пе-55505уг К-583
дубль
84

Communications de la Société mathématique de Kharkow.
2-ème série, Tome XI, № 1—2.

СООБЩЕНІЯ
ХАРЬКОВСКАГО
МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА.

ВТОРАЯ СЕРІЯ.

Томъ XI. 1907/1910

~~№№ 1—2.~~

ХАРЬКОВЪ.
Типографія и Литографія М. Зильбербергъ и С-вья.
(Рыбная улица, домъ № 30-й).
1907.

10
92
58

Communications de la Société mathématique de Kharkow.
2-ème série, Tome XI, № 6.

СООБЩЕНІЯ
ХАРЬКОВСКАГО
МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА.

ВТОРАЯ СЕРІЯ.
Томъ XI.
№ 6.

Науково-Дослідчий Інститут
БІБЛІОТЕКА
Інв. № 578
Математики і Механіки ХДУ

ХАРЬКОВЪ.
Типографія и Литографія М. Зильберберга и С-вья.
Донецъ-Захаржевская ул., с. д. № 6.
1910.

СОДЕРЖАНІЕ

XI-го тома.

Стр.

Составъ Харьковскаго Математическаго Общества на 1-е января 1910 года. . . . . .

Бернштейнъ, С. Н. Изслѣдованіе и интегрированіе дифференціальныхъ уравненій съ частными производными 2-го порядка элиптическаго типа . . . . . 1—164

Грузинцевъ, А. П. Теорія колебанія упругихъ пластинокъ 165—196

Брайцевъ, И. Р. Г. Ѳ. Вороной (Некрологъ) . . . . . 197—210

Грузинцевъ, А. П. Рѣшеніе одной задачи изъ геометрической оптики. . . . . 211—226

Синцовъ, Д. М. Кривая отраженія солнца въ морѣ . . 227—234

Роговскій, Е. А. Н. Д. Пильчиковъ (Некрологъ). . . . 235—242

Маджи, Дж. А. Гіацинтъ Морера (Некрологъ) . . . 243—248

Поссе, К. А. Замѣтка о рѣшеніи двучленныхъ сравненій съ простымъ модулемъ по способу Коркина . . . . . 249—268

Грузинцевъ, А. П. Масса электрона по электромагнитной теоріи проводниковъ . . . . . 269—278

Роговскій, Е. А. О температурѣ небеснаго пространства 279—286

Синцовъ, Д. М. Координаты точки пересѣченія двухъ прямыхъ, въ пространствѣ и плоскости, опредѣляемой этими прямыми . . . . . 287—290

Протоколы засѣданій Харьковскаго Математич. Общ. за 1908—1909 гг. и отчеты за $190^{7}/_{8}$ и $190^{8}/_{9}$ акад. г. . . 291—302

Приложенія къ протоколамъ:

Назаревскій, Я. М. О числѣ цифръ въ періодѣ періодической дроби 303

Каврайскій, В. В. Программа и нѣкоторыя положенія доклада: «Графическіе способы рѣшенія задачъ сферической астрономіи . . . . . 304—311

TABLE DES MATIÈRES

du tome XI.

Pag.

*Liste des membres de la Société mathématique de Kharkow au 1. I. 1910 . . . . . .

*Discussion et intégration des équations aux dérivées du second ordre du type elliptique, par. M. *S. Bernstein* 1

*Théorie des vibrations des plaques élastiques, par. M. *A. Grousinzeff* 165

*G. Woronoï (nécrologie), par. M. *J. Braïtseff* 197

*Resolution d'un probléme d'optique géométrique, par. M. *A. Grousinzeff* 211

*L'image du soleil, réfléchi par la mer, par. M. *D Sintsof* . . 227

*N. Piltchikoff (nécrologie), par M. *E. Rogovsky* 235

*G. Morera (nécrologie), par M. *G. A. Maggi* 243

*Note sur la résolution des congruences binômes à module premier par la méthode de Korkine, par M. *K. Possé* 249

*Sur la masse d'électron métallique, par M. *A. Grousinzeff* . 269

*Sur la temperature de l'espace céleste, par M. *E. Rogovsky* 279

*Note sur les coordonnées du point et du plan communs de deux droites qui se rencontrent, par M. *D. Sintsof* 287

*Procès verbaux des séances de la Société Mathematique de Kharkow des années 1908—1909 et les comptes rendus de la Société pour les années $1907/8$ et $1908/9$. 291

Appendice aux procès verbaux:

*Sur le nombre des chiffres au periode d'une fraction déc imale périodique, par M. *J. Nazarewsky* 303

*Programme de la communication: «Méthodes graphiques de la résolution des problèmes de l'astronomie sphérique», par M. *W. Kavraïsky* 301

СОСТАВЪ

Харьковскаго Математическаго Общества

къ 1-му января 1910 года.

A. Распорядительный комитетъ.

1. Предсѣдатель, проф. Д. М. Синцовъ.
2. Товарищи предсѣдателя, проф. А. П. Грузинцевъ и проф. Ц. К. Русьянъ.
3. Секретарь, проф. А. П. Пшеборскій.

B. Почетные члены.

1. Андреевъ Константинъ Алексѣевичъ, засл. проф. Московск. унив.
2. Бобылевъ Дмитрій Константиновичъ, проф. СПБ. унив.
3. Грузинцевъ Алексѣй Петровичъ, проф. Харьк. унив.
4. Ермаковъ Василій Петровичъ, засл. проф. унив. св. Владиміра.
5. Жуковскій Николай Егоровичъ, проф. Московскаго унив.
6. Ляпуновъ Александръ Михайловичъ, академикъ.
7. Марковъ Андрей Андреевичъ, академикъ.
8. Поссе Константинъ Александровичъ, проф. СПБ. элект.-технич. инст.
9. Стекловъ Владиміръ Андреевичъ, проф. СПБ. унив.
10. Тихомандрицкій Матвѣй Александровичъ, засл. проф. Харьк. унив.
11. Appell, Paul, проф. Парижскаго унив., академикъ.
12. Cantor Georg, проф. унив., Halle.
13. Darboux, Gaston, академикъ, Парижъ.
14. Darwin G. H., проф. унив., Кембриджъ.
15. Dini, Ulisse, проф. унив., Пиза.
16. Hilbert David, проф. унив., Göttingen.
17. Jordan, Camille, членъ института, Парижъ.
18. Klein, Felix, проф. унив., Göttingen.
19. Mittag-Leffler Gösta, проф. Stockholm.
20. Painlevé, Paul, проф. членъ института, Парижъ.
21. Picard Emile, проф. Парижскаго унив., академикъ.
22. Poincaré Henri, проф. Парижскаго унив., академикъ.
23. Volterra Vito, проф. унив., Римъ.
24. Zeuthen H. G., проф. унив., Копенгагенъ.

С. Дѣйствительные члены.

1. Аксюкъ Елизавета Петровна, преподав. 2-й Харьк. женск. гимн.
2. Алексѣевскій Владиміръ Петровичъ, проф. Томскаго техн. инст.
3. Альбицкій Василій Ивановичъ, проф. Харьк. техн. инст.
4. Бернштейнъ Сергѣй Натановичъ, прив.-доц. Харьк. унив.
5. Бураковъ Григорій Ѳедотовичъ, адъюнктъ-проф. Харьк. техн. инст.
6. Бѣляевъ Николай Павловичъ, стипендіатъ унив.
7. Веребрюсовъ Александръ Степановичъ, бывш. преп. Староб. гимн.
8. Виноградовъ Иванъ Алексѣевичъ, бывш. дир. Харьк. Коммер. учил.
9. Вольскій Степанъ Петровичъ, преп. Харьк. 3-й гимн.
10. Гохманъ Владиміръ Соломоновичъ, окончившій Ф.-М. факультетъ.
11. Граве Дмитрій Александровичъ, проф. унив. св. Владиміра.
12. Гречаниновъ Алексѣй Васильевичъ, бывш. проф. Харьк. техн. инст.
13. Гриненко Н. П., преп. 1-го Харьк. реальн. учил.
14. Грицай Алексѣй Сергѣевичъ, директ. Сумского реальн. учил.
15. Грузинцевъ Григорій Алексѣевичъ, стипендіат. универс.
16. Даватцъ Владиміръ Христіановичъ, окончившій Ф. М. Факульт.
17. Денченко Сергѣй Георгіевичъ, содержат. частн. учебн. завед. 1 разр.
18. Дробязко Михаилъ Павловичъ, преп. 1-го Харьк. реальн. учил.
19. Евдокимовъ Николай Николаевичъ, прив.-доц. Харьк. унив.
20. Епифановъ Федоръ Филипповичъ, лаборантъ университета.
21. Запорожецъ Леонидъ Григорьевичъ, преп. Харьк. Коммерч. учил.
22. Зворыкинъ Константинъ Алексѣевичъ, быв. дир. Кіевск. полит. инст.
23. Зерновъ Дмитрій Степановичъ, директ. СПБ. техн. инст.
24. Ивицкій Е. П., преп. частной гимназіи Давыденко.
25. Кирпичевъ Викторъ Львовичъ, проф. СПБ.
26. Кирьяковъ Иванъ Аѳанасьевичъ, преп. 3-й Харьк. гимн.
27. Киселевъ Андрей Петровичъ, преп. Ворон. кадет. корпуса.
28. Клюшниковъ Александръ Андреевичъ, преп. 1-й Харьк. гимн.
29. Кнаббе Владиміръ Сергѣевичъ, проф. Харьк. техн. инст.
30. Косенко Михаилъ Семеновичъ, бывш. преп. Харьк. 4-й гимн.
31. Кудревичъ Борисъ Ивановичъ, ассист. Харьк. астр. обсерв.
32. Кутневичъ Дмитрій Андреевичъ, директ. 2-го Харьк. реальн. учил.
33. Лагутинскій Михаилъ Николаевичъ, прив.-доц. Харьк. унив.
34. Латышевъ Григорій Алексѣевичъ, проф. Харьк. техн. инст.
35. Левицкій Григорій Васильевичъ, попеч. Виленск. учебн. окр.
36. Маевскій Андрей Васильевичъ, дир. Курск. реальн. учил.
37. Малышевъ Николай Ивановичъ, преп. гимн. Шиловой.
38. Мартосъ Борисъ Николаевичъ, преподав. частн. уч. завед.
39. Марчевская Елена Николаевна, преп. женск. коммер. уч. Орловской.
40. Марчевскій Михаилъ Николаевичъ, окончивш. Ф.-М. Факул.

41. Марцелли Александръ Ивановичъ, преп. 1-й Харьк. гимн.
42. Михайловскій Болеславъ Григорьевичъ, быв. преп. Хар. реал. учил.
43. Мощенко Василій Николаевичъ, преп. Харьк. коммерч. учил.
44. Мухачевъ Петръ Матвѣевичъ, дирек. Харьк. техн. инст.
45. Назаревскій Яковъ Михайловичъ, преп. частн. гимн.
46. Нечаевъ Александръ Ивановичъ, преп. гимн. Шиловой.
47. Педаевъ Дмитрій Кондратьевичъ, ассистентъ метер. станціи.
48. Петренко Георгій Ивановичъ, прив.-доц. Харьк. унив.
49. Погорѣлко Александръ Константиновичъ, быв. проф. Хар. техн. инст.
50. Пономаревъ Ростиславъ Дмитріевичъ, преп. 1-й Харьк. гимн.
51. Поповъ Иванъ Петровичъ, ассистентъ метеор. обсерв.
52. Проскурниковъ Николай Васильевичъ, быв. преп. Харьк. реал. учил.
53. Пшеборскій Антонъ Павловичъ, проф. Харьк. унив.
54. Радцигъ Александръ Александровичъ, проф. Кіевск. полит. инст.
55. Раевскій Сергѣй Александровичъ, быв. попеч. Харьк. учебн. округа.
56. Речинскій Чеславъ Владиславовичъ, преп. част. реал. уч. Буракова.
57. Роговскій Евгеній Александровичъ, проф. Харьк. унив.
58. Рудневъ Петръ Матвѣевичъ, дир. Урюп. реальн. учил.
59. Русьянъ Цезарь Карловичъ, проф. Харьк. унив.
60. Салтыковъ Николай Николаевичъ, проф. Харьк. унив.
61. Сахаровъ Михаилъ Ивановичъ, лабор. физ. каб. Харьк. унив.
62. Самецкій Рафаилъ Николаевичъ, дирек. Усть-Медв. реальн. учил.
63. Сикора Іосифъ Іосифовичъ, астр. Пулков. обсерваторіи.
64. Синцовъ Дмитрій Матвѣевичъ, проф. Харьк. унив.
65. Синяковъ Германъ Аѳанасьевичъ, преп. 2-й Харьк. гимн.
66. Сонцовъ Андрей Александровичъ, преп. 2-го Харьк. реал. учил.
67. Струве Людвигъ Оттовичъ, проф. Харьк. унив.
68. Тимофеевъ Гавріилъ Ефимовичъ, прив.-дон. университета.
69. Фесенко Валерій Михайловичъ, преп. 1-й Харьк. женск. гимн.
70. Флавицкій Николай Михайловичъ, бывш. лабор. Харьк. унив.
71. Флоровъ Петръ Степановичъ, дирек. Урюп. реальн. учил.
72. Шепелевъ Павелъ Васильевичъ, преп. Харьк. техн. инст.
73. Шиллеръ Николай Николаевичъ, членъ совѣта М. Н. П.
74. Шимковъ Андрей Петровичъ, засл. проф. Харьк. унив.
75. Шиховъ Василій Васильевичъ, окружн. испект. Харьк. учебн. округа.
76. Штукаревъ Иванъ Дмитріевичъ, бывш. преп. 2-й Харьк. гимн.
77. Чернай Николай Андреевичъ, проф. Харьк. техн. инст.

D. Члены корреспонденты:

а) русскіе.

1. Васильевъ Александръ Васильевичъ, засл. проф. Казанскаго унив.
2. Котельниковъ Александръ Петровичъ, проф. Казанскаго унив.

3. Некрасовъ Павелъ Алексѣевичъ, членъ совѣта М. Н. П.
4. Пташицкій Иванъ Львовичъ, проф. СПБ. унив.
5. Сомовъ Павелъ Осиповичъ, бывш. проф. Варшавскаго унив.
6. Тороповъ Константинъ Александровичъ, преп. Таганр. техн. учил.

b) **иностранные.**

1. Arzela, Cesare, проф. унив., Болонья.
2. Borel, Emile, проф. унив., Парижъ.
3. Cosserat Eugène, проф. Тулузскаго унив.
4. Enriques Federico, проф., Болонья.
5. Favaro Antonio, проф., Падуя.
6. Fehr Henry, проф., редакторъ „Enseignement mathématique“, Женева.
7. Forsyth Alfred Russel, проф., Кэмбриджъ.
8. Fredholm Ivar, проф., Стокгольмъ.
9. Goursat, Edouard, проф., Парижъ.
10. Greenhill, A. G., проф., Лондонъ.
11. Hadamard, Joseph, проф. въ Сорбоннѣ, Парижъ.
12. Holmgren, Erik, проф., Упсала.
13. Hurwitz Adolf, проф. политехникума въ Цюрихѣ.
14. Kneser Adolf, проф. Бреславскаго унив.
15. Korn Arthur, проф. Мюнхенскаго унив.
16. Laisant C. A., редакт. „Intermédiaire der Math“ „Nouv. Annalesde Math.“.
17. Levi-Civita, Tullio, проф. унив., Падуя.
18. Lindelöf, Ernst, проф., Гельсингфорсъ.
19. Loria Gino, проф., Генуя.
20. Maggi Gian Antonio, проф., Пиза.
21. Osgood W. F., проф., Кембриджъ (Масс.).
22. Runge Carl, проф., Гёттингенъ.
23. Schlesinger Ludwig, проф. универс., Klausenburg.
24. Teixeira, Gomes, Fr., проф. и дир. политехн. инст., Опорто.
25. Zaremba S. проф. Краковскаго унив.

Изслѣдованіе и интегрированіе дифференціальныхъ уравненій съ частными производными второго порядка эллиптическаго типа.

С. Бернштейна.

ВВЕДЕНІЕ.

Предлагая русскимъ читателямъ настоящее сочиненіе, считаю не лишнимъ сказать нѣсколько словъ о теоріи аналитическихъ функцій, лежащей въ его основѣ. Уже около пятидесяти лѣтъ эта теорія занимаетъ центральное мѣсто въ западной математикѣ: ей посвящено много замѣчательныхъ работъ и преподаванію ея удѣлено особенное вниманіе.

Такая исключительная роль теоріи аналитическихъ функцій объясняется тѣмъ, что *она является естественнымъ продолженіемъ, какъ алгебры, такъ и дифференціальнаго и интегральнаго исчисленія.* Съ одной стороны алгебра конца XVIII столѣтія приводитъ математиковъ къ необходимости разсматривать комплексныя величины наравнѣ съ вещественными. Съ другой стороны, невозможность интегрировать огромное большинство дифференціальныхъ уравненій при помощи извѣстныхъ конечныхъ выраженій приводитъ къ употребленію безконечныхъ рядовъ и первымъ дѣломъ къ простѣйшему изъ нихъ, къ строкѣ Тэйлора. Но функція комплексной перемѣнной, лежащая въ основѣ алгебры, и функція, опредѣляемая сходящейся строкой Тэйлора, удовлетворяющая дифференціальному уравненію—это одно и тоже, это и есть такъ называемая аналитическая функція, которая объединяетъ такимъ образомъ противоположные полюсы математической мысли—анализъ конечный и анализъ безконечный.

Каждый изъ указанныхъ источниковъ оказалъ свое вліяніе и на дальнѣйшее развитіе теоріи аналитическихъ функцій. Но между тѣмъ, какъ интегрированіе дифференціальныхъ уравненій при помощи анали-

тическихъ функцій первоначально лишь передвигало центръ тяжести задачи, алгебраическія функціи вмѣстѣ съ ихъ интегралами представляли богатую область для изслѣдованія и обобщеній. Благодаря алгебраическимъ функціямъ, впервые было обращено вниманіе на роль такъ называемыхъ *критическихъ и особыхъ точекъ*, являющихся въ нѣкоторомъ смыслѣ *инваріантами* для аналитическихъ функцій. Благодаря имъ было установлено важное положеніе, что знаніе *всѣхъ* особенностей функціи позволяетъ [1]) найти для нея аналитическое выраженіе, имѣющее смыслъ при всѣхъ значеніяхъ перемѣнной. Отнынѣ всякая функція была вполнѣ охарактеризована своими особенностями; наличность или отсутствіе формальной зависимости опредѣленнаго вида между функціями также непосредственно обнаруживалась разсмотрѣніемъ свойствъ ихъ особенностей. Такимъ образомъ для полнаго изслѣдованія (аналитической) функціи, какъ для вычисленія ея значенія въ любой точкѣ, такъ и для обнаруженія существованія элементарныхъ зависимостей между ней и другими функціями, впервые найденъ былъ единый и непогрѣшимый путь.

Слѣдуя этому пути, который можно назвать алгебраическимъ или комплекснымъ направленіемъ, теорія аналитическихъ функцій отъ алгебраическихъ задачъ переходитъ къ трансцендентнымъ. Вслѣдъ за алгебраическими и логариѳмическими особенностями цѣлый рядъ различныхъ вопросовъ выдвигаетъ впередъ изученіе болѣе сложныхъ такъ называемыхъ существенныхъ особыхъ точекъ, образцомъ которыхъ является точка въ безконечности для цѣлой трансцендентной функціи. Устанавливаются важныя аналогіи между этими цѣлыми функціями и многочленами, а также замѣчательныя зависимости, нашедшія впослѣдствіи примѣненіе въ различныхъ отдѣлахъ математики, между ихъ возрастаніемъ въ безконечности, убываніемъ коэффиціентовъ ихъ строки Тэйлора и густотой ихъ нулей. Подобному же изслѣдованію подвергаются мероморфныя и другія функціи, обладающія извѣстными опредѣленными особенностями, выдвигающія вмѣстѣ съ тѣмъ основной вопросъ *аналитическаго продолженія*, т. е. изученія a priori функціи, которой дано разложеніе Тэйлора, сходящееся лишь въ ограниченной области, а также общую задачу суммированія расходящихся рядовъ.

Задача аналитическаго продолженія, равнозначная по существу многократному повторенію способа послѣдовательныхъ приближеній, къ которому можно свести огромное большинство задачъ, встрѣчающихся въ анализѣ, распадается на двѣ части [2]):

1. Опредѣлить всѣ особенности функціи, которой дано разложеніе Тэйлора.

---

[1]) При нѣкоторыхъ весьма общихъ предположеніяхъ относительно особенностей.

[2]) Для библіографіи по этому вопросу мы можемъ отослать читателя къ прекрасной книгѣ Hadamard'a „Sur la série de Taylor et son prolongement analytique“.

2. Вычислить во всякой обыкновенной точкѣ значеніе функціи, которой дано разложеніе Тэйлора.

Разностороннія изслѣдованія, посвященныя первой части задачи, установили, что вообще всякая особенность равнозначна опредѣленной инваріантной ассимптотической зависимости между коэффиціентами строки Тэйлора, и въ частности привели къ простымъ пріемамъ для распознаванія мероморфныхъ и нѣкоторыхъ другихъ функцій, обладающихъ извѣстными особенностями. Еслибъ, приступая къ изученію функціи, мы заранѣе могли предвидѣть ограниченное число типовъ особенностей, какими она можетъ обладать, то дѣйствительное опредѣленіе ихъ представляло бы сравнительно мало трудности. Но бѣда въ томъ, что не только мероморфныя, но и *функціи, обладающія лишь изолированными особыми точками, являются исключеніями во всей совокупности аналитическихъ функцій*, и у насъ нѣтъ *пока* руководящей нити, для того, чтобъ разобраться въ безконечномъ многообразіи возможныхъ особенностей. Отсюда выводъ, что *первая часть задачи аналитическаго продолженія, основная съ точки зрѣнія алгебраическаго направленія, по существу не допускаетъ общаго рѣшенія.*

Напротивъ, *для вычисленія значенія аналитической функціи въ любой точкѣ найденъ безусловно общій методъ—строка многочленовъ Миттагъ-Леффлера.* Строка Миттагъ-Леффлера, коэффиціенты которой опредѣляются непосредственно изъ коэффиціентовъ строки Тэйлора, сходится внутри такъ называемой *звѣзды*, т. е. во всей плоскости комплексной перемѣнной за исключеніемъ отрѣзковъ прямыхъ линій, идущихъ отъ каждой особой точки въ безконечность [1]). Напримѣръ если *функція, представленная строкой Тэйлора не имѣетъ вещественныхъ особыхъ точекъ, то каковы бы ни были ея комплексныя особенности, ея разложеніе въ строку Миттагъ-Леффлера будетъ сходиться при*

---

[1]) Строка Миттагъ-Леффлера можетъ принимать различныя формы. Приведемъ для примѣра ту изъ нихъ, которая была первою указана Миттагъ-Леффлеромъ въ Acta Mathematica 1900. Пусть $F(z)=F(0)+F'(0)z+\ldots+\frac{1}{n!}F^{(n)}(0)z^n+\ldots$, данная строка Тэйлора, тогда строка Миттагъ-Леффлера представится въ видѣ

$$F(z)=P_0+(P_1-P_0)+(P_2-P_1)+\ldots+(P_n-P_{n-1})+\ldots$$

гдѣ

$$P_n(z)=\sum_{\lambda_1=0}^{n^2}\sum_{\lambda_2=0}^{n^4}\ldots\sum_{\lambda_n=0}^{n^{2n}}\frac{F^{(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)}(0)}{(\lambda_1)!\,(\lambda_2)!\ldots(\lambda_n)!}\cdot\left(\frac{z}{n}\right)^{\lambda_1+\lambda_2\ldots+\lambda_n}$$

и будетъ сходиться въ указанной выше области. Придавая строкѣ Миттагъ-Леффлера другія формы, можно измѣнять непрерывно область сходимости и приспособить ее также къ вычисленію многозначныхъ функцій; но для изученія всѣхъ вѣтокъ этихъ послѣднихъ предпочтительно ввести (теоретически это всегда возможно) новую перемѣнную, относительно которой данная функція, какъ и первоначальная перемѣнная, были бы однозначными функціями.

всѣхъ вещественныхъ значеніяхъ перемѣнной. Такимъ образомъ для *вычисленія* аналитическихъ функцій найденъ другой путь, кромѣ указаннаго алгебраическимъ направленіемъ.

Съ усовершенствованіемъ своихъ методовъ, теорія аналитическихъ функцій приступаетъ наконецъ къ интегрированію дифференціальныхъ уравненій. Но, какъ и въ общей задачѣ аналитическаго продолженія, главная трудность заключается въ томъ, что намъ неизвѣстны a priori всѣ возможныя неявныя особенности [1]) искомыхъ функцій. Дѣлая относительно нихъ различныя предположенія, можно установить типы уравненій, рѣшенія которыхъ обладаютъ опредѣленными особенностями, такъ напр. въ настоящее время извѣстны всѣ дифференціальныя уравненія первыхъ двухъ порядковъ, всѣ рѣшенія которыхъ мероморфны. Какъ бы ни были интересны эти новыя простыя трансцендентныя функціи, отличныя отъ всѣхъ ранѣе извѣстныхъ, замѣчательно, что *число ихъ весьма ограниченно, такъ же какъ и число уравненій, которыя при ихъ помощи могутъ быть проинтегрированы.* Такимъ образомъ задача интегрированія съ точки зрѣнія комплекснаго направленія выдвигаетъ прежде всего трудный вопросъ объ изслѣдованіи a priori возможныхъ типовъ особенностей рѣшеній дифференціальныхъ уравненій. Но впредь до полнаго разрѣшенія этого еще мало разработаннаго вопроса, теоріи функцій приходится приступить къ интегрированію наиболѣе интересныхъ уравненій другимъ путемъ, который можно назвать *реалистическимъ направленіемъ.*

Это направленіе, исходя изъ того, что основная задача опредѣленія *всѣхъ* особенностей функціи *вообще* неразрѣшима, и что *большинство естественныхъ функцій не обладаетъ простыми съ алгебраической точки зрѣнія комплексными особенностями*, ставитъ своей *ближайшей задачей аналитическое продолженіе функціи лишь для вещественныхъ значеній перемѣнныхъ.* Пользуясь различными способами вычисленія и выраженія функцій (строка Миттагъ-Леффлера, нормальные ряды и т. д.), ключъ для изслѣдованія сходимости которыхъ даетъ общая теорія аналитическихъ функцій; пользуясь основнымъ свойствомъ этихъ функцій, что для полнаго ихъ опредѣленія достаточно знать величины всѣхъ ихъ производныхъ въ нѣкоторой точкѣ; пользуясь также общими результатами изученія особенностей и асимптотическимъ выраженіемъ функцій вблизи ихъ: реалистическое направленіе, ограничиваясь вещественными значеніями перемѣнныхъ, находитъ обыкновенно руководящую нить для разрѣшенія поставленныхъ аналитическихъ вопросовъ въ геометрическихъ или механическихъ явленіяхъ, съ ними связанныхъ.

---

[1]) Неявною особенностью называется особенность, измѣняющаяся вмѣстѣ съ постоянными интегрированія. Для ознакомленія съ теоріей аналитическаго интегрированія дифференціальныхъ уравненій и съ соотвѣтствующей литературой укажемъ на мемуаръ Пэнлевэ „Sur les équations différentielles и т. д.“ въ Acta Mathematica t. XXVI.

Не останавливаясь на разнообразныхъ и выдающихся результатахъ достигнутыхъ этимъ направленіемъ при интегрированіи обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій, замѣтимъ лишь, что какова бы ни была система этихъ уравненій, всѣ неизвѣстныя функціи такъ же, какъ и первоначальная независимая перемѣнная, всегда и съ чрезвычайной легкостью могутъ быть представлены въ видѣ рядовъ многочленовъ нѣкоторой вспомогательной перемѣнной, сходящихся при всѣхъ ея вещественныхъ значеніяхъ: вся трудность интегрированія сводится формально къ изученію особой точки въ безконечности этихъ quasi-цѣлыхъ трансцендентныхъ функцій. Прибавимъ къ этому, что успѣхи изученія вещественныхъ особенностей, въ основѣ котораго лежатъ методы выработанные алгебраическимъ направленіемъ, съ своей стороны начинаютъ освѣщать путь конструированія a priori функцій, обладающихъ опредѣленными комплексными особенностями, при помощи которыхъ могли бы быть *комплексно* проинтегрированы болѣе широкіе классы дифференціальныхъ уравненій, чѣмъ при помощи извѣстныхъ до сихъ поръ элементарныхъ обобщеній алгебраическихъ функцій.

Переходя къ дифференціальнымъ уравненіямъ съ частными производными, которыя насъ въ настоящемъ сочиненіи спеціально интересуютъ, мы видимъ, что примѣненіе къ нимъ общихъ методовъ теоріи функцій еще болѣе необходимо, чѣмъ для обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій. Дѣйствительно, даже въ тѣхъ рѣдкихъ случаяхъ, когда для общаго интеграла ихъ можетъ быть найдено конечное выраженіе, содержащее *произвольныя функціи*, всякая конкретная задача при опредѣленныхъ первоначальныхъ условіяхъ приводитъ обыкновенно къ *функціональному уравненію не разрѣшимому вообще при помощи конечныхъ комбинацій извѣстныхъ функцій*. Аналитическое интегрированіе съ точки зрѣнія комплекснаго направленія обнаружило важность понятія *характеристикъ* [1]), но въ то время, какъ для *линейныхъ* уравненій онѣ являются единственно возможными случайными (т. е. мѣняющимися въ зависимости отъ первоначальныхъ условій) особенностями,—благодаря чему при первоначальныхъ условіяхъ Коши комплексное изученіе интеграловъ не представляетъ серьезныхъ затрудненій,—*не линейныя* уравненія обладаютъ отличными отъ характеристикъ неявными особенностями, изслѣдованіе которыхъ является, безъ сомнѣнія, одной изъ наиболѣе недоступныхъ задачъ современнаго анализа. Поэтому въ данномъ случаѣ вещественное интегрированіе пріобрѣтаетъ особенный интересъ.

Кромѣ того, уже давно извѣстно, что благодаря наличности произвольныхъ функцій, многія дифференціальныя уравненія съ частными

[1]) Для опредѣленности мы предполагаемъ двѣ независимыя перемѣнныя; характеристикой называются линіи, вдоль которыхъ условія Коши непригодны для опредѣленія интеграла.

производными допускаютъ неаналитическія вещественныя рѣшенія; въ силу этого приходится признать, что понятіе общаго интеграла Коши, гдѣ фигурируютъ лишь аналитическія произвольныя функціи, недостаточно (за исключеніемъ линейныхъ уравненій, гдѣ всякое рѣшеніе можетъ быть разсматриваемо, какъ сумма двухъ аналитическихъ рѣшеній, для которыхъ плоскость вещественныхъ перемѣнныхъ является особой поверхностью, и тѣхъ классовъ уравненій, которыя не допускаютъ вещественныхъ неаналитическихъ рѣшеній). Тѣмъ не менѣе изслѣдованіе вещественныхъ рѣшеній дифференціальныхъ уравненій и вообще теорія неаналитическихъ функцій находится въ настолько тѣсной связи съ теоріей аналитическихъ функцій, что можетъ быть разсматриваема какъ одно изъ развѣтвленій послѣдней. Причина этого лежитъ въ слѣдующемъ положеніи, которое полезно формулировать двумя способами:

Первая формулировка. Всякая непрерывная вещественная функція можетъ быть разсматриваема, какъ сумма двухъ аналитическихъ функцій, изъ которыхъ первая не имѣетъ особенностей въ верхней части плоскости комплексной перемѣнной, а вторая—въ нижней.

Примѣняя къ каждой изъ этихъ двухъ аналитическихъ функцій строку многочленовъ Миттагъ-Леффлера, мы приходимъ къ второй формулировкѣ Вейерштрасса:

Всякая непрерывная функція есть предѣлъ равномѣрно сходящейся строки многочленовъ.

Первая формулировка устанавливаетъ тѣсную связь между изслѣдованіемъ особенностей аналитическихъ функцій и теоріей вещественныхъ функцій, изучающей также и *разрывныя* функціи, для которыхъ удалось дать глубокую и простую классификацію, основанную на томъ, являются ли онѣ совокупностью особыхъ значеній аналитической функціи одной или нѣсколькихъ перемѣнныхъ.

Что же касается формулировки Вейерштрасса, то она естественно наводитъ на мысль о *сходствѣ между аналитическими функціями и раціональными числами.* Подобно тому, какъ раціональныя числа представляютъ группу замкнутую по отношенію ко всѣмъ раціональнымъ дѣйствіямъ и въ тоже время производная совокупность [1]) ихъ совпадаетъ съ совокупностью всѣхъ вещественныхъ чиселъ; аналитическія функціи также представляютъ замкнутую группу по отношенію ко всѣмъ аналитическимъ дѣйствіямъ, и производная совокупность ихъ совпадаетъ съ совокупностью всѣхъ непрерывныхъ функцій. Аналогія эта можетъ

---

[1]) Производной совокупностью данной совокупности называется совокупность предѣловъ элементовъ данной совокупности. Въ настоящемъ изложеніи мы для простоты разсматриваемъ, какъ предѣльныя функціи, лишь предѣлы *равномѣрно* сходящихся рядовъ.

быть проведена и дальше. Подобно тому, какъ иногда въ общихъ разсужденіяхъ о числѣ вопросъ о раціональности его не играетъ роли, въ другихъ же случаяхъ приходится вести разсужденіе при предположеніи, что число раціонально и затѣмъ переходить къ предѣлу; точно также и въ нашихъ разсужденіяхъ о функціяхъ иногда бываетъ проще не дѣлать никакихъ предположеній объ ихъ аналитическомъ характерѣ, но большею частью, оперируя съ неаналитическими функціями, мы должны разсматривать ихъ, какъ предѣлы тѣхъ или иныхъ рядовъ аналитическихъ функцій. Кромѣ того, важно обратить вниманіе на тѣ положенія, которыя являются вообще неправильными, если замѣнить въ нихъ аналитическія функціи произвольными. Не отрицая слѣдовательно теоретической важности изученія неаналитическихъ функцій, не отрицая того, что быть можетъ впослѣдствіи изучая функціи, удовлетворяющія опредѣленнымъ функціональнымъ условіямъ, анализъ естественнымъ путемъ прійдетъ къ практически важнымъ неаналитическимъ функціямъ, которыя будутъ играть въ теоріи функцій не меньшую роль, чѣмъ алгебраическія и простѣйшія трансцендентныя (e, π) числа въ теоріи чиселъ, мы должны признать, что въ настоящее время въ нашихъ рукахъ нѣтъ другого способа изслѣдованія неаналитическихъ функцій, какъ при посредствѣ аналитическихъ.

Такимъ образомъ передъ реалистическимъ направленіемъ выдвигается также важный вопросъ о критеріяхъ для распознаванія аналитическихъ функцій. Критеріи Коши, лежащіе въ основѣ теоріи дифференціальныхъ уравненій, относятся лишь къ функціямъ, которыхъ дано формальное разложеніе въ строку Тэйлора. Обобщенные Гарнакомъ эти критеріи позволили Пикару [1]) обнаружить *аналитическій характеръ рѣшеній линейныхъ дифференціальныхъ уравненій съ частными производными эллиптическаго типа* (т. е. съ мнимыми характеристиками). Однако эти критеріи, будучи достаточными, не необходимы, ибо они предполагаютъ *опредѣленную комплексную область вокругъ вещественныхъ значеній, гдѣ функція не должна имѣть особенностей.* Въ настоящемъ сочиненіи (глава II) мы указываемъ общіе критеріи *необходимые* и *достаточные*, которые въ частности позволяютъ намъ доказать основную теорему въ теоріи уравненій эллиптическаго типа, которая гласитъ:

Всякая функція z, удовлетворяющая аналитическому уравненію

$$F\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, z, x, y\right) = 0 \qquad (1)$$

и неравенству

---

[1]) Первая глава настоящей работы.

$$F'_{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}} \cdot F'_{\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}} - \frac{1}{4}\left(F'_{\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}}\right)^2 > 0 \qquad (2)$$

есть аналитическая функція. (Глава III).

Какъ приложенія этой теоремы укажемъ, что *всѣ минимальныя поверхности, а также всѣ поверхности положительной кривизны, накладывающіяся на аналитическую поверхность* (напримѣръ на эллипсоидъ) *аналитичны.*

Эта теорема, обобщающая теорему Пикара и предугаданная Hilbert'омъ [1]), является частнымъ случаемъ слѣдующаго положенія, которое формулировано мною въ статьѣ „Sur la déformation des surfaces“ помѣщенной въ 1905 году въ Mathematische Annalen [2]):

Всякая функція $f(x_1 x_2 \ldots x_n)$ вещественныхъ перемѣнныхъ $x_1, x_2, \ldots x_n$, удовлетворяющая аналитическому дифференціальному уравненію съ частными производными, которая будучи дана при значеніяхъ перемѣнныхъ $|x_1| < p, |x_2| < p, \ldots |x_n| < p$, гдѣ p какое нибудь положительное число, вполнѣ опредѣлена при $|x_1| < p + \varepsilon$, $|x_2| < p, \ldots |x_n| < p$, гдѣ ε сколь угодно малое число, есть функція аналитическая относительно перемѣнной x_1.

Эти результаты, которые значительно расширяютъ область примѣненія собственно аналитическихъ функцій, выдвигаютъ вопросъ объ *аналитическомъ продолженіи* разсматриваемыхъ рѣшеній. И прежде всего слѣдуетъ рѣшить такой вопросъ: если рѣшеніе Z уравненія эллиптическаго типа существуетъ внутри вещественнаго круга C, напримѣръ, при какихъ условіяхъ оно можетъ быть продолжено за предѣлы этого круга? Отвѣтъ на это слѣдующій: *для того чтобы функція Z могла быть продолжена за предѣлы C, необходимо и достаточно, чтобъ на кругѣ C она обращалась въ аналитическую функцію дуги и имѣла конечныя производныя первыхъ двухъ порядковъ относительно обѣихъ перемѣнныхъ.* Вслѣдъ за этой теоремой, которая допускаетъ цѣлый рядъ интересныхъ обобщеній и особенно важна въ тѣхъ случаяхъ, когда условіе конечности производныхъ можетъ быть отброшено, слѣдуетъ приступить къ изученію особенностей функціи Z внѣ круга C. Этотъ вопросъ разсматривается мною въ четвертой главѣ только для приведенныхъ линейныхъ уравненій эллиптическаго типа

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + a(x, y)\frac{\partial z}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial z}{\partial y} + c(x, y)z = d(x, y);$$

---

[1]) Отчеты объ интернаціональномъ конгрессѣ математиковъ въ Парижѣ въ 1900 г.

[2]) Другой частный случай представляютъ уравненія параболическаго типа, рѣшенія которыхъ аналитичны относительно одной лишь перемѣнной. (Comptes Rendus 12-го января 1905 года).

одинъ изъ наиболѣе интересныхъ результатовъ его изученія заключается въ слѣдующемъ: при предположеніи, что *коэффиціенты уравненія представляютъ собой цѣлыя функціи, рѣшеніе Z, существующее внутри круга C будетъ само цѣлой функціей тогда и только тогда, когда на окружности оно будетъ обращаться въ цѣлую функцію дуги.* Полное изслѣдованіе a priori всѣхъ особенностей внѣ круга *C* является съ точки зрѣнія комплекснаго направленія также и наиболѣе правильнымъ путемъ къ разрѣшенію такъ называемой *задачи Дирикле: опредѣлить функцію, удовлетворяющую данному уравненію эллиптическаго типа, обращающуюся на окружности C, внутри которой она не имѣетъ особенностей, въ данную функцію дуги.* До настоящаго времени, на сколько мнѣ извѣстно, никакихъ попытокъ въ этомъ направленіи еще не было сдѣлано, но не подлежитъ сомнѣнію, что въ нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ (линейныя уравненія) онѣ должны увѣнчаться успѣхомъ и привести къ интереснымъ и изящнымъ результатамъ.

Однако имѣя въ виду въ настоящемъ сочиненіи указать главнымъ образомъ общіе принципы интегрированія *нелинейныхъ* уравненій при первоначальныхъ условіяхъ Дирикле, (которыя могутъ быть и не аналитичными) мы должны будемъ *отказаться отъ комплексной точки зрѣнія.* Точно также намъ не прійдется останавливаться на комплексной сторонѣ изслѣдованій Пуанкарэ и его школы, посвященныхъ интегрированію нѣкоторыхъ частныхъ видовъ линейныхъ уравненій, обобщенныхъ впослѣдствіи Фредгольмомъ и Гильбертомъ. Укажемъ лишь важнѣйшій результатъ этихъ работъ:

Если функція $z(x, y, \lambda)$ перемѣнныхъ x, y и параметра λ есть рѣшеніе задачи Дирикле для уравненія

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\lambda\left(a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}+cz\right)=d$$

гдѣ $c>0$ и функціи $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$, $d(x, y)$ имѣютъ конечныя производныя перваго порядка по x и y; то функція z мероморфна относительно λ и имѣетъ лишь простые положительные полюсы [1]).

Отсюда слѣдуетъ, что для линейныхъ уравненій задача Дирикле вообще возможна за исключеніемъ нѣкоторыхъ особыхъ значеній параметра λ. Изученіе этихъ особыхъ значеній, тѣсно связанное съ вопро-

---

[1]) Для ознакомленія съ вопросомъ укажемъ резюмирующія работы: *Hilbert*, Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. (Nachricht. von der Kön. Gesellschaft der Wissenschaften zu Gottingen 1904—1906; *Steklow*, Théorie générale des fonctions fondamentales (Annales de la Fac. des Sc. de Toulouse 1904); *Picard*, Sur quelques applications de l'équation fonctionnelle de Fredholm (Rendiconti del Circolo Math. di Palermo, 1906).

сомъ о разложеніи произвольныхъ функцій въ строки подобныя (тригонометрическому) ряду Фурье и необходимое для вычисленія рѣшенія при положительныхъ [1]) значеніяхъ λ, становится лишнимъ, если $\lambda < 0$, ибо въ данномъ случаѣ *возможно примѣнить строку Миттагъ-Леффлера, коэффиціенты которой легко опредѣляются при* $\lambda = 0$. Для насъ это послѣднее обстоятельство особенно цѣнно, и его то мы кладемъ въ основу нашей методы интегрированія.

Дѣйствительно, если отъ линейныхъ уравненій мы перейдемъ къ нелинейнымъ и введемъ аналогичный вспомогательный параметръ λ, то окажется въ большинствѣ случаевъ, что искомое рѣшеніе, будучи аналитической функціей λ, не только не мероморфно, но обладаетъ ограниченной областью существованія, и комплексное изученіе ея представляетъ непреодолимыя препятствія; тѣмъ не менѣе при $\lambda = 0$ возможно вычислить всѣ ея послѣдовательныя производныя и построить строку Миттагъ-Леффлера сходящуюся внутри *звѣзды*. Такимъ образомъ, *если будетъ доказано, что нѣкоторое значеніе* λ *находится внутри звѣзды, то тѣмъ самымъ будетъ не только обнаружена возможность соотвѣтствующей задачи Дирикле, но найдено также сходящееся выраженіе для ея рѣшенія.*

Это чисто формальное приведеніе задачи Дирикле къ задачѣ аналитическаго продолженія не даетъ, конечно, непосредственно ключа къ ея разрѣшенію, но, подобно приведенію различныхъ конкретныхъ задачъ къ алгебраическимъ или дифференціальнымъ уравненіямъ, *оно устанавливаетъ опредѣленную логическую схему для нашихъ разсужденій, указывая среди безчисленнаго множества слѣдствій изъ данныхъ задачи одну опредѣленную цѣпь силлогизмовъ, которая приведетъ насъ къ желанной цѣли. Такъ, въ интересующемъ насъ случаѣ сходимость строки Миттагъ-Леффлера, а вмѣстѣ съ нею возможность задачи Дирикле стоитъ въ исключительной зависимости отъ возможности установить a priori высшіе предѣлы модулей послѣдовательныхъ производныхъ предполагаемаго рѣшенія при помощи данныхъ на контурѣ для всѣхъ промежуточныхъ значеній параметра. Ограниченіе послѣдовательныхъ частныхъ производныхъ и составляетъ такимъ образомъ истинную сущность задачи Дирикле.* Въ частности эти общія соображенія примѣняются мною къ интегрированію уравненія

$$A\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = D \qquad (3)$$

---

[1]) Слѣдуетъ замѣтить, что съ измѣненіемъ контура, мѣняются полюсы (и въ этомъ главная трудность задачи), такъ что ни для какого *положительнаго* значенія λ задача Дирикле не является всегда возможной.

гдѣ A, B, C, D аналитическія функціи x, y, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ (причемъ D можетъ зависѣть также и отъ z при условіи $D'_z \geqq 0$). Такимъ образомъ, *устанавливается возможность задачи Дирикле въ случаѣ, когда*

$$A - \frac{B^2}{C} > 0, \quad C - \frac{B^2}{A} > 0$$

и возрастаніе D, при $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ безконечномъ, не быстрѣе квадратовъ этихъ величинъ.

Напримѣръ, для уравненія минимальныхъ поверхностей

$$\left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right]\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

находимъ

$$A - \frac{B^2}{C} = 1 + \frac{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}{1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} > 0, \quad C - \frac{B^2}{A} = 1 + \frac{\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2} > 0, \quad D = 0.$$

Случай *неаналитическихъ* коэффиціентовъ разсматривается, какъ предѣльный случай аналитическихъ, благодаря теоремѣ Вейерштрасса. И вмѣстѣ съ тѣмъ обнаруживается возможность задачи Дирикле, если окружность замѣнить произвольнымъ (съ нѣкоторыми ограниченіями) контуромъ.

Въ настоящемъ сочиненіи я ограничиваюсь изученіемъ уравненій съ одной неизвѣстной функціей отъ двухъ независимыхъ перемѣнныхъ, но не подлежитъ сомнѣнію, что методы, изложенные здѣсь, примѣнимы и въ случаѣ нѣсколькихъ неизвѣстныхъ функцій и бо́льшаго числа перемѣнныхъ. Особенный интересъ представляетъ примѣненіе метода аналитическаго продолженія при болѣе сложныхъ данныхъ на контурѣ, чѣмъ въ разсматриваемомъ мною случаѣ задачи Дирикле.

Вышеизложенное далеко, конечно, не исчерпываетъ всѣхъ дѣйствительныхъ и возможныхъ примѣненій теоріи аналитическихъ функцій, но я имѣлъ въ виду установить лишь два положенія: *общіе пріемы изученія, классификаціи и вычисленія функцій являются необходимымъ условіемъ дальнѣйшаго развитія анализа; теорія аналитическихъ функцій впервые открываетъ эти пріемы, указывая опредѣленный, хотя и не всегда кратчайшій путь къ разрѣшенію всякой задачи анализа—аналитическое продолженіе (съ комплексной или реалистической точки зрѣнія).*

Настоящее же сочиненіе, посвященное интегрированію и изслѣдованію уравненій съ частными производными эллиптическаго типа, является иллюстраціей примѣненія теоріи аналитическихъ функцій къ разрѣшенію вещественныхъ задачъ [1]).

---

[1]) Важнѣйшіе выводы были сообщены мною Парижской Академіи Наукъ 16 ноября 1903 г., 24 ноября 1904 г., 29 мая и 2 октября 1905 г., 5 марта 1906 г., 13 мая 1907 г. Кромѣ того, нѣкоторыя части настоящаго сочиненія представляютъ болѣе или менѣе измѣненный переводъ статей, помѣщенныхъ въ Mathematische Annalen въ 1904 г. „Sur la nature analytique des solutions des équations aux dérivées partielles du second ordre“, въ 1905 г. „Sur la déformation des surfaces“, въ 1906 г. „Sur la généralisation du problème de Dirichlet“.

ПЕРВАЯ ЧАСТЬ

Аналитическая природа рѣшеній дифференціальныхъ уравненій съ частными производными эллиптическаго типа.

Глава I.

Теорема Пикара.

§ 1. Коши первый обратилъ вниманіе геометровъ на замѣчательное свойство нѣкоторыхъ дифференціальныхъ уравненій съ частными производными, что *ихъ интегралы аналитичны, каковы бы ни были входящія въ нихъ произвольныя функціи.*

Простѣйшимъ образцомъ такого уравненія является уравненіе Лапласа

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,$$

(*всякое* рѣшеніе котораго можетъ быть представлено въ видѣ суммы

$$z=f(x+iy)+f_1(x-iy),$$

гдѣ f и f_1 функціи комплексной перемѣнной).

Въ 1890 году Пикаръ [1]) показалъ, что *указаннымъ свойствомъ обладаютъ всѣ дифференціальныя уравненія 2-го порядка эллиптическаго типа:*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}+cz=0, \qquad (5)$$

гдѣ a, b, c *аналитическія* функціи перемѣнныхъ x, y.

Мы приведемъ здѣсь съ нѣкоторыми измѣненіями изящное доказательство Пикара, въ основѣ котораго лежитъ слѣдующая мысль, являющаяся руководящей и для дальнѣйшихъ обобщеній.

---

[1]) Journal de l'Ecole Polytechnique, 1890. Въ 1895 въ C. R. de l'Ac. des Sc. Пикаръ показалъ, что тѣмъ же свойствомъ обладаютъ и *линейныя уравненія высшихъ порядковъ съ мнимыми характеристиками.* Но въ настоящей работѣ мы оставимъ въ сторонѣ уравненія высшаго порядка.

Каждое рѣшеніе z уравненія (5), разсматриваемое въ достаточно малой области, можетъ быть получено путемъ *послѣдовательныхъ приближеній*, т. е. представлено въ видѣ сходящагося ряда аналитическихъ функцій, къ которому примѣняются общіе критеріи для распознаванія аналитическаго характера.

Итакъ, допустимъ, что нѣкоторое рѣшеніе z уравненія (5) конечно внутри части S плоскости вещественныхъ перемѣнныхъ x, y такъ же, какъ и его производныя первыхъ двухъ порядковъ. Въ такомъ случаѣ, полагая начало координатъ O внутри S, для всякой точки внутри этой области будемъ очевидно имѣть:

$$z = z_0 + p_0 x + q_0 y + \frac{1}{2}\varphi_1 x^2 + \varphi_2 xy + \frac{1}{2}\varphi_3 y^2, \tag{6}$$

гдѣ z_0, p_0, q_0 постоянныя величины, а φ_1, φ_2, φ_3 функціи x, y, модуль которыхъ менѣе высшаго предѣла M производныхъ первыхъ двухъ порядковъ z.

Точно также

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p_0 + \psi_1 x + \psi_2 y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q_0 + \pi_1 x + \pi_2 y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \chi_1, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \chi_2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \chi_3$$

гдѣ χ_1, χ_2, π_1, π_2, χ_1, χ_2 и χ_3 менѣе M.

Полагая затѣмъ $x = \varrho \cos\vartheta$, $y = \varrho \sin\vartheta$, получимъ

$$z = z_0 + \varrho(p_0 \cos\vartheta + q_0 \sin\vartheta) + \varrho^2 \Phi_0(\varrho, \vartheta)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p_0 + \varrho \Phi_1(\varrho, \vartheta) \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q_0 + \varrho \Phi_2(\varrho, \vartheta) \tag{7}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \Phi_3(\varrho, \vartheta) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \Phi_4(\varrho, \vartheta) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \Phi_5(\varrho, \vartheta),$$

гдѣ $|\Phi_i| < 2M$, если ϱ менѣе радіуса R' нѣкотораго круга C', цѣликомъ лежащаго въ области S и имѣющаго центръ въ O.

Такимъ образомъ изъ равенства $\frac{\partial z}{\partial \vartheta} = -\frac{\partial z}{\partial x} y + \frac{\partial z}{\partial y} x$ вытекаетъ

$$\frac{\partial \Phi_0}{\partial \vartheta} = -\Phi_1 \sin\vartheta + \Phi_2 \cos\vartheta.$$

И затѣмъ изъ равенства

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\theta^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} y^2 - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} xy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} x^2 - \frac{\partial z}{\partial x} x - \frac{\partial z}{\partial y} y$$

выводимъ

$$\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial\theta^2} = \Phi_3 \sin^2\theta - 2\Phi_4 \sin\theta\cos\theta + \Phi_5 \cos^2\theta - \Phi_1 \cos\theta - \Phi_2 \sin\theta.$$

Слѣдовательно

$$\left|\frac{\partial \Phi_0}{\partial\theta}\right| < 4M, \quad \left|\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial\theta^2}\right| < 10M.$$

Откуда заключаемъ, что на окружности C радіуса R меньшаго, чѣмъ R' (и внутри ея), $\Phi_0(\varrho, \theta)$ разлагается въ тригонометрическій рядъ

$$\Phi_0 = c_0 + \sum_1^\infty c_n \cos n\theta + d_n \sin n\theta,$$

причемъ имѣютъ мѣсто неравенства

$$\begin{aligned} |c_0| + \sum_1^\infty |c_n| + |d_n| &< 82M < N \\ \sum_1^\infty n\{|c_n| + |d_n|\} &< 200M^2 + 4 < N. \end{aligned} \tag{8}$$

Въ самомъ дѣлѣ

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Phi_0 d\theta$$

$$c_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \Phi_0 \cos n\theta\, d\theta = -\frac{1}{n^2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial\theta^2} \cos n\theta\, d\theta$$

$$d_n = -\frac{1}{n^2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial\theta^2} \sin n\theta\, d\theta.$$

Слѣдовательно

$$|c_0| < 2M, \quad |c_n| < \frac{20M}{n^2}, \quad |d_n| < \frac{20M}{n^2}.$$

Отсюда непосредственно вытекаетъ первое изъ неравенствъ (8). Чтобы получить второе неравенство, воспользуемся замѣчательной формулой

$$\int_0^{2\pi}[f(\theta)]^2 d\theta = \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{2\pi} f(\theta)\,d\theta\right]^2 + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left[\int_0^{2\pi} f(\theta)\cos n\theta\, d\theta\right]^2 + \left[\int_0^{2\pi} f(\theta)\sin n\theta\, d\theta\right]^2\right\}.$$

Замѣняя въ ней $f(\theta)$ черезъ $\dfrac{\partial^2 \Phi_0}{\partial \theta^2}$, замѣчаемъ, что

$$\sum_1^{\infty}\{c_n^2 n^4 + d_n^2 n^4\} < 200M^2.$$

Но мы можемъ сдѣлать два предположенія относительно $|nc_n|$: либо $|nc_n| \geqq c_n^2 n^4$; либо $|nc_n| < c_n^2 n^4$. Поэтому замѣчая, что первое предположеніе равносильно $|c_n| \leqq \dfrac{1}{n^3}$, выводимъ искомое неравенство

$$\sum_1^{\infty} n\{|c_n| + |d_n|\} < 200M^2 + 4.$$

Такимъ образомъ, принимая во вниманіе формулы (7), заключаемъ, что на окружности C

$$z = \alpha_0 + \sum_1^{\infty}\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta,$$

причемъ

$$\begin{aligned}
&|\alpha_0 - z_0| + \sum_1^{\infty}|\alpha_n| + |\beta_n| < 2MR + NR^2 < LR \\
&\left|\frac{\alpha_1}{R} - p_0\right| + \sum_2^{\infty}\frac{n}{R}\{|\alpha_n| + |\beta_n|\} < NR < LR \qquad (9) \\
&\left|\frac{\beta_1}{R} - q_0\right| + \sum_2^{\infty}\frac{n}{R}\{|\alpha_n| + |\beta_n|\} < NR < LR.
\end{aligned}$$

Таковы весьма важныя неравенства, которыя мы хотѣли установить.

Примѣнимъ теперь способъ послѣдовательныхъ приближеній къ опредѣленію a priori рѣшенія u уравненія (5), которое на окружности C совпадало бы съ разсмотрѣннымъ рѣшеніемъ z и такъ же, какъ и это послѣднее, имѣло бы конечныя производныя первыхъ двухъ порядковъ внутри C. Далѣе мы увидимъ, и это весьма существенно, что, если кругъ C достаточно малъ, то $z = u$ при всѣхъ значеніяхъ перемѣнныхъ.

Напишемъ систему уравненій:

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}=0,$$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}=a\frac{\partial u_0}{\partial x}+b\frac{\partial u_0}{\partial y}+cu_0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (10)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2}=a\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x}+b\frac{\partial u_{n-1}}{\partial y}+cu_{n-1}.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Опредѣляемъ сначала u_0, присовокупляя условіе, что на окружности C $u_0=z$. Найденное такимъ образомъ значеніе u_0 подставляемъ во второе уравненіе, изъ котораго опредѣляемъ u_1 при условіи, что на окружности C $u_1=z$. И такъ далѣе.

Очевидно, что, если при безконечномъ возрастаніи n, u_n вмѣстѣ съ производными первыхъ двухъ порядковъ стремятся равномѣрно къ нѣкоторымъ предѣламъ, то предѣлъ u_n будетъ нѣкоторой функціей, которая удовлетворяетъ уравненію (5) и на окружности C принимаетъ тѣ же значенія, что и z.

Итакъ нужно доказать, что u_n дѣйствительно стремится къ нѣкоторому предѣлу такъ же, какъ и ея производныя первыхъ двухъ порядковъ, т. е. доказать сходимость рядовъ

$$u=u_0+(u_1-u_0)+(u_2-u_1)+\ldots\ (u_n-u_{n-1})+\ldots$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{\partial(u_1-u_0)}{\partial x}+\ldots \qquad \frac{\partial(u_n-u_{n-1})}{\partial x}+\ldots$$

и т. д.

Кромѣ того, мы покажемъ, что эти ряды представляютъ собой аналитическія функціи. А затѣмъ останется лишь показать, что $u=z$ внутри круга C.

Вмѣсто функцій $u_1, u_2, \ldots, u_n$, удобно разсматривать ихъ разности $v_n=u_n-u_{n-1}$, такъ что

$$u=u_0+v_1+\ldots+v_n+\ldots \qquad (11)$$

и система уравненій (10) приводится къ системѣ:

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}=0$$

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2}=a\,\frac{\partial u_0}{\partial x}+b\,\frac{\partial u_0}{\partial y}+cu_0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (12)$$

$$\frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_n}{\partial y^2}=a\,\frac{\partial v_{n-1}}{\partial x}+b\,\frac{\partial v_{n-1}}{\partial y}+cv_{n-1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

гдѣ v_n опредѣляется условіемъ, что на окружности C $v_n=0$.

Мы видимъ, что на ряду со всѣмъ извѣстнымъ интегрированіемъ уравненія Лапласа при данныхъ значеніяхъ рѣшенія на окружности, наше доказательство требуетъ интегрированія уравненія Пуассона

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=F(x,y) \qquad (13)$$

и кромѣ того, намъ нуженъ критерій для того, чтобъ при разсмотрѣніи полученнаго ряда (11) быть въ состояніи узнать, что онъ представляетъ аналитическую функцію. Итакъ приступимъ сейчасъ къ установленію этого критерія (Гарнака).

§ 2. Лемма. *Положимъ, что $F(x,y)$ аналитическая функція комплексныхъ перемѣнныхъ x и y, правильная при всѣхъ значеніяхъ x и y, удовлетворяющихъ условіямъ $|x+yi|\leqq R$ и $|x-yi|\leqq R$. Если положимъ $x=\varrho\cos\theta$ и $y=\varrho\sin\theta$, то*

$$F(x,y)=F(\varrho\cos\theta,\ \varrho\sin\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta,$$

гдѣ

$$A_n=\varrho^n\sum_{p=0}^{\infty}\alpha_{p,n}\varrho^{2p} \quad \text{и} \quad B_n=\varrho^n\sum_{p=0}^{\infty}\beta_{p,n}\varrho^{2p},$$

причемъ рядъ

$$N=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}R^{n+2p}[|\alpha_{p,n}|+|\beta_{p,n}|]$$

сходится.

Въ самомъ дѣлѣ, если мы введемъ новыя перемѣнныя $z_1=x+yi$ и $z_2=x-yi$, то получимъ

$$F(x,y)=\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}b_{p,q}z_1^p z_2^q$$

При чемъ этотъ рядъ будетъ абсолютно сходящимся при $|z_1| \leqq R$ и $|z_2| \leqq R$. Но $z_1^p z_2^q = \varrho^{p+q}[\cos(p-q)\theta + i\sin(p-q)\theta]$.

Полагая затѣмъ $p - q = \pm n$, такъ чтобъ n всегда было положительнымъ, получаемъ

$$F(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(\varrho)\cos n\theta + B_n(\varrho)\sin n\theta,$$

гдѣ

$$A_n = \varrho^n \sum_{p=0}^{\infty}[b_{p,p+n} + b_{p+n,p}]\varrho^{2p} = \varrho^n \sum_{p=0}^{\infty} \alpha_{p,n}\varrho^{2p}$$

$$B_n = \varrho^n \sum_{p=0}^{\infty} i[b_{p+n,p} - b_{p,p+n}]\varrho^{2p} = \varrho^n \sum_{p=0}^{\infty} \beta_{p,n}\varrho^{2p}$$

Слѣдовательно, рядъ

$$N = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty} R^{n+2p}[|\alpha_{p,n}| + |\beta_{p,n}|] \leqq 2\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} R^{p+q}|b_{p,q}|$$

сходится, что и требовалось доказать.

Мы будемъ обозначать величину N символомъ $[F(x,y)]_R$ и будемъ называть ее нормою функціи $F(x, y)$ относительно R. Послѣ намъ прійдется обобщить это понятіе.

Обратная лемма. *Если данъ тригонометрическій рядъ*

$$\Phi(\varrho, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n\cos n\theta + B_n\sin n\theta$$

гдѣ

$$A_n(\varrho) = \varrho^n \sum_{p=0}^{\infty}\alpha_{p,n}\varrho^{2p} \qquad B_n(\varrho) = \varrho^n \sum_{p=0}^{\infty}\beta_{p,n}\varrho^{2p},$$

котораго норма N конечна, то полагая $x = \varrho\cos\theta$, $y = \varrho\sin\theta$, находимъ, что $\Phi(\varrho, \theta) = F(x, y)$ есть аналитическая функція правильная при всѣхъ комплексныхъ значеніяхъ x и y, удовлетворяющихъ неравенствамъ $|x + yi| < R$ и $|x - yi| < R$.

Въ самомъ дѣлѣ, полагая по прежнему $|x+yi| = z_1$ и $|x-yi| = z_2$ мы убѣждаемся, что

$$\Phi(\varrho, \theta) = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} b_{p,q} z_1^p z_2^q,$$

гдѣ

$$b_{p,p+n} = \frac{\alpha_{p,n} + i\beta_{p,n}}{2}, \qquad b_{p+n,p} = \frac{\alpha_{p,n} - i\beta_{p,n}}{2},$$

откуда слѣдуетъ сходимость ряда

$$\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} R^{p+q}|b_{p,q}| \leqq \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty} R^{n+2p}[|\alpha_{p,n}|+|\beta_{p,n}|] = N,$$

и обратная лемма такимъ образомъ доказана.

Введемъ еще новое обозначеніе.

Пусть дано разложеніе по степенямъ перемѣнныхъ $F(x_1x_2\ldots x_n)$; мы обозначимъ черезъ $\overset{+}{F}(a_1a_2\ldots a_n)$ рядъ, который получится, если замѣнить всѣ коэффиціенты ихъ модулями, а перемѣнныя $x_1x_2\ldots x_n$ соотвѣтственно числами $a_1a_2\ldots a_n$.

Нетрудно теперь доказать слѣдующее неравенство:

$$F[f_1(xy),\ f_2(xy),\ f_3(xy),\ldots f_n(xy)]_R \leqq \overset{+}{F}([f_1(xy)]_R\ldots) \tag{14}$$

Въ самомъ дѣлѣ, для этого достаточно убѣдиться, что

$$[f(xy)+\varphi(xy)]_R \leqq [f(xy)]_R + [\varphi(xy)]_R \tag{14'}$$

и

$$[f(xy).\varphi(xy)]_R \leqq [f(xy)]_R.[\varphi(xy)]_R. \tag{14''}$$

Первое изъ этихъ неравенствъ очевидно; чтобъ доказать второе, положимъ

$$f(xy) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(\varrho)\cos n\theta + B_n(\varrho)\sin n\theta$$

$$\varphi(xy) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(\varrho)\cos n\theta + D_n(\varrho)\sin n\theta$$

Тогда произведеніе $f.\varphi$ выразится суммой членовъ подобныхъ

$$A_p(\varrho).D_q(\varrho)\cos p\theta\sin q\theta = \frac{A_pD_q}{2}[\sin(p+q)\theta+\sin(q-p)\theta],$$

и замѣчая, что

$$\left[\frac{A_pD_q}{2}(\sin(p+q)\theta+\sin(q-p)\theta)\right]_R \leqq \overset{+}{A}_p(R).\overset{+}{D}_q(R)$$

убѣждаемся въ правильности (14″).

§ 3. Мы можемъ приступить теперь къ рѣшенію уравненія (13) полагая, что $F(x,y)$ имѣетъ конечную норму $[F(x,y)]_R$ и, слѣдовательно, аналитична внутри круга C радіуса R.

Отъ замѣны $x = \varrho\cos\theta$, $y = \varrho\sin\theta$ уравненіе (13) получаетъ форму

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial v}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} = F(x,y) = A_0(\varrho) + \sum_1^\infty A_n(\varrho)\cos n\theta + B_n(\varrho)\sin n\theta.$$

Откуда, полагая

$$v = C_0(\varrho) + \sum_1^\infty C_n(\varrho)\cos n\theta + D_n(\varrho)\sin n\theta,$$

находимъ, что при всякомъ значеніи n (не исключая и $n = 0$), C_n и D_n удовлетворяютъ уравненіямъ

$$\begin{aligned} &\frac{d^2 C_n}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{dC}{d\varrho} - \frac{n^2}{\varrho^2} C_n = A_n(\varrho) \\ &\frac{d^2 D_n}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{dD_n}{d\varrho} - \frac{n^2}{\varrho^2} D_n = B_n(\varrho). \end{aligned} \tag{15}$$

Мы не будемъ останавливаться на интегрированіи этихъ уравненій, не представляющемъ трудностей, и дадимъ лишь готовыя формулы, которыя читатель провѣритъ безъ труда.

Если мы хотимъ, чтобъ v обращалось въ нуль при $\varrho = R$ и не имѣло никакихъ особенностей при $\varrho < R$, то мы должны взять рѣшенія уравненій (15), удовлетворяющія тѣмъ же условіямъ. Такимъ образомъ находимъ

$$C_0(\varrho) = \int_R^\varrho \frac{d\varrho}{\varrho}\int_0^\varrho \varrho A_0 d\varrho$$

$$2nC_n(\varrho) = \varrho^n \int_R^\varrho \frac{A_n}{\varrho^{n-1}} d\varrho - \frac{1}{\varrho^n}\int_0^\varrho A_n \varrho^{n+1} d\varrho + \frac{\varrho^n}{R^{2n}}\int_0^R A_n \varrho^{n+1} d\varrho \tag{16}$$

$$2nD_n(\varrho) = \varrho^n \int_R^\varrho \frac{B_n}{\varrho^{n-1}} d\varrho - \frac{1}{\varrho^n}\int_0^\varrho B_n \varrho^{n+1} d\varrho + \frac{\varrho^n}{R^{2n}}\int_0^R B_n \varrho^{n+1} d\varrho.$$

Полезно также привести и другія выраженія для C_n и D_n, имѣющія мѣсто и при $n = 0$. Полагая

$$A_n = \varrho^n \sum_{p=0}^\infty \alpha_{p,n}\varrho^{2p}, \quad B_n = \varrho^n \sum_{p=0}^\infty \beta_{n,p}\varrho^{2p},$$

получаемъ

$$C_n = \varrho^n \sum_{p=0}^{\infty} \gamma_{p,n} \varrho^{2p} = \frac{\varrho^n}{R^{n-2}} \sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{\varrho^{2p+2}}{R^{2p+2}} - 1 \right) \frac{\alpha_{p,n}}{(2p+2)(2p+2n+2)}$$
$$D_n = \varrho^n \sum_{p=0}^{\infty} \delta_{p,n} \varrho^{2p} = \frac{\varrho^n}{R^{n-2}} \sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{\varrho^{2p+2}}{R^{2p+2}} - 1 \right) \frac{\beta_{p,n}}{(2p+2)(2p+2n+2)}. \tag{17}$$

Изъ формулъ (17) выводимъ слѣдующія *чрезвычайно важныя неравенства*

$$\overset{+}{C}_n(R) < \frac{R^2}{2n+2} \overset{+}{A}_n(R) \qquad \frac{d\overset{+}{C}_n(R)}{d\varrho} < \frac{R}{2} \overset{+}{A}_n(R)$$
$$\overset{+}{D}_n(R) < \frac{R^2}{2n+2} \overset{+}{B}_n(R) \qquad \frac{d\overset{+}{C}_n(R)}{d\varrho} < \frac{R}{2} \overset{+}{A}_n(R) \tag{18}$$

Изъ неравенства (18) вытекаетъ во-первыхъ непосредственно

$$[v(x,y)]_R = \overset{+}{C}_0(R) + \sum_{n=1}^{\infty} [\overset{+}{C}_n(R) + \overset{+}{D}_n(R)] < R^2 [F(x,y)]_R. \tag{19}$$

Далѣе, легко показать, что

$$\left[\frac{\partial v}{\partial x}\right]_R < 2R[F(x,y)]_R, \quad \left[\frac{\partial v}{\partial y}\right]_R < 2R[F(x,y)]_R. \tag{19bis}$$

Въ самомъ дѣлѣ,

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial \varrho} \cos\theta - \frac{\partial v}{\partial \theta} \frac{\sin\theta}{\varrho}.$$

Съ другой стороны

$$\left[\frac{\partial v}{\partial \varrho} \cos\theta\right]_R < \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{d\overset{+}{C}_n(R)}{\partial \varrho} + \frac{d\overset{+}{D}_n(R)}{d\varrho} \right\} < R[F(x,y)]_R,$$

а

$$\left[\frac{\partial v}{\partial \theta} \frac{\sin\theta}{\varrho}\right]_R < \sum_{n=1}^{\infty} n \left\{ \frac{\overset{+}{C}_n(R)}{R} + \frac{\overset{+}{D}_n(R)}{R} \right\} < \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{d\overset{+}{C}_n(R)}{d\varrho} + \frac{d\overset{+}{D}_n(R)}{d\varrho} \right\} < R[F(x,y)]_R.$$

Совершенно аналогичное разсужденіе приводитъ и ко второму изъ неравенствъ (19bis).

§ 4. Такимъ образомъ мы закончили всѣ необходимыя приготовленія для того, чтобъ доказать, что, въ случаѣ, если радіусъ R круга C достаточно малъ, *строка* (11) *равномѣрно сходящаяся и представляетъ собой аналитическую функцію.*

Въ самомъ дѣлѣ, возвратимся къ системѣ уравненій (12). Мы замѣчаемъ прежде всего, что u_0, которое на окружности C равно $z = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta$, внутри круга C должно быть равно

$$u_0 = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\varrho}{R}\right)^n [\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta].$$

Но равенства (9) показываютъ намъ, что

$$[u_0(xy)]_R < P, \quad \left[\frac{\partial u_0}{\partial x}\right]_R < P, \quad \left[\frac{\partial u_0}{\partial y}\right]_R < P,$$

гдѣ P есть вполнѣ опредѣленное число.

Примѣняя затѣмъ неравенства (14′) и (14″) и означая буквою Q высшій предѣлъ $[a(xy)]_R$, $[b(xy)]_R$, $[c(xy)]_R$, получаемъ

$$\left[a\frac{\partial u_0}{\partial x} + b\frac{\partial u_0}{\partial y} + cu_0\right]_R < 3PQ.$$

При помощи же неравенствъ (19) и (19bis) находимъ

$$[v_1]_R < 3PQ.R, \quad \left[\frac{\partial v_1}{\partial x}\right]_R < 3PQ.2R,$$
$$\left[\frac{\partial v_1}{\partial x}\right]_R < 3PQ.2R.$$

Если допустимъ, что $R < 1$, то легко найдемъ, что

$$\left[a\frac{\partial v_1}{\partial x} + b\frac{\partial v_1}{\partial y} + cv_1\right]_R < 3PQ.6QR.$$

Послѣдовательно примѣняя неравенства (19) и (19bis), находимъ такимъ образомъ:

$$[v_2]_R < P.(6QR)^2, \quad \left[\frac{\partial v_2}{\partial x}\right]_R < P.(6QR)^2, \quad \left[\frac{\partial v_2}{\partial y}\right]_R < P.(6QR)^2$$

$$[v_3]_R < P.(6QR)^3, \quad \left[\frac{\partial v_3}{\partial x}\right]_R < P.(6QR)^3, \quad \left[\frac{\partial v_3}{\partial y}\right]_R < P.(6QR)^3$$

. . . . . .

$$[v_n]_R < P.(6QR)^n, \quad \left[\frac{\partial v_n}{\partial x}\right]_R < P.(6QR)^n, \quad \left[\frac{\partial v_n}{\partial y}\right]_R < P.(6QR)^n.$$

Достаточно такимъ образомъ предположить, что $R < \frac{1}{6Q}$, для того, чтобы строка $u = u_0 + v_1 + \ldots + v_n + \ldots$ была *равномѣрно сходящеюся и имѣла конечную норму внутри круга C и слѣдовательно* (на основаніи обратной леммы § 2) *была аналитической*. Наконецъ, чтобъ не было сомнѣній, что u дѣйствительно удовлетворяетъ уравненію (1), нужно показать сходимость рядовъ

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{dx} + \ldots, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \ldots, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \ldots \text{ и т. д.}$$

Но это, очевидно, вытекаетъ, на основаніи извѣстной теоремы изъ теоріи функцій, изъ сходимости ряда u при $x + yi = R$ и $x - yi = R$.

Итакъ аналитическая функція u есть рѣшеніе уравненія (5), *которое на окружности C совпадаетъ съ z*. Остается показать, что u вообще тождественно съ z. Однако мы сдѣлаемъ это послѣ, а сначала покажемъ вслѣдъ за гг. Люткемейеръ [1]) и Гольмгренъ [2]), что разсужденіе Пикара безъ существенныхъ измѣненій можетъ быть примѣнено къ уравненіямъ вида

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f\left(xyz\,\frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{\partial z}{\partial y}\right), \tag{20}$$

гдѣ f есть нѣкоторая аналитическая функція перемѣнныхъ

$$x,\ y,\ z,\ \frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y}.$$

§ 5. Подобно системѣ уравненій (10) составляемъ систему

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} = f(00 z_0 p_0 q_0) = A$$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = f\left(xyu_0\,\frac{\partial u_0}{\partial x}\,\frac{\partial u_0}{\partial y}\right)$$

. . . . . .

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2} = f\left(xyu_{n-1}\,\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x}\,\frac{\partial u_{n-1}}{\partial y}\right)$$

. . . . . .

---

[1]) Göttingen, Dissertation. 1902.

[2]) Mathematische Annalen. 1903.

гдѣ z_0, p_0, q_0 представляютъ значенія z и ея первыхъ производныхъ въ началѣ координатъ, а u_n попрежнему на окружности C достаточно малаго радіуса R совпадаетъ съ z. Мы можемъ опять положить $u = u_0 + v_1 + \ldots + v_n$, гдѣ $v_n = u_n - u_{n-1}$. Тогда задача сведется снова къ изслѣдованію ряда u, при чемъ для опредѣленія v_n мы имѣемъ систему

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} = A,\\
&\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} = f\left(xyu_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial u_0}{\partial y}\right) - A,\\
&\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2} = f\left(xyu_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial u_1}{\partial y}\right) - f\left(xyu_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial u_0}{\partial y}\right), \qquad (21)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_n}{\partial y^2} = f\left(xyu_{n-1} \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} \frac{\partial u_{n-1}}{\partial y}\right) - f\left(xyu_{n-2} \frac{\partial u_{n-2}}{\partial x} \frac{\partial u_{n-2}}{\partial y}\right).\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Замѣчая, что

$$A\frac{x^2 + y^2 - R^2}{4}$$

есть рѣшеніе уравненія

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = A,$$

гдѣ A постоянная величина, которая обращается въ нуль на окружности C, получаемъ благодаря неравенствамъ (9)

$$\begin{aligned}
&[u_0 - z_0]_R < AR^2 + LR < \lambda,\\
&\left[\frac{\partial u_0}{\partial x} - p_0\right]_R < AR + LR < \lambda, \qquad (22)\\
&\left[\frac{\partial u_0}{\partial y} - q_0\right]_R < AR + LR < \lambda.
\end{aligned}$$

Очевидно, беря R достаточно малымъ, можемъ сдѣлать λ сколь угодно малымъ. Но

$$\begin{aligned}
f\left(x, y, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x}, \frac{\partial u_0}{\partial y}\right) - f(0, 0, z_0, p_0, q_0) &= P_0 . x + P_1 . y + P_2 . (u_0 - z_0) +\\
&+ P_3 . \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} - p_0\right) + P_4 . \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} - q_0\right),
\end{aligned}$$

гдѣ

$$P_i\left(x,\ y,\ u_0 - z_0,\ \frac{\partial u_0}{\partial x} - p_0,\ \frac{\partial u_0}{\partial y} - q_0\right),$$

разлагаются въ строку Тэйлора; при чемъ, если R' менѣе радіуса сходимости P_i по каждой перемѣнной, то

$$\overset{+}{P}_i(R',\ R',\ R',\ R',\ R') < Q,$$

обозначая черезъ Q нѣкоторое опредѣленное число.

Вообще

$$f\left(xyu_n \frac{\partial u_n}{\partial x} \frac{\partial u_n}{\partial y}\right) - f\left(xyu_{n-1} \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} \frac{\partial u_{n-1}}{\partial y}\right) = P_2 v_n + P_3 \frac{\partial v_n}{\partial x} + P_4 \frac{\partial v_n}{\partial y},$$

гдѣ

$$P_i\left(x,\ y,\ u_n - z_0,\ \frac{\partial u_n}{\partial x} - p_0,\ \frac{\partial u_n}{\partial y} - q_0,\ u_{n-1} - z_0,\ \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} - p_0,\ \frac{\partial u_{n-1}}{\partial y} - q_0\right)$$

разлагаются въ строку Тэйлора и

$$\overset{+}{P}_i(R',\ R',\ R',\ R',\ R',\ R',\ R',\ R') < Q.$$

Тогда изъ неравенства (14) слѣдуетъ, что *норма* P_i *менѣе* Q.

Такимъ образомъ доказательство представляется въ слѣдующемъ видѣ.

На основаніи неравенствъ (22)

$$\left[f\left(x,\ y,\ u_0,\ \frac{\partial u_0}{\partial x},\ \frac{\partial u_0}{\partial y}\right) - f(0,\ 0,\ z,\ p_0,\ q_0)\right]_R < 2QR + 3Q\lambda = L_1$$

и вслѣдствіе (19) и (19bis), полагая $R < 1$, находимъ

$$[v_1]_R < 2RL_1,\ \left[\frac{\partial v_1}{\partial x}\right]_R < 2RL_1,\ \left[\frac{\partial v_1}{\partial y}\right]_R < 2RL_1,$$

откуда

$$\left[f\left(xyu_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial u_1}{\partial y}\right) - f\left(xyu_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial u_0}{\partial y}\right)\right]_R < 6QRL_1,$$

такъ что послѣдовательно находимъ:

$$[v_2]_R < 2RL_1.6QR,\ \left[\frac{\partial v_2}{\partial x}\right]_R < 2RL_1.6QR,\ \left[\frac{\partial v_2}{\partial y}\right]_R < 2RL.6QR$$

. . . . . .

$$[v_n]_R < 2RL_1.(6QR)^{n-1},\ \left[\frac{\partial v_n}{\partial x}\right]_R < 2RL_1.(6QR)^{n-1},\ \left[\frac{\partial v_n}{\partial y}\right]_R < 2RL.(6QR)^{n-1}$$

Очевидно, чтобъ наше разсужденіе было правильно, необходимо только предположить, что

$$[u_0 - z_0]_R + [v_1]_R + \ldots\ [v_n]_R < R'$$
$$\left[\frac{\partial u_0}{\partial x} - p_0\right]_R + \left[\frac{\partial v_1}{\partial x}\right]_R + \ldots + \left[\frac{\partial v_n}{\partial x}\right]_R < R'$$
$$\left[\frac{\partial u_0}{\partial y} - q_0\right]_R + \left[\frac{\partial v_1}{\partial y}\right]_R + \ldots + \left[\frac{\partial v_n}{\partial y}\right]_R < R'$$

или, полагая $R < \frac{1}{6Q}$, предположить, что

$$\lambda + \frac{2RL_1}{1 - 6QR} < R'.$$

Но это предположеніе будетъ осуществленно, если R возьмемъ достаточно малымъ. Слѣдовательно, рядъ $u = u_0 + v_1 + \ldots + v_n + \ldots$ сходится, и норма его конечна, откуда по примѣру предыдущаго § вытекаетъ во-первыхъ, что *и есть рѣшеніе уравненія* (20), *которое на контуръ маленькаго круга C совпадаетъ съ z* и во-вторыхъ, что *и есть аналитическая функція.*

Однако все наше разсужденіе окажется недостаточнымъ для доказательства теоремы Пикара, если мы не обнаружимъ полную тождественность найденнаго рѣшенія и даннаго рѣшенія z; для этого поступимъ слѣдующимъ образомъ. По предположенію

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f\left(xyz\,\frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{\partial z}{\partial y}\right),\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f\left(xyu\,\frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Вычитая первое уравненіе изъ второго и полагая $\delta = u - z$, получимъ

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \delta}{\partial y^2} = A\frac{\partial \delta}{\partial x} + B\frac{\partial \delta}{\partial y} + C\delta, \qquad (23)$$

гдѣ A, B, C суть конечныя функціи x, y, имѣющія конечныя производныя перваго порядка по этимъ перемѣннымъ. [Въ случаѣ линейности f, функціи A, B, C, совпадаютъ съ коэффиціентами a, b, c уравненія (5)]. Съ другой стороны, модуль

$$\left| A\frac{\partial \delta}{\partial x} + B\frac{\partial \delta}{\partial y} + C\delta \right| < 3\mu N,$$

гдѣ μ наибольшій изъ модулей $|A|$, $|B|$, $|C|$, а N наибольшій изъ модулей $\left|\frac{\partial\delta}{\partial x}\right|$, $\left|\frac{\partial\delta}{\partial y}\right|$, $|\delta|$. Но, такъ какъ δ обращается въ нуль на окружности C, то, примѣняя формулу Грина [1]), получимъ

$$N \leqq h\mu RN,$$

гдѣ h нѣкоторый постоянный множитель. Полученное неравенство, очевидно, не допускаетъ иного рѣшенія, какъ $N=0$, если $R<\frac{1}{h\mu}$. Отсюда заключаемъ, что $\delta = u - z = 0$, *и теорема Пикара съ обобщеніемъ Люткемейера и Гольмрена вполнѣ доказана.*

Прежде, чѣмъ приступить къ доказательству основной теоремы теоріи уравненій эллиптическаго типа въ самой общей формѣ, мы должны прослѣдить главные моменты только что даннаго доказательства. Мы видимъ, что намъ приходилось примѣнять способъ послѣдовательныхъ приближеній при условіяхъ, когда *вторая часть равенства не содержитъ вторыхъ производныхъ*; благодаря неравенствамъ (19) и (19bis), возможно было всегда находить высшіе предѣлы нормъ рѣшенія уравненія Пуассона и его первыхъ производныхъ. Но задача наша весьма затруднилась бы, еслибъ, во второй части равенства находились и вторыя производныя, *такъ какъ ограничить нормы вторыхъ производныхъ мы не можемъ*. Естественно поэтому возникаетъ мысль, такъ видоизмѣнить понятіе нормы (которою обусловливается аналитическій характеръ функціи), чтобы *нормы вторыхъ производныхъ рѣшенія могли также быть ограничены при помощи нормы второй части равенства въ уравненіи Пуассона*. Но возможно ли такое видоизмѣненіе? Въ этомъ, конечно, можно убѣдиться, только совершивши его на самомъ дѣлѣ. Изъ предыдущаго мы можемъ уже, однако, увидѣть, что если изъ конечности употребленной нами нормы вытекаетъ аналитическій характеръ функціи, то обратное утвержденіе не вѣрно, ибо, какъ это слѣдуетъ изъ § 2 *конечность нормы свидѣтельствуетъ о томъ, что функція не имѣетъ особенностей при* $|x+iy|<R$ *и* $|x-iy|<R$, *гдѣ* x, y *берутъ какія угодно комплексныя значенія*. Естественно, поэтому, что *вообще* указанный критерій (Гарнака) неудовлетворителенъ.

Въ слѣдующей главѣ мы займемся вопросомъ объ общихъ способахъ выраженія вещественныхъ функцій и о критеріяхъ для опредѣленія аналитической ихъ природы.

---

[1]) Holmgren, Mathematische Annalen. 1903.

Глава II.

Нормальные ряды.

§ 6. Если нѣкоторая функція

$$f(x) = P_0(x) + P_1(x) + \ldots + P_n(x) + \ldots$$

получена не *искусственно*, а какъ результатъ рѣшенія опредѣленной задачи, то рядъ, ее выражающій, обыкновенно составляется слѣдующимъ образомъ: $P_0(x)$ есть нѣкоторая аналитическая комбинація изъ нѣсколькихъ данныхъ функцій (т. е. содержитъ кромѣ собственно аналитическихъ функцій отъ данныхъ функцій, производныя и интегралы этихъ послѣднихъ), $P_1(x)$ аналитическая комбинація изъ $P_0(x)$ и данныхъ функцій и т. д. Таково напримѣръ выраженіе, которое мы нашли для рѣшенія *и* въ первой главѣ. Естественно поэтому выражать функціи при помощи такихъ выраженій, чтобъ всѣ возможныя аналитическія дѣйствія (сложеніе, умноженіе, дифференцированіе, интегрированіе) могли совершаться надъ ними *почленно*, приводя къ выраженіямъ такой же формы. Легко убѣдиться, что единственнымъ выраженіемъ, обладающимъ этимъ свойствомъ является *рядъ, расположенный по степенямъ линейныхъ функцій перемѣнной*. Если такая линейная функція взята лишь одна, то получается *рядъ Тэйлора*, и въ этомъ его свойствѣ кроется причина его важной роли въ анализѣ. Но къ сожалѣнію въ примѣненіи къ функціямъ вещественной перемѣнной, строка Тэйлора обладаетъ крупнымъ недостаткомъ, что сходимость ея обусловливается *отсутствіемъ особыхъ точекъ внутри цѣлой окружности*; такъ что, напримѣръ функція $\frac{1}{1+2x^2}$ не можетъ быть представлена въ видѣ сходящейся на отрѣзкѣ $(-1, +1)$ строки Тэйлора, несмотря на то, что она не имѣетъ никакихъ вещественныхъ особенностей. Понятно, поэтому, что, если мы хотимъ получить, непремѣнно, рѣшеніе той или иной задачи въ видѣ строки Тэйлора, то мы по большей части, для коэффиціентовъ различныхъ степеней строки получимъ формальныя расходящіяся выраженія. Желая сохранить цѣнныя свойства строки Тэйлора для вещественныхъ функцій, мы должны замѣнить ее двойнымъ рядомъ, расположеннымъ *по возрастающимъ степенямъ двухъ линейныхъ функцій*. Такимъ образомъ мы приходимъ къ *нормальнымъ рядамъ*, которые мы назвали такъ, считая ихъ въ силу указанныхъ свойствъ

весьма удобными выраженіями вещественныхъ функцій. Между способами изученія функцій, разложенныхъ въ нормальные ряды, и функцій, представленныхъ строкой Тэйлора, много точекъ соприкосновенія; разница вытекаетъ лишь изъ того, что на каждомъ отрѣзкѣ функція допускаетъ безчисленное множество нормальныхъ разложеній.

Итакъ *нормальнымъ рядомъ мы назовемъ рядъ*

$$\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} A_{p,q}x^p(R-x)^q$$

абсолютно и равномѣрно сходящійся при $0 \leqq x \leqq R$. Нормальный рядъ, очевидно, обладаетъ формальными свойствами строки Тэйлора—а именно, всѣ аналитическія дѣйствія надъ нормальными рядами: сложеніе, умноженіе, дифференцированіе, интегрированіе приводятъ къ тѣмъ же нормальнымъ рядамъ. Эта цѣнная особенность нормальныхъ рядовъ не разъ будетъ использована нами. Но сначала мы покажемъ, что всякая вещественная (аналитическая или не аналитическая) функція, обладающая конечной и непрерывной *первой* производной, можетъ быть представлена въ видѣ нормальнаго ряда, а затѣмъ укажемъ критерій необходимый и достаточный, для того чтобъ этотъ рядъ представлялъ аналитическую функцію.

Теорема. *Всякая вещественная функція* $f(x)$, *имѣющая конечную вторую производную на отрѣзкѣ* 01, *разлагается въ нормальный рядъ на этомъ отрѣзкѣ.*

Въ самомъ дѣлѣ, дифференцируя два раза равенство

$$f(x) = \frac{1}{2}\int_0^1 f''(\alpha)\,|x-\alpha|\,d\alpha + A + Bx,$$

гдѣ $|x-\alpha|$ означаетъ модуль $x-\alpha$, A и B постоянныя величины [1]), легко провѣрить его правильность, ибо прійдемъ къ тождествамъ:

$$f'(x) = \frac{1}{2}\int_0^x f''(\alpha)d\alpha - \frac{1}{2}\int_x^1 f''(\alpha)d\alpha + B$$

или

$$f''(x) = f''(x).$$

Такимъ образомъ наша теорема будетъ доказана, если намъ удастся разложить въ нормальный рядъ $|x-\alpha|$ при всякомъ значеніи α, удовлетворяющемъ условію $0 \leqq \alpha \leqq 1$.

---

[1]) Значенія A и B слѣдующія: $A = \frac{1}{2}\{f(1)+f(0)-f'(1)\}$, $B = \frac{1}{2}\{f'(0)+f'(1)\}$. (См. мою замѣтку въ Bulletin de la Société Mathématique de France 1905 г. „Sur l'interpolation“).

Но для этого достаточно замѣтить, что

$$|x-\alpha| = +\sqrt{1+\alpha^2-(1-x^2+2\alpha x)} =$$
$$= \sqrt{1+\alpha^2}\left\{1-\frac{1}{2}\left(\frac{1-x^2+2\alpha x}{1+\alpha^2}\right)-\sum_{K=2}^{\infty}\frac{1.3\ldots 2K-3}{2^K.K!}\left(\frac{1-x^2+2\alpha x}{1+\alpha^2}\right)^K\right\}.$$

Полученный рядъ, какъ извѣстно изъ теоріи бинома Ньютона, *абсолютно и равномѣрно* сходится при значеніяхъ x удовлетворяющихъ неравенствамъ

$$-1 \leqq \frac{1-x^2+2\alpha x}{1+\alpha^2} \leqq 1,$$

что въ частности имѣетъ мѣсто, если $0 \leqq x \leqq 1$. Слѣдовательно, замѣчая, что $(1-x^2)$, такъ же какъ и $2\alpha x$ положительны, заключаемъ, что абсолютная сходимость не нарушится, если разобьемъ нашъ простой рядъ на двойной, полагая

$$(1-x^2+2\alpha x)^K = (1-x^2)^K + K.2\alpha x(1-x^2)^{K-1} + \ldots\ (2\alpha x)^K,$$

такъ что получимъ наконецъ

$$|x-\alpha| = \sqrt{1+\alpha^2}.\left\{1-\frac{1}{2}\left(\frac{1-x^2+2\alpha x}{1+\alpha^2}\right)-\sum_{p}^{\infty}\sum_{q}^{\infty}B_{p,q}x^p(1-x^2)^q\right\},$$

гдѣ двойная сумма относится ко всѣмъ положительнымъ числамъ p и q, удовлетворяющимъ условію $p+q \geqq 2$, при чемъ

$$B_{p,q} = \frac{1.3\ldots[2(p+q)-3].\alpha^p}{p!\,q!\,2^q.(1+\alpha^2)^{p+q}}.$$

Откуда

$$f(x) = a+bx+cx^2+\sum_{p}^{\infty}\sum_{q}^{\infty}A_{p,q}x^p(1-x^2)^q,$$

гдѣ двойная сумма относится къ положительнымъ числамъ p, q, удовлетворяющимъ условію $p+q \geqq 2$, при чемъ

$$A_{p,q} = -\frac{1.3\ldots[2(p+q)-3]}{p!\,q!\,2^{q+1}}\int_0^1 f'''(\alpha)\frac{\alpha^p d\alpha}{(1+\alpha^2)^{p+q-\frac{1}{2}}}. \qquad (24)$$

Что касается коэффиціентовъ a, b, c, то ихъ выраженіе читатель найдетъ самъ, но сейчасъ для насъ они не представляютъ интереса. Такимъ образомъ теорема доказана, и найдено фактически разложеніе данной функціи въ нормальный рядъ.

Не останавливаясь на весьма интересномъ изученіи a priori нормальнаго ряда, котораго коэффиціенты даны формулой (24), что отвлекло бы насъ слишкомъ далеко въ сторону, придадимъ лишь этимъ коэффиціентамъ при помощи интегрированія по частямъ [1]) новую форму, изъ которой видно будетъ, что *всякая функція, имѣющая непрерывную и конечную первую производную, разлагается въ нормальный рядъ*. Очевидно,

$$A_{pq} = -\frac{1.3\ldots[2(p+q)-3]}{p!\,q!\,2^{q+1}}\left[\frac{f'(1)}{2^{p+q-\frac{1}{2}}} - \int_0^1 f'(\alpha)d\frac{\alpha^p}{(1+\alpha^2)^{p+q-\frac{1}{2}}}\right],$$

если $p \neq 0$, и

$$A_{0q} = -\frac{1.3\ldots(2q-3)}{q!\,2^{q+1}}\left[\frac{f'(1)}{2^{q-\frac{1}{2}}} - f'(0) - \int_0^1 f'(\alpha)d\frac{1}{(1+\alpha^2)^{q-\frac{1}{2}}}\right]$$

или, полагая для простоты $f'(1) = f'(0) = 0$ (чего всегда можно достигнуть измѣненіемъ коэффиціентовъ a, b, c)

$$A_{p,q} = \frac{1.3\ldots[2(p+q)-3]}{2^{q+1}\,!\,p\,!\,q\,!}\int_0^1 f'(\alpha).d\frac{\alpha^p}{(1+\alpha^2)^{p+q-\frac{1}{2}}} \qquad (24^{\text{bis}})$$

Полагая $|f'(\alpha)| < M$ и замѣчая, что

$$\frac{\alpha^p}{(1+\alpha^2)^{p+q-\frac{1}{2}}}$$

имѣетъ лишь одинъ максимумъ равный

$$\frac{\left(\frac{p}{2}\right)^{\frac{p}{2}}\cdot\left[\frac{p}{2}+q-\frac{1}{2}\right]^{\frac{p}{2}+q-\frac{1}{2}}}{\left(p+q-\frac{1}{2}\right)^{p+q-\frac{1}{2}}},$$

находимъ, что

$$|A_{p,q}| < \frac{1.3\ldots[2(p+q)-3]}{2^q.p\,!\,q\,!}\cdot\frac{\left(\frac{p}{2}\right)^{\frac{p}{2}}\cdot\left(\frac{p}{2}+q-\frac{1}{2}\right)^{\frac{p}{2}+q-\frac{1}{2}}}{\left(p+q-\frac{1}{2}\right)^{p+q-\frac{1}{2}}}.M.$$

---

[1]) Легко видѣть, что коэффиціенты (24) имѣютъ смыслъ для всякой *интегрируемой* функціи.

Разсмотримъ сначала коэффиціенты A_{pq}, соотвѣтствующіе p *четному*, и положимъ

$$C_{p,q}=\frac{\left(\frac{p}{2}+q\right)!}{\left(\frac{p}{2}\right)!\,q!}$$

Тогда, замѣчая, что

$$1.3\ldots[2(p+q)-3]=\frac{[2(p+q-1)]!}{2^{p+q-1}.(p+q-1)!},$$

получимъ

$$|A_{p,q}|<\frac{[2(p+q-2)]!\left(\frac{p}{2}\right)!}{2^{p+2q-1}.(p+q-1)!p!\left(\frac{p}{2}+q\right)!}\cdot\frac{\left(\frac{p}{2}\right)^{\frac{p}{2}}\left(\frac{p}{2}+q-\frac{1}{2}\right)^{\frac{p}{2}+q-\frac{1}{2}}}{\left(p+q-\frac{1}{2}\right)^{p+q-\frac{1}{2}}}C_{p,q}M.$$

Примѣняя извѣстную формулу Стирлинга, находимъ такимъ образомъ, означая черезъ λ нѣкоторое опредѣленное (т. е. независящее отъ p, q и M) конечное число:

$$|A_{p,q}|<\frac{(p+q-1)^{p+q-1}.\left(\frac{p}{2}+q-\frac{1}{2}\right)^{\frac{p}{2}+q-\frac{1}{2}}}{\left(\frac{p}{2}+q\right)^{\frac{p}{2}+q}.\left(p+q-\frac{1}{2}\right)^{p+q-\frac{1}{2}}}\cdot\frac{\lambda C_{p,q}M}{\sqrt{\frac{p}{2}+q}}$$

или еще, означая черезъ μ нѣкоторое новое опредѣленное конечное число,

$$|A_{p,q}|<\frac{\mu C_{pq}M}{\left(\frac{p}{2}+q\right)\sqrt{p+q}}.$$

Но сумма

$$\sum C_{p,q}x^p(1-x^2)^q=1,$$

если p и q принимаютъ всевозможныя цѣлыя положительныя значенія, удовлетворяющія условію $\frac{p}{2}+q=m$, гдѣ m есть какое-нибудь опредѣленное цѣлое положительное число. Слѣдовательно, приходимъ къ выводу, что двойная сумма, относящаяся лишь къ четнымъ значеніямъ p

$$\sum_p^\infty\sum_q^\infty|A_{pq}|x^p(1-x^2)^q<\mu\sum_m^\infty\frac{1}{m^{3/2}}<k_1M.$$

Точно такимъ же образомъ обнаруживается абсолютная и равномѣрная сходимость ряда при p нечетномъ, такъ что для всѣхъ значеній p и q

$$\sum_{p}^{\infty}\sum_{q}^{\infty}|A_{p,q}|x^p(1-x^2)^q<kM,$$

гдѣ k нѣкоторый опредѣленный коэффиціентъ.

Итакъ сходимость зависитъ исключительно отъ существованія высшаго предѣла модуля первой производной. Однако мы предполагали, что функція $f(x)$ обладаетъ и второй производной. Чтобъ избавиться отъ этого лишняго условія, приведемъ слѣдующее элементарное соображеніе, въ которомъ мы сохраняемъ для простоты предположеніе, что *первая производная* $f'(x)$ *непрерывна*. Пусть

$$f(x)=f_1(x)+[f_2(x)-f_1(x)]+\ldots+[f_n-f_{n-1}]+\ldots$$

и

$$f'(x)=f_1'(x)+[f_2'(x)-f_1'(x)]+\ldots\quad[f_n'-f_{n-1}']+\ldots$$

ряды, которые сходятся абсолютно и равномѣрно при $0\leqq x\leqq 1$. При чемъ можемъ выбрать функціи $f_n(x)$ слѣдующимъ образомъ: раздѣлимъ отрѣзокъ 01 на 2^n равныя части; и пусть $f_n(x)$ опредѣляется условіями: чтобъ во-первыхъ $f_n'\left(\frac{k}{2^n}\right)=m_k$, гдѣ k цѣлое положительное число (или 0), и m_k минимальное значеніе $f'(x)$ на отрѣзкѣ равномъ $\frac{1}{2^{n-1}}$, котораго середина въ точкѣ $\frac{k}{2^n}$, во-вторыхъ $f_n(0)=f(0)$, и наконецъ, въ третьихъ, въ промежуткахъ между точками дѣленія кривая $y=f_n(x)$ совпадаетъ съ дугой окружности; такъ что вся кривая $y=f_n(x)$ является цѣпью дугъ окружностей, соприкасающихся въ точкахъ соединенія.

Слѣдовательно, согласно предыдущему $f_n(x)$ разлагается въ нормальный рядъ

$$f_n(x)=\sum_{p}^{\infty}\sum_{q}^{\infty}A_{p,q}^{(n)}x^p(1-x^2)^q.$$

Но съ другой стороны мы можемъ написать *a priori*

$$F(x)=\sum_{p}^{\infty}\sum_{q}^{\infty}A_{p,q}x^p(1-x)^q,$$

гдѣ коэффиціенты $A_{p,q}$ опредѣляются формулой (24bis). Тогда

$$F(x)-f_n(x)=\sum_{p}^{\infty}\sum_{q}^{\infty}(A_{p,q}-A_{p,q}^{(n)})x^p(1-x^2)^q,$$

при чемъ, на основаніи предыдущаго,

$$\sum_{p}^{\infty}\sum_{q}^{\infty}\left|A_{p,q}-A_{p,q}^{(n)}\right|x^p(1-x^2)^q<k\varepsilon_n,$$

гдѣ ε_n означаетъ максимумъ модуля разности $f'(x)-f'_n(x)$. Слѣдовательно,

$$F(x)=f_1(x)+[f_2(x)-f_1(x)]+\ldots\ [f_n(x)-f_{n-1}(x)]+\ldots,$$

или

$$F(x)=f(x).$$

Что и требовалось доказать.

Изъ предыдущаго видно съ достаточной ясностью, что нормальные ряды вполнѣ приспособлены для выраженія произвольныхъ функцій. Замѣтимъ также, что полагая $y=\frac{x}{1-x}$, можно придать нормальному ряду форму

$$\sum_{p}^{\infty}\sum_{q}^{\infty}\frac{A_{p,q}y^p}{(1+y)^{p+q}},$$

которая должна быть употреблена для изображенія функцій при всѣхъ положительныхъ значеніяхъ перемѣнныхъ.

§ 7. Въ нашу задачу не входитъ останавливаться на различныхъ примѣненіяхъ нормальныхъ рядовъ, изъ которыхъ наибольшій интересъ представляетъ суммированіе расходящихся при всѣхъ значеніяхъ перемѣнной строкъ Тэйлора, къ которому мы надѣемся вернуться въ ближайшемъ будущемъ.

Въ настоящій моментъ мы ограничимся изученіемъ особыхъ свойствъ характеризующихъ нормальные ряды, изображающіе *аналитическія* функціи. Изъ доказанной выше теоремы слѣдуетъ, *что аналитическая функція, не имѣющая особенностей на отрѣзкѣ* 01, *разлагается въ нормальный рядъ на этомъ отрѣзкѣ.* Въ виду важности этой послѣдней теоремы, мы дадимъ еще одно ея доказательство, основанное на примѣненіи интеграла Коши, которое естественнымъ путемъ приведетъ насъ къ искомымъ критеріямъ аналитическаго характера.

Для этого окружимъ отрѣзокъ 01 контуромъ S, внутри котораго $f(x)$ по предположенію не имѣетъ особенностей. Въ такомъ случаѣ значеніе функціи въ любой точкѣ x отрѣзка 01 дано интеграломъ Коши:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_S\frac{f(z)dz}{z-x}.$$

Мы видимъ такимъ образомъ, что достаточно доказать нашу теорему для простой дроби $\frac{A}{a+bi-x}$, гдѣ A есть постоянная величина (по отношенію къ x), а $a+bi$ какая нибудь точка контура S. Но, если $a<0$, то строка Тэйлора по степенямъ $(1-x)$, будучи абсолютно и равномѣрно сходящейся при $0\leqq x\leqq 1$, сама является нормальнымъ рядомъ, точно такъ же, какъ строка расположенная по степенямъ x — въ случаѣ, когда $a>1$. Остается разсмотрѣть случай, когда $0\leqq a\leqq 1$. Для этого замѣтимъ, что

$$\frac{1}{a+bi-x}=\frac{a-x-bi}{x^2-2ax+a^2+b^2}.$$

Поэтому мы, очевидно, можемъ ограничиться разсмотрѣніемъ дроби

$$v=\frac{1}{x^2-2ax+a^2+b^2},$$

гдѣ $0\leqq a\leqq 1$ и $b\neq 0$. Въ такомъ случаѣ

$$v=\frac{1}{1+a^2+b^2-[2ax+1-x^2]}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{a^2+b^2+1}\left(\frac{2ax+1-x^2}{a^2+b^2+1}\right)^n=$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-x)^n(1+x)^n}{(a^2+b^2+1)^{n+1}}\left[1+(n+1)\frac{2ax}{a^2+b^2+1}+\ldots\right]$$

Но полагая

$$P_n(x)=\frac{(1+x)^n}{(a^2+b^2+1)^{n+1}}\left[1+(n+1)\frac{2ax}{a^2+b^2+1}+\ldots\right]=$$
$$=\frac{(1+x)^n}{(a^2+b^2+1-2ax)^{n+1}},$$

замѣчаемъ, что всѣ члены ряда $P_n(x)$, при $0\leqq x\leqq 1$, положительны и

$$|(1-x)^n\overset{+}{P}_n(x)|=\frac{(1-x^2)^n}{(a^2+b^2+1-2ax)^{n+1}}<\frac{1}{b^2}\left(\frac{1}{1+b^2}\right)^n.$$

Такимъ образомъ v разлагается въ нормальный рядъ, и наша теорема доказана.

Очевидно, нѣтъ надобности прибавлять, что отрѣзокъ 01 можетъ быть замѣненъ любымъ отрѣзкомъ ab.

§ 8. Послѣднее доказательство приводитъ насъ къ особой группировкѣ членовъ нормальнаго ряда, которая равно возможна для *аналитическихъ* и *неаналитическихъ* функцій. А именно всегда можно написать

$$f(x) = \sum_{p}^{\infty} \sum_{q}^{\infty} A_{pq} x^p (1-x)^q = \sum_{n}^{\infty} P_n (1-x)^n,$$

гдѣ $P_n(x)$ строка Тэйлора, разложенная по степенямъ x. Радіусъ сходимости $P_n(1-x)$ не менѣе единицы; и если $n > 0$, $\overset{+}{P}_n(1-x)^n$, при приближеніи x къ единицѣ, стремится къ нулю. Очевидно, что функція $\overset{+}{P}_n.(1-x)^n$ имѣетъ абсолютный максимумъ при нѣкоторомъ значеніи x, заключенномъ между нулемъ и единицей. Пусть M_n будетъ этотъ максимумъ. Въ моей работѣ „Sur la nature analytique des solutions des équations aux dérivées partielles du second ordre", я разсматриваю рядъ этихъ максимумовъ

$$M = M_0 + M_1 + M_2 + \ldots + M_n + \ldots$$

который я называю *вещественной нормой* функціи $f(x)$. Изъ этого понятія выводится цѣлый рядъ производныхъ понятій и устанавливаются существенныя свойства ихъ. Несмотря на то, что въ большинствѣ случаевъ эти понятія вполнѣ приспособлены для достиженія той цѣли, къ которой они предназначены, я нахожу нужнымъ ввести въ нихъ нѣкоторыя измѣненія, сохраняя прежнюю терминологію и обозначенія. Дѣйствительно, приведенное выше понятіе обладаетъ крупнымъ недостаткомъ: оно не допускаетъ простого *формальнаго* опредѣленія; *фактическое вычисленіе каждаго изъ чиселъ* M_n *требуетъ разрѣшенія особаго трансцедентнаго уравненія.* Напротивъ, если мы разсмотримъ какой нибудь изъ членовъ двойного ряда $f(x)$

$$A_{pq} x^p (1-x)^q,$$

то максимумъ его модуля m_{pq} достигается при вполнѣ опредѣленномъ значеніи

$$x = \frac{p}{p+q},$$

такъ что

$$m_{p,q} = |A_{pq}| \frac{p^p q^q}{(p+q)^{p+q}}.$$

Вмѣсто максимума M_q функціи $\overset{+}{P}_q.(1-x)^q$ мы введемъ вполнѣ опредѣленное выраженіе

$$m_q = \sum_{p=0}^{p=\infty} m_{pq} = \sum_{p=0}^{p=\infty} |A_{pq}| \frac{p^p q^q}{(p+q)^{p+q}}.$$

Итакъ, отнынѣ *вещественной нормой* $f(x)$ *будемъ называть вполнѣ опредѣленную сумму*

$$m = m_0 + m_1 + m_2 + \ldots = \sum_p^{\infty} \sum_q^{\infty} |A_{pq}| \frac{p^p q^q}{(p+q)^{p+q}}.$$

Очевидно, что вообще $m_i \geqq M_i$, и норма можетъ быть безконечна, хотя бы рядъ $f(x)$ и былъ сходящимся. Разсматривая совокупность всѣхъ нормальныхъ разложеній $f(x)$, мы получимъ совокупность положительныхъ величинъ, образованную соотвѣтственными *нормами*. Эта совокупность должна имѣть низшій предѣлъ [1]), который назовемъ *низшей вещественной нормой* $f(x)$ и обозначимъ черезъ $[f(x)]_{10}$. Все сказанное, конечно, остается въ силѣ, если отрѣзокъ 01 замѣнить отрѣзкомъ $0R$; низшую норму на $0R$ обозначимъ черезъ $[f(x)]_{R0}$.

Въ частности, если $f(x)$ разлагается въ строку Тэйлора съ положительными коэффиціентами, сходящуюся при $x = R$, такъ что $f(x) = |a_0| + |a_1| x + \ldots + |a_n| x^n + \ldots$, то низшая вещественная норма ея

$$[f(x)]_{R0} = \overset{+}{f}(R) = |a_0| + |a_1| R + \ldots |a_n| R^n + \ldots$$

Но, еслибъ всѣ члены не были положительными, строка Тэйлора давала бы норму значительно превышающую низшую норму. И даже, когда радіусъ сходимости менѣе R, строкѣ Тэйлора $f(x)$ соотвѣтствуетъ безконечная норма, между тѣмъ какъ *низшая* норма ея можетъ быть конечна. Разсмотримъ, напримѣръ, функцію

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 2ax + a^2 + b^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-x^2)^n}{(1+a^2+b^2)^{n+1}} \left[1 + \frac{n+1}{1} \frac{2ax}{a^2+b^2+1} + \ldots \right.$$
$$\left. \frac{(n+K)!}{n!\,K!} \left(\frac{2ax}{a^2+b^2+1}\right)^K + \ldots \right]$$

Ясно, что норма функціи

$$\frac{(n+K)!\,(1-x^2)^n . (2ax)^K}{n!\,K!\,(1+a^2+b^2)^{n+K+1}}$$

менѣе, чѣмъ

$$(n+1) \frac{(n+K)!\,n^n . \left(\frac{K}{2}\right)^{\frac{K}{2}}}{n!\,K! \left(n+\frac{K}{2}\right)^{n+\frac{K}{2}}} \cdot \frac{(2a)^K}{(1+a^2+b^2)^{n+K+1}}$$

---

[1]) Число A называется *низшимъ предѣломъ* совокупности чиселъ $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, если какъ бы мало ни было число ε, $A - \varepsilon$ менѣе всякаго числа изъ совокупности, и $A + \varepsilon$ болѣе по крайней мѣрѣ одного числа изъ этой совокупности.

или, примѣняя формулу Стирлинга, менѣе, чѣмъ

$$\mu.(n+1)\frac{(n+K)!}{\left(n+\frac{K}{2}\right)!\left(\frac{K}{2}\right)!}\cdot\frac{a^K}{(1+a^2+b^2)^{n+K+1}},$$

гдѣ μ нѣкоторое конечное число.

Группируя члены, для которыхъ $n+K=p$, получимъ, слѣдовательно,

$$[f(x)]_{10}<\mu.\sum_{p}^{\infty}p\left(\frac{1+a^2}{1+a^2+b^2}\right)^p<\mu.\left(\frac{1+a^2+b^2}{b^2}\right)^2.$$

Такимъ образомъ норма функціи $f(x)=\dfrac{1}{x^2-2ax+a^2+b^2}$ конечна, если только b не равно нулю, между тѣмъ какъ для сходимости строки Тэйлора необходимо, чтобы $a^2+b^2>1$. Примѣняя разсужденіе § 7, мы можемъ также заключить, что вещественная норма всякой аналитической функціи конечна на отрѣзкѣ, гдѣ она не имѣетъ особенностей. Но этого мало, не этимъ характеризуется аналитическая функція. Дѣйствительно, слѣдуетъ обратить вниманіе на *способъ сходимости* ряда

$$m=m_0+m_1+\ldots+m_n+\ldots,$$

представляющаго вещественную норму функціи. *Для аналитической функціи сходимость этого ряда подобна сходимости геометрической прогрессіи.* Чтобы въ этомъ убѣдиться, замѣтимъ, что разсматривая вмѣсто функціи

$$f(x)=\frac{1}{x^2-2ax+a^2+b^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-x^2)^n}{(1+a^2+b^2)^{n+1}}\left[1+\frac{n+1}{1}\frac{2ax}{a^2+b^2+1}+\ldots\right.$$
$$\left.\frac{(n+K)!}{n!\,K!}\left(\frac{2ax}{a^2+b^2+1}\right)^K+\ldots\right]$$

функцію

$$f_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(1+\lambda)^n\frac{(1-x^2)^n}{(1+a^2+b^2)^{n+1}}\left[1+\frac{n+1}{1}\frac{2ax}{a^2+b^2+1}+\ldots\right.$$
$$\left.\frac{(n+K)!}{n!\,K!}\left(\frac{2ax}{a^2+b^2+1}\right)^K+\ldots\right]$$

найдемъ также при $\lambda<b^2$

$$[f_1(x)]_{10}<\mu.\left(\frac{1+a^2+b^2}{b^2-\lambda}\right)^2.$$

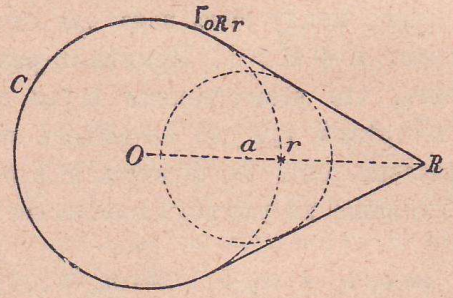
Итакъ, вообще говоря, всегда можно найти такое нормальное разложеніе аналитической функціи, чтобъ не только его вещественная норма на отрѣзкѣ $0R$ $m = m_0 + m_1 + \ldots + m_n + \ldots$ была конечна, но, чтобъ при нѣкоторомъ положительномъ значеніи λ былъ также сходящимся и рядъ

$$N = m_0 + (1+\lambda)m_1 + \ldots + (1+\lambda)^n m_n + \ldots,$$

которому полезно придать форму

$$N = m_0 + \left(\frac{R+r}{R-r}\right)m_1 + \ldots + \left(\frac{R+r}{R-r}\right)^n m_n + \ldots$$

Рядъ N называется нормою $f(x)$ внутри контура Γ_{0Rr}, образованнаго обѣими касательными изъ точки R къ окружности C радіуса r и большею дугой круга C, заключеннаго между точками соприкосновенія.



Совокупность нормъ N въ свою очередь имѣетъ низшій предѣлъ, который называется *низшей нормой внутри Γ_{0Rr}* и который мы обозначимъ символомъ $[f(x)]_{Rr}$. Резюмируя все вышесказанное, приходимъ къ новой формулировкѣ теоремы предыдущаго §.

Если аналитическая функція $f(x)$ не имѣетъ особенностей на отрѣзкѣ $0R$, можно найти достаточно малое число r, чтобъ низшая норма $f(x)$ была конечна.

Весьма существенно доказать теперь обратную теорему:

Теорема. *Если нормальный на отрѣзкѣ $0R$ рядъ $f(x)$ имѣетъ конечную норму N внутри контура Γ_{0Rr}, то онъ равномѣрно и абсолютно сходится на контурѣ Γ_{0Rr} и внутри его и представляетъ аналитическую функцію.*

Въ самомъ дѣлѣ, положимъ, что

$$f(x) = \sum_n^\infty \sum_p^\infty a_{np} x^p (R-x)^n = \sum_n^\infty P_n . (R-x)^n$$

и пусть

$$M_n = \max.|a_{n0}(R-x)^n| + \max.|a_{n1}x(R-x)^n| + \max.|a_{n2}x^2(R-x)^n| + \ldots$$
$$\max.|a_{np}x^p(R-x)^n| + \ldots$$

при

$$0 \leqq x \leqq R.$$

По предположенію рядъ

$$N = M_0 + M_1\left(\frac{R+r}{R-r}\right) + \ldots M_n\left(\frac{R+r}{R-r}\right)^n + \ldots$$

сходится. Но при $|x|$ равномъ r, имѣемъ

$$|R-x|^n\{|a_{n0}| + |a_{n1}x| + \ldots + |a_{np}x^p| + \ldots\} < M_n\left(\frac{R+r}{R-r}\right)^n.$$

Такимъ образомъ ясно во-первыхъ, что нашъ рядъ абсолютно и равномѣрно сходится на кругѣ C и внутри его.

Далѣе положимъ

$$r_1 = r \cdot \frac{R-a}{R},$$

гдѣ

$$0 < a < R.$$

Тогда мы видимъ, что всякой точкѣ на контурѣ Γ_{0Rr} и внутри его соотвѣтствуетъ значеніе $x = a + r_1(\cos\theta + i\sin\theta)$. Но

$$|R-x|^n \sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}x^k| < (R-a+r_1)^n \sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}|(r_1+a)^k$$

$$= \left(\frac{R-a+r_1}{R-a-r_1}\right)^n (R-a-r_1)^n \sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}|(r_1+a)^k$$

$$< \left(\frac{R-a+r_1}{R-a-r_1}\right)^n M_n = \left(\frac{R+r}{R-r}\right)^n M_n.$$

Слѣдовательно, абсолютная и равномѣрная сходимость нашего ряда обнаружена, какъ на контурѣ Γ_{0Rr}, такъ и внутри его.

Поэтому, замѣчая, что $P_n \cdot (R-x)^n$ правильная аналитическая функція внутри контура Γ_{0Rr}, заключаемъ на основаніи извѣстной теоремы изъ теоріи этихъ функцій, что функція $f(x)$ аналитична внутри разсматриваемаго контура.

Что и требовалось доказать.

Таковъ интересующій насъ критерій, необходимый и достаточный для того, чтобы функція разлагающаяся въ нормальный рядъ была аналитической. Изъ послѣдующаго видно будетъ, что пользованіе найденнымъ критеріемъ совершенно аналогично примѣненію элементарнаго критерія Коши, относящагося лишь къ строкамъ Тэйлора.

§ 9. Теорема. *Если $f_1(x)$ имѣетъ норму N_1 внутри контура Γ_{0Rr}, а $f_2(x)$— норму N_2, то сумма $f_1(x)+f_2(x)$ имѣетъ внутри того же контура норму не большую, чѣмъ N_1+N_2.*

Въ самомъ дѣлѣ, пусть

$$f_1(x)=\sum_n^\infty\sum_p^\infty A_{np}^{(1)}x^p(R-x)^n=\sum_n^\infty P_n^{(1)}(R-x)^n,$$

$$f_2(x)=\sum_n^\infty\sum_p^\infty A_{np}^{(1)}x^p(R-x)^n=\sum_n^\infty P_n^{(1)}(R-x)^n,$$

$$M_n^{(1)}=\sum_p^\infty|A_{np}^{(1)}|\frac{p^pn^nR^{n+p}}{(p+n)^{p+n}},\quad M_n^{(2)}=\sum_p^\infty|A_{np}^{(2)}|\frac{p^pn^nR^{n+p}}{(p+n)^{p+n}}.$$

Въ такомъ случаѣ

$$f(x)=f_1(x)+f_2(x)=\sum_n^\infty\sum_p^\infty[A_{np}^{(1)}+A_{np}^{(2)}]x^p(R-x)^n=\sum_n^\infty\sum_p^\infty A_{np}x^p(R-x)^n$$

и

$$M_n=\sum_p^\infty|A_{np}|\frac{p^px^nR^{n+p}}{(p+n)^{p+n}}\leqq M_n^{(1)}+M_n^{(1)}.$$

Слѣдовательно,

$$\begin{aligned}&M_0+M_1\left(\frac{R+r}{R-r}\right)+\ldots+M_n\left(\frac{R+r}{R-r}\right)^n+\ldots\\&\leqq M_0^{(1)}+M_0^{(2)}+[M_1^{(1)}+M_1^{(2)}]\left(\frac{R+r}{R-r}\right)+\ldots\\&=N_1+N_2.\end{aligned}$$

Найденный результатъ удобно выразить при помощи *низшихъ* нормъ. Получимъ, очевидно,

$$[f_1(x)+f_2(x)]_{Rr}\leqq[f_1(x)]_{Rr}+[f_2(x)]_{Rr}.\qquad(25')$$

Теорема. *Если $f_1(x)$ имѣетъ норму N_1 внутри контура Γ_{0Rr}, а $f_2(x)$ — норму N_2, то произведеніе $f_1(x).f_2(x)$ имѣетъ внутри того же контура норму не большую, чѣмъ $N_1.N_2$.*

Сохраняя обозначенія предыдущей теоремы легко видѣть, что

$$\Phi(x)=f_1(x).f_2(x)=\sum_{n=0}^\infty[P_0^{(1)}P_n^{(2)}+P_1^{(1)}P_{n-1}^{(2)}+\ldots+P_n^{(1)}P_0^{(2)}].(R-x)^n.$$

Слѣдовательно норма

$$[\Phi(x)]_{Rr}\leqq\sum_{n=0}^\infty[M_0^{(1)}M_n^{(2)}+\ldots+M_n^{(1)}M_0^{(2)}]\left(\frac{R+r}{R-r}\right)^n=N_1.N_2.$$

Вводя низшіе предѣлы, получаемъ

$$[f_1(x).f_2(x)]_{Rr}\leqq[f_1(x)]_{Rr}.[f_2(x)]_{Rr}.\qquad(25'')$$

Изъ неравенствъ (25′) и (25″) вытекаетъ наконецъ важное общее неравенство

$$[F(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots \varphi_n)]_{Rr} \leq \overset{+}{F}([\varphi_1(x)]_{Rr}, [\varphi_2(x)]_{Rr}, \ldots [\varphi_n(x)]_{Rr}), \quad (25)$$

гдѣ $F(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n)$ обозначаетъ произвольную аналитическую функцію, разложенную по возрастающимъ степенямъ $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$.

Переходимъ теперь къ выраженіямъ, содержащимъ интегралы.

Теорема. *Пусть*

$$I(x) = x^p \int_0^x F(x) . x^q dx .$$

Если цѣлыя числа p *и* q *удовлетворяютъ неравенствамъ* $q \geq 0$, $p + q + 1 \geq 0$, *то имѣетъ мѣсто неравенство:*

$$[I(x)]_{Rr} < \frac{R + r}{2r} \cdot \frac{R^{p+q+1}}{q+1} [F(x)]_{Rr} . \quad (26)$$

Въ самомъ дѣлѣ, пусть

$$F(x) = \sum_n^\infty \sum_k^\infty A_{nk} x^k (R - x)^n = \sum_n^\infty P_n (R - x)^n$$

и

$$[F(x)]_{Rr} = M_0 + M_1 \left(\frac{R+r}{R-r}\right) + \ldots + M^n \left(\frac{R+r}{R-r}\right)^n + \ldots ,$$

гдѣ

$$M_n = \sum_k^\infty |A_{nk}| \frac{n^n k^k R^{n+k}}{(n+k)^{n+k}} .$$

Интегрируя по частямъ, находимъ, что

$$x^p \int_0^x A_{nk} x^{q+k} (R - x)^n dx = A_{nk} [a_{nk}^{(n)} x^{p+q+k+1} (R - x)^n +$$
$$+ a_{nk}^{(n-1)} x^{p+q+k+2} (R - x)^{n-1} + \ldots a_{nk}^{(0)} x^{p+q+k+n+1}],$$

гдѣ $a_{nk}^{(n)}$, $a_{nk}^{(n-1)}$ и т. д. положительныя числа; откуда заключаемъ, что максимумъ каждаго изъ членовъ второй части равенства, менѣе максимума первой части, т. е. *a fortiori* менѣе чѣмъ

$$|A_{nk}| . \frac{n^n k^k R^{n+k+p+q+1}}{(q+1) . (n+k)^{n+k}} .$$

Слѣдовательно, если мы положимъ

$$I(x)=\sum_{n}^{\infty}\sum_{k}^{\infty}B_{nk}x^{k}(R-x)^{n}$$

и

$$L_{n}=\sum_{k}^{\infty}|B_{nk}|\frac{n^{n}k^{k}R^{n+k}}{(n+k)^{n+k}},$$

то найдемъ, что

$$L_{n}<\frac{R^{p+q+1}}{q+1}(M_{n}+M_{n+1}+\ldots).$$

Поэтому

$$L_{0}+L_{1}\left(\frac{R+r}{R-r}\right)+\ldots+L_{n}\left(\frac{R+r}{R-r}\right)^{n}+\ldots$$

$$<\frac{R^{p+q+1}}{q+1}\left\{[M_{0}+M_{1}+M_{2}+\ldots]+[M_{1}+M_{2}+\ldots]\left(\frac{R+r}{R-r}\right)\right.$$

$$\left.+[M_{2}+\ldots]\left(\frac{R+r}{R-r}\right)^{2}+\ldots\right\}$$

$$=\frac{R^{p+q+1}}{q+1}\left\{M_{0}+M_{1}\left[1+\frac{R+r}{R-r}\right]+M_{2}\left[1+\frac{R+r}{R-r}+\left(\frac{R+r}{R-r}\right)^{2}\right]+\ldots\right\}$$

$$<\frac{R^{p+q+1}}{q+1}\cdot\frac{R+r}{R-r}\left\{M_{0}+M_{1}\left(\frac{R+r}{R-r}\right)+\ldots M_{n}\left(\frac{R+r}{R-r}\right)^{n}+\ldots\right\}$$

и наконецъ, вводя нижнія нормы, приходимъ къ требуемому неравенству

$$[I(x)]_{Rr}<\frac{R+r}{R-r}\cdot\frac{R^{p+q+1}}{q+1}[F(x)]_{Rr}.$$

Теорема. *Пусть*

$$g(x)=x^{p}.\int_{x}^{R}F(x).x^{q}dx.$$

Если цѣлыя числа p и q удовлетворяютъ условіямъ $p\geqq 0$, $p+q+1\geqq 0$ и кромѣ того функція $F(x).x^{q}$ не имѣетъ особенности въ точкѣ $x=0$, то во-первыхъ, при $q\neq -1$, имѣетъ мѣсто неравенство

$$[g(x)]_{Rr}<\frac{R+r}{2r}\cdot\frac{R^{p+q+1}}{|q+1|}|F(x)|_{Rr} \tag{27}$$

и во-вторыхъ, при $q=-1$, имѣетъ мѣсто неравенство

$$[g(x)]_{Rr}<4\frac{R+r}{r}R^{p}|F(x)|_{Rr}. \tag{27bis}$$

Сохраняя обозначенія доказательства предыдущей теоремы, мы видимъ, что

$$x^p\int_x^R A_{nk}x^{q+k}(R-x)^n dx = -A_{nk}\left[a_{nk}^{(n)}x^{p+q+k+1}(R-x)^n+\ldots\right.$$
$$\left.a_{nk}^{(0)}x^{p+q+k+n+1}\right]+A_{nk}a_{nk}^{(0)}x^pR^{q+k+n+1},$$

такъ какъ по предположенію $q+k\geqq 0$.

Слѣдовательно, ограничиваясь пока случаемъ, когда $q\neq -1$, находимъ также на основаніи выше указанныхъ соображеній

$$L_n<\frac{2R^{p+q+1}}{|q+1|}(M_n+M_{n+1}+\ldots),$$

откуда вытекаетъ, какъ и раньше, неравенство (27).

Для доказательства неравенства (27bis), мы должны замѣтить, что максимумъ интеграла

$$\int_x^R x^{k-1}(R-x)^n dx$$

равенъ

$$\int_0^R x^{k-1}(R-x)^n dx=\frac{n!(k-1)!}{(k+n)!}R^{k+n}=\mu.\frac{n^nk^k}{(k+n)^{k+n}}\sqrt{\frac{n}{k(k+n)}}R^{k+n},$$

гдѣ μ нѣкоторый *конечный* коэффиціентъ, который менѣе, чѣмъ 4 на основаніи формулы Стирлинга [1]). Поэтому, повторяя прежнее разсужденіе, получимъ

$$L_n<8R^p(M_n+M_{n+1}+\ldots),$$

откуда вытекаетъ неравенство (27bis).

Примѣчаніе. Неравенства (26), (27), (27bis) будутъ играть существенную роль въ нашемъ дальнѣйшемъ изслѣдованіи, поэтому интересно выяснить, въ какой мѣрѣ они связаны съ нормальными рядами. Весьма легко убѣдиться, что, еслибъ вмѣсто нормы $F(x)$ мы знали, каковъ максимумъ ея модуля на отрѣзкѣ $0R$, то для $I(x)$ и $g(x)$ на томъ же отрѣзкѣ мы получили бы неравенства, подобныя неравенствамъ (26) и (27). *Однако ничего подобнаго неравенству* (27bis) *при замѣнѣ нормъ модулями не можетъ быть дано, если* $p=0$.

---

[1]) Seliwanoff. Differenzenrechnung. Стр. 61.

Перейдемъ теперь къ функціямъ двухъ перемѣнныхъ.

§ 10. Пусть ϱ и θ полярныя координаты вещественной точки M, прямолинейныя координаты которой x и y. Въ дальнѣйшемъ мы будемъ предполагать, что x и y могутъ становиться мнимыми величинами, но всегда будутъ имѣть мѣсто равенства

$$x = \varrho \cos\theta, \quad y = \varrho \sin\theta.$$

Разсмотримъ тригонометрическій рядъ

$$S_{\varrho,\theta} = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta,$$

гдѣ A_n и B_n нормальные ряды по перемѣнной ϱ на нѣкоторомъ отрѣзкѣ $0R$, особаго вида, а именно:

$$A_n = \varrho^n \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \alpha_{pq}^{(n)} \varrho^{2p} (R^2 - \varrho^2)^q, \quad B_n = \varrho^n \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \beta_{pq}^{(n)} \varrho^{2p} (R^2 - \varrho^2)^q.$$

Во-первыхъ, ясно, что рядъ $S_{\varrho,\theta}$ *формально* можетъ быть отождествленъ съ рядомъ, содержащимъ лишь цѣлыя и положительныя степени x, y, потому что

$$\varrho^n \cos n\theta = \frac{(x+iy)^n + (x-iy)^n}{2}$$

$$\varrho^n \sin n\theta = \frac{(x+iy)^n - (x-iy)^n}{2i}$$

$$\varrho^2 = x^2 + y^2.$$

Мы будемъ называть рядъ $S_{\varrho,\theta}$ *нормальнымъ* рядомъ относительно перемѣнныхъ ϱ, θ или x, y внутри круга C радіуса R съ центромъ въ 0, если рядъ

$$[S_{\varrho,\theta}]_{R0} = [A_0]_{R0} + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n]_{R0} + [B_n]_{R0}$$

сходящійся. Этотъ послѣдній рядъ называется *низшей нормой* $S_{\varrho,\theta}$ *на отрѣзкѣ* $R0$.

Если кромѣ того для нѣкотораго r рядъ

$$[S_{\varrho,\theta}]_{Rr} = [A_0]_{Rr} + \sum_{1}^{\infty} [A_n]_{Rr} + [B_n]_{Rr}$$

также сходится, то онъ называется *низшей нормой* $S_{\varrho,\theta}$ *внутри контура* Γ_{0Rr}, *расположеннаго въ плоскости комплексной перемѣнной* ϱ.

Мы можемъ теперь доказать слѣдующую важную теорему.

Теорема. *Если нормальный рядъ* $S_{\rho,\vartheta} = F(xy)$ *имѣетъ конечную норму внутри контура* Γ_{R0r}, *то онъ представляетъ аналитическую функцію внутри круга* C.

Въ самомъ дѣлѣ, любой изъ рядовъ A_n и B_n можетъ быть превращенъ на основаніи теоремы § 8 въ строку Тэйлора вида $\varrho^n \sum_{p=0}^{\infty} \alpha_p \varrho^{2p}$, сходящуюся при $|\varrho| \leqq r$, такъ что вслѣдствіе теоремы § 2 $F(xy)$ аналитична внутри круга C' радіуса r. Но если мы возьмемъ какую-нибудь точку $M(R' < R, \vartheta_0)$ внутри C, то въ силу той же теоремы § 8, A_n и B_n разлагаются въ строку Тэйлора по степенямъ $\varrho - R'$ съ радіусомъ сходимости не менѣе $r\frac{R-R'}{R}$. Мы заключаемъ отсюда, что постепенно увеличивая R' мы получимъ *аналитическое продолженіе* $F(xy)$ въ любой точкѣ внутри C. Что и требовалось доказать.

Замѣчаніе. Вышеприведенное разсужденіе показываетъ, что еслибъ мы при помощи строки Тэйлора стали совершать аналитическое продолженіе $F(xy)$, то, чтобъ достигнуть самой окружности C, потребовалось бы вообще безконечное число строкъ Тэйлора. Однако благодаря равномѣрной сходимости нормальнаго разложенія $F(xy)$ на окружности C, какъ и внутри ея, это разложеніе представляетъ во всякой точкѣ M окружности C предѣлъ, къ которому $F(xy)$ стремится при безконечномъ приближеніи къ этой точкѣ.

Обратная теорема.

Если аналитическая функція $F(xy)$ *не имѣетъ особенностей въ нѣкоторой области* S *(на плоскости вещественныхъ перемѣнныхъ* x, y*), то она разлагается въ нормальный рядъ внутри всякаго круга* C *расположеннаго въ области* S *и кромѣ того возможно выбрать* r *достаточно малымъ, чтобъ норма* $[F(xy)]_{Rr}$ *была конечна.*

Въ самомъ дѣлѣ, пусть R будетъ радіусомъ круга C расположеннаго въ области S и 0 его центръ. Тогда

$$F(xy) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\vartheta + B_n \sin n\vartheta$$

съ

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(\varrho\cos\vartheta, \varrho\sin\vartheta)\cos n\vartheta d\vartheta = -\frac{1}{n^2\pi}\int_0^{2\pi} F''_{\vartheta^2}(\varrho\cos\vartheta, \varrho\sin\vartheta)\cos n\vartheta d\vartheta,$$

$$B_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(\varrho\cos\vartheta, \varrho\sin\vartheta)\sin n\vartheta d\vartheta = -\frac{1}{n^2\pi}\int_0^{2\pi} F''_{\vartheta^2}(\varrho\cos\vartheta, \varrho\sin\vartheta)\sin n\vartheta d\vartheta,$$

такъ что A_n и B_n аналитическія функціи ϱ, правильныя, пока комплексная перемѣнная ϱ находится внутри нѣкоторой области (въ плоскости комплексной перемѣнной ϱ), заключающей въ себѣ отрѣзокъ OR. Слѣдовательно A_n и B_n разлагаются въ нормальные ряды и при томъ спеціальнаго вида, указаннаго на страницѣ 46. Кромѣ того, для всѣхъ n можно опредѣлить одно и то же число r такъ, чтобъ $[A_n]_{Rr}$ и $[B_n]_{Rr}$ были конечны. Болѣе того, если разсматривать $F''_{\theta^2}(\varrho\cos\theta_0, \varrho\sin\theta_0)$ какъ функцію одной перемѣнной ϱ, можно опредѣлить конечное число N такъ, чтобъ при всякомъ θ_0 имѣть

$$[F''_{\theta^2}(\varrho\cos\theta_0, \varrho\sin\theta_0)]_{Rr} < N.$$

Тогда очевидно

$$[A_n]_{Rr} < \frac{2N}{n^2}, \quad [B_n]_{Rr} < \frac{2N}{n^2},$$

и слѣдовательно

$$[F(xy)]_{Rr} < 10N.$$

Ч. и т. д.

Эти двѣ важныя теоремы подобны тѣмъ, которыя нами доказаны во 2-мъ § первой главы, но онѣ представляютъ то существенное преимущество, что онѣ совершенно не зависятъ отъ мнимыхъ особенностей функцій.

Наконецъ, намъ остается доказать еще послѣднюю теорему.

Теорема. *Если* $F(v_1v_2\ldots v_m)$ *аналитическая функція, а* $v_1v_2\ldots v_m$ *разлагаются въ нормальные ряды внутри круга* C, *то имѣетъ мѣсто неравенство*:

$$[F(v_1v_2\ldots v_m]_{Rr} \leqq F([v_1]_{Rr}, \ldots [v_m]_{Rr}). \tag{28}$$

Очевидно, теорема будетъ доказана, если мы докажемъ ее въ двухъ частныхъ случаяхъ

$$F(v_1v_2) = v_1 + v_2 \quad \text{и} \quad \Phi(v_1v_2) = v_1v_2.$$

Но изъ (25′) вытекаетъ непосредственно

$$[v_1 + v_2]_{Rr} \leqq [v_1]_{Rr} + [v_2]_{Rr}.$$

Съ другой стороны, пусть

$$v_1 = A_0^{(1)} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(1)}\cos n\theta + B_n^{(1)}\sin n\theta$$

$$v_2 = A_0^{(2)} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(2)}\cos n\theta + B_n^{(2)}\sin n\theta.$$

Умножая и группируя члены (благодаря абсолютной сходимости), получаемъ

$$v_1 v_2 = \left[A_0^{(1)} A_0^{(2)} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(A_n^{(1)} A_n^{(2)} + B_n^{(1)} B_n^{(2)}\right]$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\Bigg[\sum_{n+m=k}^{\infty}(A_n^{(1)} A_m^{(2)} - B_n^{(1)} B_m^{(2)})$$
$$+ \sum_{n-m=k}^{\infty}(A_n^{(1)} A_m^{(2)} + A_m^{(1)} A_n^{(1)} + B_n^{(1)} B_m^{(2)} + B_m^{(1)} B_n^{(2)})\Bigg]\cos k\theta$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\Bigg[\sum_{n+m=k}^{\infty}(A_n^{(1)} B_m^{(2)} + B_n^{(1)} A_m^{(2)})$$
$$+ \sum_{n-m=k}^{\infty}(A_m^{(1)} B_n^{(2)} - A_n^{(1)} B_m^{(2)} + B_n^{(1)} A_m^{(2)} - B_m^{(1)} A_n^{(2)})\Bigg]\sin k\theta .$$

Отсюда вслѣдствіе (25′) и (25″) находимъ:

$$[v_1 v_2]_{Rr} \leq \left\{[A_0^{(1)}]_{Rr} + \sum_{n=1}^{\infty}[A_n^{(1)}]_{Rr} + [B_n^{(1)}]_{Rr}\right\}\cdot\left\{[A_0^{(2)}]_{Rr} + \sum_{n=1}^{\infty}[A_n^{(2)}]_{Rr} + [B_n^{(2)}]_{Rr}\right\}$$
$$= [v_1]_{Rr}\cdot[v_2]_{Rr}.$$

Теорема такимъ образомъ доказана. Неравенство (28) вполнѣ замѣняетъ неравенство (14). Слѣдовательно, пользованіе новымъ критеріемъ для распознаванія аналитическихъ функцій тождественно пользованію критеріемъ Гарнака, но въ то время какъ, согласно заключенію конца прошлой главы, область примѣненія критерія Гарнака весьма ограничена, въ настоящей главѣ установлены безусловно общія начала для распознаванія аналитическихъ функцій.

Въ частности, разсмотрѣніе постоянной величины, связанной съ нормальнымъ рядомъ, которую мы назвали *нормой*, часто вполнѣ достаточно для указанной цѣли; однако въ иныхъ случаяхъ необходимо нѣсколько видоизмѣнить упомянутое понятіе. Пусть

$$N = m_0 + m_1\left(\frac{R+r}{R-r}\right) + \ldots m_n\left(\frac{R+r}{R-r}\right)^n + \ldots$$

норма нѣкотораго ряда внутри опредѣленнаго контура Γ_{0Rr}. Вводя новую перемѣнную $\frac{R+r}{R-r} = y$, мы получимъ функцію

$$N(y) = m_0 + m_1 y + \ldots + m_n y^n + \ldots ,$$

которая является болѣе тонкимъ и совершеннымъ орудіемъ изслѣдованія, чѣмъ постоянная норма. Однако мы не будемъ останавливаться здѣсь на дальнѣйшемъ развитіи теоріи нормальныхъ рядовъ, такъ какъ и изложеннаго вполнѣ достаточно для разрѣшенія интересующихъ насъ въ настоящемъ сочиненіи вопросовъ.

Въ заключеніе отвѣтимъ лишь на вопросъ, который, вѣроятно, возникаетъ у читателя, особенно, если онъ обладаетъ геометрическимъ складомъ ума. Не проще ли вмѣсто всей этой теоріи нормальныхъ рядовъ, разсматривать *модули* функцій внутри той или иной комплексной области, не заботясь объ ея формальномъ выраженіи? Въ нѣкоторыхъ случаяхъ это вполнѣ допустимо: въ частности это тотъ путь, который мною былъ выбранъ при доказательствѣ аналитическаго характера рѣшеній уравненій *параболическаго* типа относительно *одной* лишь перемѣнной [1]). Однако часто геометрическія разсужденія, не имѣющія подъ собой опредѣленной *формально аналитической* основы, слишкомъ грубы и поверхностны, и либо вовсе не выдерживаютъ строгой математической критики, либо требуютъ искусственныхъ, не лежащихъ въ существѣ дѣла, ограниченій.

Въ слѣдующей главѣ будетъ указано, какъ аналитическое, основанное на примѣненіи нормальныхъ рядовъ, такъ и геометрическое доказательство основной теоремы теоріи уравненій эллиптическаго типа. Преимущество второго въ томъ, что оно не опирается ни на какія новыя понятія, но первое доказательство глубже проникаетъ въ природу уравненій эллиптическаго типа, устанавливая прочный фундаментъ для дальнѣйшихъ изслѣдованій. Это и является причиной, побудившей меня удѣлить въ настоящей работѣ столь значительное мѣсто нормальнымъ рядамъ.

---

[1]) Comptes rendus de l'Acad. des Sciences. Janvier 1905.

Глава III.

Основная теорема.

§ 11. Примѣнимъ общія соображенія предыдущей главы къ доказательству слѣдующей важной теоремы:

Теорема. *Если z есть рѣшеніе аналитическаго уравненія съ частными производными второго порядка*

$$F\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, z, x, y\right) = 0, \tag{1}$$

обладающее внутри нѣкоторой области S конечными производными первыхъ трехъ порядковъ и удовлетворяющее въ этой области неравенству

$$4 F'_{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}} \cdot F'_{\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}} - \left(F'_{\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}}\right)^2 > 0, \tag{2}$$

то функція z аналитична въ области S.

Условіе конечности третьихъ производныхъ несущественно; но отъ устраненія его доказательство значительно усложняется. Поэтому мы приступимъ къ доказательству сохраняя упомянутое условіе. Прежде всего приведемъ наше уравненіе къ виду болѣе удобному для примѣненія способа послѣдовательныхъ приближеній. Въ самомъ дѣлѣ, нетрудно доказать, что данное уравненіе всегда можетъ быть приведено къ виду

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, z, x, y\right), \tag{29}$$

обозначая черезъ f аналитическую функцію, разлагающуюся въ строку Тэйлора по степенямъ

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - r_0, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - s_0, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - t_0, \frac{\partial z}{\partial x} - p_0, \frac{\partial z}{\partial y} - q_0, z - z_0, x, y,$$

гдѣ z_0, p_0, q_0, r_0, s_0, t_0 соотвѣтственныя значенія функціи z и ея производныхъ первыхъ двухъ порядковъ при $x = y = 0$. Кромѣ того, въ точкѣ $x = y = 0$ возможно предположить (и это особенно важно) $f'_{r_0} = f'_{s_0} = f'_{t_0} = 0$. Дѣйствительно, пусть z будетъ рѣшеніемъ уравненія

$$F\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x'^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x' \partial y'}, \frac{\partial^2 z}{\partial y'^2} \ldots, z, x', y'\right) = 0$$

и пусть z_0, p'_0, q'_0, r'_0, s'_0, t'_0 значенія z и его производныхъ по x' и y' въ точкѣ $x' = y' = 0$, такъ что

$$F = bx' + cy' + d(z - z'_0) + e\left(\frac{\partial z}{\partial x'} - p'_0\right) + f\left(\frac{\partial z}{\partial y'} - q'_0\right) + g\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x'^2} - r'_0\right) +$$
$$+ 2h\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x' \partial y'} - s'_0\right) + i\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y'^2} - t'_0\right) + kx'^2 + tx'y' + \ldots$$

и

$$F'_{\frac{\partial^2 z}{\partial x'^2}} = g + b_1 x' + c_1 y' + \ldots$$
$$F'_{\frac{\partial^2 z}{\partial x' \partial y'}} = 2h + b_2 x' + c_2 y' + \ldots$$
$$F'_{\frac{\partial^2 z}{\partial y'^2}} = i + b_3 x' + c_3 y' + \ldots$$

Изъ неравенства (2) выводимъ

$$gi - h^2 > 0.$$

Отсюда слѣдуетъ, что коэффиціенты подстановки

$$x = \frac{-h}{\sqrt{g(ig - h^2)}} x' + \sqrt{\frac{g}{ig - h^2}} \cdot y', \quad y = \frac{1}{\sqrt{g}} x'$$

вещественны. Далѣе имѣемъ, очевидно,

$$\frac{\partial z}{\partial x'} = \frac{-h}{\sqrt{g(ig - h^2)}} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial z}{\partial y},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y'} = \sqrt{\frac{g}{ig - h^2}} \cdot \frac{\partial z}{\partial x},$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x'^2} = \frac{h^2}{g(ig - h^2)} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{2h}{g\sqrt{ig - h^2}} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x' \partial y'} = \frac{-h}{ig - h^2} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{1}{\sqrt{ig - h^2}} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y},$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y'^2} = \frac{g}{ig - h^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

Слѣдовательно,

$$g\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x'^2} - r'_0\right) + 2h\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x' \partial y'} - s'_0\right) + i\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y'^2} - t'_0\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - v_0 - t_0$$

и

$$I' = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - f\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \ldots, x, y\right) = 0,$$

гдѣ f не содержитъ болѣе линейныхъ членовъ по

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - r_0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - s_0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - t_0,$$

или, какъ мы сказали выше, $f'_{r_0} = f'_{s_0} = f'_{t_0} = 0$.

Къ уравненію (29) способъ послѣдовательныхъ приближеній можетъ быть примѣненъ слѣдующимъ образомъ. Составимъ систему уравненій:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} = f(r_0 s_0 t_0 p_0 q_0 z_0 00) = r_0 + t_0 = A_0 \\
&\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} = f\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}, \frac{\partial u_0}{\partial x}, \frac{\partial u_0}{\partial y}, z, x, y\right) - A_0 \\
&\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_n}{\partial y^2} = f\left(\frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial x \partial y}, \ldots, x, y\right) - f\left(\frac{\partial^2 u_{n-2}}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u_{n-2}}{\partial x \partial y}, \ldots, x, y\right) \\
&\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \tag{30}$$

Опредѣлимъ затѣмъ послѣдовательно u_0, $v_1 = u_1 - u_0$, $v_2 = u_2 - u_1$ и т. д. при совокупности условій, что $u_0 = u_1 = \ldots = u_n = z$ на нѣкоторой окружности C произвольно малаго радіуса R, такъ что на той же окружности $v_n = 0$. Въ такомъ случаѣ очевидно, что, если рядъ

$$u = u_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots \tag{31}$$

такъ же, какъ и его производныя первыхъ двухъ порядковъ, равномѣрно сходится на окружности C и внутри ея, то u есть рѣшеніе уравненія (29), которое на окружности C совпадаетъ съ z.

§ 12. Но прежде чѣмъ приступить къ этому вычисленію, намъ необходимо предпринять изслѣдованіе свойствъ z, вытекающихъ изъ предположенія о существованіи производныхъ первыхъ трехъ порядковъ.

Положимъ, что производныя z первыхъ трехъ порядковъ меньше M по абсолютной величинѣ. Тогда

$$z = z_0 + p_0 x + q_0 y + \frac{1}{2}(r_0 x^2 + 2 s_0 xy + t_0 y^2) + \frac{1}{3!}(f_0 x^3 + 3 f_1 x^2 y + 3 f_2 xy^2 + f_3 y^3)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p_0 + r_0 x + s_0 y + \frac{1}{2}(\varphi_0 x^2 + 2\varphi_1 xy + \varphi_2 y^2)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = q_0 + s_0 x + t_0 y + \frac{1}{2}(\psi_0 x^2 + 2\psi_1 xy + \psi_2 y^2)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r_0 + \chi_0 x + \chi_1 y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = s_0 + \theta_0 x + \theta_1 y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t_0 + \eta_0 x + \eta_1 y$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = \pi_0, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \pi_1, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = \pi_2, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = \pi_3,$$

гдѣ f_i, φ_i, ψ_i, χ_i, θ_i, η_i, π_i обозначаютъ функціи x и y, меньшія по абсолютной величинѣ, чѣмъ M.

Полагая $x = \varrho \cos\theta$, $y = \varrho \sin\theta$, находимъ далѣе:

$$z = z_0 + \varrho(p_0 \cos\theta + q_0 \sin\theta) + \frac{\varrho^2}{2}(r_0 \cos^2\theta + 2 s_0 \cos\theta \sin\theta + t_0 \sin^2\theta) + \varrho^3 \Phi_0(\varrho, \theta)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p_0 + \varrho(r_0 \cos\theta + s_0 \sin\theta) + \varrho^3 \Phi_1(\varrho, \theta)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = q_0 + \varrho(s_0 \cos\theta + t_0 \sin\theta) + \varrho^2 \Phi_2(\varrho, \theta)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r_0 + \varrho \Phi_3(\varrho, \theta), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = s_0 + \varrho \Phi_4(\varrho, \theta), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t_0 + \varrho \Phi_5(\varrho, \theta)$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = \Phi_6(\varrho, \theta), \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \Phi_7(\varrho, \theta), \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = \Phi_8(\varrho, \theta), \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = \Phi_9(\varrho, \theta),$$

гдѣ Φ_i всѣ менѣе по абсолютной величинѣ, чѣмъ $2M$, внутри круга C' радіуса $R' < 1$, находящагося въ области S. Поэтому изъ равенствъ

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = -\frac{\partial z}{\partial x} y + \frac{\partial z}{\partial y} x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} y^2 - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} xy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} x^2 - \frac{\partial z}{\partial x} x - \frac{\partial z}{\partial y} y$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial \theta^3} = -\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} y^2 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} xy^2 - 3\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} x^2 y + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} x^3 + 3\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} xy +$$
$$+ 3\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(y^2 - x^2) - 3\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} xy + \frac{\partial z}{\partial x} y - \frac{\partial z}{\partial y} x$$

выводимъ

$$\frac{\partial \Phi_0(\varrho, \theta)}{\partial \theta} = -\Phi_1 \sin\theta + \Phi_2 \cos\theta < 4M$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_0(\varrho, \theta)}{\partial \theta^2} = \Phi_3 \sin^2\theta - 2\Phi_4 \sin\theta\cos\theta + \Phi_5 \cos^2\theta - \Phi_1 \cos\theta - \Phi_2 \sin\theta < 10M$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3 \Phi_0(\varrho, \theta)}{\partial \theta^3} = &-\Phi_6 \sin^3\theta + 3\Phi_7 \sin^2\theta\cos\theta - 3\Phi_8 \sin\theta\cos^2\theta + \Phi_9 \cos^3\theta + \\ &+ 3\Phi_3 \sin\theta\cos\theta + 3\Phi_4(\sin^2\theta - \cos^2\theta) - 3\Phi_5 \cos\theta\sin\theta + \\ &+ \Phi_1 \sin\theta - \Phi_2 \cos\theta < 24M.\end{aligned}$$

Отсюда слѣдуетъ, что на окружности C радіуса $R < R'$, Φ_0 разлагается въ тригонометрическій рядъ

$$\Phi_0 = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos n\theta + d_n \sin n\theta,$$

при чемъ коэффиціенты удовлетворяютъ неравенствамъ

$$|c_0| + \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| + |d_n| < 82M < N,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\{|c_n| + |d_n|\} < 200M^2 + 4 < N,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2\{|c_n| + |d_n|\} < 1152M^2 + 4 < N.$$

Первыя два изъ этихъ неравенствъ нами были уже выведены въ 1-й главѣ. Правильность третьяго мы обнаружимъ тѣмъ же способомъ.

Въ самомъ дѣлѣ

$$c_n = -\frac{1}{n^3\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial^3 \Phi_0}{\partial \theta^3} \sin n\theta\, d\theta, \quad d_n = \frac{1}{n^3\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial^3 \Phi_0}{\partial \theta^3} \cos n\theta\, d\theta.$$

Но изъ тождества

$$\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial^3 \Phi_0}{\partial \theta^3}\right)^2 d\theta = \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{2\pi} \frac{\partial^3 \Phi_0}{\partial \theta^3}\, d\theta\right]^2$$

$$+ \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left[\int_0^{2\pi} \frac{\partial^3 \Phi_0}{\partial \theta^3} \cos n\theta\, d\theta\right]^2 + \left[\int_0^{2\pi} \frac{\partial^3 \Phi_0}{\partial \theta^3} \sin n\theta\, d\theta\right]^2\right\}$$

вытекаетъ, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 n^6 + d_n^2 n^6 < 2(24M)^2.$$

Слѣдовательно, разбивая коэффиціенты c_n и d_n на двѣ группы: въ первой $|c_n| \leqq \frac{1}{n^4}$, и во второй $|c_n| > \frac{1}{n^4}$, т. е. $n^6 c_n^2 > n^2 |c_n|$, заключаемъ, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \{|c_n| + |d_n|\} < 1152 M^2 + 4.$$

Ч. и т. д.

Такимъ образомъ на окружности C радіуса $R < R'$ находимъ для z тригонометрическое разложеніе

$$z = z_0 + \frac{R^2}{4}(r_0 + t_0) + R^3 c + (Rp_0 + R^3 c_1)\cos\vartheta + (Rq_0 + R^3 d_1)\sin\vartheta +$$
$$+ \left[R^2 \frac{r_0 - t_0}{4} + R^3 c_2\right]\cos 2\vartheta + \left[\frac{R^2 s_0}{2} + R^3 d_2\right]\sin 2\vartheta + \sum_{n=1}^{\infty} R^3 \{c_n \cos n\vartheta + d_n \sin n\vartheta\} =$$
$$= \alpha_0 + \sum_{n-1}^{\infty} \alpha_n \cos n\vartheta + \beta_n \sin n\vartheta,$$

при чемъ

$$|\alpha_0 - z_0| + \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| + |\beta_n| < LR,$$
$$\left|\frac{\alpha_1}{R} - p_0\right| + \left|\frac{\beta_1}{R} - q_0\right| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{R} \{|\alpha_n| + |\beta_n|\} < LR, \qquad (31)$$
$$\left|\frac{4\alpha_2}{R^2} - r_0 + t_0\right| + \left|\frac{4\beta_2}{R^2} - 2s_0\right| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{R^2} \{|\alpha_n| + |\beta_n|\} < LR,$$

гдѣ L есть опредѣленное конечное число, которое зависитъ только отъ M.

Приступимъ теперь къ рѣшенію перваго изъ уравненій (30)

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} = A_0 = r_0 + t_0$$

при условіи, что u_0 на окружности C равно

$$z = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos n\vartheta + \beta_n \sin n\vartheta.$$

Это рѣшеніе очевидно будетъ дано формулой

$$u_0 = \frac{A_0}{4}(\rho^2 - R^2) + \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{R}\right)^n [\alpha_n \cos n\vartheta + \beta_n \sin n\vartheta]. \qquad (33)$$

Дифференцируя, находимъ

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} = \frac{A_0}{2}\varrho\cos\theta + \frac{\alpha_1}{R} + \sum_{n=2}^{\infty} n\frac{\varrho^{n-1}}{R^n}[\alpha_n \cos\overline{n-1}\,\theta + \beta_n \sin\overline{n-1}\,\theta]$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial y} = \frac{A_0}{2}\varrho\sin\theta + \frac{\beta_1}{R} + \sum_{n=2}^{\infty} n\frac{\varrho^{n-1}}{R^n}[\beta_n \cos\overline{n-1}\,\theta - \alpha_n \sin\overline{n-1}\,\theta]$$

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} = \frac{A_0}{2} + \frac{2\alpha_2}{R^2} + \sum_{n=3}^{\infty}\frac{n(n-1)\varrho^{n-2}}{R^n}[\alpha_n \cos\overline{n-2}\,\theta + \beta_n \sin\overline{n-2}\,\theta] \quad (33^{bis})$$

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} = \frac{2\beta_2}{R^2} + \sum_{n=3}^{\infty}\frac{n(n-1)\varrho^{n-2}}{R^n}[\beta_n \cos\overline{n-2}\,\theta - \alpha_n \sin\overline{n-2}\,\theta]$$

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} = \frac{A_0}{2} - \frac{2\alpha_2}{R^2} - \sum_{n=3}^{\infty}\frac{n(n-1)\varrho^{n-2}}{R^n}[\alpha_n \cos\overline{n-2}\,\theta + \beta_n \sin\overline{n-2}\,\theta].$$

Примѣняя къ формуламъ (33) и (33bis) обозначенія предыдущей главы, находимъ на основаніи неравенствъ (32) для низшихъ нормъ разсматриваемыхъ функцій слѣдующія неравенства, въ которыхъ r *какъ и во всѣхъ послѣдующихъ формулахъ положено равнымъ* $\frac{R}{2}$:

$$\begin{aligned}
&[u_0 - z_0]_{Rr} < \frac{15|A_0|R^2}{16} + LR < HR,\\
&\left[\frac{\partial u_0}{\partial x} - p_0\right]_{Rr} < \frac{|A_0|R}{2} + LR < HR,\\
&\left[\frac{\partial u_0}{\partial y} - q_0\right]_{Rr} < \frac{|A_0|R}{2} + LR < HR,\\
&\left[\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - r_0\right]_{Rr} < \left|\frac{A_0}{2} + \frac{2\alpha_2}{R^2} - r_0\right| + \sum_{n=3}^{\infty}\frac{n(n-1)\varrho^{n-1}}{R^2}\{|\alpha_n| + |\beta_n|\} < HR,\\
&\left[\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} - s_0\right]_{Rr} < HR,\\
&\left[\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} - t_0\right]_{Rr} < HR,
\end{aligned} \quad (34)$$

гдѣ H постоянная величина, зависящая только отъ M.

§ 13. Разсматривая слѣдующія уравненія нашей системы, мы видимъ, что имѣемъ дѣло съ уравненіями Пуассона

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = F(xy). \quad (34)$$

Положимъ, что F разлагается въ нормальный рядъ съ конечной нормой. Покажемъ, что въ такомъ случаѣ и функція v, обращающаяся

въ нуль на окружности C, разлагается въ нормальный рядъ, при чемъ норма ея, такъ же какъ и нормы ея производныхъ первыхъ двухъ порядковъ могутъ быть ограничены посредствомъ нормы $F(xy)$.

Итакъ, пусть въ полярныхъ координатахъ

$$F(xy) = A_0(\varrho) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(\varrho)\cos n\theta + B_n(\varrho)\sin n\theta,$$

гдѣ

$$A_n = \varrho^n \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} a_{pq}^{(n)} \varrho^{2p}(R^2 - \varrho^2)^q,$$

$$B_n = \varrho^n \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} b_{pq}^{(n)} \varrho^{2p}(R^2 - \varrho^2)^q,$$

и пусть

$$[F(xy)]_{Rr} = [A_0(\varrho)]_{Rr} + \sum_{1}^{\infty} [A_n(\varrho)]_{Rr} + [B_n(\varrho)]_{Rr} < P,$$

полагая по прежнему $r = \frac{R}{2}$.

Мы уже видѣли, что полагая a priori

$$v = C_0(\varrho) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n(\varrho)\cos n\theta + D_n(\varrho)\sin n\theta,$$

для C_n и D_n получаются значенія

$$C_0(\varrho) = \int_R^{\varrho} \frac{d\varrho}{\varrho} \int_0^{\varrho} \varrho A_0 d\varrho,$$

$$2nC_n(\varrho) = \varrho^n \int_R^{\varrho} \frac{A_n}{\varrho^{n-1}} d\varrho - \frac{1}{\varrho^n}\int_0^{\varrho} A_n \varrho^{n+1} d\varrho + \frac{\varrho^n}{R^{2n}}\int_0^{R} A_n \varrho^{n+1} d\varrho, \qquad (16)$$

$$2nD_n(\varrho) = \varrho^n \int_R^{\varrho} \frac{B_n}{\varrho^{n-1}} d\varrho - \frac{1}{\varrho^n}\int_0^{\varrho} B_n \varrho^{n+1} + \frac{\varrho^n}{R^{2n}}\int_0^{R} B_n \varrho^{n+1} d\varrho.$$

Дифференцируя, находимъ

$$\frac{dC_0}{d\varrho} = \frac{1}{\varrho}\int_0^{\varrho} \varrho A_0 d\varrho, \quad \frac{d^2C_0}{d\varrho^2} = A_0 - \frac{1}{\varrho^2}\int_0^{\varrho} \varrho A_0 d\varrho,$$

$$2\frac{dC_u}{d\varrho} = \varrho^{n-1} \int_R^{\varrho} \frac{A_n d\varrho}{\varrho^{n-1}} + \frac{1}{\varrho^{n+1}}\int_0^{\varrho} A_n \varrho^{n+1} d\varrho + \frac{\varrho^{n-1}}{R^{2n}}\int_0^{R} A_n \varrho^{n+1} d\varrho, \qquad (16^{bis})$$

$$2\frac{d^2C_n}{d\varrho^2} = (n-1)\varrho^{n-2} \int_R^{\varrho} \frac{A_n}{\varrho^{n-1}} d\varrho - \frac{n+1}{\varrho^{n+2}}\int_0^{\varrho} A_n \varrho^{n+1} d\varrho + \frac{(n-1)\varrho^{n-2}}{R^{2n}}\int_0^{R} A_n \varrho^{n+1} d\varrho + 2A_n$$

и аналогичныя формулы для производныхъ D_n. Изъ этихъ выраженій мы заключаемъ прежде всего, что C_n и D_n разлагаются въ нормальные ряды вида:

$$C_n = \varrho^n \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} c_{pq}^{(n)} \varrho^{2p} (R^2 - \varrho^2)^q,$$

$$D_n = \varrho^n \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} d_{pq}^{(n)} \varrho^{2p} (R^2 - \varrho^2)^q.$$

Сдѣлаемъ затѣмъ предположеніе, что во второй части уравненія Пуассона фигурируютъ лишь члены, для которыхъ $n > 2$. Въ такомъ случаѣ примѣненіе неравенствъ (26) и (27) даетъ безъ затрудненій $\left(\text{при предположеніи, что } r = \frac{R}{2}\right)$

$$\left[\frac{C_n}{\varrho^2}\right]_{Rr} < \frac{1}{2n}\left[\frac{(R+r)}{(n-2)r} + \frac{R+r}{2(n+2)r} + \frac{1}{n+2}\right][A_n]_{Rr} < \frac{6}{n^2}[A_n]_{Rr},$$

$$\left[\frac{dC_n}{\varrho d\varrho}\right]_{Rr} < \frac{1}{2}\left[\frac{R+r}{(n-2)r} + \frac{R+r}{2(n+2)r} + \frac{1}{n+2}\right][A_n]_{Rr} < \frac{6}{n}[A_n]_{Rr},$$

$$\left[\frac{d^2C_n}{d\varrho^2}\right]_{Rr} < \frac{1}{2}\left[\frac{(n-1)(R+r)}{(n-2)r} + \frac{(n+1)(R+r)}{2(n+2)r} + \frac{n-1}{n-2} + 2\right][A_n]_{Rr} < 6[A_n]_{Rr}$$

и аналогичныя неравенства для D_n и его производныхъ.

Слѣдовательно, изъ тождествъ

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial \varrho}\cos\theta - \frac{\partial v}{\varrho \partial \theta}\sin\theta, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial \varrho}\sin\theta + \frac{\partial v}{\varrho\partial\theta}\cos\theta,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial \varrho^2}\cos^2\theta - 2\frac{\partial^2 v}{\varrho\partial\varrho\partial\theta}\cos\theta\sin\theta + \frac{\partial^2 v}{\varrho^2\partial\theta^2}\sin^2\theta + \frac{\partial v}{\varrho\partial\varrho}\sin\theta + 2\frac{\partial v}{\varrho^2\partial\theta}\cos\theta\sin\theta,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial\varrho^2}\sin\theta\cos\theta + \frac{\partial^2 v}{\varrho\partial\varrho\partial\theta}(\cos^2\theta - \sin^2\theta) - \frac{\partial^2 v}{\varrho^2\partial\theta^2}\sin\theta\cos\theta - \frac{\partial v}{\varrho\partial\varrho}\cos\theta\sin\theta + \frac{\partial v}{\varrho^2\partial\theta}(\sin^2\theta - \cos^2\theta),$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial\varrho^2}\sin^2\theta + 2\frac{\partial^2 v}{\varrho\partial\varrho\partial\theta}\sin\theta\cos\theta + \frac{\partial^2 v}{\varrho^2\partial\theta^2}\cos^2\theta + \frac{\partial v}{\varrho\partial\varrho}\cos^2\theta - 2\frac{\partial v}{\varrho^2\partial\theta}\sin\theta\cos\theta$$

вытекаютъ важныя неравенства

$$[v]_{Rr} < hR^2[F]_{Rr},\quad \left[\frac{\partial v}{\partial x}\right]_{Rr} < hR[F]_{Rr},\quad \left[\frac{\partial v}{\partial y}\right]_{Rr} < hR[F]_{Rr},$$
$$\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right]_{Rr} < h[F]_{Rr},\quad \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right]_{Rr} < h[F]_{Rr},\quad \left[\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right]_{Rr} < h[F]_{Rr}, \tag{36}$$

гдѣ h нѣкоторый постоянный множитель, (который можетъ быть взятъ равнымъ *42*).

Однако до сихъ поръ неравенства (36) доказаны нами лишь при предположеніи, что тригонометрическое разложеніе F не содержитъ членовъ, для которыхъ $n \leqq 2$. Особаго разсмотрѣнія требуютъ еще случаи, когда $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$. Мы можемъ ограничиться лишь *косинусоидальными* членами, ибо замѣна косинусовъ синусами равносильна повороту на 90^0 осей координатъ.

1. *Пусть* $F = A_0(\varrho)$. Въ такомъ случаѣ

$$v = C_0(\varrho),$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{dC_0}{d\varrho}\cos\theta,\quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{dC_0}{d\varrho}\sin\theta,$$
$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{d^2C_0}{d\varrho^2}\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right) + \frac{dC_0}{\varrho d\varrho}\left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right) = \frac{A_0}{2} + \left(\frac{d^2C_0}{d\varrho^2} - \frac{A_0}{2}\right)\cos 2\theta,$$
$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \left(\frac{d^2C_0}{d\varrho^2} - \frac{A_0}{2}\right)\sin 2\theta,$$
$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{A_0}{2} - \left(\frac{d^2C_0}{d\varrho^2} - \frac{A_0}{2}\right)\cos 2\theta.$$

Мы видимъ, что полюсы, присутствія которыхъ можно было бы опасаться, на самомъ дѣлѣ отсутствуютъ.

Поэтому, замѣчая (при помощи неравенствъ 26 и 27), что

$$[C_0(\varrho)]_{Rr} < \frac{9R^2}{4}[A_0]_{Rr},\quad \left[\frac{dC_0}{d\varrho}\right]_{Rr} < \frac{3}{4}R[A_0]_{Rr},\quad \left[\frac{d^2C_0}{d\varrho}\right]_{Rr} < \frac{7}{4}[A_0]_{Rr},$$

заключаемъ, что неравенства (36) остаются въ силѣ и въ этомъ случаѣ.

2. *Пусть* $F = A_1(\varrho)\cos\theta$. Тогда

$$v = C_1\cos\theta,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{dC_1}{d\varrho}\cos^2\theta + \frac{C_1}{\varrho}\sin^2\theta, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{dC_1}{d\varrho}\cos\theta\sin\theta - \frac{C_1}{\varrho}\cos\theta\sin\theta,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{d^2C_1}{d\varrho^2}\cos^3\theta + 3\left(A_1 - \frac{d^2C_1}{d\varrho^2}\right)\cos\theta\sin\theta,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} = \left(3\frac{d^2C_1}{d\varrho^2} - 2A_1\right)\sin\theta\cos^2\theta + \left(A_1 - \frac{d^2C_1}{d\varrho^2}\right)\sin^3\theta,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \left(3\frac{d^2C_1}{d\varrho^2} - 2A_1\right)\cos\theta\sin^2\theta + \left(A_1 - \frac{d^2C_1}{d\varrho^2}\right)\cos^3\theta.$$

Полюсы и въ данномъ случаѣ отсутствуютъ.

Поэтому замѣчая, что

$$\left[\frac{C_1}{\varrho}\right]_{Rr} < 2R[A_1]_{Rr}, \quad \left[\frac{dC_1}{d\varrho}\right]_{Rr} < 2R[A_1]_{Rr}, \quad \left[\frac{d^2C_1}{d\varrho^2}\right]_{Rr} < \frac{3}{2}[A_1]_{Rr}$$

приходимъ опять къ неравенствамъ (36). Наконецъ

3. *Пусть* $F = A_2\cos 2\theta$. Слѣдовательно

$$v = C_2\cos 2\theta,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{dC_2}{d\varrho}\cos\theta\cos 2\theta + \frac{2C_2}{\varrho}\sin\theta\sin 2\theta, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{dC_2}{d\varrho}\sin\theta\cos 2\theta - \frac{2C_2}{\varrho}\cos\theta\sin 2\theta,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{d^2C_2}{d\varrho^2}\cos 2\theta\cos^2\theta + 4\frac{dC_2}{\varrho d\varrho}\sin 2\theta\cos\theta\sin\theta - \frac{4C_2}{\varrho^2}\cos 2\theta\sin^2\theta + \frac{dC_2}{\varrho d\varrho}\cos 2\theta\sin^2\theta - 4\frac{C_2}{\varrho^2}\sin 2\theta\cos\theta\sin\theta,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} = \frac{d^2C_2}{d\varrho^2}\cos 2\theta\cos\theta\sin\theta + \ldots + \frac{2C_2}{\varrho^2}(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\sin 2\theta,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{d^2C_2}{d\varrho^2}\cos 2\theta\sin^2\theta + \ldots + \frac{4C_2}{\varrho^2}\sin\theta\cos\theta\sin 2\theta.$$

И такъ какъ въ силу неравенствъ (26) и (27bis) находимъ,

$$\left[\frac{C_2}{\varrho^2}\right]_{Rr} < 4[A_2]_{Rr} \quad \left[\frac{dC_2}{\varrho d\varrho}\right] < 7[A_2]_{Rr} \quad \left[\frac{d^2C_2}{d\varrho^2}\right] < 8[A_2]_{Rr},$$

то неравенства (36) снова остаются въ силѣ (множитель h можетъ быть взятъ равнымъ 89).

Мы могли бы немедленно пойти дальше, такъ какъ *неравенства* (36) *даютъ ключъ къ доказательству нашей основной теоремы,* но здѣсь умѣстно будетъ болѣе разносторонне изслѣдовать уравненіе Пуассона.

До опубликованія представленныхъ здѣсь результатовъ (Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, ноябрь 1903 г.), было извѣстно, что при помощи модуля второй части уравненія Пуассона невозможно установить высшаго предѣла модулей вторыхъ производныхъ рѣшенія v этого уравненія, которое обращается въ нуль на данномъ контурѣ. Въ этомъ была *существенная разница между уравненіями эллиптическаго типа и обыкновенными дифференціальными уравненіями второго порядка съ одной независимой перемѣнной; здѣсь скрывалась истинная причина трудности рѣшенія такъ называемой задачи Дирикле и непримѣнимости къ ней съ большими или меньшими измѣненіями общихъ методовъ Коши для интегрированія дифференціальныхъ уравненій при болѣе простыхъ первоначальныхъ условіяхъ.*

Въ своемъ замѣчательномъ изслѣдованіи, помѣщенномъ въ Journal de l'Ecole Polytechnique въ 1890 году, о которомъ мы говорили въ 1-й главѣ, Пикаръ примѣнилъ счастливую мысль разсматривать вмѣсто модулей функцій нѣкоторыя опредѣленныя выраженія, съ ними связанныя. Но эти выраженія (*нормы* Пикара) оказались также недостаточны съ точки зрѣнія интересующей насъ сейчасъ цѣли, какъ и простые модули, и придали къ тому же значительную вѣроятность предположенію, что вообще неравенствъ, аналогичныхъ нашимъ неравенствамъ (36), не можетъ быть дано, какъ бы ни видоизмѣнять разсматриваемыя вмѣсто модулей выраженія. Однако легко построить выраженія, которыя *почти* осуществляютъ поставленную цѣль. Выраженія эти получаются слѣдующимъ образомъ.

Пусть

$$F(x, y) = A_0(\varrho) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(\varrho) \cos n\theta + B_n(\varrho) \sin n\theta .$$

Я называю *тригонометрическимъ модулемъ* функціи $F(x, y)$ внутри контура σ рядъ

$$\{F(x, y)\}_\sigma = \{A_0\}_\sigma + \sum_{n=1}^{\infty} \{A_n\}_\sigma + \{B_n\}_\sigma ,$$

гдѣ каждое изъ выраженій второй части равенства $\{A_n\}_\sigma$ означаетъ максимумъ модуля функціи A_n комплексной перемѣнной ϱ внутри контура σ, находящагося въ плоскости этой перемѣнной. Очевидно, также, что *въ случаѣ конечности тригонометрическаго модуля внутри комплексной области, $F(x, y)$ есть аналитическая функція относительно перемѣнной ϱ внутри этой области.* Вмѣсто контура σ можно разсматривать

вещественный отрѣзокъ $0R$. (Конечность тригонометрическаго модуля на опредѣленномъ отрѣзкѣ не является, разумѣется, признакомъ аналитическаго характера функціи). Легко видѣть въ этомъ случаѣ, что неравенства (36) остаются въ силѣ, если замѣнить нормы тригонометрическими модулями на отрѣзкѣ $0R$, или внутри соотвѣтствующимъ образомъ выбраннаго контура σ, при условіи однако, что *n неравно двумъ*. Дѣйствительно, достаточно предположить въ уравненіи $F = \cos 2\theta$, чтобъ замѣтить, что несмотря на конечность тригонометрическаго могуля F (на отрѣзкѣ $0R$, какъ и вообще при всѣхъ значеніяхъ ϱ), вторыя производныя рѣшенія v безконечны при $\varrho = 0$. Я считаю это обстоятельство заслуживающимъ чрезвычайнаго вниманія, такъ какъ оно показываетъ, *съ какой осторожностью нужно отдѣлять перемѣнныя ϱ и θ для того, чтобъ не ввести критической точки $\varrho = 0$, которая отсутствуетъ, пока обѣ перемѣнныя соединены.*

Единственное безусловно общее и логически совершенное средство избѣжать этого затрудненія заключается въ разсмотрѣніи такихъ выраженій, которыя бы по самой своей формѣ исключали въ случаѣ своей сходимости возможность существованія особенности въ точкѣ $\varrho = 0$; это осуществляется *нормами*. Но и сохраняя тригонометрическіе модули, можно указать болѣе или менѣе общіе искусственные пріемы, которые въ иныхъ случаяхъ приводятъ къ тѣмъ же результатамъ, что и примѣненіе нормъ. Напримѣръ, весьма интересно, что на основаніи формулъ (16) и (16bis) можно всетаки вывести изъ конечности тригонометрическаго модуля $\{\varrho^k F(x, y)\}_{0R}$ конечность [1]) тригонометричоскихъ модулей

$$\left\{\varrho^k \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right\}_{0R}, \quad \left\{\varrho^k \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right\}_{0R}, \quad \left\{\varrho^k \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right\}_{0R},$$

если k положительное, но не цѣлое число.

[1]) Легко убѣдиться, что тотъ же выводъ останется въ силѣ, если замѣнить отрѣзокъ $0R$ тупоугольнымъ ромбомъ, котораго большею діагональю является $0R$. Дѣйствительно, намъ достаточно разсмотрѣть интегралы $I = x^p \int_0^x F(x) x^q dx$, при условіи, что $q > 0$ и $p + q + 1 = 0$, и $G = x^p \int_x^R F(x) . x^q dx$, гдѣ $p > 0$ и $p + q + 1 = 0$, (такъ что $q \neq -1$) и показать, что

$$\{I\}_\sigma \leq \frac{1}{q+1} \{F(x)\}_\sigma, \quad \{G_\sigma\} < \frac{2}{|q+1|} \{F(x)\}_\sigma$$

(для опредѣленности я предположилъ, что острые углы ромба σ равны каждый 60^0). Ясно, что

$$\{I\}_\sigma \leq |x^p| . \int_0^x \{F(x)\}_\sigma . |x|^q . |dx| = |x|^p . \{F(x)\}_\sigma . \int_0^x |x|^q . |dx| =$$
$$= \{F(x)\}_\sigma . \frac{|x|^{p+q+1}}{q+1} \leq \frac{1}{q+1} \{F(x)\}_\sigma .$$

Другой пріемъ заключается въ томъ, что уравненіе Пуассона интегрируется при иныхъ предѣльныхъ условіяхъ, а именно при предположеніи, что значенія рѣшенія даны *на двухъ концентрическихъ окружностяхъ*, такъ что точка $\rho = 0$ находится внѣ кольца, внутри котораго искомое рѣшеніе не должно имѣть особенностей. Но такъ какъ для примѣненія этого пріема намъ понадобятся новыя формулы, то мы отложимъ его разсмотрѣніе на конецъ главы.

§ 14. Теперь же примѣнимъ неравенства (36) къ системѣ уравненій (30) и прежде всего разсмотримъ уравненіе

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} = f\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}\frac{\partial u_0}{\partial x}\frac{\partial u_0}{\partial y}u_0 xy\right) - f(r_0 s_0 t_0 p_0 q_0 z_0 00) = F_0(xy),$$

гдѣ u_0 дано формулой (33).

Полагая

$$u_0 - z_0 = a_1,\quad \frac{\partial u_0}{\partial x} - p_0 = b_1,\quad \frac{\partial u_0}{\partial y} - q_0 = c_1,$$

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - r_0 = a_0,\quad \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} - s_0 = b_0,\quad \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} - t_0 = c_0,$$

имѣемъ очевидно

$$F_0(xy) = A_0 a_0 + B_0 b_0 + C_0 c_0 + D_0 b_1 + E_0 c_1 + G_0 a_1 + H_0 x_1 + I_0 y_1,$$

гдѣ

$$A_0 = f'_{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}(r_0 + \theta a_0,\ s_0 + \theta b_0,\ t_0 + \theta c_0,\ p_0 + \theta b_1,\ q_0 + \theta c_1,\ z_0 + \theta a_1,\ \theta x,\ \theta y),$$

$$B_0 = f'_{\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}}(r_0 + \theta a_0,\ s_0 + \theta b_0, \ldots \theta y),$$

$$C_0 = f'_{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}(r_0 + \theta a_0,\ s_0 + \theta b_0, \ldots),$$

и т. д. $(0 < \theta < 1)$.

Съ другой стороны

$$\{G\}_\sigma \leqq |x|^p \int_x^R \{F(x)\}_\sigma |x|^q \cdot |dx| = |x|^p \cdot \{F(x)\}_\sigma \cdot \int_x^R |x|^q dx$$

и замѣчая, что

$$\int_x^R |x|^q dx < \frac{1}{\cos 60^0} \int_{|x|}^R x^q dx = 2\frac{R^{q+1} - |x|^{q+1}}{q+1},$$

находимъ

$$\{G\}_\sigma < \frac{2}{|q+1|}\{F\}_\sigma.$$

Кромѣ того ясно, что A_0, B_0, C_0 и т. д. разлагаются въ строку Тэйлора по степенямъ a_0, b_0, c_0, a_1, b_1, c_1, x, y.

Поэтому на основаніи § 9 и неравенствъ (34) находимъ

$$[A_0]_{Rr} < \overset{+}{f}'_{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}(HR,\ HR,\ HR,\ HR,\ HR,\ HR,\ R,\ R),$$

$$[B_0]_{Rr} < \overset{+}{f}'_{\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}}(HR,\ HR,\ HR,\ HR,\ HR,\ HR,\ R,\ R),$$

$$[C_0]_{Rr} < \overset{+}{f}'_{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}(HR,\ HR,\ HR,\ HR,\ HR,\ HR,\ R,\ R),$$

и т. д., гдѣ символъ $\overset{+}{f}$ относится къ строкѣ Тэйлора около значеній r_0, s_0, t_0, p_0, q_0, z_0, 0, 0. Такимъ образомъ, если вспомнимъ, что при этихъ значеніяхъ

$$f'_{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} = f'_{\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}} = f'_{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}} = 0,$$

то увидимъ, что, какъ бы мало ни было ε, можно выбрать R достаточно малымъ, чтобъ

$$[A_0]_{Rr} < \varepsilon, \quad [B_0]_{Rr} < \varepsilon, \quad [C_0]_{Rr} < \varepsilon,$$
$$[D_0]_{Rr} < P, \quad [E_0]_{Rr} < P, \quad [G_0]_{Rr} < P, \quad [H_0]_{Rr} < P, \quad [I_0]_{Rr} < P,$$

гдѣ P есть нѣкоторое опредѣленное конечное число.

Слѣдовательно,

$$[F_0]_{Rr} < 3(P+\varepsilon)HR + 2PR = \mu.$$

И наконецъ изъ неравенствъ (36) выводимъ, что

$$[v_1]_{Rr} < hR^2\mu, \quad \left[\frac{\partial v_1}{\partial x}\right]_{Rr} < hR\mu, \quad \left[\frac{\partial v_1}{\partial y}\right]_{Rr} < hR\mu,$$
$$\left[\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}\right]_{Rr} < h\mu, \quad \left[\frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial y}\right]_{Rr} < h\mu, \quad \left[\frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2}\right]_{Rr} < h\mu.$$

Обозначая черезъ F_n вторую часть равенства $(n+2)^{\text{го}}$ уравненія системы (30), докажемъ, что вообще можно R взять достаточно малымъ для того, чтобъ

$$[F_n]_{Rr} < \frac{\mu}{2^n}.$$

Для этого намъ можно употребить пріемъ, извѣстный подъ названіемъ математической индукціи: а именно, полагая наше неравенство

доказаннымъ для $n-1$, выведемъ отсюда его правильность для n, и такъ какъ для $n=0$, правильность неравенства доказана, то слѣдовательно оно будетъ выведено для всякаго n.

Итакъ допустимъ, что извѣстно, что

$$[F_0]_{Rr} < \mu, \quad [F_1]_{Rr} < \frac{\mu}{2}, \ldots [F_{n-1}]_{Rr} < \frac{\mu}{2^{n-1}}$$

и покажемъ, что можно дать R опредѣленное (не зависящее отъ n) достаточно малое значеніе, чтобъ отсюда вытекало

$$[F_n]_{Rr} < \frac{\mu}{2^n}.$$

Во-первыхъ изъ неравенствъ (36) вытекаетъ

$$\begin{gathered} [v_i]_{Rr} < \frac{h\mu R^2}{2^{i-1}}, \quad \left[\frac{\partial v_i}{\partial x}\right]_{Rr} < \frac{h\mu R}{2^{i-1}}, \quad \left[\frac{\partial v_i}{\partial y}\right]_{Rr} < \frac{h\mu R}{2^{i-1}}, \\ \left[\frac{\partial^2 v_i}{\partial x^2}\right]_{Rr} < \frac{h\mu}{2^{i-1}}, \quad \left[\frac{\partial^2 v_i}{\partial x\,\partial y}\right]_{Rr} < \frac{h\mu}{2^{i-1}}, \quad \left[\frac{\partial^2 v_i}{\partial y^2}\right]_{Rr} < \frac{h\mu}{2^{i-1}} \end{gathered} \tag{37}$$

при всякомъ i отъ единицы до n включительно.

Далѣе имѣемъ, очевидно:

$$F_n = \frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2} A_n + \frac{\partial^2 v_n}{\partial x\,\partial y} B_n + \frac{\partial^2 v_n}{\partial y^2} C_n + \frac{\partial v_n}{\partial x} D_n + \frac{\partial v_n}{\partial y} E_n + v_n G_n,$$

гдѣ

$$A_n = f'_{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}\left(\frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial x^2} + \vartheta\frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial x\,\partial y} + \vartheta\frac{\partial^2 v_n}{\partial x\,\partial y}, \frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial y^2} + \vartheta\frac{\partial^2 v_n}{\partial y^2}, \ldots, u_{n-1} + \vartheta v_n\right)$$

$$B_n = f'_{\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}}\left(\frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial x^2} + \vartheta\frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2}, \ldots u_{n-1} + \vartheta v_n\right)$$

и т. д. $(0 < \vartheta < 1)$.

Замѣтимъ также, что A_n, B_n и т. д. разлагаются въ строку Тэйлора по степенямъ

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} - r_0, \ \frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial x^2} - r_0, \ \frac{\partial^2 u_n}{\partial x\,\partial y} - s_0, \ \frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial x\,\partial y} - s_0, \ \frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2} - t_0, \ \frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial y^2} - t_0,$$

$$\frac{\partial u_n}{\partial x} - p_0, \ \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} - p_0, \ \frac{\partial u_n}{\partial y} - q_0, \ \frac{\partial u_{n-1}}{\partial y} - q_0, \ u_n - z_0, \ u_{n-1} - z_0,$$

симметричную относительно функцій u_n и u_{n-1}.

Но

$$u_n = z_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_n,$$

$$\frac{\partial u_n}{\partial x} = p_0 + \frac{\partial v_1}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial v_n}{\partial x}$$

и т. д., такъ что, какъ бы велико ни было n, изъ неравенствъ (37) вытекаетъ

$$[u_n - z_0]_{Rr} < 2h\mu,$$

$$\left[\frac{\partial u_n}{\partial x} - p_0\right]_{Rr} < 2h\mu,$$

. . . . . .

$$\left[\frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2} - t_0\right]_{Rr} < 2h\mu.$$

Слѣдовательно,

$$[A_n]_{Rr} < \overset{+}{f}'_{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}(2h\mu,\ 2h\mu,\ 2h\mu,\ 2h\mu,\ 2h\mu,\ 2h\mu,\ R,\ R),$$

$$[B_n]_{Rr} < \overset{+}{f}'_{\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}}(2h\mu,\ 2h\mu,\ 2h\mu,\ 2h\mu,\ 2h\mu,\ 2h\mu,\ R,\ R),$$

. . . . . .

$$[G_n]_{Rr} < \overset{+}{f}'_u(2h\mu,\ 2h\mu,\ 2h\mu,\ 2h\mu,\ 2h\mu,\ 2h\mu,\ R,\ R),$$

гдѣ во второй части неравенствъ символъ $\overset{+}{f}$ относится къ разложенію Тэйлора около r_0, s_0, t_0, p_0, q_0, z_0, 0, 0.

Очевидно, поэтому, что, если R было взято достаточно малымъ, будемъ также имѣть:

$$[A_n]_{Rr} < \varepsilon,\quad [B_n]_{Rr} < \varepsilon,\quad [C_n]_{Rr} < \varepsilon,\quad [D_n]_{Rr} < P,\quad [E_n]_{Rr} < P,$$
$$[G_n]_{Rr} < P.$$

Откуда

$$[F_n]_{Rr} < \frac{h\mu}{2^{n-1}}(3\varepsilon + 3RP).$$

Но ясно, что при R достаточно маломъ $3\varepsilon + 3RP < \frac{1}{2}$.

Слѣдовательно правильность неравенства

$$[F_n]_{Rr} < \frac{h\mu}{2^n}$$

доказана для всякаго n.

Отсюда вытекаетъ уже не только сходимость рядовъ $u_0 + v_1 + \ldots + v_n + \ldots$ и его производныхъ, но и сходимость нормъ:

$$[u]_{Rr} < [u_0]_{Rr} + [v_1]_{Rr} + [v_2]_{Rr} + \ldots [v_n]_{Rr} + \ldots,$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{Rr} < \left[\frac{\partial u_0}{\partial x}\right]_{Rr} + \left[\frac{\partial v_1}{\partial x}\right]_{Rr} + \ldots + \left[\frac{\partial v_n}{\partial x}\right]_{Rr} + \ldots$$

. . . . . .

и т. д.

И наконецъ, примѣняя теорему § 8 приходимъ къ заключенію, что *рѣшеніе уравненія и есть функція аналитическая.*

Теперь намъ остается еще показать, что найденное рѣшеніе u есть ничто иное, какъ произвольное рѣшеніе z, изъ котораго мы исходили, съ которымъ u совпадаетъ на окружности C малаго радіуса R. Съ этой цѣлью напишемъ:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - f\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, z, x, y\right) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - f\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, u, x, y\right) = 0.$$

Вычитая почленно и полагая $z - u = t$, находимъ

$$A(xy)\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + 2B(xy)\frac{\partial^2 t}{\partial x \partial y} + C(xy)\frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + 2D\frac{\partial t}{\partial x} + 2E\frac{\partial t}{\partial y} + Ft = 0, \quad (38)$$

гдѣ

$$A(xy) = 1 - f'_{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \theta\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \theta\frac{\partial^2 t}{\partial x \partial y}, \ldots u + \theta t, x, y\right)$$

$$B(xy) = -\frac{1}{2}f'_{\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \theta\frac{\partial^2 t}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \theta\frac{\partial^2 t}{\partial x \partial y}, \ldots\right)$$

$$C(xy) = 1 - f'_{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \theta\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}, \ldots\right)$$

и т. д., при $0 < \theta < 1$.

Мы получили такимъ образомъ линейное уравненіе относительно t. Можно показать, что если радіусъ R достаточно малъ, оно будетъ *эллиптическаго* типа, т. е. будетъ соблюдено неравенство $AC - B^2 > 0$.

Въ самомъ дѣлѣ для этого достаточно, чтобъ

$$\left|f'_{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}\right| + \left|f'_{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}\right| + \left|f'_{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} \cdot f'_{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}\right| + \frac{1}{4}\left(f'_{\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}}\right)^2 < 1, \quad (39)$$

при замѣнѣ $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ черезъ $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\theta\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$ черезъ $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\theta\frac{\partial^2 t}{\partial x\partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ черезъ $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\theta\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}$ и т. д., гдѣ θ произвольная правильная дробь.

Но въ силу предположеній $f'_{r_0}=f'_{s_0}=f'_{t_0}=0$ неравенство (39) очевидно будетъ соблюдено, если только

$$\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\theta\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}-r_0\right|<\beta,\quad \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\theta\frac{\partial^2 t}{\partial x\partial y}-s_0\right|<\beta$$

$$\left|\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\theta\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}-t_0\right|<\beta,\quad \left|\frac{\partial u}{\partial x}+\theta\frac{\partial t}{\partial x}-p_0\right|<\beta$$

$$\left|\frac{\partial u}{\partial y}+\theta\frac{\partial t}{\partial y}-q_0\right|<\beta,\quad |u+\theta t-t_0|<\beta,\quad |x|<|\beta,\quad |y|<\beta,$$

гдѣ β достаточно малое число.

Въ силу же непрерывности z и ея производныхъ первыхъ двухъ порядковъ, можно взять R достаточно малымъ, чтобъ

$$|z-z_0|<\frac{\beta}{3},\quad \left|\frac{\partial z}{\partial x}-p_0\right|<\frac{\beta}{3},\ \ldots,\ \left|\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-t_0\right|<\frac{\beta}{3}.$$

Съ другой стороны изъ нашего доказательства явствуетъ, что рѣшеніе u, найденное способомъ послѣдовательныхъ приближеній, также удовлетворяетъ неравенствамъ

$$|u-z_0|<\frac{\beta}{3},\quad \left|\frac{\partial u}{\partial x}-p_0\right|<\frac{\beta}{3},\ \ldots,\ \left|\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-t_0\right|<\frac{\beta}{3}.$$

Такъ что

$$|t|<\frac{2\beta}{3},\quad \left|\frac{\partial t}{\partial x}\right|<\frac{2\beta}{3},\ \ldots,\ \left|\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}\right|<\frac{2\beta}{3}.$$

Слѣдовательно

$$\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\theta\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}-r_0\right|<\beta,\quad \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\theta\frac{\partial^2 t}{\partial x\partial y}-s_0\right|<\beta$$

и т. д.

Итакъ уравненіе (38) относительно t эллиптическаго типа.

Теперь нетрудно будетъ доказать, что функція t, удовлетворяющая уравненію (38), которая на нѣкоторомъ достаточно маломъ контурѣ C обращается въ нуль, тождественно равна нулю.

Для этого разсмотримъ двойной интегралъ [1]) взятый въ области ограниченной контуромъ C

[1]) Аналогичное разсужденіе читатель найдетъ у Пикара „Traité d'analyse“, t. II. Ch. 1, p. 24.

$$I=\iint t\left\{\left(A\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 t}{\partial x\,\partial y}+C\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}+2D\frac{\partial t}{\partial x}+2E\frac{\partial t}{\partial y}+Ft\right)-\right.$$
$$\left.-M\left(t+2x\frac{\partial t}{\partial x}\right)\right\}dx\,dy=-M\iint\frac{\partial(t^2x)}{\partial x}dx\,dy=0,$$

гдѣ M нѣкоторая постоянная величина.

Съ другой стороны:

$$I=-\iint\left\{A\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^2+2B\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)+C\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}\right)t\frac{\partial t}{\partial x}+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial B}{\partial x}+\frac{\partial C}{\partial y}\right)t\frac{\partial t}{\partial y}-2Dt\frac{\partial t}{\partial x}-2Et\frac{\partial t}{\partial y}-Ft^2+M\left(t^2+2xt\frac{\partial t}{\partial x}\right)\right\}dx\,dy.$$

Подъ знакомъ интегрированія у насъ квадратичная форма, которая, какъ мы сейчасъ увидимъ, можетъ стать опредѣленной, если извѣстнымъ образомъ выберемъ контуръ C и число M. Въ самомъ дѣлѣ, дискриминантъ этой формы равенъ

$$\Delta=8(AC-B^2)(M-F)+4B\left(\frac{\partial B}{\partial x}+\frac{\partial C}{\partial y}-2E\right)\left(\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}-2D+2Mx\right)-$$
$$-2C\left(\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}-2D+2Mx\right)^2-2A\left(\frac{\partial B}{\partial x}+\frac{\partial C}{\partial y}-2E\right)^2.$$

Слѣдовательно, полагая

$$AC-B^2=\delta,\quad \frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}-2D=\alpha,\quad \frac{\partial B}{\partial x}+\frac{\partial C}{\partial y}-2E=\beta,$$

видимъ, что условіе $\Delta>0$, для того чтобъ разсматриваемая форма была опредѣленной, равнозначно неравенству

$$4M\delta>A\beta^2+C(\alpha+2Mx)^2-2B(\alpha+2Mx)\beta+4\delta F.$$

Но это послѣднее неравенство будетъ очевидно удовлетворено, если

$$|x|<\frac{2\delta_1}{N},\qquad M=\frac{N}{2\delta_1},$$

гдѣ δ_1 означаетъ минимумъ δ, а N максимумъ выраженія

$$|A\beta^2|+|C|.(|\alpha|+2)^2+2|B|(|\alpha|+2)|\beta|+4\delta|F|.$$

Итакъ достаточно, чтобъ на контурѣ C, $|x|<\frac{2\delta_1}{N}$, для того чтобъ рѣшеніе t, равное нулю на этомъ контурѣ, было тождественно равно нулю.

Отсюда слѣдуетъ, что $z=u$.

Такимъ образомъ *основная теорема доказана.*

§ 15. Укажемъ еще второе доказательство этой теоремы, не основанное на примѣненіи нормальныхъ рядовъ.

Пусть z будетъ по прежнему произвольнымъ рѣшеніемъ уравненія (29). Вмѣсто того, чтобъ искать по способу послѣдовательныхъ приближеній рѣшеніе уравненія (29) которое совпадало бы съ z на окружности C, обладая внутри окружности конечными производными первыхъ двухъ порядковъ, мы будемъ искать рѣшеніе u, которое бы *на двухъ концентрическихъ окружностяхъ весьма малыхъ радіусовъ совпадало бы съ* z.

Обозначимъ черезъ R и R_1 $(R_1 < R)$ соотвѣтственные радіусы разсматриваемыхъ окружностей. Тогда, на основаніи вычисленій сдѣланныхъ въ началѣ главы, видимъ, что на окружности C

$$z = z_0 + \frac{R^2}{4}(r_0 + t_0) + R^3 c_0 + (Rp_0 + R^3 c_1)\cos\theta + (Rq_0 + R^3 d_1)\sin\theta +$$
$$+ [R^2 \frac{r_0 - t_0}{4} + R^3 c_2]\cos 2\theta + \left[\frac{R^2 s_0}{2} + R^3 d_2\right]\sin 2\theta +$$
$$+ \sum_{n=3}^{\infty} R^3 [c_n \cos n\theta + d_n \sin n\theta] = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin\theta$$

и на окружности C_1

$$z = z_0 + \frac{R_1^2}{4}(r_0 + t_0) + R_1^3 c_0 + (R_1 p_0 + R_1^3 c_1)\cos\theta + (R_1 q_0 + R_1^3 d_1)\sin\theta +$$
$$+ [R_1^2 \frac{r_0 - t_0}{4} + R_1^3 c_2]\cos 2\theta + \left[\frac{R_1^2 s_0}{2} + R_1^3 d_2\right]\sin 2\theta +$$
$$\sum_{n=3}^{\infty} R_1^3 [c_n \cos n\theta + d_n \sin n\theta] = \alpha_0' + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n' \cos n\theta + \beta_n' \sin n\theta .$$

Но рѣшеніе u_0 перваго изъ уравненій (30)

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} = r_0 + t_0 = A_0 ,$$

которое на окружностяхъ C и C_1 принимаетъ указанныя значенія, равно

$$u_0 = \frac{A_0}{4}(\varrho^2 - R^2) + \alpha_0 + c_0(R_1^3 - R^3)\frac{\log\frac{\varrho}{R}}{\log\frac{R_1}{R}} +$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \left(\frac{R_1}{R}\right)^{2n}} \left\{ \frac{\varrho^n}{R^n}\left[\left(\alpha_n - \alpha_n' \frac{R_1^n}{R^n}\right)\cos n\theta + \left(\beta_n - \beta_n' \frac{R_1^n}{R^n}\right)\sin n\theta\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{R_1^n}{\varrho^n}\left[\left(\alpha_n' - \alpha_n \frac{R_1^n}{R^n}\right)\cos n\theta + \left(\beta_n' - \beta_n \frac{R_1^n}{R^n}\right)\sin n\theta\right]\right\}.$$

Полагая для опредѣленности $R_1 = \frac{R}{2}$, найдемъ на основаніи неравенствъ (32)

$$\left\{u_0 - z_0\right\}_\sigma < \frac{|A_0|R^2}{2} + 4LR < HR$$
$$\left\{\frac{\partial u_0}{\partial x} - p_0\right\}_\sigma < \frac{|A_0|R}{2} + 4LR < HR$$
$$\left\{\frac{\partial u_0}{\partial y} - q_0\right\}_\sigma < \frac{|A_0|R}{2} + 4LR < HR \qquad (34')$$
$$\left\{\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - r_0\right\}_\sigma < \frac{|A_0|R}{2} + 4LR < HR$$
$$\left\{\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} - s_0\right\}_\sigma < \frac{|A_0|R}{2} + 4LR < HR$$
$$\left\{\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} - t_0\right\}_\sigma < \frac{|A_0|R}{2} + 4LR < HR.$$

Лѣвая часть этихъ неравенствъ представляетъ тригонометрическіе модули внутри ромба σ, построеннаго на отрѣзкѣ RR_1, какъ на бо́льшей діагонали, причемъ острые углы ромба мы предположимъ равными 60^0. Неравенства (34′) вполнѣ равнозначны неравенствамъ (34).

Намъ остается вывести еще неравенства, замѣняющія неравенства (36). Для этого вернемся къ уравненію (35), и укажемъ формулы аналогичныя формуламъ (16), которыми опредѣлялись бы коэффиціенты тригонометрическаго разложенія рѣшенія, обращающагося въ нуль на окружностяхъ C и C_1. Сохраняя прежнія обозначенія, найдемъ безъ труда

$$2n\left[R^{2n} - R_1^{2n}\right] C_n = \left[\varrho^n - \frac{R_1^{2n}}{\varrho^n}\right] \int_R^\varrho A_n \left[\frac{R^{2n}}{\varrho^{n-1}} - \varrho^{n+1}\right] d\varrho +$$
$$+ \left[\varrho^n - \frac{R^{2n}}{\varrho^n}\right] \int_\varrho^{R_1} A_n \left[\frac{R_1^{2n}}{\varrho^{n-1}} - \varrho^{n+1}\right] d\varrho,$$
$$2n\left[R^{2n} - R_1^{2n}\right] D_n = \left[\varrho^n - \frac{R_1^{2n}}{\varrho^n}\right] \int_R^\varrho B_n \left[\frac{R^{2n}}{\varrho^{n-1}} - \varrho^{n+1}\right] d\varrho + \qquad (40)$$
$$+ \left[\varrho^n - \frac{R^{2n}}{\varrho^n}\right] \int_\varrho^{R_1} B_n \left[\frac{R_1^{2n}}{\varrho^{n-1}} - \varrho^{n+1}\right] d\varrho,$$

и, при $n = 0$,

$$C_0 = \int_R^\varrho \frac{d\varrho}{\varrho} \int_0^\varrho \varrho A_0 \, d\varrho + \frac{\log \frac{\varrho}{R}}{\log \frac{R_1}{R}} \int_{R_1}^R \frac{d\varrho}{\varrho} \int_0^\varrho \varrho A_0 \, d\varrho.$$

Слѣдовательно [1]),

$$\{C_n\}_\sigma < \frac{12R^2}{n^2}\{A_n\}_\sigma,\quad \{D_n\}_\sigma < \frac{12R^2}{n^2}\{B_n\}_\sigma,\quad \{C_0\}_\sigma < 2R^2\{A_0\}_\sigma \tag{41}$$

Дифференцируя формулы (40), найдемъ также

$$2(R^{2n} - R_1^{2n})\frac{dC_n}{d\varrho} = \left[\varrho^{n-1} + \frac{R_1^{2n}}{\varrho^{n+1}}\right]\int_R^\varrho A_n\left[\frac{R^{2n}}{\varrho^{n-1}} - \varrho^{n+1}\right]d\varrho +$$

$$+\left[\varrho^{n-1} + \frac{R^{2n}}{\varrho^{n+1}}\right]\int_\varrho^{R_1} A_n\left[\frac{R_1^{2n}}{\varrho^{n-1}} - \varrho^{n+1}\right]d\varrho, \tag{40^{bis}}$$

$$2(R^{2n} - R_1^{2n})\frac{d^2C_n}{d\varrho^2} = \left[(n-1)\varrho^{n-2} - (n+1)\frac{R_1^{2n}}{\varrho^{n+2}}\right]\int_R^\varrho A_n\left[\frac{R^{2n}}{\varrho^{n-1}} - \varrho^{n+1}\right]d\varrho +$$

$$+\left[(n-1)\varrho^{n-2} - (n+1)\frac{R^{2n}}{\varrho^{n+2}}\right]\int_\varrho^{R_1} A_n\left[\frac{R_1^{2n}}{\varrho^{n-1}} - \varrho^{n-1}\right]d\varrho + 2(R^{2n} - R_1^{2n})A_n.$$

Слѣдовательно,

$$\left\{\frac{dC_n}{d\varrho}\right\}_\sigma < \frac{24R}{n}\{A_n\}_\sigma,\quad \left\{\frac{d^2C_n}{d\varrho^2}\right\}_\sigma < 25\{A_n\}_\sigma. \tag{41^{bis}}$$

Такъ какъ точка $\varrho = 0$ лежитъ внѣ ромба σ, то изъ неравенствъ (41) и (41bis) безъ всякихъ затрудненій вытекаетъ

$$\{v\}_\sigma < hR^2\{F(x,y)\}_\sigma,\quad \left\{\frac{\partial v}{\partial x}\right\}_\sigma < hR\{F(x,y)\}_\sigma,\quad \left\{\frac{\partial v}{\partial y}\right\}_\sigma < hR\{F(x,y)\}_\sigma,$$
$$\left\{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right\}_\sigma < h\{F(x,y)\}_\sigma,\quad \left\{\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right\}_\sigma < h\{F(x,y)\}_\sigma,\quad \left\{\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right\}_\sigma < h\{F(x,y)\}_\sigma. \tag{42}$$

Неравенства (42) могутъ вполнѣ замѣнить неравенства (36) при примѣненіи способа послѣдовательныхъ приближеній, благодаря чему нѣтъ надобности воспроизводить еще разъ сдѣланное выше разсужденіе. Мы получимъ такимъ образомъ рѣшеніе u даннаго уравненія, имѣющее конечный тригонометрическій модуль внутри контура σ. Отсюда ясно, что функція u, а также всѣ ея производныя первыхъ двухъ порядковъ суть *аналитическія функціи относительно перемѣнной* ϱ, но a priori не оче-

[1]) Неравенства (41) получаются при помощи соображеній указанныхъ въ выноскѣ на страницѣ 36-й съ той разницей, что намъ не приходится безпокоиться относительно точки $\rho = 0$ (которая лежитъ внѣ контура σ).

видно, что рѣшеніе u должно быть аналитическимъ относительно обѣихъ перемѣнныхъ. Для того, чтобъ это доказать, замѣтимъ прежде всего, что тѣ же соображенія [1]), что и въ первомъ доказательствѣ, позволяютъ установить тождественность найденнаго рѣшенія u и рѣшенія z, изъ котораго мы исходили. Слѣдовательно, передвигая по произволу центръ окружностей C и C_1, мы приходимъ къ заключенію, что z и ея производныя первыхъ двухъ порядковъ суть аналитическія функціи относительно каждой изъ перемѣнныхъ x и y взятой въ отдѣльности. На основаніи теоремы Коши мы можемъ построить аналитическое рѣшеніе z_1, которое при $y=0$ вмѣстѣ со своей первой производной по y совпадало бы съ z и ея производной по y. Въ такомъ случаѣ при $y=0$ всѣ производныя z_1 совпадутъ съ соотвѣтственными производными z; и, такъ какъ z, разсматриваемая, какъ функція одного только y, не имѣетъ особенности при $y=0$, то $z-z_1$ при всякомъ опредѣленномъ x является аналитической функціей y, которой всѣ производныя равны нулю, а потому z тождественно равно z_1 при всякомъ x и y.

Таково второе доказательство аналитической природы рѣшенія z.

§ 16. Въ заключеніе укажемъ примѣненіе основной теоремы къ нѣкоторымъ интереснымъ частнымъ случаямъ.

1. *Всѣ минимальныя поверхности аналитичны.*

Въ самомъ дѣлѣ онѣ опредѣляются уравненіемъ

$$f=(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t=0.$$

Но всѣ рѣшенія этого уравненія [2]) удовлетворяютъ неравенству (2), такъ какъ

$$\delta=f'_r f'_t-\frac{1}{4}(f'_s)^2=1+p^2+q^2>0.$$

2. *Всѣ поверхности постоянной положительной кривизны аналитичны.*

Въ самомъ дѣлѣ онѣ удовлетворяютъ уравненію

$$f=rt-s^2-C^2(1+p^2+q^2)^2=0.$$

Но

$$\delta=f'_r f'_t-\frac{1}{4}(f'_s)^2=tr-s^2=C^2(1+p^2+q^2)^2>0.$$

3. *Всѣ поверхности, налагающіяся на какую нибудь аналитическую поверхность положительной кривизны, аналитичны.*

---

[1]) Въ интегралѣ I на страницѣ 70 слѣдуетъ лишь замѣнить x и y соотвѣтственно черезъ ρ и ϑ, не обращая вниманія на то, что коэффиціенты нѣкоторыхъ членовъ становятся безконечными при $\rho=0$, такъ какъ эта точка находится *внѣ* области интегрированія.

[2]) Такого рода уравненія называются, какъ извѣстно, уравненіями *эллиптическаго* типа.

Пусть

$$d\sigma^2 = du^2 + C^2 dv^2$$

представляетъ линейный элементъ аналитической поверхности положительной кривизны въ геодезическихъ координатахъ, на которую накладывается разсматриваемая поверхность $\sum$, такъ что C аналитическая функція u и v и кромѣ того

$$\frac{1}{C}\frac{\partial^2 C}{\partial u^2} < 0,$$

такъ какъ кривизна $\frac{1}{RR'}$ выражается формулой

$$\frac{1}{RR'} = -\frac{1}{C}\frac{\partial^2 C}{\partial u^2}.$$

Съ другой стороны, координаты x, y, z поверхности $\sum$ разсматриваемыя, какъ функціи параметровъ u и v удовлетворяютъ уравненію

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\sigma^2 = du^2 + C^2 dv^2,$$

изъ котораго выводится, что каждая изъ координатъ x, y, z удовлетворяетъ также уравненію [1])

$$F = C\left[\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} - \left(\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}\right)^2\right] + \left(C^2\frac{\partial C}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial C}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v}\right)\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + 2\frac{\partial C}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} -$$
$$- C^2\frac{\partial^2 C}{\partial u^2}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 - \left[\frac{\partial^2 C}{\partial u^2} + \frac{1}{C}\left(\frac{\partial C}{\partial u}\right)^2\right]\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + C^2\frac{\partial^2 C}{\partial u^2} = 0.$$

Легко видѣть, что это послѣднее уравненіе эллиптическаго типа.

Въ самомъ дѣлѣ

$$\delta = F_r' F_t' - \frac{1}{4}(F_s')^2 = C^2(rt - s^2) + \left(C^3\frac{\partial C}{\partial u}p - C\frac{\partial C}{\partial v}q\right)r +$$
$$+ 2C\frac{\partial C}{\partial u}qs - \left(\frac{\partial C}{\partial u}\right)^2 q^2 = C\frac{\partial^2 C}{\partial u^2}[C^2p^2 + q^2 - C^2].$$

Но

$$[C^2p^2 + q^2 - C^2] = [(1 - p^2)(C^2 - q^2) - p^2q^2]$$

дискриминантъ опредѣленной квадратичной формы

$$du^2 + C^2 dv^2 - [p\,du + q\,dv]^2.$$

Слѣдовательно,

$$\delta > 0.$$

---

[1]) Darboux „Théorie des surfaces“ t. III, стр. 262.

ВТОРАЯ ЧАСТЬ

Задача Дирикле.

Глава IV.

Каноническія линейныя уравненія эллиптическаго типа.

§ 17. Задачей Дирикле мы будемъ называть слѣдующую задачу:

Опредѣлить функцію z, удовлетворяющую данному уравненію эллиптическаго типа, обладающую конечными и непрерывными производными первыхъ двухъ порядковъ внутри даннаго контура C, и обращающуюся на этомъ контурѣ въ данную функцію дуги.

Эта задача не всегда возможна, а если возможна, то не всегда допускаетъ только одно рѣшеніе. Мы ограничимся лишь тѣми уравненіями относительно которыхъ можно *a priori* утверждать, что двухъ безконечно близкихъ рѣшеній задача Дирикле не допускаетъ. Достаточно взять простой примѣръ уравненія $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}+z=0$, чтобъ убѣдиться, что это не общее правило. Въ самомъ дѣлѣ, при всякомъ значеніи A функція

$$z=A\sin\frac{x}{\sqrt{2}}\sin\frac{y}{\sqrt{2}}$$

удовлетворяетъ нашему уравненію и обращается въ нуль на контурѣ квадрата, котораго стороны $x=0$, $y=0$, $x=\pi\sqrt{2}$, $y=\pi\sqrt{2}$.

Если

$$F\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},\ \frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y},\ z,\ x,\ y\right)=0 \qquad (1)$$

разсматриваемое уравненіе эллиптическаго типа, приходится сдѣлать ограниченіе, что всякое рѣшеніе его удовлетворяетъ также неравенству

$$F'_{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}}\cdot F'_z\leqq 0. \qquad (43)$$

Лишнее, пожалуй, напоминать, что $F'_{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}}\gtrless 0$, вслѣдствіе характеристичнаго для уравненій эллиптическаго типа неравенства (2)

$$4F'_{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}}\cdot F'_{\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}}-\left(F'_{\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}}\right)^2>0.$$

Въ дальнѣйшемъ мы будемъ всегда предполагать $F'_{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}} > 0$. Поэтому неравенство (43) замѣняется неравенствомъ

$$F'_z \leqq 0. \tag{43 bis}$$

Итакъ пусть условіе (43) соблюдено. Еслибъ задача Дирикле допускала 2 рѣшенія z и z', то можно было бы написать

$$F\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, z, x, y\right) = 0,$$
$$F\left(\frac{\partial^2 z'}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z'}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z'}{\partial y^2}, \frac{\partial z'}{\partial x}, \frac{\partial z'}{\partial y}, z', x, y\right) = 0.$$

Откуда, полагая $z - z' = t$, находимъ

$$A\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 t}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + 2D\frac{\partial t}{\partial x} + 2E\frac{\partial t}{\partial y} + Gt = 0, \tag{44}$$

гдѣ

$$A = F'_{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}}\left(\frac{\partial z'}{\partial x^2} + \theta\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z'}{\partial x \partial y} + \theta\frac{\partial^2 t}{\partial x \partial y}, \ldots\right),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$G = F'_z\left(\frac{\partial^2 z'}{\partial x^2} + \theta\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z'}{\partial x \partial y} + \theta\frac{\partial^2 t}{\partial x \partial y}, \ldots\right),$$

причемъ $0 < \theta < 1$.

Но, если въ уравненіи (44) допустимъ, что

$$AC - B^2 > 0, \quad G \leqq 0, \tag{45}$$

то рѣшеніе его $t = z - z'$, обращающееся въ нуль на контурѣ C какихъ угодно размѣровъ, должно быть тождественно нулю [1]). Слѣдовательно *условіе (43) не только исключаетъ возможность двухъ безконечно близкихъ рѣшеній задачи Дирикле, но позволяетъ утверждать, что, если вообще задача Дирикле допускаетъ два различныя рѣшенія z и z', должно существовать значеніе θ, при которомъ неравенства (45) не были бы соблюдены.*

Отсюда слѣдуетъ, что задача Дирикле не можетъ допускать болѣе одного рѣшенія, если для разсматриваемаго уравненія условія (2) и (43) соблюдены *тождественно* (она, конечно, можетъ въ этомъ случаѣ также и вовсе не имѣть рѣшенія). Таковы напримѣръ, уравненія

$$(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t = 0,$$

---

[1]) См. Picard „Traité d'analyse“ t. II. Ch. I.

или

$$e^r + e^t + r + t = 2,$$

гдѣ мы согласно принятому обозначенію полагаемъ $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$, $r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$; такъ какъ въ обоихъ случаяхъ F'_z тождественно равно нулю, а дискриминантъ $\delta = F'_r F'_t - \frac{1}{4}(F'_s)^2 = (1 + p^2 + q^2) > 0$ въ первомъ случаѣ, и $\delta = (e^r + 1)(e^t + 1) > 0$ во второмъ случаѣ.

При помощи тѣхъ же соображеній можно иногда показать, что задача Дирикле не допускаетъ болѣе двухъ рѣшеній.

Разсмотримъ, напримѣръ, уравненіе поверхностей постоянной положительной кривизны

$$rt - s^2 = C^2 (1 + p^2 + q^2)^2$$

гдѣ C постоянная величина. Второе неравенство (45), очевидно соблюдено при всякомъ θ; что касается перваго, то оно лишь въ томъ случаѣ можетъ не имѣть мѣста, если выпуклости обѣихъ поверхностей, соотвѣтствующихъ рѣшеніямъ z и z' направлены въ противоположныя стороны. Поэтому болѣе двухъ рѣшеній въ настоящемъ случаѣ наша задача не допускаетъ. Изъ подобныхъ же элементарныхъ соображеній можетъ быть выведена интересная теорема Либманна (Миндинга): *Единственная вездѣ правильная (т. е. не имѣющая особенностей) закрытая поверхность постоянной кривизны есть шаръ.*

Гораздо болѣе трудно отвѣтить на вопросъ, имѣетъ ли задача Дирикле хотя бы одно рѣшеніе.

Впервые пытались разрѣшить этотъ вопросъ Гауссъ, а за нимъ Дирикле и Риманнъ, ограничиваясь уравненіемъ Лапласа $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$. Замѣчая, что рѣшеніе z, если оно существуетъ, обращаетъ въ *минимумъ* нѣкоторый положительный двойной интегралъ, они считали очевиднымъ, что должна существовать функція (обладающая требуемыми условіями непрерывности), которая дѣйствительно обращаетъ разсматриваемый интегралъ въ минимумъ. Отсюда они умозаключали, что задача Дирикле имѣетъ рѣшеніе. Однако несостоятельность этого способа разсужденія, который сыгралъ крупную роль въ анализѣ, была ясно обнаружена Вейерштрассомъ. Подъ его вліяніемъ лучшіе математики конца прошлаго столѣтія [1]) направили свои усилія на то, чтобъ въ случаѣ уравненія Лапласа доказать возможность, задачи Дирикле. За послѣдніе годы эти изслѣдованія пополнились интересной работой Гильберта [2]), который вернулся

[1]) См. Picard „Traité d'analyse“ t. I и II, а также Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften Bd. II, Heft. IV и V.

[2]) Слѣдуетъ также отмѣтить работы Леви и Лебега въ томъ же направленіи, появившіяся во время редактированія и печатанія настоящаго сочиненія въ „Rendiconti del Circolo Mathematico di Palermo“.

къ принципу Гаусса и придалъ ему необходимую съ точки зрѣнія современнаго анализа, математическую строгость. Я не буду останавливаться на этихъ изслѣдованіяхъ, которыя можно считать классическими, какъ и на работахъ, посвященныхъ болѣе или менѣе частнымъ случаямъ линейныхъ уравненій, и перейду сейчасъ къ приведеннымъ или каноническимъ линейнымъ уравненіямъ эллиптическаго типа

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+a(x,\ y)\frac{\partial z}{\partial x}+b(x,\ y)\frac{\partial z}{\partial y}+c(x,\ y)z=d(x,\ y) \quad (46)$$

гдѣ я предполагаю, что a, b, c, d имѣютъ конечныя производныя перваго порядка, и кромѣ того $c \leqq 0$. Задача Дирикле для этихъ уравненій рѣшена Пикаромъ (Acta Mathematica t. XXV) при предположеніи, что контуръ, на которомъ даны значенія рѣшенія, аналитиченъ.

Альтернирующій способъ, при помощи котораго французскій геометръ рѣшаетъ эту задачу, былъ еще ранѣе примѣненъ имъ къ интегрированію уравненія [1])

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f(x,\ y,\ z) \qquad (f'_z \geqq 0).$$

Но, повидимому, къ болѣе сложнымъ уравненіямъ метода Пикара не примѣнима. Пикаръ далъ въ прошломъ году еще другое изящное рѣшеніе [2]) задачи Дирикле для уравненія (46), основанное на послѣднихъ изслѣдованіяхъ Гильберта и Фредгольма о линейныхъ интегральныхъ уравненіяхъ.

Для цѣльности и простоты изложенія я не буду пользоваться ни одной изъ упомянутыхъ методъ, и попытаюсь построить всю теорію задачи Дирикле, какъ для линейныхъ, такъ и для не линейныхъ уравненій, на единой основѣ—*методѣ вещественнаго аналитическаго продолженія*. Такъ же, какъ Пикаръ въ своей статьѣ изъ „Rendiconti“ введемъ въ уравненіе (46) параметръ λ и напишемъ

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\lambda\left(a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}+cz\right)=0. \quad (47)$$

Но вмѣсто того, чтобъ замѣнять это уравненіе соотвѣтствующимъ интегральнымъ уравненіемъ и получить изъ этого послѣдняго искомое рѣшеніе z въ видѣ мероморфной функціи параметра λ, мы непосредственно рѣшимъ наше уравненіе по способу послѣдовательныхъ приближеній для достаточно малыхъ значеній λ и покажемъ затѣмъ, что z разсматриваемая, какъ функція λ, аналитична и не имѣетъ положительныхъ

[1]) Journal de Mathématiques, 1896 г., 1898 г.

[2]) Rendiconti del Circolo Mathematico di Palermo, 1906 г.

особенностей; *разложеніе z въ строку Миттагъ-Леффлера по λ будетъ поэтому сходящимся при всѣхъ его положительныхъ значеніяхъ, и, въ частности, при $\lambda = 1$, дастъ намъ искомое рѣшеніе уравненія (46).*

Въ настоящей главѣ мы ограничимся предположеніемъ, что контуръ C', на которомъ даны значенія искомаго рѣшенія *аналитиченъ*. Въ такомъ случаѣ, если требуется рѣшить задачу Дирикле для уравненія

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

гдѣ f вообще функція конечная (при x, y, z, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ конечныхъ) также, какъ и ея частныя производныя перваго порядка, нужно прежде всего ввести новыя перемѣнныя x', y' такъ, чтобъ форма уравненія не измѣнилась, контуръ же C' преобразовался бы въ окружность C радіуса R. Это достигается конформнымъ преобразованіемъ [1]) площади, ограниченной контуромъ C' въ площадь круга C. Въ частности, если функція f линейна, то она остается линейной и послѣ преобразованія. Такимъ образомъ мы приведены къ рѣшенію задачи Дирикле при заданіяхъ на окружности C радіуса R. Слѣдовательно въ случаѣ уравненія (47) возможно примѣнить при λ достаточно маломъ разсужденіе подобное тому, какое нами сдѣлано въ первой главѣ. Но лучше придать этому разсужденію иную форму, которая намъ позволитъ вычислить послѣдовательныя производныя искомой функціи z по λ при $\lambda = 0$, т. е. получить ея формальное разложеніе въ строку Миттагъ-Леффлера и вмѣстѣ съ тѣмъ показать, что при $\lambda = 0$ она представляетъ аналитическую функцію λ.

Пусть $\varphi(\theta)$ представляетъ собой совокупность значеній z на окружности C при всякомъ λ. Мы предположимъ тригонометрическое разложеніе производной $\varphi(\theta)$ абсолютно сходящимся. Послѣдовательныя производныя z по λ на окружности C очевидно равны нулю. Отсюда легко видѣть, что при $\lambda = 0$, $z = z_0$, которое удовлетворяетъ уравненію Пуассона

$$\frac{\partial^2 z_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z_0}{\partial y^2} = d(x, y)$$

на окружности C обращается въ $\varphi(\theta)$. Функція z_0 вычисляется, какъ показано въ первой главѣ. Далѣе, очевидно, что, если уравненіе относительно z_1

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z_1}{\partial y^2} = -\left(a\frac{\partial z_0}{\partial x} + b\frac{\partial z_0}{\partial y} + cz_0\right)$$

---

[1]) Picard „Traité d'analyse“ t. II.

имѣетъ рѣшеніе z_1 обращающееся въ нуль на окружности, то z_1 есть ничто иное, какъ производная $\frac{dz}{d\lambda}$ функціи z при $\lambda = 0$. Но тутъ мы опять имѣемъ уравненіе Пуассона, которое мы умѣемъ интегрировать при данныхъ условіяхъ. Точно также для послѣдовательнаго вычисленія послѣдовательныхъ производныхъ z по λ, находимъ рядъ уравненій Пуассона

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 z_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z_2}{\partial y^2} = -2\left(a\frac{\partial z_1}{\partial x} + b\frac{\partial z_1}{\partial y} + cz_1\right),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{\partial^2 z_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z_n}{\partial y^2} = -n\left(a\frac{\partial z_{n-1}}{\partial x} + b\frac{\partial z_{n-1}}{\partial y} + cz_{n-1}\right),
\end{aligned} \tag{48}$$

гдѣ z_n представляетъ собой $n^{\text{ую}}$ производную $\frac{d^n z}{d\lambda^n}$ функціи z по λ при $\lambda = 0$, если на окружности $z_n = 0$. Остается лишь показать, что рядъ

$$z = z_0 + \lambda z_1 + \frac{\lambda^2}{2!} z_2 + \ldots + \frac{\lambda^n}{n!} z_n + \ldots$$

сходится при достаточно малыхъ значеніяхъ λ.

Для этого мы выведемъ слѣдующія общія неравенства.

§ 18. *Если z есть рѣшеніе* [1]) *задачи Дирикле для уравненія* ($c_0 \leqq 0$)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + a_0(x, y)\frac{\partial z}{\partial x} + b_0(x, y)\frac{\partial z}{\partial y} + c_0(x, y)\, z = d(x, y), \tag{46 bis}$$

обращающееся въ нуль на окружности C радіуса R, то тригонометрическіе модули на отрѣзкѣ $0R$ удовлетворяютъ неравенствамъ

$$\{z\}_{0R} < k\{d\}_{0R}, \quad \left\{\frac{\partial z}{\partial x}\right\}_{0R} < k\{d\}_{0R}, \quad \left\{\frac{\partial z}{\partial y}\right\}_{0R} < k\{d\}_{0R}, \tag{50}$$

гдѣ k не зависитъ отъ d.

Прежде всего легко видѣть, что

$$\bar{z} < \mu . \bar{d}, \tag{49}$$

гдѣ $\bar{z}$ высшій предѣлъ обыкновеннаго модуля z, $\bar{d}$ высшій предѣлъ обыкновеннаго модуля d, и μ, независящая отъ d постоянная. Для этого замѣтимъ, что, если въ уравненіи (46 bis) въ нѣкоторой области d менѣе нуля, то z въ этой области не можетъ имѣть отрицательнаго минимума;

---

[1]) a_0, b_0, c_0 соотвѣтственно равны $\lambda_0 a$, $\lambda_0 b$, $\lambda_0 c$, гдѣ $0 \leqq \lambda_0 \leqq 1$.

с. м. о.

если же въ нѣкоторой области $d > 0$, то z не имѣетъ въ ней положительнаго максимума.

Но мы можемъ положить

$$z = v + \overline{d}e^{s(x+R)} = v' - \overline{d}e^{s(x+R)},$$

причемъ постоянная s выбрана такъ, что она удовлетворяетъ неравенству

$$s^2 - |a_0|s + c_0 > 1.$$

Тогда внутри круга C

$$\frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y^2} + a_0\frac{\partial v'}{\partial x} + b_0\frac{\partial v'}{\partial y} + c_0 v' > 0,$$
$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + a_0\frac{\partial v}{\partial x} + b_0\frac{\partial v}{\partial y} + c_0 v < 0$$

и на основаніи только что сдѣланнаго замѣчанія, заключаемъ, что

$$v > -\overline{d}e^{2sR}, \quad v' < \overline{d}e^{2sR}$$

внутри C. Слѣдовательно

$$-\overline{d}e^{sR}(e^{sR} - e^{sx}) \leqq z \leqq \overline{d}e^{sR}(e^{sR} - e^{sx})$$

или

$$\bar{z} < \mu.\overline{d} \tag{49}$$

гдѣ $\mu = e^{2sR}$.

Пользуясь сокращенными обозначеніями производныхъ, покажемъ далѣе, что интегралъ взятый внутри круга C

$$I = \iint (rt - s^2)\,dx\,dy > 0 \tag{51}$$

для всякой функціи, обращающейся въ нуль на окружности C.

Въ самомъ дѣлѣ

$$\iint rt\,dx\,dy = \int_C pt\,dy - \iint p\frac{\partial t}{\partial x}\,dx\,dy = -\int_C qr\,dx - \iint q\frac{\partial r}{\partial y}\,dx\,dy$$

и

$$\iint s^2\,dx\,dy = -\int_C ps\,dx - \iint p\frac{\partial t}{\partial x}\,dx\,dy = -\int_C qs\,dy - \iint q\frac{\partial r}{\partial y}\,dx\,dy.$$

Слѣдовательно

$$I = \int_C ps\,dx + pt\,dy = \int_C p\,dq = -\int_C q\,dp = \frac{1}{2}\int_C p\,dq - q\,dp.$$

Эта формула остается въ силѣ, каковъ бы ни былъ контуръ и значенія z на немъ.

Но, такъ какъ C окружность, то

$$p = \frac{\partial z}{\partial \varrho}\cos\theta - \frac{\partial z}{R\partial\theta}\sin\theta, \quad dp = \left(-q + \frac{\partial^2 z}{\partial\varrho\partial\theta}\cos\theta - \frac{\partial^2 z}{R\partial\theta^2}\sin\theta\right)d\theta$$

$$q = \frac{\partial z}{\partial \varrho}\sin\theta + \frac{\partial z}{R\partial\theta}\cos\theta, \quad dq = \left(p + \frac{\partial^2 z}{\partial\varrho\partial\theta}\sin\theta + \frac{\partial^2 z}{R\partial\theta^2}\cos\theta\right)d\theta.$$

Поэтому

$$I = \frac{1}{2}\int_C \left[(p^2+q^2) - \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\frac{\partial z}{\partial\theta}\right)^2\right]d\theta$$

и въ частности, если $z = 0$ на окружности, то

$$I = \frac{1}{2}\int_C \left(\frac{\partial z}{\partial\varrho}\right)^2 d\theta > 0.$$

Съ другой стороны изъ уравненія (46bis) слѣдуетъ, что

$$\iint (r+t)^2\,dx\,dy = \iint (a_0p + b_0q + c_0z - d)^2\,dx\,dy.$$

И благодаря неравенству (51) получаемъ

$$\iint (r^2 + 2s^2 + t^2)\,dx\,dy > \iint (a_0p + b_0q + c_0z - d)^2\,dx\,dy. \qquad (51^{bis})$$

Но

$$\iint z\,(r + t + a_0p + b_0q + c_0z)\,dx\,dy = \iint z\,d\,dx\,dy =$$
$$= -\iint (p^2 + q^2 - a_0pz - b_0qz - c_0z^2)\,dx\,dy.$$

Слѣдовательно

$$\iint (p^2+q^2)\,dx\,dy < \mu_1 \overline{d^2}$$

гдѣ двойной интегралъ, какъ и прежде относится къ площади круга C, а μ_1 постоянный множитель. Отсюда

$$\iint (r^2 + 2s^2 + t^2)\,dx\,dy < k_1 \overline{d^2}$$

гдѣ k_1 постоянный множитель. Чтобъ не вводить новыхъ символовъ, *мы и въ дальнѣйшихъ неравенствахъ обозначаемъ той же буквой k_1 постоянные множители*, такъ какъ простыя зависимости между этими множителями не представляютъ никакого интереса.

Итакъ можемъ написать также

$$\iint r^2\,dx\,dy < k_1\overline{d^2},\quad \iint s^2\,dx\,dy < k_1\overline{d^2},\quad \iint t^2\,dx\,dy < k_1\overline{d^2}$$

и, вводя полярныя координаты,

$$\iint\left(\frac{\partial^2 z}{\partial\varrho^2}\right)^2\varrho\,d\varrho\,d\theta < k_1\overline{d^2},\quad \iint\left(\frac{\partial^2 z}{\partial\varrho\partial\theta}\right)^2\varrho\,d\varrho\,d\theta < k_1\overline{d^2},\quad \iint\left(\frac{\partial^2 z}{\partial\theta^2}\right)^2\frac{d\varrho}{\varrho}\,d\theta < k_1\overline{d^2}.$$

Полагая затѣмъ

$$z = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\cos n\theta + \beta_n\sin n\theta,$$

получимъ

$$\int_0^{R'}[\alpha_0''^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n''^2 + \beta_n''^2]\,\varrho\,d\varrho < k_1\overline{d^2},\quad \int_0^{R'}\sum_{n=1}^{\infty}n^2(\alpha_n'^2+\beta_n'^2)\,\varrho\,d\varrho < k_1\overline{d^2},$$

$$\int_0^{R'}\sum_{n=1}^{\infty}n^4(\alpha_n^2+\beta_n^2)\frac{d\varrho}{\varrho} < k_1\overline{d^2},$$

гдѣ $R'\leqq R$, а α_n', β_n', α_n'', β_n'' представляютъ соотвѣтственно первыя и вторыя производныя α_n и β_n по ϱ.

Но, замѣчая, что либо $\alpha_n''^2 > (k_1\overline{d^2})^{\frac{1}{2}}\dfrac{|\alpha_n''|}{n}$, либо $\dfrac{|\alpha_n''|}{n} < \dfrac{(k_1\overline{d^2})^{\frac{1}{2}}}{n^2}$, находимъ

$$\int_0^{R'}[|\alpha_0''| + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(|\alpha_n''|+|\beta_n''|)]\,\varrho\,d\varrho < k_1\overline{d}$$

и точно также,

$$\int_0^{R'}\sum_{n=1}^{\infty}(|\alpha_n'|+|\beta_n'|)\,\varrho^{\frac{1}{2}}d\varrho < k_1\overline{d},\quad \int_0^{R'}\sum_{n=1}^{\infty}n(|\alpha_n|+|\beta_n|)\frac{d\varrho}{\varrho^{1/2}} < k_1\overline{d}.$$

Наконецъ интегрируя и вводя тригонометрическіе модули, получимъ [1])

$$\{\varrho\int_0^{\theta}\frac{\partial z}{\partial\varrho}\,d\theta\}_{0R} < k_1\overline{d},\quad \{z\varrho^{\frac{1}{2}}\}_{0R} < k_1\overline{d}. \tag{52}$$

Неравенствами (52) мы воспользуемся слѣдующимъ образомъ.

---

[1]) Если функція содержитъ линейный членъ относительно θ, то мы условимся, что модуль коэффиціента θ наравнѣ съ модулями коэффиціентовъ cos и sin входитъ въ выраженіе ея тригонометрическаго модуля.

Напишемъ наше уравненіе (46bis) въ полярныхъ координатахъ

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \varrho^2}+\frac{1}{\varrho}\frac{\partial z}{\partial \varrho}+\frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}=$$

$$-\left[(a_0\cos\theta+b_0\sin\theta)\frac{\partial z}{\partial \varrho}+(b_0\cos\theta-a_0\sin\theta)\frac{\partial z}{\varrho\partial\theta}\right]-c_0 z+d.$$

Интегрируя обѣ части равенства относительно θ и полагая

$$u=\int_0^{\theta} z\,d\theta$$

получимъ уравненіе вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \varrho^2}+\frac{1}{\varrho}\frac{\partial u}{\partial \varrho}+\frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=A_0+A\theta+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta=F. \qquad (53)$$

Причемъ изъ неравенствъ (52) вытекаетъ, что

$$\{\varrho^{3/2}F\}_{0R}<k_1\{d\}_{0R}. \qquad (54)$$

Но уравненіе (53) можно разсматривать какъ уравненіе Пуассона, рѣшеніе котораго u обращается въ нуль на окружности C и представляется въ видѣ ряда

$$u=c_0+c\theta+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\cos n\theta+d_n\sin n\theta,$$

гдѣ c_0, c, c_n, d_n конечныя функціи ϱ, имѣющія конечныя производныя первыхъ двухъ порядковъ внутри C.

c_0, c_n, d_n опредѣляются формулами (16); легко убѣдиться, что c находится въ такой же зависимости отъ A, какъ c_0 отъ A_0, а именно

$$c=\int_R^{\varrho}\frac{d\varrho}{\varrho}\int_0^{\varrho}\varrho A\,d\varrho.$$

Слѣдовательно, на основаніи неравенства (54) заключаемъ, что

$$\left\{\frac{\partial u}{\partial\theta}\right\}_{0R}=\{c\}_{0R}+\sum_{n=1}^{\infty}n\left[\{c_n\}_{0R}+\{d_n\}_{0R}\right]<k_1\{d\}_{0R},$$

$$\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\right\}_{0R}=\sum_{n=1}^{\infty}n^2\left[\{c_n\}_{0R}+\{d_n\}_{0R}\right]<k_1\{d\}_{0R},$$

$$\left\{\varrho\frac{\partial^2 u}{\partial\varrho\partial\theta}\right\}_{0R}=\{\varrho c'\}_{0R}+\sum_{n=1}^{\infty}n\left[\{\varrho c_n'\}_{0R}+\{\varrho d_n'\}_{0R}\right]<k_1\{d\}_{0R}$$

и, возвращаясь къ $z = \frac{\partial u}{\partial \theta}$,

$$\{z\}_{0R} < k_1 \{d\}_{0R}, \quad \left\{\varrho \frac{\partial z}{\partial x}\right\}_{0R} < k_1 \{d\}_{0R}, \quad \left\{\varrho \frac{\partial z}{\partial y}\right\}_{0R} < k_1 \{d\}_{0R}. \quad (55)$$

Неудобство этихъ неравенствъ, изъ за котораго мы не можемъ ими удовлетвориться, это присутствіе множителя ϱ. Чтобъ избавиться отъ него, разсуждаемъ слѣдующимъ образомъ.

Обозначимъ черезъ H гармоническую функцію [1]), которая на концентрической къ C окружности C' малаго радіуса R' совпадаетъ съ z. Изъ неравенствъ (55) можемъ заключить, что

$$\{H\}_{0R'} < k_1 \{d\}_{0R'}, \quad \left\{\frac{\partial H}{\partial x}\right\}_{0R'} < k_1 \frac{\{d\}_{0R}}{R'}, \quad \left\{\frac{\partial H}{\partial y}\right\}_{0R'} < k_1 \frac{\{d\}_{0R}}{R'}.$$

Поэтому, полагая

$$v = z - H,$$

находимъ

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -a_0 \frac{\partial v}{\partial x} - b_0 \frac{\partial v}{\partial y} - c_0 v + d_1 = P,$$

гдѣ

$$\{d_1\}_{0R'} < \frac{k_1}{R'} \{d\}_{0R}.$$

Но изъ формулъ (16) вытекаетъ, что

$$\{v\}_{0R'} < hR'^2 \{P\}_{0R'}, \quad \left\{\frac{\partial v}{\partial x}\right\}_{0R'} < hR' \{P\}_{0R'}, \quad \left\{\frac{\partial v}{\partial y}\right\}_{0R'} < hR' \{P\}_{0R'}$$

гдѣ h независящій отъ R' постоянный множитель.

Слѣдовательно, полагая $\{a_0\}_{0R'} < Q$, $\{b_0\}_{0R'} < Q$, $\{c_0\}_{0R'} < Q$, получимъ

$$\{v\}_{0R'} + \left\{\frac{\partial v}{\partial x}\right\}_{0R'} + \left\{\frac{\partial v}{\partial y}\right\}_{0R'} < 3hR' \left[Q\left(\{v\}_{0R'} + \left\{\frac{\partial v}{\partial x}\right\}_{0R'} + \left\{\frac{\partial v}{\partial y}\right\}_{0R'}\right) + \{d_1\}_{0R'}\right],$$

откуда, при предположеніи, что $R' < \frac{1}{3hQ}$, выводимъ

$$\{v\}_{0R'} + \left\{\frac{\partial v}{\partial x}\right\}_{0R'} + \left\{\frac{\partial v}{\partial y}\right\}_{0R'} < \frac{3hR' \{d\}_{0R}}{1 - 3hQR'}.$$

---

[1]) Замѣтимъ, что вообще, когда мы говоримъ о рѣшеніи какого нибудь уравненія, которое на нѣкоторомъ контурѣ принимаетъ данныя значенія, безъ дальнѣйшихъ условій, то мы имѣемъ въ виду рѣшеніе, обладающее конечными производными первыхъ двухъ порядковъ *внутри* контура.

Введя новую постоянную k, можемъ написать, возвращаясь къ z

$$\{z\}_{oR'} < \frac{k}{2}\{d\}_{oR}, \quad \left\{\frac{\partial z}{\partial x}\right\}_{oR'} < \frac{k}{2}\{d\}_{oR}, \quad \left\{\frac{\partial z}{\partial y}\right\}_{oR'} < \frac{k}{2}\{d\}_{oR}.$$

Но неравенства (55) позволяютъ непосредственно ограничить тригонометрическіе модули z и ея производныхъ на отрѣзкѣ RR', такъ что можемъ тоже написать

$$\{z\}_{R'R} < \frac{k}{2}\{d\}_{oR}, \quad \left\{\frac{\partial z}{\partial x}\right\}_{R'R} < \frac{k}{2}\{d\}_{oR}, \quad \left\{\frac{\partial z}{\partial y}\right\}_{R'R} < \frac{k}{2}\{d\}_{oR},$$

откуда наконецъ

$$\{z\}_{oR} < k\{d\}_{oR}, \quad \left\{\frac{\partial z}{\partial x}\right\}_{oR} < k\{d\}_{oR}, \quad \left\{\frac{\partial z}{\partial y}\right\}_{oR} < k\{d\}_{oR}, \qquad (50)$$

гдѣ k постоянный, не зависящій [1]) отъ d коэффиціентъ.

Неравенства (50) весьма важны; впослѣдствіи мы изъ нихъ выведемъ новыя неравенства, но для того, чтобъ не утомлять читателя выводами, не имѣющими немедленнаго примѣненія, мы сейчасъ же используемъ ихъ для интегрированія линейнаго уравненія.

§ 19. Прежде всего возвращаясь къ системѣ (48) мы безъ дальнѣйшихъ объясненій, выводимъ изъ неравенствъ (50)

$$\{z_n\}_{oR} < k^n Q^n \{d\}_{oR}.n!, \quad \left\{\frac{\partial z_n}{\partial x}\right\}_{oR} < k^n Q^n \{d\}_{oR}.n!, \quad \left\{\frac{\partial z_n}{\partial y}\right\}_{oR} < k^n Q^n \{d\}_{oR}.n!,$$

откуда слѣдуетъ, что радіусъ сходимости строки

$$z = z_0 + \lambda z_1 + \frac{\lambda^2}{2!} z_2 + \ldots \frac{\lambda^n}{n!} z_n + \ldots \qquad (56)$$

не менѣе $\frac{1}{kQ}$, слѣдовательно, функція z аналитична относительно λ.

Соотвѣтствующая строка Миттагъ-Леффлера будетъ

$$z(x, y, \lambda) = P_1 + (P_2 - P_1) + \ldots (P_m - P_{m-1}) + \ldots, \qquad (56')$$

гдѣ [2])

$$P_m = \sum_k \frac{z_k}{k!} \lambda^k . \theta_{m,k}.$$

---

[1]) Коэффиціентъ k зависитъ конечно, отъ радіуса R круга C, какъ и отъ высшаго предѣла Q тригонометрическихъ модулей a_0, b_0, c_0; во всякомъ случаѣ, если R и Q имѣютъ опредѣленныя конечныя значенія (а также, если $Q=0$), то и k—опредѣленное конечное число.

[2]) Приводимъ здѣсь значенія $\theta_{m,k}$ (см. Введеніе):

$$\theta_{m_1 k} = \sum_{\alpha_1=0}^{m^2} \sum_{\alpha_2=0}^{m^4} \cdots \sum_{\alpha_m=0}^{m^{2m}} \frac{1}{m^k} \cdot \frac{k!}{\alpha_1!\,\alpha_2!..\,\alpha_m!}$$

при условіи, что $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m = k$.

Рядъ (56′) такимъ образомъ вполнѣ опредѣляется вычисленными значеніями функцій z_0, z_1 и т. д., и въ силу извѣстныхъ свойствъ строки Миттагъ-Леффлера, онъ въ частности будетъ сходиться для всѣхъ положительныхъ значеній λ, если мы покажемъ, что найденная аналитическая функція z не можетъ имѣть положительныхъ особенностей; слѣдовательно, полагая въ рядѣ (56′) $\lambda = 1$, мы получимъ искомое рѣшеніе задачи Дирикле. Но доказать отсутствіе положительныхъ особенностей очень легко, благодаря неравенствамъ (50).

Въ самомъ дѣлѣ, изъ того, что радіусъ сходимости $z\ (x, y, \lambda)$ относительно λ при $\lambda = 0$ не менѣе $\frac{1}{kQ}$, вытекаетъ между прочимъ, что задача Дирикле возможна также для уравненія (46bis) при $0 < \lambda < \frac{1}{kQ}$, какова бы ни была къ тому же вторая часть равенства d, которой тригонометрическій модуль конеченъ. Поэтому придавая λ значеніе λ_0, удовлетворяющее этому неравенству, мы получимъ для опредѣленія послѣдовательныхъ производныхъ z при $\lambda = \lambda_0$, систему уравненій аналогичную той, какую получили при $\lambda = 0$.

А именно

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 z_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z_0}{\partial y^2} + \lambda_0 \left(a \frac{\partial z_0}{\partial x} + b \frac{\partial z_0}{\partial y} + e z_0 \right) = d \\
&\frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z_1}{\partial y^2} + \lambda_0 \left(a \frac{\partial z_1}{\partial x} + b \frac{\partial z_1}{\partial y} + c z_1 \right) = - \left(a \frac{\partial z_0}{\partial x} + b \frac{\partial z_0}{\partial y} + c z_0 \right) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (57) \\
&\frac{\partial^2 z_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z_n}{\partial y^2} + \lambda_0 \left(a \frac{\partial z_n}{\partial x} + b \frac{\partial z_n}{\partial y} + c z_n \right) = - n \left(a \frac{\partial z_{n-1}}{\partial x} + b \frac{\partial z_{n-1}}{\partial y} + c z_{n-1} \right), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

гдѣ z_0 равно $z(x, y, \lambda_0)$, а z_1, z_2 и т. д., удовлетворяя системѣ (57) при условіи, что на окружности C они обращаются въ нуль, представляютъ собой послѣдовательныя производныя z при $\lambda = \lambda_0$. Но примѣняя неравенства (50), мы видимъ, что радіусъ сходимости при $\lambda = \lambda_0$ не менѣе $\frac{1}{kQ}$; слѣдовательно точка $\lambda_0 + \frac{1}{kQ}$ не можетъ быть особой. И такъ далѣе. Слѣдовательно, замѣчая, что числа k и Q меньше нѣкотораго опредѣленнаго независящаго отъ λ предѣла, заключаемъ, что, аналитическое продолженіе $z\,(x\,y\,\lambda)$ совершается безпрепятственно для всѣхъ положительныхъ значеній λ, и строка (56′) при $\lambda = 1$, даетъ намъ рѣшеніе поставленной задачи Дирикле въ видѣ сходящаго выраженія для всѣхъ значеній x, y внутри и на кругѣ C.

Такимъ образомъ мы доказали возможность задачи Дирикле для уравненія (46), предполагая однако, что функція $\varphi(\theta)$ на окружности C

и ея производная $\varphi'(\theta)$ имѣютъ абсолютно сходящіяся тригонометрическія разложенія (для этого достаточно, чтобъ вторая производная $\varphi''(\theta)$ была конечна).

Но никакого затрудненія не представляетъ перейти къ случаю, когда $\varphi(\theta)$ произвольная непрерывная функція. Въ самомъ дѣлѣ, мы можемъ представить $\varphi(\theta)$ въ видѣ равномѣрно сходящагося ряда

$$\varphi(\theta) = \varphi_1(\theta) + [\varphi_2(\theta) - \varphi_1(\theta)] + \ldots + [\varphi_n(\theta) - \varphi_{n-1}(\theta)] + \ldots$$

гдѣ $\varphi_n(\theta)$ не только обладаетъ производными первыхъ двухъ порядковъ, но даже аналитична. Слѣдовательно, для каждаго члена написаннаго ряда задача Дирикле рѣшается указаннымъ способомъ. Поэтому мы поступимъ слѣдующимъ образомъ: опредѣлимъ рѣшеніе z_1 уравненія (46) при предположеніи, что на окружности C $z_1 = \varphi_1(\theta)$; затѣмъ опредѣлимъ рѣшеніе v_1 уравненія, получающагося изъ (46), если d замѣнить нулемъ, при условіи, что на окружности $v_1 = \varphi_2(\theta) - \varphi_1(\theta)$; далѣе опредѣлимъ рѣшеніе v_2 уравненія, получающагося изъ (46) отъ замѣны d нулемъ при условіи, что на окружности $v_2 = \varphi_3(\theta) - \varphi_2(\theta)$ и т. д. Полагая

$$z = z_1 + v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots, \tag{58}$$

мы видимъ во-первыхъ, что z на окружности C равно $\varphi(\theta)$, и во-вторыхъ, что, если рядъ z, какъ и его производныя первыхъ двухъ порядковъ, сходится внутри круга C, то z есть рѣшеніе уравненія (46). Такимъ образомъ все сводится къ тому, чтобъ показать, что рядъ (58) сходится, какъ и его производныя первыхъ двухъ порядковъ.

Сходимость ряда (58) очевидна, такъ какъ абсолютная величина v_n не имѣетъ максимума внутри круга C.

Менѣе очевидна сходимость его производныхъ. Для того, чтобъ ее обнаружить, возьмемъ внутри круга C маленькій кругъ C' радіуса R' (который можетъ и не быть концентриченъ C). Въ силу только что сказаннаго, обозначая черезъ ε максимумъ модуля $|\varphi_n(\theta) - \varphi_{n-1}(\theta)|$, мы можемъ быть увѣрены, что на окружности C'

$$|v_n| < \varepsilon.$$

Обозначимъ черезъ η гармоническую функцію, которая совпадаетъ съ v_n на окружности C' и разсмотримъ тригонометрическій модуль внутри C' (т. е. на отрѣзкѣ $0R'$) функцій

$$\eta\left(1 - \frac{\rho}{R'}\right)^{\frac{3}{2}}, \quad \frac{\partial\eta}{\partial x}\left(1 - \frac{\rho}{R'}\right)^{\frac{3}{2}}, \quad \frac{\partial\eta}{\partial y}\left(1 - \frac{\rho}{R'}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Пусть на окружности C'

$$v_n = a_0 + \sum_{p=1}^{\infty} a_p \cos p\theta + b_p \sin p\theta.$$

Тогда

$$\eta = a_0 + \sum_{p=1}^{\infty} \left(\frac{\varrho}{R'}\right)^p [a_p \cos p\theta + b_p \sin p\theta]$$

и

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{R'} \sum_{p=1}^{\infty} p \left(\frac{\varrho}{R'}\right)^{p-1} [a_p \cos \overline{p-1}\,\theta + b_p \sin \overline{p-1}\,\theta],$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{R'} \sum_{p=1}^{\infty} p \left(\frac{\varrho}{R'}\right)^{p-1} [b_p \cos \overline{p-1}\,\theta - a_p \sin \overline{p-1}\,\theta].$$

Изъ неравенства (59) вытекаетъ, что

$$\sum_{p=0}^{\infty} a_p^2 + b_p^2 < 2\varepsilon^2.$$

Разбивая члены a_p на двѣ группы такимъ образомъ, чтобъ въ первую входили члены, модули которыхъ $|a_p| \leqq \frac{(2p)!}{(p!)^2\, 2^{2p}}\,\varepsilon$, а во вторую — члены, для которыхъ $|a_p| > \frac{(2p)!}{(p!)^2\, 2^{2p}}\,\varepsilon$, мы видимъ, что разсматривая лишь члены первой группы

$$\Sigma |a_p| \left(\frac{\varrho}{R'}\right)^p \leqq \frac{2\varepsilon}{\left(1 - \frac{\varrho}{R'}\right)^{\frac{1}{2}}};$$

ограничиваясь же членами второй группы, имѣемъ

$$\Sigma \frac{(2p)!}{(p!)^2\, 2^{2p}} |a_p| < \varepsilon.$$

Но

$$\frac{(p!)^2\, 2^{2p}}{(2p)!} \left(\frac{\varrho}{R'}\right)^p < \frac{2}{\left(1 - \frac{\varrho}{R'}\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Слѣдовательно и для второй группы

$$\Sigma |a_p| \left(\frac{\varrho}{R'}\right)^p < \frac{2\varepsilon}{\left(1 - \frac{\varrho}{R'}\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Отсюда выводимъ наконецъ, что

$$\left\{\eta\left(1-\frac{\varrho}{R'}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}_{0R'}<8\varepsilon$$

и точно также, что

$$\left\{\frac{\partial\eta}{\partial x}\left(1-\frac{\varrho}{R''}\right)^{\frac{3}{2}}\right\}_{0R'}<h\varepsilon\,,\quad \left\{\frac{\partial\eta}{\partial x}\left(1-\frac{\varrho}{R'}\right)^{\frac{3}{2}}\right\}_{0R'}<h\varepsilon\,, \tag{60}$$

гдѣ h нѣкоторая постоянная величина.

Положимъ далѣе $v_n=v'+\eta$, такъ что v' на окружности C' равно нулю, а внутри ея удовлетворяетъ уравненію

$$\frac{\partial^2 v'}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v'}{\partial y^2}+a\frac{\partial v'}{\partial x}+b\frac{\partial v'}{\partial y}+cv'=\delta \tag{61}$$

причемъ благодаря неравенствамъ (60)

$$\left\{\delta\left(1-\frac{\varrho}{R'}\right)^{\frac{3}{2}}\right\}_{0R'}<\varepsilon'$$

гдѣ ε' стремится къ нулю вмѣстѣ съ ε.

Съ другой стороны разсмотримъ рѣшеніе v уравненія Пуассона

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=F(xy)\,, \tag{35}$$

обращающееся въ нуль на окружности C', при предположеніи, что

$$\left\{F(x,\,y)\,.\left(1-\frac{\varrho}{R'}\right)^{\frac{3}{2}}\right\}_{0R'}<M,$$

гдѣ M опредѣленное число.

Слѣдовательно, въ формулахъ (16) и (16bis) мы можемъ замѣнить [1] A_n и B_n черезъ $\dfrac{a_n}{\left(1-\dfrac{\varrho}{R'}\right)^{\frac{3}{2}}}$ и $\dfrac{b_n}{\left(1-\dfrac{\varrho}{R'}\right)^{\frac{3}{2}}}$, причемъ

$$\sum_{n=0}^{\infty}\{a_n\}_{0R'}+\{b_n\}_{0R'}<M.$$

Такимъ образомъ получаемъ для C_n,

$$2nC_n=\left(\frac{\varrho^n}{R'^{2n}}-\frac{1}{\varrho^n}\right)I-\varrho^n I_1\,,$$

[1] R должно быть замѣнено черезъ R'.

гдѣ

$$I=\int_0^{\rho}\frac{a_n\varrho^{n+1}}{\left(1-\frac{\varrho}{R'}\right)^{\frac{3}{2}}}d\varrho,\quad I_1=\int_{\rho}^{R}\frac{a_n\varrho^{1-n}}{\left(1-\frac{\varrho}{R'}\right)^{\frac{3}{2}}}\left[1-\left(\frac{\varrho}{R'}\right)^{2n}\right]d\varrho.$$

и аналогичное выраженіе для D_n.

Что касается перваго интеграла I, то мы видимъ непосредственно, что

$$\{I\}_{0\rho}<\frac{\{a_n\}_{0R'}}{\left(1-\frac{\varrho}{R'}\right)^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{\varrho^{n+2}}{n+2}.$$

Второй же интегралъ равенъ

$$I_1=\int_{\rho}^{R'}\frac{a_n\left[1+\frac{\varrho}{R'}+\ldots+\left(\frac{\varrho}{R'}\right)^{2n-1}\right]d\varrho}{\varrho^{n-1}\left[1-\frac{\varrho}{R'}\right]^{\frac{1}{2}}}=a_n\frac{2R'}{\varrho^{n-1}}\left(1-\frac{\varrho}{R'}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{\varrho}{R'}+\ldots\right)$$

$$+2R'\int_{\rho}^{R'}a_n\left(1-\frac{\varrho}{R'}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{d}{d\varrho}\left[\frac{1}{\varrho^{n-1}}+\frac{1}{\varrho^{n-2}R'}+\ldots+\frac{\varrho^n}{R'^{2n-1}}\right)d\varrho.$$

Слѣдовательно,

$$\{I_1\}_{0\rho}<\frac{2\{a_n\}_{0R'}\cdot R'}{\varrho^{n-1}\left(1-\frac{\varrho}{R'}\right)^{\frac{1}{2}}}+\frac{4n\{a_n\}_{0R'}\cdot\left(1-\frac{\varrho}{R'}\right)^{1}}{R'^{n-2}}.$$

Откуда

$$\{2nC_n\}_{0\rho}<\frac{\{a_n\}_{0R'}\cdot\varrho^2\cdot\left[1-\left(\frac{\varrho}{R'}\right)^{2n}\right]}{(n+2)\cdot\left(1-\frac{\varrho}{R'}\right)^{\frac{3}{2}}}+\frac{2\{a_n\}_{0R'}\cdot\varrho R'}{\left(1-\frac{\varrho}{R'}\right)^{\frac{1}{2}}}+$$

$$+4n\{a_n\}_{0R'}\varrho^2\cdot\left(1-\frac{\varrho}{R'}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\varrho}{R'}\right)^{n-2}.$$

Но

$$n\left(\frac{\varrho}{R'}\right)^n<\frac{1}{1-\frac{\varrho}{R'}}.$$

Поэтому

$$\{2nC_n\}_{0\rho} < \frac{hR'^2}{\left(1-\frac{\rho}{R'}\right)^{\frac{1}{2}}}.\{a_n\}_{0R'},$$

гдѣ h постоянная величина.

Точно также

$$2\left\{\frac{dC_n}{d\rho}\right\}_{0\rho} < \frac{2R'\{a_n\}_{0R'}}{(n+2)\left(1-\frac{\rho}{R'}\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{6R'\{a_n\}_{0R'}}{\left(1-\frac{\rho}{R'}\right)^{\frac{1}{2}}} < \frac{hR'\{a_n\}_{0R'}}{\left(1-\frac{\rho}{R'}\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

И наконецъ,

$$\left\{v\left(1-\frac{\rho}{R'}\right)^{\frac{3}{2}}\right\}_{0R'} < hR'M, \quad \left\{\frac{\partial v}{\partial x}\left(1-\frac{\rho}{R'}\right)^{\frac{3}{2}}\right\}_{0R'} < hR'M,$$
$$\left\{\frac{\partial v}{\partial y}\left(1-\frac{\rho}{R'}\right)^{\frac{3}{2}}\right\}_{0R'} < hR'M. \tag{62}$$

Примѣняя неравенства (62) къ уравненію (61), мы получимъ

$$\left\{v'\left(1-\frac{\rho}{R'}\right)^{\frac{3}{2}}\right\}_{0R'} < hR'\left\{\left(a\frac{\partial v'}{\partial x}+b\frac{\partial v'}{\partial y}+cv'-\delta\right)\left(1-\frac{\rho}{R'}\right)^{\frac{3}{2}}\right\}_{0R'},$$
$$\left\{\frac{\partial v'}{\partial x}\left(1-\frac{\rho}{R'}\right)^{\frac{3}{2}}\right\}_{0R'} < hR'\left\{\left(a\frac{\partial v'}{\partial x}+b\frac{\partial v'}{\partial y}+cv'-\delta\right)\left(1-\frac{\rho}{R'}\right)^{\frac{3}{2}}\right\}_{0R'},$$
$$\left\{\frac{\partial v'}{\partial y}\left(1-\frac{\rho}{R'}\right)^{\frac{3}{2}}\right\}_{0R'} < hR'\left\{\left(a\frac{\partial v'}{\partial x}+b\frac{\partial v'}{\partial y}+cv'-\delta\right)\left(1-\frac{\rho}{R'}\right)^{\frac{3}{2}}\right\}_{9R'}.$$

Слѣдовательно, какъ на страницѣ 86, находимъ при R' достаточно маломъ

$$\left\{v'\left(1-\frac{\rho}{R'}\right)^{\frac{3}{2}}\right\}_{0R'} < k\varepsilon', \quad \left\{\frac{\partial v'}{\partial x}\left(1-\frac{\rho}{R'}\right)^{\frac{3}{2}}\right\}_{0R'} < k\varepsilon', \quad \left\{\frac{\partial v'}{\partial y}\left(1-\frac{\rho}{R'}\right)^{\frac{3}{2}}\right\}_{0R'} < k\varepsilon',$$

откуда слѣдуетъ, что тригонометрическіе модули

$$\left\{v_n\left(1-\frac{\rho}{R'}\right)^{\frac{3}{2}}\right\}_{0R'}, \quad \left\{\frac{\partial v_n}{\partial x}\left(1-\frac{\rho}{R'}\right)^{\frac{3}{2}}\right\}_{0R'}, \quad \left\{\frac{\partial v_n}{\partial y}\left(1-\frac{\rho}{R'}\right)^{\frac{3}{2}}\right\}_{0R'}$$

съ возрастаніемъ n стремятся къ нулю, а съ ними и сами производныя $\frac{\partial v_n}{\partial x}$ и $\frac{\partial v_n}{\partial y}$ во всякой точкѣ внутри круга C, такъ какъ центръ круга C' выбранъ произвольно.

Для того, чтобъ показать, что вторыя производныя v_n также стремятся къ нулю, возьмемъ кругъ C'' радіуса R'' внутри C' и концентричный C'. Изъ нашего разсужденія слѣдуетъ, что тригонометрическіе модули v_n и его первыхъ производныхъ внутри C'' стремятся къ нулю. Слѣдовательно, полагая $v_n = v'' + \zeta$, гдѣ ζ гармоническая функція, совпадающая съ v_n на окружности C'', мы видимъ, что тригонометрическіе модули ζ и его первыхъ производныхъ внутри C'' стремятся къ нулю; что касается вторыхъ производныхъ ζ, то подобно предыдущему, убѣдимся, что

$$\left\{\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\left(1-\frac{\varrho}{R''}\right)\right\}_{0R''},\quad \left\{\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y}\left(1-\frac{\varrho}{R''}\right)\right\}_{0R''},\quad \left\{\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\left(1-\frac{\varrho}{R''}\right)\right\}_{0R''}$$

также стремятся къ нулю. Съ другой стороны v'', очевидно, удовлетворяетъ уравненію

$$\frac{\partial^2 v''}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v''}{\partial y^2}=\gamma,$$

причемъ тригонометрическій модуль $\{\gamma\}_{0R''}$ съ возрастаніемъ n стремится къ нулю. Изъ тѣхъ же формулъ (16) и (16bis) легко вывести, что

$$\frac{1}{R'}\left\{\varrho\frac{\partial^2 v''}{\partial x^2}\right\}_{0R''}<h\{\gamma\}_{0R''},\quad \frac{1}{R''}\left\{\varrho\frac{\partial^2 v''}{\partial x\,\partial y}\right\}_{0R''}<h\{\gamma\}_{0R''},\quad \frac{1}{R''}\left\{\varrho\frac{\partial^2 v''}{\partial y^2}\right\}_{0R''}<h\{\gamma\}_{0R''}.$$

Слѣдовательно, если $0<\varrho<R''$, вторыя производныя $v_n = v'' + \zeta$ стремятся къ нулю. Такимъ образомъ, рядъ (58), какъ и его производныя первыхъ двухъ порядковъ, равномѣрно сходится внутри круга и представляетъ искомое рѣшеніе задачи Дирикле.

§ 20. Теперь мы перейдемъ къ случаю, когда коэффиціенты даннаго линейнаго уравненія (48) аналитичны и займемся вопросомъ объ опредѣленіи особенностей рѣшенія задачи Дирикле внѣ контура C. И прежде всего мы должны отвѣтить на вопросъ, при какихъ условіяхъ возможно аналитическое продолженіе рѣшенія за предѣлы аналитическаго контура C. Отвѣтъ на этотъ вопросъ даетъ слѣдующая простая теорема:

Для того, чтобъ рѣшеніе z уравненія (46) могло быть продолжено за предѣлы контура C, необходимо и достаточно, чтобъ на этомъ контурѣ она обращалась въ аналитическую функцію дуги.

Что указанное условіе необходимо, очевидно само собой; требуетъ доказательства лишь то, что оно достаточно. По прежнему мы можемъ ограничиться случаемъ, когда C окружность. Кромѣ того, полагая $z = v + H$ гдѣ H гармоническая функція совпадающая съ z на окружности C, мы знаемъ изъ теоремы Шварца [1]), что H можетъ быть продолжено за предѣлы C. Намъ достаточно такимъ образомъ показать, что рѣшеніе v, обращаю-

[1]) См. Picard, Traité d'analyse t. II.

щееся въ нуль на окружности C, допускаетъ аналитическое продолженіе. Но изъ предыдущаго слѣдуетъ, что тригонометрическіе модули v, $\frac{\partial v}{\partial \varrho}$, $\frac{\partial v}{\varrho \partial \theta}$ конечны, т. е. менѣе нѣкотораго числа u_0. Слѣдовательно, v удовлетворяетъ уравненію

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial v}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} = A\frac{\partial v}{\partial \varrho} + B\frac{\partial v}{\varrho \partial \theta} + Cv + D = M \qquad (63)$$

гдѣ A, B, C, D аналитическія функціи перемѣнныхъ x, y, не имѣющія особенностей въ нѣкоторой области S, обнимающей кругъ C; такъ что тригонометрическіе модули ихъ, какъ и ихъ послѣдовательныхъ производныхъ всѣхъ порядковъ конечны, а также въ частности и $\{M\}_{0R}$.

Но, полагая $v_1 = \frac{\partial v}{\partial \theta}$, легко вывести изъ формулъ (16) и (16 bis), что

$$\left\{\frac{v_1}{\varrho}\right\}_{0R} = \sum_0^\infty n\left[\left\{\frac{C_n}{\varrho}\right\}_{0R} + \left\{\frac{D_n}{\varrho}\right\}_{0R}\right] < h\{M\}_{0R}$$

$$\left\{\frac{\partial v_1}{\varrho \partial \theta}\right\}_{0R} = \sum_0^\infty n^2\left[\left\{\frac{C_n}{\varrho}\right\}_{0R} + \left\{\frac{D_n}{\varrho}\right\}_{0R}\right] < h\{M\}_{0R}$$

$$\left\{\frac{\partial v_1}{\partial \varrho}\right\}_{0R} = \sum_0^\infty n\left[\left\{\frac{dC_n}{d\varrho}\right\}_{0R} + \left\{\frac{dD_n}{d\varrho}\right\}_{0R}\right] < h\{M\}_{0R},$$

гдѣ h независимая отъ M постоянная величина.

Дифференцируя послѣдовательно по θ уравненіе (63), мы получимъ

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial v_1}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 v_1}{\partial \theta^2} = \frac{\partial M}{\partial \theta} + A\frac{\partial v_1}{\partial \varrho} + B\frac{\partial v_1}{\varrho \partial \theta} + Cv_1 = \frac{dM}{d\theta}$$

. . . . . .

$$\frac{\partial^2 v_n}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial v_n}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 v_n}{\partial \theta^2} = \frac{d^n M}{d\theta^n},$$

полагая вообще $v_n = \frac{\partial^n v}{\partial \theta^n}$; слѣдовательно при всякомъ n

$$\{v_{n+1}\}_{0R} < h\left\{\frac{d^n M}{d\theta^n}\right\}_{0R}, \quad \left\{\frac{\partial v_{n+1}}{\varrho \partial \theta}\right\}_{0R} < h\left\{\frac{d^n M}{d\theta^n}\right\}_{0R}, \quad \left\{\frac{\partial v_{n+1}}{\partial \varrho}\right\}_{0R} < h\left\{\frac{d^n M}{d\theta^n}\right\}_{0R}.$$

Съ другой стороны возьмемъ вспомогательное уравненіе

$$\frac{du}{d\theta} = (Eu + F), \qquad (64)$$

гдѣ E и F аналитическія функціи θ, обладающія свойствомъ, что при $\theta = 0$, ихъ послѣдовательныя производныя удовлетворяютъ неравенствамъ

$$\frac{d^k E}{d\theta^k} > h\left[\left\{\frac{\partial^k A}{\partial\theta^k}\right\}_{0R} + \left\{\frac{\partial^k B}{\partial\theta^k}\right\}_{0R} + \left\{\frac{\partial^k C}{\partial\theta^k}\right\}_{0R}\right],$$
$$\frac{d^k F}{d\theta^k} > h\left\{\frac{\partial^k D}{\partial\theta^k}\right\}_{0R}.$$

Легко видѣть въ такомъ случаѣ, что послѣдовательныя производныя при $\theta = 0$ рѣшенія u уравненія (64), которое при θ равномъ 0 получаетъ значеніе u_0, удовлетворяютъ неравенствамъ

$$\frac{d^n u}{d\theta^n} > \{v_n\}_{0R}, \quad \frac{d^n u}{d\theta^n} > \left\{\frac{\partial v_{n+1}}{\varrho\partial\theta}\right\}_{0R}, \quad \frac{d^n u}{d\theta^n} > \left\{\frac{\partial v_{n+1}}{\partial\varrho}\right\}_{0R}.$$

Но функція u, которой послѣдовательныя производныя болѣе модулей послѣдовательныхъ производныхъ $\frac{\partial v}{\partial\varrho}$ на окружности C, какъ и на концентричныхъ окружностяхъ меньшаго радіуса, равна

$$u = e^{\int_0^\theta E d\theta} \cdot \left[u_0 + \int_0^\theta F e^{-\int_0^\theta E d\theta}\, d\theta\right]. \tag{65}$$

Такимъ образомъ *радіусъ сходимости функціи* $\frac{\partial v}{\partial\varrho}$ *разсматриваемой какъ функція угла* θ *на каждой окружности концентрической* C *во всякой точкѣ ея не менѣе наименьшаго изъ радіусовъ сходимости* E *и* F.

Беря поэтому концентрическую окружность C' меньшую C, но сколь угодно близкую къ ней мы можемъ примѣнить классическую теорему Коши [1]) для опредѣленія единственнаго (т. е. непремѣнно совпадающаго съ v) аналитическаго рѣшенія, котораго значенія какъ и производной его по ϱ соотвѣтственно совпадаютъ съ v и $\frac{\partial v}{\partial\varrho}$ на этой окружности. Но какъ бы близко къ C мы ни выбрали окружность C', радіусъ сходимости полученнаго рѣшенія по обѣимъ перемѣннымъ болѣе опредѣленнаго значенія, а потому рѣшеніе v существуетъ и за предѣлами окружности C. Что и требовалось доказать.

Предположимъ теперь, что a, b, c, d въ уравненіи (46) суть *цѣлыя* функціи, и пусть совокупность значеній z на окружности C также выражается *цѣлой* функціей дуги. Покажемъ, что въ такомъ случаѣ *функція* z *сама есть цѣлая трансцендентная функція обѣихъ перемѣн-*

[1]) См. Goursat „Leçons sur les équations aux dérivées partielles“ t. I.

ныхъ x, y. Это очевидно во-первыхъ, если уравненіе (46) замѣнить уравненіемъ Лапласа. Поэтому полагая, какъ прежде $z = v + H$, мы видимъ, что въ вспомогательномъ уравненіи (64) E и F суть цѣлыя функціи комплексной перемѣнной θ. И слѣдовательно, на основаніи формулы (65) заключаемъ, что u также цѣлая функція θ. Такимъ образомъ $\frac{\partial v}{\partial \rho}$, а съ нимъ и $\frac{\partial z}{\partial \rho}$ на окружности C оказывается цѣлой функціей комплексной перемѣнной θ. Поэтому изъ теоремы Коши мы выводимъ, что, при $\rho = R$, ни при какомъ конечномъ (комплексномъ, какъ и вещественномъ) значеніи θ, функція z разсматриваемая, какъ функція *обѣихъ* перемѣнныхъ ρ и θ не имѣетъ особенностей. Но на основаніи [1]) извѣстной теоремы, еслибъ функція z имѣла особенность въ точкѣ x_0, y_0, то особой линіей должна была бы быть по крайней мѣрѣ одна изъ характеристикъ

$$x - x_0 + i(y - y_0) = 0 \quad \text{или} \quad x - x_0 - i(y - y_0) = 0.$$

Слѣдовательно z имѣла бы также по крайней мѣрѣ одну особую точку на конечномъ разстояніи при $\rho = R$. Такимъ образомъ мы должны заключить, что z вовсе не имѣетъ особенностей при конечныхъ значеніяхъ перемѣнныхъ, что и требовалось доказать.

Нелишнее замѣтить, что еслибъ мы a priori не предполагали, что внутри круга C функція z не имѣетъ особенностей, то мы не могли бы утверждать ихъ отсутствіе внѣ круга.

Я не буду здѣсь утруждать вниманіе читателя разсмотрѣніемъ случая, когда a, b, c, d не цѣлыя функціи, а только не имѣютъ вещественныхъ особенностей, точно такъ же, какъ и того, когда на окружности C z не цѣлая функція дуги. Полученные въ этомъ направленіи результаты были сообщены мною Парижской Академіи Наукъ 5 марта 1906 года.

§ 21. Прежде чѣмъ закончить эту главу, покажемъ еще, что задача Дирикле для уравненія (46) разрѣшается точно также, какъ и выше, если значенія рѣшенія даны на двухъ концентрическихъ окружностяхъ C и C' радіусовъ R и R' $(R' < R)$.

Очевидно, что для того, чтобъ въ этомъ убѣдиться, достаточно только доказать неравенства

$$\{z\}_{R'R} < k\{d\}_{R'R}, \quad \left\{\frac{\partial z}{\partial x}\right\}_{R'R} < k\{d\}_{R'R}, \quad \left\{\frac{\partial z}{\partial y}\right\}_{R'R} < k\{d\}_{R'R}, \quad (50^{\text{bis}})$$

если рѣшеніе z обращается въ нуль на окружностяхъ C и C'.

[1]) Delassus. Journal de Mathématiques. 1895. Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften. Bd. II. 4.

Кромѣ того, возвращаясь къ выводу неравенствъ (50) мы видимъ, что формулы (40) вполнѣ могутъ намъ теперь замѣнить формулы (16), такъ что единственный пунктъ, который требуетъ особаго разсмотрѣнія— это предварительное установленіе неравенствъ

$$\left\{\int_0^{\vartheta}\frac{\partial z}{\partial\varrho}\,d\vartheta\right\}_{R'R}<k_1\overline{d}\,,\quad \{z\}_{R'R}<k_1\overline{d}\,,\qquad (52^{\text{bis}})$$

изъ которыхъ уже безъ труда вытекаютъ неравенства (50bis). Для вывода неравенствъ (52bis) примѣнимъ также разсужденіе аналогичное тому, которое привело насъ къ неравенствамъ (52).

Мы найдемъ такимъ образомъ, что интегралъ I взятый внутри кольца, заключеннаго между окружностями C и C',

$$I=\iint(rt-s^2)\,dx\,dy=\frac{1}{2}\int_C\left(\frac{\partial z}{\partial\varrho}\right)^2d\vartheta-\frac{1}{2}\int_{C'}\left(\frac{\partial z}{\partial\varrho}\right)^2d\vartheta=\int_{R'}^{R}\int_0^{2\pi}\frac{\partial^2 z}{\partial\varrho^2}\,\frac{\partial z}{\partial\varrho}\,d\varrho\,d\vartheta$$

$$=\int_{R'}^{R}[\alpha_0''\alpha_0'+\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n''\alpha_n'+\beta_n''\beta_n']\,d\varrho\,.$$

Слѣдовательно,

$$|I|<\sqrt{\int_{R'}^{R}[\alpha_0''^2+\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n''^2+\beta_n''^2]\,d\varrho\,.\int_{R'}^{R}[\alpha_0'^2+\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n'^2+\beta_n'^2]\,d\varrho}\,.$$

Мы не можемъ въ данномъ случаѣ утверждать, что $I>0$, но изъ указаннаго неравенства можно сдѣлать тѣ же выводы.

Вмѣсто неравенства (51bis), мы напишемъ

$$\iint(r^2+s^2+t^2+rt)\,dy\,dx=\iint(a_0p+b_0q+c_0z-d)^2\,dx\,dy-I.$$

Но попрежнему

$$\iint(p^2+q^2)\,dx\,dy<\mu_1\overline{d}^2.$$

Слѣдовательно [1]),

$$\iint r^2\,dx\,dy<k_1\overline{d}^2-I\,,\quad \iint s^2\,dx\,dy<k_1\overline{d}^2-I\,,\quad \iint t^2\,dx\,dy<k_1\overline{d}^2-I.$$

И вводя коэффиціенты тригонометрическаго разложенія z, находимъ

$$\int_{R'}^{R}[\alpha_0''^2+\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n''^2+\beta_n'']\,d\varrho+\int_{R'}^{R}[\alpha_0''\alpha_0'+\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n''\alpha_n'+\beta_n''\beta_n']\,d\varrho<k_1\overline{d}^2.$$

[1]) Коэффиціентъ k_1 по прежнему представляетъ вообще конечную и опредѣленную величину, но не одну и ту же въ различныхъ неравенствахъ.

Полагая затѣмъ

$$u^2 = \int_{R'}^{R} [\alpha_0''^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n''^2 + \beta_n''^2]\, d\varrho\,,$$

получимъ

$$u^2 < \mu_1^{\frac{1}{2}} |u| \overline{d} + k_1 \overline{d^2}$$

Откуда выводимъ, что

$$u^2 < k_1 \overline{d^2}$$

и далѣе

$$\int_{R'}^{R} [|\alpha_0''| + \sum \frac{1}{n} (|\alpha_n''| + |\beta_n''|)]\, d\varrho < k_1 \overline{d}.$$

Слѣдовательно,

$$\left\{ \int_0^{\theta} \frac{\partial z}{\partial \varrho}\, d\theta \right\}_{R'R} < k_1 \overline{d}. \qquad (52^{\text{bis}})$$

Съ другой стороны, замѣчая, что

$$|I| < k_1 \overline{d^2}\,,$$

получимъ немедленно и второе изъ неравенствъ (52bis)

$$\{z\}_{R'R} < k_1 \overline{d}\,, \qquad (52^{\text{bis}})$$

и наконецъ изъ уравненія (53) выведемъ неравенства

$$\{z\}_{R'R} < k_1 \overline{d}\,, \quad \left\{\frac{\partial z}{\partial x}\right\}_{R'R} < k_1 \overline{d}\,, \quad \left\{\frac{\partial z}{\partial y}\right\}_{R'R} < k_1 \overline{d} \qquad (55^{\text{bis}})$$

(гдѣ множитель ϱ уже не фигурируетъ, какъ въ неравенствахъ (55)), которыя и заключаютъ въ себѣ требуемыя неравенства (50bis).

Здѣсь, какъ и въ концѣ предыдущей главы, мы видимъ, что изслѣдованіе рѣшенія внутри области, ограниченной двумя концентрическими окружностями, оказывается проще, чѣмъ внутри круга.

Итакъ можно считать по существу доказанной возможность задачи Дирикле, если *значенія искомаго рѣшенія линейнаго уравненія (46) даны на двухъ концентрическихъ окружностяхъ.*

Благодаря теоремѣ о конформномъ преобразованіи, кольцеобразная область, заключенная между двумя концентрическими окружностями, можетъ быть замѣнена кольцеобразной областью, ограниченной двумя аналитическими контурами.

Глава V.

Уравненія вида $r+t=f(p, q, z, x, y)$.

§ 22. Приступая къ интегрированію нелинейныхъ уравненій, мы должны прежде всего доказать слѣдующую основную лемму.

Лемма. *Если уравненіе*

$$r+t=f(xyzpq), \qquad (f'_z \geqq 0) \tag{66}$$

гдѣ f аналитическая функція перемѣнныхъ z, p, q, x, y, имѣетъ рѣшеніе z_0, которое на окружности C принимаетъ совокупность значеній, выражающуюся функціей $\varphi_0(\theta)$ угла, и которое на окружности C, какъ и внутри ея имѣетъ конечныя производныя первыхъ двухъ порядковъ, то полагая, что $\varphi(\theta)$ имѣетъ производныя первыхъ двухъ порядковъ, задача Дирикле для уравненія (66) возможна, если данныя на окружности C значенія рѣшенія выражены функціей $\varphi_0(\theta)+\alpha\varphi(\theta)$, лишь бы α было достаточно мало; въ каждой точкѣ x, y это рѣшеніе является аналитической функціей α.

Въ самомъ дѣлѣ, положимъ a priori

$$z=z_0(x, y)+\alpha z_1(x, y)+\frac{\alpha^2}{2}z_2(x, y)+\ldots+\frac{\alpha^n}{n!}z_n(x, y)+\ldots \tag{56bis}$$

и опредѣлимъ послѣдовательно $z_n=\dfrac{\partial^n z}{\partial\alpha^n}$ при $\alpha=0$ такъ, чтобъ z тождественно удовлетворяло уравненію (66), и кромѣ того, чтобъ на окружности C z_1 было равно $\varphi(\theta)$, а $z_2=z_3=\ldots=z_n=0$.

Очевидно z_1 будетъ удовлетворять линейному уравненію

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z_1}{\partial y^2}-\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial z_1}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial z_1}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial z}z_1=0, \tag{67}$$

и для опредѣленія послѣдовательныхъ производныхъ получимъ систему:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 z_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z_2}{\partial y^2}-\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial z_2}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial z_2}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial z}z_2=A_1,\\
&\frac{\partial^2 z_3}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z_3}{\partial y^2}-\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial z_3}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial z_3}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial z}z_3=A_2,\\
&\qquad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{\partial^2 z_n}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z_n}{\partial y^2}-\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial z_n}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial z_n}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial z}z_n=A_{n-1},\\
&\qquad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \tag{67}$$

гдѣ A_i зависитъ отъ z_k, $\frac{\partial z_k}{\partial x}$, $\frac{\partial z_k}{\partial y}$, причемъ k принимаетъ значенія не большія i. Вообще

$$A_{i-1} = \frac{d^i f}{d\alpha^i} - \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial z_i}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial z_i}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial z} z_i,$$

гдѣ $\frac{d^i f}{d\alpha^i}$ обозначаетъ полную производную f по α порядка i. Уравненія системы (67), которыя отличаются лишь второю частью равенства относятся къ типу уравненій изученному нами въ предыдущей главѣ, для которыхъ, какъ мы видѣли задача Дирикле возможна. Кромѣ того, въ силу установленныхъ неравенствъ, имѣемъ вообще

$$\{z_n\}_{0R} < k\{A_{n-1}\}_{0R}, \quad \left\{\frac{\partial z_n}{\partial x}\right\}_{0R} < k\{A_{n-1}\}_{0R}, \quad \left\{\frac{\partial z_n}{\partial y}\right\}_{0R} < k\{A_{n-1}\}_{0R}.$$

Благодаря этому легко построить вспомогательную аналитическую функцію $v(\alpha)$, которой послѣдовательныя производныя при $\alpha = 0$ были бы болѣе соотвѣтствующихъ производныхъ z. Для этого напишемъ уравненіе

$$v = b_1\alpha + kF(v), \tag{68}$$

гдѣ b_1 представляетъ собой высшій предѣлъ тригонометрическихъ модулей рѣшенія z_1 перваго изъ уравненій (67) и его производныхъ $\frac{\partial z_1}{\partial x}$ и $\frac{\partial z_1}{\partial y}$. Что же касается функціи $F(v)$, то она опредѣляется формулой

$$F(v) = \{f(x, y, z_0 + v, p_0 + v, q_0 + v)\}_{0R} - \{f(x, y, z_0, p_0, q_0)\}_{0R} - \\ - v[\{f'_z(x, y, z_0, p_0, q_0)\}_{0R} + \{f'_p(x, y, z_0, p_0, q_0)\}_{0R} + \\ + \{f'_q(x, y, z_0, p_0, q_0)\}_{0R}],$$

такъ что $F(0) = F'(0) = 0$. Кромѣ того функція $F(v)$ очевидно аналитическая (и безъ вещественныхъ особенностей), такъ какъ полагая модуль комплексной перемѣнной v достаточно малымъ, мы должны допустить, что $|F(v)|$ менѣе нѣкотораго числа M.

Но рѣшеніе v уравненія (68) представляется въ видѣ сходящейся строки Тэйлора

$$v = b_1\alpha + \frac{\alpha^2}{2}b_2 + \ldots \frac{\alpha^n}{n!}b_n + \ldots.$$

Я утверждаю, что

$$b_n > \{z_n\}_{0R}, \quad b_n > \left\{\frac{\partial z_n}{\partial x}\right\}_{0R}, \quad b_n > \left\{\frac{\partial z_n}{\partial y}\right\}_{0R}. \tag{69}$$

Въ самомъ дѣлѣ неравенства (69) имѣютъ мѣсто при $n = 1$; положимъ, что они вѣрны для всякаго $n' < n$.

Въ такомъ случаѣ выраженіе $\frac{d^n F(v)}{d\alpha^n}$ при $\alpha = 0$, которое получается отъ замѣны въ A_{n-1} z_i, $\frac{\partial z_i}{\partial x}$, $\frac{\partial z_i}{\partial y}$ черезъ b_i, очевидно болѣе $\{A_{n-1}\}_{0R}$. А слѣдовательно, неравенства (69) имѣютъ мѣсто и для n.

Сходимость строки для достаточно малаго модуля α такимъ образомъ доказана; функція z, которая ею представлена удовлетворяетъ поэтому уравненію (66) при требуемыхъ условіяхъ на контурѣ C и наша лемма доказана.

Указанная лемма сводитъ задачу Дирикле къ *аналитическому продолженію* ряда (56bis) по α, практически—къ вычисленію соотвѣтствующей строки Миттагъ-Леффлера.

§ 23. Мы допустимъ пока a priori что существуетъ какое нибудь рѣшеніе z_0, удовлетворяющее условіямъ леммы; часто существованіе такого рѣшенія очевидно: напримѣръ, $z_0 = 0$, если $f(x, y, z, p, q)$ обращается въ нуль при $z = p = q = 0$; вообще же нельзя утверждать, что при всякомъ f (не имѣющемъ вещественныхъ особенностей) возможно найти какое нибудь рѣшеніе z_0 уравненія (66), которое бы внутри сколь угодно большого круга не имѣло бы особенностей. Итакъ пусть функція z_0 на окружности C принимаетъ значенія выражающіяся нѣкоторой функціей $\varphi_0(\theta)$; и пусть требуется рѣшить задачу Дирикле при условіи, что на окружности C искомое рѣшеніе z должно обращаться въ функцію $\Phi(\theta)$, обладающую, какъ и $\varphi_0(\theta)$, производными первыхъ четырехъ порядковъ.

Тогда полагая

$$F(\theta, \alpha) = \varphi_0(\theta) + \alpha[\Phi(\theta) - \varphi_0(\theta)]$$

мы знаемъ на основаніи предыдущаго, что задача Дирикле допускаетъ рѣшеніе, если $|\alpha|$ достаточно малъ; это рѣшеніе представляется въ видѣ аналитической функціи $z(x, y, \alpha)$; и если при $0 < \alpha \leqq 1$ она не имѣетъ особенностей, то $z(x, y, 1)$ представитъ требуемое рѣшеніе. Однако аналитическое продолженіе z, разсматриваемой, какъ функція α, не всегда возможно. Если извѣстно, что рѣшеніе, обладающее конечными производными первыхъ двухъ порядковъ существуетъ при $\alpha < \alpha_0$, отсюда нельзя вывести, что при $\alpha = \alpha_0$ рѣшеніе также существуетъ, такъ какъ возможно, что съ приближеніемъ къ α_0 радіусъ сходимости z, разсматриваемой, какъ функція α, стремится къ нулю.

Правда, во всякомъ случаѣ, съ приближеніемъ α къ α_0, z стремится къ опредѣленному предѣлу u_0; ибо если z_1 и z_2 суть рѣшенія, соотвѣтствующія двумъ значеніямъ α_1 и α_2 параметра α, весьма близкимъ къ α_0, то разность $\delta = z_2 - z_1$ удовлетворяетъ уравненію

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \delta}{\partial y^2} + a\frac{\partial \delta}{\partial x} + b\frac{\partial \delta}{\partial y} + c\delta = 0 \text{ при } c \leqq 0,$$

и слѣдовательно, *ея абсолютное значеніе внутри круга C не можетъ быть болѣе, чѣмъ на окружности.* Но эта предѣльная функція u_0 можетъ и не быть рѣшеніемъ даннаго уравненія, такъ какъ мы не знаемъ, имѣетъ ли она производныя первыхъ двухъ порядковъ.

Для того, чтобъ задача Дирикле была возможна, необходимо и достаточно, чтобы a priori можно было установить нисшій предѣлъ радіуса сходимости z относительно α, при всякомъ α, которому соотвѣтствуетъ рѣшеніе z, имѣющее производныя первыхъ двухъ порядковъ по x и y, какъ внутри круга C, такъ и на окружности. Въ этомъ случаѣ и только въ этомъ случаѣ можно быть увѣреннымъ, что никакая точка α_0 не будетъ особенной, и потому аналитическое продолженіе вдоль всего отрѣзка 01 совершится безпрепятственно. Но если мы присмотримся къ доказательству нашей основной леммы то, мы сейчасъ же замѣтимъ, что для установленія нисшаго предѣла радіуса сходимости z какъ функціи α, *достаточно* умѣть указать a priori высшій предѣлъ $|z|$ и модулей его производныхъ первыхъ двухъ порядковъ.

Выше было уже замѣчено, что высшій предѣлъ модуля рѣшенія z можетъ быть всегда установленъ при помощи его значеній на контурѣ, такъ какъ разность между двумя рѣшеніями внутри контура не можетъ быть болѣе, чѣмъ на самомъ контурѣ. На основаніи этихъ общихъ соображеній приходимъ къ слѣдующей теоремѣ [1]):

Теорема. *Если въ уравненіи*

$$r+t=f(x,\ y,\ z,\ p,\ q) \qquad (f'_z \geqq 0) \qquad (66')$$

аналитическая функція f при безконечномъ возрастаніи перемѣнныхъ p, q возрастаетъ не быстрѣе, чѣмъ ихъ квадраты, то задача Дирикле внутри круга C возможна при сдѣланныхъ выше предположеніяхъ (стр. 102).

Все доказательство, очевидно, сводится къ установленію, при помощи данныхъ на контурѣ, *высшихъ предѣловъ модулей производныхъ рѣшенія первыхъ двухъ порядковъ.* Для этого мы примѣнимъ новый замѣчательный по своей общности пріемъ, который мы назовемъ *способомъ вспомогательныхъ функцій* (méthode des fonctions auxiliaires). Въ зависимости отъ того, устанавливается ли высшій предѣлъ *внутри* контура или *на* контурѣ, упомянутый пріемъ будетъ называться способомъ вспомогательныхъ функцій *внутри* контура или *на* контурѣ.

Нѣтъ необходимости предполагать функцію f аналитической относительно x, y, z; допустимъ лишь, что она имѣетъ конечныя (при конечныхъ значеніяхъ x, y, z) частныя производныя первыхъ двухъ порядковъ относительно этихъ перемѣнныхъ, и кромѣ того для отчетливости

---

[1]) Эта теорема впервые была мною доказана въ Mathematische Annalen t. LXII; настоящее доказательство существенно отличается отъ того, которое указано тамъ.

нашихъ разсужденій мы положимъ, что функція f представляется многочленомъ 2-й степени относительно p, q.

Если значенія z на окружности C выражаются функціей $\varphi(\theta)$, имѣющей конечныя производныя первыхъ *четырехъ* порядковъ, то гармоническая функція H, которая принимаетъ тѣ же значенія на окружности C имѣетъ конечныя частныя производныя первыхъ *трехъ* порядковъ внутри круга C, какъ на самой окружности. Въ такомъ случаѣ, мы можемъ ограничиться предположеніемъ, что функція z на окружности C обращается въ *нуль*, не мѣняя нашихъ допущеній относительно функціи $f(x, y, z, p. q)$.

Установимъ во-первыхъ высшій предѣлъ модулей первыхъ производныхъ z на контурѣ C.

По предположенію, $\frac{\partial z}{\partial \theta} = 0$. Намъ нужно лишь указать высшій предѣлъ абсолютнаго значенія производной $\frac{\partial z}{\partial \varrho}$ по нормали на контурѣ. Для этого положимъ

$$z = -n - \alpha + \alpha \log u,$$

гдѣ n извѣстный намъ максимумъ модуля z, α положительное число, которое мы опредѣлимъ дальше, и наконецъ u новая функція, которою мы замѣняемъ z. Очевидно, что функція u измѣняется въ томъ же направленіи, что z, причемъ наименьшее ея значеніе, соотвѣтствующее $z = -n$, равно e, наибольшее же значеніе, соотвѣтствующее $z = n$, равно $e^{\frac{2n+\alpha}{\alpha}}$. Далѣе,

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\alpha}{u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\alpha}{u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\alpha}{u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2,$$

$$q = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\alpha}{u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y}, \qquad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\alpha}{u}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\alpha}{u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2.$$

Поэтому u удовлетворяетъ уравненію

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{u}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] + \frac{\alpha}{u}\left[a\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2b\,\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + c\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] + 2d\frac{\partial u}{\partial x} + 2e\frac{\partial u}{\partial y} + g\frac{u}{\alpha} = Q, \tag{70}$$

если согласно нашему предположенію $f(xyzpq)$ представляется въ видѣ многочлена,

$$f = ap^2 + 2bpq + cq^2 + 2dp + 2eq + g.$$

Коэффиціенты a, b, c, d, e, g суть функціи x, y, z, конечныя, какъ и ихъ частныя производныя первыхъ двухъ порядковъ по этимъ тремъ перемѣннымъ, такъ какъ $|x| < R$, $|y| < R$, $|z| < n$.

Итакъ, пусть

$$|a| < M, \quad |b| < M, \quad |c| < M,$$

съ другой стороны положимъ постоянную величину α равною $\frac{1}{8M}$. Въ такомъ случаѣ, приравнивая нулю вторую часть уравненія (70) и разсматривая $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$, какъ координаты точки въ плоскости, а x, y, z, какъ параметры, отъ которыхъ зависятъ коэффиціенты, мы получимъ уравненіе измѣняющагося эллипсиса, ибо, полагая

$$a_1 = \frac{1}{u}\left(1 + \frac{a}{8M}\right) > \frac{7}{8u}, \quad |b_1| = \frac{|b|}{8Mu} < \frac{1}{8u}, \quad c_1 = \frac{1}{u}\left(1 + \frac{a}{8M}\right) > \frac{7}{8u},$$

находимъ $a_1 c_1 - b_1^2 > \frac{3}{4u^2}$.

Слѣдовательно, вторая часть Q уравненія (70) не можетъ ни при какихъ значеніяхъ $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ принимать отрицательныхъ значеній, большихъ нѣкотораго числа N по абсолютной величинѣ. Эта величина N, получающаяся отъ подстановки въ уравненіи эллипсиса значеній координатъ его центра опредѣляется элементарной и легко провѣряемой формулой

$$-Q < \frac{a_1 e^2 - 2b_1 de + c_1 d^2}{a_1 c_1 - b_1^2} + \frac{gu}{\alpha} = N.$$

Поэтому, если мы положимъ

$$u = u_1 - \frac{N}{4}(x^2 + y^2),$$

то

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} > 0.$$

Слѣдовательно, u_1 не можетъ имѣть максимума внутри круга C, а потому на окружности C

$$\frac{\partial u_1}{\partial \varrho} \geqq 0.$$

Откуда заключаемъ во-первыхъ, что на этой же окружности

$$\frac{\partial u}{\partial \varrho} \geqq -\frac{1}{2}NR,$$

а затѣмъ находимъ, что

$$\frac{\partial z}{\partial \varrho} = \frac{\alpha}{u}\frac{\partial u}{\partial \varrho} \geqq -\frac{\alpha NR}{2e}.$$

Таковъ крайній отрицательный предѣлъ $\frac{\partial z}{\partial \varrho}$ на окружности C. Для того, чтобъ получить высшій положительный предѣлъ, поступимъ подобнымъ же образомъ: а именно, положимъ

$$z = -n - \alpha + \alpha \log \frac{1}{1-u'}$$

гдѣ n и α сохраняютъ прежнія значенія, а u' новая неизвѣстная функція, замѣняющая z; подобно предыдущему замѣтимъ, что z и u' измѣняются въ одномъ и томъ же направленіи, причемъ наименьшее значеніе u' равно $1-e^{-1}$, наибольшее же равно $1-e^{-\frac{2n+1}{\alpha}}$ и кромѣ того u' удовлетворяетъ уравненію

$$\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y^2} = -\frac{1}{1-u'}\left[\left(\frac{\partial u'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u'}{\partial y}\right)^2\right] +$$
$$+ \frac{\alpha}{1-u'}\left[a\left(\frac{\partial u'}{\partial x}\right)^2 + 2b\left(\frac{\partial u'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u'}{\partial y}\right) + c\left(\frac{\partial u'}{\partial y}\right)^2\right] +$$
$$+ 2d\frac{\partial u'}{\partial x} + 2e\frac{\partial u'}{\partial y} + g\frac{1-u'}{\alpha} = Q'.$$

Въ данномъ случаѣ, тѣ же элементарныя соображенія позволяютъ установить высшій *положительный* предѣлъ Q'

$$Q' < N'.$$

Отсюда полагая

$$u' = u_1' + \frac{N'}{4}(x^2 + y^2),$$

мы заключаемъ, что u_1' не можетъ обладать минимумомъ внутри круга C, а потому $\frac{\partial u_1'}{\partial \varrho} \leqq 0$ на окружности C. Слѣдовательно

$$\frac{\partial u'}{\partial \varrho} \leqq \frac{1}{2} N' R$$

и

$$\frac{\partial z}{\partial \varrho} \leqq \frac{\alpha N' R}{2(1-e^{-1})}.$$

Такимъ образомъ нами установленъ и высшій положительный предѣлъ $\frac{\partial z}{\partial \varrho}$ на окружности.

Зная высшій предѣлъ модулей $|p|$ и $|q|$ на окружности C, перейдемъ теперь къ опредѣленію ихъ высшихъ предѣловъ внутри C.

Для этого положимъ

$$z = -n + \alpha \log\log u ,$$

гдѣ n сохраняетъ прежнее значеніе, а α будетъ опредѣлено нами дальше. Въ такомъ случаѣ функція u измѣняется въ томъ же направленіи, что z, между предѣлами e и $e^{e^{\frac{2n}{\alpha}}}$ и удовлетворяетъ уравненію:

$$r_1 + t_1 = \frac{1}{u\log u}[(1+\log u+\alpha a)p_1^2 + 2\alpha b p_1 q_1 + (1+\log u+\alpha c)q_1^2] + \\ + 2dp_1 + 2eq_1 + g\frac{u\log u}{\alpha} = Q_1 , \tag{71}$$

гдѣ мы положили для краткости $r_1 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $s_1 = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, $t_1 = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $p_1 = \frac{\partial u}{\partial x}$; $q_1 = \frac{\partial u}{\partial y}$, такъ какъ производныя функціи z выражаются при помощи производныхъ u:

$$p = \frac{\alpha}{u\log u}p_1 , \qquad r = \frac{\alpha}{u\log u}r_1 - \frac{\alpha(1+\log u)}{(u\log u)^2}p_1^2$$
$$q = \frac{\alpha}{u\log u}q_1 , \qquad t = \frac{\alpha}{u\log u}t_1 - \frac{\alpha(1+\log u)}{(u\log u)^2}q_1^2 .$$

Положимъ далѣе

$$p_1^2 + q_1^2 = w$$

и допустимъ, что въ нѣкоторой точкѣ x, y внутри C w достигаетъ максимума, такъ что

$$\frac{1}{2}\frac{\partial w}{\partial x} = p_1 r_1 + q_1 s_1 = 0, \qquad \frac{1}{2}\frac{\partial w}{\partial y} = p_1 s_1 + q_1 t_1 = 0 \tag{72}$$

и

$$\Delta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = r_1^2 + 2s_1^2 + t_1^2 + p_1\left(\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p_1}{\partial y^2}\right) + q_1\left(\frac{\partial^2 q_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 q_1}{\partial y^2}\right) = \\ = Q_1^2 + p_1\frac{\partial Q_1}{\partial x} + q_1\frac{\partial Q_1}{\partial y} \leqq 0 ,$$

гдѣ $\frac{\partial Q_1}{\partial x}$, $\frac{\partial Q_1}{\partial y}$, представляютъ собой частныя производныя Q_1, въ которомъ u, p_1, q_1 разсматриваются какъ опредѣленныя функціи x, y. Поэтому обозначая черезъ $\left(\frac{\partial Q_1}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial Q_1}{\partial y}\right)$, $\left(\frac{\partial Q_1}{\partial u}\right)$ частныя производныя при предположеніи, что x, y, u, p, q независимыя перемѣнныя, получимъ благодаря равенствамъ (72)

$$\Delta = Q_1^2 + p_1\left(\frac{\partial Q_1}{\partial x}\right) + q_1\left(\frac{\partial Q_1}{\partial y}\right) + (p_1^2 + q_1^2)\left(\frac{\partial Q_1}{\partial u}\right) = \frac{w^2 + \varepsilon}{u^2 \log u} + \eta,$$

гдѣ ε представляетъ собой многочленъ не выше четвертой степени относительно p_1 и q_1, коэффиціенты котораго стремятся къ нулю вмѣстѣ съ α, η многочленъ не выше третьей степени относительно p_1 и q_1. Слѣдовательно, придавая α нѣкоторое опредѣленное достаточно малое значеніе, мы можемъ достигнуть того, чтобъ при всякомъ p_1, q_1 имѣть

$$|\varepsilon| \leq \frac{1}{2} w^2.$$

Поэтому

$$\Delta > \frac{w^2}{2u^2 \log u} + \eta,$$

откуда

$$w^2 < 2|\eta| u^2 \log u < 2e^{2e^{\frac{2n}{\alpha}} + \frac{2n}{\alpha}} |\eta|.$$

Но такъ какъ η многочленъ 3-й степени относительно p_1 и q_1, высшій предѣлъ коэффиціентовъ котораго извѣстенъ послѣ того, какъ мы опредѣлили α, то мы заключаемъ, что въ точкѣ x, y, внутри круга C гдѣ w достигаетъ максимума, w не болѣе нѣкотораго a priori устанавливаемаго предѣла. Съ другой стороны изъ предыдущаго разсужденія намъ извѣстенъ высшій предѣлъ

$$w = \left(p^2 + q^2\right) \frac{\alpha^2}{u^2 \log^2 u}$$

на окружности C. Слѣдовательно, высшій предѣлъ w выражается a priori болѣе или менѣе простой функціей коэффиціентовъ a, b, c, d, e, g и ихъ *первыхъ* производныхъ при данныхъ значеніяхъ x, y, z; тоже самое поэтому можемъ сказать и относительно $|p|$ и $|q|$.

Послѣ того, какъ установленъ высшій предѣлъ модулей первыхъ производныхъ, тотъ же способъ вспомогательныхъ функцій можетъ быть примѣненъ къ установленію высшаго предѣла модулей вторыхъ производныхъ.

Для этого продифференцируемъ уравненіе (66) относительно θ. Полагая $\frac{\partial z}{\partial \theta} = z_1$, получимъ

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z_1}{\partial y^2} = \frac{\partial f}{\partial x} y - \frac{\partial f}{\partial y} x + \frac{\partial f}{\partial z} z_1 + \frac{\partial f}{\partial q} p - \frac{\partial f}{\partial p} q + \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{\partial z_1}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial q} \cdot \frac{\partial z_1}{\partial y}.$$

Замѣчаемъ, что $\frac{\partial z_1}{\partial x}$, $\frac{\partial z_1}{\partial y}$ входятъ во второй части равенства въ степени не выше первой, а потому повторяя разсужденіе страницы 105 (гдѣ α

можемъ придать теперь произвольное значеніе, напр. $\alpha = 1$) получимъ высшій предѣлъ $\left|\frac{\partial z_1}{\partial \varrho}\right| = \left|\frac{\partial^2 z}{\partial \varrho\, \partial \vartheta}\right|$ на окружности C. Изъ уравненія (66) выводимъ тогда непосредственно высшій предѣлъ $\left|\frac{\partial^2 z}{\partial \varrho^2}\right|$ на контурѣ. Остается разсмотрѣть значенія вторыхъ производныхъ *внутри* круга. Дифференцируемъ уравненіе (66) относительно x. Получимъ

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\, p + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial p}{\partial y} \qquad (66^{\text{bis}})$$

Какъ на страницѣ 107, можемъ установить высшій предѣлъ максимума квадратной формы

$$w = e^{2\varepsilon p + n'}\, e^{2(p+n')}\left[\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^2\right],$$

гдѣ n' есть только что установленный высшій предѣлъ модуля $|p|$.

Дѣйствительно, то обстоятельство, что въ уравненіи (66bis) наряду съ p (соотвѣтствующимъ z въ уравненіи (66)) фигурируетъ и q, нисколько не измѣняетъ нашего разсужденія, ибо производныя q представляются линейными функціями производныхъ p, а именно:

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} \text{ и } \frac{\partial q}{\partial y} = f - \frac{\partial p}{\partial x}.$$

Такимъ образомъ находимъ высшій предѣлъ w, откуда выводимъ высшій предѣлъ $r^2 + s^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^2$; а затѣмъ получаемъ и высшій предѣлъ модулей всѣхъ вторыхъ производныхъ.

Въ случаѣ надобности, мы могли бы, сдѣлавши соотвѣтствующія предположенія о существованіи дальнѣйшихъ производныхъ f и z на окружности C, установить тѣмъ же способомъ высшіе предѣлы модулей послѣдовательныхъ производныхъ z, но сейчасъ это для насъ не представляетъ интереса, такъ какъ, на основаніи вышесказаннаго, найденныхъ предѣловъ вполнѣ достаточно, чтобъ убѣдиться въ правильности теоремы, которую мы хотѣли доказать.

Въ частности, въ весьма распространенномъ случаѣ, когда $f(x, y, 0, 0, 0) = 0$, изъ предыдущаго доказательства вытекаетъ возможность задачи Дирикле для круга произвольнаго радіуса. Но мы покажемъ, посредствомъ аналогичныхъ разсужденій, что это послѣднее ограниченіе нисколько не существенно. Для этого докажемъ сначала слѣдующую общую теорему:

§ 23. Теорема. *Пусть*

$$r + t = f(x, y, z, p, q) \qquad (73)$$

гдѣ f какая нибудь аналитическая функція перемѣнныхъ x, y, z, p, q, не имѣющая конечныхъ вещественныхъ особенностей. Если на нѣкоторомъ кругѣ C радіуса R z обращается въ аналитическую функцію дуги, и кромѣ того тригонометрическіе модули $\{z\}_{0R}$, $\left\{\frac{\partial z}{\partial x}\right\}_{0R}$, $\left\{\frac{\partial z}{\partial y}\right\}_{0R}$ конечны, то функція z можетъ быть аналитически продолжена за предѣлы круга C.

Доказательство подобно тому, которое нами дано для соотвѣтствующей теоремы въ предыдущей главѣ. Мы можемъ ограничиться случаемъ, когда $z = 0$ на окружности C. Дифференцируя уравненіе (73) относительно θ и полагая $z_n = \frac{\partial^n z}{\partial \theta^n}$, найдемъ какъ на страницѣ 95:

$$\{z_{n+1}\}_{0R} < h\left\{\frac{d^n f_1}{d\theta^n}\right\}_{0R}, \quad \left\{\frac{\partial z_{n+1}}{\partial \varrho}\right\}_{0R} < h\left\{\frac{d^n f_1}{d\theta^n}\right\}_{0R}, \quad \left\{\frac{\partial z_{n+1}}{\varrho \partial \theta}\right\}_{0R} < h\left\{\frac{d^n f_1}{d\theta^n}\right\}_{0R},$$

если $f(x, y, z, p, q) = f_1\left(\varrho, \theta, z, \frac{\partial z}{\partial \varrho}, \frac{\partial z}{\varrho \partial \theta}\right)$ при переходѣ къ полярнымъ координатамъ.

При этомъ для того, чтобъ вторыя части неравенствъ имѣли смыслъ, существенно необходимо (и достаточно), чтобъ z, p, q имѣли конечные тригонометрическіе модули внутри C. Въ такомъ случаѣ мы можемъ построить вспомогательное уравненіе

$$\frac{du}{d\theta} = \psi(\theta, u, u, u), \tag{64^{bis}}$$

гдѣ аналитическая функція $\psi(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ четырехъ перемѣнныхъ α, β, γ, δ опредѣляется условіемъ, что при $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$

$$\frac{\partial^{k+l+m+n}\psi}{\partial\alpha^k \partial\beta^l \partial\gamma^m \partial\delta^n} = h\left\{\frac{\partial^{k+l+m+n} f_1}{\partial\theta^k \partial z^l \partial\left(\frac{\partial z}{\partial \varrho}\right)^m \partial\left(\frac{\partial z}{\varrho\partial\theta}\right)^n}\right\}_{0R}.$$

Легко видѣть тогда, что послѣдовательныя производныя рѣшенія u, которое обращается въ нуль при $\theta = 0$, уравненія (64bis), удовлетворяютъ неравенствамъ

$$\left\{\frac{\partial z_{n+1}}{\partial \varrho}\right\}_{0R} \leq \frac{d^{n+1} u}{d\theta^{n+1}},$$

изъ которыхъ вытекаетъ наша теорема.

Указанной теоремой мы воспользуемся для интересующей насъ цѣли слѣдующимъ образомъ:

Положимъ для простоты, что $f'_z > P > 0$. Уравненіе (66) во всякомъ случаѣ можетъ принять форму

$$r+t=pf'_p(x,\ y,\ \theta z,\ \theta p,\ \theta q)+qf'_q(x,\ y,\ \theta z,\ \theta p,\ \theta q)+ \\ +zf'_z(x,\ y,\ \theta z,\ \theta p,\ \theta q)+f(x,\ y,\ 0,\ 0,\ 0),$$

гдѣ $0<\theta<1$. Слѣдовательно, въ точкѣ, гдѣ $|z|$ достигаетъ максимума, имѣемъ $|z|<\dfrac{|f(x,\ y,\ 0,\ 0,\ 0|}{P}$.

При предположеніи, что f многочленъ второй степени относительно p и q, можетъ быть данъ a priori высшій предѣлъ для производныхъ первыхъ двухъ порядковъ, а слѣдовательно и для тригонометрическихъ модулей производныхъ перваго порядка, если функція z на окружности C превращается въ данную аналитическую функцію дуги. Слѣдовательно, для уравненія (66′) остается въ силѣ безъ всякихъ ограниченій свойство, что *замкнутая аналитическая кривая не можетъ быть особой линіей рѣшенія этого уравненія.*

Здѣсь не мѣсто заниматься вопросомъ, насколько существенно условіе замкнутости разсматриваемой кривой, такъ какъ это отвлекло бы насъ слишкомъ въ сторону.

Но можно всегда получить рѣшеніе, существующее внутри достаточно малаго круга, примѣняя теорему Коши. Поэтому одно изъ двухъ: или задача Дирикле возможна для всякаго круга, концентричнаго данному, или существуетъ такой кругъ C_1, что для всякаго круга внутри C_1 задача возможна, для круга же бо́льшаго радіуса, чѣмъ C_1, задача не возможна. Но второе предположеніе недопустимо, такъ какъ, какъ бы близокъ ни былъ къ C_1 кругъ C'_1 меньшаго радіуса, на основаніи предыдущаго a priori можетъ быть установленъ радіусъ сходимости на окружности C'_1 рѣшенія u_0, которое на этой окружности обращается въ нуль; такимъ образомъ рѣшеніе u_0 допускаетъ аналитическое продолженіе за предѣлы круга C_1.

Итакъ, безъ всякихъ ограниченій приходимъ къ теоремѣ.

Теорема: *Уравненіе (66′) всегда допускаетъ рѣшеніе задачи Дирикле при условіи, что контуръ, на которомъ даны значенія рѣшенія, аналитическій и значенія на немъ представляются въ видѣ функціи дуги $\varphi(\theta)$, обладающей производными первыхъ четырехъ порядковъ* [1]).

§ 24. Въ нашемъ доказательствѣ существенную роль сыграло предположеніе, что функція f аналитическая. Однако примѣняя теорему Вейерштрасса, указанную на 6-й страницѣ Введенія, *мы можемъ избавиться отъ этого предположенія.*

---

[1]) Относительно функціи $\varphi(\theta)$ можно было бы сдѣлать и болѣе общія предположенія. (См. Mathematische Annallen t. LXII).

Въ самомъ дѣлѣ возьмемъ уравненіе

$$r + t = f(xyzpq), \qquad (66'')$$

гдѣ мы дѣлаемъ относительно f всѣ тѣ же предположенія, что и раньше, кромѣ того, что f аналитическая функція. Допустимъ однако, что f имѣетъ частныя производныя первыхъ *трехъ* порядковъ относительно x, y, z, p, q. Мы можемъ построить рядъ аналитическихъ функцій f_n, которыя какъ и ихъ частныя производныя первыхъ трехъ порядковъ имѣютъ предѣлами данную функцію f и ея соотвѣтственныя производныя.

Пусть z_n рѣшеніе поставленной задачи Дирикле, если вмѣсто f взять f_n, и z_{n-1} рѣшеніе, соотвѣтствующее замѣнѣ f черезъ f_{n-1}. Тогда, $v_n = z_n - z_{n-1}$, удовлетворяетъ уравненію

$$\frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_n}{\partial y^2} = f_n(xyz_n p_n q_n) - f_n(xyz_{n-1} p_{n-1} q_{n-1}) + \\ + f_n(xyz_{n-1} p_{n-1} q_{n-1}) - f_{n-1}(xyz_{n-1} p_{n-1} q_{n-1})$$

и обращается въ нуль на окружности C.

Или еще

$$\frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_n}{\partial y^2} + a\frac{\partial v_n}{\partial x} + b\frac{\partial v_n}{\partial y} + cv_n = d$$

гдѣ a, b, c, d обладаютъ конечными частными производными первыхъ двухъ порядковъ, причемъ кромѣ того d со своими частными производными первыхъ двухъ порядковъ стремится къ нулю. Но въ такомъ случаѣ изъ неравенствъ (50) слѣдуетъ, что

$$\{v_n\}_{0R},\ \left\{\frac{\partial v_n}{\partial x}\right\}_{0R},\ \left\{\frac{\partial v_n}{\partial y}\right\}_{0R},\ \left\{\varrho\frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2}\right\}_{0R},\ \left\{\varrho\frac{\partial^2 v_n}{\partial x\,\partial y}\right\}_{0R},\ \left\{\varrho\frac{\partial^2 v_n}{\partial y^2}\right\}_{0R}$$

также стремятся къ нулю, откуда выводимъ, что z_n стремится къ предѣльной функціи z, которая удовлетворяетъ уравненію (66″). Могло бы быть сомнѣніе только относительно того, имѣетъ ли z конечныя производныя *второго* порядка въ точкѣ 0; но это затрудненіе разрѣшается разсмотрѣніемъ какого нибудь круга *эксцентрическаго* къ данному.

Мы не будемъ долѣе останавливаться на неаналитическихъ уравненіяхъ. Сказаннаго достаточно, чтобъ видѣть, что интегрированіе ихъ можетъ быть всегда приведено къ интегрированію аналитическихъ уравненій благодаря теоремѣ Вейерштрасса и независимости принципа вспомогательныхъ функцій отъ аналитическаго характера уравненія.

Глава VI.

Линейныя уравненія эллиптическаго типа общаго вида.

§ 26. Давно извѣстно, что всякое линейное дифференціальное уравненіе эллиптическаго типа

$$A\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+2D\frac{\partial z}{\partial x}+2E\frac{\partial z}{\partial y}+Fz=M \qquad (74)$$

можетъ быть приведено при помощи новыхъ перемѣнныхъ x_1, y_1, къ виду

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y_1^2}+a\frac{\partial z}{\partial x_1}+b\frac{\partial z}{\partial y_1}+cz=M. \qquad (75)$$

Для этого нужно, чтобъ перемѣнныя x_1, y_1, удовлетворяли уравненіямъ

$$\begin{gathered}A\left(\frac{\partial x_1}{\partial x}\right)^2+2B\left(\frac{\partial x_1}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial x_1}{\partial y}\right)+C\left(\frac{\partial x_1}{\partial y}\right)^2=A\left(\frac{\partial y_1}{\partial x}\right)^2+2B\left(\frac{\partial y_1}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial y_1}{\partial y}\right)+C\left(\frac{\partial y_1}{\partial y}\right)^2,\\ A\frac{\partial x_1}{\partial x}\frac{\partial y_1}{\partial x}+B\left(\frac{\partial x_1}{\partial y}\frac{\partial y_1}{\partial x}+\frac{\partial x_1}{\partial x}\frac{\partial y_1}{\partial y}\right)+C\frac{\partial x_1}{\partial y}\frac{\partial y_1}{\partial y}=0.\end{gathered} \qquad (76)$$

Это приведеніе [1]) равнозначно такимъ образомъ конформному преобразованію въ плоскость поверхности, которой линейный элементъ

$$ds=Cdx^2-2Bdxdy+Ady^2.$$

Указанная задача, насколько мнѣ извѣстно, разрѣшена лишь для *достаточно малыхъ* областей поверхности; но нельзя считать точно установленнымъ, что всякая правильная часть аналитической поверхности, ограниченная однимъ аналитическимъ контуромъ можетъ быть конформно преобразована въ кругъ.

Поэтому я считаю нужнымъ остановиться на этомъ вопросѣ, а именно, я покажу, какъ преобразовать уравненіе (74) въ уравненіе (75), такъ чтобъ каждой точкѣ внутри даннаго круга C плоскости x, y соотвѣтствовала бы одна и только одна точка внутри даннаго круга C_1 на плоскости x_1, y_1, центру 0 круга C — центръ 0_1 круга C_1, и нако-

[1]) Picard „Traité d'analyse“ t. II. Стр. 27.

нецъ, чтобъ каждой точкѣ контура C соотвѣтствовала одна точка контура C_1.

Очевидно, что если мы разрѣшимъ эту задачу, то мы фактически приведемъ рѣшеніе задачи Дирикле для уравненія (74) къ такой же задачѣ Дирикле для уравненія (75), которую мы уже рѣшили въ IV главѣ. Впрочемъ, какъ мы увидимъ дальше, это приведеніе имѣетъ лишь теоретическое значеніе; такъ какъ наиболѣе простое рѣшеніе задачи Дирикле даетъ попрежнему способъ аналитическаго продолженія.

Рѣшая алгебраическую систему уравненій (76) относительно $\frac{\partial y_1}{\partial x}$, $\frac{\partial y_1}{\partial y}$, находимъ [1])

$$\frac{\partial y_1}{\partial x} = \frac{-B\frac{\partial x_1}{\partial x} - C\frac{\partial x_1}{\partial y}}{\sqrt{AC-B^2}}; \quad \frac{\partial y_1}{\partial y} = \frac{A\frac{\partial x_1}{\partial x} + B\frac{\partial x_1}{\partial y}}{\sqrt{AC-B^2}}. \tag{77}$$

Откуда заключаемъ, что x_1 удовлетворяетъ линейному уравненію эллиптическаго типа

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{A\frac{\partial v}{\partial x} + B\frac{\partial v}{\partial y}}{\sqrt{AC-B^2}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{B\frac{\partial v}{\partial x} + C\frac{\partial v}{\partial y}}{\sqrt{AC-B^2}}\right) = 0. \tag{78}$$

И наоборотъ, если x_1 удовлетворяетъ уравненію (78), то изъ уравненій (77) опредѣляемъ y_1, и совокупность функцій x_1, y_1 удовлетворяетъ системѣ (76). Легко видѣть, что уравненію (78) удовлетворяетъ также и y_1, такъ какъ уравненія (77) равнозначны уравненіямъ

$$\frac{\partial x_1}{\partial x} = \frac{B\frac{\partial y_1}{\partial x} + C\frac{\partial y_1}{\partial y}}{\sqrt{AC-B^2}}, \quad \frac{\partial x_1}{\partial y} = \frac{-A\frac{\partial y_1}{\partial x} - B\frac{\partial y_1}{\partial y}}{\sqrt{AC-B^2}}. \tag{77bis}$$

Замѣтимъ далѣе, что, если мы возьмемъ какую нибудь аналитическую функцію комплексной перемѣнной $x_1 + iy_1$

$$P(x_1, y_1) + iQ(x_1, y_1) = f(x_1 + iy_1),$$

то функціи $P(x_1, y_1)$ и $Q(x_1, y_1)$ также удовлетворяютъ уравненію (78), такъ какъ изъ классическихъ уравненій Коши

$$\frac{\partial P}{\partial x_1} = \frac{\partial Q}{\partial y_1}; \quad \frac{\partial P}{\partial y_1} = -\frac{\partial Q}{\partial x_1}$$

[1]) Ibidem.

и изъ уравненій (77) и (77bis) вытекаетъ, что

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{B\frac{\partial Q}{\partial x} + C\frac{\partial Q}{\partial y}}{\sqrt{AC - B^2}}; \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-A\frac{\partial Q}{\partial x} - B\frac{\partial Q}{\partial y}}{\sqrt{AC - B^2}}.$$

Очевидно, поэтому, что если C_1' представляетъ собой контуръ въ плоскости перемѣнныхъ x_1', y_1', удовлетворяющихъ уравненіямъ (77), который соотвѣтствуетъ окружности C въ плоскости x, y, то, совершая конформное преобразованіе площади ограниченной C_1' въ кругъ C_1, мы получимъ новыя перемѣнныя x_1, y_1, которыя и представятъ требуемое рѣшеніе задачи. Прежде, чѣмъ приступить къ отысканію этихъ вспомогательныхъ перемѣнныхъ x_1', y_1', которыхъ существованіе a priori не очевидно, замѣтимъ, что тѣ же функціи x_1, y_1 могутъ быть получены другимъ путемъ. Дѣйствительно, согласно классическимъ результатамъ Римана, касающимся конформнаго преобразованія [1]), имѣемъ

$$x_1 + iy_1 = (x_1' + iy_1')\, e^{H+iG}, \tag{79}$$

гдѣ $H+iG$ есть аналитическая функція комплексной перемѣнной $x_1' + iy_1'$, причемъ H опредѣляется условіемъ, что на контурѣ C_1' гармоническая функція H перемѣнныхъ x_1', y_1' равна

$$H = -\frac{1}{2}\log(x_1'^2 + y_1'^2). \tag{80}$$

Но мы можемъ разсматривать H и G, какъ функціи x и y. Въ такомъ случаѣ H и G *представляютъ пару рѣшеній системы уравненій (77), причемъ H опредѣляется условіемъ (80) на окружности C.*

Для опредѣленія x_1', y_1' поступимъ слѣдующимъ образомъ.

Положимъ, что *при опредѣленной системѣ значеній A, B, C задача Дирикле для уравненія (78) возможна*, если на окружности C совокупность значеній, принимаемыхъ искомымъ рѣшеніемъ выражается функціей дуги, обладающей послѣдовательными производными первыхъ трехъ порядковъ. Въ такомъ случаѣ роль x_1' можетъ исполнять рѣшеніе уравненія (77), которое на окружности C равно $\alpha + \cos\theta$, гдѣ α есть постоянная величина, опредѣляющаяся условіемъ, чтобъ при $x = y = 0$, x_1' было равно нулю. Въ самомъ дѣлѣ, x_1' на окружности C имѣетъ лишь одинъ максимумъ $\alpha + 1$ (при $\theta = 0$) и одинъ минимумъ $\alpha - 1$ (при $\theta = \pi$); такъ что внутри круга C кривыя

$$x_1' = \text{постоянная}$$

[1]) Picard „Traité d'analyse“ t. II. Ch. X.

не могутъ имѣть двойныхъ точекъ, а потому ни въ одной точкѣ *не можетъ быть одновременно*

$$\frac{dx_1'}{dx} = \frac{dx_1'}{dy} = 0.$$

Откуда слѣдуетъ (77), что кривыя

$$x_1' = \text{пост.}, \quad y_1' = \text{пост.}$$

не могутъ имѣть болѣе одной точки пересѣченія внутри круга C. Слѣдовательно, каждой точкѣ x_1', y_1' внутри нѣкотораго контура C_1' въ плоскости перемѣнныхъ x_1', y_1' соотвѣтствуетъ одна и только одна точка x, y внутри круга C, причемъ можно сдѣлать такъ, чтобъ при $x = y = 0$ имѣть $x_1' = y_1' = 0$.

Если мы установимъ далѣе, что $\log(x_1'^2 + y_1'^2)$ на окружности C имѣетъ конечныя производныя первыхъ трехъ порядковъ, то мы немедленно вычислимъ H и G, а затѣмъ x_1 и y_1. Для этой цѣли мы докажемъ слѣдующую важную лемму.

Лемма. *Если z есть рѣшеніе уравненія эллиптическаго типа*

$$Ar + 2Bs + Ct + 2Dp + 2Eq + Fz = G, \tag{81}$$

имѣющее на окружности C конечныя производныя $n + 3^{\text{хъ}}$ порядковъ [1]) *относительно дуги окружности; если кромѣ того извѣстны высшіе предѣлы модулей производныхъ $n + 1^{\text{аго}}$ порядка A, B, C и $n^{\text{аго}}$ порядка остальныхъ коэффиціентовъ уравненія, то для модулей частныхъ производныхъ $n^{\text{аго}}$ порядка рѣшенія можетъ быть указанъ высшій предѣлъ на окружности C и внутри ея (при предположеніи, что высшій предѣлъ модуля $|z|$ также извѣстенъ).*

Замѣтимъ во-первыхъ, что гармоническая функція, которая принимаетъ тѣ же значенія, что и z, на окружности C, очевидно имѣетъ конечныя производныя $n + 2^{\text{хъ}}$ порядковъ, высшій предѣлъ которыхъ устанавливается безъ затрудненій. Поэтому можно ограничиться случаемъ, когда рѣшеніе z на окружности C равно нулю, причемъ коэффиціенты попрежнему обладаютъ конечными частными производными указаннаго въ условіи леммы порядка.

Умножая обѣ части уравненія (81) на z и интегрируя внутри круга C, получимъ немедленно

$$\iint (Ap^2 + 2Bpq + Cq^2)\, dx\, dy < M,$$

[1]) Я напоминаю, что каждый разъ, когда мною не оговаривается особо, что рѣшеніе удовлетворяетъ еще какимъ нибудь условіямъ внутри контура, то это значитъ, что внутри контура оно не имѣетъ особенностей.

гдѣ M зависитъ отъ высшихъ предѣловъ модулей коэффиціентовъ уравненія (81) и ихъ производныхъ перваго порядка (а также отъ $|z|$, если $F \gtrless 0$).

Съ другой стороны, изъ неравенства (51) выводимъ, что

$$\iint [(Ar + 2Bs + Ct)^2 + 2(AC - B^2)(s^2 - rt)]\, dx\, dy < \\ < \iint (2Dp + 2Eq + Fz - G)^2\, dx\, dy.$$

Замѣчая, что подъ-интегральное выраженіе лѣвой части неравенства представляетъ положительную квадратичную форму перемѣнныхъ r, s, t, приходимъ къ неравенствамъ

$$\iint r^2\, dx\, dy < N, \quad \iint s^2\, dx\, dy < N, \quad \iint t^2\, dx\, dy < N,$$

гдѣ N, какъ и M, зависитъ только отъ коэффиціентовъ уравненія (81) и ихъ производныхъ перваго порядка.

Дифференцируя затѣмъ уравненіе (81) относительно угла θ, мы получимъ уравненіе

$$A\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) + 2B\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right) + C\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) + 2D\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + 2E\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + F\frac{\partial z}{\partial\theta} + \\ + \frac{\partial A}{\partial\theta}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial B}{\partial\theta}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + \frac{\partial C}{\partial\theta}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2\frac{\partial D}{\partial\theta}\frac{\partial z}{\partial x} + 2\frac{\partial E}{\partial\theta}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial\theta}z = \frac{\partial G}{\partial\theta}. \tag{82}$$

Или, полагая $\frac{\partial z}{\partial\theta} = z_1$ и замѣчая, что

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z_1}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial^2 z_1}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}, \tag{83}$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = -y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + x\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = -y\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + x\frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

получимъ

$$A\frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 z_1}{\partial x\partial y} + C\frac{\partial^2 z_1}{\partial y^2} + a_1 r + b_1 s + c_1 t + d_1 p + e_1 q + f_1 z = g_1 \tag{82'}$$

гдѣ a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, f_1, g_1 конечные коэффиціенты, которые зависятъ только отъ коэффиціентовъ уравненія (81) и ихъ производныхъ перваго

порядка. Но такъ какъ z_1 на окружности C тоже обращается въ нуль, то, пользуясь неравенствомъ (51), мы опять найдемъ

$$\iint\left\{\left[A\frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 z_1}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 z_1}{\partial y^2}\right]^2+2(AC-B^2)\left[\left(\frac{\partial^2 z_1}{\partial x\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2}\right]\right\}dx\,dy<$$
$$<\iint(a_1 r+b_1 s+c_1 t+d_1 p+e_1 q+f_1 z-g_1)^2\,dx\,dy.$$

Слѣдовательно

$$\iint\left(\frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2}\right)^2 dx\,dy<L_1,\quad \iint\left(\frac{\partial^2 z_1}{\partial x\partial y}\right)^2 dx\,dy<L_1,\quad \iint\left(\frac{\partial^2 z_1}{\partial y^2}\right)^2 dx\,dy<L_1,$$

гдѣ L_1 зависитъ только отъ коэффиціентовъ уравненія (81) и ихъ производныхъ перваго порядка. Отсюда легко выводимъ опредѣленный высшій предѣлъ $|p|$ и $|q|$ (и даже тригонометрическихъ модулей $\{p\}_{R'R}$, $\{q\}_{R'R}$, если примѣнимъ разсужденіе страницы 84) внутри кольцеобразной области S, заключенной между данною окружностью C и концентрическою съ ней окружностью C' опредѣленнаго, но сколь угодно малаго радіуса R'. Съ другой стороны мы замѣчаемъ, что коэффиціенты уравненія (82′) имѣютъ конечныя производныя первыхъ $n-1$ порядковъ; поэтому дифференцируя его послѣдовательно относительно θ и обозначая вообще $\frac{\partial^p z}{\partial\theta^p}=z_p$, получимъ послѣдовательно

$$A\frac{\partial^2 z_2}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 z_2}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 z_2}{\partial y^2}+a_2\frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2}+b_2\frac{\partial^2 z_1}{\partial x\partial y}+c_2\frac{\partial^2 z_1}{\partial y^2}+\ldots=g_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (84)$$
$$A\frac{\partial^2 z_n}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 z_n}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 z_n}{\partial y^2}+a_n\frac{\partial^2 z_{n-1}}{\partial x^2}+b_n\frac{\partial^2 z_{n-1}}{\partial x\partial y}+c_n\frac{\partial^2 z_{n-1}}{\partial y^2}+\ldots=g_n,$$

причемъ во всѣхъ уравненіяхъ (84), высшій предѣлъ модулей коэффиціентовъ по предположенію извѣстенъ.

Пользуясь, какъ выше, неравенствомъ (51), получимъ такимъ образомъ послѣдовательный рядъ неравенствъ, въ которыхъ интегралы относятся ко всей площади круга C,

$$\iint\left(\frac{\partial^2 z_2}{\partial x^2}\right)^2 dx\,dy<L_2,\quad \iint\left(\frac{\partial^2 z_2}{\partial x\partial y}\right)^2 dx\,dy<L_2,\quad \iint\left(\frac{\partial^2 z_2}{\partial y^2}\right)^2 dx\,dy<L_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (85)$$
$$\iint\left(\frac{\partial^2 z_n}{\partial x^2}\right)^2 dx\,dy<L_n,\quad \iint\left(\frac{\partial^2 z_n}{\partial x\partial y}\right)^2 dx\,dy<L_n,\quad \iint\left(\frac{\partial^2 z_n}{\partial y^2}\right)^2 dx\,dy<L_n,$$

гдѣ L_i вообще зависитъ отъ модулей производныхъ коэффиціентовъ уравненія (81) не выше $i^{аго}$ порядка.

Неравенства (85) весьма цѣнны; въ частности, они даютъ намъ непосредственно высшіе предѣлы модулей (и даже тригонометрическихъ модулей) $|z_i|$ и $\left|\frac{\partial z_{i-1}}{\partial \varrho}\right|$ при $i \leqq n$ внутри области S. Высшіе предѣлы остальныхъ частныхъ производныхъ не выше $n^{аго}$ порядка внутри области S устанавливаются послѣ этого безъ затрудненій: для каждаго i опредѣляются послѣдовательно $\frac{\partial^2 z_{i-2}}{\partial \varrho^2}$, затѣмъ $\frac{\partial^3 z_{i-3}}{\partial \varrho^3}$ и т. д.

Но наши умозаключенія остаются въ силѣ лишь при предположеніи, что радіусъ R' круга C' не равенъ нулю; пусть, напримѣръ, $R' = \frac{R}{4}$, тогда внутри круга C' непосредственно мы ничего не утверждаемъ. Это затрудненіе можно было бы легко преодолѣть и безъ помощи новаго принципа, примѣняя тѣ же разсужденія къ *эксцентрическому* кругу C_1, котораго периферія находилась бы внутри кольца S, (такъ что на ней, на основаніи предыдущаго, извѣстны высшіе предѣлы производныхъ n первыхъ порядковъ) а центръ—внѣ круга C'; хотя для интересующей насъ цѣли это и не очень существенно, но такимъ образомъ мы установили бы высшіе предѣлы производныхъ z лишь $n-3$ первыхъ порядковъ. Поэтому для окончанія доказательства мы воспользуемся снова принципомъ вспомогательныхъ функцій, который вообще, играетъ важную роль въ теоріи уравненій эллиптическаго типа. А именно, предполагая извѣстными высшіе предѣлы модулей производныхъ не выше $i-1^{аго}$ порядка внутри круга C', мы построимъ опредѣленныя квадратичныя формы изъ производныхъ $i^{аго}$ порядка, высшій предѣлъ которыхъ будетъ указанъ a priori для точекъ, гдѣ онѣ достигаютъ максимума; но такъ какъ намъ кромѣ того извѣстны высшіе предѣлы *всѣхъ* частныхъ производныхъ $i^{аго}$ порядка на окружности C' (ограничивающей область S), то такимъ образомъ мы опредѣлимъ высшій предѣлъ этихъ формъ, а вмѣстѣ съ ними и каждаго изъ модулей производныхъ $i^{аго}$ порядка во всякой точкѣ внутри C'. Сдѣлавши это послѣдовательно при всѣхъ значеніяхъ $i \leqq n$, мы получимъ полное доказательство нашей леммы.

Начнемъ съ первыхъ производныхъ; мы легко увидимъ затѣмъ, что тоже разсужденіе примѣнимо и къ производнымъ высшихъ порядковъ.

Пусть m высшій предѣлъ $|z|$, и положимъ, что

$$z = -m + \log\log u .$$

Мы увидимъ тогда, какъ на страницѣ 107, что u удовлетворяетъ уравненію

$$Ar_1 + 2Bs_1 + Ct_1 = \frac{1+\log u}{u\log u}\left[Ap_1^2 + 2Bp_1q_1 + Cq_1^2\right] - \qquad (81^{bis})$$
$$- 2Dp_1 - 2Eq_1 - (Fz - G)\,u\log u = Q ,$$

гдѣ

$$p_1 = \frac{\partial u}{\partial x},\ q_1 = \frac{\partial u}{\partial y},\ r_1 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ s_1 = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y},\ t_1 = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Допустимъ затѣмъ, что въ нѣкоторой точкѣ функція

$$w = Ap_1^2 + 2Bp_1q_1 + Cq_1^2 = e^{2(z+m)}e^{2\varepsilon z+m}\left[A\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + 2B\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + C\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]$$

достигаетъ максимума. Въ этой точкѣ будемъ слѣдовательно имѣть

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\partial w}{\partial x} &= (Ap_1 + Bq_1)r_1 + (Bp_1 + Cq_1)s_1 + \frac{1}{2}[A'_x p_1^2 + 2B'_x p_1 q_1 + C'_x q_1^2] = 0,\\ \frac{1}{2}\frac{\partial w}{\partial y} &= (Ap_1 + Bq_1)s_1 + (Bp_1 + Cq_1)t_1 + \frac{1}{2}[A'_y p_1^2 + 2B'_y p_1 q_1 + C'_y q_1^2] = 0.\end{aligned} \qquad (72^{\text{bis}})$$

Откуда заключаемъ, что въ этой точкѣ

$$\begin{aligned}r_1 &= \frac{Q(Bp_1 + Cq_1)^2 + CY(Bp_1 + Cq_1) + X[(2B^2 - AC)p_1 + BCq_1]}{(AC - B^2)w},\\ s_1 &= \frac{-Q(Bp_1 + Cq_1)(Ap_1 + Bq_1) - CY(Ap_1 + Bq_1) - AX(Bp_1 + Cq_1)}{(AC - B^2)w},\\ t_1 &= \frac{Q(Ap_1 + Bq_1)^2 + Y[ABp_1 + (2B^2 - AC)q_1] + AX(Ap_1 + Bq_1)}{(AC - B^2)w},\end{aligned}$$

полагая для краткости

$$X = \frac{1}{2}[A'_x p_1^2 + 2B'_x p_1 q_1 + C'_x q_1^2],\quad Y = \frac{1}{2}[A'_y p_1^2 + 1B'_y p_1 q_1 + C'_y q_1^2];$$

или еще

$$\begin{aligned}(AC - B^2)wr_1 &= w(Bp_1 + Cq_1)^2\frac{1 + \log u}{u\log u} + h_1,\\ (AC - B^2)ws_1 &= -w(Bp_1 + Cq_1)(Ap_1 + Bq_1)\frac{1 + \log u}{u\log u} + h_2,\\ (AC - B^2)wt_1 &= w(Ap_1 + Bq_1)^2\frac{1 + \log u}{u\log u} + h_3,\end{aligned} \qquad (86)$$

гдѣ h_1, h_2, h_3 представляютъ собой многочлены третьей степени относительно p_1, q_1, коэффиціенты которыхъ суть функціи x, y, зависящія только отъ коэффиціентовъ уравненія (81) и ихъ производныхъ перваго порядка.

Кромѣ того, если w максимумъ, то

$$K = \frac{1}{2}\left[A\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right] \leqq 0,$$

такъ какъ противоположное предположеніе, $K > 0$, въ связи съ необходимымъ условіемъ максимума,

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{oy^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 \geqq 0,$$

повлекло бы за собой неравенства $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} > 0$, $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} > 0$, невозможныя при максимумѣ.

Но легко видѣть, что

$$\begin{aligned} K = {} & (Ap_1 + Bq_1)\left(A\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 p_1}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 p_1}{\partial y^2}\right) + \\ & + (Bp_1 + Cq_1)\left(A\frac{\partial^2 q_1}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 q_1}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 q_1}{\partial y^2}\right) + \\ & + A(Ar_1^2 + 2Br_1 s_1 + Cs_1^2) + 2B[Ar_1 s_1 + B(r_1 t_1 + s_1^2) + Cs_1 t_1] + \\ & + C(As_1^2 + 2Bs_1 t_1 + Ct_1^2) + H_1 + H_2, \end{aligned} \tag{87}$$

обозначая для краткости черезъ H_1 многочленъ *первой* степени относительно перемѣнныхъ $p_1 r_1$, $p_1 s_1$, $p_1 t_1$, $q_1 r_1$, $q_1 s_1$, $q_1 t_1$, и черезъ H_2— многочленъ *второй* степени относительно перемѣнныхъ p_1, q_1, коэффиціенты которыхъ суть извѣстныя функціи x, y, зависящія отъ коэффиціентовъ уравненія (81) и ихъ производныхъ первыхъ двухъ порядковъ. (Замѣтимъ, что производныя *второго* порядка фигурируютъ лишь отъ коэффиціентовъ A, B, C).

Дифференцируя уравненіе (81 bis) относительно x, мы находимъ съ другой стороны, принимая во вниманіе (72 bis), что

$$A\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 p_1}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 p_1}{\partial y^2} = -\frac{1 + \log u + (\log u)^2}{(u \log u)^2} p_1 [Ap_1^2 + 2Bp_1 q_1 + Cq_1^2] + G_1,$$

гдѣ G_1 представляетъ собой многочленъ *первой* степени относительно p_1, q_1, r_1, s_1, t_1, коэффиціенты котораго суть извѣстныя функціи x, y, u, которыя зависятъ только отъ коэффиціентовъ уравненія (81) и ихъ производныхъ перваго порядка.

Точно также дифференцируя относительно y, найдемъ, что

$$A\frac{\partial^2 q_1}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 q_1}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 q_1}{\partial y^2} = -\frac{1 + \log u + (\log u)^2}{(u \log u)^2} q_1 [Ap_1^2 + 2Bp_1 q_1 + Cq_1^2] + G_2,$$

гдѣ G_2 представляетъ собой многочленъ, обладающій тѣми же свойствами, что и G_1.

Подставляя эти выраженія, а также значенія r_1, s_1, t_1 изъ формулъ (86) въ равенство (87), получимъ

$$(AC-B^2)^2 w^2 K = -\frac{1+\log u+(\log u)^2}{(u\log u)^2}(AC-B^2)^2 w^4 + \\ +\left(\frac{1+\log u}{u\log u}\right)^2(AC-B^2)^2 w^4 + (AC-B^2)^2 P,$$

гдѣ P представляетъ собой многочленъ *седьмой* степени относительно p_1, q_1 съ извѣстными коэффиціентами.

Итакъ, если w максимумъ, мы должны имѣть

$$\frac{w^4}{u^2\log u}+P\leqq 0.$$

Такъ какъ w опредѣленная квадратичная форма, то не представляетъ никакого труда при помощи элементарныхъ принциповъ алгебры вывести изъ этого неравенства высшій предѣлъ w въ точкѣ, гдѣ w достигаетъ максимума.

На основаніи указанныхъ выше соображеній мы выводимъ высшій предѣлъ w во всякой точкѣ внутри C, а вмѣстѣ съ тѣмъ и высшій предѣлъ p и q.

Если намъ извѣстенъ высшій предѣлъ m всѣхъ производныхъ z не выше порядка i, то тѣмъ же способомъ мы получимъ высшіе предѣлы максимумовъ квадратичныхъ формъ

$$w_{k,l}=e^{2(z_{k,l}+m)}e^{2e^{z_{k,l}+m}}\left[Az_{k+1,l}^2+2Bz_{k+1,l}z_{k,l+1}+Cz_{k,l+1}^2\right],$$

гдѣ $z_{k,l}=\dfrac{\partial^{k+l}z}{\partial x^k\partial y^l}$, причемъ $k+l=i$. Для этого нужно только, чтобъ были извѣстны высшіе предѣлы модулей коэффиціентовъ уравненія (81) и производныхъ A, B, C до $i+2^{\text{го}}$ порядка и D, E, F, G до $i+1^{\text{го}}$ порядка включительно.

Въ самомъ дѣлѣ, продифференцируемъ уравненіе (81) k разъ относительно x и l разъ относительно y; мы получимъ уравненіе слѣдующаго вида:

$$A\frac{\partial^2 z_{k,l}}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 z_{k,l}}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 z_{k,l}}{\partial y^2}+D_{k,l}\frac{\partial z_{k,l}}{\partial x}+E_{k,l}\frac{\partial z_{k,l}}{\partial y}+F_{k,l}z_{k,l}+G_{k,l} \\ +d_{k,l}^{(1)}z_{k-1,l+2}+d_{k,l}^{(2)}z_{k+2,l-1}+f_{k,l}^{(1)}z_{k-2,l+2}+f_{k,l}^{(2)}z_{k+2,l-2}+ \\ +h_{k,l}^{(1)}z_{k-1,l+1}+h_{k,l}^{(2)}z_{k+1,l-1}=0.$$

Всѣ коэффиціенты этого уравненія конечны, какъ и ихъ производныя перваго порядка. Кромѣ того, можно предположить, что

$$d_{k,l}^{(1)} = d_{k,l}^{(2)} = f_{k,l}^{(1)} = f_{k,l}^{(2)} = h_{k,l}^{(1)} = 0;$$

положимъ, что это имѣетъ мѣсто при $k' + l' \leqq i - 1$.

Въ такомъ случаѣ $z_{k-1,l+2}$ представляетъ собой линейное выраженіе относительно $z_{k,l+1} = \frac{\partial z_{k,l}}{\partial y}$, $z_{k+1,l} = \frac{\partial z_{k,l}}{\partial y}$, $z_{k-1,l+1}$, $z_{k,l}$ съ коэффиціентами, имѣющими конечныя производныя. Слѣдовательно $d_{k,l}^{(1)} = 0$. Точно также видимъ, что и коэффиціенты $d_{k,l}^{(2)}$, $f_{k,l}^{(1)}$, $f_{k,l}^{(2)}$, $h_{k,l}^{(1)}$ могутъ быть приравнены нулю. Слѣдовательно, $z_{k,l}$ вообще удовлетворяетъ уравненію

$$A\frac{\partial^2 z_{k,l}}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 z_{k,l}}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 z_{k,l}}{\partial y^2} + D_{k,l}\frac{\partial z_{k,l}}{\partial x} + E_{k,l}\frac{\partial z_{k,l}}{\partial y} + F_{k,l} z_{k,l} + h_{k,l} z_{k+1,l-1} + G_{k,l} = 0. \qquad (88)$$

Уравненіе (88) отличается отъ уравненія (81) только присутствіемъ $h_{k,l} z_{k+1,l-1}$, но ясно, что наличность этого члена не мѣшаетъ намъ воспроизвести разсужденіе, которое привело къ установленію высшаго предѣла максимума w, такъ какъ первыя производныя $z_{k+1,l-1}$ выражаются *линейно* посредствомъ первыхъ производныхъ $z_{k,l}$. Поэтому для $w_{k,l}$ можетъ быть также указанъ высшій предѣлъ, а вмѣстѣ съ тѣмъ и для модулей всѣхъ производныхъ порядка $i + 1$.

Воспроизводя тоже разсужденіе для всѣхъ значеній i до $n - 1$ включительно, мы прійдемъ къ полному доказательству высказанной леммы.

Примѣнимъ теперь доказанную лемму къ изслѣдованію рѣшенія x_1' уравненія (78), которое на окружности C обращается въ $\alpha + \cos\theta$, имѣя такимъ образомъ на этой окружности конечныя частныя производныя по θ всѣхъ порядковъ. Слѣдовательно, если *извѣстенъ высшій предѣлъ функцій* $\frac{A}{\sqrt{AC - B^2}}$, $\frac{B}{\sqrt{AC - B^2}}$, $\frac{C}{\sqrt{AC - B^2}}$ *и ихъ частныхъ производныхъ до* $n+1^{го}$ *порядка включительно, то можетъ быть указанъ высшій предѣлъ модулей производныхъ* x_1' *и* y_1' *до* $n^{го}$ *порядка включительно. Въ частности на окружности* C *функція* $\log(x_1'^2 + y_1'^2)$ *имѣетъ конечныя производныя по* θ *первыхъ* n *порядковъ.*

Поэтому *рѣшеніе* H *уравненія (78), которое на окружности* C *обращается въ функцію* $-\frac{1}{2}\log(x_1'^2 + y_1'^2)$, *имѣетъ* (при предположеніи, что это рѣшеніе существуетъ) *конечныя производныя первыхъ* $n - 3^{хъ}$ *порядковъ*, высшій предѣлъ модулей которыхъ можетъ быть указанъ a priori на окружности C, какъ и внутри ея. И наконецъ изъ равенства (79) заключаемъ *о конечности частныхъ производныхъ первыхъ* $n - 3^{хъ}$ *по-*

рядковъ функцій x_1 и y_1 относительно x, y, осуществляющихъ преобразованіе координатъ, при которомъ уравненіе (74) приводится къ каноническому виду и окружность C превращается въ окружность C_1, которой центръ соотвѣтствуетъ центру C.

§ 27. Этотъ выводъ для насъ весьма существенъ, такъ какъ онъ приведетъ насъ къ важнымъ неравенствамъ.

Пусть

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 z_1}{\partial y_1^2}+a\frac{\partial z}{\partial x_1}+b\frac{\partial z}{\partial y_1}+Fz=M \tag{75}$$

приведенное уравненіе, къ которому мы пришли, гдѣ

$$a=A\frac{\partial^2 x_1}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 x_1}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 x_1}{\partial y^2}+2D\frac{\partial x_1}{\partial x}+2E\frac{\partial x_1}{\partial y},$$

$$b=A\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 y_1}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 y_1}{\partial y^2}+2D\frac{\partial y_1}{\partial x}+2E\frac{\partial y_1}{\partial y}.$$

Можно замѣтить, что a и b въ дѣйствительности не зависятъ отъ вторыхъ производныхъ x_1 и y_1, такъ какъ эти послѣднія удовлетворяютъ уравненію (78). Но въ виду того, что намъ извѣстенъ простой единообразный способъ для установленія высшихъ предѣловъ послѣдовательныхъ производныхъ x_1, y_1, это для насъ имѣетъ мало значенія.

Теперь намъ остается еще представить коэффиціенты уравненія (75) при помощи новыхъ перемѣнныхъ x_1, y_1; для этого нужно выразить старыя перемѣнныя x, y при помощи x_1 и y_1. Очевидно, что мы получимъ высшіе предѣлы производныхъ первыхъ $(n-3)^{\text{хъ}}$ порядковъ x и y по x_1 и y_1 въ томъ случаѣ, если сумѣемъ установить высшій предѣлъ модуля функціональнаго детерминанта

$$D=\frac{\partial x}{\partial x_1}\frac{\partial y}{\partial y_1}-\frac{\partial x}{\partial y_1}\frac{\partial y}{\partial x_1}=\frac{1}{\dfrac{\partial x_1}{\partial x}\dfrac{\partial y_1}{\partial y}-\dfrac{\partial x_1}{\partial y}\dfrac{\partial y_1}{\partial x}},$$

т. е. высшіе предѣлы только первыхъ производныхъ x, y по x_1, y_1.

Но изъ уравненій (77) мы выводимъ

$$\frac{\partial y}{\partial x_1}=\frac{B}{C}\frac{\partial x}{\partial x_1}-\frac{H}{C}\frac{\partial x}{\partial y_1},\quad \frac{\partial y}{\partial y_1}=\frac{H}{C}\frac{\partial x}{\partial x_1}+\frac{B}{C}\frac{\partial x}{\partial y_1}, \tag{89}$$

гдѣ $H=\sqrt{AC-B^2}$.

Слѣдовательно, x удовлетворяетъ уравненію

$$\frac{H}{C}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 x}{\partial y_1^2}\right)+\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{H}{C}\right)-\frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{B}{C}\right)\right]\frac{\partial x}{\partial x_1}+\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{B}{C}\right)+\frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{H}{C}\right)\right]\frac{\partial y}{\partial y_1}=0.$$

Производя указанное дифференцированіе и пользуясь уравненіями (89) мы видимъ, что x удовлетворяетъ не линейному уравненію, а уравненію вида

$$\frac{\partial^2 x}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial y_1^2} = f\left(\frac{\partial x}{\partial x_1}, \frac{\partial x}{\partial y_1}, x_1, y_1, x, y\right) \tag{90}$$

гдѣ f многочленъ второй степени по $\frac{\partial x}{\partial x_1}$ и $\frac{\partial x}{\partial y_1}$.

Къ этому уравненію мы можемъ примѣнить разсужденіе предыдущей главы для того, чтобъ показать, что если выраженіе

$$w = e^{2\varepsilon \frac{x+R}{\alpha}} e^{2\frac{x+R}{\alpha}} \left[\left(\frac{\partial x}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial y_1}\right)^2\right],$$

гдѣ R радіусъ круга C (т. е. максимумъ $|x|$), а α—нѣкоторая опредѣленная достаточно малая величина, достигаетъ максимума внутри круга C_1, то этотъ максимумъ менѣе опредѣленнаго числа, такъ какъ производныя y выражаются линейно при помощи производныхъ x. Слѣдовательно, остается лишь установить высшій предѣлъ первыхъ производныхъ на самой окружности C_1. Для этого мы не можемъ непосредственно примѣнить разсужденіе прошлой главы, такъ какъ значенія x на окружности C_1 a priori намъ не даны; намъ извѣстно лишь, что на этой окружности

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Но мы можемъ также построить уравненіе, которому удовлетворяетъ функція

$$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Для этого введемъ полярныя координаты

$$x = \varrho \cos\theta, \quad y = \varrho \sin\theta.$$

Уравненія (89) принимаютъ форму

$$\frac{y}{\varrho}\frac{\partial \varrho}{\partial x_1} + x\frac{\partial \theta}{\partial x_1} = \frac{B}{C}\left(\frac{x}{\varrho}\frac{\partial \varrho}{\partial x_1} - y\frac{\partial \theta}{\partial x_1}\right) - \frac{H}{C}\left(\frac{x}{\varrho}\frac{\partial \varrho}{\partial y_1} - y\frac{\partial \theta}{\partial y_1}\right),$$
$$\frac{y}{\varrho}\frac{\partial \varrho}{\partial y_1} + x\frac{\partial \theta}{\partial y_1} = \frac{H}{C}\left(\frac{x}{\varrho}\frac{\partial \varrho}{\partial x_1} - y\frac{\partial \theta}{\partial x_1}\right) + \frac{B}{C}\left(\frac{x}{\varrho}\frac{\partial \varrho}{\partial y_1} - y\frac{\partial \theta}{\partial y_1}\right).$$

Разрѣшая ихъ относительно $\frac{\partial \theta}{\partial x_1}$ и $\frac{\partial \theta}{\partial y_1}$, получимъ

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_1} = \frac{\frac{\partial \varrho}{\partial x_1}\left[B\cos 2\theta + \frac{1}{2}(A - C)\sin 2\theta\right] - \frac{\partial \varrho}{\partial y_1} H}{\varrho.(C\cos^2\theta + 2B\cos\theta\sin\theta + A\sin^2\theta)},$$
$$\frac{\partial \theta}{\partial y_1} = \frac{\frac{\partial \varrho}{\partial x_1} H + \frac{\partial \varrho}{\partial y_1}\left[B\cos 2\theta + \frac{1}{2}(A - C)\sin 2\theta\right]}{\varrho.(C\cos^2\theta + 2B\sin\theta\cos\theta + A\sin^2\theta)}. \tag{89^{bis}}$$

Откуда выводимъ уравненіе, которому удовлетворяетъ ϱ

$$\frac{\partial^2\varrho}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\varrho}{\partial y_1^2}+\frac{1}{H_1}\left[\left(\frac{\partial H_1}{\partial x_1}-\frac{\partial B_1}{\partial y_1}\right)\frac{\partial\varrho}{\partial x_1}+\left(\frac{\partial B_1}{\partial x_1}+\frac{\partial H_1}{\partial y_1}\right)\frac{\partial\varrho}{\partial y_1}\right]=0\,,\quad (90^{\text{bis}})$$

гдѣ

$$H_1=\frac{H}{\varrho.(C\cos^2\theta+2B\cos\theta\sin\theta+A\sin 2\theta)}\,,$$

$$B_1=\frac{B\cos 2\theta+\frac{1}{2}(A-C)\sin 2\theta}{\varrho.(C\cos^2\theta+2B\cos\theta\sin\theta+A\sin^2\theta)}\,.$$

Уравненіе (90bis) такой же формы, какъ и (90). Разница однако въ томъ, что при $\varrho=0$ вторая часть уравненія становится безконечной. Но мы выбрали x_1 и y_1 такъ, что $\sqrt{x_1^2+y_1^2}=\varrho_1$ обращается въ нуль вмѣстѣ съ ϱ, причемъ благодаря установленнымъ нами высшимъ предѣламъ производныхъ $\frac{\partial x_1}{\partial x}$, $\frac{\partial y_1}{\partial x}$, $\frac{\partial x_1}{\partial y}$, $\frac{\partial y_1}{\partial y}$ легко установить неравенство

$$\varrho>\frac{\varrho_1}{M}\,,$$

гдѣ M нѣкоторое опредѣленное число.

Въ самомъ дѣлѣ, на основаніи теоремы конечныхъ приращеній мы можемъ написать

$$x_1=\frac{\partial x_1}{\partial x}x+\frac{\partial x_1}{\partial y}y\,,\qquad y_1=\frac{\partial y_1}{\partial x}x+\frac{\partial y_1}{\partial y}y\,,$$

гдѣ значенія частныхъ производныхъ соотвѣтствуютъ въ обоихъ равенствахъ двумъ различнымъ вообще опредѣленнымъ точкамъ внутри круга C.

Поэтому

$$\varrho_1^2=\varrho^2\left[\left(\frac{\partial x_1}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial x_1}{\partial y}\sin\theta\right)^2+\left(\frac{\partial y_1}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial y_1}{\partial y}\sin\theta\right)^2\right]$$
$$<M^2\varrho^2$$

и мы приходимъ къ указанному выше неравенству

$$\varrho>\frac{\varrho_1}{M}.$$

Слѣдовательно, если мы возьмемъ концентрическій съ C_1 кругъ C_1' радіуса R_1' $(R_1'<R_1)$ въ плоскости перемѣнныхъ x_1, y_1, то мы можемъ утверждать, что внутри области S_1 ограниченной окружностями C_1 и C_1' функція ϱ все время болѣе $\frac{R_1'}{M}$, а потому внутри этой области модули

коэффиціентовъ уравненія (90 bis) менѣе нѣкотораго опредѣленнаго числа. Такимъ образомъ, примѣняя способъ вспомогательныхъ функцій и полагая [1])

$$\varrho = -\alpha + \alpha \log u,$$

гдѣ α опредѣленное достаточно малое число, находимъ, что

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} > -N$$

внутри области S_1, обозначая черезъ N опредѣленное положительное число.

Полагая затѣмъ

$$u = u_1 - \frac{N}{4}\varrho_1^2,$$

находимъ, что внутри S_1

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y_1^2} > 0.$$

И наконецъ, если положимъ

$$u_1 = v_1 + h_1$$

гдѣ h_1 гармоническая функція, совпадающая съ u_1 на окружностяхъ C_1 и C_1', то v_1 обращается въ нуль на этихъ окружностяхъ и также удовлетворяетъ неравенству

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial y_1^2} > 0.$$

Слѣдовательно, v_1 внутри области S_1 не имѣетъ максимума, а потому на окружности C

$$\frac{\partial v_1}{\partial \varrho_1} \geqq 0.$$

Съ другой стороны, благодаря отрицательной кривизнѣ гармонической поверхности, касательная плоскость къ поверхности $z_1 = h_1$ въ какой нибудь точкѣ, имѣющей проэкцію на окружности C_1, пересѣкаетъ эту поверхность покрайней мѣрѣ еще въ одной точкѣ, имѣющей проэкцію на окружности C_1' или на C_1. Но на окружности C_1 функція h_1 постоянна и равна

$$h_1^{(1)} = e^{\frac{R+\alpha}{\alpha}} + \frac{N}{4} R_1^2,$$

на окружности же C_1' h_1 удовлетворяетъ неравенству

$$h_1 < e^{\frac{R+\alpha}{\alpha}} + \frac{N}{4} R_1'^2 < h_1^{(1)}.$$

---

[1]) Такъ какъ $\rho > 0$.

Поэтому на окружности C_1

$$\frac{\partial h_1}{\partial \varrho_1} \geqq 0.$$

Слѣдовательно,

$$\frac{\partial u_1}{\partial \varrho_1} \geqq 0.$$

Такимъ образомъ

$$\frac{\partial u}{\partial \varrho_1} \geqq -\frac{N}{2} R_1$$

и

$$\frac{\partial \varrho}{\partial \varrho_1} \geqq -\frac{\alpha N R_1}{2e^{\frac{R+\alpha}{\alpha}}}$$

на окружности C_1. Точно такимъ же образомъ получимъ и высшій *положительный* предѣлъ $\frac{\partial \varrho}{\partial \varrho_1}$.

Теперь мы можемъ наконецъ установить высшій предѣлъ модуля функціональнаго детерминанта D, а вмѣстѣ съ тѣмъ и модулей производныхъ первыхъ $(n-3)^{\text{хъ}}$ порядковъ функцій x, y относительно x_1 y_1. Слѣдовательно, намъ извѣстны также и высшіе предѣлы модулей частныхъ производныхъ первыхъ $(n-4)^{\text{хъ}}$ порядковъ коэффиціентовъ приведеннаго уравненія (75) относительно x_1, y_1.

Положимъ $n=6$. Въ такомъ случаѣ намъ извѣстны высшіе предѣлы модулей производныхъ первыхъ двухъ порядковъ коэффиціентовъ уравненія (75), которое совершенно подобно уравненію (46), если положимъ $F \geqq 0$; къ нему примѣнимы такимъ образомъ неравенства (50), и мы приходимъ къ слѣдующей леммѣ.

Лемма. *Если z есть рѣшеніе уравненія*

$$A\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2D\frac{\partial z}{\partial x} + 2E\frac{\partial z}{\partial y} + Fz = M, \quad (F \leqq 0) \quad (74)$$

которое обращается въ нуль на окружности C радіуса R, причемъ коэффиціенты A, B, C имѣютъ конечныя производныя первыхъ семи порядковъ [1]*, D, E и F конечныя производныя первыхъ двухъ порядковъ, и если уравненіе (74) можетъ быть приведено къ каноническому виду, такъ чтобъ кругу C соотвѣтствовалъ кругъ C_1 въ плоскости новыхъ перемѣнныхъ x_1, y_1 (и центру O круга C соотвѣтствовалъ центръ O_1 круга C_1); то тригонометрическіе модули z, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ на отрѣзкѣ $O_1 R_1$ въ плоскости перемѣнныхъ x_1, y_1 удовлетворяютъ неравенствамъ:*

[1]) Число конечныхъ производныхъ A, B, C могло бы быть понижено, но съ точки зрѣнія интересующихъ насъ результатовъ, это имѣетъ второстепенное значеніе.

$$\{z\}_{0_1R_1} < k\{M\}_{0_1R_1}, \quad \left\{\frac{\partial z}{\partial x}\right\}_{0_1R_1} < k\{M\}_{0_1R_1}, \quad \left\{\frac{\partial z}{\partial y}\right\}_{0_1R_1} < k\{M\}_{0_1R_1}, \quad (91)$$

гдѣ число k не зависитъ отъ M.

Въ самомъ дѣлѣ, послѣ преобразованія уравненія (74) въ (75) изъ неравенствъ (50) непосредственно слѣдуетъ, что

$$\{z\}_{0_1R_1} < k\{M\}_{0_1R_1}, \quad \left\{\frac{\partial z}{\partial x_1}\right\}_{0_1R_1} < k\{M\}_{0_1R_1}, \quad \left\{\frac{\partial z}{\partial y_1}\right\}_{0_1R_1} < k\{M\}_{0_1R_1}.$$

Но

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial y}.$$

Тригонометрическіе же модули $\frac{\partial x_1}{\partial x}$, $\frac{\partial x_1}{\partial y}$, $\frac{\partial y_1}{\partial x}$, $\frac{\partial y_1}{\partial y}$, конечны на основаніи предыдущаго разсужденія.

До сихъ поръ въ нашихъ выводахъ мы нарочно избѣгали предположенія объ аналитическомъ характерѣ коэффиціентовъ, чтобы отчетливо подчеркнуть то мѣсто, гдѣ это предположеніе станетъ существеннымъ.

Но для дальнѣйшаго, неравенствъ (91) недостаточно, такъ какъ необходимо подобныя же неравенства имѣть и для *вторыхъ* производныхъ.

При выводѣ соотвѣтствующихъ неравенствъ для уравненія Пуассона мы уже отмѣтили важность предположенія аналитическаго характера второй его части и въ частности значеніе такъ называемыхъ *нормъ*. Здѣсь мы опять будемъ вынуждены ограничиться аналитическими коэффиціентами и пользоваться понятіемъ нормы, которое мы нѣсколько дополнимъ.

Положимъ, что $f(x)$ функція перемѣнной x на отрѣзкѣ $0R$, причемъ на части его $0A$ она разлагается въ нормальный рядъ и внутри контура Γ_{0Aa} имѣетъ низшую норму $[f(x)]_{Aa}$; на остальной же части AR отрѣзка $0R$, модуль функціи $f(x)$ имѣетъ максимумъ равный M. Наибольшее изъ чиселъ $[f(x)]_{Aa}$ и M мы назовемъ *нормализованнымъ внутри контура Γ_{0Aa} модулемъ функціи $f(x)$ на отрѣзкѣ $0R$* и обозначимъ его черезъ $[f(x)]_{Aa}^{(0R)}$.

Въ случаѣ двухъ перемѣнныхъ, если

$$f(\varrho, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta,$$

гдѣ

$$A_n = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} a_{p,q}^{(n)} \varrho^{n+p}(A^2 - \varrho^2)^q, \quad B_n = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} b_{p,q}^{(n)} \varrho^{n+p}(A^2 - \varrho^2)^q,$$

естественно назвать нормализованнымъ внутри контура Γ_{0Aa} тригонометрическимъ модулемъ функціи $f(\varrho, \theta)$ на отрѣзкѣ $0R$ выраженіе

$$[f(\varrho, \theta)]_{Aa}^{(0R)} = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n]_{Aa}^{(0R)} + [B_n]_{Aa}^{(0R)}.$$

Итакъ допустимъ вдобавокъ, что A, B, C, D, E, F аналитическія функціи *внутри* круга C, или даже только, что *ихъ радіусы сходимости въ точкѣ* $x=y=0$ *по степенямъ* $x+yi$, $x-yi$ *не менѣе нѣкотораго опредѣленнаго числа* ε. Концентрическому къ C кругу радіуса ε соотвѣтствуетъ въ плоскости перемѣнныхъ x_1, y_1 область, заключающая въ себѣ [1]) кругъ опредѣленнаго радіуса ε_1, концентрическій къ C_1.

Кромѣ того, примѣняя къ уравненію (78) разсужденіе III главы, которое привело къ доказательству основной теоремы, мы можемъ найти высшіе предѣлы нормъ x_1, y_1 внутри опредѣленнаго контура $\Gamma_{0\varepsilon' r}$ (гдѣ $r<\varepsilon'<\varepsilon$), которые являются въ то же время высшими предѣлами разложеній x_1, y_1 по степенямъ $x+yi$, $x-yi$, послѣ замѣны $x+yi$, $x-yi$ черезъ r и коэффиціентовъ разложеній ихъ модулями. И такъ какъ намъ извѣстенъ изъ предыдущаго высшій предѣлъ функціональнаго детерминанта

$$D=\frac{\partial x}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial y}{\partial y_1}-\frac{\partial x}{\partial y_1}\cdot\frac{\partial y}{\partial x_1},$$

то классическая теорія разрѣшенія двухъ аналитическихъ уравненій съ двумя неизвѣстными позволяетъ также опредѣлить высшіе предѣлы суммы модулей членовъ разложенія x, y по степенямъ x_1+iy_1, x_1-iy_1 послѣ замѣны x_1+iy_1, x_1-iy_1 нѣкоторымъ опредѣленнымъ достаточно малымъ числомъ r_1.

Возвращаясь затѣмъ къ приведенному уравненію (75), мы заключаемъ отсюда, что, беря кругъ C_1' достаточно малаго радіуса R_1' концентрическій къ C_1, мы можемъ a priori установить высшій предѣлъ нормъ коэффиціентовъ a, b, F внутри контура $\Gamma_{0_1R_1'R_1'}$, (т. е. нормъ Пикара относительно R_1'). Допустимъ также, что радіусъ R_1' взятъ настолько малымъ, что задача Дирикле для уравненія (75) внутри круга C_1' непосредственно разрѣшается къ способу послѣдовательныхъ приближеній (Глава I).

Послѣ того, какъ радіусъ R_1' ($R_1'<\varepsilon_1$) такимъ образомъ опредѣленъ независимо отъ M, положимъ, разсматривая вторую часть M уравненія (75), какъ функцію x_1, y_1, что ея тригонометрическій модуль на отрѣзкѣ 0_1R_1 *нормализованный* внутри контура $\Gamma_{0_1R_1'r_1'}$ равенъ $[M]^{(0_1R_1)}_{R_1'r_1'}$, причемъ какъ въ третьей главѣ мы беремъ для опредѣленности $r_1'=\frac{R_1'}{2}$.

Такъ какъ нормализованный тригонометрическій модуль во всякомъ случаѣ не менѣе обыкновеннаго тригонометрическаго модуля, то изъ неравенствъ (50) слѣдуетъ a fortiori

$$\{z\}_{0_1R_1}<k[M]^{(0_1R_1)}_{R_1'r_1'},\quad\left\{\frac{\partial z}{\partial x_1}\right\}_{0_1R_1}<k[M]^{(0_1R_1)}_{R_1'r_1'},\quad\left\{\frac{\partial z}{\partial y_1}\right\}_{0_1R_1}<k[M]^{(0_1R_1)}_{R_1'r_1'}.$$

---

[1]) Такъ какъ извѣстенъ высшій предѣлъ модулей $\left|\frac{\partial x}{\partial x_1}\right|$, $\left|\frac{\partial x}{\partial y_1}\right|$, $\left|\frac{\partial y}{\partial x_1}\right|$, $\left|\frac{\partial y}{\partial y_1}\right|$.

А затѣмъ изъ формулъ (16) и (16′) слѣдуетъ также, что

$$\left\{\frac{\varrho_1}{R_1}\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}\right\}_{0_1R_1} < k'\,[M]^{(0_1R_1)}_{R'_1r'_1},\quad \left\{\frac{\varrho_1}{R_1}\frac{\partial^2 z}{\partial x_1\partial y_1}\right\}_{0_1R_1} < k'\,[M]^{(0_1R_1)}_{R'_1r'_1},$$
$$\left\{\frac{\varrho_1}{R_1}\frac{\partial^2 z}{\partial y_1^2}\right\}_{0_1R_1} < k'\,[M]^{(0_1R_1)}_{R'_1r'_1},$$

гдѣ k' опредѣленный, независящій отъ M, множитель.

Но отсюда мы можемъ сдѣлать два вывода.

Во-первыхъ, для тригонометрическихъ модулей на отрѣзкѣ R'_1R_1 находимъ

$$\left\{\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}\right\}_{R'_1R_1} < k''\,[M]^{(0_1R_1)}_{R'_1r_1},\quad \left\{\frac{\partial^2 z}{\partial x_1\partial y_1}\right\}_{R'_1R_1} < k''\,[M]^{(0_1R_1)}_{R'_1r_1},$$
$$\left\{\frac{\partial^2 z}{\partial y_1^2}\right\}_{R'_1R_1} < k''\,[M]^{(0_1R_1)}_{R'_1r_1}, \tag{93}$$

гдѣ k'' новый опредѣленный постоянный множитель.

Во-вторыхъ, на окружности C'_1

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\theta_1^2} = \sum_{n=1}^{\infty} P_n\cos n\theta_1 + Q_n\cos n\theta_1,$$

причемъ

$$\sum_{n=1}^{\infty}|P_n| + |Q_n| < k''\,[M]^{(0_1R_1)}_{R'_1r_1};$$

поэтому, обозначая черезъ h гармоническую функцію, которая на окружности C'_1 совпадаетъ съ z, мы находимъ, что

$$[h]_{R'_1r'_1} < k_1\,[M]^{(0_1R_1)}_{R'_1r'_1},\quad \left[\frac{\partial h}{\partial x_1}\right]_{R'_1r'_1} < k_1\,[M]^{(0_1R_1)}_{R'_1r'_1},$$
$$\left[\frac{\partial h}{\partial y_1}\right]_{R'_1r'_1} < k_1\,[M]^{(0_1R_1)}_{R'_1r'_1},\quad \left[\frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2}\right]_{R'_1r'_1} < k_1\,[M]^{(0_1R_1)}_{R'_1r'_1},$$
$$\left[\frac{\partial^2 h}{\partial x_1\partial y_1}\right]_{R'_1r'_1} < k_1\,[M]^{(0_1R_1)}_{R'_1r'_1},\quad \left[\frac{\partial^2 h}{\partial y_1^2}\right]_{R'_1r'_1} < k_1\,[M]^{(0_1R_1)}_{R'_1r'_1},$$

гдѣ k_1 опредѣленный множитель.

Полагая $z = h + v$, мы видимъ, что v обращается въ нуль на окружности C'_1 и удовлетворяетъ уравненію

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y_1^2} + a\frac{\partial v}{\partial x_1} + b\frac{\partial v}{\partial y_1} + Fv = M - a\frac{\partial h}{\partial x_1} - b\frac{\partial h}{\partial y_1} - Fh. \tag{92}$$

Примѣняя къ этому уравненію разсужденіе страницы 86 (или способъ послѣдовательныхъ приближеній), мы получимъ немедленно

$$[v]_{R'_1r'_1} < k_2 [M]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1}, \quad \left[\frac{\partial v}{\partial x_1}\right]_{R'_1 r'_1} < k_2 [M]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1},$$
$$\left[\frac{\partial v}{\partial y_1}\right]_{R'_1 r'_1} < k_2 [M]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1},$$

гдѣ k_2 новый постоянный множитель, такъ какъ по опредѣленію

$$[M]_{R'_1 r'_1} \leqq [M]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1}.$$

Но теперь мы можемъ разсматривать уравненіе (92), какъ уравненіе Пуассона, норма второй части котораго внутри контура $\Gamma_{0R'_1 r'_1}$ менѣе $k'_1 [M]^{0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1}$, гдѣ k'_1 новый опредѣленный коэффиціентъ. Поэтому изъ неравенствъ (36), выводимъ

$$\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}\right]_{R'_1 r'_1} < k'_2 [M]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1}, \quad \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial y_1}\right]_{R'_1 r'_1} < k'_2 [M]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1},$$
$$\left[\frac{\partial^2 v}{\partial y_1^2}\right]_{R'_1 r'_1} < k'_2 [M]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1}.$$

Слѣдовательно,

$$[z]_{R'_1 r'_1} < (k_1 + k_2) [M]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1}, \quad \left[\frac{\partial z}{\partial x_1}\right]_{R'_1 r'_1} < (k_1 + k_2) [M]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1},$$
$$\left[\frac{\partial z}{\partial y_1}\right]_{R'_1 r'_1} < (k_1 + k_2) [M]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1}, \quad \left[\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}\right]_{R'_1 r'_1} < (k_1 + k'_2) [M]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1}, \quad (93')$$
$$\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial y_1}\right]_{R'_1 r'_1} < (k_1 + k'_2) [M]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1}, \quad \left[\frac{\partial^2 z}{\partial y_1^2}\right]_{R'_1 r'_1} < (k_1 + k'_2) [M]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1}.$$

И наконецъ изъ неравенствъ (93) вмѣстѣ съ неравенствами (93′), выводимъ неравенства

$$[z]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1} < \lambda_1 [M]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1}, \quad \left[\frac{\partial z}{\partial x_1}\right]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1} < \lambda_1 [M]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1},$$
$$\left[\frac{\partial z}{\partial y_1}\right]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1} < \lambda_1 [M]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1}, \quad \left[\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}\right]^{(0_1 R_1)}_{R'_2 r'_1} < \lambda_1 [M]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1}, \quad (94')$$
$$\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial y_1}\right]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1} < \lambda_1 [M]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1}, \quad \left[\frac{\partial^2 z}{\partial y_1^2}\right]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1} < \lambda_1 [M]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1},$$

равнозначныя важнымъ неравенствамъ, лежащимъ въ основѣ нашей методы интегрированія, которыя мы хотѣли вывести, а именно:

$$[z]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1} < \lambda [M]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1}, \quad \left[\frac{\partial z}{\partial x}\right]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1} < \lambda [M]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1};$$
$$\left[\frac{\partial z}{\partial y}\right]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1} < \lambda [M]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1}, \quad \left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1} < \lambda [M]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1}, \tag{94}$$
$$\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1} < \lambda [M]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1}, \quad \left[\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1} < \lambda [M]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1},$$

гдѣ λ, какъ и λ_1 опредѣленныя постоянныя величины.

Цѣпь умозаключеній, приведшая насъ къ неравенствамъ (94) существенно опирается на предположеніе, что задача Дирикле возможна [1]) для уравненія (78), соотвѣтствующаго разсматриваемому уравненію (74), ибо лишь при этомъ условіи разрѣшается поставленная въ началѣ главы задача приведенія уравненія (74) къ виду (75). Это замѣчаніе заставляетъ насъ ввести параметръ α въ уравненіе (74) и примѣнить разсужденіе подобное тому, какое было примѣнено въ четвертой главѣ.

Очевидно, что линейному уравненію эллиптическаго типа можетъ быть также придана форма

$$(1+P^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2PQ\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + (1+Q^2)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2D\frac{\partial z}{\partial x} + 2E\frac{\partial z}{\partial y} + Fz = M,$$

или, вводя параметръ α, форма

$$(1+\alpha P^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\alpha PQ\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + (1+\alpha Q^2)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2D\frac{\partial z}{\partial x} + 2E\frac{\partial z}{\partial y} + Fz = M. \qquad (F \leqq 0) \tag{95}$$

При $\alpha = 0$, уравненіе (95)—приведеннаго вида, который былъ изученъ въ IV главѣ. Къ этому уравненію непосредственно примѣняются неравенства (50) и вытекающія изъ нихъ неравенства (94).

Положимъ вообще, что для опредѣленнаго $\alpha_0 \geqq 0$, уравненіе

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{(1+\alpha_0 P^2)\frac{\partial v}{\partial x} + \alpha_0 PQ\frac{\partial v}{\partial y}}{\sqrt{1+\alpha(P^2+Q^2)}}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\alpha_0 PQ\frac{\partial v}{\partial x} + (1+\alpha_0 Q^2)\frac{\partial v}{\partial y}}{\sqrt{1+\alpha(P^2+Q^2)}}\right] = 0$$

допускаетъ рѣшеніе z_0 задачи Дирикле [2]), если данныя на окружности C значенія рѣшенія выражаются функціей дуги $\psi(\theta)$, имѣющей конечныя производныя первыхъ шести порядковъ. Въ такомъ случаѣ изъ предыдущаго (Глава IV) слѣдуетъ, что при *данномъ значеніи* α_0 уравненіе (95) допускаетъ рѣшеніе, каковы бы ни были функціи D, E, F, M, имѣющія

[1]) При предположеніи, что значенія рѣшенія на окружности C представляются функціей дуги, имѣющей конечныя производныя первыхъ шести порядковъ.

[2]) Относительно P и Q предположенія остаются тѣ же, что выше относительно A, B, C.

конечныя производныя первыхъ двухъ порядковъ, при условіи, что функція $\varphi(\theta)$ на окружности C только непрерывна. (Однако для примѣненія неравенствъ (94), необходимаго для перехода къ другимъ значеніямъ параметра α, нужно также, чтобы D, E. F, M были *аналитичны* хотя бы въ нѣкоторой маленькой области внутри круга C).

Покажемъ, что задача Дирикле также возможна при тѣхъ же значеніяхъ на окружности, представленныхъ функціей $\psi(\theta)$, для уравненія (95), если $|\alpha - \alpha_0| < \delta$, обозначая черезъ δ достаточно малое число.

Для этого, положимъ a priori

$$z = z_0 + (\alpha - \alpha_0) z_1 + \frac{(\alpha - \alpha_0)^2}{2} z_2 + \ldots \frac{(\alpha - \alpha_0)^n}{n!} z_n + \ldots \qquad (96)$$

Указанное выраженіе *формально* удовлетворяетъ уравненію, если z_0, z_1 и т. д. суть соотвѣтственно рѣшенія уравненій

$$(1+\alpha_0 P^2)\frac{\partial^2 z_0}{\partial x^2} + 2\alpha_0 PQ\frac{\partial^2 z_0}{\partial x \partial y} + (1+\alpha_0 Q^2)\frac{\partial^2 z_0}{\partial y^2} + 2D\frac{\partial z_0}{\partial x} + 2E\frac{\partial z_0}{\partial y} + Fz_0 = M,$$

$$(1+\alpha_0 P^2)\frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2} + 2\alpha_0 PQ\frac{\partial^2 z_1}{\partial x \partial y} + (1+\alpha_0 Q^2)\frac{\partial^2 z_1}{\partial y^2} + 2D\frac{\partial z_1}{\partial x} + 2E\frac{\partial z_1}{\partial y} + Fz_1 =$$
$$= -\left[P^2\frac{\partial^2 z_0}{\partial x^2} + 2PQ\frac{\partial^2 z_0}{\partial x \partial y} + Q^2\frac{\partial^2 z_0}{\partial y^2}\right],$$

. . . . . .

. . . . . .

$$(1+\alpha_0 P^2)\frac{\partial^2 z_n}{\partial x^2} + 2\alpha_0 PQ\frac{\partial^2 z_n}{\partial x \partial y} + (1+\alpha_0 Q^2)\frac{\partial^2 z_n}{\partial y^2} + 2D\frac{\partial z_n}{\partial x} + 2E\frac{\partial z_n}{\partial y} + Fz_n =$$
$$= -n\left[P^2\frac{\partial^2 z_{n-1}}{\partial x^2} + 2PQ\frac{\partial^2 z_{n-1}}{\partial x \partial y} + Q^2\frac{\partial^2 z_{n-1}}{\partial y^2}\right]$$

. . . . . .

Въ силу только что сказаннаго всѣ эти уравненія допускаютъ рѣшенія при какихъ угодно данныхъ значеніяхъ на окружности C.

Въ частности, если мы положимъ, что $z_0 = \psi(\theta)$, а $z_1 = z_2 = z_n = 0$ на окружности C, то въ случаѣ сходимости ряда (96), онъ будетъ представлять искомое рѣшеніе уравненія (95).

Но изъ неравенствъ (94) вытекаетъ вообще

$$\left[\frac{\partial^2 z_n}{\partial x^2}\right]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1} < \lambda n\left[P^2\frac{\partial^2 z_{n-1}}{\partial x^2} + 2PQ\frac{\partial^2 z_{n-1}}{\partial x \partial y} + Q^2\frac{\partial^2 z_{n-1}}{\partial y^2}\right]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1},$$

$$\left[\frac{\partial^2 z_n}{\partial x \partial y}\right]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1} < \lambda n\left[P^2\frac{\partial^2 z_{n-1}}{\partial x^2} + 2PQ\frac{\partial^2 z_{n-1}}{\partial x \partial y} + Q^2\frac{\partial^2 z_{n-1}}{\partial y^2}\right]^{0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1},$$

$$\left[\frac{\partial^2 z_n}{\partial y^2}\right]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1} < \lambda n\left[P^2\frac{\partial^2 z_{n-1}}{\partial x^2} + 2PQ\frac{\partial^2 z_{n-1}}{\partial x \partial y} + Q^2\frac{\partial^2 z_{n-1}}{\partial y^2}\right]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1}.$$

Откуда заключаемъ безъ труда, что радіусъ сходимости ряда (96) не менѣе, чѣмъ $\frac{1}{4\lambda\omega^2}$, гдѣ ω опредѣленное число, удовлетворяющее неравенствамъ

$$\omega \geqq [P]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1}, \quad \omega \geqq [Q]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1}.$$

При всякомъ α, заключенномъ между нулемъ и единицей, можетъ быть a priori указанъ низшій предѣлъ δ величины $\frac{1}{4\lambda\omega^2}$. Такимъ образомъ, если задача Дирикле возможна при $\alpha = \alpha_0$, она также возможна, при $\alpha = \alpha_0 + \delta$, а затѣмъ при $\alpha = \alpha_0 + 2\delta$ и т. д.

Слѣдовательно, въ частности задача Дирикле возможна при $\alpha = 1$, т. е. всегда возможна. *Искомое рѣшеніе получается, если преобразовать строку Тэйлора (96), (которую легче всего составить при $\alpha = 0$) въ строку Миттагъ-Леффлера и подставить въ послѣдней вмѣсто α единицу.* Какъ мы уже видѣли раньше, окружность можетъ быть замѣнена аналитическимъ контуромъ.

Въ концѣ четвертой главы мы также показали, что задача Дирикле для каноническаго уравненія возможна, если область внутри которой требуется вычислить рѣшеніе, кольцеобразна, причемъ ограничивающіе ее оба контура, благодаря конформному преобразованію могутъ не быть окружностями, а вообще аналитическими кривыми. Если мы поставимъ себѣ ту же задачу въ случаѣ неприведеннаго уравненія и совершимъ надъ нашимъ уравненіемъ указанное выше преобразованіе, которое приводитъ его къ каноническому виду, то окружность C превратится въ окружность C_1, внутренній же аналитическій контуръ превратится также въ аналитическій контуръ. Слѣдовательно, *задача Дирикле для кольцеобразной области возможна и въ общемъ случаѣ.*

§ 28. Въ заключеніе разсмотримъ еще предположенія неаналитическихъ коэффиціентовъ и неаналитическихъ контуровъ. При этомъ, чтобъ не затягивать главы, мы ограничимся наиболѣе простыми случаями.

Положимъ, что A, B, C имѣютъ конечныя производныя первыхъ четырехъ порядковъ, D, E, F, M—первыхъ двухъ порядковъ. Очевидно, опять возможность задачи Дирикле *при какихъ угодно значеніяхъ рѣшенія* на окружности будетъ зависѣть исключительно отъ ея возможности для уравненія (78), если значенія рѣшенія имѣютъ производныя *шести* порядковъ на окружности.

По предположенію, можемъ написать

$$A = \sum_{n=1}^{\infty}(A_n - A_{n-1}), \quad B = \sum_{n=1}^{\infty}(B_n - B_{n-1}), \quad C = \sum_{n=1}^{\infty}(C_n - C_{n-1}),$$

гдѣ A_n, B_n, C_n аналитическія функціи, причемъ ряды A, B, C равномѣрно сходятся, какъ и ихъ производныя первыхъ трехъ порядковъ;

кромѣ того, намъ извѣстны высшіе предѣлы модулей четвертыхъ производныхъ A_n, B_n, C_n. Разсматривая въ такомъ случаѣ приближенное уравненіе

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{A_n\frac{\partial z_n}{\partial x}+B_n\frac{\partial z_n}{\partial y}}{\sqrt{A_nC_n-B_n^2}}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{B_n\frac{\partial z_n}{\partial x}+C_n\frac{\partial z_n}{\partial y}}{\sqrt{A_nC_n-B_n^2}}\right]=0,$$

мы можемъ a priori установить высшій предѣлъ z_n и его производныхъ первыхъ *трехъ* порядковъ.

Но съ другой стороны разность $v_n=z_n-z_{n-1}$ удовлетворяетъ уравненію

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{A_n\frac{\partial v_n}{\partial x}+B_n\frac{\partial v_n}{\partial y}}{\sqrt{A_nC_n-B_n^2}}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{B_n\frac{\partial v_n}{\partial x}+C_n\frac{\partial v_n}{\partial y}}{\sqrt{A_nC_n-B_n^2}}\right]=\delta_n,$$

гдѣ δ_n съ возрастаніемъ n стремится къ нулю.

Такъ какъ v_n равно нулю на окружности, то изъ разсужденія страницы 82 заключаемъ, что v_n съ возрастаніемъ n стремится къ нулю.

Поэтому, рядъ $z=z_0+\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ сходится, также какъ и его производныя первыхъ двухъ порядковъ [1]) и удовлетворяетъ уравненію (78).

Приблизительно также разрѣшается задача Дирикле въ случаѣ неаналитическаго контура. Допустимъ для простоты, что *контуръ C выпуклый и въ каждой точкѣ имѣетъ конечную кривизну*, такъ что онъ можетъ быть окруженъ рядомъ выпуклыхъ аналитическихъ контуровъ C_n съ конечной кривизной, безконечно къ нему приближающихся.

Ограничимся кромѣ того уравненіемъ (съ указанными только что условіями относительно коэффиціентовъ)

---

[1]) Въ самомъ дѣлѣ, для всякихъ сколь угодно малыхъ значеній h и ε, можно найти достаточно большое n, чтобъ при $p\geqq n$

$$(0<\vartheta_p<1)\quad\left|\frac{z(x+h,\,y)-z(x,\,y)}{h}-\frac{\partial z_p}{\partial x}(x+\vartheta_p h,\,y)\right|<\varepsilon.$$

Такъ что

$$\left|\frac{\partial z_n}{\partial x}(x+\vartheta_n h,\,y)-\frac{\partial z_p}{\partial x}(x+\vartheta_p h,\,y)\right|<2\varepsilon,$$

откуда

$$\left|\frac{\partial z_n}{\partial x}(x,\,y)-\frac{\partial z_p}{\partial x}(x,\,y)\right|<2Mh+2\varepsilon,$$

если M высшій предѣлъ модулей вторыхъ производныхъ z_n.

Слѣдовательно, рядъ $\frac{\partial z_0}{\partial x}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\partial z_n}{\partial x}-\frac{\partial z_{n-1}}{\partial x}\right)=\frac{\partial z}{\partial x}$ равномѣрно сходится. Точно также обнаруживается сходимость рядовъ вторыхъ производныхъ. (Принципъ Гильберта, см. работу Lebesgu'a „Sur le principe de Dirichlet“, Rendiconti del Circolo Mathematico di Palermo, 1907).

$$Ar + 2Bs + Ct = 0 \qquad (97)$$

и положимъ, что данная на контурѣ функція дуги $\varphi(s)$ имѣетъ *вторыя* производныя. Легко видѣть, что и въ данномъ случаѣ задача Дирикле возможна.

Въ самомъ дѣлѣ, для той же совокупности значеній $\varphi(s)$ на каждомъ изъ приближенныхъ контуровъ C_n задача возможна. При этомъ вслѣдствіе *отрицательной кривизны поверхности*, удовлетворяющей уравненію (97), a priori можетъ быть указанъ высшій предѣлъ *наклона* касательной плоскости во всякой точкѣ поверхности. Откуда слѣдуетъ, что при достаточно большихъ n разность $z_n - z_{n-1}$ между значеніями приближенныхъ рѣшеній на контурѣ C становится сколь угодно малой. Примѣняя разсужденіе страницы 89-й и слѣдующихъ, замѣчаемъ, что предѣлъ z функцій z_n есть искомое рѣшеніе.

Этихъ нѣсколькихъ замѣчаній, мнѣ кажется, достаточно, чтобъ видѣть, какъ разрѣшается задача Дирикле при неаналитическихъ данныхъ.

Однако, если мы всмотримся въ предшествующую цѣпь умозаключеній, мы увидимъ, что въ то время, какъ возможность задачи Дирикле внутри круга опирается *исключительно* на возможность этой задачи для уравненій (Лапласа и Пуассона)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0\,, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = F(x,\ y)$$

внутри *круга* же; переходъ къ другимъ контурамъ (аналитическимъ или нѣтъ) требуетъ допущенія теоремы конформнаго преобразованія или, что тоже самое, возможности для уравненія Лапласа задачи Дирикле внутри какихъ бы то ни было *аналитическихъ* контуровъ.

Для единства методы интересно показать, что интегрированіе уравненія Лапласа внутри *аналитическаго* контура всегда можетъ быть сведено или къ непосредственному интегрированію по нашей методѣ опредѣленнаго уравненія эллиптическаго типа, при данныхъ на *окружности*, или же къ употребленію той же методы только въ соединеніи съ альтернирующимъ способомъ Шварца.

Ограничимся для простоты случаемъ, когда прямыя параллельныя нѣкоторому направленію, скажемъ, $y = h$, гдѣ h постоянная величина, пересѣкаютъ контуръ S, внутри котораго интегрируется уравненіе Лапласа, не болѣе двухъ разъ (альтернирующій способъ позволилъ бы свести къ контуру S задачу Дирикле внутри какого угодно контура).

Пусть весь контуръ заключенъ между двумя касательными $y = 0$ и $y = 2R$. Тогда уравненіе его получитъ форму [1])

[1]) Еслибъ касательныя $y = 0$ и $y = 2R$ имѣли бы касаніе высшаго порядка съ контуромъ, то достаточно было бы немного повернуть оси координатъ, чтобъ прійти къ разсматриваемому здѣсь случаю обыкновеннаго касанія.

$$x = \varphi(y) \pm \psi(y)\sqrt{y(2R-y)},$$

гдѣ φ и ψ правильныя аналитическія функціи при $0 \leqq y \leqq 2R$ (кромѣ того $\psi \gtrless 0$).

Полагая въ такомъ случаѣ

$$x_1 = \frac{x-\varphi(y)}{\psi(y)}, \quad y_1 = y,$$

мы видимъ, что каждой точкѣ x, y соотвѣтствуетъ x_1, y_1 и обратно; а контуру S соотвѣтствуетъ окружность C_1, которой уравненіе

$$x_1^2 + y_1^2 - 2Ry_1 = 0.$$

При этомъ z удовлетворяетъ уравненію

$$[1+(x_1\psi'(y_1)+\varphi'(y_1)^2]\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} - 2[x_1\psi'(y_1)+\varphi'(y_1)]\psi(y_1)\frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial y_1} + \psi^2(y_1)\frac{\partial^2 z}{\partial y_1^2} +$$
$$+ [2\varphi'(y_1)\psi'(y_1) - \psi^2(y_1)\varphi''(y_1) + 2x_1\psi'^2(y_1) - x_1\psi(y_1)\psi''(y_1)]\frac{\partial z}{\partial x_1} = 0,$$

дискриминантъ котораго $AC - B^2 = \psi^2(y_1) > 0$.

Задача Дирикле внутри круга C_1 для этого уравненія возможна, а потому возможна и внутри контура S для уравненія Лапласа.

На этомъ мы покончимъ съ этими общими соображеніями, которыя насъ нѣсколько отвлекли въ сторону.

Глава VII.

Не линейныя уравненія эллиптическаго типа общаго вида.

§ 29. Въ настоящей главѣ мы изложимъ нашу методу интегрированія въ самомъ общемъ ея видѣ. И прежде всего намъ предстоитъ доказать слѣдующую основную лемму.

Лемма. *Если z_0 есть рѣшеніе при $\alpha = \alpha_0$, аналитическаго уравненія эллиптическаго типа*

$$F(r, s, t, p, q, z, x, y, \alpha) = 0, \tag{1}$$

причемъ $F'_r F'_z \leqq 0$; если извѣстно кромѣ того, что z_0 имѣетъ конечныя производныя первыхъ семи порядковъ какъ внутри круга C, такъ и на самой окружности, то можно установить положительное число ε, достаточно малое, чтобъ при всѣхъ значеніяхъ (комплексныхъ и вещественныхъ) параметра α, удовлетворяющихъ неравенству $|\alpha - \alpha_0| < \varepsilon$, уравненіе (1) допускало рѣшеніе z, совпадающее на окружности C съ функціей z_0.

Доказательство по существу совершенно тождественно доказательству данному въ частномъ случаѣ пятой главы.

Положимъ a priori

$$z = z_0 + (\alpha - \alpha_0) z_1 + \ldots + \frac{(\alpha - \alpha_0)^n}{n!} z_n + \ldots \tag{96'}$$

Мы увидимъ тотчасъ же, что $z_1, z_2, \ldots z_n$ обращаются въ нуль на окружности C и соотвѣтственно удовлетворяютъ уравненіямъ

$$F'_{r_0}\frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2} + F'_{s_0}\frac{\partial^2 z_1}{\partial x \partial y} + F'_{t_0}\frac{\partial^2 z_1}{\partial y^2} + F'_{p_0}\frac{\partial z_1}{\partial x} + F'_{q_0}\frac{\partial z_1}{\partial y} + F'_{z_0} z_1 = A_1,$$

$$F'_{r_0}\frac{\partial^2 z_2}{\partial x^2} + F'_{s_0}\frac{\partial^2 z_2}{\partial x \partial y} + F'_{t_0}\frac{\partial^2 z_2}{\partial y^2} + F'_{p_0}\frac{\partial z_2}{\partial x} + F'_{q_0}\frac{\partial z_2}{\partial y} + F'_{z_0} z_2 = A_2,$$

. . . . . .

. . . . . .

$$F'_{r_0}\frac{\partial^2 z_n}{\partial x^2} + F'_{s_0}\frac{\partial^2 z_n}{\partial x \partial y} + F'_{t_0}\frac{\partial^2 z_n}{\partial y^2} + F'_{p_0}\frac{\partial z_n}{\partial x} + F'_{q_0}\frac{\partial z_n}{\partial y} + F'_{z_0} z_n = A_n,$$

которыя отличаются между собой лишь вторыми частями, причемъ A_n вообще зависитъ отъ всѣхъ z_i, для которыхъ $i < n$, и ихъ производныхъ первыхъ двухъ порядковъ.

Къ этимъ уравненіямъ [1]), могутъ быть примѣнены неравенства (94) съ однимъ и тѣмъ же вполнѣ опредѣленнымъ множителемъ λ.

Слѣдовательно, получимъ вообще:

$$\begin{gathered}
[z_n]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1} < \lambda [A_n]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1}, \quad \left[\frac{\partial z_n}{\partial x}\right]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1} < \lambda [A_n]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1}, \\
\left[\frac{\partial z_n}{\partial y}\right]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1} < \lambda [A_n]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1}, \quad \left[\frac{\partial^2 z_n}{\partial x^2}\right]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1} < \lambda [A_n]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1}, \qquad (98) \\
\left[\frac{\partial^2 z_n}{\partial x^2}\right]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1} < \lambda [A_n]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1}, \quad \left[\frac{\partial^2 z_n}{\partial y^2}\right]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1} < \lambda [A_n]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1},
\end{gathered}$$

гдѣ нормализованные модули разсматриваются по отношенію къ нѣкоторымъ вполнѣ опредѣленнымъ новымъ перемѣннымъ (x_1, y_1), которыя должны были бы быть вычислены, еслибъ мы хотѣли привести наши уравненія къ приведенному виду; но фактически въ этомъ нѣтъ надобности.

Неравенствами (98) мы воспользуемся, какъ и раньше, введя вспомогательное уравненіе

$$v = \lambda \varphi (v, \alpha), \qquad (99)$$

гдѣ

$$\begin{gathered}
\varphi (v, \alpha) = [F(r_0 + v, s_0 + v, t_0 + v, p_0 + v, q_0 + v, x, y, \alpha)]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1} - \\
- [F(r_0, s_0, t_0, p_0, q_0, x, y, \alpha_0)]^{0_1 R_1}_{R'_1 r'_1} - \\
- v\{[F'_{r_0}]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1} + [F'_{s_0}]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1} + [F'_{t_0}]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1} + [F'_{p_0}]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1} + [F'_{q_0}]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1} + [F'_{z_0}]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1}\},
\end{gathered}$$

обозначая черезъ p_0, q_0, r_0, s_0, t_0 послѣдовательныя производныя z_0; такъ что

$$\varphi (0, \alpha_0) = \varphi'_v (0, \alpha_0) = 0.$$

Рѣшеніе уравненія (99) представляется въ видѣ сходящагося ряда по степенямъ $(\alpha - \alpha_0)$

$$v = (\alpha - \alpha_0) v_1 + \ldots + \frac{(\alpha - \alpha_0)^n}{n!} v_n + \ldots$$

Легко показать, что

$$\begin{gathered}
v_n > [z_n]^{0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1}, \quad v_n > \left[\frac{\partial z_n}{\partial x}\right]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1}, \quad v_n > \left[\frac{\partial z_n}{\partial y}\right]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1}, \quad v_n > \left[\frac{\partial^2 z_n}{\partial x^2}\right]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1}, \\
v_n > \left[\frac{\partial^2 z_n}{\partial x \partial y}\right]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1}, \quad v_n > \left[\frac{\partial^2 z_n}{\partial y^2}\right]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1}.
\end{gathered}$$

Въ самомъ дѣлѣ, изъ построенія функціи $\varphi (v, \alpha)$ видно, что

$$[A_1]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1} = \varphi'_\alpha (0, \alpha) = \frac{v_1}{\lambda}.$$

[1]) Указанное на страницѣ 130-й условіе для примѣненія этихъ неравенствъ соблюдено благодаря основной теоремѣ, доказанной въ III главѣ.

Слѣдовательно, изъ неравенствъ (98) вытекаетъ, что

$$[z_i]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1} < v_i, \quad \left[\frac{\partial z_i}{\partial x}\right]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1} < v_i, \quad \left[\frac{\partial z_i}{\partial y}\right]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1} < v_i, \quad \left[\frac{\partial^2 z_i}{\partial x^2}\right]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1} < v_i,$$
$$\left[\frac{\partial^2 z_i}{\partial x \partial y}\right]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1} < v_i, \quad \left[\frac{\partial^2 z_i}{\partial y^2}\right]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1} < v_i, \tag{100}$$

при $i = 1$; допустимъ, что вообще эти неравенства имѣютъ мѣсто для всякаго $i < n$, остается показать, что въ такомъ случаѣ они правильны и для $i = n$. Но это слѣдуетъ изъ того, что неравенства (98) и (100) для всякаго $i < n$ влекутъ за собой

$$[A_n]^{(0_1 R_1)}_{R'_1 r'_1} < \frac{d^n \varphi(0, \alpha_0)}{d\alpha^n},$$

гдѣ вторая часть неравенства представляетъ *полную* $n^{ую}$ производную φ по α при $\alpha = \alpha_0$, между тѣмъ какъ v опредѣлено уравненіемъ (99); а потому неравенства (100) должны имѣть мѣсто и при $i = n$.

Такимъ образомъ сходимость ряда (96′) и его производныхъ первыхъ двухъ порядковъ обнаружена, и вмѣстѣ съ тѣмъ доказана и наша лемма.

Доказанная лемма приводитъ насъ къ замѣчательному выводу, что мы можемъ утверждать возможность задачи Дирикле для уравненія (1) во всѣхъ случаяхъ, когда предполагая a priori существованіе рѣшенія, мы умѣемъ при помощи данныхъ на контурѣ установить высшіе предѣлы его частныхъ производныхъ первыхъ семи порядковъ. Въ концѣ главы мы еще вернемся къ общему случаю и увидимъ, что достаточно умѣть ограничить производныя первыхъ *двухъ* порядковъ.

§ 30. Болѣе подробно мы остановимся на сравнительно частномъ, но наиболѣе интересномъ случаѣ уравненія (1), именно, на уравненіи

$$Ar + 2Bs + Ct = D \tag{3}$$

гдѣ A, B, C, D аналитическія функціи p, q, z, x, y, при условіи $AC - B^2 > 0$.

Мы покажемъ, что *принципы изложенные въ предыдущихъ главахъ даютъ возможность установить высшіе предѣлы послѣдовательныхъ производныхъ* z, *всѣхъ порядковъ, если a priori извѣстенъ высшій предѣлъ* $|z|$, $|p|$, $|q|$, *который назовемъ* M.

Какъ въ пятой главѣ разсмотримъ выраженіе

$$w = \alpha^2 e^{2\left(\frac{p+M}{\alpha}\right)} e^{2e^{\frac{p+M}{\alpha}}} [Ar^2 + 2Brs + Cs^2],$$

гдѣ α нѣкоторое число, которое будетъ опредѣлено послѣ; и установимъ высшій предѣлъ w въ точкѣ, гдѣ w достигаетъ максимума.

Прежде всего составимъ уравненіе, которому удовлетворяетъ p. Дифференцируя уравненіе (3) и замѣчая, что

$$r=\frac{\partial p}{\partial x},\quad s=\frac{\partial q}{\partial x}=\frac{\partial p}{\partial y},\quad t=\frac{D-A\frac{\partial p}{\partial x}-2B\frac{\partial p}{\partial y}}{C},$$

получимъ уравненіе вида

$$A\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 p}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}=a\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2+2b\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)+c\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^2+ \\ +2d\frac{\partial p}{\partial x}+2e\frac{\partial p}{\partial y}+f, \tag{101}$$

гдѣ a, b, c, d, e, f, какъ и A, B, C извѣстныя аналитическія функціи p, q, z, x, y. Въ частности, для уравненія минимальныхъ поверхностей

$$(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t=0,$$

гдѣ

$$A=1+q^2,\quad B=-pq,\quad C=1+p^2,\quad D=0,$$

уравненіе (101) принимаетъ весьма простую форму

$$(1+q^2)\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}-2pq\frac{\partial^2 p}{\partial x\partial y}+(1+p^2)\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}=2p\left[(1+q^2)\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2-\right. \\ \left.-2pq\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)+(1+p^2)\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^2\right];$$

здѣсь

$$a=2p(1+q^2),\quad b=-2p^2q,\quad c=2p(1+p^2),\quad d=e=f=0.$$

Положимъ

$$p=-M+\alpha\log\log u,$$

гдѣ α нѣкоторое малое число, которое будетъ опредѣлено дальше. Какъ на страницѣ 107 видимъ, что u удовлетворяетъ уравненію

$$Ar_1+2Bs_1+Ct_1=\frac{1}{u\log u}\{[A(1+\log u)+\alpha a]p_1^2+2[B(1+\log u)+\alpha b]p_1q_1+ \\ +[C(1+\log u)+\alpha c]q_1^2\}+2dp_1+2eq_1+f\frac{u\log u}{\alpha}=Q_1, \tag{102}$$

вводя сокращенныя обозначенія $p_1=\frac{\partial u}{\partial x}$, $q_1=\frac{\partial u}{\partial y}$, $r_1=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $s_1=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$, $t_1=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. Легко видѣть, что

$$w=Ap_1^2+2Bp_1q_1+Cq_1^2.$$

Поэтому въ точкѣ, гдѣ w максимумъ, r_1, s_1, t_1 опредѣляются формулами:

$$r_1 = \frac{Q_1(Bp_1+Cq_1)^2 + CY(Bp_1+Cq_1) + X[(2B^2-AC)p_1+BCq_1]}{(AC-B^2)w},$$

$$s_1 = \frac{-Q_1(Bp_1+Cq_1)(Ap_1+Bq_1) - CY(Ap_1+Bq_1) - AX(Bp_1+Cq_1)}{(AC-B^2)w},$$

$$t_1 = \frac{Q_1(Ap_1+Bq_1)^2 + Y[ABp_1+(2B^2-AC)q_1] + AX(Ap_1+Bq_1)}{(AC-B^2)w},$$

причемъ

$$X = \frac{1}{2}[(A'_x+A'_zp)p_1^2+2(B'_x+B'_zp)p_1q_1+(C'_x+C'_zq)q_1^2]+$$

$$+\frac{\alpha}{2u\log u}[A'_pp_1^3+(A'_q+2B'_p)p_1^2q_1+(2B'_q+C'_p)p_1q_1^2+C'_qq_1^3],$$

$$Y = \frac{1}{2}[(A'_y+A'_zq+\frac{D}{C}A'_q)p_1^2+2(B'_y+B'_zq+\frac{D}{C}B'_q)p_1q_1+$$

$$+(C'_y+C'_zq+\frac{D}{C}C'_q)q_1^2]+\frac{\alpha}{2u\log u}[-\frac{A}{C}A'_qp_1^3+(A'_p-\frac{2B}{C}A'_q-\frac{2A}{C}B'_q)p_1^2q_1+$$

$$+(2B'_p-\frac{4B}{C}B'_q-\frac{A}{C}C'_q)p_1q_1^2+(C'_p-\frac{2B}{C}C'_q)q_1^3].$$

Въ выраженіяхъ X, Y существенно только замѣтить, что они состоятъ изъ двухъ частей: многочлена 2-й степени относительно p_1, q_1 и многочлена 3-й степени отъ тѣхъ же перемѣнныхъ, причемъ коэффиціенты послѣдняго стремятся къ нулю вмѣстѣ съ α.

Поэтому можемъ также написать

$$(AC-B^2)wr_1 = w(Bp_1+Cq_1)^2\frac{1+\log u}{u\log u}+\frac{\alpha g_1}{u\log u}+h_1+\frac{l_1u\log u}{\alpha},$$

$$(AC-B^2)ws_1 = -w(Bp_1+Cq_1)(Ap_1+Bq_1)\frac{1+\log u}{u\log u}+\frac{\alpha g_2}{u\log u}+h_2+\frac{l_2u\log u}{\alpha},$$

$$(AC-B^2)wt_1 = w(Ap_1+Bq_1)^2\frac{1+\log u}{u\log u}+\frac{\alpha g_3}{u\log u}+h_3+\frac{l_3u\log u}{\alpha},$$

гдѣ g_1, g_2, g_3 многочлены не выше четвертой степени относительно p_1, q_1 съ данными коэффиціентами; h_1, h_2, h_3 — не выше третьей степени; l_1, l_2, l_3 многочлены—не выше второй степени относительно p_1, q_1, и всѣ съ данными коэффиціентами (зависящими лишь отъ x, y, z, p, q).

Вычисляя затѣмъ выраженіе

$$K = \frac{1}{2}\left[A\frac{\partial^2w}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2w}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2w}{\partial y^2}\right],$$

найдемъ

$$K=(Ap_1+Bq_1)\left(A\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 p_1}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 p_1}{\partial y^2}\right)+$$
$$+(Bp_1+Cq_1)\left(A\frac{\partial^2 q_1}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 q_1}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 q_1}{\partial y^2}\right)+A(Ar_1^2+2Br_1s_1+Cs_1^2)+$$
$$+2B[Ar_1s_1+B(r_1t_1+s_1^2)+Cs_1t_1]+C(As_1^2+2Bs_1t_1+Ct_1^2)+$$
$$+H_1+H_2+\frac{\alpha}{u\log u}H_3+\alpha\frac{1+\log u}{(u\log u)^2}H_4+\frac{\alpha^2}{(u\log u)^2}H_5,$$

гдѣ H_1 многочленъ первой степени относительно перемѣнныхъ p_1r_1, p_1s_1, p_1t_1, q_1r_1, q_1s_1, q_1t_1; H_2—многочленъ второй степени относительно p_1, q_1; H_3—многочленъ первой степени относительно $p_1^2r_1$, $p_1^2s_1$, $p_1^2t_1$, $p_1q_1r_1$, $p_1q_1s_1$, $p_1q_1t_1$, $q_1^2r_1$, $q_1^2s_1$, $q_1^2t_1$; и наконецъ H_4 и H_5—многочлены четвертой степени относительно p_1 и q_1; причемъ коэффиціенты всѣхъ этихъ многочленовъ извѣстныя опредѣленныя аналитическія функціи перемѣнныхъ p, q, z, x, y.

Дифференцируя уравненіе (102) по x_1, мы находимъ, что

$$A\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 p_1}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 p_1}{\partial y^2}=-\frac{1+\log u+(\log u)^2}{(u\log u)^2}p_1w+\frac{\alpha(1+\log u)}{(u\log u)^2}G_1+$$
$$+\frac{\alpha}{u\log u}G_2+\frac{\alpha^2}{(u\log u)^2}G_3+G_4+\frac{u\log u}{\alpha}G_5,$$

гдѣ G_1, G_2, G_3, G_4, G_5 многочлены съ извѣстными коэффиціентами: G_1 и G_3 многочлены третьей степени, G_5—первой степени относительно p_1 и q_1; G_2 многочленъ первой степени относительно p_1r_1, p_1s_1, p_1t_1, q_1r_1, q_1s_1, q_1t_1, p_1^2, p_1q_1, q_1^2; и наконецъ, G_4 многочленъ первой степени относительно r_1, s_1, t_1, p_1, q_1. Точно также находимъ, что

$$A\frac{\partial^2 q_1}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 q_1}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 q_1}{\partial y^2}=-\frac{1+\log u+(\log u)^2}{(u\log u)^2}q_1w+\frac{\alpha(1+\log u)}{(u\log u)^2}G_{(1)}+$$
$$+\frac{\alpha}{u\log u}G_{(2)}+\frac{\alpha}{(u\log u)^2}G_{(3)}+G_{(4)}+\frac{u\log u}{\alpha}G_{(5)},$$

гдѣ $G_{(1)}$, $G_{(2)}$, $G_{(3)}$, $G_{(4)}$, $G_{(5)}$ многочлены, обладающіе соотвѣтственно тѣми же свойствами, что G_1, G_2, G_3, G_4, G_5.

Слѣдовательно, совершая указанныя алгебраическія дѣйствія, и замѣчая, что $AC-B^2$ имѣетъ извѣстный низшій предѣлъ, отличный отъ нуля, получимъ

$$w^2K=-\frac{1+\log u+(\log u)^2}{(u\log u)^2}w^4+\left(\frac{1+\log u}{u\log u}\right)^2w^4+\alpha\frac{1+\log u}{(u\log u)^2}P_6w+$$
$$+\frac{\alpha^2}{(u\log u)^2}P_8+\frac{1+\log u}{u\log u}P_7+\frac{\alpha}{u\log u}P_7'+\frac{u\log u}{\alpha}P_6'+P_6''+\left(\frac{u\log u}{\alpha}\right)^2P_4,$$

обозначая черезъ P_8 многочленъ 8-й стопени, P_7 и P_7' многочлены 7-й степени, P_6, P_6', P_6'' многочлены 6-й степени, P_4 многочленъ 4-й степени относительно p_1, q_1 съ извѣстными коэффиціентами.

Такимъ образомъ, совокупность членовъ 8-й степени дана выраженіемъ

$$T_8 = \frac{w^4}{u^2 \log u} + \alpha \frac{1+\log u}{(u \log u)^2} P_6 w + \frac{\alpha^2}{u^2 \log u^2} P_8.$$

Но такъ какъ во всякомъ случаѣ $\log u > 1$, то можно установить вполнѣ опредѣленное, достаточно малое число α, чтобъ имѣть (при $|p_1| > 1$, $|q_1| > 1$),

$$T_8 > \frac{1}{2} \frac{w^4}{u^2 \log u}.$$

Но послѣ того, какъ число α опредѣленно, совокупность всѣхъ остальныхъ членовъ выраженія $w^2 K$ превращается въ вполнѣ опредѣленный многочленъ 7-й степени T_7 относительно p_1 и q_1, и элементарная алгебра позволяетъ установить число w_0 такъ, чтобъ при $w > w_0$ имѣть

$$w^2 K > \frac{1}{2} \frac{w^4}{u^2 \log u} + T_7 > 0.$$

w_0 и будетъ, очевидно, тѣмъ высшимъ предѣломъ, котораго максимумъ w не можетъ превзойти.

Точно такимъ же образомъ устанавливается высшій предѣлъ максимума выраженія

$$w' = \alpha^2 e^{2\left(\frac{q+M}{\alpha}\right)} e^{2e^{\frac{q+M}{\alpha}}} [As^2 + 2Bst + Ct^2].$$

Наше разсужденіе *не зависитъ* отъ данныхъ на контурѣ. Но эти данныя естественно приходится использовать, чтобъ установить высшіе предѣлы w и w' на самомъ контурѣ.

Положимъ, что рѣшеніе z дано на окружности C радіуса R, гдѣ, допустимъ для простоты, оно обращается въ *аналитическую* функцію дуги θ. Вводя гармоническую функцію, которая на окружности C принимаетъ тѣ же значенія, мы, очевидно, можемъ ограничиться случаемъ, когда на окружности C z равно нулю.

Дифференцируя уравненіе (3) относительно θ видимъ, какъ въ предыдущей главѣ, что $\frac{\partial z}{\partial \theta} = z_1$ удовлетворяетъ уравненію

$$A \frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 z_1}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 z_1}{\partial y^2} = D_1 = a \left(\frac{\partial z_1}{\partial x}\right)^2 + 2b \frac{\partial z_1}{\partial x} \frac{\partial z_1}{\partial y} + c \left(\frac{\partial z_1}{\partial y}\right)^2 + + 2d \frac{\partial z_1}{\partial x} + 2e \frac{\partial z_1}{\partial y} + g,$$

гдѣ a, b, c, d, e, g суть функціи x, y, z, p, q, высшіе предѣлы модулей которыхъ извѣстны при условіи, что $R \geqq \sqrt{x^2+y^2} > R'$, гдѣ R' произвольное положительное число, которое для опредѣленности можемъ взять равнымъ $\frac{R}{2}$.

Полагая

$$z_1 = -M - \alpha + \alpha \log u,$$

увидимъ, что u удовлетворяетъ уравненію

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{u}\left[A\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + C\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] +$$
$$+ \frac{\alpha}{u}\left[a\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2b\frac{\partial x}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + c\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] + 2d\frac{\partial u}{\partial x} + 2e\frac{\partial u}{\partial y} + g\frac{u}{\alpha} = Q.$$

Выбравши нѣкоторое достаточно малое, но вполнѣ опредѣленное значеніе для α, видимъ далѣе, что внутри кольцеобразной области, заключенной между окружностью C радіуса R и окружностью C' радіуса R',

$$Q > -N,$$

гдѣ N нѣкоторое число, которое опредѣляется, какъ на страницѣ 105.

Слѣдовательно, полагая

$$u' = u + \frac{N}{\mu}\varrho^2,$$

гдѣ μ обозначаетъ минимумъ функціи $2(A+C)$, получимъ

$$A\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u'}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u'}{\partial y^2} > 0,$$

но, какъ показано въ концѣ § 27, мы умѣемъ построить функцію v', которая на окружностяхъ C и C' совпадаетъ съ u' и удовлетворяетъ линейному уравненію

$$A\frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 v'}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 v'}{\partial y^2} = 0,$$

и, такъ какъ, благодаря отрицательной кривизнѣ поверхности $z = v'(x, y)$, касательная плоскость къ этой поверхности во всякой точкѣ, имѣющей проэкцію на окружности C пересѣкаетъ снова поверхность въ точкѣ, имѣющей проэкцію на окружности C или C', то никакого труда не представляетъ установить такое число L, чтобъ на окружности C имѣть

$$-L < \frac{\partial v'}{\partial \varrho} < L.$$

Съ другой стороны, полагая

$$v_1 = u' - v',$$

мы видимъ, что v_1 равно нулю на обѣихъ окружностяхъ C и C' и также, какъ u', удовлетворяетъ неравенству

$$A\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} > 0.$$

Поэтому на окружности C

$$\frac{\partial v_1}{\partial \varrho} \geqq 0,$$

откуда

$$\frac{\partial u'}{\partial \varrho} = \frac{\partial v'}{\partial \varrho} + \frac{\partial v_1}{\partial \varrho} \geqq -L,$$

и наконецъ

$$\frac{\partial z_1}{\partial \varrho} = \frac{\alpha}{e^{\frac{M+\alpha}{\alpha}}} \cdot \frac{\partial u}{\partial \varrho} = \frac{\alpha}{e^{\frac{M+\alpha}{\alpha}}}\left[\frac{\partial u'}{\partial \varrho} - \frac{2RN}{\mu}\right] > -\frac{\alpha}{e^{\frac{M+\alpha}{\alpha}}}\left[L + \frac{2RN}{\mu}\right].$$

Точно такимъ же образомъ найдемъ, что

$$\frac{\partial z_1}{\partial \varrho} < \frac{\alpha}{e^{\frac{M+\alpha}{\alpha}}}\left[L + \frac{2RN}{\mu}\right]$$

на окружности C.

Итакъ высшіе предѣлы вторыхъ производныхъ r, s, t установлены на окружности C, а вмѣстѣ съ ними и высшіе предѣлы w и w'. Откуда выводимъ уже высшіе предѣлы модулей r, s, t и внутри круга C.

Ограниченіе модулей дальнѣйшихъ производныхъ на основанін тѣхъ же принциповъ не представляетъ затрудненій. Приходится опять послѣдовательно при возрастающихъ k, l разсматривать выраженія $w_{k,l}$ (стран. 122), какъ въ предыдущей главѣ, причемъ, такъ же какъ и тамъ, нѣтъ надобности при $k+l \geqq 2$ вводить весьма малое число α, такъ какъ послѣ двухъ дифференцированій уравненія (3) получаются уже *линейныя* уравненія съ извѣстными коэффиціентами, которыя мы уже изслѣдовали въ указанномъ мѣстѣ. Ограниченіе модулей послѣдовательныхъ производныхъ на контурѣ совершается также безпрепятственно, ибо послѣдовательное дифференцированіе относительно угла θ также приводитъ къ уравненіямъ, къ которымъ примѣнимъ способъ вспомогательныхъ функцій на контурѣ. Такимъ образомъ, мы приходимъ къ слѣдующей теоремѣ.

Теорема. *Задача Дирикле возможна для уравненія эллиптическаго типа*

$$Ar + 2Bs + Ct = D, \qquad (D'_z \geqq 0) \qquad (3)$$

гдѣ A, B, C, D аналитическія функціи x, y, p, q (D можетъ также зависѣть отъ z), при предположеніи, что данныя значенія требуемаго рѣшенія на окружности C выражаются аналитической функціей дуги θ, если a priori возможно установить высшій предѣлъ модулей $|z|$, $|p|$ и $|q|$ предполагаемаго рѣшенія.

Въ самомъ дѣлѣ, вводя параметръ α, можемъ всегда написать наше уравненіе въ видѣ

$$r + t + \alpha[(A-1)r + 2Bs + (C-1)t] = \alpha D,$$

такъ что при $\alpha = 0$ будемъ имѣть уравненіе Лапласа, для котораго задача Дирикле возможна.

Такимъ образомъ, наша теорема вытекаетъ изъ основной леммы, доказанной въ предыдущемъ §. Случай не аналитическихъ коэффиціентовъ мы совершенно оставимъ въ сторонѣ, ограничиваясь указаніями уже сдѣланными въ предыдущихъ главахъ по этому поводу. Что же касается данныхъ на контурѣ, то прежде всего слѣдуетъ сдѣлать важное, хотя и очевидное замѣчаніе, что вмѣсто окружности C можетъ быть взятъ произвольный аналитическій контуръ (благодаря конформному преобразованію). Далѣе, столь же очевидно и то, что вмѣсто аналитическихъ данныхъ на контурѣ можно брать и неаналитическія, предполагая, что данныя значенія искомаго рѣшенія на контурѣ представлены функціей дуги имѣющей конечныя производныя первыхъ семи [1]) порядковъ.

Въ этомъ смыслѣ и слѣдуетъ понимать въ дальнѣйшемъ изложеніи выраженія „задача Дирикле для даннаго уравненія всегда возможна“ или „задача Дирикле для даннаго уравненія возможна при какихъ угодно данныхъ на опредѣленномъ контурѣ C“.

Перейдемъ теперь къ важнымъ слѣдствіямъ нашей теоремы.

§ 31. *Пусть во-первыхъ $D = 0$.* Въ такомъ случаѣ функція z не имѣетъ ни максимума, ни минимума, а потому наибольшее свое значеніе она принимаетъ на окружности. Слѣдовательно, высшій предѣлъ $|z|$ извѣстенъ.

Кромѣ того, кривизна поверхности $z = z(x, y)$ не можетъ быть положительна, поэтому всякая касательная къ ней плоскость пересѣкаетъ ограничивающій ея контуръ не менѣе, чѣмъ въ трехъ точкахъ. Элементы аналитической геометріи даютъ возможность немедленно устано-

---

[1]) Число конечныхъ производныхъ можетъ быть во многихъ случаяхъ значительно понижено, но изслѣдованіе этого вопроса выходитъ изъ рамокъ настоящей работы.

вить наибольшій *наклонъ* этихъ плоскостей. Такимъ образомъ высшіе предѣлы $|z|$, $|p|$, $|q|$ устанавливаются безпрепятственно.

Слѣдовательно, *задача Дирикле возможна для уравненія*

$$Ar + 2Bs + Ct = 0,$$

при предположеніи, что A, B, C *какія угодно аналитическія функціи* x, y, p, q и $AC - B^2 > 0$.

2-й случай. D *не равно тождественно нулю. Если* [1]) $A - \frac{B^2}{C} > 0$, $C - \frac{B^2}{A} > 0$, *и съ безконечнымъ возрастаніемъ* p, q, D *возрастаетъ не быстрѣе вторыхъ степеней* p *и* q, *если кромѣ того* $D'_z > 0$, *то задача Дирикле всегда возможна.*

Чтобъ въ этомъ убѣдиться, на основаніи предыдущаго достаточно a priori установить высшіе предѣлы $|z|$, $|p|$, $|q|$.

Начнемъ съ модуля $|z|$. Для этого напишемъ наше уравненіе въ слѣдующемъ видѣ

$$Ar + 2Bs + Ct = D(x, y, 0, 0, 0) + zD'_z(x, y, \theta z, \theta p, \theta q) + \\ + pD'_p(x, y, \theta z, \theta p, \theta q) + qD'_q(x, y, \theta z, \theta p, \theta q),$$

гдѣ θ нѣкоторая правильная дробь.

Отсюда мы заключаемъ, что въ точкѣ, гдѣ $|z|$ достигаетъ максимума

$$|z| . D'_z(x, y, \theta z, \theta p, \theta q) - |D(x, y, 0, 0, 0)| < 0;$$

слѣдовательно максимумъ $|z|$ менѣе $\frac{M}{N}$, обозначая черезъ M максимумъ $|D(x, y, 0, 0, 0)|$ и черезъ N нисшій предѣлъ D'_z при всевозможныхъ значеніяхъ z, p, q.

Перейдемъ теперь къ производнымъ перваго порядка. Наибольшее значеніе $|p|$ и $|q|$ на самой окружности мы опредѣлимъ примѣняя способъ вспомогательныхъ функцій, причемъ знакъ D'_z, конечно, не играетъ роли.

Въ самомъ дѣлѣ, положимъ для опредѣленности, что

$$D = ap^2 + 2bpq + cq^2 + 2dp + 2eq + f,$$

гдѣ a, b, c, d, e, f конечныя функціи x, y, z. Мы можемъ предположить, что на окружности C $z = 0$.

Дѣлая обычную подстановку

$$z = -n - \alpha + \alpha \log u,$$

---

[1]) Такъ что ни при какихъ вещественныхъ конечныхъ или безконечныхъ значеніяхъ p, q *не имѣютъ* мѣста ни одно изъ равенствъ $A - \frac{B^2}{C} = 0$ или $C - \frac{B^2}{A} = 0$.

мы получимъ уравненіе

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{1}{u}\left[A\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+2B\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+C\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]+$$
$$+\frac{\alpha}{u}\left[a\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+2b\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+c\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]+2d\frac{\partial u}{\partial x}+2e\frac{\partial u}{\partial y}+f\frac{u}{\alpha}=Q.$$

Замѣчая, что $A-\frac{B^2}{C}$, также какъ $C-\frac{B^2}{A}$, при всевозможныхъ значеніяхъ p, q имѣютъ опредѣленный нисшій предѣлъ Δ, мы можемъ умножить наше уравненіе на число $\frac{1}{\Delta}$ и такимъ образомъ приравнять этотъ нисшій предѣлъ единицѣ [1]). Положимъ затѣмъ, что

$$|a|<M,\quad |b|<M,\quad |c|<M,$$

гдѣ M опредѣленное число, такъ какъ a, b, c зависятъ только отъ x, y, z; и пусть, наконецъ,

$$\alpha=\frac{1}{12M}.$$

Выраженіе Q, въ которомъ $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ разсматриваются какъ координаты точки, представляетъ въ такомъ случаѣ первую часть уравненія *эллипсиса*.

Въ самомъ дѣлѣ, полагая

$$A_1=A+\alpha a,\quad B_1=B+\alpha b,\quad C_1=C+\alpha c,$$

видимъ что

$$|A_1-A|<\frac{1}{12},\quad |B_1-B|<\frac{1}{12},\quad |C_1-C|<\frac{1}{12};$$

а потому

$$|(A_1C_1-B_1^2)-(AC-B^2)|<\frac{|A|+|C|+2|B|}{12}+\frac{1}{72},$$

или

$$\left|\frac{A_1C_1-B_1^2}{AC-B^2}-1\right|<\frac{|A|+|C|+2|B|}{12(AC-B^2)}+\frac{1}{72(AC-B^2)}<\frac{1}{3}+\frac{1}{72}<\frac{2}{5}.$$

Слѣдовательно,

$$\frac{7}{5}(AC-B^2)>A_1C_1-B_1^2>\frac{3}{5}(AC-B^2).$$

---

[1]) Очевидно тогда, что A, C и $AC-B^2$ будутъ также больше единицы.

Какъ на страницѣ 105, находимъ такимъ образомъ, что

$$-Q<\frac{A_1e^2-2B_1ed+C_1d^2}{A_1C_1-B_1^2}+\left|f\frac{u}{\alpha}\right|<2\frac{Ae^2+|2Bed|+Cd^2}{AC-B^2}+\left|f\frac{u}{\alpha}\right|<$$
$$<2(|e|+|d|)^2+\left|f\frac{u}{\alpha}\right|<N,$$

гдѣ N вполнѣ опредѣленное положительное число.

Дальнѣйшая часть разсужденія не представляетъ ничего новаго, а потому на ней нѣтъ надобности останавливаться.

Итакъ высшіе предѣлы $|p|$ и $|q|$ на окружности C намъ извѣстны.

Остается установить высшіе предѣлы $|p|$ и $|q|$ внутри круга C. Для этого разсмотримъ значеніе функціи

$$w=p^2+q^2$$

въ точкѣ M, гдѣ она достигаетъ максимума. Прежде всего замѣтимъ, что можно предположить, что въ этой точкѣ $p=0$, такъ какъ w остается неизмѣнной при прямоугольномъ преобразованіи координатъ x, y, такъ же какъ и форма уравненія (3). Слѣдовательно, въ точкѣ M имѣемъ

$$p=s=t=0,\quad q\left(A\frac{\partial^2q}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2q}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2q}{\partial y^2}\right)\leqq 0.$$

Но съ другой стороны, если, раздѣливши уравненіе (3) на A, продифференцируемъ его относительно y, то благодаря условіямъ $s=t=0$, найдемъ

$$A\frac{\partial^2q}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2q}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2q}{\partial y^2}=A\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{D}{A}\right)q+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{D}{A}\right)\right].$$

Слѣдовательно,

$$q\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{D}{A}\right)\cdot q+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{D}{A}\right)\right]\leqq 0. \tag{103}$$

Ограничиваясь для простоты общимъ случаемъ, когда порядокъ возрастанія D'_z при q безконечномъ не ниже порядка возрастанія D'_y, видимъ, что, еслибъ $|q|$ превышалъ нѣкоторый опредѣленный предѣлъ L, то неравенство (103) не могло бы имѣть мѣсто. Поэтому L^2 есть высшій предѣлъ максимума $w=p^2+q^2$, и наша теорема такимъ образомъ доказана.

§ 32. Наиболѣе интересный случай, когда $D=0$, къ которому примѣнима наша метода интегрированія, представляетъ уравненіе *минимальныхъ* поверхностей

$$(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t=0.$$

Для фактическаго нахожденія рѣшенія задачи Дирикле или Плато, существованіе котораго вытекаетъ изъ предыдущаго §, пишемъ наше уравненіе въ видѣ

$$(1+\alpha q^2)\,r - 2\alpha pqs + (1+\alpha p^2)\,t = 0.$$

При α достаточно маломъ, рѣшеніе z представляется въ видѣ сходящагося ряда Тэйлора

$$z(x,\ y,\ \alpha) = z_0 + \alpha z_1(x,\ y) + \frac{\alpha^2}{2!} z_2(x,\ y) + \ldots \frac{\alpha^n}{n!} z_n(x,\ y) + \ldots,$$

гдѣ z_0 есть гармоническая функція принимающая на окружности C тѣ же значенія, что z, а z_1, $z_2 \ldots z_n$, обращаясь въ нуль на окружности, опредѣляются послѣдовательно изъ системы уравненій Пуассона

$$\begin{aligned}
&r_1 + t_1 = -[q_0^2 r_0 - 2p_0 q_0 s_0 + p_0^2 t_0]\\
&r_2 + t_2 = -2[q_0^2 r_1 - 2p_0 q_0 s_1 + p_0^2 t_1 + 2(q_0 r_0 - p_0 s_0) q_1 + 2(p_0 t_0 - q_0 s_0) p_1]\\
&\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&r_n + t_n = -n[q_0^2 r_n - 2p_0 q_0 s_n + p_0^2 t_n + 2(n-1)(q_0 r_{n-1} - p_0 s_{n-1}) q_1 +\\
&\qquad\qquad + 2(n-1)(p_0 t_{n-1} - p_0 s_{n-1}) p_1 + \ldots]\\
&\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

гдѣ p_n, q_n, r_n, s_n, t_n производныя z_n первыхъ двухъ порядковъ.

Опредѣливши такимъ образомъ коэффиціенты z_n, строку Тэйлора слѣдуетъ превратить въ строку Миттагъ-Леффлера, которая будетъ сходиться при $\alpha = 1$ и при этомъ значеніи α представитъ искомое рѣшеніе.

Уравненіе минимальныхъ поверхностей опредѣляетъ, какъ извѣстно, функцію, которая обращаетъ въ минимумъ интегралъ

$$I = \iint \sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy.$$

Если вообще разсмотримъ совокупность значеній двойного интеграла внутри контура C

$$I = \iint f(p,\ q)\,dx\,dy,$$

гдѣ $f''_{p^2} f''_{q^2} - (f''_{pq})^2 > 0$, (такъ что функція $f(p,\ q)$ имѣетъ абсолютный минимумъ), соотвѣтствующихъ всевозможнымъ функціямъ, равнымъ между собой на самомъ контурѣ C, то эта совокупность имѣетъ нисшій предѣлъ, который дѣйствительно достигается функціей, удовлетворяющей уравненію Лагранжа

$$\frac{\partial^2 f}{\partial p^2} r + \frac{\partial^2 f}{\partial p \partial q} s + \frac{\partial^2 f}{\partial q^2} t = 0,$$

если таковая существуетъ.

Это уравненіе Лагранжа относится также къ типу уравненій, для которыхъ нами доказана возможность задачи Дирикле.

Разрѣшивши такимъ образомъ задачу варіаціоннаго исчисленія для двойныхъ интеграловъ, я считаю нужнымъ указать на имѣющуюся связь, между предложенной здѣсь методой и методой Hilbert'a.

Какъ извѣстно, нѣмецкій ученый разсматриваетъ безконечный рядъ функцій, которыхъ значенія будучи подставлены въ подинтегральное выраженіе, могутъ сколь угодно приблизить соотвѣтствующій интегралъ къ его низшему предѣлу. Еслибъ удалось показать, что этотъ рядъ функцій имѣетъ предѣлъ (какъ и его производныя), то этотъ предѣлъ былъ бы именно рѣшеніемъ задачи варіаціоннаго исчисленія. Въ весьма рѣдкихъ случаяхъ, гдѣ доказательство съ большимъ трудомъ доведено было до конца, основная мысль его заключалась въ томъ, чтобъ выбрать функціи, приближающія интегралъ къ его низшему предѣлу такъ, чтобъ имѣть возможность установить высшіе предѣлы модулей послѣдовательныхъ производныхъ этихъ приближенныхъ функцій [1]). Относительно этихъ приближенныхъ функцій дѣлаются для этой цѣли различныя предположенія. Наша метода, если ограничить ея приложеніе варіаціоннымъ исчисленіемъ, указываетъ два опредѣленныхъ и весьма близкихъ между собой вида предположеній: наши приближенныя функціи либо принимаютъ на контурѣ тѣ же значенія, что искомое рѣшеніе, и обращаютъ въ минимумъ интегралъ отличающійся отъ даннаго значеніями нѣкотораго параметра, либо — обращаютъ въ минимумъ тотъ же интегралъ, но на контурѣ принимаютъ значенія, являющіяся функціями нѣкотораго параметра.

Примѣръ случая, когда $D \gtrless 0$, даетъ намъ слѣдующая геометрическая задача:

Провести черезъ данный контуръ поверхность, обладающую свойствомъ, что высота z каждой ея точки умноженная на косинусъ угла между нормалью и вертикальной осью равняется кривизнѣ $\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}$ въ этой точкѣ.

Составляя уравненіе, получимъ немедленно

$$(1 + q^2)\, r - 2pqs + (1 + p^2)\, t = z\,(1 + p^2 + q^2). \qquad (104)$$

Полученное уравненіе допускаетъ рѣшеніе задачи Дирикле на основаніи теоремы предыдущаго §.

Разсмотримъ также уравненіе

$$(1 + q^2)\, r - 2pqs + (1 + p^2)\, t = p^2 + q^2. \qquad (105)$$

Оно не вполнѣ удовлетворяетъ условіямъ только что названной теоремы, такъ какъ здѣсь $D'_z = 0$. Тѣмъ не менѣе и для этого уравненія

[1]) Lebesgue „Sur le probleme de Dirichlet". Rendiconti del Circolo Mathematico. 1907. Hadamard „Sur quelques questions du calcul des variations". Ann. de l'Ecole Normale Sup. 1907.

задача Дирикле всегда возможна. Въ самомъ дѣлѣ, условіе $D'_z > 0$ во всей цѣпи нашихъ предыдущихъ умозаключеній играло существенную роль лишь *при установленіи высшаго предѣла максимума внутри контура модуля* $|z|$ *и* p^2+q^2. Но въ данномъ случаѣ легко видѣть, что ни z, ни p, ни q не *могутъ вовсе имѣть ни максимума, ни минимума*. Мы должны однако замѣтить, что при условіи $D'_z = 0$ (вмѣсто $D'_z > 0$) наша теорема *вообще* перестаетъ быть правильной. Напримѣръ, для уравненія

$$(1+q^2)\,r - 2pqs + (1+p^2)\,t = 1+p^2+q^2,$$

которое только на одну единицу отличается отъ уравненія (104), и лишь на множитель z во второй части—отъ уравненія (105), задача Дирикле уже не всегда возможна.

Такимъ образомъ, *если* $D'_z = 0$, (при соблюденіи прочихъ условій) нельзя утверждать, что задача Дирикле возможна. Въ случаѣ, когда $A = C = 1$, $B = 0$, (Глава V), мы видѣли, что для этого достаточно, чтобъ задача была возможна хоть при какихъ нибудь опредѣленныхъ данныхъ на разсматриваемомъ контурѣ. *Вѣроятно, что этого достаточно и въ общемъ случаѣ.* Въ частности, это обобщеніе легко можетъ быть доказано при одномъ изъ двухъ предположеній: 1-е, *если* D *не содержитъ членовъ второй степени относительно* p, q, или 2-е, *если коэффиціенты даннаго уравненія не зависятъ отъ* x, y.

§ 33. Теперь намъ остается еще сказать нѣсколько словъ объ общемъ уравненіи эллиптическаго типа

$$F(r,\ s,\ t,\ p,\ q,\ x,\ y,\ z) = 0, \qquad (F'_z \geqq 0) \qquad (1)$$

которое, по опредѣленію, обладаетъ свойствомъ, что всякое рѣшеніе его удовлетворяетъ неравенству $4F'_rF'_t - (F'_s)^2 > 0$.

Параметръ α можетъ быть введенъ различными способами. Если мы ограничимся случаемъ, когда извѣстно существованіе одного какого нибудь рѣшенія z_0 уравненія (1), которое удовлетворяетъ условіямъ основной леммы и на окружности C обращается въ $\varphi_0(\theta)$, то параметръ α удобно ввести слѣдующимъ образомъ. Пусть H будетъ гармоническая функція, которая на окружности C равна $\varphi(\theta) - \varphi_0(\theta)$, и положимъ

$$z = \alpha H + u;$$

тогда функція u будетъ удовлетворять уравненію эллиптическаго типа

$$F\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x} + \alpha\frac{\partial^2 H}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + \alpha\frac{\partial^2 H}{\partial x\partial y},\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \alpha\frac{\partial^2 H}{\partial x^2},\ \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha\frac{\partial H}{\partial x},\right.$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial y} + \alpha\frac{\partial H}{\partial y},\ u+H,\ x,\ y\right) = 0.$$

Рѣшенію u, которое обращается въ нуль на окружности C, будетъ соотвѣтствовать *рѣшеніе z даннаго уравненія, которое на контурѣ равно*

$$\varphi_0(\theta) + \alpha[\varphi(\theta) - \varphi_0(\theta)].$$

Покажемъ, что *задача Дирикле для уравненія (1) возможна, если на основаніи данныхъ на контурѣ мы умѣемъ установить высшій предѣлъ модулей предполагаемаго рѣшенія и его частныхъ производныхъ первыхъ двухъ порядковъ.*

Обозначимъ черезъ M этотъ высшій предѣлъ.

Въ самомъ дѣлѣ, дифференцируемъ наше уравненіе по x. Мы получимъ

$$F'_r\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + F'_s\frac{\partial^2 p}{\partial x\partial y} + F'_t\frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + F'_p\frac{\partial p}{\partial x} + F'_q\frac{\partial p}{\partial y} + F'_z p + F'_x = 0.$$

Но разсматривая p, какъ неизвѣстную функцію, мы видимъ, что полученное уравненіе относится къ типу

$$A\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 p}{\partial x\partial y} + C\frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = D,$$

гдѣ A, B, C, D, зависятъ отъ x, y, p, $\frac{\partial p}{\partial x}$, $\frac{\partial p}{\partial y}$ и q (такъ какъ t выражается также при помощи этихъ шести величинъ изъ уравненія (1), въ которомъ $F'_t \gtrless 0$).

Дифференцируя еще разъ относительно x, получимъ

$$A\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 r}{\partial x\partial y} + C\frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = a\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + 2b\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial y} + c\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2 + 2d\frac{\partial r}{\partial x} + 2e\frac{\partial r}{\partial y} + f$$

гдѣ A, B, C, a, b, c, d, e, f суть извѣстныя аналитическія функціи x, y, z, p, q, r, s.

Къ этому уравненію безъ измѣненій примѣнимъ анализъ уравненія (101) и такимъ образомъ можетъ быть установленъ высшій предѣлъ максимума выраженія

$$w = \alpha^2 e^{2\frac{r+M}{\alpha}} e^{2e\frac{r+M}{\alpha}}\left[A\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial y} + C\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2\right],$$

гдѣ α есть нѣкоторое опредѣленное число.

Точно также находится высшій предѣлъ максимума

$$w_1 = \alpha^2 e^{2\frac{t+M}{\alpha}} e^{2e\frac{t+M}{\alpha}}\left[A\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial t}{\partial x}\cdot\frac{\partial t}{\partial y} + C\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^2\right].$$

Продолжая послѣдовательное дифференцированіе по x или по y, мы постоянно будемъ приходить къ уравненіямъ, къ которымъ примѣнимъ *способъ вспомогательныхъ функцій внутри контура*, такъ что, зная высшій предѣлъ модулей предыдущихъ производныхъ, можемъ всегда опредѣлить высшій предѣлъ максимума опредѣленной квадратичной формы изъ двухъ производныхъ слѣдующаго порядка. Остается лишь установить высшій предѣлъ модулей послѣдовательныхъ производныхъ, начиная съ третьей, на контурѣ.

Для этого дифференцируемъ два раза наше уравненіе относительно θ. Получаемъ, обозначая $\frac{\partial^2 z}{\partial\theta^2}$ черезъ z_2

$$A'\frac{\partial^2 z_2}{\partial x^2}+2B'\frac{\partial^2 z_2}{\partial x\partial y}+C'\frac{\partial^2 z^2}{\partial x^2}=a_1\left(\frac{\partial z_2}{\partial x}\right)^2+2b_1\left(\frac{\partial z_2}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z_2}{\partial y}\right)+c_1\left(\frac{\partial z_2}{\partial y}\right)^2+$$
$$+2d_1\frac{\partial z_2}{\partial x}+2e_1\frac{\partial z_2}{\partial y}+f_1,$$

гдѣ A', B', C', a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, f_1 суть опредѣленныя конечныя функціи (x, y, z, p, q, r, s, t) внутри кольцеобразной области заключенной между окружностью C и концентрической къ ней окружностью C_1 радіуса $R_1=\frac{R}{2}$, причемъ $A'C'-B'^2>0$. Остается лишь повторить дословно разсужденіе страницы 146.

Такимъ образомъ, замѣчая, что дальнѣйше дифференцированіе по θ приводитъ насъ къ аналогичнымъ уравненіямъ, къ которымъ примѣнимъ *способъ вспомогательныхъ функцій на контурѣ*, мы можемъ считать высказанную теорему доказанной. Приложимъ ее къ разрѣшенію задачи Дирикле въ случаѣ уравненія поверхностей постоянной положительной кривизны, т. е. накладывающихся на шаръ.

§ 34. Для этого покажемъ сначала, что *задача Дирикле для уравненія*

$$rt-s^2=k^2, \tag{106}$$

гдѣ k постоянная величина, возможна и допускаетъ два рѣшенія при какихъ угодно данныхъ на окружности C произвольнаго радіуса R.

Уравненіе

$$rt-s^2=k^2$$

допускаетъ 2 очевидныхъ рѣшенія

$$z_1=\frac{k}{2}(x^2+y^2),\quad z_2=-\frac{k}{2}(x^2+y^2),$$

не имѣющихъ конечныхъ особенностей.

Отсюда мы заключаемъ, что модуль рѣшенія этого уравненія, которое на окружности C равно $\varphi(\theta)$, имѣетъ высшій предѣлъ равный $|\varphi(\theta)| + \frac{1}{2}kR^2$.

Кромѣ того, такъ какъ кривизна поверхности, удовлетворяющей уравненію (106), не мѣняетъ знака, то мы должны допустить, что *выпуклость* ея направлена цѣликомъ либо внизъ, либо вверхъ. Остановимся для опредѣленности на первомъ предположеніи; такъ что $r > 0$, $t > 0$ и на контурѣ $\frac{\partial z}{\partial \varrho} > -\frac{\partial^2 z}{R\partial\theta^2}$. Не трудно установить и высшій предѣлъ $\frac{\partial z}{\partial \varrho}$ въ какой нибудь точкѣ M контура. Для этого достаточно разсѣчь цилиндръ, имѣющій основаніемъ кругъ C, плоскостью, проходящей черезъ касательную къ данному контуру въ точкѣ M такимъ образомъ, чтобъ эллипсисъ E сѣченія былъ весь ниже даннаго контура. Въ такомъ случаѣ поверхность Σ, удовлетворяющая уравненію (106), проходящая черезъ E и которой выпуклость направлена внизъ, будетъ вся, за исключеніемъ точки M, ниже разсматриваемой нами поверхности, а потому *наклонъ* $\left(\frac{\partial z'}{\partial \varrho}\right)^2 + \left(\frac{\partial z'}{\varrho\partial\theta}\right)^2$ касательной плоскости въ точкѣ M поверхности $\sum$ *больше наклона* $\left(\frac{\partial z}{\partial \varrho}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\varrho\partial\theta}\right)^2$ разсматриваемой поверхности въ той же точкѣ. Слѣдовательно,

$$\frac{\partial z}{\partial \varrho} < \frac{\partial z'}{\partial \varrho},$$

причемъ поверхность $\sum$, очевидно, имѣетъ уравненіемъ

$$z' = \frac{k}{2}(x^2 + y^2 - R^2) + ax + by + d,$$

если плоскость эллипсиса E представлена уравненіемъ

$$Z = ax + by + d.$$

Далѣе, такъ какъ ни r, ни t не можетъ быть равно нулю, слѣдовательно, $|p|$ и $|q|$ не имѣютъ максимумовъ внутри круга.

Итакъ намъ уже извѣстны высшіе предѣлы модулей первыхъ производныхъ.

Для установленія высшаго предѣла вторыхъ производныхъ, дифференцируемъ уравненіе (106) по x. Получимъ

$$r\frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + t\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - 2s\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} = 0,$$

и такъ какъ $rt - s^2 > 0$, заключаемъ, что $\left|\frac{\partial p}{\partial x}\right| = |r|$, $\left|\frac{\partial p}{\partial y}\right| = |s|$ не имѣютъ максимумовъ внутри контура. Съ другой стороны въ полярныхъ координатахъ наше уравненіе получаетъ форму

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \varrho^2}\left[\frac{\partial^2 z}{\varrho^2 \partial \theta^2}+\frac{\partial z}{\varrho \partial \varrho}\right]-\left[\frac{\partial^2 z}{\varrho \partial \varrho \partial \theta}-\frac{\partial z}{\varrho^2 \partial \theta}\right]^2 = k^2 ; \qquad (106')$$

дифференцируя его по θ и обозначая $\frac{\partial z}{\partial \theta}$ черезъ z_1, получимъ

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial \varrho^2}\left[\frac{\partial^2 z}{\varrho^2 \partial \theta^2}+\frac{\partial z}{\varrho \partial \varrho}\right]+\left[\frac{\partial^2 z_1}{\varrho^2 \partial \theta^2}+\frac{\partial z_1}{\varrho \partial \varrho}\right]\frac{\partial^2 z}{\partial \varrho^2}-2\left[\frac{\partial^2 z_1}{\varrho \partial \varrho \partial \theta}-\frac{\partial^2 z_1}{\varrho^2 \partial \theta}\right]\left[\frac{\partial^2 z}{\varrho \partial \varrho \partial \theta}-\frac{\partial z}{\varrho^2 \partial \theta}\right]=0,$$

откуда мы заключаемъ, что кривизна поверхности z_1 не положительна

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z_1}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z_1}{\partial x \partial y}\right)^2 = \frac{\partial^2 z_1}{\partial \varrho^2}\left[\frac{\partial^2 z_1}{\varrho^2 \partial \theta^2}+\frac{\partial z_1}{\varrho \partial \varrho}\right]-\left[\frac{\partial^2 z_1}{\varrho \partial \varrho \partial \theta}-\frac{\partial z_1}{\varrho^2 \partial \theta}\right]^2 \leqq 0 ,$$

а потому на контурѣ C высшій предѣлъ $\left|\frac{\partial z_1}{\partial \varrho}\right| = \left|\frac{\partial^2 z}{\varrho \partial \varrho \partial \theta}\right|$ зависитъ только отъ высшаго предѣла $\left|\frac{\partial^2 z_1}{\partial \theta^2}\right| = |\varphi'''(\theta)|$.

Однако отсюда нельзя непосредственно вывести высшій предѣлъ $\frac{\partial^2 z}{\partial \varrho^2}$. Мы сумѣемъ его опредѣлить изъ уравненія (106'), если найдемъ нисшій предѣлъ положительнаго выраженія $\frac{\partial^2 z}{\varrho^2 \partial \theta^2}+\frac{\partial z}{\varrho \partial \varrho}$. Положимъ, что мы хотимъ найти этотъ нисшій предѣлъ въ точкѣ M ($\theta = 0$). Обозначимъ черезъ φ_0, φ_0', φ_0'', φ_0''' значенія z и его производныхъ первыхъ трехъ порядковъ по θ и разсмотримъ поверхность 2-го порядка S, имѣющую уравненіе

$$z_0 = \left(\frac{d-\varphi_0-\varphi_0''}{R^2}\right)x^2-\frac{\varphi_0'+\varphi_0'''}{3R^2}xy+\left(\frac{2\varphi_0+\varphi_0''-2d}{R}\right)x+\frac{4\varphi_0'+\varphi_0'''}{3R}y+$$
$$+\alpha(x^2+y^2-R^2)+d.$$

Полагая, что α и d связаны зависимостью

$$4\alpha(d-\varphi_0-\varphi_0''+\alpha R^2)-\left(\frac{\varphi_0'+\varphi_0'''}{3}\right)^2 = k^2 R^4,$$

видимъ, что z_0 удовлетворяетъ уравненію (106). Кромѣ того, легко провѣрить, что въ точкѣ M

$$z_0 = \varphi_0, \quad \frac{\partial z_0}{\partial \theta} = \varphi_0', \quad \frac{\partial^2 z_0}{\partial \theta^2} = \varphi_0'', \quad \frac{\partial^3 z_0}{\partial \theta^3} = \varphi_0'''.$$

Но выбирая число d достаточно большимъ, мы можемъ достигнуть того, чтобъ во всѣхъ остальныхъ точкахъ контура имѣть $z_0 > \varphi$. Въ самомъ дѣлѣ, во всякой точкѣ контура

$$\delta = \varphi - z_0 = \varphi + (\varphi_0 + \varphi_0'')\cos^2\theta + \frac{\varphi_0' + \varphi_0'''}{3}\cos\theta\sin\theta - (2\varphi_0 + \varphi_0'')\cos\theta - \\ - \frac{4\varphi_0' + \varphi_0'''}{3}\sin\theta - d(1-\cos\theta)^2,$$

и такъ какъ

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\mu\theta^4}{24}, \quad \sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{6} + \frac{\mu'\theta^5}{120},$$

$$\varphi(\theta) = \varphi_0 + \varphi_0'\theta + \frac{\varphi_0''}{2}\theta^2 + \frac{\varphi_0'''}{6}\theta^3 + \frac{F}{24}\theta^4,$$

гдѣ $|\mu| < 1$, $|\mu'| < 1$ и $|F|$ менѣе высшаго предѣла *четвертыхъ* производныхъ $\varphi(\theta)$, то

$$\delta = \varphi_0'\theta + \frac{\varphi_0''}{2}\theta^2 + \frac{\varphi_0'''}{6}\theta^3 - \varphi_0'\sin\theta\cos\theta + (\cos\theta - 1)\left(\varphi_0'' + \frac{4\varphi_0' + \varphi_0'''}{3}\sin\theta\right) + \frac{F}{24}\theta^4 + \\ + (\cos\theta - 1)^2(\varphi_0 + \varphi_0'' - d) = H\theta^4 + (\cos\theta - 1)^2(\varphi_0 + \varphi_0'' - d),$$

причемъ высшій предѣлъ H извѣстенъ. Но, если $|\theta| < \pi$, то

$$\frac{\theta^4}{(\cos\theta - 1)^2} < \frac{\pi^4}{4}.$$

Слѣдовательно, достаточно взять $d > \frac{H\pi^4}{4} + \varphi_0 + \varphi_0''$, для того, чтобъ имѣть $\delta = \varphi - z_0 < 0$, т. е. $z_0 > \varphi$. Но въ такомъ случаѣ, въ точкѣ M $\frac{\partial z_0}{\partial\varrho} < \frac{\partial z}{\partial\varrho}$, и *писшимъ предѣломъ* $\frac{\partial^2 z}{\varrho^2\partial\theta^2} + \frac{\partial z}{\varrho\partial\varrho}$ будетъ

$$\frac{\partial^2 z_0}{\varrho^2\partial\theta^2} + \frac{\partial z_0}{\varrho\partial\varrho} = 2\alpha.$$

Итакъ высшіе предѣлы вторыхъ производныхъ z найдены, а потому рѣшеніе z, изображаемое поверхностью, выпуклость котораго направлена *внизъ*, существуетъ. Точно такимъ же образомъ убѣждаемся въ существованіи второго рѣшенія. Что и требовалось доказать.

Приступимъ теперь къ интегрированію уравненія поверхностей *постоянной* кривизны

$$rt - s^2 = k^2(1 + p^2 + q^2)^2. \qquad (107)$$

Покажемъ, что *при всякихъ данныхъ на окружности C можно установить число P такъ, чтобъ задача Дирикле для уравненія (107) была возможна и допускала бы два рѣшенія, если* $k < \frac{1}{P}$.

Пусть u будетъ рѣшеніемъ уравненія

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2=1,$$

которое на окружности C принимаетъ тѣ же значенія, что z. На основаніи предыдущаго, мы умѣемъ установить высшій предѣлъ P выраженія $1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$; я говорю, что если $k<\frac{1}{P}$, то задача Дирикле для уравненія (107) при тѣхъ же данныхъ на контурѣ возможна.

Въ самомъ дѣлѣ, при этомъ условіи,

$$\frac{rt-s^2}{(1+p^2+q^2)^2}<\frac{\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2}{\left[1+\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]^2}.$$

Предполагая, что выпуклости обѣихъ поверхностей направлены въ одну и ту же сторону, скажемъ, внизъ ($r>0$), мы увидимъ, что разность $z-u=\delta$, будучи равной нулю на контурѣ, не можетъ быть *отрицательной*, такъ какъ δ, очевидно, удовлетворяетъ неравенству

$$A\frac{\partial^2\delta}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2\delta}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2\delta}{\partial y^2}+D\frac{\partial\delta}{\partial x}+E\frac{\partial\delta}{\partial y}<0,$$

гдѣ $A>0$ и $AC-B^2>0$.

Слѣдовательно $z>u$. А потому *на контурѣ наклонъ* p^2+q^2 поверхности z меньше наклона поверхности u. Внутри контура наклонъ, разумѣется, не имѣетъ максимума. Остается лишь разсмотрѣть вторыя производныя. Покажемъ, что r и t также не имѣютъ максимума внутри контура. Пусть, напримѣръ, въ точкѣ M r достигалъ бы максимума. Тогда мы имѣли бы

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{\partial r}{\partial y}=0.$$

Дифференцируя два раза по x уравненіе (107), получимъ

$$r\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}+t\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}-2s\frac{\partial^2 r}{\partial x\partial y}=4k^2[pr+qs]^2+2k^2[1+p^2+q^2][r^2+s^2]>0.$$

Слѣдовательно, максимумъ невозможенъ.

Покажемъ теперь, что s не можетъ имѣть ни положительнаго максимума, ни отрицательнаго минимума внутри контура.

Для этого продифференцируемъ наше уравненіе (107) по x и по y. Получимъ

$$\begin{aligned} r\frac{\partial t}{\partial x}+t\frac{\partial r}{\partial x}-2s\frac{\partial s}{\partial x}&=2k^2(1+p^2+q^2)(pr+qs),\\ r\frac{\partial t}{\partial y}+t\frac{\partial r}{\partial y}-2s\frac{\partial s}{\partial y}&=2k^2(1+p^2+q^2)(ps+qt). \end{aligned} \tag{108}$$

Слѣдовательно, въ точкѣ, гдѣ s максимумъ или минимумъ,

$$\begin{aligned} &\frac{\partial s}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial r}{\partial x}=\frac{2k^2}{t}\cdot(1+p^2+q^2)(pr+qs),\quad \frac{\partial t}{\partial x}=0,\\ &\frac{\partial s}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial t}{\partial y}=\frac{2k^2}{r}\cdot(1+p^2+q^2)(ps+qt),\quad \frac{\partial r}{\partial y}=0. \end{aligned}$$

Дифференцируя еще разъ первое изъ уравненій (108) по y, получимъ

$$\begin{aligned} r\frac{\partial^2 s}{\partial y^2}+t\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}-2s\frac{\partial^2 s}{\partial x\partial y}&=-\frac{4k^4}{rt}(1+p^2+q^2)^2(pr+qs)(ps+qt)+\\ &+4k^2(ps+qt)(pr+qs)+2k^2(1+p^2+q^2)(rs+st)=\\ &=2k^2s\left[\frac{2(ps+qt)(pr+qs).s}{rt}+(p^2+q^2)(r+t)+r+t\right]=\\ &=\frac{2k^2s}{rt}[(2rs^2+r^2t+rt^2)p^2+2(rst+s^3)pq+(2ts^2+r^2t+rt^2)q^2]+\\ &+2k^2(r+t)s=Ls, \end{aligned}$$

гдѣ L безусловно положительное число.

Слѣдовательно s не можетъ имѣть положительнаго максимума и отрицательнаго минимума.

Но допустимъ, что $s=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ достигаетъ своего наибольшаго значенія въ точкѣ M контура, въ которой можно положить $\theta=0$. Тогда въ этой точкѣ

$$s=\frac{\partial^2 z}{\rho\partial\rho\partial\theta}-\frac{\partial z}{\rho^2\partial\theta},$$

кромѣ того

$$\frac{\partial s}{\partial\rho}=\frac{\partial^3 z}{\rho\partial\rho^2\partial\theta}-2\frac{\partial^2 z}{\rho^2\partial\rho\partial\theta}+2\frac{\partial z}{\rho^3\partial\theta}>0$$

и

$$\frac{\partial s}{\partial\theta}=\frac{\partial^3 z}{\rho\partial\rho\partial\theta^2}-2\frac{\partial^2 z}{\rho^2\partial\theta^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial\rho^2}-\frac{\partial z}{\rho\partial\rho}=0.$$

Съ другой стороны, дифференцируя уравненіе (107) по θ, находимъ

$$\frac{\partial^3 z}{\partial\rho^2\partial\theta}\left[\frac{\partial^2 z}{\rho^2\partial\theta^2}+\frac{\partial z}{\rho\partial\rho}\right]+\frac{\partial^2 z}{\partial\rho^2}\left[\frac{\partial^3 z}{\rho^2\partial\theta^3}+\frac{\partial^2 z}{\rho\partial\rho\partial\theta}\right]-2\left[\frac{\partial^3 z}{\rho\partial\rho\partial\theta^2}-\frac{\partial^2 z}{\rho^2\partial\theta^2}\right]\left[\frac{\partial^2 z}{\rho\partial\rho\partial\theta}-\frac{\partial z}{\rho^2\partial\theta}\right]=$$
$$=2k^2\left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial\rho}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\rho\partial\theta}\right)^2\right]\left[\frac{\partial^2 z}{\partial\rho\partial\theta}\cdot\frac{\partial z}{\partial\rho}+\frac{\partial^2 z}{\rho^2\partial\theta^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial\theta}\right]. \qquad (109)$$

При s достаточно большомъ вторая часть равенства положительна, но не больше $N\frac{\partial^2 z}{\partial\rho\partial\theta}$, гдѣ N опредѣленное число. Напротивъ, первая часть равенства въ разсматриваемой точкѣ во всякомъ случаѣ больше, чѣмъ

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\rho^2}\left[3\,\frac{\partial^2 z}{\rho\partial\rho\partial\theta}+\frac{\partial^3 z}{\rho^2\partial\theta^3}-2\,\frac{\partial z}{\rho^2\partial\theta}\right].$$

Но изъ уравненія (107) мы можемъ установить положительное число A такъ, чтобъ имѣть въ точкѣ M

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\rho^2}>A\left(\frac{\partial^2 z}{\rho\partial\rho\partial\theta}-\frac{\partial z}{\rho^2\partial\theta}\right)^2.$$

Слѣдовательно, $\frac{\partial^2 z}{\rho\partial\rho\partial\theta}$, а также s, не можетъ быть выше нѣкотораго предѣла, такъ какъ при возрастаніи s *первая часть равенства (109) возрастаетъ, какъ третья степень* $\frac{\partial^2 z}{\rho\partial\rho\partial\theta}$.

Высшій предѣлъ r и t на контурѣ опредѣляется при помощи s. Въ самомъ дѣлѣ, легко установить низшій предѣлъ $\frac{\partial^2 z}{\rho^2\partial\theta^2}+\frac{\partial z}{\rho\partial\rho}$, для этого достаточно разсмотрѣть то же выраженіе для функціи v, которая удовлетворяетъ уравненію $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right)^2=k^2$, и принимаетъ на контурѣ тѣ же значенія что z. Въ каждой данной точкѣ контура мы найдемъ положительное значеніе λ, удовлетворяющее условію $\frac{\partial^2 v}{\rho^2\partial\theta^2}+\frac{\partial v}{\rho\partial\rho}>\lambda>0$, которое и будетъ низшимъ предѣломъ $\frac{\partial^2 z}{\rho^2\partial\theta}+\frac{\partial z}{\rho\partial\rho}$. Слѣдовательно,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\rho^2}<\frac{M}{\lambda},$$

гдѣ M есть опредѣленное (послѣ того, какъ найденъ высшій предѣлъ s) число.

Установивъ такимъ образомъ высшіе предѣлы производныхъ первыхъ двухъ порядковъ, убѣждаемся въ правильности высказанной теоремы.

Итакъ весь нашъ сравнительно сложный анализъ, опирающійся на теорію аналитическаго продолженія, привелъ насъ къ чрезвычайно простымъ условіямъ возможности задачи Дирикле:

1-е. *Для того, чтобъ уравненіе эллиптическаго типа*

$$F(rstpqzxy) = 0 \qquad (F'_z \geqq 0) \tag{1}$$

допускало рѣшеніе задачи Дирикле для даннаго контура, достаточно умѣть a priori при помощи данныхъ на контурѣ установить высшій предѣлъ модулей предполагаемаго рѣшенія и его производныхъ первыхъ двухъ порядковъ.

Въ частности,

2-е. *Для того, чтобъ уравненіе эллиптическаго типа*

$$Ar + 2Bs + Ct = D \qquad (D'_z \geqq 0)$$

допускало рѣшеніе задачи Дирикле, достаточно умѣть a priori установить при помощи данныхъ на контурѣ высшій предѣлъ модулей предполагаемаго рѣшенія и его производныхъ перваго порядка.

Въ установленныхъ здѣсь условіяхъ возможности задачи Дирикле аналитическія функціи (въ уравненіяхъ, какъ и на контурѣ) могутъ быть замѣнены функціями, обладающими конечными производными первыхъ нѣсколькихъ порядковъ. Роль аналитическихъ функцій въ нашемъ доказательствѣ была такимъ образомъ по существу служебная, и вполнѣ вѣроятно, что при дальнѣйшемъ развитіи анализа можно будетъ болѣе простымъ путемъ прійти къ тѣмъ же выводамъ. Тѣмъ не менѣе, слѣдуетъ считать фактомъ первостепенной важности тѣсную связь между уравненіями эллиптическаго типа и аналитическими функціями. Умѣстно будетъ поэтому закончить это изслѣдованіе сопоставленіемъ найденнаго критерія возможности задачи Дирикле съ теоремой *аналитическаго продолженія*, общее доказательство которой принципіально не отличается отъ даннаго въ частномъ случаѣ V главы:

Если рѣшеніе z аналитическаго уравненія (1), существующее внутри нѣкотораго аналитическаго контура C, обращается на немъ въ аналитическую функцію дуги и кромѣ того имѣетъ конечныя производныя первыхъ двухъ порядковъ, то это рѣшеніе можетъ быть аналитически продолжено за предѣлы C.

ОПЕЧАТКИ.

Стран.	*Строка*	*Напечатано:*	*Вмѣсто:*
14	18	гдѣ χ_1, χ_2	гдѣ ψ_1, ψ_2
22	7	A_n	B_n
23	12	$3PQ.R$	$3PQ.R^2$
25	14	которая	которое
40	18	$f(x)$	$[f(x)]_{Rr}$
42	8	x^n	n^n
43	15	M^n	M_n
44	20	$\lvert F(x)\rvert_{Rr}$	$[F(x)]_{Rr}$
„	22	„	„
49	5	$A_m^{(1)} A_n^{(1)}$	$A_m^{(1)} A_n^{(2)}$
53	2	v_0	r_0
54	18	$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} y^2$	$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} y^3$
56	13	(31)	(32)
57	20	(34)	(35)
58	20	C_u	C_n
59	16	$\frac{\partial v}{\rho \partial \varrho} \sin\theta$	$\frac{\partial v}{\rho \partial \varrho} \sin^2\theta$
61	4	$\cos\theta \sin\theta$	$\cos\theta \sin^2\theta$
63	8	могуля	модуля
69	10	межно	можно
79	9	перваго порядка	первыхъ двухъ порядковъ
„	27	0	d
80	29	на	и на
82	25	$-\int_c qsdy$	$\int_c qsdy$
83	13	$>$	$<$
93	8	$9R'$	$0R'$
96	8	v_n	v_{n+1}
109	30	нисколько не	мало
„	32	23	24
111	29	безъ всякихъ ограниченій	полагая $f'_z > 0$,
„	34	24	25
115	26	трехъ	шести
116	12	„	„
117	3	$F \gtrless 0$	$F > 0$
118	3	$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2}$	$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z_1}{\partial y^2}$
140	6	$\frac{\partial^2 z_n}{\partial x^2}$	$\frac{\partial^2 z_n}{\partial x \partial y}$

Теорія колебаній упругихъ пластинокъ.

А. П. Грузинцева.

Точную теорію колебаній пластинокъ далъ въ первый разъ Кирхгоффъ въ 1850 году въ своей работѣ „Ueber das Gleichgewicht und Bewegung einer elastischen Scheibe“. Онъ приложилъ свою теорію къ случаю круглой пластинки и далъ точную теорію поперечныхъ ея колебаній.

Что касается теоріи колебаній пластинокъ, ограниченныхъ прямолинейными контурами, напр. квадратныхъ или треугольныхъ пластинокъ, то точной ихъ теоріи не существуетъ; скажемъ болѣе, даже въ большихъ трактатахъ по акустикѣ, напр. въ „Theory of Sound“ лорда Ралэя приходится довольствоваться чисто эмпирическими формулами при объясненіи узловыхъ линій квадратныхъ пластинокъ. Причина этого лежитъ несомнѣнно въ трудностяхъ чисто математическихъ: трудно подъискать даже частныя рѣшенія дифференціальныхъ уравненій колебательныхъ движеній пластинки, которые удовлетворяли бы условіямъ на контурѣ. Если мы и рѣшились сообщить здѣсь свое рѣшеніе этой задачи, то только потому, чтобы обратить вниманіе математиковъ на этотъ вопросъ.

Нашему рѣшенію задачи о поперечныхъ колебаніяхъ квадратной пластинки мы предпослали изложеніе рѣшенія общей задачи о колебаніяхъ пластинокъ, которое въ нѣкоторыхъ отношеніяхъ можетъ быть заслуживаетъ вниманія.

Колебанія пластинокъ.

Общія уравненія.

Пусть толщина плоской пластинки весьма мала и равна 2ε. Примемъ срединную плоскость за плоскость xy; а, слѣдовательно, нормаль къ пластинкѣ за ось z-овъ.

Положимъ, что проекціи перемѣщенія (ξ, η, ζ) какой-нибудь точки ея разложены по степенямъ z'а, а именно:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \xi_0 + z\xi_1 + \frac{z^2}{2}\xi_2 \\ \eta &= \eta_0 + z\eta_1 + \frac{z^2}{2}\eta_2 \\ \zeta &= \zeta_0 + z\zeta_1 + \frac{z^2}{2}\zeta_2 \end{aligned}\right\} \qquad (A)$$

Это будутъ *кинематическія условія* задачи; при чемъ (ξ_0, η_0, ζ_0) будутъ опредѣляемыми изъ уравненій движенія величинами, а $\xi_1, \ldots \zeta_2$, какъ и ξ_0, η_0, ζ_0 суть функціи x, y и t.

Кинетическими условіями задачи будутъ слѣдующія:

$$1)\ X_z = 0; \quad 2)\ Y_z = 0 \quad \text{и} \quad 3)\ Z_z = 0 \quad \text{для } z = \pm\varepsilon.$$

При этомъ, разумѣется, упругія силы X_z, Y_z, Z_z связаны съ деформаціями $\partial_1, \partial_2, \ldots \partial_6$ слѣдующими соотношеніями:

$$X_z = \mu\partial_5 = \mu\left(\frac{\partial\xi}{\partial z} + \frac{\partial\zeta}{\partial x}\right); \quad Y_z = \mu\partial_6 = \mu\left(\frac{\partial\eta}{\partial z} + \frac{\partial\zeta}{\partial y}\right);$$

$$Z_z = \lambda\Theta + 2\mu\partial_3, \quad \Theta = \partial_1 + \partial_2 + \partial_2; \quad \partial_4 = \frac{\partial\xi}{\partial y} + \frac{\partial\eta}{\partial x};$$

$$\partial_1 = \frac{\partial\xi}{\partial x}; \quad \partial_2 = \frac{\partial\eta}{\partial y}; \quad \partial_3 = \frac{\partial\zeta}{\partial z}.$$

Изъ условій 1), 2) и 3) мы должны опредѣлить *шесть* функцій:

$$\xi_1, \eta_1; \quad \xi_2, \eta_2; \quad \zeta_1 \text{ и } \zeta_2.$$

Изъ (A) находимъ:

$$\partial_5 = \xi_1 + \frac{\partial \zeta_0}{\partial x} + z\left(\xi_2 + \frac{\partial \zeta_1}{\partial x}\right) + \frac{z^2}{2}\frac{\partial \zeta_2}{\partial x},$$

$$\partial_6 = \eta_1 + \frac{\partial \zeta_0}{\partial y} + z\left(\eta_2 + \frac{\partial \zeta_1}{\partial y}\right) + \frac{z^2}{2}\frac{\partial \zeta_2}{\partial y};$$

Подставляя въ (1) и (2) и полагая $z = \pm\varepsilon$, находимъ двѣ системы:

$$\xi_1 + \frac{\partial \zeta_0}{\partial x} + \varepsilon\left(\xi_2 + \frac{\partial \zeta_1}{\partial x}\right) + \frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\partial \zeta_2}{\partial x} = 0;$$
$$\eta_1 + \frac{\partial \zeta_0}{\partial y} + \varepsilon\left(\eta_2 + \frac{\partial \zeta_1}{oy}\right) + \frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\partial \zeta_2}{\partial y} = 0 \text{ для } z = +\varepsilon;$$

$$\xi_1 + \frac{\partial \zeta_0}{\partial x} - \varepsilon\left(\xi_2 + \frac{\partial \zeta_1}{\partial x}\right) + \frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\partial \zeta_2}{\partial x} = 0;$$
$$\eta_1 + \frac{\partial \zeta_0}{\partial y} - \varepsilon\left(\eta_2 + \frac{\partial \zeta_1}{\partial y}\right) + \frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\partial \zeta_2}{\partial y} = 0 \text{ для } z = -\varepsilon.$$

Отсюда черезъ сложеніе и вычитаніе находимъ:

a) $\xi_1 + \frac{\partial \zeta_0}{\partial x} + \frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\partial \zeta_2}{\partial x} = 0;$ c) $\eta_1 + \frac{\partial \zeta_0}{\partial y} + \frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\partial \zeta_2}{\partial y} = 0;$

b) $\xi_2 + \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} = 0;$ d) $\eta_2 + \frac{\partial \zeta_1}{\partial y} = 0.$

Далѣе составимъ Θ. Имѣемъ сначала:

$$\partial_1 = \frac{\partial \xi_0}{\partial x} + z\frac{\partial \xi_1}{\partial x} + \frac{z^2}{2}\frac{\partial \xi_2}{\partial x}; \quad \partial_2 = \frac{\partial \eta_0}{\partial y} + z\frac{\partial \eta_1}{\partial y} + \frac{z^2}{2}\frac{\partial \eta_2}{\partial y}; \quad \partial_3 = \zeta_1 + z\zeta_2.$$

Отсюда, положивъ для простоты расчетовъ:

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial x} + \frac{\partial \eta_i}{\partial y} = \theta_i \qquad (i=0,\ 1,\ 2)$$

находимъ:

$$\Theta = \theta_0 + \zeta_1 + z(\theta_1 + \zeta_2) + \frac{z^2}{2}\theta_2.$$

Теперь условіе (3) даетъ:

$$\lambda(\theta_0+\zeta_1)+\varepsilon\lambda(\theta_1+\zeta_2)+\frac{\varepsilon^2\lambda}{2}\theta_2+2\mu\zeta_1+2\mu\varepsilon\zeta_2=0 \quad \text{для } z=+\varepsilon;$$

$$\lambda(\theta_0+\zeta_1)-\varepsilon\lambda(\theta_1+\zeta_2)+\frac{\varepsilon^2\lambda}{2}\theta_2+2\mu\zeta_1-2\mu\varepsilon\zeta_2=0 \quad \text{для } z=-\varepsilon.$$

Отсюда черезъ сложеніе и вычитаніе находимъ:

$$\lambda\theta_0+(\lambda+2\mu)\zeta_1+\frac{\varepsilon^2}{2}\lambda\theta_2=0 \tag{e}$$

$$\lambda\theta_1+(\lambda+2\mu)\zeta_2=0. \tag{f}$$

Теперь изъ полученныхъ *шести* уравненій (a) — (f) мы должны опредѣлить *шесть* функцій: ξ_1, η_1; ξ_2, η_2; ζ_1 и ζ_2 посредствомъ ξ_0, η_0, ζ_0, которые сами опредѣлятся, какъ уже упомянуто, изъ уравненій движенія. При этомъ точность опредѣленія $\xi_1,\ldots\zeta_2$, а по нимъ ∂_1, ∂_2, ∂_3, ∂_4 (ибо $\partial_5=0$, $\partial_6=0$) должна быть порядка малой величины ε^2; а потому ξ_1 и η_1 придется взять лишь съ точностью порядка ε и лишь ζ_1 съ точностью ε^2 и то только для составленія ∂_3; точно также ξ_2, η_2 и ζ_2 достаточно опредѣлить лишь съ точностью ε. Въ виду этого опредѣляемъ сначала ξ_1 и η_1 изъ (a) и (c) и находимъ съ сказанной точностью:

$$\xi_1=-\frac{\partial\zeta_0}{\partial x}, \quad \eta_1=-\frac{\partial\zeta_0}{\partial y} \tag{I}$$

Затѣмъ изъ (e) находимъ сначала

$$\zeta_1=-\alpha\theta_0-\frac{\varepsilon^2}{2}\alpha\theta_2 \tag{g}$$

и взявъ для опредѣленія ξ_2 и η_2 изъ (b) и (d) $\zeta_1=-\alpha\theta_0$, находимъ:

$$\xi_2=\alpha\frac{\partial\theta_0}{\partial x}, \quad \eta_2=\alpha\frac{\partial\theta_0}{\partial y} \tag{II}$$

и затѣмъ обратно изъ (g) получимъ:

$$\zeta_1=-\alpha\theta_0-\frac{\alpha^2\varepsilon^2}{2}\Delta\theta_0 \tag{III},$$

гдѣ вообще положено:

$$\Delta f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \text{ и } \alpha=\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}$$

Наконецъ изъ (f) при помощи (I) нашли бы:

$$\zeta_2 = \alpha \Delta \zeta_0 \qquad \text{(IV)}$$

или съ точностью ε^2:

$$\zeta_2 = \alpha \Delta \zeta_0 + \frac{\alpha^2 \varepsilon^2}{2} \Delta \Delta \zeta_0 \qquad \text{(IV bis)}$$

Такимъ образомъ всѣ функціи $\xi_1, \ldots \zeta_2$ опредѣлены.

Если бы пожелали опредѣлить ξ_1 и η_1 съ точностью ε^2, то изъ (a) и (c) при помощи (IV) получили бы:

$$\xi_1 = -\frac{\partial \zeta_0}{\partial x} - \frac{\alpha \varepsilon^2}{2} \frac{\partial \Delta \zeta_0}{\partial x}; \quad \eta_1 = -\frac{\partial \zeta_0}{\partial y} - \frac{\alpha \varepsilon^2}{2} \frac{\partial \Delta \zeta_0}{\partial y} \qquad \text{(I bis)}$$

Теперь находимъ:

$$\xi = \xi_0 - Az + A_1 z^2; \quad \eta = \eta_0 - Bz + B_1 z^2; \quad \zeta = \zeta_0 - Cz + C_1 z^2,$$

гдѣ положено для краткости письма:

$$A = \frac{\partial \zeta_0}{\partial x} + \frac{\alpha \varepsilon^2}{2} \frac{\partial \Delta \zeta_0}{\partial x}; \quad B = \frac{\partial \zeta_0}{\partial y} + \frac{\alpha \varepsilon^2}{2} \frac{\partial \Delta \zeta_0}{\partial y}; \quad C = \alpha \theta_0 + \frac{\alpha^2 \varepsilon^2}{2} \Delta \theta_0;$$

$$A_1 = \frac{\alpha}{2} \frac{\partial \theta_0}{\partial x}; \quad B_1 = \frac{\alpha}{2} \frac{\partial \theta_0}{\partial y}; \quad C_1 = \frac{\alpha}{2} \Delta \zeta_0 + \frac{\alpha^2 \varepsilon^2}{4} \Delta \Delta \zeta_0.$$

При этомъ B и B_1 построены аналогично съ A и A_1; стоитъ только ось x-овъ замѣнить осью y-овъ.

Далѣе находимъ:

$$\partial_1 = \frac{\partial \zeta_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x^2} + \frac{\alpha z^2}{2} \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial x^2} - z \frac{\alpha \varepsilon^2}{2} \frac{\partial^2 \Delta \zeta_0}{\partial x^2};$$

$$\partial_2 = \frac{\partial \eta_0}{\partial y} - z \left(\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial y^2} + \frac{\alpha \varepsilon^2}{2} \frac{\partial^2 \Delta \zeta_0}{\partial y^2} \right) + \frac{\alpha z^2}{2} \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial y^2};$$

$$\partial_3 = -\alpha \theta_0 - \frac{\alpha^2 \varepsilon^2}{2} \Delta \theta_0 + \alpha z \Delta \zeta_0 + \frac{\alpha^2 \varepsilon^2}{2} z \Delta \Delta \zeta_0;$$

$$\partial_4 = \frac{\partial \xi_0}{\partial y} + \frac{\partial \eta_0}{\partial x} - 2z \left(\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x \partial y} + \frac{\alpha \varepsilon^2}{2} \frac{\partial^2 \Delta \zeta_0}{\partial x \partial y} \right) + z^2 \alpha \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial x \partial y}.$$

Можно придать для краткости и симметріи письма выраженіямъ для $A, \ldots C_1$; $\partial_1, \ldots \partial_4$ другой видъ.

Положимъ:

$$\Xi = \xi_0 + \frac{\alpha\varepsilon^2}{2}\Delta\xi_0;\ H = \eta_0 + \frac{\alpha\varepsilon^2}{2}\Delta\eta_0;\ Z = \zeta_0 + \frac{\alpha\varepsilon^2}{2}\Delta\zeta_0 \text{ и } \Theta_0 = \frac{\partial\Xi}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y};$$

тогда получимъ:

$$A = \frac{\partial Z}{\partial x},\quad B = \frac{\partial Z}{\partial y} \quad \text{и} \quad C = \alpha\left(\frac{\partial\Xi}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y}\right) = \alpha\Theta_0,$$

ибо, какъ нетрудно убѣдиться, что

$$\Theta_0 = \theta_0 + \frac{\alpha\varepsilon^2}{2}\Delta\theta_0 \text{ и } C_1 = \frac{\alpha}{2}\Delta Z.$$

Затѣмъ находимъ:

$$\partial_1 = \frac{\partial\xi_0}{\partial x} - z\frac{\partial A}{\partial x} + z^2\frac{\partial A_1}{\partial x}$$

или:

$$\partial_1 = \frac{\partial\xi_0}{\partial x} - z\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \frac{\alpha}{2}z^2\frac{\partial^2\theta_0}{\partial x^2}.$$

Точно также:

$$\partial_2 = \frac{\partial\eta_0}{\partial y} - z\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} + \frac{\alpha}{2}z^2\frac{\partial^2\theta_0}{\partial y^2}.$$

Затѣмъ:

$$\partial_3 = -\alpha\Theta_0 + \alpha z\Delta\zeta_0 + \frac{\alpha^2\varepsilon^2}{2}z\Delta\Delta\zeta_0$$

или:

$$\partial_3 = -\alpha\Theta_0 + \alpha z\Delta Z.$$

Наконецъ находимъ:

$$\partial_4 = \frac{\partial\xi_0}{\partial y} + \frac{\partial\eta_0}{\partial x} - 2z\frac{\partial^2 Z}{\partial x\partial y} + z^2\alpha\frac{\partial^2\theta_0}{\partial x\partial y}.$$

Составимъ теперь функцію F, т. е. потенціалъ упругихъ силъ разсчитанный на единицу объема. Мы знаемъ, что ему можно дать въ нашемъ случаѣ ($\partial_5 = 0$, $\partial_6 = 0$) видъ:

$$F = \frac{\lambda}{2\alpha}(\partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2) + \lambda(\partial_1\partial_2 + (\partial_1 + \partial_2)\partial_3) + \frac{\mu}{2}\partial_4^2.$$

Составляемъ послѣдовательно:

$$\partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2 = \left(\frac{\partial\xi_0}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta_0}{\partial y}\right)^2 + \alpha^2\Theta_0^2 + z^2\left[\left(\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}\right)^2 + \alpha^2(\Delta Z)^2 + \right.$$
$$\left. + \alpha\left(\frac{\partial\xi_0}{\partial x}\frac{\partial^2\theta_0}{\partial x^2} + \frac{\partial\eta_0}{\partial y}\frac{\partial^2\theta_0}{\partial y^2}\right)\right] + \text{члены съ } z\text{'омъ},$$

$$\partial_1\partial_2+(\partial_1+\partial_2)\partial_3=\frac{\partial\xi_0}{\partial x}\frac{\partial\eta_0}{\partial y}-\alpha\Theta_0\theta_0+z^2\left[\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}+\frac{\alpha}{2}\left(\frac{\partial\xi_0}{\partial x}\frac{\partial^2\theta_0}{\partial y^2}+\frac{\partial\eta_0}{\partial y}\frac{\partial^2\theta_0}{\partial x^2}\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{\alpha^2}{2}\Theta_0\Delta\theta_0-\alpha(\Delta Z)^2\right]+\text{члены съ } z\text{'мъ;}$$

наконецъ:

$$\partial_4^2=\left(\frac{\partial\xi_0}{\partial y}+\frac{\partial\eta_0}{\partial x}\right)^2+2z^2\left[\alpha\left(\frac{\partial\xi_0}{\partial y}+\frac{\partial\eta_0}{\partial x}\right)\frac{\partial^2\theta_0}{\partial x\partial y}+2\left(\frac{\partial^2 Z}{\partial x\partial y}\right)^2\right]+\text{члены съ } z\text{'омъ.}$$

Мы съ умысломъ не выписываемъ членовъ съ z'омъ, ибо они, какъ ниже увидимъ, въ окончательномъ результатѣ исчезнутъ.

Теперь находимъ функцію F, отдѣливъ въ ней члены съ ξ_0, η_0 и слѣдов. съ θ_0 и Θ_0 отъ членовъ съ ζ_0, т. е. съ Z. Получаемъ:

$$F=\left\{\frac{\lambda}{2\alpha}\left(\left(\frac{\partial\xi_0}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta_0}{\partial y}\right)^2+\alpha^2\Theta_0^2\right)+\lambda\frac{\partial\xi_0}{\partial x}\frac{\partial\eta_0}{\partial y}+\frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial\xi_0}{\partial y}+\frac{\partial\eta_0}{\partial x}\right)^2-\lambda\alpha\Theta_0\theta_0+\right.$$
$$+z^2\left[\frac{\lambda}{2}\left(\frac{\partial\xi_0}{\partial x}\frac{\partial^2\theta_0}{\partial x^2}+\frac{\partial\eta_0}{\partial y}\frac{\partial^2\theta_0}{\partial y^2}\right)+\frac{\lambda\alpha}{2}\left(\frac{\partial\xi_0}{\partial x}\frac{\partial^2\theta_0}{\partial y^2}+\frac{\partial\eta_0}{\partial y}\frac{\partial^2\theta_0}{\partial x^2}\right)-\right.$$
$$\left.\left.-\frac{\lambda\alpha^2}{2}\Theta_0\Delta\theta_0+\mu\alpha\left(\frac{\partial\xi_0}{\partial y}+\frac{\partial\eta_0}{\partial x}\right)\frac{\partial^2\theta_0}{\partial x\partial y}\right]\right\}+z^2\left[\frac{\lambda}{2\alpha}\left(\left(\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}\right)^2+\alpha^2(\Delta Z)^2\right)+\right.$$
$$\left.+\lambda\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}-\lambda\alpha(\Delta Z)^2+2\mu\left(\frac{\partial^2 Z}{\partial x\partial y}\right)^2\right]+\text{члены съ } z\text{'омъ.}$$

Напишемъ на время это выраженіе такъ:

$$F=F_0(\xi_0,\eta_0)+z^2F_1(\xi_0,\eta_0)+z^2F_2(\zeta_0)+\text{члены съ } z\text{'омъ.}$$

Поэтому термодинамическій потенціалъ U будетъ: ($d\tau=dxdydz=$ $=dS.dz$)

$$U=\int dS\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}Fdz=\int dS\left[2\varepsilon F_0(\xi_0,\eta_0)+\underline{\frac{2\varepsilon^3}{3}F_1(\xi_0,\eta_0)}+\frac{2\varepsilon^3}{3}F_2(\zeta_0)\right];$$

члены же съ z'омъ исчезнутъ.

Итакъ:

$$U=2\varepsilon\int dS\left(F_0(\xi_0,\eta_0)+\underline{\frac{\varepsilon^2}{3}F_1(\xi_0,\eta_0)}\right)+\frac{2\varepsilon^3}{3}\int dSF_2(\zeta_0),$$

или:

$$U=2\varepsilon(U_0+\underline{U_1})+U_s(\zeta_0),$$

гдѣ:

$$U_0=\int F_0(\xi_0,\eta_0)dS,\quad U_1=\frac{\varepsilon^2}{3}\int F_1(\xi_0,\eta_0)dS\quad\text{и}\quad U_s(\zeta_0)=\frac{2\varepsilon^3}{3}\int F_2(\zeta_0)dS.$$

Подчеркнутые члены съ $F_1(\xi_0, \eta_0)$ могутъ быть отброшены, какъ малыя величины 2-го порядка. Слѣд. при такой степени приближенія часть U_1 можно не вычислять.

Ясно, что первый интегралъ въ U дастъ продольныя колебанія, а второй поперечныя. Далѣе, такъ какъ $F_1(\xi_0, \eta_0)$ и $F_2(\zeta_0)$ умножаются на ε^3, то при ихъ вычисленіи слѣдуетъ брать θ_0 вмѣсто Θ_0 и ζ_0 вмѣсто Z, отчего вычисленія упрощаются.

Итакъ будемъ имѣть послѣ небольшихъ и очевидныхъ упрощеній:

$$F_0(\xi_0, \eta_0) = \frac{\lambda}{2\alpha}\left(\left(\frac{\partial \xi_0}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta_0}{\partial y}\right)^2\right) + \lambda \frac{\partial \xi_0}{\partial x}\frac{\partial \eta_0}{\partial y} + \frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial \xi_0}{\partial y} + \frac{\partial \eta_0}{\partial x}\right)^2 + \lambda\alpha\left(\frac{\Theta_0^2}{2} - \Theta_0\theta_0\right);$$

$$F_1(\xi_0, \eta_0) = \frac{\lambda}{2}\left[\left(\frac{\partial \xi_0}{\partial x}\frac{\partial^2 \theta_0}{\partial x^2} + \frac{\partial \eta_0}{\partial y}\frac{\partial^2 \theta_0}{\partial y^2}\right) + \alpha\left(\frac{\partial \xi_0}{\partial x}\frac{\partial^2 \theta_0}{\partial y^2} + \frac{\partial \eta_0}{\partial y}\frac{\partial^2 \theta_0}{\partial x^2}\right) - \alpha^2\theta_0 \Delta\theta_0\right] + \\ + \mu\alpha\left(\frac{\partial \xi_0}{\partial y} + \frac{\partial \eta_0}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 \theta_0}{\partial x \partial y};$$

$$F_2(\zeta_0) = \frac{\lambda}{2\alpha}\left(\left(\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial y^2}\right)^2 + 2\alpha \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial y^2} - \alpha^2(\Delta\zeta_0)^2\right) + 2\mu\left(\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x \partial y}\right)^2$$

или еще:

$$F_2(\zeta_0) = \frac{\lambda(1-\alpha)}{2\alpha}\left[(1+\alpha)\left(\left(\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial y^2}\right)^2\right) + 2\alpha \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial y^2}\right] + 2\mu\left(\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x \partial y}\right)^2 \quad (1)$$

Можно придать другой видъ функціи $F_2(\zeta_0)$, а вмѣстѣ съ тѣмъ и потенціальной функціи U_1.

Формула для $F_2(\zeta_0)$, (1) этой стр. будетъ имѣть, если въ скобкахъ прибавить и вычесть членъ:

$$2(1+\alpha)\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial y^2}$$

слѣдующій видъ:

$$F_2(\zeta_0) = \frac{\lambda(1-\alpha)}{2\alpha}\left[(1+\alpha)(\Delta\zeta_0)^2 - 2\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial y^2}\right] + 2\mu\left(\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x \partial y}\right)^2,$$

но (стр. 168):

$$\frac{\lambda(1-\alpha)}{2\alpha} = \mu,$$

слѣдовательно получимъ:

$$F_2(\zeta_0) = \frac{\lambda(1-\alpha^2)}{2\alpha}(\Delta\zeta_0)^2 - 2\mu\left(\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x \partial y}\right)^2\right)$$

или:

$$F_2(\zeta_0) = \frac{\lambda(1-\alpha^2)}{2\alpha}\left[(\Delta\zeta_0)^2 - \frac{4\mu\alpha}{\lambda(1-\alpha^2)}\left(\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x \partial y}\right)^2\right)\right].$$

Введемъ отношеніе поперечнаго сжатія къ продольному растяженію стержня, сдѣланнаго изъ матеріала пластинки; это отношеніе, называя его σ, будетъ:

$$\sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}, \quad \text{слѣд. } 1-\sigma = \frac{\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)}, \quad 1+\sigma = \frac{3\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)},$$

а также модуль упругости:

$$E = \mu\frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+\mu} = 2\mu(1+\sigma).$$

Тогда найдемъ во 1-хъ;

$$\frac{4\mu\alpha}{\lambda(1-\alpha^2)} = \frac{2\alpha}{\lambda(1-\alpha)}\frac{1}{1+\alpha}2\mu = \frac{1}{\mu}\frac{\lambda+2\mu}{2(\lambda+\mu)}2\mu = 2(1-\sigma),$$

и во 2-хъ:

$$\frac{\lambda(1-\alpha^2)}{2\alpha} = \mu\frac{2(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu} = \frac{\mu}{1-\sigma} = \frac{2\mu(1+\sigma)}{2(1-\sigma^2)} = \frac{E}{2(1-\sigma^2)},$$

а потому:

$$F_2(\zeta_0) = \frac{E}{2(1-\sigma^2)}\left[(\Delta\zeta_0)^2 - 2(1-\sigma)\left(\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x^2}\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x\partial y}\right)^2\right)\right].$$

Слѣдовательно для $U_s(\zeta_0)$ получимъ выраженіе:

$$U_s = \frac{E\varepsilon^3}{3(1-\sigma^2)}\int dS\left[(\Delta\zeta_0)^2 - 2(1-\sigma)\left(\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x^2}\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x\partial y}\right)^2\right)\right].$$

При этомъ полезно замѣтить, что:

$$\frac{\lambda(1-\alpha)}{2\alpha} = \mu; \quad 1+\alpha = \frac{2(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}; \quad 1-\alpha = \frac{2\mu}{\lambda+2\mu}.$$

Сверхъ того тоже важно замѣтить, что съ нашимъ приближеніемъ имѣемъ:

$$\frac{1}{2}\Theta_0^2 - \Theta_0\theta_0 = -\frac{1}{2}\theta_0^2 = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\zeta_0}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\eta_0}{\partial y}\right)^2 - \frac{\partial\xi_0}{\partial x}\frac{\partial\eta_0}{\partial y},$$

а потому для $F_0(\xi_0, \eta_0)$ получимъ болѣе простое выраженіе:

$$F_0(\xi_0, \eta_0) = \lambda(1-\alpha)\left[\frac{1+\alpha}{2\alpha}\left(\left(\frac{\partial\xi_0}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta_0}{\partial y}\right)^2\right) + \frac{\partial\xi_0}{\partial x}\frac{\partial\eta_0}{\partial y}\right] + \\ + \frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial\xi_0}{\partial y} + \frac{\partial\eta_0}{\partial x}\right)^2. \qquad (2)$$

Точно также можно еще упростить и функцію $F_1(\xi_0, \eta_0)$. Находимъ, замѣнивъ θ_0 его значеніемъ $\left(\frac{\partial \xi_0}{\partial x} + \frac{\partial \eta_0}{\partial y}\right)$ въ членѣ $-\alpha^2\theta_0 \Delta\theta_0$:

$$F_1(\xi_0, \eta_0) = \frac{\lambda(1+\alpha)}{2}\left[(1+\alpha)\left(\frac{\partial \xi_0}{\partial x}\frac{\partial^2\theta_0}{\partial x^2} + \frac{\partial \eta_0}{\partial y}\frac{\partial^2\theta_0}{\partial y^2}\right) + \right.$$

$$\left. + \alpha\left(\frac{\partial \xi_0}{\partial x}\frac{\partial^2\theta_0}{\partial y^2} + \frac{\partial \eta_0}{\partial y}\frac{\partial^2\theta_0}{\partial x^2}\right)\right] + \mu\alpha\left(\frac{\partial \xi_0}{\partial y} + \frac{\partial \eta_0}{\partial x}\right)\frac{\partial^2\theta_0}{\partial x \partial y}. \qquad (3)$$

Положимъ въ основномъ уравненіи движенія, которое беремъ въ извѣстной формѣ Гельмгольца:

$$\varrho \int dS \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} dz \left[\frac{d^2\xi}{dt^2}\delta\xi + \frac{d^2\eta}{dt^2}\delta\eta + \frac{d^2\zeta}{dt^2}\delta\zeta\right] = R,$$

тогда основное уравненіе движенія будетъ имѣть видъ:

$$R + \delta U = 0.$$

Вычислимъ теперь R. Формулы стр. 169-й даютъ:

$$R = \varrho \int dS \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} dz \left\{\left(\frac{d^2\xi_0}{dt^2} - z\frac{d^2A}{dt^2} + z^2\frac{d^2A_1}{dt^2}\right)(\delta\xi_0 - z\delta A + z^2\delta A_1) + \ldots\right\} =$$

$$= \varrho \int dS \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} dz \left\{\left[\frac{d^2\xi_0}{dt^2}\delta\xi_0 + \frac{d^2\eta_0}{dt^2}\delta\eta_0 + \frac{d^2\zeta_0}{dt^2}\delta\zeta_0\right] + z^2\left[\frac{d^2\xi_0}{dt^2}\delta A_1 + \frac{d^2A}{dt^2}\delta A + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{d^2A_1}{dt^2}\delta\xi_0\right] + \text{под. члены для } \eta_0 \text{ и } \zeta_0 + \text{члены съ } z\text{'мъ}\right\}.$$

Интегрируя по z, находимъ:

$$R = 2\varrho\varepsilon \int dS \left\{\left(\frac{d^2\xi_0}{dt^2}\delta\xi_0 + \frac{d^2\eta_0}{dt^2}\delta\eta_0 + \frac{d^2\zeta_0}{dt^2}\delta\zeta_0\right) + \right.$$

$$+ \frac{\varepsilon^2}{3}\left(\frac{d^2A_1}{dt^2}\delta\xi_0 + \frac{d^2B_1}{dt^2}\delta\eta_0 + \frac{d^2C_1}{dt^2}\delta\zeta_0\right) + \frac{\varepsilon^2}{3}\left[\left(\frac{d^2A}{dt^2}\delta A + \frac{d^2B}{dt^2}\delta B + \frac{d^2C}{dt^2}\delta C\right) + \right.$$

$$\left.\left. + \left(\frac{d^2\xi_0}{dt^2}\delta A_1 + \frac{d^2\eta_0}{dt^2}\delta B_1 + \frac{d^2\zeta_0}{dt^2}\delta C_1\right)\right]\right\}.$$

Такъ-какъ коэффиціенты $A, \ldots C_1$ входятъ при множителѣ ε^2, то въ нихъ слѣдуетъ взять:

$$A=\frac{\partial\zeta_0}{\partial x};\quad B=\frac{\partial\zeta_0}{\partial y};\quad C=\alpha\theta_0;\quad A_1=\frac{\alpha}{2}\frac{\partial\theta_0}{\partial x};\quad B_1=\frac{\alpha}{2}\frac{\partial\theta_0}{\partial y};\quad C_1=\frac{\alpha}{2}\Delta\zeta_0;$$

такимъ образомъ для *продольныхъ колебаній* будемъ имѣть члены съ C, A_1 и B_1; а для *поперечныхъ* — члены съ A, B и C_1. Поэтому мы разобьемъ выраженіе R на два, положивъ:

$$R=R(\xi_0,\eta_0)+R(\zeta_0)$$

и тогда

$$R(\xi_0,\eta_0)=2\varrho\varepsilon\int dS\left\{\frac{d^2\xi_0}{dt^2}\delta\xi_0+\frac{d^2\eta_0}{dt_0}\delta\eta_0+\frac{\varepsilon^2}{3}\left(\frac{d^2A_1}{dt^2}\delta\xi_0+\frac{d^2B_1}{dt^2}\delta\eta_0+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{d^2C}{dt^2}\delta C+\frac{d^2\xi_0}{dt^2}\delta A_1+\frac{d^2\eta_0}{dt^2}\delta B_1\right)\right\};$$

$$R(\zeta_0)=2\varrho\varepsilon\int dS\left\{\frac{d^2\zeta_0}{dt^2}\delta\zeta_0+\frac{\varepsilon^2}{3}\left(\frac{d^2C_1}{dt^2}\delta\zeta_0+\frac{d^2A}{dt^2}\delta A+\frac{d^2B}{dt^2}\delta B+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{d^2\zeta_0}{dt^2}\delta C_1\right)\right\}.$$

Теперь намъ надо раскрыть варіаціи $\delta A, \ldots \delta C_1$, сведя ихъ къ $\delta\xi_0$, $\delta\eta_0$ и $\delta\zeta_0$. Основаніемъ преобразованій будутъ служить слѣдующія формулы интегральнаго исчисленія:

$$\int u\frac{\partial v}{\partial x}dS=\int uv\cos(nx)ds-\int v\frac{\partial u}{\partial x}dS,$$

$$\int u\frac{\partial v}{\partial y}dS=\int uv\cos(ny)ds-\int v\frac{\partial u}{\partial y}dS,$$

причемъ ds есть элементъ контура, а n — направленіе нормали къ нему, проведенной внутрь ограниченной контуромъ площади.

Преобразуемъ сначала $R(\zeta_0)$. Интегралы съ δA и δB даютъ по подстановкѣ въ δA и δB значеній:

$$A=\frac{\partial\zeta_0}{\partial x},\quad B=\frac{\partial\zeta_0}{\partial y}$$

и интегрированіи по частямъ:

$$\int dS\left(\frac{d^2A}{dt^2}\delta A+\frac{d^2B}{dt^2}\delta B\right)=\int ds\left[\frac{d^2A}{dt^2}\cos(nx)+\frac{d^2B}{dt^2}\cos(ny)\right]\delta\zeta_0-$$
$$-\int dS\left(\frac{d^3A}{dt^2\partial x}+\frac{d^3B}{dt^2\partial y}\right)\delta\zeta_0.$$

Затѣмъ послѣ двукратнаго примѣненія интегрированія по частямъ находимъ:

$$\int dS \frac{d^2\zeta_0}{dt^2}\delta C_1 = \frac{\alpha}{2}\int ds\left[\frac{d^2\zeta_0}{dt^2}\left(\cos(nx)\frac{\partial\delta\zeta_0}{\partial x}+\cos(ny)\frac{\partial\delta\zeta_0}{\partial y}\right)-\right.$$
$$\left.-\left(\frac{d^3\zeta_0}{dt^2\partial x}\cos(nx)+\frac{d^3\zeta_0}{dt^2\partial y}\cos(ny)\right)\delta\zeta_0\right]+\frac{\alpha}{2}\int dS\left(\frac{d^4\zeta_0}{dt^2\partial x^2}+\frac{d^4\zeta_0}{dt^2\partial y^2}\right)\delta\zeta_0.$$

Соединяя все это вмѣстѣ и подставляя вмѣсто A, B и C_1 ихъ значенія, находимъ:

$$R(\zeta_0)=2\varrho\varepsilon\int dS\left[\frac{d^2\zeta_0}{dt^2}-\frac{\varepsilon^2(1-\alpha)}{3}\frac{d^2\Delta\zeta_0}{dt^2}\right]\delta\zeta_0+\frac{2\varrho\varepsilon^3}{3}\int ds\left[\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\left(\frac{d^3\zeta_0}{dt^2\partial x}\cos(nx)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{d^3\zeta_0}{dt^2\partial y}\cos(ny)\right)\delta\zeta_0+\frac{\alpha}{2}\frac{d^2\zeta_0}{dt^2}\left(\cos(nx)\frac{\partial\delta\zeta_0}{\partial x}+\cos(ny)\frac{\partial\delta\zeta_0}{\partial y}\right)\right].$$

Это выраженіе можно представить въ болѣе компактномъ видѣ, если ввести обозначеніе:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\cos(nx)+\frac{\partial f}{\partial y}\cos(ny)=\frac{\partial f}{\partial n}.$$

Полагая послѣдовательно въ этой формулѣ:

$$f=\frac{d^2\zeta_0}{dt^2}\quad\text{и}\quad f=\delta\zeta_0,$$

получимъ:

$$R(\zeta_0)=2\varrho\varepsilon\int dS\left(\frac{d^2\zeta_0}{dt^2}-\frac{\varepsilon^2(1-\alpha)}{3}\frac{d^2\Delta\zeta_0}{dt^2}\right)\delta\zeta_0+$$
$$+\frac{2\varrho\varepsilon^3}{3}\int dS\left[\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\frac{\partial}{\partial n}\frac{d^2\zeta_0}{dt^2}\delta\zeta_0+\frac{\alpha}{2}\frac{d^2\zeta_0}{dt^2}\frac{\partial\delta\zeta_0}{\partial n}\right]. \qquad (I)$$

Подчеркнутые члены по сравненіи съ первыми можно отбросить, какъ малыя количества 2-го порядка.

Здѣсь можно, если угодно, взять:

$$\frac{\partial}{\partial n}\frac{d^2\zeta_0}{dt^2}=\frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial\zeta_0}{\partial n}.$$

Займемся теперь членомъ $R(\xi_0, \eta_0)$.

Вводя значенія:

$$C=\alpha\theta_0=\alpha\left(\frac{\partial\xi_0}{\partial x}+\frac{\partial\eta_0}{\partial y}\right);\quad A_1=\frac{\alpha}{2}\frac{\partial\theta_0}{\partial x};\quad B_1=\frac{\alpha}{2}\frac{\partial\theta_0}{\partial y},$$

находимъ сначала:

$$\int dS\frac{d^2C}{dt^2}\delta C = \alpha^2\int ds\frac{d^2\theta_0}{dt^2}(\cos(nx)\,\delta\xi_0 + \cos(ny)\,\delta\eta_0) - \\ -\alpha^2\int dS\left(\frac{d^3\theta_0}{dt^2\partial x}\,\delta\xi_0 + \frac{d^3\theta_0}{dt^2\partial y}\,\delta\eta_0\right):$$

$$\int dS\left(\frac{d^2\xi_0}{dt^2}\,\delta A_1 + \frac{d^2\eta_0}{dt^2}\,\delta B_1\right) = \frac{\alpha}{2}\int ds\left[\left(\frac{d^2\xi_0}{dt^2}\cos(nx) + \frac{d^2\eta_0}{dt^2}\cos(ny)\right)\delta\theta_0 - \right.$$
$$\left. -\frac{d^2\theta_0}{dt^2}(\cos(nx)\,\delta\xi_0 + \cos(ny)\,\delta\eta_0)\right] + \frac{\alpha}{2}\int dS\left(\frac{d^3\theta_0}{dt^2\partial x}\,\delta\xi_0 + \frac{d^3\theta_0}{dt^2\partial y}\,\delta\eta_0\right),$$

а затѣмъ:

$$R(\xi_0,\,\eta_0) = 2\varrho\varepsilon\left\{\int dS\left[\left(\frac{d^2\xi_0}{dt^2} + \frac{\varepsilon^2\alpha}{6}\frac{d^3\theta_0}{dt^2\partial x} - \frac{\varepsilon^2\alpha^2}{3}\frac{d^3\theta_0}{dt^2\partial x} + \frac{\varepsilon^2\alpha}{6}\frac{d^3\theta_0}{dt^2\partial x}\right)\delta\xi_0 + (\text{под.}\right.\right.$$
$$\text{члены съ}\,\eta_0, y)\delta\eta_0\Big] + \frac{\varepsilon^2}{3}\int ds\left[\left(\alpha^2\frac{d^2\theta_0}{dt^2} - \frac{\alpha}{2}\frac{d^2\theta_0}{dt^2}\right)(\cos(nx)\,\delta\xi_0 + \cos(ny)\,\delta\eta_0) + \right.$$
$$\left.\left. + \frac{\alpha}{2}\left(\frac{d^2\xi_0}{dt^2}\cos(nx) + \frac{d^2\eta_0}{dt^2}\cos(ny)\right)\delta\theta_0\right]\right\},$$

или по приведеніи:

$$R(\xi_0,\,\eta_0) = 2\varrho\varepsilon\int dS\left[\left(\frac{d^2\xi_0}{dt^2} + \underline{\frac{\varepsilon^2\alpha(1-\alpha)}{3}\frac{d^3\theta_0}{dt^2\partial x}}\right)\delta\xi_0 + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{d^2\eta_0}{dt^2} + \underline{\frac{\varepsilon^2\alpha(1-\alpha)}{3}\frac{d^3\theta_0}{dt^2\partial y}}\right)\delta\eta_0\right] + \frac{2\varrho\varepsilon^3\alpha}{3}\int ds\left[\underline{\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)\frac{d^2\theta_0}{dt^2}(\cos(nx)\,\delta\xi_0 + \cos(ny)\,\delta\eta_0)} + \right.$$
$$\left. + \underline{\frac{1}{2}\left(\frac{d^2\xi_0}{dt^2}\cos(nx) + \frac{d^2\eta_0}{dt^2}\cos(ny)\right)\delta\theta_0}\right]. \qquad \text{(II)}$$

Подчеркнутые члены, какъ малые 2-го порядка, можно отбросить.

Формулу (II) можно написать въ болѣе подробномъ видѣ, замѣнивъ $\delta\theta_0$ его значеніемъ:

$$\delta\theta_0 = \frac{\partial}{\partial x}\delta\xi_0 + \frac{\partial}{\partial y}\delta\eta_0.$$

Пользуясь формулами (а) стр. 4-й и полагая предварительно:

$$\text{уголъ}\ \widehat{n, x} = \varphi \quad \text{и} \quad M = \frac{d^2\xi_0}{dt^2}\cos\varphi + \frac{d^2\eta_0}{dt^2}\sin\varphi, \qquad \text{(а)}$$

найдемъ:

$$\int Mds\delta\theta_0 = -\int ds\left(\frac{\partial(M\sin\varphi)}{\partial s}\,\delta\xi_0 - \frac{\partial(M\cos\varphi)}{\partial s}\,\delta\eta_0\right) + \\ + \int ds\,M\left(\cos\varphi\frac{\partial\delta\xi_0}{\partial n} + \sin\varphi\frac{\partial\delta\eta_0}{\partial n}\right),$$

а потому формула (II) стр. 177-ой напишется въ видѣ:

$$R(\xi_0, \eta_0) = 2\varrho\varepsilon\int dS\left[\left(\frac{d^2\xi_0}{dt^2} + \frac{\alpha(1-\alpha)\varepsilon^2}{3}\frac{d^3\theta_0}{\partial x dt^2}\right)\delta\xi_0 + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{d^2\eta_0}{dt^2} + \frac{\alpha(1-\alpha)\varepsilon^2}{3}\frac{d^3\theta_0}{\partial y dt^2}\right)\delta\eta_0\right] + \frac{2\varrho\varepsilon^3\alpha}{3}\int ds\left[\left(\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)\frac{d^2\theta_0}{dt^2}\cos\phi - \right.\right.$$
$$\left. - \frac{1}{2}\frac{\partial(M\sin\phi)}{\partial s}\right)\delta\xi_0 + \left(\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)\frac{d^2\theta_0}{dt^2}\sin\phi + \frac{1}{2}\frac{\partial(M\cos\phi)}{\partial s}\right)\delta\eta_0 +$$
$$\left. + \frac{1}{2}M\left(\cos\phi\frac{\partial\delta\xi_0}{\partial n} + \sin\phi\frac{\partial\delta\eta_0}{\partial n}\right)\right]. \qquad \text{(II bis)}$$

Подчеркнутые члены, какъ малыя величины 2-го порядка въ сравненіи съ оставляемымъ членомъ, можно отбросить.

Итакъ R найдено. Теперь надо преобразовать δU. Сначала займемся *поперечными колебаніями*. Для нихъ надо найти:

$$\delta U_s = \frac{2\varepsilon^3}{3}\int dS\delta F_2(\zeta_0),$$

причемъ:

$$F_2(\zeta_0) = a\left(\left(\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial y^2}\right)^2\right) + b\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x^2}\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial y^2} + 2\mu\left(\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x\partial y}\right)^2,$$

гдѣ положено:

$$a = \frac{\lambda(1-\alpha)(1+\alpha)}{2\alpha} = \frac{2\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}; \quad b = \lambda(1-\alpha) = \frac{2\mu\lambda}{\lambda+2\mu}.$$

Можно написать $F_2(\zeta_0)$ еще такъ:

$$F_2(\zeta_0) = 2\mu\left[a_1\left(\left(\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial y^2}\right)^2\right) + b_1\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x^2}\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x\partial y}\right)^2\right],$$

если положимъ:

$$a_1 = \frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}, \quad b_1 = \frac{\lambda}{\lambda+2\mu} = \alpha.$$

Поэтому напишемъ:

$$\delta U = \frac{4\mu\varepsilon^3}{3}\int dS\left[\left(X\frac{\partial^2\delta\zeta_0}{\partial x^2} + Y\frac{\partial^2\delta\zeta_0}{\partial y^2}\right) + 2\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2\delta\zeta_0}{\partial x\partial y}\right],$$

гдѣ положено на время:

$$X = 2a_1\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x^2} + b_1\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial y^2}; \quad Y = 2a_1\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial y^2} + b_1\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x^2}.$$

Примѣняя два раза интегрированіе по частямъ, находимъ:

$$\int dS\left[X\frac{\partial^2\delta\zeta_0}{\partial x^2}+Y\frac{\partial^2\delta\zeta_0}{\partial y^2}\right]=\int dS\left(\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}\right)\delta\zeta_0+$$

$$+\int ds\left[X\cos(nx)\frac{\partial\delta\zeta_0}{\partial x}+Y\cos(ny)\frac{\partial\delta\zeta_0}{\partial y}-\left(\frac{\partial X}{\partial x}\cos(nx)+\frac{\partial Y}{\partial y}\cos(ny)\right)\delta\zeta_0\right],$$

причемъ:

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}=2a_1\left(\frac{\partial^4\zeta_0}{\partial x^4}+\frac{\partial^4\zeta_0}{\partial y^4}\right)+b_1\frac{\partial^4\zeta_0}{\partial x^2\partial y^2}.$$

Затѣмъ найдемъ:

$$\int dS\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\delta\zeta_0}{\partial y}=\int ds\left(\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x\partial y}\cos(nx)\frac{\partial\delta\zeta_0}{\partial y}-\frac{\partial^3\zeta_0}{\partial x^2\partial y}\cos(ny)\,\delta\zeta_0\right)+$$

$$+\int dS\frac{\partial^4\zeta_0}{\partial x^2\partial y^2}\delta\zeta_0;$$

$$\int dS\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\delta\zeta_0}{\partial x}=\int ds\left(\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x\partial y}\cos(ny)\frac{\partial\delta\zeta_0}{\partial x}-\frac{\partial^3\zeta_0}{\partial x\partial y^2}\cos(nx)\,\delta\zeta_0\right)+$$

$$+\int dS\frac{\partial^4\zeta_0}{\partial x^2\partial y^2}\delta\zeta_0.$$

Отсюда находимъ, складывая эти выраженія:

$$2\int dS\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2\delta\zeta_0}{\partial x\partial y}=2\int dS\frac{\partial^4\zeta_0}{\partial x^2\partial y^2}\delta\zeta_0+\int ds\left[\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x\partial y}\left(\cos(nx)\frac{\partial\delta\zeta_0}{\partial y}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\cos(ny)\frac{\partial\delta\zeta_0}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial^3\zeta_0}{\partial x^2\partial y}\cos(ny)+\frac{\partial^3\zeta_0}{\partial x\partial y^2}\cos(nx)\right)\delta\zeta_0\right].$$

Подставляя все это въ δU_s и замѣчая, что

$$2b_1+2=4a_1,$$

находимъ:

$$\delta U_s=\frac{4\mu\varepsilon^3}{3}\int dS\left(2a_1\frac{\partial^4\zeta_0}{\partial x^4}+2a_1\frac{\partial^4\zeta_0}{\partial y^4}+2\frac{\partial^4\zeta_0}{\partial x^2\partial y^2}\right)+\frac{4\mu\varepsilon^3}{3}\int ds\left[\left(X\cos(nx)+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x\partial y}\cos(ny)\right)\frac{\partial\delta\zeta_0}{\partial x}+\left(Y\cos(ny)+\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x\partial y}\cos(nx)\right)\frac{\partial\delta\zeta_0}{\partial y}-\left(\frac{\partial X}{\partial x}\cos(nx)+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\partial^3\zeta_0}{\partial x\partial y^2}\cos(nx)+\frac{\partial Y}{\partial y}\cos(ny)+\frac{\partial^3\zeta_0}{\partial x^2\partial y}\cos(ny)\right)\delta\zeta_0\right].$$

Но можно убѣдиться, что:

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial^3\zeta_0}{\partial x\partial y^2}=2a_1\frac{d\Delta\zeta_0}{\partial x};\quad \frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial^3\zeta_0}{\partial x^2\partial y}=2a_1\frac{\partial\Delta\zeta_0}{\partial y},$$

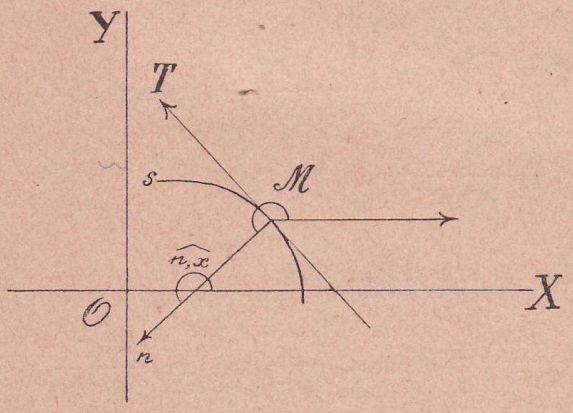
гдѣ

$$\Delta\zeta_0=\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial y^2}.$$

Поэтому

$$\delta U_s=\frac{8\mu a_1\varepsilon^3}{3}\int\Delta\Delta\zeta_0 dS+\frac{4\mu\varepsilon^3}{3}\int ds\left[\left(X\cos(nx)+\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x\partial y}\cos(ny)\right)\frac{\partial\delta\zeta_0}{\partial x}+\right.$$
$$\left.+\left(Y\cos(ny)+\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x\partial y}\cos(nx)\right)\frac{\partial\delta\zeta_0}{\partial y}\right]-\frac{8\mu a_1\varepsilon^3}{3}\int ds\left(\frac{\partial\Delta\zeta_0}{\partial x}\cos(nx)+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial\Delta\zeta_0}{\partial y}\cos(ny)\right)\delta\zeta_0.$$

Для дальнѣйшихъ преобразованій приведемъ одну теорему изъ дифференціальной геометріи.



Пусть имѣемъ функцію $f(x, y)$, тогда можно получить, если разсматривать $f(x, y)=0$, какъ уравненіе кривой:

$$\frac{\partial f}{\partial s}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{ds},$$

$$\frac{\partial f}{\partial n}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n},$$

причемъ s и n обозначаютъ длину дуги и нормали къ кривой; но если уголъ $\widehat{n,x}=\varphi$, то

$$\frac{dx}{dn}=\cos\varphi;\quad \frac{dy}{dn}=\sin\varphi;\quad \frac{dx}{ds}=\sin\varphi;\quad \frac{dy}{ds}=-\cos\varphi;$$

слѣд. предыдущія равенства будутъ:

$$\frac{\partial f}{\partial s}=\frac{\partial f}{\partial x}\sin\varphi-\frac{\partial f}{\partial y}\cos\varphi;\quad \frac{\partial f}{\partial n}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\varphi+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\varphi.$$

Отсюда находимъ:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial s}\sin\varphi+\frac{\partial f}{\partial n}\cos\varphi;\quad \frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{\partial f}{\partial s}\cos\varphi+\frac{\partial f}{\partial n}\sin\varphi.\qquad (a)$$

Преобразуемъ, пользуясь этими формулами, интегралъ по контуру s въ δU_s съ членами $\frac{\partial\delta\zeta_0}{\partial x}$ и $\frac{\partial\delta\zeta_0}{\partial y}$.

Замѣняя въ формулахъ (a) f черезъ $\delta\zeta_0$ и подставляя значенія $\frac{\partial\delta\zeta_0}{\partial x}$ и $\frac{\partial\delta\zeta_0}{\partial y}$ въ упомянутую часть интеграла, получимъ:

$$\int ds\left[\left(X\cos\phi+\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x\partial y}\sin\phi\right)\frac{\partial\delta\zeta_0}{\partial x}+\left(Y\sin\phi+\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x\partial y}\cos\phi\right)\frac{\partial\delta\zeta_0}{\partial y}\right]=$$

$$=\int ds\left[(X-Y)\sin\phi\cos\phi-\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x\partial y}(\cos^2\phi-\sin^2\phi)\right]\frac{\partial\delta\zeta_0}{\partial s}+$$

$$+\int ds\left[X\cos^2\phi+Y\sin^2\phi+2\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x\partial y}\sin\phi\cos\phi\right]\frac{\partial\delta\zeta_0}{\partial n}.$$

Но

$$X-Y=\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial y^2},$$

ибо

$$2a_1-b_1=1.$$

Первый членъ предыдущаго равенства имѣетъ видъ:

$$\int F\frac{\partial f}{\partial s}ds=[Ff]_s-\int f\frac{\partial F}{\partial s}ds,$$

но первый членъ будетъ равенъ нулю,—ибо интегрированіе производится по *замкнутому контуру*,—поэтому получимъ:

$$\int ds\left[\left(X\cos\phi+\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x\partial y}\sin\phi\right)\frac{\partial\delta\zeta_0}{\partial x}+\left(Y\sin\phi+\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x\partial y}\cos\phi\right)\frac{\partial\delta\zeta_0}{\partial y}\right]=$$

$$=-\int\frac{\partial}{\partial s}\left[\left(\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial y^2}\right)\sin\phi\cos\phi-\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x\partial y}(\cos^2\phi-\sin^2\phi)\right]ds\delta\zeta_0+$$

$$+\int ds\left[X\cos^2\phi+Y\sin^2\phi+2\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x\partial y}\sin\phi\cos\phi\right]\frac{\partial\delta\zeta_0}{\partial n}.$$

Подставляя все это въ формулу для δU_s стр. 180-й, получимъ:

$$\delta U_s=\frac{8\mu a_1\varepsilon^3}{3}\int\Delta\Delta\zeta_0 dS-\frac{4\mu\varepsilon^2}{3}\int ds\frac{\partial}{\partial s}\left[\left(\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial y^2}\right)\sin\phi\cos\phi-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x\partial y}(\cos^2\phi-\sin^2\phi)\right]\delta\zeta_0+\frac{4\mu\varepsilon^3}{3}\int ds\left[X\cos^2\phi+Y\sin^2\phi+\right.$$

$$\left.+2\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x\partial y}\sin\phi\cos\phi\right]\frac{\partial\delta\zeta_0}{\partial n}-\frac{8\mu a_1\varepsilon^3}{3}\int ds\frac{\partial\Delta\zeta_0}{\partial n}\delta\zeta_0. \qquad \text{(III)}$$

Можно упростить трехчленъ при $\frac{\partial\delta\zeta_0}{\partial n}$. Подставляя значенія X и Y и помня, что $2a_1 = b_1 + 1$, найдемъ, что:

$$X\cos^2\varphi + Y\sin^2\varphi + 2\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x\partial y}\sin\varphi\cos\varphi = \frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x^2}\cos^2\varphi + \frac{\partial^2\zeta_0}{\partial y^2}\sin^2\varphi + \\ + 2\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x\partial y}\cos\varphi\sin\varphi + b_1\left(\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\zeta_0}{\partial y^2}\right).$$

Причемъ

$$b_1 = \alpha = \frac{\theta}{1+\theta}$$

въ обозначеніяхъ Кирхгофа (у него наше $\mu = K$; $\lambda = 2K\theta$) и

$$2a_1 = \frac{2(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu} + \frac{1+2\theta}{1+\theta}$$

въ тѣхъ же обозначеніяхъ.

Соединимъ теперь $R(\zeta_0)$ и δU_s. Они удовлетворяютъ равенству:

$$R(\zeta_0) + \delta U_s = 0;$$

подставляя сюда значенія $R(\zeta_0)$ и δU_s изъ (I) стр. 176 и (III) стр. 181, получимъ по раздѣленіи на $2\varrho\varepsilon$:

$$\int dS\left\{\frac{d^2\zeta_0}{dt^2} - \frac{\varepsilon^2(1-\alpha)}{3}\frac{d^2\Delta\zeta_0}{dt^2} + \frac{4\mu a_1\varepsilon^2}{3\varrho}\Delta\Delta\zeta_0\right\}\delta\zeta_0 + \\ + \frac{\varepsilon^2}{3}\int ds\left\{\left[\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{d^2\zeta_0}{dt^2}\right) - \frac{2\mu}{\varrho}\frac{\partial}{\partial s}\left(\left(\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\zeta_0}{\partial y^2}\right)\sin\varphi\cos\varphi - \right.\right.\right. \\ \left.\left.\left. - \frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x\partial y}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\right) - \frac{4\mu a_1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial n}(\Delta\zeta_0)\right]\delta\zeta_0 + \left[\frac{\alpha}{2}\frac{d^2\zeta_0}{dt^2} + \frac{2\mu}{\varrho}\left(\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x^2}\cos^2\varphi + \right.\right. \\ \left.\left. + \frac{\partial^2\zeta_0}{\partial y^2}\sin^2\varphi + 2\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x\partial y}\sin\varphi\cos\varphi + \alpha\left(\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\zeta_0}{\partial y^2}\right)\right)\right]\frac{\partial\delta\zeta_0}{\partial n}\right\} = 0.$$

Подчеркнутые члены по замѣчаніямъ стр. 176 и 177 могутъ быть отброшены.

Это уравненіе распадается на *три*: *одно* для всѣхъ точекъ срединнаго сѣченія ($z = 0$) пластинки и *два* на контурѣ ея, а именно:

$$\frac{d^2\zeta_0}{dt^2} - \frac{\varepsilon^2(1-\alpha)}{3}\frac{d^2\Delta\zeta_0}{dt^2} + \frac{4\mu a_1\varepsilon^2}{3\varrho}\Delta\Delta\zeta_0 = 0. \qquad (1)$$

$$\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\frac{\partial}{\partial u}\frac{d^2\zeta_0}{dt^2} - \frac{2\mu}{\varrho}\frac{d}{ds}\left[\left(\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\zeta_0}{\partial y^2}\right)\sin\varphi\cos\varphi - \frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x\partial y}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\right] - \\ - \frac{4\mu a_1}{\varrho}\frac{\partial\Delta\zeta_0}{\partial n} = 0. \qquad (2)$$

$$\frac{\alpha}{2}\frac{d^2\zeta_0}{dt^2}+\frac{2\mu}{\varrho}\left[\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x^2}\cos^2\varphi+\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial y^2}\sin^2\varphi+2\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x\partial y}\sin\varphi\cos\varphi+\right.$$

$$\left.+\alpha\left(\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial y^2}\right)\right]=0. \qquad (3)$$

Уравненіе (1) отличается отъ даннаго Кирхгофомъ (Mechanik, S. 459—460) присутствіемъ второго члена, а (2) и (3) присутствіемъ первыхъ членовъ; но *эти члены могутъ быть*, какъ уже замѣчено, *отброшены*.

Уравненіямъ на контурѣ можно придать, какъ показалъ Матьё, очень компактный видъ. Разсмотримъ функціи:

$$f_1=\frac{\partial f}{\partial x}\sin\varphi-\frac{\partial f}{\partial y}\cos\varphi=\frac{\partial f}{\partial s}\text{ (стр. 180-я).}$$

Составимъ $\frac{\partial f_1}{\partial s}$. Находимъ сначала:

$$\frac{\partial f_1}{\partial s}=\sin\varphi\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\sin\varphi-\frac{\partial f}{\partial y}\cos\varphi\right)-\cos\varphi\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\sin\varphi-\frac{\partial f}{\partial y}\cos\varphi\right)=$$

$$=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\sin^2\varphi+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cos^2\varphi-2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\sin\varphi\cos\varphi+\frac{\partial f}{\partial n}\frac{\partial\varphi}{\partial s}$$

или:

$$\frac{\partial f_1}{\partial s}=\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)=\Delta f-\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cos^2\varphi+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\sin^2\varphi+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\sin\varphi\cos\varphi\right]+\frac{\partial f}{\partial n}\frac{\partial\varphi}{\partial s} \quad (\text{I})$$

Затѣмъ составимъ $\frac{\partial f_1}{\partial n}$. Находимъ:

$$\frac{\partial f_1}{\partial n}=\cos\varphi\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\sin\varphi-\frac{\partial f}{\partial y}\cos\varphi\right)+\sin\varphi\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\sin\varphi-\frac{\partial f}{\partial y}\cos\varphi\right)$$

или:

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)=\left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\sin\varphi\cos\varphi+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\sin^2\varphi-\cos^2\varphi)\right]+\frac{\partial f}{\partial n}\frac{\partial\varphi}{\partial n} \quad (\text{II})$$

Подставляя теперь значеніе прямыхъ скобокъ въ уравненія (2) и (3) стр. 182-й и стр. 183-й получаемъ: [1])

$$\frac{d}{ds}\left[\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial\zeta_0}{\partial s}\right)-\frac{\partial\zeta_0}{\partial n}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right]+2a_1\frac{\partial\Delta\zeta_0}{\partial n}=0 \qquad (2\text{ bis})$$

---

[1]) У *Mathieu* въ его „Théorie de l'élasticité des corps solides", partie I, p. 185 ошибка въ знакѣ фор. (2 bis).

$$2a_1\Delta\zeta_0+\frac{\partial\zeta_0}{\partial n}\frac{\partial\varphi}{\partial s}-\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial\zeta_0}{\partial s}\right)=0, \qquad (3\text{ bis})$$

ибо

$$1+\alpha=\frac{2(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}=2a_1 \text{ (стр. 173-я).}$$

Перейдемъ теперь къ *продольнымъ колебаніямъ*. Формула (2) стр. 173-й можетъ быть написана въ видѣ:

$$F_0(\xi_0,\eta_0)=a\left(\left(\frac{\partial\xi_0}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta_0}{\partial y}\right)^2\right)+b\frac{\partial\xi_0}{\partial x}\frac{\partial\eta_0}{\partial y}+\frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial\xi_0}{\partial y}+\frac{\partial\eta_0}{\partial x}\right)^2,$$

если будутъ введены коэффиціенты a и b стр. 14-ой. Отсюда находимъ $\delta F_0(\xi_0,\eta_0)$ и затѣмъ соотвѣтствующую часть δU, а именно:

$$\delta U_0=\int\delta F_0(\xi_0,\eta_0)dS=-\int dS\left[\left(2a\frac{\partial^2\xi_0}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2\xi_0}{\partial y^2}+(b+\mu)\frac{\partial^2\eta_0}{\partial x\partial y}\right)\delta\xi_0+\right.$$
$$+\left(2a\frac{\partial^2\eta_0}{\partial y^2}+\mu\frac{\partial^2\eta_0}{\partial x^2}+(b+\mu)\frac{\partial^2\xi_0}{\partial x\partial y}\right)\delta\eta_0\Big]+\int ds\Big[\Big(\Big(2a\frac{\partial\xi_0}{\partial x}+b\frac{\partial\eta_0}{\partial y}\Big)\cos(nx)+$$
$$+\mu\left(\frac{\partial\xi_0}{\partial y}+\frac{\partial\eta_0}{\partial x}\right)\cos(ny)\Big)\delta\xi_0+\Big(\Big(2a\frac{\partial\eta_0}{\partial y}+b\frac{\partial\xi_0}{\partial x}\Big)\cos(ny)+$$
$$\left.+\mu\left(\frac{\partial\xi_0}{\partial y}+\frac{\partial\eta_0}{\partial x}\right)\cos(nx)\right)\delta\eta_0\Big]. \qquad (A)$$

Затѣмъ представимъ $F_1(\xi_0,\eta_0)$ въ видѣ:

$$F_1(\xi_0,\eta_0)=a\left[a\left(\frac{\partial\xi_0}{\partial x}\frac{\partial^2\theta_0}{\partial x^2}+\frac{\partial\eta_0}{\partial y}\frac{\partial^2\theta_0}{\partial y^2}\right)+\frac{b}{2}\left(\frac{\partial\xi_0}{\partial x}\frac{\partial^2\theta_0}{\partial y^2}+\frac{\partial\eta_0}{\partial y}\frac{\partial^2\theta_0}{\partial x^2}\right)+\right.$$
$$\left.+\mu\left(\frac{\partial\xi_0}{\partial y}+\frac{\partial\eta_0}{\partial x}\right)\frac{\partial^2\theta_0}{\partial x\partial y}\right],$$

а отсюда найдемъ соотвѣтствующую часть δU,—а именно:

$$\delta U_1=\frac{\varepsilon^2}{3}\int dS\delta F_1(\xi_0,\eta_0)=\frac{a\varepsilon^2}{3}\int dS\Big\{a\left(\frac{\partial^2\theta_0}{\partial x^2}\frac{\partial\delta\xi_0}{\partial x}+\frac{\partial^2\theta_0}{\partial y^2}\frac{\partial\delta\eta_0}{\partial y}\right)+$$
$$+\frac{b}{2}\left(\frac{\partial^2\theta_0}{\partial y^2}\frac{\partial\delta\xi_0}{\partial x}+\frac{\partial^2\theta_0}{\partial x^2}\frac{\partial\delta\eta_0}{\partial y}\right)+\mu\frac{\partial^2\theta_0}{\partial x\partial y}\left(\frac{\partial\delta\xi_0}{\partial y}+\frac{\partial\delta\eta_0}{\partial x}\right)+a\left(\frac{\partial\xi_0}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\delta\theta_0}{\partial x}+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial\eta_0}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\delta\theta_0}{\partial y}\right)+\frac{b}{2}\left(\frac{\partial\xi_0}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\delta\theta_0}{\partial y}+\frac{\partial\eta_0}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\delta\theta_0}{\partial x}\right)+\mu\left(\frac{\partial\xi_0}{\partial y}+\frac{\partial\eta_0}{\partial x}\right)\frac{\partial^2\delta\theta_0}{\partial x\partial y}\Big\}.$$

Примѣняя интегрированіе по частямъ (формулы стр. 175-ой), для первыхъ трехъ скобокъ получимъ слѣдующее выраженіе:

$$-\frac{\alpha\varepsilon^2}{3}\int dS\left[\left(a\frac{\partial^3\theta_0}{\partial x^3}+\frac{b}{2}\frac{\partial^3\theta_0}{\partial x\partial y^2}+\mu\frac{\partial^3\theta_0}{\partial x\partial y^2}\right)\delta\xi_0+\left(a\frac{\partial^3\theta_0}{\partial y^3}+\frac{b}{2}\frac{\partial^3\theta_0}{\partial x^2\partial y}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\mu\frac{\partial^3\theta_0}{\partial x^2\partial y}\right)\delta\eta_0\right]+\frac{\alpha\varepsilon^2}{3}\int ds\left[\left(\left(a\frac{\partial^2\theta_0}{\partial x^2}+\frac{b}{2}\frac{\partial^2\theta_0}{\partial y^2}\right)\cos(nx)+\mu\frac{\partial^2\theta_0}{\partial x\partial y}\cos(ny)\right)\delta\xi_0+\right.$$
$$\left.+\left(\left(a\frac{\partial^2\theta_0}{\partial y^2}+\frac{b}{2}\frac{\partial^2\theta_0}{\partial x^2}\right)\cos(ny)+\mu\frac{\partial^2\theta_0}{\partial x\partial y}\cos(nx)\right)\delta\eta_0\right] \qquad (a)$$

Затѣмъ примѣняя къ четвертой и пятой скобкамъ два раза интегрированіе по частямъ, находимъ, что они дадутъ въ результатѣ:

$$-\frac{\alpha\varepsilon^2}{3}\int dS\left[\left(a\left(\frac{\partial^4\xi_0}{\partial x^4}+\frac{\partial^4\eta_0}{\partial x\partial y^3}\right)+\frac{b}{2}\left(\frac{\partial^4\xi_0}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4\eta_0}{\partial x^3\partial y}\right)\right)\delta\xi_0+\left(a\left(\frac{\partial^4\eta_0}{\partial y^4}+\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.+\frac{\partial^4\xi_0}{\partial x^3\partial y}\right)+\frac{b}{2}\left(\frac{\partial^4\eta_0}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4\xi_0}{\partial x\partial y^3}\right)\right)\delta\eta_0\right]+\frac{\alpha\varepsilon^2}{3}\int ds\left[\left(a\left(\frac{\partial^3\xi_0}{\partial x^3}+\frac{\partial^3\eta_0}{\partial y^3}\right)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{b}{2}\left(\frac{\partial^3\xi_0}{\partial x\partial y^2}+\frac{\partial^3\eta_0}{\partial x^2\partial y}\right)\right)\cos(nx)\delta\xi_0+\left(a\left(\frac{\partial^3\xi_0}{\partial x^3}+\frac{\partial^3\eta_0}{\partial y^3}\right)+\frac{b}{2}\left(\frac{\partial^3\xi_0}{\partial x\partial y^2}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{\partial^3\eta_0}{\partial x^2\partial y}\right)\cos(ny)\delta\eta_0\right]+\frac{\alpha\varepsilon^2}{3}\int ds\left[\left(\left(a\frac{\partial\xi_0}{\partial x}+\frac{b}{2}\frac{\partial\eta_0}{\partial y}\right)\cos(nx)\frac{\partial\delta\theta_0}{\partial x}+\right.\right.$$
$$\left.+\left(a\frac{\partial\eta_0}{\partial y}+\frac{b}{2}\frac{\partial\xi_0}{\partial y}\right)\cos(ny)\frac{\partial\delta\theta_0}{\partial y}\right)-\left(\left(a\frac{\partial^2\xi_0}{\partial x^2}+\frac{b}{2}\frac{\partial^2\eta_0}{\partial x\partial y}\right)\cos(nx)+$$
$$\left.+\left(a\frac{\partial^2\eta_0}{\partial y^2}+\frac{b}{2}\frac{\partial^2\xi_0}{\partial x\partial y}\right)\cos(ny)\right)\delta\theta_0\right]. \qquad (b)$$

Теперь остается преобразовать послѣднія, шестыя, скобки общаго выраженія для δU_1. Такъ какъ въ нихъ входитъ $\frac{\partial\delta\theta_0}{\partial x\partial y}$, то можно вести интегрированіе какъ по x'у, такъ и по y'у; мы же для симметріи результатовъ сначала примѣняемъ два раза интегрированіе по x'у, а затѣмъ два раза по y'у; послѣ чего результаты сложимъ и раздѣлимъ на 2; получимъ слѣдующее выраженіе:

$$-\frac{\alpha\varepsilon^2}{3}\int dS\left[\mu\left(\frac{\partial^4\xi_0}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4\eta_0}{\partial x^3\partial y}\right)\delta\xi_0+\mu\left(\frac{\partial^4\xi_0}{\partial x\partial y^3}+\frac{\partial^4\eta_0}{\partial x^2\partial y^2}\right)\delta\eta_0\right]+$$
$$+\frac{\alpha\varepsilon^2}{3}\int\frac{\mu}{2}ds\left[2\left(\frac{\partial^3\xi_0}{\partial x\partial y^2}+\frac{\partial^3\eta_0}{\partial x^2\partial y}\right)(\cos(nx)\delta\xi_0+\cos(ny)\delta\eta_0)+\right.$$
$$+\left(\frac{\partial\xi_0}{\partial y}+\frac{\partial\eta_0}{\partial x}\right)\left(\cos(nx)\frac{\partial\delta\theta_0}{\partial y}+\cos(ny)\frac{\partial\delta\theta_0}{\partial x}\right)-\left(\left(\frac{\partial^2\xi_0}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\eta_0}{\partial x^2}\right)\cos(ny)+\right.$$
$$\left.\left.+\left(\frac{\partial^2\xi_0}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\eta_0}{\partial x\partial y}\right)\cos(nx)\right)\delta\theta_0\right]. \qquad (c)$$

Теперь соединимъ выраженіе (a), (b) и (c) и для краткости письма положимъ:

$$\frac{\partial \Delta\xi_0}{\partial x}+\frac{\partial \Delta\eta_0}{\partial y}=W;$$

$$A=2a\frac{\partial^2\theta_0}{\partial x^2}+\left(a+\frac{b}{2}\right)\frac{\partial^2\theta_0}{\partial y^2};\quad B=2a\frac{\partial^2\theta_0}{\partial y^2}+\left(a+\frac{b}{2}\right)\frac{\partial^2\theta_0}{\partial x^2};\quad \Gamma=\mu\frac{\partial^2\theta_0}{\partial x\partial y};$$

$$\Xi=a\frac{\partial^2\xi_0}{\partial x^2}+\frac{b}{2}\frac{\partial^2\eta_0}{\partial x\partial y}+\frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial^2\xi_0}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\eta_0}{\partial x\partial y}\right);\quad H=a\frac{\partial^2\eta_0}{\partial y^2}+\frac{b}{2}\frac{\partial^2\xi_0}{\partial x\partial y}+$$

$$+\frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial^2\eta_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\xi_0}{\partial x\partial y}\right);\quad X=a\frac{\partial\xi_0}{\partial x}+\frac{b}{2}\frac{\partial\eta_0}{\partial y}=a\theta_0-\mu\frac{\partial\eta_0}{\partial y};$$

$$Y=a\frac{\partial\eta_0}{\partial y}+\frac{b}{2}\frac{\partial\xi_0}{\partial x}=a\theta_0-\mu\frac{\partial\xi_0}{\partial x};\quad Z=\frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial\xi_0}{\partial y}+\frac{\partial\eta_0}{\partial x}\right),$$

при чемъ пользовались соотношеніемъ:

$$a=\frac{b}{2}+\mu,$$

и замѣняли θ_0 его значеніемъ: $\frac{\partial\xi_0}{\partial x}+\frac{\partial\eta_0}{\partial y}$ при вычисленіи интеграла по поверхности. Найдемъ, положивъ, $\cos(nx)=\cos\varphi$ и $\cos(ny)=\sin\varphi$:

$$\delta U_1=-\frac{2a\alpha\varepsilon^2}{3}\int dS\left(\frac{\partial W}{\partial x}\delta\xi_0+\frac{\partial W}{\partial y}\delta\eta_0\right)+$$

$$+\frac{\alpha\varepsilon^2}{3}\int ds\Big\{(A\cos\varphi+\Gamma\sin\varphi)\delta\xi_0+(B\sin\varphi+\Gamma\cos\varphi)\delta\eta_0-$$

$$-(\Xi\cos\varphi+H\sin\varphi)\delta\theta_0+(X\cos\varphi+Z\sin\varphi)\frac{\partial\delta\theta_0}{\partial x}+$$

$$+(Y\sin\varphi+Z\operatorname{coc}\varphi)\frac{\partial\delta\theta_0}{\partial y}\Big\}. \qquad (B)$$

Теперь намъ нужно еще преобразовать интегралы по контуру, заключающіе множители:

$$\frac{\partial\delta\theta_0}{\partial x},\quad \frac{\partial\delta\theta_0}{\partial y}\quad \text{и}\quad \delta\theta_0.$$

Примѣнимъ формулы (a) стр. 180-й. Полагая въ нихъ f равной $\delta\theta_0$, получимъ:

$$\frac{\partial\delta\theta_0}{\partial x}=\frac{\partial\delta\theta_0}{\partial s}\sin\varphi+\frac{\partial\delta\theta_0}{\partial n}\cos\varphi;\quad \frac{\partial\delta\theta_0}{\partial y}=-\frac{\partial\delta\theta_0}{\partial s}\cos\varphi+\frac{\partial\delta\theta_0}{\partial n}\sin\varphi.$$

Подставляя эти значенія въ послѣдніе два члена формулы (B), получимъ:

$$\int ds\left[(X\cos\varphi + Z\sin\varphi)\frac{\partial\delta\theta_0}{\partial x} + (Y\sin\varphi + Z\cos\varphi)\frac{\partial\delta\theta_0}{\partial y}\right] =$$
$$= \int ds\frac{\partial\delta\theta_0}{\partial s}[(X-Y)\sin\varphi\cos\varphi - Z(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)] +$$
$$+ \int ds\,[X\cos^2\varphi + Y\sin^2\varphi + 2Z\sin\varphi\cos\varphi]\frac{\partial\delta\theta_0}{\partial n}.$$

Положимъ для краткости письма коэффиціентъ при $\frac{\partial\delta\theta_0}{\partial s}$ равнымъ G, тогда первый интегралъ дастъ:

$$\int G\frac{\partial\delta\theta_0}{\partial s}ds = -\int\frac{\partial G}{\partial s}\delta\theta_0 ds,$$

такъ какъ интегрированіе произведено по замкнутому контуру. Такимъ образомъ интегралъ по контуру въ формулѣ (B) приметъ слѣдующій видъ:

$$\frac{\alpha\varepsilon^2}{3}\int ds\Big[(A\cos\varphi + \Gamma\sin\varphi)\delta\xi_0 + (B\sin\varphi + \Gamma\cos\varphi)\delta\eta_0 +$$
$$+ (X\cos^2\varphi + Y\sin^2\varphi + 2Z\sin\varphi\cos\varphi)\frac{\partial\delta\theta_0}{\partial n}\Big] - \frac{\alpha\varepsilon^2}{3}\int ds\Big[\Xi\cos\varphi + H\sin\varphi +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial s}\Big((X-Y)\sin\varphi\cos\varphi - Z(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\Big)\Big]\delta\theta_0 = J_s, \text{ положимъ.}$$

Изъ членовъ съ $\delta\theta_0$ можно выдѣлить члены съ $\delta\xi_0$ и $\delta\eta_0$; съ $\frac{\partial\delta\xi_0}{\partial n}$, $\frac{\partial\delta\eta_0}{\partial n}$. Положимъ для простоты письма:

$$\Xi\cos\varphi + H\sin\varphi + \frac{\partial G}{\partial s} = L,$$

гдѣ, какъ выше:

$$G = (X-Y)\sin\varphi\cos\varphi - Z(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi).$$

Тогда замѣчаемъ, что $\delta\theta_0 = \frac{\partial}{\partial x}\delta\xi_0 + \frac{\partial}{\partial y}\delta\eta_0$ и примѣняя опять формулы (a) стр. 180-й, найдемъ:

$$\int Lds\delta\theta_0 = -\int ds\left[\frac{\partial(L\sin\varphi)}{\partial s}\delta\xi_0 - \frac{\partial(L\cos\varphi)}{\partial s}\delta\eta_0\right] +$$
$$+ \int dsL\left[\cos\varphi\frac{\partial\delta\xi_0}{\partial n} + \sin\varphi\frac{\partial\delta\eta_0}{\partial n}\right]. \qquad (\alpha)$$

При этомъ функціи G можно придать окончательно видъ:

$$G = \mu\left(\frac{\partial\xi_0}{\partial x} - \frac{\partial\eta_0}{\partial y}\right)\sin\varphi\cos\varphi - \frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial\xi_0}{\partial y} + \frac{\partial\eta_0}{\partial x}\right)(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)$$

или короче:

$$G = \frac{\mu}{2}\left[\left(\frac{\partial\xi_0}{\partial x} - \frac{\partial\eta_0}{\partial y}\right)\sin 2\varphi - \left(\frac{\partial\xi_0}{\partial y} + \frac{\partial\eta_0}{\partial x}\right)\cos 2\varphi\right]. \qquad (\beta)$$

Подставляя найденное значеніе

$$\int L ds \delta\theta_0$$

изъ (α) въ J_s, получимъ:

$$J_s = \frac{\alpha\varepsilon^2}{3}\int ds\left[\left(A\cos\varphi + \Gamma\sin\varphi + \frac{\partial(L\sin\varphi)}{\partial s}\right)\delta\xi_0 + \left(B\sin\varphi + \Gamma\cos\varphi - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{\partial(L\cos\varphi)}{\partial s}\right)\delta\eta_0 - L\left(\cos\varphi\frac{\partial\delta\xi_0}{\partial n} + \sin\varphi\frac{\partial\delta\eta_0}{\partial n}\right)\right] + \frac{\alpha\varepsilon^2}{3}\int N\frac{\partial\delta\theta_0}{\partial n}ds,$$

гдѣ положено:

$$N = X\cos^2\varphi + Y\sin^2\varphi + 2Z\sin\varphi\cos\varphi. \qquad (\gamma)$$

Замѣчая, что

$$\frac{\partial\delta\theta_0}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial x}\delta\frac{\partial\xi_0}{\partial n} + \frac{\partial}{\partial y}\delta\frac{\partial\eta_0}{\partial n},$$

и пользуясь тѣми же формулами (а) стр. 180-й, получимъ:

$$\int N ds\frac{\partial\delta\theta_0}{\partial n} = -\int ds\left(\frac{\partial(N\sin\varphi)}{\partial s}\frac{\partial\delta\xi_0}{\partial n} - \frac{\partial(N\cos\varphi)}{\partial s}\frac{\partial\delta\eta_0}{\partial n}\right) +$$
$$+\int dsN\left(\cos\varphi\frac{\partial^2\delta\xi_0}{\partial n^2} + \sin\varphi\frac{\partial^2\delta\eta_0}{\partial n^2}\right).$$

Подставляя въ J_s, получимъ окончательно:

$$J_s = \frac{\alpha\varepsilon^2}{3}\int ds\left[\left(A\cos\varphi + \Gamma\sin\varphi + \frac{\partial(L\sin\varphi)}{\partial s}\right)\delta\xi_0 + \left(B\sin\varphi + \Gamma\cos\varphi - \right.\right.$$
$$\left. - \frac{\partial(L\cos\varphi)}{\partial s}\right)\delta\eta_0 - \left(L\cos\varphi + \frac{\partial(N\sin\varphi)}{\partial s}\right)\frac{\partial\delta\xi_0}{\partial n} -$$
$$\left. - \left(L\sin\varphi - \frac{\partial(N\cos\varphi)}{\partial s}\right)\frac{\partial\delta\eta_0}{\partial n} + N\left(\cos\varphi\frac{\partial^2\delta\xi_0}{\partial n^2} + \sin\varphi\frac{\partial^2\delta\eta_0}{\partial n^2}\right)\right]. \qquad (\delta)$$

Колебанія квадратной пластинки.

Уравненіе для поперечныхъ колебаній пластинки (стр. 182-ая, уравн. (1)) будетъ:

$$\frac{d^2\zeta_0}{dt^2} + c^2\left(\frac{\partial^4\zeta_0}{\partial x^4} + \frac{\partial^4\zeta_0}{\partial y^4} + 2\frac{\partial^4\zeta_0}{\partial x^2\partial y^2}\right) = 0, \tag{1}$$

гдѣ положено:

$$c^2 = \frac{4\mu(\lambda+\mu)\varepsilon^2}{3\varrho(\lambda+\mu)} = \frac{\varepsilon^2 e}{\varrho},$$

если обозначимъ:

$$e = \frac{4\mu(\lambda+\mu)}{3(\lambda+2\mu)}.$$

Условія на контурѣ пластинки (стр. 183-я, фор. (2) и (3)) будутъ:

$$\frac{\partial}{\partial s}\left[\left(\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\zeta_0}{\partial y^2}\right)\sin\varphi\cos\varphi + \frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x\partial y}(\sin^2\varphi - \cos^2\varphi)\right] + 2a_1\frac{\partial\Delta\zeta_0}{\partial n} = 0 \quad \text{(a)}$$

$$\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x^2}\cos^2\varphi + \frac{\partial^2\zeta_0}{\partial y^2}\sin^2\varphi + 2\frac{\partial^2\zeta_0}{\partial x\partial y}\sin\varphi\cos\varphi + b_1\Delta\zeta_0 = 0, \quad \text{(b)}$$

причемъ значеніе символовъ $\frac{\partial}{\partial s}$ и $\frac{\partial}{\partial n}$ слѣдующее:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial s} &= \frac{\partial f}{\partial x}\sin\varphi - \frac{\partial f}{\partial y}\cos\varphi\\ \frac{\partial f}{\partial n} &= \frac{\partial f}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\varphi\end{aligned}\right\} \tag{c}$$

Положимъ, что частное рѣшеніе уравненія (1) будетъ вида:

$$\zeta_0 = U\sin(k^2 ct),$$

причемъ U будетъ функціей x и y, а k^2 подлежащій опредѣленію параметръ.

Подставляя въ (1), (a) и (b) это значеніе ζ_0, найдемъ для U уравненіе:

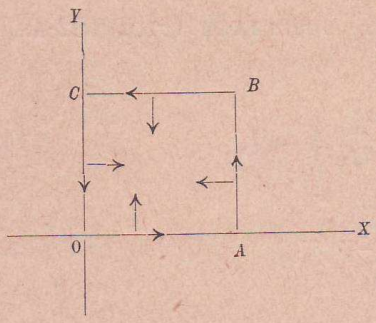
$$\Delta\Delta U - k^4 U = 0 \tag{3}$$

внутри пластинки (въ срединной плоскости) и условія:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial s}\left[\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)\sin\varphi\cos\varphi + \frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}(\sin^2\varphi - \cos^2\varphi)\right] + 2a_1\frac{\partial\Delta U}{\partial n} = 0\\ &\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\cos^2\varphi + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\sin^2\varphi + 2\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}\sin\varphi\cos\varphi + b_1\Delta U = 0\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

на ея контурѣ.

Для квадратной пластинки эти условія можно написать въ болѣе простомъ видѣ. Дѣйствительно, если примемъ одну изъ вершинъ пластинки за начало координатъ и исходящія изъ нея стороны за оси координатъ, то произведеніе $\sin\varphi\cos\varphi$ исчезаетъ на всемъ периметрѣ квадрата и затѣмъ значеніе символовъ $\frac{\partial}{\partial z}$ и $\frac{\partial}{\partial n}$ легко опредѣляется изъ прилагаемой таблицы для всѣхъ послѣдовательныхъ сторонъ квадрата.



	$y=0$	$x=a$	$y=a$	$x=0$
	OA	AB	BC	CO
φ	90^0	180^0	270^0	0^0
$\frac{\partial}{\partial s}$	$\frac{\partial}{\partial x}$	$\frac{\partial}{\partial y}$	$-\frac{\partial}{\partial x}$	$-\frac{\partial}{\partial y}$
$\frac{\partial}{\partial n}$	$\frac{\partial}{\partial y}$	$-\frac{\partial}{\partial x}$	$-\frac{\partial}{\partial y}$	$\frac{\partial}{\partial x}$

Поэтому условія (4) можно написать въ слѣдующемъ видѣ:

$$\left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)_{y=0}=0;\quad \left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)_{x=a}=0;\quad \left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)_{y=a}=0;\quad \left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)_{x=0}=0; \tag{5}$$

$$L_{y=0}=0;\quad K_{x=a}=0;\quad L_{y=a}=0;\quad K_{x=0}=0; \tag{6}$$

причемъ положено для краткости письма:

$$G=\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+c_1\Delta U;\quad H=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+c_1\Delta U; \tag{7}$$

$$K=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+b_1\Delta U;\quad L=\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+b_1\Delta U; \tag{8}$$

причемъ G, H, K и L будутъ функціями x и y и затѣмъ на самомъ дѣлѣ придется вычислять лишь вторыя производныя U по x и y; сверхъ того функціи K и L получаются соотвѣтственно изъ H и G замѣной коэффиціента $c_1=2a_1$ коэффиціентомъ b_1.

Итакъ намъ предстоитъ теперь рѣшить уравненіе:

$$\frac{\partial^4 U}{\partial x^4}+\frac{\partial^4 U}{\partial y^4}+2\frac{\partial^4 U}{\partial x^2\partial y^2}=k^4 U, \tag{9}$$

при условіяхъ на контурѣ, выраженныхъ равенствами (5)—(8).

Пойдемъ сначала путемъ, указаннымъ Кирхгофомъ въ его теоріи поперечныхъ колебаній круглой пластинки.

Положимъ, что

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = k^2 V, \tag{10}$$

гдѣ, слѣдовательно, V будетъ функція x и y.

Подставляя (10) въ (9), получимъ:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = k^2 U. \tag{11}$$

Положимъ теперь, что

$$U = u + v; \quad V = u - v;$$

причемъ u и v будутъ функціями x и y.

Подставляя эти значенія въ уравненія (10) и (11), найдемъ для опредѣленія u и v слѣдующія два уравненія:

$$\Delta u = k^2 u, \quad \Delta v = -k^2 v. \tag{12}$$

Попробуемъ удовлетворить этимъ уравненіямъ рѣшеніями:

$$u = X(x)Y(y), \quad v = X_1(x)Y_1(y). \tag{a}$$

Уравненія (12) теперь дадутъ:

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = h^2; \quad \frac{X_1''}{X_1} + \frac{Y_1''}{Y_1} = -k^2. \tag{13}$$

Отсюда заключаемъ, что если $X'' = g^2 X$, гдѣ g будетъ дѣйствительное количество, то: $Y'' = \gamma^2 Y$; причемъ положено: $\gamma^2 = k^2 - g^2$ при условіи, что $g < k$.

Точно также, если возьмемъ: $X_1'' = -h^2 X_1$; то получимъ $Y_1'' = -\beta^2 Y_1$, если положимъ, что $\beta^2 = k^2 - h^2$ при условіи: $h < k$.

Итакъ имѣемъ частное рѣшеніе уравненій (12):

$$\left.\begin{aligned} u &= A \sin H(gx + \theta) \sin H(\gamma y + \varphi) \\ v &= A_1 \sin (hx + \omega) \sin (\beta y + \psi) \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

гдѣ g, γ, h, β и θ, φ, ω, ψ должны быть опредѣлены изъ условій на контурѣ пластинки.

Замѣтимъ, что рѣшенія (а) уравненій (12) допускаютъ еще нѣсколько комбинацій; но мы беремъ тѣ, которыя дадутъ простѣйшія рѣшенія.

Пользуясь соотношеніями:

$$\gamma^2 = k^2 - g^2; \quad \beta^2 = k^2 - h^2,$$

находимъ по формуламъ стр. 190-й для функціи u значенія G, H, K и L; а именно:

$$G = \phi(c_1, \gamma)u; \quad H = \phi(c_1, g)u; \quad K = \phi(b_1, g)u; \quad L = \phi(b_1, \gamma)u,$$

гдѣ введено обозначеніе для простоты письма:

$$\phi(a, z) = ak^2 + z^2.$$

Затѣмъ находимъ тоже для функціи u:

$$\frac{\partial G}{\partial x} = Ag\phi(c_1, \gamma)\cos H(gx + \theta)\sin H(\gamma y + \varphi);$$

$$\frac{\partial H}{\partial y} = A\gamma\phi(c_1, g)\cos H(\gamma y + \varphi)\sin H(gx + \theta).$$

Точно также составимъ для функціи v:

$$G = -\phi(c_1, \beta)v, \quad H = -\phi(c_1, h)v; \quad K = -\phi(b_1, h)v; \quad L = -\phi(b_1, \beta)v$$

и затѣмъ:

$$\frac{\partial G}{\partial x} = -A_1 h\phi(c_1, \beta)\cos(hx + \omega)\sin(\beta y + \psi);$$

$$\frac{\partial H}{\partial y} = -A_1\beta\phi(c_1, h)\cos(\beta y + \psi)\sin(hx + \omega).$$

Такъ какъ $U = u + v$, то въ условіяхъ (5) и (6) стр. 190-й, надо взять суммы количествъ G, H, K и L для функцій u и v; получимъ слѣдующую систему уравненій:

$$Ag\phi(c_1, \gamma)\cos H(ga + \theta)\sin H(\gamma y + \varphi) = A_1 h\phi(c_1, \beta)\cos(ha + \omega)\sin(\beta y + \psi) \quad (1)$$

$$Ag\phi(c_1, \gamma)\cos H(\theta)\sin H(\gamma y + \varphi) = A_1 h\phi(c_1, \beta)\cos\omega\sin(\beta y + \psi) \quad (2)$$

Эти уравненія имѣютъ мѣсто для всѣхъ значеній y'а отъ 0 до a.

$$A\gamma\phi(c_1, g)\cos H(\gamma a + \varphi)\sin H(gx + \theta) = A_1\beta\phi(c_1, h)\cos(\beta a + \psi)\sin(hx + \omega) \quad (3)$$

$$A\gamma\phi(c_1, g)\cos H(\varphi)\sin H(gx + \theta) = A_1\beta\phi(c_1, h)\cos\psi\sin(hx + \omega) \quad (4)$$

— для всѣхъ значеній x'а отъ 0 до a.

$$A\phi(b_1, g)\sin H(ga+\theta)\sin H(\gamma y+\varphi) = A_1\phi(b_1, h)\sin(ha+\omega)\sin(\beta y+\psi) \quad (5)$$

$$A\phi(b_1, g)\sin H(\theta)\sin H(\gamma y+\varphi) = A_1\phi(b_1, h)\sin\omega\sin(\beta y+\psi) \quad (6)$$

— для всѣхъ значеній y'а отъ 0 до a.

Наконецъ:

$$A\phi(b_1, \gamma)\sin H(\gamma a+\varphi)\sin H(gx+\theta) = A_1\phi(b_1, \beta)\sin(\beta a+\psi)\sin(hx+\omega) \quad (7)$$

$$A\phi(b_1, \gamma)\sin H(\varphi)\sin H(gx+\theta) = A_1\phi(b_1, \beta)\sin\psi\sin(hx+\omega) \quad (8)$$

— для всѣхъ значеній x'а отъ 0 до a.

Итакъ имѣемъ *девять* уравненій съ *девятью* неизвѣстными: g, γ; h, β; θ, φ; ω, ψ и $A_1 : A$.

Отсюда мы находимъ системы болѣе простыя для рѣшенія.

Вычитая (1) и (2) одно изъ другого, затѣмъ складывая ихъ и раздѣляя первый результатъ на второй, получимъ:

$$\operatorname{tg} H\left(\frac{ga}{2}+\theta\right)\operatorname{tg} H\left(\frac{ga}{2}\right) = -\operatorname{tg}\left(\frac{ha}{2}+\omega\right)\operatorname{tg}\frac{ha}{2}.$$

Точно также изъ уравненій (5) и (6) получимъ:

$$\operatorname{tg} H\left(\frac{ga}{2}+\theta\right)\operatorname{ctg} H\left(\frac{ga}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{ha}{2}+\omega\right)\operatorname{ctg}\frac{ha}{2}.$$

Перемножая два эти результата, находимъ:

$$\operatorname{tg} H^2\left(\frac{ga}{2}+\theta\right)+\operatorname{tg}^2\left(\frac{ha}{2}+\omega\right) = 0.$$

Отсюда находимъ:

$$\theta = -\frac{ga}{2} \quad \text{и} \quad \omega = -\frac{ha}{2}. \quad (A)$$

Хотя въ правой части послѣдняго равенства можно приложить $p\pi$ (p — цѣлое число), но это вліяетъ лишь на знакъ, который можно отнести къ коэффиціенту A_1, а потому мы оставимъ выписанное рѣшеніе (A).

Совершенно такимъ же путемъ получимъ изъ уравненій (3) и (4), (7) и (8) слѣдующее:

$$\varphi = -\frac{\gamma a}{2} \quad \text{и} \quad \psi = -\frac{\beta a}{2}. \quad (B)$$

Подставляя эти значенія θ, ω, φ и ψ обратно въ систему (1)—(8), получимъ уже только *четыре* уравненія съ *пятью* неизвѣстными: g, γ; h, β и $A_1 : A$; а именно:

$$Ag\mathfrak{f}(c_1, \gamma) \cos H\left(\frac{ga}{2}\right) \sin H\gamma\left(y - \frac{a}{2}\right) = A_1 h\mathfrak{f}(c_1, \beta) \cos \frac{ha}{2} \sin \beta\left(y - \frac{a}{2}\right) \quad \text{(a)}$$

$$A\gamma\mathfrak{f}(c_1, g) \cos H\left(\frac{\gamma a}{2}\right) \sin Hg\left(x - \frac{a}{2}\right) = A_1 \beta\mathfrak{f}(c_1, h) \cos \frac{\beta a}{2} \sin h\left(x - \frac{a}{2}\right) \quad \text{(b)}$$

$$A\mathfrak{f}(b_1, g) \sin H\left(\frac{ga}{2}\right) \sin H\gamma\left(y - \frac{a}{2}\right) = A_1\mathfrak{f}(b_1, h) \sin \frac{ha}{2} \sin \beta\left(y - \frac{a}{2}\right) \quad \text{(c)}$$

$$A\mathfrak{f}(b_1, \gamma) \sin H\left(\frac{\gamma a}{2}\right) \sin Hg\left(x - \frac{a}{2}\right) = A_1\mathfrak{f}(b_1, \beta) \sin \frac{\beta a}{2} \sin h\left(x - \frac{a}{2}\right). \quad \text{(d)}$$

Положимъ въ послѣднихъ двухъ уравненіяхъ: $x = a$, $y = a$ или $x = 0$, $y = 0$ или $x = 0$, $y = a$; $x = a$, $y = 0$ и результаты раздѣлимъ одинъ на другой, получимъ:

$$\frac{\mathfrak{f}(b_1, g)}{\mathfrak{f}(b_1, \gamma)} = \frac{\mathfrak{f}(b_1, h)}{\mathfrak{f}(b_1, \beta)}.$$

Если подставимъ сюда значеніе символовъ $\mathfrak{f}$ и вспомнимъ, что

$$g^2 + \gamma^2 = k^2, \quad h^2 + \beta^2 = k^2,$$

то найдемъ:

$$h^2 = g^2; \quad \beta^2 = \gamma^2.$$

Мы можемъ взять теперь:

$$h = g, \quad \beta = \gamma. \qquad \text{(C)}$$

Итакъ остается опредѣлить параметры g и γ и отношеніе $A_1 : A$.

Подставимъ теперь значенія (C) въ систему (a)—(d) и положимъ въ ней $x = a$, $y = a$; тогда получимъ только *три* уравненія:

$$A \cos H\left(\frac{ga}{2}\right) \sin H\left(\frac{\gamma a}{2}\right) = A_1 \cos \frac{ga}{2} \sin \frac{\gamma a}{2} \qquad (\alpha)$$

$$A \cos H\left(\frac{\gamma a}{2}\right) \sin H\left(\frac{ga}{2}\right) = A_1 \cos \frac{\gamma a}{2} \sin \frac{ga}{2} \qquad (\beta)$$

$$A \sin H\left(\frac{ga}{2}\right) \sin H\left(\frac{\gamma a}{2}\right) = A_1 \sin \frac{ga}{2} \sin \frac{\gamma a}{2}. \qquad (\gamma)$$

Раздѣляя уравненіе (γ) сначала на (α), а потомъ на (β), получимъ:

$$\operatorname{tg} H\left(\frac{g a}{2}\right) = \operatorname{tg} \frac{g a}{2}, \quad \operatorname{tg} H\left(\frac{\gamma a}{2}\right) = \operatorname{tg} \frac{\gamma a}{2}. \tag{D}$$

Итакъ g и γ суть корни трансцендентнаго уравненія

$$\operatorname{tg} H\left(\frac{a u}{2}\right) = \operatorname{tg} \frac{a u}{2}$$

или, если положимъ, что $a u = 2z$:

$$\operatorname{tg} H(z) = \operatorname{tg} z \ ^{1}). \tag{E}$$

Остается опредѣлить $A_1 : A$. Для этого возведемъ въ квадратъ уравненія (α) и (γ) или (β) и (γ) и вычтемъ; получимъ:

$$A^2 \sin H^2\left(\frac{\gamma a}{2}\right) = A_1^2 \sin^2 \frac{\gamma a}{2} \cos g a,$$

но при помощи (D) найдемъ:

$$\sin H^2\left(\frac{\gamma a}{2}\right) = \frac{\sin^2 \frac{\gamma a}{2}}{\cos \gamma a},$$

а слѣдовательно

$$A^2 = A_1^2 \cos g a \cos \gamma a. \tag{F}$$

Такимъ образомъ все найдено.

Итакъ получимъ для U слѣдующее частное рѣшеніе:

$$U = A_{g\gamma} \sin H\left[g\left(x - \frac{a}{2}\right)\right] \sin H\left[\gamma\left(y - \frac{a}{2}\right)\right] +$$
$$+ A_{1 g\gamma} \sin g\left(x - \frac{a}{2}\right) \sin \gamma\left(y - \frac{a}{2}\right).$$

Одну систему узловыхъ линій получимъ, взявъ:

$$1)\ x = \frac{a}{2} \quad \text{или} \quad 2)\ y = \frac{a}{2},$$

это *медіаны* пластинки.

Можно написать болѣе общее рѣшеніе, если замѣтимъ, что

$$k^2 = g^2 + \gamma^2 = \gamma^2 + g^2.$$

---

[1]) Наименьшій корень этого уравненія будетъ: $z_0 = 0{\cdot}680 \frac{\pi}{4}$, а остальные будутъ очень близки къ $z_p = (4p + 1) \frac{\pi}{4}$, гдѣ $p = 1, 2, 3, \ldots$

Слѣдовательно g и γ можно взаимно переставить; тогда получимъ болѣе общее рѣшеніе для U, а именно:

$$U = A_{g\gamma} \sin H\left[g\left(x-\frac{a}{2}\right)\right] \sin H\left[\gamma\left(y-\frac{a}{2}\right)\right] +$$

$$+ A_{\gamma g} \sin H\left[\gamma\left(x-\frac{a}{2}\right)\right] \sin H\left[g\left(y-\frac{a}{2}\right)\right] + A_{1g\gamma} \sin g\left(x-\frac{a}{2}\right) \sin \gamma\left(y-\frac{a}{2}\right) +$$

$$+ A_{1\gamma g} \sin \gamma\left(x-\frac{a}{2}\right) \sin g\left(y-\frac{a}{2}\right).$$

Разсмотримъ случай, когда:

$$A_{g\gamma} + A_{\gamma g} = 0, \quad A_{1g\gamma} + A_{1\gamma g} = 0,$$

тогда U можно придать видъ:

$$U = A_{g\gamma}\left\{\sin H\left[\frac{g+\gamma}{2}(x+y-a)\right] \sin H\left[\frac{g-\gamma}{2}(x-y)\right] -\right.$$

$$\left. - \sin H\left[\frac{g-\gamma}{2}(x+y-a)\right] \sin H\left[\frac{g+\gamma}{2}(x-y)\right]\right\} -$$

$$- A_{1g\gamma}\left\{\sin\left[\frac{g+\gamma}{2}(x-y)\right] \sin\left[\frac{g-\gamma}{2}(x+y-a)\right] -\right.$$

$$\left. - \sin\left[\frac{g+\gamma}{2}(x+y-a)\right] \sin\left[\frac{g-\gamma}{2}(x-y)\right]\right\}.$$

Ясно, что $U = 0$ для всѣхъ точекъ прямыхъ:

$$3)\ x-y=0 \quad \text{и} \quad 4)\ x+y-a=0,$$

т. е. получаемъ еще систему узловыхъ линій пластинки, а именно ея *бисекторы*.

Послѣднее выраженіе для U даетъ узловыя линіи и въ предыдущихъ случаяхъ, т. е. когда или $x = \frac{a}{2}$, или $y = \frac{a}{2}$.

Г. Ѳ. Вороной (1868—1908).

7-го Ноября 1908 года въ 9 ч. 20 м. утра послѣ тяжкихъ страданій скончался въ Варшавѣ докторъ чистой математики, членъ-корреспондентъ С.-Петербургской Академіи Наукъ, ординарный профессоръ Варшавскаго Университета и Варшавскаго Политехническаго Института Георгій Ѳеодосьевичъ Вороной.

Умеръ онъ 40 лѣтъ отъ роду, въ полномъ расцвѣтѣ своего мощнаго математическаго таланта. Вся жизнь покойнаго была служеніемъ чистой математикѣ, которой онъ былъ до самоотверженія преданъ.

Г. Ѳ. Вороной родился 16 апрѣля 1868 года въ мѣстечкѣ Журавка Полтавской губерніи. Отецъ его, о которомъ покойный всю жизнь хранилъ самыя лучшія сыновнія чувства, былъ сперва исправляющимъ должность профессора Нѣжинскаго лицея князя Безбородко, а потомъ директоромъ Кишиневской, Бердянской и Прилукской гимназій. Среднее образованіе покойный получилъ въ гимназіяхъ Бердянской и Прилукской. Пишущій эти строки не имѣетъ свѣдѣній о жизни усопшаго за этотъ періодъ. Кое-что однако сохранилось въ его «Дневникѣ», который покойный велъ въ свои студенческіе годы, и при томъ о его пребываніи въ Прилукской гимназіи. Видно, что онъ съ большимъ успѣхомъ занимался математикой. О своемъ же преподавателѣ математики Богословскомъ покойный сохранилъ самыя лучшія воспоминанія. Изъ другого мѣста «Дневника» можно заключить, что усопшій пользовался славой прекраснаго математика не только среди товарищей, но и ученицъ женской гимназіи г. Прилукъ.

Въ бытность свою въ восьмомъ классѣ Прилукской гимназіи покойный особенно полюбилъ алгебру. Въ это время проф. Университета Св. Владиміра В. П. Ермаковъ на страницахъ своего „Журнала элементарной математики“ предложилъ тему: „Разложеніе многочленовъ на множители, основанное на свойствѣ корней квадратнаго уравненія“. Юный математикъ принялся за эту тему. Плодомъ его усилій явилась статейка, снабженная изрядным количествомъ примѣровъ. Потомъ она была напечатана въ № 1 второго тома (за 1885 годъ) вышеупомянутаго журнала.

Появленіе въ печати, хотя и простого, но все-же самостоятельнаго изслѣдованія побудило автора попытать свои силы на другихъ, болѣе трудныхъ вопросахъ. Новой темой онъ избралъ слѣдующую: Рѣшить въ цѣлыхъ и положительныхъ числахъ неопредѣленное уравненіе

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2mxyz,$$

гдѣ m какое-либо опредѣленное цѣлое число. Но рѣшеніе такого вопроса превосходило его познанія и юныя силы. Уже перебравшись въ августѣ 1885 года въ С.-Петербургскій Университетъ студентомъ-математикомъ, онъ на первыхъ порахъ еще продолжалъ размышлять надъ этой задачей. Видя потомъ тщетность своихъ усилій, онъ долженъ былъ сознаться: „я, собственно говоря, потерялъ надежду когда-либо рѣшить эту задачу“.

Насколько можно судить по «Дневнику», этимъ пока и кончаются попытки юнаго математика самостоятельнаго рѣшенія вопросовъ. Цѣлые два года уходятъ на саморазвитіе. Усердно посѣщая лекціи, дополняя ихъ изученіемъ Serret, Faà de Bruno, Чебышева и др., онъ въ часы, свободные отъ занятій математикой, пополняетъ свое общее образованіе чтеніемъ литературныхъ и философскихъ произведеній. Въ это же самое время онъ совершенствуется во французскомъ и нѣмецкомъ языкахъ, а также изучаетъ языкъ англійскій. Лѣтнія каникулы онъ обыкновенно проводитъ въ имѣніи своего отца „Журавка“. Въ родной семьѣ, а также у сосѣдей Критскихъ, родителей своей будущей жены, онъ находитъ отдыхъ и черпаетъ силы для свохъ послѣдующихъ занятій математикой.

Нельзя сказать, чтобы жизнь въ Петербургѣ улыбалась покойному. Средства, которыя могъ ему давать его отецъ, въ особенности выйдя въ 1887 году въ отставку, были недостаточны. Да и покойный принципіально не считалъ себя въ правѣ ими пользоваться. Отецъ присылалъ только плату въ коллегію, гдѣ покойный жилъ все время своего пребыванія въ Университетѣ. Все же прочее нужно было добывать уроками или какою-либо другою работой. „Вчера я получилъ урокъ черезъ одного изъ товарищей“, говорится въ «Дневникѣ»: „Урокъ крайне невыгодный: 15 р. въ мѣсяцъ, каждый день заниматься по часу. Такъ какъ это отъ меня очень далеко, то мнѣ приходится затрачивать болѣе двухъ часовъ. Я уже рѣшилъ, что, если только подвернется какая-либо другая маломальски сносная работа, немедленно откажусь отъ урока.

Матеріальная необезпеченность, а также жизнь вдвоемъ въ одной комнатѣ и при томъ въ шумной коллегіи, мѣшавшія ему свободно предаваться занятіемъ, доставляли ему сильныя нравственныя мученія. Въ своемъ «Дневникѣ» онъ постоянно сѣтуетъ на то, что отъ сильной усталости послѣ продолжительной ходьбы по урокамъ и вслѣдствіе условій жизни въ коллегіи, не можетъ всецѣло отдаться математикѣ. Покойный

напрягаетъ всѣ силы, чтобы и при этихъ неблагопріятныхъ условіяхъ выработать въ себѣ привычку безъ всякаго принужденія усаживаться за книгу.

Будучи уже на третьемъ курсѣ, покойный съ особеннымъ пыломъ начинаетъ увлекаться изученіемъ главнымъ образомъ отдѣловъ чистой математики. „Лекціи по чистой математикѣ“, пишетъ онъ: „меня все болѣе и болѣе увлекаютъ. Лекціи проф. С. по спеціальному курсу высшей алгебры я теперь предпочитаю всѣмъ остальнымъ. Теперь у меня есть настоящее желаніе работать безъ всякаго насильственнаго усаживанія за книгу“. Далѣе: „Сегодня я работалъ тоже порядочно. Записалъ шесть лекцій, такъ что на послѣдней даже рука отказалась писать. Встаю въ 5 часовъ и по утрамъ занимаюсь математикой. Что за прелестная вещь! Хотя и масса формулъ, но всѣ онѣ настолько симметричны, что легко запоминаются“.

До сихъ поръ весь пылъ своего пытливаго ума покойный направлялъ на пріобрѣтеніе познаній по математикѣ. Но вотъ мало по малу начинаетъ мучить его вопросъ, есть-ли у него способности, благодаря которымъ изъ него могъ бы впослѣдствіи выработаться ученый. „Главное, что меня занимаетъ“, пишетъ онъ: „есть-ли у меня достаточно способности.... Она (математика) поглощаетъ все мое вниманіе, и гнетущій вопросъ, быть ли мнѣ профессоромъ или не быть“. И вотъ онъ начинаетъ провѣрять свои способности. Безъ всякаго руководства пробуетъ онъ вычислить въ зависимости отъ коэффиціентовъ уравненія

$$x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \ldots + p_m = 0$$

слѣдующія симметрическія функціи его корней:

$$\sum x_1^2 x_2^2 \ldots x_\mu^2 x_{\mu+1} \ldots x_\nu ; \quad \sum x_1^3 x_2^3 \ldots x_\mu^3 x_{\mu+1}^2 \ldots x_{\mu+\nu}^2 x_{\mu+\nu+1} \ldots x_{\mu+\nu+\omega} ,$$

и достигаетъ полнаго успѣха.

Этотъ результатъ вселяетъ въ немъ увѣренность, что у него есть математическія способности. Эта увѣренность возрасла, когда покойному удалось самостоятельно, безъ примѣненія комплексныхъ чиселъ, вычислить опредѣленные интегралы:

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \cos(vx^2)\, dx , \quad \int_0^\infty e^{-x^2} \sin(vx^2)\, dx$$

при всякомъ вещественномъ v, а также проинтегрировать дифференціальное уравненіе:

$$\left[\frac{p(x^2+y^2)}{2}-rx+qy+s\right]y''+[py+q-(px-r)y'](1+y'^2)=0,$$

гдѣ p, q, r и s постоянные числа, предложенное студентамъ проф. А. А. Марковымъ.

Всѣ эти результаты убѣдили покойнаго въ существованіи у него математическихъ способностей, и вотъ онъ смѣло приступаетъ къ изысканію новыхъ свойствъ чиселъ Бернулли, идетъ усиленная, плодотворная работа. Слѣды ея хорошо сохранились въ „Дневникѣ“. Мало-помалу открывается рядъ новыхъ теоремъ, которыя формируются потомъ въ одну общую теорему, составившую сущность его кандидатскаго сочиненія: „О числахъ Бернулли“, представленнаго потомъ въ 1889 году въ государственную коммиссію.

Теорема, о которой идетъ рѣчь, состоитъ въ слѣдующемъ:

Если m-тое Бернулліево число.

$$B_m=\frac{P_m}{Q_m},$$

гдѣ $\frac{P_m}{Q_m}$ не сократимая дробь, то имѣетъ мѣсто слѣдующее сравненіе:

$$(-1)^{m-1}(a^{2m}-1)P_m\equiv 2ma^{2m-1}Q_m\left[1^{2m-1}\mathrm{E}\left(\frac{a}{N}\right)+\right.$$
$$\left.+2^{2m-1}\mathrm{E}\left(\frac{2a}{N}\right)+\ldots+(N-1)^{2m-1}\mathrm{E}\left(\frac{(N-1)a}{N}\right)\right]\ (\text{мод. } N).$$

При этомъ a и N суть какія-угодно цѣлыя положительныя числа, простыя между собою, а $\mathrm{E}\left(\frac{ai}{N}\right)$ означаетъ цѣлую часть дроби $\frac{ai}{N}$.

Изъ этой теоремы авторъ выводитъ рядъ слѣдствій и между прочимъ слѣдующую обобщенную теорему Adams'a:

Если число m, значекъ m-го Бернулліева числа, имѣетъ дѣлителемъ число $k=p_1^{\alpha}p_2^{\beta}\ldots p_l^{\lambda}$, гдѣ $p_1, p_2, \ldots, p_l$ простыя числа, то числитель его будетъ дѣлиться на k.

Эта работа, въ которой въ значительной степени развернулись творческія силы покойнаго, въ 1890 году была напечатана въ „Сообщеніяхъ Харьковскаго Математическаго Общества“.

Оцѣнка, которую далъ ей проф. А. А. Марковъ, вполнѣ убѣдила автора, что изъ него можетъ выйти славный ученый, и вотъ онъ, будучи оставленъ въ декабрѣ 1889 года при С.-Петербургскомъ университетѣ для приготовленія къ профессорскому званію, отдается самостоятельнымъ изслѣдованіямъ въ области теоріи чиселъ. Начинается мало-

по-малу назрѣвать и создаваться его магистерская диссертація: „О цѣлыхъ числахъ, зависящихъ отъ корня уравненія третьей степени“. Работа подвигается успѣшно. Но молодой ученый особенно не спѣшитъ съ съ ней. Нужно было готовиться къ магистерскимъ испытаніямъ. Да и обладалъ онъ особеннымъ творчествомъ. Теоремы угадывались имъ какъ бы чутьемъ. Онъ повѣрялъ ихъ какъ можно на большемъ числѣ примѣровъ. Потомъ, съ полной увѣренностью въ ихъ непреложности, приступалъ къ ихъ обоснованію. „Всѣ теоремы, данныя мною“, пишетъ онъ: „возникали совершенно независимо и мнѣ оставалось ихъ только повѣрять“.

Наконецъ, работа была закончена, напечатана въ 1893 году и въ октябрѣ того же года представлена въ качествѣ магистерской диссертаціи въ С.-Петербургскій университетъ.

Въ этой работѣ авторъ задался сперва цѣлью дать общую форму выраженія цѣлыхъ алгебраическихъ чиселъ, зависящихъ отъ корня ϱ неприводимаго уравненія

$$\varrho^3 = r\varrho + s,$$

гдѣ r и s обыкновенныя цѣлыя числа.

Для рѣшенія этого столь важнаго вопроса ему пришлось прибѣгнуть къ комплекснымъ числамъ по простому модулю p.

Всякое такое число имѣетъ составъ:

$$l + il',$$

гдѣ l и l' числа обыкновенныя, а i несуществующее рѣшеніе сравненія:

$$i^2 \equiv N \pmod{p}.$$

гдѣ N неквадратичный вычетъ по модулю p, т. е. рѣшеніе уравненія:

$$\left(\frac{N}{p}\right) = -1.$$

Пользуясь комплексными числами, авторъ даетъ способъ рѣшать сравненіе третьей степени:

$$(\alpha) \qquad x^3 - rx - s \equiv 0 \pmod{p}.$$

гдѣ r и s обыкновенныя числа.

При этомъ устанавливается слѣдующая теорема:

Если p есть какое-либо простое число, на которое не дѣлится

$$\Delta = 27s^2 - 4r^3,$$

то сравненіе (α) или не имѣетъ рѣшеній, или имѣетъ только одно рѣшеніе, или же три рѣшенія въ обыкновенныхъ числахъ.

Если p есть простое число, на которое дѣлится Δ, то всегда существуетъ такое обыкновенное число ξ, рѣшеніе сравненія (α), которое удовлетворяетъ, кромѣ того, сравненію:

$$3\xi^2 - r \equiv 0 \pmod{p}.$$

Число η, опредѣляемое сравненіемъ:

$$\eta \equiv -2\xi \pmod{p}.$$

также удовлетворяетъ сравненію (α), и сравненіе это только тогда имѣетъ одно рѣшеніе, когда число 3ξ дѣлится на p; въ остальныхъ случаяхъ ξ и η единственныя различныя рѣшенія сравненія (α).

Опираясь на этотъ результатъ, авторъ находитъ три основныя алгебраическія числа:

$$1; \quad \varphi = -\frac{\xi + \varrho}{\delta}; \quad \psi = \frac{\xi^2 - r + \xi\varrho + \varrho^2}{\delta^2\sigma},$$

при помощи которыхъ всѣ цѣлыя алгебраическія числа, зависящія отъ корня ϱ вышеприведеннаго алгебраическаго уравненія третьей степени, могутъ быть представлены въ формѣ:

$$x + x'\varphi + x''\psi,$$

гдѣ x, x' и x'' могутъ быть какія-угодно цѣлыя раціональныя числа.

Замѣтимъ, что ξ есть единственное рѣшеніе, опредѣленное по модулю $\delta\sigma$, сравненій:

$$\xi^3 - r\xi - s \equiv 0 \pmod{\delta^3\sigma^2};$$

$$3\xi^2 - r \equiv 0 \pmod{\delta^2\sigma}.$$

σ означаетъ наибольшее число, для котораго возможны эти сравненія.

Далѣе, число $\delta = d$, если уравненіе

$$\varrho_1^{\,3} = \frac{r}{d}\varrho_1 + \frac{s}{d^3} \qquad (\beta)$$

неособенное, и $\delta = 3d$, если это уравненіе особенное; причемъ d есть наибольшее число, для котораго возможны сравненія:

$$r \equiv 0 \pmod{d^2};$$

$$s \equiv 0 \pmod{d^3}.$$

Добавимъ, что авторъ называетъ уравненіе (β) особеннымъ, если имѣютъ мѣсто сравненія:

$$\frac{r}{d^2} \equiv 3 \pmod{9};$$

$$\frac{s}{d^3} \equiv \pm\left(1 - \frac{r}{d^2}\right) \pmod{27}.$$

Пользуясь найденнымъ видомъ цѣлыхъ алгебраическихъ чиселъ кубической области, авторъ находитъ разложеніе на простые идеальные множители всѣхъ простыхъ раціональныхъ чиселъ и даетъ способы для разложенія на простые идеальные множители всѣхъ цѣлыхъ чиселъ разсматриваемой области. Наконецъ, онъ приводитъ таблицу идеаловъ, соотвѣтствующихъ однороднымъ идеальнымъ числамъ, и устанавливаетъ теорему, которая позволяетъ съ помощью этой таблицы находить идеалъ, соотвѣтствующій всякому идеальному числу.

Защита этой диссертаціи состоялась 26 апрѣля 1894 года. 1 мая 1894 года покойный былъ назначенъ и. д. доцента, а 9 іюня того же года экстраординарнымъ профессоромъ Варшавскаго университета по каѳедрѣ чистой математики.

Переселившись такимъ образомъ въ Варшаву, покойный началъ усиленно работать надъ изысканіемъ новаго алгориѳма, который бы для алгебраическихъ чиселъ кубической области позволилъ ему рѣшить вопросы: Найти систему основныхъ единицъ, опредѣлить, эквиваленты ли два данные идеала, и, наконецъ, опредѣлить число классовъ идеаловъ.

Этотъ алгориѳмъ былъ найденъ; онъ представляетъ особое обобщеніе алгориѳма непрерывныхъ дробей.

Вотъ почему и своей работѣ покойный далъ такое названіе: „Объ одномъ обобщеніи алгориѳма непрерывныхъ дробей“.

Авторъ находитъ этотъ алгориѳмъ, разсматривая относительныя minima ковариантныхъ линейныхъ формъ.

Прежде всего онъ останавливается на системѣ двухъ такихъ формъ, зависящихъ отъ двухъ цѣлыхъ перемѣнныхъ чиселъ x и x':

$$\omega = x\lambda + x'\mu; \quad \omega' = x\lambda' + x'\mu'. \qquad (\gamma)$$

При этомъ относительныя minima системъ формъ (γ) авторъ опредѣляетъ такъ:

Если при нѣкоторыхъ значеніяхъ перемѣнныхъ x и x' ковариантныя формы (γ) получаютъ такія значенія ω_0 и ω_0', что нельзя найти цѣлыхъ раціональныхъ чиселъ t и t', удовлетворяющихъ одновременно неравенствамъ:

$$|t\lambda + t'\mu| < |\omega_0|; \quad |t\lambda' + t'\mu'| < |\omega_0'|,$$

то числа ω_0 и ω_0' *а* суть относительныя minima ковариантныхъ формъ (γ) или, символически, системы формъ:

$$\begin{bmatrix} \lambda, & \mu \\ \lambda', & \mu' \end{bmatrix}.$$

Не считая системъ (ω, ω') и $(-\omega; -\omega')$ различными, авторъ разсматриваетъ совокупность (s) всѣхъ системъ, представляющихъ отно-

сительныя minima и удовлетворяющихъ условію $\omega > 0$. При этомъ системы совокупности (s) онъ располагаетъ въ безконечный рядъ:

$$(s) \qquad \ldots.(\omega_{-1}, \omega'_{-1}), \quad (\omega_0, \omega_0''), \quad (\omega_1, \omega_1')\ldots.;$$

при чемъ

$$\ldots. > \omega_{-1} > \omega_0 > \omega_1 > \ldots.$$

$$\ldots. < |\omega'_{-1}| < |\omega_0'| < |\omega_1'| < \ldots.$$

Систему $(\omega_{k+1}, \omega'_{k+1})$, слѣдующую въ этомъ ряду за системой (ω_k, ω'_k), онъ называетъ первой системой смежной съ (ω_k, ω'_k), а систему $(\omega_{k-1}, \omega'_{k-1})$ считаетъ второю системой смежной съ (ω_k, ω'_k).

Предположимъ, что системы (ω_0, ω'_0) и (ω_1, ω'_1) представляютъ относительныя minima ковариантныхъ формъ (γ), если положить:

$$x = p_0, \; x' = p_0'; \quad x = p_1, \; x' = p_1',$$

и система (ω_1, ω'_1) есть первая система смежная съ системой (ω_0, ω'_0). Тогда оказывается, что опредѣлитель

$$\begin{vmatrix} p_0 & p_1 \\ p_0' & p_0' \end{vmatrix}$$

численно равенъ единицѣ.

Пользуясь этимъ свойствомъ предыдущаго детерминанта, авторъ доказываетъ, что, если извѣстны какія-либо двѣ смежныя системы совокупности (s), то всѣ прочія системы той же совокупности получаются при помощи алгориѳма непрерывныхъ дробей.

Отсюда устанавливается новая точка зрѣнія на этотъ алгориѳмъ, разсматривая его, какъ совокупность дѣйствій, при помощи которыхъ по даннымъ двумъ смежнымъ ряда (s) опредѣляется, какъ система, слѣдующая въ этомъ ряду за данными системами, такъ и имъ предшествующая.

Пользуясь подстановкой $\begin{pmatrix} p_0 \, p_1 \\ p_0' \, p_1' \end{pmatrix} = \pm 1$ или $\begin{pmatrix} p_1 \, p_0 \\ p_1' \, p_0' \end{pmatrix} = \mp 1$, авторъ преобразуетъ данныя формы (1) въ эквивалентныя имъ: $\begin{bmatrix} \omega_0, \, \omega_1 \\ \omega_0', \, \omega_1' \end{bmatrix}$ или $\begin{bmatrix} \omega_1, \, \omega_0 \\ \omega_1', \, \omega_0' \end{bmatrix}$, которыя названы имъ приведенными системами перваго и второго рода.

Потомъ, считая системы

$$\begin{bmatrix} \lambda, & \mu \\ \lambda', & \mu' \end{bmatrix} \text{ и } \begin{bmatrix} \tau\lambda. & \mu\tau \\ \tau'\lambda', & \mu'\tau' \end{bmatrix}$$

равнозначными, онъ разсматриваетъ систему $\begin{bmatrix} 1, \varphi \\ 1, \psi \end{bmatrix}$, гдѣ $\varphi = \frac{\mu}{\lambda}$, $\varphi' = \frac{\mu'}{\lambda'}$, названную имъ нормальной.

Каждая приведенная система формъ преобразуется въ приведенную систему перваго и второго порядка при помощи двухъ послѣдовательныхъ подстановокъ: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 & \delta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; причемъ δ находится при помощи алгориѳма непрерывныхъ дробей.

Пользуясь такими подстановками, авторъ получаетъ безконечный рядъ эквивалентныхъ приведенныхъ формъ перваго и второго рода.

$$\left[\begin{matrix} 1, & \varphi_0 \\ 1, & \varphi_0' \end{matrix}\right], \left[\begin{matrix} 1, & \varphi_1 \\ 1, & \varphi_1' \end{matrix}\right], \left[\begin{matrix} 1, & \varphi_2 \\ 1, & \varphi_2' \end{matrix}\right], \ldots\ldots$$

Затѣмъ онъ рѣшаетъ вопросъ, когда этотъ безконечный рядъ системъ формъ періодическій, и приходитъ къ слѣдующему положенію:

Для того, чтобы вышеозначенный рядъ приведенныхъ системъ коваріантныхъ формъ, эквивалентныхъ данной системѣ

$$\left[\begin{matrix} 1, & \varphi_1 \\ 1, & \varphi' \end{matrix}\right] \qquad (\lambda)$$

состоялъ изъ періодически повторяющихся членовъ, необходимо и достаточно, чтобы коэффиціенты системы (λ): φ и φ' были сопряженныя алгебраическія числа, зависящія отъ корней неприводимаго уравненія 2-й степени съ положительнымъ дискриминантомъ.

Этотъ замѣчательный результатъ позволяетъ для алгебраическихъ чиселъ квадратичной области съ положительнымъ дискриминантомъ разыскать основныя единицы, рѣшить вопросъ объ эквивалентности двухъ данныхъ идеаловъ и, наконецъ, найти число классовъ идеаловъ.

Далѣе, авторъ свои предыдущія изслѣдованія распространяетъ на коваріантныя формы съ тремя перемѣнными:

$$(\mu) \qquad \begin{aligned} &\omega = x\lambda + x'\mu + x''\nu; \\ &\omega' = x(l' + il'') + x'(m' + im'') + x''(n' + in'') \end{aligned}$$

гдѣ λ, μ и ν числа дѣйствительныя, $l' + il''$, $m' + lm''$ и $n' + in''$ числа комплексныя.

Полученные при этомъ новые результаты дали автору возможность рѣшить вышеуказанныя главныя задачи для алгебраическихъ чиселъ кубической области съ отрицательнымъ дискриминантомъ.

Въ томъ же направленіи авторъ трактуетъ систему трехъ линейныхъ коваріантныхъ формъ:

$$\begin{aligned} &\omega = x\lambda + x'\mu + x''\nu; \\ &\omega' = x\lambda' + x'\mu' + x''\nu'; \\ &\omega'' + x\lambda'' + x'\mu'' + x''\nu''. \end{aligned}$$

Результаты этихъ изслѣдованій позволяютъ ему рѣшить вышеупомянутыя три главныя задачи теоріи алгебраическихъ чиселъ кубической области съ положительнымъ дискриминантомъ.

Замѣтимъ, что новый способъ разложенія алгебраическихъ единицъ, данный авторомъ, весьма удобенъ въ практическомъ отношеніи, что подтверждается имъ примѣрами.

20-го мая 1897 года работа была блестяще защищена на степень доктора чистой математики въ С.-Петербургскомъ университетѣ. Вмѣстѣ съ тѣмъ С.-Петербургская Академія Наукъ увѣнчала обѣ диссертаціи преміей имени Буняковскаго.

Покончивъ такимъ образомъ съ тѣми работами, которыя хотя и явились, какъ результатъ творческихъ силъ покойнаго, но все-же были въ извѣстномъ смыслѣ обязательными, и сдѣлавшись 1-го августа того же 1897 года ординарнымъ профессоромъ Варшавскаго университета, покойный начинаетъ свободно обдумывать цѣлый рядъ вопросовъ, какъ по вычисленію суммъ особаго типа, такъ и въ области квадратичныхъ формъ. Начинается интенсивная работа, въ высшей степени продуктивная. Свои замѣчательныя открытія въ означенныхъ областяхъ покойный заносилъ въ математическій дневникъ, который въ цѣлости сохранился послѣ смерти. На страницахъ этого дневника каждый день записывалось все, что по разнымъ вопросамъ въ вышеозначенныхъ областяхъ создавали творческія силы усопшаго. Потомъ уже изъ этого матеріала формулировались отдѣльныя произведенія.

Покойный былъ въ высшей степени строгъ къ себѣ. Тѣ работы, которыя стали появляться въ печати съ 1903 года въ журналѣ Крелля и въ „Annales de l'E'cole Normale Supérieure", были уже готовы нѣсколько лѣтъ предъ этимъ. Только авторъ многократно ихъ передѣлывалъ, стараясь изыскать наиболѣе простые и изящные методы для выраженія своихъ глубокихъ идей.

Первой появилась въ печати его работа „Sur un problème du calcul des fonctions asymptotiques" (Crelle's Journal. Bd. 126). Въ ней авторъ при помощи замѣчательнаго преобразованія суммы:

$$\sum_{n>0}^{n\leqq x} E\left(\frac{x}{n}\right),$$

гдѣ $E(x)$ означаетъ цѣлое число, удовлетворяющее условію:

$$x-1 < E(x) \leqq x,$$

выводитъ слѣдующее равенство:

$$\sum_{n>0}^{n<x} \mathrm{E}\left(\frac{x}{n}\right) = x\left[\lg x + 2C - 1\right] + \frac{1}{4} + \vartheta\left[\frac{65}{36}\sqrt[3]{x}\lg x + \frac{79}{13}\sqrt[3]{x} + \frac{3}{2}\right],$$

гдѣ C Эйлерово постоянное, $x \geq 1$, а $|\vartheta| < 1$.

Этотъ результатъ представляетъ въ высшей степени важное дополненіе къ изслѣдованіямъ Lejeune-Dirichlet, которому,—судя по изданнымъ трудамъ,—удалось только доказать, что

$$\sum_{n>0}^{n<x} \mathrm{E}\left(\frac{x}{n}\right) = x\left[\lg + 2C - 1\right] + R(x),$$

гдѣ

$$|R(x)| < A\sqrt{x};$$

при чемъ $x > 0$, а A опредѣленное постоянное число.

Появившаяся затѣмъ въ Annales de l'Ecole Normale Supérieure (t. 22 III série, 1903) работа: „Sur une transcendante et ses applications à la sommation de quelques séries“ представляетъ результатъ его многолѣтнихъ размышленій надъ суммами вида:

$$\frac{1}{2}\sum_{n>a}^{n<b} T(n) f(n) + \frac{1}{2}\sum_{n>a}^{n<b} T(n) f(n),$$

гдѣ $f(n)$ функція аналитическая, а $T(n)$ числовая. Слѣдуя своей привычкѣ, покойный въ теченіе продолжительнаго времени на частныхъ примѣрахъ изучалъ эту сумму, при чемъ такимъ путемъ онъ выяснилъ себѣ, что

$$(v) \qquad \frac{1}{2}\sum_{n>a}^{n<b} T(n) f(n) + \frac{1}{2}\sum_{n>a}^{n<b} T(n) f(n) =$$

$$= \int_a^b f(x)\,\vartheta(x)\,dx + \sum_1^{\infty} T(n) \int_a^b f(x)\,\alpha(nx)\,dx.$$

Здѣсь функція $f(x)$ непрерывная въ границахъ $a < x < b$ и имѣетъ внутри этого промежутка ограниченное число maxima и minima; $\vartheta(x)$ и $\alpha(x)$ суть двѣ аналитическія функціи, которыя зависятъ отъ состава функціи $T(n)$.

Это соотношеніе однако имъ нигдѣ не установлено.

Въ разсматриваемой работѣ авторъ выводитъ формулу (ν) въ предположеніи, что $T(n)$ означаетъ число дѣлителей цѣлаго положительнаго числа n. При этомъ функціи $\vartheta(x)$ и $\alpha(x)$ имѣютъ слѣдующій составъ:

$$\vartheta(x) = \lg x + C; \quad \alpha(x) = 2\,[\xi(4n^2x) + \eta(4n^2x)].$$

Замѣтимъ, что C есть Эйлерово постоянное; функціи же $\xi(x)$ и $\eta(n)$ суть соотвѣтственнымъ образомъ подобранныя авторомъ рѣшенія дифференціальныхъ уравненій Фурье-Бесселя:

$$x\frac{d^2\xi(x)}{dx^2} + \frac{d\xi(x)}{dx} = \xi(x);$$

$$x\frac{d^2\eta(x)}{dx^2} + \frac{d\eta(x)}{dx} = -\eta(x).$$

Вслѣдъ за этой работой покойный приступилъ къ формулированію и печатанію въ журналѣ Крелля ряда мемуаровъ, касающихся квадратичныхъ формъ съ n перемѣнными, подъ общимъ заглавіемъ: „Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie de formes quadratiques“.

При жизни усопшаго успѣлъ выйти въ свѣтъ полностью первый мемуаръ: „Sur quelques propriétés des formes positives parfaites“ (Bd. 133) и часть второго: „Recherche sur les parallelo̊dres primitifs“ (Bd. 134).

Эти работы, которыя особенно радовали автора и служили предметомъ его гордости, представляютъ результатъ его многолѣтнихъ упорныхъ размышленій. Онъ въ нихъ съ особеннымъ свойственнымъ ему глубокомысліемъ и остроуміемъ примѣняетъ одинъ принципъ Hermite'a, которымъ пользовались въ своихъ изслѣдованіяхъ Золотаревъ, Chavre, Selling и Minkowski, къ рѣшенію различныхъ задачъ ариѳметической теоріи положительныхъ квадратичныхъ формъ съ n перемѣнными.

Покончивъ свои изслѣдованія, относящіяся къ теоріи положительныхъ квадратичныхъ формъ, въ связи съ дѣленіемъ пространства n измѣреній при помощи конгруентныхъ параллелоэдровъ, покойный приступилъ къ изысканіямъ въ области теоріи неопредѣленныхъ квадратичныхъ формъ.

Усопшій имѣлъ удивительную привычку создавать свои произведенія, какъ онъ выражался, „безъ пера и бумаги“. Обдумывая такимъ путемъ самыя сложныя теоремы и остроумнѣйшіе методы, покойный только тогда приступалъ къ ихъ записыванію, когда результаты въ его умѣ были почти уже готовы.

Къ изложенію результатовъ по теоріи неопредѣленныхъ квадратичныхъ формъ приступилъ покойный въ февралѣ 1908 года въ бытность свою въ г. Новочеркасскѣ, куда онъ, въ качествѣ декана механическаго отдѣленія, вмѣстѣ съ другими профессорами Варшавскаго политехническаго института былъ откомандированъ Министромъ Торговли и Промыш-

ленности для устройства Донского политехникума. Почти годъ, проведенный усопшимъ въ г. Новочеркасскѣ, особенно былъ для него тяжелъ: не вполнѣ благопріятныя условія жизни послужили причиной того, что болѣзнь „желчные камни“, которой онъ былъ подверженъ, начала сильно давать себя знать. А въ это время онъ напрягалъ всѣ свои силы, чтобы занести въ свой дневникъ все, что уже назрѣло въ его головѣ. Вотъ что по этому поводу между прочимъ занесено тамъ: „Я дѣлаю большіе успѣхи въ разбираемомъ вопросѣ; но въ то же время здоровье мое все ухудшается и ухудшается. Вчера я въ первый разъ получилъ отчетливую идею объ алгоритмѣ, который долженъ разрѣшить всѣ вопросы разсматриваемой теоріи формъ и вчера же я имѣлъ сильный припадокъ желчной колики, который мнѣ помѣшалъ заниматься вечеромъ и не далъ возможности заснуть почти всю ночь. Я такъ боюсь, чтобы результаты моихъ долгихъ усилій, съ такимъ трудомъ добываемые, не погибли вмѣстѣ со мной“.

Къ величайшему горю тѣхъ, кому дороги интересы науки, опасенія покойнаго были не напрасны: изъ той грандіозной работы по теоріи неопредѣленныхъ квадратичныхъ форма съ n перемѣнными, которую лелѣялъ почти въ назрѣвшемъ видѣ въ своемъ умѣ покойный, жестокій недугъ позволилъ ему оставить только „замѣтки о неопредѣленныхъ квадратичныхъ формахъ“, состоящія изъ 28 большихъ страницъ.

Едва ли по нимъ возможно будетъ хотя отчасти воспроизвести тѣ остроумнѣйшія геометрическія соображенія, приведшія къ упоминаемому имъ въ дневникѣ алгоритму, о которомъ покойный всегда говорилъ съ большимъ воодушевленіемъ и восторгомъ. Для того, чтобы это сдѣлать, недостаточно знать въ общихъ чертахъ тѣ нити, которыя руководили покойнымъ въ его изслѣдованіяхъ; но нужно быть такимъ же глубокимъ знатокомъ въ теоріи квадратичныхъ формъ съ n перемѣнными, какимъ былъ онъ; нужно обладать такою же удивительной техникой въ этой области, какую подъ конецъ своей жизни выработалъ въ себѣ покойный. Да, къ тому же, нужно такъ же самоотверженно любить эту область математическаго знанія, какъ любилъ онъ. А какъ онъ любилъ математику!

Пишущій эти строки въ бытность свою въ Новочеркасскѣ испытывалъ во время одного приступа болѣзни покойнаго самыя мучительныя чувства, видя его не только физическія, но и моральныя страданія: онъ съ величайшею скорбью все время твердилъ то, что выше было приведено изъ его дневника. Когда же ему было легче и онъ могъ уѣхать изъ Новочеркасска въ Варшаву, то при прощаніи сказалъ: „Врачи мнѣ запрещаютъ заниматься. Я и самъ замѣтилъ, что сильное умственное напряженіе всегда вызываетъ откликъ въ моей болѣзни. Но не знаютъ, что значитъ для меня не заниматься математикой. Только одной моей женѣ извѣстно, что математика для меня жизнь, все“.

Въ Варшавѣ покойный, пользуясь самоотверженнымъ уходомъ жены и помощью врачей, значительно оправился. Къ сожалѣнію, усопшій не послушался совѣтовъ врачей: или поѣхать въ Карльсбадъ, или же согласиться на операцію. Но, несмотря на это, послѣ своей поѣздки лѣтомъ въ Крымъ, а потомъ пребыванія на дачѣ въ мѣстечкѣ Журавка, онъ вернулся въ Варшаву настолько окрѣпшимъ, что никому изъ его товарищей и знакомыхъ не приходило на мысль, что развязка такъ близка.

Къ несчастью, при открытіи Варшавскаго университета и политехническаго института было много причинъ для тревожнаго настроенія. Волненія же всегда вредно отзывались на его здоровьѣ. Съ 20 октября болѣзнь стала проявляться въ высшей степени мучительной формѣ. Это былъ сильный, продолжительный ея приступъ. Ни усилія врачей, ни борьба организма не могли предотвратить рокового исхода, и 7 ноября въ 9 ч. 20 м. варшавскаго времени больного не стало.

Глубокая скорбь поразила не только его жену, его помощницу даже въ научныхъ трудахъ, и шестерыхъ дѣтей, но и всѣхъ его товарищей-профессоровъ и преподавателей Варшавскаго университета и политехническаго института. Никому не хотѣлось вѣрить, что угасъ Георгій Ѳеодосьевичъ, котораго всѣ такъ глубоко уважали и любили. Чувствовалось, что случилось нѣчто необыкновенное. Всѣ сознавали, что понесена преждевременная потеря выдающагося ученаго, славнаго профессора, который былъ гордостью и украшеніемъ двухъ высшихъ школъ Варшавы. Политехническій же институтъ въ лицѣ почившаго оплакивалъ, кромѣ того, своего перваго выборнаго декана механическаго отдѣленія, заслужившаго на этомъ поприщѣ общее уваженіе и благодарность. Провожая останки усопшаго на вокзалъ, для дальнѣйшаго слѣдованія на мѣсто погребенія въ мѣстечко Журавка, всѣ скорбѣли также о потерѣ всегда правдиваго, отзывчиваго, сердечнаго человѣка.

Проф. *И. Брайцевъ.*

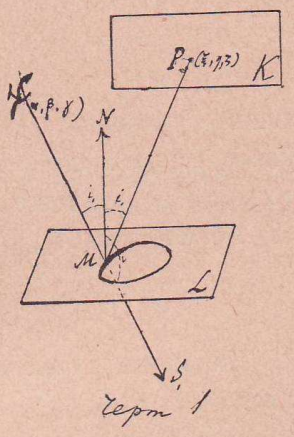
Варшава.
24 декабря 1908 г.

Одна задача изъ геометричеекой оптики.

А. П. Грузинцева.

§ 1. Задача, рѣшеніе которой намъ казалось не безинтереснымъ сообщить, состоитъ въ слѣдующемъ.

На плоскомъ зеркалѣ L данъ нѣкоторый контуръ M; требуется найти соотвѣтствующій контуръ на другой плоскости K, рисуемый отраженными отъ M лучами при свѣтящейся точкѣ S.



Черт. 1

§ 2. Мы предложимъ нѣсколько пріемовъ рѣшенія этой задачи. *Первый*, такъ сказать непосредственный, *пріемъ* будетъ состоять въ слѣдующемъ. Пусть координаты свѣтящейся точки S будутъ α, β, γ; точки M — x, y, z; а точки P — ξ, η, ζ.

Затѣмъ пусть косинусы — направленія падающаго луча SM будутъ A, B, C; нормали къ зеркалу L — A_1, B_1, C_1 и отраженнаго луча MP — A', B', C', а уголъ паденія (въ геометрическомъ смыслѣ), т. е. уголъ NMS_1 будетъ i.

Тогда законы отраженія дадутъ соотношенія: [1])

$$\left.\begin{aligned} A' &= A - 2A_1\cos i \\ B' &= B - 2B_1\cos i \\ C' &= C - 2C_1\cos i, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

причемъ уголъ паденія i опредѣляется черезъ свой косинусъ изъ равенства:

$$\cos i = AA_1 + BB_1 + CC_1. \qquad (2)$$

Далѣе уравненія падающаго и отраженнаго лучей можно написать сначала въ видѣ:

$$\frac{x-\alpha}{A} = \frac{y-\beta}{B} = \frac{z-\gamma}{C} = r \qquad (3)$$

---

[1]) См. напр. *А. Грузинцевъ* „Къ геометріи распространенія и поглощенія электромагнитной энергіи“. Сообщенія Хар. Мат. Об-ва, т. VI (1897 г.).

$$\frac{\xi - x}{A'} = \frac{\eta - y}{B'} = \frac{\zeta - z}{C'} = \varrho, \tag{4}$$

а потомъ въ видахъ удобствъ анализа при помощи (1) въ видѣ:

$$x = \alpha + Ar, \quad y = \beta + Br, \quad z = \gamma + Cr \tag{a}$$

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \alpha + A(r+\varrho) - 2A_1\varrho\cos i \\ \eta &= \beta + B(r+\varrho) - 2B_1\varrho\cos i \\ \zeta &= \gamma + C(r+\varrho) - 2C_1\varrho\cos i \end{aligned}\right\} \tag{b}$$

Затѣмъ уравненія контура M напишемъ въ видѣ:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D = 0 \tag{c}$$

и

$$f(x,\ y,\ z) = 0 \tag{d}$$

причемъ уравненіе (c) есть уравненіе плоскости, въ которой лежитъ зеркало, а уравненіе (d)—уравненіе нѣкоторой заданной напередъ поверхности, пересѣченіе которой съ плоскостью зеркала и дастъ контуръ M.

Количества A_1, B_1, C_1 удовлетворяютъ, какъ извѣстно, отношенію:

$$A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 = 1. \tag{5}$$

Наконецъ уравненіе *картинной плоскости* K можно написать въ видѣ:

$$m\xi + ny + p\zeta + q = 0 \tag{e}$$

причемъ m, n, p суть косинусы—направленія нормали къ плоскости K; слѣдовательно между ними существуетъ соотношеніе:

$$m^2 + n^2 + p^2 = 1.$$

§ 3. Въ системѣ уравненій: (2), (a)—(e) перемѣнными будутъ количества:

$$x,\ y,\ z;\quad A,\ B,\ C;\quad \xi,\ \eta,\ \zeta;\quad r,\ \varrho \text{ и } i,$$

а остальныя будутъ считаться данными.

Задача наша будетъ рѣшена, если мы изъ системы уравненій (2), (a)—(e), числомъ 10, исключимъ всѣ перемѣнныя, числомъ 9, кромѣ ξ, η, ζ, между которыми получимъ нѣкоторое уравненіе:

$$F(\xi,\ \eta,\ \zeta) = 0. \tag{A}$$

Это уравненіе вмѣстѣ съ уравненіемъ картинной плоскости и рѣшитъ предложенную задачу.

§ 4. Введемъ обозначенія, которыя намъ нужны будутъ въ дальнѣйшемъ изложеніи:

$$\left.\begin{aligned} a &= A_1\alpha + B_1\beta + C_1\gamma + D; \\ b &= A_1 m + B_1 n + C_1 p; \\ c &= m\alpha + n\beta + p\gamma + q; \end{aligned}\right\} \qquad (B)$$

геометрическій смыслъ которыхъ ясенъ.

§ 5. Теперь можемъ заняться намѣченнымъ исключеніемъ перемѣнныхъ.

Изъ уравненій (a) и (b) по умноженіи ихъ по порядку на A_1, B_1, C_1 и сложеніи результатовъ получаемъ при помощи (2) и (c):

$$r\cos i = -a \qquad (\alpha)$$

$$\varrho\cos i = a - H, \qquad (\beta)$$

гдѣ положено:

$$H = A_1\xi + B_1\eta + C_1\zeta + D + a. \qquad (C)$$

Подставимъ теперь (α) и (β) въ равенства (b) и получимъ:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \alpha - \frac{AH}{\cos i} + 2A_1(H-a) \\ \eta &= \beta - \frac{BH}{\cos i} + 2B_1(H-a) \\ \zeta &= \gamma - \frac{CH}{\cos i} + 2C_1(H-a) \end{aligned}\right\} \qquad (\gamma)$$

Теперь изъ (a) при помощи (α) находимъ:

$$A = \frac{\alpha - x}{a}\cos i, \quad B = \frac{\beta - y}{a}\cos i, \quad C = \frac{\gamma - z}{a}\cos i. \qquad (\delta)$$

Внесемъ эти значенія въ предыдущія равенства (γ), получимъ по приведеніи:

$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha_0 + \frac{a}{H}(\xi - \alpha_0) \\ y &= \beta_0 + \frac{a}{H}(\eta - \beta_0) \\ z &= \gamma_0 + \frac{a}{H}(\zeta - \gamma_0) \end{aligned}\right\} \qquad (I)$$

гдѣ положено для краткости письма:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_0 &= \alpha - 2A_1 a \\ \beta_0 &= \beta - 2B_1 a \\ \gamma_0 &= \gamma - 2C_1 a \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Теперь остается только подставить значенія x, y, z изъ (I) въ уравненіе (d):

$$f(x, y, z) = 0,$$

тогда по приведеніи получимъ:

$$F(\xi, \eta, \zeta) = 0.$$

Итакъ задача рѣшена.

§ 6. Прежде чѣмъ приступить къ изложенію другихъ пріемовъ рѣшенія задачи, покажемъ, что можно обратно по координатамъ точки $M(x, y, z)$ найти координаты точки $P(\xi, \eta, \zeta)$, т. е. перейти отъ изображенія контура къ самому контуру.

Дѣйствительно, умноживъ уравненія (I) по порядку на m, m, p и сложивъ результаты, при помощи (B) и (6), получимъ, положивъ:

$$a_1 = 2ab - c, \quad G = mx + ny + pz + q + a_1 \tag{D}$$

соотношеніе:

$$GH = aa_1, \tag{7}$$

а внеся отсюда значеніе H въ тѣ же уравненія (I), найдемъ:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \alpha_0 + \frac{a_1}{G}(x - \alpha_0) \\ \eta &= \beta_0 + \frac{a_1}{G}(y - \beta_0) \\ \zeta &= \gamma_0 + \frac{a_1}{G}(z - \gamma_0) \end{aligned}\right\} \tag{II}$$

Замѣтимъ, кстати, что равенство (7), написанное въ видѣ:

$$(A_1\xi + B_1\eta + C_1\zeta + D + a)(mx + ny + pz + q + a_1) = aa_1 \tag{III}$$

представляетъ общее геометрическое свойство двухъ пучковъ прямыхъ: SM и MP.

§ 7. Можно придти къ тѣмъ же выводамъ (I) или (II) *другимъ* болѣе короткимъ *путемъ*, если съ самаго начала рѣшенія задачи ввести координаты точки, представляющей *изображеніе* свѣтящейся точки въ зеркалѣ L. Эта точка, обозначивъ ее S_0, какъ разъ и имѣетъ координатами α_0, β_0, γ_0, которые вошли въ предыдущій анализъ, какъ нѣкоторые постоянные.

Подъ *изображеніемъ* точки въ плоскомъ зеркалѣ мы понимаемъ точку симметричную съ свѣтящейся, т. е. лежащую за зеркаломъ на перпендикулярѣ опущенномъ изъ S на плоскость зеркала на разстояніи равномъ разстоянію S отъ него.

Поэтому, если временно обозначимъ координаты изображенія точки S буквами α', β', γ', то имѣемъ согласно опредѣленію при помощи (B):

$$A_1\alpha' + B_1\beta' + C_1\gamma' + D = -a. \tag{8}$$

Сверхъ того уравненіе S_0S согласно тому же опредѣленію можно написать въ видѣ:

$$\frac{\alpha'-\alpha}{A_1} = \frac{\beta'-\beta}{B_1} = \frac{\gamma'-\gamma}{C_1} = r_0. \tag{9}$$

Изъ этихъ послѣднихъ уравненій при помощи (8) и (B) находимъ:

$$r_0 = -2a,$$

а подставляя обратно это значеніе r_0 въ (9), получимъ:

$$\alpha' = \alpha - 2A_1a, \quad \beta' = \beta - 2B_1a, \quad \gamma' = \gamma - 2C_1a$$

или по (6):

$$\alpha' = \alpha_0, \quad \beta' = \beta_0, \quad \gamma' = \gamma_0,$$

слѣдовательно, точка съ координатами α_0, β_0, γ_0, опредѣляемыми равенствами (6), есть *изображеніе* свѣтящейся точки S въ нашемъ зеркалѣ L.

§ 8. Вотъ теперь можемъ рѣшить нашу задачу короче, если съ самаго начала ввести изображеніе S_0 [1]).

Рѣшеніе будетъ состоять въ слѣдующемъ. Точка $S_0(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ лежитъ на прямой (4), а потому имѣемъ двѣ системы уравненій:

$$\frac{\alpha_0 - x}{A'} = \frac{\beta_0 - y}{B'} = \frac{\gamma_0 - z}{C'} = \varrho_0$$

$$\frac{\xi - \alpha_0}{A'} = \frac{\eta - \beta_0}{B'} = \frac{\zeta - \gamma_0}{C'} = \varrho_0'.$$

Здѣсь значеніе ϱ_0 и ϱ_0' понятно. Раздѣляя эти равенства по-членно и полагая на время:

$$\frac{\varrho_0}{\varrho_0'} = k,$$

находимъ:

$$\alpha_0 - x = k(\xi - \alpha_0), \quad \beta_0 - y = k(\eta - \beta_0), \quad \gamma_0 - z = k(\zeta - \gamma_0). \tag{10}$$

Умножая эти уравненія по порядку на A_1, B_1, C_1 и складывая результаты, найдемъ при помощи (6) и обозначеній (B) и (C):

$$k = -\frac{a}{H},$$

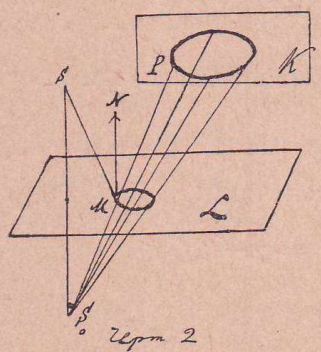
---

[1]) Этотъ же пріемъ рѣшаетъ и задачу о тѣняхъ плоскихъ фигуръ.

а подставляя обратно въ (10), получаемъ соотношенія (I). Точно также найдемъ и соотношенія (II), если только (10) будемъ умножать на m, n, p вмѣсто A_1, B_1, C_1.

Это *второе рѣшеніе* нашей задачи короче перваго.

§ 9. Но можно предложить еще способъ рѣшенія той же задачи Онъ состоитъ въ слѣдующемъ.



Черт 2

Если введемъ точку $S_0(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$—изображеніе свѣтящейся точки S, то отраженные лучи образуютъ конусъ съ вершиной S_0, пересѣченіе котораго съ картинной плоскостью K и будетъ искомымъ мѣстомъ—изображеніемъ контура M.

Пусть уравненіе плоскости, проходящей черезъ S_0 и P будетъ:

$$M(\xi - \alpha_0) + N(\eta - \beta_0) + P(\zeta - \gamma_0) = 0, \tag{1}$$

при чемъ параметры M, N, P удовлетворяютъ соотношенію:

$$M^2 + N^2 + P^2 = 1. \tag{2}$$

Сверхъ того плоскость (1) проходитъ черезъ точку $M(x, y, z)$ даннаго на L контура, а потому имѣемъ еще уравненіе:

$$M(x - \alpha_0) + N(y - \beta_0) + P(z - \gamma_0) = 0. \tag{3}$$

При этомъ координаты x, y, z должны удовлетворять: a) уравненію плоскости L, которое можно написать въ видѣ:

$$A_1(x - \alpha_0) + B_1(y - \beta_0) + C_1(z - \gamma_0) = -a, \tag{4}$$

b)

$$f(x, y, z) = 0 \tag{5}$$

и c) уравненію касательной плоскости къ контуру, т. е. уравненію:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x - \alpha_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(y - \beta_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(z - \gamma_0) = 0. \tag{6}$$

Уравненія (4), (5) и (6) послужатъ для исключенія координатъ x, y, z.

§ 10. Разыщемъ уравненіе обертки плоскости (1). Примемъ за независимое перемѣнное нѣкоторую величину u, тогда дифференцируя уравненія (1), (2) и (3) по u, найдемъ:

$$(\xi-\alpha_0)\frac{\partial M}{\partial u}+(\eta-\beta_0)\frac{\partial N}{\partial u}+(\zeta-\gamma_0)\frac{\partial P}{\partial u}=0$$

$$M\frac{\partial M}{\partial u}+N\frac{\partial N}{\partial u}+P\frac{\partial P}{\partial u}=0$$

$$(x-\alpha_0)\frac{\partial M}{\partial u}+(y-\beta_0)\frac{\partial N}{\partial u}+(z-\gamma_0)\frac{\partial P}{\partial u}=-\left(M\frac{\partial x}{\partial u}+N\frac{\partial y}{\partial u}+P\frac{\partial z}{\partial u}\right).$$

Умножимъ эти уравненія по порядку на неопредѣленные множители λ, μ, ν, результаты сложимъ, а для опредѣленія этихъ множителей примемъ, что они удовлетворяютъ уравненіямъ:

$$\left.\begin{aligned}(\xi-\alpha_0)\lambda+M\mu+(x-\alpha_0)\nu=0\\(\eta-\beta_0)\lambda+N\mu+(y-\beta_0)\nu=0\\(\zeta-\gamma_0)\lambda+P\mu+(z-\gamma_0)\nu=0\end{aligned}\right\}\qquad(7)$$

и, какъ ихъ слѣдствіе:

$$M\frac{\partial x}{\partial u}+N\frac{\partial y}{\partial u}+P\frac{\partial z}{\partial u}=0.\qquad(8)$$

Изъ системы (7) по умноженіи ея уравненій сначала на M, N, P, потомъ на A_1, B_1, C_1 и сложеніи результатовъ, находимъ при помощи равенствъ (1)—(4) и положенія (C) слѣдующее:

$$\mu=0,\quad H\lambda=-a\nu$$

слѣдовательно

$$\nu=-\frac{H}{a}\lambda.$$

Подставляя теперь обратно значенія μ и ν въ уравненія (7), получимъ:

$$x=\alpha_0+\frac{a}{H}(\xi-\alpha_0),\quad y=\beta_0+\frac{a}{H}(\eta-\beta_0),\quad z=\gamma_0+\frac{a}{H}(\zeta-\gamma_0)\quad(\mathrm{I})$$

какъ разъ систему (I), а внося эти значенія x, y, z въ уравненіе

$$f(x,\ y,\ z)=0,$$

получимъ уравненіе:

$$F(\xi,\ \eta,\ \zeta)=0,$$

рѣшающее нашу задачу.

§ 11. Если бы пожелали довести дѣло опредѣленія обертки плоскости (1), т. е. конуса съ вершиной въ S_0 и основаніемъ—изображеніемъ P контура M, то пересѣченіе этого конуса съ картинной плоскостью P, т. е. съ плоскостью

$$m\xi+n\eta+p\zeta+q=0$$

и было бы искомой кривой, но намъ достаточно уже найденнаго рѣшенія нашей задачи.

§ 12. Разсмотримъ нѣкоторые частные случаи, которые легко осуществить на опытѣ и тѣмъ, если угодно, повѣрить найденные результаты.

Пусть зеркало и картинная плоскость лежатъ въ двухъ взаимноперпендикулярныхъ плоскостяхъ; тогда, принявъ картинную плоскость за плоскость xz, плоскость зеркала за плоскость zy, будемъ имѣть:

$$\eta = 0 \quad \text{и} \quad x = 0$$

какъ уравненія этихъ плоскостей.

Затѣмъ получимъ, какъ слѣдствіе:

$$m = p = 0, \quad n = 1, \quad A_1 = 1, \quad B_1 = C_1 = 0$$

и уравненія (c) и (e) дадутъ поэтому:

$$D = 0, \quad q = 0.$$

Для постоянныхъ имѣемъ:

$$a = \alpha, \quad b = 0, \quad c = \beta;$$

$$\alpha_0 = -\alpha, \quad \beta_0 = \beta, \quad \gamma_0 = \gamma$$

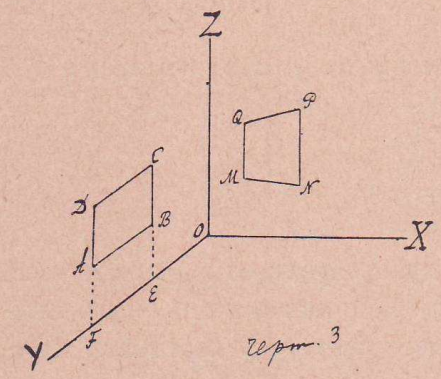
и

$$H = \xi + \alpha.$$

Въ этомъ случаѣ для координатъ x, y и z имѣемъ:

$$x = 0, \quad y = \frac{\beta\xi}{\xi + \alpha}, \quad z = \frac{\gamma\xi + \alpha\zeta}{\xi + \alpha} \qquad \text{(A)}$$

и слѣдовательно уравненія контура—изображенія будутъ:



черт. 3

$$f\left(0, \frac{\beta\xi}{\xi + \alpha}, \frac{\gamma\xi + \alpha\zeta}{\xi + \alpha}\right) = 0 \text{ и } \eta = 0. \qquad \text{(B)}$$

причемъ, какъ помнимъ, f заданная напередъ функція.

§ 13. I. Примѣнимъ эти формулы къ случаю, когда контуръ M будетъ прямоугольникъ со сторонами параллельными осямъ y и z. Назовемъ координаты точки A буквами k_1, h, точки B буквами k, h и точки D буквами k_1, h_1, т. е. на чертежѣ будетъ:

$$OE = k; \quad OF = k_1; \quad AF = BE = h; \quad DF = h_1$$

При этомъ стороны прямоугольника будутъ:

$$AB = DC = k_1 - k; \quad BC = AD = h_1 - h.$$

Уравненія сторонъ будутъ:

1) $AB \ldots z - h = 0$; 2) $CD \ldots z - h_1 = 0$; 3) $BC \ldots y - k = 0$ и 4) $AD \ldots y - k_1 = 0$.

Поэтому уравненія линій—изображеній сторонъ AB, CD, BC и AD, т. е. уравненіе $F(\xi, \eta, \zeta) = 0$ будутъ:

1) $$(\gamma - h)\xi + \alpha\zeta - \alpha h = 0,$$

т. е. прямая въ плоскости ZX, отсѣкающая на оси z'овъ отрѣзокъ h, а на оси x'овъ отрѣзокъ $\frac{\alpha h}{\gamma - h}$. Это прямая MN.

2) Прямая PQ будетъ опредѣляться уравненіемъ:

$$(\gamma - h_1)\xi + \alpha\zeta - \alpha h_1 = 0.$$

Это прямая съ отрѣзками на осяхъ z'овъ и x'овъ равными h_1 и $\frac{\alpha h_1}{\gamma - h_1}$.

3) Прямая, соотвѣтствующая BC, будетъ MQ; ея уравненіе будетъ:

$$\xi = \frac{\alpha k}{\beta - k},$$

Это прямая, параллельная оси z'овъ.

4) Наконецъ прямая, соотвѣтствующая AD, будетъ NP, опредѣляемая уравненіемъ:

$$\xi = \frac{\alpha k_1}{\beta - h_1},$$

параллельная тоже оси z'овъ.

Итакъ изображеніе прямоугольника $ABCD$ будетъ трапеціей $MNPQ$.

Теперь можемъ опредѣлить координаты точекъ M, N, P, Q соотвѣтствующихъ точкамъ B, C, D, A. Они будутъ:

$$\xi_M = \frac{\alpha k}{\beta - k}, \quad \zeta_M = \frac{\beta h - \gamma k}{\beta - k}; \quad \xi_N = \frac{\alpha k_1}{\beta - k_1}, \quad \zeta_N = \frac{\beta h - \gamma k_1}{\beta - k_1};$$

$$\xi_P = \frac{\alpha k_1}{\beta - k_1}, \quad \zeta_P = \frac{\beta h_1 - \gamma k_1}{\beta - k_1}; \quad \xi_Q = \frac{\alpha k}{\beta - k}, \quad \zeta_Q = \frac{\beta h_1 - \gamma k}{\beta - k}.$$

Длины сторонъ будутъ:

$$\left.\begin{aligned} \overline{MN} &= \frac{\beta(k_1-k)}{(\beta-k)(\beta-k_1)}\sqrt{\alpha^2+(h-\gamma)^2}; \quad \overline{NP} = \beta\frac{h_1-h}{\beta-k_1}; \\ \overline{PQ} &= \frac{\beta(k_1-k)}{(\beta-k)(\beta-k_1)}\sqrt{\alpha^2+(h_1-\gamma)^2}; \quad \overline{QM} = \beta\frac{h_1-h}{\beta-k}. \end{aligned}\right\} \quad (A)$$

Если свѣтящаяся точка лежитъ въ плоскости параллельной плоскости xy, проведенной отъ послѣдней на разстояніи $f=\frac{h+h_1}{2}$, то трапеція получится равнобочная.

При помощи простой установки, которую здѣсь описывать неумѣстно, мы нашли для плоскаго зеркала съ размѣрами 17.0 см. и 22.0 см. въ случаѣ, когда было взято:

$$\alpha = 80.0 \text{ см.}; \quad \beta = 174.0 \text{ см.}; \quad \gamma = 55.0 \text{ см.}$$

и положеніе зеркала опредѣлялось величинами:

$$k = 41.0 \text{ см.}, \quad k_1 = 58.0 \text{ см.}; \quad h = 36.3 \text{ см.}, \quad h_1 = 58.2 \text{ см.};$$

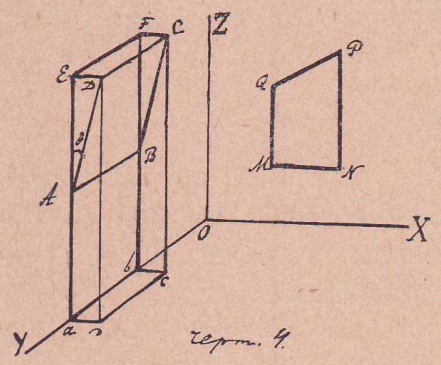
по нашимъ формуламъ найдено было:

$$\overline{MN} = 15.8 \text{ см.}; \quad \overline{NP} = 32.8 \text{ см.}; \quad \overline{PQ} = 15.4 \text{ см.}; \quad \overline{QM} = 28.7 \text{ см.}$$

Опытъ же далъ:

$$\overline{MN} = 15.3 \text{ см.}; \quad \overline{NP} = 32.8 \text{ см.}; \quad \overline{PQ} = 15.4 \text{ см.}; \quad \overline{QM} = 28.8 \text{ см.}$$

Измѣренія производились самымъ простымъ образомъ.



черт. 4.

§ 14. II. Пусть зеркало $ABCD$ повѣшено наклонно къ координатной плоскости YOZ и такимъ образомъ, что AB параллельно оси Y'овъ.

Тогда имѣемъ:

$$B_1 = 0$$

и если координаты точекъ A, B, D и C будутъ:

$$Oa = k_1; \quad Ob = k; \quad Aa = Bb = h;$$
$$Cc = Dd = Ea = h_1 \quad \text{и} \quad ED = d,$$

то получимъ:

$$A_1 = \cos\theta = \frac{h_1-h}{\sqrt{d^2+(h_1-h)^2}}, \qquad C_1 = -\sin\theta = \frac{d}{\sqrt{d^2+(h_1-h)^2}} \quad (a)$$

и затѣмъ:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{d}{h_1 - h}, \tag{b}$$

$$D = -C_1 h = -C_1 h_1 - A_1 d \tag{c}$$

или

$$D = \frac{hd}{\sqrt{d^2 + (h_1 - h)^2}}. \tag{d}$$

Теперь уравненіе $f(x, y, z) = 0$ будетъ послѣдовательно: 1) для стороны AB $z - h = 0$; 2) для стороны BC $y - k = 0$; 3) для стороны CD $z - h_1 = 0$ и наконецъ 4) для стороны DA $y - k_1 = 0$.

Уравненіе картинной плоскости будетъ: $\eta = 0$, а потому

$$m = p = 0, \quad n = 1, \quad q = 0.$$

Далѣе формулы (B) и (C) дадутъ въ нашемъ случаѣ:

$$a = A_1\alpha + C_1\gamma + D; \quad H = A_1\xi + C_1\zeta + D + a. \tag{e}$$

Для координатъ точки $S_0(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ получимъ формулы:

$$\alpha_0 = \alpha - 2A_1 a; \quad \beta_0 = \beta; \quad \gamma_0 = \gamma - 2C_1 a.$$

Подставляя все это въ формулы (I) § 5, найдемъ:

$$Hx = (\alpha - 2A_1 a)H + (\xi - \alpha + 2A_1 a)a,$$
$$Hy = \beta(A_1\xi + C_1\zeta + D),$$
$$Hz = (\gamma - 2C_1 a)H + (\zeta - \gamma + 2C_1 a)a.$$

Поэтому получимъ для контура $MNPQ$ изображенія $ABCD$ на картинной плоскости слѣдующія уравненія:

I. Для прямой MN . . . $(\gamma - h - 2C_1 a)H + (\zeta - \gamma + C_1 a)a = 0$

IV. Для прямой MQ . . . $(\beta - k)H - a\beta = 0$

II. Для прямой PN . . . $(\beta - k_1)H - a\beta = 0$

III. Для прямой PQ . . . $(\gamma - h_1 - 2C_1 a)H + (\zeta - \gamma + 2C_1 a)a = 0$.

Теперь преобразуемъ эти уравненія.

Уравненіе MN будетъ по подстановкѣ значенія H и приведеніи:

$$A_1(\gamma - h - 2C_1 a)\xi + [C_1(\gamma - h - 2C_1 a) + a](\zeta - h) = 0. \tag{I}$$

Уравненія прямыхъ MQ и PN будутъ послѣ подобныхъ же преобразованій:

для MQ . . . $[A_1\xi + C_1(\zeta - h)](\beta - k) - ak = 0$ (IV)

для PN . . . $[A_1\xi + C_1(\zeta - h)](\beta - k_1) - ak_1 = 0$ (II)

Отсюда заключаемъ, что прямыя MQ и NP всегда параллельны. Для симметріи можно придать послѣднему уравненію видъ:

$$[A_1(\xi - d) + C_1(\zeta - h_1)](\beta - k_1) - ak_1 = 0 \qquad \text{(II bis)}$$

подставивъ въ (II) вмѣсто C_1h его значеніе изъ (c).

Наконецъ уравненіе прямой PQ будетъ:

$$A_1(\gamma - h_1 - 2C_1a)(\xi - d) + [C_1(\gamma - h_1 - 2C_1a) + a](\zeta - h_1) = 0 \quad \text{(III)}$$

Разсматривая эти уравненія по два совмѣстно, найдемъ координаты точекъ пересѣченія. Мы опредѣлимъ сначала координаты точекъ M, N, P, Q. Послѣдовательно находимъ изъ уравненій (I) и (IV):

$$\xi_M = \frac{k[C_1(\gamma - h - 2C_1a) + a]}{A_1(\beta - k)}, \quad \zeta_M = h - \frac{k(\gamma - h - 2C_1a)}{\beta - k}.$$

Изъ уравненій (I) и (II) опредѣляемъ:

$$\xi_N = \frac{k_1[C_1(\gamma - h - 2C_1a) + a]}{A_1(\beta - k_1)}, \quad \zeta_N = h - \frac{k_1(\gamma - h - 2C_1a)}{\beta - k_1}.$$

Затѣмъ изъ уравненій (II bis) и (III) получаемъ:

$$\xi_P = d + \frac{k_1[C_1(\gamma - h_1 - 2C_1a) + a]}{A_1(\beta - k_1)}, \quad \zeta_P = h_1 - \frac{k_1(\gamma - h_1 - 2C_1a)}{\beta - k_1}.$$

Наконецъ уравненія (III) и (IV) дадутъ:

$$\xi_Q = d + \frac{k[C_1(\gamma - h_1 - 2C_1a] + a]}{A_1(\beta - k)}, \quad \zeta_Q = h_1 - \frac{k(\gamma - h_1 - 2C_1a)}{\beta - k}.$$

Теперь по координатамъ этихъ вершинъ находимъ длины сторонъ:

$$\left.\begin{aligned} \overline{MN} &= \frac{\beta(k_1 - k)}{A_1(\beta - k)(\beta - k_1)}\sqrt{(\gamma - h)^2 + a^2 - 2C_1a(\gamma - h)}, \\ \overline{NP} &= \frac{\beta}{\beta - k_1}\sqrt{d^2 + (h_1 - h)^2}; \quad \overline{MQ} = \frac{\beta}{\beta - k}\sqrt{d^2 + (h_1 - h)^2} \\ \text{и} \quad \overline{PQ} &= \frac{\beta(k_1 - k)}{A_1(\beta - k)(\beta - k_1)}\sqrt{(\gamma - h_1)^2 + a^2 - 2C_1a(\gamma - h_1)}. \end{aligned}\right\} \quad \text{(A)}$$

Если $d = 0$, то эти формулы обращаются въ формулы (A) § 13.

Такъ-какъ прямыя MQ и NP всегда параллельны, то фигура $MNPQ$ будетъ трапеціей и если стороны ея MN и PQ равны, то получимъ равнобочную трапецію. Это возможно при условіи:

$$A_1\left(\gamma-\frac{h_1+h}{2}\right)-C_1\left(\alpha-\frac{d}{2}\right)=0\,,$$

которое получимъ, подставляя въ равенство:

$$\overline{MN}=\overline{PQ}$$

значенія отрѣзковъ изъ формулъ (A) и преобразовавъ результатъ.

§ 15. III. Примѣнимъ наши формулы къ случаю, когда контуръ M будетъ кругъ. Его уравненіе пусть будетъ:

$$(y-y_0)^2+(z-z_0)^2-R^2=0,$$

гдѣ R радіусъ круга, а y_0 и z_0 координаты его центра.

Уравненія изображенія контура будутъ:

$$\left(\frac{\beta\xi}{\xi+\alpha}-y_0\right)^2+\left(\frac{\gamma\xi+\alpha\zeta}{\xi+\alpha}-z_0\right)^2-R^2=0,\quad \eta=0$$

или по приведеніи:

$$[(\beta-y_0)^2+(\gamma-z_0)^2-R^2]\xi^2+\alpha^2\zeta^2+2\alpha(\gamma-z_0)\xi\zeta-2\alpha[(\beta-y_0)y_0+ \\ +(\gamma-z_0)z_0+R^2]\xi-2\alpha^2z_0\zeta+\alpha^2(y_0^2+z_0^2-R^2)=0.$$

Это уравненіе эллипсиса, ибо дискриминантъ полученнаго уравненія будетъ:

$$B^2-4AC=4\alpha^2(R^2-(\beta-y_0)^2)<0,$$

такъ-какъ R всегда меньше абсолютной величины $\beta-y_0$.

Если свѣтящаяся точка помѣщена въ такомъ пунктѣ, что

$$\alpha=\sqrt{(\beta-y_0)^2-R^2},\quad \gamma=z_0,$$

то эллипсъ обратится въ кругъ.

§ 16. IV. Разсмотримъ еще любопытный случай, когда контуръ M будетъ эллипсисъ, котораго оси параллельны координатнымъ осямъ y'овъ и z'овъ.

Уравненіе этого эллипсиса будетъ:

$$\frac{(y - y_0)^2}{b^2} + \frac{(z - z_0)^2}{c^2} - 1 = 0. \qquad (a)$$

Въ такомъ случаѣ (§ 5) вмѣсто уравненія

$$F(\xi, \eta, \zeta) = 0$$

получимъ:

$$[c^2(\beta - y_0)^2 + b^2(\gamma - z_0)^2 - b^2c^2]\xi^2 + a^2b^2\zeta^2 + 2ab^2(\gamma - z_0)\xi\zeta - \\ - 2a[c^2(\beta - y_0)y_0 + b^2(\gamma - z_0)z_0 + b^2c^2]\xi - 2a^2b^2z_0\zeta + \\ + a^2(c^2y_0^2 + b^2z_0^2 - b^2c^2) = 0. \qquad (b)$$

Дискриминанъ этого уравненія

$$-a^2b^2[(\beta - y_0)^2 - c^2] < 0,$$

ибо всегда

$$c < |\beta - y_0|,$$

а потому (b) представляетъ эллипсисъ.

Если $b = c = R$, то уравненіе (b) превращается въ соотвѣтственное уравненіе предыдущаго параграфа.

§ 17. Интересенъ частный случай, когда уравненіе (b) будетъ уравненіемъ круга, т. е. случай, когда эллиптическій контуръ рисуется на картинной плоскости кругомъ.

Пусть уравненіе этого круга будетъ:

$$(\xi - \xi_0)^2 + (\zeta - \zeta_0)^2 - P^2 = 0, \qquad (c)$$

гдѣ ξ_0, ζ_0 координаты его центра, а P радіусъ.

Сравнивая (b) и (c), получимъ достаточное число уравненій для опредѣленія ξ_0, ζ_0 и P, а также получимъ и условіе возможности обращенія эллипсиса (b) въ кругъ (c).

Находимъ уравненія, если обозначимъ буквой k коэффиціентъ пропорціональности:

$$c^2(\beta - y_0)^2 + b^2(\gamma - z_0)^2 - b^2c^2 = k; \quad b^2a^2 = k; \quad b^2a(\gamma - z_0) = 0,$$
$$a^2b^2z_0 = k\zeta_0, \quad a^2[c^2(\beta - y_0)y_0 + b^2(\gamma - z_0)z_0 + b^2c^2] = k\xi_0;$$
$$a^2(c^2y_0^2 + b^2z_0^2 - b^2c^2) = k(\xi_0^2 + \zeta_0^2 - P^2).$$

Отсюда находимъ:

$$k = a^2b^2, \quad \gamma = z_0, \quad \zeta_0 = z_0. \qquad (d)$$

Затѣмъ опредѣляемъ:

$$\alpha = \frac{c}{b}\sqrt{(\beta - y_0)^2 - b^2}; \quad \xi_0 = \frac{c}{b}\frac{(\beta - y_0)y_0 + b^2}{\sqrt{(\beta - y_0)^2 - b^2}}. \tag{e}$$

Слѣдовательно, заключаемъ, что изображеніе на картинномъ экранѣ эллиптическаго контура (или зеркала) въ видѣ круга получается лишь тогда, когда свѣтящаяся точка лежитъ въ одной плоскости, параллельной плоскости xy, съ центромъ зеркала и координата α опредѣляется изъ уравненія:

$$\alpha = \frac{c}{b}\sqrt{(\beta - y_0)^2 - b^2}.$$

Радіусъ круга—изображенія будетъ:

$$P = \frac{c\beta}{\sqrt{(\beta - y_0)^2 - b^2}}. \tag{f}$$

§ 18. Для случая круглаго контура (круглаго зеркала) получаемъ уравненіе ($b = c = R$):

$$\gamma = z_0; \quad \zeta_0 = z_0; \quad \xi_0 = \frac{(\beta - y_0)y_0 + R^2}{\sqrt{(\beta - y_0)^2 - R^2}}; \quad P = \frac{R\beta}{\sqrt{(\beta - y_0)^2 - R^2}}$$

и

$$\alpha = \sqrt{(\beta - y_0)^2 - R^2}.$$

§ 19. Уравненіе (b) § 16 будетъ представлять эллипсисъ, отнесенный къ своимъ осямъ, если имѣемъ условіе:

$$z_0 = \gamma, \tag{h}$$

т. е. если свѣтящаяся точка и центръ зеркала лежатъ въ плоскости параллельной плоскости xy'овъ.

Если уравненіе эллипсиса—изображенія напишемъ для этого случая въ видѣ:

$$\frac{(\xi - \xi_0)^2}{A^2} + \frac{(\zeta - \zeta_0)^2}{C^2} - 1 = 0, \tag{k}$$

то сравненіе коэффиціентовъ, подобно случаю § 17, дастъ:

$$A = \frac{\alpha\beta b}{(\beta - y_0)^2 - b^2}, \quad C = \frac{c\beta}{\sqrt{(\beta - y_0)^2 - b^2}},$$
$$\xi_0 = \frac{\alpha[(\beta - y_0)y_0 + b^2]}{(\beta - y_0)^2 - b^2}, \quad \zeta_0 = z_0. \tag{l}$$

Эти формулы обращаются въ формулы § 16, если возьмемъ:

$$A = C = P.$$

Для круговаго контура формулы (l) будутъ:

$$A = \frac{\alpha\beta R}{(\beta - y_0)^2 - R^2}, \quad C = \frac{\beta R}{\sqrt{(\beta - y_0)^2 - R^2}},$$

$$\xi_0 = \frac{\alpha((\beta - y_0)y_0 + R^2)}{(\beta - y_0)^2 - R^2}, \quad \zeta_0 = z_0.$$

2 февраля 1909 г.

Кривая отраженія солнца въ морѣ.

Д. М. Синцова.

Въ своей статьѣ „Immagine del sole riflessa nel mare“ [1]) A. Riccò, нынѣ уже покойный, описываетъ свои наблюденія надъ рѣдкимъ явленіемъ, когда отраженіе солнца поверхностью моря является ограниченнымъ замкнутою кривою,— это требуетъ исключительно спокойной поверхности моря и совершенно ясной погоды. Riccò нашелъ, что это изображеніе представляется гораздо болѣе сплющеннымъ, чѣмъ прямое, и приписываетъ это вліянію шарообразности земли.

Представляетъ поэтому извѣстный интересъ задача такого рода: *опредѣлить видъ кривой, ограничивающей отраженіе солнца* (или лучше свѣтящагося шара) *на сферической поверхности*“ [2]).

Я даю въ дальнѣйшемъ рѣшеніе этой задачи сначала точное, затѣмъ принимая во вниманіе реальныя условія, дѣлаю нѣкоторыя приближенныя допущенія, значительно упрощающія полученное уравненіе.

При этомъ однако не принимается во вниманіе рефракція, которая однако въ этомъ явленіи должна играть существенную роль, ибо самое явленіе возможно наблюдать только тогда, когда свѣтило находится не высоко надъ горизонтомъ.

Во второй части я дѣлаю попытку принять во вниманіе и вліяніе рефракціи,—по крайней мѣрѣ астрономической,—именно я предполагаю, что въ морѣ отражается не истинный дискъ солнца, а тотъ, какимъ онъ представляется непосредственно глазу наблюдателя.

§ 1. Рѣшеніе задачи при отсутствіи рефракціи.

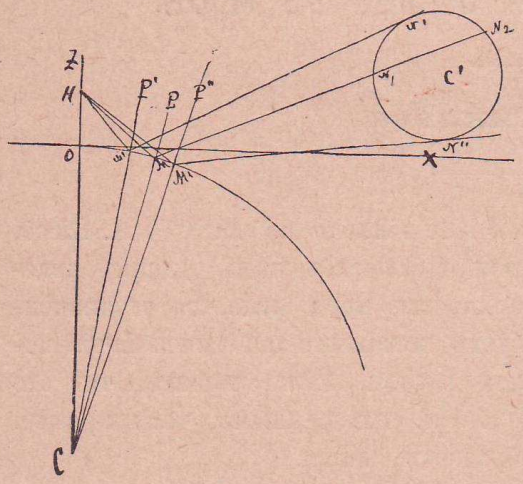
Примемъ поверхность свѣтящагося тѣла (солнца) и отражающаго (земли, покрытой водою) сферическими.

Выберемъ оси координатъ такъ, чтобы осью Z-овъ была прямая, соединяющая глазъ наблюдателя H съ центромъ земли C, и началомъ

[1]) Memorie della Società dei spettroscopisti italiani, Vol. VI.

[2]) Эта задача была мнѣ предложена проф. Д. И. Дубяго еще въ 1898 г. и тогда же мною было найдено приводимое теперь рѣшеніе. По обстоятельствамъ оно оставалось до сихъ поръ ненапечатаннымъ.

координатъ—точка встрѣчи HC съ земною поверхностью; положительное направленіе ея—отъ O къ H; за плоскость XOY примемъ касательную къ земной поверхности въ точкѣ O, и плоскость ZOX проведемъ черезъ центръ солнца C'.



Пусть Δ высота наблюдателя надъ поверхностью земли ($HO \equiv \Delta$), r—радіусъ земли и R—разстояніе OC'—начала координатъ отъ центра солнца.

При этихъ предположеніяхъ уравненіе отражающей (земной) поверхности напишется

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2rz = 0 \qquad (1)$$

уравненіе поверхности свѣтящагося тѣла (солнца):

$$(x - R\cos h_\odot)^2 + y^2 + (z - R\sin h_\odot)^2 = R^2 \sin^2 \varrho_\odot , \qquad (2)$$

гдѣ $h_\odot$—высота центра солнца надъ горизонтомъ въ точкѣ O и $\varrho_\odot$—угловой радіусъ солнца изъ O.

По закону отраженія точка $N \equiv (\xi, \eta, \zeta)$ поверхности солнца, которая даетъ лучъ, отражающійся отъ поверхности моря въ точкѣ $M \equiv (x, y, z)$ и попадающій въ глазъ наблюдателя H, лежитъ въ плоскости, проведенной черезъ M и черезъ HC, т. е.

$$\frac{\eta}{\xi} = \frac{y}{x} = \operatorname{tang} A \qquad (3)$$

Уголъ A заключается въ предѣлахъ $\pm \varrho_\odot$.

Плоскость

$$y = x \operatorname{tg} A \qquad (3')$$

пересѣкаетъ поверхность солнца по кругу. Возьмемъ въ этой плоскости слѣдующую систему осей: ось Z-овъ прежнюю и ось U—пересѣченіе плоскости (3') съ плоскостью XOY.

Такимъ образомъ

$$u^2 = x^2 + y^2, \quad x = u\cos A, \quad y = u\sin A.$$

Уравненіе круга, по которому плоскость (3') пересѣкаетъ поверхность солнца, въ этой системѣ напишется:

$$(U - u_\odot)^2 + (Z - z_\odot)^2 = \tau^2 \qquad (4)$$

гдѣ, очевидно,

$$u_\odot = R\cos h_\odot \cos A$$
$$z_\odot = R\sin h_\odot$$
$$\tau^2 = R^2(\sin^2\varrho_\odot - \cos^2 h_\odot \sin^2 A)$$

($\tau^2 > 0$ ибо $|A| \leq \varrho_\odot$ и потому $\sin^2\varrho_\odot \geq \sin^2 A$ и $\cos^2 h_\odot < 1$).

Земную поверхность плоскость (3′) пересѣкаетъ по большому кругу

$$u^2 + z^2 + 2rz = 0 \quad , \qquad (5)$$

Мы можемъ теперь представить, что нашъ чертежъ и есть сѣченіе плоскостью (3′).

Точки солнечной поверхности, дающія изображенія, видимыя изъ H, получимъ такъ: точка N поверхности солнца, изъ которой исходитъ лучъ, по отраженіи въ M попадающій въ точку H, есть, какъ извѣстно изъ геометрической оптики, въ тоже время точка пересѣченія съ поверхностью солнца луча, выходящаго изъ H (если бы H была свѣтящеюся точкою) и отражающагося въ точкѣ M, иными словами мы можемъ разсматривать свѣтящимся не дискъ солнца, а точку H, и искать тѣ точки отражающей поверхности, отраженные которыми лучи попадаютъ на поверхность солнца.

Точки, ограничивающія отраженное въ морѣ изображеніе солнца, будутъ въ тоже время предѣльными точками, отраженныя которыми лучи еще попадаютъ на поверхность солнца, а именно касаются ея.

Чтобы получить ихъ, выразимъ, что лучъ, исходящій изъ H и отраженный въ M, касается поверхности солнца, т. е. двѣ точки встрѣчи его съ этою послѣдней (стало быть съ кругомъ (C'), лежащимъ въ плоскости чертежа) совпадаютъ.

Уравненіе HM есть

$$Z - \Delta = \frac{z-\Delta}{u} U$$

Уравненіе CM

$$Z + r = \frac{z-r}{u} U$$

Если μ и ν — углы со осью U прямыхъ HM и CM, то уголъ

$$(MN,\ U) = \mu - 2(\mu - \nu) = 2\nu - \mu$$

Но

$$\operatorname{tg} 2\nu = \frac{2(z+r)u}{u^2 - (z+r)^2} = \frac{2(z+r)u}{r^2 - 2(z+r)^2}.$$

Поэтому

$$\operatorname{tg}(2\nu - \mu) = \frac{2(z+r)u^2 - (z-\Delta)[r^2 - 2(z+r)^2]}{u[r^2 - 2(z+r)^2 + 2(z+r)(z-\Delta)]} = \frac{\Xi}{u},$$

если означимъ

$$\Xi = -\frac{2z^2(r+\Delta)+rz(3r+4\Delta)+\Delta.r^2}{r^2-2(z+r)(r+\Delta)} \qquad (6)$$

Отсюда уравненіе прямой MN:

$$(Z-z)=\frac{\Xi}{u}(U-u) \quad \text{или} \quad Z-z=\frac{\Xi}{u}U-\Xi. \qquad (7)$$

Точки пересѣченія MN съ (4) получимъ, подставляя Z или U изъ (7) въ (4). Получимъ уравненія

$$U^2\left(1+\frac{\Xi^2}{u^2}\right)-2U\left(u_\odot+\frac{\Xi}{u}(\Xi-z+z_\odot)\right)+$$
$$+u_\odot{}^2+(z-z_\odot-\Xi)^2-\tau^2=0 \qquad (8)$$

Искомое условіе получимъ выразивъ, что это уравненіе имѣетъ равные корни:

$$\left[u_\odot+\frac{\Xi}{u}(\Xi-z+z_\odot)\right]^2-\left(1+\frac{\Xi^2}{u^2}\right)[u^2{}_\odot-\tau^2+(z-z_\odot-\Xi)^2]=0 \qquad (9)$$

Умножимъ (9) на u^2 и возстановимъ здѣсь x и y вмѣсто u; имѣемъ

$$uu_\odot=u\cos A.R\cos h_\odot=xR\cos h_\odot,\quad u^2=x^2+y^2$$
$$u^2{}_\odot-\tau^2=R^2(\cos^2 h_\odot-\sin^2\varrho_\odot).$$

Такимъ образомъ (9) приметъ видъ:

$$0=[xR\cos h_\odot+\Xi(\Xi-z+z_\odot)]^2-$$
$$-(x^2+y^2+\Xi^2)[R^2(\cos^2 h_\odot-\sin^2\varrho_\odot)+(\Xi-z+z_\odot)^2]. \qquad (10)$$

Это уравненіе не содержитъ A. Оно одинаково для всѣхъ значеній A. Это и есть, слѣдовательно, уравненіе, которое связываетъ координаты точекъ искомаго геометрическаго мѣста. Вмѣстѣ съ (1) уравненіе (10) опредѣляетъ кривую, ограничивающую изображеніе отраженія солнца въ морѣ.

Уравненіе (10) довольно сложно. Мы можемъ его значительно упростить, замѣтивъ, что z величина сравнительно малая и не можетъ превышать $\dfrac{\Delta}{1+\dfrac{\Delta}{2r}}$ Тѣмъ болѣе можемъ пренебречь ею сравнительно съ R.

Поэтому раздѣлимъ лѣвую часть (10) на R^2, припомнивъ, что $z_\odot=R\sin h_\odot$ и положимъ $\dfrac{1}{R}=0$.

Имѣемъ:

$$0 = [x\cos h_\odot + \Xi \sin h_\odot]^2 - (x^2 + y^2 + \Xi^2)(\cos^2 h_\odot - \sin^2 \varrho_\odot + \sin^2 h_\odot)$$

или

$$0 = [x\cos h_\odot + \Xi \sin h_\odot]^2 - (x^2 + y^2 + \Xi^2)\cos^2 \varrho_\odot \qquad (10')$$

Остается лишь замѣнить Ξ приведеннымъ выше его значеніемъ, которое мы перепишемъ

$$\Xi = \frac{\Delta + 3z + \frac{1}{r}(4\Delta z + 2z^2) + 2\Delta \cdot \frac{1}{r^2}}{1 + 2(z + \Delta)\frac{1}{r} + 2\Delta z \cdot \frac{1}{r^2}} \qquad (11)$$

такимъ образомъ (10′) представляетъ уравненіе 4-ой степени.

Если же замѣтить что z и Δ—величины одного порядка и весьма малыя сравнительно съ r, то можемъ во всякомъ случаѣ пренебречь членами съ $\frac{1}{r^2}$; тогда

$$\Xi = \Delta . 3z - \frac{2}{r}[(z + \Delta)^2 + z^2] \qquad (11')$$

и слѣдовательно

$$\Xi^2 = (\Delta + 3z)^2 - 4\frac{(\Delta + 3z)[(z + \Delta)^2 + z^2]}{r}$$

и (10′) представляетъ уравненіе 3-ьей степени.

Мы можемъ однако идти еще дальше. Высота наблюдателя надъ уровнемъ моря величина вообще весьма малая сравнительно съ радіусомъ земли. Въ Палермо, гдѣ производилъ наблюденія Riccò, $\Delta = 72$ m; что касается z, то хотя благодаря рефракціи, понижающей горизонтъ, оно можетъ получить значенія, бо́льшія вышеуказаннаго, но все же не превышающія нѣкотораго кратнаго Δ [1]).

Мы можемъ поэтому пренебречь и членами, содержащими $\frac{1}{r}$, т. е. принять

$$\Xi = \Delta + 3z ,$$

и тогда уравненіе (10) приметъ видъ

$$0 = (x\cos h_\odot + (\Delta + 3z)\sin h_\odot)^2 - [x^2 + y^2 + (\Delta + 3z)^2]\cos^2 \varrho_\odot , \qquad (12)$$

т. е. изображаетъ конусъ 2-го порядка, имѣющій вершину въ точкѣ

$$\left(0 , 0 , -\frac{\Delta}{3}\right).$$

---

[1]) Riccò видѣлъ точки моря на разстояніи 33 km, что даетъ для z верхній предѣлъ 0.182 m; при этомъ $\Delta + 3z = 618$ m, и отбрасываемый членъ — 0.0235 m.

Если бы земля была плоскостью, имѣли бы $r = \infty$, и (1) замѣнилось бы уравненіемъ $z = 0$. Тогда $\Xi = \Delta$ и уравненіе кривой изображенія приняло бы видъ

$$0 = [x \cos h_\odot + \Delta \sin h_\odot]^2 - (x^2 + y^2 + \Delta^2) \cos^2 \varrho_\odot ,$$

Это коническое сѣченіе

$$x^2 [\cos^2 h_\odot - \cos^2 \varrho_\odot] - y^2 \cos^2 \varrho_\odot + \Delta . x \sin^2 h_\odot = \Delta^2 \cos^2 \varrho_\odot$$

будетъ эллипсомъ при

$$\cos^2 h_\odot < \cos^2 \varrho_\odot \left(\text{т. е. для } h_\odot \leqq \frac{\pi}{2} \text{ при } h_\odot > \varrho_\odot \right),$$

отношеніе осей котораго есть

$$\sqrt{1 - \frac{\cos^2 h_\odot}{\cos^2 \varrho_\odot}}$$

При $h_\odot = \varrho_\odot$ этотъ эллипсъ обращается въ параболу

$$y^2 = 2\Delta . x \cos \varrho_\odot - \Delta^2 .$$

Но пренебрегать величиною $3z$ сравнительно съ Δ мы не имѣемъ права, ибо это величины одного порядка. Такимъ образомъ дѣйствительно, пока не принимать во вниманіе рефракцію, вліяніе шарообразности земли несомнѣнно.

§ 2. Изображеніе солнца при дѣйствіи рефракціи.

Попробуемъ получить кривую, ограничивающую изображеніе солнца, принимая въ соображеніе вліяніе рефракціи.

Послѣднее состоитъ изъ двухъ частей: во-первыхъ, астрономической рефракціи, искривляющей лучъ падающій, и земной, искривляющей лучъ отраженный. Послѣднее вліяніе менѣе значительно, ибо разность уровня моря и мѣста наблюдателя незначительна сравнительно съ высотою атмосферы, и потому отражаемый лучъ проходитъ черезъ слои, мало отличающіеся по своей плотности. Между тѣмъ оцѣнка вліянія и земной рефракціи представляетъ въ данномъ случаѣ значительныя аналитическія трудности. Ограничимся поэтому введеніемъ вліянія рефракціи астрономической, именно предположимъ, что *въ морѣ отражается не истинный дискъ солнца, а видимый, какъ онъ представляется наблюдателю благодаря рефракціи*. Мы говоримъ уже не о шарѣ, а *дискѣ* солнца, при чемъ, какъ это указываетъ, напр., Савичъ [1]), принимаемъ, что плоскость его перпендикулярна къ лучу зрѣнія, направленному въ центръ его,— т. е. касательна къ небесной сферѣ точки наблюденія.

[1]) Сферическая астрономія. Спб. 1874, с. 142 и слѣд.

Пусть ξ, η, ζ координаты точки контура этого диска. Тогда плоскость его выразится уравненіемъ

$$\xi \cos h_\odot + \zeta \sin h_\odot - R = 0 \qquad (1)$$

Пусть X, Y координаты точки контура относительно осей, взятыхъ въ этой плоскости, и пусть уравненіе контура въ этой системѣ есть

$$\varphi(X, Y) = 0 \qquad (2)$$

Уравненіе прямой MN (та же прямая что въ § 1) должно удовлетворяться координатами ξ, η, ζ; такимъ образомъ

$$\begin{aligned} &\zeta - z = \Xi\left(\frac{\xi}{x} - 1\right) \\ &\eta x - \xi y = 0 \end{aligned} \qquad (3)$$

Исключая изъ четырехъ уравненій (1), (2), (3) ξ, η, ζ получимъ искомое уравненіе, вмѣстѣ съ (1) § 1 опредѣляющее кривую отраженія.

Замѣтимъ, что во (2)

$$\begin{aligned} &X = \eta, \\ &Y = (\zeta - R \sin h_\odot) : \cos h_\odot, \end{aligned} \qquad (4)$$

если принять, что за начало осей XY принимаемъ центръ диска.

Что касается до уравненія этого послѣдняго, то если высота центра солнца больше 2^0, можемъ принимать дискъ ограниченнымъ дугами эллипса, такъ что (2) для верхней половины

$$\frac{X^2}{R^2 \sin^2 \varrho_\odot} + \frac{Y^2}{R^2 \sin^2 \varrho'_\odot} = 1 \qquad (Y>0)$$

для нижней (5)

$$\frac{X^2}{R^2 \sin^2 \varrho_\odot} + \frac{Y^2}{R^2 \sin^2 \varrho''_\odot} = 1 \qquad (Y<0)$$

Очевидно, что если бы взяли иную кривую въ качествѣ (2) для $h_\odot < 2^0$, то пріемъ отъ этого не измѣнился бы.

Изъ (1) и (3) найдемъ

$$\zeta = \frac{(z - \Xi)\, x \cos h_\odot + \Xi . R}{x \cos h_\odot + \Xi \sin h_\odot}, \quad \eta = y \frac{R - (z - \Xi) \sin h_\odot}{x \cos h_\odot + \Xi \sin h_\odot}.$$

Подставляя въ (5), раздѣляя на R^2 и полагая $\frac{1}{R} = 0$ получимъ:

$$\sin^2 \varrho_\odot [x \cos h_\odot + \Xi \sin h_\odot]^2 = y^2 + (\Xi \cos h_\odot - x \sin h_\odot)^2 \frac{\sin^2 \varrho_\odot}{\sin^2 \varrho^{(i)}_\odot} \qquad (6)$$

смотря потому, которую часть контура возьмемъ,—верхнюю или нижнюю.

При этомъ для Ξ, конечно, достаточно брать найденное выше второе приближенное значеніе

$$\Xi = \Delta + 3z\,,$$

Такимъ образомъ искомое уравненіе приметъ видъ

$$\sin^2\varrho\odot\,[x\cos h\odot + (\Delta + 3z)\sin h]^2\odot =$$
$$y^2 + [x\sin h\odot - (\Delta + 3z)\cos h\odot]^2\frac{\sin^2\varrho\odot}{\sin^2\varrho^{(i)}_{\odot}} \qquad (7)$$

Такъ же какъ и (12) § 1 это уравненіе выражаетъ конусъ 2-го порядка съ вершиною въ точкѣ $\left(0\,,\ 0\,,\ -\frac{\Delta}{3}\right)$. Кривая изображенія солнца получается такимъ образомъ, какъ пересѣченіе одной полости этого конуса со сферою, и оказывается такимъ образомъ сферическимъ эллипсомъ (т. е. собственно тою его частью, которая при нашемъ выборѣ осей координатъ лежитъ въ углѣ положительныхъ x-овъ и y-овъ).

Въ виду того, что высота солнца при этихъ наблюденіяхъ не можетъ быть значительна, можно было бы при нашемъ приближенномъ рѣшеніи безъ существеннаго ущерба допустить, что свѣтлый дискъ солнца лежитъ въ плоскости, перпендикулярной къ горизонту (и къ оси x-овъ). Отличіе отъ предыдущаго получилось бы то, что уравненіе (1) этого §'а замѣнилось бы черезъ $\xi = R\cos h\odot$, и уравненія (4) на

$$X = \eta\,,\quad Y = \zeta - R\sin h\odot\,.$$

Особенныхъ упрощеній это впрочемъ не вводитъ.

Въ уравненія (3) и (6) входитъ таже величина Ξ, что и въ § 1, которая, если бы земля была плоской, равнялась бы Δ. Тогда вмѣсто (1) и (7), кривая изображенія солнца опредѣлялась бы уравненіями:

$$z = 0$$
$$\sin^2\varrho\odot\,[x\cos h\odot + \Delta\sin h\odot]^2 = y^2 + [x\sin h\odot - \Delta\cos h\odot]^2\frac{\sin^2\varrho\odot}{\sin^2\varrho^{(i)}_{\odot}}$$

Интересно было бы сравнить полученный результатъ съ наблюденіями. Изъ приводимыхъ въ статьѣ Riccò случаевъ только $^1/_{IX}$—1888 удалось ему наблюдать, когда свѣтило было приблизительно на высотѣ $1^1/_2{}^0$, (минутъ черезъ 10 послѣ отдѣленія отъ самаго диска) изображеніе въ видѣ кривой эллиптическаго вида, вертикальный діаметръ котораго былъ вдвое меньше горизонтальнаго; Riccò, по его словамъ, могъ еще около 20 минутъ различать изображеніе, которое передъ исчезновеніемъ стало гораздо шире, но все еще оставалось чувствительно эллиптическимъ. Однако, эти данныя слишкомъ недостаточны, чтобы произвести сравненіе.

$^{14}/_{VI}$—09.

Профессоръ Н. Д. Пильчиковъ

(НЕКРОЛОГЪ)

Е. Роговскаго.

Николай Дмитріевичъ происходилъ изъ дворянъ Полтавской губерніи, родился въ городѣ Полтавѣ 9-го мая 1857 года. Отецъ его былъ преподавателемъ исторіи и политической экономіи въ Полтавскомъ кадетскомъ корпусѣ. Рано лишившись матери, Николай Дмитріевичъ росъ на рукахъ отца, горячаго украинскаго патріота и дѣятеля, подъ руководствомъ котораго онъ познакомился съ малорусской и польской литературой; русскую литературную рѣчь онъ усвоилъ лишь впослѣдствіи, при подготовкѣ къ поступленію въ Полтавскую гимназію, куда былъ принятъ прямо въ четвертый классъ. Въ гимназіи Николай Дмитріевичъ особенно заинтересовался математикою и физикою. Этотъ интересъ къ физико-математическимъ наукамъ не былъ случайнымъ и мимолетнымъ: онъ былъ выраженіемъ природной способности и склонности его къ указаннымъ наукамъ, и дѣйствительно, послѣ окончанія курса гимназіи, Николай Дмитріевичъ поступилъ въ 1876 г. на существовавшее тогда физико-химическое отдѣленіе физико-математическаго факультета Харьковскаго университета. Въ университетѣ онъ слушалъ лекціи профессора химіи Н. Н. Бекетова, механики В. Г. Имшенецкаго, физики А. П. Шимкова, геометріи К. А. Андреева и др. и занимался въ физической лабораторіи, гдѣ еще въ 1878 г. будучи студентомъ второго курса, работалъ надъ фонографіей до появленія въ Европѣ фонографа Эдиссона. Въ 1879 году онъ дѣлаетъ докладъ въ физико-химической секціи Общества опытныхъ наукъ объ изслѣдованіяхъ Крукса, относящихся къ четвертому состоянію матеріи. Научныя занятія не мѣшали Николаю Дмитріевичу посвящать часы досуга музыкѣ и малорусской поэзіи (нѣкоторыя изъ его стихотвореній напечатаны въ сборникѣ доктора Александрова: „Складка“ подъ иниціалами—М. П.)

По окончаніи въ 1880 году университета со степенью кандидата, Николай Дмитріевичъ, по предложенію проф. Шимкова, былъ оставленъ стипендіатомъ для приготовленія къ профессорскому званію по кафедрѣ

физики и зимою $18^{82}/_{83}$ года сдалъ магистерскій экзаменъ. Послѣ этого Николай Дмитріевичъ, по порученію Императорскаго русскаго географическаго Общества, предпринялъ экскурсію для магнитнаго изслѣдованія Курскаго района магнитныхъ аномалій, открытыхъ И. Н. Смирновымъ въ 1874 году, съ цѣлью провѣрки наблюденій послѣдняго; но Николай Дмитріевичъ не ограничился этимъ: онъ дополнилъ наблюденія нѣкоторыми новыми пунктами, въ которыхъ обнаружились также крупныя аномаліи земного магнетизма (наклоненія), а именно: въ Марьиной и Прохоровкѣ. Сравненіе съ наблюденіями Смирнова позволило опредѣлить вѣковыя измѣненія магнитныхъ элементовъ въ Харьковѣ, Бѣлгородѣ и Кустарной. За эту работу Николай Дмитріевичъ получилъ золотую медаль отъ Русскаго Географическаго Общества, и она же дала матеріалъ для его магистерской диссертаціи.

Съ 1-го Января 1884 года Николай Дмитріевичъ былъ назначенъ ассистентомъ по кафедрѣ физики и велъ практическія занятія со студентами 3-го и 4-го курсовъ, а по прочтеніи 5-го и 12-го декабря 1885 г. двухъ пробныхъ лекцій: 1) по собственному выбору: „капиллярность вообще и капиллярность растворовъ въ частности“ и 2) по назначенію факультета: „выводъ уравненія распространенія теплоты въ твердой однородной средѣ“, былъ утвержденъ 21 декабря приватъ-доцентомъ и съ тѣхъ поръ началъ читать въ университетѣ лекціи по экспериментальной физикѣ, исторіи физики и по разнымъ отдѣламъ математической физики, какъ то: теорію потенціала, математическую оптику, механическую теорію теплоты, теорію электричества, теорію упругости и др., а также метеорологію, атмосферное электричество и земной магнетизмъ.

Въ 1887 году Николай Дмитріевичъ былъ командированъ университетомъ на два года за границу съ ученою цѣлью, и по защитѣ въ Петербургскомъ университетѣ диссертаціи подъ заглавіемъ: „Матеріалы къ вопросу о мѣстныхъ аномаліяхъ земного магнетизма“ и по утвержденіи въ степени магистра физики и физической географіи, отправился въ Парижъ, гдѣ работалъ въ лабораторіи профессора Lippmann'а въ École pratique des hautes études, въ Bureau international des Poids et Mesures въ Севрѣ и въ магнитной обсерваторіи въ Parc Saint Maur; тамъ онъ указалъ на ошибку въ конструкціи сейсмографа. Въ лабораторіи Lippmann'а онъ занимался изслѣдованіями по электролизу и поляризаціи электродовъ.

Тогда же, въ мастерской оптика Pellin, были построены изобрѣтенные имъ новые аппараты, а именно: рефрактометръ съ полой чечевицей для опредѣленія показателей преломленія жидкостей и зеркало съ перемѣннымъ фокуснымъ разстояніемъ; отчеты объ этихъ работахъ и приборахъ были напечатаны въ отчетахъ Парижской академіи наукъ и въ Journal de Physique, а на бывшихъ въ то время (1889 г.) въ Парижѣ

конгрессахъ—электрическомъ и метеорологическомъ, были сдѣланы соотвѣтственные доклады; на послѣднемъ—о магнитныхъ аномаліяхъ.

По возвращеніи въ Россію, Николай Дмитріевичъ былъ назначенъ 16-го декабря 1889 г. исправляющимъ должность экстра-ординарнаго профессора по кафедрѣ физики въ Харьковскомъ университетѣ, гдѣ читалъ курсы по опытной и математической физикѣ и метеорологіи; послѣднюю—вмѣсто заболѣвшаго тогда профессора Ю. И. Морозова. Такъ имъ читались: теорія потенціала, земной магнетизмъ, оптика, механическая теорія тепла, теорія упругости, акустика, электричество и магнетизмъ. Благодаря его стараніямъ при физическомъ кабинетѣ университета было основано магнитно-метеорологическое отдѣленіе [1]), а въ Университетскомъ саду подлѣ астрономической обсерваторіи была построена въ 1893 году метеорологическая станція, въ видѣ небольшого деревяннаго дома, стоимостью около 2000 руб., съ комнатой для наблюденій, помѣщеніемъ для наблюдателя, будками для инструментовъ. Средства для этого были пожертвованы проф. Пильчиковымъ и госпожею Головковою. Сюда были перенесены въ декабрѣ того же года инструменты изъ астрономической обсерваторіи, гдѣ они раньше помѣщались, и съ 1-го января 1894 года до настоящаго времени станція продолжаетъ непрерывно работать. Для оборудованія станціи гео-магнитными приборами Николай Дмитріевичъ былъ командированъ еще въ 1889 году Совѣтомъ Харьковскаго Университета въ Петербургъ, въ Императорское Русское Географическое Общество, которое ссудило Харьковскій университетъ серіею своихъ магнитныхъ приборовъ, освободившихся отъ полярныхъ экспедицій. Варіаціонные инструменты были впослѣдствіи установлены въ подвалѣ метеорологической станціи. Результаты наблюденій университетской станціи Николай Дмитріевичъ началъ печатать съ 1892 г., и съ тѣхъ поръ они печатаются до настоящаго времени. Онъ же принималъ дѣятельное участіе въ организаціи метеорологической сѣти Харьковской губ., и по его иниціативѣ было устроено нѣсколько метеорологическихъ станцій въ Харьковской и Курской губ.

Николай Дмитріевичъ не довольствовался, однако, обычными наблюденіями на станціяхъ: онъ работалъ и надъ спеціальными изслѣдованіями, между прочимъ надъ поляризаціей свѣта небеснаго свода, и при этомъ имъ было открыто, что поляризація неба въ точкахъ наибольшей поляризаціи (на разстояніи 90° отъ свѣтила въ вертикальной плоскости)—неодинакова въ разныхъ цвѣтахъ: количество поляризован-

---

[1]) Это было вызвано тѣмъ обстоятельствомъ, что въ физическомъ кабинетѣ, находившемся не въ его завѣдываніи, Николай Дмитріевичъ не могъ работать, потому что „вслѣдствіе недостатка мѣста его работа мѣшала бы практическимъ занятіямъ студентовъ“. См. Н. Д. Пильчиковъ: Матеріалы къ вопросу о приложеніи термодинамическаго потенціала къ изученію электро-химической механики. Одесса. 1896 г., стр. 3.

ныхъ лучей синяго цвѣта болѣе, чѣмъ краснаго; этими наблюденіями онъ доказалъ неправильность предположенія Ляллемана, что синій цвѣтъ неба обусловливается флюоресценціею воздуха. Въ самомъ дѣлѣ, свѣтъ флюоресцирующихъ тѣлъ неполяризованъ, и если бы синій цвѣтъ неба имѣлъ своею причиною флюоресценцію воздуха, то прибавка неполяризованнаго синяго свѣта флюоресценціи воздуха къ общему лучеиспусканію неба произвела бы то, что относительная поляризація синихъ лучей была бы меньше, чѣмъ красныхъ, а не наоборотъ, какъ показали наблюденія Н. Д. Пильчикова. Интересно, что зимою отношеніе измѣняется и нерѣдко поляризація въ красныхъ лучахъ больше, чѣмъ въ синихъ. Одновременно съ этимъ Николай Дмитріевичъ производилъ и ночныя наблюденія надъ поляризаціею атмосферы луною; имъ найденъ слѣдующій законъ: количество поляризованнаго свѣта въ атмосферѣ возрастаетъ отъ нуля до максимума отъ новолунія до полнолунія и, затѣмъ, такъ же плавно убываетъ до нуля отъ полнолунія до слѣдующаго новолунія, что объясняется наблюденіями Пернтера, который нашелъ, что степень поляризаціи въ мутныхъ срединахъ уменьшается съ уменьшеніемъ яркости свѣта. Явленіями поляризаціи свѣта Николай Дмитріевичъ интересовался до послѣднихъ дней своей жизни; такъ въ 1904, пользуясь своимъ пребываніемъ въ Наугеймѣ для леченія, онъ производилъ тамъ свои наблюденія надъ поляризаціею неба; въ 1905 году онъ ѣдетъ въ Алжиръ для наблюденій надъ поляризаціею атмосферы во время полнаго солнечнаго затменія 30 августа (н. с.) и открываетъ, что во время полной фазы эта поляризація въ точкѣ максимальной поляризаціи исчезаетъ совершенно; Николай Дмитріевичъ объясняетъ это тѣмъ, что слабый поляризованный свѣтъ отъ солнечной короны совершенно исчезаетъ въ значительно болѣе сильномъ разсѣянномъ свѣтѣ части атмосферы, освѣщенной солнцемъ внѣ конуса тѣни. Въ декабрѣ 1907 года онъ дѣлаетъ сообщеніе на Менделѣевскомъ съѣздѣ въ Петербургѣ о поляризаціи въ мутныхъ средахъ.

Въ 1894 году Николай Дмитріевичъ перешелъ на службу въ Новороссійскій университетъ, а въ 1902 году въ Харьковскій Технологическій институтъ, какъ профессоръ физики. Вступительная лекція его: „О связи между технологіей и физикой и химіей“ напечатана въ 1-мъ томѣ Извѣстій института. Въ Новороссійскомъ университетѣ онъ читалъ курсы какъ по опытной физикѣ, такъ и по математической, напр.: теорія капиллярности, оптика, теорія потенціала, электро-магнетизмъ, физика частичныхъ силъ и др. и, кромѣ того, много занимался безпроволочною телеграфіей. Въ Харьковскомъ Технологическомъ Институтѣ особенныя усилія онъ употребилъ на возможно полное оборудованіе лабораторіи и устройство научныхъ работъ по физикѣ, и усилія его въ этомъ отношеніи остались небезплодными: Институтъ уже и теперь обладаетъ хорошо

обставленными физическимъ кабинетомъ и лабораторіей. Николай Дмитріевичъ принималъ весьма живое участіе въ вопросѣ объ открытіи при Технологическомъ Институтѣ агрономическаго отдѣленія и неоднократно входилъ въ Учебный Комитетъ Института съ соотвѣтственнымъ ходатайствомъ (см.—Н Д. Пильчиковъ: „Объ агрономическомъ отдѣленіи Х. Т. Института“ съ приложеніемъ докладной записки проф. Зайкевича, И. Красусскаго и Н. Пильчикова, Извѣстія Х. Т. Института, т. III). Подъ его предсѣдательствомъ была образована коммиссія, которая всего за мѣсяцъ до его смерти выработала основныя положенія проекта новаго отдѣленія. По иниціативѣ же Николая Дмитріевича и подъ его редакціею при Институтѣ стали издаваться „Извѣстія Харьковскаго Технологическаго Института“. Подъ его редакціею вышло три тома. Въ этихъ Извѣстіяхъ есть и его статьи и, кромѣ того, напечатаны „Результаты наблюденій“ находившейся въ его завѣдываніи метеорологической обсерваторіи Института за 1903—5 годы.

Кромѣ исполненія своихъ преподавательскихъ обязанностей, Николай Дмитріевичъ принималъ съ января 1881 г. весьма дѣятельное участіе въ жизни Общества физико-химическихъ наукъ при Харьковскомъ Университетѣ, какъ своими многочисленными докладами и замѣчаніями во время преній, такъ и несеніемъ обязанностей секретаря. Его научныя работы были достойно оцѣнены и иностранными учеными, и Николай Дмитріевичъ былъ избранъ Французскимъ Физическимъ Обществомъ иностраннымъ членомъ его Совѣта и Тулузской Академіей Наукъ дѣйствительнымъ членомъ. Въ 1908 г. Николай Дмитріевичъ былъ избранъ также членомъ Русскаго Физико-Химическаго Общества въ С.-Петербургѣ. Онъ принималъ еще дѣятельное участіе своими докладами въ занятіяхъ международныхъ конгрессовъ по метеорологіи въ 1889 г. въ Парижѣ (докладъ по теоріи магнитныхъ аномалій) и 1900 году, по электричеству въ Парижѣ въ 1889 г. (докладъ о первоначальной фазѣ электролиза), по физикѣ въ Парижѣ въ 1900 г. (докладъ о фотогальванографіи) и по радіологіи и іонизаціи въ Льежѣ въ 1905 г. (докладъ о лучахъ Мозера); точно также дѣлалъ сообщенія на съѣздахъ русскихъ естествоиспытателей и врачей въ Одессѣ въ 1883 г. (объ упруговѣсовомъ реостатѣ), въ С.-Петербургѣ въ 1889 г. (о рефрактометрѣ для опредѣленія показателя преломленія жидкостей и легкоплавкихъ тѣлъ и о новомъ сейсмографѣ для совмѣстныхъ магнитныхъ и сейсмическихъ наблюденій) и въ 1901 году (докладъ объ іонизаціонномъ полѣ радія), въ Москвѣ въ 1893 году (доклады: о спектральной поляризаціи неба, о новомъ методѣ изученія электрической конвекціи въ газахъ и о поляризаціи металловъ въ растворѣ ихъ солей) и Кіевѣ въ 1898 г. (докладъ о вліяніи магнитныхъ аномалій на суточный и годовой ходъ магнитныхъ элементовъ).

Кромѣ всего этого Николай Дмитріевичъ читалъ публичныя лекціи, посвященныя новѣйшимъ открытіямъ въ области физическихъ наукъ, въ Харьковѣ, Одессѣ, Кишиневѣ, Херсонѣ и Николаевѣ.

Многочисленныя работы Николая Дмитріевича, разсѣянныя въ разныхъ научныхъ журналахъ и сборникахъ, относятся ко всѣмъ отдѣламъ физики; отчетъ о нихъ напечатанъ въ Извѣстіяхъ Харьк. Техн. Инст. и Трудахъ Общества Физ. Хим. наукъ при Императорскомъ Харьковскомъ Университетѣ за 1908 г.

Кромѣ самостоятельныхъ работъ имъ дѣлались рефераты въ Харьковскомъ Физико-Химич. Обществѣ, напр., въ 1879 году объ опытахъ Крукса (первый докладъ Ник. Дм.); въ 1885 объ опытахъ Лоджа надъ сгущеніемъ дыма электричествомъ; въ 1890 г. имъ были демонстрированы въ проекціи волны на поверхности жидкости по стробоскопическому методу. Здѣсь, какъ и во всѣхъ его демонстративныхъ сообщеніяхъ, ярко обнаруживается его изобрѣтательная способность, благодаря которой онъ часто, съ помощью остроумныхъ приспособленій, обставлялъ свои опыты такъ, что они дѣлались въ высшей степени наглядными и поучительными. Далѣе имъ былъ напечатанъ рядъ популярныхъ статей, какъ напримѣръ: Метеорологическій конгресъ въ Парижѣ 19—26 августа 1889 года (Метеор. Вѣст. 1891 г.), о практической метеорологіи (публичная лекція, Харьк. Губ. Вѣд. 1891 г.); основные принципы энергетики (Вѣстникъ Опытн. Физики и Элемент. Матем. №№ 124 и 125, 1894 г.); руководство для метеорологическихъ наблюденій (Харьк. календарь 1894); были предложены имъ и рѣшенія нѣкоторыхъ задачъ, наприм. задачи Аршаулова (Протоколы Харьк. Матем. Общ. 1884); элементарной задачи о маятникѣ (Вѣстн. Опытной Физики и Элемен. Матем. 1891 г.). Николай Дмитріевичъ принималъ, вообще, дѣятельное участіе въ дѣлахъ Харьков. Физико-Химич. Общ., какъ въ административныхъ, напр. относительно изданія трудовъ и протоколовъ Общества, такъ и въ научныхъ. Просматривая протоколы засѣданій, можно встрѣтить его имя или въ качествѣ докладчика, или какъ участника въ преніяхъ почти въ каждомъ засѣданіи. Въ послѣднемъ отношеніи особенно памятно членамъ Общества горячая полемика его съ проф. Шимковымъ по поводу элементарнаго доказательства закона параллелограмма силъ (Труды секціи 1890 г.).

Изъ всего сказаннаго видимъ, какъ многочисленны были работы Николая Дмитріевича во всѣхъ отдѣлахъ физики; всюду онъ внесъ свою лепту, и по этимъ работамъ видно, что онъ былъ не заурядным работникомъ, а талантливымъ ученымъ, обладающимъ наблюдательнымъ и изобрѣтательнымъ умомъ, способнымъ на самостоятельныя работы и открытія въ области любимой имъ науки—физики. Мнѣ нѣтъ надобности подробно останавливаться на значеніи успѣховъ этой науки для жизни человѣчества: оно слишкомъ очевидно. Достаточно указать хотя бы на

открытіе силы пара и электричества. Политическія событія, войны и пр. измѣняютъ границы государствъ, вызываютъ паденіе однихъ и появленіе на исторической аренѣ другихъ народовъ, но они мало вліяютъ на жизнь людей. Изобрѣтеніе паровыхъ машинъ, можно сказать, совершенно измѣнило жизнь человѣчества, во много разъ увеличивъ производительность человѣческаго труда; желѣзныя дороги и пароходы, облегчивъ торговыя и вообще взаимныя сношенія, связали всѣ народы крѣпкими узами общихъ интересовъ, и тѣмъ содѣйствовали развитію идеи общаго мира, можетъ быть болѣе, чѣмъ простая проповѣдь взаимной любви; скоропечатныя машины, удешевивъ книгу и увеличивъ во много разъ ихъ производство, дали возможность печатному слову и просвѣщенію проникнуть въ самые удаленные уголки; благодаря имъ, могла возникнуть и современная періодическая пресса, служащая такимъ могучимъ орудіемъ прогресса въ дѣлѣ улучшенія общественныхъ отношеній. Съ открытіемъ электричества телеграфъ и телефоны еще тѣснѣе связали всѣ народы общими интересами, такъ какъ то, что происходитъ въ одномъ мѣстѣ земного шара, дѣлается достояніемъ всего культурнаго человѣчества. Электричеству предстоитъ еще вновь преобразовать жизнь человѣчества, благодаря возможности передавать работу на далекія разстоянія; паровая машина, работа которой можетъ быть передаваема при помощи ремней только на близкія разстоянія, заставила людей концентрироваться въ городахъ, около фабрикъ и заводовъ, создала многочисленные центры умственной и промышленной жизни; электричество съ своей далекой передачей работы заставитъ людей отхлынуть обратно въ деревню, но уже людей культурныхъ, которые разнесутъ культурныя идеи и привычки, пріобрѣтенныя въ городахъ, и свѣтъ знанія въ самые отдаленные и глухіе уголки земного шара; не будетъ нужды рабочему люду скопляться для работы въ душныхъ и антигигіеническихъ фабрикахъ и заводахъ: станки будутъ размѣщаться въ отдѣльныхъ домикахъ среди полей и лѣсовъ, и рабочая семья, сообща, не раздѣляясь, будетъ производить свою работу. Вотъ то значеніе и та роль, какую имѣютъ и могутъ имѣть въ жизни человѣчества открытія въ области физики, наряду съ открытіями въ химіи и біологіи и, вообще, въ физико-математическихъ наукахъ, и нѣтъ сомнѣнія, что имена Менделѣева, Лобачевскаго, Чебышева, Мечникова и другихъ работниковъ на полѣ этихъ наукъ, къ числу которыхъ относится и проф. Пильчиковъ, такъ же, какъ имена Толстого, Тургенева, Достоевскаго и другихъ геніальныхъ работниковъ на полѣ литературы и искусства, болѣе чѣмъ многочисленная армія и усилія дипломатовъ могутъ содѣйствовать развитію славы и престижа русскаго народа. Эти работники не умираютъ: стоитъ только взять ихъ книги, ихъ работы, и они живутъ, они говорятъ! Къ сожалѣнію ихъ мало еще въ Россіи—этихъ работниковъ мысли, и потому тѣмъ болѣе нужно цѣнить такихъ людей, какъ Николай Дмитріевичъ.

Тяжела его потеря и какъ профессора и какъ общественнаго дѣятеля; Николай Дмитріевичъ былъ прекраснымъ лекторомъ, умѣвшимъ возбудить интересъ въ своихъ слушателяхъ, и искусснымъ экспериментаторомъ, умѣвшимъ иллюстрировать свои лекціи остроумными опытами. По словамъ близко знавшихъ его онъ былъ человѣкъ въ высшей степени отзывчивый на нужды людей и въ частности студентовъ, и то горячее участіе, которое выказали студенты Технологическаго Института—его ученики, при его погребеніи доказываетъ справедливость этого мнѣнія. „И тѣмъ болѣе скорбимъ мы, его ученики—студенты, говоритъ въ своей надгробной рѣчи студ.-техн. Гольдинъ (газета „Утро“ № 435), которымъ и въ аудиторіи, и дома такъ часто приходилось сталкиваться съ покойнымъ Николаемъ Дмитріевичемъ и испытывать лично на себѣ обаяніе его свѣтлаго ума и отзывчивой души. Умеръ другъ студентовъ! Умеръ человѣкъ—ученый, всегда горячо стоявшій за обновленіе высшей школы и всегда считавшій свободный университетъ единственнымъ залогомъ процвѣтанія науки и развитія самодѣятельности“.

Въ заключеніе позволю себѣ привести выдержку изъ мѣстной газеты „Южный Край“ (7 мая 1908 г.).

„Поразительное по своей исключительной обстановкѣ, самоубійство профессора Николая Дмитріевича Пильчикова взволновало весь городъ. Личность этого выдающагося ученаго и недюжиннаго человѣка была извѣстна очень хорошо въ интеллигентныхъ кругахъ Харькова и пользовалась глубокой симпатіей и уваженіемъ въ ученыхъ и общественныхъ кругахъ. Интересную фигуру покойнаго профессора,—человѣка нѣсколько оригинальнаго, всегда сосредоточеннаго, какъ бы поглощеннаго чѣмъ-то, но чрезвычайно корректнаго, съ манерами и выдержкой истиннаго европейца—джентельмэна, нельзя было забыть тому, кто хоть разъ его видѣлъ. Н. Д. Пильчиковъ былъ личностью яркой, своеобразной, производившей на всѣхъ глубокое впечатлѣніе....

И вотъ этотъ человѣкъ, ученый съ европейской извѣстностью, профессоръ, пользовавшійся обаяніемъ среди своихъ слушателей, имѣвшій огромный нравственный престижъ среди своихъ товарищей,—этотъ человѣкъ, въ расцвѣтѣ своихъ силъ, всего на 51-мъ году жизни, кончаетъ ее столь неожиданнымъ образомъ,—револьвернымъ выстрѣломъ въ сердце..

Гіацинтъ Морера.

(НЕКРОЛОГЪ).

Г. А. Маджи.

Гіацинтъ Морера, избранный Харьковскимъ Математическимъ Обществомъ въ засѣданіи 31 октября прошлаго года членомъ корреспондентомъ, скончался 27 января 1909 года, пораженный внезапно смертельной болѣзнью. Онъ умеръ черезъ восемь дней послѣ того, какъ прочелъ свою послѣднюю лекцію въ Туринскомъ Политехникумѣ.

Гіацинтъ Морера родился въ Новарѣ (Піемонтъ), гдѣ и учился до окончанія гимназіи. Затѣмъ онъ поступилъ въ Туринскій Университетъ, гдѣ получилъ, въ 1878 году, дипломъ инженера, а въ слѣдующемъ году степень доктора математики. Послѣ этого, для усовершенствованія въ своемъ образованіи, онъ посѣтилъ университеты въ Пизѣ и Павіи и заграничные университеты Берлинскій и Лейпцигскій. Въ 1886 году, одержавъ съ честью верхъ въ объявленномъ конкурсѣ, Морера былъ назначенъ ординарнымъ профессоромъ теоретической механики въ Генуэзскомъ университетѣ. Въ Генуѣ онъ оставался до 1900 года; а затѣмъ перешелъ, на ту же самую кафедру, въ Туринскій Университетъ, по приглашенію физико-математическаго факультета. Недавно онъ перешелъ на преподаваніе высшей механики, продолжая читать, по порученію, теоретическую механику какъ въ университетѣ, такъ и во вновь учрежденномъ Туринскомъ Политехникумѣ. Ранѣе въ Генуэзскомъ университетѣ Морера преподавалъ также теоретическую физику. Въ обоихъ университетахъ, въ Генуѣ и въ Туринѣ, Морера былъ деканомъ физико-математическаго факультета, а въ Генуэзскомъ Университетѣ былъ также ректоромъ. Академіи Наукъ Туринская и dei Lincei избрали его дѣйствительнымъ членомъ.

Во время пребыванія Морера студентомъ въ Туринскомъ Университетѣ, профессоромъ высшей механики былъ Сіаччи. Морера признавалъ его своимъ главнымъ учителемъ, такъ какъ Сіаччи сообщилъ его научному духу направленіе, сохраненное имъ до конца. Кромѣ Сіаччи, Морера слушалъ, на родинѣ и заграницей, лекціи такихъ извѣстныхъ

математиковъ, какъ Д'Овидіо и Генокки, въ Туринѣ, Бетти и Дини, въ Пизѣ, Казорати и Бельтрами въ Павіи, Кронекеръ въ Берлинѣ, Клейнъ и Майеръ въ Лейпцигѣ.

Ученая дѣятельность нашего усопшаго товарища выразилась въ разработкѣ большого числа разнообразныхъ вопросовъ, принадлежащихъ къ области теоретической механики и физики и чистаго анализа. Я привожу въ прибавленіи къ настоящей статьѣ списокъ сочиненій Морера.

Между ними слѣдуетъ прежде всего отмѣтить многочисленныя работы, касающіяся различныхъ вопросовъ изъ теоріи общихъ уравненій аналитической механики и связанныхъ съ ними вопросовъ анализа. Эти труды даютъ интересныя дополненія, усовершенствованія и объясненія новыхъ обстоятельствъ, относящихся къ выводу, интегрированію и преобразованію уравненій механики и уравненій съ частными производными перваго порядка и въ полныхъ дифференціалахъ. Указанныя изслѣдованія находятся въ тѣсной связи съ трудами Майера и Ли въ разсматриваемой области. Краткость настоящаго очерка не позволяетъ намъ подробнѣе останавливаться здѣсь на разсматриваемыхъ работахъ.

Выступивъ въ началѣ своей ученой дѣятельности съ рядомъ работъ, въ указанной области, Морера обнаружилъ въ нихъ свои математическія способности; возвращаясь позднѣе въ своихъ изслѣдованіяхъ въ ту же классическую область вопросовъ динамики и чистаго анализа, Морера обогащалъ ее новыми результатами, представлявшими плоды его зрѣлаго ума.

Въ области чистаго анализа слѣдуетъ отмѣтить теорему Морера, которую можно разсматривать какъ обратную знаменитой теоремѣ Коши, состоящую въ томъ, что, если $\int w dz$, гдѣ w и z комплексныя перемѣнныя, уничтожается на нѣкоторомъ контурѣ, тогда w представляетъ, въ извѣстной области, функцію z. Важность указаннаго предложенія Морера доказалъ въ рядѣ интересныхъ его приложеній въ различныхъ своихъ работахъ.

Немногія, но весьма изящныя работы Морера, по основаніямъ теоріи потенціальной функціи, заставляютъ причислить его къ числу первыхъ математиковъ, которые ввели современную строгость въ изложеніе указанныхъ вопросовъ. Формулы, извѣстныя подъ его именемъ, для выраженія производныхъ второго порядка потенціальной функціи отличаются общностью и простотой вывода.

Механику непрерывныхъ системъ Морера обогатилъ важными результатами. Здѣсь слѣдуетъ прежде всего отмѣтить теорему, получающуюся при помощи преобразованія къ криволинейнымъ координатамъ уравненій равновѣсія, которая устанавливаетъ эквивалентность между задачами о равновѣсіи непрерывнаго тѣла, подъ дѣйствіемъ данныхъ силъ, съ задачей о равновѣсіи прямоугольной системы трехъ гибкихъ, нерастяжимыхъ, свободныхъ нитей. Исходя изъ другой точки зрѣнія, Морера

рѣшилъ задачу интегрированія разсматриваемыхъ уравненій равновѣсія при помощи произвольныхъ функціи. Послѣднимъ результатомъ онъ воспользовался въ одной изъ своихъ послѣднихъ статей, относительно равновѣсія упругихъ тѣлъ и получилъ интересные выводы.

Среди позднѣйшихъ работъ Мореры особенно выдѣляются его изслѣдованія о притяженіи неоднороднаго эллипсоида и эллипсоидальныхъ слоевъ, о задачѣ Дирихле въ эллипсоидальной области и объ «эллипсоидальныхъ гармоническихъ функціяхъ». Морера вводитъ послѣднія функціи, распространяя прежній полученный имъ результатъ, относящійся къ изслѣдованіямъ Пиццетти о геоидѣ. Названныя функціи получаются при разсмотрѣніи потенціальной функціи нѣкоторыхъ неоднородныхъ эллипсоидовъ подобно тому, какъ, по способу Томсона и Тета, получаются сферическія гармоническія функціи, при разсмотрѣніи потенціальной функціи однородной сферы. Аналогично послѣднимъ, эллипсоидальныя функціи прилагаются къ изученію задачъ, касающихся эллипсоида вмѣсто сферы. Введенными функціями Морера предполагалъ также воспользоваться для рѣшенія задачи о равновѣсіи эллипсоидальнаго упругаго тѣла [1]).

Названія остальныхъ работъ Мореры находятся въ спискѣ, приложенномъ въ концѣ настоящаго краткаго очерка.

Повсюду въ твореніи Мореры важность предмета соединяется съ талантливостью и сжатостью изложенія, часто на весьма небольшомъ числѣ страницъ. Эти качества служили отличительной чертой его ученой дѣятельности.

Съ этими проявленіями научнаго творчества вполнѣ гармонировалъ весь духовный обликъ Мореры какъ человѣка. Онъ обладалъ краткой остроумной рѣчью; не обращая вниманія на внѣшнія черты, онъ особенно цѣнилъ нравственныя качества человѣка; и самъ отличался честностью, строгостью, проницательностью, какъ въ своей научной дѣятельности, такъ и въ общественныхъ и служебыхъ отношеніяхъ. Морера былъ притомъ истиннымъ другомъ для своихъ товарищей, а любимое имъ семейство могло гордиться тѣмъ, что раздѣляло съ наукою его время и заботы. Поэтому мы оплакиваемъ, съ кончиною Мореры, потерю не только выдающагося ученаго, но также и хорошаго человѣка.

---

[1]) Сомильяно, въ некрологѣ Мореры въ «Nuovo Cimento» (апрѣль), сообщаетъ, что послѣ Мореры осталась почти законченная рукопись, посвященная послѣднему вопросу.

Списокъ сочиненій Гіацинта Мореры.

Уравненія динамики и уравненія съ частными производными перваго порядка и въ полныхъ дифференціалахъ.

1. Sopra una formola di meccanica analitica (Rendiconti del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, 1882).

2. Teorema fondamentale nella teoria delle equazioni canoniche del moto (Ibid.).

3. Il metodo di Pfaff per l'integrazione delle equazioni a derivate parziali del 1° ordine (Ibid., 1883).

4. Sul problema di Pfaff (Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, 1883).

5. Ueber die Integration der vollständigen Differentiale (Mathematische Annalen, 1886).

6. Sulla integrazione delle equazioni a derivate parziali del 1° ordine (Giornale della Società di Lettura e di Conversazioni Scientifiche (Genova), 1887).

7. Sull' integrazione delle equazioni ai differenziali totali del 2° ordine (Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino, 1902).

8. Intorno ai sistemi di equazioni a derivate parziali del 1° ordine in involuzione (Rendic. del R. Ist. Lomb., 1903).

9. I sistemi canonici d'equazioni ai differenziali totali nella teoria dei gruppi di trasformazioni (Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, 1903).

10. Sulle equazioni dinamiche di Lagrange (Ibid.).

11. Sulle equazioni dinamiche di Hamilton (Ibid., 1904).

12. Sulla trasformazione delle equazioni dinamiche di Hamilton (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 1905).

Алгебраическій анализъ.

13. Sulle proprietà invariantive del sistema di una forma lineare e di una forma bilineare alternata (Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, 1883).

14. Un piccolo contributo alla teoria delle forme quadratiche (Rendiconti del R. Ist. Lomb., 1886).

Теорія аналитическихъ функцій.

15. Sopra una nuova costruzione geometrica del teorema dell' addizione degli integrali ellittici (Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, 1880).

16. Intorno alla risoluzione di certe equazioni modulari (Rendic. del R. Ist. Lomb., 1885).

17. Ueber einige Bildungsgesetze in der Theorie der Theilung und der Transformation elliptischer Functionen (Mathem. Annalen, 1885).

18. Un teorema fondamentale nella teoria delle funzioni di una variabile complessa (Rendic. del R. Ist. Lomb., 1886).

19. Sulla rappresentazione delle funzioni di una variabile complessa per mezzo di espressioni analitiche infinite (Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, 1886).

20. Intorno all' integrale di Cauchy (Rendic. del R. Ist. Lomb., 1889).

21. Sulla definizione di una funzione di variabile complessa (Ibid., 1901).

Основанія теоріи потенціальной функціи.

22. Sulle derivate seconde della funzione potenziale di spazio (Rendic. del R. Ist. Lomb., 1885).

23. Intorno alle derivate normali della funzione potenziale di superficie (Ibid.).

24. Sopra una formola di calcolo integrale (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 1897).

Равновѣсіе непрерывныхъ системъ.

25. Sull' equilibrio delle superficie flessibili e inestendibili (Rendic. della R. Acc. dei Lincei, 1883).

26. Sulle equazioni generali per l'equilibrio dei sistemi continui a tre dimensioni (Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, 1884).

27. Soluzione generale delle equazioni indefinite dell' equilibrio di un corpo continuo (Rendic. della R. Acc. dei Lincei, 1892).

28. Intorno all' equilibrio dei corpi elastici isotropi (Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, 1907).

Притяженіе эллипсоида и эллипсоидальныя гармоническія функціи.

29. Alcune considerazioni relative alla Nota del Prof. Pizzetti „Sull' espressione della gravità alla superficie del geoide supposto ellissoidico“ (Rendic. della R. Acc. dei Lincei, 1894).

30. Sull' attrazione dell' ellissoide eterogeneo (Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, 1904).

31. Sull' attrazione degli strati ellissoidali e sulle funzioni armoniche ellissoidali (Ibid., 1905).

32. Sull' attrazione degli ellissoidi e sulle funzioni armoniche ellissoidali di 2⁰ specie (Memorie della R. Acc. delle Scienze di Torino, 1905).

33. Alcune considerazioni sulle funzioni armoniche ellissoidali (Rendic. della R. Acc. dei Lincei, 1906).

34. Sulla funzione potenziale di un doppio strato ellissoidico (Ibid., 1908).

Вопросы изъ области теоретической механики и физики.

35. Sul moto di un punto attratto da due centri fissi colla legge di Newton (Giornale di Matematiche, 1880).

36. Sulla separazione delle variabili nelle equazioni del moto di un punto sopra una superficie (Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, 1881).

37. Sul problema della corda vibrante (Ibid., 1888).

38. Sui moti elicoidali dei fluidi (Rendic. dela R. Acc. dei Lincei, 1889).

39. Studii di termodinamica (Ibid., 1891).

40. Sui sistemi di forze che ammettono la funzione delle forze (Rendic del Circolo Matem. di Palermo, 1891).

41. Stabilita della configurazioni di equilibrio di un liquido in un tubo capillare di rotazione (Ibid., 1902).

42. Intorno alle oscillazioni elettriche (Nuovo Cimento, 1902).

43. Sull' espressione analitica del principio di Huyghens (Ibid., 1905).

44. Sulla teoria dell' ellissoido fluido in equilibrio di Jacobi—Lettera al prof. Volterra (Ibid., 1908).

Вопросы изъ области анализа.

45. Osservazione relativa al resto della serie di Taylor (Rivista di Matematica (Peano), 1892).

46. Alcune considerazioni relative all' equazione differenziale $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$ (Rendic. del Circolo Matem. di Palermo, 1893).

47. Dimostrazione di una formola di calcolo integrale (Rivista di Matem., 1896).

48. Sui polinomi di Legendre (Rendic. del Circolo Matem. di Palermo, 1897).

Прочее.

49. L'insegnamento delle Scienze Matematiche nelle Università Italiane. Discorso inaugurale per l'anno accademico 1888—89 nella Università di Genova.

50. Francesco Siacci—Commemorazione (Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, 1908).

Замѣтка о рѣшеніи двучленныхъ сравненій съ простымъ модулемъ по способу Коркина.

К. Поссе.

Въ посмертномъ мемуарѣ Коркина, напечатанномъ въ 1-мъ вып. XVII тома Математическаго Сборника, авторъ даетъ способъ рѣшенія двучленныхъ сравненій, безъ помощи таблицы индексовъ. Способъ этотъ, основанный на вполнѣ элементарныхъ соображеніяхъ, могъ-бы войти въ курсы теоріи чиселъ, читаемые въ университетахъ, и составить интересный отдѣлъ этихъ курсовъ.

Объёмистый мемуаръ, въ которомъ изложенъ этотъ способъ, содержитъ въ себѣ однако многое, не относящееся непосредственно къ рѣшенію двучленныхъ сравненій. Намъ кажется, что отдѣльное изложеніе этого способа, болѣе сжатое и упрощенное въ нѣкоторыхъ подробностяхъ, можетъ, до нѣкоторой степени, облегчить ознакомленіе съ его сущностью и способствовать введенію его въ предметъ преподаванія. Съ этой цѣлью и составлена настоящая замѣтка.

Способъ Коркина основанъ на разсмотрѣніи нѣкоторыхъ чиселъ, которымъ авторъ далъ названіе *характеровъ*. Въ первомъ параграфѣ мы даемъ опредѣленіе и указываемъ главныя свойства характеровъ, во второмъ—приложеніе ихъ къ рѣшенію двучленныхъ сравненій, въ третьемъ поясняемъ способъ рѣшенія примѣрами, пользуясь таблицею первообразныхъ корней и характеровъ, составленною Коркинымъ для всѣхъ простыхъ модулей, не превышающихъ 4000, и продолженною нами для всѣхъ простыхъ модулей, не превышающихъ 10000. (См. Математическій Сборникъ т. XVII, вып. 1 и 2), Послѣдній параграфъ заключаетъ въ себѣ нѣкоторыя замѣчанія о вычисленіи первообразныхъ корней и доказательство одной теоремы Коркина, связывающей вопросъ о разысканіи первообразныхъ корней съ рѣшеніемъ сравненій.

§ 1.

Положимъ, что p обозначаетъ данное простое число, q — какой нибудь простой дѣлитель $p-1$, и α — показатель его кратности, такъ что

$$p-1=q^{\alpha}\,.\,N,$$

гдѣ N не дѣлится на q.

Главными характерами или характерами перваго порядка и степени q для даннаго числа p, называются рѣшенія сравненія

$$x^q - 1 \equiv 0 \pmod{p}; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

число ихъ равно q, и обозначая ихъ черезъ

$$1,\ u_1,\ u_2, \ldots u_{q-1},$$

можемъ положить

$$u_i \equiv [u_1]^i \pmod{p}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

т. е. разсматривать нижній значекъ въ u_i, какъ показатель степени, въ которую надо возвысить u_1, чтобы получить число, сравнимое съ u_i по модулю p.

Замѣтимъ, что во всемъ послѣдующемъ, говоря о вычисленіи какого-нибудь цѣлаго числа A, мы будемъ подразумѣвать, что вычисляется не само число A, а абсолютно-наименьшій его вычетъ по модулю p, т. е. число, заключающееся въ ряду

$$0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm \frac{p-1}{2}$$

сравнимое съ A по модулю p. Для вычисленія главныхъ характеровъ мы можемъ положить

$$u_1 \equiv g^{\frac{p-1}{q}}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

гдѣ g — первообразный корень или, общнѣе, какой нибудь невычетъ степени q, простого числа p, и примѣнить затѣмъ формулу (2) для $i = 1, 2, \ldots (q-1)$. При $\alpha > 1$, кромѣ главныхъ характеровъ, существуютъ еще характеры 2-го, 3-го и т. д. порядковъ, до порядка α включительно, опредѣляемые слѣдующимъ образомъ. Характерами 2-го порядка, степени q, называются рѣшенія сравненія

$$\frac{x^{q^2} - 1}{x^q - 1} \equiv 0 \pmod{p} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Число ихъ равно $q(q-1)$; одинъ изъ нихъ, u_1', получимъ, положивъ

$$u_1' \equiv g^{\frac{p-1}{q^2}} \pmod{p}; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

гдѣ g имѣетъ тоже самое значеніе, какъ въ формулѣ (3); а всѣ характеры 2-го порядка получимъ, давая значку i въ формулѣ

$$u_i \equiv [u_1']^i \pmod{p} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

значенія 1, 2, 3, ... $q-1$ и умножая каждое изъ чиселъ

$$u_1', u_2', \ldots u_{q-1}'$$

на всѣ характеры перваго порядка.

Вообще, характерами порядка μ, $(1 < \mu \leqq \alpha)$, называются рѣшенія сравненія

$$\frac{x^{q^\mu}-1}{x^{q^{\mu-1}}-1} \equiv 0 \pmod{p} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

Число ихъ равно $q^{\mu-1}(q-1)$; одинъ изъ нихъ, $u_1^{(\mu-1)}$, получимъ, полагая

$$u_1^{(\mu-1)} \equiv g^{\frac{p-1}{q^\mu}} \pmod{p} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

гдѣ g имѣетъ тоже самое значеніе, какъ въ формулѣ (3); а всѣ характеры порядка μ найдемъ, давая значку i въ формулѣ

$$u_i^{(\mu-1)} \equiv [u_1^{(\mu-1)}]^i \pmod{p} \ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

значенія 1, 2, ... $q-1$ и умножая числа

$$u_1^{(\mu-1)}, u_2^{(\mu-1)}, \ldots u_{q-1}^{(\mu-1)}$$

на всѣ характеры 1-го, 2-го, ... $(\mu-1)$-го порядка.

Изъ формулъ (3), (5), (8) и т. д. вытекаютъ слѣдующія основныя формулы

$$u_i^q \equiv 1, [u_i']^q \equiv u_i, [u_i'']^q \equiv u_i', \ldots [u_i^{(\alpha-1)}]^q \equiv u_i^{(\alpha-2)} \pmod{p} \ldots\ldots (10)$$

$$(i = 1, 2, 3, \ldots q-1)$$

а отсюда и болѣе общая формула

$$[u_l^{(\lambda)} u_m^{(\mu)} \ldots u_n^{(\nu)}]^q \equiv u_l^{(\lambda-1)} u_m^{(\mu-1)} \ldots u_n^{(\nu-1)} \pmod{p} \ldots\ldots\ldots (11)$$

въ которой нижніе значки (показатели степеней) могутъ имѣть любое изъ значеній 1, 2, ... $q-1$, а верхніе служатъ указателями порядковъ характеровъ.

Эта формула выражаетъ основное для рѣшенія двучленныхъ сравненій правило: *Если какое нибудь число U представлено въ видѣ произведенія характеровъ различныхъ порядковъ:*

$$U \equiv u_l^{(\lambda-1)} u_m^{(\mu-1)} \ldots u_n^{(\nu-1)} \pmod{p.} \ldots\ldots\ldots (12)$$

то, для полученія числа Ω, удовлетворяющаго сравненію

$$\Omega^q \equiv U \pmod{p} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

стоитъ только увеличить на одну единицу всѣ верхніе значки въ выраженіи U, оставляя нижніе безъ измѣненія.

Къ этому можно добавить, что всякое другое рѣшеніе сравненія (13) будетъ равно найденному указаннымъ путемъ, умноженному на одно изъ рѣшеній сравненія

$$x^q \equiv 1 \pmod{p}$$

т. е. на одинъ изъ главныхъ характеровъ.

Замѣтимъ еще формулу

$$u_i^{(\mu)} u_{q-i}^{(\mu)} \equiv u_1^{(\mu-1)} \pmod{p} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

вытекающую изъ формулъ

$$u_i^{(\mu)} \equiv [u_1^{(\mu)}]^i, [u_1^{(\mu)}]^q \equiv u_1^{(\mu-1)} \pmod{p}.$$

Кубическіе характеры, при $q = 3$, мы будемъ обозначать буквами z съ различными значками; главные кубическіе характеры

$$1, z_1, z_2$$

будутъ рѣшеніями сравненія

$$x^3 - 1 \equiv 0 \pmod{p};$$

числа z_1 и z_2 — рѣшеніями сравненія

$$x^2 + x + 1 \equiv 0 \pmod{p},$$

такъ что

$$z_2 \equiv z_1^2 \equiv -z_1 - 1 \pmod{p} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (15)$$

Квадратичные характеры, при $q = 2$, мы будемъ обозначать буквами f, f', f''.....; главные квадратичные характеры суть 1 и —1, характеры 2-го порядка, $\pm f$, удовлетворяютъ сравненію

$$f^2 \equiv -1 \pmod{p}.$$

Если $$p - 1 = 2^{\alpha} 3^{\beta} q^{\gamma} r^{\delta} s^{\varepsilon},$$

(при $p < 10000$ больше трехъ различныхъ простыхъ множителей, отличныхъ отъ 2 и 3, въ разложеніе $p - 1$ не входитъ), и

$$3 < q < r < s,$$

то буквами u, v, w будутъ обозначены характеры степеней, соотвѣтственно, q, r, s. Въ таблицахъ помѣщено всегда только по одному характеру каждой степени и каждаго порядка,—

$$z,\ z',\ldots u,\ u',\ldots;\ v,\ v',\ldots$$

причемъ нижній значекъ 1 подразумѣвается; характеры

$$u_i,\ u'_i,\ldots v_i,\ v'_i,\ldots (i>1),$$

когда въ нихъ встрѣчается надобность, должны быть вычислены возвышеніемъ табличныхъ въ степень i; z_2 получается по табличному z по формулѣ (15).

§ 2.

1. Переходя къ рѣшенію двучленныхъ сравненій съ помощью характеровъ, мы можемъ ограничиться сравненіями

$$x^q \equiv a \pmod{p}, \qquad (16)$$

гдѣ q простой дѣлитель числа $p-1$, потому что, какъ извѣстно, къ этому случаю сводятся всѣ другіе.

Извѣстно, что сравненіе (16) имѣетъ рѣшенія тогда и только тогда, когда a вычетъ степени q простого числа p, т. е. когда

$$a^{\frac{p-1}{q}} \equiv 1 \pmod{p} \qquad (17)$$

Наконецъ извѣстно, что при выполненіи условія (17) сравненіе (16) имѣетъ q рѣшеній, получаемыхъ черезъ умноженіе одного изъ нихъ на всѣ рѣшенія сравненія

$$x^q \equiv 1 \pmod{p},$$

т. е. на всѣ главные характеры степени q. Остается показать, какъ найти одно рѣшеніе сравненія (16).

Полагая, какъ выше,

$$p-1 = q^\alpha N,$$

гдѣ N не дѣлится на q, положимъ, что

$$N = qN' + s, \text{ гдѣ } |s| < q.$$

Опредѣлимъ затѣмъ какія нибудь два числа τ и σ, цѣлыя и положительныя, удовлетворяющія уравненію

$$q\tau - s\sigma = 1; \qquad (18)$$

при $s = -1$, можно взять

$$\tau = 0,\ \sigma = 1,$$

а вообще выгодно за τ и σ принимать наименьшія числа, удовлетворяющія уравненію (18).

Положимъ далѣе, что нашли какимъ-нибудь образомъ число Ω, удовлетворяющее сравненію

$$\Omega^q \equiv a^N \pmod{p} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (19)$$

Тогда, опредѣливъ число φ, по сравненію

$$\varphi\Omega \equiv 1 \pmod{p} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (20)$$

мы найдемъ одно рѣшеніе x_1 сравненія (16), по формулѣ

$$x_1 \equiv a^{N'\sigma+\tau}\varphi^{\sigma} \pmod{p} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (21)$$

Въ самомъ дѣлѣ

$$x_1^q \equiv a^{(N'\sigma+\tau)q}\varphi^{q\sigma},$$

или замѣчая, что

$$q\tau = s\sigma + 1,$$

$$x_1^q \equiv a.[a^{N'q+s}\varphi^q]^{\sigma} \equiv a.[a^N\varphi^q]^{\sigma};$$

но

$$a^N\varphi^q \equiv [\Omega\varphi]^q \equiv 1 \pmod{p};$$

Слѣдовательно

$$x_1^q \equiv a, \pmod{p}$$

что и требовалось показать.

Итакъ, все дѣло сводится къ нахожденію числа Ω, удовлетворяющаго сравненію (19), а для этого и послужатъ характеры.

Вычисляемъ послѣдовательно числа

$$a^N,\ a^{qN},\ a^{q^2N},\ \ldots\ a^{q^{\alpha-1}N}; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (22)$$

Рано или поздно получимъ въ этомъ рядѣ число, сравнимое съ 1, потому что послѣднее изъ нихъ

$$a^{q^{\alpha-1}N} = a^{\frac{p-1}{q}},$$

по условію, сравнимо съ 1. Пусть первое изъ чиселъ ряда (22), сравнимое съ 1, есть

$$a^{q^{n-1}N},$$

такъ-что

$$a^{q^{n+1}N} \equiv 1,\ a^{q^nN} \text{не} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Положимъ, для сокращенія,

$$a^{q^n{}_N} = U,\ a^{q^{n-1}{}_N} = U',\ \ldots a^N = U^{(n)}.$$

Замѣчая, что

$$U^q = a^{q^{n+1}{}_N} \equiv 1 \pmod{p}$$

найдемъ, что U сравнимо съ однимъ изъ главныхъ характеровъ

$$u_1,\ u_2, \ldots u_{q-1},$$

и, такъ-какъ U число намъ извѣстное, то будемъ знать, съ какимъ именно изъ этихъ характеровъ оно сравнимо; положимъ, что

$$U \equiv u_k \pmod{p}.$$

Замѣчая, что

$$[U']^q \equiv U \equiv u_k \pmod{p},$$

на основаніи правила § 1, найдемъ, что

$$U' = a^{q^{n-1}{}_N} \equiv u_k'.\lambda \pmod{p} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (23)$$

гдѣ λ равно одному изъ главныхъ характеровъ

$$1,\ u_1,\ u_2, \ldots u_{q-1}$$

и можетъ быть найдено рѣшеніемъ сравненія (23) или другимъ путемъ, о которомъ скажемъ дальше.

Если $\lambda = 1$, то

$$U' \equiv u_k' \pmod{p},$$

а замѣчая, что

$$[U'']^q \equiv U' \equiv u_k' \pmod{p},$$

найдемъ

$$U'' = a^{q^{n-2}{}_N} \equiv u_k''.\mu \pmod{p},$$

гдѣ μ есть одно изъ чиселъ

$$1,\ u_1,\ u_2, \ldots u_{q-1},$$

такъ-что для U'' найдемъ

$$U'' \equiv u_k'' \text{ или } U'' \equiv u_k'' u_m.$$

Если $\lambda \equiv u_l$, то

$$U' \equiv u_k' u_l \pmod{p},$$

а

$$U'' \equiv u_k'' u_l' \rho \pmod{p},$$

гдѣ ν одинъ изъ главныхъ характеровъ, такъ-что

$$U'' \equiv u''_k u'_l \text{ или } U'' \equiv u''_k u'_l u_m \pmod{p}.$$

Такимъ путемъ мы выразимъ послѣдовательно всѣ числа ряда (22), до a^N включительно, въ видѣ произведенія характеровъ, а затѣмъ по формулѣ (11) § 1, получимъ и число Ω, а слѣдовательно и рѣшеніе даннаго сравненія. Можно замѣтить, что въ выраженіе a^N войдутъ характеры не выше n-го, и въ Ω не выше $(n+1)$-го порядка.

2. Для нахожденія чиселъ λ, μ, ν, ... и φ нѣтъ надобности рѣшать сравненія первой степени, которыми эти числа опредѣляются. Можно примѣнить другой пріемъ, основанный на формулѣ (14) § 1, сущность котораго состоитъ въ постепенномъ пониженіи порядка характеровъ, входящихъ въ коеффиціентъ при искомомъ числѣ, пока не приведемъ этотъ коеффиціентъ къ 1. Пояснимъ этотъ пріемъ на опредѣленіи μ изъ сравненія

$$U'' \equiv u''_k \mu \pmod{p}$$

Умножая обѣ части сравненія на u''_{q-k} и замѣчая, что

$$u''_k u''_{q-k} \equiv [u''_1]^q \equiv u'_1 \pmod{p},$$

получимъ

$$u''_{q-k} U'' \equiv u'_1 . \mu \pmod{p};$$

умножая обѣ части этого сравненія на u'_{q-1}, получимъ

$$u'_{q-1} u''_{q-k} U'' \equiv u_1 . \mu \pmod{p},$$

и наконецъ

$$u_{q-1} u'_{q-1} u''_{q-k} U'' \equiv \mu \pmod{p}.$$

3. Въ частномъ случаѣ, когда

$$a^N \equiv 1 \pmod{p},$$

что всегда имѣетъ мѣсто при $\alpha = 1$, потому, что тогда

$$a^{\frac{p-1}{q}} = a^N,$$

а можетъ имѣть мѣсто и при $\alpha > 1$, рѣшеніе вопроса упрощается. Тогда, очевидно, можно положить

$$\Omega \equiv 1 \text{ и } \varphi \equiv 1$$

и одно рѣшеніе сравненія (1) будетъ

$$x_1 \equiv a^{N'\sigma+\tau},$$

а остальныя $q-1$ рѣшеній будутъ

$$x_1 u_1,\ x_1 u_2, \ldots x_1 u_{q-1},$$

т. е. получаются съ помощью однихъ главныхъ характеровъ.

Для сравненій 2-й степени, т. е. при $q=2$, всегда можно положить

$$N = 2N' - 1,\ \tau = 0,\ \sigma = 1,$$

такъ что общая формула для рѣшеній сравненія 2-й степени

$$x^2 \equiv a \pmod{p}$$

будетъ

$$x \equiv \pm a^{\frac{N+1}{2}} \varphi \pmod{p}$$

При $\alpha = 1$, т. е. для чиселъ p вида

$$p = 4n + 3,\ p - 1 = 2N,$$

гдѣ N — нечетное, получается извѣстная формула

$$x \equiv \pm a^{\frac{p+1}{4}} \pmod{p}.$$

При $\alpha = 2$, $p - 1 = 4N$, гдѣ N — нечетное, т. е. для чиселъ p вида

$$p = 8n + 5,$$

имѣемъ

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv a^{2N} \equiv 1 \pmod{p}$$

откуда

$$1)\ a^N \equiv 1 \text{ или } 2)\ a^N \equiv -1.$$

Случай 1) уже разсмотрѣнъ, а во 2-мъ

$$\Omega \equiv f,\ \varphi \equiv -f$$

и

$$x \equiv \pm f a^{\frac{N+1}{2}} \pmod{p}$$

гдѣ f — квадратный характеръ 2-го порядка. Этотъ случай разобранъ, между прочимъ въ сочиненіи J. Serret. Cours d' Algèbre supérieure, 4-me éd. T. II, pag. 125, но болѣе сложнымъ путемъ.

При $\alpha > 2$, рѣшеніе сравненій 2-ой степени, если a^N не $\equiv 1 \pmod{p}$, требуетъ разсмотрѣнія характеровъ порядка выше 2-го. При этомъ полезно замѣтить слѣдующую формулу.

$$-f.f'f'' \ldots f^{(n-1)} f^{(n)^2} \equiv 1 \pmod{p} \ldots\ldots (24)$$

вытекающую непосредственно изъ основныхъ

$$f^{(n)^2} \equiv f^{(n-1)}, \ldots f'^2 \equiv f,\ f^2 \equiv -1,$$

и дающую прямо выраженіе числа φ, удовлетворяющаго сравненію

$$\varphi\Omega \equiv 1 \pmod{p}$$

по данному Ω. Напр. если

$$\Omega \equiv f''f^{IV}, \text{ то } \varphi \equiv -ff'f'''f^{IV}.$$

§ 3.

Примѣры *).

1. $$x^2 \equiv 2 \pmod{6337}.$$

$$p - 1 = 2^6.3^2.11 = 2^6.N,\ N = 99,\ \frac{N+1}{2} = 50$$

$$x \equiv \pm \varphi . 2^{50} \pmod{6337}.$$

Вычисленіе 2^{50} и $2^{99} = a^N$.

$$2^9 = 512,\ 2^{10} = 1024,\ 2^{19} \equiv -1683,\ 2^{20} \equiv 2971,$$

$$2^{40} \equiv -600,\ 2^{50} \equiv 289,\ 2^{80} \equiv -1209,\ 2^{99} \equiv a^N \equiv 570$$

Таблица характеровъ даетъ

$$f^{IV} \equiv -2521,\ f''' \equiv -570,\ f'' \equiv 1713,\ f' \equiv 338,\ f \equiv 178.$$

Поэтому

$$a^N \equiv -f''',\ \Omega \equiv ff^{IV}, \text{ откуда}$$

$$\varphi \equiv -f^{IV}f'''f''f' \equiv 2926,$$

$$x \equiv \pm 2926.289 \equiv \pm 2793.$$

*) Въ приложеніяхъ къ частнымъ примѣрамъ полезно въ каждомъ частномъ случаѣ предварительно выписать табличку чиселъ p, $2p$, $3p$,...$9p$, гдѣ p данный модуль, которая и послужитъ для дѣленія на p или, точнѣе, для вычисленія абсолютно—наименьшихъ вычетовъ по модулю p. Что касается умноженій, которыя надо выполнять надъ этими вычетами, то для сокращенія этихъ выкладокъ можно съ успѣхомъ пользоваться таблицами умноженія многозначныхъ чиселъ, напр. Neue Rechentafeln D-r. Peters, (Berlin, bei Reimer, 1909).

2. $$x^2 \equiv 3 \pmod{8941}$$

$$p - 1 = 2^2 3 . 5 . 149 = 2^2 N, \quad (p = 8n + 5)$$

$$N = 2235, \quad \frac{N+1}{2} = 1118, \quad x \equiv \pm \varphi . 3^{1118}.$$

Вычисленіе 3^{1118} и $a^N = 3^{2235}$.

$$3^9 \equiv 1801, \quad 3^{18} \equiv -1982, \quad 3^{36} \equiv 3225,$$

$$3^{37} \equiv 734, \quad 3^{74} \equiv 2296, \quad 3^{148} \equiv -3574,$$

$$3^{149} \equiv -1781 = \omega, \quad 1117 = 149 . 7 + 74,$$

$$3^{1117} \equiv \omega^7 . 3^{74}; \quad \omega^2 \equiv -2094, \quad \omega^3 \equiv 1017,$$

$$\omega^6 \equiv -2867, \quad \omega^7 \equiv 816, \quad 3^{1117} \equiv -4074.$$

$$3^{1118} \equiv -3281, \quad 3^{2234} \equiv 4074^2 \equiv 2980,$$

$$a^N \equiv 3^{2235} \equiv 8940 \equiv -1 \pmod{8941}$$

Отсюда

$$\Omega \equiv f, \quad \varphi \equiv -f,$$

по таблицѣ

$$f \equiv -3080,$$

и потому

$$x \equiv \pm 3281 . 3080 \equiv \pm 2150.$$

---

3. $$x^2 \equiv 5 \pmod{9941}.$$

$$p - 1 = 2^2 2485, \quad N = 2485, \quad \frac{N+1}{2} \equiv 1243$$

Вычисленіе дастъ

$$5^{1243} \equiv 2351, \quad a^N \equiv 5^{2485} \equiv 1, \quad \varphi \equiv 1, \quad x \equiv \pm 2351.$$

---

4. $$x^3 \equiv 11 \pmod{8461}.$$

$$p - 1 = 3^2 940, \quad N = 940 = 3 . 313 + 1,$$

$$N' = 313, \quad s = 1, \quad q = 3;$$

$$3\tau - \sigma = 1, \quad \tau = 1, \quad \sigma = 2.$$

$$x_1 \equiv a^{N'\sigma + \tau} \varphi^2 \equiv 11^{627} \varphi^2 \pmod{8461}.$$

Вычисленіе 11^{627} и $a^N = 11^{940}$ даетъ

$$11^{627} \equiv 2908 \text{ и } a^N \equiv 1,\ \varphi = 1,$$

$$x_1 \equiv 2908.$$

Таблица характеровъ даетъ

$$z_1 \equiv -1777,\ z_2 \equiv 1776;$$

три рѣшенія будутъ

$$x_1 \equiv 2908,\ x_1 z_1 \equiv 2155,\ x_1 z_2 \equiv 3398.$$

---

5. $$x^3 \equiv 3 \pmod{6967}$$

$$p - 1 = 3^4 \cdot 86,\ N = 86 = 3 \cdot 29 - 1,$$

$$\tau = 0,\ \sigma = 1,\ x_1 \equiv 3^{29}\varphi,$$

$$\Omega^3 \equiv a^N \equiv 3^{86},\ \varphi\Omega \equiv 1 \pmod{p}$$

$$3^{29} \equiv 2213,\ a^N = 3^{86} \equiv 1810,$$

$$a^{3N} \equiv 1894,\ a^{3^2N} \equiv -383,\ a^{3^3N} \equiv 1.$$

Таблица характеровъ даетъ:

$$z_1''' \equiv -1559,\ z_1'' \equiv 1510,\ z_1' \equiv -1060,$$

$$z_1 \equiv -383,\ z_2 \equiv 382.$$

Слѣдовательно

$$a^{3^2N} \equiv z_1,$$

отсюда

$$1894 \equiv a^{3N} \equiv z_1'\lambda, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (25)$$

гдѣ

$$\lambda^3 \equiv 1.$$

По (25) находимъ

$$1894 z_2' \equiv z_1 . \lambda,\ 1894 z_2' . z_2 \equiv \lambda;$$

$$z_2' \equiv 1060^2 \equiv 1913,\ \lambda \equiv 1894 . 1913 . 282 \equiv -383 \equiv z_1.$$

Поэтому

$$a^{3N} \equiv z_1' . z_1$$

и

$$a^N \equiv z_1'' z_1' . \mu, \text{ гдѣ } \mu^3 \equiv 1.$$

Замѣчая, что

$$z_1'' z_1' \equiv 1810 \equiv a^N,$$

находимъ

$$\mu = 1,$$

и

$$a^N \equiv z''_1 z'_1.$$

Отсюда

$$\Omega \equiv z'''_1 z''_1,$$

и

$$z'''_1 z''_1 \varphi \equiv 1;\ z''_2 \varphi \equiv z'''_2,$$

$$z'''_1 z''_1 \varphi \equiv 1;\ z''_2 \varphi \equiv z'''_2,$$

$$z'_1 \varphi \equiv z'''_2 . z''_1$$

и наконецъ

$$\varphi \equiv z'''_2 z''_1 z'_2 . z_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (26)$$

$$z'''_2 \equiv 1559^2 \equiv -1002,$$

$$\varphi \equiv -1002 . 1510 . 1913 . 382 \equiv 2479.$$

Рѣшенія:

$$x_1 \equiv 2479 . 2213 \equiv 2998.$$

$$x_2 \equiv z_1 x_1 \equiv 2189,\ x_3 \equiv x_1 z_2 \equiv 2648.$$

6.

$$x^7 \equiv 2 \pmod{6959}.$$

$$p - 1 = 7^2 142,\ N \equiv 142 \equiv 7 . 20 + 2,$$

$$7\tau - 2\sigma = 1,\ \tau = 1,\ \sigma = 3.$$

$$x_1 \equiv 2^{61} . \varphi^3 \pmod{p}.$$

$$2^{61} \equiv -1469,\ 2^{142} \equiv a^N \equiv -2158.$$

Таблица характеровъ даетъ

$$u_1 \equiv -2158,\ u'_1 \equiv -3475;$$

Слѣдовательно

$$a^N \equiv u_1,\ \Omega \equiv u'_1 \equiv -3475;$$

$$-3475\varphi \equiv 1 \pmod{6959},$$

откуда

$$\varphi \equiv -773.$$

(Это число можно было вычислить и по формулѣ

$$\varphi \equiv u'_6 u_6,$$

вытекающей изъ выраженія

$$\Omega \equiv u_1').$$

$$\varphi^2 \equiv -945,\ \varphi^3 \equiv -210,$$

и

$$x_1 \equiv 1469\ 210 \equiv 2294.$$

Остальныя шесть рѣшеній найдемъ умножая x_1 на главные характеры:

$$u_1 \equiv -2158,\ u_2 \equiv u_1^2 \equiv 1393,$$

$$u_3 \equiv 194,\ u_4 \equiv -1112,\ u_5 \equiv -1159,\ u_6 \equiv 2841.$$

---

7. $$x^{19} \equiv 10 \pmod{8779}$$

$$p - 1 = 19N,\ N \equiv 462 \equiv 19.24 + 6,$$

$$19\tau - 6\sigma = 1,\ \tau = 1,\ \sigma = 3,$$

$$a^N = 10^{462} \equiv 1,\ \varphi \equiv 1,$$

$$x_1 \equiv 10^{73}.$$

Въ этомъ примѣрѣ вычисленіе упрощается, потому что получается

$$10^{11} \equiv -1,\ 10^{22} \equiv 1,\ 10^{22 \cdot 21} \equiv 10^{462} \equiv 1,$$

$$10^{73} \equiv 10^9 \equiv 1668,$$

такъ что

$$x_1 \equiv 1668,$$

а остальныя найдемъ умножая x_1 на главные характеры, изъ которыхъ одинъ $w_1 \equiv -104$ дается таблицею.

---

8. $$x^3 \equiv 73 \pmod{4483}$$

Рѣшенія:

$$x_1 \equiv 1234,\ x_2 \equiv 33,\ x_3 \equiv -1267.$$

---

9. $$x^5 \equiv 229 \pmod{4751}$$

Рѣшенія:

$$x_1 \equiv 10,\ x_2 \equiv 525,\ x_3 \equiv 1432,\ x_4 \equiv 836,\ x_5 \equiv -1331.$$

---

10. $x^3 \equiv 6 \pmod{4861}$

Рѣшенія:

$$x_1 \equiv -2056,\ x_2 \equiv 1685,\ x_3 \equiv 371.$$

---

11. $x^{13} \equiv 2 \pmod{8581}$.

Рѣшенія:

$$x_1 \equiv 2252;$$

остальныя 12 рѣшеній получаются умноженіемъ x_1 на w, $w^2, \ldots w^{12}$, гдѣ $w \equiv 1046$ (по таблицѣ).

§ 4.

О вычисленіи первообразныхъ корней простого числа.

1. Наилучшій въ практическомъ отношеніи способъ розысканія первообразнаго корня даннаго простого числа p, при большой величинѣ p, состоитъ въ испытаніи послѣдовательныхъ квадратичныхъ невычетовъ этого числа. Испытаніе это заключается въ вычисленіи абсолютно-наименьшихъ вычетовъ чиселъ

$$A = a^{\frac{p-1}{2q}},\ B = a^{\frac{p-1}{2r}} \ldots C = a^{\frac{p-1}{2s}}$$

гдѣ $q, r, \ldots s$ обозначаютъ простыхъ дѣлителей числа $p-1$, а a — испытываемый квадратичный невычетъ. Если ни одно изъ чиселъ $A, B, \ldots C$ не сравнимо съ (-1) по mod. p, то ни одно изъ чиселъ

$$a^{\frac{p-1}{2}},\ a^{\frac{p-1}{q}},\ a^{\frac{p-1}{r}}, \ldots a^{\frac{p-1}{s}}$$

не сравнимо съ 1, и a — первообразный корень. Если 2 квадратичный невычетъ числа p, и испытаніе, при $a = 2$, даетъ отрицательный результатъ, то надо перейти къ испытанію $a = 3$ и т. д.

Для чиселъ вида $4n+3$ можно испытывать и квадратичные вычеты, потому что, если для нѣкотораго числа a ни одно изъ чиселъ $A, B, \ldots C$ не сравнимо ни съ 1, ни съ -1, а

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p},$$

то $(-a)^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p}$, такъ какъ для чиселъ p вида $4n+3$, $\frac{p-1}{2}$ — нечетное, и $(-a)$ будетъ первообразнымъ корнемъ. Такимъ путемъ мы всегда найдемъ наименьшій по абсолютной величинѣ первообразный корень числа p; этимъ путемъ мы и вычисляли первообразные корни для всѣхъ простыхъ чиселъ p, лежащихъ между 5000 и 10000.

Наибольшее значеніе абсолютно-наименьшаго изъ первообразныхъ корней получилось для числа $p = 5881$, а именно $g = 31$.

Квадратичными невычетами (не считая, конечно, точныхъ кубовъ 8 и 27), меньшими 31, оказались числа 11, 13, 19, 22 и 26, которые и надо было испытать, причемъ получилось, что

11 и 13 принадлежитъ къ показателю $\frac{p-1}{3}$,

19 и 26 „ „ „ $\frac{p-1}{5}$,

22 „ „ „ $\frac{p-1}{7}$.

Число испытаній, считая и $a = 31$, здѣсь равно 7, и было наибольшимъ въ предѣлахъ $p < 10000$.

Въ большинствѣ-же случаевъ наименьшій квадратичный невычетъ числа p оказывается и первообразнымъ его корнемъ.

Указаннымъ путемъ можно разыскивать первообразные корни числъ p, превышающихъ предѣлъ нашихъ таблицъ, но мы не имѣемъ никакихъ данныхъ для того, чтобы установить какой нибудь высшій предѣлъ для абсолютно наименьшаго первообразнаго корня числа p, не считая, конечно, предѣла $\frac{p-1}{2}$, служащаго предѣломъ всѣхъ вообще числъ, входящихъ въ вычисленіе, при данномъ модулѣ p.

2. Въ теоретическомъ отношеніи нѣкоторый интересъ представляетъ слѣдующее замѣчаніе. Въ началѣ нашей замѣтки было указано, что при вычисленіи характеровъ степени q, за основаніе g можно взять любой невычетъ степени q; съ измѣненіемъ основанія g измѣняется только порядокъ, въ которомъ являются характеры, совокупность-же всѣхъ характеровъ остается безъ измѣненія; слѣдовательно, характеры могутъ быть вычислены независимо отъ того, извѣстенъ или неизвѣстенъ первообразный корень даннаго числа p.

Найдя характеры высшаго порядка степеней, соотвѣтствующихъ всѣмъ простымъ дѣлителямъ числа $p-1$, мы тотчасъ найдемъ и первообразный корень этого числа. Въ самомъ дѣлѣ, положимъ, что

$$p - 1 = 2^{\alpha} q^{\beta} r^{\gamma} \ldots s^{\delta}.$$

По самому опредѣленію характеровъ выходитъ, что квадратичный характеръ наивысшаго порядка $f^{(\alpha-2)}$, или -1, при $\alpha = 1$, есть число, принадлежащее показателю 2^{α}, характеръ наивысшаго порядка степени q — число, принадлежащее показателю q^{β} и т.

Такъ какъ числа

$$2^{\alpha},\ q^{\beta},\ r^{\gamma},\ \ldots\ s^{\delta}$$

—взаимно-простыя, то произведеніе характеровъ наивысшаго порядка, соотвѣтствующихъ всѣмъ простымъ дѣлителямъ числа $p-1$, принадлежитъ къ показателю

$$2^{\alpha}q^{\beta}r^{\gamma}\ldots s^{\delta}=p-1,$$

т. е. будетъ первообразнымъ корнемъ числа p.

3. Въ теоретическомъ отношеніи заслуживаетъ вниманія нижеслѣдующая теорема Коркина, высказанная имъ въ его посмертномъ мемуарѣ и устанавливающая связь между рѣшеніемъ двучленныхъ сравненій и разысканіемъ первообразныхъ корней.

Теорема. *Если въ сравненіи*

$$x^{\delta}\equiv a_i \pmod{p},$$

гдѣ p простое число, δ — дѣлитель числа $p-1$, простой или сложный, число a_i принадлежитъ къ показателю $\frac{p-1}{\delta}$, (или, по терминологіи Коркина, къ группѣ (δ)), то въ числѣ рѣшеній этого сравненія будетъ ровно λ первообразныхъ корней числа p, гдѣ $\lambda=\frac{\varphi(p-1)}{\varphi(\frac{p-1}{\delta})}$,

и $\varphi(N)$ обозначаетъ число чиселъ, меньшихъ N и простыхъ съ нимъ.

Доказательство. Замѣчая, что всякій первообразный корень числа p, по возвышеніи въ степень δ, даетъ число, принадлежащее къ показателю $\frac{p-1}{\delta}$, мы видимъ, что теорема будетъ доказана, если покажемъ, что, каково-бы ни было данное число a_i, принадлежащее къ показателю $\frac{p-1}{\delta}$, всегда будутъ существовать λ первообразныхъ корней, которые, по возвышеніи ихъ въ степень δ, даютъ числа, сравнимыя съ a_i. Чтобы это показать, замѣтимъ прежде всего, что

1) если всѣ простые дѣлители числа $p-1$ будутъ также дѣлителями числа $\frac{p-1}{\delta}$, то $\lambda=\delta$,

а 2) если простыя числа $a, b, \ldots l$, будучи дѣлителями $p-1$, не дѣлятъ $\frac{p-1}{\delta}$, то

$$\lambda=\delta.\frac{a-1}{a}.\frac{b-1}{b}\ldots\frac{l-1}{l}.$$

Это прямо слѣдуетъ изъ извѣстнаго выраженія

$$\varphi(N)=N.\frac{a-1}{a}.\frac{b-1}{b}\ldots\frac{l-1}{l}.\frac{q-1}{q}\ldots\frac{r-1}{r},$$

гдѣ $a, b, \ldots l, q, \ldots r$ обозначаютъ всѣхъ простыхъ дѣлителей числа N. Замѣтивъ это, обозначимъ черезъ

$$k_1, k_2, \ldots k_\nu, \text{ гдѣ}$$

$$\nu = \varphi\left(\frac{p-1}{\delta}\right)$$

числа простыя съ $\frac{p-1}{\delta}$ и меньшія $\frac{p-1}{\delta}$, и разсмотримъ ариѳметическую прогрессію

$$k_i,\ k_i + \frac{p-1}{\delta},\ k_i + 2\frac{p-1}{\delta}, \ldots k_i + (\delta-1)\frac{p-1}{\delta} \ldots\ldots\ldots (A)$$

гдѣ i обозначаетъ любое изъ чиселъ $1, 2, \ldots \nu$. Всѣ члены этой прогрессіи числа простыя съ $\frac{p-1}{\delta}$ и всѣ меньше $(p-1)$.

Сосчитаемъ, сколько между ними чиселъ, простыхъ съ $(p-1)$.

Если 1) всѣ простые дѣлители $p-1$ будутъ также дѣлителями $\frac{p-1}{\delta}$, то очевидно, всѣ члены прогрессіи, будучи простыми относительно $\frac{p-1}{\delta}$, будутъ простыми и относительно $p-1$, и число ихъ равно δ.

Если 2) простые дѣлители $a, b, \ldots l$ число $p-1$, не будутъ дѣлителями $\frac{p-1}{\delta}$, причемъ, конечно, всѣ они будутъ дѣлителями числа δ, то простыми относительно $p-1$ будутъ тѣ члены прогрессіи, которые не дѣлятся ни на одно изъ чиселъ $a, b, \ldots l$. По извѣстному свойству ариѳметической прогрессіи, разность которой не дѣлится ни на одно изъ простыхъ чиселъ $a, b, \ldots l$, а число всѣхъ членовъ прогрессіи δ—кратное отъ $a, b \ldots l$, мы заключаемъ, что въ прогрессіи (A) число чиселъ простыхъ съ $p-1$ будетъ

$$\delta \cdot \frac{a-1}{a} \cdot \frac{b-1}{b} \cdots \frac{l-1}{l}.$$

Сопоставляя это со сказаннымъ выше о числѣ λ, мы видимъ, что число членовъ прогрессіи (A), простыхъ съ $p-1$, всегда равно λ.

Обозначимъ эти числа черезъ

$$m_1, m_2, \ldots m_\lambda,$$

причемъ общій видъ этихъ чиселъ будетъ

$$m_j = k_i + \mu_j \frac{p-1}{\delta},\ j = 1, 2, \ldots \lambda,\ \mu_j < \delta.$$

Обозначая черезъ g любой первообразный корень числа p, разсмотримъ рядъ

$$g^{m_1},\ g^{m_2},\ldots g^{m_\lambda}.$$

Всѣ числа этого ряда будутъ также первообразными корнями числа p, несравнимы между собой, и по возвышеніи въ степень δ даютъ числа, сравнимыя съ однимъ и тѣмъ-же числомъ

$$a_i \equiv g^{k_i\delta},$$

принадлежащимъ къ показателю (δ). Замѣнивъ въ прогрессіи (A) число k_i другимъ k_j изъ того-же ряда чиселъ

$$k_1,\ k_2,\ldots k_\nu,$$

мы такимъ же образомъ убѣдимся въ существованіи λ первообразныхъ корней, которые по возвышеніи ихъ въ степень δ дадутъ числа, сравнимыя съ другимъ числомъ

$$a_j \equiv g^{k_j\delta},$$

принадлежащимъ показателю $\frac{p-1}{\delta}$ и не сравнимому съ a_i, потому-что при

$$a_i \equiv a_j$$

получили-бы

$$g^{(k_i-k_j)\delta} \equiv 1 \pmod{p},$$

гдѣ $|k_i - k_j| < \frac{p-1}{\delta}$, что невозможно. Число чиселъ, принадлежащихъ показателю $\frac{p-1}{\delta}$ равно $\nu = \varphi\left(\frac{p-1}{\delta}\right)$ и каждое изъ сравненій

$$x^\delta \equiv a_i \pmod{p},\ i = 1,\ 2,\ldots\nu.$$

имѣетъ λ первообразныхъ корней въ числѣ своихъ рѣшеній. Теорема доказана.

Въ частномъ случаѣ, когда $\delta = q$ — простому дѣлителю число $p-1$,

$$\lambda = \frac{\varphi(p-1)}{\varphi(\frac{p-1}{q})} = q \text{ или } q-1$$

а именно $\lambda = q$, когда $p - 1 = q^\alpha N$, гдѣ N не дѣлится на q и $\alpha > 1$, и $\lambda = q-1$, при $\alpha = 1$.

Поэтому, при $\alpha > 1$, *всѣ* рѣшенія сравненія

$$x^q \equiv a \pmod{p},$$

гдѣ a — число, принадлежащее показателю $\frac{p-1}{q}$, будутъ первообразными корнями числа p, а при $\alpha = 1$, *всѣ*, кромѣ одного, которое будетъ вычетомъ степени q. Въ самомъ дѣлѣ, при $\alpha = 1$, $a^N \equiv 1$, $\varphi \equiv 1$ и $x_1 \equiv a^{N'\sigma+\tau}$ будетъ вычетомъ степени q, потому—что

$$x_1^{\frac{p-1}{q}} \equiv x_1^N \equiv a^{(N'\sigma+\tau)N} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Остальныя $q-1$ рѣшеній

$$x_1 u_1,\ x_1 u_2, \ldots x_1 u_{q-1},$$

гдѣ $u_1, u_2, \ldots u_{q-1}$ главные характеры, будутъ первообразными корнями.

4. Въ заключеніе замѣтимъ еще одну теорему, которая можетъ иногда служить для болѣе быстраго разысканія первообразнаго корня, чѣмъ пріемъ, изложенный въ началѣ этого параграфа.

Теорема. *Если число a принадлежитъ къ показателю m, а число b къ показателю n, по простому модулю p, и въ разложеніяхъ m и n на простые множители нѣтъ общихъ простыхъ множителей съ одинаковыми показателями степеней, то произведеніе a b принадлежитъ къ показателю N, гдѣ N наименьшее кратное чиселъ m и n.*

Примѣчаніе. Въ случаѣ, когда $N = p-1$, число ab будетъ первообразнымъ корнемъ числа p.

Доказательство этой теоремы столь просто, что мы позволимъ себѣ на немъ не останавливаться и ограничимся однимъ примѣромъ.

При $p = 109$, $p-1 = 2^2 3^3$, 2 принадлежитъ къ показателю $2^2 3^2$, 3 къ показателю 3^3, число $6 = 2.3$ — принадлежитъ къ показателю $N = 2^2 3^3 = p-1$, 6 — первообразный корень.

24.XI.09.

Масса электрона по электромагнитной теоріи проводниковъ.

Извѣстно, что *электромагнитныя* свойства какой-нибудь средины характеризуются ея діэлектрической постоянной, K, коэффиціентомъ электропроводности, C и коэффиціентомъ магнитной проницаемости, μ; съ другой стороны *оптическія* свойства той-же средины могутъ характеризоваться ея показателемъ преломленія, n и коэффиціентомъ поглощенія, $\varkappa$. Между этими величинами согласно теоріи Максвелла, существуютъ нѣкоторыя зависимости, а именно:

$$K\mu = n^2\ (1 - \varkappa^2)$$

и

$$C\tau = n^2\varkappa$$

гдѣ τ періодъ измѣненія того кинетическаго состоянія среды (ея эфира), которое воспринимается нами, какъ электромагнитное (оптическое) явленіе. Но эти соотношенія не представляютъ [1]) фактовъ дѣйствительности и замѣняются въ настоящее время иными, болѣе сложными.

Въ эти новыя соотношенія входятъ сверхъ перечисленныхъ постоянныхъ, (которыя вообще суть функціи періода τ) еще *двѣ* другихъ, которыя мы обозначили въ нашей „Электромагнитной теоріи“ буквами γ и η и которыя характеризуютъ средину со стороны вліянія самой матеріи на кинетическое состояніе эфира. Необходимость введенія новыхъ физическихъ постоянныхъ, характеризующихъ электромагнитныя свойства среды, признавалась и признается всѣми изслѣдователями нашего вопроса, такъ Гельмгольцъ ввелъ діэлектрическую постоянную частицъ разсматриваемой средины; моя теорія вводитъ, какъ уже упомянуто, двѣ постоянныя; такъ дѣлаетъ Г. А. Лоренцъ, а также А. Шустеръ [2]) въ 1904 г.

Эти двѣ постоянныя вводятся въ моей теоріи: *одна* явленіями дисперсіи, а *другая* явленіями поляризаціи (оптической), но оба рода явленій оказываются зависимыми другъ отъ друга. Связь между K, μ и C

---

[1]) См. „Электромагнитная теорія проводниковъ“ автора, стр. 10—11. 1899 г.

[2]) См. *A. Schuster* Einführung in die theoretische Optik, S. 292. или Phil. Mag. (6) p. 238 (1901).

съ одной и съ n и $\varkappa$ съ другой для даннаго періода въ моей теоріи выражаются однимъ соотношеніемъ, которое я называю *дисперсіоннымъ*; оно комплекснаго вида и содержитъ въ себѣ, слѣдовательно, два соотношенія между упомянутыми величинами и есть слѣдующее:

$$K\mu - \frac{1+\gamma u}{1+u} D\mu\sqrt{-1} = \frac{1-u}{1+u} V^2 e^{2v\sqrt{-1}} \qquad (1)$$

въ немъ положено:

$$D = 2C\tau, \quad V^2 e^{2v\sqrt{-1}} = n^2(1-\varkappa\sqrt{-1})^2,$$

и n съ $\varkappa$ относятся къ случаю нормальнаго паденія луча на границу средины [1]). О количествѣ u скажемъ ниже. Другое постоянное вводится соотношеніемъ, которое я называю *поляризаціоннымъ* [2]), и оно имѣетъ видъ:

$$\frac{1-u}{1-\eta u} = -\frac{e^{-2v\sqrt{-1}}}{V^2} \qquad (2)$$

Это соотношеніе даетъ мѣсто теоріи поляризаціи на металлахъ, данной еще Коши.

Наконецъ величина, комплексная, u есть отношеніе между перемѣщеніями электрона (іона) и частицы эфира. Оно выражается въ зависимости отъ массы электрона, коэффиціента тренія и періода въ слѣдующей формѣ: [3])

$$\frac{1}{u} = \frac{\eta+1}{2} - mp^2 + kp\sqrt{-1} \qquad (3)$$

причемъ:

$$m = \frac{K}{8\pi} m_1, \quad k = \frac{K}{8\pi} k_1, \quad p = \frac{2\pi}{\tau},$$

гдѣ m_1 масса электрона, а k_1 коэффиціентъ тренія средины.

Въ приведенныхъ уравненіяхъ (1)—(3) данными опыта для такихъ проводниковъ, какъ металлы, должны считаться количества: C, n и $\varkappa$ для даннаго періода τ или данной длины волны λ. Если изъ системы (1)—(3) исключить u, что получимъ 4 уравненія съ 5-ью неизвѣстными: K, η, γ, m_1 и k_1 (μ полагаемъ равнымъ 1-цѣ), а слѣдовательно можемъ выразить *четыре* величины при помощи *одной, пятой.* За эту послѣднюю мы примемъ *массу электрона* m_1.

---

[1]) Электромагнитная теорія проводниковъ, стр. 44 и 62.

[2]) Тамъ-же, стр. 57 и 62.

[3]) Тамъ-же, стр. 32, 37 и 43. Это уравненіе имѣетъ мѣсто только при одномъ родѣ іоновъ.

Введемъ для удобства вычисленій слѣдующія обозначенія:

$$\alpha = \frac{m_1}{4\pi};\ \beta = \frac{k_1}{4\pi};\ A = V^2 cos 2v;\ B = V^2 sin 2v,$$

гдѣ, слѣдовательно:

$$A = n^2(1 - \varkappa^2);\ B = -2n^2\varkappa. \tag{4}$$

Такимъ образомъ мы будемъ имѣть систему уравненій:

$$K = \frac{(\frac{1}{u} - 1)(A + B\sqrt{-1}) + (\gamma + \frac{1}{u})D\sqrt{-1}}{1 + \frac{1}{u}} \tag{a}$$

$$\eta = \left(\frac{1}{u} - 1\right)(A + B\sqrt{-1}) + \frac{1}{u} \tag{b}$$

$$\eta = \frac{2}{u} - 1 + K\alpha p^2 - K\beta p\sqrt{-1} \tag{c}$$

Въ этой системѣ, слѣдовательно, извѣстны изъ опыта количества: A, B, D, для даннаго каждый разъ p. Займемся теперь рѣшеніемъ этой системы (a) — (c). Изъ равенства (b) находимъ:

$$\frac{1}{u} = \frac{\eta + A + B\sqrt{-1}}{P_1 + B\sqrt{-1}} \tag{a_1}$$

гдѣ положено:

$$P_1 = A + 1. \tag{d}$$

Подставивъ это значеніе $\frac{1}{u}$ въ уравненіе (c), получимъ:

$$\eta = \frac{2\eta + A - 1 + B\sqrt{-1}}{P_1 + B\sqrt{-1}} + K(\alpha p^2 - \beta p\sqrt{-1}).$$

Отсюда находимъ K, а именно:

$$K = \frac{(A - 1 + B\sqrt{-1})(\eta - 1)}{(P_1 + B\sqrt{-1})(\alpha p^2 - \beta p\sqrt{-1})} \tag{b_1}$$

Это равенство распадается на два слѣдующія:

$$\left.\begin{aligned} K\ (P_1\alpha p^2 + B\beta p) &= (A - 1)(\eta - 1) \\ K\ (B\alpha p^2 - P_1\beta p) &= B(\eta - 1) \end{aligned}\right\} \tag{e}$$

Отсюда, исключая K: $(\eta - 1)$, найдемъ:

$$2B\alpha p^2 = -(\Gamma - 1)\beta p, \tag{f}$$

гдѣ положено:

$$\Gamma = A^2 + B^2$$

и для удобства дальнѣйшихъ вычисленій мы равенство (f) на p не сокращаемъ.

Далѣе изъ перваго равенства въ системѣ (e) находимъ:

$$K = \frac{(A-1)(\eta-1)}{P_1 \alpha p^2 + B\beta p},$$

а затѣмъ, подставивъ сюда значеніе βp изъ (f), по преобразованіи найдемъ:

$$K = \frac{\eta - 1}{P\,\alpha p^2}, \tag{g}$$

гдѣ положено:

$$P = \frac{\Gamma + 2A + 1}{\Gamma - 1}.$$

Подставимъ теперь найденное значеніе K изъ (g), а также значеніе $\frac{1}{u}$ изъ (a_1) въ равенство (a); по сравненіи дѣйствительныхъ и мнимыхъ частей получимъ:

$$\left.\begin{aligned} &\eta^2 + DBP\alpha p^2\gamma - (AP\alpha p^2 - 2A)\,\eta = -(A + DB)\,P\alpha p^2 + 2A + 1 \\ &-DP_1 P\alpha p^2\gamma - (BP\alpha p^2 - 2B + DP\alpha p^2)\,\eta = -(B - AD)\,P\alpha p^2 + 2B \end{aligned}\right\} \text{(h)}$$

Исключая отсюда γ, послѣ нѣкоторыхъ преобразованій найдемъ:

$$P_1\eta^2 - [(\Gamma + A + BD)\,P\alpha p^2 - 2(\Gamma + A)]\,\eta = -(\Gamma + A + BD)P\alpha p^2 + 2\Gamma + 3A + 1.$$

Если здѣсь положимъ, какъ въ „Электромагнитной теоріи проводниковъ“ (стр. 63):

$$M_1 = \Gamma + A + BD;\ N_1 = 2\Gamma + 3A + 1,$$

то получимъ:

$$P_1\eta^2 - (M_1 P\alpha p^2 - 2\Gamma - 2A)\,\eta + M_1 P\alpha p^2 - N_1 = 0 \tag{I}$$

Это уравненіе для удобствъ рѣшенія его можно еще преобразовать.

Положимъ, что

$$\frac{9\pi}{\lambda_1^2} P = L,\ 10^{30} m_1 = x,$$

то получимъ:

$$P\alpha p^2 = Lx.$$

Дѣйствительно имѣемъ:

$$\alpha p^2 = \frac{m_1}{4\pi} \cdot \frac{4\pi^2\omega_0^2}{\lambda_0^2} = \frac{9\pi}{\lambda_1^2} \cdot 10^{30} m_1,$$

ибо

$$p = \frac{2\pi}{\tau},\ \tau = \frac{\lambda_0}{\omega_0},$$

гдѣ λ_0 длина волны, соотвѣтствующей данному періоду τ, а $\omega_0 = 3.10^{10}\ \frac{\text{см.}}{\text{сек.}}$ — скорость свѣта въ міровомъ эфирѣ; затѣмъ для удобства числовыхъ вычисленій положено:

$$\lambda_0 = \lambda_1 .10.^{-5}$$

Итакъ уравненіе (I) можно теперь написать въ слѣдующемъ видѣ:

$$P_1\eta^2 - (M_1 Lx - 2\Gamma - 2A)\,\eta + M_1 Lx - N_1 = 0 \qquad \text{(I bis)}$$

Положимъ здѣсь:

$$\frac{M_1}{P_1} = K_\infty,\ \frac{N_1}{P_1} = -\eta_0;\ LK_\infty = H,\ \Gamma + A = P_1 h,$$

тогда уравненіе (I bis) приметъ видъ:

$$\eta^2 - (Hx - 2h)\,\eta + Hx + \eta_0 = 0 \qquad \text{(I ter)}$$

Въ этомъ уравненіи всѣ количества, кромѣ η и x, извѣстны изъ опыта.

Рѣшая это уравненіе и замѣчая, что

$$(Hx - 2h)^2 - 4\,(Hx + \eta_0) = (Hx + \eta_0 - 1)^2,$$

ибо

$$2h = \frac{2\Gamma + 2A}{P_1} = \frac{N_1 - 3A - 1 + 2A}{P_1} = -\eta_0 - 1,$$

получимъ:

$$2\eta = Hx + \eta_0 + 1 \pm (Hx + \eta_0 - 1).$$

Первый корень будетъ:

$$\eta = Hx + \eta_0 \qquad \text{(A)}$$

а второй

$$\eta = 1.$$

Но этотъ корень $\eta = 1$ не годится [1]), ибо тогда имѣли-бы по уравненію (b):

$$A + B\sqrt{-1} = -1,$$

чего быть не можетъ.

Зная η, можно опредѣлить окончательно K, а именно изъ равенства (g), помня, что

$$P\alpha p^2 = Lx,$$

---

[1]) Въ «Электромагнитной теоріи проводниковъ», стр. 63, показано, что это значеніе η приводитъ къ первоначальной теоріи Максвелла.

получаемъ:

$$K = K_\infty + \frac{G}{x} \qquad (B)$$

причемъ положено:

$$G = \frac{\eta_0 - 1}{L}$$

и замѣчено, что

$$H = LK_\infty .$$

Прежде чѣмъ идти дальше замѣтимъ, что, если-бы подставили значеніе x изъ уравненія (A) въ уравненіи (B), то по замѣнѣ коэффиціентовъ K_∞, η_0, G и H ихъ значеніями, получили-бы формулу:

$$K = \frac{M_1(\eta - 1)}{N_1 + P_1\eta},$$

данную въ „Электромагнитной теоріи проводниковъ“ на стр. 67. Корню $\eta = 1$, соотвѣтствовалъ бы корень $K = 0$ (Planck). Теперь займемся опредѣленіемъ коэффиціента γ.

Второе равенство въ системѣ (h) даетъ по подстановкѣ значенія η [1]):

$$D\gamma = \frac{B - AD}{P_1} - \frac{2B}{P_1 Lx} - \left(\frac{B + D}{P_1} - \frac{2B}{P_1 Lx}\right)(\eta_0 + Hx)$$

или, окончательно:

$$\gamma = \gamma_0 - H_1 x + \frac{G_1}{x} \qquad (C)$$

гдѣ положено

$$\gamma_0 = \frac{2B}{DP_1} K_\infty - \frac{B + D}{DP_1}\eta_0 + \frac{B - AD}{DP_1},$$

$$H_1 = \frac{(D + B)H}{DP_1}, \quad G_1 = \frac{2BG}{DP_1}.$$

Остается опредѣлить K_0. Находимъ:

$$K_0 = \frac{G + K_\infty x}{(Hx + \eta_0)x} \qquad (D)$$

Такимъ образомъ всѣ постоянныя теоріи, т. е. K, η, γ и K_0 опредѣлены въ функціи одной перемѣнной x, т. е. въ функціи массы іона (электрона), ибо

$$x = m_1 \cdot 10^{30},$$

а m_1 масса іона.

---

[1]) Корню $\eta = 1$ соотвѣтствовалъ бы корень $\gamma = -1$.

Само собой разумѣется, что всѣ предыдущіе расчеты могутъ быть примѣнены лишь къ случаю, когда въ явленіи участвуетъ только одинъ родъ іоновъ, т. е. къ области дисперсіи, незаключающей въ себѣ полосы поглощенія [1]). Прежде чѣмъ изслѣдовать полученные выводы, соединимъ въ порядкѣ, необходимомъ для вычисленій, всѣ формулы. Мы будемъ считать для всякой длины волны λ_0 данными n и $\varkappa$ (для случая нормальнаго паденія луча на изслѣдуемую средину), а также коэффиціентъ электропроводности C изслѣдуемаго металла. Находимъ послѣдовательно:

$$A = n^2(1-\varkappa^2),\ B = -2n^2\varkappa,\ \Gamma = A^2+B^2,\ P_1 = A+1,\ C_1 = C.10^5,$$

приэтомъ C должно быть выражено въ абсолютныхъ электро-магнитныхъ единицахъ.

$$\lambda_1 = \lambda_0.10^5,\ D = 6C_1\lambda_1;\ P = 1+\frac{2P_1}{\Gamma-1},\ L = \frac{9\pi}{\lambda_1^2}P,$$

$$M_1 = A+\Gamma+BD,\ N_1 = 2\Gamma+3A+1,\ \eta_0 = -\frac{N_1}{P_1},\ K_\infty = \frac{M_1}{P_1}.$$

Затѣмъ

$$G = \frac{\eta_0-1}{L},\ H = LK_\infty,\ K_1 = \frac{2B}{DP_1}K_\infty,\ \eta_1 = \frac{D+B}{DP_1}\eta_0,$$

$$G_1 = \frac{2B}{DP_1}G,\ H_1 = \frac{D+B}{DP_1}H_1,\ H_2 = \frac{B-AD}{DP_1},\ \gamma_0 = K_1-\eta_1+H_2.$$

Вычисливъ эти коэффиціенты, найдемъ по формуламъ (A), (B), (C), (D) количества η, K, γ и K_0 въ функціи x'а. Мы пока ограничимся опредѣленіемъ K и η. Мы нашли для нихъ формулы:

$$K = K_\infty+\frac{G}{x},\ \eta = Hx+\eta_0.$$

Зная x, мы опредѣлили-бы обѣ эти величины. Въ нашей электромагнитной теоріи мы вычисляли K и η въ предположеніи, что коэффиціентъ $K_0 = 0.5$ для всѣхъ металловъ, въ этомъ случаѣ имѣли-бы приближенно:

$$x = \frac{2}{L}$$

и затѣмъ нашли-бы K и η по приведеннымъ формуламъ. Это предположеніе мы могли сдѣлать, допустивъ, что въ срединѣ дѣйствуютъ іоны,

---

[1]) Ср. Дисперсія металловъ. Сообщенія Харьк. Матем. Общества. Т. IX (1904) стр. 1—2.

число различныхъ видовъ которыхъ очень велико, такъ—что ихъ можно было-бы замѣнить іонами одного рода, *физически-эквивалентнаго* имъ.

Если положимъ, что $K_0 = 0.5$, то изъ формулы (D) нашли-бы

$$x = \frac{2K_\infty - \eta_0 \pm \sqrt{(2K_\infty - \eta_0)^2 + 8HG}}{2H}. \qquad (E)$$

Такъ какъ η_0 по сравненію съ 1-цей довольно велико, то можно взять приближенно по формулѣ для G:

$$GL = \eta_0,$$

въ такомъ случаѣ положительный корень (E) будетъ:

$$x = \frac{2}{L}. \qquad (F)$$

Примѣняя эту формулу къ наблюденіямъ Друде (Электромагнитная теорія проводниковъ, стр. 73) находимъ слѣдующія значенія x для красныхъ и желтыхъ лучей:

Таблица значеній x.

Металлъ	Красные лучи $\lambda_0 = 6.3.10^{-5}$ см.	Желтые лучи $\lambda_0 = 5.893.10^{-5}$ см.
Ag	3.092	2.720
Cu	3.237	2.930
Au	3.261	2.941
Al	2.919	2.572
Mg	3.025	2.670
Zn	2.889	2.543
Cd	2.939	2.596
Co	2.902	2.559
Sn	2.923	2.577
Fe	2.905	2.514
Ni	2.940	2.641
Pt	2.914	2.564
Pb	2.932	2.568
Sb	2.876	2.522
Bi	3.013	2.618
Среднее	2.967	2.626

Хотя n_0 измѣняется для различныхъ металловъ очень значительно: примѣрно отъ 0.2 (*Ag*) до 3.1 (*Sb*), а $n_0 \varkappa_0$ отъ 3.0 (*Ag*) до 5.5 (*Zn*),

коэффиціентъ—же электропроводности измѣняется еще значительнѣе: отъ 0.9 (*Bi*) до 63 (*Ag*), но все это почти не вліяетъ на величину x' а.

Итакъ *въ среднемъ* для металловъ для желтыхъ и красныхъ лучей можно взятъ $x = 2 \cdot 8$,—т. е. масса электрона m_1 будетъ:

$$m_1 = 2 \cdot 8 . 10^{-30} \text{ грамма.}$$

Масса водороднаго атома по расчетамъ Планка [1]) равна

$$m_H = 0 \cdot 81 . 10^{-24} \text{ грамма,}$$

слѣдовательно, выходитъ, что масса электрона въ металлѣ примѣрно въ $3 . 10^5$ разъ меньше массы водороднаго атома. Если-же сравнимъ массу электрона въ металлѣ съ массой электрона, несущаго свой отрицательный зарядъ въ катодномъ лучѣ, считая эту послѣднюю примѣрно въ 1000 разъ меньшей массы водороднаго атома, (т. е. $m_1 = 8 . 1 . 10^{-28}$ гр. [2]) то получимъ, что масса металлическаго электрона меньше массы электрона въ катодномъ лучѣ въ 300 разъ.

Интересно сравнить найденное значеніе массы металлическаго электрона съ массой, найденной другими изслѣдователями и по другимъ методамъ.

Langevin въ 1903 году опубликовалъ работу [3]), въ которой даетъ формулу:

$$m_1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{e^2}{aV^2},$$

гдѣ m_1 — масса электрона, e его отрицательный зарядъ, V скорость свѣта $\left(V = 3 . 10^{10} \frac{\text{см.}}{\text{сек.}} \right)$ и a радіусъ электрона, считаемаго сферой.

Примемъ, какъ нѣкоторое среднее, что зарядъ электрона

$$e = 4 \cdot 7 . 10^{-10} \text{ абс. } C.G.S \text{ единицъ,}$$

тогда

$$m_e = \frac{1 \cdot 64 . 10^{-40}}{a} \text{ см. гр.}$$

и если для радіуса a возмемъ число *M. Abraham*'а т. е.

$$a = 5 \cdot 5 . 10^{-13} \text{ см.,}$$

---

[1]) *Drude's* Annalen der Physik. Bd. 9, S. 640 (1902).

[2]) По *J. J. Thomson*'у $m_1 = 5 . 9 . 10^{-28}$ гр. *Die Korpuscular-theorie der Materie.* S. 83. (1908).

[3]) Annales de physique et de chemie, t. 28 (7 s.) p. 354 (1903).

то

$$m_1 = 3.10^{-28} \text{ гр.}$$

Если возмемъ радіусъ a въ 100 разъ большимъ, то получимъ:

$$m_1 = 3.10^{-30} \text{ гр.}$$

— число тождественное съ нашимъ.

Чтобы имѣть болѣе ясное представленіе о размѣрахъ электрона при этихъ расчетахъ вспомнимъ, что по даннымъ кинетической теоріи газовъ можно взять для атомовъ кислорода или водорода:

$$a_O = 4 \cdot 5.10^{-8} \text{ см.}, \quad a_H = 2.10^{-8} \text{ см.},$$

а при нашихъ расчетахъ для металлическаго электрона:

$$a_1 = 5 \cdot 5.10^{-11} \text{ см.}$$

т. е. въ 1000 разъ менѣе.

Таковы расчеты въ предположеніи, что въ срединѣ дѣйствуетъ одинъ родъ іоновъ, когда-же имѣетъ мѣсто случай многихъ родовъ іоновъ и, слѣдовательно, имѣемъ дѣло съ спектромъ, въ которомъ много полосъ поглощенія, тогда расчетъ сильно усложняется, ибо тогда коэффиціенты η и γ сами комплексны.

Апрѣль 1909 г.

О температурѣ небеснаго пространства.

Е. Роговскаго.

Вопросъ о температурѣ небеснаго пространства имѣетъ важное научное значеніе, потому что отъ этой температуры зависитъ температура верхнихъ слоевъ земной атмосферы, а слѣдовательно, и всей атмосферы и земной поверхности; отъ температуры же земной поверхности находятся въ полной зависимости растенія и животныя: флора и фауна земли были иными при другой средней температурѣ ея поверхности; зависятъ отъ нея и геологическіе процессы.

Французскій ученый Пулье [1]), еще въ 1837 г., первый далъ методъ для вычисленія температуры небеснаго пространства. Имъ была выведена слѣдующая формула:

$$a^{t'} = 1{\cdot}235\,\frac{2-b}{2-b'} - \frac{A}{3{\cdot}60}, \qquad (1)$$

гдѣ t' — температура небеснаго пространства, a — постоянная формулы Дюлонга и Пти равная $1{\cdot}0077$, b — поглощательная способность земной атмосферы для лучей, испускаемыхъ земной поверхностью, b' — тоже для солнечныхъ лучей, и A — солнечная постоянная въ формулѣ Буге, т. е. количество солнечной теплоты въ мал. калоріяхъ, падающей нормально на 1 кв. см. поверхности на границѣ земной атмосферы въ 1 минуту. По наблюденіямъ Пулье среднее значеніе этой постоянной $1{\cdot}76$. Принявъ $b = 0{\cdot}9$ и $b' = 0{\cdot}35$, получимъ для температуры небеснаго пространства — 143° Ц. Пулье вывелъ среднее значеніе — 142° Ц.

Позднѣйшія наблюденія дали для солнечной постоянной A числа, значительно отличающіяся отъ числа Пулье; такъ:

Pouillet (1837)	1·76
Forbes (1842)	2·82
Hagen (1863)	1·90
Violle (1875)	2·54

[1]) *Pouillet.* Mémoire sur la chaleur solaire etc. Compt. Rend. t. VII, p. 24—65, 1838.

Langley (1884)	3·07
Савельевъ (1890)	3·47
Ångström (1890)	4·00
Rizzo (1897)	2·90
Crova (1897)	3·50
Westman (1901)	2·1
Exner (1902)	2·0
Holm и Jansson (190^2/$_3$)	2·2
Kimball (1903)	2·2
Abbot и Fowl (190^2/$_7$)	2·1
Ганскій (1904)	3·23
Ångström (1906)	2·17
Féry и Millochau (1907)	2·56
Féry и Millochau (1907)	2·38
Alessandri (1908)	2·09

Большинство метеорологовъ и вообще ученыхъ, занимающихся актинометріею, принимали въ недавнее время, что солнечная постоянная равна 3 и не менѣе 2·5. Если подставить вмѣсто A въ приведенную выше формулу 2·5, то получимъ для t'—температуры небеснаго пространства, число—267·4° С. очень близкое къ абсолютному нулю. На этомъ основаніи Лянглей, а за нимъ и другіе ученые принимали, что температура небеснаго пространства равна абсолютному нулю, т. е.—273° С [1]).

Новѣйшія наблюденія Онгстрема [2]), произведенныя съ новымъ усовершенствованнымъ пиргеліометромъ, дали для солнечной постоянной число 2·17, а Алессандри [3]) даже число 2·0858. Если подставить въ формулу (1) число 2·1, то для температуры небеснаго пространства получимъ—186·3° Ц.—число уже довольно близкое къ числу найденному Пулье. При $A = 2·0$, для t' получимъ—172·0° Ц. Такимъ образомъ само собою отпадаетъ возраженіе Лянглея противъ теоріи Пулье. Привожу въ переводѣ соотвѣтственные отрывки изъ книги Лянглея [4]): „Такъ какъ очень немногіе, которые цитируютъ число Пулье для „температуры небеснаго пространства“ знаютъ путь, которымъ онъ вывелъ ее (его знаменитый мемуаръ чаще цитируется, чѣмъ читается), то я могу изложить здѣсь, что онъ опредѣляетъ при помощи въ высшей степени оригинальнаго, остроумнаго и, повидимому, правильнаго, хотя не вполнѣ удовлетворительнаго ряда разсужденій, что количество теплоты необходимой, чтобы

---

[1]) *S. P. Langley.* Researches on Solar Heat. Washington, p. 123 (footnote), 1884.

[2]) *Angström.* Methode nouvelle pour l'étude de la radiation solaire. Nova Acta R. Soc. Sc. I 1907 Метеор. Вѣстн. 1907, p. 340—345.

[3]) *Alessandri.* Meteorol. Zeitschr. 1909, p. 54—60.

[4]) *S. P. Langley.* l. c. p. 47—48.

удержать среднюю температуру поверхности земли на ея извѣстной величинѣ должно быть таково, чтобы она могла расплавить въ годъ слой льда толщиною въ 57 метровъ, и такъ какъ онъ нашелъ ранѣе, что только 31 метръ этого слоя расплавляется солнцемъ, то онъ принужденъ былъ приписать нѣкоторому другому источнику то тепло, которое плавитъ остальные 26 метровъ, и онъ находитъ его, придавая пространству температуру — 142 ° Ц.“ „Если бы его методы измѣренія прямого солнечнаго лучеиспусканія были правильны, то, какъ видно изъ опытовъ на горѣ Уитней, онъ нашелъ бы, что почти 57 метровъ льда плавитъ одно только солнце, и въ этомъ случаѣ температура пространства, согласно его теоріи, должна быть равна абсолютному нулю. Необходимымъ слѣдствіемъ теоріи Пулье, является то, что по мѣрѣ того, какъ наши измѣренія солнечной теплоты даютъ все большія величины ея, исчезаетъ необходимость приписывать температурѣ небеснаго пространства замѣтную величину“. Новѣйшія наблюденія однако показали, какъ мы видѣли выше, что солнечная постоянная равна не 3, какъ предполагалъ Лянглей, а около 2, такъ что опять является необходимость приписать этому пространству температуру, отличную отъ нуля, другими словами, найти новый источникъ тепла, кромѣ солнца.

Исходною точкою для вывода формулы (1) служатъ для Пулье формулы тепловаго обмѣна въ томъ случаѣ, когда шаръ, окруженный газовой атмосферой, помѣщенъ въ центрѣ нѣкоторой сферы, весьма большаго діаметра сравнительно съ размѣрами шара и его оболочки. Называя черезъ s, s' и s'' поверхности шара, наружной сферы и газовой оболочки (среднюю поверхность ея), а черезъ e, e' и e'' соотвѣтственно количества тепла, испускаемыя единицей поверхности ихъ, Пулье пишетъ слѣдующія три равенства [1]):

$$\left.\begin{aligned} 2e''s'' &= bes + b'e's'Sin^2\omega \\ es &= e''s'' + (1-b')e's'Sin^2\omega \\ e's'Sin^2\omega &= e''s'' + (1-b)es \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Здѣсь b означаетъ поглощательную способность газовой оболочки (атмосферы) для лучей, испускаемыхъ шаромъ, а b' тоже для лучей, испускаемыхъ наружною сферой, а ω уголъ, подъ которымъ виденъ радіусъ шара или оболочки съ точекъ наружной сферы. Такимъ образомъ, первое равенство выражаетъ, что количество теплоты, испускаемой атмосферою въ обѣ стороны, равно количеству теплоты испускаемой шаромъ и

[1]) Формулы эти невѣрны въ томъ отношеніи, что въ нихъ должны входить не $Sin^2\omega$, а $\frac{1}{2}Sin^2\omega$.

наружной сферою и поглощаемой атмосферою. Соотвѣтственнымъ же образомъ, второе уравненіе выражаетъ равенство количества теплоты, испускаемой шаромъ и получаемой имъ отъ газовой оболочки и наружной сферы, а третье—равенство количества теплоты, испускаемаго наружною сферой на шаръ съ его атмосферою, и количества теплоты, получаемой ею отъ шара и его газовой оболочки.

Въ томъ случаѣ, когда діаметръ наружной сферы весьма великъ сравнительно съ діаметромъ шара, а діаметръ оболочки мало отличается отъ діаметра шара, можно принять, что $s'' = s$, и такъ какъ $s = s' \, Sin^2\varpi$, то предыдущія равенства примутъ слѣдующій простой видъ:

$$\begin{aligned} 2e'' &= be + b'e' \\ e &= e'' + (1 - b')e' \\ e' &= e'' + (1 - b)e. \end{aligned} \tag{3}$$

Изъ послѣднихъ двухъ уравненій находимъ:

$$\frac{e}{e'} = \frac{2 - b'}{2 - b}. \tag{4}$$

По закону Дюлонга и Пти $e = Ba^t$, гдѣ t температура тѣла, a постоянная, равная для всѣхъ тѣлъ $1 \cdot 0077$, а $B = 1 \cdot 146$; точно также $e' = B'a^{t'}$. Принимая B и B' равными, получаемъ:

$$a^{t-t'} = \frac{2 - b'}{2 - b}. \tag{5}$$

Принявъ вмѣстѣ съ Пулье, что указанный выше шаръ есть земной шаръ, газовая оболочка—земная атмосфера, а наружная сфера—небесная сфера, мы, однако, не можемъ непосредственно примѣнить формулу (5) къ этому случаю, потому что земля получаетъ теплоту не только отъ небесной сферы, но и отъ солнца. Замѣняя небесную сферу фиктивной сферой такой температуры v, чтобы она испускала на землю столько же теплоты, какъ дѣйствительная небесная сфера вмѣстѣ съ солнцемъ, можемъ написать по закону Дюлонга и Пти, что

$$Ba^v = Ba^{t'} + \frac{A}{\pi}, \tag{6}$$

гдѣ v температура этой воображаемой сферы, t' собственная температура небеснаго пространства, а членъ $\frac{A}{\pi}$ выражаетъ среднее количество теплоты, падающей отъ солнца на единицу поверхности тропическаго пояса; этотъ членъ получается отъ дѣленія количества теплоты, падающей отъ солнца въ 1 минуту на тропическій поясъ и равнаго $A.2rh$,

гдѣ r — радіусъ земли, а h ширина тропическаго пояса, на полную поверхность этого пояса, равную $2\pi rh$.

Къ этой фиктивной сферѣ, замѣняющей собою небесную сферу вмѣстѣ съ солнцемъ, можно уже приложить формулу (5), принявъ t' равнымъ v, а t равнымъ $27\cdot5^0$ — средней температурѣ тропическаго пояса:

$$a^{27\cdot5-\nu} = \frac{2-b'}{2-b}. \tag{7}$$

Подставляя значеніе a^ν изъ этой формулы въ формулу (6), получаемъ:

$$a^{t'} = a^{27\cdot5}\frac{2-b}{2-b'}, \quad -\frac{A}{1\cdot146\,\pi}. \tag{8}$$

Пулье принялъ, что $b = 0\cdot9$ и $b' = 0\cdot35$; эти числа близки къ нынѣ принимаемымъ: $0\cdot9$ и $0\cdot4$; если ихъ подставить въ формулу (8), то получится формула (1).

Температуру небеснаго пространства Пулье приписываетъ звѣздной теплотѣ: звѣзды испускаютъ теплоту и температура небесной сферы есть та температура, которую должна имѣть сфера, чтобы ея лучеиспусканіе было равно лучеиспусканію звѣзднаго неба, распредѣленному равномѣрно по всей небесной сферѣ. Такое допущеніе несправедливо: по разсчету Ньюкома свѣтовое лучеиспусканіе всѣхъ звѣздъ до 7-ой величины составляетъ только $\frac{1}{31000000}$ долю солнечнаго свѣта; приблизительно въ томъ же отношеніи должны находиться и полныя лучеиспусканія звѣздъ и солнца. По разсчету Лянглея всѣ эти звѣзды испускаютъ не болѣе $7\cdot5.10^{-9}$ калоріи въ минуту — это количество такъ ничтожно, что не можетъ играть никакой роли въ тепловыхъ процессахъ земной атмосферы. Но если подъ температурой небеснаго или, правильнѣе, междупланетнаго пространства, мы будемъ понимать температуру того разрѣженнаго газа, который въ немъ заключается, то эта температура можетъ имѣть нѣкоторую конечную величину, которая, если не совпадаетъ, то не можетъ многимъ отличаться отъ температуры верхнихъ слоевъ земной атмосферы. Лучеиспусканіе этихъ слоевъ, образующихъ какъ бы границу небеснаго пространства, окружающаго землю. и служитъ тѣмъ источникомъ теплоты, которую Пулье приписывалъ лучеиспусканію звѣздъ.

Сообразно съ этимъ представленіемъ, вмѣсто формулъ (2), можемъ написать, какъ первое, грубое, приближеніе:

$$\begin{aligned} 2e''s'' &= bes + b'e's'q_2' \\ es &= e''s''q'' + (1-b')e's'q_1' \\ e's'q_2' &= e''s'' + (1-b)es. \end{aligned} \tag{9}$$

Здѣсь e, e', e'', s, s', s'', b и b' имѣютъ тѣже значенія, что и въ формулахъ (2), а q_1' и q'' означаютъ тѣлесные углы (по отношенію къ полусферѣ), подъ которыми виденъ земной шаръ изъ точки на верхней границѣ атмосферы, и изъ точки въ среднемъ слоѣ ея, а q_2' тѣлесный уголъ, подъ которымъ виденъ средній слой атмосферы изъ точки на верхней границѣ ея.

Называя черезъ s_h поверхность сферы концентрической съ земнымъ шаромъ и находящейся на разстояніи h отъ его поверхности, и черезъ q_h соотвѣтственное значеніе q, не трудно найти, что

$$\frac{s_h}{s} = \left(\frac{R+h}{R}\right)^2$$

и (10)

$$q_h = 1 - \frac{\sqrt{h(2R+h)}}{R+h},$$

гдѣ R —радіусъ земли.

Изъ уравненій (9) получается:

$$\frac{e}{e'} = \frac{s'}{s} \cdot \frac{q_2'q'' + (1-b')q_1'}{1+(1-b)q''}. \tag{11}$$

Далѣе, вмѣсто закона Дюлонга и Пти, будемъ пользоваться закономъ Стефана, по которому лучеиспусканіе чернаго тѣла пропорціонально четвертой степени его абсолютной температуры, т. е. $e = \sigma T^4$, гдѣ σ—постоянная. Тогда изъ формулы (11) получается:

$$\frac{T}{T'} = \sqrt[4]{\frac{s'}{s} \cdot \frac{q_2'q'' + (1-b')q_1'}{1+(1-b)q''}}. \tag{12}$$

гдѣ T и T' абсолютныя температуры поверхности земли и небесной сферы, т. е. температуры, считаемыя отъ -273^0 Ц.

Разсуждая дальше, какъ Пулье (см. выше), легко получить слѣдующія формулы, соотвѣтствующія формуламъ (6) и (7):

$$\sigma(273+v)^4 = (273+t')^4 + \frac{A}{\pi} \tag{13}$$

и

$$\frac{273+t}{273+v} = \sqrt[4]{\frac{s'}{s} \cdot \frac{q_2'q'' + (1-b')q_1'}{1+(1-b)q''}}. \tag{14}$$

Опредѣляя изъ послѣдняго равенства $273+v$ и подставляя его значеніе въ (12), получаемъ:

$$(273+t')^4 = (273+t)^4 \frac{s}{s'} \cdot \frac{1+(1-b)q''}{q_2'q'' + (1-b')q_1'}, - \frac{A}{\pi\sigma} \tag{15}$$

Здѣсь t' есть температура небеснаго пространства, а t — температура тропическаго пояса.

Земная атмосфера, конечно, не имѣетъ рѣзкой границы, но условно за границу ея можно принять тотъ слой, присутствіе котораго обнаруживается какими-либо явленіями, напримѣръ, утренними и вечерними сумерками (зарею), свѣтящимися облаками, полярными сіяніями, метеорами и другими. Наибольшая высота получается изъ наблюденій надъ высотою появленія метеоровъ, это около 300 км.

Принявъ за средній слой земной атмосферы тотъ слой ея, который находится на высотѣ 5·5 км. отъ поверхности земли и который дѣлитъ всю атмосферу на двѣ части равной массы, мы можемъ считать что q_1' и q_2', т. е. углы, подъ которыми видны изъ точки на высотѣ $h = 300$ км земная поверхность (q_1') и слой на высотѣ 5·5 км. (q_2'), равны одной и той же величинѣ q'; а за s'' и q'' значенія s и q точки на высотѣ $h = 5{\cdot}5$ км. Тогда формула (15) обращается въ такую:

$$(273 + t')^4 = (273 + t)^4 \frac{s}{s'} \frac{1 + (1 - b)q''}{q'[q'' + (1 - b')]} - \frac{A}{\pi\sigma}, \qquad (16)$$

гдѣ:

$$s' = 1{\cdot}096s, \quad q' = 0{\cdot}70$$

$$s'' = 1{\cdot}048s, \quad q'' = 0{\cdot}96$$

Пулье положилъ среднюю температуру тропическаго пояса равною $27{\cdot}5^0$ Ц. Эта величина слишкомъ велика. По даннымъ Шпиталера и Батхельдера годовая температура имѣетъ наибольшую величину на параллели 10^0 с. ш., а именно $26{\cdot}4^0$ Ц. по Шпиталеру и $27{\cdot}1^0$ по Батхельдеру [1]); среднее изъ этихъ двухъ цифръ $= 26{\cdot}75^0$. Это число мы и примемъ за значеніе t въ формулѣ (16).

Далѣе, b поглощеніе атмосферою лучей, испускаемыхъ землею, можно принять равнымъ 0·9. Что касается b' поглощенія лучей небеснаго свода, то нужно замѣтить, что эти лучи составляются изъ лучей, испускаемыхъ солнцемъ, и лучей, испускаемыхъ небеснымъ пространствомъ, по нашему лучей, испускаемыхъ верхними слоями атмосферы; если поглощательную способность земной атмосферы для первыхъ лучей можно принять равною 0·4, то для вторыхъ ее можно принять такою же, какъ и для лучей, испускаемыхъ землею, т. е. 0·9. Примемъ для b' среднее значеніе — 0·65.

По опредѣленію Курльбаума [2]) $\sigma = 5{\cdot}32.10^{-12} \frac{\text{уатт.}}{\text{см.}^2\ 1^0}$, или $\sigma = 7{\cdot}68.10^{-11} \frac{\text{гр. кал.}}{\text{см.}^2 \text{ мин. } 1^0}$. Такимъ образомъ, окончательно, получаемъ:

$$(273 + t')^4 = 8{\cdot}8038.10^9 - 4{\cdot}1447.10^9 A. \qquad (17)$$

[1]) *J. Hann.* Lehrbuch der Meteorologie. 1901, p. 143.

[2]) *F. Kurlbaum.* Über eine Methode zur Bestimmung der Strahlung in absolutem Maass etc. Wied. Ann. *65*, 1898, p. p. 747—760.

По этой формулѣ при $A = 2$ получаемъ t', т. е. температуру небеснаго пространства, равною $-121{\cdot}4^0$ Ц., а при $A = 2{\cdot}1$, $t' = -197{\cdot}0^0$ Ц. Наибольшее значеніе A, возможное по этой формулѣ, равно $2{\cdot}12$.

Такимъ образомъ, при значеніяхъ A, лежащихъ между $2{\cdot}0$ и $2{\cdot}1$, температура небеснаго пространства, въ среднемъ—$159{\cdot}2^0$ Ц., близка къ той, которую нашелъ Пулье, т. е.—142^0 Ц., а слѣдовательно температуры планетъ, найденныя мною въ другомъ мѣстѣ [1]), остаются справедливыми и при новыхъ предположеніяхъ.

Въ новѣйшее время Фери [2]) обратилъ вниманіе на то, что благодаря употребленію не абсолютно чернаго поглощателя, опредѣленія Курльбаума и другихъ даютъ для σ слишкомъ малую величину. По его опредѣленію $\sigma = 6{\cdot}3.10^{-12}\frac{\text{уатт}}{\text{см.}^2 1^0}$ [3]). По опредѣленію Бауэра и Мулена [4]) $6{\cdot}0$. Эти числа нѣсколько увеличиваютъ предѣльное значеніе A и *повышаютъ* температуру небеснаго пространства сравнительно съ найденными выше; такъ при $\sigma = 6{\cdot}0$ максимальное значеніе A равно $2{\cdot}40$, а t' равно—$91{\cdot}5^0$ Ц. при $A = 2{\cdot}1$. При $\sigma = 6{\cdot}3.10^{-12}$ максимальное значеніе $A = 2{\cdot}52$, а при $A = 2{\cdot}1$, $t' = -50{\cdot}5^0$ Ц., т. е. является уже значительно повышенною, а вмѣстѣ съ тѣмъ температуры всѣхъ планетъ приблизятся къ земной, уменьшивъ свои численныя значенія, приведенныя въ примѣчаніи [1]). Однако результаты опытовъ Фери нуждаются еще въ тщательной провѣркѣ, которая, конечно, будетъ вскорѣ произведена, и только тогда можно будетъ прійти къ болѣе точному заключенію о температурѣ небеснаго пространства.

---

[1]) *Е. Роговскій.* Еще о температурѣ и составѣ атмосферъ солнца и планетъ. Изв. Р. Астр. Общ. VIII, 1899 стр. 32—45. Astrophysical Journ. XIV, 1901, p. 234—260. Привожу здѣсь найденныя мною среднія температуры поверхностей планетъ:

Меркурій	$+40^0$ Ц.	Юпитеръ	$+2690^0$ Ц.
Венера	$+25^0$ „	Сатурнъ	$+827^0$ „
Земля	$+15^0$ „	Уранъ	$+188^0$ „
Луна	-85^0 „	Нептунъ	$+300$ „
Марсъ	-73^0 „		

[2]) *C. Féry.* Sur l'approximation des corps noirs employés comme récepteurs. C. R. *148*, 1909, p. 777—780.

[3]) *C. Féry.* Détermination de la constante de la loi de Stefan. C. R. *148*, 1909, p. 915—918.

[4]) *E. Bauer et M. Moulin.* Sur la constante de la loi de Stefan. C. R. *149*, 1909, p. 988—990.

Координаты точки пересѣченія двухъ прямыхъ въ пространствѣ и плоскости, опредѣляемой этими двумя прямыми.

Д. М. Синцова.

1. Простая и элементарная задача: „*опредѣлить координаты точки пересѣченія двухъ пересѣкающихся прямыхъ*“ получаетъ нѣкоторый интересъ, если прямыя заданы ихъ однородными координатами, и требуется выразить съ помощью ихъ однородныя координаты точки пересѣченія. Пусть, дѣйствительно, даны прямая p шестью координатами p_{ik} ($i=1, 2, 3, 4$), связанными соотношеніемъ

$$\frac{1}{2}(p,p)\equiv p_{12}p_{34}+p_{13}p_{42}+p_{14}p_{23}=0 \qquad (1)$$

и прямая p' — координатами p'_{ik}, связанными соотношеніемъ

$$\frac{1}{2}(p',p')\equiv p'_{12}p'_{34}+p'_{13}p'_{42}+p'_{14}p'_{23}=0 \qquad (1')$$

Если прямыя p и p' пересѣкаются, то

$$(p,p')\equiv p_{12}p'_{34}+p_{13}p'_{42}+p_{14}p'_{23}+p'_{12}p_{34}+p'_{13}p_{42}+p'_{14}p_{23}=0 \qquad (2),$$

Координаты точки x, принадлежащей прямой p, удовлетворяютъ *четыремъ* уравненіямъ:

$$\left.\begin{aligned} &1)\ x_2p_{34}+x_3p_{42}+x_4p_{23}=0\\ &2)\ x_1p_{34}+x_3p_{41}+x_4p_{13}=0\\ &3)\ x_1p_{24}+x_2p_{41}+x_4p_{12}=0\\ &4)\ x_1p_{23}+x_2p_{31}+x_3p_{12}=0 \end{aligned}\right\} \qquad (I)$$

независимыхъ между которыми въ силу (1) только два.

Если эта точка x принадлежитъ и второй прямой p', то выполняются еще четыре уравненія:

$$\left.\begin{aligned} &1)\ x_2p'_{34}+x_3p'_{42}+x_4p'_{23}=0\\ &2)\ x_1p'_{34}+x_3p'_{41}+x_4p'_{13}=0\\ &3)\ x_1p'_{24}+x_2p'_{41}+x_4p'_{12}=0\\ &4)\ x_1p'_{23}+x_2p'_{31}+x_3p'_{12}=0 \end{aligned}\right\} \qquad (II)$$

между которыми независимыхъ также только два.

Возьмемъ два какихъ-нибудь уравненія системы (I) и два какихъ нибудь уравненія системы (II). Сдѣлать это можно всего $\frac{4.3}{1.2}\times\frac{4.3}{1.2}=36$ способами. Всѣ получаемыя такимъ образомъ системы изъ четырехъ уравненій между четырьмя однородными перемѣнными $x_1x_2x_3x_4$ оказываются при условіи (2) совмѣстными. Такъ, если взять I: 1, 2, II: 3, 4, то опре-

дѣлитель системы принимаетъ съ помощью (I) и (II) видъ: $p_{34}p'_{12}$ (p,p'), т. е. обращается въ нуль въ силу (2). Такимъ образомъ достаточно брать одно уравненіе изъ одной группы и два уравненія изъ другой.

Спрашивается, сколько получается различныхъ системъ выраженій для $x_1x_2x_3x_4$. Подробный подсчетъ показываетъ, что различныхъ выраженій получается только *четыре*, а именно: первая система:

$$(A)\quad \begin{cases} \varrho x_1 = -p_{12}p'_{34} - p_{13}p'_{42} - p_{14}p'_{23} \equiv p_{34}p'_{12} + p_{42}p'_{13} + p_{23}p'_{14}; \\ \varrho x_2 = p_{23}p'_{24} - p_{24}p'_{23}; \\ \varrho x_3 = p_{24}p'_{34} - p_{34}p'_{23}; \\ \varrho x_4 = p_{24}p'_{34} - p_{34}p'_{24}; \end{cases}$$

Эта система получается, если брать изъ 2-й группы уравненіе 1-ое и два какихъ-нибудь изъ 1-ой группы или наоборотъ (только тогда мѣняетъ знакъ множитель пропорціональности).

Вторая система:

$$(B)\quad \begin{cases} \varrho' x_1 = p_{13}p'_{14} - p_{14}p'_{13} \\ \varrho' x_2 = p_{23}p'_{14} + p_{42}p'_{13} + p_{12}p'_{34} \equiv -p'_{23}p_{14} - p_{13}p'_{42} - p_{34}p'_{12}; \\ \varrho' x_3 = p_{13}p'_{34} - p'_{13}p_{34} \\ \varrho' x_4 = p_{14}p'_{34} - p'_{14}p_{34} \end{cases}$$

Эта система получается, если изъ 2-ой группы взять уравненіе 2-ое, и два какихъ-нибудь изъ 1-ой (или наоборотъ).

Третья система:

$$(C)\quad \begin{cases} \varrho'' x_1 = p_{12}p'_{14} - p'_{12}p_{14}; \\ \varrho'' x_2 = p_{12}p'_{24} - p'_{12}p_{24}; \\ \varrho'' x_3 = p'_{13}p_{42} + p'_{23}p_{14} + p'_{34}p_{12} \equiv -p_{13}p'_{42} - p_{23}p'_{14} - p_{34}p'_{12}; \\ \varrho'' x_4 = p_{14}p'_{24} - p'_{14}p_{24}. \end{cases}$$

Эта система получается, если изъ 2-ой группы взять уравненіе 3-ье и какія-нибудь два уравненія 1-й группы (или наоборотъ).

Наконецъ, взявъ изъ 2-й группы уравненіе 4-ое и какія-нибудь два уравненія 1-ой группы, приходимъ къ 4-ой системѣ выраженій:

$$(D)\quad \begin{cases} \varrho''' x_1 = p_{12}p'_{13} - p'_{12}p_{13}; \\ \varrho''' x_2 = p_{12}p'_{23} - p_{23}p'_{12}; \\ \varrho''' x_3 = p_{13}p'_{23} - p'_{13}p_{23} \\ \varrho''' x_4 = p'_{12}p_{34} + p'_{13}p_{42} + p_{14}p'_{23} \equiv -p_{12}p'_{34} - p_{13}p'_{42} - p_{23}p'_{14}. \end{cases}$$

2. Не трудно произвести слѣдующую повѣрку этихъ результатовъ, полученныхъ непосредственнымъ рѣшеніемъ указанныхъ системъ линей-

ныхъ уравненій. Пусть y — какая-нибудь точка прямой p и z — какая-нибудь точка прямой p', — тогда можно принять

$$(3) \qquad p_{ik} = x_i y_k - x_k y_i \text{ и } p'_{ik} = x_i z_k - x_k z_i.$$

Если эти значенія подставимъ въ уравненія системы (A), то получимъ $\varrho = (x_2 y_3 z_4)$. Подстановка въ (B) доставитъ $\varrho' = (x_1 y_3 z_4)$, подстановка въ (C): $\varrho'' = (x_1 y_2 z_4)$ и подстановка въ (D) $\varrho''' = (x_1 y_2 z_3)$.

3. Полученные результаты по принципу двойственности непосредственно переносятся на задачу опредѣленія координатъ плоскости, опредѣляемой двумя пересѣкающимися прямыми.

Пусть осевыя координаты прямой p суть π_{ik}, связанныя съ плоскостными координатами двухъ опредѣляющихъ прямую плоскостей u, v равенствами

$$\pi_{ik} = u_i v_k - u_k v_i, \qquad (4)$$

и съ лучевыми — соотношеніями

$$\pi_{12} : \pi_{13} : \pi_{14} : \pi_{34} : \pi_{42} : \pi_{13} = p_{34} : p_{42} : p_{23} : p_{12} : p_{13} : p_{14} \qquad (5)$$

Въ этихъ координатахъ соотношенія (1), (1′) и (2) перепишутся

$$\tfrac{1}{2}(\pi,\pi) \equiv \pi_{12}\pi_{34} + \pi_{13}\pi_{42} + \pi_{14}\pi_{23} = 0$$

$$\tfrac{1}{2}(\pi',\pi') \equiv \pi'_{12}\pi'_{34} + \pi'_{13}\pi'_{42} + \pi'_{14}\pi'_{23} = 0$$

$$(\pi,\pi') \equiv \pi_{12}\pi'_{34} + \pi'_{12}\pi_{34} + \pi_{13}\pi'_{42} + \pi'_{13}\pi_{42} + \pi_{14}\pi'_{13} + \pi'_{14}\pi_{23} = 0$$

Если u — плоскость, проходящая черезъ прямыя π и π', то рѣшая системы, аналогичныя (I) и (II) найдемъ четыре вида выраженій $u_1 u_2 u_3 u_4$:

$$(A_1) \begin{cases} \sigma.u_1 = \pi'_{12}\pi_{34} + \pi'_{13}\pi_{42} + \pi'_{14}\pi_{23} \equiv -\pi_{12}\pi'_{34} - \pi_{13}\pi'_{42} - \pi_{14}\pi'_{23}; \\ \sigma.u_2 = \pi_{23}\pi'_{24} - \pi'_{23}\pi_{24}; \\ \sigma.u_3 = \pi_{23}\pi'_{34} - \pi'_{23}\pi_{34}; \\ \sigma.u_4 = \pi_{24}\pi'_{34} - \pi_{34}\pi'_{24}; \end{cases}$$

$$(B_1) \begin{cases} \sigma' u_1 = \pi_{13}\pi'_{14} - \pi_{14}\pi'_{13}; \\ \sigma' u_2 = \pi'_{14}\pi_{23} + \pi'_{13}\pi_{42} + \pi_{34}\pi_{12} \equiv -\pi_{14}\pi'_{23} - \pi_{13}\pi'_{42} - \pi_{34}\pi'_{12}; \\ \sigma'.u_3 = \pi_{23}\pi'_{34} - \pi_{34}\pi'_{23}; \\ \sigma'.u_4 = \pi_{24}\pi'_{34} - \pi_{34}\pi'_{24}. \end{cases}$$

$$(C_1) \begin{cases} \sigma'' u_1 = \pi_{12}\pi'_{14} - \pi_{14}\pi'_{12}; \\ \sigma'' u_2 = \pi_{12}\pi'_{24} - \pi_{24}\pi'_{12}; \\ \sigma''.u_3 = -\pi_{13}\pi'_{42} - \pi_{23}\pi'_{14} - \pi_{34}\pi'_{12} \equiv \pi_{12}\pi'_{34} + \pi'_{13}\pi_{42} + \pi_{1k}\pi'_{23}; \\ \sigma''.u_4 = \pi_{14}\pi'_{24} - \pi_{24}\pi'_{14}. \end{cases}$$

$$(D_1)\quad\begin{cases}\sigma'''_1 u_1 = \pi_{12}\pi'_{13} - \pi_{13}\pi'_{12};\\ \sigma'''_1 u_2 = \pi_{12}\pi'_{23} - \pi_{23}\pi'_{12};\\ \sigma'''_1 u_3 = \pi_{13}\pi'_{23} - \pi_{23}\pi'_{13};\\ \sigma'''_1 u_4 = \pi'_{12}\pi_{34} + \pi'_{13}\pi_{42} + \pi_{14}\pi'_{23} \equiv -\pi_{12}\pi'_{34} - \pi_{13}\pi'_{42} - \pi'_{14}\pi_{23}\end{cases}$$

Этимъ выраженіямъ съ помощью (5) можно дать еще другой видъ:

$$(A_1)\quad\begin{cases}\sigma_1 u_1 = p_{12}p'_{34} + p_{13}p'_{42} + p_{14}p'_{23} \equiv -p'_{12}p_{34} - p'_{13}p_{42} - p'_{14}p_{23}\\ \sigma_1 u_2 = p_{13}p'_{14} - p_{14}p'_{13}\\ \sigma_1 u_3 = p_{14}p'_{12} - p_{12}p'_{14}\\ \sigma_1 u_4 = p_{12}p'_{13} - p_{13}p'_{13}\end{cases}$$

$$(B_1)\quad\begin{cases}\sigma'_1 u_1 = p_{23}p'_{24} - p_{24}p'_{23}\\ \sigma'_1 u_2 = p'_{12}p_{34} + p_{13}p'_{42} + p_{14}p'_{23} \equiv -p_{12}p'_{34} - p'_{13}p_{42} - p'_{14}p_{23}\\ \sigma'_1 u_3 = p_{14}p'_{12} - p_{12}p'_{14}\\ \sigma'_1 u_4 = p_{12}p'_{13} - p_{13}p'_{12}\end{cases}$$

$$(C_1)\quad\begin{cases}\sigma''_1 u_1 = p_{34}p'_{23} - p'_{34}p_{23}\\ \sigma''_1 u_2 = p_{13}p'_{34} - p_{34}p'_{13}\\ \sigma'' u_3 = p'_{12}p_{34} + p_{13}p'_{42} + p'_{14}p_{23} \equiv -p_{12}p'_{34} - p'_{13}p_{42} - p_{14}p'_{23}\\ \sigma''_1 u_4 = p_{13}p'_{23} - p_{23}p'_{13}\end{cases}$$

$$(D_1)\quad\begin{cases}\sigma'''_1 u_1 = p_{34}p'_{42} - p_{42}p'_{34}\\ \sigma'''_1 u_2 = p_{34}p'_{14} - p_{34}p'_{34}\\ \sigma'''_1 u_3 = p_{42}p'_{14} - p_{14}p'_{42}\\ \sigma'''_1 u_4 = p_{12}p'_{34} + p_{13}p'_{42} + p'_{14}p_{23} \equiv -p'_{12}p_{34} - p'_{13}p_{41} - p_{14}p'_{23}\end{cases}$$

Не трудно убѣдиться, что полученныя выраженія для x_i и u_k опредѣляютъ точку и прямую въ соединенномъ положеніи.

Такъ взявъ системы (A) и (A_1) получаемъ:

$$\rho\sigma_1 \Sigma u_i x_i \equiv -(p_{12}p'_{34} + p_{13}p'_{42} + p_{14}p'_{23})\ (p_1 p') = 0 \text{ въ силу } (2).$$

Все это, конечно, вещи очень простыя, но необходимыя при пользованіи координатами прямой. Тѣмъ не менѣе мнѣ не приводилось встрѣчать ихъ гдѣ-либо.

Августъ 1909 г.

ПРОТОКОЛЫ

засѣданій Харьковекаго Математическаго Общества.

Засѣданіе 15 марта 1908 года (соединенное съ Обществомъ Физико-Химическихъ Наукъ)

было посвящено чествованію проф. А. П. Грузинцева по случаю исполнившагося 35-лѣтія его службы. Подробный протоколъ, содержащій рѣчи, произнесенныя въ засѣданіи, и полученныя привѣтствія, будетъ изданъ отдѣльною брошюрой.

Годичное Собраніе 26 октября 1908 года.

1. Предсѣдатель сообщилъ о смерти почетныхъ членовъ Общества профессоровъ А. Мауег'а и А. Н. Коркина и дѣйствительнаго члена профессора Н. Д. Пильчикова.

Собраніе почтило память скончавшихся членовъ вставаніемъ.

А. П. Грузинцевъ сообщилъ краткій очеркъ трудовъ и дѣятельности Н. Д. Пильчикова.

Н. Н. Салтыковъ подѣлился своими воспоминаніями объ опытахъ Н. Д. Пильчикова, демонстрированныхъ имъ на лекціяхъ, и отмѣтилъ память о немъ, какъ объ академическомъ дѣятелѣ, который заслуживаетъ самаго глубокаго уваженія. Смерть Н. Д. Пильчикова также и въ этомъ отношеніи представляетъ тяжелую потерю.

Постановлено напечатать въ Сообщеніяхъ Математическаго Общества некрологи скончавшихся членовъ и помѣстить ихъ фотографическія карточки. Выразить соболѣзнованіе Петербургскому Университету по поводу смерти профессора А. Н. Коркина.

2. Секретарь прочиталъ годовой отчетъ о дѣятельности Общества за прошедшій годъ, который и былъ утвержденъ собраніемъ.

3. Предсѣдатель сообщилъ письмо А. П. Грузинцева съ благодарностью Обществу за избраніе въ почетные члены.

4. Предсѣдатель сообщилъ о разысканныхъ имъ въ Архивѣ университета цѣломъ рядѣ сочиненій и изданій, Математическаго Общества и другихъ математическихъ трудовъ.

Собраніе постановило благодарить г. предсѣдателя за этотъ его трудъ.

5. Принятъ въ члены Общества согласно уставу приват.-доцентъ Харьковскаго Университета С. Н. Бернштейнъ, избраны единогласно въ члены Общества: Н. П. Бѣляевъ, В. Х. Даватцъ, Г. А. Грузинцевъ и М. Н. Марчевскій.

6. Постановлено украсить помѣщенія Математическаго отдѣленія физико-математическаго факультета портретами какъ великихъ старыхъ математиковъ, такъ и современныхъ выдающихся математиковъ.

7. Постановлено уплатить за оттиски Проекта Учебнаго Плана по математикѣ 4 р. 46 к., составленнаго Кіевскимъ Физико-Математическимъ Обществомъ и пріобрѣсти еще одинъ библіотечный шкапъ.

8. Постановлено платить ежемѣсячно сторожу при Математическомъ Обществѣ два рубля.

9. Произведено избраніе распорядительнаго комитета предсѣдателемъ избранъ проф. Д. М. Синцовъ, товарищами предсѣдателя профессора А. П. Грузинцевъ и Ц. К. Руссьянъ, секретаремъ профессоръ Н. Н. Салтыковъ.

Отчетъ о дѣятельности Харьковскаго Математическаго Общества за $190^{7}/_{8}$ академическій годъ.

Занятія Харьковскаго Математическаго Общества за истекшій академическій $190^{7}/_{8}$ годъ открылись общимъ собраніемъ 14 октября 1907 года.

Заслушавъ отчетъ о дѣятельности Общества за $190^{6}/_{7}$ академическій годъ и утвердивъ его, собраніе приступило къ выбору членовъ распорядительнаго комитета на слѣдующій годъ. Предсѣдателемъ Общества былъ избранъ проф. Д. М. Синцовъ, товарищами предсѣдателя профессора: А. П. Грузинцевъ и Ц. К. Руссьянъ; секретаремъ избранъ профессоръ Н. Н. Салтыковъ.

Въ отчетномъ году, кромѣ годичнаго собранія Общества, состоялось еще три засѣданія, на которыхъ было сдѣлано пять сообщеній научнаго характера, постановлено вступить въ обмѣнъ изданіями съ новыми научными учрежденіями и обществами. Кромѣ того, одно засѣданіе происходило совмѣстно съ Обществомъ Физико-Химическихъ Наукъ и было посвящено чествованію 30-тилѣтней ученой и преподавательской дѣятельности профессора А. П. Грузинцева.

Въ истекшемъ академическомъ году было закончено печатаніе 2, 3 и 4 выпусковъ X тома и четырехъ первыхъ выпусковъ XI тома „Сообщеній Харьковскаго Математическаго Общества“.

„Сообщенія Харьковскаго Математическаго Общества“ разсылались различнымъ русскимъ и заграничнымъ обществамъ въ обмѣнъ на ихъ

изданія; въ прошедшемъ году число послѣднихъ равнялось 79, изъ которыхъ 42 было русскихъ и 37 иностранныхъ.

Библіотека Общества пополнялась, кромѣ упомянутыхъ изданій также, сочиненіями, присылаемыми членами Общества, и журналами, выписываемыми на средства Общества: Acta mathematica, L'Intermédiaire des mathématiciens, Mathesis и Hoffman's Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht.

Съ января мѣсяца 1908 года Математическое Отдѣленіе Физико-Математическаго Факультета перешло въ отдѣльное помѣщеніе. Благодаря этому Математическое Общество перенесло свою библіотеку въ отдѣльное помѣщеніе, гдѣ будутъ происходить также засѣданія Общества. Вмѣстѣ съ тѣмъ явилась возможность приступить къ осуществленію математическаго кабинета для занятій студентовъ такимъ образомъ, какъ это проектировалось раньше въ засѣданіяхъ Математическаго Общества.

Въ отчетномъ году составъ членовъ Общества пополнился избраніемъ въ почетные члены проф. А. П. Грузинцева и въ дѣйствительные члены приватъ-доцента С. Н. Бернштейна.

Вмѣстѣ съ тѣмъ Общество понесло тяжелыя потери въ числѣ своихъ членовъ, вслѣдствіе кончины своихъ почетныхъ членовъ профессоровъ А. Mayer'a и А. Н. Коркина и дѣйствительнаго члена профессора Н. Д. Пильчикова.

Вслѣдствіе отмѣченныхъ измѣненій составъ Харьковскаго Математическаго Общества къ концу отчетнаго года состоялъ изъ 18 почетныхъ членовъ, 45 дѣйствительныхъ членовъ и 13 членовъ корреспондентовъ, такъ что общее число членовъ Общества равнялось 76.

Средства Математическаго Общества въ отчетномъ году составлялись изъ слѣдующихъ суммъ:

1. Остатокъ отъ ассигнованій Харьковскаго Университета и добровольныхъ взносовъ прежнихъ лѣтъ къ 10 октября 1907 года	862 р. 02 к.
2. Ассигнованіе Харьковскаго Университета на 1908 г.	500 „ — „
3. Добровольные взносы членовъ Общества	28 „ — „
4. Плата авторовъ за отдѣльные оттиски	18 „ 05 „
5. Доходы отъ продажи изданій Общества	20 „ — „
Итого . .	1428 р. 07 к.

Расходы Общества выразились въ слѣдующихъ суммахъ.

1. Печатаніе изданій Общества	504 р. 53 к.
2. Выписка сочиненій	
3. Переписка и приведеніе библіотеки Общества въ порядокъ	77 „ — „
4. Почтовые расходы	6 р. 51 к.
5. Устройство засѣданій Общества	8 „ — „
Итого . .	596 р. 04 к.

Такимъ образомъ къ 25 октября 1908 года средства Общества равняются 832 рублямъ 3 коп., изъ которыхъ 741 руб. 22 к. хранятся въ кассѣ Университета и 90 руб. 81 коп. находятся въ кассѣ Общества.

Засѣданіе 31 октября 1908 года.

1. Избраны единогласно въ почетные члены Общества слѣдующіе ученые: V. Volterra, C. Jordan, P. Painlevé, H. G. Zeuthen, G. H. Darwin и U. Dini и въ члены корреспонденты Общества ученые: C. Arzela, E. Borel, E. Goursat, H. Fehr, I. Fredholm, A. Favaro, A. R. Forsyth, F. Enriques, A. G. Greenhil, C. A. Laisant, G. Loria, E. Lindelöf, E. Holmgren, T. Levi-Civita, G. A. Maggi, G. Morera, H. Minkowski, W. F. Osgood, C. Runge, G. Teixeira.

2. Д. М. Синцовъ прочелъ некрологъ проф. А. Н. Коркина, присланный проф. К. А. Поссе.

Постановлено напечатать въ Сообщеніяхъ Общества.

3. А. П. Грузинцевъ прочелъ докладъ: Поперечныя колебанія упругихъ квадратныхъ пластинокъ.

С. Н. Бернштейнъ, Д. М. Синцовъ и Г. А. Грузинцевъ высказали нѣсколько замѣчаній по поводу разсматриваемой въ докладѣ задачи.

Постановлено напечатать докладъ А. П. Грузинцева въ Сообщеніяхъ Общества.

4. Постановлено пріобрѣсти для Общества портреты профессоровъ математическихъ наукъ, которые помѣщены въ Юбилейномъ изданіи Харьковскаго Университета.

Засѣданіе 17 декабря 1908 года.

1. Д. М. Синцовъ прочелъ некрологъ проф. Г. Ѳ. Вороного, присланный Мордухай-Болтовскимъ. Память Г. Ѳ. Вороного почтена вставаніемъ.

2. Предсѣдатель доложилъ, что имъ согласно постановленію Математическаго Общества пріобрѣтены уже фотографическія карточки нѣкоторыхъ харьковскихъ математиковъ. Кромѣ того, черезъ В. А. Стеклова полученъ портретъ проф. А. Н. Коркина для „Сообщеній Математическаго Общества“.

3. М. Н. Лагутинскій сдѣлалъ сообщеніе: „О примѣненіи необратимыхъ преобразованій при интегрированіи дифференціальныхъ уравненій“.

4. Д. М. Синцовъ сдѣлалъ сообщеніе: „Къ вопросу объ особенныхъ элементахъ коннекса“.

5. Предсѣдатель напомнилъ, что въ настоящемъ году исполнилось 30-илѣтіе существованія Математическаго Общества. Постановили: просить А. П. Пшеборскаго дополнить свою работу по исторіи Математическаго Общества, включивъ въ нее и очеркъ за послѣднія пять лѣтъ.

6. Д. М. Синцовъ сообщилъ, что имъ вскорѣ будетъ законченъ составленіемъ указатель книгъ по математикѣ и физикѣ, вышедшихъ въ Харьковѣ за послѣднія 100 лѣтъ. Постановили: напечатать этотъ указатель въ одномъ изъ ближайшихъ выпусковъ „Сообщеній Математическаго Общества".

7. Предсѣдатель напомнилъ о предстоящемъ юбилеѣ проф. К. А. Андреева. Постановили: привѣтствовать проф. К. А. Андреева и просить предсѣдателя выполнить это отъ лица Математическаго Общества.

8. Обсуждали вопросъ о возобновленіи засѣданій по вопросамъ преподаванія. Постановили: назначить первое педагогическое засѣданіе на 14-е января 1909 года и къ этому засѣданію пригласить преподавателей математики и физики всѣхъ среднихъ учебныхъ заведеній г. Харькова.

9. Обсуждали вопросъ о фиксированіи дня для научныхъ засѣданій. Постановили: назначать научныя засѣданія въ первую среду послѣ 15-го числа каждаго мѣсяца.

10. С. Н. Бернштейнъ предложилъ ввести рефераты о работахъ, появляющихся въ журналахъ. Признали введеніе такихъ рефератовъ желательнымъ, причемъ Д. М. Синцовъ взялъ на себя русскіе журналы, С. Н. Бернштейнъ „Acta mathematica" и всѣ французскіе журналы, если не найдется другихъ членовъ Общества, желающихъ реферировать эти журналы, А. П. Грузинцевъ статьи по физикѣ въ „Comptes-rendus" и Г. А. Грузинцевъ—„Rendiconti del Circolo matematico di Palermo".

11. Доложено, присланное Комитетомъ по сбору пожертвованій на Менделѣевскій Институтъ, приглашеніе Математическому Обществу принять участіе. А. П. Грузинцевъ сообщилъ, что въ Харьковѣ образовался мѣстный комитетъ, и пожертвованія могутъ быть направляемы его предсѣдателю профессору И. П. Осипову.

Засѣданіе 21 января 1909 года.

Предсѣдатель, доложивъ о постановленіи Математическаго Общества возобновить засѣданія, посвященныя вопросамъ преподаванія математики и физики въ средней и высшей школѣ, указалъ на желательность устройства подобныхъ засѣданій, дающихъ возможность обмѣна мнѣній между представителями средней школы и школы высшей и предложилъ присутствующимъ высказаться о цѣляхъ, которыя должна преслѣдовать педагогическая секція Общества.

Послѣ обмѣна мнѣній, въ которомъ участіе приняли П. В. Шепелевъ, А. П. Грузинцевъ, Г. А. Грузинцевъ и Д. А. Кутневичъ, собраніе, находя устройство такихъ засѣданій желательнымъ, намѣтило для педагогической дѣятельности Общества слѣдующія главныя цѣли:

1) обсужденіе вопросовъ, относящихся къ реформированію программы математики и физики въ средней школѣ,

2) разъясненіе различныхъ практическихъ вопросовъ преподаванія и

3) знакомство съ современнымъ состояніемъ различныхъ вопросовъ математики и физики, представляющихъ интересъ для преподавателей.

Засѣданіе постановлено устраивать два раза въ мѣсяцъ и ближайшее назначить на среду 4 февраля.

По предложенію А. П. Грузинцева обсуждался вопросъ о печатаніи докладовъ, которые будутъ сдѣланы въ педагогическихъ засѣданіяхъ Общества.

Въ цѣляхъ ознакомленія возможно большаго числа преподавателей съ дѣятельностью педагогическаго отдѣла Математическаго Общества предположено войти въ сношенія съ редакціями „Вѣстника опытной физики и элементарной математики“ и „Физическаго Обозрѣнія“ о печатаніи въ этихъ журналахъ протоколовъ засѣданій съ краткими рефератами докладовъ по примѣру Московскаго Математическаго Кружка.

И. А. Кирьяковъ указалъ на желательность разъясненія вопроса о предѣлѣ погрѣшности при логариѳмическихъ вычисленіяхъ, недостаточно разработаннаго въ общепринятыхъ учебникахъ алгебры. По просьбѣ собранія А. П. Пшеборскій согласился въ одномъ изъ ближайшихъ засѣданій сдѣлать докладъ „О приближенныхъ вычисленіяхъ“.

Изъявили желаніе сдѣлать доклады въ ближайшихъ засѣданіяхъ П. В. Шепелевъ, Д. А. Кутневичъ и В. М. Фесенко.

Засѣданіе 2 февраля 1909 года.

1. Утверждены протоколы засѣданій Математическаго Общества 31 октября и 17 декабря 1908 года и 21 января 1909 года.

2. Утвержденъ образецъ извѣщенія иностранныхъ ученыхъ о выборѣ ихъ въ члены Общества.

3. Въ число членовъ приняты, согласно уставу Общества, Д. А. Кутневичъ, Г. Ѳ. Бураковъ и П. В. Шепелевъ.

Кромѣ того избраны единогласно въ члены Общества слѣдующіе г.г. преподаватели среднихъ учебныхъ заведеній, лаборанты и ассистенты, Е. П. Аксюкъ, В. С. Гохманъ, Н. П. Гриненко, С. П. Вольскій, М. П. Дробязко, Ф. Ф. Епифановъ, Л. Г. Запорожецъ, И. І. Кирьяковъ, В. И. Кудревичъ, А. И. Марцелли, Е. Н. Марчевская, Б. Н. Мартосъ, В. И. Мощенко, Я. М. Назаревскій, А. И. Нечаевъ, Р. Д. Пономаревъ, А. И. Поповъ, Ч. В. Речинскій, М. И. Сахаровъ, А. А. Сонцовъ, Г. Е. Тимофеевъ, Г. Н. Тихоновъ, В. М. Фесенко.

4. Въ виду кончины проф. Минковскаго, члена-корреспондента Общества, постановлено просить проф. А. П. Пшеборскаго сдѣлать докладъ о научныхъ трудахъ проф. Минковскаго.

5. По случаю исполнившагося столѣтія со дня рожденія Дарвина постановлено принять участіе въ чествованіи его памяти въ публичномъ

засѣданіи Общества естествоиспытателей при Харьковскомъ Университетѣ, поручивъ распорядительному комитету Математическаго Общества передать привѣтствіе Обществу естествоиспытателей.

6. Проф. Н. Н. Салтыковъ доложилъ некрологъ проф. Г. Ф. Вороного, составленный проф. И. П. Брайцевымъ. Постановлено напечатать въ Сообщеніяхъ Математическаго Общества.

7. Проф. Н. Н. Салтыковъ сдѣлалъ сообщеніе по вопросу о Математическихъ съѣздахъ и организаціи общенія между русскими представителями математическихъ наукъ.

Постановлено напечатать докладъ въ Сообщеніяхъ Общества и поручить коммиссіи изъ трехъ членовъ Общества: А. П. Грузинцева, Д. М. Синцова и Н. Н. Салтыкова выработать основанія для осуществленія изложенныхъ въ докладѣ соображеній и выяснить связанный съ ними вопросъ о матеріальныхъ средствахъ.

8. С. Н. Бернштейнъ изложилъ обзоръ содержанія трудовъ, опубликованныхъ въ 31 томѣ журнала Acta Mathematica.

Засѣданіе 4 февраля 1909 года.

1. П. В. Шепелевъ сдѣлалъ докладъ: „Объ изложеніи законовъ механики“ (Опытъ наиболѣе раціональнаго ихъ изложенія). Профессоръ Н. Н. Салтыковъ сдѣлалъ возраженія относительно того, насколько такое изложеніе будетъ доступно ученикамъ. Профессоръ Ц. К. Руссьянъ указалъ на внутреннее противорѣчіе въ докладѣ, заключающееся въ томъ, что авторъ сейчасъ же послѣ изложенія силы разсматриваетъ отношеніе силъ т. е. разсматриваетъ силу, какъ величину, что возможно только послѣ второго закона механики. Во-вторыхъ, Ц. К. Руссьянъ указалъ на излишнюю сложность умозаключеній, ведущихъ къ опредѣленію массы и указалъ на простое, обычно излагаемое опредѣленіе ея. Въ послѣдовавшихъ преніяхъ принимали участіе П. В. Шепелевъ, проф. Е. А. Роговскій, проф. Н. Н. Салтыковъ, В. В. Коврайскій и А. А. Сонцовъ.

2. В. М. Фесенко сдѣлалъ докладъ: „О слiяніи преподаванія планиметріи съ стереометріей“, именно былъ сдѣланъ историческій очеркъ развитія этого вопроса. Предсѣдательствующій проф. Ц. К. Руссьянъ въ виду интереса и полноты очерка выразилъ г. докладчику благодарность. Проф. Н. Н. Салтыковъ, въ виду этого достоинства доклада, выразилъ также пожеланіе, чтобы этотъ докладъ былъ напечатанъ.

Засѣданіе 18 февраля 1909 года.

1. Д. А. Кутневичъ сдѣлалъ докладъ: „Теорія ахроматической призмы“.

2. П. В. Шепелевъ сдѣлалъ докладъ: „Графическій способъ изученія движенія въ стоячихъ волнахъ“.

3. П. В. Шепелевъ сдѣлалъ докладъ: „Графическій способъ изслѣдованія перемѣщенія изображенія предмета при перемѣщеніи самаго предмета“.

4. В. В. Каврайскій сдѣлалъ докладъ: „Графическій способъ рѣшенія задачъ сферической астрономіи“.

Засѣданіе 4 марта 1909 года.

1. Утвержденъ протоколъ засѣданія 2 февраля.

2. Избраны въ члены Общества г.г. В. В. Бутовъ, С. Г. Денченко, Е. П. Ивицкій, Н. Н. Малышевъ, Д. К. Педаевъ, Г. И. Петренко и Н. М. Подпрятовъ.

3. Избранъ исполняющимъ обязанности секретаря педагогическихъ собраній Математическаго Общества Н. П. Бѣляевъ.

4. Проф. А. П. Грузинцевъ сдѣлалъ докладъ: „Рѣшеніе одной задачи изъ геометрической оптики“.

5. Проф. Д. М. Синцовъ сдѣлалъ докладъ: „Кривая отраженія солнца въ морѣ“.

6. В. В. Каврайскій продолжалъ начатый имъ въ предыдущемъ засѣданіи докладъ „О графическомъ способѣ рѣшенія задачъ сферической астрономіи“.

Засѣданіе 15 апрѣля 1909 года.

1. Я. М. Назаревскій сдѣлалъ докладъ: „Число цифръ въ періодѣ десятичной (періодической) дроби“.

2. Въ число членовъ избранъ инжен.-техн. А. Г. Бѣлинскій, преподаватель частной гимназіи Драшковской.

3. В. В. Каврайскій окончилъ (3-е сообщеніе) докладъ: „О графическомъ способѣ рѣшенія задачъ сферической астрономіи“.

Засѣданіе 29 апрѣля 1909 года.

1. Г. предсѣдатель сообщилъ о письмахъ, полученныхъ отъ г.г. Жордана, Дарвина, Цейтена, Вольтерра, Арцела, Бореля, Гурса, Енрикеса, Фаваро, Фера, Форзайта, Линделёфа, Леви-Чивита, Лезана, Лоріа и Маджи, выразившихъ признательность за избраніе ихъ въ почетные члены и члены-корреспонденты Общества.

2. Г. предсѣдатель доложилъ письмо К. А. Андреева въ отвѣтъ на привѣтствіе, посланное ему отъ Математическаго Общества по случаю исполнившагося юбилея.

3. Почтена вставаніемъ память скончавшихся ученыхъ П. Д. Хрущова и Г. Морера.

4. Постановлено удовлетворить просьбу редакціи журнала Monatshefte о досылкѣ изданій Общества.

5. Постановлено вступить въ обмѣнъ изданіями съ научнымъ Обществомъ имени Шевченко въ Львовѣ и подписаться на изданіе полнаго собранія сочиненій Эйлера.

6. Г. предсѣдатель доложилъ письмо г. предсѣдателя ученаго комитета Министерства Народнаго Просвѣщенія по поводу международной коммиссіи о преподаваніи математики. Собраніе выразило пожеланіе, чтобы обсужденію послѣднихъ вопросовъ были посвящены занятія предстоящаго съѣзда естествоиспытателей и врачей въ Москвѣ, въ концѣ года, чтобы происходили съѣзды національной подкоммиссіи и чтобы резолюціи педагогическихъ засѣданій Харьковскаго Математическаго Общества сообщались въ эту подкоммиссію, въ засѣданія которой командировались бы представители Математическаго Общества, для поддержанія сдѣланныхъ постановленій.

7. Проф. Н. Н. Салтыковъ сдѣлалъ сообщеніе „Къ теоріи уравненій съ частными производными“.

8. Пр.-доц. С. Н. Бернштейнъ сдѣлалъ сообщеніе „Доказательство начала Дирихле и разложеніе функцій въ рядъ“.

Годичное засѣданіе 25 октября 1909 года.

1. Предсѣдатель, сообщивъ, что 8 сентября исполнилось 30 лѣтъ со дня перваго предварительнаго засѣданія Математическаго Общества, въ краткомъ очеркѣ намѣтилъ главныя вѣхи его дѣятельности и предложилъ почтить вставаніемъ память скончавшихся бывшихъ предсѣдателей Общества: засл. проф. Е. И. Бейсра, проф. Харьк. Унив. и акад. В. Г. Имшенецкаго и товарищей предсѣдателя проф. М. Θ. Ковальскаго и Д. М. Деларю.

2. Секретарь доложилъ отчетъ о дѣятельности Общества и денежный отчетъ. Отчетъ утвержденъ.

3. Предсѣдатель доложилъ, что лѣтомъ поступили изданія ученаго Общества въ Упсалѣ, съ которымъ рѣшено обмѣниваться изданіями, Göttinger Nachrichten съ 1897 года и изданія Наукового Товариства имени Шевченко. Библіотека благодаря работѣ главнымъ образомъ Н. П. Бѣляева приведена въ порядокъ, составленъ карточный каталогъ книгъ и брошюръ, переписаны и приведены въ порядокъ иностранные журналы и частью русскіе. Въ разборкѣ кромѣ Н. П. Бѣляева и Д. М. Синцова, принимали участіе М. Н. Марчевскій, Г. А. Грузинцевъ, С. Н. Бернштейнъ и ст. Н. Подтягинъ.

4. По предложенію проф. Н. Н. Салтыкова постановлено пожертвовать въ Математическую библіотеку Высшихъ Женскихъ Курсовъ О. В. В. Т. Ж. 2-ую серію Сообщеній и другія изданія Общества.

5. Постановлено выкладывать въ лекторіи получаемые Обществомъ журналы.

6. Произведены выборы Распорядительнаго Комитета Общества. Оказались избранными: предсѣдателемъ проф. Д. М. Синцовъ, товарищами предсѣдателя проф. А. П. Грузинцевъ и проф. Ц. К. Руссьянъ, секретаремъ проф. А. П. Пшеборскій.

7. Намѣчено устраивать засѣданія Математическаго Общества по прежнему по пятницамъ въ дни, когда не будетъ факультетскихъ засѣданій, попеременно: одно засѣданіе научнаго характера и одно педагогическаго, ставя на послѣднихъ и такіе научные доклады, которые могутъ имѣть болѣе широкій интересъ.

8. Предсѣдатель доложилъ полученныя послѣ весенняго засѣданія письма W. F. Osgood'a, A. G. Greenhill'я и C. Runge съ выраженіемъ благодарности за избраніе въ члены-корреспонденты.

9. Проф. Н. Н. Салтыковъ предложилъ избрать ревизіонную коммиссію; это предложеніе, поддержанное проф. Д. М. Синцовымъ, не было принято собраніемъ.

Отчетъ о дѣятельности Харьковскаго Математическаго Общества за $190^{8}/_{9}$ академическій годъ.

Занятія Харьковскаго Математическаго Общества за истекшій $190^{8}/_{9}$ академическій годъ открылись общимъ собраніемъ 26 октября 1908 г.

Заслушавъ отчетъ о дѣятельности Общества за $190^{7}/_{8}$ академическій годъ и утвердивъ его, собраніе избрало распорядительный комитетъ въ слѣдующемъ составѣ: предсѣдателемъ проф. Д. М. Синцова, товарищами предсѣдателя профессоровъ А. П. Грузинцева и Ц. К. Руссьяна, секретаремъ проф. Н. Н. Салтыкова.

Кромѣ годичнаго собранія въ отчетномъ году состоялось еще 9 засѣданій. Четыре изъ этихъ засѣданій были посвящены 9 научнымъ докладамъ и реферированію текущей математической литературы. Остальныя пять засѣданій были посвящены докладамъ по вопросамъ, касающимся преподаванія въ средней школѣ. Всего такихъ докладовъ было доложено 9, причемъ одинъ изъ докладовъ былъ продолженъ въ теченіе трехъ различныхъ засѣданій.

Въ истекшемъ академическомъ году вышли въ свѣтъ печатавшіяся въ прошедшемъ году 5—6 книжки X тома и 3—4 книжки XI тома и 5-ая книжка XI тома.

„Сообщенія Харьковскаго Математическаго Общества“ высылались 42 русскимъ обществамъ и учрежденіямъ и 37 иностраннымъ, въ обмѣнъ на ихъ изданія.

Кромѣ послѣднихъ изданій, въ библіотеку Общества присылались сочиненія членовъ общества, а также выписывались на средства Общества періодическія изданія: Acta mathematica, L'Intermédiaire des mathématiciens, Mathésis и Hoffman's Zeitschrift, а также и собраніе сочиненій Brioschi.

Въ отчетномъ году составъ членовъ Общества пополнился избраніемъ въ почетные члены Общества слѣдующихъ ученыхъ: G. H. Darwin, U. Dini, C. Jordan, P. Painlevé, V. Volterra и H. G. Zeuthen.

Въ члены-корреспонденты избраны ученые: C. Arzela, E. Borel, E. Goursat, H. Fehr. I. Fredholm, A. Favaro, A. R. Forsyth, F. Enriques, A. G. Greenhill, C. A. Laisant, G. Loria, E. Lindelöf, E. Holmgren, T. Levi-Civita, G. A. Maggi, G. Morera, H. Minkowski, W. F. Osgood, C. Runge, G. Teixeira.

Въ дѣйствительные члены Общества были избраны слѣдующіе преподаватели среднихъ учебныхъ заведеній: Е. П. Аксюкъ, А. Г. Бѣлинскій, Н. П. Бѣляевъ, В. В. Бутовъ, С. П. Вольскій, В. С. Гохманъ, Г. А. Грузинцевъ, Н. П. Гриненко, В. Х. Даватцъ, С. Г. Денченко, М. П. Дробязко, Ф. Ф. Епифановъ, Л. Г. Запорожецъ, Е. П. Ивицкій, И. А. Кирьяковъ, Б. В. Кудревичъ, Н. Н. Малышевъ, Е. Н. Марчевская, М. Н. Марчевскій, Б. Н. Мартосъ, А. И. Марцелли, В. И. Мощенко, Я. М. Назаревскій, А. И. Нечаевъ, Д. К. Педаевъ, Г. И. Петренко, Н. М. Подпрятовъ, Р. Д. Пономаревъ, А. И. Поповъ, Ч. В. Речинскій, М. И. Сахаровъ, А. А. Сонцовъ, Г. Е. Тимофеевъ, П. Б. Тихоновъ и В. М. Фесенко.

Кромѣ того въ число членовъ вошли преподаватели Технологическаго Института въ Харьковѣ Г. Ѳ. Бураковъ, Д. А. Кутневичъ и П. В. Шепелевъ.

Въ отчетномъ году Общество понесло тяжелыя потери въ числѣ своихъ членовъ-корреспондентовъ, вслѣдствіе кончины профессоровъ Г. Ѳ. Вороного, H. Minkowski и G. Morera.

Вслѣдствіе отмѣченныхъ измѣненій составъ Харьковскаго Математическаго Общества къ концу истекшаго академическаго года состоялъ изъ 24 почетныхъ членовъ, 81 дѣйствительныхъ членовъ и 30 членовъ-корреспондентовъ, такъ что общее число членовъ Общества равнялось 134.

Въ виду выражавшагося нѣкоторыми членами Общества пожеланія (въ томъ числѣ и секретаремъ), чтобы отчеты денежные ежегодно утверждались ревизіонной коммиссіей, при настоящемъ отчетѣ прилагается подробный кассовый отчетъ секретаря Общества съ оправдательными документами и приходо-расходной книжкой, а также справка, данная г. бухгалтеромъ Университета относительно расходованія суммъ, ассигнованныхъ изъ спеціальныхъ средствъ Университета.

Денежный отчетъ секретаря Математическаго Общества за $190^{8}/_{9}$ академическій годъ.

Приходъ.

1.	Согласно съ отчетомъ за прошлый годъ, утвержденнымъ 26 октября 1908 года, остатокъ отъ прошлаго года	90 р. 81 к.
2.	Поступило членскихъ взносовъ, за текущій годъ .	34 „ — „
3.	Получено отъ А. П. Грузинцева за его оттиски .	8 „ 55 „
	Итого . . .	133 р. 36 к.

Расходъ.

1.	Уплачено за оттиски программъ изъ Кіева . . .	4 р. 46 к.
2.	Фотографическія карточки профессоровъ математики въ Харьковскомъ Университетѣ	9 „ — „
3.	За логариѳмы Каллета, изданныя въ переводѣ Павловскимъ въ 1820 г.	— „ 50 „
4.	Устройство засѣданій Общества	10 „ 82 „
5.	Почтовые расходы и разсылка изданій Общества .	29 „ 94 „
	Итого . . .	54 р. 72 к.

Въ кассѣ Общества у секретаря остается въ наличности 78 р. 64 к.

Отчетъ по расходованію средствъ, ассигнованныхъ по смѣтѣ спеціальныхъ средствъ.

Приходъ.

1.	Остатокъ къ 25 октября 1908 года изъ прежнихъ ассигнованій	741 р. 22 к.
2.	Ассигновано по дополнительной и основной смѣтамъ спеціальныхъ средствъ Университета на 1909 г.	750 „ — „
	Итого . .	1491 р. 22 к.

Расходъ.

1.	Сторожу С. Шуличенко.	22 р. — к.
2.	За переплетъ книгъ	13 „ 90 „
3.	Пріобрѣтено книгъ на	85 „ 08 „
4.	Уплачено за портреты А. Н. Коркина и А. П. Грузинцева.	47 „ 30 к.
5.	Уплачено по счетамъ типографіи Зильберберга .	836 „ 20 „
	Итого. . .	1004 р. 48 к.

Къ 25 октября 1909 года остается въ кассѣ Университета средствъ, ассигнованныхъ Математическому Обществу 486 р. 74 к. (по справкѣ полученной отъ бухгалтера Университета).

Приложеніе къ протоколу засѣданія 15 апрѣля 1909 г. Докладъ Я. М. Назаревскаго о числѣ цифръ въ періодѣ десятичной періодической дроби.

I. На основаніи элементарныхъ свойствъ дѣлимости доказывается, что несократимая дробь $\frac{r}{m}$, знаменатель которой есть число взаимно простое съ 10, при обращеніи въ десятичную даетъ чистую періодическую дробь и число цифръ въ періодѣ равно наименьшему показателю l, при которомъ $10^l - 1$ дѣлится на m.

II. Съ помощью теоремы Фермата устанавливается то положеніе, что для несократимой дроби $\frac{r}{p}$, гдѣ p — абсолютно простое число, отличное отъ 2 и 5, число цифръ въ періодѣ десятичной дроби равно дѣлителю числа $p-1$.

III. Въ дальнѣйшемъ приходится пользоваться теоріей квадратичныхъ вычетовъ и различать два случая:

α) Если простое число p будетъ вида $40n \pm 1, \pm 3, \pm 9, \pm 13$, то несократимая дробь $\frac{r}{p}$, при обращеніи въ десятичную, даетъ періодъ, въ которомъ число цифръ есть дѣлитель $\frac{p-1}{2}$; если же притомъ $p = 2q+1$, гдѣ q — простое число, то число цифръ періода $= \frac{p-1}{2}$.

β) Если p будетъ вида $40n \pm 7, \pm 11, \pm 17, \pm 19$ и $p - 1 = 2^m p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots$ гдѣ p_1, $p_2 \ldots$ нечетныя простыя числа, то число цифръ въ періодѣ всегда четное и дѣлится на 2^m.

Частные случаи, для которыхъ число цифръ въ періодѣ равно $p-1$: 1) простыя числа вида $2^{2^n}+1$ и 2) простыя числа вида $p = 2^n q + 1$, при томъ условіи, что q — число простое и $10^{2^{n-1}}+1$ не дѣлится на p. Сюда относятся простыя числа вида $2q+1$ (кромѣ 11), вида $4q+1$, вида $8q+1$ (кромѣ 137), вида $16q+1$ и вида $32q+1$ (кромѣ 353).

IV. Несократимая дробь $\frac{r}{p_1^{\alpha_1}}$ даетъ періодъ заключающій или $lp_1^{\alpha_1-1}$ или $lp_1^{\alpha_1-s}$ цифръ, смотря по тому, будетъ ли $10^l - 1$ дѣлиться только на p_1 или на p_1^s $(s > 1)$.

V. Въ самомъ общемъ случаѣ несокр. дробь $\frac{r}{m}$, гдѣ $m = 2^n 5^k p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots$ даетъ смѣшанную періодическую дробь, въ которой до періода n или k цифръ ($n \gtrless k$), а число цифръ въ періодѣ равно наименьшему кратному чиселъ $l_1 p_1^{s_1}$, $l_2 p_2^{s_2}, \ldots$ опредѣляющихъ соотвѣтственно число цифръ въ періодѣ для знаменателей $p_1^{\alpha_1}$, $p_2^{\alpha_2}$ . . .

В. В. Каврайскій. Программа и нѣкоторыя положенія доклада „Графическіе способы рѣшенія задачъ сферической астрономіи", прочитаннаго въ Харьковскомъ Математическомъ Обществѣ на засѣданіяхъ 18.II, 4.III и 15.IV 1909 г.

ВВЕДЕНІЕ.

Значеніе графическихъ способовъ въ астрономіи. Классификація и обзоръ извѣстныхъ автору графическихъ способовъ рѣшенія астрономическихъ задачъ; упомяну здѣсь слѣдующіе, какъ наиболѣе близкіе къ изложенному въ первой части доклада: 1) *E. Ronin.* Planisphère cherche-étoiles. Ed. par G. Thomas. Paris. 93.—2) *D-r E. Kohlschütter.* Messkarte zur Auflösung der sphaer. Dreiecke nach Chauvenet. Verl. von D. Reimer, Berl. 05.—3) *D-r F. Koerber.* Transformator für sph. Coordinaten. Verl. von D. Reimer. Berl. 06. 4) Проф. *Г. Вульфъ.* Способъ графическаго рѣшенія задачъ по космографіи и математической географіи. Нижн.-Новг. 1909. (Приложеніе къ „Рус. Астр. Кал." Ниж. Кр. Люб. Физ. и Астр.) [1]).

Стереографическая сѣтка. Условное изображеніе точекъ полусферы, содержащей центръ проектированія. Основные пріемы рѣшенія задачъ сферической геометріи въ стереографической проекціи при помощи стереографической сѣтки; между прочимъ—измѣреніе угловъ разстояніемъ полюсовъ сторонъ и черезъ приведеніе проекціи вершины надлежащей перемѣной плоскости проекцій въ центръ или на „главную окружность" сѣтки (т. е. окружность, по которой проектируемая сфера пересѣкается съ плоскостью проекцій). *Графическое рѣшеніе сферическихъ треугольниковъ при помощи стереографической сѣтки.* При этомъ возможно обойтись безъ построенія проекцій малыхъ круговъ съ полюсомъ не на главной окружности.

Распространеніе изложеннаго выше на другіе виды картографическихъ проекцій. Основное условіе пригодности картографической проекціи для графическаго рѣшенія задачъ сферической геометріи вышеуказанными

---

[1]) Послѣдняя работа вышла въ свѣтъ, когда «Планисфера и счетный кругъ» (см. ниже) были уже построены, а о трехъ первыхъ я узналъ лишь по прочтеніи доклада.

способами: вращенію сферы вокругъ нѣкотораго діаметра („главный діаметръ“) должно соотвѣтствовать вращеніе ея проекціи вокругъ нѣкотораго центра („центръ проекціи“ сѣтки) на пропорціональный уголъ или прямолинейное поступательное движеніе на пропорціональную длину. Кромѣ того желательно, чтобы проекція по крайней мѣрѣ одной изъ полусферъ, на которыя сфера раздѣляется плоскостью, перпендикулярной главному діаметру, имѣла конечные размѣры (точки другой полусферы могутъ условно изображаться проекціями точекъ симметричныхъ имъ относительно только что упомянутой плоскости).

I. Планисфера.

Такъ названа центральная часть сдѣланнаго мною чертежа [1]) для графическаго рѣшенія астрономическихъ задачъ посредствомъ построенія стереографическихъ проекцій, входящихъ въ задачу линій и точекъ (иногда только точекъ) небесной сферы. Черченіе производится карандашемъ отъ руки на транспарантѣ изъ коленкоровой кальки, вращающемся вокругъ иглы, втыкаемой въ центръ чертежа. Планисфера представляетъ: 1) стереографическую сѣтку 30 *ст.* въ діаметрѣ съ меридіанами и параллелями черезъ 1^0; утолщенные меридіаны проведены черезъ $5^0 = 20^m = \frac{1}{3}^h$, что позволяетъ производить отсчеты въ часахъ и минутахъ почти такъ же легко, какъ и въ градусахъ; 2) стереографическую проекцію на плоскость небеснаго экватора звѣздъ сѣвернаго (синій цвѣтъ) и южнаго (красный цвѣтъ) полушарій до 3-й величины включительно; 3) проекцію эклиптики на ту же плоскость съ отмѣченными на ней положеніями истиннаго солнца въ средній московскій полдень на каждый день 1910 г. (нумерація по старому и по новому стилю); 4) положенія средняго солнца въ тѣ же моменты (нумерація по с. и н. ст.); 5) стереографич. проекцію эклиптики на плоскость колюра солнцестояній съ положеніями ист. солнца въ тѣ же моменты (нумерація по нов. ст.) и 6) шкалу для поворота транспаранта на уголъ, равный прецессіи за промежутокъ времени между двумя данными эпохами, для эпохъ отъ 500 г. до Р. Х. до 2000 г. по Р. Х..

Способъ пользованія шкалами, опредѣляющими положенія истиннаго и средняго солнца, въ разные годы и на различныхъ меридіанахъ.

Рѣшеніе задачъ въ проекціи на плоскость круга склоненія (меридіана, колюра солнцестояній и т. д.): *преобразованіе координатъ, восходъ и заходъ свѣтилъ, сумерки, опредѣленіе времени, азимута* и т. под.

Рѣшеніе задачъ въ проекціи главнымъ образомъ *на плоскость экватора.* Такой выборъ плоскости проекцій позволяетъ, пользуясь выше-

[1]) Оконченъ въ декабрѣ 1908 г.

упомянутой звѣздной картой и проекціями эклиптики и экватора, обходиться при рѣшеніи большей части задачъ безъ астрономическаго календаря и звѣзднаго каталога; кромѣ того, суточному вращенію земли здѣсь соотвѣтствуетъ вращеніе транспаранта, благодаря чему является возможность избѣжать не только вычисленія какихъ бы то ни было, хотя бы самыхъ простыхъ, формулъ, но даже ссылокъ на нихъ,—всѣ задачи рѣшаются чисто графически на основаніи однихъ только опредѣленій основныхъ понятій сферической астрономіи; при этомъ ошибка результата (какъ и при пользованіи способами, указанными выше) не превосходитъ $0^0.2 — 0^0.3$ дуги большого круга, а экономія времени по сравненію съ рѣшеніемъ тѣхъ же задачъ вычисленіемъ достигаетъ 90%.

Опредѣленіе горизонтальныхъ координатъ свѣтила въ заданный моментъ звѣзднаго или средняго времени. Опредѣленіе координатъ звѣздъ въ отдаленную эпоху. Редукція положенія солнечныхъ пятенъ. Задачи на восходъ и заходъ свѣтилъ, сумерки, прохожденіе свѣтилъ черезъ меридіанъ и первый вертикалъ и элонгацію. Для частаго рѣшенія этихъ послѣднихъ задачъ для одной и той же географической широты полезно разъ навсегда нанести на транспарантѣ отъ руки при помощи планисферы проекціи—меридіана, 1-го вертикала, горизонта, альмукантаратовъ, лежащихъ на 1^0 и 18^0 ниже горизонта, и геометрическаго мѣста точекъ, параллактическій уголъ которыхъ $= 90^0$; эта послѣдняя линія легко строится по точкамъ. Планисфера съ такимъ транспарантомъ съ успѣхомъ замѣняетъ подвижную карту звѣзднаго неба.

Общій взглядъ съ геометрической точки зрѣнія на различные способы опредѣленія географической широты (φ) и поправки часовъ ($\Delta\sigma$, $\Delta\mu$). Зная экваторіальныя координаты свѣтилъ и моменты ихъ наблюденія по звѣдному хронометру съ неизвѣстной поправкой $\Delta\sigma$, легко построить проекціи положеній этихъ свѣтилъ въ моменты ихъ наблюденія относительно того меридіана, на которомъ хронометръ показывалъ бы вѣрное звѣздное время (будемъ называть этотъ меридіанъ „исходнымъ“). Затѣмъ, на основаніи остальныхъ данныхъ наблюденія, строимъ проекціи двухъ, по крайней мѣрѣ, геометрическихъ мѣстъ зенита мѣста наблюденія: если, напр., наблюдалось зенитное разстояніе (z) звѣзды, то малый кругъ сферическаго радіуса z, описанный вокругъ этой звѣзды будетъ однимъ изъ такихъ геометрическихъ мѣстъ; если двѣ звѣзды въ моменты ихъ наблюденія находились на одномъ вертикалѣ, то однимъ изъ геометрическихъ мѣстъ зенита будетъ этотъ вертикалъ, который получимъ, проведя окружность большого круга черезъ положенія наблюдаемыхъ звѣздъ; если извѣстна φ, то можемъ построить суточную параллель зенита, которая и будетъ однимъ изъ его геометрическихъ мѣстъ, и т. д. Изъ двухъ, обыкновенно, точекъ пересѣченія проекцій геометрическихъ мѣстъ зенита

всегда легко выбрать изображающую зенитъ; приведя ее на одинъ изъ діаметровъ стереографической сѣтки отсчитаемъ непосредственно искомыя φ и $\Delta\sigma$ (или одну изъ нихъ, если другая извѣстна); на самомъ дѣлѣ: φ есть склоненіе зенита, а $\Delta\sigma$, какъ легко понять, равна часовому углу „исходнаго“ меридіана. Подобнымъ же образомъ рѣшается задача и въ томъ случаѣ, когда моменты отмѣчены по хронометру, идущему по среднему времени, и ищется его поправка $\Delta\mu$; такъ какъ при этомъ, опредѣляя на планисферѣ положеніе средняго солнца, мы не принимаемъ во вниманіе неизвѣстной пока разности долготъ мѣста наблюденія и „исходнаго“ меридіана, то, какъ не трудно показать, искомая поправка получится выраженною въ единицахъ звѣзднаго, а не средняго времени [1]).

На основаніи приведеннаго геометрическаго разсмотрѣнія задачи легко вывести *условіе выгоднѣйшаго подбора звѣздъ для наблюденій*—опредѣляемыя наблюденіями геометрическаго мѣста зенита должны пересѣкаться ортогонально—и вообще *изслѣдовать* задачу.

Графическое рѣшеніе при помощи планисферы различныхъ задачъ на опредѣленіе широты и времени. Его практическое значеніе. Составленіе эфемеридъ къ наблюденіямъ для опредѣленія широты и времени производится по той же схемѣ, какъ опредѣленіе поправки часовъ соотвѣтствующимъ пріемомъ.

II. Счетный кругъ.

На одномъ листѣ съ планисферою, вокругъ нея, нанесены нѣсколько окружностей и дугъ съ дѣленіями, представляющія *счетный кругъ*, сходный съ логариѳмической линейкой и приспособленный для рѣшенія главнымъ образомъ астрономическихъ задачъ; онъ состоитъ изъ слѣдующихъ шкалъ: 1) Внѣшняя окружность (діам. 34 *ст.*), раздѣленная на 1000 частей; соотвѣтствующіе этимъ дѣленіямъ центральные углы служатъ модулемъ другихъ шкалъ: для шкалъ 5-й, 9-й и 10-й одно дѣленіе первой шкалы соотвѣтствуетъ $1''$, а для остальныхъ—0.001. 2) Логариѳмическая шкала—даетъ дуги, соотвѣтствующія десятичному lgx по аргументу x. 3) $lgsin\xi = lgcos\xi_1$ по аргументу ξ или ξ_1, для $6^0 \leqq \xi \leqq 90^0$. 4) Небольшая шкала для $S = lgsin\xi - lg\xi'$ (минутъ) и $T = lgtg\xi - lg\xi'$ по аргументу ξ для $\xi \leqq 6^0$. 5) Средняя рефракція по *Laplace*'у для температуры воздуха $(t_e) = +10^0C$ и высоты барометра $H_0 = 760mm$ при температурѣ ртути $t_i) = +10^0C$; аргументъ $-h'$ (видимая высота) или $z' = 90^0 - h'$. 6) $lgT_e = lg\dfrac{1+10\alpha}{1+\alpha t_e}$ по аргументу t_e въ градусахъ C или R (α — коэф-тъ расширенія воздуха).

---

[1]) По небольшой точности, даваемой планисферой, послѣднее замѣчаніе не имѣетъ практическаго значенія, если поправка не слишкомъ велика.

7) $lgT_i = lg\frac{1+10\beta}{1+\beta t_i}$ по аргументу t_i въ ^{00}C или R (β — коэф-тъ расш. ртути). 8) Отдѣльные штрихи для lgH_0^{mm} и $lgH_0^{\text{анг. дм.}}$ около логариѳмической шкалы для поворота транспаранта на уголъ, соотвѣтствующій $lg\frac{H}{H_0}$ по аргументу H^{mm} или $H^{\text{а. д.}}$ 9) Дѣйствіе параллакса на высоту солнца по аргументу h или z. 10) Видимый радіусъ солнца на разные дни года. 11) Отдѣльные штрихи, соотвѣтствующіе логариѳмамъ слѣдующихъ чиселъ: π, 2π, $\frac{4}{3}\pi$, e, $sin\ 1''$, $\frac{1\text{ сж.}}{1\ m.}$, $\frac{1\text{ англ. дм.}}{1\ ст.}$, $\frac{1\ m.}{1\text{ англ. фт.}}$, $\frac{1\ krg.}{1\text{ рус. фн.}}$, $235^s.9 (= 3^m55^s.9)$, $236^s.6 (= 3^m56^s.6)$ и средняго радіуса земли въ km.

3 основныхъ пріема вычисленій при помощи счетнаго круга: 1) поворотъ транспаранта съ проведеннымъ на немъ указателемъ въ положительную сторону на уголъ между началомъ и даннымъ штрихомъ какой-нибудь шкалы, 2) поворотъ въ отрицательную сторону, 3) поворотъ на уголъ, равный разности угловъ между началомъ шкалы и двумя данными штрихами.

Опредѣленіе рефракціи и приведеніе видимыхъ высотъ края солнца къ истиннымъ высотамъ центра. Примѣръ совмѣстнаго примѣненія планисферы и счетнаго круга: *опредѣленіе вліянія рефракціи на угловое разстояніе двухъ звѣздъ* въ данный моментъ. Эти задачи рѣшаются съ точностью до 0·5 и съ весьма большой экономіей времени по сравненію съ вычисленіемъ (послѣдняя напр., въ 10 минутъ, если свѣтила изображены на планисферѣ).

III. Графическій выводъ широты (φ), поправки часовъ ($\Delta\sigma$, $\Delta\mu$) и азимута (a) изъ наблюденій по способу Harzer'a.

Способъ Harzer'a, изложенный въ общеизвѣстномъ „Путеводителѣ по небу“ К. Д. Покровскаго (Изд. 2-е Спб. 97, стр. 256), состоитъ въ наблюденіи по часамъ, поправку которыхъ желаютъ опредѣлить, моментовъ прохожденія двухъ паръ звѣздъ черезъ 2 вертикала. Вертикалы осуществляются двумя подвѣшенными нитяными треугольниками съ привязанными грузами. Такимъ образомъ для опредѣленія широты и времени этимъ способомъ не требуется никакихъ спеціально астрономическихъ инструментовъ, и самыя наблюденія чрезвычайно просты. Наоборотъ, вычисленія этихъ наблюденій довольно сложны, въ особенности въ томъ случаѣ, когда не извѣстны ни широта, ни время. Графическіе способы могутъ облегчить или даже совершенно устранить эти вычисленія.

Примѣненіе планисферы. Пусть замѣчены моменты прохожденія 2-хъ паръ звѣздъ черезъ 2 вертикала и извѣстны ихъ экваторіальныя координаты, ищутся φ и $\Delta\sigma$ (или $\Delta\mu$, если хронометръ идетъ по сред-

нему времени). Изъ сказаннаго выше объ опредѣленіи широты и времени вообще, ясно, какъ рѣшить эту задачу при помощи планисферы или просто стереографической сѣтки. Зная основные пріемы построеній при помощи стереографической сѣтки, легко опредѣлить и азимуты вертикаловъ, на которыхъ наблюдались свѣтила.

Гномоническая (центральная) *проекція.* Для рѣшенія этой же задачи вмѣсто стереографической сѣтки можно съ удобствомъ примѣнить гномоническую, лучше всего—зенитальную для широты (φ_0), не слишкомъ отличающейся отъ широты мѣста наблюденія. Такія сѣтки ($\varphi_0 = 45^0$), построенныя Lorenzoni, годныя для всей Европы, приложены къ „Звѣздному атласу К. Д. Покровскаго (Изд. А. Маркса, Спб.). Вычисливъ часовые углы свѣтилъ въ моменты ихъ наблюденія относительно „исходнаго“ (см. выше) меридіана и принявъ за таковой одинъ изъ меридіановъ сѣтки, наносимъ свѣтила на сѣтку или на положенный на нее транспарантъ; затѣмъ соединяемъ проекціи свѣтилъ, наблюденныхъ на одномъ вертикалѣ прямыми линіями [1]) и отсчитываемъ склоненіе и часовой уголъ (отъ исходнаго меридіана) точки ихъ пересѣченія, т. е. проекціи зенита,— эти координаты соотвѣтственно равны φ и —(минусъ) $\Delta\sigma$ (или $\Delta\mu$).

Возстановленіе перпендикуляровъ къ меридіанамъ въ гномонической проекціи. Проекцію перпендикуляра къ меридіану въ данной точкѣ можно построить, принимая во вниманіе, что она проходитъ черезъ проекцію полюса этого меридіана. Для средняго меридіана (т. е. перпендикулярнаго къ плоскости проекцій) проекція перпендикуляра къ нему перпендикулярна его проекціи. Всякую точку чертежа легко привести на средній меридіанъ, мысленно вращая проектируемую сферу на надлежащій уголъ, чему соотвѣтствуетъ перемѣщеніе проекцій всѣхъ ея точекъ вдоль параллей сѣтки на то же число градусовъ.

Измѣреніе азимута въ гномонической проекціи. Биссекторъ остраго угла между экваторомъ и горизонтомъ обладаетъ тѣмъ свойствомъ, что для всѣхъ его точекъ часовые углы равны азимутамъ; для каждой точки биссектора тупого угла между экваторомъ и горизонтомъ азимутъ = дополненію часового угла до 180^0. Для опредѣленія азимута вертикала, нанесеннаго на гномоническую сѣтку, отсчитываемъ часовой уголъ точки пересѣченія его съ проекціей одного изъ только что упомянутыхъ биссекторовъ.

Изложенные способы даютъ точность, значительно меньшую точности самихъ наблюденій, и потому не годятся для ихъ окончательной обработки. Однако, если одинъ изъ вертикаловъ былъ близокъ къ меридіану, а другой—къ 1-му вертикалу, то, принявъ найденное графически φ за истинное, можемъ вычислить $\Delta\sigma$ по болѣе простымъ форму-

---

[1]) Гномоническая проекція большого круга есть прямая.

ламъ для того случая, когда φ извѣстно, уже съ достаточной точностью, изъ наблюденій близъ меридіана. Зная $\Delta\sigma$ найдемъ окончательное значеніе φ изъ наблюденія вблизи 1-го вертикала.

Графическій выводъ времени и азимута изъ наблюденій по способу Harzer'a. При помощи планисферы или сѣтки Lorenzoni задача рѣшается подобно предыдущей, только вторымъ геометрическимъ мѣстомъ зенита служитъ суточная параллель зенита. Вмѣсто того, чтобы наносить проекціи свѣтилъ по ихъ часовымъ угламъ относительно „исходнаго" меридіана, можно строить ихъ относительныя положенія по разности ихъ дѣйствительныхъ часовыхъ угловъ и, получивъ проекцію зенита, отсчитывать одинъ изъ этихъ угловъ, откуда уже нетрудно вывести поправку часовъ ариѳметически. При этомъ, если азимутъ малъ, всѣ построенія произведутся *въ узкой полосѣ около меридіана*, хотя бы $\Delta\sigma$ было и велико.

Нижеслѣдующіе графическіе способы даютъ возможность опредѣлить $\Delta\sigma$ *съ достаточной точностью*, совершенно не прибѣгая къ тригонометрическимъ вычисленіямъ, если наблюденіе сдѣлано вблизи меридіана и φ извѣстна.

„Сокращенная" гномоническая проекція. Представимъ себѣ гномоническую сѣтку въ крупномъ масштабѣ, выдѣлимъ изъ нея неширокую полосу вдоль средняго меридіана и спроектируемъ ее ортогонально на плоскость, перпендикулярную плоскости этого меридіана; выбирая достаточно близкимъ къ 90^0 уголъ между I и II плоскостями проекцій, можемъ, какъ намъ угодно, уменьшить размѣръ (а слѣд. и масштабъ) II-й проекціи въ направленіи средняго меридіана. Полученную такимъ образомъ сѣтку назовемъ *„сокращенной" гномонической.* Въ сокращенной гномонической проекціи, очевидно, какъ и въ обыкновенной, большіе круги проектируются прямыми, поэтому $\Delta\sigma$ и a опредѣляются при помощи этой сѣтки совершенно такъ же, какъ и сѣткой Lorenzoni, но съ гораздо большей точностью, соотвѣтствующей первоначальному масштабу (уменьшеніе масштаба вдоль средняго меридіана мало вліяетъ на точность результата, подобно ошибкамъ въ φ и δ).

На докладѣ были демонстрированы 2 сокращенныхъ гномоническихъ сѣтки — экваторіальная ($\varphi_0 = 0^0$) и полярная ($\varphi_0 = 90^0$) размѣромъ 25×15 *ст.* охватывающія по 136^0 по склоненію и по $4^0 10'$ въ перпендикулярномъ направленіи (въ срединѣ чертежа); если добавить къ нимъ еще зенитальную сѣтку тѣхъ же размѣровъ для $\varphi_0 = 45^0$, то зенитъ и любыя 2 звѣзды, удаленныя по склоненію не болѣе, чѣмъ на 90^0 одна отъ другой, всегда могутъ быть нанесены на одну изъ этихъ сѣтокъ

---

[1]) *F. Oom.* Méthodes de calcul graphique en usage à l'Observatoire Royal de Lisbonne, Lisb. 05. p. 3.

(при маломъ a, разумѣется), при чемъ $\Delta\sigma$ и a отсчитываются съ точностью, соотв., до $2^s - 4^s$ или $^1/_2' - 1'$.

Сокращенныя гномоническія сѣтки позволяютъ такъ же легко рѣшить слѣдующую, напр., задачу: найти часовой уголъ (малый) t, зная φ, δ и a или φ, δ, азимутъ (a') пассажнаго инструмента и наклонъ (i) его оси (ср. графическій способъ редукціи прохожденій M. Campos Rodrigues'a) [1]).

„Полярный“ способъ. Если, при маломъ или близкомъ къ 180^0 азимутѣ a, часовые углы t_1 и t_2 наблюденныхъ свѣтилъ будутъ также малы или близки къ 180^0, для чего достаточно избѣгать звѣздъ близкихъ къ полюсу, то полюсы часовыхъ круговъ и вертикала будутъ лежать въ двухъ *небольшихъ* областяхъ около полюсовъ меридіана, т. е. точекъ запада (W) и востока (O). Сведя графическое рѣшеніе задачи къ построенію этихъ полюсовъ и измѣренію разстояній между ними, можемъ производить его въ большомъ масштабѣ и получить значительную точность.

Пусть имѣемъ небольшую часть стереографической сѣтки около ея полюса. Наложенный на нее транспарантъ можно вращать концентрически, наблюдая, чтобы 2 отмѣченныя на немъ точки постоянно находились на „главной“ (см. введеніе) окружности. Примемъ эту окружность за изображеніе небеснаго экватора, а на ея полюсѣ отмѣтимъ точку P_1, западный полюсъ часового круга первой изъ наблюденныхъ звѣздъ; большой кругъ, полюсомъ котораго служитъ эта звѣзда, проходитъ черезъ P_1 и составляетъ съ экваторомъ уголъ равный $90^0 - \delta$, считая отъ юга (предполагаемъ для краткости азимутъ и часовые углы обѣихъ звѣздъ положительными и близкими къ 0^0, а не къ 180^0); пользуясь меридіанами сѣтки, проводимъ его проекцію. Полюсъ P_2 часового круга второй звѣзды лежитъ на экваторѣ же, къ сѣверу отъ P_1 въ разстояніи, равномъ $t_2 - t_1 = (\sigma_2 - \sigma_1) - (\alpha_2 - \alpha_1)$, гдѣ $(\sigma_2 - \sigma_1)$—промежутокъ времени между прохожденіями, выраженный въ звѣздномъ времени, α_1 и α_2 — прямыя восхожденія свѣтилъ. Построивъ P_2 и приведя его вращеніемъ транспаранта на полюсъ сѣтки, проводимъ мысленно дугу большого круга, полюсомъ котораго служитъ вторая звѣзда, и отмѣчаемъ карандашемъ точку S ея пересѣченія съ соотвѣтствующей линіей для первой звѣзды. S есть, очевидно, полюсъ большого круга, проходящаго черезъ обѣ звѣзды, т. е. полюсъ вертикала, на которомъ онѣ наблюдены. Горизонтъ проходитъ черезъ эту точку S и пересѣкаетъ экваторъ въ точкѣ запада (W) подъ угломъ, равнымъ $90^0 - \varphi$; повернемъ транспарантъ такъ, чтобы S упала на соотвѣтствующій этому углу меридіанъ сѣтки, тогда полюсъ сѣтки будетъ изображеніемъ точки W, и мы отсчитаемъ: $a = WS$ и $t_1 = WP_1$. Поправка часовъ (идущихъ по звѣздному времени) $\Delta\sigma = \sigma_1 - (t_1 + \alpha_1)$.

Если наблюденіе произведено не нитянымъ треугольникомъ, а пассажнымъ инструментомъ съ наклономъ оси i, и коллимаціонная ошибка исключе-

на перекладываніемъ трубы или $= 0$, то S есть слѣдъ оси инструмента, и горизонтъ не проходитъ черезъ S, а касается окружности, описанной вокругъ S сферическимъ радіусомъ i. Изображеніе этой окружности легко построить циркулемъ, принимая во вниманіе конформность стереографической проекціи и малость i.

Чтобы экваторъ изображался прямою, можно пользоваться подобной же сѣткой въ цилиндрической проекціи (цилиндръ касается проектируемой полусферы по крайнему меридіану) или, еще лучше,—въ меркаторской, такъ какъ послѣдняя конформна.

При a, t_1 и t_2 достаточно малыхъ можно просто принять часть поверхности сферы за плоскость и рѣшать задачу, не прибѣгая къ сѣткѣ, при помощи циркуля, линейки, масштаба и транспортира.

Науково-Дослідний Інститут
БІБЛІОТЕКА
Інв. № 578
Математики і Механіки ХДУ