

# КРЮЧИНСКИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК

выпуск 7

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО  
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ УССР

УКРАИНСКИЙ  
ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ  
СБОРНИК

ВЫПУСК 7

ИЗДАТЕЛЬСТВО  
ХАРЬКОВСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ  
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА имени А. М. ГОРЬКОГО  
Харьков 1970

## РЕСПУБЛИКАНСКИЙ МЕЖВЕДОМСТВЕННЫЙ СБОРНИК НАУЧНЫХ РАБОТ ПО ГЕОМЕТРИИ

7-й выпуск сборника содержит 23 статьи. В них рассматриваются различные вопросы геометрии в целом, римановой геометрии и геометрии обобщенных пространств, алгебраической, линейчатой геометрии и других областей.

### Редакционная коллегия:

Акад. АН УССР проф. А. В. Погорелов (ответственный редактор), проф. А. С. Смогоржевский (заместитель отв. редактора), доц. В. П. Белоусова, проф. Я. П. Бланк, доц. Д. З. Гордевский, проф. Н. И. Кованцов, доц. Е. А. Косачевская, доц. А. С. Лейбин (ответственный секретарь), доц. Е. П. Сенькин, доц. Н. С. Синюков, доц. В. Н. Скрыдлов, доц. М. А. Улановский.

Адрес редколлегии: Харьков—77, пл. Дзержинского, 4,  
Харьковский университет, механико-математический факультет.

2—2—3

Редактор Л. Ф. Кизилова  
Техредактор Г. П. Александрова  
Корректор Л. П. Пипенко

Сдано в набор 28/II 1969 г. Подписано к печати 25/XII 1969 г. БЦ 50352. Формат 70×108<sup>1/16</sup>.  
Объем 11,75 физ. печ. л., 16,4 усл. печ. л., 13,6 уч.-изд. л. Зак. 9-111. Тираж 900.  
Цена 96 коп. ТПУ 1969 г. поз. 7.

Отпечатано с матриц Книжной ф-ки им. Фрунзе в типографии № 16 Областного управ-  
ления по печати, Харьков, 3, Университетская, 16. Зак. 484.

## ДМИТРИЙ МАТВЕЕВИЧ СИНЦОВ

К столетию со дня рождения

20 ноября 1967 г. исполнилось 100 лет со дня рождения выдающегося советского геометра, действительного члена АН УССР, заслуженного деятеля науки Д. М. Синцова.

Дмитрий Матвеевич родился в г. Вятке в семье земского врача. С восьмилетнего возраста и на протяжении следующих 25 лет он проживал в Казани. Среднее образование получил в 3-й Казанской гимназии, которую окончил с золотой медалью в 1886 г.

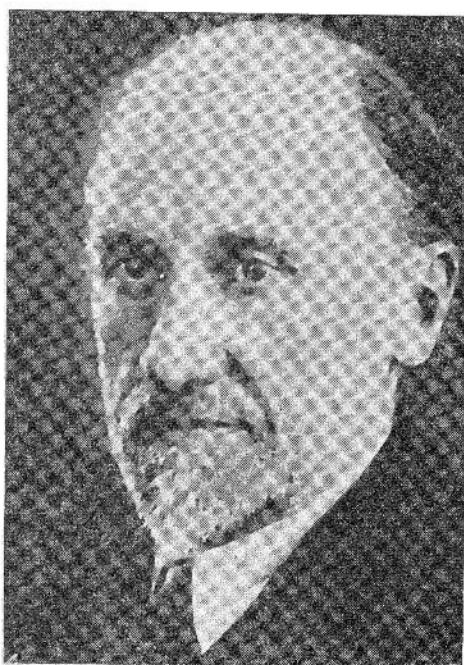
Д. М. Синцов — воспитанник Казанского университета. В 1890 г. он закончил физико-математический факультет университета и был оставлен при кафедре математики для подготовки к профессорскому званию.

С 1894 г. Д. М. Синцов — приват-доцент Казанского университета, там же в 1895 г. он защитил магистерскую диссертацию [8], а в 1898 г. — докторскую [13]. В 1899 г. Дмитрий Матвеевич переехал в Екатеринослав, где на протяжении четырех лет был профессором Высшего горного училища.

В 1903 г. Д. М. Синцов избирается ординарным профессором Харьковского университета и переезжает в Харьков, где до конца жизни ведет активную научную, педагогическую и общественную работу.

В 1935 г. выдающемуся ученому присвоено звание заслуженного деятеля науки, а в 1938 г. он избирается действительным членом АН УССР, в том же году — депутатом Верховного Совета УССР первого созыва.

В годы Великой Отечественной войны Дмитрий Матвеевич Синцов эвакуировался в Уфу вместе с АН УССР. После освобождения Харькова от немецких захватчиков он возвратился в Харьков, принимал участие в восстановлении научно-исследовательского института математики, заведовал кафедрой геометрии в университете и вел большую работу как депутат Верховного Совета.



Скончался Д. М. Синцов 28 января 1946 г. на 79-м году жизни.

В научном творчестве Дмитрия Матвеевича Синцова главное место занимает теория коннексы (ее применение в теории дифференциальных уравнений) и тесно с ней связанная геометрия пфаффовых и монжевых многообразий.

Коннексом в простейшем случае называется геометрическая конфигурация, определяемая уравнением

$$f(x_1, x_2, x_3; u_1, u_2, u_3) = 0,$$

однородным степени  $n$  относительно точечных координат  $x_i$  и однородным степени  $m$  относительно тангенциальных координат  $u_i$ . (Тернарный коннекс порядка  $n$  и класса  $m$ ).

Точка  $x$  и прямая  $u$  образуют элемент коннекса, если их координаты удовлетворяют уравнению коннекса. Фиксированной точке  $x$  соответствует кривая  $k_x$ , огибаемая прямыми  $u$ , которые вместе с  $x$  образуют элементы коннекса; фиксированной прямой  $u$  соответствует кривая  $k_u$ , точки которой в сочетании с  $u$  служат элементами коннекса. Если  $y$  — точка касания прямой  $u$  с кривой  $K_x$ , а  $v$  — прямая, касательная кривой  $K_u$  в точке  $x$ , то множество элементов  $(y, v)$  образует новый коннекс, сопряженный данному.

Система двух коннексов составляет коинциденцию. Всякое обыкновенное дифференциальное уравнение тождественно с коинциденцией

$$f(x, u) = 0, \quad u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0,$$

называемой главной коинциденцией коннекса. Тем самым создается принцип для классификации дифференциальных уравнений по порядку и классу соответствующего коннекса.

Понятие коннекса было введено А. Клебшем в 1872 г. Применение методов теории инвариантов и алгебраической геометрии к этим образам оказалось полезным для теории дифференциальных уравнений, в частности, для теории особенных решений и классификации особенных точек интегральных кривых. С другой стороны, теория коннексов нашла применение в теории геометрических преобразований. А. Клебш разработал основания теории тернарного коннекса и ее приложений к обыкновенным дифференциальным уравнениям.

В своей магистерской диссертации [8] Д. М. Синцов построил общую теорию кватернарного коннекса, т. е. коннекса с элементом точка — плоскость и установил связь его главной коинциденции с теорией дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, именно с интеграционной теорией С. Ли. В этой работе подробно изучены коннексы линейные относительно точечных, либо тангенциальных координат и линеолинейные. Рассмотрены также коннексы с элементом точка — гиперплоскость в многомерном пространстве и их связь с дифференциальными уравнениями в частных производных первого порядка от многих переменных.

Поскольку коннекс, сопряженный сопряженному, совпадает с исходным, у него как и у алгебраических кривых, должны существовать необходимые особенности.

В цикле работ [25, 35, 36, 37] Д. М. Синцов исследует вопрос об особенных элементах коннекса, изучает влияние особенных элементов на порядок и класс сопряженного коннекса как для тернарных коннексов на плоскости, так и для кватернарных коннексов в пространстве.

Цикл статей [29, 40, 111] посвящен коннексу с элементом точка — прямая — плоскость. В этих статьях изучены общие свойства таких коннексов, их главная коинциденция, вопрос об особенных элементах и интег-

рациональная задача, приводящая к дифференциальным уравнениям в полных дифференциалах второго порядка вида

$$f[x; (xdx); (xdxd^2x)] = 0.$$

В то время как для рассматриваемого коннекса не существует сопряженного ему коннекса, коннекс с элементом точки — линейный комплекс — плоскость, который является его естественным обобщением, имеет сопряженный коннекс.

Коннексу с элементом точки — прямая в пространстве посвящена работа [117]. Связанная с ним интеграционная задача приводит к уравнениям Пфаффа и Монжа.

С 1926 г. Д. М. Синцов публикует большую серию работ, посвященную пфаффовым и монжевым многообразиям. Уравнение Пфаффа

$$P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = 0$$

в случае, когда выполнено условие интегрируемости, определяет однопараметрическое семейство поверхностей. Если условие интегрируемости не выполнено, оно определяет систему интегральных кривых такую, что все кривые, проходящие через данную точку пространства, касаются в ней общей плоскости.

Исследование интегральных кривых обнаруживает, что из них можно выделить кривые, обладающие свойствами асимптотических линий поверхности, кривые, аналогичные линиям кривизны, а также кривые, обобщающие свойства геодезических линий поверхности. Таким образом, многие понятия теории поверхностей обобщаются на подобные пфаффовые многообразия. Вместе с тем здесь осуществляется известное расщепление свойств. Так, два определения линий кривизны поверхности приводят к двум различным типам линий кривизны пфаффовых многообразий, точно также приходится различать геодезические «прямейшие» и геодезические «кратчайшие».

Исследование дифференциально-геометрических свойств интегральных кривых пфаффовых уравнений восходит к Фоссу. Этому вопросу посвятили работы Лилиенталь, Роджерса, Дарбу, Иссиали. Работы Д. М. Синцова по геометрии пфаффовых многообразий значительно пополняют и систематизируют результаты этих авторов. Д. М. Синцов ввел для этих систем понятия полной и гауссовой кривизны, индикаторы геодезического кручения, обобщил формулы Эннепера—Бельтрами и исследовал частные случаи систем.

Интегральные кривые уравнения Монжа

$$F(x, y, z, dx, dy, dz) = 0,$$

однородного но нелинейного относительно  $dx, dy, dz$ , проходящие через произвольную точку пространства, касаются в ней конуса с вершиной в этой точке. Д. М. Синцов выделил из общего множества интегральных кривых монжевы уравнения те, которые обладают свойствами асимптотических, свойствами линий кривизны первого и второго рода, свойствами геодезических — кратчайших и прямейших, и составил их дифференциальные уравнения, а также вычислил экстремальные значения нормальной кривизны, кривизну и кручение асимптотических линий.

Докторская диссертация Д. М. Синцова [13] была посвящена актуальному для своего времени вопросу о нахождении рациональных интегралов линейных дифференциальных уравнений. Метод, предлагавшийся для этой цели Лиувиллем, вызвал критические замечания Пуассона и Альфана. Другой метод был предложен Имшепецким. В возникшей полемике по вопросу о сравнительных достоинствах обоих методов приняли участие русские математики (Андреев, Некрасов, Гюнтер, Пессе и др.). Д. М. Синцов до-

казал, что при надлежащем развитии метод Лиувилля может быть эффективно применен для уравнений любого порядка, а также для совокупных систем линейных уравнений, и установил тождество двух методов. В этой диссертации Д. М. Синцов разработал графический метод, обобщающий «многоугольник Ньютона» на случай системы уравнений. Изящество этого метода отмечает Н. Г. Чеботарев в статье, помещенной в сборнике памяти Ньютона.

Работы [1, 2, 14] посвящены функциям Бернулли. Функцией Я. Бернулли называется алгебраический полином, представляющий для целых значений аргумента суммы одинаковых степеней натуральных чисел. Работу [1] Д. М. Синцов написал еще будучи студентом университета. Она содержала не только обстоятельный обзор ранее полученных результатов, но и оригинальное обобщение на функции дробного порядка. Она не потеряла своего значения и в наши дни и цитируется в книге Nörlund'a „Differenzierrechnung”.

Теории функциональных уравнений Д. М. Синцов посвятил работы [24, 26, 28, 47]. Содержание этих статей обстоятельно излагаются в недавно вышедшей книге Azel'a „Vorlesungen über Funktionalgleichungen”, 1960.

Д. М. Синцов уделял много внимания написанию учебных руководств и курсов лекций. Из большого числа изданных им учебников наибольшей известностью пользовались курсы аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений, отличавшиеся оригинальностью содержания.

Д. М. Синцов проявлял глубокий интерес к реформе преподавания математики в средней и высшей школе. Это отразилось в его статьях, посвященных вопросам преподавания, в его докладах на съездах и конференциях, а также учебных руководствах.

Большую работу проводил Д. М. Синцов по изданию математических библиографических справочников и рефериованию работ отечественных математиков.

С 1906 г. Д. М. Синцов был бессменным председателем Харьковского математического общества.

Математики Харькова в значительной степени обязаны ему тем, что наши университетские библиотеки располагают богатым собранием книг и журналов по математике. Следует также отметить его работу по созданию в Харьковском университете геометрического кабинета с богатой коллекцией моделей.

Д. М. Синцов был отзывчив, добр, пользовался любовью и уважением многочисленных учеников и всех знавших его.

Я. П. Бланк

#### СПИСОК НАУЧНЫХ РАБОТ Д. М. СИНЦОВА

1. О функциях Бернулли дробных порядков. Изв. Казанск. физ.-матем. об-ва, 1890 (1), 8, стр. 291—336.
2. Бернуллисы функции с произвольными указателями. Изв. Казанск. физ.-матем. об-ва, 1891 (2), I, № 2, стр. 234—256.
3. Распространение данного Э. Пикаром нового доказательства существования интеграла системы дифференциальных уравнений 1-го порядка на комплексные значения переменных. Изв. Казанск. физ.-матем. об-ва, 1893 (2), III, № 3, стр. 138—146.
4. Заметки об уравнениях, аналогичных уравнению Риккати. Изв. Казанск. физ.-матем. об-ва, 1894 (2), IV, № 1, стр. 1—17.
5. По поводу некоторых интегралов Эрмита. Изв. Казанск. физ.-матем. об-ва, 1894 (2), IV, № 2, стр. 76—77.
6. Новый вид уравнений линейчатых поверхностей. Изв. Казанск. физ.-матем об-ва, 1894 (2), IV, № 3, стр. 198.
7. Разложение произвольных степеней тригонометрических функций в степенные строки. Изв. Казанск. физ.-матем. об-ва, 1894 (2), IV, № 4, стр. 199—204.

8. Теория коннексов в пространстве в связи с теорией дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. (Магистерская диссертация). Уч. зап. Казанск. ун-та. 1894, кн. 6, стр. 145—194; 1895, кн. 1, стр. 143—198; кн. 3, стр. 99—184; кн. 4, стр. 85—146. Отдельное издание, Казань, 1894, стр. 1—255.
9. Notes sur l'équation différentielle des surfaces régulières. Nouvelles Annales de Mathématiques, 1895 (3), XIV, p. 58—61.
10. Об одном свойстве поверхностей второй степени. Изв. Казанск. физ.-матем. об-ва, 1896 (2), VI, № 2, стр. 42—46; 1897 (2), VII, стр. 10.
11. К вопросу о рациональном интегрировании линейных дифференциальных уравнений. (По поводу исследований Лиувилля и Имшенецкого). Изв. Казанск. физ.-матем. об-ва, 1897 (2), VII, № 1, стр. 1—66; № 4, стр. 137—145.
12. К заметке: «Об одном свойстве поверхностей второй степени». Изв. Казанск. физ.-матем. об-ва, 1898 (2), VII, № 2, стр. 82—91.
13. Рациональные интегралы линейных уравнений. (Докторская диссертация). Уч. зап. Казанск. ун-та, 1898, № 4, стр. 179—214; № 5—6; стр. 81—138; № 7—8, стр. 137—174; № 9, стр. 1—50. Также отд. изд.: Казань, 1898 г., стр. 1—184.
14. Заметка о Бернульиевых числах. Изв. Казанск. физ.-матем. об-ва, 1898 (2), VIII, № 2, стр. 104—106.
15. К теории коннексов. (Краткая аннотация реферата, прочитанного 28 VIII. 1898 г. на X съезде русских естествоиспытателей и врачей). Дневник X съезда русских естествоиспытателей и врачей в Киеве, 1898, № 10, вып. II, стр. 430.
16. Sur les dérivées d'une fonction algébrique. Nouvelles Annales de Mathématiques, 1898, 3 série, t. XVII, p. 411—413.
17. Théorie des connexes dans l'espace. Bulletin des Sciences Mathématiques, 1898, 2 série, t. XXII, p. 227—228.
18. Связь между эллиптическими и гиперболическими функциями. Изв. Казанск. физ.-матем. об-ва, 1899 (2), IX, № 1, стр. 27—28.
19. Условия интегрируемости дифференциалов вида  $\Sigma X dx$ . Изв. Казанск. физ.-матем. об-ва, 1899 (2), № 2, стр. 38—40.
20. Об «аналитическом параллограмме» Лагранжа — Ньютона. (Историческая справка). Изв. Казанск. физ.-матем. об-ва, 1899 (2), IX, № 3, стр. 44—46.
21. К вопросу о склонности строк. Московск. матем. сб., 1899, XX, стр. 616—619.
22. Über eine Eigenschaft der Flächen zweiten Grades. Zeitschrift für Mathematik und Physik, 1899, 44, S. 351—355.
23. Note sur l'évaluation d'une intégrale définie. Annals of Mathematics. 2 series, vol. 2, 1900—1901, № 3, p. 189—192.
24. К задаче г. Семиколенова. Изв. Казанск. физ.-матем. об-ва, 1901 (2), XI, № 1, стр. 13—16.
25. К вопросу об особенных элементах коннекса. Изв. Казанск. физ.-матем. об-ва, 1901 (2), XI, № 3, стр. 71—102.
26. Über eine Functionalgleichung. Archiv der Mathematik und Physik. III serie, VI, Heft 3 und 4, S. 216—217.
27. К вопросу о кривизне кривых линий. Изв. Казанск. физ.-матем. об-ва, 1903 (2), XII, № 4, стр. 71—84.
28. Заметка по функциональному исчислению. Изв. Казанск. физ.-матем. об-ва, 1903 (2), XIII, № 2, стр. 46—72.
29. К теории коннексов. (Коннексы с элементом: точка — прямая плоскость). Сообщения Харьковск. матем. об-ва (СХМО), 1904, 2 (VIII), стр. 210—281.
30. Несколько слов по поводу статьи проф. М. А. Тихомандрицкого «Сумма углов плоского треугольника». Зап. имп. Харьковск. ун-та, 1905, № 2, стр. 1—5.
31. По поводу письма проф. М. А. Тихомандрицкого. Журн. Мин. нар. просв., 1907, № 6, стр. 454—457.
32. Кривизна асимптотических линий. Зап. имп. Харьковск. ун-та, 1908.
33. По поводу «Одной теоремы элементарной геометрии». Журн. Мин. нар. просв., 1908, № 9, стр. 178—180.
34. Резюме трех докладов на XII съезде русских естествоиспытателей и врачей в Москве. XII съезд русских естествоиспытателей и врачей в Москве. Предварительные сведения, 1909, стр. 18.
35. К вопросу об особенных элементах коннекса. II — Порядок и класс сопряженного коннекса. Влияние на них основных точек и прямых и собственно-особенных элементов. СХМО, 1909 (2), X, стр. 271—287.
36. К вопросу об особенных элементах коннекса. III — Понижение порядка и класса сопряженного пространственного коннекса, благодаря наличию некоторых особенностей. СХМО, 1910, (2), XII, стр. 1—18.
37. К вопросу об особенных элементах коннекса. IV — Основания теории сопряженного коннекса. СХМО, 1911, (2), XII, стр. 74—105.
38. Кривая отражения солнца в море. СХМО, 1910 (2), XI, стр. 227—234.
39. Координаты точки пересечения двух прямых в пространстве и плоскости, определяемой этими прямыми. СХМО, 1910 (2), XI, стр. 287—290.

40. Системы кривых, связанные с главной коинциденцией коннекса ( $x, p, u$ ). *Московск. матем. сб.*, 1910, 27, в. 3, стр. 346—359.
41. On the theorie of connexes. *Proc. 5 Intern. Congr. of Math., Cambridge, Aug., 1913*, р. 134—137.
42. Две задачи. *СХМО*, 1913 (2), XIII, стр. 274—275.
43. Заметка по поводу теоремы Польке. «*Матем. образов.*» 1915, № 4, стр. 170—171.
44. О графическом решении уравнений. *Вестник опытной физики и элементарной математики* (Вестн. о. ф. и эл. матем.), 1915 г.
45. Об одном свойстве однополого гиперболоида. *Матем. образов.*, 1915, № 4, стр. 172—178.
46. Одна задача на огибающую. *СХМО*, 1915 (2), XIV, стр. 102—104.
47. Об одном функциональном уравнении. *СХМО*, 1915 (2), XIV, стр. 247—250.
48. Формула Эрмита для приближенного вычисления дуги кривой и ее видоизменение. *Изв. Казанск. физ. матем. об-ва*, 1916, (2), XXII.
49. Несколько моделей для иллюстрации квадратичного характера линейчатой геометрии (задача Gergonne—Steiner'a). *Изв. Казанск. физ.-матем. об-ва*, 1917 (2), XXII.
50. Н. Е. Жуковский и классификация особенных точек дифференциальных уравнений первого порядка. *Наукові записки науково-дослідних математичних кatedр України* (Наук. зап. н.-д. матем. кат. Укр.). Отд. матем., 1924, вып. I, стр. 76—80.
51. О точках возврата огибающей. *Изв. Казанск. физ.-матем. об-ва*, 1924 (2), XXIV, стр. 61—67.
52. Этюды по теории плоских кривых. I—Несколько замечаний по поводу книги G. Loria «*Spezielle algebraische u. transcendentale ebene Kurven*» II—Об одной любопытной циссиоидальной кривой. *Наук. зап. н.-д. матем. кат. Укр.*, 1926, т. II, стр. 71—78.
53. Обобщение формулы Епперег'a—Beltrami на системы интегральных кривых Пфаффова уравнения  $Pdx + Qdy + Rdz = 0$ . *СХМО*, 1927 (4), I, стр. 64—73.
54. Свойства системы интегральных кривых Пфаффова уравнения. Распространение на системы интегральных кривых Пфаффова уравнения  $Pdx + Qdy + Rdz = 0$  теоремы Гаусса. *СХМО*, 1927, (4), I, стр. 74—79.
55. Етюди з теорії кривих. III — З'язок Декартового листа з Штейнеровою гіпопциклоїдою. — Зап. Харківськ. інст. нар. освіти (ХІНО), 1927, т. II, стор. 35—38.
56. О геометрическом толковании уравнений Монжа в связи с теорией коннексов. Труды Всероссийского съезда математиков в Москве 2 апреля — 4 мая 1927 г., под ред. проф. И. И. Привалова. М.Л., 1928, стр. 231—232.
57. Гауссова кривизна и линии кривизны второго рода. *СХМО*, 1928 (4), II, стр. 77—79.
58. Этюды по теории плоских кривых. IV — Мальтийский крест; V — Значение радиуса кривизны в обыкновенной точке кривой. *СХМО*, 1928 (4), II, стр. 80—86.
59. Поправка к статье «Обобщение формулы Эннепера — Бельтрами на системы интегральных кривых Пфаффова уравнения». *СХМО*, 1928 (4), II, стр. 199.
60. О системах интегральных кривых Пфаффова уравнения  $Pdx + Qdy + Rdz = 0$ . *Наук. зап. н.-д., матем. кат. Укр.*, 1928, т. III, стор. 107—148.
61. Деякі властивості прямолінійчастих поверхонь. Зап. ХІНО, 1928, т. III, стор. 76—83.
62. Криві подвійної кривизни — перерізи гелікоїда оборотовими поверхнями (зокрема поверхнями другого порядку). Зап. ХІНО, 1928, т. III, стор. 84—91.
63. Об одном свойстве асимптотических линий линейчатых поверхностей. Отчет о деятельности математической конференции научно-педагогического общества ДВ гос. ун-та за июнь — декабрь 1928, стр. 27—28.
64. Sur le moment de deux droites et son application dans la théorie des connexes.— *L'Enseignement Mathématiques*, 1928, XXXVII, № 1—2—3, p. 50—71.
65. Sur le problème des loxodromies (extrait d'une lettre à M. G. Loria). — *Giorn. Battaglini*, 1927.
66. Этюды по теории плоских кривых. VI—К определению особенных точек. *Журн. матем. об-ва при Дон. горн. ин-те*, 1929, I.
67. О линиях кривизны 2-го рода в системе интегральных кривых уравнений Пфаффа. (Ортогональные системы. Теорема Joachimstahl'я). Отчет о деятельности математической конференции научно-педагогического общества ДВ гос. ун-та, 1929, стр. 21—24.
68. Об одной геометрической задаче. Отчет о деятельности математической конференции научно-педагогического общества ДВ гос. ун-та, январь—декабрь, 1929 г., стр. 23—25.
69. Окремі випадки систем інтегральних кривих Пфаффового рівняння. *Записки Харківського математичного товариства та Українського інституту математичних наук (ЗХМТ)*, 1929 (4), III, стр. 111—119.
70. Геометрія Монжевих рівнянь. *ЗХМТ*, 1929 (4), III, стр. 12—132.
71. Кривизна асимптотичних ліній (ліній головних дотичних) для поверхонь, систем

- інтегральних кривих Пфаффових та Монжевих рівнянь та комплексів. ЗХМТ, 1929 (4), III, стор. 132—146.
72. Скрут асимптотичних ліній. ЗХМТ, 1929 (4), III, стор. 147—160.
  73. Zur Krümmungstheorie der Integralkurven der Pfaffeschen Gleichung. Mathematische Annalen, 1929, Band 101, Heft 2/3, S, 261—272.
  74. Дифференціальне уравнение главной конінденции коннекса в ліпейчатой форме. Изв. Казанск. физ.-матем. об-ва, 1929—1930 (3), IV, стор. 41—43.
  75. Об одном уравнении Poincaré и теории коннексов. Изв. Казанск. физ.-матем. об-ва, 1929—1930 (3), IV, стр. 44—46.
  76. Современное состояние теории коннексов. Труды I Всесоюзного съезда математиков. Харьков, 1930, М.—Л., 1936, стр. 309—317.
  77. К вопросу об объеме усеченной пирамиды у египтян. (Очерк по истории математики). Матем. образов., 1930, № 1, стр. 1—4.
  78. Питання про особливі елементи коннексу. ЗХМТ, 1930, (4), IV, стор. 191—199.
  79. Огибающие кривые в пространстве. Журн. физ.-матем. об-ва при Пермск. гос. ун-те, 1930, т. V, вып. 1.
  80. Кривая Уатта. Изв. матем. кафедры ДВ гос. ун-та, 1930, япварь—декабрь, стр. 13—16.
  81. О линиях кривизны второго рода в системе интегральных кривых уравнения Пфаффа. Отчет математической конференции ДВ гос. ун-та, 1931.
  82. Свойства системы интегральных кривых Пфаффова уравнения в  $n$ -переменных. Изв. АН СССР, 1931, № 10, стр. 1275—1294.
  83. Studien über das System der Integralkurven der Pfaffischen Gleichung  $Pdx + Qdy + Rdz = 0$ . ЗХМТ, 1932 (4), V, стор. 97—129.
  84. Sur une propriété du système des courbes intégrales de l'équation différentielle du 2-d ordre  $y'' = f(x, y)$  et son application à la construction du centre de courbure. ЗХМТ, 1933 (4), VI, стор. 19—25.
  85. Sur la détermination des points singuliers d'une surface définie par des équations de forme paramétrique. ЗХМТ, 1933 (4), VII, стор. 9—13.
  86. Sur l'axe de deviation (portionne affine). ЗХМТ, 1934 (4), VIII, стор. 33—36.
  87. Discussion du cas douteux des singularités doubles de la courbe plane en coordonnées tangentielle. ЗХМТ, 1934 (4), VIII, стор. 37—43.
  88. Sur une extension d'un problème de Czuber sur les enveloppes. ЗХМТ, 1934, (4), IX, стор. 33—37.
  89. Формула Френе—Серре для плоского  $n$ -вимірного простору. Учені записки Харківського державного університету. (Уч. зап. ХДУ), 1935, кн. 2—3, стор. 1—14.
  90. По властивості систем інтегральних кривих Пфаффового рівняння в  $n$ -змінних. Уч. зап. ХДУ, 1935, кн. 2—3, стор. 1—14.
  91. О выводе выражений для меры кривизны и меры кручения. Матем. просв., 1935, № 4, стр. 69—76.
  92. Циссоиды эллипса и гиперболы. Матем. просв., 1935, № 4, стр. 100—105.
  93. Etudes sur les systèmes de courbes intégrales de l'équation de Pfaff  $\Sigma Pdx = 0$ . Détermination des courbes intégrales, situées sur une surface donnée. Application aux courbes du complexe linéaire. ЗХМТ, 1935 (4), XI, стр. 35—44.
  94. Sur une application mécanique des propriétés des courbes intégrales de l'équation de Pfaff. ЗХМТ, 1935 (4), XI, стр. 45—47.
  95. Sur le sens géométrique de l'équation différentielle des surfaces réglées. ЗХМТ, 1935 (4), стр. 49—53.
  96. Про властивості системи інтегральних кривих диференціального рівняння першого порядку (додаток до § 5, статті «Про властивості системи інтегральних кривих Пфаффового рівняння в  $n$ -змінних»). Уч. зап. ХДУ, 1936, кн. 4, стор. 1—4.
  97. Приближенная замена цепной линии параболой или эллипсом. Матем. просв., 1936, № 5, стр. 93—95.
  98. Об одной геометрической задаче. Матем. просв. 1936, № 5, стр. 96—98.
  99. Загальні ідеї теорії коннексів і інтеграційні задачі з пими зв'язані. Уч. зап. ХДУ, 1936, кн. 6—7, стор. 1—13.
  100. Связь астроиды и четырехлепестного венчика. Матем. просв., 1936, № 9, стор. 37—38.
  101. Sur une propriété des lignes géodésiques du système des courbes intégrales de l'équation de Pfaff. ЗХМТ, 1936 (4), XIII, вып. 1, стор. 63—64.
  102. Sur les congruences des courbes dans l'espace. ЗХМТ, 1936 (4), XIII, вып. 1, стор. 65—73.
  103. Sur la classification des points d'une courbe dans  $Rn$  et le nombre des types des points de rebroussement. ЗХМТ, 1936 (4), XIII, вып. 1, стор. 74.
  104. О геометрии Монжевых уравнений. Труды семинара по векторному и тензорному анализу. М., 1937, вып. IV, стр. 184—185.
  105. Про інтегрування нормальніх систем сукупних диференціальних рівнянь. (Способ Коркіна і схема Адамара). Уч. зап. ХДУ, 1937, № 10, стор. 17—29.

106. Проективна теорія диференціальних рівнянь першого порядку. Уч. зап. ХДУ, 1937, кн. 8—9, стор. 41—60.
107. Застосування однієї цікавої символічної формули в теорії лінійних диференціальних рівнянь. Уч. зап. ХДУ, 1937, № 10, стор. 1—4.
108. З приводу деяких найновіших досліджень з геометрії Пфаффових многообразностей. Уч. зап. ХДУ, 1937, № 10, стор. 31—39.
109. «Алгебра або числення скінчених» Лобачевського і спосіб Греффе обчислення коренів численних рівнянь. Уч. зап. ХДУ, 1937, № 10, стор. 41—56.
110. Найпростіші образи і метричні функції коннектсного простору. ЗХМТ, 1937, (4), XIV, стор. 159—172.
111. До теорії коннексів з елементом (точка, пряма, площа). Геометр. зб., I, 1938, стор. 9—21.
112. Визначення омбілічних ліній на поверхнях, заданих рівнянням в нероз'язаному виді. Геометр. зб., I, 1938, стор. 35—41.
113. Про інтегрування квадратичного рівняння в повних диференціалах від трьох змінних другого степеня. Геометр. зб., I, 1938, стор. 95—99.
114. До питання про інтегральні криві одночленової форми. Геометр. зб., I, 1938, стор. 99—103.
115. Исследования по теории Пфаффовых многообразий (Специальные многообразия первого и второго рода). Геометр. зб., I, 1940, стор. 63—83.
116. Геометрическая теория интегрирования дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с двумя независимыми переменными. Геометр. зб., II, 1940, стор. 33—61.
117. Общая теория коннекса с элементом (точка, прямая) в пространстве. Зб. праць інст. матем. АН УРСР, 1940, № 5, стор. 31—71.
118. Исследования по теории Пфаффовых многообразий. ЗХМТ, 1940, (4), XVI, стор. 62—81.
119. Конгруэнции кривых, заданные совокупной системой нормального вида. Статья II. ЗХМТ, 1940 (4), XVIII, стор. 1—25.
120. Конфигурации, определяемые пересечением 2, 3 и более билинейных коннексов. Зб. праць ін-ту матем. АН УРСР, 1941, № 6, стор. 3—32.
121. Про одну властивість інтегральних кривих рівнянь виду  $y'' = f(x, y) \cdot (1 + y'^2)^m$ . Доп. АН УРСР, відділ фіз.-хім., і матем. наук, 1942, № 1—2, стор. 9—13.
122. Дослідження за теорією Пфаффових рівнянь. Інст. матем. і фіз. АН УРСР, 1943 р., стор. 209—224.
123. О структурной линии семейства интегральных кривых дифференциального уравнения первого порядка. «Наукова хроніка» Харк. держ. ун-ту, 1945, № 2.

#### ЛИТЕРАТУРА О Д. М. СИНЦОВЕ

1. С. Н. Бернштейн и Л. Я. Гиршвальд. Д. М. Синцов (Некролог). УМН, II, 4, (20), 1947, стр. 190—206.
2. Академик Д. М. Синцов. Уч. зап. ХГУ, XXIV. Зап. ин-та матем. и мех. и ХМО, серия 4, т. XIX, 1948, стр. 5—12, список научных работ Д. М. Синцова, стр. 13—19.
3. И. А. Наумов. Дмитрий Матвеевич Синцов (Очерк жизни и научно-педагогической деятельности). Изд-во ХГУ, Харьков, 1955.

**РЕАЛИЗАЦИЯ ВЫПУКЛОЙ ПОВЕРХНОСТИ С КРАЕМ  
ПО ДАННОЙ МЕТРИКЕ**

**C. П. Гейсберг** (Ленинград)

**§ 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ**

1. В настоящей статье рассматривается решение задачи о построении регулярной выпуклой поверхности с заданной метрикой, аппликата края которой есть данная функция длины дуги. В случае, когда край плоский, эта задача решена А. В. Погореловым [1]. В [2] А. Д. Александров и А. В. Погорелов решают эту задачу, требуя от искомой поверхности регулярности лишь в ее внутренних точках. В этой работе мы при более жестких условиях получаем реализацию, регулярную дополнительно и в точках края. Кроме того, получены также имеющие самостоятельный интерес оценки нормальных кривизн поверхности, включая точки края, через внутреннюю метрику и краевое условие.

2. Пусть в круге  $D \xi^2 + \eta^2 \leq 1$  дана метрика

$$ds^2 = E d\xi^2 + 2F d\xi d\eta + G d\eta^2 \quad (1)$$

положительной гауссовой кривизны  $K$ ; на окружности  $d \xi^2 + \eta^2 = 1$  дана функция  $z = z(s)$ , где  $s$  — длина дуги  $d$  в метрике (1). Введем обозначения:

$$k_1^2 = \max_D K; \quad k_2^2 = \min_D K,$$

$z(s)$  — геодезическая кривизна  $d$ ,

$$\sigma_1 = \max_d \sigma(s); \quad \sigma_2 = \min_d \sigma(s).$$

Тогда основной результат работы формулируется следующим образом.

**Теорема.** Пусть метрика (1) принадлежит классу  $C^{4,\alpha}$ , причем  $\sigma_2 \geq 1,001k_1$ .

Тогда, если

$$|z'(s)| \leq 3 \cdot 10^{-5} \left( \frac{k_2}{\sigma_1} \right)^4; \quad |z''(s)| \leq 3 \cdot 10^{-5} k_2 \left( \frac{k_2}{\sigma_1} \right)^4,$$

то существует поверхность  $F$  класса  $C^2$  с метрикой (1) и краем  $z = z(s)$ , причем для кривизны нормальных сечений вдоль ее края и тангенса угла наклона ее касательных плоскостей к плоскости  $OXY$  может быть дана оценка в зависимости только от величин  $k_2$ ,  $\sigma_1$ .

При  $z(s) \equiv 0$  получаем результат А. В. Погорелова<sup>1</sup> [1, теорема 1, стр. 88].

3. Построение искомой поверхности  $F$  будем проводить по методу, описанному в [1], взяв в качестве первого приближения реализацию метрики (1) с краем  $z(s) \equiv 0$ . Тогда доказательство теоремы сводится к полу-

<sup>1</sup> Условие  $\sigma_2 \geq 1,001k_2$  нужно для оценки угла наклона касательных плоскостей.

чению априорных оценок в  $C^2$  для радиус-вектора  $r(\xi, \eta)$  поверхности  $F$ . В [1] показано, что достаточно оценить компоненту  $r(\xi, \eta)$  поверхности  $F$ .

Оценка  $\|z(\xi, \eta)\|$  внутри  $D$  проводится точно так же, как в (1), поэтому мы ее опускаем. Новые трудности возникают лишь при получении оценки на  $d$ . Для этого удобно в окрестности  $d$  ввести полугеодезические координаты  $u, v$ , приняв за линию  $u = 0$  окружность  $d$ , за координатные линии  $u$  — геодезические, перпендикулярные  $d$ , за линии  $v$  — их ортогональные траектории; в качестве параметров возьмем длины дуг соответствующих координатных линий. Тогда  $ds^2 = du^2 + c^2dv^2$ , где  $c \equiv c(u, v)$  — функция, удовлетворяющая уравнению

$$c_{uu} + Kc = 0, \quad c(0, v) = 1, \quad c_u(0, v) = -z(v),$$

и компонента  $z(u, v)$  удовлетворяет уравнению Дарбу [1]:

$$r(t + \alpha) - (s - \beta)^2 + \gamma = 0, \quad z(0, v) = z(v), \quad (2)$$

где

$$\alpha = cc_{uv}p - \frac{c_v}{c}q; \quad \beta = \frac{c_u}{c}q; \quad \gamma = \frac{c_{uu}}{c}(c^2 - c^2p^2 - q^2),$$

$p, q, r, s, t$  — обычные обозначения производных функции  $z(u, v)$ .

Таким образом, доказательство теоремы сводится к получению оценок  $p, q, r, s, t$  и дискриминанта  $\Delta$  уравнения (2) на  $d$ . Так как  $c^2 - c^2p^2 - q^2$  есть дискриминант формы  $dx^2 + dy^2 = ds^2 - dz^2$ , то на  $d$   $1 - p^2 - q^2 \geq 0$  и для  $p, q$  имеем оценку  $|p| \leq 1, |q| \leq 1$ . Поэтому достаточно оценить  $r, s, t$  и  $\Delta$ . Этому посвящена остальная часть работы. В § 2 оцениваются  $s, t$  и устанавливается ряд вспомогательных предложений. В § 3 оцениваются  $r$  и  $\Delta$ .

## § 2. ОЦЕНКА $s, t$ . ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

Так как на  $d$   $ds = dv$ , то  $t = z''(v)$ . Оценка  $s$ , приводимая ниже, повторяет с незначительными изменениями соответствующую оценку в [1].

**Лемма 1.** Величина  $s$  допускает оценку через исходные данные задачи.

Доказательство. Пусть на  $d$   $0 \leq v \leq v_0$  и систему координат  $(u, v)$  можно ввести при  $0 \leq u \leq u_0, 0 \leq v \leq v_0$ . Очевидно, что  $u_0$  и  $v_0$  допускают оценку через величины  $\sigma_1, k_2$ . Обозначим через  $\delta_0$  минимальное  $\delta$ , для которого при  $0 \leq u \leq u_0, 0 \leq v \leq v_0$

$$\varphi_\delta(u, v) = \delta u - q + z'(v) \geq 0.$$

Тогда

$$\frac{q - z'(v)}{u} \leq \delta_0, \quad s = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{q - z'(v)}{u} \leq \delta_0.$$

Так как на  $d$   $\varphi_{\delta_0}(u, v) \equiv 0$ , то  $\varphi_{\delta_0}(u, v)$  достигает минимума либо при  $u = u_0$ , и тогда

$$\delta_0 = \frac{q - z^1(v)}{u} \Big|_{u=u_0}; \quad s \leq \frac{1 + |z'(v)|}{u_0},$$

либо  $\varphi_{\delta_0}(u, v)$  достигает минимума при  $0 < u < u_0$ , и тогда в точке минимума  $\delta_0 = s; t = z''(v)$ ;

$$q_{uu}du^2 + 2q_{uv}du\,dv + (q_{vv} - z''(v))dv^2 \leq 0.$$

В первом случае оценка  $s$  сверху получена. Рассмотрим второй случай. Повторяя рассуждения А. В. Погорелова [1], получим, что в точке минимума

$$\begin{aligned} -cc_{uu}s^3 &\leq (-2\beta s + \beta^2 - \gamma)(z''(v) + \alpha_v) + \\ &+ [(s - \beta)^2 - \gamma] \left[ (cc'_u)'_v p - \left( \frac{c_v}{c} q \right)'_v \right] + \\ &+ [2\beta_v(s - \beta) + \gamma_v](z''(v) + \alpha). \end{aligned}$$

Так как правая часть второго порядка по  $s$ , то отсюда вытекает оценка сверху для  $s$  в точке минимума. Поэтому оценивается  $\delta_0$ , и следовательно,  $s$  на  $d$  сверху.

Оценка  $s$  снизу производится аналогично. Лемма доказана.

Переходим к доказательству вспомогательных предложений, которые понадобятся в § 3 для оценки  $r$  и  $\Delta$ . Обозначим через  $\gamma$  край поверхности  $F$ , через  $\Gamma$  — проекцию  $\gamma$  на плоскость  $OXY$ , через  $\tilde{\sigma}(v)$  — кривизну  $\Gamma$ .

**Лемма 2.** Величина  $\tilde{\sigma}(v)$  допускает оценку

$$\tilde{\sigma}(v) > k_2. \quad (3)$$

**Доказательство.** Линия  $\Gamma$  ограничивает на плоскости  $OXY$  область с метрикой

$$ds^2 = ds^2 - dz^2 = (1 - p^2) du^2 - 2pq du dv + (c^2 - q^2) dv^2,$$

причем на  $\Gamma$   $c = 1$ ,  $c_v = 0$ . Кривизна линии  $\Gamma$  совпадает с ее геодезической кривизной в этой метрике. Поэтому

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}(v) &= \left[ \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{-pq}{\sqrt{c^2 - q^2}} - \frac{\partial}{\partial u} (\sqrt{c^2 - q^2}) \right) \right] \left| \frac{1 - p^2 - pq}{-pq \sqrt{1 - q^2}} \right|^{-\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{-c_u (1 - q^2) - q_v p}{(1 - q^2)^{\frac{3}{2}} (1 - p^2 - q^2)^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

Отсюда и из условий теоремы следует оценка (3).

**Лемма 3.** Длина  $l$  линии  $\Gamma$  допускает двустороннюю оценку

$$\frac{2\pi}{k_2} > l > \frac{\pi}{2\sigma_1}. \quad (4)$$

**Доказательство.** Неравенство  $\frac{2\pi}{k_2} > l$  сразу следует из (3). Для оценки  $l$  снизу сначала оценим через  $l$  площадь  $S_F$  поверхности  $F$ . Пусть

$$m = \min_{\Gamma} z(s), \quad M = \max_{\Gamma} z(s),$$

$D'$  — область, ограниченная  $\Gamma$ ,  $h$  — высота шапочки<sup>1</sup>, отсекаемой от поверхности  $F$  плоскостью  $z = M$ . Тогда из рассуждений, приведенных в [3, стр. 195], вытекает

$$\iint_{D'} K dx dy \geq \iint_{p^2 + q^2 \leq 4\pi \frac{h^2}{l^2}} \frac{dp dq}{(1 + p^2 + q^2)^2}.$$

Кроме того, очевидно

$$\text{mes } D' \leq \frac{l^2}{4\pi}.$$

Поэтому, если

$$4\pi \frac{h^2}{l^2} \geq 1,$$

то

$$\sigma_1^2 \frac{l^2}{4\pi} > \iint_{p^2 + q^2 = 1} \frac{dp dq}{(1 + p^2 + q^2)^2} = \frac{\pi}{2}$$

и (4) доказано. Если  $4\pi h^2 < l^2$ , то  $h < \frac{l}{2\sqrt{\pi}}$ . Поэтому

$$\begin{aligned} s_F &\leq l(h + M - m) + \text{mes } D' \leq \\ &\leq \frac{l^2}{2\sqrt{\pi}} + \frac{l^2}{4\pi} + l(M - m). \end{aligned}$$

<sup>1</sup> Поверхность  $F$  всюду считается выпуклой вверх.

Из условий теоремы вытекает, что  $M - m < 0,1l$ . Следовательно,

$$S_F < \frac{1,3}{\pi} l^2.$$

Далее, вдоль  $\Gamma$   $ds^2 = (1 - q^2) dv^2$ , поэтому для длины края  $\gamma$  имеем  $l_\gamma < 1,1l$ , и из формулы Гаусса — Бонне

$$\int_{\gamma} \sigma(v) dv + \iint_{S_F} K ds = 2\pi$$

вытекает, что

$$1,1l\sigma_1 + \frac{\sigma_1^2 l^2}{\pi} 1,3 > 2\pi.$$

Стало быть,  $l > \frac{\pi}{2\sigma_1}$ . Лемма доказана.

Пусть  $M_0$  — произвольная точка  $\Gamma$ . Выберем координатные оси  $OX$ ,  $OY$  так, чтобы ось  $OY$  была направлена по нормали к  $\Gamma$  в точке  $M_0$  внутрь  $\Gamma$ . Пусть в точке  $M_1 \in \Gamma$   $x(M_1) = x_1 = \max_{\Gamma} X$ ; в точке  $M_2 \in \Gamma$   $y(M_2) = y_2 = \min_{\Gamma} Y$ ; в точке  $M_3 \in \Gamma$   $x(M_3) = x_3 = \min_{\Gamma} X$ . Будем отсчитывать длины дуг на  $\Gamma$  от точки  $M_0$ , считая  $s \geq 0$  на дуге  $M_0M_1M_2$ ,  $s \leq 0$  на дуге  $M_0M_3M_2$ .

**Лемма 4.** На дугах  $M_0M_1$ ,  $M_0M_3$

$$y > 0,39 k_2 s^2. \quad (5)$$

**Доказательство.** В силу (3) линия  $\Gamma$  лежит внутри круга  $T$  радиуса  $K_2^{-1}$ , касающегося оси  $OY$  в точке  $M_0$ . Поэтому ордината точки  $N$ , лежащей на одной из дуг  $M_0M_1$ ,  $M_0M_3$  не меньше ординаты точки  $N'$  с той же длиной дуги  $ON' = ON$ , лежащей на круге  $T$ . Имеем

$$y(N') = k_2^{-1} \left( 1 - \cos \frac{s}{k_2^{-1}} \right) > 0,39 s^2 k_2,$$

значит, лемма доказана.

**Лемма 5.** Справедлива оценка

$$y_2 > \frac{1}{3} \frac{k_2}{\sigma_1^2}.$$

**Доказательство.** В силу (5)

$$|x_1| < \frac{5}{3} \sqrt{\frac{y_2}{k_2}}; |x_3| < \frac{5}{3} \sqrt{\frac{y_2}{k_2}}.$$

Поэтому, применяя (4), имеем

$$2y_2 + \frac{10}{3} \sqrt{\frac{y_2}{k_2}} \geq |x_1| + |x_3| + 2y_3 \geq \frac{\pi}{2\sigma_1}.$$

Следовательно,  $y_2 > \frac{1}{3} \frac{k_2}{\sigma_1^2}$ , что и требовалось.

**Лемма 6.** Пусть точка  $N$  лежит на дуге  $M_1M_2$ . Тогда

$$0 < s(N) < x(N) + 23 \left( \frac{k_2}{\sigma_1} \right)^2 y(N),$$

$$s(N) \leq \frac{10}{\sqrt{k_2}} \frac{\sigma_1}{k_2} \sqrt{y(N)}.$$

**Доказательство.** Заметим, что в силу (4)  $|x_1| + |x_3| \leq \frac{\pi}{0,9k_2}$ . Положим  $x(N) = x_1 - \Delta x$ . Тогда

$$\Delta x \leq \frac{x_1 + |x_3|}{y_2} y(N) \leq \frac{\pi}{0,3} \left( \frac{\sigma_1}{k_2} \right)^2 y(N).$$

В то же время

$$s(N) \leq s(M_1) + \Delta x + y(N) \leq x_1 + \Delta x + 2y(N) \leq x(N) + 2\Delta x + 2y(N),$$

следовательно,

$$s(N) \leq x(N) + y(N) \left( 2 + \frac{2\pi}{0,3} \left( \frac{\sigma_1}{k_2} \right)^2 \right) < x(N) + 23 \left( \frac{\sigma_1}{k_2} \right)^2 y(N).$$

Далее, при  $y(N) > \frac{1}{k_2}$  вторая оценка следует из (4). Если  $y(N) < \frac{1}{k_2}$ , то по лемме 5

$$\Delta x \leq \frac{x_1 + |x_3|}{y_2} y(N) \leq \frac{\pi\sqrt{3}}{0,9} \frac{1}{\sqrt{k_2}} \frac{\sigma_1}{k_2} \sqrt{y(N)},$$

и в силу (5)

$$\begin{aligned} s(N) &\leq x_1 + \Delta x + 2y(N) \leq \frac{5}{3\sqrt{k_2}} \sqrt{y(N)} + \frac{\pi\sqrt{3}}{0,9} \frac{1}{\sqrt{k_2}} \frac{\sigma_1}{k_2} \sqrt{y(N)} + \\ &\quad + \frac{2}{\sqrt{k_2}} \sqrt{y(N)} \leq \frac{10}{\sqrt{k_2}} \frac{\sigma_1}{k_2} \sqrt{y(N)}. \end{aligned}$$

Следовательно, лемма доказана.

Аналогично доказывается

**Лемма 7.** Пусть точка  $N$  лежит на дуге  $M_3M_2$ . Тогда

$$0 > s(N) > x(N) - 23 \left( \frac{\sigma_1}{k_2} \right)^2 y(N),$$

$$|s(N)| \leq \frac{\sigma_1}{k_2} \frac{10}{\sqrt{k_2}} \sqrt{y(N)}.$$

Далее, пусть  $\bar{M}_0$  — точка  $\gamma$ , проектирующаяся в точку  $M_0$ . Перенесем начало координат в точку  $\bar{M}_0$ . Очевидно, при этом все полученные оценки сохраняются. Будем рассматривать координату  $z$  точки  $\bar{M} \in \gamma$  как функцию длины дуги  $M_0M$  между  $M_0$  и проекцией  $M$  точки  $\bar{M}$  на  $\Gamma$ . Так как  $z = z(v)$  и  $dv^2 = (1 - q^2) ds^2$ , то

$$z'_s = z'_v \frac{1}{\sqrt{1 - q^2}}, \quad z''_{s^2} = z''_{v^2} \frac{1}{\sqrt{1 - q^2}} + z'_v \frac{qq'_v}{(1 - q^2)^{1/2}}.$$

Учитывая, что  $q = z'_v$ , отсюда получаем

$$|z'_s| \leq 3,1 \cdot 10^{-6} \left( \frac{K_2}{\sigma_1} \right)^4; \quad |z''_{s^2}| \leq 3,1 \cdot 10^{-6} \left( \frac{K_2}{\sigma_1} \right)^4 k_2.$$

Проведем плоскость  $P$  через касательную к  $\gamma$  в точке  $M_0$ . Ее уравнение будет

$$z = z'_s(0)x + \mu y.$$

**Лемма 8.** При  $\mu = 10^{-2} \left( \frac{k_2}{\sigma_1} \right)^2$  плоскость  $P$  лежит над  $\gamma$ .

**Доказательство.** Для точки  $\bar{N} \in \gamma$ , проектирующейся на дугу  $M_0M_1$  в точку  $N$ , имеем в силу леммы 4

$$\begin{aligned} z(\bar{N}) &\leq z'_s(0)s(N) + \max_{\Gamma} |z''_{s^2}| s^2(N) < z'_s(0)x(N) + |z'_s(0)|y(N) + \\ &+ \frac{100}{39k_2} \max_{\Gamma} |z''_{s^2}| y(N) < z'_s(0)x(N) + 5 \cdot 10^{-4} \left( \frac{k_2}{\sigma_1} \right)^4 y(N) \leq z'_s(0)x(N) + \mu y(N). \end{aligned}$$

Следовательно,  $\bar{N}$  лежит под плоскостью  $P$ .

Пусть точка  $\bar{N} \in \gamma$  проектируется в точку  $N$ , лежащую на дуге  $M_1M_2$ . Тогда в силу леммы 6

$$\begin{aligned} z(\bar{N}) &\leq z_s'(0)s(N) + \max_{\Gamma} |z_s''| s^2(N) \leq z_s'(0)x(N) + \\ &+ |z_s'(0)|23\left(\frac{\sigma_1}{k_2}\right)^2 y(N) + \frac{100}{k_2}\left(\frac{\sigma_1}{k_2}\right)^2 \max_{\Gamma} |z_s''| y(N) \leq z_s'(0)x(N) + \mu y(N). \end{aligned}$$

Значит,  $\bar{N}$  лежит под плоскостью  $P$ .

Аналогично с помощью леммы 7 рассматривается случай, когда точка  $\bar{N} \in \gamma$  проектируется на дугу  $M_0M_3M_2$ . Лемма доказана.

Аналогично доказывается

**Лемма 9.** При  $\mu = -10^{-2}\left(\frac{k_2}{\sigma_1}\right)^2$  плоскость  $P$  лежит под  $\gamma$ .

### § 3. ОЦЕНКА $r$ И $\Delta$

Для оценки  $r$  сначала оценим величину  $p$  снизу. Применим метод, использованный А. В. Погореловым в случае  $z(s) \equiv 0$ . Поместим в область  $D'$ , ограниченную контуром  $\Gamma$ , круг  $Q$  наибольшего радиуса  $p$ . Так как в силу (3) кривизна  $\Gamma$  не меньше  $k_2$ , то из леммы 3 легко вытекает оценка

$$p \geq \frac{1}{k_2} - \sqrt{\frac{1}{k_2^2} - \frac{1}{(2\sigma_1)^2}} > 0,12 \frac{k_2}{\sigma_1^2}.$$

Спроектируем  $D'$  в направлении  $OZ$  на плоскость  $P$  из леммы 9. В полученную на плоскости  $P$  область  $D''$  можно поместить круг  $Q'$  радиуса  $p$ . Обозначив через  $\varphi$  угол между плоскостями  $P$  и  $OXY$ , для диаметра  $\delta$  области  $D''$  в силу леммы 3 имеем оценку

$$\delta < \frac{\pi}{k_2} \frac{1}{\cos \varphi}.$$

Далее, пусть  $O'$  — центр круга  $Q'$  и  $O'O'' \parallel OZ$ . Построим шар радиуса  $\frac{1}{k_2}$  с центром на  $O'O''$ , лежащем ниже  $O'$  на достаточно большом расстоянии, и будем его смещать вдоль  $OO'$  к поверхности  $F$ . В некоторый момент шар коснется круга  $Q'$ , причем его высшая точка  $N$  в этот момент будет находиться под  $F$ . Простые выкладки показывают, что для  $z(N)$  справедлива оценка

$$z(N) \geq \frac{1}{k_2} - \sqrt{\frac{1}{k_2^2} - p^2 \cos^2 \varphi} - \frac{\pi \operatorname{tg} \varphi}{0,99 k_2} \geq \frac{k_2 p^2 \cos^2 \varphi}{2} - \frac{\pi \operatorname{tg} \varphi}{0,99 k_2}.$$

Кроме того, на основании леммы 9

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + (z_s'(0))^2 + \mu^2}} \geq 1 - \frac{1}{2} (124)^2 \cdot 9 \cdot 10^{-12}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} z(N) &\geq 0,006 \frac{k_2^2}{\sigma_1^4} - \frac{1}{2} 124^2 \cdot 9 \cdot 10^{-5} \cdot 0,006 \frac{k_2^3}{\sigma_1^4} - 400 \cdot 10^{-5} \frac{\pi}{0,99 k_2} \geq \\ &\geq 0,001 \frac{k_2^3}{\sigma_1^4}. \end{aligned}$$

С другой стороны, для угла  $\bar{\varphi}$  наклона касательной плоскости  $F$  в точке  $M_0$  получим на основании леммы 3

$$\operatorname{tg} \bar{\varphi} \geq \frac{z(\bar{N})}{\frac{\pi}{0,99k_2}} > 0,0003 \frac{k_2^4}{\sigma_1^4},$$

и

$$\operatorname{tg} \bar{\varphi} = \frac{\sqrt{p^2 + q^2}}{\sqrt{1 - p^2 - q^2}} < p + q < p + 3 \cdot 10^{-5} \frac{k_2^4}{\sigma_1^4}.$$

Поэтому  $p > 0,0001 \left( \frac{k_2}{\sigma_1} \right)^4$ , т. е. оценка  $p$  снизу получена. Используя эту оценку, имеем на  $d$

$$|t + \alpha| = |z''(v) - c_u p| \geq k_2 |p| - |z''(v)| > 10^{-6} k_2 \left( \frac{k_2}{\sigma_1} \right)^4.$$

Тогда

$$r = \frac{(s - \beta)^2 - \gamma}{t + \alpha}$$

имеет оценку сверху, так как числитель этой дроби оценивается в силу леммы 1.

Переходим к оценке дискриминанта  $\Delta$ . Так как на  $d\Delta = -\frac{c_{uu}}{c}(1 - p^2 - q^2)$ , то достаточно оценить  $1 - p^2 - q^2$  снизу. В то же время  $1 - p^2 - q^2 = \frac{1}{\cos^2 \bar{\varphi}}$ , где  $\bar{\varphi}$  — угол наклона касательной плоскости к поверхности. Поэтому достаточно оценить разность  $\frac{\pi}{2} - \bar{\varphi}$  снизу.

Для этого спроектируем область  $D'$  в направлении  $OZ$  на плоскость  $P$  из леммы 8. Обозначим через  $\Gamma''$  контур полученной на плоскости  $P$  области  $D'$ . Нетрудно видеть, что для кривизны  $\sigma$  линии  $\Gamma''$  будем иметь

$$\sigma = \sqrt{1 + (z'_s(0))^2(1 + \mu^2)} \cdot \frac{y''_{x^2}}{[1 + \mu^2 + 1 + (z'_s(0))^2(y_x^2)]^{3/2}},$$

где  $x$  и  $y$  — координаты точки  $\Gamma''$ , в которой вычисляется  $\sigma$ . Поэтому

$$\sigma \geq \frac{\sqrt{1 + (z'_s(0))^2}}{1 + \mu^2} \cdot \frac{y''_{x^2}}{(1 + (y_x^2)^{3/2})} \geq (1 - \mu^2) \sigma_2.$$

Следовательно, линия  $\Gamma''$  лежит внутри круга  $Q$  радиуса  $|(1 - \mu^2) \sigma_2|^{-1}$ , касающегося  $\Gamma''$  в точке  $M_0$ . Построим шар радиуса  $\frac{1}{k_2}$  с центром, лежащим под плоскостью  $P$ , проходящей через  $Q$ . Так как  $\frac{1}{k_2} > \frac{1}{(1 - \mu^2) \sigma_2}$ , то это возможно. Более того, поскольку

$$\frac{1}{k_2} > \frac{1}{(1 - \mu^2) \sigma_2} \sqrt{1 + (z'_s(0))^2 + \mu^2} = \frac{1}{(1 - \mu^2) \sigma_2 + \cos \varphi},$$

то центр шара лежит под плоскостью  $OXY$  на расстоянии, допускающем оценку снизу. Поэтому касательная плоскость к шару в точке  $M_0$  наклонена под углом, допускающим оценку сверху.

С другой стороны, из приведенного построения следует, что шар расположен над поверхностью  $F$ . Следовательно, касательная плоскость к  $F$  к точке  $M_0$  лежит под касательной плоскостью к шару в этой точке и потому ее наклон допускает оценку сверху. Теорема полностью доказана.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Погорелов. Изгибание выпуклых поверхностей. Гостехиздат, М.—Л., 1951.
2. А. Д. Александров, А. В. Погорелов. Теория поверхностей и дифференциальные уравнения в частных производных. Труды IV Всесоюзного математического съезда, т. I, 1963, стр. 3—15.
3. И. Я. Бакельман. Геометрические методы решения эллиптических уравнений. Физматгиз, М., 1965.

Поступила 10 ноября 1967 г.

---

## О ТОЧЕЧНЫХ СООТВЕТСТВИЯХ ПРОСТРАНСТВ С ГАРМОНИЧЕСКОЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ КОНФИГУРАЦИЕЙ

*М. В. Драгнев* (Москва)

Точечные соответствия между двумя трехмерными проективными пространствами с гармонической характеристической конфигурацией рассмотрел Мураккини [1]. Он показал, что при таких отображениях в каждом из двух пространств имеется 6 семейств характеристических поверхностей и для некоторых весьма частных случаев проинтегрировал дифференциальные уравнения задачи. Кроме того, Мураккини показал, что отображения указанного типа существуют с произволом в 12 функций одного аргумента.

Целью настоящей работы является исследование свойств системы характеристических поверхностей в случае соответствий между двумя трехмерными проективными пространствами с гармонической характеристической конфигурацией.

Работа выполнена методом внешних форм Картана. Все утверждения имеют локальный характер. Значения понятий и терминов, употребляемых в работе, см. в [2].

1. Пусть рассматривается соответствие  $T$  между двумя проективными пространствами  $S_3$  и  $\bar{S}_3$ . С каждой точкой  $A \in S_3$  свяжем репер, образованный четырьмя независимыми аналитическими точками  $A_0 \equiv A, A_1, A_2, A_3$ , а с каждой точкой  $TA = B \in \bar{S}_3$  свяжем такой же репер, состоящий из точек  $B_0 \equiv B, B_1, B_2, B_3$ . Тогда бесконечно малые перемещения реперов в пространствах  $S_3$  и  $\bar{S}_3$  определяются уравнениями:

$$dA_i = \omega_i^a A_a (i, a = 0, 1, 2, 3), \quad (1)$$

$$dB_i = \bar{\omega}_i^a B_a (i, a = 0, 1, 2, 3), \quad (1')$$

где  $\omega_i^a$  и  $\bar{\omega}_i^a$  — формы Пфаффа относительно параметров движения реперов. Они подчиняются уравнениям структуры пространств  $S_3$  и  $\bar{S}_3$ :

$$D\omega_i^j = [\omega_i^a \omega_a^j] (i, j, a = 0, 1, 2, 3), \quad (2)$$

$$D\bar{\omega}_i^j = [\bar{\omega}_i^a \bar{\omega}_a^j] (i, j, a = 0, 1, 2, 3), \quad (2')$$

где через  $D\omega_i^j$  и  $D\bar{\omega}_i^j$  обозначены внешние дифференциалы форм  $\omega_i^j$  и  $\bar{\omega}_i^j$  (суммирование все время будет идти только по греческим индексам).

Фиксируем произвольно в каждой точке  $A$  одну из касательных гомографий  $K$  [3] и определим вершины репера в  $\bar{S}_3$  условиями

$$KA_i = B_i (i = 0, 1, 2, 3).$$

Тогда будем иметь

$$\omega_0^i = \bar{\omega}_0^i (i = 1, 2, 3).$$

Обозначим эти формы короче через  $\omega^i$ .

Характеристические прямые в точке  $A$  определяются уравнениями

$$\frac{\Omega^1}{\omega^1} = \frac{\Omega^2}{\omega^2} = \frac{\Omega^3}{\omega^3},$$

где  $\Omega^i = C_{\alpha\beta}^i \omega^\alpha \omega^\beta$ ,  $C_{\alpha\beta}^i = C_{\beta\alpha}^i$  ( $i, \alpha, \beta = 1, 2, 3$ ) [3].

Говорят, что семь прямых связки  $\{A\}$  образуют гармоническую конфигурацию, если они пересекают произвольную плоскость, не проходящую через  $A$ , по четырем вершинам и трем диагональным точкам полного четырехвершинника.

Пусть характеристические прямые отображения  $T$  образуют гармоническую конфигурацию. Тогда в каждой точке пространства будем иметь 6 плоскостей, содержащих по три характеристические прямые. Эти плоскости называются характеристическими.

Выберем репер в  $S_3$  так, чтобы вершины  $A_1, A_2, A_3$  и единичная точка  $E = A_0 + A_1 + A_2 + A_3$  лежали на четырех характеристических прямых, соответствующих вершинам полного четырехвершинника. Тогда плоскости

$$A_0 A_i A_j \text{ и } A_0 A_k E \quad (i, j, k = 1, 2, 3)$$

становятся характеристическими и определяются соответственно уравнениями

$$\omega^k = 0 \quad (k = 1, 2, 3; i \neq j \neq k)$$

и

$$\omega^i = \omega^j \quad (i, j = 1, 2, 3; i \neq j \neq k).$$

Мураккини [1] показал, что отображения  $T$  с гармонической конфигурацией характеристических прямых существуют с произволом в 12 функций одного аргумента и что при этом характеристические плоскости огибают 6 семейств поверхностей, которые также называются характеристическими. Он получил при указанном выборе репера следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \omega_i^j &= b_i^j (\omega^l - \omega^j) \quad (i, j = 1, 2, 3; i \neq j), \\ \omega_0^0 - \omega_i^j &= b_i^j \omega^\alpha \quad (i, \alpha = 1, 2, 3), \\ \omega_i^0 &= b_i \omega^l \quad (i = 1, 2, 3). \end{aligned} \tag{3}$$

Мураккини подробно исследовал и проинтегрировал систему (3) в случаях, когда некоторые (или все) семейства характеристических поверхностей состоят из плоскостей, а также, когда все коэффициенты  $b_i^j$  постоянны.

2. Рассмотрим некоторые свойства характеристических поверхностей. Для этого нам понадобятся уравнения асимптотических линий на них.

Из (1) обычным дифференцированием получаем

$$d^2 A_0 = (\dots) A_0 + (\omega_\alpha^0 \omega^\alpha + \omega_0^0 \omega^0) A_\beta \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3)$$

(коэффициент при  $A_0$  нас не интересует).

Вдоль асимптотических линий каждой из поверхностей  $\omega^k = 0$  ( $k = 1, 2, 3$ ) точка

$$d^2 A_0 = (\dots) A_0 + (\omega_i^\beta \omega^i + \omega_i^0 \omega^0) A_\beta \quad (i, j, \beta = 1, 2, 3; i \neq j \neq k)$$

должна лежать в ее касательной плоскости  $A_0 A_i A_j$  ( $i \neq j \neq k$ ). Следовательно, мы должны иметь

$$(A_0 A_i A_j d^2 A_0) = (\omega_i^k \omega^i + \omega_i^0 \omega^0) (A_0 A_i A_j A_k) = 0,$$

откуда получаем уравнения асимптотических линий на характеристических поверхностях  $\omega^k = 0$  ( $k = 1, 2, 3$ )

$$\omega_i^k \omega^l + \omega_j^k \omega^l = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3; i \neq j \neq k)$$

или в силу (3)

$$b_i^k (\omega^l)^2 + b_j^k (\omega^l)^2 = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3; i \neq j \neq k). \quad (4)$$

Аналогично для асимптотических линий на характеристических поверхностях  $\omega^i = \omega^j$  ( $i, j = 1, 2, 3; i \neq j$ ) получим следующие уравнения:

$$(b_1^i + b_2^i + b_3^i - b_1^j - b_2^j - b_3^j) (\omega^l)^2 + (b_k^l - b_k^i) (\omega^i - \omega^k)^2 = 0 \\ (k = 1, 2, 3; i \neq j \neq k). \quad (5)$$

Из (4) видно, что на каждой поверхности  $\omega^k = 0$  ( $k = 1, 2, 3$ ) линии  $\omega^i = 0$  и  $\omega^j = 0$  ( $i, j = 1, 2, 3; i \neq j \neq k$ ) образуют сопряженную сеть, а из (5) следует, что на каждой поверхности  $\omega^i = \omega^j$  ( $i, j = 1, 2, 3; i \neq j$ ) тем же свойством обладают линии  $\omega^l = 0$  и  $\omega^l = \omega^k$  ( $i, k = 1, 2, 3; i \neq k$ ).

Напомним, что три семейства поверхностей образуют *трижды сопряженную систему*, если поверхности каждого двух семейств высекают на любой поверхности третьего семейства сопряженную систему линий.

Таким образом, имеет место

**Теорема 1.** *Три семейства характеристических поверхностей  $\omega^k = 0$  ( $k = 1, 2, 3$ ) образуют трижды сопряженную систему. Каждое семейство характеристических поверхностей  $\omega^k = 0$  ( $k = 1, 2, 3$ ) образует трижды сопряженную систему с двумя семействами характеристических поверхностей  $\omega^i = \omega^j$  и  $\omega^i = \omega^k$  ( $i, j = 1, 2, 3; i \neq j \neq k$ ).*

Назовем всякую систему 6 семейств поверхностей, обладающих такими свойствами, гармонически сопряженной.

Заметим, что ребра  $A_0A_1, A_0A_2, A_0A_3$  репера и «единичная прямая»  $A_0E$  являются касательными каждой к линии пересечения трех характеристических поверхностей. Назовем их главными в отличие от трех других прямых  $A_0(A_1 + A_2), A_0(A_1 + A_3), A_0(A_2 + A_3)$ , каждая из которых касается линий пересечения только двух характеристических поверхностей.

Ясно, что касательные  $A_0A_k$  и  $A_0E$  к поверхности  $\omega^i = \omega^j$  ( $i, j = 1, 2, 3; i \neq j \neq k$ ) сопряжены. Вычисляя  $dA_k$  в направлении  $A_0E$ , т. е. при  $\omega^i = \omega^k$  (а следовательно, при  $\omega^1 = \omega^2 = \omega^3$ ) получим, в силу (3),

$$dA_k = \omega_k^0 A_0 + \omega_k^k A_k \quad (k = 1, 2, 3),$$

откуда следует, что каждая вершина  $A_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) репера является вторым фокусом луча  $A_0A_k$  конгруэнции  $\omega^i = \omega^j$  ( $i, j = 1, 2, 3; i \neq j \neq k$ ). Этим устанавливается геометрический смысл фиксации вершин репера в работе [1].

3. Отвлекаясь теперь от вопросов точечных соответствий между пространствами, поставим задачу о существовании наиболее общей гармонически сопряженной системы поверхностей.

Для решения задачи свяжем с каждой точкой  $A$  пространства репер, состоящий из четырех независимых аналитических точек  $A_0 \equiv A, A_1, A_2, A_3$ , таким образом, чтобы точки  $A_1, A_2, A_3, E$  лежали на четырех главных касательных к линиям пересечения поверхностей системы. Тогда перемещения репера определяются уравнениями (1), где формы  $\omega_i^l$ , кроме

уравнений структуры (2), должны удовлетворять еще условиям полной интегрируемости уравнений

$$\omega^k = 0 \quad (k = 1, 2, 3),$$

$$\omega^i = \omega^j \quad (i, j = 1, 2, 3; i \neq j),$$

т. е.

$$[D\omega^k, \omega^k] = 0 \quad (k = 1, 2, 3), \quad (6)$$

$$[D(\omega^i - \omega^j), \omega^i - \omega^j] = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (7)$$

Из (6), используя уравнения структуры (2), получаем

$$[\omega_i^k \omega^i \omega^k] + [\omega_i^k \omega^i \omega^k] = 0 \\ (i, j, k = 1, 2, 3; i \neq j \neq k), \quad (8)$$

а из (7) с учетом (2) и (8) имеем

$$[\omega_k^i \omega^k \omega^i] + [\omega_k^i \omega^k \omega^i] + [\omega_i^i - \omega_j^i, \omega^i, \omega^j] = 0 \\ (i, j, k = 1, 2, 3; i \neq j \neq k). \quad (9)$$

Для того чтобы три семейства поверхностей  $\omega^k = 0 \quad (k = 1, 2, 3)$  образовали трижды сопряженную систему, как известно [4], должны выполняться условия, которые вместе с (8) дают

$$[\omega_i^k \omega^i \omega^k] = 0 \quad (i, k = 1, 2, 3; i \neq k). \quad (10)$$

Закрепим каждую вершину  $A_k \quad (k = 1, 2, 3)$  репера во втором фокусе лука  $A_0 A_k$  конгруэнции  $\omega^i = \omega^j \quad (i, j = 1, 2, 3; i \neq j \neq k)$  и потребуем, чтобы поверхности

$$\omega^k = 0, \quad \omega^i = \omega^k, \quad \omega^j = \omega^k \quad (i, j, k = 1, 2, 3; i \neq j \neq k)$$

также образовали трижды сопряженную систему. Для этого при перемещении точки  $A$  по поверхности  $\omega^i = \omega^j \quad (i, j = 1, 2, 3; i \neq j)$  в направлении  $A_0 E$ , точка  $A_k \quad (k = 1, 2, 3; i \neq j \neq k)$  должна описывать линию, касательную к  $A_0 A_k$ . т. е. при  $\omega^1 = \omega^2 = \omega^3$  в выражении

$$dA_k = \omega_k^0 A_0 + \omega_k^i A_i + \omega_k^j A_j + \omega_k^k A_k \quad (i, j, k = 1, 2, 3; i \neq j \neq k)$$

должны исчезнуть коэффициенты при  $A_i$  и  $A_j$ .

Таким образом, получаем еще уравнения, которые с учетом (10), можно переписать в виде

$$[\omega_i^j, \omega^i - \omega^j, \omega^k] = 0 \quad (i, j, k = 1, 2, 3; i \neq j \neq k). \quad (11)$$

Заметим, что репер фиксирован еще не полностью. В нашем распоряжении остается нормировка вершин. Так как направление  $A_0 E$  уже выбрано, точки  $A_1, A_2, A_3$  могут приобрести только общий для них всех множитель  $\rho$ . Выберем его так, чтобы форма  $\omega^1$  была полным дифференциалом  $du$ . При этом нужно учесть, что вместо  $\rho$  мы всегда можем взять произведение  $\rho \cdot g'(u)$ , где  $g(u)$  — произвольная функция от  $u$ . Этим мы воспользуемся в дальнейшем.

Таким образом, мы можем считать, что

$$D\omega^1 = [\omega^1, \omega_1^1 - \omega_0^0] + [\omega^2 \omega_1^1] + [\omega^3 \omega_3^1] = 0. \quad (12)$$

Кроме того, умножая  $A_0$  на подходящий множитель, мы можем добиться, чтобы

$$(A_0 A_1 A_2 A_3) = 1,$$

откуда получим

$$\omega_0^0 + \omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 = 0. \quad (13)$$

Вопрос о существовании гармонически сопряженной системы поверхностей сводится, таким образом, к исследованию системы уравнений (9), (10), (11), (12), (13). Дифференцировать их внешним образом не придется, они образуют замкнутую систему. Для удобства обозначим ее значком (\*).

Разрешая (9), (10), (11), (12) по лемме Картана, получим

$$\begin{aligned}\omega_i^j &= a_i^j (\omega^i - \omega^j) \quad (i, j = 1, 2, 3; i \neq j), \\ \omega_0^0 - \omega_1^1 &= a_1^1 \omega^1 + a_2^1 \omega^2 + a_3^1 \omega^3, \\ \omega_0^0 - \omega_2^2 &= a \omega^1 + a_2^2 \omega^2 + a_3^2 \omega^3, \\ \omega_0^0 - \omega_3^3 &= \beta \omega^1 + a_2^3 \omega^2 + a_3^3 \omega^3, \\ a - \beta + a_1^3 - a_1^2 &= 0\end{aligned}\tag{14}$$

и убедимся, что система (\*) — не в инволюции.

Дифференцируя (14) внешним образом и применяя еще раз лемму Картана, получим среди других уравнений следующие:

$$d(a - a_1^2) = \gamma \omega^1 = \gamma du\tag{15}$$

$$\begin{aligned}\omega_1^0 &= (a_1 - \gamma) \omega^1, \\ \omega_2^0 &= a_2 \omega^2, \\ \omega_3^0 &= a_3 \omega^3.\end{aligned}\tag{16}$$

Воспользуемся теперь произволом в выборе нормирующего множителя  $\gamma$  и умножим вершины  $A_1, A_2, A_3$  репера на общий множитель  $\frac{1}{\sqrt[4]{g'(u)}}$ , а вершину  $A_0$  на  $\sqrt[4]{g'^3(u)}$  (чтобы сохранилось уравнение (13)).

Так как при этом формы  $\omega_i^j - \omega_0^0$  ( $i = 1, 2, 3$ ) меняются по закону

$$(\omega_i^j - \omega_0^0)^* = (\omega_i^j - \omega_0^0) - d \ln g'(u),$$

а коэффициент  $a - a_1^2$ , как видно из (15), является функцией одного  $u$ , то можно выбрать  $g(u)$  так, чтобы

$$a - a_1^2 = 0.$$

Тогда  $\gamma = 0$  и система уравнений (14), (16) принимает вид

$$\begin{aligned}\omega_i^j &= a_i^j (\omega^i - \omega^j) \quad (i, j = 1, 2, 3; i \neq j), \\ \omega_0^0 - \omega_i^i &= a_i^i \omega^i \quad (i = 1, 2, 3), \\ \omega_i^0 &= a_i \omega^i \quad (i = 1, 2, 3),\end{aligned}$$

т. е. полностью совпадает с системой (3). Таким образом, доказана

**Теорема 2.** Гармонически сопряженная система поверхностей существует с произволом в 12 функций одного аргумента. Всякая гармонически сопряженная система поверхностей является системой характеристических поверхностей для некоторого соответствия между двумя пространствами  $S_3$  и  $\bar{S}_3$  с гармонической характеристикской конфигурацией.

4. Мураккини [1] рассмотрел случай, когда система характеристических поверхностей содержит семейства, состоящие из плоскостей. Рассмотрим более общий случай, когда среди 6 семейств поверхностей гармонически сопряженной системы имеется хотя бы одно, состоящее из развертывающихся поверхностей и нет ни одного семейства плоскостей.

Из (4) и (5) видно, что для этого достаточно выполнение одного из равенств типа

$$\begin{aligned} b_i^j &= 0 \quad (i \neq j), \\ b_k^i &= b_k^j \quad (i \neq j \neq k), \\ b_1^i + b_2^i + b_3^i &= b_1^j + b_2^j + b_3^j, \end{aligned}$$

где  $i, j, k$  — фиксированные значения из множества {1, 2, 3}.

Пусть, например,  $b_i^k = 0$  ( $i \neq k$ ). Тогда поверхности  $\omega^k = 0$  — развертывающиеся. При этом  $b_j^k \neq 0$  ( $i \neq j \neq k$ ), так как в противном случае эти поверхности обратились бы в плоскости. Кроме того,

$$\omega_i^k = 0.$$

Дифференцируя это уравнение внешним образом, получим

$$b_i^j = 0, \quad b_i = 0,$$

откуда, принимая во внимание (4) и (5), следует, что поверхности еще двух семейств  $\omega^i = 0$  и  $\omega^j = \omega^k$  являются развертывающимися.

В этом случае

$$\omega_i^j = 0 \text{ и } \omega_i^0 = 0,$$

и следовательно,

$$dA_i = \omega_i^j A_i,$$

т. е. точка  $A_i$  неподвижна. Это значит, что поверхности

$$\omega^k = 0, \quad \omega^i = 0, \quad \omega^k = \omega^j \quad (k \neq j)$$

являются конусами с общей вершиной  $A_i$  и общей образующей  $A_0 A_i$  ( $\omega^k = \omega^j = 0$ ).

Пусть теперь  $b_k^i = b_k^j$  ( $i \neq j \neq k$ ). Тогда развертывающимися окажутся поверхности семейства  $\omega^i = \omega^j$ . Дифференцируя внешним образом уравнения

$$\begin{aligned} \omega_k^i &= b_k^i (\omega^k - \omega^i), \\ \omega_k^j &= b_k^j (\omega^k - \omega^j) \end{aligned}$$

и применяя лемму Картана, получим для  $db_k^i$  два разложения по независимым формам  $\omega^1, \omega^2, \omega^3$ . Сравнивая их и учитывая, что при этом  $b_i^i + b_j^i \neq b_i^j + b_j^i$ , найдем

$$b_k^i = b_k^j = b_k = 0.$$

Отсюда следует, что поверхности семейств  $\omega^i = 0$  и  $\omega^j = 0$  также развертывающиеся.

Кроме того, как легко видеть,

$$dA_k = \omega_k^j A_k,$$

а значит, поверхности

$$\omega^i = 0, \quad \omega^j = 0, \quad \omega^i = \omega^j \quad (i \neq j)$$

суть конусы с общей вершиной  $A_k$  и общей образующей  $A_0 A_k$  ( $\omega^i = \omega^j = 0$ ).

Пусть, наконец,  $b_1^i + b_2^i + b_3^i = b_1^j + b_2^j + b_3^j$ ,  $b_k^i \neq b_k^j$  ( $i \neq j \neq k$ ). Дифференцируя (3) внешним образом и разрешая полученные уравнения по лемме Картана, получим разложения  $d(b_1^i + b_2^i + b_3^i)$  и  $d(b_1^j + b_2^j + b_3^j)$  по формам  $\omega^1, \omega^2, \omega^3$ . Сравнивая их, найдем

$$b_1^i + b_2^i + b_3^i = b_1^j + b_2^j + b_3^j = b_1^k + b_2^k + b_3^k.$$

Завит, из того, что поверхности семейства  $\omega^i = \omega^j$  развертывающиеся, следует, что поверхности семейств  $\omega^i = \omega^k$  и  $\omega^j = \omega^k$  тоже развертывающиеся.

В этом случае, кроме того, легко видеть, что

$$d\{E + (b - 1)A_0\} = \omega_0^0\{E + (b - 1)A_0\},$$

где  $b = b_1^1 + b_2^1 + b_3^1 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = b_1^3 + b_2^3 + b_3^3$ . Следовательно, поверхности

$$\omega^i = \omega^j, \omega^i = \omega^k, \omega^j = \omega^k \quad (i \neq j \neq k)$$

суть конусы с общей вершиной  $E + (b - 1)A_0$  и общей образующей  $A_0E$  ( $\omega^i = \omega^j = \omega^k$ ).

Таким образом, имеет место

**Теорема 3.** *Если среди 6 семейств поверхностей гармонически сопряженной системы имеется одно, состоящее из развертывающихся поверхностей, то среди них имеется еще два таких семейства. При этом все три семейства состоят из конусов, имеющих общую вершину и общую образующую.*

Легко видеть, что если гармонически сопряженная система содержит кроме трех семейств конусов еще семейство развертывающихся поверхностей, то она содержит обязательно семейство плоскостей.

Пусть гармонически сопряженная система поверхностей содержит три семейства конусов, имеющих общую вершину  $A_k$  и общую образующую  $A_0A_k$ . Это суть поверхности

$$\omega^i = 0, \omega^j = 0, \omega^i = \omega^j \quad (i \neq j \neq k),$$

и при этом

$$b_k = b_k^i = b_k^j = 0. \quad (17)$$

Присоединяя (17) к (3), получим систему в инволюции, решение которой существует с произволом в 9 функций одного аргумента.

Остается еще случай, когда три семейства развертывающихся поверхностей состоят из конусов с общей вершиной  $E + (b - 1)A_0$  и общей образующей  $A_0E$ , т. е. когда конусами являются поверхности

$$\omega^i = \omega^j, \omega^i = \omega^k, \omega^j = \omega^k \quad (i \neq j \neq k).$$

В этом случае

$$b_1^1 + b_2^1 + b_3^1 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = b_1^3 + b_2^3 + b_3^3. \quad (18)$$

Присоединяя (18) к (3), получим систему не в инволюции. После одного продолжения получается система в инволюции и решение существует также с произволом в 9 функций одного аргумента.

**Теорема 4.** *Гармонически сопряженная система поверхностей, содержащая три семейства конусов с общей вершиной и общей образующей, существует с произволом в 9 функций одного аргумента.*

#### ЛИТЕРАТУРА

1. L. Murgachini. Trasformazioni puntuale fra due spazi a configurazione caratteristica armonica, Bollettino della Unione Matematica Italiana, serie 3, anno 8, № 2, 1953, 144—152.
2. В. В. Рыжков. Дифференциальная геометрия точечных соответствий между пространствами. Сб. «Геометрия 1963». (Итоги науки, ВИНИТИ АН СССР), 1965, 65—107.
3. Э. Чех. Проективная дифференциальная геометрия соответствий между двумя пространствами, I. Чехословацкий математический журнал, 1952, № 1, 91—107.
4. С. П. Фиников. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. Гостехиздат, М.—Л., 1948.

Поступила 29 ноября 1967 г.

**О ГЛАДКОСТИ ИЗОМЕТРИЧЕСКОГО ПОГРУЖЕНИЯ ДВУМЕРНОГО  
МНОГООБРАЗИЯ КРИВИЗНЫ, БОЛЬШЕЙ  $K_0$ , В ТРЕХМЕРНОЕ  
РИМАНОВО ПРОСТРАНСТВО**

*A. A. Дубровин* (Харьков)

1. Пусть  $R$  — полное трехмерное риманово пространство и  $M$  — многообразие ограниченной кривизны, гомеоморфное сфере. Пусть удельная кривизна для любой области  $G$  многообразия  $M$  подчинена условию

$$K_0 + \alpha \leq \frac{\omega(G)}{S(G)} \leq \beta$$

$(K_0 = \text{const}, \alpha = \text{const} > 0, \beta = \text{const})$ .

Тогда, если кривизна пространства всюду  $< K_0$ , существует в  $R$  локально выпуклая гладкая поверхность, изометричная  $M$ .

Доказательство этого утверждения состоит в следующем. Многообразие  $M$  изометрично некоторой гомеоморфной сфере локально выпуклой поверхности  $F$  в пространстве постоянной кривизны  $K_0$  [1]. Поверхность  $F$  можно приблизить регулярными поверхностями  $F_n$  с гауссовой кривизной большей  $\left(K_0 + \frac{2}{3}\alpha\right)$  [2], [3].

Пусть  $R_n$  — последовательность римановых пространств с регулярной метрикой, сходящихся к пространству  $R$  и удовлетворяющих условию — кривизна пространства  $R_n$  всюду меньше  $K_0 + \frac{\alpha}{3}$ .

По теореме А. В. Погорелова [4], [5] многообразие с метрикой поверхности  $F_n$  можно изометрически погрузить в  $R_n$  в виде локально выпуклой поверхности  $\Phi_n$ . Переходя к пределу по надлежащим образом выбранной подпоследовательности  $\Phi_n$ , получим локально выпуклую поверхность  $\Phi$  в пространстве  $R$ , изометричную  $M$ .

Внешняя кривизна  $K_e$  поверхности  $\Phi_n$  в пространстве  $R_n$  подчинена неравенствам

$$0 < \bar{\alpha} \leq K_e \leq \bar{\beta} < \infty$$

$(\bar{\alpha} = \text{const}, \bar{\beta} = \text{const})$ .

В работе доказывается, что последовательность поверхностей  $\Phi_n$  с такой внешней кривизной может сходиться только к гладкой поверхности в пространстве  $R$ . Следовательно,  $M$  изометрично гладкой локально выпуклой поверхности  $\Phi$  в  $R$ .

2. Область  $D$  риманова пространства называется выпуклой, если для каждой пары точек области  $D$  среди всех кривых, соединяющих эти точки в  $D$ , есть кратчайшая.

Область  $F$  на границе выпуклой области  $D$  называется выпуклой поверхностью в  $R$  [4].

Поверхность, выпуклая в окрестности каждой своей точки, называется гладкой выпуклой.

Пусть  $O$  — произвольная точка выпуклой поверхности в пространстве  $R$ . Введем в окрестности точки  $O$  координаты  $(x^1, x^2, x^3)$  такие, чтобы линейный элемент пространства имел вид

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{ij} dx^i dx^j, \\ g_{ij}(0, 0, 0) &= g_{ij}^0, \\ \frac{\partial g_{ij}(0, 0, 0)}{\partial x^k} &= 0, \\ (O &= (0, 0, 0)). \end{aligned}$$

Евклидово пространство с линейным элементом

$$ds_0^2 = g_{ij}^0 dx^i dx^j,$$

соприкасающееся с  $R$  в точке  $O(0, 0, 0)$ , будем обозначать  $E$ . Пусть  $x^i = x^i(u, v)$  — уравнение поверхности  $F$  в окрестности точки  $O$ . Легко видеть, что касательный конус к поверхности  $x^i = x^i(u, v)$  в точке  $O(0, 0, 0)$  в пространстве  $E$  — выпуклый. В соответствии с этим точку  $O$  на поверхности  $F$  будем называть гладкой, если касательный конус есть плоскость, ребристой, если касательный конус — двугранный угол и конической, если касательный конус не вырождается.

В дальнейшем нам понадобится выражение для внешней кривизны регулярной поверхности  $F$ , заданной уравнением

$$x^3 = f(x^1, x^2).$$

Пусть  $g_{ij}, \lambda_{ij}$  — коэффициенты соответственно первой и второй квадратичных форм поверхности  $F$ .

Тогда внешняя кривизна  $K_e$  поверхности  $F$  равна

$$K_e = \frac{\lambda_{11}\lambda_{22} - \lambda_{12}^2}{\tilde{g}_{11}\tilde{g}_{22} - \tilde{g}_{12}^2}.$$

Выразим величины  $\lambda_{ij}$  и  $\tilde{g}_{ij}$  через первые и вторые производные функции  $f(x^1, x^2)$ :  $p, q, r, s, t$  и коэффициенты линейного элемента пространства  $R$ .

Пусть  $e_i$  — векторы координатного триэдра в точке  $x(x^1, x^2, x^3)$  пространства  $R$ ,  $x_1$  и  $x_2$  — касательные векторы,  $n$  — единичный вектор нормали в точке  $(x^1, x^2, x^3)$  поверхности,  $D_i$  — абсолютное дифференцирование в пространстве по  $x^i$ .

Имеем

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\partial x}{\partial x^1} = e_i \frac{\partial x^i}{\partial x^1}, \quad x_2 = \frac{\partial x}{\partial x^2} = e_i \frac{\partial x^i}{\partial x^2}, \\ \tilde{g}_{ij} &= (x_i, x_j); \\ \tilde{g} &= \tilde{g}_{11}\tilde{g}_{22} - \tilde{g}_{12}^2 = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{vmatrix} + 2p \begin{vmatrix} g_{13} & g_{23} \\ g_{12} & g_{22} \end{vmatrix} + \\ &+ 2q \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{13} & g_{23} \end{vmatrix} + p^2 \begin{vmatrix} g_{22} & g_{23} \\ g_{23} & g_{33} \end{vmatrix} + q^2 \begin{vmatrix} g_{11} & g_{13} \\ g_{13} & g_{33} \end{vmatrix}; \quad (1) \\ D_i x_j &= e_k \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^i \partial x^j} + \Gamma_{ks}^i e_l \frac{\partial x^k}{\partial x^i} \frac{\partial x^s}{\partial x^j}, \end{aligned}$$

где  $\Gamma_{ks}^i$  — символы Христоффеля 2-го рода для пространства  $R$ ,

$$\lambda_{11} = (n, D_1 x_1) = \frac{(e_1, e_2, e_3)}{\sqrt{\tilde{g}}} (r + a),$$

где

$$a = \Gamma_{11}^3 + 2\Gamma_{13}^3 p + \Gamma_{33}^3 p^2 - q(\Gamma_{11}^3 + 2\Gamma_{13}^3 p + \Gamma_{33}^3 p^2) - p(\Gamma_{11}^1 + 2\Gamma_{13}^1 p + \Gamma_{33}^1 p^2); \quad (21)$$

$$\lambda_{12} = (n, D_1 x_2) = \frac{(e_1, e_2, e_3)}{\sqrt{\tilde{g}}} (s + b),$$

где

$$b = \Gamma_{12}^3 + \Gamma_{13}^3 q + \Gamma_{23}^3 p + \Gamma_{33}^3 pq - p(\Gamma_{12}^1 + \Gamma_{13}^1 q + \Gamma_{32}^1 p + \Gamma_{33}^1 pq) - q(\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{13}^2 q + \Gamma_{32}^2 p + \Gamma_{33}^2 pq); \quad (22)$$

$$\lambda_{22} = (n, D_2 x_2) = \frac{(e_1, e_2, e_3)}{\sqrt{\tilde{g}}} (t + c),$$

$$c = \Gamma_{22}^3 + 2\Gamma_{23}^3 q + \Gamma_{33}^3 q^2 - p(\Gamma_{22}^1 + 2\Gamma_{23}^1 q + \Gamma_{33}^1 q^2) - q(\Gamma_{22}^2 + 2\Gamma_{23}^2 q + \Gamma_{33}^2 q^2). \quad (23)$$

Обозначая  $g^2 = (e_1, e_2, e_3)^2$ , получаем

$$K_e = \frac{g^2}{g^2} [(r + a)(t + c) - (s + b)^2]. \quad (3)$$

**3. Теорема 1.** Пусть  $R_n$  — последовательность регулярных римановых пространств, сходящихся к  $R$  в классе  $C^{(1,1)}$ ,  $F_n$  — последовательность регулярных поверхностей, выпуклых в  $R_n$ , сходящихся к поверхности  $F$ , выпуклой в  $R$ .

Тогда, если внешние кривизны поверхностей  $F_n$  в  $R_n$  удовлетворяют условию

$$(K_e)_n \leq \beta = \text{const} < \infty, \quad (4)$$

каждая точка  $O$  предельной поверхности  $F$  или гладкая, или внутренняя точка отрезка геодезической прямой в  $R$ , который расположен на поверхности  $F$ .

**Доказательство.** Пусть точка  $O$  не является гладкой и не является внутренней точкой геодезического отрезка. Тогда для точки  $O$  на поверхности  $F$  в пространстве  $E$  могут представиться только следующие три возможности [6], [2]:

- 1) точка  $O$  — коническая;
- 2) точка  $O$  — ребристая, причем через нее не проходит никакое прямолинейное ребро;
- 3) точка  $O$  является концом прямолинейного ребра.

Рассмотрим второй случай.

Обозначим  $\gamma$  геодезическую линию в  $R$ , касательную к криволинейному ребру в точке  $O$ .

Введем в окрестности  $\gamma$  в  $R$  координаты  $(x^1, x^2, x^3)$ , считая, что  $O(0, 0, 0)$  и вдоль  $\gamma: x^2 = 0, x^3 = 0$  линейный элемент пространства имеет вид

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j, \frac{1}{2} \sum_i (\xi^i)^2 \leq g_{ij} \xi^i \xi^j \leq \kappa \sum_i (\xi^i)^2$$

$(\kappa = \text{const} > 0)$

$$g_{ii}|_\gamma = \delta_{ii}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

$$\left. \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^k} \right|_\gamma = 0.$$

Соприкасающееся с  $R$  евклидово пространство будем обозначать  $E$ .

Касательный конус в точке  $O$  к поверхности  $F$  в пространстве  $E$  будет двугранный угол  $2\theta_0 < \pi$ . Пусть  $T_1$  и  $T_2$  — грани этого угла,  $\gamma$  — его ребро. Не ограничивая общности, можно считать, что ось  $Ox^3$  направлена внутрь угла и составляет с гранями  $T_1$  и  $T_2$  углы, равные  $\theta_0$ .

Пусть  $D(x^1, x^2, x^3)$  — выпуклая в  $R$  область, на границе которой расположена поверхность  $F$  и  $U(O)$  — окрестность точки  $O$  на поверхности  $F$ . Тогда, если  $U(O)$  достаточно мала, в пространстве  $E$  в каждой точке  $P \in U$  можно построить открытый конус с вершиной в этой точке, углом при вершине  $\vartheta$ ,  $0 < \vartheta < \theta_0$  и осью, параллельной оси  $Ox^3$ , который полностью содержится в области  $D(x^1, x^2, x^3)$  в некоторой пространственной окрестности точки  $O$ . Отсюда следует, что поверхность в достаточно малой окрестности  $U(O)$  можно задать уравнением

$$x^3 = f(x^1, x^2).$$

Обозначим  $\bar{F}$  выпуклую оболочку, натянутую на поверхность  $x^3 = f(x^1, x^2)$  в пространстве  $E$ . Очевидно, точка  $O$  принадлежит  $F$  и касательный конус к  $\bar{F}$  в точке  $O$  совпадает с касательным конусом к поверхности  $x^3 = f(x^1, x^2)$ .

Проведем плоскость  $\sigma$  перпендикулярно к оси  $Ox^3$  на расстоянии  $h$  от точки  $O$ . При достаточно малом  $h$  плоскость отсечет от поверхности  $\bar{F}$  шапочку  $\bar{G}$ , однозначно проектирующуюся на плоскость  $\sigma$ .

Так как  $O$  — точка криволинейного ребра, то известно, что при  $h \rightarrow 0$  удельная кривизна шапочки  $\bar{G}$  неограниченно растет [6], [2]. Докажем, что это противоречит условиям теоремы.

Пусть  $O_n$  — последовательность точек, сходящаяся к  $O$ ,  $\gamma_n$  — последовательность геодезических в  $R_n$ , проходящих через  $O_n$  и сходящихся к  $\gamma$ . Введем в окрестности  $\gamma_n$  в  $R_n$  координаты  $(x_n^1, x_n^2, x_n^3)$ , считая, что  $O_n(0, 0, 0)$ .

$$O_n x_n^3 \rightarrow O x^3 \text{ и вдоль } \gamma_n: x_n^2 = 0, \quad x_n^3 = 0$$

линейный элемент пространства  $R_n$  имеет вид

$$ds_n^2 = g_{ij}^{(n)} dx_n^i dx_n^j, \quad \frac{1}{2\pi} \sum_i (\xi^i)^2 \leq g_{ij}^{(n)} \xi^i \xi^j \leq 2\pi \sum_i (\xi^i)^2,$$

$$\left. g_{ij}^{(n)} \right|_{\gamma_n} = \delta_{ij}, \quad \left. \frac{\partial g_{ij}^{(n)}}{\partial x_n^k} \right|_{\gamma_n} = 0.$$

Отобразим евклидово пространство  $E(O_n)$  с декартовыми координатами  $(x_n^1, x_n^2, x_n^3)$  на  $E(0)$  согласно равенству  $x_n^i = x^i$  и обозначим  $x^1 = x$ ,  $x^2 = y$ ,  $x^3 = z$ .

Таким образом, в пространстве  $E$  имеем окрестность  $\tilde{U}(x, y, z)$  точки  $O$ , в которой последовательность функций  $g_{ij}^{(n)}(x, y, z)$  сходится к функции  $g_{ij}(x, y, z)$  в классе  $C^{1,1}$ .

Пусть  $U_n(O_n)$  — область на поверхности  $F_n$ , последовательность  $U_n(O_n)$  сходится к области  $U(O)$  на поверхности  $F$ , при этом  $U_n \subset \tilde{U}$ ,  $U \subset \tilde{U}$ .

Так как поверхности  $F_n$  выпуклые в  $R_n$  и сходятся к  $F$ , то они в некоторой окрестности  $\bar{U}$  точки  $O$  при достаточно большом  $n$  допускают задание уравнениями

$$z_n = f_n(x, y),$$

при этом

$$\left| \frac{\partial z_n}{\partial x} \right| < N(\vartheta), \quad \left| \frac{\partial z_n}{\partial y} \right| < N(\vartheta) \\ (N(\vartheta) = \text{const} < \infty). \quad (5)$$

На поверхности  $z_n = f_n(x, y)$  натянем выпуклые оболочки в пространстве  $E$  и обозначим их  $\bar{F}_n$ .

Тогда  $\bar{F}_n \rightarrow \bar{F}$ . Пусть  $\bar{G}_n$  — последовательность шапочек на поверхностях  $\bar{F}_n$ , сходящаяся к шапочке  $\bar{G}$ .

Оценим сверху площадь сферического изображения шапочки  $\bar{G}_n$ . Обозначим  $\Omega_n$  проекцию основания шапочки на плоскость  $(x, y)$  и  $G_n$  область на поверхности  $z_n = f_n(x, y)$ , проектирующуюся в  $\Omega_n$ .

Имеем

$$\omega(\bar{G}_n) \leq \iint_{\bar{G}_n} |K| ds, \quad (6)$$

где  $K$  — гауссова кривизна поверхности  $G_n$ .

Из соотношения (3) находим

$$K = \frac{rt - s^2}{\tilde{g}^2} = \frac{1}{\tilde{g}^2} \left\{ \frac{\tilde{g}^2}{g^2} K_e - \right. \\ \left. - [c(r+a) - 2b(s+b) + a(t+c) + ac - b^2] \right\},$$

где  $\tilde{g} = 1 + p^2 + q^2$ ,  $p, q, r, s, t$  — производные функции  $z_n = z_n(x, y)$ , а функции  $\tilde{g}$ ,  $K_e$ ,  $a, b, c, g$  вычислены на поверхности  $G_n$  в пространстве  $R_n$  с метрикой  $ds_n^2 = g_{ij}^{(n)} dx_n^i dx_n^j$ .

Далее,

$$\iint_{G_n} |K| ds \leq \iint_{G_n} \left( \frac{\tilde{g}}{g} \right)^2 K_e ds + \iint_{\Omega_n} |c(r+a) - 2b(s+b) + a(t+c)| dx dy + \\ + \iint_{\Omega_n} |ac - b^2| dx dy = I_1 + I_2 + I_3. \quad (7)$$

Для оценки  $I_1$  заметим, что квадратичная форма линейного элемента  $ds_n^2$  положительно определена и  $ds_n^2 \rightarrow ds^2$ . Значит можно указать такое число  $A_0(x)$ , не зависящее от  $n$ , что из (1), (4) и (5) будет вытекать

$$I_1 \leq A_0 s(G_n) \leq A_1 (\beta, \vartheta, \kappa) s(\Omega_n), \quad (8)$$

где  $s(G_n)$ ,  $s(\Omega_n)$  — площади поверхностей  $G_n$  и  $\Omega_n$ .

Для оценки  $I_2$  и  $I_3$  сначала оценим функции  $|a|$ ,  $|b|$  и  $|c|$ . Так как  $g_{ij}^{(n)} \rightarrow g_{ij}$  в классе  $C^{1,1}$ , то можно указать такое число  $\lambda$ , не зависящее от  $n$ , что символы Христоффеля  $\Gamma_{ij}^k$ , вычисленные для любого  $ds_n^2$  в точках поверхности  $G_n$ , удовлетворяют неравенству

$$|\Gamma_{ij}^k| \leq \lambda \sqrt{y^2 + z_a^2}. \quad (9)$$

Последовательность поверхностей  $G_n \rightarrow G$ . Следовательно, при достаточно большом  $n$

$$|z_n(x, y)| \leq N(\vartheta) \delta, \quad (10)$$

$$\text{где } \delta = \max_{\Omega} |y|. \quad (11)$$

Из соотношений (2<sub>1</sub>, 2<sub>2</sub>, 2<sub>3</sub>), (5), (9), (10) и (11) заключаем, что

$$|a|, |b|, |c| \leq A_2 \delta,$$

$$A_2 = A_2(\lambda, \vartheta) < \infty,$$

$$I_3 \leq A_3(\lambda, \vartheta) \delta^2 s(\Omega_n). \quad (12)$$

Для оценки  $I_2$  заметим, что

$$(r+a)(l+c) > (s+b)^2 \gg 0.$$

**Тогда**

$$\begin{aligned} I_2 &\leq A_4 \left| \int_{\Omega_n} (r+a+l+c) dx dy \right| \leq A_2 \delta \left| \int_{\Omega_n} pdx - qdy \right| + 2A_2^2 \delta s(\Omega_n) \leq \\ &\leq A_4 (\delta l_n + s(\Omega_n)), \end{aligned} \quad (13)$$

где  $\Gamma_n$  — граница  $\Omega_n$ ,  $l_n$  — длина  $\Gamma_n$ ,  $A_4 = A_4(\lambda, \vartheta)$ . При  $n \rightarrow \infty$   $s(\Omega_n) \rightarrow s(\Omega)$ ,  $l_n \rightarrow l$  ( $l$  — длина границы  $\Omega$ ) и

$$\omega(\bar{G}) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \omega(G_n).$$

Из (7), (8), (12) и (13) заключаем, что

$$\frac{\omega(\bar{G})}{s(\bar{G})} \leq \bar{A}(\lambda, \vartheta, \alpha) + \frac{\delta l}{s(\Omega)}.$$

Легко видеть, что при сжатии выпуклой шапочки  $\bar{G}$  в точку  $O$

$$\frac{\delta l}{s(\Omega)} \leq C_0 < \infty (C_0 = \text{const})$$

Следовательно, удельная кривизна шапочки  $\bar{G}$  ограничена при любом достаточно малом  $h$  числом  $A = A(\lambda, \vartheta, C_0) < \infty$ . Мы пришли к противоречию.

Аналогично исключаются возможности 1) и 3). Нужно только соответствующим образом строить шапочку  $G$  [1], [2]. Теорема доказана.

**Теорема 2.** Пусть  $R_n$  — последовательность регулярных римановых пространств, сходящихся к  $R$  в классе  $C^{1,1}$ ,  $F_n$  — последовательность регулярных поверхностей, выпуклых в  $R_n$ , сходящихся к поверхности  $F$ , выпуклой в  $R$ .

Тогда, если внешние кривизны поверхностей  $F_n$  в  $R_n$  удовлетворяют условию:

$$0 < \alpha \leq (K_r)_n \quad (\alpha = \text{const}), \quad (14)$$

то предельная поверхность  $F$  не содержит отрезков геодезических пространства  $R$ .

**Доказательство.** Допустим противное, т. е. что предельная поверхность  $F$  содержит отрезок  $\gamma$  геодезической пространства  $R$ . Пусть  $O$  — внутренняя точка стрелки  $\gamma$  геодезической.

Введем в окрестности  $\gamma$  в пространстве  $R$  координаты Ферми  $(x^1, x^2, x^3)$ , считая, что  $O(0, 0, 0)$  и вдоль  $\gamma: x^2 = 0, x_3^3 = 0$  линейный элемент пространства имеет вид

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j, \frac{1}{2} \sum_i (\xi^i)^2 \leq g_{ij} \xi^i \xi^j \leq 2 \sum_i (\xi^i)^2 (x = \text{const} > 0),$$

$$g_{ij} \Big|_{\gamma} = g_{ij}^0 = \text{const}, \quad \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \Big|_{\gamma} = 0.$$

Пусть  $E$  — евклидово пространство с линейным элементом

$$ds_0^2 = g_{ij}^0 dx^i dx^j$$

и  $D(x^1, x^2, x^3)$  — область на границе, которой расположена поверхность  $F$ . В пространстве  $E$  касательный конус к поверхности  $F$  в точке  $O$  представляет собой двухгранный угол  $2\vartheta_0 \leq \pi$ , образованный полуплоскостями  $T_1$  и  $T_2$  с ребром, расположенным на поверхности  $F$  и направленным по оси  $Ox^1$ . Не ограничивая общности, можно считать что ось  $Ox^2$  расположена в полуплоскости  $T_2$ , ось  $Ox^3$  направлена внутрь области  $D(x^1, x^2, x^3)$  и составляет с  $T_1$  и  $T_2$  углы, равные  $\vartheta_0$ .

Поверхность  $F$  расположена на границе выпуклой в  $R$  области  $D$ .

Пусть  $U(O)$  — окрестность точки  $O$  на поверхности  $F$ . В пространстве  $E$  в каждой точке  $p \in U$  построим открытый конус с вершиной в этой точке, углом при вершине  $\vartheta$ ,  $0 < \vartheta < \vartheta_0$ , и осью, параллельной оси  $Ox^3$ . Тогда, если  $U(O)$  достаточно мала, угол  $\vartheta$  можно выбрать таким, что построенный конус будет содержаться в области  $D(x^1, x^2, x^3)$  в некоторой пространственной окрестности точки  $O$ . Отсюда следует, что поверхность  $F$  в окрестности  $U(O)$  можно задать уравнением

$$x^3 = f(x^1, x^2).$$

Пусть  $O_n$  — последовательность точек, сходящихся к  $O$ ,  $\gamma_n$  — последовательность геодезических в  $R_n$ , проходящих через  $O_n$  и сходящихся к  $\gamma$ . Введем в окрестности  $\gamma_n$  в пространстве  $R_n$  координаты  $(x_n^1, x_n^2, x_n^3)$ , считая что  $O_n(0, 0, 0)$ ,  $O_n x_n^3 \rightarrow O x^3$  и вдоль  $\gamma_n: x_n^2 = 0, x_n^3 = 0$ , линейный элемент пространства  $R_n$  имеет вид

$$ds_n^2 = g_{ij}^{(n)} dx_n^i dx_n^j, \quad \frac{1}{2} \sum_i (\xi^i)^2 \leq g_{ij}^{(n)} \xi^i \xi^j \leq 2 \sum_i (\xi^i)^2,$$

$$g_{ij}^{(n)} \Big|_{\gamma_n} = g_{ij}^0, \quad \frac{\partial g_{ij}^{(n)}}{\partial x^k} \Big|_{\gamma_n} = 0.$$

Далее отобразим евклидово пространство  $E(O_n)$  с линейным элементом  $ds_{n0}^2 = g_{ij}^0 dx_n^i dx_n^j$  на пространство  $E$  согласно равенству  $x_n^i = x^i$  и обозначим  $x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$ . Таким образом, в пространстве  $E$  будем иметь окрестность  $\tilde{U}(x, y, z)$  точки  $O$ , в которой последовательность функций  $g_{ij}^{(n)}(x, y, z)$  сходится к функции  $g_{ij}(x, y, z)$  в классе  $C^{(1,1)}$ .

Пусть  $U_n(O_n)$  — область на поверхности  $F_n$ , сходящаяся к области  $U(O)$  на поверхности  $F$ , при этом  $U_n \in \tilde{U}$ ,  $U \subset \tilde{U}$ .

Так как поверхности  $F_n$  выпуклые в  $R_n$  и сходятся к  $F$ , то они в некоторой окрестности  $\tilde{U}$  точки  $O_n = 0$  при достаточно большом  $n$  допускают задание уравнениями

$$z_n = f_n(x, y),$$

причем

$$\left| \frac{\partial z_n}{\partial x} \right| < N(\vartheta), \quad \left| \frac{\partial z_n}{\partial y} \right| < N(\vartheta) \quad (N(\vartheta) = \text{const} < \infty) \quad (15)$$

в некотором прямоугольнике  $|x| < l, |y| < \delta$ .

Обозначим  $\sigma_n = \max_{|x| < l} |z_n(x, 0)|$ . Очевидно,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = 0$ .

Из условия теоремы и соотношения (3) для поверхности  $F_n$  имеем

$$0 < \alpha \frac{g^2}{g^2} \leq (r + a)(t + c) - (s + b)^2. \quad (16)$$

Для удобства производные функции  $z_n(x, y)$  и выражения  $a_n, b_n, c_n$ , вычисленные на поверхности  $F_n$  в  $R_n$ , будем писать без индекса  $n$ . Так как внешняя кривизна  $F_n$  положительна, то при

$$|x| < l, |y| < \delta, (r + a) > 0 \text{ и } (t + c) > 0.$$

Следовательно,

$$(r + a)(t + c) - (s + b)^2 = (r + a)(t + c) - s^2 - 2b(s + b) + b^2 \leq \\ \leq (r + a)(t + c) - s^2 + |b|(r + a) + |b|(t + c) - b^2 = (r + a + |b|)(t + c + |b|) - s^2 \leq (r + |a| + |b|)(t + |c| + |b|) - s^2. \quad (17)$$

Оценим выражения  $|a|, |b|, |c|$ . Так как  $g_{ij}^{(n)} \rightarrow g_{ij}$  в классе  $C^{1,1}$ , то для коэффициентов  $\Gamma_{ij}^k$ , вычисленных для любого  $R_n$  в точках поверхности  $z_n = f_n(x, y)$  имеет место оценка

$$|\Gamma_{ij}^k| \leq \lambda \sqrt{y^2 + z_n^2} (\lambda = \text{const}). \quad (18)$$

Так как  $|z_n| \leq \sigma_n + N(\delta)\delta$ , то из (2) и (18) получаем

$$|a|, |b|, |c| \leq \frac{1}{2} A(\delta, \lambda) (\sigma_n + \delta), \quad (19)$$

из соотношения (3) и неравенств (14), (17), (19) имеем

$$0 < z_1 \leq \alpha \frac{\bar{g}^2}{g^2} \leq [r + A(\sigma_n + \delta)][t + A(\sigma_n + \delta)] - s^2, \quad (20)$$

$$a_1 = a_1(n, \alpha).$$

Рассмотрим поверхность  $\bar{F}_n$ , заданную функцией

$$\bar{z}_n = z_n(x, y) + \frac{A}{2}(\delta + \sigma_n)(x^2 + y^2).$$

Из неравенства (20) видно, что поверхности  $\bar{F}_n$  выпуклы в прямоугольнике  $[|x| < l, |y| < \delta]$ . Поэтому предельная поверхность

$$\bar{z} = z + \frac{A}{2}\delta(x^2 + y^2) (|x| < l, |y| < \delta) \quad (21)$$

будет выпуклой при любом  $\delta$ .

Так как полуплоскость  $z = 0, y > 0$  касается поверхности  $z = z(x, y)$  вдоль оси  $Ox$  ( $-l < x < l$ ) со стороны  $y > 0$ , то для любого  $\varepsilon > 0$  можно утверждать  $\bar{\delta} = \bar{\delta}(\varepsilon)$ , что опорная прямая к плоской кривой  $z = z_0(x_0, y)$ ,  $|x_0| < l, 0 < y < \bar{\delta}$  будет составлять с плоскостью  $z = 0$  угол  $\vartheta$  такой, что  $\varepsilon \leq \bar{\delta} < \frac{\varepsilon}{2}$ . Не ограничивая общности можно считать, что в (21)  $\delta = \bar{\delta}$ .

Отсюда заключаем, что для достаточно большого  $n$  в прямоугольнике

$$\left[ |x| < \frac{l}{2}, \frac{\delta}{4} < y < \frac{3}{4}\delta \right] \quad \left| \frac{\partial z_n}{\partial y} \right| < \varepsilon.$$

Введем новые переменные  $u = \frac{x}{\varepsilon}$ ,  $v = y\varepsilon$  в прямоугольнике

$$\Delta[u < l_1, \delta_0 < v < \delta_1], \text{ где } l_1 = \frac{l}{2\varepsilon}, \delta_0 = \frac{\varepsilon\delta}{4}, \delta_1 = \frac{3}{4}\varepsilon\delta.$$

В этом прямоугольнике рассмотрим последовательность функций

$$z_n = \tilde{z}_n(u, v) = \bar{z}_n\left(u\varepsilon, \frac{v}{\varepsilon}\right),$$

сходящихся к функции  $z = z\left(u\varepsilon, \frac{v}{\varepsilon}\right) + \frac{A}{2}\left(\frac{4\delta_1\varepsilon}{3}u^2 + \mu v^2\right)$ , где  $\mu = \frac{\delta}{\varepsilon^2}$ .

Числа  $N$ ,  $\varepsilon$  и  $\delta$  будем считать такими, что  $N\varepsilon \ll 1$ ,  $\mu = \frac{\delta}{\varepsilon^2} \ll 1$ .

Тогда

$$\left|\frac{\partial \tilde{z}_n}{\partial u}\right| \leq N\varepsilon \ll 1, \quad \left|\frac{\partial \tilde{z}_n}{\partial v}\right| \leq \left|\frac{\partial \bar{z}_n}{\partial y}\right| \frac{1}{\varepsilon} \ll 1. \quad (22)$$

Из неравенства (20) очевидно, что

$$\tilde{r}\tilde{l} - \tilde{s}^2 \geq \alpha_1 > 0; \quad (23)$$

из неравенств (22) и (23) заключаем, что гауссова кривизна поверхностей  $z_n = \tilde{z}_n(u, v)$  в прямоугольнике  $\Delta \{|u| < l_1, \delta_0 < v < \delta_1\}$  будет удовлетворять неравенству

$$K = \frac{\tilde{r}\tilde{l} - \tilde{s}^2}{(1 + (1 - g_{23}^{0*}) p^2 + q^2)^2} \geq \alpha_2 > 0 \quad (\alpha_2 = \alpha_2(\alpha, \kappa)).$$

Следовательно, удельная кривизна предельной поверхности  $z = \tilde{z}(u, v)$  в прямоугольнике  $\Delta$  удовлетворяет неравенству

$$\frac{\omega(G)}{s(G)} \geq \alpha_2 > 0.$$

Теперь покажем, что на поверхности  $z = \tilde{z}(u, v)$  можно указать такую область, удельная кривизна которой будет мала вместе с  $\varepsilon$ . Из точки  $P(0, 0, -h)$  проведем опорную прямую к кривой  $z = \tilde{z}(0, v)$ . Пусть  $Q(0, v_0, \tilde{z}_0)$  — их общая точка. Будем считать, что  $h$  достаточно мало и  $v_0 = \delta$ . Соединим точку  $P$  с точками  $M_1(-d, 0, 0)$  и  $M_2(d, 0, 0)$ . Тогда легко видеть, что прямые  $PM_1$  и  $PM_2$  будут пересекать кривую

$$z = \tilde{z}(u, 0) = \frac{2}{3} A\delta_1\varepsilon u^2,$$

если

$$d = \frac{1}{4\sqrt{A}} \sqrt{\frac{h}{\delta_1\varepsilon}}. \quad (23')$$

Трехгранный угол  $\theta = PM_1M_2Q$  вырезает на поверхности  $z = \tilde{z}(u, v)$  область  $G$ . Обозначим  $\tilde{G}$  подобласть  $G$ , определенную в прямоугольнике  $\Delta$ .

Тогда при достаточно малом  $h$  можно указать такую постоянную  $C > 0$ , не зависящую от  $h$  и  $d$ , что

$$s(\tilde{G}) > C\delta_1 d. \quad (24)$$

Сферическое изображение угла  $\theta$  покрывает сферическое изображение поверхности  $\tilde{G}$ . Так как  $h$  мало по сравнению с  $d$  при  $P \rightarrow O$ , то при некоторой постоянной  $M > 0$ , не зависящей от  $h$  и  $d$ ,

$$\omega(\theta) < M \frac{h}{d}. \quad (25)$$

На соотношений (25), (24) и (23') заключаем, что

$$\frac{\omega(\bar{G})}{s(\bar{G})} < \frac{\omega(0)}{s(\bar{G})} < 16 \frac{A}{C} \varepsilon.$$

Следовательно,

$$\alpha_2 < 16 \frac{A}{C} \varepsilon.$$

Это неравенство противоречиво, так как  $\varepsilon$  произвольно мало. Итак, поверхность  $F$  не может содержать отрезков геодезических. Теорема доказана.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. Д. Александров. Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей. Гостехиздат, 1948.
2. А. В. Погорелов. Изгибание выпуклых поверхностей. Гостехиздат, 1951.
3. А. В. Погорелов. Некоторые вопросы теории поверхностей в эллиптическом пространстве. Изд-во ХГУ, 1958.
4. А. В. Погорелов. Некоторые вопросы геометрии в целом в римановом пространстве. Изд-во ХГУ, Харьков, 1957.
5. А. В. Погорелов. Некоторые результаты по геометрии в целом. Изд-во ХГУ, Харьков, 1961.
6. А. Д. Александров. Гладкость выпуклой поверхности с ограниченной первичной кривизной. ДАН СССР, т. 36, № 7, 1942.

Поступила 20 июня 1968 г.

## К ТЕОРИИ ПЛОСКОСТЕЙ ОРТОГОНАЛЬНОЙ СИММЕТРИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ В $E^m$

*В. Ф. Игнатенко* (Полтава), *А. С. Лейбин* (Харьков)

В настоящей статье изучаются некоторые свойства поверхностей евклидова  $m$ -мерного пространства  $E^m$ , связанные с их плоскостями ортогональной симметрии (имеются в виду гиперповерхности и их гиперплоскости симметрии). Эти свойства в настоящее время полностью выяснены только для поверхностей 2-го порядка (квадрик) в  $E^m$ . В значительной мере они разработаны для алгебраических кривых на плоскости  $E^2$  и в меньшей мере для алгебраических поверхностей в  $E^3$  [1] — [7]; для поверхностей в  $E^m$ , не являющихся квадриками, они почти не затронуты.

Расположение плоскостей симметрии поверхности определяется прежде всего свойствами самого пространства  $E^m$ , его группами симметрий (см., например, [8, 9]). Но оно зависит также и от поверхности, от свойств функций, входящих в уравнение поверхности, в частности, от ее порядка, если она алгебраическая.

В начале статьи при помощи плоскостей симметрии дается описание строения цилиндрических поверхностей и поверхностей вращения (§ 1), затем (§ 2) приведен ряд теорем для поверхностей общего вида; в § 3 даются некоторые оценки числа плоскостей симметрии алгебраической поверхности, если это число конечно; в § 4 намечается классификация поверхностей по числу и расположению их плоскостей симметрии.

В пространстве  $E^m$  предполагается заданной координатная система с началом  $O$  и ортонормированным базисом. Буквой  $F$  обозначается произвольная поверхность, символом  $F_n$  — алгебраическая поверхность порядка  $n$ .

### § 1. О ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЯХ И ПОВЕРХНОСТЯХ ВРАЩЕНИЯ

1\*. Поверхность  $F$  называется *цилиндрической*, если в  $E^m$  существует такой вектор  $\alpha$ , что всякая плоскость, ортогональная  $\alpha$ , является плоскостью симметрии  $F$ . Всякая прямая, параллельная  $\alpha$  и имеющая с  $F$  общую точку, лежит на  $F$ , являясь ее прямолинейной образующей. Если таких векторов в  $E^m$  есть несколько, то, очевидно, любая линейная комбинация из них является направляющим вектором прямолинейной образующей  $F$ . Пусть линейное подпространство всех таких векторов  $h$ -мерно; тогда через каждую точку  $F$  проходит  $h$ -плоскость, принадлежащая  $F$  — ее  $h$ -мерная образующая. Очевидно,  $1 < h < m - 1$ .

Пусть  $h \geq 2$ . Так как все  $h$ -образующие  $F$  вполне параллельны друг другу, то любая  $(m - h)$ -плоскость, вполне ортогональная  $h$ -образующим, содержит  $(m - h)$ -ось вращения  $F$ ; при этом вращении каждая  $h$ -образующая вращается в себе, оставаясь в целом неподвижной.

Всякая плоскость, проходящая через  $(m - h)$ -ось вращения поверхности  $F$ , является плоскостью симметрии  $F$ .

Каждая  $h$ -образующая пересекает любую  $(m-h)$ -ось вращения (при  $h=1$  — любую плоскость симметрии) в единственной точке. Все эти точки внутри каждой оси (внутри плоскости симметрии) заполняют  $(m-h-1)$ -мерную поверхность  $F^{m-h-1}$ , которая для  $F$  является направляющей  $(m-h-1)$ -поверхностью; она является пересечением  $F$  с  $(m-h)$ -осью вращения (с плоскостью симметрии при  $h=1$ ).

Заметим, что при  $h \geq 3$  всякая  $(m-i)$ -плоскость ( $2 \leq i \leq h$ ), проходящая через  $(m-h)$ -ось вращения цилиндрической поверхности  $F$ , является  $(m-i)$ -осью вращения  $F$ ; каждую  $h$ -образующую она пересекает по  $(h-i)$ -плоскости, вокруг которой при этом вращении  $F$  вращается в себе  $h$ -образующая.

2°. Рассмотрим поверхность, заданную уравнением

$$F(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0; \quad (1)$$

в случае цилиндрической поверхности можно выбрать координатную систему так, чтобы одна из  $(m-h)$ -осей вращения  $F$  служила координатной  $(m-h)$ -плоскостью, содержащей, например, базисные векторы  $e_{h+1}, e_{h+2}, \dots, e_m$ . Тогда уравнение (1) не будет содержать переменных  $x_1, x_2, \dots, x_h$  и будет иметь вид

$$F(x_{h+1}, x_{h+2}, \dots, x_m) = 0. \quad (2)$$

Внутри этой координатной  $(m-h)$ -плоскости (оси вращения), т. е., при  $x_1 = x_2 = \dots = x_h = 0$ , уравнение (2) задает направляющую  $(m-h-1)$ -поверхность  $F^{m-h-1}$ .

3°. Фигуру  $\Phi$  мы называем *фигурой вращения относительно* (или *вокруг*)  $(m-k)$ -мерной оси вращения  $\Pi_0^{m-k}$  ( $k$  фиксировано в пределах  $2 \leq k \leq m$ ), если каждая  $k$ -плоскость  $\Pi^k$ , вполне ортогональная  $\Pi_0^{m-k}$  и имеющая с  $\Phi$  хотя бы одну общую точку, пересекает  $\Phi$  по совокупности  $(k-1)$ -мерных концентрических сфер  $S^{k-1}$  с центром  $C \equiv \Pi^k \cap \Pi_0^{m-k}$ . (В дальнейшем для краткости такую плоскость  $\Pi^k$  будем называть *ортосекущей*, имея в виду ее ортогональность оси  $\Pi_0^{m-k}$  и то, что она с  $\Phi$  имеет общие точки).

Очевидно, всякая  $l$ -плоскость  $\Pi^l$  ( $2 \leq l \leq k$ ), принадлежащая ортосекущей плоскости  $\Pi^k$  и проходящая через центр  $C$  сечения, также пересекает  $\Phi$  по совокупности сфер  $S^{l-1}$ , т. е. является ортосекущей, а всякая  $(m-l)$ -мерная плоскость  $\Pi^{m-l}$ , проходящая через ось вращения  $\Pi_0^{m-k}$ , является  $(m-l)$ -мерной осью вращения фигуры  $\Phi$ .

4°. Каждая плоскость  $\Pi^{m-1}$ , проходящая через ось вращения  $\Pi_0^{m-k}$  фигуры  $\Phi$ , является для  $\Phi$  плоскостью ортогональной симметрии. Это следует из того, что для каждой сферы  $S^{k-1}$  сечения  $(k-1)$ -плоскость  $\Pi^{k-1} \equiv \Pi^k \cap \Pi^{m-1}$  является диаметральной, и в ней сфера  $S^{k-1}$  отражается в себя. Верно и обратное утверждение, которое может служить определением фигуры вращения:

**Теорема 1.** *Если существует  $(m-k)$ -мерная плоскость  $\Pi_0^{m-k}$  ( $2 \leq k \leq m$ ) такая, что всякая проходящая через нее плоскость  $\Pi^{m-1}$  является плоскостью ортогональной симметрии фигуры  $\Phi$ , то  $\Phi$  есть фигура вращения вокруг оси  $\Pi_0^{m-k}$ .*

Действительно, пусть  $M$  — какая-нибудь точка фигуры  $\Phi$ . Если она лежит в  $\Pi_0^{m-k}$  (впрочем, такой точки у фигуры  $\Phi$  может вообще не быть), то все плоскости симметрии  $\Pi^{m-1}$ , проходящие через  $\Pi_0^{m-k}$ , проходят и через точку  $M$ , и ее отражения в этих плоскостях совпадают с ней самой. Пусть точка  $M$  не лежит в  $\Pi_0^{m-k}$ . Отразим ее во всех плоскостях  $\Pi^{m-1}$ ,

принадлежащих через  $\Pi_0^{m-k}$ . Отрезки, соединяющие точку  $M$  с ее отражениями в  $\Pi_0^{m-k}$ , направлены по нормали к соответствующим  $\Pi^{m-1}$ , и поэтому  $\Pi_0^{m-k}$  ортогональны  $\Pi^{m-k}$ , а прямые, являющиеся продолжениями этих отрезков, заполняют  $k$ -плоскость  $\Pi^k$ , вполне ортогональную  $\Pi_0^{m-k}$ ;  $\Pi^k$  и  $\Pi_0^{m-k}$  пересекаются в единственной точке  $C$ . Через точку  $C$  проходят все  $(k-1)$ -плоскости, по которым плоскости симметрии  $\Pi^{m-1}$  пересекают плоскость  $\Pi^k$ ; эти  $(k-1)$ -плоскости, заполняя всю  $\Pi^k$ , ортогональны соответствующим отрезкам, соединяющим точку  $M$  с ее отражениями, и проходят через их середины. Следовательно, все отражения точки  $M$  находятся на точке  $C$  на том же расстоянии, что и точка  $M$ , и заполняют  $(k-1)$ -мерную сферу, лежащую в  $\Pi^k$ . Теорема доказана.

Если плоскость  $\Pi^{m-1}$  не проходит через  $\Pi^{m-k}$ , то они либо вполне параллельны, либо  $\Pi^{m-1}$  пересекает  $\Pi^{m-k}$  по  $(m-k-1)$ -мерной плоскости. В этом случае верна

**Теорема 2.** *Если фигура  $\Phi$  имеет  $(m-k)$ -мерную ось вращения  $\Pi_0^{m-k}$  и плоскость симметрии  $a$  фигуры  $\Phi$  пересекает эту ось под острым углом, не равным нулю, то пересечение  $\Pi_0^{m-k} \cap a = \Pi_0^{m-k-1}$  является  $(m-k-1)$ -осью вращения  $\Phi$ .*

Для доказательства отразим  $\Phi$  в плоскости  $a$ . Фигура  $\Phi$  перейдет в себя, а ее ось вращения  $\Pi_0^{m-k}$  отразится в  $(m-k)$ -плоскость  $\Pi_1^{m-k}$ , не совпадающую с  $\Pi_0^{m-k}$  и также являющуюся  $(m-k)$ -осью вращения  $\Phi$ ; оси  $\Pi_0^{m-k}$  и  $\Pi_1^{m-k}$  пересекаются по  $\Pi_0^{m-k-1} = \Pi_0^{m-k} \cap a$ . Всякая  $(m-k)$ -плоскость, полученная поворотом одной из этих двух осей вокруг другой на произвольный угол в произвольном возможном направлении, является, конечно, также  $(m-k)$ -осью вращения, проходящей через ту же  $\Pi_0^{m-k-1}$ . Продолжая конечное число таких поворотов вокруг исходных или новых  $(m-k)$ -осей, можно вложить  $(m-k)$ -ось вращения в любую плоскость  $\Pi^{m-1}$ , проходящую через  $\Pi_0^{m-k-1}$ . Поэтому такая плоскость  $\Pi^{m-1}$  есть плоскость симметрии фигуры  $\Phi$ ; следовательно, по теореме 1,  $\Phi$  есть фигура вращения относительно  $\Pi_0^{m-k-1}$ .

**Следствие.** *Если  $a_1, a_2, \dots, a_k$  ( $2 < k \leq m$ ) — линейно независимые плоскости симметрии фигуры  $\Phi$  и пересечение  $s$  из них — пусть  $a_1, \dots, a_s$  ( $2 \leq s \leq k$ ) — есть  $(m-s)$ -ось вращения  $\Phi$ , а каждая следующая плоскость образует острый угол с пересечением всех предыдущих, то  $\Phi$  имеет  $(m-k)$ -мерную ось вращения — пересечение всех данных плоскостей.*

Теорему 2 можно сформулировать так:

*Если фигура  $\Phi$  имеет две  $(m-k)$ -мерные оси вращения, пересекающиеся по  $(m-k-1)$ -мерной плоскости под острым углом, то это пересечение их есть  $(m-k-1)$ -мерная ось вращения  $\Phi$ .*

**Теорема 3.** *Если фигура  $\Phi$  имеет  $(m-k)$ -мерную ось вращения и не проходящую через эту ось вполне параллельную ей плоскость симметрии, то всякая  $k$ -плоскость, вполне ортогональная оси и имеющая с  $\Phi$  общую точку, целиком принадлежит  $\Phi$ ; всякая плоскость, вполне параллельная оси, является плоскостью симметрии, а всякая  $(m-k)$ -плоскость, вполне параллельная оси, является осью вращения  $\Phi$ .*

Доказательство этой теоремы отличается от доказательства теоремы 2 только тем, что здесь пересечение  $\Pi_0^{m-k-1}$  оси вращения и плоскости симметрии бесконечно удалено; как и там, условие теоремы можно изменить так: «*Если  $\Phi$  имеет две вполне параллельные  $(m-k)$ -оси вращения*». В этом случае фигуру  $\Phi$  следует называть не фигурой вращения, а цилиндрической (или даже призматической), если ее пересечение с указанной осью

вращения, т. е. направляющая фигура  $\Phi^{m-k-1}$ , является многогранником).

5°. Ось вращения  $P_0^{m-k}$  фигуры  $\Phi$  мы назовем *минимальной осью вращения данного направления*, если никакая принадлежащая ей ( $m-k-1$ )-плоскость не является осью вращения фигуры  $\Phi$ . Из теорем 1–3 вытекает

**Теорема 4.** *Если фигура  $\Phi$  есть фигура вращения относительно оси  $P_1^{m-k}$  и эта ось минимальна, то всякая плоскость симметрии фигуры  $\Phi$  либо проходит через эту ось, либо ортогональна ей.*

Плоскостей симметрии, ортогональных минимальной оси  $P_1^{m-k}$ , фигура  $\Phi$  может иметь конечное или бесконечное множество. В последнем случае  $\Phi$  может оказаться фигурой вращения относительно другой оси или даже нескольких осей:  $P_1^{m-k_1}, \dots, P_s^{m-k_s}$ ; очевидно, все такие оси должны быть максимально ортогональны друг другу (т. е. их ортогональные дополнения попарно вполне ортогональны), причем  $k_1 + \dots + k_s \leq m$ . Кроме того, фигура  $\Phi$  может оказаться цилиндрической относительно одной из осей — пусть номер этой оси есть  $s$  — и тогда фигура имеет плоские обра-зующие максимальной размерности  $h = k_s$ .

Поскольку наибольшая размерность оси вращения равна  $m-2$ , т. е. все  $k_j \geq 2$ , имеет место

**Теорема 5.** *В пространстве  $E^m$  фигура вращения может иметь не более  $\left[\frac{m}{2}\right]$  минимальных осей вращения; все эти оси попарно ортогональны друг другу и имеют хотя бы одну общую точку.*

Последнее утверждение теоремы следует из того, что, как легко видеть, не пересекающиеся оси вращения может иметь только цилиндрическая по-верхность.

6°. Центры  $C$  сечений фигуры  $\Phi$  ортосекущими плоскостями  $P^k$  (п. 3°) заполняют в оси вращения  $P_0^{m-k}$  некоторое множество  $\{C\}$ , структура и размерность которого, в зависимости от фигуры  $\Phi$ , могут быть весьма разнообразны. То же можно сказать и о структуре пересечения каждой ортосекущей плоскостью  $P^k$  фигуры  $\Phi$ , т. е. множества  $\{S^{k-1}\} \equiv \Phi \cap P^k$  лежащих в  $P^k$  концентрических  $(k-1)$ -сфер с центром  $C$ ; структура этого множества вполне определяется структурой числового множества  $\{\rho\}$ , лежа-щего на числовой неотрицательной полуоси и составленного из значений радиусов  $\rho$  сфер  $S^{k-1}$  сечения.

Из всего разнообразия строений этих множеств нас будут интересовать те случаи, когда фигура  $\Phi$  представляет собой поверхность  $F$  вращения вокруг  $(m-k)$ -мерной оси  $P_0^{m-k}$ . При этом каждая точка  $F$ , внут-ренняя по отношению к  $F$ , должна иметь окрестность, гомеоморфную  $(m-1)$ -мерному шару. Поскольку поверхность  $F$  в нашем случае является топо-логическим произведением множеств  $\{C\}$  и  $\{S^{k-1}\}$ , множество  $\{\rho\}$ , соотве-тствующее данной ортосекущей плоскости  $P^k$ , может иметь такие варианты своего строения:

- $\{\rho\}$  дискретно, конечно или бесконечно.
- $\{\rho\}$  заполняет сплошь некоторые отрезки неотрицательной числовой полуоси, не заполняя ее всю; один из отрезков может быть бесконечным.
- $\{\rho\}$  заполняет всю неотрицательную числовую полуось.

В случае *в)* множество  $(k-1)$ -сфер заполняет всю ортосекущую плоскость  $P^k$ , которая поэтому вся входит в состав поверхности  $F$ . В слу-чае *а)* каждая точка множества  $\{\rho\}$ , а в случае *б)* каждая граничная точка множества  $\{\rho\}$  должна быть непрерывной функцией точки множества  $\{C\}$ , по крайней мере, почти всюду на множестве  $\{C\}$ . При этом размерность

— множества  $\{S^{k-1}\}$  — должна быть в случае а) равна  $k-1$ , а в случаях б) и в) равна  $k$ .

Множество  $\{C\}$  всех точек пересечения  $\Pi^k$  с  $\Pi_0^{m-k}$  поэтому должно состоять из одной или нескольких связных компонент и при этом может разделяться на две части. Одна часть  $\{C'\}$  состоит из  $(m-k)$ -мерных связных компонент — областей в оси  $\Pi_0^{m-k}$ ; через каждую точку  $C'$  этой части проходит ортосекущая плоскость  $\Pi^k$ , в которой имеет место случай а). Вторая часть  $\{C''\}$  множества  $\{C\}$  состоит из  $(m-k-1)$ -мерных связных компонент — областей  $(m-k-1)$ -мерной поверхности  $F_0^{m-k-1}$  в оси  $\Pi_0^{m-k}$ ; через каждую точку  $C''$  этой части проходит ортосекущая плоскость со случаем б) или в).

Если  $\{C\} \equiv \{C''\}$  и все ортосекущие плоскости принадлежат  $F$ , мы относим  $F$  к поверхностям вращения, а к цилиндрическим, как было установлено в п. 4°, по отношению к данной оси вращения. Это оправдано тем, что для образования цилиндрической поверхности ее плоская направляющая фигура  $\Phi^{m-k-1}$  — сечение  $(m-k)$ -плоскостью, служащей осью вращения поверхности  $F$ , — может быть заменена неплоской направляющей фигурой  $\Phi^{m-k-1}$  — сечением поверхности  $F$  произвольной  $(m-k)$ -мерной поверхностью (любой, фигурой), удовлетворяющей только одному условию: чтобы она  $k$ -образующую поверхность  $F$  пересекала хотя бы в одной точке. Поэтому, по отношению к этой секущей  $(m-k)$ -поверхности наша цилиндрическая поверхность  $F$  уже не может быть названа поверхностью вращения; при таком образовании она является поверхностью переноса.

Аналогично поверхность вращения может быть получена вращением вокруг  $(m-k)$ -мерной оси  $(m-k)$ -мерной меридианной поверхности, которая может быть плоской — сечением поверхности  $F$   $(m-k+1)$ -мерной полу-поверхностью, ограниченной  $(m-k)$ -осью вращения, или неплоской — сечением  $(m-k+1)$ -мерной поверхностью, имеющей ось вращения своим краем и не пересекающей каждую сферу  $S^{k-1}$  хотя бы в одной точке.

7°. Пусть поверхность вращения задана уравнением (1) (п. 2°). Если ее ось вращения взять в качестве координатной, поместив в нее базисные векторы  $e_{k+1}, e_{k+2}, \dots, e_m$ , то уравнение (1) примет вид

$$F_1(r, x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_m) = 0; r^2 = x_1^2 + \dots + x_k^2. \quad (3)$$

В случае, когда множество  $\{\rho\}$  конечно (п. 6°), уравнение (3) может содержать  $N$  неявных функций  $f_i$ , таких, что совокупность уравнений

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_k^2 = f_i(x_{k+1}, \dots, x_m), i = 1, 2, \dots, N \quad (4)$$

эквивалентна уравнению (3), т. е. описывает нашу поверхность.

Если поверхность имеет несколько минимальных осей вращения, то, поставив базисные векторы  $F^m$  в их ортогональные дополнения, можно уравнению (3) придать, например, такой вид:

$$F_1(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \sqrt{x_4^2 + x_5^2}, x_6, x_{10}) = 0.$$

Это — поверхность в  $E^{10}$ ; она является поверхностью вращения относительно двух осей:  $\Pi_1^7$  (ее уравнение  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ ) и  $\Pi_2^8$  ( $x_4 = x_5 = 0$ ) в цилиндрической относительно оси  $\Pi_3^7$  ( $x_6 = x_7 = x_8 = 0$ ); ее 3-образующие параллельны базисным векторам  $e_6, e_7$  и  $e_8$ . При вращении  $F$  вокруг оси  $\Pi_1^7$  во вполне ортогональных этой оси 3-плоскостях 2-сфера вращаются в себе каждая, тогда как плоские 3-образующие, как и 1-сфера (окружности), лежащие в секущих 2-плоскостях, ортогональных оси  $\Pi_2^8$ , меняются местами. Вращение вокруг  $\Pi_2^8$  происходит аналогично. При вращении вокруг  $\Pi_3^7$  (или

любой вполне параллельной ей 7-плоскости) каждая 3-образующая вращается в себе, тогда как 1-сфера между собой и 2 сферы между собой меняются местами.

## § 2. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ПОВЕРХНОСТЕЙ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ РАСПОЛОЖЕНИЕМ ИХ ПЛОСКОСТЕЙ СИММЕТРИИ

В этом параграфе будут рассмотрены главным образом поверхности, имеющие конечное число плоскостей симметрии; попутно будут выяснены некоторые признаки поверхностей вращения и цилиндрических.

8°. Пусть поверхность  $F$  имеет две параллельные друг другу плоскости симметрии  $\alpha$  и  $\beta$ . Все их многократные отражения друг в друге также являются плоскостями симметрии  $F$ , их множество счетно. Каждая точка поверхности  $F$  отражается в счетное множество точек поверхности, лежащих на одной прямой  $l$ . Если поверхность  $F$  алгебраическая порядка  $n$ , то она либо имеет с прямой  $l$  не более  $n$  общих точек, либо содержит всю прямую. Поэтому справедлива

**Теорема 6.** *Если алгебраическая поверхность имеет две параллельные плоскости симметрии, то она цилиндрическая с образующей прямой, перпендикулярной этим плоскостям.*

Неалгебраическая поверхность может иметь параллельные плоскости симметрии, не будучи цилиндрической. Однако если между этими плоскостями есть другие параллельные им плоскости симметрии и не существует наименьшего расстояния между такими плоскостями, то они расположены всюду плотно в  $E^m$ , и тогда поверхность  $F$  цилиндрическая.

9°. Рассмотрим случай двух непараллельных плоскостей симметрии поверхности.

**Теорема 7.** *Если поверхность  $F$  имеет две плоскости симметрии, угол между которыми несоизмерим с  $\pi$ , то  $(m-2)$ -плоскость их пересечения является осью вращения поверхности  $F$ .*

**Доказательство.** Пусть плоскости симметрии  $\alpha$  и  $\beta$  поверхности  $F$  пересекаются по  $P^{m-2}$  и образуют угол, несоизмеримый с  $\pi$ . Их многократные отражения друг в друге заполняют пространство  $E^m$  всюду плотно и также являются плоскостями симметрии  $F$ . Каждая точка  $F$  отражается в этих плоскостях в точки  $F$ , которые всюду плотно заполняют окружность с центром в  $P^{m-2}$ , лежащую в 2-плоскости, вполне ортогональной  $P^{m-2}$ ; очевидно, вся эта окружность лежит на  $F$ , и поэтому  $F$  есть поверхность вращения.

10°. Обозначим через  $F_n^*$  приводимую алгебраическую поверхность, в состав которой входит хотя бы один набор плоскостей, пересекающихся по одной  $(m-2)$ -плоскости и образующих при ней равные двугранные углы. Например, уравнение

$$(3x_1^2 + 2x_2^2 - x_3 - 1)(x_4^2 - x_5^2)x_4x_5x_6(3x_6^2 - x_7^2) = 0$$

задает в  $E^7$  поверхность  $F_9^*$ . Она имеет два набора плоскостей, входящих в ее состав: 1) четыре плоскости  $x_4 = 0$ ,  $x_5 = 0$ ,  $x_4 - x_5 = 0$ ,  $x_4 + x_5 = 0$  пересекаются по оси  $x_4 = x_5 = 0$  и образуют углы  $\frac{\pi}{4}$ , и 2) три плоскости  $x_7 = 0$ ,  $x_6\sqrt{3} - x_7 = 0$ ,  $x_6\sqrt{3} + x_7 = 0$  пересекаются по оси  $x_6 = x_7 = 0$  и образуют углы  $\frac{\pi}{3}$ .

**Теорема 8.** *Пусть алгебраическая поверхность  $F_n$  имеет две непараллельные плоскости симметрии. Если  $(m-2)$ -плоскость их пересечения не является осью вращения  $F_n$ , то угол между ними соизмерим с  $\pi$  и наи-*

плоскостей общая мера  $\theta \geq \frac{\pi}{n}$ ; для поверхностей  $F_n^*$  и только для них эта мера снижается до  $\frac{\pi}{2n}$ .

**Доказательство.** Прежде всего заметим, что так как поверхность  $F_n$  эллиптическая, то произвольная плоскость либо вся принадлежит  $F_n$ , либо имеет с  $F_n$  пересечение, размерность которого не выше  $m-2$ ; плоскость может вовсе не пересекать поверхности (иметь несобственное пересечение).

Пусть  $\alpha$  и  $\beta$  — плоскости симметрии  $F_n$ , пересекающиеся по  $\Pi^{m-2}$  под углом, имеющим с  $\pi$  наибольшую общую меру  $\frac{\pi}{k}$ . Многократные отражения в  $\alpha$  друг в друге также являются плоскостями симметрии  $F_n$ , проходящими через  $\Pi^{m-2}$ . Этих плоскостей, включая  $\alpha$  и  $\beta$ , есть ровно  $k$ , и они разбивают пространство  $E^m$  на  $2k$  двугранных углов с общим ребром  $\Pi^{m-2}$ , каждый из которых равен  $\frac{\pi}{k}$ . Перенумеруем эти плоскости в порядке обхода вокруг  $\Pi^{m-2}$ :  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ .

Если точка  $M$  поверхности  $F_n$  лежит в одной из этих плоскостей — пусть в  $\alpha_1$  — то она отражается в остальных плоскостях  $\alpha_i$  в точки поверхности  $F_n$ , также лежащие в плоскостях  $\alpha_i$ . Припишем этим точкам номера плоскостей, в которых они лежат; при обходе вокруг  $\Pi^{m-2}$  они расположатся в таком порядке при нечетном  $k$ :  $M_1, M_3, \dots, M_k, M_2, M_4, \dots, M_{k-1}$  — их будет по одной в каждой плоскости  $\alpha_i$ , и при  $k$  четном:  $M_1, M_3, \dots, M_{k-1}, M'_1, M'_3, \dots, M'_{k-1}$  — их здесь тоже  $k$ , но они лежат по две в плоскостях только с нечетными номерами; точки  $M_i$  и  $M'_i$  симметричны друг относительно  $\Pi^{m-2}$ .

Пусть  $F_n$  принадлежит вся  $\alpha_1$ . Тогда при нечетном  $k$  все плоскости  $\alpha_i$  принадлежат  $F_n$ . При этом, очевидно,  $\Pi^{m-2}$  не является осью вращения  $\alpha_1$ , вращаясь, заполняла бы не  $F_n$ , а все пространство  $E^m$ ). Так как порядок поверхности  $n$ , то должно быть  $k \leq n$ ; поверхность в этом случае приводима — это  $F_n^*$ . Биссекторные плоскости  $\beta_i$  двугранных углов между соседними плоскостями  $\alpha_i$  и  $\alpha_{i+1}$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ;  $\alpha_{k+1} \equiv \alpha_1$ ) могут при этом также оказаться плоскостями симметрии  $F_n^*$ , и тогда угол  $\theta = \frac{\pi}{2k} > \frac{\pi}{2n}$ . Время будет при  $k = n$  — тогда  $F_n^*$  состоит только из плоскостей  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  и  $\theta = \frac{\pi}{2n}$ , и при  $k = n-1$  — тогда  $F_n^*$  состоит из  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$  и еще одной плоскости  $\gamma$ , ортогональной всем  $\alpha_i$  и, значит, 2-ортогональной  $\Pi^{m-2}$ ; заметим, что  $\gamma$  также является плоскостью симметрии для  $F_n^*$ .

Если  $k$  четно, то вместе с  $\alpha_1$  поверхности принадлежат все плоскости с нечетными номерами:  $\alpha_3, \alpha_5, \dots, \alpha_{k-1}$ , — их  $\frac{k}{2}$ , и при  $k \geq 4$  поверхность есть  $F_n^*$ . Очевидно,  $k \leq 2n$ , следовательно, и в этом случае  $\theta = \frac{\pi}{k} > \frac{\pi}{2n}$ .

Наконец, в том случае, когда поверхности  $F_n$  не принадлежит ни одна плоскость  $\alpha_i$  полностью,  $F_n$  имеет точки, лежащие вне  $\alpha_i$ . Пусть  $M$  — такая точка. Она отражается во всех  $\alpha_i$  также в точки  $F_n$ ; этих отражений, вместе с самой точкой  $M$ , будет  $2k$ . Все они лежат на одной окружности, плоскость которой 2-ортогональна  $\Pi^{m-2}$ , а центр лежит в  $\Pi^{m-2}$ . Если  $k > n$ , то вся поверхность принадлежит  $F_n$ , и  $\Pi^{m-2}$  есть ось вращения  $F_n$ . Следовательно, если  $\Pi^{m-2}$  не является осью вращения для  $F_n$ , то  $k \leq n$  и  $\theta \geq \frac{\pi}{n}$ . Так будет для всех неприводимых  $F_n$ , а также и для приводимых, но не являющихся поверхностями  $F_n^*$ , и даже для некоторых  $F_n^*$ , содержащих в указанном в начале п. 10° наборах достаточно малое число плоскостей. (Например,

поверхность  $F_9^*$ , уравнение которой приведено в начале п. 10°, имеет четыре принадлежащие ей плоскости симметрии  $x_4 = 0$ ,  $x_5 = 0$ ,  $x_4 - x_5 = 0$ ,  $x_4 + x_5 = 0$  — это плоскости  $\alpha_i$ , и четыре биссекторные плоскости  $\beta_i$  — всего 8 плоскостей симметрии, проходящих через  $(m-2)$ -плоскость  $x_4 = x_5 = 0$ ; для них угол  $\theta_1 = \frac{\pi}{8} > \frac{\pi}{9}$ . Аналогично через  $(m-2)$ -плоскость  $x_6 = x_7 = 0$  проходит шесть плоскостей симметрии этой поверхности, и для них тоже  $\theta_2 = \frac{\pi}{6} > \frac{\pi}{9}$ ). Теорема доказана полностью.

**Следствие.** Если через некоторую  $(m-2)$ -плоскость, не являющуюся осью вращения поверхности  $F_n$ , проходит более  $n$  плоскостей симметрии  $F_n$ , то поверхность  $F_n$  приводима — это  $F_n^*$ ; число  $k$  этих плоскостей четно,  $k \leq 2n$ , и половина их (через одну) входит в состав поверхности.

Поскольку поверхности  $F_n^*$  составляют весьма узкий класс алгебраических поверхностей, в дальнейшем символом  $F_n$  мы будем обозначать алгебраические поверхности, не являющиеся поверхностями  $F_n^*$ , если не будет сделано специальных оговорок.

11°. Назовем двугранный угол между плоскостями  $\alpha$  и  $\beta$  симметрии поверхности  $F$  *минимальным*, если внутри него через его  $(m-2)$ -ребро не проходит ни одна плоскость симметрии  $F$ . Из теорем 7 и 8 вытекает

**Следствие 2.** Минимальный двугранный угол между плоскостями симметрии поверхности  $F$  может иметь значения только вида  $\frac{\pi}{q}$ , где  $q \geq 2$ , целое; для алгебраической поверхности  $F_n$   $2 \leq q \leq \frac{\pi}{n}$  (для  $F_n^*$   $2 \leq q \leq \frac{\pi}{2n}$ ).

12°. **Теорема 9.** Если поверхность имеет три плоскости симметрии, из которых одна параллельна пересечению двух других, то эта поверхность имеет параллельные плоскости симметрии.

**Доказательство.** Пусть  $\alpha$  и  $\beta$  — плоскости симметрии поверхности  $F$ , пересекающиеся по  $\Pi_{\alpha\beta}^{m-2}$ . Случай, когда  $\Pi_{\alpha\beta}^{m-2}$  есть ось вращения  $F$ , рассмотрен в теореме 3 (п. 4°); случай, когда третья плоскость  $\gamma$  параллельна  $\alpha$  или  $\beta$ , рассмотрен в п. 8°, теорема 6; в обоих случаях теорема 9 верна.

Осталось рассмотреть случай, когда  $\gamma$  пересекает и  $\alpha$  и  $\beta$ ; очевидно, следует считать, что  $(m-2)$ -плоскости их пересечения, вполне параллельные  $\Pi_{\alpha\beta}^{m-2}$ , не являются осями вращения поверхности  $F$ .

Многократные отражения  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  друг в друге будут также плоскостями симметрии  $F$ ; все они, а следовательно, и их пересечения —  $(m-2)$ -плоскости  $\Pi^{m-2}$  — вполне параллельны  $\Pi_{\alpha\beta}^{m-2}$ . Так как ни одна из этих  $\Pi^{m-2}$  не является осью вращения  $F$ , то через каждую из них проходит конечное число плоскостей симметрии  $F$ .

Полную картину расположения плоскостей симметрии в этом случае дает сечение вполне ортогональной всем им 2-плоскостью  $\Pi^2$ . Плоскости симметрии  $F$  пересекают ее по прямым, а  $\Pi^{m-2}$  — в точках пересечения этих прямых. Вся плоскость  $\Pi^2$  оказывается разбитой на треугольники с минимальными внутренними углами; все треугольники конгруэнты и порождаются многократными отражениями одного из них в его сторонах. Это хорошо известная картина группы симметрий в 2-плоскости, для которой треугольник является фундаментальной областью [8, 10]. Все плоскости симметрии  $F$  при этом группируются в три, четыре или шесть серий параллельных плоскостей. Теорема доказана.

При выполнении условий теоремы 9 алгебраическая поверхность  $F_n$  непременно оказывается цилиндрической (п. 8°, теорема 6).

**Б3.** Трехгранный угол  $\tau$ , образованный тремя линейно независимыми плоскостями симметрии  $F$ , назовем *минимальным*, если все его внутренние двугранные углы минимальны ( $\pi/11^\circ$ ). Пересекая этот угол 3-плоскостью  $P^3$ , ортогональной его  $(m-3)$ -вершине  $P^{m-3}$ , легко видеть, что его метрические свойства такие же, как и у трехгранного угла с зеркальными отражениями в  $E^3$  ( $\equiv P^3$ ). Эти свойства хорошо известны (см., например, [8, 10]; ~~заранее~~ они легко выводятся из теоремы 8 и ее следствия 2, п. 11°). Одни из ~~этих~~ двугранных углов всегда прямой, обозначим его через  $\varphi_1$ . Два другие, согласно следствию в п. 11°, имеют вид  $\varphi_2 = \frac{\pi}{q_2}$ ,  $\varphi_3 = \frac{\pi}{q_3}$ , причем ~~заранее~~ натуральных чисел  $q_2$  и  $q_3$  возможны только такие:

	$\tau_{22n}$	$\tau_{233}$	$\tau_{234}$	$\tau_{235}$	(5)
$q_2$	2	3	3	3	
$q_3$	$n \geq 2$	3	4	5	

Отсюда немедленно следует

**Теорема 10.** Если через данную  $(m-3)$ -плоскость проходит конечное множество плоскостей симметрии и среди них есть три, образующие трехгранный угол, все двугранные углы которого острые, то минимальный трехгранный угол этой системы плоскостей есть  $\tau_{235}$ .

Действительно, угол  $\tau_{235}$  вместе со своим отражением в грани, лежащей против угла  $\frac{\pi}{3}$ , образует один трехгранный угол с внутренними двугранными углами  $\frac{\pi}{3}$ ,  $\frac{\pi}{3}$  и  $\frac{2\pi}{5}$ . Тот же угол и его пять последовательных отражений в гранях, лежащих против углов  $\frac{\pi}{5}$  и  $\frac{\pi}{2}$  поочередно (так, что угол  $\tau_{235}$  в все эти его отражения имеют общее  $(m-2)$ -ребро, в котором сходятся углы  $\frac{\pi}{3}$ ), образуют один трехгранный угол с внутренними двугранными углами  $\frac{\pi}{3}$ . При всех других минимальных углах каждый трехгранный угол имеет хотя бы один прямой или тупой внутренний двугранный угол.

Понятие минимального угла распространяется на случай любого числа  $k < m$  линейно независимых плоскостей симметрии поверхности: это такой  $k$ -гранный угол, все внутренние  $(k-1)$ -гранные углы которого минимальны. Это понятие также связано с группами симметрий  $(k-1)$ -мерной сферы с центром в точке  $(m-k)$ -вершины угла и ортогональной граням; на этой сфере минимальный угол вырезает фундаментальную область группы — сферический  $(k-1)$ -мерный симплекс [8]. Свойства этого  $k$ -гранныго минимального угла определяют расположение плоскостей симметрии и их число, если это возможно.

**Б4.** Рассмотрим множество всех плоскостей симметрии некоторой поверхности  $F$ . Это множество обладает тем очевидным свойством, что оно вместе с поверхностью  $F$  все в целом симметрично относительно каждого элемента — каждой плоскости симметрии  $F$ .

Построим сферическое изображение этого множества. Единичный нормальный вектор  $p$  каждой плоскости перенесем в некоторую точку  $Q$  пространства  $E^m$ . На единичной сфере  $S^{m-1}$  с центром в точке  $Q$  концы  $P$  этих векторов образуют множество  $\{P\}$ . Чтобы избежать возможных затруднений при выборе одного из двух противоположных направлений нормального вектора каждой плоскости симметрии, мы отождествим все диаметрально противоположные точки сферы  $S^{m-1}$  и тогда будем обозначать эту сферу

символом  $S_p^{m-1}$ . Тем самым между точками  $P$  на  $S_p^{m-1}$  и плоскостями симметрии  $F$  установится взаимно-однозначное соответствие.

Из сказанного в начале п. 14<sup>0</sup> следует, что все множество  $\{P\}$  сферически симметрично относительно каждой своей точки  $P$ .

Пусть  $P_1$  и  $P_2$  — две точки множества  $\{P\}$ . Назовем точку  $P'_1$  сферическим отражением точки  $P_1$  относительно точки  $P_2$ , если вектор  $\mathbf{p}'_1 = QP'_1$  симметричен вектору  $\mathbf{p}_1 = QP_1$  относительно вектора  $\mathbf{p}_2 = QP_2$ . Проведем через точки  $P_1$  и  $P_2$  большую окружность  $S^1$  сферы  $S^{m-1}$  — это будет единственная окружность с центром  $Q$ . Очевидно, все многократные сферические отражения точек  $P_1$  и  $P_2$  друг в друге принадлежат  $\{P\}$ ; они располагаются на  $S^1$ , причем если дуга  $P_1P_2$  соизмерима с  $\pi$ , то их конечное число, и они делят  $S^1$  на равные дуги, а если несоизмерима, то эти точки заполняют  $S^1$  всюду плотно, следовательно и сплошь (теорема 7). Последний случай имеет место, если поверхность  $F$  имеет  $(m-2)$ -ось вращения, вполне ортогональную 2-плоскости окружности  $S^1$ .

15<sup>0</sup>. Справедливо обратное последнему утверждение:

**Теорема 11.** *Поверхность с бесконечным множеством плоскостей симметрии, проходящих через общую точку, имеет ось вращения, проходящую через эту точку.*

**Доказательство.** Пусть  $Q$  — точка пересечения указанных в теореме плоскостей симметрий поверхности  $F$ . Поместим в эту точку центр сферы  $S_p^{m-1}$ , несущей отображение  $\{P\}$  плоскостей симметрии  $F$  (п. 14<sup>0</sup>). В данном случае множество  $\{P\}$  бесконечно, поэтому оно имеет по крайней мере одну предельную точку  $P_o$ . (Очевидно, множество  $\{P\}$  имеет бесконечное множество предельных точек — это все отражения  $P_o$  в каждой точке  $P$ , отражения этих отражений и т. д.).

Нетрудно видеть, что соответствующая точке  $P_o$  плоскость  $a_o$ , предельная для плоскостей симметрий  $F$ , сама является плоскостью симметрии  $F$ . Действительно, выберем какую-либо последовательность  $P_1, P_2, \dots, P_i, \dots$  точек из  $\{P\}$ , сходящуюся к  $P_o$ . Соответствующие им плоскости симметрии  $a_1, a_2, \dots, a_i, \dots$  сходятся к плоскости  $a_o$ . Пусть  $M$  — какая-либо точка поверхности  $F$ , не принадлежащая всем  $a_i$ . Ее отражения в плоскостях  $a_i$  — точки  $M_i$ , очевидно, сходятся к точке  $M_o$  — отражению  $M$  в  $a_o$ . Так как поверхность есть замкнутое множество, точка  $M_o$  принадлежит поверхности  $F$ . Следовательно, плоскость  $a_o$  есть плоскость симметрии  $F$ , предельная точка  $P_o$  принадлежит множеству  $\{P\}$  и множество  $\{P\}$  замкнуто.

Остается доказать, что на сфере  $S^{m-1}$  найдется хотя бы одна большая окружность, сплошь заполненная точками  $P$ . Мы ее найдем среди больших окружностей, проходящих через предельную точку  $P_o$ .

Каждая из точек последовательности  $P_i$ , сходящейся к  $P_o$ , отличная от  $P_o$ , определяет единственную большую окружность  $S_i^1$  сферы  $S^{m-1}$ , проходящую через  $P_o$  и  $P_i$ . Если найдется точка  $P_i$ , такая, что дуга  $P_oP_i$  окружности  $S_i^1$  несоизмерима с  $\pi$ , то теорема доказана. Однако возможно, что все окружности  $S_i^1$  несут конечное число точек  $P$ . Так как длина дуги  $P_oP_i$  с возрастанием номера  $i$  стремится к нулю, число  $b_i$  — наибольшая общая мера этой дуги с  $\pi$  — также стремится к нулю. Поэтому, если у множества  $\{S_i^1\}$  есть предельная окружность, то она сплошь заполнена точками  $P$ .

Проведем  $(m-1)$ -плоскость, касательную к сфере  $S^{m-1}$  в точке  $P_o$ , и в ней построим единичную  $(m-2)$ -сферу с центром в точке  $P_o$ ; у этой сферы мы также отождествим диаметрально противоположные точки и назовем ее тогда  $'S_p^{m-2}'$ . Каждой точке  $P_i$  сферы  $S_p^{m-1}$  соответствует точка  $T_i$  сферы  $'S_p^{m-2}'$  пересечения сферы с касательной к окружности  $S_i^1$  в точке  $P_o$ .

Если множество точек  $T_i$  конечно, то по крайней мере одна из них принадлежит бесконечному подмножеству  $\{P_j\}$  множества  $\{P_i\}$ ; определяющая окружность  $P$  окружности сливается в одну — это и будет искомая предельная окружность  $S_o^1$ . Если же множество  $\{T_i\}$  бесконечно, то оно имеет хотя бы одну предельную точку  $T_o$ ; касательная  $P_o T_o$  к сфере определяет искомую предельную большую окружность  $S_o^1$  на  $S^{m-1}$ . Доказана.

Соответствующая окружности  $S_o^1$  ( $m=2$ )-ось вращения поверхности  $F$  может не быть минимальной (п. 5°), если множество  $\{P\}$  содержит точку, лежащую на окружности  $S_o^1$  и не являющуюся ее полюсом; соответствующая плоскость симметрии  $\alpha$  будет пересекать найденную ( $m=2$ )-ось под острым углом, и в силу вступает теорема 2.

**Следствие.** Пусть поверхность  $F$  имеет  $k$  линейно независимых симметрий,  $P_o^{m-k}$  — их пересечение. Если никакой  $k$ -гранный многоугольник, обладающий данными или другими плоскостями симметрии  $F$ , проходящий через  $P_o^{m-k}$ , не является минимальным, то поверхность  $F$  имеет  $m-k$  плоскостей симметрии, проходящими через  $P_o^{m-k}$  или совпадающими в ней.

В самом деле, у всякого из указанных  $k$ -гранных углов — они имеют общую вершину  $P_o^{m-k}$  — есть среди его внутренних ( $k-1$ )-гранных углов один, не имеющий внутренний ( $k-2$ )-гранный угол, и т. д. — вплоть до внутреннего двугранного угла. Следовательно, у каждого  $k$ -гранных угла, соединенного любыми плоскостями симметрии  $F$ , проходящими через  $P_o^{m-k}$ , есть один двугранный внутренний угол, через ребро которого проходит плоскость симметрии  $F$ , не входящая в состав этого угла. Поэтому поверхность  $F$  имеет бесконечное множество плоскостей симметрии, проходящих через  $P_o^{m-k}$ . По теореме 10, поверхность имеет ось вращения; следовательно, что эта ось проходит через  $P_o^{m-k}$ .

Ит. Будем через  $F^A$  обозначать поверхность, имеющую

**Свойство А.** Всякая ( $m-2$ )-плоскость пересечения двух плоскостей симметрии поверхности есть ее ( $m-2$ )-ось ортогональной симметрии (или  $m-2$ -плоскость ортогональной симметрии).

Доказано, если число плоскостей симметрии  $F^A$ , проходящих через любую-либо ( $m-2$ )-ось симметрии, конечно, то оно четно; для каждой плоскости симметрии найдется ортогональная ей плоскость симметрии, проходящая через ту же ( $m-2$ )-ось. (Последнее утверждение совпадает с условием А в [11]).

**Теорема 12.** Если через ( $m-2$ )-мерную ось симметрии  $P_o^{m-2}$  поверхности  $F^A$  проходит конечное число плоскостей симметрии и это число четно, то все другие плоскости симметрии ее, не проходящие через  $P_o^{m-2}$ , должны быть 2-ортогональны  $P_o^{m-2}$  \*.

\* Эта теорема имеется в работе [11] под номером 5, но там ее доказательство содержит ошибку; второй абзац его должен начинаться так: «Заметим, что гиперплоскость  $\alpha$  можно считать даже не ортогональной ни одной из гиперплоскостей  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ »; в этом абзаце вместо  $P_{m-2}$  нужно всюду читать  $\alpha_1$  (или  $\alpha_2$ ).

Здесь мы приводим другое, совсем короткое доказательство.

Нужно указать, что в той же работе [11] теорема 6 неверна. При указанных в ней условиях поверхность  $F_{2n}^A$  не состоит из сфер, а является поверхностью вращения  $(m-2)$ -меры. При доказательстве этой теоремы ошибочно принято, что через любую  $(m-1)$ -сферу можно провести 2-плоскость, вполне ортогональную заданной поверхности вращения.

Доказательство получается непосредственно из таблицы (5): минимальный трехгранный угол, составленный плоскостями симметрии  $F$ , одним из ребер которого является ось симметрии  $P_0^{m-2}$ , имеет при этом ребро угол не больший  $\frac{\pi}{4}$ , следовательно, это угол  $\varphi_3$ , для него  $q_3 \geq 4$ ; так как  $q_2$  тоже должно быть четным, то  $q_2 = 2$  и  $\varphi_1 = \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$ , т. е. плоскость симметрии, пересекающая ось  $P_0^{m-2}$ , 2-ортогональна этой оси.

**Следствие 1.** Минимальный трехгранный угол между плоскостями симметрии поверхности  $F^A$  имеет два прямых угла:  $\tau_{22n}$ .

**Следствие 2.** Если три плоскости симметрии поверхности  $F$  образуют трехгранный угол, все три внутренних двугранных угла которого острые, то вершина этого угла есть  $(m-3)$ -ось вращения поверхности  $F^A$ .

Действительно, через каждое из  $(m-2)$ -ребер данного угла проходит более двух плоскостей симметрии  $F^A$ , так как двугранные углы острые. Но при этом не выполнено необходимое условие конечности числа плоскостей симметрии: каждое  $(m-2)$ -ребро пересекается третьей гранью угла не 2-ортогонально, т. е. под острым углом; следовательно, число плоскостей симметрии бесконечно; остальное следует из теоремы 11 и теоремы и ее следствия.

**17°. Теорема 13.** Алгебраическая поверхность  $F_n$  в пространстве  $E^m$  имеющая  $m$  попарно взаимно-ортогональных плоскостей симметрии, центральна. Если при этом ее порядок нечетный, то она приводима: по крайней мере одна из ее плоскостей симметрии является ее компонентой.

Для доказательства первого утверждения совместим указанные  $m$  плоскости симметрии поверхности с координатными плоскостями  $x_i = 0$ , ( $i = 1, 2, \dots, m$ ). Уравнение  $F_n$  станет при этом инвариантным относительно преобразования  $x'_i = -x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ), а это значит, что начало координат  $O$  является центром поверхности  $F_n$ .

Таким образом, указанная в теореме поверхность  $F_{2p-1}$  нечетного порядка  $2p-1$  является центральной. Совместив ее плоскости симметрии с координатными, можно ее уравнение записать так:

$$\sum_{s=1}^p \varphi_{2s-1} = 0, \quad (6)$$

где  $\varphi_{2s-1}$  — однородные формы степени  $2s-1$  относительно переменных  $x_i$ . Каждая из переменных  $x_i$  должна входить во все члены уравнения (6) только в четной, либо только в нечетной степени. Поэтому существует в крайней мере одна переменная — пусть это  $x_m$  — входящая во все члены уравнения (6). Следовательно, плоскость  $x_m = 0$  является компонентой поверхности  $F_{2p-1}$ . Теорема доказана.

### § 3. ОЦЕНКИ ЧИСЛА ПЛОСКОСТЕЙ ОРТОГОНАЛЬНОЙ СИММЕТРИИ ПОВЕРХНОСТИ $F_n^A$

**18°.** Если нормаль к плоскости симметрии  $a$  поверхности  $F_n$  не является асимптотической для  $F_n$ , то  $a$  есть главная диаметральная плоскость  $F_n$  (заметим, что в работах [12—15], где дается или используется определение диаметральной плоскости или оси, это ограничение на нормаль обычно не оговаривается). Поэтому для  $F_n$ , у которой число  $\tilde{N}$  таких пло-

имеющей симметрии конечно, справедлива оценка, данная в [12] для главных центральных плоскостей  $F_n$ :

$$\tilde{N} \leq \sum_{k=1}^m (n-1)^{m-k}. \quad (7)$$

В дальнейшем указанное ограничение на нормаль к плоскости симметрии  $F_n$  в нашей работе не налагается, и все же для некоторых типов поверхностей оценка числа их плоскостей симметрии оказывается значительно выше оценки (7). В этом параграфе даются точные оценки для поверхности  $F_n^*$ . (Напомним, что, начиная с п. 11°, под поверхностью  $F_n$ , в частности  $F_n^4$ , мы понимаем поверхность, не являющуюся поверхностью  $F_n^*$  — п. 11°. Заметим, что для  $F_n^*$  оценка (7) оказывается заниженной; например, в  $E^3$  поверхность  $F_3^*$ , состоящая из трех взаимно перпендикулярных плоскостей, имеет не семь — по формуле (7), — а девять плоскостей симметрии).

Так как  $F_1$  — плоскость — имеет бесконечное множество плоскостей симметрии, то это множество может быть конечным только в случае, когда поверхность  $F_n$  имеет порядок  $n \geq 2$ ; поэтому, записывая порядок  $n = 2p$  в виде  $n = 2p + 1$  в зависимости от его четности, мы можем считать  $p = \frac{n-1}{2} > 1$ .

**Теорема 14.** Для поверхности  $F_n^A$ , множество плоскостей симметрии конечно, число  $N$  этих плоскостей имеет точную верхнюю границу  $\bar{N}$ , определяемую формулами

$$\begin{aligned} \text{при } m \text{ четном} \quad \bar{N} &= mp, \\ \text{при } m \text{ нечетном} \quad \bar{N} &= (m-1)p+1. \end{aligned}$$

Действительно, все  $N$  плоскостей симметрии  $F_n^A$  могут группироваться в наборы, каждый из которых состоит из четного числа, не превосходящего  $\frac{m}{2}$  (теорема 8 и начало п. 16°) плоскостей, проходящих через одну ось симметрии поверхности (свойство А); согласно теореме 12 все эти, кроме оси попарно 2-ортогональны, и поэтому никакие два набора не имеют общих плоскостей. Число этих осей, очевидно, не превосходит  $\left[\frac{m}{2}\right]$ .

Если  $m$  четно, то  $\bar{N} = \frac{m}{2} \cdot 2p = mp$ . Если же  $m$  нечетно, то число плоскостей, входящих в указанные наборы, не более  $\frac{m-1}{2} \cdot 2p = (m-1)p$ ; векторы всех этих плоскостей имеют  $(m-1)$ -мерную линейную оболочку. Единственный ортогональный ей вектор может служить нормалью к вектором для еще одной плоскости симметрии  $F_n^A$ , и получается  $\bar{N} = (m-1)p+1$ .

Остается доказать, что эти оценки точные. Для этого положим

$$\psi_{p,i} = a_i(x_{2i-1}^2 + x_{2i}^2)^p + b_i \sum_{k=0}^p (-1)^k C_{2p}^{2k} x_{2i-1}^{2k} x_{2i}^{2k} \quad (8)$$

в  $\bar{N}$  форму порядка  $2p$  от  $2r$  переменных

$$\Psi_{2p}(x_1, x_2, \dots, x_{2r}) = \sum_{i=1}^r \psi_{p,i} \quad (9)$$

Тогда при  $m$  четном граница  $\bar{N}$  достигается на поверхностях, соответственно, четного и нечетного порядков ( $h = \text{const} \neq 0$ )

$$F_{2p}^A: \varphi_{2p}(x_1, \dots, x_m) + h = 0; \quad (10)$$

$$F_{2p+1}^A: x_1 [\varphi_{2p}(x_1, \dots, x_m) + h] = 0. \quad (11)$$

Их  $(m-2)$ -оси симметрии служат координатные  $(m-2)$ -плоскости  $x_{2i-1} = x_{2i} = 0$  ( $i = 1, \dots, \frac{m}{2}$ ); каждая 2-плоскость, вполне ортогональная любой из них, пересекает поверхность по центральной кривой, имеющей  $2p$  осей симметрии [7]. Очевидно, коэффициенты  $a_i, b_i, h$  в (8) и (9) можно выбрать так, чтобы уравнения (10) и (11) определяли поверхности с конечным числом плоскостей симметрии и чтобы (10) была неприводимой; поверхность (11) должна быть приводимой по теореме 13 — она содержит плоскость  $x_1 = 0$ .

Пусть теперь  $m$  — нечетное число. Тогда поверхности

$$F_{2p}^A: \varphi_{2p}(x_1, \dots, x_{m-1}) + cx_m^2 + h = 0, \quad (12)$$

$$F_{2p+1}^A: x_m [\varphi_{2p}(x_1, \dots, x_{m-1}) + h] = 0 \quad (13)$$

имеют точно  $(m-1)p+1$  плоскостей симметрии. (Как и выше, поверхность  $F_{2p+1}^A$  приводима, по теореме 13). Теорема доказана.

20°. Указанные в теореме 14 границы достигаются на центральных поверхностях, так как они имеют  $m$  попарно ортогональных плоскостей симметрии (теорема 13), причем поверхность нечетного порядка должна быть приводимой. Если же поверхность  $F_{2p}^A$  нецентральная или неприводимая нечетного порядка, то оценки числа плоскостей симметрии снижаются:

**Теорема 15.** Для нецентральной поверхности четного порядка  $F_{2p}^A$  и для неприводимой поверхности нечетного порядка  $F_{2p+1}^A$ , множество плоскостей симметрии которых конечно, число  $N$  этих плоскостей имеет точную верхнюю границу  $\bar{N}$  вида

при  $m$  четном

$$\bar{N} = (m-2)p+1,$$

при  $m$  нечетном

$$\bar{N} = (m-1)p.$$

Для доказательства заметим, что как неприводимая  $F_{2p+1}^A$ , так и нецентральная  $F_{2p}^A$  не могут иметь более  $m-1$  попарно ортогональных плоскостей симметрии (теорема 13); учитывая это, нетрудно провести подсчет чисел  $\bar{N}$  так же, как и в п. 19°. Используя форму (9), составим уравнения поверхностей, на которых эти границы достигаются:

неприводимые поверхности  $F_{2p}^A$  (обе неприводимые):

$$\text{при } m \text{ четном} \quad \varphi_{2p}(x_1, \dots, x_{m-2}) + cx_{m-1}^2 + dx_m + h = 0,$$

$$\text{при } m \text{ нечетном} \quad \varphi_{2p}(x_1, \dots, x_{m-1}) + dx_m + h = 0;$$

неприводимые поверхности  $F_{2p+1}^A$ :

$$\text{при } m \text{ четном} \quad \varphi_{2p}(x_1, \dots, x_{m-2}) + cx_{m-1}^2 + dx_m^{2p+1} + h = 0,$$

$$\text{при } m \text{ нечетном} \quad \varphi_{2p}(x_1, \dots, x_{m-1}) + dx_m^{2p+1} + h = 0.$$

21°. Наконец, если  $F_{2p+1}^A$  неприводима и центральна, оценки еще снижаются:

**Теорема 16.** Для неприводимой центральной поверхности нечетного порядка  $F_{2p+1}^A$  с конечным множеством плоскостей симметрии число  $N$

плоскостей имеет точную верхнюю границу  $\bar{N}$ , определяемую формулами

$$\text{если } m \text{ четном} \quad \bar{N} = (m-2)p,$$

$$\text{если } m \text{ нечетном} \quad \bar{N} = (m-3)p+1.$$

Не останавливаясь на подсчете чисел  $N$ , аналогичном предыдущим, приведем примеры центральных неприводимых поверхностей  $F_{2p+1}^A$ , на которых эти границы достигаются:

если  $m \geq 6$  четном

$$x_{m-1}(\psi_{p,1} + h_1) + x_m[\varphi_{2p}(x_3, \dots, x_{m-2}) + h_2] = 0;$$

если  $m > 6$  нечетном

$$x_{m-1}(\psi_{p,1} + h_1) + x_m[\varphi_{2p}(x_3, \dots, x_{m-3}) + cx_{m-2}^2 + h_2] = 0;$$

$$\text{если } m = 3 \quad (\bar{N} = 1) \quad ax_1^2x_2 + bx_3^{2p+1} = 0;$$

$$\text{если } m = 4 \quad (\bar{N} = 2p) \quad x_3\psi_{p,1} + cx_4 = 0;$$

$$\text{если } m = 5 \quad (\bar{N} = 2p+1) \quad x_3(\psi_{p,1} + cx_4^2) + dx_5 = 0.$$

Теорема доказана. Так как произвольная центральная плоская кривая обладает свойством А (п. 16°), справедливо

**Следствие.** Неприводимая центральная плоская кривая нечетного порядка осей симметрии не имеет.

Это свойство центральной плоской кривой отмечено в [7].

#### § 4. О КЛАССИФИКАЦИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ ПО ЧИСЛУ И РАСПОЛОЖЕНИЮ ИХ ПЛОСКОСТЕЙ СИММЕТРИИ

22°. Симметрия поверхности, в частности, ортогональная симметрия относительно плоскости, является ее существенным свойством; поэтому нам представляется естественным положить это свойство в основу классификации поверхностей, имеющих плоскости симметрии. В этом параграфе мы замечаем такую классификацию — по основным характеристикам множества плоскостей симметрии поверхности.

Все поверхности, имеющие плоскости симметрии, разделяются на два типа:

I — поверхности, множество плоскостей симметрии которых конечно; II — поверхности, множество плоскостей симметрии которых бесконечно.

Поверхности типа I разобьем на классы  $Ik$  ( $k = 1, \dots, m$ ): поверхность относится к классу  $Ik$ , если она имеет  $k$  линейно независимых плоскостей симметрии, или, точнее, если множество нормальных векторов всех плоскостей симметрии имеет  $k$ -мерную линейную оболочку.

Внутри каждого класса  $Ik$  ( $2 \leq k \leq m$ ) поверхности могут быть подразделены по строению минимальных  $k$ -гранных углов (п. 13°), образуемых плоскостями симметрии, т. е. по группам симметрий поверхностей.

Поверхности типа II могут быть подразделены на классы:

II D — поверхности, имеющие только дискретные серии параллельных плоскостей симметрии (пп. 8°, 12°). Такие поверхности в свою очередь разделяются по числу и расположению нормальных векторов этих серий, т. е. по группам симметрий поверхности, связанных с заполнениями пространства (сотами) [8].

II C — цилиндрические поверхности, не имеющие осей, относительно которых они были бы поверхностями вращения («чисто-цилиндрические» поверхности, см. конец пп. 4° и 6°). Их дальнейшее подразделение возможно по размерности  $h$  плоских образующих и по свойствам — особенно по свойствам симметрии — направляющих поверхности  $F^{m-h-1}$  (п. 1°).

$\text{II}R$  — поверхности вращения, не имеющие параллельных плоскостей симметрии («чисто-ротационные» поверхности). Они допускают дальнейшее подразделение по числу и размерности минимальных осей вращения (п. 5°).

Смешанные классы:  $\text{IICR}$ ,  $\text{IIRD}$  и т. п. Это поверхности, обладающие признаками поверхностей одновременно двух или даже всех трех предыдущих классов (например, поверхность, описанная в конце п. 7°).

Наконец, поверхности каждого класса типа II подразделяются по числу и расположению отдельных плоскостей симметрии, не входящих в серии параллельных плоскостей и не проходящих через оси вращения поверхности. Эти поверхности можно характеризовать как поверхности смешанного типа. Например, в  $E^3$  гиперболоид вращения есть поверхность смешанного типа II —  $\text{IIR}$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. М. В. Постников. Этюды по теории кривых четвертого порядка. Казань, 1888.
2. В. О. Шифф. Об осях симметрии центральных кривых четвертого порядка. Харьков, 1893.
3. G. Loria. Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven. Leipzig, 1902.
4. E. Pascal. Repertorium der höhere Mathematik, Bd. II, Leipzig, 1902.
5. G. Castelnuovo und F. Enriques. Grundeigenschaften der algebraischen Flächen. Enz. math. Wiss., Bd IV, H. 6. Leipzig, 1915.
6. W. F. Meurer. Spezielle algebraischen Flächen. Enz. math. Wiss., Bd III, H. 11. Leipzig, 1931.
7. А. Т. Чуб. Некоторые вопросы из теории алгебраических кривых. Изв. Крымск. пед. ин-та, Симферополь, т. 35, 1961, 143—172.
8. H. S. M. Coxeter. Regular polytopes. N.-York—London, 1963.
9. F. Вейль. Симметрия. «Наука», М., 1968.
10. H. S. M. Coxeter. Regular and semi-regular polytopes, I. Math. Zeitschr., 46, 1940, 380—407.
11. В. Ф. Игнатенко. О гиперплоскостях ортогональной симметрии алгебраических гиперповерхностей. «Укр. геометр. сб.», вып. 5—6, 1968, 78—84.
12. В. Ф. Игнатенко. К теории главных диаметральных гиперплоскостей алгебраических гиперповерхностей. Третья Прибалт. геометр. конференция (тезисы докладов). Паланга, 1968, 69—70.
13. M. Piazzolla-Beloch. Proprietà diametrali delle superficie algebriche. Atti IV congr. Unione mat. ital., 1953, 2, 425—430.
14. А. А. Савелов. Плоские кривые. История, свойства, применения. (Справочное руководство). Физматиз, М., 1960.
15. B. A. Rosina. Sulla teoria diametrale delle superficie algebriche. Bull. Soc. roy. sci., Liège, 1962, 31, № 3, 4, 146—167.

Поступила 19 мая 1968 г.

## О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

В. Ф. Игнатенко (Полтава)

Вопросу геометрического образования в трехмерном пространстве алгебраических поверхностей  $F_n$  порядка  $n$  при помощи поверхностей низших порядков посвящено много работ (см., например, [1, 2]). В данной заметке указываются некоторые свойства поверхностей  $F_n$  евклидова пространства  $E^m$ , связанные с возможностью их образования при помощи поверхностей низших порядков.

1° Введем в пространстве  $E^m$  афинную систему координат. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} \varphi_{\alpha_1}^1 - \lambda_1 &= 0, \\ \varphi_{\alpha_2}^2 - \lambda_2 &= 0, \\ &\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ &\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ &\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \varphi_{\alpha_{m-1}}^{m-1} - \lambda_{m-1} &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

и уравнение

$$\sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i \varphi_{\beta_i}^i = 0, \tag{2}$$

где  $\lambda_i$  — параметры,  $\varphi_{\alpha_i}^i$  (а также  $\varphi_{\beta_i}^i$ ) — независимые многочлены соответственно  $\alpha_i$ -й и  $\beta_i$ -й степеней относительно переменных  $x_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ).

Положим  $\bar{\alpha} = \prod_{i=1}^{m-1} \alpha_i$ ,  $\beta = \max \beta_i$ . Система (1) определяет связку кривых в общем порядке  $\bar{\alpha}$ , а уравнение (2) —  $(m-2)$ -параметрическую связку поверхностей порядка  $\beta$  с центральной кривой связки, задаваемой системой уравнений  $\varphi_{\beta_i}^i = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, m-1$ ). Отметим, что связки плоскостей с центральным образом, отличным от точки, рассматриваются, в частности, в [3].

Исключая  $\lambda_i$  из уравнений (1) и подставляя их значения в уравнение (2), находим уравнение вида

$$\sum_{i=1}^{m-1} \varphi_{\alpha_i}^i \varphi_{\beta_i}^i = 0. \tag{3}$$

Поверхность, задаваемую уравнением вида (3), обозначим через  $F_n^*$ ,  $n = \max \deg(\varphi_{\alpha_i}^i, \varphi_{\beta_i}^i)$ . Имеет место

**Теорема 1.** *Всякая поверхность порядка  $n$ , уравнение которой может быть записано в виде (3), есть геометрическое место точек пересечения кривых в общем порядке  $\bar{\alpha}$  связки (1) с соответственными поверхностями порядка  $\beta$  связки (2).*

При  $x_i = 1$  связку (1) обозначим через  $\{l_1\}$ . Связка  $\{l_1\}$  представляет собой связку параллельных прямых; уравнение (3) принимает вид

$$\sum_{l=1}^{m-1} \varphi_1 \psi_{l_1}^l = 0. \quad (4)$$

Уравнение (4) выделяет среди поверхностей  $F_n^*$  те, которые можно рассматривать как геометрическое место точек пересечения элементов связки  $\{l_1\}$  параллельных прямых с соответственными элементами связки (2) поверхностей порядка  $n - 1$ .

Заметим, что теоремы, указываемые в [4], не являются верными для поверхностей четвертого порядка общего вида, на что указал А. С. Лейбин. Приведенные в [4] теоремы 1, 2 и 3 справедливы для отдельных классов поверхностей четвертого порядка, асимптотические конусы которых могут быть представлены соответственно уравнениями вида (3) ( $\alpha_l = \beta_l = 2$ ) и (4) ( $\alpha_l = 1, \beta_l = 3$ ).

Рассмотрим теперь рациональное преобразование пространства  $E^m$  в себя, задаваемое равенствами

$$x'_j = k f_j \quad (j=1, 2, \dots, m), \\ \sum_{j=1}^m x'_j \varphi_j = \varphi_1, \quad (5)$$

где  $k$  — множитель пропорциональности,  $f_j$  (а также  $\varphi_j$ ) — независимые мономы относительно переменных  $x_j$ .

Отметим, что если  $f_j = x_j$ , то преобразование (5) является центральным ([5] при  $m = 3$ ).

Подвергнув преобразованию (5) плоскость, определяемую уравнением

$$2x_1 - 1 = 0,$$

получим поверхность  $\bar{F}_n$ , задаваемую уравнением

$$f_1 \varphi_1 - \sum_{s=2}^m f_s \varphi_s = 0. \quad (6)$$

Пусть  $s = \max \deg \varphi_j$ ;  $0(\bar{F}_n) = \max \deg (f_j \varphi_j)$ . Положим  $\frac{x'_l}{x_1} = \xi_l$  ( $l = 2, 3, \dots, m$ ); уравнения  $x'_j = k f_j$  запишем в виде  $f_l = \xi_l f_1$ , ( $l = 2, 3, \dots, m$ ). Принем  $\xi_l$  за параметры. Тогда эти уравнения задают связку кривых

в общем порядке  $s = \prod_{l=2}^m \deg (f_l - \xi_l f_1)$ . Для случая, когда  $x'_1 = \frac{1}{2}$ , эту

связку обозначим через  $\bar{C}$ . Связку поверхностей порядка  $s$ , определяемую

уравнением  $\sum_{j=1}^m x'_j \varphi_j = \varphi_1$ , где  $x'_j$  считаются параметрами, обозначим при

$x'_1 = \frac{1}{2}$  через  $\hat{C}$ .

Тогда справедлива

**Теорема 2.** Любая поверхность порядка  $n$ , уравнение которой может быть записано в виде (6), есть геометрическое место точек пересечения связок в общем порядке  $s$  связки  $\bar{C}$  с соответственными поверхностями порядка  $s$  связки  $\hat{C}$ .

Обозначим через  $\bar{C}_1$  связку  $\bar{C}$  при  $f_j = x_j$ ; уравнение (6) принимает вид

$$x_1 \varphi_1 - \sum_{s=2}^m x_s \varphi_s = 0. \quad (7)$$

К виду (7) приводится уравнение произвольной поверхности  $F_n$  порядка  $n$ . Пусть при  $\varphi_i = \bar{\varphi}_i$  уравнение (7) определяет поверхность  $\bar{F}_n$ . Координатная система может быть выбрана так, что многочлены  $\varphi_i$  не содержат переменных  $x_t$ , ( $t = 1, 2, \dots, j-1$ ), имея все  $x_{t+1}$  можно предполагать при этом, что  $\varphi_i$  независимы). Связку  $\hat{C}$  при  $\varphi_i = \bar{\varphi}_i$  обозначим через  $\hat{C}_1$ . Соответствие связок  $\bar{C}_1$  и  $\hat{C}_1$  является взаимнооднозначным, его можно считать проективным (коррелятивным) соответствием.

Отметим, что  $\bar{C}_1$  представляет собой связку прямых, а  $\hat{C}_1$  — связку поверхностей порядка  $n-1$ .

Таким образом, имеет место

**Следствие 1.** Произвольную поверхность  $F_n$  порядка  $n$  можно рассматривать как геометрическое место точек пересечения прямых связки  $\bar{C}_1$  с соответственными поверхностями порядка  $n-1$  проективной ей связки  $\hat{C}_1$ ; центры связок  $\bar{C}_1$  и  $\hat{C}_1$  принадлежат поверхности  $F_n$ .

**Замечание.** Следствие 1 показывает, что произвольная поверхность  $F_n$  является образом плоскости в некотором центральном рациональном преобразовании. В трехмерном пространстве теорема, аналогичная следствию 1, доказывается, в частности, в [6] синтетическим методом.

Пусть  $\bar{C}_2$  есть связка  $\bar{C}$  при  $f_j = \bar{\varphi}_j$  (с обозначим через  $\bar{s}$ ), а  $\hat{C}_2$  — связка  $\hat{C}$  при  $\varphi_j = x_j$ ;  $\hat{C}_2$  определяет связку плоскостей. Тогда имеет место

**Следствие 2.** Произвольную поверхность  $F_n$  порядка  $n$  можно рассматривать как геометрическое место точек пересечения кривых в общем порядка  $\bar{s}$  связки  $\bar{C}_2$  с соответственными плоскостями проективной ей связки  $\hat{C}_2$ ; центры связок  $\bar{C}_2$  и  $\hat{C}_2$  принадлежат поверхности  $F_n$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. G. Castelnuovo und F. Enriques: Grundeigenschaften der algebraischen Flächen. Enz. Mat. Wiss., Bd. III, H. 6, Leipzig, 1915.
2. W. Fr. Meyer. Spezielle algebraischen Flächen. Enz. Mat. Wiss., Bd. III, H. 11, Leipzig, 1931.
3. Д. З. Гордевский, А. С. Лейбин. Популярное введение в многомерную геометрию. Изд-во ХГУ, Харьков, 1964.
4. В. Ф. Игнатенко. О геометрическом образовании алгебраических гиперповерхностей четвертого порядка. «Укр. геометр. сб.», вып. 5—6. Изд-во ХГУ, Харьков, 1968.
5. Н. А. Никулин. К вопросу о рациональном преобразовании алгебраических поверхностей. Итоговая научная конференция профессорско-преподавательского состава Крымпединститута. Симферополь, 1965, стр. 117—119.
6. F. Schur Ueber die Construction der Flächen n-ter Ordnung. Mat. Ann., Bd. 23, Leipzig, 1884.

Поступила 27 апреля 1968 г.

## КИНЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ

В. Д. Измайлова (Свердловск)

**1.** Определим в трехмерном эквиаффинном пространстве внешнее произведение двух ковекторов  $\xi$  и  $\eta$  следующим образом:

$$\xi_i \eta_j s^{ijk} \equiv p^k, \quad (1)$$

— основная плотность пространства, или в прямых обозначениях

$$[\xi \eta] = p.$$

Также теперь  $\lambda = [n, v]$  — внешнее произведение двух векторов  $n$  и  $v$  (см. в [1]). В дальнейшем для обозначения векторов будем использовать латинские буквы, а для обозначения ковекторов — греческие).

Нетрудно проверить, что

$$p = [[nv] \mu] = (n\mu) v - (v, \mu) n, \quad (2)$$

в круглые скобки заключено скалярное произведение вектора на ковектор.

Заметим теперь, что в аффинном пространстве  $A_3$  тривектор  $\epsilon^{ijk}$  определен с точностью до множителя, поэтому формула (1) позволяет сопоставить паре ковекторов не вектор, а псевдовектор  $p^k$ . Однако в дальнейшем мы будем иметь дело лишь с задачами на отыскание направлений прямых, которые пересекаются две какие-нибудь плоскости, 2 — направления которых характеризуются ковекторами  $\mu$  и  $\nu$ . Поэтому формулы (1) и (2) применимы и в  $A_3$ .

**2.** Рассмотрим поверхность  $X_2^*$  в аффинном (или евклидовом) пространстве, оснащенную полем аффинных (или соответственно метрических) векторов  $n(u^1, u^2)$ . Пусть на  $X_2$  задана произвольная кривая  $u_t : u^a = u^a(t), t \in I$  ( $I$  — некоторый промежуток) и векторное поле  $v(t)$ .

Будем называть опорной плоскостью 1-го рода направления  $v$  в данной точке  $M$  поверхности такую плоскость, которая проходит через вектор  $v$  и осищающий вектор  $n$  в этой точке. Опорной плоскостью 2-го рода направление  $v$  будем называть плоскость, проходящую через направление, сопряженное направлению  $v$  и осищающий вектор  $n$  (Опорная плоскость 2-го рода в книге [1] названа просто опорной плоскостью направления  $v$ ).

Выясним теперь, каким образом перемещается в пространстве опорная плоскость 1-го рода направления  $v$  вдоль кривой  $u_t$ . Для этого мы найдем направление прямой, по которой пересекаются две бесконечно близкие плоскости семейства опорных плоскостей 1-го рода, зависящее от параметра  $t$ . Будем называть эту прямую мгновенной осью «вращения» опорной плоскости.

\* Класс дифференцируемости  $X_2$  и других объектов —  $C^s$ ,  $s \leq 3$ .

Опорная плоскость направления  $v$  может быть охарактеризована вектором  $\xi = [n, v]$ , а опорная плоскость в бесконечно близкой точке ковектором

$$\eta = [n + \Delta n, v + \Delta v] = [n_*, v_*].$$

Направление прямой, по которой пересекаются эти плоскости, определяется вектором

$$[\xi, \eta] = [[n, v], [n_*, v_*]],$$

что по формуле (2) можно представить так:

$$[\xi, \eta] = (nn_*v_*)v - (vn_*v_*)n.$$

Но

$$\begin{aligned} n_* &= n + N_a^{\beta} r_{\beta} du^a + \dots, \\ v_* &= v + \{(v_{\alpha}^{\beta} + v^{\alpha} \Gamma_{\alpha\beta}^{\beta}) r_{\beta} + v^{\alpha} \omega_{\alpha\beta} n\} du^{\alpha} + \dots, \end{aligned}$$

где  $N_a^{\beta}$ ,  $\Gamma_{\alpha\beta}^{\beta}$ ,  $\omega_{\alpha\beta}$  определяются из деривационных уравнений поверхности

$$\begin{aligned} r_{\alpha\beta} &= \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} r_{\gamma} + \omega_{\alpha\beta} n, \\ n_{\alpha} &= N_a^{\alpha} r_{\alpha}. \end{aligned}$$

Здесь  $\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}$  — внутренняя связность (1-го рода) поверхности\*,  $\omega_{\alpha\beta}$  — асимметрический тензор,  $N_a^{\alpha}$  — основной аффинор поверхности.

Учитывая (4), смешанные произведения в (3) можно представить та-

$$(nn_*v_*) = (nr_{\alpha}v) N_a^{\alpha} du^a + \dots = (nr_{\alpha}r_{\beta}) N_a^{\alpha} v^{\beta} du^a + \dots$$

или

$$(nn_*v_*) = \epsilon_{\alpha\beta} N_a^{\alpha} v^{\beta} du^a + \dots,$$

где  $\epsilon_{\alpha\beta}$  — дискриминантный бивектор  $\epsilon_{\alpha\beta} = (nr_{\alpha}r_{\beta})$ . Аналогично

$$(vn_*v_*) = (vn_{\alpha}r_{\beta}) \nabla_{\alpha} v^{\beta} du^a + \dots$$

Или

$$(vn_{\alpha}v) = -\epsilon_{\alpha\beta} v^{\beta} Dv^{\alpha} + \dots$$

где  $\nabla_{\alpha}$  и  $D$  есть соответственно абсолютная производная и дифференциал поля  $v$  относительно  $\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}$ .

Представляя  $du^a$  через  $u^a dt$ , деля обе части (3) на  $dt$  и переходя к пределу при  $dt \rightarrow 0$ , мы находим, что направление мгновенной оси «вращения» опорной плоскости направления  $v$  (1-го рода) определяется вектором

$$p = \epsilon_{\alpha\beta} N_a^{\alpha} v^{\beta} u^a + \epsilon_{\alpha\beta} v^{\beta} D u^{\alpha} n,$$

где  $D$  — символ абсолютного дифференциала вдоль кривой  $u_t$ . В частности, если  $v = u$ , т. е. если рассматривается перемещение опорной плоскости 1-го рода направления самой кривой  $u_t$ , то мгновенная ось «вращения» этой плоскости будет определяться вектором

$$\tilde{p} = \epsilon_{\alpha\beta} N_a^{\alpha} u^{\beta} u^a v + \epsilon_{\alpha\beta} u^{\beta} D u^{\alpha} n.$$

Из (8) видно, что направление оси «вращения» определяется направлением поля  $v$ , а не самим полем и не зависит от выбора параметра  $t$  кривой.

Далее нетрудно показать, что в этом случае мгновенная ось вращения опорной плоскости в точке  $M$  проходит через эту точку. Действительно

\* Для  $X_2 \subset E_8$  это символы Кристоффеля 1-й квадратичной формы.

прямая  $N$  — точка пересечения прямой, по которой пересекаются опорные плоскости, соответствующие точкам  $M(t)$  и  $M(t + \Delta t)$  с касательной плоскостью поверхности в точке  $M$ . Очевидно, точка  $N$  есть точка пересечения касательной к кривой  $u_t$  с опорной плоскостью в точке  $M(t + \Delta t)$ , так как опорная плоскость в точке  $M$  и касательная плоскость в точке  $M$  пересекаются по касательной к  $u_t$ . Значит, при  $\Delta t \rightarrow 0 N \rightarrow M$ .

Кроме того, в случае  $X_2 \subset E_3$ , если в качестве  $u$ ,  $v$  и  $n$  взять орты,  $p$  можно истолковать как угловую скорость вращения (без кавычек) опорной плоскости 1-го рода направления  $v$ , а

$$\sqrt{(\varepsilon_{\alpha\beta}N_\alpha^\beta v^\alpha u^\alpha)^2 + (\varepsilon_{\alpha\beta}v^\alpha Dv^\beta u^\alpha)^2}$$

— модуль этой скорости. Векторы

$$\varepsilon_{\alpha\beta}N_\alpha^\beta u^\alpha v \text{ и } \varepsilon_{\alpha\beta}v^\alpha Dv^\beta n \quad (10)$$

соответственно тангенциальной и нормальной составляющими скорости.

В аффинном же пространстве эти компоненты определяются с точностью до общего множителя, а значит, инвариантный смысл имеет лишь направление  $p$ . Тем не менее, удобно и для аффинного случая сохранить в силу замечания за векторами (10) и псевдовектором  $p$  названия «скорости».

Из (8) и (9) получаем следующие следствия.

**Теорема 1.** Линия кривизны поверхности характеризуется тем, что опорная плоскость 1-го рода перемещается так, что ее мгновенная ось \* остается параллельной нормали  $n$ .

Действительно, линия кривизны определяется уравнением

$$\varepsilon_{\alpha\beta}N_\alpha^\beta du^\alpha du^\beta = 0.$$

Если же нормали  $n$  вдоль линии кривизны образуют торс, мы можем сказать в силу теоремы 1, что этот торс есть огибающая семейства опорных плоскостей 1-го рода направления линии кривизны \*\*.

Далее, из (8) следует, что если поле  $v(t)$  переносится параллельно кривой  $u_t$ , то

$$p = \varepsilon_{\alpha\beta}N_\alpha^\beta u^\beta v^\alpha v,$$

т. е. опорная плоскость такого направления вращается вокруг прямой, касательной  $v$ , и наоборот. В частности, получается

**Теорема 2.** Геодезическая линия поверхности характеризуется тем, что ее опорная плоскость вращается вокруг касательной к этой линии.

Отметим теперь, что если поле  $v(t)$  вдоль  $u_t$  переносится параллельно в связности 2-рода  $\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma$  (определение см. в [1 стр. 155]), то, как следует из (8),

$$p = \varepsilon_{\alpha\beta}N_\alpha^\beta v^\beta u^\alpha v + 2\varepsilon_{\alpha\beta}T_{\alpha\beta}^\gamma v^\alpha v^\beta n, \quad (11)$$

т. е.  $2T_{\alpha\beta}^\gamma = \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma - \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma$  (тензор деформации). В частности, если линия является геодезической линией 2-го рода, то мгновенная ось вращения ее опорной плоскости 1-го рода имеет направление

$$p = \varepsilon_{\alpha\beta}N_\alpha^\beta u^\beta u^\alpha u + 2\varepsilon_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta n, \quad (12)$$

\* Теперь кавычки будем опускать.

\*\* То, что это огибающая некоторого семейства плоскостей — тривиально. Здесь важно заметить, что указанным семейством является именно семейство опорных плоскостей.

где  $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} = \varepsilon_{\alpha\beta} T_{\alpha\beta}^\gamma$  — тензор Сегре (см. [1, стр. 164]). Из теоремы 2 и формулы (12) следует

**Теорема 3.** Если выполнены два из трех условий:

- 1) линия  $u_t$  — геодезическая 1-го рода;
- 2) линия  $u_t$  — геодезическая 2-го рода;
- 3) линия  $u_t$  — есть линия Сегре, то выполнены и все три.

Заметим, что линия  $u_t$  является геодезической 2-го рода тогда и только тогда, когда направление  $v$ , сопряженное направлению данной линии, переносится параллельно в связности 1-го рода, что следует из определения сопряженных связностей [2].

Линия  $u_t$ , о которой идет речь в предыдущей теореме, и только она обладает свойством, что репер, (вдоль кривой), образованный нормалью к поверхности  $n$ , касательной  $u$  к этой линии и сопряженным ему направлением  $v$  при перемещении вдоль  $u_t$ , ведет себя следующим образом: опорные плоскости направлений  $u$  и  $v$  врашаются вокруг этих направлений, а касательная плоскость вращается тоже вокруг  $v$ .

4. Пусть на поверхности задана регулярная сеть векторными полями  $v(u^1, u^2)$  и  $w(u^1, u^2)$ . Тогда с поверхностью можно связать подвижной репер  $\{v, w, n\}$ , где  $n$  — вектор оснащения. Мы будем вести рассмотрение одновременно и для поверхности в евклидовом пространстве  $E_3$ , и для поверхности в аффинном пространстве  $A_3$ . В первом случае векторы  $v, w, n$  будем считать ортами, во втором случае для векторов  $n$  (аффинной нормали)  $v$  и  $w$  допустим независимо друг от друга произвольную перенормировку, так как будем интересоваться аффинными инвариантами сети, а не полей  $v$  и  $w$ .

Координатные плоскости репера  $\{v, w, n\}$  — опорные плоскости 1-го рода направлений  $v, w$  и касательная плоскость.

Направление мгновенной оси вращения плоскости 1-го рода направления  $v$  при ее перемещении вдоль  $w$  определяется вектором

$$p = \varepsilon_{\alpha\beta} N_\alpha^\beta v^\alpha w^\beta v + \varepsilon_{\alpha\beta} v^\alpha D_w^\beta n, \quad (13)$$

а оси вращения опорной плоскости 1-го рода направления  $w$  при ее смещении в направлении  $v$  — вектором

$$q = \varepsilon_{\alpha\beta} N_\alpha^\beta w^\beta v^\alpha w + \varepsilon_{\alpha\beta} w^\beta D_v^\alpha n. \quad (14)$$

Аналогично мгновенные оси вращения опорных плоскостей 1-го рода направлений  $v$  и  $w$  при их смещении по тем же направлениям  $v$  и  $w$  суть

$$p^* = \varepsilon_{\alpha\beta} N_\alpha^\beta v^\beta v^\alpha v + \varepsilon_{\alpha\beta} v^\alpha D_v^\beta n, \quad (15)$$

$$q^* = \varepsilon_{\alpha\beta} N_\alpha^\beta w^\beta w^\alpha w + \varepsilon_{\alpha\beta} w^\beta D_w^\alpha n. \quad (16)$$

В формулах (13) и (14) скаляры

$$\tau \equiv \varepsilon_{\alpha\beta} v^\alpha D_w^\beta; \quad \tau \equiv \varepsilon_{\alpha\beta} w^\alpha D_v^\beta \quad (17)$$

в метрическом случае  $X_2 \subset E_3$  являются компонентами угловой скорости вращения соответственно опорных плоскостей 1-го рода направлений  $v$  и  $w$  при их смещении в направлениях  $w$  и  $v$ .

С другой стороны, это есть не что иное, как Чебышевские кривизны, соответственно линий ( $w$ ) и ( $v$ ) сети (см. [3, стр. 71]). Таким образом, получена

**Теорема 4.** Чебышевские кривизны  $\tau$  и  $\tau$  сети ( $w, v$ ) являются нормальными касательными к линиям  $w$  и  $v$ .

и компонентами угловой скорости вращения опорных плоскостей линий сетей  $v$  и  $w$ .

В формулах (15) и (16) скаляры

$$\gamma \equiv \epsilon_{\alpha\beta} v^\alpha Dv^\beta; \quad \gamma \equiv \epsilon_{\alpha\beta} w^\alpha Dw^\beta \quad (18)$$

геодезические кривизны линий ( $v$ ) и ( $w$ ) (определение см. в [3, стр. 70]). Следовательно, имеет место

**Теорема 5.** Геодезические кривизны  $\gamma_v$  и  $\gamma_w$  сети ( $v, w$ ) являются нормальными компонентами векторов угловой скорости вращения опорных плоскостей I-го рода при их смещении по линиям ( $v$ ) и ( $w$ ).

Формулы в (13) и (14)

$$\lambda \equiv \epsilon_{\alpha\beta} N_\alpha^2 v^\beta w^\alpha; \quad \lambda \equiv \epsilon_{\alpha\beta} N_\alpha^2 w^\beta v^\alpha, \quad (19)$$

такие тангенциальные составляющие векторов угловой скорости опорных плоскостей I-го рода направлений  $v$  и  $w$  при их смещении в линии  $w$  и  $v$  соответственно, будем называть Чебышевскими кручениями ( $w$ ) и ( $v$ ).

Формулы в (15) и (16)

$$\mu \equiv \epsilon_{\alpha\beta} N_\alpha^2 v^\beta v^\alpha; \quad \mu \equiv \epsilon_{\alpha\beta} N_\alpha^2 w^\beta w^\alpha, \quad (20)$$

являются геодезическими кручениями линий сети ( $v$ ) и ( $w$ ). Согласно (15) и (16)  $\mu_v$  и  $\mu_w$  есть тангенциальные компоненты векторов угловых скоростей опорных плоскостей I-го рода направлений  $v$  и  $w$  при их смещении в направлениях  $v$  и  $w$ .

Формулы (13), (14), (15) и (16) перепишем так:

$$p = \lambda v + \tau n; \quad q = \lambda w + \tau n. \quad (21)$$

$$p^* = \mu v + \gamma n; \quad q^* = \mu w + \gamma n. \quad (21')$$

В случае  $X_3 \subset A_3$  истолкование указанных здесь скаляров как скоростей вынуждено. Однако нетрудно заметить, что при любом перенормировании  $v$ ,  $w$  и  $n$  каждый из векторов (21) получает лишь скалярный множитель, в следовательно, направления этих векторов определяются сетью в эйнштейново-инвариантном смысле.

Б. Рассмотрим плоскость, определяемую в данной точке поверхности

$$\xi + \eta \equiv [v, q] + [w, p]. \quad (22)$$

Проверить, что она не зависит от перенормирования направлений линий сети.

Эта плоскость, очевидно, тогда и только тогда совпадает с касательной плоскостью к поверхности, когда сеть Чебышевская ( $\gamma_v = \gamma_w = 0$ ). Помимо этого будем называть ее Чебышевской плоскостью сети.

**Теорема 6.** Чебышевский вектор сети  $t \equiv \tau v + \tau w$  имеет направление, по которому Чебышевская плоскость сети пересекается с касательной плоскостью.

\* См. [3, стр. 251].

Действительно, касательная плоскость, направление которой мы характеризовать ковектором  $\zeta = [v, w]$ , и Чебышевская плоскость пересекаются по прямой, определяемой вектором

$$[\xi + \eta, \zeta] = [\xi, \zeta] + [\eta, \zeta] = [[v, q], [vw]] - [[pw], [vw]] = \\ = -(qv) v - (pv) w.$$

Но

$$(qv) v = \tau(vvw), (pv) w = \tau(vvw)$$

в силу (21), и следовательно, Чебышевская плоскость сети пересекает касательную плоскость по прямой, определяемой вектором

$$\frac{-\tau v}{v} - \frac{\tau w}{w}.$$

Теорема доказана. Аналогично устанавливается

**Теорема 7.** Геодезический вектор сети  $\frac{\tau v}{v} + \frac{\tau w}{w}$  имеет направление прямой, по которой пересекается касательная плоскость поверхности геодезической плоскостью сети, определяемой ковектором

$$[vq^*] + [wp^*].$$

Рассмотрим тензор  $C_{\alpha\beta} \equiv \epsilon_{\alpha\mu} N_\beta^\sigma$ , фигурирующий в (13) и (14). Легко видеть, что он симметричен тогда и только тогда, когда поверхность минимальна. Действительно, если

$$\epsilon_{\alpha\mu} N_\beta^\sigma = \epsilon_{\beta\mu} N_\alpha^\sigma,$$

то, умножив обе части равенства на  $\epsilon^{\alpha\beta}$ , где  $\epsilon^{\alpha\beta}\epsilon_{\beta\gamma} = \delta_\gamma^\alpha$ , получим  $N_\gamma^\alpha = N_\alpha^\gamma$ . Наоборот, если  $N_\alpha^\gamma = 0$ , т. е. если поверхность минимальна, то сверху  $C_{\alpha\beta} = \epsilon_{\alpha\mu} N_\beta^\sigma$  с  $\epsilon^{\alpha\beta}$ , получим 0, это означает, что  $C_{\alpha\beta}$  симметричен. Отсюда следствие (и из (13) и (14)) получается

**Теорема 8.** Минимальные и только минимальные поверхности делят сеть  $(v, w)$ , у которой Чебышевские кручения линий сети  $\lambda$  совпадают.

Если, в случае  $X_2 \subset A_3$  в формулах (13) и (14) абсолютное дифференцирование в связности 1-го рода заменить абсолютным дифференцированием в связности 2-го рода  $\Gamma_{\alpha\beta}^{*\gamma}$ , то получим

$$p = \lambda v + \epsilon_{\alpha\mu} v^\sigma \overset{*}{D} v^\mu n + 2S_{\alpha\mu\nu} v^\sigma w^\mu n,$$

$$q = \lambda w + \epsilon_{\alpha\mu} w^\sigma \overset{*}{D} w^\mu n + 2S_{\alpha\mu\nu} w^\sigma v^\mu n.$$

$$\text{Если } \overset{*}{\tau} \equiv \epsilon_{\alpha\mu} v^\sigma \overset{*}{D} v^\mu; \quad \overset{*}{\tau} \equiv \epsilon_{\alpha\mu} w^\sigma \overset{*}{D} w^\mu$$

назвать Чебышевскими кривизнами сети 2-го рода, то, очевидно,

$$\overset{*}{\tau} = \overset{*}{\tau} + 2S_{\alpha\mu\nu} v^\sigma w^\mu,$$

$$\overset{*}{\tau} = \overset{*}{\tau} + 2S_{\alpha\mu\nu} w^\sigma v^\mu.$$

Назовем тензор

$$a_\sigma \equiv S_{\alpha\mu} v^\sigma w^\mu = S_{\alpha\mu} w^\sigma v^\mu$$

асимптотическим тензором сети: для поверхностей общего типа (под этим будем понимать поверхности, для которых ранг матрицы  $\|a_{\alpha\beta}\|$ , где

имеет смысл, а сочетание  $\beta\sigma$  — номер столбца, равен 2)  $a_\sigma = 0$  тогда и только тогда, когда сеть асимптотическая. Это вытекает из того, что, как известно, (см. [1, стр. 164]), тензор Сегре и асимптотический тензор поверхности одинаковы.

Помним теперь, что выражения

$$S_{\alpha\beta\mu}v^\alpha v^\sigma w^\mu = a_\sigma v^\sigma; S_{\alpha\beta\mu}w^\sigma v^\alpha v^\mu = a_\sigma w^\sigma$$

могут обращаться в 0 тогда и только тогда, когда  $a_\sigma = 0$ , когда сеть асимптотическая. Отсюда и из (24) тогда получается следующее

**Теорема 9.** Если для сети на  $X_2 \subset A_3$  общего типа выполнены два из

- 1) сеть является Чебышевской сетью 1-го рода;
- 2) сеть является Чебышевской сетью 2-го рода;
- 3) сеть асимптотическая, то выполнены и все три.

Эта теорема является дополнением к теореме П. А. Широкова о том, что асимптотическая сеть на  $X_2 \subset A_3$  одновременно является Чебышевской и в связности 1-го, и в связности 2-го рода. Теорема 9 асимптотическая сеть — единственная сеть, обладающая этими свойствами.

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1. П. А. Широков, А. П. Широков. Аффинная дифференциональная геометрия. М., 1959.
- 2. А. П. Норден. Пространства аффинной связности. ГТТИ, М—Л., 1950.
- 3. В. В. Шуликовский. Классическая дифференциальная геометрия. Физматлит, 1954.

Поступила 30 мая 1968 г.

**О СТРУКТУРЕ ЧЕТЫРЕХМЕРНЫХ РИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВ,  
ДОПУСКАЮЩИХ ТРЕХПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ СЕМЕЙСТВО ДВУМЕРНЫХ  
ВПОЛНЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ**

Л. И. Калыняк, Ю. С. Слободян (Харьков)

В работе [4] выяснена структура полных четырехмерных римановых пространств с аналитической метрикой, допускающих четырех- и пятипараметрические семейства двумерных вполне геодезических поверхностей [1].

В настоящей работе рассматривается структура полных четырехмерных римановых пространств с аналитической метрикой, допускающих только трехпараметрическое семейство двумерных вполне геодезических поверхностей. Доказано, что если пространство допускает только трехпараметрическое семейство двумерных вполне геодезических поверхностей, то либо оно допускает конечное число трехмерных вполне геодезических поверхностей постоянной кривизны, либо однопараметрическое семейство трехмерных вполне геодезических поверхностей, каждая из которых допускает двухпараметрическое семейство двумерных вполне геодезических поверхностей.

Известно, что если двумерная поверхность  $F_2$ , проходящая через точку  $M$  четырехмерного риманова пространства вполне геодезическая, то в пространстве бивекторов  $E_6$ , касательном к риманову в точке  $M$ , существует конечное число поверхностей второго порядка  $\Phi$  и бивектор, определяющий касательную площадку к поверхности  $F_2$ , есть главное направление одной из поверхностей  $\Phi$ . Поверхность  $\Phi$  названа индикатрисой двумерных вполне геодезических поверхностей риманового пространства.

Пространство бивекторов  $E_6$  определяется следующим конусом [3]: в пространстве кососимметрических тензоров, касательных в точке  $M$

$$p^{12}p^{34} - p^{13}p^{24} + p^{14}p^{23} = 0 \quad (1)$$

**Лемма.** Если в точке  $M$  четырехмерного риманова пространства  $V_4$  индикатриса допускает только однопараметрическое семейство гладких направлений, то однопараметрическое семейство двумерных вполне геодезических поверхностей проходит через фиксированное направление ортогонально фиксированному направлению.

**Доказательство.** Пусть двумерная плоскость  $E_2$  в пространстве  $E_6$  полностью лежит на конусе [1]. Это значит, что уравнение (1) должно выполняться тождественно относительно переменных  $p_{ij}$ . Перебирая все возможные способы задания плоскости  $E_2$ , мы убеждаемся, что плоскости четырехмерного пространства, отвечающие бивекторам на  $E_2$ , проходят через фиксированное (не зависящее от  $p^{ij}$ ) направление и ортогональны фиксированному (не зависящему от  $p^{ij}$ ) направлению. Это и доказывает лемму.

**Теорема.** Если четырехмерное риманово пространство с аналитической метрикой допускает трехпараметрическое семейство двумерных вполне

помимо поверхностей, причем индикатриса хотя бы в одной точке  $V_4$

только однопараметрическое семейство главных направлений, то

либо четырехмерное риманово пространство допускает конечное

четырехмерных вполне геодезических поверхностей постоянной кривизны;

либо оно допускает однопараметрическое семейство трехмерных

геодезических поверхностей, и каждая такая поверхность допускает

однопараметрическое семейство двумерных вполне геодезических поверхностей;

либо оно допускает семейство двумерных вполне геодезических по-

верхностей, зависящее от большего числа параметров.

**Доказательство.** Пусть в точке индикатриса допускает только однопараметрическое семейство главных направлений. В силу аналитичности пространства индикатриса будет допускать только однопараметрическое семейство главных направлений и в каждой точке пространства может, быть множества  $V$  (поверхностей), которое не имеет

общей точки.

Так как через каждую точку проходит однопараметрическое семейство трехмерных вполне геодезических поверхностей, и по лемме оно образует трехмерную поверхность, то таких трехмерных поверхностей в четырехмерном римановом пространстве может быть не более трехпараметрического семейства. Пусть через точку  $P$  проходит трехмерная поверхность  $F_{3P}$ . На поверхности  $F_{3P}$  возьмем точку  $M$ . Через эту точку проходит трехмерная поверхность  $F_{3M}$  с осью  $\delta_M$ .

Возможны следующие случаи:

1) поверхность  $F_{3P}$  совпадает с  $F_{3M}$ ;

2) поверхность  $F_{3P}$  не совпадает с  $F_{3M}$ .

Рассмотрим случай 1).

Чтобы для каждой точки  $M$  на  $F_{3P}$  поверхности  $F_{3M}$  совпадают с поверхностью  $F_{3P}$ . Тогда на  $F_{3P}$  лежит трехпараметрическое семейство двумерных вполне геодезических поверхностей, и она сама будет вполне геодезической постоянной кривизны.

Рассмотрим случай 2).

Чтобы на  $F_{3P}$  найдется точка  $M$  такая, что  $F_{3M}$  не совпадает с  $F_{3P}$ .

Возможны следующие случаи:

а) в  $V_4$  имеется однопараметрическое семейство  $F_{3M}$ ;

б) в  $V_4$  имеется двупараметрическое семейство  $F_{3M}$ ;

в) в  $V_4$  имеется трехпараметрическое семейство  $F_{3M}$ .

Рассмотрим случай а).

В пространстве находится однопараметрическое семейство  $F_{3M}$ . На поверхности  $F_{3M}$  лежит двупараметрическое семейство двумерных вполне геодезических поверхностей. Как показано в работе [5], двумерные поверхности на  $F_{3M}$  расположены пучками, и через каждую точку  $F_{3M}$  проходит ось пучка. Поэтому вполне они геодезические. Расположение трехмерных вполне геодезических поверхностей рассмотрено в работе [4].

Рассмотрим случай б).

В пространстве находится двупараметрическое семейство трехмерных поверхностей  $F_{3M}$ . Возьмем точку  $P$  такую, в которой индикатриса допускает только однопараметрическое семейство главных направлений, и через которую проходит однопараметрическое семейство  $\{F_{3M}\}$ . Построим это семейство. Так как из каждой поверхности семейства  $\{F_{3M}\}$  через точку  $P$  проходит двумерная вполне геодезическая поверхность, то через  $P$  проходит однопараметрическое семейство двумерных вполне геодезических поверхностей.

Но по лемме они образуют только одну трехмерную поверхность.

Проведя это построение, получим, что через точку  $P$  проходит двупараметрическое семейство двумерных вполне геодезических поверхностей.

Таким образом в этом пространстве их имеется четырехпараметрическое семейство.

ство. Вопрос о структуре такого пространства уже исследовался в работе [4].

Аналогичные рассуждения проводим в случае, когда трехмерных поверхностей  $F_{3m}$  трехпараметрическое семейство. Этим и заканчивается доказательство теоремы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Э. Картан. Геометрия римановых пространств. М., 1936.
2. Э. Гурса. Курс математического анализа т. 2. М., 1933.
3. П. А. Широков. Тензорное исчисление. Изд-во Казанск. ун-та 1961.
4. Ю. С. Слободян. О четырехмерных римановых пространствах, допускающих семейства двумерных вполне геодезических поверхностей. «Укр. геометр. сб.», вып. 2. Изд-во ХГУ, Харьков, 1966, 90—97.
5. Ю. С. Слободян. О трехмерных римановых пространствах, допускающих однопараметрическое семейство вполне геодезических поверхностей. «Укр. геометр. сб.», вып. 3. Изд-во ХГУ, Харьков, 1965, 96—111.

*Поступила 8 июня 1968 г.*

---

## ПАРА КВАЗИСПЕЦИАЛЬНЫХ КОМПЛЕКСОВ ВТОРОГО РОДА

*Н. И. Кованцов, Е. Н. Ищенко* (Киев)

Назовем квазиспециальным комплексом второго рода комплекс прямых точечном проективном пространстве  $P_3$ , который двумя способами распадается на два двупараметрических семейства плоских пучков (обозначим этот комплекс  $K_1$ ).

Известно [1, 2], что центр плоского пучка, принадлежащего комплексу, есть однодimensionalный центр всех лучей этого пучка. Следовательно, у каждого квазиспециального комплекса второго рода совокупность положений однодimensionalных центров выражается в две поверхности (обозначим  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ ). Каждый луч комплекса  $K_1$  пересекает поверхности  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  в двух однодimensionalных центрах (обозначим их через  $M_1$  и  $M_2$ ). Касательные плоскости к поверхностям  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  в точках  $M_1$  и  $M_2$  пересекаются по общую прямой  $l_2$ . Прямая  $l_2$  в свою очередь описывает некоторый комплекс (обозначим  $K_2$ ). В общем случае комплекс  $K_2$  не является квазиспециальным. Мы ограничимся рассмотрением лишь того случая, когда комплекс  $K_2$  также является квазиспециальным второго рода. Более того, мы можем на следующее обстоятельство.

Плоскости, соответствующие точкам  $M_1$  и  $M_2$  в нормальной корреляции между  $K_1$  и комплексом  $K_2$ , пересекают луч  $l_2$  соответственно в точках  $N_1$  и  $N_2$ . Для того чтобы точки  $N_1$  и  $N_2$  представляли собой вершины плоского пучка, за которые распадается комплекс  $K_2$ , а касательными плоскостями к поверхностям, которые описываются этими точками, были бы плоскости  $N_1M_1M_2$  и  $N_2M_1M_2$ . В таком случае мы получаем конфигурацию симметричную по отношению к комплексам  $K_1$  и  $K_2$ . Такую конфигурацию и назовем парой квазиспециальных комплексов второго рода.

Целью настоящей заметки является доказательство следующей теоремы.

**Теорема.\*** *Пара квазиспециальных комплексов второго рода представляет собой один и тот же комплекс проективного вращения, в котором  $M_1$  и  $M_2$  занимают два различных положения.*

Следовательно, совместим с точками  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $N_1$  и  $N_2$  соответственно координатного репера  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  и  $A_4$ . Поскольку плоскости  $A_1A_2A_3$  и  $A_2A_3A_4$  соответствуют точкам  $A_1$  и  $A_2$  в нормальной корреляции между  $A_3$  и  $A_4$ , то главные формы  $\omega_1^3$  и  $\omega_2^4$  инфинитезимального смещения по линии центра комплекса  $K_1$  будут пропорциональны друг другу.

При помощи координат вершин можно добиться того, чтобы между ними имел место соотношение

$$\omega_1^3 + \omega_2^4 = 0. \quad (1)$$

Продолжение этого соотношения имеет вид

$$\begin{aligned}\omega_1^2 - \omega_3^4 &= p\omega_2^3 + \alpha\omega_1^4 + \beta\omega_2^4, \\ \omega_2^1 - \omega_4^3 &= \alpha\omega_2^3 + q\omega_1^4 - \gamma\omega_2^4, \\ \omega_2^2 + \omega_3^3 - \omega_1^1 - \omega_4^4 &= \beta\omega_2^3 - \gamma\omega_1^4 + r\omega_2^4.\end{aligned}\quad (2)$$

Инфлексионные центры  $I = A_1 + tA_2$  луча  $l_1$  определяются уравнением  $qt^4 + 2\gamma t^3 - (2\alpha - r)t^2 + 2\beta t + p = 0$ .

Поскольку сейчас точки  $A_1$  и  $A_2$  являются инфлексионными центрами, то  $p = q = 0$ . Далее, так как точки  $A_1$  и  $A_2$  описывают поверхности, касательные к плоскостям  $A_1A_3A_4$  и  $A_2A_3A_4$ , то

$$\omega_1^2 = 0, \quad \omega_2^1 = 0.$$

Следовательно, комплекс  $K_1$  будет определяться следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}\omega_1^3 + \omega_2^4 &= 0, \\ \omega_1^2 &= 0, \quad \omega_2^1 = 0, \\ -\omega_3^4 &= \alpha\omega_1^4 + \beta\omega_2^4, \\ -\omega_4^3 &= \alpha\omega_2^3 - \gamma\omega_2^4, \\ \omega_2^2 + \omega_3^3 - \omega_1^1 - \omega_4^4 &= \beta\omega_2^3 - \gamma\omega_1^4 + r\omega_2^4.\end{aligned}\quad (3)$$

Поскольку точки  $A_3$  и  $A_4$  описывают сейчас поверхности, касательные к плоскостям  $A_3A_1A_2$  и  $A_4A_1A_2$ , то будут иметь место равенства

$$\omega_3^4 = 0, \quad \omega_4^3 = 0.$$

Продолжая четверку равенств  $\omega_1^2 = 0, \omega_2^1 = 0, \omega_3^4 = 0, \omega_4^3 = 0$ , получим

$$\begin{aligned}\omega_3^2 &= \alpha\omega_1^3 + b\omega_1^4, \\ \omega_4^2 &= b\omega_1^3, \\ \omega_3^1 &= b\omega_2^4, \\ \omega_4^1 &= b\omega_2^3 + c\omega_2^4.\end{aligned}\quad (4)$$

В таком случае, как легко видеть, будет иметь место равенство

$$\omega_3^2 + \omega_4^1 = 0. \quad (5)$$

Главными формами комплекса  $K_2$  являются формы  $\omega_3^1, \omega_3^2, \omega_4^1, \omega_4^2$ . Из (3) получаем  $\alpha = \beta = \gamma = 0$  (учли равенства  $\omega_3^4 = 0, \omega_4^3 = 0$ ).

Легко понять, что в этом случае внешний дифференциал формы, стоящей в левой части уравнения (5), тождественно исчезает.

Таким образом, рассматриваемая пара квазиспециальных комплексов второго рода характеризуется следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}\omega_1^3 + \omega_2^4 &= 0, \\ \omega_1^2 &= 0, \quad \omega_2^1 = 0, \\ \omega_3^4 &= 0, \quad \omega_4^3 = 0, \\ \omega_2^2 + \omega_3^3 - \omega_1^1 - \omega_4^4 &= r\omega_2^4, \\ \omega_3^1 + \omega_4^2 &= 0, \quad \omega_4^1 = b\omega_2^3 + c\omega_2^4, \\ \omega_3^2 &= a\omega_1^3 + b\omega_1^4, \quad \omega_4^2 = b\omega_2^3.\end{aligned}\quad (6)$$

Система является алгебраическим следствием такой замкнутой

$$\begin{aligned} \omega_1^3 + \omega_2^4 &= 0, \\ \omega_1^2 &= 0, \quad \omega_2^1 = 0, \\ \omega_3^4 &= 0, \quad \omega_4^3 = 0, \quad \omega_3^1 + \omega_4^2 = 0, \\ [\omega_2^3 + \omega_3^3 - \omega_1^1 - \omega_4^4, \omega_2^4] &= 0, \\ [\omega_1^3 \omega_3^2] + [\omega_1^4 \omega_4^2] &= 0, \\ [\omega_2^3 \omega_3^1] + [\omega_2^4 \omega_4^1] &= 0, \\ [\omega_2^2 + \omega_3^3 - \omega_1^1 - \omega_4^4, \omega_4^2] &= 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Система (6) и (7) показывает, что комплексы существуют четыре функции одного аргумента [3]. Вместе с тем, система определяющая комплекс проективного вращения, а это доказывает теорему.

Таким образом мы доказали следующие две теоремы.

**Теорема 1.** Пусть  $K_1$  и  $K_2$  — два квазиспециальных комплекса второго порядка из которых представляет совокупность линий пересечения плоскостей к поверхности, описываемым их инфлексионными центрами. В таком случае две грани тетраэдра (образованного каждыми четырьмя инфлексионными центрами) соответствуют в нормальной форме паре инфлексионных центров одного комплекса, а две другие соответствуют в нормальной корреляции инфлексионным центрами другого комплекса.

**Теорема 2.** Если координаты вершин сопровождающего репера пары комплексов другого комплекса необходимо должны быть связаны

$$\omega_1^3 + \omega_2^4 = 0,$$

$$\omega_3^1 + \omega_4^2 = 0.$$

#### ЛИТЕРАТУРА

- Ш. Е. Гозанцов. Теория комплексов. Изд-во КГУ, К., 1963.  
 Ш. Е. Гозанцов. Квазиспециальные комплексы. Матем. сб., т. 41 (83), № 3, 1957.  
 Ш. Е. Гозанцов. Метод внешних форм Картана. Гостехиздат, М.—Л., 1948.

Поступила 8 июня 1968 г.

## МНОГОМЕРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА С МНОГОГРАННОЙ МЕТРИКОЙ НЕОТРИЦАТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ. II

*A. D. Милка* (Харьков)

### МЕТРИКА С НЕОТРИЦАТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНОЙ

В этой части работы определяются многогранные  $h$ -метрики с неотрицательной кривизной и устанавливаются их основные свойства: неналегающие кратчайших, теорема об условии выпуклости, теорема об однородности окрестности кратчайшей и др. Вводятся квазигеодезические линии, для которых доказываются соответствующие теоремы существования и сходимости. Полученные результаты согласуются с известными положениями для двумерных метрик [1].

В дальнейшем существенно используется терминология и основные факты (в особенности о касательном конусе и присоединенной  $h$ -развертке), приведенные в первой части [2].

#### § 1. Определения

Пусть  $R$  —  $n$ -мерная  $h$ -развертка. Будем говорить, что кривизна  $R$  неотрицательна, если для каждой  $(n-2)$ -мерной грани  $h$ -развертки сумма величин примыкающих к ней двугранных углов  $n$ -мерных граней не превосходит  $2\pi$ . Многогранная  $h$ -метрика, по определению, имеет неотрицательную кривизну, если в любой ее точке соответствующий  $h$ -конус, окрестность вершины которого изометрична некоторой окрестности точки, является  $h$ -разверткой с неотрицательной кривизной. Указанное свойство  $h$ -метрики, очевидно, не зависит от способа ее представления с помощью многогранников; кривизна  $h$ -развертки, присоединенной в любой ее точке, неотрицательна. Выпуклая многогранная поверхность в данном определении имеет неотрицательную кривизну.

Двумерные многогранные метрики с неотрицательной кривизной введены А. Д. Александровым в монографиях [1] и [3]. В работе [3] по существу содержится соответствующее определение и для трехмерных разверток, которые мы распространili многомерный случай.

Будем говорить, что многогранная  $h_2$ -метрика  $M$  удовлетворяет условию выпуклости, если в  $M$  выполняется следующее предложение. Пусть  $O$  — произвольная точка в  $M$ ,  $L$  и  $N$  — кратчайшие, исходящие из этой точки,  $OXY$  — треугольник, где  $X \in L$ ,  $Y \in N$ , а  $O'X'Y'$  — треугольник двумерной плоскости в  $\Omega$  с теми же сторонами. Тогда угол в треугольнике  $O'X'Y'$  против стороны, соответствующей  $XY$ , есть невозрастающая функция расстояний  $X, Y$  от точки  $O$ . При этом в случае, если  $\Omega$  — евклидovская  $r$ -сфера, рассматриваются только те треугольники, периметры которых меньше  $2r\pi$ .

Пусть  $M$  — пространство с многогранной  $h_2$ -метрикой,  $G'$  — замкнутая выпуклая область в двумерной плоскости в  $\Omega$ ,  $G$  — изометрический обра-

т. е. отображение, сохраняющее длины кривых. Назовем  $G$  геодезическим вложением  $G'$  в  $M$ , если существует такое положительное  $\delta$ , что любая кратчайшая с длиной, не большей  $\delta$ , расположенной в этой области, является также кратчайшей в пространстве  $M$ . При условии, что  $\delta$  равно диаметру области  $G'$ , указанное вложение будем называть геодезическим. Геодезические вложения в  $M$  семейства областей в  $\Omega$ , имеющих в двумерной плоскости, которые характеризуются одним числом  $\delta$ , будем называть равностепенно геодезическими.

Пусть, что  $\Omega$  — евклидовская сфера,  $\Lambda'$  — плоский выпуклый заштрихованный четырехугольник в  $\Omega$ , в частности — полуплоскость, а  $\Delta$  — его изометрический образ в  $M$ . Пусть существует такое число  $\varepsilon$ , что каждый двухугольник в  $\Omega$ , являющийся частью  $\Lambda'$  с теми же вершинами, угол которого не превосходит  $\varepsilon$ , геодезически переводится в  $M$  отображением  $\Delta' \rightarrow \Delta$ . Если указанное отображение переводит в пространство  $M$  все возможные четырехугольники равностепенно геодезически, то будем говорить, что  $\Delta$  является равномерно геодезическим отображением (вложенiem в  $M$ ).

Нам придется рассматривать вложения так называемых полосок. Зададим выпуклую фигуру, расположенную в двумерной плоскости в  $\Omega$ , называть полоской, если граница этой фигуры состоит в общем виде из кратчайшей (основания полоски), двух прямолинейных отрезков, симметричных относительно вертикальной оси, идущей в точках, концах основания, двух участков окружностей в тех же точках и кратчайшей, ортогональной прямой, проведенной перпендикулярно к основанию через его середину. Углы между отрезками и исходящими из его концов граничными прямолинейными отрезками будем называть углами полоски, а величину отрезка ранее указанной прямой, ортогональной основанию, заключенного в полоске, — ее шириной.

Геодезическую ломаную в многогранной  $h$ -метрике назовем квазигеодезической, если в каждой внутренней ее вершине любое исходящее направление в пространстве образует с примыкающими звеньями ломаной фигуры, которые в сумме не превосходят  $\pi$ . Данное определение для двух звеньев согласуется с известным определением А. Д. Александрова [1]. Пусть  $C$  — квазигеодезическая,  $A$  — внутренняя вершина  $C$ ,  ${}^AS$  — производящая  $h$ -метрика, о которой мы предположим, что внутренний угол не превышает  $\pi$ . И пусть  $X, Y$  — проекции на  ${}^AS$  звеньев  $C$ , примыкающих к  $A$ . Ломаная  $C$ , очевидно, будет квазигеодезической (в вершине  $A$ ) в том и только том случае, если для произвольной точки  $Z \in {}^AS$  сумма расстояний  $ZX$  и  $ZY$ , измеренных в метрике присоединенной  $h$ -развертке, не превосходит  $\pi$ . В связи с этим введем еще следующее определение.

Пусть  $M$  —  $h$ -развертка, составленная из многогранников единичной площади,  $X$  — фиксированная точка в  $M$ . Точку  $Y \in M$  будем называть полюсом по отношению к  $X$ , если для каждой точки  $Z$ , принадлежащей  $M$ , сумма расстояний  $ZX$  и  $ZY$  не больше  $\pi$ ;  $X$  и  $Y$ , очевидно, — взаимные полюсы. Может оказаться, что  $Y \equiv X$ , но это не исключает наличия для  $X$  других полюсов в  $M$ . Нетрудно обнаружить существование зависимости между вопросом о построении квазигеодезической, точнее — ее продолжения, в задачей об отыскании полюса для данной точки. Только что отмеченный случай  $Y \equiv X$  соответствует тому, что квазигеодезическая будет иметь точку возврата. Если в присоединенной  $h$ -развертке  ${}^AS$  задать пару точек  $X$  и  $Y$  и избрать прямолинейные отрезки в основной плоскости  $A$ , проектирующиеся в эти точки, то такие отрезки в пространстве двухзвенную квазигеодезическую ломаную.

ПОСЛЕДНЕЕ ИЗЛОЖЕНИЕ ОДНОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Топологический полиедр размерности  $n$  называется гомологической сферой, если он является  $h$ -многообразием, имеющим те же группы гомологий, что и  $n$ -мерная сфера евклидова пространства.

## § 2. Свойства метрики

Пусть  $M$  — пространство с многогранной  $h_2$ -метрикой неотрицательной кривизны. Внутренняя метрика такого пространства характеризуется следующими теоремами.

**Теорема 1.** Угловая метрика пространства в точке совпадает с метрикой присоединенной  $h$ -развертки. Сумма углов между парами из трехкратчайших, исходящих из общей точки, не превосходит  $\pi$ . В пространстве  $M$  выполняется условие неналегания кратчайших.

**Теорема 2.** Каждая кратчайшая в  $M$  служит основанием пучка полосок с равными высотами, углы которых в совокупности отделены от нуля, разностепенно геодезически вложенных в пространство и не имеющих в нем общих внутренних точек. Причем любая кратчайшая, исходящая из точки на основании, имеет начальный участок, принадлежащий одной из полосок.

Пусть  $L$  — кратчайшая,  $\{\tau\}$  — соответствующий пучок полосок,  $Y$  и  $Z$  — точки на  $L$ ,  $N$  — кратчайшая с началом в точке  $Y$ , принадлежащая полоске  $\tau$ . Предположим, что существует последовательность кратчайших  $ZY_n$ , где  $Y_n \in N$ , сходящихся к отрезку  $ZY$  на  $L$ . Тогда для всех точек на  $N$ , достаточно близких к  $Y$ , линии  $ZX$ , кратчайшие в полоске  $\tau$ , являются также кратчайшими в пространстве.

**Замечание.** Для  $h$ -разверток, составленных из многогранников евклидовой  $r$ -сферы условия последней теоремы уточняются: речь должна идти только лишь о кратчайших, длины которых меньше  $r\pi$ .

**Теорема 3.** Метрика пространства  $M$  удовлетворяет условию выпуклости.

**Следствие.** Углы любого треугольника в  $M$  не меньше соответствующих углов плоского треугольника в  $\Omega$  с теми же сторонами. (В развертках, составленных из многогранников  $r$ -сферы, рассматриваются лишь треугольники, имеющие периметр, меньший  $2r\pi$ ). Для сходимости углов в  $M$  имеет место полуунпрерывность снизу.

**Теорема 4.** Диаметр  $h$ -развертки  $M$ , составленной из многогранников единичной сферы, не превосходит  $\pi$ , периметр любого треугольника в  $M$  не больше  $2\pi$ . Если в пространстве  $M$  имеется кратчайшая длины  $\pi$ , то в нем существует пучок кратчайших с теми же концами, покрывающих все пространство. Каждый треугольник в  $M$  с периметром  $2\pi$  сводится к двугольнику, либо представляет замкнутую геодезическую, кратчайшую на любом участке, длина которого равна  $\pi$ .

В следующей теореме содержатся утверждения, характеризующие симметричность кратчайшей в  $M$  и взаимное положение соответствующих полосок. Первая часть теоремы показывает, что можно говорить об угле между полосками, именно под ним понимается угол в пространстве между направлениями в этих полосках, исходящими из общей точки перпендикулярно к основанию.

**Теорема 5.** Внутренние точки кратчайшей в  $M$  имеют изометрические окрестности. Присоединенные в них  $h$ -развертки изометричны, их изометрия осуществляется параллельным перенесением направлений в соответствующих полосках.

Пусть  $L$  — кратчайшая, расположенная строго внутри другой кратчайшей в  $M$ ,  $\{\tau\}$  — отвечающий  $L$  пучок полосок, о которых говорило

теорема 2 с достаточно малыми высотами. Пусть  $\tau_x$  и  $\tau_y$  — произвольно выбранные полоски из  $\{\tau\}$ , а  $\alpha$  — угол между ними,  $\tau'_x$  и  $\tau'_y$  — соответственно параллельные им полоски в  $\Omega$ , составляющие двугранный угол также величине  $\alpha$  с ребром  $L'$ , образом  $L$  по изометрии  $\tau \rightarrow \tau'$ . Тогда для каждого из отрезков  $X \in \tau_x$ ,  $Y \in \tau_y$  и соответствующих им точек  $X' \in \tau'_x$ ,  $Y' \in \tau'_y$  длины в  $\Omega$  и  $M$  равны:  $X'Y' = XY$ .

Следствительно приведенных теорем мы ограничимся лишь необходимыми замечаниями, которые позволят в случае необходимости восстановить соответствующие доказательства. Для многограных выпуклых поверхностей эти теоремы в основном известны. Теоремы 3,5 для многомерных многогранников доказывались в работе [4]. В более общем случае, рассмотренном в [5], приводилась и теорема 4 (см. также [6]).

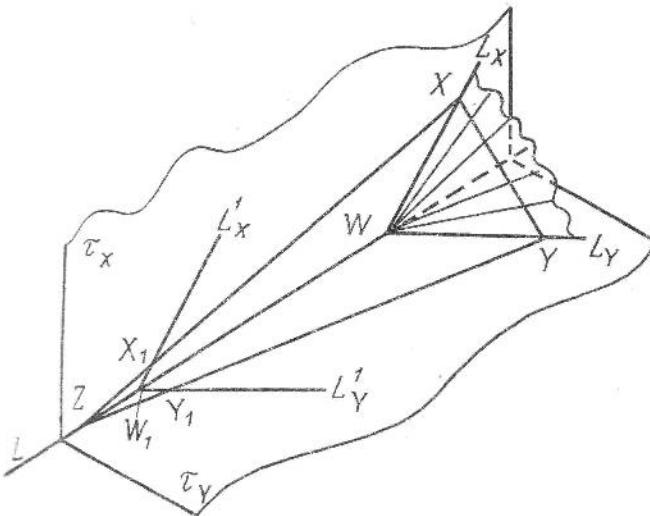


Рис. 1

В теоремах 1—4 при доказательстве используется индукция по различности рассматриваемых пространств. Учитывая свойства касательного края в присоединенной  $h$ -развертке, можно заметить, что первая теорема вытекает из теоремы 4 для пространств меньшей размерности. Теорема 2 вытекает из теоремы 1, а теорема 3 об условии выпуклости следует из теоремы 2 и доказывается дословно методом, предложенным А. Д. Александровым в исследовании двумерных разверток с неотрицательной кривизной [1]. Наконец, четвертая теорема вытекает из теоремы 3 и ее аналогии об углах треугольника.

Для доказательства теоремы 5, точнее, первой ее части, удобнее пользоваться на предлагаемых рисунках (см. рис. 1, 2).

Первый из этих рисунков относится к пространству  $M$ . Здесь  $L$  и другие изображенные линии — кратчайшие в пространстве,  $\tau_x$  и  $\tau_y$  — полоски над  $L$ , а  $W$  и  $Y_1$  — внутренние ее точки. Принадлежность кратчайших полоскам и точек — этим кратчайшим, наглядно показана на рис. 1. Кратчайшие  $L'_x$  и  $L'_y$  получаются из  $L_x$  и  $L_y$  параллельным перенесением последних в соответствующих полосках  $\tau_x$  и  $\tau_y$ . Фигура, покрытая штриховкой, представляет часть конуса в  $M$ , проектирующего из точки  $W$  кратчайшую  $XY$ , причем считается, что точки  $X$ ,  $Y$  близки к  $W$ . Треугольник  $WXY$  в этой фигуре, ограниченный кратчайшими  $WX$ ,  $WY$  и  $XY$ , изометричен соответствующему треугольнику в  $\Omega$ , вполне геодезически вложенному в  $M$ . Заметим,

что принадлежность кратчайших  $ZX, ZY$  соответствующим полоскам  $\tau_X, \tau_Y$  обосновывается теоремой 2.

Трехгранный угол  $W'X'Y'Z'$  (см. рис. 2) с вершиной  $W'$  расположенный в пространстве  $\Omega$ . Его составляют треугольники, изометричные треугольникам в  $M$ , изображенным на рис. 1. Соответствующие по изометрии элементы этих треугольников имеют в  $\Omega$  и  $M$  сходственные обозначения. Указанный трехгранный угол заведомо существует, поскольку в пространстве для углов между кривыми выполняется неравенство треугольника, а сумма углов между парами из трех кратчайших, исходящих из одной точки, по теореме 1 не превосходит  $2\pi$ .

Обозначим теперь  $\alpha$  и  $\alpha_1$  углы между кратчайшими  $L_X, L_Y$  и  $L_X^1, L_Y^1$  соответственно. Имеем равенства  $\angle X_1'W_1Y_1 = \angle X'W'Y' = \alpha$ . Применив к кратчайшим  $ZX$  и  $ZY$  теорему 3 об условии выпуклости, получим  $X_1Y_1 > X_1'Y_1$ , где  $X_1'Y_1$  — расстояние между соответствующими точками в  $M$ . Для треугольников  $X_1W_1Y_1$  и  $X_1'W_1Y_1$  это неравенство означает, что угол первого из них при вершине  $W_1$  не меньше соответствующего угла второго треугольника, поскольку точки  $X_1, Y_1$  достаточно близки к  $W_1$ . Таким образом,  $\alpha_1 > \alpha$ . Тем же способом можно получить противоположное равенство, выбрав точку  $Z$  на  $L$  по другую сторону от пары  $W_1, W$ . Поэтому углы между кратчайшими  $L_X, L_Y$  и  $L_X^1, L_Y^1$  совпадают.

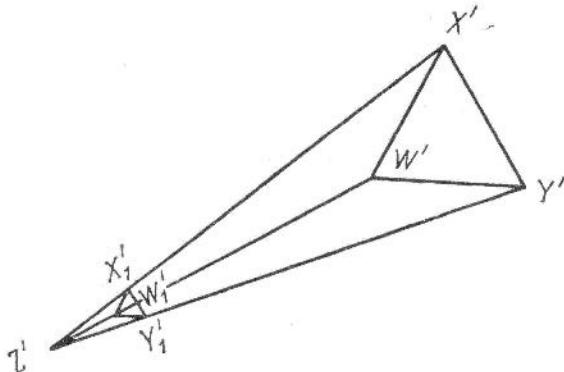


Рис. 2

Нам остается отметить, что в полном доказательстве исходными являются кратчайшая  $L$  и внутренние ее точки  $W_1, W$ . Кратчайшие  $L_X, L_Y$  указываются произвольно, по ним определяются полоски  $\tau_X, \tau_Y$  (теорема 2) и соответствующие кратчайшие  $L_X^1$  и  $L_Y^1$ . Затем уже фиксируется точка  $Z$ , выбираются точки  $X, Y$  и проводятся другие вспомогательные построения. Очевидно, соответствие между кратчайшими в  $M$ , данные в теореме, исходящими из точек  $W_1, W$ , взаимно однозначно.

При выводе второй части теоремы также применяется описанная конструкция.

В следующем параграфе изложенные результаты будут использованы при изучении квазигеодезических линий в многогранных  $h$ -метриках с отрицательной кривизной.

*Замечание к теореме 5.* Теорема об окрестности кратчайшей нахождения применения не только в исследовании внутренней геометрии рассматриваемых нами пространств. С ее помощью, например, может быть доказана такая важная теорема топологического содержания, аналогичная соответствующим утверждениям для римановых метрик (см. [7]).

**Лемма 4.** *Пусть  $M$  —  $h$ -развертка с неотрицательной кривизной, составленная из сферического пространства. Предположим сначала, что эта пространство одномерна. Тогда, если  $M$  ориентируема, она односвязна (аналогично Синга); неориентируемая  $h$ -развертка имеет фундаментальную изоморфную группу вычетов целых чисел по мод 2; Нечетномерная  $h$ -развертка  $M$  ориентируема.*

### § 3. Квазигеодезические

Было известно, обобщением геодезических линий для двумерных нерегулярных многогранников являются так называемые квазигеодезические. В этом параграфе будет установлено, что квазигеодезические (во введенном ранее смысле) существуют и в изучаемых нами пространствах, причем окажется, что класс этих линий, как и для двух измерений, замкнут относительно предельных переходов.

Рассмотрим некоторое пространство  $M$  с многогранной  $h$ -метрикой неотрицательной кривизны. Нам понадобятся следующие вспомогательные леммы о квазигеодезических в этом пространстве.

**Лемма 1.** *Пусть  $C$  — квазигеодезическая в  $M$ , расположенная в достаточно малой окрестности некоторой точки  $X$ ,  $x_C$  — проекция  $C$  на прилегающую  $h$ -развертку  $xS$  в этой точке. Тогда  $x_C$  — квазигеодезическая в  $xS$ , причем угловые точки  $x_C$  и  $C$  соответствуют друг другу. Обратно, если  $x_C$  — квазигеодезическая в  $xS$ , а  $C$  — геодезическая ломаная, расположенная в малой окрестности точки  $X$ , проектирующаяся в  $x_C$  из этой же точки  $X$ . Тогда  $C$  — квазигеодезическая ломаная в пространстве.*

**Лемма 2.** *Пусть  $\{C\}$  — квазигеодезические ломаные, расположенные в некоторой области пространства  $M$ , длины которых ограничены в соответствии с теоремой 1. Тогда среди ломаных из  $\{C\}$  не существует квазигеодезических с наибольшим числом угловых точек.*

**Лемма 3.** *Допустим, что пространство  $M$  составлено из единичной сферы. Пусть  $C$  — квазигеодезическая в  $M$  с длиной  $\pi$  между точками  $X, Y$ . Тогда для каждой точки  $Z \in M$  имеет место неравенство  $|ZX - ZY| < \pi$ , т. е. концы  $C$  — взаимно полярные точки.*

**Лемма 4.** *В каждой пространственной форме кривизны единица, не изоморфной сфере, любые две точки взаимно полярны.*

**Лемма 5.** *Пусть  $R$  —  $h$ -конус, составленной из многогранников сферической формы пространства. Пусть  $O$  и  $\tilde{O}$  — диаметрально противоположные вершины  $h$ -конуса. Предположим, что существует изометрия  $R \leftrightarrow R$  без общих точек, переставляющая эти вершины. Пусть  $M$  — факторпространство, полученное из  $R$  склеиванием точек, эквивалентных в указанной изометрии. Тогда  $M$  не может быть гомологической сферой.*

Из лемм легко выводится с помощью теоремы 5. Лемма 2 следует из леммы 1 и леммы 2 для пространств меньших размерностей, так как соответствующее доказательство может быть проведено по индукции. Лемма 3 доказывается при помощи теоремы 4 и следствия теоремы 3 об элементарном римановом пространстве. Для римановых пространств эта лемма в несколько иной форме была отмечена В. А. Топоноговым (см. [8]). Доказательство леммы основывается на представлении пространственной формы в виде фундаментальных областей (см. [9], [10]). Оно проводится довольно элементарно, если воспользоваться следующим фактом.

Гомотетическим местом точек в единичной евклидовской сфере, сумма расстояний которых до двух фиксированных ее точек не превышает  $\pi$ , является замкнутая полусфера с центром, срединой кратчайшей

на сфере, соединяющей заданные точки. При этом, конечно, считается, что длина отмеченной кратчайшей меньше  $\pi$ .

Лемма 5 доказывается от противного. Допустим, что пространство  $M$  — гомологическая сфера. Тогда оно ориентируемо. Как следствие получаем, что множество точек  $h$ -конуса  $R$ , равноудаленных от  $O$  и  $\tilde{O}$ , переходит при склеивании в неориентируемую  $h$ -развертку, подпространство пространства  $M$  на единицу меньшей размерности (в случае надобности  $M$  подвергается дополнительному разрезанию). Но это противоречит комбинаторному аналогу теоремы Жордана (см. [11, стр. 491]), примененному к пространству  $M$ . Здесь возникают те же обстоятельства, что и при попытке вложения в обычную  $n$ -мерную сферу ( $n - 1$ )-мерного неориентируемого гомологического многообразия. Такое вложение, как известно, невозможно (см. [12]). Полученное противоречие и доказывает лемму.

Приведем теперь теоремы о квазигеодезических в пространстве  $M$ .

**Теорема 6.** *Предел сходящейся последовательности квазигеодезических в пространстве является квазигеодезической, длина которой равна пределу длины исходной последовательности кривых.*

**Теорема 7.** *Из каждой точки в  $M$  в любом направлении можно пройти квазигеодезическую ломаную. Эта ломаная не обязательно единственная и может быть выбрана такой, чтобы она не имела точек возврата. Квазигеодезическая неграниценно продолжается в обе стороны.*

**Теорема 8.** *Если пространство  $M$  составлено из многогранников единичной сферы и является гомологической сферой, то каждая точка в  $M$  имеет полюс. Этих полюсов бесчисленное множество, либо он единственный и отстоит от исходной точки на расстояние  $\pi$ .*

**Замечание.** Последняя теорема устанавливается и без ограничения, что  $M$  — гомологическая сфера. Однако в случае единственности полюса получим, что он может совпадать с исходной точкой. Для наших целей этого недостаточно.

При выводе теорем 6—8 используем индукцию по размерности рассматриваемых пространств. Именно, предположим, что для пространств, размерности меньшей  $n$ , эти теоремы уже установлены и что  $M$  —  $n$ -мерное пространство.

Изложим наиболее существенную часть доказательства теоремы 6 (считая доказанным, что предельная кривая — геодезическая ломаная).

Пусть  $C$  — геодезическая ломаная в  $M$ , предел последовательности квазигеодезических  $\{C_n\}$ , а  $Z$  — внутренняя вершина  $C$ . Докажем, что  $C$  в этой вершине — квазигеодезическая.

Обозначим  $\{\tilde{C}_n\}$  последовательность участков  $C_n$ , сходящихся к малой окрестности точки  $Z$  на ломаной  $C$ . Приимая, что квазигеодезические  $\tilde{C}_n$  не содержат  $Z$ , нетрудно заметить, что длины проекций  $^Z C_n$  этих ломаных на присоединенную  $h$ -развертку  $^Z S$  в этой точке стремятся к  $\pi$ , а концы проекций сходятся к точкам, мы их обозначим  $X$  и  $Y$ , в которые проектируются звенья  $C$ , примыкающие к  $Z$ . Выбрав из ломаных  $^Z \tilde{C}_n$  на  $^Z S$ , являющихся по лемме 1 квазигеодезическими, сходящуюся последовательность и применив к ней теорему 6 (для пространств меньших размерностей), получим, что точки  $X$ ,  $Y$  соединяются на присоединенной  $h$ -развертке  $^Z S$  квазигеодезической ломаной с длиной  $\pi$ . По лемме 3 концы этой квазигеодезической взаимно полярны. Отсюда следует, что ломаная  $C$  в вершине  $Z$  — квазигеодезическая.

Теорема 7 непосредственно выводится из леммы 2 и теоремы 8 для пространств меньших размерностей.

Доказательство теоремы 8. Напомним предположение индукции: теоремы 6—8 верны для пространств, размерности которых меньше  $n$ .

В дальнейшем мы считаем, что  $M$  —  $n$ -мерная  $h$ -развертка, гомологическая сферическая, составленная из многогранников сферического пространства кривизны  $\kappa$ . Заметим, что в рассматриваемом нами пространстве  $M$  теоремы 7 и 8, как уже установлено, выполняются.

Пусть  $O$  — точка в  $M$ , а  $\{C\}$  — всевозможные квазигеодезические с длиной, произведенные из этой точки. Свободные концы квазигеодезических леммы 3 являются для  $O$  полюсами. Если среди таких концов существует бесчисленное множество различных, или если в пространстве  $M$  существует точка, отстоящая от  $O$  на расстоянии  $\pi$  (единственный полюс), то справедливость теоремы 8 тем самым будет доказана. В связи с этим мы исследуем возникающие здесь возможности. Могут представиться три случая: квазигеодезические из  $\{C\}$  имеют угловые точки или таковых нет, так что каждая линия  $C$  является геодезической.

В первом случае выберем из  $\{C\}$  квазигеодезическую  $C$  с наибольшим числом угловых точек. По лемме 2 такая квазигеодезическая существует. Пусть  $X$  — последняя угловая точка  $C$  в направлении от  $O$ ,  $\tilde{C}$  — участок квазигеодезической, заключенный между  $O$  и  $X$ , а  $l$  — оставшееся звено этой линии. Согласно теореме 7 из точки  $X$  в любом заданном направлении можно провести квазигеодезическую, по длине равную  $l$ . Эта линия, очевидно, будет геодезической, если вместе с участком  $\tilde{C}$  она составит квазигеодезическую ломаную, поскольку мы полагаем, что  $C$  имеет наибольшее число угловых точек. Так как  $X$  — угловая точка  $C$ , то продолжение квазигеодезической осуществляется бесконечным числом способов. Нужно найти соответствующие направления из этой точки, а они существуют, что вытекает из теоремы 8 (для меньших размерностей), примененной к присоединенной в  $X$   $h$ -развертке. Будем считать, что из точки  $X$  существует бесчисленное множество различных квазигеодезических с длиной, включющее  $C$ , совпадающих на участке  $\tilde{C}$ . Такие квазигеодезические, очевидно, отличаются только последними звенями. Дополнительно заметить, что среди указанных звеньев существуют сколь угодно близкие к  $l$  в смысле угловой метрики в  $X$  (в противном случае  $l$  подходит образом заменяется). Но в этих предположениях легко заметить, что свободные концы рассматриваемых сейчас квазигеодезических не совпадают. Во всяком случае не совпадают концы тех из квазигеодезических, звенья которых близки к  $l$ , что вытекает из теоремы 2 о порядке, примененной к звену  $l$  ломаной  $C$ . Таким образом точка  $X$  имеет в пространстве  $M$  неограниченное количество полюсов.

Рассмотрим второй случай.

Как уже отмечалось раньше, ломаные из  $\{C\}$  в данном случае являются геодезическими. Учитывая теорему 2 о полоске, теорему 5 об окрестности кратчайшей и теорему 6 о сходимости квазигеодезических, нетрудно заметить, что все эти линии оканчиваются в одной и той же точке, — обозначим ее  $\tilde{O}$  — а пространство  $M$  допускает изометрическое отображение на плоскость, представляющую  $O, \tilde{O}$  и инвариантное на каждой из геодезических  $C$ . Кроме того, оказывается, что пространство  $M$  обладает следующими свойствами:

Ближайшие две геодезические из  $\{C\}$  ограничивают фигуру, изометрическую вложенному в  $M$  двухугольнику из  $\Omega$ , составленную линиями из множества  $\{C\}$ . Для произвольной геодезической  $C$  и любой другой геодезической  $L$  пространства с длиной, меньшей или равной  $\pi$ , не наложенными на  $C$  и исходящей из внутренней ее точки, существует множество геодезических из  $\{C\}$ , которые проходят через  $L$ , образуя «двухугольник», равномерно геодезически вложенный в  $M$  из  $\Omega$ . Если через точку  $O$

проходит некоторая геодезическая  $L$ , то  $L$  является частью замкнутой геодезической  $L$  с длиной  $2\pi$ , имеющей, возможно, самоналегания, причем для каждой точки  $X \in M$ , не принадлежащей  $\tilde{L}$ , существует точечное подмножество пространства  $M$  с «границей»  $\tilde{L}$ , включающее  $X$  и представляющее геодезически вложенную в  $M$  двумерную полуплоскость пространства  $M$ . Множество точек всевозможных таких замкнутых геодезических является вполне геодезическим подпространством  $M$ , изометричным некоторой пространственной форме с кривизной единица.

Перечисленные свойства рассматриваемого пространства позволяют в этом случае убедиться в справедливости теоремы 8.

Предположим, что замкнутые геодезические, проходящие через точку  $O$  о которых только что говорилось, существуют, и обозначим  $\tilde{\Omega}$  соответствующую пространственную форму,ложенную в  $M$ . Учитывая свойства пространства  $M$ , лемму 4 и характер вложения  $\tilde{\Omega}$  в  $M$ , легко заметить, что  $\tilde{O}$  отстоит от  $O$  в пространстве на расстоянии  $\pi$ , являясь единственным для точки  $O$  полюсом, или же полюсами в  $M$  для этой точки служат все точки формы  $\tilde{\Omega}$ . Аналогичное положение имеет место и в случае, когда замкнутая геодезическая с длиной  $2\pi$ , проходящая через  $O$ , единственная: геодезическая играет роль формы  $\tilde{\Omega}$ .

Может оказаться, что таких замкнутых геодезических не существует вовсе. Тогда через точки  $O$ ,  $\tilde{O}$  вообще не проходят геодезические. По этой причине каждая из линий  $C$  обладает тем свойством, что кратчайшие, единяющие  $O$  и  $\tilde{O}$  с внутренними ее точками, являются сами участками этой линии. Кроме того, любые две геодезические из  $\{C\}$  не имеют общих внутренних точек. Действительно, пусть для некоторой геодезической  $C$  и какой-то внутренней ее точки существует кратчайшая в  $M$ , которая соединяет  $O$  с этой точкой и не налагает на  $C$ . Продолжим эту кратчайшую геодезическую с длиной  $\pi$ , исходящей из точки  $O$ , и обозначим  $\tilde{C}$  получившую линию. Учитывая свойства пространства  $M$ , отмеченные ранее, находим, что геодезические  $\tilde{C}$ ,  $C$  принадлежат двумерной «полуплоскости» из геодезически вложенной в  $M$ , причем концы этих линий находятся в этой фигуре на «границе», являющейся в пространстве  $M$  замкнутой геодезической с длиной  $2\pi$ , проходящей через точку  $O$ . Мы же сейчас считаем, что подобных геодезических в  $M$  не существует. Поэтому, очевидно, линии  $\{C\}$  — кратчайшие в пространстве (точка  $\tilde{O}$  — единственный полюс для  $C$  или же каждая такая линия, начиная от точки  $O$  — кратчайшая на длине  $\frac{\pi}{2}$ ), а точки  $O$ ,  $\tilde{O}$  совпадают. Последняя возможность для пространства исключается леммой 5.

Таким образом, утверждения теоремы 8 справедливы и во втором случае.

Теорема доказана.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. Д. Александров. Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей. Гос. техиздат, М.—Л., 1948.
2. А. Д. Милка. Многомерные пространства с многогранной метрикой неотрицательной кривизны. I. «Укр. геометр. сб.», вып. 5—6. Изд-во ХГУ, Харьков, 1967.
3. А. Д. Александров. Выпуклые многогранники. ОГИЗ М.—Л., 1950.
4. А. Д. Милка. О внутренней метрике выпуклых гиперповерхностей. «Укр. геометр. сб.», вып. 2. Изд-во ХГУ, Харьков, 1966. 59—69.
5. А. Д. Милка. Метрическое строение одного класса пространств, содержащих прямые линии. «Укр. геометр. сб.», вып. 4. Изд-во ХГУ, Харьков, 1967.

- III. Б. А. Тороногов. Римановы пространства кривизны, ограниченной снизу. Ученые записки т. XIV, вып. I (85), 1959.
- IV. Б. А. Тороногов. Геометрия многообразий. «Мир», М., 1967.
- V. Б. А. Тороногов. Зависимость между кривизной и топологическим строением многомерных пространств четной размерности. ДАН СССР, т. 133, № 5 (1960).
- VI. Э. Якоби. Геометрия римановых пространств. ОНТИ М.—Л., 1936.
- VII. Ф. Клейн. Несевклидова геометрия. ОНТИ М.—Л., 1936.
- VIII. Л. А. Александров. Комбинаторная топология Гостехиздат, М.—Л., 1947.
- IX. И. Бернштейн и В. Трельфалль. Топология. М.—Л., 1938.

Поступила 20 июня 1968 г.

## ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ПОВЕРХНОСТИ ПЕРЕНОСА

Л. Т. Моторний (Харьков)

Поверхности переноса характеризуются тем, что они несут сопряженную чебышевскую сеть. Для того, чтобы сеть кривых на поверхности

$$\frac{\partial v}{\partial u} = \varphi(u, v), \quad \frac{\partial v}{\partial u} = \psi(u, v)$$

была сетью переноса, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия Сервана — Бианки:

$$\frac{\partial^2 u^k}{\partial v^1 \partial v^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^k \frac{\partial u^\alpha}{\partial v^1} \cdot \frac{\partial u^\beta}{\partial v^2} = 0 \quad (1)$$

и условие сопряженности:

$$b_{11} + b_{12}(\varphi + \psi) + b_{22}\varphi\psi = 0. \quad (2)$$

Обобщение поверхности переноса, рассматриваемое в настоящей заметке, заключается в ослаблении условий (1), а именно, вместо чебышевской сети рассматриваются а) конформно-чебышевская (ромбическая) сеть б) получебышевская сеть.

В работе доказывается, что любая поверхность несет бесконечное множество сопряженных ромбических сетей, причем конформные преобразования переводящие их в чебышевские, можно выбирать с произволом одной функции одного аргумента.

Рассматриваются также сопряженные получебышевские сети на поверхностях.

Доказывается, что на любой поверхности существует сопряженная получебышевская сеть с произволом одной функции одного аргумента.

## § 1. Сопряженные ромбические сети

Конформно-чебышевской (ромбической) сетью называют такую сеть, которая становится чебышевской после надлежащего конформного преобразования [1].

Если ромбическую сеть принять за координатную, то первая квадратичная форма поверхности может быть приведена к виду

$$ds^2 = e^{2\varphi} (du^2 + 2F dudv + dv^2). \quad (1.1)$$

Выведем необходимое и достаточное условие, чтобы сеть кривых

$$\frac{\partial v}{\partial u} = \varphi(u, v), \quad \frac{\partial v}{\partial u} = \psi(u, v) \quad (1.2)$$

на поверхности была ромбической.

В конформном преобразовании поверхности коэффициенты  $g_{ik}$  ее квадратической формы и символы Кристоффеля  $\Gamma'_{ik}^l$  преобразуются следующим образом:

$$g_{ik}^* = e^{2\varphi} g_{ik}, \quad (1.3)$$

$$\Gamma'_{ik}^l = \Gamma'_{ik} + \delta_i^l \frac{\partial \sigma}{\partial u^k} + \delta_k^l \frac{\partial \sigma}{\partial u^i} - g'^l g_{ik} \frac{\partial \sigma}{\partial u^l}, \quad (1.4)$$

$$u = u^1, \quad v = u^2.$$

Дальше будем считать, что поверхность после конформного преобразования отнесена к тем же параметрам  $u, v$ , что и до преобразования.

После конформного преобразования сеть должна стать чебышевской, поэтому для нее будут выполняться уравнения Сервана — Бианки:

$$\frac{\partial^2 u^k}{\partial v^1 \partial v^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^{k*} \frac{\partial u^\alpha}{\partial v^1} \cdot \frac{\partial u^\beta}{\partial v^2} = 0, \quad (1.5)$$

$u^1, u^2$  — параметры чебышевской сети.

В (1.5)  $\varphi, \psi$  по (1.2), получим

$$\begin{aligned} \varphi_u + \psi \varphi_v &= \varphi [\Gamma_{11}^{1*} + (\varphi + \psi) \Gamma_{12}^{1*} + \Gamma_{22}^{1*} \varphi \psi] - [\Gamma_{11}^{2*} + (\varphi + \psi) \Gamma_{12}^{2*} + \Gamma_{22}^{2*} \varphi \psi], \\ \varphi_v + \psi \varphi_v &= \psi [\Gamma_{11}^{1*} + (\varphi + \psi) \Gamma_{12}^{1*} + \Gamma_{22}^{1*} \varphi \psi] - [\Gamma_{11}^{2*} + (\varphi + \psi) \Gamma_{12}^{2*} + \Gamma_{22}^{2*} \varphi \psi]. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Подставляя сюда значения  $\Gamma'_{ik}^l$  по (1.4), получим

$$\begin{aligned} \varphi_u + \psi \varphi_v &= \varphi \left\{ \Gamma_{11}^1 + \left(2 - \frac{g_{11}g_{22}}{g}\right) \sigma_u + \frac{g_{11}g_{22}}{g} \sigma_v + (\varphi + \psi) \left( \Gamma_{12}^1 - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{g_{11}g_{22}}{g} \sigma_u + \frac{g_{11}g_{22}}{g} \sigma_v \right) + \varphi \psi \left( \Gamma_{22}^1 + \frac{g_{11}g_{22}}{g} \sigma_u - \frac{g_{11}g_{12}}{g} \sigma_v \right) - \left( \Gamma_{11}^2 + \frac{g_{11}g_{12}}{g} \sigma_u - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{g_{11}g_{22}}{g} \sigma_v + (\varphi + \psi) \left[ \Gamma_{12}^2 + \frac{g_{11}g_{22}}{g} \sigma_u - \frac{g_{11}g_{12}}{g} \sigma_v \right] + \varphi \psi \left[ \Gamma_{22}^2 + \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + \left(2 - \frac{g_{11}g_{22}}{g}\right) \sigma_v + \frac{g_{12}g_{22}}{g} \sigma_v \right] \right\}, \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} \varphi_v + \psi \varphi_v &= \psi \left\{ \Gamma_{11}^1 + \left(2 - \frac{g_{11}g_{22}}{g}\right) \sigma_u + \frac{g_{11}g_{12}}{g} \sigma_v + (\varphi + \psi) \left( \Gamma_{12}^1 - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{g_{11}g_{22}}{g} \sigma_u + \frac{g_{11}g_{22}}{g} \sigma_v \right) + \varphi \psi \left( \Gamma_{22}^1 + \frac{g_{11}g_{12}}{g} \sigma_u - \frac{g_{11}g_{12}}{g} \sigma_v \right) - \right. \\ &\quad \left. - \left( \Gamma_{11}^2 + \frac{g_{11}g_{12}}{g} \sigma_u - \frac{g_{11}g_{22}}{g} \sigma_v + (\varphi + \psi) \left( \Gamma_{12}^2 + \frac{g_{11}g_{22}}{g} \sigma_u - \frac{g_{11}g_{12}}{g} \sigma_v \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \varphi \psi \left[ \Gamma_{22}^2 + \left(2 - \frac{g_{11}g_{22}}{g}\right) \sigma_v + \frac{g_{12}g_{22}}{g} \sigma_u \right] \right\}, \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$g = g_{11}g_{22} - g_{12}^2,$$

представляет конформное преобразование поверхности.

Несколько из этой системы  $\sigma_u, \sigma_v$  ( $\sigma_{uv} = \sigma_{vu}$ ), мы получим необходимое гомотетичное условие, чтобы сеть кривых на поверхности была ромбической сетью.

Потребуем, чтобы сеть была сопряженной:

$$b_{11} + b_{12}(\varphi + \psi) + b_{22}\varphi\psi = 0, \quad (1.1)$$

где  $b_{ik}$  — коэффициенты второй квадратичной формы поверхности.

Если в уравнениях (1.7)  $\sigma = \text{const}$ , то ромбическая сеть будет состояться из чебышевской подобием, а так как при подобии сопряженности сохраняется, то исходная поверхность (а вместе с ней и преобразованная) есть поверхность переноса.

Таким образом, сеть переноса есть частный случай сопряженной ромбической сети.

Отнесем поверхность к асимптотическим линиям. Тогда по (1.9) имеем

$$\varphi = -\psi, \quad (1.1)$$

а уравнения (1.7) после этого принимают вид (если их разрешить относительно  $\varphi_u$ ,  $\varphi_v$ ):

$$\begin{aligned} \varphi\varphi_v &= a_1 - b_1\varphi^2, \\ \varphi_u &= a_2\varphi - b_2\varphi^3, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где

$$\begin{aligned} a_1 &= \Gamma_{11}^2 + \frac{g_{11}g_{12}}{g}\sigma_u - \frac{g_{11}^2}{g}\sigma_v; \quad a_2 = \Gamma_{11}^1 + \left(2 - \frac{g_{11}g_{22}}{g}\right)\sigma_u + \frac{g_{11}g_{12}}{g}\sigma_v; \\ b_1 &= \Gamma_{22}^2 + \left(2 - \frac{g_{11}g_{12}}{g}\right)\sigma_v + \frac{g_{12}g_{22}}{g}\sigma_u; \quad b_2 = \Gamma_{22}^1 - \frac{g_{22}^2}{g}\sigma_u + \frac{g_{12}g_{22}}{g}\sigma_v. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Условие интегрируемости этой системы имеет вид

$$(a_{1u} - 2a_1a_2) + (b_{1u} - 4a_1b_2 - a_{2v})\varphi^2 - (b_{2v} + 2b_1b_2)\varphi^4 = 0. \quad (1.13)$$

Отсюда видно, что при заданном конформном преобразовании (при данном  $\sigma$ ) поверхность может нести континuum сопряженных ромбических сетей (когда (1.13) есть тождество относительно  $\varphi$ ), либо две (если корни (1.13) удовлетворяют системе (1.11), либо не несет вообще ни одной такой сети (если корни (1.13) не удовлетворяют системе (1.11)).

Перепишем уравнения (1.11) в виде

$$\begin{aligned} \varphi_u &= a_2\varphi - b_2\varphi^3, \\ \frac{g_{12}}{g}(g_{11} - g_{22}\varphi^2)\sigma_u &= \varphi\varphi_v - \Gamma_{11}^2 + \frac{g_{11}^2}{g}\sigma_v + \Gamma_{22}^2\varphi^2 + \left(2 - \frac{g_{11}g_{22}}{g}\right)\varphi^2\sigma_v. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Если поверхность аналитическая, то правые части обоих уравнений аналитические функции  $u$ ,  $v$ .

Если  $g_{12} = 0$ , то поверхность минимальная. Если

$$g_{11} - g_{22}\varphi^2 = 0, \quad (1.15)$$

то ромбическая сеть  $\varphi$ ,  $\psi$  состоит из линий кривизны, следовательно, поверхность изотермическая [2].

Таким образом, если поверхность не является минимальной или изотермической, то уравнения (1.14) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial u} &= F(\varphi, \varphi_v\sigma_v, u, v), \\ \frac{\partial\sigma}{\partial u} &= G(\varphi, \varphi_v, \sigma_v, u, v), \end{aligned} \quad (1.16)$$

где  $F$  и  $G$  — аналитические функции своих аргументов.

Согласно теореме Коши—Ковалевской система (1.16) имеет решение, произвол которого зависит от двух функций одного аргумента.

## § 2. Случай изотермической поверхности

Изотермической поверхностью называется поверхность, у которой ли-  
нейные элементы образуют ромбическую сеть.

Линии на изотермической поверхности в качестве координатной сети  
изометричны. Тогда

$$\begin{aligned} b_{12} &= g_{12} = 0, \quad g_{11} = g_{22} = e^{2\rho}, \\ \Gamma_{11}^1 &= \Gamma_{12}^2 = -\Gamma_{22}^1 = \rho_u, \\ -\Gamma_{11}^2 &= \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{22}^2 = \rho_v. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Формулы Гаусса—Петерсона—Кодадци при этом принимают вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial b_{11}}{\partial v} &= (b_{11} + b_{22}) \rho_v, \\ \frac{\partial b_{22}}{\partial u} &= (b_{11} + b_{22}) \rho_u, \\ -b_{11}b_{22} &= e^{2\rho} \Delta \rho. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Таким образом, любое решение системы (2.2) определяет изотермиче-  
скую поверхность.

Линия на изотермической поверхности есть еще одна сопряженная ром-  
бическая сеть

$$\frac{\partial v}{\partial u} = \varphi(u, v), \quad \frac{\partial v}{\partial u} = \psi(u, v), \quad (2.3)$$

которые в силу  
должны выполнятся условия (1.7), (1.9), которые в силу  
записаны так:

$$\begin{aligned} \varphi_u + \varphi\varphi_v &= \varphi [(1 - \varphi\psi) \lambda_u + (\varphi + \psi) \lambda_v] - [(\varphi + \psi) \lambda_u - (1 - \varphi\psi) \lambda_v], \\ \psi_u + \varphi\psi_v &= \psi [(1 - \varphi\psi) \lambda_u + (\varphi + \psi) \lambda_v] - [(\varphi + \psi) \lambda_u - (1 - \varphi\psi) \lambda_v], \quad (2.4) \\ \varphi\psi &= a = -\frac{b_{11}}{b_{22}}, \end{aligned}$$

$$\lambda = \rho + \sigma. \quad (2.5)$$

Сопряженная сеть на изотермической поверхности по определению  
сопряженная ромбическая сеть. Конформное преобразование, переводя-  
щее чебышевскую, задается условием

$$\sigma = -\rho, \quad (2.6)$$

$$\lambda = 0. \quad (2.7)$$

Следовательно, одним из решений системы (2.4) является:

$$\varphi = 0, \quad \psi = \infty, \quad \lambda = 0. \quad (2.8)$$

Пусть вспять на изометрической поверхности сопряженные ромбиче-  
ские линии, отличные от координатной, т. е. будем предполагать, что  $\varphi\psi \neq 0$ .  
Потом из третьего уравнения (2.4) имеем

$$\psi = \frac{a}{\varphi}, \quad \psi_u = \frac{a_u\varphi - a\varphi_u}{\varphi^2}, \quad \psi_v = \frac{a_v\varphi - a\varphi_v}{\varphi^2}. \quad (2.9)$$

Подставляя в первые два уравнения (2.4), получим

$$\begin{aligned} \varphi_u + \frac{a\varphi_v}{\varphi} &= \left( \lambda_v - \frac{a\lambda_u}{\varphi} \right) (1 + \varphi^2), \\ \frac{a\varphi_u}{\varphi^2} + \frac{a\varphi_v}{\varphi} &= \frac{\varphi^2 + a^2}{\varphi^2} (\lambda_u\varphi - \lambda_v) + \frac{a_u}{\varphi} + a_v. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Так как мы предполагаем поверхность аналитической, то правые и левые части уравнений (2.10) есть аналитические функции своих аргументов. Определители, составленные из коэффициентов при  $\varphi_u, \lambda_u$  и  $\varphi_v, \lambda_v$ , соответственно равны

$$\frac{1}{\varphi^3} (\varphi^4 + 2a^2\varphi^2 + a^2) \text{ и } -\frac{a}{\varphi^3} (\varphi^4 + 2\varphi^2 + a^2). \quad (2.11)$$

Они одновременно равны нулю, лишь когда

$$a^2 = 1, \quad 1 + \varphi^2 = 0, \quad (2.12)$$

но при этих значениях  $a, \varphi$  система (2.10) выполняется тождественно т. е. (2.12) — решение системы (2.10).

Таким образом, если  $a^2 \neq 1$ , то систему (2.10) можно разрешить относительно  $\varphi_u, \lambda_u$  (либо  $\varphi_v, \lambda_v$ ):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial u} &= A(\varphi, \varphi_v, \lambda_v, a), \\ \frac{\partial \lambda}{\partial u} &= B(\varphi, \varphi_v, \lambda_v, a), \end{aligned} \quad (2.13)$$

причем  $A$  и  $B$  — аналитические функции своих аргументов.

Согласно теореме Коши—Ковалевской у системы (2.13) или, что то же самое, (2.4) существует решение, произвол которого зависит от двух функций одного аргумента.

Если  $a = 1$ , то поверхность минимальная, более подробно эти поверхности рассмотрим в следующем параграфе.

Если  $a = -1$ , а  $\varphi^2 + 1 \neq 0$ , то систему (2.10) можно привести к виду (2.13), где  $A, B$  — по-прежнему аналитические функции, а следовательно существует решение системы (2.10), зависящее от двух функций одного аргумента.

### § 3. Случай минимальных поверхностей

Отнесем минимальную поверхность к асимптотическим линиям, тогда

$$g_{12} = b_{11} = b_{22} = 0. \quad (3.1)$$

Пусть на минимальной поверхности сеть кривых

$$\frac{dv}{du} = \varphi(u, v), \quad \frac{dv}{du} = \psi(u, v) \quad (3.2)$$

есть сопряженная ромбическая. Тогда для нее должны выполняться условия (1.11), которые в силу (3.1) принимают вид

$$\begin{aligned} \varphi \varphi_v &= \Gamma_{11}^2 - \frac{g_{11}}{g_{22}} \sigma_v - (\Gamma_{22}^2 + \sigma_v) \varphi^2, \\ \varphi_u &= (\Gamma_{11}^1 + \sigma_u) \varphi - \left( \Gamma_{22}^1 - \frac{g_{22}}{g_{11}} \sigma_u \right) \varphi^3. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Учитывая значения

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{(g_{11})_u}{2g_{11}}, \quad \Gamma_{11}^2 = -\frac{(g_{11})_v}{2g_{22}}, \quad \Gamma_{22}^1 = -\frac{(g_{22})_u}{2g_{11}}, \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{(g_{22})_v}{2g_{22}}, \quad (3.4)$$

уравнения (3.3) можно переписать так:

$$\begin{aligned} -2(g_{11} + g_{22}\varphi^2)\sigma_v &= 2g_{22}\varphi\varphi_v + (g_{11})_v + (g_{22})_v\varphi^2, \\ 2(g_{11} + g_{22}\varphi^2)\varphi^2\sigma_u &= 2g_{11}\varphi\varphi_u - (g_{11})_u\varphi^2 - (g_{22})_u\varphi^4, \end{aligned} \quad (3.5)$$

если  $g_{11} + g_{22}\varphi^2 \neq 0$ , имеем

$$g_{11} + g_{22}\varphi^2 = U(u)e^{-2\sigma} = V(v)\varphi^2e^{-2\sigma}, \quad (3.6)$$

$U(u), V(v)$  — произвольные функции.

Из (3.6) следует

$$\varphi^2 = \frac{U(u)}{V(v)}. \quad (3.7)$$

Если

$$g_{11} + g_{22}\varphi^2 = 0, \quad (3.8)$$

то  $\varphi, \psi$  — минимальная. Минимальная сеть есть сопряженная ромбическая, причем любое конформное преобразование переводит минимальную сеть в чебышевскую.

Из всего сказанного в этих трех параграфах вытекает

**Теорема 1.** На любой аналитической поверхности существует бесконечное множество сопряженных ромбических сетей, зависящих от двух комплексных функций одного аргумента.

#### § 4. Ромбические сети, переводящиеся в чебышевские одним и тем же конформным преобразованием

**F.** Выясним, существуют ли конформные преобразования поверхности, сохраняющие вторую квадратичную форму.

**Теорема 2.** Если вторая квадратичная форма поверхности сохраняется при конформных преобразованиях, то либо конформное преобразование является движением, либо поверхность развертывающаяся (тогда конформное преобразование сводится к подобию), либо поверхность минимална.

$$ds^2 = e^{2\rho}(du^2 + dv^2), \quad (4.1)$$

конформное преобразование определяется из условия

$$(1 - e^{2\rho})\Delta\rho = e^{2\rho}\Delta\sigma. \quad (4.2)$$

**Доказательство.** Пусть поверхность  $F^*$  получается из  $F$  конформным преобразованием. Коэффициенты первой и второй квадратичной формы поверхностей  $F$  и  $F^*$  соответственно  $g_{ik}, b_{ik}, g_{ik}^*, b_{ik}^*$ , причем

$$\begin{aligned} g_{ik}^* &= e^{2\sigma}g_{ik}, \\ b_{ik}^* &= b_{ik}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Уравнения Петерсона—Кодаци для поверхностей  $F$  и  $F^*$  соответствен но имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial b_{ij}}{\partial u^k} - \Gamma_{ik}^\alpha b_{aj} &= \frac{\partial b_{ik}}{\partial u^j} - \Gamma_{ij}^\alpha b_{ak}, \\ \frac{\partial b_{ij}}{\partial u^k} - \Gamma_{ik}^{*\alpha} b_{aj} &= \frac{\partial b_{ik}}{\partial u^j} - \Gamma_{ij}^{*\alpha} b_{ak}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Вычитая из первого уравнения (4.4) второе, получим

$$(\Gamma_{ik}^{*\alpha} - \Gamma_{ik}^\alpha)b_{aj} = (\Gamma_{ij}^{*\alpha} - \Gamma_{ij}^\alpha)b_{ak}. \quad (4.5)$$

Учитывая значения  $\Gamma_{ik}^{\alpha*}$  по (1.4) уравнения (4.5) можно записать так

$$b_{ij} \frac{\partial \sigma}{\partial u^k} + g^{\alpha l} g_{il} b_{ak} \frac{\partial \sigma}{\partial u^l} = b_{ik} \frac{\partial \sigma}{\partial u^l} + g^{\alpha l} g_{ik} b_{al} \frac{\partial \sigma}{\partial u^l}. \quad (4.6)$$

Система (4.6) содержит только два существенных уравнения:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u} (b_{12} - g^{\alpha 1} g_{11} b_{\alpha 2} + g^{\alpha 1} g_{12} b_{\alpha 1}) = (b_{11} - g^{\alpha 2} g_{12} b_{\alpha 1} + g^{\alpha 2} g_{11} b_{\alpha 2}) \frac{\partial \sigma}{\partial v}, \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u} (b_{22} - g^{\alpha 1} g_{12} b_{\alpha 2} + g^{\alpha 1} g_{22} b_{\alpha 1}) = (b_{12} - g^{\alpha 2} g_{22} b_{\alpha 1} + g^{\alpha 2} g_{12} b_{\alpha 2}) \frac{\partial \sigma}{\partial v}.$$

Отнесем  $F$  к изотермической сети:

$$g_{11} = g_{22} = e^{2\sigma}, \quad g_{12} = 0. \quad (4.8)$$

Теперь уравнения (4.7) принимают вид:

$$(b_{11} + b_{22}) \frac{\partial \sigma}{\partial u} = 0, \\ (b_{11} + b_{22}) \frac{\partial \sigma}{\partial v} = 0. \quad (4.9)$$

Откуда, если  $b_{11} + b_{22} \neq 0$ , то

$$\sigma = \text{const.} \quad (4.10)$$

Уравнение Гаусса для  $F$  и  $F^*$  имеет вид

$$b_{11} b_{22} - b_{12}^2 = -e^{2\sigma} \Delta \rho = -e^{2\sigma*} \Delta \rho^*, \quad (4.11)$$

$$\rho^* = \rho + \sigma.$$

В силу (4.10) из (4.11) имеем либо

$$\sigma = 0, \quad (4.12)$$

либо

$$\Delta \rho = 0. \quad (4.13)$$

Если

$$b_{11} + b_{22} = 0, \quad (4.14)$$

исходная поверхность — минимальная, а конформное преобразование поверхности  $F$  определяется из условия (4.11)

$$(1 - e^{2\sigma}) \Delta \rho = e^{2\sigma} \Delta \sigma. \quad (4.15)$$

Если  $\sigma = 0$ , то первые и вторые квадратичные формы поверхностей  $F$  и  $F^*$  совпадают, следовательно, поверхности конгруэнты.

Если выполняется (4.13), то  $K = 0$  — поверхность развертывающая, а (4.10) означает, что конформное преобразование сводится к подобию.

Таким образом, если при конформном преобразовании  $F$  сохраняются коэффициенты ее второй квадратичной формы, то выполняется одно из трех условий (4.12), (4.13), (4.14).

Теорема доказана.

2°. Выясним, существуют ли поверхности, на которых две различные сопряженные ромбические сети переводятся в чебышевские одним и тем же конформным преобразованием.

Ставим поверхность к сопряженной ромбической сети, тогда

$$\begin{aligned} g_{11} = g_{22} = e^{2\omega}, \quad g_{12} = e^{2\omega} \cos \omega, \quad b_{12} = 0, \\ \sin^2 \omega \Gamma_{11}^1 = -\sigma_u \cos 2\omega + \sigma_v \cos \omega + \omega_u \sin \omega \cos \omega, \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$\sin^2 \omega \Gamma_{11}^2 = \sigma_u \cos \omega - \sigma_v - \omega_u \sin \omega,$$

$$\sin^2 \omega \Gamma_{12}^1 = \sigma_v - \sigma_u \cos \omega,$$

$$\sin^2 \omega \Gamma_{12}^2 = \sigma_u - \sigma_v \cos \omega,$$

$$\sin^2 \omega \Gamma_{22}^1 = -\sigma_u + \sigma_v \cos \omega - \omega_v \sin \omega, \quad (4.17)$$

$$\sin^2 \omega \Gamma_{22}^2 = \sigma_u \cos \omega - \sigma_v \cos 2\omega + \omega_v \sin \omega \cos \omega.$$

Будет на поверхности есть еще одна сопряженная ромбическая сеть

$$\frac{dv}{du} = \varphi(u, v), \quad \frac{dv}{du} = \psi(u, v), \quad (4.18)$$

на нее должны выполняться условия (1.7), (1.9):

$$b_{11} + b_{22}\varphi\psi = 0, \quad (4.19)$$

$$\begin{cases} \varphi_u + \varphi\psi_v = A\varphi - B, \\ \psi_u + \varphi\psi_v = A\psi - B, \end{cases} \quad (4.20)$$

$$\begin{cases} \varphi_u + \varphi\psi_v = A\varphi - B, \\ \psi_u + \varphi\psi_v = A\psi - B, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} A = & -\frac{\cos 2\omega}{\sin^2 \omega} (\rho + \sigma)_u + \frac{\cos \omega}{\sin^2 \omega} (\rho + \sigma)_v + \omega_u \operatorname{ctg} \omega + \\ & + (\varphi + \psi) \left[ \frac{(\rho + \sigma)_v}{\sin^2 \omega} - (\rho + \sigma)_u \frac{\cos \omega}{\sin^2 \omega} \right] + \\ & + \varphi\psi \left[ -\frac{(\rho + \sigma)_u}{\sin^2 \omega} + \frac{\cos \omega}{\sin^2 \omega} (\rho + \sigma)_v - \frac{\omega_v}{\sin \omega} \right], \\ B = & \frac{\cos \omega}{\sin^2 \omega} (\rho + \sigma)_u - \frac{(\rho + \sigma)_v}{\sin^2 \omega} - \frac{\omega_u}{\sin \omega} + \\ & + (\varphi + \psi) \left[ \frac{(\rho + \sigma)_u}{\sin^2 \omega} - \frac{\cos \omega}{\sin^2 \omega} (\rho + \sigma)_v \right] + \\ & + \varphi\psi \left[ -\frac{\cos 2\omega}{\sin^2 \omega} (\rho + \sigma)_v + \frac{\cos \omega}{\sin^2 \omega} (\rho + \sigma)_u + \omega_v \operatorname{ctg} \omega \right], \end{aligned} \quad (4.21)$$

представляет конформное преобразование, которое переводит вторую сеть в чебышевскую.

В общем случае

$$\rho \neq -\sigma. \quad (4.22)$$

Однако представляет интерес случай, когда две ромбические сети на поверхности переводятся в чебышевские одним и тем же конформным преобразованием, т. е.

$$\rho = -\sigma. \quad (4.23)$$

Уравнения (4.20) при этом принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \sin \omega (\varphi_u + \varphi\psi_v) &= \varphi (\omega_u \cos \omega - \omega_v \varphi\psi) + (\omega_u - \varphi\psi\omega_v \cos \omega), \\ \sin \omega (\psi_u + \varphi\psi_v) &= \psi (\omega_u \cos \omega - \omega_v \varphi\psi) + (\omega_u - \varphi\psi\omega_v) \cos \omega. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Условия (4.19) и (4.24) дают необходимое и достаточное условие существования поверхности переноса двойного образования [3], у которой коэффициенты первой и второй квадратичных форм равны соответственно:

$$\begin{aligned} g_{11} = g_{22} = 1, \quad g_{12} = \cos \omega, \\ b_{12} = 0, \quad b_{11}, \quad b_{22}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Искомая поверхность получается из поверхности переноса (4.25) конформным преобразованием:

$$g_{ik}^* = e^{2\sigma} g_{ik}. \quad (4.26)$$

При этом конформном преобразовании коэффициенты второй квадратичной формы сохраняются, следовательно, по теореме 2, если искомая поверхность не минимальная, она является поверхностью переноса двойного образования.

Если поверхность минимальная, то для нее по-прежнему из (4.7) имеет

$$b_{11} + b_{22} = 0. \quad (4.27)$$

Условие сопряженности принимает вид

$$\varphi\psi = 1. \quad (4.28)$$

Теперь уравнения (4.24) записутся так:

$$\begin{aligned} \frac{\varphi^2 - 1}{\varphi} \varphi_u &= \left( \varphi^2 + 1 \right) \left( \omega_u \operatorname{ctg} \omega - \frac{\omega_v}{\sin \omega} \right) + 2\varphi \left( \frac{\omega_u}{\sin \omega} - \omega_v \operatorname{ctg} \omega \right), \\ \frac{1 - \varphi^2}{\varphi} \varphi_v &= 2\varphi \left( \omega_u \operatorname{ctg} \omega - \frac{\omega_v}{\sin \omega} \right) + \left( \varphi^2 + 1 \right) \left( \frac{\omega_u}{\sin \omega} - \omega_v \operatorname{ctg} \omega \right). \end{aligned} \quad (4.29)$$

Условие интегрируемости этой системы:

$$\left[ \left( \frac{\omega_u}{\sin \omega} \right)_u - \left( \frac{\omega_v}{\sin \omega} \right)_v \right] (\varphi^2 + 2\varphi \cos \omega + 1) = 0. \quad (4.30)$$

Уравнения Петерсона—Кодацци для этих поверхностей имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial b_{11}}{\partial u} &= \frac{\omega_v}{\sin \omega}, \\ \frac{\partial b_{11}}{\partial v} &= \frac{\omega_u}{\sin \omega}, \end{aligned} \quad (4.31)$$

откуда

$$\frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\omega_u}{\sin \omega} \right) = \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\omega_v}{\sin \omega} \right). \quad (4.32)$$

Следовательно, (4.30) тождество, а система (4.29) вполне интегрируема и ее решение зависит от произвольной константы.

Таким образом, минимальные поверхности несут континуум ромбических сопряженных сетей, переводящихся в чебышевские одним и тем же конформным преобразованием, которое определяется из уравнения Гаусса

$$\begin{aligned} 2b_{11}^2 &= e^{2\sigma} \left[ 2\Delta\sigma + \frac{2}{\sin \omega} (\rho_u \omega_v + \rho_v \omega_u) - 2(\sigma \cos \omega)_{uv} + \omega_{uv} \sin \omega - \right. \\ &\quad \left. - 2\operatorname{ctg} \omega (\rho_u \omega_u + \rho_v \omega_v) \right]. \end{aligned} \quad (4.33)$$

**Теорема 3.** Если две различные сопряженные ромбические сети на поверхности переводятся в чебышевские одним и тем же конформным преобразованием, то эта поверхность есть поверхность двойного образования либо минимальная.

Минимальные поверхности несут континуум сопряженных ромбических сетей, переводящихся в чебышевские одним и тем же конформным преобразованием.

### § 5. Поверхности, несущие сопряженные получебышевские сети

1<sup>o</sup>. Второе обобщение сети переноса мы получим, если вместо чебышевой сети возьмем получебышевскую [1].

Если сеть получебышевская, то для нее должно выполняться одно условие (1.5).

Таким образом, для того, чтобы сеть кривых на поверхности

$$\frac{dv}{du} = \varphi(u, v), \quad \frac{dv}{\bar{u}} = \psi(u, v) \quad (5.1)$$

бесконечной получебышевской, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

$$\Gamma_{11} + \Gamma_{22} = \psi [\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^1 (\varphi + \psi) + \Gamma_{22}^1 \varphi \psi] - [\Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 (\varphi + \psi) + \Gamma_{22}^2 \varphi \psi], \quad (5.2)$$

$$\Gamma_{11} + \Gamma_{12} + \Gamma_{22} = 0. \quad (5.3)$$

Отнесем поверхность к асимптотической сети, тогда по (5.3)

$$\varphi = -\psi. \quad (5.4)$$

После чего (5.2) принимает вид

$$\varphi_u = \varphi \varphi_v + \varphi (\Gamma_{11}^1 - \Gamma_{22}^1 \varphi^2) + \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{22}^2 \varphi^2. \quad (5.5)$$

Если поверхность аналитическая, то правая часть (5.5) есть аналитическая функция своих аргументов, следовательно, по теореме Коши—Ковалевской уравнение (5.5) имеет решение, зависящее от произвольной функции одного аргумента.

Теорема 4. Если через обыкновенную точку аналитической поверхности проведем произвольную аналитическую кривую, то в достаточно малой окрестности этой точки существует одна и только одна сопряженная получебышевская сеть, включающая эту кривую.

2<sup>o</sup>. Определим поверхности, на которых линии кривизны образуют получебышевскую сеть.

Отнесем поверхность к линиям кривизны. Условие (5.2) для координатной сети

$$\Gamma_{12}^1 = 0, \quad (5.6)$$

так как сеть ортогональная, то

$$\frac{\partial g_{11}}{\partial v} = 0, \quad (5.7)$$

т. е. первую квадратичную форму поверхности можно привести к виду

$$ds^2 = du^2 + G(u, v) dv^2. \quad (5.8)$$

Условие (5.8) означает, что линии кривизны образуют полугеодезическую сеть.

Верно и обратное: если полугеодезическая сеть состоит из линий кривизны, то она и получебышевская.

Отнесем поверхность к линиям кривизны, тогда

$$\begin{aligned} g_{11} &= 1, \quad g_{12} = b_{12} = 0, \quad g_{22} = G(u, v), \\ \Gamma_{11}^1 &= \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^1 = 0, \quad \Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{2} G_u, \\ \Gamma_{12}^2 &= \frac{G_u}{2G}, \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{G_v}{2G}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Уравнения Петерсона—Кодашчи принимают вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial b_{11}}{\partial v} &= 0, \\ \frac{\partial b_{22}}{\partial u} &= \frac{G_u}{2\bar{G}} b_{22} + \frac{G_u}{2} b_{11},\end{aligned}\quad (5.10)$$

или

$$\frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{b_{22}}{\sqrt{\bar{G}}} \right) = b_{11} \frac{\partial}{\partial u} (\sqrt{\bar{G}}). \quad (5.11)$$

А уравнение Гаусса имеет вид

$$-\frac{b_{11}b_{22}}{\sqrt{\bar{G}}} = (\sqrt{\bar{G}})_{uu}. \quad (5.12)$$

Из (5.11), (5.12) имеем

$$\left[ \frac{(\sqrt{\bar{G}})_{uu}}{U(u)} \right]_u = -U_{(u)} (\sqrt{\bar{G}})_u, \quad (5.13)$$

где

$$U_{(u)} = b_{11}.$$

Таким образом, любое решение уравнения (5.13) определяет искомую поверхность.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Я. С. Дубнов. Тензорные характеристики некоторых классов поверхностей и принадлежащих им сетей. Труды семинара по векторному и тензорному анализу. IV, 1937.
2. В. Ф. Каган. Основы теории поверхностей, ч. II. ГИТТЛ, М., 1948.
3. Я. П. Бланк. Поверхности сдвига эллиптического пространства. Зап. н-и. ин-та матем. и мех. и ХМО, серия 4, т. 20, 61, 1950.

*Поступила 5 июня 1968 г.*

## РЕАЛИЗАЦИЯ В ЦЕЛОМ ДВУМЕРНЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ МЕТРИК

## ЗНАКОПЕРЕМЕННОЙ КРИВИЗНЫ

Э. Г. Позняк (Москва)

**Л** А. В. Погореловым было высказано предположение о возможности реализации любого геодезического круга в полной двумерной метрике  $W$  без сопряженных точек. В настоящей статье это предположение используется для случая, когда  $W$  представляет собой полную аналитическую двумерную метрику без сопряженных точек. При этом метрика  $W$  должна иметь знакопеременную кривизну.

**2** Рассмотрим в прямоугольнике  $\Pi_{ab} = [0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b]$  метрику  $W_{II}$

$$ds^2 = dx^2 + B^2(x, y) dy^2. \quad (1)$$

Будем предполагать, что функция  $B(x, y)$  является аналитической в  $\Pi_{ab}$ , т. е. в окрестности любой точки  $\Pi_{ab}$ , включая границу, функция  $B(x, y)$  может быть разложена в степенной ряд по переменным  $x$  и  $y$ . Таким образом, аналитичность  $B(x, y)$  в  $\Pi_{ab}$  означает аналитичность этой функции в некотором прямоугольнике  $\Pi_{a^*b^*}$ , который содержит  $\Pi_{ab}$ .

При сформулированных предположениях справедлива следующая теорема.

**Теорема 1.** Метрика  $W_{II}$  может быть реализована в  $E^3$  посредством аналитической поверхности.

Из этой теоремы вытекает следующее утверждение.

**Теорема 2.** Пусть  $W$  — полная двумерная аналитическая метрика без сопряженных точек. Тогда метрика в любом геодезическом круге метрики  $W$  может быть реализована в  $E^3$  посредством аналитической поверхности.

В самом деле, так как  $W$  — метрика без сопряженных точек, то любой геодезический круг в этой метрике можно заключить в прямоугольник  $\Pi_{ab}$ , в котором определяется линейным элементом вида (1), а функция  $B(x, y)$  является аналитической в  $\Pi_{ab}$ .

3. Пусть  $l, m, n$  — приведенные коэффициенты второй квадратичной формы. Уравнения Петерсона—Кодации и Гаусса для линейного элемента (1) записать в следующей форме:

$$\begin{aligned} (B^2 m)_x &= B(Bl)_y, \\ n_x &= \frac{1}{B^2} (B^2 m)_y - 2 \frac{B_y}{B^3} (B^2 m) + B_x (Bl), \\ B^3 (Bl) n - (B^2 m)^2 &= B^4 K. \end{aligned} \quad (2)$$

Новые неизвестные функции  $u$  и  $v$  с помощью соотношений

$$u = B^2 m, \quad v = \frac{1}{\varepsilon n}, \quad 0 < \varepsilon < 1. \quad (3)$$

Система (2) преобразуется в следующую систему:

$$\begin{aligned} u_x &= \varepsilon \left[ \frac{2}{B^3} uv u_y + \left( B^2 K + \frac{1}{B^2} u^2 \right) v_y + B (BK)_y v - \frac{2B_y}{B^3} u^2 v \right] \\ v_x &= \varepsilon \left[ -\frac{1}{B^2} v^2 u_y + \frac{2B_y}{B^3} uv^2 - \varepsilon B_x BK v^3 - \varepsilon \frac{B_x}{B} u^2 v^3 \right]. \end{aligned} \quad (4)$$

*Замечание 1.* Система (4) неэквивалентна системе (2). Однако, если известно любое решение системы (4), удовлетворяющее условию  $v \neq 0$ , то, как это видно из формул (3), решение системы (2) может быть найдено алгебраически.

4. В этом пункте указываются некоторые вспомогательные предложения о степенных рядах.

**Лемма 1.** Пусть  $f(x, y)$  — аналитическая в прямоугольнике  $\Pi_{ab}$  функция. Можно указать такие числа  $M$  и  $r$ , что для производных  $\frac{\partial^{y+\mu} f}{\partial x^y \partial y^\mu}$  функции  $f$  в  $\Pi_{ab}$  будет иметь место оценка

$$\left| \frac{\partial^{y+\mu} f}{\partial x^y \partial y^\mu} \right| < y! \mu! \frac{M}{r^{y+\mu}}. \quad (5)$$

Доказательство леммы 1 очевидно.

Введем понятие *мажорантной* аналитической функции. Анализическая функция  $f(x, y)$  называется *мажорантной* для аналитической функции  $g(x, y)$  в данной точке  $P(x_0, y_0)$ , если все коэффициенты разложения  $f(x, y)$  в ряд с центром в  $P$  неотрицательны и не меньше абсолютных значений соответствующих коэффициентов разложения в ряд с центром в  $P$  функции  $g(x, y)$ . Анализическая функция  $f(x, y)$  называется *мажорантной* для аналитической функции  $g(x, y)$  в области  $G$ , если она является мажорантной для  $g(x, y)$  в каждой точке  $G$ .

*Замечание 2.* Пусть функция  $f(x, y)$  является аналитической в прямоугольнике  $\Pi_{ab}$ . Из леммы 1 вытекает существование такого  $r$ , что разложение  $f(x, y)$  в степенной ряд с центром в произвольной точке  $P(x_0, y_0)$  прямоугольника  $\Pi_{ab}$  сходится в квадрате с центром в этой точке, со сторонами длины  $2r$  и параллельными сторонами  $\Pi_{ab}$ . При этом из оценки (5) вытекает, что функция  $\frac{M}{(1 - \frac{x-x_0}{r})(1 - \frac{y-y_0}{r})}$  является мажорантной для  $f(x, y)$  в точке  $P(x_0, y_0)$ .

Пусть  $P(x_0, y_0)$  некоторая точка области  $G$ , а  $G^*$  — подобласть области  $G$ , удовлетворяющая следующим условиям: 1)  $G^*$  — односвязна, 2) точка  $P$  принадлежит границе  $G^*$ , 3) любая точка  $G^*$  может быть соединена с  $P$  целиком расположенной (кроме точки  $P$ ) в  $G^*$  гладкой линией с неотрицательным угловым коэффициентом, 4) для каждой точки  $G^*$  разности  $x - x_0$  и  $y - y_0$  неотрицательны.

Легко убедиться в справедливости следующей леммы.

**Лемма 2.** Пусть аналитическая в области  $G$  функция  $f(x, y)$  является мажорантной для аналитической функции  $g(x, y)$  в точке  $P(x_0, y_0)$ . Тогда  $g(x, y)$  является аналитической в области  $G^*$ , а  $f(x, y)$  будет мажорантной функцией для  $g(x, y)$  в области  $G^*$ .

5. Обратимся к системе (4). Каждая из правых частей этой системы имеет вид

$$\begin{aligned} \varepsilon \left[ \left( \sum_{i, k=0}^3 a_{ik}(x, y) u^i v^k \right) u_y + \left( \sum_{i, k=0}^3 b_{ik}(x, y) u^i v^k \right) v_y + \right. \\ \left. + \left( \sum_{i, k=0}^3 c_{ik}(x, y) u^i v^k \right) \right], \end{aligned} \quad (6)$$

где  $a_{ik}$ ,  $b_{ik}$  и  $c_{ik}$  представляют собой аналитические функции в прямоугольнике  $\Pi_{a^*b^*}$ , который содержит  $\Pi_{ab}$ . Пусть  $M$  и  $r$  — числа, указанные в лемме 1 и пригодные для оценки производных каждой из функций  $a_{ik}$ ,  $b_{ik}$  и  $c_{ik}$ \*. Согласно замечанию 2, функция  $M \left( 1 - \frac{x-x_0}{r} \right) \left( 1 - \frac{y-y_0}{r} \right)$  будет мажорантной для любой из функций  $a_{ik}$ ,  $b_{ik}$ ,  $c_{ik}$  в произвольной данной точке  $P(x_0, y_0)$  прямоугольника  $\Pi_{a^*b^*}$ . Поэтому функция

$$A = \frac{M}{\left( 1 - \frac{x-x_0}{r} \right) \left( 1 - \frac{y-y_0}{r} \right)} \sum_{i=0}^3 u^i v^k$$

будет мажорантной для каждой из функций в круглых скобках выражения (6) в точке с координатами  $x = x_0$ ,  $y = y_0$ ,  $u = 0$ ,  $v = 0$ .

Договоримся называть *мажорантной системой для системы* (4) в точке  $x = x_0$ ,  $y = y_0$ ,  $u = 0$ ,  $v = 0$  систему, у которой правые части получаются из правых частей (6) системы (4), заменой в круглых скобках мажорантными в указанной точке функциями. Заметим, что только что введенная функция  $A(u, v, x, y)$  обладает свойством  $A(u, v, x, y) = A(v, u, x, y)$ . Используя это свойство и полагая  $u = v = z$ , легко убедиться, что вместо мажорантной системы для (4) можно рассматривать одно мажорантное уравнение

$$z_x = 2\varepsilon A(z, z, x, y) [z_y + 1]. \quad (7)$$

Далее, так как функция  $\frac{MQc^6}{\left( 1 - \frac{x-x_0}{r} \right) \left( 1 - \frac{y-y_0}{r} \right) \left( 1 - \frac{z}{c} \right)}$  ( $Q$  — некоторая, не зависящая от  $c$  константа), является мажорантной для функции  $A(z, z, x, y)$  в точке  $x = x_0$ ,  $y = y_0$ ,  $z = 0$  при любом значении  $c \geq 1$ , то обращаясь к уравнению (7) и обозначая снова буквой  $M$  константу  $2MQ$ , мы получим нужное нам мажорантное уравнение для системы (4):

$$z_x = \frac{\varepsilon M c^6}{\left( 1 - \frac{x-x_0}{r} \right) \left( 1 - \frac{y-y_0}{r} \right) \left( 1 - \frac{z}{c} \right)} [z_y + 1]. \quad (8)$$

6. В этом пункте мы установим некоторые свойства решений мажорантного уравнения (8). Поскольку эти свойства не зависят от выбора точки  $(x_0, y_0)$ , мы будем считать  $x_0 = y_0 = 0$ . Кроме того, для удобства, положим следующее ограничение на  $r$ :

$$0 < r \leq 1. \quad (9)$$

Пусть  $\delta$  — некоторая фиксированная константа, удовлетворяющая условию

$$0 < \delta \leq \frac{r}{2}. \quad (10)$$

Рассмотрим (8) в области

$$-r + \delta \leq x \leq r - \delta, \quad -r + \delta \leq y \leq r - \delta, \quad |z| < c, \quad (11)$$

где  $c$  — некоторая константа не меньшая единицы (дополнительные ограничения на  $c$  будут выяснены в дальнейшем). Через  $G$  мы обозначим область, определенную неравенствами  $-r + \delta \leq x \leq r - \delta$ ,  $-r + \delta \leq y \leq$

\* Хотя  $c_{ik}$  зависит от  $\varepsilon$ , но для всех значений  $\varepsilon$ , заключенных между нулем и единицей, можно выбрать универсальные  $M$  и  $r$ .

$\leq r - \delta$ . Будем решать задачу Коши для (8) для следующих начальных данных:

$$\text{при } x = 0, y = Y, z = \omega(Y), \quad (12)$$

при этом ограничим область изменения  $Y$  условием

$$0 \leq Y \leq Y_0, \quad Y_0 < r - \delta. \quad (13)$$

Из (10) и (13) вытекает, что число  $\mu$ , определенное соотношением

$$\mu\delta = r - \delta - Y_0, \quad (14)$$

положительно.

Пусть  $G^*$  представляет собой любую фиксированную равнобочную трапецию, большее основание которой совпадает с отрезком  $[0, Y_0]$  оси  $oy$ , а меньшее основание лежит на прямой  $x = r - \delta$ . Обозначим через  $\eta$  модуль углового коэффициента боковой стороны трапеции  $G^*$ . Справедливо следующее утверждение.

**Лемма 3.** Можно указать такие числа  $\varepsilon_0$  и  $c$  ( $0 < \varepsilon_0 < 1, c > 1$ ), что для любого  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$  в замкнутой области  $G^*$  существует решение задачи Коши для уравнения (8) при начальных данных (12).

**Доказательство.** Будем решать указанную задачу Коши методом характеристик. Уравнения характеристик для (8) (при  $x_0 = y_0 = 0$ ) имеют вид

$$dx = -\frac{\left(1 - \frac{x}{r}\right)\left(1 - \frac{y}{r}\right)\left(1 - \frac{z}{c}\right)}{\varepsilon Mc^6} dy = \frac{\left(1 - \frac{x}{r}\right)\left(1 - \frac{y}{r}\right)\left(1 - \frac{z}{c}\right)}{\varepsilon Mc^6} dz. \quad (15)$$

Пусть  $\Delta$  — некоторая положительная константа. Выберем  $c \geq 1$  так, чтобы выполнялось неравенство

$$\min_{0 \leq Y \leq Y_0} [c - \omega(Y)] > 3 + \Delta > 3. \quad (16)$$

Выберем теперь  $\varepsilon_0$ ,  $0 < \varepsilon_0 < 1$ , так, чтобы число  $\alpha = \frac{\varepsilon_0 Mc^7 r^2}{\delta^2}$  было меньше каждого из чисел  $\mu$ ,  $\eta$  и  $\Delta$ . Убедимся, что если  $c$  и  $\varepsilon_0$  выбраны таким образом, то при любом  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ , проекции на плоскость  $oxy$  характеристик рассматриваемой задачи Коши заполняют  $G^*$ . Этим очевидно, и будет завершено доказательство леммы.

Из уравнений (15) следует, что вдоль характеристики, проходящей через точку  $x = 0, y = Y, z = \omega(Y)$ , выполняется соотношение

$$y + z = Y + \omega(Y). \quad (17)$$

Отсюда и из (15) вытекает, что для углового коэффициента проекции  $L$  на плоскость  $oxy$  рассматриваемой характеристики справедлива формула

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\varepsilon Mc^7 r^2}{(r - x)(r - y)[(c - \omega) + (y - Y)]}. \quad (18)$$

Пусть  $L^*$  — часть  $L$ , расположенная в первом квадранте. Убедимся, что  $L^*$  пересекает прямую  $x = r - \delta$ . Для этого рассмотрим треугольник  $\widehat{G}$  с вершиной в точке  $Y$ , с боковыми сторонами на прямых

$$y - Y = \pm \frac{\varepsilon Mc^7 r^2}{\delta^2} x. \quad (19)$$

основанием на прямой  $x = r - \delta$ . Так как в точке  $Y$  модуль углового коэффициента  $L^*$  меньше  $\frac{\varepsilon Mr^7r^2}{\delta^2}$ , то в некоторой окрестности  $Y$  кривая  $L^*$  находится внутри  $\widehat{G}$ . Поэтому линия  $L^*$  либо прекращается во внутренней точке треугольника  $\widehat{G}$ , либо выходит из  $\widehat{G}$  через боковую сторону, либо пересекает основание треугольника  $\widehat{G}$ . Докажем, что имеет место лишь последняя возможность. Пусть точка  $Q(x, y, z)$  характеристики проектируется во внутреннюю точку  $P(x, y)$  треугольника  $\widehat{G}$ . Таким образом, точка  $P$  принадлежит кривой  $L^*$ . Из неравенства  $|x| < r < 1$  соотношения (19) и выбора  $\varepsilon_0$  вытекает, что для точки  $P$  справедливо неравенство

$$|y - Y| < \frac{\varepsilon Mr^7r^2}{\delta^2} < \alpha.$$

В силу выбора  $\alpha$  ( $\alpha < \Delta$ ) из последнего неравенства, соотношения (17) и неравенства (16) имеем, что аппликата  $z$  точки  $Q$  удовлетворяет условию  $|z| < c$ , т. е. точка  $Q$  принадлежит области (11), а следовательно, точка  $Q$  является внутренней точкой рассматриваемой характеристики. Поэтому точка  $P$  будет внутренней точкой кривой  $L^*$ . Иными словами, линия  $L^*$  может прекращаться во внутренней точке треугольника  $\widehat{G}$ . Допустим теперь, что  $L^*$  имеет общую, отличную от  $Y$ , точку с боковой стороной треугольника  $\widehat{G}$ . Но тогда в некоторой внутренней точке треугольника  $\widehat{G}$  модуль углового коэффициента  $L^*$  будет больше  $\frac{\varepsilon Mr^7r^2}{\delta^2}$ . Однако в каждой внутренней точке  $G^*$  действуют оценки  $|r - x| \geq \delta$ ,  $|r - y| \geq \delta$ ,  $|(c - \omega) + (y - Y)| \geq \min(c - \omega) - \max|y - Y| > 1$ , из которых и из (18) вытекает, что модуль углового коэффициента  $L^*$  во внутренней точке  $\widehat{G}$  меньше  $\frac{\varepsilon Mr^7r^2}{\delta^2}$ . Следовательно,  $L^*$  не может выходить через боковую сторону  $\widehat{G}$ . Итак,  $L^*$  пересекает прямую  $x = r - \delta$ . Так как  $\alpha$  меньше модуля углового коэффициента  $\eta$  боковой стороны трапеции  $G^*$ , то линии  $L^*$ , исходящие из точек  $0$  и  $Y_0$  оснований этой трапеции, лежат вне  $G^*$ . Отсюда вытекает, что линии  $L^*$ , исходящие из всех точек основания  $G^*$  покрывают  $G^*$ . Лемма доказана.

Займемся теперь оценками решения  $z$  уравнения (8) и оценкой производной  $z_y$ . Справедлива следующая лемма.

**Лемма 4.** Пусть  $P(x, y)$  — точка трапеции  $G^*$ , расположенная на линии  $L^*$ , исходящей из точки  $Y$  отрезка  $[0, Y_0]$ , а  $z$  — аппликата характеристики, отвечающей  $P$ . Тогда имеют место оценки

$$\begin{aligned} |z| &\leq |\omega(Y)| - \varepsilon \frac{Mr^2c^2}{\delta^2} |x|, \\ |z_y| &\leq |\omega'(Y)| + \varepsilon \frac{2Mc^8r^2}{\delta^2} \left[ 3 + |\omega| + \frac{1}{\delta} + \frac{|\omega'|}{\delta} \right]^2 |x|. \end{aligned} \quad (20)$$

**Доказательство.** Первая из этих оценок вытекает из соотношений (17) и (19).

Перейдем к выводу второй оценки. Любая линия  $L^*$  представляет собой график функции  $y = y(x, Y)$ , которая является решением (18) для начальных данных:  $y = Y$  при  $x = 0$ . Допустим, что соотношение  $y = y(x, Y)$  можно разрешить относительно  $Y$ , так что  $Y = Y(x, y)$ . Тогда

из (17) мы получим следующее выражение для  $z$  как функции точки  $P(x, y)$  из  $G^*$ :

$$z = Y(x, y) + \omega(Y(x, y)) - y. \quad (21)$$

Дифференцируя (21) по  $y$ , найдем

$$z_y = (1 + \omega') \frac{\partial Y}{\partial y} - 1. \quad (22)$$

Из (22) может быть установлена оценка для  $z_y$ , если известна оценка для  $\frac{\partial Y}{\partial y}$ . При этом, в процессе рассуждений мы докажем разрешимость уравнения  $y = y(x, Y)$  относительно  $Y$ .

Подставим в правую и левую части (18) решение  $y = y(x, Y)$ . Продифференцировав полученное тождество по  $Y$  и, воспользовавшись перестановочностью порядков дифференцирования, найдем, что производная  $\frac{dy}{dY}$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial y}{\partial Y} \right) = A \frac{\partial y}{\partial Y} + B, \quad (23)$$

где  $A$  и  $B$  определяются соотношениями

$$\begin{aligned} A &= -\varepsilon \frac{Mc^7r^2 \{[c - \omega] + [y - Y] - (r - y)\}}{(r - x)(r - y)^2 [(c - \omega) + (y - Y)]^2}, \\ B &= -\varepsilon \frac{Mc^7r^2 (1 + \omega')}{(r - x)(r - y) [(c - \omega) + (y - Y)]^2}. \end{aligned} \quad (24)$$

Вдоль линии  $L^*$ , исходящей из точки  $Y$  отрезка  $[0, Y_0]$ , соотношение (23) представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение для  $\frac{dy}{dY}$  с известными коэффициентами  $A$  и  $B$ .

Интегрируя это уравнение вдоль  $L^*$  для начальных данных  $\frac{dy}{dY} = 1$  при  $x = 0$ , получим следующее представление для  $\frac{dy}{dY}$ :

$$\frac{dy}{dY} = e^0 + \int_0^x B e^{t \int_0^t A dt} dt. \quad (25)$$

Из выражения для  $A$  вытекает, что первый член в правой части соотношения (25) имеет вид  $1 + O(\varepsilon) \cdot x$ . Используя выражение для  $B$  и неположительность  $A$ , найдем, что второй член в правой части (25) имеет вид  $O(\varepsilon)x$ . Таким образом, из (25) вытекает

$$\frac{dy}{dY} = 1 + O_1(\varepsilon)x. \quad (26)$$

При этом выражение  $O_1(\varepsilon)$  в (26) мажорируется для малых  $\varepsilon$ , например, следующим образом:

$$|O_1(\varepsilon)| \leq \varepsilon \frac{Mc^8r^2}{\delta^2} \left[ 3 + |\omega| + \frac{1}{\delta} + \frac{|\omega'|}{\delta} \right]. \quad (27)$$

Из (26) и (27) вытекает, что  $\frac{dy}{dY} > 0$  для всех достаточно малых  $\varepsilon$  и поэтому соотношение  $y = y(x, Y)$  можно разрешить относительно  $Y$ . Используя это соображение, легко убедиться в справедливости следующего представления для  $\frac{\partial Y}{\partial y}$ :

$$\frac{\partial Y}{\partial y} = 1 + O_2(\varepsilon)x. \quad (28)$$

При этом выражение  $O_2(\varepsilon)$  в (28) мажорируется для малых  $\varepsilon$ , например, следующим образом:

$$|O_2(\varepsilon)| \leq \varepsilon \frac{2Mc^8r^2}{\delta^2} \left[ 3 + |\omega| + \frac{1}{\delta} + \frac{|\omega'|}{\delta} \right]. \quad (29)$$

Из (22) и (28) получаем представление для  $z_y$

$$z_y = \omega' + O_3(\varepsilon) x. \quad (30)$$

При этом выражение  $O_3(\varepsilon)$  в (30) мажорируется, например, следующим образом:

$$|O_3(\varepsilon)| \leq \varepsilon \frac{2Mc^8r^2}{\delta^2} \left[ 3 + |\omega| + \frac{1}{\delta} + \frac{|\omega'|}{\delta} \right]^2. \quad (31)$$

Из (30) и (31) вытекает вторая из оценок (20).

7. Докажем существование решения системы (4) в прямоугольнике  $\Pi_{a^*b^*}$ . Напомним, что коэффициенты правых частей этой системы заданы в прямоугольнике  $\Pi_{a^*b^*}$ , который содержит  $\Pi_{ab}$ . Справедливо следующее утверждение.

**Лемма 5.** Пусть на левой вертикальной стороне прямоугольника  $\Pi_{a^*b^*}$  указаны произвольные аналитические начальные данные\* для системы (4). Тогда для всех достаточно малых  $\varepsilon$  система (4) имеет в  $\Pi_{ab}$  аналитическое решение. При этом решение и производные решения по  $y$  равнозерно ограничены при  $\varepsilon \rightarrow 0$  в  $\Pi_{ab}$ .

**Доказательство.** 1) **Доказательство существования.** Рассмотрим систему (4) в прямоугольнике  $\Pi_{a^*b^*}$  ( $a^*$  и  $b^*$  — соответственно длины горизонтальной и вертикальной стороны  $\Pi_{a^*b^*}$ ). Согласно пункту 5 уравнение (2) является мажорантным для системы (4) в любой точке с координатами  $x = x_0$ ,  $y = y_0$ ,  $z = 0$  где  $(x_0, y_0)$  — произвольная точка  $\Pi_{a^*b^*}$ . При этом  $0 < \varepsilon \leq 1$ .

Пусть  $u_0(y)$ ,  $v_0(y)$ ,  $0 \leq y \leq b^*$  — аналитические начальные данные задачи Коши для системы (4),  $\rho$  и  $r$  — такие положительные числа, что функция  $\frac{\rho}{1 - \frac{y - y_0}{r}}$  является мажорантной для каждой из функций  $u_0(y)$ ,  $v_0(y)$  в любой данной точке  $y_0$  сегмента  $[0, b^*]$ .

Выберем число  $k$  (меньшее  $\min(\rho, r)/12a^*$ ) столь малым, чтобы прямая, проходящая через любую данную вершину  $\Pi_{a^*b^*}$  и имеющая угловой коэффициент, по модулю равный  $k$ , не имела общих точек с  $\Pi_{ab}$ . Построим равнобочную трапецию  $\Omega$ , боковинам которой служит левая вертикальная сторона  $\Pi_{a^*b^*}$  и модули угловых коэффициентов боковых сторон которой равны  $k$ . Очевидно,  $\Omega$  содержит  $\Pi_{ab}$ . Разделим прямоугольник  $\Pi_{a^*b^*}$  на вертикальные полосы  $i$  равной ширины  $\delta$ , не превосходящей  $\frac{r}{2}$  ( $i$  — номер полосы). Через  $\Omega_i$  обозначим пересечение трапеции  $\Omega$  с полосой  $i$ . Построим в  $\Omega_1$  решение задачи Коши с начальными данными  $u_0(y)$ ,  $v_0(y)$  для системы (4). Для этой цели покроем  $\Omega_1$  квадратами  $Q_{1s}$ , стороны которых параллельны координатным осям и имеют длину  $2r$ , а центры расположены на левой вертикальной стороне  $\Omega_1$  в точках, находящихся друг от друга на равном расстоянии, меньшем  $\frac{1}{4} \min(\rho, r)$  ( $s$  — номер,

\* Начальные данные могут зависеть и от  $\varepsilon$ . При этом требуется, чтобы при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , производные начальных данных удовлетворяли условиям леммы 1 и числа  $M$  и  $r$  не зависели от  $\varepsilon$ .

квадрата, нумерация идет снизу вверх). Обратимся к квадрату  $Q_{11}$ . Рассмотрим в этом квадрате мажорантное уравнение (8) для системы (4) и будем решать это мажорантное уравнение для следующих начальных данных: при  $x = 0, y = Y, z = \omega(Y) = \frac{p}{1 - \frac{y}{\rho}}$ . При этом,  $0 < Y < Y_0 = \frac{1}{2} \min(p, r)$ . Отметим, что эти начальные данные мажорируют в точке  $y = 0$  начальные данные  $u_0(y), v_0(y)$  задачи Коши для системы (4).

В дальнейших рассуждениях используем обозначения и выводы п. 6. Рассмотрим равнобочную трапецию  $G^*$  с большим основанием  $[0, Y_0]$  и с меньшим основанием на правой вертикальной стороне  $\Omega_1$ . Угловой коэффициент  $\eta$  боковой стороны трапеции  $G^*$  подчиним условию  $|\eta| < k$ . Трапецию  $G^*$  будем обозначать  $G_{11}^*$ , ее большее основание —  $q_{11}^*$ , а меньшее —  $q_{21}^*$ . Выберем  $\epsilon_0, c$  и  $\Delta$  так, как указано в доказательстве леммы 6. Тогда согласно этой лемме в  $G_{11}^*$  существует аналитическое решение  $z_{11}(x, y)$  задачи Коши для (8) для указанных выше начальных данных. Известно, что если уравнение (8), мажорантное для системы (4) в данной точке ( $x = y = z = 0$ ), имеет для мажорантных начальных данных решение, то и система (4) имеет в окрестности данной точки решения рассматриваемой задачи Коши, причем указанное выше решение уравнения (8) будет мажорантной функцией для решения системы (4) в точке  $x = y = 0$ <sup>1</sup>. Отсюда и из леммы 2 вытекает, что система (4) имеет в  $G_{11}^*$  решение, определяемое начальными данными  $u_0(y), v_0(y)$ , причем решение  $z_{11}(x, y)$  уравнения (8) будет мажорантной функцией для  $u(xy)$  и  $v(x, y)$  в  $G_{11}^*$ . Отметим, что функция  $z_{11}(x, y)$  будет мажорантной для функций  $u(\delta, y), v(\delta, y)$  на меньшем основании  $g_{21}^*$  трапеции  $G_{11}^*$ .

Проводя совершенно аналогичные рассуждения для любого квадрата  $Q_{1s}$ , мы убедимся в существовании решения задачи Коши для системы (4) для начальных данных  $u_0(y), v_0(y)$  в соответствующей трапеции  $G_{1s}^*$ , причем решение  $z_{1s}(x, y)$  мажорантного уравнения, рассматриваемое на меньшем основании  $g_{2s}^*$  каждой такой трапеции, будет мажорантной функцией для решения (4). Так как трапеции  $G_{1s}^*$  покрывают  $\Omega_1$ , то тем самым доказано существование решения рассматриваемой задачи Коши для системы (4) в  $\Omega_1$ <sup>2</sup>.

Докажем, что при достаточно малом  $\epsilon_0$  построенное решение можно продолжить в  $\Omega_2$ . Обратимся к отрезкам  $g_{2s}^*$ . Эти отрезки покрывают левую вертикальную сторону  $\Omega_2$ . На объединении этих отрезков заданы функции  $u(\delta, y), v(\delta, y)$ <sup>3</sup>. Будем рассматривать эти функции как начальные данные задачи Коши для системы (4). Покроем  $\Omega_2$  квадратами  $Q_{2s}$ , стороны которых параллельны координатным осям и имеют длину  $2r$ , а центры расположены в нижних концах отрезков  $g_{2s}^*$ .

Построим равнобочные трапеции  $G_{2s}^*$ , большими основаниями которых служат отрезки  $g_{2s}^*$ , а меньшие основания  $g_{3s}^*$  расположены на правой вертикальной стороне полосы 2; модуль углового коэффициента боковых

<sup>1</sup> Р. Курант. Уравнения с частными производными. «Мир», М., 1964.

<sup>2</sup> Отметим, что  $\epsilon_0, c, \Delta$  пригодны для любого квадрата  $Q_{1s}$ . Поэтому все трапеции  $G_{1s}^*$  конгруэнтны.

<sup>3</sup>  $u(x, y), v(x, y)$  — только что построенное в  $\Omega_1$  решение задачи Коши для системы (4).

сторон трапеций  $G_{2s}^*$  выберем равным  $\eta$ . Обратимся к квадрату  $Q_{2s}$  и трапеции  $G_{2s}^*$ . На стороне  $g_{2s}^*$  этой трапеции заданы начальные данные  $u(\delta, y), v(\delta, y)$  задачи Коши для (4). Кроме того, на этой же стороне задана функция  $z_{1s}(\delta, y)$ , мажорантная на  $g_{2s}^*$  для  $u(\delta, y), v(\delta, y)$ . Используя первую из оценок (20) в лемме 4, легко убедиться, что путем выбора можно добиться выполнения последнего из неравенств (16) для начальных данных  $z_{1s}(\delta, y)$  мажорантного уравнения (8). Но тогда согласно лемме 3 можно построить решение мажорантного уравнения (8), а следовательно, и решение системы (4) в  $G_{2s}^*$ . Так как трапеции  $G_{2s}^*$  покрывают  $\Omega_2$ , то решение  $u(x, y), v(x, y)$  будет продолжено в  $\Omega_2$ . Повторяя рассуждения, мы продолжим решение во всю область  $\Omega$ . При этом, очевидно, в любой трапеции  $G_{is}^*$  действуют оценки (20).

2) *Равномерная ограниченность решения и его производных в  $\Pi_{ab}$ .* В процессе рассуждений при доказательстве существования решения  $u(x, y), v(x, y)$  задачи Коши для системы (4) в  $\Pi_{ab}$  мы построили трапеции  $C_{is}^*$ , которые покрывают  $\Pi_{ab}$  и в каждой из которых существует решение  $z_{is}(x, y)$  мажорантного уравнения (8), являющегося мажорантной функцией для  $u(x, y), v(x, y)$ . Мы также установили, что в каждой из этих трапеций для  $u(x, y), v(x, y)$  действуют оценки (20) леммы 4. Отсюда вытекает, что решение  $u(x, y), v(x, y)$  и его производные<sup>1</sup> по  $y$  равномерно ограничены по  $x, y$  при  $(x, y) \in \sim \Pi_{ab}$  и  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ . Лемма доказана.

8. Докажем теперь теорему 1. Будем считать, что начальные данные  $u_0(y), v_0(y)$  для системы (4) при любом  $\varepsilon$  ограничены снизу некоторой положительной фиксированной константой<sup>2</sup>. Построим для этих начальных данных при любом  $\varepsilon, 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ , решение  $u(x, y), v(x, y)$  задачи Коши для системы (4) в  $\Pi_{ab}$ . Согласно лемме 5 это решение и его производные  $u, v$  равномерно ограничены в  $\Pi_{ab}$  при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ . Отсюда и из уравнения (4) вытекает, что производные  $u_x$  и  $v_x$  представляют собой в  $\Pi_{ab}$  функции вида  $O(\varepsilon)$ . Но тогда из системы (4) вытекает следующее предположение для  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  в  $\Pi_{ab}$ :  $u(x, y) = u_0(y) + O(\varepsilon), v(x, y) = v_0(y) + O(\varepsilon)$ . Отсюда и из ограниченности  $v_0(y)$  снизу положительной константой следует, что для всех достаточно малых  $\varepsilon$  функция  $v(x, y)$  отлична от нуля во всех точках  $\Pi_{ab}$ . Но тогда, согласно замечанию 1 леммы 3, алгебраически может быть построено  $\Pi_{ab}$  решение системы (2) равнений Петерсона — Кодаци и Гаусса для метрики (1). Теорема 1 доказана.

*Замечание 3.* Более тонкий анализ показывает, что аналитические в метрики вида (1) могут быть реализованы в  $E^3$  посредством аналитических поверхностей, не имеющих самопересечений.

<sup>1</sup> Производные мажорантных функций являются, очевидно, мажорантными для соответствующих производных.

<sup>2</sup> При этом предполагаются выполненные условия, сформулированные в сноске лемме 5.

Поступила 27 мая 1968 г.

## К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ НЕГОЛОНОМНОЙ ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ

*M. P. Роговой* (Харьков)

### 1. Канонический репер

Рассмотрим соответствие в  $n$ -мерном евклидовом пространстве, где каждой точке  $A(u^1, u^2, \dots, u^n)$  пространства отнесена по определенному закону инцидентная ей гиперплоскость  $\alpha$ .

Сопровождающий репер  $AI_1I_2 \dots I_n$  этой системы  $(A, \alpha)$  состоит из  $n-1$  единичных взаимно-ортогональных векторов  $I_1, I_2, \dots, I_{n-1}$ , лежащих в гиперплоскости  $\alpha$  и единичного вектора  $I_n$ , ортогонального этой гиперплоскости.

Бесконечно малое перемещение репера  $AI_1I_2 \dots I_n$  в пространстве

$$\begin{aligned} dA &= \omega^i I_i, & (i, k = 1, 2, \dots, n) \\ dI_i &= \omega_i^k I_k, \end{aligned} \quad (1)$$

определяется компонентами  $\omega^i, \omega_i^k$ , удовлетворяющими условиям

$$\omega_i^k = -\omega_k^i \quad (i, k = 1, 2, \dots, n), \quad (2)$$

и уравнениям структуры евклидова пространства [3,5]

$$\begin{aligned} D\omega^i &= [\omega^j \omega_j^i], & (i, j, k = 1, 2, \dots, n) \\ D\omega_i^k &= [\omega_i^j \omega_j^k]. \end{aligned} \quad (3)$$

Примем  $n$  линейно-независимых форм  $\omega^i, (j = 1, 2, \dots, n)$  за базисные и выразим формы  $\omega_i^k$  через базисные,

$$\omega_i^k = \Gamma_{ij}^k \omega^j \quad (i, j, k = 1, 2, \dots, n). \quad (4)$$

Для бесконечно малых перемещений в гиперплоскости  $\alpha$

$$\omega^n = 0.$$

В случае полной интегрируемости уравнение (5) определяет в точке гиперповерхность с касательной гиперплоскостью  $\alpha$ . Гиперплоскости системгибают в этом случае однопараметрическое семейство гиперповерхностей [1,5].

Если уравнение (5) не вполне интегрируемое, совокупность его интегральных кривых, инцидентных точке  $A$ , образует неголономную гиперповерхность [1,5].

Репер будет каноническим, если векторы  $I_1, I_2, \dots, I_{n-1}$  направит по касательным к линиям кривизны 1-го рода неголономной гиперповерхности.

ности. При этом коэффициенты  $\Gamma_{ij}^n$  будут удовлетворять следующим условиям [5]:

$$\Gamma_{ii}^n + \Gamma_{ii}^n = 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, n-1; i \neq j). \quad (6)$$

Условия полной интегрируемости уравнения (5) в каноническом репере имеют вид [5]

$$\Gamma_{ij}^n = 0, \quad (i, j = 1, 2, \dots, n-1; i \neq j). \quad (7)$$

## 2. Инвариантная коническая поверхность

Переместимся в пространстве из точки  $A$  в бесконечно близкую точку  $A^*$  в направлении  $\omega^1 : \omega^2 : \dots : \omega^n$  и будем искать те направления, для которых нормали  $I_n$  и  $I_n^*$  к гиперплоскостям системы в точках  $A$  и  $A^*$  пересекаются. Для того, чтобы такое пересечение произошло, векторы  $I_n$ ,  $I_n^* = I_n + dI_n$ ,  $dA$  должны лежать в одной двумерной плоскости. Отсюда следует, что векторы  $dI_n$  и  $dA - \omega^n I_n$  должны быть коллинеарны

$$dI_n = \lambda (dA - \omega^n I_n), \quad (8)$$

где  $\lambda$  — скалярный множитель.

Если развернуть условие (8), воспользовавшись (1) и (2), получим следующую систему уравнений:

$$\omega_i^n + \lambda \omega^i = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n-1), \quad (9)$$

или в силу (4)

$$(\Gamma_{ij}^n + \delta/\lambda) \omega^j = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n-1, j = 1, 2, \dots, n). \quad (10)$$

Из однородной системы линейных уравнений (10) следует, что  $\omega^1, \omega^2, \dots, \omega^n$  пропорциональны минорам  $(n-1)$ -го порядка матрицы

$$\begin{vmatrix} \Gamma_{11}^n + \lambda \Gamma_{12}^n & \dots & \Gamma_{1, n-1}^n & \Gamma_{1n}^n \\ \Gamma_{21}^n & \Gamma_{22}^n + \lambda & \dots & \Gamma_{2, n-1}^n & \Gamma_{2n}^n \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \Gamma_{n-1, 1}^n & \Gamma_{n-1, 2}^n & \dots & \Gamma_{n-1, n-1}^n + \lambda \Gamma_{n-1, n}^n & \end{vmatrix} \quad (11)$$

взятым с определенным знаком

$$\omega^i = (-1)^j \Delta_j(\lambda) t, \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad (12)$$

где  $\Delta_j(\lambda)$  — минор  $(n-1)$ -го порядка матрицы (11), который получается вычеркиванием  $j$ -го столбца, он представляет собой многочлен  $(n-1)$ -го порядка для  $j = n$  и  $(n-2)$ -го порядка для  $j = 1, 2, \dots, n-1$  относительно параметра  $\lambda$ ;  $t$  — скалярный множитель.

Уравнение (12) определяют в пространстве двумерную коническую поверхность  $(n-1)$ -го порядка с вершиной в точке  $\bar{A}$ . Эти уравнения, если через  $x^j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) обозначить координаты точки пространства относительно канонического репера, перепишутся так:

$$x^j = (-1)^j \Delta_j(\lambda) t, \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad (13)$$

где  $\lambda$  — параметр, определяющий направление прямолинейной образующей конуса, а  $t$  — параметр, определяющий положение точки на образующей.

Касательная гиперплоскость  $\alpha$  неголомомной гиперповерхности в точке  $A$  ( $x^n = 0$ ), пересекает конус по  $n-1$  образующим, параметры которых  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}$  являются корнями уравнения.

$$\Delta_n(\lambda) = 0, \quad (14)$$

и совпадают с главными кривизнами 2-го рода  $k_1^{(2)}, k_2^{(2)}, \dots, k_{n-1}^{(2)}$  неголономной гиперповерхности. Сами же образующие конуса, принадлежащие касательной гиперплоскости  $\alpha$ , как это следует из системы (10), где положено  $\omega^n = 0$ , направлены по касательным к линиям кривизны 2-го рода неголономной гиперповерхности [5].

Этого и следовало ожидать, так как линии кривизны 2-го рода — это как раз те линии неголономной гиперповерхности, вдоль которых нормали  $I_n$  образуют развертывающуюся поверхность [1].

### 3. Инвариантная дифференциальная форма $D$ и нормальное отклонение системы $(A, \alpha)$

При бесконечно малом перемещении  $AA^*$  вдоль образующей инвариантного конуса вектор  $I_n^* = I_n + dI_n$  лежит в двумерной плоскости векторов  $I_n, dA$ , т. е. в нормальной плоскости неголономной гиперповерхности в направлении  $dA - \omega^n I_n$ . При произвольном перемещении в пространстве, не вдоль образующей конуса, вектор  $I_n^*$  отклонится от этой плоскости на некоторый угол  $d\psi$ . Подсчитаем величину угла.

Спроектируем вектор  $I_n^* = I_n + dI_n$  на двумерную плоскость, определяемую векторами  $I_n, A - \omega^n I_n$ , и пусть его составляющая в данной плоскости, разложенная по этим векторам, равна

$$\mu_1 I_n + \mu_2 (dA - \omega^n I_n).$$

Составляющая вектора  $I_n^*$ , ортогональная этой плоскости, равна

$$I_n^* - \mu_1 I_n - \mu_2 (dA - \omega^n I_n) = (1 - \mu_1) I_n - \mu_2 (dA - \omega^n I_n) + dI_n; \quad (15)$$

умножая (15) скалярно на  $I_n$ , затем на  $dA - \omega^n I_n$ , находим

$$\begin{aligned} \mu_1 &= 1, \\ \mu_2 &= \frac{(dA - \omega^n I_n, dI_n)}{(dA - \omega^n I_n)^2}. \end{aligned} \quad (16)$$

Подставляем найденные значения  $\mu_1$  и  $\mu_2$  в (15), получим

$$\begin{aligned} I_n^* - \mu_1 I_n - \mu_2 (dA - \omega^n I_n) &= \\ = dI_n - \frac{(dA - \omega^n I_n, dI_n)}{(dA - \omega^n I_n)^2} (dA - \omega^n I_n). \end{aligned} \quad (17)$$

Искомое отклонение  $d\psi$  вектора  $I_n^*$  от нормальной плоскости неголономной гиперповерхности в точке  $A$ , определяемой направлением  $dA - \omega^n I_n$ , с точностью до бесконечно малых высшего порядка, равно модулю вектора (17),

$$d\psi^2 = \frac{(dA - \omega^n I_n)^2 \cdot dI_n^2 - (dA - \omega^n I_n, dI_n)^2}{(dA - \omega^n I_n)^2},$$

или в развернутом виде

$$d\psi^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} (\omega^i)^2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} (\omega_i^n)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n-1} \omega^i \omega_i^n\right)^2}{\sum_{i=1}^{n-1} (\omega^i)^2}. \quad (18)$$

Обозначим через  $D$  дифференциальную форму в числителе (18),

$$\begin{aligned} D &= (dA - \omega^n I_n)^2 \cdot dI_n^2 - (dA - \omega^n I_n, dI_n)^2 = \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} (\omega^i)^2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} (\omega_i^n)^2 - \left( \sum_{i=1}^{n-1} \omega^i \omega_i^n \right)^2, \end{aligned} \quad (19)$$

$D$  — инвариантная дифференциальная форма, связанная с системой  $(A, a)$ .

К этой дифференциальной форме  $D$  можно прийти другим путем. При бесконечно малом перемещении  $AA^*$  вдоль образующей инвариантного конуса нормали  $I_n$  и  $I_n^*$  к гиперплоскостям системы пересекаются. При произвольном перемещении из точки  $A$  в бесконечно близкую точку  $A^*$  пространства такого пересечения не произойдет: нормаль  $I_n^*$  отклонится от прежнего положения  $I_n$  на некоторое расстояние. Подсчитаем это расстояние, т. е. длину перпендикуляра  $MM^*$  прямых  $I_n$  и  $I_n^*$ . Имеем

$$M = A + \mu I_n, \quad dM = dA + \mu dI_n + d\mu I_n, \quad (20)$$

вектор  $dM$  перпендикулен к векторам  $I_n$  и  $I_n^* = I_n + dI_n$ , поэтому

$$(dM, I_n) = 0, \quad (dM, dI_n) = 0, \quad (21)$$

или

$$\begin{aligned} (dA, I_n) + \mu &= 0, \\ (dA, dI_n) + \mu dI_n^2 &= 0; \end{aligned} \quad (22)$$

откуда находим

$$\begin{aligned} d\mu &= -\omega^n, \\ \mu &= -\frac{(dA, dI_n)}{dI_n^2} = -\frac{(dA - \omega^n I_n, dI_n)}{dI_n^2}. \end{aligned} \quad (23)$$

из (20) и (23) получаем

$$\vec{MM^*} = dM = (dA - \omega^n I_n) - \frac{(dA - \omega^n I_n, dI_n)}{dI_n^2} dI_n$$

и квадрат искомого расстояния между нормалью  $I_n$  и  $I_n^*$  равен

$$dM^2 = \frac{(dA - \omega^n I_n)^2 \cdot dI_n^2 - (dA - \omega^n I_n, dI_n)^2}{dI_n^2}. \quad (24)$$

Числитель формулы (24) совпадает с дифференциальной формой  $D$  (19).

Отметим следующее. Пусть через точку  $A$  в пространстве проведена произвольная кривая линия. Нормали  $I_n$  к гиперплоскостям системы вдоль этой кривой образуют линейчатую поверхность. Параметр распределения этой линейчатой поверхности

$$p = \frac{\sqrt{D}}{dI_n^2}. \quad (25)$$

Форма  $D$  определяет величину  $d\phi$  отклонения нормали гиперплоскости системы от нормальной плоскости неголономной гиперповерхности при бесконечно малом перемещении в пространстве. Введем следующее определение: отношение квадратного корня из  $D$  к квадрату длины перемещения

$dA^2 = ds^2$  в пространстве назовем нормальным отклонением системы  $(A, a)$  и обозначим его через  $\chi$

$$\chi = \frac{\sqrt{D}}{ds^2} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} (\omega^i)^2 \sum_{j=1}^{n-1} (\omega_j^n)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n-1} \omega^i \omega_i^n\right)^2}}{\sum_{i=1}^{n-1} (\omega^i)^2}. \quad (26)$$

Нормальное отклонение  $\chi$  в данной точке  $A$  зависит от направления перемещения в пространстве.

Вдоль образующих инвариантного конуса нормальное отклонение обращается в нуль; это следует из того, что выполняется условие (8), т. е. векторы  $dI_n$  и  $dA - \omega^n I_n$  коллинеарны и форма  $D$  (19) обращается в нуль. Обратное утверждение также справедливо: обращение в нуль нормального отклонения отвечает перемещению вдоль образующей инвариантного конуса. Это становится очевидным, если по известному тождеству Коши записать форму  $D$  в виде

$$D = \sum_{i,j=1}^{n-1} (\omega^i \omega_j^n - \omega^j \omega_i^n)^2 \quad (i < j). \quad (27)$$

Из (27) следует, что при  $\omega^1 = \omega^2 = \dots = \omega^{n-1} = 0$  форма  $D = 0$ . Это означает, что нормаль  $I_n$  неголономной гиперповерхности является образующей инвариантного конуса.

#### 4. Нормальное отклонение для неголономной гиперповерхности и кручение геодезических линий 1-го рода

Для неголономной гиперповерхности  $\omega^n = 0$ , как следует из (26) и (18), нормальное отклонение

$$\chi = \frac{d\psi}{ds} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} (\omega^i)^2 \cdot \sum_{j=1}^{n-1} (\omega_j^n)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n-1} \omega^i \omega_i^n\right)^2}}{\sum_{i=1}^{n-1} (\omega^i)^2}, \quad (28)$$

т. е. нормальное отклонение при перемещении по неголономной гиперповерхности равно отношению угла отклонения ее нормали от нормальной плоскости, определяемой направлением перемещения, к дифференциальному дуги неголономной гиперповерхности.

Докажем, что кручение геодезической линии 1-го рода неголономной гиперповерхности равно нормальному отклонению для неголономной гиперповерхности в направлении этой геодезической линии.

На неголономной гиперповерхности различают два вида геодезических линий [1].

Геодезическая линия 1-го рода — это линия неголономной гиперповерхности, в каждой точке которой ее главная нормаль совпадает с нормалью к гиперповерхности. Геодезическая линия 2-го рода — это линия на неголономной гиперповерхности, осуществляющая кратчайшее расстояние между двумя ее точками.

Для голономной гиперповерхности геодезические линии 1-го и 2-го рода, как известно, совпадают, для неголономной гиперповерхности, как показал Д. М. Синцов, они различны [1].

Рассмотрим геодезическую линию 1-го рода и будем считать параметром этой линии длину ее дуги  $s$ .

Вектор главной нормали любой кривой на неголономной гиперповерхности  $\omega^n = 0$  направлен по вектору

$$d^2A = d\omega^i I_i + \omega^i dI_i \quad (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

(при использовании формул (1))

$$d^2A = (d\omega^i + \omega^j \omega_j^i) I_i + \omega^i \omega_j^n I_n \quad (i, j = 1, 2, \dots, n-1).$$

Для геодезической линии вектор  $d^2A$  направлен по вектору  $I_n$ , следовательно,

$$d\omega^i + \omega^j \omega_j^i = 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, n-1), \quad (29)$$

то есть дифференциальные уравнения геодезических линий 1-го рода неголономной гиперповерхности.

Таким образом, вдоль геодезической линии

$$d^2A = \omega^i \omega_j^n I_n \quad (j = 1, 2, \dots, n-1), \quad (30)$$

кроме того, из (30) находим

$$d^3A = d(\omega^i \omega_j^n) I_n + \omega^i \omega_j^n dI_n \quad (j = 1, 2, \dots, n-1). \quad (31)$$

Подсчитаем кручение (вторую кривизну [4]) геодезической линии и покажем, что оно выражается через дифференциальную форму  $D$  неголономной гиперповерхности.

Формулы Френе для произвольной кривой линии в  $n$ -мерном пространстве имеют следующий вид [4]:

$$\begin{aligned} \frac{d\tau_1}{ds} &= k_1 \tau_2, \\ \frac{d\tau_2}{ds} &= -k_1 \tau_1 + k_2 \tau_3, \\ \vdots &\vdots \\ \frac{d\tau_i}{ds} &= -k_{i-1} \tau_{i-1} + k_i \tau_{i+1}, \\ \vdots &\vdots \\ \frac{d\tau_{n-1}}{ds} &= -k_{n-2} \tau_{n-2} + k_{n-1} \tau_n, \\ \frac{d\tau_n}{ds} &= -k_{n-1} \tau_{n-1}, \end{aligned} \quad (32)$$

где  $\tau_i$  — единичные векторы сопровождающего репера линии а  $k_i$  —  $i$ -ая кривизна линии в данной точке  $A$ . Нас интересует 2-ая кривизна  $k_2$ , которую будем называть кручением кривой и обозначим через  $\kappa$ . Так как

$$\tau_1 = A', \quad \frac{d\tau_1}{ds} = A'',$$

то из 1-го уравнения (32) находим

$$k_1 = |A''|, \quad \tau_2 = \frac{A''}{|A''|}, \quad (33)$$

и следовательно,

$$\frac{d\tau_2}{ds} = \frac{(A'')^2 A''' - (A'' A''') A''}{|A''|^3}. \quad (34)$$

Из 2-го уравнения (32)

$$\kappa^2 = \left( \frac{d\tau_2}{ds} \right)^2 - k_1^2$$

и в силу (33) и (34)

$$\chi^2 = \frac{(A'')^2 (A''')^2 - (A'')^2 (A'A''')^2 - (A''A''')^2}{\{(A'')^2\}^2}, \quad (36)$$

или в дифференциалах

$$\chi^2 = \frac{dA^2 \{(d^2A)^2 (d^3A)^2 - (d^2A, d^3A)^2\} - (d^2A)^2 (dA, d^3A)^2}{(dA)^2 (d^2A)^2}. \quad (37)$$

Для геодезической линии 1-го рода неголономной гиперповерхности ( $\omega^n = 0$ ) дифференциалы  $d^2A$  и  $d^3A$  вычисляют по формулам (30) и (31). Кроме того,

$$dA|_{\omega^n=0} = dA - \omega^n I_n. \quad (37)$$

Формула (36) после подстановки этих выражений приобретает вид

$$\chi^2 = \frac{(dA - \omega^n I_n)^2 dI_n^2 - (dA - \omega^n I_n, dI_n)^2}{(dA - \omega^n I_n)^2}, \quad (38)$$

или, принимая во внимание (19),

$$\chi = \frac{\sqrt{D}}{ds^2} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} (\omega^i)^2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} (\omega_i^n)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n-1} \omega^i \omega_i^n\right)^2}}{\sum_{i=1}^{n-1} (\omega^i)^2}. \quad (39)$$

Из (26) и (39) следует, что  $\chi = \zeta$ , т. е. для направления на неголономной гиперповерхности нормальное отклонение равно кручению геодезической линии 1-го рода, выходящей в этом направлении.

### 5. Нормальное отклонение для неголономной поверхности

В трехмерном пространстве  $n = 3$  уравнение

$$\omega^3 = 0 \quad (40)$$

каждой точке  $A$  пространства относит инцидентную ей плоскость  $a$  — касательную плоскость к неголономной поверхности, определяемой совокупностью интегральных кривых уравнения (40), проходящих через точку  $A$ . В случае полной интегрируемости уравнения (40), когда выполнено условие

$$\Gamma_{12}^3 = 0, \quad (41)$$

плоскости системы огибают однопараметрическое семейство поверхностей. Уравнения (13) инвариантной конической поверхности записываются так:

$$\begin{aligned} x &= - \begin{vmatrix} \Gamma_{12}^3 & \Gamma_{13}^3 \\ \Gamma_{22}^3 + \lambda \Gamma_{23}^3 & \end{vmatrix} t, \\ y &= \begin{vmatrix} \Gamma_{11}^3 + \lambda \Gamma_{13}^3 & \Gamma_{13}^3 \\ \Gamma_{21}^3 & \Gamma_{23}^3 \end{vmatrix} t, \\ z &= - \begin{vmatrix} \Gamma_{11}^3 + \lambda \Gamma_{12}^3 & \Gamma_{12}^3 \\ \Gamma_{21}^3 & \Gamma_{22}^3 + \lambda \end{vmatrix} t, \end{aligned} \quad (42)$$

где  $x, y, z$  — координаты относительно канонического тетраэдра  $AI_1I_2I_3$ .

Исключая из (42) параметры  $\lambda$  и  $t$ , получим уравнение инвариантного конуса в виде

$$\Gamma_{12}^3 (x^2 + y^2) + (\Gamma_{11}^3 - \Gamma_{22}^3) xy + \Gamma_{13}^3 yz - \Gamma_{23}^3 xz = 0. \quad (43)$$

Уравнение (43) этого конуса можно получить проще из условия компланарности векторов  $dA, J_3 + dJ_3, J_3$ :

$$(dA, dJ_3, J_3) = \omega^1 \omega_2^3 - \omega^2 \omega_1^3 = 0,$$

или в развернутом виде

$$\Gamma_{12}^3 \{(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2\} + (\Gamma_{11}^3 - \Gamma_{22}^3) \omega^1 \omega^3 + \Gamma_{13}^3 \omega^2 \omega^3 - \Gamma_{23}^3 \omega^1 \omega^3 = 0, \quad (44)$$

замена в последнем уравнении  $\omega^1, \omega^2, \omega^3$  соответственно на  $x, y, z$  приводит к уравнению (43).

Касательная плоскость ( $z = 0$ ) неголономной поверхности пересекает конус (43) по касательным к линиям кривизны 2-го рода [5]:

$$\Gamma_{12}^3 (x^2 + y^2) + (\Gamma_{11}^3 - \Gamma_{22}^3) xy = 0. \quad (45)$$

Нормаль  $J_3 (x = 0, y = 0)$  неголономной поверхности принадлежит к образующим этого конуса.

В случае голономности,  $\Gamma_{12}^3 = 0$ , уравнение конуса (43) принимает вид

$$(\Gamma_{11}^3 - \Gamma_{22}^3) xy - \Gamma_{23}^3 xz + \Gamma_{13}^3 yz = 0, \quad (46)$$

а плоскость  $z = 0$  пересекает этот конус по касательным к совпадшим линиям кривизны 1-го и 2-го рода поверхности.

Дифференциальную форму  $D$  для точечно-плоскостной системы получаем из (19) или (27) при  $n = 3$ :

$$D = \{(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2\} \{(\omega_1^3)^2 + (\omega_2^3)^2\} - (\omega^1 \omega_1^3 + \omega^2 \omega_2^3)^2 = \\ = (\omega^2 \omega_1^3 - \omega^1 \omega_2^3)^2, \quad (47)$$

или в развернутом виде, если подставить

$$\begin{aligned} \omega_1^3 &= \Gamma_{11}^3 \omega^1 + \Gamma_{12}^3 \omega^2 + \Gamma_{13}^3 \omega^3, \\ \omega_2^3 &= \Gamma_{21}^3 \omega^1 + \Gamma_{22}^3 \omega^2 + \Gamma_{23}^3 \omega^3, \end{aligned}$$

получим

$$\sqrt{D} = \Gamma_{12}^3 \{(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2\} + (\Gamma_{11}^3 - \Gamma_{22}^3) \omega^1 \omega^3 - \Gamma_{13}^3 \omega^2 \omega^3 - \Gamma_{23}^3 \omega^1 \omega^3. \quad (48)$$

Из (48) следует, что вдоль образующих инвариантного конуса (43) форма  $D$  обращается в нуль.

Нормальное отклонение для произвольного направления  $\omega^1 : \omega^2 : \omega^3$  в пространстве согласно (26) и (48)

$$\chi = \frac{\Gamma_{12}^3 \{(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2\} + (\Gamma_{11}^3 - \Gamma_{22}^3) \omega^1 \omega^2 + \Gamma_{13}^3 \omega^2 \omega^3 - \Gamma_{23}^3 \omega^1 \omega^3}{(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 + (\omega^3)^2}. \quad (49)$$

Для неголономной поверхности,  $\omega^3 = 0$ ,

$$\sqrt{D} = \Gamma_{12}^3 \{(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2\} + (\Gamma_{11}^3 - \Gamma_{22}^3) \omega^1 \omega^2 \quad (50)$$

и представляет собой левую часть уравнения линий кривизны 2-го рода [5].

Нормальное отклонение для направлений на неголономной поверхности, формула (28),

$$\chi = \frac{\Gamma_{12}^3 \{(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2\} + (\Gamma_{11}^3 - \Gamma_{22}^3) \omega^1 \omega^2}{(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2}. \quad (51)$$

Кручение геодезической линии 1-го рода, формула (39),

$$\chi = \frac{\Gamma_{12}^3 [(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2] + (\Gamma_{11}^3 - \Gamma_{22}^3) \omega^1 \omega^2}{(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2}. \quad (52)$$

Из (51) и (52) следует, что

$$\chi = \chi. \quad (53)$$

Для голономной поверхности,  $\Gamma_{12}^3 = 0$ , как известно,

$$\chi = \frac{(\Gamma_{11}^3 - \Gamma_{22}^3) \omega^1 \omega^2}{(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2}, \quad (54)$$

где в числителе (54) — IV дифференциальная форма поверхности, представляющая собой левую часть уравнения линий кривизны [2].

Если за IV дифференциальную форму неголономной поверхности принять левую часть уравнения линий кривизны 2-го рода,

$$IV = \Gamma_{12}^3 [(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2] + (\Gamma_{11}^3 - \Gamma_{22}^3) \omega^1 \omega^2, \quad (55)$$

то из (52) и (53) следует

$$\chi = \chi = \frac{IV}{I}, \quad (56)$$

т. е. для направлений на неголономной поверхности нормальное отклонение равно кручению геодезической линии 1-го рода, идущей в этом направлении, и равно отношению IV дифференциальной формы к I дифференциальной форме неголономной поверхности.

## 6. Главные значения и главные направления нормального отклонения системы ( $A$ , $\chi$ )

Для точечно-плоскостной системы в трехмерном пространстве нормальное отклонение

$$\chi = \frac{\Gamma_{12}^3 [(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2] + (\Gamma_{11}^3 - \Gamma_{22}^3) \omega^1 \omega^2 + \Gamma_{13}^3 \omega^2 \omega^3 - \Gamma_{23}^3 \omega^1 \omega^3}{(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 + (\omega^3)^2}, \quad (57)$$

откуда

$$\begin{aligned} \Gamma_{12}^3 [(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2] + (\Gamma_{11}^3 - \Gamma_{22}^3) \omega^1 \omega^2 + \Gamma_{13}^3 \omega^2 \omega^3 - \Gamma_{23}^3 \omega^1 \omega^3 - \\ - \chi [(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 + (\omega^3)^2] = 0. \end{aligned} \quad (58)$$

Чтобы определить главные значения и главные направления нормального отклонения, дифференцируем (58) последовательно по  $\omega^1$ ,  $\omega^2$ ,  $\omega^3$ , полагая  $\frac{\partial \chi}{\partial \omega^1} = 0$ ,  $\frac{\partial \chi}{\partial \omega^2} = 0$ ,  $\frac{\partial \chi}{\partial \omega^3} = 0$ ,

$$\begin{aligned} 2(\Gamma_{12}^3 - \chi) \omega^1 + (\Gamma_{11}^3 - \Gamma_{22}^3) \omega^2 - \Gamma_{23}^3 \omega^3 = 0, \\ (\Gamma_{11}^3 - \Gamma_{22}^3) \omega^1 + 2(\Gamma_{12}^3 - \chi) \omega^2 + \Gamma_{13}^3 \omega^3 = 0, \\ -\Gamma_{23}^3 \omega^1 + \Gamma_{13}^3 \omega^2 - 2\chi \omega^3 = 0. \end{aligned} \quad (59)$$

Приравнивая нулю определитель системы (59)

$$\begin{vmatrix} 2(\Gamma_{12}^3 - \chi) & \Gamma_{11}^3 - \Gamma_{22}^3 & -\Gamma_{23}^3 \\ \Gamma_{11}^3 - \Gamma_{22}^3 & 2(\Gamma_{12}^3 - \chi) & \Gamma_{13}^3 \\ -\Gamma_{23}^3 & \Gamma_{13}^3 & -2\chi \end{vmatrix} = 0, \quad (60)$$

получаем уравнение третьей степени относительно  $\chi$ , корни которого  $\chi_1, \chi_2, \chi_3$  — главные значения нормального отклонения. При этих значениях  $\chi$ , система (59), определяет три направления в пространстве  $\omega^1 : \omega^2 : \omega^3$ , ( $i = 1, 2, 3$ ) — главные направления нормального отклонения системы  $(A, \alpha)$ .

Определитель системы (59) симметричен, и поэтому уравнение (60) имеет только действительные корни, а главные направления системы  $(A, \alpha)$  взаимно ортогональны. Более того, нетрудно установить по числу перемен знаков в коэффициентах уравнения (60), что оно имеет не менее одного и не более двух положительных корней.

Для неголономной поверхности,  $\omega^3 = 0$ , нормальное отклонение

$$\chi = \frac{\Gamma_{12}^3 \{(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2\} + (\Gamma_{11}^3 - \Gamma_{22}^3) \omega^1 \omega^2}{(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2}, \quad (61)$$

или

$$(\Gamma_{12}^3 - \chi) \{(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2\} + (\Gamma_{11}^3 - \Gamma_{22}^3) \omega^1 \omega^2 = 0. \quad (62)$$

Главные значения (здесь они экстремальные) и отвечающие им главные направления определяются из системы

$$\begin{aligned} 2(\Gamma_{12}^3 - \chi) \omega^1 + (\Gamma_{11}^3 - \Gamma_{22}^3) \omega^2 &= 0, \\ (\Gamma_{11}^3 - \Gamma_{22}^3) \omega^1 + 2(\Gamma_{12}^3 - \chi) \omega^2 &= 0, \end{aligned} \quad (63)$$

откуда экстремальные значения нормального отклонения

$$\chi = \Gamma_{12}^3 \pm \frac{\Gamma_{11}^3 - \Gamma_{22}^3}{2}, \quad (64)$$

и достигаются они в направлениях

$$\omega^1 = \pm \omega^2, \quad (65)$$

т. е. в направлениях биссектрис углов, образованных касательными к линиям кривизны 1-го и 2-го рода неголономной поверхности. Известно, что биссектрисы у этих углов общие [1].

## 7. Индикатриса нормальных отклонений

Рассмотрим всевозможные направления в пространстве  $\omega^1 : \omega^2 : \omega^3$ , выходящие из точки  $A$ . Индикатриса нормальных отклонений системы  $(A, \alpha)$  определяется как геометрическое место точек  $M$  пространства, для которых отрезок  $AM = \frac{1}{\sqrt{|\chi|}}$ , где  $\chi$  — нормальное отклонение в направлении  $AM$ .

Координаты точки  $M(x, y, z)$  относительно канонического тетраэдра  $AI_1I_2I_3$ :

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{|\chi|}} \cdot \frac{\omega^1}{\sqrt{(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 + (\omega^3)^2}}, \\ y &= \frac{1}{\sqrt{|\chi|}} \cdot \frac{\omega^2}{\sqrt{(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 + (\omega^3)^2}}, \\ z &= \frac{1}{\sqrt{|\chi|}} \cdot \frac{\omega^3}{\sqrt{(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 + (\omega^3)^2}}; \end{aligned} \quad (66)$$

и уравнение индикатрисы нормальных отклонений системы  $(A, \alpha)$ , как следует из (57) и (66), представляет собой поверхность 2-го порядка:

$$\Gamma_{12}^3 (x^2 + y^2) + (\Gamma_{11}^3 - \Gamma_{22}^3) xy + \Gamma_{13}^3 yz - \Gamma_{23}^3 xz = \pm 1. \quad (67)$$

Знак в правой части (67) определяется знаком  $\chi$ , будем считать  $\chi > 0$ , если при перемещении в точку  $A^* = A + dA$  векторы  $dA, I_3, I_3^*$  образуют

левую систему и  $\chi < 0$ , если эти векторы образуют правую систему.

Из свойства корней уравнения (60) следует, что индикатриса (67) — это два (однополостный и двухполостный) гиперболоида. Инвариантный конус (43) — асимптотический конус индикатрисы.

Уравнение индикатрисы нормальных отклонений для неголономной поверхности получим из (67) при  $z = 0$ :

$$\Gamma_{12}^3 (x^2 + y^2) (\Gamma_{11}^3 - \Gamma_{22}^3) xy = \pm 1; \quad (68)$$

она представляет собой эллипс или пару сопряженных гипербол, асимптоты которых совпадают с касательными к линиям кривизны 2-го рода (45). Оси индикатрисы, как следует из (65), направлены по биссектрисам углов, образованных касательными к линиям кривизны 1-го (или 2-го) рода.

В случае голономной поверхности,  $\Gamma_{12}^3 = 0$ , линии кривизны 1-го и 2-го рода совпадают, индикатриса (68) представляет собой в этом случае пару сопряженных равнобочных гипербол, асимптотами которых являются касательные к линиям кривизны поверхности.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Д. М. Сипцов. Свойства системы интегральных кривых Пфаффова уравнения в  $n$ -мерсменных. Известия АН СССР. Отделение математических и естественных наук, серия VII, № 10(1931), 1275—1294.
2. В. Ф. Каган. Основы теории поверхностей, ч. I. ОГИЗ, М.—Л., 1947.
3. С. П. Фиников. Метод внешних форм Картана. ОГИЗ, М., 1948.
4. Б. А. Розенфельд. Многомерные пространства. «Наука», М., 1966.
5. М. Р. Роговой. К метрической теории неголономных гиперповерхностей в  $n$ -мерном пространстве. «Украинский геометрический сборник», вып. 5—6. Изд-во ХГУ, Харьков, 1968, 127—139.

Поступила 4 января 1968 г.

## О КРИВИЗНЕ И КРУЧЕНИИ НЕГОЛОННОМНОЙ ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ

M. P. Роговой (Харьков)

## 1. Канонический репер. Соприкасающаяся гиперповерхность

Канонический репер  $AI_1I_2\dots I_n$  неголономной гиперповерхности построен следующим образом [7]:  $A$  — точка гиперповерхности, векторы  $I_1, I_2, \dots, I_{n-1}$  направлены по касательным к линиям кривизны 1-го рода, а вектор  $I_n$  — по нормали к гиперповерхности.

Деривационные формулы канонического репера имеют вид

$$\begin{aligned} dA &= \omega^i I_i, \\ dI_i &= \omega_i^k I_k, \quad (i, k = 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \quad (1)$$

Компоненты бесконечно малого перемещения репера,  $\omega^i, \omega_i^k$ , удовлетворяют уравнениям структуры евклидова пространства [1, 6]:

$$\begin{aligned} D\omega^i &= [\omega^j \omega_j^k], \\ D\omega_i^k &= [\omega_i^j \omega_j^k], \quad (i, j, k = 1, 2, \dots, n); \end{aligned} \quad (2)$$

и, кроме того,

$$\omega_i^k = -\omega_k^i \quad (i, k = 1, 2, \dots, n). \quad (3)$$

За базисные приняты формы  $\omega^1, \omega^2, \omega^3$ :

$$\omega_i^k = \Gamma_{ij}^k \omega^j, \quad (i, j, k = 1, 2, \dots, n). \quad (4)$$

Уравнение неголономной гиперповерхности

$$\omega^n = 0. \quad (5)$$

Если условия полной интегрируемости этого уравнения

$$\Gamma_{ij}^n = 0, \quad (i, j = 1, 2, \dots, n-1; i \neq j) \quad (6)$$

выполнены, оно определяет голономную гиперповерхность [3, 7],  $\Gamma_{ij}^n$  — характеристики неголономности.

Для неголономной поверхности в трехмерном пространстве Е. Бомпиани показал, что кривые, инцидентные точке  $A$ , в окрестности 2-го порядка этой точки расположены на голономной поверхности [5]. Это утверждение обобщается на случай неголономной гиперповерхности в  $n$ -мерном пространстве [7]: кривые неголономной гиперповерхности, инцидентные точке  $A$ , расположены в окрестности 2-го порядка этой точки на голономной гиперповерхности. Эта голономная гиперповерхность, имеющая общую окрестность 2-го порядка с неголономной гиперповерхностью, названа соприкасающейся гиперповерхностью [7]. При таком определении в рассматриваемой точке  $A$

неголономной гиперповерхности может быть построено бесчисленное множество соприкасающихся гиперповерхностей: любое однопараметрическое семейство интегральных кривых уравнения (5), инцидентных точке  $A$ , образует соприкасающуюся гиперповерхность. Очевидно, в точке  $A$  неголономной гиперповерхности все соприкасающиеся гиперповерхности имеют общую окрестность 2-го порядка.

Возникает вопрос, как совместить этот результат с известными фактами расщепления свойств неголономной гиперповерхности уже в окрестности 2-го порядка? Такое расщепление свойств происходит в силу того, что в бесконечно близкой к  $A$  точке  $A^*$  касательные гиперплоскости к неголономной и соприкасающейся гиперповерхностям не совпадают.

В трехмерном пространстве понятие соприкасающейся поверхности, образованной пучком геодезических линий неголономной поверхности, ввел еще Роджерс. Соприкасающиеся  $m$ -мерные геодезические поверхности для многомерных неголономных многообразий рассматривал В. В. Вагнер [4].

## 2. О кручении неголономной гиперповерхности

Понятие кручения неголономной гиперповерхности вводится путем следующего дифференциально-геометрического построения [7]. В точке  $A$  рассматривается соприкасающаяся гиперповерхность. В бесконечно близкой точке  $A^*$  нормали к неголономной и соприкасающейся гиперповерхностям не совпадают и образуют угол  $d\varphi$ . Квадрат отношения этого угла  $d\varphi$  к дифференциальному дуги  $ds$  неголономной гиперповерхности назван кручением  $\kappa$  неголономной гиперповерхности в точке  $A$  [7]:

$$\kappa = \left( \frac{d\varphi}{ds} \right)^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} (\Gamma_{ij}^n \omega^j)^2}{\sum_{i=1}^{n-1} (\omega^i)^2} \quad (j = 1, 2, \dots, n-1; i \neq j). \quad (7)$$

Как видно из (7), кручение  $\kappa$  зависит только от характеристик неголономности  $\Gamma_{ij}^n$  в точке  $A$  и от направления на неголономной гиперповерхности. В случае голономности все  $\Gamma_{ij}^n = 0$  и кручение  $\kappa = 0$ .

Доказано, что для нечетного  $n$  в точке  $A$  неголономной гиперповерхности имеется  $m = \frac{n-1}{2}$  попарно ортогональных двухмерных плоскостей таких, что для любого направления, выходящего из точки  $A$  и лежащего в данной двумерной плоскости, кручение неголономной гиперповерхности сохраняет постоянное значение. Для четного  $n$  в точке  $A$  имеется  $m = \frac{n}{2} - 1$  таких двумерных плоскостей и одно направление с нулевым кручением. Для неголономной поверхности в трехмерном пространстве кручение не зависит от направления на поверхности и, как следует из (7),  $\kappa = (\Gamma_{12}^3)^2$  [7].

Покажем теперь, что к изучению вопроса о кручении неголономной гиперповерхности возможен другой подход, такой же как для пространства евклидовой связности [1; 6]. В силу результатов, изложенных в пункте 1, на неголономной гиперповерхности существует бесконечно малый замкнутый контур, расположенный в окрестности точки  $A$ : можно представить, что этот контур проведен на соприкасающейся гиперповерхности, построенной в точке  $A$ .

Подсчитаем геометрическую сумму векторов  $dA$  при обходе такого бесконечно малого контура:

$$\Delta A = \oint dA. \quad (8)$$

Для голономной гиперповерхности  $dA$  — полный дифференциал, и интеграл (8) равен нулю. Для неголономной гиперповерхности этот интеграл не равен нулю: преобразуем его в двойной интеграл по поверхности [1, 6]:

$$\begin{aligned} \Delta A &= \iint D(dA) = \iint D(\omega^i I_i) = \iint D\omega^i I_i + [dI_i \omega^i] = \\ &= \iint [D\omega^i - [\omega^j \omega^i_j]] I_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \quad (9)$$

Из уравнений структуры (2), при условии  $\omega^n = 0$ , следует, что коэффициенты при векторах  $I_i$ , за исключением коэффициента при векторе  $I_n$ , обращаются в нуль; учитывая (4), получаем окончательно\*

$$\Delta A = - \iint [\omega^j \omega^n_j] I_n = -2 \iint \Gamma_{jk}^n [\omega^j \omega^k] I_n, \quad (j, k = 1, 2, \dots, n-1, j < k). \quad (10)$$

Формула (10) показывает, что бесконечно малому контуру в окрестности точки  $A$  неголономной гиперповерхности отвечает бесконечно малая трансляция в направлении нормали  $I_n$ . Эта трансляция зависит от характеристик неголономности  $\Gamma_{jk}^n$ , определяющих кручение  $\times$  неголономной гиперповерхности в точке  $A$ .

Для неголономной поверхности в трехмерном пространстве формула (10) приобретает вид

$$\Delta A = -2 \iint \Gamma_{12}^3 [\omega^1 \omega^2] I_3 = -2 \iint V \times dS I_3, \quad (11)$$

где  $dS$  — элемент площади неголономной поверхности.

Легко заметить, что трансляция, определяемая формулой (10), является суммой  $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$  трансляций, отвечающих элементарным двумерным площадкам  $dS_{jk} = [\omega^j \omega^k]$ :

$$\Delta A = -2 \iint \Gamma_{jk}^n dS_{jk} I_n, \quad (j, k = 1, 2, \dots, n-1; j < k). \quad (12)$$

### 3. О кривизне неголономной гиперповерхности

На неголономной гиперповерхности различают два вида линий кривизны и главных кривизн [3, 7].

Главные кривизны 1-го рода, отвечающие линиям кривизны 1-го рода,

$$k_i^1 = -\Gamma_{ii}^n \quad (i = 1, 2, \dots, n-1). \quad (13)$$

Главные кривизны 2-го рода, отвечающие линиям кривизны 2-го рода и определяемые как корни уравнения,

$$|\Gamma_{ij}^n + \delta_{ij}^k|_{ij=1}^{n-1} = 0. \quad (14)$$

Понятие полной кривизны неголономной гиперповерхности также расщепляется. Полная кривизна 1-го рода

$$K^{(1)} = (-1)^{n-1} \Gamma_{11}^n \Gamma_{22}^n \dots \Gamma_{n-1, n-1}^n, \quad (15)$$

полная кривизна 2-го рода

$$K^{(2)} = (-1)^{n-1} |\Gamma_{ii}^n|_{ij=1}^{n-1}. \quad (16)$$

Установлено, что полная кривизна 2-го рода неголономной гиперповерхности совпадает с ее гауссовой кривизной [2, 7].

Проведем теперь бесконечно малый замкнутый контур в окрестности точки  $A$  неголономной гиперповерхности и осуществим вдоль этого контура параллельный перенос вектора

$$\xi = \xi^i I_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n-1). \quad (17)$$

Уравнения параллельного переноса вектора  $\xi$  в бесконечно малой окрестности точки  $A$  неголономной гиперповерхности находятся, как обычно, из условия коллинеарности вектора

$$d\xi = (d\xi^k + \xi^i \omega_i^k) I_k + \xi^i \omega_i^n I_n, \quad (i, k = 1, 2, \dots, n-1), \quad (18)$$

вектору нормали  $I_n$ :

$$d\xi^k + \xi^i \omega_i^k = 0, \quad (i, k = 1, 2, \dots, n-1). \quad (19)$$

Геометрическое приращение вектора  $\xi$  при обходе бесконечно малого контура

$$\Delta \xi = \oint d\xi. \quad (20)$$

Из (18) и (19) следует, что при параллельном переносе вектора  $\xi$

$$d\xi = \xi^i \omega_i^n I_n, \quad (i = 1, 2, \dots, n-1), \quad (21)$$

и следовательно,

$$\Delta \xi = \oint \xi^i \omega_i^n I_n, \quad (i = 1, 2, \dots, n-1). \quad (22)$$

Преобразуем этот криволинейный интеграл в интеграл по поверхности [1; 6]:

$$\begin{aligned} \Delta \xi &= \iint D(\xi^i \omega_i^n I_n) = \iint D(\xi^i \omega_i^n) I_n + [dI_n, \xi^i \omega_i^n] = \iint \{\xi^i D\omega_i^n + \\ &+ [d\xi^i, \omega_i^n]\} I_n + [\xi^i \omega_i^n, \omega_j^n I_j], \quad (i, j = 1, 2, \dots, n-1). \end{aligned} \quad (23)$$

В силу уравнений параллельного переноса (19) и уравнений структуры (2), коэффициент при  $I_n$  обращается в нуль и, окончательно,

$$\Delta \xi = \iint [\omega_i^n \omega_j^n] (\xi^i I_i - \xi^j I_j), \quad (i, j = 1, 2, \dots, n-1; i < j). \quad (24)$$

Формула (24) определяет приращение  $\Delta \xi$ , которое получает вектор  $\xi$  при параллельном переносе по замкнутому бесконечно малому контуру. Это приращение, как и в случае пространства евклидовой связности [1, 6], является геометрической суммой  $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$  приращений, отвечающих составляющим  $[\omega_i^n \omega_j^n]$  полного поворота вектора  $\xi$  при обходе контура, что позволяет полный поворот вектора  $\xi$  рассматривать как сумму  $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$  составляющих поворотов, определяемых системой бивекторов

$$[\omega_i^n \omega_j^n] [I_i I_j] \quad (i, j = 1, 2, \dots, n-1, i < j). \quad (25)$$

Для неголономной поверхности в трехмерном пространстве полный поворот вектора  $\xi$  определяется бивектором

$$[\omega_1^3 \omega_2^3] [I_1 I_2] = \{\Gamma_{11}^3 \Gamma_{22}^3 + (\Gamma_{12}^3)^2\} [\omega^1 \omega^2] I_3;$$

принимая во внимание (16), формула (24) приобретает вид

$$\Delta \xi = \iint K^{(2)} [\xi^i I_i] dS, \quad (26)$$

где  $dS$  — элемент площади неголономной поверхности. Угол поворота  $d\theta$  вектора  $\xi$  при обходе замкнутого бесконечно малого контура, когда контур стягивается к точке  $A$ , определяется полной кривизной 2-го рода неголономной поверхности:

$$d\theta = K^{(2)} dS. \quad (27)$$

Это следует из (26), если подсчитать угол между векторами  $\xi$  и  $\Delta\xi$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. E. Cartan. Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée. Ann. de l'Ecole Normale, t. 40 (1923), 325—412.
2. Я. П. Бланк. Связь между гауссовой кривизной и линиями кривизны 2-го рода системы интегральных кривых уравнений Пфаффа. Сообщения ХМО, том II, (1928), 75—76.
3. Д. М. Синцов. Свойства системы интегральных кривых Пфаффова уравнения в  $n$  переменных. Изв. АН СССР, отделение математических и естественных наук, серия VII, № 10, (1931), 1275—1294.
4. В. В. Вагнер. Дифференциальная геометрия неголономных многообразий. В книге «VIII международный конкурс на соискание премии им. Н. И. Лобачевского», Казань, (1937), 197—262.
5. E. Vompiani. Sulle varietà anolonomie. Rend. dei Lincei, V. XXVII, F. 6, (1938).
6. Э. Картан. Пространства аффинной, проективной и конформной связности. Изд-во КГУ, Казань, 1962.
7. М. Р. Роговой. К метрической теории неголономных гиперповерхностей в  $n$ -мерном пространстве. Украинский геометрический сборник, вык. 5—6, Изд-во ХГУ, Харьков, (1968), 127—139.

Поступила 27 мая 1968 г.

**ОБ ОДНОЗНАЧНОМ ОПРЕДЕЛЕНИИ ВЫПУКЛОЙ ПОВЕРХНОСТИ  
МЕТРИКОЙ И ПОВОРОТАМИ ДУГ КРИВЫХ**

E. П. Сенькин (Харьков)

**Теорема.** Выпуклая поверхность однозначно определяется метрикой и вариациями поворотов дуг кривых, лежащих на ней. Аналогичный результат сложным путем установлен в работе К. Радзишевского\*.

В настоящей заметке дается простое доказательство этого утверждения.

**Лемма.** Пусть  $L$  — плоская выпуклая кривая с концами  $A$  и  $B$ , а  $L^*$  — пространственная кривая с концами  $A^*$ ,  $B^*$ .

Пусть между  $L$  и  $L^*$  установлено изометрическое соответствие, причем соответствующие дуги  $L$  и  $L^*$  имеют одинаковые вариации поворотов, тогда  $r(A, B) \leq r(A^*, B^*)$ , где  $r$  — расстояние в пространстве.

Для простоты будем считать, что поворот кривой  $L$  не больше  $\pi$ . Проведем из точки  $A^*$  лучи во все точки кривой  $L^*$  и развернем полученный конус на плоскость. Кривая  $L^*$  перейдет в некоторую кривую  $\bar{L}$ . При этом поворот каждой дуги кривой  $\bar{L}$  будет, очевидно, не больше поворота соответствующей дуги кривой  $L^*$ , а расстояние  $r(A^*, B^*)$  не изменится.

Предположим, что  $r(A^*, B^*) < r(A, B)$ .

Направим ось  $x$  по хорде  $AB$ . Перенесем  $\bar{L}$  так, чтобы точки  $A^*$  и  $A$  и полукасательные в них совместились. Имеем

$$r(A, B) = \int_0^l \cos \alpha(s) ds,$$

$$r(A^*, B^*) = \int_0^l \cos \bar{\alpha}(s) ds,$$

где  $\alpha(s)$  и  $\bar{\alpha}(s)$  — углы между правыми полукасательными и осью  $x$ . Следовательно,

$$\int_0^l [\cos \alpha(s) - \cos \bar{\alpha}(s)] ds > 0.$$

Так как  $\alpha(s)$  и  $\bar{\alpha}(s)$  отличаются от поворотов дуг кривых  $L$  и  $\bar{L}$  на угол между полукасательными и осью  $x$  в точках  $A$  и  $A^*$ , который в обоих случаях один и тот же, то найдется такое значение  $s^*$ , что поворот дуги кривой  $\bar{L}$  будет больше поворота соответствующей дуги на  $L$ .

\* K. Radziszewski. Sur une condition de coïncidence des surfaces convexes isométriques. Ann. polon. math., 15, № 2, 1964, 167—177.

Докажем теорему. Пусть  $F_1$  и  $F_2$  — изометричные выпуклые поверхности, у которых соответствующие по изометрии дуги кривых имеют одинаковую вариацию поворота в пространстве. Очевидно, достаточно доказать, что они совпадают локально.

Пусть  $G_1$  и  $G_2$  — достаточно малые соответствующие по изометрии окрестности на  $F_1$  и  $F_2$ . Пусть  $x_1, y_1$  и  $x_2, y_2$  — соответствующие по изометрии пары точек в этих областях, а  $r(x_1, y_1)$  и  $r(x_2, y_2)$  — расстояния между ними в пространстве. Если  $r(x_1, y_1) \equiv r(x_2, y_2)$ , то области  $G_1$  и  $G_2$  равны. В противном случае найдутся пары точек  $x_1, y_1$  и  $x_2, y_2$ , для которых, например,  $r(x_1, y_1) < r(x_2, y_2)$ .

Проведем через точки  $x_2, y_2$  плоское сечение, получим плоскую выпуклую кривую  $L_2$  на поверхности  $F_2$ . Пусть  $L_1$  — соответствующая кривая на  $F_1$ . Очевидно, она будет кривой ограниченной вариации поворота в пространстве, так как в силу изометрии будет иметь правый (левый) поворот ограниченной вариации.

Кривые  $L_1$  и  $L_2$  не могут иметь одинаковые вариации поворота. Действительно, если вариации равны, то дуга  $L_1$  получается из плоской выпуклой дуги  $L_2$  «скручиванием». Но тогда, согласно лемме, расстояние между концами ее  $x_1, y_1$  может только увеличиваться, что противоречит неравенству

$$r(x_1, y_1) < r(x_2, y_2).$$

*Замечание.* Из приведенного доказательства видно, что не обязательно требовать равенство вариаций поворота любых соответствующих дуг кривых на  $F_1$  и  $F_2$ . Достаточно, чтобы для любой пары точек, принадлежащих  $G_1$  и  $G_2$ , существовало плоское сечение, такое, что соответствующая дуга на второй поверхности имела ту же вариацию поворота.

Поступила 30 мая 1968 г.

## УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ

$$\det \| z_{ik} \| = \varphi$$

*E. P. Сенькин* (Харьков)

Для модуля решения линейного эллиптического уравнения

$$\sum a_{ik} z_{ik} = \varphi(x_1, \dots, x_n)$$

А. Д. Александровым [1] получена следующая оценка:

$$|z| < C(D) \sqrt{\int_D \frac{\varphi}{a} dx_1 \dots dx_n}, \quad (1)$$

где  $D$  — ограниченная область изменения переменных  $x_1, \dots, x_n$ ,  $a = \det \| a_{ik} \|$ ,  $C(D)$  — постоянная, зависящая от размеров области. Ю. А. Волковым [2] получена оценка изменения решения для эллиптического уравнения  $\det \| z_{ik} \| = \varphi$ .

В работе [3] показано, что, используя оценку (1), можно получить изменения модуля решения уравнения

$$rt - s^2 = \varphi(x, y) > 0.$$

В настоящей заметке эта задача решается для случая  $n$ -переменных.

Рассмотрим в ограниченной области  $D$  изменения переменных  $x_1, \dots, x_n$  уравнение

$$\det \| z_{ik} \| = \varphi(x_1, \dots, x_n).$$

Будем считать, что квадратичная форма с коэффициентами  $z_{ik}$  — положительно определенная.

Пусть  $z^1$  и  $z^2$  — дважды дифференцируемые решения уравнения (2), обращенные выпуклостью в сторону  $z < 0$ . Обозначим

$$f^1 = \det \| z_{ik}^1 \|, \quad f^2 = \det \| z_{ik}^2 \|,$$

$$\Delta z = z^2 - z^1, \quad z^\tau = (1 - \tau) z^1 + \tau z^2 \quad (0 \leq \tau \leq 1).$$

Тогда

$$f^2 - f^1 = \int_0^1 \frac{df^\tau}{d\tau} d\tau = \int_0^1 \sum \frac{\partial f^\tau}{\partial z_{ik}^*} \Delta z_{ik} d\tau = \sum \frac{\partial f^*}{\partial z_{ik}^*} \Delta z_{ik},$$

где  $*$  обозначены значения функций для некоторого  $0 < \tau^* < 1$ . Но

$$\sum \frac{\partial f^*}{\partial z_{ik}^*} \Delta z_{ik} = \sum A_{ik}^* \Delta z_{ik},$$

где  $A_{ik}^*$  — алгебраические дополнения определителя при  $\tau = \tau^*$ . Следовательно,

$$\sum A_{ik}^* \Delta z_{ik} = \varphi_2 - \varphi_1.$$

Имеем

$$\det \| A_{ik}^* \| = \det \| z_{ik}^* \|^{n-1}.$$

Но, как показано в [4],

$$\sqrt[n]{\det \| z_{ik}^* \|} \geq (1 - \tau^*) \sqrt[n]{\det \| z_{ik}^1 \|} + \tau^* \sqrt[n]{\det \| z_{ik}^2 \|},$$

откуда заключаем, что  $\det \| A_{ik}^* \| > \text{const} > 0$ .

Применяя к (3) оценку (1), найдем

$$|z^2 - z^1| < C_1(D) \sqrt[n]{\int_D |\varphi_2 - \varphi_1|^n dx_1 \dots dx_n}.$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. Д. Александров. Некоторые оценки, касающиеся задачи Дирихле. ДАН СССР, 134, 5, 1960.
2. Ю. А. Волков. Оценка изменения решения уравнения вида  $f(z_1, \dots, z_n) \det \| z_{ik} \| = h(x_1, \dots, x_n)$  в зависимости от изменения правой части уравнения. Вестник ЛГУ, 13. Изд-во ЛГУ, Л., 1960.
3. Е. П. Селькин. К вопросу об устойчивости решений уравнений эллиптического типа. «Укр. геометр сб.», вып. 6. Изд-во ХГУ, 1968 г.
4. А. Д. Александров. К теории смешанных объемов выпуклых тел. Матем. сб., 3 (45): 1, 1938.

Поступила 30 мая 1968 г.

**ОБ ОДНОМ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОМ СВОЙСТВЕ  
ВПОЛНЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ  
ПЯТИМЕРНОГО РИМАНОВА ПРОСТРАНСТВА**

Ю. С. Слободян (Харьков)

Вполне геодезической поверхностью  $k$  измерений  $R_k$   $n$ -мерного риманова пространства  $R_n$  называется такая поверхность, геодезические линии которой совпадают с геодезическими линиями пространства.

Пусть линейный элемент риманова пространства в точке  $M$  определяется числами  $g_{\alpha\beta}$  ( $\alpha, \beta = 1, \dots, n$ ). Под пространством  $k$ -тензоров  $E_N$ , касательным к риманову в точке  $M$  будем понимать пространство  $C^k$  измерений  $E_N$  кососимметрических тензоров  $p$  размерности  $k$ , линейный элемент которого дается числами

$$g_{i_1 \dots i_k j_1 \dots j_k} = |g_{i_\epsilon j_m}| (e, m = 1 \dots, k).$$

Под пространством  $k$ -векторов, касательным к риманову в точке  $M$  будем понимать конус  $(n-k)k+1$  измерений в пространстве  $E_N$ , заданный системой уравнений [4],

$$p^{i_1 \dots i_k p j_1 \dots j_k} = 0.$$

Пусть  $k$ -мерная площадка, касательная к вполне геодезической поверхности в точке  $M$ , дается  $k$ -вектором  $p$ . В настоящей работе доказано, что компоненты  $k$ -вектора ( $k = 2, 3$ ) есть главные направления некоторой поверхности второго порядка  $\Phi_k$ , построенной в пространстве  $k$ -векторов, касательном к риманову в точке  $M$ .

Работа состоит из двух параграфов. В § 1 рассматриваются двумерные вполне геодезические поверхности пятимерного риманова пространства. В § 2 рассматриваются трехмерные поверхности пятимерного пространства. В этом же параграфе вводится понятие кривизны трехмерного пространства по трехмерной площадке как сумма кривизн пространства по двумерным площадкам.

**§ 1. Характеристическое свойство  
двумерных вполне геодезических поверхностей  
пятимерного риманова пространства**

**Теорема 1.** Пусть через точку  $M$  пятимерного риманова пространства  $R_5$  проходит двумерная поверхность  $F_2$  и пусть касательная площадка к поверхности  $F_2$  задана бивектором  $p$ . Если поверхность  $F_2$  — вполне геодезическая, то в пространстве бивекторов, касательном к риманову в точке  $M$ , существует конечное число поверхностей второго порядка  $\Phi_2$ , таких, что бивектор  $p$  есть главное направление одной из поверхностей  $\Phi_2$ .

В некоторой специальной системе координат уравнение  $\Phi_2$  имеет вид

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} p^{\alpha\beta} p^{\gamma\delta} - t_1 (p^{12} p^{34} - p^{13} p^{24} + p^{14} p^{23}) - t_2 (p^{12} p^{35} - p^{13} p^{25} + p^{15} p^{23}) - t_3 (p^{12} p^{45} - p^{14} p^{25} + p^{15} p^{24}) = 1,$$

где  $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$  — компоненты тензора Римана пространства  $R_5$ , числа  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $t_3$  определяются из следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned}\Delta &= 0, \\ \Delta_{\alpha[\beta} \Delta_{\gamma\delta]} &= 0,\end{aligned}$$

где  $\Delta = 0$  — характеристическое уравнение поверхности  $\Phi_2$ ,  $\Delta_{\alpha\beta}$  — алгебраические дополнения элементов фиксированной строки определителя  $\Delta$ .

**Доказательство.** Пусть в пространстве  $R_5$  введены координаты  $y^\alpha$  ( $\alpha = 1, \dots, 5$ ), на поверхности  $F_2$  — координаты  $x^i$  ( $i = 1, 2$ ). Для того, чтобы поверхность  $F_2$  была вполне геодезической, необходимо и достаточно, чтобы в каждой ее точке выполнялись следующие условия [3 стр. 196]:

$$\begin{aligned}R_{\alpha\beta\gamma\delta} y_{,i}^\alpha y_{,j}^\beta y_{,k}^\gamma y_{,l}^\delta &= \bar{R}_{ijkl}, \\ R_{\alpha\beta\gamma\delta} y_{,i}^\alpha y_{,j}^\beta y_{,k}^\gamma \xi_\tau^\delta &= 0 \\ (\alpha, \beta, \gamma, \delta &= 1, \dots, 5; i, j, k, l = 1, 2; \tau = 3, 4, 5),\end{aligned}\tag{1}$$

где  $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$  — компоненты тензора Римана, составленные для метрики пространства,  $\bar{R}_{ijkl}$  — компоненты тензора Римана, составленные для метрики поверхности,  $\xi_\tau^\delta$  — компоненты вектора, ортогонального к поверхности.

Условия (1) — это условия интегрируемости системы дифференциальных уравнений, определяющих вполне геодезические поверхности. Вследствие антисимметричности тензора Римана по первым двум и последним двум индексам этим условиям можно придать следующий вид:

$$\begin{aligned}R_{\alpha\beta\gamma\delta} p^{\alpha\beta} p^{\gamma\delta} &= \bar{R}_{1212}, \\ R_{\alpha\beta\gamma\delta} p^{\alpha\beta} q^{\gamma\delta} &= 0,\end{aligned}\tag{2}$$

где  $p^{\alpha\beta}$  — компоненты бивектора  $\bar{p}$ , определяющего площадку, касательную к поверхности  $F_2$ ;  $q^{\gamma\delta}$  — компоненты бивектора  $\bar{q}$ , построенного на векторах  $a_1$  и  $a_2$ ; вектор  $a_1$  лежит в касательной площадке к поверхности  $F_2$ , вектор  $a_2$  ортогонален ей.

Найдем компоненты бивектора  $\bar{q}$  как функции компонент бивектора  $\bar{p}$ . Сначала выберем базисные вектора бивектора  $\bar{p}$  следующим образом:

$$\begin{aligned}e_1(p^{12}, 0, p^{32}, p^{42}, p^{52}), \\ e_2\left(0, 1, \frac{p^{13}}{p^{12}}, \frac{p^{14}}{p^{12}}, \frac{p^{15}}{p^{12}}\right).\end{aligned}$$

Вектор  $a_1$  раскладывается по векторам  $e_1$  и  $e_2$  или

$$a_1 \left( p^{12}, \lambda_1, p^{32} + \lambda_1 \frac{p^{13}}{p^{12}}, p^{42} + \lambda_1 \frac{p^{14}}{p^{12}}, p^{52} + \lambda_1 \frac{p^{15}}{p^{12}} \right).$$

Выберем в пространстве  $R_5$  координаты таким образом, чтобы в  $M$

$$g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}.$$

Компоненты тривектора  $\bar{p}$ , ортогонального бивектору  $\bar{p}$ , при этом условии имеют вид

$$\bar{p}(p^{45}, p^{53}, p^{34}, p^{25}, p^{42}, p^{23}, p^{51}, p^{14}, p^{31}, p^{12}),$$

Базисными векторами тривектора  $\bar{p}$  могут быть следующие векторы:

$$\begin{aligned}\xi_1 & \left( p^{45}, 0, 0, p^{51}, p^{14} \right), \\ \xi_2 & \left( 0, 1, 0, \frac{p^{52}}{p^{45}}, \frac{p^{24}}{p^{45}} \right), \\ \xi_3 & \left( 0, 0, 1, \frac{p^{53}}{p^{45}}, \frac{p^{34}}{p^{45}} \right).\end{aligned}\quad (3)$$

Таким образом,

$$a_2 \left( p^{45}, \lambda_2, \lambda_3, p^{51} - \lambda_2 \frac{p^{25}}{p^{45}} + \lambda_3 \frac{p^{53}}{p^{45}}, p^{12} - \lambda_2 \frac{p^{42}}{p^{45}} + \lambda_3 \frac{p^{34}}{p^{45}} \right).$$

Компоненты бивектора  $q$  имеют вид:

$$\begin{aligned}q^{12} &= p^{12}\lambda_2 - \lambda_1 p^{45}, \\ q^{13} &= p^{12}\lambda_3 - p^{45} \left( p^{32} + \lambda_1 \frac{p^{13}}{p^{12}} \right), \\ q^{14} &= p^{12} \left( p^{51} + \lambda_2 \frac{p^{52}}{p^{45}} + \lambda_3 \frac{p^{53}}{p^{45}} \right) - p^{45} \left( p^{42} + \lambda_1 \frac{p^{14}}{p^{12}} \right), \\ q^{15} &= p^{12} \left( p^{14} + \lambda_2 \frac{p^{24}}{p^{45}} + \lambda_3 \frac{p^{34}}{p^{45}} \right) - p^{45} \left( p^{52} + \lambda_1 \frac{p^{15}}{p^{12}} \right), \\ q^{23} &= \lambda_1 \lambda_3 - \lambda_2 \left( p^{32} + \lambda_1 \frac{p^{13}}{p^{12}} \right), \\ q^{24} &= \lambda_1 \left( p^{51} + \lambda_2 \frac{p^{52}}{p^{45}} + \lambda_3 \frac{p^{53}}{p^{45}} \right) - \lambda_2 \left( p^{42} + \lambda_1 \frac{p^{14}}{p^{12}} \right), \\ q^{25} &= \lambda_1 \left( p^{14} + \lambda_2 \frac{p^{24}}{p^{45}} + \lambda_3 \frac{p^{34}}{p^{45}} \right) - \lambda_2 \left( p^{52} + \lambda_1 \frac{p^{15}}{p^{12}} \right), \\ q^{34} &= \left( p^{32} + \lambda_1 \frac{p^{13}}{p^{12}} \right) \left( p^{51} + \lambda_2 \frac{p^{52}}{p^{45}} + \lambda_3 \frac{p^{53}}{p^{45}} \right) - \lambda_3 \left( p^{42} + \lambda_1 \frac{p^{14}}{p^{12}} \right), \\ q_{35} &= \left( p^{32} + \lambda_1 \frac{p^{13}}{p^{12}} \right) \left( p^{14} + \lambda_2 \frac{p^{24}}{p^{45}} + \lambda_3 \frac{p^{34}}{p^{45}} \right) - \lambda_3 \left( p^{52} + \lambda_1 \frac{p^{15}}{p^{12}} \right), \\ q_{45} &= \left( p^{42} = \lambda_1 \frac{p^{14}}{p^{12}} \right) \left( p^{14} + \lambda_2 \frac{p^{42}}{p^{45}} + \lambda_3 \frac{p^{24}}{p^{45}} \right) - \\ &\quad - \left( p^{52} + \lambda_1 \frac{p^{15}}{p^{12}} \right) \left( p^{51} + \lambda_2 \frac{p^{52}}{p^{45}} + \lambda_3 \frac{p^{53}}{p^{45}} \right).\end{aligned}\quad (4)$$

Подставляя компоненты  $q^{\gamma\delta}$  в уравнение (2) и обозначая  $R_{\alpha\beta\gamma\delta} p^{\alpha\beta} = A_{\gamma\delta}$ , получим

$$\begin{aligned}-A_{12}p^{45}p^{12} - A_{13}p^{45}p^{13} - A_{14}p^{45}p^{14} - A_{15}p^{45}p^{15} - A_{24}p^{51}p^{12} + \\ + A_{25}p^{14}p^{12} + A_{34}p^{13}p^{51} + A_{35}p^{14}p^{13} + A_{45}(p^{142} + p^{152}) = 0, \\ A_{12}p^{12}p^{45} - A_{14}p^{12}p^{25} - A_{15}p^{12}p^{42} - A_{23}p^{32}p^{45} - A_{24}p^{42}p^{45} - \\ - A_{25}p^{52}p^{45} - A_{34}p^{32}p^{25} - A_{35}p^{42}p^{32} - A_{45}(p^{422} + p^{252}) = 0, \\ -A_{13}p^{45}p^{32} + A_{14}(p^{12}p^{51} - p^{45}p^{42}) + A_{15}(p^{12}p^{14} - p^{45}p^{52}) + \\ + A_{34}p^{32}p^{51} + A_{35}p^{32}p^{14} + A_{45}(p^{42}p^{14} - p^{52}p^{51}) = 0, \\ A_{13}p^{12}p^{45} + A_{14}p^{12}p^{53} + A_{15}p^{12}p^{34} + A_{34}(p^{32}p^{53} - p^{42}p^{45}) + \\ + A_{35}(p^{32}p^{24} - p^{52}p^{45}) + A_{45}(p^{42}p^{34} - p^{52}p^{53}) = 0, \\ -A_{23}p^{13}p^{45} - A_{24}(p^{25}p^{12} + p^{14}p^{45}) - A_{25}(p^{42}p^{12} + p^{15}p^{45}) - \\ - A_{34}p^{13}p^{25} - A_{35}p^{13}p^{42} - A_{45}(p^{14}p^{42} - p^{15}p^{25}) = 0, \\ A_{23}p^{12}p^{45} + A_{24}p^{53}p^{12} + A_{25}p^{34}p^{12} + \\ + A_{34}(p^{13}p^{53} - p^{14}p^{45}) + A_{35}(p^{13}p^{34} - p^{15}p^{45}) + \\ + A_{45}(p^{14}p^{34} - p^{15}p^{53}) = 0,\end{aligned}\quad (5)$$

Решим эту систему уравнений, считая известными  $A_{34}$ ,  $A_{35}$ ,  $A_{45}$ . Определитель ее  $\Delta$  имеет вид

$$\Delta = \begin{vmatrix} -p^{12}p^{45} & -p^{45}p^{13} & -p^{15}p^{14} - p^{45}p^{15} & 0 & p^{51}p^{13} & p^{14}p^{12} \\ p^{12}p^{45} & 0 & -p^{12}p^{25} - p^{12}p^{42} - p^{32}p^{45} & -p^{42}p^{45} - p^{52}p^{45} \\ 0 & -p^{45}p^{32} & a^1 & a^2 & 0 & 0 \\ 0 & p^{12}p^{45} & p^{12}p^{53} & p^{12}p^{34} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -p^{13}p^{45} & -a^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p^{12}p^{45} & p^{53}p^{12} \\ p^{12} & p^{13} & p^{14} & p^{15} & p^{23} & p^{24} \\ & & & & & p^{25} \end{vmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} a^1 &= p^{12}p^{51} - p^{45}p^{42}, \\ a^2 &= p^{12}p^{14} - p^{45}p^{52}, \\ a^3 &= p^{25}p^{12} - p^{45}p^{14}, \\ a^4 &= p^{42}p^{12} + p^{15}p^{45}, \\ a^5 &= p^{42}p^{14} - p^{52}p^{51}, \\ a^6 &= p^{32}p^{35} - p^{42}p^{45}, \\ a^7 &= p^{32}p^{34} - p^{52}p^{45}, \\ a^8 &= p^{42}p^{34} - p^{52}p^{53}, \\ a^9 &= -p^{13}p^{35} - p^{14}p^{45}, \\ a^{10} &= p^{13}p^{34} - p^{15}p^{45}, \\ a^{11} &= p^{14}p^{34} - p^{15}p^{53}, \end{aligned}$$

или

$$\Delta = -p^{12} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & p^{23}p^{45} & a^1 & a^2 \\ -p^{13}p^{45} & a^3 & a^4 & 0 & 0 & 0 \\ -p^{45}p^{32} & a^1 & a^2 & 0 & 0 & 0 \\ p^{12}p^{45} & p^{12}p^{53} & p^{12}p^{34} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p^{13}p^{45} & -a^3 & -a^4 \\ 0 & 0 & 0 & p^{12}p^{45} & p^{53}p^{12} & p^{34}p^{12} \end{vmatrix}.$$

Определитель  $\Delta$  можно разложить по определителям третьего порядка. После разложения получим

$$\Delta = -p^{12}p^{45} \begin{vmatrix} -p^{13}p^{45} - (p^{12}p^{25} + p^{14}p^{45}) & -(p^{12}p^{42} + p^{15}p^{45}) \\ -p^{32}p^{45} & p^{12}p^{51} - p^{45}p^{42} \\ p^{12}p^{45} & p^{53}p^{12} \end{vmatrix}^2.$$

Вынесем из первого столбца  $p^{54}$ , а из последней строчки  $p^{12}$ , преобразуем оставшийся определитель, получим

$$\Delta = -p^{12}p^{45} \begin{vmatrix} p^{53}p^{13} - p^{12}p^{25} - p^{14}p^{45} & p^{34}p^{13} - p^{12}p^{42} - p^{15}p^{45} \\ p^{53}p^{32} + p^{12}p^{51} - p^{45}p^{42} & p^{34}p^{32} + p^{12}p^{14} - p^{45}p^{52} \end{vmatrix}^2.$$

Или, так как  $p^{a^3}$  есть компоненты бивектора,

$$\begin{aligned} \Delta &= -p^{12}p^{45} [p^{53}p^{13} (+p^{34}p^{32} + p^{12}p^{14} - p^{45}p^{52}) - \\ &\quad - p^{12}p^{25} (p^{34}p^{32} + p^{12}p^{14}) - p^{14}p^{45} (p^{34}p^{32} + \\ &\quad + p^{12}p^{14} - p^{45}p^{52}) + p^{53}p^{32} (p^{12}p^{42} + p^{15}p^{45}) - \\ &\quad - p^{12}p^{51} (p^{34}p^{13} - p^{12}p^{42} - p^{15}p^{45}) + p^{45}p^{42} (p^{34}p^{13} - p^{12}p^{42} - p^{15}p^{45})] = \\ &= -p^{12}p^{45} (\sum_{(a^3)} p^{a^3})^2. \end{aligned}$$

Найдем  $A_{13}$ . Соответствующий определитель  $\Delta_{13}$  имеет вид

$$\Delta_{13} = \begin{vmatrix} -p^{12}p^{34} & A_1 & -p^{45}p^{14} & -p^{45}p^{15} & p^{51}p^{12} & 0 & p^{14}p^{12} \\ p^{12}p^{34} & A_2 & -p^{12}p^{25} & -p^{12}p^{42} & -p^{42}p^{45} & -p^{32}p^{45} & -p^{52}p^{45} \\ 0 & A_3 & a^1 & a^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_4 & p^{12}p^{53} & p^{12}p^{34} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_5 & 0 & 0 & a^3 & -p^{13}p^{45} & a^4 \\ 0 & A_6 & 0 & 0 & p^{53}p^{12} & p^{12}p^{45} & p^{34}p^{12} \\ p^{12} & A_7 & p^{14} & p^{15} & p^{24} & p^{23} & p^{25} \end{vmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= -A_{34}p^{13}p^{51} - A_{35}p^{14}p^{13} - A_{45}(p^{14^2} + p^{15^2}), \\ A_2 &= A_{34}p^{32}p^{25} + A_{35}p^{42}p^{32} + A_{45}(p^{42^2} + p^{25^2}), \\ A_3 &= -A_{34}p^{32}p^{51} + A_{35}p^{32}p^{14} + A_{45}a^5, \\ A_4 &= -A_{34}a^6 - A_{35}a^7 - A_{45}a^8, \\ A_5 &= A_{34}p^{13}p^{25} + A_{35}p^{13}p^{42} + A_{45}a^5, \\ A_6 &= -A_{34}a^9 - A_{35}a^{10} - A_{45}a^{11}, \\ A_7 &= -A_{34}p^{34} - A_{35}p^{35} + K \sum_{(a^2)} p^{a^2} - A_{45}p^{45}. \end{aligned}$$

Или

$$\Delta_{13} = -p^{12} \begin{vmatrix} A'_1 & 0 & 0 & p^{23}p^{15} & a^1 & a^2 \\ A'_2 & -a^3 & -a^4 & 0 & 0 & 0 \\ A'_3 & a^1 & a^2 & 0 & 0 & 0 \\ A'_4 & p^{12}p^{53} & p^{12}p^{34} & 0 & 0 & 0 \\ A'_5 & 0 & 0 & -p^{13}p^{45} & -a^3 & -a^4 \\ A'_6 & 0 & 0 & p^{12}p^{45} & p^{53}p^{12} & p^{34}p^{12} \end{vmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} A'_1 &= A_{34}(p^{13}p^{51} + p^{34}p^{45}) - A_{35}(p^{14}p^{13} + p^{35}p^{45}) - \\ &\quad - A_{45}(p^{14^2} + p^{15^2} + p^{45^2}) + p^{45} K \sum_{(a^2)} p^{a^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A'_2 &= A_{34}(p^{32}p^{25} + p^{34}p^{45}) + A_{35}(p^{42}p^{32} + p^{35}p^{45}) + \\ &\quad + A_{45}(p^{42^2} + p^{25^2} + p^{45^2}) - Kp^{45} \sum_{(a^2)} p^{a^2}; \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \Delta_{13} &= p^{12}p^{45} \sum_{(a^2)} p^{2\beta^2} (A_{34}\Delta_{13}^{34} + A_{35}\Delta_{13}^{35} + \\ &\quad + A_{45}\Delta_{13}^{55} - K \sum_{(a^2)} p^{a^2} \cdot p^{45} \cdot \Delta_{13}^{(K)}), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_{13}^{34} &= \begin{vmatrix} p^{32}p^{25} + p^{34}p^{45} & -(p^{12}p^{25} + p^{14}p^{45}) & -(p^{12}p^{12} + p^{15}p^{45}) \\ -p^{32}p^{51} & p^{12}p^{51} - p^{45}p^{42} & p^{12}p^{14} - p^{45}p^{32} \\ -(p^{32}p^{53} - p^{42}p^{45}) & p^{12}p^{53} & p^{12}p^{34} \end{vmatrix}, \\ \Delta_{13}^{35} &= \begin{vmatrix} p^{42}p^{32} + p^{35}p^{45} & -(p^{12}p^{25} + p^{14}p^{45}) & -(p^{12}p^{42} + p^{15}p^{45}) \\ -p^{32}p^{14} & p^{12}p^{51} - p^{45}p^{42} & p^{12}p^{14} - p^{45}p^{52} \\ -(p^{32}p^{34} - p^{52}p^{45}) & -p^{12}p^{35} & p^{12}p^{34} \end{vmatrix}, \\ \Delta_{13}^{45} &= \begin{vmatrix} p^{42^2} + p^{25^2} + p^{45^2} & p^{12}p^{25} + p^{14}p^{45} & -(p^{12}p^{42} + p^{15}p^{45}) \\ -(p^{42}p^{14} - p^{52}p^{51}) & p^{12}p^{51} - p^{45}p^{42} & p^{12}p^{14} - p^{45}p^{52} \\ -(p^{42}p^{34} - p^{52}p^{53}) & -p^{12}p^{35} & p^{12}p^{34} \end{vmatrix}, \\ \Delta_{13}^{(K)} &= \begin{vmatrix} p^{12}p^{51} - p^{45}p^{42} & p^{12}p^{14} - p^{45}p^{52} \\ p^{53} & p^{34} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Вычислим определитель  $\Delta_{13}^{34}$ . Последний столбец этого определителя умножим на  $\frac{p^{53}}{p^{34}}$  и результат вычтем из предпоследнего;

умножим последний столбец на  $\frac{p^{32}p^{33} - p^{42}p^{45}}{p^{12}p^{34}}$  и сложим с первым. При этом получим

$$\Delta_{13}^{34} = p^{24}p^{45} \sum_{(\alpha\beta)} p^{\alpha\beta^2}. \quad (6)$$

Аналогично

$$\Delta_{13}^{35} = p^{25}p^{45} \sum_{(\alpha\beta)} p^{\alpha\beta^2}, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{13}^{45} &= 0, \\ \Delta_{13}^{(K)} &= -(p^{12}p^{13} - p^{24}p^{42} + p^{53}p^{52}). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$A_{13}p^{12} = -p^{24}A_{34} - p^{25}A_{35} + K(p^{12}p^{13} - p^{34}p^{42} + p^{53}p^{52}).$$

Аналогично

$$\begin{aligned} A_{14}p^{12} &= A_{34}p^{23} - A_{45}p^{25} - K(p^{12}p^{14} - p^{23}p^{34} - p^{52}p^{45}), \\ A_{15}p^{12} &= A_{35}p^{23} + A_{45}p^{24} + K(p^{12}p^{15} - p^{23}p^{35} - p^{42}p^{54}), \\ A_{24}p^{12} &= -A_{34}p^{13} + A_{45}p^{15} - K(p^{12}p^{24} + p^{13}p^{34} + p^{51}p^{45}), \\ A_{25}p^{12} &= A_{34}p^{14} + A_{35}p^{15} + K(p^{12}p^{23} - p^{34}p^{14} - p^{35}p^{15}), \\ A_{25}p^{12} &= -A_{35}p^{13} - A_{45}p^{14} + K(p^{12}p^{25} + p^{13}p^{35} + p^{41}p^{54}). \end{aligned} \quad (8)$$

Подставляя значения  $A_{13}, \dots, A_{25}$  в систему (5) и учитывая систему  $p^{\alpha\beta}p^{\gamma\delta} = 0$ , получим

$$A_{12}p^{12} = A_{34}p^{34} + A_{35}p^{35} + A_{45}p^{45} + K(p^{12^2} - p^{34^2} - p^{35^2} - p^{45^2}).$$

Введем обозначение

$$\begin{aligned} A_{34} - Kp^{34} &= t_{34}p^{12}, \\ A_{35} - Kp^{35} &= t_{35}p^{12}, \\ A_{45} - Kp^{45} &= t_{45}p^{12}. \end{aligned} \quad (9)$$

В этих обозначениях система (8) примет вид:

$$\begin{aligned} A_{12} - Kp^{12} &= t_{34}p^{34} + t_{35}p^{35} + t_{45}p^{45}, \\ A_{13} - Kp^{13} &= -t_{34}p^{24} - t_{35}p^{25}, \\ A_{14} - Kp^{14} &= t_{34}p^{23} - t_{45}p^{25}, \\ A_{15} - Kp^{15} &= t_{35}p^{23} + t_{45}p^{24}, \\ A_{23} - Kp^{23} &= t_{34}p^{14} + t_{35}p^{15}, \\ A_{24} - Kp^{24} &= -t_{34}p^{13} + t_{45}p^{15}, \\ A_{25} - Kp^{25} &= -t_{35}p^{13} - t_{45}p^{14}. \end{aligned} \quad (10)$$

Таким образом, система уравнений (5) свелась к решению системы (9) (10) и условий

$$p^{\alpha\beta}p^{\gamma\delta} = 0. \quad (11)$$

Решаем дальше систему (9, 10, 11). Систему уравнений (9, 10) можно рассматривать как линейную однородную систему уравнений относительно переменных  $p^{\alpha\beta}$ , считая  $K, t_{\mu\nu}$  ( $\mu, \nu = 3, 4, 5$ ) параметрами. Для того, чтобы она имела решение, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель  $\Delta$  был равен нулю. В уравнение  $\Delta = 0$  войдут компоненты тензора Римана,

вычисленные для метрики пространства, величина  $K$  — внутренняя кривизна вполне геодезической поверхности и параметры  $t_{\mu\nu}$ . Решение системы (9, 10) имеет вид

$$p^{\alpha\beta} = \pm \sqrt{\frac{\bar{R}_{1212}}{K}} \frac{\Delta_{\alpha\beta}}{\sqrt{\sum_{(\gamma\delta)} \Delta_{\gamma\delta}^2}},$$

где  $\Delta_{\alpha\beta}$  — минор элемента  $p_{\alpha\beta}$  в определителе  $\Delta$ . Подставляя значения  $p^{\alpha\beta}$  в систему (11), получим

$$\Delta_{\alpha[\beta}\Delta_{\gamma\delta]} = 0. \quad (12)$$

Среди уравнений (12) только три независимы. Они и определяют параметры  $t_{\mu\nu}$ . Не ограничивая общности, можно считать, что в точке  $M$

$$\sum_{(\alpha\beta)} p^{\alpha\beta} = 1,$$

тогда

$$K = \bar{R}_{1212}.$$

При этом условии систему (9—10) можно рассматривать как систему, определяющую главные направления следующей поверхности второго порядка:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} p^{\alpha\beta} p^{\gamma\delta} - 2t_{34}(p^{12}p^{34} - p^{13}p^{24} + p^{14}p^{23}) - 2t_{35}(p^{12}p^{35} - p^{25}p^{13} + p^{23}p^{15}) - 2t_{45}(p^{12}p^{45} - p^{25}p^{14} + p^{24}p^{15}) = 1. \quad (13)$$

*Замечание.* При решении условий интегрируемости мы пользовались специальными координатами на плоскости, определяемой тензором  $p$ . Однако, как нетрудно убедиться, при выборе координат произвольным другим способом мы получили бы ту же поверхность второго порядка.

## §2. Характеристическое свойство трехмерных вполне геодезических поверхностей

**Теорема.** Пусть через точку  $M$  пятимерного риманова пространства  $R_5$  проходит трехмерная поверхность  $F_3$ , и пусть трехмерная евклидова площадка, касательная к поверхности  $F_3$ , задана тривектором  $p$ . Если поверхность  $F_3$  вполне геодезическая, то в пространстве тривекторов, касательном к риманову в точке  $M$  существует конечное число поверхностей второго порядка  $\Phi_3$  таких, что тривектор  $p$  есть главное направление одной из поверхностей  $\Phi_3$ .

В специальной системе координат поверхность  $\Phi_3$  имеет вид

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} p^{\alpha\beta} p^{\gamma\delta} - t_1(p^{123}p^{145} + p^{124}p^{153} + p^{125}p^{134}) - t_2(p^{234}p^{215} + p^{231}p^{245} + p^{235}p^{241}) - t_3(p^{345}p^{312} + p^{341}p^{325} + p^{342}p^{351}) = 1. \quad (14)$$

Параметры  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $t_3$  определяются из следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned} \Delta &= 0, \\ \Delta_{\alpha\beta[\gamma}\Delta_{\delta\varphi\varphi]} &= 0, \end{aligned}$$

где  $\Delta = 0$  — характеристическое уравнение поверхности  $\Phi_3$ ;  $\Delta_{\alpha\beta\gamma}$  — алгебраическое дополнение элементов фиксированной строки определителя  $\Delta$ .

**Доказательство.** Условия интегрируемости (1) для трехмерных вполне геодезических поверхностей имеют вид

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}y_{,l}^{\alpha}y_{,j}^{\beta}y_{,k}^{\gamma}y_{,l}^{\delta} = -R_{ijkl}, \quad (15)$$

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}y_{,l}^{\alpha}y_{,j}^{\beta}y_{,k}^{\gamma}y_{,l}^{\delta} = 0$$

$$(\alpha\beta\gamma\delta = 1, \dots, 5; i, j, k, l = 1, 2, 3; \tau = 4, 5).$$

Придадим условиям (15) удобный для дальнейших рассуждений вид.

Вследствие антисимметричности тензора  $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$  условия (15) можно переписать следующим образом:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}p_{ij}^{\alpha\beta}p_{kl}^{\gamma\delta} = R_{ijkl}, \quad (16)$$

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}p_{ij}^{\alpha\beta}y_{,k}^{\gamma}y_{,l}^{\delta} = 0, \quad (17)$$

где  $p_{ij}^{\alpha\beta}$  — компоненты бивектора  $p_{ij}$ , построенного на векторах  $y_i$  и  $y_j$ .

Преобразуем сначала систему (16), считая  $i < j$ ,  $k < l$ . Зафиксируем индексы  $i, j$ , получим

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}p_{ij}^{\alpha\beta}p_{12}^{\gamma\delta} = \bar{R}_{ij12},$$

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}p_{ij}^{\alpha\beta}p_{13}^{\gamma\delta} = \bar{R}_{ij13},$$

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}p_{ij}^{\alpha\beta}p_{23}^{\gamma\delta} = \bar{R}_{ij23}.$$

Умножим первое уравнение последней системы на  $y_{,3}^{\xi}$ , второе — на  $-y_{,2}^{\xi}$  и третье — на  $y_{,1}^{\xi}$ . Полученные уравнения сложим, получим

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}(p_{12}^{\alpha\beta}y_{,3}^{\xi} - p_{13}^{\alpha\beta}y_{,2}^{\xi} + p_{23}^{\alpha\beta}y_{,1}^{\xi}) = \bar{R}_{ij12}y_{,3}^{\xi} - \bar{R}_{ij13}y_{,2}^{\xi} + \bar{R}_{ij23}y_{,1}^{\xi}.$$

Величина, стоящая слева в скобках, есть компонента  $p^{\alpha\beta\xi}$  тривектора  $\mathbf{p}$ , определяющего трехмерную площадку, касательную к вполне геодезической поверхности. Мы можем записать

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}p_{ij}^{\alpha\beta}p_{\xi}^{\gamma\delta} = \bar{R}_{ij12}y_{,3}^{\xi} - \bar{R}_{ij13}y_{,2}^{\xi} + \bar{R}_{ij23}y_{,1}^{\xi}.$$

Проводя то же еще раз, получим

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta\gamma\delta}p_{\xi}^{\alpha\beta}p_{\xi}^{\gamma\delta} = \bar{R}_{1212}y_{,3}^{\xi}y_{,3}^{\xi} - 2\bar{R}_{1213}y_{,3}^{\xi}y_{,2}^{\xi} + \bar{R}_{1313}y_{,2}^{\xi}y_{,2}^{\xi} + 2\bar{R}_{1223}y_{,1}^{\xi}y_{,3}^{\xi} - \\ - 2\bar{R}_{1323}y_{,1}^{\xi}y_{,2}^{\xi} + \bar{R}_{2323}y_{,1}^{\xi}y_{,1}^{\xi} = K. \end{aligned} \quad (18)$$

Разделим левую и правую часть на квадрат тривектора  $\mathbf{p}$  и просуммируем все выражение по  $\xi$ . Величину, стоящую справа, будем называть внутренней кривизной  $K$  трехмерной вполне геодезической поверхности в точке  $\mathbf{p}$ . Выражение слева дает кривизну пространства в точке  $M$  в направлении трехмерной площадки  $\mathbf{p}$  [2].

Преобразуем условие (17). Как и в случае двумерных поверхностей, ему можно придать следующий вид:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}p_{ij}^{\alpha\beta}q^{\gamma\delta} = 0, \quad (19)$$

где  $p_{ij}^{\alpha\beta}$  — компоненты бивектора, построенного на векторах  $y_{,i}$ ,  $y_{,j}$ ;  $q^{\gamma\delta}$  — компоненты бивектора  $q$ , построенного так, что один из его векторов лежит в трехмерной плоскости, касательной к вполне геодезической поверхности, а другой ортогонален ей.

Систему (19) можно преобразовать следующим образом:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}p_{ij}^{\alpha\beta}q^{\gamma\delta} = 0. \quad (20)$$

Условия интегрируемости уравнений для трехмерных вполне геодезических поверхностей свелись к следующим:

$$(A_{\gamma\delta}^{\varepsilon} - A_{\gamma\delta}^{\delta} + A_{\delta\delta}^{\varepsilon}) p_{\varepsilon}^{\gamma\delta} = K p^{\alpha\beta} p_{\alpha\beta}, \quad (21)$$

$$A_{\gamma\delta}^{\varepsilon} q^{\gamma\delta} = 0, \quad (22)$$

где

$$A_{\gamma\delta}^{\varepsilon} = R_{\alpha\beta\gamma\delta} p^{\alpha\beta}.$$

Как и в случае двумерных вполне геодезических поверхностей выражим компоненты бивектора  $q$  через компоненты тривектора  $p$ . Выбираем базисные вектора тривектора  $p$ .

$$l_1(p^{123}, 0, 0, p^{423}, p^{523}),$$

$$l_2(0, 1, 0, \frac{p^{143}}{p^{123}}, \frac{p^{153}}{p^{123}}),$$

$$l_3(0, 0, 1, \frac{p^{124}}{p^{123}}, \frac{p^{125}}{p^{123}}).$$

Предположим, как и в случае двумерных поверхностей, что в  $M$

$$g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}.$$

Компоненты бивектора  $\bar{p}$ , ортогонального тривектору  $p$ , имеют вид

$$\bar{p}(p^{345}, -p^{245}, p^{235}, p^{224}, p^{145}, -p^{351}, \\ p^{134}, p^{125}, -p^{124}, p^{123}).$$

Базисными векторами бивектора  $\bar{p}$  можно считать следующие векторы:

$$l_1(p^{345}, 0, -p^{145}, p^{135}, -p^{134}),$$

$$l_2(0, 1, -\frac{p^{245}}{p^{345}}, \frac{p^{235}}{p^{345}}, -\frac{p^{224}}{p^{345}}).$$

Вектор  $a_1$ , лежащий в плоскости векторов  $l_1, l_2, l_3$  имеет компоненты

$$a_1(p^{123}, \lambda_1, \lambda_2, p^{423} + \lambda_1 \frac{p^{143}}{p^{123}} + \lambda_2 \frac{p^{124}}{p^{123}}, p^{523} + \lambda_1 \frac{p^{153}}{p^{123}} + \lambda_2 \frac{p^{125}}{p^{123}}).$$

Вектор  $a_2$ , лежащий в плоскости векторов  $l_1, l_2$ , имеет компоненты

$$a_2(p^{345}, \lambda_2, -p^{145} - \lambda_3 \frac{p^{245}}{p^{345}}, p^{135} + \lambda_3 \frac{p^{235}}{p^{345}}, -p^{134} - \lambda_3 \frac{p^{224}}{p^{345}}).$$

Непосредственной проверкой, учитывая, что  $p^{\alpha\beta\gamma}$  — компоненты тривектора, легко убедиться, что скалярное произведение векторов  $a_1$  и  $a_2$  равно нулю независимо от  $\lambda_1, \lambda_2$  и  $\lambda_3$ .

Вычислив компоненты бивектора  $q$ , получим

$$q_{12} = p^{123}\lambda_3 - p^{345}\lambda_1,$$

$$q_{13} = -p^{123}\left(p^{145} + \lambda_3 \frac{p^{245}}{p^{345}}\right) - \lambda_2 p^{345},$$

$$q_{14} = \left(p^{135} + \lambda_3 \frac{p^{235}}{p^{345}}\right) p^{123} - p^{345}\left(p^{423} - \lambda_1 \frac{p^{143}}{p^{123}} + \lambda_2 \frac{p^{124}}{p^{123}}\right),$$

$$q_{15} = -\left(p^{134} + \lambda_3 \frac{p^{234}}{p^{345}}\right) p^{123} - \left(p^{523} + \lambda_1 \frac{p^{153}}{p^{123}} + \lambda_2 \frac{p^{125}}{p^{123}}\right) p^{345},$$

$$q_{23} = -\lambda_1\left(p^{145} + \lambda_3 \frac{p^{245}}{p^{345}}\right) - \lambda_2 \lambda_3,$$

$$q_{24} = \lambda_1\left(p^{135} + \lambda_3 \frac{p^{235}}{p^{345}}\right) - \lambda_3\left(p^{423} + \lambda_1 \frac{p^{143}}{p^{123}} + \lambda_2 \frac{p^{124}}{p^{123}}\right),$$

$$\begin{aligned}
q_{25} &= -\lambda_1 \left( p^{134} + \lambda_3 \frac{p^{234}}{p^{345}} \right) - \left( p^{523} + \lambda_1 \frac{p^{153}}{p^{123}} + \lambda_2 \frac{p^{125}}{p^{123}} \right), \\
q_{34} &= \lambda_2 \left( p^{135} + \lambda_3 \frac{p^{235}}{p^{123}} \right) + \left( p^{423} + \lambda_1 \frac{p^{134}}{p^{123}} + \lambda_2 \frac{p^{124}}{p^{123}} \right) \left( p^{145} + \lambda_2 \frac{p^{245}}{p^{345}} \right), \\
q_{35} &= -\lambda_2 \left( p^{134} + \lambda_3 \frac{p^{234}}{p^{345}} \right) + \left( p^{145} + \lambda_3 \frac{p^{245}}{p^{345}} \right) \left( p^{523} + \lambda_1 \frac{p^{153}}{p^{123}} + \lambda_2 \frac{p^{125}}{p^{123}} \right), \\
q_{45} &= - \left( p^{423} + \lambda_1 \frac{p^{143}}{p^{123}} + \lambda_2 \frac{p^{124}}{p^{123}} \right) \left( p^{134} + \lambda_3 \frac{p^{234}}{p^{345}} \right) - \\
&\quad - \left( p^{523} + \lambda_1 \frac{p^{153}}{p^{123}} + \lambda_2 \frac{p^{125}}{p^{123}} \right) \left( p^{135} + \lambda_3 \frac{p^{235}}{p^{345}} \right).
\end{aligned}$$

Подставляя компоненты бивектора  $q$  в систему уравнений (20) и учитывая, что числа  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  могут принимать произвольные значения, получим

$$\begin{aligned}
&-A_{12}p^{345}p^{123} - A_{14}p^{345}p^{143} - A_{15}p^{345}p^{153} - A_{23}p^{145}p^{123} + A_{24}p^{135}p^{123} - \\
&\quad - A_{25}p^{134}p^{123} + A_{34}p^{143} - A_{35}p^{145}p^{153} + A_{45}(p^{135} + p^{134}) = 0, \\
&A_{12}p^{123}p^{345} - A_{13}p^{123}p^{245} + A_{14}p^{235}p^{123} - A_{15}p^{234}p^{123} - A_{24}p^{123}p^{345} - \\
&\quad - A_{25}p^{523}p^{345} + A_{34}p^{423}p^{245} + A_{35}p^{245}p^{523} - A_{45}(p^{235} + p^{234}) = 0, \\
&-A_{13}p^{345}p^{123} - A_{14}p^{345}p^{124} - A_{15}p^{345}p^{125} + A_{34}b^6 - A_{35}b^5 - A_{45}b^7 = 0, \quad (23) \\
&-A_{13}p^{123}p^{145} + A_{14}b^1 - A_{15}b^2 + A_{34}p^{423}p^{143} + A_{35}p^{145}p^{523} - A_{45}b^8 = 0, \\
&\quad - A_{23}p^{123}p^{245} + A_{24}b^3 - A_{25}b^{12} + A_{34}p^{143}p^{245} + \\
&\quad + A_{35}p^{245}p^{153} + A_{45}b^8 = 0, \\
&-A_{23}p^{125}p^{345} - A_{24}p^{453}p^{124} + A_{31}b^9 - A_{35}b^{10} - A_{45}b^{11} = 0.
\end{aligned}$$

Решим систему (23). Известными величинами будем считать  $A_{25}^{\pm}, A_{34}^{\pm}, A_{35}^{\pm}, A_{45}^{\pm}$ . Определитель  $\Delta$  системы (23) имеет вид

$$\Delta = \begin{vmatrix} -p^{345}p^{123} & 0 & -p^{345}p^{143} & -p^{345}p^{153} & -p^{145}p^{123} & p^{135}p^{123} \\ p^{123}p^{345} & -p^{123}p^{245} & p^{123}p^{235} & -p^{234}p^{123} & 0 & -p^{423}p^{345} \\ 0 & -p^{345}p^{123} & -p^{124}p^{345} & -p^{345}p^{125} & 0 & 0 \\ 0 & -p^{123}p^{145} & b^1 & -b^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -p^{245}p^{123} & b^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -p^{123}p^{345} & -p^{124}p^{245} \end{vmatrix},$$

где

$$\begin{aligned}
b^1 &= p^{135}p^{123} - p^{345}p^{423}, \quad b^2 = p^{134}p^{123} + p^{345}p^{523}, \\
b^3 &= p^{235}p^{123} - p^{143}p^{345}, \quad b^4 = p^{135}p^{345} - p^{234}p^{123}, \\
b^5 &= p^{134}p^{123} - p^{145}p^{125}, \quad b^6 = p^{135}p^{123} + p^{124}p^{145}, \\
b^7 &= p^{135}p^{125} + p^{124}p^{134}, \quad b^8 = p^{135}p^{523} + p^{423}p^{134}, \\
b^9 &= p^{123}p^{235} + p^{124}p^{245}, \quad b^{10} = p^{234}p^{123} - p^{245}p^{125}, \\
b^{11} &= p^{235}p^{125} + p^{124}p^{234}, \quad b^{12} = p^{234}p^{123} + p^{153}p^{345},
\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
\Delta &= \begin{vmatrix} -p^{345}p^{123} & 0 & -p^{345}p^{143} & p^{345}p^{153} \\ p^{123}p^{345} & -p^{123}p^{245} & p^{123}p^{235} & -p^{234}p^{123} \\ 0 & -p^{345}p^{123} & -p^{124}p^{345} & -p^{345}p^{125} \\ 0 & -p^{123}p^{145} & b^1 & -b^2 \end{vmatrix} \times \\
&\quad \times \begin{vmatrix} -p^{245}p^{123} & b^3 \\ -p^{123}p^{345} & -p^{124}p^{345} \end{vmatrix} \Delta_1 \times \Delta_2.
\end{aligned}$$

Вычислим определитель  $\Delta_2$ :

$$\Delta_2 = -p^{123}p^{345}(-p^{245}p^{124} - b^3).$$

Вычислим определитель  $\Delta_1$ . С помощью элементарных преобразований имеем

$$\Delta_1 = -p^{345^a} p^{123^a} \begin{vmatrix} p^{124} p^{245} + b^3 & p^{125} p^{245} - b^1 \\ p^{124} p^{145} + b^1 & p^{125} p^{145} - b^2 \end{vmatrix}.$$

Но числа  $p^{\alpha\beta\gamma}$  — компоненты тривектора, следовательно, они удовлетворяют системе

$$p^{\alpha\beta[\gamma} p^{\delta\epsilon]\psi} = 0. \quad (*)$$

Учитывая систему (\*), получим

$$\Delta_1 = +p^{345^a} p^{123^a} \sum p^{\alpha\beta\gamma^a}.$$

И таким образом,

$$\Delta = -p^{345^a} p^{123^a} \sum_{(\alpha\beta\gamma)} p^{\alpha\beta\gamma^a} \cdot (-p^{245} p^{124} - p^{235} p^{123} + p^{134} p^{345}).$$

Аналогично случаю двумерных вполне геодезических поверхностей определяем  $A_{12}^e$ ,  $A_{13}^e$ ,  $A_{14}^e$ ,  $A_{15}^e$ ,  $A_{23}^e$ ,  $A_{24}^e$ . Введем обозначение

$$B_{\alpha\beta\gamma} = A_{\alpha\beta}^{\gamma} - A_{\alpha\gamma}^{\beta} + A_{\beta\gamma}^{\alpha}.$$

В этом обозначении решение системы (21, 23) можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} B_{145} - Kp^{145} &= t_1 p^{123}, \\ B_{245} - Kp^{245} &= t_2 p^{123}, \\ B_{345} - Kp^{345} &= t_3 p^{123}, \\ B_{123} - Kp^{123} &= t_1 p^{145} + t_2 p^{245} + t_3 p^{345}, \\ B_{124} - Kp^{124} &= t_1 p^{153} + t_2 p^{235}, \\ B_{125} - Kp^{125} &= t_1 p^{134} + t_2 p^{234}, \\ B_{134} - Kp^{134} &= t_1 p^{125} + t_3 p^{325}, \\ B_{135} - Kp^{135} &= -t_1 p^{124} + t_3 p^{342}, \\ B_{234} - Kp^{234} &= t_2 p^{215} + t_3 p^{351}, \\ B_{235} - Kp^{235} &= t_2 p^{241} - t_3 p^{341}. \end{aligned} \quad (24)$$

Рассмотрим следующую поверхность второго порядка:

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta\gamma\delta} p^{\alpha\beta\gamma^a} p^{\delta\epsilon} - t_1 (p^{123} p^{145} + p^{124} p^{153} + p^{125} p^{134}) - \\ - t_2 (p^{234} p^{215} + p^{231} p^{245} + p^{235} p^{241}) - \\ - t_3 (p^{345} p^{312} + p^{341} p^{325} + p^{342} p^{351}) &= 1. \end{aligned} \quad (25)$$

Числа  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $t_3$  считаем независимыми от компонент тривектора  $p$ . Как и в случае двумерных вполне геодезических поверхностей,  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $t_3$  и собственные значения  $K$  поверхности (25) определяются из следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned} \Delta &= 0, \\ \Delta_{\alpha\beta[\gamma} \Delta_{\delta\epsilon]\psi} &= 0 \quad (\alpha, \dots, \psi = 1, \dots, 5). \end{aligned}$$

где  $\Delta$  — определитель матрицы коэффициентов системы (24);  $\Delta_{\alpha\beta\gamma}$  — минор соответствующего элемента определителя  $\Delta$ .

Путем непосредственной проверки легко убедиться, что если мы выберем другие компоненты базисных векторов тривектора  $p$  и ортогонального ему бивектора  $\bar{p}$  поверхность (25) не изменится.

Так как переход к новым координатам в римановом пространстве и на вполне геодезической поверхности сводится к линейному преобразо-

анию в евклидовом пространстве, касательном к риманову, соответственно к поверхности, то построенная поверхность второго порядка (25) перейдет в некоторую поверхность второго порядка.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Э. Картан. Геометрия римановых пространств. ОНТИКП, 1936.
2. Картан. Геометрия римановых пространств в ортогональном референсе. Изд-во иностр. лит. М., 1962.
3. Л. Эйзенхарт. Риманова геометрия. Изд-во иностр. лит. М., 1948.
4. П. А. Широков Тензорное исчисление. Казань 1961.

*Поступила 30 мая 1968 г*

## ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ОДНОРОДНЫХ МНОГОГРАННИКОВ

С. П. Солов (Харьков)

Связный многогранник называется *однородным*, если все его грани правильные многоугольники, а любые две вершины могут быть переведены друг в друга при помощи преобразований симметрии так, что при этом многогранник переходит сам в себя. Однородный многогранник без кратных вершин и ребер называется *элементарным*.

Как известно, в  $E_3$  существует только пять конечных групп вращений: циклические группы  $C_p$  ( $p = 1, 2, 3, \dots$ ), диэдрические группы  $D_p$  ( $p = 2, 3, 4, \dots$ ), тетраэдрическая группа  $A_4$ , октаэдрическая группа  $S_4$  и икосаэдрическая группа  $A_5$  [1]. Группа  $C_p$  изоморфна группе вращений правильной  $p$ -угольной пирамиды, которая не является однородным многогранником. Группа  $D_p$  — это группа вращений правильной  $p$ -угольной призмы. Существует пять бесконечных серий призм и антипризм, соответствующих этой группе вращений. В обозначениях Кокстера [2] это  $2 \frac{n}{d} | 2 = t\left\{2, \frac{n}{d}\right\}$  ( $n \geq 3, d \geq 1$ ),  $|22 \frac{n}{d} = S\left\{\frac{2}{n/d}\right\}$  ( $n \geq 4, d \geq 1$ ) и  $|22 \frac{n}{d} = S'\left\{\frac{2}{n/d}\right\}$  ( $\frac{n}{2} > d > \frac{n}{3}$ ). Этой же группе изоморфна группа вращений дважды покрытого правильного  $p$ -угольника  $\{p, 2\}$ . Группы вращений всех остальных однородных многогранников изоморфны группам  $A_4$ ,  $S_4$  и  $A_5$ . Например, среди выпуклых однородных многогранников, отличных от призм и антипризм, группой вращения  $A_4$  обладает тетраэдр  $\{3, 3\}$  и усеченный тетраэдр  $t\{3, 3\}$ ; группой  $S_4$  — октаэдр  $\{3, 4\}$ , усеченный октаэдр  $t\{3, 4\}$ , куб  $\{4, 3\}$ , усеченный куб  $t\{4, 3\}$ , кубооктаэдр  $\left\{\frac{3}{4}\right\}$ , усеченный кубооктаэдр  $t\left\{\frac{3}{4}\right\}$ , ромбокубооктаэдр  $r\left\{\frac{3}{4}\right\}$  и плосконосый куб  $s\left\{\frac{3}{4}\right\}$ ; группой  $A_5$  — икосаэдр  $\{3, 5\}$ , усеченный икосаэдр  $t\{3, 5\}$ , додекаэдр  $\{5, 3\}$ , усеченный додекаэдр  $t\{5, 3\}$ , икосододекаэдр  $\left\{\frac{3}{5}\right\}$ , усеченный икосододекаэдр  $t\left\{\frac{3}{5}\right\}$ , ромбикосододекаэдр  $r\left\{\frac{3}{5}\right\}$  и плосконосый додекаэдр  $s\left\{\frac{3}{5}\right\}$ .

В настоящей работе доказана

**Теорема.** Существует только 79 однородных многогранников, вершинные фигуры которых не имеют кратных вершин или сторон, а все грани перпендикулярны инвариантным осям вращений хотя бы одной из групп  $A_4$ ,  $S_4$  и  $A_5$ .

**Доказательство.** Проведем через центр сферы  $S$  плоскости, перпендикулярные инвариантным осям группы вращений. Эти плоскости разобьют  $S$  на сферические многоугольники. Каждый сферический много-

угольник  $\alpha$ , вершины которого лежат в одной плоскости, а стороны изме-  
ряются углами правильных многоугольников, определяют плоский много-  
угольник, который может быть вершинной фигуруой однородного много-  
гранника.

Действительно, каждый такой многоугольник определяет многограничный  
угол  $M$  с вершиной в центре  $O$  сферы  $S$ , плоские углы' которого есть  
углы правильных многоугольников. В плоскостях граней  $M$  построим  
правильные многоугольники с соответствующими углами, которые имеют  
общую вершину в  $O$  и по две вершины в вершинах  $\alpha$ . Мы получаем,

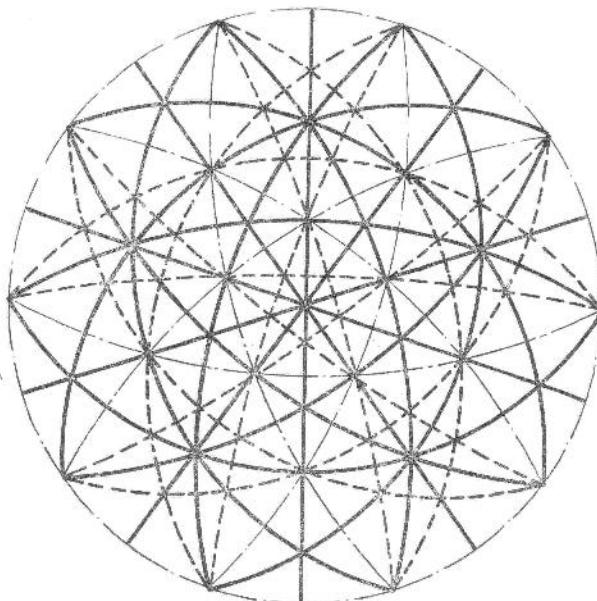


Рис. 1

таким образом, звезду вершины  $M'$  многогранника. Через точку  $O$  и вер-  
шины сферического многоугольника  $\alpha$  проведем сферу  $C$ . Каждая грань  
 $M'$  будет вписана в  $C$ . Можем построить в любой вершине  $\alpha$  звезду вер-  
шины  $L'$ , имеющую две общие грани с  $M'$  и конгруэнтную ей с точностью  
до отражения. Эти две грани полностью определяют сферу  $C$ , описанную  
как вокруг  $M'$ , так и вокруг  $L'$ . В каждой вершине  $M'$  и  $L'$  будем стро-  
ить звезды вершин  $N'_i$ , имеющие по две общие грани с  $M'$ , либо с  $L'$ ,  
либо одну грань общую с  $M'$ , а другую с  $L'$ . Все вершины звезд вершин  
 $N'_i$  будут лежать на сфере  $C$ . Если таким образом можно продолжить  
построение до замкнутого многогранника, то мы получим многогранник  
с правильными гранями, все вершины которого лежат на сфере  $C$ .

Любая вершина такого многогранника может быть переведена в дру-  
гую при помощи вращения вокруг оси, проходящей через центр  $C$ , либо  
отражения в плоскости, проходящей через центр  $C$ . Если при этом много-  
гранник переходит сам в себя, то он будет однородным.

Пусть ребро однородного многогранника равно  $l$ , а грани при вершине  
его — правильные многоугольники  $\{p\}$ ,  $\{q\}$ ,  $\{r\}$ ,  $\{s\}$ , ... . Тогда его вершин-  
ная фигура есть многоугольник, вписанный в окружность, со сторонами  
 $2l \cos \frac{\pi}{p}$ ,  $2l \cos \frac{\pi}{q}$ ,  $2l \cos \frac{\pi}{r}$ ,  $2l \cos \frac{\pi}{s}$ , ..., который мы символически  
обозначим  $(p, q, r, s, \dots)$ . Для того, чтобы указанное выше построение

многогранника было возможно, должны выполняться следующие необходимые условия:

а) если вершинная фигура есть  $(p, q, r, s, \dots)$ , то на сфере, либо на евклидовой или гиперболической плоскости должна существовать однородная мозаика, в каждой вершине которой сходятся правильные многоугольники  $\{p\}, \{q\}, \{r\}, \{s\}, \dots$  в том же порядке, что и при вершине однородного многогранника;

б) если  $\{p\}$  имеет нечетное число сторон и окружена одинаковыми и теми же  $\{q\}$ , то все  $\{q\}$  должны образовывать с  $\{p\}$  равные двугранные углы в случае, когда количество  $\{p\}$  меньше половины всех граней при одной

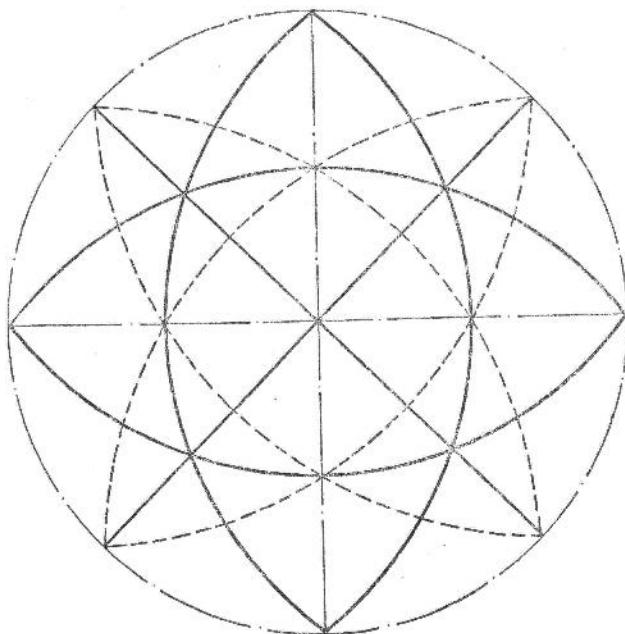


Рис. 2

вершине однородного многогранника. Эти условия вытекают из простых геометрических соображений.

На рис. 1 показана стереографическая проекция одной из полусфер с сетью больших кругов, соответствующих группе вращений  $A_5$ . Штрихпунктирные линии соответствуют пятикратным, штриховые — трехкратным и сплошные — двукратным осям вращения.

На рис. 2 дана стереографическая проекция одной из полусфер с большими кругами, соответствующими группе вращений  $S_4$ . Инвариантные оси группы  $S_4$  имеют кратность 2, 3 и 4, соответствующие им большие круги на рисунке обозначены сплошными, штриховыми и штрихпунктирными линиями соответственно.

Группа вращений  $A_4$  есть подгруппа группы  $S_4$  и группы  $A_5$ . Соответствующие группе  $A_4$  многогранники встречаются как в  $S_4$  так и в  $A_5$ .

Мы будем рассматривать только такие однородные многогранники, вершинные фигуры которых есть многоугольники без кратных вершин и сторон. Выписывая все сферические многоугольники, соответствующие таким вершинным фигурам и ограничениям на количество сторон у грани однородного многогранника [3], получим 53 треугольника, 53 четырех-

угольника, 20 пятиугольников и 19 шестиугольников. Сферические многоугольники с большим числом сторон, вершины которых лежат в одной плоскости, имеют кратные элементы. Все остальные многоугольники не плоские, или их стороны не измеряются углами правильных многоугольников.

Рассмотрим однородные многогранники, вершинные фигуры которых есть треугольники  $(p, q, r)$  со сторонами  $2l \cos \frac{\pi}{p}$ ,  $2l \cos \frac{\pi}{q}$  и  $2l \cos \frac{\pi}{r}$ . Из 53 треугольников 24 не удовлетворяют условиям а) и б). Это  $(3, 4, 3)$ ,  $(3, 6, 4)$ ,  $\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 3\right)$ ,  $\left(\frac{5}{2}, 3, 3\right)$ ,  $\left(\frac{5}{2}, \frac{10}{3}, 4\right)$ ,  $\left(\frac{5}{2}, \frac{10}{3}, 3\right)$ ,  $\left(\frac{5}{2}, 4, 3\right)$ ,  $\left(\frac{5}{2}, 5, 6\right)$ ,  $(3, 5, 3)$ ,  $\left(3, 4, \frac{10}{3}\right)$ ,  $\left(3, \frac{10}{3}, 6\right)$ ,  $(3, 4, 5)$ ,  $\left(\frac{5}{2}, 5, 4\right)$ ,  $\left(\frac{5}{2}, 10, 6\right)$ ,  $\left(\frac{10}{3}, 5, 6\right)$ ,  $(4, 10, 3)$ ,  $(3, 5, 5)$ ,  $(3, 10, 6)$ ,  $(3, 10, 5)$ ,  $(4, 5, 6)$ ,  $(4, 10, 5)$ ,  $\left(\frac{8}{3}, 3, 4\right)$ ,  $(3, 4, 8)$  и  $\left(\frac{5}{2}, 4, 6\right)$ . Восемь треугольников  $(4, 3, 4)$ ,  $\left(4, \frac{5}{2}, 4\right)$ ,  $(4, 5, 4)$ ,  $(4, 6, 4)$ ,  $\left(4, \frac{8}{3}, 4\right)$ ,  $(4, 8, 4)$ ,  $\left(4, \frac{10}{3}, 4\right)$  и  $(4, 10, 4)$

определяют призмы. Остальные многоугольники и соответствующие им элементарные однородные многогранники приведены в табл. 1, где  $B$ ,  $P$ ,  $\Gamma$  и  $d$  обозначают соответственно количество вершин, ребер и граней многогранника, его эйлерову характеристику и плотность. В обозначении вершинной фигуры знак — показывает противоположную ориентацию стороны вершинной фигуры (грани однородного многогранника), а  $\pm$  стоит в том случае, когда сторона вершинной фигуры проходит через центр описанной окружности [3].

Рассмотрим однородные многогранники, вершинные фигуры которых являются четырехугольниками. Из числа полученных четырехугольников условиям а) и б) не удовлетворяют следующие:  $\left(\frac{5}{2}, 3, 5, 3\right)$ ,  $\left(3, \frac{5}{2}, 5, \frac{5}{2}\right)$ ,  $\left(3, \frac{5}{2}, 4, 4\right)$ ,  $(-3, 4, 4, 5)$ ,  $(3, -4, -3, 4)$ ,  $\left(3, 5, -\frac{5}{2}, 5\right)$ ,  $\left(\frac{5}{2}, -4, -\frac{5}{2}, 4\right)$ ,  $\left(4, -\frac{5}{2}, 5, 4\right)$ ,  $(4, -5, -4, 5)$ ,  $(3, -5, -3, 5)$  и  $\left(\frac{5}{2}, -3, -\frac{5}{2}, 3\right)$ . Остальные четырехугольники определяют две антипризмы  $\left(-\frac{5}{2}, 3, 3, 3\right)$ ,  $(5, 3, 3, 3)$ , 35 элементарных однородных многогранников (табл. 1) и пять неэлементарных однородных многогранников, приведенных в табл. 2. Здесь кратность вершины, например 5, означает, что вершины многогранника как точки пространства совпадают группами по пять. Аналогично определяется и кратность ребер. Кратность же граней не для всех одинакова. Например,  $4\{3\}$  обозначает, что кратность треугольных граней равна четырем.

Из 20 пятиугольников, полученных из сети больших кругов для  $A_5$  ( $A_4$  и  $S_4$  имеют только треугольники и четырехугольники) следующие десять не удовлетворяют условиям а) и б):  $\left(-\frac{5}{2}, 3, \frac{5}{2}, 3, \frac{5}{2}\right)$ ,  $\left(\frac{5}{2}, 3, \frac{5}{2}, -3, -3\right)$ ,  $\left(3, \frac{5}{2}, 5, -4, 5\right)$ ,  $\left(3, \frac{5}{2}, 5, -3, 4\right)$ ,  $\left(3, \frac{5}{2}, 4, -\frac{5}{2}, 5\right)$ ,  $(3, -4, -5, 4, 4)$ ,  $(3, -4, -4, \frac{5}{2}, 4)$ ,  $\left(\frac{5}{2}, -4, -5, 4, 4\right)$ ,  $(3, 3, 5,$

Таблица 1

№ п/п	Вершинная фигура	Г			$\chi$	$d$	Обозначения Кокстера	Группа вращений
		B	P	$\Gamma$				
1	(3, 3, 3)	4	6	$4 \{3\}$	2	1	$3   23 = \{3, 3\}$	$A_4$
2	(6, 3, 6)	12	18	$4 \{3\} + 4 \{6\}$	2	1	$23   3 = t \{3, 3\}$	$A_4$
3	(4, 4, 4)	8	12	$6 \{4\}$	2	1	$3   24 = \{4, 3\}$	$S_4$
4	(6, 4, 6)	24	36	$8 \{6\} + 6 \{4\}$	2	1	$24   3 = t \{3, 4\}$	$S_4$
5	(8, 3, 8)	24	36	$8 \{3\} + 6 \{8\}$	2	1	$23   4 = t \{4, 3\}$	$S_4$
6	$\left(\frac{8}{3}, 3, \frac{8}{3}\right)$	24	36	$8 \{3\} + 6 \left\{\frac{8}{3}\right\}$	2	7	$23   \frac{4}{3} = t' \{4, 3\}$	$S_4$
7	(4, 6, 8)	48	72	$8 \{6\} + 12 \{4\} + 6 \{8\}$	2	1	$234   = t \left\{\begin{array}{l} 3 \\ 4 \end{array}\right\}$	$S_4$
8	$\left(\frac{8}{3}, 6, 8\right)$	48	72	$8 \{6\} + 6 \{8\} + 6 \left\{\frac{8}{3}\right\}$	-4	4	$3   \frac{4}{3} = t' \left\{\begin{array}{l} 3 \\ 4 \end{array}\right\}$	$S_4$
9	$\left(\frac{8}{3}, 4, 6\right)$	48	72	$8 \{6\} + 12 \{4\} + 6 \left\{\frac{8}{3}\right\}$	2	7	$23   \frac{4}{3} = t' \left\{\begin{array}{l} 3 \\ 4 \end{array}\right\}$	$S_4$
10	(5, 5, 5)	20	30	$12 \{5\}$	2	1	$3   25 = \{5, 3\}$	$A_5$
11	$\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$	20	30	$12 \left\{\frac{5}{2}\right\}$	2	7	$3   2 \frac{5}{2} = \left\{\frac{5}{2}, 3\right\}$	$A_5$
12	(6, 5, 6)	60	90	$20 \{6\} + 12 \{5\}$	2	1	$25   3 = t \{3, 5\}$	$A_6$
13	$\left(10, \frac{5}{2}, 10\right)$	60	90	$12 \left\{\frac{5}{2}\right\} + 12 \{10\}$	-6	3	$2   \frac{5}{2} = t \left\{5, \frac{5}{2}\right\}$	$A_5$
14	$(10, 3, 10)$	60	90	$20 \{3\} + 12 \{10\}$	2	1	$23   5 = t \{5, 3\}$	$A_6$
15	$\left(6, \frac{5}{2}, 6\right)$	60	90	$20 \{6\} + 12 \left\{\frac{5}{2}\right\}$	2	7	$2   \frac{5}{2} = t \left\{3, \frac{5}{2}\right\}$	$A_6$
16	$\left(\frac{10}{3}, 5, \frac{10}{3}\right)$	60	90	$12 \{5\} + 12 \left\{\frac{10}{3}\right\}$	-6	9	$25   \frac{5}{3} = t' \left\{\frac{5}{2}, 5\right\}$	$A_6$
17	$\left(\frac{10}{3}, 3, \frac{10}{3}\right)$	60	90	$20 \{3\} + 12 \left\{\frac{10}{3}\right\}$	2	13	$23   \frac{5}{3} = t' \left\{\frac{5}{2}, 3\right\}$	$A_6$
18	(4, 6, 10)	120	180		2	1	$235   = t \left\{\begin{array}{l} 3 \\ 5 \end{array}\right\}$	$A_5$

$20 \{6\} + 30 \{4\} + 12 \{10\}$

$(4, 6, 10)$

19	$\left(\frac{10}{3}, 6, 10\right)$	120	180	$20\{6\} + 12\{10\} + 12\left\{\frac{10}{3}\right\}$	-16	4	$3 \frac{5}{3}   5$	$A_3$
20	$\left(\frac{10}{3}, 4, 10\right)$	120	180	$12\{10\} + 30\{4\} + 12\left\{\frac{10}{3}\right\}$	-6	3	$2 \frac{5}{3}   5 = r'\left\{\frac{5}{2}\right\}$	$A_6$
21	$\left(\frac{10}{3}, 4, 6\right)$	120	180	$20\{6\} + 30\{4\} + 12\left\{\frac{10}{3}\right\}$	2	13	$23 \frac{5}{3}   = r'\left\{\frac{3}{5/2}\right\}$	$A_5$
22	$(3, 3, 3, 3)$	6	12	$8\{3\}$	2	1	$4 23 = \{3, 4\}$	$S_4$
23	$(3, \pm 4, -3, \pm 4)$	6	12	$4\{3\} + 3\{4\}$	1	-	$\frac{3}{2}   3   2$	$A_4$
24	$(3, 4, 3, 4)$	12	24	$8\{3\} + 6\{4\}$	2	1	$2   34 = \left\{\frac{3}{4}\right\}$	$S_4$
25	$(3, \pm 6, -3, \pm 6)$	12	24	$8\{3\} + 4\{6\}$	0	0	$\frac{3}{2}   3   3$	$S_4$
26	$(4, \pm 6, -4, \pm 6)$	12	24	$4\{6\} + 6\{4\}$	-2	-	$\frac{4}{3}   4   3$	$S_4$
27	$\left(\frac{8}{3}, 3, \frac{8}{3}, 4\right)$	24	48	$8\{3\} + 6\{4\} + 6\left\{\frac{8}{3}\right\}$	-4	4	$34 \left \frac{4}{3}\right $	$S_4$
28	$(4, 4, -3, 4)$	24	48	$8\{3\} + 18\{4\}$	2	5	$\frac{3}{2}   4   2 = r'\left\{\frac{3}{4}\right\}$	$S_4$
29	$\left(\frac{8}{3}, -4, -\frac{8}{3}, 4\right)$	24	48	$12\{4\} + 6\left\{\frac{8}{3}\right\}$	-6	-	$2 \frac{4}{3} \frac{8/2}{4/2}$	$S_4$
30	$(4, 4, 4, 3)$	24	48	$8\{3\} + 18\{4\}$	2	1	$34   2 = r\left\{\frac{3}{4}\right\}$	$S_4$
31	$(4, 8 - 3, 8)$	24	48	$8\{3\} + 6\{4\} + 6\{8\}$	-4	2	$\frac{3}{2}   4   4$	$S_4$

Продолжение табл. 1

№ п/п	Вершинная фигура	$\Gamma$			$\chi$	$d$	Обозначения Кокстера	Группа вращений
		$B$	$P$					
32	(4, $\pm 8, -4, \pm 8$ )	24	48	12 {4} + 6 {8}	-6	-	$24 \begin{vmatrix} 3 \\ 4/2 \end{vmatrix}$	$S_4$
33	(3, 5; 3, 5)	30	60	20 {3} + 12 {5}	2	1	$2 35 = \begin{Bmatrix} 3 \\ 5 \end{Bmatrix}$	$A_5$
34	$\left(\frac{5}{2}, 5, \frac{5}{2}, 5\right)$	30	60	$12 \begin{Bmatrix} 5 \\ 2 \end{Bmatrix} + 12 \{5\}$	-6	3	$2 \begin{Bmatrix} 5 \\ 2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 5 \end{Bmatrix}$	$A_6$
35	(3, $\pm 10, -3, \pm 10$ )	30	60	20 {3} + 6 {10}	-4	-	$\frac{3}{2} 3   5$	$A_5$
36	(5, $\pm 10, -5, \pm 10$ )	30	60	12 {5} + 6 {10}	-12	-	$\frac{5}{4} 5   5$	$A_6$
37	$\left(\frac{5}{2}, 3, \frac{5}{2}, 3\right)$	30	60	$20 \{3\} + 12 \begin{Bmatrix} 5 \\ 2 \end{Bmatrix}$	2	7	$2 3 \frac{5}{2} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 5/2 \end{Bmatrix}$	$A_5$
38	$\left(\frac{5}{2}, \pm 6, \frac{-5}{2}, \pm 6\right)$	30	60	$10 \{6\} + 12 \begin{Bmatrix} 5 \\ 2 \end{Bmatrix}$	-8	-	$\frac{5}{3} \frac{5}{2}   3$	$A_5$
39	(5, $\pm 6, -5, \pm 6$ )	30	60	10 {6} + 12 {5}	-8	-	$\frac{3}{2} 3   \frac{5}{3}$	$A_5$
40	$\left(3, \pm \frac{10}{3}, -3, \pm \frac{10}{3}\right)$	30	60	$20 \{3\} + 6 \begin{Bmatrix} 10 \\ 3 \end{Bmatrix}$	-4	-	$\frac{3}{2} 3   \frac{5}{3}$	$A_5$
41	$\left(\frac{5}{2}, \pm \frac{10}{3}, -\frac{5}{2}, \pm \frac{10}{3}\right)$	30	60	$12 \begin{Bmatrix} 5 \\ 2 \end{Bmatrix} + 6 \begin{Bmatrix} 10 \\ 3 \end{Bmatrix}$	-12	-	$\frac{5}{3} \frac{5}{2}   \frac{5}{3}$	$A_5$
42	$\left(5, 4, \frac{5}{2}, 4\right)$	60	120	$12 \begin{Bmatrix} 5 \\ 2 \end{Bmatrix} + 12 \{5\} + 30 \{4\}$	-6	3	$\frac{5}{2} 5   2 = r \begin{Bmatrix} 5 \\ 2 \end{Bmatrix}$	$A_6$
43	$\left(5, 6, \frac{-5}{2}, 6\right)$	60	120	$20 \{6\} + 12 \begin{Bmatrix} 5 \\ 2 \end{Bmatrix} + 12 \{5\}$	-16	4	$\frac{5}{3} 5   3$	$A_6$
44	(4, $-6, -4, 6$ )	60	120	$20 \{6\} + 30 \{4\}$	-10	-	$23 \begin{Bmatrix} 5/4 \\ 5/6 \end{Bmatrix}$	$A_6$

45	$\left(\frac{10}{3}, \frac{5}{2}, \frac{10}{3}, 3\right)$	60	120	$20\{3\} + 12\left\{\frac{5}{2}\right\} + 12\left\{\frac{10}{3}\right\}$	-16	10	$3\frac{5}{2} 3$	$A_5$
46	$\left(3, 4, -\frac{5}{2}, 4\right)$	60	120	$20\{3\} + 39\{4\} + 12\left\{\frac{5}{2}\right\}$	2	13	$3\frac{5}{3} 2 = r'\left\{\frac{3}{5/2}\right\}$	$A_6$
47	$\left(\frac{10}{3}, -4, -\frac{10}{3}, 4\right)$	60	120	$30\{4\} + 12\left\{\frac{10}{3}\right\}$	-18	-	$2\frac{5}{3} 2/4$	$A_5$
48	$\left(5, \frac{10}{3}, 3, \frac{10}{3}\right)$	60	120	$20\{3\} + 12\{5\} + 12\left\{\frac{10}{3}\right\}$	-16	4	$35 5$	$A_5$
49	$(5, 6, -3, 6)$	60	120	$20\{3\} + 20\{6\} + 12\{5\}$	-8	6	$3 53$	$A_6$
50	$\left(\frac{10}{3}, 6, -\frac{10}{3}, -6\right)$	60	120	$20\{6\} + 12\left\{\frac{10}{3}\right\}$	-28	-	$3\frac{5}{3} 2/2$	$A_5$
51	$(5, 4, 3, 4)$	60	120	$20\{3\} + 30\{4\} + 12\{5\}$	2	1	$35 2 = r\left\{\frac{3}{5}\right\}$	$A_5$
52	$\left(3, 6, \frac{5}{2}, 6\right)$	60	120	$20\{3\} + 20\{6\} + 12\left\{\frac{5}{2}\right\}$	-8	2	$3\frac{5}{2} 3$	$A_5$
53	$(10, 5, 10, -3)$	60	120	$20\{3\} + 12\{5\} + 12\{10\}$	-16	2	$3 5 5$	$A_5$
54	$(4, 10, -4, -10)$	60	120	$30\{4\} + 12\{10\}$	-18	-	$25 5/2$	$A_5$
55	$\left(3, 10, -\frac{5}{2}, 10\right)$	60	120	$20\{3\} + 12\left\{\frac{5}{2}\right\} + 12\{10\}$	-16	4	$3\frac{5}{3} 5$	$A_5$
56	$(6, 10, -6, -10)$	60	120	$20\{6\} + 12\{10\}$	-28	-	$35 3/2$	$A_5$
57	$(3, 3, 3, 3)$	12	30	$20\{3\}$	2	1	$5 23 = \{3, 5\}$	$A_6$

Продолжение табл. 1

№ п/п	Вершинная фигура	$B$	$P$	$\Gamma$		$\chi$	$d$	Обозначения Кокстера	Группа вращений
				$\chi$	$d$				
58	$\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$	12	30	$12 \left\{\frac{5}{2}\right\}$		-6	3	$5   2 \frac{5}{2} = \left\{\frac{5}{2}, 5\right\}$	$A_5$
59	(5, 5, 5, 5)	12	30	$12 \{5\}$		-6	3	$\frac{5}{2}   25 = \left\{5, \frac{5}{2}\right\}$	$A_5$
60	(3, 3, 3, 3)	12	30	$20 \{3\}$		2	7	$\frac{5}{2}   23 = \left\{3, \frac{5}{2}\right\}$	$A_5$
61	$\left(3, \frac{5}{2}, 3, \frac{5}{2}, 3, \frac{5}{2}\right)$	20	60	$20 \{3\} + 12 \left\{\frac{5}{2}\right\}$		-8	2	$3   3 \frac{5}{2}$	$A_5$
62	$\left(5, \frac{5}{2}, 5, \frac{5}{2}, 5, \frac{5}{2}\right)$	20	60	$12 \left\{\frac{5}{2}\right\} + 12 \{5\}$		-16	4	$3   \frac{5}{3} 5$	$A_5$
63	(5, 3, 5, 3, 5, 3)	20	60	$20 \{3\} + 12 \{5\}$		-8	6	$\frac{3}{2}   35$	$A_5$

Таблица 2

№ п/п	Вершинная фигура	F			Кратность			χ	d	Обозначения Кокстера	Группы на враще- ния
		B	P	R	B	P	R				
1	$\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 3\right)$	60	120	$36\left\{\frac{5}{2}\right\} + 20\{3\}$	5	4	$3\left\{\frac{5}{2}\right\}$	-4	16	$3\frac{5}{2}\left \frac{5}{4}\right.$	$A_5$
2	$(5, 5, 5, -3)$	60	120	$36\{5\} + 20\{3\}$	5	4	$3\{5\}$	-4	8	$\frac{3}{2}\left \frac{5}{2}\right.$	$A_5$
3	$\left(4, -\frac{5}{2}, 4, 5\right)$	60	120	$30\{4\} + 12\left\{\frac{5}{2}\right\} + 12\{5\}$	3	2	1	-6	9	$\frac{5}{3}\left \frac{5}{2}\right.$	$A_5$
4	$(4, -3, 4, 5)$	60	120	$30\{4\} + 20\{3\} + 12\{5\}$	3	2	1	2	11	$\frac{3}{2}\left \frac{5}{2}\right.$	$A_5$
5	$\left(3, 4, \frac{5}{2}, 4\right)$	60	120	$30\{4\} + 20\{3\} + 12\left\{\frac{5}{2}\right\}$	3	2	1	2	7	$\frac{3}{2}\left \frac{5}{2}\right.$	$A_5$
6	$\left(3, \frac{5}{2}, 3, 4, -\frac{5}{2}\right)$	120	300	$30\{4\} + 80\{3\} + 48\left\{\frac{5}{2}\right\}$	6	5	$4\{3\}, 4\left\{\frac{5}{2}\right\}$	-22	13	-	$A_5$
7	$(3, -4, 5, 3, 5)$	120	300	$30\{4\} + 80\{3\} + 48\left\{\frac{5}{2}\right\}$	6	5	$4\{3\}, 4\left\{\frac{5}{2}\right\}$	-22	19	-	$A_5$
8	$(3, 4, -3, 4, 4)$	120	300	$90\{4\} + 80\{3\}$	6	5	$3\{4\}, 4\left\{\frac{3}{2}\right\}$	-10	15	-	$A_5$
9	$\left(\frac{5}{2}, 4, -\frac{5}{2}, 4, 4\right)$	120	300	$90\{4\} + 48\left\{\frac{5}{2}\right\}$	6	5	$3\{4\}, 4\left\{\frac{5}{2}\right\}$	-42	15	-	$A_5$
10	$\left(4, -\frac{5}{2}, 5, -\frac{5}{2}, 5\right)$	120	300	$30\{4\} + 48\left\{\frac{5}{2}\right\} + 48\{5\}$	6	5	$4\left\{\frac{5}{2}\right\}, 4\{5\}$	-54	21	-	$A_5$
11	$(4, 5, 4, -5, 4)$	120	300	$90\{4\} + 48\{5\}$	6	5	$3\{4\}, 4\{5\}$	-42	15	-	$A_5$
12	$\left(3, \frac{5}{2}, 3, 4, -3, 4\right)$	60	180	$60\{3\} + 12\left\{\frac{5}{2}\right\} + 30\{4\}$	3	3	$3\{3\}$	-18	7	-	$A_5$
13	$\left(3, \frac{5}{2}, 4, -\frac{5}{2}, 4, \frac{5}{2}\right)$	60	180	$20\{3\} + 36\left\{\frac{5}{2}\right\} + 30\{4\}$	3	3	$3\left\{\frac{5}{2}\right\}$	-34	7	-	$A_5$
14	$\left(4, -3, 4, 4, -\frac{5}{2}, 4\right)$	60	180	$20\{3\} + 12\left\{\frac{5}{2}\right\} + 60\{4\}$	3	3	$2\{4\}$	-28	8	-	$A_5$
15	$(3, 4, 4, 5, 4, 4)$	60	180	$20\{3\} + 12\{5\} + 60\{4\}$	3	3	$2\{4\}$	-28	16	-	$A_5$
16	$\left(\frac{5}{2}, 4, 4, -5, 4, 4\right)$	60	180	$60\{4\} + 12\left\{\frac{5}{2}\right\} + 12\{5\}$	3	3	$2\{4\}$	-36	6	-	$A_5$

$-3, 5)$  и  $(3, 5, 3, -5, -5)$ . Остальные пятиугольники определяют четыре правильных однородных многогранника (табл. 1) и шесть неэлементарных однородных многогранников, которые приводятся впервые (табл. 2).

Из 19 полученных шестиугольников условиям а) и б) не удовлетворяют  $\left(3, \frac{5}{2}, -5, -4, \frac{5}{2}, 4\right)$ ,  $\left(3, \frac{5}{2}, -5, -3, -\frac{5}{2}, 5\right)$ ,  $\left(3, \frac{5}{2}, 4, 3, -4, 5\right)$ ,  $\left(3, -4, 5, 4, -\frac{5}{2}, 5\right)$ ,  $\left(\frac{5}{2}, 4, 4, -\frac{5}{2}, -4, -4\right)$ ,  $(3, 4, 4, -3, -4, -4)$ ,  $(3, -4, -3, -4, 3, 5)$ ,  $(3, 5, -4, -5, -4, 5)$ ,  $\left(-\frac{5}{2}, 4, \frac{5}{2}, 4, -\frac{5}{2}, 5\right)$ ,  $\left(-\frac{5}{2}, 5, 4, -5, 4, 5\right)$  и  $(4, 4, -5, -4, -4, 5)$ . Остальные шестиугольники определяют три элементарных однородных многогранника (табл. 1) и пять неэлементарных однородных многогранников, которые приводятся впервые (табл. 2).

Итак, мы получили все однородные многогранники, грани которых перпендикулярны инвариантным осям вращения тетраэдра, октаэдра и икосаэдра, а вершинные фигуры которых есть многоугольники без кратных элементов. Все полученные элементарные однородные многогранники имеются в [2, табл. 7], а из 16 неэлементарных однородных многогранников в [2, табл. 6] имеются только пять.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. F. Klein. Lectures on the Icosahedron, N. Y., 1956.
2. H. S. M. Coxeter, M. S. Longuet-Higgins, J. C. P. Miller. Uniform polyhedra. *philos. trans. roy. soc.*, London, 246, № 91, ser. A P, 401—450, 1954.
3. С. П. Солов. Конечность числа элементарных однородных многогранников пентулевой плотности. «Укр. геометр. сб.», вып. 5—6. Изд-во ХГУ, Харьков, 1968.

Поступила 2 июня 1968 г.

**О КРИВЫХ С ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИЕЙ ПОВОРОТА НА  
ПОВЕРХНОСТЯХ, ПРЕДСТАВИМЫХ РАЗНОСТЬЮ ВЫПУКЛЫХ  
ФУНКЦИЙ**

**C. Ф. Старохозяев** (Харьков)

В работе устанавливаются некоторые условия, при которых кривая, расположенная на поверхности, представимой разностью выпуклых функций, имеет ограниченной вариации внутренний поворот или поворот в пространстве. Полученные результаты являются аналогами соответствующих теорем для выпуклых поверхностей.

Поверхностью, представимой разностью выпуклых функций (ПРВ), называется такая поверхность, которую можно задать в декартовой системе координат уравнением

$$z = h_1(x, y) - h_2(x, y),$$

где  $h_1(x, y)$ ,  $h_2(x, y)$  — выпуклые функции (см. [1]). Поверхности, определяемые функциями  $h_1$  и  $h_2$ , называются выпуклыми компонентами поверхности ПРВ.

Нам понадобятся некоторые сведения о кривых с ограниченной вариацией поворота в пространстве (см. [2], [3]). Напомним соответствующее определение.

Пусть  $\gamma$  — кривая в пространстве. Впишем в нее правильно ломаную  $C$  и обозначим  $\psi(C)$  сумму дополнений до  $\pi$  углов этой ломаной. Верхний предел  $\psi(\gamma)$  величин  $\psi(C)$  по всем ломанным  $C$  при неограниченном убывании звеньев ломаной называется вариацией пространственного поворота кривой  $\gamma$ . Оказывается, что в данном определении всегда выполняется неравенство

$$\psi(C) \leq \psi(\gamma).$$

Как установлено А. Д. Александровым, поверхность ПРВ является многообразием с внутренней метрикой ограниченной кривизны (см. [4]).

Поверхности, рассматриваемые в работе, будут предполагаться открытыми. Под кривой, как обычно, будет пониматься непрерывный и однозначный образ в пространстве замкнутого отрезка.

Докажем вспомогательные предложения.

**Лемма 1.** Пусть  $C$  — ориентированная ломаная, однозначно проектирующаяся на плоскость  $xy$  в ломаную  $\bar{C}$ , и пусть «положительные» направления звеньев  $C$ , как и любая линейная комбинация таких направлений соседних звеньев с положительными коэффициентами, наклонены к плоскости  $xy$  под углами, не превосходящими некоторого числа  $\theta$ , меньшего  $\frac{\pi}{2}$ . Тогда вариации поворотов в пространстве этих ломаных связаны неравенством

$$\psi(\bar{C}) \leq \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} \cdot \psi(C).$$

**Доказательство.** Приведем утверждение, эквивалентное этой лемме.

Пусть  $e$  и  $g$  — единичные векторы, исходящие из одной точки,  $\bar{e}$  и  $\bar{g}$  — соответствующие им проекции на плоскость  $xy$ , и пусть  $\alpha \equiv \angle(e, g)$  и  $\bar{\alpha} \equiv \angle(\bar{e}, \bar{g})$ . Предположим, что каждый из векторов  $\lambda e + \mu g$ , где  $\lambda$  и  $\mu$  — любые неотрицательные постоянные, образует с плоскостью  $xy$  угол, не превосходящий некоторого числа  $\theta$ , меньшего  $\frac{\pi}{2}$ . Тогда

$$\bar{\alpha} \leq \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} \cdot \alpha. \quad (*)$$

Для доказательства этого утверждения в силу аддитивности величин, входящих в неравенство (\*), достаточно рассмотреть случай, когда угол  $\alpha$  не превосходит  $\frac{\pi}{2}$ .

Сравнивая площадь треугольника, образованного векторами  $e$ ,  $g$  и их разностью, с площадью его проекции на плоскость  $xy$ , получим неравенство

$$\sin \alpha \geq |e| |\bar{g}| \cdot \sin \bar{\alpha},$$

в котором  $|\bar{e}| \geq \cos \theta$  и  $|\bar{g}| \geq \cos \theta$ ,  $\bar{\alpha} \leq \frac{\pi}{2}$ . Отсюда вытекает (\*), так как  $\alpha \geq \sin \alpha$ ,  $\sin \bar{\alpha} > \frac{2}{\pi} \bar{\alpha}$ .

Лемма доказана.

**Лемма 2.** Пусть  $C$  — ломаная, «разность» ломаных  $C_1$  и  $C_2$ , звенья которых наклонены к плоскости  $xy$  под углами, не превосходящими соответственно чисел  $\theta_1$  и  $\theta_2$ , меньших  $\frac{\pi}{2}$ . И пусть  $\bar{C}$  — общая проекция на плоскость для этих ломаных. Тогда имеет место неравенство

$$\psi(C) \leq \psi(\bar{C}) + N(\theta_1, \theta_2)(\psi(C_1) + \psi(C_2)),$$

где  $N(\theta_1, \theta_2)$  — положительная постоянная.

**Доказательство.** Легко заметить, что вариация поворота ломаной  $C$  в пространстве не меньше вариации поворота этой ломаной на проектирующем ее цилиндре, и первая не превосходит последней в сумме с вариацией поворота проекции  $\bar{C}$ .

Для доказательства леммы достаточно рассмотреть случай, когда все ломаные принадлежат вертикальной плоскости, так что дальше считаем  $\psi(\bar{C}) = 0$ . Предположим также, что ориентирована и плоскость, содержащая эти ломаные.

Пусть  $e$  и  $g$  — «положительные» направления двух соседних звеньев ломаной  $C$ ,  $e_i$  и  $g_i$  — соответствующие им направления на соответствующей ломаной  $C_i$ , а  $\bar{e} = g$  — соответствующее направление на прямой  $\bar{C}$ . Обозначим  $\lambda \equiv \angle(e, \bar{e})$  и  $\mu \equiv \angle(g, \bar{g})$ ,  $\alpha_i \equiv \angle(e_i, \bar{e})$  и  $\beta_i \equiv \angle(g_i, \bar{g})$  — ориентированные углы в плоскости, проектирующей ломаные. Очевидно, углы  $|\lambda - \mu|$  и  $|\alpha_i - \beta_i|$  — вариации поворотов соответствующих ломаных в соответствующих их вершинах. Тогда

$$\operatorname{tg} \lambda = \operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_2 \text{ и } \operatorname{tg} \mu = \operatorname{tg} \beta_1 - \operatorname{tg} \beta_2,$$

а по теореме о среднем

$$|\lambda - \mu| \leq D(\theta_1, \theta_2) |\operatorname{tg} \lambda - \operatorname{tg} \mu|$$

и

$$|\operatorname{tg} \alpha_i - \operatorname{tg} \beta_i| \leq D(\theta_i) |\alpha_i - \beta_i|.$$

Таким образом,

$$|\lambda - \mu| \leq N_1(\theta_1, \theta_2) |\alpha_1 - \beta_1| + N_2(\theta_1, \theta_2) |\alpha_2 - \beta_2|.$$

Отсюда выводится утверждение леммы.

Лемма доказана.

**Лемма 3.** Пусть  $C$  — ломаная, вписанная в выпуклую поверхность, опорные плоскости которой наклонены к плоскости  $xy$  под углами, не превосходящими некоторого числа  $\theta$ , меньшего  $\frac{\pi}{2}$ . И пусть  $\bar{C}$  — проекция ломаной  $C$  на эту плоскость. Тогда имеет место неравенство

$$\psi(C) \leq \pi + N(\theta) \psi(\bar{C}),$$

где  $N(\theta)$  — положительная постоянная.

Доказательство этой леммы мы приводить не будем. Оценка вариации поворота, аналогичная данной, устанавливалась А. В. Погореловым при исследовании кривых с ограниченной вариацией поворота на выпуклой поверхности (см. [2, стр. 19—20]).

**Лемма 4.** Пусть  $C$  — ломаная, расположенная на некотором многограннике и не проходящая через его вершины. Тогда вариация правого (левого) поворотов ломаной  $C$  на многограннике не превосходит вариации её поворота в пространстве.

Доказательство. Пусть  $e$  — одно из направлений на ребре многогранника, которое пересекает ломаную,  $e_1$  и  $e_2$  — направления звеньев этой ломаной от вершины, точки пересечения. Легко заметить, что углы  $\alpha = \angle(e_1, e_2)$ ,  $\alpha_1 = \angle(e_1, e)$  и  $\alpha_2 = \angle(e_2, e)$  — плоские углы трехгранного выпуклого угла и что разность  $|\alpha_1 + \alpha_2 - \pi|$  равна вариации правого (и левого) поворота ломаной на многограннике в соответствующей ее вершине. Поэтому справедливы неравенства

$$\alpha \leq \alpha_1 + \alpha_2, \quad \alpha + \alpha_1 + \alpha_2 \leq 2\pi,$$

и, значит,

$$-\pi + \alpha \leq \alpha_1 + \alpha_2 - \pi \leq \pi + \alpha.$$

Отсюда вытекает утверждение леммы.

Лемма доказана.

**Лемма 5.** Пусть  $F$  — поверхность ПРВ и  $A$  — точка на этой поверхности. Тогда для любого положительного числа  $\varepsilon$  можно указать число  $\delta > 0$ , такое, что все плоские сечения поверхности  $F$ , исходящие из точки  $A$ , проектирующиеся на плоскость  $xy$  в прямолинейные отрезки длины  $\delta$ , имеют внутренние повороты на  $F$ , не превосходящие  $\varepsilon$ .

Доказательство. Построим две последовательности многогранников  $\{P_n^1\}$  и  $\{P_n^2\}$ , сходящиеся соответственно к выпуклым компонентам  $F_1$  и  $F_2$  поверхности  $F$ . Будем считать, что точки  $A_i \in F_1$  и  $A_2 \in F_2$ , расположенные на одной вертикали с  $A$ , являются вершинами соответствующих многогранников и что все остальные вершины любого из пары многогранников  $P_n^1$  и  $P_n^2$  находятся строго над открытыми гранями другого из этой пары, и что касательные конусы многогранников  $P_n^i$  в точке  $A_i$  сходятся к касательному конусу поверхности  $F_i$  в этой точке. Обозначим  $\{P_n/P_n = P_n^1 - P_n^2\}$  последовательность многогранников, сходящихся к поверхности  $F$ . Удобно предполагать, что метрики рассматриваемых поверхностей и многогранников с помощью ортогонального проектирования перенесены на плоскость  $xy$  и заданы тем самым в общей параметризации. Таким образом, можно говорить о величинах, характеризующих область или кривую в плоскости, рассматриваемую в той или иной метрике. Подобные величины в дальнейшем обозначаются сходственными символами, а принадлежность их метрике отмечается соответствующими индексами. Например,  $\Omega(\bar{S})$ ,  $\Omega'(\bar{S})$  и  $\Omega_n(\bar{S})$ ,  $\Omega'_n(\bar{S})$  — абсолютные кривизны

множества  $\bar{S}$ , рассматриваемого соответственно в метриках поверхностей  $F$ ,  $F_i$  и многогранников  $P_n$ ,  $P_n^i$ .

Пусть  $\bar{A}$  — проекция точек  $A_1$  и  $A_2$  на плоскость  $xy$ . Обозначим  $U_i \equiv U(\bar{A}; \delta)$  круг в этой плоскости с центром в  $\bar{A}$  и радиусом  $\delta$ . Пусть  $l$  — прямолинейный отрезок длины  $\delta$  с началом в  $\bar{A}$ . Надо установить, что при заданном  $\epsilon > 0$  и при соответствующем выборе  $\delta$  односторонний поворот  $\tau(l)$  отрезка  $l$ , рассматриваемого в метрике  $F$ , не превосходит  $\epsilon$  для каждого из направлений  $l$ .

Докажем сначала следующее утверждение, характеризующее поведение кривизны многогранников  $P_n$  в окрестности точки  $\bar{A}$ , приближающих поверхность  $F$ .

**Лемма 6.** При заданном  $\epsilon > 0$  существует область  $G$  на плоскости, содержащая  $\bar{A}$ , и число  $N > 0$ , такие, что абсолютная кривизна  $\Omega_n(G \setminus \bar{A})$  этой области с выколотой точкой  $\bar{A}$ , рассматриваемой в метрике многогранника  $P_n$ , при  $n > N$  не превосходит  $\epsilon$ .

**Доказательство.** Заметим, что величина  $\Omega_n$  допускает следующее представление:

$$\Omega_n(G \setminus \bar{A}) = -\omega_n(G \setminus \bar{A}) + 2\omega_n^+(G \setminus \bar{A}).$$

Поэтому высказанное утверждение достаточно установить для каждой из величин в отдельности, подобрав общую область  $G$ : для модуля  $\omega_n(G \setminus A)$  и положительной ее части  $\omega_n^+(G \setminus \bar{A})$ .

Оценка величины  $\omega_n^+(G \setminus \bar{A})$  не представляет затруднений. Действительно, положительная часть кривизны сосредоточена в тех вершинах, которые являются «разностями» вершины (или внутренней точки грани) одного из пары многогранников  $P_n^1$  и  $P_n^2$  и внутренней точки грани (вершины) другого. Многогранные углы многогранника  $P_n$  в этих вершинах выпуклые и получаются из углов компонент этого многогранника аффинными преобразованиями. Поскольку опорные плоскости многогранников  $P_n^1$  и  $P_n^2$  в окрестности точки  $\bar{A}$  строго отделены от вертикальных ( $P_n^i$  сходятся к  $F_i$ ), то подбирается такая окрестность  $G_0$  этой точки и некоторая константа  $M > 0$ , не зависящая от  $n$ , что для любой области  $G \subset G_0$

$$\omega_n^+(G \setminus \bar{A}) \leq M(\Omega_n^1(G \setminus \bar{A}) + \Omega_n^2(G \setminus \bar{A})).$$

Так как поверхность  $F_i$  и многогранники  $P_n^i$  — выпуклые,  $P_n^i$  сходятся к  $F_i$  и точка  $A_i$ , соответствующая точке  $\bar{A}$ , принадлежит одновременно поверхности и многогранникам, то при соответствующем подборе области  $G_0$  и целого числа  $N > 0$  для всех  $G \subset G_0$  при  $n > N$  будут выполняться неравенства

$$\Omega_n^i(G \setminus \bar{A}) < \frac{\epsilon}{8M}.$$

Оценим величину  $\omega_n(G \setminus \bar{A})$ .

Можно заметить, что кривизны многогранников  $P_n$  в точке  $\bar{A}$  сходятся к кривизне  $F$ .

Так как последовательность многогранников  $\{P_n\}$  сильно сходится к  $F$ , метрики этих многогранников сходятся к метрике  $F$  равномерно (см. [1]), а абсолютные кривизны метрик ограничены в совокупности (см. [4]), то кривизны  $\omega_n$  как функции борелевских множеств на плоскости локально слабо сходятся к  $\omega$ , кривизне поверхности  $F$  (см. [5, стр. 192]). По признаку Колмогорова (см. [5, стр. 187]) это означает следующее. Для каждого замкнутого круга  $\bar{U}_\delta$  и для любого открытого множества  $G_0$  с ком-

актным (в области определения рассматриваемых метрик) замыканием, содержащего  $\bar{U}_\delta$ , существует последовательность открытых множеств  $\{G_n \mid \bar{U}_\delta \subset G_n \subset G_0\}$  таких, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\omega(G_n) - \omega_n(G_n)| = 0.$$

Поскольку функция  $\omega$  на кольце борелевских множеств в плоскости вполне аддитивна, то при любом выборе области  $G_n$ , расположенной в достаточно малой окрестности точки  $\bar{A}$ , кривизна  $\omega(G_n \setminus \bar{A})$  будет достаточно малой.

Учитывая высказанные замечания, мы заключаем следующее.

Существует область  $G_0$ , содержащая точку  $\bar{A}$ , области  $G_n \subset G_0$ , которым принадлежит круг  $\bar{U}_\delta$ , и целое число  $N > 0$ , такие, что при  $n > N$

$$|\omega_n(\bar{A}) - \omega(\bar{A})| < \frac{\varepsilon}{6}, \quad |\omega(G_n) - \omega_n(G_n)| < \frac{\varepsilon}{6}, \quad |\omega(G_n \setminus \bar{A})| < \frac{\varepsilon}{6}.$$

Имеем

$$\begin{aligned} |\omega_n(G_n \setminus \bar{A})| &= |\omega_n(G_n \setminus \bar{A}) - \omega(G_n \setminus \bar{A}) + \omega(G_n \setminus \bar{A})| = \\ &= |\omega_n(G_n \setminus \bar{A}) + \omega_n(\bar{A}) - \omega(G_n \setminus \bar{A}) - \omega(\bar{A}) - \omega_n(\bar{A}) + \omega(\bar{A}) + \omega(G_n \setminus \bar{A})| \leqslant \\ &\leqslant |\omega_n(G_n) - \omega(G_n)| + |\omega_n(\bar{A}) - \omega(\bar{A})| + |\omega(G_n \setminus \bar{A})|. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$|\omega_n(G_n \setminus \bar{A})| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Объединяя полученные результаты, находим, что

$$\Omega_n(G_n \setminus \bar{A}) < \varepsilon.$$

Так как функция  $\Omega$  неотрицательна и на кольце борелевских множеств плоскости вполне аддитивна, то подавно

$$\Omega_n(U_\delta \setminus \bar{A}) \leq \Omega_n(\bar{U}_\delta \setminus \bar{A}) < \varepsilon.$$

Этим лемма 6 доказана. Здесь в качестве области  $G$  фигурирует круг  $U_\delta$ ,  $n > N > 0$ , а  $N$  и  $\delta$  подобраны по  $\varepsilon$ .

Продолжим доказательство леммы 5.

Пусть  $U_\delta$  — круг с центром в  $\bar{A}$ , для которого при  $n > N$

$$\Omega_n(\bar{U}_\delta \setminus \bar{A}) < \frac{\varepsilon}{2},$$

и пусть  $l$  — произвольный радиус этого круга. Существование такого круга  $U_\delta$  гарантируется леммой 6.

Согласно одной теореме Ю. Д. Бураго (см. [6, стр. 14]) поворот отрезка  $l$  в метрике поверхности  $F$  выражается следующим образом:

$$\tau(l) = \bar{\tau}(l) + \bar{\omega}(l).$$

Здесь  $\bar{\tau}(l)$  — слабый предел поворотов  $\tau_n(l)$  отрезка  $l$  в метриках многоугольников  $P_n$ , который, можно предположить, существует, а  $\bar{\omega}(l)$  — так называемая наплывающая кривизна (по терминологии Ю. Д. Бураго) при сходимости метрик  $P_n$  к  $F$ . Как оказывается, кривизна  $\bar{\omega}(l)$  не превосходит величины, мажорирующей при достаточно больших  $n$  абсолютные кривизны областей  $U_\delta \setminus \bar{A}$ . В данном случае, таким образом,

$$\bar{\omega}(l) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Для слабого предела  $\tau(l)$  выполняется (см. [5, стр. 187]) следующее соотношение:

$$\bar{\tau}(l) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n(l).$$

Как вытекает из леммы 2 и леммы 4, для отрезка  $l$ , не «проходящего» через вершины многогранника  $P_n$ ,

$$\tau_n(l) \leq \tilde{N}(0)(\psi_n^1(l) + \psi_n^2(l)),$$

где  $\psi_n^i(l)$  — вариации пространственных поворотов прообразов отрезка  $l$  на соответствующих многогранниках  $P_n^i$ , а  $\tilde{N}(0)$  — постоянная, определяемая наклонами  $\theta$  опорных плоскостей поверхности  $F$  в окрестности точки  $A$ . Произвольное направление  $l$  приближается направлениями, не «проходящими» через вершины многогранника  $P_n$ , и по теореме о вариации поворота предельной кривой в фиксированной метрике (см. [5, стр. 245]) для такого направления получаем оценку

$$\tau_n(l) \leq \tilde{N}(0)(\psi_n^1(l) + \psi_n^2(l)) + \Omega_n(\bar{U}_\delta \setminus \bar{A}).$$

Очевидно, что при достаточно малом  $\delta$  и при достаточно больших  $n$  вариации пространственных поворотов  $\psi_n^i(l)$  плоских сечений на выпуклых многогранниках  $P_n^i$  равномерно малые независимо от выбора направления  $l$ . Можно считать поэтому, что

$$\tau_n(l) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Следовательно,

$$\tau(l) < \varepsilon,$$

и это неравенство выполняется для всех радиусов  $l$  круга  $U_\delta$ .

Лемма доказана.

**Замечание.** Как известно, сумма односторонних поворотов кривой на поверхности равна кривизне множества внутренних ее точек. Учитывая это обстоятельство и леммы 5 и 6, нетрудно заметить, что в условиях леммы 5 можно гарантировать существование такого  $\delta$ , что односторонние повороты соответствующих сечений не превосходят  $\varepsilon$  по модулю.

**Лемма 7.** Пусть  $T$  — плоскость,  $e$  — единичный вектор, не параллельный  $T$ ,  $S$  — плоскость, образующая с  $e$  достаточно малый угол  $\chi$ , и  $v$  — орт линии пересечения  $S$  и  $T$ . Пусть  $\varphi$  — угол в плоскости  $S$ , составленный векторами, которые наклонены к вектору  $v$  под углами, не превосходящими некоторого малого числа  $\theta$ . Тогда для угла  $\varphi$ , проекции угла  $\varphi$  на плоскость  $T$  вдоль направления  $e$ , справедлива оценка

$$\bar{\varphi} \leq N^*(\chi, \theta) \cdot \chi \cdot \varphi,$$

где  $N^*(\chi, \theta)$  — положительная постоянная, ограниченная при малых  $\chi$ .

**Доказательство.** Можно положить, что  $e$  не параллелен  $S$ . Приняв, что начало отсчета векторов находится на пересечении  $S$  и  $T$ , введем следующие обозначения:  $g$  — единичный вектор направления проекции  $e$  на  $S$ ,  $\bar{g}$  — орт линии пересечения с  $T$  плоскости, проведенной через  $e$  и  $g$ , не разделяющий эти векторы, и  $\theta_g = \angle(g, v)$ ,  $\bar{\theta}_g = \angle(\bar{g}, v)$ ,  $\chi = \angle(g, \bar{g})$ . Пусть  $r(t) = (v + tg)/|v + tg|$  — произвольный единичный вектор в плоскости  $S$ ,  $\bar{r}(t)$  — единичный вектор направления проекции  $r(t)$  на  $T$  вдоль направления  $e$ . Можно показать, что дифференциалы  $dr(t)$  и  $d\bar{r}(t)$  имеют следующие выражения для модулей:

$$|dr(t)| = \sqrt{\frac{1 - 2t \cos \theta_g + t^2}{(1 + t^2)^3}} dt \text{ и } |\bar{r}(t)| = h \cdot \sqrt{\frac{1 - 2t \cos \bar{\theta}_g + t^2 h^2}{(1 + t^2 h^2)^3}} dt,$$

где  $h = \sin \alpha / \sin(\alpha + \chi)$ . Так как  $|d\tau|$  и  $|dr|$  — бесконечно малый угол в  $S$  и его проекция на  $T$  соответственно,  $t$  и  $\alpha$  в сравнении с  $\chi$  — малые величины, а  $\chi$  отделен от нуля и  $\pi$ , то для отношения  $|d\tau|/|dr|$  легко получается оценка сверху. Отсюда, если учесть, что  $h \sim \alpha$ , выводится утверждение леммы.

Лемма доказана.

**Замечание.** Используя обозначения леммы 7 и метод ее доказательства, можно рассмотреть следующий случай:  $e$  перпендикулярен  $T$ , угол  $\alpha$  конечный и отделен от нуля и  $\pi$ . В этом случае для угла  $\varphi$  получается двусторонняя оценка вида

$$D_1 \bar{\Phi} \leq \varphi \leq D_2 \bar{\Phi},$$

где  $D_1$  и  $D_2$  — постоянные, определяющиеся границами  $\alpha$ , близкие к единице, когда плоскости  $S$  и  $T$  образуют малый угол.

Приведем доказательства теорем.

**Теорема 1.** Пусть  $F$  — поверхность ПРВ,  $\gamma$  — кривая на ней, а  $\bar{\gamma}$  — проекция кривой  $\gamma$  на плоскость  $xy$ . Тогда для того, чтобы кривая  $\gamma$  имела ограниченной вариации пространственный поворот, необходимо и достаточно, чтобы проекция  $\bar{\gamma}$  обладала этим же свойством.

**Доказательство.** Пусть  $C$  и  $\bar{C}$  — ломаные, правильно вписанные в кривые  $\gamma$  и  $\bar{\gamma}$  соответственно, где  $\bar{C}$  — проекция  $C$  на плоскость  $xy$ . Обозначим  $C_1$  и  $C_2$  ломаные с той же проекцией на эту плоскость, вписанные соответственно в выпуклые компоненты  $F_1$  и  $F_2$  поверхности  $F$ . Звенья ломаной  $C_i$ , очевидно, наклонены к плоскости  $xy$  под углами, не превосходящими некоторого числа  $\theta_i$ , меньшего  $\frac{\pi}{2}$ , определяемого лишь наклонами плоскостей, опорных к  $F_i$ . Звенья ломаной  $C$  как «разности» соответствующих звеньев ломаных  $C_1$  и  $C_2$  наклонены к этой плоскости под углами, не превосходящими некоторого числа  $\theta$ , также меньшего  $\frac{\pi}{2}$ , зависящего лишь от  $\theta_1$  и  $\theta_2$ . В таком случае согласно леммам 1, 2, 3 вариации поворотов ломаных связаны неравенствами

$$\begin{aligned}\psi(\bar{C}) &\leq N(\theta) \psi(C), \\ \psi(C) &\leq \psi(\bar{C}) + N(\theta_1, \theta_2)(\psi(C_1) + \psi(C_2)), \\ \psi(C_i) &\leq \pi - N_i(\theta_i) \psi(\bar{C}).\end{aligned}$$

А отсюда вытекает утверждение теоремы и тот факт, что вариации пространственного поворота кривой  $\gamma$ , ее проекции  $\bar{\gamma}$  и соответствующих кривых  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  на выпуклых компонентах поверхности, определяемых проектирующим цилиндром кривой  $\gamma$ , связаны неравенством

$$\psi(\gamma) \leq \psi(\bar{\gamma}) + N(\theta_1, \theta_2)(\psi(\gamma_1) + \psi(\gamma_2)).$$

Теорема доказана.

**Теорема 2.** Если кривая  $\gamma$ , лежащая на поверхности ПРВ, имеет ограниченной вариации пространственный поворот, то у нее ограниченной вариации правый (левый) поворот на поверхности.

**Доказательство.** Из теоремы 1 следует, что вариация поворота кривой  $\gamma$ , проекции  $\gamma$  на плоскость  $xy$ , ограничена. Пусть  $\{P_n^i\}$  — последовательность выпуклых многогранников, сходящихся к поверхности  $F$ , выпуклой компоненте  $F$ , и вписанных в эту поверхность,  $\{P_n\}$  — последовательность многогранников, разностей  $P_n^1$  и  $P_n^2$ , сходящихся к поверхности  $F$ . Пусть  $\{C_n | C_n \subset P_n\}$ ,  $\{C_n^1 | C_n^1 \subset P_n^1\}$ ,  $\{C_n^2 | C_n^2 \subset P_n^2\}$  — последовательность ломаных, вписанных в соответствующие многогранники, и  $\bar{C}_n$  — проекция  $C_n$  на плоскость  $xy$ . Тогда согласно теореме 1

10\*

тельности ломаных, не проходящих через вершины соответствующих многоугранников и имеющих на плоскость  $xy$  общей проекцией при фиксированном  $n$  ломаную, которую мы обозначим  $\bar{C}_n$ . Относительно последовательности ломаных  $\{\bar{C}_n\}$  предположим, что эти ломаные вместе с вариациями поворотов сходятся к  $\gamma$ . Учитывая неравенства, использованные при доказательстве предыдущей теоремы, находим, что вариации поворотов в пространстве ломаных  $C_n$  ограничены в совокупности. По лемме 4 вариации правых (левых) поворотов этих ломаных на соответствующих многогранниках обладают тем же свойством. Многогранники  $P_n$  сильно сходятся

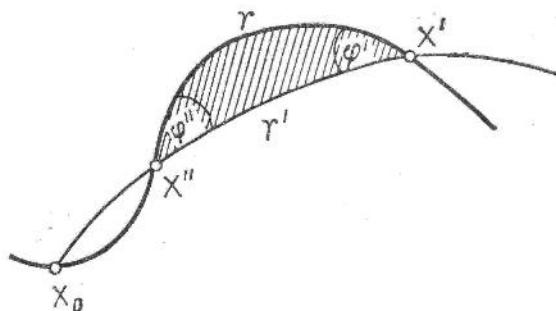


Рис. 1

к  $F$ , и согласно результатам А. Д. Александрова метрики этих многогранников равномерно сходятся к метрике  $F$ , а абсолютные их кривизны равномерно ограничены. Заметим, что гомеоморфизм между метриками  $P_n$  и  $F$  устанавливается ортогональным проектированием. Можно показать в соответствии с определениями, принятими в теории многообразий с ограниченной кривизной [5], что при указанной сходимости метрик ломаные  $C_n$  на многогранниках  $P_n$  сходятся к кривой  $\gamma$ . Теперь ограниченность вариации правого (левого) поворота кривой  $\gamma$  на поверхности  $F$  вытекает из теоремы Ю. Д. Бураго [6] о повороте предельной кривой в сходящихся метриках.

Теорема доказана.

**Теорема 3.** *На поверхности ПРВ кривая ограниченной вариации внутреннего поворота имеет в каждой точке непрерывную справа правую полукасательную и непрерывную слева левую полукасательную.*

**Доказательство.** Пусть  $F$  — данная поверхность,  $\gamma$  — кривая с ограниченной вариацией внутреннего поворота на  $F$  и  $X_0$  — точка на кривой  $\gamma$ . Согласно теореме А. Д. Александрова кривая  $\gamma$  имеет в каждой точке правую полукасательную [1, 4]. Покажем, что эта полукасательная непрерывна справа.

Пусть  $X'$  — точка кривой  $\gamma$ , близкая к  $X_0$ . Проведем через точки  $X_0$  и  $X'$  плоскость, перпендикулярную плоскости  $xy$ . Она пересечет поверхность  $F$  по некоторой кривой  $\gamma'$ . Чтобы не вводить новых обозначений, отрезки  $X_0X'$  кривых  $\gamma$  и  $\gamma'$  будем обозначать так же —  $\gamma$  и  $\gamma'$ . Мы утверждаем, что при достаточной близости  $X'$  к  $X_0$  кривые  $\gamma$  и  $\gamma'$  в точке  $X'$  образуют сколь угодно малый угол. Докажем это.

Пусть  $X''$  — первая точка пересечения кривых  $\gamma$  и  $\gamma'$  при следовании из  $X'$  в  $X_0$ . Это может быть и  $X_0$ . (Если первой точки пересечения нет, т. е. существует последовательность точек пересечения, сходящаяся к  $X'$ , то кривые  $\gamma$  и  $\gamma'$  в точке  $X'$  образуют угол, равный нулю). Применяя

к заштрихованной луночке (см. рис. 1), образованной дугами кривых  $\gamma$  и  $\gamma'$  между точками  $X'$  и  $X''$ , теорему Гаусса — Боннэ, получим

$$p + p' - \varphi - \varphi' + \omega = 0.$$

Здесь  $p$  и  $p'$  — повороты кривых  $\gamma$  и  $\gamma'$  со стороны луночки,  $\varphi'$  и  $\varphi''$  — углы в точках  $X'$  и  $X''$ , а  $\omega$  — кривизна луночки. При достаточной близости  $X'$  к  $X_0$  мало в силу условия теоремы и полной аддитивности поворота  $\gamma$  на  $F$ ,  $p'$  оценивается малой положительной величиной, что следует из леммы 5, наконец,  $\omega$  мала ввиду аддитивности кривизны поверхности на кольце борелевских множеств и того обстоятельства, что  $X_0$  не принадлежит внутренней части луночки. Так как  $\varphi'$  и  $\varphi''$  неотрицательны, то они малы одновременно. Малость всех указанных величин определяется только малостью окрестности точки  $X_0$  на  $F$ , в которой ведутся наши построения. Итак, при достаточной близости  $X'$  к  $X_0$  угол между кривыми  $\gamma$  и  $\gamma'$  в точке  $X'$  будет мал.

Так как рассматриваемая окрестность точки  $X_0$  на  $F$  мала, то в ней полукасательные одного направления в сечении  $\gamma'$  образуют равномерно малый угол, а полукасательные, правая и левая, в разных точках этого сечения образуют угол, близкий к  $\pi$ . Это вытекает из леммы 2. Поэтому угол на поверхности в точке  $X'$  между ветвями сечения  $\gamma'$  равномерно близок к  $\pi$ , а односторонние повороты сечения в этой точке равномерно малые. То же можно сказать о поворотах в  $X'$  кривой  $\gamma$ . Учитывая теперь малость  $\varphi'$  и малость кривизны поверхности в точке  $X'$ , легко находим, что угол между продолжениями участков  $X_0X'$  кривых  $\gamma$  и  $\gamma'$ , а, значит, и угол в пространстве в этой точке между правыми полукасательными кривых, стремится к нулю, когда  $X'$  сходится к  $X_0$ . Так как хорда  $X_0X'$  по направлению сходится к полукасательной кривой  $\gamma$  в точке  $X_0$ , то отсюда следует, что к этой полукасательной сходится и правая полукасательная этой кривой в точке  $X'$ .

Теорема доказана.

**Теорема 4.** На гладкой поверхности ПРВ кривая ограниченной вариации внутреннего поворота имеет непрерывную касательную в каждой точке, где внутренний поворот равен нулю.

**Теорема 5.** Геодезическая линия на гладкой поверхности ПРВ является гладкой кривой с непрерывно изменяющейся касательной.

Теоремы 4 и 5 являются простым следствием теоремы 3.

**Теорема 6.** На поверхности ПРВ с гладкими выпуклыми компонентами кривая ограниченной вариации внутреннего поворота имеет ограниченной вариации пространственный поворот.

**Доказательство.** Пусть  $F$  — данная поверхность ПРВ,  $F_1$  и  $F_2$  — ее гладкие выпуклые компоненты. Пусть  $\gamma$  — кривая ограниченной вариации внутреннего поворота на поверхности  $F$  и  $\tilde{\gamma}$  — ее проекция на плоскость  $xy$ . Если кривая  $\tilde{\gamma}$  является кривой ограниченной вариации поворота, то по теореме 1 кривая  $\gamma$  имеет ограниченной вариации пространственный поворот. Допустим, что вопреки утверждению теоремы, кривая  $\gamma$  не является кривой ограниченной вариации пространственного поворота. Тогда на кривой  $\gamma$  можно указать точку  $X_0$  такую, что в любой сколь угодно малой правой (или левой) полуокрестности этой точки вариация пространственного поворота  $\gamma$  не ограничена. Положим для определенности, что это имеет место для сколь угодно малой правой полуокрестности точки  $X_0$  кривой  $\gamma$ .

Кривая  $\gamma$  в точке  $X_0$  имеет непрерывную правую полукасательную (теорема 3). Не ограничивая общности, можно считать, что  $X_0$  проекти-

руется на плоскость  $xy$  в начало координат, а правая полукасательная к  $\gamma$  в этой точке проектируется в положительную полуось  $x$ .

Так как вариация пространственного поворота  $\gamma$  в сколь угодно малой правой полуокрестности точки  $X_0$  неограничена, то этим свойством обладает и правая полуокрестность точки  $O$  кривой  $\bar{\gamma}$ . Отсюда следует, что в кривую  $\bar{\gamma}$  можно вписать ломаную  $\bar{C}$  с бесконечным числом звеньев, обладающую следующими свойствами. При  $n \rightarrow \infty$  вершины ломаной  $\bar{P}_n$  сходятся к точке  $O$ , на любом участке  $\bar{P}_n O$  вариация поворота ломаной неограничена. Поскольку почти все точки кривой  $\gamma$  гладкие, то, не нарушая общности, можно считать, что все вершины  $\bar{P}_k$  ломаной  $\bar{C}$  являются гладкими точками кривой  $\bar{\gamma}$ . Из непрерывности правой полукасательной кривой  $\gamma$  следует, что направления звеньев  $\bar{P}_k \bar{P}_{k-1}$  ломаной  $\bar{C}$  при  $k \rightarrow \infty$  сходятся к направлению оси  $x$ .

В дальнейшем мы будем рассматривать участок ломаной, ограниченный вершинами  $\bar{P}_n$  и  $\bar{P}_m$  ( $m > n$ ). Вершину  $\bar{P}_n$  берем произвольно, но достаточно близко к  $O$ , а вершину  $\bar{P}_m$  выбираем из того условия, чтобы вариация поворота выделенного отрезка ломаной была заключена в конечных пределах, например, между  $\pi$  и  $2\pi$ . Это всегда можно сделать, так как поворот в любой вершине меньше  $\pi$ , а вариация поворота участка  $\bar{P}_n O$  ломаной неограничена.

Чтобы не вводить новых обозначений, условимся обозначать отрезок кривой  $\gamma$ , который проектируется в отрезок  $\bar{P}_n \bar{P}_m$  кривой  $\bar{\gamma}$ , также через  $\gamma$ , его проекцию на плоскость  $xy$  — через  $\gamma$ , отрезок ломаной  $\bar{C}$  между  $\bar{P}_n$  и  $\bar{P}_m$  — через  $\bar{C}$ . Обозначим через  $C^1$  кривую на выпуклой компоненте  $F_1$ , которая проектируется в ломаную  $\bar{C}$ .

Кривая  $C^1$  разбивается точками  $P_k^1$  ( $n < k < m$ ), соответствующими точкам  $\bar{P}_k$ , на выпуклые дуги, лежащие в плоскостях, перпендикулярных к плоскости  $xy$ . Наша задача состоит в том, чтобы оценить вариацию поворота кривой  $C^1$  на открытых выпуклых дугах, из которых она составлена, т. е. вариацию пространственного поворота кривой  $C^1$  с удаленными точками  $P_k^1$ , где  $n < k < m$ . Так как все дуги обращены выпуклостью в одну сторону, то вариация поворота на множестве этих дуг равна  $\sum p_\alpha^1$ , где  $p_\alpha^1$  — поворот на отдельно взятой дуге с концами в точках  $P_{n+\alpha} P_{n+\alpha+1}$ .

Пусть  $\tilde{g}$  — прямая, по которой пересекается плоскость  $yz$  касательной плоскостью к выпуклой компоненте  $F_1$  в точке  $X_0^1$ , соответствующей точке  $X_0$  на  $F$ . Спроектируем кривую  $C^1$  на плоскость  $xz$  прямыми, параллельными  $\tilde{g}$ . Это проектирование однозначное, если достаточно велико  $n$ . Полученную в плоскости  $xz$  кривую обозначим через  $\tilde{C}^1$ . Эта кривая плоская и составлена из выпуклых дуг, обращенных выпуклостью в одну сторону. Поворот этой кривой представляется в виде  $\sum \tilde{p}_\alpha^1 + \sum \tilde{q}_\alpha^1$ , где  $\tilde{p}_\alpha^1$  — повороты открытых дуг, а  $\tilde{q}_\alpha^1$  — повороты в вершинах. При достаточно большом  $n$  поворот кривой  $\tilde{C}^1$  достаточно малый, например, меньше заданного  $\varepsilon$ . Поэтому имеет место оценка

$$\sum \tilde{p}_\alpha^1 < \varepsilon + \sum |\tilde{q}_\alpha^1|. \quad (1)$$

(Мы считаем повороты  $\tilde{p}_\alpha^1$  неотрицательными).

Так как звенья ломаной  $\bar{C}$  образуют малые углы с осью  $x$  при достаточно большом  $n$ , то отношение поворотов плоских дуг кривых  $C^1$  и  $C^1$  близко к единице,  $p_\alpha^1 / \tilde{p}_\alpha^1 \sim 1$ . Поэтому, взяв достаточно большое  $n$ , будем иметь

неравенство  $p_\alpha^1 < \tilde{p}_\alpha^1(1 + \varepsilon)$ . Что касается поворотов в соответствующих вершинах кривых  $C^1$  и  $\tilde{C}^1$ , то при достаточно большом  $n$ , как это следует из леммы 7,  $|\tilde{q}_\alpha^1| < \varepsilon |q_\alpha^1|$ . Теперь из неравенства (1) получаем следующую оценку:

$$\sum p_\alpha^1 < (1 + \varepsilon)(\varepsilon + \varepsilon D \sum |q_\alpha|),$$

где  $q_\alpha$  — повороты в вершинах  $\tilde{C}$ , а  $D$  — некоторая константа, зависящая от наклонов опорных плоскостей к  $F_1$  в окрестности точки  $X_\alpha^1$ . Таким образом, можно считать, что суммарный поворот на выпуклых дугах кривой  $C^1$  сколь угодно мал при достаточно большом  $n$ .

Аналогично доказывается, что суммарный поворот на выпуклых дугах кривой  $C^2$  на поверхности  $F_2$  тоже мал. Здесь  $F_2$  — вторая выпуклая компонента поверхности  $F$ , а  $C^2$  — кривая на ней, которая проектируется в  $\tilde{C}$ .

Покажем теперь, что для кривой  $\gamma$  на поверхности  $F$  можно указать положительную оценку снизу для вариации внутреннего поворота, не зависящую от  $n$ . Таким образом мы придем к противоречию, так как вариация внутреннего поворота кривой  $\gamma$  стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$ .

Обозначим через  $C^*$  кривую на поверхность  $F$ , которая проектируется в ломаную  $\tilde{C}$ . Кривая  $\gamma$  и кривая  $C^*$  пересекаются в точках  $P_\alpha$  (по могут иметь и другие точки пересечения). Мы будем говорить, что эти кривые разбиваются точками  $P_\alpha$  на звенья. Рассмотрим поворот кривой  $\gamma$  на двух звеньях, примыкающих к точке  $P_\alpha$ .

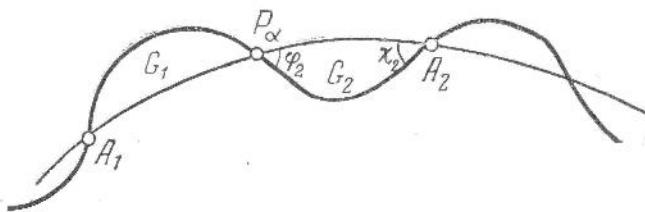


Рис. 2

Пусть  $A_1$  и  $A_2$  — ближайшие к  $P_\alpha$  точки пересечения кривых  $\gamma$  и  $C^*$  (см. рис. 2). Применяя теорему Гаусса—Боннэ к области  $G_2$ , получим

$$p_\alpha + p_2^* - \varphi_2 - \chi_2 + \omega_2 = 0.$$

Здесь  $p_\alpha$  и  $p_2^*$  — повороты дуг кривых  $\gamma$  и  $C^*$ , ограничивающих область  $G_2$ ,  $\varphi_2$  и  $\chi_2$  — углы в точках  $P_\alpha$  и  $A_2$ ,  $\omega_2$  — кривизна области  $G_2$ . Аналогично, применяя теорему Гаусса—Боннэ к области  $G_1$ , получим

$$p_{\alpha-1} + p_1^* - \varphi_1 - \chi_1 + \omega_1 = 0.$$

Из этих равенств находим

$$\begin{aligned} |p_{\alpha-1}| &\geq |\varphi_1| - |p_1^*| - |\omega_1|, \\ |p_\alpha| &\geq |\varphi_2| - |p_2^*| - |\omega_2|. \end{aligned}$$

Отсюда

$$|p_{\alpha-1}| + |p_\alpha| \geq |\varphi_1| + |\varphi_2| - |p_1^*| - |p_2^*| - |\omega_1| - |\omega_2|. \quad (2)$$

Так как точка  $P_\alpha$  является гладкой точкой кривой  $\gamma$ , то  $\varphi_1 + \varphi_2 \geq |v_\alpha|$ , где  $v_\alpha$  — поворот кривой  $C^*$  в точке  $P_\alpha$ . Величина  $|v_\alpha|$  оценивается через поворот ломаной  $\tilde{C}$  в точке  $P_\alpha$ . Именно  $|v_\alpha| > M |v_\alpha|$ , где  $M$  — положительная постоянная,

$\bar{v}_\alpha$  — поворот ломаной  $\bar{C}$  в точке  $\bar{P}_\alpha$ , проекции  $P_\alpha$ .

Принимая во внимание указанные соотношения, для вариации внутреннего поворота кривой  $\gamma$  получаем оценку

$$2p(\gamma) \geq M \sum |\bar{v}_\alpha| - 2 \sum |p_\alpha^*| - 2\Omega,$$

где  $p(\gamma)$  — вариация внутреннего поворота  $\gamma$ ,  $p_\alpha^*$  — повороты дуг кривой  $C$ , определяемых областями вида  $G_1$  и  $G_2$ ,  $\Omega$  — абсолютная кривизна окрестности точки  $X_0$  на  $F$ , где ведутся построения. При достаточно большом  $n$  слагаемые правой части неравенства, кроме первого, малы. Малость  $\Sigma |p_\alpha^*|$  вытекает из того факта, что эта сумма оценивается через вариации пространственного поворота совокупности выпуклых дуг кривых  $C^1$ ,  $C^2$  и через абсолютную кривизну  $\Omega$  окрестности точки  $X_0$ . Соответствующие оценки устанавливаются так же, как это было сделано в доказательстве леммы 5.

Поскольку  $\Sigma |\bar{v}_\alpha| > \pi$ , то отсюда следует положительность оценки  $p(\gamma)$  для  $p(\gamma)$ . А это невозможно.

Теорема доказана.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. Д. Александров. О поверхностях, представимых разностью выпуклых функций. Изв. АН Каз. ССР, вып. 3, 1949.
2. А. В. Погорелов. Однозначная определенность общих выпуклых поверхностей. Изд-во АН УССР, К., 1952.
3. В. А. Залгаллер. О классе кривых с ограниченной вариацией поворота выпуклой поверхности. Матем. сб., т. 30 (72), № 1, 1952.
4. А. Д. Александров. Поверхности, представимые разностью выпуклых функций. ДАН СССР, т. 72 (4), 1950.
5. А. Д. Александров и В. А. Залгаллер. Двумерные многообразия ограниченной кривизны. Тр. МИАН СССР, т. 63, 1962.
6. Ю. Д. Бураго. Кривые в сходящихся пространствах. Тр. МИАН СССР, т. 76, 1965.

Поступила 8 апреля 1968 г.

## УПОРЯДОЧЕННЫЕ ПСЕВДОРИМАНОВЫ ПРОСТРАНСТВА. I

M. A. Улановский (Харьков)

В настоящей заметке рассматриваются некоторые вопросы глобальной геометрии специального класса псевдоримановых пространств\*. Выбор этого класса подсказан общей теорией относительности А. Эйнштейна. Именно, изучаются пространства «физического типа» — псевдоримановы  $V_n$  произвольной размерности  $n$  с сигнатурой  $(n-2)$  фундаментальной формы. В случае  $n=4$  причинноследственные отношения событий физического пространства-времени устанавливают в  $V_4$  некоторые отношения следования; наша цель — изучение псевдоримановых  $V_n$ , для которых аналогичные отношения можно рассматривать (в целом) как отношения порядка.

В дальнейшем будем записывать фундаментальную форму  $ds^2 = g_{ij}du^i du^j$  псевдориманова  $V_n$  так, чтобы в подходящем базисе касательного пространства каждой точки  $u \in V_n$   $ds^2$  проводилась в сумме  $n-1$  квадратов со знаком минус и одного квадрата со знаком плюс. Касательное пространство в точке  $u \in V_n$  будет обозначаться через  $T_u$ . Неравенство  $ds^2 > 0$  определяет в  $T_u$  открытый конус  $K_u$ ; этот конус очевидным образом распадается на два конуса с общей вершиной (соответственно условиям  $x^n > 0$  или  $x^n < 0$ , если фундаментальная форма приведена к виду  $\Sigma (x^i)^2 + (x^n)^2$ ). Предположим теперь, что на  $V_n$  задана дополнительная структура: в каждом  $T_u$  один из указанных конусов обозначен через  $K_u^+$ , а другой — через  $K_u^-$  так, что поле конусов  $K_u^+$  (следовательно, и  $K_u^-$ ) непрерывно на всем  $V_n$ . Конечно, не всякое  $V_n$  допускает такую структуру. Мы будем называть локально упорядоченным пространство  $V_n$ , на котором такая структура задана. Для упрощения записи  $K_u^+$  ниже будет обозначаться просто через  $K_u$ ; обозначение  $K_u^-$  сохраняется. Замыкание конуса  $K_u$  в  $T_u$  будет обозначаться через  $\bar{K}_u$ ; вообще замыкание любого множества  $M$  будем обозначать  $\bar{M}$ .

Пусть  $\varphi(t)$  — кусочно-гладкая дуга в локально упорядоченном  $V_n$ ,  $0 \leq t \leq 1$ . Назовем  $\varphi(t)$  упорядоченной (строго упорядоченной) дугой, если в каждой точке  $\varphi(t)$  касательный вектор  $\frac{\partial}{\partial t}$  принадлежит  $\bar{K}_{\varphi(t)}$  ( $K_{\varphi(t)}$ ). Отношение  $a \prec b$  ( $a < b$ ) означает, что существует упорядоченная (строго упорядоченная) дуга  $\varphi(t)$  такая, что  $\varphi(0) = a$ ,  $\varphi(1) = b$ ;  $M^<$  ( $M^<$ ) — множество пар  $(a, b)$  из  $V_n \times V_n$  таких, что  $a \prec b$  ( $a < b$ ). Очевидно,  $M^< \subset M^<$ . Введем также отношение  $\prec \prec : a \prec \prec b$ , если  $a \neq b$  и  $(a, b) \in M^<$ ;  $F_a^<$  ( $F_a^{<\prec}$ ,  $F_a^{<\prec\prec}$ ) — множество точек  $x \in V_n$  таких, что  $a \prec x$  ( $a \prec x$ ,  $a \prec \prec x$ );  $P_a^<$  ( $P_a^{<\prec}$ ,  $P_a^{<\prec\prec}$ ) содержит точки  $y$  такие, что  $y \prec a$  ( $y \prec a$ ,  $y \prec \prec a$ ). Интервал  $J_{a,b}^<$  ( $J_{a,b}^{<\prec}$ ) — пересечение  $F_a^< \cap P_b^<$  ( $F_a^{<\prec} \cap P_b^{<\prec}$ ).

Локально упорядоченное  $V_n$  мы называем упорядоченным в целом, если отношение  $\prec$  есть отношение порядка соответственно хорошо известному

\* После того, как настоящая заметка была сдана в печать, автору стала известна работа H. J. Seifert'a, содержащая близкие результаты/Zeitschrift für Naturforschung, 1967, 22a, N. 9., 1356—1360/Результаты настоящей заметки составили также содержание сообщения автора на III Всесоюзной Геометрической конференции (Казань, сентябрь 1967 г.).

определению; очевидно, для этого необходимо и достаточно выполнение требования: если  $(a, b) \in M^<$ , то  $(b, a) \notin M^<$ . Аналогично определяется сильно упорядоченное  $V_n$ , как пространство, в котором отношение  $\prec \prec$  есть отношение порядка. Если  $\Omega$  — открытое подмногообразие  $V_n$ , то отношения  $<, \prec, \prec \prec$ , определенные в  $\Omega$ , как в самостоятельном пространстве, вообще говоря, не совпадают с отношениями, определенными в  $\Omega$  как подпространстве  $V_n$ . Если это обстоятельство сможет привести к недоразумениям, то будем указывать:  $a < b$  (относительно  $\Omega$ , или относительно  $V_n$ ). Упорядоченную дугу  $\varphi(t)$  будем называть также процессом. Будут рассматриваться процессы вида

$$\varphi : [0, 1] \rightarrow V_n ((0, 1] \rightarrow V_n, (0, 1) \rightarrow V_n).$$

Процесс

$$\varphi : [0, 1] \rightarrow V_n$$

назовем полным в будущем, если не существует процесс

$$\varphi^* : [0, 1] \rightarrow V_n,$$

такой, что  $\varphi^*(t) = \varphi(t)$ ,  $0 < t < 1$ . Аналогично определяется процесс, полный в прошлом; полный процесс —

$$\varphi : (0, 1) \rightarrow V_n,$$

такой, что процессы  $\varphi : (0, -\frac{1}{2}) \rightarrow V_n$  и  $\varphi : (\frac{1}{2}, 1) \rightarrow V_n$  полны соответственно в прошлом и будущем.

Метрическую функцию  $\rho(a, b)$  определим на  $V_n \times V_n$  следующим образом:  $\rho(a, b)$  — верхняя грань псевдоримановой длины упорядоченных дуг, соединяющих  $a$  и  $b$ . Определения  $\rho(a, b)$  относительно всего пространства  $V_n$  и его открытого подмногообразия также, вообще говоря, не совпадают.

В дальнейшем будем часто пользоваться вспомогательной положительно определенной (римановой) формой  $ds^2$ : можно предположить, что эта форма определена на всем базисном многообразии  $V_n$  и более того, полна [6]. Имеет место очевидная двойственность «прошлое — будущее». Ниже в соответствующих случаях будет формулироваться только одно из двойственных утверждений.

Легко видеть, что на дифференцируемом многообразии  $M_n$  может быть задана локально упорядоченная псевдориманова структура тогда и только тогда, когда на  $M_n$  существует гладкое векторное поле без особенностей. Доказательство этого факта известно (см., например, [2]): пара  $ds^2$  и  $ds^2$  определяет однозначно «ось симметрии» конуса  $K_u$ , и в качестве вектора поля можно взять вектор на этой оси длиной в единицу (в смысле  $ds^2$  или  $ds^2$ ). И наоборот, если векторное поле  $\xi(u)$  задано, то в качестве  $K_u$  можно взять, например, конус вращения (в смысле метрики  $ds^2$ ) с осью  $\xi(u)$  и постоянным «углом при вершине». Для определения  $ds^2$  теперь достаточно потребовать, чтобы длина  $\xi(u)$  относительно искомой метрики была равна единице.

С помощью этого же приема легко построить пример локально упорядоченного, но не упорядоченного в целом  $V_n$ : достаточно в качестве упомянутого выше поля  $\xi(u)$  взять векторное поле, среди линий тока которого есть замкнутые.

Пусть  $V_n$  и  $V'_m$  — локально упорядоченные пространства и  $\varphi : V_n \rightarrow V'_m$  — регулярное отображение  $V_n$  в  $V'_m$ . Назовем  $\varphi$   $\omega$ -гомоморфизмом, если  $d\varphi(K_u) = K'_{\varphi(u)}$  и  $H_u \cap K_u = 0$ , где  $d\varphi$  — линейное отображение касательного  $T_u$ , порожденное отображением  $\varphi$ ,  $K_u$  и  $K'_{\varphi(u)}$  — определенные выше конусы соответственно для  $V_n$  и  $V'_m$  и  $H_u$  — ядро отображения  $d\varphi : T_u \rightarrow T'_{\varphi(u)}$ . Заметим, что в этом определении локальная упорядоченность  $V_n$  в действительности является следствием локальной упорядоченности  $V'_m$ . Если,

в частности,  $\varphi$  — диффеоморфизм  $V_n$  на  $V'_m$ , то  $\varphi$  можно называть  $\omega$ -изоморфизмом; впрочем,  $\omega$ -изоморфизм — не что иное, как конформное отображение, сохраняющее структуру локальной упорядоченности.

**Теорема 1.** *Если  $\varphi: V_n \rightarrow V'_m$   $\omega$ -гомоморфизм и  $V'_m$  упорядочено (сильно упорядочено) в целом, то и  $V_n$  упорядочено (сильно упорядочено) в целом.*

Действительно, пусть  $M^<\subset V_n \times V_n$  и  $M'^<\subset V'_m \times V'_m$  определены, как и выше,  $(a, b) \in M^<$  и  $\psi(t)$  — процесс, соединяющий  $a$  и  $b$  ( $\psi(0) = a$ ,  $\psi(1) = b$ ). Очевидно,  $\varphi\psi(t)$  — невырожденная упорядоченная дуга в  $V'_m$ , откуда  $\varphi(a) < \varphi(b)$ . Если бы одновременно было  $b < a$ , то и  $\varphi(b) < \varphi(a)$ , что противоречит упорядоченности  $V'_m$  в целом. Поскольку  $\varphi(M^<) \subset M'^<$ , то  $\varphi(M^<) \subset M'^<$ , откуда из сильной упорядоченности  $V'_m$  следует также сильная упорядоченность  $V_n$ .

Пусть  $O$  — произвольная точка в  $V_n$ ,  $\Omega_0$  — нормальная (звездная) окрестность точки  $O$ : каждая точка  $x \in \Omega_0$  может быть соединена одной и только одной геодезической дугой, лежащей в  $\Omega_0$ , с точкой  $O$ . Пусть  $x^1, \dots, x^n$  — нормальные геодезические координаты в  $\Omega_0$  с началом в точке  $O$  ( $0, \dots, 0$ ). В касательном пространстве  $T_x$  каждой точки  $x \in \Omega_0$  введем, кроме естественного базиса  $(\partial/\partial x^1, \dots, \partial/\partial x^n)$ , нормальный базис  $e_1 \dots e_n$ , полученный из естественного базиса в точке  $O$  параллельным переносом вдоль геодезической  $Ox$ . Этот выбор базиса известным образом определит  $n$  линейных форм:

$$\omega^i(x, \xi) = \lambda_j^i(x^1, \dots, x^n) \xi^j$$

компонент вектора  $\xi$  относительно нормального базиса, если компоненты этого же вектора в естественном базисе суть  $\xi^1 \dots \xi^n$ . Далее, аффинная связность, соответствующая псевдоримановой структуре  $V_n$ , определит  $n^2$  форм

$$\omega_j^i(x, \xi) = \Gamma_{jk}^i(x^1 \dots x^n) \xi^k.$$

В силу определения эти формы удовлетворяют условиям:

$$\begin{aligned} \omega^i(x, x) &\equiv \lambda_j^i(x^1 \dots x^n) x^j = x^i, \\ \omega_j^i(x, x) &\equiv \Gamma_{jk}^i(x^1 \dots x^n) x^k = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Форма  $ds^2$  может быть теперь записана в виде:

$$ds^2 = g_{ij} \omega^i \omega^j, \quad (2)$$

где  $g_{ij} = \text{const}$ , причем имеют место соотношения:

$$g_{iz} \Gamma_{jk}^z + g_{jz} \Gamma_{ik}^z = 0. \quad (3)$$

Рассмотрим теперь в  $\Omega_0$  «конус»  $L_0$ , определенный неравенствами

$$g_{ij} x^i x^j > 0 \quad \text{и} \quad x^n > 0$$

(нормальные координаты  $x^1 \dots x^n$  предполагаются выбранными так, что направление  $\frac{\partial}{\partial x^n}$  принадлежит конусу  $K_0$ ). Очевидно, граница этого конуса  $L_0^*$ , соответствующая уравнению  $g_{ij} x^i x^j = 0$ , есть изотропный конус, образованный пульевыми геодезическими, проведенными из точки  $O$ . Легко показать, что существует достаточно малая звездная окрестность точки  $O$ , обладающая тем свойством, что любая упорядоченная дуга с началом в точке  $O$  (точнее ее связная часть, лежащая в этой окрестности) принадлежит  $\overline{L_0}$ . Однако это утверждение в действительности справедливо для произвольной заранее заданной звездной окрестности  $\Omega_0$ . Действительно, пусть  $\varphi(t)$  — упорядоченная кусочно-гладкая дуга с началом в точке  $O$ , и пусть  $\varphi(t_0)$  —

«точка выхода»  $\varphi(t)$  из конуса  $\bar{L}_0$  ( $\varphi(t_0) \in L_0^*$ ). Рассмотрим конус  $L_{\varphi(t_0)}$ , определенный в звездной окрестности  $\Omega_{\varphi(t_0)}$  точки  $\varphi(t_0)$  ( $\Omega_{\varphi(t_0)} \subset \Omega_0$ ). Можно показать, что конус  $L_{\varphi(t_0)}$  лежит в конусе  $L_0$ , причем пересечение их границ есть продолжение геодезической, соединяющей  $O$  с  $\varphi(t_0)$ . Из этого обстоятельства немедленно следует, что  $\varphi(t_0)$  не может быть «точкой выхода» кривой  $\varphi(t)$  и  $(\varphi(t) \subset \bar{L}_0)$ .

Приведенное утверждение о конусах  $L_{\varphi(t_0)}$  и  $L_0$  может быть доказано различными способами; изложим один из них.

Запишем, что кручение аффинной связности  $\omega_j^i = \Gamma_{jk}^i dx^k$  равно нулю:

$$\partial_k \lambda_j^i - \partial_j \lambda_k^i = \Gamma_{aj}^i \lambda_k^a - \Gamma_{ak}^i \lambda_j^a,$$

откуда, принимая во внимание (1), получим

$$\partial_k \lambda_j^i \cdot x^k - \partial_j \lambda_k^i \cdot x^k = \Gamma_{aj}^i x^a.$$

Далее,  $\partial_j \lambda_k^i \cdot x^k = \delta_j^i - \lambda_j^i$ ; полагая  $x^i = \bar{x}^i t$ , найдем

$$\frac{\partial}{\partial t} (\lambda_j^i t) = \delta_j^i + \Gamma_{aj}^i \bar{x}^a t,$$

$$g_{ab} \bar{x}^a \frac{\partial}{\partial t} (\lambda_j^i t) = g_{aj} \bar{x}^a + g_{ab} \bar{x}^b \Gamma_{ij}^a \bar{x}^i t.$$

Наконец, учтем, что в силу (3)

$$g_{ab} \bar{x}^a \Gamma_{ij}^b \bar{x}^i t = -g_{ij} \bar{x}^a \Gamma_{aj}^b \bar{x}^i t = 0;$$

интегрируя последние соотношения и полагая  $t = 1$ , получим

$$g_{ab} \bar{x}^a \lambda_i^b = g_{ai} \bar{x}^a. \quad (4)$$

Пусть  $dx$  — вектор из касательного пространства  $T_x$  некоторой точки  $x(x^1 \dots x^n) \in L_0^*$  ( $g_{ij} x^i x^j = 0$ ). Очевидно,

$$\frac{1}{2} d(g_{ij} x^i x^j) = g_{ij} x^i dx^j = g_{ab} \lambda_i^a x^i \lambda_j^b dx^j.$$

Если рассмотреть вектор  $x \in T_x$  с компонентами  $x^1 \dots x^n$ , равными координатам точки  $x \in L_0^*$ , то правая часть последнего соотношения есть скалярное произведение векторов  $x$  и  $dx$ . Если  $dx \in K_x$ , то

$$d(g_{ij} x^i x^j) \geq 0,$$

где равенство возможно только тогда, когда  $dx$  коллинеарен  $x$ . Отсюда ясно, что любая упорядоченная геодезическая (кроме продолжения геодезической  $Ox$ ) направлена в точке  $x$  внутрь конуса  $g_{ij} x^i x^j$ , и связная часть ее пересечения с окрестностью  $\Omega_0$  лежит, очевидно, целиком в этом конусе (в противном случае можно было бы применить аналогичное рассуждение к точке выхода этой геодезической).

Таким образом, имеет место

**Теорема 2.** Если  $\Omega_0$  — звездная окрестность точки  $O \in V_n$ , то множество точек  $x$  таких, что  $O < x$  (относительно  $\Omega_0$ ) совпадает с  $L_0$ ; множество точек  $x$  таких, что  $O \prec x$ , но  $O \ll x$ , совпадает с  $L_0^*$ .

В частности, если локально упорядоченное  $V_n$  обладает тем свойством, что любые две его точки можно соединить одной и только одной геодезической, то  $V_n$  сильно упорядочено в целом. В таком  $V_n$  отношения  $\prec$  и  $\ll$  совпадают.

Заметим, что упорядоченная дуга  $\varphi(t)$  ( $\varphi(0) = O$ ,  $\varphi(t) \in \Omega_0$ ) тогда и только тогда лежит на границе  $L_0^*$  конуса  $L_0$ , когда она представляет собой геодезическую линию (изотропную).

Докажем, что множество  $M^<$  открыто. Действительно, пусть  $a < b$  и  $\varphi(t)$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) — строго упорядоченная дуга, соединяющая  $a$  и  $b$ . Если  $U_a$  и  $U_b$  — выпуклые окрестности точек  $a$  и  $b$  (выпуклая нормальная окрестность есть звездная окрестность каждой своей точки) и  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$  настолько малы, что  $\varphi(\alpha) \in U_a$  и  $\varphi(1-\beta) \in U_b$ , то  $a \in L_{\varphi(\alpha)}^-$  и  $b \in L_{\varphi(1-\beta)}^-$ . Очевидно, существуют окрестности  $U'_a$  и  $U'_b$  такие, что  $U_a \subset L_{\varphi(\alpha)}^-$ ,  $U_b \subset L_{\varphi(1-\beta)}^-$ ; для каждой пары  $a' \in U'_a$ ,  $b' \in U'_b$ ,  $(a', b') \in M^<$ .

Докажем также теорему.

**Теорема 3.** *Если  $a \prec b$ , но  $a \not\ll b$ , то существует изотропная геодезическая, соединяющая  $a$  и  $b$ .*

Действительно, пусть  $\varphi(t)$  — упорядоченная дуга, соединяющая  $a$  и  $b$ . Если  $\varphi(t)$  — геодезическая, то она изотропна, если же  $\varphi(t)$  не является геодезической, то на  $\varphi(t)$  можно найти точки  $\varphi(t_1)$  и  $\varphi(t_2)$ , которые соединяет геодезическая, не совпадающая с отрезком  $\varphi: [t_1, t_2] \rightarrow V_n$  дуги  $\varphi(t)$ . Из сделанного выше замечания очевидно, что (по крайней мере, если дуга  $\varphi: [t_1, t_2] \rightarrow V_n$  лежит в звездной окрестности точки  $\varphi(t_1)$ )  $\varphi(t_1) \prec \varphi(t_2)$ . Пусть  $t^*$  — верхняя граница значений  $t$  таких, что  $\varphi(t_1) \prec \varphi(t^*)$ . Покажем, что  $\varphi(t_1) \prec \varphi(t^*)$ . Рассмотрим выпуклую окрестность  $U_{\varphi(t^*)}$  точки  $\varphi(t^*)$ ; пусть  $\varphi(t') \in U_{\varphi(t^*)}$  и  $t' < t^*$ . Поскольку  $\varphi(t_1) \prec \varphi(t')$ , существует строго упорядоченная дуга  $\psi(u)$ , соединяющая  $\varphi(t_1)$  и  $\varphi(t')$ . Возьмем  $\alpha < 0$  настолько малым, что  $\psi(1-\alpha) \in U_{\varphi(t^*)}$ . Так как  $U_{\varphi(t^*)}$  — звездная окрестность точки  $\psi(1-\alpha)$  и дуга, соединяющая  $\psi(1-\alpha)$  с  $\varphi(t^*)$  (состоящая из отрезка  $\psi: [1-\alpha, 1] \rightarrow V_n$  и отрезка  $\varphi: [t', t^*] \rightarrow V_n$ ) не является изотропной геодезической,  $\varphi(t^*)$  лежит внутри конуса  $L_{\psi(1-\alpha)}$  и  $\psi(1-\alpha) \prec \varphi(t^*)$ ; следовательно, и  $\varphi(t_1) \prec \varphi(t^*)$ . Поскольку  $M^<$  открыто,  $t^*$  может быть указанной верхней границей только тогда, когда  $\varphi(t^*) = b$ . Точно так же доказывается, что  $\varphi(\bar{0}) \prec \varphi(t_1)$ ; таким образом,  $a \prec b$ . Теорема доказана, вместе с ней, очевидно, доказано утверждение: из отношений  $a \prec b$ ,  $b \prec c$  ( $a < b$ ,  $b \prec c$ ) следует  $a \prec c$ . Более того, легко видеть, что из отношений  $a \prec \prec b$ ,  $b \prec c$  ( $a < b$ ,  $b \prec \prec c$ ) также следует  $a \prec c$ .

Пусть по-прежнему  $\Omega_0$  — произвольная звездная окрестность точки  $O \in V_n$ ,  $x^1 \dots x^n$  — нормальные координаты в  $\Omega_0$ . Введем в  $L_0$  (напомним, что  $L_0$  определен в окрестности  $\Omega_0$  неравенством  $g_{ij}x^i x^j > 0$ ) хорошо известный аналог полярных координат. Именно, для точки  $x(x^1 \dots x^n) \in L_0$  положим  $\rho = \sqrt{g_{ii}x^i x^i}$ ; очевидно,  $\rho$  — длина (в псевдоримановой метрике  $ds^2 = g_{ij}\omega^i \omega^j$ ) отрезка геодезической  $Ox$ . Вседем также какие-либо параметры  $u^1 \dots u^{n-1}$ , определяющие направление геодезического луча. Очевидно,

$$x^i = \rho f^i(u^1 \dots u^{n-1}),$$

где  $g_{ij}f^i f^j = 1$ .

Используя соотношения (1) и (4), легко получим

$$ds^2 = d\rho^2 - ds_n^2,$$

где  $ds_n^2 = -\rho^2 g_{\alpha\beta} \lambda_i^\alpha \lambda_j^\beta d\lambda^i d\lambda^j$  — положительно определенная форма, содержащая лишь дифференциалы  $du^1 \dots du^{n-1}$ .

Пусть  $\varphi(t)$  — строго упорядоченная кривая,  $\varphi(0) = O$ . Поскольку вдоль  $\varphi(t)$   $|ds^2| > 0$ ,  $d\rho^2 > 0$ , следовательно, координата  $\rho$  строго растет вдоль  $\varphi(t)$  и может рассматриваться как параметр этой дуги. При этом для метрической (псевдоримановой) дуги  $s$  кривой  $\varphi(t)$  имеет место неравенство

$$s = \int_0^{\rho_1} \sqrt{d\rho^2 - ds_n^2} \leq \rho_1,$$

т. е. длина любой упорядоченной дуги, соединяющей  $O$  с точкой  $x(\rho_1,$

$u^1 \dots u^n$ ), не превосходит длины  $\rho_1$  геодезической  $Ox$ . Далее, если  $x \in L_0^*$ , то единственная упорядоченная дуга, соединяющая  $O$  с  $x$  — изотропная геодезическая  $Ox$  нулевой длины. Итак, имеет место

**Теорема 4.** *Если  $x$  — точка из звездной окрестности  $\Omega_0$  точки  $O \in V_n$  и  $O < x$  (относительно  $\Omega_0$ ), то метрическая функция  $\rho(O, x)$  (определенная относительно  $\Omega_0$ ) равна псевдоримановой длине геодезической  $Ox$ , лежащей в  $\Omega_0$ , в частности,  $\rho(O, x) < \infty$ .*

Обозначим через  $\sigma$  собственно риманову длину (относительно полной римановой метрики  $d\sigma^2$ ) произвольной дуги  $\Phi(t) \subset V_n$ . Поскольку теперь  $V_n$  можно считать метрическим пространством с внутренней метрикой, к дугам  $\Phi(t) \subset V_n$  можно применить известные определения и теоремы о сходимости дуг в метрическом пространстве [1]. В частности, если  $\varphi_n(t)$  — последовательность дуг ограниченной длины, лежащая в некоторой компактной области, то из нее можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторой дуге  $\Phi(t)$ . Пусть, далее,  $\varphi_n(t)$  — произвольная последовательность дуг, удовлетворяющая условиям:

- 1) если  $\sigma_n$  — длина дуги  $\varphi_n(t)$ , то  $\sigma_n \rightarrow \infty$ ;
- 2) точки  $\varphi_n(0)$  — начала дуг — лежат в некотором компактном подмножестве пространства  $V_n$ . Покажем, как из  $\varphi_n(t)$  выделить подпоследовательность, сходящуюся в определенном смысле к некоторой дуге  $\Phi(t)$ , определенной непрерывным отображением  $\Phi: [0, \infty) \rightarrow V_n$ .

Выберем последовательность вещественных чисел  $c_n \rightarrow \infty$ . Для числа  $c_1$  отбросим конечное множество дуг  $\varphi_n(t)$ , длина которых меньше  $c_1$ , а из каждой оставшейся возьмем часть длиной  $c_1$ , начиная от начала  $\varphi_n(0)$ ; далее, возьмем подпоследовательность дуг  $\varphi_{n_i}(t)$ , для которых указанные части сходятся к дуге  $\varphi_{c_1}$  (напомним, что метрика  $d\delta^2$  полна на  $V_n$ , а потому все указанные части дуг лежат в некоторой области с компактным замыканием). Из подпоследовательности  $\varphi_{n_i}(t)$  снова выделим подпоследовательность тем же способом, пользуясь частями дуг длиной в  $c_2$  и т. д. Очевидно,

$$\varphi_{c_1} \subset \varphi_{c_2} \subset \dots \subset \varphi_{c_n} \subset \dots$$

Диагональная последовательность, построенная из указанных выше подпоследовательностей кривых  $\varphi_n(t)$ , сходится к дуге

$$\Phi = \bigcup_{i=1}^{\infty} \varphi_{c_i}$$

в том смысле, что для любого  $c > 0$  части дуг подпоследовательности длиной в  $c$  сходятся к некоторой части дуги  $\Phi$  (именно, если в качестве параметра каждой дуги  $\varphi_n(t)$  выбрать длину дуги  $\sigma$ , то параметр  $\sigma'$  на предельной дуге  $\Phi$ , вообще говоря, не являющейся длиной дуги, можно выбрать так, что указанные части дуг подпоследовательности сходятся к той части  $\Phi$ , для которой  $0 < \sigma' \ll c$ ).

Заметим теперь, что предельная дуга некоторой последовательности упорядоченных кусочно-гладких дуг, вообще говоря, не будет кусочно-гладкой. Поэтому естественно соответствующим образом расширить класс упорядоченных дуг. Именно, назовем строго упорядоченной (упорядоченной) дугу  $\Phi(t)$ , определенную с помощью непрерывного отображения  $\Phi: [0, 1] \rightarrow V_n$  (или  $\Phi: [0, 1] \rightarrow V_n$  и т. п.), если для любого  $t_0 \in [0, 1]$  существует число  $\varepsilon > 0$  такое, что

$$\Phi(t) \in L_{\Phi(t_0)}(\bar{L}_{\Phi(t_0)}), \quad t_0 < t < t_0 + \varepsilon,$$

где  $L_{\varphi(t_0)}$  определен, как и выше, в некоторой звездной окрестности точки  $\varphi(t_0)$ .

Прежде всего легко видеть, что такое расширение класса упорядоченных кривых не меняет отношений порядка, установленных выше с помощью кусочно-гладких дуг. Действительно, из доказательства теоремы 2 очевидно, что связная часть пересечения дуги  $\varphi: [t_0, 1] \rightarrow V_n$  со звездной окрестностью точки лежит в конусе  $L_{\varphi(t_0)}(\bar{L}_{\varphi(t_0)})$ ; с помощью покрытия дуги  $\varphi(t)$  выпуклыми окрестностями легко заменить  $\varphi(t)$  геодезической ломаной, каждое звено которой упорядочено. Далее, для любой упорядоченной кривой  $\varphi(t)$  можно определить псевдориманову дугу  $s$  как нижнюю грань сумм вида

$$\sum r(\varphi(t_i), \varphi(t_{i+1})),$$

где  $0, \dots, t_i, \dots, 1$  — произвольное подразделение дуги  $\varphi: [0, 1] \rightarrow V_n$ . При этом, однако, следует ограничиться лишь такими подразделениями, в которых каждая пара

$$(\varphi(t_i), \varphi(t_{i+1}))$$

лежит в некоторой выпуклой окрестности, причем метрическая функция  $r(\varphi(t_i), \varphi(t_{i+1}))$  вычисляется относительно этой окрестности. Легко видеть, что это определение для кусочно-гладких кривых совпадает с  $\int \sqrt{ds^2}$ . Что касается упорядоченной, но не кусочно-гладкой кривой, то каждая часть ее, лежащая в выпуклой окрестности, спрямляется в смысле принятого определения, а потому спрямляется вся дуга. Остается неизменной и теорема 4.

Из определения упорядоченной дуги и теоремы 2 следует, что предел последовательности упорядоченных дуг, расположенных в выпуклой окрестности, есть также упорядоченная дуга; отсюда легко следует, что это же утверждение справедливо для любой сходящейся последовательности упорядоченных дуг.

Сделаем снова объектом изучения собственно риманову дугу произвольной кривой. Пусть, как и выше,  $\Omega_0$  — звездная окрестность точки  $O \in V_n$ . Выберем в  $\Omega_0$  нормальные координаты  $x^1 \dots x^n$  так, чтобы в касательном пространстве  $T_O$  фундаментальная псевдориманова форма имела вид

$$ds^2 = - \sum_{i=1}^{n-1} dx^{i^2} + dx^n.$$

Не уменьшая общности последующих рассуждений, можно положить (всюду в  $\Omega_0$ )

$$ds^2 = \sum_{i=1}^n dx^{i^2}.$$

В касательном пространстве  $T_O$  конус  $K_O$  есть (относительно  $ds^2$ ) конус вращения с осью  $\frac{\partial}{\partial x^n}$  и углом  $\alpha = \frac{\pi}{4}$  между каждой образующей и этой осью. Очевидно, существует окрестность  $U_0 \subset \Omega_0$  точки  $O$  такая, что в любой точке  $x \in U_0$   $\max \alpha_x \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$ , где  $\beta = \text{const}$ , а  $\alpha_x$  — угол между какой-либо образующей конуса  $Kx$  и вектором  $\frac{\partial}{\partial x^n} \in T_x$ . Легко видеть, что для любой связной упорядоченной дуги  $\varphi(t)$ , лежащей в  $U_0$ , координата  $x^n$  строго возрастает и

$$r(\varphi(t_1), \varphi(t_2)) \leq \sec \beta / x^n(t_2) - x^n(t_1). \quad (A)$$

где  $r(a, b)$  — расстояние между  $a$  и  $b$  в метрике  $d\sigma^2$ . Если, сверх того,  $c_1 \leq x_n \leq c_2$  в  $U_0$ , то из (A) легко заключить, что риманова длина всех связных упорядоченных дуг, расположенных в  $U_0$ , равномерно ограничена.

Из того же неравенства (A) следует, что если последовательность упорядоченных дуг  $\varphi_n(t) \subset U_0$  сходится к дуге  $\varphi(t)$  с концами  $a$  и  $b$  ( $(a, b) \in U_0 \times U_0$ ), то  $\limsup \sigma_n \leq \sec \beta / |b^n - a^n|$ , где  $\sigma_n$  — длина дуги  $\varphi_n(t)$ ,  $a^1 \dots a^n$  и  $b^1 \dots b^n$  — координаты точек  $a$  и  $b$ . Но

$$|b^n - a^n| \leq r(a, b) \leq \sigma \leq \limsup \sigma_n \leq \sec \beta / |b^n - a^n|,$$

откуда

$$\sigma \geq \cos \beta \cdot \limsup \sigma_n.$$

Итак, следующая

**Лемма 1.** Для любой точки  $O \in V_n$  существует окрестность  $U_0$  и числа  $c > 0$ ,  $k > 0$  такие, что 1) риманова длина любой связной упорядоченной дуги  $\varphi(t) \subset U_0$  не превосходит  $c$  и 2) для любой последовательности связных упорядоченных дуг  $\varphi_n(t) \subset U_0$ , сходящейся к дуге  $\varphi(t)$ ,

$$\sigma \geq k \limsup \sigma_n,$$

где  $\sigma$  — длина  $\varphi(t)$ ,  $\sigma_n$  — длина  $\varphi_n(t)$ .

Из леммы 1 легко получить следующее утверждение:

**Лемма 2.** Пусть  $\varphi_n(t)$  — последовательность упорядоченных дуг в  $V_n$  такая, что  $\sigma_n \rightarrow \infty$ , где  $\sigma_n$  — риманова длина  $\varphi_n(t)$  в полной метрике  $d\sigma^2$ . Если существует дуга  $\varphi(t) \subset V_n : \varphi : [0, \infty) \rightarrow V_n$  такая, что для каждого  $s$ ,  $0 < s < \infty$ , последовательность частей дуг  $\varphi_n(t)$  длиной  $s$  (считая от начала  $\varphi_n(0)$ ) сходится к части  $\varphi : [0, s] \rightarrow V_n$  дуги  $\varphi(t)$ , то длина дуги  $\varphi(t)$  бесконечна.

Действительно, если  $\varphi(t)$  не лежит ни в какой области с компактным замыканием, то она имеет бесконечную длину в силу полноты метрики  $d\sigma^2$ . Если же  $\varphi(t) \subset G$  и  $G$  компактно, то, предположив конечность длины  $\varphi(t)$  и использовав конечное покрытие  $\bar{G}$  окрестностями, упомянутыми в лемме 1, мы прийдем к противоречию.

Пусть снова  $G$  — область в  $V_n$  с компактным замыканием  $\bar{G}$ . Предположим, что риманова длина упорядоченных дуг, лежащих в  $G$ , не ограничена сверху. Выберем последовательность упорядоченных дуг  $\varphi_n(t) \subset G$  так, чтобы их длины  $\sigma_n$  образовали бесконечно растущую последовательность. Выберем из этой последовательности подпоследовательность, сходящуюся (в том же смысле, что и в лемме 2) к дуге  $\varphi(t) \subset \bar{G}$ . Из леммы 2 следует, что  $\varphi(t)$  — кривая бесконечной длины. Итак, имеет место

**Лемма 3.** Если риманова длина связных упорядоченных дуг в области  $G \subset V_n$  с компактным замыканием не ограничена сверху, то  $G$  содержит упорядоченную кривую бесконечной длины.

Пусть длина упорядоченной кривой  $\varphi(t)$  бесконечна,  $\varphi(t) \subset G$  и  $\bar{G}$  компактно. Выберем на  $\varphi(t)$  параметр  $\sigma$ , равный длине дуги, отсчитанной от  $\varphi(0)$ . Очевидно, существует сходящаяся последовательность точек  $\varphi(\sigma_n) \rightarrow h$ , где  $\sigma_n \rightarrow \infty$  и  $h \in \bar{G}$ ; эта последовательность может быть выбрана так, чтобы  $\sigma_{n+1} - \sigma_n \geq c > 0$ ,  $c = \text{const}$ . Рассмотрим последовательность

$$\Phi : [\sigma_n; \sigma_n + c] \rightarrow \bar{G}$$

частей дуги  $\varphi(t)$ . Можно предположить, что эта последовательность также сходится, в частности, существует  $\lim \varphi(\sigma_n + c) = h'$ . Если  $c$  достаточно мало, то  $h \neq h'$  (см. лемму 1). Таким образом, последовательность пар точек  $\varphi(\sigma_n)$ ,  $\varphi(\sigma_n + c)$ , соединенных упорядоченными дугами (упомянутыми частями дуги  $\varphi(t)$ ), сходится к паре  $(h, h')$ , откуда  $|h - h'| < c$  (более того,

$h \prec h'$ . В то же время последовательность пар точек  $(\varphi(\sigma_n + c), \varphi(\sigma_{n+1}))$ , соединенных упорядоченными дугами

$$\varphi : [\delta_n + c, \delta_{n+1}] \rightarrow \bar{G},$$

сходится к паре  $(h', h)$ , откуда  $h' \prec \prec h$  (но, вообще говоря,  $h' \not\prec h$ ). Тем самым доказана

**Теорема 5.** Если  $V_n$  сильно упорядочено в целом, то римановы длины связных упорядоченных дуг, расположенных в компактном множестве  $G \subset V_n$ , равномерно ограничены.

Предположим теперь, что  $V_n$  сильно упорядочено в целом. Пусть  $(a, b) \in M^\prec$  и  $I_{a, b}^\prec$  имеет компактное замыкание. В силу теоремы 5 римановы длины всех упорядоченных дуг, соединяющих  $a$  и  $b$ , ограничены. Следовательно, на любой последовательности  $\varphi_n(t)$  таких дуг псевдоримановой длины  $s_n$  можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к упорядоченной дуге  $\varphi(t)$ , псевдориманова длина которой равна  $s$ . Дословно так же, как для метрического пространства выводится неравенство

$$\liminf s_n \geq \sigma,$$

можно вывести неравенство

$$\limsup s_n \leq s.$$

Отсюда легко получить утверждения:  $\rho(a, b) < \infty$  и существует упорядоченная дуга, соединяющая  $a$  и  $b$ , псевдориманова длина которой равна  $\rho(a, b)$ ; очевидно, эта дуга — геодезическая. Заметим, что интервал  $I_{a, b}^\prec$  при сделанных предположениях оказывается замкнутым (точнее, замкнуто множество  $I_{a, b}^\prec \cup a \cup b$ ). Итак, доказана

**Теорема 6.** Если  $V_n$  сильно упорядочено в целом,  $(a, b) \in M^\prec$  и интервал  $I_{a, b}^\prec$  имеет компактное замыкание, то множество  $I_{a, b}^\prec \cup a \cup b$  замкнуто,  $\rho(a, b) < \infty$  и существует упорядоченная геодезическая максимальной длины (равной  $\rho(a, b)$ ), соединяющая  $a$  и  $b$ .

Пусть  $V_n$  сильно упорядочено и  $I_{a, b}^\prec$  компактен для каждой пары  $(a, b) \in M^\prec$ . Покажем, что  $M^\prec = \bar{M}^\prec$ . Действительно, пусть  $a \prec \prec b$  и  $(a, b) \notin M^\prec$ . В выпуклой окрестности точки  $a$  возьмем какую-либо точку  $a' < a$ ;  $a$  лежит внутри конуса  $L_{a'}$ , а потому и некоторая окрестность  $U_a$  точки  $a$  лежит в  $L_{a'}$ . Аналогично выберем точку  $b' > b$ ; некоторая окрестность  $U_b$  точки  $b$  будет лежать в конусе  $L_{b'}$ . Поскольку  $a \prec \prec b$ , существует последовательность

$$(x_n, y_n) \rightarrow (a, b),$$

такая, что  $x_n \prec y_n$ ; для достаточно больших  $n$   $x_n \in U_a$ ,  $y_n \in U_b$ , и потому  $a' \prec x_n \prec y_n \prec b'$ , т. е.

$$(x_n, y_n) \in I_{a'b'}^\prec \times I_{a'b'}^\prec.$$

Из компактности интервала  $I_{a'b'}^\prec$  следует, что и  $a \prec b$ .

Все изложенное позволяет выделить простейший класс упорядоченных в целом псевдоримановых пространств. Именно, псевдориманово  $V_n$  сигнатуры  $(n - 2)$  мы назовем пространства класса А, если:

- 1)  $V_n$  сильно упорядочено в целом;
- 2) для любой пары  $(a, b) \in M^\prec$  интервал  $I_{a, b}^\prec$  имеет компактное замыкание.

Из доказанного следует, что для пространств класса А справедливы утверждения:

- 1)  $\bar{I}_{a, b}^\prec = I_{a, b}^\prec \cup a \cup b$ ;
- 2) отношение  $\prec$  совпадает с отношением  $\prec \prec$ ;

3)  $\varphi(a, b) < \infty$  для любой пары  $(a, b) \in M^{\prec}$ ;

4) Для любой пары  $(a, b) \in M^{\prec}$  существует геодезическая максимальной псевдоримановой длины, соединяющая  $a$  и  $b$ . Если  $V_n$  геодезически полно, то для любой точки  $a \in V_n$

$$F_a^{\prec} = \exp K_a, \quad F_a^{\prec\prec} = \exp \bar{K}_a.$$

Из теоремы 5 следует, что для любой пары точек  $(a, b) \in M^{\prec}$  пространства класса А римановы длины упорядоченных кривых, соединяющих  $a$  и  $b$ , равномерно ограничены сверху. И наоборот, если для каждой пары  $(a, b) \in M^{\prec}$  упорядоченного в целом  $V_n$  это утверждение справедливо, то  $V_n$  принадлежит классу А.

Действительно, легко видеть, что в этом случае интервал  $I_{a,b}^{\prec}$  компактен, отношения  $\prec$  и  $\prec\prec$  совпадают (следовательно,  $V_n$  сильно упорядочено в целом).

Рассмотрим теперь некоторые свойства упорядоченных в целом пространств  $V_n$ , не принадлежащих классу А. Очевидно, в таком  $V_n$  существует пара  $(a, b) \in M^{\prec}$ , для которой римановы длины упорядоченных дуг, соединяющих  $a$  и  $b$ , не ограничены сверху. Заметим, что такая ситуация может иметь место как тогда, когда замыкание  $I_{a,b}^{\prec}$  не компактно, так и тогда, когда  $I_{a,b}^{\prec}$  компактно, но отношение  $\prec\prec$  не является отношением порядка. Выберем последовательность  $\varphi_n(t)$ ,  $\varphi_n(0) = a$ ,  $\varphi_n(1) = b$  упорядоченных дуг так, чтобы их римановы длины  $\sigma_n$  бесконечно возрастили. Считая точку  $a$  началом каждой дуги  $\varphi_n(t)$ , выберем подпоследовательность  $\varphi_{n_k}(t)$ , сходящуюся к дуге  $\psi(t)$  бесконечной длины с началом в точке  $a$ . Далее, считая началом каждой дуги точку  $b$  (т. е. рассматривая дуги  $\psi_n(t) = \varphi_n(1-t)$ ) мы найдем предельную кривую  $\psi(t)$  с началом в точке  $b$ . На кривой  $\psi(t)$ , можно ввести параметр  $\sigma$  следующим образом: точке  $\psi(t)$  приписываем параметр  $\sigma$ , если

$$\psi(t) = \lim \varphi_n(t_\sigma),$$

где  $\varphi_n(t_\sigma)$  — конец отрезка  $(\varphi_n(0), \varphi_n(t_\sigma))$  длины  $\sigma$ . Аналогично определенный параметр дуги  $\psi(t)$  обозначим через  $\sigma'$ . Пусть  $\varphi_n(t)$  имеет длину не меньшую, чем  $\sigma + \sigma'$  для заданных  $\sigma$ ,  $\sigma'$ . Как легко видеть, при соответствующем выборе последовательностей  $\varphi_n(t)$  и  $\psi_n(t)$  можно считать для каждого  $n$   $\psi_n(t) = \varphi_n(1-t)$ ;

$$\lim \varphi_n = \psi; \quad \lim \psi_n = \psi.$$

Поскольку  $\varphi_n(t_\sigma) < \psi_n(t_{\sigma'})$ , очевидно,

$$\varphi(\sigma) \prec\prec \psi(\sigma'),$$

т. е. вообще

$$\varphi(t_1) \prec\prec \psi(t_2).$$

Легко видеть, что  $\varphi(t)$  — процесс, полный в будущем,  $\psi(t)$  — процесс, полный в прошлом; таким образом, из точки  $a$  исходит полный в будущем процесс, каждое событие (точка) которого предшествует (в смысле отношения  $\prec\prec$ ) каждому событию полного в прошлом процесса с концом в точке  $b$ .

Таким образом, справедлива

**Теорема 7.** *Если  $V_n$  упорядочено в целом, но не принадлежит классу А, то в  $V_n$  существуют процессы  $\varphi(t)$  и  $\psi(t)$ , полные соответственно в будущем и прошлом и такие, что*

$$\varphi \prec\prec \psi$$

В то же время очевидно, что в пространстве класса А таких процессов быть не может: прежде всего, мы имели бы  $\phi < \psi$  и, как легко видеть, интервал  $I_{a,b}$  не был бы компактным. Таким образом, пространства класса А характеризуются тем свойством, что в них такие процессы существовать не могут.

В связи с отмеченным свойством пространств класса А рассмотрим следующее понятие [4]. Назовем глобальным сечением (сильным глобальным сечением) точечное множество  $R \in V_n$ , обладающее свойствами:

1) если  $(a, b) \in R \times R$ , то  $(a, b) \in M^<(\bar{M}^<)$ , т. е. никакая пара точек из  $R$  не связана отношением  $<$  ( $\prec$ );

2)  $R$  имеет общую точку с каждым полным процессом.

Если в  $V_n$  существуют указанные выше процессы  $\phi(t)$  и  $\psi(u)$  (которые легко дополнить до процессов, полных и в прошедшем, и в будущем), причем  $\phi(t) \prec \psi(u)$ , то очевидно, что в  $V_n$  не существует, по крайней мере, сильное глобальное сечение. В действительности в этих условиях  $V_n$  вообще не содержит глобальных сечений. Пусть  $\phi(t)$  и  $\psi(u)$  — полные процессы,  $\phi(t) \prec \psi(u)$ . Возьмем произвольные точки  $a = \phi(t_0)$  и  $b = \psi(u_0)$  этих процессов. Пусть  $\Omega_a$  и  $\Omega_b$  — звездные окрестности точек  $a$  и  $b$ ,  $x^1 \dots x^n, y^1 \dots y^n$  — нормальные геодезические координаты в этих окрестностях с началами в точках  $a$  и  $b$ . Окрестности  $\Omega_a$  и  $\Omega_b$  и координаты  $x^1 \dots x^n, y^1 \dots y^n$  можно выбрать так, чтобы координатные линии  $x^n, y^n$  ( $x^i = \text{const}, y^i = \text{const}, i = 1 \dots n - 1$ ) были строго упорядочены и пересекали изотропные конусы  $L_a, L_a^-, L_b, L_b^-$ . Каждую из координатных линий  $x^n, y^n$  (определенную только в окрестностях  $\Omega_a, \Omega_b$ ) легко дополнить до полного процесса, например, с помощью максимальных геодезических. Каждый из полученных таким образом процессов обязан пересекать множество  $R$ ; легко видеть, что точка пересечения принадлежит открытому отрезку, ограниченному точками пересечения линии  $x^n, y^n$  с границами конусов  $L_a^-, L_a (L_b^-, L_b)$ . Таким образом, пересечение  $R \cap \Omega_a (R \cap \Omega_b)$  однозначно проектируется линиями  $x^n, y^n$  на поверхность  $x^n = 0 (y^n = 0)$ . Возьмем на процессе  $\phi(t)$  точку  $\phi(t_1) \in \Omega_a$  так, чтобы  $a < \phi(t_1)$ ; точка  $\phi(t_1)$  однозначно проектируется линией  $x^n$  на множество  $R$  в некоторую точку  $r_1 \in R$ ; очевидно,  $r_1 < \phi(t_1)$ .

Аналогичное построение в окрестности  $\Omega_b$  (где нужно выбрать  $\psi(u_1) < b$ ) приводит к отношению  $\psi(u_1) < r_2 \in R$ ; поскольку  $\phi(t_1) \prec \psi(u_1)$ ,  $r_1 < r_2$ , что невозможно.

Итак, имеет место

**Теорема 8.** Если упорядоченное в целом  $V_n$  содержит глобальное сечение, то  $V_n$  — пространство класса А.

Вопрос о справедливости обратного утверждения остается открытым. В заключение рассмотрим два примера.

**Пример 1.** Пусть

$$M_2 = T_2 \times R_1$$

(прямое произведение тора  $T_2$  на евклидову прямую  $R_1$ ). Тор  $T_2$  представим как евклидову плоскость  $XOY$  с отождествленными точками  $A(x, y)$  и  $B(x + k, y + l)$ , где  $k$  и  $l$  — любые целые числа; прямую  $R_1$  назовем осью  $OZ$ . На плоскости  $XOY$  рассмотрим векторное поле

$$\xi_1 = \cos \alpha \frac{\partial}{\partial x} + \sin \alpha \frac{\partial}{\partial y},$$

где  $\alpha = \text{const}$  выбрано так, что  $\operatorname{tg} \alpha$  иррационален. Соответствующее поле  $\xi_1$  как векторное поле на торе  $T_2$  имеет в качестве линий тока незамкнутые линии бесконечной длины (в метрике  $d\sigma^2$ , как-либо определенной на  $T_2$ ), всюду плотные в  $T_2$ . Далее, на  $OZ$  возьмем постоянное векторное поле

$\xi_2 = 1$  и, наконец, в  $M_3$  — поле векторов  $\eta$ , каноническими проекциями которых служат векторы  $\xi_1$  и  $\xi_2$ . Пользуясь римановой структурой в  $M_3$ , определенной как прямое произведение римановых структур в  $T_2$  и  $R_1$ , построим в каждом касательном пространстве конус вращения  $K$  с осью  $\eta$  так, чтобы он касался слоя  $T_2$  вдоль образующей  $\xi_1$ . Выберем псевдориманову фундаментальную форму  $ds^2$  с заданным полем конусов  $K$ . Определенная таким образом псевдориманово  $V_3$  упорядочено (но не сильно упорядочено) в целом. Действительно, вдоль любой упорядоченной кривой координата  $z$  не убывает, поэтому достаточно проверить, что не может быть одновременно  $a \prec b$  и  $b \prec a$  при  $z_a = z_b$ . Но при  $z_a = z_b$  единственная упорядоченная кривая, на которой могут лежать  $a$  и  $b$ , представляет собой линию тока поля  $\xi_2$ , что и доказывает высказанное утверждение. С другой стороны, из доказательства теоремы 4 очевидно, что для любой пары точек из слоя  $T_2$  ( $z_a = z_b$ ) одновременно  $a \prec \prec b$  и  $b \prec \prec a$ . Заметим, что построенное  $V_3$  может быть  $C^\infty$  — гладким способом погружено в  $M_4$ , диффеоморфно евклидовому  $E_4$ .

**Пример 2.** На евклидовой плоскости  $XOY$  с метрикой

$$d\delta^2 = dx^2 + dy^2$$

определен псевдориманову форму

$$ds^2 = \cos x \, dx^2 + 2 \sin x \, dx \, dy - \cos x \, dy^2.$$

Рассмотрим векторное поле

$$\xi = \cos \frac{x}{2} \frac{\partial}{\partial x} + \sin \frac{x}{2} \frac{\partial}{\partial y}.$$

Определим в каждом касательном  $T_2$  конус  $K$  так, чтобы он содержал вектор  $\xi$ ; тем самым в нашем  $V_2$  определена локально-упорядоченная структура.

Докажем, что  $V_2$  сильно упорядочено в целом. Для этого рассмотрим отображение

$$\psi : V_2 \rightarrow R_1,$$

определенное формулой

$$z = e^{\frac{y}{2}} \sin \frac{x}{2}.$$

Легко проверить, что для каждого вектора  $\eta \in \bar{K}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} \eta_1 + \frac{\partial z}{\partial y} \eta_2 > 0,$$

т. е.  $\psi$  —  $w$ -гомоморфизм  $V_2$  на  $R_1$ . В силу естественности упорядоченности  $R_1$ ,  $V_2$  сильно упорядочено в целом. В то же время  $V_2$  не принадлежит классу А. Действительно, линии  $\gamma_1$  ( $x = -\pi$ ) и  $\gamma_2$  ( $x = \pi$ ) — полные процессы (точнее, строго упорядоченные геодезические). Легко видеть, что  $\gamma_1 \leq \gamma_2$ . Проверить это можно, например, так: любые две точки  $A$  ( $-\pi, y$ ) и  $B$  ( $\pi, y$ ) с одинаковой ординатой можно соединить строго упорядоченной дугой

$$y = -3 \ln \cos \frac{x}{3} + C$$

при подходящем  $C$ ; следовательно,  $A < B$ . После этого достаточно заметить, что координата  $y$  на  $\gamma_1$  убывает, а на  $\gamma_2$  растет при движении «в будущее».

## ЛИТЕРАТУРА

1. А. Д. Александров. Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей. ОГИЗ, М., Л., 1948.
2. А. Н. Лихнерович. Теория связностей в целом и группы топономий. ИЛ, М., 1960.
3. Р. И. Пименов. Некоторые теоремы о метрических пространствах кинематического типа. Тезисы доклада на Всесоюзном симпозиуме по геометрии в целом, Петрозаводск, 1967.
4. S. W. Hawking. Proc. Roy. Soc. London, ser A, 294 (1966), 511—521.
5. E. H. Connelmer Penrose R., Proc. Camb. Phil. Soc., 63 (1967), 2.
6. K. Nomizu. Ozeki H., Proc. Amer. Math. Soc., 12 (1961).

Поступила 1 февраля 1968 г.

## КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ РИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВ, СОХРАНЯЮЩИЕ КРИВИЗНУ ТРЕХМЕРНОЙ ПЛОЩАДКИ

*С. И. Федищенко* (Днепропетровск)

Специальные классы конформных отображений римановых пространств давно привлекали внимание геометров. Так, например, В. Ф. Каганом [1] изучались пространства, допускающие такое отображение на евклидово пространство, при котором образами геодезических являются линии, расположенные в двумерных плоскостях, проходящих через общую точку или параллельных одному направлению. Эти пространства называются субпроективными, а указанное их отображение является конформным. Затем К. Яно [2] в своих исследованиях по концентрической геометрии рассматривал конформное соответствие между пространствами  $V_n$  и  $\bar{V}_n$ , при котором каждой геодезической окружности пространства  $V_n$  соответствует некоторая геодезическая окружность пространства  $\bar{V}_n$ .

В данной статье рассматривается класс конформных отображений  $V_n$  на  $\bar{V}_n$  ( $n > 3$ ), при которых остается неизменной риманова кривизна пространства  $V_n$  для каждой трехмерной площадки. Нами получена, при некоторых предположениях, полная внутренняя тензорная характеристика римановых пространств, допускающих нетривиальное в определенном смысле конформное отображение указанного класса, и приведен пример такого пространства.

Риманова кривизна  $P$  пространства  $V_n$  ( $n > 3$ ) для данной трехмерной площадки  $\{\lambda_1^i, \lambda_2^i, \lambda_3^i\}$  нами определяется по формуле [3]

$$\begin{aligned} P(g_{ij}g_{hk}g_{st} + g_{ik}g_{jh}g_{sj} + g_{il}g_{kj}g_{sk} - g_{ih}g_{jk}g_{st} - g_{ij}g_{ht}g_{sk} - \\ - g_{ik}g_{ht}g_{st})\lambda_1^i\lambda_2^j\lambda_3^h\lambda_1^k\lambda_2^l\lambda_3^s\lambda_1^t = 2(R_{ikh}g_{st} + R_{sij}g_{hk} + R_{hst}g_{ij} + 2R_{ihs}g_{kt} + \\ + 2R_{ihs}g_{ht} + 2R_{tsht}g_{jk})\lambda_1^i\lambda_2^j\lambda_3^h\lambda_1^k\lambda_2^l\lambda_3^s\lambda_1^t, \end{aligned}$$

где  $g_{ij}$  — метрический тензор,  $R_{hijk}$  — тензор кривизны  $V_n$ .

Формула В. Броня [4] для кривизны пространства в данном трехмерном направлении отличается от нашей лишь постоянным множителем.

Если два пространства  $V_n$  и  $\bar{V}_n$  находятся в конформном соответствии, то их метрические тензоры и тензоры кривизны в общей по отображению системе координат связаны соотношениями [5, § 28]

$$\begin{aligned} \bar{g}_{ij} = e^{2\sigma}g_{ij}, \quad \sigma = \sigma(x^1, \dots, x^n), \\ e^{-2\sigma}\bar{R}_{hijk} = R_{hijk} + g_{hk}\sigma_{ij} + g_{ij}\sigma_{hk} - g_{ih}\sigma_{jk} - g_{ik}\sigma_{hj} + \\ + (g_{hk}g_{ij} - g_{ij}g_{hk})\Delta_1\sigma, \end{aligned}$$

где  $\sigma_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_{i}\sigma_{j}$ ;  $\Delta_1\sigma = g^{2\beta}\sigma_{,\alpha}\sigma_{,\beta}$  ( $i, j, h, k, \alpha, \beta = 1, \dots, n$ ), и запятой обозначено ковариантное дифференцирование относительно метрического

тензора  $g_{ij}$ . Зависимость же между римановыми кривизнами  $P$  и  $\bar{P}$  пространств  $V_n$  и  $\bar{V}_n$  по отношению к трехмерным площадкам оказывается следующей:

$$(e^{2\sigma} \bar{P} - P) (g_{ij} g_{hk} g_{st} + g_{ik} g_{ht} g_{sj} + g_{it} g_{hj} g_{sk} - g_{il} g_{hk} g_{sj} - g_{ij} g_{ht} g_{sk} - g_{ik} g_{hj} g_{st}) \lambda_1^i \lambda_1^j \lambda_2^h \lambda_2^k \lambda_3^s \lambda_3^t = 2(S_{ikhj} g_{st} + S_{isjt} g_{hk} + S_{istk} g_{ij} + 2S_{ihjs} g_{kt} + 2S_{ihsk} g_{jt} + 2S_{isht} g_{jk}) \lambda_1^i \lambda_1^j \lambda_2^h \lambda_2^k \lambda_3^s \lambda_3^t,$$

где  $S_{hijk} = g_{hk}\sigma_{ij} + g_{ij}\sigma_{hk} - g_{hj}\sigma_{ik} - g_{ik}\sigma_{hj} + (g_{hk}g_{ij} - g_{ij}g_{hk})\Delta_1\sigma$ .

Будем рассматривать лишь нетривиальные и неизотропные конформные отображения, т. е. при  $\sigma \neq \text{const}$  и  $\Delta_1\sigma \neq 0$ .

Потребуем, чтобы при конформном отображении  $V_n$  на  $\bar{V}_n$  его риманова кривизна для каждой данной трехмерной площадки оставалась неизменной, т. е. чтобы  $\bar{P} \equiv P$ . Из предыдущих соотношений следует, что для этого необходимо и достаточно, чтобы в  $V_n$  существовало нетривиальное решение уравнения:

$$\sigma_{hj} = \frac{e^{2\sigma} - 1}{n-2} \left[ R_{hj} - \frac{R}{2(n-1)} g_{hj} \right] - \frac{\Delta_1\sigma}{2} g_{hj}, \quad (1)$$

где  $R_{hj}$  — тензор Риччи, а  $R$  — скалярная кривизна  $V_n$ , и чтобы тензор конформной кривизны этого пространства удовлетворял условиям

$$\begin{aligned} & 2(C_{ihjk} + C_{jhik}) g_{st} + 2(C_{hskt} + C_{ksht}) g_{ij} + 2(C_{isjt} + C_{jist}) g_{hk} + \\ & + (C_{ihks} + C_{ikhs}) g_{jt} + (C_{jiks} + C_{jkhs}) g_{it} + (C_{ihlt} + C_{iklt}) g_{js} + \\ & + (C_{jhkl} + C_{jkhl}) g_{is} + (C_{hjls} + C_{hjls}) g_{it} + (C_{kils} + C_{kjls}) g_{ht} + \\ & + (C_{hjlt} + C_{hjlt}) g_{ks} + (C_{kijt} + C_{kjit}) g_{is} + (C_{hsti} + C_{htsi}) g_{jk} + \\ & + (C_{ksti} + C_{ktsi}) g_{jh} + (C_{hstj} + C_{htsj}) g_{lk} + (C_{kstj} + C_{ktsj}) g_{th} = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Из соотношения между тензорами кривизны пространств  $V_n$  и  $\bar{V}_n$  вытекает следующая связь между их тензорами Риччи:

$$\bar{R}_{hj} = R_{hj} + (n-2)\sigma_{hj} + [\Delta_2\sigma + (n-2)\Delta_1\sigma] g_{hj}, \quad (3)$$

где  $\Delta_2\sigma = g^{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta}$ .

Свертывая (1) с  $g^{hj}$ , найдем выражение для  $\Delta_2\sigma$ . Подставляя его в (3) и учитывая (1), получим  $\bar{R}_{hj} = e^{2\sigma} R_{hj}$ , или

$$\bar{R}_j^\ell = R_j^\ell. \quad (4)$$

Так что, если при конформном отображении  $V_n$  на  $\bar{V}_n$  его риманова кривизна по отношению к трехмерной площадке остается неизменной, смешанные тензоры Риччи этих пространств равны между собой, а значит, равны и их скалярные кривизны:  $\bar{R} = R$ .

Пусть теперь имеют место равенства (4). Тогда (3) преобразуется в

$$(e^{2\sigma} - 1) R_{hj} = (n-2)\sigma_{hj} + [\Delta_2\sigma + (n-2)\Delta_1\sigma] g_{hj}.$$

Исключая  $\Delta_2\sigma$  из этого равенства и равенства, полученного отсюда свертыванием с  $g^{hj}$ , приходим к уравнениям (1).

Следовательно, соотношения (4) и (1) эквивалентны между собой.

Свернув (2) с  $g^{\ell i}$ , получим  $(n-4)(C_{ihjk} + C_{jhik}) = 0$ , откуда при  $n > 4$  находим  $C_{ihjk} = 0$ , т. е. пространство  $V_n$  при  $n > 4$  по необходимости является конформно-плоским.

Проверка показывает, что всякое конформно-плоское  $V_n$  ( $n > 3$ ), в котором существует нетривиальное решение уравнений (1), при конформном отображении при помощи функции  $\sigma$  сохраняет риманову кривизну дву-

мерной площадки. Такое отображение будем называть тривиальным. В дальнейшем будем искать только нетривиальные отображения, т. е. сохраняющие риманову кривизну трехмерной площадки, но не сохраняющие кривизны двумерной площадки, а значит, из дальнейшего рассмотрения исключим конформно-плоские пространства.

Таким образом, нас может интересовать только случай  $n = 4$ , к рассмотрению которого мы и переходим.

Возьмем систему координат, ортогональную в точке  $M_0$  пространства  $V_4$ . В этой системе координат в данной точке условия (2) запишутся в виде

$$\begin{aligned} g_{ss}C_{ihhi} + g_{ii}C_{shhs} + g_{hh}C_{issi} &= 0, \\ g_{ii}C_{shht} + g_{hh}C_{sitt} &= 0 \quad (i, h, s, t \neq i). \end{aligned}$$

Подставляя сюда вместо компонент тензора конформной кривизны их выражения через компоненты тензора кривизны в рассматриваемой системе координат, убеждаемся, что эти условия выполняются тождественно. Таким образом, в точке  $M_0$  в специальной системе координат в каждом  $V_4$  тождественно выполняются условия (2). Поскольку  $M_0$  — произвольная точка, а соотношения (2) посвят тензорный характер, то они выполняются тождественно для каждого  $V_4$  в каждой точке и в любой системе координат.

В результате получаем следующую теорему.

**Теорема 1.** Римановы пространства  $V_n$  при  $n > 4$  не допускают нетривиальных конформных отображений, сохраняющих кривизну трехмерной площадки. Нетривиальное (при  $\sigma \neq \text{const}$ ) конформное отображение не конформно-плоского  $V_4$  сохраняет кривизну трехмерной площадки тогда и только тогда, когда сохраняется смешанный тензор Риччи, или, что то же, выполняются условия (1).

Переходим к исследованию уравнений (1) при  $n = 4$ .

Условия интегрируемости уравнений (1) имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_{,\alpha}R_{hjk}^{\alpha} - \frac{e^{2\sigma}-1}{2}\left[R_{hk,j} - R_{hj,k} + \frac{1}{6}(g_{hj}R_{,k} - g_{hk}R_{,j})\right] + \\ + \frac{1+3e^{2\sigma}}{24}R(g_{hj}\sigma_{,k} - g_{hk}\sigma_{,j}) + \frac{e^{2\sigma}+1}{2}(R_{hk}\sigma_{,j} - R_{hj}\sigma_{,k}) = 0. \end{aligned}$$

Свернув последнее с  $g^{hj}$  и приняв во внимание известную формулу  $g^{\alpha\beta}R_{\alpha k,\beta} = \frac{1}{2}R_{,k}$ , получим

$$\sigma_{,\alpha}R_{\alpha k} = \frac{R}{4}\sigma_{,k} \quad (\text{где } \sigma_{,i} = g^{ih}\sigma_{,h}). \quad (5)$$

Просуммируем (1) с  $\sigma_{,k}^h$ . Учитывая (5) и то, что

$$2\sigma_{,\alpha}\sigma_{,\alpha k} = (\Delta_1\sigma)_{,k},$$

будем иметь

$$(\Delta_1\sigma)_{,j} = \left(\frac{e^{2\sigma}-1}{12}R + \Delta_1\sigma\right)\sigma_{,j}.$$

Так как градиенты функций  $\sigma$  и  $\Delta_1\sigma$  пропорциональны, то это значит, что  $\Delta_1\sigma = \varphi(\sigma)$ .

Продифференцируем (5) ковариантно по  $x^m$ , результат проальтернируем по  $m, k$  и воспользуемся соотношениями (1). Это дает нам

$$\sigma_{,j}R_{,k} - \sigma_{,k}R_{,j} + 4\sigma_{,i}(R_{\alpha k,i} - R_{\alpha i,k}) = 0.$$

Из условий интегрируемости уравнений (1) свертыванием с  $\sigma^h$ , находим

$$\sigma_{,j}R_{,k} - \sigma_{,k}R_{,j} + 6\sigma^a(R_{ak,j} - R_{aj,k}) = 0.$$

Из последних двух соотношений следует:  $\sigma_{,j}R_{,k} - \sigma_{,k}R_{,j} = 0$ . Таким образом, при  $R \neq \text{const}$   $\sigma = \sigma(R)$ . Тогда

$$\sigma_{,h} = \sigma' R_{,h}; \quad \sigma_{,hj} = \sigma' R_{,hj} + \sigma'' R_{,h}R_{,j}; \quad \Delta_1\sigma = (\sigma')^2 \Delta_1 R.$$

Штрихом здесь и в дальнейшем обозначается производная по переменной  $R$ . По условию  $\Delta_1\sigma \neq 0$ , следовательно,

$$\Delta_1 R \neq 0. \quad (6)$$

Уравнения (1) преобразуются в следующие:

$$R_{,hj} - \frac{e^{2\sigma} - 1}{2\sigma'} R_{,hj} + \frac{1}{2} \left( \frac{e^{2\sigma} - 1}{6\sigma'} R + \sigma' \Delta_1 R \right) g_{hj} + \left( \frac{\sigma''}{\sigma'} - \sigma' \right) R_{,h}R_{,j} = 0. \quad (7)$$

Суммируя (7) с  $g^{hi}$ , находим

$$\sigma'' = \frac{e^{2\sigma} - 1}{6\Delta_1 R} R - \frac{\Delta_2 R}{\Delta_1 R} \sigma' - (\sigma')^2, \quad (8)$$

где  $\Delta_2 R = g^{ab} R_{,ab}$ .

Так как  $\sigma$  и  $\Delta_1\sigma$  — функции  $R$ , то и  $\Delta_1 R$  — функция  $R$ , а тогда из (8) следует, что

$$\Delta_2 R = \psi(R). \quad (9)$$

Подставляя в (7) выражение (8) для  $\sigma''$ , будем иметь

$$R_{,hj} + AR_{,hj} + BG_{hj} + DR_{,h}R_{,j} = 0, \quad (10)$$

где обозначено

$$\begin{aligned} A(R) &= -\frac{e^{2\sigma} - 1}{2\sigma'}; \quad B(R) = \frac{e^{2\sigma} - 1}{12\sigma'} R + \frac{1}{2} \sigma' \Delta_1 R, \\ D(R) &= \frac{e^{2\sigma} - 1}{6\sigma' \Delta_1 R} R - \frac{\Delta_2 R}{\Delta_1 R} - 2\sigma'. \end{aligned} \quad (11)$$

Первые два из равенств (11) разрешим относительно  $\sigma'$  и  $e^{2\sigma}$ :

$$\sigma' = \frac{RA + 6B}{3\Delta_1 R}, \quad (12)$$

$$e^{2\sigma} = 1 - \frac{2A(RA + 6B)}{3\Delta_1 R}. \quad (13)$$

Тогда последнее из равенств (11) приводит к соотношению

$$RA + 4B + D\Delta_1 R + \Delta_2 R = 0, \quad (14)$$

которое можно получить из (10) свертыванием с  $g^{hi}$ .

Продифференцируем первое из равенств (11) по  $R$ , из полученного найдем выражение для  $\sigma''$  и подставим его в соотношение (8). Принимая во внимание (12), (13), (14), видим, что функции  $A$ ,  $B$  и  $D$  должны удовлетворять условию

$$3(A' + AD + 1)\Delta_1 R - A^2 R - 6AB = 0. \quad (15)$$

Соотношения (5) преобразуются в следующие:

$$R^a R_{ak} = \frac{R}{4} R_{,k} \quad (\text{где } R^h = g^{ah} R_{,a}). \quad (16)$$

Свертывая (10) с  $R^h$  и принимая во внимание (16), получим

$$2(\Delta_1 R)' + RA + 4B + 4D\Delta_1 R = 0. \quad (17)$$

Продифференцируем (12) по  $R$  и полученное выражение для  $\sigma''$  подставим в (8). Учитывая (12), (13), (14), (15) и (17), находим еще одно условие на функции  $A$ ,  $B$  и  $D$ :

$$3RA' + 12B' + 2A + 3ADR + 12BD + R = 0. \quad (18)$$

Найдем выражения для функций  $A$ ,  $B$  и  $D$  непосредственно из уравнений (10).

В результате свертывания (10) с  $g^{hi}$  получим (14). Суммируя (10) с  $R^h_i R^j_i$  и учитывая (16), находим (17). Вследствие (14) соотношение (17) принимает вид  $3D\Delta_1 R - \Delta_2 R + 2(\Delta_1 R)' = 0$ , откуда

$$D = \frac{\Delta_2 R - 2(\Delta_1 R)'}{3\Delta_1 R}. \quad (19)$$

Продифференцируем (16) ковариантно по  $x^h$  и результат свернем с  $g^{hh}$ , что приведет к соотношению

$$4R^{\alpha\beta}R_{,\alpha\beta} - R\Delta_2 R + \Delta_1 R = 0 \quad (\text{где } R^{hi} = g^{\alpha h}g^{\beta i}R_{\alpha\beta}).$$

Умножим (10) на  $R^{hi}$  и просуммируем по индексам  $h$ ,  $j$ . С учетом (14), (16) и предыдущего соотношения получим  $A(4R^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} - R^2) = \Delta_1 R$ . Вследствие (6) коэффициент при  $A$  отличен от нуля, и мы можем определить  $A$

$$A = \frac{\Delta_1 R}{4R^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} - R^2}. \quad (20)$$

Зная  $A$  и  $D$ , из (14) находим  $B$ :

$$B = \frac{(\Delta_1 R)'}{6} - \frac{R\Delta_1 R}{4(4R^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} - R^2)} - \frac{\Delta_2 R}{3}. \quad (21)$$

Так как  $A$  и  $\Delta_1 R$  — функции от  $R$ , то из (20) заключаем, что

$$R^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} = f(R). \quad (22)$$

Условия (6), (9), (10), (15), (16), (22) являются необходимыми для того, чтобы  $V_4$  допускало неизотропное конформное отображение, сохраняющее риманову кривизну трехмерной площадки, при помощи функции  $\sigma$  (причем последняя по необходимости определяется формулой (13)).

Нетрудно показать, что эти условия являются также и достаточными. В самом деле, суммируя (10) с  $R^h_i$  и учитывая (16), получаем

$$2(\Delta_1 R)_{,i} = -(RA + 4B + 4D\Delta_1 R)R_{,i},$$

откуда вытекает, что  $\Delta_1 R$  является функцией  $R$ . Далее, при выполнении условий (6) и (16) из (10) описанным выше способом находим выражения (19), (20), (21) для функций  $D$ ,  $A$ ,  $B$ , которые вследствие (6), (9) и (22) будут функциями  $R$ . Тогда и  $\sigma$ , определяемая формулой (13), будет функцией  $R$ . Выписав условия интегрируемости уравнений (10) и свернув их с  $g^{hi}$ , в силу (16) получим соотношение (18). Из (13), принимая во внимание (15), (17) и (18), находим

$$\sigma_{,h} = \frac{RA + 6B}{3\Delta_1 R} R_{,h}; \quad \sigma_{hi} = \frac{RA + 6B}{3\Delta_1 R} (R_{,hi} + DR_{,h}R_{,i}).$$

Найденные выражения для  $\sigma_{,h}$  и  $\sigma_{hi}$  подставляем в уравнения (1) и убеждаемся, что вследствие (10) они удовлетворяются тождественно.

Условия (6), (9), (10), (15), (16) и (22) являются полной внутренней тензорной характеристикой пространств  $V_4$ , допускающих конформное отображение с сохранением римановой кривизны трехмерной площадки.

Полученные результаты сформулируем в виде следующей теоремы.

**Теорема 2.** Для того чтобы пространство  $V_4$  при  $R \neq \text{const}$  и  $\Delta_1 R \neq 0$  допускало нетривиальное конформное отображение, сохраняющее риманову кривизну трехмерной площадки, необходимо и достаточно, чтобы оно не было конформно-плоским и удовлетворяло условиям (9), (10), (15), (16) и (22).

При этом функция  $\sigma$ , осуществляющая такое отображение, дается формулой (13), а функции  $A$ ,  $B$  и  $D$  определяются формулами (19), (20) и (21).

Нетривиальным примером такого пространства является  $V_4$  с метрикой

$$(ds)^2 = \frac{6}{x^1 + 6\sqrt{2}} \left[ \frac{(dx^1)^2}{u(x^1)} + 2(dx^2)^2 + \sqrt{2} e^{2x^3+v(x^1)} (dx^3)^2 + \right. \\ \left. + \sqrt{2} e^{2x^3-v(x^1)} (dx^4)^2 \right],$$

где  $u(x^1) = (x^1)^2 - 72$ ,  $v(x^1) = \sqrt{3} \ln \frac{|x^1 - \sqrt{u}|}{6\sqrt{2}}$ .

Функция  $\sigma$  в этом случае имеет вид

$$2\sigma = \ln |x^1 + 6\sqrt{2}| - \ln |x^1 - 6\sqrt{2}|.$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. Ф. Каган. Субпроективные пространства. Физматгиз, 1961.
2. K. Yano. Concircular geometry I—V, Proc. Imp. Acad. Tokyo 16 (1940), 195—200, 354—360, 442—448, 505—511; 18 (1942), 446—451.
3. С. И. Федищенко и В. М. Чернышenko. Об одном обобщении пространств постоянной кривизны. Труды семинара по векторному и тензорному анализу, вып. 11 (1961), стр. 269—276.
4. W. Wonga. Eine Verallgemeinerung des Schurschen Satzes, Proc. Ned. Ak. V. Wetensch, Vol. 44, 8 (1941). 943—946.
5. Л. П. Эйзенхарт. Риманова геометрия. ИЛ, М., 1948.

Поступила 21 декабря 1967 г.

## СТРОЕНИЕ ПРОСТРАНСТВ ЦЕНТРО-ПРОЕКТИВНОЙ СВЯЗНОСТИ

A. Шибяк (Краков)

Теория пространств проективной и центро-проективной связности изучалась Э. Картаном [4] и другими (см. [10], [7], [6], [1] и [5]). Из уравнений проективной структуры следует, что между пространствами центро-проективной связности и пространствами проективной связности имеется такая же зависимость, как и между пространствами линейной центро-аффиной связности и общими пространствами линейной связности. В обоих случаях в слое действует лишь центро-проективная или соответственно линейная группа.

В данной статье строится пространство центро-проективной связности как пространство реперов для операторов дифференцирования Ли [9] относительных скаляров. Получается аналогия с реперизацией пространств линейной связности. Используется аппарат Л. Е. Евтушика и В. Близникаса неголономного дифференцирования Ли. Прилагается строение римановой метрики по методу, идеей которого автор обязан Г. Ф. Лаптеву.

## 1. Расслоенное пространство центро-проективных реперов

Мы рассматриваем дифференцируемое многообразие  $M$  размерности  $n$ . Пусть  $x^1, \dots, x^n$  — локальные координаты точки в некоторой области  $O \subset M$ . Тогда любое векторное поле  $X^i$ , заданное на  $O$ , определяет оператор дифференцирования Ли скалярных полей на  $O$ , который может быть представлен в локальных координатах  $\{x^i\}$  в виде

$$L_X = X^i \partial_i,$$

где  $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ . Операторы  $\partial_1, \dots, \partial_n$  считаются составляющими натурального линейного репера, соответствующего принятым локальным координатам. Мы обобщим эту схему, взяв вместо скаляров относительные скаляры произвольного веса. Пусть  $\sigma$  — относительный скаляр веса  $r$ . Обозначая символом  $L_X$  оператор дифференцирования Ли, мы имеем равенство

$$L_X \sigma = X^i \partial_i \sigma - r (\partial_i X^i) \sigma. \quad (1)$$

Определяя новый оператор  $\partial_0$  формулой

$$\partial_0 \sigma = -r \sigma$$

и полагая

$$X^0 = \partial_j X^j,$$

запишем формулу (1) в виде

$$L_X \sigma = \sum_{j=0}^n X^j \partial_j \sigma. \quad (2)$$

Примем в дальнейшем, что большие латинские буквы пробегают значения от 0 до  $n$ , маленькие — от 1 до  $n$ .

Таким образом, мы расширили натуральный линейный репер  $\{\partial_i\}$  до более общего  $\{\partial_j\}$ .

**Теорема 1.** При переходе от одной системы локальных координат  $\{x^k\}$  к другой  $\{x^l\}$  составляющие поля реперов  $\{\partial_j\}$  преобразуются по следующему закону:

$$\partial_{\bar{k}} = \partial_0, \quad \partial_{\bar{k}} = A_{\bar{k}}^H \partial_H, \quad (3)$$

где

$$A_0^0 = 1, \quad A_{\bar{k}}^h = \frac{\partial x^h}{\partial x_{\bar{k}}}, \quad A_k^h = \frac{\partial x^h}{\partial x^k}, \quad A_{\bar{k}l}^h = \frac{\partial^2 x^h}{\partial x^{\bar{k}} \partial x^l}, \quad A_{\bar{k}}^l = A_l^i A_{i\bar{k}}^l, \quad A_n^0 = 0.$$

Матрица этого преобразования

$$\begin{vmatrix} 1 & A_1^0 & \dots & A_n^0 \\ 0 & A_1^1 & \dots & A_n^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & A_1^n & \dots & A_n^n \end{vmatrix}$$

является матрицей центро-проективного преобразования.

**Доказательство.** Компоненты векторного поля  $X^h$  преобразуются по закону  $X^h = A_i^h X^i$ . Далее имеем

$$X^{\bar{k}} = \partial_{\bar{k}} X^k = A_{\bar{k}}^j \partial_j (A_h^k X^h) = \partial_j X^j + A_{\bar{k}}^j A_{jh}^k X^h = A_{\bar{k}}^0 X^H,$$

где

$$A_0^0 = 1, \quad A_h^0 = A_{\bar{k}}^j A_{jh}^0 \left( = A_{\bar{k}}^j \frac{\partial^2 x^{\bar{k}}}{\partial x^j \partial x^h} \right).$$

Значит, координаты оператора  $X^H \partial_H$  преобразуются по следующему закону, который запишем в матричной форме

$$\begin{vmatrix} X^0 \\ X^1 \\ \vdots \\ X^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & A_1^0 & \dots & A_n^0 \\ 0 & A_1^1 & \dots & A_n^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & A_1^n & \dots & A_n^n \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} X^0 \\ X^1 \\ \vdots \\ X^n \end{vmatrix}. \quad (4)$$

Имея в виду инвариантность оператора (2), немедленно заключаем, что составляющие репера подчиняются закону

$$\|\partial_0, \partial_1, \dots, \partial_n\| = \|\partial_0, \partial_1, \dots, \partial_n\| \cdot \begin{vmatrix} 1 & A_1^0 & \dots & A_n^0 \\ 0 & A_1^1 & \dots & A_n^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & A_1^n & \dots & A_n^n \end{vmatrix}, \quad (5)$$

а это и есть закон (3). Матрицы размерности  $(n+1) \times (n+1)$ , появляющиеся в формулах (4) и (5), соответствуют проективным преобразованиям  $n$ -мерного проективного пространства, составляющим на месте точку с неоднородными координатами  $(1, 0, \dots, 0)$ . Поскольку такие преобразования

являются центропроективными, нормированными так, чтобы в левом углу стояла единица, наше предложение доказано.

Следует заметить, что параметры  $A_k^0$  можно выразить формулой

$$A_k^0 = -\partial_k \ln |\det A_s^p|. \quad (6)$$

Теперь построим на  $M$  расслоенное пространство центро-проективной структуры, допуская и неголономные поля реперов  $\{d_0, d_1, \dots, d_n\}$ , где

$$d_0 = \partial_0, \quad d_k = B_k^H \partial_H,$$

причем  $B_k^H$  — произвольное поле матриц в  $O$ . Таким образом, получаем над каждой точкой слой, изоморфный центро-проективной группе. Это построение расширяется обычным способом на все многообразие  $M$ , которое теперь считается базой получаемого расслоенного пространства центро-проективной структуры. Мы обозначим его  $P(M)$ .

Так как первый столбец матрицы центро-проективных преобразований постоянен, базис алгебры Ли этой группы может быть представлен в виде матрицы с  $n$  столбцами и  $n+1$  строками. Следовательно, любое поле слоевых форм (см. [5] на  $P(M)$ ) обладает  $n(n+1)$  составляющими  $\omega_k^H$ .

Более того, мы сможем применить известные выражения для алгебр Ли линейных групп и отсюда получаются структурные уравнения для  $P(M)$ :

$$d\omega_k^0 = -\omega_i^0 \wedge \omega_k^i - \omega_{kl}^0 \wedge \omega^l, \quad (7)$$

$$d\omega_k^h = -\omega_i^h \wedge \omega_k^i - \omega_{kl}^h \wedge \omega^l, \quad (8)$$

где  $\omega^1, \dots, \omega^n$  — базисные формы. Формы  $\omega_k^h$  имеют такую же структуру, как и слоевые формы пространства линейных реперов. Если мы их продолжим и положим

$$\omega_k^0 = \omega_{ik}^i, \quad \omega_{kl}^0 = \omega_{ikl}^i,$$

то  $\omega_k^0$  и  $\omega_{kl}^0$  удовлетворяют уравнениям (7) (см. [5]).

Выясним геометрический смысл неголономных реперов. Пусть в области  $O$  задано поле центро-проективных реперов, удовлетворяющих уравнениям

$$dd_H = \omega_H^I d_I, \quad \text{где } \omega_0^I = 0, \quad \omega_k^0 = \omega_{ik}^i. \quad (9)$$

В этом поле инфинитезимальные изменения относительного скаляра записываются в виде

$$d\sigma + r\omega^0 \sigma = \sigma_i \omega^i, \quad (10)$$

где  $\omega^0 = \omega_i^i$ , и смещения векторного поля  $X^I$  — в виде

$$dX^I + \omega_j^I X^j = X_i^I \omega^i. \quad (11)$$

Если мы продолжим (11) и положим  $X^0 = X_i^i$ , то к системе (11) приведется уравнение

$$dX^0 + \omega_j^0 X^j = X_i^0 \omega^i. \quad (12)$$

Применяя формулы Л. Е. Евтушика [3], получим

$$L_X \sigma = X^i \sigma_i - r X^0 \sigma.$$

Таким образом, мы пришли к следующей теореме.

**Теорема 2.** Репер  $\{d_I\}$ , удовлетворяющий системе (9), является совокупностью обобщенных операторов дифференцирования полей относитель-

ных скаляров, действующих по формулам  $d_0\sigma = -r\sigma$ , причем  $r = \text{весу } \sigma$ ,  $d_i\sigma = \sigma_i$ , где определением  $\sigma_i$  служит равенство (10). В таком репере производная Ли поля  $\sigma$  относительно  $X$  выражается формулой

$$L_X\sigma = X^I d_I\sigma. \quad (13)$$

Заметим, что для двух операторов  $L_X$  и  $L_Y$  определена алгебра Ли по формуле

$$L_{[XY]} = L_X \circ L_Y - L_Y \circ L_X, \quad (14)$$

где  $\circ$  — символ сложения операции. Применяя (14) к произвольному относительному скаляру, получим после сокращений

$$[X, Y] = (X^I Y^0 - Y^I X^0) d_0 + (X^I Y^l - Y^I X^l) d_l,$$

что обобщает формулы В. Близникаса [2].

## 2. Инфинитезимальные центро-проективные связности.

Пусть векторы

$$E_H^k = \left( \frac{\partial}{\partial A_k^H} \right)_{A_l^I = \delta_l^I}, \quad (15)$$

касательные к центро-проективному групповому многообразию в его единичной точке образуют базис алгебры Ли центропроективной группы. Пусть  $\omega = \omega_k^H E_H^k$  — поле слоевых форм, компоненты которых подчинены структурным уравнениям

$$d\omega_k^H = -\omega_h^H \wedge \omega_k^h - \omega_{kl}^H \wedge \omega^l, \quad (16)$$

причем  $\omega_{kl}^H = \omega_{lk}^H$ . Пусть наряду с  $\omega$  задана форма связности  $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_k^H E_H^k$ . Тогда  $\tilde{\omega}$  и  $\omega$  отличаются на линейную комбинацию базисных форм [2], т. е.

$$\tilde{\omega}_k^H = \omega_k^H + \gamma_{kl}^H \omega^l, \quad (17)$$

где  $\gamma_{kl}^H$  являются компонентами некоторого объекта. Мы найдем его инфинитезимальные уравнения, используя равенство

$$d\tilde{\omega}_k^H + \tilde{\omega}_l^H \wedge \omega_k^l = R_{kl}^H \omega^l \wedge \omega^l, \quad (18)$$

где  $R_{kl}^H$  компоненты тензора центро-аффинной кривизны. Подставляя (17) в (18) и используя (16), получим

$$\begin{aligned} d\gamma_{kl}^H \wedge \omega^l + \gamma_{kl}^l \omega_k^H \wedge \omega^l - \gamma_{ll}^H \omega_k^l \wedge \omega^l - \gamma_{kl}^H \omega_l \wedge \omega^l + \gamma_{ll}^H \gamma_{kl}^l \omega^l \wedge \omega^l - \omega_{kl}^H \wedge \omega^l = \\ = R_{kl}^H \omega^l \wedge \omega^l, \end{aligned}$$

и отсюда в силу леммы Картана получатся уравнения для  $\gamma$

$$d\gamma_{kl}^H + \gamma_{kl}^l \omega_l^H - \gamma_{ll}^H \omega_k^l - \gamma_{kl}^H \omega_l^l - \omega_{kl}^H = \gamma_{kl,l}^H \omega^l. \quad (19)$$

Выпишем отдельно (19) при  $H = 0$

$$d\gamma_{kl}^0 + \gamma_{kl}^l \omega_l^0 - \gamma_{ll}^0 \omega_k^l - \gamma_{kl}^0 \omega_l^l - \omega_{kl}^0 = \gamma_{kl,l}^0 \omega^l. \quad (20)$$

Известно, что, продолжая структурные уравнения линейной группы, получим структурные уравнения для  $\omega_{kl}^0$

$$d\omega_{kl}^0 + \omega_h^l \wedge \omega_{kl}^h + \omega_{hk}^l \wedge \omega_l^h = -\omega_{kl}^l \wedge \omega^h.$$

Тем самым определяется на  $M$  расслоенная структура, структурной группой которой служит группа  $L_n^2$ , первое продолжение линейной группы. Повторяя только приведенные рассуждения для соответствующей формы связности  $\tilde{\omega}_j^l E_i^i + \omega_{jk}^l E_j^k$ , мы придем к заключению, что

$$\tilde{\omega}_{kl}^i = \omega_{kl}^i + \gamma_{kl}^i \omega^j. \quad (21)$$

Здесь  $\gamma_{pl}^l$  вместе с  $\gamma_{kl}^i$  образуют геометрический объект, который мы предполагаем симметричным по нижним индексам  $k, l, j$ .

Его инфинитезимальные изменения таковы:

$$d\gamma_{khj}^i - \gamma_{khp}^i \omega_j^p - \gamma_{pj}^i \omega_{kh}^p - \gamma_{pkj}^l \omega_h^p - \gamma_{phj}^l \omega_k^p + \gamma_{khj}^p \omega_p^l + \gamma_{hj}^p \omega_{pk}^l + \gamma_{kj}^p \omega_{ph}^l - \omega_{khj}^i = \gamma_{khj, l}^i \omega^l.$$

Свертывая по индексам  $i, k$  и полагая  $\gamma_{hj}^i = \gamma_{hj}^0$ , мы получаем для  $\gamma_{hj}^0 \dots$  уравнения вида (20).

Будем называть объект  $\{\gamma_{kh}^i, \gamma_{khj}^i\}$  неголономным объектом линейной связности второго порядка и объект  $\{\gamma_{kh}^i, \gamma_{kh}^0\}$  — неголономным объектом центропроективной связности. Только что полученный результат мы сформулируем в виде предложения.

**Теорема 3.** Компоненты  $\gamma_{kh}^0$  неголономного объекта центропроективной связности получаются путем свертывания компонент  $\gamma_{jhk}^i$  объекта линейной связности второго порядка  $\gamma_{kh}^0 = \gamma_{ikh}^i$ .

Имея ввиду формулы Г. Ф. Лаптева [5]  $\omega_{ik}^i = \omega_k^0$  и приведенную выше формулу (21), мы сразу придем к следующей теореме:

**Теорема 4.** Формула центропроективной связности  $\tilde{\omega}_k^H E_H^k$  получается из формы линейной связности второго порядка  $\tilde{\omega}_j^l E_i^i + \omega_{jk}^l E_l^k$  путем свертывания, а именно,  $\omega_k^0 = \omega_{ik}^i$ .

Пусть в области  $O \subset M$  задано натуральное поле реперов  $\partial_0, \partial_1, \dots, \partial_n$ . Оно является локальным сечением пространства  $P(M)$ . Ограничива форму связности  $\omega_k^H E_H^k$  этим сечением, получим разложение

$$\tilde{\omega}_k^H = \Gamma_{kl}^H dx^l,$$

где  $\{x^1, \dots, x^n\}$  — локальные координаты, определяющие реперы  $\{\partial_i\}$ . Объект  $\Gamma$  называется голономным объектом связности. Закон его преобразования находится как частный случай закона преобразования объекта общей линейной связности, а именно, переходя к другому сечению, определяемому полем реперов  $\{\partial_{\bar{0}}, \dots, \partial_{\bar{n}}\}$ , мы имеем  $\tilde{\omega}_{\bar{k}}^{\bar{H}} = \Gamma_{\bar{k}\bar{l}}^{\bar{H}} dx^{\bar{l}}$ , где  $x^{\bar{l}} = A_{\bar{l}}^i dx^i$  и

$$\Gamma_{\bar{k}\bar{l}}^{\bar{H}} = A_{\bar{l}}^{\bar{H}} A_{\bar{k}}^i A_{\bar{i}}^s \Gamma_{js}^l + A_{\bar{i}}^{\bar{H}} A_{\bar{k}}^i \Gamma_{\bar{i}\bar{l}}^{\bar{s}}. \quad (22)$$

Параметры  $A$  определены теоремой 1.

(Закон (22) был дан в работе [6] в равносильном виде. Разница между формулой (22) и формулами В. Г. Лемлейна (3.16) возникает потому, что мы здесь приняли другой базис в алгебре Ли центропроективной группы, т. е. мы не умножаем  $E_k^0$  на  $n+1$ ).

### 3. Центро-проективные касательные пространства и строение римановых метрик

Рассмотрим теперь классы пропорциональности операторов вида  $L_X = -X^I d_I$ , действующих на относительных скалярах. Мы считаем два оператора  $L_X = -X^I d_I$  и  $L_Y = Y^I d_I$  принадлежащими одному классу тогда и только тогда, когда существует скаляр  $t \neq 0$  такой, что для любого относительного скаляра  $\sigma$  имеем

$$L_X \sigma = t L_Y \sigma.$$

Вследствие теоремы 1 это условие равносильно тому, что  $X^0 = tY^0$ ,  $X^1 = tY^1, \dots, X^n = tY^n$ , т. е. векторы также определяют класс пропорциональности. Такой класс пропорциональности называется пунктором [6, 7]. В качестве его неоднородных координат можно принять совокупность чисел

$$u^1 = \frac{X^1}{(n+1)X^0}, \dots, u^n = \frac{X^n}{(n+1)X^0}. \quad (23)$$

Компоненты (23) пунктора подчинены следующему закону преобразования:

$$u^k = \frac{A_k^{\bar{k}} u^{\bar{k}}}{1 + (n+1) A_k^{\bar{0}} u^{\bar{k}}},$$

который немедленно получается из формулы (4). Но так как фактор  $n+1$  не играет в наших рассуждениях существенной роли, мы будем исследовать неоднородные компоненты пунктора в более удобном виде, а именно, принимая

$$p^k = \frac{X^k}{X^0}. \quad (24)$$

**Теорема 5.** Компоненты (24) пунктора удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений (ср. [6]):

$$dp^k + \omega_j^k p^j - p^k p^l \omega_j^l = p_i^k \omega^l. \quad (25)$$

**Доказательство.** В силу уравнений (11), (12) имеем

$$\begin{aligned} dp^k + dp^k &= \frac{X^k + dX^k}{X^0 + dX^0} = \frac{p^k + dX^k/X^0}{1 + dX^0/X^0} = \\ &= [p^k + (-\omega_j^k X^j + X_l^k \omega^l)/X^0] [1 - (-\omega_h^0 X^h + X_l^0 \omega^l)/X^0] = \\ &= p^k - \omega_j^k p^j + p^k p^l \omega_j^l + (X_l^k/X^0 - X_l^0/X^0) \omega^l, \end{aligned}$$

что и дает наше предложение если мы положим  $X_l^k/X^0 - X_l^0/X^0 = p_l^k$ .

**Следствие.** Ковариантный дифференциал поля пункторов имеет вид

$$\Delta p^k = dp^k + p^l \tilde{\omega}_j^k - p^k p^l \tilde{\omega}_j^0$$

или в неголономной (форме (см. [2]))

$$\Delta p^k = (p_i^k - p^l \gamma_{jl}^k - p^k p^l \gamma_{jl}^0) \omega^l.$$

Таким образом, всякое векторное поле имеет определенное поле пункторов. Обратно, если задано поле пункторов, то можно, по крайней мере локально, найти порождающее его векторное поле. С каждой точкой  $x$  базисного многообразия  $M$  мы свяжем  $n$ -мерное центро-проективное пространство, точками которого будут пункторы. Мы назовем его *центро-проективным касательным пространством в точке  $x$* . Совокупность всех

этих касательных пространств обладает структурой ассоциированного с  $P(M)$  расслоенного пространства, стандартным слоем которого служит  $n$ -мерное проективное пространство. Структурными формами этого ассоциированного пространства служат формы  $\omega^i$  и  $\omega'_i$  вместе с формами  $Dp^k$ , равными левым частям уравнений (25). Мы будем обозначать это пространство символом  $\Pi(M)$ . Если  $X^i$  — векторное поле на  $M$  и  $p^k$  — соответствующее ему поле пункторов, то поле  $p^k$  является сечением пространства  $\Pi(M)$ . Отображение  $X \rightarrow p$  мы назовем подниманием в  $\Pi(M)$ .

**Теорема 6.** Пусть в  $\Pi(M)$  задано параллельное поле невырожденных гиперквадрик, не проходящих через несобственные точки  $p^1 = \dots = p^n = 0$  слоев, и пусть на  $M$  задано векторное поле, такое, что его поднимание  $z$  в  $\Pi(M)$  все лежит по одну сторону от этой гиперквадрики. Тогда на  $M$  существует риманова метрика.

**Доказательство.** Возьмем на  $M$  гладкую дугу  $x = x_t$ ,  $-\infty < t < \infty$ . Взяв две точки  $x_0$  и  $x_t$ , спроектируем горизонтально (относительно заданной  $P(M)$  связности) центро-проективное касательное пространство в  $x_t$  на такое же пространство в  $x_0$ . Так как наше поле гиперквадрик обладает параллелизмом, то гиперквадрика слоя, соответствующего  $x_t$ , перейдет при этом проектировании в гиперквадрику слоя, соответствующего  $x_0$ . По точке поля пункторов  $z_t = z_{x_t}$  перейдет в точку  $\bar{z}_t$ , соседнюю по отношению к  $z_0 = z_{x_0}$ . Таким образом, дуга  $z_{x_t}$  отображается в дугу  $\bar{z}_t$  в слое над  $x_0$  и, как легко понять,  $\bar{z}_t$  расположена по одну сторону от гиперквадрики в  $x_0$  = слое. Проведем прямую через две соседние точки  $\bar{z}_1$  и  $\bar{z}_2 = \bar{z}_{t+r}$  дуги  $\bar{z}_t$  и найдем (действительные или мнимые) несобственные точки  $a_1$  и  $a_2$  этой прямой, т. е. точки пересечения прямой с гиперквадрикой. Затем вычислим неевклидово расстояние

$$\rho(z_1, z_2) = |\ln(z_1, z_2; a_1, a_2)|, \quad (26)$$

где  $(\cdot, \cdot; \cdot, \cdot)$  обозначает двойное отношение. Теперь определяем длину дуги  $s$  кривой  $x_t$ , полагая

$$\frac{ds}{dt} \Big|_{x_t} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \tau^{-1} \rho(z_1, z_2). \quad (27)$$

Чтобы доказать существование этого предела и римановость определенной таким путем метрики, выполним все вычисления в координатах.

Прежде всего заметим, что в силу наших предложений гиперквадрика может быть представлена уравнением вида

$$1 + 2a_{0k}p^k + a_{hk}p^kp^h = 0.$$

Для любой пары пункторов  $p, q$  положим

$$a(p, q) = 1 + a_{0k}(p^k + q^k) + a_{hk}p^kq^h.$$

Если приращение параметра  $\tau$  стремится к нулю, то точка  $z_2$  имеет в слое  $x_0$  координаты

$$z_2^i = z_1^i + (\nabla_V z^i) \tau + o(\tau),$$

где  $\nabla_V z^i$  — ковариантная производная поля  $z$  в направлении вектора  $V$ , касательного к дуге  $x_t$ . После элементарных вычислений получаем равенство

$$\rho(z_1, z_2) = \left| \ln \frac{a(z, z) + a(z, \nabla_V z) \tau + V \Delta \tau}{a(z, z) + a(z, \Delta_V z) \tau - V \Delta \tau} \right| + o(\tau),$$

где

$$\Delta = a(z, \nabla_V z) a(z, \nabla_V z) - a(z, z) a(\nabla_V z, \nabla_V z),$$

и отсюда в силу (27)

$$\frac{ds}{dt} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \tau^{-1} \left| \ln \frac{a(z, z) + a(z, \nabla_V z) \tau + \sqrt{\Delta} \tau}{a(z, z) + a(z, \nabla_V z) \tau - \sqrt{\Delta} \tau} \right|.$$

Следует различать два случая: эллиптический, когда  $\Delta < 0$ , и гиперболический, когда  $\Delta > 0$ . В первом случае мы имеем

$$\rho(z_1, z_2) = 2 \operatorname{arctg}(\sqrt{-\Delta} \tau) + O(r)$$

и

$$\frac{ds}{dt} = 2 \lim_{\tau \rightarrow 0} \tau^{-1} \operatorname{arctg}(\sqrt{-\Delta} \tau) = 2\sqrt{-\Delta}.$$

Во втором случае —

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \tau^{-1} |\ln(a(z, z) + a(z, \nabla_V z) \tau + \sqrt{\Delta} \tau) - \ln a(z, z) - \\ &- \lim_{\tau \rightarrow 0} \tau^{-1} |\ln(a(z, z) + a(z, \nabla_V z) \tau - \sqrt{\Delta} \tau) - \ln a(z, z)| = 2\sqrt{\Delta}. \end{aligned}$$

Итак, в обоих случаях получаем равенство

$$ds^2 = 4 |a(z, \nabla_V z) a(z, \Delta_V z) - a(z, z) a(\nabla_V z, \nabla_V z)| dt^2$$

или в координатном виде

$$ds^2 = 4 |a_{IK} a_{HJ} - a_{HK} a_{II}| z^I z^H \nabla_V z^K \nabla_V z^J dt^2, \quad (28)$$

причем мы приняли  $a_{00} = 1$ ,  $z^0 = 1$ ,  $\nabla z^0 = 0$ . Полагая  $\nabla z^k = \tilde{z}_i^k \omega^i$ , окончательно получим

$$ds^2 = 4 |a_{IK} a_{HJ} - a_{HK} a_{II}| z^I z^H \tilde{z}_i^K z_j^I \omega^i \otimes \omega^j. \quad (29)$$

Следует заметить, что хотя мы и не ограничивали структурную группу подгруппой псевклиновых движений, полученная метрика является римановой вследствие ковариантности выражений (29). Теорема доказана.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. Близникас. Полный объект центро-проективной связности и объект кручения — кривизны пространства центральных конункторов. Лит. матем. сб., т. 4, № 4, 1966, 457—475.
2. В. Близникас. Неголономное дифференцирование Ли и линейные связности в пространстве опорных элементов. Лит. матем. сб. т. 6, № 4, 1966, 141—209.
3. Л. Евтушик. Производная Ли и дифференциальные уравнения поля геометрического объекта. ДАН СССР, т. 132, № 5, 1960, 998—1001.
4. Э. Картан. Пространства аффинной, проективной и конформной связности. Казань, 1962.
5. Г. Ф. Лаптев. Основные инфinitезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии. Труды геометрического семинара, т. I, М., 1966.
6. В. Г. Лемлейн. Локальные центро-проективные пространства и связности в дифференцируемом многообразии. Лит. матем. сб., т. 4, № 1, 1964, 41—132.
7. L. Eisenhart. Non-Riemannian Geometry — A. M. S. Coll Rubl. Vol. VIII, N.—Vork, 1927.
8. A. Lechnerowicz. Théorie globale des groupes d'holonomie, Roma, Ed. Gremonese 1955.
9. W. Siebodzinski. Sur les équations de Hamilton, Bull. Acad. Roy. de Belgique, (5), 17, (1931), 864—870.
10. T. Thomas. On the projective and egui-projective geometries of paths. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 11 (1925).

Поступила 17 апреля 1967 г.

## К ВОПРОСУ ОБ ИЗГИБАНИИ ВЫПУКЛЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ С РАЗРЕЗОМ

Л. А. Шор (Харьков)

В статье [1] приведены достаточные условия изгибаляемости выпуклых поверхностей с конечным разрезом (теорема 3) и бесконечным разрезом (теорема 4) в классе  $R$  (в классе всех выпуклых поверхностей с разрезом).

В сформулированных ниже двух теоремах даются необходимые и достаточные условия изгибаляемости в классе  $R$  выпуклых поверхностей как с конечными, так и с бесконечными разрезами.

**Теорема 1.** Выпуклая поверхность  $F$  с разрезом по неразделяющей ее элементарной кривой  $\Gamma$  изгибаема в классе  $R$  тогда и только тогда, когда

1) на кривой  $\Gamma$  имеются две конические точки  $A_1$  и  $A_2$  поверхности  $F$ , кривизны которых не меньше  $\pi$ ;

2) если  $\tilde{\Gamma} = A_1A_2 \subset \Gamma$  — простая кривая,  $s \in [0, \sigma]$  — длина дуги кривой  $\tilde{\Gamma}$ , отсчитываемой от точки  $A_1$  до точки  $M(s) \in \tilde{\Gamma}$  и  $\varphi_r(s)$ ,  $\varphi_l(s)$  — соответственно правый и левый повороты участка  $A_1M(s) \subset \Gamma$ , то существует такое  $\tau > 0$ , что выполнено хотя бы одно из двух условий:

а)  $\varphi_r(s)$  монотонно не убывает при  $s \in [0, \tau]$ ,  $\varphi_l(s)$  монотонно не убывает при  $s \in [\sigma - \tau, \sigma]$ ,  $\varphi_r(s) + \varphi_l(s - 2t)$  монотонно не убывает при любом фиксированном  $t \in [0, \frac{1}{2}\tau]$  и  $s \in [2t, \sigma]$ ;

б)  $\varphi_l(s)$  монотонно не убывает при  $s \in [0, \tau]$ ,  $\varphi_r(s)$  монотонно не убывает при  $s \in [\sigma - \tau, \sigma]$ ,  $\varphi_r(s) + \varphi_l(s - 2t)$  монотонно не убывает при любом фиксированном  $t \in [0, \frac{1}{2}\tau]$  и  $s \in [2t, \sigma]$ .

**Теорема 2.** Бесконечная выпуклая поверхность  $F$  с бесконечным разрезом  $\Gamma$ , не разделяющим ее, изгибаема в классе  $R$  тогда и только тогда, когда:

1) на кривой  $\Gamma$  имеется коническая точка  $A$  поверхности  $F$ , кривизна которой  $\geq \pi$ ;

2) если  $\tilde{\Gamma} \subset \Gamma$  — бесконечная простая кривая, выходящая из точки  $A$ ;  $s \in [0, \infty]$  — длина дуги кривой  $\tilde{\Gamma}$ , отсчитываемой от точки  $A$  до точки  $M(s) \in \tilde{\Gamma}$ ,  $\varphi_r(s)$  и  $\varphi_l(s)$  — соответственно правый и левый повороты участка  $AM(s) \subset \tilde{\Gamma}$ , то существует такое  $\tau > 0$ , что выполнено хотя бы одно из следующих условий:

а)  $\varphi_r(s)$  монотонно не убывает при  $s \in [0, \tau]$ ,  $\varphi_r(s) + \varphi_l(s - 2t)$  монотонно не убывает при любом фиксированном  $t \in [0, \frac{1}{2}\tau]$  и  $s \in [2t, \infty)$ ;

б)  $\varphi_l(s)$  монотонно не убывает при  $s \in [0, \tau]$ ,  $\varphi_l(s) + \varphi_r(s - 2t)$  монотонно не убывает при любом фиксированном  $t \in [0, \frac{1}{2}\tau]$  и  $s \in [2t, \infty)$ ,

Доказательства теорем 1 и 2 основаны на теореме А. Д. Александрова о склеивании [2] и аналогичны доказательству теоремы 1 из [1].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Л. А. Шор. Об одном классе изгибаний выпуклых поверхностей с разрезом. «Укр. геометр. сб.», вип. 4. Изд-во ХГУ, Харьков, 1967, 102—107.
2. А. Д. Александров. Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей. Гостехиздат, М-Л., 1948.

## СОДЕРЖАНИЕ

стр.

Я. П. Бланк. Дмитрий Матвеевич Синцов (К столетию со дня рождения)	3
С. П. Гейсберг. Реализация выпуклой поверхности с краем по данной метрике . . . . .	11
М. В. Драгнев. О точечных соответствиях пространств с гармонической характеристической конфигурацией . . . . .	19
А. А. Дубровин. О гладкости изометрического погружения двумерного многообразия кривизны, большей $K_0$ , в трехмерное риманово пространство . . . . .	26
В. Ф. Игнатенко. О некоторых свойствах алгебраических поверхностей . . . . .	36
В. Ф. Игнатенко, А. С. Лейбин. К теории плоскостей ортогональной симметрии поверхностей в $E^m$ . . . . .	39
В. Д. Измайлова. Кинематические задачи теории поверхностей . . . . .	55
Л. И. Калыняк, Ю. С. Слободян. О структуре четырехмерных римановых пространств, допускающих трехпараметрическое семейство двумерных вполне геодезических поверхностей . . . . .	62
Н. И. Кованцов, Е. Н. Ищенко. Пара квазиспециальных комплексов второго рода . . . . .	65
А. Д. Милка. Многомерные пространства с многогранной метрикой неотрицательной кривизны. II . . . . .	68
Л. Т. Моторный. Об одном обобщении поверхности переноса . . . . .	78
Э. Г. Позябик. Реализация в целом двумерных аналитических метрик знакопеременной кривизны . . . . .	89
М. Р. Роговой. К дифференциальной геометрии неголономной гиперповерхности . . . . .	98
М. Р. Роговой. О кривизне и кручении неголономной гиперповерхности . . . . .	109
Е. П. Сенькин. Об однозначном определении выпуклой поверхности метрикой и поворотами дуг кривых . . . . .	114
Е. П. Сенькин. Устойчивость решений уравнения $\det \ z_{ik}\  = \varphi$ . . . . .	116
Ю. С. Слободян. Об одном характеристическом свойстве вполне геодезических поверхностей пятимерного риманова пространства . . . . .	118
С. П. Соловьев. Об одном классе однородных многогранников . . . . .	130
С. Ф. Старохозяев. О кривых с ограниченной вариацией поворота на поверхностях, представимых разностью выпуклых функций . . . . .	141
М. А. Улановский. Упорядоченные псевдоримановы пространства . . . . .	153
С. И. Федищенко. Конформные отображения римановых пространств, сохраняющие кривизну трехмерной площадки . . . . .	166
А. Шибяк. Строение пространств центро-проективной связности . . . . .	172
Л. А. Шор. К вопросу об изгибе выпуклых поверхностей с разрезом . .	180

## РЕФЕРАТЫ

УДК 513

**Реализация выпуклой поверхности с краем по данной метрике.** Гейсберг С. П. «Украинский геометрический сборник», вып. 7, 1969, стр. 11—18.

Пусть в круге  $D$  дана метрика  $H$  кривизны  $K > 0$ , на окружности  $d$  дана функция  $z = z(s)$ , где  $s$  — длина дуги  $d$  в метрике  $H$ . Положим  $k_1^2 = \max_D K$ ,  $k_2^2 = \min_D K$ ;  $\sigma(s)$  — геодезическая кривизна  $d$ ,  $\sigma_1 = \max_d \sigma(s)$ ,  $\sigma_2 = \min_d \sigma(s)$ . Доказана

**Теорема.** Если  $H$  принадлежит классу  $C^{4,\alpha}$ , причем  $\sigma_2 \geq 1,001K_1$  и  $|z'(s)| \leqslant 3 \cdot 10^{-5} \left(\frac{k_2}{\sigma_1}\right)^4$ ,  $|z''(s)| \leqslant 3 \cdot 10^{-5} k_2 \left(\frac{k_2}{\sigma_1}\right)^4$ , то существует поверхность  $F$  класса  $C^2$  с метрикой  $H$  и краем  $\bar{z} = z(s)$ , причем для кривизны нормальных сечений  $F$  вдоль ее края может быть дана оценка в зависимости только от величин  $k_2$  и  $\sigma_1$ .

Библиографических ссылок 3.

УДК 513

**О точечных соответствиях пространств с гармонической характеристической конфигурацией.** Драгнев М. В. «Украинский геометрический сборник», вып. 7, 1969, стр. 19—25.

Точечные соответствия между трехмерными проективными пространствами с гармонической характеристической конфигурацией были рассмотрены Мураккини.

В предлагаемой работе исследуются характеристические поверхности точечных соответствий вышеуказанного типа в связи с теорией трижды сопряженных систем. Показывается, что среди шести семейств характеристических поверхностей рассматриваемого точечного соответствия можно выделить четыре специальные тройки семейств, образующие трижды сопряженные системы поверхностей. Доказывается и обратное, что всякая система шести семейств поверхностей, обладающая таким свойством, является системой характеристик поверхностей для некоторого точечного соответствия между двумя проективными пространствами с гармонической характеристической конфигурацией. Кроме того, описывается частный случай, когда среди шести семейств характеристических поверхностей рассматриваемого точечного соответствия имеется хотя бы одно семейство развертывающихся поверхностей и доказывается, что в таком случае этим свойством обладают еще два семейства характеристических поверхностей, причем все поверхности этих трех семейств являются конусами с общей вершиной и образующей.

Библиографических ссылок 4.

УДК 513

**О гладкости изометрического погружения двумерного многообразия кривизны, большей  $K_0$ , в трехмерное риманово пространство.** Дубровин А. А. «Украинский геометрический сборник», вып. 7, 1969, стр. 26—35.

Пусть  $R$  — полное трехмерное риманово пространство и  $M$  — многообразие ограниченной кривизны, гомеоморфное сфере. Пусть удельная кривизна для любой области  $G$  многообразия  $M$  подчинена условию

$$K_0 + \alpha < \frac{\omega(G)}{s(G)} < \beta$$

$(K_0 = \text{const}, \alpha = \text{const} > 0, \beta = \text{const} < \infty)$ .

Тогда, если кривизна пространства всюду  $\leq K_0$ , существует в  $R$  локально выпуклая гладкая поверхность, изометричная  $M$ .

Библиографических ссылок 6.

УДК 513

**О некоторых свойствах алгебраических поверхностей.**  
Игнатенко В. Ф. «Украинский геометрический сборник», вып. 7, 1969, стр. 36—38.

Рассматриваются некоторые свойства алгебраических гиперповерхностей  $n$ -го порядка пространства  $E^m$ , связанные с возможностью их образования при помощи гиперповерхностей из низших порядков.

Библиографических ссылок 6.

УДК 513

**К теории плоскостей ортогональной симметрии поверхностей в  $E^m$ .** Игнатенко В. Ф., Лейбин А. С. «Украинский геометрический сборник», вып. 7, 1969, стр. 39—54.

Изучается взаимное расположение гиперплоскостей ортогональной симметрии алгебраических гиперповерхностей пространства  $E^m$ ; даются некоторые оценки числа этих гиперповерхностей в зависимости от структуры гиперповерхности и ее порядка.

Библиографических ссылок 15.

УДК 513

**Кинематические задачи теории поверхностей.** Измайлов В. Д. «Украинский геометрический сборник», вып. 7, 1969, стр. 55—61.

В работе рассматривается понятие опорной плоскости 1 и 2-го рода направления вдоль кривой на поверхности в аффинном пространстве, а также кинематическая интерпретация вектора опорной плоскости при перемещении ее вдоль кривой на поверхности. Устанавливаются характеристические свойства линий кривизны и геодезических линий по характеру перемещений их опорных плоскостей.

Во второй части работы рассматриваются регулярные сети на поверхности, задаваемые векторными полями. Устанавливается, что нормальные компоненты угловой скорости вращения опорных плоскостей 1-го рода при их смещении вдоль семейств сетей являются чебышевскими кривизнами сетей.

Указывается также кинематическая интерпретация геодезических кривизн сети, чебышевского и геодезического векторов сети.

Библиографических ссылок 3.

УДК 513

**О структуре четырехмерных римановых пространств, допускающих трехпараметрическое семейство двухмерных вполне геодезических поверхностей.** Калыняк Л. И., Слободян Ю. С. «Украинский геометрический сборник», вып. 7, 1969, стр. 62—64.

В работе доказана следующая теорема:

*Если четырехмерное пространство  $V_4$  с аналитической метрикой допускает трехпараметрическое семейство двумерных вполне геодезических поверхностей, причем индикаторика хотя бы в одной точке  $M$  допускает только однопараметрическое семейство глазных направлений, то*

1) либо четырехмерное риманово пространство допускает конечное число трехмерных вполне геодезических поверхностей постоянной кривизны;

2) либо оно допускает однопараметрическое семейство трехмерных вполне геодезических поверхностей, и каждая такая поверхность допускает двухпараметрическое семейство двумерных вполне геодезических поверхностей;

3) либо  $V_4$  допускает семейство двумерных вполне геодезических поверхностей, зависящее от большего числа параметров;

Библиографических ссылок 5.

УДК 513

**Пара квазиспециальных комплексов второго рода.** Кованцов Н. И., Ищенко Е. Н. «Украинский геометрический сборник» вып. 7, 1969, стр. 65—67.

В работе вводится понятие пары квазиспециальных комплексов второго рода и доказывается теорема для того случая, когда пара квазиспециальных комплексов второго рода представляет собой один и тот же комплекс проективного вращения. Кроме того, сформулированы еще две теоремы, вытекающие из доказательства основной теоремы данной работы.

Библиографических ссылок 3.

УДК 513

**Многомерные пространства с многогранной метрикой неотрицательной кривизны.** П. Милка А. Д. «Украинский геометрический сборник», вып. 7, 1969, стр. 68—77.

В этой части работы определяются многогранные  $h$  — метрики с неотрицательной кривизной и устанавливаются их основные свойства: непалегание кратчайших, теорема об условии выпуклости, теорема об однородности окрестности кратчайшей и др. Вводятся квазигеодезические линии, для которых доказываются соответствующие теоремы существования и сходимости. Полученные результаты согласуются с известными положениями для двумерных метрик.

Начало работы см. в «Укр. геометр. сб.», вып. 5—6, 1967, стр.

Рисунков 2. Библиографических ссылок 12.

УДК 513

**Об одном обобщении поверхности переноса.** Моторный Л. Т. «Украинский геометрический сборник», вып. 7, 1969, стр. 78—88.

В работе рассматривается обобщение поверхности переноса, которое заключается в ослаблении условий Сервана — Бианки, а именно: вместо чебышевской сети рассматривается а) конформно-чебышевская (ромбическая) сеть, б) получебышевская сеть.

Доказывается, что любая поверхность несет бесконечное множество сопряженных ромбических сетей, причем конформные преобразования, переводящие их в чебышевские, можно выбирать с произволом одной функции одного аргумента.

Рассматриваются также сопряженные получебышевские сети на поверхностях.

Библиографических ссылок 3.

УДК 513. 73

**Реализация в целом двумерных аналитических метрик знакопеременной кривизны.** Позняк Э. Г. «Украинский геометрический сборник», вып. 7, 1969, стр. 89—97.

Доказывается следующая теорема: Пусть  $W$  — полная двумерная аналитическая метрика без сопряженных точек. Тогда метрика в любом геодезическом круге метрики  $W$  может быть реализована в  $E^3$  посредством аналитической поверхности.

УДК 513

**К дифференциальной геометрии неголономной гиперповерхности.** Роговой М. Р. «Украинский геометрический сборник», вып. 7, 1969, стр. 98—108.

В  $E_n$  в каждой точке неголономной гиперповерхности строится инвариантная двумерная коническая поверхность ( $n - 1$ )-го порядка. Гиперплоскость, касательная к гиперповерхности в данной точке, пересекает конус по касательным к линиям кривизны 2-го рода.

Вводится нормальное отклонение и доказывается, что оно равно кручению геодезической линии 1-го рода.

Библиографических ссылок 5.

УДК 513. 71

**О кривизне и кручении неголономной гиперповерхности.** Роговой М. Р. «Украинский геометрический сборник», вып. 7, 1969, стр. 109—113.

В статье рассматриваются два подхода к изучению кривизны и кручения неголономной гиперповерхности: путем дифференциально-геометрических построений и при помощи методов, применяемых для пространства евклидовой связности. В окрестности точки строится бесконечно малый замкнутый контур, принадлежащий неголономной гиперповерхности, с помощью которого характеризуются ее кривизна и кручение.

Библиографических ссылок 7.

УДК 513

**Об однозначном определении выпуклой поверхности метрикой и поворотами дуг кривых.** Селькин Е. П. «Украинский геометрический сборник», вып. 7, 1969, стр. 114—115.

В работе дается простое доказательство следующей теоремы: Выпуклая поверхность однозначно определена метрикой и вариациями поворотов дуг кривых, лежащих на ней.

Библиографических ссылок 1.

УДК 513

**Устойчивость решений уравнения**  $\det \|z_{ik}\| = \varphi$ . Сенькин Е. П., «Украинский геометрический сборник», вып. 7, 1969, стр. 116—117.

С помощью теоремы А. Д. Александрова об оценке модуля решения линейного эллиптического уравнения  $\sum a_{ik} z_{ik} = \varphi$  доказывается устойчивость решений уравнения  $\det \|z_{ik}\| = \varphi$ .

Библиографических ссылок 4.

УДК 513

**Об одном характеристическом свойстве вполне геодезических поверхностей пятимерного риманова пространства.** Слободян Ю. С., «Украинский геометрический сборник», вып. 7, 1969, стр. 118—129.

В работе рассматриваются дву- и трехмерные вполне геодезические поверхности пятимерного риманова пространства. Доказывается, что если двумерная поверхность  $F_2$  вполне геодезическая, то бивектор, определяющий касательную площадку к поверхности  $F_2$ , в точке  $M$  является главным направлением некоторой поверхности второго порядка  $\Phi_3$ , построенной в пространстве бивекторов, касательном к риманову в точке  $M$ . Поверхность  $\Phi_3$  зависит только от точки пространства. В специальной координатной системе она строится в явном виде.

Аналогичные результаты имеют место и для трехмерных вполне геодезических поверхностей.

Библиографических ссылок 4.

УДК 513

**Об одном классе однородных многогранников.** Соловьев С. П. «Украинский геометрический сборник», вып. 7, 1969, стр. 130—140.

Рассматриваются однородные многогранники, грани которых перпендикулярны инвариантным осям конечных групп вращений в  $E_3$ . Доказана следующая теорема:

Существует только 63 элементарных и 16 неэлементарных однородных многогранников, грани которых перпендикулярны инвариантным осям вращения тетраэдра, октаэдра или икосаэдра, а вершинные фигуры которых есть многоугольники без кратных элементов.

Однинадцать неэлементарных однородных многогранников приводятся впервые.

Рисунок 2. Библиографических ссылок 3.

УДК 516

**О кривых с ограниченной вариацией поворота на поверхностях, представимых разностью выпуклых функций.** Старохозяев С. Ф. «Украинский геометрический сборник», вып. 7, 1969, стр. 141—152.

В работе устанавливаются некоторые условия, при которых кривая, расположенная на поверхности, представимой разностью выпуклых функций, имеет ограниченной вариации внутренний поворот или поворот в пространстве. Полученные результаты являются аналогами соответствующих теорем для выпуклых поверхностей.

Рисунок 2. Библиографических ссылок 6.

УДК 513

**Упорядоченные псевдоримановы пространства.** Ильинский М. А. «Украинский геометрический сборник», вып. 7, 1969, стр. 153—165.

Изучаются отношения порядка в псевдоримановых пространствах, соответствующие хронологическим отношениям в общей теории относительности.

Библиографических ссылок 6.

УДК 513

**Конформные отображения римановых пространств, сохраняющие кривизну трехмерной площадки.** Федченко И. «Украинский геометрический сборник», вып. 7, 1969, стр. 166—171.

В статье рассматриваются конформные отображения римановых  $V_n$ , сохраняющие кривизну в трех направлениях.

Показано, что  $V_n$  при  $n > 4$  не допускает нетривиальных отображений такого типа.

Подробно разобран случай  $n = 4$ ,

Библиографических ссылок 5.

УДК 513

Строение пространства центро-проективной связности,  
Шибяк А. «Украинский геометрический сборник»,  
вып. 7, 1969, стр. 172—179.

Пространство центро-проективной связности рассматривается как база для рас-  
сloенного пространства центро-проективных реперов. Такое пространство относится  
как к полю естественных реперов, так и к полю неголономных реперов, относительно  
которых высказывается ряд предложений. При этом используется метод, основанный  
на операции дифференцирования Ли, применяемой как к абсолютным, так и к относи-  
тельным скалярам.

Библиографических ссылок 10.

УДК 513

К вопросу об изгиении выпуклых поверхностей с раз-  
резом. Шор Л. А. «Украинский геометрический сбор-  
ник», вып. 7, 1969, стр. 180—181.

В статье уточняются формулировки двух теорем об изгиании выпуклых поверх-  
ностей с разрезом в классе всех выпуклых поверхностей, доказанных в предыдущей  
работе автора, посвященной этому вопросу. Уточненные формулировки содержат не-  
обходимые и достаточные условия изгиания.

•Библиографических ссылок 2.

## ИСПРАВЛЕНИЕ

В статье А. П. Мокляка «К эквицентроаффинной теории неплоских кривых в  $E_3$ », помещенной в «Укр. геометр. сборнике», вып. 4, по вине издательства всюду пропущен знак (две черточки над буквой), отличающий обозначение дублета от обозначения вектора. Для понимания статьи необходимо поставить две черточки над *всеми* буквами  $r$ ,  $a$  и  $b$ , стоящими в формулах (2), (6)<sub>2</sub>, (9)<sub>2</sub>, (11), (13), (41), (47)<sub>2</sub>, в строках 9 снизу стр. 49, 7 и 8 снизу стр. 50, 6 сверху и 10 снизу стр. 53, 12 и 13 сверху стр. 54, 10 сверху стр. 55, внутри скобок строки 13 снизу и во втором равенстве строки 8 снизу стр. 54, внутри круглых скобок в (26); над вторым  $r$  в строке 9 сверху стр. 50; над всеми *вторыми* сомножителями в равенствах (3), (4), (48), в строке 11 снизу стр. 54, в первых трех произведениях в (25), во всех элементах определителя в (26)<sub>2</sub>, в знаменателе второй формулы строки 6 снизу стр. 54; над *первыми* сомножителями в четвертом произведении в (25) и в знаменателе первой формулы строки 6 снизу стр. 54. Кроме того, в последнем члене формулы для третьей ковариантной производной в (15) нужно дописать множитель  $r_1$ .