_3 = \frac{C_1 + 2B_1}{3c}.$$

Мы получили коэффиціенты полинома, который можетъ быть интеграломъ системы (2) и (3). Чтобы онъ дѣйствительно былъ интеграломъ, необходимо и достаточно удовлетворить еще двумъ уравненіямъ (23) и послѣднему изъ уравненій (24).

Удобнѣе для окончательнаго опредѣленія этихъ условій замѣнить ихъ двумя другими.

Множимъ лѣвыя части уравненій (24) соотвѣтственно на $a+b$, $a+c$, $b+c$ и складываемъ. Въ результатѣ получаемъ:

$$\frac{2}{\alpha}\begin{vmatrix} \mu_1 & 1 & a^2 \\ \mu_2 & 1 & b^2 \\ \mu_3 & 1 & c^2 \end{vmatrix} + \frac{1}{f\alpha}\begin{vmatrix} v_1 a(ad-e) & 1 & a^2 \\ v_2 b(bd-e) & 1 & b^2 \\ v_3 c(cd-e) & 1 & c^2 \end{vmatrix} + \frac{1}{h}\begin{vmatrix} v_1 a(b+c) & a^2 & 1 \\ v_2 b(a+c) & b^2 & 1 \\ v_3 c(a+b) & c^2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

гдѣ $h \equiv (a+b)(b+c)(c+a) \equiv ed-f$.

Подставляя сюда значенія постоянныхъ v_i μ_i по формуламъ (29) и (30) послѣ соотвѣтствующихъ преобразованій и упрощеній, получаемъ:

$$(d^2-e)\alpha f = 2e^3 - 2d^3 f. \tag{31}$$

При выполненіи этого условія третье уравненіе изъ (24) станетъ слѣдствіемъ первыхъ двухъ (24) и уравненій (21), (22) и (27).

Затѣмъ умножаемъ уравненіе (23) на 2 и складываемъ съ нимъ лѣвыя части уравненій (24); въ результатѣ получаемъ уравненіе, не зависящее отъ величинъ ϱ_i, слѣдующаго вида:

$$\frac{2}{\alpha}\begin{vmatrix} \mu_1 & 1 & a \\ \mu_2 & 1 & b \\ \mu_3 & 1 & c \end{vmatrix} + \frac{1}{f\alpha}\begin{vmatrix} v_1 a^2(b+c) & 1 & a \\ v_2 b^2(a+c) & 1 & b \\ v_3 c^2(a+b) & 1 & c \end{vmatrix} + \frac{1}{h}\begin{vmatrix} v_1 a(b+c) & a & 1 \\ v_2 b(a+c) & b & 1 \\ v_3 c(a+b) & c & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Пользуясь формулами (29) и (30), мы приводимъ это условіе къ такому виду:

$$\alpha d f = (e^2 d - 2d^2 f - 3ef). \tag{32}$$

Если данныя постоянныя удовлетворяютъ и этому условію, то уравненіе (23) будетъ слѣдствіемъ, и найденный нами полиномъ будетъ интеграломъ разсматриваемой нами системы.

Итакъ разсматриваемая нами система имѣетъ только два вида четвертаго интеграла, представляющаго полиномъ 2-го порядка. Одинъ, требующій существованія трехъ условій между постоянными задачи, данъ въ цитированномъ выше сочиненіи В. А. Стекловымъ, другой предложенъ впервые въ настоящей работѣ и требуетъ для своего существованія выполненія четырехъ условій между данными задачи.

§ 14. О дифференціальныхъ уравненіяхъ движенія твердаго тѣла въ жидкости.

Дана система [1]):

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 \frac{\partial T}{\partial y_3} - x_3 \frac{\partial T}{\partial y_2}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_3 \frac{\partial T}{\partial y_1} - x_1 \frac{\partial T}{\partial y_3} \qquad (1)$$

$$\frac{dx_3}{dt} = x_1 \frac{\partial T}{\partial y_2} - x_2 \frac{\partial T}{\partial y_1}$$

$$\frac{dy_1}{dt} = x_2 \frac{\partial T}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial T}{\partial x_2} + y_2 \frac{\partial T}{\partial y_3} - y_3 \frac{\partial T}{\partial y_2}$$

$$\frac{dy_2}{dt} = x_3 \frac{\partial T}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial T}{\partial x_3} + y_3 \frac{\partial T}{\partial y_1} - y_1 \frac{\partial T}{\partial y_3} \qquad (2)$$

$$\frac{dy_3}{dt} = x_1 \frac{\partial T}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial T}{\partial x_1} + y_1 \frac{\partial T}{\partial y_2} - y_2 \frac{\partial T}{\partial y_1}$$

гдѣ подъ T мы подразумѣваемъ слѣдующій полиномъ 2-го порядка:

$$T \equiv S\left[b_{11}x_1^2 + 2b_{12}x_1x_2 + 2b_{24}(x_1y_2 + y_1x_2) + 2b_{14}x_1y_1 + b_{44}y_1^2\right].$$

Знакъ S обозначаетъ, что вмѣсто каждаго члена заключеннаго въ прямыя скобки надо взять сумму трехъ, которые получаются вслѣдствіе перемѣны индексовъ у постоянныхъ и перемѣнныхъ помощью круговыхъ подстановокъ (123), (456). Такъ напр.:

$$Sb_{24}(x_1y_2 + y_1x_2) \equiv b_{24}(x_1y_2 + y_1x_2) + b_{35}(x_2y_3 + y_2x_3) + b_{16}(x_3y_1 + y_3x_1).$$

Прежде всего замѣтимъ, что дифференціальныя уравненія (1) и (2) не измѣнятся, если вмѣсто T положить въ нихъ:

$$T + \varrho_1(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + \varrho_2(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3), \qquad (3)$$

гдѣ ϱ_1 и ϱ_2 произвольно взятыя постоянныя.

Условимся обозначать для краткости полиномы $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ и $x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ соотвѣтственно черезъ U и V.

---

[1]) В. А. Стекловъ. О движеніи твердаго тѣла въ жидкости. Харьковъ. 1893, стр. 35, 36, 89, 92—107.

Интегралы системы (1) и (2), независящіе отъ времени, опредѣляются при помощи слѣдующаго дифференціальнаго уравненія въ частныхъ производныхъ 1-го порядка:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial x_1} & \frac{\partial T}{\partial y_1} & x_1 \\ \frac{\partial z}{\partial x_2} & \frac{\partial T}{\partial y_2} & x_2 \\ \frac{\partial z}{\partial x_3} & \frac{\partial T}{\partial y_3} & x_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial y_1} & \frac{\partial T}{\partial x_1} & x_1 \\ \frac{\partial z}{\partial y_2} & \frac{\partial T}{\partial x_2} & x_2 \\ \frac{\partial z}{\partial y_3} & \frac{\partial T}{\partial x_3} & x_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial y_1} & \frac{\partial T}{\partial y_1} & y_1 \\ \frac{\partial z}{\partial y_2} & \frac{\partial T}{\partial y_2} & y_2 \\ \frac{\partial z}{\partial y_3} & \frac{\partial T}{\partial y_3} & y_3 \end{vmatrix} = 0. \qquad (4)$$

Это уравненіе допускаетъ интеграломъ кромѣ полиномовъ U и V еще и T. Какъ показали изслѣдованія A. Clebsch'a, В. А. Стеклова и А. М. Ляпунова [1]), при извѣстныхъ условіяхъ относительно коэффиціентовъ полинома T существуетъ и четвертый интегралъ въ видѣ полинома φ второго порядка.

Если мы подставимъ φ вмѣсто z, то получимъ тождество, въ которомъ можно перемѣнить φ на T и T на φ; другими словами, если въ уравненіе (4) вмѣсто полинома T подставимъ полиномъ φ, то онъ будетъ имѣть тѣ же четыре интеграла. Точно также тѣ же четыре интеграла будетъ имѣть и уравненіе, получаемое изъ уравненія (4) подстановкой въ него вмѣсто T полинома $\alpha T + \alpha_1 \varphi$, гдѣ α и α_1 произвольныя постоянныя.

Въ дальнѣйшемъ займемся слѣдующей задачей: опредѣлить два такихъ полинома второго порядка φ и T, которые удовлетворяютъ тождеству:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial T}{\partial y_1} & x_1 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} & \frac{\partial T}{\partial y_2} & x_2 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} & \frac{\partial T}{\partial y_3} & x_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} & \frac{\partial T}{\partial x_1} & x_1 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} & \frac{\partial T}{\partial x_2} & x_2 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y_3} & \frac{\partial T}{\partial x_3} & x_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} & \frac{\partial T}{\partial y_1} & y_1 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} & \frac{\partial T}{\partial y_2} & y_2 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y_3} & \frac{\partial T}{\partial y_3} & y_3 \end{vmatrix} = 0. \qquad (5)$$

Если мы найдемъ пару такихъ полиномовъ φ и T, то согласно предыдущему и полиномы $\alpha T + \alpha_1 \varphi + \alpha_2 U + \alpha_3 V$ и $\beta T + \beta_1 \varphi + \beta_2 U + \beta_3 V$ будутъ представлять такую же пару, каково бы ни было значеніе постоянныхъ α, α_1, α_2, α_3, β, β_1, β_2, β_3. Можно воспользоваться произвольностью шести изъ этихъ постоянныхъ, чтобы найти наиболѣе простыя рѣшенія, которыя тѣмъ не менѣе дали бы самое общее рѣшеніе.

---

[1]) Mathematische Annalen. B. III. s. 238, B. 42, s. 273., Сообщенія Харьковскаго Математическаго Общества, 2-я серія т. III, стр. 263, т. IV, стр. 81.

Рѣшеніе этой задачи начнемъ съ самаго простого случая, когда φ представляетъ собой квадратъ линейнаго полинома: $\psi \equiv a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+$ $+b_1y_1+b_2y_2+b_3y_3$.

По подстановкѣ вмѣсто полинома φ ψ^2 въ тождество (5) получимъ для опредѣленія полинома T такое уравненіе:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial T}{\partial x_1} & b_1 & x_1 \\ \frac{\partial T}{\partial x_2} & b_2 & x_2 \\ \frac{\partial T}{\partial x_3} & b_3 & x_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial T}{\partial y_1} & a_1 & x_1 \\ \frac{\partial T}{\partial y_2} & a_2 & x_2 \\ \frac{\partial T}{\partial y_3} & a_3 & x_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial T}{\partial y_1} & b_1 & y_1 \\ \frac{\partial T}{\partial y_2} & b_2 & y_2 \\ \frac{\partial T}{\partial y_3} & b_3 & y_3 \end{vmatrix} = 0. \qquad (6)$$

Это уравненіе допускаетъ два интеграла, зависящихъ только отъ x_i, во первыхъ U, во вторыхъ $\psi_1 \equiv b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3$.

Безъ особаго труда можно показать, что дифференціальное уравненіе (6) въ частныхъ производныхъ относительно T не будетъ имѣть другихъ линейныхъ интеграловъ кромѣ ψ и ψ_1, если только хоть одна изъ постоянныхъ b_i отлична отъ нуля.

Въ томъ же случаѣ, когда $b_1 = b_2 = b_3 = 0$, уравненіе (6) приметъ видъ:

$$(a_2x_3 - a_3x_2)\frac{\partial T}{\partial y_1} + (a_3x_1 - a_1x_3)\frac{\partial T}{\partial y_2} + (a_1x_2 - a_2x_1)\frac{\partial T}{\partial y_3} = 0.$$

Это уравненіе будетъ имѣть четыре линейныхъ интеграла $a_1y_1 + a_2y_2 + a_3y_3$, x_1, x_2, x_3, кромѣ того извѣстенъ пятый интегралъ V и общее выраженіе для полинома T будетъ въ этомъ случаѣ слѣдующимъ:

$$\alpha(a_1y_1 + a_2y_2 + a_3y_3)^2 + \alpha_1 V + \varphi_1(x),$$

гда $\varphi_1(x)$ произвольный однородный полиномъ перемѣнныхъ x_i второго порядка.

Перейдемъ затѣмъ къ случаю, когда напр. хотя бы постоянная b_1 не равнялась нулю.

Допустимъ сначала, что полиномъ T не имѣетъ членовъ второго измѣренія въ перемѣнныхъ y_i. Тогда этотъ полиномъ будетъ имѣть видъ:

$$y_1U_1 + y_2U_2 + y_3U_3 + \Theta(x),$$

гдѣ $\Theta(x)$ — полиномъ второй степени относительно перемѣнныхъ x_i, а U_i — ихъ линейныя функціи.

Вмѣсто этого значенія полинома T удобнѣе разсматривать такое: $T+\sigma V_1+\sigma\psi_1\psi$, т. е. вмѣсто полинома U_i въ выраженіи T будетъ стоять $U_i' \equiv U_i+\sigma x_i+\sigma_1 b_i\psi_1$. Этими величинами σ и σ_1 мы можемъ воспользоваться позже для полученія болѣе простого результата.

Обозначимъ для краткости черезъ B операцію

$$B_1\frac{\partial}{\partial x_1}+B_2\frac{\partial}{\partial x_2}+B_3\frac{\partial}{\partial x_3}\equiv\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x_1} & b_1 & x_1\\ \frac{\partial}{\partial x_2} & b_2 & x_2\\ \frac{\partial}{\partial x_3} & b_3 & x_3\end{vmatrix}$$

Подставляемъ первое значеніе полинома T въ равенство (6) и замѣчаемъ, что оно должно быть тождествомъ при всѣхъ возможныхъ величинахъ перемѣнныхъ y_i. Поэтому, приравнивая нулю коэффиціенты при первыхъ степеняхъ перемѣнныхъ y_i и независящій отъ нихъ членъ, получаемъ:

$$\begin{aligned}BU_1+b_3U_2-b_2U_3&=0\\ BU_2+b_1U_3-b_3U_1&=0\\ BU_3+b_2U_1-b_1U_2&=0\end{aligned}\tag{7}$$

$$B\Theta+\begin{vmatrix}U_1 & a_1 & x_1\\ U_2 & a_2 & x_2\\ U_3 & a_3 & x_3\end{vmatrix}=0.\tag{8}$$

Умножая три уравненія (7) соотвѣтственно на b_1, b_2, b_3 и складывая, получаемъ:

$$B(b_1U_1+b_2U_2+b_3U_3)=0.\tag{9}$$

Умножая ихъ же на x_1, x_2, x_3 и складывая результаты, послѣ легкихъ вычисленій убѣждаемся, что имѣемъ

$$B(x_1U_1+x_2U_2+x_3U_3)=0.\tag{10}$$

Наконецъ, умноживъ ихъ послѣдовательно на B_1, B_2, B_3 и складывая, точно также безъ труда получаемъ:

$$B(B_1U_1+B_2U_2+B_3U_3)=0.\tag{11}$$

Такъ какъ интегралы уравненія

$$Bz = 0,$$

равны ψ_1 и U, то изъ трехъ уравненій (9), (10) и (11) мы получаемъ:

$$\begin{aligned} b_1U_1 + b_2U_2 + b_3U_3 &= \lambda_1\psi_1 \\ x_1U_1 + x_2U_2 + x_3U_3 &= \lambda_2U + \lambda_3\psi_1^2 \\ B_1U_1 + B_2U_2 + B_3U_3 &= \lambda_4U + \lambda_5\psi_1^2. \end{aligned} \tag{12}$$

Полиномы U_1', U_2', U_3' будутъ удовлетворять тѣмъ же уравненіямъ (7), а потому имѣемъ точно также:

$$\begin{aligned} b_1U_1' + b_2U_2' + b_3U_3' &= \lambda_1'\psi_1 \\ x_1U_1' + x_2U_2' + x_3U_3' &= \lambda_2'U + \lambda_3'\psi_1^2 \\ B_1U_1' + B_2U_2' + B_3U_3' &= \lambda_4'U - \lambda\psi_1^2 \end{aligned}$$

Но полиномы U_i' выражаются линейно черезъ U_i, x_i и ψ_1. Подставляя въ только что полученныя равенства эти выраженія, мы найдемъ

$$\begin{aligned} b_1U_1 + b_2U_2 + b_3U_3 &= [\lambda_1' - \sigma - \sigma_1(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)]\psi_1 \\ x_1U_1 + x_2U_2 + x_3U_3 &= (\lambda_2' - \sigma)U + (\lambda_3' - \sigma_1)\psi_1^2 \\ B_1U_1 + B_2U_2 + B_3U_3 &= \lambda_4'U - \lambda\psi_1^2. \end{aligned}$$

Сравнивая полученныя равенства съ равенствами (12), мы видимъ между прочимъ, что

$$\lambda_2' - \sigma = \lambda_2, \quad \lambda_3' - \sigma_1 = \lambda_3, \quad \lambda_4' = \lambda_4, \quad -\lambda = \lambda_5$$

Отсюда видно, что достаточно дать произвольнымъ до сихъ поръ величинамъ σ и σ_1 значенія $-\lambda_2$ и $-\lambda_3$, чтобы величины λ_2' и λ_3' равнялись нулю.

Опредѣлитель уравненій (13) относительно U_i' равенъ полиному $(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)U - \psi_1^2$, отличному отъ нуля; поэтому они дадутъ опредѣленныя функціи для U_i'. Эти функціи будутъ раціональными дробями, если только постоянная λ_1' не равна нулю, а λ_4' не равна $\lambda(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)$. Въ этомъ послѣднемъ случаѣ раціональныя дроби оказываются сократимыми, и мы получаемъ, что полиномъ U_i' равенъ λB_i, т. е.:

$$U_i' = U_i - \lambda_2x_i - \lambda_3b_i\psi_1 = \lambda B_i,$$

откуда будемъ имѣть окончательно:

$$U_i = \lambda B_i + \lambda_2x_i + \lambda_3b_i\psi_1$$
$$i = 1, 2, 3.$$

Переходимъ къ опредѣленію полинома Θ', удовлетворяющаго, какъ и полиномъ Θ уравненію типа (8). Подставляя въ него только что найденныя значенія полиномовъ U_i', получаемъ:

$$B\Theta' = -\lambda(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)\,U + \lambda(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)\,\varphi_1. \qquad (14)$$

Производя операцію B надъ произвольнымъ полиномомъ второго порядка, получаемъ въ результатѣ опять полиномъ 2-го порядка, но такой, у котораго сумма коэффиціентовъ при членахъ x_1^2, x_2^2, x_3^2 равна нулю. Поэтому въ равенствѣ (14) полиномъ, находящійся во второй части, долженъ обладать тѣмъ-же свойствомъ, а потому

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0. \qquad (15)$$

Это условіе оказывается достаточнымъ для возможности интеграціи, и мы получаемъ изъ уравненія (14) при постоянной $b_1^2 + b_2^2 + b_3^2$ отличной отъ нуля;

$$\Theta = \lambda\frac{(x_1b_2a_3)}{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}\psi_1 + \lambda_4 U + \lambda_5\psi_1^2.$$

Отсюда:

$$\Theta = \lambda\frac{(x_1b_2a_3)}{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}\psi_1 + \lambda_3(a_1x_1 + a_3x_2 + a_3x_3)\,\psi_1 + \lambda_4 U + \lambda_5\psi^2{}_1.$$

Складывая выраженія $U_1y_1 + U_2y_2 + U_3y_3$ и Θ, получимъ искомый интегралъ. Въ своей простѣйшей формѣ при $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0$ онъ напишется такъ:

$$\psi_2 \equiv (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)(y_1b_2x_3) + (x_1b_2a_3)\,\psi_1.$$

Итакъ при условіи (15) уравненіе (6) будетъ имѣть пять независимыхъ между собою интеграловъ U, V, ψ, ψ_1, ψ_2.

Въ исключенномъ нами случаѣ $b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 0$ потребуются въ формулахъ небольшія измѣненія, на которыхъ мы останавливаться не будемъ.

Перейдемъ теперь къ общему случаю, когда искомый интегралъ имѣетъ члены второго измѣренія въ перемѣнныхъ y_i. Положивъ въ уравненіи (6) $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, получимъ такое:

$$\frac{\partial T_0}{\partial y_1}(b_2y_3 - b_3y_2) + \frac{\partial T_0}{\partial y_2}(b_3y_1 - b_1y_3) + \frac{\partial T_0}{\partial y_3}(b_1y_2 - b_2y_1) = 0,$$

гдѣ T_0—часть полинома T, зависящая только отъ y_1, y_2, y_3. Поэтому, интегрируя это уравненіе, мы заключаемъ, что

$$T_0 = \alpha(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) + \alpha_1(b_1y_1 + b_2y_2 + b_3y_3)^2.$$

Вычтя изъ интеграла T $\alpha_1\psi^2$, мы представимъ его въ эквивалентной формѣ:

$$y_1^2+y_2^2+y_3^2+W_1y_1+W_2y_2+W_3y_3+\varphi_1,$$

гдѣ W и φ_1—полиномы 1-го и 2-го порядка однихъ перемѣнныхъ x_i.

Нетрудно убѣдиться, что полиномы W_i удовлетворяютъ такимъ уравненіямъ:

$$BW_1+(W_2b_3-W_3b_2)+2(a_2x_3-a_3x_2)=0,$$
$$BW_2+(W_3b_1-W_1b_3)+2(a_3x_1-a_1x_3)=0,$$
$$BW_3+(W_1b_3-W_2b_1)+2(a_1x_2-a_2x_1)=0.$$

Умножая эти уравненія соотвѣтственно на B_1, B_2 и B_3 и складывая, получаемъ:

$$B(B_1W_1+B_2W_2+B_3W_3)+2(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)U-$$
$$-2(a_1x_1+a_3x_2+a_3x_3)\psi_1=0.$$

Отсюда такъ же, какъ изъ уравненія (14) выводимъ условіе (15).

Но тогда уравненіе (6) имѣетъ пять независимыхъ алгебраическихъ интеграловъ, и слѣдовательно искомый интегралъ будетъ ихъ функціей.

Дѣйствительно, прилагая правило умноженія детерминантовъ, получаемъ:

$$\psi_2^2=(\Sigma b_i^2)^2\begin{vmatrix}\Sigma y_i^2 & \Sigma b_iy_i & V\\ \Sigma b_iy_i & \Sigma b_i^2 & \psi\\ V & \psi_1 & U\end{vmatrix}+2\psi\Sigma b_i^2\begin{vmatrix}V & \Sigma b_iy_i & \Sigma a_iy_i\\ \psi_1 & \Sigma b_i^2 & 0\\ U & \psi_1 & \Sigma a_ix_i\end{vmatrix}+\psi_1^2\begin{vmatrix}U & \psi_1 & \Sigma a_ix_i\\ \psi_1 & \Sigma b_i^2 & 0\\ \Sigma a_ix_i & 0 & \Sigma a_i^2\end{vmatrix},$$

гдѣ всѣ суммы распространены по индексу i отъ 1 до 3 включительно.

Отбрасывая въ этомъ выраженіи соотвѣтствующимъ образомъ интегралы, мы можемъ достичь того, что останется произведеніе выраженія $U\Sigma b_1^2-\psi_1^2$ на полиномъ:

$$\psi_3\equiv\Sigma y_i^2\Sigma b_i^2-2\Sigma b_ix_i\Sigma a_iy_i+2\Sigma b_iy_i\Sigma a_ix_i+(\Sigma a_ix_i)^2.$$

Конечно, если постоянная Σb_i^2 равна нулю, то въ этомъ выраженіи надо произвести соотвѣтствующія измѣненія.

При помощи найденнаго выраженія для ψ_3, легко получить слѣдующее общее выраженіе для полинома T:

$$T\equiv\alpha\psi_3+\alpha_1\psi^2+\alpha_2\psi_2+\alpha_3V+\alpha_4\psi\psi_1+\alpha_5\psi_1^2+\alpha_6U.$$

Входящія въ него постоянныя должны быть подчинены кромѣ того условіямъ, при которыхъ этотъ полиномъ будетъ положительнымъ.

По подстановкѣ этого выраженія въ дифференціальныя уравненія (1) и (2), мы получимъ самый общій типъ ихъ, имѣющій четвертый линейный интегралъ. Они не будутъ зависѣть отъ постоянныхъ α_3 и α_6. Положить же ихъ въ выраженіи T равными нулю нельзя, такъ какъ этотъ полиномъ можетъ перестать быть положительнымъ.

Если мы прибавимъ еще тѣ условія, которымъ подчинилъ A. Clebsch видъ полинома T, то придемъ безъ труда къ найденному имъ случаю [1]).

Предположимъ теперь, что полиномъ φ не можетъ быть приведеннымъ къ квадрату линейной функціи. Полагаемъ въ тождествѣ (5) $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ и получаемъ:

$$\left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial y_1} \frac{\partial T_0}{\partial y_2} y_3\right) = 0,$$

гдѣ φ_0 и T_0 члены полиномовъ φ и T, зависящіе только отъ перемѣнныхъ y_i. Отсюда получаемъ тождество:

$$\alpha\varphi_0 + \alpha_1 T_0 + \alpha_2 (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) = 0.$$

Если мы за T возьмемъ выраженіе, данное для уравненій (1) и (2), то можемъ ограничиться для φ двумя случаями $\alpha_2 + \alpha = 0$, и $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Мы остановимся на первомъ случаѣ и положимъ слѣдовательно:

$$\varphi \equiv y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + 2\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_i y^j + \varphi_1.$$

Предположимъ кромѣ того, что между коэффиціентами b_{44}, b_{55}, b_{66} существуетъ пара неравныхъ. Разсматривая вмѣсто T $T + \sigma\varphi + \sigma_1 V$, а вмѣсто φ $\varphi + \sigma_2 V$, можемъ предположить при надлежащемъ выборѣ σ, σ_1 и σ_2, что

$$b_{44}' + b_{55}' + b_{66}' = 0, \tag{16}$$

$$b_{14}' + b_{25}' + b_{36}' = 0, \tag{17}$$

$$a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0. \tag{18}$$

Подставивъ въ дифференціальныя уравненія (1) и (2) φ вмѣсто T, получимъ дифференціальныя уравненія, вторыя части которыхъ обращаются въ нуль при $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

Слѣдовательно они будутъ имѣть безконечное число особенныхъ точекъ, заключающихся въ формулѣ 0, 0, 0, c_1, c_2, c_3, гдѣ c_1, c_2, c_3 — какія угодно постоянныя.

---

[1]) Mathematische Annalen. B. III. s. 248.

Положимъ:

$$U_j = \sum_{i=1}^{3} a_{ij} x_i, \quad V_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} y_j, \quad 2\varphi_{1i} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i}.$$

Тогда полиномъ T будетъ интеграломъ такого дифференціальнаго уравненія въ частныхъ производныхъ:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial T}{\partial x_1} & y_1 + U_1 & x_1 \\ \frac{\partial T}{\partial x_2} & y_2 + U_2 & x_2 \\ \frac{\partial T}{\partial x_3} & y_3 + U_3 & x_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial T}{\partial y_1} & V_1 + \varphi_{11} & x_1 \\ \frac{\partial T}{\partial y_2} & V_2 + \varphi_{12} & x_2 \\ \frac{\partial T}{\partial y_3} & V_3 + \varphi_{13} & x_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial T}{\partial y_1} & U_1 & y_1 \\ \frac{\partial T}{\partial y_2} & U_2 & y_2 \\ \frac{\partial T}{\partial y_3} & U_3 & y_3 \end{vmatrix} = 0. \quad (19)$$

Для полученія интеграла T можно воспользоваться полярными операціями вида

$$c_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + c_2 \frac{\partial}{\partial y_2} + c_3 \frac{\partial}{\partial y_3}.$$

Подставивъ вмѣсто T его значеніе, беремъ отъ полученнаго тождества вторую производную по перемѣнной y_1 и получаемъ:

$$x_2 \frac{\partial^2 T}{\partial y_1 \partial x_3} - x_3 \frac{\partial^2 T}{\partial y_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y_1^2} (a_{21} x_3 - a_{31} x_2) = 0.$$

Отсюда слѣдуетъ: $b_{16}' = b_{44}' a_{31}$, $b_{24}' = b_{44}' a_{21}$ или $b_{16} = b_{44} a_{31}$, $b_{24} = b_{44} a_{21}$.

Беря вторыя производныя отъ нашего тождества по y_2, y_3, получимъ тѣмъ же путемъ:

$$b_{16} = b_{44} a_{31} = b_{66} a_{13}, \quad b_{24} = b_{44} a_{21} = b_{55} a_{12}, \quad b_{35} = b_{66} a_{23} = b_{55} a_{32}. \quad (20)$$

Подвергнувъ тѣ-же тождества два раза операціи $\frac{\partial}{\partial y_1} + \frac{\partial}{\partial y_2}$, получимъ въ лѣвой части его выраженіе, составленное изъ суммы трехъ: двухъ, полученныхъ дифференцированіемъ нашего тождества два раза по y_1 и y_2, слѣдовательно равныхъ нулю и третьяго, удвоенной второй

частной производной лѣвой части этого тождества по перемѣннымъ y_1 и y_2, которая также должна быть равной нулю; такимъ образомъ имѣемъ:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y_2 \partial x_3} x_2 - \frac{\partial^2 T}{\partial y_2 \partial x_2} x_3 + \frac{\partial^2 T}{\partial y_1 \partial x_1} x_3 - \frac{\partial^2 T}{\partial y_1 \partial x_3} x_1 + \frac{\partial^2 T}{\partial y_1{}^2}(a_{22}x_3 - a_{32}x_2) +$$
$$+ \frac{\partial^2 T}{\partial y_2{}^2}(a_{31}x_1 - a_{11}x_3) + U_3\left(\frac{\partial^2 T}{\partial y_2{}^2} - \frac{\partial^2 T}{\partial y_1{}^2}\right) = 0.$$

Это тождество распадается на три слѣдующихъ:

$$\begin{gathered} -b_{16}' + b_{55}'a_{31} + a_{13}(b_{55}' - b_{44}') = 0, \\ b_{35}' - b_{44}'a_{32} + a_{23}(b_{55}' - b_{44}') = 0, \end{gathered} \tag{21}$$

$$-b_{25}' + b_{14}' + b_{44}'a_{22} - b_{55}'a_{11} + a_{33}(b_{55}' - b_{44}') = 0. \tag{22}$$

При помощи формулъ (20) условія (21) принимаютъ видъ: $(a_{31} + a_{13})(b_{55} - b_{44}) = 0$, $(a_{23} + a_{32})(b_{55} - b_{44}) = 0$.

Вычисляя вторыя частныя производныя лѣвой части нашего тождества по перемѣннымъ y_2 и y_3, а затѣмъ по перемѣннымъ y_1 и y_3, получаемъ:

$$(a_{31} + a_{13})(b_{66} - b_{55}) = 0, \quad (a_{12} + a_{21})(b_{66} - b_{55}) = 0,$$
$$(a_{12} + a_{21})(b_{44} - b_{66}) = 0, \quad (a_{23} + a_{32})(b_{44} - b_{66}) = 0,$$

$$\begin{gathered} -b_{36}' + b_{25}' + b_{55}'a_{33} - b_{66}'a_{22} + a_{11}(b_{66}' - b_{55}') = 0 \\ -b_{14}' + b_{36}' + b_{66}'a_{11} - b_{44}'a_{33} + a_{22}(b_{44}' - b_{66}') = 0. \end{gathered} \tag{23}$$

Полученныя равенства совмѣстно съ равенствами (21) приводятъ къ такимъ:

$$a_{31} + a_{13} = 0, \quad a_{12} + a_{21} = 0, \quad a_{23} + a_{32} = 0. \tag{24}$$

Кромѣ того постоянныя $b_{44} + b_{55}$, $b_{44} + b_{66}$, $b_{55} + b_{66}$, какъ величины по предположенію положительныя, не равны нулю. Поэтому, сравнивая условія (24) и (20), получаемъ:

$$a_{13} = a_{31} = a_{12} = a_{21} = a_{23} = a_{32} = b_{16} = b_{24} = b_{35} = 0.$$

Складывая равенства (22) и (23), получаемъ

$$\begin{vmatrix} 1 & a_{11} & b_{44}' \\ 1 & a_{22} & b_{55}' \\ 1 & a_{33} & b_{66}' \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда въ связи съ условіями (16) и (18) получаемъ:

$$a_{11} = \lambda b_{44}', \quad a_{22} = \lambda b_{55}', \quad a_{33} = \lambda b_{66}'.$$

Если положимъ въ этихъ формулахъ $\lambda = 0$, то послѣ соотвѣтствующихъ вычисленій придемъ къ III случаю A. Clebsch'a [1]). Мѣняя роль полиномовъ φ и T, получаемъ его I случай [2]). Принимая же постоянную λ отличной отъ нуля, приходимъ къ формѣ живой силы, данной впервые В. А. Стекловымъ [3]).

Мѣняя роль полиномовъ φ и T, придемъ къ случаю, указанному впервые А. М. Ляпуновымъ [4]).

Что-же касается полинома $T + \lambda\varphi$, то онъ не дастъ ничего новаго, такъ какъ получается изъ T, если замѣнимъ постоянныя b_{44}, b_{55}, b_{66} соотвѣтственно черезъ $b_{44} + \lambda$, $b_{55} + \lambda$, $b_{66} + \lambda$ и прибавимъ полиномъ $\beta U + \beta_1 V$, гдѣ β и β_1 надлежаще выбранныя постоянныя.

---

[1]) Mathematische Annalen. B. III, s. 260.

[2]) Ibidem. s 256.

[3]) Сообщенія Харьковскаго Математическаго Общества, 2-я серія, т. III, стр. 231.

[4]) Ibidem. T. IV, стр. 81.

Sur la recherche des solutions particulières de l'équation de Laplace.

Par A. Friedmann.

Soit

$$\triangle V = 0$$

l'équation de Laplace; transformons cette équation en coordonnées curvilignes orthogonales ϱ, ϱ_1, ϱ_2.

Lamé et puis M. Darboux et M. Wangerin [1]) ont indiqué les transformations pour lesquelles le potentiel V a la forme particulière:

$$V = f(\varrho) f_1(\varrho_1) f_2(\varrho_2),$$

ou même

$$V = \lambda(\varrho, \varrho_1, \varrho_2) f(\varrho) f_1(\varrho_1) f_2(\varrho_2),$$

où $f(\varrho)$, $f_1(\varrho_1)$, $f_2(\varrho_2)$ satisfont aux équations différentielles ordinaires du second ordre, $\lambda(\varrho, \varrho_1, \varrho_2)$ étant une fonction ne contenant aucune constante arbitraire.

Ainsi il est naturel de généraliser les recherches classiques mentionnées plus haut et de poser, comme le fait M. Stekloff [2]), le problème suivant:

---

[1]) *Lamé.* Leçons sur les coordonnées curvilignes. Paris, 1859.

Darboux. Leçons sur les systèmes orthog. et les coord. curvilignes. Paris, 1898. Voir aussi les mém. de M. Darboux dans Ann. Ec. Norm. Sup. 1866, 1878.

Wangerin. Monatsber. d. Berl. Akad. 1878, p. 152.

Haentzschel. Studien über die Reduction der Potentialgleichung auf gewöhnliche Differentialgleichungen. Berlin, 1893.

[2]) *В. А. Стекловъ.* Общіе методы рѣшенія основныхъ задачъ математической физики. Харьковъ. 1901, с. 242.

Trouver toutes les transformations orthogonales x, y, z en ϱ, ϱ_1, ϱ_2 telles que l'équation

$$\text{(A)} \qquad \Delta V = 0$$

admette les solutions de la forme

$$\text{(B)} \qquad V = f(\varrho)\, V_1(\varrho_1, \varrho_2).$$

On sait que dans la théorie de l'équation de Laplace les fonctions dites fondamentales jouent le rôle prépondérant. Ainsi la recherche des méthodes pour construire ces fonctions est un problème important. Si l'equation (A) admet les solutions du type (B), parmi ces solutions on peut trouver parfois des fonctions fondamentales pour la surface $\varrho = \text{const}$ et même un système complet de ces fonctions.

En réalité, pour les surfaces du second ordre on peut mettre le potentiel V sous la forme (B) et on peut trouver par cette méthode les fonctions fondamentales pour les surfaces mentionnées. Citons, par exemple, les fonctions sphériques, les fonctions de Bessel et celles de Lamé.

Notre travail sera consacré à la résolution du problème général, mentionné plus haut, c'est-à-dire à la recherche des cas pour lesquels le potentiel V a la forme (B).

§ 1.

1. Transformons l'équation de Laplace

$$\text{(1)} \qquad \Delta V = 0$$

en coordonnées orthogonales ϱ, ϱ_1, ϱ_2.

Introduisons avec Lamé les fonctions H, H_1, H_2, dites les *coefficients de Lamé*, de la manière suivante:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = H^2 d\varrho^2 + H_1^2 d\varrho_1^2 + H_2^2 d\varrho_2^2.$$

L'équation (1) transformée en ϱ, ϱ_1, ϱ_2 sera, comme on sait,

$$\text{(2)} \qquad \frac{\partial \alpha \frac{\partial V}{\partial \varrho}}{\partial \varrho} + \frac{\partial \alpha_1 \frac{\partial V}{\partial \varrho_1}}{\partial \varrho_1} + \frac{\partial \alpha_2 \frac{\partial V}{\partial \varrho_2}}{\partial \varrho_2} = 0,$$

où

$$\text{(3)} \qquad \alpha = \frac{H_1 H_2}{H}, \quad \alpha_1 = \frac{H H_2}{H_1}, \quad \alpha_2 = \frac{H H_1}{H_2}.$$

Si cette équation admet la solution de la forme:

$$V = f(\varrho)\, V_1(\varrho_1, \varrho_2), \tag{4}$$

il est évident, que $f(\varrho)$ satisfait à une équation différentielle linéaire du second ordre. Moyennant la transformation qui n'altère ni l'orthogonalité, ni la forme (4), on peut mettre cette équation sous la forme:

$$f'' = \psi(\varrho) f. \tag{5}$$

Nous considérons d'abord le cas où $\psi(\varrho)$ diffère de zéro. Le cas contraire sera examiné plus loin. Nous allons introduire cette condition restrictive dans notre problème général: supposons, avec M. Dall'Acqua [1]), que *chacune des quantités*

$$\frac{f'}{f}, \quad \frac{\partial \lg V_1}{\partial \varrho_1}, \quad \frac{\partial \lg V_1}{\partial \varrho_2},$$

contienne une constante arbitraire, ne dépendant pas des constantes de deux autres.

A l'aide de cette condition et de la formule (5) nous aurons:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \varrho} = 0, \tag{6}$$

et la fonction V_1 satisfera à une ou à plusieurs équations de la forme

$$\frac{\partial \alpha_1 \frac{\partial V_1}{\partial \varrho_1}}{\partial \varrho_1} + \frac{\partial \alpha_2 \frac{\partial V_1}{\partial \varrho_1}}{\partial \varrho_2} + \alpha \psi(\varrho) V_1 = 0. \tag{7}$$

Nous avons deux cas à distinguer:

1) V_1 satisfait *seulement* à une équation de la forme (7) où il faut considérer ϱ comme une constante; toutes les autres équations possibles de la forme (7) sont linéairement dépendantes de cette équation;

2) V_1 satisfait *au moins* à deux équations de la forme (7) linéairement indépendantes entre elles.

Faisons quelques conventions. Nous allons désigner pas les lettres latines majuscules A, B, C, G, F les fonctions de ϱ_1 et ϱ_2, par les lettres latines minuscules a, b, c les fonctions d'une seule ϱ, par la lettre grecque γ la fonction de ϱ et ϱ_1.

---

[1]) *Dall'Acqua.* Rendiconti della R. Accad. dei Lincei. 1908, p. 296.

Passons maintenant à la démonstration des quelques théorèmes importants pour notre but.

Théorème 1. *Si l'équation (2) admet la solution*

$$V = f(\varrho) V_1(\varrho_1, \varrho_2),$$

telle que f et V_1 satisfassent aux conditions de M. Dall'Acqua (p. 246) les coefficients de Lamé sont de la forme:

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} H = Aa^2, \\ H_1 = Ba, \\ H_2 = Ca; \end{cases}$$

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} H = Ab^2(a+F)(a+G), \\ H_1 = Bb(a+F), \\ H_2 = Cb(a+G); \end{cases}$$

$$\text{(III)} \qquad \begin{cases} H = Ab^2a(a+F\gamma), \\ H_1 = Bb(a+F\gamma), \\ H_2 = Cba. \end{cases}$$

Considérons le premier cas où V_1 satisfait seulement à une équation du second ordre. Supposons que cette équation soit

$$\text{(8)} \qquad \varepsilon \frac{\partial^2 V_1}{\partial \varrho_1^2} + \eta \frac{\partial^2 V_1}{\partial \varrho_2^2} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varrho_1} \frac{\partial V_1}{\partial \varrho_1} + \frac{\partial \eta}{\partial \varrho_2} \frac{\partial V_1}{\partial \varrho_2} + \omega V_1 = 0$$

où $\varepsilon = (\alpha_1)_{\varrho = \text{const.}}$, $\eta = (\alpha)_{\varrho = \text{const.}}$. Les formules (6) et (7) conduisent aux relations

$$\alpha_1 = \lambda\varepsilon, \quad \alpha_2 = \lambda\eta, \quad \frac{\partial \alpha_1}{\partial \varrho_1} = \lambda \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varrho_1}, \quad \frac{\partial \alpha_2}{\partial \varrho_2} = \lambda \frac{\partial \eta}{\partial \varrho_2}, \quad \alpha\psi(\varrho) = \lambda\omega,$$

λ étant une fonction de ϱ, ϱ_1, ϱ_2,
d'ou

$$\varepsilon \frac{\partial \lambda}{\partial \varrho_1} = 0, \quad \eta \frac{\partial \lambda}{\partial \varrho_2} = 0,$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \varrho_1} = 0, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial \varrho_2} = 0.$$

On en conclut que (voir la formule (6)):

$$\alpha = \alpha(\varrho_1, \varrho_2), \quad \alpha_1 = \lambda(\varrho)\varepsilon(\varrho_1, \varrho_2), \quad \alpha_2 = \lambda(\varrho)\eta(\varrho_1, \varrho_2),$$

d'où les formules (I) découlent immédiatement.

Dans le deuxième cas on peut écrire les équations suivantes, auxquelles, d'après l'hypothèse faite, satisfait V_1:

$$\frac{\partial^2 V_1}{\partial \varrho_1^2} = \nu_1 \frac{\partial V_1}{\partial \varrho_1} + \nu_2 \frac{\partial V_1}{\partial \varrho_2} + \nu_3 V_1,$$

$$\frac{\partial^2 V_1}{\partial \varrho_2^2} = \mu_1 \frac{\partial V_1}{\partial \varrho_1} + \mu_2 \frac{\partial V_1}{\partial \varrho_2} + \mu_3 V_1.$$

Moyennant les conditions de M. Dall'Acqua on peut écrire, eu égard aux formules (6) et (7),

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \varrho} = 0,$$

$$(9) \qquad \begin{aligned} &\frac{\partial \alpha_1}{\partial \varrho_1} + \nu_1 \alpha_1 + \mu_1 \alpha_2 = 0, \\ &\frac{\partial \alpha_2}{\partial \varrho_2} + \nu_2 \alpha_1 + \mu_2 \alpha_2 = 0, \\ &\psi(\varrho)\alpha + \nu_3 \alpha_1 + \mu_3 \alpha_2 = 0, \end{aligned}$$

Choisissant convenablement les fonctions $s_1(\varrho_1, \varrho_2)$ et $s_2(\varrho_1, \varrho_2)$ nous pouvons réduire les trois dernières des équations (9) à cette forme plus simple:

$$\alpha_1 = s_1(\varrho_1, \varrho_2) t_1, \quad \alpha_2 = s_2(\varrho_1, \varrho_2) t_2,$$

$$(10) \qquad \begin{aligned} &\frac{\partial t_1}{\partial \varrho_1} + \bar{\mu}_1 t_2 = 0, \\ &\frac{\partial t_2}{\partial \varrho_2} + \bar{\nu}_2 t_1 = 0, \\ &\psi(\varrho)\alpha + \bar{\nu}_3 t_1 + \bar{\mu}_3 t_2 = 0. \end{aligned}$$

Il est évident que $\bar{\nu}_3$ et $\bar{\mu}_3$ ne peuvent pas être égales à zéro simultanément. Ainsi il faut distinguer deux cas:

1) $\bar{\nu}_3$ ou $\bar{\mu}_3$ est égal à zéro,

2) $\bar{\nu}_3$ et $\bar{\mu}_3$ sont différents de zéro.

Dans le premier cas il suffit de supposer $\bar{\mu}_3 = 0$, $\bar{\nu}_3 \neq 0$, le cas contraire se déduise de celui-ci par la permutation des lettres ϱ_1 et ϱ_2. Dans ce cas nous aurons:

$$t_1 = -\psi(\varrho) \frac{\alpha}{\nu_3}.$$

Si $\bar{\mu}_1 = 0$, $\bar{\nu}_2 = 0$,

$$\frac{\partial t_1}{\partial \varrho_1} = 0, \quad \frac{\partial t_2}{\partial \varrho_2} = 0, \quad t_1 = \psi(\varrho)\lambda_1(\varrho_2), \quad t_2 = \lambda_2(\varrho, \varrho_1),$$

si $\mu_1 = 0$, $\nu_2 \neq 0$,

$$\frac{\partial t_1}{\partial \varrho_1} = 0, \; t_1 = \psi(\varrho)\lambda_1(\varrho_2), \; t_2 = \psi(\varrho)\lambda_2(\varrho_2) + \lambda_3(\varrho, \varrho_1).$$

Un calcul simple prouve que ces deux suites de formules correspondent aux formules (III).

Si $\mu_1 \neq 0$, on aura:

$$t_2 = -\frac{\partial t_1}{\partial \varrho_1}\frac{1}{\mu_1}, \; t_1 = \psi(\varrho)\lambda_1(\varrho_1, \varrho_2), \; t_2 = \psi(\varrho)\lambda_2(\varrho_1, \varrho_2).$$

Ces équations conduisent aux formules (I).

Considérons à présent le cas où $\bar{\mu}_3$ et $\bar{\nu}_3$ sont différents de zéro A l'aide de la troisième des équations (10) on peut écrire:

$$\frac{\partial t_1}{\partial \varrho_1} + \omega_1 t_1 + \bar{\omega}_1 \psi(\varrho) = 0,$$

$$\frac{\partial t_2}{\partial \varrho_2} + \omega_2 t_2 + \bar{\omega}_2 \psi(\varrho) = 0.$$

Il est facile de voir que

$$t_1 = n_1(\varrho_1, \varrho_2)\psi(\varrho) + n_1(\varrho_1, \varrho_2)\vartheta_1(\varrho, \varrho_2),$$

$$t_2 = n_2(\varrho_1, \varrho_2)\psi(\varrho) + n_2(\varrho_1, \varrho_2)\vartheta_2(\varrho, \varrho_1).$$

Substituons ces expressions dans la 3-me des équations (10), divisons les résultats par $\psi(\varrho)$ (différent de zéro) et différentions par rapport à ϱ. Nous aurons

$$\bar{\nu}_3 \bar{n}_1 \frac{\partial\left(\frac{\vartheta_1}{\psi}\right)}{\partial \varrho} + \bar{\mu}_3 \bar{n}_2 \frac{\partial\left(\frac{\vartheta_2}{\psi}\right)}{\partial \varrho} = 0.$$

Supposons d'abord que n_1 et n_2 soient différentes de zéro; on peut écrire:

$$\vartheta_1(\varrho, \varrho_2) = \psi(\varrho)(\zeta_1(\varrho_2)\vartheta(\varrho) + \tau_1(\varrho_2)),$$

$$\vartheta_2(\varrho, \varrho_1) = \psi(\varrho)(\zeta_2(\varrho_1)\vartheta(\varrho) + \tau_2(\varrho_1)),$$

d'où résultent immédiatement les formules (II) du théorème I.

La démonstration de ce théorème dans le cas où l'une des quantités $\bar{n}_1$ et $\bar{n}_2$ est égal à zéro ne présente aucune difficulté [1]).

---

[1]) Les formes pour H, H_1, H_2 du théor. 1 se trouvent sans doute dans les formes données par M. Dall'Acqua (l. c.).

Théorème 2. *Les fonctions f et V_1 satisfont aux équations suivantes:*
Pour les formules (I):

$$(\mathrm{I}_1)\qquad \begin{cases} f'' = Ka^2 f \\ \dfrac{\partial p_1 \dfrac{\partial V_1}{\partial \varrho_1}}{\partial \varrho_1} + \dfrac{\partial p_2 \dfrac{\partial V_1}{\partial \varrho_2}}{\partial \varrho_2} + KpV_1 = 0 \end{cases}$$

où K est une constante arbitraire,

$$p = \frac{BC}{A},\quad p_1 = \frac{AC}{B},\quad p_2 = \frac{AB}{C}.$$

Pour les formules (II):

$$(\mathrm{II}_1)\qquad \begin{cases} f'' = b(K_1 a + K_2) f, \\ \dfrac{\partial p_1 \dfrac{\partial V_1}{\partial \varrho_1}}{\partial \varrho_1} + \dfrac{\partial p_2 \dfrac{\partial V_1}{\partial \varrho_2}}{\partial \varrho_2} + K_1 p V_1 = 0, \\ \dfrac{\partial p_1 G \dfrac{\partial V_1}{\partial \varrho_1}}{\partial \varrho_1} + \dfrac{\partial p_2 F \dfrac{\partial V_2}{\partial \varrho_2}}{\partial \varrho_2} + K_2 p V_1 = 0. \end{cases}$$

Pour les formules (III):

$$(\mathrm{III}_1)\qquad \begin{cases} f'' = Kaf, \\ \dfrac{\partial p_1 \dfrac{\partial V_1}{\partial \varrho_1}}{\partial \varrho_1} + \dfrac{\partial p_1 \dfrac{\partial V_1}{\partial \varrho_2}}{\partial \varrho_2} + KpV_1 = 0, \\ \dfrac{\partial p_2 F \dfrac{\partial V_1}{\partial \varrho_2}}{\partial \varrho_2} = 0, \end{cases}$$

où K, K_1, K_2 sont des constantes arbitraires,

$$p = \sqrt{\frac{BC}{A}},\quad p_1 = \sqrt{\frac{AC}{B}},\quad p_2 = \sqrt{\frac{AB}{C}}.$$

La démonstration du premier cas est très simple.

L'équation principale (2), dans le deuxième cas, peut s'écrire:

$$\frac{f''(\varrho)}{f(\varrho)b(\varrho)} + \frac{a(\varrho)}{pV_1}\left(\frac{\partial p_1 \dfrac{\partial V_1}{\partial \varrho_1}}{\partial \varrho_1} + \frac{\partial p_2 \dfrac{\partial V_1}{\partial \varrho_2}}{\partial \varrho_2}\right) + \frac{1}{pV_1}\left(\frac{\partial p_1 G \dfrac{\partial V_1}{\partial \varrho_1}}{\partial \varrho_1} + \frac{\partial p_2 F \dfrac{\partial V_1}{\partial \varrho_2}}{\partial \varrho_2}\right) = 0,$$

où $a(\varrho)$ est différent de zero; dans le cas contraire les formules (II) coïncident avec les formules (I); pour démontrer le second cas du théorème, il suffit de différentier l'égalité précédente par rapport à ϱ_1 et ϱ_2 séparément, en tenant compte de ce que $a(\varrho)$ est différent de zéro.

Dans le troisième cas on peut écrire:

$$(11)\quad \frac{f''(\varrho}{f(\varrho)a(\varrho)}+\frac{1}{pV_1}\left(\frac{\partial p_1\frac{\partial V_1}{\partial\varrho_1}}{\partial\varrho_1}+\frac{\partial p_1\frac{\partial V_1}{\partial\varrho_2}}{\partial\varrho_2}\right)+\frac{\gamma(\varrho,\varrho_1)}{a(\varrho)}\cdot\frac{1}{pV_1}\cdot\frac{\partial p_2F\frac{\partial V_1}{\partial\varrho_2}}{\partial\varrho_2}=0$$

Il faut remarquer que γ ne peut pas avoir la forme:

$$\vartheta_1(\varrho_1)[\vartheta(\varrho)+a(\varrho)\zeta(\varrho_1)],$$

car dans le cas contraire les formules (III) se transforment en les formules (II), après une modification légère des notations.

Différentions l'égalité (11) par rapport à ϱ_2; on trouve en tenant compte de la remarque précédente:

$$\frac{1}{pV_1}\left(\frac{\partial p_1\frac{\partial V_1}{\partial\varrho_1}}{\partial\varrho_1}+\frac{\partial p_2\frac{\partial V_1}{\partial\varrho_2}}{\partial\varrho_2}\right)=\xi_1(\varrho_1),$$

$$\frac{1}{pV_1}\cdot\frac{\partial p_2F\frac{\partial V_1}{\partial\varrho_2}}{\partial\varrho_2}=\xi_1(\varrho_2),$$

$$\frac{f''}{f.a}+\xi_1(\varrho_1)+\frac{\gamma}{a}\xi_2(\varrho_2)=0.$$

C'est à dire:

$$\xi_2(\varrho_2)=0,\ \xi_1(\varrho_1)=-K,$$

où K désigne une constante arbitraire.

2. Démontrons maintenant le théorème suivant.

Théorème 3. *Si nous avons dans les formules (II)*

$$G=0,$$

F est indépendant de ϱ_2,

$$p=\lambda_1(\varrho_1)\lambda_2(\varrho_2),$$
$$p_1=\mu_1(\varrho_1)\mu_2(\varrho_2),$$
$$p_2=\nu_1(\varrho_1)\nu_2(\varrho_2),$$

à condition que:

$$\lambda_2(\varrho_2) = \mu_2(\varrho_2);$$

deux cas peuvent se présenter:

1) ou les équations pour $V_1(II_1)$ sont incompatibles;

2) ou elles admettent les solutions de la forme $V_1 = \varphi_1(\varrho_1)\varphi_2(\varrho_2)$, φ_1, φ_2 étant des fonctions dont chacune satisfait à l'équation différentielle ordinaire du second ordre.

Dans le cas du théorème 3 les équations (II_1) peuvent s'écrire:

$$F\frac{\partial p_1 \frac{\partial V_1}{\partial \varrho_1}}{\partial \varrho_1} + (K_1 F - K_2) p V_1 = 0,$$

$$F\frac{\partial p_2 \frac{\partial V_1}{\partial \varrho_2}}{\partial \varrho_2} + K_2 p V_1 = 0.$$

La première de ces équations donne:

$$V_1 = c_1(\varrho_2) u_1(\varrho_1) + c_2(\varrho_2) u_2(\varrho_1),$$

où u_1 et u_2 sont des solutions de cette équation, linéairement indépendantes.

Posons

$$\frac{K_2 \lambda_1}{F v_1} = \vartheta(\varrho_1).$$

On peut écrire:

$$(12) \quad u_1(\varrho_1)\left(\frac{d v_2 c_1'(\varrho_2)}{d\varrho_2} + \vartheta(\varrho_1)\lambda_2 c_1(\varrho_2)\right) + u_2(\varrho_1)\left(\frac{d v_2 c_2'(\varrho_2)}{d\varrho_2} + \vartheta(\varrho_1)\lambda_2 c_2(\varrho_2)\right) = 0$$

Différentions cette égalité par papport à ϱ_2 et considérons le déterminant:

$$\begin{vmatrix} \frac{d v_2 c_1'(\varrho_2)}{d\varrho_2} + \vartheta(\varrho_1)\lambda_2 c_1(\varrho_2), & \frac{d v_2 c_2'(\varrho_2)}{d\varrho_2} + \vartheta(\varrho_1)\lambda_2 c_2(\varrho_2) \\ \frac{d^2 v_2 c_1'(\varrho_2)}{d\varrho_2^2} + \vartheta(\varrho_1)\frac{d\lambda_2 c_1(\varrho_2)}{d\varrho_2}, & \frac{d^2 v_2 c_2'(\varrho_2)}{d\varrho_2^2} + \vartheta(\varrho_1)\frac{d\lambda_2 c_2(\varrho_2)}{d\varrho_2} \end{vmatrix}.$$

Ce déterminant est un polynome quadratique par rapport à $\vartheta(\varrho_1)$ à coefficients indépendants de ϱ_1. Trois cas peuvent se présenter:

1) les équations (II_1) sont incompatibles [1],

2) $\vartheta(\varrho_1)$ est une constante,

[1]) Il est inutile pour nous de considérer la solution $V_1 = 0$.

3) les coefficients de notre polynome sont égaux à zéro.

Les deux premiers cas démontrent le théorème. Le dernier donne la relation (coeff. de $[\vartheta(\varrho_1)]^2$ est $= 0$):

$$\frac{d \lg \lambda_2 c_2(\varrho_2)}{d\varrho_2} = \frac{d \lg \lambda_2 c_1(\varrho_2)}{d\varrho_2},$$

$$c_2(\varrho_2) = C c_1(\varrho_2),$$

où C est une constante, et l'égalité (12) devient:

$$\frac{d v_2 c_1'(\varrho_2)}{d\varrho_2} + \vartheta(\varrho_1)\lambda_2 c_1(\varrho_2) = 0$$

Donc, ou $\vartheta(\varrho_1)$ est une constante, ou les équations (II) sont incompatibles, $C.Q.F.D.$

Remarques. 1⁰. Le théorème 3 a lieu si $F = 0$, G est indépendant de ϱ_2, $\lambda_1(\varrho_1) = \mu_1(\varrho_1)$ (au lieu de $\lambda_2(\varrho_2) = \mu_2(\varrho_2)$).

2⁰. Le même théorème s'applique aux équations (III_1) pour le cas où F est différent de zéro; dans le cas $F = 0$, les formules (III) se réduisent aux formules (I).

Dans tous les cas du théorème 3, si l'équation de Laplace admet une solution de la forme: $V = f(\varrho) V_1(\varrho_1, \varrho_2)$, la fonction $V_1(\varrho_1, \varrho_2)$ se réduit nécessairement au produit $f_1(\varrho_1) f_2(\varrho_2)$.

§ 2.

1. Ce paragraphe sera consacré a l'intégration des équations pour H, H_1, H_2, dues à Lamé, dans lesquelles H, H_1, H_2 sont tirés des formules (I), (II), (III).

Ces équations, bien connues [1]), sont les suivantes:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial\varrho_1 \partial\varrho_2} - \frac{1}{H_1} \cdot \frac{\partial H_1}{\partial\varrho_2} \cdot \frac{\partial H}{\partial\varrho_1} - \frac{1}{H_2} \cdot \frac{\partial H_2}{\partial\varrho_1} \cdot \frac{\partial H}{\partial\varrho_2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 H_1}{\partial\varrho \partial\varrho_2} - \frac{1}{H} \cdot \frac{\partial H}{\partial\varrho_2} \cdot \frac{\partial H_1}{\partial\varrho} - \frac{1}{H_2} \cdot \frac{\partial H_2}{\partial\varrho} \cdot \frac{\partial H_1}{\partial\varrho_2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 H_2}{\partial\varrho \partial\varrho_1} - \frac{1}{H} \cdot \frac{\partial H}{\partial\varrho_1} \cdot \frac{\partial H_2}{\partial\varrho} - \frac{1}{H_1} \cdot \frac{\partial H_1}{\partial\varrho} \cdot \frac{\partial H_2}{\partial\varrho_1} = 0,$$

---

[1]) Voir *Lamé*, Leçons sur les coordonnées curvilignes.

$$\frac{\partial}{\partial \varrho_1}\left(\frac{1}{H_1}\cdot\frac{\partial H}{\partial \varrho_1}\right)+\frac{\partial}{\partial \varrho}\left(\frac{1}{H}\cdot\frac{\partial H_1}{\partial \varrho}\right)+\frac{1}{H_2^2}\cdot\frac{\partial H}{\partial \varrho_2}\cdot\frac{\partial H_1}{\partial \varrho_2}=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial \varrho_2}\left(\frac{1}{H_2}\cdot\frac{\partial H}{\partial \varrho_2}\right)+\frac{\partial}{\partial \varrho}\left(\frac{1}{H}\cdot\frac{\partial H_2}{\partial \varrho}\right)+\frac{1}{H_1^2}\cdot\frac{\partial H}{\partial \varrho_1}\cdot\frac{\partial H_2}{\partial \varrho_1}=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial \varrho_1}\left(\frac{1}{H_1}\cdot\frac{\partial H_2}{\partial \varrho_1}\right)+\frac{\partial}{\partial \varrho_2}\left(\frac{1}{H_2}\cdot\frac{\partial H_1}{\partial \varrho_2}\right)+\frac{1}{H^2}\cdot\frac{\partial H_1}{\partial \varrho}\cdot\frac{\partial H_2}{\partial \varrho}=0.$$

Nous allons appeler ces équations „équations de Lamé". En introduisant des nouvelles fonctions $h=H^2$, $h_1=H_1^2$, $h_2=H_2^2$, nous obtiendrons six relations, analogues à celles de Lamé, que nous allons appeler „équations de Lamé transformées". Dans plusieurs des cas qui vont suivre nous pouvons intégrer ces équations jusqu'à la fin, lorsque les expressions de H, H_1, H_2 ont la forme (I), (II) ou (III), mais pour abréger cette note nous indiquerons seulement quelques propriétés des intégrales de ces équations, propriétés, nécessaires pour le but de notre travail.

2. Les 1—3-me équations de Lamé pour H, H_1, H_2 définis par les formules (I) donnent deux cas:

1) $a=\text{const.}$, A, B, C satisfont à l'équation:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial \varrho_1 \partial \varrho_2}-\frac{1}{B}\cdot\frac{\partial B}{\partial \varrho_2}\cdot\frac{\partial A}{\partial \varrho_1}-\frac{1}{C}\cdot\frac{\partial C}{\partial \varrho_1}\cdot\frac{\partial A}{\partial \varrho_2}=0$$

2) $A=\text{const.}$

Les trois autres équations pour le premier cas donnent (il est évident qu'on peut poser $a=1$):

$$\text{(IV)}\qquad \begin{cases} H=A, \\ H_1=B, \\ H_2=C, \end{cases}$$

où A, B, C satisfont aux équations:

$$\text{(IV}_1\text{)}\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 A}{\partial \varrho_1 \partial \varrho_2}-\dfrac{1}{B}\cdot\dfrac{\partial B}{\partial \varrho_2}\cdot\dfrac{\partial A}{\partial \varrho_1}-\dfrac{1}{C}\cdot\dfrac{\partial C}{\partial \varrho_1}\cdot\dfrac{\partial A}{\partial \varrho_2}=0, \\[2ex] \dfrac{\partial^2 A}{\partial \varrho_1^2}-\dfrac{1}{B}\cdot\dfrac{\partial B}{\partial \varrho_1}\cdot\dfrac{\partial A}{\partial \varrho_1}+\dfrac{B}{C^2}\cdot\dfrac{\partial B}{\partial \varrho_2}\cdot\dfrac{\partial A}{\partial \varrho_2}=0, \\[2ex] \dfrac{\partial^2 A}{\partial \varrho_2^2}-\dfrac{1}{C}\cdot\dfrac{\partial C}{\partial \varrho_2}\cdot\dfrac{\partial A}{\partial \varrho_2}+\dfrac{C}{B^2}\cdot\dfrac{\partial C}{\partial \varrho_1}\cdot\dfrac{\partial A}{\partial \varrho_1}=0, \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial \varrho_1}\left(\dfrac{1}{B}\cdot\dfrac{\partial C}{\partial \varrho_1}\right)+\dfrac{\partial}{\partial \varrho_2}\left(\dfrac{1}{C}\cdot\dfrac{\partial B}{\partial \varrho_2}\right)=0. \end{cases}$$

On peut remarquer que la dernière de ces équations est la condition d'intégrabilité de trois premières équations, où la fonction inconnue est A. L'intégration de ces équations en A (si B et C sont données) se ramène à deux équations linéaires du premier ordre et aux quadratures simples.

Dans le second cas la quatrième et la cinquième des équations de Lamé donnent:

$$\frac{d^2 \frac{1}{a}}{d\varrho^2} = 0,$$

d'où:

$$a = \frac{1}{\varkappa\varrho + \varkappa_1},$$

où $\varkappa$, $\varkappa_1$ sont des constantes.

Ainsi les équations de Lamé donnent:

$$\text{(V)} \qquad \begin{cases} H = \dfrac{1}{(\varkappa\varrho + \varkappa_1)^2}, \\ H_1 = \dfrac{B}{\varkappa\varrho + \varkappa_1}, \\ H_2 = \dfrac{C}{\varkappa\varrho + \varkappa_1}, \end{cases}$$

où B et C satisfont à l'équation:

$$(\text{V}_1) \qquad \frac{\partial}{\partial\varrho_1}\left(\frac{1}{B}\cdot\frac{\partial C}{\partial\varrho_1}\right) + \frac{\partial}{\partial\varrho_2}\left(\frac{1}{C}\cdot\frac{\partial B}{\partial\varrho_2}\right) + \varkappa^2 BC = 0.$$

3. Substituons les h, h_1, h_2, tirées des formules (II) dans la première des équations de Lamé transformées. Nous obtenons une fonction rationnelle en a, mais a n'est pas une constante (les formules (II) coïncident, dans le cas contraire, avec les formules (I)), et par suite l'équation obtenue sera une identité par rapport à a; multiplions la par $(a+F)$ et $(a+G)$ séparément et posons $a = -F$, $a = -G$ respectivement; nous pouvons écrire:

$$(13) \qquad \begin{cases} A(G-F)\dfrac{\partial F}{\partial\varrho_1}\dfrac{\partial F}{\partial\varrho_2} = 0, \\ A(F-G)\dfrac{\partial G}{\partial\varrho_1}\dfrac{\partial G}{\partial\varrho_2} = 0. \end{cases}$$

Il faut distinguer deux cas, selon que F est égal à G ou non. Si $F = G$, on peut poser dans la première équation de Lamé $a = -G$; donc nous obtenons la relation:

$$\frac{\partial F}{\partial \varrho_1} \cdot \frac{\partial F}{\partial \varrho_2} = 0.$$

Deux cas se présentent naturellement:

1) F est une fonction de ϱ_2 seulement,

2) F est une fonction de ϱ_1 seulement.

Faisons d'abord une remarque préliminaire. Sans altérer ni la forme spécifique de H, H_1, H_2, ni les conditions spéciales de notre problème, on peut faire les substitutions suivantes:

$$\varrho = \varrho(\bar{\varrho}),$$
$$\varrho_1 = \varrho_1(\bar{\varrho}_1),$$
$$\varrho_2 = \varrho_2(\bar{\varrho}_2),$$

où $\varrho(\bar{\varrho})$, $\varrho_1(\bar{\varrho}_1)$, $\varrho_2(\bar{\varrho}_2)$ sont des fonctions quelconques de ces arguments.

L'emploi de ces substitutions peut ramener les équations et les fonctions de notre problème à la forme la plus simple.

A l'aide de cette remarque nous pouvons supposer, que $F = \varrho_2$ pour le premier des deux cas précédents et que $F = \varrho_1$ pour le deuxième cas:

Désignons par Ω l'expression suivante

$$\Omega = \frac{\partial^2 A}{\partial \varrho_1 \partial \varrho_2} - \frac{1}{2A} \cdot \frac{\partial A}{\partial \varrho_1} \cdot \frac{\partial A}{\partial \varrho_2} - \frac{1}{2B} \cdot \frac{\partial B}{\partial \varrho_2} \cdot \frac{\partial A}{\partial \varrho_1} - \frac{1}{2C} \cdot \frac{\partial C}{\partial \varrho_1} \cdot \frac{\partial A}{\partial \varrho_2}.$$

La première équation de Lamé nous donne pour le premier cas:

$$(V_2) \qquad \begin{aligned} H &= Ab^2(a + \varrho_2)^2, \\ H_1 &= Bb\,(a + \varrho_2), \\ H_2 &= Cb\,(a + \varrho_2), \end{aligned}$$

et les relations:

$$\frac{\partial \lg \sqrt{A}}{\partial \varrho_1} = \frac{\partial \lg C}{\partial \varrho_1},$$
$$\Omega = 0.$$

Les conditions pour le deuxième cas s'obtiennent en permutant les lettres ϱ_2 avec ϱ_1 et B avec C.

Si F est inégal à G, nous pouvons construire, en développant les conditions (13), un tableau concernant 16 cas; mais en réalité ces 16 cas

ne sont pas tous essentiellement distincts les uns des autres; le nombre des cas distincts se ramène à six. L'un de ces cas peut s'écrire, après une modification légère des notations,

$$\text{(VI)} \qquad \begin{aligned} H &= Aab, \\ H_1 &= Ba, \\ H_2 &= Cb. \end{aligned}$$

Les autres cinq cas ainsi que le cas (V_2) se trouvent dans le tableau suivant.

№	Cas	Les conditions qui se découlent de la 1-re équation de Lamé (transf.)
1	$H^2 = Ab^2(a+\varrho_2)^2$ $H_1^2 = Bb(a+\varrho_2)$ $H_2^2 = Cb(a+\varrho_2)$	$\frac{\partial \lg \sqrt{A}}{\partial \varrho_1} = \frac{\partial \lg C}{\partial \varrho_1}$, $\Omega = 0$.
2	$H^2 = Ab^2a(a+\varrho_2)$ $H_1^2 = Bb(a+\varrho_2)$ $H_2^2 = Cba$	$\frac{\partial C}{\partial \varrho_1} = 0$, $\Omega = 0$.
3	$H^2 = Ab^2a(a+\varrho_2)$ $H_1^2 = Bba$ $H_2^2 = Cb(a+\varrho_2)$	$\frac{\partial \lg A}{\partial \varrho_1} = \frac{\partial \lg C}{\partial \varrho_1}$, $\Omega = 0$.
4	$H^2 = Ab^2(a+\varrho_2)(a+G(\varrho_2))$ $H_1^2 = Bb(a+\varrho_2)$ $H_2^2 = Cb(a+G(\varrho_2))$	$\frac{\partial A}{\partial \varrho_2} = 0$, $\frac{\partial C}{\partial \varrho_1} = 0$.
5	$H^2 = Ab^2(a+\varrho_1)(a+\varrho_2)$ $H_1^2 = Bb(a+\varrho_2)$ $H_2^2 = Cb(a+\varrho_1)$	$\frac{\partial \lg B}{\partial \varrho_2} = \frac{1}{\varrho_1-\varrho_2}$, $\frac{\partial \lg C}{\partial \varrho_1} = \frac{1}{\varrho_2-\varrho_1}$, $\Omega = 0$.
6	$H^2 = Ab^2(a+\varrho_1)(a+\varrho_2)$ $H_1^2 = Bb(a+\varrho_1)$ $H_2^2 = Cb(a+\varrho_2)$	$\frac{\partial \lg \frac{A}{B}}{\partial \varrho_2} = \frac{1}{\varrho_1-\varrho_2}$, $\frac{\partial \lg \frac{A}{C}}{\partial \varrho_1} = \frac{1}{\varrho_2-\varrho_1}$, $\Omega = 0$.

4. Examinons d'abord les formules (VI).

On peut dire que: 1) a et b sont différents tous les deux des constantes et que 2) a est inégale à b; dans le cas contraire les formules (VI)

$$H = Aab,$$
$$H_1 = Ba,$$
$$H_2 = Cb,$$

se dégénèrent aux formules (I).

Les trois premières équations de Lamé donnent:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial\varrho_1\partial\varrho_2} - \frac{1}{B}\cdot\frac{\partial B}{\partial\varrho_2}\cdot\frac{\partial A}{\partial\varrho_1} - \frac{1}{C}\cdot\frac{\partial C}{\partial\varrho_1}\cdot\frac{\partial A}{\partial\varrho_2} = 0,$$

$$(14)\qquad \frac{a'}{a}\left(\frac{1}{B}\cdot\frac{\partial B}{\partial\varrho_2} - \frac{1}{A}\cdot\frac{\partial A}{\partial\varrho_2}\right) - \frac{b'}{b}\cdot\frac{1}{B}\cdot\frac{\partial B}{\partial\varrho_2} = 0.$$

$$\frac{b'}{b}\left(\frac{1}{C}\cdot\frac{\partial C}{\partial\varrho_1} - \frac{1}{A}\cdot\frac{\partial A}{\partial\varrho_1}\right) - \frac{a'}{a}\cdot\frac{1}{C}\cdot\frac{\partial C}{\partial\varrho_1} = 0.$$

Nous avons trois cas à distinguer:

1) $a' \neq 0$, $b' \neq 0$, $\frac{\partial B}{\partial\varrho_2} \neq 0$ $\left(\text{ou ce qui revient au même, } \frac{\partial C}{\partial\varrho_1} \neq 0\right)$;

2) $a' \neq 0$, $b' \neq 0$, $\frac{\partial B}{\partial\varrho_2} = \frac{\partial C}{\partial\varrho_1} = 0$;

3) $b' = 0$, $a' \neq 0$ (ou ce qui est au fond la même chose, $a' = 0$, $b' \neq 0$).

Dans le premier cas il est facile de déduire des équations (14) la formule:

$$\frac{\dfrac{d\lg b}{d\varrho}}{\dfrac{d\lg a}{d\varrho}} = \frac{\dfrac{1}{B}\cdot\dfrac{\partial B}{\partial\varrho_2} - \dfrac{1}{A}\cdot\dfrac{\partial A}{\partial\varrho_2}}{\dfrac{1}{B}\cdot\dfrac{\partial B}{\partial\varrho_2}},$$

d'où (parce que dans cette égalité l'une des parties ne dépend que de ϱ, l'autre que de ϱ_1 et ϱ_2) $b = \alpha a^h$, où α est une constante, h est aussi une constante différente de 1 ou de 0 (voir plus haut).

Les formules (14) nous donnent:

$$A = \zeta_1(\varrho_1)\zeta_2(\varrho_2),$$
$$B = \xi_1(\varrho_1)A^{\frac{1}{1-h}},$$
$$C = \xi_2(\varrho_2)A^{\frac{h}{h-1}}.$$

Mais à l'aide d'une remarque à la p. 256 on peut supposer:

$$\xi_1(\varrho_1) = \zeta_1(\varrho_1), \quad \xi_2(\varrho_2) = \zeta_2(\varrho_2).$$

La dernière des équations de Lamé peut s'écrire ainsi:

$$(15) \qquad \alpha^2 a^{2h} \frac{\partial}{\partial \varrho_1}\left(\frac{1}{B}\cdot\frac{\partial C}{\partial \varrho_1}\right) + a^2 \frac{\partial}{\partial \varrho_2}\left(\frac{1}{C}\cdot\frac{\partial B}{\partial \varrho_2}\right) + h\left(\frac{a'}{a}\right)^2 = 0,$$

où h est différent de 1; donc l'équation précédente donne:

$$\frac{\partial}{\partial \varrho_1}\left(\frac{1}{B}\cdot\frac{\partial C}{\partial \varrho_1}\right) = k_1, \quad \frac{\partial}{\partial \varrho_2}\left(\frac{1}{C}\cdot\frac{\partial B}{\partial \varrho_2}\right) = k_2,$$

où k_1, k_2 sont des constantes.

La première de ces conditions peut s'écrire:

$$\zeta_2(\varrho_2)^{1+\frac{h+1}{h-1}} \psi(\varrho_1) = k_1$$

où $\psi(\varrho_1)$ est une certaine combinaison de la fonction $\zeta_1(\varrho_1)$ et de ses dérivées. Cette égalité, pour $k_1 \neq 0$, entraîne [1])

$$1 + \frac{h+1}{h-1} = 0$$

ce qui est impossible pour h différent de zéro.

Les mêmes conclusions peuvent démontrer l'impossibilité de l'équation (15) pour $k_1 = 0$, $k_2 \neq 0$, et il est facile de démontrer cette impossibilité pour le cas où $k_1 = 0$, $k_2 = 0$.

Dans le second cas la dernière des équations de Lamé devient, comme il est facile à voir, impossible.

Les équations (14) pour le 3-me cas donnent les relations:

$$(\mathrm{VI}_1) \qquad \begin{cases} A = \zeta_1(\varrho_1)\zeta_2(\varrho_2) \\ B = \zeta_2(\varrho_2) \\ C = 1 \end{cases}$$

Ces relations sont suffisantes pour le but de ce travail et nous n'examinerons pas plus loin ce cas. Mais il convient de dire que dans

---

[1]) Nous avons:

$$\zeta_2'(\varrho_2) \neq 0.$$

ce cas on peut intégrer complétement les équations de Lamé et obtenir deux formes différentes sous lesquelles se présentent les fonctions $\zeta_1(\varrho_1)$ et $\zeta_2(\varrho_2)$.

5. Il est facile de démontrer que les cas 1, 2, 4, 5 de notre tableau [p. 257] sont impossibles. Multiplions la seconde des équations de Lamé par $(a+\varrho_2)$ et posons $\varrho_2 = -a(\varrho)$, pour tous les cas mentionnés nous obtenons la relation:

$$B(\varrho_1, \varrho_2) b(\varrho) a'(\varrho) = 0,$$

ce qui démontre l'impossibilité de ces quatre cas.

6. Nous avons vu, que dans le cas 3 de notre tableau (p. 257) les conditions suivantes sont remplies:

$$(16) \qquad \begin{gathered} \frac{\partial \lg A}{\partial \varrho_1} = \frac{\partial \lg C}{\partial \varrho_1}, \\ \frac{\partial^2 A}{\partial \varrho_1 \partial \varrho_2} - \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial A}{\partial \varrho_1} \cdot \frac{\partial A}{\partial \varrho_2} - \frac{1}{2B} \cdot \frac{\partial B}{\partial \varrho_2} \cdot \frac{\partial A}{\partial \varrho_1} = 0. \end{gathered}$$

La troisième des équations de Lamé donne:

$$\frac{a+\varrho_2}{2a} \cdot \frac{\partial C}{\partial \varrho_1} \cdot \frac{d(ba)}{d\varrho} = 0.$$

Ainsi il faut distinguer deux cas: 1) $(ba)' = 0$; 2) $\frac{\partial C}{\partial \varrho_1} = 0$, $(ba)' \neq 0$

La seconde des équations de Lamé peut s'écrire pour le premier cas:

$$\frac{b' a \varrho_2}{2(a+\varrho_2)} \cdot \frac{\partial B}{\partial \varrho_2} = 0.$$

Mais il est facile de voir que $b'a \neq 0$, ainsi il faut conclure que $\frac{\partial B}{\partial \varrho_2} = 0$, et les équations (16), après une transformation légère, donnent.

$$(\mathrm{VII}_1) \qquad \begin{cases} A = \zeta_1(\varrho_1)\zeta_2(\varrho_2), \\ B = 1, \\ C = \zeta_1(\varrho_1). \end{cases}$$

Cette forme de A, B, C suffit pour le but de notre travail; on peut ajouter que dans ce cas-là les équations de Lamé s'intègrent complétement et donnent une forme particulière des fonctions ζ_1 et ζ_2.

Le second cas donne:

$$\frac{\partial C}{\partial \varrho_1} = 0, \quad \frac{\partial A}{\partial \varrho_1} = 0.$$

Faisons une remarque préliminaire.

Pour le cas 3 on peut écrire les formules pour H^2, H_1^2, H_2^2, de la manière suivante:

$$H^2 = Ab^2a^2\varrho_2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{\varrho_2}\right),$$
$$H_1^2 = Bba,$$
$$H_2^2 = Cba\varrho_2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{\varrho_2}\right),$$

ou, en tenant compte de la remarque de la p. 256,

$$H^2 = \overline{A}l(\varrho + \varrho_2),$$
$$H_1^2 = Bg,$$
$$H_2^2 = \overline{C}g(\varrho + \varrho_2).$$

La seconde des équations de Lamé donne:

$$\frac{\partial \lg \overline{A}}{\partial \varrho_2}(\varrho + \varrho_2) + 1 + \frac{g'}{g'} \cdot \frac{\partial \lg B}{\partial \varrho_2} = 0.$$

De cette égalité on peut conclure que, dans le cas considéré (voir la remarque de la p. 256) B ne dépend pas de ϱ_1; donc dans ce cas A, B, C sont indépendants de ϱ_1.

7. Examinons le cas 6. La 2-me des équations de Lamé donne

$$(ba')\left(\frac{1}{\varrho_2 - \varrho_1} - \frac{\partial \lg B}{\partial \varrho_2}\right) + b'\left(\frac{\varrho_1}{\varrho_2 - \varrho_1} - \varrho_2 \frac{\partial \lg B}{\partial \varrho_2}\right) = 0.$$

Si $b' \neq 0$, on peut dire que

$$\frac{(ba)'}{b'} = K,$$

où K est une constante.

Mais on peut écrire les formules pour H^2, H_1^2, H_2^2, du n⁰ 6 de la manière suivante:

$$H^2 = Ab^2(a - K + K + \varrho_1)(a - K + K + \varrho_2),$$
$$H^2 = Bb(a - K + K + \varrho_1),$$
$$H_2^2 = Cb(a - K + K + \varrho_2).$$

On peut transformer ces formules ainsi:

$$H^2 = A(K+\varrho_1)(K+\varrho_2)(ba-Kb)^2\left(\frac{1}{a-K}+\frac{1}{K+\varrho_1}\right)\left(\frac{1}{a-K}+\frac{1}{K+\varrho_2}\right),$$

$$H_1^2 = B(K+\varrho_1)(ba-Kb)\left(\frac{1}{a-K}+\frac{1}{K+\varrho_1}\right),$$

$$H_2^2 = C(K+\varrho_2)(ba-Kb)\left(\frac{1}{a-K}+\frac{1}{K+\varrho_2}\right).$$

On peut donner à ces formules cette forme plus simple:

$$H^2 = \overline{A}.\overline{b}^2(\overline{a}+\overline{\varrho}_1)(\overline{a}+\overline{\varrho}_2),$$
$$H_1^2 = \overline{B}.\overline{b}\,(\overline{a}+\overline{\varrho}_1),$$
$$H_2^2 = \overline{C}.\overline{b}\,(\overline{a}+\overline{\varrho}_2),$$

où $\overline{b} = ba - Kb$, et, en vertu des conditions précédentes, $\overline{b}' = 0$. Donc dans les formules du n⁰ 6 on peut supposer toujours $b' = 0$.

Les équations 2-me et 3-me de Lamé donnent (à l'aide des conditions du tableau de la p. 257)

$$\frac{\partial \lg B}{\partial \varrho_2} = \frac{1}{\varrho_2 - \varrho_1}, \quad \frac{\partial \lg C}{\partial \varrho_1} = \frac{1}{\varrho_1 - \varrho_2}, \quad \frac{\partial \lg A}{\partial \varrho_1} = \frac{\partial \lg A}{\partial \varrho_2} = 0,$$

d'où il suit:

$$A = k,$$
$$B = \xi_1(\varrho_1)(\varrho_2 - \varrho_1),$$
$$C = \xi_2(\varrho_2)(\varrho_1 - \varrho_2),$$

où k est une constante.

On peut écrire les coefficients de Lamé ainsi:

$$H^2 = b(\varrho+\varrho_1)(\varrho+\varrho_2),$$
$$H_1^2 = \xi_1(\varrho_1)(\varrho+\varrho_1)(\varrho_2-\varrho_1),$$
$$H_2^2 = \xi_2(\varrho_2)(\varrho+\varrho_2)(\varrho_1-\varrho_2).$$

Multiplions la 6-me des équations de Lamé par $\frac{(\varrho+\varrho_2)(\varrho+\varrho_1)}{(\varrho_2-\varrho_1)^2}$ et différentions la quatre fois par rapport à ϱ; nous pouvons écrire:

$$\frac{d^4\left(\frac{1}{b}\right)}{d\varrho^4} = 0,$$

d'où

$$\frac{1}{b} = \alpha\varrho^3 + \beta\varrho^2 + \gamma\varrho + \delta = f(\varrho),$$

où α, β, γ, δ sont des constantes.

Multiplions la 6-me des équations de Lamé par $(\varrho_2 - \varrho_1)$ et posons $\varrho_2 = \varrho_1$; nous obtenons:

$$\xi_1(\varrho_1) = \xi_2(\varrho_1).$$

Multiplions la même équation de Lamé par $(\varrho + \varrho_1)$ et faisons ensuite $\varrho = -\varrho_1$; nous obtenons:

$$\xi_1(\varrho_1) = -\frac{1}{f(-\varrho_1)},$$

et, par suite:

$$\xi_2(\varrho_2) = -\frac{1}{f(-\varrho_2)}.$$

Après toutes ces considérations préliminaires, nous pouvons écrire les coefficients de Lamé sous la forme suivante:

$$\text{(VIII)} \qquad \begin{cases} H^2 = \dfrac{(\varrho - \varrho_1)(\varrho - \varrho_2)}{f(\varrho)}, \\ H_1^2 = \dfrac{(\varrho_1 - \varrho)(\varrho_1 - \varrho_2)}{f(\varrho_1)}, \\ H_2^2 = \dfrac{(\varrho_2 - \varrho)(\varrho_2 - \varrho_1)}{f(\varrho_2)}. \end{cases}$$

Ce sont les formules célèbres dues à Lamé [1]), qui jouent un rôle prépondérant dans la théorie des coordonnées curvilignes. Il est facile de démontrer que les H, H_1, H_2 tirés des formules (VIII) satisfont à toutes les équations de Lamé.

8. Il est évident que dans les formules (III) l'expression:

$$a' + F\frac{\partial\gamma}{\partial\varrho}$$

est différent de zéro, car dans le cas contraire ces formules se ramènent aux formules (I) et (II). Cette remarque nous permet de déterminer ϱ comme fonction de ϱ_1 et ϱ_2 de l'égalité:

$$a + F\gamma = 0.$$

---

[1]) *Lamé* l. c.

Multiplions la seconde des équations de Lamé par $a+F\gamma$ et déterminons ϱ de la manière précédente, nous aurons:

$$\frac{\partial F}{\partial \varrho_2}=0$$

c'est à dire F est une fonction de ϱ_1 seulement.

A l'aide de cette égalité nous pouvons simplifier les formules (III) en les écrivant sous la forme:

$$\begin{aligned} H &= A\alpha\gamma, \\ H_1 &= B\gamma, \\ H_2 &= C\alpha. \end{aligned} \tag{17}$$

Substituant ces expressions de H, H_1, H_2 dans la première des équations de Lamé (non transformée) et différentiant le résultat obtenu par rapport à ϱ, on aura:

$$\left(\frac{\partial \lg A}{\partial \varrho_2}-\frac{\partial \lg B}{\partial \varrho_2}\right)\cdot\frac{\partial^2 \lg \gamma}{\partial \varrho\, \partial \varrho_1}=0.$$

Il est facile de voir que $\frac{\partial^2 \lg \gamma}{\partial \varrho \partial \varrho_1} \neq 0$; dans le cas contraire les formules (17) se ramènent à des formules (I).

Ainsi de la première des équations de Lamé nous pourrons conclure:

$$\frac{\partial \lg A}{\partial \varrho_2}=\frac{\partial \lg B}{\partial \varrho_2},\quad \frac{\partial^2 A}{\partial \varrho_1 \partial \varrho_2}-\frac{1}{A}\cdot\frac{\partial A}{\partial \varrho_1}\cdot\frac{\partial A}{\partial \varrho_2}-\frac{1}{C}\cdot\frac{\partial C}{\partial \varrho_1}\cdot\frac{\partial A}{\partial \varrho_2}=0.$$

La seconde des equations de Lamé donne:

$$\gamma\cdot\frac{a'}{a}\cdot\frac{\partial B}{\partial \varrho_2}=0.$$

Il faut distinguer deux cas:

1) $a'=0$;

2) $a' \neq 0$, $\frac{\partial B}{\partial \varrho_2}=0$.

Si $a'=0$, la 3-me des équations de Lamé donne:

$$\frac{\partial \lg C}{\partial \varrho_1}=0,$$

(on peut supposer, sans restreindre la généralité, $\frac{\partial \lg \gamma}{\partial \varrho} \neq 0$) et on peut écrire à l'aide des conditions précédentes:

$$(\mathrm{IX}_1) \qquad \begin{cases} A = \zeta_1(\varrho_1)\zeta_2(\varrho_2), \\ B = \zeta_2(\varrho_2), \\ C = 1. \end{cases}$$

Il y a en effet des fonctions ζ_1 et ζ_2 qui donnent les expressions (IX_1) satisfaisantes à toutes les équations de Lamé; nous n'insistons pas sur ce point.

Si $\frac{\partial B}{\partial \varrho_2} = 0$, on peut dire que $\frac{\partial A}{\partial \varrho_2} = 0$, par suite on peut poser $A = B = 1$ (sans restreindre la généralité). Différentions la 3-me des équations de Lamé par ϱ_2; nous aurons:

$$\frac{\partial^2 \lg C}{\partial \varrho_1 \partial \varrho_2}\left(a' - a\frac{\partial \lg \gamma}{\partial \varrho}\right) = 0.$$

L'expression, $a' - a\frac{\partial \lg \gamma}{\partial \varrho}$, est différent de zéro, car $\frac{\partial^2 \lg \gamma}{\partial \varrho \partial \varrho_1}$ est différent de zéro; on a donc

$$\frac{\partial^2 \lg C}{\partial \varrho_1 \partial \varrho_2} = 0,$$

et nous pouvons écrire:

$$(\mathrm{IX}_2) \qquad \begin{cases} A = 1, \\ B = 1, \\ C = \zeta(\varrho_1). \end{cases}$$

On peut déterminer effectivement la fonction $\zeta(\varrho_1)$ pour que toutes les conditions de Lamé soient satisfaites.

9. Les considérations précédentes (§ 2) conduisent à la proposition suivante.

Théorème 4. *Si l'équation de Laplace admet des solutions de la forme:*

$$V = f(\varrho)V_1(\varrho_1, \varrho_2)$$

(à condition du théorème 1, p. 247) on a quatre cas à distinguer:

$$1)\qquad \begin{aligned} H &= A, \\ H_1 &= B, \\ H_2 &= C, \end{aligned}$$

où A, B, C vérifient les conditions de la p. 254.

$$2)\qquad \begin{aligned} H &= \frac{1}{(k\varrho + k_1)^2}, \\ H_1 &= \frac{B}{k\varrho + k_1}, \\ H_2 &= \frac{C}{k\varrho + k_1}, \end{aligned}$$

où B, C vérifient les conditions de la p. 255; k, k_1 sont des constantes.

$$3)\qquad \begin{aligned} H^2 &= \frac{(\varrho - \varrho_1)(\varrho - \varrho_2)}{f(\varrho)}, \\ H_1^2 &= \frac{(\varrho_1 - \varrho)(\varrho_1 - \varrho_2)}{f(\varrho_1)}, \\ H_2^2 &= \frac{(\varrho_2 - \varrho)(\varrho_2 - \varrho_1)}{f(\varrho_2)}, \end{aligned}$$

où $f(\varrho)$ est un polynôme du 3-me degré.

4) Dans tous les autres cas les conditions du théorème 3 sont remplies (et des remarques sur la p. 253) et par suite ce théorème a lieu pour tous ces autres cas.

§ 3.

Dans ce paragraphe nous voulons rechercher quelles sont les surfaces $\varrho = \text{const.}$, $\varrho_1 = \text{const.}$, $\varrho_2 = \text{const.}$, pour lesquelles l'équation de Laplace a des propriétés mentionnées plus haut. Comme nous l'avons déjà dit, M. Darboux avait examiné tous les cas pour lesquels l'équation de Laplace admet des solutions de la forme:

$$V = f(\varrho) f_1(\varrho_1) f_2(\varrho_2),$$

sous quelques conditions supplémentaires [1]).

---

[1]) *Darboux.* Leçons sur les syst. orthogon. etc.

Il a trouvé que tous ces cas se ramènent aux surfaces du second ordre, aux cônes et aux cylindres isothermiques. Pour abréger le langage nous allons donner à cet ensemble de surfaces le nom des „surfaces de Darboux".

A l'aide du théorème 3 nous pouvons conclure que le 4-me cas de la p. 266 donne des „surfaces de Darboux".

C'est à Lamé qu'on doit rapporter le 3-me cas—les surfaces dans ce cas sont des ellipsoïdes et hyperboloïdes à une ou à deux nappes, confocales.

Les raisonnements bien simples [1]) nous montrent que dans le 1-er cas $\varrho = \text{const}$ est un plan, $\varrho_1 = \text{const}$, $\varrho_2 = \text{const}$, sont des surfaces de revolution. Et, réciproquement, pour chaque système des surfaces de révolution avec l'axe de révolution commune on peut ramener H, H_1, H_2, à la forme du 1-r cas.

Dans le 2-me cas ce sont les deux courbures qui montrent que les surfaces $\varrho_1 = \text{const.}$ sont des sphères, tandis que les surfaces $\varrho_1 = \text{const.}$, $\varrho_2 = \text{const.}$ sont des cônes.

On peut répondre à présent à la question posée plus haut p. 245. A cette question (sous quelques conditions supplémentaires) répondent *les surfaces de Darboux, les plans et les surfaces de révolution, les sphères et les cônes.* On peut remarquer aisément, que si l'équation de Laplace admet des solutions $f(\varrho) . V_1(\varrho_1, \varrho_2)$, les fonctions fondamentales pour la surface $\varrho = \text{const.}$ créées par M. Stekloff [2]), coïncident (formellement, au moins) avec celles de M. Poincaré et M. Ed. Le-Roy [3]). Mais les travaux de M. Zaremba et M. Levi-Civita [4]) ont montré que dans ce cas les surfaces $\varrho = \text{const}$ sont des surfaces du second ordre [5]).

§ 4.

Examinons à présent le cas mentionné à la p. 3, où $\psi(\varrho) = 0$, et

$$f = m\varrho + n,$$

où m, n sont des constantes.

---

1) *Bianchi.* Lezioni di geometria differenziale, t. 2, p. 482.

2) *В. А. Стекловъ.* Общіе методы рѣшенія и т. д.

3) *Ed. Le-Roy.* Ann. Ec. Norm. Sup. 1897—98.

4) *Zaremba.* Bull. internat. de l'Acad. de Cracovie. 1902.
Levi-Civita. Ib. 1902.

5) Ou peut être quelques sortes des cônes et des cylindres.

Il est évident que dans ce cas, si $f.V_1$ vérifie l'équation de Laplace, V_1 la vérifiera aussi.

Si u et v satisfont à l'équation de Laplace, la formule bien connue nous donne:

$$\iint_S \left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right) d\sigma = 0,$$

où $d\sigma$ désigne l'élément de la surface S, n désigne la direction de la normale à la surface S, enfin l'intégration s'étend sur toute la surface S. Transformons cette intégrale aux coordonnées ϱ, ϱ_1, ϱ_2 et soit $\varrho = \text{const.}$ la surface S; nous aurons:

$$\iint_{\varrho=\text{const.}} \frac{H_1 H_2}{H}\left(v\frac{\partial u}{\partial \varrho} - u\frac{\partial v}{\partial \varrho}\right) d\varrho_1 d\varrho_2 = 0,$$

Posons maintenant $u = f(\varrho)V_1(\varrho_1, \varrho_2)$, $v = V_1(\varrho_1, \varrho_2)$, nous obtenons

$$f'(\varrho)\iint_{\varrho=\text{const.}} \frac{H_1 H_2}{H} V_1^2 d\varrho_1 d\varrho_2 = 0,$$

d'où il suit:

$$f'(\varrho) = 0,$$
$$\varrho = \text{const.}$$

ou (voir plus haut):

$$m = 0,$$

ainsi notre cas se ramène à celui où le potentiel ne dépend que de deux variables ϱ_1, ϱ_2,—le cas qui a été traité M. Levi-Civita [1]). Par une méthode analogue, on peut discuter le cas où $\frac{f'}{f}$ ne contient une constante arbitraire.

St.-Pétersbourg.
Decembre 1909.

---

[1]) *Levi-Civita.* Memor. della Reale Accad. delle Scienze de Torino, 1898—1899. p. 105.

Преобразованіе Лоренца и принципъ относительности.

А. П. Грузинцева.

Въ послѣднее время физики очень заинтересованы такъ называемымъ «принципомъ относительности». Сущность дѣла состоитъ въ томъ, что Лоренцъ въ своихъ изслѣдованіяхъ уравненій электричества для движущихся срединъ напалъ на одно преобразованіе координатъ и времени, которыя служили независимыми перемѣнными въ системѣ дифференціальныхъ уравненій электродинамики. Толкуя свои формулы преобразованія физически, онъ пришелъ къ крайне любопытнымъ выводамъ по отношенію нашихъ понятій о пространствѣ и времени, не говоря уже о выводахъ по отношенію къ «ньютоновой» механикѣ; но эти выводы, строго говоря, уже выходятъ изъ сферы чистой физики и принадлежатъ или къ механикѣ или къ общей теоріи познанія (гносеологіи); поэтому ограничимся лишь разсмотрѣніемъ ихъ математическаго и чисто физическаго характера. Оказывается, что если преобразуемъ уравненія электродинамики или, что тоже самое при извѣстныхъ условіяхъ, оптики *для чистаго эфира* отъ перемѣнныхъ x, y, z; t (координатъ и времени) къ новымъ перемѣннымъ x', y', z'; t' по формуламъ преобразованія, предложеннымъ Лоренцомъ, что уравненія сохраняютъ свой видъ. Въ этомъ послѣднемъ результатѣ и заключается предложеніе или теорема Лоренца. Тоже преобразованіе, но также только для эфира, выполнено было Миньковскимъ, Эйнштейномъ и А. Пуанкаре и предложеніе Лоренца въ этомъ случаѣ оказалось вѣрнымъ. Въ настоящей статьѣ я показываю, что предложеніе Лоренца оказывается справедливымъ *для всякой физической средины*, характеризуемой діэлектрической постоянной и коэффиціэнтомъ магнитной проницаемости отличными отъ единицы (для эфира $K=1$ и $\mu=1$); болѣе того, оно справедливо и для поглощающихъ срединъ (металлы). Но приложимость предложенія Лоренца въ обоихъ этихъ случаяхъ требуетъ соблюденія двухъ условій: 1) измѣненія электромагнитнаго поля должны быть *періодическими* во времени и 2) между діэлектрической постоянной и магнитной проницаемостью средины съ

одной стороны и ея показателемъ преломленія съ другой должно существовать нѣкоторое соотношеніе. Это соотношеніе оказывается *закономъ Максвелла* $K\mu = n^2$.

Надо замѣтить, что изслѣдованія упомянутыхъ выше ученыхъ относились, собственно говоря, къ срединамъ безъ дисперсіи, но, принимая въ разсчетъ движеніе электроновъ (Лоренцъ), очень легко получается тотъ результатъ, что n (показатель преломленія) будетъ опредѣленной функціей періода или частоты перемѣнъ электромагнитнаго поля. Прибавимъ еще, что эти результаты получаются независимо отъ того, какого взгляда мы придерживаемся на токи проводимости: обычнаго ли (омовы токи), взглядовъ Д. Д. Томсона или Лоренца или считаемъ ихъ явленіемъ болѣе сложнаго характера.

Сказанное относится, собственно говоря, къ предложенію или теоремѣ Лоренца, что же касается его формулъ преобразованія, то для приложимости ихъ ко всякимъ срединамъ необходимо и достаточно, чтобы входящая въ нихъ скорость свѣта была не «универсальной» постоянной, т. е. скоростью свѣта въ эфирѣ, какъ полагаетъ, напр. Эйнштейнъ, а просто скоростью свѣта въ разсматриваемой срединѣ, т. е. въ той, для которой написаны дифференціальныя уравненія электромагнитнаго поля и изслѣдуются явленія происходящія въ ней. Такимъ образомъ, принявъ справедливость теоремы Лоренца, т. е. инваріантность дифференціальныхъ уравненій средины, мы безъ всякаго ихъ интегрированія очень просто находимъ законъ Максвелла и законъ дисперсіи.

Сверхъ того при помощи преобразованія Лоренца мы получаемъ просто и строго послѣдовательно законы аберраціи и законъ, извѣстный подъ именемъ принципа Допплера, что было указано и самимъ Лоренцомъ и Эйнштейномъ.

Все это заставляетъ признать за преобразованіемъ и теоремой Лоренца чрезвычайно важное значеніе.

I.

Теоріи физическихъ явленій, напр. электромагнитныхъ и оптическихъ, построены въ предположеніи, что средины, въ которыхъ онѣ происходятъ, *неподвижны* и законы ихъ получены, слѣдовательно, для случая неподвижныхъ срединъ. Такъ, если мы утверждаемъ, что свѣтовой лучъ отражается отъ зеркальной пластинки подъ такимъ же угломъ, подъ какимъ упалъ, то неявно предполагаемъ, что и отражающая пластинка, и окружающій воздухъ, въ которомъ происходитъ явленіе отраженія, неподвижны. Естественно является вопросъ: сохранятъ ли свою форму физическіе законы явленія при движеніи тѣлъ и срединъ, въ которыхъ ихъ наблюдаемъ? Въ частныхъ случаяхъ, напр. въ нѣко-

торыхъ оптическихъ явленіяхъ, задачу эту пытались рѣшить съ давнихъ поръ, (Френель, Физо, Допплеръ), но удовлетворительнаго общаго рѣшенія вопроса не получили, напротивъ того въ нѣкоторыхъ случаяхъ получались отрицательные результаты (Майкельсонъ, Майкельсонъ и Морлей) необходимость же имѣть рѣшеніе ясна, хотя бы потому, что всѣ наблюдаемыя явленія на землѣ какъ разъ происходятъ въ движущихся срединахъ, т. е. въ тѣлахъ, увлекаемыхъ землей въ ея движеніи около своей оси и около солнца. Задача усложняется еще тѣмъ обстоятельствомъ, что мы не знаемъ ни одной матеріальной средины, которая находилась бы въ абсолютномъ покоѣ или, что тоже самое, что наблюдаемыя нами движенія тѣлъ суть движенія относительныя. Такимъ образомъ мы имѣемъ слѣдующую общую задачу: дать теорію физическаго явленія, происходящаго въ той или другой срединѣ, при непремѣнномъ условіи ея движенія. Анализируя эту задачу ближе, мы ее сведемъ къ другой болѣе простой по ея формулировкѣ. Дѣйствительно, въ настоящее время дать теорію физическаго явленія значитъ просто составить систему дифференціальныхъ уравненій, въ которой подъ видомъ ихъ рѣшеній и содержатся законы, управляющіе явленіемъ. Въ составъ же этихъ дифференціальныхъ уравненій будутъ входить нѣкоторыя функціи и производныя этихъ функцій, представляющихъ величину (напряженность) тѣхъ физическихъ факторовъ, которые участвуютъ въ явленіи, а независимыми перемѣнными въ окончательномъ итогѣ будутъ координаты той точки, въ которой наблюдаемъ явленіе и время момента наблюденія. Нужно впрочемъ оговориться: въ нѣкоторыхъ случаяхъ мы за независимыя перемѣнныя выбираемъ опредѣленныя функціи координатъ и времени, а не сводимъ ихъ къ этимъ послѣднимъ перемѣннымъ; въ такомъ положеніи находится, напр., термодинамика.

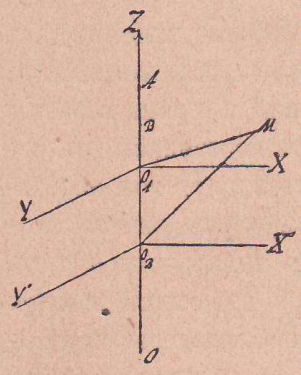
Итакъ поставленная задача будетъ состоять въ слѣдующемъ: дана система дифференціальныхъ уравненій нѣкоторыхъ функцій координатъ точки и времени. Система координатъ (прямолинейная и прямоугольная, разумѣется) сама перемѣщается въ пространствѣ съ постоянной относительной скоростью по сравненію съ нѣкоторой другой системой координатъ. При этомъ время, какъ *физическій факторъ*, опредѣляется соотвѣтствующимъ приборомъ (часами, регистрирующимъ аппаратомъ и т. п.), будетъ обозначаться или регистрироваться въ каждой изъ этихъ системъ координатъ своимъ числомъ; точно также и самъ наблюдатель, принадлежащій той или другой системѣ координатъ и времени, движется съ той же скоростью и наблюдаетъ соотвѣтственное время момента явленія. Спрашивается, какимъ образомъ мы можемъ перейти отъ системы дифференціальныхъ уравненій, установленныхъ для перваго случая перемѣнныхъ (координатъ и времени) къ системѣ дифференціальныхъ уравненій для перемѣнныхъ во второмъ случаѣ.

Облечемъ въ математическую форму эту задачу. Пусть въ системѣ, скажемъ A, перемѣнныя будутъ: x, y, z и t; а во второй, назовемъ ее системой B, будутъ соотвѣтственно x', y', z'; t', причемъ система B, положимъ, движется относительно системы A въ нѣкоторомъ направленіи съ постоянной скоростью v. Наша задача будетъ состоять въ опредѣленіи зависимостей системы перемѣнныхъ (x, y, z; t) отъ системы (x', y', z'; t') и обратно.

Первый, кто рѣшилъ эту задачу и нашелъ искомыя зависимости, былъ *Г. А. Лоренцъ* (1895) [1]), но путемъ сложнаго анализа, преобразовывая дифференціальныя уравненія электромагнитнаго поля въ эфирѣ, данныя раньше Максвелломъ и извѣстныя подъ именемъ Герцъ-Максвелловыхъ уравненій; сверхъ того въ пріемѣ Лоренца не выступалъ съ полной ясностью универсальный характеръ преобразованія и значеніе послѣдняго иногда затемнялось физическими толкованіями полученныхъ формулъ, толкованіями, съ которыми не всегда было возможно согласиться. Но во всякомъ случаѣ съ полнымъ правомъ мы можемъ говорить о *преобразованіи Лоренца*. Затѣмъ (1905) *Эйнштейнъ* [2]) независимо отъ уравненій электромагнитнаго поля установилъ соотношенія Лоренца между системой перемѣнныхъ (x, y, z; t) и (x', y', z'; t') при помощи опредѣленія времени, какъ физическаго фактора наблюдаемаго явленія. Зная эти соотношенія, уже легко переходить отъ одной системы дифференціальныхъ уравненій къ другой.

II.

Соображенія Эйнштейна состоятъ въ слѣдующемъ. Пусть имѣемъ двѣ системы, движущіяся другъ относительно друга съ постоянной скоростью v въ изотропномъ пространствѣ въ нѣкоторомъ направленіи OZ, которое примемъ за общую ось координатъ Z или Z'. Пусть O_A и O_B будутъ начала координатъ двухъ системъ, изъ которыхъ одну, а именно O_AXYZ можемъ принять за неподвижную, а другую $O_BX'Y'Z'$ движущейся со скоростью v по направленію прямой OZ относительно первой: оси O_BX', O_BY' соотвѣтственно параллельны O_AX и O_AY. Пусть координаты нѣкоторой точки M пространства въ системѣ A будутъ x, y, z и моментъ наблюденія какого нибудь явленія, напримѣръ, свѣтящейся точки въ пунктѣ M, для наблюдателя связаннаго съ системой A, будетъ t. Это t есть отсчетъ въ моментъ наблюденія прибора, служащаго для опре-



[1]) См. напр. его Theory of electrons, p. 197. (1909).

[2]) Annalen d. Physik. Bd. 17, p. 891 (1905).

дѣленія времени въ системѣ A. Далѣе пусть x', y', z' и t' соотвѣтственныя величины въ системѣ B, опредѣляемыя наблюдателемъ, связаннымъ неизмѣняемо съ ней; приэтомъ необходимо, чтобы приборъ для регистрированія времени въ системѣ B былъ тождественнъ съ такимъ же приборомъ въ системѣ A.

Возьмемъ на оси OZ двѣ точки: A, принадлежащую системѣ A, и B—системѣ B. Пусть $AB = u$. Затѣмъ пусть изъ A идетъ свѣтовой лучъ къ B, гдѣ помѣщено зеркало, отражается отъ него и попадаетъ обратно въ A. Обозначимъ t_0', t_1', t_2' соотвѣтственно моменты времени въ системѣ B выхожденія луча изъ A, отраженія отъ B и возвращенія опять въ A; тогда ясно, что

$$t_1' - t_0' = t_2' - t_1'; \tag{1}$$

откуда находимъ:

$$2t_1' = t_0' + t_2'. \tag{2}$$

Согласно нашему взгляду на время t' мы можемъ написать, что вообще:

$$t' = \phi(z, t), \tag{3}$$

если z координата какой нибудь точки на оси OZ, а t соотвѣтственный моментъ времени въ системѣ A; что же касается ϕ, то это нѣкоторая *однозначная* функція; приэтомъ, ясно, что t' не зависитъ отъ x и y. При помощи (3) имѣемъ:

$$t_0' = \phi(z, t); \quad t_1' = \phi\left(z - u, \quad t + \frac{u}{\omega + v}\right);$$
$$t_2' = \phi\left(z, \; t + \frac{u}{\omega - v} + \frac{u}{\omega + v}\right), \tag{4}$$

причемъ z координата точки A, а ω *скорость свѣта въ той срединѣ, которой наполнено разсматриваемое пространство;* дробь $\frac{u}{\omega + v}$ есть время, въ теченіе котораго свѣтъ переходитъ отъ A до B, а $\frac{u}{\omega - v}$ время отъ B до A. Надо впрочемъ замѣтить, что самъ Эйнштейнъ разсматриваетъ случай, когда взятая средина—эфиръ. Разлагая t_1' и t_2' въ (4) по теоремѣ Тэйлора, въ предположеніи, что u безконечно-мало, найдемъ:

$$t_1' = \phi(z, t) - \frac{\partial\phi}{\partial z} u + \frac{\partial\phi}{\partial t} \frac{u}{\omega + v};$$
$$t_2' = \phi(z, t) + \frac{\partial\phi}{\partial t} \frac{2u\omega}{\omega^2 - v^2}, \tag{5}$$

но, какъ показываетъ чертежъ: $u = z - vt$, а потому:

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = \frac{\partial\phi}{\partial u};$$

подставивъ это въ выраженіе для t_1', получимъ:

$$t_1' = \phi(z, t) - \frac{\partial\phi}{\partial u} u + \frac{\partial\phi}{\partial t} \frac{u}{\omega + v}. \tag{6}$$

Подставивъ теперь значенія t_0' изъ (4), t_1' изъ (6) и t_2' изъ (5) въ равенство (2), по сокращеніи найдемъ:

$$\frac{\partial\phi}{\partial u} + \frac{v}{\omega^2 - v^2} \frac{\partial\phi}{\partial t} = 0. \tag{7}$$

Интегралъ этого уравненія будетъ:

$$\phi = F(At + Bu), \tag{8}$$

гдѣ F какая угодно *однозначная* функція t и u. Между постоянными A и B существуетъ зависимость:

$$A \frac{v}{\omega^2 - v^2} + B = 0, \tag{9}$$

которую получаемъ черезъ подстановку (8) въ (7). Опредѣливъ B изъ (9) и подставивъ въ (8), найдемъ:

$$\phi = F\left[A\left(t - \frac{uv}{\omega^2 - v^2}\right)\right],$$

или, подставляя значеніе $u = z - vt$, получимъ окончательно:

$$t' = F\left[a\left(t - \frac{v}{\omega^2} z\right)\right], \tag{10}$$

гдѣ написано a вмѣсто $\frac{A\omega^2}{\omega^2 - v^2}$.

Мы возьмемъ теперь вмѣсто произвольной функціи F *простѣйшую однозначную функцію*, а именно *линейную*, т. е. положимъ, что

$$t' = a\left(t - \frac{v}{\omega^2} z\right). \tag{11}$$

Здѣсь неизвѣстно постоянное a; его мы опредѣлимъ немного ниже.

Примѣняя подобный же пріемъ ко времени t, какъ функціи z' и t', очевидно найдемъ:

$$t = a\left(t' + \frac{v}{\omega^2} z'\right), \tag{12}$$

такъ какъ вся разница системъ A и B та, что если v скорость системы B относительно A, то скорость системы A относительно B будетъ $-v$.

Изъ уравненій (11) и (12) можемъ найти зависимость z отъ z' и t' или обратно: зависимость z' отъ z и t. Найдемъ первую. Умножимъ уравненіе (12) на a и сложимъ почленно съ (11); получимъ:

$$z = a(z' + mt'), \tag{13}$$

гдѣ положено:

$$m = \frac{a^2 - 1}{a^2} \frac{\omega^2}{v}. \tag{14}$$

Теперь намъ надо опредѣлить a. Но прежде, чѣмъ сдѣлать это, мы покажемъ, что въ предыдущемъ поставленная нами задача рѣшена.

Дѣйствительно, къ формуламъ (12) и (13) мы присоединимъ еще двѣ очевидныя:

$$x = x', \quad y = y', \tag{15}$$

тогда система соотношеній (15), (13) и (12), т. е.

$$x = x', \; y = y', \; z = a(z' + mt'); \quad t = a\left(t' + \frac{v}{\omega^2} z'\right), \tag{a}$$

и будетъ искомой системой соотношеній между $(x', y', z'; t')$ и $(x, y, z; t)$. Для полученія обратныхъ соотношеній стоитъ только изъ (11) и (12) исключить t' и тогда получимъ z' и искомыя соотношенія будутъ:

$$x' = x, \; y' = y, \; z' = a(z - mt); \; t' = a\left(t - \frac{v}{\omega^2} z\right). \tag{b}$$

Займемся теперь опредѣленіемъ a. Съ этой цѣлью возьмемъ нѣкоторую точку M и примемъ, что свѣтъ доходитъ отъ нея до O_A во время t, тогда имѣемъ:

$$x^2 + y^2 + z^2 = \omega^2 t^2, \tag{16}$$

приэтомъ ωt есть разстояніе $\overline{O_A M}$; если мы теперь замѣнимъ x, y, z и t ихъ значеніями въ функціи $x', y', z'; t'$, то должны получить разстояніе $\overline{O_B M} = \omega t'$. Подставляя въ (16) значенія $x, y, z; t$ изъ формулъ (a), находимъ:

$$x'^2 + y'^2 + a^2\left(1 - \frac{v^2}{\omega^2}\right) z'^2 = a^2(\omega^2 - m^2) t'^2 + 2a^2(v - m) z't'. \tag{17}$$

Чтобы это равенство превратилось въ *соотвѣтствующее равенству* (16), а именно:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = \omega^2 t'^2, \tag{18}$$

необходимо и достаточно, чтобы:

$$a^2\left(1 - \frac{v^2}{\omega^2}\right) = 1; \quad v - m = 0;$$

тогда коэффиціентъ при t'^2 въ (17) будетъ равенъ ω^2. Итакъ имѣемъ:

$$a^2 = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{\omega^2}}, \quad m = v. \tag{19}$$

При этихъ значеніяхъ a^2 и m полученное нами раньше уравненіе (14) превращается въ тождество. Положимъ:

$$k = + \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{\omega^2}}}, \tag{20}$$

тогда для однозначности рѣшеній примемъ, что $a = k$ и формулы преобразованія (a) и (b) напишутся въ видѣ:

$$x = x', \quad y = y', \quad z = k(z' + vt'); \quad t = k\left(t' + \frac{v}{\omega^2} z'\right) \tag{A}$$

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = k(z - vt); \quad t' = k\left(t' - \frac{v}{\omega^2} z\right) \tag{B}$$

Итакъ первая наша задача рѣшена.

III.

Теперь намъ предстоитъ показать чрезвычайно важное свойство *преобразованія Лоренца*, а именно, что дифференціальныя уравненія электродинамики и оптики сохраняютъ свой видъ, будутъ ли приняты за независимыя перемѣнныя система $(x, y, z; t)$ или система $(x', y', z'; t')$. Приэтомъ формулы (A) или (B) можно считать съ точки зрѣнія анализа прямо данными; другими словами дальнѣйшій анализъ не зависитъ отъ соображеній предыдущаго параграфа.

Разсмотримъ сначала случай діэлектрика, характеризуемаго физически діэлектрической постоянной K и магнитной проницаемостью μ. Пусть составляющія магнитной силы, разсчитанной на единицу магнитной массы, будутъ α, β, γ; составляющія электрическаго смѣщенія f, g, h и электрическаго тока u, v, w. Тогда уравненія электромагнитнаго поля въ точкѣ (x, y, z) въ моментъ времени t будутъ:

$$4\pi A u = \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z}, \quad 4\pi A v = \frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x}, \quad 4\pi A w = \frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y} \tag{1}$$

$$u = \frac{\partial f}{\partial t}, \quad v = \frac{\partial g}{\partial t}, \quad w = \frac{\partial h}{\partial t} \tag{2}$$

$$AK\mu\frac{\partial\alpha}{\partial t}=4\pi\left(\frac{\partial g}{\partial z}-\frac{\partial h}{\partial y}\right);\quad AK\mu\frac{\partial\beta}{\partial t}=4\pi\left(\frac{\partial h}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial z}\right);$$

$$AK\mu\frac{\partial\gamma}{\partial t}=4\pi\left(\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\partial g}{\partial x}\right) \tag{3}$$

и

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\frac{\partial\beta}{\partial y}+\frac{\partial\gamma}{\partial z}=0\,, \tag{4}$$

причемъ $A=\frac{1}{\omega_0}$ и ω_0 есть скорость свѣта въ пустотѣ.

Мы выписали лишь самыя необходимыя уравненія; въ ученіи объ электромагнитныхъ поляхъ употребляются еще многія другія уравненія, но онѣ суть слѣдствія приведенныхъ. Далѣе для преобразованія системы уравненій (1)—(4) отъ перемѣнныхъ (x, y, z, t) къ системѣ (x', y', z', t') мы должны будемъ пользоваться слѣдующими формулами, легко получаемыми при помощи уравненій (B) § II:

$$\frac{\partial U}{\partial t}=k\left(\frac{\partial U}{\partial t'}-v\frac{\partial U}{\partial z'}\right);\quad \frac{\partial U}{\partial z}=k\left(\frac{\partial U}{\partial z'}-\frac{v}{\omega^2}\frac{\partial U}{\partial t'}\right);\quad \frac{\partial U}{\partial x}=\frac{\partial U}{\partial x'},\quad \frac{\partial U}{\partial y}=\frac{\partial U}{\partial y'}, \tag{a}$$

гдѣ U какая угодно конечная и непрерывная функція координатъ и времени.

Преобразуемъ сначала уравненія (3). Находимъ при помощи (a):

$$\left.\begin{aligned} AK\mu\frac{\partial}{\partial t'}\left(k\alpha+\frac{4\pi kv}{AK\mu\omega^2}g\right)&=4\pi\left[\frac{\partial}{\partial z'}\left(kg+\frac{AK\mu kv}{4\pi}\alpha\right)-\frac{\partial h}{\partial y'}\right]\\ AK\mu\frac{\partial}{\partial t'}\left(k\beta-\frac{4\pi kv}{AK\mu\omega^2}f\right)&=4\pi\left[\frac{\partial h}{\partial x'}-\frac{\partial}{\partial z'}\left(kf-\frac{AK\mu kv}{4\pi}\beta\right)\right]\end{aligned}\right\}. \tag{b}$$

Затѣмъ третье уравненіе въ системѣ (3) даетъ сначала:

$$AK\mu k\left(\frac{\partial\gamma}{\partial t'}-v\frac{\partial\gamma}{\partial z'}\right)=4\pi\left(\frac{\partial f}{\partial y'}-\frac{\partial g}{\partial x'}\right),$$

но (4) дастъ при помощи (a):

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x'}+\frac{\partial\beta}{\partial y'}+k\left(\frac{\partial\gamma}{\partial z'}-\frac{v}{\omega^2}\frac{\partial\gamma}{\partial t'}\right)=0\,;$$

опредѣливъ отсюда $\frac{\partial\gamma}{\partial z'}$ и подставивъ въ предыдущее уравненіе, получимъ, зная по (20) § II, что $1-\frac{v^2}{\omega^2}=\frac{1}{k^2}$, послѣ очевидныхъ преобразованій слѣдующее:

$$AK\mu\frac{\partial\gamma}{\partial t'}=4\pi\left[\frac{\partial}{\partial y'}\left(kf-\frac{AK\mu kv}{4\pi}\beta\right)-\frac{\partial}{\partial x'}\left(kg+\frac{AK\mu kv}{4\pi}\alpha\right)\right]. \qquad \text{(c)}$$

Положимъ теперь:

$$\left.\begin{aligned} &k\left(f-\frac{AK\mu v}{4\pi}\beta\right)=Nf';\quad k\left(g+\frac{AK\mu v}{4\pi}\alpha\right)=Ng';\quad h=Nh'\\ &k\left(\alpha+\frac{4\pi v}{AK\mu\omega^2}g\right)=N\alpha';\quad k\left(\beta-\frac{4\pi v}{AK\mu\omega^2}f\right)=N\beta';\quad \gamma=N\gamma',\end{aligned}\right\} \qquad \text{(A)}$$

причемъ N нѣкоторый постоянный коэффиціентъ; тогда уравненія (b) и (c) будутъ имѣть видъ:

$$\begin{gathered} AK\mu\frac{\partial\alpha'}{\partial t'}=4\pi\left(\frac{\partial g'}{\partial z'}-\frac{\partial h'}{\partial y'}\right);\quad AK\mu\frac{\partial\beta'}{\partial t'}=4\pi\left(\frac{\partial h'}{\partial x'}-\frac{\partial f'}{\partial z'}\right);\\ AK\mu\frac{\partial\gamma'}{\partial t'}=4\pi\left(\frac{\partial f'}{\partial y'}-\frac{\partial g'}{\partial x'}\right);\end{gathered} \qquad \text{(3 bis)}$$

эти уравненія того же вида, какъ и уравненія (3) въ системѣ перемѣнныхъ $(x,\ y,\ z;\ t)$; здѣсь слѣдовательно функціи $f,\ g,\ h;\ \alpha,\ \beta,\ \gamma$ преобразовались въ f', g', h' и α', β', γ'. Коэффиціентъ N зависитъ отъ нашего произвола; его можно взять, напр., равнымъ единицѣ. Перейдемъ теперь къ системамъ (1) и (2) совмѣстно.

Первыя два уравненія дадутъ при помощи формулы (a):

$$\left.\begin{aligned} &4\pi A\frac{\partial}{\partial t'}\left(kf-\frac{kv}{4\pi A\omega^2}\beta\right)=\frac{\partial\gamma}{\partial y'}-\frac{\partial}{\partial z'}(k\beta-4\pi Akvf)\\ &4\pi A\frac{\partial}{\partial t'}\left(kg+\frac{kv}{4\pi A\omega^2}\alpha\right)=\frac{\partial}{\partial z'}(k\alpha+4\pi Akvg)-\frac{\partial\gamma}{\partial x'}.\end{aligned}\right\} \qquad \text{(d)}$$

Для преобразованія третьяго уравненія воспользуемся соотношеніемъ:

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial h}{\partial z}=0, \qquad (5)$$

вытекающимъ изъ (1) и (2). Тогда подобно тому, какъ и выше, получимъ:

$$4\pi A\frac{\partial h}{\partial t'}=\frac{\partial}{\partial x'}(k\beta-4\pi Akvf)-\frac{\partial}{\partial y'}(k\alpha+4\pi Akvg). \qquad \text{(e)}$$

Уравненія (d) и (e) будутъ имѣть видъ системъ (1) и (2), если *возможно* положить:

$$\left.\begin{array}{ll} k\left(f-\dfrac{v}{4\pi A\omega^2}\beta\right)=N'f', & k\left(g+\dfrac{v}{4\pi A\omega^2}\alpha\right)=N'g', \quad h=N'h' \\ k(\alpha+4\pi Avg)=N'\alpha'; & k(\beta-4\pi Avf)=N'\beta', \quad \gamma=N'\gamma', \end{array}\right\} \quad \text{(B)}$$

тогда (d) и (e) будутъ:

$$4\pi A\frac{\partial f'}{\partial t'}=\frac{\partial\gamma'}{\partial y'}-\frac{\partial\beta'}{\partial z'}; \quad 4\pi A\frac{\partial g'}{\partial t'}=\frac{\partial\alpha'}{\partial z'}-\frac{\partial\gamma'}{\partial x'}; \quad 4\pi A\frac{\partial h'}{\partial t'}=\frac{\partial\beta'}{\partial x'}-\frac{\partial\alpha'}{\partial y'} \quad (1\,\text{bis})$$

Итакъ система уравненій (1)—(3) превращается преобразованіемъ Лоренца въ подобную же систему, если *возможно совмѣстное существованіе условій* (A) *и* (B); но это требуетъ, чтобы соблюдено было: 1) $N'=N$ и 2) соотношеніе между коэффиціентами K и μ:

$$A^2K\mu\omega^2=1; \quad \text{(f)}$$

но если положимъ:

$$\frac{\omega_0}{\omega}=n,$$

т. е. n будетъ показатель преломленія нашей средины (K, μ); тогда равенство (f) будетъ:

$$K\mu=n^2. \quad (6)$$

А это извѣстное соотношеніе Максвелла.

Такимъ образомъ оказался неожиданный результатъ: допущеніе справедливости преобразованія Лоренца привело насъ къ выводу (6), который полученъ Максвелломъ, какъ результатъ интегрированія дифференціальныхъ уравненій электромагнитнаго поля. Это обстоятельство заставляетъ признать за пріемомъ Лоренца важное значеніе.

Замѣтимъ, что самъ Лоренцъ, а также Минковскій [1]), Эйнштейнъ и А. Пуанкаре [2]) доказали справедливость «теоремы Лоренца» для случая чистаго эфира, т. е. когда $K=1$, $\mu=1$ или, какъ можно убѣдиться, для болѣе общаго случая, когда $K\mu=1\,(n=1)$; причемъ u, v, w были согласно взглядамъ Лоренца:

---

[1]) *Minkowski.* Zwei Abhandlungen über die Grundgleichungen der Elektrodynamik изданныя Блюменталемъ (1910).

[2]) *H. Poincaré.* Sur la dynamique de l'électron. Rend. del Circ. math. di Palermo. T. XXI (1906).

$$u = \frac{\partial f}{\partial t} + \varrho\xi, \quad v = \frac{\partial g}{\partial t} + \varrho\eta, \quad w = \frac{\partial h}{\partial t} + \varrho\zeta,$$

гдѣ ξ, η, ζ составляющія скорости электрона, а

$$\varrho = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z},$$

объемная плотность электричества въ точкѣ (x, y, z).

IV.

Положимъ, что предложеніе Лоренца справедливо будетъ и въ томъ случаѣ, когда въ срединѣ имѣются движущіеся съ зарядами электроны, т. е. когда средина будетъ обладать дисперсіей.

Пусть (f_i, g_i, h_i) будутъ проекціи перемѣщенія электрона рода i (мы разсматриваемъ одинъ родъ электроновъ въ видахъ простоты анализа), тогда составляющія электрическаго тока будутъ имѣть видъ, обозначивъ C_i нѣкоторое постоянное, въ разсмотрѣніе физическаго смысла котораго пока не входимъ:

$$u = \frac{\partial f}{\partial t} + C_i \frac{\partial f_i}{\partial t}, \quad v = \frac{\partial g}{\partial t} + C_i \frac{\partial g_i}{\partial t}, \quad w = \frac{\partial h}{\partial t} + C_i \frac{\partial h_i}{\partial t}, \tag{1}$$

Уравненія (1), (3) и (4) § III останутся въ силѣ и здѣсь. Члены

$$C_i \frac{\partial f_i}{\partial t}, \quad C_i \frac{\partial g_i}{\partial t}, \quad C_i \frac{\partial h_i}{\partial t}$$

будутъ составляющими тока переноса.

Что касается движенія электрона, то оно, разумѣется, представляется соотвѣтственными уравненіями вида:

$$m_i \frac{\partial^2 f_i}{\partial t^2} + k_i \frac{\partial f_i}{\partial t} + a_i^2 f_i = b_i f \quad \text{и т. п.}$$

физическій смыслъ коэффиціентовъ m_i, k_i, a_i^2 и b_i понятенъ самъ собой.

Для *періодическихъ* измѣненій средины можно убѣдиться [1]), что:

$$f_i = u_i f, \quad g_i = u_i g, \quad h_i = u_i h, \tag{2}$$

гдѣ u_i функція періода измѣненій электромагнитнаго поля или частоты ν и выражается такъ:

$$u_i = \frac{b_i}{a_i^2 - m_i \nu^2 + k_i \nu \sqrt{-1}}.$$

---

[1]) См. напр. *А. Грузинцевъ*. Электронная теорія въ оптикѣ. Сообщ. Хар. Мат. Общества Т. XII (2), № 2 стр. 64 (1910).

Благодаря уравненіямъ (2) равенства (1), положивъ въ нихъ $D_i = 1 + C_i u_i$, можно написать въ видѣ:

$$u = D_i \frac{\partial f}{\partial t}; \quad v = D_i \frac{\partial g}{\partial t}; \quad w = D_i \frac{\partial h}{\partial t} \tag{3}$$

и уравненія (1) и (2) § III будутъ:

$$\begin{gathered} 4\pi A D_i \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z}, \quad 4\pi A D_i \frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x}, \\ 4\pi A D_i \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y}; \end{gathered} \tag{4}$$

уравненія же (3) и (4) останутся въ прежнемъ видѣ.

Преобразуя уравненія (4) при помощи формулъ (a) § III къ новымъ перемѣннымъ x', y', z'; t' и пользуясь равенствами:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} = 0, \quad 1 - \frac{v^2}{\omega^2} = \frac{1}{k^2},$$

получимъ:

$$\begin{gathered} 4\pi A D_i \frac{\partial f'}{\partial t'} = \frac{\partial \gamma'}{\partial y'} - \frac{\partial \beta'}{\partial z'}; \quad 4\pi A D_i \frac{\partial g'}{\partial t'} = \frac{\partial \alpha'}{\partial z'} - \frac{\partial \gamma'}{\partial x'}; \\ 4\pi A D_i \frac{\partial h'}{\partial t'} = \frac{\partial \beta'}{\partial x'} - \frac{\partial \alpha'}{\partial y'}, \end{gathered} \tag{4 bis}$$

того же вида, какъ и уравненія (4); причемъ положено:

$$\left.\begin{gathered} k\left(f - \frac{v}{4\pi A \omega^2 D_i}\beta\right) = Nf'; \quad k\left(g + \frac{v}{4\pi A \omega^2 D_i}\alpha\right) = Ng'; \quad h = Nh'; \\ k(\alpha + 4\pi A v D_i g) = N\alpha'; \quad k(\beta - 4\pi A v D_i f) = N\beta'; \quad \gamma = N\gamma'. \end{gathered}\right\} \tag{A}$$

Подобнымъ же образомъ преобразуемъ систему (3) § III къ новымъ перемѣннымъ x', y', z'; t'; получимъ слѣдующую систему уравненій того же вида (3):

$$\begin{gathered} AK\mu \frac{\partial \alpha'}{\partial t'} = 4\pi\left(\frac{\partial g'}{\partial z'} - \frac{\partial h'}{\partial y'}\right); \quad AK\mu \frac{\partial \beta'}{\partial t'} = 4\pi\left(\frac{\partial h'}{\partial x'} - \frac{\partial f'}{\partial z'}\right); \\ AK\mu \frac{\partial \gamma'}{\partial t'} = 4\pi\left(\frac{\partial f'}{\partial y'} - \frac{\partial g'}{\partial x'}\right). \end{gathered} \tag{3 bis}$$

Здѣсь положено:

$$\left.\begin{gathered} k\left(f - \frac{AK\mu v}{4\pi}\beta\right) = N'f'; \quad k\left(g + \frac{AK\mu v}{4\pi}\alpha\right) = N'g'; \quad h = N'h' \\ k\left(\alpha + \frac{4\pi v}{AK\mu\omega^2}g\right) = N'\alpha'; \quad k\left(\beta - \frac{4\pi v}{AK\mu\omega^2}f\right) = N'\beta'; \quad \gamma = N'\gamma'. \end{gathered}\right\} \tag{B}$$

Для того же, чтобы векторы (f', g', h') и $(\alpha', \beta', \gamma')$ въ системахъ (A) и (B) были тождественны, необходимо и достаточно соблюденіе двухъ условій:

$$N = N'$$

и

$$A^2 K\mu\omega^2 D_i = 1. \tag{C}$$

Первое условіе есть простое равенство коэффиціентовъ пропорціональности, второе же есть *извѣстное дисперсіонное соотношеніе*. Дѣйствительно, такъ какъ D_i комплексно, ибо входящее въ него количество, какъ мы знаемъ,

$$u_i = \frac{b_i}{a_i^2 - m_i v^2 + k_i v\sqrt{-1}} \tag{a}$$

само комплексно, а потому должны положить, что ω комплексно; пусть

$$\frac{\omega_0}{\omega} = \frac{1}{A\omega} = n(1 - \varkappa\sqrt{-1}), \tag{b}$$

тогда уравненіе (C) приметъ видъ:

$$n^2(1 - \varkappa\sqrt{-1})^2 = K\mu + \frac{K\mu b_i C_i}{a_i^2 - m_i v^2 + k_i v\sqrt{-1}}, \tag{D}$$

а это и есть дисперсіонное соотношеніе общепринятое въ настоящее время. При этомъ n и $\varkappa$ суть показатель преломленія и коэффиціентъ поглощенія средины при нормальномъ паденіи луча на ея границу.

Такимъ образомъ и здѣсь преобразованіе Лоренца приводитъ къ важному результату, обыкновенно получаемому черезъ интегрированіе уравненій электромагнитнаго поля.

V.

Если мы примемъ во вниманіе и токи проводимости въ обычномъ смыслѣ слова, то получимъ для u, v, w слѣдующія формулы опять таки для случая *періодическихъ измѣненій* кинетическаго состоянія средины:

$$u = E\frac{\partial f}{\partial t}, \quad v = E\frac{\partial g}{\partial t}, \quad w = E\frac{\partial h}{\partial t}, \tag{1}$$

гдѣ положено:

$$E = 1 + D_i - \frac{4\pi C}{Kv}\sqrt{-1}, \tag{2}$$

при чемъ C коэффиціентъ электропроводности средины, выраженный въ электростатическихъ единицахъ, а v, какъ и прежде, частота измѣненій электромагнитнаго поля. Уравненія поля будутъ имѣть прежній

видъ въ системѣ перемѣнныхъ x', y', z'; t', а коэффиціенты, характеризующіе физическія свойства среды будутъ удовлетворять соотношенію, аналогичному (C) предыдущаго параграфа, а именно:

$$A^2 K\mu\omega^2 E = 1\,, \tag{E}$$

откуда найдемъ дисперсіонное соотношеніе въ видѣ:

$$n^2(1-\varkappa\sqrt{-1})^2 = K\mu - \frac{4\pi C\mu}{v}\sqrt{-1} + \frac{K\mu b_i C_i}{\alpha_i^2 - m_i v^2 + k_i v\sqrt{-1}}\,. \tag{F}$$

Если примемъ, что $C_i = 0$, то получимъ извѣстныя формулы Максвелла для проводниковъ (металловъ) или, что все равно, для поглощающихъ срединъ.

VI.

Преобразованіе Лоренца очень просто и строго послѣдовательно приводитъ насъ къ законамъ аберраціи и Допплера (принципу Допплера). Разсмотримъ случай прозрачнаго діэлектрика и пусть имѣемъ частныя рѣшенія для f, g, h слѣдующаго обычнаго вида:

$$f = f_0 \sin Q\,, \quad g = g_0 \sin Q\,, \quad h = h_0 \sin Q\,, \tag{1}$$

гдѣ положено

$$Q = v\left(t - \frac{mx + ny + pz}{\omega}\right), \tag{2}$$

слѣдовательно v будетъ частота измѣненія электромагнитнаго поля, а m, n, p косинусы направленія вектора Пойнтинга или, проще, свѣтового луча. При помощи соотношеній (3) § III легко находимъ для составляющихъ магнитной силы слѣдующія выраженія, помня, что $AK\mu\omega = \frac{1}{A\omega}$:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= 4\pi A\omega\,(nh_0 - pg_0)\sin Q\,, \\ \beta &= 4\pi A\omega\,(pf_0 - mh_0)\sin Q\,, \\ \gamma &= 4\pi A\omega\,(mg_0 - nf_0)\sin Q\,. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Теперь формулы (A) или (B) § III, дадутъ:

$$Nf' = k\left[\left(1 - \frac{v}{\omega}p\right)f_0 + \frac{mv}{\omega}h_0\right]\sin Q\,;$$

$$Ng' = k\left[\left(1 - \frac{v}{\omega}p\right)g_0 + \frac{nv}{\omega}h_0\right]\sin Q\,; \quad Nh' = h_0 \sin Q\,.$$

Отсюда при помощи соотношенія

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} = 0\,,$$

которое теперь превращается въ соотношеніе:

$$mf_0 + ng_0 + ph_0 = 0$$

и равенства:

$$\frac{1}{k^2} = 1 - \frac{v^2}{\omega^2},$$

находимъ:

$$ND' = k\left(1 - \frac{v}{\omega}p\right) D_0 \sin Q,$$

если положимъ:

$$D_0 = \sqrt{f_0^2 + g_0^2 + h_0^2}, \quad D' = \sqrt{f'^2 + g'^2 + h'^2}. \tag{5}$$

Но подставляя въ Q значенія x, y, z и t изъ формулъ преобразованія (A) § II и полагая:

$$v' = vk\left(1 - \frac{v}{\omega}p\right), \tag{a}$$

$$m' = \frac{m}{k\left(1 - \frac{v}{\omega}p\right)}, \quad n' = \frac{n}{k\left(1 - \frac{v}{\omega}p\right)}, \quad p' = \frac{p - \frac{v}{\omega}}{1 - \frac{v}{\omega}p}, \tag{b}$$

находимъ:

$$Q = v'\left(t' - \frac{m'x' + n'y' + p'z'}{\omega}\right) \tag{6}$$

формула (a) представляетъ, ясно, принципъ Допплера въ общей формѣ, а формулы (b) даютъ законы аберраціи.

Если-бы взяли общій случай § III и положили бы, что

$$f = Me^{\varrho}, \quad g = Ne^{\varrho}, \quad h = Pe^{\varrho},$$

причемъ

$$Q = vt\sqrt{-1} + ax + by + cz$$

и M, N, P; a, b, c комплексныя постоянныя, то получили бы изъ формулы (3) § III:

$$\alpha = \frac{4\pi\sqrt{-1}}{AK\mu v}(Pb - Nc)e^{\varrho}; \quad \beta = \frac{4\pi\sqrt{-1}}{AK\mu v}(Mc - Pa)e^{\varrho};$$

$$\gamma = \frac{4\pi\sqrt{-1}}{AK\mu v}(Na - Mb)e^{\varrho}, \tag{7}$$

Формулы (A) дадутъ:

$$\left.\begin{aligned} Nf' &= k\left[M\left(1 - \frac{v}{v}c\sqrt{-1}\right) + \frac{v}{v}aP\sqrt{-1}\right]e^{\varrho} \\ Ng' &= k\left[N\left(1 - \frac{v}{v}c\sqrt{-1}\right) + \frac{v}{v}bP\sqrt{-1}\right]e^{\varrho} \\ Nh' &= Pe^{\varrho}. \end{aligned}\right\}$$

Положимъ, какъ и выше:

$$M^2 + N^2 + P^2 = D_0{}^2,$$

тогда зная, что

$$Ma + Nb + Pc = 0,$$

изъ предыдущихъ равенствъ получимъ:

$$N^2(f'^2 + g'^2 + h'^2) = k^2\left[\left(1 - \frac{v}{v}\, c\sqrt{-1}\right)^2 (D_0{}^2 - P^2) + \right.$$
$$\left. + \frac{P^2}{k^2} - \frac{v^2}{v^2}(a^2 + b^2)\, P^2 - \frac{2vc}{v}\, P\sqrt{-1}\left(1 - \frac{v}{v}\, c\sqrt{-1}\right)\right] e^{2\varrho}.$$

Но легко убѣдиться, сопоставляя уравненія (1), (2) и (3) § III, что

$$a^2 + b^2 + c^2 = -A^2 v^2 n^2,$$

гдѣ

$$n = \frac{\omega_0}{\omega} = n_0\,(1 - \varkappa\sqrt{-1}) \tag{8}$$

есть комплексный показатель преломленія, а потому предыдущее равенство будетъ имѣть видъ:

$$N^2(f'^2 + g'^2 + h'^2) = k^2\left[\left(1 - \frac{v}{v}\, c\sqrt{-1}\right)^2 D_0{}^2 - P^2\left(1 - \frac{1}{k^2} - A^2 v^2 n^2\right)\right] e^{2\varrho}.$$

Но по (8):

$$1 - \frac{1}{k^2} = \frac{v^2}{\omega^2} = A^2 v^2 n^2,$$

а слѣдовательно:

$$N\sqrt{f'^2 + g'^2 + h'^2} = k\left(1 - \frac{v}{v}\, c\sqrt{-1}\right) D_0\, e^{\varrho}. \tag{9}$$

Преобразуя Q, найдемъ:

$$Q = v' t'\sqrt{-1} + a'x' + b'y' + c'z',$$

если положимъ:

$$v' = kv\left(1 - \frac{v}{v}\, c\sqrt{-1}\right),\ a' = a,\ b' = b,\ c' = k\left(c + \frac{v}{\omega^2}\, v\sqrt{-1}\right). \tag{10}$$

Эти формулы даютъ принципъ Допплера и законы аберраціи въ поглощающихъ срединахъ и имѣютъ пока въ настоящее время лишь теоретическій интересъ.

VII.

Примѣнимъ къ движенію электроновъ преобразованіе Лоренца. Уравненія движенія мы возмемъ въ видѣ данномъ нами въ § IV, предположивъ только, что онѣ отнесены къ системѣ $(x', y', z'; t')$; поэтому будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned} m_i \frac{\partial^2 f_i}{\partial t'^2} + k_i \frac{\partial f_i}{\partial t'} + a_i^2 f_i = b_i f', \\ m_i \frac{\partial^2 g_i}{\partial t'^2} + k_i \frac{\partial g_i}{\partial t'} + a_i^2 g_i = b_i g', \\ m_i \frac{\partial^2 h_i}{\partial t'^2} + k_i \frac{\partial h_i}{\partial t'} + a_i^2 h_i = b_i h', \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

причемъ количества f', g', h' даны уравненіями (A) § III, а именно:

$$Nf' = k\left(f - \frac{AK\mu v}{4\pi}\beta\right); \quad Ng' = k\left(g + \frac{AK\mu v}{4\pi}\alpha\right); \quad Nh' = h. \qquad (2)$$

Допустимъ для простоты, что электронъ (f_i, g_i, h_i) лежитъ въ началѣ координатъ O_B, тогда f_i, g_i, h_i не будутъ зависѣть отъ z и по формуламъ преобразованія (a) § III мы получимъ:

$$\frac{\partial f}{\partial t'} = k\frac{\partial f_i}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2 f_i}{\partial t'^2} = k^2 \frac{\partial^2 f_i}{\partial t^2} \quad \text{и т. п.}$$

Подставивъ значенія эти въ уравненія (1) и пользуясь (2), получимъ:

$$\left.\begin{aligned} m_i k^2 \frac{\partial^2 f_i}{\partial t^2} + k_i k \frac{\partial f_i}{\partial t} + a_i^2 f_i = \frac{b_i k}{N}\left(f - \frac{AK\mu v}{4\pi}\beta\right) \\ m_i k^2 \frac{\partial^2 g_i}{\partial t^2} + k_i k \frac{\partial g_i}{\partial t} + a_i^2 g_i = \frac{b_i k}{N}\left(g + \frac{AK\mu v}{4\pi}\alpha\right) \\ m_i k^2 \frac{\partial^2 h_i}{\partial t^2} + k_i k \frac{\partial h_i}{\partial t} + a_i^2 h_i = \frac{b_i}{N} h. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Послѣднее уравненіе напишемъ въ видѣ:

$$m_i k^3 \frac{\partial^2 h_i}{\partial t^2} + k_i k^2 \frac{\partial h_i}{\partial t} + a_i^2 k h_i = \frac{b_i k}{N} h. \qquad (4)$$

Далѣе такъ какъ коэффиціентъ N произволенъ, то, какъ это неявно сдѣлано и у Лоренца, и у Эйнштейна, можемъ положить, что $N=k$ и тогда уравненія (3) и (4) будутъ имѣть видъ:

$$\left.\begin{aligned} m_i k^2 \frac{\partial^2 f_i}{\partial t^2} + k_i k \frac{\partial f_i}{\partial t} + a_i^2 f_i &= b_i \left(f - \frac{AK\mu v}{4\pi} \beta \right) \\ m_i k^2 \frac{\partial^2 g_i}{\partial t^2} + k_i k \frac{\partial g_i}{\partial t} + a_i^2 g_i &= b_i \left(g - \frac{AK\mu v}{4\pi} \alpha \right) \\ m_i k^3 \frac{\partial^2 h_i}{\partial t^2} + k_i k^2 \frac{\partial h_i}{\partial t} + a_i^2 k h_i &= b_i h . \end{aligned}\right\} \qquad \text{(A)}$$

Это уравненія движенія электрона въ системѣ $(x, y, z; t)$; въ нихъ масса электрона представляется для проекціи перемѣщенія вдоль оси z въ видѣ:

$$m_i k^3 = \frac{m_i}{\left(1 - \frac{v^2}{\omega^2}\right)^{\frac{3}{2}}}, \qquad \text{(B)}$$

а для проекцій перемѣщеній вдоль осей x и y въ видѣ:

$$m_i k^2 = \frac{m_i}{1 - \frac{v^2}{\omega^2}}. \qquad \text{(C)}$$

Лоренцъ далъ первой массѣ названіе *продольной*, и второй—*поперечной*, причемъ у него $K=1$, $\mu=1$. Точно также и силы сопротивленія и *quasi*-упругія силы представляются съ различными коэффиціентами, смотря по тому будетъ-ли движеніе продольно или поперечно относительно направленія перемѣщенія системы координатъ.

VIII.

Изъ содержанія параграфовъ III — VI заключаемъ, что преобразованіе Лоренца (равенства (A) и (B) § II) остается справедливымъ и для случая, когда скорость свѣта ω будетъ количествомъ комплекснымъ, т. е. преобразованіе Лоренца примѣнимо и къ случаю такъ называемыхъ *поглощающихъ срединъ*. Для послѣднихъ коэффиціентъ k_i въ выраженіи u_i отличенъ отъ нуля; для срединъ же прозрачныхъ (прозрачныхъ діэлектриковъ) $k_i=0$ и тогда u_i и, слѣдовательно, ω количества дѣйствительныя. Сверхъ того ясно, что преобразованіе Лоренца для общихъ случаевъ (k_i и C отличны отъ нуля) имѣетъ мѣсто лишь для періодическихъ измѣненій электромагнитнаго поля, а это есть случай всей области оптическихъ явленій и большей части, если не всей, электродинамики.

Изъ полученнаго и сказаннаго вытекаетъ вся важность и значеніе преобразованія Лоренца для современныхъ теорій электродинамики и оптики, но пока въ чисто математическомъ смыслѣ слова. Но Лоренцъ и многіе физики въ томъ обстоятельствѣ, что уравненія электромагнитнаго поля сохраняютъ свой видъ при переходѣ отъ перемѣнныхъ $(x, y, z; t)$ къ перемѣннымъ $(x', y', z'; t')$ усматриваютъ проявленіе особаго общаго принципа — *принципа относительности (Relativitätsprinzip)*, какъ его называютъ; но, намъ кажется, еще не имѣется къ тому вполнѣ обоснованныхъ данныхъ, такъ какъ одного отрицательнаго результата опытовъ Майкельсона, на которые опирается Лоренцъ, еще не достаточно; главнѣйше съ экспериментальной стороны дѣла, да и съ принципіальной стороны имѣются, если не возраженія, то во всякомъ случаѣ, недоразумѣнія и сомнѣнія. Дѣйствительно, до сихъ поръ физики были убѣждены, что достаточно для пріемлемости той или другой теоріи физическихъ явленій при одинаковыхъ прочихъ обстоятельствахъ условія удовлетворенія принципу сохраненія энергіи, а при выдвигаемой новой точкѣ зрѣнія является необходимость считаться съ принципомъ относительности. Во всякомъ случаѣ надо подождать болѣе детальнаго и всесторонняго разсмотрѣнія вопроса.

ПРОТОКОЛЫ

засѣданій Харьковскаго Математическаго Общества.

Очередное Собраніе 6 ноября 1909 г.

Присутствовали: Д. М. Синцовъ, Н. Н. Салтыковъ, М. Н. Марчевскій, Н. П. Бѣляевъ, Г. А. Грузинцевъ, Н. Н. Евдокимовъ, Ч. В. Речинскій, Б. И. Кудревичъ, С. Н. Бернштейнъ, А. П. Пшеборскій и М. Н. Лагутинскій.

Предсѣдательствовалъ Д. М. Синцовъ.

1. Проф. Н. Н. Салтыковъ прочелъ статью проф. Maggi, посвященную памяти проф. Morera.

2. Проф. Н. Н. Салтыковъ прочелъ свою статью, посвященную памяти проф. A. Mayer'a.

3. *С. Н. Бернштейнъ* сдѣлалъ сообщеніе: «Приближенное вычисленіе вѣроятностей по формулѣ Лапласа».

4. Постановлено обратиться съ предложеніемъ обмѣна изданіями къ Ломбардской Академіи Наукъ.

Засѣданіе 27 ноября 1909 г.

Присутствовали: А. П. Грузинцевъ, Л. О. Струве, А. П. Пшеборскій, Е. А. Роговскій, Я. М. Назаревскій, Ф. Ф. Епифановъ, Д. К. Педаевъ, Р. Д. Пономаревъ, С. Г. Денченко, М. П. Дробязко, Н. Тихоновъ, Н. П. Гриненко, Л. Г. Запорожецъ, Г. А. Грузинцевъ, С. Н. Бернштейнъ, Ч. В. Речинскій, М. Н. Марчевскій, В. М. Фесенко, Е. Н. Марчевская, Е. П. Аксюкъ, Н. П. Бѣляевъ и 10 постороннихъ лицъ.

Предсѣдательствовалъ Д. М. Синцовъ.

1. Е. А. Роговскій сдѣлалъ сообщеніе: «О температурѣ междупланетнаго пространства».

2. Г. А. Грузинцевъ сдѣлалъ сообщеніе: «О преподаваніи тригонометріи».

3. В. М. Фесенко сдѣлалъ сообщеніе: «О графическомъ методѣ въ ариѳметикѣ».

Замѣчанія сдѣлали В. А. Студенцовъ, В. В. Каврайскій и др.

Засѣданіе 5 февраля 1910 г.

Присутствовали: Д. М. Синцовъ, А. П. Грузинцевъ, Г. А. Грузинцевъ, Н. П. Гриненко, Я. М. Назаревскій, Ц. К. Руссьянъ, Н. Н. Евдокимовъ, Б. И. Кудревичъ, М. Н. Марчевскій, В. Х. Даватцъ, А. П. Пшеборскій, Е. А. Роговскій и Н. Н. Салтыковъ.

Предсѣдательствовалъ Д. М. Синцовъ.

1. Доложены и утверждены протоколы предыдущихъ засѣданій.

2. Д. М. Синцовъ сообщилъ, что правленіе Харьковскаго Университета разрѣшило пріобрѣсти шкафъ для Математическаго Общества изъ остатковъ отъ ассигнованій за прежніе годы. Вмѣстѣ съ тѣмъ Правленіе препроводило матеріальную книгу. Вслѣдствіе послѣдняго обстоятельства постановлено просить проф. Н. Н. Салтыкова передать шкафы, фактически принадлежащіе Математическому Обществу, но записанные въ матеріальную книгу механическаго кабинета, на имя Математическаго Общества.

3. А. П. Грузинцевъ сдѣлалъ сообщеніе: «Опредѣленіе массы электрона по электромагнитной теоріи проводниковъ». Замѣчанія по поводу доклада сдѣлали Е. А. Роговскій и С. Н. Бернштейнъ.

4. *Д. М. Синцовъ* сдѣлалъ сообщеніе: «О математической секціи на XII съѣздѣ естествоиспытателей и врачей».

5. *Н. Н. Салтыковъ* сдѣланъ сообщеніе: «О подсекціи механики на XII съѣздѣ естествоиспытателей и врачей».

6. По предложенію предсѣдателя избраны единогласно per acclamationem въ члены-корреспонденты Общества слѣдующіе предлагаемые распорядительнымъ комитетомъ лица:

1) Проф. Московскаго Университета Болеславъ Корнеліевичъ *Млодзѣевскій*, товарищъ предсѣдателя Моск. математ. Общ. и предсѣдатель Московскаго математическаго Кружка.

2) Проф. Московскаго Университета Леонидъ Кузьмичъ *Лахтинъ*, секретарь Московскаго Математическаго Общества.

3) Проф. Московскаго Университета Димитрій Ѳедоровичъ *Егоровъ* редакторъ Московскаго Математическаго Сборника.

4) Проф. Московскаго Университета Сергѣй Алексѣевичъ *Чаплыгинъ*, директоръ Московскихъ Высшихъ Женскихъ Курсовъ.

5) Проф. и б. директоръ С.-Петербургскаго Политехническаго Института (и пр.-доц. Университета) Иванъ Всеволодовичъ *Мещерскій*.

6) Проф. Юрьевскаго Университета Гурій Васильевичъ *Колосовъ*.

7. А. *П. Пшеборскій* доложилъ статью *К.* А. *Поссе*: «Замѣтка о рѣшеніи двучленныхъ сравненій съ простымъ модулемъ по способу Коркина».

Засѣданіе 20 февраля 1910 г.

Присутствовали: С. П. Вольскій, Н. Тихоновъ, Л. Г. Запорожецъ, М. П. Дробязко, И. А. Кирьяковъ, Я. М. Назаревскій, Р. Д. Пономаревъ, Е. П. Ивицкій, Ч. В. Речинскій, С. Н. Бернштейнъ, Б. И. Кудревичъ, И. П. Поповъ, В. В Бутовъ, Н. Н. Салтыковъ, Н. Н. Евдокимовъ, А. П. Грузинцевъ, В. Н. Мощенко, Г. А. Грузинцевъ, Ф. Ф. Епифановъ, В. Х. Даватцъ, А. П. Пшеборскій и Н. П. Бѣляевъ.

Предсѣдательствовалъ Д. М. Синцовъ.

1. Предсѣдатель сообщилъ о полученіи писемъ отъ проф. Д. Ѳ. Егорова, И. В. Мещерскаго и Б. К. Млодзѣевскаго съ благодарностью за избраніе въ члены-корреспонденты.

2. Предсѣдатель доложилъ о полученіи извѣщенія Комитета Попечительства о трудовой помощи о срокѣ для представленіи сочиненій на соисканіе преміи имени Ея Императорскаго Величества Государыни Императрицы Александры Ѳеодоровны.

3. М. И. Сахаровъ сдѣлалъ докладъ: «Жидкій воздухъ и опыты съ нимъ». Докладчикъ изложилъ начало Джауля-Томсона и далъ описаніе устройства и дѣйствій машины Linde для добыванія жидкаго воздуха. Докладъ сопровождался демонстрированіемъ опытовъ, обнаруживающихъ *свойства жидкаго воздуха.* Точка кипѣнія. Воспламененіе тлѣющей лучинки и горѣніе ея въ жидкомъ воздухѣ. Магнитность жидкаго воздуха (опытъ показанъ съ электромагнитомъ Дюбуа). Взрывчатость ваты, смоченной жидкимъ воздухомъ и подожженной. Хрупкость каучука, охлажденнаго жидкимъ воздухомъ. Ковкость и тягучесть ртути, охлажденной жидкимъ воздухомъ. Замораживаніе спирта и сѣрнаго эфира. Отвердѣваніе газовъ: хлора и углекислоты, охлажденныхъ жидкимъ воздухомъ. Свѣченіе трубочекъ съ отвердѣвшими газами въ перемѣнномъ полѣ. Люминисценція парафина.

4. *Н. Н. Салтыковъ* сдѣлалъ докладъ «О программахъ по математикѣ во французскихъ среднихъ школахъ», въ которомъ познакомилъ съ учебными планами и программами, введенными реформою 1905 г.

5. *Р. Д. Пономаревъ* демонстрировалъ два конструированные имъ прибора по физикѣ: одинъ для доказательства независимости давленія жидкости на дно сосуда отъ его формы, другой для изученія свойствъ паровъ.

Засѣданіе 19 марта 1910 г.

Присутствовали: С. Н. Бернштейнъ, В. Х. Даватцъ, Г. А. Грузинцевъ, Н. Н. Евдокимовъ, М. Н. Лагутинскій, Н. Н. Салтыковъ и Д. М. Синцовъ.

Предсѣдательствовалъ Д. М. Синцовъ.

1. *Д. М. Синцовъ* сдѣлалъ сообщеніе: «Пониженіе порядка и класса сопряженнаго (кватернарнаго) коннекса въ случаѣ наличности нѣкоторыхъ элементарныхъ особенностей».

2. *Д. М. Синцовъ* сдѣлалъ сообщеніе: «Координаты точки пересѣченія двухъ прямыхъ, заданныхъ однородными координантами». Замѣчанія сдѣлалъ Г. А. Грузинцевъ.

3. Предсѣдательствующій доложилъ о письмѣ проф. Юрьевскаго Университета Г. В. Колосова, выражающаго благодарность за избраніе въ члены-корреспонденты.

4. Предсѣдатель доложилъ просьбу проф. Г. В. Колосова о высылкѣ «Сообщеній» Математ. Общ. въ Математическій Кабинетъ Юрьевскаго Университета. Постановили высылать, начиная съ XI-тома.

5. Предсѣдатель доложилъ письмо Общества Естествоиспытателей при Юрьевскомъ Университетѣ объ обмѣнѣ изданіями, начиная съ 1909 г. Постановили вступить въ обмѣнъ.

6. Доложено циркулярное письмо предсѣдателя Коммиссіи, избранной СПБ. Академіей Наукъ, для организаціи чествованія 200-лѣтняго юбилея М. В. Ломоносова, о сообщеніи лицамъ, могущимъ принять участіе, объ изданіи сборника статей, посвященныхъ разработкѣ вопросовъ научной дѣятельности и біографіи Ломоносова. Постановили принять къ свѣдѣнію.

7. Предсѣдатель доложилъ письмо проф. А. П. Грузинцева, пожертвовавшаго Обществу въ его библіотеку свыше 40 томовъ журналовъ Wiedemann's Annalen (35 том.), Journal de Physique (7 томовъ) и Annales de Physique et de Chimie (1 томъ). Постановили выразить благодарность проф. А. П. Грузинцеву.

8. *Н Н Салтыковъ* сдѣлалъ сообщеніе: «Къ теоріи уравненій въ частныхъ производныхъ. Теорема Софуса Ли». Замѣчанія сдѣлали М. Н. Лагутинскій и Д. М. Синцовъ.

9. *М. Н. Лагутинскій* сдѣлалъ сообщеніе: «Значеніе особенныхъ точекъ для алгебраическаго интегрированія линейныхъ дифференціальныхъ уравненій въ частныхъ производныхъ 1-го порядка». Замѣчанія сдѣлали С. Н. Бернштейнъ и Д. М. Синцовъ.

Засѣданіе 27 марта 1910 г.

Присутствовали: Д. М. Синцовъ, Л. О. Струве, Б. И. Кудревичъ, Н. Н. Евдокимовъ, Ч. В. Речинскій, Н. П. Бѣляевъ, Я. М. Назаревскій, Н. П. Гриненко, А. А. Сонцевъ, Н. Н. Салтыковъ, А. П. Пшеборскій, С. Н. Бернштейнъ, Г. А. Грузинцевъ, Р. Д. Пономаревъ и 7 постороннихъ лицъ.

Предсѣдательствовалъ Д. М. Синцовъ.

1. *Б. И. Кудревичъ* сдѣлалъ сообщеніе: «Наблюденія надъ горизонтальнымъ маятникомъ на Харьковской обсерваторіи». По окончаніи доклада Н. Ф. Фонъ-Дитмаръ сообщилъ, что Совѣтъ Съѣзда горнопромышленниковъ юга Россіи рѣшилъ устроить въ Донецкомъ раіонѣ сейсмическую станцію 1-го разряда. Приборы для этой станціи уже изготовляются подъ наблюденіемъ академ. князя Голицына.

2. Н. Н. Салтыковъ доложилъ сообщеніе С. В. Новосильцева: «О постановкѣ преподаванія высшей математики въ коммерческихъ училищахъ». Замѣчанія по поводу доклада были сдѣланы Н. Н. Салтыкова, Н. П. Гриненко, А. П. Пшеборскимъ, Д. М. Синцовымъ, И. И. Поповымъ и Н. Ф. Фонъ-Дитмаромъ, при чемъ послѣдній указывалъ на необходимость введенія въ курсы средней школы счетоводства. Д. М. Синцовъ указалъ на желательность прочтенія Н. Ѳ. Фонъ-Дитмаромъ доклада о счетоводствѣ въ одномъ изъ ближайшихъ засѣданій Общества.

3. По предложенію *А. П. Пшеборскаго* избрана коммиссія, для выработки программы анкеты среди преподавателей средней школы по вопросу о введеніи высшей математики въ среднюю школу; въ коммиссію вошли: Н. Н. Салтыковъ, Д. М. Синцовъ, Я. М. Назаревскій, Р. Д. Пономаревъ, Г. Н. Гриненко.

Засѣданіе 7 мая 1910 г.

Предсѣдательствовалъ Д. М. Синцовъ.

Присутствовали: Д. М. Синцовъ, А. П. Грузинцевъ, Г. А. Грузинцевъ, Ц. К. Руссьянъ, В. Х. Даватцъ, Б. И. Кудревичъ, Г. И. Петренко, Н. П. Бѣляевъ, Н. Н. Салтыковъ, А. П. Пшеборскій и четыре постороннихъ лица.

1. *А. П. Грузинцевъ* сдѣлалъ сообщеніе «Электронная теорія въ оптикѣ».

2. *Н. Н. Салтыковъ* доложилъ статью *І. Д. Тамаркина* «Задача о продольныхъ колебаніяхъ гибкаго стержня».

3. *Н. Н. Салтыковъ* сдѣлалъ сообщеніе «Къ теоріи касательныхъ преобразованій».

Замѣчанія сдѣлалъ Ц. К. Руссьянъ.

4. По предложенію предсѣдателя постановлено пріобрѣсти новый шкафъ для нуждъ Общества цѣною до 40 руб.

5. Предсѣдатель сообщилъ письмо проф. С. А. Чаплыгина съ выраженіемъ благодарности за избраніе его членомъ-корреспондентомъ.

6. Предсѣдатель сообщилъ о результатахъ работъ коммиссіи выработавшей вопросы для анкеты о постановкѣ преподаванія математики въ реальныхъ училищахъ.

7. По предложенію Предсѣдателя постановлено обратиться къ Министру Народнаго Просвѣщенія съ ходатайствомъ объ ассигнованіи суб-

сидіи въ размѣрѣ 1200 руб. въ годъ. Соотвѣтственное ходатайство поручено выработать Распорядительному комитету Общества.

Общее годичное Собраніе 26 сентября 1910 г.

Присутствовали: Д. М. Синцовъ, Ц. К. Руссьянъ, Н. Н. Евдокимовъ, Н. П. Бѣляевъ, Г. А. Грузинцевъ, А. П. Грузинцевъ, А. П. Пшеборскій, Б. И. Кудревичъ, М. П. Дробязко, Н. П. Гриненко, Р. Д. Пономаревъ, П. М. Ерохинъ, М. Н. Лагутинскій, С. М. Семилѣтовъ, В. А. Студенцовъ.

Предсѣдательствовалъ Д. М. Синцовъ.

1. Г. Предсѣдатель напомнилъ о смерти члена Общества И. П. Попова, сообщилъ краткія свѣдѣнія о жизни и трудахъ покойнаго и предложилъ почтить память его вставаніемъ.

2. Доложенъ отчетъ о дѣятельности и денежныхъ средствахъ Общества за $19^{09}/_{10}$ акад. годъ. Выражено и принято пожеланіе о включеніи въ отчетъ перечисленія докладовъ, сдѣланныхъ за годъ въ засѣданіяхъ Общества. Послѣ этого отчетъ утвержденъ.

3. По предложенію г. Предсѣдателя постановлено обратиться съ просьбой къ редактору «Вѣстника Опытной физики и элементарной математики» напечатать программу анкеты.

4. Выражена благодарность Н. П. Бѣляеву за его труды по приведенію въ порядокъ библіотеки Общества.

5. По предложенію г. Предсѣдателя постановлено ассигновать изъ спеціальныхъ средствъ Общества на хозяйственныя нужды 30 руб.

6. Постановлено по предложенію Д. М. Синцова ассигновать изъ суммъ Общества на устройство педагогическаго отдѣла при библіотекѣ Общества для выписки періодическихъ изданій 50 руб.

7. Избраны въ члены Общества В. А. Студенцовъ, С. М. Семилѣтовъ, П. М. Ерохинъ и Н. Е. Подтягинъ.

8. Произведенъ выборъ членовъ распорядительнаго Комитета. Избраны предсѣдателемъ проф. Д. М. Синцовъ, товарищами предсѣдателя проф. А. П. Грузинцевъ и проф. Ц. К. Руссьянъ, а секретаремъ А. П. Пшеборскій.

Отчетъ о дѣятельности Харьковскаго Математическаго Общества за $19^{09}/_{10}$ академическій годъ.

Занятія Математическаго Общества открылись Общимъ годичнымъ собраніемъ 25 октября 1909 г. Послѣ заслушанія и утвержденія отчета за истекшій годъ произведенъ выборъ членовъ распорядительнаго комитета на $19^{09}/_{10}$ годъ. Избраны: предсѣдателемъ проф. Д. М. Синцовъ, товарищами предсѣдателя: проф. А. П. Грузинцевъ и проф. Ц. К. Руссьянъ и секретаремъ проф. А. П. Пшеборскій.

Въ теченіе истекшаго года было устроено 4 научныхъ и 3 педагогическихъ засѣданія; на первыхъ было сдѣлано 14, а на вторыхъ 8 докладовъ. Въ истекшемъ году вышли въ свѣтъ 5—6-ой выпускъ XI-го и 1-й выпускъ XII-го томовъ «Сообщеній Общества». Нѣкоторые изъ докладовъ, сдѣланныхъ на педагогическихъ засѣданіяхъ, были напечатаны въ «Вѣстникѣ опытной физики и элементарной математики» Нельзя не отмѣтить того обстоятельства, что въ истекшемъ году выработаны и разосланы вопросные листки для выясненія вопроса о постановкѣ преподаванія высшей математики въ реальныхъ училищахъ. Далѣе было возбуждено передъ Министерствомъ Народнаго Просвѣщенія ходатайство о выдачѣ ежегодной субсидіи въ размѣрѣ 1200 руб. въ годъ. Результаты этого ходатайства пока неизвѣстны. «Сообщенія Харьковскаго Математическаго Общества» высылались 45 русскимъ обществамъ и учрежденіямъ и 40 иностраннымъ, главнымъ образомъ въ обмѣнъ на ихъ изданія. Кромѣ послѣднихъ изданій, въ библіотеку поступили пожертвованія отъ членовъ Общества; наиболѣе крупное пожертвованіе (40 томовъ) было сдѣлано проф. А. П. Грузинцевымъ. Кромѣ того на средства Общества выписывались періодическія изданія: Acta mathematica, L'Intermédiaire des mathématiciens, Mathésis и Hoffman's Zeitschrift. Въ отчетномъ году избраны въ члены-корреспонденты Общества профессора: Б. К. Млодзѣевскій, Л. К. Лахтинъ, Д. Ѳ. Егоровъ, С. А. Чаплыгинъ, И. В. Мещерскій и Г. В. Колосовъ. Къ концу истекшаго академическаго года Общество состояло изъ 24 почетныхъ членовъ, 80 дѣйствительныхъ и 36 членовъ корреспондентовъ. Къ настоящему отчету прилагается кассовой отчетъ секретаря Общества съ оправдательными документами и приходо-расходной книгой и справка, данная г. бухгалтеромъ Университета, относительно расходованія суммъ, ассигнованныхъ изъ спеціальныхъ средствъ Университета.

Справка о суммахъ Математическаго Общества.

Оставалось . . . . . 488 р. 40 к.
Ассигновано по ст. 78 смѣты спеціальныхъ средствъ 1910 года . . 300 » — »

ИЗРАСХОДОВАНО:

Типографіи Зильбербергъ и С-вья за типографскія работы для Математическаго Общества . . . . . 470 р. 25 к.

Столяру А. А. Соколову доплата за два шкафа библіотеки . . . . . 100 »

Служителю Общества С. Шуличенко, жалованье по сентябрь 1910 г. . . . . 18 р.
Почтовые расходы . . . . . 13 р. 86 к.

Итого израсходовано . 602 р. 11 к.

Остается . . . . . 186 р. 29 к.

Денежный отчетъ секретаря Харьковскаго Математическаго Общества за 19$^{09}/_{10}$ академическій годъ.

ПРИХОДЪ.

1. Остатокъ отъ предыдущаго года. . . . . 79 р. 16 к.
2. Поступило членскихъ взносовъ. . . . . 35 » 40 »
3. Отъ продажи «Сообщеній Общества» . . . . . 15 » — »
4. Отъ продажи сочиненія проф. Д. М. Синцова «Теорія коннексовъ». . . . . 1 » — »
5. Перенесено изъ средствъ, ассигнованныхъ Университетомъ, и не израсходованныхъ на пересылку «Сообщеній» за границу . . . . . 3 » — »

Итого въ приходѣ . . 134 р. 18 к.

РАСХОДЪ.

1. На устройство засѣданій . . . . . 12 р. 50 к.
2. За разсылку анкетныхъ листовъ . . . . . — » 80 »
3. Отправка оттисковъ проф. Maggi. . . . . — » 68 »
4. Поздравительная телеграмма проф. Б. К. Млодзѣевскому. 1 » 35 »
5. Исправленіе шкафовъ . . . . . 3 » 75 »

Итого въ расходѣ . . 19 р. 08 к.

Такимъ образомъ въ кассѣ Общества остается 115 руб. 10 коп.

Секретарь Общества *А. Пшеборскій.*

Засѣданіе 30 сентября 1910 г.

Присутствовали: Д. М. Синцовъ, А. П. Грузинцевъ, Г. А. Грузинцевъ, Ц. К. Руссьянъ, Н. Н. Салтыковъ, Н. П. Бѣляевъ, С. М. Семилѣтовъ, С. Н. Бернштейнъ, Б. И. Кудревичъ, А. П. Пшеборскій, В. С. Гохманъ.

Предсѣдательствовалъ Д. М. Синцовъ.

1. *Ц. К. Руссьянъ* сдѣлалъ сообщеніе «О теоремахъ С. Ли и В. А. Стеклова».

2. *Г. А. Грузинцевъ* сдѣлалъ сообщеніе «Объ одной теоремѣ изъ теоріи непрерывныхъ функцій». Замѣчанія были сдѣланы С. Н. Бернштейномъ и Ц. К. Руссьяномъ.

Засѣданіе 22 октября 1910 г.

Присутствовали: Д. М. Синцовъ, Ц. К. Руссьянъ, Н. Н. Салтыковъ, А. П. Грузинцевъ, М. Н. Лагутинскій, Г. А. Грузинцевъ, П. М. Ерохинъ, В. С. Гохманъ, Н. П. Бѣляевъ, С. М. Семилѣтовъ.

Предсѣдательствовалъ Д. М. Синцовъ.

1. М. Н. Лагутинскій сдѣлалъ докладъ: «О приложеніи полярныхъ операцій къ интегрированію дифференціальнымъ уравненій».

Замѣчанія сдѣланы были Д. М. Синцовымъ.

2. Н. Н. Салтыковъ сдѣлалъ сообщеніе: «О приложеніи теоріи характеристикъ къ интегрированію дифференціальныхъ уравненій въ частныхъ производныхъ 1-го порядка».

Замѣчанія сдѣланы были Ц. К. Руссьяномъ.

3. Д. М. Синцовъ доложилъ о своей работѣ «Къ вопросу объ особенныхъ элементахъ коннексовъ. IV. Основанія теоріи сопряженнаго коннекса», въ которой онъ даетъ аналитическія доказательства теоремъ К. Стефаноса.

Засѣданіе 11 января 1911 года.

Присутствовали: С. Н. Бернштейнъ, Н. Н. Евдокимовъ, М. Н. Лагутинскій, П. М. Ерохинъ, Н. Е. Подтягинъ, Н. П. Бѣляевъ, Г. А. Грузинцевъ, Ц. К. Руссьянъ.

Предсѣдательствовалъ Д. М. Синцовъ.

1. Предсѣдатель доложилъ о просьбѣ Тулузскаго Университета выслать уничтоженныя пожаромъ «Сообщенія Х. М. О.». Постановлено выслать вторую серію, начиная съ т. 1.

2. Предсѣдатель сообщилъ, что имъ получено письмо отъ Студенческаго Математическаго Кружка при СПБ. Университетѣ съ просьбой

о высылкѣ «Сообщеній Х. М. О.» Постановлено высылать, начиная съ XII-го тома.

3. По предложенію предсѣдателя постановлено передавать одинъ экземпляръ «Сообщеній» начиная съ XII-го тома въ библіотеку Кассы взаимопомощи студентовъ-математиковъ.

4. Д-ръ Ф. И. Ивановъ сдѣлалъ сообщеніе: «Объ одномъ новомъ свойствѣ простого гармоническаго движенія». Замѣчанія сдѣлалъ А. П. Грузинцевъ.

5. Предсѣдатель сообщилъ о предложеніи, полученномъ отъ проф. К. А. Андреева, какъ предсѣдателя организаціоннаго комитета, принять участіе въ чествованіи Николая Егоровича Жуковскаго. Постановили послать въ день чествованія привѣтственную телеграмму и просить Д. М. Синцова и Н. Н. Салтыкова лично отъ имени Харьковскаго Математическаго Общества принести юбиляру привѣтствіе.

6. М. Н. Лагутинскій сдѣлалъ сообщеніе: «Примѣненіе полярныхъ операцій къ интегрированію алгебраическихъ дифференціальн. уравненій».

Засѣданіе 4 февраля 1911 г.

Присутствовали: С. Н. Бернштейнъ, А. П. Грузинцевъ, Г. А. Грузинцевъ, Н. Н. Евдокимовъ, П. М. Ерохинъ, Б. И. Кудревичъ, М. Н. Лагутинскій, Н. Е. Подтягинъ, А. П. Пшеборскій, Ч. В. Речинскій, Ц. К. Руссьянъ, Н. Н. Салтыковъ, Д. М. Синцовъ.

Предсѣдательствовалъ Д. М. Синцовъ.

1. Послѣ открытія засѣданія Предсѣдатель напомнилъ о потерѣ, понесенной Обществомъ, въ лицѣ скончавшагося въ Ялтѣ члена Общества проф. Е. А. Роговскаго и предоставилъ слово А. П. Грузинцеву, который далъ краткую характеристику научной дѣятельности покойнаго Е. А. Роговскаго. Послѣ рѣчи А. П. Грузинцева память Е. А. Роговскаго была почтена вставаніемъ.

2. Предсѣдатель сообщилъ о состояніи средствъ Общества и о положеніи печатанія «Сообщеній».

3. Предсѣдатель сообщилъ о согласіи Венгерской Академіи Наукъ на обмѣнъ изданіями.

4. Предсѣдатель доложилъ о предполагаемомъ чествованіи 50-лѣтняго юбилея научной дѣятельности G. Darboux. Постановлено принять участіе въ чествованіи и послать на медаль въ честь Darboux изъ средствъ Общества 50 fr.

5. С. Н. Бернштейнъ сдѣлалъ краткій рефератъ о статьѣ Vallée-Poussin'a.

6. Д. М. Синцовъ доложилъ статью А. А. Маркова «Объ открытіи П. А. Некрасова».

7. Н. Н. Салтыковъ сдѣлалъ сообщеніе «Къ теоріи характеристикъ и ея приложеній».

8. Ц. К. Руссьянъ сдѣлалъ сообщеніе: «По поводу доказательствъ обобщенной теоремы С. Ли».

Засѣданіе 4 марта 1911 г.

Присутствовали: Д. М. Синцовъ, А. П. Грузинцевъ, Г. А. Грузинцевъ, М. Н. Лагутинскій, Ч. В. Речинскій, М. Н. Марчевскій, А. П. Пшеборскій, Н. Е. Подтягинъ, П. М. Ерохинъ, Б. И. Кудревичъ, В. С. Гофманъ.

Предсѣдательствовалъ Д. М. Синцовъ.

1. Доложенъ и утвержденъ протоколъ предыдущаго засѣданія.

2. Д. М. Синцовъ сообщилъ о выходѣ подъ его редакціей I-го выпуска «Русской математической библіографіи» и передалъ въ библіотеку Общества 1 экземпляръ.

3. Г. предсѣдатель сообщилъ о согласіи на обмѣнъ изданіями со стороны Стокгольмской Академіи, Амстердамской Академіи и «Jednota českych mathematiků v Praze».

4. Г. предсѣдатель сообщилъ постановленіе физико-математическаго факультета уплатить за печатаніе №№ 3 и 4 XII тома «Сообщеній» изъ суммъ, ассигнованныхъ на печатаніе сочиненій до 350 р., съ тѣмъ чтобы по утвержденіи смѣтъ спеціальныхъ средствъ университета, 200 руб. были возвращены обратно.

5. Г. предсѣдатель сообщилъ просьбу библіотеки Московскаго Университета о высылкѣ XII тома «Сообщеній». Постановлено высылать по мѣрѣ выхода въ свѣтъ и просить пополнить дефекты «Ученыхъ записокъ Московскаго Университета».

6. А. П. Грузинцевъ сдѣлалъ сообщеніе «По поводу преобразованія Лоренца и принципа относительности».

Засѣданіе 18 марта 1911 г.

Присутствовали: Д. М. Синцовъ, А. П. Грузинцевъ, С. Н. Бернштейнъ, М. Н.. Марчевскій, П. М. Ерохинъ, Н. Е. Подтягинъ, В. М. Фесенко, А. П. Пшеборскій, М. И. Сахаровъ, Н. П. Бѣляевъ, И. А. Кирьяковъ, Я. М. Назаревскій, В. Н. Мощенко, Л. Г. Запорожецъ, П. В. Шепелевъ.

1. Доложенъ и утвержденъ протоколъ предыдущаго засѣданія.

2. П. М. Ерохинъ сдѣлалъ сообщеніе «О принципѣ относительности». Замѣчанія сдѣлали А. П. Грузинцевъ и Д. М. Синцовъ.

3. М. И. Сахаровъ демонстрировалъ опыты Кавендиша.

Засѣданіе 31 марта 1911 г.

Присутствовали: В. М. Фесенко, П. М. Ерохинъ, С. М. Семилѣтовъ, М. Н. Марчевскій, Л. Г. Запорожецъ, Н. П. Гриненко, Б. И. Кудревичъ, В. Н. Мощенко, П. В. Шепелевъ, Е. П. Аксюкъ, И. А. Кирьяковъ, Я. М. Назаревскій, А. П. Грузинцевъ, Г. А. Грузинцевъ и Н. П. Бѣляевъ.

Предсѣдательствовалъ Д. М. Синцовъ.

1. Предсѣдатель сообщилъ о полученіи отъ акад. А. А. Маркова недостающихъ въ библіотекѣ Общества статей его.

2. Предсѣдатель доложилъ о полученіи для печатанія статьи *А. А. Фридмана* «О разысканіи частныхъ рѣшеній уравненій Лапласа» рекомендованной В. А. Стекловымъ. Постановлено напечатать статью въ «Сообщеніяхъ».

3. *Н. П. Бѣляевъ* сдѣлалъ докладъ: «Элементарная теорія приближенныхъ вычисленій».

4. *Г. А. Грузинцевъ* сдѣлалъ докладъ: «Аксіома о параллельныхъ и неевклидова геометрія», въ которомъ указалъ, въ какихъ размѣрахъ понятія неевклидовой геометріи могутъ быть введены въ курсъ средней школы, причемъ высказался противъ увлеченій въ этомъ направленіи.

Засѣданіе 30 мая 1911 г.

Присутствовали: Б. И. Кудревичъ, Е. П. Аксюкъ, В. М. Фесенко, Р. Д. Пономаревъ, Г. А. Грузинцевъ, Я. М. Назаревскій, Н. Тихоновъ, Н. П. Бѣляевъ, Н. Е. Подтягинъ, Ч. В. Речинскій, Л. Г. Запорожецъ и С. М. Семилѣтовъ.

Предсѣдательствовалъ Д. М. Синцовъ.

1. Предсѣдатель доложилъ, что какъ онъ узналъ во время своей поѣздки въ Петербургъ, на ходатайство Математическаго Общества послѣдовало благопріятное заключеніе Ученаго Комитета, отмѣтившаго педагогическую дѣятельность Общества, и на докладъ Комитета уже послѣдовала благопріятная же резолюція Министра. Самый размѣръ субсидіи долженъ выясниться въ ближайшее время.

Въ связи съ этимъ предсѣдатель познакомилъ Собраніе съ планами расширенія издательской дѣятельности Общества изданіемъ какъ классическихъ мемуаровъ, имѣющихъ значеніе и для преподавателей средней школы, и обзоровъ современнаго состоянія отдѣльныхъ отраслей математической науки, такъ и выдѣленіемъ въ особую серію «Трудовъ» Общества болѣе крупныхъ поступающихъ въ Общество работъ. Этотъ проектъ будетъ внесенъ на обсужденіе годичнаго собранія. Кромѣ того, полученіе субсидіи дастъ возможность теперь же приступить къ организаціи проектированной педагогической библіотеки, которая должна за-

ключать педагогическую литературу, учебники и пособія по математикѣ въ средней школѣ. Кромѣ того, для открытія библіотеки въ извѣстные дни по вечерамъ надо пригласить особое лицо за плату. Присутствующіе въ принципѣ одобрили эти планы.

2. Предсѣдатель сообщилъ о поступившихъ новыхъ книгахъ и журналахъ.

3. Предсѣдатель доложилъ о предположенномъ съѣздѣ преподавателей математики и физики.

Засѣданіе 25 августа 1911 г.

Предсѣдательствовалъ Д. М. Синцовъ.

Присутствовали: А. П. Грузинцевъ, Е. П. Аксюкъ, Г. А. Грузинцевъ, М. И. Сахаровъ, С. Г. Денченко, Н. Н. Евдокимовъ, Н. Е. Подтягинъ, С. М. Семилѣтовъ, Ч. В. Речинскій, М, Н. Марчевскій, Л. Г. Запорожецъ, В. Н. Мощенко, Р. Д. Пономаревъ, Н. П. Бѣляевъ.

1. Предсѣдатель доложилъ о предстоящемъ съѣздѣ преподавателей математики, при чемъ предложилъ намѣтить заранѣе доклады, изъ сдѣланныхъ уже въ Обществѣ, которые могли бы быть повторены на съѣздѣ. Относительно новыхъ докладовъ предсѣдателемъ выражено пожеланіе, чтобы они были подвергнуты сначала обсужденію на засѣданіяхъ Общества, чему и можно посвятить засѣданія до Рождества. Послѣ обмѣна мнѣній собраніе приняло предложеніе предсѣдателя, при чемъ признана желательной передача Обществу предварительной цензуры докладовъ членовъ Общества. Кромѣ того, присутствующими были высказаны пожеланія, чтобы со стороны начальства были разрѣшены на этотъ съѣздъ командировки.

2. Предсѣдатель сообщилъ о положеніи издательской дѣятельности Общества.

3. Предсѣдатель предложилъ утвердить протоколы прошлыхъ засѣданій въ виду необходимости печатать ихъ. Собраніе утвердило протоколы.

4. Предсѣдатель доложилъ о назначеніи Математическому Обществу Министерствомъ Народнаго Просвѣщенія ежегодной субсидіи въ размѣрѣ 900 руб., съ тѣмъ чтобы пособіе изъ спеціальныхъ средствъ Университета не уменьшалось.

5. Предсѣдатель доложилъ о разрѣшеніи ему, проф. Синцову, и проф. Пшеборскому посѣщать уроки математики въ реальныхъ училищахъ съ цѣлью ознакомленія съ постановкой преподаванія спеціальнаго курса математики въ 7-мъ классѣ названныхъ училищъ.

6. Предсѣдатель доложилъ о печатаніи Математическимъ Обществомъ статьи Лобачевскаго: „Новыя начала геометріи“, при чемъ предложилъ назначить цѣну этой книгѣ 1 руб. Собраніе согласилось съ предложеніемъ предсѣдателя.

7. Предсѣдатель сообщилъ о пріобрѣтеніи Математическимъ Обществомъ книгъ для педагогической библіотеки, именно: нѣмецкихъ и нѣкоторыхъ другихъ учебниковъ. Отъ французскихъ книгопродавцевъ получено извѣщеніе о скидкѣ, которую они будутъ дѣлать. Нѣкоторыя книги отъ нихъ уже выписаны. На очереди пріобрѣтеніе англійскихъ, италіанскихъ и русскихъ книгъ. Къ русскимъ авторамъ и издателямъ предположено обратиться съ просьбой о пожертвованіи ими книгъ. Въ цѣляхъ знакомства съ новыми книгамн постановлено выписать „Книжную лѣтопись".

8. Обсуждали порядокъ пользованія библіотекою. Постановили:

Для пользованія книгами библіотека должна быть открыта 3 раза въ недѣлю (вторникъ, четвергъ и субботу) отъ 6-ти ч. до 9-ти ч. вечера.

Книги могутъ быть выдаваемы членамъ общества на домъ на 2 недѣли. Въ случаѣ неимѣнія на книгу новаго требованія она можетъ быть дана на новый срокъ.

Для записи различныхъ пожеланій должна быть заведена особая книга.

Плату библіотекарю назначили 25 р. въ мѣсяцъ, исключая каникулы.

Постановили, въ виду увеличенія работы прибавить плату служителю до 5 р. въ мѣсяцъ. (Вмѣсто прежнихъ 2 р.).

За произведенную переписку карточекъ постановили уплатить по 6 коп. за каждую.

9. Предсѣдатель доложилъ о произведенныхъ лѣтомъ расходахъ. Собраніе утвердило ихъ.

10. Предсѣдатель сообщилъ о полученіи изданій отъ различныхъ ученыхъ обществъ и о посылкѣ въ эти Общества изданій Харьковскаго Математическаго Общества.

Годичное засѣданіе 5 октября 1911 г.

Присутствовали: Д. М. Синцовъ, А. П. Грузинцевъ, Н. Н. Салтыковъ, Н. Н. Евдокимовъ, С. Н. Бернштейнъ, Ч. В. Речинскій, В. М. Фесенко, Е. П. Аксюкъ, Б. И. Кудревичъ, Р. Д. Пономаревъ, М. И. Сахаровъ, П. М. Ерохинъ, Г. А. Грузинцевъ, А. П. Пшеборскій, Н. П. Бѣляевъ, М. Н. Лагутинскій, Д. А. Рожанскій.

Предсѣдательствовалъ Д. М. Синцовъ.

1. Доложенъ и утвержденъ отчетъ о дѣятельности Общества за $19^{10}/_{11}$ акад. годъ и денежный отчетъ о состояніи средствъ Общества.

2. Обсуждался вопросъ объ организаціи педагогической библіотеки, при чемъ принято пожеланіе о пополненіи библіотеки учебниками по элементарной механикѣ, согласно предложенію Н. Н. Салтыкова. Что касается учебниковъ по физикѣ, то пока рѣшено ихъ не пріобрѣтать, принимая во вниманіе, что они могутъ быть пріобрѣтаемы въ библіотеку физическаго семинара.

3. Въ почетные члены единогласно (per acclamationem) избранъ проф. Richard Dedekind.

4. Въ члены-корреспонденты единогласно (per acclamationem) избранъ проф. Морской Академіи А. Н. Крыловъ.

5. Безъ избранія согласно уставу вошелъ прив.-доц. Харьковскаго Университета Д. А. Рожанскій.

6. Доложено приглашеніе Академіи Наукъ принять участіе въ чествованіи 200-лѣтія М. П. Ломоносова. Постановлено составить привѣтствіе и просить почетныхъ членовъ Общества А. М. Ляпунова и В. А Стеклова быть представителями Общества.

7. Произведены выборы распорядительнаго комитета на $19^{11}/_{12}$ акад. годы; избраны: предсѣдателемъ проф. Д. М. Синцовъ, товарищами предсѣдателя проф. А. П. Грузинцевъ и проф. Ц. К. Руссьянъ и секретаремъ проф. А. П. Пшеборскій.

8. Постановлено просить Н. П. Бѣляева оказывать и въ этомъ году помощь секретарю Общества.

Отчетъ о дѣятельности Харьковскаго Математическаго Общества за $19^{10}/_{11}$ акад. годъ.

Занятія Математическаго Общества въ отчетномъ году открылись общимъ годичнымъ собраніемъ 26 сентября 1910 г.

Послѣ заслушанія и утвержденія отчета за истекшій годъ произведенъ выборъ членовъ распорядительнаго комитета на $19^{10}/_{11}$ г. Избраны: предсѣдателемъ проф. Д. М. Синцовъ, товарищами предсѣдателя проф. А. П. Грузинцевъ и проф. Ц К. Руссьянъ и секретаремъ проф. А. П. Пшеборскій.

Въ теченіи истекшаго года кромѣ годичнаго засѣданія было устроено 8 засѣданій, изъ которыхъ 6 научныхъ и 2 педагогическихъ.

На этихъ засѣданіяхъ были сдѣланы слѣдующіе доклады:

1) *Н. П. Бѣляевъ.* Элементарная теорія приближенныхъ вычисленій.

2) *Г. А. Грузинцевъ.* Объ одной теоремѣ изъ теоріи непрерывныхъ функцій.

3) *Г. А. Грузинцевъ.* Аксіома о параллельныхъ и неэвклидова геометрія (возможность введенія понятій неэвклидовой геометріи въ средней школѣ).

4) *А. П. Грузинцевъ.* По поводу преобразованій Лоренца и принципа относительности.

5) *П. М. Ерохинъ.* О принципѣ относительности.

6) *М. Н. Лагутинскій.* О приложеніи полярныхъ операцій къ интегрированію дифференціальныхъ уравненій.

7) *М. Н. Лагутинскій.* Второй докладъ на ту же тему.

8) *А. А. Марковъ.* Объ открытіяхъ П. А. Некрасова.

9) *Ц. К. Руссьянъ.* О теоремахъ С. Ли и В. А. Стеклова.

10) *Ц. К. Руссьянъ.* По поводу доказательства обобщенiи теоремы С. Ли.

11) *Н. Н. Салтыковъ.* О приложенiи теорiи характеристикъ къ интегрированiю диф. уравненiй въ частныхъ производныхъ 1-го порядка.

12) *Н. Н. Салтыковъ.* Къ теорiи характеристикъ и ихъ приложенiй.

13) *М. И. Сахаровъ.* Демонстрацiя опытовъ Кавендиша.

14) *Д. М. Синцовъ.* Къ вопросу объ особыхъ элементахъ коннексовъ.

15) *Д. М. Синцовъ.* Основанiя теорiи сопряженныхъ коннексовъ.

16) *Д-ръ Ф. П. Ивановъ.* Объ одномъ новомъ свойствѣ простого гармоническаго движенiя.

17) *А. А. Фридманъ.* О разысканiи частныхъ рѣшенiй уравненiя Лапласа.

Въ истекшемъ году вышли въ свѣтъ 2—5 выпуски XII т. „Сообщенiй“ Общества и брошюра, посвященная юбилею проф. А. П. Грузинцева; находится въ печати 6 выпускъ XII т. и кромѣ того печатается статья Н. И. Лобачевскаго „Новыя начала геометрiи“ и Пикара „Обозрѣнiе новѣйшихъ успѣховъ анализа“.

Общество понесло въ истекшемъ году потерю въ лицѣ своего дѣйствительнаго члена проф. Е. А. Роговскаго.

Въ число членовъ Общества избраны: П. М. Ерохинъ, Н. Е. Подтягинъ, С. М. Семилѣтовъ и В. А. Студенцовъ. Такимъ образомъ къ концу истекшаго года общество состояло изъ 24 почетныхъ, 83 дѣйствительныхъ и 35 членовъ корреспондентовъ.

По примѣру прежнихъ лѣтъ „Сообщенiя Общества“ разсылались различнымъ ученымъ обществамъ и научнымъ и просвѣтительнымъ учрежденiямъ въ большинствѣ случаевъ въ обмѣнъ на ихъ изданiя. Обществомъ въ истекшемъ году было сдѣлано нѣсколько предложенiй объ обмѣнѣ изданiями; пока получено согласiе на обмѣнъ и соотвѣтствующiя изданiя отъ слѣдующихъ ученыхъ обществъ: Jednota českich mathematiků въ Прагѣ, Kralovske česke spolecnosti nauk, Smithsonian Institution, Венгерской академiи наукъ, Амстердамской академiи наукъ, Стокгольмской академiи наукъ, Societas Scientiarum Fennica и С.П.Б. Технологическаго Института. Кромѣ того пополнены Американскимъ Математическимъ Обществомъ и университетомъ Дж. Гопкинса въ Балтиморѣ дефекты въ Bulletin'ѣ American Mathematical Society и въ журналѣ „American Journal of Mathematics“ и присланы прежнiя изданiя Smitshonian Institution. Такимъ образомъ къ концу года „Сообщенiя“ высылались 47 русскимъ обществамъ и учрежденiямъ и 46 иностраннымъ. Должно быть отмѣчено то обстоятельство, что положено основанiе педагогической библiотеки. Пока прiобрѣтены нѣмецкiе учебники и начались переговоры съ французскими, италiанскими и англiйскими книгопродавцами о прiобрѣтенiи отъ нихъ соотвѣтствующихъ учебниковъ на льготныхъ условiяхъ.

На средства Общества выписывались слѣдующія изданія Acta Mathematica, Mathésis, l'Intermédiaire des Mathématiciens, Hoffmann's Zeitschrift für math. и naturwiss. Unterricht.

Постановлено выписать L'Enseignement mathématique и Unterrichtsblätter für d. mathem. u. naturwissenschaftlichen Unterricht.

Вслѣдствіе расширенія библіотеки поставлено пригласить на учебное время постояннаго библіотекаря съ платой по 25 р. въ мѣсяцъ. Въ настоящее время библіотека общества открыта по 3 раза въ недѣлю (вторникъ, четвергъ и суббота) отъ 6 до 9 часовъ. Составленъ карточный каталогъ, на что ассигнована отдѣльная сумма съ расчетомъ по 6 к. за каждую карточку. Подобныя затраты возможно было выполнить благодаря тому, что Министерство Народнаго Просвѣщенія ассигновало Обществу ежегодную субсидію въ размѣрѣ 900 р. съ тѣмъ, чтобы выдаваемое до сихъ поръ Обществу пособіе отъ Харьковскаго Университета не уменьшалось. Нельзя не отмѣтить и того обстоятельства, что въ настоящее время Общество готовится принять дѣятельное участіе въ предстоящемъ съѣздѣ преподавателей математики въ С.-Петербургѣ.

Наконецъ, должно упомянуть, что въ истекшемъ году Общество принимало участіе въ чествованіи 40-лѣтняго юбилея почетнаго члена Общества проф. Н. Е. Жуковскаго, при чемъ это участіе выразилась въ посылкѣ юбиляру привѣтствія, прочитаннаго почетнымъ членомъ Общества проф. К. А. Андреевымъ.

Къ настоящему отчету прилагается кассовой отчетъ секретаря Общества съ оправдательными документами и приходо-расходной книжкой и справка, данная г. бухгалтеромъ университета относительно расходованія суммъ, принадлежащихъ Обществу и находящихся въ кассѣ Университета.

Денежный отчетъ секретаря Харьковскаго Математическаго Общества за $19^{10}/_{11}$ акад. годъ.

ПРИХОДЪ.

1. Остатокъ отъ предыдущаго года	115 р.	10 к.
2. Поступило членскихъ взносовъ	62 „	— „
3. Получено за отдѣльные оттиски статей, напечатанныхъ въ „Сообщеніяхъ“	17 „	10 „
4. За продажу 1 экз. диссертаціи А. М. Ляпунова	2 „	25 „
Итого въ приходѣ	196 р.	45 к.

РАСХОДЪ.

1. Уплачено A. Hermann'у за журналы	41 р.	94 к.
2. На медаль въ честь G. Darboux	19 „	71 „
3. Переплетъ книгъ	29 „	30 „

4. Чай на засѣданіяхъ . . . . . 10 р. 89 к.
5. Почтовые, типографскіе и канцелярскіе расходы. . . . 32 „ 94 „
6. Самоваръ, чайная посуда и 2 дюжины чайныхъ ложечекъ . 25 „ 96 „
7. Лекціи А. М. Ляпунова (Лит.). . . . . 2 „ — „

Итого въ расходѣ . 162 р. 74 к.

Такимъ образомъ къ началу настоящаго года въ кассѣ Общества остается . . . . . 33 р. 71 к.

Секретарь Общества *А. Пшеборскій.*

Справка о приходѣ и расходѣ суммъ, ассигнуемыхъ изъ спеціальныхъ средствъ университета, и пособія изъ суммъ Министерства Народнаго Просвѣщенія.

ПРИХОДЪ.

Оставалось на 1 октября 1910 г. . . . . 186 руб. 54 коп.
Перечислено изъ хозяйственныхъ суммъ въ возмѣщеніе израсходованныхъ на пріобрѣтеніе двухъ шкафовъ. 100 » — »
Ассигновано Физико-Матем. Факультетомъ въ пособіе на печатаніе статьи М. Н. Лагутинскаго . . . . . 150 » — »
Пособіе по смѣтѣ спеціальныхъ средствъ на 1911 г.. 700 » — »
Пособіе изъ суммъ Министерства Народн. Просв.. . . . 900 » — »

2036 руб. 54 коп.

РАСХОДЪ.

Типографіи М. Зильберберга и С-ья за печатаніе «Сообщеній Харьк. Матем. Общества:

Т. XII n⁰ 2. . . . . .145 р. 05 к.
Т. XII n⁰ 3. . . . . .139 р. 35 к. [1]).
Т. XII n⁰ 4—5. . . . . .276 р. 80 к.

561 руб. 20 коп.
Расходы по обмѣну изданіями. . . . . 19 » 53 »
Расходы по организаціи педагогической библіотеки общества . . . . . 107 » 98 » [2])
Жалованье библіотекарю за сентябрь. . . . . 25 » — »
» служителю Общества. . . . . 24 » — »

737 руб. 71 коп.
Остается на 1 октября. . . . . .1298 руб. 83 коп.

---

[1]) Причиталось 156 р. 45 к., но 17 р. 10 уплачено изъ суммъ, находившихся у секретаря, какъ полученные за отдѣльные оттиски.

[2]) Въ эту сумму не вошла уплата по представленнымъ въ Правленіе счетамъ М. Вега на 290 м. и А. Hermann'a на 42 fr.

Приложенія къ протоколамъ.

КОНСПЕКТЪ ДОКЛАДА

„Результаты наблюденій надъ горизонтальными маятниками на Харьковской Астрономической Обсерваторіи въ 1909 году“.

Ассистента Обсерваторіи *Б. И. Кудревича.*

(Прочитанъ 27 марта 1910 г.)

На Харьковской Астрономической Обсерваторіи проф. Г. В. Левицкимъ установлены въ 1893 г. два легкихъ горизонтальныхъ маятника системы Rebeur-Paschwitz'a. Принимая періодъ колебанія одного изъ нихъ въ горизонтальномъ положеніи равнымъ $14^s.00$, а въ вертикальномъ $0^s.41$, получаемъ: 1) уголъ φ, составляемый его базисомъ съ вертикалью равнымъ приблизительно $3'$; 2) длину простого вертикальнаго маятника, соотвѣтствующаго данному горизонтальному, равной 200 metr. и 3) разстояніе центра качаній отъ базиса для вертикальнаго положенія маятника равной 168^{mm}; благодаря же зеркальной регистраціи, получаемъ длину индикатора, соотвѣтствующаго одному изъ горизонтальныхъ маятниковъ, равной 10000 metr., что означаетъ, что одинъ миллиметръ амплитуды записи соотвѣтствуетъ измѣненію отвѣса на $0''.02$. Вслѣдствіе неудовлетворительности помѣщенія, измѣненія температуры оказываютъ сильное вліяніе на маятникъ: нагрѣваніе солнцемъ стѣнъ зданія вызываютъ иногда значительное уклоненіе маятниковъ съ ясно выраженнымъ періодомъ колебанія въ одинъ день; къ этому прибавляется и вредное вліяніе осѣданія винтовъ, вслѣдствіе чего на Харьковскомъ сейсмографѣ, при его теперешней установкѣ, оказались невозможными изслѣдованія надъ періодическимъ измѣненіемъ географической широты мѣста, приливами и отливами земной коры и т. п. Констатировано также вліяніе, на маятникъ случайныхъ сотрясеній почвы, обусловливаемыхъ жизнью города и хожденіемъ и работами въ зданіи обсерваторіи, вліяніе вѣтра, промерзанія почвы и т. п. Сопоставленіе отсчетовъ харьковскихъ записей отдѣльныхъ землетрясеній съ записями другихъ сейсмическихъ станцій

(Страссбургъ, Гамбургъ, Батавія, Буда-Пештъ, Загребъ) показало, что короткая длина часа на сейсмограммахъ ($1^h = 2^{cm}$) очень часто даетъ невѣрные результаты для моментовъ началъ различныхъ фазъ сейсмическаго возмущенія; однако несмотря на этотъ недостатокъ регистраціи можно было примѣнить отсчеты записей нѣкоторыхъ землетрясеній къ опредѣленію скоростей распространенія различныхъ сейсмическихъ волнъ: продольныхъ, поперечныхъ и поверхностныхъ. Сравненіе полученныхъ скоростей съ результатами наблюденій Rizzo и Milne'а дало вполнѣ удовлетворительное согласіе.

О преподаваніи тригонометріи въ средней школѣ.

Г. А. Грузинцева.

(Доложено въ педагогическомъ засѣданіи Хар. Матем. О-ва 19 $^{21}/_{XI}$ 09).

Теперь, какъ кажется, уже можно высказать увѣренность, что русская средняя школа наканунѣ реформы программъ и преподаванія математики. Общее направленіе реформы ясно: введеніе въ кругъ понятій средней школы идей т. н. высшей математики. Назрѣвшее измѣненіе характера преподаванія необходимо также и для проведенія въ жизнь этой точки зрѣнія. Много въ этомъ отношеніи намъ дастъ, конечно, опытъ западно-европейской и американской школы.

При преподаваніи тригонометріи мнѣ пришлось измѣнить обычное изложеніе этого предмета. Правда тригонометрія не такой основной предметъ, какъ алгебра или геометрія, но она легче поддается измѣненію въ духѣ новыхъ идей даже при сохраненіи старой программы. Измѣненія, о которыхъ я хочу говорить, относятся главнымъ образомъ къ первымъ урокамъ и къ такъ назыв. «гоніометріи».

Начинающій изучать тригонометрію бываетъ сначала ошеломленъ количествомъ новыхъ и совершенно непохожихъ на знакомыя ему раньше понятій: связь между углами и отрѣзками, синусы, косинусы и т. п., измѣненіе ихъ при измѣненіи угла или дуги, многозначность arcsinx и т. д. Въ особенности чуждой ему кажется идея о функціи, которая доминируетъ надъ этими понятіями, какъ бы ни замазывали это учебники и какъ бы ни загоняли ее въ мелкій шрифтъ и выноски.

Хотя въ концѣ концовъ учащійся довольно быстро осваивается съ этими понятіями, но я положительно утверждаю, что это дѣлается за счетъ ясности и точности представленій.

Какъ на примѣръ укажу на одну изъ самыхъ распространенныхъ ошибокъ учащихся—смѣшивать синусъ съ т. н. линіей синуса; также изъ цѣлаго отдѣла тригонометріи—измѣненіе тригонометрическихъ функцій

у нихъ остается лишь то, что синусъ въ I и II четверти—положителенъ, въ III и IV отрицателенъ, а косинусъ и т. д.

Поэтому мнѣ кажется полезнымъ остановиться нѣсколько дольше на основныхъ понятіяхъ тригонометріи.

Что новаго узнаетъ учащійся въ тригонометріи съ самаго начала?

Стремленіе установить связь между сторонами и углами треугольника съ цѣлью ввести послѣдніе въ вычисленія—вотъ первое слѣдствіе постановки задачи тригонометріи. Введеніе тригонометрическихъ функцій должно у насъ явиться рѣшеніемъ этой предварительной задачи.

Поставимъ вопросъ: *да возможно ли* установить такую связь? Если намъ удастся, не вводя формально понятія о тригонометрическихъ функціяхъ, убѣдить въ этомъ учениковъ, то этимъ мы подготовимъ ихъ умы къ идеѣ функціи.

Углы и отрѣзки—слишкомъ различныя вещи, такъ что сначала кажется невозможнымъ и непонятнымъ, какъ они могутъ одновременно входить въ вычисленія; оказывается однако, что въ геометріи уже приходилось имѣть дѣло съ вычисленіями, гдѣ входятъ совершенно различныя величины: я говорю о вычисленіи площадей и объемовъ. Но введеніе площадей и объемовъ въ вычисленіе наравнѣ съ отрѣзками могло быть сдѣлано лишь послѣ того, какъ каждую площадь мы связали съ нѣкоторымъ опредѣленнымъ *числомъ*, зависящимъ отъ величины отрѣзковъ, опредѣляющихъ эту площадь. Это обстоятельство указываетъ на направленіе, въ которомъ слѣдуетъ искать рѣшеніе поставленной нами задачи.

Нужно, значитъ, связать каждый уголъ съ нѣкоторымъ числомъ, находящимся въ зависимости отъ величины отрѣзковъ, опредѣляющихъ этотъ уголъ.

Если мы послѣ этихъ разсужденій, иллюстрированныхъ—само собой разумѣется—частными примѣрами, введемъ тригонометрическіе функціи, то, я думаю, учащійся не будетъ смѣшивать синусъ съ перпендикуляромъ, опущеннымъ и т. д.

Такъ какъ съ самаго начала я поставилъ введеніе тригонометрическихъ функцій въ связь съ задачей тригонометріи—рѣшеніемъ треугольниковъ, я буду говорить, разумѣется, о синусѣ *угла*, косинусѣ *угла* и т. д., а не о синусѣ дуги, косинусѣ дуги. Хотя такое изложеніе съ теоретической точки зрѣнія имѣетъ свои недостатки, но дидактическія преимущества его слишкомъ очевидны.

Впослѣдствіи, когда учащіеся уже освоятся съ новыми понятіями, введеніе этого болѣе широкаго взгляда будетъ необходимо; безъ него т. н. обобщеніе понятія объ углѣ и понятіе о періодичности тригонометрическихъ функцій не могутъ быть усвоены съ достаточнымъ пониманіемъ.

Итакъ, нужно каждый уголъ связать съ числомъ, зависящимъ отъ опредѣляющихъ этотъ уголъ отрѣзковъ.

Изъ тѣхъ же соображеній, по какимъ я дольше останавливался на вопросахъ, обычно затрагиваемыхъ вскользь, я ввожу первоначально *одну тригонометрическую функцію* $\sin x$. Это я дѣлаю съ тѣмъ большей охотой, что всѣмъ ходомъ предыдущихъ разсужденій учащіеся приведены къ убѣжденію—съ точки зрѣнія теоріи вполнѣ правильному—въ необходимости и *достаточности* введенія хоть одного числа, связывающаго уголъ съ отрѣзками.

Почему я ввожу именно $\sin x$, а не $\cos x$ или $\operatorname{tg} x$? Преимущества $\sin x$ заключаются въ томъ, что основныя формулы, изъ которыхъ можно вывести все необходимое для рѣшенія косоугольныхъ треугольниковъ, могутъ быть выведены изъ уравненій, въ которыя входитъ только синусъ, я говорю о т. н. «формулѣ синусовъ».

Синусъ я опредѣляю, какъ отношеніе въ прямоугольномъ треугольникѣ противолежащаго катета къ гипотенузѣ. Мы искали число, связывающее уголъ съ отрѣзками,—это отношеніе и есть искомое число. Со всевозможной убѣдительностью необходимо, конечно, доказать учащимся, что синусъ (остраго угла) вполнѣ опредѣленъ величиной даннаго угла и и, обратно, синусъ вполнѣ опредѣляетъ соотвѣтствующій ему уголъ.

У учащихся естественно является вопросъ, какъ же воспользоваться этой идеей для «практики»? Легкое наведеніе со стороны преподавателя приводитъ ихъ къ отвѣту: надо составить таблицу—«какому углу соотвѣтствуетъ какой синусъ».

Опредѣленіе (посредствомъ извѣстнаго построенія) синуса по углу учащимся извѣстно. Для систематическаго построенія таблицы синусовъ мы пользуемся миллиметровой бумагой и транспортиромъ. При аккуратной работѣ и достаточно большомъ радіусѣ окружности она даетъ точность до 0,01.

Такимъ образомъ у каждаго ученика имѣется составленная имъ самимъ таблица синусовъ для угловъ отъ 0^0 до 90^0; *этими таблицами мы первое время пользуемся при рѣшеніи численныхъ задачъ.*

Конечно до того, какъ ими пользоваться, мы посвящаемъ нѣкоторое время на ихъ исправленіе и *изученіе.*

Разсматривая наши таблицы, мы замѣчаемъ, что, какъ и слѣдовало ожидать по геометрическимъ соображеніямъ, съ возрастаніемъ угла синусъ также возрастаетъ; кромѣ того мы видимъ, что синусъ возрастаетъ *не пропорціонально* углу.

На послѣднее обстоятельство, мнѣ кажется, полезно указать отдѣльно, хотя бы безъ доказательства. Вѣдь къ числу довольно распространенныхъ ошибокъ начинающихъ относится увѣренность, что

$$\sin 2x = 2 \sin x \quad \text{и т. п.}$$

И если они впослѣдствіи не пишутъ этого, то чаще бываетъ это не потому, что они убѣждены въ противномъ, а потому, что они просто выучили новую формулу

$$\sin 2x = 2 \sin x . \cos x .$$

Это изученіе было-бы не закончено, если-бы мы прошли мимо того факта, что при *небольшихъ* измѣненіяхъ угла синусъ измѣняется пропорціонально; учащимся при этомъ полезно указать, что это имѣетъ связь съ тѣмъ обстоятельствомъ, что синусъ измѣняется *постепенно*. Эта мысль, какъ я замѣтилъ, воспринимается ими безъ труда.

Всѣ эти указанія подготовляютъ почву для идеи *непрерывности* и для уясненія сущности *интерполированія таблицъ*.

Полезно использовать т. н. таблицы «натуральныхъ синусовъ» (напр. у Пржевальскаго); тамъ это свойство синусовъ, конечно, замѣтнѣе.

Кромѣ всего этого мы замѣчаемъ—если не замѣтили раньше,—что $\sin x < 1$.

Теперь, когда у насъ составлена таблица синусовъ и ясно сознана возможность, зная величину остраго угла, найти его синусъ, можно перейти къ понятію *о функціи*.

Опираясь на таблицу синусовъ, мы даемъ опредѣленіе функціи: если каждому значенію одной перемѣнной, напр. x, соотвѣтствуетъ вполнѣ опредѣленное значеніе другой, напр. y, то мы называемъ y функціей x'а.

Это опредѣленіе, какъ видно, вполнѣ научное.

Учащихся не затрудняетъ и обозначеніе $y = f(x)$.

На понятіи о функціи, конечно, необходимо остановиться. Примѣры изъ геометріи дадутъ возможность съ большей ясностью представить себѣ функціональную зависимость, какъ *зависимость* между двумя перемѣнными величинами.

Пользуясь однимъ синусомъ, можно уже рѣшать треугольники. Прежде всего прямоугольные. Хотя теоретически при помощи одного синуса можно рѣшать задачи всѣхъ типовъ на прямоугольные треугольники, но слѣдуетъ обратить вниманіе, что практически пользованіе Пиѳагоровой теоремой слишкомъ сложно. Это указаніе всегда встрѣчаетъ сочувствіе у учащихся.

Переходимъ къ косоугольнымъ треугольникомъ.

«Формула синусовъ», которую мы выводимъ, даетъ возможность легко рѣшать треугольники по двумъ угламъ и одной сторонѣ, а также по двумъ сторонамъ и противолежащему углу. Задачи остальныхъ типовъ теоретически разрѣшимы, такъ какъ число уравненій достаточно, но практически мы пока еще не можемъ ихъ рѣшить относительно неизвѣстныхъ.

Для рѣшенія этихъ уравненій вводятъ еще тригонометрическія функціи, которыя учащійся воспринимаетъ, какъ нѣкоторыя преобразованія синуса.

Выведя соотношенія между различными тригонометрическими функціями одного и того-же угла, познакомивъ учащихся съ обобщеніемъ понятія угла и дуги, съ теоремой сложенія $\sin x$, $\cos x$ и $\operatorname{tg} x$ и приведеніемъ формулъ къ логариѳмическому виду, мы можемъ дать точное опредѣленіе непрерывной функціи и доказать также вполнѣ точно, что $\sin x$ и $\cos x$ непрерывны при всякихъ значеніяхъ x, а $\operatorname{tg} x$ для всякаго x, неравнаго

$$(2k+1)\frac{\pi}{2}$$

Изученіе разности

$$f(x+h)-f(x)$$

при безконечно-маломъ h дается ученикамъ легко.

Идея періодичности тригонометрическихъ функцій, формулированная въ такой формѣ

$$f(x+a)=f(x),$$

также вполнѣ имъ доступна.

Изученіе измѣненія тригонометрическихъ функцій въ зависимости отъ аргумента было бы, конечно, не полно безъ графическаго изображенія $\sin x$, $\cos x$ и $\operatorname{tg} x$.

Въ дальнѣйшемъ преподаваніи тригонометріи, какъ мнѣ кажется, нѣтъ необходимости измѣнять обычный порядокъ изложенія предмета.

Резюмирую сказанное: я пытался при преподаваніи послѣдовательно провести дидактическій пріемъ—не вводить новыхъ понятій, не подготовивъ къ нимъ умы учащихся.

Это, привело меня къ измѣненію послѣдовательности изложенія матерьяла; болѣе того въ этомъ небольшомъ курсѣ можно даже замѣтить концентричность.

Введеніе въ кругозоръ учащихся сначала *одной* тригонометрической функціи подсказано тѣмъ же стремленіемъ. Съ другой стороны, такъ сказать, въ вознагражденіе за потерянную систематичность, мы получаемъ возможность ввести бо́льшую строгость и достигнуть полнаго усвоенія учащимися идей, которыя много дадутъ имъ и для общаго развитія.

Науково-Дослідний Інститут
БІБЛІОТЕКА
Інв. № 579
Математики і Механіки ХДУ