Украинский геометрический сборник

выпуск 9

издательство харьковского университета

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ УССР

УКРАИНСКИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК

ВЫПУСК 9

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ХАРЬКОВСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА ИМЕНИ А. М. ГОРЬКОГО
Харьков 1970

513
У45

Выпуск посвящен вопросам геометрии в целом, геометрии обобщенных пространств, пространств с заданной фундаментальной группой и другим вопросам геометрии.

Адрес редакционной коллегии:
Харьков-77, пл. Дзержинского, 4, Харьковский университет, механико-математический факультет.

2—2—3
37—70

ХАРЬКОВСКАЯ ТИПООФСЕТНАЯ ФАБРИКА «КОММУНИСТ»

О ГОЛОНОМНОСТИ ОСНОВАНИЯ ТОЧЕЧНОГО СООТВЕТСТВИЯ МЕЖДУ КОНФОРМНЫМИ ПРОСТРАНСТВАМИ

М. А. Акивис, В. С. Болодурин

(Москва)

В теории точечных соответствий между конформными пространствами естественным образом возникает понятие основания соответствия. Под ним понимают совокупность двух ортогональных систем в обоих пространствах, переходящих при соответствии друг в друга. Изучение этого основания тесно связано с теорией сопряженных систем с многомерными компонентами на поверхностях проективного пространства [1, 2, 3], а также с теорией многообразий с тензорными структурами. В настоящей статье излагаются некоторые результаты, полученные при исследовании соответствий с голономным основанием.

1. Рассмотрим два n-мерных конформных пространства $\overline{C}_n$, $\hat{C}_n$ и достаточно гладкое взаимно однозначное точечное соответствие $T:\overline{C}_n \to \hat{C}_n$. С каждой точкой $\overline{M} \in \overline{C}_n$ свяжем конформный репер, состоящий из двух точек $\overline{M}_0$, $\overline{M}_{n+1}$ и n независимых гиперсфер $\overline{M}_i$, инцидентных точкам $\overline{M}_0$, $\overline{M}_{n+1}$. Тогда имеют место соотношения $(\overline{M}_0, \overline{M}_i) = 0$, $(\overline{M}_{n+1}, \overline{M}_i) = 0$ $(i, j = 1, 2, \dots, n)$, где круглые скобки обозначают скалярное произведение соответствующих элементов, определяемое основной квадратичной формой конформного пространства $\overline{C}_n$. Нормируя точку $\overline{M}_{n+1}$, положим $(\overline{M}_0, \overline{M}_{n+1}) = -1$. Введем также обозначения $(\overline{M}_i, \overline{M}_j) = \bar{g}_{ij}$.

Уравнения инфинитезимального преобразования репера $\{M_0, M_i, M_{n+1}\}$ запишем в виде: $d\overline{M}_\xi = \overline{\omega}_\xi^\eta \overline{M}_\eta$ $(\xi, \eta = 0, 1, \dots, n+1)$, где $\overline{\omega}_\xi^\eta$ — формы Пфаффа, удовлетворяющие ряду условий, вытекающих из предыдущих соотношений:

$$\begin{gathered}\overline{\omega}_0^{n+1} = 0, \quad \overline{\omega}_{n+1}^0 = 0, \quad \overline{\omega}_0^0 + \overline{\omega}_{n+1}^{n+1} = 0,\\ \overline{\omega}_i^0 = \bar{g}_{ij}\overline{\omega}_{n+1}^j, \quad \overline{\omega}_i^{n+1} = \bar{g}_{ij}\overline{\omega}_0^j, \\ d\bar{g}_{ij} - \bar{g}_{ik}\overline{\omega}_j^k - \bar{g}_{kj}\overline{\omega}_i^k = 0.\end{gathered} \tag{1}$$

Уравнения структуры пространства $\overline{C}_n$ получим из уравнений $d\overline{\omega}_\xi^\eta = \overline{\omega}_\xi^\zeta \wedge \overline{\omega}_\zeta^\eta$, принимая во внимание соотношения (1).

К каждой точке $\hat{M} = T\overline{M}$ пространства $\hat{C}_n$ присоединим аналогичный репер $\{\hat{M}_0, \hat{M}_i, \hat{M}_{n+1}\}$. Компоненты $\hat{\omega}_\xi^\eta$ этого репера удовлетворяют соотношениям (1′), подобным (1).

Уравнения, определяющие соответствие $T:\overline{C}_n \to \hat{C}_n$, можно записать в виде

$$\overline{\omega}_0^i = \overset{\wedge}{\omega}{}_0^i. \tag{2}$$

Геометрически это означает, что репер в точке $\hat{M}_0 \in \hat{C}_n$ выбран так, что направления, выходящие из точек $\overline{M}_0$ и $\hat{M}_0$ и ортогональные гиперсферам $\lambda^i \overline{M}_i$, $\lambda^i \hat{M}_i$, соответствуют при отображении T. Формы $\overline{\omega}_0^i = \overset{\wedge}{\omega}{}_0^i$ для краткости будем обозначать ниже через ω^i.

2. Распределением Δ размерности p на дифференцируемом многообразии V_n называется закон, ставящий в соответствие каждой точке M этого многообразия p-мерное подпространство $\Delta(M)$ касательного пространства.

Распределения $\overline{\Delta}_\alpha$ размерностей p_α $(\alpha = 1, 2, \ldots, s)$ в конформном пространстве $\overline{C}_n$ образуют ортогональную систему $\overline{\Sigma}$, если в каждой точке $\overline{M}$ этого пространства $p_1 + p_2 + \ldots + p_s = n$ и $\overline{\Delta}_\alpha(M)$ и $\overline{\Delta}_\beta(M)$ вполне ортогональны друг другу при $\alpha \neq \beta$.

Обозначим через $\overline{g}^{ij}$ тензор, обратный тензору $\overline{g}_{ij}$. Тогда, в силу положительной определенности тензоров $\overline{g}_{ij}$ и $\hat{g}_{ij}$, тензор $g_j^i = \overline{g}^{ik} \hat{g}_{kj}$ имеет простую структуру. Соответствие $T:\overline{C}_n \to \hat{C}_n$ называется соответствием типа $(p_1, p_2, \ldots, p_s)$ (см. [4]), если среди собственных значений тензора $\overline{g}_j^i$ имеется p_1 равных между собой, но отличных от остальных, p_2 равных между собой, но отличных от остальных, и т. д.

Пусть далее g_α является собственным значением тензора g_j^i кратности p_α, а $\overline{\Delta}_\alpha(\overline{M}_0)\left(\overset{\wedge}{\Delta}_\alpha\left(\hat{M}_0\right)\right)$ — p_α-мерным направлением, натянутым на собственные направления тензора g_j^i в точке $\overline{M}_0\left(\hat{M}_0\right)$ пространства $\overline{C}_n$ $\left(\hat{C}_n\right)$, соответствующие этому собственному значению. Тогда в пространствах $\overline{C}_n$, $\hat{C}_n$ возникают ортогональные системы $\overline{\Sigma}$, $\overset{\wedge}{\Sigma}$. Совокупность этих ортогональных систем называют основанием соответствия. С целью его изучения специализируем реперы в обоих пространствах $\overline{C}_n$, $\hat{C}_n$ так, чтобы p_α-мерное направление $\overline{\Delta}_\alpha(\overline{M}_0)\left(\overset{\wedge}{\Delta}_\alpha\left(\hat{M}_0\right)\right)$ было ортогональным к пучку гиперсфер, порожденному точкой $\overline{M}_0\left(\hat{M}_0\right)$ и гиперсферами

$$\overline{M}_{i_\alpha}\left(\hat{M}_{i_\alpha}\right)(i_\alpha = p_1 + \ldots + p_{\alpha-1} + 1, \ldots, p_1 + \ldots + p_\alpha).$$

Такие реперы назовем адаптированными основанию соответствия.

Поскольку направления $\overline{\Delta}_\alpha\left(\overset{\wedge}{\Delta}_\alpha\right)$ и $\overline{\Delta}_\beta\left(\overset{\wedge}{\Delta}_\beta\right)$ ортогональны при $\alpha \neq \beta$, то в адаптированных реперах квадратичные формы $\overline{g}_{ij}\omega^i\omega^j$ и $\hat{g}_{ij}\omega^i\omega^j$ не должны содержать произведений $\omega^{i_\alpha}\omega^{i_\beta}$ $(\alpha \neq \beta)$. Следовательно,

$$\overline{g}_{i_\alpha j_\beta} = 0, \ \hat{g}_{i_\alpha j_\beta} = 0, \tag{3}$$

а остальные компоненты тензоров $\overline{g}_{ij}$, $\hat{g}_{ij}$ связаны условиями

$$\hat{g}_{i_\alpha j_\alpha} = g_\alpha \overline{g}_{i_\alpha j_\alpha}.$$

Формы Пфаффа $\overline{\omega}^{i_\alpha}_{j_\beta}$ и $\hat{\omega}^{i_\alpha}_{j_\beta}$ $(\alpha \neq \beta)$, определяющие вращения направлений $\overline{\Delta}_\alpha(\overline{M}_0)$ и $\hat{\Delta}_\alpha(\hat{M}_0)$, после перехода к адаптированным реперам становятся главными:

$$\overline{\omega}^{i_\alpha}_{j_\beta} = \sum_\gamma \overline{\Gamma}^{i_\alpha}_{j_\beta k_\gamma} \omega^{k_\gamma}, \tag{4}$$

$$\hat{\omega}^{i_\alpha}_{j_\beta} = \sum_\gamma \hat{\Gamma}^{i_\alpha}_{j_\beta k_\gamma} \omega^{k_\gamma}. \tag{5}$$

Наряду с распределениями $\overline{\Delta}_\alpha$ и $\hat{\Delta}_\alpha$ введем в пространствах $\overline{C}_n$ и $\hat{C}_n$ дополнительные распределения $\overline{\Delta}^\alpha$ и $\hat{\Delta}^\alpha$, где

$$\overline{\Delta}^\alpha(M_0) = \sum_{\beta \neq \alpha} \overline{\Delta}_\beta(\overline{M}_0) \text{ и } \hat{\Delta}^\alpha(\hat{M}_0) = \sum_{\beta \neq \alpha} \hat{\Delta}_\beta(\hat{M}_0).$$

В адаптированных реперах распределения $\overline{\Delta}_\alpha$ и $\hat{\Delta}_\alpha$ определяются системой уравнений Пфаффа

$$\omega^{i_\beta} = 0, \quad (\beta = 1, \dots, \alpha - 1, \alpha + 1, \dots, s), \tag{6}$$

а распределения $\overline{\Delta}^\alpha$ и $\hat{\Delta}^\alpha$ — системой уравнений

$$\omega^{i_\alpha} = 0. \tag{7}$$

3. Ортогональная система $\overline{\Sigma}$ называется слабо голономной, если голономны все распределения $\overline{\Delta}_\alpha$, образующие эту систему. Ортогональная система $\overline{\Sigma}$ называется сильно голономной, если голономны все распределения $\overline{\Delta}^\alpha$, дополнительные к распределениям $\overline{\Delta}_\alpha$. Дифференцируя уравнения (6) внешним образом и используя соотношения (4), находим условия голономности распределения $\overline{\Delta}_\alpha$:

$$\overline{\Gamma}^{i_\beta}_{j_\alpha k_\alpha} = \overline{\Gamma}^{i_\beta}_{k_\alpha j_\alpha}, \tag{8}$$

где индекс α фиксирован, а $\beta \neq \alpha$. Если условия (8) выполняются для любых индексов α, β $(\alpha \neq \beta)$, то ортогональная система $\overline{\Sigma}$ будет слабо голономной. Используя уравнения (7), аналогично находим условия сильной голономности системы $\overline{\Sigma}$:

$$\overline{\Gamma}^{i_\alpha}_{j_\beta k_\beta} = \overline{\Gamma}^{i_\alpha}_{k_\beta j_\beta}, \quad \overline{\Gamma}^{i_\alpha}_{j_\beta k_\gamma} = \overline{\Gamma}^{i_\alpha}_{k_\gamma j_\beta}, \tag{9}$$

где индексы α, β, γ попарно не равны друг другу.

Формы $\overline{\omega}^i_j$, $\hat{\omega}^i_j$ пространств $\overline{C}_n$, $\hat{C}_n$ связаны между собой. Зависимость между ними получаем, дифференцируя внешним образом уравнения (2) и разрешая затем квадратичные уравнения по лемме Картана:

$$\hat{\omega}^i_j - \overline{\omega}^i_j - \delta^i_j\left(\hat{\omega}^0_0 - \overline{\omega}^0_0\right) = \mu^i_{jk}\omega^k, \tag{10}$$

где $\mu^i_{jk} = \mu^i_{kj}$. Совокупность величин $\{\overline{g}_{ij}, \hat{g}_{ij}, \mu^i_{jk}\}$ образует второй фундаментальный геометрический объект изучаемого точечного соответствия [5].

В соотношения (10) внесем разложения (4), (5). Тогда, приравнивая коэффициенты при формах ω^{k_γ}, получим

$$\hat{\Gamma}^{i_\alpha}_{j_\beta k_\gamma} - \overline{\Gamma}^{i_\alpha}_{j_\beta k_\gamma} = \mu^{i_\alpha}_{j_\beta k_\gamma} \quad (\alpha \neq \beta)$$

и, следовательно,

$$\hat{\Gamma}^{i_\alpha}_{[j_\beta k_\gamma]} = \overline{\Gamma}^{i_\alpha}_{[j_\beta k_\gamma]}.$$

Из этих соотношений и условий голономности (8), (9) вытекает, что если одна из ортогональных систем основания соответствия является слабо (сильно) голономной, то и вторая также является слабо (сильно) голономной. Этот факт очевиден в силу инвариантности понятия голономности относительно дифференцируемых отображений. Исходя из этого свойства, можно говорить о голономности основания соответствия, понимая под этим одновременную голономность обеих систем $\overline{\Sigma}$, $\hat{\Sigma}$ в пространствах $\overline{C}_n$, $\hat{C}_n$.

Заметим, что при $s = 2$ понятия слабой и сильной голономности ортогональной системы совпадают.

4. Выведем некоторые соотношения, которым удовлетворяют коэффициенты $\overline{\Gamma}^{i_\alpha}_{j_\beta k_\gamma}$ ортогональной системы $\overline{\Sigma}$. Прежде всего из уравнений (1), (3) вытекают соотношения, связывающие компоненты тензора $\overline{g}_{ij}$

$$\overline{g}_{i_\alpha j_\alpha} \overline{\omega}^{j_\alpha}_{i_\beta} + \overline{g}_{j_\beta i_\beta} \overline{\omega}^{j_\beta}_{i_\alpha} = 0, \quad (\alpha \neq \beta).$$

Внося в эти соотношения разложения (4), найдем

$$\overline{g}_{i_\alpha j_\alpha} \overline{\Gamma}^{j_\alpha}_{i_\beta k_\gamma} + \overline{g}_{j_\beta i_\beta} \overline{\Gamma}^{j_\beta}_{i_\alpha k_\gamma} = 0,$$

где индекс γ может принимать любое значение. Если $s \geqslant 3$, то из этой системы можно выделить подсистему для трех различных индексов α, β, γ:

$$\overline{g}_{i_\alpha j_\alpha} \overline{\Gamma}^{j_\alpha}_{i_\beta k_\gamma} + \overline{g}_{j_\beta i_\beta} \overline{\Gamma}^{j_\beta}_{i_\alpha k_\gamma} = 0,$$

$$\overline{g}_{i_\beta j_\beta} \overline{\Gamma}^{j_\beta}_{i_\gamma k_\alpha} + \overline{g}_{j_\gamma i_\gamma} \overline{\Gamma}^{j_\gamma}_{i_\beta k_\alpha} = 0,$$

$$\overline{g}_{i_\gamma j_\gamma} \overline{\Gamma}^{j_\gamma}_{i_\alpha k_\beta} + \overline{g}_{j_\alpha i_\alpha} \overline{\Gamma}^{j_\alpha}_{i_\gamma k_\beta} = 0.$$

Предположим теперь, что рассматриваемая система $\overline{\Sigma}$ сильно голономна. Тогда, складывая первые два из этих соотношений и вычитая третье, с помощью соотношений (9) получаем

$$\overline{g}_{i_\beta j_\beta} \overline{\Gamma}^{j_\beta}_{i_\gamma k_\alpha} = 0,$$

откуда

$$\overline{\Gamma}^{j_\beta}_{i_\gamma k_\alpha} = 0. \tag{11}$$

Для геометрической характеристики полученных равенств рассмотрим интегральную поверхность $\overline{V}^\alpha_{n-p_\alpha}$ распределения $\overline{\Delta}^\alpha$ сильно голономной ортогональной системы $\overline{\Sigma}$. Первый и второй дифференциалы ее точки $\overline{M}_0$ запишутся в виде

$$d\overline{M}_0 = \overline{\omega}^0_0 \overline{M}_0 + \sum_{\beta \neq \alpha} \omega^{i_\beta} \overline{M}_{i_\beta},$$

$$d^2\overline{M}_0 \equiv \sum_{\beta\neq\alpha}\left(\omega^{i_\beta}\overline{\omega}_{i_\beta}^{k_\alpha}\overline{M}_{k_\alpha} + \omega^{i_\beta}\overline{\omega}_{i_\beta}^{n+1}\overline{M}_{n+1}\right), \ \left(\operatorname{mod}\overline{M}_0, \ \overline{M}_{i_\beta}\right).$$

Квадратичная форма $\overline{\varphi}^{n+1} = \sum_{\beta\neq\alpha}\omega^{i_\beta}\overline{\omega}_{i_\beta}^{n+1}$ определяет угловую метрику на поверхности $\overline{V}^{\alpha}_{n-p_\alpha}$, формы $\overline{\varphi}^{i_\alpha} = \sum_{\beta\neq\alpha}\omega^{j_\beta}\overline{\omega}_{j_\beta}^{i_\alpha}$ являются ее вторыми квадратичными формами [6]. В силу соотношений (3), (4), (11) эти квадратичные формы приобретают вид

$$\overline{\varphi}^{n+1} = \sum_{\beta\neq\alpha}\overline{g}_{j_\beta k_\beta}\omega^{j_\beta}\omega^{k_\beta}, \ \overline{\varphi}^{i_\alpha} = \sum_{\beta\neq\alpha}\overline{\Gamma}^{i_\alpha}_{j_\beta k_\beta}\omega^{j_\beta}\omega^{k_\beta},$$

откуда видно, что матрицы квадратичных форм имеют квазидиагональную структуру. Поверхности, основные квадратичные формы которых имеют такой вид, называются поверхностями, несущими систему кривизны, которая высекается на поверхности $\overline{V}^{\alpha}_{n-p_\alpha}$ поверхностями $\overline{V}^{\beta}_{n-p_\alpha}$ $(\beta\neq\alpha)$. Таким образом, доказано утверждение:

Теорема 1. *Интегральные поверхности $\overline{V}^{\alpha}_{n-p_\alpha}$ сильно голономной ортогональной системы $\overline{\Sigma}$ при $s\geqslant 3$ пересекаются по поверхностям, образующим систему кривизны на каждой поверхности $\overline{V}^{\alpha}_{n-p_\alpha}$.*

В частности, если $p_1 = p_2 = \ldots = p_s = 1$, то на гиперповерхности $\overline{V}^{i}_{n-1}$ распределения $\overline{\Delta}_j\ (j\neq i)$ сильно голономной ортогональной системы $\overline{\Sigma}$ определяют сеть линий кривизны. В этом случае приходим к известной теореме Дюпена о n-ортогональных системах поверхностей.

В теории сопряженных систем $\overline{\Sigma}$ на поверхности $\overline{V}_m \subset \overline{P}_n$ известны понятия расслояемых и вполне расслояемых сопряженных систем [1]. Сильно голономная ортогональная система $\overline{\Sigma}$ в $\overline{C}_n$ называется расслояемой, если для каждой пары распределений $\overline{\Delta}_\alpha$, $\overline{\Delta}_\beta$ имеет место $d_{\overline{\Delta}_\alpha}d_{\overline{\Delta}_\beta}\overline{M}_0 \equiv \equiv 0\ (\operatorname{mod}\overline{\Delta}_\alpha,\ \overline{\Delta}_\beta)$. При $s=2$ эти соотношения выполняются тождественно. При $s\geqslant 3$ требование расслояемости системы $\overline{\Sigma}$ приводит к равенствам $\overline{\Gamma}^{i_\alpha}_{j_\beta k_\gamma} = 0$, где индексы α, β, γ различны. В силу (11) эти равенства выполняются всегда для сильно голономных систем $\overline{\Sigma}$. Следовательно, такие системы всегда расслояемы. Более того, так как для любой голономной пары направлений $\overline{d}_1$, $\overline{d}_2$, принадлежащих различным распределениям сильно голономной системы $\overline{\Sigma}$, выполняется условие $\overline{d}_1\overline{d}_2(\overline{M}_0)\equiv 0$ $(\operatorname{mod}\overline{d}_1\overline{d}_2)$, то указанные системы $\overline{\Sigma}$ будут вполне расслояемыми (см. [1]).

5. Многообразием с тензорной структурой называется дифференцируемое многообразие с заданным на нем полем вещественного тензора F^i_j, для которого кратности корней характеристического уравнения и порядки клеток жордановой формы тензора не зависят от точки многообразия.

Точечное соответствие $T:\overline{C}_n \to \hat{C}_n$ индуцирует на пространстве $\overline{C}_n\left(\hat{C}_n\right)$ поле тензора g^i_j, имеющего простую структуру. Пространство $\overline{C}_n\left(\hat{C}_n\right)$ с индуцированным на нем полем тензора g^i_j можно рассматривать как частный тип многообразия с тензорной структурой. Вопрос об интегрируемости выделенной структуры в силу п. 3 оказывается равносилен вопросу о голономности основания соответствия T.

Обозначим через $\overline{\nabla}$ оператор ковариантного дифференцирования в пространстве $\overline{C}_n$, а через ∇_δ — его значение при $\omega^i = 0$. Тогда из соотношений (1), (1′), (10) нетрудно получить с помощью введенного оператора дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют компоненты тензора g^i_j:

$$\overline{\nabla} g^i_j = 2g^i_j\left(\overset{\wedge}{\omega}{}^0_0 - \overline{\omega}{}^0_0\right) + g^i_{jk}\omega^k, \tag{12}$$

где

$$g^i_{jk} = \hat{g}_{jl}\mu^l_{kt}g^{tl} + g^i_l\mu^l_{jk}.$$

Продолжив уравнения (12) и закрепив затем главные параметры, приходим к дифференциальным уравнениям на величины g^i_{jk}:

$$\nabla_\delta g^i_{jk} = 2g^i_{jk}\left(\overset{\wedge}{\pi}{}^0_0 - \overline{\pi}{}^0_0\right) + 2g^i_j\pi^0_k + \left(\delta^i_{[k}\hat{g}_{l]j} - g^i_{[k}\overline{g}_{l]j}\right)\overline{\pi}{}^l_{n+1},$$

где

$$\overline{\pi}{}^\xi_\eta = \overline{\omega}{}^\xi_\eta \,(\mathrm{mod}\,\omega^i),\quad \overset{\wedge}{\pi}{}^\xi_\eta = \overset{\wedge}{\omega}{}^\xi_\eta \,(\mathrm{mod}\,\omega^i),\quad \pi^0_k = \overset{\wedge}{\pi}{}^0_k - \overline{\pi}{}^0_k.$$

Из этих уравнений вытекает, что совокупность величин $\left\{\overline{g}_{ij},\ \hat{g}_{ij},\ g^i_{jk}\right\}$ образует геометрический объект. Этот объект охватывается вторым фундаментальным геометрическим объектом соответствия T.

В системе координат, адаптированной основанию соответствия, из уравнений, записанных выше, находим

$$\begin{aligned}\nabla_\delta g^{i_\alpha}_{j_\beta k_\gamma} &= 2g^{i_\alpha}_{j_\beta k_\gamma}\left(\overset{\wedge}{\pi}{}^0_0 - \overline{\pi}{}^0_0\right),\\ \nabla_\delta g^{i_\alpha}_{[j_\beta k_\beta]} &= 2g^{i_\alpha}_{[j_\beta k_\beta]}\left(\overset{\wedge}{\pi}{}^0_0 - \overline{\pi}{}^0_0\right),\end{aligned} \tag{13}$$

где $\alpha \neq \beta$, $\beta \neq \gamma$, $\gamma \neq \alpha$. Эти уравнения интерпретируются следующим образом. Стационарная подгруппа C преобразований семейства конформных реперов, связанных с точкой $\overline{M}_0$, после перехода к адаптированным реперам распадается в прямое произведение подгрупп $C_1, \ldots, C_s$. Как показывают уравнения (13), величины $g^{i_\alpha}_{j_\beta k_\gamma}$ $(\alpha \neq \beta,\ \beta \neq \gamma,\ \gamma \neq \alpha)$, а также величины $g^{i_\alpha}_{[j_\beta k_\beta]}$ $(\beta \neq \alpha)$ образуют тензоры относительно этого прямого произведения. Геометрический смысл найденных тензоров раскрывается в следующих предложениях.

Теорема 2. *Основание соответствия $T : \overline{C}_n \to \hat{C}_n$ слабо голономно тогда и только тогда, когда выполняется условие*

$$g^{i_\alpha}_{[j_\beta k_\beta]} = 0, \quad (\alpha \neq \beta). \tag{14}$$

Действительно, так как $\overline{g}{}^{i_\alpha}_{j_\beta} = 0$, $(\alpha \neq \beta)$, то из уравнений (12) получаем

$$g^{k_\beta}_{j_\beta}\overline{\omega}{}^{i_\alpha}_{k_\beta} - g^{i_\alpha}_{k_\alpha}\overline{\omega}{}^{k_\alpha}_{j_\beta} = \sum_\gamma g^{i_\alpha}_{j_\beta k_\gamma}\omega^{k_\gamma}.$$

В силу соотношений (4) отсюда вытекает

$$(g_\beta - g_\alpha)\,\overline{\Gamma}{}^{i_\alpha}_{j_\beta k_\gamma} = g^{i_\alpha}_{j_\beta k_\gamma}. \tag{15}$$

Следовательно,

$$(g_\beta - g_\alpha)\,\overline{\Gamma}{}^{i_\alpha}_{[j_\beta k_\gamma]} = g^{i_\alpha}_{[j_\beta k_\gamma]}.$$

Отсюда ясно, что если основание соответствия слабо голономно, то выполняются соотношения (8), и тогда выполняются условия (14). Очевидно и обратное утверждение.

Теорема 3. *Основание соответствия $T:\overline{C}_n \to \hat{C}_n$ сильно голономно тогда и только тогда, когда выполняются условия*

$$g^{i_\alpha}_{[i_\beta k_\beta]} = 0, \quad g^{i_\alpha}_{i_\beta k_\gamma} = 0 \quad (\alpha \neq \beta,\ \beta \neq \gamma,\ \gamma \neq \alpha). \tag{16}$$

При доказательстве этой теоремы возможны два случая. Если $s = 2$, то, как мы уже отмечали, понятие слабой и сильной голономности совпадают. Тогда, в силу теоремы 2, выполняются условия (16).

Пусть $s \geqslant 3$ и основание соответствия сильно голономно. Тогда из теоремы 1 вытекает, что $\overline{\Gamma}^{i_\alpha}_{i_\beta k_\gamma} = 0$ $(\alpha \neq \beta, \beta \neq \gamma, \gamma \neq \alpha)$, и, следовательно, в силу (15)

$$g^{i_\alpha}_{i_\beta k_\gamma} = 0. \tag{17}$$

Далее, из сравнения условий (8), (9) ясно, что сильно голономная ортогональная система $\overline{\Sigma}$ всегда является слабо голономной. Тогда, в силу теоремы 2, выполняются соотношения (14). Соотношения (17) и (14) вместе дают доказываемые соотношения (16).

Обратно, пусть справедливы условия (16). Тогда из первых соотношений (16) и теоремы 2 следует, что $\overline{\Gamma}^{i_\alpha}_{[i_\beta k_\beta]} = 0$. Далее, из вторых соотношений (16) и (15) получаем $\overline{\Gamma}^{i_\alpha}_{i_\beta k_\gamma} = 0$, т. е. все соотношения (9) выполняются. Теорема доказана.

6. Ортогональная система $\overline{\Sigma}\left(\hat{\Sigma}\right)$ соответствия T типа $(1, 1, \dots, 1)$ состоит из n линейно независимых полей собственных направлений тензоров g^i_j. Основание соответствия определяет в этом случае в пространствах $\overline{C}_n$, $\hat{C}_n$ ортогональные сети $\bar{\sigma}$, $\hat{\sigma}$, переходящие при этом соответствии друг в друга. Условия слабой голономности (8) для такого основания соответствия всегда выполнены. Сильно голономное основание соответствия называется в этом случае голономным основанием. Теореме 3 может быть придана новая формулировка: основание соответствия типа $(1, 1, \dots, 1)$ будет голономным тогда и только тогда, когда в репере, отнесенном к основанию соответствия, все компоненты μ^i_{jk} с различными индексами равны нулю. Этот результат для соответствия $T:\overline{C}_n \to \hat{C}_n$ аналогичен результату, имеющему место для основания простого отображения евклидовых пространств [7].

В заключение выясним произвол существования соответствий типа $(1, 1, \dots, 1)$ с голономным основанием соответствия. Известно, что голономные ортогональные сети (n-ортогональные системы в пространстве n измерений) существуют с произволом в $\frac{n(n-1)}{2}$ функций двух переменных. Зададим в пространствах $\overline{C}_n$, $\hat{C}_n$ голономные ортогональные сети $\bar{\sigma}$, $\hat{\sigma}$. Система уравнений, определяющая соответствие, для которого эти сети служат основанием, оказывается в инволюции. Исследование этой системы показывает, что точечные соответствия $T:\overline{C}_n \to \hat{C}_n$ типа $(1, 1, \dots, 1)$ с заданным голономным основанием соответствия существуют с произволом в n функций одного переменного.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Рыжков. Сопряженные системы на многомерных поверхностях. Труды Моск. матем. о-ва, 1958, 7, 179—226.

2. М. А. Акивис. О строении двухкомпонентных сопряженных систем. ВИНИТИ. Труды геометр. семинара, 1966, 1, 7—31.

3. М. А. Акивис. О строении сопряженных систем на многомерных поверхностях. Тезисы докладов на III-й Межвузовск. геометр. конф., Казань, 1967, 4—5.

4. В. В. Рыжков. Дифференциальная геометрия точечных соответствий между двумя пространствами. Итоги науки, Геометрия, 1963, М., Инст. научн. инф. АН СССР, 1965, 63—105.

5. В. С. Болодурин. Об оснащениях, связанных с точечными соответствиями между конформными пространствами. ВИНИТИ, М., 1968, 28 стр. (РЖМат, 1968, 7А593 Деп).

6. М. А. Акивис. К конформно-дифференциальной геометрии многомерных поверхностей. Матем. сб., 1961, 53 (95), № 1, 59—72.

7. В. Т. Базылев. К геометрии дифференцируемых отображений евклидовых n-пространств. Тезисы докладов на III-й Межвузовск. геометр. конф., Казань, 1967, 8.

Поступила 31 октября 1969 г.

О СФЕРИЧЕСКОМ ОБРАЗЕ ПОВЕРХНОСТИ С БЛИЗКОЙ К НУЛЮ КРИВИЗНОЙ

Ю. А. Аминов

Харьков

Гауссов сферический образ регулярной двумерной поверхности нулевой кривизны есть одномерный континуум, поэтому естественно ожидать, что сферический образ поверхности с гауссовой кривизной K, близкой к нулю, является полоской, ширина которой зависит от того, насколько близка гауссова кривизна к нулю. Однако заметим, что сферическим образом одной полости любой псевдосферы, даже со сколь угодно малой по модулю гауссовой кривизной, является полусфера с выколотым полюсом. Этот пример показывает, что получить оценку ширины полосы сферического образа целиком для всей поверхности в зависимости от $|K|$ нельзя. Если же рассмотреть кусок псевдосферы, не уходящий в бесконечность, то наглядно видно, что ширина сферического образа будет тем меньше, чем меньше $|K|$. Поэтому естественно ставить ограничения на порядок убывания $|K|$ на бесконечности, связанные с длиной радиус-вектора поверхности. Следующая теорема дает некоторую оценку сверху ширины полосы сферического образа для общих поверхностей.

Пусть r-радиус-вектор n-мерной поверхности F в $(n+1)$-мерном евклидовом пространстве, S^n и S^{n-2} — ее n-я и $(n-2)$-я симметрические функции главных кривизн, (если $n=2$, то положим $S^{n-2}=1$), пусть $S^n \neq 0$.

Обозначим через Ψ гауссово отображение на единичную n-мерную сферу; при этом, хотя Ψ локально гомеоморфно, на сфере могут оказаться области, покрытые более одного раза, т. е. в одну точку сферы при отображении перейдет несколько точек поверхности F. Иными словами, образ Ψ может состоять из нескольких листов, расположенных один под другим. Область на сфере, расположенную на одном листе, будем называть однолистной.

Теорема 1. *Если симметрические функции главных кривизн S^n и S^{n-2} куска поверхности удовлетворяют условию*

$$-\frac{S^{n-2}}{A_0^2(1+r^2)^2} \leqslant S^n < 0, \quad (A_0 = \mathrm{const} > 0), \tag{1}$$

то радиус ρ любого n-мерного шара на единичной сфере, содержащегося в однолистной области в образе этого куска при гауссовом сферическом отображении, удовлетворяет неравенству

$$\sin \rho \leqslant \frac{C}{A_0 - C},$$

где C — постоянная. В качестве C можно взять число

$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{n^2+n}\,(n-2)!\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}\right)}.$$

Заметим, что оценка имеет силу лишь при $A_0 > 2C$, т. е. полученная оценка годится лишь для поверхностей, у которых отношение $\frac{S^n}{S^{n-2}}$ достаточно близко к нулю. При $n = 2$ теорему можно считать в некотором смысле двойственной к теореме Н. В. Ефимова о проекции на квадрат куска поверхности отрицательной кривизны [1].

Доказательство. Предположим обратное. Пусть на сфере в однолистной области сферического образа поверхности существует шар радиуса ρ в метрике на сфере такой, что

$$\sin \rho > \frac{C}{A_0 - C}.$$

Рассмотрим единичную сферу в евклидовом пространстве с декартовыми координатами $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}$. Через точки указанного шара и центр единичной сферы 0 проведем лучи, которые заполняют в пространстве конус. В этот конус поместим $(n+1)$-мерный шар ω радиуса a так, чтобы его центр O_1 был как можно ближе расположен к центру единичной сферы. Найдем расстояние от центра единичной сферы до самой удаленной от O точки шара ω, которую обозначим через M. Тогда

$$MO = MO_1 + O_1O = a + \frac{a}{\sin \rho}. \tag{2}$$

Внутри указанного конуса рассмотрим теперь опорную функцию поверхности $H = H(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1})$, получаемую продолжением по условию однородности с одного листа сферического образа поверхности. Сумму главных миноров второго порядка матрицы $\|H_{\alpha_i\alpha_j}\|$ обозначим через J. Как известно (см. [2]), при $\alpha_1^2 + \ldots + \alpha_{n+1}^2 = 1$ эта сумма равна

$$J = \frac{S^{n-2}}{S^n}.$$

Первые производные опорной функции H_{α_i} постоянны вдоль луча, выходящего из центра единичной сферы, и вектор $\{H_{\alpha_1}, \ldots, H_{\alpha_{n+1}}\}$ равен r — радиус-вектору точки поверхности F, в которой нормаль к поверхности коллинеарна этому лучу. Вторые производные $H_{\alpha_i\alpha_j}$ являются однородными функциями степени -1. Поэтому J есть однородная функция степени -2, и, следовательно, для точек, расположенных на расстоянии μ от центра O единичной сферы, имеем

$$J = \frac{S^{n-2}}{\mu^2 S^n}.$$

Рассмотрим следующее выражение:

$$\frac{J}{\left(1 + H_{\alpha_1}^2 + \ldots + H_{\alpha_{n+1}}^2\right)^2}.$$

По условию теоремы в точках единичной сферы имеет место

$$\frac{J}{(1+|\operatorname{grad} H|^2)^2}=\frac{J}{(1+r^2)^2}=\frac{S^{n-2}}{S^n\,(1+r^2)^2}\leqslant -A_0^2.$$

Так как самая удаленная точка шара ω расположена на расстоянии $a\left(1+\frac{1}{\sin\rho}\right)$ (см (2)), то во всем шаре ω выполнено следующее неравенство:

$$\frac{J}{(1+|\operatorname{grad} H|^2)^2}\leqslant -\frac{A_0^2}{a^2\left(1+\frac{1}{\sin\rho}\right)^2}.$$

В работе [3] доказана следующая теорема, являющаяся обобщением теоремы Н. В. Ефимова из работы [1]. *Пусть в $(n+1)$-мерном шаре радиуса a задана регулярная функция $\Phi=\Phi(x_1,\ \ldots,\ x_{n+1})$, J — сумма главных миноров второго порядка матрицы $\|\Phi_{x_i x_j}\|$ удовлетворяет неравенству*

$$\frac{J}{(1+|\operatorname{grad}\Phi|^2)^2}\leqslant -K_0^2<0,\ (K_0 — \textit{постоянное число}),$$

то радиус шара $a\leqslant\frac{C}{K_0}$, причем C может быть взято равным:

$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{n^2+n}\,(n-2)!\,\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}\right)}.$$

Взяв в качестве K_0^2 число $\frac{A_0^2}{a^2}\left(1+\frac{1}{\sin\rho}\right)^2$ и применив указанную теорему к опорной функции H, получим

$$a\leqslant\frac{Ca\left(1+\frac{1}{\sin\rho}\right)}{A_0}.$$

Отсюда находим

$$\sin\rho\leqslant\frac{C}{A_0-C},$$

что противоречит первоначальному предположению.

Замечание: При $n=2$, применяя теорему Н. В. Ефимова к преобразованию Лежандра, можно получить $\sin 2\rho\leqslant\frac{2C}{A_0}$, где C — абсолютная постоянная, в качестве которой можно взять число $e\sqrt{3}$.

Рассмотрим теперь поверхности, у которых ограничены n-я и $(n-1)$-я симметрические функции главных кривизн.

Теорема 2. *Пусть поверхность F содержится в шаре радиуса d и выполнено условие*

$$0<S^n\leqslant\frac{S^{n-1}}{A_0 d},\ (A_0=\text{const}>0),$$

тогда радиус ρ любого n-мерного шара на единичной сфере, содержащегося в однолистной области в сферическом образе этого куска, удовлетворяет неравенству

$$\sin\rho\leqslant\frac{1}{A_0 n-1}. \tag{3}$$

Как и при доказательстве теоремы 1, рассмотрим шар ω, радиус которого a. Заметим, что при $\alpha_1^2 + \ldots + \alpha_{n+1}^2 = 1$ имеет место

$$H_{\alpha_1\alpha_1} + \ldots + H_{\alpha_{n+1}\alpha_{n+1}} = \frac{S^{n-1}}{S^n}.$$

Так как $\sum H_{\alpha_i\alpha_i}$ — однородная функция степени -1, то во всем шаре ω в силу условия теоремы

$$\sum H_{\alpha_i\alpha_i} \geqslant A_0 d \frac{1}{a\left(1 + \frac{1}{\sin \rho}\right)}.$$

Проинтегрируем $\sum H_{\alpha_i\alpha_i}$ по шару ω и этот интеграл выразим через интеграл по граничной сфере $\partial\omega$. Имеем

$$\frac{A_0 dV(\omega)}{a\left(1 + \frac{1}{\sin \rho}\right)} \leqslant \int\limits_{\omega} \sum H_{\alpha_i\alpha_i} dv = \int\limits_{\partial\omega} (\operatorname{grad} H dS) \leqslant S(d\omega)\, d,$$

где $V(\omega)$ — объем шара ω, $S(\partial\omega)$ — площадь сферы $\partial\omega$, причем $\frac{V(\omega)}{aS(\partial\omega)} =$ $= n$-размерность поверхности F. Отсюда находим

$$A_0 n \leqslant 1 + \frac{1}{\sin \rho},$$

что и доказывает (3).

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. В. Ефимов. Исследование однозначной проекции поверхности отрицательной кривизны. ДАН СССР, 93, № 4 (1953), 609—611.
2. В. Бляшке. Круг и шар. «Наука», М., 1967.
3. S. S. Chern. On the curvatures of a piece of hupersurface in Euclidean space. Abhandl. Math. Semin. Univ. Hamburg, 29, № 1—2, (1965), 77—91.

Поступила 10 октября 1969 г.

К ВОПРОСУ ОБ ИЗГИБАНИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ

К. М. Белов
(Москва)

1°. Рассмотрим регулярную поверхность F, отнесенную к изотермической системе координат:

$$ds^2 = \Lambda(x, y)(dx^2 + dy^2). \tag{1}$$

Пусть $w(z) = \frac{1}{2}(b_2^2 - b_1^1) + ib_1^2$, где $z = x + iy$, i — мнимая единица, а b_i^k — смешанные компоненты тензора второй квадратичной формы, функция Векуа этой поверхности. Обозначим H среднюю кривизну, K — гауссову кривизну, $E = \sqrt{H^2 - K}$ — эйлерову разность поверхности F. Тогда, как нетрудно убедиться,

$$|w| = \sqrt{H^2 - K} = E, \tag{2}$$

а уравнения Петерсона — Кодацци и Гаусса могут быть записаны в виде

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial \ln \Lambda}{\partial \bar{z}} w + \frac{\partial H}{\partial z} = 0, \tag{3}$$

$$K = -\frac{2}{\Lambda}\frac{\partial^2 \ln \Lambda}{\partial z \partial \bar{z}}, \tag{4}$$

где символы дифференцирования определяются формулами

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) \text{ и } \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Из (2) следует, что функция Векуа

$$w = Ee^{i\alpha}. \tag{5}$$

С другой стороны, если b — нормальная кривизна поверхности в некотором направлении, составляющем с осью OX угол γ, а a — геодезическое кручение поверхности в той же точке и в том же направлении, то [2]

$$H - b + ia = we^{2i\gamma}. \tag{6}$$

Поэтому, α — удвоенный угол между главным направлением на поверхности и осью OX [1]. Из последней формулы следует также, что

$$a = E \sin 2\varphi,$$
$$H - b = E \cos 2\varphi, \tag{7}$$

где φ — угол между данным направлением и первым главным направлением на поверхности, и что

$$a^2 = bb_{\perp} - K, \tag{8}$$

где $b_{\perp}$ — нормальная кривизна поверхности в направлении, перпендикулярном данному.

2°. Пусть теперь F_1 и F_2 — две изометричные регулярные поверхности, отнесенные к изотермической системе координат (1), а w_1 и w_2 — их функции Векуа. Ориентируем поверхности таким образом, чтобы в окрестности рассматриваемой точки выполнялось условие $H_1 H_2 \geqslant 0$, где H_1 и H_2 — средние кривизны поверхностей F_1 и F_2 в соответствующих по изометрии точках. Последнее условие всегда выполнено, если ограничиться рассмотрением достаточно малых изгибаний.

Положим

$$\omega = w_1 - w_2 = Ge^{i\beta} \tag{9}$$

и назовем эту функцию функцией изгибания. Пусть a_1 и a_2 — геодезические кручения поверхностей F_1 и F_2 в соответствующих по изометрии точках и направлениях. Направления, в которых $a_1 = a_2$, назовем главными направлениями изгибания.

Из (6) следует, что

$$H_1 - b_1 - H_2 + b_2 + i(a_1 - a_2) = e^{2i\gamma}\omega = Ge^{2i\left(\gamma + \frac{\beta}{2}\right)}, \tag{10}$$

где b_1 и b_2 — нормальные кривизны поверхностей F_1 и F_2 в соответствующих по изометрии точках и направлениях. Поэтому если $\gamma = -\frac{\beta}{2}$, то $a_1 = a_2$. Следовательно, β — удвоенный угол между главным направлением изгибания и осью OX. Кроме того, в каждой точке любой изгибаемой поверхности существует главное направление изгибания.

Последнее замечание можно уточнить.

Теорема 1. *При изгибании поверхности в каждой точке этой поверхности определяются два взаимно перпендикулярных главных направления изгибания.*

В самом деле, если $a_1 = E_1 \sin 2\varphi_1$ и $a_2 = E_2 \sin 2\varphi_2$ и если $a_1 = a_2$ в некотором направлении, т. е. $E_1 \sin 2\varphi_1 = E_2 \sin 2\varphi_2$, то изменение направления на угол 90° не нарушит этого равенства.

Положим $\psi = \gamma + \frac{1}{2}\beta$. Из (10) следует, что

$$a_1 - a_2 = G \sin 2\psi, \qquad (H_1 - b_1) - (H_2 - b_2) = G \cos 2\psi, \tag{11}$$

где ψ — угол между данным направлением и главным направлением изгибания.

При изменении координации $z' = \Phi_{(z)}$ функция изгибания преобразуется по формуле

$$\omega' = \frac{|\Phi'|^2}{(\Phi')^2}\,\omega,$$

откуда следует, что модуль этой функции G является инвариантом преобразования. Назовем его изгибом поверхности в данной точке:

$$G = |w_1 - w_2|. \tag{12}$$

3°. Введем далее следующие понятия. Назовем разность $\mathrm{A} = a_1 - a_2$ геодезическим скручиванием поверхности в данной точке в данном направлении, а разность $\mathrm{B} = b_1 - b_2$ — нормальным изгибом поверхности в данной точке в данном направлении. Нормальный изгиб в направлении, перпендикулярном данному, обозначим $\mathrm{B}_\perp$. Назовем разность $\mathrm{H} = H_1 - H_2$ средним изгибом поверхности, а разность $\mathrm{K} = \mathrm{H}^2 - G^2$ — гауссовым изгибом. Ввиду (10) имеем для гауссова изгиба выражение

$$\mathrm{K} = (b_1 - b_2)(b_{1\perp} - b_{2\perp}) - (a_1 - a_2)^2.$$

Следовательно, аналогично (8) имеем для гауссова изгиба

$$\mathrm{K} = \mathrm{B}\mathrm{B}_\perp - \mathrm{A}^2. \tag{13}$$

Перепишем формулы (11) в виде

$$\mathrm{A} = G \sin 2\psi, \qquad \mathrm{H} - \mathrm{B} = G \cos 2\psi. \tag{14}$$

Отсюда видно, что в каждой точке поверхности и в любом направлении

$$\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 - 2\mathrm{H}\mathrm{B} + \mathrm{K} = 0. \tag{15}$$

Вычитая уравнение (3), написанное для поверхности F_2, из уравнения (3), написанного для поверхности F_1, получим для функции изгибания соотношение

$$\frac{\partial \omega}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial \ln \Lambda}{\partial \bar{z}}\,\omega + \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial z} = 0, \tag{16}$$

причем

$$|\omega| = \sqrt{\mathrm{H}^2 - \mathrm{K}} = G. \tag{17}$$

4°. Нормальные изгибы в главных направлениях изгибания назовем главными изгибами поверхности и обозначим B_1 и B_2. Так как гауссов изгиб K не зависит от направления, то из соотношения (13) следует, что

$$\mathrm{K} = \mathrm{B}_1\mathrm{B}_2. \tag{18}$$

Кроме того,

$$\mathrm{H} = \frac{1}{2}(\mathrm{B} + \mathrm{B}_\perp).$$

Следовательно, средний изгиб имеет выражение

$$H = \frac{1}{2}(B_1 + B_2). \tag{19}$$

Ввиду (17) изгиб поверхности в данной точке

$$G = \frac{1}{2}|B_1 - B_2|. \tag{20}$$

Заметим, что из $B_1 = B_2$ следует $G = 0$. Точка, в которой $G = O$, называется особой точкой изгибания; пример: точка конгруэнтности F_1 и F_2. В предположении $G \neq O$ имеем $B_1 \neq B_2$. Пусть, например, $B_1 > B_2$.

Теорема 2. *Для нормального изгиба поверхности в данном направлении имеет место формула*

$$B = B_1 \cos^2\varphi + B_2 \sin^2\varphi, \tag{21}$$

где φ — угол между первым главным направлением изгибания и данным направлением.

В самом деле, ввиду $\psi = 90° - \varphi$ из (14) следует, что $A = G \sin 2\varphi$; $H - B = G \cos 2\varphi$. Поэтому, в силу (19) и (20)

$$B_1 \cos^2\varphi + B_2 \sin^2\varphi = \frac{1}{2} B_1 (1 + \cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + \frac{1}{2} B_2 (1 + \sin^2\varphi -$$

$$- \cos^2\varphi) = \frac{1}{2}(B_1 + B_2) + \frac{1}{2}(B_1 - B_2)\cos 2\varphi = H + G\cos 2\varphi = B.$$

Из теоремы 2 следует, что

$$B_1 = \max_{\varphi} B; \ B_2 = \min_{\varphi} B.$$

Поэтому изгиб поверхности

$$G = \frac{1}{2}\left[\max_{\varphi} B - \min_{n} B\right],$$

или

$$G = \frac{1}{2}\left[\max_{\varphi}(b_1 - b_2) - \min_{\varphi}(b_1 - b_2)\right].$$

5°. Направления, в которых нормальный изгиб поверхности равен нулю, называются характеристическими направлениями изгибания. Из формулы (21) видно, что главные направления изгибания являются биссекторными для характеристических.

6°. Назовем изгибание поверхности эллиптическим в точке М, если в этой точке гауссов изгиб $K > 0$, параболическим, если $K = 0$, и гиперболическим, если $K < 0$. Если изгибание эллиптическое (параболическое, гиперболическое) во всех точках поверхности, будем говорить, что изгибание является эллиптическим (параболическим, гиперболическим).

Изгибание поверхности с сохранением средней кривизны, например, является гиперболическим всюду на поверхности, за исключением конечного множества внутренних точек поверхности либо множества меры нуль граничных точек. В самом деле, из $H_1 = H_2$ следует $H = 0$ и, значит, ввиду (17) $K = -G^2 \leqslant O$. Из уравнения (16) следует далее, что функция $\Delta\omega$ является в случае $H = O$ аналитической и, если изгиб $G = |\omega|$ обращается в нуль на бесконечном множестве внутренних точек поверхности либо на множестве граничных точек положительной меры, то изгиб равен нулю всюду, и изгибание тривиально.

Теорема 3. *Изгибание поверхности положительной кривизны является гиперболическим всюду, за исключением, может быть, множества* *меры нуль граничных точек поверхности либо конечного множества внутренних точек.*

Действительно, при изгибании поверхности положительной кривизны в каждой точке, не являющейся точкой конгруэнтности, определяются два характеристических направления [3]. В каждом из этих направлений $B_1 \cos^2 \varphi + B_2 \sin^2 \varphi = 0$, что может случиться лишь при $B_1 \geqslant 0$ и $B_2 \leqslant 0$. Значит, $\mathrm{K} = B_1 B_2 \leqslant 0$. Заключительная часть утверждения теоремы вытекает из характера распределения точек конгруэнтности двух изометричных поверхностей положительной кривизны [4].

Теорема 4. *Всякое изгибание поверхности отрицательной кривизны с сохранением сети линий кривизны является эллиптическим.*

Для доказательства рассмотрим гауссов изгиб

$$\mathrm{K} = \mathrm{H}^2 - G^2 = (H_1 - H_2)^2 - |w_1 - w_2|^2 = H_1^2 - 2H_1H_2 + H_2^2 - |w_1|^2 -$$

$$- |w_2|^2 + (w_1\bar{w}_2 + \bar{w}_1 w_2) = 2K - 2H_1H_2 + (w_1\bar{w}_2 + \bar{w}_1 w_2).$$

В силу (5) $w_1 = E_1 e^{i\alpha_1}$ и $w_2 = E_2 e^{i\alpha_2}$, где α_1 и α_2 — удвоенные углы между главными направлениями на поверхностях F_1 и F_2 и осью OX. Поэтому

$$\mathrm{K} = -2\left[H_1H_2 - K - \sqrt{H_1^2 - K}\sqrt{H_2^2 - K}\cos 2\alpha\right], \tag{22}$$

где α — угол между главными направлениями на поверхностях F_1 и F_2. Из этой формулы следует, что в случае $\alpha = 0$

$$\mathrm{K} = -2\frac{K(H_1 - H_2)^2}{H_1H_2 - K + \sqrt{H_1^2 - K}\sqrt{H_2^2 - K}}$$

и, значит, ввиду $H_1H_2 \geqslant 0$ имеем в случае $K < 0$ эллиптическое изгибание.

Примером изгибания с сохранением сети линий кривизны является изгибание поверхности вращения в поверхность вращения. Следовательно, если поверхность вращения имеет отрицательную кривизну, то упомянутое изгибание будет эллиптическим.

Кстати отметим, что поверхности, допускающие изгибания с сохранением сети линий кривизны, либо являются развертывающимися либо содержат одно семейство линий кривизны в параллельных плоскостях (Д. Кодацци).

7°. Параболическим изгибаниям поверхностей было посвящено сообщение автора на Тбилисской конференции геометров [5]. Имеет место следующее предложение.

Теорема 5. *Если нетривиальное изгибание поверхности F_1 в поверхность F_2 является параболическим, то поверхности F_1 и F_2 линейчатые.*

Линейчатые поверхности могут допускать не только параболические изгибания. Например, изгибание минимального геликоида в классе минимальных поверхностей является гиперболическим, а изгибание части однополостного гиперболоида вращения в поверхность вращения в силу теоремы 4 является эллиптическим.

Теорема 6. *Для того, чтобы нетривиальное изгибание линейчатой поверхности было параболическим, необходимо и достаточно, чтобы хотя бы одна образующая перешла при изгибании в прямолинейную образующую изометричной поверхности.*

Доказательство теорем 5 и 6 содержится в работе [6].

Из формулы (22) следует, в частности, что развертывающаяся поверхность может допускать лишь гиперболические изгибания и параболические (с сохранением образующих). В самом деле в этом случае

$$K = -4H_1H_2\sin^2\alpha \leqslant 0. \tag{23}$$

Примером изгибаний второго типа (параболических) является любое изгибание бесконечного цилиндра или полуцилиндра. Как известно, эти поверхности допускают лишь изгибания с сохранением образующих (Вилкицкий, ЛГУ; Г. В. Борисова, МГУ). Цилиндрический пояс, кроме параболических изгибаний, допускает и другие, в чем легко убедиться на модели. Все они гиперболические.

8°. Рассмотрим изгибание части кругового цилиндра радиуса R, которому она подвергается при скольжении по цилиндру. Если это скольжение происходит без поворота, оно является параболическим (даже тривиальным). При повороте на угол α поверхность изгибается и из формулы (23) следует, что гауссов изгиб

$$K = -\frac{1}{R^2}\sin^2\alpha. \tag{24}$$

Следовательно, изгиб такой поверхности ввиду $H = O$

$$G = \sqrt{H^2 - K} = \sqrt{-K} = \frac{1}{R}|\sin\alpha|.$$

Максимальный изгиб получается при повороте на 90°.

В силу (19) имеем $B_1 = -B_2$, а в силу (18) и (24) —

$$-B_1^2 = -\frac{1}{R^2}\sin^2\alpha.$$

Таким образом,

$$B_1 = -B_2 = \frac{1}{R}\sin\alpha,$$

поэтому ввиду (21) нормальный изгиб в направлении, составляющем с параллелью угол ψ,

$$B = \frac{1}{R}\sin\alpha\sin(2\psi + \alpha).$$

Характеристики изгибания рассматриваемой поверхности идут по биссектрисам углов между образующими поверхностей F_1 и F_2, а линиями изгиба (линии, имеющие в каждой точке направление, совпадающее с главным направлением изгибания) являются винтовые линии, идущие по биссектрисам углов между характеристиками.

9°. Изучение некоторых работ украинских геометров показывает, что введение понятий, аналогичных тем, которые приведены выше, полезно и при рассмотрении бесконечно малых изгибаний поверхностей. В работе [7], например, доказывается, что в каждой точке поверхности F при бесконечно малом изгибании ее определяются два направления, в которых приращение Δb нормальной кривизны поверхности принимает экстремальные значения (в случае конечных изгибаний они названы были выше главными направлениями изгибания) и определяются направления, в которых $\Delta b = 0$ (выше характеристические направления изгибания). Оказывается, что при бесконечно малом изгибании поверхности положительной кривизны кривизна одних линий на поверхности возрастает, а других убывает. В каждой точке поверхности существуют два вещественных направления, в которых кривизна не изменяется (см. [7], теорема 3). Эти факты полностью аналогичны тем, которые имеют место в случае конечных изгибаний и следуют из формулы (21), так как в случае $K > 0$ изгибание является гиперболическим (теорема 3).

Теоремой 4 работы [7] дается классификация бесконечно малых изгибаний, аналогичная классификации конечных изгибаний по знаку гауссова изгиба, приведенной здесь в п. 6°, разбиение всех изгибаний на эллиптические, параболические и гиперболические.

Далее, в работе [7] отмечено (без доказательства), что развертывающиеся поверхности не допускают эллиптических бесконечно малых изгибаний и в случае параболического изгибания одно из характеристических направлений является направлением прямолинейной образующей поверхности. Для конечных изгибаний эти результаты содержатся здесь в п. 7°.

В работе [8] доказано, что в случае непараболического бесконечно малого изгибания развертывающейся поверхности прямолинейные образующие искривляются. Для случая конечных изгибаний этот факт также имеет место и содержится в теореме 6, сформулированной выше. Изложенное выше позволяет сделать следующие выводы.

1. Методы и понятия, приведенные в статье, могут быть использованы для изучения и бесконечно малых изгибаний.

2. Ряд фактов, изложенных в работе, без изменения (почти без изменения) распространяется на случай бесконечно малых изгибаний.

3. Некоторые факты, известные в теории бесконечно малых изгибаний, могут быть перенесены на случай конечных изгибаний поверхности.

Пример. Обозначим $\underset{1}{\Delta b}$ и $\underset{2}{\Delta b}$ экстремальные значения изменения нормальной кривизны поверхности в данной точке при бесконечно малом изгибании. Тогда для изменения нормальной кривизны поверхности в произвольном направлении

$$\Delta b = \underset{1}{\Delta b} \cos^2 \varphi + \underset{2}{\Delta b} \sin^2 \varphi,$$

где φ — угол, который образует это направление с направлением экстремального изменения нормальной кривизны. Доказательство этого утверждения легко следует из теоремы 2.

Это значит, например, что при бесконечно малом изгибании поверхности направления, в которых изменение нормальной кривизны поверхности F имеет экстремальные значения, взаимно ортогональны.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Н. Векуа. Обобщенные аналитические функции. Физматгиз, М., 1959.

2. К. М. Белов. Об однозначной определенности поверхностей. ДАН СССР, т. 127, № 2, 1959, 239—241.

3. С. Э. Кон-Фоссен. Некоторые вопросы дифференциальной геометрии в целом. Физматгиз, М., 1959.

4. К. М. Белов. Некоторые замечания о неизгибаемости поверхностей. ДАН СССР, т. 131, № 3, 1960, 475—477.

5. К. М. Белов. Параболические изгибания поверхностей. Тезисы докладов IV Всесоюзной межвузовской конференции по геометрии. ТбГУ, 1969, 13—14.

6. К. М. Белов. Об изгибании линейчатых поверхностей. Сиб. матем. ж., т. XI, № 2, 1970., 464—467.

7. В. П. Белоусова, Н. И. Пашкурлат. Про одну властивість поля обертання та її висновки. Вестник Киевск. ун-та, 1965, № 7, 58—62.

8. П. Л. Симоконь. Бесконечно малые изгибания K-го порядка куска цилиндрической поверхности. I Республиканская математическая конференция молодых исследователей, т. 2, 1965, Киев, 594—602.

Поступила 12 ноября 1969 г.

ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ ПЕТЕРСОНА В P_4

Я. П. Бланк, Н. М. Гормашева
(Харьков)

1. Гиперповерхностью Петерсона в четырехмерном проективном пространстве назовем гиперповерхность, несущую коническую 3-сеть. Это значит, что через каждую точку гиперповерхности проходит три двумерные поверхности F_1, F_2, F_3 и три кривые их пересечения C_{23}, C_{31}, C_{12} (C_{ik} — линия пересечения поверхностей F_i, F_k), такие, что касательные к кривым C_{ij}, проведенные в точках поверхности F_k $(i \neq k \neq j)$, образуют гиперконусы. Обозначим Γ_1, Γ_2, Γ_3 линии, на которых расположены вершины гиперконусов, описанных около гиперповерхности вдоль однопараметрического семейства двумерных поверхностей F_1, F_2, F_3. Имеют место следующие зависимости:

$$x^i_u = ax^i + \alpha u^i,$$
$$x^i_v = bx^i + \beta v^i, \quad (i = 1, \ldots, 5)$$
$$x^i_w = cx^i + \gamma w^i,$$

где u^i, v^i, w^i — однородные координаты точек кривых Γ_1, Γ_2, Γ_3, соответственно; u^i — функции одного параметра u, v^i — функции одного параметра v, w^i — функции одного параметра w.

$$x^i_{uv} = a_v x^i + a\left(bx^i + \beta v^i\right) + \alpha_v u^i = b_u x^i + b\left(ax^i + \alpha u^i\right) + \beta_u v^i.$$

Следовательно,

$$a_v = b_u, \ \frac{\beta_u}{\beta} = a, \ \frac{\alpha_v}{\alpha} = b, \ \left(\ln \frac{\beta}{\alpha}\right)_{uv} = 0.$$

Аналогично

$$b_w = c_v, \ \frac{\gamma_v}{\gamma} = b, \ \frac{\beta_w}{\beta} = c, \ \left(\ln \frac{\beta}{\gamma}\right)_{vw} = 0;$$

$$c_u = a_w, \ \frac{\alpha_w}{\alpha} = c, \ \frac{\gamma_u}{\gamma} = a, \ \left(\ln \frac{\gamma}{\alpha}\right)_{wu} = 0,$$

т. е.

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{A(v, w)}{B(u, w)}, \ \frac{\gamma}{\beta} = \frac{B_1(u, w)}{C(u, v)}, \ \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{C_1(u, v)}{A_1(v, w)} \tag{1}$$

и

$$\frac{A_1}{A} = \frac{B_1}{B} \cdot \frac{C_1}{C}. \tag{2}$$

Левая часть (2) от u не зависит, следовательно, можно положить $u =$ $=$ const, поэтому

$$\frac{A_1}{A} = \frac{w_0(w)}{v_0(v)}, \tag{3}$$

$$\frac{B_1}{B} = \frac{C}{C_1} \cdot \frac{w_0(w)}{v_0(v)}. \tag{4}$$

Левая часть (4) не зависит от v, следовательно, можно положить $v =$ $=$ const, поэтому

$$\frac{B_1}{B} = \frac{w_0(w)}{u_0(u)}.$$

Наконец,

$$\frac{C_1}{C} = \frac{u_0(u)}{v_0(v)}.$$

Так как

$$a = \frac{\gamma_u}{\gamma} = \frac{\beta_u}{\beta}, \quad b = \frac{\alpha_v}{\alpha} = \frac{\gamma_v}{\gamma}, \quad c = \frac{\alpha_w}{\alpha} = \frac{\beta_w}{\beta},$$

то

$$\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)_u = 0, \quad \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)_v = 0, \quad \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_w = 0$$

и по (1)

$$C(u, v) = B_1(u, w) \cdot A_2(v, w),$$

$$A_1(v, w) = C_1(u, v) \cdot B_2(u, w),$$

$$B(u, w) = A(v, w) \cdot C_2(u, v).$$

Положив в первом соотношении $w = \mathrm{const}$, получим

$$C(u, v) = \frac{u_2(u)}{v_2(v)},$$

а при $v = \mathrm{const}$

$$B_1(u, w) = \frac{u_2(u)}{w_2(w)}.$$

Положив во втором $u = \mathrm{const}$, получим

$$A_1(v, w) = \frac{v_3(v)}{w_3(w)},$$

а при $w = \mathrm{const}$ получим

$$C_1(u, v) = \frac{v_3(v)}{u_3(u)}.$$

Наконец, положив в третьем соотношении $v = \mathrm{const}$, получим

$$B(u, w) = \frac{w_4(w)}{u_4(u)},$$

положив же $u = \mathrm{const}$, получим

$$A(v, w) = \frac{w_4(w)}{v_4(v)}.$$

Но по (3)

$$\frac{A_1}{A} = \frac{w_0}{v_0} = \frac{v_3}{w_3} \cdot \frac{v_4}{w_4},$$

следовательно,

$$v_0 v_3 v_4 = w_0 w_3 w_4 = \mathrm{const} = h_1.$$

Аналогично

$$\frac{B_1}{B} = \frac{w_0}{u_0} = \frac{u_2}{w_2} \cdot \frac{u_4}{w_4}$$

и

$$u_0 u_2 u_4 = w_0 w_2 w_4 = \mathrm{const} = h_2;$$

$$\frac{C_1}{C} = \frac{u_0}{v_0} = \frac{v_3}{u_3} \cdot \frac{v_2}{u_2},$$

$$u_0 u_2 u_3 = v_0 v_2 v_3 = \mathrm{const} = h_3,$$

т. е.

$$\frac{u_4}{u_3} = \frac{h_2}{h_3}, \quad \frac{v_4}{v_2} = \frac{h_1}{h_3}, \quad \frac{w_3}{w_2} = \frac{h_1}{h_2}.$$

Но

$$x_u^i = ax^i + \alpha u^i, \quad a = \frac{\beta_u}{\beta}, \quad \alpha = \beta\frac{B}{A} = \beta\frac{v_4}{u_4},$$

поэтому

$$x_u^i = \frac{\beta_u}{\beta}x^i + \beta\frac{v_4}{u_4}u^i,$$

аналогично

$$x_v^i = \frac{\alpha_v}{\alpha}x^i + \alpha\frac{u_4}{v_4}v^i,$$

$$x_w^i = \frac{\alpha_w}{\alpha}x^i + \alpha\frac{u_3}{w_3}w^i,$$

или

$$\left(\frac{x^i}{v_4\beta}\right)_u = \frac{u^i}{u_4}, \quad \left(\frac{x^i}{u_4\alpha}\right)_v = \frac{v^i}{v_4}, \quad \left(\frac{x^i}{u_3\alpha}\right)_w = \frac{w^i}{w_3}, \tag{5}$$

а так как

$$u_3 = \frac{h_3}{h_2}u_4,$$

то

$$\left(\frac{x^i}{u_4\alpha}\right)_w = \frac{h_3}{h_2}\frac{w^i}{w_3}.$$

Так как

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{A}{B} = \frac{u_4}{v_4},$$

то

$$v_4\beta = u_4\alpha,$$

и первое уравнение из (5) имеет вид

$$\left(\frac{x^i}{u_4\alpha}\right)_u = \frac{u^i}{u_4}.$$

Обозначим

$$\frac{1}{\alpha u_4} = \lambda, \quad \frac{u^i}{u_4} = \varphi^{i'}(u), \quad \frac{v^i}{v_4} = \chi^{i'}(v), \quad \frac{h_3 w^i}{h_2 w_3} = \Psi^{i'}(w),$$

имеем по (5)

$$(\lambda x^i)_u = \varphi^{i'}(u), \quad (\lambda x^i)_v = \chi^{i'}(v), \quad (\lambda x^i)_w = \Psi^{i'}(w),$$

т. е.

$$\lambda x^i = \varphi^i(u) + \chi^i(v) + \Psi^i(w). \tag{6}$$

Такую параметризацию гиперповерхности Петерсона назовем канонической. При этом кривые $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$, порождающие сеть, определяются уравнениями

$$\rho x^i = \frac{d\varphi^i}{du}, \quad \rho x^i = \frac{d\chi^i}{dv}, \quad \rho x^i = \frac{d\Psi^i}{dw}.$$

2. На гиперповерхностях второго порядка в P_4 (гиперквадриках) существует ∞^6 конических 3-сетей.

Действительно, уравнение невырожденной гиперквадрики с помощью вещественных или комплексных коллинеаций может быть приведено к виду

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = x_5^2. \tag{7}$$

Гиперквадрика (7) допускает параметризацию

$$\begin{aligned}
\rho x_1 &= 2 - \frac{u^2+v^2+w^2}{2},\\
\rho x_2 &= 2u,\\
\rho x_3 &= 2v,\\
\rho x_4 &= 2w,\\
\rho x_5 &= 2 + \frac{u^2+v^2+w^2}{2}.
\end{aligned}$$

Следовательно, гиперквадрика является гиперповерхностью Петерсона.

При этой параметризации вершины касательных гиперконусов лежат на линиях

$$\begin{aligned}
&\Gamma_1\ (x_3=0,\ x_4=0,\ x_1+x_5=0),\\
&\Gamma_2\ (x_2=0,\ x_4=0,\ x_1+x_5=0),\\
&\Gamma_3\ (x_2=0,\ x_3=0,\ x_1+x_5=0),
\end{aligned}$$

т. е. $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ — прямые, пересекающиеся в точке $(1, 0, 0, 0, -1)$ гиперквадрики и лежат в касательной гиперплоскости $x_1+x_5=0$, соответствующей этой точке. При этом каждая из прямых Γ_i полярно сопряжена 2-плоскости, образованной двумя другими прямыми.

Произвольно выбираем точку (M) на гиперквадрике (3 параметра), в ее касательной 3-плоскости — произвольную прямую Γ_1, проходящую через (M) (2 параметра), и в 2-плоскости, полярно сопряженной Γ_1, произвольную прямую Γ_2, проходящую через (M) (1 параметр); тогда прямая Γ_3 определится однозначно. Следовательно, на невырожденной гиперквадрике существует ∞^6 конических 3-сети.

Этим исчерпываются все конические 3-сети на гиперквадриках.

Действительно, пусть коническая 3-сеть на гиперквадрике порождается линиями $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$. Докажем, что Γ_1, Γ_2 и Γ_3 — прямые, обладающие вышеперечисленными свойствами. Действительно, гиперконус, описанный около гиперквадрики S из полюса (P), расположенного на Γ_1, касается ее по квадрике F, принадлежащей полярной 3-плоскости Π. Γ_2 и Γ_3 порождают на F коническую сеть, состоящую из кривых второго порядка (коник). Следовательно, Γ_2 и Γ_3 — прямые, лежащие в гиперплоскости Π. Так как Γ_2, Γ_3 принадлежат 3-плоскостям Π, соответствующим всем точкам (P) линии Γ_1, то они лежат в 2-плоскости (α) и имеют общую точку O; однопараметрическое семейство 3-плоскостей Π, пересекающихся по (α), образуют пучок, а Γ_1 — прямая, полярно сопряженная плоскости (α). Отсюда и следует наше утверждение.

Пусть на гиперквадрике задана параметризация (6). Легко видеть, что и в тангенциальных координатах имеет место аналогичная параметризация.

3. Рассмотрим гиперповерхности Петерсона, которые и в тангенциальных координатах допускают аналогичное каноническое представление.

Теорема. *Если гиперповерхность в P_4 допускает параметризацию*

$$\begin{aligned}
\rho x_i &= u_i(u) + v_i(v) + w_i(w),\\
\sigma \xi_i &= U_i(u) + V_i(v) + W_i(w), \quad (i = 1, \ldots, 5)
\end{aligned}$$

то линии $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$, порождающие коническую 3-сеть, прямые, проходящие через общую точку.

Действительно, имеют место следующие зависимости

$$S\xi_i x_i = S\xi_i u_i' = S\xi_i v_i' = S\xi_i w_i' = 0.$$

Отсюда следует
$$SV'_i u'_i = SW'_i u'_i = SU'_i v'_i = SW'_i v'_i = SU'_i w'_i = SV'_i w'_i = 0. \tag{8}$$

Если отношения функций $u'_i(u)$ постоянны, линия Γ_1 вырождается в точку, а гиперповерхность — в гиперконус. Аналогично для функций $v'_i(v)$ и $w'_i(w)$. Исключив этот случай, будем считать, что отношения функций $u'_i(u)$ и соответственно $v'_i(v)$, $w'_i(w)$ не постоянны.

Будем также считать, что отношения функций U'_i и соответственно V'_i, W'_i — не постоянны. Тем самым мы исключим случай, когда гиперповерхность вырождается в гиперплоскость.

Из уравнений
$$\begin{gathered} SV'_i u'_i = 0, \\ SW'_i u'_i = 0 \end{gathered} \tag{9}$$
следует, что линия (u'_i) — прямая. Действительно, (V'_i) и (W'_i) определяют однопараметрические семейства гиперплоскостей. Линия Γ_1 по (9) принадлежит гиперплоскостям обоих семейств. Так как эти семейства не совпадают, то всегда можно выбрать две различные гиперплоскости одного семейства и отличную от них гиперплоскость второго семейства, которые в своем пересечении определяют прямую Γ_1. То же самое справедливо для линий Γ_2, Γ_3.

Итак, линии Γ_1, Γ_2, Γ_3 — прямые. Пусть Γ_1 определяется точками $A(a_i)$ и $\widetilde{A}(\widetilde{a}_i)$, Γ_2 — точками $B(b_i)$ и $\widetilde{B}(\widetilde{b}_i)$ и Γ_3 — точками $C(c_i)$ и $\widetilde{C}(\widetilde{c}_i)$. Учитывая это, можно записать:
$$u'_i = u'(u)\, a_i + u'_0(u)\, \widetilde{a}_i,$$
$$v'_i = v'(v)\, b_i + v'_0(v)\, \widetilde{b}_i,$$
$$w'_i = w'(w)\, c_i + w'_0(w)\, \widetilde{c}_i,$$
где
$$\left(\frac{u'}{u'_0}\right)' \cdot \left(\frac{v'}{v'_0}\right)' \cdot \left(\frac{w'}{w'_0}\right)' \neq 0.$$

Из уравнений (8) следует
$$\begin{cases} SU'_i c_i = 0, \\ SU'_i \widetilde{c}_i = 0, \\ SU'_i b_i = 0, \\ SU'_i \widetilde{b}_i = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} SV'_i a_i = 0, \\ SV'_i \widetilde{a}_i = 0, \\ SV'_i c_i = 0, \\ SV'_i \widetilde{c}_i = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} SW'_i b_i = 0, \\ SW'_i \widetilde{b}_i = 0, \\ SW'_i a_i = 0, \\ SW'_i \widetilde{a}_i = 0, \end{cases}$$
т. е. прямые Γ_1, Γ_2, Γ_3 попарно пересекаются.

Три попарно пересекающиеся прямые либо лежат в одной 2-плоскости (при этом точки пересечения могут быть разными или совпадающими), либо не лежат в одной 2-плоскости (тогда они все три проходят через одну точку).

Покажем, что первое невозможно. Действительно, пусть Γ_1, Γ_2, Γ_3 лежат в одной 2-плоскости и точки их пересечения различны. Можно, например, считать
$$(\widetilde{a}_i) = (\widetilde{c}_i), \ (c_i) = (\widetilde{b}_i), \ (a_i) = (b_i).$$

Примем точку $\tilde{A}$ за начало координат (0, 0, 0, 0, 1), а прямые Γ_1 и Γ_2 — за оси Ox_1 и Ox_2, тогда можно положить $A \equiv (1, 0, 0, 0, 0)$, $C \equiv (0, 1, 0, 0, 0)$. При этом имеем

$$u_1' = u'(u),\ u_2' = u_3' = u_4' = 0,\ \ u_5' = u_0'(u);$$

$$v_1' = v'(v),\ v_2' = v_0'(v),\ v_3' = v_4' = v_5' = 0;$$

$$w_1' = w_3' = w_4' = 0,\ w_2' = w'(w),\ \ w_5' = w_0'(w),$$

т. е.,

$$\begin{aligned} x_1 &= u(u) + v(v) + \alpha_1, \\ x_2 &= v_0(v) + w(w) + \alpha_2, \\ x_3 &= \alpha_3, \\ x_4 &= \alpha_4, \\ x_5 &= u_0(u) + w_0(w) + \alpha_5, \end{aligned}$$

где α_i — постоянные. Следовательно,

$$\alpha_3 x_4 - \alpha_4 x_3 = 0$$

и гиперповерхность вырождается в гиперплоскость. Такое же вырождение получается, если $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ лежат в одной 2-плоскости и проходят через общую точку.

Поэтому, $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ не лежат в одной 2-плоскости и имеют общую точку. Пусть это будет точка $(\tilde{a}_i) = (\tilde{b}_i) = (\tilde{c}_i)$. Примем ее за начало координат, а $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ — за оси Ox_1, Ox_2, Ox_3 соответственно; совместим точки A, B, C с точками пересечения $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ с гиперплоскостью $x_5 = 0$. При этом уравнения гиперповерхности Петерсона запишутся так:

$$\begin{aligned} x_1 &= u(u) + \alpha_i, \\ x_2 &= v(v) + \alpha_2, \\ x_3 &= w(w) + \alpha_3, \\ x_4 &= \alpha_4,\ \ (\alpha_4 \neq 0) \\ x_5 &= u_0(u) + v_0(v) + w_0(w) + \alpha_5. \end{aligned}$$

Приняв $u(u) + \alpha_1$, $v(v) + \alpha_2$, $w(w) + \alpha_3$ за новые параметры u, v, w соответственно, перепишем уравнения гиперповерхности в таком виде:

$$\begin{aligned} \rho x_1 &= u, \\ \rho x_2 &= v, \\ \rho x_3 &= w, \\ \rho x_4 &= 1, \\ \rho x_5 &= U(u) + V(v) + W(w). \end{aligned} \tag{10}$$

Вершины касательных гиперконусов лежат на прямых

$$\begin{aligned} &\Gamma_1: (x_2 = x_3 = x_4 = 0), \\ &\Gamma_2: (x_1 = x_3 = x_4 = 0), \\ &\Gamma_3: (x_1 = x_2 = x_4 = 0), \end{aligned}$$

которые расположены в гиперплоскости $x_4=0$ и пересекаются в общей точке $0(0,0,0,0,1)$. Уравнения гиперповерхности (10) в тангенциальных координатах следующие:

$$\begin{aligned}
\sigma\xi_1 &= U'(u),\\
\sigma\xi_2 &= V'(v),\\
\sigma\xi_3 &= W'(w),\\
\sigma\xi_4 &= (U-uU')+(V-vV')+(W-wW'),\\
\sigma\xi_5 &= -1.
\end{aligned}$$

Конусы с вершинами на Γ_1 касаются гиперповерхности (10) по двумерным поверхностям F_1, которые служат сечениями гиперповерхности пучком гиперплоскостей, проходящих через 2-плоскость, определяемую точками $\xi_2=0$, $\xi_3=0$, $\xi_5=0$, т. е. через 2-плоскость, определяемую прямыми Γ_2, Γ_3. Аналогично, два других семейства двумерных поверхностей F_2 и F_3 гиперповерхности (10) представляют собой ее сечения пучками гиперплоскостей, проходящих через 2-плоскость прямых Γ_1, Γ_3 и 2-плоскость прямых Γ_1, Γ_2. Поэтому, рассматриваемую 3-сеть будем называть плоской конической. Уравнение гиперповерхности, несущей плоскую коническую 3-сеть, приводится к каноническому виду (10), она определена с произволом в 3 функции одного аргумента и является обобщением на P_4 поверхности P_3, несущей двойную сеть Кенигса.

В работе [2] были определены все поверхности в P_3, несущие две двойные сети Кенигса.

4. Рассмотрим гиперповерхность Петерсона, допускающую представление (10). Пусть она несет еще одну плоскую коническую 3-сеть, порождаемую прямыми Γ_1', Γ_2', Γ_3', проходящими через точку $D(d_i)$. Пусть p, q, r — криволинейные координаты этой сети. В параметрах новой сети

$$\rho x_i = P_i(p)+Q_i(q)+R_i(r), \quad (i=1,\ldots,5).$$

Пусть

$$\alpha_{ij}=\begin{vmatrix} d_i d_j\\ a_i a_j\end{vmatrix},\quad \beta_{ij}=\begin{vmatrix} d_i d_j\\ b_i b_j\end{vmatrix},\quad \gamma_{ij}=\begin{vmatrix} d_i d_j\\ c_i c_j\end{vmatrix}$$

плюккеровы координаты прямых Γ_1', Γ_2', Γ_3' соответственно. Уравнения этих прямых следующие:

$$\begin{aligned}
\Gamma_1'&:\ \rho x_i = P_i' = a_i p_1'(p)+d_i p_2'(p),\\
\Gamma_2&:\ \rho x_i = Q_i' = b_i q_1'(q)+d_i q_2'(q),\\
\Gamma_3&:\ \rho x_i = R_i' = c_i r_1'(r)+d_i r_2'(r),
\end{aligned}$$

где $i=1,2,3,4,5$, и

$$\left(\frac{p_1'}{p_2'}\right)'\cdot\left(\frac{q_1'}{q_2'}\right)'\cdot\left(\frac{r_1'}{r_2'}\right)'\neq 0.$$

Следовательно,

$$\rho x_i = P_i(p)+Q_i(q)+R_i(r) = (a_i p_1 + d_i p_2)+(b_i q_1+d_i q_2)+(c_i r_1+d_i r_2).$$

Имеют место соотношения:

$$\begin{aligned}
&(P_1+Q_1+R_1)-(P_4+Q_4+R_4)\,u=0,\\
&(P_2+Q_2+R_2)-(P_4+Q_4+R_4)\,v=0,\\
&(P_3+Q_3+R_3)-(P_4+Q_4+R_4)\,w=0,\\
&[U'a_1+V'a_2+W'a_3+(U-uU'+V-vV'+W-wW')\,a_4-a_5]\,p_1'+\\
&+[U'd_1+V'd_2+W'd_3+(U-uU'+V-vV'+W-wW')\,d_4-d_5]\,p_2'=0,
\end{aligned}$$

$$[U'b_1+V'b_2+W'b_3+(U-uU'+V-vV'+W-wW')\,b_4-b_5]\,q_1'+$$
$$+[U'd_1+V'd_2+W'd_3+(U-uU'+V-vV'+W-wW')d_4-d_5]\,q_2'=0,$$
$$[U'c_1+V'c_2+W'c_3+(U-uU'+V-vV'+W-wW')\,c_4-c_5]\,r_1'+$$
$$+[U'd_1+V'd_2+W'd_3+(U-uU'+V-vV'+W-wW')\,d_4-d_5]\,r_2'=0.$$

Исключая из этих уравнений функции параметров p, q, r, получаем три дифференциальных уравнения, которым должны удовлетворять функции U, V, W гиперповерхности (10), если она несет еще хотя бы одну сеть с указанными свойствами. Запишем только первое из этих уравнений.

$$\begin{aligned}
&U''\cdot[\alpha_{14}(U+V-vV'+W-wW')+V'(u\alpha_{24}+\alpha_{12})+W'(u\alpha_{34}+\alpha_{13})+\\
&\quad+(u\alpha_{45}+\alpha_{51})][\beta_{14}(U+V-vV'+W-wW')+V'(u\beta_{24}+\beta_{12})+\\
&\quad+W'(u\beta_{34}+\beta_{13})+(u\beta_{45}+\beta_{51})]+V''\cdot[\alpha_{24}(U-uU'+V+W-wW')+\\
&\quad+U'(v\alpha_{14}+\alpha_{21})+W'(v\alpha_{34}+\alpha_{23})+(v\alpha_{45}+\alpha_{52})][\beta_{24}(U-uU'+V+W-\\
&\quad-wW')+U'(v\beta_{14}+\beta_{21})+W'(v\beta_{34}+\beta_{23})+(v\beta_{45}+\beta_{52})]+\\
&\quad+W''\cdot[\alpha_{34}(U-uU'+V-vV'+W)+U'(w\alpha_{14}+\alpha_{31})+V'(w\alpha_{24}+\alpha_{32})+\\
&\quad+(w\alpha_{45}+\alpha_{53})][\beta_{34}(U-uU'+V-vV'+W)+U'(w\beta_{14}+\beta_{31})+\\
&\quad+V'(w\beta_{24}+\beta_{32})+(w\beta_{45}+\beta_{53})]=0. \qquad (11)
\end{aligned}$$

Второе уравнение получается из первого путем замены β_{ij} на γ_{ij}, третье — также из первого путем замены α_{ij} на γ_{ij}.

Дифференцируя (11) по u, v, w и учитывая, что $U''\cdot V''\cdot W''\neq 0$ (так как в противном случае гиперповерхность будет тангенциально вырожденной), получаем уравнение

$$\begin{aligned}
&\frac{U'''}{U''}[(\alpha_{12}+u\alpha_{24}+v\alpha_{41})(\beta_{13}+u\beta_{34}+w\beta_{41})+(\alpha_{13}+u\alpha_{34}+w\alpha_{41})\times\\
&\times(\beta_{12}+u\beta_{24}+v\beta_{41})]+\frac{V'''}{V''}[(\alpha_{21}+u\alpha_{42}+v\alpha_{14})(\beta_{23}+v\beta_{34}+w\beta_{42})+\\
&+(\alpha_{23}+v\alpha_{34}+w\alpha_{42})(\beta_{21}+u\beta_{42}+v\beta_{14})]+\frac{W'''}{W''}[(\alpha_{13}+u\alpha_{34}+w\alpha_{41})\times\\
&\times(\beta_{23}+v\beta_{34}+w\beta_{42})+(\alpha_{23}+v\alpha_{34}+w\alpha_{42})(\beta_{13}+u\beta_{34}+w\beta_{41})]=0. \qquad (12)
\end{aligned}$$

Дифференцируя это уравнение еще раз по u, v, w, получаем

$$\left(\frac{U'''}{U''}\right)'\alpha_{41}\beta_{41}+\left(\frac{V'''}{V''}\right)'\alpha_{42}\beta_{42}+\left(\frac{W'''}{W''}\right)'\alpha_{43}\beta_{43}=0,$$

откуда следует, что

$$\left(\frac{U'''}{U''}\right)'\alpha_{41}\beta_{41}=h_1,\quad \left(\frac{V'''}{V''}\right)'\alpha_{42}\beta_{42}=h_2,\quad \left(\frac{W'''}{W''}\right)'\alpha_{43}\beta_{43}=h_3,$$
$$h_1+h_2+h_3=0,$$

или

$$\frac{U'''}{U''}\alpha_{41}\beta_{41}=h_1u+k_1,$$
$$\frac{V'''}{V''}\alpha_{42}\beta_{42}=h_2v+k_2,$$
$$\frac{W'''}{W''}\alpha_{43}\beta_{43}=h_3w+k_3.$$

Подставляя эти выражения в уравнения, полученные из (12) дифференцированием по u, v, по u, w и по v, w, получаем новые уравнения на функцию U:

$$\begin{aligned}&\frac{U'''}{U''}[\alpha_{41}(u\beta_{34}+\beta_{13})+\beta_{41}(u\alpha_{34}+\alpha_{13})]=n_1u+m_1,\\&\frac{U'''}{U''}[\alpha_{41}(u\beta_{24}+\beta_{12})+\beta_{41}(u\alpha_{24}+\alpha_{12})]=l_1u+g_1,\end{aligned}\tag{13}$$

на функцию V:

$$\begin{aligned}&\frac{V'''}{V''}[\alpha_{42}(v\beta_{34}+\beta_{23})+\beta_{42}(v\alpha_{34}+\alpha_{23})]=n_2v+m_2,\\&\frac{V'''}{V''}[\alpha_{42}(v\beta_{14}+\beta_{21})+\beta_{42}(v\alpha_{14}+\alpha_{21})]=\lambda_1v+\mu_1,\end{aligned}\tag{14}$$

и на функцию W:

$$\begin{aligned}&\frac{W'''}{W''}[\alpha_{34}(w\beta_{41}+\beta_{13})+\beta_{34}(w\alpha_{41}+\alpha_{13})]=\lambda_2w+\mu_2,\\&\frac{W'''}{W''}[\alpha_{34}(w\beta_{42}+\beta_{23})+\beta_{34}(w\alpha_{42}+\alpha_{23})]=l_1w+g_2,\end{aligned}\tag{15}$$

где постоянные n_i, l_i, k_i, λ_i удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned}n_1+n_2+2k_3=0,\\l_1+l_2+2k_2=0,\\\lambda_1+\lambda_2+2k_1=0.\end{aligned}$$

Подставляя (13), (14), (15) в (12), получаем новые уравнения на функции U, V, W. Действуя таким образом с уравнениями, полученными из (11) дифференцированием по u, v, u, w и v, w, а затем только по u, v и w, и, наконец, подставляя полученные соотношения в само уравнение (11), получаем на каждую из функций U, V, W систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Аналогичные соотношения получаем из второго и третьего уравнений.

Полученные системы оказываются совместными только при условии

$$U'''=0,\ V'''=0,\ W'''=0,$$

но оно является необходимым и достаточным, чтобы гиперповерхность (10) была гиперквадрикой.

Следовательно, если гиперповерхность Петерсона несет более одной плоской конической 3-сети, она является гиперквадрикой.

Заметим, что в трехмерном пространстве существуют поверхности Петерсона, несущие более одной плоской конической сети и отличные от квадрик. Все эти поверхности определены [2].

5. Найдем наибольшее число n параметров, от которого может зависеть коническая 3-сеть на данной гиперповерхности в P_4 и определим соответствующие гиперповерхности.

Гиперквадрики несут ∞^6 конических 3-сети, следовательно, $n \geqslant 6$.

Через произвольную точку (M) гиперповерхности S проходят три двумерные поверхности F_i и три линии их пересечения C_{jk} конической 3-сети. Вершина гиперконуса, касающегося S вдоль F_1, лежит в касательной гиперплоскости α точки (M) и может, следовательно, зависеть самое большее от трех параметров. Когда точка (M) фиксирована, поверхность F_1 определена и несет коническую 2-сеть из линий, которые входят в состав соответствующей 3-сети.

На двумерной поверхности четырехмерного пространства существует единственная сопряженная сеть, если только поверхность не лежит в трехмерном пространстве; но тогда число параметров конической 3-сети не превышает число 3. Поэтому в нашем случае каждая поверхность F_1 лежит в 3-плоскости. Более того, если $n \geqslant 6$, каждая поверхность F_1 есть квадрика. Действительно, в трехмерном пространстве только на квадриках число параметров, от которого может зависеть коническая сеть, больше двух [1]. Невырожденная квадрика трехмерного пространства несет ∞^4 конических сетей, порождаемых прямыми Γ_2 и Γ_3, полярно сопряженными относительно квадрики. Но только ∞^3 этих сетей может входить в состав конической 3-сети гиперповерхности S.

Рассмотрим однопараметрическое семейство поверхностей F_1, входящее в состав конической 3-сети. Любые две поверхности F_1', F_1'' этого семейства принадлежат двум 3-плоскостям, которые пересекаются по 2-плоскости. Прямые Γ_2 и Γ_3 лежат в этих 3-плоскостях и, следовательно, принадлежат 2-плоскости. Но если две взаимные поляры квадрики лежат в плоскости, то эта плоскость служит касательной плоскостью квадрики, а их точка пересечения — точкой касания. На квадрике существует лишь ∞^3 таких конических сетей (два параметра определяют точку на квадрике и один — прямую в пучке касательных, проходящих через эту точку). Итак, наибольшее число параметров, от которого может зависеть коническая 3-сеть, равно 6. При этом через каждую точку (M) искомой гиперповерхности S проходит ∞^3 квадрик, принадлежащих S и расположенных каждая в соответствующей 3-плоскости.

Так как через точку (M) четырехмерного пространства проходит ∞^3 3-плоскостей, то отсюда следует, что искомая поверхность есть гиперквадрика.

Теорема. *Конические 3-сети гиперповерхности Петерсона в P_4 могут зависеть самое большее от 6 параметров, и если гиперповерхность несет ∞^6 конических 3-сетей, то она есть гиперквадрика.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. П. Бланк. Конические сети. Записки математического отделения физико-математического факультета ХГУ и Харьковского матем. общества, т. XXIII, 1952, 113—141.

2. J. Blank. Flächen mit zwei Konjugierten Netzen ebener Kegellinien Comm. de la Soc. Math. de Kharkof, ser. 4, t. 11 (1935), 55—68.

Поступила 8 декабря 1969 г.

ОБ УРАВНЕНИЯХ ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦЫ В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

В. И. Денисов

(Харьков)

В работе дано определение импульса и энергии частицы. Получены уравнения, которые определяют изменения импульса и энергии при движении. Показано, что несохранение этих величин связано с асимметрией искривленного пространства-времени. Исследованы трансформационные свойства импульса-энергии частицы.

1. Предположим, что пробная частица движется в асимптотически плоском пространстве-времени W. Пусть $\underset{\rho}{\xi^i}$ $(\rho = 1, 2, \ldots, 10)$ — векторные поля, определяющие наблюдателя в предельном пространстве-времени, а $\underset{\rho}{\Delta g_{ik}}$ — тензоры асимметрии пространства-времени W [3].

Определим импульс и энергию частицы следующим образом. Импульс P_ρ частицы — проекция вектора четырехскорости частицы u^i на $\underset{\rho}{\xi}^i$ ($\rho = 1, 2, 3$), т. е.

$$P = u_i \underset{\rho}{\xi}^i.$$

Энергия P_4 частицы — проекция вектора u^i частицы на $\underset{4}{\xi}^i$, т. е.

$$P_4 = u_i \underset{4}{\xi}^i.$$

Аналогично определяются момент частицы и т. д.

Сделаем следующее замечание. Все латинские индексы являются тензорными и принимают значения 1, 2, 3, 4. Греческие индексы являются групповыми (см. [3]) и если не указано особо, принимают значения 1, 2, 3, 4.

Векторные поля $\underset{\rho}{\xi}^i$ порождены группой параллельных переносов в предельном пространстве-времени [3]. Далее мы предполагаем, что пробная частица имеет единичную собственную массу и движется по времениподобной траектории.

Определим скорость изменения импульса — энергии частицы

$$\frac{d}{ds} P_\alpha = \frac{d}{ds}(u^i \underset{\alpha}{\xi}_i) = \frac{du^i}{ds} \underset{\alpha}{\xi}_i + \frac{1}{2} u^i u^k (\underset{\alpha}{\xi}_{i,\,k} + \underset{\alpha}{\xi}_{k,\,i}),$$

где $\frac{d}{ds}$ — знак ковариантной производной по собственному времени. Так как u^i — вектор, касательный к мировой линии частицы, то [1]

$$\frac{du^i}{ds} = 0, \tag{1.1}$$

поэтому имеем

$$\frac{dP_\alpha}{ds} = \frac{1}{2} (\underset{\alpha}{\xi}_{i,\,k} + \underset{\alpha}{\xi}_{k,\,i}) u^i u^k. \tag{1.2}$$

Используя определение тензора асимметрии [3], запишем (1.2) так:

$$\frac{dP_\alpha}{ds} = \frac{1}{2} \underset{\alpha}{\Lambda} g_{ik} u^i u^k, \tag{1.3}$$

где $\underset{\alpha}{\Lambda} g_{ik}$ — тензор асимметрии пространства-времени W.

Нетрудно показать, что уравнения (1.1) и (1.3) эквивалентны. Действительно, так как в силу (1.3)

$$\frac{du^i}{ds} \underset{\alpha}{\xi}_i = 0,$$

а векторные поля $\underset{\alpha}{\xi}_i$ линейно независимы, то имеем

$$\frac{du^i}{ds} = 0.$$

Уравнения (1.3) можно преобразовать следующим образом. Выразим четырехвектор u^i через $\underset{\rho}{\xi}^i$. Так как векторные поля линейно независимы, то

$$u^i = A^\rho \underset{\rho}{\xi}^i. \tag{1.4}$$

Умножая левую и правую часть этого равенства на $\underset{\alpha}{\xi}^i$, получим

$$P_\alpha = A^\rho (\underset{\rho}{\xi}^i \underset{\alpha}{\xi}_i) = A^\rho \sigma_{\alpha\rho},$$

где $\sigma_{\rho\alpha} = (\underset{\rho}{\xi}^i \underset{\alpha}{\xi}_i)$.

В силу линейной независимости векторов $\underset{\alpha}{\xi}^i$, матрица $\|\sigma_{\rho\alpha}\|$ имеет обратную $\|\bar{\sigma}^{\alpha\rho}\|$. Тогда $A^{\rho\alpha} = \bar{\sigma}^{\rho\alpha} P_\alpha$ и

$$u^i = \underset{\rho}{\xi}^i \bar{\sigma}^{\rho\alpha} P_\alpha. \tag{1.5}$$

$$(\alpha,\ \rho = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

Подставляя (5) в (3), получим уравнения вида

$$\frac{dP_\alpha}{ds} = \frac{1}{2} \underset{\alpha}{\Omega}^{\rho\beta} P_\rho P_\beta, \tag{1.6}$$

где

$$\underset{\alpha}{\Omega}^{\rho\beta} = \underset{\alpha}{\Lambda} g_{ik} \underset{\beta'}{\xi}^i \underset{\rho'}{\xi}^k \bar{\sigma}^{\rho'\rho} \bar{\sigma}^{\beta'\beta}. \tag{1.7}$$

Выражение (1.7) можно упростить следующим образом. Из определения оператора асимметрии $\underset{\alpha}{\Lambda}$ [3], следует

$$\underset{\rho'}{\xi}^i \underset{\beta'}{\xi}^k \underset{\alpha}{\Lambda} g_{ik} = \underset{\alpha}{\Lambda} g_{ik} \xi^i \xi^k - \underset{\rho'}{\xi}_l \underset{\alpha}{\Lambda} \underset{\beta'}{\xi}^l - \underset{\beta'}{\xi}_l \underset{\alpha}{\Lambda} \underset{\rho'}{\xi}^l,$$

но так как векторные поля $\underset{\alpha}{\xi}^i$ коммутируют между собой, т. е.

$$\underset{\alpha}{\Lambda} \underset{\rho}{\xi}^i = 0,$$

то

$$\xi^i \xi^k \underset{\alpha}{\Lambda} g_{ik} = \underset{\alpha}{\Lambda} \sigma_{\rho'\beta'}. \tag{1.8}$$

Подставляя (1.8) в (1.7) и (1.6), получим

$$\frac{dP_\alpha}{ds} = -\frac{1}{2} \underset{\alpha}{\Lambda} \bar{\sigma}^{\rho\nu} P_\rho P_\nu. \tag{1.9}$$

Уравнение (1.9) не содержит u^i, и его, в силу эквивалентности (1.3), можно считать уравнением движения частицы. Правую часть (1.9), которая определяет скорость изменения импульса и энергии частицы, естественно считать 4-силой, действующей на частицу со стороны поля тяготения. Обозначим правую часть (1.9) F_α.

В работе [3] показано, что искривление асимптотически плоского пространства-времени проявляется в его асимметрии. Наличие же асимметрии приводит, как видно из (1.3) и (1.9), к тому, что импульс, энергия частицы изменяются при движении, т. е. не сохраняются.

В тех случаях, когда пространство-время допускает группу движений, соответствующие тензоры асимметрии обращаются в нуль и можно определить величины, которые сохраняются при движении [2].

Например, если пространство-время стационарно, то сохраняется энергия частицы. В изотропном пространстве сохраняется момент и т. д. В общем же случае, когда пространство-время асимметрично, происходит «рассеивание» импульса, энергии, момента частицы на асимметриях поля тяготения. Скорость «рассеивания» определяется правой частью уравнения (1.3) и зависит от направления вектора u^i. В каждой точке пространства-времени W определена поверхность второго порядка

$$\underset{\rho}{\Lambda} g_{ik} x^i x^k = \pm 1,$$

которую мы назовем индикатрисой рассеивания. Эта поверхность второго порядка характеризует «рассеивание» в зависимости от направления движения частицы. В некоторых случаях, когда пространство-время W допускает специальные группы преобразований, индикатриса рассеивания устроена достаточно просто. Например, когда W допускает группу конформных преобразований, соответствующая индикатриса представляет собой сферу. Индикатриса рассеивания вырождается в точку, когда пространство-время допускает группу движений.

2. В этом разделе мы исследуем трансформационные свойства величин P_α, 4-силы и индикатрисы рассеивания.

В работе [3] показано, что два несопряженных эквивалентных наблюдателя в предельном пространстве-времени связаны следующим образом:

$$\underset{\alpha}{\xi'^{i}} = \bar{a}^{\rho}_{\alpha} \underset{\alpha}{\xi^{i}}, \tag{2.1}$$

где $\bar{a}^{\rho}_{\alpha}$ — коэффициенты, определяющие преобразование Лоренца, связывающее двух эквивалентных наблюдателей.

Из (2.1) видно, что $\underset{\alpha}{\xi'^{i}}$ и $\underset{\alpha}{\xi^{i}}$ связаны простым соотношением — они ведут себя как ковариантные векторы. Соответствующие тензоры асимметрии преобразуются аналогично:

$$\underset{\alpha}{\Lambda'} g_{ik} = \bar{a}^{\rho}_{\alpha} \underset{\rho}{\Lambda} g_{ik}. \tag{2.2}$$

Из определения P_α и (2.1) следует, что P'_α и P_α связаны простым образом

$$P'_\alpha = \bar{a}^{\rho}_{\alpha} P_\alpha. \tag{2.3}$$

Для 4-силы F_α имеем

$$F'_\alpha = \bar{a}^{\rho}_{\alpha} F_\rho. \tag{2.4}$$

Индикатрисы рассеивания преобразуются по такому же закону.

Таким образом, из (2.3) и (2.4) видно, что величины P_α и F_α двух эквивалентных несопряженных наблюдателей ведут себя как компоненты четырехмерных ковариантных векторов. Это свойство величин P_α позволяет естественным образом ввести в пространстве $\{P_\alpha\}$ метрику.

Как следует из (1.5), для времениподобных траекторий имеем

$$u^i u_i = \bar{\sigma}^{\alpha\beta} P_\alpha P_\beta = 1.$$

Величины $\bar{\sigma}^{\alpha\beta}$ и $\sigma_{\alpha\beta}$ в силу определения при переходах от одного наблюдателя к другому ведут себя как симметричные тензоры второго ранга. С помощью $\bar{\sigma}^{\alpha\beta}$ и $\sigma_{\alpha\beta}$ можно подымать и опускать индексы, производить свертки.

Легко видеть, что скаляры, построенные с помощью $\sigma_{\alpha\beta}$, являются инвариантами относительно выбора наблюдателей.

3. В случае, когда пространство-время W является пространством частной теории относительности, все тензоры асимметрии $\underset{\alpha}{\Lambda} g_{ik}$ равны нулю. Поэтому уравнения (1.3) дают

$$\frac{dP_\alpha}{ds} = 0,$$

откуда видно, что импульс и энергия частицы сохраняются. Четырехсила $F_\alpha = 0$. Эти следствия являются инвариантными, не зависящими от системы координат в плоском пространстве-времени. Отметим, что в специальной системе координат, где

$$ds^2 = dx^{4^2} - dx^{1^2} - dx^{2^2} - dx^{3^2},$$

компоненты P_α совпадают с одноименными компонентами вектора u^i.

Рассмотрим уравнения движения в приближении слабого поля и малой скорости частицы. В этом случае метрика имеет вид

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2\varphi}{c^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2\varphi}{c^2}\right)(dx^{1^2} + dx^{2^2} + dx^{3^2}).$$

Пусть φ и $\frac{\partial \varphi}{\partial x^\alpha}$ стремятся асимптотически к нулю, а наблюдатель определен полями $\underset{\rho}{\xi^i} = \underset{\rho}{\delta^i}$.

Так как движение медленное и поле слабое, из (1.3) можно получить

$$\frac{dP_\alpha}{ds} = \frac{1}{2} \underset{\alpha}{\Lambda} g_{44}.$$

В нашем случае

$$\underset{\alpha}{\Lambda} g_{44} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(1 + \frac{2\varphi}{c^2}\right)$$

и

$$\frac{dP_\alpha}{ds} = -\frac{dv_\alpha}{c^2 dt}.$$

Поэтому имеем

$$\frac{dv_\alpha}{dt} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x^\alpha}.$$

Эти уравнения движения совпадают с известными классическими уравнениями.

Заметим, что уравнения (1.3) могут быть получены из принципа наименьшего действия.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Теория поля. Физматгиз, 1960.

2. A. Trautman. On the Conservation Theorem and Coordinate Systems in General Relativity. Bulletin de l'Academie Polonaise des sciences, cl. III, vol. V, n 7, 1957, p. 721—727.

3. В. И. Денисов. Асимметрия асимптотически плоских пространств-времен общей теории относительности. Украинский геометрический сборник, вып. 8, Изд-во ХГУ, Харьков, 1970.

Поступила 12 декабря 1969 г.

О ДЛИНЕ ДУГИ В ОДНОМ ПОДПРОСТРАНСТВЕ АФФИННОГО ПРОСТРАНСТВА

Г. И. Дринфельд, Л. М. Юртова

(Харьков)

Ватанабе [1] доказал существование длины дуги, инвариантной относительно преобразований

$$\begin{gathered}\bar{x}^i = \sum_{j=1}^{n} a_j^i x^j + a_i, \qquad \det(a_j^i) \neq 0, \\ \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} a_j^i = (-1)^{i+1} \det(a_j^i), \qquad i = 1, 2, \ldots, n\end{gathered} \tag{1}$$

при четном n. Случай нечетного n не был рассмотрен. В настоящей заметке с помощью вычислений по схеме, использованной в [2], показано, что при $n=3$ тоже существует длина дуги, инвариантная относительно преобразований (1).

Инфинитезимальными операторами преобразований

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_1, \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_2, \\ z' &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_3 \end{aligned} \tag{2}$$

при условии (1) являются операторы

$$\begin{aligned} X_1(f) &= \frac{\partial f}{\partial x}, \quad X_2(f) = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad X_3(f) = \frac{\partial f}{\partial z}, \\ X_4(f) &= -\frac{1}{2}x\frac{\partial f}{\partial x} + \left(x + \frac{1}{2}y\right)\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{1}{2}z\frac{\partial f}{\partial z}, \\ X_5(f) &= -\frac{1}{2}x\frac{\partial f}{\partial x} + \left(\frac{1}{2}y + z\right)\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{1}{2}z\frac{\partial f}{\partial z}, \\ X_6(f) &= \frac{1}{2}x\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}y\frac{\partial f}{\partial y} + \left(x - \frac{1}{2}z\right)\frac{\partial f}{\partial z}, \\ X_7(f) &= -\frac{1}{2}x\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{2}y\frac{\partial f}{\partial y} + \left(y + \frac{1}{2}z\right)\frac{\partial f}{\partial z}, \\ X_8(f) &= \left(\frac{1}{2}x + y\right)\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{2}y\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{1}{2}z\frac{\partial f}{\partial z}, \\ X_9(f) &= \left(-\frac{1}{2}x + z\right)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}y\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{1}{2}z\frac{\partial f}{\partial z}, \end{aligned} \tag{3}$$

удовлетворяющие групповым соотношениям. Дважды продолженными операторами являются

$$\begin{aligned} \overline{\overline{X}}_1(f) &= X_1(f), \quad \overline{\overline{X}}_2(f) = X_2(f), \quad \overline{\overline{X}}_3(f) = X_3(f), \\ \overline{\overline{X}}_4(f) &= X_4(f) + (1+p)\frac{\partial f}{\partial p} + \frac{3}{2}r\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{2}s\frac{\partial f}{\partial s}, \\ \overline{\overline{X}}_5(f) &= X_5(f) + (p+q)\frac{\partial f}{\partial p} + \left(\frac{3}{2}r + s\right)\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{2}s\frac{\partial f}{\partial s}, \\ \overline{\overline{X}}_6(f) &= X_6(f) + (1-q)\frac{\partial f}{\partial q} - \frac{1}{2}r\frac{\partial f}{\partial r} - \frac{3}{2}s\frac{\partial f}{\partial s}, \\ \overline{\overline{X}}_7(f) &= X_7(f) + (p+q)\frac{\partial f}{\partial q} + \frac{1}{2}r\frac{\partial f}{\partial r} + \left(r + \frac{3}{2}s\right)\frac{\partial f}{\partial s}, \\ \overline{\overline{X}}_8(f) &= X_8(f) - p(1+p)\frac{\partial f}{\partial p} - q(1+p)\frac{\partial f}{\partial q} - \\ &\quad - r\left(\frac{3}{2} + 3p\right)\frac{\partial f}{\partial r} - \left(\frac{3}{2}s + 2sp + qr\right)\frac{\partial f}{\partial s}, \\ \overline{\overline{X}}_9(f) &= X_9(f) + p(1-q)\frac{\partial f}{\partial p} + q(1-q)\frac{\partial f}{\partial q} + \\ &\quad + \left(\frac{3}{2}r - 2qr - ps\right)\frac{\partial f}{\partial r} + s\left(\frac{3}{2} - 3q\right)\frac{\partial f}{\partial s}, \end{aligned} \tag{4}$$

где $p = \frac{dy}{dx}$, $q = \frac{dz}{dx}$; $r = \frac{d^2y}{dx^2}$, $s = \frac{d^2z}{dx^2}$.

Условия инвариантности интеграла

$$\int M(x, y, z, p, q, r, s)\, dx$$

относительно рассматриваемых преобразований таковы:

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial z} = 0,$$

$$(1+p)\frac{\partial M}{\partial p} + \frac{3}{2} r \frac{\partial M}{\partial r} + \frac{1}{2} s \frac{\partial M}{\partial s} - \frac{1}{2} M = 0,$$

$$(p+q)\frac{\partial M}{\partial p} + \left(\frac{3}{2} r + s\right)\frac{\partial M}{\partial r} + \frac{1}{2} s \frac{\partial M}{\partial s} - \frac{1}{2} M = 0,$$

$$(1-q)\frac{\partial M}{\partial q} - \frac{1}{2} r \frac{\partial M}{\partial r} - \frac{3}{2} s \frac{\partial M}{\partial s} + \frac{1}{2} M = 0,$$

$$(p+q)\frac{\partial M}{\partial q} + \frac{1}{2} r \frac{\partial M}{\partial r} + \left(\frac{3}{2} s + r\right)\frac{\partial M}{\partial s} - \frac{1}{2} M = 0,$$

$$p(p+q)\frac{\partial M}{\partial p} + q(1+p)\frac{\partial M}{\partial q} + r\left(\frac{3}{2} + 3p\right)\frac{\partial M}{\partial r} + \qquad (5)$$

$$+ \left(\frac{3}{2} s + 2sp + qr\right)\frac{\partial M}{\partial s} - \left(\frac{1}{2} + p\right) M = 0,$$

$$p(1-q)\frac{\partial M}{\partial p} + q(1-q)\frac{\partial M}{\partial q} + s\left(\frac{3}{2} - 3q\right)\frac{\partial M}{\partial s} +$$

$$+ \left(\frac{3}{2} r - 2qr - ps\right)\frac{\partial M}{\partial r} + \left(-\frac{1}{2} + q\right) M = 0.$$

Решение первых семи уравнений (5)

$$M = [r(1-q) + s(p+1)]^{\frac{1}{3}}$$

легко найти. Это решение удовлетворяет и остальным уравнениям той же системы. Так как первые семь уравнений (5) линейно независимы, то, с точностью до постоянного множителя, найденное решение является единственным. Таким образом, инвариантная относительно рассматриваемой группы длина дуги существует и равна

$$\int [r(1-q) + s(p+1)]^{\frac{1}{3}}\, dx,$$

или, в более симметричной форме,

$$\int \left(\begin{vmatrix} \dot{x} & \ddot{x} \\ \dot{y} & \ddot{y} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \dot{y} & \ddot{y} \\ \dot{z} & \ddot{z} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \dot{x} & \ddot{x} \\ \dot{z} & \ddot{z} \end{vmatrix} \right)^{\frac{1}{3}} dt.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. S. Watanabe. On hypersurfaces of spaces belonging to certain transformation group. II. «Tensor», 18, № 1, 1967, 90—96.

2. Г. И. Дринфельд. О вычислении аффинной дуги и аффинной площади. Укр. геометр. сб. вып. 5—6, Изд-во ХГУ, Харьков, 1968, 70—73.

Поступила 12 мая 1969 г.

О ПЛОСКОСТЯХ СИММЕТРИИ ПРИВОДИМОЙ ПОВЕРХНОСТИ ОДНОГО СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

В. Ф. Игнатенко
(Полтава)
А. С. Лейбин
(Харьков)

В этой заметке речь идет о плоскостях симметрии приводимой $(m-1)$-мерной поверхности F^* в евклидовом пространстве E^m, имеющей в своем составе $l \geqslant 2$ плоскостей, проходящих через одну $(m-2)$-плоскость и образующих при ней равные двугранные углы меры $\frac{\pi}{l}$; поверхность F^* может содержать несколько таких наборов плоскостей. Как выяснено в [1], п. 10°, поверхности такого строения имеют некоторые свойства симметрии, характерные только для них; поэтому при отыскании верхних оценок числа плоскостей симметрии для алгебраических поверхностей F_n в работах [1] и [2] поверхности F_n^* исключались из рассмотрения. Здесь выясняется, что существование поверхностей F^* влияет на указанные оценки только в двумерном и трехмерном пространствах, в пространствах же высшего числа измерений исключение поверхностей F^* оказывается ненужным.

1°. Пусть дана произвольная поверхность F^*. Обозначим через H^* поверхность, которую образуют все плоскости, входящие в состав F^*, через F' — поверхность, получаемую удалением H^* из F^*; общую часть поверхностей H^* и F' — $(m-2)$-мерное место разветвления F^* — считаем пересечением H^* и F', т. е. относим эту общую часть как к H^*, так и к F'. Может оказаться F' пустой, $F' \equiv \varnothing$, тогда $F^* \equiv H^*$.

Поверхности H^* и F' могут иметь как конечное, так и бесконечное число плоскостей симметрии; очевидно, число плоскостей симметрии поверхности F^* не превосходит их

$$N(F^*) \leqslant N(H^*), \quad N(F^*) \leqslant N(F')$$

и $N(F^*)$ может быть конечным, когда $N(H^*)$ и $N(F')$ бесконечны. Например, в пространстве E^3 поверхность F_4^*

$$(x_1^2 - x_2^2)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1) = 0$$

распадается на H_2^*—пару плоскостей $x_1 = \pm x_2$ и F_2'—сферу; каждая из этих компонент имеет бесконечное множество плоскостей симметрии, тогда как у F_4^* их только пять: $x_1 = \pm x_2$ и три координатные плоскости.

Пусть F_n^* — алгебраическая порядка n, ее составляющие $F'_{n'}$ и $H^*_{n''}$ имеют порядки соответственно n' и n'', $n' + n'' = n$. Может найтись $(m-2)$-плоскость Π^{m-2}, через которую проходит $2h > n$ плоскостей симметрии F_n^* [1]. Для этого необходимо, чтобы через указанную Π^{m-2} проходило h плоскостей симметрии $H^*_{n''}$, входящих в ее состав; при этом Π^{m-2} будет $(m-2)$-осью вращения для $F'_{n'}$.

2°. Если k — число линейно независимых плоскостей среди всех плоскостей, входящих в H^*, и $k < m$, то H^* имеет бесконечное множество плоскостей симметрии: к ним относится всякая плоскость, перпендикулярная ко всем плоскостям, входящим в H^*.

Отсюда следует, что $H^*_{n''}$ может иметь конечное множество плоскостей симметрии только в случае, если ее порядок (равный числу составляющих ее плоскостей) $n'' \geqslant m$.

3. В работе [2] рассматриваются поверхности F_n^D с конечным числом плоскостей симметрии; индекс D означает, что плоскости симметрии этих поверхностей образуют минимальные трехгранные углы только типа τ_{22l}, т. е. такие, двугранные углы которых равны $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{l}$ $(2 \leqslant l \leqslant n)$, и поэтому F_n^D допускают диэдрические подгруппы ~~симметрий~~. вращений. Поверхности F_n^{*D} там исключались из рассмотрения. Влияние поверхностей F_n^{*D} на точные верхние границы $\overline{N}(F_n^D)$ числа $N(F_n^D)$ плоскостей симметрии поверхностей F_n^D устанавливает

Теорема. *Для поверхностей F_n^{*D} и F_n^D, отличных от F_n^{*D}, порядка n, имеющих конечные множества плоскостей симметрии, в пространстве E^m размерности $m > 3$*

$$\overline{N}(F_n^D) \geqslant \overline{N}(F_n^{*D}); \tag{1}$$

равенство возможно только в E^4 при $n > 4$ и только в случае, когда $F_n^{*D} \equiv H_n^{*D}$ и состоит из $h_1 \geqslant 2$ и $h_2 > 2$ плоскостей, проходящих соответственно через две вполне ортогональные 2-плоскости $(h_1 + h_2 = n)$. Если $m \leqslant 3$, то

$$\overline{N}(F_n^D) < \overline{N}(F_n^{*D}); \tag{2}$$

в E^3 граница $\overline{N}(F_n^{*D}) = 2n - 1$ и достигается только на поверхностях H_n^{*D}, $n \geqslant 4$, состоящих из $n - 1$ плоскостей с общей прямой и плоскости, ортогональной этой прямой.

Доказательство содержится в пп. 4° — 7° этой заметки.

4°. В работе [2] выяснено, что если поверхность F_n^D, отличная от F_n^{*D}, имеет максимальное число $\overline{N}(F_n^D)$ плоскостей симметрии, то существует $q = \left[\frac{m}{2}\right]$ попарно 2-ортогональных $(m-2)$-плоскостей Π_i^{m-2} $(i = 1, \ldots, q)$, через каждую из которых проходит n плоскостей симметрии поверхности. При m четном общее число плоскостей симметрии равно nq; при m нечетном есть еще одна ортогональная всем Π_i^{m-2} плоскость симметрии, и их число равно $nq + 1$.

Аналогично устроена и поверхность F_n^{*D}; $(m-2)$-плоскости, через которые проходят ее плоскости симметрии, можно считать совпадающими с Π_i^{m-2} поверхности F_n^D. Если F_n^{*D} имеет максимальное возможное при данном n число $\overline{N}$ плоскостей симметрии, то $H_{n''}^{*D}$ состоит только из плоскостей симметрии F_n^{*D}; через каждую Π_i^{m-2} проходит h_i таких плоскостей, принадлежащих $H_{n''}^{*D}$, причем $0 \leqslant h_i \leqslant n''$.

5°. Легко видеть, что среди F_n^{*D} данного порядка $n > m$ наибольшее число плоскостей симметрии имеют поверхности $F_n^{*D} \equiv H_n^{*D}$ $(n'' = n)$. Действительно, если $F_{n'}^{\prime D} \neq \varnothing$, то $n' \geqslant 2$, поэтому $n'' \leqslant n - 2$, т. е. число плоскостей, составляющих $H_{n''}^{*D}$ и проходящих через Π_i^{m-2}, будет меньше по крайней мере на 2, а число плоскостей симметрии на 4 меньше, чем в случае $F_{n'}^{\prime D} \equiv \varnothing$; повышение на единицу порядка n' снижает число плоскостей симметрии $H_{n''}^{*D}$ — а значит и $F_n^{*D} \equiv H_{n''}^{*D} \cup F_{n'}^{\prime D}$ — по крайней мере на две единицы. Поэтому, при $n > m$ для F_n^{*D} максимальное число $\overline{N}(F_n^{*D})$ достигается только в случае $F_n^{*D} \equiv H_n^{*D}$, т. е. когда $n'' = n$.

Все сказанное в этом пункте верно только при $n > m$. Действительно, при $n < m$ поверхность H_n^* будет цилиндрической (п. 2°). Чтобы

H_n^* не была цилиндрической при $n = m$, все составляющие ее плоскости должны быть линейно независимы, а так как все они должны быть и плоскостями симметрии H_n^*, то они должны быть взаимно попарно ортогональны. Но такая H_n^* имеет симметрию n-мерного куба и, следовательно, не является поверхностью H_n^{*D}.

6°. Рассмотрим неравенство (2).

Пусть m четно, $m = 2q$. Тогда $H_{n''}^{*D}$ имеет порядок $n'' = \Sigma h_i$, и $\overline{N}\,(H_{n''}^{*D}) = 2\Sigma h_i = 2n''$. Неравенство (2) сводится к неравенству

$$nq < 2n'' \leqslant 2n,$$

откуда $q = 1$ и $m = 2$, т. е. неравенство (2) выполнимо только в E^2. (Заметим, что в E^2 значок D теряет смысл, и в символах поверхности его можно не писать). Действительно, как это выяснено в [1], п. 10°, кривая H_n^*, распадающаяся на n прямых, проходящих через одну точку и составляющих при ней равные углы, имеет $2n$ осей симметрии; всякая другая кривая $F_n^* \neq H_n^* \, (n'' \neq n)$ имеет осей меньше, кривая же F_n, отличная от F_n^*, не более n осей симметрии.

Из этих рассуждений следует также, что в E^2 равенство (1) невозможно.

Пусть m нечетно, $m = 2q + 1$; очевидно, $m \geqslant 3$, $q \geqslant 1$. Поверхность $H_{n''}^{*D}$ имеет порядок $n'' = \Sigma h_i + 1$, поэтому $\overline{N}\,(H_{n''}^{*D}) = 2\Sigma h_i + 1 = 2n'' - 1$. Неравенство (2) сводится к неравенству

$$nq + 1 < 2n'' - 1 \leqslant 2n - 1,$$

откуда $q < 2 - \frac{2}{n}$. Очевидно, нужно предполагать, что $n > 1$. При $n = 2$ поверхность F_2^* распадается на пару плоскостей, т. е. цилиндрическая. Следовательно, нужно предполагать $n \geqslant 3$; тогда $q < 2$, и остается единственная возможность: $q = 1$, $m = 3$.

В E^3 при $n = 3$ поверхность F_3^* необходимо распадается на три плоскости и, согласно п. 5°, не может быть поверхностью F_3^{*D}. Поэтому в E^3 нас будут интересовать только поверхности F_n^{*D} порядка $n \geqslant 4$. Так как здесь $n > m$, то в качестве F_n^{*D} нужно взять H_n^{*D} (п. 5°), состоящую из $n - 1$ плоскостей, проходящих через одну прямую a и составляющих при ней равные двугранные углы, и еще одной плоскости, перпендикулярной прямой a. Эта поверхность имеет $2n - 1$ плоскостей симметрии; число $2n - 1$ больше $n + 1 = \overline{N}\,(F_n^D)$ в E^3.

Заметим, что и в E^3 невозможно равенство (1).

7°. Выясним теперь, при каких условиях может иметь место равенство (1).

При $m = 2q$ равенство (1) сводится к соотношениям

$$nq = 2n'' \leqslant 2n,$$

т. е. оно возможно при $q \leqslant 2$. Если $q = 1$, то $m = 2$; но в E^2, как мы уже знаем (п. 6°), равенство (1) невозможно. Остается рассмотреть $q = 2$, $m = 4$.

Так как $q = 2$, то в E^4 есть две 2-плоскости Π_1^2 и Π_2^2, через каждую из которых проходит не менее четырех плоскостей симметрии F_n^D [2], что возможно при $n \geqslant 4$.

Если $n = 4$, то $\overline{N}\,(F_4^D) = 8$ для F_4^D, отличной от F_4^{*D} [2]. Поверхность же F_4^{*D} не может состоять из четырех плоскостей (п. 5°); следовательно, $F_4^{*D} \equiv H_2^{*D} \cup F_2^{'D}$, где H_2^{*D} — пара плоскостей, проходящих, например, через Π_1^2, а $F_2^{'D}$ — квадрика вращения относительно Π_1^2 (не сфера). Но эта F_4^{*D} имеет всего шесть плоскостей симметрии, из которых четыре проходит через Π_1^2, две — через Π_2^2, и имеет место неравенство (1).

Если $n > 4$, то $n > m$ и, согласно п. 5°, нужно взять $F_n^{*D} \equiv H_n^{*D}$, которая имеет строение, описанное в теореме. Число ее плоскостей симметрии равно $2(h_1 + h_2) = 2n$ — такое же, как и для F_n^D, и равенство (1) выполняется. Примером такой F_n^{*D} может служить поверхность

$$x_1 x_2 \prod_{k=0}^{h-1} (\lambda_k x_3 - \mu_k x_4) = 0,$$

где $\lambda_k : \mu_k = \operatorname{tg} \frac{k\pi}{h}$ и $h = n - 2$.

Наконец, при $m = 2q + 1$ равенство (1) сводится к соотношениям

$$nq + 1 = 2n'' - 1 \leqslant 2n - 1,$$

откуда $q \leqslant 2 - \frac{2}{n}$, т. е. $q = 1$, $m = 3$; но в п. 6° уже выяснено, что в E^3 имеет место только неравенство (2), равенство же (1) невозможно. Теорема доказана полностью.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Ф. Игнатенко, А. С. Лейбин. К теории плоскостей ортогональной симметрии поверхностей в E^m. Укр. геометр. сб., вып. 7, Изд-во ХГУ, Харьков, 1969, 40—55.

2. В. Ф. Игнатенко, А. С. Лейбин. О плоскостях ортогональной симметрии поверхностей пространства E^m. Укр. геометр. сб., вып. 8, Изд-во ХГУ, Харьков, 1970, 38—48.

Поступила 10 октября 1969 г.

АНАЛОГ ПАРАЛЛЕЛЬНОГО ПЕРЕНЕСЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ СВЯЗНОСТИ

Н. И. Кованцов, Фан Лыонг Хиеу

(Киев)

В настоящей работе мы вводим понятие пространства эллиптической связности, а в нем, с помощью параллелизма Клиффорда, — понятие параллельного перенесения, являющегося естественным аналогом параллельного перенесения Леви-Чивита в римановом пространстве.

Прежде всего напомним известные вещи. Пусть мы имеем некоторую область Ω_3, гомеоморфную внутренней области трехмерной евклидовой сферы. Пусть эта область отнесена к внутренним координатам u^1, u^2, u^3. Зададим на ней дважды ковариантный метрический тензор

$$g_{ij} = g_{ij}(u^1,\ u^2,\ u^3); \quad i,\ j = 1,\ 2,\ 3. \tag{1}$$

Будем предполагать, что этот тензор определяет невырожденную положительно определенную квадратичную форму

$$ds^2 = g_{ij} du^i du^j. \tag{2}$$

Это означает, что такую форму можно представить в виде

$$ds^2 = (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 + (\omega^3)^2, \tag{3}$$

где

$$\omega^i = \lambda^i_j (u^1,\ u^2,\ u^3)\, du^j, \tag{4}$$

$$|\lambda^i_j| \neq 0.$$

Вместо того, чтобы задавать тензор (1), можно просто задавать формы (4), которые позволяют однозначно определить тензор (1). Но переход от (1) к (4) неоднозначен. Компонент тензора (1)—6, а компонент тензоров λ^i_j — 9. Связь между ними можно легко получить:

$$g_{ij} = \lambda^1_i \lambda^1_j + \lambda^2_i \lambda^2_j + \lambda^3_i \lambda^3_j. \tag{5}$$

Возьмем формы

$$\omega^i_j = P^i_{jk} (u^1,\ u^2,\ u^3)\, du^k, \quad i,\ j,\ k = 1,\ 2,\ 3, \tag{6}$$

где через P^i_{jk} обозначим следующие коэффициенты:

$$P^i_{jk} = \left(-\frac{\partial \lambda^i_q}{\partial u^k} + \Gamma^s_{qk} \lambda^i_s \right) \lambda^q_j, \quad i,\ j,\ k,\ q,\ s = 1,\ 2,\ 3. \tag{7}$$

Здесь Γ^s_{qk} есть символы Кристоффеля, образованные тензором g_{ij}.

Возьмем трехмерное евклидово пространство E_3. Фиксируем в нем точку O, с которой совмещаем начала радиусов-векторов.

Составим систему дифференциальных уравнений [1]:

$$dr = \omega^j e_j,$$

$$de_j = \omega^k_j e_k, \quad j,\ k = 1,\ 2,\ 3. \tag{8}$$

Эти уравнения будем называть деривационными уравнениями риманова пространства, отнесенного к ортогональному реперу. Можно проверить непосредственно, что

$$\omega^k_j + \omega^j_k = 0. \tag{9}$$

При переходе к новому реперу $A'e'_i$, осуществляемом по формулам

$$e_j = \alpha_j^k e'_k, \quad j, \ k = 1, \ 2, \ 3 \tag{10}$$

(матрица (α_j^k) — ортогональна), формы ω^j, ω_j^k меняются следующим образом:

$$\omega'^k = \alpha_l^k \omega^l,$$
$$\omega'^l_k = \alpha'^j_k \left(-d\alpha_j^l + \alpha_p^l \omega_j^p\right), \quad j, \ k, \ l, \ p = 1, \ 2, \ 3. \tag{11}$$

Здесь α'^j_k — элементы матрицы, обратной к (α_j^k):

$$\alpha_i^k \alpha'^j_k = \delta_i^j \text{ (символ Кронекера)}. \tag{12}$$

Произвольный вектор в римановом пространстве может быть записан в виде

$$e = \xi^i e_i. \tag{13}$$

Этот вектор параллельно переносится в смысле Леви-Чивита, если

$$de = d(\xi^i e_i) = \left(d\xi^i + \xi^k \omega_k^i\right) e_i = 0,$$

т. е.

$$d\xi^i + \xi^k \omega_k^i = 0. \tag{14}$$

В евклидовом пространстве это обстоятельство выглядит так:

$$A' = A + dA, \ e' = e.$$

С точкой A связан ортогональный репер Ae_i, а с точкой A' — репер $A'e'_i$, где

$$e'_i = e_i + de_i.$$

Произвольная точка L имеет в репере Ae_i координаты ξ^i. Бесконечно близкая к ней точка L' имеет в репере $A'e'_i$ координаты $\xi^i + d\xi^i$, где $d\xi^i$ определяются равенствами (14). Прямые AL и $A'L'$ в E_3 параллельны. Рассматриваемое таким образом риманово пространство V_3 является пространством евклидовой связности. Эта связность сохраняет расстояния двух любых точек, если координаты соответствующих пар точек в бесконечно близких реперах Ae_i и $A'e'_i$ одинаковы.

Таким образом, при указанном взгляде на риманово пространство мы в качестве касательного пространства взяли обычное евклидово пространство E_3. Равенство векторов в E_3 приводит к параллелизму Леви-Чивита в V_3.

Наша идея заключается в том, чтобы заменить E_3 другим метрическим пространством, а именно, эллиптическим. Эллиптическое пространство оказывается здесь удобным потому, что в нем естественным образом определен параллелизм Клиффорда, которым мы воспользуемся в качестве аналога обычного евклидова перенесения.

Найдем формулы, аналогичные формулам (14). Для этого зададим формы ω^i, ω_j^k как и раньше, но теперь вместо системы (8) мы составим другую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} dA &= \omega^i A_i, \\ dA_i &= -\omega^i A + \omega_i^j A_j, \ i, \ j = 1, 2, 3. \end{aligned} \tag{15}$$

Назовем эти уравнения деривационными уравнениями риманова пространства, отнесенного к реперу (AA_i). В уравнениях (15) A, A_i будут истолковываться как аналитические точки трехмерного проективного пространства P_3, отнесенного к некоторой неподвижной системе проективных координат T. Чтобы такое проективное пространство могло быть интерпретацией эллиптического пространства, фиксируем в нем некоторую мнимую поверхность второго порядка (абсолют эллиптического пространства) вместе с левой его частью:

$$a_{\mu\nu}\xi^\mu\xi^\nu = 0, \quad \mu, \ \nu = 0, \ 1, \ 2, \ 3 \tag{16}$$

(уравнение — в системе T). Результат подстановки в левую часть уравнения (16) координат (в T) какой-либо точки $M(\xi^i)$ обозначим символом M^2:

$$M^2 = a_{\mu\nu}\xi^\mu\xi^\nu, \ \mu, \ \nu = 0, \ 1, \ 2, \ 3. \tag{17}$$

Если $N(\eta^i)$ — какая-либо другая точка, то символом MN обозначим следующее:

$$MN = a_{\mu\nu}\xi^\mu\eta^\nu, \ \mu, \ \nu = 0, \ 1, \ 2, \ 3. \tag{18}$$

Тогда равенство

$$M^2 = 0$$

будет означать принадлежность точки M к абсолюту (16) (для действительных точек это невозможно).

Равенство

$$MN = 0$$

означает полярную сопряженность точек M и N относительно (16).

Выберем репер AA_i так, чтобы имели место равенства

$$\begin{gathered} A^2 = R^2 = 1, \\ A_i^2 = 1, \\ A_iA_j = 0, \quad i \neq j \end{gathered} \tag{19}$$

(ради простоты мы положили радиус кривизны эллиптического пространства равным 1). Равенства (19) означают, что репер AA_i автополярен относительно (16) и координаты его вершин определенным образом пронормированы. Это условие будем считать выполненным для всех реперов AA_i эллиптического пространства. Если перейти от репера AA_i к реперу $A'A_i'$ по формулам

$$\begin{aligned} &A = \rho A^2, \\ &A_i = \alpha_i^k A_k, \ i, \quad k = 1, \ 2, \ 3 \end{aligned} \tag{20}$$

то, принимая во внимание равенства

$$\begin{gathered} A'^2 = 1, \\ A'^2 = 1, \\ A_i'A_j' = \delta_{ij} \text{ (символ Кронекера)}, \end{gathered}$$

легко заключим, что матрица (α_i^k) ортогональна. Непосредственно можно проверить справедливость следующих равенств:

$$\begin{aligned} &\omega'^k = a_j'^k\omega^j, \\ &\omega_k'^l = \alpha_k'^j\left(-d\alpha_j^l + \alpha_p^l\omega_j^p\right). \end{aligned} \tag{21}$$

Это в точности совпадает с (11). Следовательно, формы ω^i и ω_j^i, определенные равенствами (4) и (6), мы действительно можем подставить в деривационные уравнения (15).

Если формы ω^i, ω_j^i удовлетворяют условиям интегрируемости деривационных уравнений эллиптического пространства (15):

$$D(\omega^i A_i) \equiv 0 \,(\operatorname{mod} dA - \omega^i A_i),$$

$$D\left(-\omega^i A + \omega_i^j A_j\right) \equiv 0 \left(\operatorname{mod} dA_i + \omega^i A - \omega_i^j A_j\right),$$

т. е.

$$\begin{aligned} D\omega^i &= -\left[\omega_k^i \omega^k\right], \\ D\omega_i^j &= -\left[\omega^i \omega^j\right] + \left[\omega_i^k \omega_k^j\right], \end{aligned} \tag{22}$$

то уравнения (15) определяют просто эллиптическое пространство вместе с некоторым полем реперов, отнесенным к системе криволинейных координат

$$\begin{aligned} A &= A(u^1, u^2, u^3), \\ A_i &= A_i(u^1, u^2, u^3). \end{aligned} \tag{23}$$

Если уравнения (22) не выполнены, то уравнения (15) не вполне интегрируемы. В этом случае будем говорить, что они определяют пространство эллиптической связности. Основанием для такого названия является то, что если взять два бесконечно близких репера AA_i и $A'A_i'$ в P_3 и считать соответствующими те точки в P_3, которые в этих реперах имеют одинаковые координаты, то такое соответствие будет принадлежать к группе преобразований эллиптического пространства, т. е. это будет коллинеацией в P_3, сохраняющей абсолют (16) в P_3.

Легко понять, что абсолют (16) в репере AA_i имеет уравнение

$$x^{0^2} + x^{1^2} + x^{2^2} + x^{3^2} = 0. \tag{24}$$

На этой поверхности существуют два семейства (мнимых) прямолинейных образующих [2]. Всякое (действительное) движение эллиптического пространства является результатом двух однозначно определенных (действительных) сдвигов, из которых один называется сдвигом первого рода, а другой — второго рода.

Сдвигом первого (второго) рода является движение, при котором всякая прямая второго (первого) семейства прямолинейных образующих абсолюта переходит сама в себя, в то время как в первом (втором) семействе остаются инвариантными две комплексно-сопряженные прямые, и притом точечно. Эти прямые определяют линейную конгруэнцию действительных прямых. Через каждую точку пространства проходит единственная действительная прямая, пересекающая обе фиксированные прямые. Вследствие этого всякая такая прямая переходит при сдвиге сама в себя. Все сдвиги, сохраняющие указанную конгруэнцию, образуют непрерывное семейство, похожее на группу параллельных сдвигов евклидова пространства в некотором определенном направлении. Поэтому прямые указанной конгруэнции называют клиффордовыми параллелями, а соответствующие сдвиги — клиффордовыми сдвигами. При этом две прямые называются параллелями «первого» или «второго» рода в зависимости от того, принадлежат ли обе пересекающие их комплексно-сопряженные образующие абсолюта к первому или второму семейству образующих.

Найдем клиффордову параллель к данной прямой m первого (второго) рода, проходящую через заданную точку M. Прежде всего находим точки пересечения S и S' прямой m с абсолютом, затем образующие первого (второго) семейства, которые проходят через точки S и S', после чего искомая параллель определяется как та прямая, которая проходит через M и пересекает обе эти образующие первого (второго) семейства.

Обратимся к уравнению абсолюта (24). Одно из семейств прямолинейных образующих абсолюта (назовем его первым) имеет уравнения

$$\begin{aligned} x^0 + ix^1 &= -u(x^2 + ix^3), \\ x^0 - ix^1 &= \frac{1}{u}(x^2 - ix^3), \end{aligned} \tag{25}$$

u — параметр.

Пусть точка B в репере AA_i имеет координаты ξ^i. Любая точка $M(x^\alpha)$ прямой AB может быть определена равенством

$$\overline{M} = \overline{A} + \lambda\overline{B},$$

λ — произвольный параметр. Так как точка A имеет координаты 1, 0, 0, 0, то для точки M имеем

$$\begin{aligned} x^0 &= 1 + \lambda\xi^0, \\ x^1 &= \lambda\xi^1, \\ x^2 &= \lambda\xi^2, \\ x^3 &= \lambda\xi^3. \end{aligned} \tag{26}$$

Подставляя (26) в (25), получим

$$\begin{aligned} (1 + \lambda\xi^0) + i\lambda\xi^1 &= -u(\lambda\xi^2 + i\lambda\xi^3), \\ (1 + \lambda\xi^0) - i\lambda\xi^1 &= \frac{1}{u}(\lambda\xi^2 - i\lambda\xi^3), \end{aligned}$$

откуда после исключения λ придем к уравнению

$$(\xi^2 + i\xi^3)u^2 + 2i\xi^1 u + (\xi^2 - i\xi^3) = 0. \tag{27}$$

Полученное квадратное уравнение относительно u определяет два значения u_1, u_2 параметра u, которые соответствуют двум прямолинейным образующим первого семейства, пересекающим прямую AB.

Пусть теперь

$$A' = A + dA.$$

Учитывая (15), имеем

$$A' = A + \omega^i A_i.$$

Точка A' имеет в репере AA_i координаты

$$A'(1,\ \omega^1,\ \omega^2,\ \omega^3). \tag{28}$$

Точку B можно задать равенством

$$B = \xi^0 A + \xi^i A_i,$$

отсюда

$$\begin{aligned} dB = d\xi^0 A + \xi^0 dA + d\xi^i A_i + \xi^i dA_i = d\xi^0 A + \xi^0\omega^i A_i + d\xi^i A_i + \\ + \xi^i\left(-\omega^i A + \omega_i^j A_j\right) = (d\xi^0 - \xi^i\omega^i)A + \left(d\xi^i + \xi^0\omega^i + \xi^j\omega_j^i\right)A_i. \end{aligned}$$

Следовательно, точка B', близкая к точке B, определяется равенством

$$\begin{aligned} B' = B + dB = (\xi^0 + d\xi^0 - \xi^i\omega^i)A + \\ + \left(\xi^i + d\xi^i + \xi^0\omega^i + \xi^j\omega_j^i\right)A_i. \end{aligned} \tag{29}$$

Из (28) и последнего равенства видно, что любая точка прямой $A'B'$ имеет координаты

$$\begin{aligned} x^0 &= 1 + t(\xi^0 + d\xi^0 - \xi^i\omega^i), \\ x^i &= \omega^i + t\left(\xi^i + d\xi^i + \xi^0\omega^i + \xi^j\omega_j^i\right), \end{aligned} \tag{30}$$

где t — параметр.

Внесем (29) в (25). Исключив параметр t, получим снова некоторое квадратное уравнение относительно u:

$$au^2 + bu + c = 0,$$

где

$$\begin{aligned} a &= (\omega^2 + i\omega^3)(\xi^0 - i\xi^1) - \left[\left(\xi^2 + d\xi^2 + \xi^0\omega^2 + \xi^j\omega_j^2\right) + \right. \\ &\quad \left. + i\left(\xi^3 + d\xi^3 + \xi^0\omega^3 + \xi^j\omega_j^3\right)\right] + i\omega^1(\xi^2 + i\xi^3), \\ b &= -2i\left(\xi^1 + d\xi^1 + \xi^0\omega^1 + \xi^j\omega_j^1\right) + 2i\omega^1\xi^0 + 2i\omega^2\xi^3 - 2i\omega^3\xi^2, \\ c &= (\omega^2 - i\omega^3)(\xi^0 + i\xi^1) - \left[\left(\xi^2 + d\xi^2 + \xi^0\omega^2 + \xi^j\omega_j^2\right) - \right. \\ &\quad \left. - i\left(\xi^3 + d\xi^3 + \xi^0\omega^3 + \xi^j\omega_j^3\right)\right] - i\omega^1(\xi^2 - i\xi^3) \end{aligned} \tag{31}$$

(члены второго порядка малости отброшены). Для того, чтобы прямая $A'B'$ была параллелью к прямой AB в смысле Клиффорда, нужно потребовать, чтобы имели место соотношения

$$\frac{a}{\xi^2 + i\xi^3} = \frac{b}{2i\xi^1} = \frac{c}{\xi^2 - i\xi^3}. \tag{32}$$

Из этих уравнений мы получаем два уравнения, связывающие дифференциалы $d\xi^i$:

$$\begin{aligned} &(\xi^2 + i\xi^3)\,d\xi^1 - \xi^1 d\xi^2 - i\xi^1 d\xi^3 = (\xi^1\xi^3 - i\xi^1\xi^2)\,\omega^1 + \left(i\xi^{1^2} + \xi^2\xi^3 + i\xi^{3^2}\right)\omega^2 - \\ &\quad - \left(\xi^{1^2} + \xi^{2^2} + i\xi^2\xi^3\right)\omega^3 - (\xi^2 + i\xi^3)\,\xi^j\omega_j^1 + \xi^1\xi^j\omega_j^2 + i\xi^1\xi^j\omega_j^3, \\ &(\xi^2 - i\xi^3)\,d\xi^1 - \xi^1 d\xi^2 + i\xi^1 d\xi^3 = (\xi^1\xi^3 + i\xi^1\xi^2)\,\omega^1 + \\ &\quad + \left(-i\xi^{1^2} + \xi^2\xi^3 - i\xi^{3^2}\right)\omega^2 - \left(\xi^{1^2} + \xi^{2^2} - i\xi^2\xi^3\right)\omega^3 - \\ &\quad - (\xi^2 - i\xi^3)\,\xi^j\omega_j^1 + \xi^1\xi^j\omega_j^2 - i\xi^1\xi^j\omega_j^3, \end{aligned} \tag{33}$$

или, после некоторых упрощений,

$$\begin{aligned} \xi^2 d\xi^1 - \xi^1 d\xi^2 &= \xi^1\xi^3\omega^1 + \xi^2\xi^3\omega^2 - \left(\xi^{1^2} + \xi^{2^2}\right)\omega^3 - \\ &\quad - \xi^2\xi^j\omega_j^1 + \xi^1\xi^j\omega_j^2, \\ \xi^3 d\xi^1 - \xi^1 d\xi^3 &= -\xi^1\xi^2\omega^1 + \left(\xi^{1^2} + \xi^{3^2}\right)\omega^2 - \xi^2\xi^3\omega^3 - \\ &\quad - \xi^3\xi^j\omega_j^1 + \xi^1\xi^j\omega_j^3. \end{aligned} \tag{33'}$$

Потребуем теперь, чтобы AB и $A'B'$ не только были параллельными между собой, но и имели одинаковую длину, что точно соответствует равенству модулей векторов $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{e}'$ в E_3. Это требование наложит на $d\xi^0$, $d\xi^i$ какое-то еще одно соотношение. Чтобы его получить, обратимся к формуле расстояния двух точек в эллиптическом пространстве.

Как известно, если уравнение абсолюта имеет вид (24), то расстояние d между точками A и B определяется по формуле

$$d(A, B) = \frac{i}{2}\ln\frac{AB + \sqrt{(AB)^2 - A^2B^2}}{AB - \sqrt{(AB)^2 - A^2B^2}}. \tag{34}$$

Эта же формула справедлива и тогда, когда в качестве системы координат берется репер AA_i. В этом случае точки A и B имеют координаты

$$A(1,\ 0,\ 0,\ 0), \quad B(\xi^0,\ \xi^1,\ \xi^2,\ \xi^3).$$

Следовательно,

$$A^2 = 1,\ B^2 = \xi^{0^2} + \xi^{1^2} + \xi^{2^2} + \xi^{3^2},\ AB = \xi^0.$$

Но в таком случае

$$d(A, B)=\frac{i}{2}\ln\frac{\xi^0+i\sqrt{\xi^{1^2}+\xi^{2^2}+\xi^{3^2}}}{\xi^0-i\sqrt{\xi^{1^2}+\xi^{2^2}+\xi^{3^2}}}.$$

Далее с помощью (28) и (29) вычислим значения A'^2, $A'B'$, B'^2 для точек A' и B'. Учитывая (9), по той же формуле (34) будем иметь

$$d(A', B')=\frac{i}{2}\ln\frac{(\xi^0+d\xi^0)+i\sqrt{(\xi^{1^2}+\xi^{2^2}+\xi^{3^2})+2(\xi^1d\xi^1+\xi^2d\xi^2+\xi^3d\xi^3)}}{(\xi^0+d\xi^0)-i\sqrt{(\xi^{1^2}+\xi^{2^2}+\xi^{3^2})+2(\xi^1d\xi^1+\xi^2d\xi^2+\xi^3d\xi^3)}}.$$

В соответствии с нашим требованием

$$d(A, B)=d(A', B').$$

Следовательно,

$$\frac{\xi^0+i\sqrt{\xi^{1^2}+\xi^{2^2}+\xi^{3^2}}}{\xi^0-i\sqrt{\xi^{1^2}+\xi^{2^2}+\xi^{3^2}}}=$$

$$=\frac{(\xi^0+d\xi^0)+i\sqrt{(\xi^{1^2}+\xi^{2^2}+\xi^{3^2})+2(\xi^1d\xi^1+\xi^2d\xi^2+\xi^3d\xi^3)}}{(\xi^0+d\xi^0)-i\sqrt{(\xi^{1^2}+\xi^{2^2}+\xi^{3^2})+2(\xi^1d\xi^1+\xi^2d\xi^2+\xi^3d\xi^3)}}.$$

Отсюда

$$\frac{\xi^0}{\xi^0+d\xi^0}=\frac{\sqrt{\xi^{1^2}+\xi^{2^2}+\xi^{3^2}}}{\sqrt{(\xi^{1^2}+\xi^{2^2}+\xi^{3^2})+2(\xi^1d\xi^1+\xi^2d\xi^2+\xi^3d\xi^3)}}.$$

После несколько громоздких, но элементарных вычислений приходим к искомому уравнению

$$\left(\xi^{1^2}+\xi^{2^2}+\xi^{3^2}\right)d\xi^0-\xi^0\xi^1d\xi^1-\xi^0\xi^2d\xi^2-\xi^0\xi^3d\xi^3=0. \tag{35}$$

Условие постоянства отрезка AB при параллельном перенесении сводится к равенству (35), которое после интегрирования примет вид

$$\begin{gathered} c^2\xi^{0^2}=\xi^{1^2}+\xi^{2^2}+\xi^{3^2}, \\ c^2=\text{const}. \end{gathered} \tag{36}$$

Если мы положим

$$\frac{\xi^1}{\xi^0}=\eta^1,\quad \frac{\xi^2}{\xi^0}=\eta^2,\quad \frac{\xi^3}{\xi^0}=\eta^3, \tag{37}$$

то равенство (36) перепишется так:

$$\eta^{1^2}+\eta^{2^2}+\eta^{3^2}=c^2=\text{const}, \tag{38}$$

что полностью совпадает с соответствующим равенством в V_3.

Из (38) дифференцированием получим

$$\eta^1d\eta^1+\eta^2d\eta^2+\eta^3d\eta^3=0. \tag{39}$$

Далее, дифференцируя (37), находим

$$\begin{aligned} d\xi^1&=d\xi^0\eta^1+\xi^0d\eta^1,\\ d\xi^2&=d\xi^0\eta^2+\xi^0d\eta^2,\\ d\xi^3&=d\xi^0\eta^3+\xi^0d\eta^3. \end{aligned}$$

Внеся это и значения ξ^1, ξ^2, ξ^3 из (37) в (33)′, получим

$$\begin{aligned} \eta^2d\eta^1-\eta^1d\eta^2&=\eta^1\eta^3\omega^1+\eta^2\eta^3\omega^2-\left(\eta^{1^2}+\eta^{2^2}\right)\omega^3-\eta^2\eta^j\omega_j^1+\eta^1\eta^j\omega_j^2,\\ \eta^3d\eta^1-\eta^1d\eta^3&=-\eta^1\eta^2\omega^1+\left(\eta^{1^2}+\eta^{3^2}\right)\omega^2-\eta^2\eta^3\omega^3-\eta^3\eta^j\omega_j^1+\eta^1\eta^j\omega_j^3. \end{aligned} \tag{40}$$

Система уравнений (39), (40) и есть аналог уравнений (14). Они представляют собой условие параллельного перенесения в пространстве эллиптической связности. Решая эти уравнения относительно $d\eta^i$, получаем следующие формулы:

$$
\begin{aligned}
d\eta^1 &= \eta^3\omega^2 - \eta^2\omega^3 - \eta^2\omega_2^1 - \eta^3\omega_3^1,\\
d\eta^2 &= \eta^1\omega^3 - \eta^3\omega^1 - \eta^3\omega_3^2 - \eta^1\omega_1^2,\\
d\eta^3 &= \eta^2\omega^1 - \eta^1\omega^2 - \eta^1\omega_1^3 - \eta^2\omega_2^3.
\end{aligned}
\tag{41}
$$

Мы видим, что, как и в случае риманова пространства, $d\eta^i$ линейны относительно η^i.

Отрезок AB переносится параллельно в пространстве эллиптической связности в смысле Клиффорда, если дифференциалы неоднородных координат его конца определены равенствами (41).

ЛИТЕРАТУРА

1. Э. Картан. Риманова геометрия в ортогональном репере, Изд-во Московск. ун-та 1960.

2. Ф. Клейн. Неевклидова геометрия, перевод Н. К. Брушинского. Объединенное научно-техническое издательство НКТП СССР, М.-Л., 1936.

3. Э. Картан. Пространства аффинной, проективной и конформной связности. Изд-во Казанск. ун-та. Казань, 1962.

Поступила 22 ноября 1969 г.

ОБОБЩЕННЫЕ ПРОСТРАНСТВА КАК ПРОСТРАНСТВА С ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ ГРУППОЙ

Н. И. Кованцов

(Киев)

В работе показывается, что геометрия каждого обобщенного пространства (например, риманова, пространства аффинной связности) в каждой окрестности его текущего элемента определяется одной и той же группой. Такая группа является соответствующей подгруппой бесконечной группы всех аналитических преобразований координат точек пространства. Мы называем последнюю универсальной группой, некоторые авторы (см. [1]) называют ее дифференциальной. Специфика геометрии обобщенного пространства зависит от характера преобразования компонент объекта, задающего пространство, включая и дифференциалы координат точек этого пространства, взятые в n различных направлениях (n — размерность пространства), иными словами — от представления указанной подгруппы в пространстве объекта, задающего обобщенное пространство, вместе с дифференциалами точек.

Всякое однородное пространство (так мы называем пространство с фундаментальной группой) представляет собой некоторое подпространство (абсолют) в пространстве объекта соответствующего обобщенного пространства. Геометрия однородного пространства есть геометрия группы, индуцированной универсальной группой на абсолюте. Голономные и неголономные поверхности представляют собой соответственно примеры однородных и неоднородных пространств.

Каждое обобщенное пространство можно рассматривать как неголономное пространство по отношению к соответствующему однородному пространству (в работе рассматриваются пары: риманово пространство — евклидово пространство, пространство аффинной связности — аффинное пространство, неголономная поверхность в трехмерном евклидовом пространстве — голономная поверхность в том же пространстве).

1. Универсальные группы

Пусть M_n — n-мерное дифференцируемое многообразие, x^i — координаты его текущей точки. Пусть

$$x^{i'} = x^{i'}(x^1, \ldots, x^n), \; i, \; i' = 1, \ldots, n \tag{1}$$

— бесконечная группа невырожденных преобразований координат. Равенства (1) могут быть решены относительно x^i:

$$x^i = x^i(x^{1'}, \ldots, x^{n'}). \tag{2}$$

Дифференцируя (1), получим формулы преобразования для дифференциалов соответствующих порядков, взятых в одном и том же направлении в многообразии M_n:

$$dx^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} dx^i, \tag{3}$$

$$d^2x^{i'} = \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^i \partial x^j} dx^i dx^j + \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} d^2x^i,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Будем рассматривать дифференциалы dx^i, d^2x^i, ... как координаты точек в пространствах $\Sigma_1(dx^i)$, $\Sigma_2(dx^i, d^2x^i)$, ..., а частные производные $\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}$, $\frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^i \partial x^j}$, ... в каждой точке многообразия M_n — как параметры некоторого преобразования. Введем для этих производных следующие обозначения:

$$\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} = \alpha_i^{i'}, \quad \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^i \partial x^j} = \alpha_{ij}^{i'}, \ \ldots \tag{4}$$

(Эти обозначения используем несколько позднее). Тогда каждая система равенств (3_1), (3_{1-2}), ... будет представлять собой конечные уравнения групп Γ_1, Γ_2, ... соответственно с числом параметров n^2, $n^2 + \frac{n^2(n+1)}{2}$, ... Действительно, умножая преобразование (1) на преобразование

$$x^{i''} = x^{i''}(x^{1'}, \ldots, x^{n'}), \tag{5}$$

получим

$$dx^{i''} = \frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{i'}} dx^{i'}, \tag{6}$$

$$d^2x^{i''} = \frac{\partial^2 x^{i''}}{\partial x^{i'} \partial x^{j'}} dx^{i'} dx^{j'} + \frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{i'}} d^2x^{i'},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

или
$$dx^{i''} = \frac{\partial x^{i''}}{\partial x^i}\, dx^i, \tag{7}$$
$$d^2x^{i''} = \frac{\partial^2 x^{i''}}{\partial x^i \partial x^j}\, dx^i dx^j + \frac{\partial x^{i''}}{\partial x^i}\, d^2x^i,$$
. . . .

где
$$\frac{\partial x^{i''}}{\partial x^i} = \frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}, \tag{8}$$
$$\frac{\partial^2 x^{i''}}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial^2 x^{i''}}{\partial x^{i'} \partial x^{j'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j} + \frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{i'}} \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^i \partial x^j},$$
. . . .

Это означает, что произведение двух преобразований вида (3_1), (3_{1-2}), ... есть преобразование того же вида.

Обратные преобразования имеют вид
$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\, dx^{i'}, \tag{9}$$
$$d^2x^i = \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{i'} \partial x^{j'}}\, dx^{i'} dx^{j'} + \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\, d^2x^{i'},$$
. . . .

где производные $\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}$, $\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{i'} \partial x^{j'}}$ ... известным образом выражаются через производные $\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}$, $\frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^i \partial x^j}$, ...

Таким образом, обратные преобразования имеют также вид преобразований (3), а это вместе с предыдущим утверждением о произведении двух преобразований и доказывает групповой характер таких преобразований. Тождественное преобразование получается при
$$\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} = \delta_i^{i'}, \quad \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^i \partial x^j} = \ldots = 0. \tag{10}$$

Группы Γ_1, Γ_2, ... назовем универсальными группами (подгруппами) по той причине, что они, как мы увидим ниже, лежат в основе геометрий всех пространств — как тех, в которых действует та или иная фундаментальная группа, так и обобщенных. Группы Γ_1, Γ_2, ... были получены Г. Ф. Лаптевым иным путем, а именно: дифференциальным продолжением дифференцируемого многообразия [1]. В указанной работе даны дифференциальные уравнения соответствующего этим группам смещения репера в центроаффинном пространстве достаточно большого числа измерений, но не выписаны конечные уравнения этих групп и не замечена их связь с преобразованием координат в M_n в том именно виде, в каком эта связь рассматривается у нас. Г. Ф. Лаптев называет группу Γ_r дифференциальной группой и обозначает символом D_n^r. По причинам, которые приведены выше, нам представляется более предпочтительным термин «универсальные группы».

Имея конечные уравнения групп Γ_1, Γ_2, ..., можем найти их дифференциальные уравнения в пространствах Σ_1, Σ_2, ... С этой целью продифференцируем (3) по параметрам $\alpha_i^{i'}$, $\alpha_{ij}^{i'}$, ...:
$$d\,(dx^{i'}) = d\alpha_i^{i'} dx^i, \tag{11}$$
$$d\,(d^2x^{i'}) = d\alpha_i^{i'} d^2x^i + d_{\alpha_{jk}^{i'}} dx^j dx^k,$$
. . . .

Заменим здесь дифференциалы dx^i, d^2x^i, ... их значениями по формулам (9), придем к дифференциальным уравнениям групп в относительных компонентах:

$$d(dx^{i'}) = -\omega^{i'}_{j'}dx^{j'}, \tag{12}$$
$$d(d^2x^{i'}) = -\omega^{i'}_{j'}d^2x^{j'} - \omega^{i'}_{j'k'}dx^{j'}dx^{k'},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

где

$$\omega^{i'}_{j'} = -\alpha^{i}_{j'}d\alpha^{i'}_{i}, \tag{13}$$
$$\omega^{i'}_{j'k'} = -\alpha^{j}_{j'}\alpha^{k}_{k'}d\alpha^{i'}_{jk} - \alpha^{i}_{j'k'}d\alpha^{i'}_{i},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

Все формы $\omega^{i'}_{j'k'}$, ... симметричны относительно всех нижних индексов.

Непосредственным внешним дифференцированием форм $\omega^{i'}_{j'}$, $\omega^{i'}_{j'k'}$, ... или внешним дифференцированием вполне интегрируемой системы уравнений (12) находим уравнения структуры групп Γ_1, Γ_2, ...:

$$D\omega^{i'}_{j'} = [\omega^{k'}_{j'}\omega^{i'}_{k'}], \tag{14}$$
$$D\omega^{i'}_{j'k'} = [\omega^{l'}_{j'k'}\omega^{i'}_{l'}] + [\omega^{l'}_{j'}\omega^{i'}_{l'k'}] + [\omega^{l'}_{k'}\omega^{i'}_{j'l'}],$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

Обратимся к тому представлению групп Γ_1, Γ_2, ... в центроаффинном пространстве, которое было указано в [1]:

$$de_{i'} = \omega^{j'}_{i'}e_{j'}, \tag{15}$$
$$de_{i'j'} = \omega^{k'}_{i'j'}e_{k'} + \omega^{k'}_{i'}e_{k'j'} + \omega^{k'}_{j'}e_{i'k'},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

Все векторы $e_{i'j'}$, ... симметричны по всем индексам. Беря точки

$$P_1 = x^{i'}_1 e_{i'}, \tag{16}$$
$$P_2 = x^{i'}_2 e_{i'} + x^{i'j'}_2 e_{i'j'},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

центроаффинного пространства, дифференцируя их и полагая $dP_1 = dP_2 = \dots = 0$, получим дифференциальные уравнения групп Γ_1, Γ_2, ..., представленных как группы преобразований подпространств этого пространства:

$$dx^{i'}_1 = -\omega^{i'}_{j'}x^{j'}_1, \tag{17}$$
$$dx^{i'}_2 = -\omega^{i'}_{j'}x^{j'}_2 - \omega^{i'}_{k'l'}x^{k'l'}_2,$$
$$dx^{i'j'}_2 = -\omega^{i'}_{l'}x^{l'j'}_2 - \omega^{j'}_{l'}x^{i'l'}_2, \tag{18}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

Эти уравнения не совпадают с уравнениями (12). Совпадения и не следовало ожидать, так как пространства Σ_1, Σ_2, ..., в которых действуют группы Γ_1, Γ_2, ..., имеют соответственно размерности n, $2n$, ..., тогда как аффинные пространства A_1, A_2, ..., в которых действуют те же группы, имеют соответственно размерности n, $n + \frac{n(n+1)}{2}$, ...

Конечные уравнения групп Γ_1, Γ_2, ... в пространствах A_1, A_2, ... имеют вид:
в векторной форме

$$e_{i'} = \alpha^{i}_{i'}e_i, \tag{19}$$

$$e_{i'j'} = \alpha^k_{i'j'} e_k + \alpha^i_{i'} \alpha^j_{j'} e,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

в координатной форме

$$x_1^{i'} = \alpha_i^{i'} x_1^i, \tag{20}$$

$$x_2^{i'} = \alpha_i^{i'} x_2^i + \alpha_{ij}^{i'} x_2^{ij},$$

$$x_2^{i'j'} = \alpha_i^{i'} \alpha_j^{j'} x_2^{ij}, \tag{21}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

Таким образом, имеем два представления групп $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$ в пространствах $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots$ и $A_1, A_2, \ldots$. Первое представление (см. (3)) является кремоновым (степень правых частей соответствует номеру пространства), второе (см. (20), (21), ...) — линейно. Между прочим, равенства (3) дают пример бирационального преобразования — каждая преобразованная координата является целой рациональной функцией от первоначальных координат, при этом от координат, носящих тот же номер, что и преобразованная координата; она всегда зависит линейно от первых же координат $dx^1, dx^2, \ldots$, как однородная функция, порядок которой равен номеру преобразуемой координаты.

Обращает на себя внимание то, что пример бирационального преобразования дает нам и любой алгебраический объект (компоненты преобразованного объекта есть полиномы от компонент первоначального объекта), в частности тензор (линейный однородный объект). Было бы небезынтересно более пристально рассмотреть намечающуюся здесь связь между вопросами современной дифференциальной геометрии (обобщенные пространства, пространства с фундаментальной группой и т. д.) и такой, казалось бы, безнадежно устаревшей теорией, как теория кремоновых преобразований.

Координаты точек в пространствах $A_1, A_2, \ldots$, как показывают равенства (20, 21) и т. д., представляют собой некоторые объекты. В частности, координаты $x_1^i, x_2^{ij}, x_3^{ijk}, \ldots$ являются тензорами, соответствующее число раз контравариантными.

Найдем еще представление универсальных групп в их групповых пространствах. Мы имеем

$$\frac{\partial x^{i''}}{\partial x^i} = \frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}, \tag{22}$$

$$\frac{\partial^2 x^{i''}}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial^2 x^{i''}}{\partial x^{i'} \partial x^{j'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j} + \frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{i'}} \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^i \partial x^j}, \tag{23}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Положим, в отличие от (4),

$$\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} = x_i^{i'}, \quad \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^i \partial x^j} = x_{ij}^{i'}, \ \ldots \tag{24}$$

Это первоначальные координаты точки группового пространства; положим теперь

$$\frac{\partial x^{i''}}{\partial x^i} = x_i^{i''}, \quad \frac{\partial^2 x^{i''}}{\partial x^i \partial x^j} = x_{ij}^{i''}, \ \ldots \tag{25}$$

это — координаты преобразованной точки; положим, наконец,

$$\frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{i'}} = \alpha_{i'}^{i''}, \quad \frac{\partial^2 x^{i''}}{\partial x^{i'} \partial x^{j'}} = \alpha_{i'j'}^{i''}, \ \ldots \tag{26}$$

это — параметры преобразования. Тогда равенства (22, 23), ... могут быть представлены в виде

$$
\begin{aligned}
&x^{i''}_{i} = \alpha^{i''}_{i'} x^{i'}_{i},\\
&x^{i''}_{ij} = \alpha^{i''}_{i'j'} x^{i'}_{j} x^{j'}_{j} + \alpha^{i''}_{i'} x^{i'}_{ij}.\\
&\dots\dots\dots\dots
\end{aligned} \tag{27}
$$

Это и есть конечные уравнения (по порядку $(27_1, 27_{1-2}), \dots$) групп Γ_1, Γ_2, ... в групповых пространствах. Они снова представляют собой некоторые кремоновы преобразования.

Вместо частных производных можно было бы взять полные дифференциалы $d_p x^i$, $d_{pq} x^i$, ..., соответствующие различным направлениям в дифференцируемом многообразии. При этом мы всегда будем считать, что все такие дифференциалы симметричны относительно нижних индексов. С ними мы будем иметь дело в дальнейшем, когда будем рассматривать геометрию обобщенных или однородных пространств. Вместо равенств (3) теперь имеем

$$
\begin{aligned}
&d_p x^{i'} = \alpha^{i'}_{i} d_p x^i, \qquad\qquad (28)\\
&d_{pq} x^{i'} = \alpha^{i'}_{ij} d_p x^i d_q x^j + \alpha^{i'}_{i} d_{pq} x^i,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
$$

Это в точности совпадает с равенствами (27), если соответствующим образом изменить обозначения.

Пусть теперь $T(x^1, \dots, x^n)$ — какой-нибудь объект порядка (класса) r. В таком случае

$$
T(x^{1'}, \dots, x^{n'}) = f\left(T(x^1, \dots, x^n), \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i_1}}, \dots, \frac{\partial^r x^{i'}}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_r}}\right). \tag{29}
$$

По определению объекта имеем

$$
T(x^{1''}, \dots, x^{n''}) = f\left(T(x^{1'}, \dots, x^{n'}), \frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{i'_1}}, \dots, \frac{\partial^r x^{i''}}{\partial x^{i'_1} \dots \partial x^{i'_r}}\right) =
$$

$$
= f\left(T(x^1, \dots, x^n), \frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{i_1}}, \dots, \frac{\partial^r x^{i''}}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_r}}\right) \tag{30}
$$

и

$$
T(x^1, \dots, x^n) = f\left(T(x^{1'}, \dots, x^{n'}), \frac{\partial x^{i}}{\partial x^{i'_1}}, \dots, \frac{\partial^r x^{i}}{\partial x^{i'_1} \dots \partial x^{i'_r}}\right). \tag{31}
$$

Но это означает, что в пространстве объекта T (координатами точек пространства являются компоненты объекта; более подробно об этом сказано в примечании, приведенном в конце работы) действует универсальная группа Γ_r. Тождественное преобразование, как и прежде, получается при

$$
\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i_1}} = \delta^{i'}_{i_1}, \quad \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^{i_1} \partial x^{i_2}} = \dots = 0. \tag{32}
$$

Равенства (29) могут быть записаны в виде

$$
T(x^{1'}, \dots, x^{n'}) = f\left(T(x^1, \dots, x^n), \alpha^{i'}_{i_1}, \dots, \alpha^{i'}_{i_1 \dots i_r}\right). \tag{33}
$$

Производные объекта r-го порядка вместе с самим объектом образуют объект порядка $r+1$:

$$
T(x^1, \dots, x^n), \frac{\partial T}{\partial x^i}(x^1, \dots, x^n). \tag{34}
$$

В пространстве этого объекта действует уже группа Γ_{r+1}.

2. Риманова геометрия

1) Окрестность первого порядка. Пусть нам по-прежнему дано дифференцируемое многообразие M_n. Возьмем объект T с компонентами

$$d_p x^i, \ g_{ij} = g_{ji}. \tag{35}$$

Эти компоненты определяют пространство $N_1 = n^2 + \frac{n(n+1)}{2}$ измерений. Обозначим его символом R_1. Введем в это пространство группу Γ_1 так, чтобы координаты точек R_1 изменялись по формулам

$$\begin{aligned} d_p x^{i'} &= \alpha_i^{i'} d_p x^i, \\ g_{i'j'} &= \alpha_{i'}^i \alpha_{j'}^j g_{ij}. \end{aligned} \qquad \alpha_i^{i'} \alpha_{i'}^j = \delta_i^j. \tag{36}$$

Достойно внимания то, что группа линейна.

Геометрию пространства R_1 с заданной в нем фундаментальной группой Γ_1 назовем геометрией первой дифференциальной окрестности произвольной точки риманова пространства. Легко показать, что это есть классическая риманова геометрия в указанной окрестности.

Найдем дифференциальные уравнения группы (36). С этой целью, дифференцируя (36) по параметрам $\alpha_i^{i'}$, получим

$$d(d_p x^{i'}) = d\alpha_i^{i'} d_p x^i, \tag{37}$$

$$\left(d\alpha_i^{i'} \alpha_j^{j'} + \alpha_i^{i'} d\alpha_j^{j'}\right) g_{i'j'} + \alpha_i^{i'} \alpha_j^{j'} dg_{i'j'} = 0.$$

Заменяя здесь дифференциалы $d_p x^i$ их значениями

$$d_p x^i = \alpha_{i'}^i d_p x^{i'},$$

получим искомое

$$d(d_p x^{i'}) = -\omega_{j'}^{i'} d_p x^{j'}, \tag{38}$$

$$dg_{i'j'} = \omega_{i'}^{k'} g_{k'j'} + \omega_{j'}^{k'} g_{i'k'}.$$

Все функционально независимые инварианты группы получаются путем интегрирования следующей системы уравнений в частных производных первого порядка:

$$-\frac{\partial f}{\partial\left(d_p x^{i'}\right)} d_p x^{j'} + \frac{\partial f}{\partial(g_{p'q'})}\left(\delta_{p'}^{j'} g_{i'q'} + \delta_{q'}^{j'} g_{p'i'}\right) = 0. \tag{39}$$

Имеем n^2 уравнений (по числу независимых форм $\omega_{j'}^{i'}$) и $n^2 + \frac{n(n+1)}{2}$ координат $d_p x^{i'}$ и $g_{p'q'}$. Интегрируя эти уравнения, получим $\frac{n(n+1)}{2}$ независимых инвариантов

$$i_{pq} = g_{ij} d_p x^i d_q x^j. \tag{40}$$

Очевидно, $i_{pq} = i_{qp}$. Эти инварианты можно было бы получить непосредственно, исключая из конечных уравнений группы Γ_1 параметры $\alpha_i^{i'}$. Равенства (40) определяют n квадратичных форм (при $p = q$) и $\frac{n(n+1)}{2}$ билинейных (при $p \neq q$). Мы предполагаем, что формы i_{pp} являются невырожденными, положительно определенными.

Из инвариантов (40) можно образовать бесчисленное множество других инвариантов, как дифференциальных, так и интегральных, из которых наиболее известными являются следующие:

1°. Длина дуги кривой l

$$x^i = x^i(t) \tag{41}$$

— интеграл

$$s = \int\limits_{l} \sqrt{i_{pp}}. \tag{42}$$

Для этой кривой

$$d_p x^i = \frac{\partial x^i}{dt} dt.$$

2°. Угол двух кривых, имеющих направления $d_p x^i$ и $d_q x^i$:

$$\cos\Theta = \frac{i_{pq}}{\sqrt{i_{pp} i_{qq}}}. \tag{43}$$

3°. Объем области D_m:

$$V_m = \overbrace{\int \cdots \int}^{m}_{D_m} \sqrt{|i_{\alpha\beta}|} \quad \alpha,\ \beta = 1,\ \ldots\ m \tag{44}$$

(символом $|i_{\alpha\beta}|$ как обычно обозначен определитель) некоторой m-мерной поверхности δ_m

$$x^i = x^i(t^1,\ \ldots,\ t^m), \tag{45}$$

для которой положено

$$d_\alpha x^i = \frac{\partial x^i}{\partial t^\alpha} dt^\alpha. \text{ (не суммировать!)} \tag{46}$$

Равенство (44) может быть записано в виде

$$V_m = \int \underset{D_m}{\cdots} \int \sqrt{\left| g_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial t^\alpha} \frac{\partial x^j}{\partial t^\beta} \right|}\, dt^1 \ldots dt^m. \tag{47}$$

Можно, однако, каждое направление на поверхности δ_m задавать с помощью дифференциалов $d_{\alpha'} t^\beta$ ($\alpha,\ \beta = 1,\ \ldots,\ m$). Тогда равенство (47) можно записать в виде, где подынтегральное выражение является инвариантом относительно замены переменных

$$V_m = \frac{1}{m!} \int \underset{D_m}{\cdots} \int \sqrt{\left| g_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial t^\alpha} \frac{\partial x^j}{\partial t^\beta} \right|}\, |d_\alpha t^\beta|. \tag{48}$$

В частности, если $m = n$, то формула дает объем n-мерной области D_n риманова пространства. Если эта область отнесена к своим первоначальным координатам $x^1,\ \ldots,\ x^n$, то формула (47) принимает вид

$$V_n = \frac{1}{n!} \int \underset{D_n}{\cdots} \int \sqrt{|g_{ij}|}\, |d_p x^i|. \tag{49}$$

2) Окрестность второго порядка. В соответствии со сказанным выше, производные $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}$ являются компонентами объекта второго порядка (второго класса). В пространстве этого объекта перейдем к новым координатам Γ^k_{ij} по формулам

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right), \quad (g^{kl} g_{il} = \delta^k_i). \tag{50}$$

Возьмем пространство R_2 объекта

$$d_p x^i,\ g_{ij},\ d_{pq} x^i,\ \Gamma^k_{ij}. \tag{51}$$

Размерность этого пространства равна

$$N_2 = n^2 + \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n^2(n+1)}{2} + \frac{n^2(n+1)}{2}.$$

Подвергнем R_2 преобразованиям группы Γ_2 с соответствии с равенствами

$$\begin{aligned} d_p x^{i'} &= \alpha^{i'}_i d_p x^i, \\ g_{i'j'} &= \alpha^i_{i'} \alpha^j_{j'} g_{ij}, \\ d_{pq} x^{i'} &= \alpha^{i'}_{ij} d_p x^i d_q x^j + \alpha^{i'}_i d_{pq} x^i, \\ \Gamma^{k'}_{i'j'} &= \alpha^i_{i'} \alpha^j_{j'} \alpha^{k'}_k \Gamma^k_{ij} + \alpha^k_{i'j'} \alpha^{k'}_k. \end{aligned} \tag{52}$$

Группа не является линейной — в третьей строчке мы имеем кремоновы преобразования.

Дифференциальные уравнения группы имеют вид

$$\begin{aligned} d(d_p x^{i'}) &= -\omega^{i'}_{j'} d_p x^{j'}, \\ dg_{i'j'} &= \omega^{p'}_{i'} g_{p'j'} + \omega^{p'}_{j'} g_{i'p'}, \\ d(d_{pq} x^{i'}) &= -\omega^{i'}_{k'} d_{pq} x^{k'} - \omega^{i'}_{j'k'} d_p x^{j'} d_q x^{k'}, \\ d\Gamma^{k'}_{i'j'} &= \omega^{p'}_{i'} \Gamma^{k'}_{p'j'} + \omega^{p'}_{j'} \Gamma^{k'}_{i'p'} - \omega^{k'}_{p'} \Gamma^{p'}_{i'j'} + \omega^{k'}_{i'j'}. \end{aligned} \tag{53}$$

Инварианты группы определяем, решая систему дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка $\left(\text{число уравнений равно } n^2 + \frac{n^2(n+1)}{2}\right)$:

$$\begin{gathered} -\frac{\partial f}{\partial (d_p x^{i'})} d_p x^{j'} + \frac{\partial f}{\partial (g_{p'q'})} \left(\delta^{j'}_{p'} g_{i'q'} + \delta^{j'}_{q'} g_{p'i'}\right) + \frac{\partial f}{\partial \Gamma^{r'}_{p'q'}} \left(\delta^{j'}_{p'} \Gamma^{r'}_{i'q'} + \delta^{j'}_{q'} \Gamma^{r'}_{i'p'} - \right. \\ \left. - \delta^{r'}_{i'} \delta^{j'}_{k'} \Gamma^{k'}_{p'q'}\right) - \frac{\partial f}{\partial (d_{pq} x^{i'})} d_{pq} x^{j'} = 0, \\ -\frac{\partial f}{\partial (d_{pq} x^{i'})} d_p x^{j'} d_q x^{k'} + \frac{\partial f}{\partial \Gamma^{i'}_{j'k'}} = 0. \end{gathered} \tag{54}$$

При числе переменных, равном N_2, мы будем иметь $\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n^2(n+1)}{2}$ функционально независимых инвариантов. Часть инвариантов, в числе $\frac{n(n+1)}{2}$, уже найдена в первой окрестности (см. (40)), остальные могут быть представлены, например, следующими:

$$i_{pq.\,r} = g_{ij} (d_{pq} x^i + \Gamma^i_{kl} d_p x^k d_q x^l) d_r x^j. \tag{55}$$

Очевидно, инварианты $i_{pq.\,r}$ удовлетворяют следующим соотношениям:

$$i_{pq.\,r} = i_{qp.\,r}, \tag{56}$$

следовательно, число независимых из них равно $\frac{n^2(n+1)}{2}$. Все остальные инварианты будут функциями от i_{pq} и $i_{pq.\,r}$. В частности, такими инвариантами являются квадратичные формы

$$i_{pq.\,rs} = g_{ij} \xi^i_{pq} \xi^j_{rs}, \tag{57}$$

где

$$\begin{aligned} \xi^i_{pq} &= d_{pq} x^i + \Gamma^i_{kl} \xi^k_p \xi^l_q, \\ \xi^k_p &= d_p x^k. \end{aligned} \tag{58}$$

Возьмем n линейно независимых векторов ξ^i_p, следовательно, $|\xi^i_p| \neq 0$. В таком случае

$$|i_{pq}| = |g_{ij}\xi^i_p\xi^j_q| = |g_{ij}|\,|\xi^i_p|^2 \neq 0. \tag{59}$$

Мы можем построить систему величин i^{pq}, удовлетворяющих соотношениям

$$i_{pq}i^{qr} = \delta^r_p. \tag{60}$$

Это не совсем обычные величины — у них в знаменателе стоит дифференциальная форма степени $2n$-определитель $|i_{pq}|$, а в числителе — дифференциальные формы степени $2(n-1)$, представляющие соответствующие миноры этого определителя. Следовательно, i^{pq} не есть дифференциальные формы в обычном значении этого слова. Тем не менее они представляют собой некоторые алгебраические образования, польза которых будет видна из дальнейшего.

Поскольку $|\xi^i_p| \neq 0$, то можно решить систему алгебраических уравнений

$$\xi^i_p\xi'^p_j = \delta^i_j, \tag{61}$$

а в таком случае обращается и равенство $i_{pq} = g_{ij}\xi^i_p\xi^j_q$:

$$i^{pq} = g^{ij}\xi'^p_i\xi'^q_j. \tag{62}$$

Из системы равенств

$$i_{pq.\,r} = g_{ij}\xi^i_{pq}\xi^j_r \tag{63}$$

находим

$$\xi^i_{pq} = g^{ij}\xi'^r_j i_{pq.\,r}. \tag{64}$$

Внося это в (57), будем иметь

$$i_{pq.\,rs} = g_{ij}g^{ik}\xi'^a_k i_{pq.\,a}g^{jl}\xi'^b_l i_{rs.\,b} =$$

$$= i_{pq.\,a}i_{rs.\,b}g^{jl}\xi'^a_j\xi'^b_l = i_{pq.\,a}i_{rs.\,b}i^{ab}. \tag{65}$$

Так выражаются инварианты (57) через инварианты $i_{pq.\,a}$ и i^{ab}. Последнее равенство может быть переписано в виде

$$i_{pq.\,rs}i_{ab} = i_{pq.\,a}i_{rs.\,b}. \tag{66}$$

Величины ξ^i_{pq} являются компонентами контравариантного вектора. Контравариантный вектор образуют и величины

$$\gamma^i_{pp} = \frac{\xi^i_{pp}}{i_{pp}}. \tag{67}$$

Равенства

$$\gamma^i_{pp} = 0,$$

или

$$\frac{d_{pp}x^i}{(d_p s)^2} + \Gamma^i_{kl}\frac{d_p x^k}{d_p s}\frac{d_p x^l}{d_p s} = 0 \tag{68}$$

(по p не суммировать!) есть уравнения геодезических линий, соответствующих направлению $d_p x^i$. Здесь по определению

$$(d_p s)^2 = i_{pp}. \tag{69}$$

$(d_p s)^2$ — квадрат дифференциала длины дуги, соответствующей направлению $d_p x^i$.

Каждое из уравнений

$$\xi^i_{pq} = 0 \tag{70}$$

может быть представлено как инвариантное уравнение в частных производных второго порядка

$$\frac{\partial^2 x^i}{\partial t^p \partial t^q} + \Gamma^i_{kl} \frac{\partial x^k}{\partial t^p} \frac{\partial x^l}{\partial t^q} = 0 \tag{71}$$

(p, q фиксированы). Такое уравнение всегда интегрируется и определяет некоторый класс двумерных поверхностей. Решение зависит от $2n$ функций одного аргумента.

Поверхности, определяемые уравнениями (71), не являются вполне геодезическими, т. е. поверхностями, содержащими ∞^2 геодезических линий пространства (68). Поверхность, определяемая уравнениями (71), будет вполне геодезической тогда и только тогда, когда индексы p, q одновременно пробегают какую-либо пару значений, следовательно, для каждого i имеется тройка уравнений в частных производных второго порядка. Такие тройки интегрируются не при всяких значениях Γ^i_{kl}. В евклидовом пространстве, для которого Γ^i_{kl} подчиняются некоторым условиям (тензор кривизны обращается в нуль), уравнения (71) интегрируются при любых значениях p и q.

Примечание. Говоря об инвариантности уравнений (71), мы имеем в виду лишь инвариантность относительно преобразования переменных x^i. Что же касается преобразования параметров t^p, t^q, то оно в общем случае не оставляет уравнения (71) неизменными. Можно было бы, однако, привести эти уравнения к виду, когда такая инвариантность будет иметь место.

Поверхность, определяемую системой уравнений (71) при каждой фиксированной паре значений p и q, назовем квазигеодезической.

Пусть $d_p x^i$ — некоторый вектор в римановом пространстве, точнее — поле некоторого вектора. Абсолютный дифференциал этого вектора, подсчитанный для смещений $d_q x^i$, определяется формулой

$$D_q(d_p x^i) = \xi^i_{pq} = d_{pq} x^i + \Gamma^i_{kl} d_p x^k d_q x^l. \tag{72}$$

Два направления $d_p x^i$ и $d_q x^i$ в заданной точке пространства определяют двумерную площадку, которой в общем случае касается бесчисленное множество квазигеодезических двумерных поверхностей (это множество, как отмечено выше, зависит от $2n$ функций одного аргумента). Лишь при смещении по любой из таких поверхностей абсолютный дифференциал ξ^i_{pq} вектора $d_p x^i$ обращается в нуль, т. е. (в терминах, связанных с параллельным перенесением) он переносится параллельно в смысле Леви-Чивита. Для всякой другой поверхности этот дифференциал в нуль не обращается и представляет собой некоторый вектор риманова пространства. С каждой парой векторов $d_p x^i$ и $d_q x^i$, в силу предположенной симметрии $d_{pq} x^i = d_{qp} x^i$, связывается вполне определенный вектор. Назовем этот вектор абсолютным дифференциалом второго порядка точки риманова пространства. Обычный дифференциал естественно считать абсолютным первого порядка. Если вектор $d_p x^i$ переносится параллельно в смысле Леви-Чивита в направлении $d_q x^i$, то абсолютный дифференциал ξ^i_{pq} в этом случае обращается в нуль. В частности, если $p = q$ и $\xi_{pp} = 0$, то вектор $d_p x^i$ переносится параллельно в направлении, определяемом им самим, а линии, которые таким вектором определяются, есть геодезические линии риманова пространства.

Равенства (57) показывают, что инвариант $i_{pq.\,rs}$ есть скалярное произведение двух векторов, являющихся абсолютными дифференциалами второго порядка, инвариант $i_{pq.\,pq}$ есть квадрат такого вектора. Таким геометрическим истолкованием инвариантов $i_{pq.\,rs}$ можно ограничиться. Подобным же образом могут быть истолкованы инварианты i_{pq}, $i_{pq.r}$.

3) Окрестность третьего порядка. Переходя к окрестности третьего порядка, мы могли бы в качестве пространства R_3 взять то, в котором координаты точек соответствуют дифференциалам $d_p x^i$, $d_{pq}x^i$, $d_{pqr}x^i$ и функциям g_{ij}, $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}$, $\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^k \partial x^l}$. Можно, однако, произвести замену координат и вместо производных $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}$ взять символы Кристоффеля, что мы уже и сделали в окрестности второго порядка. Целесообразно произвести еще одну замену, перейдя от координат $\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^k \partial x^l}$ к координатам $\frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial x^l}$.

Однако первых координат $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$, вторых $\frac{n^3(n+1)}{2}$. Вторых больше на $\frac{n^2(n^2-1)}{4}$. В то же время производные $\frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial x^l}$ однозначно выражаются через $\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^k \partial x^l}$, и наоборот. Следовательно, между $\frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial x^l}$ должны существовать некоторые зависимости в числе $\frac{n^2(n^2-1)}{4}$. Такими зависимостями являются, очевидно, следующие:

$$\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^k \partial x^l} - \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^l \partial x^k} = g_{jp}R^p_{i,\,kl} + g_{ip}R^p_{j,\,kl} = R_{ij,\,kl} + R_{ji,\,kl} = 0, \tag{73}$$

или

$$g_{ip}\left(\frac{\partial \Gamma_{jk}^p}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma_{jl}^p}{\partial x^k} + \Gamma_{jk}^q \Gamma_{lq}^p - \Gamma_{jl}^q \Gamma_{kq}^p\right) + \\ + g_{jp}\left(\frac{\partial \Gamma_{ik}^p}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma_{il}^p}{\partial x^k} + \Gamma_{ik}^q \Gamma_{lq}^p - \Gamma_{il}^q \Gamma_{kq}^p\right) = 0. \tag{74}$$

Эти равенства следует считать, очевидно, уравнениями абсолюта в пространстве переменных g_{ij}, Γ_{ij}^k, $\frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial x^l}$. Такой абсолют представляет собой некоторую систему поверхностей 3-го порядка. Число соотношений (74) равно разности между числом производных $\frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial x^l}$ и числом вторых производных $\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^k \partial x^l}$, т. е. оно равно $\frac{n^2(n^2-1)}{4}$.

Итак, в качестве пространства R_3 возьмем пространство объекта

$$d_p x^i,\ d_{pq}x^i,\ d_{pqr}x^i,\ g_{ij},\ \Gamma_{ij}^k,\ \frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial x^l} \tag{75}$$

измерения

$$n^2 + \frac{n^2(n+1)}{2} + \frac{n^2(n+1)(n+2)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n^2(n+1)}{2} + \frac{n^3(n+1)}{2}.$$

Введем в R_3 группу Γ_3, конечные уравнения которой имеют вид

$$\begin{gathered}
d_p x^{i'} = \alpha_i^{i'} d_p x^i, \\
d_{pq} x^{i'} = \alpha_{il}^{i'} d_p x^i d_q x^l + \alpha_i^{i'} d_{pq} x^i, \\
d_{pqr} x^{i'} = \alpha_{ijl}^{i'} d_p x^i d_q x^j d_r x^l + \alpha_{il}^{i'} (d_{pq} x^i d_r x^l + d_{qr} x^i d_p x^l + d_{pr} x^i d_q x^l) + \\
+ \alpha_i^{i'} d_{pqr} x^i, \\
g_{i'j'} = \alpha_{i'}^i \alpha_{j'}^j g_{ij}, \\
\Gamma_{i'j'}^{k'} = \alpha_k^{k'} \alpha_{i'}^i \alpha_{j'}^j \Gamma_{ij}^k + \alpha_{i'j'}^k \alpha_k^{k'}, \\
\frac{\partial \Gamma_{i'j'}^{k'}}{\partial x^{l'}} = \alpha_k^{k'} \alpha_{i'}^i \alpha_{j'}^j \alpha_{l'}^l \frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial x^l} + (\alpha_{kl}^{k'} \alpha_{l'}^l \alpha_{i'}^i \alpha_{j'}^j + \alpha_k^{k'} \alpha_{i'l'}^i \alpha_{j'}^j + \alpha_k^{k'} \alpha_{i'}^i \alpha_{j'l'}^j) \Gamma_{ij}^k + \\
+ \alpha_{i'j'}^k \alpha_{kl}^{k'} \alpha_{l'}^l + \alpha_k^{k'} \alpha_{i'j'l'}^k .
\end{gathered} \tag{76}$$

Группа Γ_3, действующая в пространстве R_3, индуцирует группу преобразований абсолюта (74). Именно последняя и представляет собой группу римановой геометрии в окрестности 3-го порядка текущей точки этого пространства. Совокупность точек, принадлежащих абсолюту (74), обозначим через R_3'. Обратим внимание на то, что поверхности (74) рассматриваются в пространстве R_3, имеющем указанную выше размерность. Поэтому размерность совокупности точек абсолюта мы должны считать равной

$$N_3' = n^2 + \frac{n^2(n+1)}{2} + \frac{n^2(n+1)(n+2)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n^2(n+1)}{2} + \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Группа Γ_3, действующая в этом пространстве, зависит от $n^2 + \frac{n^2(n+1)}{2} + \frac{n^2(n+1)(n+2)}{6}$ параметров. (Легко понять, что индуцированная группа совпадает с самой группой Γ_3). Следовательно, в третьей дифференциальной окрестности своей текущей точки риманово пространство имеет

$$\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n^2(n+1)}{2} + \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

функционально независимых абсолютных инвариантов. Часть из них переходит сюда из второй дифференциальной окрестности. Это инварианты i_{pq} и $i_{pq.\,r}$. Что же касается остальных независимых инвариантов, то, чтобы их найти, мы введем предварительно понятие абсолютного дифференциала третьего порядка. Назовем таким дифференциалом вектор

$$\xi_{pq.\,r}^i = D_r \xi_{pq}^i = d_r \xi_{pq}^i + \Gamma_{kc}^i \xi_{pq}^k d_r x^c = d_{pqr} x^i + \frac{\partial \Gamma_{ab}^i}{\partial x^c} d_p x^a d_q x^b d_r x^c + \Gamma_{kl}^i (d_{pq} x^k d_r x^l + \\
+ d_{qr} x^k d_p x^l + d_{pr} x^k d_q x^l) + \Gamma_{kc}^i \Gamma_{ab}^k d_p x^a d_q x^b d_r x^c. \tag{77}$$

Теперь за независимые инварианты третьего порядка возьмем такие:

$$i_{pq.\,r.\,s} = g_{ij} \xi_{pq.\,r}^i \xi_s^j. \tag{78}$$

Легко убедиться в справедливости следующего равенства:

$$\xi_{pq.\,r}^i - \xi_{pr.\,q}^i = R_{a.\,bc}^i d_p x^a d_q x^b d_r x^c, \tag{79}$$

следовательно,

$$i_{pq.\,r.\,s} - i_{pr.\,q.\,s} = g_{ij} R_{a,\,bc}^i d_p x^a d_q x^b d_r x^c d_s x^j = \\
= R_{ja,\,bc} d_p x^a d_q x^b d_r x^c d_s x^j. \tag{80}$$

Принимая во внимание равенства (73), можно записать следующие соотношения между инвариантами $i_{pq.\,r.\,s}$:

$$i_{pq.\,r.\,s} - i_{pr.\,q.\,s} + i_{sq.\,r.\,p} - i_{sr.\,q.\,p} = 0. \tag{81}$$

Этих соотношений столько же, сколько и (73), т.е. их число равно $\frac{n^2(n^2-1)}{4}$. Кроме того, из (77) непосредственно видно, что

$$\xi^{i}_{pq.\,r} = \xi^{i}_{qp.\,r}, \tag{82}$$

следовательно,

$$i_{pq.\,r.\,s} = i_{qp.\,r.\,s}. \tag{83}$$

Число таких соотношений равно $\frac{n^3(n-1)}{2}$. Таким образом, на n^4 инвариантов $i_{pq.\,r.\,s}$ наложено $\frac{n^2(n^2-1)}{4} + \frac{n^3(n-1)}{2}$ соотношений (81) и (83). Следовательно, число независимых инвариантов равно

$$n^4 - \frac{n^2(n^2-1)}{4} - \frac{n^3(n-1)}{2} = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Тем самым инварианты i_{pq}, $i_{pq.\,r}$, $i_{pq.\,r.\,s}$ образуют полную систему инвариантов третьей дифференциальной окрестности.

Кроме инвариантов $i_{pq.\,r.\,s}$, в третьей дифференциальной окрестности естественно выделяются такие инвариантные формы:

$$i_{pq.\,r.\,st} = g_{ij}\xi^{i}_{pq.\,r}\xi^{j}_{st}, \tag{84}$$

$$i_{pq.\,r.\,st.\,u} = g_{ij}\xi^{i}_{pq.\,r}\xi^{j}_{st.\,u}. \tag{85}$$

Эти инварианты, однако, могут быть выражены через уже найденные функционально независимые инварианты:

$$\xi^{i}_{pq.\,r} = g^{ik}\xi'^{u}_{k} i_{pq.\,r.\,u}, \tag{86}$$

$$\xi^{j}_{st} = g^{jl}\xi'^{a}_{l} i_{st.\,a} \tag{87}$$

(см. (64) и (78)). Внося это в (84) и (85), получаем

$$i_{pq.\,r.\,st} = g_{ij}g^{ik}\xi'^{u}_{k} i_{pq.\,r.\,u} g^{jl}\xi'^{a}_{l} i_{st.\,a} = i_{pq.\,r.\,u} i_{st.\,a} i^{au}, \tag{88}$$

$$i_{pq.\,r.\,st.\,u} = g_{ij}g^{ik}\xi'^{b}_{k} i_{pq.\,r.\,b} g^{jl}\xi'^{a}_{l} i_{st.\,u.\,a} = i_{pq.\,r.\,b} i_{st.\,u.\,a} i^{ab}. \tag{89}$$

Обратимся к равенству (80). Каждая пара векторов $d_p x^a$, $d_s x^j$ и $d_q x^b$, $d_r x^c$ определяет бивектор, соответственно

$$d_{ps}x^{aj} = \frac{1}{2}(d_p x^a d_s x^j - d_p x^j d_s x^a), \tag{90}$$

$$d_{qr}x^{bc} = \frac{1}{2}(d_q x^b d_r x^c - d_q x^c d_r x^b)$$

Равенство (80) может быть переписано в виде

$$i_{pq.\,r.\,s} - i_{pr.\,q.\,s} = R_{ja,\,bc} d_{ps}x^{aj} d_{qr}x^{bc}. \tag{91}$$

В частности, при $p = q$, $r = s$ это равенство приобретает вид

$$i_{pp.\,r.\,r} - i_{pr.\,p.\,r} = R_{ja,\,bc} d_{pr}x^{aj} d_{pr}x^{bc}. \tag{92}$$

Инвариант, стоящий справа, имеет геометрическое истолкование в терминах параллельного перенесения — это главная часть приращения угла (с каким-то фиксированным направлением) произвольного вектора, обнесенного по геодезической поверхности, которая определяется бивектором $d_{pr}x^{ij}$ (см. [2]). Элемент площади этой поверхности определяется по формуле

$$d_{pr}S = \frac{1}{2}\sqrt{|i_{pr}|} = \frac{1}{2}\sqrt{i_{pp}i_{rr} - i_{pr}^2}.$$

Тогда инвариант

$$J_{pr} = \frac{i_{pp.\,r.\,r} - i_{pr.\,p.\,r}}{\frac{1}{2}\sqrt{i_{pp}i_{rr} - i_{pr}^2}} \tag{93}$$

будет представлять собой предел отношения упомянутого выше угла приращения к площади геодезической поверхности.

Евклидова геометрия выделяется из общей римановой геометрии тем, что группа Γ_3, ей соответствующая, действует на абсолюте

$$R^k_{i,\,jl} = 0. \tag{94}$$

Легко видеть, что условия (94) не противоречат равенствам (74).

3. Пространство аффинной связности

Геометрия пространства аффинной связности имеет много общего с римановой геометрией, однако между ними есть и целый ряд существенных различий.

В качестве пространства представлений группы Γ_1 в первой дифференциальной окрестности возьмем пространство объекта d_px^i (обозначим это пространство символом U_1). Конечные уравнения группы Γ_1 имеют обычный вид

$$d_px^{i'} = \alpha^{i'}_i d_px^i. \tag{95}$$

В качестве пространства U_2 берем пространство объекта d_px^i, $d_{pq}x^i$, Γ^k_{ij} с конечными уравнениями группы Γ_2:

$$\begin{aligned} d_px^{i'} &= \alpha^{i'}_i d_px^i, \\ d_{pq}x^{i'} &= \alpha^{i'}_{ij} d_px^i d_qx^j + \alpha^{i'}_i d_{pq}x^i, \\ \Gamma^{k'}_{i'j'} &= \alpha^{k'}_k \alpha^i_{i'} \alpha^j_{j'} \Gamma^k_{ij} + \alpha^k_{i'j'} \alpha^{k'}_k. \end{aligned} \tag{96}$$

При $n^2 + \frac{n^2(n+1)}{2}$ параметрах $\alpha^{i'}_i$, $\alpha^{i'}_{ij}$ и $n^2 + \frac{n^2(n+1)}{2} + \frac{n^2(n+1)}{2}$ переменных d_px^i, $d_{pq}x^i$, Γ^k_{ij} будем иметь $\frac{n^2(n+1)}{2}$ функционально независимых инвариантов. Чтобы их найти, следует из равенств (96) исключить параметры $\alpha^{i'}_i$, $\alpha^{i'}_{ij}$. Для такого исключения положим, как уже было сделано прежде, $\xi^k_p = d_px^k$. Мы полагаем, что имеет место неравенство $|\xi^k_p| \neq 0$. В таком случае получаем n ковариантных векторов ξ'^p_k как решение системы линейных уравнений (61). Но в таком случае величины

$$i^r_{pq} = \xi^i_{pq}\xi'^r_i \tag{97}$$

образуют систему $\frac{n^2(n+1)}{2}$ функционально независимых инвариантов. Здесь векторы ξ^i_{pq} определяются равенствами (58). Очевидно, инварианты i^r_{pq} представляют собой дифференциальные формы первого измерения — это дроби, в числителях которых стоят формы порядка $n+1$, в знаменателе — форма $|\xi^i_p|$ порядка n. При этом мы считаем, что вектор ξ^r_{pq} есть форма первого порядка. В развернутом виде равенство (97) выглядит так:

$$i^r_{pq} = \frac{1}{|\xi^i_p|} \begin{vmatrix} \xi^1_1 \ldots & \xi^{i-1}_1 \xi^{i+1}_1 \ldots \xi^n_1 \\ \ldots & \ldots \\ \xi^1_{r-1} \ldots & \xi^{i-1}_{r-1} \xi^{i+1}_{r-1} \ldots \xi^n_{r-1} \\ \xi^1_{r+1} \ldots & \xi^{i-1}_{r+1} \xi^{i+1}_{r+1} \ldots \xi^n_{r+1} \\ \ldots & \ldots \\ \xi^1_n \ldots & \xi^{i-1}_n \xi^{i+1}_n \ldots \xi^n_n \end{vmatrix} (d_{pq}x^i + \Gamma^i_{kl} d_p x^k d_q x^l). \tag{98}$$

Совершенно очевидно, что и в случае риманова пространства величины (97) являются инвариантами. Их можно было бы включить в базис полной системы инвариантов вместо $i_{pq.r}$. Легко убедиться в справедливости следующих равенств:

$$i^r_{pq} = i_{pq.s} i^{rs}, \tag{99}$$

$$i_{pq.s} = i_{rs} i^r_{pq}. \tag{100}$$

Равенства

$$i^r_{pq} = 0 \tag{101}$$

равносильны равенствам $\xi^i_{pq} = 0$ (в силу $|\xi^i_r| \neq 0$). При $p = q$ эти равенства представляют собой дифференциальные уравнения геодезических линий.

Геометрия дифференциальной окрестности 3-го порядка определяется группой Γ_3, действующей в пространстве A_3 объекта $d_p x^i$, $d_{pq}x^i_1$, $d_{pqr}x^i$, Γ^k_{ij}, $\dfrac{\partial \Gamma^k_{ij}}{\partial x^l}$. Размерность этого пространства равна

$$n^2 + \frac{n^2(n+1)}{2} + \frac{n^2(n+1)(n+2)}{6} + \frac{n^2(n+1)}{2} + \frac{n^3(n+1)}{2}.$$

Порядок группы Γ_3 равен $n^2 + \dfrac{n^2(n+1)}{2} + \dfrac{n^2(n+1)(n+2)}{6}$. Следовательно, группа имеет $\dfrac{n^2(n+1)}{2} + \dfrac{n^3(n+1)}{2}$ функционально независимых инвариантов. Часть из этих инвариантов уже найдена во второй окрестности. Это инварианты i^r_{pq}. В качестве других независимых инвариантов можно взять, например, такие:

$$i^s_{pq.r} = \xi^i_{pq.r} \xi'^s_i. \tag{102}$$

Здесь векторы $\xi^i_{pq.r}$ определяются равенствами (77). Для таких векторов, как известно, имеют место соотношения $\xi^i_{pq.r} = \xi^i_{qp.r}$, следовательно,

$$\xi^s_{pq.r} = \xi^s_{qp.r}. \tag{103}$$

Инварианты $i^s_{pq.r}$, разумеется, можно рассматривать и в римановом пространстве.

Легко обнаруживаем справедливость следующих равенств:

$$i^s_{pq.r} = i_{pq.r.t} i^{st}, \tag{104}$$

$$i_{pq.r.t} = i_{st} i^s_{pq.r}. \tag{105}$$

Если внести правые части последних равенств в соотношения (81), то получим новые зависимости между инвариантами $i^t_{pq.\,r}$, специфичные уже для риманова пространства

$$i_{ts}i^t_{pq.\,r} - i_{ts}i^t_{pr.\,q} + i_{tp}i^t_{sq.\,r} - i_{tp}i^t_{sr.\,q} = 0. \tag{106}$$

В отличие от риманова пространства группа Γ_3 рассматривается уже во всем пространстве A_3, а не только на абсолюте (106).

Аффинное пространство выделяется из пространства аффинной связности тем, что геометрия его есть геометрия группы Γ_3, действующей на абсолюте

$$R^l_{i,\,jk} = 0, \tag{107}$$

где $R^l_{i,\,jk}$ — компоненты тензора кривизны, определенного объектом связности Γ^k_{ij}.

4. Поверхности в трехмерном евклидовом пространстве

Пусть $n = 2$. В качестве пространства Σ_1 (примечание: употребляемые здесь обозначения Σ_1, Σ_2, ... не следует путать с теми, которые использовались в разделе 1) объекта первого порядка (класса) возьмем следующее пространство:

$$d_p x^i,\ g_{ij},\ i,\ j,\ p.\ \ldots = 1,\ 2. \tag{108}$$

Здесь g_{ij} — дважды ковариантный, симметричный, невырожденный тензор с положительно определенной квадратичной формой $g_{ij}dx^i dx^j$. Конечные уравнения группы Γ_1, действующей в пространстве Σ_1, имеют вид

$$\begin{aligned} d_p x^{i'} &= \alpha^{i'}_i d_p x^i,\\ g_{i'j'} &= \alpha^i_{i'}\alpha^j_{j'} g_{ij}. \end{aligned} \tag{109}$$

Геометрия этой группы есть геометрия первой дифференциальной окрестности точки поверхности σ в трехмерном евклидовом пространстве. Полная система функционально независимых инвариантов содержит всего три инварианта

$$i_{pq} = g_{ij} d_p x^i d_q x^j. \tag{110}$$

Из них невозможно исключить четырех дифференциалов $d_p x^i$, а потому конечных инвариантов, т. е. инвариантов, зависящих только от g_{ij}, окрестность первого порядка не содержит.

В качестве объекта, определяющего геометрию второй дифференциальной окрестности точки поверхности трехмерного евклидова пространства, возьмем следующий:

$$d_p x^i,\ g_{ij},\ d_{pq}x^i,\ \Gamma^k_{ij},\ b_{ij}, \tag{111}$$

где Γ^k_{ij} — символы Кристоффеля второго рода, определяемые тензором g_{ij}, а b_{ij} — дважды ковариантный тензор, в общем случае не симметричный. Объект (III) есть объект второго порядка, его компоненты образуют пространство Σ_2, фундаментальной группой этого пространства является группа Γ_2. Конечные уравнения группы Γ_2 имеют вид

$$\begin{aligned} d_p x^{i'} &= \alpha^{i'}_i d_p x^i,\\ g_{i'j'} &= \alpha^i_{i'}\alpha^j_{j'} g_{ij},\\ b_{i'j'} &= \alpha^i_{i'}\alpha^j_{j'} b_{ij}, \end{aligned}$$

$$d_{pq}x^{i'} = \alpha^{i'}_{ij} d_p x^i d_q x^j + \alpha^{i'}_i d_{pq} x^i, \tag{112}$$

$$\Gamma^{k'}_{i'j'} = \alpha^{k'}_k \alpha^i_{i'} \alpha^j_{j'} \Gamma^k_{ij} + \alpha^k_{i'j'} \alpha^{k'}_k .$$

При $b_{12} = b_{21}$ геометрия поверхности σ ничем не отличается от геометрии второй дифференциальной окрестности точки поверхности в трехмерном евклидовом пространстве. При $b_{12} \neq b_{21}$ геометрия такой поверхности будет неголономной. Размерность пространства Σ_2 равна 23. Группа Γ_2 имеет порядок 10. Следовательно, группа допускает 13 функционально независимых инвариантов. Их можно найти обычным путем, записав дифференциальные уравнения группы (112), найдя операторы группы и проинтегрировав уравнения, полученные от приравнивания этих операторов нулю. Мы не будем выписывать этих уравнений. Приведем сразу же все функционально независимые инварианты:

$$\begin{aligned} i_{pq} &= g_{ij} d_p x^i d_q x^j, \\ e_{pq} &= b_{ij} d_p x^i d_q x^j, \\ i^r_{pq} &= \xi^i_{pq} \xi'^r_i, \end{aligned} \tag{113}$$

где

$$\xi^i_{pq} = d_{pq} x^i + \Gamma^i_{kl} d_p x^k d_q x^l, \tag{114}$$

$$\xi'^r_i d_r x^j = \delta^j_i.$$

Поскольку в общем случае $i_{12} = i_{21}$, $i^r_{12} = i^r_{21}$, $b_{12} \neq b_{21}$, то мы имеем как раз 13 инвариантов. Вся геометрия второй окрестности определяется только инвариантами (113) и всевозможными функциями от них.

Поскольку 13 равенств (113) содержат 10 дифференциалов $d_p x^i$, $d_{pq} x^i$, то, исключив их, можно получить лишь три функционально независимых конечных инварианта. За таковые можно принять, например, следующие:

$$K_1 = \frac{e_{11}e_{22} - \frac{1}{4}(e_{12} + e_{21})}{i_{11}i_{22} - i^2_{12}} = \frac{b_{11}b_{22} - \frac{1}{4}(b_{12} + b_{21})^2}{g_{11}g_{22} - g^2_{12}}, \tag{115}$$

$$K_2 = \frac{e_{11}e_{22} - e_{12}e_{21}}{i_{11}i_{22} - i^2_{12}} = \frac{b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}}{g_{11}g_{22} - g^2_{12}}, \tag{116}$$

$$H = \frac{i_{11}e_{22} + i_{22}e_{11} - i_{12}(e_{12} + e_{21})}{i_{11}i_{22} - i^2_{12}} = \frac{g_{11}b_{22} + g_{22}b_{11} - g_{12}(b_{12} + b_{21})}{g_{11}g_{22} - g^2_{12}} \tag{117}$$

K_1 носит название полной кривизны поверхности, K_2 — гауссовой кривизны. Мы будем называть K_1 кривизной первого рода, K_2 — кривизной второго рода поверхности, H — средней кривизной. Никаких других независимых конечных инвариантов вторая дифференциальная окрестность иметь не будет.

Равенство $K_1 = K_2$ имеет своим следствием то, что компоненты b_{12} и b_{21} становятся равными друг другу, $b_{12} = b_{21}$. Во второй дифференциальной окрестности в этом случае геометрия неголономной поверхности ничем не отличается от геометрии поверхности голономной.

В третьей окрестности мы имеем группу Γ_3, которая действует в пространстве Σ_3. Координатами точек такого пространства являются компоненты объекта

$$d_p x^i,\ g_{ij}, d_{pq} x^i,\ \Gamma^k_{ij},\ b_{ij},\ d_{pqr} x^i,\ \frac{\partial \Gamma^k_{ij}}{\partial x^l},\ \frac{\partial b_{ij}}{\partial x^k}. \tag{118}$$

Как и в случае риманова пространства мы ограничены лишь геометрией на абсолюте

$$R_{11,12}=0,\ R_{12,12}+R_{21,12}=0,\ R_{22,12}=0, \tag{119}$$

где $R_{ij,kl}$ — четырежды ковариантный тензор кривизны, определяемый метрическим тензором g_{ij} (см. (73)).

Пространство объекта (118) при условии (119) имеет размерность 48. Порядок группы равен 20. Всего мы имеем, таким образом, 28 инвариантов. 13 инвариантов уже найдено — это инварианты (113). Что касается остальных 15 инвариантов, то за таковые можно принять, например, следующие:

$$\xi^s_{pq.\,r}=\xi^i_{pq.\,r}\xi'^s_i, \tag{120}$$

$$\Gamma=\frac{R_{12,12}-(b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21})}{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}, \tag{121}$$

$$\Pi_p=b_i\xi'^i_p. \tag{122}$$

Здесь $\xi^i_{pq.\,r}=\xi^i_{qp.\,r}$ — вектор, определяемый равенствами (77), b_i — вектор, определяемый равенствами

$$b_i=\frac{\partial b_{i1}}{\partial x^2}-\frac{\partial b_{i2}}{\partial x^1}+\Gamma^k_{i1}b_{k2}-\Gamma^k_{i2}b_{k1}. \tag{123}$$

Равенства

$$\Gamma=0,\ \Pi_p=0 \tag{124}$$

есть классические уравнения Гаусса и Петерсона — Кодацци. Если к этим уравнениям присоединить условие

$$b_{12}=b_{21}, \tag{125}$$

то мы получим голономные поверхности как в третьей, так и в последующих дифференциальных окрестностях точки. При этом предполагается, что переход от одной окрестности к другой (более высокого порядка) осуществляется добавлением к объекту предыдущей окрестности следующих дифференциалов точки x^i и производных от функциональных компонент предыдущего объекта. Равенства (119), (124) и (125) определяют абсолют, на котором развертывается геометрия голономной поверхности.

Если расширить пространство Σ_2 новым объектом — кососимметрическим тензором

$$T_{ij,k}=-T_{ji,k}, \tag{126}$$

так что

$$T_{i'j',k'}=\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}T_{ij,k}, \tag{127}$$

то группа Γ_2 определит в этом пространстве геометрию неголономной поверхности с кручением (во второй дифференциальной окрестности точки). Тензор (126) есть тензор кручения. Среди его компонент лишь две независимых: $T_{12,1}$, $T_{12,2}$. Полагая $T_{12,i}=T_i$, будем иметь псевдовектор веса 1:

$$T_{i'}=h\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}T_i. \tag{128}$$

Здесь

$$h = \frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} \frac{\partial x^2}{\partial x^{2'}} - \frac{\partial x^1}{\partial x^{2'}} \frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}}.$$

Для голономной поверхности, кроме равенств (119), (124) и (125), должны быть выполнены также и равенства

$$T_i = 0. \tag{129}$$

Как интерпретация геометрии поверхности может быть рассмотрена система векторных дифференциальных уравнений в трехмерном евклидовом пространстве

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{r} &= \boldsymbol{r}_i dx^i, \\ d\boldsymbol{r}_i &= G^k_{ij} \boldsymbol{r}_k dx^j + b_{ij} \boldsymbol{n} dx^j, \\ d\boldsymbol{n} &= - b_{ik} g^{jk} dx^i \boldsymbol{r}_j, \end{aligned} \tag{130}$$

где

$$G^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} + \frac{1}{2} g^{kl} (T_{lj,\,i} + T_{lj,\,i} + T_{il,\,j}). \tag{131}$$

При полной интегрируемости системы (130) мы имеем поверхность в евклидовом пространстве вместе с сопровождающим репером

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r} &= \boldsymbol{r}(x^1,\ x^2), \\ \boldsymbol{r}_i &= \boldsymbol{r}_i(x^1,\ x^2), \\ \boldsymbol{n} &= \boldsymbol{n}(x^1,\ x^2). \end{aligned} \tag{132}$$

В этом случае необходимо выполняются условия (119), (124), (125), (129). При невыполнении этих условий уравнения (130) можно рассматривать как уравнения системы интегральных кривых. Такая система и является интерпретацией неголономной поверхности. Подобным образом, беря n-мерное евклидово пространство E_n и систему векторных уравнений в нем

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{r} &= \boldsymbol{r}_i dx^i, \\ d\boldsymbol{r}_i &= \Gamma^k_{ij} \boldsymbol{r}_k dx^j, \end{aligned} \tag{133}$$

мы, при условии ее полной интегрируемости (94), получим радиус-вектор текущей точки пространства E_n вместе с сопровождающим репером:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r} &= \boldsymbol{r}(x^1,\ \ldots,\ x^n), \\ \boldsymbol{r}_i &= \boldsymbol{r}_i(x^1,\ \ldots,\ x^n). \end{aligned} \tag{134}$$

При отсутствии такого условия на систему (133) будем смотреть как на систему интегральных кривых. Совокупность таких кривых естественно назвать неголономным евклидовым пространством. Если в (133) заменить Γ^k_{ij} значениями (131), то можно прийти к риманову пространству с кручением.

В заключение необходимо сделать следующее замечание. Во всех наших рассмотрениях пространства объектов представляли собой заданные в целом арифметические пространства соответствующего числа измерений, в которых действует та или иная подгруппа универсальной группы. Каждая координата такого пространства соответствует какой-то компоненте объекта, однако ни о каком равенстве этой координаты соответствующей компоненте при тех или иных значениях x^i многообразия M_n речь не идет. После того, как средствами теории групп найдем те или иные векторы, тензоры или инварианты, мы полагаем те координаты точек пространства объектов, которые соответствуют функциональным компонентам объекта, равными соответствующим функциям на многообразии M_n. При преобразовании координат в дифференцируемом многообразии эти функции будут изменяться в соответствии с законом преобразования компонент объекта. Во всех рассмотрениях мы и принимали соответствующие координаты точек пространства объектов равными тем или иным функциям на M_n.

Напомним, что геометрия неголономных поверхностей трехмерного евклидова и других пространств в ее различных формах явилась предметом рассмотрения в многочисленных работах, из которых мы отметим лишь [3—6]. Некоторое время назад сравнительному рассмотрению различных аспектов в этой геометрии мы посвятили отдельную статью, посланную в журнал «Analele stiintifice ale universitătii «Al I. Cuza» din Iasi».

Отысканию инвариантов римановых и неримановых пространств способами, отличными от тех, которые изложены в настоящей работе, посвятил несколько статей I. Romain (см. [7—9]). Заметим, однако, что главной целью нашей работы является не отыскание инвариантов тех или иных пространств, а единый подход к геометриям однородных и обобщенных пространств, геометриям голономных и неголономных многообразий. Каждая из таких геометрий есть геометрия одних и тех же подгрупп универсальной группы, представляемых в соответствующих пространствах объектов. Понятие голономности и неголономности многообразия (пространства) возникает лишь в том случае, когда геометрия многообразия (пространства) интерпретируется на системе интегральных кривых вполне интегрируемой или не вполне интегрируемой системы дифференциальных уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Ф. Лаптев. Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии. Труды геометрического семинара, т. 1, М., 1966.
2. П. К. Рашевский. Риманова геометрия и тензорный анализ. Гостехиздат, М., 1953.
3. Д. М. Синцов. О системах интегральных кривых Пфаффова уравнения $Pdx + Qdy + Rdz = 0$. Наук. зап. н.-д. матем. кафедр. Укр., т. 3, 1928.
4. Gh. Th. Gheorghiu, Sur les variétés nonholonomes de lèspace S_3. Revne de Mathematiques pures et appliquèes, t. 2, 1957, p. 501—508, Bucuresti.
5. Gh. Vranceanu, Les espaces nonholonomes, Mémorial des sciences Mathématiques, fasc. 76, 1936, Paris.
6. E. Bortolotti, Geometria proiettiva differenziala delle superficie anolonome, Atti del 1 Congresso dell' Unione italiana, Firenza, 1937, p. 305—311.
7. I. Romain, Invariants différentiels d'un espace non riemannien, C. R. Acad. Sc. Paris, 244, 1957, 2777—2779.
8. I. Romain. Invariants différentiels d'un espace non riemannien, Bull. cl. sci. Acad. roy. Belg., 1960, 46, № 11, 929—945 (Première Communication).
9. I. Romain, Jnvariants différentiels d'un espace non riemannien, Bull. cl. sci. Acad. roy. Belg., 1961, № 2, 957—962 (Deuxième Communication).

Поступила 31 марта 1969 г.

УСЛОВИЯ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ РЕГУЛЯРНОЙ ГИПЕРКОМПЛЕКСНОЙ СТРУКТУРЫ НА МНОГООБРАЗИИ

Г. И. Кручкович

(Москва)

1. Гиперкомплексная алгебра

Приведем некоторые сведения из теории гиперкомплексных алгебр, используемые в статье. Подробные доказательства сформулированных здесь утверждений можно найти в книгах [1, 2].

Под гиперкомплексной алгеброй H понимается вещественная ассоциативная и коммутативная r-мерная алгебра, обладающая главной единицей 1. При выбранном в алгебре H базисе

$$e_1 = 1, e_2, \ldots, e_r \tag{1}$$

произведение ее элементов вполне определяется таблицей умножения базисных единиц

$$e_\alpha e_\beta = C^\gamma_{\alpha\beta} e_\gamma, \tag{2}$$

где $C^\gamma_{\alpha\beta}$ — структурные константы алгебры H в базисе (1). Здесь и далее греческие индексы $\alpha, \beta, \gamma, \sigma, \tau, \ldots$ пробегают значения от 1 до r. Везде без особых оговорок используется тензорное правило суммирования, в частности, в правой части (2) происходит суммирование по индексу γ.

Требования ассоциативности, коммутативности алгебры H и выбор первой базисной единицы $e_1 = 1$ налагают на структурные константы условия:

$$C_\alpha C_\beta = C^\gamma_{\alpha\beta} C_\gamma, \tag{3}$$

$$C^\gamma_{\alpha\beta} = C^\gamma_{\beta\alpha}, \tag{4}$$

$$C^\gamma_{1\alpha} = C^\gamma_{\alpha 1} = \delta^\gamma_\alpha \text{ (0 при } \alpha \neq \gamma, \text{ 1 при } \alpha = \gamma), \tag{5}$$

5*

где введено обозначение матриц

$$C_\alpha = (C^\gamma_{\alpha\beta}) \tag{6}$$

при каждом фиксированном значении α. Как обычно, в матрице (6) верхний индекс γ означает номер строки, нижний индекс β — номер столбца. Из (3) и (5) вытекает, что

$$a^\alpha e_\alpha \to a^\alpha C_\alpha = C \ (a^\alpha \in R)$$

есть изоморфное отображение алгебры H в алгебру матриц r-го порядка, называемое регулярным представлением $C(H)$ алгебры H. Известно, что $C(H)$ — максимальная коммутативная подалгебра матриц, т. е.

$$AC = CA \to A = a^\alpha C_\alpha \in C(H). \tag{7}$$

Если $C(H)$ — неразложимая алгебра, то все ее матрицы одновременно могут быть приведены к одному из видов

$$C = aI + N \ (a \in R), \tag{8}$$

$$C = aI + bJ + N \ (a, b \in R), \tag{9}$$

где I — единичная матрица, N — нижняя треугольная матрица с нулями по диагонали, J — матрица, для которой $J^2 = -I$. Конечно, перевод матриц (6) в форму (8) или (9) означает некоторую замену первоначально выбранного базиса (1). Будем считать, что эта замена сделана, и (1) уже новый базис.

Заметим, что в случае (9) $r = 2p$ и J определяет в r-мерном линейном пространстве комплексную структуру комплексной размерности p. Алгебру H можно в таком случае рассматривать как p-мерную алгебру над полем комплексных чисел и представить ее матрицы (6) в комплексной форме

$$C = (a + bi)\,\tilde{I} + \tilde{N}, \tag{10}$$

где $\tilde{I}$ — единичная матрица порядка p, $\tilde{N}$ — комплексная нильпотентная нижняя треугольная матрица порядка p. Таким образом, случай (9) вполне аналогичен случаю (8) с заменой основного поля R на поле комплексных чисел.

Учитывая строение матриц (8) и условие коммутативности (4), мы получим в выбранном базисе (1) равенства

$$C^\gamma_{\alpha\beta} = 0 \text{ при } \gamma \leqslant \alpha \text{ или } \gamma \leqslant \beta. \tag{11}$$
$$(\alpha > 1,\ \beta > 1)$$

2. Гиперкомплексная структура на многообразии

Пусть M — n-мерное бесконечно гладкое многообразие. Все заданные на нем объекты (тензоры, связности) предполагаются также бесконечно дифференцируемыми. Совокупность $\{A\}$ аффиноров на M, т. е. тензорных полей типа [1; 1] определяет на данном многообразии гиперкомплексную алгебраическую структуру, коротко H-структуру, если существует изоморфизм $H \to \{A\}$. Пусть при этом изоморфизме аффиноры E_α являются образами базисных единиц (1). Тогда

$$E_1 = I,\ E_\alpha E_\beta = C^\gamma_{\alpha\beta} E_\gamma, \tag{12}$$

и любой аффинор A данной H-структуры имеет вид

$$A = a^\gamma E_\gamma \ (a^\gamma \in R). \tag{13}$$

H-структура на M называется регулярной, если в окрестности каждой точки $q \in M$ можно найти такую координатную область U_q и такой базис $X_1, \ldots, X_n$ векторных полей в U_q, относительно которого аффиноры E_α задаются квазидиагональными матрицами

$$E_\alpha = \begin{pmatrix} C_\alpha & & & \\ & C_\alpha & & \\ & & \ddots & \\ & & & C_\alpha \end{pmatrix}. \tag{14}$$

В этом случае необходимо $n = mr$, где m — число диагональных блоков в (14). Указанный базис $X_1, \ldots X_n$ называется адаптированным базисом регулярной H-структуры. Ниже рассматривается только регулярная H-структура.

Регулярная H-структура называется интегрируемой на многообразии M, если в окрестности каждой точки $q \in M$ среди адаптированных базисов можно найти хотя бы один голономный

$$X_i = \partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{15}$$

где x^i — локальные координаты в окрестности точки q. Иными словами, на M существует специальный атлас локальных систем координат, в каждой из которых аффиноры E_α задаются постоянными матрицами (14).

Отметим, что в случае, когда H совпадает с алгеброй комплексных чисел, H-структура есть известная, почти комплексная структура на M, которая автоматически является регулярной, а интегрируемая H-структура превращает M в комплексно аналитическое многообразие. Нетрудно показать, что и в общем случае интегрируемая регулярная H-структура вносит на M структуру гиперкомплексно аналитического многообразия, и указанный выше специальный атлас на M состоит из систем координат, связанных между собой гиперкомплексно аналитическим образом. Именно поэтому нахождение условий интегрируемости представляет собой одну из первоочередных задач теории H-структур.

Будем считать, что индексы i, j, k относятся к многообразию M, т. е. изменяются в пределах от 1 до n. Поскольку у нас $n = mr$, то удобно будет каждый такой индекс представлять в виде пары индексов — греческого, изменяющегося от 1 до r, и латинского — $u, v, w = 1, \ldots, m$, например,

$$i = u\alpha, \; j = v\beta, \; k = w\gamma.$$

Пусть $X_1, \ldots, X_n$ и $Y_1, \ldots, Y_n$ — два адаптированных базиса регулярной H-структуры, введенных в окрестности U_q. Матрица T перехода от первого ко второму должна переводить в себя матрицу (14), т. е.

$$E_\alpha = T^{-1} E_\alpha T \text{ или } T E_\alpha = E_\alpha T. \tag{16}$$

Если разбить матрицу T на m^2 r-мерных блоков (T^u_v), то вследствие (14) и (16) каждый блок T^u_v перестановочен с каждой матрицей C_α, т. е., согласно (7), раскладывается по самим матрицам C_α с некоторыми (вообще функциональными) коэффициентами:

$$T^i_j = T^{u\alpha}_{v\beta} = \gamma^{u\sigma}_{v} C^\alpha_{\sigma\beta}. \tag{17}$$

И обратно, любая невырожденная матрица T, построенная по формуле (17), удовлетворяет (16), т. е. переводит адаптированный базис $\{X_i\}$ снова в адаптированный базис $\{Y_i\}$.

Разумеется, тот же вид (17) будет иметь и матрица T перехода от $\{Y_i\}$ к $\{X_j\}$. Следовательно, взаимные базисы $\omega^{i'}$ и ω^{i} линейных форм связаны преобразованием

$$\omega^{(u\alpha)'} = \eta_v^{u\sigma} C_{\sigma\beta}^{\alpha} \omega^{v\beta}. \tag{18}$$

3. *H*-связности

Аффинная связность ∇ на многообразии M, снабженном H-структурой, называется H-связностью, если относительно нее все аффиноры H-структуры ковариантно постоянны, что вследствие (13) равносильно $\nabla E_\alpha = 0$, или в координатном виде

$$X_k E_{\alpha j}^{i} + \Gamma_{kp}^{i} E_{\alpha j}^{p} - \Gamma_{kj}^{p} E_{\alpha p}^{i} = 0. \tag{19}$$

В адаптированном базисе $E_{\alpha j}^{i} = \text{const}$, и поэтому $X_k E_{\alpha j}^{i} = 0$, тогда (19) равносильно условиям

$$\Gamma_k E_\alpha = E_\alpha \Gamma_k, \quad \Gamma_k = (\Gamma_{kj}^{i}). \tag{20}$$

Отсюда так же, как при переходе от (16) к (17), получаем

$$\Gamma_{kj}^{i} = \Gamma_{w\gamma v\beta}^{u\alpha} = \lambda_{w\gamma v}^{u\sigma} C_{\sigma\beta}^{\alpha}, \tag{21}$$

и при произвольном выборе функций $\lambda_{w\gamma v}^{u\sigma}$ в U_q коэффициенты (21) определяют H-связность.

Предположим, что среди H-связностей на многообразии M имеется хотя бы одна связность без кручения. В таком случае в любом базисе

$$\Gamma_{jk}^{i} - \Gamma_{kj}^{i} = b_{jk}^{i}, \tag{22}$$

где справа стоит объект неголономности этого базиса. Для него

$$d\omega^{i} = -\frac{1}{2} b_{jk}^{i} \omega^{j} \wedge \omega^{k}. \tag{23}$$

В адаптированном базисе из (21) и (22) находим

$$b_{jk}^{i} = b_{v\beta w\gamma}^{u\alpha} = \lambda_{v\beta w}^{u\sigma} C_{\sigma\gamma}^{\alpha} - \lambda_{w\gamma v}^{u\sigma} C_{\sigma\beta}^{\alpha}. \tag{24}$$

Наконец, подстановка выражений (24) в (23) приводит к разложению

$$d\omega^{u\alpha} = (C_{\sigma\beta}^{\alpha} \omega^{v\beta}) \wedge (\lambda_{w\gamma v}^{u\sigma} \omega^{w\gamma}). \tag{25}$$

4. Первое условие интегрируемости

Теорема 1. *Для того, чтобы заданная на многообразии M регулярная H-структура была интегрируемой, необходимо и достаточно, чтобы на M существовала хотя бы одна H-связность ∇ без кручения.*

Необходимость очевидна, так как интегрируемая H-структура допускает локально плоскую H-связность.

Доказательство достаточности проведем в три этапа:

A) H-структура неразложима и определена регулярным матричным представлением алгебры H вида (8). На структурные константы наложены тогда условия (11) и (5), вследствие которых допустимые преобразования (18) базисных линейных форм ω^{i} имеют вид:

$$\begin{gathered}\omega^{(u1)'} = \eta_v^{u1} \omega^{v1}, \ \det|\eta_v^{u1}| \neq 0,\\ \omega^{(u2)'} = \eta_v^{u2} \omega^{v1} + \eta_v^{u1} \omega^{v2},\\ \omega^{(u\alpha)'} = \eta_v^{u\alpha} \omega^{v1} + \sum_{\mu,\nu=2}^{\alpha-1} C_{\mu\nu}^{\alpha} \eta_v^{u\mu} \omega^{v\nu} + \eta_v^{u1} \omega^{v\alpha} \quad (\alpha = 3, \ldots, r).\end{gathered} \tag{26}$$

По условию, на M существует H-связность без кручения, так что для любого адаптированного базиса справедливы формулы (24) и (25). Наша задача состоит в том, чтобы специализировать этот базис (за счет преобразований вида (26)) так, чтобы в нем было $d\omega^i = 0$. Это и будет означать, что в некоторых локальных координатах x^i выполняются равенства (15), т. е. соответствующий адаптированный базис $\{X_i\}$ голономный. В таком случае рассматриваемая H-структура интегрируема.

Положим сначала в (25) $\alpha = 1$. Вследствие (11) и (5)

$$d\omega^{u1} = \omega^{v1} \wedge \left(\lambda^{u1}_{w\gamma v}\omega^{w\gamma}\right).$$

Отсюда видно, что $d\omega^{u1} = 0$ есть алгебраическое следствие системы $\omega^{u1} = 0$ $(u = 1, \dots, m)$, т. е. последняя система вполне интегрируема. Некоторым линейным преобразованием вида

$$\omega^{(u1)'} = \tau^u_v\omega^{v1}, \ \det|\tau^u_v| \neq 0$$

можно привести формы $\omega^{(u1)'}$ к полным дифференциалам, т. е. получить $d\omega^{(u1)'} = 0$. Указанное преобразование включается в допустимое преобразование (26), если там положить

$$\eta^{u1}_v = \tau^u_v, \text{ остальные } \eta^{u\alpha}_v = 0.$$

Итак, среди адаптированных базисов существует такой, относительно которого (штрихи отброшены)

$$d\omega^{u1} = 0. \tag{27}$$

Допустим теперь, что при сохранении равенства (27) можно перейти к такому адаптированному базису, в котором

$$d\omega^{u1} = 0, \ d\omega^{u2} = 0, \ \dots, d\omega^{us} = 0. \tag{28}$$

Докажем, что этот базис можно еще «подправить» так, чтобы кроме (28) в нем было и $d\omega^{us+1} = 0$. Отправляясь тогда от доказанного равенства (27) и полагая последовательно $s = 1$, $s = 2, \dots, s = r - 1$, мы придем к адаптированному базису, в котором все $d\omega^i = 0$, что и докажет теорему в случае A).

Из сравнения (28) и (23) вытекает, что

$$b^{u\alpha}_{v\beta w\gamma} = 0 \ (\alpha = 1, \dots, s) \tag{29}$$

Полагая в равенствах (24) сначала $\beta = \gamma = 1$, затем $\beta = 1$, $\gamma > 1$ и используя (29), получим

$$\lambda^{u\alpha}_{v1w} = \lambda^{u\alpha}_{w1v} \ (\alpha = 1, \dots, s), \tag{30}$$

$$\lambda^{u\alpha}_{w\gamma v} = C^{\alpha}_{\sigma\gamma}\lambda^{u\sigma}_{v1w} \ (\alpha = 1, \dots, s; \ \gamma > 1) \tag{31}$$

Рассмотрим теперь внешний дифференциал формы ω^{us+1}, выделив в правой части (25) слагаемые, содержащие ω^{v1}:

$$d\omega^{us+1} = \omega^{v1} \wedge \theta^u_v + \Omega, \tag{32}$$

где

$$\Omega = \sum_{\beta,\ \gamma \geqslant 2} T^u_{v\beta w\gamma}\omega^{v\beta} \wedge \omega^{w\gamma}, \tag{33}$$

$$T^u_{v\beta w\gamma} = C^{s+1}_{\sigma\beta}\lambda^{u\sigma}_{w\gamma v} \ (\beta, \gamma \geqslant 2). \tag{34}$$

На самом деле в (34) по σ надо суммировать только от 1 до s, так как при $\sigma \geqslant s + 1$ вследствие (11) $C^{s+1}_{\sigma\beta} = 0$.

Поэтому из (31)

$$T^u_{v\beta w\gamma} = C^{s+1}_{\sigma\beta} C^{\sigma}_{\tau\gamma} \lambda^{u\tau}_{v1w}. \tag{35}$$

Заметим, что индекс τ здесь вместе с σ не может быть больше s вследствие того же условия (11).

Из коммутативности алгебры H вытекает, что и соответствующие матрицы (6) коммутируют между собой, в частности

$$C^{s+1}_{\sigma\beta} C^{\sigma}_{\tau\gamma} = C^{s+1}_{\sigma\gamma} C^{\sigma}_{\tau\beta},$$

а вследствие (30)

$$\lambda^{u\tau}_{v1w} = \lambda^{u\tau}_{w1v} \quad (\tau \leqslant s).$$

В результате мы видим, что правая часть (35) не меняется при перестановке индексов β с γ и v с w, т. е.

$$T^u_{v\beta w\gamma} = T^u_{w\gamma v\beta},$$

а тогда из (33) вытекает, что $\Omega = 0$, а из (32):

$$d\omega^{us+1} = \omega^{v1} \wedge \theta^u_v.$$

Это равенство вместе с (27) означает, что

$$\omega^{us+1} = \tau^u_v \omega^{v1} + \omega^{(us+1)'}, \quad \omega^{(us+1)'} = df^u, \tag{36}$$

где f^u — некоторые функции. Если сделать преобразование только форм ω^{us+1}, не меняя всех остальных, по формуле (36), то, сохранив равенства (29), мы добавим к ним также и $d\omega^{(us+1)'} = 0$. Такое преобразование, очевидно, имеет допустимый вид (26) при $\gamma^{u1}_{lv} = \delta^u_v$, $\gamma^{us+1}_{lv} = -\tau^u_v$ и остальных $\gamma^{u\alpha}_{lv} = 0$. Тем самым завершается доказательство теоремы для случая А).

Б) H-структура неразложима и определена регулярным матричным представлением алгебры H вида (9). Как мы видели, в этом случае алгебру H и саму H-структуру можно перевести в комплексную область. Получающийся при этом комплексный вид $\tilde{H}$-структуры вполне аналогичен действительному виду H-структуры (8), разобранному в А). Поэтому все предыдущее доказательство дословно повторяется в комплексном виде, если только выполнены условия:

1. J-структура на M интегрируема, т. е. M есть комплексно аналитическое многообразие $\tilde{M}$.

2. H-структура на M порождает аффинорную комплексно аналитическую структуру $\tilde{H}$ на $\tilde{M}$.

3. Связность ∇ при переходе к комплексно аналитическим координатам порождает связность $\tilde{\nabla}$ также без кручения с сохранением условия $\tilde{\nabla}\tilde{H} = 0$. Здесь под J-структурой на M понимается структура, порожденная матрицей вида (14), куда вставлены по диагонали блоки J из (9). Эту матрицу мы обозначаем той же буквой J. Очевидно, для нее равенство $J^2 = -I$ сохраняется. $\tilde{H}$-структура строится в комплексной области также по типу (14) с блоками по диагонали вида (10).

Покажем, что условия, сформулированные в трех пунктах, выполнены. Рассмотрим эти пункты в отдельности.

1. Так как матрица J входит в рассматриваемую сейчас H-структуру, то $\nabla J = 0$ для данной связности ∇. Интегрируемость J-структуры вытекает из того факта, что ∇ не имеет кручения ([3]).

2. Выполнение этого пункта, очевидно, достаточно проверить для $\tilde{N}$-структуры, отличающейся от $\tilde{H}$ на скалярную часть $(a+bi)\tilde{I}$. Из того, что матрицы (9) образуют коммутативную алгебру, вытекает равенство $JN = NJ$ на многообразии M. Это в свою очередь означает ([3, 4]), что $\tilde{N}$-структура, порожденная на $\tilde{M}$ нильпотентной частью (10), является аффинорной («чистой») структурой.

Рассмотрим совместный для аффиноров J и N тензор Нейенхейса-Кобаяси ([5]) на M. Нетрудно проверить, что он выражается через тензор кручения S произвольной H-связности по формуле

$$\underset{J,N}{K^k_{ij}} = S^k_{pq}N^p_j J^q_i + S^k_{pq}J^p_j N^q_i + J^k_p S^p_{qj} N^q_i + J^k_p S^p_{iq} N^q_j + N^k_p S^p_{qj} J^q_i +$$
$$+ N^k_p S^p_{iq} J^q_j + (J^k_p N^p_q + N^k_p J^p_q) S^q_{ji}.$$

У нас среди H-связностей имеется одна с $S=0$, поэтому $\underset{J,N}{K} = 0$, а это есть необходимое и достаточное условие того, что аффинор N порождает на $\tilde{M}$ комплексно аналитический тензор $\tilde{N}$ ([3, 6]).

3. Выполнение последнего пункта вытекает из общей теории комплексно аналитических многообразий и из сказанного в пункте 2. (См. [3, 7]).

Таким образом, все необходимые условия для перевода задачи в комплексную область выполнены, а в ней случай Б) доказывается повторением рассуждений из А).

В) H-структура на M разложима. Это означает, что произвольная ее матрица (в адаптированном базисе) имеет квазидиагональное строение

$$A = \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & A'' \end{pmatrix}, \tag{37}$$

причем H-структуре принадлежат наряду с (37) и обе матрицы

$$\begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A'' \end{pmatrix}. \tag{38}$$

Случай В) целиком сводится к неразложимым случаям А) и Б) с помощью следующей леммы, завершающей доказательство теоремы.

Лемма 1. *Пусть разложимая H-структура на M допускает H-связность ∇ без кручения, тогда:*

i) разложение (37) имеет место в некоторой локальной системе координат x^i;

ii) матрица A' в этой системе координат зависит только от «своих» координат x^{i_1}, а A'' — от x^{i_2};

iii) связность ∇ порождает на поверхностях $\{x^{i_1}\}$ и $\{x^{i_2}\}$ связности ∇' и ∇'' также без кручения и при этом $\nabla' A' = 0$, $\nabla'' A'' = 0$.

Доказательство. Согласно (20) в адаптированном базисе матрица Γ_k перестановочна с любой матрицей (37) и (38), т. е. является квазидиагональной того же вида (37). Из (22) следует, что

$$b^{i_1}_{k_2 j_2} = 0, \quad b^{i_2}_{k_1 j_1} = 0,$$

где индексы i_1, j_1, k_1 отвечают первому диагональному блоку матрицы (37), а индексы i_2, j_2, k_2 — второму. Как вытекает из (23), обе системы — $\omega^{i_1} = 0$ и $\omega^{i_2} = 0$ — вполне интегрируемы. Требование i) леммы выполнено в той локальной системе координат, в которой $\omega^{i_1} = dx^{i_1}$ и $\omega^{i_2} = dx^{i_2}$.

Запишем условие $\nabla A = 0$ в введенных координатах:

$$\partial_k A^i_j + \Gamma^i_{kp} A^p_j - \Gamma^p_{kj} A^i_p = 0. \tag{39}$$

Полагая здесь $i = i_1$, $j = j_2$ и используя вид (37) матрицы A, получим

$$\Gamma^{i_1}_{kp_2} A^{p_2}_{j_2} = \Gamma^{p_1}_{kj_2} A^{i_1}_{p_1}. \tag{40}$$

Среди матриц (37) присутствует и единичная матрица I, причем по условию ее части

$$\begin{pmatrix} I' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I'' \end{pmatrix}$$

принадлежат H-структуре. Поэтому в (40) можно положить $A^{i_1}_{p_1} = \delta^{i_1}_{p_1}$, $A^{p_2}_{j_2} = 0$ и получить оттуда $\Gamma^{i_1}_{kp_2} = 0$. Аналогично, при $i = i_2$, $j = j_1$ из (39) получится $\Gamma^{i_2}_{kp_1} = 0$. Но коэффициенты связности без кручения в локальных координатах симметричны по своим нижним индексам, поэтому в наших координатах отличными от нуля могут быть лишь величины $\Gamma^{i_1}_{k_1 j_1}$ и $\Gamma^{i_2}_{k_2 j_2}$, определяющие на поверхностях $\{x^{i_1}\}$ и $\{x^{i_2}\}$ связности ∇' и ∇'' также без кручения.

Полагая в (39) $i = i_1$, $j = j_1$, $k = k_2$ и $i = i_2$, $j = j_2$, $k = k_1$, мы получим теперь $\partial_{k_2} A^{i_1}_{j_1} = 0$ и $\partial_{k_1} A^{i_2}_{j_2} = 0$, т. е. требование *ii*) леммы выполнено. Наконец, *iii*) получается из (39), если все три индекса i, j, k принадлежат к одной группе. Лемма доказана.

5. Второе условие интегрируемости

В этом параграфе мы установим тензорный признак интегрируемости регулярной H-структуры, с помощью которого возможна эффективная проверка на интегрируемость данной H-структуры.

Пусть на многообразии M даны два аффинора A и B, коммутирующих между собой. Назовем тензором Нейенхейса—Широкова ([6]), соответствующим паре A, B, тензор $\underset{A,\,B}{Q}$ типа (1, 2), определяемый (в свернутой форме) равенством

$$\underset{A,\,B}{Q}(X, Y) = [BX, AY] - A[BX, Y] - B[X, AY] + AB[X, Y], \tag{41}$$

где X, Y — произвольные векторные поля на M, квадратная скобка означает их коммутирование. В локальных координатах

$$\underset{A,\,B}{Q^k_{ij}} = B^p_i \partial_p A^k_j - A^p_i \partial_p B^k_i + A^k_p \partial_j B^p_i - B^k_p \partial_i A^p_j. \tag{42}$$

Заметим, что при $A = B$ тензор $\underset{A,\,A}{Q}$ совпадает с известным тензором Нейенхейса ([5]), отвечающим аффинору A. В случае некоммутирующих аффиноров величины (42) не образуют тензора.

Пусть ∇ — произвольная аффинная связность на M с тензором кручения S, для которой $\nabla A = 0$, $\nabla B = 0$. Легко подсчитать тогда, что

$$\underset{A,\,B}{Q^k_{ij}} = A^k_p B^q_i S^p_{qj} + A^q_j B^k_p S^p_{iq} + A^p_j B^q_i S^k_{pq} + A^k_q B^q_p S^p_{ji}. \tag{43}$$

Обозначим $\underset{\alpha,\,\beta}{Q}$ тензор Нейенхейса—Широкова, отвечающий паре базисных аффиноров E_α, E_β регулярной H-структуры (14), и рассмотрим тот случай, когда

$$\underset{\alpha,\,\beta}{Q} = 0 \quad (\alpha, \beta = 1, \ldots, r). \tag{44}$$

Пусть ∇ — произвольная H-связность с тензором кручения S, тогда из (14), (43) и (44) при $i = u\mu$, $j = v\nu$, $k = w\gamma$ получим

$$C^{\gamma}_{\alpha\sigma} C^{\tau}_{\beta\mu} S^{w\sigma}_{u\tau v\nu} + C^{\gamma}_{\beta\sigma} C^{\tau}_{\alpha\nu} S^{w\sigma}_{u\mu v\tau} + C^{\tau}_{\beta\mu} C^{\sigma}_{\alpha\nu} S^{w\gamma}_{v\sigma u\tau} + C^{\gamma}_{\alpha\tau} C^{\tau}_{\beta\sigma} S^{w\sigma}_{v\nu u\mu} = 0.$$

Положим в этом равенстве $\mu = \nu = 1$. Учитывая (5), будем иметь

$$C^{\gamma}_{\alpha\sigma} S^{w\sigma}_{u\beta v1} + C^{\gamma}_{\beta\sigma} S^{w\sigma}_{u1v\alpha} + S^{w\gamma}_{v\alpha u\beta} + C^{\gamma}_{\alpha\tau} C^{\tau}_{\beta\sigma} S^{w\sigma}_{v1u1} = 0.$$

Обозначая индексы $k = w\gamma$, $p = u\beta$, $q = v\alpha$, получим отсюда (с учетом косой симметрии тензора S по нижним индексам и перестановочности матриц C_α и C_β)

$$S^k_{pq} + T^k_{pq} - T^k_{qp} = 0, \tag{45}$$

где введено обозначение

$$T^k_{pq} = C^{\gamma}_{\beta\sigma} S^{w\sigma}_{u1v\alpha} + \frac{1}{2} C^{\gamma}_{\beta\sigma} C^{\sigma}_{\alpha\tau} S^{w\tau}_{v1u1} = \left(S^{w\sigma}_{u1v\alpha} + \frac{1}{2} C^{\sigma}_{\alpha\tau} S^{w\tau}_{v1u1}\right) C^{\gamma}_{\beta\sigma}. \tag{46}$$

Из (46) следует, что каждая из матриц $T_p = (T^k_{pq})$ разбивается на блоки T^w_v, которые являются линейными комбинациями матриц (6). Следовательно, матрицы T_p перестановочны со всеми матрицами (14), и новая связность $\tilde{\nabla}$, определяемая коэффициентами

$$\tilde{\Gamma}^k_{pq} = \Gamma^k_{pq} + T^k_{pq},$$

вместе с ∇ является H-связностью (3). Равенство (45) при этом означает, что тензор кручения построенной связности $\tilde{\nabla}$ равен нулю. В результате доказана

Лемма 2. *Если данная регулярная структура H обладает свойством* (44), *то на многообразии M существует H-связность без кручения.*

Сформулируем теперь тензорный признак интегрируемости регулярной H-структуры.

Теорема 2. *Для того, чтобы регулярная H-структура на многообразии M была интегрируемой, необходимо и достаточно, чтобы все тензоры Нейенхейса—Широкова этой структуры обращались в нуль.*

Необходимость очевидна. Интегрируемая H-структура записывается в окрестности каждой точки постоянными матрицами в некоторой локальной системе координат. Поэтому из (42) получаем обращение в нуль тензоров Нейенхейса—Широкова для любой пары аффиноров H-структуры.

Достаточность вытекает из леммы 2 и теоремы 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Г. Чеботарев. Введение в теорию алгебр. ГИТТЛ, 1949.

2. Д. А. Супруненко, Р. И. Тышкевич. Перестановочные матрицы, изд-во «Наука и техника», Минск, 1966.

3. K. Yano. Differential geometry on complex and almost complex spaces. Oxford, Pergamon Press, 1965.

4. S. Sawaki. On almost — analytic tensor in 0* — spaces. Tohoku Math, J. 1961, v. 13, № 1, 154—178.

5. E. T. Kobajashi. A remark on the Nijenhuis tensor. Pacif. J. Math., v. 12, № 3, 963—977, 1962.

6. А. П. Широков. К вопросу о чистых тензорах и инвариантных подпространствах в многообразиях с почти алгебраической структурой. Казанск. гос. ун-т, Уч. записки, т. 126, кн. 1, 1966, 81—89.

7. А. П. Широков. К теории пространств, определяемых коммутативными алгебрами. Казанск. гос. ун-т, Уч. записки, т. 125, кн. 1, 1965, 165—182.

Поступила 1 декабря 1969 г.

УСИЛЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ЗАМКНУТЫХ ВЫПУКЛЫХ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ N-МЕРНОГО ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

А. И. Медяник

(Харьков)

В n-мерном евклидовом пространстве E_n рассматриваются замкнутые выпуклые гиперповерхности с аналитическими опорными функциями. Соответствующими точками поверхностей F_1 и F_2 считаются точки с параллельными внешними нормалями. Совместим параллельным переносом соответствующие точки $M_1 \in F_1$ и $M_2 \in F_2$. Если индикатрисы кривизны в этих точках не помещаются одна внутри другой, то возможны три случая:

1) индикатрисы кривизны совпадают;

2) индикатрисы кривизны не совпадают и не касаются одна другой ни в одной общей точке;

3) индикатрисы кривизны не совпадают, но касаются одна другой хотя бы в одной общей точке.

В первых двух случаях будем говорить, что в соответствующих точках индикатрисы кривизны *сильно не помещаемы* одна внутри другой, а в последнем случае — *слабо не помещаемы* одна внутри другой.

Интересно, что в E_3 третья возможность не реализуется и это играет существенную роль при обобщении на случай многомерного пространства следующей теоремы единственности А. Д. Александрова:

Пусть H_1 и H_2 — выпуклые тела с аналитическими опорными функциями. Если индикатрисы Дюпена на H_1 и H_2 в точках с параллельными внешними нормалями не могут быть помещены одна внутри другой при совмещении этих точек параллельным переносом, то тела H_1 и H_2 равны и параллельно расположены [1].

В [2] эта теорема обобщается следующим образом:

Теорема 1. *Пусть F_1 и F_2 — замкнутые выпуклые гиперповерхности в E_n с аналитическими опорными функциями. Если индикатрисы кривизны в точках с параллельными внешними нормалями сильно не помещаемы одна внутри другой, то поверхности F_1 и F_2 равны и параллельно расположены.*

В настоящей статье теорема 1 усиливается в том смысле, что для некоторых нормалей будет допускаться слабая непомещаемость индикатрис кривизны в соответствующих точках. Именно, имеет место

Теорема 2. *Пусть F_1 и F_2 — замкнутые выпуклые гиперповерхности в E_n с аналитическими опорными функциями. Если индикатрисы кривизны в точках с параллельными внешними нормалями не помещаемы одна внутри другой, причем множество соответствующих точек F_1 и F_2, индикатрисы кривизны в которых слабо не помещаемы одна внутри другой, имеет нулевую $(n-2)$-мерную меру, то поверхности F_1 и F_2 равны и параллельно расположены.*

Пример, построенный в [3], показывает, что условие теоремы 2 нельзя ослабить.

Доказательство теоремы 2 будем вести методом А. Д. Александрова [1].

Теорема 2 является следствием следующей теоремы:

Теорема 3. *Пусть $H(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — аналитическая функция, определенная в E_n и положительно однородная первой степени. Если в каждой точке, где $d^2H \not\equiv 0$, d^2H — знакопеременная форма, имеющая меньший*

$n-1$ ранг лишь на множестве нулевой $(n-1)$-мерной меры, то H — линейная функция.

Если $H_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $H_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — опорные функции поверхностей F_1 и F_2 из теоремы 2, то функция $H = H_1 - H_2$ удовлетворяет условиям теоремы 3. Действительно, условие непомещаемости одной индикатрисы внутри другой аналитически выражается одним из требований: либо $d^2H \equiv 0$, либо d^2H — знакопеременная форма, причем точки слабой непомещаемости соответствуют тем точкам, где ранг d^2H меньше $n-1$ [2]. Поэтому по теореме 3 поверхности F_1 и F_2 равны и параллельно расположены.

Доказательство теоремы 3. Рассмотрим огибающую H семейства плоскостей, задаваемых в прямоугольной системе координат уравнением

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = H(x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{1}$$

В силу аналитичности поверхность H ограничена (для этого достаточно, чтобы функция H была дважды непрерывно дифференцируема). Поэтому H имеет опорные плоскости всех направлений. Эти плоскости опираются на поверхность H только в точках, где ранг d^2H меньше $n-1$, т. е. где хотя бы один главный радиус кривизны H равен нулю [4]. Эти точки определяются условиями

$$\sum_{i=1}^{n} A_{ii} = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1, \tag{2}$$

где A_{ii} — алгебраическое дополнение элемента $\dfrac{\partial^2 H}{\partial x_i^2}$ в матрице $\left\| \dfrac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j} \right\|$ [4].

Обозначим N множество точек единичной гиперсферы $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$, где выполняется условие (2).

Для N справедливо следующее утверждение:

Лемма 1. *Пусть N — множество точек единичной гиперсферы, где одновременно равны нулю аналитические функции $f_1(\boldsymbol{n}), f_2(\boldsymbol{n}), \ldots, f_m(\boldsymbol{n})$. Тогда для N возможны только следующие случаи:* 1) *N пусто;* 2) *N заполняет всю сферу;* 3) *N состоит из конечного числа аналитических поверхностей, размерности которых меньше $n-2$;* 4) *N представляет собой совокупность $(n-2)$-мерных аналитических поверхностей, которые разбивают сферу на конечное число областей, внутри которых может быть лишь конечное число поверхностей меньшего числа измерений* [5].

Так как поверхность H имеет опорные плоскости всех направлений, то N не пусто. Если же множество N заполняет всю сферу, то в силу условия теоремы $d^2H \equiv 0$ и, значит, $H(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — линейная функция, что и требуется доказать.

Осталось показать, что последние два случая для N невозможны.

Воспользуемся следующим утверждением:

Лемма 2. *Если в точке $\boldsymbol{n}_0$ единичной гиперсферы, которая принадлежит компоненте $N_0 \subset N$ размерности меньшей $n-2$, выполняется условие* (2), *то через соответствующую точку поверхности H может проходить только опорная плоскость с нормалью, принадлежащей N_0.*

Доказательство этой леммы лишь незначительно отличается от доказательства аналогичной леммы 2 статьи [5].

По лемме 2 третий случай невозможен, так как мера множества N равна нулю.

Рассмотрим четвертый случай. Пусть G — область на гиперсфере, ограниченная поверхностью $F \subset N$. Так как на единичной гиперсфере по условию ранг d^2H меньше $n-1$ и отличен от нуля лишь для множества нулевой $(n-2)$-мерной меры, то на F $d^2H \equiv 0$, т. е. на F

$$H(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i,$$

где a_i — некоторые константы.

Определим функцию $H^*(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, равную $H(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в области G и равную $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i$ вне области G. Эта функция положительно однородная первой степени и дважды непрерывно дифференцируема, так как на F $d^2H \equiv 0$. Аналогично (1) построим поверхность H^*, которая ограничена и потому имеет опорные плоскости всех направлений. В силу леммы 2 опорные плоскости поверхности H^* проходят через точку $A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, т. е. H^* состоит из единственной точки, что противоречит существованию области G. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Д. Александров. О теоремах единственности для замкнутых поверхностей. ДАН СССР, 22, № 3 (1939), 99—102.
2. А. И. Медяник. Одна общая теорема единственности для аналитических замкнутых выпуклых гиперповерхностей n-мерного евклидова пространства. Укр. геометр. сб., вып. 5—6 (1968), 115—117.
3. А. И. Медяник. Некоторые теоремы единственности для замкнутых выпуклых поверхностей четырехмерного евклидова пространства. Записки мех.-матем. ф-та и Харьковского матем. об-ва, 31 (1965), 78—80.
4. Bonnesen T., Fenchel W. Theorie der konvexen Körper, New York, Chelsea Publishing Company, 1948. 61.
5. А. Г. Медяник. Одна теорема єдиності для замкнених опуклих аналітичних поверхонь n-вимірного простору. ДАН УРСР, № 12, (1966), 1527—1530.

Поступила 10 ноября 1969 г.

К ОДНОЙ ГИПОТЕЗЕ СТОКЕРА

А. Д. Милка

(Харьков)

Стокер [1] высказал предположение, что плоские углы замкнутого выпуклого многогранника однозначно определяются двугранными углами (обращение теоремы Коши). Более подробно это означает следующее.

Два многогранника будем называть сходственными, если между их гранями, ребрами и вершинами устанавливается одно-однозначное соответствие, сохраняющее инцидентность.

Гипотеза Стокера заключается в следующем. Если у двух сходственных выпуклых замкнутых многогранников двугранные углы при соответствующих ребрах равны, то так же равны соответствуюшие плоские углы многогранников.

Сейчас имеются лишь результаты Каршера [2] для пятивершинников и многогранников, описанных вокруг сферы, подтверждающие справедливость этой гипотезы.

В этой заметке рассмотрен еще один класс многогранников. Ниже дается определение этого класса и доказывается соответствующая теорема.

Будем называть «центральным» замкнутый выпуклый многогранник, если в пространстве имеется точка — «центр» многогранника, лучи из которой в его вершины направлены в их сферические изображения. Простой пример «центрального» многогранника — замкнутый выпуклый многогранник, вписанный в сферу.

Теорема. *Плоские углы центрального многогранника, «центр» которого не принадлежит плоскости никакой его грани, однозначно определяются его двугранными углами.*

Доказательство. Воспользуемся следующим предложением. Пусть V — выпуклый многогранный угол, V′ — другой такой угол, преобразование угла V с теми же двугранными углами. Поместим вершину V в начало отсчета векторов и обозначим $\{e_i\}$ единичные векторы внешних нормалей к граням угла V, $\{\Delta\theta_i\}$ — соответствующие приращения плоских углов этих граней при переходе к углу V′. Тогда вектор $\omega = \sum e_i \Delta\theta_i$ (суммируется по всем граням), если V′ и V — не равные, не равен нулю и направлен в угол V.

Данное утверждение является эквивалентной формулировкой одной леммы об изометрических деформациях многогранных углов, принадлежащей А. В. Погорелову. (Лемма использовалась ее автором в доказательстве теоремы Коши об однозначной определенности выпуклых многогранников [3]; доказательство леммы см. в [4]).

Пусть P и P′ — сходственные многогранники с равными соответствующими двугранными углами, и P — «центральный» многогранник. Покажем, что соответствующие плоские углы многогранников одинаковы.

Выберем началом отсчета векторов «центр» многогранника P. Пусть r_j — радиус-вектор j-той вершины P, ω_j — соответствующий этой вершине вектор, определяемый приращениями прилежащих плоских углов многогранника при переходе к многограннику P′. Учитывая вспомогательное утверждение, высказанное перед этим, и то обстоятельство, что P — центральный, мы заключаем: числа $r_j\omega_j$ неположительны; все эти числа равны нулю только в том случае, когда соответствующие плоские углы многогранников P и P′ одинаковы. Рассмотрим выражение

$$\Omega \equiv \sum_j r_j \omega_j,$$

суммирование в котором — по всем вершинам многогранника P. Перейдем в этом выражении к суммированию по граням многогранника. Тогда слагаемое, отвечающее i-той грани, представляется суммой

$$\Delta_i \equiv \boldsymbol{e}_i \sum_j \boldsymbol{r}_j^i \Delta\theta_j^i,$$

где $\boldsymbol{r}_j^i$ и θ_j^i относятся только к рассматриваемой грани. Скалярные произведения $\boldsymbol{e}_i \boldsymbol{r}_j^i$ в этой сумме одинаковы и равны расстоянию i-той грани от начала отсчета векторов. Кроме этого $\sum_j \Delta\theta_j^i = 0$, как разность сумм плоских углов соответствующих (i-тых) граней многогранников P и P′. Следовательно, $\Delta_i \equiv 0$, и

$$\Omega = \sum_i \Delta_i = 0.$$

Учитывая свойства чисел $\boldsymbol{r}_i \boldsymbol{\omega}_i$, мы находим, что $\boldsymbol{r}_i \boldsymbol{\omega}_i \equiv 0$, и равенство соответствующих плоских углов многогранников установлено.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. J. Stoker. Geometrical Problems Concerning Polihedra in the Large. Comm. Pure Appl. Math., Vol. XXI, 119—168 (1968).
2. H. Karcher. Remarks on Polyhedra with Given Dihedral Angles. Там же, 169—174.
3. А. В. Погорелов. Новое доказательство неизгибаемости выпуклых многогранников. Успехи матем. наук, т. II, вып. 5 (71) (1956), 207—208.
4. Ю. А. Волков. О деформациях выпуклого многогранного угла. Там же, 209—210.

Поступила 13 декабря 1969 г.

ОБ ОДНОМ ПРИЗНАКЕ СФЕРЫ

А. Д. Милка

(Харьков)

Пусть F — гиперповерхность вращения в пространстве постоянной кривизны, евклидовом, сферическом или гиперболическом, и пусть эта поверхность обладает следующими свойствами:

1) существует параллель π_F поверхности (сечение F гиперплоскостью, ортогональной оси вращения), такая, что любая кратчайшая на π_F есть также кратчайшая на F;

2) для каждой точки $P \in F$ и двух любых диаметральных точек π_F сумма расстояний до P на поверхности от этих точек не зависит от их выбора и определяется лишь точкой P. Будем говорить тогда, что F обладает C-свойством.

Теорема. *Замкнутая выпуклая гиперповерхность вращения, обладающая C-свойством, есть сфера.*

Эта теорема доказывается в данной статье.

Статья состоит из трех параграфов. Первые два — вспомогательные. В них устанавливаются некоторые общие свойства кратчайших на выпуклых гиперповерхностях вращения. Доказательство теоремы о сфере содержится в последнем параграфе.

Общие предложения о свойствах метрики выпуклых поверхностей, которые мы используем, предполагаются известными [1].

В дальнейшем считается, что тип пространства, в котором проводятся доказательства, фиксирован. Уравнение меридиана поверхности вращения записывается в форме $r = \varphi(u)$, где u — длина дуги меридиана, r — расстояние от оси поверхности точки на меридиане, соответствующей дуге u.

Случай поверхности в E_3 (регулярной, но не обязательно выпуклой) рассматривался в [2], где и было введено понятие C-свойства.

1. Леммы о кратчайших на выпуклых гиперповерхностях вращения

Лемма 1. *Каждая кратчайшая на выпуклой гиперповерхности вращения F принадлежит двумерной поверхности вращения, полученной в сечении F трехмерной плоскостью, проходящей через ось гиперповерхности. Кратчайшие на такой двумерной поверхности есть также кратчайшие на F. Меридианы поверхности F есть кратчайшие.*

Доказательства приводить не будем. Оно легко получается для ребристых гиперповерхностей (меридианы которых — ломаные) и распространяется на общий случай с помощью приближения произвольной поверхности выпуклыми ребристыми поверхностями вращения.

Следующая лемма является распространением теоремы Клеро, известной для регулярных поверхностей в E_3 [3].

Будем говорить, что меридианы поверхности одинаково ориентированы, если они ориентированы, и при проектировании на ось вращения определяют на ней одну и ту же ориентацию.

Введем обозначение:

$$Sr = \begin{cases} \operatorname{sh} r \text{ — для гиперболического пространства,} \\ r \text{ — для пространства Евклида,} \\ \sin r \text{ — для сферического пространства.} \end{cases}$$

Лемма 2. *Пусть F — выпуклая гиперповерхность вращения с одинаково ориентированными меридианами, и L — ориентированная кратчайшая на F. Пусть X — переменная точка на L и $r(X)$ — расстояние X от оси вращения. Пусть $\theta(X)$ — угол в точке на поверхности между «положительными» направлениями в этой точке кратчайшей и соответствующего меридиана. Тогда выполняется равенство*

$$Sr(X) \cdot \sin\theta(X) = \text{const}. \tag{*}$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай ребристой поверхности в трехмерном пространстве. Более того, из непрерывности функции от X, левой части равенства (*) следует, что можно ограничиться случаем кругового конуса (то есть поверхности вращения, меридиан которой — прямая линия или луч с вершиной на оси поверхности).

Пусть K — конус вращения с осью Λ, L — кратчайшая на K, не совпадающая с образующей. Имеются такие возможности: (1) конус с собственной вершиной на оси Λ, (2) конус с образующей, параллельной Λ (случай евклидова (тривиальный) и гиперболического пространства), (3) конус в гиперболическом пространстве с образующей, расходящейся с Λ.

Случай (1). Пусть A — вершина конуса, B — основание перпендикуляра на K, опущенного из A на L, $\bar{B}$ — проекция B на A. Рассмотрим ΔAXB на конусе, изометричный плоскому прямоугольному треугольнику, ограниченный отрезками AX и AB и дугой $\breve{X}B$ кратчайшей L. Пусть 2γ — угол раствора конуса, $r(X)$ — расстояние X от Λ, $\theta(X)$ — угол в вершине X в ΔAXB, x — длина AX, b — длина AB. Тогда из ΔAXB и $\Delta AB\overline{B}$ получаем: $Sx \cdot \sin\theta(X) = Sb$, $Sx \cdot \sin\gamma = Sr(X)$. Следовательно, $Sr(X) \cdot \sin\theta(X) = Sb \cdot \sin\gamma = \text{const}$.

Утверждение леммы в случае (2) следует из его справедливости в первом случае.

Рассмотрим случай (3). Пусть L_K — окружность, параллель конуса с наименьшей длиной. При разрезании конуса K по меридиану и разворачивании его на плоскость эта окружность переходит в прямолинейный отрезок. Пусть X и Y — близкие точки на L, $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ — соответствующие их проекции на L_K при проектировании меридианами, A и B — их соответствующие проекции на Λ, C — центр L_K и r — ее радиус. Можно считать, что точки X, Y на K располагаются по одну сторону от L_K. Четырехугольник $X\overline{X}\overline{Y}Y$ на конусе, ограниченный кратчайшими XY, $\overline{X}X$, $\overline{X}\overline{Y}$, $Y\overline{Y}$, изометричен плоскому двупрямоугольнику. Пусть x и y — длины отрезков $X\overline{X}$ и $Y\overline{Y}$, $\theta(X)$ и $\theta(Y)$ — углы на K при соответствующих вершинах четырехугольника, $r(\cdot)$ — расстояние точки $(\cdot)$ от Λ. Из двупрямоугольника $X\overline{X}\,\overline{Y}Y$ имеем равенство $\operatorname{ch} x \times \sin\theta(X) = \operatorname{ch} y \cdot \sin\theta(Y)$, а из трипрямоугольников $AX\overline{X}C$ и $BY\overline{Y}C$ находим $\operatorname{ch} x = \operatorname{sh} r(X)/\operatorname{sh} r$, $\operatorname{ch} y = \operatorname{sh} r(Y)/\operatorname{sh} r$. Поэтому $\operatorname{sh} r(X)\sin\theta(X) = \operatorname{sh} r(Y)\sin\theta(Y)$, что доказывает лемму в рассматриваемом случае.

Лемма доказана.

Установим одно следствие. Константу справа в (*) будем называть константой Клеро. Геометрическое выражение этой константы — радиус параллели поверхности, которой касается кратчайшая. Точка касания кратчайшей и параллели, — такую параллель поверхности назовем параллелью Клеро, — будет называться точкой Клеро.

С л е д с т в и е. *Точки Клеро на кратчайшей, не сводящейся к дуге параллели, лежат изолированно. Кратчайшая на поверхности расположена по одну сторону от параллели Клеро. Каждый открытый участок кратчайшей, не сводящейся к дуге параллели, не содержащий точки Клеро, однозначно проектируется параллелями поверхности.*

Лемма 3. *Пусть L — кратчайшая на выпуклой гиперповерхности вращения с меридианом $r = \varphi(u)$, не сводящаяся к дуге параллели и не содержащая внутри точек Клеро. И пусть u_1, u_2 $(u_1 < u_2)$ — координаты концов кратчайшей. Тогда длина $|L|$ кратчайшей L выражается равенством*

$$|L| = \int_{u_1}^{u_2} \frac{\varphi(u)\,\mathrm{d}u}{\sqrt{\varphi^2(u) - c^2}},$$

где c — константа Клеро L.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По лемме 1 можно рассматривать только случай двумерной поверхности. Заметим, что особенность в интеграле, представляющем $|L|$, если один из концов L — точка Клеро, как следует из выпуклости φ (точнее из существования конечных правой и левой производных в каждой точке), интегрируема.

Длина дуги s на кратчайшей L представляется в виде функции $s = s(u)$. Покажем, что эта функция дифференцируема и найдем ее производную.

Пусть X — внутренняя точка L. Выберем точку $Y \in L$, близкую к X, обозначим Z точку меридиана, проходящего через Y, принадлежащего вместе с X одной параллели и соединим Z с Y кратчайшей на поверхности. Учитывая лемму 2, заключаем, что угол между этой кратчайшей и меридианом поверхности в точке Z близок к $\frac{\pi}{2}$. Кроме того, кривизна внутренности треугольника ZXY близка к 0. Поэтому существует предел отношения $|\Delta s| / |\Delta u|$ при $Y \to X$, равный $1 / |\cos\theta|$, т. е. функция $s = s(u)$ дифференцируема. Используя лемму 2, находим

$$\frac{ds(u)}{du} = \frac{\varphi(u)}{\sqrt{\varphi^2(u) - c^2}}.$$

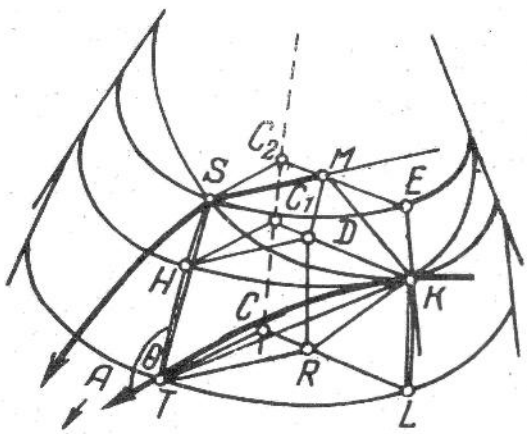
Лемма доказана.

Лемма 4*. Внутренняя точка Клеро кратчайшей на выпуклой гиперповерхности вращения является гладкой точкой меридиана поверхности.*

Доказательство этой леммы, представляющей и самостоятельный интерес, выносится в следующий параграф.

2. Доказательство леммы 4

Пусть утверждение леммы неверно. По лемме 1 можно рассматривать поверхность в трехмерном пространстве. Пусть F — такая поверхность (см. рисунок), $L \subset F$ — кратчайшая, К — точка Клеро L, L(К) — параллель F, которой кратчайшая L касается в К. Пусть К — угловая точка меридиана $F \cdot L$(К) разбивает F на две части, одной из которых,



«нижней», — обозначим ее F^-, — принадлежит L. Пусть K — конус, касательный к F^- вдоль L(К). Проведем плоскость π^*, касательную в точке К к «верхней», второй части F. Линию пересечения $\pi^* \cap K$ обозначим N, а выпуклую область, определяемую этой линией — σ. Будем рассматривать выпуклую поверхность F^*, составленную из F^-, куска конуса K между L(К) и N и области G; кривая L на F^* также будет кратчайшей. Если X — точка F^*, то симметричную ей точку относительно меридианной плоскости, проходящей через К, — плоскости τ(К), — будем обозначать X′. Пусть A (A $\neq$ К) — фиксированная точка L. Рассмотрим кривую $L_s = AS + SS' + S'A'$, где $S \in N$, $\breve{AS}$, $A'S'$ — кратчайшие. Покажем, что при S, близкой к К, эта линия на F^* короче L.

Поясним детали на рисунке, который мы будем непосредственно использовать, и введем некоторые обозначения. τ(S) обозначает меридианную плоскость, проходящую через S. Будем обозначать $L(X)$ параллель поверхности, проходящую через X. Тогда $T = L \cap \tau(S)$, $L = L(T) \cap \tau(K)$, $H = L(K) \cap \tau(S)$, $E = L(S) \cap \tau(K)$;

C, C_1, C_2 соответственно — точки оси поверхности, центры окружностей $L(T)$, $L(K)$, $L(S)$; $R = CL \cap TT'$, $D = C_1K \cap HH'$, $M = C_2E \cap SS'$. Символом $|(\cdot)|$ будет обозначаться длина кривой $(\cdot)$. Обозначим $|\widetilde{AS}| = l$, $|\widetilde{AT}| = s$, $|\widetilde{ST}| = a$, ψ — двугранный угол между $\tau(S)$ и $\tau(K)$, θ — угол на поверхности в вершине T треугольника AST, $\bar{\theta}$ — угол в плоском треугольнике с теми же сторонами, что и ΔAST, соответствующий углу θ, v — угол в точке K между внешней нормалью к K и плоскостью $\tau(K)$; r — радиус параллели $L(K)|TR| = q$, $|SM| = q_1|TK| = t$, $|RK| = p$. В дальнейшем в качестве малого параметра будем использовать значение p. Для упрощения величины, зависящие от p и стремящиеся к единице при $p \to 0$, будем обозначать одним символом $-\delta(p)$ (это не приведет к недоразумениям). Подобно будем использовать символ $\varepsilon(p)$, обозначая им величины, стремящиеся к нулю.

Докажем, что при S, близкой к K, будет выполняться неравенство $s + t > l + q_1$. Отсюда, очевидно, последует, что $|L| > |L_s|$, (и линия L, таким образом, не кратчайшая), что будет противоречить нашему предположению. Для простоты выкладок ограничимся дальше случаем поверхности в евклидовом пространстве. По лемме 2, здесь $v \neq 0$ и можно принять $r = 1$. Все наши рассуждения почти буквально переносятся на общий случай, если воспользоваться соответствующими формулами тригонометрии неевклидовой плоскости. (Равенство $v = 0$ допустимо только для поверхности в гиперболическом пространстве, когда конус K ортогонален плоскости параллели $L(K)$. Можно показать, однако, что этот случай невозможен.

Так как H — гладкая точка поверхности, то прямая, несущая отрезок ST сходится к касательной к $\widetilde{ST}$ в точке H. Отсюда $|ST| = \delta(p)a$, $q - q_1 = \delta(p) a \sin v \sin \psi$. Применяя теорему Либермана к окрестности точки K кратчайшей L, находим, что $\angle RKL \to \frac{\pi}{2}$. Кроме того $\angle KRL \to v$. Поэтому стороны ΔRKL имеют один и тот же порядок p. Стороны других треугольников в сечении $\tau(K)$ (изображенных на рисунке), сходящихся в K, также имеют порядок p, поскольку углы этих треугольников сходятся к конкретным ненулевым значениям, наглядно определяемым. Достаточно заметить, что прямые, несущие отрезки DM и DR, сходятся к касательной образующей K, проходящей через K. Отсюда $|EK| \sim p$. Следовательно, $a \sim p$, $|DK| = \delta(p)$ $|RE| = \delta p\, p / \cos v$. Зная $|DK|$, из ΔHC_1D находим $\sin\psi = \delta(p)\sqrt{2}\sqrt{p}/\sqrt{\cos v}$. Поэтому $q \sim p$. Наконец, по лемме 2 получаем $\cos\theta = \delta(p)\sqrt{2}\sqrt{\operatorname{tg} v \sin v}\sqrt{p}$. Выражение для t:

$$t = q + p^2/(t+q) = q + \frac{1}{2}\delta(p)p^2/q = q + Q_1\delta(p)p\sqrt{p},$$

где Q_1 — положительная константа. По теореме косинусов для плоского треугольника, соответствующего ΔAST, имеем

$$l = s + \frac{1}{2s}\delta(p)a^2 - \delta(p)a\cos\bar{\theta} = s + \varepsilon(p)p\sqrt{p} - \delta(p)a\cos\bar{\theta}.$$

Теперь докажем неравенство $\omega \equiv s + t - l - q_1 > 0$.

Подставив в выражение ω значения l и t, получим

$$\omega = s + q + Q_1\delta(p)\, p\sqrt{p} - s - \varepsilon(p)\, p\sqrt{p} + \delta(p)\, a\cos\overline{\theta} - q_2 =$$
$$= Q_1\delta(p)\, p\sqrt{p} + q - q_1 + \delta(p)\, a\cos\overline{\theta}.$$

Если $\overline{\theta} \leqslant \frac{\pi}{2}$, то имеем $\omega > 0$, так как $q > q_1$.

Пусть $\overline{\theta} > \frac{\pi}{2}$. Тогда, по теореме об углах треугольника на выпуклой поверхности, $\overline{\theta} \leqslant \theta, \cos\overline{\theta} \geqslant \cos\theta$. Следовательно,

$$q - q_2 + \delta(p)\, a\cos\overline{\theta} = \sqrt{2}\,\delta(p)\, a\sin v\sqrt{p}/\sqrt{\cos v} + \delta(p)\, a\cos\overline{\theta} \geqslant$$
$$\geqslant Q_2\,\delta(p)\,(\delta(p) - \bar{\delta}(p))\, p\sqrt{p} = \varepsilon(p)\, p\sqrt{p},$$

и снова величина ω положительна. ($Q_2 = \mathrm{const} > 0$).

Таким образом, точка K не может быть угловой точкой меридиана поверхности.

Лемма доказана.

Замечание. Утверждение леммы 4, по-видимому, справедливо и для кратчайших на произвольных выпуклых гиперповерхностях. Кратчайшая не может касаться ребра поверхности (ребра любого порядка), если в окрестности точки касания эта кратчайшая — не прямолинейный отрезок. Иначе это предположение формулируется следующим образом. Каждая гладкая точка кратчайшей, не сводящейся в окрестности этой точки к отрезку прямой, является гладкой точкой поверхности.

3. Доказательство теоремы о сфере

Рассматриваем поверхность в трехмерном пространстве. Пусть F — замкнутая выпуклая поверхность вращения, и пусть эта поверхность обладает C-свойством относительно параллели L.

Кривая L делит поверхность на две части. Пусть Φ — одна из частей. Пусть P — произвольная точка внутри Φ, отличная от полюса. Любая кратчайшая на F, соединяющая P с точкой L, принадлежит, очевидно, Φ. Будем считать, что L ориентирована. Тогда для каждой кратчайшей на Φ, исходящей из точки на L, приобретает смысл выражение: угол между этой кратчайшей и правой (соответственно — левой) ветвью L. Угол «справа» будем обозначать ξ, угол «слева» — η. Пусть $X \in L$ — произвольная точка, $Y \in L$ — близкая к ней точка, расположенная от L справа, s — расстояние Y от X, $L(Y)$ — кратчайшая на Φ, соединяющая P с Y, и $\xi(Y)$ — соответствующий этой кратчайшей правый угол, $\rho = \rho(s)$ — длина кратчайшей L как функция s. При $Y \to X$ кратчайшая $L(Y)$ сходится к определенной кратчайшей $L^+(X)$ и угол $\xi(Y)$ — к значению $\xi^+(X)$ правого угла ξ для предельной кратчайшей. Аналогично определяются пределы слева для точек Y, слева сходящихся к X, — кратчайшая $L^-(X)$ и левый угол $\eta^-(X)$ для этой кратчайшей. Справедливо неравенство $\xi^+(X) + \eta^-(X) \leqslant \pi$, и любая кратчайшая, соединяющая P с X, отличная от $L^+(X)$ и $L^-(X)$, располагается в двуугольнике, ограниченном предельными кратчайшими (не исключается, что $L^+(X) \equiv L^-(X)$). Функция $\rho = \rho(s)$ при каждом s имеет правую производную $\rho^+(s)$ по s, и $\rho^+(0) = -\cos\xi^+(X)$. Аналогично, для точек $Y \in L$, расположенных от X слева, и правой производной соответствующей функции $\rho(s)$ выполняется равенство $\rho^-(0) = -\cos\eta^-(X)$ (подчеркнем, что производная вычисляется по расстоянию от X точек Y. Индекс

«—» при ρ в последнем равенстве отмечает соответствующую производную для точек Y слева от X.

Пусть X' — диаметральная точка для X и пусть $|L(X)|$, $|L(X')|$ — расстояния на поверхности X, X' от P. По условию $|L(X)| + |L(X')| = C(P)$. Рассмотрим сумму слева как функцию точки X, функцию дуги на L. С помощью дифференцирования получим равенства $\cos\xi^+(X) + \cos\xi^+(X') = 0$, $\cos\eta^-(X) + \cos\eta^-(X') = 0$. Отсюда $\xi^+(X) + \xi^+(X') = \pi$, $\eta^-(X) + \eta^-(X') = \pi$. А по предыдущему $\xi^+(X) + \eta^-(X) \leqslant \pi$, $\xi^+(X') + \eta^-(X') \leqslant \pi$. Поэтому $\xi^+(X) + \eta^-(X) = \xi^+(X') + \eta^-(X') = \pi$, что означает, что точка P соединяется с точками X и X' единственными кратчайшими ($L^+(X) \equiv L^-(X)$, $L^+(X') = L^-(X')$). Из последнего установленного факта, так как X произвольна, легко заключить следующее. Каждые две диаметральные точки на L соединяются пучком кратчайших на Ф, сплошь покрывающих поверхность (как меридианы сферу).

Пусть $r = \varphi(u)$ — уравнение меридиана Ф, где $u = 0$ соответствует параллели L. Учитывая лемму 2 и найденное свойство поверхности Ф, получаем, что φ — строго убывающая функция.

Далее для простоты будем рассматривать случай поверхности в евклидовом пространстве, считая при этом, что L — единичного радиуса (выкладки в общем случае буквально те же).

С помощью леммы 3 устанавливаем, что меридиан поверхности удовлетворяет интегральному уравнению

$$\int_0^x \frac{\varphi(z)\,dz}{\sqrt{\varphi^2(z) - \varphi^2(x)}} = \frac{\pi}{2}. \tag{*}$$

Найдем из (*) функцию φ. Здесь можно применить метод, известный в решении интегрального уравнения Абеля [4] (хотя уравнение (*) и не стандартно).

Обе части равенства (*) домножим на выражение $2\varphi(x)\varphi'(x) \times dx \big/ \sqrt{\varphi^2(x) - \varphi^2(u)}$, проинтегрируем по x в пределах от 0 до u, и слева изменим порядок интегрирования. (По лемме 4 функция φ гладкая. Можно обойтись и без применения этого свойства φ, если понимать интегрирование в смысле Лебега. Легко заметить, что эта функция удовлетворяет условию Липшица и, следовательно, абсолютно непрерывна). После упрощений получим уравнение

$$\int_0^u \varphi(z)\,dz = \sqrt{1 - \varphi^2(u)},$$

решением которого (при условии $\varphi(0) = 1$) является функция

$$\varphi(u) = \cos u. \tag{1}$$

Пусть $\psi(u)$ — расстояние до центра параллели L проекции на ось поверхности точки меридиана Ф с координатой u. Легко находится, что

$$\psi(u) = \sin u. \tag{2}$$

Из (1) и (2) следует, что Ф — полусфера, и, значит, F — сфера. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Д. Александров. Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей. М. — Л., 1948.
2. Е. А. Морозова. Об одном характеристическом свойстве сферы. Тез. докл. Второй всесоюзный симпозиум по геометрии в целом. Петрозаводск, 1967, стр. 47.
3. М. Я. Выгодский. Дифференциальная геометрия. М. — Л., 1949.
4. С. Г. Михлин. Лекции по линейным интегральным уравнениям. Физматгиз, М., 1959.

Поступила 13 декабря 1969 г.

БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ПОЧТИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ АФФИННОСВЯЗНЫХ И РИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВ I

Н. С. Синюков

(Одесса)

В работе рассматриваются бесконечно малые преобразования аффинносвязных и римановых пространств, соответствующие их почти геодезическим отображениям [1]. Именно, сначала приводится вывод основных уравнений трех типов таких преобразований, затем дается оценка степени подвижности произвольного риманова пространства относительно каждого из них и, наконец, находятся максимально подвижные в определенном смысле пространства.

Преобразования, подобные бесконечно малым почти геодезическим преобразованиям первого типа, насколько нам известно, еще не изучались. Частным случаем бесконечно малых почти геодезических преобразований второго типа являются рассматривавшиеся в теории почти комплексных структур бесконечно малые аналитически планарные преобразования [2, 3]. Третьему типу принадлежат бесконечно малые конциркулярные преобразования [4].

Здесь и в дальнейшем мы имеем в виду пространства аффинной связности без кручения. Исследование ведется локально в классе функций C^k, где k может изменяться от 3 до ∞ в зависимости от вопроса, который излагается, и это не будет каждый раз оговариваться специально.

1. Определение понятия о бесконечно малых почти геодезических преобразованиях, основные уравнения

Рассмотрим вещественное пространство аффинной связности без кручения A_n, отнесенное к координатам $x^1, x^2, \dots, x^n$. Кривую этого пространства $\tilde{C}$, определенную уравнениями

$$\tilde{x}^h = \tilde{x}^h(t) \quad (h, i, \dots, \alpha, \beta, \dots, = 1, 2, \dots, n > 2) \tag{1}$$

мы называем [1] п о ч т и г е о д е з и ч е с к о й, если существует параллельное вдоль нее поле двумерных площадок, каждая из которых проходит через касательный к ней вектор. Для того, чтобы кривая $\tilde{C}$ представляла собой почти геодезическую A_n, необходимо и достаточно, чтобы функции (1) удовлетворяли условиям

$$\tilde{\lambda}^h_{2|} = \tilde{a}\,\tilde{\lambda}^h_{1|} + \tilde{b}\,\tilde{\lambda}^h, \tag{2}$$

в которых $\tilde{\lambda} = \dfrac{d\tilde{x}^h}{dt}$, $\tilde{\lambda}^h_{1|} = \tilde{\lambda}^h_{,\alpha}\tilde{\lambda}^\alpha$, $\tilde{\lambda}^h_{2|} = \tilde{\lambda}^h_{1|,\alpha}\tilde{\lambda}^\alpha$; $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ некоторые инварианты; , — знак ковариантной производной в A_n. Почти геодезические являются наименее искривленными (после геодезических) линиями в пространстве аффинной связности, поскольку их вторая и все последующие кривизны тождественно равны нулю. В плоском пространстве они представляют собою кривые, лежащие в двумерных плоскостях [5].

О п р е д е л е н и е 1. *Бесконечно малое преобразование пространства A_n*

$$\tilde{x}^h = x^h + \varepsilon\xi^h(x) \tag{3}$$

называется п о ч т и г е о д е з и ч е с к и м, если в результате его каждая геодезическая A_n переходит в кривую, являющуюся в главном почти геодезической этого пространства.

Здесь x^h — координаты исходной точки A_n, ε — малый параметр (не зависящий от $x^1, x^2, \dots, x^n$), $\xi^h(x^1, x^2 \dots, x^n)$ — вектор смещения. Если геодезическая линия C пространства A_n задана уравнениями

$$x^h = x^h(t), \; \lambda^h_{1|} = \rho\lambda^h, \tag{4}$$

где, как и раньше, $\lambda^h_{1|} = \lambda^h_{,\alpha}\lambda^\alpha$, а соответствующая ей в преобразовании (3) кривая $\tilde{C}$ — уравнениями (1), то мы имеем

$$\tilde{x}^h(t) \equiv x^h(t) + \varepsilon\xi^h(x(t)). \tag{5}$$

Согласно определению, бесконечно малое преобразование (3) является почти геодезическим, если кривая, определенная системой функций (5), в главном представляет собою почти геодезическую A_n, т. е. если эти функции удовлетворяют условиям (2) в пренебрежении членами второго и более высокого порядка относительно ε, какой бы ни была взята исходная геодезическая (4) в A_n.

1. Перейдем теперь к нахождению условий, возникающих при этом на векторе ξ^h. Члены второго и более высокого порядка в соответствии со сказанным мы в дальнейшем конкретно выписывать не будем, а только обозначать символом $\boxed{2}$. Из (5) дифференцированием по t находим

$$\tilde{\lambda}^h = \lambda^h + \varepsilon\frac{\partial\xi^h}{\partial x^\alpha}\lambda^\alpha = \lambda^h + \varepsilon\left(\xi^h_{1|} - \Gamma^h_{\alpha\beta}\xi^\alpha\lambda^\beta\right), \tag{6}$$

где мы полагаем $\xi^h_{1|} = \xi^h_{,\alpha}\lambda^\alpha$, $\xi^h_{2|} = \xi^h_{1|.\alpha}\lambda^\alpha, \dots$; $\Gamma^h_{ij}(x)$ — коэффициенты связности A_n. Далее, по определению

$$\tilde{\lambda}^h_{1|} = \frac{d\tilde{\lambda}^h}{dt} + \Gamma^h_{\alpha\beta}\left(\tilde{x}(t)\right)\tilde{\lambda}^\alpha\tilde{\lambda}^\beta,$$

а на основании (3)

$$\Gamma^h_{ij}\left(\tilde{x}\right) = \Gamma^h_{ij}(x) + \varepsilon\frac{\partial\Gamma^h_{ij}(x)}{\partial x^\gamma}\xi^\gamma(x) + \boxed{2}.$$

Таким образом, учитывая (6), получаем

$$\tilde{\lambda}^h_{1|} = \lambda^h_{1|} + \varepsilon\left(\xi^h_{2|} + R^{\ h}_{.\alpha\beta\gamma}\lambda^\alpha\xi^\beta\lambda^\gamma - \Gamma^h_{\alpha\beta}\xi^\alpha\lambda^\beta_{1|}\right) + \boxed{2}, \tag{7}$$

где $R^{\ h}_{.ijk}$ — тензор Римана пространства A_n.
Наконец, из (4), (5) и (7) находим

$$\tilde{\lambda}^h_{2|} = (\rho^1 + \rho^2)\lambda^h + \varepsilon\left[\xi^h_{3|} + R^{\ h}_{.\alpha\beta\gamma,\ \delta}\xi^\beta\lambda^\gamma\lambda^\delta + R^{\ h}_{.\alpha\beta\gamma}\lambda^\alpha\xi^\beta_{1|}\lambda^\gamma + \right.$$
$$\left. + 3\rho R^{\ h}_{.\alpha\beta\gamma}\lambda^\alpha\xi^\beta\lambda^\gamma - (\rho^1 + \rho^2)\Gamma^h_{\alpha\beta}\xi^\alpha\lambda^\beta\right] + \boxed{2}. \tag{8}$$

Поскольку в (5) $\tilde{x}$ зависят от ε, в (2) $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ имеют вид

$$\tilde{a} = \tilde{a}_0 + \varepsilon\tilde{a}_1 + \boxed{2}; \ \tilde{b} = \tilde{b}_0 + \varepsilon b_{1|} + \boxed{2}, \tag{9}$$

при $\tilde{a}_0$, $\tilde{a}_1$, $\tilde{b}_0$ и $\tilde{b}_1$, не зависящих от ε. На основании (6), (7), (8) и (9) условия (2) дают соотношения

$$(\rho^1 + \rho^2)\lambda^h + \varepsilon\left[\xi^h_{3|} + R^{\ h}_{.\alpha\beta\gamma,\ \delta}\lambda^\alpha\xi^\beta\lambda^\gamma\lambda^\delta + R^{\ h}_{.\alpha\beta\gamma}\lambda^\alpha\xi^\beta_{1|}\lambda^\gamma + \right.$$
$$\left. + 3\rho R^{\ h}_{.\alpha\beta\gamma}\lambda^\alpha\xi^\beta\lambda^\gamma - (\rho^1 + \rho^2)\Gamma^h_{\alpha\beta}\xi^\alpha\lambda^\beta\right] = \left(\tilde{a}_0\rho + \tilde{b}_0\right)\lambda^h + \varepsilon\left[\left(\tilde{a}_1\rho + \tilde{b}_1\right)\lambda^h + \right.$$
$$\left. + \tilde{a}_0\left(\xi^h_{2|} + R^{\ h}_{.\alpha\beta\gamma}\lambda^\alpha\xi^\beta\lambda^\gamma - \rho\Gamma^h_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\xi^\beta\right) + \tilde{b}_0\left(\xi^h_{1|} - \Gamma^h_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\xi^\beta\right)\right] + \boxed{2},$$

которые должны выполняться тождественно относительно ε (с точностью до членов первого порядка). Приравнивая здесь члены нулевого порядка, получаем

$$\rho^1 + \rho^2 = \tilde{a}_0\rho + \tilde{b}_0, \tag{10}$$

а члены первого порядка относительно ε, учитывая (10), —

$$\xi^h_{3|} + R^{\ h}_{.\alpha\beta\gamma,\ \delta}\lambda^\alpha\xi^\beta\lambda^\gamma\lambda^\delta + R^{\ h}_{.\alpha\beta\gamma}\lambda^\alpha\xi^\beta_{1|} + 3\rho R^{\ h}_{.\alpha\beta\gamma}\lambda^\alpha\xi^\beta\lambda^\gamma =$$
$$= \tilde{a}_0\left(\xi^h_{2|} + R^{\ h}_{.\alpha\beta\gamma}\lambda^\alpha\xi^\beta\lambda^\gamma\right) + \tilde{b}_0\xi^h_{1|} + \left(\tilde{a}_1\rho + \tilde{b}_1\right)\lambda^h. \tag{11}$$

Так как $\xi^h_{1|} = \xi^h_{,\alpha}\lambda^\alpha$ и в соответствии с (4)

$$\xi^h_{3|} = \xi^h_{,\alpha\beta\gamma}\lambda^\alpha\lambda^\beta\lambda^\gamma + 3\rho\xi^h_{,\alpha\beta}\lambda^\alpha\lambda^\beta + (\rho^1 + \rho^2)\xi^h_{1|},$$

$\xi^h_{2|} = \xi^h_{,\alpha\beta}\lambda^\alpha\lambda^\beta + \rho\xi^h_{1|}$ получаем возможность представить (11) в форме

$$P^h_{\alpha\beta,\gamma}\lambda^\alpha\lambda^\beta\lambda^\gamma = aP^h_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\lambda^\beta + b\lambda^h \tag{12}$$

при

$$P^h_{ij}(x) \equiv \xi^h_{,ij} + \xi^\alpha R^{\ h}_{.i\alpha j}. \tag{13}$$

Итак, условия (12), в которых a и b — некоторые инварианты, необходимы, чтобы в результате бесконечно малого преобразования (3) геодезическая линия (4) пространства A_n переходила в кривую, являющуюся в главном почти геодезической его. В них тензор P^h_{ij}, определенный формулами (13), и его первая ковариантная производная рассматриваются в точках геодезической C, а λ^h — касательный вектор ее. Поэтому, чтобы бесконечно малое преобразование (3) пространства A_n было почти геодезическим, необходимо, чтобы (12) выполнялось для каждой геодезической линии A_n. А так как в A_n через любую точку $M(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ в любом направлении λ^h можно провести геодезическую линию, (12) должно выполняться для тензора P^h_{ij} тождественно относительно $x^1, x^2, \ldots, x^n$ и λ^1, $\lambda^2, \ldots, \lambda^n$. Но тогда непосредственной проверкой легко убедиться в том, что вследствие (12) для каждой геодезической (4) пространства A_n, отнесенной к каноническому параметру ($\rho \equiv 0$), кривая $\widetilde{C}$, определенная уравнениями (5), будет удовлетворять условиям (2) с точностью до членов первого порядка относительно ε, т. е. в достаточности условий (12). Поскольку тензор P^h_{ij}, определенный формулой (13) представляет собою производную Ли коэффициентов связности пространства A_n, соответствующую вектору смещения ξ^h [6], полученный результат можно сформулировать следующим образом.

Теорема 1. *Для того, чтобы бесконечно малое преобразование* (3) *пространства A_n было почти геодезическим, необходимо и достаточно, чтобы соответствующая его вектору смещения производная Ли коэффициентов связности этого пространства удовлетворяла условиям* (12) *тождественно относительно* $x^1, \ldots, x^n$ и $\lambda^1, \ldots, \lambda^n$.

2. Так как компоненты тензора P^h_{ij} являются функциями только координат точки $x^1, x^2, \ldots, x^n$, левая часть соотношений (12) при каждом h представляет собою однородную кубическую форму относительно $\lambda^1, \lambda^2, \ldots, \lambda^n$. Такой же характер должна иметь и первая их часть, а это возможно в нескольких случаях в соответствии с тем, как инварианты a и b зависят от $\lambda^1, \lambda^2, \ldots, \lambda^n$. Поэтому мы приходим к следующим трем типам бесконечно малых почти геодезических преобразований пространств аффинной связности.

Первый тип $\Pi_1(\xi)$ бесконечно малых почти геодезических преобразований мы получаем, когда a является линейной однородной, а b — квадратичной формой:

$$a = a_\alpha(x)\lambda^\alpha, \quad b = b_{\alpha\beta}(x)\lambda^\alpha\lambda^\beta.$$

Здесь a_i — ковариантный вектор, b_{ij} — симметричный тензор. Условия (12) при этом принимают вид

$$P^h_{(ij,k)} = a_{(i}P^h_{jk)} + b_{(ij}\delta^h_{k)}, \tag{14}$$

где круглые скобки обозначают циклирование, так как по (13) $P^h_{ij} = P^h_{ji}$ на основании тождества Риччи [7].

Второй тип $\Pi_2(\xi)$ бесконечно малых почти геодезических преобразований возникает тогда, когда инвариант a представляет собою отношение квадратичной формы $a_{\alpha\beta}(x)\lambda^\alpha\lambda^\beta$ к линейной однородной $\psi_\gamma(x)\lambda^\gamma$, на которую делится каждая из квадратичных форм $P^h_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\lambda^\beta$ с остатком вида $P\lambda^h$, т. е.

$$P^h_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\lambda^\beta = 2\mu^h_\alpha\lambda^\alpha\psi_\beta\lambda^\beta + 2\varphi_\alpha\lambda^\alpha\lambda^h. \tag{15}$$

Тогда (12) дают полиномиальное тождество от $\lambda^1, \lambda^2, \ldots, \lambda^n$:

$$P^h_{\alpha\beta,\gamma}\lambda^\alpha\lambda^\beta\lambda^\gamma = 2a_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\lambda^\beta\mu^h_\gamma\lambda^\gamma + b_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\lambda^\beta\lambda^h \tag{16}$$

при $b = b_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\lambda^\beta - 2\frac{\varphi_\alpha\lambda^\alpha}{\psi_\beta\lambda^\beta}a_{\gamma\delta}\lambda^\gamma\lambda^\delta$. Поскольку (15) также носит тождественный относительно λ^h характер, а векторы φ_i, ψ_i и аффинор μ_i^h зависят только от координат точки, мы имеем

$$P_{ij}^h = \varphi_i\delta_j^h + \varphi_j\delta_i^h + \psi_i\mu_j^h + \psi_j\mu_i^h. \tag{17}$$

Вследствие (17) соотношения (16) примут вид

$$\psi_\alpha a^\alpha \mu_{\beta,\gamma}^h\lambda^\beta\lambda^\gamma = \sigma\lambda^h + \nu\mu_\alpha^h\lambda^\alpha,$$

$$\sigma = \frac{1}{2}b_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\lambda^\beta - \varphi_{\alpha,\beta}\lambda^\alpha\lambda^\beta, \quad \nu = a_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\lambda^\beta - \psi_{\alpha,\beta}\lambda^\alpha\lambda^\beta.$$

Так как $\psi_\gamma\lambda^\gamma \not\equiv 0$, из последних соотношений (если оставить случай делимости каждой из линейных форм $\mu_\alpha^h\lambda^\alpha$ на $\psi_\alpha\lambda^\alpha$ с остатком вида $\rho\lambda^h$), вытекает, что $\sigma = \sigma_\beta\lambda^\beta\psi_\alpha\lambda^\alpha$, $\nu = \nu_\alpha\lambda^\alpha\psi_\beta\lambda^\beta$ и

$$\mu_{i,j}^h + \mu_{j,i}^h = \sigma_i\delta_j^h + \sigma_j\delta_i^h + \nu_i\mu_j^h + \nu_j\mu_i^h, \tag{18}$$

где $\sigma_i(x)$ и $\nu_i(x)$ — векторы. Легко видеть, что на основании (17) и (18) условия (12) будут выполнены, т. е. они характеризуют бесконечно малые почти геодезические преобразования второго типа.

К третьему типу $\Pi_3(\xi)$ бесконечно малых почти геодезических преобразований мы приходим, когда a является отношением кубической формы $a_{\alpha\beta\gamma}\lambda^\alpha\lambda^\beta\lambda^\gamma$ к квадратичной $\psi_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\lambda^\beta$, на которую делится с остатком вида $\rho\lambda^h$ каждая из квадратичных форм $P_{\alpha\beta}^h\lambda^\alpha\lambda^\beta$. Тогда

$$P_{\alpha\beta}^h\lambda^\alpha\lambda^\beta = \psi_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\lambda^\beta\mu^h + 2\varphi_\alpha\lambda^\alpha\lambda^h,$$

или, что то же,

$$P_{ij}^h = \varphi_i\delta_j^h + \varphi_j\delta_i^h + \psi_{ij}\mu^h, \tag{19}$$

где $\mu^h(x)$ и $\varphi_i(x)$ — некоторые векторы, $\psi_{ij}(x)$ — симметричный тензор. Условия же (12) теперь принимают вид

$$P_{\alpha\beta,\gamma}^h\lambda^\alpha\lambda^\beta\lambda^\gamma = \mu^h a_{\alpha\beta\gamma}\lambda^\alpha\lambda^\beta\lambda^\gamma + b_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\lambda^\beta\lambda^h$$

при $b_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\lambda^\beta = 2\varphi_\alpha\lambda^\alpha a + b$. После подстановки сюда ковариантных производных P_{ij}^h из (19) вследствие того, что $\psi_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\lambda^\beta \not\equiv 0$, мы получаем $\mu_{,\gamma}^h\lambda^\gamma = \rho\lambda^h + \nu_\gamma\lambda^\gamma\mu^h$ или

$$\mu_{,i}^h = \rho\delta_i^h + \nu_i\mu^h, \tag{20}$$

когда

$$\rho\psi_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\lambda^\beta = b_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\lambda^\beta - 2\varphi_{\alpha,\beta}\lambda^\alpha\lambda^\beta$$

и

$$\nu_\gamma\lambda^\gamma\psi_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\lambda^\beta = a_{\alpha\beta\gamma}\lambda^\alpha\lambda^\beta\lambda^\gamma - \psi_{\alpha\beta,\gamma}\lambda^\alpha\lambda^\beta\lambda^\gamma,$$

$\nu_i(x)$ — вектор, $\rho(x)$ — инвариант. Обратно, вследствие (19) и (20), условия (12) будут выполняться тождественно относительно λ^h при указанных здесь дробно рациональных выражениях инвариантов a и b.

Таким образом, получаем следующую теорему.

Теорема 2. *Существует три типа бесконечно малых почти геодезических преобразований пространств аффинной связности* $\Pi_1(\xi)$, $\Pi_2(\xi)$ *и* $\Pi_3(\xi)$, *характеризующихся соответственно основными уравнениями* (14), (17) *и* (18), (19) *и* (20) *при* P_{ij}^h, *определяемом формулами* (13).

Полученные нами типы бесконе[illegible] геодезических преобразований, естественным образом, [illegible]ют рассматривавшимся в [1] трем типам почти геодезических [illegible]ний пространств аффинной связности при том же геометрическом значении аффинора μ_i^h и вектора μ^h (в пределах указанной ранее точности относительно ε).

Если $P_{ij}^h \equiv 0$, мы имеем бесконечно малое движение A_n, а если $P_{ij}^h = \psi_i \delta_j^h + \psi_j \delta_i^h$ — бесконечно малое геодезическое преобразование [7].

2. Бесконечно малые почти геодезические преобразования первого типа $\Pi_1(\xi)$ пространств аффинной связности

Рассмотрим бесконечно малые почти геодезические преобразования $\Pi_1(\xi)$ с целью выяснения степени подвижности относительно их произвольного пространства A_n.

Прежде всего, полагая

$$\xi_{,i}^h = \eta_i^h, \tag{21}$$

запишем соотношения (13) в виде

$$\eta_{i,j}^h = -\xi^\alpha R_{.i\alpha j}^{\;h} + P_{ij}^h. \tag{22}$$

Уравнения (21), (22) и основные уравнения (14) бесконечно малых преобразований первого типа дают нам систему линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка относительно вектора $\xi^h(x)$, аффинора $\eta_i^h(x)$ и симметричного тензора $P_{ij}^h(x)$. Каждому ненулевому решению этой системы соответствует преобразование $\Pi_1(\xi)$ данного пространства. Следовательно, степень подвижности A_n относительно $\Pi_1(\xi)$ тем больше, чем больше произвол общего решения системы (21), (22), (14). Исследованием последнего вопроса мы теперь и займемся.

Прежде всего отметим, что условия интегрируемости уравнений (21) выполняются тождественно вследствие (22). Условия же интегрируемости уравнений (22) вследствие (21), а также тождеств Риччи и Бианки [7] дают нам

$$P_{ik,j}^h = P_{ij,k}^h + T_{ijk}^h, \tag{23}$$

где

$$T_{ijk}^h = \eta_i^\alpha R_{.\alpha jk}^{\;h} - \eta_\alpha^h R_{.ijk}^{\;\alpha} - \eta_k^\alpha R_{.i\alpha j}^{\;h} + \eta_j^\alpha R_{.i\alpha k}^{\;h} + \xi^\alpha R_{.ijk,\alpha}^{\;h} \tag{24}$$

является производной Ли тензора Римана пространства A_n, соответствующей вектору ξ^h [6]. На основании (23) уравнения (14) представляются так:

$$3P_{ij,k}^h = -T_{(ij)k}^h + a_{(i}P_{jk)}^h + b_{(ij}\delta_{k)}^h, \tag{25}$$

где $T_{(ij)k}^h = T_{ijk}^h + T_{jik}^h$, т. е. в разрешенном относительно ковариантных производных тензора P_{ij}^h виде. Очевидно, система дифференциальных уравнений (21), (22) и (25) эквивалентна исходной, но удобней для исследования. С ней мы теперь и будем иметь дело.

Так как условия интегрируемости уравнений (22) выполняются тождественно вследствие уравнений (25), рассмотрим условия интегрируемости последних. Полагая

$$b_{ijk} = b_{ij,k} - \frac{1}{3} a_k b_{ij}, \quad a_{ij} = a_{i,j} - \frac{1}{3} a_i a_j, \tag{26}$$

$$\begin{gathered}
\tilde{T}_{ijkl}^h = 3\left(-P_{ij}^\alpha R_{.\alpha kl}^{\;h} + P_{\alpha j}^h R_{.ikl}^{\;\alpha} + P_{\alpha i}^h R_{.jkl}^{\;\alpha}\right) + \\
+ T_{(ij)[k,l]}^h - a_l T_{jlk}^h - a_j T_{ilk}^h + \frac{1}{3}\left(a_k T_{(ij)l}^h - a_l T_{(ij)k}^h\right) - \\
- a_{il} P_{jk}^h - a_{jl} P_{ik}^h + a_{ik} P_{jl}^h + a_{jk} P_{il}^h - a_{[kl]} P_{ij}^h,
\end{gathered} \tag{27}$$

мы можем записать их так:

$$\widetilde{T}^h_{ijkl} = b_{ij]}\delta^h_k - b_{ij,k}\delta^h_l + b_{i[kl]}\delta^h_j + b_{j[kl]}\delta^h_i. \quad (28)$$

Здесь квадратные скобки обозначают альтернацию (без деления). Из (28) находим

$$(n-1)\, b_{ijk} = -\frac{1}{n+2}\left(\widetilde{T}^\alpha_{k(ij)\alpha} + n\widetilde{T}^\alpha_{ijk\alpha}\right), \quad (29)$$

или по (26)

$$b_{ij,k} = \frac{1}{3}\, a_k b_{ij} - \frac{1}{(n-1)(n+2)}\left(\widetilde{T}^\alpha_{k(ij)\alpha} + n\widetilde{T}^\alpha_{ijk\alpha}\right). \quad (30)$$

Поскольку согласно (24) в ковариантную производную тензора T^h_{ijk} войдут ковариантные производные от η^h_i и ξ^h, которые мы считаем выраженными согласно уравнениям (21) и (22), компоненты тензора $\widetilde{T}$, определенного формулами (27), представляют собою линейные однородные функции ξ^h, η^h_i и P^h_{ij} с коэффициентами, зависящими от пространства A_n и вектора a_i. Значит, такой же характер имеет и правая часть уравнения (29), а (21), (22), (25) и (30) образуют систему линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка в разрешенной форме относительно ξ^h, η^h_j, P^h_{ij} и b_{jk} с коэффициентами, определяемыми пространством A_n и вектором a_i. Эта система для данного A_n и вектора a_i имеет не более одного решения, соответствующего начальным значениям

$$\xi^h|_0,\ \eta^h_i|_0,\ P^h_{ij}|_0\,(= P^h_{ji}|_0),\ b_{ij}|_0\,(= b_{ji}|_0) \quad (31)$$

всех искомых функций. Следовательно, справедлива

Теорема 3. *Совокупность всех бесконечно малых почти геодезических преобразований первого типа* $\Pi_1(\xi)$ *каждого пространства аффинной связности* A_n *зависит не более чем от одного произвольного вектора* $a_i(x)$ *и* N_1 *существенных параметров (начальных значений* (31)), *причем*

$$N_1 = \frac{n(n+1)(n+3)}{2}. \quad (32)$$

Подчеркнем еще, что когда мы говорим о функциональном и параметрическом произволе одновременно, мы имеем в виду, что при однозначном задании указанных произвольных функций произвол определяется данным количеством параметров.

Теперь естественно поинтересоваться тем, какие пространства наиболее подвижны относительно бесконечно малых преобразований $\Pi_1(\xi)$. К этому вопросу мы и переходим.

3. Пространства первой подвижности относительно бесконечно малых почти геодезических преобразований первого типа $\Pi_1(\xi)$

Структура системы уравнений (21), (22), (25) и (30) говорит о том, что наибольшей с геометрической точки зрения подвижностью относительно бесконечно малых почти геодезических преобразований $\Pi_1(\xi)$ пространство A_n обладает тогда, когда эта система имеет решение для некоторого вектора $a_i(x)$ при любом выборе начальных значений (31). Это имеет место, когда система (21), (22), (25) и (30) вполне интегрируема, т. е. когда условия ее интегрируемости выполняются тождественно относительно всех искомых функций (вследствие самих уравнений). В соответствии с этим мы введем понятие о пространствах первой подвижности, положив в его основу требование подобного рода.

Определение 2. A_n *называется пространством первой подвижности относительно бесконечно малых преобразований* $\Pi_1(\xi)$, *если в этом пространстве первые из существенных условий интегрируемости их основных уравнений* — (21), (22), (25) и (30) *выполняются тождественно относительно искомых функций для некоторого вектора* $a_i(x)$.

Как уже отмечалось в предыдущем параграфе, условия интегрируемости уравнений (21) и (22) выполняются тождественно вследствие этих уравнений и (25) в любом пространстве. Условия же интегрируемости уравнений (25) даны в (28). Вследствие уравнений (30) они примут вид

$$\widetilde{T}^h_{ijkl} = -\frac{1}{n+2}\left(\delta^h_j \widetilde{T}^\alpha_{i[kl]\alpha} + \delta^h_i \widetilde{T}^\alpha_{j[kl]\alpha}\right) + \tag{33}$$

$$+\frac{1}{(n-1)(n+2)}\left[\delta^h_l\left(n\widetilde{T}^\alpha_{ijk\alpha} + \widetilde{T}^\alpha_{k(ij)\alpha}\right) - \delta^h_k\left(n\widetilde{T}^\alpha_{ijl\alpha} + \widetilde{T}^\alpha_{l(ij)\alpha}\right)\right].$$

Напомним, что компоненты тензора $\widetilde{T}^h_{ijkl}$ даются формулами (27) и вследствие уравнений (21), (22) и (25) являются линейными однородными функциями ξ^h, η^h_i и P^h_{ij} с коэффициентами, зависящими от пространства A_n и вектора a_i. Следовательно, такой же характер имеют и соотношения (33). Легко видеть, что они не могут выполняться тождественно для любого пространства, т. е. что это и есть первые из существенных условий интегрируемости основных уравнений $\Pi_1(\xi)$. Пространства, для которых (33) при некотором векторе $a_i(x)$ выполняются тождественно относительно ξ^h, η^h_i и P^h_{ij}, согласно определению и имеют первую подвижность.

1. Выясним, что это за пространства, предполагая, что они римановы. Потребуем сначала, чтобы в пространстве V_n условия (33) выполнялись тождественно относительно P^h_{ij}. Согласно (24) и (27) это значит, что тождественно относительно P^h_{ij} (при условии их симметрии по нижним индексам) должны выполняться соотношения

$$(n+2)\,\hat{T}^h_{ijkl} = -\left(\delta^h_j \hat{T}^\alpha_{i[kl]\alpha} + \delta^h_i \hat{T}^\alpha_{j[kl]\alpha}\right) +$$

$$+\frac{1}{n-1}\left[\delta^h_l\left(n\hat{T}^\alpha_{ijk\alpha} + \hat{T}^\alpha_{k(ij)\alpha}\right) - \delta^h_k\left(n\hat{T}^\alpha_{ijl\alpha} + \hat{T}^\alpha_{l(ij)\alpha}\right)\right], \tag{34}$$

$$\hat{T}^h_{ijkl} = 3\left(-P^\alpha_{ij}R^h_{\alpha kl} + P^h_{\alpha j}R^\alpha_{ikl} + P^h_{\alpha i}R^\alpha_{jkl}\right) -$$

$$-a_{il}P^h_{jk} - a_{jl}P^h_{ik} + a_{ik}P^h_{jl} + a_{ik}P_{il} - a_{[kl]}P^h_{ij} +$$

$$+P^\alpha_{il}R^{\ \ h}_{.(\alpha j)k} + P^\alpha_{jl}R^{\ \ h}_{.(\alpha i)k} - P^\alpha_{ik}R^{\ \ h}_{.(\alpha j)l} - P^\alpha_{jk}R^h_{(\alpha i)l} - P^h_{\alpha l}R^{\ \ \alpha}_{.(ij)k} + P^h_{\alpha k}R^{\ \ \alpha}_{.(ij)l}. \tag{35}$$

Полагая здесь $P^h_{ij} = g_{ij}\lambda^h$, где g_{ij} — метрический тензор пространства V_n, а λ^h — произвольный вектор, получим следующие условия на пространство:

$$(n+2)\,\check{T}^h_{\beta ijkl} = -\left(\delta^h_j \check{T}^\alpha_{\beta i[kl]\alpha} + \delta^h_i \check{T}^\alpha_{\beta j[kl]\alpha}\right) +$$

$$+\frac{1}{n-1}\left[\delta^h_l\left(n\check{T}^\alpha_{\beta ijk\alpha} + \check{T}^\alpha_{\beta k(ij)\alpha}\right) - \delta^h_k\left(n\check{T}^\alpha_{\beta ijl\alpha} + \check{T}^\alpha_{\beta l(ij)\alpha}\right)\right], \tag{36}$$

причем

$$\check{T}^h_{\beta ijkl} = -3g_{ij}R^{\ h}_{.\beta kl} + g_{il}R^{\ \ h}_{.(\beta j)k} + g_{jl}R^h_{(\beta i)k} - g_{ik}R^{\ \ h}_{.(\beta j)l} - g_{ik}R^{\ \ h}_{.(\beta i)l} -$$

$$-\delta^h_\beta\left(a_{il}g_{jk} + a_{jl}g_{ik} - a_{ik}g_{jl} - a_{lk}g_{il} - a_{[kl]}g_{ij}\right).$$

После умножения (36) на g^{ij}, а также последующего суммирования как по i, так и по j, будем иметь

$$3(n^2+4n+2)R^{\;h}_{.\beta kl} = -\left[(n+2)^2+2\right]\delta^h_\beta a_{[kl]} - \\ -2\left(a^{\;h}_{.k}g_{\beta l} - a^{\;h}_{.l}g_{\beta k} - \delta^h_k a_{\beta l} + \delta^h_l a_{\beta k}\right) + \\ + \frac{1}{n-1}\left\{\delta^h_l\left[3(n^2+4n+2)R_{\beta k} - 2(ag_{\beta k} - na_{\beta k}) + (n^2+2n+2)a_{[k\beta]}\right] - \right. \\ \left. - \delta^h_k\left[3(n^2+4n+2)R_{\beta l} - 2(ag_{\beta l} - na_{\beta l}) + (n^2+2n+2)a_{[l\beta]}\right]\right\},$$

где мы обозначаем $a^{\;h}_{.k} = g^{h\alpha}a_{\alpha k}$, $a = a_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}$. Свертывание здесь по h, β дает $a_{[kl]} \equiv 0$ и поэтому они принимают вид

$$R^{\;h}_{.\beta kl} = P\left(a^h_k g_{\beta l} - a^h_l g_{\beta k} - \delta^h_k a_{\beta l} + \delta^h_l a_{\beta k}\right) + \\ + \frac{1}{n-1}\left\{\delta^h_l\left[R_{\beta k} + P(ag_{\beta k} - na_{\beta k})\right] - \delta^h_k\left[R_{\beta l} + P(ag_{\beta l} - na_{\beta l})\right]\right\}, \qquad (37)$$

$$P = -\frac{2}{3}(n^2+4n+2).$$

Отсюда после умножения на $g^{\beta k}$ и суммирования по β и по k вытекает

$$nR^h_l - R\delta^n_l = nP\left(a\delta^h_l - na^h_l\right).$$

В результате же свертывания (36) по h, β, а также умножения на g^{il} и суммирования как по i, так и по l, мы получаем

$$nR_{jk} - Rg_{jk} = nq\left(aq_{jk} - na_{jk}\right), \quad q = \frac{4-(n-1)(n+2)}{n^2+2n+4}.$$

Сравнивая эти соотношения с предыдущими, видим, что

$$nR_{jk} = Rg_{jk}, \quad na_{jk} = ag_{jk}. \qquad (38)$$

Вследствие этого из (37) вытекает

$$R^{\;h}_{.ijk} = K\left(\delta^h_j g_{ik} - \delta^h_k g_{ij}\right), \qquad (39)$$

и V_n является пространством постоянной кривизны. Возвращаясь теперь к (34), убеждаемся в том, что вследствие (38) и (39) они выполняются тождественно относительно P^h_{ij} при $a = 3nK$ или по (38), когда

$$a_{ij} = 3Kg_{ij}. \qquad (38')$$

Итак, (38′) и (39) необходимы, чтобы V_n имело первую подвижность. Для выяснения же вопроса о достаточности рассмотрим основные уравнения $\Pi_1(\xi)$ при этих условиях. Уравнения (22) вследствие (39) будут такими:

$$\eta^h_{i,j} = -K\left(\xi^h g_{ij} - \xi^\alpha g_{\alpha i}\delta^h_j\right) + P^h_{ij}. \qquad (40)$$

Из (24) мы получаем

$$T^h_{ijk} = K\left(\delta^h_j \tilde{\eta}_{ik} - \delta^h_k \tilde{\eta}_{ij}\right), \qquad (41)$$

$$\eta_{ik} = \eta^a_{ik}g_{ai}, \quad \tilde{\eta}_{ik} = \eta_{ik} + \eta_{ki}.$$

Поэтому уравнения (25) упрощаются:

$$3P^h_{ij,k} = K\left(2\delta^h_k\tilde{\eta}_{ij} - \delta^h_j\eta_{ik} - \delta^h_i\tilde{\eta}_{jk}\right) + a_{(ij}P_{j\,k} + b_{(ij}\delta^h_{k)}. \qquad (42)$$

Используя (38′), (39), (40) и (42), из (27) находим

$$\tilde{T}^h_{ijkl} = K\left[\delta^h_l\left(2P_{k(i;j)} + 3P_{ij;k}\right) - \delta^h_k\left(2P_{l(i;j)} + 3P_{ij;l}\right) - \right. \\ \left. - \delta^h_i P_{j[k;l]} - \delta^h_j P_{i[k;l]}\right] - a_i T^h_{jlk} - a_j T^h_{ilk} + \frac{1}{3}\left(a_k T^h_{(ij)l} - a_l T^h_{(ij)k}\right), \qquad (43)$$

когда $P_{ij;\,k} = P^{\alpha}_{ij} g_{\alpha k}$. Подставляя (43) в (33) и имея в виду (41), убеждаемся в том, что они выполняются тождественно как относительно P^h_{ij}, так и относительно η^h_i, ξ^h. Таким образом, (38′) и (39) достаточны, чтобы V_n было пространством первой подвижности. В итоге нами доказана

Теорема 4. *Первую подвижность относительно бесконечно малых почти геодезических преобразований первого типа $\Pi_1(\xi)$ имеют римановы пространства $V_n\,(n > 2)$ постоянной кривизны и только они, причем при условии* (38′).

2. Для определения степени подвижности этих пространств при наличии (38′) обратимся к последним из основных уравнений преобразований $\Pi_1(\xi)$ — к уравнениям (30). Вследствие (43) они будут такими:

$$b_{ij,\,k} = \frac{1}{3} a_k b_{ij} - K\left[\, 2P_{k\,(i;\,j)} + 3P_{ij;\,k} - a_i \tilde{\eta}_{jk} - a_j \tilde{\eta}_{ik} - \frac{2}{3} a_k \tilde{\eta}_{ij}\right]. \qquad (44)$$

Легко видеть, что условия их интегрируемости выполняются тождественно относительно всех искомых функций вследствие (40), (42) и самих уравнений (44). Следовательно, система основных уравнений (21), (22), (25) и (30) бесконечно малых преобразований $\Pi_1(\xi)$ оказывается вполне интегрируемой, и имеет место

Теорема 5. *Каждое риманово пространство $V_n\,(n > 2)$ постоянной кривизны для любого вектора a_i, удовлетворяющего условиям* (38′), *допускает совокупность бесконечно малых почти геодезических преобразований $\Pi_1(\xi)$, зависящую от N_1 произвольных параметров (последнее дается формулой* (32)).

Принимая во внимание (26), из (38′) находим

$$a_{i,\,j} = \frac{1}{3} a_i a_j + 3K g_{ij}. \qquad (45)$$

Геометрически это значит, что вектор a_i определяет в V_n эквидистантную конгруэнцию [8], притом, когда $K \neq 0$, обязательно неизотропную. В то же время (45) представляют собой систему дифференциальных уравнений относительно a_i. Нетрудно убедиться в том, что она вполне интегрируема, т. е. имеет общее решение, содержащее n существенных параметров. В целом, таким образом, каждое V_n постоянной кривизны имеет совокупность бесконечно малых почти геодезических преобразований первого типа $\Pi_1(\xi)$, зависящую от $N_1 + n$ произвольных параметров.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. С. Синюков. Почти геодезические отображения аффинносвязных и римановых пространств. ДАН СССР. т. 151, № 4, (1963), 781—782.
2. Ishihara S. Holomorphically projective changes and their groups in an almost complex manifold. «Tohoku Math. J.», 9, № 3, 273—297, 1957.
3. Tachibana S. On infinitesimal holomorphically projective transformations in Kählerian manifolds. «Tohoku Math. J.», 12, № 1, 77—101, 1960.
4. Ishihara S. On infinitesimal concircular transformation. «Kódai. Math. Semin. Repts». 12, № 2, 45—56, 1960.
5. И. А. Скоутен и Д. Дж. Стройк. Введение в новые методы дифференциальной геометрии. Т. II, ИЛ, Москва, 1948, стр. 35.
6. Yano Kentaro. The theory of Lie derivatives and its applications. Amst. N-Holland publ. Groningen, Nordhoff, 1957.
7. Eisenhart L. Non Riemannian geometry. Amer. math. society. Colloquium publ. New York, 1927.
8. Н. С. Синюков. Эквидистантные римановы пространства. Научный ежегодник Одесского ун-та за 1956 г., Одесса, 1957, 133—135.

Поступила 31 октября 1969 г.

УПОРЯДОЧЕННЫЕ ПСЕВДОРИМАНОВЫ ПРОСТРАНСТВА. II.

М. А. Улановский

(Харьков)

Настоящая статья представляет собой продолжение статьи [9], которая ниже будет цитироваться как «часть I». Мы отсылаем читателя к части I по поводу определений основных понятий: упорядоченной (строго упорядоченной) дуги в псевдоримановом X_n, отношений $<$, $\prec$, $\prec$, $\prec$, интервала $I_{a,b}$ и др.

В этой статье мы рассмотрим различные предположения о структуре упорядоченного псевдориманова пространства, введем дополнительно некоторые отношения, а также рассмотрим пространства несколько более общего типа, чем псевдоримановы пространства. Будет изучен вопрос о существовании строго монотонной функции в таких пространствах, а также вопрос о существовании «глобального сечения» в пространствах специального типа, названных в части I «пространствами класса A».

Сохраняются обозначения, принятые в части I; так, черта над буквой, обозначающей множество, означает замыкание этого множества; $d\sigma^2$ — вспомогательная собственно риманова метрика, полная на X_n. Нашей основной задачей является изучение отношений порядка в псевдоримановом X_n; конусы K_x, определяющие направления «в будущее» в касательных T_x точек $x \in X_n$, соответствуют фундаментальной форме ds^2 сигнатуры $(n-2)$. Однако простые соображения показывают, что ограничиться псевдоримановыми пространствами нецелесообразно: совокупность всех псевдоримановых пространств физического типа не замкнута относительно естественных операций, в частности, относительно прямого (декартова) произведения. Действительно, пусть X_n и Y_m — — дифференцируемые многообразия, на которых заданы псевдоримановы формы ds_1^2 и ds_2^2 сигнатуры $n-2$ и $m-2$ соответственно. Метрика $ds^2 = ds_1^2 + ds_2^2$ уже не определяет отношений порядка, так как ее сигнатура равна $n+m-4$. Естественно определить в касательном пространстве $T_{(x, y)}$ каждой точки $(x, y) \in X_n \times Y_m$ конус $K_{(x, y)}$ как совокупность векторов, проекции которых на T_x и T_y (касательные пространства многообразий X_n и Y_m) принадлежат конусам K_x и K_y, определенным формами ds_1^2 и ds_2^2. При таком определении $(x', y') \prec$ $\prec (x'', y'')$ тогда и только тогда, когда $x' \prec x''$, $y' \prec y''$. Ниже будет применяться обозначение: $K_{(x, y)} = K_x + K_y$. Очевидно, $K_{(x, y)}$ не определяется какой бы то ни было псевдоримановой формой (в частности, для $X_2 \times Y_1$ $K_{(x, y)}$ — трехгранный угол). Далее, пусть φ: $Y_m \to X_n$ — дифференцируемое отображение; если в X_n задана псевдориманова метрика (физического типа, т. е. с сигнатурой $n-2$), то конус $d\varphi^{-1}(K_x)$ также не соответствует псевдоримановой метрике; если ядро $d\varphi$ не пусто, то $d\varphi^{-1}(K_x)$ есть выпуклый конус, содержащий плоское подпространство.

Итак, в общем случае мы рассмотрим дифференцируемое многообразие X_n, в каждом касательном пространстве T_x которого задан выпуклый конус K_x. Однако конусы K_x в различных T_x предполагаются «однотипными» в следующем смысле. В стандартном векторном пространстве E_n выберем произвольный выпуклый конус K. Конусы K_x выбираются так, что для каждого T_x существует линейный изоморфизм φ: $T_x \to E_n$, такой, что $\varphi(K_x) = K$. Изоморфизм φ для некоторой окрестности произвольной точки $x \in X_n$ может быть описан матрицей A_x

(соответственно естественным базисам в T_x и некоторому выбранному базису в E_n); предполагается, что A_x гладко зависит от x (по крайней мере, при подходящем выборе φ, поскольку φ определен неоднозначно).

При выполнении изложенных условий будем говорить, что в X_n задана «структура K»; соответствующий конус в касательном T_x точки x будем обозначать через K_x. Поскольку могут рассматриваться различные структуры K, L ... на одном и том же X_n, иногда придется отмечать: $x' < x'' (K)$, т. е. x' предшествует x'' в смысле структуры K (определения отношений $<$, $\prec$ ничем не отличаются от аналогичных определений для псевдоримановых структур, см. часть I). Иногда будет употребляться и запись:

$$x' \prec x'' (K, \Omega),$$

x' и x'' можно соединить K-упорядоченной дугой, лежащей в некоторой области Ω.

Частный случай структуры K (аналогичный, с физической точки зрения, классическому пространству-времени): конус $K \in E_n$ есть полупространство. Легко видеть, что в случае, когда конус K содержит плоское подпространство, упорядоченности в целом в смысле отношения $\prec$ быть не может; однако, возможна упорядоченность в смысле отношения $<$. Ниже, за исключением тех случаев, где противное будет специально оговорено, рассматриваются лишь структуры, удовлетворяющие условию: все направления замкнутого конуса K содержатся в некотором открытом полупространстве пространства E_n.

Отметим некоторые локальные свойства структуры K, во многом аналогичные свойствам псевдоримановых структур, рассмотренным в части I, а также некоторые отличия от указанного частного случая.

Согласно определению структуры K, для каждой точки x из X_n существует окрестность ω_x и гладкое семейство изоморфизмов φ_x: $T_x \to E_n$, такое, что $\varphi(K_x) = K$. Очевидно, для x' и x'' из ω_x $\varphi_{x'}\varphi_{x''}^{-1}$ — изоморфизм $T_{x'}$ на $T_{x''}$, переводящий $K_{x'}$ в $K_{x''}$; положив $x'' = x' + dx$, мы запишем главную часть $\varphi_{x'}\varphi_{x''}^{-1}$ в виде

$$\{\Gamma_j^i\} = \{\Gamma_{jk}^i dx^k\}.$$

Очевидно, Γ_{jk}^i определяют аффинную связность (вообще говоря, с кручением), относительно которой поле конусов K_x инвариантно. Геодезические этой афинной связности обладают свойством: если касательный вектор в некоторой точке принадлежит (не принадлежит) конусу структуры K, то это же утверждение справедливо для любой точки геодезической. Пусть ω_0 — нормальная геодезическая окрестность некоторой точки $0 \in X_n$; из сказанного выше следует, что $L_0 = \exp_0 K_0$ принадлежит «будущему» $F_0^{\prec}(\omega_0)$ точки 0 относительно окрестности ω_0. Однако этим аналогия с теоремой 2 части I исчерпывается: вообще говоря, $\exp_0 K_0$ есть лишь собственная часть $F_0^{\prec}(\omega_0)$, тогда как в случае структуры K, определенной псевдоримановой метрикой, эти множества совпадают. Легко видеть, что в общем случае имеет место более слабое утверждение: на каждом геодезическом луче, исходящем из 0 и имеющем «пространственноподобный» касательный вектор ξ ($\xi \notin \overline{K}_0$), есть отрезок $0x$, не принадлежащий $F_0^{\prec}(\omega_0)$.

Эти соображения позволяют дословно так же, как в части I, доказать утверждение: множество пар точек x, y таких, что $x < y$, открыто в $X_n \times X_n$. Так же, как в части I, возможно обобщить понятие упорядоченной дуги на непрерывные (но, вообще говоря, не гладкие) дуги.

Однако в общем случае изотропные геодезические не обладают многими свойствами, изложенными в части I; в частности, не имеет места теорема 3 части I. Тем более это касается всех «метрических» теорем — теорем о свойствах функции $\rho(x, y)$ ($\rho(x, y) \leqslant \infty$ есть верхняя грань псевдоримановых длин упорядоченных дуг, соединяющих x и y).

Нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 1. *Для любой точки $0 \in X_n$ существует окрестность U и числа $c > 0$, $k > 0$ такие, что*

1) *риманова длина любой связной упорядоченной дуги $\varphi(t) \in U$ не превосходит c;*

2) *для любой последовательности связных упорядоченных дуг $\varphi_n(t) \subset U$, сходящейся к дуге $\varphi(t)$, $\sigma \geqslant k \lim\sup \sigma_n$,* где σ, σ_n — *римановы (в метрике $d\sigma^2$) длины дуг $\varphi(t)$, $\varphi_n(t)$.*

Лемма эта в частном случае псевдоримановой структуры совпадает с леммой 1 части I; для доказательства ее в общем случае достаточно заметить следующее: конус K_0 лежит, как было условлено выше, в некотором полупространстве касательного пространства T_0, например, в полупространстве $x^n > 0$. Очевидно, конус K_0', определенный условием $x^{n^2} - \lambda \Sigma x^{i^2} \geqslant 0$, при достаточно малом λ содержит K_0. Это же, очевидно, справедливо для каждого конуса K_u' метрики $ds^2 = du^{n^2} - \lambda \sum du^{i^2}$, где u принадлежит некоторой окрестности точки 0. Поскольку утверждение леммы, как показано в части I, справедливо для структуры K', оно тем более справедливо для структуры K.

Лемма 2. *Пусть последовательность упорядоченных дуг $\varphi_i(t)$ сходится к строго упорядоченной дуге $\varphi: [0, 1] \to X_n$. Тогда существуют p* и *t_0 такие, что*

$$\varphi(0) < \varphi_p(t_0)$$

(здесь и ниже имеется в виду сходимость дуг метрического пространства в смысле определения, принятого в [8]; *см. также часть* I).

В силу условия (строгая упорядоченность $\varphi(t)$ существует t_0 такое, что $\varphi(0) < \varphi(t_0)$; поскольку множество точек x таких, что $\varphi(0) < x$ открыто в X_n, существует такое p, что $\varphi(0) < \varphi_p(t_0)$.

Содержание леммы 3 связано с некоторой гипотезой о структуре K. Будем говорить, что структура K на X_n удовлетворяет гипотезе H_1, если у каждой точки $0 \in X_n$ есть окрестность ω_0, обладающая свойством: упорядоченная дуга $\varphi(t)$, покинув ω_0, вторично вернуться в нее не может (если $\varphi(t_1) \in \omega_0$, $\varphi(t_2) \notin \omega_0$ и $t_1 < t_2$, то $\varphi(t) \notin \omega_0$ для любого $t > t_2$). S. W. Hawking назвал псевдоримановы пространства, удовлетворяющие этой гипотезе, сильно упорядоченными ([3]).

Лемма 3. *Если структура K на X_n удовлетворяет H_1 и Ω — область с компактным замыканием $(\overline{\Omega})$, то римановы длины связных упорядоченных дуг, расположенных в Ω, равномерно ограничены.*

Это же утверждение рассмотрено в части I для псевдоримановых структур, но при более сильном условии: отношение $\prec\!\prec$ есть отношение порядка. Для доказательства леммы 3 достаточно построить конечное покрытие Ω окрестностями $\{\omega_i\}$, упомянутыми в формулировке гипотезы H_1 и удовлетворяющими одновременно утверждению леммы 1. Справедливость леммы 3 немедленно следует из того, что римановы длины пересечений дуги $\varphi(t)$ с ω_i ограничены сверху и, согласно H_1, $\varphi(t)$ пересекает каждое ω_i не более одного раза.

Введем теперь следующие определения.

Пусть K' и K'' — две структуры, заданные на X_n; отношение $K' < K''$ (K'' мажорирует K') означает, что каждый открытый конус K''_x содержит все направления замкнутого $\bar{K}'_x$. $K' \prec K''$, если для каждого $x \in X_n$ $K'_x \subset K''_x$.

Это определение позволяет ввести новое отношение между точками X_n: по определению, $a \dashv b$ относительно заданной структуры K, если относительно каждой структуры K', мажорирующей K $(K' > K)$, $a < b$: $a \dashv b\,(K)$, если $a < b\ (K')$, где $K' > K$.

Следующий пример показывает, что отношение $\dashv$ существенно не сводится к отношениям $<$, $\prec$, $\prec\prec$, введенным в части I. Пусть X_2 — цилиндр, представленный в виде полосы $|y| \leqslant 1$ плоскости XOY (с отождествлением точек $(x, -1$ и $(x, 1))$. Конус K (в любой точке (x, y)) определим условием: $dy > dy - dx > 0$ $(ds^2 = dy^2 - dxdy)$. Будущее $F_0^{\prec}$ точки $0\,(o, o)$ есть часть $x \geqslant 0$ нашего цилиндра; будущее $F_0^{\dashv}$ ($F_0^{\dashv} \ni a$, $0 \dashv a$) есть весь цилиндр X_2.

В этом примере X_2 не является упорядоченным пространством в смысле, установленном в части I: $x = c$ — замкнутая упорядоченная дуга. Изменим несколько этот пример, удалив из X_2 лучи: $x \leqslant 0$, $y = -\frac{2}{3}$; $x \geqslant 0$, $y = -\frac{1}{3}$; $x \leqslant 0$, $y = \frac{1}{3}$; $x \geqslant 0$, $y = \frac{2}{3}$. Оставшаяся открытая часть X_2 есть упорядоченное пространство; более того легко проверить, что выполнена гипотеза H_1. Тем не менее, отношение $\dashv$ не является отношением порядка: для любой структуры K', $K' > K$, существует замкнутая упорядоченная дуга, проходящая через точку $0\,(o, o)$.

Рассмотрим еще одно предположение: структура K по определению удовлетворяет гипотезе H_2, если отношение $\dashv$ есть отношение порядка, что означает следующее:

1) транзитивность: из $a \dashv b$, $b \dashv c$ следует $a \dashv c$;

2) если $a \dashv b$ — a предшествует b в смысле отношения $\dashv$, то b не предшествует a (мы увидим, что транзитивность имеет место всегда; последний же пример показывает, что второе требование может быть не выполнено даже структурой, удовлетворяющей гипотезе H_1).

Рассмотрим свойства отношения $\dashv$.

Лемма 4. *Отношение $\dashv$ транзитивно: из $a \dashv b$, $b \dashv c$ следует $a \dashv c$.*

Действительно, пусть K' — произвольная структура, мажорирующая K: $K' > K$. Поскольку отношение $(<, K')$ транзитивно, из $a < b\ (K')$, $b < c\,(K')$ следует $a < c\,(K')$; в силу произвольности K' $a \dashv c$.

Лемма 5. *Если $K' > K$ и $a \prec\prec b\,(K)$,* то $a < b\,(K')$.

Пусть $(a_n, b_n) \to (a, b)$ и $a_n \prec b_n\,(K)$. Согласно предположению, a_n и b_n можно соединить K-упорядоченной дугой $\varphi_n(t)$; если ω_a — окрестность точки a, упомянутая в лемме 1, то не ограничивая общности, можно предположить, что связные компоненты точек a_n в пересечениях $\varphi_n(t) \cap \omega_a$ сходятся к некоторой K-упорядоченной дуге $\varphi(t) \subset \omega_a$. Поскольку $\varphi(t)$ строго упорядочена относительно K', согласно лемме 2 существуют такие n и t_0, что $\varphi_n(t_0) \in \omega_a$, $a < \varphi_n(t_0)\,(K')$. Повторяя это рассуждение для точки b, мы найдем, что для некоторого n одновременно $\varphi_n(t_1) < b$, т. е. $a < b\,(K')$.

Лемма 6. *Множество пар точек (a, b), связанных отношением $\dashv$,* замкнуто в $X_n \times X_n$.

Действительно, пусть $(a_n, b_n) \to (a, b)$ и $a_n \dashv b_n$. Пусть $K' > K$; найдем структуру K'' так, чтобы $K' > K'' > K$. Поскольку $a_n \dashv b_n\,(K)$, $a_n < b_n\,(K'')$, $a \prec\prec b\,(K'')$ и, согласно лемме 5, $a < b\,(K')$. Ввиду произвольности K', $a \dashv b\,(K)$.

Лемма 7. Если отношение $a \dashv a$ не имеет места (т. е. существует структура K', $K' > K$, такая, что через точку a не проходит ни одна K'-упорядоченная замкнутая дуга), то существует окрестность ω_a точки a и структура K_a, $K_a > K$, такие, что K_a-упорядоченная дуга, покинув ω_a, вторично пересечь ее не может (гипотеза H_1 выполнена для точки a и структуры K_a).

Если утверждение леммы неверно, то для любой структуры K', $K' > K$, найдется последовательность окрестностей $\{\omega_i\}$ точки a такая, что $\omega_i \supset \omega_{i+1}$ и $\bigcap\limits_i \omega_i = a$, причем для каждой окрестности ω_i найдется K'-упорядоченная дуга, пересекающая ω_i дважды. Легко видеть, что окрестности ω_i могут быть выбраны так, что для некоторой окрестности U_a, $U_a \supset \omega_i$, имеет место утверждение: K'-упорядоченная дуга $\varphi_i(t)$, пересекающая ω_i дважды, не может лежать целиком в U_a. Очевидно, $\varphi_i(t)$ содержит связные части φ_i: $[0, t_i'] \to \overline{U}_a$, φ_i: $[t_i'' 1] \to U_a$ такие, что $\varphi_i(0) \in \omega_i$, $\varphi_i(1) \in \omega_i$, $\varphi_i(t_i')$ и $\varphi_i(t_1'')$ лежат на границе U_a. Выбрав подпоследовательность номеров i_α так, чтобы $\varphi_{i_\alpha}(t_i') \to x_1$, $\varphi_{i_\alpha}(t_i'') \to x_2''$, получим: $a \prec\!\!\prec x_1 \prec\!\!\prec x_2 \prec\!\!\prec a$, откуда для $K'' > K'$ $a < x_1 < x_2 < a$. Поскольку K'' произвольно, доказанное противоречит условиям леммы.

Теорема 1. *Если структура K на X_n удовлетворяет гипотезе H_2, то существует структура K', мажорирующая K $(K' > K)$, для которой отношение $\prec$ есть отношение порядка.*

Пусть $\{S_i\}$ — последовательность открытых шаров (в смысле вспомогательной полной римановой метрики $d\sigma^2$) с центром в некоторой точке $0 \in X_n$ и радиусами R_i, $R_i < R_{i+1}$, $R_i \to \infty$. Очевидно, $\{S_i\}$ покрывает X_n. Для каждой точки $x \in \overline{S}_1$ существуют окрестность ω_x и структура K_x (определенная на всем X_n), упомянутые в последней лемме; выберем из ω_x конечное покрытие $\overline{S}_1 — \omega_1 \ldots \omega_r$ ($\overline{S}_i$ компактны!). Если $K_1 \ldots K_r$ — соответствующие структуры, то определим структуру K^1, конусы которой в каждой точке $x \in X_n$ суть пересечения конусов структур $K_1 \ldots K_r$. Очевидно, замкнутая K^1-упорядоченная дуга (если она существует) не может пересечь S_1: точка пересечения принадлежала бы одной из окрестностей $\omega_1 \ldots \omega_r$, и для этой окрестности было бы не выполнено утверждение последней леммы. Это же рассуждение можно повторить для $S_2 - S_1$ (относительно многообразия $X_n - \overline{S}_1$), выбрав структуру K^2, обладающую тем свойством, что замкнутые K^2-упорядоченные дуги не пересекают $S_2 - S_1$. При этом $K^{(2)}$ можно подчинить дополнительному условию: $K^1 \succ K^2$. После этого нетрудно «склеить» K^1 и K^2, построив структуру K^*, совпадающую с $K^{(2)}$ на шаре с центром в O и радиусом $R_1 - \alpha$ ($\alpha > 0$ произвольно) и со структурой $K^{(2)}$ на $X_n - S_1$. Продолжая этот процесс для $S_3 - S_2$, $S_4 - S_3$ неограниченно, мы заметим, что для каждой точки x после конечного числа p шагов конусы структур K_p, $K_{p+1} \ldots$ будут совпадать; эти совпадающие конусы и определяют искомую структуру K'.

Замечание к теореме 1. Если K удовлетворяет H_2, то, согласно теореме, существует K', $K' > K$, для которой $\prec$ есть отношения порядка; если $K' > K'' > K$, то K'', очевидно, дополнительно удовлетворяет гипотезе H_2. Итак, имеет место утверждение: если K удовлетворяет H_2, то существует структура K'', мажорирующая K, также удовлетворяющая гипотезе H_2.

Введем теперь еще одно отношение между точками X_n: $a =\!| b$. Для этого предварительно рассмотрим следующее определение.

Пусть $0, t_1, \ldots t_{n-1}$, 1 — подразделение отрезка $[0, 1]$ и φ_i $(t = 0 \ldots n-1)$-непрерывные отображения:

$$\varphi_i: [t_i, t_{i+1}] \to X_n,$$

такие, что $\varphi_i(t)$ — упорядоченные дуги; по определению, тем самым задана «кусочно-упорядоченная дуга» $\varphi(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Расстояния (в смысле метрики $d\sigma^2$)

$$r_i = r_i(\varphi_{i-1}(t_i), \varphi_i(t_i))$$

«скачки» дуги $\varphi(t)$. Упорядоченная дуга $\varphi_i[t_i, t_{i+1}] \to X_n$ — «звено» дуги $\varphi(t)$. Пусть a, b, a', b' — произвольные точки из X_n; a и b «соединены» кусочно-упорядоченной дугой $\varphi(t)$ со скачками $r_0, \ldots, r_n$, если $\varphi(0) = a'$, $\varphi(1) = b'$, причем $r_1 \ldots r_{n-1}$ определены выше, а $r_0 = r(a, a')$, $r_n = r(b', b)$.

Отношение $=\!|$ определим так: $a =\!| b$, если существует покрытие X_n областями $\{\omega_\alpha\}$ и набор положительных чисел $\{N_\alpha\}$ $(\alpha = 1 \ldots \infty)$, такие, что при любом выборе положительных чисел $\{\delta_\alpha\}$ a и b могут быть соединены кусочно-упорядоченной дугой $\varphi(t)$ со скачками, удовлетворяющими условию: если ω_α содержит скачок с номером i, то $r_i \leqslant \delta_\alpha$, причем число последовательных скачков, содержащихся в ω_α, не превосходит N_α (последовательные скачки — скачки с номерами p, $p+1, \ldots$; ω_α содержит скачок с номером i, если хотя бы одна из точек $\varphi_{i-1}(t_i)$, $\varphi_i(t_i)$ содержится в ω_α).

Очевидно, в этом условии покрытие ω_α всегда можно заменить подчиненным ему покрытием. Легко видеть также, что в качестве ω_α могут быть взяты окрестности, удовлетворяющие условиям леммы 1; в частности, можно считать, что римановы длины упорядоченных дуг в каждом ω_α ограничены.

В следующих двух леммах Ω будет означать произвольную область из X_n, замыкание которой компактно, причем римановы длины упорядоченных дуг, расположенных в $\overline{\Omega}$, равномерно ограничены сверху.

Лемма 8. Для любой структуры K', мажорирующей данную структуру K $(K' > K)$ и чисел $N \geqslant 1$. $R > 0$, найдется такое число $\delta > 0$, что будет справедливо утверждение: если какие-либо точки a и b из Ω, расстояние между которыми не меньше R, можно соединить кусочно-упорядоченной дугой (в смысле K), лежащей в Ω, со скачками, не превышающими δ, и числом скачков, не превышающим N, то имеет место отношение: $a < b$ (K').

Если утверждение леммы неверно, то для заданной структуры $K' > K$ можно найти последовательность положительных чисел $\delta_r \to 0$ и пар точек (a_r, b_r) таких, что $(a_r, b_r) \to (a, b)$, a_r и b_r можно соединить кусочно-упорядоченной дугой $\varphi_r(t)$ со скачками $\leqslant \delta$ и числом скачков $\leqslant N$, $a_r \not< b_r (K')$ и $r(a, b) \geqslant R$. Кроме того, легко видеть, что последовательность (a_r, b_r) можно выбрать таким образом, чтобы кусочно-упорядоченные дуги $\varphi_r(t)$ сходились к K-упорядоченной (непрерывной) дуге $\varphi(t)$, соединяющей a и b (звенья дуг $\varphi_r(t)$ сходятся к частям дуги $\varphi(t)$. Следовательно, $a \prec b (K)$, $a < b (K')$ (лемма 5) и потому $a_r < b_r (K')$ при достаточно большом r, что противоречит сделанному выше предположению.

Лемма 9. *Пусть $\delta > 0$; существует структура K_δ, мажорирующая структуру K, для которой справедливы утверждения:*

1) *длина K_δ-упорядоченных дуг в Ω ограничена;*

2) *для любых a, b из Ω, таких, что $a < b$ (K_δ, Ω), существуют точки a', b', расположенные, соответственно, в δ-окрестностях точек a и b, связанные соотношением*

$$a' \prec b' (K, \overline{\Omega}).$$

Существование структуры K', мажорирующей K на Ω и такой, что длины K'-упорядоченных дуг в $\overline{\Omega}$ ограничены, следует из замечания к теореме 1, примененного к $\overline{\Omega}$. Построим теперь последовательность структур $K_1 > K_2 \ldots > K_n \ldots > K$, равномерно сходящуюся (в очевидном смысле) к K и такую, что для каждого r длины K_r-упорядоченных дуг в $\overline{\Omega}$ ограничены. Если второе утверждение леммы неверно, то можно найти последовательность пар (a_r, b_r), сходящуюся к (a, b) и такую, что в δ-окрестностях a_r и b_r нет точек a_r', b_r', связанных отношением $(<, K)$. С другой стороны, можно предположить, что последовательность K_r-упорядоченных дуг $\varphi_r(t)$, соединяющих a_r и b_r, сходится к $\varphi(t)$, соединяющей a и b, причем $\varphi(t)$ K-упорядочена, т. е. $a \prec b\,(K)$. Это, очевидно, противоречит сделанному выше предположению: при достаточно большом r δ-окрестности a_r и b_r содержат точки a и b, причем $a \prec b\,(K)$.

Теорема 2. *Отношения* $\dashv$ и $=\!|$ *эквивалентны.*

1. Пусть K^* — произвольная структура, мажорирующая K: $K^* > K$. Из леммы 1 следует, что X_n может быть покрыто (локально конечно) не более, чем счетным числом областей $\{U_i\}$, таких, что в каждом U_i длины K^*-упорядоченных дуг ограничены. Пусть $a \dashv b\,(K)$. Легко видеть, что всегда возможно выбрать K' так, чтобы: а) $K^* > K' > K$ и б) для заданной последовательности $\delta_r > 0$ структура K' в каждом U_r удовлетворяла условиям леммы 9 относительно δ_r.

Пусть $\psi(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ — K'-упорядоченная дуга, соединяющая a и b. Покрытие $\{U_r\}$ очевидным образом индуцирует некоторое покрытие отрезка $[0, 1]$; пусть $0, t_1 \ldots 1$ — разбиение $[0, 1]$, подчиненное этому покрытию (каждый отрезок t_i, t_{i+1} принадлежит некоторому элементу покрытия). Подбирая, согласно лемме 9, точки a_i, a_{i+1} так, чтобы $r(a_i, \psi(t_i)) < \delta_r$ и $r(a_{i+1}, \psi(t_{i+1})) < \delta_r$ (r — номер одного из элементов U_r, содержащих $\psi(t)$, $t_i \leqslant t \leqslant t_{i+1}$), мы получим кусочно-упорядоченную дугу $\varphi(t)$ (с K-упорядоченными звеньями, соединяющими $a_0 a_1$, $a_1' a_2 \ldots$) и сколь угодно малыми скачками $r_i \leqslant 2\delta_r$. В то же время легко видеть, что для фиксированного покрытия $\{U_r\}$ каждый элемент U_i содержит ограниченное количество скачков $\varphi(t)$ при любом выборе δ_i; таким образом, $a =\!| b$.

2. Пусть $a =\!| b$. Для некоторого фиксированного покрытия $\{\Omega_\alpha\}$ многообразия X_n выполнены сформулированные в определении отношения $=\!|$ условия: существуют числа N_α такие, что для любого набора чисел $\{\delta_\alpha\}$, $\delta_\alpha > 0$, можно построить кусочно-упорядоченную дугу $\varphi(t)$, соединяющую a и b так, чтобы число ее скачков в Ω_α не превышало N_α и скачки эти не превышали δ_α. Не ограничивая общности, можно предположить, что каждое Ω_α удовлетворяет условию: длины K^*-упорядоченных дуг в Ω_α ограничены, где K^*, как и в пункте 1 доказательства, некоторая структура, мажорирующая заданную структуру K. Действительно, в случае необходимости каждое Ω_α можно покрыть окрестностями ω_r, удовлетворяющими этому условию, и перейти к покрытию $(\Omega_\alpha \cap \omega_r)$. Пусть теперь $\{S_i\}$ — концентрические шары, покрывающие $X_n \cdot X_n$ покрыто компактными множествами $T_i = S_{i+1} - S_i$; для каждого T_i существует такое $l_i > 0$, что шар с центром в произвольной точке $x \in T_i$ радиуса l_i целиком принадлежит некоторому элементу покрытия $\{\Omega_\alpha\}$. Обозначим через l_α наименьшее из l_i, соответствующих тем T_i, которые имеют непустое пересечение с Ω_α. Для каждого Ω_α и заданной структуры K' согласно лемме 8 найдем число $\delta_\alpha > 0$ (соответственно фиксированному N_α и $R = l_\alpha$). Если $\varphi : [0, 1] \to X_n$ — кусочно-упорядоченная дуга, соединяющая a и b, скачки которой в каждом Ω_α меньше δ_α и

число скачков в Ω_α не превосходит N_α, то существует подразделение $0, t_1 \dots 1$ отрезка $[0, 1]$ такое, что $\varphi(t_i, t_{i+1})$ принадлежит какому-либо Ω_α и расстояние между $\varphi(t_i)$ и $\varphi(t_{i+1})$ не меньше l_α (в действительности, $\varphi(t_i)$ может означать пару точек). Согласно лемме 8, точки a, $\varphi(0)$, $\varphi(t_1) \dots$ последовательно связаны отношением $(<, K')$ (если $\varphi(t_i) = (\varphi_l(t_i), \varphi_{l+1}(t_i))$, $\varphi(t_{i+1}) = (\varphi_m(t_{i+1}), \varphi_{m+1}(t_{i+1}))$, имеется в виду отношение: $\varphi_l(t_i) < \varphi_{m+1}(t_{i+1})$ и т. п.). Следовательно, $a < b\,(K')$.

Лемма 10. *Для того, чтобы имело место отношение $a =\!| \, b \equiv a -\!| \, b$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие: для произвольного покрытия X_n областями $\{\Omega_\alpha\}$ (Ω_α компактны) существуют такие числа $\{l_\alpha^*\}$, $l_\alpha > 0$, что при любом выборе $\{\delta_\alpha\}$, $\delta_\alpha > 0$, a и b можно соединить кусочно-упорядоченной дугой $\varphi(t)$, скачки которой в каждом Ω_α не превосходят δ_α, причем длина каждого звена $\varphi(t)$, имеющего непустое пересечение с Ω_α, не меньше l_α.*

Мы опускаем доказательство, использующее леммы 8 и 9, почти дословно повторяющее рассуждения, уже проведенные в доказательстве теоремы 2.

Пусть на X_n и X_m заданы структуры K_1, K_2. Как было отмечено выше, на произведении $X_n \times X_m$ можно определить структуру $L = K_1 + K_2$, конусы которой состоят из векторов, проекции которых на касательные пространства многообразий X_n, X_m принадлежат конусам структур K_1 и K_2. Пусть (x', y') и (x'', y'') — точки из $X_n \times X_m$. Легко видеть, что отношение $(x', y') \prec (x'', y'')$ (L) равносильно совокупности отношений $x' \prec x'(K_1)$ $y' \prec y''(K_2)$. Однако отношение $(x', y') -\!| \, (x'', y'')$ не эквивалентно совокупности отношений $x' -\!| \, x''$, $y' -\!| \, y''$.

Пример. Рассмотрим $E_2 \times S_1$, где E_2 — псевдоевклидова плоскость, S_1 — окружность, в которой отношение $\prec$ соответствует какой-либо ориентации. Легко проверить, что в $E_2 \times S_1$ любые две точки (e', s'), (e'', s'') связаны отношением $-\!|$, что заведомо не имеет места для любых e', e'' на E_2.

Упомянутая эквивалентность имеет место, если в X_n и X_m выполнена гипотеза H_2. Отсюда следует, в частности, что произведение многообразий, удовлетворяющих H_2, также удовлетворяет гипотезе H_2. Сначала рассмотрим частный случай: произведение произвольного X_n со структурой K на вещественную прямую R. В $X_n \times R$ определена структура $L = K + R_1$, где R_1 соответствует естественному отношению порядка в R.

Теорема 3. *Если в многообразии X_n со структурой K выполнена гипотеза H_2, то отношение $(x', \rho') -\!| \, (x'', \rho'')$ (L) (ρ', ρ'' — вещественные числа, x', x'' — точки из R) имеет место тогда и только тогда, когда $x' -\!| \, x''$ и $\rho' \leqslant \rho''$.*

Прежде всего построим некоторое специальное покрытие X_n. Пусть $K' > K$, причем K' также удовлетворяет H_2; $\{\omega_i'\}$ — покрытие X_n областями, удовлетворяющими условию гипотезы H_1 относительно K'; произвольная K'-упорядоченная (непрерывная) дуга пересекает каждую область ω_i' не более одного раза. Пусть $\{\omega_\alpha\}$ — такое покрытие X_n, что каждое $\overline{\omega}_\alpha$ принадлежит ω_i'; при этом можно предположить, что ω_α удовлетворяют тому же условию H_1 относительно K'. Покажем, что ω_α удовлетворяют также условию, аналогичному условию гипотезы H_1, но уже для кусочно-K-упорядоченных дуг: для заранее заданного набора чисел $\{N_\alpha\}$ найдутся такие наборы положительных чисел $\{\delta_\alpha\}$, $\{c_\alpha\}$, что общее число скачков любой кусочно-K-упорядоченной дуги $\varphi(t)$ (удовлетворяющей известным условиям относительно чисел N_α и δ_α), содержащихся в данном ω_α, не превосходит c_α.

Действительно, пусть $\overline{\omega}_\alpha \subset \omega_i'$; выберем числа $\{\delta_\alpha\}$ так, чтобы (как в пункте 2 доказательства теоремы 2) $\varphi(t)$ можно было заменить K'-упорядоченной (непрерывной) дугой $\psi(t)$. Поскольку отрезок $\psi(t)$, содержащийся в ω_i', имеет ограниченную сверху длину (лемма 3) и, покинув ω_i', $\psi(t)$ вторично пересечь ω_i' не может, легко проверить, что, согласно конструкции, примененной в упомянутом уже доказательстве теоремы 2, число скачков $\varphi(t)$, содержащихся в ω_α, ограничено сверху.

Пусть теперь $(x_0, \rho_0) \in X_n \times R$, $p > 0$ — произвольное вещественное число. Покажем, что для некоторого покрытия $\{\Omega_i\}$ многообразия $X_n \times \times R$ можно выбрать числа $\{\delta_i\}$ так, что кусочно-упорядоченная дуга $\Phi(t)$, исходящая из (x_0, ρ_0) и направленная «в будущее», не сможет содержать точку с координатой $\rho < \rho_0 - p$ (координата ρ — проекция точки (x, ρ) на R). Пусть $\{\Omega_i\}$ — покрытие $X_n \times R$, элементы которого — Ω_i — «цилиндры»; проекциями этих цилиндров на X_n служат элементы построенного выше покрытия $\omega_\alpha : \Omega_i = \omega_\alpha \times (\rho_1, \rho_2)$. Согласно лемме 10 мы можем ограничиться кусочно-упорядоченными дугами, удовлетворяющими условию: длина звена, пересекающего Ω_i, не меньше l_i, где $\{l_i\}$ — некоторая система положительных чисел. Наложим также предварительное условие: $\delta_i < \frac{1}{2} l_i$.

Пусть $[\Phi(t_1), \Phi(t_2)]$ — «отрезок» дуги $\Phi(t)$; легко видеть, что для каждого ω_α можно указать такое число N_α, что будет выполнено условие: если число всех скачков отрезка $[\Phi(t_1), \Phi(t_2)]$ больше N_α, проекции этих скачков на X_n содержатся в ω_α и $\text{пр}_R\, \Phi(t_1) \geqslant \rho_0 - p$, то $\text{пр}_R\, \Phi(t_2) > \rho_0$. Пусть $\Phi(t)$ определена отображением $\Phi : [0, 1] \to X_n$, $\Phi(0) = (x_0, \rho_0)$ и для некоторого t^* $\text{пр}_R\, \Phi(t^*) < \rho_0 - p$. Очевидно, в этом случае существует отрезок $[t_1, t_2]$ такой, что $\Phi[t_1, t_2]$ содержится в полосе $\rho_0 - p \leqslant \rho \leqslant \rho_0$, $\text{пр}_R\, \Phi(t_1) = \rho_0$, $\text{пр}_R\, \Phi(t_2) = \rho_0 - p$ (если $\Phi(t_2)$ — пара точек a, b, то имеется в виду, что $\text{пр}_R\, a \geqslant \rho_0 - p$, $\text{пр}_R\, b \leqslant \rho_0 - p$). Проекция отрезка $\Phi[t_1, t_2]$ на X_n, очевидно, обладает свойством: каждое ω_α содержит не более N_α последовательных ее скачков. Если теперь для цилиндров Ω_i, имеющих непустое пересечение с полосой $\rho_0 - p \leqslant \leqslant \rho \leqslant \rho_0$, выбрать δ_i, удовлетворяющие условию $\Sigma\, \delta_i c_\alpha < p$ (сумма берется по всем комбинациям i, α таким, что $\text{пр}_{X_n} \Omega_i$ и ω_α имеют непустое пересечение), то мы получим, очевидно, противоречие: $\text{пр}_R\, \Phi(t_2) > \rho_0 - - p$.

Пусть теперь $(x_1, \rho_1) \dashv (x_2, \rho_2)$. Мы видели, что при соответствующем выборе δ_i кусочно-упорядоченная дуга $\Phi(t)$, соединяющая (x_1, ρ_1), (x_2, ρ_2), лежит в области $\rho > \rho_1 - p$; повторение проведенного рассуждения для точки (x_2, ρ_2) и кусочно-упорядоченной дуги, исходящей из этой точки и направленной «в прошлое», показывает, что $\Phi(t)$ лежит в области $\rho < \rho_2 + p$. Отсюда немедленно следует, что $x_1 \dashv x_2\ (K)$: проекция кусочно-упорядоченной дуги, соединяющей (x_1, ρ_1) и (x_2, ρ_2), соединяет x_1 и x_2 и удовлетворяет условиям определения отношения $=\!|$. Далее, поскольку p было выбрано произвольно, $\rho_1 \leqslant \rho_2$.

Из доказанной теоремы следует утверждение: если структура K на X_n удовлетворяет H_2, то структура L на $X_n \times R$ также удовлетворяет H_2; в частности, существует структура L', $L' > L$, также удовлетворяющая H_2.

Теорема 4. *Если структура K на X_n удовлетворяет гипотезе H_2, то существует строго монотонная функция*

$$F : X_n \to R,$$

удовлетворяющая условию: для каждой области Ω *с компактным замыканием существует число* c_Ω *такое, что при* $x_1 \prec x_2 (K, \Omega)$

$$|F(x_2) - F(x_1)| > c_\Omega \cdot r(x_1, x_2)$$

($r(x_1, x_2)$ — *расстояние между* x_1, x_2 *в метрике* $d\sigma^2$). (см. [4]).

В силу теоремы 3, в $X_n \times R$ существует структура L', ($L' > L$). Определим L^* как структуру, конусы которой суть пересечения конусов L' и полупространств, состоящих из векторов, проекции которых на R неотрицательны. Очевидно, $L \prec L^* \prec L'$, и L^* также удовлетворяет H_2.

Пусть S — гиперповерхность в $X_n \times R$ (вообще говоря, класса c^0), никакие две точки которой не связаны отношением ($<$, L^*). S — график невозрастающей (относительно K) функции $f: X_n \to R$.

Действительно, пусть x_1, x_2 — точки из X_n, причем $x_1 \prec x_2$. Если бы было $f(x_1) < f(x_2)$, то точки $(x_1, f(x_1))$ и $(x_2, f(x_2))$ гиперповерхности были бы связаны отношением ($<$, L^*).

Мы построим гиперповерхность S, которую можно рассматривать как график функции, невозрастающей на X_n и строго убывающей в некоторой области $\omega \subset X_n$. Предположим, что $\omega \subset \text{пр}_{X_n}\Omega$, где Ω — область в $X_n \times R$. Предположим, что Ω удовлетворяет условию гипотезы H_1. Это означает, что отношения $m_1 \prec m_2 (L^*, \Omega)$, $m_1 < m_2 (L^*, \Omega)$ эквивалентны отношениям $m_1 \prec m_2 (L^*, X_n \times R)$, $m_1 < m_2 (L^*, X_n \times R)$, если m_1 и m_2 — любые точки из Ω. Построим часть искомой поверхности S_ω так, чтобы она однозначно проектировалась на ω и была расположена в области Ω. При этом предполагается, что точки S_ω не связаны отношением $< (L^*, \Omega)$, следовательно, и отношением $< (L^*, X_n \times R)$. Более того, потребуем, чтобы для S_ω, как графика функции $f: \omega \to R$, было выполнено условие: при $x_1 \prec x_2 (K, \omega)$ $f(x_1) - f(x_2) > c \cdot r(x_1, x_2)$ для некоторого $c > 0$. Мы опускаем описание построения S_ω, совершенно тривиальное при подходящем выборе ω.

Чтобы продолжить S_ω до графика искомой функции $f: X_n \to R$, выберем в X_n счетное всюду плотное множество точек $\{x_i\}$ и опишем построение точек $(x_i \times R) \cap S$. На «вертикальном» слое $x_1 \times R$ рассмотрим множество точек (x_1, ρ'), каждая из которых предшествует в смысле $< (L^*)$ хотя бы одной точке из S_ω; очевидно, $\sup \rho' < \infty$ ($\sup \rho' \leqslant \sup \text{пр}_R m$, $m \in S_\omega$). Точно так же $\inf \rho'' > -\infty$, где ρ'' — такое значение ρ, что хотя бы одна точка из S_ω предшествует точке (x_1, ρ). Далее, $\sup \rho' \leqslant \inf \rho''$ (в противном случае, как легко видеть, какие-либо две точки из S_ω были бы связаны отношением $< (L^*)$). Если выбрать ρ_1 так, что $\sup \rho' \leqslant \rho_1 \leqslant \inf \rho''$, то, поскольку множество пар точек, связанных отношением $<$, открыто, легко видеть, что точки множества $S_\omega \cup$ $\cup (x_1, \rho_1)$ не связаны отношением $< (L^*)$; проведенное построение, таким образом, можно повторить для $x_2 \times R$ и т. д.

Итак, график искомой функции $f: X_n \to R$ определен на множестве $\{x_i\}$. Гиперповерхность S определим как замыкание построенного множества точек $S_\omega \cup \{(x_i, \rho_i)\}$. Надлежит проверить, что построенное множество точек S есть гиперповерхность класса C^0, пересекающая каждую «вертикаль» $x \times R$ в одной и только одной точке. Решающим обстоятельством в этих рассуждениях служит тот факт, что «вертикальное» направление, касательное к слою R, принадлежит открытому конусу структуры L^* (это же направление принадлежит границе конуса естественной структуры $L = K + R_1$). Пусть, например, x — точка из X_n, и $\{x_{i_k}\}$, $k = 1 \ldots \infty$ — последовательность точек из упомянутого выше счетного множества $\{x_i\}$, сходящаяся к x. Очевидно, в любой окрестности U точки x найдутся точки a, b из множества $\{x_i\}$ такие, что «интервал» $J^{<}_{a,b}$ представляет собой окрестность точки x, $J^{<}_{a,b} \subset U$. Для достаточно большого k, очевидно, имеем $f(a) \geqslant f(x'_{jk}) \geqslant f(b)$, откуда следует, что на $x \times R$ существует по крайней мере одна точка множества S. Если на $x \times R$ было бы две точки (x, ρ') и (x, ρ'') множества $S(\rho' < \rho'')$, то поскольку $(x, \rho') < (x, \rho'')(L^*)$ (по $(x, \rho') \nless (x, \rho'')(L)$!) и множество пар (m, n), $m < n$ открыто, при достаточно больших k, l точки (x'_{i_k}, ρ'_{i_k}), (x''_{i_e}, ρ''_{ie}) последовательностей, сходящихся к (x, ρ') и (x, ρ''), также были бы связаны отношением $< (L^*)$, что противоречит построению S над множеством $\{x_i\}$, их которого выбраны x'_{i_k} и x''_{i_e}. Таким же образом проверяется непрерывность S. Итак, искомая функция $f: X_n \to R$ построена. Для построения строго убывающей функции F, удовлетворяющей условиям теоремы, покроем X_n счетным множеством окрестностей $\{\omega_i\}$; при подходящем выборе ω_i мы сможем, как показано выше, построить функции f_i, каждая из которых не возрастает на X_n и строго (и «достаточно быстро») убывает в соответствующей окрестности ω_i. Легко видеть, что всегда возможно подобрать коэффициенты $c_i > 0$ так, чтобы ряд $\Sigma c_i f_i$ правильно сходился в каждой компактной области $\Omega \subset X_n$. Очевидно, можно положить $F = \Sigma c_i f_i$.

Теорема 5. *Если K на X_n удовлетворяет H_2, то существует гладкая (C^∞) монотонная функция $\Phi: X_n \to R$, не имеющая на X_n особых точек* (grad $\Phi \neq 0$) *и такая, что в каждой точке $x \in X_n$ все направления конуса K_x структуры K лежат в полупространстве $d\Phi > 0$.*

Заметим, что эта теорема допускает также следующую формулировку: если структура K может быть мажорирована какой-либо структурой K', для которой отношение $<$ есть отношение порядка, то существует и структура K'', обладающая тем же свойством, причем конусы структуры K'' есть полупространства (если конусы K можно «расширить» сколь угодно мало, то их можно расширить до полупространств, не нарушая упорядоченности отношения $<$).

Перейдем к доказательству теоремы 5.

Пусть ω' — некоторая область X_n, гомеоморфная евклидовому шару. Пусть также $F: \omega' \to R$ — строго монотонная функция класса C^0, для определенности, строго возрастающая, причем для $x_1 \prec x_2 (K, \omega')$

$$F(x_2) - F(x_1) > c \cdot r(x_1, x_2), \ c > 0.$$

Представим себе ω' в виде области евклидова пространства E_n, в котором выбраны координаты $x', \dots x^n$, и продолжим произвольным образом F до интегрируемой функции, определенной на E_n. Пусть $\bar{\omega} \subset \omega'$. $\Phi(x) = \int\limits_{E_n} \psi(x-t) F(t) dv$, где $\psi \geqslant 0$, $\psi = \text{const}$ в сфере радиуса r с центром $0(0, \dots, 0)$, $\psi = 0$ вне сферы с тем же центром и радиусом $r + \delta$, $\psi \in C^\infty$ и $\int\limits_{E_n} \psi dv = 1$. Легко видеть, что $\Phi(x)$ — гладкая функция, аппроксимирующая F в ω с любой точностью, соответственно выбору r и δ. Пусть $x_1 \prec x_2 (K, \omega)$. Легко видеть, что при достаточно малом $r(x_1, x_2)$ $\left(\text{можно положить } r = \sqrt{\sum (x_2^i - x_1^i)^2}\right)$

$$\Phi(x_2) - \Phi(x_1) \geqslant c \cdot r(x_1, x_2),$$

откуда $|D\Phi| \geqslant c$, где $D\Phi$ — производная от Φ в направлении произвольного вектора конуса структуры K (в любой точке области ω).

Дальнейшее построение гладкой монотонной функции может быть проведено по хорошо известной схеме (см. [6]). Разъяснения требует лишь следующее обстоятельство.

Пусть $\{U_i\}$ и $\{\omega_i\}$ — покрытия X_n, причем для каждого i $\overline{U}_i \in \omega_i$, $\Omega_p = \bigcup_{i=1}^{p} U_i$, $\lambda(x)$ — дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям: $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, $\lambda = 0$ в U_{p+1}, $\lambda = 1$ вне ω_{p+1}; пусть $\Phi_p(x)$ — монотонная функция, гладкая в Ω_p и непрерывная на X_n. Положим $\Phi_{p+1} = \Phi_p$ в $X_n - \overline{\omega}_{p+1}$, $\Phi_{p+1} = \lambda(\Phi_p - \varphi_{p+1}) + \varphi_{p+1}$ в ω_{p+1}, где φ_{p+1} аппроксимирует (с выполнением соответствующих условий) Φ_p в U_{p+1}. Нужно проверить, что Φ_{p+1}, будучи гладкой в Ω_{p+1}, удовлетворяет условиям теоремы. Полагая

$$\Delta f = f(x_2) - f(x_1),\ \Delta x = r(x_1, x_2),\ x_1 \prec x_2, \quad \text{получим}$$

$$\frac{\Delta\Phi_{p+1}}{\Delta x} = \frac{\Delta\lambda}{\Delta x}\Big[(\Phi_p - \varphi_{p+1}) + (\Delta\Phi_p - \Delta\varphi_{p+1})\Big] + \Big[\lambda\frac{\Delta\Phi_p}{\Delta x} + (1-\lambda)\frac{\Delta\varphi_{p+1}}{\Delta x}\Big];$$

легко видеть, что все слагаемые правой части, кроме последнего, можно сделать сколь угодно малыми, последнее же не меньше c. Предположим, что после p-го шага (построения функции Φ_p, гладкой в Ω_p) оказалось, что $\Phi_p(x_2) - \Phi_p(x_1) \geqslant c_i^p \cdot r(x_1, x_2)$, если x_1 и x_2 — точки из ω_i, $x_1 \prec x_2\ (\omega_i)$. Приведенные выкладки показывают, что Φ_{p+1} удовлетворяет (при подходящем выборе φ_{p+1}) аналогичному условию, с заменой чисел c_i^p некоторыми числами $c_i^{p+1} > 0$, $0 < c_i^{p+1} < c_i^p$, причем для каждого i после конечного числа шагов $c_i^p = c_i^{p+1}$. Эти соображения и доказывают справедливость теоремы.

Теорема, обратная теореме 5, очевидна: если на X_n существует гладкая монотонная функция, Φ, удовлетворяющая условиям теоремы 5, то K удовлетворяет H_2, поскольку K мажорируется структурой K', конусы которой суть полупространства $d\Phi > 0$. Далее, из теоремы 5 немедленно следует, что декартово произведение $X_n \times X_m$ пространств, удовлетворяющих гипотезе H_2, также удовлетворяет этой гипотезе: если Φ_1 и Φ_2 — гладкие строго растущие функции, соответственно, на X_n и X_m, то $\Phi(x', x'') = \Phi(x') + \Phi(x'')\ (x' \in X_n, x'' \in X_n)$ — гладкая строго монотонная функция на $X_n \times X_m$.

Гипотеза A. Структура K на X_n удовлетворяет гипотезе A, если выполнена гипотеза H_1 и интервалы $J_{a,b}^{\prec}$ компактны (легко показать, что это определение эквивалентно определению «пространств класса A» в части I; см. также [5]). Ради простоты ниже рассматриваются структуры, определенные псевдоримановыми метриками.

Глобальным сечением, (см. [1, 5] и часть I) называется гиперповерхность (вообще говоря, класса C^0), никакие две точки которой не связаны отношением $\prec$ и которая пересекает любую полную (непродолжаемую) упорядоченную дугу. Известно, что существование глобального сечения обеспечивает выполнение гипотезы A. Наша цель — доказать обратное утверждение: выполнение гипотезы A обеспечивает существование гладкого глобального сечения. Будет также показано, что гипотеза A сильнее гипотезы H_2. Пример пространства, удовлетворяющего H_2 и не удовлетворяющего A: один из двух типов полных односвязных пространств постоянной кривизны не удовлетворяет гипотезе A, но оба типа удовлетворяют гипотезе H_2.

Построим в псевдоримановом X_n, удовлетворяющем гипотезе A, некоторую функцию $\psi(x_1, x_2)$, определенную для любой пары точек x_1, x_2, таких, что $x_1 \prec x_2$. $\psi(x_1, x_2)$ есть верхняя грань длин (в смысле вспомогательной римановой метрики) упорядоченных дуг, соединяющих x_1 и x_2.

Легко видеть, что $\psi(x', x'') \leqslant \lim\inf \psi(x_i', x_i'')$, если $(x_i', x_i'' \to (x', x'')$. Действительно, пусть $\varphi(t)$ — геодезическая (в смысле псевдоримановой структуры) ломаная с упорядоченными звеньями, длина которой достаточно мало отличается от $\psi(x', x'')$, $\varphi(O)=x'$, $\varphi(1)=x''$. Очевидно, x'_i и x''_i можно соединить упорядоченной ломаной $\varphi_i(t)$ с длиной, сколь угодно близкой к длине $\varphi(t)$, если пара (x'_i, x''_i) достаточно близка к (x', x'') (построение $\varphi_i(t)$ может быть основано на замечании: если $a_p\, a_{p+1}$ — звено геодезической ломаной $\varphi(t)$, то для любой окрестности ω_p точки a_p найдется окрестность ω_{p+1} точки a_{p+1}, каждую точку которой можно соединить упорядоченной геодезической с какой-либо точкой из ω_p). Таким образом, $\psi(x_1, x_2)$ полунепрерывна; нетрудно было бы привести пример X_n, в котором эта функция не непрерывна. Но выполнение гипотезы A обеспечивает непрерывность $\psi(x_1, x_2)$.

Действительно, пусть $(a_i, b_i)\to(a, b)$, $\varphi_i(t)$ геодезические ломаные, соединяющие a_i, b_i, причем $\sigma_i>\psi(a_i, b_i)-\delta_i$ (σ_i — риманова длина $\psi_i(t)$, $\delta_i\to 0$). Не ограничивая общности, можно предположить, что последовательность $\varphi_i(t)$ сходится к упорядоченной дуге $\varphi(t)$, $\varphi(O)=a$, $\varphi(1)=b$. Предположим сначала, что $\varphi(t)$ строго упорядочена в точках a и b (для некоторого отрезка $[O, \alpha]$ и $t\in[O, \alpha)$ $a<\varphi(t)$; аналогично для b). Согласно лемме 2, для сколь угодно малого t_1 и сколь угодно близкого к единице t_2 при достаточно большом i $a<\varphi_i(t_1)\prec\varphi_i(t_2)<b$, т. е. a и b можно соединить упорядоченной ломаной, длина которой сколь угодно близка к любому σ_i с достаточно большим i. Следовательно, $\psi(a, b)\geqslant$ $\geqslant\limsup\sigma_i$.

В общем случае это же рассуждение можно применить к участку $\varphi(\alpha)$, $\varphi(\beta)$ дуги $\varphi(t)$, где α — верхняя грань значений t таких, что $a\not\prec\varphi(\alpha)$ (аналогично определяется β). Участки a, $\varphi(\alpha)$ и $\varphi(\beta)$, b дуги $\varphi(t)$ — изотропные геодезические. Легко видеть, что римановы длины упорядоченных дуг, сходящихся к изотропной геодезической, сходятся к длине этой геодезической; очевидно, $\psi(a, b)\geqslant\psi(a, a')+\psi(a', b')+$ $+\psi(b', b)\geqslant\limsup\sigma_n$, $a'=\varphi(\alpha)$, $b'=\varphi(\beta)$. Отметим некоторые свойства функции $\psi(x_1, x_2)$.

Прежде всего, если O — фиксированная точка из X_n, то $\psi(O, x)$ — монотонная функция на $F_0^{\prec}$, растущая «достаточно быстро»: $\psi(O, x_2)-$ $\psi(O, x)\geqslant r(x_1, x_2)$ при $O\prec x_1\prec x_2$. Далее пусть $F_o(c)$ — множество точек x из $F_0^{\prec}$, для которых $\psi(0x)\leqslant c$; поскольку $\psi(O, x)\geqslant r(O, x)$ и вспомогательная метрика $d\sigma^2$ полна на X_n, $F_o(c)$ компактно. Упорядоченная дуга, покинув $F_o(c)$, вернуться в $F_o(c)$ не может. Если $\psi:(-\infty, \infty)\to$ $\to X_n$ — полная упорядоченная дуга, $\psi(t_o)=0$, то $\lim\psi(O, \varphi(t))=\infty$, $t\to\infty$ (обращаем внимание читателя на то, что это обстоятельство не связано с геодезической полнотой псевдоримановой метрики ds^2).

Покажем, что выполнение гипотезы A обеспечивает выполнение H_2. Пусть $0>a_1>\ldots>a_i>\ldots>a_1$ $a_i\to a$. Поскольку гипотеза A выполнена, $F_{a_i}^{\prec}$ замкнуты, причем $F_{a_i}^{\prec}\subset F_{a_{i+1}}^{\prec}$. Выберем последовательность чисел $c_i\to\infty$. Легко видеть, что в компактном $F_a(c_1)$ при любом выборе $l_1>0$ можно так выбрать $\delta_1>0$, что кусочно-упорядоченная дуга с началом в O (со звеньями $\geqslant l_1$ и скачками $\leqslant\delta_1$), лежащая в $F_a(c_1)$, не выйдет за пределы $F_a(c_1)\cap F_{a_1}^{\prec}$. Далее, при любом $l_2>0$ легко выбрать $\delta_2>0$ так, чтобы соответствующие кусочно-упорядоченные дуги с началом в $F_a(c_1)\cap F_{a_1}^{\prec}$ не вышли за пределы $F_a(c_2)\cap F_{a_2}^{\prec}$ и т. д. В силу отмеченного выше свойства — упорядоченная дуга, выйдя из $F_a(c)$, вторично в $F_a(c)$ не возвращается — легко видеть, что $0\neq\!\mid x_1$ для любой точки x_1, не лежащей в $F_a^{\prec}$. Поскольку для любой точки x такой, что $0\not\prec x$, можно подобрать $a<0$ так, чтобы $F_a^{\prec}\not\ni x$ (заметим, что это утверждение также обеспечивается выполнением гипотезы A), $0\neq\!\mid x$. Таким образом, отношения $=\!\mid$ и $\prec$ совпадают; следовательно, гипотеза H_2 выполнена.

Покажем, что функция $\psi(O, x)$ (O фиксировано), определенная в $F_O^{\prec}$, может быть продолжена до непрерывной неубывающей функции $\psi_0 : X_n \to R$. Построение графика проводится по схеме, изложенной в доказательстве теоремы 4. Заменим $\psi(O, x)$ убывающей функцией $(-\psi(O, x))$; график этой функции обозначим через S_0. По-прежнему $\{x_i\}$ — счетное всюду плотное множество в X_n; пользуясь обозначениями, примененными в доказательстве теоремы 4, рассмотрим снова $\sup \rho'$ и $\inf \rho''$; снова $\sup \rho' < \infty$ (поскольку $\sup(-\psi(O, x)) = 0$). Однако в рассматриваемом случае уже не очевидно, что $\inf \rho'' > -\infty$; не очевидно также, что L^* может быть выбрано таким образом, чтобы точки S_0 не были связаны попарно отношением $(<, L^*)$. Покажем, что структура L^* может быть выбрана способом, снимающим указанные возражения.

Действительно, пусть $a < 0$ (K, X_n). Поместим S_0 в «полосу» Ω: Ω состоит из точек (x, ρ), для которых $x \in F_a^{\prec}$, $-\psi(a, x) \leqslant \rho \leqslant 0$. Полосу Ω покроем компактными областями $\Omega_i : \Omega_i \ni (x, \rho)$,

$$c_1^i \leqslant \psi(a, x) \leqslant c_2^i.$$

Легко видеть, что для произвольного набора чисел $\{l_i\}$, $l_i > 0$ существуют положительные числа $\{\delta_i\}$ такие, что точки S_0 попарно не могут быть соединены кусочно-упорядоченной дугой, звенья которой, пересекающие Ω_i, не меньше l_i, а соответствующие скачки не больше δ_i. Из этого замечания легко следует существование структуры L^*, $L \prec L^*$, относительно которой точки S_0 не связаны попарно отношением $<$. При этом по построению конусы L^* содержат лишь векторы с неотрицательными проекциями на R, в том числе «вертикальное» направление.

Далее, легко видеть, что структура L^* может быть выбрана так, что L^*-упорядоченная дуга с началом на S_0 может покинуть Ω только в точке, где $\rho = 0$. Для доказательства (как в изложенных выше рассуждениях при проверке эквивалентности отношений $=\!|$ и $\prec$) можно выбрать последовательность $a_i \to a$, $0 > a_1 > \ldots > a_i > \ldots > a$, рассмотреть T_i-подмножества Ω, состоящие из точек (x, ρ), для которых $x \in F_{a_i}^{\prec}$ и проверить, что при подходящем выборе L^* L^*-упорядоченная дуга с началом в S_0, лежащая в $\bigcup\limits_{i=1}^{p} \Omega_i$, не выходит за пределы $\left(\bigcup\limits_{i=1}^{p} \Omega_i\right) \cap T_p$.

Легко проверить теперь, что на любом «вертикальном» слое (x, ρ) $(x = \text{const})$ существуют точки, которым не предшествует (в смысле L^*) ни одна точка из S_0: достаточно взять точку (x, ρ), не принадлежащую Ω, для которой $\rho < 0$.

Итак, проверено последнее условие: $\inf \rho'' > -\infty$. Тем самым доказана

Лемма 11. *Если псевдориманово X_n удовлетворяет гипотезе А, то для любого $0 \in X_n$ функция $\psi(0, x)$ может быть продолжена до непрерывной неубывающей функции:*

$$\psi_0 : X_n \to R.$$

Выберем снова в X_n счетное всюду плотное множество точек $\{x_i\}$ и для каждой из них определим функцию ψ_i упомянутую в последней лемме. Пусть $\psi' = \Sigma c_i \psi_i$, где положительные числа c_i подобраны так, чтобы рассмотренный ряд правильно сходился в любой компактной области Ω. Функция ψ' обладает свойством: если $\varphi(t)$ — полная упорядоченная дуга, то $\psi'(\varphi(t)) \to \infty$ при $t \to \infty$. Таким же образом можно найти функцию ψ'', для которой $\psi''(\varphi(t)) \to -\infty$ при $t \to -\infty$; очевидно, функция $\psi = \psi' + \psi''$ есть строго (и «достаточно быстро» в смысле теоремы 4) растущая функция, удовлетворяющая условию: для каждой полной упорядоченной дуги $\varphi(t)$, $\sup \psi(\varphi(t)) = \infty$, $\inf \psi(\varphi(t)) = -\infty$.

Согласно теореме 5, ψ может быть аппроксимирована гладкой монотонной функцией; очевидно, эта функция также обладает указанным выше свойством. Таким образом, имеет место

Теорема 6. *Если псевдориманово X_n удовлетворяет гипотезе А, то справедливы утверждения:*

1) *в X_n выполнена гипотеза H_2, причем отношения $\dashv$ и $\prec$ эквивалентны;*

2) *существует гладкая строго монотонная функция без особых точек $\psi : X_n \to R$, каждая поверхность уровня которой есть глобальное сечение.*

Как известно, в случае существования гауссовой поверхности X_n допускает простое описание: $X_n = X_{n-1} \times R$, причем слои X_{n-1} пространственноподобны (см. [5]).

ЛИТЕРАТУРА

1. S. W. Hawking. Proceed. Roy. Soc. s. A, 294, 1966, 511—521.
2. S. W. Hawking. Proceed. Roy. Soc. s. A, 295, 1966, 490—493.
3. S. W. Hawking. Proceed. Roy. Soc. s. A, 300, 1967, 187—201.
4. S. W. Hawking. Proceed. Roy. Soc. s. A, 308, 1969.
5. H. I. Seifert. Zeitschr. für Naturforsch., 9, 1967, 1356—1360.
6. Н. Стинрод. Топология косых произведений. Изд-во иностр. лит., М., 1953.
7. Р. И. Пименов. Пространства кинематического типа. Изд-во «Наука», Л., 1968.
8. А. Д. Александров. Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей. ОГИЗ, М. — Л., 1948.
9. М. Улановский. Упорядоченные псевдоримановы пространства. I. Укр. геометр. сб., вып. 7, Изд-во ХГУ, Харьков, 1969.

Поступила 8 декабря 1969 г.

О ПОЛУПРИВОДИМОСТИ В ЦЕЛОМ РИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

Я. Л. Шапиро

(Горький)

ВВЕДЕНИЕ

Пусть на пространстве аффинной связности (L^n) задано ω-мерное ($\omega + 1 < n$) распределение (Q^ω).

Пусть, далее, $q \in Z^n$, D — некоторая окрестность q и V_p^ω — максимальное интегральное многообразие распределения Q^ω, проходящее через $p \in L^n$.

Предположим, что τ — любое направление в $p \in D$, не принадлежащее V_p^ω, а $\gamma(s)$ — геодезическая линия на D с аффинным параметром s, пробегающим интервал J.

Если подмногообразие

$$V^{\omega+1}(\gamma) = \bigcup_{s \in J} V_{\gamma(s)}^\omega \cap D$$

является вполне геодезическим[1] для любой точки $p \in D$, любого τ и некоторого J, то Q^ω называется геодезическим распределением (или геодезическим полем ω-мерных направлений) в окрестности q.

Если распределение на L^n геодезично в окрестности любой точки $p \in L^n$, то будем его называть локально-геодезическим (на L^n).

Известно ([1, 2]), что условие геодезичности распределения Q^ω в окрестности точки риманова пространства V^n (мы его предполагаем здесь собственноримановым, класса C^V, $V \geqslant 2$) можно записать в виде

$$A^a_{,\alpha\beta} = T^a g_{\alpha\beta} - G^a_{bc} A^b_{,\alpha} A^c_{,\beta}$$
$$(a,\ b, \dots,\ h = 1, \dots,\ \omega;\ \alpha,\ \beta, \dots = 1, \dots,\ n), \tag{1}$$

где A^a — ω функций, вектор-градиенты $\left(A^a_{.\alpha}\right)$ которых образуют локальный базис Q^ω, T^a и G^a_{bc}, некоторые (дифференцируемые) функции от A^d, $g_{\alpha\beta}$ — метрический тензор V^n, а запятая обозначает ковариантное дифференцирование на базе $g_{\alpha\beta}$.

Пусть $Q^{n-\omega}$— распределение, дополнительное по ортогональности к Q^ω.

Как следует из (1), $Q^{n-\omega}$ — снова инволютивно, в связи с чем функции $A^a = u^a$ можно дополнить другими функциями u^i $(i,\ j,\ k,\ l = \omega + 1, \dots,\ n)$ таким образом, что u^a являются координатами на (открытой) окрестности (U) точки p, причем интегральные многообразия распределения Q^ω на D определены уравнениями $u^i = \mathrm{const}$, а интегральные многообразия $Q^{n-\omega}$ — уравнениями $u^a = \mathrm{const}$.

Координатные пары $(U,\ \varphi)$ определенного таким образом класса координатных систем будем называть адаптированными (к локально-геодезическому распределению). Можно показать (см. [2], стр. 133—138), что dS^2 на V^n для адаптированной пары $(U,\ \varphi)$ имеет вид

$$dS^2 = g_{ab}(u^c)\, du^a du^b + e^{2T(u^c)}\, \pi_{ij}(u^k)\, du^i du^j, \tag{2}$$

где g_{ab}, T, π_{ij} — некоторые функции класса C^v, причем

$$\frac{\partial T}{\partial u^a} = g_{ab} T^b. \tag{3}$$

Наоборот, из (2) следует (1) для $u^a = A^a$. Метрика вида (2) рассматривалась многими авторами с различных точек зрения, в работе [3] она названа полуприводимой. В связи с этим термином назовем V^n с локально-геодезическим распределением (на V^n) полуприводимым (в целом).

Заметим, что в случае, когда $T^a = 0$ для полуприводимого (в целом) V^n, то V^n — приводимо в известном смысле этого слова.

1. Аналог теоремы де Рама для полуприводимого (в целом) V^n

Пусть, кроме базиса $A^a_{,\alpha}$ в окрестности $p \in V^n$ локально-геодезического (на V^n) Q^ω, мы имеем еще локальный базис $A'^a_{,\alpha}$ того же Q^ω в окрестности $p' \in V^n$. Если q принадлежит пересечению упомянутых окрестностей, то (для q) имеем

$$A'^a_{,\alpha} = m^a_b A^b_{,\alpha}, \tag{4}$$

где $\left(m^a_b\right)$ — матрица ранга ω. Введя величины $g^{*ab} = g_{\alpha\beta} A^{a\alpha} A^{b\beta}$, мы замечаем закон преобразования

$$g^{*\prime ab} = g^{*cd} m^a_c m^b_d,$$

[1] Подмногообразие мы называем вполне геодезическим, если через любую его точку в любом его направлении проходит геодезическая объемлющего пространства, на некотором своем протяжении принадлежащая подмногообразию.

соответствующий переходу от одного базиса Q^{ω} к другому. Обозначая через $\overset{*}{g}_{ab}$ $(\overset{*}{g}_{ab}=\overset{*}{g}_{ba})$ элементы обратной для (g^{*ab}) матрицы, введем еще величины

$$T_a = \overset{*}{g}_{ab}T^b$$

и отметим их закон преобразования

$$T'_a = \tilde{m}_a^b T_b,$$

где $\left(\tilde{m}_a^b\right)$ — матрица, обратная $\left(m_a^b\right)$.

Отсюда и из (4) следует

$$T'_a dA'^a = T_a dA^a.$$

Таким образом, форма $\psi = T_a dA^a$ на V^n определена локально-геодезическим Q^{ω}.

Как легко видеть, для пары $(U, \varphi): \overset{*}{g}_{ab} = g_{ab}$ и в связи с (3) — $T_a = \dfrac{\partial T}{\partial u^a}$.

Следовательно, внешний дифференциал ψ равен нулю. Таким образом, при односвязном V^n формулой

$$\mathrm{T} = \int\limits_{p_0}^{p} \psi,$$

в которой интегрирование происходит по произвольной (кусочнодифференцируемой) кривой, соединяющей фиксированную точку p_0 с произвольной точкой p, определена однозначная функция $\mathrm{T}(p)$.

Рассматривая ее для (U, φ), имеем

$$\mathrm{T} = \int\limits_{p_0}^{p} \left(\frac{\partial T}{\partial u^a}\right) du^a = T(u^b) + C, \tag{5a}$$

где C — постоянная.

Следовательно, dS^2 (для (U, φ)) может быть написано в виде

$$dS^2 = g_{ab}du^a du^b + e^{2\mathrm{T}}\overset{\circ}{\pi}_{ij}du^i du^j. \tag{6}$$

Кроме того, из (5a) следует, что T постоянно на любом $V^{n-\omega}$.

Введем теперь на (односвязном) V^n вспомогательную метрику

$$d\bar{S}^2 = e^{-2\mathrm{T}}dS^2.$$

Если V^n полно и T ограничено (по модулю), то $\bar{V}^n$ с метрикой $d\bar{S}^2$ тоже полно. Кроме того, для пары (U, φ)

$$d\bar{S}^2 = e^{-2\mathrm{T}}g_{ab}du^a du^b + \overset{*}{\pi}_{ij}du^i du^j,$$

откуда следует, что по отношению к $d\bar{S}^2$ поля плоскостей, соответствующие Q^{ω} и $Q^{n-\omega}$, являются полями абсолютного параллелизма.

Таким образом, $\bar{V}^n$ приводимо, и согласно теореме де Рама ([4], стр. 340) для приводимого, односвязного и полного V^n, построив $V^{\omega}_{p_0}$ и $V^{n-\omega}_{p_0}$ для Q^{ω} и $Q^{n-\omega}$, можно утверждать, что а) $V^{\omega}_{p_0}$ и $V^{n-\omega}_{p_0}$ односвязны и полны по отношению к индуцированным на них метрикой $d\bar{S}^2$ метрикам $(d\bar{s}^2$ и $ds_v^2)$; б) каждое V^{ω} пересекается с каждым $V^{n-\omega}$ в одной точке, если через $p \in V^n$ провести V^{ω}_p и $V^{n-\omega}_p$ до пересечения с $V^{\omega}_{p_0}$ и $V^{n-\omega}_{p_0}$ в точках x и x_v, то отображение

$$\Psi: \bar{V}^n \to V^{\omega}_{p_0} \times V^{n-\omega}_{p_0}: p \to (x, x_v)$$

является изометрией $\bar{V}^n$ на риманово произведение

$$V^{\omega}_{p_0} \times V^{n-\omega}_{p_0}.$$

Следовательно, введя регулярные отображения $\Phi : p \to x$ и $\Phi_v : p \to \to x_v$, будем иметь

$$d\bar{S}^2 = \Phi^* d\bar{s}^2 + \Phi_v^* ds_v^2, \tag{7}$$

где Φ^* и Φ_v^* обозначают отображения (форм), сопряженные с Φ и Φ_v.

Пусть $T_* = I^* T$, где I — вложение $V^{\omega}_{p_0}$ в V^n. Так как T постоянно на любом $V^{n-\omega}$, то $T = \Phi^* T_*$.

Таким образом, из (7) следует

$$dS^2 = \Phi^* e^{2T_*} d\bar{s}^2 + e^{2T} \Phi_v^* ds_v^2$$

или, обозначая $e^{2T_*} d\bar{s}^2 = ds^2$,

$$dS^2 = \Phi^* ds^2 + e^{2T} \Phi_v^* ds_v^2, \tag{8}$$

причем $V^{\omega}_{p_0}$ полно также относительно ds^2. Таким образом, справедлива

Теорема 1. *Если на односвязном полном V^n определено локально-геодезическое распределение и определяемая им (т. е. Q^{ω}) функция T (согласно (5)) ограничена по модулю, то имеет место диффеоморфизм (Ψ) многообразия V^n на произведение двух многообразий (V^{ω} и $V^{n-\omega}$), односвязных и полных относительно определенных на них римановых метрик $\left(ds^2 \text{ и } ds_v^2\right)$.*

Кроме того, если Φ и Φ_v — регулярные отображения V^n на V^{ω} и $V^{n-\omega}$, (канонически) определяемые Ψ, то для dS^2 на V^n имеет место (8).

Наоборот, если имеет место диффеоморфизм (Ψ) W^n на произведение двух односвязных многообразий (V^{ω} и $V^{n-\omega}$) полных относительно римановых метрик $\left(ds^2 \text{ и } ds_v^2\right)$ и T_* — некоторая ограниченная по модулю функция на V^{ω}, то, определяя на многообразии $V^n = V^{\omega} \times V^{n-\omega}$ риманову метрику формулой

$$dS^2 = \Phi^* ds^2 + e^{2\Phi^* T_*} \Phi_v^* ds_v^2, \tag{9}$$

где Φ и Φ_v — канонические отображения произведения на его сомножители, мы получим риманово W^n, для которого выполняются все условия теоремы 1.

В самом деле, нетрудно проверить (см. 2), что множества $(\Phi_v)^{-1}(p_v)$, $(p_v \in V^{n-\omega})$ являются максимальными интегральными многообразиями для некоторого локально-геодезического распределения на V^n, очевидным образом удовлетворяющего и остальным условиям теоремы 1.

Теорема де Рама оказывается частным случаем теоремы 1, соответствующим предположению $T^a = 0$. Локально-геодезическое распределение Q^{ω} будем называть геодезическим, если существует такое регулярное отображение (Φ) V^n на некоторое многообразие $X^{n-\omega}$, что максимальные интегральные многообразия распределения совпадают с (предполагаемые связными) многообразиями

$$\Phi^{-1}(p)\,(p \in X^{n-\omega}).$$

Мы можем, следовательно, утверждать, что локально-геодезическое распределение при условиях теоремы 1 является геодезическим.

2. Приводимость локально-геодезического распределения

Локально-геодезическое Q^{ω} будем называть приводимым к локально-геодезическому $Q^{\tilde{\omega}} \left(\tilde{\omega} < \omega\right)$, если $Q^{\tilde{\omega}}_P \subset Q^{\omega}_P$, где P — любая точка V^n (или L^n) и Q^{ω}_P обозначает ω — плоскость, соответствующую Q^{ω} в P.

В дальнейшем мы предполагаем, что Q^ω и V^n удовлетворяют условиям теоремы 1.

Пусть $u^a (a = 1, \dots, \omega)$ — координаты на открытой окрестности w точки $p \in V^\omega$, а $u^i (i = \omega + 1, \dots, n)$ и w_v играют аналогичную роль по отношению к $p_v \in V^{n-\omega}$.

Тогда $u^\alpha (\alpha = 1, \dots, n)$ — координаты на окрестности $U = \Psi^{-1} (w \times \times w_v)$ точки $P = \Psi^{-1} (p \times p_v) \in V_n$.

Для построенной таким образом координатной пары (U, φ) на V^n отображения Φ и Φ_v записываются в виде

$$\Phi : u^\alpha \to u^a, \ \Phi_v : u^\alpha \to u^i.$$

Метрика dS^2 на V^n записывается, согласно (8), для (U, φ) в виде

$$dS^2 = g_{ab} du^a du^b + e^{2\mathrm{T}} \pi_{ij} du^i du^j, \tag{10}$$

где $ds^2 = g_{ab} du^a du^b$, $ds_v^2 = \pi_{ij} du^i du^j$ — римановы метрики на V^ω и $V^{n-\omega}$, записанные для локальных координат u^a и u^i.

Можно, очевидно, положить $\mathrm{T} = \Phi^* \mathrm{T}_*$, где T_* — ограниченная (по модулю) функция на V^ω. Множества $\Phi^{-1} (p)$, $(p \in w)$ и $(\Phi_v)^{-1}$, (p_v), $(p_v \in w_v)$ определены уравнениями $\Phi^* u^v = \mathrm{const}$, $(\Phi_v)^* u^i = \mathrm{const}$ и на них естественным образом определена структура (связного) многообразия, при которой они являются подмногообразиями V^n. Касательные к $(\Phi_v)^{-1} (p_v)$ ω-плоскости образуют распределение Q^ω, аналогично строится распределение $Q^{n-\omega}$. Очевидно, $\Phi^{-1} (p)$ и $(\Phi_v)^{-1} (p_v)$ являются максимальными интегральными многообразиями для построенных Q^ω и $Q^{n-\omega}$.

С другой стороны, как видно из (10), распределение Q^ω является локально-геодезическим (точнее — геодезическим) и пара (U, φ) адаптирована к Q^ω.

Для функций $\Phi^* u^a = u^a = A^a$ имеют место (1), из которых, рассматривая A^a как координаты, мы имеем

$$G^a_{bc} = \Gamma^a_{bc} - T^a g_{bc}, \tag{11}$$

где Γ^a_{bc} — коэффициенты римановой связности на V^ω.

Таким образом, G^a_{bc} — коэффициенты некоторой аффинной связности (Ω), которую мы назовем присоединенной.

Если Q^ω приводимо к локально-геодезическому $Q^{\tilde{\omega}} \left(\tilde{\omega} < \omega\right)$, соответствующая которому функция $\tilde{\mathrm{T}}$ ограничена, то, повторяя для $Q^{\tilde{\omega}}$ предыдущие построения, будем иметь диффеоморфизм $\tilde{\Psi} : V^n \to V^{\tilde{\omega}} \times V^{n-\tilde{\omega}}$, локальные координаты $\tilde{u}^{a'} (a', \dots, h' = 1, \dots, \omega)$, $\tilde{u}^{i'} (i', j', \dots = \omega + 1, \dots, n)$ на $V^{\tilde{\omega}}$ и $V^{n-\tilde{\omega}}$, координатную пару $\left(\tilde{U}, \tilde{\varphi}\right)$, функции $\tilde{\Phi}^* \tilde{u}^{a'} = \tilde{u}^{a'} = \tilde{A}^{a'}$, удовлетворяющие уравнениям

$$\tilde{A}^{a'}_{,\alpha\beta} = \tilde{T}^{a'} \left(\tilde{A}^{d'}\right) g_{\alpha\beta} - \tilde{G}^{a'}_{b'c'} \left(\tilde{A}^{d'}\right) \tilde{A}^{b'}_{,\alpha} \tilde{A}^{c'}_{,\beta}, \tag{12}$$

и, наконец, соотношения

$$\tilde{G}^{a'}_{b'c'} = \tilde{\Gamma}^{a'}_{b'c'} - \tilde{T}^{a'} \tilde{g}_{b'c'}, \tag{13}$$

характеризующие $\tilde{G}^{a'}_{b'c'}$, как коэффициенты присоединенной связности (Ω) на $V^{\tilde{\omega}}$.

Пусть M^ω — множество максимальных интегральных многообразий распределения $Q^{n-\omega}$ и $V^{n-\omega} \in M^\omega$. Отображение $V^{n-\omega}_P \to \Phi (P)$ $(P \in V^{n-\omega})$

является взаимно однозначным соответствием между элементами M^{ω} и V^{ω}. То же можно сказать об аналогичном множестве $M^{\widetilde{\omega}}$, построенном для $Q^{\widetilde{\omega}}$.

Поскольку $Q^{n-\omega}$, $Q^{n-\widetilde{\omega}}$ дополняют по ортогональности Q^{ω} и $Q^{\widetilde{\omega}}$, то из приводимости Q^{ω} к $Q^{\widetilde{\omega}}$ следует: $Q_P^{n-\omega} \subset Q_P^{n-\widetilde{\omega}}$.

Таким образом, если $P \in V^{n-\omega} \cap V^{n-\widetilde{\omega}}$, то $V^{n-\omega} \subset V^{n-\widetilde{\omega}}$ и соответствие $F: V_P^{n-\omega} \to V_P^{n-\widetilde{\omega}}$ является отображением M^{ω} на $M^{\widetilde{\omega}}$. Следовательно, F является также отображением V^{ω} на $V^{\widetilde{\omega}}$.

В окрестности $P \in V^n$, на которой действуют обе пары (U, φ), $(\widetilde{U}, \widetilde{\varphi})$, $A^a_{,\alpha}$ и $\widetilde{A}^{a'}_{,\alpha}$ образуют локальные базисы Q^{ω} и $Q^{\widetilde{\omega}}$. Вследствие приводимости Q^{ω} имеем

$$\widetilde{A}^{a'}_{,\alpha} = m^{a'}_a A^a_{,\alpha}, \tag{14}$$

откуда следует, что

$$\widetilde{A}^{a'} = f^{a'}(A^a), \tag{15}$$

где $f^{a'}$ — дифференцируемые функции и ранг матрицы $\left\| \frac{\partial A^{a'}}{\partial A^a} \right\|$ равен $\widetilde{\omega}$.

Так как приводимость Q^{ω} к $Q^{\widetilde{\omega}}$ эквивалентна вложению $Q_P^{n-\omega} \subset Q_P^{n-\widetilde{\omega}}$, которым определяется F, то (15) представляет F в локальных координатах. Отсюда, в частности, следует, что Fрегулярно.

Кроме того, из (1), (12) и (14) прямыми вычислениями можно получить

$$\widetilde{G}^{a'}_{b'c'} m^{b'}_b m^{c'}_c = m^{a'}_a G^a_{bc} - \frac{\partial^2 \widetilde{u}^{a'}}{\partial u^b \partial u^c},$$

где

$$m^{a'}_a = \frac{\partial \widetilde{u}^{a'}}{\partial u^a}.$$

Таким образом, F оказывается гомоморфизмом Ω на $\widetilde{\Omega}$ (в смысле М. Улановского, см. [5], стр. 281—282).

Пусть теперь F гомоморфизм V^{ω} (как многообразия аффинной связности Ω) на какое-либо пространство аффинной связности $L^{\widetilde{\omega}}$ $(\widetilde{\omega} < \omega)$ (иначе говоря, гомоморфизм Ω на связность Ω' пространства $L^{\widetilde{\omega}}$).

Введем регулярное отображение $\widetilde{\Phi} = F \circ \Phi$. Пусть $\widetilde{u}^{a'}$ $(a', \ldots, h' = 1, \ldots, \widetilde{\omega})$ локальные координаты на $L^{\widetilde{\omega}}$ и $\widetilde{\Gamma}^{a'}_{b'c'}$ — соответствующие коэффициенты связности. Положим $\widetilde{A}^{a'} = (\widetilde{\Phi})^* \widetilde{u}^{a'}$. Очевидно $\widetilde{A}^{a'} = f^{a'}(A^a)$, где A^a — функции на некоторой области $D \subset V^n$, вектор-градиенты которых $(A^a_{,\alpha})$ образуют локальный базис распределения Q^{ω}. Следовательно, имеют место соотношения (1).

Наряду с (1) мы имеем

$$\widetilde{A}^{a'}_{,\alpha} = \frac{\partial f^{a'}}{\partial A^a} A^a_{,\alpha}. \tag{16}$$

К этому (полагая $u^a = A^a$) добавляются соотношения

$$\tilde{\Gamma}^{a'}_{b'c'} \frac{\partial \tilde{u}^{b'}}{\partial u^b} \frac{\partial \tilde{u}^{c'}}{\partial u^c} = \frac{\partial \tilde{u}^{a'}}{\partial u^a} G^a_{bc} - \frac{\partial^2 \tilde{u}^{a'}}{\partial u^b \partial u^c}, \tag{17}$$

выражающие в локальных координатах, что F — гомоморфизм. Но из (1), (16) и (17) следует

$$\tilde{A}^{a'}_{,\alpha\beta} = \tilde{T}^{a'} g_{\alpha\beta} - \tilde{\Gamma}^{a'}_{b'c'}\left(\tilde{A}^{d'}\right) \tilde{A}^{b'}_{,\alpha} \tilde{A}^{c'}_{,\beta}, \tag{18}$$

где

$$\tilde{T}^{a'} = \frac{\partial f^{a'}}{\partial u^a} T^a.$$

Из (18) нетрудно получить $\tilde{T}^{a'} = \tilde{T}^{a'}\left(\tilde{A}^{b'}\right)$.

Таким образом, распределение $\tilde{Q^\omega}$, образованное $\tilde{\omega}$-плоскостями, ортогональными касательным $n - \omega$-плоскостям к многообразиям $(\Phi)^{-1} \times \times (p) \left(p \in \tilde{L^\omega}\right)$, является локально-геодезическим. Кроме того, из геометрически очевидных соображений следует, что Q^ω приводимо к $\tilde{Q^\omega}$.

Теорема 2. *Пусть для V^n и локально-геодезических распределений Q^ω, $\tilde{Q^\omega}$ (на V^n) выполнены условия теоремы 1, причем Q^ω приводимо к $\tilde{Q^\omega}$. Тогда существует гомоморфизм аффинной связности (Ω), присоединенной к Q^ω, на связность $\tilde{\Omega}$, играющей ту же роль по отношению к $\tilde{Q^\omega}$. Наоборот, если существует гомоморфизм Ω на какую-либо аффинную связность Ω' $\left(\text{на } \tilde{L^\omega}\right)$, то Q^ω приводимо к локально-геодезическому $\tilde{Q^\omega}$. Если $\tilde{Q^\omega}$ удовлетворяет условию теоремы 1, то Ω' совпадает с присоединенной к $\tilde{Q^\omega}$ связностью $\left(\tilde{\Omega}\right)$.*

Будем говорить, что локально-геодезическое Q^ω распадается в произведение ω одномерных локально-геодезических распределений $Q^1_1, \ldots, Q^1_\omega$, если $Q^\omega_P = (Q^1_1)_P + \ldots + (Q^1_\omega)_P$.

Имеет место легко доказываемая

Теорема 3. *Пусть для локально-геодезического распределения Q^ω и V^n, на котором оно задано, выполнены условия теоремы 1. Тогда необходимое и достаточное условие распадения Q^ω в произведение одномерных локально-геодезических распределений заключается в равенстве нулю тензора кривизны присоединенной связности.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. Л. Шапиро. О геодезических полях многомерных направлений. ДАН. 32 (1941), 237—239.

2. Я. Л. Шапиро. Геодезические поля направлений и проективные системы путей. Матем. сборник, т. 36 : 1,1955.

3. Г. И. Кручкович. Об одном классе римановых пространств. Труды семинара по векторному и тензорному анализу, вып. XI, (1961), 103—128.

4. G. de Rham. Sur la réductibilité d'un espace de Riemann, Comm. Math. Helv., vol. 21 (1952), 328—343.

5. М. Улановский. Группа движений и эндоморфизмы пространства аффинной связности. Матем. сборник, т. 58 (100) : № 3, М., 1962.

Поступила 28 августа 1969 г.

РЕФЕРАТЫ

УДК 513 **О голономности основания точечного соответствия между конформными пространствами.** Акивис М. А., Болодурин В. С. «Украинский геометрический сборник», вып. 9, 1970, стр. 3—10.

Основанием точечного соответствия $T : \overline{C}_n \to \widehat{C}_n$, где $\overline{C}_n$, $\widehat{C}_n$ — n-мерные конформные пространства, называется совокупность ортогональных систем $\overline{\Sigma} \subset \overline{C}_n$, $\widehat{\Sigma} \subset \widehat{C}_n$ таких, что $\widehat{\Sigma} = T\overline{\Sigma}$. Основание соответствия определяется единственным образом. Изучаются условия слабой и сильной голономности этого основания. Отмечается ряд свойств сильно голономных систем $\overline{\Sigma}$. В частности, доказывается обобщение известной теоремы Дюпена об n-ортогональных системах поверхностей на случай сильно голономных ортогональных систем.

С изучаемым соответствием естественным образом связывается тензорная структура. Вопрос об интегрируемости этой структуры равносилен вопросу о голономности основания соответствия T. Выделены тензоры, обращение в нуль которых является условием слабой (сильной) голономности основания соответствия T или то же самое слабой (сильной) интегрируемости присоединенной тензорной структуры.

Особо рассмотрены соответствия типа (1, 1, ..., 1). Доказано, что соответствия этого типа с заданным голономным основанием существуют с произволом в n функций одного переменного.

Библиографических ссылок 7.

УДК 513 **О сферическом образе поверхности с близкой к нулю кривизной.** Аминов Ю. А., «Украинский геометрический сборник», вып. 9, 1970, стр. 10—13.

В работе получаются оценки сверху для радиуса шара, лежащего на n-мерной единичной сфере, содержащегося в сферическом образе поверхности. Условия, которые накладываются на поверхность, формулируются с помощью n-ой $(n-1)$-ой и $(n-2)$-симметрических функций главных кривизн и длины радиус-вектора поверхности.

Библиографических ссылок 3.

УДК 513 **К вопросу об изгибании поверхностей.** Белов К. М., «Украинский геометрический сборник», вып. 9, 1970, стр. 13—19.

Вводится функция, характеризующая изометрические преобразования в пространстве регулярных поверхностей — функция изгибания. Изгибания поверхностей в зависимости от свойств этой функции подразделяются на три типа: эллиптические, параболические и гиперболические. Доказывается ряд теорем о типах изгибаний некоторых классов поверхностей. В частности, устанавливается: изгибание поверхности положительной кривизны является гиперболическим всюду, за исключением, возможно, конечного числа внутренних точек; изгибания параболического типа допускают только линейчатые поверхности.

Библиографических ссылок 8.

УДК 513 **Гиперповерхности Петерсона в P_4.** Бланк Я. П., Гормашева Н. М., «Украинский геометрический сборник», вып. 9, стр. 20—29.

В работе изучаются гиперповерхности четырехмерного проективного пространства P_4, несущие сопряженные конические 3-сети. Если линии сети принять за координатные линии гиперповерхности, то ее уравнения в точечных координатах:

(1) $$\rho x_i = u_i(u) + v_i(v) + w_i(w), \ (i = 1, \ldots, 5),$$

а вершины касательных гиперконусов лежат на линиях

$$\Gamma_1 \left(U_i'\right), \ \Gamma_2 \left(v_i'\right), \ \Gamma_3 \left(w_i'\right).$$

Доказано, что если гиперповерхность (1) и в тангенциальных координатах имеет аналогичные уравнения

$$\sigma\xi_i = U_i(u) + V_i(v) + W_i(w), \ (i = 1, \ldots, 5), \tag{2}$$

то линии Γ_1, Γ_2, Γ_3, порождающие коническую 3-сеть, прямые, проходящие через общую точку. Гиперповерхность, допускающая параметризацию (1) —(2), определена с произволом в три функции одного аргумента, ее уравнения (1) могут быть приведены к виду

$$(u, \ v, \ w, \ 1, \ U(u) + V(v) + W(w).$$

Если гиперповерхность несет две 3-сети, обладающие свойствами (1)—(2), то она является гиперквадрикой.

Показано, что конические 3-сети гиперповерхности Петерсона в P_4 могут зависеть самое большее от шести параметров, и если гиперповерхность несет ∞^6 конических 3-сетей, то она есть гиперквадрика.

Библиографических ссылок 2.

УДК 513 **Об уравнениях движения частицы в общей теории относительности.** Денисов В. И., «Украинский геометрический сборник», вып. 9, 1970, стр. 29—33.

В работе дано определение импульса и энергии частицы, движущейся в асимптотически плоском пространстве-времени. Получены уравнения движения частицы, из которых следует, что изменение импульса и энергии частицы определяются асимметрией, пространства-времени. Введено понятие индикатрисы рассеивания. Исследованы трансформационные свойства импульса и энергии частицы, индикатрисы рассеивания.

В приближении слабого поля и медленного движения полученные уравнения дают классические уравнения движения.

Библиографических ссылок 3.

УДК 513 **О длине дуги в одном подпространстве аффинного пространства.** Дринфельд Г. И., Юртова Л. М. «Украинский геометрический сборник», вып. 9, 1970, стр. 33—35.

Ватанабе (S. Watanabe) доказано существование длины дуги инвариантной относительно преобразований

$$\overline{x^i} = \sum_{j=1}^{n} a_j^i x^j + a_i, \quad i = 1, 2 \ldots, n \qquad\qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$\sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+1} a_j^i = (-1)^{i+1} \det \left(a_j^i\right) \neq 0$$

при четном n; случай нечетного n не рассматривался. В заметке доказано существование длины дуги при $n = 3$, инвариантной относительно указанных преобразований.

Библиографических ссылок 2.

УДК 513 **О плоскостях симметрии приводимой поверхности одного специального вида.** Игнатенко В. Ф., Лейбин. А. С. «Украинский геометрический сборник», вып. 9, 1970, стр. 36—39.

В евклидовом пространстве E^m рассматриваются приводимые $(m-1)$-мерные поверхности F_n^{*D} порядка n с конечным числом плоскостей симметрии; индекс D означает, что ее плоскости симметрии образуют только такие трехгранные минимальные углы, которые соответствуют диэдрическим подгруппам симметрий поверхности, звездочка — что в состав поверхности входит хотя бы одна компонента, состоящая из плоскостей, проходящих через одну $(m-2)$-плоскость и образующих при ней равные двугранные углы. В предыдущих работах при отыскании точных верхних границ числа плоскостей симметрии поверхностей F_n^D поверхности F_n^{*D} исключались. Здесь выяснено, что существование поверхностей F_n^{*D} влияет на указанные границы только в пространствах E^2 и E^3.

Библиографических ссылок 2.

УДК 513 **Обобщенные пространства как пространства с фундаментальной группой.** Кованцов Н. И., «Украинский геометрический сборник», вып. 9, 1970, стр. 39—59.

Изучаются группы преобразований, названные автором универсальными, которые индуцируются бесконечной группой невырожденных преобразований координат точек дифференцируемого n-мерного многообразия в его окрестностях различных порядков. Если присоединить к этим окрестностям геометрические объекты соответствующих порядков и рассматривать дифференциалы координат и компоненты объектов как координаты точек пространства, в котором действует универсальная группа, то обобщенные пространства можно рассматривать как пространства с фундаментальной группой. При этом естественным путем находятся инварианты в любой окрестности обобщенного пространства как функционально независимые инварианты универсальной группы.

Библиографических ссылок 9.

УДК 513 **Аналог параллельного перенесения в пространстве эллиптической связности.** Кованцов Н. И., Фан Лыонг Хиеу, «Украинский геометрический сборник», вып. 9, 1970, стр. 60—67.

В рассматриваемой работе вводится понятие трехмерного пространства эллиптической связности как неголономного эллиптического пространства.

В каждой точке пространства эллиптической связности существует касательное эллиптическое пространство. Параллелизм Клиффорда, определенный в касательном пространстве, порождает некоторый параллелизм в пространстве эллиптической связности подобно тому, как обычный параллелизм евклидова пространства порождает параллелизм Леви-Чивита в римановом пространстве. Выписываются уравнения, определяющие параллельный перенос вектора в пространстве эллиптической связности.

Библиографических ссылок 3.

УДК 513 **Условия интегрируемости регулярной гиперкомплексной структуры на многообразии.** Кручкович Г. И., «Украинский геометрический сборник», вып. 9, 1970, стр. 67—75.

Рассматривается аффинорная структура на многообразии M, определяемая в каждой точке регулярным матричным представлением вещественной ассоциативной коммутативной и унитальной алгебры H. Доказывается равносильность следующих трех предложений:

1. H-структура интегрируема, т. е. в окрестности каждой точки существует локальная система координат, в которой все аффиноры структуры имеют постоянный матричный вид.
2. На многообразии M существует аффинная связность без кручения, сохраняющая структуру.
3. Равны нулю тензоры Нейенхейса — Широкова, отвечающие H-структуре.

Библиографических ссылок 7.

УДК 513 **Усиление теоремы единственности для аналитических замкнутых выпуклых гиперповерхностей n-мерного евклидова пространства.** Медяник А. И., «Украинский геометрический сборник», вып. 9, 1970, стр. 76—78.

В работе дается обобщение на n-мерный случай следующей теоремы единственности А. Д. Александрова:

Пусть H_1 и H_2 — выпуклые тела с аналитическими опорными функциями. Если индикатрисы Дюпена на H_1 и H_2 в точках с параллельными внешними нормалями не могут быть помещены одна внутри другой при совмещении этих точек параллельным переносом, то тела H_1 и H_2 равны и параллельно расположены.

Библиографических ссылок 5.

УДК 513 **Об одном признаке сферы.** Милка А. Д. «Украинский геометрический сборник», вып. 9, 1970, стр. 78—84.

Доказывается теорема: пусть F — замкнутая, выпуклая гиперповерхность вращения в пространстве постоянной кривизны, евклидовом, сферическом или гиперболическом, и пусть эта поверхность обладает свойствами: 1) существует параллель π_F поверхности (сечение F гиперплоскостью, ортогональной оси вращения) такая, что любая кратчайшая на π_F есть также кратчайшая на F; 2) для каждой точки $P \in F$ и двух любых диаметральных точек π_F сумма расстояний до P на поверхности от этих точек не зависит от их выбора и определяется лишь точкой P. Тогда F — сфера.

Как вспомогательные устанавливаются некоторые свойства кратчайших на выпуклых гиперповерхностях вращения.

Поверхности (не обязательно выпуклые), обладающие свойствами, указанными в теореме (иначе, обладающие C-свойством), введены были в работе [1], где рассматривался регулярный случай в E_3.

Библиографических ссылок 4. Рисунков 1.

УДК 513 **К одной гипотезе Стокера.** Милка А. Д., «Украинский геометрический сборник», вып. 9, 1970, стр. 85—86.

Устанавливается справедливость гипотезы Стокера (J. J. Stoker), — обращение теоремы Коши, — для одного класса замкнутых выпуклых многогранников. В рассмотренный класс включаются многогранники, вписанные в сферу. Многогранники, описанные вокруг сферы, рассматривались ранее Каршером (H. Karcher), и результат этого решения к настоящему времени — единственный. Доказательства в этой заметке основываются на лемме А. В. Погорелова об изометрических деформациях выпуклых многогранных углов.

Библиографических ссылок 4.

УДК 513 **Бесконечно малые почти геодезические преобразования аффинносвязных и римановых пространств. I.** Синюков Н. С., «Украинский геометрический сборник», вып. 9, 1970, стр. 86—95.

Рассматриваются бесконечно малые преобразования аффинносвязных (без кручения) и римановых пространств, соответствующие их почти геодезическим отображениям (Н. С. Синюков, ДАН СССР, т. 151, № 4).

Сначала дается вывод основных уравнений для вектора смещений бесконечно малых почти геодезических преобразований. Анализ их приводит к трем типам таких преобразований, для каждого из которых указываются характеристические условия. Ко второму типу относятся изучавшиеся в теории почти комплексных структур бесконечно малые аналитически планарные преобразования, к третьему — бесконечно малые конциркулярные преобразования.

Наконец, дается оценка сверху степени подвижности произвольного риманова пространства относительно этих преобразований и находятся максимально подвижные в геометрическом отношении пространства. Ими оказываются пространства постоянной кривизны, для которых и получается точная оценка степени подвижности при данных условиях.

Библиографических ссылок 8.

УДК 513 **Упорядоченные псевдоримановы пространства, II.** Улановский М. А., «Украинский геометрический сборник», вып. 9, 1970, стр. 96—110.

Заметка представляет собой продолжение статьи под тем же названием («Украинский геометрический сборник», вып. 7). Рассматриваются отношения порядка в псевдоримановом X_n, аналогичные причинно-следственным отношениям физического пространства-времени.

Библиографических ссылок 9.

УДК 513 **О полуприводимости в целом римановых пространств.** Шапиро Я. Л. «Украинский геометрический сборник», вып. 9, 1970, стр. 110—116.

Основной результат работы — обобщение известной теоремы де Рама о приводимых римановых пространствах на «полуприводимые» римановы пространства (теорема требует, однако, выполнения некоторого дополнительного условия). Рассмотрен также вопрос о приводимости геодезического распределения к распределению меньшей размерности.

Библиографических ссылок 5.

СОДЕРЖАНИЕ

Редактор А. П. Гужва
Техредактор Л. Т. Момот
Корректор Р. Е. Лорф

Сдано в набор 4 V 1970 г. Подписано к печати 24 XII 1970 г. БЦ 50299
Формат 70×108 1/16. Объем 7,5 физ. печ. л., 10,5 усл. печ. л., 8,6 уч.-изд. л. Заказ 0-891
Тираж 740. Цена 56 коп. ТПУ 1970 г. поз. 37.

Типоофсетная фабрика «Коммунист» Комитета по печати при Совете Министров УССР.
Харьков, ул. Энгельса, 11.