КРАИН-СКИЙ ГЕОМЕТРИ-ЧЕСКИЙ СБОРНИК

выпуск 8

издательство харьковского университета

МИНИСТЕРСТВО
ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ УССР

УКРАИНСКИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК

ВЫПУСК 8

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ХАРЬКОВСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА имени А. М. ГОРЬКОГО
Харьков
1970

517
У45

Сборник содержит статьи, посвященные геометрии в целом в трехмерном и многомерном пространстве, геометрии обобщенных пространств, геометрии пространств с заданной фундаментальной группой, теории относительности, линейчатой геометрии.

Адрес редакционной коллегии:

Харьков-77, пл. Дзержинского, 4,
Харьковский университет, механико-математический факультет.

$\frac{2-2-3}{36-70}$

ХАРЬКОВСКАЯ ТИПООФСЕТНАЯ ФАБРИКА

УКРАИНСКИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК

Выпуск 8 1970

НЕКОТОРЫЕ ГЛОБАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ГЕОМЕТРИИ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

Ю. А. Аминов

(Харьков)

В работе дается новое дивергентное представление для суммы внешней и внутренней кривизны поля в римановом пространстве и с его помощью для особых точек вводится мощность источников кривизны. Для поля в евклидовом пространстве, заданного внутри замкнутой трубчатой поверхности, являющейся инвариантным многообразием, получаются оценки сверху и снизу интегральной кривизны. С помощью некоторых интегральных соотношений также устанавливаются взаимные ограничения в «целом» полной кривизны поля и кривизны силовых линий. Кроме того, дается одно обобщение формулы Гаусса — Бонне для произвольного векторного поля.

1. Пусть в n-мерном римановом пространстве T задано единичное векторное поле $\boldsymbol{n}$. Рассмотрим уравнение $D\boldsymbol{n} = \lambda dx$, собственные числа которого будем обозначать через $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. В силу единичности вектора $\boldsymbol{n}$ одно из чисел λ_i (например, таковым можем считать λ_n) равно нулю. Вообще говоря, остальные λ_i могут оказаться комплексными, так как поле $\boldsymbol{n}$ не обязательно является голономным. Однако симметрические функции от λ_i $(i = 1, \ldots, n-1)$, являясь коэффициентами характеристического уравнения для λ_i, будут действительными. Через H обозначим среднюю кривизну поля: $H = (\lambda_1 + \ldots + \lambda_{n-1})(n-1)$, вторую симметрическую функцию от λ_i обозначим через $K_e = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \ldots$.

Пусть K_T — скалярная кривизна пространства T в направлении $(n-1)$-мерной площадки, ортогональной полю $\boldsymbol{n}$, k — вектор кривизны силовой линии поля $\boldsymbol{n}$, R — скалярная кривизна Риччи пространства T, которая в наших обозначениях равна среднему значению кривизн двумерных площадок в точке, умноженному на $n(n-1)$. Тогда мы установим, что *имеет место следующее соотношение*:

$$\operatorname{div}((n-1)H\boldsymbol{n} - \boldsymbol{k}) = 2K_e + K_T + \frac{R}{2}. \tag{1}$$

Заметим, что если поле $\boldsymbol{n}$ голономно, то правую часть формулы (1) можно записать в виде $K_e + K_i + \frac{R}{2}$, где K_i — внутренняя скалярная кривизна гиперповерхности, ортогональной полю $\boldsymbol{n}$. Для единообразия записи можно в общем случае определить внутреннюю скалярную кривизну поля $\boldsymbol{n}$ по формуле $K_i = K_e + K_T$. Тогда формула (1) получит вид:

$$\operatorname{div}((n-1)H\boldsymbol{n} - \boldsymbol{k}) = K_e + K_i + \frac{R}{2}. \tag{1'}$$

Для простоты дадим доказательство (1) в том случае, когда поле $\boldsymbol{n}$ задано в трехмерном пространстве. Пусть $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ и $\boldsymbol{e}_3$ — базис в T, а

ξ^1, ξ^2, ξ^3 — координаты вектора $\boldsymbol{n}$ относительно этого базиса. Запишем характеристическое уравнение для λ_i через ξ^i. Имеем

$$D\boldsymbol{n} = D\xi^j \boldsymbol{e}_j = \left(\frac{\partial \xi^j}{\partial u^k} + \xi^l \Gamma^j_{kl}\right)\boldsymbol{e}_j du^k = \lambda \boldsymbol{e}_j du^j.$$

Как обычно, будем обозначать

$$\xi^j_{,k} = \frac{\partial \xi^j}{\partial u^k} + \xi^l \Gamma^j_{kl}.$$

Характеристическое уравнение для λ будет третьего порядка, но так как $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор, то свободный член равен нулю, и оно сводится к квадратному:

$$\lambda^2 - \lambda \xi^i_{,i} + \frac{1}{2}(\xi^i_{,i}\xi^j_{,j} - \xi^i_{,j}\xi^j_{,i}) = 0.$$

Таким образом, для средней кривизны H и внешней кривизны поля имеем выражения

$$H = \frac{1}{2}\xi^i_{,i};\quad K_e = \frac{1}{2}(\xi^i_{,i}\xi^j_{,j} - \xi^i_{,j}\xi^j_{,i}). \tag{2}$$

Вектор кривизны силовой линии равен

$$\boldsymbol{k} = \frac{d\boldsymbol{n}}{ds} = \frac{d}{ds}(\xi^j \boldsymbol{e}_j) = \frac{d\xi^j}{ds}\boldsymbol{e}_j + \xi^j \frac{d\boldsymbol{e}_j}{ds} =$$

$$= \left(\frac{\partial \xi^j}{\partial u^k}\boldsymbol{e}_j + \xi^j \frac{\partial \boldsymbol{e}_j}{\partial u^k}\right)\frac{du^k}{ds} = \left(\frac{\partial \xi^j}{\partial u^i} + \xi^\alpha \Gamma^j_{i\alpha}\right)\boldsymbol{e}_j \frac{du^i}{ds} = \xi^j_{,i}\xi^i \boldsymbol{e}_j. \tag{3}$$

Используя (2) и (3), находим

$$\operatorname{div}(2H\boldsymbol{n} - \boldsymbol{k}) = (\xi^i_{,i}\xi^j)_{,j} - (\xi^j_{,i}\xi^i)_{,j} = \xi^j\xi^i_{,ij} +$$

$$+ \xi^i_{,i}\xi^j_{,j} - \xi^j_{,i}\xi^i_{,j} - \xi^i\xi^j_{,ij} = 2K_e + \xi^j\xi^i_{,ij} - \xi^i\xi^j_{,ij}.$$

В третьем слагаемом поменяем местами знаки суммирования: i на j, j на i. Тогда получим

$$\operatorname{div}(2H\boldsymbol{n} - \boldsymbol{k}) = 2K_e + \xi^j(\xi^i_{,ij} - \xi^i_{,ji}) = 2K_e + R^i_{ijp}\xi^p\xi^j. \tag{4}$$

Здесь мы пользуемся обозначениями для тензора Римана из [1]. Выберем теперь координатный репер в пространстве T так, что в некоторой точке M вектор $\boldsymbol{e}_1$ был бы направлен по вектору $\boldsymbol{n}$, и в этой точке базис был бы ортонормированный. Тогда

$$R^i_{ijp}\xi^p\xi^j = R_{i11i} = R_{2112} + R_{3113}.$$

С другой стороны, скалярная кривизна Риччи R равна

$$R = R_{ijkl}g^{il}g^{jk} = 2(R_{2112} + R_{3113} + R_{3223}).$$

Кривизна пространства в направлении двумерной площадки, ортогональной полю, $K_T = R_{2323} = -R_{3223}$. Поэтому

$$R^i_{ijp}\xi^p\xi^j = \frac{R}{2} - R_{3223} = \frac{R}{2} + K_T. \tag{5}$$

Подставив (5) в (4), получим формулу (1).

Замечание. Векторное поле $\boldsymbol{l} = 2H\boldsymbol{n} - \boldsymbol{k}$ в евклидовом пространстве рассматривал также С. С. Бюшгенс [2] в связи с гидродинамикой. Это поле он называет полем присоединенных векторов к полю направлений скорости потока жидкости и показывает, что для стационарного потока идеальной несжимаемой жидкости поле $\boldsymbol{l}$ голономно.

2. Если T — пространство постоянной кривизны K_T, то с помощью (1) для любой области V, не содержащей особых точек поля $\boldsymbol{n}$, интеграл от внешней кривизны K_e можно выразить через граничные значения поля $\boldsymbol{n}$, кривизну K_T и объем области V.

Пусть теперь строго внутри области V имеется множество M особых точек поля $\boldsymbol{n}$. Обозначим через F_ε ε-окрестность M и через ∂F_ε — ее границу с нормалью ν направленной внутрь F_ε. Тогда будем называть M источником кривизны с мощностью Q, если существует

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\partial F_\varepsilon} \left\{ \frac{(n-1)}{2} H(\boldsymbol{n}\nu) - \frac{1}{2}(\boldsymbol{k}\nu) \right\} dS = Q. \tag{6}$$

В следующей теореме мы будем предполагать, что объем, занимаемый особыми точками поля $\boldsymbol{n}$, равен нулю.

Теорема 1. *Пусть поле $\boldsymbol{n}$ задано в n-мерном замкнутом ориентируемом римановом пространстве T, общая мощность источников кривизны поля равна Q_0 и $A_0 = \max |K_T|$ по всем двумерным площадкам и по всему пространству T. Пусть V — объем всего пространства T. Тогда* $\min\limits_T |K_e| \leqslant \frac{n-1}{2} A_0 + \frac{|Q_0|}{V}$.

Так как T замкнуто и ориентируемо, то с помощью (1) находим $2\int\limits_T K_e dv = -\int\limits_T \left(K_T + \frac{R}{2}\right) dv + 2Q_0$. Выбрав в произвольной точке ортонормированный базис $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$, так чтобы вектор $\boldsymbol{e}_1$ был направлен по вектору поля $\boldsymbol{e}$, получим $\left|K_T + \frac{R}{2}\right| = |R_{2112} + R_{3113} + \ldots + R_{n11n}| \leqslant (n-1) A_0$. Следовательно, $\min\limits_T 2|K_e| V \leqslant (n-1) V A_0 + 2|Q_0|$, что и требовалось доказать.

В этой оценке примечательно то, что она не зависит от величины неголономности поля.

3. В евклидовом пространстве мощность источников кривизны векторного поля можно ввести, как это сделано нами в работе [3], также с помощью выражения

$$Q = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\Psi(\partial F_\varepsilon)} (\boldsymbol{x}\boldsymbol{n})\, d\sigma, \tag{7}$$

где $\boldsymbol{x}$ — радиус-вектор границы ∂F_ε, $d\sigma$ — элемент площади единичной сферы σ, понимаемой со знаком, Ψ — отображение ∂F_ε на σ с помощью векторного поля $\boldsymbol{n}$. Из формулы (1) и работы [5] вытекает, что два интеграла в (6) и (7) равны, если внутри ∂F_ε нет особых точек поля. Однако для нас важен именно тот случай, когда внутри ∂F_ε имеются особые точки. Покажем, что эти два определения, (7) и (6), дают одно и то же значение Q. Рассмотрим на любой поверхности F с нормалью ν две формы α и β второго порядка и форму γ первого порядка: $\alpha = 2(\boldsymbol{x}\boldsymbol{n})\, d\sigma$, $\beta = \{2H(\boldsymbol{n}\nu) - (\boldsymbol{k}\nu)\}\, dS$, $\gamma = (d\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}\boldsymbol{x})$.

Покажем, что имеет место

$$\alpha - \beta = d\gamma, \tag{8}$$

где внешний дифференциал $d\gamma$ берется по поверхности F. Заметим, что в том случае, когда поле $\boldsymbol{n}$ — поле нормалей к F, из (8) получим теорему Минковского о среднем значении опорной функции замкнутой поверхности и ее интегральной средней кривизне (см. [4], стр. 160). Преобразуем сначала форму β. В достаточно малой окрестности F введем семейство параллельных к F поверхностей F_t. Вектор нормали к этим поверхностям обозначим через $\nu = \nu(x_1, x_2, x_3)$. Разложим вектор $\boldsymbol{n}$ на две составляющие — касательную к F_t и ортогональную: $\boldsymbol{n} = \cos\varphi\nu + \sin\varphi\mu$, где μ — единичный вектор. Получим

$$2(\boldsymbol{n}\nu)H = (\boldsymbol{n}\nu)\operatorname{div}\boldsymbol{n} = \cos^2\varphi\operatorname{div}\nu +$$
$$+\cos\varphi\sin\varphi\operatorname{div}\mu + \cos^2\varphi(\operatorname{grad}\varphi\mu) - \sin\varphi\cos\varphi(\operatorname{grad}\varphi\nu). \tag{9}$$

Найдем теперь выражение для $(\boldsymbol{k}\nu)$. Вектор кривизны силовой линии $\boldsymbol{k}$ запишем в виде:

$$\boldsymbol{k} = [\boldsymbol{n}\operatorname{rot}\boldsymbol{n}]^*. \tag{10}$$

Действительно, имеем, например, для первой компоненты $[\boldsymbol{n}\operatorname{rot}\boldsymbol{n}]$ выражение

$$\xi_2(\xi_{1x_2} - \xi_{2x_1}) - \xi_3(\xi_{3x_1} - \xi_{1x_3}) = \xi_1\xi_{1x_1} + \xi_2\xi_{1x_2} +$$
$$+\xi_3\xi_{1x_3} - \xi_1\xi_{1x_1} - \xi_2\xi_{2x_1} - \xi_3\xi_{3x_1} = \frac{d\xi_1}{ds},$$

где $\frac{d}{ds}$ — дифференцирование по длине дуги вдоль силовой линии поля $\boldsymbol{n}$. Используя (10), можно записать

$$-(\boldsymbol{k}\nu) = -(\boldsymbol{n}\operatorname{rot}\boldsymbol{n}\nu) = -\sin\varphi(\mu,\ \cos\varphi\operatorname{rot}\nu + \sin\varphi\operatorname{rot}\mu +$$
$$+\cos\varphi[\mu\operatorname{grad}\varphi] - \sin\varphi[\nu\operatorname{grad}\varphi],\ \nu) = -\sin\varphi\cos\varphi(\mu\operatorname{rot}\nu\nu) -$$
$$-\sin^2\varphi(\mu\operatorname{rot}\mu\nu) + \cos\varphi\sin\varphi(\operatorname{grad}\varphi\nu) + \sin^2\varphi(\operatorname{grad}\varphi\mu). \tag{11}$$

Так как $|[\nu\operatorname{rot}\nu]|$ — кривизна силовой линии поля ν, а F_t — семейство параллельных поверхностей, то $[\nu\operatorname{rot}\nu] = 0$. Так как поле μ лежит на F, то $(\mu\operatorname{rot}\mu\nu)$ — нормальная кривизна линии на F, проходящей в направлении μ. Складывая (9) и (11) и сокращая при этом на $\cos\varphi\,\times$ $\times\sin\varphi(\operatorname{grad}\varphi\nu)$, получим

$$\beta = \{\cos^2\varphi\operatorname{div}\nu + \cos\varphi\sin\varphi\operatorname{div}\mu - \sin^2\varphi(\mu\operatorname{rot}\mu\nu) + (\operatorname{grad}\varphi\mu)\}\,dS. \tag{12}$$

Если (u, v) криволинейные координаты на F, то форму α можем записать в виде

$$\alpha = 2(\boldsymbol{x}\boldsymbol{n})\,d\sigma = 2(\boldsymbol{x}\boldsymbol{n})(\boldsymbol{n}_u\boldsymbol{n}_v\boldsymbol{n})\,du\,dv = 2(\boldsymbol{n}_u\boldsymbol{n}_v\boldsymbol{x})\,du\,dv =$$
$$=\left\{\frac{\partial}{\partial u}(\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}_v\boldsymbol{x}) + \frac{\partial}{\partial v}(\boldsymbol{n}_u\boldsymbol{n}\boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}_u\boldsymbol{x}_v) - (\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}_v\boldsymbol{x}_u)\right\}du\,dv =$$
$$= d\gamma + (\boldsymbol{n},\ [\boldsymbol{n}_u\boldsymbol{x}_v] - [\boldsymbol{n}_v\boldsymbol{x}_u])\,du\,dv.$$

Рассмотрим отдельно выражение $[\boldsymbol{n}_u\boldsymbol{x}_v] - [\boldsymbol{n}_v\boldsymbol{x}_u]$. Используя разложение вектора $\boldsymbol{n}$ на нормальную и касательную составляющую получим

$$[\boldsymbol{n}_u\boldsymbol{x}_v] - [\boldsymbol{n}_v\boldsymbol{x}_u] = \cos\varphi([\nu_u\boldsymbol{x}_v] - [\nu_v\boldsymbol{x}_u]) + \sin\varphi([\mu_u\boldsymbol{x}_v] - [\mu_v\boldsymbol{x}_u]) +$$
$$+[\cos\varphi\mu - \sin\varphi\nu,\ \boldsymbol{x}_v\varphi_u - \boldsymbol{x}_u\varphi_v].$$

Как известно из теории поверхностей,

$$[\nu_u\boldsymbol{x}_v] - [\nu_v\boldsymbol{x}_u] = \nu 2H_F|[\boldsymbol{x}_u\boldsymbol{x}_v]|, \tag{13}$$

где H_F — средняя кривизна поверхности F. Далее, первая компонента вектора $[\mu_u\boldsymbol{x}_v] - [\mu_v\boldsymbol{x}_u]$ равна

$$(\mu_{2u}x_{3v} - \mu_{3u}x_{2v}) - (\mu_{2v}x_{3u} - \mu_{3v}x_{2u}) =$$
$$=\mu_{2x_1}(x_{1u}x_{3v} - x_{1v}x_{3u}) + \mu_{2x_2}(x_{2u}x_{3v} - x_{2v}x_{3u}) +$$
$$+\mu_{3x_1}(x_{1v}x_{2u} - x_{1u}x_{2v}) + \mu_{3x_3}(x_{3v}x_{2u} - x_{3u}x_{2v}) =$$
$$=\{\mu_{2x_2}\nu_1 + \mu_{3x_3}\nu_1 + \mu_{1x_1}\nu_1 - \mu_{1x_1}\nu_1 - \mu_{2x_1}\nu_2 - \mu_{3x_1}\nu_3\}|[\boldsymbol{x}_u\boldsymbol{x}_v]|. \tag{14}$$

* Здесь мы полагаем: $\operatorname{rot}\boldsymbol{n} = -[\nabla\boldsymbol{n}]$, где ∇ — оператор Гамильтона.

Используя (14) и выражения, получаемые подобным образом для второй и третьей компонент вектора $[\mu_u \boldsymbol{x}_v] - [\mu_v \boldsymbol{x}_u]$, получим

$$(\boldsymbol{n}, [\mu_u \boldsymbol{x}_v] - [\mu_v \boldsymbol{x}_u]) = \cos\varphi\,(-\nu_i \mu_{jx_i} \nu_j) - \sin\varphi\,(\mu_i \mu_{jx_i} \nu_j) + \cos\varphi \operatorname{div}\mu.$$

Выберем оси координат так, чтобы ось x_3 была направлена по вектору ν. Тогда $\nu_1 = \nu_2 = 0$, $\nu_3 = 1$. Следовательно, от выражения в первой скобке останется только $-\mu_{3x_3}$, но третья компонента вектора μ вдоль вектора ν, т. е. вдоль оси x_3, тождественно равна нулю, поэтому $\mu_{3x_3} = 0$. Кроме того, $\mu_i \mu_{jx_i}$ — j-я компонента вектора кривизны силовой линии поля μ. Так как поле μ касается поверхности F, то силовая линия лежит на поверхности F. Вектор кривизны силовой линии поля можем записать в виде $[\mu \operatorname{rot}\mu]$. Итак, получим

$$(\boldsymbol{n}, [\mu_u \boldsymbol{x}_v] - [\mu_v \boldsymbol{x}_u]) = \{\cos\varphi \operatorname{div}\mu - \sin\varphi\,(\mu \operatorname{rot}\mu\nu)\}\,|[\boldsymbol{x}_u \boldsymbol{x}_v]|. \qquad (15)$$

Рассмотрим теперь разность $\boldsymbol{x}_v \varphi_u - \boldsymbol{x}_u \varphi_v$, которую можно расписать следующим образом:

$$\boldsymbol{x}_v \varphi_u - \boldsymbol{x}_u \varphi_v = (\boldsymbol{x}_v x_{iu} - \boldsymbol{x}_u x_{iv})\,\varphi_{x_i} = [\nu \operatorname{grad}\varphi]\,|[\boldsymbol{x}_u \boldsymbol{x}_v]|.$$

Следовательно,

$$[\cos\varphi\mu - \sin\varphi\nu,\ \boldsymbol{x}_v \varphi_u - \boldsymbol{x}_u \varphi_v] = [\cos\varphi\mu - \sin\varphi\nu,\ [\nu \operatorname{grad}\varphi]]\,|[\boldsymbol{x}_u \boldsymbol{x}_v]| =$$
$$= \{\cos\varphi\nu\,(\operatorname{grad}\varphi\mu) + \sin\varphi\mu\,(\operatorname{grad}\varphi\mu)\}\,|[\boldsymbol{x}_u \boldsymbol{x}_v]| = \boldsymbol{n}\,(\operatorname{grad}\varphi\mu)\,|[\boldsymbol{x}_u \boldsymbol{x}_v]|. \quad (16)$$

Используя (13), (15) и (16), окончательно получим

$$(\boldsymbol{n},\ [\boldsymbol{n}_u \boldsymbol{x}_v] - [\boldsymbol{n}_v \boldsymbol{x}_u]) =$$
$$= \{\cos^2\varphi 2H_F - \sin^2\varphi\,(\mu \operatorname{rot}\mu\nu) + \cos\varphi\sin\varphi \operatorname{div}\mu + (\operatorname{grad}\varphi\mu)\}\,|[\boldsymbol{x}_u \boldsymbol{x}_v]|.$$

Таким образом, принимая во внимание (12), имеем

$$\alpha = d\gamma + \beta.$$

Отсюда вытекает, что, если F — замкнутая поверхность, то интегралы форм α и β по F равны.

4. Используя второе определение для мощности источников, можно дать следующее ее геометрическое истолкование для поля в евклидовом пространстве. Пусть F_ε — ε — окрестность особого множества точек поля. Пусть c — произвольное число, такое что $c > \max|(\boldsymbol{x}\boldsymbol{n})|$. Рассмотрим отображение h, ставящее в соответствие точке x конец вектора $\boldsymbol{h}(x)$, отложенного от начала координат:

$$\boldsymbol{h}(x) = \sqrt[3]{3}\,[(\boldsymbol{x}\boldsymbol{n}) + c]^{\frac{1}{3}}\boldsymbol{n}.$$

Найдем $\boldsymbol{I}$ — якобиан отображения h, который равен $(\boldsymbol{h}_{x_1}\boldsymbol{h}_{x_2}\boldsymbol{h}_{x_3})$. Имеем

$$\boldsymbol{h}_{x_i} = \sqrt[3]{3}\,[(\boldsymbol{x}\boldsymbol{n}) + c]^{\frac{1}{3}}\boldsymbol{n}_{x_i} + 3^{-\frac{2}{3}}[(\boldsymbol{x}\boldsymbol{n}) + c]^{-\frac{2}{3}}[\xi_i + (\boldsymbol{x}\boldsymbol{n}_{x_i})]\,\boldsymbol{n}.$$

Так как вектор $\boldsymbol{n}$ единичный, то $(\boldsymbol{n}_{x_1}\boldsymbol{n}_{x_2}\boldsymbol{n}_{x_3}) = 0$, и так же как при доказательстве формулы (7) в работе [5], получим:

$$(\boldsymbol{x}\boldsymbol{n}_{x_1})(\boldsymbol{n}_{x_2}\boldsymbol{n}_{x_3}\boldsymbol{n}) + (\boldsymbol{x}\boldsymbol{n}_{x_2})(\boldsymbol{n}_{x_3}\boldsymbol{n}_{x_1}\boldsymbol{n}) + (\boldsymbol{x}\boldsymbol{n}_{x_3})(\boldsymbol{n}_{x_1}\boldsymbol{n}_{x_2}\boldsymbol{n}) = 0.$$

Следовательно, якобиан отображения h равен

$$I = \{(\boldsymbol{n}_{x_1}\boldsymbol{n}_{x_2}\boldsymbol{n})\,\xi_3 + (\boldsymbol{n}_{x_1}\boldsymbol{n}_{x_3}\boldsymbol{n})\,\xi_2 + (\boldsymbol{n}_{x_2}\boldsymbol{n}_{x_3}\boldsymbol{n})\,\xi_1\} = K,$$

где последнее равенство написано на основании формулы (1) из работы [5]. Отсюда вытекает, что интеграл от полной кривизны K, по любой области D не содержащей особых точек, равен объему тела, описываемому концом вектора $\boldsymbol{h}(x)$, когда x пробегает D. Так как граница hD может иметь самопересечения индекса $+1$ или -1, объемы отдельных областей, которые ограничиваются $h\partial D$, берутся с учетом знака. Пусть теперь T_ε — объем, заключенный внутри $h\partial F_\varepsilon$, N — степень отображения ∂F_ε на σ полем n. Пусть существует $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} T_\varepsilon = T_0$. Тогда имеем

$$T_0 = \lim_{\varepsilon\to 0} T_\varepsilon = \lim \frac{1}{3}\int\limits_{\psi(\partial F_\varepsilon)} 3\,[(\boldsymbol{x}\boldsymbol{n}) + c]\,d\sigma = 4\pi Nc + Q,$$

т. е.

$$Q = T_0 - 4\pi cN.$$

5. Применим теперь формулу (1) к доказательству одной теоремы в «целом» для поля в евклидовом пространстве.

Теорема 2. *Пусть регулярное поле* $\boldsymbol{n}$ *задано внутри произвольной замкнутой трубчатой поверхности* Φ, *являющейся для поля инвариантным многообразием. Тогда*

$$0 \leqslant \int\limits_V K dv \leqslant \frac{1}{2} S, \tag{17}$$

где S — *площадь поверхности* Φ.

Оценка (17) показывает, что внутри Φ поле не может иметь сколь угодно большую кривизну равномерно по всему объему V. Условие инвариантности поверхности Φ означает, что на Φ поле $\boldsymbol{n}$ лежит в касательных плоскостях к Φ. Если интерпретировать поле $\boldsymbol{n}$ как направление скоростей потока жидкости, а Φ — как неподвижную стенку, то это условие показывает, что нормальная составляющая скорости на Φ равна нулю: $v_n|_\Phi = 0$, при этом K является гауссовой кривизной поверхностей равного потенциала скоростей.

Докажем (17). Запишем уравнение произвольной трубчатой поверхности в параметрическом виде $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$. Пусть параметр u, изменяющийся от 0 до l, — длина дуги осевой линии $\boldsymbol{r}^\circ(u)$, v — угол поворота, отсчитываемый от главной нормали в плоскости, нормальной к осевой линии. $\vec{\xi}_1$, $\vec{\xi}_2$, $\vec{\xi}_3$ — сопровождающий трехгранник линии $\boldsymbol{r}^\circ(u)$, k и $\varkappa$ — ее кривизна и кручение, R — радиус окружности сечения Φ нормальной к $\boldsymbol{r}^\circ(u)$ плоскостью. Тогда уравнение Φ можем записать в виде

$$\boldsymbol{r}(u, v) = \boldsymbol{r}^\circ(u) + R\left(\cos v\,\vec{\xi}_2 + \sin v\,\vec{\xi}_3\right).$$

Обозначим:

$$\boldsymbol{a} = \cos v\,\vec{\xi}_2 + \sin v\,\vec{\xi}_3,$$

$$\boldsymbol{b} = \cos v\,\vec{\xi}_3 - \sin v\,\vec{\xi}_2.$$

Тогда находим

$$\boldsymbol{r}_u = \vec{\xi}_1(1 - kR\cos v) + R\varkappa\boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{r}_v = R\boldsymbol{b},$$

$$[\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v] = \left[\vec{\xi}_1\boldsymbol{b}\right](1 - kR\cos v)\,R.$$

Первая квадратичная форма Φ имеет вид

$$ds^2 = \{(1 - kR\cos v)^2 + R^2\varkappa^2\}\,du^2 - 2R^2\varkappa\,du\,dv + R^2dv^2.$$

Отсюда получим для площади поверхности $S = 2\pi lR$.

Найдем вторую квадратичную форму. При вычислении вторых производных $\boldsymbol{r}(u, v)$ достаточно выписать только те члены, которые не содержат $\vec{\xi}_1$ и $\boldsymbol{b}$:

$$\boldsymbol{r}_{uu} = R\vec{\xi}_2(1 - kR\cos v) - R\varkappa^2\boldsymbol{a} + \ldots$$

$$\boldsymbol{r}_{uv} = -R\varkappa\boldsymbol{a} + \ldots, \quad \boldsymbol{r}_{vv} = -R\boldsymbol{a}.$$

Следовательно, вторая квадратичная форма имеет вид:

$$\mathrm{II} = \{R^2\varkappa^2 - (1 - kR\cos v)Rk\cos v\}\,du^2 + 2R^2\varkappa\,du\,dv + R^2dv^2.$$

По формуле (1), принимая во внимание, что Φ является инвариантным многообразием, объемный интеграл от полной кривизны K можем выразить через интеграл по поверхности Φ от нормальной кривизны k_n семейства силовых линий поля n:

$$2\int\limits_V K dv = -\int\limits_\Phi k_n dS = \int\limits_\Phi \frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}} dS =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^l \frac{\{[R^2\varkappa^2 - Rk\cos v(1 - kR\cos v)]\,\delta u^2 + 2R^2\varkappa\,\delta u\,\delta v + R^2\delta v^2\}(1 - kR\cos v)R}{[(1 - kR\cos v)^2 + \varkappa^2R^2]\,\delta u^2 + 2R^2\varkappa\,\delta u\,\delta v + R^2\delta v^2}\,du\,dv,$$

где δu и δv берутся для силовых линий поля n. Преобразуем числитель подынтегрального выражения к виду

$$-kR^2\cos v\,\delta s^2 + R(R\varkappa\delta u + R\delta v)^2.$$

Следовательно,

$$2\int\limits_V K dv = -\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^l kR^2\cos v\,du\,dv + \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^l \frac{R^3(\varkappa\delta u + \delta v)^2}{(1 - kR\cos v)^2\delta u^2 + R^2(\varkappa\delta u + \delta v)^2}\,du\,dv.$$

Первый интеграл справа равен нулю, так как R и k не зависят от v. Поэтому наименьшее значение интегральной кривизны, равное нулю, получим в том случае, когда силовые линии поля n удовлетворяют уравнению

$$\varkappa\delta u + \delta v = 0.$$

Далее, очевидно, имеем

$$1 \geqslant \frac{(R\varkappa\delta u + k\delta v)^2}{(1 - kR\cos v)^2\delta u^2 + (R\varkappa\delta u + R\delta v)^2}. \tag{18}$$

Следовательно, наибольшее значение интегральной кривизны получим в том случае, когда силовые линии являются линиями $\delta u = 0$, т. е. сечениями трубки, нормальными к осевой линии плоскостями. Тогда выражение (18) в точности равно 1, и для этого семейства линий получим

$$-\int\limits_\Phi k_n dS = 2\pi Rl = S.$$

Построим теперь пример поля с ненулевой мощностью источника кривизны. Рассмотрим на торе с площадью S два поля: поле касательных к меридианам — l_1 и поле касательных к параллелям — l_2. Продолжая гладким образом поле l_1 вне тора, а поле l_2 внутрь тора, мы получим поле, для которого тор будет особым множеством. Пусть F_ε — его ε-окрестность. Тогда $\partial F_\varepsilon = \Phi_1 \cup \Phi_2$, где Φ_1 — поверхность вне тора и Φ_2 — внутри тора. Как легко видеть, интеграл от $H\boldsymbol{n} - \boldsymbol{k}/2$ по Φ_1, если нормаль, как это требуется в определении мощности источника, направлена внутрь Φ_1, в пределе равен $-\frac{1}{2}S$; а интеграл по Φ_2 в пределе дает 0. Таким образом, мощность источника кривизны $Q = -\frac{1}{2}S$. Если поле l_1 продолжить хотя бы локально внутрь тора, а l_2 вне тора, то $Q = \frac{1}{2}S$.

6. Геометрически легко увидеть, что локально полная кривизна поля и кривизна силовых линий не накладывают друг на друга никаких ограничений. Однако если их рассматривать в некоторой области фиксированных размеров, то эти величины оказываются взаимно связанными.

Теорема 3. *Пусть в кубе евклидова пространства со стороной a задано регулярное векторное поле $\boldsymbol{n}$, полная кривизна которого удовлетворяет неравенству $K \leqslant -K_0 < 0$, а кривизна силовых линий $|[\boldsymbol{n} \operatorname{rot} \boldsymbol{n}]| \leqslant \mu_0$, ($K_0$ и μ_0 — постоянные числа). Тогда*

$$a \leqslant \frac{4\mu_0}{K_0} + \sqrt{\left(\frac{4\mu_0}{K_0}\right)^2 + \frac{24}{K_0}}.$$

Для доказательства мы установим одну интегральную формулу (21), связывающую полную кривизну и кривизну силовых линий. Пусть $V(t)$ — куб с центром в начале координат и с ребром $2t : \{x_i = \pm t\}$. Представим полную кривизну K в дивергентном виде

$$K = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{3} \begin{vmatrix} \xi_{ix_i} & \xi_{ix_j} \\ \xi_{jx_i} & \xi_{jx_j} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} (\xi_1 \xi_{2x_2} - \xi_2 \xi_{1x_2}) + \frac{\partial}{\partial x_1} (\xi_1 \xi_{3x_3} - \xi_3 \xi_{1x_3}) + \ldots \right\}.$$

Интеграл от K по кубу $V(t)$ по теореме Гаусса—Остроградского можно свести к интегралу по поверхности куба. Рассмотрим отдельно выражение, соответствующее грани $x_1 = t$, которое имеет вид

$$\frac{1}{2} \iint\limits_{x_1 = t} (\xi_1 \xi_{2x_2} - \xi_2 \xi_{1x_2} + \xi_1 \xi_{3x_3} - \xi_3 \xi_{1x_3})\, dx_2 dx_3 =$$
$$= \frac{1}{2} \iint\limits_{x_1 = t} \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \xi_1 \xi_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} \xi_1 \xi_3 - 2\xi_{1x_2} \xi_2 - 2\xi_{1x_3} \xi_3 \right) dx_2 dx_3. \qquad (19)$$

Интегралы от первых двух членов этого выражения преобразуем к интегралам по ребрам. Для преобразования третьего и четвертого члена заметим, что вторую и третью компоненту вектора $\operatorname{rot} \boldsymbol{n}$ можно записать в виде

$$\xi_{3x_1} - \xi_{1x_3} = 2\xi_2 \rho + \xi_1 k_3 - \xi_3 k_1,$$
$$\xi_{1x_2} - \xi_{2x_1} = 2\xi_3 \rho + \xi_2 k_1 - \xi_1 k_2,$$

где $\rho = \frac{1}{2} (\boldsymbol{n} \operatorname{rot} \boldsymbol{n})$, $\boldsymbol{k} = (k_1, k_2, k_3) = [\boldsymbol{n} \operatorname{rot} \boldsymbol{n}]$ — вектор кривизны силовой линии. Подставим в (19) получаемые отсюда выражения для ξ_{1x_3} и ξ_{1x_2}. Тогда (19) примет вид

$$\frac{1}{2} \left(\int\limits_{l_1} \xi_1 \xi_2 dx_3 - \int\limits_{l_2} \xi_1 \xi_2 dx_3 + \int\limits_{l_3} \xi_1 \xi_3 dx_2 - \int\limits_{l_4} \xi_1 \xi_3 dx_2 \right) - \iint\limits_{x_1 = t} \{ \xi_2 (\xi_{2x_1} + 2\xi_3 \rho + \xi_2 k_1 -$$
$$- \xi_1 k_2) + \xi_3 (\xi_{3x_1} - 2\xi_2 \rho + \xi_3 k_1 - \xi_1 k_3) \}\, dx_2 dx_3,$$

где l_i — ребра грани $x_1 = t$, например $l_1 : x_1 = t$, $x_2 = t$. К выражению, интегрируемому по грани $x_1 = t$, добавим и вычтем $\xi_1^2 k_1$. Так как $\boldsymbol{k} \perp \boldsymbol{n}$, то под знаком интеграла по грани $x_1 = t$ останется лишь

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_1}(\xi_2^2 + \xi_3^2) + k_1.$$

Вынесем знак дифференцирования по x_1 с первого члена за знак интеграла и заменим его на дифференцирование по t. Так как грань зависит от t, нужно добавить еще интегралы от $(\xi_2^2 + \xi_3^2)/2$ по ребрам, ограничивающим грань $x_1 = t$. Получим, не выписывая интегралы по ребрам l_2, l_3 и l_4, следующее выражение:

$$\frac{1}{2}\int_{l_1}(\xi_1\xi_2 + \xi_2^2 + \xi_3^2)\,dx_3 + \ldots - \iint_{x_1=t} k_1 dx_2 dx_3 - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\iint_{x_1=t}(\xi_2^2 + \xi_3^2)\,dx_2 dx_3. \qquad (20)$$

Преобразуя подобным образом интегралы по другим граням, мы найдем, например, что по ребру l_1 интегрируется выражение

$$\frac{1}{2}(2\xi_1\xi_2 + \xi_1^2 + \xi_2^2 + 2\xi_3^2) = \frac{1}{2}\{(\xi_1 + \xi_2)^2 + 2\xi_3^2\} = |a_3|^2,$$

если через a_i $(i = 1 \ldots 6)$ обозначать проекцию вектора n на плоскость, проходящую через ребро l_i и центр куба. Пусть ν — вектор нормали к поверхности куба $V(t)$, dS — элемент ее площади. Итак, имеем

$$\int_{V(t)} K dv = -\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{3}\iint_{\substack{x_k = \pm t\\ k \neq i \neq j}} \frac{\xi_i^2 + \xi_j^2}{2}\,dx_i dx_j - \iint_{\partial V}(n \operatorname{rot} n\nu)\,dS + \sum_{i=1}^{6}\int_{l_i}|a_i|^2 dx_l. \qquad (21)$$

Интегрируя (21) по t от нуля до $t = \frac{a}{2}$ и принимая во внимание неравенства

$$\left|\int_{\partial V(t)}(z \operatorname{rot} n\nu)\,dS\right| \leqslant \mu_0 6\,(2t)^2, \quad -\int_{V(t)} K dv \geqslant K_0\,(2t)^3,$$

$$\sum_{k=1}^{3}\iint_{\substack{x_k=\pm t\\ k\neq i\neq j}}\frac{\xi_j^2 + \xi_i^2}{2}\,dx_i dx_j \leqslant 12t^2,$$

получим

$$3a^2 \geqslant K_0\frac{a^4}{8} - \mu_0 a^3.$$

Отсюда следует доказываемое неравенство.

7. В работе В. Вагнера [6] дается некоторое обобщение формулы Гаусса — Бонне для строго неголономного векторного поля. В этой работе мы установим существенно иное обобщение формулы Гаусса—Бонне, пригодное для произвольного векторного поля, а также дадим одно приложение этой формулы.

Пусть в области V трехмерного евклидова пространства задано векторное поле $\boldsymbol{n}$, имеющее особые точки. Пусть F — замкнутая поверхность, не проходящая через особые точки, (α, β) — криволинейные локальные координаты на F, такие, что нармаль, индуцируемая ими, направлена вне F. Поверхность F можно отобразить на единичную сферу σ, сопоставляя каждой точке $x \in F$ конец вектора $\boldsymbol{n}(x)$. Это отображение обозначим через ψ. Элемент площади единичной сферы $d\sigma$ может быть записан в виде

$$d\sigma = (\boldsymbol{n}_\alpha \boldsymbol{n}_\beta \boldsymbol{n})\, d\alpha d\beta.$$

Так как при отображении ψ сфера σ покрывается образом F целое число раз, то интеграл от формы $d\sigma$ по F равен $4\pi\theta$, где θ — целое число:

$$4\pi\theta = \int_F d\sigma = \int_F (\boldsymbol{n}_\alpha \boldsymbol{n}_\beta \boldsymbol{n})\, d\alpha d\beta. \tag{22}$$

Пусть $x_i = x_i(\alpha, \beta)$, $i = 1, 2, 3$ — уравнение поверхности F в декартовых координатах. Имеем

$$(\boldsymbol{n}_\alpha \boldsymbol{n}_\beta \boldsymbol{n}) = \left\{ (\boldsymbol{n}_{x_2} \boldsymbol{n}_{x_3} \boldsymbol{n}) \left(\frac{\partial x_2}{\partial \alpha} \frac{\partial x_3}{\partial \beta} - \frac{\partial x_2}{\partial \beta} \frac{\partial x_3}{\partial \alpha} \right) + (\boldsymbol{n}_{x_3} \boldsymbol{n}_{x_1} \boldsymbol{n}) \left(\frac{\partial x_3}{\partial \alpha} \frac{\partial x_1}{\partial \beta} - \frac{\partial x_1}{\partial \alpha} \frac{\partial x_3}{\partial \beta} \right) + \right.$$
$$\left. + (\boldsymbol{n}_{x_1} \boldsymbol{n}_{x_2} \boldsymbol{n}) \left(\frac{\partial x_1}{\partial \alpha} \frac{\partial x_2}{\partial \beta} - \frac{\partial x_1}{\partial \beta} \frac{\partial x_2}{\partial \alpha} \right) \right\}.$$

Пусть ν_i — компоненты единичного вектора нормали ν поверхности F, dS — элемент площади F. Легко установить, что вектор $\boldsymbol{P}$, имеющий в декартовой системе координат компоненты

$$\boldsymbol{P} = \{ (\boldsymbol{n}_{x_2} \boldsymbol{n}_{x_3} \boldsymbol{n}),\ (\boldsymbol{n}_{x_3} \boldsymbol{n}_{x_1} \boldsymbol{n}),\ (\boldsymbol{n}_{x_1} \boldsymbol{n}_{x_2} \boldsymbol{n}) \},$$

является инвариантным вектором. Тогда $d\sigma$ можно записать в виде

$$d\sigma = \{ (\boldsymbol{n}_{x_2} \boldsymbol{n}_{x_3} \boldsymbol{n})\, \nu_1 + (\boldsymbol{n}_{x_3} \boldsymbol{n}_{x_1} \boldsymbol{n})\, \nu_2 + (\boldsymbol{n}_{x_1} \boldsymbol{n}_{x_2} \boldsymbol{n})\, \nu_3 \}\, dS = (\boldsymbol{P}\nu)\, dS. \tag{23}$$

Распишем теперь вектор $\boldsymbol{P}$ более подробно. Выберем в некоторой точке $x \in V$ специальную систему координат, так чтобы ось x_3 была направлена по вектору $\boldsymbol{n}(x)$. Пусть ξ_1, ξ_2, ξ_3 — декартовы координаты вектора $\boldsymbol{n}$. Тогда в точке x получим:

$$\xi_1 = \xi_2 = \xi_{3x_i} = 0, \ i = 1, 2, 3.$$

Для полной кривизны K и средней кривизны H по формулам (2) находим

$$H = \frac{1}{2} (\xi_{1x_1} + \xi_{2x_2}); \ K = \xi_{1x_1} \xi_{2x_2} - \xi_{1x_2} \xi_{2x_1}.$$

Вектор $\boldsymbol{P}$ запишем в виде:

$$\boldsymbol{P} = \left\{ \begin{vmatrix} \xi_{1x_2} \xi_{1x_3} \\ \xi_{2x_2} \xi_{2x_3} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \xi_{1x_3} \xi_{1x_1} \\ \xi_{2x_3} \xi_{2x_1} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \xi_{1x_1} \xi_{1x_2} \\ \xi_{2x_1} \xi_{2x_2} \end{vmatrix} \right\}.$$

Таким образом, третья компонента вектора $\boldsymbol{P}$ равна K. Преобразуем первую и вторую компоненту вектора $\boldsymbol{P}$. Добавим к первой компоненте $\xi_{1x_1} \xi_{1x_3}$, а ко второй — $\xi_{2x_2} \xi_{2x_3}$ и вычтем из них эти же выражения. Получим

$$\begin{vmatrix} \xi_{1x_2} \xi_{1x_3} \\ \xi_{2x_2} \xi_{2x_3} \end{vmatrix} = \xi_{2x_3} \xi_{1x_2} + \xi_{1x_1} \xi_{1x_3} - 2H \xi_{1x_3},$$

$$\begin{vmatrix} \xi_{1x_3} \xi_{1x_1} \\ \xi_{2x_3} \xi_{2x_1} \end{vmatrix} = \xi_{1x_3} \xi_{2x_1} + \xi_{2x_2} \xi_{2x_3} - 2H \xi_{2x_3}.$$

Легко видеть, что вектор с компонентами $\{\xi_{1x_3}, \xi_{2x_3}, 0\}$ есть вектор кривизны силовой линии поля $\boldsymbol{n}$. Обозначим его через $\boldsymbol{k}$.

Рассмотрим теперь вектор

$$\boldsymbol{l} = \{ \xi_{2x_3} \xi_{1x_2} + \xi_{1x_1} \xi_{1x_3}, \xi_{1x_3} \xi_{2x_1} + \xi_{2x_2} \xi_{2x_3},\ 0 \}.$$

Пусть $\frac{d}{ds}$ — дифференцирование по длине дуги в направлении вектора $\boldsymbol{k}$. Тогда, очевидно, имеем

$$\boldsymbol{l} = \frac{d\boldsymbol{n}}{ds} \cdot |\boldsymbol{k}|.$$

Итак, вектор $\boldsymbol{P}$ *может быть записан следующим образом:*

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{n}K - 2H\boldsymbol{k} + \frac{d\boldsymbol{n}}{ds} \cdot |\boldsymbol{k}|^{*}. \tag{24}$$

Используя (22), (23) и (24) для замкнутой поверхности F, имеем следующее обобщение формулы Гаусса—Бонне:

$$4\pi\theta = \int_F \left\{ (\boldsymbol{n}\nu) K - 2H(\boldsymbol{k}\nu) + \left(\frac{d\boldsymbol{n}}{ds}\nu\right)|\boldsymbol{k}| \right\} dS. \tag{25}$$

Если внутри нет особых точек поля $\boldsymbol{n}$, то $\theta = 0$.

Пусть теперь задан кусок поверхности F, ограниченный гладкой кривой Γ. Рассмотрим три случая:

а) поле $\boldsymbol{n}$ на Γ ортогонально вектору касательной к Γ;

б) кривая Γ есть линия тока поля $\boldsymbol{n}$;

в) поле $\boldsymbol{n}$ на кривой Γ постоянно.

В случае *а*) используем результат работы [7], в которой установлено, что для площади σ области на единичной сфере, ограниченной кривой $\Psi(\Gamma)$, имеет место выражение

$$\sigma = -\int_\Gamma (nx_s x_{ss})\, ds + 2\pi m. \tag{26}$$

Выражение $(nx_s x_{ss})$ естественно называть геодезической кривизной $\frac{1}{\rho_g}$ кривой Γ относительно поля $\boldsymbol{n}$. Учитывая (23), (24) и (26), *получим следующее обобщение формулы Гуасса — Бонне в случае а*):

$$\int_F \left\{ K(\boldsymbol{n}\nu) - 2H(\boldsymbol{k}\nu) + \left(\frac{d\boldsymbol{n}}{ds}\nu\right)|\boldsymbol{k}| \right\} dS = -\int_\Gamma \frac{ds}{\rho_g} + 2\pi m.$$

Рассмотрим теперь случай *б*). Тогда $\Psi(\Gamma)$ есть индикатриса касательных кривой Γ. Найдем геодезическую кривизну кривой $\Psi(\Gamma)$ на сфере. Обозначим через ν главную нормаль кривой Γ, β — бинормаль Γ, k — ее кривизну, $\varkappa$ — кручение, $\frac{d}{ds}$ — дифференцирование по длине дуги кривой Γ, $\frac{d}{ds_c}$ — дифференцирование по длине дуги сферической кривой $\Psi(\Gamma)$. Геодезическая кривизна кривой $\Psi(\Gamma)$ равна

$$\frac{1}{\rho_{gc}} = \left(\boldsymbol{n}\nu \frac{d\nu}{ds_c}\right).$$

Можно записать:

$$\frac{d\nu}{ds_c} = \frac{d\nu}{ds}\frac{ds}{ds_c} = (-k\boldsymbol{n} + \varkappa\beta)\frac{1}{k}.$$

Отсюда находим

$$\frac{1}{\rho_{gc}} = (\boldsymbol{n}\nu\beta)\frac{\varkappa}{k} = \frac{\varkappa}{k}.$$

---

* Если векторное поле задано в n-мерном евклидовом пространстве, то подобным образом можно установить, что третья симметрическая функция главных кривизн S^3 выражается через первую S^1, вторую S^2 и вектор кривизны линии тока $\boldsymbol{k}$:

$$3S^3 = \operatorname{div}(S^2\boldsymbol{n} - 2S^1\boldsymbol{k} + (\boldsymbol{k}\nabla)\boldsymbol{n})$$

Пусть F — поверхность, натянутая на кривую Г. Для площади области на сфере $\Psi(F)$ запишем соотношение

$$\sigma = -\int_{\psi(\Gamma)} \frac{ds_c}{\rho_{gc}} + 2\pi m = -\int_{\Gamma} \frac{\varkappa}{k}\frac{ds_c}{ds}\,ds + 2\pi m =$$

$$= -\int_{\Gamma} \varkappa ds + 2\pi m.$$

В случае *в*) образ $\Psi(\Gamma)$ есть точка; поэтому для любой поверхности F с границей Г $\Psi(F)$ покрывает единичную сферу некоторое целое число раз Θ.

Рассмотрим один частный случай поля $\boldsymbol{n}$, заданного во всем пространстве. Пусть имеется непрерывное отображение f трехмерной сферы S^3 в двумерную сферу S^2. Спроектируем S^3 из южного полюса на трехмерное пространство T^3, касательное к S^3 в северном полюсе. Отображение f естественным образом индуцирует единичное векторное поле $\boldsymbol{n}$ в T^3. Именно в каждой точке $M \in T^3$, которая является образом точки $P \in S^3$ при проектировании S^3 на T^3, вектор поля определим так: $\boldsymbol{n}(M) = f(P)$.

Число Θ, получаемое в случае в), будет инвариантом Хопфа отображения f (см. [9] *и* [10]). Если $\boldsymbol{n}_1$ и $\boldsymbol{n}_2$ — два постоянных единичных вектора, при условии невырожденности отображения f, одномерные циклы $f^{-1}(\boldsymbol{n}_1)$ и $f^{-1}(n_2)$ можно определенным образом ориентировать, исходя из ориентаций S^3 и S^2. Коэффициент зацепления этих циклов и будет равен инварианту Хопфа. Он зависит только от гомотопического класса отображения f.

Применим теперь формулу (25) к установлению достаточных условий, при которых особенность векторного поля устранима. Устранимость особенности мы понимаем в следующем смысле. Пусть M — связное множество особых точек поля, имеющее нулевую поверхностную меру, F_ε — ε — окрестность M. Будем называть особенность устранимой, если при любом достаточно малом $\varepsilon > 0$ поле $\boldsymbol{n}$ можно продолжить с границы ∂F_ε гладким образом внутрь F_ε.

Рассмотрим еще один инвариант векторного поля, который в работе [8] обозначается через i_5. Можно установить, что

$$i_5 = (\boldsymbol{P},\ \mathrm{rot}\,\boldsymbol{n} - (\boldsymbol{n}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{n})\,\boldsymbol{n}).$$

Если оси координат выбрать так, чтобы ось x_3 была направлена по вектору $\boldsymbol{n}$, для i_5 получим:

$$i_5 = \xi_{2x_3}\begin{vmatrix}\xi_{1x_2} & \xi_{1x_3}\\ \xi_{2x_2} & \xi_{2x_3}\end{vmatrix} - \xi_{1x_3}\begin{vmatrix}\xi_{1x_3} & \xi_{1x_1}\\ \xi_{2x_3} & \xi_{2x_1}\end{vmatrix}. \quad (27)$$

Можно показать, что $\frac{i_5}{4}$ равно полному геодезическому кручению, т. е. $i_5 = 4\tau_1\tau_2\tau_3$, где τ_i — главные геодезические кручения в точке.

Теорема 4. *Пусть в некоторой ε-окрестности особого множества M нулевой поверхностной меры ограничены по модулю следующие инварианты поля: полная кривизна K, средняя кривизна H, кривизна силовых линий $|\boldsymbol{k}|$ и $(\boldsymbol{n}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{n})\,i_5$. Тогда особенность устранима.*

Замечание. Как видим, в классе голономных полей достаточно потребовать ограниченности $|K|$, $|H|$ и $|k|$.

Доказательство. Оценим длину вектора $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{n}_s |\boldsymbol{k}|$. Рассмотрим скалярное произведение вектора $\boldsymbol{l}$ на $\boldsymbol{P}$:

$$(\boldsymbol{lP}) = \xi^2_{2x_3}\xi^2_{1x_2} + \xi_{1x_1}\xi_{2x_3}\xi_{1x_3}(\xi_{1x_2} - \xi_{2x_1}) + \xi^2_{1x_3}\xi^2_{2x_1} - \xi_{2x_2}\xi_{2x_3}\xi_{1x_3}(\xi_{1x_2} - \xi_{2x_1}) -$$
$$- (\xi^2_{1x_3} + \xi^2_{2x_3})\,\xi_{1x_1}\xi_{2x_2} = (\xi_{1x_2} - \xi_{2x_1})\left[\xi^2_{2x_3}\xi_{1x_2} + (\xi_{1x_1} - \xi_{2x_2})\,\xi_{1x_3}\xi_{2x_3} -\right.$$
$$\left.- \xi^2_{1x_3}\xi_{2x_1}\right] - (\xi^2_{1x_3} + \xi^2_{2x_3})(\xi_{1x_1}\xi_{2x_2} - \xi_{1x_2}\xi_{2x_1}) = (\boldsymbol{n}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{n})\,i_5 - |\boldsymbol{k}|^2 K.$$

С другой стороны, используя (24), имеем

$$(\boldsymbol{lP}) = -2H(\boldsymbol{kl}) + |\boldsymbol{l}|^2.$$

Следовательно, получим

$$-2H(\boldsymbol{kl}) + |\boldsymbol{l}|^2 = (\boldsymbol{n}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{n})\,i_5 - K|\boldsymbol{k}|^2. \tag{28}$$

Имеем, очевидно,

$$0 \leqslant (-2H\boldsymbol{k} + \boldsymbol{l})^2 = 4H^2|\boldsymbol{k}|^2 - 4H(\boldsymbol{kl}) + |\boldsymbol{l}|^2 =$$
$$= 4H^2|\boldsymbol{k}|^2 + 2(\boldsymbol{n}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{n})\,i_5 - 2|\boldsymbol{l}|^2 - 2K|\boldsymbol{k}|^2 + |\boldsymbol{l}|^2.$$

Отсюда находим

$$|\boldsymbol{l}|^2 \leqslant (4H^2 - 2K)|\boldsymbol{k}|^2 + 2(\boldsymbol{n}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{n})\,i_5.$$

Следовательно, длина вектора $\boldsymbol{l}$ также ограничена в некоторой окрестности особого множества M. Применим теперь формулу (25) для замкнутой поверхности ∂F_ε. Так как подынтегральная функция ограничена, а поверхностная мера множества M равна нулю, то, переходя к пределу при $\varepsilon \to O$, получим $\Theta = O$. Поэтому степень отображения ∂F_ε на единичную сферу σ полем $\boldsymbol{n}$ равна нулю. Как известно (см., например, [11] стр. 125), в этом случае векторное поле $\boldsymbol{n}$ с границы ∂F_ε можно без особых точек продолжить внутрь ∂F_ε, что и требовалось доказать.

ЛИТЕРАТУРА

1. П. К. Рашевский. Риманова геометрия и тензорный анализ. Изд-во «Наука», М., 1964.

2. С. С. Бюшгенс. О линиях тока (идеальной несжимаемой жидкости). ДАН СССР, XXУIII, 5, 1951.

3. Ю. А. Аминов. Источники кривизны векторного поля. Матем. сб., т. 80, (122) : 2 (10), 1969, 210—224.

4. В. Бляшке. Введение в дифференциальную геометрию. Гостехиздат, 1957.

5. Ю. А. Аминов. Дивергентные свойства кривизны векторного поля и семейства поверхностей. Математические заметки, т. 3, вып. 1, 1968. 103—111.

6. V. Vagner. On the geometrical interpretation of the curvature vector of a non — holonomic V_3^2 in three — dimensional Euclidean space Матем. сб. 4 (46), 1938.

7. M. Krein. Uber den Satz von «Curvatura integra», Изв. Казанск. физ.-матем. об., сер. 3, т. 3, 1928.

8. С. С. Бюшгенс. Геометрия векторного поля. Изд-во АН СССР. Сер. матем. 10 (1946) 73—96.

9. П. Хилтон, С. Уайли. Теория гомологий. Изд-во «Мир», М., 1966.

10. Х. Уитни. Геометрическая теория интегрирования. Изд-во иностр лит., М.. 1960.

11. М. А. Красносельский. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. ГИТТЛ, М., 1956.

Поступила 12 мая 1969 г.

УКРАИНСКИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК

Выпуск 8 1970

ПОЛНЫЕ ГАРМОНИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ С ОДНОЗНАЧНЫМ СФЕРИЧЕСКИМ ИЗОБРАЖЕНИЕМ

А. Л. Вернер

(Ленинград)

ВВЕДЕНИЕ

1. Пусть поверхность F задана в трехмерном евклидовом пространстве R^3 уравнением

$$z = f(x, y) \tag{1}$$

над некоторой областью D в плоскости $Q: z = 0$ и $f(x, y) \in C^2(D)$. Плоскость Q переменных x, y будем рассматривать также как плоскость комплексной переменной $\xi = x + iy$.

Нормальным отображением поверхности F в плоскость P переменных p, q называется отображение $\nu_F: D \to P$, определяемое равенствами (см. [1])

$$p = f_x(x, y), \quad q = f_y(x, y). \tag{2}$$

Под гармонической поверхностью ниже понимается поверхность F в R^3, заданная уравнением (1), где функция $f(x, y)$ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta f = 0. \tag{3}$$

Основная цель настоящей заметки — доказать, что полная в смысле внутренней метрики двусвязная гармоническая поверхность со взаимно однозначным сферическим отображением будет графиком суммы логарифмического потенциала и линейной функции (§ 2), а односвязная гармоническая поверхность, заданная на всей плоскости и имеющая взаимно однозначное сферическое (или, что то же самое, нормальное) отображение, будет гиперболическим параболоидом. Кроме того в § 1 отмечены некоторые свойства нормального отображения гармонической поверхности, заданной на всей плоскости Q, которые непосредственно вытекают из соответствующих теорем теории функции комплексной переменной.

2. Если поверхность F задана уравнением (1) и функция $f(x, y)$ удовлетворяет уравнению

$$af_{xx} + 2bf_{xy} + cf_{yy} = 0, \quad ac - b^2 > 0, \tag{4}$$

где a, b, c — постоянные, то всегда аффинным преобразованием

$$x = \alpha x' + \beta y', \quad y = \gamma x' + \delta y'$$

уравнение (4) можно свести к уравнению Лапласа для функции $f'(x', y') = f(\alpha x' + \beta y', \gamma x' + \delta y')$. Поскольку нормальное отображение $\nu_{F'}$ поверхности F', заданной уравнением $z = f', (x', y')$, получается из ν_F аффинным преобразованием

$$p' = p\alpha + q\gamma, \quad q' = p\beta + q\delta,$$

то полученные ниже результаты для гармонических поверхностей справедливы для поверхностей, заданных уравнениями (1), (4).

Как обычно, через p, q, r, s и t обозначаются ниже первые и вторые частные производные функции $f(x, y)$.

§ 1. Односвязные гармонические поверхности, заданные на всей плоскости

1. Пусть гармоническая поверхность F задана уравнением (1) над областью D плоскости Q. Поскольку для функции $f(x, y)$ везде в D имеют место равенства

$$p_y = q_x, \quad p_x = -q_y, \tag{5}$$

то функция

$$w(\xi) = p(\xi) - iq(\xi) \tag{6}$$

комплексной переменной ξ будет аналитической в D. Отображение $w(\xi): D \to P$ получается из ν_F отражением относительно прямой $q = 0$. Отметим еще, что для F

$$rt - s^2 = -r^2 - s^2 = -(p_x^2 + q_x^2) = -|w'_\xi|^2. \tag{7}$$

Поэтому при $w'_\xi \neq 0$ отображения ν_F и $w(\xi)$ будут конформными. Если в точке ξ_1 функция $w'_\xi(\xi)$ имеет нуль кратности n, то функция $w(\xi) - w(\xi_1)$ имеет в точке ξ_1 нуль кратности $n+1$, а потому отображение ν_F в окрестности точки ξ_1 имеет кратность $n+1$, т. е. соответствующая точка поверхности F будет седлом порядка $n+2$.

2. Рассмотрим гармоническую поверхность F, заданную уравнением (1) над всей плоскостью $Q: z = 0$. В этом случае $w(\xi)$ будет аналитической целой функцией: многочленом или целой трансцендентной функцией, причем

$$f(x, y) = Re\int w(\xi)\, d\xi. \tag{8}$$

Если $w(\xi)$ — целая трансцендентная функция, то из теоремы Пикара следует, что $w(\xi)$ принимает бесконечное число раз любое значение, за исключением, может быть, одного. Поэтому отображение ν_F в этом случае имеет бесконечную кратность во всех точках, за исключением разве лишь одной. Если в этом случае у поверхности F гауссова кривизна $K < 0$, то целая трансцендентная функция $w'_\xi(\xi) \neq 0$, а тогда, как известно,

$$w'_\xi(\xi) = e^{g(\xi)}, \tag{9}$$

где $g(\xi)$ — целая функция. Из (8) и (9) следует представление для задания на всей плоскости гармонической поверхности отрицательной кривизны со сферическим отображением бесконечной кратности.

Если $w(\xi)$ — многочлен степени n, то функция $f(x, y)$ будет гармоническим многочленом степени $n+1$. Если $n = 0$, то F будет плоскостью, *при $n = 1$ F будет гиперболическим параболоидом и имеет взаимно однозначное сферическое (нормальное) отображение.* При $n > 1$ функция $w'_\xi(\xi)$ имеет нули, сумма кратностей которых равна $n-1$, т. е. на поверхности F имеются точки уплощения $X_1, \ldots, X_k$, с порядком седлообразности $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ соответственно. При этом

$$\sum_{i=1}^{k} (\alpha_i - 2) = n - 1. \tag{10}$$

Отображение ν_F в этом случае, очевидно, имеет постоянную кратность n, если нормальное изображение точек уплощения X_i считать с кратностью $\alpha_i + 1$.

§ 2. Двусвязные полные гармонические поверхности со взаимно-однозначным сферическим отображением

1. Пусть F — полная в смысле внутренней метрики двусвязная гармоническая поверхность со взаимно однозначным сферическим отображением, заданная уравнением (1). Поскольку сферическое изображение поверхности F лежит в одной полусфере, то на F нет замкнутой геодезической (см. [2]), а потому поверхность F имеет рог. Как доказано в [3], в этом случае область D — проекция F на Q — такова, что ее дополнение $H = Q \setminus D$ будет ограниченным замкнутым выпуклым множеством. Будем считать, что рог поверхности F направлен вверх, т. е. $f(x_n, y_n) \to +\infty$, когда последовательность точек $(x_n, y_n) \in D$ имеет пределом точку $(x_0, y_0) \in H$.

Как доказано в [4], поверхность F имеет предельный конус $A(F)$, который состоит из луча, направленного вертикально вверх, и выпуклого конуса $C(F)$, однозначно проектирующегося на Q.

2. Рассмотрим поверхность F^*, полученную из F преобразованием Лежандра

$$p = p(x, y), \quad q = q(x, y),$$
$$g(x, y) = px + qy - f(x, y). \tag{11}$$

Поверхность F^* задана уравнением

$$g = g(p, q) \tag{12}$$

над областью $D^* = \nu_F(F) \subset P$ — нормальным изображением поверхности F. Множество $H^* = P \setminus D^*$ будет ограниченным замкнутым множеством (см. [3]).

Поверхность F^* также будет гармонической, так как

$$\frac{\partial^2 g}{\partial p^2} = \frac{-t}{rt - s^2}, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial q^2} = \frac{-r}{rt - s^2}$$

(см. [5], стр. 578), т. е.

$$\frac{\partial^2 g}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial q^2} = 0. \tag{13}$$

Отметим, что поскольку ν_F взаимно однозначно, то $rt - s^2 < 0$ во всех точках $(x, y) \in D$.

3. **Теорема.** *Если F — двусвязная полная гармоническая поверхность со взаимно однозначным сферическим отображением, заданная уравнением (1) на области D, то D будет всей плоскостью с одной исключенной точкой (считаем, что исключена точка* $(0, 0)$*), а*

$$f(x, y) = a_0 \ln(x^2 + y^2) + a_1 x + b_1 y + c, \tag{14}$$

где $a_0 \neq 0$.

Доказательство. Пусть рог поверхности F направлен вверх. В плоскости Q введем полярные координаты r, θ. Так как конус $C(F)$ не имеет вертикальных образующих, то справедливо неравенство

$$|f(r\cos\theta, r\sin\theta)| < Mr, \quad M = \mathrm{const} > 0, \tag{15}$$

где $r \geqslant R_0$ и $H = Q \diagdown D$ лежит внутри круга $r < R_0$.

Из (15), как известно, вытекает (см. [6], стр. 237), что если $r \geqslant R_0$, то

$$f(x, y) = a_0 \ln(x^2 + y^2) + a_1 x + b_1 y + u(x, y), \tag{16}$$

где $u(x, y)$ — ограниченная гармоническая функция. Будем считать, что $a_1 = b_1 = 0$, так как этого всегда можно добиться, заменяя $f(x, y)$ функцией $f(x, y) - (a_1 x + b_1 y)$. Итак,

$$f(x, y) = a_0 \ln(x^2 + y^2) + u(x, y) \tag{17}$$

при

$$x^2 + y^2 \geqslant R_0^2.$$

Гармоническая функция $u_1(x, y) = u\left(\frac{\cos\theta}{r}, \frac{\sin\theta}{r}\right)$ в окрестности нуля ограничена, а потому в нуле имеет устранимую особенность. Следовательно, при $x^2 + y^2 \leqslant \frac{1}{R_0^2}$

$$|\operatorname{grad} u_1| \leqslant M_1 = \text{const}, \tag{18}$$

а для $x^2 + y^2 \geqslant R_0^2$ имеет место

$$|\operatorname{grad} u| = \frac{|\operatorname{grad} u_1|}{x^2 + y^2} \leqslant \frac{M_1}{x^2 + y^2}. \tag{19}$$

Из (17) и (19) вытекает, что

$$\lim_{x^2 + y^2 \to \infty} [p^2(x, y) + q^2(x, y)] = 0, \tag{20}$$

т. е. нормальное изображение поверхности F — область $D^* = P \diagdown O^*$, где точка $O^* = (0, 0) \in P$.

Покажем, что $a_0 \neq 0$. Если $a_0 = 0$, то в окрестности нуля гармоническая функция

$$g(p, q) = \frac{\partial u}{\partial x} x + \frac{\partial u}{\partial y} y - u(x, y) \tag{21}$$

будет ограничена, а потому имеет в нуле устранимую особенность. Но тогда поверхность F^* будет односвязной полной гармонической поверхностью, а следовательно такой поверхностью будет и F, что невозможно, так как F — двусвязна.

Итак, $a_0 \neq 0$. Поскольку от F нельзя отрезать горбушку, то из (17) следует, что $a_0 < 0$. Но тогда

$$g(p(x, y), q(x, y)) = -a_0 \ln(x^2 + y^2) - u(x, y) + 2a_0 + \frac{\partial u}{\partial x} x + \\ + \frac{\partial u}{\partial y} y \tag{22}$$

и из (15) и (20) вытекает, что $\lim\limits_{x^2 + y^2 \to \infty} g(p, q) = +\infty$, т. е. двусвязная гармоническая поверхность F^* будет полной и проектируется на всю плоскость P, за исключением точки O^*.

Поверхность F также получена из полной гармонической двусвязной поверхности F^* со взаимно однозначным сферическим отображением преобразованием Лежандра. Поэтому, применяя к ней те же рассуждения, что были применены к F^*, получаем, что F проектируется на всю плоскость Q, за исключением одной точки. Можно считать, что $D = Q \diagdown O$, где точка $O = (0, 0)$.

Итак, областью регулярности гармонической функции $f(x, y)$ будет вся плоскость Q, за исключением одной особой точки — начала координат. При этом

$$\lim_{x^2+y^2\to 0} f(x, y) = +\infty. \tag{23}$$

Тогда, как известно (см., например, [7], стр. 446), при $r \neq 0$

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = 2a_0 \ln r + c + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) r^n. \tag{24}$$

Из неравенства (15) следует, что в сумме (24) при $n > 1$ все $a_n = b_n = 0$, т. е.

$$f(x, y) = a_0 \ln(x^2 + y^2) + a_1 x + b_1 y + c,$$

что и требовалось доказать.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Я. Бакельман. К теории уравнений Монжа—Ампера. Вестник ЛГУ, № 1 (1958), 25—38.
2. А. Л. Вернер. Топологическое строение полных поверхностей неположительной кривизны со взаимно однозначным сферическим отображением. Вестник ЛГУ, № 7 (1965), 16—29.
3. А. Л. Вернер. О внешней геометрии простейших полных поверхностей. I. Матем. сборник, 74 (116) : 2 (1967), 218—240.
4. А. Л. Вернер. О внешней геометрии простейших полных поверхностей. II. Матем. сборник, 75 (117) : 1 (1968), 126—153.
5. Г. М. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления. I. Гостехиздат, М.—Л., 1951.
6. С. Л. Соболев. Уравнения математической физики. Гостехиздат, М., 1954.
7. А. И. Маркушевич. Теория аналитических функций. Гостехиздат. М.—Л., 1950.

Поступила 6 апреля 1969 г.

УКРАИНСКИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК

Выпуск 8 1970

РЕГУЛЯРНОСТЬ ОРИЦИКЛОВ И ГЛАДКОСТЬ ПОЛУГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ СЕТИ НА РЕГУЛЯРНОМ СЕДЛОВОМ РОГЕ

А. Л. Вернер

(Ленинград)

1. Постановка задачи. Рассмотрим в трехмерном евклидовом пространстве R^3 двусвязную поверхность $T \in C^2$ неположительной кривизны, которая по своим внутренним свойствам будет рогом (см. [1]). В работе [2] доказано, что на T в целом может быть введена полугеодезическая координатная сеть. Геодезическими линиями этой сети (линиями u) являются геодезические лучи на роге T, кратчайшие на любом своем отрезке и идущие в бесконечно удаленную точку рога. Ортогональные к ним линии (линии v) будут замкнутыми, гладкими, выпуклыми в смысле внутренней метрики поясами на T, и ниже именуются орициклами. Такая координатная сеть получена предельным переходом от полярной полугеодезической сети, полюс которой по рогу уходит к бесконечности. Поэтому в рассматриваемом случае нельзя непосредственно сделать вывод о регулярности данной сети при регулярности поверхности T, применяя, как обычно, общие теоремы теории дифференциальных уравнений.

В настоящей заметке будет доказано, что для рога T класса C^2 указанная выше полугеодезическая параметризация будет из класса C^1, а каждый орицикл будет кривой класса C^2, когда параметром на нем выбран естественный параметр. Рог T ниже называем седловым рогом.

2. Обозначения. Мы будем считать, что границей рога T является некоторый орицикл Ω, и что на T введены полугеодезические координаты u, v. При этом параметр u будет естественным параметром геодезических лучей и изменяется на полупрямой $[a, +\infty)$, а параметром v будет естественный параметр некоторого орицикла $\Omega_0 \neq \Omega$. Орицикл Ω в этих координатах задан уравнением $u = a$. Можно считать также, что $a < 0$ и орицикл Ω_0 задан уравнением $u = 0$.

В R^3 фиксируем некоторое начало O. Точку на T с внутренними координатами u, v обозначаем через $X(u, v)$, а через $\bar{r}(u, v)$ — вектор, идущий из O в $X(u, v)$. Вектор-функция $\bar{r}(u, v)$ задает T. Кроме того, поскольку $T \in C^2$, то в окрестности каждой точки X поверхность T может быть задана уравнением

$$z = f_X(x, y) \qquad (1)$$

в декартовых координатах x, y, z. Ниже мы считаем, что при этом ось z идет по нормали к T в точке $X(u, v)$, а плоскость $z = 0$ касается T в этой точке. Через $K(u, v)$ обозначим гауссову кривизну рога T в точке $X(u, v)$.

Через Ω_u обозначим орицикл, заданный уравнением $u = \mathrm{const}$, а через $s(u, v, \Delta v)$ — длину его дуги между точками $X(u, v)$ и $X(u, v + \Delta v)$. Очевидно $s(0, v, \Delta v) = \Delta v$.

В работе [2] доказано, что при всех $u \geqslant a$ и v существует положительная функция

$$b(u, v) = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{s(u, v, \Delta v)}{\Delta v} \tag{2}$$

и установлены следующие свойства этой функции:

1) линейный элемент ds^2 рога T имеет вид

$$ds^2 = du^2 + b^2(u, v)\, dv^2; \tag{3}$$

2) $b(u, v)$ дважды дифференцируема по u, причем производные $b_u(u, v)$ и $b_{uu}(u, v)$ непрерывны по u;

3) $b(u, v)$ удовлетворяет уравнению Гаусса

$$K(u, v)\, b(u, v) + b_{uu}(u, v) = 0; \tag{4}$$

4) поскольку $b(0, v) = 1$ и $K(u, v) \leqslant 0$, то из (4) вытекает, что $b(u, v)$ монотонно убывает по u и обращена выпуклостью вниз, т. е.

$$b_{u}, (u, v) \leqslant 0 \text{ и } b_{uu}(u, v) \geqslant 0, \tag{5}$$

и при всех v существуют пределы

$$\lim_{u \to \infty} b(u, v) = b^0(v) \leqslant 1 \tag{6}$$

и

$$\lim_{u \to +\infty} b_u(u, v) = 0. \tag{7}$$

Кроме того, в [2] доказана гладкость орициклов.

3. Вспомогательные леммы.

Лемма 1. *Пусть функция $f(x) \geqslant 0$ и непрерывна на полуоси $[a, +\infty)$ и решение $y = g(x)$ уравнения*

$$y'' = f(x)\, y \tag{8}$$

на полуоси $[a, +\infty)$ удовлетворяет краевым условиям

$$g(a) = 0 \tag{9}$$

и

$$\lim_{x \to +\infty} g'(x) = 0. \tag{10}$$

Тогда $g(x) \equiv 0$ при $x \geqslant a$.

Доказательство. Допустим противное. Пусть открытое множество $E = E(x > a,\ g(x) < 0)$ имеет ограниченную компоненту (α, β). Тогда в интервале (α, β) найдется такая точка c, в которой $g(c) < 0$ и $g''(c) > 0$. Такую точку легко получить, натягивая на часть графика функции $g(x)$, заданную на интервале (α, β), выпуклую оболочку. Но тогда $f(c) < 0$, что противоречит условию леммы.

Поэтому E не имеет ограниченных компонент. Если E имеет неограниченную компоненту $[a_1, +\infty)$,то над ней часть графика функции $g(x)$ будет выпуклой кривой, обращенной выпуклостью вверх. Но тогда $\lim\limits_{x \to +\infty} g'(x) < 0$, что противоречит условию (10). Итак, E — пусто. Поэтому везде $g(x) \geqslant 0$, а тогда $g''(x) \geqslant 0$. Следовательно, график функции $g(x)$ — кривая, обращенная выпуклостью вниз. Очевидно, условие (10) для такой кривой, начинающейся из точки на оси x, может быть выполнено лишь в том случае, когда $g(x) \equiv 0$. Лемма доказана.

Следствие. *Пусть два решения $g_1(x)$ и $g_2(x)$ уравнения (8) на полуоси $[a, +\infty)$ удовлетворяют условию (10) и $g_1(a) = g_2(a)$. Тогда $g_1(x) = g_2(x)$ при всех $x \geqslant a$.*

Справедливость этого следствия становится очевидной, если заметить, что разность $g(x) = g_1(x) - g_2(x)$ является решением уравнения (8) и удовлетворяет условиям леммы 1.

Лемма 2. *Функция $b(u, v)$, определенная равенством* (2), *и ее производные $b_u(u, v)$ и $b_{uu}(u, v)$ непрерывны.*

Доказательство. Покажем сначала непрерывность $b(u, v)$ при $u \geqslant 0$. Так как $b(0, v) = 1$ и по u функция $b(u, v)$ убывает, то $0 < b(u, v) \leqslant 1$ при $u \geqslant 0$. Пусть найдется такая точка (u_0, v_0), $u_0 \geqslant 0$, что существует последовательность точек $(u_n, v_n) \to (u_0, v_0)$, для которой

$$\lim_{n \to \infty} b(u_n, v_n) = b_1 \neq b(u_0, v_0).$$

Выпуклые функции $b(u, v)$ при $u \geqslant 0$ равномерно ограничены на полуоси $[0, +\infty)$ и потому из последовательности v_n можно выбрать такую подпоследовательность v_{n_k}, что функции $b\left(u, v_{n_k}\right)$ сходятся к некоторой функции $\tilde{b}(u)$. Поскольку гауссова кривизна $K(u, v)$ непрерывна, то функция $\tilde{b}(u)$ будет решением уравнения

$$b_{uu} + K(u, v_0)\, b = 0,$$

отличным от его решения $b(u, v_0)$ над полуосью $[0, +\infty)$ при одинаковых краевых условиях

$$b(0, v_0) = \tilde{b}(0) = 1 \text{ и } \lim_{u \to +\infty} b_u(u, v_0) = \lim \tilde{b}_u(u) = 0.$$

Это невозможно в силу следствия леммы 1. Итак, $b(u, v)$ — непрерывна при $u \geqslant 0$. Из соотношения (4) вытекает непрерывность $b_{uu}(u, v)$ при $u \geqslant 0$. Непрерывность $b_u(u, v)$ для $u \geqslant 0$ следует из того, что при сходимости выпуклых функций $b(u, v)$ к функции $b(u, v_0)$, когда $v \to v_0$, сходятся и касательные к графикам выпуклых функций, когда предельная кривая — гладкая.

Непрерывность $b(u, v)$, $b_u(u, v)$ и $b_{uu}(u, v)$ при $u < 0$ следует из непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от начальных данных (в данном случае от $b(0, v) = 1$ и $b_u(0, v)$) и от параметра (в данном случае непрерывности $K(u, v)$ по v) (см. [3] § 23).

4. Гладкость полугеодезической сети.

Теорема 1. *Пусть $T \in C^2$ — седловой рог в R^3 и на T в целом введены полугеодезические координаты u, v. Тогда вектор-функция $\bar{r} = \bar{r}(u, v)$, задающая T в этих параметрах, из класса C^1.*

Доказательство. Координатными линиями u будут геодезические лучи L_{v_0}, каждый из которых задается вектор-функцией $\bar{r} = \bar{r}(u, v_0)$, дважды непрерывно дифференцируемой по естественному параметру u. Непрерывность поля единичных векторов $\bar{r}_u(u, v)$ на T следует из непрерывности поля направлений геодезических лучей на T ([2], лемма 5) Поэтому вектор-функция $\bar{r}_u(u, v)$ непрерывна.

Семейством координатных линий v будет семейство гладких замкнутых кривых Ω_u — орициклов. Пусть v^u — естественный параметр орицикла Ω_u, причем $v^0 = v$, а функция $V^u(v) = v^u$ — значение параметра v^u в точке $X(u, v) = \Omega_u \cap L_v$. Из (2) и леммы 2 следует, что существует непрерывная производная $\frac{dV^u(v)}{dv} = b(u, v) \geqslant c(u) = \text{const} > 0$.

Поскольку вектор-функция $\bar{r}(u_0, v)$, задающая орицикл Ω_{u_0}, непрерывно дифференцируема по его естественному параметру v^{u_0}, то отсюда следует существование непрерывной производной

$$\frac{\partial \bar{r}(u,\ v)}{\partial v} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial v^u} b(u,\ v) \neq 0.$$

Непрерывность $\bar{r}_v(u,\ v)$ следует из ортогональности $\bar{r}_u(u,\ v)$ и $\bar{r}_v(u,\ v)$. Теорема доказана.

5. Регулярность орициклов в полугеодезической параметризации

Теорема 2. *Пусть рог T удовлетворяет условиям теоремы 1 и принадлежит классу C^2. Тогда орициклы Ω_u на T будут кривыми класса C^2.*

Доказательство. Докажем, что орицикл $\Omega_0 \in C^2$. Обозначим через $\varphi(u,\ v,\ \Delta v)$ дугу орицикла Ω_u между точками $X(u,\ v)$ и $X(u,\ v+\Delta v)$, а через $\tau(u,\ v,\ \Delta v)$ — внутренний поворот дуги $\varphi(u,\ v,\ \Delta v)$. Направление обхода кривых Ω_u при возрастании параметра пусть соответствует отрицательному повороту дуг $\varphi(u,\ v,\ \Delta v)$; так как все Ω_u направлены выпуклостью в одну сторону, то повороты $\tau(u,\ v,\ \Delta v)$ не меняют знак. Дуга $\varphi(u,\ v,\ \Delta v)$ будет эквидистантной для дуги $\varphi(0,\ v,\ \Delta v)$, удаленной от $\varphi(0,\ v,\ \Delta v)$ на расстояние u. Пусть $s(u,\ v,\ \Delta v)$ — длина дуги $\varphi(u,\ v,\ \Delta v)$. Тогда, как известно, (см. [4]) производная

$$\left.\frac{ds(u,\ v,\ \Delta u)}{du}\right|_{u=0} = \tau(0,\ v,\ \Delta v).$$

Поскольку

$$s(u,\ v,\ \Delta v) = \int\limits_{v}^{v+\Delta v} b(u,\ v)\,dv,$$

то

$$\tau(0,\ v,\ \Delta v) = \int\limits_{v}^{v+\Delta v} b_u(0,\ v)\,|dv|.$$

Следовательно, существует при всех v

$$k_g(v) = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\tau(0,\ v,\ \Delta v)}{|\Delta v|} = b_u(0,\ v), \tag{11}$$

и функция $k_g(v)$ — геодезическая кривизна кривой Ω_0 — непрерывна в силу леммы 2.

Пусть $P(u,\ v)$ — касательная плоскость к T в точке $X(u,\ v)$, а $\Omega_0'(v)$ — проекция кривой Ω_0 на плоскость $P(0,\ v)$. Покажем, что геодезическая кривизна $k_g(v)$ в точке $X(0,\ v)$, определенная равенством (11), равна кривизне $\tilde{k}(v)$ (со знаком) кривой $\Omega_0'(v)$ в точке $X(0,\ v)$, причем из существования $k_g(v)$ следует существование $\tilde{k}(v)$.

Действительно, проведем через точки $X(0,\ v)$ и $X(0,\ v+\Delta v)$ геодезические кривые, касающиеся кривой Ω_0 в этих точках. Пусть $Y(v,\ \Delta v)$ — точка пересечения этих геодезических, а $\delta(v,\ \Delta v)$ — треугольник, образованный дугой $\varphi(0,\ v,\ \Delta v)$ и кратчайшими отрезками $X(0,\ v)\,Y(v,\ \Delta v)$ и $X(0,\ v+\Delta v)\,Y(v,\ \Delta v)$. Пусть, далее, $\beta(v,\ \Delta v)$ — внешний угол в треугольнике $\delta(v,\ \Delta v)$ при вершине $Y(v,\ \Delta v)$, а $\omega(v,\ \Delta v)$ — кривизна треугольника $\sigma(v,\ \Delta v)$. Поскольку

$$-\omega(v,\ \Delta v) = \tau(0,\ v,\ \Delta v) + \beta(v,\ \Delta v)$$

и $\omega(v, \Delta v)$ — величина того же порядка, что и площадь треугольника $\delta(v, \Delta v)$, т. е ее порядок относительно Δv не ниже двух, то существует

$$-\lim_{\Delta v\to 0}\frac{\beta(v, \Delta v)}{|\Delta v|}=\lim_{\Delta v\to 0}\frac{\tau(v, \Delta v)}{|\Delta v|}=k_g(v).$$

Если $X'(0, v+\Delta v)$ — проекция точки $X(0, v+\Delta v)$ на $T(0, v)$, а $\psi(v, \Delta v)$ — угол между касательными к $\Omega_0'(v)$ в точках $X(0, v)$ и $X'(0, v+\Delta v)$, то легко показать, что разность углов $\psi(v, \Delta v)-\beta(v, \Delta v)$ есть бесконечно малая величина, порядок малости которой выше Δv (см., например, [5] § 74). Поэтому существует

$$\left|\tilde{k}(v)\right|=\lim_{\Delta v\to 0}\frac{\psi(v, \Delta v)}{|\Delta v|}=\lim_{\Delta v\to 0}\frac{\beta(v, \Delta v)}{|\Delta v|}=-k_g(v).$$

Следовательно, кривая $\Omega_0'(v)$ дважды дифференцируема в точке $X(0, v)$.

Введем декартовы координаты x, y, z с началом в точке $X(0, v)$ так, чтобы плоскость $P(0, v)$ имела уравнение $z=0$, а ось x была касательной к $\Omega_0'(v)$ в точке $X(0, v)$. Зададим кривую $\Omega_0'(v)$ в окрестности точки $X(0, v)$ уравнениями $y=g(x)$, $z=0$. Тогда $g_x'(0)=0$ и при надлежащем выборе направления оси y

$$g_{xx}''(0)=k_g(v).$$

Пусть в окрестности точки $X(0, v)$ поверхность T задана уравнением $z=f(x, y)$, а вектор-функция $\bar{r}=\bar{r}(v)$ задает орицикл Ω_0. Тогда из двукратной дифференцируемости $\Omega_0'(v)$ и T в точке $X(0, v)$ следует, что в этой точке существует $\frac{d^2\bar{r}}{dv^2}$, причем

$$\frac{d^2\bar{r}}{dv^2}=\frac{d^2\bar{r}}{dx^2}=\left(0,\ g_{xx}''(0),\ f_{xx}''(0, 0)\right).$$

Поскольку $g_{xx}''(0)=k_g(v)$, а $f_{xx}''(0, 0)$ — нормальная кривизна поверхности T в точке $X(0, v)$ в направлении орицикла Ω_0, то из непрерывности этих кривизн и непрерывности изменения системы координат x, y, z при движении точки $X(0, v)$ по Ω_0 вытекает, что производная $\frac{d^2\bar{r}}{dv^2}$ — непрерывна, т. е. $\Omega_0\in C^2$. Теорема доказана.

6. Дополнение. Пусть теперь рог $T\in C^3$, а $\bar{R}=\bar{R}(\xi, \eta)\in C^3$ — некоторая параметризация поверхности T, и область G — область определения функции $\bar{R}(\xi, \eta)$ в плоскости параметров ξ, η. Обозначим через Φ_u — прообраз орицикла Ω_u, а через Λ_v — прообраз геодезической L_v. Замкнутая кривая Φ_0 задается уравнениями

$$\xi=f(v)\in C^2,\quad \eta=g(v)\in C^2.$$

Кривая Λ_v задается уравнениями $\xi=\xi(u, v)$, $\eta=\eta(u, v)$, $v=\mathrm{const}$, $a\leqslant u\leqslant+\infty$, которые будут решениями следующей системы дифференциальных уравнений для функции $\xi(u, v)$, $\eta(u, v)$, $\alpha(u, v)=\frac{\partial\xi}{\partial u}$ и $\beta(u, v)=\frac{\partial\eta}{\partial u}$:

$$\xi'=\alpha;\quad \eta'=\beta; \tag{12}$$

$$\alpha'=-(\Gamma_{11}^1\alpha^2+2\Gamma_{12}^1\alpha\beta+\Gamma_{22}^1\beta^2);$$

$$\beta'=-(\Gamma_{11}^2\alpha^2+2\Gamma_{12}^2\alpha\beta+\Gamma_{22}^2\beta^2),$$

при начальных данных

$$\xi(0,\ v)=f(v),\quad \eta(0,\ v)=g(v),$$
$$\alpha(0,\ v)=-g'(v)\lambda(v),\quad \beta(0,\ v)=f'(v)\lambda(v)$$
$$\left(\lambda(v)=\left[\overline{R}_\xi^2 g'(v)^2-2\overline{R}_\xi R_\eta g'(v)f'(v)+\overline{R}_\eta^2 f'(v)^2\right]^{\frac{1}{2}}\right),$$

где $\Gamma_{jk}^i(\xi,\ \eta)\in C^1$ — коэффициенты Кристоффеля поверхности T относительно параметризации $\overline{R}(\xi,\ \eta)$. Поскольку начальные данные $f(v)$, $g(v)$, $-g'(v)\lambda(v)$, $f'(v)\lambda(v)$ и правые части уравнений (12) непрерывно дифференцируемы по ξ, η, α и β, то из теорем о дифференцируемости решений дифференциальных уравнений по параметрам и по начальным данным ([3], § 24) следует, что функции $\alpha(u,\ v)$ и $\beta(u,\ v)$ непрерывно дифференцируемы по v, а также существуют непрерывные производные $\frac{\partial^2\alpha}{\partial u\partial v}$ и $\frac{\partial^2\beta}{\partial u\partial v}$.

А тогда вектор-функция $\overline{r}(u,\ v)\equiv\overline{R}(\xi(u,\ v),\ \eta(u,\ v))$, задающая T в полугеодезических координатах u и v, имеет непрерывные частные производные $\overline{r}_{uu}(u,\ v)$, $\overline{r}_{uv}(u,\ v)$, $\overline{r}_{uuu}(u,\ v)$ и $\overline{r}_{uuv}(u,\ v)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Э. Кон-Фоссен. Кратчайшие пути и полная кривизна поверхности. В книге: С. Э. Кон-Фоссен. Некоторые вопросы дифференциальной геометрии в целом. Физматгиз, 1959.

2. А. Л. Вернер. Полугеодезическая координатная сеть на трубках неположительной кривизны. Труды МИАН им. В. А. Стеклова, т. 63 (1965), 130—140.

3. Л. С. Понтрягин. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Изд-во «Наука», М., 1965.

4. Ю. Ф. Борисов. Полуокрестность и вариация длины кривой на поверхности. Труды МИАН им. В. А. Стеклова, т. 63 (1965), 26—48.

5. М. Я. Выгодский. Дифференциальная геометрия. ГИТТЛ, М.-Л., 1949.

Поступила 6 апреля 1969 г.

УКРАИНСКИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК

Выпуск 8 1970

АСИММЕТРИЯ АСИМПТОТИЧЕСКИ ПЛОСКИХ ПРОСТРАНСТВ-ВРЕМЕН ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

В. И. Денисов
(Харьков)

1. В общей теории относительности предполагается, что пространство-время имеет римановый характер, а наличие поля тяготения проявляется в отклонении свойств риманового пространства-времени W от свойств плоского пространства-времени.

Обычно это отклонение определяют кривизной пространства-времени W. Мы будем его характеризовать еще и асимметрией. Относительно пространства-времени W, рассматриваемого в работе, мы предполагаем следующее.

Пространство-время W топологически эквивалентно плоскому. Это означает, что W может быть получено непрерывной деформацией плоского пространства-времени. Пространство-время асимптотически плоско, и его метрический тензор g_{ik} непрерывен вместе с частными производными до третьего порядка.

То плоское пространство-время E, к которому W асимптотически приближается, назовем предельным.

Понятие асимметрии пространства-времени W вводится нами на основе сравнения его с E. Известно, что E допускает десятипараметрическую непрерывную группу преобразований, относительно которой метрика E инвариантна. Эти преобразования называются преобразованиями симметрии E. Риманово пространство-время W, как правило, не допускает преобразований, оставляющих метрику инвариантной, т. е. W асимметрично. Зададим метрику риманового пространства-времени W на его предельном пространстве-времени E, определив соответствие по общности координат. Для этого достаточно найти в системе координат, где задано W, метрику плоского пространства-времени, такую, что метрика W и ее первые производные асимптотически совпадают с метрикой и первыми производными плоского пространства-времени. Эта метрика и определяет E. Соответствующими точками W и E считаем точки, имеющие одинаковые координаты. Пусть $\underset{\rho}{\chi}$, $(\rho = 1, 2, \ldots, 10)$ — операторы группы движений предельного пространства-времени E. Эти операторы определяются десятью векторными полями $\underset{\rho}{\xi}{}^i$, заданными на E.

Систему операторов $\underset{\rho}{\chi}$ мы будем называть наблюдателем в E.

Необходимо отметить, что векторные поля $\underset{\rho}{\xi}{}^i$, определяющие наблюдения, могут быть заданы на E не единственным образом. Они определяются с точностью до преобразования десятипараметрической группой Лоренца.

Предположим, что на E определена система векторных полей $\underset{\rho}{\xi}{}^i$.

В силу определенного выше соответствия между W и E в каждой точке пространства-времени W определены десять векторных полей $\underset{\rho}{\xi}{}^i$.

Асимметрией $\underset{\rho}{\Lambda} g_{ik}$ пространства-времени W относительно наблюдателя $\underset{\rho}{\chi}$ называется производная Ли его метрического тензора g_{ik} относительно векторного поля $\underset{\rho}{\xi}^i$. Из определения производной Ли [1] имеем

$$\underset{\rho}{\Lambda} g_{ik} = \underset{\rho}{\xi}_{i,\,k} + \underset{\rho}{\xi}_{k,\,i}, \tag{1.1}$$

где ковариантная производная берется в метрике пространства W. Из (1. 1) следует, что при преобразовании координат

$$\tilde{x}_i = f^i (x^1,\ x^2,\ x^3,\ x^4)$$

величины $\underset{\rho}{\Lambda} g_{ik}$ ведут себя как тензоры второго ранга.

Смысл $\underset{\rho}{\Lambda} g_{ik}$ прост. Именно, тензор асимметрии показывает, как изменяется метрический тензор пространства-времени W при преобразованиях симметрии предельного пространства-времени E.

Пусть $\underset{\alpha}{\xi}^i$ $(\alpha = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$ — операторы группы параллельных переносов в E. Тогда тензоры $\underset{1}{\Lambda} g_{ik}$, $\underset{2}{\Lambda} g_{ik}$, $\underset{3}{\Lambda} g_{ik}$ мы назовем тензорами неоднородности пространства-времени W, а $\underset{4}{\Lambda} g_{ik}$ — тензором нестационарности W. Аналогично определяются тензоры анизотропии пространства-времени W.

Так как $\underset{\rho}{\Lambda} g_{ik}$ — тензоры второго ранга, то достаточно найти их в одной системе координат. В любой другой системе координат $\underset{\rho}{\Lambda} g_{ik}$ находятся по известным правилам.

Наиболее простой вид $\underset{\rho}{\Lambda} g_{ik}$ имеют в системе координат, где метрика пространства-времени E имеет вид

$$ds^2 = dx^{4^2} - dx^{1^2} - dx^{2^2} - dx^{3^2}. \tag{1.2}$$

В такой системе координат определим наблюдателя следующим образом:

$$\underset{1}{\xi}^i = \delta^i_1;\ \underset{2}{\xi}^i = \delta^i_2;\ \underset{3}{\xi}^i = \delta^i_3;\ \underset{4}{\xi}^i = \delta^i_4 \tag{1.3}$$

$$\underset{5}{\xi}^i = (0, -x^3,\ x^2,\ 0);\ \underset{6}{\xi} = (x^3,\ 0,\ -x^1,\ 0),\ \underset{7}{\xi} = (-x^2,\ x^1,\ 0,\ 0) \tag{1.4}$$

$$\underset{8}{\xi} = (-x^4,\ 0,\ 0,\ -x^1);\ \underset{9}{\xi} = (0,\ -x^4,\ 0 - x^2);\ \underset{10}{\xi} = (0,\ 0,\ -x^4,\ -x^3). \tag{1.5}$$

Из (1. 1) и (1. 3) нетрудно получить выражения для тензоров неоднородности и нестационарности W:

$$\underset{\rho}{\Lambda} g_{ik} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^\rho},\ \ (\rho = 1,\ 2,\ 3); \qquad \underset{4}{\Lambda} g_{ik} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^4}.$$

Подставляя (1. 4) в (1. 1), получим тензоры анизотропии пространства-времени

$$\underset{5}{\Lambda} g_{ik} = (-g_{i2}\delta^3_k + g_{i3}\delta^2_k) + (-g_{k2}\delta^3_i + g_{k3}\delta^2_i) + \left(-x^3 \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^2} + x^2 \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^3}\right);$$

$$\underset{6}{\Lambda} g_{ik} = (g_{i1}\delta^3_k - g_{i3}\delta^1_k) + (g_{k1}\delta^3_i - g_{k3}\delta^1_i) + \left(x^3 \frac{\partial g_{ik}}{g x^1} - x^1 \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^3}\right);$$

$$\underset{7}{\Lambda} g_{ik} = (-g_{i1}\delta^2_k + g_{i2}\delta^1_k) + (-g_{k1}\delta^2_i + g_{k2}\delta^1_i) + \left(-x^2 \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^1} + x^1 \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^2}\right).$$

Нетрудно найти тензоры пространственно-временной анизотропии, для этого надо подставить (1. 5) в (1. 1).

2. Из определения величин $\underset{\rho}{\Lambda} g_{ik}$ следует, что асимметрия пространства-времени W характеризуется десятью тензорами второго ранга.

В этой части работы мы покажем, что десять тензоров $\underset{\rho}{\Lambda} g_{ik}$ связаны рядом соотношений, которые определяются структурными константами группы Лоренца.

Известно [2], что операторы непрерывной конечнопараметрической группы связаны структурными соотношениями. Именно, коммутатор двух операторов группы $\underset{\alpha}{X}$ и $\underset{\beta}{X}$ есть линейная комбинация операторов группы

$$[\underset{\alpha}{X},\ \underset{\rho}{X}] = C^{\rho}_{\alpha\beta} \underset{\rho}{X},$$

где $C^{\rho}_{\alpha\beta}$ — структурные константы группы.

Нетрудно показать, что коммутационные соотношения для производных Ли имеют аналогичный вид

$$[\underset{\alpha}{L}\underset{\beta}{L}] = \underset{\alpha}{L}\underset{\beta}{L} - \underset{\beta}{L}\underset{\alpha}{L} = C^{\rho}_{\alpha\beta} \underset{\rho}{L}. \tag{2. 1}$$

Пусть $\underset{\alpha}{X}$ — операторы неоднородной группы Лоренца.

Из определения асимметрии пространства-времени и свойства производных Ли (2. 1) имеем

$$\underset{\alpha}{\Lambda}\underset{\beta}{\Lambda} g_{ik} - \underset{\beta}{\Lambda}\underset{\alpha}{\Lambda} g_{ik} = C^{\rho}_{\alpha\beta} \underset{\rho}{\Lambda} g_{ik}, \tag{2. 2}$$

где $C^{\rho}_{\alpha\beta}$ — структурные константы неоднородной группы Лоренца.

Следовательно, десять тензоров асимметрии связаны структурными соотношениями (2. 2). Так как структурные константы неоднородной группы Лоренца известны, то, рассматривая соотношения (2. 2), нетрудно убедиться, что из десяти тензоров $\underset{\rho}{\Lambda} g_{ik}$ можно выделить базисные тензоры асимметрии, которые определяют остальные.

В качестве базисных тензоров асимметрии можно взять, например, тензоры $\underset{4}{\Lambda} g_{ik}$, $\underset{6}{\Lambda} g_{ik}$, $\underset{7}{\Lambda} g_{ik}$, $\underset{8}{\Lambda} g_{ik}$.

Тогда,

$$\underset{1}{\Lambda} g_{ik} = \underset{8}{\Lambda}\underset{4}{\Lambda} g_{ik} - \underset{4}{\Lambda}\underset{8}{\Lambda} g_{ik};$$
$$\underset{5}{\Lambda} g_{ik} = \underset{6}{\Lambda}\underset{7}{\Lambda} g_{ik} - \underset{7}{\Lambda}\underset{6}{\Lambda} g_{ik};$$
$$\underset{2}{\Lambda} g_{ik} = \underset{1}{\Lambda}\underset{8}{\Lambda} g_{ik} - \underset{8}{\Lambda}\underset{1}{\Lambda} g_{ik};$$
$$\underset{3}{\Lambda} g_{ik} = \underset{6}{\Lambda}\underset{1}{\Lambda} g_{ik} - \underset{4}{\Lambda}\underset{5}{\Lambda} g_{ik};$$

аналогичным образом определяются $\underset{9}{\Lambda} g_{ik}$ и $\underset{10}{\Lambda} g_{ik}$.

Таким образом, четыре тензора $\underset{4}{\Lambda} g_{ik}$, $\underset{6}{\Lambda} g_{ik}$, $\underset{7}{\Lambda} g_{ik}$ и $\underset{8}{\Lambda} g_{ik}$ определяют асимметрию пространства-времени. Если эти четыре тензора асимметрии нулевые, то пространство-время допускает десятипараметрическую группу движений Лоренца и поэтому плоско.

3. В этой части работы мы исследуем более подробно трансформационные свойства тензоров асимметрии.

Мы отмечали, что десять векторных полей $\underset{\rho}{\xi}{}^{i}$, с помощью которых были построены тензоры асимметрии, определяются на предельном пространстве-времени E не однозначно. Эта неоднозначность связана с тем, что набор векторных полей $\underset{\rho}{\xi^i}$ определяет наблюдателя в E, относительно которого и изучаются свойства асимметрии. Но в предельном пространстве-времени существует целый класс эквивалентных, в силу принципа относительности, наблюдателей. Каждый такой наблюдатель определен своим набором векторных полей, с помощью которых строятся тензоры асимметрии.

Пусть система координат $\{x^i\}$ такова, что метрика E имеет вид (1. 2) и A — наблюдатель, определенный векторными полями (1. 3), (1. 4), (1. 5). Пусть система координат $\{\widetilde{x}^i\}$ получена из $\{x^i\}$ с помощью преобразований группы Лоренца, и $\widetilde{A}$ наблюдатель в системе координат $\{\widetilde{x}^i\}$. Векторные поля $\underset{\rho}{\widetilde{\xi}^i}$, определяющие $\widetilde{A}$, в системе координат $\{\widetilde{x}_i\}$ имеют вид (1. 3), (1. 4). (1. 5).

Выясним, как связаны тензоры асимметрии наблюдателей A и $\widetilde{A}$. С точки зрения наблюдателя A наблюдатель $\widetilde{A}$ определяет асимметрию с помощью векторных полей $\underset{\rho}{Z^i}$, которые при преобразовании $\{x^i\}$ в $\{\widetilde{x}^i\}$ переходят в $\underset{\rho}{\widetilde{\xi}^i}$. Набор векторных полей $\underset{\rho}{Z^i}$ отличается, в общем случае, от набора полей $\underset{\rho}{\xi^i}$. Поэтому тензоры асимметрии наблюдателя $\widetilde{A}$ не являются образами тензоров асимметрии наблюдателя A при преобразовании $\{x^i\}$ в $\{\widetilde{x}^i\}$.

Пусть A и $\widetilde{A}$ связаны преобразованием переноса

$$\widetilde{x}^i = x^i + a^i, \tag{3. 1}$$

где a^i — постоянные.

В системе координат $\{\widetilde{x}^i\}$ наблюдатель A определен векторными полями:

$$\underset{1}{\widetilde{\xi}^i} = \delta^i_1;\ \underset{2}{\widetilde{\xi}^i} = \delta^i_2;\ \underset{3}{\widetilde{\xi}^i} = \delta^i_3;\ \underset{4}{\widetilde{\xi}^i} = \delta^i_4;$$

$$\underset{5}{\widetilde{\xi}} = \left(0,\ -\widetilde{x}^3,\ \widetilde{x}^2,\ 0\right);\ \underset{6}{\widetilde{\xi}} = \left(\widetilde{x}^3,\ 0,\ -\widetilde{x}^1,\ 0\right);\ \underset{7}{\widetilde{\xi}} = \left(-\widetilde{x}^2,\ \widetilde{x}^1,\ 0,\ 0\right);$$

$$\underset{8}{\widetilde{\xi}} = \left(-\widetilde{x}^4,\ 0,\ 0,\ -\widetilde{x}^1\right);\ \underset{9}{\xi} = \left(0,\ -\widetilde{x}^4,\ 0,\ -\widetilde{x}^2\right);\ \underset{10}{\xi} = \left(0,\ 0,\ -\widetilde{x}^4,\ -\widetilde{x}^3\right).$$

Образы этих векторных полей, при преобразовании, обратном (3. 1), имеют вид:

$$z^i_1 = \delta^i_1;\ z^i_2 = \delta^i_2;\ z^i_3 = \delta^i_3;\ z^i_4 = \delta^i_4, \tag{3. 2}$$

$$\underset{5}{z} = (0,\ -x^3 - a^3,\ x^2 + a^2,\ 0);\ \underset{6}{z} = (x^3 + a^3,\ 0,\ -x^1 - a^1,\ 0);$$

$$\underset{7}{z} = (-x^2 - a^2,\ x^1 + a^1,\ 0,\ 0),\ \underset{8}{z} = (-x^4 - a^4,\ 0,\ 0,\ -x^1 a^1);$$

$$\underset{9}{z} = (0,\ -x^4 - a^4,\ 0,\ -x^2 - a^2);\ \underset{10}{z} = (0,\ 0,\ -x^4 - a^4,\ x^3 + a^3).$$

Пусть $\underset{\rho}{\tilde{\Lambda}}g_{ik}$ — тензоры асимметрии наблюдателя $\tilde{A}$ в системе координат наблюдателя A. Используя (3. 2) и (1. 1), нетрудно показать, чтс тензоры неоднородности и нестационарности наблюдателей A и $\tilde{A}$ связаны соотношениями:

$$\underset{\alpha}{\tilde{\Lambda}}g_{ik} = \underset{\alpha}{\Lambda}g_{ik}, \quad (\alpha = 1,\ 2,\ 3,\ 4).$$

Найдем тензоры анизотропии наблюдателя $\tilde{A}$.

Векторные поля z_5, z_6 и z_7 из (3. 2) можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} \underset{5}{z^i} &= \underset{5}{\xi^i} - a^3\underset{2}{\xi^i} + a^2\underset{3}{\xi^i}; \\ \underset{6}{z^i} &= \underset{6}{\xi^i} + a^3\underset{1}{\xi^i} - a^1\underset{3}{\xi^i}; \\ \underset{7}{z^i} &= \underset{7}{\xi^i} - a^2\underset{1}{\xi^i} + a^1\underset{2}{\xi^i}. \end{aligned} \tag{3. 3}$$

Подставляя (3. 3) в (1. 1), получим

$$\begin{aligned} \underset{5}{\tilde{\Lambda}}g_{ik} &= \underset{5}{\Lambda}g_{ik} - a^3\underset{2}{\Lambda}g_{ik} + a^2\underset{3}{\Lambda}g_{ik}, \\ \underset{6}{\tilde{\Lambda}}g_{ik} &= \underset{6}{\Lambda}g_{ik} + a^3\underset{1}{\Lambda}g_{ik} - a^1\underset{3}{\Lambda}g_{ik}, \\ \underset{7}{\tilde{\Lambda}}g_{ik} &= \underset{7}{\Lambda}g_{ik} - a^2\underset{1}{\Lambda}g_{ik} + a^1\underset{2}{\Lambda}g_{ik}. \end{aligned} \tag{3. 4}$$

Смысл выражений (3. 4) прост. Пусть, например, W — сферически симметричное пространство-время. Тогда существует наблюдатель, относительно которого тензоры анизотропии равны нулю. Относительно любого другого наблюдателя, находяшегося не в центре сферической симметрии, пространство-время W анизотропно, причем анизотропия определяется смещением наблюдателя от центра симметрии — вектором (a^1, a^2, a^3).

Аналогично определяется связь тензоров пространственно-временной анизотропии наблюдателей A и $\tilde{A}$.

Пусть системы координат наблюдателей A, и $\tilde{A}$ связаны однородным преобразованием Лоренца:

$$\tilde{x}^i = a^i_k x^k, \tag{3. 5}$$

коэффициенты которого удовлетворяют условиям

$$a^4_j \cdot a^4_m - \sum_{\rho=1}^{3} a^\rho_j a^\rho_m = \begin{cases} 1 & j = m = 4 \\ 0 & j \neq m \\ -1 & j = m = \alpha. \end{cases}$$

Найдем $\underset{\rho}{z^i}$ — образы векторных полей $\underset{\rho}{\xi^i}$ при преобразовании, обратном (3. 5).

Преобразование, обратное (3. 5), обозначим так:

$$x^i = \bar{a}^i_k \tilde{x}^k.$$

Тогда, например, $\underset{1}{z^i}$, $\underset{2}{z^i}$, $\underset{3}{z^i}$ и $\underset{4}{z^i}$ имеют следующий вид:

$$\underset{1}{z^i} = \bar{a}^i_1,\ \underset{2}{z^i} = \bar{a}^i_2;\ \underset{3}{z^i} = \bar{a}^i_3;\ \underset{4}{z^i} = \bar{a}^i_4. \tag{3.6}$$

Подставляя (3. 6) в (1. 1), найдем связь между тензорами $\widetilde{\Lambda g}_{ik}$ и Λg_{ik}:

$$\underset{\rho}{\widetilde{\Lambda} g_{ik}} = \bar{a}^\beta_\rho \underset{\beta}{\Lambda g_{ik}} \ (\rho,\ \beta = 1,\ 2,\ 3,\ 4). \tag{3.7}$$

Из (3. 7) видно, что тензоры неоднородности-нестационарности пространства-времени W относительно наблюдателей A и $\tilde{A}$ связаны простым образом — они преобразуются как компоненты ковариантного вектора. Смысл выражения (3. 7) прост. Пусть, например, преобразование (3. 5) таково, что $\bar{a}^\rho_4 \neq 0$, а пространство-время W стационарно относительно наблюдателя A, т. е. $\underset{4}{\Lambda g_{ik}} = 0$. Относительно наблюдателя $\tilde{A}$, по (3. 7), имеем

$$\underset{4}{\widetilde{\Lambda} g_{ik}} = \bar{a}^1_4 \underset{1}{\Lambda g_{ik}} + a^2_4 \underset{2}{\Lambda g_{ik}} + a^3_4 \underset{3}{\Lambda g_{ik}},$$

т. е. относительно $\tilde{A}$ пространство-время W нестационарно. Это естественно, так как преобразование с $\bar{a}^\rho_4 \neq 0$ по существу означает переход к наблюдателю $\tilde{A}$, который движется в предельном пространстве-времени равномерно и прямолинейно относительно A.

Шварцшильдовское пространство-время, например, стационарно для наблюдателя, покоящегося относительно центрального тела. Если же наблюдатель движется относительно тела, то для него рассматриваемое пространство-время нестационарно.

Связь между тензорами анизотропии наблюдателей A и $\tilde{A}$ исследуется аналогично. Мы не приводим этого исследования, так как оно громоздко.

Из рассмотренного выше следует, что понятия стационарное пространство-время, изотропное пространство-время и т. д. не являются абсолютными для наблюдателей в предельном пространстве-времени E. Причина этого — неоднозначность выбора полей $\underset{\rho}{\xi^i}$, которые определяют наблюдателя и асимметрию искривленного пространства-времени W.

Выясним, для каких наблюдателей эти понятия абсолютны.

Пусть A — наблюдатель в E, а $\underset{\rho}{\xi^i}$ — система векторных полей, определяющих A.

Пусть $\tilde{x}^i = f^i\ (x^1,\ x^2,\ x^3,\ x^4)$ — преобразование Лоренца. Тогда наблюдатель $\tilde{A}$ сопряжен с A, если векторные поля $\underset{\rho}{\tilde{\xi}^i}$, определяющие $\tilde{A}$, связаны с $\underset{\rho}{\xi^i}$ следующим образом:

$$\underset{\rho}{\tilde{\xi}^i} = \underset{\rho}{\xi^l} \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^l}. \tag{3.8}$$

Наблюдатели A и $\tilde{A}$ несопряжены, если векторные поля $\underset{\rho}{\xi^i}$ и $\underset{\rho}{\tilde{\xi}^i}$, их определяющие, не связаны условием (3. 8).

Принципиальное различие между сопряженными и несопряженными наблюдателями состоит в том, что для сопряженных наблюдателей понятия симметрии пространства-времени $\mathbb{W}$ являются абсолютными понятиями. Для несопряженных наблюдателей эти понятия относительны.

Понятие сопряженных наблюдателей можно расширить, рассматривая общее преобразование координат. Именно, пусть

$$\tilde{x}^i = \varphi^i (x^1, x^2, x^3, x^4)$$

общее преобразование координат. Наблюдатели A и $\tilde{A}$ сопряжены, если ξ^i и $\tilde{\xi}^i$ связаны соотношением вида (3. 8).

Отметим, что понятие асимметрии может быть введено не только для асимптотически плоских пространств-времен, а также и для пространств II и III типов по классификации А. З. Петрова.

В следующей работе мы построим законы сохранения для асимптотически плоских пространств-времен, используя понятие асимметрии.

ЛИТЕРАТУРА

1. К. Яно, С. Бохнер. Кривизна и числа Бетти. Изд-во иностр. лит., М., 1957.
2. Л. П. Эйзенхарт. Непрерывные группы преобразований. Изд-во иностр. лит., М. 1947.

Поступила 17 мая 1969 г.

УКРАИНСКИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК

Выпуск 8 1970

АСИММЕТРИЯ И ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ ДЛЯ АСИМПТОТИЧЕСКИ ПЛОСКИХ ПРОСТРАНСТВ-ВРЕМЕН ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

В. И. Денисов

(Харьков)

В этой работе, используя понятие асимметрии, введенное в [1], рассмотрены законы сохранения для асимптотически плоских пространств-времен общей теории относительности. Исследованы трансформационные свойства этих законов сохранения.

1. Пусть A — наблюдатель в предельном пространстве-времени E, [1]. Пусть $\underset{\rho}{\xi^i}$ — векторные поля, определяющие наблюдателя A. Тогда относительно A определены тензоры асимметрии $\underset{\rho}{\Lambda} g_{ik}$ искривленного пространства-времени W.

В работе [2] показано, что ковариантная дивергенция векторного поля $\underset{\rho}{S^i}$, определяемого выражением

$$\underset{\rho}{S^i} = \frac{1}{\varkappa}\left\{g^{il}\left(\underset{\rho}{\xi^k}\right)_{,l} - g^{kl}\underset{\rho}{\xi^i}_{k,l} - R^i_l\underset{\rho}{\xi^l}\right\} + \\ + \frac{1}{\varkappa}\left(R^i_l + \frac{1}{2}\delta^i_l R\right)\underset{\rho}{\xi^l} + T^i_l\underset{\rho}{\xi^l}, \tag{1. 1}$$

равна нулю в силу уравнений тяготения Эйнштейна.
Из определения тензоров асимметрии нетрудно получить следующие равенства:

$$g^{il}\underset{\rho}{\xi^k}_{k,\,l} = g^{il}\left(\frac{\underset{\rho}{\Lambda} g}{g}\right)_{,l} \\ g^{kl}\underset{\rho}{\xi^i}_{k,\,l} + R^i_l\underset{\rho}{\xi^l} = g^{kl}\underset{\rho}{\Lambda}\Gamma^i_{kl}, \tag{1. 2}$$

где $\underset{\rho}{\Lambda} g$ и $\underset{\rho}{\Lambda}\Gamma^i_{kl}$ — асимметрии g и Γ^i_{kl} соответственно.

Асимметрия $\underset{\rho}{\Lambda}\Gamma^i_{kl}$ определяется асимметрией g_{ik} и равна

$$\underset{\rho}{\Lambda}\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2} g^{ik}\left(\underset{\rho}{\Lambda} g_{kn,\,l} + \underset{\rho}{\Lambda} g_{ln,\,k} - \underset{\rho}{\Lambda} g_{kl,\,n}\right). \tag{1. 3}$$

Подставляя (1. 2) и (1. 3) в (1. 1), после несложных преобразований получим:

$$\underset{\rho}{S^i} = \frac{1}{\varkappa}\left(\frac{\underset{\rho}{\Lambda} g^{il} g}{g}\right)_{,l} + \frac{1}{\varkappa}\left(R^i_l + \frac{1}{2}\delta^i_l R\right)\underset{\rho}{\xi^l} + T^i_l\underset{\rho}{\xi^l}. \tag{1. 4}$$

Так как $\rho = 1, 2, \ldots, 10$, то мы имеем десять векторных полей $\underset{\rho}{S^i}$, ковариантная дивергенция которых равна нулю в силу уравнений тяготения Эйнштейна. Каждому такому полю соответствует закон сохранения.

Физический смысл каждого из этих законов сохранения определим, исходя из следующего.

Известно, что в теории, построенной в плоском пространстве-времени, каждый закон сохранения определяется и интерпретируется на основе симметрии пространства-времени. В общей теории относительности этот принцип построения законов сохранения лишен смысла, так как пространства-времена общей теории относительности, как правило, асимметричны.

Мы предполагаем, что энергия, импульс, момент пространства-времени определяется его кривизной и асимметрией. Векторные поля (1. 4) мы интерпретируем следующим образом.

$\underset{a}{S}{}^i$ — четырехвектор импульса $\underset{a}{P}$ пространства времени, если $\underset{a}{\xi}{}^i$ — поле пространственных трансляций предельного пространства-времени.

$\underset{4}{S}{}^i$ — четырехвектор энергии $\underset{4}{P}$ пространства-времени, если $\underset{4}{\xi}{}^i$ — поле временных трансляций предельного пространства-времени.

$\underset{5}{S}{}^i, \underset{6}{S}{}^i, \underset{7}{S}{}^i$ — четырехвекторы момента пространства-времени, если ξ^i — поля, соответствующие изотропии предельного пространства-времени.

Четырехвектор $\underset{\rho}{S}{}^i$ представим как сумму трех векторных полей:

$$\underset{\rho}{S}{}^i = \underset{\rho}{S}{}^i_G + \underset{\rho}{S}{}^i_{G\times M} + \underset{\rho}{S}{}^i_M,$$

где

$$\underset{\rho}{S}{}^i_G = \frac{1}{\varkappa}\left(\frac{\underset{\rho}{\Lambda} g^{il} g}{g}\right)_{,l},$$

$$\underset{\rho}{S}{}^i_{G\times M} = \frac{1}{\varkappa}\left(R^i_l + \frac{1}{2}\delta^i_l R\right)\underset{\rho}{\xi}{}^l,$$

$$\underset{\rho}{S}{}^i_M = T^i_l \underset{\rho}{\xi}{}^l.$$

Каждый из этих векторов мы интерпретируем следующим образом.

$\underset{\rho}{S}{}^i_G$ — часть $\underset{\rho}{S}{}^i$, определяемая полем тяготения;

$\underset{\rho}{S}{}^i_{G\times M}$ — часть $\underset{\rho}{S}{}^i$, определяемая взаимодействием поля тяготения и материи;

$\underset{\rho}{S}{}^i_M$ — часть $\underset{\rho}{S}{}^i$, определяемая материей.

Таким образом, полный четырехвектор $\underset{\rho}{S}{}^i$ состоит из гравитационной части $\underset{\rho}{S}{}^i_G$, части, определяемой взаимодействием $\underset{\rho}{S}{}^i_{G\times M}$, и части $\underset{\rho}{S}{}^i_M$, определяемой материей. Для каждого из этих четырехвекторов естественно определяется поток и плотность соответствующей величины.

Из $\underset{\rho}{S}{}^i_G$ следует, что этот четырехвектор определяется асимметрией пространства-времени. Отсюда видно, что только нестационарные области пространства-времени могут иметь энергию поля тяготения и переносить ее.

В некоторых случаях четырехвектор $\underset{\rho}{S}{}^i$ расщепляется на два четырехвектора, причем ковариантная дивергенция каждого из них равна нулю. Такое расщепление происходит тогда, когда пространство-время допускает группу движений.

Пусть $\underset{a_0}{\xi^i}$ — вектор Киллинга. Тогда $\underset{a_0}{\Lambda g_{ik}} = 0$ и $\underset{a_0}{S^i}$ имеет вид:

$$\underset{a_0}{S^i} = \frac{1}{\varkappa}\left(R^i_l + \frac{1}{2}\delta^i_l R\right)\underset{a_0}{\xi^l} + T^i_l \underset{a_0}{\xi^l}.$$

Легко видеть, что

$$\left(\underset{a_0}{S^i}_{G\times M}\right)_{,i} = 0 \text{ и } \left(\underset{a_0}{S^i}_M\right)_{,i} = 0,$$

поэтому соответствующий закон сохранения расщепляется в этом случае на два закона сохранения. Например, если пространство-время стационарно, то закон сохранения энергии расщепляется на закон сохранения энергии взаимодействия и закон сохранения энергии материи. Можно также показать, что энергия стационарного пространства-времени локализована в области, где $T^i_k \neq 0$.

Аналогичное расщепление происходит с законом сохранения импульса в случае, когда искривленное пространство-время однородно, и импульс локализован в области, где $T^i_k \neq 0$ и т. д.

2. В этой части работы мы рассмотрим трансформационные свойства величин $\underset{\rho}{S^i}$.

Пусть преобразование координат $\{x^i\} \to \{\widetilde{x}^i\}$ означает переход от наблюдателя A к наблюдателю $\widetilde{A}$, сопряженному с A, [1]. Тогда, в силу векторных свойств величины $\underset{\rho}{S^i}$ по значку i, имеем

$$\underset{\rho}{\widetilde{S}^i} = \underset{\rho}{S^l}\frac{\partial \widetilde{x}^i}{\partial x^l}.$$

Это и есть закон преобразования $\underset{a}{S^i}$ при переходе от A к $\widetilde{A}$.

Пусть A и A' — несопряженные наблюдатели, эквивалентные в предельном пространстве-времени E, а система координат такова, что метрика E имеет вид

$$ds^2 = dx^4 - dx^{1^2} - dx^{2^2} - dx^{3^2}.$$

Пусть наблюдатель A определен полями $\underset{1}{\xi^i} = (1, 0, 0, 0)$;

$$\underset{2}{\xi^i} = (0, 1, 0, 0);\ \underset{3}{\xi^i} = (0, 0, 1, 0);\ \underset{4}{\xi^i} = (0; 0, 0, 1).$$

Пусть преобразование Лоренца, которым связаны A и A', будет

$$x'^i = a^i_j x^j. \tag{2.1}$$

Тогда, как показано в работе [1], с точки зрения A наблюдатель A' определен полями

$$\underset{1}{\xi'^i} = \overline{a}^i_1,\ \underset{2}{\xi'^i} = \overline{a}^i_2,\ \underset{3}{\xi'^i} = \overline{a}^i_3, \ldots, \tag{2.2}$$

где $\overline{a}^i_j$ — элементы матрицы преобразования, обратного (2.1), а тензоры неоднородности наблюдателей A' и A связаны соотношениями

$$\underset{m}{\Lambda' g_{ik}} = \overline{a}^l_m \underset{l}{\Lambda g_{ik}} \quad (m, l = 1, 2, 3, 4). \tag{2.3}$$

Тогда четырехвектор $\underset{\rho}{\acute{S}^i}$ наблюдателя A' в системе координат наблюдателя A имеет вид

$$\underset{n}{\acute{S}^i} = \frac{1}{\varkappa}\left(\frac{\underset{n}{\acute{\Lambda}} g^{il} g}{g}\right)_{,l} + \frac{1}{\varkappa}\left(R^i_l + \frac{1}{2}\delta^i_l R\right)\underset{n}{\acute{\xi}^l} + \acute{T}^i_l \underset{n}{\xi^l},$$

или, принимая во внимание (2. 2) и (2. 3),

$$\underset{n}{S'^i} = \bar{a}^m_n \underset{m}{S^i}, \ (m, n = 1, 2, 3, 4). \tag{2. 4}$$

Из (2. 4) видно, что $\underset{m}{S^i}$ и $\underset{l}{S^i}$ связаны простым образом. Именно при переходе от A к A' в одной системе координат $\underset{l}{S^i}$ ведет себя как ковариантный вектор.

Пусть P_1, P_2, P_3, P_4 — полный импульс и полная энергия пространства-времени. Тогда из (2. 4) следует, что P_m и P'_l связаны соотношениями

$$P'_l = \bar{a}^m_l P_m.$$

Можно показать, что в специальной системе координат существует наблюдатель, четырехвекторы величин $\underset{\rho}{S^i}$, $(\rho = 1, 2, 3, 4)$ которого можно преобразовать в псевдотензор Меллера и Мицкевича.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Денисов. Асимметрия асимптотически плоских пространств-времен общей теории относительности. См. статью в настоящем сборнике.

2. В. И. Денисов. Законы сохранения в общей теории относительности. Украинский геометрический сборник, вып. 3. Изд-во ХГУ, 1966, стр. 25—32.

Поступила 17 мая 1969 г.

УКРАИНСКИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК

Выпуск 8 1970

О ПЛОСКОСТЯХ ОРТОГОНАЛЬНОЙ СИММЕТРИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА E^m

В. Ф. Игнатенко
(Полтава)
А. С. Лейбин
(Харьков)

Ряд вопросов теории плоскостей ортогональной симметрии поверхностей евклидова m-мерного пространства E^m рассматривается в работах [1, 2, 3]; в частности, в [1] дается обобщение отдельных результатов работы [4]. В [3] приводятся точные оценки числа плоскостей ортогональной симметрии поверхности F_n^A (это поверхность порядка n, удовлетворяющая следующему условию A: пересечение любых двух плоскостей симметрии F_n^A есть ее $(m-2)$-плоскость симметрии [3]); минимальные трехгранные углы между плоскостями симметрии F_n^A могут иметь только такие двугранные углы: $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{l}$ $(2 \leqslant l \leqslant n)$.

В предлагаемой статье даются точные оценки числа осей ортогональной симметрии плоской нецентральной кривой и числа плоскостей ортогональной симметрии поверхности F_n с указанными минимальными трехгранными углами, но без условия А; изучаются поверхности F_n пространства E^4 с плоскостями симметрии правильных 24- и 600-гранника; проводится классификация F_n в E^4 по числу и расположению их плоскостей симметрии. Указывается также один признак произвольной поверхности F с параллельными плоскостями ортогональной симметрии.

В E^m считается заданной прямоугольная координатная система началом О и осями $x_1, \ldots, x_m$. Поверхность F_n предполагается отличной от поверхности F_n^*, т. е. F_n не содержит в своем составе $l\,(2 \leqslant l \leqslant n)$ плоскостей с общей $(m-2)$-плоскостью, таких что угол между любыми двумя соседними из них равен $\frac{\pi}{l}$ [3]; симметрия произвольной поверхности считается ортогональной. Число плоскостей симметрии F_n предполагается конечным.

1. Об осях симметрии плоских алгебраических кривых

Как известно, изучению кривых с осями симметрии посвящено много работ (см., например, [5—9]). В [9] указываются, в частности, все возможные значения числа N осей симметрии центральной кривой четного порядка (центральная кривая нечетного порядка с осями симметрии приводима; по крайней мере одна из осей будет ее компонентой [9]). Такого результата для нецентральной кривой K_n порядка n с N осями симметрии в литературе нами не было встречено; он получен в этой статье. Попутно установлены некоторые свойства циркулярных кривых, связанные с их осями симметрии. Отметим, что по циркулярным кривым известен целый ряд работ (см. [5, 6, 10—14] и др.); однако их теория далека от своего полного завершения.

1°. Пусть дана нецентральная кривая K_n. Несколько первых старших форм ее уравнения могут представлять собой степени двучлена $x_1^2+x_2^2$. Пусть форма степени h — первая по старшинству, не являющаяся степенью этого двучлена; она может содержать $(x_1^2+x_2^2)^r$ в качестве множителя $(0 \leqslant 2r < h)$.

Имеет место

Теорема 1. *Если нецентральная кривая K_n, отличная от K_n^*, имеет оси симметрии, то их число N нечетно; при четном h число N может быть любым нечетным делителем числа $\frac{h-2r}{2}$, при нечетном h число N может быть любым нечетным, не превосходящим $h-2r$.*

Доказательство. Обозначим через K_h нецентральную кривую, определяемую уравнением кривой K_n, из которого удалены все формы, представляющие собой степени двучлена $x_1^2+x_2^2$. Оси симметрии кривых K_n и K_h совпадают. Поэтому $N \leqslant h$; в силу нецентральности K_n число N нечетно. Так как циклические точки симметричны относительно произвольной прямой, то осевая симметрия K_h распространяется на $h-2r$ ее бесконечно удаленных точек. Отсюда следует, что при четном h N должно быть делителем $\frac{h-2r}{2}$; если h нечетно, то $N \leqslant h-2r$.

Пусть h четно. При этом n также четно. Приведем пример кривой K_n, имеющей ровно $N \geqslant 3$ осей симметрии; N — произвольный нечетный делитель $\frac{h-2r}{2}$. Положим $s=\frac{h-2r}{2N}$. Возьмем N прямых a_k $(k=1, 2, \ldots, N)$, проходящих через точку O так, что угол между любыми двумя соседними из них равен $\frac{\pi}{N}$. Уравнения этих прямых запишем в виде:

$$x_1-\omega_k x_2 = 0 \left(\omega_k=\operatorname{tg}\frac{k\pi}{N};\quad k=1, 2, \ldots, N\right).$$

Тогда уравнение

$$\left(x_1^2+x_2^2\right)^{\frac{n}{2}}+\left(x_1^2+x_2^2\right)^r \prod_{k=1}^{N}\left(x_1-\omega_k x_2\right)^{2s}=c, \tag{1}$$

в нем $h=2(r+Ns)$ — определяет K_n ровно с N осями симметрии, которыми будут биссектрисы углов $\widehat{a_i a_{i+1}}$ $(i=1, \ldots, N-1)$. Для $N=1$ пример K_n дает уравнение (1), если к его левой части прибавить член ax_2.

Пусть h нечетно. При этом n четно (нечетно), если $h<n$ $(h=n)$. Пусть N — произвольное нечетное число, не превосходящее $h-2r$. Для этого N уравнение (1), если в нем взять $s=\frac{1}{2}$, определяет кривую K_n ровно с N осями симметрии. Теорема доказана.

Из теоремы 1 следует, что для произвольной r-циркулярной кривой K_n $(0 \leqslant 2r < n)$ число осей симметрии $N \leqslant n-2r$; циркулярная кривая K_3, в частности, может иметь только одну ось симметрии [6]. Число $n-h$ характеризует кратность касания кривой с ее изотропными асимптотами.

2°. Напомним, что минимальным углом плоской кривой называется такой угол, образованный ее осями симметрии, через внутреннюю область которого не проходит ни одна ось симметрии этой кривой [3].

Теорема 2. *Пусть нецентральная кривая K_{2p-1} имеет N осей симметрии. Тогда либо все они, либо биссектрисы минимальных углов K_{2p-1}, либо и те и другие являются прямыми асимптотического направления K_{2p-1}. В последнем случае K_{2p-1} имеет N четнократных асимптотических направлений.*

Доказательство. Пусть нецентральная кривая K_{2p-1} имеет N осей симметрии с общей точкой 0; $a\,(0 \in a)$ — произвольная неизотропная прямая асимптотического направления, проходящая внутри некоторого минимального угла K_{2p-1} и не являющаяся его биссектрисой. Отражение a относительно осей симметрии K_{2p-1} дает четное число ее асимптотических направлений. Так как число всех асимптотических направлений K_{2p-1} нечетно, то существуют асимптотические направления этой кривой, совпадающие либо с осями симметрии K_{2p-1}, либо с биссектрисами ее минимальных углов; кривая K_{2p-1} может допускать и обе эти возможности. В последнем случае, очевидно, K_{2p-1} имеет N четнократных асимптотических направлений, которые определяются или осями симметрии K_{2p-1}, или бессектрисами ее минимальных углов. Теорема доказана.

2. Точные оценки числа плоскостей симметрии поверхностей F_n с диэдрической подгруппой самосовмещений D_l.

3°. Перейдем теперь к нахождению точных оценок числа плоскостей симметрии поверхностей F_n с плоскостями симметрии, образующими минимальные трехгранные углы τ_{22l} $\left(\tau_{22l}\right.$ имеет только такие двугранные углы: $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{l}\,(2 \leqslant l \leqslant n)$ $\left.[3]^*\right)$. Указанные поверхности допускают диэдрическую подгруппу самосовмещений D_l; обозначим эти F_n через F_n^D.

Отметим, что поверхности F_n^D включают в себя поверхности F_n^A; но для поверхностей F_n^D, которые не являются поверхностями F_n^A, оценки работы [3] нужно повысить. Например, поверхность F_3^D пространства E^3, определяемая уравнением

$$\prod_{k=0}^{2}(x_1 - \omega_k x_2) + a x_3^2 = c, \quad \left(\omega_k = \operatorname{tg}\frac{k\pi}{3};\; k = 0,\ 1,\ 2\right),$$

имеет не три (см. теорему 14 работы [3]), а четыре плоскости симметрии: $x_3 = 0$ и $x_1 - \omega_k' x_2 = 0$, $\left(\omega_k' = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}\right)\right)$.

Теорема 3. *Для поверхности F_n^D, множество плоскостей симметрии которой конечно, число N этих плоскостей имеет точную верхнюю границу $\bar{N}$, определяемую формулами:*

при m четном $\bar{N} = nq$, при m нечетном $\bar{N} = nq + 1$,

где $q = \left[\frac{m}{2}\right]$.

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 14 работы [3]. Пусть через некоторую $(m-2)$-плоскость Π_1^{m-2} проходит $l > 2$ плоскостей симметрии F_n^D. Тогда все остальные ее плоскости симметрии должны быть 2-ортогональны Π_1^{m-2}. Поэтому может существовать только $q = \left[\frac{m}{2}\right]$ таких $(m-2)$-плоскостей $\Pi_i^{m-2}\,(i = 1, 2, \ldots, q)$, через каждую из которых проходит больше двух плоскостей симметрии F_n^D. Так как через любую $(m-2)$-плоскость не может проходить больше n плоскостей симметрии F_n^D, то F_n^D не может иметь больше nq, $nq + 1$ этих плоскостей соответственно при четном и нечетном m.

* В [3], п. 11°, имеется описка. Приведенные там два условия для g нужно читать так:

$$2 \leqslant q \leqslant n, \; 2 \leqslant q \leqslant 2n.$$

Покажем, что данные оценки являются точными. Если $n = 2p$, то поверхность F_{2p}^D с $\overline{N}$ плоскостями симметрии является поверхностью F_{2p}^A. Примеры F_{2p}^A с $\overline{N}$ плоскостями симметрии дают такие уравнения [3]:

$$\begin{gathered}\text{при } m \text{ четном } \varphi_{2p}(x_1, \ldots, x_m) + d = 0,\\ \text{при } m \text{ нечетном } \varphi_{2p}(x_1, \ldots, x_{m-1}) + cx_m^{2p} + d = 0,\end{gathered} \tag{2}$$

где

$$\varphi_{2p}(x_1, \ldots, x_{2r}) = \sum_{i=1}^{r} \psi_{p,\, i};$$

$$\psi_{p,\, i} = a_i \left(x_{2i-1}^2 + x_{2i}^2\right)^p + b_i \sum_{k=0}^{p} (-1)^k C_{2p}^{2k} x_{2i-1}^{2(p-k)} x_i^{2k};$$

в уравнениях (2) соответственно $2r = m$, $m - 1$.

Пусть $n = 2p - 1$. Рассмотрим такую вспомогательную функцию:

$$f_{2p-1}(x_1, \ldots, x_{2r}) = \sum_{i=1}^{r} g_{2p-1,\, i},$$

где

$$g_{2p-1,\, i} = a_i \prod_{k=0}^{2p-1} (x_{2i-1} - \omega_k x_{2i}), \quad \left(\omega_k = \operatorname{tg} \frac{k\pi}{2p-1}\,;\ k = 1, \ldots, 2p-1\right).$$

Тогда примеры поверхностей F_{2p-1}^D, на которых достигаются границы $\overline{N}$, определяют такие уравнения:

$$\text{при } m \text{ четном } f_{2p-1}(x_1, \ldots, x_m) + d = 0, \tag{3}$$

$$\text{при } m \text{ нечетном } f_{2p-1}(x_1, \ldots, x_{m-1}) + cx_m^{2(p-1)} + d = 0. \tag{4}$$

Действительно, для указанных поверхностей $(m-2)$-плоскостями $\Pi_i^{m-2} \times$ $\times\ (i = 1, \ldots, q)$ служат $(m-2)$-плоскости, определяемые такими парами плоскостей: $x_1 = 0$ и $x_2 = 0, \ldots;$ $x_{q-1} = 0$ и $x_q = 0$. Через любую из этих $(m-2)$-плоскостей проходит $2p-1$ плоскостей симметрии каждой из F_{2p-1}^D; это вытекает из того, что произвольная 2-плоскость, ортосекущая к любой из $\Pi_i^{m-2}\,(i = 1, \ldots, q)$, пересекает эти F_{2p-1}^D по кривым, имеющим $2p-1$ осей симметрии (см. кривую (1) при $h = n$ и $r = 0$). Уравнение (4) инвариантно относительно преобразования $x_m' = -x_m$, т. е. плоскость $x_m = 0$ является плоскостью симметрии поверхности (4). Теорема доказана.

4°. Поверхность F_{2p}^D с $\overline{N}$ плоскостями симметрии имеет m попарно ортогональных плоскостей симметрии (теорема 13 работы [3]). Среди F_{2p}^D существуют, в частности, конусы с $\overline{N}$ плоскостями симметрии. Примеры таких конусов задают уравнения (2) при $d = 0$.

Пусть поверхность F_{2p}^D нецентральна. Тогда оценки числа плоскостей симметрии, данные в п. 3°, снижаются:

Теорема 4. *Для нецентральной поверхности F_{2p}^D, множество плоскостей симметрии которой конечно, число N этих плоскостей имеет точную верхнюю границу $\overline{N}$, определяемую формулами:*

$$\textit{при } m \textit{ четном } \overline{N} = mp - 1,$$

$$\textit{при } m \textit{ нечетном } \overline{N} = (m-1)\,p.$$

Подсчет чисел $\overline{N}$ аналогичен предыдущим. Приведем примеры нецентральных поверхностей F_{2p}^D, на которых эти границы достигаются:

$$\text{при } m \text{ четном } \varphi_{2p}(x_1, \ldots, x_{m-2}) + g_{2p-1, \frac{m}{2}} + d = 0; \tag{5}$$

$$\text{при } m \text{ нечетном } \varphi_{2p}(x_1, \ldots, x_{m-1}) + cx_m^{2p-1} + d = 0. \tag{6}$$

Нецентральная поверхность F_{2p}^D с $\overline{N}$ плоскостями симметрии при четном m имеет ровно $2p-1$ плоскостей симметрии, проходящих через одну $(m-2)$-плоскость; произвольная 2-плоскость, ортосекущая к этой $(m-2)$-плоскости, является или 2-плоскостью асимптотического направления нецентральной F_{2p}^D, или пересекает ее по p-циркулярной кривой (теорема 1). Для поверхности (5) указанная 2-плоскость определяет ее 2-асимптотическое направление (x_{m-1}, x_m). Уравнение

$$\varphi_{2p}(x_1, \ldots, x_{m-2}) + (x_{m-1}^2 + x_m^2)^p + g_{2p-1, \frac{m}{2}} + d = 0$$

дает пример нецентральной F_{2p}^D, которую произвольная 2-плоскость, ортосекущая к Π_q^{m-2}, пересекает по p-циркулярной кривой.

5°. Для поверхности F_{2p-1}^D число $\overline{N}$ достигается, в частности на нецентральных поверхностях; примеры таких поверхностей задают уравнения (3) и (4). Центральная F_{2p-1}^D при четном m с $\overline{N}$ плоскостями симметрии есть конус. Пример такого конуса определяет уравнение (3) при $d=0$. При нечетном m поверхность F_{2p-1}^D с $\overline{N}$ плоскостями симметрии нецентральна.

Теорема 5. *В четномерном пространстве E^m для неконической центральной поверхности F_{2p-1}^D, множество плоскостей симметрии которой конечно, число N этих плоскостей имеет точную верхнюю границу*

$$\overline{N} = (2p-1)q - 2, \quad q = \frac{m}{2}.$$

В нечетномерном пространстве E^m эта оценка как для конической, так и для неконической центральной поверхности F_{2p-1}^D имеет вид:

$$\overline{N} = (2p-1)q, \quad q = \left[\frac{m}{2}\right].$$

Не останавливаясь на подсчете чисел $\overline{N}$, приведем примеры поверхностей, на которых оценки теоремы 5 достигаются:

$$\text{при } m \text{ четном } f_{2p-1}(x_1, \ldots, x_{m-2}) + g_{2p-3, \frac{m}{2}} = 0, \tag{7}$$

$$\text{при } m \text{ нечетном } f_{2p-1}(x_1, \ldots, x_{m-1}) + cx_m = 0,$$
$$f_{2p-1}(x_1, \ldots, x_{m-1}) + cx_m^{2p-1} = 0.$$

Если m четно, то существует такая $(m-2)$-плоскость, принадлежащая $2p-3$-плоскостям симметрии неконической центральной F_{2p-1}^D, что любая ортосекущая к ней 2-плоскость определяет двукратное 2-асимптотическое направление этой F_{2p-1}^D. Для поверхности (7) такой $(m-2)$-плоскостью будет Π_q^{m-2}.

6°. Произвольный моноид (поверхность F_n с $(n-1)$-кратной точкой) есть нецентральная поверхность. Среди нецентральных F_{2p}^D существуют моноиды с $\overline{N}$ плоскостями симметрии; числа $\overline{N}$ определяются теоремой 4.

Примеры таких моноидов задают уравнения (5) и (6) при $d=0$. Уравнение (4) при $d=0$ также определяет моноид, т. е. среди F^D_{2p-1} при нечетном m существуют моноиды с $(2p-1)q+1$ плоскостями симметрии. При четном m моноид F^D_{2p-1} не может иметь больше $(2p-1)q-1$ этих плоскостей; пример моноида F^D_{2p-1} с $(2p-1)q-1$ плоскостями симметрии дает такое уравнение:

$$f_{2p-1}(x_1, \ldots, x_{m-2}) + \psi_{p-1,\ \frac{m}{2}} = 0;$$

указанный моноид имеет 2-асимптотическое направление — ортогональное дополнение к $\prod_q^{m-2}$.

Таким образом, имеет место

Теорема 6. *Для моноида F^D_{2p-1}, множество плоскостей симметрии которого конечно, число N этих плоскостей имеет точную верхнюю границу $\overline{N}$, определяемую формулами:*

$$\text{при } m \text{ четном } \overline{N} = (2p-1)q-1,$$

$$\text{при } m \text{ нечетном } \overline{N} = (2p-1)q+1,$$

где $q = \left[\frac{m}{2}\right]$.

7°. Любую алгебраическую кривую n-го порядка, лежащую в плоскости xy и имеющую μ осей симметрии, проходящих через начало координат, одна из которых совпадает с осью x, можно задать уравнением

$$P(x, y) = \sum_{r,\,s} c_{r,\,s} |z|^{2r} \operatorname{Re} z^{\mu s} = 0, \tag{8}$$

где $z = x + iy$, $i = \sqrt{-1}$; числа $r > 0$, $s > 0$ целые, $2r + \mu s \leqslant n$, среди них есть такие r и s, что $2r + \mu s = n$ и для них не все $c_{rs} = 0$. (Этим уравнением фактически пользуется Э. Гурса в [1]).

Если ни одна ось симметрии кривой не совпадает с осью x, а Θ — наименьший угол, образуемый осями симметрии с осью x, то в (8) нужно заменить z на $e^{-i\theta}z$.

Положив $z_t = x_{2t-1} + ix_{2t}$ и снабдив в (8) n, μ, z, r, s, P, если нужно, и θ индексами t, мы можем любую поверхность F^D_n задать уравнением вида

$$\sum_{t=1}^{h} P_t + f(x_{2h+1}, \ldots, x_m) = 0,$$

где $n_t \leqslant n$, f — многочлен степени не выше n, $P_t = P(x_{2t-1}, x_{2t})$, $1 \leqslant h \leqslant q = \left[\frac{m}{2}\right]$.

3. Точные оценки числа плоскостей симметрии поверхностей F_n в пространствах E^3 и E^4

В этом параграфе почти полностью снимаются ограничения на тип алгебраической поверхности: требуется только, чтобы она была отлична от F^*_n, (т. е. чтобы в случае ее приводимости она не содержала в своем составе набора плоскостей, проходящих через одну $(m-2)$-плоскость под равными углами друг к другу) (см. [3], п° 10).

8°. Пусть $F_n \in E^3$. Известно, что поверхность F_n с плоскостями симметрии диэдра не может иметь больше $n+1$ этих плоскостей [15]; минимальный порядок поверхности F_n с плоскостями симметрии правильных тетраэдра, куба и икосаэдра равен соответственно 3, 4 и 6 [4]. Так как существуют поверхности F_{2t} $(t = 3, 4, \dots)$ с плоскостями симметрии икосаэдра, то справедлива

Теорема 7. *Для поверхности F_n пространства E^3, множество плоскостей симметрии которой конечно, число этих плоскостей имеет точную верхнюю границу $\overline{N}$, определяемую так: для F_3 и F_5 $\overline{N} = 6$, для F_4 $\overline{N} = 9$, для F_{2t} $(t = 3, 4, 5, 6, 7)$ $\overline{N} = 15$; эти границы достигаются на поверхностях с плоскостями симметрии правильных тетраэдра, куба и икосаэдра, при $n \neq 5,14$ — только на этих F_n. Для всех остальных $F_n \overline{N} = n + 1$ и достигается на поверхностях с плоскостями симметрии диэдра,*

Следствие. *Пусть поверхность F_n пространства E^3 имеет конечное множество плоскостей симметрии и главных диаметральных плоскостей; точные верхние границы чисел этих плоскостей есть соответственно $\overline{N}$ и N_n^3. Тогда $\overline{N} < N_n^3$, если $n > 2$.*

Следствие вытекает из теоремы 7 с учетом того, что $N_n^3 = n^2 - n + 1$ [16].

9°. Рассмотрим трехмерную поверхность F_n в E^4. Обозначим через F_n^B поверхность F_n с плоскостями симметрии бипирамиды, основанием которой является трехмерный симплекс. Число плоскостей симметрии F_n^B равно 7; $\min O(F_n^B) = 3$. Пример F_3^B дает такое уравнение:

$$x_1 x_2 x_3 + x_4^2 = c. \tag{9}$$

Действительно, поверхность (9) имеет плоскость симметрии $x_4 = 0$; плоскостями симметрии этой поверхности будут также плоскости, проходящие через ось x_4 и 2-плоскости симметрии 2-поверхности

$$x_1 x_2 x_3 = c,$$

лежащей в плоскости $x_4 = 0$. Число 2-плоскостей симметрии этой 2-поверхности равно 6 [4].

10°. Поверхности F_n с плоскостями симметрии симплекса и куба рассматривались в [1]. Рассмотрим здесь поверхности F_n с плоскостями симметрии правильных 24-гранника и 600-гранника, обозначим эти поверхности через F_n^{24} и F_n^{60}. Они имеют, соответственно, 24 и 60 плоскостей симметрии [17], которые можно задать такими уравнениями:

$$F_n^{24}: \begin{cases} x_i = 0, \ (i = 1, 2, 3, 4), \\ x_p \pm x_q = 0, \ (p, q = 1, 2, 3, 4; \ p < q), \\ x_1 \pm x_2 \pm x_3 \pm x_4 = 0; \end{cases} \tag{10}$$

$$F_n^{60}: \begin{cases} x_i = 0, \ (i = 1, 2, 3, 4), \\ x_1 \pm x_2 \pm x_3 \pm x_4 = 0, \\ 2x_\alpha \pm (\sqrt{5} + 1)\, x_\beta \pm (\sqrt{5} - 1)\, x_\gamma = 0, \end{cases} \tag{11}$$

где номера α, β, γ пробегают все циклические перестановки чисел (1, 2, 4), (1, 3, 2), (1, 4, 3), (2, 3, 4).

Покажем, что порядок поверхности F_n^{24} (F_n^{60}) может быть только четным, при этом доказательство проведем только для поверхности F_n^{24}, для F_n^{60} оно аналогично.

Пусть n нечетно. Тогда F_n^{24}, как имеющая четыре попарно ортогональные плоскости симметрии, содержит одну из них своей компонентой (теорема 13 работы [3]); это значит, что F_n^{24} содержит в своем составе все эти плоскости, т. е. $n > 24$. Считая $n > 24$, положим $n' = n - 24$. Исключим плоскости симметрии F_n^{24} из ее состава. Получим поверхность $F_{n'}^{24}$ нечетного порядка n'. $F_{n'}^{24}$ имеет плоскости симметрии 24-гранника, но не содержит их в своем составе, что в силу теоремы 13 работы [3] невозможно.

Поверхность $F_n^{24}\left(F_n^{60}\right)$ имеет четыре (пять) плоскостей симметрии, проходящих через одну 2-плоскость. Поэтому

$$0\left(F_n^{24}\right) \geqslant 4, \quad 0\left(F_n^{60}\right) \geqslant 6.$$

11°. Пусть плоскости симметрии поверхности F_n^{24} задаются уравнениями (10). Тогда все переменные $x_i\ (i = 1, 2, 3, 4)$ должны входить в уравнение F_n^{24} только в четной степени и притом только симметрично. Следовательно, уравнение поверхности F_n^{24} должно иметь вид:
при $n = 4$

$$a_1\sigma_1^{(4)} + a_2\sigma_2^{(4)} + a_3\sigma^{(2)} = c, \tag{12}$$

где

$$\sigma_1^{(4)} = \sum_{i=1}^{4} x_i^4, \quad \sigma_2^{(4)} = \sum_{\substack{i,\, j=1 \\ i \neq j}}^{4} x_i^2 x_j^2, \quad \sigma^{(2)} = \sum_{i=1}^{4} x_i^2;$$

при $n = 6$

$$b_1\sigma_1^{(6)} + b_2\sigma_2^{(6)} + b_3\sigma_3^{(6)} + b_4\sigma_1^{(4)} + b_5\sigma_2^{(4)} + b_6\sigma^{(2)} = c, \tag{13}$$

где

$$\sigma_1^{(6)} = \sum_{i=1}^{4} x_i^6, \quad \sigma_2^{(6)} = \sum_{\substack{i,\, j=1 \\ i \neq j}}^{4} x_i^4 x_j^2, \quad \sigma_3^{(6)} = \sum_{\substack{i,\, j,\, k=1 \\ i<j<k}}^{4} x_i^2 x_j^2 x_k^2$$

и т. д. для дальнейших четных n.

При любом четном $n = 2p$ можно указать такие коэффициенты соответствующего уравнения, при котором оно будет определять совокупность p концентрических сфер.

Потребовав, чтобы поверхности (12) и (13) были поверхностями с плоскостями симметрии 24-гранника, можно показать, что при $n = 4$ уравнение (12) дает только совокупность двух концентрических сфер; поверхностей F_6^{24} существует бесчисленное множество. Например, уравнение

$$\Phi_6 \equiv \sigma_2^{(6)} - 3\sigma_3^{(6)} = 3$$

определяет F_6^{24}.

Таким образом, $\min 0\left(F_n^{24}\right) = 6$. Поверхности F_{2p}^{24} существуют при любом $p \geqslant 3$. Пример F_{2p}^{24} $(p > 3)$ дает такое уравнение

$$\left(\sigma^{(2)}\right)^p + \Phi_6 = c.$$

12°. Пусть $\zeta_i = 0\ (i = 1, 2, \ldots, 60)$ есть нормированные уравнения (11). Тогда уравнения

$$\sum_{i=1}^{60} \zeta_i^{2s} = c, \quad (s = 1, 2, 3, 4, 5)$$

определяют совокупности s концентрических сфер. Уравнение

$$\sum_{i=1}^{60} \zeta_i^{12} = c$$

дает пример F_{12}^{60}. Пример $F_{2p}^{60}\,(p > 6)$ определяет такое уравнение:

$$(\sigma^{(2)})^p + \sum_{i=1}^{60} \zeta_i^{12} = c.$$

Таким образом, существуют поверхности F_{2p}^{60} при $p \geqslant 6$. Вопрос о $\min 0\left(F_n^{60}\right)$ остается открытым.

Следовательно, из всего вышесказанного — с учетом теоремы 3 — вытекает

Теорема 8. *Пусть поверхность $F_n\,(n \neq 6,\ 8,\ 10)$ пространства E^4 имеет конечное множество плоскостей симметрии. Тогда число N всех этих плоскостей имеет точную верхнюю границу $\overline{N}$, определяемую так:*

$\overline{N} = 7$ при $n = 3$; $\overline{N}$ достигается только на поверхностях с плоскостями симметрии бипирамиды, основанием которой является трехмерный симплекс.

$\overline{N} = 16$ при $n = 4$; $\overline{N}$ достигается только на поверхностях с плоскостями симметрии куба.

$\overline{N} = 60$ при $n = 2t\ (t = 6,\ 7, \ldots, 15)$; $\overline{N}$ достигается на поверхностях с плоскостями симметрии правильного 600-гранника и при $n \neq 30$ — только на них.

$\overline{N} = 2n$ при всех остальных n и достигается на поверхностях с плоскостями симметрии бипирамиды.

Поверхность F_n и E^4 вообще не может иметь больше $N_n^4 = n(n-1)^2 + n$ главных диаметральных плоскостей [18]; существует комплексная поверхность, на которой это число достигается. Имеет место

Следствие. *Пусть поверхность F_n пространства E^4 имеет конечное множество плоскостей симметрии и главных диаметральных плоскостей; точные верхние границы чисел этих плоскостей есть, соответственно, $\overline{N}$ и N_n^4. Тогда $\overline{N} < N_n^4$, если $n > 2$.*

4. Классификация поверхностей F_n пространства E^4.

13°. В работе [3] намечена классификация произвольных поверхностей F, имеющих плоскости симметрии, по числу и расположению этих плоскостей. Здесь эта классификация проводится подробнее для алгебраических поверхностей F_n с плоскостями симметрии в пространстве E^4.

Все поверхности F_n (как и F [3]) разделим на два типа:

I. Поверхности, множество плоскостей симметрии которых конечно.

II. Поверхности, множество плоскостей симметрии которых бесконечно.

Поверхности типа I разобьем на четыре класса I_k, $(k = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$ по числу k их линейно независимых плоскостей симметрии. В классе I_2 выделим $n - 1$ подклассов $\mathrm{I}_{2l}\,(l = 2, \ldots, n)$. Подкласс I_{2l} имеет l плоскостей симметрии, проходящих через одну 2-плоскость, которая является для F_n 2-осью симметрии порядка l.

Пусть α_1, α_2, α_3 — линейно независимые плоскости симметрии поверхности F_n класса I_3; $\Pi_0^1 = \alpha_1 \cap \alpha_2 \cap \alpha_3$.

Проведем 3-плоскость Π^3 вполне ортогонально прямой Π_0^1; $F_n^1 = \Pi^3 \cap F_n$. Плоскостная симметрия поверхности F_n характеризуется 2-плоскостями симметрии F_n'; F_n' имеет конечное число 2-плоскостей симметрии. В Π^3 поверхности F_n' можно разделить на поверхности с плоскостями симметрии диэдра, правильных тетраэдра, куба и икосаэдра.

В зависимости от этого поверхности F_n класса I_3 разобьем на четыре подкласса $I_{3\tau}$ ($\tau = 1, 2, 3, 4$). Поверхность подкласса I_{31} имеет 2-ось симметрии порядка l ($2 \leqslant l \leqslant n$). Поэтому поверхности подкласса I_{31} подразделим на $n-1$ видов по порядку l их 2-оси симметрии.

В классе I_4 выделим пять подклассов $I_{4\tau'}$ ($\tau' = 1, 2, 3, 4, 5$) соответственно тому, плоскости симметрии каких из следующих многогранников имеет F_n: бипирамида, правильный симплекс, куб, правильный 24-гранник, правильный 600-гранник. Дальнейшую классификацию поверхностей подкласса I_{41} можно провести по виду основания бипирамиды.

Рассмотрим теперь поверхности типа II. Их мы разделим на такие классы:

II-C — цилиндрические поверхности, не имеющие осей, относительно которых они являются поверхностями вращения («чисто — цилиндрические» поверхности). Они разбиваются на подклассы II-C_t ($t = 1, 2$) в зависимости от размерности их плоских t — образующих. Дальнейшую классификацию поверхностей подклассов II-C_t ($t = 1, 2$) можно провести в зависимости от числа и расположения 2-, 1-плоскостей симметрии их направляющих соответственно 2-, 1-поверхностей. Классификация поверхностей подкласса II-C_1 сходна с классификацией поверхностей типа I (по числу k' ($k' = 0, 1, 2, 3$) линейно независимых 2-плоскостей симметрии их направляющих 2-поверхностей и т. д.). Поверхности подкласса II-C_2 можно разделить на $n+1$ видов по числу l' ($l' = 0, 1, \ldots n$,) 1-плоскостей симметрии их направляющих 1-поверхностей.

II-R — нецилиндрические поверхности вращения («чисторотационные» поверхности); их разделим на подклассы II-R_h ($h = 0, 1, 2$) соответственно размерностям их минимальных h-осей вращения. Среди поверхностей подкласса II-R_1 выделим два вида в зависимости от наличия плоскости симметрии, ортогональной 1-оси их вращения. Поверхности подкласса II-R_2 разобьем на виды II-R_{21}, II-R_{22} соответственно по числу t ($t = 1, 2$) их 2-осей вращения. Поверхности вида II-R_{21} допускают дальнейшую классификацию по числу плоскостей симметрии, не проходящих через их 2-ось вращения; эта классификация аналогична классификации поверхностей класса I_2.

II-CR — цилиндрические поверхности, имеющие оси, относительно которых они являются поверхностями вращения. Эти поверхности разбиваются на подклассы II-CR_t ($t = 1, 2$) соответственно размерностям их минимальных t-осей вращения. Поверхности подкласса II-CR_2 разделяются на виды II-CR_{2h} ($h = 1, 2$) по размерности их плоских h-образующих. В виде II-CR_{21} можно выделить два подвида по наличию плоскости симметрии, ортогональной 2-оси вращения и 1-образующей поверхности.

5. Об одной характеристике поверхности F с параллельными плоскостями симметрии.

14°. Поверхность F_n, имеющая параллельные плоскости симметрии, является цилиндром. Среди неалгебраических поверхностей существуют нецилиндрические поверхности с параллельными плоскостями симметрии. Такой поверхностью в E^3, например, будет поверхность, образованная вращением кривой $x_1 = \sin x_2 + c$, лежащей в плоскости (x_1, x_2), вокруг оси x_2. Эта поверхность имеет одно дискретное семейство параллельных плоскостей симметрии.

Пусть E^m разбито на единичные кубические ячейки; Δ — одна из них. Поместив в Δ некоторую поверхность и затем отразив ее в гранях всех единичных ячеек E^m, получим неалгебраическую поверхность, имеющую несколько дискретных семейств параллельных плоскостей симметрии.

Укажем один признак произвольной поверхности F с параллельными плоскостями симметрии.

Теорема 9. *Пусть поверхность F имеет $p\,(2 \leqslant p \leqslant m)$ линейно независимых плоскостей симметрии $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ и плоскость симметрии β, вполне параллельную их пересечению, и пусть k — число плоскостей α_i, ортогональных β. Тогда F имеет не менее чем $p - k$ или $p - k + 1$ семейств параллельных плоскостей симметрии в зависимости от того, параллельна или нет β одной из плоскостей α_i; если эта поверхность алгебраическая, то она есть цилиндр соответственно с* не менее чем $p - \kappa$, $p - \kappa + 1$-*образующими* $(p - \kappa,\ p - \kappa + 1 \leqslant m - 2)$.

Доказательство этой теоремы принципиально не отличается от доказательства теоремы 9 работы [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. E. Goursat. Etude des surfaces qui admettent tous les plans de symétrie d'un polyèdre réguliers. Ann de l'Ec. Norm. (3) IV, 1887, 159—200, 241—312—317—340.

2. В. Ф. Игнатенко. О гиперплоскостях ортогональной симметрии алгебраических гиперповерхностей. Укр. геометр. сб., вып. 5—6. Изд-во ХГУ, Харьков, 1968, стр. 78—84.

3. В. Ф. Игнатенко, А. С. Лейбин. К теории плоскостей ортогональной симметрии поверхностей в E^m. Укр. геометр. сб., вып. 7. Изд-во ХГУ, Харьков, 1969, стр. 40—55.

4. L. Lecornu. Sur les surfaces possédant les mêmes plans de symétrie que l'un des polyèdres réguliers. Acta Math., 10, 1887, 201—280.

5. G. Loria. Spesielle ebene algebraische Kurven. Enz. Mat. Wiss., Bd. III C 5, Leipzig, 1908.

6. G. Loria. Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven. Leipzig, 1902.

7. М. В. Постников. Этюды по теории кривых четвертого порядка. Казань, 1888.

8. В. О. Шифф. Об осях симметрии центральных кривых четвертого порядка. Харьков, 1893.

9. А. Т. Чуб. Некоторые вопросы из теории алгебраических кривых. Известия Крымпединститута, т. 35, Симферополь, 1961, стр. 143—172.

10. В. К. Дыдырко. Циркулярные кривые третьего порядка. Труды Белорусского госуниверситета, № 17—18, Минск, 1928.

11. О. Н. Колесников. Геометрическое образование плоских кривых четвертого порядка. Известия Крымпединститута, т. 29, Симферополь, 1958, стр. 113—172.

12. А. А. Савелов. Плоские кривые. Физматгиз, М., 1961.

13. С. А. Смогоржевский и Е. С. Столова. Справочник по теории плоских кривых третьего порядка. Физматгиз, М., 1960.

14. B. A. Rosina. Sulle configurazioni delle curve algebriche piane n—circolari. Bull. Soc. roy, sci Liege, 1968, 37, № 3, 4, 141—148.

15. G. Castelnuovo und F. Enriques. Grundeigeschaften der algebraischen Flächen. Enz. Mat. Wiss. Bd. IV, 71. 6, Zeipzig, 1915.

16. B. A. Rosina. Sulla teoria diametrale delle superficie algebriche. Bull. Soc. roy, sc. Liège, 1962, 31, № 3, 4, 146—147.

17. P. H. Schoute. Mehrdimensionale Geometrie. II. Leipzig, 1905.

18. В. Ф. Игнатенко. К теории главных диаметральных гиперповерхностей алгебраических гиперповерхностей. Третья Прибалтийская геометрическая конференция (тезисы докладов). Паланга, 1968, стр. 68—69.

Поступила 16 мая 1969 г.

УКРАИНСКИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК

Выпуск 8 1970

О НЕКОТОРЫХ ТИПАХ АФФИНОРНЫХ СТРУКТУР В КАСАТЕЛЬНОМ ПУЧКЕ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОГО МНОГООБРАЗИЯ

Ф. И. Каган

(Иваново)

ВВЕДЕНИЕ

В последние годы в дифференциальной геометрии наметился совершенно определенный интерес к изучению аффинорных структур на дифференцируемом многообразии. Наиболее интенсивно развивалась теория почти комплексных структур, так что к настоящему времени имеются монографические освещения относящихся сюда вопросов, а также содержательный обзор Д. В. Беклемишева [1]. Вместе с тем растет поток работ, посвященных аффинорным структурам и других типов. Это, прежде всего, почти алгебраические [7] аффинорные и полиаффинорные структуры, в частности, почти двойные и почти дуальные структуры (именуемые также структурами почти произведения и почти касательными структурами), почти кватернионные структуры, а также f-структуры К. Яно и многие другие. При этом больше всего внимания уделяется нахождению условий интегрируемости рассматриваемых структур, изучению автоморфизмов этих структур, а также свойств определяемых ими распределений. Большой интерес представляет также совместное изучение аффинорных структур и тензорных структур других типов (почти эрмитовы структуры с их аналогами; почти контактные структуры с их аналогами и другие).

Зарубежная литература по аффинорным структурам к настоящему времени весьма обширна и трудно обозрима. В последние годы ряд интересных работ по аффинорным структурам выполнен советскими авторами — Д. В. Беклемишевым, В. И. Близникасом, В. В. Вишневским, В. А. Гаухманом, А. Л. Крищюнайте, Г. И. Кручковичем, Н. М. Остиану, М. М. Цаленко, А. П. Широковым и др.

С другой стороны, начиная с работы С. Сасаки [16] от 1958 года, началось достаточно интенсивное изучение дифференциальной геометрии касательного расслоенного пространства (касательного пучка) [4—6, 8, 9, 11—14, 16—19, 21—26].

Как впервые заметил Т. Нагано [14], в касательном пучке риманова многообразия всегда существует почти комплексная структура. В дальнейшем были найдены и другие способы получения аффинорных структур в касательном пучке. При этом обнаружились интересные связи между свойствами дифференциально-геометрических структур на исходном многообразии M и свойствами аффинорных структур в касательном пучке $T(M)$.

Настоящая работа посвящена аффинорным структурам в касательном пучке дифференцируемого многообразия.

В основе применяемого нами метода лежит понятие полного поднятия (лифта), введенное ранее автором [4,6]. С помощью этой конструкции, излагаемой нами в § 1, задание в касательном расслоенном пространстве произвольной инфинитезимальной связности позволяет определить операции продолжения тензорных полей произвольных типов из многообразия в его касательный пучок. При этом все другие типы лифтов, вводившиеся разными авторами [23, 25, 26], получаются как частные случаи полного поднятия.

Применительно к аффинорным полям полное поднятие получает простую чисто алгебраическую трактовку. Для произвольной ассоциативной и дистрибутивной алгебры A мы строим (в § 2) ассоциативную и дистрибутивную алгебру $\widetilde{A}$, называемую нами присоединенной алгеброй. При этом полное поднятие оказывается изоморфизмом алгебры $\widetilde{L}(M)$, присоединенной к алгебре $L(M)$ аффинорных полей на многообразии M, в алгебру $L(T(M))$ аффинорных полей, определенных на касательном пучке $T(M)$.

Этот результат (теорема 2) позволяет вопрос о нахождении почти комплексных, почти двойных и почти дуальных структур в $T(M)$ полностью свести к вопросу о нахождении так называемых биунитарных элементов в алгебре $\widetilde{A}$, присоединенной к произвольной алгебре A с единицей. Поэтому в § 3 разыскиваются биунитарные элементы алгебры $\widetilde{A}$, присоединенной к алгебре A, в которой фиксированы некоторая деривация и биунитарный элемент, квадрат которого противоположен единице алгебры A. На основе этих результатов и теоремы 2 мы получим в следующем параграфе бесконечные множества (в виде двух-и четырехпараметрических семейств) почти комплексных, почти двойных и почти дуальных структур в касательном пучке многообразия с почти комплексной структурой (для каждой инфинитезимальной связности в касательном расслоенном пространстве).

Все введенные ранее другими авторами аффинорные структуры в касательном пучке оказываются при этом частными случаями полученных нами бесконечных семейств структур. В этом же § 4 даются необходимые и достаточные условия для того, чтобы полное поднятие определяло в $T(M)$ аффинорную структуру любого из рассматриваемых типов. В последнем параграфе получено явное выражение тензора Нейенхойса для произвольного аффинора в $T(M)$ в виде полного поднятия. Тем самым дается единый метод для нахождения условий интегрируемости, по крайней мере, для любых почти комплексных и почти двойных структур в $T(M)$.

Основные результаты этой статьи были доложены на III Прибалтийской геометрической конференции [5].

1. Полное поднятие для тензорных полей из многообразия в его касательный пучок

Пусть M—n-мерное дифференцируемое многообразие и $T(M)$ — его касательный пучок, то есть $2n$-мерное расслоенное пространство, базисным пространством которого служит многообразие M, слоями — касательные векторные пространства, а каноническая проекция соотносит каждой точке z из $T(M)$ точку ξ из M, в которой z служит касательным к M вектором.

Если (ξ^α)* — локальные координаты в M, то в $T(M)$ можно ввести локальные координаты (ξ^α, x^α), где x^α — координаты касательного к M вектора z в точке $\xi = (\xi^\alpha)$ относительно естественного репера. Эти координаты в $T(M)$ будем называть специальными.

---

* Здесь и в дальнейшем индексы принимают следующие значения: $\alpha, \beta, \ldots = 1, 2, \ldots, n$; $a, b = 1, 2, \ldots, 2n$.

Пусть $T^{(b)}_{(a)} = T^{b_1 \ldots b_s}_{a_1 \ldots a_r}$ — компоненты тензора валентности (r, s) в касательном пучке $T(M)$ относительно специальных координат. Условимся каждой такой компоненте соотносить $(r+s)$ — разрядное двоичное число

$$\nu = (A_1 \ \ldots \ A_r B_1 \ \ldots \ B_s)_2, \tag{1.1}$$

где

$$A_i = \begin{cases} 0, \text{ если } a_i = n + \alpha_i, \\ 1, \text{ если } a_i = \alpha_i, \end{cases} \quad B_j = \begin{cases} 0, \text{ если } b_j = \beta_j, \\ 1, \text{ если } b_j = n + \beta_j. \end{cases} \tag{1.2}$$

$$(i = 1, \ \ldots, \ r; \ j = 1, \ \ldots, \ s).$$

Число ν назовем **типовым номером** компоненты $T^{(b)}_{(a)}$ и будем писать $\underset{(\nu)\{\alpha\}}{T}{}^{\{\beta\}}$, где $\{\alpha\}$ и $\{\beta\}$ играют роль коллективных индексов, причем на i-ом месте коллективного индекса $\{\alpha\}$ ставится α_i или $n + \alpha_i$ в зависимости от того, 1 или 0 находятся в соответствующем разряде двоичной записи числа ν, то есть в соответствии с (1.1) и (1.2). Аналогично для $\{\beta\}$.

Например, для тензора в $T(M)$ валентности $(4, 2)$

$$\underset{(25)\{\alpha\}}{T}{}^{\{\beta\}} = T^{\beta_1 n + \beta_2}_{n + \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 n + \alpha_4},$$

так как $25 = (011001)_2$.

На множестве всех возможных типовых номеров для компонент тензора валентности (r, s) введем частичное отношение порядка следующим образом.

Если

$$\nu = (A_1 \ \ldots \ A_r B_1 \ \ldots \ B_s)_2,$$
$$\nu' = (A'_1 \ \ldots \ A'_r B'_1 \ \ldots \ B'_s)_2,$$

то

$$\nu' \leqslant \nu \leftrightarrow \forall_{\substack{i=1, \ldots, r \\ j=1, \ldots, s}} A'_i \leqslant A_i \wedge B'_j \leqslant B_j. \tag{1.3}$$

Пусть теперь на $T(M)$ задан объект инфинитезимальной связности G, компоненты которого в специальных координатах даются функциями

$$G^{\beta}_{\alpha} = G^{\beta}_{\alpha}(\xi^{\lambda}, \ x^{\lambda}). \tag{1.4}$$

Тогда, как показал автор [4, 6], для любой последовательности

$$\underset{0}{t}, \ \underset{1}{t}, \ \ldots, \ \underset{2^{r+s}-1}{t} \tag{1.5}$$

из 2^{r+s} тензорных полей на M валентности (r, s) величины

$$\underset{(\nu)\{\alpha\}}{T}{}^{\{\beta\}} = \sum_{\nu' \leqslant \nu} (-1)^l G^{\omega_{i_1}}_{\alpha_{i_1}} \ldots G^{\omega_{i_k}}_{\alpha_{i_k}} G^{\beta_{j_1}}_{\sigma_{j_1}} \ldots G^{\beta_{j_l}}_{\sigma_{j_l}} \underset{\nu'}{t}{}^{\beta_1 \ldots \sigma_{j_1} \ldots \sigma_{j_l} \ldots \beta_s}_{\alpha_1 \ldots \omega_{i_1} \ldots \omega_{i_k} \ldots \alpha_r} \tag{1.6}$$

являются компонентами тензора валентности (r, s) в $T(M)$ относительно соответствующих специальных координат. (Здесь $i_1, \ \ldots, \ i_k; \ j_1, \ \ldots, \ j_l$ — это номера разрядов, в которых различаются двоичные представления чисел ν' и ν). Возникающий таким образом тензор в $T(M)$ назовем **полным поднятием** последовательности тензоров (1.5) относительно инфинитезимальной связности G и обозначим

$$T = {}^G\left[\underset{0}{t}, \ \underset{1}{t}, \ \ldots, \ \underset{2^{r+s}-1}{t}\right]. \tag{1.7}$$

Все сказанное выше остается в силе, если вместо тензорных полей на многообразии M рассматривать поля локальных тензоров в касательном пучке, то есть если каждой точке многообразия соотносить не тензор, а поле тензоров фиксированной валентности в соответствующем слое касательного пучка $T(M)$. В специальных координатах такое поле локальных тензоров имеет следующее координатное выражение:

$$t_{(\alpha)}^{(\beta)} = t_{(\alpha)}^{(\beta)}(\xi^\lambda,\ x^\lambda), \tag{1.8}$$

так что его компоненты зависят как от базисных, так и от слоевых координат.

Важно заметить, что при наличии на $T(M)$ произвольной инфинитезимальной связности любой тензор в касательном пучке можно представить как полное поднятие соответствующей последовательности полей локальных тензоров.

Введенное понятие полного поднятия содержит, как частные случаи, все рассматривавшиеся другими авторами типы поднятий (лифтов) для тензорных полей[1].

Именно, для тензорного поля t на M произвольной валентности $(r,\ s)$ каждый из рассматривавшихся ранее типов поднятий представим в виде полного поднятия следующим образом:

а) вертикальное поднятие[2]

$${}^{V}t = {}^{G}[\mathrm{O},\ \ldots,\ \mathrm{O},\ t]; \tag{1.9}$$

б) естественное поднятие[3]

$${}^{N}t = {}^{G}[\mathrm{O},\ \ldots,\ \mathrm{O},\ \underbrace{t,\ \ldots,\ t}_{r+s\ \text{раз}},\ \overset{\circ}{\nabla}t]; \tag{1.10}$$

где $\overset{\circ}{\nabla}t$ — поле локального тензора, компоненты которого в специальных координатах имеют вид

$$\overset{\circ}{\nabla}t_{(\alpha)}^{(\beta)} = x^\rho\nabla_\rho t_{(\alpha)}^{(\beta)} + \sum_{i=1}^{r} x^\rho S_{\rho\alpha_i}^{\omega_i} t_{\alpha_1\ \ldots\ \omega_i\ \ldots\ \alpha_r}^{(\beta)} - \sum_{j=1}^{s} x^\rho S_{\rho\sigma_j}^{\beta_j} t_{(\alpha)}^{\beta_1\ldots\sigma_j\ldots\beta_s} \tag{1.11}$$

(∇_ρ — символ ковариантной производной относительно связности G, $S_{\lambda\mu}^{\nu} = 2G_{[\lambda|\mu]}^{\nu}$ — тензор кручения этой связности);

в) горизонтальное поднятие[4]

$${}^{H}t = {}^{G}[\mathrm{O},\ \ldots,\ \mathrm{O},\ \underbrace{t\ \ldots,\ t}_{r+s\ \text{раз}},\ \mathrm{O}] \tag{1.12}$$

---

[1] Первоначально поднятия разных типов были введены и подробно изучены для случаев векторных полей [9, 16, 21]. Переход к случаю тензорных полей произвольной валентности был осуществлен в работах Яно и Кобаяси [25, 26], Яно и Исихара [23] и, независимо от них, в упомянутых выше работах автора.

[2] Этот тип поднятий для произвольных тензоров рассматривается в работах [25, 6]. Легко видеть, что вертикальное поднятие не зависит от выбора связности G.

[3] Естественное поднятие (называемое также дифференциальным продолжением или полным лифтом) рассматривается в работах [16, 25, 6]. Оно тоже не зависит от выбора связности. Тензорное поле t должно быть дифференцируемым. Представление (1.10) имеет место лишь в случае произвольной полуметрической связности, которая характеризуется тем, что компоненты объекта связности в любых специальных координатах обладают однородностью первой степени по слоевым координатам. В частности, это имеет место в случае, когда связность G получена из аффинной связности, так что в специальных координатах

$$G_\alpha^\beta(\xi^\lambda,\ x^\lambda) = x^\rho\Gamma_{\alpha\rho}^\beta(\xi^\lambda).$$

[4] Горизонтальное поднятие для тензоров произвольной валентности ввели Яно и Исихара в работе [23]. Чтобы из (1.12) получить горизонтальное поднятие в смысле Яно и Исихара, достаточно рассматривать связности G, получающиеся из аффинных связностей (см. предыдущую сноску).

Очевидно, перечисленные типы поднятий связаны следующей зависимостью:

$$
{}^N t = {}^H t + {}^V\left(\overset{\circ}{\nabla} t\right). \tag{1.13}
$$

В заключение дадим явное выражение для полного поднятия в случае полей аффиноров, которое нам потребуется в дальнейшем. Если $F = {}^G\left[\underset{0}{f}, \underset{1}{f}, \underset{2}{f}, \underset{3}{f}\right]$, то в специальных координатах

$$
F^b_a = \begin{cases} \underset{0}{f}{}^\beta_\alpha, & a = n + \alpha,\ b = \beta; \\ \underset{1}{f}{}^\beta_\alpha - G^\beta_\sigma \underset{0}{f}{}^\sigma_\alpha, & a = n + \alpha, b = n + \beta; \\ \underset{2}{f}{}^\beta_\alpha + G^\omega_\alpha \underset{0}{f}{}^\beta_\omega, & a = \alpha,\ b = \beta; \\ \underset{3}{f}{}^\beta_\alpha - G^\beta_\sigma \underset{2}{f}{}^\sigma_\alpha + G^\omega_\alpha \underset{1}{f}{}^\beta_\omega - G^\omega_\alpha G^\beta_\sigma \underset{0}{f}{}^\sigma_\omega, & a = \alpha,\ b = n + \beta. \end{cases} \tag{1.14}
$$

2. Присоединенная алгебра и полное поднятие для полей аффиноров

Начнем с одного алгебраического понятия, которое в дальнейшем будет существенно использовано. Пусть A — произвольная алгебра над кольцом K с единицей. Множество A^4, являющееся четвертой декартовой степенью множества A, снабдим следующими операциями:[1]

(1) сложение

$$
\left(\underset{0}{a}, \underset{1}{a}, \underset{2}{a}, \underset{3}{a}\right) + \left(\underset{0}{b}, \underset{1}{b}, \underset{2}{b}, \underset{3}{b}\right) = \left(\underset{0}{a} + \underset{0}{b}, \underset{1}{a} + \underset{1}{b}, \underset{2}{a} + \underset{2}{b}, \underset{3}{a} + \underset{3}{b}\right), \tag{2.1}
$$

(2) умножение

$$
\left(\underset{0}{b}, \underset{1}{b}, \underset{2}{b}, \underset{3}{b}\right)\left(\underset{0}{a}, \underset{1}{a}, \underset{2}{a}, \underset{3}{a}\right) = \left(\underset{20}{ba} + \underset{01}{ba}, \underset{30}{ba} + \underset{11}{ba}, \underset{03}{ba} + \underset{22}{ba}, \underset{32}{ba} + \underset{13}{ba}\right), \tag{2.2}
$$

(3) умножение на элемент кольца K

$$
\lambda\left(\underset{0}{a}, \underset{1}{a}, \underset{2}{a}, \underset{3}{a}\right) = \left(\lambda\underset{0}{a}, \lambda\underset{1}{a}, \lambda\underset{2}{a}, \lambda\underset{3}{a}\right), \ \lambda \in K. \tag{2.3}
$$

Легко проверить, что если A — ассоциативная дистрибутивная алгебра, то и A^4 относительно введенных операций образует ассоциативную дистрибутивную алгебру над тем же кольцом, которую мы будем называть **присоединенной алгеброй** для данной алгебры A и обозначать $\tilde{A}$. Роль нуля в алгебре $\tilde{A}$ играет элемент $(0, 0, 0, 0)$, где 0 — нуль алгебры A. Если алгебра A унитарна (т. е. имеет единицу e), то и присоединенная алгебра унитарна, причем роль единицы, как легко проверить, играет элемент $(0, e, e, 0)$.

Важную особенность присоединенной алгебры составляет наличие среди ее автоморфизмов трех инволюций. Именно имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Присоединенная алгебра допускает три инволюционных автоморфизма*

$$
i_1\colon \left(\underset{0}{a}, \underset{1}{a}, \underset{2}{a}, \underset{3}{a}\right) \to \left(-\underset{0}{a}, \underset{1}{a}, \underset{2}{a}, -\underset{3}{a}\right), \tag{2.4}
$$

$$
i_2\colon \left(\underset{0}{a}, \underset{1}{a}, \underset{2}{a}, \underset{3}{a}\right) \to \left(\underset{3}{a}, \underset{2}{a}, \underset{1}{a}, \underset{0}{a}\right), \tag{2.5}
$$

$$
i_3\colon \left(\underset{0}{a}, \underset{1}{a}, \underset{2}{a}, \underset{3}{a}\right) \to \left(-\underset{3}{a}, \underset{2}{a}, \underset{1}{a}, -\underset{0}{a}\right), \tag{2.6}
$$

[1] Умножение в алгебре A мы записываем справа налево.

так что

$$\underset{1}{i}^2 = \underset{2}{i}^2 = \underset{3}{i}^2 = \varepsilon^*; \tag{2.7}$$

при этом

$$\underset{1}{i}\,\underset{2}{i} = \underset{2}{i}\,\underset{1}{i} = \underset{3}{i}, \tag{2.8}$$

$$\underset{3}{i}\,\underset{1}{i} = \underset{1}{i}\,\underset{3}{i} = \underset{2}{i}, \tag{2.9}$$

$$\underset{2}{i}\,\underset{3}{i} = \underset{3}{i}\,\underset{2}{i} = \underset{1}{i}. \tag{2.10}$$

Доказательство. Факт, что преобразования (2. 4 — 2. 6) являются автоморфизмами присоединенной алгебры, непосредственно проверяется с помощью (2. 1 — 2. 3). Проверка условий (2. 7—2. 10) с очевидностью вытекает из определений (2. 4—2. 6).

Будем рассматривать множество $L(M)$ всех аффинорных полей на дифференцируемом многообразии M как алгебру над полем R вещественных чисел. Обозначим, кроме того, через $L_1(M)$ алгебру полей локальных аффиноров в касательном пучке и через $L(T(M))$ алгебру всех аффинорных полей на $T(M)$, рассматриваемом как дифференцируемое многообразие. Ясно, что алгебра $L(M)$ является подалгеброй алгебры $L_1(M)$.

Пусть G — объект инфинитезимальной связности. Тогда, в соответствии с определениями полного поднятия и присоединенной алгебры, можно ввести отображение

$$l_G : \widetilde{L}_1(M) \to L(T(M)) \tag{2.11}$$

алгебры $\widetilde{L}_1(M)$, присоединенной к алгебре $L_1(M)$, на алгебру $L(T(M))$ следующим образом:

$$l_G\left\{\left(\underset{0}{f}, \underset{1}{f}, \underset{2}{f}, \underset{3}{f}\right)\right\} = {}^G\left[\underset{0}{f}, \underset{1}{f}, \underset{2}{f}, \underset{3}{f}\right], \quad \underset{i}{f} \in L_1(M). \tag{2.12}$$

Теорема 2. *Отображение l_G является изоморфизмом алгебры $\widetilde{L}_1(M)$ на алгебру $L(T(M))$.*

Доказательство. Так как линейность отображения l_G усматривается непосредственно из его определения и определения полного поднятия, достаточно рассмотреть поведение l_G относительно операций умножения в алгебрах $\widetilde{L}_1(M)$ и $L(T(M))$. Пользуясь выражением (1. 14) полного поднятия в специальных координатах, нетрудно подсчитать, что если

$$F = {}^G\left[\underset{0}{f}, \underset{1}{f}, \underset{2}{f}, \underset{3}{f}\right] \quad \text{и} \quad H = {}^G\left[\underset{0}{h}, \underset{1}{h}, \underset{2}{h}, \underset{3}{h}\right],$$

то [1]

$$H\circ F = {}^G\left[\underset{2}{h}\circ\underset{0}{f} + \underset{0}{h}\circ\underset{1}{f},\ \underset{3}{h}\circ\underset{0}{f} + \underset{1}{h}\circ\underset{1}{f},\ \underset{0}{h}\circ\underset{3}{f} + \underset{2}{h}\circ\underset{2}{f},\ \underset{3}{h}\circ\underset{2}{f} + \underset{1}{h}\circ\underset{3}{f}\right] \tag{2.13}$$

Это означает, что l_G является гомоморфизмом присоединенной алгебры $\widetilde{L}_1(M)$ на алгебру $L(T(M))$. Кроме того, ядро этого гомоморфизма состоит только из нуля алгебры $\widetilde{L}_1(M)$, так как из (1. 14) видно, что полное поднятие является нулевым аффинором тогда и только тогда, когда все

* Через ε обозначено тождественное преобразование.

[1] Операцию умножения аффиноров мы записываем справа налево.

аффиноры $\underset{0}{f}, \underset{1}{f}, \underset{2}{f}, \underset{3}{f}$ нулевые. Этим замечанием доказательство теоремы полностью завершается.

3. Биунитарные элементы присоединенной алгебры

Основной целью настоящей работы является изучение аффинорных структур специального вида в касательном пучке. Речь пойдет о полях аффиноров на $T(M)$, квадрат которых лишь множителем ω ($\omega = -1, 0, +1$) отличается от единичного тензора Кронекера (это так называемые почти комплексные, почти дуальные и почти двойные структуры). Из некоторых соображений, особенно естественных, когда аффинорная структура рассматривается совместно с римановой метрикой [3], мы будем называть также случаи $\omega = -1$, $\omega = 0$ и $\omega = 1$, соответственно, эллиптическим, параболическим и гиперболическим случаями.

Так как полное поднятие дает изоморфное отображение присоединенной алгебры $\widetilde{L}_1(M)$ на алгебру $L(T(M))$ (теорема 2), и интересующие нас структуры на $T(M)$ определяются свойством, которое выражается только через операцию умножения в алгебре, то достаточно, очевидно, рассмотреть вопрос о структуре элементов алгебры $\widetilde{A}$, присоединенной к произвольной унитарной алгебре A, квадрат которых лишь множителем ω отличается от единичного элемента.

Элемент a произвольной алгебры с единицей e назовем унитарным типа ω ($\omega = -1, 0, 1$), если

$$a = \omega e. \tag{3.1}$$

Элемент a назовем биунитарным типа ω, если его квадрат является унитарным типа ω, то есть если

$$a^2 = \omega e. \tag{3.2}$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 3. *Для того чтобы элемент* $\left(\underset{0}{a}, \underset{1}{a}, \underset{2}{a}, \underset{3}{a}\right)$ *алгебры* $\widetilde{A}$, *присоединенной к алгебре A с единицей e, был биунитарным типа ω, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

$$\begin{aligned} \underset{2}{a}\underset{0}{a} &= -\underset{0}{a}\underset{1}{a}, \\ \underset{3}{a}\underset{2}{a} &= -\underset{1}{a}\underset{3}{a}, \\ \underset{1}{a}^2 &= \omega e - \underset{3}{a}\underset{0}{a}, \\ \underset{2}{a}^2 &= \omega e - \underset{0}{a}\underset{3}{a}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Доказательство. Условие биунитарности

$$\left(\underset{0}{a}, \underset{1}{a}, \underset{2}{a}, \underset{3}{a}\right)^2 = \omega(0, e, e, 0)$$

в силу (2.2) и (2.3) записывается в виде:

$$\left(\underset{2}{a}\underset{0}{a} + \underset{0}{a}\underset{1}{a},\ \underset{3}{a}\underset{0}{a} + \underset{1}{a}^2,\ \underset{0}{a}\underset{3}{a} + \underset{2}{a}^2,\ \underset{3}{a}\underset{2}{a} + \underset{1}{a}\underset{3}{a}\right) = (0, \omega e, \omega e, 0),$$

что, очевидно, равносильно условиям (3.3).

Рассмотрим теперь один специальный случай, естественный и важный с точки зрения геометрии касательного пучка.

Пусть в унитарной алгебре A выделены:

1) биунитарный элемент f эллиптического типа

$$f^2 = -e; \tag{3.4}$$

2) деривация D алгебры, то есть линейное преобразование алгебры, обладающее свойством

$$D(ba) = Db \cdot a + b \cdot Da. \tag{3.5}$$

Заметим сразу, что из (3.5) вытекает

$$De = 0. \tag{3.6}$$

Предполагая, что A — алгебра над полем R вещественных чисел, будем искать в присоединенной алгебре $\widetilde{A}$ биунитарные элементы $\left(a_0, a_1, a_2, a_3\right)$, причем каждый элемент a_i $(i = 0, 1, 2, 3)$ мы будем искать в виде линейной комбинации

$$a_i = \alpha_i e + \beta_i f + \gamma_i Df. \tag{3.7}$$

Имеем в силу (3.4—3.7)

$$\alpha_i\alpha_j = \left(\alpha_i\alpha_j - \beta_i\beta_j\right)e + \left(\beta_i\alpha_j + \beta_j\alpha_i\right)f + \left(\gamma_i\alpha_i + \gamma_j\alpha_i\right)Df + \left(\beta_i\gamma_j - \beta_j\gamma_i\right)f\cdot Df + \gamma_i\gamma_i\,(Df)^2.$$

Отсюда видно, что для выполнения условий (3.3) достаточно выполнения следующих условий:[1]

$$\alpha_2\alpha_0 - \beta_2\beta_0 = -\left(\alpha_0\alpha_1 - \beta_0\beta_1\right);\quad \alpha_3\alpha_2 - \beta_3\beta_2 = -\left(\alpha_1\alpha_3 - \beta_1\beta_3\right);$$

$$\beta_2\alpha_0 + \beta_0\alpha_2 = -\left(\beta_0\alpha_1 + \beta_1\alpha_0\right);\quad \beta_3\alpha_2 + \beta_2\alpha_3 = -\left(\beta_1\alpha_3 + \beta_3\alpha_1\right);$$

$$\gamma_2\alpha_0 + \gamma_0\alpha_2 = -\left(\gamma_0\alpha_1 + \gamma_1\alpha_0\right);\quad \gamma_3\alpha_2 + \gamma_2\alpha_3 = -\left(\gamma_1\alpha_3 + \gamma_3\alpha_1\right);$$

$$\beta_2\gamma_0 - \beta_0\gamma_2 = -\left(\beta_0\gamma_1 - \beta_1\gamma_0\right);\quad \beta_3\gamma_2 - \beta_2\gamma_3 = -\left(\beta_1\gamma_3 - \beta_3\gamma_1\right);$$

$$\gamma_2\gamma_0 = -\gamma_0\gamma_1;\qquad \gamma_3\gamma_2 = -\gamma_1\gamma_3;$$

$$\alpha_1^2 - \beta_1^2 = \omega - \left(\alpha_3\alpha_0 - \beta_3\beta_0\right);\quad \alpha_2^2 - \beta_2^2 = \omega - \left(\alpha_0\alpha_3 - \beta_0\beta_3\right);$$

$$2\alpha_1\beta_1 = -\left(\beta_3\alpha_0 + \beta_0\alpha_3\right);\quad 2\alpha_2\beta_2 = -\left(\beta_0\alpha_3 + \beta_3\alpha_0\right);$$

$$2\alpha_1\gamma_1 = -\left(\gamma_3\alpha_0 + \gamma_0\alpha_3\right);\quad 2\alpha_2\gamma_2 = -\left(\gamma_0\alpha_3 + \gamma_3\alpha_0\right);$$

$$0 = -\left(\beta_3\gamma_0 - \beta_0\gamma_3\right);\quad 0 = -\left(\beta_0\gamma_3 - \beta_3\gamma_0\right);$$

$$\gamma_1^2 = -\gamma_3\gamma_0;\qquad \gamma_2^2 = -\gamma_0\gamma_3.$$

Эту систему удобно представить в виде:

$$\begin{cases} \alpha_0\left(\alpha_1 + \alpha_2\right) - \beta_0\left(\beta_1 + \beta_2\right) = 0; \\ \beta_0\left(\alpha_1 + \alpha_2\right) + \alpha_0\left(\beta_1 + \beta_2\right) = 0; \end{cases} \quad (a) \qquad \begin{cases} \alpha_3\left(\alpha_1 + \alpha_2\right) - \beta_3\left(\beta_1 + \beta_2\right) = 0; \\ \beta_3\left(\alpha_1 + \alpha_2\right) + \alpha_3\left(\beta_1 + \beta_2\right) = 0; \end{cases} \quad (\text{в})$$

$$\gamma_0\left(\alpha_1 + \alpha_2\right) + \alpha_0\left(\gamma_1 + \gamma_2\right) = 0;\quad \gamma_0\left(\beta_2 - \beta_1\right) - \beta_0\left(\gamma_2 - \gamma_1\right) = 0;$$

$$\gamma_3\left(\alpha_1 + \alpha_2\right) + \alpha_3\left(\gamma_1 + \gamma_2\right) = 0;\quad -\gamma_3\left(\beta_2 - \beta_1\right) + \beta_3\left(\gamma_2 - \gamma_1\right) = 0; \tag{3.8}$$

[1] Эти условия будут и необходимыми для (3.3), если элементы e, f, Df, $f\cdot Df$, $(Df)^2$ линейно независимы.

$$\underset{1}{\alpha}^2-\underset{1}{\beta}^2=\omega-\left(\underset{3}{\alpha}\underset{0}{\alpha}-\underset{3}{\beta}\underset{0}{\beta}\right);\quad \underset{2}{\alpha}^2-\underset{2}{\beta}^2=\omega-\left(\underset{3}{\alpha}\underset{0}{\alpha}-\underset{3}{\beta}\underset{0}{\beta}\right);$$
$$2\underset{1}{\alpha}\underset{1}{\beta}=-\left(\underset{3}{\beta}\underset{0}{\alpha}+\underset{0}{\beta}\underset{3}{\alpha}\right);\quad 2\underset{2}{\alpha}\underset{2}{\beta}=-\left(\underset{3}{\beta}\underset{0}{\alpha}+\underset{0}{\beta}\underset{3}{\alpha}\right);$$
$$2\underset{1}{\alpha}\underset{1}{\gamma}=-\left(\underset{3}{\gamma}\underset{0}{\alpha}+\underset{0}{\gamma}\underset{3}{\alpha}\right);\quad 2\underset{2}{\alpha}\underset{2}{\gamma}=-\left(\underset{3}{\gamma}\underset{0}{\alpha}+\underset{0}{\gamma}\underset{3}{\alpha}\right);$$
$$\underset{0}{\gamma}\left(\underset{1}{\gamma}+\underset{2}{\gamma}\right)=0;\qquad \underset{3}{\gamma}\left(\underset{1}{\gamma}+\underset{2}{\gamma}\right)=0$$
$$\underset{0}{\beta}\underset{3}{\gamma}-\underset{3}{\beta}\underset{0}{\gamma}=0$$
$$\underset{1}{\gamma}^2=-\underset{0}{\gamma}\underset{3}{\gamma};\qquad \underset{2}{\gamma}^2=-\underset{0}{\gamma}\underset{3}{\gamma}.$$

Обозначим

$$\varkappa=\underset{0}{\alpha}^2+\underset{0}{\beta}^2+\underset{3}{\alpha}^2+\underset{3}{\beta}^2. \tag{3.9}$$

I. Пусть $\varkappa\neq 0$.

Тогда из (3.8*а*) или (3.8*в*) имеем

$$\underset{1}{\alpha}+\underset{2}{\alpha}=0,\qquad \underset{1}{\beta}+\underset{2}{\beta}=0$$

и система (3.8) принимает вид:

$$\begin{gathered}
\underset{2}{\alpha}=-\underset{1}{\alpha},\\
\underset{2}{\beta}=-\underset{1}{\beta},\\
\left(\underset{1}{\gamma}+\underset{2}{\gamma}\right)\left(\underset{1}{\gamma}-\underset{2}{\gamma}\right)=0,\\
\underset{0}{\alpha}\left(\underset{1}{\gamma}+\underset{2}{\gamma}\right)=0,\\
\underset{3}{\alpha}\left(\underset{1}{\gamma}+\underset{2}{\gamma}\right)=0,\\
\gamma\left(\underset{1}{\gamma}+\underset{2}{\gamma}\right)=0,\\
\alpha\left(\underset{1}{\gamma}+\underset{2}{\gamma}\right)=0,\\
\underset{3}{\gamma}\left(\underset{1}{\gamma}+\underset{2}{\gamma}\right)=0,\\
\underset{1}{\alpha}^2-\underset{1}{\beta}^2=\omega-\left(\underset{0}{\alpha}\underset{3}{\alpha}-\underset{0}{\beta}\underset{3}{\beta}\right),\\
2\underset{1}{\alpha}\underset{1}{\beta}=-\left(\underset{0}{\alpha}\underset{3}{\beta}+\underset{3}{\alpha}\underset{0}{\beta}\right),\\
2\underset{1}{\alpha}\underset{1}{\gamma}=-\left(\underset{0}{\alpha}\underset{3}{\gamma}+\underset{3}{\alpha}\underset{0}{\gamma}\right),\\
2\underset{0}{\gamma}\underset{1}{\beta}=\underset{0}{\beta}\left(\underset{1}{\gamma}-\underset{2}{\gamma}\right),\\
2\underset{3}{\gamma}\underset{1}{\beta}=\underset{3}{\beta}\left(\underset{1}{\gamma}-\underset{2}{\gamma}\right),\\
\underset{0}{\beta}\underset{3}{\gamma}-\underset{3}{\beta}\underset{0}{\gamma}=0,\\
\underset{1}{\gamma}^2=-\underset{0}{\gamma}\underset{3}{\gamma}.
\end{gathered}\tag{3.8.1}$$

I. *A*) Пусть $\underset{1}{\gamma}=\underset{2}{\gamma}$.

Система (3.8.1) принимает вид:

$$\underset{2}{\alpha}=-\underset{1}{\alpha},$$

$$\underset{2}{\beta} = -\underset{1}{\beta},$$
$$\gamma = \underset{1}{\gamma},$$
$$\underset{0}{\alpha}\underset{1}{\gamma} = \underset{3}{\alpha}\underset{1}{\gamma} = \underset{1}{\alpha}\underset{1}{\gamma} = 0,$$
$$\underset{0}{\gamma}\underset{1}{\gamma} = \underset{3}{\gamma}\underset{1}{\gamma} = 0,$$
$$\underset{0}{\gamma}\underset{1}{\beta} = \underset{3}{\gamma}\underset{1}{\beta} = 0,$$
$$\underset{1}{\gamma}^2 = -\underset{0}{\gamma}\underset{3}{\gamma},$$
$$\underset{0}{\beta}\underset{3}{\gamma} = \underset{3}{\beta}\underset{0}{\gamma},$$
$$\underset{1}{\alpha}^2 - \underset{1}{\beta}^2 = \omega - (\underset{0}{\alpha}\underset{3}{\alpha} - \underset{0}{\beta}\underset{3}{\beta}),$$
$$2\underset{1}{\alpha}\underset{1}{\beta} = -(\underset{0}{\alpha}\underset{3}{\beta} + \underset{3}{\alpha}\underset{0}{\beta}),$$
$$2\underset{1}{\alpha}\underset{1}{\gamma} = -(\underset{0}{\alpha}\underset{3}{\gamma} + \underset{3}{\alpha}\underset{0}{\gamma}).$$

Предположение $\underset{1}{\gamma} \neq 0$ делает эту систему противоречивой, так как в этом случае из $\underset{3}{\gamma}\underset{1}{\gamma} = 0$ следовало бы $\underset{3}{\gamma} = 0$, и из $\underset{1}{\gamma}^2 = -\underset{0}{\gamma}\underset{3}{\gamma}$ мы получили бы, вопреки предположению, $\underset{1}{\gamma} = 0$. Таким образом, исследуемая система в случае (I. *A*) принимает вид:

$$\begin{gathered}
\underset{2}{\alpha} = -\underset{1}{\alpha},\ \underset{2}{\beta} = -\underset{1}{\beta},\ \underset{1}{\gamma} = \underset{2}{\gamma} = 0,\\
\underset{0}{\gamma}\underset{1}{\beta} = \underset{3}{\gamma}\underset{1}{\beta} = 0,\quad \underset{0}{\gamma}\underset{3}{\gamma} = 0,\\
\underset{0}{\beta}\underset{3}{\gamma} = \underset{3}{\beta}\underset{0}{\gamma},\ \underset{0}{\alpha}\underset{3}{\gamma} = -\underset{3}{\alpha}\underset{0}{\gamma},\\
\underset{1}{\alpha}^2 - \underset{1}{\beta}^2 = \omega - (\underset{0}{\alpha}\underset{3}{\alpha} - \underset{0}{\beta}\underset{3}{\beta}),\\
2\underset{1}{\alpha}\underset{1}{\beta} = -(\underset{0}{\alpha}\underset{3}{\beta} + \underset{3}{\alpha}\underset{0}{\beta}).
\end{gathered} \tag{3.8.I.A}$$

I. *A*. 1) Пусть $\underset{0}{\gamma} = 0,\ \underset{3}{\gamma} \neq 0$.

Имеем в этом случае

$$\underset{2}{\alpha} = -\underset{1}{\alpha},\ \underset{0}{\alpha} = 0,\ \underset{1}{\alpha}^2 = \omega,$$
$$\underset{1}{\beta} = \underset{2}{\beta} = 0,\ \underset{0}{\gamma} = \underset{1}{\gamma} = \underset{2}{\gamma} = 0,\quad \underset{3}{\gamma} \neq 0.$$

Эта система допускает следующие биунитарные элементы в $\widetilde{A}$:

при $\omega = -1$: решений нет,

при $\omega = 0$:

$$(0, 0, 0, \underset{3}{\alpha}e + \underset{3}{\beta}f + \underset{3}{\gamma}Df),\quad \underset{3}{\alpha}^2 + \underset{3}{\beta}^2 \neq 0,\quad \underset{3}{\gamma} \neq 0, \tag{I.A.1}$$

при $\omega = 1$:

$$(0\ \pm e, \mp e, \underset{3}{\alpha}e + \underset{3}{\beta}f + \underset{3}{\gamma}Df),\quad \underset{3}{\alpha}^2 + \underset{3}{\beta}^2 \neq 0,\quad \underset{3}{\gamma} \neq 0.$$

I. *A*. 2) Пусть $\underset{3}{\gamma} = 0,\ \underset{0}{\gamma} \neq 0$.

Рассуждая аналогично, получаем следующие решения:
при $\omega = -1$: решений нет,
при $\omega = 0$:

$$(\underset{0}{\alpha} e + \underset{0}{\beta} f + \underset{0}{\gamma} Df,\ 0,\ 0,\ 0),\ \ \underset{0}{\alpha}^2 + \underset{0}{\beta}^2 \neq 0,\ \ \underset{0}{\gamma} \neq 0, \qquad (\mathrm{I}.\,A.\,2)$$

при $\omega = 1$:

$$(\underset{0}{\alpha} e + \underset{0}{\beta} f + \underset{0}{\gamma} Df \pm e,\ \mp e,\ 0),\ \ \underset{0}{\alpha}^2 + \underset{0}{\beta}^2 \neq 0,\ \ \underset{0}{\gamma} \neq 0.$$

I. A. 3) Пусть $\underset{0}{\gamma} = \underset{3}{\gamma} = 0$.

Исследуемая система принимает вид:

$$\underset{2}{\alpha} = -\underset{1}{\alpha},\ \ \underset{2}{\beta} = -\underset{1}{\beta},\ \ \underset{0}{\gamma} = \underset{1}{\gamma} = \underset{2}{\gamma} = \underset{3}{\gamma} = 0,$$

$$\underset{1}{\alpha}^2 - \underset{1}{\beta}^2 = \omega + \underset{0}{\beta}\underset{3}{\beta} - \underset{0}{\alpha}\underset{3}{\alpha};\ \ 2\underset{1}{\alpha}\underset{1}{\beta} = -(\underset{0}{\alpha}\underset{3}{\beta} + \underset{3}{\alpha}\underset{0}{\beta}).$$

Если обозначить

$$\lambda = \omega + \underset{0}{\beta}\underset{3}{\beta} - \underset{0}{\alpha}\underset{3}{\alpha},$$

$$\mu = \underset{0}{\alpha}\underset{3}{\beta} + \underset{3}{\alpha}\underset{0}{\beta},$$

то, как нетрудно проверить, все решения системы

$$\underset{1}{\alpha}^2 - \underset{1}{\beta}^2 = \lambda$$

$$2\underset{1}{\alpha}\underset{1}{\beta} = -\mu$$

можно представить в виде

$$\underset{1}{\alpha} = \pm\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \lambda}$$

$$\underset{1}{\beta} = \mp s(\mu)\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 - \lambda}\,,$$

где

$$s(\mu) = \begin{cases} -1, & \text{если } \mu < 0 \\ \ \ 1, & \text{если } \mu \geqslant 0. \end{cases}$$

Соответствующие этому случаю биунитарные элементы в $\widetilde{A}$ имеют вид

$$(\underset{0}{\alpha} e + \underset{0}{\beta} f,\ \pm\xi e \mp \eta f,\ \ \mp\xi e \pm \eta f,\ \underset{3}{\alpha} e + \underset{3}{\beta} f), \qquad (\mathrm{I}.\,A.\,3)$$

где

$$\lambda = \omega + \underset{0}{\beta}\underset{3}{\beta} - \underset{0}{\alpha}\underset{3}{\alpha},$$

$$\mu = \underset{0}{\alpha}\underset{3}{\beta} + \underset{3}{\alpha}\underset{0}{\beta},\ \ \underset{0}{\alpha}^2 + \underset{0}{\beta}^2 + \underset{3}{\alpha}^2 + \underset{3}{\beta}^2 \neq 0$$

$$\xi = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \lambda}$$

$$\eta = s(\mu)\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 - \lambda}$$

$$s(\mu) = \begin{cases} -1, & \text{если } \mu < 0, \\ \ \ 1, & \text{если } \mu \geqslant 0. \end{cases}$$

I. B) Пусть $\underset{1}{\gamma} \neq \underset{2}{\gamma}$.

В этом случае, как это видно из третьего уравнения системы (3. 8. I), $\underset{2}{\gamma} = -\underset{1}{\gamma}$ $(\underset{1}{\gamma} \neq 0)$, и мы приходим к системе

$$\underset{2}{\alpha} = -\underset{1}{\alpha},\ \underset{2}{\beta} = -\underset{1}{\beta},\ \underset{2}{\gamma} = -\underset{1}{\gamma}\ \ (\underset{1}{\gamma} \neq 0)$$

$$\underset{0}{\beta}\underset{3}{\gamma} = \underset{3}{\beta}\underset{0}{\gamma},\ \underset{0}{\gamma}\underset{1}{\beta} = \underset{1}{\gamma}\underset{0}{\beta},\ \underset{3}{\gamma}\underset{1}{\beta} = \underset{1}{\gamma}\underset{3}{\beta},\ \underset{1}{\gamma}^2 = -\underset{0}{\gamma}\underset{3}{\gamma}$$

$$\underset{1}{\alpha}^2 - \underset{1}{\beta}^2 = \omega + \underset{0}{\beta}\underset{3}{\beta} - \underset{0}{\alpha}\underset{3}{\alpha},\ 2\underset{1}{\alpha}\underset{1}{\beta} = -(\underset{0}{\alpha}\underset{3}{\beta} + \underset{3}{\alpha}\underset{0}{\beta}),$$

$$2\underset{1}{\alpha}\underset{1}{\gamma} = -(\underset{0}{\alpha}\underset{3}{\gamma} + \underset{3}{\alpha}\underset{0}{\gamma}).$$

Так как из уравнения $\underset{1}{\gamma}^2 = -\underset{0}{\gamma}\underset{3}{\gamma}$ видно, что $\underset{0}{\gamma} \neq 0$, введем обозначение $\dfrac{\underset{1}{\gamma}}{\underset{0}{\gamma}} = \sigma$.

Наша система запишется тогда в виде:

$$\underset{2}{\alpha} = -\underset{1}{\alpha},\ \ \underset{2}{\beta} = -\underset{1}{\beta},\ \ \underset{2}{\gamma} = -\underset{1}{\gamma},$$

$$\underset{1}{\gamma} = \sigma\underset{0}{\gamma},\ \ \underset{1}{\beta} = \sigma\underset{0}{\beta},\ \ \underset{3}{\gamma} = -\sigma^2\underset{0}{\gamma},\ \ \underset{3}{\beta} = -\sigma^2\underset{0}{\beta},$$

$$\underset{1}{\alpha}^2 = \omega - \underset{0}{\alpha}\underset{3}{\alpha},\ \ 2\underset{1}{\alpha} = \sigma\underset{0}{\alpha} - \frac{1}{\sigma}\underset{3}{\alpha}.$$

Система из двух последних уравнений может быть, очевидно, переписана так:

$$(\underset{1}{\alpha} - \sigma\underset{0}{\alpha})^2 = \omega,$$

$$\underset{3}{\alpha} = \sigma(\sigma\underset{0}{\alpha} - 2\underset{1}{\alpha}).$$

Ее решениями являются:
при $\omega = -1$: решений нет;
при $\omega = 0$:

$$\begin{cases} \underset{1}{\alpha} = \sigma\underset{0}{\alpha}, \\ \underset{3}{\alpha} = -\sigma^2\underset{0}{\alpha}; \end{cases}$$

при $\omega = 1$:

$$\begin{cases} \underset{1}{\alpha} = \sigma\underset{0}{\alpha} \pm 1, \\ \underset{3}{\alpha} = -\sigma^2\underset{0}{\alpha} \mp 2\sigma. \end{cases}$$

Итак, в случае (I. B) получаются следующие биунитарные элементы в $\bar{A}$:
при $\omega = -1$: решений нет,
при $\omega = 0$:

$$(\alpha e + \beta f + \gamma Df,\ \sigma(\alpha e + \beta f + \gamma Df),\ -\sigma(\alpha e + \beta f + \gamma Df),\ -\sigma^2(\alpha e + \beta f + \gamma Df)),$$
$$\alpha^2 + \beta^2 \neq 0,\ \gamma \neq 0,\ \sigma \neq 0, \qquad \text{(I. } B\text{)}$$

при $\omega = 1$:

$$(\alpha e + \beta f + \gamma Df,\ \sigma(\alpha e + \beta f + \gamma Df) \pm e,\ -\sigma(\alpha e + \beta f + \gamma Df) \mp e,$$
$$-\sigma^2(\alpha e + \beta f + \gamma Df) \mp 2\sigma e),\ \gamma \neq 0,\ \sigma \neq 0.$$

II. Пусть $\varkappa = 0$:
В этом случае система (3.8) принимает вид:

$$\begin{gathered}
\alpha_0 = \beta_0 = \alpha_3 = \beta_3 = 0, \\
\gamma_0(\alpha_1 + \alpha_2) = 0, \quad \gamma_0(\gamma_1 + \gamma_2) = 0, \quad \gamma_0(\beta_2 - \beta_1) = 0, \\
\gamma_3(\alpha_1 + \alpha_2) = 0, \quad \gamma_3(\gamma_1 + \gamma_2) = 0, \quad \gamma_3(\beta_2 - \beta_1) = 0, \\
\alpha_1^2 - \beta_1^2 = \omega, \quad \alpha_2^2 - \beta_2^2 = \omega, \\
\alpha_1\beta_1 = 0, \quad \alpha_2\beta_2 = 0, \\
\alpha_1\gamma_1 = 0, \quad \alpha_2\gamma_2 = 0, \\
\gamma_1^2 = -\gamma_0\gamma_3, \quad \gamma_2^2 = -\gamma_0\gamma_3.
\end{gathered} \tag{3.8.II}$$

II. *A*) Пусть $\gamma_0^2 + \gamma_3^2 \neq 0$.

Тогда имеем

$$\begin{gathered}
\alpha_0 = \beta_0 = \alpha_3 = \beta_3 = 0, \\
\alpha_2 = -\alpha_1, \quad \beta_2 = \beta_1, \quad \gamma_2 = -\gamma_1, \quad \gamma_1^2 = -\gamma_0\gamma_3, \\
\alpha_1^2 - \beta_1^2 = \omega, \quad \alpha_1\beta_1 = 0, \quad \alpha_1\gamma_1 = 0.
\end{gathered}$$

Как нетрудно проверить, все возможные биунитарные элементы в $\tilde{A}$, отвечающие этому случаю, исчерпываются следующими:

при $\omega = -1$:

$$\left.\begin{array}{l}
(\gamma Df, \ \pm f + \sigma\gamma Df, \ \pm f - \sigma\gamma Df, \ -\sigma^2\gamma Df), \\
(-\sigma^2\gamma Df, \ \pm f - \sigma\gamma Df, \ \pm f + \sigma\gamma Df, \ \gamma Df),
\end{array}\right. \quad \gamma \neq 0;$$

при $\omega = 0$:

$$\left.\begin{array}{l}
(\gamma Df, \ \sigma\gamma Df, \ -\sigma\gamma Df, \ -\sigma^2\gamma Df), \\
(-\sigma^2\gamma Df, \ -\sigma\gamma Df, \ \sigma\gamma Df, \ \gamma Df),
\end{array}\right. \quad \gamma \neq 0; \tag{II.A}$$

при $\omega = 1$:

$$\left.\begin{array}{l}
(0, \ \pm e, \ \mp e, \ \gamma Df), \\
(\gamma D\ , \ \pm e, \ \mp e, \ 0).
\end{array}\right. \quad \gamma \neq 0;$$

II. *B*) Пусть $\gamma_0 = \gamma_3 = 0$.

Система (3.8.II) принимает вид:

$$\begin{gathered}
\alpha_0 = \beta_0 = \gamma_0 = \alpha_3 = \beta_3 = \gamma_3 = 0, \quad \gamma_1 = \gamma_2 = 0, \\
\alpha_1^2 - \beta_1^2 = \omega, \quad \alpha_2^2 - \beta_2^2 = \omega, \\
\alpha_1\beta_1 = 0, \quad \alpha_2\beta_2 = 0.
\end{gathered}$$

В этом случае получаем следующие биунитарные элементы в $\tilde{A}$:

при $\omega = -1$:

$$\begin{gathered}
(0, \ f, \ \pm f, \ 0), \\
(0, \ -f, \ \pm f, \ 0);
\end{gathered}$$

при $\omega = 0$:

$$(0,\ 0,\ 0,\ 0); \tag{II. B}$$

при $\omega = 1$:

$$(0,\ e,\ \pm e,\ 0),$$
$$(0,\ -e,\ \pm e,\ 0).$$

Если условиться рассматривать биунитарные элементы с точностью до знака, то результаты проведенного исследования могут быть сформулированы в виде следующей теоремы.

Теорема 4. *Пусть в унитарной алгебре A над полем R вещественных чисел выделены:*

(1) *биунитарный элемент f эллиптического типа*

$$f^2 = -e, \tag{3.10}$$

(2) *деривация D алгебры*

$$D(ba) = Db \cdot a + b \cdot Da. \tag{3.11}$$

Тогда в присоединенной алгебре $\tilde{A}$ существуют следующие биунитарные элементы типа ω:

а) *эллиптического типа* ($\omega = -1$):

$$\underset{0}{E}(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) = (\alpha_1 e + \beta_1 f,\ \xi e - \eta f,\ -\xi e + \eta f,\ \underset{2}{\alpha} e + \underset{2}{\beta} f), \tag{3.12}$$

$$\underset{1}{E}(\gamma, \sigma) = (\gamma Df,\ f + \sigma\gamma Df,\ f - \sigma\gamma Df,\ -\sigma^2\gamma Df), \tag{3.13}$$

$$\underset{2}{E}(\gamma, \sigma) = (-\sigma^2\gamma Df,\ f - \sigma\gamma Df,\ f + \sigma\gamma Df,\ \gamma Df). \tag{3.14}$$

б) *гиперболического типа* ($\omega = 1$):

$$\underset{0}{H}(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) = (\alpha_1 e + \beta_1 f,\ \xi e - \eta f,\ -\xi e + \eta f,\ \alpha_2 e + \beta_2 f), \tag{3.15}$$

$$\underset{1}{H}(\alpha, \beta, \gamma; \sigma) = (\alpha e + \beta f + \gamma Df,\ \sigma(\alpha e + \beta f + \gamma Df) + e, \tag{3.16}$$
$$-\sigma(\alpha e + \beta f + \gamma Df) - e,\ -\sigma^2(\alpha e + \beta f + \gamma Df) - 2\sigma e),$$

$$\underset{2}{H}(\alpha, \beta, \gamma; \sigma) = (-\sigma^2(\alpha e + \beta f + \gamma Df) - 2\sigma e,\ -\sigma(\alpha e + \beta f + \gamma Df) - e,$$
$$\sigma(\alpha e + \beta f + \gamma Df) + e,\ \alpha e + \beta f + \gamma Df); \tag{3.17}$$

в) *параболического типа* ($\omega = 0$):

$$\underset{0}{P}(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) = (\alpha_1 e + \beta_1 f,\ \xi e - \eta f,\ -\xi e + \eta f,\ \alpha_2 e + \beta_2 f), \tag{3.18}$$

$$\underset{1}{P}(\alpha, \beta, \gamma; \sigma) = (\alpha e + \beta f + \gamma Df,\ \sigma(\alpha e + \beta f + \gamma Df),$$
$$-\sigma(\alpha e + \beta f + \gamma Df),\ -\sigma^2(\alpha e + \beta f + \gamma Df)), \tag{3.19}$$

$$\underset{2}{P}(\alpha, \beta, \gamma; \sigma) = (-\sigma^2(\alpha e + \beta f + \gamma Df),\ -\sigma(\alpha e + \beta f + \gamma Df),$$
$$\sigma(\alpha e + \beta f + \gamma Df),\ \alpha e + \beta f + \gamma Df). \tag{3.20}$$

Здесь использованы обозначения:

$$\xi = \sqrt{\frac{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2} + \lambda}{2}}, \tag{3.21}$$

$$\eta = s(\mu)\sqrt{\frac{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2} - \lambda}{2}}, \tag{3.22}$$

$$\lambda = \omega + \underset{1}{\beta}\underset{2}{\beta} - \underset{1}{\alpha}\underset{2}{\alpha}, \tag{3.23}$$

$$\mu = \underset{1}{\alpha}\underset{2}{\beta} + \underset{2}{\alpha}\underset{1}{\beta}, \tag{3.24}$$

$$s(\mu) = \begin{cases} -1, & \text{если } \mu < 0, \\ 1, & \text{если } \mu \geqslant 0; \end{cases} \tag{3.25}$$

параметры $\underset{1}{\alpha}, \underset{2}{\alpha}, \underset{1}{\beta}, \underset{2}{\beta}, \alpha, \beta, \gamma, \sigma$ могут принимать любые действительные значения.

Замечания. 1. Множества биунитарных элементов типов (3.15 — 3.17) (соответственно, типов (3.18 — 3.20)) имеют непустые пересечения. Именно, как нетрудно проверить, трехпараметрические семейства $\underset{1}{H}(\alpha, \beta, 0; \sigma)$ и $\underset{2}{H}(\alpha, \beta, 0; \sigma)$ целиком включаются в четырехпараметрическое семейство $\underset{0}{H}(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$. Аналогично для семейств биунитарных элементов параболического типа.

2. Введенные в теореме 4 семейства биунитарных элементов замкнуты (в совокупности) относительно инволюционных автоморфизмов (2.4—2.6). Было бы совсем нетрудно написать явные выражения образов рассматриваемых семейств при автоморфизмах $\underset{1}{i}, \underset{2}{i}, \underset{3}{i}$ через эти же семейства.

3. Теоремы, аналогичные теореме 4, могут быть получены и в случаях, когда в алгебре A фиксирован биунитарный элемент гиперболического или параболического типа.

4. Аффинорные структуры в касательном пучке многообразия с почти комплексной структурой

Полученные в предыдущем параграфе результаты (теорема 4) с помощью теоремы 2 могут быть непосредственно использованы применительно к аффинорным структурам в касательном пучке.

В алгебре $L_1(M)$ полей локальных аффиноров роль единичного и нулевого элементов играют, соответственно, единичный аффинор δ Кронекера и нулевой аффинор. Наличие этих стандартных аффиноров на произвольном многообразии M позволяет ввести в его касательном пучке $T(M)$ бесчисленное множество почти комплексных, почти двойных и почти дуальных структур. Действительно, из семейств (3.12—3.20) биунитарных элементов присоединенной алгебры $\tilde{A}$ легко выделить семейства элементов, не зависящих от фиксированного в A биунитарного элемента f. Таковы, очевидно, семейства

$$\underset{0}{E}(\alpha_1, \alpha_2, 0, 0) = (\alpha_1 e, \sqrt{\lambda} e, -\sqrt{\lambda} e, \alpha_2 e), \ \lambda = -1 - \alpha_1\alpha_2 \geqslant 0;$$

$$\underset{0}{H}(\alpha_1, \alpha_2, 0, 0) = (\alpha_1 e, \sqrt{\lambda} e, -\sqrt{\lambda} e, \alpha_2 e), \ \lambda = 1 - \alpha_1\alpha_2 \geqslant 0;$$

$$\underset{0}{P}(\alpha_1, \alpha_2, 0, 0) = (\alpha_1 e, \sqrt{\lambda} e, -\sqrt{\lambda} e, \alpha_2 e), \ \lambda = -\alpha_1\alpha_2 \geqslant 0;$$

и ничего нового другие семейства не дают.

Из этого замечания и теоремы 2 получается следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть M-произвольное дифференцируемое многообразие, G-произвольная инфинитезимальная связность в его касательном пучке $T(M)$. Тогда в касательном пучке могут быть введены следующие аффинорные структуры:*

а) *почти комплексные:*

$$E(\alpha_1, \alpha_2) = {}^G\left[\alpha_1\delta, \sqrt{-1-\alpha_1\alpha_2}\,\delta, -\sqrt{-1-\alpha_1\alpha_2}\,\delta, \ \alpha_2\delta\right], \tag{4.1}$$

б) *почти двойные:*

$$H(\alpha_1, \alpha_2) = {}^G\left[\alpha_1\delta, \ \sqrt{1-\alpha_1\alpha_2}\,\delta, -\sqrt{1-\alpha_1\alpha_2}\,\delta, \ \alpha_2\delta\right], \tag{4.2}$$

в) *почти дуальные:*

$$P(\alpha_1, \alpha_2) = {}^G\left[\alpha_1\delta, \ \sqrt{-\alpha_1\alpha_2}\,\delta, -\sqrt{-\alpha_1\alpha_2}\,\delta, \ \alpha_2\delta\right]. \tag{4.3}$$

Замечания. 1. Почти комплексную структуру $E(1,-1) = {}^{G}[\delta, 0, 0, -\delta]$ изучали многие авторы: Нагано [14], Тачибана и Окумура [18] — в касательном пучке для римановых пространств; Домбровский [9] — в касательном пучке пространств с линейной связностью; Яно и Дэвис [21], Мацумото [13], Акбар-Задех и Бонан [8] — в касательном пучке финслеровых пространств; Яно и Исихара [24], Кандату [12] — в касательном пучке пространств с нелинейной связностью.

2. Почти двойную структуру $H(1, 1) = {}^{G}[\delta, 0, 0, \delta]$ изучал Хух [11].

Пусть теперь на M задана некоторая почти комплексная структура φ. Для произвольной инфинитезимальной связности G в $T(M)$ можно ввести деривацию D алгебры $L_1(M)$*, если положить (в специальных координатах)

$$D = x^{\rho}\nabla_{\rho}, \tag{4.4}$$

где ∇_{ρ} — символ ковариантной производной относительно G. Аффинорную структуру $F = {}^{G}[\underset{0}{f}, \underset{1}{f}, \underset{2}{f}, \underset{3}{f}]$ на $T(M)$ назовем линейным продолжением k-го порядка аффинорной структуры φ на M в касательный пучок $T(M)$, если

$$\underset{i}{f} = \underset{i}{\alpha}^{(0)}\delta + \underset{i}{\alpha}^{(1)}\varphi + \underset{i}{\alpha}^{(2)}D\varphi + \underset{i}{\alpha}^{(3)}D^2\varphi + \ldots + \underset{i}{\alpha}^{k+1}D^k\varphi, \tag{4.5}$$
$$(i = 0, 1, 2, 3)$$

где хотя бы одно из $\underset{i}{\alpha}^{(k+1)}$ отлично от нуля.

Теоремы 2 и 4 позволяют полностью решить вопрос о почти комплексных, почти двойных и почти дуальных структурах в $T(M)$, являющихся линейными продолжениями нулевого и первого порядка почти комплексной структуры, заданной на многообразии M. Именно, имеет место следующая теорема.

Теорема 6. *Пусть на произвольном (четномерном) дифференцируемом многообразии M задана почти комплексная структура φ. Пусть G — произвольная инфинитезимальная связность в касательном пучке $T(M)$ и D — деривация типа (4.4) алгебры $L_1(M)$. Тогда в касательном пучке могут быть введены следующие аффинорные структуры:*

а) *почти комплексные:*

$$\underset{0}{E}(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) = {}^{G}[\alpha_1\delta + \beta_1\varphi, \xi\delta - \eta\varphi, -\xi\delta + \eta\varphi, \alpha_2\delta + \beta_2\varphi], \tag{4.6}$$

$$\underset{1}{E}(\gamma, \sigma) = {}^{G}[\gamma D\varphi, \varphi + \sigma\gamma D\varphi, \varphi - \sigma\gamma D\varphi, -\sigma^2\gamma D\varphi], \tag{4.7}$$

$$\underset{2}{E}(\gamma, \sigma) = {}^{G}[-\sigma^2\gamma D\varphi, \varphi - \sigma\gamma D\varphi, \varphi + \sigma\gamma D\varphi, \gamma D\varphi]; \tag{4.8}$$

б) *почти двойные:*

$$\underset{0}{H}(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) = {}^{G}[\alpha_1\delta + \beta_1\varphi, \xi\delta - \eta\varphi, -\xi\delta + \eta\varphi, \alpha_2\delta + \beta_2\varphi], \tag{4.9}$$

$$\underset{1}{H}(\alpha, \beta, \gamma; \sigma) = {}^{G}[\Psi(\alpha, \beta, \gamma), \sigma\Psi(\alpha, \beta, \gamma) + \delta, -\sigma\Psi(\alpha, \beta, \gamma) - \delta,$$
$$-\sigma^2\Psi(\alpha, \beta, \gamma) - 2\sigma\delta], \tag{4.10}$$

$$\underset{2}{H}(\alpha, \beta, \gamma; \sigma) = {}^{G}[-\sigma^2\Psi(\alpha, \beta, \gamma) - 2\sigma\delta, -\sigma\Psi(\alpha, \beta, \gamma) - \delta,$$
$$\sigma\Psi(\alpha, \beta, \gamma) + \delta, \Psi(\alpha, \beta, \gamma)]; \tag{4.11}$$

---

* Под $L_1(M)$ мы здесь понимаем алгебру неограниченно дифференцируемых полей локальных аффиноров.

в) *почти дуальные*:

$$\underset{0}{P}(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) = {}^G[\alpha_1\delta + \beta_1\varphi,\ \xi\delta - \eta\varphi,\ -\xi\delta + \eta\varphi,\ \alpha_2\delta + \beta_2\varphi], \tag{4.12}$$

$$\underset{1}{P}(\alpha, \beta, \gamma; \sigma) = {}^G[\Psi(\alpha, \beta, \gamma),\ \sigma\Psi(\alpha, \beta, \gamma),\ -\sigma\Psi(\alpha, \beta, \gamma),$$
$$-\sigma^2\Psi(\alpha, \beta, \gamma)], \tag{4.13}$$

$$\underset{2}{P}(\alpha, \beta, \gamma; \sigma) = {}^G[-\sigma^2\Psi(\alpha, \beta, \gamma),\ -\sigma\Psi(\alpha, \beta, \gamma),$$
$$\sigma\Psi(\alpha, \beta, \gamma),\ \Psi(\alpha, \beta, \gamma)]. \tag{4.14}$$

Здесь использованы обозначения:

$$\xi = \sqrt{\frac{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2} + \lambda}{2}}, \tag{4.15}$$

$$\eta = s(\mu)\sqrt{\frac{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2} - \lambda}{2}}, \tag{4.16}$$

$$\lambda = \omega + \beta_1\beta_2 - \alpha_1\alpha_2, \tag{4.17}$$

$$\mu = \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1, \tag{4.18}$$

$$s(\mu) = \begin{cases} -1, & \text{если } \mu < 0, \\ 1, & \text{если } \mu \geqslant 0, \end{cases} \tag{4.19}$$

$\omega = -1, 1, 0$ соответственно случаям почти комплексных, почти двойных и почти дуальных структур,

$$\Psi(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha\delta + \beta\varphi + \gamma D\varphi; \tag{4.20}$$

параметры $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \alpha, \beta, \gamma, \sigma$ могут принимать любые действительные значения[1].

Замечания 1. Почти комплексная структура $\underset{1}{E}(O, \sigma) = \underset{2}{E}(O, \sigma) = {}^G[O, \varphi, \varphi, O]$ изучалась Танно [19], Яно и Исихара [23]. При этом в качестве G брались инфинитезимальные связности, порожденные связностью Леви-Чивита для римановой метрики — в первой работе — и аффинной связностью — во второй.

2. Почти комплексную структуру ${}^N\varphi = \underset{2}{E}(I, O)$ изучали Сато [17], Яно и Кобаяси [25].

3. Перечисленными в замечаниях к теоремам 5 и 6 структурами исчерпываются, насколько нам известно, все типы вводившихся другими авторами аффинорных структур в касательном пучке.

Наконец, комбинируя теоремы 2 и 3, можно высказать общий критерий для разыскания всех возможных почти комплексных, почти двойных и почти дуальных структур в касательном пучке.

Теорема 7. *Для того, чтобы аффинор* $F = {}^G\left[\underset{0}{f}, \underset{1}{f}, \underset{2}{f}, \underset{3}{f}\right]$ *определял на* $T(M)$ *почти комплексную, почти двойную или почти дуальную структуру, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\underset{2}{f} \circ \underset{0}{f} = -\underset{0}{f} \circ \underset{1}{f}, \tag{4.21}$$

$$\underset{3}{f} \circ \underset{2}{f} = -\underset{1}{f} \circ \underset{3}{f}, \tag{4.22}$$

[1] Чтобы из перечисленных семейств аффинорных структур в $T(M)$ выделить линейные продолжения нулевого и первого порядков, нужно соответствующим образом ограничить изменение параметров. В эти семейства входят и семейства (4.1—4.3), которые не зависят от выбора почти комплексной структуры φ на M. (Ср. с замечаниями к теореме 4).

$$\underset{1}{f}^2 = \omega\delta - \underset{3}{f} \circ \underset{0}{f}, \tag{4.23}$$

$$\underset{2}{f}^2 = \omega\delta - \underset{0}{f} \circ \underset{3}{f}, \tag{4.24}$$

где $\omega = -1,\ 1,\ 0$ *соответственно случаям почти комплексной, почти двойной или почти дуальной структуры.*

5. Тензор Нейенхойса для аффинорных структур в касательном пучке

Как известно [10, 15], каждому дифференцируемому полю аффинора f на многообразии M можно соотнести тензорное поле

$$N(f)^\gamma_{\alpha\beta} = 2f^\lambda_{[\alpha}\partial_{|\lambda|}f^\gamma_{\beta]} - 2f^\gamma_\sigma\partial_{[\alpha}f^\sigma_{\beta]}, \tag{5.1}$$

называемое тензором Нейенхойса для аффинора f. Если на многообразии M задан объект $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$ аффинной связности с тензором кручения $S^\gamma_{\alpha\beta}$, то, как нетрудно проверить, тензор Нейенхойса допускает следующее инвариантное выражение:

$$N(f)^\gamma_{\alpha\beta} = 2f^\lambda_{[\alpha}\nabla_{|\lambda|}f^\gamma_{\beta]} - 2f^\gamma_\sigma\nabla_{[\alpha}f^\sigma_{\beta]} - f^\lambda_\alpha f^\mu_\beta S^\gamma_{\lambda\mu} - f^\gamma_\rho f^\rho_\sigma S^\sigma_{\alpha\beta} + \\ + f^\gamma_\sigma f^\mu_\beta S^\sigma_{\alpha\mu} + f^\gamma_\sigma f^\lambda_\alpha S^\sigma_{\lambda\beta}. \tag{5.2}$$

Аффинорная структура, задаваемая полем аффинора f на многообразии M, называется интегрируемой, если в окрестности каждой точки существуют локальные координаты, относительно которых компоненты тензора f постоянны.

Обращение в нуль тензора $N(f)$ является необходимым условием интегрируемости структуры, определяемой f. В случаях почти комплексной структуры и структуры почти произведения это условие является и достаточным [10, 20].

Нашей ближайшей целью является нахождение тензора Нейенхойса для произвольного аффинора, заданного в касательном пучке $T(M)$. Пусть в $T(M)$ заданы поля локального аффинора f с компонентами $f^\beta_\alpha(\xi^\lambda, x^\lambda)$ относительно специальных координат и объект инфинитезимальной связности G с компонентами $G^\beta_\alpha(\xi^\lambda, x^\lambda)$. Как известно [2], ковариантная производная от f есть поле локального тензора с компонентами[1]

$$\nabla_\gamma f^\beta_\alpha = \partial_\gamma f^\beta_\alpha + G^\beta_{\gamma|\sigma}f^\sigma_\alpha G^\beta_{\gamma|\alpha}f^\beta_\sigma - G^\sigma_{\gamma|\alpha}f^\beta_\sigma f^\beta_\alpha - G^\sigma_\gamma f^\beta_{\alpha|\sigma}. \tag{5.3}$$

В частном случае, когда f есть поле аффинора на многообразии M, а объект G порожден объектом аффинной связности $(G^\beta_\alpha = \Gamma^\beta_{\alpha\sigma}x^\sigma)$, соотношение (5.3) дает обычную ковариантную производную относительно аффинной связности. Напомним еще, что тензоры кривизны и кручения инфинитезимальной связности в специальных координатах имеют, соответственно, компоненты

$$R^\gamma_{\alpha\beta} = 2\partial_{[\alpha}G^\gamma_{\beta]} - 2G^\sigma_{[\alpha}G^\gamma_{\beta]|\sigma}, \tag{5.4}$$

$$S^\gamma_{\alpha\beta} = 2G^\gamma_{[\alpha|\beta]}. \tag{5.5}$$

Нахождение тензора Нейенхойса для аффинора $F = {}^G\left[\underset{0}{f}, \underset{1}{f}, \underset{2}{f}, \underset{3}{f}\right]$, представленного в виде полного поднятия относительно произвольной инфинитезимальной связности, проводится в соответствии с определе-

[1] Индекс с предшествующей вертикальной чертой обозначает частное дифференцирование по слоевой координате.

нием (5. 1) и выражением (1. 14) для полного лифта в специальных координатах. После весьма трудоемких выкладок, использующих соотношения (5. 3—5. 5), удается представить $N(F)$ в виде полного поднятия. Этот результат, доказательство которого мы опускаем из-за громоздкости, можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 8. *Пусть* $F = {}^{G}\left[\underset{0}{f}, \underset{1}{f}, \underset{2}{f}, \underset{3}{f}\right]$. *Тогда тензор Нейенхойса* $N(F)$ *есть полное поднятие*

$$N(F) = {}^{G}\left[\underset{0}{n}, \underset{1}{n}, \underset{2}{n}, \underset{3}{n}, \underset{4}{n}, \underset{5}{n}, \underset{6}{n}, \underset{7}{n}\right], \tag{5. 6}$$

где поля локальных тензоров $\underset{i}{n}$ *являются комитантами аффиноров* $\underset{j}{f}$, *их ковариантных производных, а также тензоров* R *и* S *кривизны и кручения инфинитезимальной связности* G.

Именно, в специальных координатах

$$\underset{0}{n}{}^{\gamma}_{\alpha\beta} = 2\underset{0}{f}{}^{\omega}_{[\alpha}\nabla_{|\omega|}\underset{0}{f}{}^{\gamma}_{\beta]} + 2\underset{1}{f}{}^{\omega}_{[\alpha}\underset{0}{f}{}^{\gamma}_{\beta]|\omega} + 2\underset{0}{f}{}^{\gamma}_{\omega}\underset{1}{f}{}^{\omega}_{[\alpha|\beta]} + 2\underset{2}{f}{}^{\gamma}_{\omega}\underset{0}{f}{}^{\omega}_{[\alpha|\beta]} - \underset{0}{f}{}^{\lambda}_{\alpha}\underset{0}{f}{}^{\mu}_{\beta}S^{\gamma}_{\lambda\mu}, \tag{5.7}$$

$$\underset{1}{n}{}^{\gamma}_{\alpha\beta} = 2\underset{0}{f}{}^{\omega}_{[\alpha}\nabla_{|\omega|}\underset{1}{f}{}^{\gamma}_{\beta]} + 2\underset{1}{f}{}^{\omega}_{[\alpha}\underset{1}{f}{}^{\gamma}_{\beta]|\omega} + 2\underset{1}{f}{}^{\gamma}_{\omega}\underset{1}{f}{}^{\omega}_{[\alpha|\beta]} + 2\underset{3}{f}{}^{\gamma}_{\omega}\underset{0}{f}{}^{\omega}_{[\alpha|\beta]} - \underset{0}{f}{}^{\lambda}_{\alpha}\underset{0}{f}{}^{\mu}_{\beta}R^{\gamma}_{\lambda\mu}, \tag{5. 8}$$

$$\begin{aligned}\underset{2}{n}{}^{\gamma}_{\alpha\beta} = -\underset{4}{n}{}^{\gamma}_{\beta\alpha} &= \underset{0}{f}{}^{\omega}_{\alpha}\nabla_{\omega}\underset{2}{f}{}^{\gamma}_{\beta} - \underset{2}{f}{}^{\omega}_{\beta}\nabla_{\omega}\underset{0}{f}{}^{\gamma}_{\alpha} + \underset{2}{f}{}^{\gamma}_{\omega}\nabla_{\beta}\underset{0}{f}{}^{\omega}_{\alpha} + \underset{0}{f}{}^{\gamma}_{\omega}\nabla_{\beta}\underset{1}{f}{}^{\omega}_{\alpha} + \underset{1}{f}{}^{\omega}_{\alpha}\underset{2}{f}{}^{\gamma}_{\beta|\omega} - \\ &- \underset{3}{f}{}^{\omega}_{\beta}\underset{0}{f}{}^{\gamma}_{\alpha|\omega} - \underset{2}{f}{}^{\gamma}_{\omega}\underset{2}{f}{}^{\omega}_{\beta|\alpha} - \underset{0}{f}{}^{\gamma}_{\omega}\underset{3}{f}{}^{\omega}_{\beta\,|\alpha} + \underset{0}{f}{}^{\lambda}_{\alpha}\underset{2}{f}{}^{\gamma}_{\sigma}S^{\sigma}_{\lambda\beta} - \underset{0}{f}{}^{\lambda}_{\alpha}\underset{2}{f}{}^{\mu}_{\beta}S^{\gamma}_{\lambda\mu} + \underset{0}{f}{}^{\lambda}_{\alpha}\underset{0}{f}{}^{\gamma}_{\sigma}R^{\sigma}_{\lambda\beta},\end{aligned} \tag{5. 9}$$

$$\begin{aligned}\underset{3}{n}{}^{\gamma}_{\alpha\beta} = -\underset{5}{n}{}^{\gamma}_{\beta\alpha} &= \underset{0}{f}{}^{\omega}_{\alpha}\nabla_{\omega}\underset{3}{f}{}^{\gamma}_{\beta} - \underset{2}{f}{}^{\omega}_{\beta}\nabla_{\omega}\underset{1}{f}{}^{\gamma}_{\alpha} + \underset{3}{f}{}^{\gamma}_{\omega}\nabla_{\beta}\underset{0}{f}{}^{\omega}_{\alpha} + \underset{1}{f}{}^{\gamma}_{\omega}\nabla_{\beta}\underset{1}{f}{}^{\omega}_{\alpha} + \underset{1}{f}{}^{\omega}_{\alpha}\underset{3}{f}{}^{\gamma}_{\beta|\omega} - \\ &- \underset{3}{f}{}^{\omega}_{\beta}\underset{1}{f}{}^{\gamma}_{\alpha|\omega} - \underset{3}{f}{}^{\gamma}_{\omega}\underset{2}{f}{}^{\omega}_{\beta|\alpha} - \underset{1}{f}{}^{\gamma}_{\omega}\underset{3}{f}{}^{\omega}_{\beta|\alpha} + \underset{0}{f}{}^{\lambda}_{\alpha}\underset{3}{f}{}^{\gamma}_{\sigma}S^{\sigma}_{\lambda\beta} - \underset{0}{f}{}^{\lambda}_{\alpha}\underset{2}{f}{}^{\mu}_{\beta}R^{\gamma}_{\lambda\mu} + \underset{0}{f}{}^{\lambda}_{\alpha}\underset{1}{f}{}^{\gamma}_{\sigma}R^{\sigma}_{\lambda\beta};\end{aligned} \tag{5. 10}$$

$$\begin{aligned}\underset{6}{n}{}^{\gamma}_{\alpha\beta} &= 2\underset{2}{f}{}^{\omega}_{[\alpha}\nabla_{|\omega|}\underset{2}{f}{}^{\gamma}_{\beta]} - 2\underset{2}{f}{}^{\gamma}_{\omega}\nabla_{[\alpha}\underset{2}{f}{}^{\omega}_{\beta]} - 2\underset{0}{f}{}^{\gamma}_{\omega}\nabla_{\alpha}\underset{3}{f}{}^{\omega}_{\beta]} + 2\underset{3}{f}{}^{\omega}_{[\alpha}\underset{2}{f}{}^{\gamma}_{\beta]|\omega} - \underset{0}{f}{}^{\gamma}_{\omega}\underset{3}{f}{}^{\omega}_{\sigma}S^{\sigma}_{\alpha\beta} - \\ &- \underset{2}{f}{}^{\gamma}_{\omega}\underset{2}{f}{}^{\omega}_{\sigma}S^{\sigma}_{\alpha\beta} + 2\underset{2}{f}{}^{\gamma}_{\sigma}\underset{2}{f}{}^{\lambda}_{[\alpha}S^{\sigma}_{|\lambda|\,\beta]} - \underset{2}{f}{}^{\lambda}_{\alpha}\underset{2}{f}{}^{\mu}_{\beta}S^{\gamma}_{\lambda\mu} - \underset{2}{f}{}^{\gamma}_{\omega}\underset{0}{f}{}^{\omega}_{\sigma}R^{\sigma}_{\alpha\beta} - \underset{0}{f}{}^{\gamma}_{\omega}\underset{1}{f}{}^{\omega}_{\sigma}R^{\sigma}_{\alpha\beta} + 2\underset{2}{f}{}^{\lambda}_{[\alpha}\underset{0}{f}{}^{\gamma}_{|\sigma|}R^{\sigma}_{|\lambda|\beta]},\end{aligned} \tag{5. 11}$$

$$\begin{aligned}\underset{7}{n}{}^{\gamma}_{\alpha\beta} &= 2\underset{2}{f}{}^{\omega}_{[\alpha}\nabla_{|\omega|}\underset{3}{f}{}^{\gamma}_{\beta]} - 2\underset{3}{f}{}^{\gamma}_{\omega}\nabla_{[\alpha}\underset{2}{f}{}^{\omega}_{\beta]} - 2\underset{1}{f}{}^{\gamma}_{\omega}\nabla_{[\alpha}\underset{3}{f}{}^{\omega}_{\beta]} + 2\underset{3}{f}{}^{\omega}_{[\alpha}\underset{3}{f}{}^{\gamma}_{\beta]|\omega} - \underset{1}{f}{}^{\gamma}_{\omega}\underset{3}{f}{}^{\omega}_{\sigma}S^{\sigma}_{\alpha\beta} - \\ &- \underset{3}{f}{}^{\gamma}_{\omega}\underset{2}{f}{}^{\omega}_{\sigma}S^{\sigma}_{\alpha\beta} + 2\underset{3}{f}{}^{\gamma}_{\sigma}\underset{2}{f}{}^{\lambda}_{[\alpha}S^{\sigma}_{|\lambda|\beta]} - \underset{3}{f}{}^{\gamma}_{\omega}\underset{0}{f}{}^{\omega}_{\sigma}R^{\sigma}_{\alpha\beta} - \underset{1}{f}{}^{\gamma}_{\omega}\underset{1}{f}{}^{\omega}_{\sigma}R^{\sigma}_{\alpha\beta} + \\ &+ 2\underset{2}{f}{}^{\lambda}_{[\alpha}\underset{1}{f}{}^{\gamma}_{|\sigma|}R^{\sigma}_{|\lambda|\beta]} - \underset{2}{f}{}^{\lambda}_{\alpha}\underset{2}{f}{}^{\mu}_{\beta}R^{\gamma}_{\lambda\mu}.\end{aligned} \tag{5. 12}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. В. Беклемишев. Дифференциальная геометрия пространств с почти комплексной структурой. Итоги науки. Геометрия, 1963, Изд-во ВИНИТИ, М., 1965, 165—212.
2. В. В. Вагнер. Теория составного многообразия. Труды семинара по вектор. и тензор. анализу, вып. VIII, 1950, 11—72.
3. В. В. Вишневский. Об одном обобщении пространств Широкова-Рашевского. Уч. зап. Казанск. гос. ун-та, т. 125, кн. 1, 1965, 60—73.
4. Ф. И. Каган. О тензорах в касательном пучке. Тезисы докл. III Межвузовск. конф. по пробл. геометрии, Казань, 1967, 71—72.
5. Ф. И. Каган. О некоторых типах почти алгебраических структур в касательном пучке. Тезисы докл. III Прибалтийской геом. конф., Паланга, 1968, 74—76.
6. Ф. И. Каган. К теории лифтов для тензорных полей из многообразия в его касательный пучок. Известия высш. уч. завед. Математика, № 9, 1969, 37—46.
7. А. П. Широков. Об одном типе G-структур, определяемых алгебрами. Труды геометрич. семинара, том 1, М., 1966, 425—456.

8. Akbar-Zadeh H., Bonan E. Structure presque kählérienne naturelle sur le fibré tangent à une variété finslerienne. C. R. Acad. Sci., 258 (1964), 5581—5582.
9. Dombrowski P. On the geometry of the tangent bundle. J. Reine Angew. Math., 210 (1962), 73—88.
10. Eckmann B., Frölicher A. Sur l'integrabilité des structures presque complexes. C. R. Acad. Sci., 232 (1951), 2284—2286.
11. Houh Ch. Note on almost product manifolds and their tangent bundles. Canad. Math. Bull., 9 (1966), № 5, 621—630.
12. Kandatu A. Tangent bundle of a manifold with a non — linear connection. Kôdai Math. Semin. Repts, 18 (1966), № 4, 259—270.
13. Matsumoto M. Connections, metrics and almost complex structures of tangent bundles. J. Math. Kyoto Univ., 5 (1966), 3, 251—278.
14. Nagano T. Isometries on complex — product spaces. Tensor, N. S., 9 (1959), 47—61.
15. Nijenhuis A. X_{n-1} — forming set of eigenvectors. Proc. Kon. Ned. Akad. Wet., Amsterdam, A54 (2), 1951, 200—212.
16. Sasaki S. On the differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifolds. Tôhoku Math. J., 10 (1958), 338—354.
17. Satô I. Almost analytic vector fields in almost complex manifolds. Tôhoku Math. J., 17 (1965), 185—199.
18. Tachibana S., Okumura M. On the almost — complex structure of tangent bundles of Riemannian Spaces. Tôhoku Math. J. 14 (1962), № 2, 156—161.
19. Tanno Sh. Almost complex structures in bundle spaces over almost contact manifolds. J. Math. Soc. Japan, 17 (1965), № 2, 167—186.
20 Yano K. Affine connections in an almost product space. Kôdai Math. Sem. Rep. 11 (1959), 1—24.
21. Yano K., Davies E. T. On the tangent bundles of Finsler and Riemannian manifolds. Rend. Circolo mat. Palermo, 12 (1963), № 2, 211—228.
22. Yano K., Ishihara Sh. Differential geometry in tangent bundle. Kôdai Math. Semin. Reports, 18 (1966), № 4, 271—292.
23. Yano K., Ishihara Sh. Horizontal lifts of tensor fields and connections to tangent bundles. J. Math and Mech., 16 (1967), № 9, 1015—1030.
24. Yano K., Ishihara Sh. Almost complex structures induced in tangent bundles. Kôdai Math. Sem. Reports, 19 (1967), 1—27.
25. Yano K., Kobayashi S. Prolongations of tensor fields and connections to tangent bundles. I. General theory. J. Math. Soc. Japan, 18 (1966), № 2, 194—210.
26. Yano K., Kobayashi S. Prolongations of tensor fields and connections to tangent bundles II Infinitesimal automorphisms. J. Math. Soc. Japan, 18 (1966), № 3, 236—246.

Поступила 21 ноября 1968 г.

УКРАИНСКИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК

Выпуск 8 1970

О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ КВАЗИСПЕЦИАЛЬНЫХ КОМПЛЕКСОВ С ДВУКРАТНЫМ РАССЛОЕНИЕМ

Н. И. Кованцов, Е. Н. Ищенко

(Киев)

Квазиспециальный комплекс, допускающий однократное расслоение, представляет собой двупараметрическое семейство плоских пучков, центры которых описывают некоторую поверхность. Квазиспециальный комплекс, допускающий двукратное расслоение, может быть двумя способами разложен в двупараметрические семейства плоских пучков, центры которых описывают уже две поверхности. Аналогичное можно говорить и о квазиспециальных комплексах с трехкратным и четырехкратным расслоением.

Термин «квазиспециальный» введен Н. И. Кованцовым в 1957 г. [1]. В этой работе подробно исследованы квазиспециальные комплексы K_1, допускающие однократное расслоение. Для комплексов K_2, допускающих двукратное расслоение, выписана система дифференциальных уравнений, решение которой существует с произволом в семь функций одного аргумента. Вначале предполагалось, что эта система описывает весь класс комплексов с двукратным расслоением. Однако все последующие попытки свести к ней общие условия двукратного расслоения оставались безрезультатными, т. е. оставалось невыясненным, охватывает ли эта система весь класс комплексов K_2 или только их часть. На протяжении 11 лет неоднократно пытались решить этот вопрос, но в связи с непреодолимыми аналитическими трудностями задача отыскания находящейся в инволюции системы дифференциальных уравнений, полностью характеризующей комплексы K_2 с двукратным расслоением, оставалась нерешенной.

В настоящей работе получена система дифференциальных уравнений для одного класса комплексов K_2, не являющаяся частным случаем системы в [1]. Следовательно, система в [1] не охватывает всего класса комплексов с двукратным расслоением, а характеризует лишь некоторый достаточно широкий их класс.

Вместе с тем мы выделяем еще три довольно интересных класса комплексов, которые являются частными случаями отмеченного в работе [1], и даем им безынтегральное представление. Эти классы, так же, как и тот, который не входит в совокупность комплексов, отмеченных в работе [1], характеризуются вырождением в плоскости поверхностей, описываемых центрами плоских пучков.

Система дифференциальных уравнений, характеризующая наши классы комплексов K_2, получается следующим образом.

В качестве системы отнесения примем полуканонический тетраэдр, уравнения инфинитезимального перемещения которого имеют вид:

$$\omega_1^3 + \omega_2^4 = 0,$$

$$\omega_1^2 - \omega_3^4 = p\omega_2^3 + \alpha\omega_1^4 + \beta\omega_2^4,$$

$$\omega_2^1 - \omega_4^3 = \alpha\omega_2^3 + q\omega_1^4 - \gamma\omega_2^4,$$

$$\omega_2^2 + \omega_3^3 - \omega_4^4 - \omega_1^1 = \beta\omega_2^3 - \gamma\omega_1^4 + r\omega_2^4. \tag{1}$$

Здесь вершины тетраэдра A_1 и A_2 помещены на луч комплекса, а плоскости $(A_1A_2A_3)$ и $(A_2A_1A_4)$ соответствуют этим точкам в нормальной корреляции.

Инфлекционные центры $I = A_1 + tA_2$ луча комплекса определяются уравнением

$$qt^4 + 2\gamma t^2 - (2\alpha - r)\, t^2 + 2\beta t + p = 0. \tag{2}$$

Поместим точки A_1 и A_2 в инфлекционные центры, тогда, в соответствии с уравнением (2), должны положить

$$p = 0, \quad q = 0.$$

Далее, так как точки A_1 и A_2 описывают поверхности (σ_1, σ_2), ничто не мешает нам, как это сделано и в [2], совместить с касательными плоскостями этих поверхностей плоскости $(A_1A_3A_4)$ и $(A_2A_3A_4)$. В таком случае

$$\omega_1^2 = 0, \quad \omega_2^1 = 0.$$

Потребуем, чтобы поверхности σ_1 и σ_2 представляли собой плоскости, тогда

$$\omega_3^1 = \omega_4^1 = \omega_3^2 = \omega_4^2 = 0.$$

Следовательно, комплекс K_2 будет определяться следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{gathered}
\omega_1^3 + \omega_2^4 = 0, \\
\omega_2^1 = \omega_1^2 = \omega_3^1 = \omega_4^1 = \omega_3^2 = \omega_4^2 = 0, \\
-\omega_3^4 = \alpha\omega_1^4 + \beta\omega_2^4, \\
-\omega_4^3 = \alpha\omega_2^3 - \gamma\omega_2^4, \\
\omega_2^2 + \omega_3^3 - \omega_4^4 - \omega_1^1 = \beta\omega_2^3 - \gamma\omega_1^4 + r\omega_2^4.
\end{gathered} \tag{3}$$

К этой системе присоединим уравнения, определяющие третью дифференциальную окрестность луча комплекса [2]. Из шести содержащихся там уравнений у нас сейчас остается лишь четыре, которые мы запишем в таком виде:

$$\begin{aligned}
d\alpha &= \frac{\alpha}{2}\left(\omega_3^3 - \omega_2^2 + \omega_4^4 - \omega_1^1\right) + \frac{3}{2}\alpha\beta\omega_2^3 + \frac{3}{2}\alpha\gamma\omega_1^4 - h\omega_2^4, \\
d\beta &= -\beta\left(\omega_2^2 - \omega_3^3\right) + \left(\alpha^2 - \frac{1}{2}\alpha r - h\right)\omega_1^4 + \beta^2\omega_2^3 - r_1\omega_2^4, \\
d\gamma &= -\gamma\left(\omega_1^1 - \omega_4^4\right) + \left(\alpha^2 - \frac{1}{2}\alpha r + h\right)\omega_2^3 + \gamma^2\omega_1^4 + r_2\omega_2^4, \\
dr &= \frac{r}{2}\left(\omega_3^3 - \omega_2^2 + \omega_4^4 - \omega_1^1\right) + \left(-3\alpha\beta + \frac{1}{2}\beta r - r_1\right)\omega_2^3 + \\
&\quad + \left(-3\alpha\gamma + \frac{1}{2}\gamma r - r_2\right)\omega_1^4 - r_3\omega_2^4.
\end{aligned} \tag{4}$$

Система (3—4), определяющая комплекс K_2, не в инволюции. Дифференцируя внешним образом первое уравнение системы (4), получим следующее квадратичное уравнение

$$\begin{aligned}
&\Big[-dh + \frac{h}{2}\left(\omega_3^3 - \omega_1^1 + 3\omega_4^4 - 3\omega_2^2\right) + \left(\frac{3}{2}h\gamma - \frac{3}{2}\alpha r_2 - \frac{3}{2}\alpha^2\gamma\right)\omega_1^4 + \\
&\quad + \left(\frac{5}{2}\beta h + \frac{3}{2}\alpha r_1 + \frac{3}{2}\alpha^2\beta\right)\omega_2^3,\ \omega_2^4\Big] + 4\alpha h\left[\omega_2^3\omega_1^4\right] = 0.
\end{aligned} \tag{5}$$

Отсюда следует

$$\alpha h = 0.$$

Легко понять, что $h=0$. Действительно, если $\alpha \neq 0$, то это утверждение доказано. Если же $\alpha = 0$, то из первого равенства системы (4) следует, что и $h=0$ (в силу независимости формы ω_2^4).

Учитывая равенство $h=0$ в соотношении (5), получаем еще два конечных соотношения:

$$\alpha(r_1 + \alpha\beta) = 0, \quad \alpha(r_2 + \alpha\gamma) = 0.$$

Дифференцируя три последних равенства системы (3—4), получаем всего одно конечное соотношение

$$\alpha r_3 = 0.$$

Итак, имеем следующую систему конечных соотношений:

$$\alpha(r_1 + \alpha\beta) = 0, \quad \alpha(r_2 + \alpha\gamma) = 0, \quad \alpha r_3 = 0. \tag{6}$$

Возможны два случая.

1. $\alpha = 0$.

В этом случае система (4) принимает следующий вид:

$$d\beta = -\beta(\omega_2^2 - \omega_3^3) + \beta^2\omega_2^3 - r_1\omega_2^4,$$

$$d\gamma = -\gamma(\omega_1^1 - \omega_4^4) + \gamma^2\omega_1^4 + r_2\omega_2^4,$$

$$dr = \frac{r}{2}(\omega_3^3 - \omega_2^2 + \omega_4^4 - \omega_1^1) + \left(\frac{1}{2}\beta r - r_1\right)\omega_2^3 +$$

$$+ \left(\frac{1}{2}\gamma r - r_2\right)\omega_1^4 - r_3\omega_2^4. \tag{7}$$

Легко видеть, что система допускает решение с произволом три функции одного аргумента.

Таким образом, рассматриваемый комплекс имеет следующее безынтегральное представление.

Берутся две произвольные плоскости $\Pi_1(A_1A_3A_4)$ и $\Pi_2(A_2A_3A_4)$, в этих плоскостях — две произвольные кривые σ_1 и σ_2 (две функции одного аргумента). Между касательными к этим кривым устанавливаем произвольное соответствие (еще одна функция одного аргумента). Соответствующие касательные делаем директрисами линейных конгруэнций. Однопараметрическое семейство таких конгруэнций и есть квазиспециальный комплекс с двукратным расслоением.

Доказательство этого утверждения следует из рассуждений, приведенных в работе [1]. Линейчатые поверхности, описываемые центрами плоских пучков, в данном случае вырождаются в семейство касательных к кривым σ_1 и σ_2.

Интерес представляют следующие геометрически отличные друг от друга случаи:

1) $r_1 = 0$.

2) $r_1 = 0, \quad r_2 = 0$.

3) $r_1 = 0, \quad r_2 = 0, \quad r_3 = 0$.

Рассмотрим эти случаи последовательно.

1) Система уравнений (3—4) принимает в этом случае вид:

$$\omega_1^3 + \omega_2^4 = 0,$$

$$\omega_1^2 = \omega_2^1 = \omega_3^1 = \omega_4^1 = \omega_3^2 = \omega_4^2 = 0,$$

$$
\begin{gathered}
\omega_3^4 = -\beta\omega_2^4, \quad \omega_4^3 = \gamma\omega_2^4, \\
\omega_2^2 + \omega_3^3 - \omega_4^4 - \omega_1^1 = \beta\omega_2^3 - \gamma\omega_1^4 + r\omega_2^4, \\
d\beta = -\beta\left(\omega_2^2 - \omega_3^3\right) + \beta^2\omega_2^3, \\
d\gamma = -\gamma\left(\omega_1^1 - \omega_4^4\right) + \gamma^2\omega_1^4 + r_2\omega_2^4, \\
dr = \frac{r}{2}\left(\omega_3^3 - \omega_2^2 + \omega_4^4 - \omega_1^1\right) + \frac{1}{2}\beta r\omega_2^3 + \\
+\left(\frac{1}{2}\gamma r - r_2\right)\omega_1^4 - r_3\omega_2^4.
\end{gathered} \tag{8}
$$

Решение системы существует с произволом две функции одного аргумента. Легко обнаружить, что в этом случае точка

$$
Q = A_2 + \frac{1}{\beta}A_3
$$

остается неподвижной. Следовательно, кривая σ_2 вырождается в точку. Кривая σ_1 остается произвольной. Соответствие между касательными к кривой σ_1 и прямыми пучка с центром Q остается также произвольным.

2) В этом случае система (3—4) принимает вид

$$
\begin{gathered}
\omega_1^3 + \omega_2^4 = 0, \\
\omega_2^1 = \omega_1^2 = \omega_3^1 = \omega_4^1 = \omega_3^2 = \omega_4^2 = 0, \\
\omega_3^4 = -\beta\omega_2^4, \quad \omega_4^3 = \gamma\omega_2^4, \\
\omega_2^2 + \omega_3^3 - \omega_4^4 - \omega_1^1 = \beta\omega_2^3 - \gamma\omega_1^4 + r\omega_2^4, \\
d\beta = -\beta\left(\omega_2^2 - \omega_3^3\right) + \beta^2\omega_2^3, \\
d\gamma = -\gamma\left(\omega_1^1 - \omega_4^4\right) + \gamma^2\omega_1^4, \\
dr = \frac{r}{2}\left(\omega_3^3 - \omega_2^2 + \omega_4^4 - \omega_1^1\right) + \frac{1}{2}\beta r\omega_2^3 + \\
+\frac{1}{2}\gamma r\omega_1^4 - r_3\omega_2^4.
\end{gathered} \tag{9}
$$

Легко видеть, что единственным ковариантом этой системы будет следующий:

$$
\left[\Delta r_3, \quad \omega_2^4\right] = 0,
$$

где

$$
\Delta r_3 = dr_3 + \frac{r_3}{2}\left(\omega_1^1 - \omega_3^3 + 3\omega_2^2 - 3\omega_4^4\right) - \frac{1}{2}\gamma r\omega_1^4 - \frac{3}{2}\beta r_3\omega_2^3.
$$

Тем самым класс комплексов существует с произволом в одну функцию одного аргумента. Можно выяснить строение этого комплекса.

Так, исследуя систему (9), видим, что на каждой плоскости — Π_1 и Π_2 — остаются неподвижными две точки

$$
P = A_1 + \frac{1}{\gamma}A_4, \quad Q = A_2 + \frac{1}{\beta}A_3.
$$

Следовательно, кривые σ_1 и σ_2 вырождаются в точки. Прямые (A_1A_4) в плоскости Π_1 образуют пучок с центром в точке P, а прямые (A_2A_3) в плоскости Π_2 образуют пучок с центром в точке Q. Между лучами этих пучков задается совершенно произвольное соответствие — это и выясняет геометрический смысл функции одного аргумента, с произволом которой существует решение системы (9).

Таким образом, класс комплексов, определенный системой (9), имеет следующее безынтегральное представление.

В двух произвольно выбранных плоскостях фиксируется два каких-то пучка прямых. Между лучами пучков устанавливается произвольное соответствие, после чего соответствующие лучи делаются директрисами линейных конгруэнций. Совокупность таких конгруэнций и есть указанный комплекс.

3) В этом случае все инфлекционные центры комплекса описывают поверхности. Так как сложное отношение

$$W = (A_1 A_2 I_1 I_2) = \text{const},$$

то здесь имеем тетраэдральный комплекс.

II. Рассмотрим теперь случай, когда $\alpha \neq 0$.

При этом $h = 0$, $r_1 = -\alpha\beta$, $r_2 = -\alpha\gamma$, $r_3 = 0$. Система дифференциальных уравнений (3)—(4) принимает вид:

$$\begin{gathered}
\omega_1^3 + \omega_2^4 = 0, \\
\omega_2^1 = \omega_1^2 = \omega_3^1 = \omega_4^1 = \omega_3^2 = \omega_4^2 = 0, \\
-\omega_3^4 = \alpha\omega_1^4 + \beta\omega_2^4, \\
-\omega_4^3 = \alpha\omega_2^3 - \gamma\omega_2^4, \\
\omega_2^2 + \omega_3^3 - \omega_4^4 - \omega_1^1 = \beta\omega_2^3 - \gamma\omega_1^4 + r\omega_2^4, \\
d\alpha = \frac{\alpha}{2}\left(\omega_3^3 - \omega_2^2 + \omega_4^4 - \omega_1^1\right) + \frac{3}{2}\alpha\beta\omega_2^3 + \frac{3}{2}\alpha\gamma\omega_1^4, \\
d\beta = -\beta\left(\omega_2^2 - \omega_3^3\right) + \left(\alpha^2 - \frac{1}{2}\alpha r\right)\omega_1^4 + \beta^2\omega_2^3 + \alpha\beta\omega_2^4, \\
d\gamma = -\gamma\left(\omega_1^1 - \omega_4^4\right) + \left(\alpha^2 - \frac{1}{2}\alpha r\right)\omega_2^3 + \gamma^2\omega_1^4 - \alpha\gamma\omega_2^4, \\
dr = \frac{r}{2}\left(\omega_3^3 - \omega_2^2 + \omega_4^4 - \omega_1^1\right) + \left(-2\alpha\beta + \frac{1}{2}\beta r\right)\omega_2^3 + \\
+ \left(-2\alpha\gamma + \frac{1}{2}\gamma r\right)\omega_1^4.
\end{gathered} \tag{10}$$

Внешнее дифференцирование дает тождественный нуль, т. е. система замкнута. Следовательно, она — в инволюции, и ее решение существует с произволом в 14 произвольных постоянных [3].

Покажем, что между плоскостями $(A_1A_3A_4)$ и $(A_2A_3A_4)$ существует коррелятивное соответствие, т. е. каждой точке одной плоскости ставится в соответствие прямая другой плоскости и наоборот, причем взаимная инцидентность точек и прямых не будет нарушаться при переходе от одной плоскости к другой.

В самом деле, пусть точка A_1 движется по некоторой прямой плоскости $(A_1A_3A_4)$. В этом случае из равенства

$$dA_1 = \omega_1^1 A_1 + \omega_1^3 A_3 + \omega_1^4 A_4$$

следует, что $\omega_1^3 = a\omega_1^4$, где a — некоторый коэффициент. Тогда

$$dA_1 = \omega_1^1 A_1 + \omega_1^4 (aA_3 + A_4).$$

При наличии коррелятивного соответствия между плоскостями $(A_1A_3A_4)$ и $(A_2A_3A_4)$ неподвижность прямой $(A_1, aA_3 + A_4)$ плоскости $(A_1A_3A_4)$ влечет за собой неподвижность некоторой точки $M = A_2 + bA_3$ плоскости $(A_2A_3A_4)$. Другими словами, когда точка A_1 движется по неподвижной прямой $(A_1, aA_3 + A_4)$, то соответствующие ей прямые плоскости $(A_2A_3A_4)$ проходят через неподвижную точку M. Запишем условия неподвижности прямой $(A_1, aA_3 + A_4)$. Эта прямая будет неподвижной, если неподвижной будет точка $R = aA_3 + A_4$. Так как

$$dR = (a\omega_3^4 + \omega_4^4)\, R + \left[da + a\,(\omega_3^3 - \omega_4^4) + \omega_4^3 - a^2\omega_3^4\right] A_3,$$

то условия неподвижности точки R и, следовательно, прямой $(A_1, aA_3 + A_4)$ запишутся в виде

$$\begin{gathered} da + a\,(\omega_3^3 - \omega_4^4) + \omega_4^3 - a^2\omega_3^4 = 0, \\ \omega_1^3 = a\omega_1^4. \end{gathered} \tag{11}$$

Далее, так как для точки $M = A_2 + bA_3$

$$dM = \omega_2^2 M + \left[db + b\,(\omega_3^3 - \omega_2^2) + \omega_2^3\right] A_3 + (\omega_2^4 + b\omega_3^4)\, A_4,$$

то условия неподвижности этой точки имеют вид:

$$\begin{gathered} db + b\,(\omega_3^3 - \omega_2^2) + \omega_2^3 = 0, \\ \omega_2^4 + b\omega_3^4 = 0. \end{gathered} \tag{12}$$

Из равенств (11) и (12) получим

$$a = \frac{\alpha b}{b_1^3 - 1}\,. \tag{13}$$

Дифференцируя равенство (13) и используя уравнения (10) и (11), получим (12). Это и говорит нам о коррелятивности соответствия между плоскостями $(A_1A_3A_4)$ и $(A_2A_3A_4)$.

Из равенств

$$\begin{gathered} dA_1 = \omega_1^1 A_1 + \omega_1^3 A_3 + \omega_1^4 A_4, \\ dA_2 = \omega_2^2 A_2 + \omega_2^3 A_3 + \omega_2^4 A_4 \end{gathered}$$

следует, что когда точка A_1 неподвижна $(\omega_1^4 = \omega_2^4 = 0)$, то точка A_2 движется по неподвижной прямой (A_2A_3), т. е. луч комплекса описывает пучок в плоскости $(A_1A_2A_3)$.

Аналогично, когда неподвижной остается точка A_2 $(\omega_2^3 = \omega_2^4 = 0)$, то точка A_1 описывает неподвижную прямую (A_1A_4), т. е. луч комплекса описывает в плоскости $(A_2A_1A_4)$ пучок прямых.

Итак, чтобы построить квазиспециальный комплекс, определенный системой (10), следует взять две произвольные плоскости (шесть произвольных постоянных), установить между ними коррелятивное соответствие (восемь произвольных постоянных), и через каждую точку одной плоскости провести пучок прямых, пересекающих соответствующую этой точке прямую другой плоскости и наоборот.

Выясним, что описывают два других инфлекционных центра комплекса, определенного системой (10).

Инфлекционные центры $I = A_1 + tA_2$ луча в нашем случае определяются уравнением

$$2\gamma t^2 - (2\alpha - r)\, t + 2\beta = 0.$$

Дифференцируя $I = A_1 + tA_2$, найдем

$$dI = \omega_1^1 I + \left[dt + t\,(\omega_2^2 - \omega_1^1)\right] A_2 + (\omega_1^3 + t\omega_2^3)\, A_3 + (\omega_1^4 + t\omega_2^4)\, A_4.$$

Так как

$$[dt + t(\omega_2^2 - \omega_1^1), \quad \omega_1^3 + t\omega_2^3, \quad \omega_1^4 + t\omega_2^4] =$$

$$= \frac{\gamma t^2 - 2\beta - \frac{1}{2} rt}{4\gamma t - (2\alpha - r)} (2\gamma t^2 - (2\alpha - r) t + 2\beta) [\omega_2^3 \omega_1^3 \omega_1^4] = 0,$$

то формы, стоящие коэффициентами перед A_2, A_3, A_4, линейно зависимы. Легко показать, что

$$dt + t(\omega_2^2 - \omega_1^1) = \frac{2(\alpha t - \beta)(\beta - \gamma t)}{t(4\gamma t - 2\alpha + r)} (\omega_1^3 + t\omega_2^3) +$$

$$+ \frac{\alpha(4\gamma t - 2\alpha + r) + 2\gamma(\beta - \gamma t)}{4\gamma t - 2\alpha + r} (\omega_1^4 + t\omega_2^4).$$

Следовательно,

$$dI = \omega_1^1 I + \left(A_3 + \frac{2(\alpha t - \beta)(\beta - \gamma t)}{t(4\gamma t - 2\alpha + r)} A_2\right)(\omega_1^3 + t\omega_2^3) +$$

$$+ \left(A_4 + \frac{\alpha(4\gamma t - 2\alpha + r) + 2\gamma(\beta - \gamma t)}{4\gamma t - 2\alpha + r} A_2\right)(\omega_1^4 + t\omega_2^4).$$

Отсюда заключаем, что точка $I = A_1 + tA_2$ описывает поверхность, касательная плоскость σ к которой определяется равенством

$$\sigma = (A_1 + tA_2, \;\; A_3 - tA_4, \;\; (4\alpha\gamma t - 2\alpha^2 + \alpha r + 2\beta\gamma - 2\gamma^2 t) A_2 +$$

$$+ (4\gamma t - 2\alpha + r) A_4).$$

Так как $d\sigma \not\equiv 0 \pmod{\sigma}$, то это означает, что два другие инфлекционные центры комплекса не описывают плоскостей, т. е. в нашем случае комплекс не является тетраэдральным. В таком случае по теореме, доказанной в [2], каждый из инфлекционных центров этого комплекса является центром плоского пучка, принадлежащего комплексу. Следовательно, полученный в настоящей работе комплекс для случая $\alpha \neq 0$ имеет четырехкратное расслоение.

У комплексов, полученных в случаях (I), (I. 1), (I. 2), инфлекционные центры, не лежащие на плоскостях Π_1 и Π_2, не описывают поверхностей. Следовательно, эти комплексы представляют собой пример комплексов, допускающих только двукратное расслоение.

Остается открытым вопрос, существуют ли квазиспециальные комплексы второго рода (только с двукратным расслоением), отличные от комплексов, отмеченных в работе [1]

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. И. Кованцов. Квазиспециальные комплексы, Матем. сб., т. 41 (83), № 3, 1957.

2. Н. И. Кованцов. Теория комплексов, Изд-во КГУ, Киев, 1963.

3. С. П. Фиников. Метод внешних форм Картана, Гостехиздат, М.-Л., 1948.

Поступила 8 июня 1968 г.

УКРАИНСКИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК

Выпуск 8 1970

ОДНОРОДНЫЕ ОБЩИЕ ПРОСТРАНСТВА ПУТЕЙ $A_3(x, \dot{x})$ С ГРУППАМИ АФФИННЫХ ДВИЖЕНИЙ G_5

А. Т. Кондратьев

(Пенза)

ВВЕДЕНИЕ

Многообразие X_n вместе с путями, определенными системой дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + \Gamma^i\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = 0, \ (i = 1, 2, \ldots, n),$$

где Γ^i — функции $2n$ независимых переменных x^i; $\frac{dx^i}{dt}$ положительно однородные второй степени относительно $\dot{x}^k \equiv \frac{dx^k}{dt}$, называется общим пространством путей $A_n(x, \dot{x})$. Эти пространства, впервые введенные Дугласом, являются прямым обобщением финслеровых пространств. Можно показать, что функции

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}\Gamma^{\ i}_{\cdot j \cdot k}$$

являются компонентами аффинной связности. Поэтому, если функции $\Gamma^i_{jk}(x, \dot{x})$ не зависят от направления, мы имеем дело с пространством обычной аффинной связности $A_n(x)$. В этом случае тензор $\Gamma^i_{jke} \equiv \Gamma^i_{jk\cdot e} = 0$; верно и обратное утверждение, т. е. если тензор $\Gamma^i_{jke} = 0$, то $\Gamma^i_{jk} = a^i_{jk}(x)$. Таким образом, равенство нулю тензора Γ^i_{jke} есть необходимое и достаточное условие того, чтобы общее пространство путей $A_n(x, \dot{x})$ сводилось к $A_n(x)$. В дальнейшем рассматриваются общие пространства путей, не сводимые к пространствам обычной аффинной связности.

Важное место в общей геометрии путей занимает теория аффинных и проективных движений, развитая Кнебельманом [1]. Здесь мы рассмотрим только аффинные движения. Инфинитезимальное преобразование

$$\bar{x}^i = x^i + v^i(x)\,\delta t,$$

где $v^i(x)$ — координаты контрвариантного вектора, δt — бесконечномалый параметр, называется аффинным движением пространства $A_n(x, \dot{x})$, если оно любую геодезическую переводит в геодезическую с сохранением аффинности параметра. В терминах производной Ли условие, при котором v^i определяет аффинное движение, выражается равенством

$$L\Gamma^i = 0, \tag{1}$$

где L знак лиевой производной, взятой в направлении вектора v^i. Аппарат производной Ли применительно к геометрии общих пространств путей разработал Б. Л. Лаптев [2]. Это позволило ему записать условия автоморфизмов в инвариантной форме. Известно, что если пространство $A_n(x, \dot{x})$ допускает r линейно-независимых инфинитезимальных аффинных движений, то оно допускает и конечную непрерывную группу G_r движений. Наибольшее число линейно-независимых движений, которое пространство $A_n(x, \dot{x})$ может допустить, равно n^2+n. В этом случае мы получаем плоское пространство. Обобщая результаты И. П. Егорова [3] на случай пространств $A_n(x, \dot{x})$, Т. Окубо [4] доказал, что если пространство допускает группу G_r движений, где $n^2 < r \leqslant \leqslant n^2+n$, то оно необходимо плоское. Поэтому пространства $A_n(x, \dot{x})$, не сводимые к плоскому, могут допускать группу движений G_r, где $r \leqslant n^2$. Если $n=3$, то $r \leqslant 9$. Пространства максимальной подвижности рассмотрены в [5].

Общие пространства путей A_3 с группой движений G_5

При определении общих пространств путей с указанной подвижностью мы исходим из того, что стационарная подгруппа точки P пространства является двучленной и в специальных координатах — линейной и однородной. Классификацию всех двучленных подгрупп центро-аффинной группы от трех переменных дал С. Ли [6]. В этой классификации мы и находим возможные типы стационарных подгрупп. Известно также, что если среди операторов стационарной подгруппы есть оператор $U = x^1p_1 + \ldots + x^np_n$, то соответствующее пространство не отличается от обычного аффинного пространства.

Таким образом, имеем следующие возможные типы стационарных подгрупп, не содержащих оператора U:

I. $x^3p_2 + U$, $x^1p_1 + \alpha U$,
II. x^3p_1, $x^3p_2 + U$,
III. x^3p_2, $x^1p_2 + U$,
IV. $x^3p_2 + U$, $x^3p_1 + x^1p_2 + \alpha U$,
V. $x^1p_1 + \alpha U$, $x^2p_2 + \beta U$,
VI. x^3p_2, $x^1p_1 + \alpha U$,
VII. x^3p_2, $x^3p_1 + x^1p_2 + U$,
VIII. x^3p_2, $x^3p_1 + x^1p_2$,
IX. x^3p_2, x^1p_2,
X. x^3p_1, x^3p_2,
XI. $x^3p_1 + x^1p_2$, $x^2p_2 - x^3p_3 + \alpha U$,
XII. x^3p_2, $x^1p_1 + (x^1 + x^2)\,p_2 + \alpha U$,
XIII. x^3p_2, $x^3p_1 + x^2p_2 + \alpha U$,
XIV. x^3p_2, $ax^1p_1 + cx^2p_2 + \alpha U$,
α, β, a, c — const, $c \neq 0$.

Рассмотрим теперь каждую из подгрупп I — XIV.

1°. Стационарная подгруппа типа I

$$X_4 = x^3p_2 + U, \quad X_5 = x^1p_1 + \alpha U$$

имеет структуру $[X_4X_5] = 0$. Так как искомая группа G_5 транзитивна, то ее операторы сдвигов можно взять в виде

$$X_i = p_i + \ldots,$$

поэтому

$$[X_1X_4] = X_1 + c_{14}^{\sigma}X_{\sigma}, \quad [X_2X_4] = X_2 + c_{24}^{\sigma}X_{\sigma}, \qquad (i = 1, 2, 3, \sigma = 4, 5)$$
$$[X_1X_5] = (1+\alpha)X_1 + c_{15}^{\sigma}X_{\sigma}, \quad [X_2X_5] = \alpha X_2 + c_{25}^{\sigma}X_{\sigma},$$
$$[X_3X_4] = X_2 + X_3 + c_{34}^{\sigma}X_{\sigma}, \quad [X_3X_5] = \alpha X_3 + c_{35}^{\sigma}X_{\sigma}. \tag{2}$$

Если теперь в подстановке $\overline{X}_i = X_i + a_i^{\sigma}X_{\sigma}$ положить $a_1^{\sigma} = c_{14}^{\sigma}$, $a_2^{\sigma} = {}_{24}^{\sigma}$, $a_3^{\sigma} = c_{34}^{\sigma} - c_{24}^{\sigma}$, то в новом базисе

$$[X_1X_4] = X_1, \quad [X_2X_4] = X_2, \quad [X_3X_4] = X_2 + X_3.$$

Тождества Якоби в структуре (2) уничтожают постоянные c_{i5}^{σ} и дают $[X_iX_j] = 0$, поэтому операторы сдвигов

$$X_i = p_i,$$

а интегрирование уравнений (1) приводит к следующему пространству:

$$\Gamma^1 = a(\dot{x}^1)^{1-\alpha}(\dot{x}^3)^{1+\alpha}e^{-\frac{\dot{x}^2}{\dot{x}^3}}, \quad \Gamma^3 = b(\dot{x}^1)^{-\alpha}(\dot{x}^3)^{2+\alpha}e^{-\frac{\dot{x}^2}{\dot{x}^3}},$$

$$\Gamma^2 = (b\dot{x}^2 + c\dot{x}^3)(\dot{x}^1)^{-\alpha}(\dot{x}^3)^{1+\alpha}e^{-\frac{\dot{x}^2}{\dot{x}^3}}, \quad a, b, c - \text{const}. \tag{3}$$

Теорема 1. *Однородное общее пространство путей $A_3(x, \dot{x})$ с группой движений G_5, стационарная подгруппа которой типа I, определяется базисными функциями (3).*

2°. Проводя аналогичное исследование, приходим к выводу, что справедлива.

Теорема 2. *Общие пространства путей $A_n(x, \dot{x})$, допускающие транзитивную группу движений G_5, стационарные подгруппы которой типа* II, III, IV, *определяются соответственно функциями:*

$$\Gamma^1 = (a\dot{x}^1 + b\dot{x}^3)A, \quad \Gamma^2 = (a\dot{x}^2 + c\dot{x}^3)A,$$
$$\Gamma^3 = a\dot{x}^3A, \quad A = \dot{x}^3e^{-\frac{\dot{x}^2}{\dot{x}^3}}, \quad a, b, c - \text{const}. \tag{4}$$

$$\Gamma^1 = 0, \quad \Gamma^2 = 0, \quad \Gamma^3 = 0, \tag{5}$$

$$\Gamma^1 = (a\dot{x}^1 + b\dot{x}^3)B, \quad \Gamma^2 = (a\dot{x}^2 + b\dot{x}^1 + c\dot{x}^3)B,$$
$$\Gamma^3 = a\dot{x}^3B, \quad B = \dot{x}^3e^p, \tag{6}$$
$$p = \frac{(\dot{x}^1)^2}{2(\dot{x}^3)^2} - \frac{\dot{x}^2}{\dot{x}^3} - \frac{a\dot{x}^1}{\dot{x}^3},$$
$$a, b, c - \text{const}.$$

Во всех случаях (4—6) $X_i = p_i$. Функции (4), (6) определяют пространства направлений, так как они не зависят от точки. Пространство (5) является евклидовым.

3° Если в стационарной подгруппе типа V

$$X_4 = x^1p_1 + \alpha U, \quad X_5 = x^2p_2 + \beta U$$

допустить, что $\alpha \neq 0, 1, -\frac{1}{2}$, то при любом β имеем:

$$[X_1X_4] = (1+\alpha)X_1, \quad [X_2X_4] = \alpha X_2,$$
$$[X_3X_4] = \alpha X_3, \quad [X_1X_5] = \beta X_1,$$
$$[X_2X_5] = (1+\beta)X_2, \quad [X_3X_5] = \beta X_3,$$
$$[X_iX_j] = 0.$$

Отсюда ясно, что $X_i = p_i$, а пространство

$$\Gamma^i = a^i (\dot{x}^1)^{-\alpha} (\dot{x}^3)^{1+\alpha+\beta} (\dot{x}^2)^{-\beta} \dot{x}^i, \tag{7}$$

a^i — const, одновременно не равные нулю.

Если $\alpha = 0$, $\beta \neq -\frac{1}{2}$, получаемые пространства находятся в классе (7). Пусть $\alpha = 0$, $\beta = -\frac{1}{2}$. В этом случае базисные функции, определяющие пространство, имеют вид:

$$\Gamma^1 = a\dot{x}^1\varphi, \quad \Gamma^2 = b\dot{x}^2\varphi - \frac{\lambda (\dot{x}^2)^2 x^3}{2},$$

$$\Gamma^3 = \frac{c}{\dot{x}^2}\varphi^3 - \frac{\lambda b}{4}\dot{x}^2 (x^3)^2\varphi + \frac{\lambda^2 (\dot{x}^2)^2 (x^3)^3}{4} + \lambda \dot{x}^2 \dot{x}^3 x^3, \tag{8}$$

$$\varphi = \sqrt{\dot{x}^2 \dot{x}^3 + \frac{\lambda}{4} (\dot{x}^2)^2 (x^3)^2}, \quad a, \ b, \ c — \text{const},$$

а операторы сдвигов

$$X_1 = p_1, \quad X_2 = p_2,$$
$$X_3 = \frac{\lambda (x^2)^2}{4} p_2 + \left(1 - \frac{\lambda x^2 x^3}{2}\right) p_3.$$

Допустим, что $\alpha = 1$. Здесь пространство находится только при $\beta = -1$ и определяется функциями:

$$\Gamma^1 = b\dot{x}^1 A + c\dot{x}^2 \dot{x}^3, \quad \Gamma^2 = b\dot{x}^2 A, \quad \Gamma^3 = a\dot{x}^3 A,$$
$$A = \dot{x}^2 \dot{x}^3 (\dot{x}^1 - \lambda \dot{x}^2 x^3)^{-1}, \quad a, \ b, \ c — \text{const}. \tag{9}$$

Операторы сдвигов

$$X_1 = p_1, \quad X_2 = p_2, \quad X_3 = p_3 + \lambda x^2 p_1.$$

Наконец, для $\alpha = -\frac{1}{2}$ общее пространство путей с группой G_5 определяется только при $\beta = 0$ и имеет вид:

$$\Gamma^1 = b\dot{x}^1 A + 2\lambda x^1 \dot{x}^1 \dot{x}^3 + \lambda^2 (x^1)^3 (\dot{x}^3)^2 + c (\dot{x}^3)^{-1} A^3,$$
$$\Gamma^2 = a\dot{x}^2 A, \quad \Gamma^3 = b\dot{x}^3 A - \lambda x^1 (\dot{x}^3)^2,$$
$$A = \sqrt{\dot{x}^1 \dot{x}^3 + \frac{\lambda (x^1)^2 (\dot{x}^3)^2}{2}}, \tag{10}$$
$$a, \ b, \ c — \text{const}.$$

Группа движений

$$G_5 = \left\{ p_2, \ p_3, \ (1 - \lambda x^1 x^3) p_1 + \frac{\lambda (x^3)^2}{2} p_3, \ x^2 p_2, \quad \frac{x}{2} p_1 - \frac{x^2}{2} p_2 - \frac{x^3}{2} p_3 \right\}.$$

4°. Рассмотрим теперь пространства, допускающие стационарную подгруппу VI:

$$X_4 = x^3 p_2, \quad X_5 = x^1 p_1 + \alpha U.$$

Если положить $\alpha \neq 1, -\frac{1}{2}, 0, -1$, то можно за счет выбора нового базиса $\overline{X}_i = X_i + a_i^\sigma X_\sigma$ с применением тождеств Якоби получить структуру группы, имеющей следующее транзитивное представление:

$$p_1, \ p_2, \ p_3, \ x^3 p_2, \ x^1 p_1 + \alpha U.$$

Интеграция уравнений (1) дает пространство:

$$\Gamma^1 = a(\dot{x}^1)^{1-\alpha}(\dot{x}^3)^{1+\alpha},\quad \Gamma^3 = b(\dot{x}^1)^{-\alpha}(\dot{x}^3)^{2+\alpha},$$

$$\Gamma^2 = b(\dot{x}^1)^{-\alpha}x^2(\dot{x}^3)^{1+\alpha} + c(\dot{x}^1)^{-\alpha}(\dot{x}^3)^{2+\alpha},\quad a,\ b,\ c\text{ — const}. \tag{11}$$

Случаи $\alpha = 0,\ 1,\ -1$ будут изучены в типе XIV. Полагая $\alpha = -\frac{1}{2}$, находим структуру G_5, которой удовлетворяют операторы

$$p_1,\ p_2,\ p_3 + (1 + \lambda x^1 x^3)\,p_2.$$

Пространство в этом случае будет зависеть не только от направления, но и от точки:

$$\Gamma^1 = a(\dot{x}^1)^{\frac{3}{2}}(\dot{x}^3)^{\frac{1}{2}},\quad \Gamma^3 = 0,$$

$$\Gamma^2 = \frac{a\lambda}{2}(\dot{x}^1)^{\frac{3}{2}}(\dot{x}^3)^{\frac{1}{2}}(x^3)^2 - 2\lambda\dot{x}^1\dot{x}^3x^3 + b(\dot{x}^1)^{\frac{1}{2}}(\dot{x}^3)^{\frac{3}{2}}, \tag{12}$$

$$a,\ b,\ c\text{ — const}.$$

5°. Для стационарной подгруппы типа VII

$$X_4 = x^3p_2,\quad X_5 = x^3p_1 + x^1p_2 + U$$

пространство

$$\Gamma^1 = (a\dot{x}^1 + b\dot{x}^3)\,A,\quad \Gamma^2 = (a\dot{x}^2 + b\dot{x}^1 + c\dot{x}^3)\,A,$$

$$\Gamma^3 = a\dot{x}^3A,\quad A = \dot{x}^3e^{-\frac{\dot{x}^1}{\dot{x}^3}},\quad a,\ b,\ c\text{ — const} \tag{13}$$

находится методом, изложенным в 1°. Здесь группа движений имеет операторы сдвигов в виде $X_i = p_i$.

Теорема 3. *Однородные общие пространства путей $A_3(x, \dot{x})$, отличные от $A_3(x)$, с группой движений G_5 и стационарными подгруппами V, VI, VII существуют и определяются функциями* (7), (8), (9), (10), (11), (12), (13).

6°. С подгруппой типа VIII

$$X_4 = x^3p_2,\quad X_5 = x^3p_1 + x^1p_2$$

связана группа G_5, определяемая одной из структур:

$$\begin{aligned}
&[X_1X_4] = \lambda X_4, && [X_2X_4] = 0, && [X_3X_4] = X_2,\\
\alpha)\ &[X_1X_5] = X_2 + 2\lambda X_5, && [X_2X_5] = \lambda X_4, && [X_3X_5] = X_1,\\
&[X_1X_2] = -\lambda X_2, && [X_1X_3] = -2\lambda X_3, && [X_3X_2] = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta)\ &[X_1X_4] = 0, && [X_1X_5] = X_2 + pX_4,\\
&[X_2X_4] = 0, && [X_2X_5] = 0,\\
&[X_3X_4] = X_2, && [X_1X_3] = \lambda X_1 + \sigma X_4 + \nu X_5\\
&[X_3X_5] = X_1, && [X_1X_2] = 0,\\
&[X_2X_3] = (p + \lambda)\,X_2 + p\lambda X_4.
\end{aligned}$$

Если $p = 0$, то она действует как группа аффинных движений в пространстве $A_3(x)$.

7°. Структура стационарной подгруппы типа IX

$$X_4 = x^3p_2,\quad X_5 = x^1p_2$$

определяется так: $[X_4X_5] = 0$. Выбирая операторы сдвигов в виде

$$X_i = p_i + \ldots$$

и применяя тождества Якоби и подходящий базис, получим

$$\begin{aligned}
&[X_1X_4] = 0, \quad [X_2X_4] = 0, \quad [X_3X_4] = X_2,\\
&[X_1X_5] = X_2, \quad [X_2X_5] = 0, \quad [X_3X_5] = 0,\\
&[X_1X_2] = \lambda X_2, \ [X_2X_3] = \rho X_2, \ [X_1X_3] = \rho X_1 + \lambda X_3 + \nu X_4 + \sigma X_5.
\end{aligned} \tag{14}$$

Допустим, что $\lambda \neq 0$, $\rho \neq 0$. Тогда, выбирая подходящие постоянные a и b в подстановке

$$\overline{X}_1 = X_1 + aX_5, \ \overline{X}_2 = X_2, \ \overline{X}_3 = X_3 + bX_4,$$

мы получим структуру, которой удовлетворяют операторы

$$p_1 - \lambda U, \ p_2, \ p_3 + \rho U.$$

Соответствующее пространство имеет вид:

$$\begin{aligned}
&\Gamma^i = \dot{x}^i\dot{x}^1 A^1 + \delta_2^i (\dot{x}^1)^2 A^2,\\
&A^k = (\lambda x^1 - \rho x^3 - 1)^{-1} \varphi^k \left(\frac{\dot{x}^1}{\dot{x}^3}\right), \ k = 1, \ 2;
\end{aligned} \tag{15}$$

φ^k — произвольные функции указанного аргумента.

В случае, когда $\lambda = 0$, $\rho \neq 0$, можно уничтожить σ в структуре (14), а операторы сдвигов получить в виде:

$$X_1 = p_1, \ X_2 = p_2, \ X_3 = p_3 + \rho U + \nu x^1 x^3 p_2. \tag{16}$$

Пространство $A_3(x, \dot{x})$ определяется объектом

$$\begin{aligned}
&\Gamma^i = \dot{x}^i\dot{x}^3 A^1 + \delta_2^i \left[(\dot{x}^3)^2 A^2 - \frac{2\nu}{\rho} \dot{x}^1 \dot{x}^3 \right],\\
&A^k = (1 + \rho x^3)^{-1} \varphi^k \left(\frac{\dot{x}^3}{\dot{x}^1}\right).
\end{aligned} \tag{17}$$

Если же $\lambda \neq 0$, $\rho = 0$, то получающиеся при этом операторы сдвигов можно перевести в (16) с помощью

$$x^{1'} = x^3, \ x^{2'} = x^2, \ x^{3'} = x^1.$$

Наконец, для $\rho = \lambda = 0$ имеем:

$$X_1 = p_1 - \sigma x^1 x^3 p_2, \ X_2 = p_2, \ X_3 = p_3 + \nu x^1 x^3 p_2,$$

а пространство

$$\Gamma^i = a\dot{x}^i\dot{x}^3 + \delta_2^i \left[2\sigma \dot{x}^1 \dot{x}^3 x^1 - 2\nu x^3 \dot{x}^1 \dot{x}^3 + b (\dot{x}^3)^2\right], \tag{18}$$

a, b — функции от $(\dot{x}^1)^{-1}\dot{x}^3$.

Теорема 4. *Существуют однородные общие пространства путей $A_3(x, \dot{x})$, допускающие группу G_5 аффинных движений, стационарная подгруппа которой типа IX. Базисные функции этих пространств имеют вид* (15), (17), (18).

Теорема 5. *Не существует однородных общих пространств путей $A_3(x, \dot{x})$, отличных от $A_3(x)$, с группой движений G_5, стационарная подгруппа которой типа X.*

8°. Стационарная подгруппа типа XI

$$X_4 = x^3 p_1 + x^1 p_2, \ X_5 = x^2 p_2 - x^3 p_3 + \alpha U$$

в случае, когда $\alpha \neq 0, 1$ дополняется до группы G_5 операторами $X_i = p_i$.

Пространство $A_3(x, \dot{x})$, допускающее эту группу, находится путем интегрирования системы (1) и имеет вид:

$$\Gamma^1 = a\dot{x}^1\dot{x}^3\Delta^{\frac{1-\alpha}{2}} + b(\dot{x}^3)^2\Delta^{\frac{2-\alpha}{2}},$$

$$\Gamma^3 = a(\dot{x}^3)^2\Delta^{\frac{1-\alpha}{2}}, \tag{19}$$

$$\Gamma^2 = \frac{a(\dot{x}^1)^2}{2}\Delta^{\frac{1-\alpha}{2}} + b\dot{x}^1\dot{x}^3\Delta^{\frac{2-\alpha}{2}} + c(\dot{x}^3)^2\Delta^{\frac{3-\alpha}{2}},$$

$$\Delta = \left(\frac{\dot{x}^2}{\dot{x}^3} - \frac{(\dot{x}^1)^2}{2(\dot{x}^3)^2}\right), \quad a, \ b, \ c - \text{const}.$$

Если $\alpha = 0$, то искомая группа определяется следующей структурой:

$$\begin{aligned} &[X_1X_4] = X_2, && [X_2X_4] = 0, && [X_3X_4] = X_1, \\ &[X_1X_5] = 0, && [X_2X_5] = X_2, && [X_3X_5] = -X_3, \\ &[X_1X_2] = \lambda X_2, && [X_1X_3] = -\lambda X_3, && [X_2X_3] = -\lambda X_1. \end{aligned} \tag{20}$$

При $\lambda = 0$ соответствующее пространство выделяется из (19) при $\alpha = 0$.

Если же $\alpha = 1$, то главные операторы группы G_5

$$X_1 = p_1, \ X_2 = p_2, \ X_3 = \lambda x^1x^3p_1 + \frac{\lambda(x^1)^2}{2}p_2 + (1 + \lambda(x^3)^2 p_3,$$

а пространство определяется объектом:

$$\Gamma^1 = \frac{\dot{x}^1\dot{x}^3(a - 2\lambda x^3) + b\dot{x}^3\Delta^{\frac{1}{2}}}{1 + \lambda(x^3)^2},$$

$$\Gamma^3 = \frac{(a - 2\lambda x^3)(\dot{x}^3)^2}{1 + \lambda(x^3)^2}, \tag{21}$$

$$\Gamma^2 = \frac{2b\dot{x}^1\Delta^{\frac{1}{2}} + (a - 2\lambda x^3)(\dot{x}^1)^2 + 2c\Delta}{1 + \lambda(x^3)^2},$$

$$\Delta = (\dot{x}^1)^2 - 2\dot{x}^2\dot{x}^3, \quad a, \ b, \ c - \text{const}.$$

9°. Стационарная подгруппа типа XII

$$X_4 = x^3p_2, \quad X_5 = x^1p_1 + (x^1 + x^2)p_2 + \alpha U$$

имеет структуру $[X_4X_5] = X_4$. Как и раньше, операторы сдвигов группы G_5 в силу ее транзитивности представляем в виде:

$$X_i = p_i + \ldots (i = 1, 2, 3).$$

Применяя подходящий выбор постоянных a_i^σ в подстановке

$$\overline{X}_i = X_i + a_i^\sigma X_\sigma \quad (\sigma = 4, \ 5)$$

и используя тождества Якоби, при $\alpha \neq 0, 1, -1$ получим структуру, которой удовлетворяют операторы

$$X_i = p_i.$$

Решения системы (1) приводят к пространству

$$\Gamma^1 = a(\dot{x}^1)^{1-\alpha}(\dot{x}^3)^{1+\alpha}, \quad \Gamma^3 = b(\dot{x}^1)^{-\alpha}(\dot{x}^3)^{2+\alpha},$$

$$\Gamma^2 = b(\dot{x}^1)^{-\alpha}\dot{x}^2(\dot{x}^3)^{1+\alpha} + (\dot{x}^1)^{1-\alpha}(\dot{x}^3)^{1+\alpha}\left[(a - b)\ln\frac{\dot{x}^1}{\dot{x}^3} + c\right], \tag{22}$$

$$a, \ b, \ c - \text{const}.$$

Если $\alpha = 0$, то

$$X_1 = p_1,\ X_2 = p_2,\ X_3 = \mu x^1 p_1 + (\nu x^1 x^3 + \mu x^2)\, p_2 + (1 + \mu x^3)\, p_3,$$

искомое пространство задается функциями:

$$\Gamma^1 = a\dot x^1 \dot x^3, \quad \Gamma^3 = b\left(\dot x^3\right)^2$$

$$\Gamma^2 = b\dot x^2 \dot x^3 + \left[(a-b)\ln\frac{\dot x^1}{\dot x^3} + \frac{\nu(a-b)}{2}(x^3)^2 - 2\nu x^3 + c\right]\dot x^1 \dot x^3, \tag{23}$$

$\mu = 0$, a, b — const, причем $a \neq b$.

Если же $\mu \neq 0$, то

$$\Gamma^1 = \frac{a\dot x^1 \dot x^3}{1+\mu x^3}, \qquad \Gamma^3 = (1+\mu x^3)^{-1}\, b\left(\dot x^3\right)^2, \tag{24}$$

$$\Gamma^2 = (1+\mu x^3)^{-1}\left\{b\dot x^2 \dot x^3 + \dot x^1 \dot x^3\left[(a-b)\left(\ln\frac{\dot x^1}{\dot x^3} + \frac{\nu x^3}{\mu} - \frac{\nu}{\mu^2}\ln(1+\mu x^3)\right) - 2\nu x^3 + c\right]\right\}.$$

Для $\alpha = 1$ имеем:

$$X_1 = p_1,\quad X_2 = p_2,\quad X_3 = p_3 + \lambda x^3 p_1,$$
$$X_4 = x^3 p_2,$$
$$X_5 = 2x^1 p_1 + (x^1 + 2x^2)\, p_2 + x^3 p_3.$$

Эта группа движений допускается пространством

$$\Gamma^i = a\dot x^i \Delta + \left[\delta_1^i(-b)\left(\dot x^3\right)^2 + \delta_2^i\left(b\left(\dot x^3\right)^2 \ln\frac{\Delta}{\dot x^3} + c\left(\dot x^3\right)^2\right)\right], \tag{25}$$

$$\Delta = \left(\dot x^1 - \lambda x^3 \dot x^3\right)^{-1}\left(\dot x^3\right)^2, \quad a,\ b, c \text{ — const}.$$

Наконец, значение $\alpha = -1$ определяет операторы сдвигов в виде

$$X_1 = (1-\mu x^1)\, p_1 - \mu x^2 p_2 - \mu x^3 p_3,\ X_2 = p_2,\ X_3 = p_3,$$

а пространство

$$\Gamma^1 = (1-\mu x^1)^{-1} a\left(\dot x^1\right)^2, \quad \Gamma^3 = b(1-\mu x^1)^{-1}\dot x^1 \dot x^3,$$

$$\Gamma^2 = (1-\mu x^1)^{-1}\left\{b\dot x^1 \dot x^2 + \left(\dot x^1\right)^2\left[(b-a)\ln\frac{\dot x^3}{\dot x^1} + c\right]\right\}, \tag{26}$$

$$a,\ b,\ c \text{ — const},\ a \neq b.$$

Теорема 6. *Общие пространства путей $A_3(x, \dot x)$, допускающие группу аффинных движений G_5, стационарные подгруппы которой типа XI и XII, задаются в некоторой системе координат функциями* (19), (21), (22), (23), (24), (25), (26), *а также структурой* (20).

10°. Изложим кратко результаты, связанные со стационарной подгруппой типа XIII:

$$X_4 = x^3 p_2, \quad X_5 = \alpha U + x^3 p_1 + p_2.$$

Полагая $\alpha \neq 0, -1$, получим $X_i = p_i$. Интегрирование системы (1) дает пространство, не зависящее от положения

$$\Gamma^i = a\dot x^i \dot x^3 e^{-\frac{\alpha \dot x^1}{\dot x^3}} + \left[\delta_1^i c\left(\dot x^3\right)^2 e^{-\frac{\alpha \dot x^1}{\dot x^3}} + \delta_2^i b\left(\dot x^3\right)^2 e^{(1-\alpha)\frac{\dot x^1}{\dot x^3}}\right], \tag{27}$$

$$a,\ b,\ c \text{ — const}.$$

Если $\alpha = 0$, то группа аффинных движений

$$G_5 = \{p_1, \quad (1 - x^3 A)\, p_2, \quad \sigma x^1 p_1 + x^2 A p_2 + (1 + \sigma x^3)\, p_3, \quad x^3 p_2, \quad x^3 p_1 + x^2 p_2\},$$

где $A(x^3)$ — решение системы

$$(1 + \sigma x^3)\, x^3 A' + 2(1 + \sigma x^3)\, A - x^3 A^2 - (\sigma^2 + \tau)\, x^3 - \sigma = 0,$$
$$2A' + 2\delta\sigma x^3 + (1 + \sigma x^3)\, x^3 \delta' + \delta = 0,$$
$$\delta = -\frac{2A' + x^3 A''}{1 + (x^3)^2 A'}.$$

Пространство с этой группой имеет вид:

$$\Gamma^i = \frac{a \dot{x}^i x^3}{1 + \sigma x^3} + \left\{ \delta^i_1 \frac{b\,(\dot{x}^3)^2}{1 + \sigma x^3} + \delta^i_2 \left[\delta \left(\dot{x}^2 \dot{x}^3 x^3 - x^2 (\dot{x}^3)^2 \right) - (\dot{x}^3)^2 \Phi(x^3)\, e^{\frac{\dot{x}^1}{\dot{x}^3}} \right] \right\},$$
$$\Phi = c e^{\int \frac{(A - 2\sigma)}{1 + \sigma x^3} dx^3}, \quad a, \ b, \ c \text{ — const.} \tag{28}$$

В случае, когда $\alpha = -1$, группа движений

$$G_5 = \left\{ p_1, \ p_2 - \frac{\nu x^3}{2} p_1, \quad p_3 + \frac{\nu x^2}{2} p_1, \ x^3 p_2, \ (x^3 - x^1)\, p_1 - x^3 p_3 \right\},$$

а пространство определяется базисными функциями:

$$\Gamma^i = a \dot{x}^i \dot{x}^3 e^{\gamma} + \left\{ \delta^i_1 \left(c e^{\gamma} + \frac{b\nu}{2} x^3 e^{2\gamma} \right) (\dot{x}^3)^2 + \delta^i_2 b\, (\dot{x}^3)^2 e^{2\gamma} \right\}, \tag{29}$$
$$\gamma = \dot{x}^1 (\dot{x}^3)^{-1} - \frac{\nu \dot{x}^2 \dot{x}^3}{2 \dot{x}^3} + \frac{\nu x^2}{2}, \quad a, \ b, \ c \text{ — const.}$$

Таким образом, выделяется три класса пространств (27), (28), (29), допускающих транзитивную группу G'_5, подгруппа которой типа XIII.

11°. Наконец, рассмотрим подгруппу типа XIV:

$$X_4 = x^3 p_2, \ X_5 = a x^1 p_1 + c x^2 p_2 + \alpha U,$$
$$c \neq 0.$$

Положим, что $a = 0$, тогда получим:

$$X_4 = x^3 p_2, \ X_5 = x^2 p_2 + pU, \ [X_4 X_5] = X_4.$$

Выберем операторы сдвига так, чтобы $X_i = p_i + \ldots$, тогда

$$[X_1 X_4] = c^{\sigma}_{14} X_{\sigma}, \ [X_2 X_4] = c^{\sigma}_{24} X_{\sigma}, \ [X_3 X_4] = X_2 + c^{\sigma}_{34} X_{\sigma},$$
$$[X_1 X_5] = p X_1 + c^{\sigma}_{15} X_{\sigma}, \ [X_2 X_5] = (1 + p)\, X_2 + c^{\sigma}_{25} X_{\sigma}, \ [X_3 X_5] = p X_3 + c^{\sigma}_{35} X_{\sigma}.$$

При условии, что $p \neq \frac{1}{2}$, 0, 1, —1, путем преобразования базиса и применения тождеств Якоби получим:

$$c^{\sigma}_{i\tau} = 0, \ [X_i X_j] = 0, \ (i = 1, \ 2, \ 3; \ \sigma, \ \tau = 4, \ 5).$$

Отсюда $X_i = p_i$, а интеграция системы (1) дает $\Gamma^i = 0$. Такой же результат мы получим и для $p = -1$. Случай $p = \frac{1}{2}$ приводит к пространству $A_3(x)$.

Операторы сдвигов

$$p_1, \ p_2, \ \lambda x^1 p_1 + \sigma x^2 x^3 p_2 + (1 + \sigma (x^3)^2)\, p_3$$

получаются для $p = 0$, а пространство при $\lambda = 0$, $\lambda \neq 0$ имеет соответственно вид:

$$\Gamma^1 = (\dot{x}^1)^2 A^2, \ \Gamma^k = -\frac{2\sigma x^3 \dot{x}^k \dot{x}^3}{1+\sigma(x^3)^2} + \frac{\dot{x}^k \dot{x}^3}{1+\sigma(x^3)^2} A^3, \tag{30}$$

$A^k = A^k\left[\dot{x}^3(\dot{x}^1)^{-1}(1+\sigma(x^3)^2)^{-1}\right]$ — произвольная функция указанного аргумента.

$$\Gamma^1 = (\dot{x}^1)^2 e^{-\lambda\int\frac{dx^3}{1+\sigma(x^3)^2}} A^1\left[\dot{x}^3(\dot{x}^1)^{-1}(1+\sigma(x^3)^2)^{-1}e^{\lambda\int\frac{dx^2}{1+\sigma(x^3)^2}}\right]$$

$$\Gamma^k = \frac{\dot{x}^k \dot{x}^3}{1+\sigma(x^3)^2}(a - 2\sigma x^3), \ a — \text{const}. \tag{31}$$

С параметром $p = 0$ связаны также операторы вида

$$p_1 - x^3 p_3, \quad p_2, \quad p_3,$$

которые действуют в пространстве

$$\Gamma^1 = (\dot{x}^1)^2 A^1\left(\frac{\dot{x}^3}{\dot{x}_1} e^{x^1}\right), \qquad \Gamma^k = a\dot{x}^1\dot{x}^k, \tag{32}$$

A^1 — функция, a — const, как операторы аффинных движений.

Общее пространство путей $A_3(x, \dot{x})$, определяемое функциями

$$\Gamma^1 = \Gamma^3 = 0, \ \Gamma^2 = (\dot{x}^3)^2 A\left(\frac{\dot{x}^3}{\dot{x}^1}\right), \tag{33}$$

отвечает значению параметра $p = 1$ и допускает операторы p_i.

Если теперь в подгруппе XIV $a \neq 0$, то

$$X_4 = x^3 p_2, \ X_5 = (1+q)x^1 p_1 + (p+q)x^2 p_2 + q x^3 p_3,$$
$$[X_4 X_5] = pX_4, \ p \neq 0.$$

Выпишем пространства и операторы сдвигов, связанные с этой подгруппой:

а) $$\Gamma^1 = b(\dot{x}^1)^{1-q}(\dot{x}^3)^{1+q}, \ \Gamma^3 = a(\dot{x}^1)^{-q}(\dot{x}^3)^{2+q},$$
$$\Gamma^2 = a(\dot{x}^1)^{-q}(\dot{x}^2)(\dot{x}^3)^{1+q} + c(\dot{x}^1)^{p-q}(\dot{x}^3)^{2+q-p},$$
$$X_i = p_i, \ p \neq -q, \ q, \ -(1+q), \ 2q+1, \ -\frac{q}{2}, \ 1-q,$$
$$q \neq 0, \ -1; \ a, \ b, \ c — \text{const}.$$

б) В случае $p = -(1+q)$ при $q = 1$, $p = -2$ возможная группа аффинных движений имеет структуру:

$$[X_1X_4] = \lambda X_5, \quad [X_2X_4] = 0, \quad [X_3X_4] = X_2,$$
$$[X_1X_5] = 2X_1, \quad [X_2X_5] = -X_2, \quad [X_3X_5] = X_3,$$
$$[X_1X_2] = \lambda X_3, \quad [X_1X_3] = 0, \quad [X_2X_3] = 0.$$

в) Если $p = 2q + 1$, то

$$\Gamma^1 = a(\dot{x}^1)^{1-q}(\dot{x}^3)^{1+q},$$
$$\Gamma^3 = b(\dot{x}^1)^{-q}(\dot{x}^3)^{2+q},$$
$$\Gamma^2 = b(\dot{x}^1)^{-q}\dot{x}^2(\dot{x}^3)^{1+q} - 2\lambda\dot{x}^1\dot{x}^3 x^3 + \lambda(a-b)(\dot{x}^1)^{1-q}(\dot{x}^3)^{1+q}\frac{(x^3)^2}{2} +$$
$$+ c(\dot{x}^1)^{1+q}(\dot{x}^3)^{1-q},$$
$$X_1 = p_1, \ X_2 = p_2, \ X_3 = p_3 + \lambda x^1 x^3 p_2,$$
$$a, \ b, \ c — \text{const}.$$

г) $p = -\frac{q}{2}$. Пространства, не сводящиеся к предыдущим, здесь получаются при $q = 2$, $p = -1$:

$$\Gamma^1 = \frac{\lambda (\dot{x}^3)^3 \Delta^{-1}}{2} \left[2a^1 - a^2 \lambda^3 x^3 (\dot{x}^3)^2 \Delta^{-2} + 2a^3 \lambda \dot{x}^1 \Delta^{-1}\right],$$

$$\Gamma^2 = \lambda^2 (\dot{x}^3)^3 \Delta^{-2} \left[a^3 \dot{x}^2 - a^2 (\dot{x}^3)^2 \lambda \Delta^{-1}\right],$$

$$\Gamma^3 = a^3 (\dot{x}^3)^4 \lambda^2 \Delta^{-2},$$

$$\Delta = 3\lambda \dot{x}^2 x^3 - 6\dot{x}^1 - 3\lambda x^2 \dot{x}^3, \ a^i - \text{const}.$$

$$X_1 = p_1, \quad X_2 = p_2 - \frac{\lambda x^3}{2} p_1, \quad X_3 = p_3 + \frac{\lambda x^2}{2} p_1,$$

а также при $q = -\frac{1}{2}$, $p = \frac{1}{4}$:

$$\Gamma^i = a\dot{x}^i \Delta^{\frac{1}{2}} + \delta^i_1 \left[\frac{\lambda x^1 \dot{x}^1 \dot{x}^3}{2} + \frac{(x^1)^3 (\dot{x}^3)^2}{6} + \frac{c\Delta^{\frac{3}{2}}}{\dot{x}^3}\right] +$$

$$+ \delta^i_2 \left[b (\dot{x}^3)^{\frac{1}{2}} \Delta^{\frac{3}{4}} - \frac{\lambda x^1 \dot{x}^2 \dot{x}^3}{2}\right] + \delta^i_3 \left(-\frac{\lambda x^1 (\dot{x}^3)^2}{2}\right),$$

$$\Delta = \lambda (x^1)^2 (\dot{x}^3)^2 + 4\dot{x}^1 \dot{x}^3; \quad X_2 = p_2, \quad X_3 = p_3,$$

$$X_1 = \left(1 - \frac{\lambda x^1 x^3}{2}\right) p_1 + \frac{\lambda x^2 x^3}{4} p_2 + \frac{\lambda (x^3)^2}{4} p_3.$$

д) $p = 1 - q$.

$$\Gamma^1 = \frac{b\sigma}{2} (\dot{x}^2 x^3 - x^2 \dot{x}^3) \Delta^{-q} + \frac{c\sigma x^3}{2} (\dot{x}^3)^{\frac{1}{q}} \Delta^{1-2q} + a (\dot{x}^3)^{1+\frac{1}{q}} \Delta^{1-q},$$

$$\Gamma^2 = b\dot{x}^2 \Delta^{-q} + c (\dot{x}^3)^{\frac{1}{q}} \Delta^{1-2q},$$

$$\Gamma^3 = b (\dot{x}^3) \Delta^{-q},$$

$$\Delta = \left[\dot{x}^1 - \frac{\sigma}{2} (\dot{x}^2 x^3 - \dot{x}^3 x^2)\right] (\dot{x}^3)^{-\left(1+\frac{1}{q}\right)},$$

$$a, \ b, \ c - \text{const}.$$

$$X_1 = p_1, \ X_2 = p_2 - \frac{\sigma x^3}{2} p_1, \ X_3 = \frac{\sigma x^2}{2} p_1 + p_3.$$

е) $q = 0$.

$$\Gamma^1 = a\dot{x}^1 \dot{x}^3 \Delta^{-1}, \ \Gamma^3 = \left(b (\dot{x}^3)^2 - 2\sigma x^3 (\dot{x}^3)^2\right] \Delta^{-1},$$

$$\Gamma^2 = \left(b\dot{x}^2 \dot{x}^3 - 2\sigma x^3 \dot{x}^2 \dot{x}^3\right) \Delta^{-1} + c (\dot{x}^1)^p (\dot{x}^3)^{2-p} \Delta^{p-2} \times$$

$$\times e^{\int \frac{\lambda + \sigma x^3}{\Delta} dx^3},$$

$$\Delta = 1 + \lambda x^3 + \sigma (x^3)^2,$$

$$p \neq -1,$$

$$X_1 = p_1, \ X_2 = p_2, \ X_3 = (\lambda x^2 + \sigma x^2 x^3) p_2 + (1 + \lambda x^3 + \sigma x^{32}) p_3.$$

Если же $p = -1$, то

$$\Gamma^1 = a\dot{x}^1 \dot{x}^3 \Delta^{-1}, \quad \Gamma^3 = b (\dot{x}^3)^2 \Delta^{-1} - 2\lambda x^3 (\dot{x}^3)^2 \Delta^{-1},$$

$$\Gamma^2 = b\dot{x}^2 \dot{x}^3 \Delta^{-1} - 2\lambda x^3 \dot{x}^2 \dot{x}^3 \Delta^{-1} + c (\dot{x}^3)^3 (\dot{x}^1)^{-1} \Delta^{-3} \int \frac{\nu dx^3}{\Delta},$$

$$\Delta = 1 + \lambda (x^3)^2, \quad c \neq 0,$$

$$X_1 = p_1, \ X_2 = p_2,$$
$$X_3 = \nu x^1 p_1 + \lambda x^2 x^3 p_2 + (1 + \lambda (x^3)^2) p_3.$$

ж) $q = -1$.

$$\Gamma^i = \dot{x}^i \dot{x}^1 \left[\delta_1^i a + \delta_2^i \left(b + (\dot{x}^1)^{1+p} (\dot{x}^3)^{1-p} e^{-\lambda p x^1} \cdot c\right) + \delta_3^i b\right],$$
$$X_1 = p_1 - \lambda x^2 p_2 - \lambda x^3 p_3, \ X_2 = p_2, \ X_3 = p_3, \ c \neq 0, \ p \neq 2.$$

При $q = -1$, $p = 2$ находим:

$$X_1 = p_1, \ X_2 = p_2 - \frac{\varepsilon x^3}{2} p_1, \ X_3 = p_3 + \frac{\varepsilon x^2}{2} p_1, \quad \varepsilon = \pm 1;$$
$$\Gamma^1 = \frac{a\varepsilon}{2} (\dot{x}^2 x^3 - x^2 \dot{x}^3) \Delta + \frac{b\varepsilon}{2} \frac{x^3}{\dot{x}^3} \Delta^3 + c\Delta^2,$$
$$\Gamma^k = a\dot{x}^k \Delta + \delta_2^k b (\dot{x}^3)^{-1} \Delta^3, \quad b \neq 0,$$
$$\Delta = \dot{x}^1 - \frac{\varepsilon}{2} (\dot{x}^2 x^3 - \dot{x}^3 x^2).$$

З) $p = q$ дает пространство при $q = \frac{1}{2}$:

$$\Gamma^i = \dot{x}^i A^3 + \left[\delta_1^i \psi + \delta_2^i \varphi\right],$$
$$\psi = -\frac{\tau (\dot{x}^3)^3}{2} \int \ln (K)^{-2\lambda} dK - \frac{\tau (\dot{x}^3)^2}{2} x^3 A^2 - \frac{(\dot{x}^3)^3}{2} A^1,$$
$$\varphi = -(\dot{x}^3)^2 [\ln (K)^{-2\lambda} + A^2], \quad K = (\dot{x}^3)^{-1} x^3,$$
$$A^i = A^i \left\{(\dot{x}^3)^{-3} \left[2\dot{x}^1 - \tau (\dot{x}^2 x^3 - x^2 \dot{x}^3) - \lambda\tau \dot{x}^3 (x^3)^2 \right]\right\},$$
$$X_1 = p_1, \ X_2 = p_2 - \frac{\tau x^3}{2} p_1, \ X_3 = p_3 + \frac{\tau x^2}{2} p_1 - 2\lambda x^3 \ln x^3 p_2.$$

и) $q = -p$.

$$X_1 = p_1, \ X_2 = \lambda (p - 1) x^1 p_1 + (2 + \lambda p x^2) p_2, \ X_3 = (2 + \lambda p x^2) p_3$$
$$\Gamma^1 = a (\dot{x}^1)^{p+1} \Delta^{1-p},$$
$$\Gamma^2 = b \dot{x}^2 (\dot{x}^1)^p \Delta^{1-p} + c (\dot{x}^1)^{2p} (2 + \lambda p x^2) \Delta^{2-2p},$$
$$\Gamma^3 = b \dot{x}^3 (\dot{x}^1)^p \Delta^{1-p} + c (\dot{x}^1)^{2p} (\dot{x}^2)^{-1} \left[\Delta^{3-2p} + \dot{x}^3 (2 + \lambda p x^2) \Delta^{2-2p}\right],$$
$$\Delta = \lambda p \dot{x}^2 x^3 - (2 + \lambda p x^2) \dot{x}^3, \quad \lambda \neq 0.$$

Теорема 7. *Общие пространства путей с транзитивной группой G_5, несводимые к $A_3(x)$, для стационарной подгруппы XIV существуют и определяются функциями* (30)—(33) *и* а) — и).

ЛИТЕРАТУРА

1. Knebelman M. S. Motions and Collineations in generalized spaces. Amer. I. M. 51, 517—564 (1929).

2. Б. Л. Лаптев. Производная Ли для объектов, являющихся функциями точки и направления. Казань, изв. физ.-матем. о-ва (3), 10, (1938), 3—36.

3. И. П. Егоров. О движениях в пространствах аффинной связности. Докторская диссертация, МГУ, 1956.

4. Окиво Т. On the order of the groups of affine collineations in the generalized spaces of paths. Tensor, 1956, 6, № 3, 141—158.

5. А. Т. Кондратьев. Однородные пространства линейных элементов аффинной связности $A_3(x, \dot{x})$ высокой подвижности. Волж. матем. сб., вып. 4, Куйбышев, 82—92, 1966.

6. S. Lie si F. Engel. Theorie der Transformations gruppen. Leipzig. 1893, V. III, p. 117.

Поступила 15 октября 1968 г.

УКРАИНСКИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК

Выпуск 8 1970

ЭКВИАРЕАЛЬНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ ПЛОСКОСТИ ЛОБАЧЕВСКОГО НА ПЛОСКОСТЬ ЕВКЛИДА

Н. Курбанов

(Киев)

Рассмотрим прежде всего эквиареальное отображение псевдосферы на полусферу. Из произвольной точки M псевдосферы σ проведем касательную к меридиану $\psi = \psi_1$ псевдосферы (ψ — долгота), проходящему через точку M. Пусть P — точка пересечения этой касательной с осью вращения псевдосферы; как известно, отрезок MP имеет постоянную длину, которую обозначим через a. Пусть φ — острый угол, образуемый этой касательной с осью псевдосферы.

На окружности радиуса a, лежащей в основании псевдосферы, как на экваторе, построим полусферу Σ и из ее центра O_1 проведем прямую O_1M, лежащую в плоскости $\psi = \psi_1$ меридиана, образующую с плоскостью экватора угол φ и пересекающую полусферу Σ в точке M_1. Получим отображение псевдосферы σ на полусферу Σ, в котором точки M и M_1 — соответственные (углы φ и ψ можно рассматривать как криволинейные координаты и на псевдосфере и на полусфере). Покажем, что такое отображение эквиареально.

Действительно, отнесем псевдосферу и полусферу к общей прямоугольной декартовой системе координат. Ось псевдосферы направим по оси OZ, а плоскость ее ребра возврата совместим с плоскостью XOY.

Линейные элементы псевдосферы и сферы в координатах φ и ψ соответственно таковы:

$$ds^2 = a^2 \operatorname{ctg}^2 \varphi d\varphi^2 + a^2 \sin^2 \varphi d\psi^2, \tag{1}$$

$$ds_1^2 = a^2 d\varphi^2 + a^2 \cos^2 \varphi d\psi^2. \tag{2}$$

Элемент площади на псевдосфере равен:

$$d\sigma = \sqrt{EG}\, d\varphi d\psi = a^2 \cos \varphi d\varphi d\psi. \tag{3}$$

С другой стороны, элемент площади на сфере

$$d\sigma_1 = \sqrt{E_1 G_1}\, d\varphi d\psi = a^2 \cos \varphi d\varphi d\psi. \tag{4}$$

Сравнивая друг с другом (3) и (4), видим, что элементы площади псевдосферы и сферы равны между собой в данном отображении. Следовательно, полученное отображение является эквиареальным.

Поверхность псевдосферы можно рассматривать как кусок плоскости Лобачевского, поэтому данное отображение можно считать также эквиареальным отображением некоторого куска плоскости Лобачевского на сферу. В этом отображении меридианы и параллели псевдосферы переходят в меридианы и параллели сферы. В особых точках псевдосферы нарушается взаимная однозначность соответствия.

Еще в XVIII веке, занимаясь вопросами картографии, Ламберт и Мольвейде получили эквиареальные отображения сферы на кусок плоскости (на круг, на прямоугольник [1]).

Мы рассмотрим одно из таких отображений.

Пусть φ и ψ — географические координаты на полусфере. Через полюс O_2 полусферы Σ проведем касательную плоскость Π и на этой плоскости из точки O_2 как из центра опишем окружность I с радиусом $O_2A = \sqrt{2}a$ (a — радиус сферы).

Возьмем произвольную точку M' полусферы и соединим ее с полюсом O_2. Отрезок O_2M', как легко показать, имеет длину $2a\left(\cos\frac{\varphi}{2} - \sin\frac{\varphi}{2}\right)$. Пусть точка M' лежит в плоскости $\psi = \psi_1$, эта плоскость пересекает плоскость Π по некоторому диаметру окружности I. Из точки O_2 (центра) на этом диаметре отложим отрезок

$$O_2M'' = O_2M'.$$

Будем считать, что точки M' и M'' соответственные. Покажем, что полученное отображение полусферы на круг эквиареально.

Действительно, если точку O_2 примем за начало декартовой системы координат, а диаметр круга, соответствующий $\psi = 0$, за ось абсцисс, то в этой системе координат точка M'' имеет координаты:

$$X_2 = \sqrt{2}\,a\left(\cos\frac{\varphi}{2} - \sin\frac{\varphi}{2}\right)\cos\psi,$$

$$Y_2 = \sqrt{2}\,a\left(\cos\frac{\varphi}{2} - \sin\frac{\varphi}{2}\right)\sin\psi. \tag{5}$$

В таком случае линейный элемент круга (плоскости Π) будет:

$$ds_2^2 = \frac{a^2}{2}(1 + \sin\varphi)\,d\varphi^2 + 2a^2(1 - \sin\varphi)\,d\psi^2, \tag{6}$$

а элемент площади

$$d\sigma_2 = \sqrt{E_2G_2}\,d\varphi d\psi = a^2\cos\varphi\,d\varphi d\psi. \tag{7}$$

Сравнивая (4) и (7), заключаем, что указанное отображение эквиареально. Теперь ясно, что если будем считать соответственными точки M на псевдосфере и M'' на плоскости Евклида, то тем самым установим эквиареальное отображение псевдосферы на круг, т. е. мы получаем эквиареальное отображение куска плоскости Лобачевского на евклидову плоскость.

Можно было бы осуществить эквиареальное отображение не куска, а всей плоскости Лобачевского на евклидову плоскость; часть последней, на которую отображается плоскость Лобачевского, будет, очевидно, бесконечной.

Известно [2], что линейный элемент плоскости Лобачевского в полярных координатах r и Θ имеет вид:

$$ds^2 = k^2\operatorname{ctg}^2\tilde{r}\,d\Theta^2 + dr^2, \tag{8}$$

где $\tilde{r} = \Pi(r)$.

Из формулы Лобачевского

$$\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\tilde{r} = e^{\frac{r}{k}}$$

получим

$$\operatorname{ctg}\tilde{r} = \operatorname{sh}\frac{r}{k},$$

поэтому линейному элементу (8) можно придать вид

$$ds^2 = k^2 sh^2 \frac{r}{k} d\Theta^2 + dr^2. \tag{8'}$$

Отсюда находим элемент площади

$$d\sigma = ksh \frac{r}{k}\, d\Theta dr. \tag{9}$$

Линейный элемент плоскости Евклида в полярных координатах r_1, Θ_1 имеет вид

$$ds_1^2 = r_1^2 d\Theta_1^2 + dr_1^2. \tag{10}$$

Положим

$$r_1 = \sqrt{2k^2 \operatorname{ch} \frac{r}{k}} \text{ и } \Theta = \Theta_1. \tag{11}$$

Следовательно,

$$dr_1 = \frac{\operatorname{sh} \frac{r}{k}\, dr}{\sqrt{2 \operatorname{ch} \frac{r}{k}}}, \; d\Theta = d\Theta_1.$$

Здесь область изменения r — $(0, \infty)$.
Этой области соответствует область изменения

$$r_1 : (\sqrt{2}k, \; \infty).$$

Следовательно, области круга с центром в начале и с радиусом $\sqrt{2}k$ плоскости Евклида формулы отображения (11) не ставят в соответствие никакой точки плоскости Лобачевского; это отображение вырожденное.

Полюсу $r = 0$ плоскости Лобачевского соответствует все точки евклидова круга радиуса $\sqrt{2}k$.

Линейный элемент плоскости Евклида в координатах Θ, r будет иметь вид

$$ds_1^2 = 2k^2 \operatorname{ch} \frac{r}{k}\, d\Theta^2 + \frac{1}{2} \operatorname{th} \frac{r}{k} \operatorname{sh} \frac{r}{k}\, dr^2. \tag{12}$$

Элемент площади этой плоскости

$$d\sigma_1 = \sqrt{k^2 \operatorname{ch} \frac{r}{k} \operatorname{sh} \frac{r}{k} \operatorname{th} \frac{r}{k}}\, dr d\Theta = k \operatorname{sh} \frac{r}{k}\, dr d\Theta. \tag{13}$$

Сравнивая формулы (9) и (13), заключаем, что **отображение** (11) плоскости Лобачевского на плоскость Евклида **эквиареально.**

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Ф. Каган. Основы теории поверхностей, I и II часть, ГИТТЛ, М. —Л., 1948—1949.
2. В. Ф. Каган. Основания геометрии, I и II часть, ГИТТЛ, М. —Л., 1949—1956.

Поступил 25 мая 1969 г.

УКРАИНСКИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК

Выпуск 8 1970

ОДНО ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ А. Д. АЛЕКСАНДРОВА ДЛЯ ЗАМКНУТЫХ ВЫПУКЛЫХ МНОГОГРАННИКОВ НА СЛУЧАЙ n-МЕРНОГО ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

А. И. Медяник

(Харьков)

А. Д. Александров в работе [1] доказал следующую теорему единственности для замкнутых выпуклых многогранников трехмерного евклидова пространства:

Теорема. А. *Если у двух выпуклых многогранников грани одного соответствует грань другого с параллельной внешней нормалью и обратно, и если их соответственные грани не могут быть помещены одна внутри другой параллельными переносами, то многогранники равны и параллельно расположены.*

Как следует из уточненной леммы Коши, утверждение теоремы A остается в силе, если от одной пары соответственных граней не требовать выполнения условия непомещаемости одной грани внутри другой [2]. Так видоизмененную теорему A будем называть усиленной теоремой A.

Как показывает пример четырехмерного параллелепипеда с гранями, параллельными граням куба, среди ребер которого, инцидентных одной вершине, два ребра больше, а два другие меньше соответствующих ребер параллелепипеда, теорема A не допускает очевидного обобщения на случай пространств высшего числа измерений.

В работе [3] теорема A обобщается на четырехмерный случай следующим образом:

Теорема 1. *Пусть P_1 и P_2 — замкнутые выпуклые многогранники четырехмерного евклидова пространства с попарно параллельными гранями. Пусть все пары соответствующих двумерных граней, за исключением самое большее пяти пар, удовлетворяют условию непомещаемости. Тогда многогранники P_1 и P_2 равны и параллельно расположены.*

Условимся называть параллельными $(n-1)$-мерные грани многогранников P^n и Q^n, если единичные векторы внешних нормалей этих граней равны, и параллельными k-мерные грани, если каждая из них является пересечением соответственно параллельных $(k+1)$-мерных граней $(k < n-1)$. Вырождение граней не допускается.

В настоящей работе доказывается следующая теорема:

Теорема 2. *Пусть P^n и Q^n — замкнутые выпуклые многогранники n-мерного евклидова пространства E_n $(n \geqslant 4)$ с попарно параллельными гранями. И пусть все пары соответствующих по параллельности двумерных граней, кроме не более $\frac{n(n-1)}{2}-1$ пар, удовлетворяют условию непомещаемости. Тогда многогранники P^n и Q^n равны и параллельно расположены.*

Сразу заметим, что оценка, данная теоремой 2, не может быть улучшена. Действительно, пусть P^n и Q^n — прямые призмы с неравными высотами, в основаниях которых лежат равные $(n-1)$-мерные симплексы. P^n и Q^n можно расположить так, что их грани будут попарно параллельны, а число пар двумерных граней, не удовлетворяющих условию непомещаемости, будет равно числу ребер $(n-1)$-мерного симплекса, т. е. $\frac{n(n-1)}{2}$.

Предположим, что многогранники P^n и Q^n не равны. Тогда у них должны быть неравные соответствующие трехмерные грани, а значит, по теореме A у них есть пары соответствующих двумерных граней, не удовлетворяющих условию непомещаемости. Обозначим A_n совокупность тех двумерных граней многогранника Q^n, которые входят в пары граней, не удовлетворяющих условию непомещаемости. Будем обозначать Q^k k-мерную грань Q^n, инцидентную хотя бы одной двумерной грани из A_n; A_k — подмножество A_n, принадлежащее Q^k, m_k — число граней, входящих в A_k.

По усиленной теореме A для произвольной грани Q^3

$$m_3 \geqslant 2. \tag{1}$$

Лемма 1. *Пусть* Q_0^3 — *грань* Q^4. *Если* $m_3^0 \geqslant 5$, *то* $m_4 \geqslant m_3^0 + 3$.

Доказательство. К каждой двумерной грани Q_0^3, входящей в A_4, прилегает трехмерная грань Q^3, для которой $m_3 \geqslant 2$ по неравенству (1). Кроме того, в Q^4 каждая двумерная грань инцидентна двум трехмерным. Поэтому вне грани Q_0^3 имеется не меньше $\left[\frac{5}{2}\right] + 1 = 3$ граней из A_4. Лемма доказана.

Лемма 2. *Если* $m_3 \geqslant 3$ *для каждой грани* $Q^3 \subset Q^5$, *то* $m_5 \geqslant 10$.

Доказательство. Пусть Q^3, $\overline{Q}^3$ — грани Q^4, инцидентные одной и той же двумерной грани из A_4. По условию леммы

$$m_3 = 3 + \alpha_3,\ \alpha_3 \geqslant 0;\ \overline{m}_3 = 3 + \bar{\alpha}_3,\quad \bar{\alpha}_3 \geqslant 0. \tag{2}$$

Поэтому $m_4 = m_3 + \overline{m}_3 - 1 + \tilde{\alpha}_4 = 5 + \alpha_3 + \bar{\alpha}_3 + \tilde{\alpha}_4$, где $\tilde{\alpha}_4$ — число граней из A_4, не принадлежащих Q^3 и $\overline{Q}^3$. Так как $m_3 \geqslant 3$, то $\tilde{\alpha}_4 \geqslant 1$ и, значит,

$$m_4 = 6 + \alpha_3 + \bar{\alpha}_3 + \alpha_4,\ \alpha_4 \geqslant 0. \tag{3}$$

Пусть теперь $\overline{Q^4} \subset Q^5$ — грань, граничащая с Q^4 по Q^3. По доказанному

$$\overline{m}_4 = 6 + \alpha_3 + \bar{\alpha}_3' + \bar{\alpha}_4,\quad \bar{\alpha}_3',\ \bar{\alpha}_4 \geqslant 0. \tag{4}$$

Из равенств (2, 3, 4) получаем

$$m_5 = m_4 + \overline{m}_4 - m_3 + \tilde{\alpha}_5 = 9 + \alpha_3 + \bar{\alpha}_3 + \bar{\alpha}_3' + \alpha_4 + \bar{\alpha}_4 + \tilde{\alpha}_5,$$

где $\tilde{\alpha}_5$ — число граней из A_5, не принадлежащих Q^4 и $\overline{Q}^4$. Так как $m_3 \geqslant 3$, то $\tilde{\alpha}_5 \geqslant 1$. Значит, $m_5 \geqslant 10$, что и требовалось доказать.

Лемма 3. *Пусть* Q^4 — *грань* Q^5. *Тогда* $m_5 \geqslant m_4 + 4$.

Доказательство. Обозначим $\overline{Q}^4$ четырехмерную грань Q^5, пересекающуюся с Q^4 по некоторой грани Q^3. По теореме 1 $m_4 \geqslant 6$, $\overline{m}_4 \geqslant 6$. Если мы допустим, что $m_5 < 10$, то $m_3 \geqslant m_4 + \overline{m}_4 - 9 \geqslant 3$, что противоречит лемме 2. Итак, для $m_4 = 6$ лемма 3 доказана.

Пусть теперь $m_4 > 6$. Предположим, что вне грани Q^4 находится меньше четырех граней из A_5. Для определенности предположим, что вне Q^4 имеется три грани $Q_j^2 (j = 1, 2, 3)$. Из этого предположения и теоремы 1 вытекает, что $m_3 \geqslant 3$ для каждой грани $Q^3 \subset Q^4$. Значит, в Q^4 есть по крайней мере четыре грани $Q_i^3 (i = 1, 2, 3, 4)$. Покажем, что среди чисел m_3^i $(i = 1, 2, 3, 4)$ точно три равны 4.

Пусть $Q_i^4 (i = 1, 2, 3, 4)$ — грань Q^5, пересекающаяся с Q^4 по Q_i^3. Предположим, что m_3^1 и m_3^2 не равны 4. Тогда по теореме 1 и лемме 1 Q_1^4 и Q_2^4 содержат все три грани $G_j^2 (j = 1, 2, 3)$, которые, следовательно, принадлежат их пересечению, т. е. некоторой трехмерной грани Q^3. По той же причине Q_3^4 содержит хотя бы две из граней $\{Q_j^2\}$, а значит, и всю грань Q^3. Мы пришли к противоречию, так как в Q^5 трехмерной грани инцидентны только две четырехмерные.

Рассмотрим теперь случай, когда все четыре числа m_3^i равны 4. Нетрудно установить, что в этом случае $m_4^i = 6$ $(i = 1, 2, 3, 4)$, и, следовательно, каждая грань $Q_i^4 (i = 1, 2, 3, 4)$ содержит две грани из $Q_j^2 (j = 1, 2, 3)$. Значит, найдутся две грани, например Q_1^4 и Q_2^4, пересечение которых содержит две грани из $\{Q_j^2\}$, которые должны принадлежать одной трехмерной грани, что невозможно, если принять во внимание условия $m_3^1 = 4$, $m_4^1 = 6$.

Итак, для четырех граней $Q_i^3 (i = 1, 2, 3, 4)$ только одно из чисел m_3^i отлично от 4. Из этого, в частности, следует, что существует еще одна грань $Q_5^3 \subset Q^4$. Если $m_3^5 = 4$, то нашлись бы четыре трехмерные грани с $m_3 = 4$, если же $m_3^5 \neq 4$, то нашлась бы четверка трехмерных граней, только для двух из которых $m_3 = 4$, что противоречит доказанному выше. Случаи, когда вне Q^4 имеется меньше трех граней из A_5, тоже невозможны. Лемма 3 доказана.

Доказательство теоремы 2. Предположим, что многогранники P^n и Q^n не равны. Пусть $Q^4 \subset Q^5 \subset \ldots \subset Q^{n-1} \subset Q^n$ — последовательность вложенных граней. По теореме 1

$$m_4 = 6 + \alpha_4, \ \alpha_4 \geqslant 0. \tag{5}$$

По лемме 3

$$m_5 = m_4 + 4 + \alpha_5, \ \alpha_5 \geqslant 0.$$

Предположим, что для $5 \leqslant s < n$ справедливо равенство

$$m_s = m_{s-1} + (s-1) + \alpha_s, \ \alpha_s \geqslant 0.$$

Докажем, что для m_{s+1} имеет место равенство

$$m_{s+1} = m_s + s + \alpha_{s+1}, \ \ \alpha_{s+1} \geqslant 0. \tag{6}$$

Рассмотрим грань Q^{s+1}. Пусть $\{Q_i^{s-1}\}$ — множество всех $(s-1)$-мерных граней Q^s, содержащих грани из A_s. Каждой грани Q_i^{s-1}, кроме Q^s, инцидентна еще одна s-мерная грань $\overline{Q}_i^s$. По предположению индукции

$$\overline{m}_s^i = m_{s-1}^i + (s-1) + \overline{\alpha}_s^i, \ \ \overline{\alpha}_s^i \geqslant 0.$$

Из последнего равенства следует, что вне грани Q^s есть по крайней мере $s-1$ грань из A_{s+1}. Если их больше $s-1$, то наше утверждение доказано. Пусть их число равно точно $s-1$. Тогда все грани $\{\overline{Q}_i^s\}$ инцидентны некоторой грани Q_0^r.

Покажем, что пересечение $Q^s \cap Q_0^r$ не содержит граней из A_s. Действительно, если в указанном пересечении содержится хотя бы одна двумерная грань из A_s, то эта грань принадлежит также пересечению всех $(s-1)$-мерных граней $\{Q_i^{s-1}\}$. Поскольку $Q^s \supset Q^{s-2} = Q_i^{s-1} \cap Q_j^{s-1}$, то пересечение всех $(s-2)$-мерных граней Q^s тоже содержало бы двумерную грань из A_s и т. д., что невозможно, так как A_s содержит более одной грани.

Итак, $m_{s+1} = m_s + m_r^0$. Простой оценкой числа граней $\overline{Q}_i^s$ можно установить, что $r \leqslant s-2$ (очевидно $r \geqslant 3$).

Пусть $Q_0^{r+3} \supset Q_0^r$ — грань Q^{s+1} (она может совпадать с Q^{s+1}). Из индуктивного предположения вытекает, что Q_0^{r+3} пересекается с Q^s по $(r+2)$ — мерной грани Q_0^{r+2}. В Q^{r+2} число граней $\{Q_i^{r+1}\}$ равно числу граней $\{Q_i^r\}$, так как $m_{r+3} = m_{r+2} + m_r$ и, значит, все грани $\overline{Q}_i^{r+1}$, пересекающиеся с Q^{r+2} по Q_i^r, и все грани $\overline{Q}_i^{r+2}$, пересекающиеся с Q^{r+2} по Q_i^{r+1}, содержат Q^r. Но это невозможно, потому что каждая грань Q_i^r инцидентна только двум граням из $\{Q_i^{r+1}\}$, а каждая грань Q_i^{r+1} инцидентна более чем двум граням из $\{Q_i^r\}$.

Полученное противоречие показывает, что вне Q^s имеется не менее s граней из A_{s+1}, т. е. равенство (6) доказано.

Итак,

$$m_s = m_{s-1} + (s-1) + \alpha_s, \quad \alpha_s \geqslant 0; \quad 5 \leqq s \leqslant n. \tag{7}$$

Просуммировав равенства (5) и (7) от $s=5$ до $s=n$, получим:

$$m_n = \frac{n(n-1)}{2} + \sum_{i=4}^{n} \alpha_i, \quad \alpha_i \geqslant 0. \tag{8}$$

Из равенства (8) и следует утверждение теоремы 2.

В заключение, отвечая референту статьи [3] (РЖМат, 1968, 8А557), приводим новую редакцию другой теоремы единственности для многогранников в E_4, сформулированной в [3] и [4].

Теорема 1а. *Пусть P_1 и P_2 — замкнутые выпуклые многогранники в E_4, грани которых попарно параллельны. И пусть для трехмерных граней P_1 и P_2 невозможно, чтобы с точностью до параллельного переноса грани одной пары соответствующих трехмерных граней были равны, а другой — неравны. Если число пар соответствующих двумерных граней, удовлетворяющих условию непомещаемости одной грани внутри другой, превышает разность между числом двумерных и трехмерных граней одного из многогранников, то P_1 и P_2 равны и параллельно расположены.*

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Д. Александров. Элементарное доказательство теоремы Минковского и некоторых других теорем о выпуклых многогранниках. «Известия АН СССР, ОМЕН», № 4, 1937, 598—608.

2. А. Д. Александров. Выпуклые многогранники, гл. II, VI, Гостехиздат, М. —Л., 1950, 87—88, 268.

3. А. И. Медяник. К теореме единственности для замкнутых выпуклых многогранников четырехмерного евклидова пространства. Укр. геометр. сб., вып. 4. Изд-во ХГУ, Харьков, 1967, 40—42.

4. А. И. Медяник. Некоторые теоремы единственности для замкнутых выпуклых поверхностей четырехмерного евклидова пространства. Записки мех.-матем. ф-та ХГУ и ХМО, т. 31, 1965, 75—81.

Поступила 16 декабря 1968 г.

УКРАИНСКИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК

Выпуск 8 1970

ИНТЕГРАЛЬНАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ ПОЛЯ СМЕЩЕНИЙ

А. Д. Милка

(Харьков)

1. Поле смещений s регулярной поверхности X, как принято в теории изгибаний (см. [1]), определяется равенством

$$z = s + [yx]. \tag{1}$$

В локальных координатах (u, v) на X поле s подчиняется уравнениям:

$$s_u = \alpha [xx_u] - \beta [xx_v], \quad s_v = \gamma [xx_u] - \alpha [xx_v]. \tag{2}$$

Здесь x — радиус-вектор поверхности, z — ее изгибающее поле, y — соответствующее поле вращений, α, β, γ — скалярные функции.

Имеется следующая кинематическая интерпретация поля смещений s. При изгибании поверхности X каждая плоскость, касательная к поверхности, движется в пространстве как твердое тело. Движение такой плоскости, очевидно, определяет движение всего пространства, и в каждой точке пространства индуцируется вектор скорости. Из равенства (1) следует, что вектор скорости, индуцированный в начале отсчета векторов движением плоскости, касательной в точке x, в точности совпадает с s.

Теорема. *Для каждой области D на X с регулярной границей D' справедлива интегральная формула:*

$$\oint_{(D')} [s\,\mathrm{d}\,s] = 2\iint_{(D)} x\,(\beta\gamma - \alpha^2)\,(xx_u x_v)\,\mathrm{d}\,u\,\mathrm{d}\,v. \tag{3}$$

Доказательство. По формуле Грина

$$\oint_{(D')} [s\,\mathrm{d}\,s] = 2\iint_{(D)} [s_u s_v]\,\mathrm{d}\,u\,\mathrm{d}\,v.$$

Подставляя сюда из (2) выражения s_u, s_v и используя тождество

$$[[xx_u]\,[xx_v]] \equiv x\,(xx_u x_v),$$

получаем формулу (3).

Теорема доказана.

Напомним для сравнения известную формулу В. Бляшке:

$$\oint_{(D)'} (xy\,\mathrm{d}\,y) = 2\iint_{(D)} (\beta\gamma - \alpha^2)\,(xx_u x_v)\,\mathrm{d}\,u\,\mathrm{d}\,v.$$

Для замкнутой поверхности X из (3) выводится формула:

$$\iint_{(X)} x\,(\beta\gamma - \alpha^2)\,(xx_u x_v)\,\mathrm{d}\,u\,\mathrm{d}\,v = 0. \tag{4}$$

2. Установим аналог формулы (3) для многогранника.

Пусть P — конечный ориентированный многогранник с границей. Предположим, что многогранник P подвергается бесконечно малому изгибанию. Тогда каждая грань многогранника движется как твердое тело и индуцирует движение пространства. Пусть A — некоторая вершина P. Обозначим $v_1, v_2, \ldots, v_n$ скорости начала отсчета векторов, индуцированные движениями соответствующих граней, сходящихся в A, упорядоченных по возрастанию индексов согласно ориентации многогранника. Введем вектор

$$\Omega = [v_1 v_2] + [v_2 v_3] + \ldots + [v_{n-1} v_n] + [v_n v_1],$$

если A — внутренняя вершина P, и вектор

$$\omega = [v_1 v_2] + [v_2 v_3] + \ldots + [v_{n-1} v_n],$$

если A принадлежит границе.

Очевидна формула

$$\sum_{(i)} \Omega_i + \sum_{(j)} \omega_j = 0, \tag{5}$$

где (i) — суммирование по всем внутренним, а (j) — по граничным вершинам многогранника.

Для замкнутого многогранника P формула (5) переходит в равенство

$$\sum_{(i)} \Omega_i = 0, \tag{6}$$

где суммирование производится по всем вершинам.

3. Найденные формулы могут оказаться полезными в исследованиях жесткости выпуклых поверхностей.

Так, например, с помощью (4) и (6) получаются новые доказательства жесткости замкнутой выпуклой регулярной поверхности, не содержащей плоских областей, и жесткости замкнутого выпуклого многогранника. В этих случаях для доказательства начало отсчета векторов выбирается на поверхности.

Первое из доказательств основывается на неравенстве $\beta\gamma - \alpha^2 \leqslant 0$, известном для выпуклой поверхности. В силу этого неравенства векторы $x(\beta\gamma - \alpha^2)(x x_u x_v)$ в интеграле (4) направлены в одно полупространство, и равенство их суммы нулю возможно лишь в случае $\beta\gamma - \alpha^2 \equiv 0$, что соответствует жесткости поверхности.

Доказательство для многогранника аналогично и опирается на следующую лемму.

Пусть V — выпуклый многогранный угол, ориентированный таким образом, что направление обхода вокруг вершины с направлением в сферическое отображение определяет левый винт. Положим, что начало отсчета векторов находится внутри угла или на его поверхности. Пусть угол V подвергается бесконечно малому изгибанию. Введем вектор Ω (из векторов, индуцированных гранями V в начале отсчета), как это делалось в п. 2 для многогранника.

Лемма. *Вектор Ω, не равный нулю, направлен к вершине угла V по радиусу-вектору этой вершины. Из равенства $\Omega = 0$ следует, что изгибание V тривиально, если угол не сводится к двугранному, и тривиально на сумме граней, принадлежащих одной плоскости, в противном случае.*

Доказательство проводится индукцией по числу граней угла V и сходно с соответствующим доказательством подобного утверждения (для поля вращений), данным автором в [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. В. Ефимов. Качественные вопросы теории деформации поверхностей. Успехи матем. наук, вып. 2, (1948), 47—159.

2. А. Д. Милка. Аналог формулы Бляшке для многогранников. Украинский геометрич. сборник. вып. 1. Изд-во ХГУ, Харьков, 1965, 62—65.

Поступила 16 мая 1969 г.

УКРАИНСКИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК

Выпуск 8 1970

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ ШУРА — ШМИДТА

А. Д. Милка

(Харьков)

Известна следующая теорема, принадлежащая Шуру и Шмидту ([1], стр. 73).

При «скручивании» выпуклой кривой в евклидовом пространстве, т. е. при изометрической ее деформации, не увеличивающей кривизну, длина замыкающей хорды кривой не уменьшается.

Цель настоящей заметки — распространение указанной теоремы на случай произвольного пространства с постоянной кривизной и случай деформаций в таком пространстве в классе кривых с ограниченной вариацией поворота. Вместе с этим приводятся обращение теоремы о «скручивании» и некоторые ее следствия: даются обобщение теоремы Шварца и Шмидта об оценке длины кривой ([1], стр. 75) и обобщение теоремы Бляшке об окружностях кривизны ([2], стр. 137), усиливающее недавние результаты Каршера [3].

Условимся, что пространство, которое будем рассматривать, есть пространство Евклида, или сферическое пространство, или пространство Лобачевского.

1. Определения

Как обычно, под кривой понимается непрерывный и однозначный образ в пространство замкнутого отрезка. Кривая замкнутая, если образы концов отрезка совпадают.

Пусть L и L' — изометричные кривые в пространстве. Тогда можно говорить о дугах кривых, соответствующих по изометрии, о соответствующих хордах, замыкающих эти дуги и соответствующих вписанных ломаных. Предположим, что все хорды L по длине не превосходят соответствующих им хорд L'. Тогда будем говорить, что L' получается из L (изометрической) деформацией с растяжениями в пространстве. Если указанное соотношение выполняется лишь локально, т. е. каждая точка L имеет окрестность, переходящую в соответствующую дугу L' с растяжениями в пространстве, то отображение $L \to L'$ будем называть (изометрической) деформацией с локальными растяжениями.

Символом τ_l в дальнейшем будем обозначать полуплоскость τ, ограниченную прямой l. Для точки X будем обозначать $\overline{X}$ проекцию ее на l, а $h(X)$ — высоту над этой прямой, т. е. расстояние между X и $\overline{X}$. Отрезок, длина его обозначаются одинаково. Подобно будут обозначаться дуги кривых и их длины. Элементы пары кривых, поставленных в некоторое точечное соответствие, будут иметь сходственные обозначения. Символом $C_\varkappa$ обозначается окружность, имеющая геодезическую кривизну $\varkappa$. Плоскость с постоянной кривизной K будет называться K-плоскостью.

Выпуклая кривая $L \subset \tau_l$ с концами A, B (в случае сферического пространства — не проходящая через центр полуплоскости τ_l) будет называться нормальной (относительно прямой l), если дополненная кривая $\tilde{L}$, полученная присоединением к L прямолинейных отрезков $A\bar{A}$ и $B\bar{B}$, также является выпуклой.

Пусть L — некоторая кривая. Назовем поворотом ломаной, составленной из конечного числа звеньев, сумму дополнений до π углов при внутренних ее вершинах. Тогда вариация поворота в пространстве кривой L есть верхний предел поворотов ломаных, правильно вписанных в кривую, при ее разбиении их вершинами на множества, диаметры которых неограниченно убывают. Если этот предел конечен, то L называется кривой с ограниченной вариацией поворота. В случае евклидова пространства подобные кривые детально изучены ([4], стр. 139). Их основные свойства — спрямляемость, существование полукасательных, полная аддитивность вариации поворота, как функции дуги, — распространяются и на общий случай. Для доказательства, достаточно проверить, что в геодезическом соответствии между пространствами сферическим или Лобачевского и Евклидовым соответствующие кривые спрямляемы одновременно, а вариация поворота каждой кривой, образа кривой с ограниченной вариацией поворота, ограничена.

Выражение «удельная кривизна кривой не меньше $\varkappa$», используемое нами, означает: для каждой дуги этой кривой выполняется неравенство $\frac{\omega(s)}{s} \geqslant \varkappa$, где s — длина дуги, $\omega(s)$ вариация ее поворота в пространстве. Соответственно определяются кривые «с удельной кривизной, не большей $\varkappa$».

Пусть L и L' — замкнутые выпуклые кривые. Кривая L в кривой L' допускает свободное качение, если выполняется условие: для каждой пары точек $X \in L$ и $X' \in L'$ и каждой пары прямых, опорных к кривым в этих точках, существует движение пространства, переводящее L в замыкание выпуклой области, ограниченной L', и совмещающее опорные прямые и точку X с X'.

2. Леммы о деформациях кривых

Лемма 1. *Если при изометрической деформации выпуклой ломаной (для случая сферического пространства — вмещаемой в открытую полуплоскость) без искривления ее звеньев повороты в вершинах не возрастают, то расстояние между концами ломаной не уменьшается. Это расстояние сохраняется лишь в том случае, если деформация ломаной сводится к движению.*

Лемма доказывается индукцией по числу звеньев ломаной.

Следствие. *Пусть L — кривая малой длины и с малой вариацией поворота в пространстве. Тогда существует выпуклая кривая, изометричная L, с теми же вариациями поворотов на соответствующих дугах, из которой кривая L получается деформацией с растяжениями в пространстве.*

Для доказательства этого утверждения вписываем правильно в L сходящиеся к ней вместе с вариациями поворотов ломаные, последние, сохраняя углы, разворачиваем в выпуклые ломаные на плоскость и выбираем из плоских ломаных сходящуюся подпоследовательность. Пределом подпоследовательности будет кривая, обладающая требуемыми свойствами. Сходимость поворотов плоских ломаных к повороту предельной кривой выводится из теоремы о сходимости площадей выпуклых областей, теоремы Гаусса — Бонне и того факта, что в малых окрестностях концов ломаных сосредоточиваются равномерно малые повороты.

Лемма 2. *Пусть L — выпуклая кривая в полуплоскости τ_l, нормальная относительно l, $C \subset \tau_l$ — ломаная, однозначно проектирующаяся на l, $\{A_i\}_1^n$ — правильная система точек на L, включающая концы кривой, $\{B_i\}_1^n$ — последовательные вершины C. Предположим, что высоты над l соответствующих из указанных точек попарно равны, т. е. $h(A_i) = h(B_i)$, а соответствующие дуги кривой L и звенья ломаной C связаны соотношениями $A_i\breve{}A_{i+1} \geqslant B_iB_{i+1} \geqslant A_iA_{i+1}$. Тогда C — выпуклая ломаная, нормальная относительно прямой l.*

Для доказательства леммы нужно установить, — и это не трудно сделать, — что углы при внутренних вершинах ломаной не превосходят углов между полукасательными к L в соответствующих из $\{A_i\}$ точках.

Заметим, что ломаную C можно рассматривать как результат деформации кривой L с заранее заданной на этой кривой правильной системой точек, переходящих в вершины ломаной. Очевидно, замыкающая хорда C по длине будет не меньше соответствующей хорды L. Если точки $\{A_i\}$ разбивают кривую L на малые дуги с малыми поворотами, то разность длин хорд, замыкающих L и C, оценивается величиной, пропорциональной длине большей из дуг L, заключенных между соседними точками деления.

Лемма 3. *Пусть C — выпуклая ломаная в полуплоскости τ_l, нормальная относительно l, содержащая не менее двух звеньев, C' — другая ломаная, не обязательно плоская, и пусть $\{A_i\}_1^n$ и $\{A_i'\}_1^n$ — последовательные вершины C и C'. Предположим, что высоты над l соответствующих из указанных точек и соответствующие звенья ломаных связаны соотношениями: $h(A_1) = h(A_1')$, $h(A_i) \leqslant h(A_i')$, $h(A_n) = h(A_n')$ и $A_iA_{i+1} \geqslant A_i'A_{i+1}'$. Тогда $A_1A_n \geqslant A_1'A_n'$ и равенство возможно лишь в случае, когда дополненные ломаные $\tilde{C}$, $\tilde{C}'$ конгруэнтны.*

Доказательство. Здесь используется индукция по числу звеньев ломаной C. Наиболее важный случай представляется двухзвенной ломаной, для которой $h(A_i) \equiv h(A_i')$, $A_iA_{i+1} \equiv A_i'A_{i+1}'$. Этот случай мы и рассмотрим.

Пусть ASB и $A'S'B'$ — ломаные C и C', где обозначение вершин согласовано с изометрией. Достаточно установить неравенства

$$\angle AS\bar{S} \geqslant \angle A'S'\bar{S}' \text{ и } \angle BS\bar{S} \geqslant \angle B'S'\bar{S}',$$

т. к. тогда получим, что

$$\angle A'S'B' \leqslant \angle A'S'\bar{S}' + \angle B'S'\bar{S}' \leqslant \angle AS\bar{S} + \angle BS\bar{S} = \angle AS\bar{B}$$

и, значит,

$$A'B' \leqslant AB.$$

Допустим, что $\angle AS\bar{S} < \angle A'S'\bar{S}'$. Из сравнения треугольников $AS\bar{S}$ и $A'S'\bar{S}'$ следует: $A\bar{S} \leqslant A'\bar{S}'$. Сравнивая теперь прямоугольные треугольники $\bar{A}A\bar{S}$ и $\bar{A}'A'\bar{S}'$, находим, что $\bar{A}\,\bar{S} \leqslant \bar{A}'\bar{S}'$. Для треугольников $\bar{A}S\bar{S}$ и $\bar{A}'S'\bar{S}'$ последнее неравенство означает, что $\bar{A}S < \bar{A}'S'$. Следовательно,

$$\angle \bar{A}AS < \angle \bar{A}'A'S.'$$

Будем считать, что отрезок $\bar{A}\,\bar{S}$ налегает на отрезок $\bar{A}'\bar{S}'$, являясь тогда его частью. Кроме того, предположим, что совпадают отрезки $A\bar{A}$

и $A'\bar{A}'$, так что $A \equiv A'$, $\bar{A} \equiv \bar{A}'$. Легко заметить, что отрезок $A\bar{S}'$ пересекает отрезок $S\bar{S}$ и, следовательно,

$$\angle \bar{A}AS = \angle \bar{A}A\bar{S}' + \angle \bar{S}'AS.$$

Так как $S\bar{S}' \geqslant S\bar{S} = S'\bar{S}'$, то из сравнения треугольников $\bar{S}'AS$ и $\bar{S}'AS'$ получаем, что $\angle \bar{S}'AS > \angle \bar{S}'AS'$. Поэтому

$$\angle \bar{A}AS = \angle \bar{A}A\bar{S}' + \angle \bar{S}'AS > \angle \bar{A}A\bar{S}' + \angle \bar{S}'AS' \geqslant \angle \bar{A}AS'.$$

Таким образом, $\angle \bar{A}AS > \angle \bar{A}'A'S'$, но ранее было найдено противоположное неравенство. Полученное противоречие означает, что $\angle AS\bar{S} \geqslant \angle A'S'\bar{S}'$. В процессе доказательства можно было бы заметить, что равенство здесь возможно лишь в случае, когда ломаные $\bar{A}AS\bar{S}$ и $\bar{A}'A'S'\bar{S}'$ конгруэнтны.

Аналогично устанавливается неравенство $\angle BS\bar{S} \geqslant \angle B'S'\bar{S}'$.

Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть L — выпуклая кривая в полуплоскости τ_l, нормальная относительно l, L' — другая кривая, не обязательно плоская, и пусть φ — некоторый гомеоморфизм между L и L'. Предположим, что высоты над l соответствующих по φ точек и соответствующие дуги кривых L, L' связаны соотношениями: $h(Z) \leqslant h(Z')$, причем в концах кривых соблюдается равенство, и всюду $\breve{XY} \geqslant \breve{X'Y'}$, где $Z, X, Y \in L$, $Z', X', Y' \in L'$ Тогда замыкающая хорда L' по длине не превосходит соответствующей хорды L; равенство возможно лишь в случае, когда дополненные кривые $\tilde{L}$, $\tilde{L}'$ конгруэнтны.*

Лемма доказывается с помощью леммы 2 (с учетом сделанного к ней замечания) и леммы 3.

Лемма 5. *Пусть L — выпуклая кривая в полуплоскости τ_l, нормальная относительно l, L' — другая кривая, не обязательно плоская,* изометричная *L. Предположим, что соответствующие хорды кривых связаны соотношением $XY \leqslant X'Y'$, где $X, Y \in L$, $X', Y' \in L'$, а соответствующие высоты над l в концах кривых попарно равны. Тогда высоты над l соответствующих точек удовлетворяют неравенству $h(Z) \leqslant h(Z')$, причем проекции кривой L' на l и замыкающей ее хорды совпадают. Здесь $Z \in L$, $Z' \in L'$.*

Лемма выводится из леммы 4.

Отметим одно утверждение, вытекающее из леммы 5 и справедливое в условиях этой леммы.

Каждая малая хорда кривой L', примыкающая к любому из ее концов, образует с замыкающей хордой кривой угол, который не превосходит соответствующего угла для L.

Лемма 6. *Пусть L — замкнутая выпуклая кривая (для сферического пространства — вмещаемая в открытую полуплоскость), L' — изометричная ей кривая в пространстве. Предположим, что соответствующие хорды кривых связаны соотношением $XY \leqslant X'Y'$, где $X, Y \in L$, $X', Y' \in L'$. Тогда кривые L и L' конгруэнтны.*

Доказательство. Выберем на кривой L две наиболее удаленные в пространстве точки. Пусть это будут точки A и B, и пусть A' и B' — соответствующие им точки на кривой L'. Можно считать, что хорды AB и $A'B'$ принадлежат одной прямой, — обозначим ее символом l. Двумерная плоскость, содержащая L, делится этой прямой на части, полуплоскости τ^+ и τ^-, которым принадлежат участки L^+ и L^- кривой

L: $L^+ \subset \tau^+$, $L^- \subset \tau^-$, $L^+ + L^- = L$. Обозначим L'^+ и L'^- соответствующие дуги кривой L. В силу выбора точек A, B легко заметить, что обе кривые L^+ и L^-, или, быть может, в точности одна из них, если речь идет о сферическом пространстве, расположены относительно l нормально. (Вторая из кривых в отмеченном подслучае состоит, очевидно, из двух прямолинейных отрезков, которые сходятся в центре соответствующей полуплоскости). Пусть L^+ нормально расположена относительно l. Предположим, что эта кривая и кривая L'^+, не конгруэнтны. Обе они удовлетворяют условиям леммы 5. Следовательно, высоты над l соответствующих точек кривых связаны неравенством $h(Z) \geqslant h(Z')$, где $Z \in L^+$, $Z' \in L'^+$. Из леммы 4 тогда получим, что хотя бы для одной из точек L^+ указанное неравенство будет строгим. Отметим такую точку Z, ее проекцию $\bar{Z}$ на l и соответствующую проекцию $\bar{Z}'$ точки Z', расположенную по лемме 5 внутри отрезка $\bar{A}'\bar{B}'$. Очевидно, что одна из дуг кривой L^+, определяемых точкой Z, образует с отрезком $Z\bar{Z}$ в этой точке угол, не превосходящий $\frac{\pi}{2}$. Пусть этим свойством обладает дуга $\breve{AZ}$. Из сравнения прямоугольных треугольников $ZA\bar{Z}$ и $Z'A'\bar{Z}'$, для которых $ZA \leqslant Z'A'$ и $Z\bar{Z} \geqslant Z'\bar{Z}'$, вытекает неравенство для углов: $\angle ZA\bar{Z} < \angle Z'A'\bar{Z}'$. (В случае сферического пространства кривизны единица наш выбор дуги $\breve{AZ}$ обеспечивает неравенства $\breve{A'Z'} \leqslant \breve{AZ} \leqslant \frac{\pi}{2}$. Кроме того, $Z'\bar{Z}' \leqslant Z\bar{Z} \leqslant \frac{\pi}{2}$). Это ведет к противоречию с условиями леммы. Действительно, для любой пары точек X и Y, где $X \in \breve{AZ}$, а $Y \in L^-$, близких к A, и соответствующих им точек на L' выполняются соотношения

$$\angle XAY = \angle XAZ + \angle ZAB + \angle BAY > \angle X'A'Z' + \angle Z'A'B' + \\ + \angle B'A'Y' + \varepsilon \geqslant \angle X'A'Y' + \varepsilon,$$

поскольку $\angle ZAB > \angle Z'A'B' + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ не зависит от выбора точек X и Y, и по лемме 5, применяемой к парам кривых $\breve{AZ}$ и $\breve{A'Z'}$, L^- и L'^-, имеем $\angle XAZ \geqslant \angle X'A'Z'$ и $\angle BAY \geqslant \angle B'A'Y'$. Неравенство $\angle XAY \geqslant \angle X'A'Y' + \varepsilon$ означает, что для точек X и Y, близких к A и от нее равноудаленных, $XY > X'Y'$. Последнее соотношение невозможно, а поэтому надо принять, что кривые L^+ и L'^+ конгруэнтны. Отсюда легко заключается, что конгруэнтны и кривые L, L'.

Лемма доказана.

Замечание. Более общее предложение по отношению к этой лемме содержится в теореме о «скручивании». Утверждение леммы справедливо в том случае, если L' получается из L изометрической деформацией с локальными растяжениями или такой изометрической деформацией, в которой вариации поворотов дуг L при переходе к L' не возрастают.

3. Теорема о «скручивании».

Теорема 1. *Если при изометрической деформации выпуклой кривой (для случая сферического пространства — вмещаемой в открытую полуплоскость) вариации поворотов дуг не возрастают или если деформация сопровождается локальными растяжениями в пространстве, то замыкающая хорда кривой по длине не уменьшается. Длина хорды сохраняется лишь в том случае, если деформация сводится к движению.*

Доказательство. Пусть L — исходная кривая, L' — результат деформации L.

Предположим, что деформация сопровождается локальными растяжениями в пространстве. Впишем в кривую L правильно ломаную C, концы которой совпадают с концами кривой, звенья которой замыкают нормально проектирующиеся на них дуги. Обозначим C' ломаную, вписанную в L' и соответствующую C по изометрии $L \leftrightarrow L'$. Учитывая следствие леммы 5, легко заметить, что углы ломаной C не превосходят соответствующих углов для C'. Ломаную C' можно слегка деформировать, уменьшая (при необходимости) ее звенья и сохраняя углы между ними, чтобы получить новую ломаную, изометричную C в прежнем соответствии вершин, удовлетворяющую вместе с C условиям первой леммы. Эта деформация C', оказывается, подбирается таким образом, что расстояние между концами ломаной изменяется не более, чем на $N\varepsilon$, где ε — разность длин C' и C, а N определяется лишь длиной L (для евклидова и сферического пространств $N \equiv 1$). Отсюда следует вывод: замыкающая хорда кривой L по длине, — а значит и любая ее хорда, — не превосходит соответствующей хорды L'. Если длины хорд, замыкающих L и L', окажутся равными, то мы поступаем следующим образом. Дополняем кривые указанными хордами до замкнутых и распространяем на замкнутые кривые изометрию $L \leftrightarrow L'$; замкнутые кривые, как нетрудно заметить, удовлетворяют условиям леммы 6, и на основании этой леммы обнаруживается конгруэнтность L, L'.

Случай, когда для деформации $L \to L'$ выполняется первое из тех условий, что указываются в теореме, — вариации поворотов дуг L не возрастают, сводится к уже рассмотренному. Именно устанавливается, что утверждение теоремы (за исключением предложения о конгруэнтности) справедливо для кривых с малыми длинами и малыми вариациями поворотов в пространстве. При малых параметрах, на основании следствия первой леммы, можно ограничиться выпуклыми кривыми, а последние приближаются изометричными ломаными, удовлетворяющими условиям леммы 1. Здесь учитывается следующее обстоятельство: изометричные выпуклые кривые с равными поворотами на соответствующих дугах конгруэнтны. Эта однозначная определенность выводится из интегрального представления координат кривой (точнее — системы интегральных уравнений, связывающих повороты дуг и координаты текущих точек), аналогичного известному для случая евклидовой плоскости. Оно устанавливается путем приближения общей кривой регулярными выпуклыми кривыми, если исходить из выражения для геодезической кривизны последних.

Теорема доказана.

Теорема 2. *При любой изометрической деформации кривой с ограниченной вариацией поворота, сопровождающейся локальными растяжениями в пространстве, вариации поворотов дуг кривой не возрастают, и результатом деформации оказывается кривая также с ограниченной вариацией поворота.*

Доказательство. Пусть L — исходная кривая, L' — результат ее деформации. Можно считать, что длина L и вариация поворота в пространстве достаточно малые. Тогда, кроме этого (учитывая следствие леммы 1), можно принять, что L — плоская выпуклая кривая. Пусть C' ломаная, правильно вписанная в L', а C — ломаная, вписанная в L, соответствующая C' по изометрии $L \leftrightarrow L'$. На основании следствия леммы 5 находим, что углы ломаной C не превосходят соответствующих углов C'. Этим устанавливается, что вариация поворота ломаной C' не превосходит вариации поворота C. Отсюда вытекает утверждение теоремы.

Теорема доказана.

4. Приложения

Теорема 3. *Пусть L — кривая, отличная от дуги окружности, с удельной кривизной, не большей $\varkappa$, где $\varkappa > 0$ и $\varkappa > \sqrt{-K}$ для случая K — плоскости Лобачевского, и с расстоянием d между концами, меньшим диаметра окружности $C_\varkappa$. Тогда L либо длиннее большей, либо короче меньшей дуги $C_\varkappa$, стягиваемой хордой d.*

Эта теорема — прямое следствие теоремы 1.

Теорема 4. *Пусть L — замкнутая выпуклая кривая, отличная от окружности. Предположим, что удельная кривизна кривой L не меньше $\varkappa$, где $\varkappa > 0$ и $\varkappa > \sqrt{-K}$ для случая K — плоскости Лобачевского. Тогда кривизна наименьшей окружности, описанной вокруг L, больше $\varkappa$; в окружности $C_\varkappa$ кривая L допускает свободное качение, причем общая часть кривой и окружности всегда связна и меньше половины $C_\varkappa$.*

Для доказательства теоремы достаточно убедиться в возможности локального вложения кривой в окружность с кривизной $\varkappa$. Из этого факта, который устанавливается ниже, утверждения теоремы получаются достаточно просто, и мы их выводить не будем.

Пусть X — произвольная точка L. Предположим, что $X \in C_\varkappa$, что касательная к $C_\varkappa$ в X — опорная прямая к L и что L и $C_\varkappa$ по отношению к этой касательной расположены в одной полуплоскости. Утверждается, что малая окрестность X на L находится в замкнутом круге, ограниченном $C_\varkappa$.

В противном случае существуют дуги $L(X) \subset L$ и $C_\varkappa(X) \subset C_\varkappa$, примыкающие к точке X, касающиеся в этой точке, и точка $Y \in L(X)$, лежащая вне $C_\varkappa$ и близкая к X. Пусть λ — общая полукасательная в X к этим дугам, а $Y_\varkappa$ — точка $C_\varkappa(X)$, удаленная вдоль дуги от X, на расстояние, равное расстоянию Y от X вдоль $L(X)$. По следствию леммы 5, примененному к дугам $\breve{XY} \subset L(X)$ и $\breve{XY_\varkappa} \subset C_\varkappa(X)$, хорда XY наклонена к полукасательной λ под углом, не меньшим угла наклона к λ хорды $XY_\varkappa$. Отсюда, учитывая что Y находится вне $C_\varkappa$, следует неравенство $XY > XY_\varkappa$, противоречащее, однако, теореме 1.

Подобное обстоятельство (о локальном вложении) используется и в доказательстве следующей теоремы, аналогичной в первой своей части теореме 4.

Теорема 5. *Пусть L — замкнутая выпуклая кривая, отличная от окружности. Предположим, что удельная кривизна кривой L не больше $\varkappa$ и больше $\sqrt{-K}$ для случая K — плоскости Лобачевского. Тогда кривизна наибольшей окружности, вписанной в L, меньше $\varkappa$; окружность $C_\varkappa$ в кривой L допускает свободное качение, причем общая часть кривой и окружности всегда связна и меньше половины $C_\varkappa$. Предположим, что удельная кривизна кривой не больше $\varkappa$. Тогда кривизна наибольшей окружности, вписанной в L, также не больше $\varkappa$; для каждого диаметра замкнутой области, ограниченной кривой L, существуют окружности с кривизной $\varkappa$, вложенные в эту область, касающиеся L в концах диаметра.*

Условия в формулировках теоремы 4 и теоремы 5, относящиеся к плоскости Лобачевского, вызваны следующим фактом, существенным в доказательствах.

Кривые с постоянной геодезической кривизной в K-плоскости Лобачевского разбиваются на три класса; с кривизной $> \sqrt{-K}$ окружности, с кривизной $= \sqrt{-K}$-орициклы, и с кривизной $< \sqrt{-K}$ — эквидистанты прямых линий.

В заключение заметим, что для плоскости, отличной от сферической, для бесконечных кривых в этой плоскости имеются предложения, аналогичные теоремам 4 и 5. При этом в плоскости Лобачевского в качестве кривых сравнения можно брать не только окружности, а и эквидистанты и орициклы.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Бляшке. Дифференциальная геометрия. ОНТИ НКТП, М. — Л., 1935.
2. В. Бляшке. Круг и шар. Изд-во «Наука», М., 1967.
3. H. Karcher. Umkreise und Inkreise Kurven in der sphärischen und der hyperbolischen Geometrie. Math. Annalen 177, 122—132 (1968).
4. А. В. Погорелов. Внешняя геометрия выпуклых поверхностей. Изд-во «Наука», М., 1969.

Поступила 16 мая 1969 г.

УКРАИНСКИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК

Выпуск 8 1970

О КРИВЫХ В n-МЕРНОМ ЭКВИЦЕНТРОАФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

А. П. Мокляк

(Умань)

В работе [1] Я. С. Дубнов с помощью векторно-дублетного алгоритма и одномерного тензорного исчисления построил эквицентроаффинную геометрию кривых на плоскости. В [2, 3] построены с помощью этого же метода основные понятия теории кривых-торсов в трехмерном эквицентроаффинном пространстве E_n. Представляет определенный интерес обобщить некоторые понятия из обеих теорий на n-мерное эквицентроаффинное пространство E_n.

1. Рассмотрение начнем в проективном n-мерном пространстве [4]. Выделим из него центроаффинное n-мерное пространство E_n путем фиксации некоторой точки O и неинцидентной с ней гиперплоскости ω, а также путем удаления из проективного n-пространства подпространств, инцидентных фиксированным элементам.

Подпространства, инцидентные фиксированным элементам, будем считать несобственными.

Между точками E_n и векторами n-мерного векторного пространства B_n [5] устанавливается взаимно-однозначное соответствие: вектор $\boldsymbol{a} \in B_n$ и точка $M \in E_n$ соответствуют друг другу в том и только в том случае, когда $\boldsymbol{a} = \overline{OM}$, где O — фиксированная точка — центр пространства.

В центроаффинном, а значит, и в эквицентроаффинном пространстве E_n сохраняется проективное свойство полной двойственности предложений относительно точек и гиперплоскостей, прямых и $(n-2)$-мерных плоскостей, m-мерных плоскостей и $(n-m-1)$-мерных плоскостей, а также слов «лежит на» и «проходит через» [6].

Двойственным аналогом вектора как упорядоченной пары обыкновенных точек, первой из которых всегда служит фиксированная точка O, а вторая не лежит в гиперплоскости ω, служит дублет — упорядоченная пара обыкновенных гиперплоскостей, первой из которых («начало дублета») служит фиксированная гиперплоскость ω, а вторая («край дублета») не проходит через точку O. Вследствие такого соглашения символ вектора $(\boldsymbol{a})$ в центроаффинном n-мерном пространстве одновременно рассматривается и как символ обыкновенной точки, а символ дублета $(\overline{\overline{\boldsymbol{a}}})$ — как символ обыкновенной гиперплоскости. Следовательно, условие $\boldsymbol{a}\overline{\overline{\boldsymbol{a}}} = 0$ является условием параллельности вектора $\boldsymbol{a}$ и гиперплоскости $\overline{\overline{\boldsymbol{a}}}$, а равенство $\boldsymbol{a}\overline{\overline{\boldsymbol{a}}} = 1$ выражает тот факт, что конец радиуса-вектора $\boldsymbol{a}$ лежит в гиперплоскости $\overline{\overline{\boldsymbol{a}}}$ [7].

Для каждых n линейно независимых векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ мы можем отыскать n взаимных им дублетов $\overline{\overline{\boldsymbol{a}}}^1, \overline{\overline{\boldsymbol{a}}}^2, \ldots, \overline{\overline{\boldsymbol{a}}}^n$ в смысле формулы:

$$\boldsymbol{a}_i\overline{\overline{\boldsymbol{a}}}^j = \delta_i^j, \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n). \tag{1}$$

Базис n-мерного центроаффинного пространства E_n состоит из n произвольно выбранных линейно независимых векторов $\boldsymbol{e}_i = \overline{OE}_i$ и взаимных с ними дублетов $\overline{\overline{\boldsymbol{e}}}^i$

Чтобы построить систему координат в E_n, проведем оси всех базисных векторов до пересечения с гиперплоскостью ω в несобственных точках X_i (назовем их OX_1, $OX_2, \ldots$, OX_n — оси координат), плоскости, содержащие попарно эти оси, трехмерные пространства, содержащие эти оси по три и т. д. до $(n-1)$-мерных пространств, содержащих по $n-1$ осей каждая. Полученная фигура совместно с базисными дублетами дает основную координатную фигуру n-мерного центроаффинного пространства E_n.

Поскольку в n-мерном проективном пространстве p-мерное и g-мерное подпространства $(p \leqslant g < n,\ p+g+1 \geqslant n)$ общего расположения, т. е. не лежащие в пространстве меньшего, чем n числа измерений, пересекаются по подпространству $r = p+g-n$ измерений [4], то в нашем центроаффинном пространстве E_n прямая пересекается с гиперплоскостью в собственной или несобственной точке.

Пусть проведенные через произвольную точку $\boldsymbol{r}(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ параллельно базисным дублетам n гиперплоскостей пересекают оси координат соответственно в точках M_1, $M_2, \ldots$, M_n; тогда $x^i = (O,\ X_i;\ M_i,\ E_i)$. Для нахождения координат произвольной гиперплоскости $\overset{=}{r}(x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n)$, проходящей через точку $\boldsymbol{r}(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, находим точки T_1, $T_2, \ldots$, T_n ее пересечения с координатными осями; тогда $x_i = (O,\ X_i;\ E_i,\ T_i)$.

2. В эквицентроаффинном пространстве E_n, как и в любом его подпространстве, кривая может рассматриваться как однопараметрическое семейство точек.

Рассмотрим параметрически заданную кривую

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t), \quad t_1 \leqslant t \leqslant t_2, \tag{2}$$

где $\boldsymbol{r}(t)$ — n раз непрерывно дифференцируемая вектор-функция параметра t, причем производная $\boldsymbol{r}_1 = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ ни в одной точке не обращается в нуль. В том случае, когда в точке M кривой векторы $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_{11}, \ldots$, $\boldsymbol{r}_{n-1}$ линейно независимы (других точек здесь мы не рассматриваем), с точкой M связывается отличное от нуля число, равное знакопеременному произведению этих векторов:

$$\underset{1}{g} = (\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_{11} \ldots \boldsymbol{r}_{n-1}). \tag{3}$$

При эквицентроаффинных преобразованиях

$$\overset{*}{x}{}^j = B^j_s x^s,\ \det(B^i_j) = 1, \tag{4}$$

пространства E_n произведение (3) сохраняется. Нетрудно видеть, что при переходе к новому параметру $\overset{*}{t}$ оно ведет себя как одномерный тензор валентности $N = \frac{n(n-1)}{2}$. Под одномерным тензором мы понимаем такую функцию одного параметра (у нас — функция точки на кривой), которая при переходе от параметра t к параметру $\overset{*}{t}$ умножается на некоторую степень производной $\frac{dt}{d\overset{*}{t}}$. Если тензор преобразуется по закону

$$\overset{*}{T} = T\left(\frac{dt}{d\overset{*}{t}}\right)^N, \tag{5}$$

то число N называется валентностью тензора [1].

Так как одномерный скалярный тензор $\underset{1}{g}$ инвариантен при эквицентроаффинных преобразованиях, то выражение

$$\underset{1}{s}(t) = \int_{t_1}^{t_2} \left| \underset{1}{g} \right|^{\frac{2}{n(n-1)}} dt \tag{6}$$

будет функцией точки на кривой, не зависящей от выбора параметра и не изменяющейся при эквицентроаффинных преобразованиях кривой $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$. Эта *функция* (6) *на кривой в n-мерном эквицентроаффинном пространстве играет роль ее эквицентроаффинной длины дуги первого рода или эквицентроаффинного натурального параметра первого рода.*

При $n = 2$ или $n = 3$ получаем, как частный случай, эквицентроаффинный натуральный параметр σ плоской кривой в E_2 ([1], формула (14)) или эквицентроаффинный натуральный параметр $\underset{1}{s}$ первого рода для неплоской кривой в E_3 ([2], формула (12)).

3. Одномерный скалярный тензор (3) будем называть основным тензором первого рода на кривой в n-мерном эквицентроаффинном пространстве E_n. Используем его для «ковариантного дифференцирования первого рода». Именно

$$\underset{1}{\Gamma} \equiv \frac{2}{n(n-1)} \frac{d}{dt} \left(\ln \underset{1}{g} \right) \tag{7}$$

есть порождаемый тензором $\underset{1}{g}$ объект Христофеля первого рода,

а

$$\overset{1}{\nabla}{}^t_1 T = \frac{dT}{dt} - N \underset{1}{\Gamma} T \tag{8}$$

ковариантная производная первого рода тензора (5) по параметру t, имеющая $(N+1)$-ю валентность.

Так как вдоль кривой (2) векторы $\boldsymbol{r}(t)$ образуют одномерное тензорное поле нулевой валентности, то векторы $\overset{1}{\nabla}{}^t_1 \boldsymbol{r}$ образуют тензорное поле первой валентности. От этого векторного поля можно в свою очередь вычислить ковариантную производную первого рода $\overset{1}{\nabla}{}^t_1 \left(\overset{1}{\nabla}{}^t_1 \boldsymbol{r} \right)$, которую мы будем обозначать $\overset{1}{\nabla}{}^t_2 \boldsymbol{r}$, и т. д. Выпишем последовательность векторов

$$\overset{1}{\nabla}{}^t_1 \boldsymbol{r},\ \overset{1}{\nabla}{}^t_2 \boldsymbol{r}, \ldots,\ \overset{1}{\nabla}{}^t_{n-1} \boldsymbol{r} \tag{9}$$

в какой-нибудь точке $M(t)$ кривой.

Введем понятие m-мерной ($m \leqslant n-1$) соприкасающейся плоскости кривой (2) в n-мерном эквицентроаффинном пространстве. Это — плоскость, проходящая через точку $M(t)$ параллельно первым m векторам (9).

В частности, первая соприкасающаяся плоскость совпадает просто с касательной, а вторая — с двумерной соприкасающейся плоскостью линии $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ в n-мерном аффинном пространстве ([7], стр. 128). При $m = n-1$ имеем соприкасающуюся гиперплоскость.

Всего в точке имеется $n-1$ соприкасающихся плоскостей ($m = 1, 2, \ldots, n-1$), причем при $g > p$ соприкасающаяся g-плоскость проходит через соприкасающуюся p-плоскость.

4. Будем рассматривать кривую (2) вместе с ее соприкасающимися гиперплоскостями $\overset{=}{\boldsymbol{r}}$. Параметр t введем таким образом, чтобы одному и тому же его значению всегда соответствовали точка $\boldsymbol{r}(t)$ и соприкасающаяся гиперплоскость $\overset{=}{\boldsymbol{r}}(t)$ именно в этой точке. Теперь на каждой точке кривой в n-мерном эквицентроаффинном пространстве определится двой-

ственный к (3) и той же валентности одномерный тензор второго рода

$$\underset{2}{g} = \left(\bar{\bar{r}}\bar{\bar{r}}_1 r_{11} \dots \bar{\bar{r}}_{n-1}\right), \tag{10}$$

который мы тут же можем использовать как для ковариантного дифференцирования второго рода вдоль кривой, так и образования двойственного к (6) выражения:

$$\underset{2}{s}(t) = \int_{t_1}^{t_2} \left|\underset{2}{g}\right|^{\frac{2}{n(n-1)}} dt, \tag{11}$$

играющего для кривой в n-мерном эквицентроаффинном пространстве роль *эквицентроаффинной длины дуги второго рода или эквицентроаффинного натурального параметра второго рода.*

При $n = 2$ или $n = 3$ двойной инвариант (11) (как относительно выбора параметра, так и относительно эквицентроаффинных преобразований (4)) совпадает с эквицентроаффинным натуральным параметром $\hat{\sigma}$ для плоской кривой в E_2 ([1], формула (14)) или с эквицентроаффинным натуральным параметром второго рода для неплоской кривой в E_3 ([2], формула (23)).

5. С каждой точкой кривой в эквицентроаффинном n-мерном пространстве ассоциируются две пары взаимных реперов:

1-ая пара

векторный $\left(\boldsymbol{r},\ \overset{1}{\nabla}{}^t_1\boldsymbol{r}, \dots,\ \overset{1}{\nabla}{}^t_{n-1}\boldsymbol{r}\right)$,

2-я пара

взаимный ему дублетный $\left(\bar{\bar{\boldsymbol{r}}},\ \bar{\bar{\boldsymbol{r}}}^{(1)}, \dots,\ \bar{\bar{\boldsymbol{r}}}^{(n-1)}\right)$;

дублетный $\left(\bar{\bar{\boldsymbol{r}}},\ \overset{1}{\nabla}{}^t_1\bar{\bar{\boldsymbol{r}}}, \dots,\ \overset{1}{\nabla}{}^t_{n-1}\bar{\bar{\boldsymbol{r}}}\right)$,

взаимный ему векторный $(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{r}^{(1)}, \dots,\ \boldsymbol{r}^{(n-1)})$;

Можно показать, что знакопеременное произведение векторов первой пары реперов равно основному одномерному тензору $\underset{1}{g}$, т. е.

$$\left(\overset{1}{\nabla}{}^t_0\boldsymbol{r}\overset{1}{\nabla}{}^t_1\boldsymbol{r} \dots \overset{1}{\nabla}{}^t_{n-1}\boldsymbol{r}\right) = \underset{1}{g}, \tag{12}$$

откуда

$$\left(\overset{1}{\nabla}{}^t_0\boldsymbol{r}\overset{1}{\nabla}{}^t_1\boldsymbol{r} \dots \overset{1}{\nabla}{}^t_{n-2}\boldsymbol{r}\overset{1}{\nabla}{}^t_n\boldsymbol{r}\right) = 0, \tag{13}$$

или

$$\overset{1}{\nabla}{}^t_n\boldsymbol{r} + \overset{1}{\lambda}_i\overset{1}{\nabla}{}^t_i\boldsymbol{r} = 0, \ \left(\begin{matrix}\text{суммирование}\\ \text{по } i = 0,\ 1, \dots,\ n-2\end{matrix}\right). \tag{14}$$

Умножая скалярно правую и левую часть дифференциального уравнения (14) на внешнее произведение $\left[\overset{1}{\nabla}{}^t_0,\ \boldsymbol{r} \dots \overset{1}{\nabla}{}^t_{i-1}\boldsymbol{r}\overset{1}{\nabla}{}^t_{i+1}\boldsymbol{r} \dots \overset{1}{\nabla}{}^t_{n-1}\boldsymbol{r}\right]$ векторов первой пары реперов, найдем:

$$\overset{1}{\lambda}_i = \frac{\left(\overset{1}{\nabla}{}^t_0\boldsymbol{r}\overset{1}{\nabla}{}^t_1\boldsymbol{r} \dots \overset{1}{\nabla}{}^t_{n-1}\boldsymbol{r}\right)\overset{1}{\nabla}{}^t_n\boldsymbol{r}}{\underset{1}{g}\overset{1}{\nabla}{}^t_i\boldsymbol{r}}, \ (i = 0,\ 1, \dots,\ n-2). \tag{15}$$

Так как при умножении тензоров валентности их складываются, то нетрудно подсчитать, что коэффициенты $\overset{1}{\lambda}_i$ представляют собой одномерные скалярные тензоры валентности

$$N_i = n - i. \tag{16}$$

Из них и тензора $\underset{1}{g}$ образуем тензоры нулевой валентности

$$\overset{1}{k}_i = \overset{1}{\lambda}_i \underset{1}{g}^{-\frac{2(n-i)}{n(n-1)}}, \quad (i = 0,\ 1, \dots ,\ n-2). \tag{17}$$

Величину $\overset{1}{k}_i$, эквицентроаффинно инвариантным образом связанную с кривой в n-мерном эквицентроаффинном пространстве E_n, будем называть i-й эквицентроаффинной кривизной первого рода.

В частности, в двумерном эквицентроаффинном пространстве кривая, как показывает формула (17), имеет только одну 0-кривизну. Она совпадает с векторной эквицентроаффинной кривизной, введенной в центроаффинную теорию плоских кривых Дубновым [1]. В самом деле, последовательно рассматривая формулы (12), (15) и (17), при $n = 2$ получим:

$$\underset{1}{g} = \left(\overset{1}{\nabla}{}^t_0 \boldsymbol{r} \overset{1}{\nabla}{}^t_1 \boldsymbol{r}\right); \ \overset{1}{\lambda}_0 = g^{-1}\left(\overset{1}{\nabla}{}^t_1 \boldsymbol{r} \overset{1}{\nabla}{}^t_2 \boldsymbol{r}\right);$$

$$\overset{1}{k}_0 = \frac{(\boldsymbol{r}_1 \boldsymbol{r}_{11})}{(\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}_1)^3}, \tag{18}$$

что совпадает с формулой (19) работы [1].

Далее, при $n = 3$ формулы (12), (15) и (17) дают

$$\overset{1}{\lambda}_0 = \frac{\left(\overset{1}{\nabla}{}^t_1 \boldsymbol{r} \overset{1}{\nabla}{}^t_2 \boldsymbol{r} \overset{1}{\nabla}{}^t_3 \boldsymbol{r}\right)}{\underset{1}{g}}; \ \overset{1}{\lambda}_1 = \frac{\left(\overset{1}{\nabla}{}^t_0 \boldsymbol{r} \overset{1}{\nabla}{}^t_2 \boldsymbol{r} \overset{1}{\nabla}{}^t_3 \boldsymbol{r}\right)}{\underset{1}{g}}. \tag{19}$$

$$\overset{1}{k}_0 = \frac{\overset{1}{\lambda}_0}{\underset{1}{g}}; \ \overset{1}{k}_1 = \frac{\overset{1}{\lambda}_1}{\underset{1}{g}^{\frac{2}{3}}}, \tag{20}$$

т. е. для кривой в трехмерном эквицентроаффинном пространстве E_3 $\overset{1}{k}_0$ и $\overset{1}{k}_1$ представляют собой не что иное как соответственно эквицентроаффинное кручение и кривизну первого рода, которые мы рассматривали в работе [2] (формулы (21), (22)).

Двойственным образом получаем для кривой в n-мерном эквицентроаффинном пространстве E_n ее *i-е эквицентроаффинные кривизны второго рода:*

$$\overset{2}{k}_i = \overset{2}{\lambda}_i \underset{2}{g}^{-\frac{2(n-i)}{n(n-1)}}, \quad (i = 0,\ 1, \dots ,\ n-2), \tag{21}$$

где $\underset{2}{g}$, $\overset{2}{\lambda}_i$ — величины соответственно двойственные (12) *и* (15).

Отсюда, например, для кривой в двумерном эквицентроаффинном пространстве E_2 легко получаем выражение

$$\overset{2}{k}_0 = \frac{\left(\overset{=}{r}_1 \overset{=}{r}_{11}\right)}{\left(\overset{=}{r}\, \overset{=}{r}_1\right)^3}, \tag{22}$$

совпадающее с дублетной эквицентроаффинной кривизной кривой в эквицентроаффинной геометрии кривых на плоскости (формула (20) работы [1]).

Заметим также, что для кривой в E_3 получаем из (21) выражения $\overset{2}{k}_0$ и $\overset{2}{k}_1$, совпадающие соответственно с эквицентроаффинным кручением и кривизной второго рода $\underset{2}{\varkappa}$ и $\underset{2}{k}$ ([2], формулы (25, 24)).

6. Отнесем кривую в n-мерном эквицентроаффинном пространстве E_n к ее натуральному параметру первого рода (6). Тогда ассоциированные с каждой точкой кривой обе пары реперов (см. пункт 5) пронормируются эквицентроаффинно инвариантным образом. Обозначим векторы первой

пары реперов последовательно через $\boldsymbol{t}_1, \boldsymbol{t}_2, \ldots, \boldsymbol{t}_n$. Из формулы (6) и (12) будем иметь:

$$\underset{1}{g}\binom{s}{1} = (\boldsymbol{t}_1\boldsymbol{t}_2 \ldots \boldsymbol{t}_n) = \pm 1. \tag{23}$$

Изменяя в случае необходимости ориентацию координатных векторов, будем считать, что

$$\underset{1}{g}\binom{s}{1} = +1. \tag{24}$$

Векторы $\boldsymbol{t}_p$, которые в силу (24) во всех точках кривой независимы, могут служить базисом n-мерного пространства E_n. Они и взаимные им дублеты составляют сопровождающий базис первого рода кривой в n-мерном эквицентроаффинном пространстве.

Ось вектора $\boldsymbol{t}_1 = \boldsymbol{r}$ назовем первой эквицентроаффинной нормалью к нашей кривой в данной ее точке.

Прямая, проходящая через данную точку кривой, параллельно вектору $\boldsymbol{t}_2$, будет касательной. *Прямые же, проходящие через данную точку кривой, параллельно векторам $\boldsymbol{t}_3, \boldsymbol{t}_4, \ldots, \boldsymbol{t}_n$, будем называть* 2-й, 3-й, ..., $(n-1)$-й *эквицентроаффинными нормалями к нашей кривой.*

Из формулы (17), учитывая (24), получаем:

$$\overset{1}{k}_i\binom{s}{1} = \overset{1}{\lambda}_i\binom{s}{1}. \tag{25}$$

Следовательно, по (14) можно записать основное уравнение первого рода развиваемой здесь общей теории кривых в n-мерном эквицентроаффинном пространстве:

$$\overset{1}{\nabla}\overset{s}{\underset{n}{\overset{1}{}}}\boldsymbol{r} + \overset{1}{k}_i\binom{s}{1}\overset{1}{\nabla}\overset{s}{\underset{i}{\overset{1}{}}}\boldsymbol{r} = 0, \quad \left(\begin{matrix}\text{суммирование}\\ \text{по } i = 0, 1, \ldots, n-2\end{matrix}\right). \tag{26}$$

Легко усмотреть, что производная $\dfrac{d\boldsymbol{t}_p}{\underset{1}{ds}}$ произвольного сопровождающего базиса кривой равна $\boldsymbol{t}_{p+1}$ для всякого $p = 1, 2, \ldots, n-1$ и

$$\frac{d\boldsymbol{t}_n}{\underset{1}{ds}} = \overset{1}{\nabla}\overset{s}{\underset{n}{\overset{1}{}}}\boldsymbol{r}.$$

Отсюда, учитывая (26) и предыдущие обозначения, можно написать:

$$\begin{gathered}\frac{d\boldsymbol{t}_p}{\underset{1}{ds}} = \boldsymbol{t}_{p+1}, \ (p = 1, 2, \ldots, n-1),\\ \frac{d\boldsymbol{t}_n}{\underset{1}{ds}} = -\overset{1}{k}_i\binom{s}{1}\boldsymbol{t}_{i+1}, \quad \left(\begin{matrix}\text{суммирование}\\ \text{по } i = 0, 1, \ldots, n-2\end{matrix}\right).\end{gathered} \tag{27}$$

Формулы (27) назовем формулами Френе первого рода для кривой в n-мерном эквицентроаффинном пространстве.

В частности, для кривой в двумерном эквицентроаффинном пространстве из (27) получаем:

$$\begin{gathered}\frac{d\boldsymbol{t}_1}{\underset{1}{ds}} = \boldsymbol{t}_2;\\ \frac{d\boldsymbol{t}_2}{\underset{1}{ds}} = -\overset{1}{k}_0\boldsymbol{t}_1,\end{gathered} \tag{28}$$

что совпадает, отличаясь только обозначениями, с формулами Серре-Френе для плоской кривой ([7], стр. 84).

Заметим, что с точки зрения этой общей теории нам в работе [2] в формуле (29) векторы $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{n}$ следовало бы называть соответственно вектором первой эквицентроаффинной нормали и вектором эквицентроаффинной бинормали.

Двойственным образом, относя кривую к параметру (11), получаем двойственное к (26) основное уравнение второго рода общей теории кривых в n-мерном эквицентроаффинном пространстве:

$$\overset{2}{\nabla}{}^{\frac{s}{2}}_{n}\bar{\bar{\boldsymbol{r}}} + \overset{2}{k}_i\binom{s}{2}\overset{2}{\nabla}{}^{\frac{s}{2}}_{i}\bar{\bar{\boldsymbol{r}}} = 0, \quad (\text{суммирование по } i = 0,\ 1, \ldots,\ n-2) \qquad (29)$$

и формулы Френе второго рода

$$\frac{d\bar{\bar{\boldsymbol{t}}}_p}{d\underset{2}{s}} = \bar{\bar{\boldsymbol{t}}}_{p+1}, \quad (p = 1,\ 2, \ldots,\ n-1);$$

$$\frac{d\bar{\bar{\boldsymbol{t}}}_n}{d\underset{2}{s}} = -\overset{2}{k}_i\binom{s}{2}\bar{\bar{\boldsymbol{t}}}_{i+1}, \quad (\text{суммирование по } i = 0,\ 1, \ldots,\ n-2).$$

Имеет место, непосредственно вытекающая из формул Френе (27) и (30), **теорема**: *произвольные непрерывные функции*

$$k_0(s),\ k_1(s), \ldots,\ k_{n-2}(s)$$

некоторого аргумента s определяют кривую в n-мерном эквицентроаффинном пространстве с точностью до преобразования (4).

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. С. Дубнов. Центроаффинная геометрия кривых на плоскости. «Труды семинара по вект. и тенз. анализу», т. VIII (1950), Гостехиздат, стр. 106.
2. $\boxed{\text{А. П. Мокляк.}}$ Об эквицентроаффинных инвариантах пространственных кривых. «Укр. геометр. сб.», вып. 2. Изд-во ХГУ, Харьков, 1966, 70—76.
3. $\boxed{\text{А. П. Мокляк.}}$ К эквицентроаффинной теории неплоских кривых в E_3. «Укр. геометр. сб.», вып. 4. Изд-во ХГУ, Харьков, 1967, 49—55.
4. Д. З. Гордевский, А. С. Лейбин. Популярное введение в многомерную геометрию. Изд-во ХГУ, Харьков, 1964.
5. П. К. Рашевский. Риманова геометрия и тензорный анализ. Изд-во «Наука», М., 1967.
6. Б. А. Розенфельд. Многомерные пространства. Изд-во «Наука», М., 1967.
7. П. А. Широков и А. П. Широков. Аффинная дифференциальная геометрия. Физматгиз, М., 1959.

Поступила 21 ноября 1969 г.

Выпуск 8 1970

К ПРОЕКТИВНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ НЕГОЛОНОМНОЙ ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ

М. Р. Роговой

(Харьков)

Пусть M_0 — точка неголономной гиперповерхности S_{n-1} в n-мерном проективном пространстве P_n. Уравнения инфинитезимального перемещения репера первого порядка $M_0 M_1 M_2, \ldots, M_{n-1}, M_n$ (точки $M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}$ выбраны в касательной гиперплоскости)

$$dM_i = \omega_i^k M_k, \ (i, \ k = 0, \ 1, \ 2, \ \ldots, \ n). \tag{1}$$

Формы ω_i^k удовлетворяют уравнениям структуры проективного пространства [2]:

$$D\omega_i^k = \left[\omega_i^j \omega_j^k\right], \ \ (i, \ j, \ k = 0, \ 1, \ 2, \ \ldots, \ n). \tag{2}$$

Уравнение S_{n-1}

$$\omega_0^n = 0; \tag{3}$$

условия полной интегрируемости этого уравнения

$$\Gamma_{ij}^n = \Gamma_{ji}^n, \ \ (i, \ j = 1, \ 2, \ \ldots \ n-1) \tag{4}$$

не выполняются, где Γ_{ij}^n — коэффициенты в разложении

$$\omega_i^k = \Gamma_{ij}^k \omega_0^j, \ (i, \ k = 0, \ 1, \ 2, \ \ldots, \ n; \ j = 1, \ 2, \ \ldots, \ n). \tag{5}$$

1. Асимптотический конус неголономной гиперповерхности

Асимптотические линии неголономной гиперповерхности определяются из условия инцидентности точки

$$M^* = M_0 + dM_0 + \frac{1}{2} d^2 M_0$$

касательной гиперплоскости:

$$(M_0 M_1 M_2 \ \ldots \ M_{n-1} d^2 M_0) = 0. \tag{6}$$

Из (1), учитывая (3), находим

$$d^2 M_0 = \left(d\omega_0^k + \Gamma_{ij}^k \omega_0^i \omega_0^j\right) M_k + \Gamma_{ij}^n \omega_0^i \omega_0^j M_n, \tag{7}$$
$$(i, \ j, \ k = 1, \ 2, \ \ldots, \ n-1),$$

и для асимптотических линий получаем уравнение

$$\Gamma_{ij}^n \omega_0^i \omega_0^j = 0, \ \ (i, \ j, \ \ldots, \ n-1). \tag{8}$$

В точке M_0 уравнение (8) определяет коническую $(n-2)$-поверхность 2-го порядка — асимптотический конус неголономной гиперповерхности.

2. Полярное соответствие относительно асимптотического конуса

В координатах $x^0, \ x^1, \ x^2, \ \ldots, \ x^n$ относительно репера $M_0 M_1 M_2 \ldots M_n$ уравнение асимптотического конуса (8) перепишется так:

$$\Gamma_{ij}^n x^i x^j = 0, \ \ (i, \ j = 1, \ 2, \ \ldots, \ n-1). \tag{8'}$$

Этот конус позволяет установить соответствие в касательной к S_{n-1} гиперплоскости $x^n = 0$ между прямыми и $(n-2)$-плоскостями, инцидентными точке M_0; прямой

$$\frac{x^1}{\omega_0^1} = \frac{x^2}{\omega_0^2} = \ldots = \frac{x^{n-1}}{\omega_0^{n-1}} \tag{9}$$

соответствует полярная относительно конуса $(n-2)$ — плоскость

$$(\Gamma_{ij}^n + \Gamma_{ji}^n)\,\omega_0^i x^j = 0, \quad (i,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1). \tag{10}$$

Для голономной гиперповерхности, в силу (4), уравнение $(n-2)$-плоскости (10), отвечающей прямой (9) в полярном соответствии относительно конуса (8′), приобретает вид:

$$\Gamma_{ij}^n \omega_0^i x^j = 0, \quad (i,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1). \tag{10'}$$

3. Обобщенное соответствие Бомпиани

Для S_{n-1} в P_n может быть обобщено соответствие, которое для $n=3$ построил Бомпиани между связкой прямых с центром в точке M_0 и полем прямых в касательной плоскости неголономной поверхности [1].

Как известно, уравнение (3) ставит в соответствие каждой точке пространства P_n инцидентную ей гиперплоскость. Переместимся из точки M_0 в бесконечно близкую точку $M_0^* = M_0 + dM_0$ пространства, и прямой

$$(M_0 M_0^*) = (M_0 dM_0) = \omega_0^k (M_0 M_k), \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n) \tag{11}$$

поставим в соответствие $(n-2)$-плоскость пересечения соответствующих точкам M_0 и M_0^* гиперплоскостей

$$\begin{cases} (M_0 M_1 \ldots M_{n-1}), \\ (M_0^* M_1^* \ldots M_{n-1}^*) = (M_0 M_1 \ldots M_{n-1}) + d\,(M_0 M_1 \ldots M_{n-1}). \end{cases} \tag{12}$$

Если ввести обозначения

$$\mu_i = (M_0 M_1 \ldots M_{i-1} M_{i+1} \ldots M_n), \quad (i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{13}$$

тогда

$$d\mu_n = (\omega_0^0 + \omega_1^1 + \ldots + \omega_{n-1}^{n-1})\,\mu_n + \omega_{n-1}^n \mu_{n-1} - \omega_{n-2}^n \mu_{n-2} + \\ + \ldots + (-1)^{n-1} \omega_0^n \mu_0, \tag{14}$$

и $(n-2)$-плоскость, отвечающая прямой (11), как следует из (12), определится как пересечение гиперплоскостей

$$\begin{cases} \mu_n \\ \omega_{n-1}^n \mu_{n-1} - \omega_{n-2}^n \mu_{n-2} + \ldots + (-1)^{n-1} \omega_0^n \mu_0. \end{cases} \tag{12'}$$

В координатах относительно репера $M_0 M_1 \ldots M_n$ прямой

$$\frac{x^1}{\omega_0^1} = \frac{x^2}{\omega_0^2} = \ldots = \frac{x^n}{\omega_0^n} \tag{15}$$

отвечает $(n-2)$-плоскость

$$\begin{aligned} &x^n = 0, \\ &\omega_0^n x^0 + \omega_1^n x^1 + \ldots + \omega_{n-1}^n x^{n-1} = 0. \end{aligned} \tag{16}$$

Прямым, лежащим в касательной гиперплоскости $\mu_n\ (\omega_0^n = 0)$,

$$\frac{x^1}{\omega_0^1} = \frac{x^2}{\omega_0^2} = \ldots = \frac{x^{n-1}}{\omega_0^{n-1}}, \tag{17}$$

отвечают $(n-2)$-плоскости

$$\begin{gathered} x^n = 0, \\ \omega_1^n x^1 + \omega_2^n x^2 + \ldots + \omega_{n-1}^n x^{n-1} = 0, \end{gathered} \tag{18}$$

инцидентные точке M_0.

4. Инвариантные образующие асимптотического конуса

Ищем такую прямую (17), чтобы отвечающая ей $(n-2)$-плоскость (10) в полярном соответствии относительно асимптотического конуса и $(n-2)$-плоскость (18), отвечающая этой прямой в обобщенном соответствии Бомпиани, совпадали. Для этого должны выполняться следующие условия:

$$(\Gamma_{ij}^n + \Gamma_{ji}^n)\,\omega_0^i = k\omega_j^n, \quad (i,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1). \tag{19}$$

Или, обозначив $1-k=\lambda$ и, поменяв i и j местами,

$$(\Gamma_{ji}^n + \Gamma_{ij}^n\lambda)\,\omega_0^i = 0, \quad (i,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1). \tag{20}$$

Система однородных уравнений (20) имеет нетривиальное решение, если ее определитель равен нулю:

$$\left|\Gamma_{ji}^n + \Gamma_{ij}^n\lambda\right|_{i,\,j=1}^{n-1} = 0. \tag{21}$$

В общем случае все корни уравнения (21) простые и каждому корню λ_k, $(k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1)$ отвечает единственная прямая $\underset{k}{\omega_0^1} : \underset{k}{\omega_0^2} : \ldots : \underset{k}{\omega_0^{n-1}}$. Таким образом, в касательной гиперплоскости к S_{n-1} найдены $n-1$ инвариантных прямых, обладающих указанным свойством.

Отметим, что в случае четного $n = 2m$ один из корней уравнения (21) равен -1. Действительно, левая часть уравнения (21) при $\lambda = -1$ представляет собой в этом случае кососимметрический определитель нечетного порядка и, как известно, такой определитель равен нулю. Будем считать $\lambda_m = -1$.

Докажем теперь, что корню $\lambda_k \neq -1$ уравнения (21) отвечает прямолинейная образующая асимптотического конуса. В самом деле, прямая, отвечающая этому корню, определяется из системы (20), где положено $\lambda = \lambda_k$,

$$(\Gamma_{ji}^n + \Gamma_{ij}^n\lambda_k)\,\underset{k}{\omega_0^i} = 0, \quad (i,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1). \tag{20'}$$

Если умножить (20') на $\underset{k}{\omega_0^j}$ и просуммировать, получим

$$(1+\lambda_k)\,\Gamma_{ij}^n \underset{k}{\omega_0^i}\underset{k}{\omega_0^j} = 0, \quad (i,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1), \tag{22}$$

откуда и следует справедливость нашего утверждения.

Для нечетного n все $n-1$ инвариантных прямых — это образующие асимптотического конуса; для четного $n=2m$ исключение представляет прямая $\underset{m}{\omega_0^1} : \underset{m}{\omega_0^2} : \ldots : \underset{m}{\omega_0^{n-1}}$, отвечающая корню $\lambda_m = -1$.

Выберем точки $M_1,\ M_2,\ \ldots,\ M_{n-1}$ на этих инвариантных прямых. Это тотчас приводит, как следует из системы (20'), к следующим условиям:

$$\Gamma_{ji}^n + \Gamma_{ji}^n\lambda_j = 0, \quad (i,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1). \tag{23}$$

(по индексу j не суммировать).

Если в (23) поменять индексы i и j местами,

$$\Gamma^n_{ij} + \Gamma^n_{ji}\lambda_i = 0, \quad (i,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1), \tag{24}$$

умножить (23) на λ_i и вычесть (24), получим

$$\Gamma^n_{ij}(\lambda_i\lambda_j - 1) = 0, \ (i,\ j = 1, 2,\ \ldots,\ n-1). \tag{25}$$

При фиксированных i и j из (25) следует, что либо $\Gamma^n_{ij} = 0$, либо $\lambda_i\lambda_j = 1$. Нетрудно убедиться, что при соответствующей нумерации корней λ_i это приводит к следующим условиям:

$$\Gamma^n_{ij} = 0, \quad (i,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1;\ i + j \neq n), \tag{26}$$

$$\lambda_i \cdot \lambda_j = 1, \quad (i + j = n);$$

и из (23) и (26)

$$\lambda_k = -\frac{\Gamma^n_{k,\ n-k}}{\Gamma^n_{n-k,\ k}}, \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1). \tag{27}$$

Уравнение (8) асимптотического конуса приобретает вид

$$\Gamma^n_{k,\ n-k}\omega^k_0\omega^{n-k}_0 = 0, \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1), \tag{28}$$

или в координатах x^j

$$\Gamma^n_{k,\ n-k}x^k x^{n-k} = 0, \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1). \tag{28'}$$

Отсюда видно, что в случае четного $n = 2m$ прямая $M_0M_m\,(x^1 = x^2 = \ldots = x^{m-1} = x^{m+1} = \ldots = x^n = 0)$, отвечающая корню $\lambda_m = -1$, не принадлежит асимптотическому конусу (ведь $\Gamma^n_{mm} \neq 0$).

Полярная $(n-2)$-плоскость относительно асимптотического конуса (28'), отвечающая прямой $\omega^1_0 : \omega^2_0 : \ \ldots : \omega^{n-1}_0$, как следует из (10) и (26), запишется уравнением:

$$(\Gamma^n_{k,\ n-k} + \Gamma^n_{n-k,\ k})\,\omega^k_0 x^{n-k} = 0, \ (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1). \tag{29}$$

Инвариантной образующей (M_0M_k) асимптотического конуса, как следует из этого уравнения, отвечает $(n-2)$-плоскость $x^{n-k} = 0$, касательная к асимптотическому конусу. Эта $(n-2)$-плоскость в случае нечетного n содержит $n-2$ инвариантных образующих, кроме образующей (M_0M_{n-k}), а в случае четного $n = 2m$; $-n-3$ инвариантных образующих и инвариантную прямую (M_0M_m); прямой (M_0M_m) отвечает полярная $(n-2)$-плоскость, содержащая $n-2$ инвариантных образующих асимптотического конуса.

Для голономной гиперповерхности соответствие Бомпиани совпадает с полярным соответствием относительно асимптотического конуса, и приведенное здесь построение теряет смысл.

5. Фокальные образы S_{n-1}

Как отмечалось выше, в пункте 3, уравнение (3) определяет в каждой точке пространства P_n инцидентную ей гиперплоскость, т. е. определяет неголономное многообразие с образующим элементом «точка-гиперплоскость».

Рассмотрим инвариантную $(n-2)$-плоскость

$$(M_0M_1\ \ldots\ M_{\alpha-1}M_{\alpha+1}\ \ldots\ M_{n-1}).$$

При перемещении из точки M_0 вдоль некоторой линии L в P_n получим однопараметрическое семейство таких $(n-2)$-плоскостей. Ищем такую линию L, чтобы при перемещении вдоль нее бесконечно близкие плоскости

$$(M_0M_1 \ldots M_{\alpha-1}M_{\alpha+1} \ldots M_{n-1}), \tag{30}$$

$$(M_0M_1 \ldots M_{\alpha-1}M_{\alpha+1} \ldots M_{n-1}) + d(M_0M_1 \ldots M_{\alpha-1}M_{\alpha+1} \ldots M_{n-1}) \tag{30'}$$

принадлежали одной гиперплоскости; эту гиперплоскость, следуя М. А. Акивису [3], назовем фокальной гиперплоскостью. Касательную (M_0dM_0) к линии L назовем фокальной прямой.

Воспользовавшись (1), находим

$$\begin{aligned} d(M_0M_1 \ldots M_{\alpha-1}M_{\alpha+1} \ldots M_{n-1}) = \\ = (\omega_0^0 + \omega_1^1 + \ldots + \omega_{\alpha-1}^{\alpha-1} + \omega_{\alpha+1}^{\alpha+1} + \ldots + \omega_{n-1}^{n-1}) \times \\ \times (M_0M_1 \ldots M_{\alpha-1}M_{\alpha+1} \ldots M_{n-1}) + \omega_0^k (M_kM_1 \ldots M_{\alpha-1}M_{\alpha+1} \ldots M_{n-1}) + \\ + \omega_1^k (M_0M_k \ldots M_{\alpha-1}M_{\alpha+1} \ldots M_{n-1}) + \ldots + \\ + \omega_{n-1}^k (M_0M_1 \ldots M_{\alpha-1}M_{\alpha+1} \ldots M_{n-2}M_k), \ (k = \alpha, n). \end{aligned} \tag{31}$$

Рассмотрим пучок гиперплоскостей с $(n-2)$-мерной осью (30)

$$(M_0M_1 \ldots M_{\alpha-1}M_{\alpha+1} \ldots M_{n-1}, M_\alpha - tM_n). \tag{32}$$

Для того, чтобы $(n-2)$-плоскость $(30')$ принадлежала гиперплоскости (32), т. е. чтобы гиперплоскость (32) была фокальной, необходимо и достаточно выполнение следующих условий [3,4]:

$$\omega_i^n + t\omega_i^\alpha = 0, \ (i = 0, 1, 2, \ldots n), \tag{33}$$

или, учитывая (5),

$$(\Gamma_{ij}^n + t\Gamma_{ij}^\alpha)\,\omega_0^j = 0, \tag{34}$$

$$(i = 0, 1, 2, \ldots, \alpha - 1, \alpha + 1, \ldots, n-1; \ j = 1, 2, \ldots, n).$$

где Γ_{ij}^n удовлетворяют условиям (26) и, кроме того,

$$\Gamma_{0j}^n = \delta_j^n, \ \Gamma_{ij}^\alpha = \delta_j^\alpha,$$

(δ_j^n, δ_j^α — символы Кронекера).

Общее решение однородной системы (34) $n-1$ уравнений с n неизвестными:

$$\underset{\alpha}{\omega_0^j} = (-1)^j \underset{\alpha}{\Delta^j}(t)\,\lambda, \ (j = 1, 2, \ldots, n); \tag{35}$$

$\underset{\alpha}{\Delta^j}(t)$ — минор матрицы системы, получаемый вычеркиванием j-го столбца;

λ — произвольный множитель.

Уравнения (35) определяют двумерную коническую поверхность $(n-1)$-го порядка с вершиной в точке M_0 — фокальная коническая поверхность K_α неголономного многообразия. Параметр t определяет прямолинейную образующую K_α, параметр λ — положение точки на этой образующей.

Касательная гиперплоскость к S_{n-1} пересекает K_α по $n-1$ образующим, определяемым уравнением.

$$\underset{\alpha}{\Delta^n}(t) = 0. \tag{36}$$

6. Инвариантные прямолинейные образующие K_α

Запишем уравнения (35) конуса K_α в координатах $x^0, x^1, \ldots, x^n$ относительно репера $M_0M_1 \ldots M_n$:

$$\underset{\alpha}{x^j} = (-1)^j \underset{\alpha}{\Delta^j}(t)\,\lambda, \ (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{37}$$

Произвольная гиперплоскость пространства, проходящая через точку M_0 пересекает K_α по $n-1$ прямолинейным образующим. Если потребовать, чтобы все эти образующие совпадали, гиперплоскость становится соприкасающейся гиперплоскостью для K_α; ее уравнение:

$$\begin{vmatrix} X^1 & X^2 \dots X^n \\ \underset{\alpha}{x^1} & \underset{\alpha}{x^2} \dots \underset{\alpha}{x^n} \\ \underset{\alpha}{\dot{x}^1} & \underset{\alpha}{\dot{x}^2} \dots \underset{\alpha}{\dot{x}^n} \\ \dots & \dots \\ \underset{\alpha}{\overset{(n-2)}{x^1}} & \underset{\alpha}{\overset{(n-2)}{x^2}} \dots \underset{\alpha}{\overset{(n-2)}{x^n}} \end{vmatrix} = 0. \tag{38}$$

Потребуем, чтобы соприкасающаяся гиперплоскость (38) проходила через инвариантную прямую (M_0M_α); это приводит к условию:

$$\begin{vmatrix} \underset{\alpha}{x^1} & \underset{\alpha}{x^2} & \dots & \underset{\alpha}{x^{\alpha-1}} & \underset{\alpha}{x^{\alpha+1}} & \dots & \underset{\alpha}{x^n} \\ \underset{\alpha}{\dot{x}^1} & \underset{\alpha}{\dot{x}^2} & \dots & \underset{\alpha}{\dot{x}^{\alpha-1}} & \underset{\alpha}{\dot{x}^{\alpha+1}} & \dots & \underset{\alpha}{\dot{x}^n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \underset{\alpha}{\overset{(n-2)}{x^1}} & \underset{\alpha}{\overset{(n-2)}{x^2}} & \dots & \underset{\alpha}{\overset{(n-2)}{x^{\alpha-1}}} & \underset{\alpha}{\overset{(n-2)}{x^{\alpha+1}}} & \dots & \underset{\alpha}{\overset{(n-2)}{x^n}} \end{vmatrix} = 0. \tag{39}$$

Как следует из (37), $\underset{\alpha}{x^j}$ представляют собой многочлены $(n-1)$-ой степени относительно t; пусть $\lambda = 1$ и

$$\underset{\alpha}{x^j} = \underset{\alpha}{a^j_1} t^{n-1} + \underset{\alpha}{a^j_2} t^{n-2} + \dots + \underset{\alpha}{a^j_{n-1}} t + \underset{\alpha}{a^j_n}, \quad (j = 1, 2, \dots, n). \tag{40}$$

Подставив $\underset{\alpha}{x^j}$ и их производные из (40) в (39), после некоторых преобразований приходим к такому уравнению:

$$\sum_{p=0}^{n-1} (-1)^p C^p_{n-1} \det \left\| \underset{\alpha}{a^i_1}, \underset{\alpha}{a^i_2}, \dots, \underset{\alpha}{a^i_{n-p-1}}, \underset{\alpha}{a^i_{n-p+1}}, \dots, \underset{\alpha}{a^i_n} \right\| t^{n-p-1} = 0, \tag{41}$$
$$(i = 1, 2, \dots, \alpha - 1, \alpha + 1, \dots, n).$$

В общем случае уравнение (41) имеет $n-1$ различных корней $\underset{\alpha}{t_1}$, $\underset{\alpha}{t_2}, \dots, \underset{\alpha}{t_{n-1}}$; им отвечают $n-1$ инвариантных образующих конуса K_α:

$$\underset{\alpha}{x^j_k} = (-1)^j \underset{\alpha}{\Delta^j} (\underset{\alpha}{t_k}) \lambda, \quad (j = 1, 2, \dots, n;\ k = 1, 2, \dots, n-1). \tag{42}$$

Эти инвариантные образующие определяют инвариантную гиперплоскость, которая через них проходит:

$$\begin{vmatrix} X^1 & X^2 & \dots X^n \\ \underset{\alpha}{x^1_1} & \underset{\alpha}{x^2_1} & \dots \underset{\alpha}{x^n_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \underset{\alpha}{x^1_{n-1}} & \underset{\alpha}{x^2_{n-1}} & \dots \underset{\alpha}{x^n_{n-1}} \end{vmatrix} = 0. \tag{43}$$

7. Проективная нормаль S_{n-1}

Каждой инвариантной прямой (M_0M_α), $(\alpha = 1, 2, \dots, n-1)$ в касательной гиперплоскости μ_n к S_{n-1} отвечает инвариантная гиперплоскость

$\varkappa_\alpha$, определяемая уравнением (43). Эта гиперплоскость получена в результате такого построения: через прямую $(M_0 M_\alpha)$ проводятся соприкасающиеся гиперплоскости к конусу K_α (37); количество таких гиперплоскостей $(n-1)$ и они выделяют на K_α $n-1$ прямолинейных образующих (42), по которым они касаются конуса K_α. Эти $n-1$ образующих конуса K_α и определяют проходящую через них инвариантную гиперплоскость $\varkappa_\alpha$ ((43).

Гиперплоскости $\varkappa_\alpha$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, n-1)$ пересекаются по прямой, проходящей через точку M_0 и не лежащей в касательной гиперплоскости μ_n неголономной гиперповерхности S_{n-1}. Эту прямую назовем проективной нормалью S_{n-1}.

Выберем точку M_n репера на проективной нормали; тогда коэффициент при X^n в уравнении (43) обращается в нуль:

$$\begin{vmatrix} \underset{\alpha}{x_1^1} & \underset{\alpha}{x_1^2} & \ldots \underset{\alpha}{x_1^{n-1}} \\ \underset{\alpha}{x_2^1} & \underset{\alpha}{x_2^2} & \ldots \underset{\alpha}{x_2^{n-1}} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \underset{\alpha}{x_{n-1}^1} & \underset{\alpha}{x_{n-1}^2} & \ldots \underset{\alpha}{x_{n-1}^{n-1}} \end{vmatrix} = 0, \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{44}$$

Из (40) находим

$$\underset{\alpha}{x_k^j} = \underset{\alpha}{a_1^j} \underset{\alpha}{t_k^{n-1}} + \underset{\alpha}{a_2^j} \underset{\alpha}{t_k^{n-2}} + \ldots + \underset{\alpha}{a_{n-1}^j} \underset{\alpha}{t_k} + \underset{\alpha}{a_n^j}, \tag{45}$$
$$(j, k = 1, 2, \ldots, n-1)$$

и подставляем в (44).

По известной теореме Бине—Коши об определителях, условия (44) перепишутся так:

$$\sum_{p=0}^{n-1} \det \left\| \underset{\alpha}{a_1^j}, \underset{\alpha}{a_2^j}, \ldots, \underset{\alpha}{a_{n-p-1}^j}, \underset{\alpha}{a_{n-p+1}^j}, \ldots, \underset{\alpha}{a_n^j} \right\| \det \left\| 1, \underset{\alpha}{t_k}, \ldots \right.$$
$$\left. \ldots, \underset{\alpha}{t_k^{p-1}}, \underset{\alpha}{t_k^{p+1}}, \ldots, \underset{\alpha}{t_k^{n-1}} \right\| = 0, \tag{46}$$
$$(j, k, \alpha = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Определители вида

$$\det \| 1, t_k, \ldots, t_k^{p-1}, t_k^{p+1}, \ldots, t_k^{n-1} \|,$$

находящиеся под знаком суммы (46), как известно, приводятся к определителю Вандермонда

$$\det \| 1, t_k, t_k^2, \ldots, t_k^{n-2} \|$$

по формуле

$$\det \| 1, t_k, \ldots, t_k^{p-1}, t_k^{p+1}, \ldots, t_k^{n-1} \| = \det \| 1, t_k, t_k^2, \ldots, t_k^{n-2} \| s_{n-p-1}, \tag{47}$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n-1),$$

где s_{n-p-1} — сумма всевозможных произведений элементов $t_1, t_2, \ldots t_{n-1}$, взятых в количестве $n-p-1$.

С помощью (47) условия (46) перепишутся так:

$$\sum_{p=0}^{n-1} \det \left\| \underset{\alpha}{a_1^j}, \underset{\alpha}{a_2^j}, \ldots, \underset{\alpha}{a_{n-p-1}^j}, \underset{\alpha}{a_{n-p+1}^j}, \ldots, \underset{\alpha}{a_n^j} \right\| \underset{\alpha}{s_{n-p-1}} = 0, \tag{48}$$
$$(\underset{\alpha}{s_0} = 1), \quad (j, \alpha = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Симметрические функции $\underset{\alpha}{s}_{n-p-1}$, $(p = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$ корней уравнения (41) выражаются через коэффициенты этого уравнения:

$$\underset{\alpha}{s}_{n-p-1} = \frac{\det \left\| \underset{\alpha}{a}{}_1^i, \underset{\alpha}{a}{}_2^i, \ldots, \underset{\alpha}{a}{}_p^i, \underset{\alpha}{a}{}_{p-2}^i, \ldots, \underset{\alpha}{a}{}_n^i \right\|}{\det \left\| \underset{\alpha}{a}{}_1^i, \underset{\alpha}{a}{}_2^i, \ldots, \underset{\alpha}{a}{}_{n-1}^i \right\|}, \tag{49}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, \alpha - 1, \alpha + 1, \ldots, n).$$

Внося выражения для s_{n-p-1} из (49) в (48), получим условия совпадения прямой M_0M_n репера с проективной нормалью S_{n-1}:

$$\sum_{p=0}^{n-1} \det \left\| \underset{\alpha}{a}{}_1^j, \underset{\alpha}{a}{}_2^j, \ldots, \underset{\alpha}{a}{}_{n-p-1}^j, \underset{\alpha}{a}{}_{n-p+1}^j, \ldots, \underset{\alpha}{a}{}_n^j \right\| \times$$
$$\times \det \left\| \underset{\alpha}{a}{}_1^i, \underset{\alpha}{a}{}_2^i, \ldots, \underset{\alpha}{a}{}_p^i, \underset{\alpha}{a}{}_{p+2}^i, \ldots, \underset{\alpha}{a}{}_n^i \right\| = 0, \tag{50}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, \alpha - 1, \alpha + 1, \ldots, n; \; j, \alpha = 1, 2, \ldots, n-1).$$

8. Канонический репер S_{n-1}

Потребуем, чтобы точки $M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}$ репера лежали в $(n-2)$-плоскости, отвечающей проективной нормали (M_0M_n) в соответствии Бомпиани, определяемом (17) и (18). Так как прямой (M_0M_n)

$$\omega_0^1 = \omega_0^2 = \ldots = \omega_0^{n-1} = 0$$

отвечает в соответствии Бомпиани $(n-2)$-плоскость

$$x^0 + \Gamma_{1n}^n x^1 + \Gamma_{2n}^n x^2 + \ldots + \Gamma_{n-1,\,n}^n x^{n-1} = 0,$$

такое требование приводит к следующим условиям:

$$\Gamma_{in}^n = 0, \; (i = 1, 2, \ldots, n-1) \tag{51}$$

Итак, условия (26) фиксируют прямые $(M_0M_1), (M_0M_2), \ldots, (M_0M_n)$ репера, а условия (51) фиксируют точки $M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}$ на этих прямых. Условия (26) и (51) могут быть объединены и запишутся так:

$$\Gamma_{ij}^n = 0, \; (i = 1, 2, \ldots, n-1; \; j = 1, 2, \ldots, n; \; i + j \neq n). \tag{52}$$

Остаются еще произвольными выбор вершины M_n на проективной нормали и нормирование всех вершин репера. Этим можно добиться, чтобы

$$\omega_0^0 + \omega_1^1 + \ldots + \omega_n^n = 0, \tag{53}$$

и сделать равными нулю или единице некоторые коэффициенты Γ_{ij}^k [2].

Автор благодарит проф. Я. П. Бланка за помощь, оказанную при выполнении этой работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. E. Bompiani. Sulle Varietá analonome. Rend. dei Lincei, v. XXVII, F. 6, 1938.

2. С. П. Фиников. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. ОГИЗ, М., 1948.

3. М. А. Акивис. Фокальные образы поверхностей ранга r. «Изв. вузов, серия матем.», № 1 (1957), 9—19.

4. Е. Т. Ивлев, А. А. Лучинин. О реперах поверхности S_n в P_{n+2} $(n \geqslant 2)$. «Изв. вузов, серия матем.», № 9 (1967), 48—69.

Поступила 6 января 1969 г.

УКРАИНСКИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК

Выпуск 8 1970

К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ ТОЧЕЧНЫХ СООТВЕТСТВИЙ МЕЖДУ ЕВКЛИДОВЫМИ ПРОСТРАНСТВАМИ

В. И. Романов

(Москва)

Простейшим объектом, возникающим в дифференциальной геометрии точечных соответствий между евклидовыми пространствами, является поле эллипсоидов деформации [1, 2]. Если, наоборот, с каждой точкой пространства $\mathscr{E}_n$ связать некоторый эллипсоид, имеющий ее своим центром, то встает вопрос об условиях, при которых заданное поле эллипсоидов будет служить полем эллипсоидов деформации некоторого соответствия между пространствами, и о тех параметрах поля, которые могут быть заданы произвольно. Отдельные вопросы такого рода рассматривались G. Melzi [1, 2], Л. Я. Бушмановой [3], В. В. Рыжковым [4], В. И. Романовым [5].

1. Рассмотрим отображение T

$$y^i = y^i(x^j) \quad i, j = \overline{1, n} \tag{1}$$

евклидова $\mathscr{E}_n(x^i)$ в евклидово $\hat{\mathscr{E}}_n(y^i)$, определяемое вещественно аналитическими функциями (1). Оба пространства отнесены к прямоугольным декартовым координатам. Мы ограничиваемся такой областью пространства $\mathscr{E}_n$, в которой отображение T однозначно обратимо и имеет неисчезающий якобиан

$$J = \det\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right).$$

В фиксированной точке $\boldsymbol{x} \in \mathscr{E}_n$ главная линейная часть A_x отображения T определяется якобиевой матрицей J_x:

$$d\boldsymbol{y} = J_x d\boldsymbol{x}. \tag{2}$$

Единичная сфера пространства $\mathscr{E}_n$, имеющая центр в точке $\boldsymbol{x} \in \mathscr{E}_n$, перейдет при отображении A_x в эллипсоид с центром в $\boldsymbol{y} = T\boldsymbol{x}$. Для записи уравнения этого эллипсоида обозначим столбцовую матрицу координат точки $\boldsymbol{x}$ той же буквой $\boldsymbol{x}$, а транспонированную (строчную) матрицу через $\boldsymbol{x}^t$. Уравнение сферы в $\mathscr{E}_n$ примет вид:

$$(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{x})^t (\boldsymbol{X} - \boldsymbol{x}) = 1. \tag{3}$$

Отсюда, полагая $\boldsymbol{X} - \boldsymbol{x} = J^{-1}(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{y})$, найдем

$$(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{y})^t J^{t-1} J^{-1} (\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{y}) = 1. \tag{4}$$

Этот эллипсоид называется эллипсоидом деформации (растяжений), а его главные направления — главными направлениями отображения T в точке $\boldsymbol{x}$.

Полуоси a_i, $i = \overline{1, n}$ этого эллипсоида связаны с собственными значениями λ_i матрицы

$$J_x^{t-1} J_x^{-1}$$

соотношениями $\lambda_i = \frac{1}{a_i^2}$. Напротив, полуоси $b_i = \frac{1}{a_i^2}$ эллипсоида в $\mathscr{E}_n$, являющегося прообразом единичной сферы в $\hat{\mathscr{E}}_n$, связаны соотношениями $\mu_i = \frac{1}{b_i^2}$ с собственными значениями μ_i матрицы $J_x^t J_x$. Будем также рассматривать отображения T пространства $\mathscr{E}_n$ в $\mathscr{E}_N$ при $N > n$. Задавая отображение T уравнениями

$$y^\alpha = y^\alpha(x^i) \quad i = \overline{1, n}, \quad \alpha = \overline{1, N},$$

предположим, что в некоторой области ранг якобиевой матрицы J_x максимален (и равен n) и отображение устанавливает взаимнооднозначное соответствие между точками $\mathscr{E}_n$ и поверхности $V_n \subset \mathscr{E}_N$. В этом случае, подобно предыдущему, определяется поле эллипсоидов деформаций, расположенных в касательных плоскостях поверхности V_n.

2. Теорема 1. *Отображение евклидова $\mathscr{E}_n(x^i)$ в евклидово $\mathscr{E}_N(y^\alpha)$, $N \geqslant n$ с наперед заданными попарно неравными величинами полуосей $a_i(x^j)$ эллипсоида деформаций существует с произволом:*

1) N функций $N-1$ аргумента при $n = N$,

2) $N-n$ функций n аргументов при $n < N$.

Прежде чем перейти к доказательству этой теоремы, сделаем следующее замечание. Пусть в $(n-1)$-мерном подпространстве $\mathscr{E}_{n-1}$ пространства $\mathscr{E}_N$ помещается $(n-2)$-мерный эллипсоид Φ_{n-2}, имеющий попарно неравные полуоси $a_1 < a_2 < \ldots < a_{n-2} < a_{n-1}$. Тогда в любом $\mathscr{E}_n \supset \mathscr{E}_{n-1}$ найдется $(n-1)$-мерный эллипсоид Φ_{n-1} с тем же центром и любыми наперед заданными полуосями b_i, удовлетворяющими неравенствам

$$b_1 < a_1 < b_2 < a_2 < \ldots < b_{n-1} < a_{n-1} < b_n,$$

сечением которого гиперплоскостью $\mathscr{E}_{n-1}$ служит данный эллипсоид Φ_{n-2}. Так как $\mathscr{E}_n \supset \mathscr{E}_{n-1}$ можно задавать любым вектором, ортогональным к $\mathscr{E}_{n-1}$, то $\mathscr{E}_n$, а следовательно и эллипсоид, определяется с произволом, зависящим от $N-n$ параметров.

Чтобы данному утверждению придать алгебраическую формулировку, мы воспользуемся тем, что матрица коэффициентов в уравнении эллипсоида всегда может рассматриваться как матрица Грама для линейно независимых векторов, а величины полуосей эллипсоида связаны простыми соотношениями с собственными значениями матрицы Грама.

Лемма (доказательство которой в данной статье опущено). *Пусть матрица Грама G_{n-1} для $n-1$ независимых векторов $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_{n-1}$ имеет собственные значения, равные числам $\mu_1 < \mu_2 < \ldots < \mu_{n-1}$. Всегда можно определить в пространстве E_N, где $N > n-1$ вектор $\mathbf{y}_n$ такой, что заданные числа λ_i $i = \overline{1, n}$, удовлетворяющие условию*

$$0 < \lambda_1 < \mu_1 < \lambda_2 < \mu_2 < \ldots < \mu_{n-1} < \lambda_n,$$

будут собственными значениями матрицы Грама G_n для векторов

$$\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_{n-1}, \mathbf{y}_n.$$

$(N-n)$ координат вектора $\mathbf{y}_n$, например, $y_n^{n+1}, \ldots, y_n^N$ могут быть взяты произвольные при единственном условии, чтобы выражение

$$(y_n^{n+1})^2 + \ldots + (y_n^N)^2$$

было достаточно малым.

Доказательство теоремы проведем индукцией по n при фиксированном N. При этом процесс индукции используется для доказательства разрешимости относительно n-мерных координат одного из векторов.

Пусть $n=1$, $N \geqslant 1$. Покажем, что можно найти вектор-функцию $\xi = \xi(u^1)$ такую, что матрица Грама G_1

для вектора $\xi_1 = \frac{\partial \xi}{\partial u^1}$ имеет собственное значение, равное заданной функции $\theta(u^1) > 0$. Согласно определению матрицы Грама, имеем

$$G = (\xi_1,\ \xi_1),\ (\xi_1,\ \xi_1) - \theta(u^1) = 0.$$

Это дифференциальное уравнение относительно неизвестной вектор-функции $\xi(u^1)$ очевидно имеет решение:

$$\xi(u^1) = \left(\int\limits_{u_0^1}^{u^1} \sqrt{\theta - \sum_{k=2}^{N} \varepsilon_k^2}\, du^1,\ \int\limits_{u_0^1}^{u^1} \varepsilon_2 du^1,\ \ldots,\ \int\limits_{u_0^1}^{u^1} \xi_N du' \right).$$

Здесь $N-1$ функций $\varepsilon_k(u^1)$ должны удовлетворять условию

$$\theta(u^1) - \sum_{k=2}^{N} \varepsilon_k^2 > 0,$$

но в остальном произвольные. Очевидно, теорема 1 в этом случае справедлива (при $N = n = 1$ произвол определяется в одну постоянную).

Пусть теперь теорема верна для отображений $\mathscr{E}_{n-1} \to \mathscr{E}_N$, $n-1 < N$. Покажем, что она будет верна и для отображений $\mathscr{E}_n \to \mathscr{E}_N$. Пусть для отображения $F: \mathscr{E}_n \to \mathscr{E}_N$ заданы $\lambda_i(u^1,\ \ldots,\ u^n)$ — величины полуосей эллипсоида деформации; занумеруем их так, чтобы выполнялись следующие неравенства:

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ \ldots \ < \lambda_n.$$

Выберем функции $\mu_j(u^1,\ \ldots,\ u^{n-1})$, удовлетворяющие в точке $M_0(u_0^i)$ условию

$$0 < \lambda_1 < \mu_1 < \lambda_2 < \mu_2 < \ \ldots \ < \mu_{n-1} < \lambda_n.$$

По предположению индукции существует отображение подпространства $\mathscr{E}_{n-1}(u^n = u_0^n)$ в $\mathscr{E}_N$ с заданными значениями μ_j. Пусть это отображение осуществляется вектор-функцией $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(u^1,\ \ldots,\ u^{n-1})$, тогда выполняются следующие соотношения:

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_1 - \mu_j, & \boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2, & \ldots, & \boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \boldsymbol{x}_{n-1}\boldsymbol{x}_1, & \ldots, & & \boldsymbol{x}_{n-1}\boldsymbol{x}_{n-1} - \mu_j \end{vmatrix} = 0. \tag{5}$$

$$i,\ j = \overline{1,\ n-1}$$

Согласно лемме, в точке $M_0(u_0^i)$ можно найти такой вектор ξ_n, например, с координатами $\xi_n^{n+1},\ \ldots\ \xi_n^N$ равными нулю, что уравнения

$$\Phi_l \equiv \begin{vmatrix} \boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_1 - \lambda_1, & \boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2, & \ldots, & \boldsymbol{x}_1\xi_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \xi_n\boldsymbol{x}_1, & \ldots, & & \xi_n\xi_n - \lambda_l \end{vmatrix} = 0 \tag{6}$$

будут удовлетворяться при $u^i = u_0^i$. Нетрудно проверить, что якобиан

$$\left| \frac{\partial \Phi_l}{\partial \xi_n^j} \right| \neq 0, \quad j = \overline{1,\ n}..$$

Это имеет место при $\xi_n^s = 0$, $s = \overline{n+1,\ N}$. Тем самым, в силу теоремы о неявных функциях, уравнения (6) допускают решения относительно

$\xi_n^1, \ldots, \xi_n^n$, если произвольно задать ξ_n^s как достаточно малые по модулю вещественно-аналитические функции от $u^1, \ldots, u^{n-1}$:

$$\xi_n^i = \xi_n^i (u^i, \ldots, u^{n-1}).$$

Присоединяя сюда задаваемые произвольно ξ_n^s, $s = \overline{n+1, N}$, найдем

$$\xi_n = \xi_n (u^1, \ldots, u^{n-1}),$$

или вещественно-аналитическую вектор-функцию, удовлетворяющую системе (6). Покажем теперь, что существует вектор-функция $\boldsymbol{y}(u^1, \ldots, u^n)$ такая, что матрица Грама $G(\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_n)$, где $\boldsymbol{y}_i = \frac{\partial y}{\partial u^i}$ $i = \overline{1, n}$, будет иметь функции $\lambda_i(u^1, \ldots, u^n)$ собственными значениями, т. е. для нее выполняются соотношения:

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{y}_1\boldsymbol{y}_1 - \lambda_i, & \boldsymbol{y}_1\boldsymbol{y}_2, & \ldots, & \boldsymbol{y}_1\boldsymbol{y}_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \boldsymbol{y}_n\boldsymbol{y}_1, & \ldots, & & \boldsymbol{y}_n\boldsymbol{y}_n - \lambda_i \end{vmatrix} = 0. \qquad (7)$$

$$i = \overline{1, n}$$

Систему (7) можно рассматривать как систему дифференциальных уравнений с частными производными относительно $\boldsymbol{y}(u^1, \ldots, u^n)$. Если задать начальные условия

$$\boldsymbol{y}(u^1, \ldots, u^{n-1}, u_0^n) = \boldsymbol{x}(u^1, \ldots, u^{n-1}) \qquad (8)$$

и, кроме того, положить

$$y_n^s = \varphi^s (u^1, \ldots, u^n), \; s = \overline{n+1, N},$$

где φ^s произвольные достаточно малые вещественно-аналитические функции u^i, то система (7) в окрестности точки M_0 будет разрешима относительно y_n^i и в силу начальных условий (8) будет иметь единственное решение.

1. При $N > n$ произвольными остаются $(N - n)$ координат вектора $\boldsymbol{y}_n$, зависящих от n аргументов.

2. При $N = n$ произвольными являются $(n-1)$ функция $\mu_j(u^1, \ldots, u^{n-1})$ и одна из координат x_{n-1}^n вектора $\boldsymbol{x}_{n-1}$, зависящих от $(n-1)$ аргумента.

3. **Теорема 2.** *Отображение T одного евклидова пространства $E_n(u^1, \ldots, u^n)$ в другое евклидово E_n' с наперед заданным полем вектора одной из полуосей эллипсоида деформаций существует с произволом в n функций $(n-1)$ аргумента.*

Задание вектора полуоси равносильно заданию одного из собственных чисел и соответствующего ему собственного вектора матрицы Грама.

Пусть поле главного направления задано вектором $\boldsymbol{a} = (a^1, \ldots, a^n)$. Выберем систему координат так, чтобы в точке $M_0(u_0^1, \ldots, u_0^n)$ выполнялись условия $a^1 = 1$, $a^2 = \ldots = a^n = 0$. Собственное значение λ и вектор $\boldsymbol{a}$ должны удовлетворять уравнениям:

$$\begin{aligned} \Phi^1 &\equiv (g_{11} - \lambda) a^1 + g_{12}a^2 + \ldots + g_{1n}a^n = 0, \\ \Phi^2 &\equiv g_{12}a^1 + (g_{22} - \lambda) a^2 + \ldots + g_{2n}a^n = 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Phi^n &\equiv g_{1n}a^1 + g_{2n}a^2 + \ldots + (g_{nn} - \lambda) a^n = 0. \end{aligned} \qquad (9)$$

Рассмотрим сначала систему (9) при $u^1 = u_0^1$. Возьмем произвольную вектор-функцию $\xi(u^2, \ldots, u^n)$ от $u^2, \ldots, u^n$, для которой определитель Грама G_{n-1} для векторов $\xi_k = \frac{\partial \xi}{\partial u^k}$, $k = \overline{2, n}$ не равен нулю. Покажем, что можно выбрать вектор-функцию $\xi_1(u^2, \ldots, u^n)$, удовлетворяющую системе (9) при $u^1 = u_0^1$, где $g_{ij} = \xi_i \xi_j$ $i, j = \overline{1, n}$. В точке M_0 система (9) легко решается в силу условий для a^l относительно вектора $\xi_1 = (\xi_1^1, \ldots, \xi_1^n)$. Легко проверить, что якобиан $\left|\frac{\partial \Phi^i}{\partial \xi_1^j}\right| \neq 0$ и по теореме о неявных функциях в окрестности M_0 имеем

$$\xi_1^i = \xi_1^i(\lambda, \xi_k, \boldsymbol{a}).$$

Систему (9) можно рассматривать как систему дифференциальных уравнений с частными производными относительно вектор-функции

$$\boldsymbol{x}(u^1, \ldots, u^n); \ \boldsymbol{x}_i = \frac{\partial x}{\partial u^i}; \ g_{ij} = (\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j); \ i, j = \overline{1, n}.$$

Если задать начальные условия

$$\boldsymbol{x}(u_0^1, u_0^2, \ldots, u^n) = \xi(u^2, \ldots, u^n),$$

система (9) будет разрешима в окрестности точки M_0 относительно $\boldsymbol{x}_1^i$

$$\boldsymbol{x}_1^i = \boldsymbol{x}_1^i(u^1, \ldots, u^n, \boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{a}),$$

и в силу начальных условий (9) по теореме Коши будет иметь единственное решение. Произвольным остается выбор вектор-функции $\xi(u^2, \ldots, u^n)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Melzi G. Su alcune transformazioni puntuali tra spazi ordinari estendenti le trasformazioni conformi. Rend. mat. e sue appl. S. V., vol. Rend mat. e appl., 16, № 1, 2, 1957, 96—117.

2. Melzi G. Trasformazioni tra iperspazi reali estendenti le transformazioni conformi. Rend. Ist Lombardo, Sei. mat., fis., chim e geol., A 95 № 2, 1961.

3. Г. В. Бушманова. Об одном обобщении конформного преобразования трехмерного евклидова пространства. «Известия высших учебных заведений. Математика», № 2, 1962, 27—34.

4. В. В. Рыжков. Об отображениях евклидовых пространств, обобщающих конформные. Труды Томск. гос. университета, т. 181, 1965, 15—18.

5. В. И. Романов. О некоторых отображениях евклидовых пространств. Труды Университета дружбы народов им. Патриса Лумумбы, т. 21, выпуск 2, 1967, 55—67.

Поступила 10 октября 1969 г.

УКРАИНСКИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК

Выпуск 8 1970

О СТРУКТУРЕ ПОЛНЫХ РИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВ, ДОПУСКАЮЩИХ СЕМЕЙСТВА ВПОЛНЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Ю. С. Слободян

(Харьков)

Вполне геодезической поверхностью (в. г. п.) k измерений n-мерного риманова пространства называется такая поверхность R_k, геодезические линии которой являются геодезическими линиями пространства.

В настоящей работе рассматриваются полные римановы n-мерные пространства с аналитической метрикой, допускающие μ-параметрические семейства ($\mu = 2(n-k)$) k-мерных вполне геодезических поверхностей.

В дальнейшем нам потребуются некоторые определения.

Евклидово пространство $E_N\,(N = C_n^k)$ кососимметрических k раз контравариантных тензоров будем называть касательным к пространству R_n в точке M, если компоненты метрического тензора E_N связаны с метрическим тензором $g_{\alpha\beta}$ пространства R_n в точке M следующими соотношениями:

$$g_{\alpha_1\ldots\alpha_k\beta_1\ldots\beta_k} = \left|g_{\alpha_l\beta_m}\right|$$
$$(l,\ m = 1\ \ldots\ k).$$

Подробное изучение пространства с метрическим тензором $g_{\alpha_1\ldots\beta_k}$ можно найти в монографии [3, § 27].

Приведем также определение конуса Грассмана в пространстве E_N [5, гл. VII, § 2].

Всякому набору k векторов $l_1, \ldots l_k$ пространства E_n в E_N отвечает кососимметрический тензор p с компонентами $p^{\alpha_1\cdots\alpha_k}$. Обратное утверждение неверно. Для того чтобы набору величин $p^{\alpha_1\cdots\alpha_k}$, кососимметрических по всем индексам, отвечал некоторый набор k векторов в пространстве E_n, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

$$p^{\alpha_1\cdots[\alpha_k}p^{\beta_1\cdots\beta_k]} = 0 \tag{1}$$

или, что то же самое [5, гл. VII, § 6],

$$\sum_{\lambda=0}^{k-1} (-1)^{\lambda} p_{i_1\ldots i_{k-1}i_\lambda} p_{j_0\ldots j_{\lambda-1}j_{\lambda+1}\ldots j_k} = 0. \tag{1'}$$

Система уравнений (1) или (1′) дает конус Грассмана. Кососимметрический по всем индексам k-тензор p, компоненты которого удовлетворяют системе (1), называется k-вектором [3, § 25]. Пространство E_N в дальнейшем рассматривается как векторное пространство, векторами которого служат k раз контравариантные кососимметрические по всем индексам тензоры.

Работа состоит из двух частей. В первой части доказано, что в пространстве k-векторов E_{N_1}, касательном к риманову в точке M, существует конечное число поверхностей второго порядка Ф, для которых k-вектор, определяющий k-мерную площадку, касательную к вполне геодезической поверхности в точке M, является главным направлением одной из поверхностей Ф. Для трехмерного риманова пространства поверхность Ф совпадает с индикатрисой Римана [1, стр. 92]. Для n-мерного риманова пространства и $(n-1)$-мерной вполне геодезической поверхности — с индикатрисой Эйнштейна, записанной в нормальных координатах [1, стр. 196].

Заметим, что вопросы, аналогичные затронутым в первой части, рассматривались автором в работе [6, 7]. Во второй части работы выясняется на основании этого свойства вполне геодезических поверхностей структура полных римановых пространств, допускающих μ-параметрические ($\mu = 2(n-k)$) семейства k-мерных вполне геодезических поверхностей. Доказано, что: 1) либо все такие поверхности содержат $(k-2)$-мерную вполне геодезическую поверхность, 2) либо через каждую точку пространства проходит $(n-k)$-параметрический пучок вполне геодезических поверхностей с $(k-1)$-мерной осью и никакие две оси не пересекаются, 3) либо пространство допускает некоторое семейство вполне геодезических поверхностей постоянной кривизны.

1. Об одном характеристическом свойстве вполне геодезических поверхностей риманова пространства

Рассмотрим k-мерные вполне геодезические поверхности n-мерного риманова пространства.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть через точку M n-мерного риманова пространства R_n проходит k-мерная поверхность F_k, и пусть касательная площадка к поверхности F_k дана k-вектором p. Для того, чтобы поверхность F_k была вполне геодезической, необходимо, чтобы к-вектор p был главным направлением некоторой поверхности Ф второго порядка, построенной в пространстве k-векторов E_N, касательном к риманову в точке M.*

Поверхность Ф называется индикатрисой риманова пространства. Если в R_n выбрать систему координат таким образом, чтобы в точке M

$$g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta},$$

то уравнение поверхности Ф имеет вид:

$$R_{(\alpha\beta)(\gamma\delta)} p^{(\alpha\beta)\mu_3\ldots\mu_k} p^{(\gamma\delta)\mu_3\ldots\mu_k} - t_{\mu_1\ldots\mu_k\nu_1\ldots\nu_k} p^{\mu_1\ldots[\mu_k} p^{\nu_1\ldots\nu_k]} = 1, \tag{2}$$

где $\mu_1, \ldots, \mu_k, \nu_1, \ldots, \nu_k, \alpha, \beta = 1, \ldots, n$, круглая скобка обозначает суммирование по паре индексов $\alpha < \beta$, $\gamma < \delta$, $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ — компоненты тензора Римана пространства R_n, числа $t_{\mu_1\ldots\mu_k\nu_1\ldots\nu_k}$ определяются из следующей системы уравнений:

$$\Delta = 0, \tag{3}$$

$$\Delta_{\mu_1\ldots[\mu_k} \Delta_{\nu_1\ldots\nu_k]} = 0, \tag{4}$$

где $\Delta = 0$ — характеристическое уравнение индикатрисы; собственные корни уравнения (3) дают кривизну пространства R_n в направлении k-мерной площадки, определяемой k-вектором p, $\Delta_{\nu_1\ldots\nu_k}$ — дополнения к элементам некоторой строки определителя Δ, числа $t_{\alpha_1\ldots\mu_k\nu_1\ldots\nu_k}$ представляют собой также некоторую «смешанную» кривизну [1] в направлении площадки k-вектора p и ортогонального ему $(n-k)$-вектора.

Наконец, в точке M имеется только конечное число индикатрис.

Доказательство. Заметим сразу, что из геометрического смысла величин $t_{\mu_1\ldots\mu_k\nu_1\ldots\nu_k}$ и собственных значений характеристического уравнения следует, что в фиксированной точке M пространства R_n может существовать только конечное число индикатрис. В противном случае пространство касалось бы некоторой площадки бесчисленное число раз, что невозможно, так как метрика пространства аналитическая.

1. Пусть кососимметрический k-тензор в n-мерном евклидовом пространстве E_n задан компонентами $p^{\nu_1\ldots\nu_k}$ $(\nu_1, \ldots, \nu_k = 1, \ldots, n)$. Как уже сказано во введении, для того, чтобы тензор p определял k-вектор p, необходимо и достаточно, чтобы числа $p^{\nu_1\ldots\nu_k}$ удовлетворяли следующей системе уравнений:

$$p^{\nu_1\ldots[\nu_k}p^{\mu_1\ldots\mu_k]} = 0. \tag{1''}$$

Среди этих уравнений $C_n^k - k(n-k) - 1$ независимых в том смысле, что остальные уравнения могут быть получены с помощью алгебраических операций из указанного числа. Построим систему независимых уравнений системы (1″) следующим образом. Строить ее будем по частям. За первую часть системы возьмем уравнения

$$p^{1\ldots[k}p^{\alpha_1\ldots\alpha_k]} = 0, \tag{a_0}$$

$$\alpha_1 < \ldots < \alpha_k;\ \alpha_1, \ldots, \alpha_k = 1, \ldots, n.$$

Таких уравнений, очевидно, $C_k^0 C_{n-k}^k$ и они независимы между собой.

За вторую часть независимой системы возьмем следующую:

$$\begin{gathered} p^{1\ldots[k}p^{1\alpha_1\ldots\alpha_k]} = 0,\\ \cdots\cdots\cdots\\ p^{k1\ldots[k-1}p^{k\alpha_1\ldots\alpha_k]} = 0. \end{gathered} \tag{a_1}$$

В системе (a_1), очевидно, $C_k^1 C_{n-k}^{k-1}$ уравнений и все они независимы между собой, так как в каждое уравнение один раз входит переменная, которой нет ни в одном из предыдущих уравнений. Дальнейшее построение независимой системы ведем по индукции. За часть независимой системы (a_l) возьмем

$$\begin{gathered} p^{1\ldots l\ldots[k}p^{1\ldots l\alpha_{l+1}\ldots\alpha_k]} = 0,\\ \cdots\cdots\cdots\\ p^{k-l+1\ldots k\,1\ldots[k-l}p^{k-l+1\ldots k\alpha_{l+1}\ldots\alpha_k]} = 0,\\ (l = 2, \ldots, k-3). \end{gathered}$$

Таких уравнений $C_k^l \cdot C_{n-k}^{k-l}$.

И, наконец, за последнюю часть системы a_{k-2} возьмем уравнения

$$\begin{gathered} p^{1\ldots[k}p^{1\ldots k-2\alpha_{k-1}\alpha_k]} = 0,\\ \cdots\cdots\cdots\\ p^{3\ldots k1[2}p^{3\ldots k\alpha_{k-1}\alpha_k]} = 0. \end{gathered} \tag{a_{k-2}}$$

Таких уравнений $C_k^{k-2} C_{n-k}^{-2}$. Все они независимы между собой.

Докажем, что построенная система удовлетворяет предъявленным к ней требованиям. Во-первых, число N_1 всех уравнений в системе $(a_0, \ldots, a_{k-2})$ равно $C_n^k - (n-k)k - 1$.

Действительно,

$$\begin{gathered} C_n^0 = 1,\ C_{n-k}^1 = n - k,\\ C_k^1 = k, \end{gathered}$$

в то же время известно, что

$$\sum_{i=0}^{k} C_k^i C_{n-k}^{k-i} = C_n^k.$$

Поэтому

$$N_1 = \sum_{i=0}^{k-2} C_k^i \cdot C_{n-k}^{k-i} = C_n^k - (n-k)\,k - 1,$$

что и доказывает утверждение.

Во-вторых, каждое уравнение системы $(a_0, \ldots, a_{k-2})$ содержит величину p, которая ни в одно из оставшихся уравнений не входит. Поэтому никакое уравнение системы не является следствием других.

2. Пусть в пространстве R_n введена система координат $\{y^\alpha\}$, на поверхности $F_k - \{x^i\}$. Условия интегрируемости вполне геодезических поверхностей имеют вид [2, гл. IV]:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} y^\alpha_{,i} y^\beta_{,j} y^\gamma_{,m} y^\delta_{,l} = \overline{R}_{ijml}, \tag{5}$$

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} y^\alpha_{,i} y^\beta_{,j} y^\gamma_{,m} \xi^\delta_{|\eta} = 0,$$

$$(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta = 1,\ \ldots,\ n;\ i,\ j,\ l,\ m = 1,\ \ldots,\ k;\ \eta = k+1,\ \ldots,\ n),$$

где $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ — компоненты тензора Римана пространства, R_n, $\overline{R}_{ijml}$ — компоненты тензора Римана, вычисленные в точке M для метрики поверхности, $\xi^\delta_{|\eta}$ — компоненты вектора, ортогонального поверхности F_k, запятая обозначает ковариантное дифференцирование относительно метрики поверхности.

Вследствие антисимметричности тензора R, условие (5) можно записать в виде

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} p^{\alpha\beta}_{ij} p^{\gamma\delta}_{ml} = \overline{R}_{ijml}, \tag{6}$$

где $p^{\alpha\beta}_{ij}$ — компоненты бивектора, построенного на векторах $y^\alpha_{,i} y^\beta_{,j}$. Второе условие системы (5) преобразовывается следующим образом. Фиксируя сначала индекс η, умножая эти условия на некоторые числа a^m и складывая, затем фиксируя индекс m и умножая результат на b_η и также складывая, получим в силу антисимметрии тензора R:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} p^{\alpha\beta}_{ij} q^{\gamma\beta}_{m\eta} = 0, \tag{7}$$

где $q^{\gamma\delta}_{m\eta}$ — компоненты бивектора, построенного таким образом, что один из его векторов лежит в k-мерной плоскости векторов $\left(y^\alpha_{,1}, \ldots, y^\alpha_{,k}\right)$, а другой — в ортогональной ей плоскости векторов $\xi^\delta_{|\eta}$.

Условия интегрируемости (6) и (7) выражены через компоненты бивекторов. Однако для доказательства теоремы нам необходимо выразить их через компоненты k-вектора площадки, касательной к поверхности F_k. Для этого предположим, что в точке M координатные векторы взаимно ортогональны и единичны и укажем метод дальнейшего преобразования условий (6) и (7).

Имеем

$$p^{\alpha\beta}_{ij} = \begin{vmatrix} y^\alpha_{,i} y^\beta_{,i} \\ y^\alpha_{,j} y^\beta_{,j} \end{vmatrix},\quad p^{\alpha\beta}_{im} = \begin{vmatrix} y^\alpha_{,i} y^\beta_{,i} \\ y^\alpha_{,m} y^\beta_{,m} \end{vmatrix},\quad p^{\alpha\beta}_{jm} = \begin{vmatrix} y^\alpha_{,j} y^\beta_{,j} \\ y^\alpha_{,m} y^\beta_{,m} \end{vmatrix}.$$

Умножая первое из этих соотношений на $y^\gamma_{,m}$, второе на $-y^\gamma_{,i}$ и третье — на $y^\gamma_{,\cdot}$, получим компоненту $p^{\alpha\beta\gamma}_{ijm}$ тривектора p_{ijm}.

Соответственно формула (6) примет вид:

$$R_{(\alpha\beta)(\gamma\delta)} p^{(\alpha\beta)\xi}_{ijm} p^{(\gamma\delta)\xi}_{ln\eta} = K_3. \tag{6'}$$

Аналогично, учитывая ортогональность векторов $y^{\alpha}_{,i}$ и $\xi^{\alpha}_{1\eta}$, получим

$$R_{(\alpha\beta)(\gamma\delta)}p^{(\alpha\beta)\xi}_{ijm}q^{(\gamma\delta)\xi}_{ln\eta}=0. \tag{6''}$$

Этим методом условиям (6) и (7) можно придать вид:

$$\begin{gathered} R_{\alpha\beta\gamma\delta}p^{\alpha\beta\mu_3\ldots\mu_k}p^{\gamma\delta\mu_3\ldots\mu_k}=K, \\ R_{\alpha\beta\gamma\delta}p^{\alpha\beta\mu_3\ldots\mu_k}q^{\gamma\delta\mu_3\ldots\mu_k}=0, \end{gathered} \tag{8}$$

где K — кривизна поверхности по k-мерной площадке, $p^{\mu_1\ldots\mu_k}$ — компоненты k-вектора, касательного к поверхности, $q^{\mu_1\ldots\mu_k}$ — компоненты k-вектора, построенного так, что $k-1$ его векторов лежит в площадке k-вектора p, а последний вектор — ортогонален этой площадке.

Построим k-вектор q.

Сначала выберем базисные вектора k-вектора p:

$$e_i\,(p^{1\ldots i-1\alpha i+1\ldots k}).$$

Всякий $(k-1)$-вектор, лежащий в площадке k-вектора p, раскладывается по независимым $(k-1)$-векторам p_{k-1} k-вектора p. Выберем $(k-1)$-вектора p_{k-1} следующим образом. За i-й $(k-1)$-вектор p_{k-1_i} возьмем $(k-1)$-вектор, построенный на векторах $(e_1, \ldots, e_{i-1}, e_{i+1} \ldots, e_k)$. Компоненты $(k-1)$-вектора p_{k-1_i} имеют вид:

$$p_{k-1_i}\left(p^{\mu_1\ldots\mu_{i-1}i\mu_{i+1}\ldots\mu_k}\right).$$

Компоненты $(k-1)$-вектора, лежащего в плоскости k-вектора p, имеют вид:

$$p_{k-1}\left(\mu'_i p^{\mu_1\ldots\mu_{i-1}i\mu_{i+1}\ldots\mu_k}\right),$$

где μ'_i — произвольные числа.

Выбрав в точке M ортогональную систему координат, $g_{\alpha\beta}=\delta_{\alpha\beta}$, можем выписать компоненты $(n-k)$-вектора p_{n-k}, ортогонального k-вектору p:

$$\bar{p}^{\mu_{k+1}\ldots\mu_n}=\bar{p}^{\mu_1\ldots\mu_k}.$$

Индексы расположены в таком порядке, чтобы число перестановок в выражении $(\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_n)$ было четное. Выбирая базисные вектора $(n-k)$-вектора $\bar{p}$, получим

$$\begin{gathered} e_{\alpha_1}\,(p^{1\ldots i-1\alpha_1 i+1\ldots k},\ 0, \ldots, \overset{(\alpha_1)}{p}{}^{12\ldots k},\ 0\ldots 0), \\ (i=1, \ldots, k;\ \alpha_1\ldots\alpha_k=k+1, \ldots, n). \end{gathered}$$

Вектор a_2, лежащий в плоскости $(n-k)$-вектора $\bar{p}$, имеет компоненты

$$\begin{gathered} a_2\,(\lambda_{\alpha_1}p^{\alpha_1 2\ldots k}, \ldots, \lambda_{\alpha_1}p^{12\ldots k-1\alpha_1}, \\ \lambda_{k+1}p^{12\ldots k}, \ldots, \lambda_n p^{12\ldots k}). \end{gathered}$$

И, наконец, k-вектор q строится следующим образом:

$$\begin{gathered} q_{1\ldots k}=(-1)^e\mu'_i p^{12\ldots i\ldots k-l-1k-e+1\ldots k}\lambda_{\alpha_l}p^{1\ldots k-e-1\alpha_l\ldots k}, \\ (i=1, \ldots, k;\quad e=0, \ldots, k-1) \\ q_{j\ldots k\alpha_1\ldots\alpha_{j-1}}=(-1)^l\mu'_i p^{j\ldots k\alpha_1\ldots\alpha_{j-l-1}l\alpha_{j-l+1}\ldots\alpha_{j-1}}\cdot\lambda_{\alpha_l}p^{1\ldots k}+ \\ +(-1)^{l+m}\mu'_i p^{j\ldots k-m-1ik-m+1\ldots k\alpha_1\ldots\alpha_{j-1}}\cdot\lambda_{\alpha_{k-m}}p^{1\ldots\alpha_{k-m}\ldots k}, \\ (l=0, \ldots, j-1,\ m=0, \ldots, k-(j-1);\ \alpha_m=k+1, \ldots m), \end{gathered}$$

$$q_{\alpha_1 \ldots \alpha_k} = (-1)^l \mu_i' p^{\alpha_1 \ldots \alpha_{l-1} i \alpha_{l+1} \ldots \alpha_k} \cdot \lambda_{\alpha_l} p^{1 \ldots k} +$$
$$+ (-1)^{l+m} \mu_i' p^{\alpha_1 \ldots \alpha_{m-1} i \alpha_{m+1} \ldots \alpha_k} \cdot \lambda_{\alpha_m} p^{1 \ldots k}$$
$$(l, \ m = 1 \ldots k, \ \alpha_l, \ \alpha_m = k+1, \ldots, \ n).$$

Введем обозначение

$$B_{\mu_1 \ldots \mu_k} = R^{[\mu_1 \mu_2}_{\nu_1 \nu_2} p^{|\nu_1 \nu_2| \mu_3 \ldots \mu_k]}.$$

Условия интегрируемости в. г. п. теперь примут вид

$$B_{\nu_1 \ldots \nu_k} p^{\nu_1 \ldots \nu_k} = K,$$
$$B_{\nu_1 \ldots \nu_k} q^{\nu_1 \ldots \nu_k} = 0, \tag{9}$$
$$(\nu_1 < \ldots < \nu_k).$$

Подставляя в эти условия значения компонент q, получим

$$(-1)^l B_{l \nu_1 \ldots \nu_{i-1} \nu_{i+1} \ldots \nu_k} p^{\nu_1 \ldots \nu_{i-1} i \nu_{i+1} \ldots \nu_k} p^{1 \ldots i-1 \alpha_1 i+1 \ldots k} +$$
$$+ B_{\nu_1 \ldots \nu_{i-1} \alpha_1 \nu_{i+1} \ldots \nu_k} \cdot p^{\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_{i-1} i \nu_{i+1} \ldots \nu_k} p^{1 \ldots k} = 0. \tag{10}$$

Эту систему можно переписать в виде

$$\left\| p^{\alpha_1 2 \ldots k} \ldots p^{1 \ldots k-1 \alpha_1} 0 \ldots \overset{(\alpha_1)}{p^{12 \ldots k}} 0 \ldots 0 \right\| \cdot \left\| B_{\nu_1 \ldots \nu_k} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} p^{1 \ldots k-1 l} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ p^{n-k+1 \ldots l} \end{matrix} \right\|.$$

Таким образом, для определения $B_{\nu_1 \ldots \nu_k}$ мы имеем $k(n-k)$ уравнений (10) и условие (9). Решая эту систему совместно и учитывая, что $p^{\nu_1 \ldots \nu_k}$ — компоненты k-вектора, получим [5, стр. 90]

$$B_{\nu_1 \ldots \nu_{k-1} \alpha_1} p^{\nu_1 \ldots \nu_{i-1} i \nu_{i+1} \ldots \nu_{k-1} \nu_k} =$$
$$= K p^{\nu_1 \ldots \nu_{i-1} i \nu_{i+1} \ldots \nu_k} \cdot p^{\nu_1 \ldots \nu_{i-1} \alpha_1 \nu_{i+1} \ldots \nu_k},$$
$$B_{1 \ldots k} p^{1 \ldots k} = B_{\alpha_1 \ldots \alpha_k} p^{\alpha_1 \ldots \alpha_k} + B_{i_1 \ldots i_l \alpha_{l+1} \ldots \alpha_k} p^{i_1 \ldots i_l \alpha_{l+1} \ldots \alpha_k} +$$
$$+ K \left(p^{1 \ldots k^2} + \sum_l \left(p^{i_1 \ldots i_l \alpha_{l+1} \ldots \alpha_k} \right)^2 \right),$$
$$(l = 1, \ldots, \ k-2).$$

Вводя обозначения

$$B_{\alpha_1 \ldots \alpha_k} - K p^{\alpha_1 \ldots \alpha_k} = t_{\alpha_1 \ldots \alpha_k} p^{1 \ldots k},$$
$$B_{i_l \alpha_2 \ldots \alpha_k} - K p_{i_l \alpha_2 \ldots \alpha_k} = t_{i_l \alpha_2 \ldots \alpha_k} p^{1 \ldots k},$$
$$B_{i_1 \ldots i_l \alpha_{l+1} \ldots \alpha_k} - K p_{i_1 \ldots i_l \alpha_{l+1} \ldots \alpha_k} = p^{12 \ldots k} t_{i_1 \ldots i_l \ldots \alpha_k},$$
$$(l = 1 \ldots k-2),$$

получим

$$B_{1 \ldots i-1 \alpha_l i+1 \ldots k} - K p^{1 \ldots i-1 \alpha_l i+1 \ldots k} =$$
$$= t_{\alpha_1 \ldots \alpha_{l-1} \alpha_l \alpha_{l+1} \ldots \alpha_k} p^{\alpha_1 \ldots \alpha_{l-1} i \alpha_{i+1} \ldots \alpha_k} +$$
$$+ t^{(i)}_{i_1 \ldots i_m \alpha_l \alpha_{m+1} \ldots \alpha_k} p^{\overset{(i)}{i_1} \ldots i_m i \alpha_{m+1} \ldots \alpha_k},$$
$$B_{12 \ldots k} = K p^{12 \ldots k} + t_{\alpha_1 \ldots \alpha_k} \cdot p^{\alpha_1 \ldots \alpha_k} +$$
$$+ t_{i_1 \ldots i_m \alpha_{m+1} \ldots \alpha_k} \cdot p^{i_1 \ldots i_m \alpha_{m+1} \ldots \alpha_k},$$

$$(i_1, \ldots, i_k = 1, \ldots k; \quad \alpha_1, \ldots, \alpha_k = k+1, \ldots, n;$$
$$i_1 < \ldots < i_k; \ \alpha_1 < \ldots < \alpha_k; \ m = 1, \ldots, k-2;$$
$$i = 1, \ldots, k).$$

Последнюю систему уже нетрудно решить относительно компонент $p^{\nu_1 \ldots \nu_k}$. Решение ее имеет при условии

$$\Delta = 0,$$
$$\Delta_{\nu_1 \ldots [\nu_k} \Delta_{\mu_1 \ldots \mu_k]} = 0$$

вид

$$p^{\nu_1 \ldots \nu_k} = L \Delta_{\nu_1 \ldots \nu_k},$$

где Δ — определитель системы, $\Delta_{\nu_1 \ldots \nu_k}$ — его миноры. Из первых двух уравнений определяем величины $t_{\nu_1 \ldots \nu_k}$ и K.

Рассмотрим, наконец, следующую поверхность второго порядка.

$$R_{\nu_1 \nu_2 \mu_1 \mu_2} - p^{\nu_1 \ldots \nu_k} p^{\mu_1 \mu_2 \nu_3 \ldots \nu_k} - t_{\nu_1 \ldots \nu_k \mu_1 \ldots \mu_k} p^{\nu_1 \ldots} \ldots \text{ и т. д. } [^{\nu_k} p^{\mu_1 \ldots \mu_k]}.$$

Система уравнений, определяющая главные направления этой поверхности, совпадает с найденным решением условий интегрируемости вполне геодезических поверхностей вследствие условий, определяющих k-вектор.

Теорема доказана.

Заметим, что величины $t_{\nu_1 \ldots \nu_k}$ и K выражаются только через компоненты тензора Римана пространства. В данной точке риманова пространства существует конечное число индикатрис.

2. О структуре полных n-мерных римановых пространств допускающих μ-параметрические семейства k-мерных в. г. п.

Докажем сначала несколько лемм.

Лемма 1. *Максимальная размерность плоскости, полностью лежащей на конусе Грассмана, равна $n-(k-1)$, если $k \leqslant \left[\frac{n}{2}\right]$, и равна $k+1$, если $k \geqslant \left[\frac{n}{2}\right]$.*

Доказательство ведем по индукции.

Рассмотрим сначала случай $k=2$. Для $n=4$ лемма 1 доказана и найдены соответствующие плоскости [6]. Систему уравнений, дающую конус Грассмана при $k=2$, можно записать в виде:

$$p^{1[2} p^{\alpha_1 \alpha_2]} = 0, \quad (\alpha_1, \ \alpha_2 = 3, \ldots, n).$$

Предполагая, что для $(n-1)$-мерного пространства найдены плоскости максимальной размерности, нетрудно убедиться, что и для n-мерного пространства они имеют вид:

$$p^{2\alpha_1} = a^{\alpha_1} p^{12} + a^2 p^{1\alpha_1},$$
$$p^{\alpha_1 \beta_1} = a^{\beta_1} p^{1\alpha_1} - a^{\alpha_1} p^{1\beta_1}.$$

На конусе лежит таким образом $(n-1)$-параметрическое семейство $(n-1)$-мерных плоскостей.

Нетрудно убедиться непосредственной подстановкой, что на конусе Грассмана лежит также $(n-1)$-параметрическое семейство $(n-1)$-мерных плоскостей вида:

$$p^{i+1\alpha_1} = a^{\alpha_1} p^{ii+1} + a^{i+1} p^{i\alpha_1},$$

$$p^{\alpha_1\beta_1} = a^{\beta_1}p^{i\alpha_1} - a^{\alpha_1}p^{i\beta_1}$$

и что других плоскостей размерности $n-1$ на конусе Грассмана нет.

Предположим теперь, что $k>2$. Для $n=5$, $k=3$ лемма доказана [6]. Компоненты k-вектора p будем определять последовательно.

а) Рассмотрим следующую часть уравнений, дающих конус Грассмана.

$$p^{1\cdots[k}p^{i_1\cdots i_{k-2}\alpha_{k-1}\alpha_k]} = 0$$

$$(i_1, \ldots, i_{k-2} < k < \alpha_{k-1} < \alpha_k).$$

Решение этой системы имеет вид:

$$p^{i_1\cdots i_{k-2}k\alpha_{k-1}} = a^{i_1\cdots i_{k-2}\alpha_{k-1}}p^k + a^{i_1\cdots i_{k-2}k}p^{\alpha_{k-1}},$$

$$p^{i_1\cdots i_{k-2}\alpha_{k-1}\alpha_k} = a^{i_1\cdots i_{k-2}\alpha_k}p^{k-1} - a^{i_1\cdots i_{k-2}\alpha_{k-1}}p^{\alpha_k},$$

где

$$p^k = p^{1\cdots k-1k}, \ p^{\alpha_k} = p^{1\cdots k-1\alpha_k}.$$

Определено, таким образом, $C_{k-1}^{k-2}\cdot C_{n-(k-1)}^2$ величин p. Число независимых величин a равно $(k-1)(n-k+1)$. Все остальные величины a выражаются через найденные. Докажем это.

б) Рассмотрим следующую часть системы уравнений конуса

$$p^{ki_1\cdots i_{k-2}[k-1}p^{ki_1\cdots i_{k-3}\alpha_{k-1}\alpha_k]} = 0.$$

Из этой системы, во-первых, имеем, что

$$p^{i_1\cdots i_{k-3}k\alpha_{k-1}\alpha_k} = a^{i_1\cdots i_{k-3}\alpha_{k-1}\alpha_k}p^k +$$

$$+ a^{i_1\cdots i_{k-3}k\alpha_k}p^{\alpha_{k-1}} + a^{i_1\cdots i_{k-3}k\alpha_{k-1}}p^{\alpha_k},$$

где

$$(i_1 < \ldots < i_{k-3} < k < \alpha_{k+1} < \alpha_{k+2}),$$

и, во-вторых,

$$a^{i_1\cdots i_{k-3}\alpha_{k-1}\alpha_k} = a^{i_1\cdots i_{k-2}\alpha_{k-1}}a^{i_1\cdots i_{k-3}i_{k-1}\alpha_k} +$$

$$+ a^{i_1\cdots i_{k-2}\alpha_k}a^{i_1\cdots i_{k-3}\alpha_{k-1}i_{k-1}},$$

$$a^{i_1\cdots i_{k-3}k\alpha_k} = a^{i_1\cdots i_{k-2}k}a^{i_1\cdots i_{k-3}i_{k-1}\alpha_k} +$$

$$+ a^{i_1\cdots i_{k-2}\alpha_k}a^{i_1\cdots i_{k-3}ki_{k-1}}.$$

Найденные решения удовлетворяют также следующей части системы уравнений конуса

$$p^{i_1\cdots i_{k-1}[k}p^{i_1\cdots i_{k-3}k\alpha_{k-1}\alpha_k]} = 0.$$

Таким образом, мы определили $C_{k-1}^{k-3}\cdot C_{n-k+1}^3$ неизвестных величин p.

в) Рассмотрим, наконец, l-ю часть системы уравнений конуса:

$$p^{ki_1\cdots[i_{k-1}}p^{i_1\cdots i_{k-l-1}\alpha_{k-l+1}k\cdots\alpha_k]} = 0,$$

откуда имеем

$$p^{i_1\cdots i_{k-l-1}ki_{k-l+1}\cdots\alpha_k} = a^{i_1\cdots i_{k-l-1}\alpha_{k-l+1}\cdots\alpha_k}p^k +$$

$$+ \sum_m a^{i_1\cdots i_{k-l-1}ki_{k-l+1}\cdots\alpha_{m-1}\alpha_{m+1}\cdots\alpha_k}p^{\alpha_m},$$

где

$$a^{i_1\cdots i_{k-l-1}\alpha_{k-l+1}\cdots\alpha_k} = \sum_m a^{i_1\cdots i_{k-2}\alpha_m}a^{i_1\cdots i_{k-l-1}\alpha_{k-l+1}\cdots\alpha_{m-1}\alpha_{m+1}\cdots\alpha_k},$$

$$a^{i_1 \dots i_{k-l-1} k \alpha_{k-l+1} \dots \alpha_{m-1} \alpha_{m+1} \dots \alpha_k} =$$
$$= a^{i_1 \dots i_{k-2} k} a^{i_1 \dots i_{k-l-1} i_{k-1} \alpha_{k-l+1} \alpha_{m-1} \alpha_{m+1} \dots \alpha_k} +$$
$$+ \sum_{n_1 \neq m} a^{i_1 \dots i_{k-2} \alpha_{n_1}} a^{i_1 \dots i_{k-l-1} k \alpha_{k-l+1} \dots \alpha_{m-1} \alpha_{m+1} \dots \alpha_k}.$$

Случай в) определяет $C_{k-1}^{k-l} C_{n-k+1}^{l}$ компонент p. Как показано в начале работы, нами найдены все компоненты p.

Замечание 1. На конусе Грассмана, кроме найденного $(k-1)(n-k+1)$-параметрического семейства $(n-k+1)$-мерных плоскостей, лежат плоскости с независимыми переменными

$$p^{i_1 \dots i_{k-1} \alpha_k} \quad (i_1 < \dots < i_{k-1} < k < \alpha_k).$$

Замечание 2. Рассмотрим конус Грассмана K_{n-k}, составленный для $(n-k)$-мерных плоскостей пространства E_n. На конусе K_k, согласно доказанному, лежит $(n-k+1)(k-1)$-параметрическое семейство $(n-k+1)$-мерных плоскостей. Однако на этом же конусе лежит $(n-k-1)(k+1)$ параметрическое семейство $(k+1)$-мерных плоскостей, полученных заменой

$$p^{i_{k+1} \dots i_n} = p^{i_1 \dots i_k}.$$

Лемма 2. *Плоскости n-мерного евклидова пространства, отвечающие тем k-векторам, которые лежат на плоскостях E_{n-k+1} конуса Грассмана, проходят через фиксированную (не зависящую от компонент k-вектора) $(k-1)$-мерную плоскость. Плоскости n-мерного пространства, отвечающие тем k-векторам, которые лежат на $(k+1)$-мерных плоскостях E_{k+1} конуса Грассмана, проходят ортогонально фиксированной $(k-1)$-мерной плоскости.*

В частности, если $n = 2k$, то в пространстве существуют плоскости обоих видов.

Доказательство. Рассмотрим сначала плоскости, отвечающие тем k-векторам, которые лежат на E_{n-k+1}. Базисные векторы искомых плоскостей можем выбрать следующим образом:

$$e_i(0, \dots, \overset{(i)}{p^{1 \dots k}}, 0, \dots, \overset{(k)}{0}, p^{12 \dots i-1 k+1 i+1 \dots k}, \dots, p^{1 \dots i-1 n i+1 \dots k}),$$

где

$$(i = 1, \dots k).$$

Согласно найденным плоскостям E_{n-k+1}, можем записать, что всякий вектор x лежащий в плоскости векторов e_i, имеет компоненты (в дальнейшем штрихи будем опускать)

$$x^i = \lambda^i \quad (i = 1, \dots, k), \tag{11}$$
$$x^{\alpha_1} = \sum_i \lambda_i (a^{1 \dots i-1 \alpha_1 i+1 \dots k-2} + a^{1 \dots i-1 k i+1 \dots k-2} p^{\alpha_1} +$$
$$+ \lambda_k p^{1 \dots k-1 \alpha_1}.$$

Исключая из этой системы λ_i и приравнивая коэффициенты при $p^{i_1 \dots k-1 \alpha_1}$ нулю, получим

$$x^{\alpha_1} = \sum_i x^i a^{1 \dots i-1 \alpha_1 i+1 \dots k-2}, \quad x^k = \sum_i x^i a^{1 \dots i-1 k i+1 \dots k-2}. \tag{11'}$$

Эти уравнения и дают искомые $(k-1)$-мерные плоскости.

Перейдем к плоскостям E_{k+1}. Найдем вектор y, ортогональный вектору x:

$$\sum_i y^i x^i + \sum_{\alpha_1} y^{\alpha_1} \Big(\sum_i x^i \,(a^{1\,\ldots\,i-1\alpha_1 i+1\,\ldots\,k-2} +$$
$$a^{1\,\ldots\,i-1ki+1\,\ldots\,k-2} p^{\alpha_1} + x^k p^{1\,\ldots\,k-1\alpha_1}) = 0.$$

Приравнивая коэффициенты при x^i нулю, получим

$$y^i + y^{\alpha_1} (a^{1\,\ldots\,i-1\alpha_1 i+1\,\ldots\,k-2} + a^{1\,\ldots\,i-1ki+1\,\ldots\,k-2} p^{\alpha_1}),$$
$$y^k = y^{\alpha_1} p^{\alpha_1}. \tag{12}$$

Все такие плоскости проходят ортогонально фиксированной плоскости $(n-k)$-вектора, соответствуют найденным $(n-k+1)$-плоскостям и лежат на конусе Грассмана.

2. Пусть через точку M риманова пространства проходит μ-параметрическое семейство k-мерных вполне геодезических поверхностей. Согласно теореме 1, k-векторы, касательные к вполне геодезическим поверхностям в точке M, есть главные направления конечного числа индикатрис — поверхностей второго порядка, построенных в пространстве кососимметрических k-тензоров, касательном к риманову в точке M. Отсюда следует, что по меньшей мере одна из индикатрис допускает семейство главных направлений, зависящее от $\nu\,(\nu \geqslant \mu)$ параметров. Однако только те главные направления индикатрисы могут давать площадки, касающиеся в. г. п., которые лежат на конусе Грассмана.

Лемма 3. *Если в n-мерном римановом пространстве существует $(k+1)$-мерная аналитическая поверхность F_{k+1}, на которой лежит по меньшей мере двупараметрическое семейство k-мерных вполне геодезических поверхностей, причем через каждую точку поверхности F_{k+1} проходит по меньшей мере одно параметрическое семейство k-мерных в. г. п., то сама поверхность F_{k+1} является вполне геодезической поверхностью пространства.*

В самом деле, в работе [5] доказано, что двумерные вполне геодезические поверхности проходят либо через одну точку, либо расположены пучками, и «оси» пучков не пересекаются. Но тогда всякая геодезическая линия поверхности F_{k+1} лежит на вполне геодезической поверхности и, следовательно, совпадает с геодезической линией пространства.

Теорема 2. *Если полное n-мерное риманово пространство с аналитической метрикой допускает только $2(n-k)$-параметрическое семейство k-мерных вполне геодезических поверхностей, и через каждую точку пространства проходит только одно $(n-k)$-параметрическое семейство и существует хотя бы одна точка, в которой индикатриса допускает только $(n-к)$-параметрическое семейство главных направлений, то либо а) все поверхности семейства содержат $(k-2)$-мерную вполне геодезическую поверхность, либо б) через каждую точку пространства проходит $(n-к)$-параметрический пучок вполне геодезических поверхностей с $(k-1)$-мерной «осью», и никакие две «оси» не пересекаются, или же в) пространство допускает однопараметрическое семейство $(k+1)$-мерных вполне геодезических поверхностей постоянной кривизны.*

Линейный элемент пространства приводится к одному из следующих видов:

в случае а)

$$dS^2 = dx^{1^2} + \varphi(x^1)\left[d\sigma^2_{k-2}(x^2\,\ldots\,x^{k-1}) + \varphi(x^2\,\ldots\,x^{k-1})\, d\sigma^2_{n-k-1}\right], \tag{13}$$

где $d\sigma^2_{k-2}$ — линейный элемент $(k-2)$-мерной поверхности,

$$d\sigma^2_{n-k+1} = d\sigma^2_{n-k+1}(x^k, \ldots, x^n);$$

в случае б)

$$dS^2 = d\sigma^2_{k-1}(x^1 \dots x^{k-1}) + \varphi(x^1 \dots x^{k-1})\, d\sigma^2_{n-k+1}(x^k \dots x^n), \tag{14}$$

где $d\sigma^2_{k-1}$ — линейный элемент некоторой $(k-1)$-мерной поверхности, $d\sigma^2_{n-k+1}$ — линейный элемент $(n-k+1)$-мерной поверхности;
в случае в)

$$dS^2 = d\sigma^2_{k+1}(x^1 \dots x^{k+1}) + \varphi(x^1 \dots x^n)\, d\sigma^2_{n-k-1}(x^1 \dots x^n), \tag{15}$$

где $d\sigma^2_{k+1}$ — линейный элемент $(k+1)$-мерной поверхности постоянной кривизны.

Доказательство. Возьмем точку M, в которой индикатриса допускает только $(n-k)$-параметрическое семейство главных направлений.

$(n-k+1)$-мерные пространства главных направлений $\widetilde{E}_{n-k+1}$ имеют либо вид E_{n-k+1}, либо E_{k+1}. Таким образом, возможны два следующих случая:

I. Все вполне геодезические поверхности, проходящие через точку M, содержат одну $(k-1)$-мерную в. г. п., т. е. мы имеем пучок вполне геодезических поверхностей с $(k-1)$-мерной «осью».

II. Все вполне геодезические поверхности, проходящие через точку M, образуют некоторую $(k+1)$-мерную вполне геодезическую в точке M поверхность F_{k+1}. В силу леммы 3 поверхность F_{k+1} является вполне геодезической поверхностью пространства.

Рассмотрим случай I.

Пусть все поверхности, проходящие через точку M, образуют пучок с «осью» $F_{(k-1)\,M}$.

Возьмем точку N, близкую к точке M. Все вполне геодезические поверхности, проходящие через N, образуют в силу аналитичности семейства также пучок с «осью» $F_{(k-1)\,N}$. Имеем две возможности:

1) «Оси» $F_{(k-1)M}$ и $F_{(k-1)\,N}$ пересекаются по $(k-i)$-мерной поверхности F_{k-i}.

2) «Оси» $F_{(k-1)M}$ и $E_{(k-1)\,N}$ вовсе не пересекаются.

Рассмотрим первую возможность. Пусть «оси» $F_{(k-1)M}$ и $F_{(k-1)N}$ пересекаются по F_{k-i}. Докажем, что на F_{k-i} индикатриса допускает семейство главных направлений, зависящее более чем от $n-k$ параметров.

Действительно, если у $(n-k+1)$-мерных пространств $E_{(n-k+1)\,M}$ и $E_{(n-k+1)N}$ соответствующих $F_{(k-1)\,M}$ и $F_{(k-1)\,N}$ есть общее направление, утверждение доказано в силу свойств главных направлений. Если у пространств $E_{(n-k+1)\,M}$ и $E_{(n-k+1)\,N}$ такого направления нет, то они полностью ортогональны друг другу. И тогда поверхностей, соответствующих $E_{(n-k+1)\,N}$ в силу доказанной леммы 2 либо не существует, либо (если $n=2k$) они не могут иметь общую геодезическую.

Возьмем точку P, близкую к M и N, $P \notin F_{(k-1)\,M}$, $P \notin F_{(k-1)\,N}$. Через P проходит поверхность F_{kPM} из семейства с «осью» $F_{(k-1)\,M}$ и поверхность F_{kNP} из семейства с «осью» $F_{(k-1)\,N}$. Кроме того, через P проходит пучок с «осью» $F_{(k-1)\,P}$. В точке P имеем, таким образом, $(n-k+1)$-параметрическое семейство главных направлений $E_{(n-k+1)\,P}$ и, кроме него, еще два главные направления n_M, касательное к поверхности F_{kMP} и n_N, касательное к поверхности F_{kNP}. Поверхности F_{kMP} и F_{kNP}, имея общую поверхность F_{k-i} и точку P, пересекаются по поверхности F_{k-i+1}.

Докажем, что F_{k-i+1} совпадает с $F_{(k-1)\,P}$.

Предположим, что F_{k-i+1} не совпадает с $F_{(k-1)\,P}$, тогда по меньшей мере одно из направлений n_M или n_N ортогонально $E_{(n-k+1)\,P}$. Пусть для определенности n_M ортогонально $E_{(n-k+1)P}$. Выбирая на F_{kNP} последовательность точек $N_i \to N$, получим в каждой точке последовательности N_i ту же картину, что и в точке N. По непрерывности и в точке N получим два $(n-k+1)$-мерные пространства главных направлений $E'_{(n-k+1)N}$ и $E''_{(n-k+1)N}$. В $E''_{(n-k+1)N}$ лежат векторы, ортогональные E'_{n-k+k}, что невозможно, так как в этом случае либо в точке N вполне геодезические поверхности не будут образовывать пучка, либо их не существует (лемма 2), либо индикатриса в точке N допускает более чем $(n-k)$-параметрическое семейство главных направлений.

Таким образом, поверхность пересечения поверхностей F_{kNP} и F_{kMP} совпадает с «осью» $F_{(k-1)P}$.

Рассмотрим вторую возможность. Пусть «оси» $F_{(k-1)M}$ и $F_{(k-1)N}$ не пересекаются. Рассмотрим все «оси», имеющиеся в пространстве. Если никакие две из них не пересекаются, то утверждение доказано, причем на каждой k-мерной вполне геодезической поверхности лежит однопараметрическое семейство «осей».

Действительно, через точку M проходит «ось» $F_{(k-1)M}$, через точку N — «ось» $F_{(k-1)N}$. Возьмем точку P, близкую к точкам M и N, $P \notin F_{(k-1)M}$, $P \notin F_{(k-1)N}$. Через P проходит «ось» $F_{(k-1)P}$. В точке P индикатриса, как и в случае 1), допускает двупараметрическое семейство главных направлений и еще два главные направления n_M и n_N, касательные к F_{kMP} и F_{kNP}. Выбирая, как и в предыдущем случае, последовательность точек $N_i \to N$, сходящуюся к точке N либо M, получим, что либо в этой точке индикатриса допускает семейство главных направлений, зависящее от большего числа параметров, либо в точке M поверхности не образуют пучка.

Рассмотрим случай II.

Пусть поверхности, проходящие через точку M, образуют $(k+1)$-мерную вполне геодезическую, в силу леммы 3, поверхность F_{k+1}. Возьмем точку $N \in F_{(k+1)}$, близкую к точке M. Поверхности, проходящие через точку N, образуют $(k+1)$-мерную вполне геодезическую поверхность $F_{(k+1)N}$. В точке N индикатриса допускает $(k+1)$-параметрическое семейство главных направлений F_{k+1}, соответствующее $F_{(k+1)N}$, и еще однопараметрическое семейство главных направлений E, соответствующее тем вполне геодезическим поверхностям поверхности $F_{(k+1)M}$, которые проходят через точку N.

Докажем, что $F_{(k+1)N}$ касается поверхности $F_{(k+1)M}$.

Предположим, что это неверно. Тогда $F_{(k+1)M}$ ортогональна ей, в противном случае индикатриса в точке N допускала бы семейство главных направлений, зависящее более чем от $k+1$ параметров. Аналогичная картина должна иметь место и в точке M. Но тогда в точке M индикатриса допускает две $(n-k+1)$-мерные взаимно ортогональные плоскости главных направлений. Следовательно, $(k+1)$-параметрическое семейство вполне геодезических поверхностей, проходящее через точку N, не может быть ортогонально фиксированной $(k-1)$-поверхности (поверхности этого семейства образуют пучок с $(k-1)$-мерной «осью»).

Найдем вид линейного элемента пространства.

Сначала рассмотрим тот случай, когда все k-мерные вполне геодезические поверхности проходят через фиксированную $(k-1)$-мерную вполне геодезическую поверхность F_{k-1}.

Построим геометрическое место точек, равноудаленных от F_{k-1}. Получим некоторый $(n-1)$-мерный цилиндр Φ_{n-1}. Геодезические линии цилиндра являются линиями пересечения его с вполне геодезическими поверхностями пространства [5]. Так как ортогональные траектории семейства вполне геодезических поверхностей устанавливают между ними изометрическое соответствие, то между отдельными цилиндрами существует конформное соответствие, зависящее от растояния между ними. Каждый такой цилиндр допускает $2(n-k)$-параметрическое семейство $(k-1)$-мерных вполне геодезических поверхностей Φ_{k-1}. Через фиксированную точку цилиндра проходит $(n-k)$-параметрический пучок поверхностей Φ_{k-1}, имеющий $(k-2)$-мерную ось Φ_{k-2}. Так как оси пучков в. г. п. пространства проходят через $(k-2)$-мерную ось $F_{(k-2)}$, то оси Φ_{k-2} не пересекаются. Как будет показано в следующем пункте, линейный элемент цилиндра можно привести к виду:

$$d\sigma^2_{n-1} = d\sigma^2_{k-2}(x^2, \ldots, x^k) + \varphi(x^2, \ldots, x^k)\, d\sigma^2_{n-k+1}(x^{k+1}, \ldots, x^n).$$

Выбирая цилиндры Φ_{n-1} и ортогональные им геодезические линии пространства за координатные поверхности, можно линейный элемент пространства привести к виду:

$$dS^2 = dx^{1^2} + \varphi_1(x^1)\left[d\sigma^2_{k-2}(x^2, \ldots, x^k) + \varphi_2(x^2 \ldots x^k)\, d\sigma^2_{n-k+1}(x^{k+1}, \ldots, x^n)\right].$$

В случае $n=4$, $k=2$ цилиндры Φ_{n-1} обращаются в пространства постоянной кривизны.

Рассмотрим случай, когда «оси» $(n-k)$-параметрических пучков не пересекаются.

Выберем на одной из осей точку M и проведем $(n-1)$-мерную поверхность Φ_{n-1}, ортогональную всем «осям». Всякая ортогональная траектория вполне геодезических поверхностей, которая касается Φ_{n-1}, полностью лежит на этой поверхности. Таким образом, ортогональные траектории семейства вполне геодезических поверхностей переводят «ось» семейства в «ось» того же семейства. Так как вполне геодезические поверхности пересекают поверхности Φ_{n-1} ортогонально, то линии, полученные при этом пересечении, будут геодезическими линиями поверхности Φ_{n-1} (4).

Зафиксируем две близкие поверхности Φ'_{n-1} и Φ''_{n-1}. На поверхности Φ'_{n-1} возьмем четыре точки A, B, C, D так, чтобы

$$AB = CD$$

в смысле метрики поверхности Φ'_{n-1}. Проведем через точки A, B, C, D $(k-1)$-мерные «оси» семейств вполне геодезических поверхностей. Они пересекут поверхность Φ''_{k-2} соответственно по $(k-2)$-мерным поверхностям. Возьмем на них точки A', B', C', D' так, чтобы

$$A'B' = C'D',$$

и чтобы A', B', C', D' лежали на тех же двумерных в. г. п., что и точки $ABCD$. На поверхности Φ'_{n-1} проведем геодезические этой поверхности AB и CD, проведем также некоторую линию δ, ортогональную AB в точке A и CD в точке D. Выберем однопараметрическое семейство вполне геодезических поверхностей, для которого линия δ служит ортогональной траекторией. Ортогональные траектории этого семейства переводят «ось» семейства в «ось», поэтому они будут переводить отрезок AB в отрезок CD. Соответствие между поверхностями Φ'_{n-1} и Φ''_{n-1} конформное.

Выбирая «оси» и поверхности, ортогональные им за координатные поверхности, получим линейный элемент пространства, который можно записать так:

$$dS^2 = d\sigma^2_{k-1}(x^1, \ldots, x^{k-1}) + \varphi(x^1, \ldots, x^{k-1})\, d\sigma^2_{n-k+1}(x^k, \ldots, x^n), \quad (16)$$

где $d\sigma^2_{k-1}$ — линейный элемент поверхности F_{k-1}.

Рассмотрим, наконец, тот случай, когда пространство допускает однопараметрическое семейство трехмерных вполне геодезических поверхностей постоянной кривизны.

Следуя методу Картана [1, стр. 176], нетрудно показать, что линейный элемент пространства можно записать в виде:

$$dS^2 = d\sigma^2_{k+1}(x^1, \ldots, x^{k+1}) + \varphi(x^1, \ldots, x^n)\, d\sigma_{n-k-1}(x^{k+2}, \ldots, x^n), \quad (17)$$

где $d\sigma^2_{k+1}$ — линейный элемент $(k+1)$-мерной поверхности постоянной кривизны.

Обратная теорема. *Если линейный элемент пространства имеет вид (13), (14) или (15), то такое пространство допускает $2(n-k)$-параметрическое семейство k-мерных вполне геодезических поверхностей.*

Доказательство этой теоремы в случае, когда линейный элемент пространства имеет вид (15), очевидно.

Вид линейного элемента (13) является частным случаем (14). Достаточно поэтому доказать теорему для пространств с линейным элементом (14).

Введем на поверхности Φ_{n-k+1} обобщенную полугеодезическую систему координат. Тогда линейный элемент поверхности примет следующий вид:

$$d\sigma^2_{n-k+1} = dx^{k^2} + \varphi(x^k, \ldots, x^n)\, d\sigma^2_{n-k}.$$

Линии $x^{k+1} = C^{k+1}, \ldots, x^n = C^n$ являются геодезическими линиями на поверхности Φ_{n-k+1}. С другой стороны, символы Кристоффеля, вычисленные для метрики пространства, имеют следующий вид:

$$\Gamma^{\alpha}_{ij} = 0,$$

$$(\alpha = n-k+1, \ldots, n;\ i,\ j = 1, \ldots, k-1).$$

Это является необходимым и достаточным условием того, что поверхность $x^\alpha = C^\alpha$ — вполне геодезическая. Но мы можем включить в координатную систему поверхности Φ_{n+1-k} произвольную геодезическую. Так как поверхность Φ_{n-k+1} допускает $2(n-k)$-параметрическое семейство геодезических линий, то пространство допускает $2(n-k)$-параметрическое семейство k-мерных вполне геодезических поверхностей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Э. Картан. Геометрия римановых пространств. ГИИЛ, М., 1936.
2. Л. Эйзенхарт. Риманова геометрия. ГИИЛ, М., 1948.
3. П. А. Широков. Тензорное исчисление. Изд-во Казанск. ун-та, 1961.
4. В. Ф. Гантмахер. Теория матриц. Изд-во иностр. лит., М., 1960.
5. В. Ходж и Д. Пидо. Методы алгебраической геометрии, том I, II, Изд-во иностр. лит., М., 1954.
6. Ю. С. Слободян. О структуре четырех-мерных римановых пространств, допускающих семейства двумерных вполне геодезических поверхностей. Укр. геометр. сб., вып. 5—6, Изд-во ХГУ, Харьков, 1968.
7. Ю. С. Слободян. О структуре n-мерных римановых пространств, допускающих семейства вполне геодезических гиперповерхностей. Укр. геометр. сб., вып. 4, Изд-во ХГУ, Харьков, 1967.

Поступила 17 марта 1969 г.

УКРАИНСКИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК

Выпуск 8 1970

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПОЛНОТЫ ПЕРЕЧНЯ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ОДНОРОДНЫХ МНОГОГРАННИКОВ

С. П. Сопов

(Харьков)

Многогранник P называется *однородным*, если все его грани — правильные многоугольники, а любые две вершины могут быть переведены друг в друга при помощи симметрических преобразований так, что многогранник при этом переходит сам в себя. Гранями могут быть выпуклые и звездчатые правильные многоугольники.

Связный однородный многогранник без кратных вершин и ребер называется *элементарным*.

Как известно [1], конечная группа G самосовмещений P имеет неподвижную точку, являющуюся центром описанной вокруг P сферы. Элементами G могут быть только собственные вращения B_i вокруг инвариантной оси и вращательные симметрии C_i, представляющие собой произведение симметрии относительно плоскости и вращения вокруг прямой, перпендикулярной плоскости симметрии. Если G содержит центральную симметрию I, то любая вращательная симметрия может быть представлена в виде

$$C_i = B_i I = I B_i.$$

Из всех конечных групп движений нас будут интересовать только группа самосовмещений куба $S_4 \times \{I\}$ и группа самосовмещений икосаэдра $A_5 \times \{I\}$. Все остальные конечные группы либо являются подгруппами этих двух, либо соответствуют группам самосовмещений бесконечных серий призм и антипризм $D_n \times \{I\}$ [2].

В [3] был предложен перечень известных элементарных многогранников, но полнота этого перечня не была доказана. В настоящей статье доказана

Теорема А. *Существует только 75 элементарных однородных многогранников, отличных от призм и антипризм.*

Метод доказательства этой теоремы заключается в следующем. Выбираем на сфере точку A_0 и подвергаем ее всем преобразованиям из G. Количество образов A_0 равно порядку G либо является делителем ее порядка. Выделим на сфере область Δ_0, каждая точка которой расположена не дальше к точке A_0, чем к любому из образов A_0. Точки A_i, являющиеся образами A_0, будут в свою очередь иметь соответствующие им области Δ_i. Все эти области равны между собой и покрывают в своей совокупности всю сферу. Каждой точке сферы соответствует единственная точка из Δ_0. Для групп $S_4 \times \{I\}$ и $A_5 \times \{I\}$ Δ_0 — прямоугольный треугольник. Будем называть Δ_0 фундаментальным треугольником группы G. Выпуклая оболочка точек A_i есть выпуклый многогранник, имеющий G своей группой самосовмещений.

Определим векторы $\boldsymbol{r}_i$ с началом в центре сферы и концами в точках $A_i (i = 0, 1, 2, \ldots, g-1)$, где g — порядок G. Если A_0 находится на границе Δ_0, то некоторые $\boldsymbol{r}_i$ совпадают. Кроме того, определим векторы ρ_i с началом в A_0 и концами в A_i $(i = 1, 2, \ldots, g-1)$. У однородного многогранника P все ребра равны, а каждой вершине инцидентно q правильных многоугольников, не обязательно одинаковых. Поэтому для того, чтобы точки A_i были вершинами однородного многогранника P, необходимо выполнение следующих условий:

1) существует по крайней мере три вектора $\boldsymbol{r}_j$, скалярные произведения которых на вектор $\boldsymbol{r}_0$ равны;

2) существует замкнутый цикл ω_0 из векторов ρ_j, удовлетворяющим условию 1), такой, что угол между каждыми двумя соседними векторами ω_0 равен углу правильного многоугольника. При каждой вершине A_i мы получим цикл ω_i, подвергая векторы ρ_j из ω_0 всем преобразованиям из G;

3) в плоскостях, определенных соседними векторами из ω_0, должны лежать правильные многоугольники, смежные ребра которых являются соседними векторами из ω_i.

Очевидно, что эти условия являются и достаточными для существования однородного многогранника. Действительно, многогранник с вершинами в точках A_i, ребрами которого являются векторы ρ_j и их образы, а гранями — многоугольники, удовлетворяющие условию 3), есть однородный.

Составляя все возможные скалярные произведения и приравнивая их попарно, мы получим уравнения для определения координат A_0. Определяя углы между векторами ρ_j и проверяя выполнение условий 2) и 3), мы найдем все точки A_0, образы которых служат вершинами однородных многогранников.

Идея этого метода принадлежит А. В. Погорелову.

В [4] были найдены все однородные многогранники, грани которых перпендикулярны инвариантным осям вращений. Следовательно, для доказательства теоремы A нам остается найти многогранники, грани которых не все перпендикулярны осям вращений.

1. Некоторые вспомогательные результаты

Преобразования из G, оставляющие грань многогранника P инвариантной, образуют группу H порядка h, которая является подгруппой группы G порядка g. Для группы $S_4 \times \{I\}$ $g = 48$, а для $A_5 \times \{I\}$ — $g = 120$.

Пусть Γ_n — количество n-угольных граней однородного многогранника P, переходящих друг в друга при помощи преобразований из G. Назовем такие грани *эквивалентными*.

Теорема 1. *Γ_n равно индексу группы G по подгруппе H.*

Доказательство. Преобразования, оставляющие плоскость грани многогранника P инвариантной, образуют группу F — порядка f. В каждой такой плоскости располагаются компланарные эквивалентные многоугольники, количество которых равно индексу F по подгруппе H, т. е. $\frac{f}{h}$. Количество же плоскостей, содержащих грань P, равно индексу группы G по подгруппе F, т. е. $\frac{g}{f}$. Порядок фактор группы $\frac{G}{H}$ равен $\Gamma_n = \frac{g}{f} \cdot \frac{f}{h} = \frac{g}{h}$, что и требовалось доказать.

Пусть P имеет N_0 вершин. N_0 является делителем g [5], т. е. $\frac{g}{N_0} = m$.

Следствие. *Если вершине P инцидентно q_n правильных n — угольников* $\{n\}$*, то $h = \frac{mn}{g_n}$.

Действительно, $\Gamma_n = \frac{N_0 q_n}{n}$ [6]. Поэтому

$$h = \frac{g}{\Gamma_n} = \frac{mn}{q_n}.$$

Грань многогранника P, перпендикулярную k-кратной оси вращения, будем называть гранью типа γ_k ($k = 2, 3, 4, 5$). Если группа преобразований H, оставляющая грань инвариантной, имеет порядок $h \geqslant 3$, то эта грань типа γ_k ($k = 2, 3, 4, 5$). Действительно, если H содержит только собственные движения, то утверждение справедливо. Если же H содержит несобственные движения, то, как известно [2], количество несобственных движений в H равно количеству собственных движений, т. е. в H есть вращения, отличные от тождественного.

Пусть теперь $h = 2$. Тогда H может иметь, кроме тождественного преобразования E, еще одно преобразование β, такое, что $\beta^2 = E$. Таким преобразованием может быть: B_π — поворот на угол π, C_0 — отражение в плоскости или центральная симметрия I. В первом случае грань типа γ_2, во втором и третьем случае — грани типа γ_1 и $\bar{\gamma}_0$.

Если $h = 1$, т. е. грань переводится в себя только тождественным преобразованием, то такую грань будем называть гранью типа γ_0. Очевидно, что грани типа γ_0, $\bar{\gamma}_0$ и γ_1 могут быть гранями типа γ_k ($k = 2$, 3, 4, 5).

Для доказательства теоремы A достаточно найти все элементарные однородные многогранники, имеющие грани типа γ_0, $\bar{\gamma}_0$ или γ_1.

Теорема 2. *Если вершине элементарного однородного многогранника P инцидентно три грани* ($q = \Sigma q_i = 3$), *то все они типа* γ_k ($k = 2, 3, 4, 5$).

Доказательство. Из следствия теоремы 1 имеем

$$hq_n = mn. \tag{1}$$

Докажем, что P не имеет граней типа γ_0, $\bar{\gamma}_0$ и γ_1. Поэтому в (1) достаточно взять $h = 1, 2$. Все правильные многогранники имеют грани типа γ_k ($k = 2, 3, 4, 5$). Поэтому впредь мы будем считать, что

$$q_n < q \tag{2}$$

независимо от эквивалентности n-угольников.

Пусть $h = 1$. Тогда из (1) следует, что $q_n = mn \geqslant 3$. Но, согласно (2), $q_n < 3$. Следовательно, при $q = 3$ P не может иметь граней типа γ_0. Пусть $h = 2$. Тогда (1) имеет вид $2q_n = mn$. Это возможно только при $q_n = 2$, $m = 1$, $n = 4$. Если вершине многогранника P инцидентно три грани, из которых два квадрата, то это может быть только призма [7]. Так как $N_0 = g$, то это может быть призма, в основании которой лежит $\{24\}$ или $\{60\}$, группы которых не совпадают с группами $S_4 \times \{I\}$ и $A_5 \times \times \{I\}$. Если же в основании призмы лежит $\{n\}$ при $n \neq 24$ и $n \neq 60$, то это будет несвязный неэлементарный многогранник. Теорема доказана.

Будем говорить, что P имеет ребро C или B, если инцидентные ему вершины преобразуются друг в друга соответственно несобственным

---

* В дальнейшем правильный n-угольник будем обозначать символом Шлефли $\{n\}$, а угольную звезду $\left\{\frac{n}{d}\right\}$ — n.

или собственным движением. В частности, если C есть зеркальное отражение в плоскости, то ребро C_0, а если B есть поворот на угол π, то ребро B_π.

В дальнейшем нам потребуется следующая

Лемма. *Элементарный однородный многогранник P, вершине которого инцидентно четыре грани, не может иметь двух граней типа γ_1, инцидентных общему ребру C_0.*

Доказательство проведем отдельно для группы $S_4 \times \{I\}$ и $A_5 \times \{I\}$. У икосаэдра все плоскости симметрии переходят друг в друга при преобразованиях из $A_5 \times \{I\}$. У куба же плоскости симметрии разбиваются на два типа. Три из них проходят через середины ребер и не содержат вершин, а остальные шесть содержат по два ребра и четыре вершины куба. Обозначим их через L_3 и L_6 соответственно. Если P имеет $N_0 = g$, то ни одна плоскость симметрии не проходит через вершины P.

В случае группы $S_4 \times \{I\}$, согласно теореме 1, эквивалентных граней типа γ_1 должно быть 24. Предположим, что утверждение леммы неверно. Тогда каждой вершине P инцидентно 2 либо 3 грани типа γ_1, т. е. $q_n = 2, 3$. Докажем, что $N_0 = g$. Как известно [6], $\Gamma_n = \frac{q_n N_0}{n}$ или

$$n\Gamma_n = N_0 q_n. \tag{3}$$

При $q_n = 2$ имеем $24n = 2N_0$. Пусть $n = 3$, тогда $N_0 = 36$, что невозможно [5]. Если $n = 4$, то $N_0 = 48$, т. е. $N_0 = g$. При $n \geqslant 5$ $N_0 > g$, что невозможно. Пусть $q_n = 3$. Решая (3), получим два возможных варианта $n = 3$, $N_0 = 24$ и $n = 6$, $N_0 = 48$. В первом случае из четырех граней при вершине три треугольника. Многогранник может быть только антипризмой [7], в основании которой лежит $\{12\}$ или $\left\{\frac{12}{5}\right\}$ и группа которой не совпадает с группой $S_4 \times \{I\}$. Если же в основании антипризмы лежит многоугольник с меньшим числом сторон, чем 12, то многогранник несвязный, а, следовательно, неэлементарный. Во втором случае $N_0 = g$. Таким образом, плоскости симметрии не могут проходить через вершины P.

Пусть грань типа γ_1 перпендикулярна плоскости L_6. Каждой плоскости L_6, согласно теореме 1, перпендикулярны 4 эквивалентные грани типа γ_1. В каждой такой плоскости лежит четырехкратная ось вращения и перпендикулярная ей двукратная ось. Поворот вокруг этих осей на угол π переводит эту плоскость в себя. Если эквивалентные грани типа γ_1 инцидентны общему ребру C_0, то это ребро перпендикулярно двукратной или четырехкратной оси вращения и, следовательно, полностью содержится в одной из плоскостей симметрии, что невозможно.

Пусть теперь грань типа γ_1 перпендикулярна плоскости L_3. Каждой плоскости L_3 перпендикулярно восемь эквивалентных граней типа γ_1. Каждая такая плоскость содержит две взаимно перпендикулярные четырехкратные оси и две взаимно перпендикулярные двукратные оси. Угол между четырехкратной и двукратной осью равен $\frac{\pi}{4}$. Грани типа γ_1, перпендикулярные плоскости L_3, образуют пояс, сечение которого этой плоскостью есть $\{8\}$, $\left\{\frac{8}{3}\right\}$ или $\left\{\frac{8}{2}\right\}$. Нетрудно убедиться, что в первых двух случаях плоскость симметрии проходит через вершины P, что невозможно. В последнем случае грани взаимно перпендикулярны и образуют два замкнутых пояса. Если $n = 4$, то это просто кубы, а P — неэлементарный многогранник. Если $n = 6$, то не существует вершинной фигуры с данными условиями.

Вершинной фигурой мы называем плоский многоугольник, вершины которого есть концы ребер, исходящих из данной вершины многогранника P, а стороны — диагонали (вершинные фигуры) граней, инцидентных данной вершине. Вершинной фигурой мы часто будем пользоваться в дальнейшем, характеризуя строение многогранника в окрестности его вершины.

Таким образом, для группы $S_4 \times \{I\}$ лемма справедлива.

В случае группы $A_5 \times \{I\}$, согласно теореме 1, эквивалентных граней типа γ_1 должно быть 60. Уравнение (3) дает следующие решения: $q_n = 2$, $n = 4$, $N_0 = 120$; $q_n = 3$, $n = 3$, $N_0 = 60$; $q_n = 3$, $n = 6$, $N_0 = 120$. Мы получаем антипризму при $N_0 = 60$. В остальных случаях плоскости симметрии не могут проходить через вершины P. Каждой из пятнадцати плоскостей симметрии перпендикулярно четыре эквивалентные грани типа γ_1. В каждой плоскости симметрии лежат две двукратные оси вращения. Пусть две грани типа γ_1 имеют общее ребро C_0. Тогда, как и в случае группы $S_4 \times \{I\}$, это ребро перпендикулярно двукратной оси. Так как через двукратную ось проходят две взаимно перпендикулярные плоскости симметрии, то одна из них должна полностью содержать ребро C_0, т. е. проходить через вершины P. Лемма доказана полностью.

Теорема 3. *Если вершине элементарного однородного многогранника P инцидентно четыре грани ($q = 4$), то все они типа γ_k ($k = 2, 3, 4, 5$).*

Доказательство. В [8] были найдены все однородные многогранники с неотрицательной эйлеровой характеристикой $\chi = N_0 - N_1 + N_2$, где N_0, N_1, N_2 — соответственно количество вершин, ребер и граней P. Если $q = 4$, то $N_1 = 2N_0$ и для $\chi < 0$ имеем $N_2 < N_0 \leqslant g$. Отсюда, согласно теореме 1, сразу следует, что P не может иметь граней типа γ_0. Если $N_0 \leqslant \frac{g}{2}$, то P не может иметь граней типа $\bar{\gamma}_0$ и γ_1. Поэтому доказательство теоремы достаточно провести для многогранников с $\chi < 0$ и количеством вершин, равным порядку группы.

Пусть P имеет грань типа $\bar{\gamma}_0$. Согласно теореме 1 и неравенству (3) вершине многогранника P могут быть инцидентны следующие грани типа $\bar{\gamma}_0$: 1) три шестиугольника и 2) два квадрата. В первом случае из четырех граней при вершине P три проходят через центр сферы, что невозможно. Во втором случае два квадрата должны перемежать две другие грани, не имеющие ребер C_0. Таких граней должно быть меньше $\frac{g}{2}$. Для группы $S_4 \times \{I\}$, согласно теореме 1, таких граней нет. Для группы $A_5 \times \{I\}$ такими гранями могут быть только два шестиугольника. Так как квадраты вписаны в большой круг сферы, описанной вокруг P, то шестиугольник вообще не может быть вписан в эту сферу. Следовательно, при $q = 4$ P не может иметь граней типа $\bar{\gamma}_0$.

Пусть P имеет грань типа γ_1.

По теореме 1 вершине многогранника P могут быть инцидентны два квадрата или три шестиугольника типа γ_1. Если вершине инцидентно три шестиугольника, то четвертая грань согласно лемме должна иметь все ребра C_0. Следовательно, она должна быть четноугольником типа γ_k ($k = 2, 3, 4, 5$). Если вершине инцидентно два квадрата типа γ_1, то по лемме либо каждая из двух других граней имеет ребра C_0, но не обязательно все, либо одна из них имеет все ребра C_0, а вторая совсем не имеет таких ребер. Поэтому, если вершине P инцидентно четыре грани и среди них есть типа γ_1, имеющие общее ребро, то все грани P — четноугольники.

Докажем теорему для группы $S_4 \times \{I\}$.

Пусть в вершине P сходится три шестиугольника типа γ_1. Из (1) и (3) следует, что четвертой гранью может быть: 1) квадрат типа γ_2 с ребрами C_0, 2) шестиугольник типа γ_3 с ребрами C_0 и 3) восьмиугольник типа γ_4 с ребрами C_0. Второй случай невозможен по (2). Шестиугольники типа γ_1 могут быть перпендикулярны либо плоскости L_3, либо плоскости L_6 и чередуются с гранями типа γ_k $(k=2, 4)$. Плоскости L_3 перпендикулярно четыре восьмиугольника типа γ_4 или четыре квадрата типа γ_2. Следовательно, в первом и в третьем случае только 12 из 24 шестиугольников перпендикулярно плоскостям L_3. В каждой плоскости L_6 лежит одна двукратная и одна четырехкратная ось. Каждой из шести плоскостей L_6 перпендикулярно по два шестиугольника типа γ_1. Это невозможно.

Пусть вершине многогранника P инцидентно по два квадрата типа γ_1, имеющих общее ребро. Из (1) и (3) получаем, что двумя другими гранями могут быть: 1) $\{4\}$ типа γ_2 с ребрами C_0 и $\{6\}$ типа γ_3 с ребрами C_0; 2) $\{4\}$ типа γ_2 с ребрами C_0 и $\{8\}$ типа γ_4 с ребрами C_0, 3) $\{6\}$ типа γ_3 с ребрами C_0 и $\{8\}$ типа γ_4 с ребрами C_0; 4) два $\{8\}$ типа γ_2, имеющие через одно ребра C_0. В первых трех случаях из каждой вершины P исходит три ребра C_0. Из простых геометрических рассуждений видно, что четвертое ребро B_π. Следовательно, оно перпендикулярно двукратной или четырехкратной оси вращения. Квадраты типа γ_1 образуют замкнутый пояс, их общие ребра B_π. Многогранник P вписан в сферу, поэтому все ребра B_π этого пояса параллельны. В силу структуры плоскостей симметрии это возможно лишь в случае, когда все ребра B_π параллельны четырехкратной оси. Но тогда все эти ребра C_0, а квадраты типа γ_k $(k=2, 4)$. В четвертом случае восьмиугольники типа γ_2 инцидентны квадратам по ребрам C_0. Так как $\{8\}$ перпендикулярен к плоскости L_3 и плоскости L_6, то и квадраты типа γ_1 перпендикулярны плоскостям симметрии различных типов, что невозможно.

Пусть теперь квадраты типа γ_1 разделены другими гранями. Такими гранями могут быть: 1) два $\{8\}$ типа γ_2, имеющие через одно ребра C_0; 2) $\{3\}$ типа γ_3 с ребрами B и $\{8\}$ типа γ_4 с ребрами C_0; 3) $\{4\}$ типа γ_4 с ребрами B и $\{6\}$ типа γ_3 с ребрами C_0; 4) $\{4\}$ типа γ_4 с ребрами B и $\{8\}$ типа γ_4 с ребрами C_0. Это легко получается из (1) и (3) с учетом того, что $\chi < 0$ и в одной плоскости не может лежать более восьми вершин многогранника P [5]. Рассматривая замкнутые пояса из граней P, перпендикулярные плоскостям L_3 и L_6, мы, как и выше, приходим к выводу, что многогранников с данными гранями нет.

Итак, для группы $S_4 \times \{I\}$ теорема доказана.

Рассмотрим группу $A_5 \times \{I\}$. В каждой плоскости симметрии икосаэдра лежат две взаимно перпендикулярные двукратные оси, две трехкратные и две пятикратные оси вращения.

Пусть вершине многогранника P инцидентно три $\{6\}$ типа γ_1. Тогда на основании теоремы 1 граней типа γ_1 — 60. Из (1), (2) и (3) следует, что четвертой гранью при вершине может быть $\{4\}$ типа γ_2 с ребрами C_0 или $\{10\}$ типа γ_5 с ребрами C_0.

В первом случае вершинной фигурой может быть только пересеченная трапеция, т. е. самопересекающийся четырехугольник, состоящий из двух оснований и двух диагоналей трапеции. Если ребро многогранника P равно 1, то радиус описанной окружности вокруг вершинной фигуры $r=\frac{\sqrt{27-3\sqrt{6}}}{5}$, а радиус описанной сферы вокруг P $R=\frac{1}{2\sqrt{1-r^2}}=$ $=\frac{5}{2\sqrt{3\sqrt{6}-2}}$. Четыре квадрата типа γ_2 и четыре $\{6\}$ типа γ_1 образуют замкнутый пояс, перпендикулярный плоскости симметрии. В сечении пояса этой плоскостью мы получаем восьмиугольник, четыре стороны которого, равные 1, попарно параллельны и соответствуют квадратам, а остальные четыре длины $\sqrt{3}$ соответствуют шестиугольникам. Возможен единственный такой пояс, где смежные по общему ребру $\{4\}$ и $\{6\}$ образуют двугранный угол, равный $\frac{\pi}{4}$. Радиус описанной окружности вокруг этого восьмиугольника $\rho = \frac{\sqrt{8-2\sqrt{6}}}{2}$, а радиус описанной сферы вокруг P $R_1 = \frac{\sqrt{9-2\sqrt{6}}}{4} \neq R$. Следовательно, многогранника в этом случае нет.

Четвертой гранью при вершине P может быть еще десятиугольная звезда $\left\{\frac{10}{3}\right\}$ типа γ_5. Выпуклый $\{10\}$ не может быть гранью P, так как не существует многоугольника, который мог бы быть вершинной фигурой P. Единственной вершинной фигурой будет пересеченная трапеция. Следовательно, шестиугольники должны образовывать с $\left\{\frac{10}{3}\right\}$ острые двугранные углы. Если мы построим соответствующий пояс из $\left\{\frac{10}{3}\right\}$ и $\{6\}$, перпендикулярный плоскости симметрии, то увидим, что $\{6\}$ либо образуют с $\left\{\frac{10}{3}\right\}$ прямые двугранные углы, либо проходят через центр сферы, что невозможно.

Итак, не существует однородного многогранника с четырьмя гранями при вершине, три из которых есть шестиугольники типа γ_1. Пусть вершине P инцидентно два $\{4\}$ типа γ_1. Как и для группы $S_4 \times \{I\}$ из (1) и (3) заключаем, что другими двумя гранями при вершине могут быть: 1) $\{4\}$ типа γ_2 и $\{6\}$ типа γ_3; 2) $\{4\}$ типа γ_2 и $\{10\}$ типа γ_5; 3) $\{6\}$ типа γ_3 и $\{10\}$ типа γ_5; 4) $\{3\}$ типа γ_3 и $\{10\}$ типа γ_5; 5) $\{4\}$ типа γ_2 и $\{10\}$ типа γ_5; 6) $\{5\}$ типа γ_5 и $\{6\}$ типа γ_3; 7) $\{5\}$ типа γ_5 и $\{10\}$ типа γ_5; 8) два $\{8\}$ типа γ_2 и 9) два $\{12\}$ типа γ_3. В первых трех случаях два квадрата типа γ_1 смежны по общему ребру B_π. В следующих четырех случаях квадраты перемежены другими гранями так, что ребра C_0 квадратов инцидентны одной грани, а остальные инцидентны $\{3\}$ или $\{5\}$ с ребрами B. В последних двух случаях $\{8\}$ и $\{12\}$ разделяют квадраты так, что каждому из них инцидентно одно ребро C_0 одного квадрата и ребро другого типа второго квадрата. В этих двух случаях квадраты могут быть смежны по общему ребру. Докажем, что ни одна из этих возможностей не реализуется в виде однородного многогранника с группой $A_5 \times \{I\}$.

В случае 1) нет соответствующей вершинной фигуры. В случаях 2) — 7) вместо выпуклых $\{10\}$ и $\{5\}$ должны быть взяты соответственно $\left\{\frac{10}{3}\right\}$ и $\left\{\frac{5}{2}\right\}$. В двух последних случаях возможны как $\{8\}$ и $\{12\}$, так и $\left\{\frac{8}{3}\right\}$ и $\left\{\frac{12}{5}\right\}$.

Рассмотрим случай 2). Здесь вершинной фигурой P может быть равнобочная трапеция со сторонами $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3-\tau}$ или пересеченная трапеция с диагоналями $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$ и основаниями $\sqrt{3-\tau}$ и $\sqrt{2}$ $\left(\tau = 2\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$. В вершинной фигуре первого типа одна из диагоналей должна быть вершинной фигурой правильного многоугольника с ребрами C_0. Длина этой диагонали равна $\sqrt{2+\sqrt{6-2\tau}}$, что не соответствует вершинной фигуре ни одного из правильных многоугольников. Следовательно, многогранника с такой вершинной фигурой нет. Аналогичное доказательство и для вершинной фигуры второго типа и для случаев 8) и 9), когда два $\{4\}$ типа γ_1 инцидентны общему ребру.

В случае 3) не существует вершинной фигуры. Действительно, так как сумма углов всех четырех многоугольников при вершине больше 2π, то вершинной фигурой может быть только самопересекающийся четырехугольник со сторонами $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ и $\sqrt{3-\tau}$, вписанный в окружность радиуса $r<1$. Первые две стороны вершинной фигуры и две другие образуют углы, опирающиеся на одну и ту же дугу. Длина хорды, стягивающей эту дугу, равна $\sqrt{4\left(1+\frac{2-\tau}{4+2\sqrt{3(3-\tau)}}\right)}>2$. Отсюда заключаем, что $r>1$, а многогранника в этом случае нет.

Аналогично последнему случаю с тремя шестиугольниками при вершине P опровергаются случаи 4), 6) и 7). В случае 5), рассматривая замкнутый пояс из квадратов типа γ_1 и γ_2 и считая радиус описанной сферы двумя различными способами, приходим к двум неравным значениям для R.

Осталось рассмотреть два последних случая при условии, что квадраты типа γ_1 не имеют общего ребра.

В случае 9) вершинам одного $\{12\}$ инцидентно двенадцать или шесть $\{12\}$ типа γ_3. Пусть два $\{12\}$ имеют одну общую вершину. Каждому $\{12\}$ из двадцати существует параллельный ему $\{12\}$. Поэтому из вышеупомянутых двенадцати $\{12\}$ по крайней мере две пары параллельны. Так как все они вписаны в сферу, то эти $\{12\}$ образуют с инцидентным им $\{12\}$ угол, равный $\frac{\pi}{2}$, т. е. угол между двумя трехкратными осями равен $\frac{\pi}{2}$, что невозможно. Пусть два $\{12\}$ имеют две общие вершины, не инцидентные одному ребру. Тогда шесть $\{12\}$ должны образовать с исходным $\{12\}$ равные двугранные углы. Следовательно, должны существовать шесть трехкратных осей, образующих равные углы с данной трехкратной осью. Это невозможно.

Подобные рассуждения в случае 8) приводят нас к известным многогранникам, вписанным в усеченный куб с группой $S_4\times\{I\}$, грани которых типа γ_k ($k=2, 3, 4$). Новых элементарных многогранников мы не получаем.

Теорема 3 полностью доказана.

2. Однородные многогранники с группой $S_4\times\{I\}$

Расположим куб с ребром 2 в прямоугольной системе координат так, чтобы начало координат совпало с центром куба, а грани его были перпендикулярны координатным осям. В выбранной таким образом системе координат вершины куба имеют координаты (1; 1; 1), (—1; 1; 1), (—1; —1; 1), (1; —1; 1), (1; 1; —1), (—1; 1; —1), (1; —1; —1) и (—1; —1; —1), а плоскости симметрии куба записываются уравнениями: $X=0$, $Y=0$, $Z=0$ (плоскости L_3) и $X=Y$, $X=-Y$, $X=Z$, $X=-Z$, $Y=Z$ и $Y=-Z$ (плоскости L_6). Плоскости симметрии разбивают грани куба на сорок восемь треугольников Δ_i. Выберем среди этих треугольников тот, для координат каждой точки которого выполняется неравенство

$$0\leqslant X\leqslant Y\leqslant Z=1. \tag{4}$$

Обозначим его Δ_0. Этот треугольник является фундаментальным для группы $S_4 \times \{I\}$. Действительно, подвергая Δ_0 всем преобразованиям группы $S_4 \times \{I\}$, мы получим систему треугольников Δ_j ($j = 0, 1, 2, \ldots, 47$), совпадающую с системой Δ_i.

Выберем внутри Δ_0 точку $A_0(X; Y; 1)$. Образы этой точки $A_i \in \Delta_i$ ($i = 0, 1, \ldots, 47$). Координаты некоторых точек A_i отличаются от координат A_0 только знаком, другие только порядком, остальные и тем и другим. Если возьмем точку A_0 на границе фундаментального треугольника Δ_0, то некоторые образы A_i совпадают. Границу Δ_0 составляют прямые $X = 0$, $Y = 1$ и $X = Y$ (при $Z = 1$). Число образов точки, взятой на границе Δ_0, является делителем порядка группы. В частности, в вершинах Δ_0 совпадают по 8, 6 и 4 образа A_0. Эти точки определяют вершины правильных и квазиправильного многогранников с группой $S_4 \times \{I\}$. Точка (0; 0; 1) и ее образы служат вершинами октаэдра, точка (1; 1; 1)— куба и (0; 1; 1) — кубооктаэдра.

Каждая точка $A_0(X; Y; 1)$ и ее образы A_i служат вершинами многогранника, порождающего группу $S_4 \times \{I\}$. Для того, чтобы этот многогранник был однородным, необходимо еще равенство всех его ребер. Это соответствует равенству скалярных произведений по крайней мере трех векторов $\boldsymbol{r}_i$ с началом в центре куба и концами в точках A_i на вектор $\boldsymbol{r}_0$.

Точки A_i разбиваются на шесть групп: 1) $(a_1X;\ b_1Y;\ c_1)$, 2) $(a_2X;\ c_2;\ b_2Y)$, 3) $(c_3;\ b_3Y;\ a_3X)$, 4) $(b_4Y;\ a_4X;\ c_4)$, 5) $(b_5Y;\ c_5;\ a_5X)$ и 6) $(c_6;\ a_6X;\ b_6Y)$ — где a_i, b_i и c_i ($i = 1, 2, \ldots, 6$) независимо друг от друга принимают значения ± 1. Найдем скалярные произведения θ_i векторов $\boldsymbol{r}_i$ ($i = 0, 1, \ldots, 47$) на вектор $\boldsymbol{r}_0(X;\ Y; 1)$. Мы получим сорок восемь скалярных произведений, которые удобно разбить на шесть групп соответственно группам точек A_i: I) $\alpha_1X^2 + \beta_1Y^2 + \gamma_1$; II) $\alpha_2X^2 + (\beta_2 + \gamma_2)Y$; III) $\alpha_3Y^2 + (\beta_3 + \gamma_3)X$; IV) $(\alpha_4 + \beta_4)XY + \gamma_4$; V) $\alpha_5XY + \beta_5X + \gamma_5Y$ и VI) $\alpha_6XY + \beta_6X + \gamma_6Y$, где α_i, β_i и γ_i ($i = 1, 2, \ldots, 6$) независимо друг от друга принимают значения ± 1. Если скалярные произведения двух векторов на вектор $\boldsymbol{r}_0$ тождественно равны, то такое скалярное произведение мы впредь будем считать одним кратности два. Из 47 интересующих нас скалярных произведений Θ_i 14 имеют кратность 2. Очевидно, что для каждого Θ_i существует равное ему по абсолютной величине, но противоположное по знаку скалярное произведение. Поэтому мы впредь не будем рассматривать те Θ_i, которые при любых X и Y, удовлетворяющих условию(4), принимают только отрицательные значения. Принимая это во внимание, мы окончательно получаем 20 различных скалярных произведений, помещенных в табл. 1.

Таблица 1

i	Θ_i	Кратность	Группа
1	$X^2 - Y^2 + 1$	1	I
2	$X^2 + Y^2 - 1$	1	I
3	$-X^2 + Y^2 + 1$	1	I
4	$-X^2 - Y^2 + 1$	1	I
5	$X^2 + 2Y$	1	II
6	X^2	2	II
7	$-X^2 + 2Y$	1	II
8	$Y^2 + 2X$	1	III
9	$Y^2 - 2X$	1	III
10	Y^2	2	III
11	$-Y^2 + 2X$	1	III
12	$2XY + 1$	1	IV
13	$2XY - 1$	1	IV
14	$-2XY + 1$	1	IV
15	1	2	IV
16	$XY + X + Y$	2	V, VI
17	$XY + X - Y$	2	V, VI
18	$XY - X + Y$	2	V, VI
19	$-XY + X + Y$	2	V, VI
20	$-XY - X + Y$	2	V, VI

Для нахождения точек $A_0(X;\ Y;\ 1)$ с требуемыми

Таблица 2

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1																				
2	$Y=1$																			
3	$X=Y$	—																		
4	$X=0$		—																	
5		—																		
6	$Y=1$	$Y=1$	—		—															
7		—	$Y=1$		$X=0$	—														
8		—			$X=Y$	—														
9			—		—		—	$X=0$												
10		—	—		—	$X=Y$	—	$X=0$	$X=0$											
11	—		—		—		$X=Y$	—												
12	—	—		—		—		$Y=1$	—	—										
13	—	$X=Y$	—		—	—	—	—		—	$Y=1$	—								
14			—	$X=Y$					$Y=1$			$X=0$								
15	$X=Y$	—	$X=Y$	—		—			—	$Y=1$	—	$X=0$	—	$X=0$						
16		—			$X=Y$	—		$Y=1$ $X=Y$	—	—	—	$Y=1$	—							
17	—		—		—	$X=Y$	—	—		$X=Y$	$Y=1$	—	$Y=1$		—	—				
18		—	—		—	$X=Y$	—		—	$Y=1$ $X=Y$		—	—		$Y=1$	$X=0$	$X=Y$			
19		—	—		—	—	$X=Y$		—	$Y=1$	$X=Y$	—	—		$Y=1$	$X=0$	—	$X=0$ $Y=1$		
20			—		—		—		$Y=1$			—		$Y=1$	—	$X=0$		$X=0$	$X=0$	

свойствами мы предварительно приравняем скалярные произведения по два. Результаты приведены в табл. 2. Прочерки в табл. 2 обозначают, что скалярные произведения не равны ни для одной точки из Δ_0, либо равны только в вершинах Δ_0, т. е. в точках (0; 0; 1), (1; 1; 1) и (0; 1; 1). Незаполненные клетки на пересечении двух скалярных произведений обозначают, что эти скалярные произведения равны вдоль некоторых линий в Δ_0. Это либо прямые линии, либо кривые второго порядка. В таблице отмечены только те скалярные произведения, которые совпадают на границе фундаментального треугольника Δ_0. Точка $A_0(X;\ Y;\ 1)$, удовлетворяющая только двум скалярным произведениям, не может определять вершин элементарного однородного многогранника, имеющего грани типа γ_0, $\overline{\gamma}_0$ или γ_1. Кратность двух скалярных произведений не превышает четырех. Согласно теоремам 2 и 3, элементарные однородные многогранники при $q \leqslant 4$ имеют все грани типа $\gamma_k\,(k=2,\ 3,\ 4)$. Поэтому для определения точек с кратностью больше четырех будем приравнивать Θ_i по три.

Найдем точки A_0, расположенные внутри Δ_0. Приравнивая Θ_i по три, мы получаем уравнения не выше четвертой степени для определения координат A_0. В табл. 3 приведены результаты решений этих уравнений с учетом того, что кратность A_0 больше четырех. Таких точек оказалось только семь. Остальные 32 точки имеют кратность меньше пяти.

Таблица 3

i	X	Y	Z	Значение Θ_i в точке A_0	Кратность	Многогранник в обозначениях [3]
(10, 11, 20)	$3-2\sqrt{2}$	$\sqrt{2}-1$	1	$\pm(3-2\sqrt{2})$	5	—
(2, 4, 17, 20)	$\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{8\sqrt{2}-11}}{2}}$	$\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{8\sqrt{2}-11}}{2}}$	1	0	6	$8\{3, 4\}$
(4, 6, 20)	0,379 513 708	0,843 764 586	1	$\pm 0{,}144\,030\,654$	5	—
(6, 11, 20)	0,361 103 082	0,769 292 360	1	$\pm 0{,}130\,395\,436$	5	—
(7, 15, 16)	0,295 597 743	0,543 689 013	1	± 1	5	$\mid 234 = S\left\{\begin{matrix}3\\4\end{matrix}\right\}$
(1, 10, 20)	0,119 725 923	0,712 156 688	1	$\pm 0{,}507\,167\,148$	5	—
(4, 10, 20)	0,122 992 918	0,701 738 111	1	$\pm 0{,}492\,436\,372$	5	—

Для того, чтобы многогранник с вершинами в исходной точке и ее образах был однородным, необходимо, чтобы ее грани были правильными многоугольниками. Определим углы между ребрами многогранника, инцидентными его вершине A_0. Направление этих ребер определяют векторы $\rho_i = \boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_0$. Из семи интересующих нас точек только две определяют векторы ρ_i, удовлетворяющие условиям 1) —3) стр. 141. Мы получаем единственный элементарный однородный многогранник — плосконосый куб, грани которого не все перпендикулярны инвариантным осям вращения. В обозначениях [3] это $S\left\{\begin{matrix}3\\4\end{matrix}\right\} = |234$. Каждой вершине его инцидентно пять граней. Из них квадрат типа γ_4 с ребрами B, треугольник типа γ_3 с ребрами B, а остальные три треугольника типа γ_0. Этот однородный многогранник имеет 24 вершины, его эйлерова характеристика равна 2. Вершины его — суть образы точки с координатами

(0,295.597.743; 0,543.689.013; 1). 48 образов этой точки определяют два концентрических плосконосых куба, которые переходят друг в друга при помощи зеркального отражения в плоскостях симметрии куба.

Скалярные произведения Θ_2, Θ_4, Θ_{17} и Θ_{20} дают точку (вторая строка табл. 3), образы которой служат вершинами составного многогранника (компаунда), составленного из восьми октаэдров, имеющих общий центр.

Таким образом, мы исследовали все точки $A_0(X;\ Y;\ 1)$ внутри Δ_0. Рассмотрим его границу.

Вершины Δ_0 определяют октаэдр, куб, кубооктаэдр и вписанные в них однородные многогранники. Все они имеют грани типа γ_k ($k = 2, 3, 4$) [4].

Стороны границы Δ_0 составляют отрезки прямых $X = 0$, $Y = 1$ и $X = Y$. При $X = 0$ некоторые Θ_i совпадают и остается только семь различных: 0, 1, Y, $2Y$, $1+Y^2$, $1-Y^2$, Y^2. При совместном решении они определяют четыре точки: 1) $(0;\ \sqrt{2}-1;\ 1)$ $\Theta_j(A_0) = \pm(2\sqrt{2}-2)$; 2) $\left(0;\ \frac{\sqrt{2}}{2};\ 1\right)$ $\Theta_j(A_0) = \pm\frac{1}{2}$; 3) $\left(0;\ \frac{\sqrt{5}-1}{2};\ 1\right)$; $\Theta_j(A_0) = \pm\frac{\sqrt{5}-1}{2}$; 4) $\left(0;\ \frac{1}{2};\ 1\right)$ $\theta_j(A_0) = \pm 1$. Первая точка не определяет однородного многогранника. Вторая точка определяет два компаунда. Компонентами первого из них являются три куба, каждый из которых имеет две грани типа γ_4 и четыре грани типа γ_2. Компонентами второго есть шесть тетраэдров, вписанных в кубы из первого компаунда. Третья точка имеет кратность пять и определяет четыре компаунда. Компонентами их являются: 1) два правильных икосаэдра $\{3, 5\}$, 2) два больших икосаэдра $\left\{3, \frac{5}{2}\right\}$, 3) два больших додекаэдра $\left\{5, \frac{5}{2}\right\}$ и 4) два малых звездчатых додекаэдра $\left\{\frac{5}{2}, 5\right\}$. Первые два из них имеют при вершине два треугольника типа γ_3 и три треугольника типа γ_1. Два последние имеют все грани типа γ_1. Четвертая точка дает усеченный октаэдр $t\{3, 4\} = 24|\ 3$ [4], [8].

При $Y = 1$ имеем всего шесть различных скалярных произведений: 1, X^2, $1+2X$, $1-2X$, X^2+2, $2-X^2$, которые дают две точки: 1) $(\sqrt{2}-1;\ 1;\ 1)$ и 2) $\left(\frac{1}{2};\ 1;\ 1\right)$. Первая точка дает вершины четырех элементарных многогранников, грани которых все типа γ_k ($k = 2, 3, 4$). Вторая точка определяет компаунд, состоящий из четырех октаэдров $\{3, 4\}$. Вершине каждого октаэдра инцидентно три треугольника типа γ_1 и один типа γ_3.

При $X = Y$ имеем шесть различных скалярных произведений: 1, X^2, $1-2X^2$, $1+2X^2$, $2X+X^2$, $2X-X^2$. Решая их совместно, получаем четыре точки: 1) $(\sqrt{2}-1;\ \sqrt{2}-1;\ 1)$, 2) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\ \frac{\sqrt{2}}{2};\ 1\right)$, 3) $\left(\frac{1}{3};\ \frac{1}{3};\ 1\right)$ и 4) $\left(\frac{\sqrt{3}}{3};\ \frac{\sqrt{3}}{3};\ 1\right)$. Все эти точки дают либо элементарные однородные многогранники с гранями типа γ_k ($k = 2, 3, 4$) [4], либо вообще не определяют вершин однородного многогранника.

Итак, кроме перечисленных в [4] элементарных однородных многогранников, грани которых перпендикулярны инвариантным осям куба, существует только один элементарный однородный многогранник с группой S_4 — плосконосый куб.

3. Однородные многогранники с группой $A_5 \times \{I\}$

Примем три взаимно-перпендикулярные двукратные оси вращения икосаэдра с ребром 2 за оси координат. Тогда двенадцать вершин икосаэдра V_i ($i = 1, 2, \ldots, 12$) будут иметь следующие координаты: $V_1(\tau; 1; 0)$, $V_2(\tau; -1; 0)$, $V_3(1; 0; -\tau)$, $V_4(-1; 0; -\tau)$, $V_5(0; \tau; 1)$, $V_6(0; \tau; -1)$, $V_7(0; -\tau; 1)$, $V_8(0; -\tau; -1)$, $V_9(1; 0; \tau)$, $V_{10}(-1; 0; \tau)$, $V_{11}(-\tau; 1; 0)$ и $V_{12}(-\tau; -1; 0)$. Для каждой вершины V_k существует диаметрально противоположная вершина V_{13-k}. Поэтому последние шесть вершин мы будем обозначать через V_{k-13} ($k = 7, 8, \ldots, 12$). Десять граней икосаэдра, имеющие хотя бы одну из вершин V_1, V_2 или V_3, в этих обозначениях будут: $V_1V_2V_3$, $V_1V_3V_6$, $V_1V_5V_6$, $V_3V_4V_6$, $V_2V_{-4}V_{-6}$, $V_2V_{-5}V_{-6}$, $V_1V_2V_{-4}$, $V_1V_{-4}V_5$, $V_2V_3V_{-5}$ и $V_3V_4V_{-5}$. Остальные десять граней имеют противоположные знаки у индексов.

Пусть в треугольнике $V_1V_2V_3$ взята точка с барицентрическими координатами X, Y, Z. Тогда шесть точек внутри этого треугольника, получаемых из исходной преобразованиями группы $A_5 \times \{I\}$, будут: $(X; Y; Z)$, $(Y; Z; X)$, $(Z; X; Y)$, $(X; Z; Y)$, $(Z; Y; X)$ и $(Y; X; Z)$. Первая точка есть результат тождественного преобразования, следующие две получаем при помощи собственного вращения, а последние три — при помощи симметрии.

В треугольнике $V_1V_2V_3$ выберем аналогично тому, как мы делали в случае группы $S_4 \times \{I\}$, фундаментальный треугольник Δ_0. Барицентрические координаты каждой точки этого треугольника удовлетворяют соотношениям $0 \leqslant X \leqslant Y \leqslant Z \leqslant 1$ и $X + Y + Z = 1$. Границу Δ_0 составляют отрезки прямых $X = 0$, $X = Y$ и $Y = Z$. Вершины Δ_0 имеют барицентрические координаты $(0; 0; 1)$, $\left(0; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ и $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$. Образы первой из них дают вершины икосаэдра $\{3, 5\}$, второй — икосододекаэдра $\left\{\frac{3}{5}\right\}$, третьей — додекаэдра $\{5, 3\}$.

Точка с барицентрическими координатами X, Y, Z внутри Δ_0 определяет вектор $\boldsymbol{r} = V_1X + V_2Y + V_3Z$. Скалярные произведения Θ_i этого вектора на векторы, концы которых принадлежат первым десяти выше упомянутым граням, перечислены в первых тридцати семи строках табл. 4. Десять из них принимают как положительные, так и отрицательные значения. В последних десяти строчках таблицы 4 приведены их значения, причем $\Theta_{38} = -\Theta_7$, $\Theta_{39} = -\Theta_{13}$, $\Theta_{40} = -\Theta_{21}$, $\Theta_{41} = -\Theta_{19}$, $\Theta_{42} = -\Theta_{22}$, $\Theta_{43} = -\Theta_{23}$, $\Theta_{44} = -\Theta_{24}$, $\Theta_{45} = -\Theta_{28}$, $\Theta_{46} = -\Theta_{37}$ и $\Theta_{47} = -\Theta_{34}$.

Таблица 4

i	$\frac{\Theta_i}{2}$	r_i
1	$X^2 + 2YZ + \frac{\tau}{2}$	$V_1X + V_3Y + V_2Z$
2	$Y^2 + 2XZ + \frac{\tau}{2}$	$V_3X + V_2Y + V_1Z$
3	$Z^2 + 2XY + \frac{\tau}{2}$	$V_2X + V_1Y + V_3Z$
4	$XY + XZ + YZ + \frac{\tau}{2}$	$V_3X + V_1Y + V_2Z$; $V_2X + V_3Y + V_1Z$

Продолжение табл. 4

i	$\frac{\Theta_i}{2}$	r_i
5	$Y^2+Z^2-\tau X^2+\frac{\tau}{2}$	$-V_5X+V_2Y+V_3Z$
6	$X^2+Z^2-\tau Y^2+\frac{\tau}{2}$	$V_1X+V_6Y+V_3Z$
7	$X^2+Y^2-\tau Z^2+\frac{\tau}{2}$	$V_1X+V_2Y-V_4Z$
8	$X^2-(\tau-1)\,YZ+\frac{\tau}{2}$	$V_1X+V_3Y+V_6Z;\quad V_1X-V_4Y+V_2Z$
9	$Y^2-(\tau-1)\,XZ+\frac{\tau}{2}$	$-V_4X+V_2Y+V_1Z;\quad V_3X+V_2Y-V_5Z$
10	$Z^2-(\tau-1)\,XY+\frac{\tau}{2}$	$V_6X+V_1Y+V_3Z;\quad V_2X-V_5Y+V_3Z$
11	$2YZ-\tau X^2+\frac{\tau}{2}$	$-V_5X+V_3Y+V_2Z$
12	$2XZ-\tau Y^2+\frac{\tau}{2}$	$V_3X+V_6Y+V_1Z$
13	$2XY-\tau Z^2+\frac{\tau}{2}$	$V_2X+V_1Y-V_4Z$
14	$XZ+YZ-\tau XY+\frac{\tau}{2}$	$V_6X+V_3Y+V_1Z;\quad V_3X-V_5Y+V_2Z$
15	$XY+YZ-\tau XZ+\frac{\tau}{2}$	$V_2X+V_3Y-V_5Z;\quad -V_4X+V_1Y+V_2Z$
16	$XY+XZ-\tau YZ+\frac{\tau}{2}$	$V_3X+V_1Y+V_6Z;\quad V_2X-V_4Y+V_1Z$
17	$Y^2-\tau X^2-2\tau XZ+\frac{\tau}{2}$	$-V_6X+V_2Y-V_5Z$
18	$Z^2-\tau Y^2-2\tau XY+\frac{\tau}{2}$	$V_6X+V_4Y+V_3Z$
19	$X^2-\tau Z^2-2\tau YZ+\frac{\tau}{2}$	$V_1X-V_4Y+V_5Z$
20	$Z^2-\tau X^2-2\tau XY+\frac{\tau}{2}$	$V_4X-V_5Y+V_3Z$
21	$X^2-\tau Y^2-2\tau YZ+\frac{\tau}{2}$	$V_1X+V_5Y+V_6Z$
22	$Y^2-\tau Z^2-2\tau XZ+\frac{\tau}{2}$	$-V_4X+V_2Y-V_6Z$
23	$X^2-\tau(Y^2+Z^2)-\tau YZ+\frac{\tau}{2}$	$V_1X+V_6Y+V_5Z;\quad V_1X+V_5Y-V_4Z$
24	$Y^2-\tau(X^2+Z^2)-\tau XZ+\frac{\tau}{2}$	$-V_6X+V_2Y-V_4Z;\quad -V_5X+V_2Y-V_6Z$
25	$Z^2-\tau(X^2+Y^2)-\tau XY+\frac{\tau}{2}$	$V_4X+V_6Y+V_3Z;\quad -V_5X+V_4Y+V_3Z$
26	$YZ-\tau X+\frac{\tau}{2}$	$-V_6X-V_5Y+V_2Z;\quad V_4X+V_3Y-V_5Z$
27	$XZ-\tau Y+\frac{\tau}{2}$	$V_6X+V_5Y+V_1Z;\quad V_3X+V_4Y+V_6Z$

Продолжение табл. 4

i	$\frac{\Theta_i}{2}$	r_i
28	$XY - \tau Z + \frac{\tau}{2}$	$-V_4X + V_1Y + V_5Z;\ V_2X - V_4Y - V_6Z$
29	$XY - \tau(XY + XZ + YZ) + \frac{\tau}{2}$	$V_5X + V_1Y + V_6Z;\ V_2X - V_6Y - V_5Z$
30	$XZ - \tau(XY + XZ + YZ) + \frac{\tau}{2}$	$V_5X - V_4Y + V_1Z;\ V_3X - V_5Y + V_4Z$
31	$YZ - \tau(XY + XZ + YZ) + \frac{\tau}{2}$	$-V_4X - V_6Y + V_2Z;\ V_6X + V_3Y + V_4Z$
32	$YZ - \tau(X^2 + XY + YZ) + \frac{\tau}{2}$	$V_4X + V_3Y + V_6Z;\ -V_5X - V_6Y + V_2Z$
33	$XZ - \tau(Y^2 + XZ + YZ) + \frac{\tau}{2}$	$-V_4X + V_5Y + V_1Z;\ V_3X + V_6Y + V_4Z$
34	$XY - \tau(Z^2 + XY + XZ) + \frac{\tau}{2}$	$V_2X - V_5Y - V_6Z;\ V_5X + V_1Y - V_4Z$
35	$YZ - \tau(X^2 + XZ + YZ) + \frac{\tau}{2}$	$-V_6X - V_4Y + V_2Z;\ -V_5X + V_3Y + V_4Z$
36	$XZ - \tau(Y^2 + XY + XZ) + \frac{\tau}{2}$	$V_3X + V_4Y - V_5Z;\ V_5X + V_6Y + V_1Z$
37	$XY - \tau(Z^2 + XY + YZ) + \frac{\tau}{2}$	$V_6X + V_1Y + V_5Z;\ V_2X - V_6Y - V_4Z$
38	$\tau Z^2 - X^2 - Y^2 - \frac{\tau}{2}$	$-V_1X - V_2Y + V_4Z$
39	$\tau Z^2 - 2XY - \frac{\tau}{2}$	$-V_2X - V_1Y + V_4Z$
40	$\tau Y^2 - X^2 + 2\tau YZ - \frac{\tau}{2}$	$-V_1X - V_5Y - V_6Z$
41	$\tau Z^2 - X^2 + 2\tau YZ - \frac{\tau}{2}$	$-V_1X + V_4Y - V_5Z$
42	$\tau Z^2 - Y^2 + 2\tau XZ - \frac{\tau}{2}$	$V_4X - V_2Y + V_6Z$
43	$\tau(Y^2 + Z^2 + YZ) - X^2 - \frac{\tau}{2}$	$-V_1X - V_6Y - V_5Z;\ -V_1X - V_5Y + V_4Z$
44	$\tau(X^2 + Z^2 + XZ) - Y^2 - \frac{\tau}{2}$	$V_6X - V_2Y + V_4Z;\ V_5X - V_2Y + V_6Z$
45	$\tau Z - XY - \frac{\tau}{2}$	$V_4X - V_1Y - V_5Z;\ -V_2X + V_4Y + V_6Z$
46	$\tau(Z^2 + XY + YZ) - XY - \frac{\tau}{2}$	$-V_6X - V_1Y - V_5Z;\ -V_2X + V_6Y + V_4Z$
47	$\tau(Z^2 + XY + XZ) - XY - \frac{\tau}{2}$	$-V_2X + V_5Y + V_6Z;\ -V_5X - V_1Y + V_4Z$

Двадцать семь скалярных произведений имеют кратность 2. Приравнивая Θ_i по два, мы получаем 198 уравнений, отличных от уравнений границы Δ_0. Все остальные пары дают либо прямые: $X = Y$, $X = 0$ и $Y = Z$, либо точки $(0;\ 0;\ 1)$, $\left(0;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right)$ и $\left(\frac{1}{3};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{3}\right)$. Согласно теоремам 2 и 3, решение уравнений, получаемых попарным приравниванием скалярных произведений, не дает однородных многогранников, среди граней которых есть грани типа γ_0, $\bar{\gamma}_0$ или γ_1.

Приравнивая Θ_i по три, мы получаем 115 точек внутри Δ_0, кратность которых больше четырех. Только семь из них определяют элементарные однородные многогранники, приведенные в первых семи строках табл. 5.

Все эти многогранники имеют шестьдесят вершин, поэтому точка и ее образы определяют два плосконосых многогранника, не имеющих плоскостей симметрии. Друг в друга они переводятся только зеркальным отражением. Все эти многогранники имеют по 60 треугольников типа γ_0.

В вершинах Δ_0 мы получаем правильные и квазиправильные многогранники, помещенные в следующих семи строчках табл. 5. Все грани этих многогранников типа $\gamma_k\,(k=2,\ 3,\ 5)$.

При $X=0$ мы получаем шесть точек кратности больше четырех. Только одна из них дает плосконосый многогранник. В обозначениях [3] это $\left|33\frac{5}{2}\right.$, который имеет 60 вершин, 12 $\left\{\frac{5}{2}\right\}$ типа γ_5, 40 $\{3\}$ типа γ_3 и 60 $\{3\}$ типа γ_1 (табл. 5). Точка с барицентрическими координатами $X=0$, $Y=\frac{3-\tau}{5}$, $Z=\frac{\tau+2}{5}$ при $\frac{1}{2}\Theta_i\,(A_0)=\frac{3\tau+2}{2}$ определяет компаунд, состоящий из 24 пятиугольных призм.

При $X=Y$ мы получаем пять интересующих нас точек. Одна из них определяет вершины двух элементарных однородных многогранников $\frac{3}{2}\,\frac{5}{3}\,3\frac{5}{2}$ и $\left|3\,\frac{5}{3}\,\frac{5}{2}\right.$, помещенных в табл. 5. У первого из них каждой вершине инцидентно восемь граней, среди которых две $\left\{\frac{5}{2}\right\}$ типа γ_5, два $\{3\}$ типа γ_3 и четыре $\{4\}$ типа $\bar{\gamma}_0$. Вершине второго многогранника инцидентно две $\left\{\frac{5}{2}\right\}$ типа γ_5, один $\{3\}$ типа γ_3 и три $\{3\}$ типа γ_0 (табл. 5). Точка $\left(\frac{4-\tau}{11};\ \frac{4-\tau}{11};\ \frac{3+2\tau}{11}\right)$ при $\Theta_j(A_0)=\pm\frac{10+3\tau}{121}$ определяет компаунд, состоящий из 24 пятиугольных призм, в основании которых лежат $\left\{\frac{5}{2}\right\}$ типа γ_5. Точка $\left(\frac{1}{4};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{2}\right)$ при $\Theta_j(A_0)=\pm\frac{1+2\tau}{4}$ определяет два компаунда. Первый из них состоит из пяти $\left\{\frac{5}{2},\ 5\right\}$, а второй из пяти $\left\{3;\ \frac{5}{2}\right\}$. Остальные точки и их образы не являются вершинами однородных многогранников.

При $Y=Z$ имеем три точки кратности 6. Первая из них определяет элементарный однородный многогранник $\left|\frac{3}{2}\,\frac{3}{2}\,\frac{5}{2}\right.$ (табл. 5), вершине которого инцидентна $\left\{\frac{5}{2}\right\}$ типа γ_5, два $\{3\}$ типа γ_3 и три $\{3\}$ типа γ_1. Две остальные точки имеют одни и те же координаты, но различные значения $\Theta_j(A_0)$. Они не определяют однородных многогранников.

Таким образом, существует одиннадцать элементарных однородных многогранников с группой $A_5\times\{I\}$, среди граней которых есть грани типа γ_0, $\bar{\gamma}_0$ или γ_1.

Таблица 5

Θ_i	X	Y	Z	$\frac{1}{2}\Theta_i(A_0)$	Кратность	Многогранник в обозначениях [3]
(4, 10, 11)	0,148831935	0,289202962	0,561965102	1,098219950	5	$\lvert 235 = S\begin{Bmatrix}3\\5\end{Bmatrix}$
(9, 12, 25)	0,161360797	0,295926581	0,542712621	0,844464293	5	$\lvert 2\frac{5}{2}5$
(8, 25, 26)	0,157112736	0,349013015	0,493874249	0,727171790	6	$\lvert 3\frac{5}{3}5$
(24, 27, 41)	0,097314744	0,341198733	0,561486522	0,311586786	5	$\lvert 23\frac{5}{2}$
(13, 24, 29)	0,080001190	0,375387306	0,544611504	0,389168244	5	$\lvert 2\frac{5}{3}5$
(22, 33, 43)	0,070060138	0,350335370	0,579604492	0,256779756	5	$\lvert 23\frac{5}{3}$
(16, 17, 36)	0,096896345	0,236974426	0,666129228	0,641108727	5	$\lvert 2\frac{3}{2}\frac{5}{3}$
(1, 2, 8, …)	0	0	1	$\frac{\tau}{2}$	5	$5\lvert 23 = \{3, 5\}$
(…, 8, 9, 30)	0	0	1	$\frac{\tau}{2}$	5	$\frac{5}{2}\lvert 25 = \left\{5, \frac{5}{2}\right\}$
(7, 19, 22, …)	0	0	1	$-\frac{\tau}{2}$	5	$5\lvert 2\frac{5}{2} = \left\{\frac{5}{2}, 5\right\}$
(…, 22, 23, 24)	0	0	1	$-\frac{\tau}{2}$	5	$\frac{5}{2}\lvert 23 = \left\{3, \frac{5}{2}\right\}$
(17, 18, 19, …)	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}+\frac{\tau}{6}$	6	$3\lvert 3\frac{5}{2}$
(…, 19, 20, …)	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}+\frac{\tau}{6}$	6	$3\lvert \frac{5}{3}5$
(…, 20, 21, 22)	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}+\frac{\tau}{6}$	6	$\frac{3}{2}\lvert 35$
(4, 6, 14, 15, 18, 25, 26)	0	$\frac{3-\sqrt{4\tau+1}}{4-2\tau}$	$\frac{1-2\tau+\sqrt{4\tau+1}}{4-2\tau}$	$\frac{(\tau+1)\sqrt{4\tau+1}-\tau-5}{2(5-3\tau)}$	6	$\lvert 33\frac{5}{2}$
(23, 24, 34, 37, 43, …)	$\frac{3-\tau\sqrt{\tau}}{8-2\tau}$	$\frac{3-\tau\sqrt{\tau}}{8-2\tau}$	$\frac{1-\tau+\tau\sqrt{\tau}}{4-\tau}$	0	8	$\lvert \frac{3}{2}\frac{5}{3}3\frac{5}{2}$
(…, 37, 43, 44, 46, 47)	$\frac{3-\tau\sqrt{\tau}}{8-2\tau}$	$\frac{3-\tau\sqrt{\tau}}{8-2\tau}$	$\frac{1-\tau+\tau\sqrt{\tau}}{4-\tau}$	0	8	$\lvert 3\frac{5}{3}\frac{5}{2}$
(12, 13, 16, 24, 25, 32, 35)	$\frac{3+\tau-\sqrt{9\tau+5}}{5-2\tau}$	$\frac{2-3\tau+\sqrt{9\tau+5}}{2(5-2\tau)}$	$\frac{2-3\tau+\sqrt{9\tau+5}}{2(5-2\tau)}$	$\frac{(21+15\tau)\times\sqrt{9\tau+5}-29-39\tau}{2(29-16\tau)}$	6	$\lvert \frac{3}{2}\frac{3}{2}\frac{5}{2}$

Используя результаты настоящей статьи и [4], мы приходим к выводу, что перечень элементарных однородных многогранников, приведенный в [3, табл. 7], полон. Таким образом, теорема A доказана.

В заключение автор выражает искреннюю благодарность А. И. Меданику за ряд ценных советов и помощь при оформлении этой статьи, а также Ю. Л. Подпалову и В. И. Хатунцеву за численное решение уравнений на ЭВМ.

ЛИТЕРАТУРА

1. H. S. M. Coxeter. Regular polytops. London, 1948.
2. Г. С. М. Кокстер. Введение в геометрию. Изд-во «Наука», 1966.
3. H. S. M. Coxeter, M. S. Longuet-Higgins, J. C. P. Miller. Uniform polyhedra. Philos. trans. roy. Soc., London, 246, № 916, ser. A, 401—450, 1954.
4. С. П. Сопов. Об одном классе однородных многогранников. Укр. геометр. сб., вып. 7, Изд-во ХГУ, Харьков, 1969.
5. С. П. Сопов. Конечность числа элементарных однородных многогранников ненулевой плотности. Укр. геометр. сб., вып. 5—6, Изд-во ХГУ, Харьков, 1968.
6. С. П. Сопов. Одна теорема об однородных многогранниках. Укр. геометр. сб., вып. 2, Изд-во ХГУ, Харьков, 1966.
7. В. А. Залгаллер. Выпуклые многогранники с правильными гранями. Изд-во «Наука», 1966.
8. С. П. Сопов. О количестве однородных многогранников с неотрицательной эйлеровой характеристикой. Укр. геометр. сб., вып. 3, Изд-во ХГУ, Харьков, 1966.

Поступила 28 марта 1969 г.

УКРАИНСКИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК

Выпуск 8 1970

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ РИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВ, ДОПУСКАЮЩИХ СЕМЕЙСТВА ДВУМЕРНЫХ ВПОЛНЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

В. Г. Сурядная, Ю. С. Слободян

(Харьков)

Индикатрисой риманова пространства в некоторой его точке M называется поверхность второго порядка, построенная в пространстве кососимметрических тензоров [3].

Имеет место следующая

Теорема. *Если полное n-мерное риманово пространство с аналитической метрикой допускает только $(2n-5)$-параметрическое семейство двумерных геодезических поверхностей, и индикатриса хотя бы в одной точке M пространства допускает только $(n-3)$-параметрическое семейство главных направлений, то такое пространство допускает однопараметрическое семейство $(n-1)$-мерных вполне геодезических поверхностей.*

Изложим метод доказательства теоремы. Как показано в работе [3], бивектор, определяющий двумерную касательную площадку к двумерной вполне геодезической поверхности, есть главное направление индикатрисы. Это условие необходимое. Но так как по условию теоремы число главных направлений равно числу вполне геодезических поверхностей хотя бы в одной точке и метрика пространства аталитическая, то оно становится также и достаточным. Индикатриса представляет собой поверхность второго порядка в пространстве кососимметрических двухвалентных тензоров. Не всякому тензору отвечает двумерная площадка. Чтобы это имело место, необходимо и достаточно, чтобы компоненты тензора удовлетворяли следующей системе уравнений:

$$p_{[\alpha\beta}p_{\gamma\sigma]} = 0, \quad (\alpha,\ \beta = 1,\ \ldots,\ n), \tag{1}$$

т. е. чтобы тензор p был бивектором.

Кроме того, тензор p должен быть главным направлением индикатрисы. И таких главных направлений в некоторой точке должно быть $(n-3)$-параметрическое семейство. Но тогда они лежат на $(n-2)$-мерной плоскости. Таким образом, нужно найти все $(n-2)$-мерные плоскости в C_n^2-мерном пространстве кососимметрических 2-тензоров, лежащие на конусе (1). Задача эта сама по себе чрезвычайно трудная. Однако конус (1) допускает линейную транзитивную группу преобразований [2]. Поэтому достаточно найти все $(n-2)$-мерные плоскости, лежащие на конусе (1) в одной его точке (отличной от вершины). Все такие плоскости находятся непосредственной подстановкой уравнений, определяющих $(n-2)$-мерную плоскость в уравнение (1).

Мы не будем выписывать полученный результат.

Зная компоненты главных направлений, нетрудно найти все двумерные плоскости, касательные к вполне геодезическим поверхостям n-мерного риманова пространства в точке M. Оказывается, что все такие площадки проходят через некоторое фиксированное направление и ортогональны некоторому фиксированному направлению. Двумерные вполне геодезические поверхности, содержащие точку M, лежат, таким образом, на $(n-1)$-мерной поверхности $F_{(n-1)}$ и имеют общую «ось» — геодезическую линию.

Вследствие аналитичности метрики, через каждую точку пространства проходит «ось» семейства. В пространстве может быть, таким образом, самое большее $2(n-1)$-параметрическое семейство поверхностей $F_{(n-1)}$.

Докажем, что поверхностей $F_{(n-1)}$ во всем пространстве может быть только однопараметрическое семейство, и что все они вполне геодезические.

Пусть в пространстве имеется k-параметрическое семейство $F_{(n-1)k}$ поверхностей $F_{(n-1)}$, которое обладает двумя следующими свойствами: 1) все двумерные вполне геодезические поверхности пространства лежат на поверхностях семейства $F_{(n-1)k}$, 2) k-минимальное.

Рассмотрим случай $k=1$. На каждой из поверхностей $F_{(n-1)}$ лежит $(2n-6)$ — параметрическое семейство двумерных вполне геодезических поверхностей. Но тогда через каждую точку $F_{(n-1)}$ проходит «ось» семейства, полностью лежащего на $F_{(n-1)}$. Отсюда следует, что $F_{(n-1)}$ вполне геодезическая.

Рассмотрим случай $k>1$. На каждой поверхности семейства $F_{(n-1)k}$ лежит $(2n-5-k)$-параметрическое семейство двумерных вполне геодезических поверхностей. Через точку M проходит $(k-1)$ — параметрическое семейство семейства $F_{(n-1)k}$. Отсюда и из расположения вполне геодезических поверхностей в точке M следует, что через M проходит $(n-3)$-параметрическое семейство двумерных вполне геодезических поверхностей. Так как в точке M индикатриса допускает по условию только $(n-3)$-параметрическое семейство главных направлений, то это семейство также проходит через фиксированное направление и ортогонально фиксированному направлению, т. е. образует только одну поверхность $F_{(n-1)}$. Продолжая аналогичное построение, получим в точке M однопараметрическое семейство осей, что противоречит условию теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Картан. Геометрия римановых пространств. Гл. V. Изд-во иностр. лит. М., 1936.

2. В. Ходж и Д. Пидо. Методы алгебраической геометрии, т. II. Изд-во иностр. лит., М., 1954, стр. 342—343.

3. Ю. С. Слободян. О структуре римановых пространств, допускающих семейства вполне геодезических поверхностей. См. статью в настоящем сборнике.

Поступила 15 мая 1969 г.

АЛЕКСАНДР СТЕПАНОВИЧ СМОГОРЖЕВСКИЙ

1896—1969

НЕКРОЛОГ

6 мая 1969 года скончался видный украинский математик доктор физико-математических наук профессор Киевского политехнического института Александр Степанович Смогоржевский. Эту утрату особенно остро чувствуют киевские геометры, многие из которых были его учениками. Редколлегия Украинского геометрического сборника в его лице потеряла заместителя ответственного редактора.

А. С. Смогоржевский родился 6 марта (по новому стилю) 1896 года в селе Бырлинцы Лесовые ныне Винницкой области. В 1916 году, окончив гимназию с медалью, он поступает на физико-математический факультет Новороссийского (ныне Одесского) университета. Но времена были трудные, вскоре ему приходится оставить учение, и в 1918 году он уже работает учителем сельской школы. Однако мысль об окончании университета не покидает его, и в 1929 году Александр Степанович успешно сдает экстерном экзамены за Киевский институт народного образования. (Этот институт был создан после Великой Октябрьской революции на базе Киевского университета; в начале тридцатых годов он был снова преобразован в университет, которому вскоре было присвоено имя Т. Г. Шевченко).

Работая в школе, А. С. Смогоржевский не переставал заниматься научными изысканиями. В 1927 г. в соавторстве с академиком АН УССР М. Ф. Кравчуком он публикует свою первую статью, в 1931—вторую. Обе статьи посвящены ортогональным и унитарным преобразованиям. С этого времени не прекращается научная деятельность Александра Степановича, чему способствовал переход его на работу в высшую школу в 1930 году. Он заведовал кафедрой геометрии в Киевском педагогическом институте, кафедрой математики в Киевском гидромелиоративном институте, работал в должности профессора кафедры геометрии в Киевском университете, но больше всего сил он отдал развитию математики в Киевском политехническом институте, где в 1944 году он возглавил кафедру высшей математики. В 1952 году эта кафедра разделилась на две, одной из них — кафедрой математической физики — А. С. Смогоржевский руководил до конца своих дней.

Как ученый, Александр Степанович больше всего известен своими работами по геометрии. Однако его математические интересы достаточно широки и относятся к таким областям, как теория дифференциальных уравнений, теория ортогональных полиномов. Начав свою научную деятельность в средней школе, А. С. Смогоржевский никогда не переставал интересоваться вопросами элементарной математики и методики преподавания математики в средней и высшей школе.

В теории дифференциальных уравнений Александр Степанович с большим мастерством пользуется понятием функции Грина для изучения свойств решений как одного, так и системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Эти исследования изложены в его большом мемуаре «Функции Грина линейных дифференциальных систем в одномерной области» (1940 г.). В течение следующих пяти лет он подытоживает эти исследования и в 1945 году защищает докторскую диссертацию. Наиболее ценными из полученных результатов можно считать введение им понятий эрмитовой функции Грина, тензора Грина и обобщенного тензора Грина.

Целый ряд работ А. С. Смогоржевский посвятил теории ортогональных полиномов, в частности, тех, которые связаны с теоретико-вероятностной схемой С. Н. Бернштейна.

Когда говорят о геометрических работах А. С. Смогоржевского, то обычно имеют в виду его работы по геометрии Лобачевского. Между тем к геометрическим можно отнести и большой цикл его работ, начинающийся упомянутыми первыми двумя работами и посвященный теории ортогональных и унитарных преобразований в n-мерном пространстве. Основным в этих работах является представление матрицы такого преобразования в виде произведения подходящим образом выбранных матриц определенного строения.

С 1945 года начинается период творчества Александра Степановича, почти целиком посвященный исследованиям в области геометрии Лобачевского и элементарной математики. За десять лет, с 1945 по 1954, появляется большой цикл работ по геометрии Лобачевского, начатый еще тремя работами 1941 года. В них Александра Степановича больше всего интересуют геометрические построения в плоскости Лобачевского, которые во многом аналогичны классическим построениям с помощью циркуля и линейки в евклидовой плоскости, но во многом и существенно отличны от них. Так, некоторые задачи (например, деление отрезка на произвольное число равных частей), легко выполнимые в плоскости Евклида, оказываются невыполнимыми в плоскости Лобачевского, и наоборот. К этому циклу работ относятся и две близкие по содержанию книги А. С. Смогоржевского, в которых излагается эта теория; одна вышла в 1949 году как учебное пособие для университетов и педагогических институтов Украины (на украинском языке), другая — в 1951 году в серии «Геометрия Лобачевского и развитие ее идей».

Как наиболее интересные отметим следующие результаты, полученные А. С. Смогоржевским в теории построений на плоскости Лобачевского. Это, в первую очередь, построение правильного 17-угольника — проблема, которая в свое время была решена юным К. Ф. Гауссом для евклидовой плоскости. Как и у Гаусса, все построение здесь выполняется лишь с помощью циркуля и линейки.

Смогоржевский показывает, что всякую задачу на построение в плоскости Лобачевского, сводящуюся к решению уравнений, содержащих только квадратные радикалы, можно решить при помощи циркуля и линейки — как и на плоскости Евклида, — либо с помощью циркуля и орициркуля, либо с помощью линейки и гиперциркуля постоянной высоты. (Н. П. Хоменко и Н. М. Несторовичем было доказано, что в каждой отдельной конструктивной операции высоте гиперциркуля можно придавать совершенно произвольное значение).

Александр Степанович переносит на плоскость Лобачевского построения Штейнера, рассматривая построения с заданной окружностью с центром, с заданным орициклом с осью и парой параллельных прямых или эквидистантой с базисом и парой параллельных прямых.

В построениях, аналогичных построениям Маскерони, А. С. Смогоржевский устанавливает, что все задачи, приводимые к уравнениям с квадратными радикалами, разрешимы без линейки, если пользоваться одновременно циркулем, орициркулем и гиперциркулем.

Геометическим построениям в неевклидовом пространстве был посвящен обзорный доклад А. С. Смогоржевского (совместно с В. Ф. Рогаченко) на I Всесоюзной геометрической конференции в Киеве в 1962 г.

Работа Александра Степановича в области неевклидовых геометрий нашла свое отражение и в написанном им учебнике по основаниям геометрии (1954 год), который и сейчас рассматривается в украинских педагогических институтах как один из основных учебников по курсу оснований геометрии или по курсу высшей геометрии.

В 1961 году, совместно с Е. С. Столовой, А. С. Смогоржевский выпускает объемистый «Справочник по теории плоских кривых третьего порядка». На его составление авторы затратили огромный труд, о чем свидетельствует приведенный в нем библиографический указатель, содержащий 1001 название; при этом авторы использовали не только крупные монографии, но и многочисленные статьи в журналах. В справочнике почти нет доказательств, но каждый приводимый факт описан с такой полнотой, что всякий, кому приходится иметь дело с кривыми третьего порядка, может найти в этом справочнике всю необходимую информацию.

Всю жизнь Александр Степанович живо интересовался методикой преподавания математики в высшей и средней школе, много внимания уделял популяризации математики. Он много раз выступал с докладами перед учителями и учащимися, писал методические разработки для высшей школы (о методе Майора в начертательной геометрии, о преподавании теории эллиптических функций, о разрешимости задач на построение и т. п.), писал популярные сочинения по математике, редактировал учебную и научно-популярную литературу по математике, был членом Комиссии по изданию учебников при Министерстве высшего образования УССР. За несколько дней до его кончины вышла в свет первая часть «Хрестоматии по элементарной математике», редактором которой он был.

Многие работы А. С. Смогоржевского переведены на другие языки и изданы в ряде зарубежных стран (Чехословакия, Болгария, Япония, Китай).

Память об Александре Степановиче Смогоржевском навсегда сохранят его многочисленные ученики и товарищи по работе.

Н. И. КОВАНЦОВ

СПИСОК РАБОТ А. С. СМОГОРЖЕВСКОГО

1. Про ортогональні перетворення. — «Зап. Київськ. ін-ту нар. освіти», 1927, т. 2, 151—156.

Соавт: Кравчук М. П.

2. Про викладання арифметики в трудшколі. — В кн.: Методматеріали Округової учбово-методичної комісії (Тульчин. окр. інспектура нар. освіти), № 2 (4), Тульчин, 1929, 136—140.

3. Про одну задачу на minimum. — «Зап. природн.-техн. відділу» (Всеукр. акад. наук), К., 1931, № 3, 109—115.

4. Про унітарні та ортогональні перетворення. — «Журн. матем. циклу». (Всеукр. акад. наук), К., 1931, № 2—3, 3—41. Соавт.: Кравчук М. П.

5. Про унітарні матриці типу циркулянтів. — «Журн. матем. циклу» (Всеукр. акад. наук), К., 1932, № 1, 89—91.

6. Note sur les polynomes orthogonaux. — «Sitzungsberichte der math. naturwiss. ärztl. Sek. der Ukr. Sevcenko-Gesellschaft der Wissenschaften in Lemberg», Львов, 1932, H. 16, S.12—16.

7. Про Green'ову функцію звичайного лінійного диференціального рівняння. — «Журн. матем. циклу Всеукр. акад. наук», К., 1933, т. 1, вип. 3, 31—48.

8. Вища математика. Ч. I. К., Вид-во Всеукр. акад. наук, 1934. 408 с.

Соавт.: Кравчук М. П., Касьяненко П., Кулик С., Можар В.

9. Про ортогональні поліноми. — «Журн. ін-ту матем. Всеукр. акад. наук», К., 1934, № 3—4, 171—186.

10. Про тензор Гріна системи звичайних лінійних диференціальних рівнянь. — «Журн. ін-ту матем. Всеукр. акад. наук», К., 1934, № 3—4, с. 187—193.

11. Про узагальнену лінійну диференціальну задачу, — «Журн. ін-ту матем. Всеукр. акад. наук», К., 1934, № 3—4, 157—169.

12. Про ортогональні поліноми, зв'язані з імовірносною схемою С. Н. Бернштейна. — «Журн. ін-ту матем. Укр. акад. наук», К., 1935, № 3—4, 119—125.

13. Про узагальнену функцію Гріна звичайного лінійного диференціального рівняння. — «Журн. ін-ту матем. Укр. акад. наук», К., 1935, № 3—4, с. 61—76.

14. Sur les polynomes orthogonaux. — «Compt. rend. acad. Sci», P., 1935, vol. 200, p. 801—803.

15. О функции Грина обыкновенного линейного дифференциального уравнения. — В кн.: Труды Второго Всесоюзного математического съезда. Т. 2. Л. — М., 1936, 251—253.

16. Про узагальнений тензор Гріна системи звичайних лінійних диференціальних рівнянь. — «Сб. науч.-исслед. работ». (Киевск. индустр. ин-т), 1936, № 3, 109—115.

17. М. І. Лобачевський. — «Пролетарський студент», К., 1936, 19 січня.

18. Деякі геометричні перетворення і побудови, зв'язані з екстремальними задачами і питаннями геометрографії. — «Наук. зап». (Київськ. держ. ун-т), 1939, т. 4, вип. 5. Фіз.-матем. зб. № 4, 125—133.

19. Елементи геометрії трикутника. К., «Рад. школа», 1939. 87 стр.

20. О некоторых геометрических построениях, — «Науч.-информ. бюл. Киевск. индустр. ин-та», 1939, вып. 4, 157—158.

21. О поверхности зубчатого колеса с винтовым зубом. — «Науч.-информ. бюл. Киевск. индустр. ин-та», 1939, вып. 4, 155—156.

22. Дополнительные вопросы к курсу аналитической геометрии. К., 1940. 52 стр. (Киевск. индустр. ин-т).

23. Дослідження в задачах на побудову. — «Ком. освіта», К., 1940, № 1, с. 68—71.

24. Методика розв'язування задач на побудову. К., «Рад. школа», 1940, 268 стр.
Соавт.: Астряб О. М. и др.
То же: Вид. 2-е, переробл. і доп. К., «Рад. школа», 1960, 387 стр.
Соавт.: Астряб О. М. и др.

25. Про одне показникове рівняння. — «Ком. освіта», 1940, № 2, 63—65.

26. Про поверхню зубчатого колеса з гвинтовим зубом. — «Наук. зап.» (Наук.-дослід. ін-т педагогіки нар. ком. освіти УРСР), К., 1940, т. 2, 119—124.

27. Функції Гріна лінійних диференціальних систем в одновимірній області. — «Наук. зап.» (Наук.-дослід. ін-т педагогіки нар. ком. освіти УРСР), К., 1940, т. 2, 5—118.

28. Les fonctions de Green des systems différentiels linéaires dans un domaine á une seule dimension. — «Матем. сб.», М., 1940, т. 7, вып. 1, 179—196.

29. Про матриці перетворення веєрштрассових координат в гіперболічній геометрії. — «Наук. зап. мех.-матем. фак. Київськ. держ. ун-ту», 1941, т. 5, 77—80.

30. Про одне точкове перетворення в гіперболічній геометрії. — «Наук. зап. мех.-матем. фак. Київськ. держ. ун-ту», 1941, т. 5, 41—47.

31. Про побудову центрів кіл за допомогою одної тільки лінійки. — «Наук. зап.» (Київськ. держ. пед. ін-т), 1941, т. 5. Фіз.-матем. сер., № 2, 8—15.

32. О линейных квазидифференциальных системах. — «Сообщ. о науч.-исслед. работе» (Киевск. политехн. ин-т), 1945, т. 4, 3—4.

33. О некоторых геометрических построениях в гиперболической и евклидовой плоскостях. — «Докл. АН СССР», М., 1945, т. 50, 61—63.

34. Методичні вказівки для заочників педагогічних інститутів. Фізико-математичний факультет. Основи геометрії, (К., «Рад. школа», 1946). 44 стр. (Упр. вищ. школи М., освіти УРСР. Наук.-метод. кабінет заоч. пед. освіти).

35. Методичні вказівки для заочників педагогічних інститутів. Фізико-математичний факультет. Проективна геометрія. К., «Рад. школа», 1946. 18 стр. (Упр. вищ. школи М., освіти УРСР. Наук.-метод. кабінет заоч. пед. освіти).

36. Построение в гиперболической плоскости треугольника по трем углам. — «Сообщ. о науч.-исслед. работе» (Киевск. политехн. ин-т), 1946, т. 5, 3—4.

37. Основи геометрії. К., «Рад. школа», 1947. 298 стр.
То же: — Вид. 2-е. К., «Рад. школа», 1954. 343 стр.

38. Геометрические построения в пространстве Лобачевского. — В кн.: 50 лет Киевского ордена Ленина политехнического института. Сборник научных трудов, посвященных юбилею, 1898—1948. К., 1948, 621—642.

39. Замітка про лінійні квазідиференціальні системи. — «Наук. зап.» (Київськ. держ. пед. ін-т), 1948, т. 6. Фіз.-матем. сер., № 3, 35—38.

40. Метод Майора в нарисній геометрії. Лекція для студентів-заочників пед. ін-тів фіз.-мат. фак. (К., «Рад. школа», 1948). 27 стр.

41. Методичні вказівки для заочників учительських інститутів. Фізико-математичний факультет. Аналітична геометрія. К., «Рад. школа», 1948. 48 стр. (Упр. вищ. школи М-ва освіти УРСР. Наук.-метод. кабінет заоч. пед. освіти).

42. О проективных построениях в гиперболической плоскости, аналогичных штейнеровским построениям в евклидовой плоскости. — «Сообщ. о науч.-исслед. работе» (Киевск. политехн. ин-т), 1948, т. 7, 107—108.

43. Побудова правильного сімнадцятикутника в гіперболічній площині з допомогою лінійки і циркуля. — «Наук. зап.» (Київськ. держ. пед. ін-т), 1948, т. 6. Фіз.-матем. сер., № 3, 27—34, 41—43. (черт.)

44. Про інтегрування звичайного лінійного однорідного диференціального рівняння з сталими коефіцієнтами. — «Наук. зап.» (Київськ. держ. пед. ін-т), 1948, т. 6. Фіз.-матем. сер., № 3, 39—40.

45. Про розв'язування конструктивних задач другого степеня в просторі Лобачевського з допомогою циркуля гороциркуля і гіперциркуля. — «Наук. зап.» (Київськ. держ. ун-т), 1948, т. 7, вип. 4. Матем. зб., № 2, 151—156.

46. Определение угла задней заточки спирального сверла, заточенного на станках-полуавтоматах. — «Изв. Киевск. политехн. ин-та», 1949, т. 9, 21—25.

47. Самостоятельная работа студентов и изучение высшей математики. К., Изд-во Киевск. политехн. ин-та. 1949. 16 с. Стеклогр. изд.

48. Теорія геометричних побудов у просторі Лобачевського. К., «Рад. школа». 1949. 112 стр.

49. Додатки до українського перекладу книги Ж. Адамара: «Елементарна геометрія». — В кн.: Ж. Адамар. Елементарна геометрія. Ч. 2, вип. 2. Стереометрія. К., «Рад. школа», 1950, 189—224.

50. Геометрические построения в плоскости Лобачевского. М. — Л., Гостехиздат, 1951. 191 стр. Серия «Геометрия Лобачевского и развитие ее идей», вып. III.

51. О некоторых плоских кривых в геометрии Лобачевского. — «Наук. зап». (Київськ. держ. ун-т), 1951, т. 10, вип. 1. Матем. зб., № 5, 59—65.

52. Про розв'язування геометричних задач (з матеріалів для математичних гуртків). — В кн.: Математика в школі. Метод. зб. Вип. 4. К., «Рад. школа», 1951, 112—124.
Соавт.: Каримов А.

53. Аксіоматичний метод у курсі арифметики. — В кн.: Математика в школі. Метод. зб. Вип. 6. К., 1952. 8—15.

54. Метод. координат. М., Гостехиздат. 1952. 40 стр.
То же: К., «Рад. школа», 1959. 40 с. (на укр. яз.).
То же: Прага, 1954. 48 стр. (на чешск. яз).
То же: Шанхай, 1955. 50 стр. (на кит. яз.).

55. Основні ідеї геометрії Лобачевського. К., «Рад. школа». 1952. 42 стр.

56. Видатний радянський учений-педагог. (О. М. Астряб). — «Рад. школа», К., 1954, № 10, 53—54.

57. Про одну конструктивну задачу геометрії Лобачевського. — «Доп. АН УРСР», К., 1954, № 6, 399—401.

58. Развитие геометрических идей Лобачевского в работах кафедры математической физики. — «Изв. Киевск. политехн. ин-та», 1954, т. 15, 149—164.

59. До викладання деяких питань теорії еліптичних функцій. — «Наук. зап.» (Луцьк. держ. пед. ін-т), 1955, т. 3, Фіз.-мат. сер., вип. 2, 29—34.

60. О многоугольниках. — «Изв. Киевск. политехн. ин-та», 1954, т. 16, 184—199.

61. Об одной двумерной метрической геометрии. — «Изв. Киевск. политехн. ин-та», 1956, т. 19, 316—327.

62. О делении отрезка прямой на равные части. — «Изв. Киевск. политехн. ин-та», 1956, т. 19, 328—336.

63. Об одной метрической геометрии. — В кн : Труды Третьего Всесоюзного математического съезда. Т. 1. М., 1956, 170—171.

64. Линейка в геометрических построениях. М., Гостехиздат, 1957, 63 стр.
То же: К., «Рад. школа», 1961, 62 стр. (на укр. яз.).

65. О геометрии Лобачевского. М., Гостехиздат, 1957, 68 стр.

66. Борис Яковлевич Букреев. (К 100-летию со дня рождения). — «Успехи матем. наук», М., 1959, т. 14, вып. 5, 181—190. Библиограф.: с. 190—196.
Соавт.: Белоусова В. П., Добровольский В. А., Ильин И. Г.

67. Борис Яковлевич Букреев. (К 100-летию со дня рождения). К., «Рад. школа», 1959, 40 стр.
Соавт.: Белоусова В. П., Добровольский В. А., Ильин И. Г.

68. Дифференциальные уравнения математической физики и начала теории функций комплексного переменного. К., 1959. 181 стр. (Киевск. политехн. ин-т). Ротапринт.

69. Про кути в гіперболічній площині, вписані в коло. — Доп. АН УРСР, К., 1959, № 5, 463—464.

70. Элементы тензорного исчисления и теория вероятностей. К., 1959. 154 стр. (Киевск. политехн. ин-т).
Соавт.: Далецкий Ю. Л. Ротапринт.

71. Про геометрію Лобачевського. К., «Рад. школа», 1960, 66 стр.

72. Дослідження задач на побудову К., «Рад. школа», 1961, 87 стр.

73. Справочник по теории плоских кривых третьего порядка. М., Физматгиз, 1961, 263 стр.
Соавт.: Столова Е. С.

74. Пособие по вычислительному практикуму. Под. ред. А. С. Смогоржевского, К., 1962. 168 стр. (Киевск. политехн. ин-т).
Соавт.: Далецкий Ю. Л., Добровольский В. А., Скородумов В. М.

75. О некоторых плоских алгебраических кривых. — «Укр. геометр. сб.», Харьков, 1965, вып. 1, 98 — 101.
Соавт.: Столова Е. С.

76. Михаил Филиппович Кравчук. (К 75-летию со дня рождения). — «Укр. матем. журн.», К., 1968, т. 20, № 1, 85—91, с портр.
Соавт.: Вирченко Н. А., Добровольский В. А., Митропольский Ю. А. «Список трудов М. Ф. Кравчука», 87—91 (161 назв.)
Библиографию составила ст. библиограф ЦНБ ХГУ Е. А. Авксентьева

Замечание к статье «Метрическое строение одного класса пространств содержащих прямые линии»*

А. Д. Милка

В доказательстве леммы 3, содержащемся в статье, должно быть опущено предложение «Очевидно, $WX = WY$», вкравшееся в текст по невнимательности автора.

Пользуясь случаем, приведем еще одно доказательство этой леммы.

Пусть s', q', p', s'' — параллельные прямые в двумерной плоскости, соответствующие прямым s, q, p, s согласно определению параллельности в $R: (s, q) \longleftrightarrow (s', q')$, $(q, p) \longleftrightarrow (q', p')$, $(p, s) \longleftrightarrow (p', s'')$. Считаем, что q' разделяет s' и p', а p' — q' и s''.

Пусть $Z' \in s'$, $Y' \in q'$, $X' \in p'$, $Z'' \in s''$ — точки на этих прямых, соответствующие точкам X, Z, Y по изометрии. Допустим, что кратчайшая XY не ортогональна прямым p, q. Учитывая лемму 1, заключаем, что отрезок $X'Y'$, а значит $Z'Z''$, также не ортогональны s', s''. В таком случае, очевидно, на прямой s' указывается точка W', такая, что выполняется неравенство $Z'W' > W'Z''$. Отмечая на s точку W, соответствующую W' по изометрии $s \longleftrightarrow s'$, и аналогичные точки на p, q для пересечений отрезка $W'Z''$ с прямыми p', q', мы убеждаемся, что прямая s на отрезке WZ не является кратчайшей в R. Но это невозможно, и лемма тем самым доказана.

Поступила 22 июня 1969 г.

* А. Д. Милка. «Укр. геометр. сб.», вып. 4. Изд-во ХГУ, Харьков, 43—48.

СОДЕРЖАНИЕ

Редактор *А. П. Гужва*. Техредактор *Т. П. Воробиенко*. Корректор *Р. Е. Дорф*.

Сдано в набор 20/II 1970 г. Подписано к печати 17/IX-70 г. БЦ 20305.
Формат: $70\times108^1/_{16}$. Объем: 10,5 физ. печ. л., 14,7 усл. печ. л., 11,7 уч.-изд. л.
Заказ 0-398. Тираж 570. Цена 1 руб. 17 коп. ТПУ 1970 г., поз. 36.

Типоофсетная фабрика Комитета по печати при Совете Министров УССР.
Харьков, ул. Энгельса, 11.

УДК 513 **Некоторые глобальные вопросы геометрии векторного поля.** Аминов Ю. А. «Украинский геометрический сборник», вып. 8, 1970, стр. 3—15.

В работе дано новое дивергентное представление для суммы внешней и внутренней кривизн поля в римановом пространстве и с его помощью для особых точек поля вводится мощность источников кривизны. Для поля в евклидовом пространстве, заданного внутри замкнутой канaловой поверхности, являющейся инвариантным многообразием, получены оценки сверху и снизу интегральной кривизны. С помощью некоторых интегральных соотношений установлены также взаимные ограничения «в целом» полной кривизны поля и кривизны силовых линий. Кроме того, дается одно обобщение формулы Гаусса—Бонне для произвольного векторного поля. Отсюда получены достаточные условия, при которых особое множество поля будет устранимым. Эти условия формулируются через геометрические инварианты поля и особенно просто выглядят, когда векторное поле голономно.

Библиографических ссылок 11.

УДК 513 **Регулярность орициклов и гладкость полугеодезической сети на регулярном седловом роге.** Вернер А. Л. «Украинский геометрический сборник», вып. 8, 1970, стр. 16—21.

Пусть поверхность $T \in C^2$ в трехмерном евклидовом пространстве будет рогом неположительной гауссовой кривизны. На T в целом может быть введена полугеодезическая координатная сеть. Геодезическими линиями этой сети будут геодезические лучи на роге T, кратчайшие на любом своем отрезке и идущие в бесконечно удаленную точку рога. Ортогональные к ним линии будут замкнутыми гладкими выпуклыми в смысле врутренней метрики поясами на T и называются орициклами.

В работе доказано, что для рога T класса C^2 указанная выше полугеодезическая параметризация будет из класса C^1, а каждый орицикл будет кривой класса C^2, когда параметром на нем выбран естественный параметр.

Библиографических ссылок 5.

УДК 513 **Полные гармонические поверхности с однозначным сферическим изображением.** Вернер А. Л. «Украинский геометрический сборник», вып. 8, 1970, стр. 22—26.

Под гармонической поверхностью понимается поверхность в трехмерном евклидовом пространстве, заданная уравнением $z = f(x,y)$ и удовлетворяющая уравнению Лапласа $\Delta f = 0$.

В работе доказано, что полная в смысле внутренней метрики двусвязная гармоническая поверхность с однолистным сферическим отображением будет графиком суммы логарифмического потенциала и линейной функции, а односвязная гармоническая поверхность, заданная на всей плоскости и имеющая однолистное сферическое отображение, будет гиперболическим параболоидом.

Библиографических ссылок 7.

УДК 513.53 **Асимметрия асимптотически плоских пространств-времен общей теории относительности.** Денисов В. И. «Украинский геометрический сборник», вып. 8, 1970, стр. 27—33.

Для асимптотически плоского пространства-времени W вводится определение асимметрии как производной Ли метрического тензора пространства W относительно векторных полей операторов симметрии соответствующего плоского пространства-времени E. Соответственно десяти векторным полям в E автор получает десять тензоров — производных Ли, исследует зависимость между ними и выясняет их физический смысл.

Библиографических ссылок 2.

УДК 513.53 **Асимметрия и законы сохранения для асимптотически плоских пространств-времен общей теории относительности.** Денисов В. И. «Украинский геометрический сборник», вып. 8, 1970, стр. 34—37.

Законы сохранения для асимптотически плоского пространства-времени W, полученные автором ранее без использования понятия асимметрии W, здесь выводятся на основании понятия асимметрии. Последний метод является естественным и единым для теории относительности.

Библиографических ссылок 2.

УДК 513 **О плоскостях ортогональной симметрии поверхностей евклидова пространства E^m.** Игнатенко В. Ф., Лейбин А. С. «Украинский геометрический сборник», вып. 8, 1970, стр. 38—48.

Даются различного рода точные оценки числа плоскостей симметрии поверхностей в зависимости от их порядка, центральности, кратных точек. Проводится классификация поверхностей F_n пространства E^4 по числу и расположению их плоскостей симметрии. Указывается один признак произвольной поверхности с параллельными плоскостями симметрии.

Библиографических ссылок 18.

УДК 513.7 **О некоторых типах аффинорных структур в касательном пучке дифференцируемого многообразия.** Каган Ф. И. «Украинский геометрический сборник», вып. 8, 1970, стр. 49—68.

На основе предложенного автором аппарата полного поднятия для тензорных полей из дифференцируемого многообразия M в его касательное расслоение $T(M)$ изучаются почти комплексные и аналогичные им аффинорные структуры в $T(M)$. Найдены бесконечные множества таких структур в $T(M)$, содержащие, как частные случаи, все вводившиеся ранее другими авторами аффинорные структуры в $T(M)$.

Для произвольной аффинорной структуры в $\overset{c}{T}(M)$ найден ее тензор Нейенхойса в виде полного поднятия, что дает единый метод разыскания условий интегрируемости, по крайней мере, для любых почти комплексных и почти двойных структур в $T(M)$.

Библиографических ссылок 26.

УДК 513 **О некоторых классах квазиспециальных комплексов с двукратным расслоением.** Кованцов Н. И., Ищенко Е. Н. «Украинский геометрический сборник», вып. 8, 1970, стр. 69—75.

В данной работе получены системы дифференциальных уравнений для трех классов комплексов с двукратным расслоением и для этих комплексов дано безынтегральное представление. Вместе с тем выделен еще один класс комплексов, которые являются вырождениями квазиспециальных комплексов второго рода в комплексы с четырехкратным расслоением.

Библиографических ссылок 3.

УДК 513 **Однородные общие пространства путей $A_3(x,\dot{x})$ с группами аффинных движений G_5.** Кондратьев А. Т. «Украинский геометрический сборник», вып. 8, 1970, стр. 76—87.

Найдены все однородные общие трехмерные пространства путей $A_3(x,\dot{x})$, допускающие пятичленные группы аффинных движений. Классифицируя пространства по группам движений, автор исходит из стационарной подгруппы (она здесь трехчленная), дополняет ее операторами сдвигов до группы G_5, ищет ее транзитивное представление и интегрирует уравнения инвариантности объекта Γ^i, определяющего пространства путей.

Библиографических ссылок 6.

УДК 513 **Эквиареальное отображение плоскости Лобачевского на плоскость Евклида.** Курбанов Н. «Украинский геометрический сборник», вып. 8, 1970, стр. 88—90.

В статье рассматривается оригинальная конструкция, позволяющая эквиареально отображать псевдосферу евклидова пространства, интерпретирующую плоскость Лобачевского, сначала на сферу, а потом и на плоскость евклидова пространства. Этим осуществляется отображение части плоскости Лобачевского, соответствующей псевдосфере, на евклидову плоскость. Даются также формулы, позволяющие эквиареально отобразить всю плоскость Лобачевского на евклидову плоскость.

Библиографических ссылок 2.

УДК 513 **Одно обобщение теоремы единственности А. Д. Александрова для замкнутых выпуклых многогранников на случай n-мерного евклидова пространства.** Медяник А. И. «Украинский геометрический сборник», вып. 8, 1970, стр. 91—94.

Доказана теорема:

Пусть P^n и Q^n — замкнутые выпуклые многогранники n-мерного евклидова пространства E_n $(n \geqslant 4)$ с попарно параллельными гранями. И пусть все пары соответствующих по параллельности двумерных граней, кроме не более $\frac{n(n-1)}{2}-1$, удовлетворяют условию непомещаемости, то такие многогранники равны и параллельно расположены.

Библиографических ссылок 4.

УДК 513 **Об одной теореме Шура — Шмидта.** Милка А. Д. «Украинский геометрический сборник», вып. 8, 1970, стр. 95—102.

Дается распространение на случай пространств с постоянной кривизной теоремы Шура и Шмидта о «скручивании» выпуклой кривой в пространстве Евклида. Приводятся обращения этой теоремы и некоторые ее приложения. В частности, обобщается теорема Бляшке об окружностях кривизны кривой.

Библиографических ссылок 4.

УДК 513 **Интегральная формула для поля смещений.** Милка А. Д. «Украинский геометрический сборник», вып, 8, 1970, стр. 103—104.

Устанавливается формула, которая в обычных обозначениях теории изгибаний регулярных поверхностей имеет следующее выражение:

$$\oint_{(D')} [sds] = 2 \iint_{(D)} x\,(\beta\gamma - \alpha^2)\,(xx_u x_v)\,du dv.$$

Приводится соответствующий аналог для многогранников. Дается приложение найденных формул к доказательству жесткости замкнутой выпуклой регулярной поверхности и замкнутого выпуклого многогранника.

Библиографических ссылок 2.

УДК 513 — **О кривых в n-мерном эквицентроаффинном пространстве.** Мокляк А. П. «Украинский геометрический сборник», вып. 8, 1970, стр.

В работе строится общая теория кривых в n-мерном эквицентроаффинном пространстве с помощью векторно-дублетного алгоритма и одномерного тензорного исчисления. Основные соотношения эквицентроаффинной геометрии кривых на плоскости и в пространстве получаются из нее как частный случай при $n = 2$ и $n = 3$.

Библиографических ссылок 7.

УДК 513. 71 **К проективно-дифференциальной геометрии неголономной гиперповерхности.** Роговой М. Р. «Украинский геометрический сборник», вып. 8, 1970, стр. 112 — 119.

Рассматривается полярное соответствие относительно асимптотического конуса неголономной гиперповерхности и обобщенное соответствие Бомпиани. С помощью этих соответствий удается выделить $n-1$ проективно-инвариантных прямых в касательной гиперплоскости неголономной гиперповерхности. Фокальные образы позволяют ввести проективную нормаль; строится канонический репер неголономной гиперповерхности.

Библиографических ссылок 4.

УДК 513. 73 **К дифференциальной геометрии точечных соответствий между евклидовыми пространствами.** Романов В. И. «Украинский геометрический сборник», вып. 8, 1970, стр. 120 — 124.

Простейшим объектом, возникающим в дифференциальной геометрии точечных соответствий между евклидовыми пространствами, является поле эллипсоидов деформации:

В данном сообщении устанавливаются две теоремы существования отображений.

1) при заданных (в функциях точки E_n) попарно неравных величинах осей эллипсоида деформаций. Произвол равен n функций $(n-1)$ аргумента,

2) при заданном поле вектора, совпадающего с одной из полуосей эллипсоида. Произвол равен n функций $(n-1)$ аргумента.

Библиографических ссылок 5.

УДК 513 **О структуре полных римановых пространств, допускающих семейства вполне геодезических поверхностей.** Слободян Ю. С. «Украинский геометрический сборник», вып. 8, 1970, стр. 125 — 138.

Доказано, что κ-вектор, определяющий касательную площадку к вполне геодезической поверхности, есть главное направление индикатрисы — поверхности второго порядка, построенной в пространстве кососимметрических тензоров, касательном к риманову.

Изучена структура полных римановых пространств, допускающих $2(n-\kappa)$-параметрическое семейство κ-мерных вполне геодезических поверхностей при условии аналитичности метрики пространства и некотором ограничении на индикатрису.

Библиографических ссылок 7.

УДК 513 **Доказательство полноты перечня элементарных однородных многогранников.** Сопов С. П. «Украинский геометрический сборник», вып. 8, 1970, стр. 139 — 156.

Рассматриваются связные однородные многогранники без кратных вершин и ребер, т. е. элементарные. Используя свойства конечных групп движений, доказана

Теорема. Существует только 75 элементарных однородных многогранников, отличных от призм и антипризм.

Библиографических ссылок 8.

УДК 513 **Об одном свойстве римановых пространств, допускающих семейства двумерных вполне геодезических поверхностей.** Сурядная В. Г., Слободян Ю. С. «Украинский геометрический сборник», вып. 8, 1970, стр. 157 — 158.

Доказана теорема: если полное n-мерное риманово пространство с аналитической метрикой допускает только $(2n-5)$-параметрическое семейство двумерных вполне геодезических поверхностей, и индикатриса хотя бы в одной точке допускает только $(n-3)$-параметрическое семейство главных направлений, то такое пространство допускает однопараметрическое семейство $(n-1)$-мерных вполне геодезических поверхностей.

Библиографических ссылок 3.