РЕФЕРАТЫ

УДК 2—2—3

О регулярности роста субгармонических функций. Гришин А. Ф. Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения», вып. 6, 1968, стр. 3.

Пусть $u(z)$ — субгармоническая во всей плоскости функция конечного уточненного порядка $\rho(r)$, а μ — мера того же порядка. Введем функции

$$u_h(z) = \frac{u(z+hz) - u(z)}{r^{\rho(r)}}, \quad v_h(z) = \frac{1}{r^{\rho(r)}} \int\limits_{|z-\zeta| \leqslant \frac{1}{4}|z|} \ln \left| \frac{\zeta - z - hz}{\zeta - z} \right| d\mu(\zeta).$$

Множество C называется исключительным для функции $u(z)$ (меры μ), если при $z + hz \overline{\in} C$, $z \overline{\in} C$ функция

$$u_h(z) \underset{h \to 0}{\rightrightarrows} 0 \quad (v_h(z) \underset{h \to 0}{\rightrightarrows} 0).$$

В первой части работы находятся достаточные условия, для того чтобы функция $u(z)$ (мера μ) имела исключительное множество, состоящее из кругов

1) со сколь угодно малой верхней линейной плотностью;
2) с нулевой линейной плотностью;
3) видимых из начала координат под конечным углом;
4) с конечной суммой радиусов.

Во второй части исследуется точность этих достаточных условий.

Библиографических ссылок 21.

УДК 2—2—3

О росте целых функций, удовлетворяющих специальным неравенствам. Зимогляд В. В. Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения», вып. 6, 1968, стр. 30.

Доказана следующая теорема. Пусть $F(w) \not\equiv \text{const}$ и $f(z)$ — целые функции. Если функция $\varphi(z) = F(f(z))$ удовлетворяет неравенству

$$|\varphi(x+iy)| \leqslant M(|y|, \varphi), \ -\infty < x, \ y < \infty, \ M(r, \varphi) = \max_{|z|=r} |\varphi(z)|,$$

то справедливо одно из следующих утверждений:

а) $f(z)$ — полином степени не больше 2;

б) $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\, r^{-1} \ln M(r, \varphi) = \infty$;

в) $0 < \underline{\lim\limits_{r\to\infty}}\, r^{-1} \ln M(r, \varphi) = \overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\, r^{-1} \ln M(r, \varphi) < \infty$.

Ранее И. В Островским было доказано (РЖМат, 1964, 7Б146), что при тех же условиях либо $f(z)$ — полином степени не больше 2, либо $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\, r^{-1} \ln M(r, f) > 0$.

Рисунков 2. Библиографических ссылок 4.

УДК 2—2—3

Обобщение второй теоремы Абеля и теоремы Таубера на ряды Ньютона с узлами, уходящими в бесконечность. Морозюк Э. В. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения», вып. 6, 1968, стр. 42.

Для степенных рядов известны вторая теорема Абеля и теорема Таубера. При определенных ограничениях эти теоремы обобщаются на ряды Ньютона

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\prod\limits_{k=1}^{n} \lambda_k} \prod_{k=1}^{n} (z - \lambda_k)$$

с узлами λ_k, $|\lambda_k| \to \infty$ при $k \to \infty$ и $|\arg \lambda_k| \leqslant \psi_0$, $0 \leqslant \psi_0 < \frac{\pi}{2}$.

Будем говорить, что последовательность $\{\lambda_k\}$ удовлетворяет условиям (β), если

1) $|\lambda_k| \to \infty$ при $k \to \infty$;

2) $|\arg \lambda_k| \leqslant \psi_0$, $0 \leqslant \psi_0 < \frac{\pi}{2}$;

3) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_k|}$ расходится;

4) показатель сходимости последовательности $\{\lambda_k\}$ конечен. Назовем областью G_{z_0} область, определяемую неравенствами

$$|\arg (z - z_0)| \leqslant \frac{\pi}{2} - \psi_0 - \delta, \ |z - z_0| \leqslant R,$$

где $0 < \delta < \frac{\pi}{2} - \psi_0$, $R > 0$, $\delta = \text{const}$, $R = \text{const}$.

Для рассматриваемых рядов справедливы аналоги второй теоремы Абеля и теоремы Таубера.

Теорема 1. *Пусть последовательность $\{\lambda_k\}$ узлов ряда* (1) *удовлетворяет условиям* (β) *и вещественная часть узлов такова, что*

$$a\eta(k) \leqslant \operatorname{Re} \lambda_k \leqslant b\eta(k),$$

где a и b — некоторые постоянные, $0 < a \leqslant b < +\infty$, а функция $\eta(x)$ при $x \geqslant 1$ положительна и имеет непрерывную положительную производную. Тогда, если ряд (1) *сходится в точке z_0, отличной от узла ряда, он равномерно сходится в области G_{z_0}.*

Теорема 2. *Пусть z_0 является точкой границы области сходимости ряда* (1), *отличной от узла ряда, последовательность $\{\lambda_k\}$ удовлетворяет условиям, налагаемым на последовательность узлов в теореме 1, а коэффициенты ряда таковы, что при $n \to \infty$*

$$\left| a_n \lambda_n \exp \left[(-z_0 + \gamma) \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\lambda_k} \right] \right| = 0 \left(\frac{1}{n} \right),$$

где γ — сколь угодно малая положительная постоянная. Тогда, если при стремлении z к z_0 по некоторому пути, лежащему в G_{z_0}

$$\lim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\prod\limits_{k=1}^{n} \lambda_k} \prod_{k=1}^{n} (z - \lambda_k) = S,$$

ряд (1) сходится в точке z_0 и его сумма равна S.

Аналогичные теоремы остаются справедливыми в случае, когда узлы λ_k удовлетворяют некоторым условиям, отличным от приведенных выше.

Библиографических ссылок 10.

УДК 2—2—3 **К обратной задаче теории наилучших приближений в пространствах Банаха.** Димитров Д. Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения», вып. 6, 1968, стр. 52.

Вводится в c_0 эквивалентная норма, которая делает его локально равномерно выпуклым. Строится T-система, не являющаяся B-системой.

Библиографических ссылок 4.

УДК 2—2—3 **Эквивалентные нормы в несепарабельных B-пространствах с безусловным базисом.** Троянски С. Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения», вып. 6, 1968, стр. 59.

Статья посвящена доказательству следующего предложения: пространство Банаха с безусловным базисом любой мощности изоморфно локально равномерно выпуклому пространству.

Библиографических ссылок 5.

УДК 2—2—3 **Некоторые двумерные банаховы пространства с симметричным наклоном.** И в а н о в Л. А. Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения», вып. 6, 1968, стр. 66.

Пусть P и Q — подпространства банахова пространства E. Наклоном P к Q называется величина

$$(\widehat{P, Q}) = \inf \| x - y \| \qquad (x \in P, \ y \in Q, \ \| x \| = 1).$$

В общем случае $(\widehat{P, Q}) \neq (\widehat{Q, P})$.

Как известно, для того чтобы в E $(\dim E > 2)$ для любых двух подпространств P и Q выполнялось равенство $(\widehat{P, Q}) = (\widehat{Q, P})$, необходимо и достаточно, чтобы E было пространством со скалярным произведением (т. е. норма в E порождается скалярным произведением).

В работе строится пример двумерного банахова пространства без скалярного произведения, в котором для любых подпространств P и Q выполняется равенство $(\widehat{P, Q}) = (\widehat{Q, P})$.

Рисунков 2. Библиографических ссылок 2.

УДК 2—2—3 **Операторные шары.** Ш м у л ь я н Ю. Л. Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения», вып. 6, 1968, стр. 68.

Пусть $\mathfrak{H}$ — гильбертово пространство, $\mathfrak{K}$ — замкнутый единичный шар в пространстве операторов, действующих в $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{K}^{\circ}$ — соответствующий открытый шар. Если A, B, C — ограниченные операторы в $\mathfrak{X}$, то множество

$$A\, \mathfrak{K}\, B + C \, (A\, \mathfrak{K}^{\circ} B + C)$$

называется замкнутым («открытым») операторным шаром. Операторы A, B, C называются соответственно левым радиусом, правым радиусом и центром операторного шара.

Установлены критерии того, что шар $A_1 \mathfrak{K} B_1 + C_1$ является подмножеством шара $A_2 \mathfrak{K} B_2 + C_2$. Доказано, что пересечение последовательности замкнутых шаров $A_n \mathfrak{K} B_n + C_n$ является замкнутым шаром, центр и радиусы которого могут быть получены из A_n, B_n и C_n с помощью предельного перехода.

Пусть

$$A_1 \mathfrak{K} B_1 + C_1 \subset A_2 \mathfrak{K} B_2 + C_2.$$

Отсюда не вытекает соответствующее включение для «открытых» шаров, даже в двумерном пространстве. Приводится достаточный признак того, что из неравенства

$$A_1 \mathfrak{K}^{\circ} B_1 + C_1 \subset A_2 \mathfrak{K} B_2 + C_2$$

вытекает неравенство

$$A_1 \mathfrak{K}^{\circ} B_1 + C_1 \subset A_2 \mathfrak{K}^{\circ} B_2 + C_2.$$

В последнем параграфе рассмотрены операторные шары в пространстве с инволюцией. Библиографических ссылок 6.

УДК 2—2—3 **Классы единственности решения задачи Коши для разностного аналога уравнений типа Соболева — Гальперна.** Б о р о к В. М. Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения», вып. 6, 1968, стр. 82.

Рассматривается вопрос о классах единственности решения задачи Коши для уравнений вида

$$P\left(\Delta, \frac{d}{dt}\right) u(x, t) \equiv \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=-p_k}^{q_k} \frac{d^k u(x + jh, t)}{dt^k} = 0 \tag{1}$$

$-\infty < x < \infty$, $0 \leqslant t < \infty$, P_k, $q_k \geqslant 0$, a_{kj} — постоянные при начальных условиях

$$D_t^j u(x, 0) = 0, \ j = 0, \ \ldots, \ n-1; \ -\infty < x < \infty. \tag{2}$$

Эти уравнения являются разностным (по переменной x) аналогом уравнений типа Соболева — Гальперна $P\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right) u(x, t) = 0$. В зависимости от поведения корней многочлена $P(s, \lambda)$ в окрестности точки $\lambda = \infty$ различаются шесть типов уравнения (1), для каждого из которых устанавливаются необходимые и достаточные условия единственности решения задачи (1) — (2) в классе функций, удовлетворяющих $t \geqslant 0$ оценке вида

$$|u(x, t)| \leqslant C \exp\{\beta t\} \cdot A(x), \ \beta > 0$$

либо при всех значениях x, либо при значениях x на одной из полуосей в терминах поведения при $|x| \to \infty$ функции $A(x)$.

Библиографических ссылок 11.

УДК 2—2—3 **Краевые задачи с мелкозернистой границей для эллиптических дифференциальных операторов второго порядка.** Михайленко В. Г. Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения», вып. 6, 1968, стр. 93.

В работах В. А. Марченко и Е. Я. Хруслова было показано, что для приближенного решения уравнения

$$\Delta u = -\varphi \quad u|_{\Gamma} = 0$$

в области, граница которой состоит из очень большого числа мелких связных компонент, можно решать уравнение

$$\Delta \bar{u} - f(x)\bar{u} = -\varphi,$$

где $f(x)$ определенным образом выражается через емкости связных компонент границы. При замене $u(x)$ на $\bar{u}(x)$ погрешность будет тем меньше, чем мельше диаметры связных компонент границы.

В работе этот результат обобщен на произвольный эллиптический самосопряженный дифференциальный оператор второго порядка с достаточно гладкими коэффициентами.

Библиографических ссылок 6.

УДК 2—2—3 **О резонансных явлениях в одной задаче дифракции.** Хруслов Е. Я. Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения», вып. 6, 1968, стр. 111.

Рассмотрена задача о прохождении волн через тонкие каналы в плоском слое конечной толщины h. Процесс прохождения волн описывается решением краевой задачи Неймана для уравнения Гельмгольца в области внешней по отношению к такому слою. Изучается асимптотическое поведение решения этой задачи, когда каналы становятся все более тонкими, число их стремится к бесконечности, и располагаются они достаточно однородно в некоторой области слоя. Получены формулы, дающие асимптотическое представление решения, и на основе их доказано, что при достаточно тонких каналах в системе наблюдается явление резонансного прохождения волн, заключающееся в том, что при волновых числах

$$k \neq \pm \frac{\pi m}{h} \quad (m = 1, 2, \ldots)$$

волны почти полностью отражаются от слоя, а при

$$k \neq \pm \frac{\pi m}{h} \quad (m = 1, 2, \ldots)$$

почти полностью проходят через каналы в слое.

Рисунков 2. Библиографических ссылок 10.

УДК 2—2—3 **Об оценке снизу функции, субгармонической в круге.** Говоров Н. В. Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения», вып. 6, 1968, стр. 130.

Основным результатом настоящей статьи является следующая

Теорема. *Пусть функция $u(z)$, субгармоническая в круге $|z| < 1$, имеет точную верхнюю границу $M > 0$ и неотрицательна в центре этого круга. Тогда для любого $N > 2$ найдется не более чем счетное множество кружков $|z - z_n| \leqslant \rho_n$, удовлетворяющих условию*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho_n < \frac{1}{N},$$

вне которых выполняется оценка

$$u(z) \geqslant -AMN,$$

где A — некоторая абсолютная положительная постоянная.

Устанавливаются достаточные условия того, чтобы множество упомянутых кружков было конечным или сгущалось только к окружности $|z| = 1$.

Доказано несколько частных случаев приведенной теоремы, отличающихся от общего случая улучшенным значением постоянной A.

Полученные результаты прилагаются к оценке снизу модуля функции, аналитической и ограниченной внутри круга.

Библиографических ссылок 10.

УДК 2—2—3 **Краевая задача Римана с бесконечным индексом степенного порядка меньше $\frac{1}{2}$.** Говоров Н. В. Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения», вып. 6, 1968, стр. 151.

Рассматривается краевая задача Римана

$$\Phi^{+}(t) = G(t)\,\Phi^{-}(t) + g(t)$$

в области D, граница которой есть гладкий бесконечный контур L, неограниченный с одной стороны. Функции $\ln G\,|(t)|$ и $g(t)$ предполагаются удовлетворяющими условию Гельдера, а

$$\arg G(t) = 2\pi\varphi(t)\,|t|^{\rho},$$

где $\varphi(t)$ удовлетворяет условию Гельдера, $\varphi(\infty) > 0$. Таким образом, индекс коэффициента $G(t)$ равен бесконечности. Точка, в которой $\arg G(t)$ сбращается в бесконечность (в данном случае $t = \infty$), названа в работе точкой завихрения. Рассматривается только тот случай, когда порядок завихрения ρ меньше $\frac{1}{2}$. Общее решение однородной задачи в классе ограниченных функций (аналитических в D) имеет вид:

$$\Phi(z) = F(z)\exp\left[\frac{z}{2\pi j}\int\limits_{L}\frac{\ln G(\tau)}{\tau(\tau - z)}\,d\tau\right],$$

где $F(z)$ — произвольная целая функция, порядок которой не превосходит ρ и для которой на контуре L выполняется некоторое асимптотическое неравенство.

Неоднородная задача рассматривается только для случая, когда контур L есть луч $1 \leqslant t \leqslant \infty$. Общее решение этой задачи в классе ограниченных функций записывается формулой

$$\Phi(z) = \Psi(z) + \frac{\Psi_0(z)}{2\pi i}\int\limits_{1}^{\infty}\frac{g(x)\,dx}{\Psi_0^{+}(x)\,(x - z)},$$

где $\Psi(z)$ — общее решение однородной задачи, а

$$\Psi_0(z) = \exp\left[\frac{z}{2\pi i}\int\limits_{1}^{\infty}\frac{\ln G(x)}{x(x - z)}\,dx\right]\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{z}{r_n}\right),$$

$$r_n = \left(\frac{2n - 1}{2\lambda\cos\rho\pi}\right)^{1/\rho}, \quad \lambda = \varphi(\infty).$$

Библиографических ссылок 18.

УДК 2—2—3 **О свойствах корней обобщенных ортогональных многочленов.** Геронимус Я. Л. Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения», вып. 6. 1968, стр. 177.

Пусть $\{c_k\}_{-n}^{n}$ — последовательность комплексных чисел, удовлетворяющая условиям

$$c_{-k} = \bar{c}_k, \; D_k = |c_{i-j}|_0^k \neq 0, \; (k = 0, 1, \ldots, n),$$

и пусть многочлены $\{P_k(z)\}_0^n$ ортогональны на единичной окружности Γ ($|z| = 1$) относительно этой последовательности.

В работе находится число их корней внутри и вне Γ. Эту задачу, недавно решенную М. Г. Крейном при помощи теории операторов, автор решает чисто алгебраическими методами.

Библиографических ссылок 7.

УДК 2—2—3 **Об одном пространстве функций.** Тригуб Р. М. Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения», вып. 6, 1968, стр. 181.

В работе рассматривается класс B непрерывных на $[0, \pi]$ комплекснозначных функций $f(x) = \lambda(x) + i\mu(x)$, для которых

$$\| f \| = \sup_n \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} | K_n (f; t) | \, dt < \infty,$$

где

$$K_n (f, t) = \frac{\lambda(0)}{2} + \sum_{k=1}^{\pi} \lambda \left(\frac{k\pi}{n} \right) \cos kt + \mu \left(\frac{k\pi}{n} \right) \sin kt,$$

и изучаются свойства функций класса B.

Оказывается, что класс B функций является банаховой алгеброй (относительно обычных алгебраических операций над функциями) над полем вещественных чисел (умножение функции класса B на i, вообще говоря, выводит ее из этого класса!).

Для функций из алгебры B устанавливается аналог теоремы Винера о делении. Устанавливается также, что каждая функция из класса B (после продолжения ее на сегмент $[-\pi, \pi]$ с помощью формулы $f(-x) = f(-x)$ и последующего периодического продолжения) разлагается в абсолютно сходящийся ряд Фурье.

Библиографических ссылок 5.

УДК 2—2—3 **Изоморфизмы пространства аналитических функций в круге, перестановочные со степенью оператора интегрирования.** Нагнибида Н. И. Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения», вып. 6, 1968, стр. 184.

Работа посвящена описанию полной группы изоморфизмов пространства $\mathfrak{A}_R$, аналитических в круге $|z| < R$, $0 < R \leqslant \infty$, функций, перестановочных с оператором I^n $\left(I f(z) = \int_0^z f(r)\, dr\right)$ при каждом фиксированном n, $n \geqslant 1$. Доказана следующая

Теорема. *Для того чтобы линейный оператор B был изоморфизмом пространства $\mathfrak{A}_R$, $0 < R \leqslant \infty$, перестановочным с I^n, $n \geqslant 1$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$1)\ B = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{n-1} \frac{k!}{q!} b_{k,q} I^{k-q} A_q \quad \left(A_q f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk+q} z^{nk+q} \right);$$

$$2)\ \varphi q(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{k,q} z^k \in \mathfrak{A}_R;$$

$$3)\ \Delta = \det \| b_{k,q} \|_{k,q=0}^{n-1} \neq 0.$$

Полученная теорема применяется к нахождению необходимых и достаточных условий того, что некоторая специальная система функций образовала в $\mathfrak{A}_R$, $0 < R \leqslant \infty$ квазистепенной в смысле М. Г. Хапланова базис.

Библиографических ссылок 5.

УДК 2—2—3 **Неэффективные регулярные линейные интегральные преобразования.** Давыдов Н. А. Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения», вып. 6, 1968, стр. 189.

Рассматриваются интегральные преобразования вида

$$t(x) = \int_0^x S(t)\, dc(x, t), \tag{1}$$

$$t(x) = \int_0^\infty S(t)\, dc(x, t). \tag{2}$$

Если преобразование (1) удовлетворяет условиям

$$c(x, x) - c(x, 0) \to 1 \quad (x \to \infty), \tag{3}$$

$$\bigvee_{0}^{x_0} (c(x, t)) \to 0 \quad (x \to \infty) \tag{4}$$

для каждого фиксированного x_0,

$$\bigvee_{0}^{x} (c(x, t)) < H, \tag{5}$$

где H не зависит от x, $\bigvee_{0}^{x} (c(x, t))$ — полное измерение функции $c(x, t)$ на отрезке $0 \leqslant \leqslant t \leqslant x$, то оно регулярно в классе непрерывных функций, т. е. из

$$\lim_{x \to \infty} S(x) = S \tag{6}$$

следует

$$\lim_{x \to \infty} \int_{0}^{x} S(t)\, dc(x, t) \tag{7}$$

для каждой функции $S(t)$, непрерывной в $[0, \infty)$. Если преобразование (2) удовлетворяет условиям (4) и

$$c(x, t) - c(x, 0) \to c(x)\,(t \to \infty), \ c(x) \to 1\,(x \to \infty), \tag{3'}$$

$$\bigvee_{0}^{\infty} (c(x, t)) < H, \tag{8}$$

где H не зависит от x, то оно регулярно в классе непрерывных ограниченных функций, т. е. из (6) следует

$$\lim_{x \to \infty} \int_{0}^{\infty} S(t)\, dc(x, t) = S \tag{9}$$

для каждой функции $S(t)$, непрерывной и ограниченной в $[0, \infty)$.

В работе доказаны

Теорема 1. *Если преобразование (1), удовлетворяющее условиям (3) — (5), удовлетворяет еще и условию*

$$\underline{\lim}_{x \to \infty} \left[\left| c(x, x) - \lim_{t \to x - 0} c(x, t) \right| - \lim_{x' \to x - 0} \bigvee_{0}^{x'} (c(x, t)) \right] > 0,$$

то из (7) следует (6) для каждой функции $S(t)$, непрерывной в $[0, \infty)$.

Теорема 2. *Если преобразование (2), удовлетворяющее условиям (3), (4), (8), удовлетворяет еще и условию*

$$\underline{\lim}_{x \to \infty} \left[\left| c(x, x) - \lim_{t \to x - 0} c(x, t) \right| \right| - \lim_{x' \to x - 0} \bigvee_{0}^{x'} (c(x, t)) - \bigvee_{x}^{\infty} (c(x, t)) \Big] > 0,$$

то из (9) следует (6) для каждой функции $S(t)$, непрерывной и ограниченной в $[0, \infty)$.

Получены следствия из этих теорем. В частности, из теорем 1—2 следуют теоремы Агнью, доказанные им для регулярных матричных преобразований.

Библиографических ссылок 4.