

издательство жарковского университета

# Краинский геометрический сборник

выпуск 5-6

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО  
ОБРАЗОВАНИЯ УССР.

# УКРАИНСКИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК

Выпуск 5—6

ИЗДАТЕЛЬСТВО  
ХАРЬКОВСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ  
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА имени А. М. ГОРЬКОГО  
Харьков 1968

## РЕСПУБЛИКАНСКИЙ МЕЖВЕДОМСТВЕННЫЙ СБОРНИК НАУЧНЫХ РАБОТ ПО ГЕОМЕТРИИ

Настоящий выпуск сборника открывается кратким обзором развития геометрии на Украине за 50 лет Советской власти.

Значительное число статей посвящено геометрии в целом: геометрии нерегулярных многообразий, теории изгибаания, теории многогранников. Другие статьи относятся к римановой геометрии, геометрии пространств аффинной связности и пространств с заданной фундаментальной группой, линейчатой геометрии.

Редакционная коллегия: акад. АН УССР проф. А. В. Погорелов (ответственный редактор), проф. А. С. Смогоржевский (зам. ответственного редактора), доц. В. П. Белогусова, проф. Я. П. Бланк, доц. Д. З. Гордеевский, проф. Н. И. Кованцов, канд. физ.-мат. наук Е. А. Косачевская, доц. А. С. Лейбин (ответственный секретарь), доц. Е. П. Сенькин, доц. Н. С. Синюков, доц. В. Н. Скрыдлов, доц. М. А. Улановский.

Адрес редакционной коллегии: Харьков 77, пл. Дзержинского, 4, Харьковский университет, механико-математический факультет.

# КРИВЫЕ ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИИ ПОВОРОТА В МНОГООБРАЗИЯХ ОГРАНИЧЕННОЙ КРИВИЗНЫ, ЗАДАННЫХ ОБОБЩЕННЫМ ЧЕБЫШЕВСКИМ ЛИНЕЙНЫМ ЭЛЕМЕНТОМ I

И. Я. Бакельман (Ленинград), Л. А. Эпштейн (Петрозаводск)

В настоящей работе изучается вопрос об аналитической характеристике кривых ограниченной вариации поворота в многообразиях ограниченной кривизны в смысле А. Д. Александрова [1]. Эта характеристика дается в терминах чебышевской параметризации многообразия ограниченной кривизны, построенной одним из авторов работы в [2].

Пусть  $Q$  — положительный квадрант на евклидовой плоскости с декартовыми координатами  $u, v$ . Пусть далее  $\tau(u, v)$  — функция ограниченной вариации переменных  $u, v$  ([3], стр. 78), у которой

$$\operatorname{Var}_Q \{\tau(u, v)\} < \frac{\pi}{2}, \quad \tau(0, v) = \tau(u, 0) = \frac{\pi}{2}. \quad (1)$$

Зададим в  $Q$  метрику  $\rho$  посредством линейного элемента

$$ds^2 = du^2 + 2 \cos \tau(u, v) dudv + dv^2. \quad (2)$$

В [2] доказано, что метрика (2) имеет ограниченную кривизну, а

$$\tau(u, v) = \frac{\pi}{2} - \omega(D_{uv}), \quad (3)$$

где  $\omega(D_{uv})$  есть кривизна прямоугольника

$$D_{uv}: \begin{cases} 0 \leq u' < u \\ 0 \leq v' < v \end{cases}$$

в метрике  $\rho$ . Метрику  $\rho$ , определенную линейным элементом, (2) называют чебышевской.

Из результатов работы [2] вытекает также, что при изучении интересующих нас вопросов теории кривых достаточно ограничиться многообразиями ограниченной кривизны, метрика которых задана чебышевским линейным элементом (2) в квадранте  $Q$ . Поэтому ниже мы рассматриваем только такие метрики.

В этой и последующих публикациях под тем же названием будут рассмотрены следующие вопросы:

1. Условия, обеспечивающие ограниченность вариации поворота простой кривой  $l$  в метрике, заданной обобщенным чебышевским линейным элементом (2), в предположении, что  $l$  на евклидовой плоскости с декартовыми координатами  $u, v$  имеет поворот ограниченной вариации.

2. Условия, гарантирующие решение обратной задачи.

3. Построение примеров, показывающих неулучшаемость этих условий.

4. Вывод формул для различных геометрических характеристик многообразий ограниченной кривизны (угол между кривыми, поворот кривой, кривизна области и другие) через коэффициенты линейного элемента (2).

В первой части мы подробно излагаем решение вопроса 1 и формулируем итоговый результат, полученный во втором вопросе. Этот результат вместе с решением вопросов 3 и 4 будет помещен в последующих частях работы.

## I. ФОРМУЛЫ ДЛЯ ПОВОРОТА КРИВОЙ И ЕГО ВАРИАЦИЙ В РЕГУЛЯРНЫХ ЧЕБЫШЕВСКИХ МЕТРИКАХ

Пусть  $Q$  — положительный квадрант на плоскости с декартовыми координатами  $u, v$ . Пусть далее  $\tau(u, v)$  — дважды непрерывно дифференцируемая функция в квадранте  $Q$ , удовлетворяющая условиям

$$\operatorname{Var}_Q \{\tau(u, v)\} < \frac{\pi}{2}, \quad \tau(0, v) = \tau(u, 0) = \frac{\pi}{2}. \quad (1.1)$$

Так как  $\tau(u, v) \in C^2(Q)$ , то для вариации  $\tau(u, v)$  справедлива формула

$$\operatorname{Var}_Q \{\tau(u, v)\} = \iint_Q \left| \frac{\partial^2 \tau}{\partial u \partial v} \right| du dv. \quad (1.2)$$

Функция  $\tau(u, v)$  в  $Q$  задает регулярную чебышевскую метрику  $\rho$  посредством линейного элемента

$$ds^2 = du^2 + 2 \cos \tau(u, v) du dv + dv^2. \quad (1.3)$$

Если  $K(u, v)$  — гауссова кривизна метрики (1.3), то для угла  $\tau(u, v)$  между координатными линиями в точке  $(u, v)$  справедлива, как известно формула

$$\tau(u, v) = \frac{\pi}{2} - \int_0^u \int_0^v K(\xi, \eta) \sin \tau(\xi, \eta) d\xi d\eta. \quad (1.4)$$

Полагая  $d\sigma = \sin \tau d\xi d\eta$  ( $d\sigma$  — очевидно, элемент площади метрики  $\rho$ ), формулу (1.4) можно записать так:

$$\tau(u, v) = \frac{\pi}{2} - \int_0^u \int_0^v K d\sigma. \quad (1.5)$$

Пусть теперь в квадранте  $Q$  задана кривая  $l$  с помощью дважды непрерывно дифференцируемых функций

$$u = u(t), \quad v = v(t), \quad a \leq t \leq b$$

и всюду на  $[a, b]$

$$u'^2(t) + v'^2(t) \geq c_0 = \text{const} > 0.$$

Для геодезической кривизны кривой  $l$  имеет место формула

$$k_g = \frac{(v'u' - u''v') \sin \tau - [(u' + \cos \tau \cdot v') \tau_u u'^2 - (u' \cos \tau + v') \tau_v v'^2]}{(u'^2 + 2u'v' \cos \tau + v'^2)^{3/2}}.$$

Введем в рассмотрение функции параметра  $t \in [a, b]$

$$\theta(t) = \tau(u(t), v(t)), \quad (1.6a)$$

$$A(t) = \int_0^{v(t)} K(u(t), \xi) \sin \tau(u(t), \xi) d\xi, \quad B(t) = \int_0^{u(t)} K(\xi, v(t)) \sin \tau(\xi, v(t)) d\xi.$$

Эти функции имеют следующий геометрический смысл. Пусть  $t$  меняется в промежутке от  $\alpha$  до  $\beta$ , где  $a \leq \alpha < \beta \leq b$ . Тогда величина

$$\Delta \theta = \theta(\beta) - \theta(\alpha). \quad (1.6)$$

есть приращение угла  $\tau(u, v)$  между координатными линиями в метрике  $\rho$  при переходе от точки  $M(u(\alpha), v(\alpha))$  в точку  $N(u(\beta), v(\beta))$  вдоль кривой  $l$ , т. е.

$$\Delta\theta = \tau(u(\beta), v(\beta)) - \tau(u(\alpha), v(\alpha)).$$

Далее при перемещении точки  $X(u(t), v(t))$  вдоль кривой между точками  $M$  и  $N$  в направлении возрастания параметра  $t$  отрезок с концами в точках  $(u(t), 0)$  и  $X$  замечает (вообще говоря неоднозначно) криволинейную трапецию  $H_{\alpha, \beta}$ . Величина

$$\omega(H_{\alpha, \beta}) = \int_{\alpha}^{\beta} A(t) u'(t) dt$$

есть, очевидно, интегральная кривизна этой трапеции с учетом того обстоятельства, что при суммировании интегральной гауссовой кривизны под кривой  $l$  учитывается каждый раз ориентация проекции соответствующей дуги кривой  $l$ , вызываемая прохождением точки  $(u(t), v(t))$  по  $l$  в направлении возрастания  $t$ . Таким образом, величину

$$\omega(H_{\alpha, \beta}) = \int_{\alpha}^{\beta} A(t) u'(t) dt$$

удобно рассматривать как криволинейный интеграл

$$\int_{l_{\alpha, \beta}} \left[ \int_0^v K(u, \xi) \sin \tau(u, \xi) d\xi \right] du$$

вдоль дуги  $l_{\alpha, \beta}$  кривой  $l$  с концами в точках  $(u(\alpha), v(\alpha))$  и  $(u(\beta), v(\beta))$ . Мы будем называть

$$\omega(H_{\alpha, \beta}) = \int_{l_{\alpha, \beta}} \left[ \int_0^v K(u, \xi) \sin \tau(u, \xi) d\xi \right] du \quad (1.7)$$

интегральной кривизной ориентированной криволинейной трапеции  $H_{\alpha, \beta}$ .

Совершенно аналогично вводится в рассмотрение величина

$$\omega(G_{\alpha, \beta}) = \int_{l_{\alpha, \beta}} \left[ \int_0^u K(\xi, v) \sin \tau(\xi, v) d\xi \right] dv, \quad (1.8)$$

которую мы будем называть интегральной кривизной ориентированной криволинейной трапеции  $G_{\alpha, \beta}$ .

Введем далее в рассмотрение два угла  $\varphi(t)$  и  $\psi(t)$ , которые в метрике  $\rho$  есть соответственно углы между положительными направлениями координатных линий  $u$  и  $v$  и касательным вектором  $t$  к кривой  $l$  в точке  $(u(t), v(t))$ . Тогда для тангенсов этих углов справедливы формулы

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{v' \sin \tau}{u' + v' \cos \tau}, \quad (1.9)$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{-u' \sin \tau}{u' \cos \tau + v'}. \quad (1.10)$$

Справедлива следующая

**Теорема 1.** При сделанных выше предположениях относительно кривой  $l$  справедливы формулы

$$\varphi(t_2) - \varphi(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} k_g ds - \omega(H_{t_1 t_2}), \quad (1.11)$$

$$\psi(t_2) - \psi(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} k_g ds + \omega(G_{t_1 t_2}), \quad (1.12)$$

где  $a \leq t_1 < t_2 \leq b$

**Доказательство.** Установим справедливость соотношения (1.11). Из формулы (1.9) находим

$$\frac{\varphi'(t)}{\cos^2 \varphi(t)} = \frac{(v''u' - u''v') \sin \tau + (v' + u' \cos \tau) \tau_v v'^2 + (v' + u' \cos \tau) \tau_u u' v'}{(u' + v' \cos \tau)^2}.$$

Далее, так как

$$\frac{1}{\cos^2 \varphi(t)} = \frac{u'^2 + 2u'v' \cos \tau + v'^2}{(u' + v' \cos \tau)^2}, \quad (1.13)$$

то

$$\varphi'(t) = \frac{(v''u' - u''v') \sin \tau + (v' + u' \cos \tau) \tau_v v'^2 + (v' + u' \cos \tau) \tau_u u' v'}{u'^2 + 2u'v' \cos \tau + v'^2} \quad (1.14)$$

Пользуясь формулой для геодезической кривизны, имеем

$$\varphi'(t) = k_g \sqrt{u'^2 + 2u'v' \cos \tau + v'^2} + \tau_u u'.$$

Из формулы (1.4) получаем, что

$$\tau_u(u, v) = - \int_0^v K(u, \xi) \sin \tau(u, \xi) d\xi.$$

Таким образом,

$$\varphi'(t) = k_g \sqrt{u'^2 + 2u'v' \cos \tau + v'^2} - \int_0^{v(t)} K(u(t), \xi) \sin \tau(u(t), \xi) d\xi \cdot u'(t).$$

Отсюда непосредственно следует

$$\varphi(t_2) - \varphi(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} k_g ds - \omega(H_{t_1 t_2}).$$

Итак, соотношение (1.11) установлено. Аналогично доказывается справедливость формулы (1.12).

Теорема доказана.

**Теорема 2.** Пусть  $l_{t_1 t_2}$  дуга кривой 1. Тогда, если относительно 1 выполнены условия теоремы 1, то справедливы формулы

$$\begin{aligned} \varphi(t_2) - \varphi(t_1) &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{(v''u' - u''v') \sin \tau}{u'^2 + 2u'v' \cos \tau + v'^2} dt + \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} \frac{v'^2 + u'v' \cos \tau}{u'^2 + 2u'v' \cos \tau + v'^2} \frac{d\tau}{dt} dt; \end{aligned} \quad (1.15)$$

$$\begin{aligned} \psi(t_2) - \psi(t_1) &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{(v''u' - u''v') \sin \tau}{u'^2 + 2u'v' \cos \tau + v'^2} dt - \\ &- \int_{t_1}^{t_2} \frac{u'v' \cos \tau + u'^2}{u'^2 + 2u'v' \cos \tau + v'^2} \frac{d\tau}{dt} dt. \end{aligned} \quad (1.16)$$

**Доказательство.** Установим справедливость соотношения (1.15). Из соотношения (1.14) получаем

$$\varphi'(t) = \frac{(v''u' - u''v') \sin \tau}{u'^2 + 2u'v' \cos \tau + v'^2} + \frac{v'^2 + u'v' \cos \tau}{u'^2 + 2u'v' \cos \tau + v'^2} \frac{d\tau}{dt}.$$

Отсюда вытекает соотношение (1.15). Аналогично устанавливается формула (1.16).

Теорема доказана.

С каждой дважды непрерывно дифференцируемой кривой  $l$ , заданной в  $Q$  уравнениями

$$u = u(t), \quad v = v(t), \quad a \leq t \leq b,$$

где функции  $u'(t)$ ,  $v'(t)$  всюду удовлетворяют условию  $u'^2(t) + v'^2(t) \geq c_0^2 > 0$ , свяжем некоторое натуральное число  $N$  такое, что

1. Существует разбиение отрезка  $[a, b]$  точками

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b,$$

при котором на каждом из промежутков  $[t_i, t_{i+1}]$  кривую  $l$  можно задать в явном виде уравнениями

$$\begin{aligned} u &= u, \\ v &= f(u) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} u &= f(v), \\ v &= v. \end{aligned}$$

2. В пределах  $[t_i, t_{i+1}]$  имеем соответственно

$$|u'(t)| \geq \frac{\sqrt{3}}{2} c_0$$

или

$$|v'(t)| \geq \frac{\sqrt{3}}{2} c_0.$$

Число  $N$  определяется, очевидно, неоднозначно. Положим

$$n(l) = \inf N. \quad (1.17)$$

Очевидно,  $n(l)$  оценивается сверху через величину интеграла от модуля кривизны кривой  $l$  по длине дуги на евклидовой плоскости с координатами  $u, v$ , т. е. от

$$\int_a^b |k| ds = \int_a^b \frac{|v''u' - u''v'|}{\sqrt{u'^2 + v'^2}} dt.$$

**Теорема 3.** Пусть  $l$  — кривая, удовлетворяющая условиям теоремы 1. Тогда для

$$\int_a^b |k_g| ds = \int_a^b |k_g| \sqrt{u'^2 + 2 \cos \tau \cdot u'v' + v'^2} dt,$$

где  $k_g$  — геодезическая кривизна кривой  $l$  в чебышевской метрике (1.3) справедлива оценка

$$\int_a^b |k_g| ds \leq \frac{1}{a_1} \int_a^b \frac{|v''u' - u''v'|}{\sqrt{u'^2 + v'^2}} dt + \frac{3}{2a_1} \operatorname{var} \theta(t) + \frac{n(l)\pi}{2} \quad (1.18)$$

(функция  $\theta(t)$  определена выше (1.6а), а постоянная  $a > 0$  определена ниже (1.21)).

**Доказательство.** Существует разбиение кривой  $l$  на дуги  $l_{t_i t_{i+1}}$  точками  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n(l)} = b$  так, что соблюдены сформулированные выше условия 1 и 2.

Имеем

$$\int_a^b |k_g| ds = \sum_{i=0}^{n(l)-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} |k_g| ds. \quad (1.19)$$

Оценим каждый из интегралов в правой части равенства (1.19).

Пусть дуга  $l_{t_i t_{i+1}}$  задана уравнениями

$$u = u, \quad v = f(u).$$

В этом случае при движении точки  $X(u(t), v(t))$  по дуге  $l_{t_i t_{i+1}}$  отрезок  $k_g$ , с концами в точках  $(u(t), 0)$ ,  $X$  однозначно и монотонно заменяет криволинейную трапецию  $H_{t_i t_{i+1}}$ . Согласно теореме 1,

$$\int_a^{\beta} k_g ds = [\varphi(\beta) - \varphi(\alpha)] + \omega(H_{\alpha \beta}),$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  — произвольные точки промежутка  $[t_i, t_{i+1}]$ . Отсюда вытекает, что

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} |k_g| ds \leq \text{var } \varphi(t) + \text{var } \omega(t).$$

Так как

$$\begin{aligned} \text{var } \varphi(t) &= \int_{[t_i, t_{i+1}]}^{t_{i+1}} |\varphi'(t)| dt, \\ \text{var } \omega(e) &= \iint_{H_{t_i t_{i+1}}} |K| dz, \end{aligned}$$

то окончательно имеем:

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} |k_g| ds \leq \int_{t_i}^{t_{i+1}} |\varphi'(t)| dt + \iint_{H_{t_i t_{i+1}}} |K| dz. \quad (1.20)$$

Далее из теоремы 2 следует, что

$$\begin{aligned} \int_{t_i}^{t_{i+1}} |\varphi'(t)| dt &\leq \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{|v''u' - u''v'| |\sin \tau|}{u'^2 + 2u'v' \cos \tau + v'^2} dt + \\ &+ \max_{[t_i, t_{i+1}]} \left| \frac{v'^2 + u'v' \cos \tau}{u'^2 + 2u'v' \cos \tau + v'^2} \right| \text{var } \theta(t). \end{aligned}$$

Так как

$$\Omega = \iint_Q \left| \frac{\partial^2 \tau}{\partial u \partial v} \right| du dv < \frac{\pi}{2},$$

то во всех точках квадранта  $Q$  функция  $\tau(u, v)$  удовлетворяет неравенствам

$$0 < a_0 = \frac{\pi}{2} - \Omega \leq \tau(u, v) \leq \frac{\pi}{2} + \Omega = b_0 < \pi,$$

из которых вытекает, что всюду в  $Q$  имеют место оценки

$$0 < a_1 \leq \frac{du^2 + 2 \cos \tau du dv + dv^2}{du^2 + dv^2} \leq b_1 < +\infty, \quad (1.21)$$

где постоянные  $a_1$  и  $b_1$  определяются лишь в зависимости от  $a_0$  и  $b_0$ .

Отсюда следует, что при всех  $t \in [t_i, t_{i+1}]$  имеем

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{|\sigma''u' - u''v'| + \sin \tau|}{u'^2 + 2u'v' \cos \tau + v'^2} dt \leq \frac{1}{a_1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{|\sigma''u' - u''v'|}{u'^2 + v'^2} dt;$$

$$\frac{|\sigma''u' + u'v' \cos \tau|}{u'^2 + 2 \cos \tau u'v' + v'^2} \leq \frac{3}{2a_1}.$$

Таким образом,

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} |k_g| ds \leq \frac{1}{a_1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{|\sigma''u' - u''v'|}{u'^2 + v'^2} dt + \frac{3}{2a_1} \operatorname{var} \theta(t) + \iint_{G_{t_i t_{i+1}}} |K| d\sigma.$$

Аналогично, если дуга  $l_{t_i t_{i+1}}$  задана уравнениями

$$u = f(v), \quad v = v,$$

то

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} |k_g| ds \leq \frac{1}{a_1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{|\sigma''u' - u''v'|}{u'^2 + v'^2} dt + \frac{3}{2a_1} \operatorname{var} \theta(t) + \iint_{G_{t_i t_{i+1}}} |K| d\sigma.$$

Поскольку все  $H_{t_i t_{i+1}}, G_{t_i t_{i+1}}$  содержатся в  $Q$ , то при всех  $i = 0, 1, \dots, n(l)-1$  имеем

$$\iint_{H_{t_i t_{i+1}}} |K| d\sigma \leq \iint_Q |K| d\sigma < \frac{\pi}{2}, \quad \iint_{G_{t_i t_{i+1}}} |K| d\sigma \leq \iint_Q |K| d\sigma < \frac{\pi}{2}.$$

Отсюда

$$\int_a^b |k_g| ds \leq \frac{1}{a_1} \int_a^b \frac{|\sigma''u' - u''v'|}{u'^2 + v'^2} dt + \frac{3}{2a_1} \operatorname{var} \theta(t) + \frac{n(l)\pi}{2}.$$

Теорема доказана.

**Теорема 4.** Пусть выполнены условия теоремы 3. Тогда имеет место неравенство

$$\int_a^b \frac{|\sigma''u' - u''v'| dt}{u'^2 + v'^2} \leq \frac{b_1}{\sin a_0} \left[ \int_a^b |k_g| ds + \frac{3}{2a_1} \operatorname{var} \theta(t) + \frac{n(l)\pi}{2} \right]. \quad (1.22)$$

**Доказательство.** Так как всюду в  $Q$  выполнены неравенства

$$0 < a_0 = \frac{\pi}{2} - \Omega \leq \tau(u, v) \leq \frac{\pi}{2} + \Omega = b_0 < \pi,$$

где

$$\Omega = \iint_Q \left| \frac{\partial^2 \tau}{\partial u \partial v} \right| du dv < \frac{\pi}{2},$$

то при всех  $(u, v) \in Q$

$$\sin \tau \geq \min \left\{ \sin \left( \frac{\pi}{2} - \Omega \right), \sin \left( \frac{\pi}{2} + \Omega \right) \right\} = \sin a_0 > 0.$$

С другой стороны, из (1.21) следует, что

$$u'^2 + v'^2 \geq \frac{1}{b_1} (u'^2 + 2u'v' \cos \tau + v'^2).$$

Тогда при всех  $t$  имеем

$$\frac{|\sigma''u' - u''v'|}{u'^2 + v'^2} \leq \frac{b_1}{\sin a_0} \frac{|\sigma''u' - u''v'| \sin \tau}{u'^2 + 2u'v' \cos \tau + v'^2}.$$

Отсюда

$$\int_a^b \frac{|v''u' - u''v'|}{u'^2 + v'^2} dt \leq \frac{b_1}{\sin a_0} \int_a^b \frac{|v''u' - u''v'| \sin \tau}{u'^2 + 2u'v' \cos \tau + v'^2} d\tau. \quad (1.23)$$

Оценим интеграл, стоящий в правой части (1.23). Для этого произведем разбиение кривой  $l$  на дуги  $l_{t_i t_{i+1}}$  точками

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n(l)} = b.$$

Разбиение производим так, как это делалось в доказательстве теоремы 3.

Предположим, что дуга  $l_{t_i t_{i+1}}$  допускает задание уравнениями

$$u = u, \quad v = f(u).$$

Из формулы (1.14) для угла  $\varphi(t)$  имеем

$$\varphi'(t) = \frac{(v''u' - u''v') \sin \tau}{u'^2 + 2u'v' \cos \tau + v'^2} + \frac{v'^2 + u'v' \cos \tau}{u'^2 + 2u'v' \cos \tau + v'^2} d\tau.$$

Отсюда

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{|v''u' - u''v'| \sin \tau}{u'^2 + 2u'v' \cos \tau + v'^2} d\tau \leq \int_{t_i}^{t_{i+1}} |\varphi'(t)| dt + \max_{[t_i, t_{i+1}]} \left| \frac{v'^2 + u'v' \cos \tau}{u'^2 + 2u'v' \cos \tau + v'^2} \right| \operatorname{var} \theta(t).$$

Теперь прежде всего отметим, что, как уже доказано в теореме 3,

$$\max_{[t_i, t_{i+1}]} \left| \frac{v'^2 + u'v' \cos \tau}{u'^2 + 2u'v' \cos \tau + v'^2} \right| \leq \frac{3}{2a_1}.$$

Далее из теоремы 1, используя рассуждения, проведенные в доказательстве теоремы 3, получаем

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} |\varphi'(t)| dt \leq \int_{t_i}^{t_{i+1}} |k_g| ds + \operatorname{var} \omega(e).$$

Таким образом,

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{|v''u' - u''v'| \sin \tau}{u'^2 + 2u'v' \cos \tau + v'^2} d\tau \leq \int_{t_i}^{t_{i+1}} |k_g| ds + \operatorname{var} \omega(e) + \frac{3}{2a_1} \operatorname{var} \theta(t). \quad (1.24)$$

Если же дуга  $l_{t_i t_{i+1}}$  допускает задание уравнениями вида

$$u = f(v), \quad v = v,$$

то аналогичными рассуждениями получаем оценку

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{|v''u' - u''v'| \sin \tau}{u'^2 + 2u'v' \cos \tau + v'^2} d\tau \leq \int_{t_i}^{t_{i+1}} |k_g| ds + \operatorname{var} \omega(e) + \frac{3}{2a_1} \operatorname{var} \theta(t). \quad (1.25)$$

Так как  $H_{t_i t_{i+1}}$ ,  $G_{t_i t_{i+1}}$  при всех  $i = 0, 1, 2, \dots, n(l) - 1$  содержатся в  $Q$ , то имеем

$$\operatorname{var}_{e \subseteq H_{t_i t_{i+1}}} \omega(e) = \iint_{H_{t_i t_{i+1}}} |K| d\sigma \leq \iint_Q |K| d\sigma < \frac{\pi}{2}, \quad (1.26)$$

$$\operatorname{var}_{e \subseteq G_{t_i t_{i+1}}} \omega(e) = \iint_{G_{t_i t_{i+1}}} |K| d\sigma \leq \iint_Q |K| d\sigma < \frac{\pi}{2}. \quad (1.27)$$

Используя неравенства (1.24—1.27), получаем неравенство

$$\int_a^b \frac{|v''u' - u''v'|}{u'^2 + v'^2} dt \leq \frac{b_1}{\sin a_0} \left[ \int_a^b |k_g| ds + \frac{3}{2a_1} \operatorname{var}_Q \theta(t) + \frac{n(l)\pi}{2} \right].$$

Теорема доказана.

## 2. УСЛОВИЯ ОГРАНИЧЕННОСТИ ВАРИАЦИИ ПОВОРОТА КРИВОЙ В ОБОБЩЕННОЙ ЧЕБЫШЕВСКОЙ МЕТРИКЕ

Пусть в положительном квадранте  $Q$  на плоскости  $u, v$  определена обобщенная чебышевская метрика  $\rho$  с помощью линейного элемента

$$ds^2 = du^2 + 2 \cos \tau du dv + dv^2. \quad (2.1)$$

Как мы отмечали выше, функция  $\tau(u, v)$  имеет в  $Q$  ограниченную вариацию и удовлетворяет следующим условиям:

$$\Omega = \operatorname{var}_Q \tau(u, v) < \frac{\pi}{2},$$

$$\tau(0, v) = \tau(u, 0) = \frac{\pi}{2}$$

при всех  $u \in [0, \infty), v \in [0, \infty)$ .

Пусть  $l$  — простая кривая, заданная в  $Q$  — непрерывными функциями

$$\begin{aligned} u &= u(t), & a \leq t \leq b, \\ v &= v(t), \end{aligned}$$

Если  $l$  на евклидовой плоскости с декартовыми координатами  $u, v$  имеет поворот ограниченной вариации, то это, как известно, эквивалентно тому, что существует последовательность регулярных кривых  $l_n$  (или ломаных), сходящаяся к  $l$ , у которых вариации поворотов равномерно ограничены в совокупности. В качестве такой последовательности можно взять, например (что ниже постоянно будет использоваться), последовательность регулярных кривых, которая получается из любой последовательности сходящихся ломаных, вписанных в  $l$  с помощью заглаживания малой дуги ломаной, содержащей вершину, надлежащее подобранным куском параболы. При этом точки касания  $B_{i-1}$  и  $B_i$  берутся достаточно близкими к соответствующей вершине  $A_i$ , парабола обращена выпуклостью в сторону вершины, и звенья ломаной, исходящие из  $A_i$ , являются касательными к куску параболы в ее концах.

Введем функцию

$$\theta_l(t) = \tau(u(t), v(t)).$$

Ниже будем предполагать, что вдоль кривой  $l$  эта функция имеет ограниченную вариацию. Легко видеть, что последовательность регулярных кривых  $l_n$ , построенная выше и сходящаяся к  $l$  при  $n \rightarrow \infty$ , имеет  $\operatorname{var}_{l_n} \theta_l(t)$  — равномерно ограниченные в совокупности, причем точная верхняя граница множества этих вариаций зависит лишь от

$$\operatorname{var} \theta_l(t).$$

Далее известно, что если кривая  $l$  на плоскости  $u, v$  имеет поворот ограниченной вариации, то она спрямляема, имеет в каждой точке правую и левую касательные, которые не совпадают не более чем на счетном множестве точек. Отсюда, как известно, легко следует, что существует разбиение промежутка  $[a, b]$  точками

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N = b$$

такое, что

1. На каждом участке  $[t_i, t_{i+1}]$  дуги  $l_{t_i t_{i+1}}$  кривой  $l$  задается уравнением

$$v = f(u),$$

$$u = f(v).$$

2. Правые и левые касательные в точках  $l_{t_i t_{i+1}}$  наклонены соответственно к оси  $u$  или  $v$  под углами не большими, чем  $\frac{\pi}{2} - \delta$ , где  $\delta > 0$  — некоторое фиксированное число.

Обозначим через

$$n(l) = \inf N$$

при фиксированном  $\delta$  по всем разбиениям промежутка  $[a, b]$ . Легко видеть, что построенная выше последовательность регулярных кривых  $l_n$ , сходящаяся к  $l$ , имеет числа  $n(l_n)$ , равномерно ограниченные в совокупности. Положим

$$n_0 = \max \{n(l_n), n(l)\}.$$

Имеет место

**Теорема 1.** Если кривая  $l$ , расположенная в квадранте  $Q$ , имеет ограниченную вариацию поворота на евклидовой плоскости  $u, v$  и  $\text{var } \theta_l(t) < \infty$ , то кривая  $l$  в обобщенной чебышевской метрике  $\rho$  имеет поворот ограниченной вариации.

**Доказательство.** Построим последовательность функций  $\tau_n(u, v)$  дважды непрерывно дифференцируемых в  $Q$  и удовлетворяющих следующим условиям:

$$1. \tau_n(u, 0) = \tau_n(0, v) = \frac{\pi}{2}.$$

$$2. \text{var } \tau_n(u, v) \leq \text{var } \tau(u, v) = \Omega < \frac{\pi}{2}.$$

3. Регулярные чебышевские метрики  $\rho_n$ , порожденные линейными элементами

$$ds_n^2 = du^2 + 2 \cos \tau_n(u, v) du dv + dv^2,$$

равномерно сходятся в метрике  $\rho$ .

Пусть  $l_n$  — последовательность регулярных кривых, сходящаяся к  $l$  на евклидовой плоскости, построенная по способу, указанному выше, в 2. Для того чтобы установить справедливость настоящей теоремы, согласно [1], достаточно установить, что вариации поворота кривых  $l_n$  в метриках  $\rho_n$  равномерно ограничены.

Согласно теореме 3 (в 1), для этих вариаций поворотов, которые равны интегралам от модуля геодезической кривизны  $k_g$  по длине дуги в метрике  $\rho_n$  имеют место оценки

$$\int_{l_n} |k_g| ds_n \leq \frac{1}{a_1} \chi(l_n) + \frac{3}{2a_1} \text{var } \theta_{l_n}(t) + \frac{n_0 \pi}{2},$$

где  $\chi(l_n)$  — вариации поворотов кривых  $l_n$  на евклидовой плоскости  $u, v$ . Так как величины  $\chi(l_n)$  и  $\text{var } \theta_{l_n}(t)$  имеют, согласно сделанным в начале 2 замечаниям, равномерные оценки, то интегралы  $\int_{l_n} |k_g| ds_n$  равномерно ограничены.

Теорема доказана.

Имеет место также и обратное. Именно, пусть  $\rho$  метрика ограниченной кривизны, определенная в  $Q$  чебышевским линейным элементом

$$ds^2 = du^2 + 2 \cos \tau(u, v) du dv + dv^2,$$

где  $\tau(u, v)$  — функция ограниченной вариации в  $Q$ , удовлетворяющая условиям

$$\operatorname{var} \tau(u, v) < \frac{\pi}{2},$$

$$\tau(u, 0) = \tau(0, v) = \frac{\pi}{2}$$

при  $0 \leq u < +\infty, 0 \leq v < +\infty$ .

Тогда справедлива

**Теорема 2.** Если простая кривая  $l$ , заданная в  $Q$  непрерывными функциями

$$\begin{aligned} u &= u(t), \\ v &= v(t), \end{aligned} \quad a \leq t \leq b$$

имеет в метрике  $\rho$  ограниченную вариацию поворота по одну сторону от  $l^*$  и

$$\operatorname{var}_{a \leq t \leq b} \theta_l(t) < +\infty,$$

где

$$\theta_l(t) = \tau(u(t), v(t)),$$

то кривая  $l$  имеет ограниченную вариацию поворота на евклидовой плоскости с декартовыми координатами  $u, v$ .

Доказательство теоремы 2 опирается на формулы, выражающие синтетические понятия многообразий ограниченной кривизны (угол между кривыми, поворот и др.) с помощью коэффициентов обобщенного чебышевского линейного элемента (2.1) и внутренних уравнений кривых на евклидовой плоскости с декартовыми координатами  $u, v$ .

Эти формулы будут даны во второй части работы и там же будет приведено доказательство теоремы 2. Во второй части работы будут даны примеры, показывающие, что условие

$$\operatorname{var}_{a \leq t \leq b} \theta_l(t) < +\infty$$

существенно и без него утверждения теорем 1 и 2 неверны.

## ЛИТЕРАТУРА

1. А. Д. Александров, В. А. Залгаллер. Двумерные многообразия ограниченной кривизны. Труды МИАН СССР, т. 63, 1962.
2. И. Я. Бакельман. Чебышевские сети в многообразиях ограниченной кривизны. Труды МИАН СССР, т. 76, 1965.
3. В. И. Смирнов. Курс высшей математики, т. 5, Физматгиз, М., 1959.

\* В этом случае, как известно из [1],  $l$  имеет ограниченную вариацию поворота и по другую сторону от  $l^*$ .

## КОНИЧЕСКИЕ СЕТИ НА ПОВЕРХНОСТЯХ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Я. П. Бланк, Г. В. Паньков, В. В. Рокотянская (Харьков)

Конической сетью называется сопряженная сеть, образованная линиями касания конусов, описанных около поверхности. Поверхность, несущая коническую сеть, называется поверхностью Петерсона. Ее канонические уравнения

$$\rho x_i = u_i(u) + v_i(v), \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (1)$$

при этом коническая сеть принята за координатную, а вершины конусов сети расположены на кривых  $\Gamma_1, \Gamma_2$ , определяемых уравнениями

$$\lambda x_i = \frac{du_i}{du}, \quad \mu x_i = \frac{dv_i}{dv}. \quad (2)$$

Будем говорить, что  $\Gamma_1, \Gamma_2$  порождают коническую сеть.

В работе [1] доказано, что невырожденные квадрики и только они несут максимальное множество конических сетей (если исключить из рассмотрения конусы), именно,  $\infty^4$  таких сетей, порождаемых любой парой полярно сопряженных относительно квадрики прямых. Не существует поверхностей, несущих только  $\infty^3$  конических сетей. Все поверхности, несущие  $\infty^2$  конических сетей,— линейчатые, принадлежат линейной конгруэнции и с точностью до коллинеаций (вещественных или мнимых) исчерпываются следующими четырьмя типами:

$$\begin{aligned} 1^\circ zx^n &= ty^n, & 2^\circ \frac{z}{t} &= \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \\ 3^\circ x^3 + yt^2 &= xzt, & 4^\circ \frac{z}{t} &= \frac{y}{x} + \ln \frac{x}{t}. \end{aligned} \quad (3)$$

У каждой такой поверхности кривые, порождающие конические сети, расположены на квадриках некоторого пучка так, что на каждой квадрике лежит  $\infty^1$  пар таких кривых [2]. В числе этих поверхностей содержатся, в частности, все неразвертывающиеся линейчатые поверхности третьего порядка, уравнения которых, при надлежащем выборе координатного тетраэдра, приводятся, как известно, к виду  $3^\circ$  (поверхность Кэйли), либо к виду

$$zx^2 = ty^2 \quad (4)$$

(общая линейчатая поверхность третьего порядка).

В работе [1] было также доказано, что на нелинейчатых поверхностях третьего порядка с четырьмя коническими точками либо эквивалентными им особенностями существует  $\infty^1$  конических сетей. Соответствующие кривые, порождающие эти сети, лежат на самой поверхности и совпадают с ее асимптотическими линиями.

Естественно возникает вопрос о существовании конических сетей на поверхностях третьего порядка общего вида.

Исследование этого вопроса и составляет содержание настоящей работы.

Табл. 1 воспроизводит классификацию неразвертывающихся поверхностей третьего порядка по особым точкам, принадлежащую Шлефли.

В этой таблице  $C$ ,  $B$ ,  $U$  означают соответственно коническую, бипланарную и унипланарную точки. Нижние индексы показывают, на сколько единиц соответствующая особая точка понижает класс поверхности.  $U^{(1)}$ ,  $V^{(1)}$  — линейные формы переменных  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $U^{(2)}$ ,  $U^{(3)}$  — соответственно квадратичные и кубичные формы.

Таблица 1

№	Класс	Особые точки	Уравнение поверхности
1	12	0	$U^{(2)}t + U^{(3)} = 0$
2	10	$C_2$	$U^{(1)}V^{(1)}t + U^{(3)} = 0$
3	9	$B_3$	$xyz + y^2(z + \delta t) + (a, b, c, d)(x, y)^3 = 0$
4	8	$2C_2$	$2xyz + (x + y)(z^2 - ax^2 - by^2) = 0$
5	8	$B_4$	$xzt + y^2z + (a, b, c, d)(x, y)^3 = 0$
6	7	$B_3 + C_2$	$xyt + xz^2 + yz^2 - ax^3 = 0$
7	7	$B_5$	$x^3 + (y + z + t)x^2 + ayzt = 0$
8	6	$3C_2$	$xzt + (ax - y)(bx - y)(cx - y) = 0$
9	6	$2B_3$	$2xyt + (x + y)(z^2 - ax^2) = 0$
10	6	$B_4 + C_2$	$xyt + xz^2 + y^3 - ax^3 = 0$
11	6	$B_6$	$(x + y + z)^2 t + xyz = 0$
12	6	$U_6$	$yzt + x^2(x + y + z) = 0$
13	5	$B_3 + 2C_2$	$xyt + xz^2 + yz^2 = 0$
14	5	$B_5 + C_2$	$x^2t + y^2z + xz^2 = 0$
15	5	$U_7$	$t(xy + xz + yz) + xyz = 0$
16	4	$4C_2$	$xyz + xt^2 + t^3 = 0$
17	4	$2B_3 + C_2$	$xyt + (x + y)z^2 = 0$
18	4	$B_4 + 2C_2$	$xyt + xz^2 + y^3 = 0$
19	4	$B_6 + C_2$	$x^2t + xz^2 + y^3 = 0$
20	4	$U_8$	$xyz = t^3$
21	3	$3B_3$	$zx^2 = ty^2$ (общая линейчатая поверхность)
22	3		$y^3 + x(zx + ty) = 0$ (линейчатая поверхность Кэйли)
23	3		

В табл. 2 (стр. 24) указаны поверхности третьего порядка, несущие конические сети, число сетей, канонические уравнения поверхности и уравнения линий, порождающих конические сети. В первой колонке приведен номер соответствующей поверхности согласно табл. 1.

Из этой таблицы видно, что из 23 типов поверхностей третьего порядка по классификации Шлефли на 20 типах обнаружены конические сети. При этом, если на поверхности имеются две особые точки, то существует коническая сеть и одна из двух линий, порождающих сеть, есть прямая, соединяющая эти точки. Если на поверхности имеется бипланарная точка с индексом  $k \geq 4$ , т. е. понижающая класс поверхности на число единиц большее или равное четырем, то существует коническая сеть, и одна из линий, порождающих сеть, совпадает с прямой пересечения касательных плоскостей в бипланарной точке. Если на поверхности имеется унипланарная точка, то каждая из прямых пересечения поверхности с касательной плоскостью в этой точке есть одна из линий, порождающих коническую сеть.

Поверхность третьего порядка без особых точек (№ 1 в табл. 1) можно задать уравнениями

$$\sum_{i=1}^5 a_i x_i^3 = 0, \quad \sum_{i=1}^5 x_i = 0. \quad (5)$$

Если один из коэффициентов  $\alpha_i$  равен нулю, поверхность принадлежит классу тетраэдально-симметрических, определяемых уравнением

$$\sum_{i=1}^4 \alpha_i x_i^n = 0, \quad (6)$$

где  $n$  — любое вещественное число.

На таких поверхностях существуют три конические сети, порождаемые тремя парами противолежащих ребер координатного тетраэдра (двойные сети Кенигса) [3].

Пусть все  $\alpha_i$  отличны от нуля. Если  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5$ , поверхность называется диагональной. Она допускает 120 коллинеаций, оставляющих ее инвариантной. Чтобы решить вопрос о существовании конических сетей на диагональной поверхности можно поступить так.

Положим

$$\begin{aligned} 4x_1 &= x + y + z + t, \\ 4x_2 &= -x - y + z + t, \\ 4x_3 &= x - y - z + t, \\ 4x_4 &= -4t. \end{aligned} \quad (7)$$

Уравнение диагональной поверхности принимает вид

$$2xyz + (x^2 + y^2 + z^2)t - 5t^3 = 0. \quad (8)$$

Предположим, что она несет коническую сеть. Подставив в (8) вместо текущих координат их параметрические выражения по (1) и положив

$$u_4(u) = u, \quad v_4(v) = v, \quad (9)$$

должны получить тождество относительно  $u, v$ :

$$(2u_1u_2u_3 + u \sum u_i^2 - 5u^3) - (2v_1v_2v_3 + v \sum v_i^2 - 5v^3) + \\ + u(\sum v_i^2 - 15v^3) - v(\sum u_i^2 - 15u^3) + 2 \sum u_i B_i - 2 \sum v_i A_i = 0, \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= u_2u_3 + uu_1, \quad A_2 = u_3u_1 + uu_2, \quad A_3 = u_1u_2 + uu_3, \\ B_1 &= v_2v_3 + vv_1, \quad B_2 = v_3v_1 + vv_2, \quad B_3 = v_1v_2 + vv_3. \end{aligned} \quad (11)$$

Продифференцировав (10) дважды по  $u$  и дважды по  $v$ , приходим к функциональному уравнению

$$\sum u_i'' B_i'' = \sum v_i'' A_i''. \quad (12)$$

Можем считать

$$u_3'' \neq 0, \quad v_3'' \neq 0. \quad (13)$$

Действительно, положив в (10)  $v = u$ , имеем

$$[u_1(u) - v_1(u)][u_2(u) - v_2(u)][u_3(u) - v_3(u)] \equiv 0.$$

Ввиду равноправности всех сомножителей можем считать

$$v_3(u) = u_3(u). \quad (14)$$

Если  $u_3'' = 0$ , поверхность вырождается в плоскость. Положив в (12)  $v = \text{const}$ , получим линейное однородное уравнение, связывающее функции  $u_i'', A_i''$  одной переменной  $u$ . В силу (13) число таких независимых уравнений не больше пяти. То же самое имеет место для шести функций  $v_i'', B_i''$ . При этом, если функции  $u$  связаны  $i$ - зависимостями, то функции  $v$  связаны  $k$ - зависимостями так, что  $k + i = 6$ .

Ввиду равноправности обеих систем предстоит исследовать следующие возможные случаи:

5 зависимостей на функции  $u$ , 1 зависимость на функции  $v$ ,  
 4 зависимости » »  $u$ , 2 зависимости » »  $v$ ,  
 3 » » »  $u$ , 3 » » »  $v$ .

Таблица 2

№	Число сетей	Канонические уравнения поверхности	Линии, порождающие сеть	
23	$\infty^2$	$u^2 - v^2, \quad u^4 - v^4 - \lambda(u^2 - v^2) - \mu(u + v),$ $2(u^3 - v^3) - \lambda(u - v) - \mu, \quad u - v.$	$3x^4 - 2zt = 2t^2,$ $x^3 + y^2 - xt \pm yt^3 = 0,$ $zt = 4xy, \quad \begin{cases} \mu z x^2 \\ 2x^2 \end{cases} = \mu t y^2.$	
22	$\infty^2$	$\lambda u - \mu v, \quad \frac{\lambda}{v} - \frac{\mu}{u}, \quad \frac{\lambda^2}{v^3} - \frac{\mu}{u^2}, \quad \lambda^2 u^2 - \mu v^2.$		
16	$\infty^1$	$(1 + k)^2(1 - ku)^2 - (1 + kv)^2, \quad \frac{(1 - k)^2(1 - ku)^2}{u} - \frac{(1 + kv)^2}{v},$ $\frac{(1 - ku)^2}{u} - \frac{(1 - k)^2(1 + kv)^2}{v}, \quad \frac{(1 - v)(1 - k^2 v)}{(1 - u)(1 - k^2 u)},$ $-\frac{(1 + k)^2(1 - ku)^2}{(1 + ku)^2} + \frac{(1 - k)^2(1 + kv)^2}{(1 - kv)^2},$ $-\frac{(1 - k)^2(1 + ku)^2}{(1 - ku)^2} + \frac{(1 + k)^2(1 - kv)^2}{(1 + kv)^2}.$	Асимптотические линии поверхности	
18	$\infty^1$	$\frac{4u}{1 + u^2} - \frac{4kv}{(v + k)^2}, \quad \frac{(u - 1)^2}{(v - 1)^2} + \frac{(v - k)^2}{(v - k)^2},$ $\left(ku + \frac{k}{u}\right) - \left(v + \frac{k^2}{v^2}\right), \quad \left(ku + \frac{k}{u}\right)^2 - \left(v + \frac{k^2}{v}\right)^2.$	Асимптотические линии поверхности	
19	$\infty^1$	$\frac{1}{16v} - \frac{1}{16u}, \quad v - u, \quad 4u^2 - 4cu + 4cv - 4v^2,$ $16(u^3 - 2u^2 + c^2u - v^3 + 2v^2 - c^2v).$	Асимптотические линии поверхности	
21	3	$\frac{1}{u}, \quad u, v^3, v;$ $\frac{1}{u}, \quad v^3, u, v;$ $v^3, \quad \frac{1}{u}, u, v;$	$z = t = 0; \quad x = y = 0,$ $y = t = 0; \quad x = z = 0,$ $x = t = 0; \quad y = z = 0,$	
17	3	$\frac{v^3}{v^2 - 1}, \quad u, -\frac{1}{u}, v;$ $u, v^3, -\frac{1}{u}, \frac{1}{v}, v;$	$x = t = 0; \quad y = z = 0,$ $y = t = 0; \quad x = z = 0,$ $y = 0, \quad x = 0, yz = 3t^2.$	

$x = t = 0; \quad x = 0; \quad y = 0; \quad z = 0;$ $x = z = 0; \quad y = 0; \quad z(t - 2x)^3 - 3x^2t + 4x^3 = 0,$ $x = y = 0; \quad z = 0; \quad y(t - 2x)^3 - 3x^2t + 4x^3 = 0,$ $x = t = 0; \quad y = z; \quad 3x^2 + 8xy + 4y^2 - yt = 0,$ $x = 0, y = -z; \quad y = z, \quad 4t(x + 2y)^2 + xy(x + 4y) = 0$ $y = 0, x = -z; \quad x = z, \quad 4t(y + 2x)^2 + xy(y + 4x) = 0$ $z = 0, -x = y; \quad x = y, \quad 4t(z + 2x)^2 + xz(z + 4y) = 0$ $x = y = 0; \quad z = t, \quad 4\left(x - \frac{at}{2}\right)^2 [4x + 4y + (4a + c)t] = c^2t^3,$ $u + v, \quad -\frac{1}{u} + v, \quad v^3, v.$
$v, u, \frac{v^3}{1-v^2}, -\frac{1}{u} + v - \frac{1}{v};$ $v, \frac{v^3}{1-v^2}, u, -\frac{1}{u} + v - \frac{1}{v};$ $-\frac{1}{v} - v, u + v, -\frac{1}{u} + v, \frac{(1+v^2)^3}{v^3}.$
$2v^2, u + v - v^3, -u + v - v^3, \frac{u^2}{2} - \frac{v^2}{2}(1-v)^3;$ $u + v - v^2, 2v^3, -u + v - v^3, \frac{u^2}{2} - \frac{v^2}{2}(1-v)^2;$ $u + v - v^3, -u + v - v^3, 2v^3, \frac{u^2}{2} - \frac{v^2}{2}(1-v)^3.$
$\frac{av}{2} + \frac{1}{2}(cv^2 + 4a)^{1/2}, -\frac{1}{v} - \frac{a+2}{2}v - \frac{1}{2}(cv^2 + 4a)^{1/2},$ $u + v, \quad -\frac{1}{u} + v, \quad c = 4a + a^2,$ $\frac{av}{2} + \frac{1}{2}(cv^2 + 4a)^{1/2}, \quad u + v,$ $-\frac{1}{v} - \frac{a+2}{2}v - \frac{1}{2}(cv^2 + 4a)^{1/2}, \quad -\frac{1}{u} + v.$
$\frac{av}{2} + \frac{1}{2}(cv^2 + 4a)^{\frac{1}{2}}, \quad u + v, \quad -\frac{1}{u} + v,$ $-\frac{1}{v} - \frac{a+2}{2}v - \frac{1}{2}(cv^2 + 4a)^{1/2}.$
$x = z = 0; \quad y = 0, \quad 4xt + 3z^3 = 0;$ $x = y = 0; \quad x = 0, \quad y^2t + z^3 = 0.$

Продолжение табл. 2

№	Число сетей	Канонические уравнения поверхности	Линии, порождающие сеть	
14	2	$u, \frac{1}{v}, v, -\frac{1}{u} - v^2;$ $v, 1, u - \frac{1}{2v}, -u^2 + \frac{1}{4v^2};$	$y = z = 0; x = 0, yt = 3z^2;$ $x = y = 0, y = 0, xt^2 = z^3,$	
10	2	$v, u, (av^2 + 2)^{1/2}, -\frac{1}{u} - \frac{1}{v};$ $v, u, -\frac{v}{1+v}, u, \frac{u^2}{2} - \frac{av^2}{2},$ $-1, v, u, u^2 - v^2,$	$x = z = 0; y = 0, z^2(ax + 2t) = av^3;$ $x = y = 0; z = 0, y(ax - t)^3 + ax^3 = 0,$ $x = y = 0; x = z = 0,$	
20	1	$v, -1, u^2 - \frac{1}{v} - av^2, u,$	$x = y = 0; y = t = 0.$	
11	1	$\frac{1}{k}, \frac{v}{k}, u, -\frac{1}{u}, \lambda^2 = (a - v)(b - v)(c - v).$	$x = y = 0; z = t = 0.$	
9	1	$v, -1, u - \frac{1}{2v}, u^2 - \frac{1}{4v^2} - av^2,$	$x = y = 0; y = 0, xt^2 = 2(z^2 - ax^2)^2.$	
7	1	$\frac{1}{k}, \frac{v}{k}, u, -\frac{1}{u} - \frac{v^2}{k};$	$x = y = 0; z = 0, (2ax^3 + 6bx^2y + 6cxy^2 + 2dy^3)^2 =$	
6	1	$\lambda^2 = a + 3bv + 3cv^2 + dv^3,$	$= (3bx^2 + 6cxy + 2dy^2 - dx)^2(y^2 + xt).$	
5	1	$v, -\frac{v}{v+1}, u, \frac{u^2}{2} - \frac{1}{2} \left[ av^2 + \frac{6v^2}{(v+1)^2} \right];$	$x = y = 0; z = 0.$	
4	1	$\frac{1}{k}, \frac{v}{k}, u - 6\frac{v^2}{k}, \frac{1}{u} - \frac{v^3}{k};$ $\lambda^2 = a + 3bv + 3cv^2 + dv^3 - 7dv^4.$	$(2by^2 - ax^2)^2 + y^2(t - ax - 2by)^2 = 0,$ $x = y = 0; x = -\frac{v}{2k^3}, y = \frac{1}{k} - \frac{v}{2k^3};$ $z = \frac{-2bv}{k} + \frac{dv^2}{k^3}, t = \frac{-2v^3}{k} + \frac{v^2v^3}{k^3},$ $v = 2k \frac{dv}{dv}.$	

В каждом из этих случаев приходим к противоречию. Покажем это для случая 3 зависимостей.

Пусть  $u''_1, u''_2, u''_3$  — линейно независимы, тогда

$$A_i'' = \sum a_{ik} u_k''; \quad B_i'' = \sum b_{ik} v_k''; \quad b_{kl} = a_{lk}, \quad (15)$$

следовательно,

$$A_i = \sum a_{ik} u_k + a_{i4} + a_{i5}; \quad (16)$$

$$B_i = \sum b_{ik} v_k + b_{i4} + b_{i5}. \quad (17)$$

Из (10) и полученного из него дифференцированием по  $u$  и  $v$  следует

$$\sum u_i^2 - 15u^2 = 2 \sum b_{k4} u_k + cu + c_1; \quad (18)$$

$$\sum v_i^2 - 15v^2 = 2 \sum a_{k4} v_k + cv + c_2; \quad (19)$$

$$2u_1 u_2 u_3 + 2u \sum b_{i4} u_i + 2 \sum b_{i5} u_i + (c_1 + c_2) u - d = 0. \quad (20)$$

Покажем, что система из пяти уравнений (16), (18), (20) на три функции несовместна.

Действительно, хоть одна пара уравнений (16) разрешима относительно двух функций из системы  $u_1, u_2, u_3$  в противном случае было бы

$$(u_3 - a_{12})(u_3 - a_{21}) = (u - a_{11})(u - a_{22}); \\ (u_1 - a_{23})(u_4 - a_{32}) = (u - a_{22})(u - a_{33}); \\ (u_2 - a_{13})(u_2 - a_{31}) = (u - a_{11})(u - a_{33}). \quad (21)$$

Следовательно

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \left( \frac{u_1}{u} \right)^2 = 1,$$

а это противоречит (18).

Пусть, для определенности, первое из уравнений (21) не выполняется, тогда

$$u_1 = \frac{u(a_{13}u_3 - a_{14}u) - u_3(a_{23}u_3 + a_{24}u) + \dots}{(u - a_{11})(u - a_{22}) - (u_3 - a_{12})(u_3 - a_{21})}, \quad (22)$$

$$u_2 = \frac{u(a_{23}u_3 + a_{24}u) - u_3(a_{13}u_3 + a_{14}u) + \dots}{(u - a_{11})(u - a_{22}) - (u_3 - a_{12})(u_3 - a_{21})}. \quad (23)$$

Подставим эти значения в третье из уравнений (16) в (18) и (20), получим многочлены относительно  $u, u_3$ :

$$uu_3(u^2 - u_3^2)^2 + \dots = 0, \quad (24)$$

$$(u_3^2 - 15u^2)(u^2 - u_3^2)^2 + \dots = 0, \quad (25)$$

$$u(5u^2 - u_3^2)(u^2 - u_3^2) + \dots = 0. \quad (26)$$

Общий наибольший делитель этих многочленов

$$u^2 - u_3^2 + pu_3 + qu + r = 0. \quad (27)$$

Следовательно,

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{u_3}{u} = \omega = \pm 1. \quad (28)$$

Если

$$h = a_{14} - a_{23} + \omega(a_{13} - a_{21}) \neq 0,$$

то из (22) и (23) следует

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \left( \frac{u_1}{u} \right)^2 = \lim_{u \rightarrow \infty} \left( \frac{u_2}{u} \right)^2 = 1,$$

что противоречит (18).

Если  $h = 0$ , то из (22) и (23) следует

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{u_1}{u} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{u_2}{u} = 0.$$

Но тогда по уравнению (16)

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{u_3}{u} = 0,$$

что противоречит (28).

Во всех остальных случаях, как показывает подробный анализ, приходим также к несовместным системам уравнений.

Таким образом, диагональная поверхность не несет конических сетей, и следовательно, не является поверхностью Петерсона.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Я. П. Бланк. Конические сети, «Зап. физ.-матем. ф-та ХГУ и ХМО», т. 23, 1952, 113—141.
2. Я. П. Бланк. О поверхностях, несущих  $\infty^2$  конических сетей. ДАН СССР, т. 131, № 3, 1960, 482—484.
3. J. Blank. Flächen mit zwei konjugierten Netzen ebener Kegellinien. Comm. de la Soc. Math. de Kharkof, ser. 4, т. 11, 1935, 55—68.

*Поступила 26 апреля 1967 г.*

---

## ОБЗОР РАБОТ ПО ГЕОМЕТРИИ НА УКРАИНЕ ЗА 50 ЛЕТ (1917—1967)

*Я. П. Бланк, Е. П. Сенькин* (Харьков)

Еще до Великой Октябрьской революции на Украине работал ряд выдающихся математиков, внесших ценный вклад в развитие геометрии.

Много содействовал подъему математической культуры в России профессор Киевского университета М. Е. Ващенко-Захарченко. Ему принадлежит перевод «Начал» Евклида и комментарии к ним.

Д. А. Граве в своей докторской диссертации «Основы математической теории построения географических карт» получил все эквиареальные проекции шара на плоскость, переводящие меридианы и параллели в окружности либо прямые. Он доказал теорему, сформулированную без доказательства П. Л. Чебышевым, о том, что наивыгоднейшая проекция части земного шара на плоскость та, в которой масштаб изображения на границе карты постоянен.

Оригинальные синтетические исследования по проективной геометрии опубликовал работавший в Харькове с 1873 по 1898 год К. А. Андреев. В работах «О геометрическом образовании плоских кривых» и «О геометрических соответствиях в применении к вопросу о построении кривых линий» он построил теорию многозначных соответствий и обобщил известное проективное образование кривых второго порядка на алгебраические кривые высших порядков.

Д. М. Синцов, в основном еще до 1917 г., выполнил свои фундаментальные работы по теории коннексов в пространстве и их связи с дифференциальными уравнениями в частных производных.

С. Н. Бернштейн получил, как следствие своей теории дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка эллиптического типа, первое общее решение проблемы Плато построения минимальной поверхности, опирающейся на данный контур. Ему же принадлежит важная для геометрии в целом теорема: поверхность  $z = f(x, y)$ , где  $f(x, y)$  имеет непрерывные частные производные первых двух порядков (при всех вещественных  $x, y$ ), полная кривизна которой не положительна и не равна тождественно нулю, не может оставаться между двумя фиксированными плоскостями  $z = \pm h$ .

В. Ф. Каган (Одесса) опубликовал свои капитальные исследования по основаниям геометрии. Он построил систему аксиом евклидовой геометрии и исследовал ее непротиворечивость и независимость. Он известен также как блестящий популяризатор работ Н. И. Лобачевского.

После Великой Октябрьской революции развитие геометрии в СССР характеризуется возникновением крупных геометрических школ, объединяющих большие коллективы исследователей: это школы классической дифференциальной геометрии (Москва, Харьков, Киев, Томск), тензорной дифференциальной геометрии (Москва, Казань, Саратов, Пенза), номографии и синтетических методов в геометрии (Москва), дифференциальной геометрии «в целом» (Ленинград, Москва, Харьков, Новосибирск).

На Украине крупнейший центр геометрических исследований в Харькове возглавлял до 1946 г. заслуженный деятель науки действительный член АН УССР Д. М. Синцов (1867—1946), а с 1946 г. и в настоящее время — действительный член АН УССР и член-корреспондент АН СССР А. В. Погорелов, лауреат премий Государственной, Ленинской и им. Лобачевского.

Фундаментальные исследования по теории коннексов, выполненные в основном еще в дооктябрьский период, привели Д. М. Синцова к разработке дифференциальной геометрии пфаффовых и монжевых многообразий. Уравнение Пфаффа в случае, когда выполнено условие интегриуемости, определяет однопараметрическое семейство поверхностей. В противоположном случае множество интегральных кривых, проходящих через произвольную точку пространства, не лежит на поверхности, но имеет в этой точке общую касательную плоскость. Этот геометрический образ получил название неголономной поверхности. В серии работ Д. М. Синцов развил дифференциальную геометрию неголономных поверхностей. Им исследованы линии кривизны первого и второго рода, минимальные, асимптотические, геодезические линии двух типов — прямейшие и кратчайшие, изучены средняя, гауссова и полная кривизна, построена индикатриса кривизны, индикатриса геодезического кручения, обобщено соотношение Эннепера—Бельтрами, исследованы специальные типы неголономных поверхностей. Эти результаты обобщены им на  $n$ -мерное пространство.

Работы Д. М. Синцова по геометрии пфаффовых многообразий значительно пополнили и систематизировали результаты исследований его предшественников (Фосс, Роджерс, Дарбу).

По геометрии монжевых уравнений, т. е. уравнений вида  $F(x_i; dx_k)$ ,  $i, k = 1, 2, 3$ , однородных и нелинейных относительно дифференциалов, имелся единственный результат С. Ли, обобщающий теорему Менье. Д. М. Синцов выделил из системы интегральных кривых монжева уравнения асимптотические линии, линии кривизны первого и второго рода, геодезические прямейшие и кратчайшие и изучил их свойства.

Д. М. Синцов продолжил также свои исследования по теории коннексов, опубликовав ряд работ, посвященных интеграционным задачам, связанным с теорией коннексов, вопросу об особенностях элементах коннекса, метрическим функциям коннексного пространства, общей теории коннекса с элементом (точка, прямая) в пространстве, теории коннексов с элементом (точка, прямая, плоскость) и конфигурациям, определенным пересечением двух, трех и более билинейных коннексов.

В связи с работой над составлением атласа кривых Д. М. Синцов напечатал ряд статей под общим названием «Этюды по теории плоских кривых».

Из геометрических исследований его многочисленных учеников отметим следующие. Т. И. Котов получил интересные результаты по теории геодезических линий. Н. М. Душин исследовал самопроективные или  $W$ -кривые, т. е. кривые, инвариантные относительно одночленной группы проективных преобразований. П. А. Соловьев опубликовал работы по экстремальным задачам, связанные с плоскими кривыми (о наилучшем наложении двух замкнутых кривых, о кривых, у которых центр тяжести совпадает с центром тяжести кривизны, и о приборах, вычерчивающих непрерывным движением алгебраические кривые).

П. М. Дармостук разрабатывал теорию комплексов прямых. Кроме того, он изучал комплексы кривых, конусы которых пересекают некоторую поверхность по кривым, зависящим от двух параметров. С. М. Уристман обобщил кривые Бертрана и определил некоторые новые типы пар

кривых. Им определены линейчатые поверхности, на которых стрикционные линии являются геодезическими, асимптотическими, линиями кривизны, плоскими или прямыми.

Я. П. Бланк и М. А. Николаенко распространяли на пифагоровы многообразия понятие соприкасающейся поверхности С. Ли. Я. П. Бланк рассмотрел для этих многообразий геометрическую интерпретацию проективного линейного элемента и соответствие Серге. М. А. Николаенко исследовала характеристики монжева уравнения в трехмерном и многомерном пространстве.

Некоторые другие вопросы проективно-дифференциальной геометрии неголономных поверхностей стали темой кандидатской диссертации М. Р. Рогового. Монжевы уравнения второго порядка относительно дифференциалов исследовал в кандидатской диссертации А. М. Макаренко, погибший на фронте в Великую Отечественную войну.

Поверхностям переноса и их обобщениям посвятил свою докторскую диссертацию Я. П. Бланк. Обобщая проблему С. Ли о поверхностях переноса двойного образования, он определил все поверхности, несущие континуум конических сетей, а также поверхности с двумя двойными сетями Кенигса и дал решение проблемы Ф. Энгеля об определении поверхностей, являющихся поверхностями переноса относительно пары плоскостей. Я. П. Бланк, Л. Т. Моторный и Е. А. Косачевская опубликовали ряд работ, относящихся к обобщению проблемы С. Ли на поверхности переноса в неевклидовых пространствах.

Общую теорию конгруэнций прямых в аффинной дифференциальной геометрии построил методами тензорного анализа Д. З. Гордевский. Ему принадлежат также синтетические исследования по многомерным пространствам.

В своей кандидатской диссертации А. С. Лейбин дает решение задачи (на которую указывают Гильберт и Кон-Фоссен в «Наглядной геометрии») о построении сферического отображения топологической модели Бойя проективной плоскости. Отображение осуществляется в виде замкнутой многолистной поверхности, покрывающей сферу.

Группы движений и некоторые другие вопросы геометрии римановых пространств аффинной связности изучает М. А. Улановский.

В. В. Рокотянская исследовала изгибание на главном основании поверхностей нулевой кривизны эллиптического пространства.

Отметим исследования по интегральной геометрии Г. И. Дриффельда, работавшего до 1941 г. в Киеве, а с 1945 г. — в Харькове. Он применил к нахождению мер множеств геометрических элементов полученные им ранее результаты по теории интегральных инвариантов групп Ли. В этом же направлении работают его ученики С. А. Демидова, А. В. Луценко.

Вопросам геометрии в целом посвящены многочисленные исследования академика АН УССР А. В. Погорелова, его учеников и сотрудников в отделе геометрии физико-технического института низких температур АН УССР. В этих исследованиях получил исчерпывающее решение ряд актуальных проблем современной геометрии.

Одной из таких проблем, привлекавших внимание геометров, начиная с Коши, была проблема однозначности определенности выпуклых поверхностей. Сущность ее заключается в установлении равенства двух выпуклых поверхностей при условии их изометрии. Решением этой проблемы занимались Коши, Либман, Гильберт, Вейль, Кон-Фоссен и др. В трудах этих геометров однозначная определенность устанавливалась в тех или иных дополнительных предположениях о регулярности рассматриваемых поверхностей. Значение проблемы особенно возросло в связи с установлением общих теорем А. Д. Александрова о реализуемости

абстрактно заданной метрики выпуклой поверхностью. Методы и результаты А. Д. Александрова, полученные для общих многообразий и общих выпуклых поверхностей, могут быть применены для решения соответствующих вопросов теории регулярных поверхностей в классической постановке при условии решения двух проблем: однозначной определенности в самых общих предположениях и проблемы регулярности поверхности с регулярной метрикой (см. далее).

Начиная с 1948 г. А. В. Погорелов в цикле работ дал полное решение проблемы однозначной определенности для общих выпуклых поверхностей. В частности, им доказано равенство замкнутых изометрических выпуклых поверхностей, равенство бесконечных выпуклых поверхностей с полной кривизной  $2\pi$  и равенство бесконечно выпуклых поверхностей с кривизной  $<2\pi$  при некоторых дополнительных условиях, естественно вытекающих из соответствующей теоремы о реализации С. П. Оловянишникова.

Оригинальный подход к рассмотрению вопроса об однозначной определенности, основанный на простых геометрических соображениях, предложен Е. П. Сенькиным. А. С. Лейбиним доказана изгибаемость любой выпуклой поверхности, которая получается из замкнутой удалением области с положительной кривизной. Изгибаемость выпуклых многогранников и поверхностей с границей при различных условиях, которым должна удовлетворять граница, исследована Л. А. Шором.

Другой проблемой, вытекающей из потребности применения синтетического метода теории общих выпуклых поверхностей в классической дифференциальной геометрии, была проблема регулярности выпуклой поверхности с регулярной метрикой. Проблема состоит в решении вопроса о регулярности общей выпуклой поверхности с регулярной метрикой (коэффициенты линейного элемента  $ds^2$ , регулярные функции криволинейных координат  $u, v$ ). Эта проблема также исчерпывающим образом решена в работах А. В. Погорелова. Доказано, что любая выпуклая поверхность (без предположения какой-либо регулярности заранее) будет регулярной, если ее метрика регулярна, а гауссова кривизна положительна. Более точно, если метрика принадлежит классу  $C^n$ ,  $n > 2$  (коэффициенты  $g_{ij}(u, v)$  линейного элемента  $ds^2$  обладают непрерывными производными порядка  $n$ ), то поверхность принадлежит классу  $C^{n-1+\alpha}$  (вектор-функция  $r(u, v)$ , задающая поверхность имеет производные порядка  $n - 1$ , удовлетворяющие условию Гельдера с показателем  $\alpha$ ). Если метрика поверхности аналитическая, то поверхность аналитическая. Аналогичная теорема имеет место и для выпуклых поверхностей пространств постоянной кривизны — эллиптического пространства и пространства Лобачевского (А. В. Погорелов, А. А. Дубровин).

В 1916 г. Г. Вейль поставил проблему об изометрическом погружении двумерного гомеоморфного сфере аналитического риманова многообразия с положительной кривизной в виде выпуклой аналитической поверхности евклидова пространства. Намеченное самим Вейлем решение проблемы было завершено Г. Леви в 1937 году. Другое решение проблемы Вейля, открывшее новое направление исследований геометрии в целом, было дано А. Д. Александровым в 1941 году. Это решение в равной степени относится к евклидову пространству и к пространствам постоянной кривизны. В связи с этим естественно возникла проблема о погружении двумерного риманова многообразия в любое риманово пространство. Она также решена А. В. Погореловым в виде следующей теоремы.

Пусть  $R$  — полное трехмерное риманово пространство и  $M$  — замкнутое гомеоморфное сфере риманово многообразие с гауссовой кривизной всюду большей некоторой постоянной  $C$ . Тогда, если кривизна прост-

ранства  $R$  всюду меньше  $C, M$  допускает изометрическое погружение в  $R$  в виде регулярной поверхности  $F$ .

Выяснен произвол, с которым это погружение осуществляется, и степень регулярности погружения в зависимости от регулярности пространства  $R$  и погружаемого многообразия  $M$ .

Наряду с изгибаниями (конечными изометрическими преобразованиями) внимание многих геометров (Дарбу, Либмай, Бляшке и др.) привлекали бесконечно малые изгибы. Это бесконечно малые деформации, при которых длины кривых на поверхности в начальный момент деформации стационарны. Основные проблемы для бесконечно малых изгибаний состоят в установлении возможности бесконечно малых изгибаний, их произволе и степени регулярности.

Эти проблемы для случая самых общих выпуклых поверхностей рассмотрены А. В. Погореловым, причем получены окончательные результаты. В частности, доказано, что общая замкнутая выпуклая поверхность, не содержащая плоских областей,— жесткая (т. е. не допускает бесконечно малых изгибаний, кроме тривиальных). Если же поверхность содержит плоские области, то она жесткая вне этих областей. Доказана весьма общая теорема существования бесконечно малых изгибаний для выпуклых поверхностей с краем и установлен произвол, с которыми эти бесконечно малые изгибы строятся. Доказано, что регулярная поверхность с положительной гауссовой кривизной не допускает иных бесконечно малых изгибаний, кроме регулярных. В частности, аналитическая поверхность допускает только аналитические бесконечно малые изгибы.

Многие вопросы геометрии в целом при их аналитическом истолковании приводят к соответствующим задачам для дифференциальных уравнений с частными производными. Это значит, что многие геометрические результаты могут быть сформулированы как теоремы существования, единственности и регулярности обобщенных решений соответствующих дифференциальных уравнений (чаще всего уравнений типа Монжа—Ампера). Таковы теоремы об однозначной определенности для выпуклых поверхностей, о регулярности выпуклых поверхностей с регулярной метрикой, о жесткости выпуклых поверхностей и др. А. В. Погореловым доказана весьма общего содержания теорема существования бесконечного выпуклого многогранника с данными направлениями граней, заданной монотонной функцией на конечных гранях и опорной функцией на границе сферического изображения. Эта теорема при известном истолковании функции, заданной на конечных гранях, дает теоремы существования обобщенных решений для уравнений Монжа—Ампера весьма общего вида. При достаточной регулярности коэффициентов уравнения это решение обладает определенной регулярностью. Доказана соответствующая теорема о единственности обобщенных решений.

Ряд теорем единственности для выпуклых поверхностей, поставленных в точечное соответствие по параллельности нормалей, доказаны А. И. Медянником. Намечается исследование многомерных выпуклых гиперповерхностей. Ряд интересных результатов в этом направлении получен А. Д. Милкой. Рассматриваются экстремальные задачи для выпуклых поверхностей. В частности, найдено точное соотношение (типа неравенства) между внутренним и внешним диаметром поверхности (Н. П. Макуха).

Разрабатываются вопросы геометрии в целом для многомерных римановых многообразий. Так, например, изучается структура риманова пространства, несущего семейство вполне геодезических поверхностей (Ю. С. Слободян), разрабатываются вопросы теории гравитации (В. И. Денисов), теория однородных многогранников (С. П. Сопов).

В последние годы ведется интенсивная работа по применению геометрических методов в нелинейной теории упругих оболочек, в частности, в вопросах устойчивости оболочек. Здесь разработан общий подход к проблеме и получены многочисленные конкретные результаты (А. В. Погорелов, В. И. Бабенко, В. В. Михайлов).

Интересные исследования в различных разделах геометрии ведутся киевскими геометрами.

Б. Я. Букреев, чьи научные интересы не ограничиваются только геометрией, а относятся и к области математического анализа, в частности, вариационного исчисления, опубликовал книгу «Планиметрия Лобачевского в аналитическом изложении».

А. С. Смогоржевский, которому принадлежат работы по линейной алгебре, ортогональным полиномам и по теории дифференциальных уравнений, написал ряд статей и книгу по геометрическим построениям в плоскости Лобачевского, а также курс оснований геометрии и в соавторстве с Е. Ф. Столовой — справочник по теории плоских кривых третьего порядка.

Теории комплексов прямых посвятил серию оригинальных работ, а также специальную монографию Н. И. Кованцов, сформировавшийся как геометр в школе классической дифференциальной геометрии С. П. Финикова.

Комплексом называется трехпараметрическое множество прямых. Через точку пространства проходит конус прямых комплекса. На прямой комплекса имеются четыре инфlectionных центра. Они определяются следующим образом. Если пересечь конус комплекса фиксированной плоскостью, в сечении образуется плоская кривая. Если перемещать вершину конуса вдоль прямой комплекса, то лишь для четырех положений вершины соответствующая плоская кривая имеет перегиб. Эти вершины и называются инфlectionными центрами. Н. И. Кованцов дал полное решение вопроса о строении комплексов с кратными инфlectionными центрами.

Комплекс, образованный прямыми, касательными к поверхности, называется специальным. Это частный случай комплекса, лучи которого принадлежат двупараметрическому множеству плоских пучков. Такие комплексы Н. И. Кованцов назвал квазиспециальными. Им доказано, что вершина плоского пучка комплекса является инфlectionным центром всех прямых пучка. Следовательно, возможны четыре класса квазиспециальных комплексов: комплексы, допускающие однократное расслоение в двупараметрическое семейство плоских пучков, комплексы, допускающие два либо три, либо четыре таких расслоения. Все эти комплексы рассмотрены Н. И. Кованцовым. Наряду с проективно-дифференциальными свойствами им исследовались и метрические свойства комплексов, а также опубликован ряд работ по теории линейчатых комплексов в неевклидовых пространствах. В проективно-дифференциальной теории поверхностей существенную роль играет канонический пучок прямых, определяющийся окрестностью третьего порядка поверхности. Для отдельных прямых пучка (директрисы Вильчинского, ребра Грина, оси Чеха, нормали Фубини) существуют конструкции, не связанные между собой. Н. И. Кованцов дал единое построение для прямых канонического пучка.

Некоторыми вопросами геометрии в целом занимаются В. П. Белоусова, И. Г. Ильин, а также ученики В. П. Белоусовой (Г. М. Зразевская, В. И. Михайловский, М. Н. Радченко, П. Л. Симоконь). Ими опубликован ряд работ по бесконечно малым изгибаниям первого и высших порядков как общих, так и специальных классов поверхностей

(вращения, цилиндроидов, развертывающихся), а также по бесконечно малым деформациям более общего характера.

В Одессе до 1922 г. работал выдающийся советский геометр В. Ф. Каган. Здесь им были опубликованы работы по основаниям геометрии. Переехав затем в Москву, он основал там известную школу тензорной дифференциальной геометрии.

В Одессе же, до своего переезда в Казань, выполнил свои геометрические исследования по обобщенным поверхностям переноса виднейший советский алгебраист Н. Г. Чеботарев. Ему принадлежит обобщение результатов С. Ли о поверхностях переноса двойного образования на многомерное пространство, а также широкое обобщение понятия поверхности переноса, заключающееся в том, что вместо группы переносов берется любая, вообще некоммутативная группа преобразований и ищутся поверхности, несущие системы импримитивности относительно этой группы.

Воспитаник Одесского университета Д. Н. Зейлигер, переехавший затем в Казань, вернулся в 1930 г. на Украину в г. Донецк. Он издал отдельной книгой свои исследования по комплексной линейчатой геометрии, в которой продолжил работы А. Котельникова и Э. Штуди.

В 1935 г. Г. Х. Гохман издал курс «Введение в тензорное исчисление». В 1941 г. М. С. Бродский опубликовал работу «Конгруэнции прямых эллиптического пространства». В. И. Костин написал курс оснований геометрии и несколько статей по некоторым вопросам неевклидовой геометрии. Н. С. Синюков в ряде статей изучает геодезические отображения римановых пространств и пространства, обобщающие субпроективные пространства Кагана.

В Днепропетровске И. Е. Огиевецкий опубликовал книгу «Основы плоской кинематической геометрии» и статьи, посвященные одному общему принципу преобразований, названному им принципом дуальности. Д. Я. Петров, будучи заочным аспирантом кафедры геометрии в Харькове, защитил кандидатскую диссертацию на тему «Конгруэнции с постоянным фокусным расстоянием». Л. Л. Вербицкий изучал геометрию конформно-евклидовых пространств, а также метрическую дифференциальную геометрию гиперповерхностей 2-го порядка.

Вопросы метрической двойственности исследовал ученик В. Ф. Кагана Е. Ф. Лищинский. Субпроективными пространствами Кагана занимается П. Т. Степаненко. Конгруэнции прямых и поверхностей в пространствах постоянной кривизны исследует Б. У. Британ. В. М. Чернышенко принадлежит обобщение чебышевских сетей.

Различным вопросам геометрии Лобачевского посвятили работы М. Г. Андриевская, В. И. Коба (Киев) — вопросы аналитической геометрии; М. Г. Беляев (Черновцы), Б. С. Вакарчук (Черновцы и Днепропетровск), С. В. Дениско (Львов) — вопросы дифференциальной геометрии; Р. И. Демаховская (Киев), В. Ф. Рогаченко (Львов) — вопросы геометрических построений. В Симферополе Н. А. Никулин, А. Т. Чуб, В. Н. Боровик опубликовали работы по теории алгебраических кривых. В. Н. Скрыдлов и А. П. Мокляк проводили исследования в области центро-аффинной дифференциальной геометрии. В 1962 г. в Киеве состоялась первая, а в 1964 г. в Харькове — вторая Всесоюзная конференция геометров.

В 1938 и 1940 гг. в Харькове под редакцией Д. М. Синцова вышли два тома «Геометрического сборника».

С 1965 г. в Харькове регулярно выходит республиканский «Украинский геометрический сборник».

# О ПОВЕРХНОСТЯХ ОГРАНИЧЕННОЙ ВНЕШНЕЙ КРИВИЗНЫ

Ю. Д. Бураго (Ленинград)

А. В. Погорелов [1] подробно изучил класс гладких поверхностей ограниченной внешней кривизны. В частности, им показано, что такая поверхность по своей внутренней геометрии является многообразием ограниченной кривизны (МОК) А. Д. Александрова [2]. Другие классы поверхностей, которые по своей внутренней геометрии являются МОК, рассматривались в работах [3—8]. В настоящей работе аналогичный результат получен для более широкого класса поверхностей, который включает поверхности, рассмотренные в [1, 3—8]. В конце работы сформулированы некоторые нерешенные вопросы.

## § 1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТА

Пусть  $F$  — двумерная поверхность в  $R^3$ . Наши рассмотрения будут иметь локальный характер, поэтому будем считать, что  $F$  — гомеоморф открытого круга. Плоскость  $P$  называется локально опорной к  $F$  в точке  $X$ , если  $X \in P$  и существует окрестность  $U$  точки  $X$ , лежащая в замкнутом полупространстве, ограниченном  $P$ . (Под окрестностью точки поверхности мы всегда понимаем окрестность в топологии этой поверхности). Если  $U \setminus P = X$ , то плоскость  $P$  называется локально строго опорной. В дальнейшем локально опорные плоскости для краткости называем просто опорными. Опорную плоскость, не являющуюся строго опорной, назовем особой.

Пусть  $S_0$  — фиксированная единичная сфера с центром  $O$  и попарно отождествленными противоположными точками. Сферическим образом плоскости  $P$  называется такая точка  $p \in S_0$ , что вектор  $Op$  ортогонален  $P$ , а сферическим образом некоторого множества плоскостей — объединение их сферических образов.

Пусть  $E \subset F$ ,  $p \in S_0$ . Обозначим через  $n_E^+(p)$  число точек  $X \in E$ , через каждую из которых проходит плоскость  $P_X$ , строго локально опорная к  $F$  в точке  $X$  и имеющая  $p$  своим сферическим образом. Функция  $n_G^+(p)$  измерима для любого открытого множества  $G$  (см. ниже лемму 1). Положим

$$\mu^+(G) = \int_{S_0} n_G^+(p) d\sigma_p, \quad (1)$$

где  $d\sigma_p$  — элемент площади  $S_0$ .

Внешней положительной кривизной поверхности  $F$  на множестве  $E \subset F$  назовем число

$$\mu^+(E) = \inf_{G \subset E} \mu^+(G). \quad (2)$$

В дальнейшем мы используем следующие обозначения:  $E$ ,  $\text{int } E$ ,  $\partial E$  — замыкание, внутренность и граница множества  $E \subset F$  в топологии поверхности  $F$ ;  $d(X, Y)$  — пространственное расстояние между точками;

$\rho_F(X, Y)$  — расстояние между  $X, Y$  по поверхности  $F$ ;  $S(X, r)$  — сфера радиуса  $r$  с центром в  $X$ ;  $s(l)$  — длина кривой  $l$ . Если  $F$  — многообразие ограниченной кривизны, то  $\omega(E)$  — внутренняя кривизна  $F$  на множестве  $E$ ,  $\omega^\pm(E) = \frac{1}{2}[\text{var } \omega(E) \pm \omega(E)]$ ;  $\tau(l)$  — поворот на поверхности  $F$  кривой  $l \subset F$  (с одной стороны).

Если поверхность  $F$  взаимно-однозначно проектируется (ортогонально) в некоторую плоскость  $Q$ , то проекцию множества  $E \subset F$  (или точки  $X \in F$ ) на  $Q$  будем обозначать  $E'$  (или  $X'$ ). Плоскость  $Q$  примем в этом случае за плоскость  $Oxy$  декартовой системы координат, а поверхность  $F$  будем считать заданной уравнением  $z = F(X)$ ,  $X' \in Q$ .

Обозначим через  $\Phi$  класс поверхностей  $F$ , удовлетворяющих следующим условиям: a)  $\mu^+(F) < \infty$ ; b) поверхность  $F$  имеет конечную площадь по Лебегу; c) каждая точка поверхности  $F$  имеет окрестность, взаимно-однозначно проектирующуюся в некоторую плоскость  $Q$ ; d)  $\mu^+(X) < 2\pi$  для любой точки  $X \in F$ .

**Теорема 1.** Поверхность  $F$  класса  $\Phi$  по своей внутренней геометрии является многообразием ограниченной кривизны, причем для любого борелевского множества  $E \subset F$

$$\omega^+(E) \leq \mu^+(E). \quad (3)$$

Метод доказательства теоремы 1 заимствован из [8].

**Теорема 2.** Пусть поверхность  $F$  взаимно-однозначно проектируется в плоскость  $Q$ , метрически связна\* и ограничена геодезической ломаной  $\Lambda$ . Тогда метрика  $\rho_F$  индуцирует на  $F$  исходную топологию в том и только том случае, если существует последовательность многограных поверхностей  $\Pi_k$ , взаимно-однозначно проектирующихся в  $Q$ , и таких, что  $\Pi_k \rightarrow F$  равномерно вместе с метриками (т. е. существуют такие гомеоморфизмы  $\varphi_k : F \xrightarrow{\text{на}} \Pi_k$ , что  $d(X, \varphi_k(X)) \rightarrow 0$ ,  $\rho_{\Pi_k}(\varphi_k(X), \varphi_k(Y)) \rightarrow \rho_F(X, Y)$  равномерно относительно  $X, Y \in F$ ).

Замечания.

1. Из приведенных ниже лемм 3, 4 следует, что каждая поверхность класса  $\Phi$  допускает локально указанную в теореме 2 аппроксимацию.

2. Требование, чтобы граница  $F$  являлась геодезической ломаной, несущественно.

3. Если не предполагать, что поверхность  $F$  взаимно-однозначно проектируется в плоскость  $Q$ , то теорема 2 остается спрятавшей с той лишь оговоркой, что поверхности  $\Pi_k$  тоже могут не допускать явного задания.

4. Для доказательства теоремы 1 было бы достаточно аппроксимировать  $F$  такими поверхностями  $F_k$ , которые сходятся к  $F$  вместе с метриками, имеют не большие чем  $F$  положительные внешние кривизны, и настолько прости, что для них  $\omega^+ = \mu^+$ . Аппроксимация, используемая в приведенном доказательстве теоремы 1, удовлетворяет двум последним условиям. Согласно замечанию 1, существует аппроксимация поверхности  $F \in \Phi$ , для которой выполнено первое условие. Существует ли аппроксимация, обладающая всеми этими тремя свойствами?

## § 2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Для доказательства теоремы 1 нам понадобятся сформулированные ниже утверждения. Их доказательства будут приведены в следующих двух параграфах.

**Лемма 1.** Пусть  $\mu^+(F) < \infty$  и множество  $E \subset F$  есть множество типа  $G_\delta$ . Тогда функция  $n_E^+(p)$  измерима и

$$\mu^+(E) = \int_{S_\delta} n_E^+(p) d\sigma_p. \quad (4)$$

\* Поверхность  $F$  называется метрически связной, если любые две точки можно соединить лежащей на поверхности кривой конечной длины.

**Следствие.** Если множество  $E_1, E_2, \dots$  типа  $G_b$  образуют разные множества  $E$  тоже типа  $G_b$ , то

$$\mu^+(E) = \sum_i \mu^+(E_i). \quad (5)$$

**Лемма 2.** Пусть поверхность  $F$  ограничена простой замкнутой кривой  $L$ , взаимно-однозначно проектируется в плоскость  $Q$  и  $\mu^+(F) < \infty$ . Тогда для любой последовательности чисел  $\varepsilon_k > 0, \varepsilon_k \rightarrow 0$  существует последовательность поверхностей  $F'_k$ , удовлетворяющих следующим условиям.

1°. Поверхности  $F'_k$  взаимно-однозначно проектируются в  $Q$ , причем  $F'_k \subset F$ .

2°. Для любой точки  $X_k \in F'_k$  имеем

$$|F(X'_k) - F_k(X'_k)| < \varepsilon_k.$$

3°.

$$\mu^+(F'_k) \leq \mu^+(F).$$

4°. Для любого открытого множества  $G$ ,  $\bar{G} \subset F$

$$\mu^+(G) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu^+(\tilde{G}_k), \quad (6)$$

где  $\tilde{G}_k$  — такое подмножество  $F'_k$ , что  $G' = \tilde{G}'_k$ .

5°. Поверхности  $F'_k$  по своей внутренней геометрии — МОК, причем

$$\omega^+(E) = \mu^+(E) \quad (7)$$

для любого борелевского множества  $E \subset F'_k$ .

6°. Кривые  $L_k$  равномерно сходятся к  $L$ , причем

$$s(L_k) \rightarrow s(L).$$

**Замечание 1.** В силу 1°, 2°, 6° существуют гомеоморфизмы  $\varphi_k : F \xrightarrow{\text{на}} F'_k$ , при которых поверхности  $F'_k$  сходятся равномерно к  $F$ . Согласно 3°, 5°,

$$\omega^+(F'_k) \leq \mu^+(F).$$

**Замечание 2.** Доказательство леммы 2 дано в § 3. Его нетрудно изменить так, что  $F'_k$  будут многогранными поверхностями. Для этого достаточно аппроксимировать  $F$  кусочно-выпуклыми многогранными поверхностями с помощью конструкции, предложенной в [1, стр. 98].

**Лемма 3.** Поверхность  $F$  класса  $\Phi$  метрически связна.

**Лемма 4.** Пусть поверхность  $F$  взаимно — однозначно проектируется в плоскость  $Q$ , имеет конечную площадь, метрически связна и пусть  $\mu^+(F) < \infty$ . Тогда метрика поверхности индуцирует на  $F$  имевшуюся исходную топологию.

Ниже мы воспользуемся некоторыми результатами Ю. Г. Решетника [9]. Сформулируем их в удобной нам форме. Обозначим через  $K_\alpha$  бесконечный выпуклый конус с полным углом  $\alpha$  при вершине. Из теоремы 1 [9] очевидно следует

**Теорема А.** Пусть в многообразии ограниченной кривизны имеется простая замкнутая кривая  $L$ , ограничивающая область  $G$ , причем  $\alpha = 2\pi - \omega^+(G) > 0$ . Тогда существует замкнутая выпуклая кривая  $\tilde{L}$  на конусе  $K_\alpha$ , охватывающая вершину конуса, и такая, что существует распрямляющее отображение кривой  $L$  на  $\tilde{L}$ .

(Определение распрямляющего отображения см. [10]).

Далее, в [9] по существу доказана следующая

**Теорема В.** Пусть  $M$  — пространство с внутренней метрикой, причем топология, индуцированная метрикой  $M$ , превращает  $M$  в двумерное многообразие. Предположим, для любого набора попарно непересекаю-

щихся областей  $G_k$ ,  $k = 1, \dots, m$ , ограниченных простыми замкнутыми кривыми  $L_k$ , существует такой набор конусов  $K_{\alpha_k}$ ,  $\alpha_k < 2\pi$ ,  $k = 1, \dots, m$ , что при каждом  $k$ ,  $1 \leq k \leq m$ , существует распрямляющее отображение  $L_k$  на замкнутую выпуклую кривую  $L_k \subset K_{\alpha_k}$ , причем

$$\sum_{k=1}^m (2\pi - \alpha_k) \leq C(M) < \infty.$$

Тогда  $M$  многообразие ограниченной кривизны и

$$\omega^+(M) \leq C(M).$$

Доказательство теоремы 1 (сравните с [8]). Согласно леммам 3, 4 поверхность  $F$  метрически связна и метрика  $\rho_F$  индуцирует на  $F$  ее исходную топологию.

Пусть  $\Delta ABC$  — простой геодезический треугольник на  $F$ ; обозначим через  $L$  простую замкнутую кривую, составленную из кратчайших  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$ , а через  $G$  — область на  $F$ , ограниченную  $L$ .

В лемме 2 возьмем в качестве поверхности  $F$  область  $G$  и пусть  $\{F_k\}$ ,  $\{\varphi_k\}$  — последовательности поверхностей и гомеоморфизмов, о которых идет речь в лемме 2 и замечании 1 к ней.

Согласно теореме  $A$  существует распрямляющее отображение  $L$  на выпуклую кривую  $\tilde{L}$  на конусе  $K_{\alpha_k}$ , где

$$2\pi - \alpha_k = \omega^+(K_{\alpha_k}) \leq \omega^+(F_k). \quad (8)$$

Выбирая из последовательностей  $\{\alpha_k\}$ ,  $\{K_{\alpha_k}\}$ ,  $L_k$  сходящиеся подпоследовательности, нетрудно установить, что существует распрямляющее отображение кривой  $L$  на выпуклую кривую  $\tilde{L}$  на конусе  $K_\alpha$ , где  $\alpha$  — предел чисел  $\alpha_k$  для выбранной подпоследовательности. Согласно замечанию 1 к лемме 2 из неравенства (8) следует, что

$$2\pi - \alpha = \omega^+(K_\alpha) \leq \mu^+(G).$$

Пусть  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{B}$ ,  $\tilde{C}$  — точки на  $\tilde{L}$ , соответствующие вершинам треугольника  $ABC$ . Тогда участки  $\tilde{A}\tilde{B}$ ,  $\tilde{B}\tilde{C}$ ,  $\tilde{C}\tilde{A}$  кривой  $\tilde{L}$  — кратчайшие на  $K_\alpha$ . По теореме Гаусса-Бонне

$$\tilde{\delta} \leq \omega^+(K_\alpha) \leq \mu^+(G),$$

где  $\tilde{\delta}$  — избыток треугольника  $\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}$ . Избыток треугольника  $ABC$ , измеренный в метрике  $\rho_G$ , не превосходит  $\tilde{\delta}$ , тем более

$$\delta \leq \mu^+(G),$$

где  $\delta$  — избыток  $ABC$  в метрике  $\rho_F$ .

Из доказанного следует, что для любого конечного набора  $\Delta_1, \dots, \Delta_k$  попарно непересекающихся простых геодезических треугольников на  $F$  имеем

$$\sum_{i=1}^k \delta(\Delta_i) \leq \mu^+(F).$$

Отсюда следует [2, стр. 9, 129], что  $F$  — двумерное многообразие ограниченной кривизны, причем

$$\omega^+(F) \leq \mu^+(F).$$

Теорема доказана.

### § 3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ЛЕММ 1—4

**Лемма 5.** Площадь  $\sigma$  сферического образа множества  $M$  особых опорных плоскостей поверхности  $F$  равна нулю.

Доказательство. Пусть  $M$  — множество всех особых опорных плоскостей и  $P \in M$  — особая опорная плоскость к  $F$ , в точке  $X_P$ . Обозначим через  $U(X_P)$  окрестность точки  $X_P$ , лежащую по одну сторону от  $P$ , и выберем число  $r$  так, чтобы граница  $U(X_P)$  лежала вне шара  $S(X_P, r_P)$ .

Пусть  $M_{nk}$  — такое подмножество  $M$ , что при  $P, R \in M_{nk}$  имеем  $d(X_P, X_R) < \frac{1}{2n}$ ,  $r > \frac{1}{n}$ . Подмножества  $M_{nk}$  можно выбрать так, что  $\bigcup_{k=1}^{\infty} M_{nk} = M$ . Поэтому достаточно показать, что  $\sigma(M_{nk}) = 0$ .

Пусть  $S\left(X_R, \frac{1}{2n}\right)$  — шар с центром в фиксированной точке  $X_R$ ,  $R \in M_{nk}$ . Тогда при  $P \in M_{nk}$ ,  $X_P \in S\left(X_R, \frac{1}{2n}\right)$  и  $S(X_P, r_P) \supset S\left(X_R, \frac{1}{2n}\right)$ . Положим  $E = U(X_P) \cap S\left(X_R, \frac{1}{2n}\right)$ . Натянем на  $E$  выпуклую оболочку  $\hat{E}$ . В силу выбора шара  $S\left(X_R, \frac{1}{2n}\right)$  каждая плоскость  $P \in M_{nk}$  является особой опорной плоскостью к выпуклому телу  $\hat{E}$ . Как известно [11, стр. 156], сферический образ множества таких плоскостей имеет меру нуль.

**Лемма 6.** Функция  $n_G^+(p)$  измерима для любого открытого множества  $G$ .

Доказательство. Нам надо доказать измеримость множеств  $s_k = \{p : p \in S_0, n_G^+(p) \geq k\}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Пусть  $s$  — сферический образ множества особых опорных плоскостей к  $F$ . Если  $p \in s_k \setminus s$ , то существуют плоскости  $P_1, \dots, P_k$ , которые имеют направление  $p$  и являются строго спорными к  $F$  в точках  $X_1, \dots, X_k$  множества  $G$ . Возьмем столь малые окрестности  $U_i$  точек  $X_i$ , что множества  $U_i$  попарно не пересекаются и каждое из них лежит по одну сторону от соответствующей плоскости  $P_i$ . Тогда при каждом  $i$  найдется плоскость  $\tilde{P}_i$ , такая, что граница компоненты  $K_i$  множества  $U_i \setminus P_i$ , содержащей  $X_i$ , лежит в плоскости  $\tilde{P}_i$ . Ясно, что  $K_i$  имеет опорные плоскости всех направлений, близких к  $p$ . Следовательно, каждая точка  $p \in s_k \setminus s$  имеет на  $S_0$  окрестность, принадлежащую  $s_k \cup s$ . Отсюда, ввиду  $\sigma(s) = 0$  (лемма 5), следует измеримость  $s_k$ .

Доказательство леммы 1. Пусть  $\{G_i\}$  — такая последовательность открытых множеств, что  $G_{i+1} \subset G_i$  и  $\bigcap G_i = E$ .

Тогда  $n_{G_i}^+(p) \rightarrow n_E^+(p)$  при всех  $p$ , так что функция  $n_E^+(p)$  измерима. Далее,  $n_{G_i}^+(p) \leq n_F^+(p)$  при всех  $p$ , причем  $\int_{S_0} n_F^+(p) d\sigma_p < \infty$ . Следовательно, по теореме Лебега,

$$\mu^+(G_i) = \int_{S_0} n_{G_i}^+(p) d\sigma_p \rightarrow \int_{S_0} n_E^+(p) d\sigma_p. \quad (9)$$

С другой стороны, так как  $n_{E_1}^+(p) \geq n_{E_2}^+(p)$  при  $E_1 \supset E_2$ , то, ввиду (2), последовательность  $\{G_i\}$  всегда можно выбрать так, что

$$\mu^+(G_i) \rightarrow \mu^+(E),$$

что вместе с (9) доказывает (4).

Для доказательства леммы 2 нам понадобятся следующие утверждения.

**Лемма 7.** Пусть  $F$  — локально-выпуклая поверхность, взаимно-однозначно проектирующаяся в плоскость  $Q$ , и пусть граница  $F$  содержит кривую  $L$ , проекция  $L'$  которой имеет конечную вариацию поворота. Если при этом углы между опорными плоскостями к  $F$  и плоскостью  $Q$  ограничены сверху числом  $\theta < \frac{\pi}{2}$ , то кривая  $L$  имеет конечную вариацию поворота на поверхности  $F$ .

**Доказательство.** Пусть кривые  $L_k \subset F$  сходятся к  $L$ , причем  $\text{var } \tau(L'_k) \rightarrow \text{var } \tau(L')$ . Такая последовательность кривых существует. Вариация поворота\*  $\text{var } \tau(L_k)$  кривой  $L_k$  на поверхности  $F$  не превосходит  $\pi + m(\theta) \text{var } \tau(L'_k)$ , где  $m(\theta)$  зависит лишь от  $\theta$ . Эта оценка фактически получена, например, в [12], в ходе доказательства теоремы 1,3 из § 3.

Переходя к пределу при  $k \rightarrow \infty$ , видим, что  $L$  — кривая с конечной вариацией поворота на  $F$ , причем

$$\text{var } \tau(L) \leq \pi + m(\theta) \text{var } \tau(L').$$

**Лемма 8.** Пусть поверхность  $F$  взаимно-однозначно проектируется в плоскость  $Q$ , а кривые  $l_i$  с началом в общей точке  $O$ , занумерованные циклически ( $i = 1, 2, \dots, k$ ), разбивают  $F$  на области  $F_i$  так, что граница  $F_i$  состоит из  $l_i, l_{i+1}$ , точки  $O$  и участка границы  $F$ . Предположим, что проекции кривых  $l_i$  — выпуклые кривые  $l'_i$ , а каждая поверхность  $F_i$  — локально выпукла (вверх или вниз). Если при этом углы, образованные опорными плоскостями к  $F_i$  с плоскостью  $Q$ , не превосходят числа  $\phi < \frac{\pi}{2}$ , то поверхность  $F$  имеет в точке  $O$  касательный конус  $K$ , а по своей внутренней геометрии является многообразием ограниченной кривизны, причем

$$\theta = 2\pi - \omega(O), \quad (10)$$

где  $\theta$  — полный угол вокруг вершины  $K$ .

**Доказательство.** Поверхности  $F_i$  являются многообразиями неотрицательной кривизны, а каждая кривая  $l_i$  имеет, по лемме 7, конечные вариации поворота на соответствующих поверхностях  $F_{i-1}$  и  $F_i$ . По теореме о склеивании [2, § 3 гл. IX]  $F$  — многообразие ограниченной кривизны.

Существование касательного конуса  $K$  к  $F$  в точке  $O$  и равенство (10) доказываются так же, как и для выпуклой поверхности [11, § 5 гл. IV и § 1 гл. IX].

**Лемма 9.** Пусть поверхность  $F$  взаимно-однозначно проектируется в плоскость  $Q$ , а кривая  $l$  разбивает  $F$  на две части,  $F_1$  и  $F_2$ , причем проекция  $l'$  кривой  $l$  выпукла (не обязательно строго) в сторону  $F_2$ ; поверхность  $F_1$  выпукла вверх, а поверхность  $F_2$  локально выпукла вниз. Если при этом а) опорные плоскости к  $F_1$  и  $F_2$  образуют с  $Q$  углы, не превосходящие  $\beta < \frac{\pi}{2}$ , б) поверхность  $F$  не допускает отсекания верхних горбушек, в) поверхность  $F_2$  не допускает отсекания нижних горбушек, то  $\omega^+(l) = 0$ .

**Доказательство.** По лемме 8  $F$  — многообразие ограниченной кривизны. Пусть  $l_1$  — любая дуга кривой  $l$ , а  $\tau_1(l_1), \tau_2(l_1)$  — повороты соответственно со сторон  $F_1, F_2$ . Обозначим через  $F_1$  верхнюю «поду-

\* Так как  $\text{var } \omega(L_k) \rightarrow 0$ , то безразлично, рассматривать поворот  $L_k$  справа или слева.

выпуклой оболочки множества  $\partial F_1$ . Нетрудно видеть, что  $\hat{\tau}_1(l_1) > \tau_1(l_1)$ , где  $\hat{\tau}_1$  — поворот на  $\hat{F}_1$ .

Если поверхность  $\tilde{F} = \hat{F}_1 \cup l \cup F_2$  — седловая, то, как показано в [8],  $\tilde{F}$  — многообразие неположительной кривизны и  $\hat{\tau}_1(l_1) + \tau_2(l_1) = \omega(l_1) \leq 0$  для любой дуги  $l_1 \subset l$ . Тем более  $\tau_1(l) + \tau_2(l) \leq 0$ , откуда ясно, что  $\omega^+(l) = (\tau_1 + \tau_2)^+(l) = 0$ .

Докажем, что поверхность  $F$  не допускает отсекания горбушек (седловых). Так как поверхность  $F$  не допускает отсекания верхних горбушек, то, как легко видеть, и  $\tilde{F}$  не допускает отсекания верхних горбушек. Допустим, что от  $\tilde{F}$  удалось отсечь нижнюю горбушку  $K$ . Поверхность  $\tilde{F}_2$  — седловая, поэтому  $K' \cap F'_2 \neq \emptyset$ . Но, так как кривая  $l'$  выпукла в сторону  $F'_2$ , то найдется отрезок  $AB$ , концы которого принадлежат  $F'_2$  и проектируются на  $\partial K'$ , а сам отрезок — на  $K' \cap F'_2$ . Отсюда ясно, что поверхность  $F_2$  лежит выше отрезка  $AB$ , что противоречит локальной выпуклости  $F_2$  вниз.

Доказательство леммы 2. Для построения поверхностей  $F_k$  используем идею С. З. Шефеля [8].

1). Пусть поверхности  $F, \tilde{F}$  взаимно-однозначно проектируются на замкнутую область  $D$  плоскости  $Q$  и  $F(X) - \varepsilon < \tilde{F}(X) < F(X)$  при всех  $X \in D$ .

Верхней допустимой горбушкой поверхности  $\tilde{F}$  относительно плоскости  $P$  будем называть наибольшее множество  $D_P \subset D$  такое, что  $F(X) - \varepsilon < P(X) < \tilde{F}(X)$  при  $X \in D_P$  и  $P(X) = \tilde{F}(X)$  при  $X \in \partial D_P$ .

Операцией срезания верхней допустимой горбушки  $D_P$  называется построение поверхности  $\tilde{F}$ :

$$\tilde{F}(X) = \begin{cases} \tilde{F}(X) & \text{при } X \in D \setminus D_P, \\ P(X) & \text{при } X \in D_P. \end{cases}$$

Аналогично определяются нижние допустимые горбушки и операция срезания.

2) Пусть  $\{\Pi_k\}$  — последовательность многограных поверхностей, удовлетворяющих условиям 1°, 2°, 6° леммы; ясно, что такая последовательность существует.

Пусть  $P^1, P^2, \dots$  — последовательность плоскостей, всюду плотная в множестве всех плоскостей. Рассмотрим последовательность поверхностей  $F^0 = \Pi_k, F^1, F^2, \dots$ , где каждая поверхность  $F^i$  получена из предыдущей срезанием верхней допустимой горбушки соответствующей плоскостью  $P^i$ . («Допустимость» горбушек берется по отношению к поверхностям  $z = F(X') - \varepsilon_k, z = F(X'), X' \in \Pi'_k$ .

Последовательность поверхностей  $F^i$  сходится равномерно к некоторой поверхности  $F_k^*$ , не допускающей срезания верхних допустимых горбушек, — доказательство аналогично [8]. Ясно, что  $F - \varepsilon_k < F_k^* < F$  и  $\partial F_k^* = \partial \Pi_k$ . Применяя к  $F_k^*$  аналогичную процедуру для нижних горбушек, получим поверхность  $F_k$ , не допускающую срезания ни верхних, ни нижних допустимых горбушек (сравним с [8]).

3) Ясно, что построенная так поверхность  $F_k$  удовлетворяет условиям 1°, 2°, 6°. Проверим, что условия 3°—5° для последовательности  $(F_k)$  также выполняются.

Введем обозначения  $\tilde{E}_k = \{X_k: X_k \in F_k, X'_k = X', \text{ где } X \in E \subset F\}$ ,

$$H_k^+ = \{X': X' \in \Pi'_k, F_k(X') = F(X')\},$$

$$H_k^- = \{X': X' \in \Pi'_k, F_k(X') = F(X') - \varepsilon_k\}.$$

Если плоскость  $P$  является строго опорной к  $F_k$  в точке  $X$ , то либо  $X' \in H_k^+$  и тогда плоскость  $P$  — строго опорная к  $F$  в точке  $\tilde{X}$ , либо  $X' \in H_k^-$  и тогда  $P$  — строго опорная к  $F - \varepsilon_k$  в  $X$ . Так как  $H_k^+ \cap H_k^- = \emptyset$ , то отсюда ясно, что

$$n_{G_k}^+(p) \leq n_G^+(p) \quad (11)$$

для любого открытого множества  $G \subset F$  и точки  $p \in S_0$ . Следовательно,

$$\mu^+(\tilde{E}_k) \leq \mu^+(E)$$

для любого борелевского множества  $E \subset F$ . В частности, справедливо утверждение 3° леммы.

4) Пусть теперь  $G$  — открытое подмножество  $F$  такое, что при некотором  $k_0$   $G' \subset \bigcap_{k=k_0}^{\infty} F_k'$  и  $p \in S_0$ . Пусть  $n_G^+(p) \geq m$ . Легко видеть, что тогда при всех достаточно больших  $k$   $n_{G_k}^+(p) \geq m$ . Ввиду (11) это означает, что  $n_{G_k}^+(p) \rightarrow n_G^+(p)$  при всех  $p \in S_0$ . При  $\mu^+(F) < \infty$  отсюда и из (11) по теореме Лебега получаем утверждение 4°.

5) Перейдем к доказательству утверждения 5°. Рассмотрим множества  $G_k^+ = \{X' : F_k > \Pi_k\}$ ,  $G_k^- = \{X' : F_k^* < \Pi_k\} \setminus \overline{G_k^+}$ .

Пусть  $F_k^+$ ,  $F_k^-$ ,  $F_k^0$  — части поверхности  $F_k$ , лежащие соответственно над  $G_k^+$ ,  $G_k^-$ ,  $\Pi_k^0 = \Pi_k' \setminus (G_k^+ \cup G_k^-)$ . Перечислим некоторые свойства поверхностей  $F_k^+$ ,  $F_k^-$ ,  $F_k^0$ . Эти свойства легко могут быть получены обобщением соответствующих рассуждений в [8]. Каждое из множеств  $G_k^-$ ,  $G_k^+$ ,  $G_k^0$  ограничено конечным числом выпуклых дуг. (Мы считаем везде в дальнейшем, что на дуге нет точки, являющейся предельной для всех трех множеств. Дуги могут вырождаться в прямолинейный отрезок, точку или быть замкнутыми). Причем, если дуга  $l'$  принадлежит общей границе  $G_k^+$  и  $G_k^-$ , то она выпукла внутрь  $G_k^+$ , а если дуга  $l'$  принадлежит границе  $G_k^+$  или  $G_k^-$  с  $G_k^0$ , то она выпукла внутрь  $G_k^+$ ,  $G_k^-$ , соответственно.

Наконец, поверхность  $F_k^+$  локально выпукла вниз,  $F_k^-$  локально выпукла вверх, а  $F_k^0$  является многогранной поверхностью, частью  $\Pi_k$ ; поверхность  $F_k$  удовлетворяет условию Липшица и ее константа Липшица не больше, чем для  $\Pi_k$ .

6) По лемме 8 поверхность  $F_k$  является многообразием ограниченной кривизны. Установим равенство (7). Рассмотрим следующие три множества:

- a)  $L = F_k^+ \cup \text{int } F_k^-$ ,
- b)  $M = \{\tilde{X}_k : \tilde{X}_k \in F_k, F(X') - \varepsilon_k < F_k(X') < F(X')\}$ ,
- c)  $N = \partial F_k^-$ .

Поскольку множества  $L$ ,  $M$ ,  $N$  являются множествами типа  $G_\delta$  и  $L \cup M \cup N = F$ , то, согласно следствию леммы 1, равенство (7) достаточно установить лишь для малых множеств типа  $G_\delta$ , каждое из которых содержится в одном из множеств  $L$ ,  $M$ ,  $N$ .

a) Пусть  $E \subset L$ . Тогда равенство (7) следует из теоремы Гаусса для выпуклой поверхности [11].

b) Далее, по построению  $F_k$ ,  $\mu^+(M) = 0$ . Поверхность  $M$  не допускает отсечения горбушек, следовательно, по теореме Шефеля [8],  $\omega^+(M) = 0$ , т. е.  $\mu^+(\tilde{E}) = \omega^+(E) = 0$  при  $E \subset M$ .

c) Множество  $N$  состоит из конечного числа кривых  $A_i A_{i+1}$ , проектирующихся на  $Q$  в выпуклые внутрь  $F_k^-$  дуги, и из граничных точек  $A_i$  этих кривых.

Поверхность  $F_k$ , по построению, не имеет в точках  $N$  строго опорных точек, так что  $\mu^+(N) = 0$ . Отсюда следует также, что полный угол  $\lambda_k$  вокруг вершины касательного конуса к  $F$  в точке  $A_i$  не менее, чем  $2\pi$ , и по лемме 8,  $\omega(A_i) = 2\pi - \theta_i < 0$ . Для каждой из дуг  $\widehat{A_i A_{i+1}}$  выполняются условия леммы 9, следовательно  $\omega^+(\widehat{A_i A_{i+1}}) = 0$ . В итоге, используя следствие леммы 1, получаем

$$\omega^+(N) = \mu^+(N) = 0.$$

**Лемма 2** доказана.

**Лемма 10.** Пусть поверхность  $F$  взаимно-однозначно проектируется в плоскость  $Q$ , ограничена спрямляемой кривой  $L$  и  $\mu^+(F) < 2\pi$ . Тогда  $F$  метрически связна.

Действительно, аппроксимируем  $F$  поверхностями  $F_k$  с границами  $L_k$ , о которых идет речь в лемме 2. Пусть  $X, Y \in F$ ,  $X_k, Y_k \in F_k$  и  $X_k \rightarrow X$ ,  $Y_k \rightarrow Y$ . Длина кратчайшей  $\lambda_k$  на  $F_k$ , соединяющей точки  $X_k, Y_k$ , не превосходит  $s(L_k) \left[1 + \cos \frac{1}{2} \omega^+(F_k)\right]^{-1}$ . Выберем подпоследовательность, для которой кривые  $\lambda_k$  сходятся к некоторой кривой  $\lambda$ , соединяющей на  $F$  точки  $X$  и  $Y$ . Имеем

$$\rho_F(X, Y) \leq s(\lambda) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} s(\lambda_k) \leq s(L) \left[1 + \cos \frac{\mu^+(F)}{2}\right]^{-1}.$$

**Доказательство леммы 3.** Каждая точка поверхности с конечной площадью имеет сколь угодно малые окрестности, ограниченные спрямляемыми кривыми, например, [14, § 20, п. 2, 5]. Пусть  $E(X)$  — окрестность точки  $X \in F$ , ограниченная спрямляемой кривой и такая, что  $\mu^+[E(X)] < 2\pi$ . Согласно лемме 10, поверхность  $E(X)$  — метрически связна. Отсюда следует метрическая связность  $F$ .

**Лемма 11.** Пусть поверхность  $F$  взаимно-однозначно проектируется в плоскость  $Q$  и пусть  $D$  — двугранильник на  $F$ , ограниченный двумя кратчайшими  $l^1, l^2$ , соединяющими точки  $A, C$ . Если при этом  $\mu^+(D) \leq \delta < \pi$ , то для любой точки  $B \in D$  имеем

$$\rho_F(A, B) + \rho_F(B, C) \leq \cos^{-1} \frac{\delta}{4} \rho_F(A, C). \quad (12)$$

**Доказательство.** Пусть  $\{D_k\}$  — последовательность поверхностей аппроксимирующих  $D$ , как это указано в лемме 2. Пусть точкам  $A, B, C$  и кратчайшим  $l^1, l^2$  соответствуют на  $D_k$  точки  $A_k, B_k, C_k$  и кривые  $l_k^1, l_k^2$ . Обозначим через  $A_k B_k, B_k C_k$  кратчайшие пути в  $D_k$ , соединяющие  $A_k$  с  $B_k$  и  $C_k$  с  $B_k$ .

Из теоремы 5 [13] следует, что

$$s(A_k B_k) + s(B_k C_k) \leq \max[s(l_k^1), s(l_k^2)] \cos^{-1} \frac{\omega^+(D_k)}{2}.$$

Переходя к пределу при  $k \rightarrow \infty$ , получим утверждение леммы.

**Доказательство леммы 4.** Ясно, что утверждение леммы равносильно следующему: если  $A, A_k \in F$  и  $d(A, A_k) \rightarrow 0$ , то  $\rho_F(A, A_k) \rightarrow 0$ .

Допустим, что нашлась такая последовательность  $\{A_k\}$ , что  $A \in F$ ,  $d(A, A_k) \rightarrow 0$  и  $\rho_F(A, A_k) > \varepsilon > 0$ . Пусть  $V$  — окрестность точки  $A$ , ограниченная спрямляемой кривой  $l$  и столь малая, что  $\mu^+(V \setminus A) < \delta < \pi$ , где число  $\delta$  можно взять сколь угодно малым. Рассмотрим метрику  $\rho_V$ , индуцируемую в замкнутой области  $\bar{V}$  метрикой  $\rho_F$ . Кривая  $l$  спрямляема, поэтому область  $V$  в метрике  $\rho_V$  метрически связна. Ввиду компактности  $\bar{V}$

$$C = \sup_{X, Y \in \bar{V}} \rho_V(X, Y) < \infty. \quad (13)$$

Так как  $d(A_k, A) \rightarrow 0$ , то для всех достаточно больших  $k$  точки  $A_k \in V$ . Каждая точка  $A_k$  лежит либо в двуугольнике, ограниченном двумя кратчайшими соединениями  $A$  с некоторой точкой  $X_k \in l$ , либо на кратчайшей  $AX_k$ ,  $X_k \in l$ . В первом случае по лемме 11 имеем

$$\rho_V(A_k, A) + \rho_V(A_k, X_k) \leq \cos^{-1} \frac{\delta}{4} \rho_V(A, X_k). \quad (14)$$

Это же неравенство, очевидно, справедливо и во втором случае. Так как  $\rho_V(A_k, A) \geq \rho_F(A_k, A) \geq \varepsilon$ , то из неравенства (14) следует, что

$$\rho_V(X_k, A_k) + \varepsilon \leq \cos^{-1} \frac{\delta}{4} \rho_V(A, X_k). \quad (15)$$

Длины кратчайших  $A_k X_k$ ,  $AX_k$  ограничены сверху числом  $C < \infty$ . Поэтому можно выбрать подпоследовательность, для которой кратчайшие  $A_k X_k$ ,  $AX_k$  сходятся (как кривые пространства  $R^3$ ) к некоторым предельным кривым. При этом  $d(A, A_k) \rightarrow 0$ , то есть  $A_k \rightarrow A$ . Обозначим через  $X$  предельную точку последовательности  $\{X_k\}$ ,  $X \in l$ . Введем еще обозначения для кривых:

$$l_1(A, X) = \lim_{k \rightarrow \infty} A_k X_k, \quad l_2(A, X) = \lim_{k \rightarrow \infty} AX_k.$$

Как известно,

$$s(l_1(A, X)) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} s(A_k X_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \rho_V(A_k, X_k).$$

Что касается длины  $l_2(A, X)$ , то точки  $X_k X$  лежат на спрямляемой кривой  $l$ . Поэтому  $X_k \rightarrow X$  в метрике  $\rho_V$ . И так как  $X_k A$  — кратчайшая, то отсюда следует, что  $l_2(A, X)$  — кратчайшая, причем

$$\rho_V(A, X) = s(l_2(A, X)) = \lim_{k \rightarrow \infty} s(A, X_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \rho_V(A, X_k).$$

Поэтому, переходя в (15) к пределу при  $k \rightarrow \infty$ , получим

$$s(l_1(A, X)) + \varepsilon \leq \cos^{-1} \frac{\delta}{4} \rho_V(A, X).$$

Так как  $\rho_V(A, X) \leq s(l_1(A, X)) \leq C$ , то отсюда следует, что

$$\cos \frac{\delta}{4} \leq C(C + \varepsilon)^{-1}.$$

Последнее неравенство противоречит тому, что число  $\delta$  может быть выбрано произвольно малым.

*Замечание.* Требование метрической связности  $F$  в лемме 8 можно заменить предположением, что из каждой точки  $X \in F$  такой, что  $\mu^+(X) = 2\pi$ , исходит спрямляемая кривая (см. лемму 10).

#### § 4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2

**Лемма 13.** Пусть на множестве  $D$  заданы метрики  $\rho$ ,  $\rho_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , причем пространство  $(D, \rho)$  — компактное и полное. Если при этом  $\rho_k \rightarrow \rho$  при  $k \rightarrow \infty$  и

$$\rho_k(X, Y) \leq \rho(X, Y) + \varepsilon_k,$$

где  $\varepsilon_k$  не зависит от  $X, Y \in D$  и  $\varepsilon_k \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ , то метрики  $\rho_k$  сходятся к  $\rho$  равномерно в  $D$ .

**Доказательство.** Допустим, что утверждение леммы не имеет противоречий, т. е. для некоторого  $\varepsilon > 0$  найдется последовательность пар  $(X_k, Y_k)$  таких, что

$$\rho(X_k, Y_k) - \rho_k(X_k, Y_k) > \varepsilon. \quad (16)$$

Можно считать, что в метрике  $\rho$   $X_k \rightarrow X, Y_k \rightarrow Y, X, Y \in D$ . Пусть  $k$  сколь велико, что  $\varepsilon_k < \frac{1}{6}\varepsilon$  и

$$\rho_k(X, X_k) < \frac{1}{6}\varepsilon, \quad \rho(Y, Y_k) < \frac{1}{6}\varepsilon. \quad (17)$$

Тогда, по условию леммы

$$\rho_k(X, X_k) < \frac{1}{6}\varepsilon, \quad \rho_k(Y, Y_k) < \frac{1}{6}\varepsilon. \quad (18)$$

Так как  $\rho_k \rightarrow \rho$ , то при достаточно большом  $k$   $|\rho(X, Y) - \rho_k(X, Y)| < \frac{1}{6}\varepsilon$ .

Поэтому из (17), (18) и неравенства треугольника получаем

$$\begin{aligned} |\rho(X_k, Y_k) - \rho_k(X_k, Y_k)| &\leq |\rho(X, Y) - \rho_k(X, Y)| + \\ &+ \rho(X, X_k) + \rho(Y, Y_k) + \rho_k(X, X_k) + \rho_k(Y, Y_k) < \frac{1}{6}\varepsilon, \end{aligned}$$

что противоречит (16).

**Доказательство теоремы 2. A.** Пусть указанная в теореме последовательность многогранников существует, и допустим, что нашлась последовательность точек  $X^i \in F$  такая, что  $X^i \rightarrow X$  в топологии  $R^3$  и  $\rho_F(X^i, X) \geq \varepsilon > 0, i = 1, 2, \dots$ . Тогда для достаточно больших  $k$  при всех  $i$

$$\rho_{\Pi_k}(\varphi_k(X^i), \varphi_k(X)) \geq \frac{1}{2}\varepsilon.$$

С другой стороны,  $X^i \rightarrow X$ , следовательно  $\varphi_k(X^i) \rightarrow \varphi_k(X)$  в топологии  $\Pi_k$ , значит,  $\lim_{i \rightarrow \infty} \rho_{\Pi_k}(\varphi_k(X^i), \varphi_k(X)) = 0$ , что противоречит последнему неравенству.

B. 1°. Пусть метрика  $\rho$  индуцирует на  $F$  структуру многообразия. Как следует из леммы 13, достаточно показать, что по любому  $\varepsilon > 0$  найдется такая многогранная поверхность  $\Pi$ , взаимно-однозначно проектирующаяся в плоскость  $Q$ , и такой гомеоморфизм  $\varphi : F \xrightarrow{\text{на}} \Pi$ , что

$$d(X, \varphi(X)) < \varepsilon, \quad X \in F, \quad (19)$$

$$\rho_{\Pi}(\varphi(X), \varphi(Y)) \leq \rho_F(X, Y) + \varepsilon, \quad X, Y \in F. \quad (20)$$

2°. Выберем число  $\delta$ ,  $0 < \delta < \frac{1}{4}\varepsilon$ , так, чтобы из  $d(X', Y') < 2\delta$  следовало  $|F(X') - F(Y')| < \frac{1}{2}\varepsilon$ .

3°. Нетрудно видеть, что для каждой точки  $X \in F$  найдется сколь угодно малая окрестность  $V(X)$ , ограниченная ломаной  $M_X$  из кратчайших в метрике  $\rho_F$ . Если же  $X \in \partial F$ , то найдется сколь угодно малая полуокрестность  $V(X)$  точки  $X$ , ограниченная участком границы  $F$  и ломаной  $M_X$  с концами на  $\partial F$ . В дальнейшем мы будем, для краткости, такую полуокрестность называть просто окрестностью. Все эти окрестности можно выбрать так, что для любых двух точек  $Y, Z \in V(X)$ ;  $\rho_F(Y, Z) < \delta$ . Вершины ломаной  $M_X$  считаем расставленными столь густо, что расстояние между соседними вершинами меньше, чем  $\delta$ .

4°. Из окрестностей  $V(X)$  выделим конечный набор, образующий покрытие  $\bar{F}$ . В этот набор заведомо включим окрестности всех вершин геодезической ломаной  $\Lambda$ .

Обозначим через  $A$  множество точек, состоящее из центральных точек выделенных окрестностей и всех вершин соответствующих ломаных  $M_X$ . Соединим каждые две точки из  $A$  кратчайшей в метрике  $\rho_F$ .

Можно считать, что система кратчайших, соединяющих точки из  $A$ , не имеет лишних пересечений (т. е. любые две кратчайшие, имеющие общие точки  $X, Y$ , совпадают на участке  $XY$ ) и области, на которые эти кратчайшие разбивают  $F$ , таковы, что любые две точки одной области удалены друг от друга в метрике  $\rho_F$  не более, чем на  $\delta$  (сравним с  $3^\circ$ ).

Пусть множество  $B$  включает в себя  $A$ , а также все точки, в которых пересекаются или разветвляются кратчайшие построенной системы. Каждую точку из  $B$  соединим кратчайшей с ближайшей к ней точкой из  $A$ , избегая при этом лишних пересечений кратчайших и не меняя уже построенных кратчайших. Обозначим через  $C$  множество, состоящее из  $A$  и всех точек пересечения и разветвления построенных кратчайших, а через  $\Sigma$  — множество всех проведенных кратчайших. Заметим, что звенья ломаной  $\Lambda$  входят в  $\Sigma$ .

5°. Ясно, что для любой вершины  $X \in C$  найдется вершина  $Y \in A$  такая, что в системе  $\Sigma$  существует кратчайшая  $XY$  (длина которой, очевидно, не превосходит  $\delta$ ).

Кратчайшие системы  $\Sigma$  разбивают  $F$  на конечное число областей  $T_i$ , каждая из которых ограничена ломаной из конечного числа звеньев. Длина каждого звена ломаной меньше  $\delta$ . Это следует из того, что каждое звено умещается в некоторой окрестности  $V(X)$ . Диаметр каждой области  $T_i$  в метрике  $\rho_F$  также меньше  $\delta$ .

6°. Спроектируем полученную сеть на плоскость  $Q$ . Каждое звено плоской сети заменим вписанной в него ломаной с теми же концами. Эти ломаные можно провести так, чтобы сеть из ломаных была топологически эквивалентна исходной сети, а каждая ломаная отходила от соответствующего звена криволинейной сети не более, чем на  $\delta$ .

Пусть  $T'_i$  — проекция  $T_i$  на  $Q$ , а  $Q'_i$  — соответствующая область в плоской сети из ломаных. Диаметр каждого многоугольника  $Q'_i$  не превосходит  $3\delta$ . Разобьем каждый многоугольник  $Q'_i$  на треугольники  $t'_{ij}$  не пересекающимися диагоналями. Обозначим через  $t'_{ij}$  треугольник с вершинами на  $F$ , проектирующийся в  $t'_{ij}$ , и рассмотрим многогранную поверхность  $\Pi$ , составленную из треугольников  $t'_{ij}$ .

7°. Покажем, что поверхность  $\Pi$  удовлетворяет условиям (19), (20).  
Рассмотрим гомеоморфизм  $\varphi : F \xrightarrow{\text{на}} \Pi$ , тождественный на точках  $C$  и такой, что  $\varphi(T_i) = Q'_i$  при всех  $i$ . Такое отображение очевидно существует.

Пусть  $X \in F$  и точка  $\varphi(X) = X'_1$  принадлежит треугольнику  $t'_{ij} \subset \Pi$  и проектируется в точку  $X'_1 \in Q'_i$ . Ясно, что найдутся такие вершины  $Y'_1, Y'_2$  треугольника  $t'_{ij}$ , что

$$F(Y'_1) = \Pi(Y'_1) \leq \Pi(X'_1) \leq \Pi(Y'_2) = F(Y'_2). \quad (21)$$

Так как  $X' \in T'_i$ ,  $Y'_k \in Q'_i$ ,  $k = 1, 2$ , то  $d(X', Y'_k) \leq 2\delta$ .  
Следовательно,

$$|F(Y'_k) - F(X')| \leq \frac{1}{2}\varepsilon, \quad k = 1, 2.$$

Отсюда и из (21) имеем

$$|\Pi(X'_1) - F(X')| \leq \frac{1}{2}\varepsilon,$$

что, виду  $d(X'_1, X') \leq 2\delta > \frac{1}{2}\varepsilon$ , дает

$$d(\varphi(X), X) \leq \sqrt{\left(\frac{1}{2}\varepsilon\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\varepsilon\right)^2} < \varepsilon.$$

Тем самым условие (19) выполнено.

**8°.** Перейдем к оценке (20). Заметим, что если  $X \in A$ ,  $Y \in C$ , то

$$\rho_{\Pi}(X, Y) \leq \rho_F(X, Y). \quad (22)$$

Действительно, кратчайшая в метрике  $\rho_F$ , соединяющая  $X$  и  $Y$ , входит в систему  $\Sigma$ , следовательно, на  $\Pi$  лежит ломаная, вписанная в эту кратчайшую, и уже длина этой ломаной не превосходит  $\rho_F(X, Y)$ .

Пусть теперь точка  $X$  не принадлежит  $C$ . Обозначим через  $Y$  одну из вершин того треугольника  $t_{ij}$ , которому принадлежит точка  $\varphi(X)$ . Через точку  $Y$  проходит некоторое звено сети, входящее в границу  $T_i$ . Пусть  $Z$  — один из концов этого звена;  $Z \in C$ . Точки  $X$  и  $Z$  лежат в одном многоугольнике  $T_i$ . Поэтому

$$\rho_F(X, Z) < \delta. \quad (23)$$

Также,

$$\rho_{\Pi}(\varphi(X), Y) = d(\varphi(X), Y) \leq \operatorname{diam} t_{ij} \leq 3\delta. \quad (24)$$

Наконец, точку  $Y$  соединяет на  $\Pi$  с  $Z$  ломаная, вписанная в кратчайшую  $YZ$  на  $F$ . Поэтому

$$\rho_{\Pi}(Y, Z) \leq \rho_F(Y, Z) \leq \operatorname{diam} T_i \leq \delta. \quad (25)$$

Согласно 5° для точки  $Z \in C$  найдется точка  $S \in A$  такая, что  $\rho_F(Z, S) < \delta$ .

Отсюда и из (23)–(25), учитывая (22), получим

$$\rho_{\Pi}(\varphi(X), S) \leq 5\delta, \quad \rho_F(X, S) \leq 2\delta. \quad (26)$$

9°. Пусть теперь  $X_1, X_2$  — какие-либо точки  $F$ . Согласно 8° найдутся точки  $S_1, S_2 \in A$  такие, что

$$\rho_{\Pi}(\varphi(X_i), S_i) \leq 5\delta, \quad \rho_F(X_i, S_i) \leq 2\delta, \quad i = 1, 2. \quad (27)$$

При этом, виду (22),

$$\rho_{\Pi}(S_1, S_2) \leq \rho_F(S_1, S_2) \quad (28)$$

сравнивая (27) с (28), получим

$$\rho_{\Pi}(\varphi(X_1), \varphi(X_2)) \leq \rho_F(X_1, X_2) + 14\delta.$$

Теорема доказана.

### § 5. ВОПРОСЫ

1°. Как и в [8], требование, чтобы поверхность  $F$  допускала локально ~~ное~~ задание, по-видимому, лишнее. Так ли это?

2°. Из доказательства теоремы 1 видно, что в ее формулировке требования конечности площади  $F$  и отсутствия точек  $X$ , где  $\rho^+(X) = 2\pi$  можно заменить следующими условиями: а) каждая точка  $F$  имеет сколь угодно малые окрестности, ограниченные спрямляемыми кривыми; б) поверхность  $F$  метрически связна. Условие а) выполняется для любой поверхности с конечной площадью. Справедливость условия б) мы установили, используя все ограничения, входящие в определение класса  $\Phi$ .

Можно ожидать, однако, что условие в) выполняется и при наличии точек  $X$ , для которых  $\mu^+(X) = 2\pi$ . Иными словами, пусть в замкнутом круге  $U$  с выколотым центром  $O$  задана внутренняя метрика  $\rho$  такая, что любая кривая с началом в  $O$  имеет в метрике  $\rho$  бесконечную длину; если метрика  $\rho$  реализована в  $R^3$  в виде поверхности  $F$  с  $\mu^+(F) < \infty$ , то поверхность  $F$  не может быть ограничена. Однако даже при дополнительных предположениях ( $F \in C^1$ , и  $F$  имеет специальную структуру сферического изображения) решение этой задачи, полученное А. Л. Вернером [15], связано с большими трудностями.

3°. Пусть  $F$  — замкнутая поверхность с краем. Обеспечивает ли спрямляемость границы  $F$  (в случае  $\mu^+(F) < \infty$ ) конечность площади  $F$  и ее метрическую связность? Возможно, имеют место оценки такого типа:

$$S(F) \leq f(\mu^+, S, d)^*, \quad D(F) \leq \varphi(\mu^+, S, d).$$

Здесь  $s$  — длина границы  $F$ ,  $d$  — диаметр шара, содержащего  $F$ ,  $S$  — площадь, а  $D$  — внутренний диаметр  $F$  (поверхность  $F$  для простоты считаем гомеоморфной кругу).

Если  $\mu^+(F) < 2\pi$ , то площадь и внутренний диаметр оцениваются из внутренне геометрических соображений [13]. Однако и в этом случае возникает вопрос о связи внешней кривизны с диаметром шара, содержащего  $F$ .

4°. Наконец, каковы свойства отрицательной внешней кривизны  $\mu^-$  поверхности?

Характеристику  $\mu^-$  можно ввести, например, следующим образом. Пусть плоскость  $P$  не является опорной к  $F$  в точке  $X \in P \cap F$  и пусть  $0 < r < R < \infty$ . Обозначим через  $m(R, r)$  число компонент множества  $E = (F \setminus P) \cap [S(X, R) \setminus S(X, r)]$ , имеющих предельные точки как на  $\partial S(X, R)$ , так и на  $\partial S(X, r)$ . Положим

$$k(p, X) = \lim_{R \rightarrow 0} \frac{m(R, r)}{r},$$

$$n_E^-(p) = \sum \left( \frac{1}{2} k(p, X) - 1 \right),$$

где сумма берется по всевозможным парам  $(P, X)$ , состоящим из точки  $X \in E$  и плоскости  $P$  направления  $p$ , проходящей через  $X$ .

Если  $\mu^+(F) < \infty$ , то функция кратности  $n_E^-(p)$  определена для почти всех  $p$ . Измерима ли функция  $n_E^-(p)$ ? (Во всяком случае можно определить  $\mu^-(E)$  как внешний интеграл от  $n^-(p)$ . При таком определении  $\mu^-$  для поверхностей  $F$  с  $\mu^+(F) < \infty$  справедливы теоремы типа 1, 2 из § 4 [1]).

Пусть поверхности  $F_k \rightarrow F$  равномерно. Верно ли неравенство

$$\mu^-(F) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \mu^-(F_k)? \quad (29)$$

Если  $F$  — замкнутая поверхность и  $\mu^+(F) < \infty$ , то при почти всех  $p$  имеет место равенство  $n_F^+(p) - n_F^-(p) = \chi$ . Следовательно,  $\mu^+(F) - \mu^-(F) = 2\pi\chi$ , где  $\chi$  — эйлерова характеристика  $F$ . Поэтому из неравенства (29) следовала бы теорема Гаусса (в форме  $\mu^+(E) - \mu^-(E) = \omega(E)$ ,  $E \subset F$ ) для замкнутой поверхности класса  $\Phi$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Погорелов. Поверхности ограниченной внешней кривизны. Изд-во ХГУ, Харьков, 1956.
2. А. Д. Александров, В. А. Залгаллер. Двумерные многообразия ограниченной кривизны. Труды МИАН СССР, 1962.
3. А. Д. Александров. О поверхностях, представимых разностью выпуклых функций. Изв. АН Казах. ССР, 3, 1949, 3—20.

\* Уже после того, как настоящая заметка была написана, автором получены некоторые результаты такого типа.

- А. Д. Александров. Поверхности, представимые разностями выпуклых  
ДАН СССР, 74, 1950, 613—616.
- Ю. Г. Решетняк. Об одном обобщении выпуклых поверхностей. Матем. сб.,  
1958, 58(100), 381—398.
- И. Я. Бакельман. Дифференциальная геометрия гладких нерегулярных по-  
верхностей. Усп. матем. наук, 11, 2, 1956, 67—124.
- И. Я. Бакельман. Нерегулярные поверхности ограниченной внешней кри-  
вивидности. ДАН СССР, 119, 1958, 632—633.
- С. В. Шефель. О внутренней геометрии седловых поверхностей. Сиб. матем.  
журнал, V. 6, 1964, 1382—1396.
- Ю. Г. Решетняк. Об одном специальном отображении конуса в многооб-  
ъемной ограниченной кривизны. Сиб. матем. журнал, т. 3, вып. 2, 1962, 256—272.
- Ю. Г. Решетняк. К теории пространств кривизны, не большей  $K$ . Матем.  
журнал, 1960, 2, 782—798.
- А. Д. Александров. Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей.  
М.—Л. 1948.
- А. В. Погорелов. Однозначная определенность общих выпуклых поверх-  
ностей. Киев, 1952.
- А. Д. Александров, В. В. Стрельцов. Оценки длины кривой на по-  
верхности. ДАН СССР, 93, 1953, 221—224.
- L. Cesari. Surface area. Princeton, 1956.
- А. Л. Вернер. О внешней геометрии простейших полных поверхностей отри-  
цательной кривизны. Матем. сб. т. 74 вып. 2, 1967, 218—240.

Поступила 6 августа 1967 г.

## ОЦЕНКА ДЕФОРМАЦИИ ВЫПУКЛОЙ ПОВЕРХНОСТИ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ИЗМЕНЕНИЯ ЕЕ ВНУТРЕННЕЙ МЕТРИКИ

Ю. А. Волков (Ленинград)

Известно, что если две замкнутые выпуклые поверхности изометричны, то они равны. В общем случае, т. е. для поверхностей, не подчиненных никаким требованиям регулярности, это доказано А. В. Погореловым [1]. Отсюда уже легко выводится, что две замкнутые выпуклые поверхности сколь угодно близки к равенству, если они достаточно близки к изометрии.<sup>1</sup>

Проблема оценки степени отклонения поверхностей от равенства в зависимости от степени их отклонения от изометрии была поставлена еще в 1936 г. С. Э. Кон-Фоссеном [2]. Некоторая оценка такого рода и устанавливается в настоящей работе<sup>2</sup>. Наши рассуждения не опираются на упомянутый выше результат А. В. Погорелова и потому дают, в частности, новое доказательство однозначной определенности замкнутых выпуклых поверхностей.

Работа состоит из двух глав.

### ГЛАВА I

#### § 1

В первой главе устанавливается оценка деформации выпуклой шапочки, которая, как известно, тоже однозначно определена своей внутренней метрикой. Несмотря на то, что некоторая оценка для шапочек легко выводится из оценки замкнутых поверхностей, представляется полезным начать с шапочек, так как непосредственный вывод дает более точную оценку. Кроме того, предварительный вывод оценки для шапочек позволяет познакомиться со всеми основными идеями предлагаемого доказательства в более простой обстановке.

Замкнутые поверхности рассматриваются во второй главе. Идея предлагаемого вывода состоит в следующем: наряду с двумя данными близкими к изометрии шапочками  $P^0$  и  $P^1$  мы вводим в рассмотрение «смешанные шапочки»  $P^{01}$  и  $P^{10}$ , т. е. просто пары, в первую из которых объединены внутренняя метрика  $S^0$  шапочки  $P^0$  и высоты<sup>3</sup>  $h^1$  шапочки  $P^1$ , а во вторую — внутренняя метрика  $S^1$  шапочки  $P^1$  и высоты  $h^0$  шапочки  $P^0$ . На множестве такого рода «смешанных шапочек» мы определяем некоторую величину  $H$ ; для настоящих шапочек она сводится к интегральной средней кривизне замкнутой поверхности, состоя-

<sup>1</sup> Точные определения близости и степени отклонений от равенства и изометрии приводятся в § 2 глав I и II.

<sup>2</sup> Точная формулировка результата приводится в § 3 глав I и II.

<sup>3</sup> Высоты шапочки — расстояния от ее точек до плоскости, в которой лежит граница шапочки. Эту плоскость мы всегда будем представлять расположенной горизонтально.

наиболее изогнутой шапочки и проекции шапочки на плоскость ее границы. Помимо устанавливаются следующие свойства величины  $H^1$ .

1. При переходе от обычной шапочки  $P$  к любой «смешанной шапочке»  $\tilde{P}$  с той же внутренней метрикой  $H$  всегда убывает, причем эта величина допускает оценку снизу через величину наибольшего из приращений высот изометрических точек шапочек  $P$  и  $\tilde{P}$ .

2. При переходе от обычной шапочки  $P$  к «смешанной» шапочке  $\tilde{P}$  с теми же высотами убыль величины  $H$  допускает оценку сверху через величину, зависящую лишь от взаимного отклонения внутренних метрик шапочек  $P$  и  $\tilde{P}$ .

После этого нужные оценки отклонения высот у двух обычных шапочек  $P^0$  и  $P^1$  с близкими метриками получаются следующим образом: снизу через  $H^0$ ,  $H^1$ ,  $H^{01}$  и  $H^{10}$  значения величины  $H$  соответственно для шапочек  $P^0$ ,  $P^1$ ,  $P^{01}$ ,  $P^{10}$ .

Очевидно,  $(H^0 - H^{01}) + (H^1 - H^{10}) = (H^0 + H^{10}) + (H^1 - H^{01})$ . Далее, по свойству 1 каждая из разностей в левой части этого равенства оценивается снизу через наибольшее из отклонений высот шапочек  $P^0$  и  $P^1$ , а по свойству 2 правая часть допускает оценку сверху через величину отклонения внутренних метрик тех же шапочек. В результате мы и получаем оценку отклонения высот через отклонение метрик.

Очевидно, достаточно получить нужную оценку для многогранных шапочек, так как для общих шапочек оценка после этого получается прямым переходом. Поэтому мы определяем нужные нам понятия, вправило, только для многограных шапочек, хотя не представило бы большого труда дать соответствующие определения в общем случае.

В следующем параграфе (§ 2) приводятся точные определения вводимыми вами понятий и формулируются леммы 1, 2, на которые непосредственно опирается доказательство основного результата первой части работы (теорема 1). Сама же теорема доказывается в § 3. Последующие параграфы посвящены доказательству вспомогательных предложений (леммы 3—9), с помощью которых доказываются и леммы 1—2 (§ 7).

## § 2

Пусть  $P$  — многогранная выпуклая шапочка, через  $S$  будем обозначать любую развертку этой шапочки, а через  $h_i (i = 1, \dots, n)$  — набор высот шапочки, т. е. расстояний от вершин шапочки  $A_i (i = 1, \dots, n)$  до плоскости, в которой лежит граница шапочки.

Говоря о развертке шапочки, мы обычно будем предполагать, не оговаривая этого всякий раз, что развертка эта триангулирована, причем так, что вершины треугольников триангуляции находятся только в «настоящих» вершинах развертки, т. е. только в тех внутренних точках, где кривизна отлична от нуля, и только в тех граничных, где отличен от нуля поворот границы.

Будем говорить, что развертка  $S$  (триангулированная развертка некоторой выпуклой шапочки) вместе с набором чисел  $h_i \geq 0 (i = 1, \dots, n)$ , сопоставленных вершинам этой развертки, образует обобщенную шапочку  $P = (S, h)$ , если выполняются следующие условия:

1) граничным вершинам  $S$  сопоставлены  $h_i = 0$ ,

<sup>1</sup> Чтобы не перегружать изложение несущественными для понимания идеи доказательства деталями, мы допускаем некоторые вольности как в определении смешанной шапочки, так и в формулировке свойств величины  $H$ , точные формулировки даны в §§ 2 и 3.

2) каждый треугольник триангуляции  $S$  можно расположить над (горизонтальной) плоскостью так, что расстояния от вершин треугольника до плоскости совпадут с числами  $h_i$ , сопоставленными этим вершинам. При этом, числа  $h_i$  будем называть высотами обобщенной шапочки  $P$ , а  $S$  — разверткой шапочки. Так как обобщенные шапочки будут основным объектом исследования, то слово «обобщенная» мы будем обычно опускать всюду, за исключением ответственных формулировок.

Если некоторый треугольник  $T$  развертки  $S$  шапочки  $P$  расположить над горизонтальной плоскостью так, чтобы его вершины находились на предписанных высотах, то тем самым определяется высота  $h(A)$  любой точки  $A$  треугольника  $T$ , проекция  $T$  на горизонтальную плоскость и многогранник, составленный отрезками, проектирующими отдельные точки  $T$ . Этот многогранник мы будем называть призмой, проектирующей  $T$ . Впрочем, слово «проектирующая» мы часто будем опускать и говорить просто: призма шапочки  $P$ .

Отметим, что не исключается случай вырождения проектирующей призмы в многоугольник, лежащий в вертикальной плоскости. Склейивание треугольников в развертке  $S$  естественным образом порождает склейивание призм, проектирующих эти треугольники, и склейивание проекций.

Развертку, получающуюся при склеивании проекций треугольников развертки  $S$ , будем называть проекцией развертки  $S$  и обозначать  $\mathcal{S}$ . Хотя некоторые из треугольников, составляющих  $S$ , могут вырождаться в отрезки, но, как показано в [3], доказательство леммы 9], ни одна из сторон этих треугольников в интересующем нас случае выпуклых шапочек не вырождается в точку и потому углы этих треугольников определяются без затруднений. Вместе с тем определены полные углы при всех вершинах развертки  $S$ , а тем самым и ее кривизны.

Под полным двугранным углом обобщенной шапочки при некотором ребре ее развертки  $S$  будем понимать сумму двугранных углов проектирующих призм, подходящих к этому ребру. Обобщенную шапочку назовем выпуклой, если все ее двугранные углы  $\ll \pi$ .

Полной кривизной  $H(P)$  обобщенной шапочки  $P = (S, h)$  будем называть величину  $\sum_i \omega_i h_i + \sum_k (\pi - \alpha_k) l_k$ , где первая сумма распространена на все внутренние вершины  $A_i$  развертки  $S$ , причем  $h_i$  — высота вершины  $A_i$ , а  $\omega_i$  — кривизна проекции  $S$  в точке, лежащей под  $A_i$ ; вторая сумма берется по всем ребрам развертки  $S$ , причем  $l_k$  — длина ребра, а  $\alpha_k$  — полный двугранный угол при этом ребре.

Сформулируем основные леммы.

**Лемма 1.** Пусть  $P^0(S^0, h^0)$  и  $P^1 = (S^1, h^1)$  — выпуклые многогранные шапочки, причем  $P^0$  — обыкновенная, а  $P^1$  — обобщенная и развертка  $S^0$  изометрична  $S^1$ , тогда  $H(P^0) - H(P^1) > \max\{0, C(\Delta h)^3\}$ , где  $\Delta h = \max_i (h_i^1 - h_i^0)$ ,  $h_i^1$  и  $h_i^0$  — высоты соответствующих по изометрии вершин разверток  $S^1$  и  $S^0$ , а  $C$  — постоянная, зависящая только от диаметра  $S^0$ .

Доказательство леммы 1 в § 7.

Отметим, что количественную оценку разности  $H(P^0) - H(P^1)$  мы устанавливаем только для того случая, когда у  $P^1$  есть высоты большие, чем у  $P^0$ . Для наших целей этого достаточно. Можно, однако, показать, что в действительности справедлива оценка

$$H(P^0) - H(P^1) \geq C \left( \max_i |h_i^1 - h_i^0| \right)^3.$$

Будем говорить, что две развертки  $S^0$  и  $S^1$   $\epsilon$ -близки по внутренней метрике или  $\epsilon$ -близки к изометрии, если существует гомеоморфизм  $\varphi$  раз-

$S^0$  не  $S^1$  такой, что для любых двух точек  $A$  и  $B$  развертки  $S^0$

$$|\rho_0(A, B) - \rho_1[\varphi(A), \varphi(B)]| \leq \varepsilon,$$

$\rho_0$  и  $\rho_1$  — расстояния в развертках  $S^0$  и  $S^1$  соответственно. При этом изоморфизм  $\varphi$  будем называть почти-изометрией.

**Лемма 2.** Пусть  $P^0 = (S^0, h^0)$  — обычная выпуклая шапочка, а  $S^1$  — развертка другой выпуклой шапочки  $\varepsilon$  — близкая по внутренней метрике к  $P^0$ , тогда существует выпуклая обобщенная шапочка  $P^{10}$  такая, что

1) развертка  $S^{10}$  шапочки  $P^{10}$  изометрична  $S^1$ ,

2) полные кривизны  $H^0$  и  $H^{10}$  шапочек  $P^0$  и  $P^{10}$  удовлетворяют неравенству  $H^0 - H^{10} \leq C\varepsilon^\alpha$ ,

3) высоты  $h^0$  и  $h^{10}$  любых соответствующих по почти-изометрии точек разверток  $S^0$  и  $S^{10}$  в шапочках  $P^0$  и  $P^{10}$  удовлетворяют неравенству  $h^{10} \geq h^0 - C\varepsilon^\alpha$ . Здесь  $\alpha$  — абсолютная постоянная ( $\geq \frac{1}{4}$ ), а постоянная  $C$  зависит от внутренних диаметров  $S^0$  и  $S^1$ .

Доказательство леммы 2 см. в § 7 этой главы.

Все, что мы говорили до сих пор, было нацелено на получение оценки отклонения высот двух шапочек в соответствующих по почти-изометрии точках через заданное отклонение внутренних метрик этих шапочек.

После того, как такая оценка получена, не составляет большого труда оценить и разности пространственных расстояний для любых пар соответствующих по почти-изометрии точек рассматриваемых шапочек.

### § 3

Докажем основной результат первой части работы.

**Теорема 1.** Если у выпуклых шапочек  $P^0 = (S^0, h^0)$  и  $P^1 = (S^1, h^1)$  развертки  $S^0$  и  $S^1$   $\varepsilon$ -близки по внутренней метрике, то высоты  $h^0$  и  $h^1$  в точках, соответствующих по почти-изометрии, отличаются не более чем на  $C\varepsilon^\beta$ , где  $\beta$  — абсолютная постоянная ( $\geq \frac{1}{12}$ ), а постоянная  $C$  зависит от диаметров  $S^0$  и  $S^1$ .

Доказательство. Пусть  $H^0$  и  $H^1$  — полные кривизны шапочек  $P^0$  и  $P^1$ . Применим лемму 2 к шапочке  $P^0$  и развертке  $S^1$  построим шапочку  $P^{10}$  такую, что ее полная кривизна  $H^{10} \geq H^0 - C\varepsilon^\alpha$ , а ее высоты  $h_i^{10} \geq h_i^0 - C\varepsilon^\alpha$ . Совершенно аналогично по шапочке  $P^1$  и развертке  $S^0$  построим шапочку  $P^{01}$  такую, что

$$H^{01} \geq H^1 - C\varepsilon^\alpha \text{ и } h_i^{01} \geq h_i^1 - C\varepsilon^\alpha.$$

Следует, что

$$(H^0 - H^{10}) + (H^1 - H^{01}) \leq 2C\varepsilon^\alpha. \quad (*)$$

С другой стороны,

$$(H^0 - H^{10}) + (H^1 - H^{01}) = (H^0 - H^{01}) + (H^1 - H^{10}).$$

Следствие неравенств  $h_i^{01} \geq h_i^1 - C\varepsilon^\alpha$  и  $h_i^{10} \geq h_i^0 - C\varepsilon^\alpha$

$$\Delta^{01}h = \max_i \{h_i^{01} - h_i^0\} \geq \max_i (h_i^1 - h_i^0) - C\varepsilon^\alpha,$$

$$\Delta^{10}h = \max_i \{h_i^{10} - h_i^1\} \geq \max_i (h_i^0 - h_i^1) - C\varepsilon^\alpha,$$

и потому достаточно уметь оценить сверху величины  $\Delta^{01}h$  и  $\Delta^{10}h$ . Если  $\Delta^{01}h$  и  $\Delta^{10}h < 0$ , то нужная оценка уже есть. Если же хоть одна из величин  $\Delta^{01}h$  и  $\Delta^{10}h > 0$  (пусть, например,  $\Delta^{01}h > 0$ ), то по лемме 1 одна из разностей  $H^0 - H^{01}$  или  $H^1 - H^{10}$  неотрицательна, а другая не менее чем  $C(\Delta^{01}h)^{3^1}$  и значит

$$(H^0 - H^{01}) + (H^1 - H^{10}) \geq C(\Delta^{01}h)^3. \quad (**)$$

Сравнивая (\*) и (\*\*) получим

$$(\Delta^{01}h)^3 \leq C\varepsilon^2.$$

В результате во всех случаях

$$\max_i |h_i^1 - h_i^0| \leq C\varepsilon^\beta, \quad \left( \beta = \frac{\alpha}{3} \right).$$

#### § 4

Докажем некоторые леммы в развертках.

При изучении деформаций многогранного угла часто удобно вместо самого угла рассмотреть тот сферический многоугольник, по которому наш многогранный угол пересекает (единичную) сферу с центром в вершине угла. Длины сторон этого сферического многоугольника равны плоским углам многогранного угла, а углы сферического многоугольника равны двугранным углам многогранного угла.

Совершенно аналогично при изучении строения обобщенной шапочки вблизи некоторой ее вершины  $A$  оказывается полезным рассмотрение некоторой сферической развертки, которую мы сейчас точно определим и будем далее называть сферическим сечением шапочки при вершине  $A$ .

Возьмем все многогранные углы призм шапочки, подходящие к вершине  $A$ , и каждый из них пересечем единичной сферой с центром в  $A$ . Заданный закон склеивания боковых граней этих призм естественным образом порождает склеивание полученных нами сферических треугольников в некоторую сферическую развертку — ее и назовем сферическим сечением шапочки при вершине  $A$ .

Эта развертка, очевидно, состоит из конечного числа треугольников, у каждого из которых одна сторона (основание) лежит на границе развертки, а две другие (боковые стороны) подходят к единственной внутренней вершине развертки. Основания треугольников соответствуют углам треугольников шапочки, подходящим к  $A$ , а боковые стороны — углам боковых граней проектирующих призм. При этом, в частности, длина границы сферического сечения равна полному углу шапочек при вершине  $A$ .

Далее, граничные вершины сферического сечения соответствуют ребрам шапочки, подходящим к  $A$ , а углы при этих вершинах равны двугранным углам шапочки при соответствующих ребрах. В частности, углы на границе сферического сечения выпуклой шапочки  $\leq \pi$ .

Наконец, внутренняя вершина сферического сечения соответствует отрезку, проектирующему вершину  $A$ , а кривизна сечения в этой вершине равна кривизне проекций  $S$  развертки  $S$  нашей шапочки в точке, лежащей под вершиной  $A$ .

Если сферическое сечение имеет нулевой поворот в некоторой граничной вершине, то это значит, что двугранный угол шапочки при соответствующем этой вершине ребре равен  $\pi$ , и треугольники шапочки, при-

<sup>1</sup> Буквой  $C$  в разных местах обозначаются, вообще говоря, разные постоянные, зависящие лишь от диаметров разверток  $S^0$  и  $S^1$ .

приклеивание к этому ребру при склеивании проектирующих их призм, сводится в одну плоскость. Поэтому изучение дуг нулевого поворота лежащих на границе сферического сечения, есть одновременно изучение «плоских углов» шапочки.

Сравнительно возможной величины таких дуг мы докажем следующим замечанием.

**Лемма 3.** Если длина границы сферического сечения  $< 2\pi$ , а кривизна в вершине сечения  $\leq 0$ , то никакой отрезок границы с длиной  $\geq \pi$  не может иметь нулевого поворота.

**Доказательство.** Предположим, что, вопреки доказываемому, такой отрезок нашелся. Вырежем из сечения сектор с вершиной в вершине сечения и таким углом, чтобы угол оставшегося сектора был  $\geq \pi$ . Эту вырезку можно сделать так, что на границе оставшейся части развертки сохранится геодезический отрезок длины  $\geq \pi$  (так как под которым виден из вершины сечения отрезок границы длины  $\pi$ , составляет всего павсего  $\pi$ ). Оставшуюся часть сечения выложим на сферу с использованием всех нужных склеиваний. Полученный сферический конус  $S$  содержит на границе дугу большого круга длиной  $\geq \pi$  и потому полная длина  $l$  его границы  $\geq 2\pi$ . Остается заметить, что длина границы сечения  $\geq l$ , так как она получается заменой входящей в границу  $S$  разности боковых сторон вырезаемого сектора на (очевидно, меньшую этой разности) длину остальной части границы сектора. Но это противоречие и доказывает наше утверждение.

Далее нам понадобится следующий результат, касающийся кривизны во внутренней вершине сферического сечения.

**Лемма 4.** При неизменных длинах граничных ребер и положительном повороте в каждой граничной вершине кривизна  $\omega$  во внутренней вершине  $O$  сферического сечения  $S$  — монотонно возрастающая функция внутренних ребер  $OB_k$  сечения  $S$ .

**Доказательство** проводится непосредственным вычислением производных  $\frac{d\omega}{d\rho_k}$ . Это вычисление дает следующий результат:

$$\frac{d\omega}{d\rho_k} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta \sin \rho_k} > 0.$$

Здесь  $0 < \gamma_k = \alpha + \beta < \pi$  — полный угол сечения при граничной вершине  $B_k$ , а  $\alpha$  и  $\beta$  — те части, на которые этот угол делится дугой  $OB_k$ .

**Лемма 5.** Пусть  $S$  — сферическое сечение с кривизной  $\omega$  ( $\leq 0$ ) во внутренней вершине  $O$ ,  $r$  ( $\leq 2\pi$ ) — длина границы сечения  $S$ ,  $\gamma_k$  ( $\leq \pi$ ) — полный угол сечения при граничной вершине  $B_k$ , а  $\alpha_k$  и  $\beta_k$  ( $\alpha_k + \beta_k = \gamma_k$ ) — те же части, на которые угол  $\gamma_k$  делится дугой  $OB_k$ . Тогда

$$\sum_k \frac{\sin \gamma_k}{\sin \alpha_k \sin \beta_k \sin OB_k} \geq C V^{-\omega},$$

где  $C$  — абсолютная постоянная.

**Доказательство.** Прежде всего дадим левой части неравенства гомогеническое истолкование.

Разрежем сечение  $S$  по той дуге большого круга, которая соединяет точку  $O$  с наиболее удаленной от нее точкой границы, и развернем сечение  $S$  на сферу единичного радиуса, причем для наглядности будем говорить, что точка  $O$  попала в южный полюс сферы. Возьмем конус  $K$  с вершиной в центре сферы, направляющей которого служит наше развернутое сечение, и построим «взаимный» ему конус  $\tilde{K}$ , т. е. конус, обра-

зованный внешними нормалями к опорным плоскостям конуса  $K$ . Построение той части конуса, которая соответствует берегам разреза, требует некоторых уточнений, которые мы ввиду их очевидности опускаем. Во всяком случае тот поворот вокруг оси сферы, который совмещает «берега» конуса  $K$ , должен совмещать и «берега» конуса  $\tilde{K}$ .

Рассмотрим две ломаные  $\tilde{L}$  и  $L^*$ , являющиеся соответственно пересечениями конуса  $\tilde{K}$  со сферой и с касательной плоскостью к сфере в северном ее полюсе. Обобщая общепринятую терминологию, естественно назвать эти ломаные границами сферического и нормального изображений конуса  $K$ . Непосредственное вычисление показывает, что в левой части доказываемого неравенства стоит длина ломаной  $L^*$ . Нужная нам оценка длины ломаной  $L^*$  проводится по-разному в зависимости от того, лежит ли все сечение  $S$  в южном полушарии или оно заходит и в северное.

В первом случае мы соединяем концы ломаных  $\tilde{L}$  и  $L^*$  соответственно на сфере и на плоскости с северным полюсом сферы, производим склеивание по проведенным дугам (отрезкам) и получаем на сфере некоторую развертку  $\tilde{S}$ , границей которой служит ломаная  $\tilde{L}$ , а на плоскости — развертку  $S^*$  с границей  $L^*$ .

По изопериметрическому неравенству  $|L^*|^2 \geq 4\pi|S^*|$ , где  $|L^*|$  — длина  $L^*$ , а  $|S^*|$  — площадь  $S^*$ . Далее, очевидно,  $|S^*| \geq |\tilde{S}|$ , где  $|\tilde{S}|$  — площадь  $\tilde{S}$ . Наконец, применяя к  $\tilde{S}$  теорему Гаусса — Бонне и замечая, что поворот  $\tilde{L}$  равен длине  $p$  границы сечения  $S$ , получим

$$p + \omega + |\tilde{S}| = 2\pi, \quad |\tilde{S}| = 2\pi - p - \omega \geq -\omega.$$

Все это вместе и дает  $|L^*|^2 \geq 4\pi(-\omega)$ .

В случае, когда  $S$  заходит в северное полушарие, мы по-прежнему соединяем концы ломаных  $\tilde{L}$  и  $L^*$  с северным конусом и рассматриваем на плоскости к сфере замкнутые ломаные  $L_1^*$  и  $\tilde{L}_1$ , состоящие из  $L^*$  и  $\tilde{L}$ , дополненных дугами тех секторов с вершиной в северном полюсе, границами которых и служат отрезки (дуги), соединяющие концы ломаных  $L^*$  и  $\tilde{L}$  с северным полюсом.

Обозначим через  $\rho$  радиус сектора, полученного на сфере, тогда радиус сектора на плоскости, очевидно,  $\operatorname{tg} \rho$ , а углы обоих этих секторов —  $\omega$ . По изопериметрическому неравенству в применении к области  $S_1^*$ , ограниченной ломаной  $L_1^*$ , получим  $|L^*| + \operatorname{tg} \rho \cdot (-\omega) \geq \sqrt{4\pi|S_1^*|}$ ,  $|S_1^*|$  — площадь  $S_1^*$ . Далее  $|S_1^*| \geq \frac{|\tilde{S}_1|}{\cos^3 \rho}$ , так как вся область  $\tilde{S}_1$  лежит на сфере вне круга радиуса  $\rho$  с центром в северном полюсе.

По теореме Гаусса — Бонне в применении к  $\tilde{S}_1$  (поворот ломаной  $\tilde{L}$  равен  $p$ , а поворот дуги сектора  $-\omega \cdot \cos \rho$ )

$$p + \omega \cos \rho + |\tilde{S}_1| = 2\pi, \quad |\tilde{S}_1| \geq (-\omega) \cos \rho.$$

Собирая все эти неравенства и принимая во внимание, что выпуклая ломаная  $L^*$  охватывает замыкающую ее дугу сектора и потому  $|L^*| \geq (-\omega) \cdot \operatorname{tg} \rho$ , получим

$$2|L^*| \geq |L^*| + (-\omega) \operatorname{tg} \rho \geq \sqrt{4\pi \frac{(-\omega)}{\cos^2 \rho}}$$

или

$$|L^*| \geq \sqrt{\pi(-\omega)}.$$

Доказательство закончено.

В дальнейшем нам потребуется непрерывная деформация специального вида, переводящая одну из двух  $\varepsilon$ -близких по внутренней метрике выпуклых разверток положительной кривизны в другую. Специальный характер деформации состоит в том, что она может быть осуществлена в конечное число шагов, каждый из которых представляет вырезание (или вклейивание) либо некоторого двуугольника, либо «полосок» — другой фигуры стандартного вида, которую мы опишем ниже.

Рассмотрим один из возможных способов построения такой деформации и оценим через  $\varepsilon$  порядок суммарной ширины двуугольников и «полосок», которые при этом вырезаются или вклеиваются.

Будем считать, что  $\varepsilon$  — мало в сравнении с внутренними диаметрами  $d^0$  и  $d^1$  деформируемых разверток  $S^0$  и  $S^1$ , и введем некоторое  $\lambda$  в сравнении с  $d^0$  и  $d^1$  и «большое» в сравнении с  $\varepsilon$ .

Каждую из разверток  $S^0$  и  $S^1$  разобъем, начиная от их границ, на «полосы» шириной  $\lambda$  ( $n$ -полоса есть множество точек, расстояния которых от границы развертки заключены между числами  $(n-1)\lambda$  и  $n\lambda$ ).

Затем границы каждой из полос заменим вписанными в них ломаными с вершинами, близкими к соответствующим по почти-изометрии точкам, и с длинами звеньев порядка  $\lambda$  и разобъем вновь полученные полосы на треугольники с длинами сторон порядка  $\lambda$ . При этом может быть не удастся обойтись без введения «небольшого» числа сильно вытянутых треугольников, но несложный подсчет показывает, что они не портят порядка проводимых ниже оценок.

Нужная нам деформация осуществляется теперь следующим образом: сначала стандартным приемом вырезания двуугольников «выгоняем» кривизну из всех треугольников, на которые нами разбиты развертки  $S^0$  и  $S^1$ . Получающиеся после этого развертки  $\tilde{S}^0$  и  $\tilde{S}^1$  состоят из «широких плоских полос». Деформация полос, составляющих одну из этих разверток, в полосы, образующие вторую, представляет несложную, хотя и прополтивую, по существу планиметрическую задачу, на решении которой мы не останавливаемся.

Как известно, суммарная ширина вырезаемых двуугольников имеет порядок  $\lambda(\Omega^0 + \Omega^1)$ , где  $\Omega^0$ ,  $\Omega^1$  — полные кривизны разверток  $S^0$  и  $S^1$ , не говоря, допускает оценку  $C\lambda$  с абсолютной постоянной  $C$ .

С другой стороны, у треугольников в развертках  $\tilde{S}^0$  и  $\tilde{S}^1$  с вершинами в точках, близких к соответствующим им по почти-изометрии точкам, длины сторон отличаются на величину порядка  $\varepsilon$ , а сами длины имеют порядок  $\lambda$ , поэтому углы таких треугольников отличаются на величину порядка  $\frac{\varepsilon}{\lambda}$ . Число треугольников в одной полосе имеет порядок  $\frac{1}{\varepsilon}(d = \max(d^0, d^1))$ , поэтому границы соответствующих полос разверток  $\tilde{S}^0$  и  $\tilde{S}^1$  при разворачивании на плоскость будут отклоняться (при поддающемся расположении) на величину порядка  $\frac{\varepsilon d^2}{\lambda^2}$ . А так как и число полос имеет порядок  $\frac{d}{\lambda}$ , то нетрудно заметить, что суммарная ширина «узких» полосок, которые нужно подклеить и вырезать в окрестности границ полос разбиения наших разверток для превращения развертки  $\tilde{S}^0$  в развертку  $\tilde{S}^1$ , имеет порядок  $\frac{\varepsilon d^3}{\lambda^3}$ .

Если теперь выбрать  $\lambda \sim \varepsilon^{1/4} d^{3/4}$ , то оценка суммарной ширины двуугольников и полосок, участвующих в деформации, будет иметь наилучший (при указанном способе оценки) порядок, а именно:  $C\varepsilon^{1/4}(C \sim d^{3/4})$ .

Рассмотрим ту часть  $\bar{S}^0$  развертки  $S^0$ , которая уцелеет после всех вырезаний. После того, как к этой части будут произведены все под克莱ивания, появится изометрия  $\chi$ , отображающая  $\bar{S}^0$  и все, что к ней подклеено, на развертку  $S^1$ . Возьмем любую точку  $\bar{A}$  из  $\bar{S}^0$ . В развертке  $S^1$  имеются точки  $\chi(\bar{A})$  и  $\varphi(A)$ , т. е. точки, соответствующие  $\bar{A}$  при изометрии  $\chi$  и почти-изометрии  $\varphi$ .

Покажем, что эти точки удалены друг от друга не более, чем на величину порядка  $C\varepsilon^{1/4}$ .

В самом деле, пусть  $T^0$  — тот треугольник нашей триангуляции  $S^0$ , который содержит точку  $\bar{A}$ , а  $T^1$  — соответствующий ему треугольник триангуляции  $S^1$ . Не меняя порядка оценки можно считать, что  $\varphi(\bar{A})$  и  $\chi(\bar{A})$  лежат в  $T^1$  (в крайнем случае придется заменить их на близкие).

Вырежем из  $T^1$  все двуугольники и рассмотрим точки  $\varphi(A)$  и  $\chi(\bar{A})$  как точки полученного треугольника  $\tilde{T}^1$  (если  $\varphi(A)$  при вырезании исчезла, заменим ее близкой, т. е. удаленной от нее не более чем на  $C\varepsilon^{1/4}$ ). Расстояния этих точек до вершин треугольника  $\tilde{T}^1$  соответственно близки вследствие малости вырезки и того, что  $\varphi$  и  $\chi$  — почти-изометрии. Так как треугольник  $\tilde{T}^1$  плоский, то из близости расстояний двух его точек до вершин следует близость самих точек. А отсюда уже следует и близость точек  $\varphi(\bar{A})$  и  $\chi(\bar{A})$  в треугольнике  $T^1$ .

## § 5

В этом параграфе мы изучим в нужном нам объеме деформации обобщенной выпуклой шапочки. Начнем с деформаций, при которых не меняется внутренняя метрика развертки этой шапочки и сохраняется выпуклость шапочки.

Сначала докажем лемму 7, устанавливающую возможность таких деформаций, а затем установим некоторые качественные и количественные результаты, свойства 1—9, касающиеся поведения кривизны проекции рассматриваемой шапочки при этих деформациях.

Сделаем несколько замечаний о строении выпуклых обобщенных шапочек.

Напомним, что развертка  $S$  выпуклой обобщенной шапочки  $P$  предполагается триангулированной, причем вершины треугольников находятся только в настоящих вершинах развертки. Каждый из треугольников развертки  $S$  может быть расположен над горизонтальной плоскостью так, что его вершины будут находиться над этой плоскостью как раз на тех высотах, какие этим вершинам приписаны в шапочке  $P$ .

Мы скажем, что два треугольника  $T$  и  $T^*$  принадлежат одной и той же грани шапочки  $P$ , если можно найти такую цепочку треугольников, начинающуюся с  $T$  и кончающуюся  $T^*$ , что каждые два соседних треугольника цепочки склеиваются по ребру в развертке  $S$  и полный угол шапочки  $P$  при этом ребре равен  $\pi$ .

Для треугольников, принадлежащих одной и той же грани, сохраним только склеивания по ребрам с полным углом  $\pi$  и превратим тем самым каждую из граней в некоторую развертку.

Непосредственным следствием леммы 3 § 4 является следующая

**Лемма 6.** Пусть  $F$  — некоторая грань выпуклой шапочки  $P$ ,  $A$  — граничная вершина этой грани,  $A$  — проекция этой вершины, и пусть кривизна нижнего основания в точке  $A$  — неположительна, тогда полный угол грани  $F$  при вершине  $A$  менее  $\pi$ .

**Лемма 7.** Какова бы ни была выпуклая многогранная шапочка  $P$ , следующие утверждения:

1. Если кривизна нижнего основания шапочки  $P$  в точке, лежащей под вершиной  $A_i$  этой шапочки, отрицательна, то  $P$  можно непрерывно деформировать, сохраняя ее внутреннюю метрику и выпуклость, и притом так, что высота вершины  $A_i$  будет уменьшаться, а высоты всех других (подлежащих) вершин останутся неизменными.

2. Если на нижнем основании  $P$  есть точки с положительной кривизной, то  $P$  можно непрерывно деформировать с сохранением внутренней метрики и выпуклости, и притом так, что высоты всех тех вершин  $P$ , под которыми лежат точки с положительной кривизной, будут расти, а высоты всех остальных вершин останутся неизменными.

**Доказательство.** Докажем первое утверждение леммы.

Если  $T$  — невырожденная треугольная призма, то, очевидно, можно деформировать ее так, чтобы высота одной (и притом любой) из ее вершин уменьшилась, а верхнее основание  $T$  повернулось как твердое тело вокруг прямой, соединяющей две другие вершины. В вырожденной призме точно так же можно уменьшать высоты тех вершин, которые лежат на границе (а не внутри) того многоугольника, каким является наша вырожденная призма.

Пусть теперь  $P$  — выпуклая многогранная шапочка и  $A$  — ее вершина, причем кривизна нижнего основания под вершиной  $A$  — отрицательна.

Пусть все грани шапочки  $P$ , подходящие к  $A$ , как-то триангулированы. Возьмем все призмы, проектирующие те треугольники нашей триангуляции, которые подходят к  $A$ . Каждую из этих призм можно деформировать по способу, описанному в пункте 1, уменьшая высоту вершины  $A$ ; тот факт, что внутрь вырожденной призмы  $A$  попасть не может, легко следует из того, что вершина  $A$  — настоящая вершина развертки.

Покажем теперь, что триангуляцией граней можно распорядиться так, что при уменьшении высоты  $A$  указанным выше образом не будет нарушаться и выпуклость шапочки.

Пусть  $F$  — одна из граней, подходящих к  $A$ , и  $B_1$  и  $B_2$  — граничные вершины  $F$ , соседние с  $A$ . Проведем в грани  $F$  кратчайшую, соединяющую  $B_1$  и  $B_2$ . По лемме 6 угол грани  $F$  при вершине  $A < \pi$  и кратчайшая  $B_1B_2$  не идет по ребрам  $B_1A$  и  $AB_2$ . Эта кратчайшая может иметь с границей грани  $F$  общие вершины  $B_3 \dots B_k$ , отличные от  $B_1$  и  $B_2$ ; в этих точках кратчайшая обращена выпуклостью внутрь грани  $F$  или, иначе говоря, к вершине  $A$ . Поэтому часть грани  $F$ , ограниченная ребрами  $B_1A$ ,  $AB_2$  и кратчайшей  $B_1B_2$ , звезда относительно точки  $A$  и может быть разбита на треугольники отрезками  $AB_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ). Если теперь опускать вершину  $A$ , триангулировав как описано выше каждую из граней, содержащую  $A$ , то легко видеть, что грани будут переламываться по звеньям кратчайшей  $B_1B_2$  и по ребрам  $AB_i$ , причем как раз так, что выпуклость сохраняется. Разумеется, при этом сохранение выпуклости на граничных ребрах граней, подходящих к  $A$ , обеспечивается малостью деформации.

Переходим к доказательству второго утверждения леммы.

Небольшое обобщение рассуждений предыдущего пункта позволяет показать, что можно с сохранением выпуклости уменьшить на одну и ту же величину (достаточно малую) одновременно высоты всех тех внутренних вершин, проекции которых имеют неположительные кривизны, в всех граничных вершин. Отметим прежде всего, что затруднения с опусканием вершин вырожденных призм здесь не возникает, так как в данном случае все они опускаются одновременно на одну и ту же ве-

личину. Что касается сохранения выпуклости, то теперь оно достигается так: на границе каждой из граней выделяются ломаные вида  $B_1A_1A_2 \dots A_kB_2$ , у которых все вершины, кроме первой и последней, — опускающиеся; вершины  $B_1$  и  $B_2$  соединяются в рассматриваемой грани кратчайшей  $\gamma$ :  $B_1B_3B_4 \dots B_kB_2$ , где  $B_3 \dots B_k$  — общие вершины кратчайшей и границы грани; все вершины  $B_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ) — не опускающиеся:  $B_1$  и  $B_2$  — по выбору, а  $B_3 \dots B_k$  потому, что углы грани при этих вершинах  $\geq \pi$  и, следовательно, кривизны их проекций по лемме 3 положительны. Часть грани, заключенную между ломаной  $B_1A_1 \dots A_kB_2$  и кратчайшей  $B_1B_3 \dots B_kB_2$  триангулируем следующим образом: каждые две последовательные вершины  $B_iB_{i+1}$  нашей кратчайшей соединяем с той из вершин  $A_k$ , для которой площадь треугольника  $B_iA_kB_{i+1}$  наибольшая (т. е. с вершиной, самой далекой от прямой  $B_iB_{i+1}$  и лежащей по разные от этой прямой стороны с точками  $B_{i-1}, B_{i+2}$ ); затем каждую из вершин  $B_i$  соединяем отрезками с теми из вершин  $A_k$ , которые лежат между вершинами  $A_{k_i-1}A_{k_i}$  построенных ранее треугольников  $B_{i-1}A_{k_i-1}B_i$  и  $B_iA_{k_i}B_{i+1}$ . Легко проверяется, что эта триангуляция и дает сохранение выпуклости.

Для доказательства второго утверждения леммы теперь достаточно у данной шапочки  $P$  сначала опустить на одну и ту же величину все граничные вершины и все вершины с проекциями неположительной кривизны, а затем поднять на ту же величину все без исключения вершины.

Теперь мы переходим к изучению зависимости кривизны нижнего основания выпуклой шапочки от высот этой шапочки (при неизменной внутренней метрике шапочки).

Прежде всего заметим, что нижнее основание, а следовательно, и его кривизны однозначно определены высотами шапочки только после того, как фиксирована некоторая триангуляция шапочки. Однако если производить перетриангуляцию отдельно внутри каждой грани шапочки, то, очевидно, нижнее основание не будет меняться.

Итак, пусть фиксирована триангуляция развертки  $S$  шапочки  $P$ ,  $A_i$  — некоторая ее вершина,  $A_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ) — соседние вершины,  $h_i$  и  $h_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ) — высоты этих вершин, а  $\omega_i$  и  $\omega_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ) — кривизны проекции  $S$  развертки  $S$  в точках, лежащих под вершинами  $A_i$  и  $A_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ).

Сформулируем нужные нам свойства производных  $\frac{\partial \omega_i}{\partial h_i}$  и  $\frac{\partial \omega_i}{\partial h_k}$ .

$$1. \frac{\partial \omega_i}{\partial h_k} = \frac{\partial \omega_k}{\partial h_i}.$$

2. Пусть  $l_{ik}$  — длина проекции ребра  $A_iA_k$  на  $S$ ,  $\gamma_{ik}$  — двугранный угол шапочки при ребре  $A_iA_k$ ,  $\alpha_{ik}$  и  $\beta_{ik}$  — те части, на которые  $\gamma_{ik}$  делится вертикальной плоскостью, проходящей через ребро  $A_iA_k$ , а  $\rho_{ik}$  — угол между ребром  $A_iA_k$  и вертикалью, тогда

$$l_{ik} \frac{\partial \omega_i}{\partial h_k} = \frac{\sin \gamma_{ik}}{\sin \alpha_{ik} \sin \beta_{ik} \sin \rho_{ik}} \geq 0,$$

$$3. \frac{\partial \omega_i}{\partial h_i} = - \sum_{k=1}^n \frac{\partial \omega_i}{\partial h_k}.$$

4. Если  $\omega_i = 0$ , треугольники развертки  $S$  фактически склеены в некоторой плоскости  $Q$  вокруг проекции вершины  $A_i$ , числа  $\xi_i$  и  $\xi_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ) пропорциональны отклонениям (расстояниям со знаком) проекций вершин  $A_i$  и  $A_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ) от некоторой прямой в плоскости  $Q$ , то

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial h_i} \xi_i + \sum_{k=1}^n \frac{\partial \omega_i}{\partial h_k} \xi_k = 0.$$

Покажем 1 и 2. Непосредственное вычисление  $\frac{\partial \omega_i}{\partial p_{ik}}$  (см. доказательство леммы 4) дает следующий результат.

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial p_{ik}} = \frac{\sin \gamma_{ik}}{\sin \alpha_{ik} \sin \beta_{ik} \sin \rho_{ik}},$$

где  $\rho_{ik}$  (в лемме 4 —  $OB_k$ ) — расстояние от внутренней вершины  $O_i$  сферического сечения при вершине  $A_i$  до граничной вершины  $B_k$  этого же сечения, соответствующей ребру  $A_i A_k$ , а  $\alpha_{ik}$  и  $\beta_{ik}$  — углы между  $O_i B_k$  и  $B_{k-1} B_k$  и между  $O_i B_k$  и  $B_k B_{k+1}$ , иначе говоря,  $\alpha_{ik}$  и  $\beta_{ik}$  — углы между срезами шапочки, пересекающимися по ребру  $A_i A_k$ , и вертикальной плоскостью, проектирующей это ребро.

Далее, очевидно,

$$\cos \rho_{ik} = \frac{h_i - h_k}{|A_i A_k|},$$

и поэтому

$$\sin \rho_{ik} \frac{\partial \rho_{ik}}{\partial h_k} = \frac{1}{|A_i A_k|} \text{ и } \frac{\partial \rho_{ik}}{\partial h_k} = \frac{1}{l_{ik}}.$$

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial h_k} = \frac{\partial \omega_i}{\partial \rho_{ik}} \frac{\partial \rho_{ik}}{\partial h_k} = \frac{\sin \gamma_{ik}}{\sin \alpha_{ik} \sin \beta_{ik} \sin \rho_{ik}} \cdot \frac{1}{l_{ik}}$$

и, очевидно,

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial h_k} = \frac{\partial \omega_k}{\partial h_i}.$$

Свойство 3 выражает тот факт, что кривизны нижнего основания не меняются, если все высоты шапочки изменятся на одну и ту же величину.

Аналогично, свойство 4 есть выражение неизменности кривизны  $\omega_i$  при вращении как твердого целого куска шапочки, состоящего из треугольников, подходящих к вершине  $A_i$ , вокруг некоторой прямой, лежащей в плоскости нижнего основания.

Опираясь на свойства 1—4, займемся исследованием системы линейных уравнений с матрицей  $\left\| \frac{\partial \omega_i}{\partial h_k} \right\|$ .

5. Принцип максимума. Пусть из вершин шапочки выделена некоторая связная совокупность вершин  $A_k$  ( $k = 1, \dots, m+n$ ), связная в том смысле, что от любой вершины совокупности к любой другой можно перейти, двигаясь только по настоящим ребрам шапочки, концы которых принадлежат выделенной совокупности.

Пусть далее вершины выделенной совокупности разбиты на две группы, на «внутренние»  $A_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ) и «граничные»  $A_k$  ( $k = n+1, \dots, m+n$ ), причем требуется, чтобы всякая вершина шапочки, соединенная настоящим ребром с одной из «внутренних» вершин принадлежала выделенной совокупности.

Пусть, наконец, каждой из выделенных вершин сопоставлено число  $\xi_k$  ( $k = 1, \dots, n+m$ ), причем при всех  $i = 1, \dots, n$

$$\sum_{k=1}^{m+n} \frac{\partial \omega_i}{\partial h_k} \xi_k = 0,$$

тогда, либо  $\max_k \xi_k = \min_k \xi_k$  ( $k = 1, \dots, m+n$ ), либо  $\max_k \xi_k$  и  $\min_k \xi_k$  достигаются только в «граничных» вершинах.

**Доказательство.** Пусть, например, для некоторой внутренней вершины  $A_i$   $\xi_i = \max_k \xi_k$ , ввиду свойства 3

$$\sum \frac{\partial \omega_i}{\partial h_k} \xi_k = \sum_{k \neq i} \frac{\partial \omega_i}{\partial h_k} (\xi_k - \xi_i).$$

Так как  $\xi_k - \xi_i < 0$ , а по свойству  $2 \frac{\partial \omega_i}{\partial h_k} > 0$  для всех вершин  $A_k$ , соединенных с  $A_i$  настоящим ребром, то

$$\sum_{k \neq i} \frac{\partial \omega_i}{\partial h_k} (\xi_k - \xi_i) \neq 0,$$

покуда хоть одна из разностей  $\xi_k - \xi_i$  отлична от нуля. Это значит, что  $\max_k \xi_k$  достигается и во всех соседних с  $A_i$  вершинах  $A_k$ .

Продолжая так и далее, мы докажем, что все  $\xi_k$  одинаковы, т. е.  $\max_k \xi_k = \min_k \xi_k$ .

Непосредственными следствиями принципа максимума являются следующие свойства:

6. Матрица  $\left\| \frac{\partial \omega_i}{\partial h_k} \right\|$ ,  $i, k = 1, \dots, n$  — неособенная.

В самом деле, неособенность матрицы тотчас же следует из того, что однородная система

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial \omega_i}{\partial h_k} \xi_k = 0$$

имеет только нулевое решение, последнее же следует из принципа максимума в применении к системе чисел  $\xi_k$ , где  $\xi_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ) — решение нашей системы, а при  $k = n+1, \dots, n+m$   $\xi_k = 0$ .

7. Пусть  $\left\| \Gamma_{ik} \right\|$  — матрица, обратная матрице  $\left\| \frac{\partial \omega_i}{\partial h_k} \right\|$ ,  $i, k = 1, \dots, n$ , и  $\Gamma_{ik} = 0$ , если  $i$  или  $k > n$ , тогда

a)  $\Gamma_{ik} = \Gamma_{ki}$ ,  
б)  $\min_k \Gamma_{ik} = \Gamma_{ii} < \Gamma_{ik} < 0$  при  $k \neq i$ ,  $k = 1, \dots, n$ .

Симметрия матрицы  $\left\| \Gamma_{ik} \right\|$  следует из симметрии матрицы  $\left\| \frac{\partial \omega_i}{\partial h_k} \right\|$ .

Для доказательства неравенств  $\Gamma_{ii} < \Gamma_{ik} < 0$ ,  $i$  — фиксировано,  $k = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, n$  применим принцип максимума к системе чисел  $\xi_k = \Gamma_{ik}$  и при этом вершину  $A_i$  причислим к «границным». Поскольку на «границе»  $\xi_k = \Gamma_{ik} = 0$  при  $k > 0$  и  $\xi_i = \Gamma_{ii}$  при  $k = i$ , то 0 и  $\Gamma_{ii}$  дают  $\max_k \Gamma_{ik}$  и  $\min_k \Gamma_{ik}$ . По определению  $\Gamma_{ik}$

$$1 = \sum_k \frac{\partial \omega_i}{\partial h_k} \Gamma_{ki} = \sum_{k \neq i} \frac{\partial \omega_i}{\partial h_k} (\Gamma_{ki} - \Gamma_{ii}),$$

но  $\frac{\partial \omega_i}{\partial h_k} > 0$ , а все числа  $\Gamma_{ki} - \Gamma_{ii}$  одного знака, значит, все они положительны и  $\Gamma_{ki} > \Gamma_{ii} = \min_k \Gamma_{ik}$ , а тогда  $\max_k \Gamma_{ik} = 0 > \Gamma_{ik}$ , что и требовалось доказать.

8. Пусть кривизна проекции  $S$  шапочки  $P$  равна нулю всюду за исключением, быть может, точки  $A_0$ , лежащей под вершиной  $A_0$ . Пусть далее  $A_i$  — любая другая вершина шапочки,  $A_i$  — проекция  $A_i$ ,  $l_{i0}$  — длина кратчайшей  $A_0 A_i$  развертки  $S$ , а  $r_{i0}$  — длина кратчайшей  $A_0 C_i$ , являю-

продолжением кратчайшей  $A_0A_i$  за точку  $A_i$  до встречи с границей  $S$ . Тогда

$$\frac{\Gamma_{i0} - \Gamma_{00}}{l_{i0}} > \frac{-\Gamma_{00}}{r_{i0}}. \quad (*)$$

Прежде чем доказывать это неравенство, дадим ему геометрическое обоснование.

Будем считать, что развертка  $S$  разрезана по некоторой кратчайшей, проходящей точку  $A_0$  (единственную точку с, возможно, ненулевой кривизной) с границей  $S$ , и после этого развернута на плоскость. Считая плоскость  $xy$  некоторой декартовой системы координат, под каждой из точек  $A_k$  точку  $B_k$  с аппликатой  $z_k = \Gamma_{k0}$  (намечено, что все  $\Gamma_{k0} < 0$ ). Кроме того, построим конус  $K$  с вершиной  $B_0$ , проходящий через границу  $S$ .

Левая и правая части неравенства (\*) представляют тангенсы углов между плоскостью  $xy$  соответственно отрезка  $B_0B_i$  и образующей  $B_0C_i$  конуса  $K$ , лежащей в той же вертикальной плоскости, что и отрезок  $B_0B_i$ . Поэтому неравенство (\*) утверждает, что точка  $B_i$  лежит не ниже конуса  $K$ .

Это мы сейчас и докажем.

Пусть  $Q$  — произвольная опорная плоскость конуса  $K$ , проходящая между образующей  $B_0C_i$ , а  $l$  — линия пересечения этой плоскости с плоскостью  $xy$ .

Будем считать, что берега разреза, сделанного в развертке  $S$  образуют равные углы с прямой  $l$  (ясно, что этого всегда можно добиться, если нужно, место разреза).

Обозначим через  $\xi_k$  аппликаты точек пересечения плоскости  $Q$  с вертикальными прямыми, проходящими через точки  $A_k$  ( $k = 1, \dots, n+m$ ). Для того чтобы доказать, что точка  $B_i$  лежит не ниже конуса  $K$ , достаточно проверить, что она лежит не ниже плоскости  $Q$ , или, иначе говоря, что  $\xi_i < \Gamma_{i0}$ .

Это утверждение мы докажем применением принципа максимума для чисел  $\xi_k - \Gamma_{k0}$ . Определим прежде всего подходящее разбиение вершин развертки на «внутренние» и «границевые».

Вырежем из развертки  $S$  сектор  $U$  по следующему правилу: если полный угол при вершине  $A_0 < \pi$ , то возьмем  $S$  целиком, если же полный угол  $> \pi$ , то вырежем из  $S$  сектор с углом  $\pi$ , содержащий кратчайшую  $A_0C_i$  и ограниченный кратчайшими, идущими из  $A_0$  на границу  $S$ , которые при разворачивании этого сектора на плоскость укладываются на прямую  $l_0$ , параллельную прямой  $l$  (напомним, что  $l$  — опорная прямая к границе  $S$  в точке  $C_i$ ). Те внутренние вершины шапочки, проекции которых попали внутрь выделенного нами сектора, назовем «внутренними»; «границенным» отнесем те из оставшихся вершин шапочки, которые соединены настоящим ребром хотя бы с одной из «внутренних» вершин.

Покажем, что для любой «границочной» вершины  $\xi_k < \Gamma_{k0}$ . «Границчная» вершина может быть либо вершиной, лежащей на общей границе шапочки и сектора  $U$ , либо такой вершиной, лежащей внутри шапочки, которая соединена настоящим ребром с одной из «внутренних» вершин, но имеет проекцию, лежащую вне сектора  $U$ .

В первом случае  $\xi_k < 0$ , так как весь сектор, за исключением точки  $A_0$ , лежит над плоскостью  $Q$ , а  $\Gamma_{kk} = 0$  и, следовательно,  $\xi_k < \Gamma_{k0}$ .

Во втором случае проекция рассматриваемой граничной вершины лежит по ту сторону от прямой  $l_0$ , где нет точек сектора  $U$ , а для всех точек  $\xi_k < \Gamma_{00}$  ( $\xi_k = \Gamma_{00}$  под точкой  $A_0$  и вообще под прямой  $l_0$ ). В то же время всегда  $\Gamma_{00} < \Gamma_{k0}$ , и значит,  $\xi_k < \Gamma_{k0}$ .

Заметим теперь, что для всех «внутренних» вершин

$$\sum_k \frac{\partial \omega_i}{\partial h_k} \Gamma_{k0} = \sum_k \frac{\partial \omega_i}{\partial h_k} \xi_k = 0$$

(последнее по свойству 4), и, значит,

$$\sum_k \frac{\partial \omega_i}{\partial h_k} (\Gamma_{k0} - \xi_k) = 0.$$

На «границе», как было показано выше,  $\Gamma_{k0} - \xi_k \geq 0$ . Отсюда по принципу максимума заключаем, что и всюду «внутри»  $\Gamma_{k0} \geq \xi_k$ , в частности,  $\Gamma_{i0} \geq \xi_i$ , что и требовалось доказать.

9. Из свойств 8, 2 и леммы 5 легко выводится следующая оценка величины  $\Gamma_{00}$ :

$$-\Gamma_{00} \leq C \frac{d}{\sqrt{-\omega_0}}, \quad (\omega_0 < 0).$$

В самом деле, по определению чисел  $\Gamma_{k0}$  и свойству 3

$$1 = \sum_k \frac{\partial \omega_0}{\partial h_k} \Gamma_{k0} = \sum_{k \neq 0} \frac{\partial \omega_0}{\partial h_k} (\Gamma_{k0} - \Gamma_{00}).$$

Далее с помощью оценки  $\frac{\Gamma_{k0} - \Gamma_{00}}{l_{k0}} \geq \frac{-\Gamma_{00}}{r_{k0}}$  получим

$$1 = -\Gamma_{00} \sum_{k \neq 0} \frac{1}{r_{k0}} \left( l_{k0} \frac{\partial \omega_0}{\partial h_k} \right).$$

Очевидно,  $r_{k0} \leq d$ , где  $d$  — диаметр развертки  $S$ . Далее по свойству 2

$$\sum_{k \neq 0} l_{k0} \frac{\partial \omega_0}{\partial h_k} = \sum_{k \neq 0} \frac{\sin \gamma_{0k}}{\sin \alpha_{0k} \sin \beta_{0k} \sin \rho_{0k}}.$$

Последняя величина по лемме 5 допускает оценку  $C \sqrt{-\omega_0}$  через кривизну  $\omega_0$  в вершине  $A_0$  с абсолютной постоянной  $C$ . Теперь для  $\Gamma_{00}$  получается оценка

$$-\Gamma_{00} \leq C \frac{d}{\sqrt{-\omega_0}}.$$

Переходим к рассмотрению деформаций выпуклых многогранных шапочек  $P$ , у которых кривизны проекции  $S$  всюду неположительны. Из леммы 6 тотчас же следует, что грани такой шапочки — выпуклые (плоские) многоугольники. Далее представляется более удобным следить за деформациями не самой шапочки  $P$ , а соответствующей ей «перевернутой» шапочки  $P^*$ , определяемой следующим образом: каждый из треугольников  $T$  развертки  $S$  шапочки  $P$  располагаем в горизонтальной плоскости и над ним строим треугольник, вершины которого расположены над вершинами  $T$  на таких высотах, какие предписаны вершинам треугольника  $T$  в шапочке  $P$ . Короче говоря, шапочка  $P^*$  — это та шапочка, для которой треугольники поверхности исходной шапочки служат проекциями (на горизонтальную плоскость) и которая имеет те же высоты, что и  $P$ . Очевидно, что не только  $P$  однозначно определяет  $P^*$ , но и обратно, по  $P^*$  однозначно восстанавливается  $P$ , причем для возможности последнего построения необходимо и достаточно, чтобы треугольники, составляющие развертку шапочки  $P^*$ , были наклонены к горизонтальной плоскости под углами, не большими  $\frac{\pi}{4}$ .

Шапочки  $P$  и  $P^*$  выпуклы или невыпуклы одновременно (это тотчас следует из теоремы Либермана о выпуклости декартовых координат на выпуклой поверхности как функций длины дуги кратчайшего пути, разумеется, может быть совершенно элементарно доказано). Граням шапочки  $P$  соответствуют грани шапочки  $P^*$ , и если проекция  $S$  развертки шапочки  $P$  имеет неположительные кривизны, то вместе с гранями  $P$  и гранями  $P^*$  являются плоскими выпуклыми многоугольниками.

Теперь нам требуется продеформировать выпуклую шапочку  $P$  в  $S$  неположительной кривизны (с сохранением выпуклости и метрики  $S$ ) так, чтобы высоты ее получили наперед заданные (малые) значения. Из сказанного выше ясно, что сначала можно построить соответствующую деформацию шапочки  $P^*$  (эта деформация строится очевидным образом), а затем вернуться к шапочке  $P$ .

Далее нам потребуется такая деформация выпуклой шапочки  $P$  в  $S$  неположительной кривизны, при которой сохраняются выпуклость метрики  $S$ , высота одной из вершин  $A_0$  растет по заданному закону, а кривизны  $\omega_i$  проекции  $S$  под всеми другими вершинами  $A_i$  не изменяются. Покажем, что такая деформация существует.

По доказанному выше кривизны  $\omega_i$  проекции деформированной шапочки определены при всех  $h_i$  достаточно близких к высотам  $h_i^0$  исходной шапочки, а теперь требуется распорядиться выбором  $h_i$  так, чтобы удовлетворились уравнения  $\omega_i(h_k) = \omega_i(h_k^0)$  — это возможно, так как по свойству замкнутости этой системы, т. е.  $\det \left\| \frac{\partial \omega_i}{\partial h_k} \right\|$ , отличен от нуля.

Обратимся теперь к деформациям шапочки  $P$  при малых непрерывных изменениях развертки  $S$ . Как и прежде, переход к перевернутой шапочке  $P^*$ , очевидно, позволяет построить выпуклую шапочку с продеформированной разверткой. После этого подъемом тех вершин, под которыми кривизна проекции шапочки оказалась положительной, можно добиться того, чтобы кривизна проекции стала всюду неположительной. Оформление этого рассуждения легко получается с использованием леммы 7).

Теперь мы в состоянии доказать следующую лемму.

**Лемма 8.** Пусть  $P$  — выпуклая многогранная шапочка, у которой развертка  $S$  имеет в точке, лежащей под некоторой вершиной  $A_0$ , неположительную, а под всеми другими вершинами — нулевую кривизну. Тогда

- 1) Если к вершине  $A_0$  подходят только невырожденные призмы, то шапочку  $P$  можно непрерывно деформировать так, что она останется выпуклой, ее внутренняя метрика неизменной, высота вершины  $A_0$  будет возрастать, а кривизна  $S$  под всеми вершинами, кроме  $A_0$ , останется нулевой.
- 2) При этой деформации

$$\frac{-d\omega_0}{\sqrt{-\omega_0}} \geq Cdh_0$$

вспомогательной  $C$ , зависящей лишь от диаметра развертки  $S$  шапочки  $P$ .

Существование деформации с нужными свойствами установлено ранее. Далее имеет место равенство

$$dh_0 = \sum \Gamma_{0k} d\omega_k = \Gamma_{00} d\omega_0,$$

так как при всех  $k \neq 0$ ,  $d\omega_k = 0$ .

Отсюда по свойству 9

$$dh_0 \leq \frac{Cd}{\sqrt{-\omega_0}} (-d\omega_0)$$

## § 6

Рассмотрим изменение полной кривизны шапочки при ее деформации. Прежде всего выведем выражение для полного дифференциала полной кривизны многогранной шапочки.

**Лемма 9.** Справедливо равенство:

$$dH = \sum_i \omega_i dh_i + \sum_k (\pi - \alpha_k) dl_k,$$

где  $H$  — полная кривизна шапочки  $P$ ;  $h_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) — высоты вершин  $A_i$  этой шапочки,  $\omega_i$  — кривизны проекции  $S$  в точках, лежащих под  $A_i$ ,  $\alpha_k$  — полные углы при граничных ребрах, а  $l_k$  — длины граничных ребер шапочки  $P$ .

**Доказательство.** Непосредственное дифференцирование  $H$  дает

$$dH = \sum_i (\omega_i dh_i + h_i d\omega_i) + \sum_k [(\pi - \alpha_k) dl_k - l_k d\alpha_k].$$

Поэтому для того, чтобы доказать утверждаемое, достаточно проверить, что

$$\sum_i h_i d\omega_i - \sum_k l_k d\alpha_k = 0$$

или, вводя вместо  $\omega_i$  полный угол  $\theta_i = 2\pi - \omega_i$ ,

$$\sum_i h_i d\theta_i + \sum_k l_k d\alpha_k = 0. \quad (*)$$

Ясно, что  $(*)$  достаточно установить по отдельности для каждой призмы шапочки  $P$ , так как после этого сложением получится нужный результат для всей шапочки. В свою очередь, каждую призму можно разбить на тетраэдры, и потому достаточно проверить, что  $(*)$  выполняется при любой деформации любого тетраэдра.

Ввиду линейности  $(*)$  по  $dl$  и  $dh$  при его проверке для тетраэдра достаточно рассмотреть лишь частные виды деформации, однако такие, сложением которых можно было бы составить произвольную деформацию. В качестве таких частных деформаций возьмем те, при которых одна из вершин тетраэдра движется вдоль одного из ребер, подходящих к этой вершине.

Пусть в тетраэдре  $ABCD$   $A$  движется по ребру  $AD$ . Введем следующие обозначения для сторон и плоских углов грани  $ABC$ :

$$BC = a, \quad AC = b, \quad AB = c, \quad \angle ABC = \beta, \quad \angle ACB = \gamma,$$

и пусть  $\theta_a, \theta_b, \theta_c$  — двугранные углы тетраэдра при сторонах  $a, b$  и  $c$ .

Пусть  $\omega_a$  — угловая скорость вращения плоскости  $ABC$  вокруг ребра  $a$ , тогда  $d\theta_a = \omega_a dt$ . На изменения углов  $\theta_b$  и  $\theta_c$  влияют только составляющие угловой скорости по ребрам  $b$  и  $c$ , т. е.  $-\omega_a \cos \gamma$  и  $-\omega_a \cos \beta$ , и при этом  $d\theta_b = -\omega_a \cos \gamma dt$  и  $d\theta_c = -\omega_a \cos \beta dt$ . Поэтому  $ad\theta_a + bd\theta_b + cd\theta_c = \omega_a dt (a - b \cos \gamma - c \cos \beta) = 0$ .

Что и требовалось доказать.

Пусть развертка  $S$  выпуклой шапочки  $P$  с проекцией  $S$  неподвижной кривизны подвергается непрерывной деформации, в результате которой из  $S$  оказывается вырезанным некоторый двуугольник (с единственной вершиной внутри) ширины  $\delta$  (ширина — расстояние от лежащей внутри вершины до границы двуугольника). Пусть далее шапочка  $P$  деформируется при деформации  $S$  так, как описано в конце § 5. Оценим сверху убыль полной кривизны  $H$  шапочки  $P$  при этой деформации.

Деформацию шапочки  $P$  можно разбить на три этапа: первый — вырезание двуугольника, второй — «выравнивание» берегов разреза, возвращение к выпуклости, третий — подъем вершин, под которыми кривизна

положительна. На третьем этапе полная кривизна  $H$  может быть отрицательна, так как  $\Delta H \approx \sum \omega_i \Delta h_i$  (лемма 9) и все слагаемые в правой части неотрицательны. На втором этапе деформации мы будем следить за величиной  $\tilde{H}$ , которая является естественным обобщением величины  $H$ , учитывющим тот факт, что разные берега разреза имеют разные высоты, и определяется следующим образом:

$$\tilde{H} = \sum_i \omega_i h_i + \sum_k (\pi - \alpha_k) l_k + \sum_j (\pi - \theta_j) h_j.$$

Здесь первая сумма, как и прежде, распространяется на все вершины, уцелевшие после вырезания двуугольника, вторая — на все ребра, и ребра, составляющие берега разреза (причем берега считаются неотъемлемыми, а угол  $\alpha_k$  — равным сумме углов при отдельных берегах), третья сумма берется по всем вертикальным ребрам, проектирующим «вершины» вершины шапочки, появившиеся на берегах разреза. После «под克莱ивания» берегов разреза  $\tilde{H}$  переходит в полную кривизну  $H$  шапочки, получающейся склеиванием берегов разреза. Легко показать, что «низкого берега» разреза можно осуществлять так, чтобы во всех вершинах шапочки, под которыми  $\omega_i < 0$ ,  $h_i$  не менялось бы в то же время оказывается, что как раз на «низком берегу»  $(\pi - \theta_j) \geq 0$ . Поэтому при подъеме этого берега

$$\Delta \tilde{H} \approx \sum (\pi - \theta_j) \Delta h_j \geq 0.$$

Убыль полной кривизны на первом этапе, точнее разность  $H - \tilde{H}$ , где  $H$  — полная кривизна исходной шапочки, а  $\tilde{H}$  берется до начала «под克莱ивания берегов», может быть представлена (просто на основании выражений для  $H$  и  $\tilde{H}$ ) в виде  $\tilde{H} - \frac{\pi}{2}L$ , где  $\tilde{H}$  — обычным образом определяемая полная кривизна шапочки, у которой роль  $S$  играет вырезанный двуугольник, а  $L$  — длина «контура под克莱ивания», т. е. суммы длины контура двуугольника, длины проекции этого контура и удвоенной суммы высот граничных вершин двуугольника.

Оценка величины  $\tilde{H} - \frac{\pi}{2}L$  представляет элементарную задачу: двуугольник разбивается на две «половинки», а величина  $\tilde{H} - \frac{\pi}{2}L$  — на соответствующие слагаемые, далее «половинки» деформируются с целью увеличить интересующую нас величину, и в экстремальном положении получается явная оценка вида  $C\delta$  ( $\delta$  — «ширина» двуугольника).

Аналогичными рассуждениями устанавливается оценка убыли полной кривизны и во всех других нужных нам случаях.

### § 7

**Доказательство леммы 1. 1.** Прежде всего докажем, что выпуклых многогранных шапочек с данной внутренней метрикой и наибольшую полную кривизну имеет обычная шапочка. В частности, этим будет доказано, что  $H(P^0) \geq H(P')$ . Ввиду очевидной непрерывности кривизны  $H(P)$ , замкнутости и ограниченности области изменения высот шапочки при неизменности ее внутренней метрики, достаточно показать, что любую обобщенную выпуклую многогранную шапочку можно деформировать так, что она останется выпуклой, ее внутренняя метрика не изменится, а полная кривизна возрастет. Итак, пусть  $P$  — обобщенная шапочка с той же внутренней метрикой, что и у  $P^0$ .

По лемме 7  $P$  можно деформировать с сохранением выпуклости и внутренней метрики так, что всюду, где высоты шапочки  $P$  меняются приращение высоты вершины и кривизна проекции  $S$  под этой вершиной имеют одинаковые знаки. Но тогда (ввиду леммы 9)

$$\Delta H \approx \sum_i \omega_i \Delta h_i > 0.$$

2. Аналогичное рассуждение (с использованием леммы 7) показывает что деформация, увеличивающая  $H(P)$ , может быть проведена и тогда когда одной из вершин запрещено спускаться (до тех пор, пока эта вершина не останется единственной вершиной, под которой кривизна нижнего основания отлична от нуля).

Это позволяет заключить, что в множестве  $M_i(P^0, \delta)$  выпуклых шапочек с развертками, изометричными развертке  $S^0$  шапочки  $P^0$ , имеющих в одной из вершин  $A_i$  высоту  $h_i \geq h_i^0 + \delta$ , где  $\delta$  — положительная постоянная, наибольшую полную кривизну  $H$  имеет та шапочка  $P$  у которой кривизна проекции  $S$  под всеми вершинами, кроме  $A_i$  — нулевая, а  $h_i = h_i^0 + \delta$ .

3. Отсюда следует, что в условиях леммы для шапочек  $P^0$  и  $P'$  при  $\Delta h = \max_k (h_k^1 - h_k^0) > 0$

$$H(P^0) - H(P') \geq H(P^0) - H(P),$$

где  $P$  имеет строение, описанное в предыдущем пункте, причем в качестве взят один из тех номеров, где достигается  $\max_k (h_k^1 - h_k^0)$ , а в качестве  $\delta = \Delta h$ .

4. Будем теперь деформировать  $P^0$  в  $P$ , увеличивая  $h_i$  по закону:  $h_i(t) = h_i^0 + t\Delta h$ ;  $0 < t < 1$ , сохраняя нулевую кривизну в развертке  $S$  всюду, кроме проекции вершины  $A_i$ . Такая деформация возможна, как показано в конце § 5.

Теперь осталось оценить изменение  $H$  при этой деформации. Используя равенство леммы 9, получим

$$H(P^0) - H(P) = - \int_0^1 dH(t) = - \int_0^1 \omega_i(t) dh_i(t) = \Delta h \int_0^1 [-\omega_i(t)] dt.$$

Далее оценка леммы 8 дает

$$\frac{1}{V} \frac{-d\omega_i}{dt} \geq C\Delta h \quad \text{и} \quad -\omega_i(t) \geq (C\Delta h)^2 t^2,$$

и потому

$$H(P^0) - H(P^1) \geq H(P^0) - H(P) = \Delta h \int_0^1 [-\omega_i(t)] dt \geq C\Delta h^3 \text{ и. т. д.}$$

**Доказательство леммы 2.** Будем деформировать развертку  $S^0$  в развертку  $S^1$  так, как это описано в конце § 4, и вслед за деформацией развертки будем деформировать шапочку  $P^0$  по способу, указанному в конце § 5. Шапочку, полученную в результате этой деформации в тот момент, когда  $S^0$  продеформируется в  $S^1$ , обозначим  $P^{10}$ .

Первое утверждение доказываемой леммы верно по построению  $P^{10}$ .

Справедливость второго утверждения, т. е. оценки  $H^0 - H^{10} \leq C\varepsilon^\alpha$ , следует из того, что суммарная ширина двугольников и полосок, вырезаемых и вклеиваемых при переходе от  $S^0$  к  $S^1$ , не превосходит  $C\varepsilon^\alpha$  ( $\alpha > \frac{1}{4}$ )

как показано в § 6, величины того же порядка не превосходят полной кривизны при переходе от  $P^0$  к  $P^{10}$ .

Предыдущее утверждение следует из того, что при всех деформациях, оставляющих  $P^0$  в  $P^{10}$ , высоты всех тех точек развертки  $S^0$ , которые не были вырезаны, разве лишь возрастали, и того, что (как показано в § 4) любых двух соответствующих по почти-изометрии  $\varphi$  точек  $A$  и  $B$  разверток  $S^0$  и  $S^1$  найдутся удаленные от них на величины порядка не более чем  $C\varepsilon^\alpha$  ( $\alpha \geq \frac{1}{4}$ ) точки  $A^*$  и  $B^*$ , соответствующие по изометрии, остававшейся после полной деформации  $S^0$  (иначе говоря, как раз такие точки  $A^*$  и  $B^*$ , что точка  $A^*$  шапочки  $P^0$  в результате всех деформаций переходит в точку  $B^*$  шапочки  $P^{10}$ ).

## ГЛАВА II

### § 1

В главе II мы получим оценку деформации замкнутой выпуклой поверхности. Для удобства чтения эта глава построена по тому же плану, что и глава I: каждый следующий параграф главы II по содержанию аналогичен параграфу с тем же номером главы I.

### § 2

Пусть  $P$  — замкнутый выпуклый многогранник,  $S$  — любая его развертка состоящая из треугольников с вершинами  $A_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ). Числа  $r_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) обозначим расстояния от вершины  $A_0$  до вершины  $A_i$  ( $i > 0$ ). Будем говорить, что нам задан обобщенный многогранник  $P$ ,

если задана некоторая гомеоморфная сфере развертка  $S$  положительной кривизны; эта развертка разбита на треугольники  $T_k$  с вершинами  $A_i$  ( $i = 0, \dots, n$ );

если задан набор чисел  $r_i > 0$  ( $i = 1, \dots, n$ );

если заданы числа  $r_i$  и развертка  $S$  с фиксированной триангуляцией  $\{T_k\}$  следующим образом:

а) с теми вершинами  $A_i$ , которые соединены ребрами триангуляции  $S$  вершиной  $A_0$ , в качестве  $r_i$  сопоставлены как раз длины этих ребер;

б) на любом треугольнике  $T_k$ , не имеющем  $A_0$  среди своих вершин на основании можно построить пирамиду, длины боковых ребер которой равны как раз числам  $r_i$ , сопоставленным с вершинами треугольника  $T_k$ . Числа  $r_i$  назовем радиусами многогранника и вершину  $A_0$  — вершиной многогранника.

Мы будем писать  $P = (S, r_i, A_0)$ , если нам нужно отметить тот факт, что  $S$  — развертка,  $r_i$  — радиусы обобщенного многогранника, а  $A_0$  — вершина многогранника. Пирамиды, построенные описанным выше способом из треугольниками  $T_k$ , будем называть пирамидами, составляющими многогранник  $P$ .

Закон склеивания треугольников  $T_k$  в развертке  $S$  естественным образом порождает закон склеивания пирамид многогранника  $P$  и превращает наш многогранник в трехмерное многообразие с границей, склеенное из пирамид, причем границей этого многообразия будет, очевидно, исходная развертка  $S$ .

Под полным двугранным углом  $\alpha_k$  многогранника  $P$  при некотором граничном ребре  $A_i A_j$  будем понимать сумму двугранных углов пирамид многогранника, подходящих к этому ребру.

Кривизной  $\omega_i$  многогранника  $P$  при внутреннем его ребре  $A_0 A_i$  назовем разность  $2\pi - \theta_i$ , где  $\theta_i$  — сумма двугранных углов пирамид, подходящий к ребру  $A_0 A_i$ .

Обобщенный многогранник назовем выпуклым, если его двугранный угол при любом граничном ребре  $\ll \pi$ .

Полной кривизной  $H(P)$  обобщенного многогранника  $P$  назовем сумму

$$\sum_i \omega_i r_i + \sum_k (\pi - \alpha_k) l_k,$$

где первая сумма берется по всем внутренним вершинам  $A_i$  развертки многогранника  $P$ , а вторая — по всем ребрам развертки  $S$ , причем обозначает длину ребра.

Переходим теперь к формулировке основных лемм.

**Лемма 1.** Пусть  $P^0 = (S^0, r_i^0, A_0^0)$  и  $P^1 = (S, r_i^1, A_0^1)$  — выпуклые многогранники, причем  $P^0$  — обычный, а  $P^1$  — обобщенный, их развертки  $S^0$  и  $S^1$  изометричны и  $A_0^0$  и  $A_0^1$  соответствуют по изометрии. Тогда

$$H(P^0) - H(P^1) \geq \max \{0, C\lambda(\Delta r)^3\},$$

где  $\Delta r = \max_i (r_i^1 - r_i^0)$ ,  $r_i^1$  и  $r_i^0$  — радиусы соответствующих по изометрии вершин разверток  $S^0$  и  $S^1$ ,  $C$  — постоянная, зависящая только от внутреннего диаметра  $S^0$ , а  $\lambda$  — радиус наибольшего круга, содержащегося в сферическом изображении вершины  $A_0^0$ .

Доказательство леммы 1 см. в § 7 этой главы.

Напомним, что две развертки  $S^0$  и  $S^1$  мы называем  $\varepsilon$ -близкими по внутренней метрике, если существует гомеоморфизм  $\varphi: S^0$  на  $S^1$  такой, что для любых двух точек  $A$  и  $B$  развертки  $S^0$

$$|\rho_0(A, B) - \rho_1[\varphi(A), \varphi(B)]| < \varepsilon,$$

где  $\rho_0$  и  $\rho_1$  — расстояния в развертках  $S^0$  и  $S^1$  соответственно.

Сам гомеоморфизм  $\varphi$  при этом называется почти-изометрией.

**Лемма 2.** Пусть  $P^0 = (S^0, r_i^0, A_0^0)$  — обычный выпуклый многогранник, а  $S^1$  — гомеоморфная сфере развертка положительной кривизны  $\varepsilon$ -близкая по внутренней метрике к  $S^0$ , тогда существует выпуклый обобщенный многогранник  $P^{10}$  такой, что

1) его развертка  $S^{10}$  изометрична  $S^1$ ;

2) полные кривизны  $H^0$  и  $H^{10}$  многогранников  $P^0$  и  $P^{10}$  удовлетворяют неравенству

$$H^0 - H^{10} \leq C\varepsilon^\alpha;$$

3) радиусы  $r^0$  и  $r^{10}$  любых соответствующих по почти-изометрии  $\varphi$  точек разверток  $S^0$  и  $S^{10}$  в многогранниках  $P^0$  и  $P^{10}$  удовлетворяют неравенству

$$r^{10} \geq r^0 - C\varepsilon^\alpha.$$

Здесь  $\alpha$  — абсолютная постоянная  $(\geq \frac{1}{4})$ , а постоянная  $C$  зависит от внутренних диаметров  $S^0$  и  $S^1$ .

Доказательство леммы 2 см. в § 7 этой главы.

### § 3

**Основной результат главы II.**

**Теорема 1.** Если у замкнутых выпуклых многогранников  $P^0$  и  $P^1$  диаметры  $S^0$  и  $S^1$   $\varepsilon$ -близки по внутренней метрике, то пространственные радиусы  $r^0$  и  $r^1$  между любыми двумя соответствующими по почти-изометрии точками отличаются не более чем на  $C\varepsilon^\beta$ , где  $\beta$  — абсолютная постоянная ( $> \frac{1}{24}$ ), а постоянная  $C$  зависит от диаметров  $S^0$  и  $S^1$ .

**Доказательство.** Обозначим через  $A_i^0$  ( $i = 0, \dots, n$ ) и  $A'_i$  ( $i = 0, \dots, n$ ) соответствующие по почти-изометрии вершины многогранников  $P^0$  и  $P^1$  и предположим, что нумерация самих многогранников и их вершин выбрана так, что наибольшая из разностей пространственных расстояний, т. е.  $\max(|A'_i A'_j| - |A_i^0 A_j^0|)$  — положительна и достигается при  $i = 0, j = 1$ . Обозначим эту разность через  $\Delta r$ . Будем деформировать многогранник  $P^0$ , двигая вершину  $A_0^0$  в направлении одной из внешних нормалей многогранника  $P^0$  в точке  $A_0^0$  до тех пор, пока сферическое изображение этой вершины не будет содержать некоторый круг диаметра 1 и обозначим через  $P_\lambda^0$  полученный многогранник, а через  $S_\lambda^0$  — его развертку. Применяя лемму 2 к многограннику  $P^1$  и развертке  $S^1$ , затем к  $P^0$  и  $S^1$  и, наконец, к  $P^1$  и  $S_\lambda^0$ , построим «смешанные» многогранники  $P^{01}$ ,  $P^{10}$ , и  $P_\lambda^{01}$ . Полные кривизны  $H^{01}$ ,  $H^{10}$  многогранников  $P^{01}$  и  $P^{10}$  связаны с полными кривизнами  $H^0$ ,  $H^1$  многогранников  $P^0$  и  $P^1$  следующими неравенствами:

$$H^0 - H^{10} \leq C\varepsilon^\alpha, \quad H^1 - H^{01} \leq C\varepsilon^\alpha.$$

Отсюда следует

$$(H^0 - H^{10}) + (H^1 - H^{01}) \leq C\varepsilon^{\alpha+1}.$$

Левые стороны справедливо тождество

$$\begin{aligned} (H^0 - H_\lambda^0) + (H_\lambda^0 - H_\lambda^{01}) + (H_\lambda^{01} - H^{01}) + (H^1 - H^{10}) = \\ = (H^0 - H^{10}) + (H^1 - H^{01}). \end{aligned} \tag{*}$$

Поскольку  $H_\lambda^0$  и  $H_\lambda^{01}$  — полные кривизны многогранников  $P_\lambda^0$  и  $P_\lambda^{01}$ .

Из элементарных свойств полной кривизны  $H$  обычных многогранников с учетом способа построения  $P_\lambda^0$  из  $P^0$  легко получается следующее неравенство для полных кривизн  $H_\lambda^0$  и  $H^0$  этих многогранников:

$$H_\lambda^0 \leq H^0 + C\lambda^2, \text{ или } H^0 - H_\lambda^0 \geq -C\lambda^2.$$

Используя явное выражение дифференционала полной кривизны (см. лемму 3 § 6), способ построения  $P^{01}$ ,  $P_\lambda^{01}$  и монотонное «возрастание» внутренней метрики при переходе от  $S^0$  к  $S_\lambda^0$  легко удается показать, что  $H_\lambda^{01} > H^{01}$  или  $H_\lambda^{01} - H^{01} \geq 0$ .

Наконец, применение леммы 1 к многогранникам  $P^1$  и  $P^{10}$  и к  $P_\lambda^0$  и  $P_\lambda^{01}$  дает

$$H^1 - H^{10} \geq 0, \quad H_\lambda^0 - H_\lambda^{01} \geq C\lambda(\Delta r - C\lambda - C\varepsilon^\alpha)^3$$

\* Как принято, мы обозначаем одной и той же буквой  $C$  в разных местах, вообще разные положительные постоянные, зависящие лишь от внутренних диаметров  $S^0$  и  $S^1$ .

(дополнительные члены в правой части второго из этих неравенств появлялись вследствие изменения радиусов при переходе от  $P^0$  к  $P_\lambda^0$  и при переходе от  $P^1$  к  $P_\lambda^{01}$ ).

Оценивая с помощью приведенных неравенств левую часть тождества (\*) снизу и вспоминая имеющуюся оценку правой части (\*) сверху, получим

$$-C\lambda^2 + C\lambda(\Delta r - C\lambda - C\varepsilon^\alpha)^3 \leq C\varepsilon^\alpha.$$

Из этого неравенства наилучшая оценка  $\Delta r$  через  $\varepsilon$  (т. е. оценка с наибольшим показателем) получается, если выбрать  $\lambda \approx \varepsilon^{\alpha/2}$ . При этом получается

$$\Delta r \leq C\varepsilon^\beta$$

$$\left( \text{где } \beta = \frac{\alpha}{6} > \frac{1}{24} \right).$$

#### § 4

Напомним, что в § 4 главы I изучались сферические сечения и деформации обычных плоских разверток положительной кривизны. Все определения и результаты этого параграфа без всяких изменений переносятся на сферические сечения при вершинах обобщенных многогранников. Развертка положительной кривизны, гомеоморфная сфере, легко может быть разбита на конечное число разверток гомеоморфных кругу с границе положительного поворота, после чего могут быть применены рассуждения работы [1].

Напомним, что в конце § 4 была установлена возможность деформировать одну из двух  $\varepsilon$ -близких по внутренней метрике разверток положительной кривизны в другую путем вклеивания и вырезания двугольников и деформации некоторых «узких» полос и была получена оценка вида  $C\varepsilon^\alpha$  ( $\alpha > \frac{1}{4}$ ) для суммарной «ширины» двугольников и полос, участвующих в деформации.

В этом параграфе мы изучим деформации обобщенного выпуклого многогранника. Начнем с деформаций, при которых не меняется внутренняя метрика развертки многогранника и сохраняется его выпуклость.

Грань обобщенного выпуклого многогранника определяется так же, как в главе I определялась грань обобщенной шапочки. Роль проекции шапочки теперь переходит к сферическому сечению  $S_{A_0}$  многогранника при выделенной величине  $A_0$ . Ее кривизна и равны как раз кривизнам многогранника при «внутренних» ребрах  $A_0 A_i$ .

**Лемма 6.** Пусть  $F$  — некоторая грань обобщенного выпуклого многогранника  $P$ ,  $A$  — граничная вершина этой грани,  $A$  — проекция этой вершины на сферическое сечение  $S_{A_0}$  многогранника  $P$  при точке  $A_0$ , и пусть кривизна сечения  $S_{A_0}$  в точке  $A$  неположительна, тогда полный угол грань  $F$  при вершине  $A < \pi$ .

**Лемма 7.** Каков бы ни был обобщенный выпуклый многогранник  $P$ , справедливы следующие утверждения.

1. Если кривизна сечения  $S_{A_0}$  в точке, лежащей под вершиной  $A$  этого многогранника, отрицательна, то  $P$  можно непрерывно деформировать, сохраняя внутреннюю метрику его развертки и его выпуклость, и притом так, что радиус  $r_i$  вершины  $A_i$  будет уменьшаться, а радиусы всех других (настоящих) вершин останутся неизменными.

2. Если в сечении  $S_{A_0}$  есть только вершины с положительной кривизной, то  $P$  можно деформировать так, что сохраняется его выпуклость и внутренняя метрика его развертки, а радиусы всех тех вершин  $P$ , под-

лишними лежат точки сечения  $S_{A_0}$  с положительной кривизной, будут

доказательство леммы 6 дословно то же, что и у леммы 6 в [1].  
В доказательство леммы 7 по сравнению с доказательством леммы 7

в [1] нужно внести следующее изменение.

При доказательстве второго утверждения леммы 7 в [1] применялась деформация шапочки, состоящая в одновременном подъеме всех ее вершин

и ту же величину. Эта деформация, очевидно, сохраняла выпуклость и внутреннюю метрику.

Для обобщенного выпуклого многогранника в этом месте нужно использовать несколько иную деформацию, а именно деформацию, увеличивающую на одну и ту же (малую) величину квадрата всех радиусов многогранника. Тот факт, что такая деформация обладает нужными свойствами, будет установлен позднее.

Далее в § 5 работы [1] изучалась зависимость кривизны проекции выпуклой шапочки в зависимости от высот шапочки при неизменной внутренней метрике ее развертки. Эти результаты непосредственно будут использоваться в настоящей работе, так как изучение нужной нам деформации обобщенного выпуклого многогранника будет сведено (в доказательстве леммы 8) известным классическим приемом к изучению деформации некоторой обобщенной выпуклой шапочки.

Переходим теперь к построению аналога «перевернутой» шапочки в общении построений главы I, где используется эта шапочка.

Представим, что треугольники развертки многогранника  $P$  лежат в горизонтальной плоскости  $XY$  и под каждой точкой  $A$  каждого из треугольников построена точка  $B$  с аппликатой  $z(B) = r^2(A)$ , где  $r(A)$  — радиус точки  $A$  в многограннике  $P$ . Непосредственное вычисление показывает, что над каждым из треугольников развертки мы получим таким образом кусок параболоида, задаваемого уравнением вида  $z = x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma$ . Склейивание треугольников развертки многогранника  $P$  естественно порождает склейивание лежащих над ними параболоидов, а условие выпуклости  $P$  эквивалентно определенному ограничению на коэффициенты в соседних параболоидах. Полученная в результате «кусочно-параболическая» поверхность  $P^*$  в рассуждениях, доказывающих существование деформаций обобщенного выпуклого многогранника при заданных деформациях его развертки, как раз и играет ту роль, какую играла «перевернутая» шапочка в аналогичных рассуждениях главы I.

Теперь сформулируем и докажем лемму 8, аналогичную лемме 8 I.

**Лемма 8.** Пусть  $P$  — обычный выпуклый многогранник и пусть изображение его вершины  $A_0$  содержит круг радиуса  $\lambda$ ,  $\tilde{P}$  — обобщенный многогранник с разверткой, изометричной развертке многогранника  $P$ , и выделенной вершиной  $A_0$ . Пусть далее кривизна изометрического сечения  $S_{A_0}$  многогранника  $P$  равна нулю всюду, кроме вершины  $A$ , а радиус  $\tilde{r}(A)$  точки  $A$  многогранника  $\tilde{P}$ , лежащей над  $A$ , больше радиуса  $r(A)$  соответствующей по изометрии точки многогранника  $P$ .

Тогда:

1. Многогранник  $P$  можно непрерывно деформировать в  $\tilde{P}$  так, что деформируемый многогранник будет все время выпуклым, метрика его развертки неизменной, кривизна сечения  $S_{A_0}$  равной нулю всюду, кроме вершины  $A$  точки  $A$ .

2. При этом кривизна  $\omega(A)$  сечения  $S_{A_0}$  в точке  $A$  меняется так, что

$$dr < -\frac{C d\omega}{\lambda \sqrt{-\omega}},$$

$r = r(A)$  — радиус точки  $A$ .

Доказательство может быть проведено следующим образом.

Поскольку вся «неевклидовость» деформируемого многогранника  $P_t$  сосредоточена вокруг ребра  $A_0A$ , то этот многогранник можно развернуть в евклидово пространство, проведя в нем через ребро  $A_0A$  плоский разрез. Поместим развернутый многогранник  $P_t$  так, чтобы точка  $A_0$  попала в начало  $O$  системы декартовых координат  $XYZ$ , сам многогранник лежал в полупространстве  $z > 0$ , и при этом все плоскости многогранного угла при вершине  $A_0$  были бы наклонены к плоскости  $XY$  под углами, большими  $\lambda$ .

Последнее требование осуществимо в начальный момент деформации потому, что сферическое изображение вершины  $A_0$  содержит круг радиуса  $\lambda$ , далее же в процессе деформации развертка  $S_{A_0}$  а вместе с ней и «телесный» угол при вершине  $A_0$  в некотором смысле лишь «сжимаются». Далее в каждый момент деформации будем подвергать  $P_t$  проективному преобразованию, задаваемому формулами  $x' = \frac{x}{z}$ ;  $y' = \frac{y}{z}$ ;  $z' = \frac{1}{z}$ . Это преобразование переведет  $P_t$  в обобщенную шапочку  $Q_t$  как раз того вида, для которого была получена в § 5 главы I оценка  $\dot{h} \leq -\frac{Cd}{\sqrt{-\omega}}$  скорости  $\dot{h}$  изменения высот через скорость изменения  $\dot{\omega}$  кривизны при единственном «неевклидовом» ребре, саму эту кривизну  $\omega$  и диаметр шапочки  $d$ . Хорошо известно, что скорости изменения радиусов многогранника  $P_t$  (при его изгибе) определенным образом связаны со скоростями изменения высот шапочки  $Q_t$  (при соответствующем ее изгибе); можно найти и связи величин  $\omega$  и  $\dot{\omega}$ ; диаметр шапочки  $Q_t$  допускает оценку вида  $\frac{C}{\lambda}$ , где  $C$  зависит только от диаметра  $P_t$ .

Все это и приводит к оценке вида

$$dr \leq -\frac{C d\omega}{\lambda \sqrt{-\omega}}.$$

## § 6

Выражение для полного дифференциала полной кривизны выводится так же, как в главе [1].

**Лемма 9.** Справедливо равенство

$$dH = \sum_i \omega_i dr_i + \sum_k (\pi - \alpha_k) dl_k,$$

где  $H$  — полная кривизна обобщенного многогранника  $P$ ;  $r_i$  — радиусы (т. е. длины всех внутренних ребер) этого многогранника;  $\omega_i$  — кривизны при этих ребрах;  $l_k$  — длины всех граничных ребер, а  $\alpha_k$  — полные углы при этих ребрах.

Далее в § 6 главы I оценивается сверху убыль полной кривизны при деформациях обобщенной выпуклой шапочки, порожденных деформациями ее развертки. Все эти рассуждения почти без изменений переносятся и на случай обобщенных многогранников и показывают, что убыль полной кривизны допускает оценку вида  $C\delta$ , где  $\delta$  — суммарная «ширина» вырезаемых двугольников и деформируемых полосок.

Напомним, что упомянутый вывод опирается в основном на следующие факты: некоторое «аддитивное» разложение полной кривизны; «малость» членов этого разложения, относящихся к «узким» полосам и двугольникам, и, наконец, на тот факт, что «выпуклофикация», сопровождающая деформацию и изменяющая полную кривизну всюду, а не только в районе деформации развертки, не портит наши оценки.

### § 7

Доказательство леммы 1 проводится так же, как и в главе I. При этом единственная часть доказательства совсем не меняется, а в выводе используется лемма 8 настоящей работы, что и приводит к пояснению в окончательном неравенстве радиуса  $\lambda$  круга, содержащегося в эпифизическом изображении вершины  $A_0$ .

Доказательство леммы 2 ничем не отличается от доказательства в главе I; при этом, разумеется, должны быть использованы вспомогательные результаты соответствующих параграфов настоящей работы.

### ЛИТЕРАТУРА

- 1. А. В. Погорелов. Однозначная определенность общих выпуклых поверхностей. Учен. зап. АН УССР, Киев, 1952.
- 2. С. Э. Кон-Фоссен. Изгибаemость поверхностей в «целом». Усп. матем. наук, № 1, 1936.
- 3. Ю. А. Волков. Существование выпуклого многогранника с данной разверткой. Учен. зап. ЛГУ, вып. 19, 1960.
- 4. А. Д. Александров. Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей. Огиз ИМЛ, М.-Л., 1948.

*Поступила 21 июля 1967 г.*

## О ВЫЧИСЛЕНИИ АФФИННОЙ ДУГИ И АФФИННОЙ ПЛОЩАДИ

*Г. И. Дринфельд* (Харьков)

### 1. Аффинная дуга плоской кривой

$$I = \int \sqrt[3]{y''} dx \quad (1)$$

есть не что иное, как интегральный инвариант аффинной группы, сохраняющей площадь (см., например, [1]). Если положить  $y = y(t)$ ,  $x = x(t)$ , то

$$I = \int \left| \begin{array}{cc} \dot{x} & \ddot{x} \\ \dot{y} & \ddot{y} \end{array} \right|^{1/3} dt. \quad (2)$$

С помощью непрямых вычислений и не касаясь вопроса единственности, Ватанабе [2] показал, что дуга кривой  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$ , инвариантная относительно группы преобразований

$$\begin{aligned} \bar{x} &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_1; \\ \bar{y} &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_2; \\ \bar{z} &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_3; \end{aligned} \quad (3)$$

$$\sum_{k=1}^3 a_{ik} = \Delta, \quad \Delta = \|a_{ik}\| \neq 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (4)$$

равна

$$\int \left\{ \left| \begin{array}{cc} \dot{x} & \ddot{x} \\ \dot{y} & \ddot{y} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} \dot{y} & \ddot{y} \\ \dot{z} & \ddot{z} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} \dot{z} & \ddot{z} \\ \dot{x} & \ddot{x} \end{array} \right| \right\}^{1/3} dt. \quad (5)$$

Мы намерены получить формулу (5) с помощью прямых вычислений, причем решается и вопрос единственности и, кроме того, таким же образом найти площадь поверхности, инвариантную относительно той же группы преобразований.

Ватанабе [3] обобщил формулу (5) и на случай  $n$ -мерного пространства. Для такого пространства наши вычисления, мы полагаем, тоже применимы.

2. Из условий (4) следует, что из коэффициентов  $a_{ik}$  независимыми являются только шесть. Если, например, в качестве зависимых выбрать  $a_{23}$ ,  $a_{32}$ ,  $a_{33}$ , то их можно выразить через независимые  $a_{ik}$ , воспользовавшись одним из равенств

$$\begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 1 & a_{22} & a_{23} \\ 1 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 1 & a_{13} \\ a_{21} & 1 & a_{23} \\ a_{31} & 1 & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 1 \\ a_{21} & a_{22} & 1 \\ a_{31} & a_{32} & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad (6)$$

являющихся следствием (4), и равенствами

$$a_{11} + a_{12} + a_{13} = a_{21} + a_{22} + a_{23} = a_{31} + a_{32} + a_{33},$$

следующими из (4). Мы получим

$$\begin{aligned} a_{23} &= a_{11} + a_{12} + a_{13} - a_{21} - a_{22}; \\ a_{32} + a_{33} &= a_{11} + a_{12} + a_{13} - a_{31}; \\ a_{32} &= a_{12} + \frac{1 + (a_{22} - a_{12})(a_{31} - a_{11})}{a_{21} - a_{11}}, \end{aligned} \quad (7)$$

которому преобразованию будут соответствовать

$$a_{ik} = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases}, \quad a_1 = a_2 = a_3 = 0. \quad (7')$$

достаточно вычислить производные  $\frac{\partial a_{23}}{\partial a_{ik}}$ ,  $\frac{\partial a_{32}}{\partial a_{ik}}$ ,  $\frac{\partial a_{33}}{\partial a_{ik}}$  при значениях величин  $a_{ik}$ .

С помощью обычного приема (разложение  $F(x, y, z)$  по степеням независимых параметров преобразований) находим инфинитезимальные операторы группы (3)–(4):

$$\begin{aligned} X_1(f) &= \frac{\partial f}{\partial x}; \\ X_2(f) &= \frac{\partial f}{\partial y}; \\ X_3(f) &= \frac{\partial f}{\partial z}; \\ X_4(f) &= x \frac{\partial f}{\partial x} + z \frac{\partial f}{\partial y} + y \frac{\partial f}{\partial z}; \\ X_5(f) &= y \frac{\partial f}{\partial x} + z \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z}; \\ X_6(f) &= z \frac{\partial f}{\partial x} + z \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z}; \\ X_7(f) &= (x - z) \frac{\partial f}{\partial y}; \\ X_8(f) &= (y - z) \frac{\partial f}{\partial y} + (y - z) \frac{\partial f}{\partial z}; \\ X_9(f) &= (x - y) \frac{\partial f}{\partial z}. \end{aligned} \quad (8)$$

Коммутация, очевидно, транзитивна.

Положив

$$p = \frac{dy}{dx}, \quad q = \frac{dz}{dx}, \quad r = \frac{d^2y}{dx^2}, \quad s = \frac{d^2z}{dx^2}$$

продолжив операторы (8), получим операторы

$$X_1(f) = X_1(f);$$

$$X_2(f) = X_2(f);$$

$$X_3(f) = X_3(f);$$

$$X_4(f) = X_4(f) + (q - p) \frac{\partial f}{\partial p} + (p - q) \frac{\partial f}{\partial q} + (s - 2r) \frac{\partial f}{\partial r} + (r - 2s) \frac{\partial f}{\partial s};$$

$$X_5(f) = X_5(f) + (q - p^2) \frac{\partial f}{\partial p} + (q - pq) \frac{\partial f}{\partial q} + (s - 3pr) \frac{\partial f}{\partial r} + (s - rq - 2ps) \frac{\partial f}{\partial s}; \quad (9)$$

$$\begin{aligned}\tilde{X}_6(f) &= X_6(f) + (q - pq)\frac{\partial f}{\partial p} + (q - q^2)\frac{\partial f}{\partial q} + (s - 2qr - ps)\frac{\partial f}{\partial r} + (s - 3qs)\frac{\partial f}{\partial s}; \\ \tilde{X}_7(f) &= X_7(f) + (1 - q)\frac{\partial f}{\partial p} - s\frac{\partial f}{\partial r}; \\ \tilde{X}_8(f) &= X_8(f) + (p - q)\frac{\partial f}{\partial p} + (p - q)\frac{\partial f}{\partial q} + (r - s)\frac{\partial f}{\partial r} + (r - s)\frac{\partial f}{\partial s}; \\ \tilde{X}_9(f) &= X_9(f) + (1 - p)\frac{\partial f}{\partial q} - r\frac{\partial f}{\partial s}.\end{aligned}$$

Условие инвариантности интеграла

$$\int M(x, y, z, p, q, r, s) dx \quad (10)$$

относительно одночленной группы с инфинитезимальным оператором

$$X(f) = \xi_x f_x + \eta f_y + \zeta f_z + \gamma_1 f_p + \zeta_1 f_q + \gamma_2 f_r + \zeta_2 f_s,$$

таково

$$X(M) + (\xi_x + p\xi_y + q\xi_z)M = 0.$$

Поэтому условия инвариантности интеграла (10) относительно группы с инфинитезимальными операторами (9) дают

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial z} = 0;$$

$$\begin{aligned}\tilde{X}_4(M) + M &= 0, \quad \tilde{X}_5(M) + pM = 0, \quad \tilde{X}_6(M) + qM = 0; \\ \tilde{X}_7(M) &= \tilde{X}_8(M) = \tilde{X}_9(M) = 0.\end{aligned} \quad (11)$$

Система уравнений (11) легко интегрируется. С точностью до постоянного множителя, ее единственным решением является

$$M = [(p - 1)s + (1 - q)r]^{1/3}.$$

Таким образом, единственным интегральным инвариантом (10) группы преобразований (3), удовлетворяющих условиям (4), является

$$\int [(p - 1)s + (1 - q)r]^{1/3} dx = \int \left\{ \left| \begin{array}{cc} \dot{x} & \ddot{x} \\ \dot{y} & \ddot{y} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} \dot{y} & \ddot{y} \\ \dot{z} & \ddot{z} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} \dot{z} & \ddot{z} \\ \dot{x} & \ddot{x} \end{array} \right| \right\}^{1/3} dt.$$

3. Для того, чтобы найти аффинную площадь поверхности

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v),$$

продолжим операторы (8), полагая

$$dz = p dx + q dy, \quad p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Мы получим операторы

$$\begin{aligned}\tilde{X}_1(f) &= X_1(f), \quad \tilde{X}_2(f) = X_2(f), \quad \tilde{X}_3(f) = X_3(f); \\ \tilde{X}_4(f) &= X_4(f) + (-p - pq)\frac{\partial f}{\partial p} + (1 - q^2)\frac{\partial f}{\partial q}; \\ \tilde{X}_5(f) &= X_5(f) + (p - pq)\frac{\partial f}{\partial p} + (q - p - q^2)\frac{\partial f}{\partial q}; \\ \tilde{X}_6(f) &= X_6(f) + (p - p^2 - pq)\frac{\partial f}{\partial p} + (q - q^2 - pq)\frac{\partial f}{\partial q}; \\ \tilde{X}_7(f) &= X_7(f) + (pq - q)\frac{\partial f}{\partial p} + q^2\frac{\partial f}{\partial q}; \\ \tilde{X}_8(f) &= X_8(f) + (pq - p)\frac{\partial f}{\partial p} + (1 - q)^2\frac{\partial f}{\partial q}; \\ \tilde{X}_9(f) &= X_9(f) + \frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial q}.\end{aligned} \quad (12)$$

$$X(M) + M(\xi_x + p\xi_z + \eta_y + q\eta_z) = 0$$

инвариантности интеграла

$$\int M(x, y, z, p, q) dx dy \quad (13)$$

относительно одночленной группы с инфинитезимальным оператором

$$X(f) = \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta \frac{\partial f}{\partial z} + \xi_1 \frac{\partial f}{\partial p} + \eta_1 \frac{\partial f}{\partial q}$$

ясно, что условия инвариантности интеграла (13) относительно группы инфинитезимальными операторами (12) таковы:

$$\tilde{X}_1(M) = \tilde{X}_2(M) = \tilde{X}_3(M) = 0;$$

$$\tilde{X}_4(M) + (1+q)M = 0, \quad \tilde{X}_5(M) + qM = 0, \quad \tilde{X}_6(M) + (p+q)M = 0;$$

$$\tilde{X}_7(M) - qM = 0, \quad \tilde{X}_8(M) + (1-q)M = 0, \quad \tilde{X}_9(M) = 0.$$

Несложным, с точностью до постоянного множителя, решением последней системы уравнений является

$$M = 1 - p - q.$$

Таким образом, аффинная площадь поверхности равна

$$\int (1-p-q) dx dy = \int \left\{ \frac{D(x, y)}{D(u, v)} + \frac{D(y, z)}{D(u, v)} + \frac{D(z, x)}{D(u, v)} \right\} du dv.$$

*Замечание.* Если в качестве независимых коэффициентов преобразования (3) выбрать  $a_{ik}$ ,  $i \neq k$ , то вместо последних шести операторов (8) получим операторы

$$\begin{aligned} X'_4(f) &= \left( y - \frac{1}{2}x \right) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}y \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{1}{2}z \frac{\partial f}{\partial z}; \\ X'_5(f) &= \left( z - \frac{1}{2}x \right) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}y \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{1}{2}z \frac{\partial f}{\partial z}; \\ X'_6(f) &= \frac{1}{2}x \frac{\partial f}{\partial x} + \left( x - \frac{1}{2}y \right) \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{1}{2}z \frac{\partial f}{\partial z}; \\ X'_7(f) &= \frac{1}{2}x \frac{\partial f}{\partial x} + \left( z - \frac{1}{2}y \right) \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{1}{2}z \frac{\partial f}{\partial z}; \\ X'_8(f) &= \frac{1}{2}x \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}y \frac{\partial f}{\partial y} + \left( x - \frac{1}{2}z \right) \frac{\partial f}{\partial z}; \\ X'_9(f) &= \frac{1}{2}x \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}y \frac{\partial f}{\partial y} + \left( y - \frac{1}{2}z \right) \frac{\partial f}{\partial z}. \end{aligned} \quad (14)$$

Проверить, что операторы (14) являются линейными, с постоянными коэффициентами, комбинациями операторов (8). Ясно, что для формулы (5) на случай пространства более чем трех измерений можно менять диагональные коэффициенты преобразований считать функциональными. Для трехмерного пространства практически безразличен независимых  $a_{23}$ ,  $a_{32}$ ,  $a_{33}$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

Б. Н. Г. Чеботарев. Теория групп Ли. ГИТТЛ, М., 1940.

С. Watanabe S. On hypersurfaces of spaces belonging to certain transformation groups. *Acta math. Acad. scient. hung.*, 1966, 17, № 1—2.

С. Watanabe S. On hypersurfaces of spaces belonging to certain transformation groups. *Tensors*, 1967, 18, № 1.

Поступила 30 сентября 1967.

## О ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ ОБРАЗОВАНИИ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

*B. F. Игнатенко* (Полтава)

Пусть в евклидовом пространстве  $E_m$  фиксирована координатная система началом  $O$  и единичными векторами  $e_1, e_2, \dots, e_m$  ортонормированного базиса.

Тогда уравнение центральной гиперповерхности четвертого порядка общего вида с центром в точке  $O$  можно записать в виде

$$\varphi_4 + \varphi_2 + \varphi_0 = 0, \quad (1)$$

где  $\varphi_4, \varphi_2, \varphi_0$  — однородные формы соответственно четвертой, второй и нулевой степени переменных  $x_i$ .<sup>1</sup>

Уравнение (1) можно переписать так:

$$\sum_{\alpha, \beta, \gamma, \delta=1}^m b_{\alpha\beta\gamma\delta} x_\alpha x_\beta x_\gamma x_\delta + \varphi_2 + \varphi_0 = 0. \quad (2)$$

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{k, s=1}^m a_{1ks} x_k x_s - l_1 &= 0; \\ \sum_{k, s=1}^m a_{2ks} x_k x_s - l_2 &= 0; \\ \cdots &\cdots \cdots \cdots \cdots \\ \sum_{k, s=1}^m a_{(m-1)ks} x_k x_s - l_{m-1} &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

и уравнение

$$\begin{aligned} (l_1 + l_2) \sum_{k, s=1}^m c_{1ks} x_k x_s + (l_1 + l_3) \sum_{k, s=1}^m c_{2ks} x_k x_s + \cdots + \\ + (l_{m-2} + l_{m-1}) \sum_{k, s=1}^m c_{\eta ks} x_k x_s + l_1 \sum_{k, s=1}^m d_{1ks} x_k x_s + \\ + l_2 \sum_{k, s=1}^m d_{2ks} x_k x_s + \cdots + l_{m-1} \sum_{k, s=1}^m d_{(m-1)ks} x_k x_s + \varphi_2 + \varphi_0 = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $l_1, l_2, \dots, l_{m-1}$  есть некоторые параметры, а  $\eta = \frac{(m-1)(m-2)}{2}$ .

Заметим, что при переменных  $l_1, l_2, \dots, l_{m-1}$  система (3) определяет связку центральных кривых  $2^{m-1}$ -го порядка, а уравнение (4) — связку центральных гиперповерхностей второго порядка.

<sup>1</sup> Коэффициенты рассматриваемых здесь уравнений считаются действительными.

Представляя  $l_1, l_2, \dots, l_{m-1}$ , найденные из уравнений (3), в уравнение (4), получим

$$\begin{aligned} & \sum_{k,s=1}^m c_{ik}x_kx_s \left( \sum_{k,s=1}^m a_{1ks}x_kx_s + \sum_{k,s=1}^m a_{2ks}x_kx_s \right) + \sum_{k,s=1}^m c_{2ks}x_kx_s \left( \sum_{k,s=1}^m a_{1ks}x_kx_s + \right. \\ & \quad \left. + \sum_{k,s=1}^m a_{3ks}x_kx_s \right) + \dots + \sum_{k,s=1}^m c_{\eta ks}x_kx_s \left( \sum_{k,s=1}^m a_{(m-2)ks}x_kx_s + \right. \\ & \quad \left. + \sum_{k,s=1}^m a_{(m-1)ks}x_kx_s \right) + \sum_{k,s=1}^m a_{1ks}x_kx_s \sum_{k,s=1}^m d_{1ks}x_kx_s + \sum_{k,s=1}^m a_{2ks}x_kx_s \times \\ & \quad \sum_{k,s=1}^m d_{2ks}x_kx_s + \dots + \sum_{k,s=1}^m a_{(m-1)ks}x_kx_s \sum_{k,s=1}^m d_{(m-1)ks}x_kx_s + \varphi_2 + \varphi_0 = 0. \quad (5) \end{aligned}$$

Однородные формы второй и нулевой степени переменных  $x_i$  уравнений (2) и (5), очевидно, совпадают.

Приравняв соответствующие коэффициенты форм четвертой степени переменных  $x_i$  этих уравнений, получим некоторую систему  $S^*$  из  $N = \frac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{24}$  квадратных уравнений относительно коэффициентов  $c_{ik}, d_{jks}, a_{jks}$  ( $i = 1, 2, \dots, \eta; j = 1, 2, \dots, m-1$ ), как неизвестных.

Нетрудно проверить, что система  $S^*$  имеет  $N_1 = \frac{m(m+1)(m+2)(5m-9)}{24}$  неизвестных.

При фиксированных коэффициентах  $b_{\alpha\beta\gamma\delta}$  указанные неизвестные могут выбраны так, чтобы система  $S^*$  имела только действительные решения, если  $m \geq 3$ .

В самом деле, зафиксировав неизвестные  $a_{jks}$  системы  $S^*$ , число которых  $\frac{m(m^2-1)}{2}$ , получим систему  $S_1^*$  линейных уравнений относительно неизвестных  $c_{ik}, d_{jks}$ . Неизвестные  $a_{jks}$  и  $N' = \frac{m(m+1)[(m+2)(5m-9)-12(m-1)]}{24}$  однородных неизвестных, взятых среди неизвестных  $c_{ik}, d_{jks}$ , можно, очевидно, выбрать так, чтобы система  $S_1^*$  из  $N$  линейных уравнений относительно  $N$  неизвестных была совместна, если  $m \geq 3$ .

Отсюда следует, что любую центральную гиперповерхность четвертого порядка пространства  $E_m$  ( $m \geq 3$ ) можно задать уравнением вида (5).

Следовательно, имеет место

**Теорема 1.** В евклидовом пространстве  $E_m$  ( $m \geq 3$ ) произвольная центральная гиперповерхность четвертого порядка (2) с центром  $O$  может быть образована как геометрическое место точек пересечения элементов (3) центральных кривых  $2^{m-1}$ -го порядка, каждая из которых есть точка пересечения  $m-1$  центральных гиперповерхностей второго порядка с общим центром  $O$ , в соответственными элементами проективной ей связки центральных гиперповерхностей второго порядка, центры которых совпадают с точкой  $O$ .

Допишем к левым частям уравнений (2), (4) и (5) однородные формы того вида  $\varphi_3$  и  $\varphi_1$  соответственно третьей и первой степени относительно переменных  $x_i$ . Полученные уравнения обозначим соответственно через (4') и (5').

Уравнения (2') и (5') при  $m \geq 3$  будут теперь представлять произвольную гиперповерхность четвертого порядка, а уравнение (4') — связку гиперповерхностей третьего порядка общего вида.

<sup>1</sup> Заметим, что от перестановки индексов  $\alpha, \beta, \gamma, \delta; p, q, r$  и  $k, s$  связанные с ними коэффициенты соответствующих уравнений не изменяются.

Очевидно, что имеет место аналогичная теорема 1

**Теорема 2.** Произвольная гиперповерхность четвертого порядка (2) евклидова пространства  $E_m$  ( $m \geq 3$ ) может быть образована как геометрическое место точек пересечения элементов связки (3) центральных краевых  $2^{m-1}$ -го порядка, каждая из которых есть линия пересечения  $m$ -центральных гиперповерхностей второго порядка с общим центром, с соответствующими элементами проективной ей связки (4') гиперповерхности третьего порядка.

При переменных  $t_1, t_2, \dots, t_{m-1}$  система уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m a_{1k}x_k - t_1 &= 0; \\ \sum_{k=1}^m a_{2k}x_k - t_2 &= 0; \\ \cdot &\quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \sum_{k=1}^m a_{(m-1)k}x_k - t_{m-1} &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

определяет связку параллельных прямых, а уравнение

$$\begin{aligned} (t_1 + t_2) \sum_{p, q, r=1}^m a_{1pqr}x_p x_q x_r + (t_1 + t_3) \sum_{p, q, r=1}^m a_{2pqr}x_p x_q x_r + \dots + \\ + (t_{m-2} + t_{m-1}) \sum_{p, q, r=1}^m a_{(m-1)pqr}x_p x_q x_r + t_1 \sum_{p, q, r=1}^m c_{1pqr}x_p x_q x_r + t_2 \times \\ \times \sum_{p, q, r=1}^m c_{2pqr}x_p x_q x_r + \dots + t_{m-1} \sum_{p, q, r=1}^m c_{(m-1)pqr}x_p x_q x_r + \sum_{i=0}^3 \varphi_i = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

— связку гиперповерхностей третьего порядка.

Подставим в уравнение (7) значения  $t_1, t_2, \dots, t_{m-1}$ , найденные из уравнений (6).

Получим уравнение:

$$\begin{aligned} \sum_{p, q, r=1}^m a_{1pqr}x_p x_q x_r \left( \sum_{k=1}^m a_{1k}x_k + \sum_{k=1}^m a_{2k}x_k \right) + \sum_{p, q, r=1}^m a_{2pqr}x_p x_q x_r \left( \sum_{k=1}^m a_{1k}x_k + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^m a_{3k}x_k \right) + \dots + \sum_{p, q, r=1}^m a_{(m-1)pqr}x_p x_q x_r \left( \sum_{k=1}^m a_{(m-2)k}x_k + \sum_{k=1}^m a_{(m-1)k}x_k \right) + \\ + \sum_{k=1}^m a_{1k}x_k \sum_{p, q, r=1}^m c_{1pqr}x_p x_q x_r + \sum_{k=1}^m a_{2k}x_k \sum_{p, q, r=1}^m c_{2pqr}x_p x_q x_r + \dots + \\ + \sum_{k=1}^m a_{(m-1)k}x_k \sum_{p, q, r=1}^m c_{(m-1)pqr}x_p x_q x_r + \sum_{i=0}^3 \varphi_i = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Покажем, что уравнение произвольной гиперповерхности четвертого порядка может быть записано в виде (8), при  $m \geq 3$ .

Действительно, однородные формы третьей, второй, первой и нулевой степени переменных  $x_i$  уравнений (2') и (8) совпадают. Приравняем соответствующие коэффициенты однородных форм четвертой степени переменных  $x_i$  этих уравнений. В результате получим систему  $R$  из  $N = \frac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{24}$  квадратных уравнений относительно коэффициентов  $a_{jk}, c_{jptr}, a_{ipqr}$  ( $j=1, 2, \dots, m-1; i=1, 2, \dots, \eta$ ) как неизвестных. Система  $R$  при любых фиксированных коэффициентах  $b_{\alpha\beta\gamma\delta}$  имеет действительные решения, если  $m \geq 3$ .

В общем виде, система  $R$  имеет

$$Q = \frac{5}{24} [24(m-1) + (m+1)(m+2)(2m^2 - 3m - 3)]$$

неизвестных. Неизвестные  $a_{jk}$ , число которых равно  $T = m(m-1)$ , и  $Q - T$  неизвестных, взятых среди неизвестных  $c_{jprq}, a_{ipqr}$ , можно выбрать так, чтобы система  $R$  представляла совместную систему  $N$  линейных уравнений относительно  $N$  неизвестных.

Таким образом справедлива

**Теорема 3.** Произвольная гиперповерхность четвертого порядка (2') квадратного пространства  $E_m$  ( $m \geq 3$ ) может быть образована как геометрическое место точек пересечения элементов связки (6) параллельных прямых с соответственными элементами проективной ей связки (8) гиперповерхности третьего порядка.

Теорему 3 в известном смысле можно рассматривать как  $m$ -мерное обобщение соответствующей теоремы об образовании общей поверхности четвертого порядка, рассмотренной в [1].

#### ЛИТЕРАТУРА

II. H. Reye. Projectivische Erzeugung der allgemeinen Flächen dritter, vierter und höherer Ordnung durch Flächenbündel niederer Ordnung. Mat. Ann., Bd. I, Leipzig, 1866.

Поступила 3 августа 1967 г.

## О ГИПЕРПЛОСКОСТЯХ ОРТОГОНАЛЬНОЙ СИММЕТРИИ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ

B. F. Игнатенко (Полтава)

В данной статье изучается расположение гиперплоскостей ортогональной симметрии алгебраических гиперповерхностей евклидова  $m$ -мерного пространства  $E_m$ .

1. Пусть в  $m$ -мерном евклидовом пространстве  $E_m$  фиксирована координатная система началом  $O$  и единичными векторами  $e_1, e_2, \dots, e_m$  ортонормированного базиса.

Рассмотрим в этом пространстве произвольную  $m$ -мерную алгебраическую гиперповерхность  $n$ -го порядка  $F_n$  и некоторую  $k$ -мерную плоскость  $\Pi_k$ , где  $k = 1, 2, \dots, m-1$ .

Уравнение гиперповерхности  $F_n$  можно записать в виде

$$\sum_{j=0}^n \varphi_j(x_i) = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

где  $\varphi_j(x_i)$  — однородные формы степени  $j$  относительно переменных  $x_i$ . Совместим плоскость  $\Pi_k$  с координатной плоскостью

$$\begin{aligned} x_1 &= 0; \\ x_2 &= 0; \\ \cdot &\cdot &\cdot &\cdot &\cdot \\ x_{m-k} &= 0. \end{aligned}$$

Тогда уравнение поверхности пересечения плоскости  $\Pi_k$  с гиперповерхностью  $F_n$  можно записать так:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^n \varphi_j(x_i) &= 0; \\ x_1 &= 0; \\ x_2 &= 0; \\ \cdot &\cdot &\cdot &\cdot &\cdot \\ x_{m-k} &= 0 \end{aligned}$$

или

$$\sum_{j=0}^l \psi_j(x_s) = 0, \quad s = m-k+1, \dots, q, \quad (l \leq n, q \leq m),$$

где  $\psi_j(x_s)$  — однородные формы степени  $j$  относительно переменных  $x_s$ . Имеют место следующие случаи.

1)  $l=0$ . Возможны такие подслучаи:

a) Число  $\psi_0$  — отлично от нуля. Плоскость  $\Pi_k$  не пересекает гиперповерхность  $F_n$ .

b) Число  $\psi_0$  есть нуль. Плоскость  $\Pi_k$ , очевидно, лежит на гиперповерхности  $F_n$ .

2)  $l \neq 0$ . Рассмотрим два подслучаия:

$\bullet \quad l = n$ . Плоскость  $\Pi_k$  пересекает гиперповерхность  $F_n$  по поверхности порядка  $n$ .

$\bullet \quad 0 < l < n$ . Плоскость  $\Pi_k$  пересекает гиперповерхность  $F_n$  по поверхности менее, чем  $n$ -го порядка.

Такую плоскость  $\Pi_k$ , которая не пересекает гиперповерхность  $F_n$  по поверхности  $n$ -го порядка, назовем плоскостью асимптотического направления гиперповерхности  $F_n$ .

Таким образом, имеет место

**Теорема 1.** Если плоскость  $\Pi_k$  является плоскостью асимптотического направления гиперповерхности  $F_n$ , то она либо пересекается с ней по поверхности менее, чем  $n$ -го порядка ( $0 < l < n$ ), либо вовсе не пересекает гиперповерхность  $F_n$  ( $l = 0$ , число  $\phi_0$  — отлично от нуля), либо содержит гиперповерхности  $F_n$  ( $l = 0$ , число  $\phi_0$  есть нуль). Если плоскость  $\Pi_k$  не является плоскостью асимптотического направления гиперповерхности  $F_n$ , то она пересекает эту гиперповерхность по поверхности  $n$ -го порядка.

Частные случаи теоремы 1 для гиперповерхности второго порядка рассматриваются в [1, 2].

**2.** Пусть точка  $N$  принадлежит гиперповерхности  $F_n$ . Если точка  $N'$ , симметричная точке  $N$  относительно плоскости  $\Pi_k$ , также принадлежит поверхности  $F_n$ , то плоскость  $\Pi_k$  называется плоскостью симметрии гиперповерхности\*.

**Теорема 2.** Если  $\alpha$  и  $\beta$  — две различные гиперплоскости симметрии поверхности  $F_n$ , то гиперплоскость, симметрична одной из них относительно другой, также будет гиперплоскостью симметрии этой поверхности.

**Доказательство.** Пусть гиперплоскость  $\gamma$  будет симметричной плоскости  $\alpha$  относительно гиперплоскости  $\beta$ , где  $\alpha$  и  $\beta$  — две различные гиперплоскости симметрии гиперповерхности  $F_n$ . Если гиперплоскости  $\alpha$  и  $\beta$  взаимно-ортогональны, то, очевидно,  $\alpha \equiv \gamma$ . Поэтому предполагаем, что гиперплоскости  $\alpha$  и  $\beta$  не взаимно-ортогональны, и будем считать, что они не вполне параллельны. В противном случае, легко видеть, что произвольная гиперплоскость, вполне параллельная этим гиперплоскостям, является гиперплоскостью симметрии гиперповерхности  $F_n$ .

Любая плоскость  $\Pi_2$ , пересекающая гиперповерхность  $F_n$ , не лежащая на ней и вполне ортогональная плоскости  $\Pi_{m-2} \equiv \alpha \times \beta$ , пересекает гиперповерхность  $F_n$  по некоторой кривой  $p$ -го порядка  $K_p$ , где по теореме 1  $p \leq n$ .

Положим  $a \equiv \Pi_2 \times \alpha$ ,  $b \equiv \Pi_2 \times \beta$ ,  $d \equiv \Pi_2 \times \gamma$ .

Нетрудно видеть, что прямые  $a$ ,  $b$ ,  $d$  будут осями симметрии кривой  $K_p$ . Так как  $\Pi_2$  есть произвольная 2-плоскость, пересекающая гиперповерхность  $F_n$ , не лежащая на ней и вполне ортогональная плоскости  $\Pi_{m-2}$ , гиперплоскость  $\gamma$  есть гиперплоскость симметрии гиперповерхности  $F_n$ . Теорема доказана.

**Теорема 3.** Пусть  $F_{2n}$  — неприводимая гиперповерхность. Конечное число гиперплоскостей симметрии этой гиперповерхности, проходящих через  $(m-2)$ -мерную плоскость, не может быть больше  $2n$ .

**Доказательство.** Пусть через некоторую  $(m-2)$ -мерную плоскость  $\Pi_{m-2}$  проходит конечное и большее  $2n$  число гиперплоскостей симметрии гиперповерхности четного порядка  $F_{2n}$ . Тогда любая плоскость  $\Pi_2$ , пересекающая гиперповерхность  $F_{2n}$ , не лежащая на ней и вполне орто-

\* Будем предполагать, что плоскость  $\Pi_k$  является плоскостью ортогональной симметрии гиперповерхности  $F_n$ .

гональная плоскости  $\Pi_{m-2}$ , пересекает эту гиперповерхность по кривой  $K_p$  (по теореме 1  $p \leq 2n$ ), состоящей из концентрических окружностей с центром в точке  $P$ , где  $P \equiv \Pi_2 \times \Pi_{m-2}$ . Следовательно, любая гиперплоскость, проходящая через плоскость  $\Pi_{m-2}$ , является гиперплоскостью симметрии гиперповерхности  $F_{2n}$ , что противоречит условию. Теорема доказана.

Из теоремы 3 непосредственно вытекает.

**Следствие.** Если гиперповерхность  $F_{2n}$  имеет больше  $2n$  гиперплоскостей симметрии, проходящих через  $(m-2)$ -мерную плоскость  $\Pi_{m-2}$ , то гиперповерхность  $F_{2n}$  является гиперповерхностью вращения с  $(m-2)$ -мерной осью вращения  $\Pi_{m-2}$ .

Обозначим теперь через  $F_n^*$  гиперповерхность  $F_n$ , удовлетворяющую следующему условию A: если через некоторую  $(m-2)$ -мерную плоскость проходит не меньше двух ее гиперплоскостей симметрии, то среди них существуют две взаимно-ортогональные гиперплоскости.

**Теорема 4.** Если через некоторую  $(m-2)$ -мерную плоскость проходит не меньше двух гиперплоскостей симметрии гиперповерхности  $F_n^*$ , то все они разбиваются на взаимно-ортогональные пары.

**Доказательство.** Пусть через некоторую  $(m-2)$ -мерную плоскость  $\Pi_{m-2}$  проходит не меньше двух гиперплоскостей симметрии гиперповерхности  $F_n^*$ . По условию среди них существуют две взаимно-ортогональные гиперплоскости. Поэтому произвольная плоскость  $\Pi_2$ , пересекающая гиперповерхность  $F_n^*$ , не лежащая на ней и вполне ортогональная  $\Pi_{m-2}$ , пересекает гиперповерхность  $F_n^*$  по центральной кривой  $K_p$  (по теореме 1  $p \leq r$ ) с центром в точке  $P \equiv \Pi_2 \times \Pi_{m-2}$ . Пусть гиперплоскость симметрии  $\alpha$  проходит через плоскость  $\Pi_{m-2}$ . Обозначим через  $\beta$  гиперплоскость, проходящую через плоскость  $\Pi_{m-2}$  и ортогональную гиперплоскости  $\alpha$ . Из работы [3] вытекает, что прямая  $b \equiv \Pi_2 \times \beta$  является осью симметрии кривой  $K_p$ . Теорема доказана.

**Теорема 5.** Пусть гиперповерхность  $F_n^*$  имеет конечное число гиперплоскостей симметрии. Если через  $(m-2)$ -мерную плоскость  $\Pi_{m-2}$  проходит больше двух гиперплоскостей симметрии этой гиперповерхности, то все другие, не проходящие через плоскость  $\Pi_{m-2}$ , гиперплоскости симметрии гиперповерхности  $F_n^*$ , если они существуют, 2-ортогональны этой плоскости.

**Доказательство.** Рассмотрим гиперповерхность  $F_n^*$ , имеющую конечное число гиперплоскостей симметрии. Если через  $(m-2)$ -мерную плоскость  $\Pi_{m-2}$  проходит больше двух гиперплоскостей симметрии гиперповерхности  $F_n^*$ , то, как вытекает из теоремы 4, число их четное. Пусть, для определенности, через плоскость  $\Pi_{m-2}$  проходят четыре гиперплоскости симметрии  $\alpha_i$ , ( $i = 1, 2, 3, 4$ ). Допустим существование гиперплоскости симметрии  $\beta$ , не 2-ортогональной плоскости  $\Pi_{m-2}$ . Гиперплоскость  $\beta$ , очевидно, не может быть вполне параллельной плоскости  $\Pi_{m-2}$ . Среди гиперплоскостей  $\alpha_i$  существуют, очевидно, по крайней мере три гиперплоскости — пусть это  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$  — не ортогональны гиперплоскости  $\beta$ , причем две из них будут взаимно-ортогональны. Будем считать ими гиперплоскости  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ .

Заметим, что гиперплоскость  $\beta$  можно считать даже не 1-ортогональной плоскости  $\Pi_{m-2}$ . Действительно, пусть гиперплоскость  $\beta$  есть 1-ортогональна плоскости  $\Pi_{m-2}$ . Гиперплоскости  $\alpha_3$  и  $\beta$  не взаимно-ортогональны. Поэтому через плоскость  $\Pi_{m-2}^0 \equiv \alpha_3 \times \beta$  проходит гиперплоскость симметрии, не 1-ортогональная плоскости  $\Pi_{m-2}$ . Ее и можно принять за  $\beta$ .

Положим  $\Pi_{m-2}^1 \equiv \alpha_1 \times \beta$ ,  $\Pi_{m-2}^2 \equiv \alpha_2 \times \beta$ . Обозначим через  $\beta_1$  и  $\beta_2$  гиперплоскости симметрии, проходящие соответственно через плоскости  $\Pi_{m-2}^1$  и  $\Pi_{m-2}^2$  и ортогональные гиперплоскостям  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ . Гиперплоскости  $\beta_1$  и  $\beta_2$  существуют в силу теоремы 4. Пусть  $\Pi_{m-2}^3 \equiv \beta_1 \times \alpha_2$ ,  $\Pi_{m-2}^4 \equiv \beta_2 \times \alpha_1$ . Обозначим через  $\beta_3$  гиперплоскость, проходящую через плоскости  $\Pi_{m-2}^3$  и  $\Pi_{m-2}^4$  и являющуюся, очевидно, гиперплоскостью симметрии. Попарно взаимно-ортогональные гиперплоскости  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  и  $\beta_3$  разбивают пространство  $E_m$  на восемь областей; каждая из этих гиперплоскостей разбивается на четыре четверти. Из восьми областей пространства  $E_m$  рассмотрим одну область, которая ограничена четвертями гиперплоскостей  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , содержащими соответственно плоскости  $\Pi_{m-2}^1$  и  $\Pi_{m-2}^2$ .

Так как количество гиперплоскостей симметрии, проходящих через плоскости  $\Pi_{m-2}^3$  и  $\Pi_{m-2}^4$  конечно, то существуют гиперплоскости симметрии  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ , проходящие соответственно через указанные плоскости так, что во внутренней области каждого из углов  $\alpha_2\gamma_1$  и  $\alpha_1\gamma_2$ , грани которых проходят через рассматриваемую область пространства  $E_m$ , не проходят гиперплоскости симметрии, содержащие соответственно плоскости  $\Pi_{m-2}^3$  и  $\Pi_{m-2}^4$ . Заметим, что гиперплоскости  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  могут совпадать соответственно с гиперплоскостями  $\beta_1$  и  $\beta_2$ .

Пусть  $\Pi_{m-2}^5 \equiv \alpha_2 \times \gamma_2$ ,  $\Pi_{m-2}^6 \equiv \alpha_1 \times \gamma_1$ ,  $\Pi_{m-2}^7 \equiv \gamma_1 \times \gamma_2$ . Гиперплоскости  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  разбивают рассматриваемую область пространства  $E_m$  на четыре подобласти, симметричные по двум относительно плоскости  $\Pi_{m-2}^7$ . Пусть соответственно симметричными относительно плоскости  $\Pi_{m-2}^7$  являются подобласти  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon'_1$ ,  $\varepsilon_2$  и  $\varepsilon'_2$ . Будем считать, что плоскость  $\Pi_{m-2}^7$  проходит через подобласть  $\varepsilon_1$ . Тогда гиперплоскости симметрии  $\delta_1$  и  $\delta_2$ , ортогональные соответственно гиперплоскостям симметрии  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  и проходящие через плоскость  $\Pi_{m-2}^7$ , пройдут через подобласть  $\varepsilon_1$ .

Действительно, пусть, например, гиперплоскость  $\delta_1$  проходит через подобласти  $\varepsilon_2$  и  $\varepsilon'_2$ . Плоскость  $\Pi_{m-2}^8 \equiv \alpha_1 \times \delta_1$  лежит при этом внутри угла  $\Pi_{m-2}^6\Pi_{m-2}^4$  гиперплоскости  $\alpha_1$ , и гиперплоскость  $\gamma'_1$ , проходящая через плоскости  $\Pi_{m-2}^3$  и  $\Pi_{m-2}^8$ , является ортогональной гиперплоскости  $\gamma_1$ , что, очевидно, невозможно. Полученное противоречие показывает, что гиперплоскость  $\delta_1$  проходит через подобласть  $\varepsilon_1$ . Аналогично убеждаемся, что через эту подобласть проходит и гиперплоскость  $\delta_2$ . Таким образом, во крайней мере одна из гиперплоскостей  $\delta_1$  и  $\delta_2$  пересекает одну из гиперплоскостей  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  по некоторой плоскости  $\Pi_{m-2}^9$ , отличной от плоскости  $\Pi_{m-2}^7$  и проходящей через один из углов  $\Pi_{m-2}^6\Pi_{m-2}^5$  и  $\Pi_{m-2}^6\Pi_{m-2}^6$  соответственно в гиперплоскостях  $\alpha_2$  и  $\alpha_1$ . Положим для определенности, что плоскость  $\Pi_{m-2}^9$  пройдет внутри угла  $\Pi_{m-2}^6\Pi_{m-2}^5$ , определенного в гиперплоскости  $\alpha_2$ , т. е.  $\Pi_{m-2}^9 \equiv \delta_1 \times \alpha_2$ .

Так как гиперплоскости  $\alpha_2$  и  $\delta_1$ , очевидно, не взаимно-ортогональны, то существует гиперплоскость симметрии  $\delta^*$ , проходящая через плоскость  $\Pi_{m-2}^9$  и ортогональная гиперплоскости  $\alpha_2$ . Гиперплоскость  $\delta^*$  содержит, легко видеть, плоскость  $\Pi_{m-2}^4$  и проходит внутри угла  $\alpha_1\gamma_2$ , что невозможно. Полученное противоречие показывает, что рассматриваемая гиперповерхность  $F_n^*$  не может иметь гиперплоскость симметрии  $\beta$ , не 2-ортогональную плоскости  $\Pi_{m-2}$ . Теорема доказана.

3. Под центральной гиперповерхностью в пространстве  $E_m$  понимается гиперповерхность, имеющая единственный центр симметрии, который называется центром этой гиперповерхности.

Предположим теперь, что гиперповерхность  $F_{2n}^*$ , удовлетворяющая условию А, имеет центр  $O$  и гиперплоскость симметрии  $\beta$ , не 2-ортогональную  $(m-2)$ -мерной плоскости  $\Pi_{m-2}$ , через которую проходит больше двух гиперплоскостей симметрии этой гиперповерхности. Рассмотрим плоскости  $\Pi_{m-2}^3$  и  $\Pi_{m-2}^4$ , о которых шла речь при доказательстве теоремы 5. Из теоремы 5 и следствия теоремы 3 вытекает, что произвольная гиперплоскость, проходящая через любую из плоскостей  $\Pi_{m-2}^3$  и  $\Pi_{m-2}^4$ , является гиперплоскостью симметрии.

Положим  $\Pi_{m-3} = \Pi_{m-2} \times \beta$ . Тогда произвольная гиперплоскость, проходящая через плоскость  $\Pi_{m-3}$ , есть также гиперплоскость симметрии.

Действительно, пусть  $\alpha'$  есть некоторая гиперплоскость, проходящая через плоскость  $\Pi_{m-3}$ .

Обозначим через  $\Pi_{m-2}^{\alpha'}$  произвольную  $(m-2)$ -мерную плоскость гиперплоскости  $\alpha'$ , проходящую через плоскость  $\Pi_{m-3}$ . Плоскость  $\Pi_{m-2}^{\alpha'}$  можно рассматривать, очевидно, как плоскость пересечения некоторых двух гиперплоскостей пучков гиперплоскостей  $\{\Pi_{m-2}^3\}$  и  $\{\Pi_{m-2}^4\}$ . Этому показывает, что гиперплоскость  $\alpha'$  является гиперплоскостью симметрии.

Пусть  $\alpha$  есть некоторая полупрямая с началом в центре рассматриваемой гиперповерхности  $F_{2n}^*$ , который совпадает с точкой  $O \in \Pi_{m-3}$ , пересекающая гиперповерхность  $F_{2n}^*$  в точках  $P_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Возьмем любую из этих точек, например, точку  $P_1$ , и рассмотрим гиперсферу  $F_2^{P_1}$  с центром в точке  $O$ , на которой лежит точка  $P_1$ .

Гиперсфера  $F_2^{P_1}$  является компонентной гиперповерхности  $F_{2n}^*$ .

Действительно, пусть  $K (K \neq P_1)$  — произвольная точка гиперсферы  $F_2^{P_1}$ . Проведем через точки  $P$  и  $K$  плоскость  $\Pi_2$  вполне ортогонально некоторой плоскости  $\Pi_{m-3}^*$ , проходящей через плоскость  $\Pi_{m-3}$ . Так как любая гиперплоскость, проходящая через плоскость  $\Pi_{m-2}^*$ , есть гиперплоскость симметрии, то гиперповерхность  $F_{2n}^*$  является гиперповерхностью вращения с осью вращения  $\Pi_{m-2}^*$ . Отсюда, окружность  $K_2 = \Pi_2 \times F_2^{P_1}$  лежит на гиперповерхности  $F_{2n}^*$ , и, следовательно, точка  $K$  есть точка этой гиперповерхности.

Аналогично убеждаемся, что и гиперсфера  $F_2^{P_s}$ , ( $s = 2, 3, \dots, n$ ), входят в состав гиперповерхности  $F_{2n}^*$ .

Так как вне гиперсфер  $F_2^{P_i}$  гиперповерхность  $F_{2n}^*$ , очевидно, точек не имеет, то рассматриваемая гиперповерхность состоит из  $n$  концентрических гиперсфер.

Следовательно, справедлива

**Теорема 6.** Если центральная гиперповерхность  $F_{2n}^*$  имеет гиперплоскость симметрии, не 2-ортогональную  $(m-2)$ -мерной плоскости, через которую проходит больше двух гиперплоскостей симметрии этой гиперповерхности, то гиперповерхность  $F_{2n}^*$  состоит из  $n$  концентрических гиперсфер.

**Теорема 7.** Обозначим через  $F_{2n-1}$  центральную гиперповерхность нечетного порядка  $2n-1$ . Пусть через центр гиперповерхности  $F_{2n-1}$  проходят гиперплоскость  $\alpha$  и ортогональная ей прямая  $b$ . Если  $\alpha$  — гиперплоскость симметрии гиперповерхности  $F_{2n-1}$ , то  $b$  — ее ось симметрии.

наоборот, причем либо гиперплоскость  $\alpha$ , либо прямая  $b$ , либо они принадлежат гиперповерхности  $F_{2n-1}$ .

**Доказательство.** Пусть гиперповерхность  $F_{2n-1}$  является центральной гиперповерхностью нечетного порядка  $2n - 1$ . Уравнение гиперповерхности  $F_{2n-1}$  с центром в точке  $O$ , как инвариантное относительно преобразования  $x_i = -x_i$ , можно записать в виде

$$\sum_{s=1}^n f_{2s-1}(x_i) = 0, \quad (1)$$

где  $f_{2s-1}(x_i)$  есть однородные формы степени  $2s - 1$  относительно переменных  $x_i$ .

Из уравнения (1), в частности, следует, что центр гиперповерхности  $F_{2n-1}$  принадлежит ей самой.

Пусть гиперплоскость  $\alpha$  является гиперплоскостью симметрии гиперповерхности  $F_{2n-1}$ , а  $b$  есть прямая, проходящая через точку  $O$  и ортогональная гиперплоскости  $\alpha$ . Совместим гиперплоскость  $\alpha$  с координатной гиперплоскостью  $x_m = 0$ . Прямая  $b$  при этом совпадает с осью  $x_m$ . В результате получим, что уравнение (1) инвариантно относительно преобразования  $x_m = -x_m; x_k = x_k, (k = 1, 2, \dots, m-1)$ . Это возможно в случаях, когда переменная  $x_m$  входит во все формы  $f_{2s-1}(x_i)$  или только в нечетной, или только в четной степени. Уравнение (1) при этом инвариантно и относительно преобразования  $x_m = x_m; x_k = -x_k$ . Это значит, что ось  $x_m$  является осью симметрии гиперповерхности  $F_{2n-1}$ . Следовательно, наличие гиперплоскости симметрии  $\alpha$  влечет за собой существование оси симметрии, ортогональной гиперплоскости  $\alpha$ .

Аналогично доказывается и обратное утверждение.

Пусть переменная  $x_m$  входит во все формы  $f_{2s-1}(x_i)$  в нечетной степени. Тогда уравнение (1) можно записать в виде

$$x_m \sum_{s=1}^n f_{2(s-1)}(x_i) = 0, \quad (2)$$

где  $f_{2(s-1)}(x_i)$  суть однородные формы степени  $2(s-1)$  относительно переменных  $x_i$ .

Уравнение (2) показывает, что гиперплоскость  $x_m = 0$  является компонентной гиперповерхности  $F_{2n-1}$ . Для центральной гиперповерхности  $F_{2(n-1)}$ , задаваемой уравнением

$$\sum_{s=1}^n f_{2(s-1)}(x_i) = 0,$$

эта гиперплоскость является гиперплоскостью симметрии.

Отметим, что гиперповерхность  $F_{2(n-1)}$  в общем оси  $x_m$  не содержит.

Перейдем теперь к случаю, когда переменная  $x_m$  входит во все формы  $f_{2s-1}(x_i)$  только в четной степени. Гиперплоскость  $x_m = 0$  при этом компонентной гиперповерхности  $F_{2n-1}$  в общем не является. Приведем через ось  $x_m$  плоскость  $\Pi_2$ .

Возможны такие случаи.

1. Плоскость  $\Pi_2$  принадлежит гиперповерхности  $F_{2n-1}$ .
2. Плоскость  $\Pi_2$  не принадлежит гиперповерхности  $F_{2n-1}$ . Тогда она пересекает эту гиперповерхность по некоторой кривой  $K_{2p-1}$ ; нетрудно видеть, что кривая  $K_{2p-1}$  имеет нечетный порядок  $2p - 1$ , где  $1 \leq p \leq n$ . При этом возможны такие подслучаи:

а) Кривая  $K_{2p-1}$  состоит из одной прямой, совпадающей с осью  $x_m (p = 1)$ .

б) Кривая  $K_{2p-1}$  является центральной кривой с центром в точке  $O$  ( $1 < p \leq h$ ). Ось  $x_m$  и прямая  $a = \Pi_2 \times \alpha$  являются ее осями симметрии.

Прямая  $a$ , можно считать, не принадлежит кривой  $K_{2p-1}$ . Поэтому как вытекает из [3], ось  $x_m$  служит компонентой этой кривой и, следовательно, принадлежит гиперповерхности  $F_{2n-1}$ . Теорема доказана.

В заключение выражаю признательность Л. С. Атанасяну и А. С. Лейбину, замечания которых способствовали улучшению работы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Л. С. Атанасян. Основы многомерной геометрии, М., 1963.
2. Б. А. Розенфельд. Многомерные пространства, М., 1966.
3. А. Т. Чуб. Некоторые вопросы из теории алгебраических кривых Крымского педагогического института, т. 35, Симферополь, стр. 143—171.

# ГИПЕРКОМПЛЕКСЫ ПРЯМЫХ С СОВПАДАЮЩИМИ ОСНОВНЫМИ ТОЧКАМИ И С ТОЧКАМИ СОВМЕЩЕНИЯ В ЧЕТЫРЕХМЕРНОМ ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

*В. Л. Карпенко* (Киев)

В настоящей работе методом внешних форм Картана [1] рассматривается пятимерное многообразие прямых (называемое гиперкомплексом) четырехмерном проективном пространстве  $P_4$ . Выделяется частный случай, когда на луче гиперкомплекса имеется двойная основная точка, показывается, что такой гиперкомплекс можно сконструировать при помощи вполне произвольного четырехпараметрического многообразия четырехмерных плоскостей. Кроме того исследуется случай, когда на луче гиперкомплекса имеются точки совмещения, и устанавливается, что теория таких гиперкомплексов тесно связана с теорией псевдоконгруэнций четырехмерных плоскостей [2—4]. Исходя из этого показано, что гиперкомплексы прямых с различными и совпадающими точками совмещения можно получить при помощи псевдоконгруэнций определенного вида.

## § 1. НОРМАЛЬНЫЙ РЕПЕР ГИПЕРКОМПЛЕКСА ПРЯМЫХ

Запишем уравнения инфинитезимального смещения подвижного репера  $\{A_i\}$  гиперкомплекса прямых в виде

$$dA_i = \omega_i^j A_j, \quad D\omega_i^k = [\omega_i^l \omega_l^k], \quad (i, j, k = 1, 2, 3, 4, 5). \quad (1.1)$$

Поместим вершины  $A_1$  и  $A_2$  репера на луч гиперкомплекса. Тогда главными становятся формы  $\omega_1^3, \omega_2^3, \omega_1^4, \omega_2^4, \omega_1^5, \omega_2^5$  и уравнение гиперкомплекса прямых можно записать следующим образом:

$$\omega_1^3 = a_1 \omega_2^3 + a_2 \omega_1^3 + a_3 \omega_2^4 + a_4 \omega_1^5 + a_5 \omega_2^5. \quad (1.2)$$

Гиперкомплекс прямых имеет инвариантную двумерную плоскость, называемую касательным пространством [5]. Касательное пространство определяется равенством

$$\Pi = (a_3 a_4 - a_2 a_5) (A_1 A_2 A_3) - (a_1 a_4 + a_5) (A_1 A_2 A_4) + (a_1 a_2 + a_3) (A_1 A_2 A_5).$$

Поместим вершину  $A_5$  репера в касательное пространство. Тогда

$$a_4 = a_5 = 0 \quad (a_1 a_2 + a_3 \neq 0). \quad (1.3)$$

Пусть  $M = A_1 + t A_2$  — произвольная точка луча гиперкомплекса. Тогда

$$dM = (\omega_1^1 + t \omega_2^1) M + [\omega_1^2 + dt + t(\omega_2^2 - \omega_1^1) - t^2 \omega_2^1] A_2 + (\omega_1^3 + t \omega_2^3) A_3 + \dots + (\omega_1^5 + \omega_2^5 t) A_5$$

неподвижность точки  $M$  определяется условиями

$$\begin{aligned} \omega_1^3 + dt + t(\omega_2^2 - \omega_1^1) - t^2 \omega_2^1 &= 0, \\ \omega_1^3 + t \omega_2^3 &= 0, \quad \omega_1^4 + t \omega_2^4 = 0, \quad \omega_1^5 + t \omega_2^5 = 0. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Если точка  $M$  неподвижна, то луч  $(A_1A_2)$  гиперкомплекса описывает гиперконус с вершиной в точке  $M$ . Касательная гиперплоскость к нему определяется касательным пространством  $\Pi$  и дифференциалом любой точки луча, отличной от точки  $M$ :

$$\sigma = (\Pi dA_2) = \omega_2^3(A_1A_2A_5A_3) + \omega_2^4(A_1A_2A_5A_4).$$

Учитывая условия (1.4) и уравнение (1.2), находим

$$\sigma = (a_3t - a_3)(A_1A_2A_5A_3) + (a_1 + t)(A_1A_2A_5A_4). \quad (1.5)$$

Мы видим, что каждой точке  $M$  луча гиперкомплекса однозначно соответствует определенная касательная гиперплоскость  $\sigma$ . Назовем это соответствие нормальной корреляцией. Точки  $A_1$  в нормальной корреляции соответствует гиперплоскость

$$\sigma_1 = -a_3(A_1A_2A_5A_3) + a_1(A_1A_2A_5A_4).$$

В качестве этой гиперплоскости возьмем гиперплоскость  $(A_1A_2A_5A_3)$ . Тогда

$$a_1 = 0, (a_3 \neq 0). \quad (1.6)$$

Точка  $A_2$  в нормальной корреляции соответствует гиперплоскость

$$\sigma_2 = a_2(A_1A_2A_5A_3) + (A_1A_2A_5A_4).$$

В качестве этой гиперплоскости возьмем гиперплоскость  $(A_1A_2A_5A_4)$ . Тогда

$$a_2 = 0. \quad (1.7)$$

Нормированием координат вершины  $A_3$  или  $A_4$  репера приведем коэффициент  $a_3$  к  $-1$ :

$$a_3 = -1 \quad (1.8)$$

Тогда уравнение (1.2) гиперкомплекса прямых принимает вид

$$\omega_1^3 + \omega_2^4 = 0. \quad (1.9)$$

Репер, компоненты инфинитезимального смещения которого связаны соотношением (1.9), назовем нормальным репером гиперкомплекса прямых.

## § 2. ОСНОВНЫЕ ТОЧКИ ЛУЧА ГИПЕРКОМПЛЕКСА

Продифференцируем уравнение (1.9) внешним образом

$[\omega_1^2 - \omega_3^4, \omega_2^3] + [\omega_2^1 - \omega_4^3, \omega_1^4] + [\omega_2^2 + \omega_3^3 - \omega_1^1 - \omega_4^4, \omega_2^4] - [\omega_3^3 \omega_1^5] - [\omega_5^4 \omega_2^5] = 0$   
Отсюда по лемме Картана получаем:

$$\begin{aligned} \omega_1^2 - \omega_3^4 &= p\omega_2^3 + z\omega_1^4 + \beta\omega_2^4 + a_{14}\omega_1^5 + a_{15}\omega_2^5, \\ \omega_2^1 - \omega_4^3 &= z\omega_2^3 + q\omega_1^4 - \gamma\omega_2^4 + a_{24}\omega_1^5 + a_{25}\omega_2^5, \\ \omega_2^2 + \omega_3^3 - \omega_1^1 - \omega_4^4 &= \beta\omega_2^3 - \gamma\omega_1^4 + r\omega_2^4 + a_{34}\omega_1^5 + a_{35}\omega_2^5, \\ -\omega_5^3 &= a_{14}\omega_2^3 + a_{24}\omega_1^4 + a_{34}\omega_2^4 + a_{44}\omega_1^5 + a_{45}\omega_2^5, \\ -\omega_5^4 &= a_{15}\omega_2^3 + a_{25}\omega_1^4 + a_{35}\omega_2^4 + a_{45}\omega_1^5 + a_{55}\omega_2^5. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Коэффициенты уравнений системы (2.1) определяют дифференциальную окрестность второго порядка луча гиперкомплекса.

Пусть луч  $(A_1A_2)$  гиперкомплекса движется в направлении, касательном к инвариантной двумерной плоскости  $(A_1A_2A_5)$ . Тогда

$$\omega_2^3 = \omega_1^4 = \omega_2^4 = 0. \quad (2.2)$$

Произвольной точке  $M$  луча гиперкомплекса в нормальной корреляции соответствует гиперплоскость

$$\sigma = (A_1A_2A_5A_3) + t(A_1A_2A_5A_4).$$

При этом, вообще говоря, инвариантная плоскость  $(A_1A_2A_5)$  перемещается в произвольном направлении. Однако на луче гиперкомплекса существуют точки, которым в нормальной корреляции соответствуют такие гиперплоскости  $\sigma$ , что  $d\Pi \in \sigma$ . Найдем эти точки. Если  $d\Pi \in \sigma$ , то, учитывая условия (2.2), имеем

$$\omega_5^4 - t\omega_5^3 = 0.$$

Учитывая во внимание условия (1.4) неподвижности точки  $M$ , получаем

$$a_{41}t^2 - 2a_{15}t + a_{55} = 0. \quad (2.3)$$

Уравнение (2.3) определяет на луче гиперкомплекса искомые точки и показывает, что в общем случае на луче гиперкомплекса имеется две такие точки. Назовем эти точки основными точками луча гиперкомплекса.

### § 3. ГИПЕРКОМПЛЕКСЫ С ДВОЙНОЙ ОСНОВНОЙ ТОЧКОЙ

Поместим вершину  $A_1$  репера в двойную основную точку. Тогда из уравнения (2.3) следует, что

$$a_{45} = a_{55} = 0 \quad (a_{44} \neq 0). \quad (3.1)$$

В этом случае

$$\begin{aligned} d[A_1A_2A_5] &= (\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_5^5)[A_1A_2A_5] + \omega_2^3([A_1A_3A_5] - a_{14}[A_1A_2A_3] - \\ &- a_{15}[A_1A_2A_4]) + \omega_1^4([A_4A_2A_5] - a_{24}[A_1A_2A_3] - a_{25}[A_1A_2A_4]) - a_{44}\omega_1^5 \times \\ &\times [A_1A_2A_3] + \omega_2^4([A_1A_4A_5] - a_{34}[A_1A_2A_3] - a_{35}[A_1A_2A_4]) \end{aligned}$$

дифференциал  $d[A_1A_2A_5]$  зависит только от четырех существенных форм  $\omega_2^3$ ,  $\omega_1^4$ ,  $\omega_2^4$ ,  $\omega_1^5$ . Следовательно, инвариантная плоскость  $(A_1A_2A_5)$  описывает четырехмерное многообразие двумерных плоскостей.

Если плоскость  $(A_1A_2A_5)$  неподвижна, то

$$\omega_1^4 = \omega_2^4 = \omega_3^4 = \omega_5^4 = \omega_2^3 = \omega_1^5 = 0$$

и луч гиперкомплекса огибает в плоскости  $(A_1A_2A_5)$  некоторую плоскую кривую. Точкой прикосновения луча гиперкомплекса с этой кривой является двойная основная точка  $A_1$ .

Покажем, что при помощи произвольного четырехмерного многообразия двумерных плоскостей можно получить гиперкомплекс с двойной основной точкой.

Действительно, пусть  $(A_1A_2A_5)$  — плоскость вполне произвольного четырехмерного многообразия двумерных плоскостей. Уравнения этого многообразия можно записать в виде

$$\begin{aligned} \omega_1^3 &= a'_1\omega_2^3 + a'_2\omega_1^4 + a'_3\omega_2^4 + f_1\omega_5^3, \\ -\omega_5^4 &= a'_{15}\omega_2^3 + a'_{25}\omega_1^4 + a'_{35}\omega_2^4 + f_2\omega_5^3 \end{aligned} \quad (3.2)$$

где  $a'_1$ ,  $a'_2$ ,  $a'_3$ ,  $f_1$ ,  $a'_{15}$ ,  $a'_{25}$ ,  $a'_{35}$ ,  $f_2$  — некоторые коэффициенты.

Если гиперплоскость  $(A_1A_2A_5A_3)$  неподвижна, то

$$\omega_1^4 = \omega_2^4 = \omega_5^4 = \omega_3^4 = 0$$

и плоскость  $(A_1A_2A_5)$  при этом огибает в гиперплоскости  $(A_1A_2A_5A_3)$  линейчатую поверхность. Прямая прикосновения этой поверхности с плоскостью  $(A_1A_2A_5)$  определяется равенством

$$l = (f_1a'_{15} - a'_1f_2)(A_2A_5) + f_2(A_1A_5) + a'_{15}(A_1A_2). \quad (3.3)$$

Совместим с этой прямой ребро  $(A_1A_2)$  репера. Тогда

$$f_1 = f_2 = 0, \quad (a'_{15} \neq 0). \quad (3.4)$$

Поскольку при неподвижной плоскости  $(A_1A_2A_5)$  дифференциал  $d[A_1A_2]$  зависит только от одной существенной формы, прямая  $(A_1A_2)$  огибает в плоскости  $(A_1A_2A_5)$  некоторую плоскую кривую (обозначим ее  $s$ ). Точной прикосновения прямой  $(A_1A_2)$  с кривой  $s$  является точка  $A_1$ .

Образуем гиперкомплекс, проведя через каждую точку  $A_1$  кривой  $s$  в плоскости  $(A_1A_2A_5)$  касательные. Уравнение этого гиперкомплекса можно записать в виде

$$\omega_1^3 = a_1\omega_2^3 + a_2\omega_1^4 + a_3\omega_2^4 + a_4\omega_1^5 + a_5\omega_2^5.$$

Принимая во внимание уравнение (3.2<sub>1</sub>) и равенства (3.4), получаем

$$a_4 = a_5 = 0, \quad a_1 = a'_1, \quad a_2 = a'_2, \quad a_3 = a'_3.$$

Выбирая в качестве гиперплоскостей, соответствующих точкам  $A_1$  и  $A_2$  в нормальной корреляции, гиперплоскости  $(A_1A_2A_3A_5)$  и  $(A_1A_2A_5A_4)$ , и, нормируя координаты вершины  $A_3$  или  $A_4$  репера (см. § 1), получим

$$a_1 = a_2 = 0, \quad a_3 = -1.$$

После этого уравнение гиперкомплекса принимает вид

$$\omega_1^3 + \omega_2^4 = 0.$$

Дифференциальным продолжением этого уравнения будет система (2.1). Из пятого уравнения этой системы, принимая во внимание уравнение (3.2<sub>2</sub>), находим:

$$a_{45} = a_{55} = 0, \quad a_{15} = a'_{15}, \quad a_{25} = a'_{25}, \quad a_{35} = a'_{35}.$$

Тогда уравнение (2.3) показывает, что точка  $A_1$  является двойной основной точкой и, следовательно, сконструированный гиперкомплекс прямых, является гиперкомплексом с двойной основной точкой.

#### § 4. ТОЧКИ СОВМЕЩЕНИЯ ЛУЧА ГИПЕРКОМПЛЕКСА

Рассмотрим гиперкомплексы, для которых каждая точка луча является основной. При этом равенство (2.3) тождественно исчезает и, значит,

$$a_{44} = a_{45} = a_{55} = 0. \quad (4.1)$$

В этом случае

$$\begin{aligned} d[A_1A_2A_5] = & (\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_5^5)[A_1A_2A_5] + \omega_2^3([A_1A_3A_5] - a_{14}[A_1A_2A_3] - \\ & - a_{15}[A_1A_2A_4]) + \omega_1^4([A_4A_2A_5] - a_{24}[A_1A_2A_3] - a_{25}[A_1A_2A_4]) + \\ & + \omega_2^4([A_1A_4A_5] - [A_3A_2A_5] - a_{34}[A_1A_2A_3] - a_{35}[A_1A_2A_4]) \end{aligned}$$

и дифференциал  $d[A_1A_2A_5]$  зависит только от трех существенных форм  $\omega_2^3, \omega_1^4, \omega_2^4$ . Поэтому инвариантная плоскость  $(A_1A_2A_5)$  описывает трехпараметрическое многообразие двумерных плоскостей (называемое псевдоконгруэнцией).

Пусть  $\sigma = (A_1A_2A_5A_3) + t(A_1A_2A_5A_4)$  — произвольная гиперплоскость, проходящая через плоскость  $(A_1A_2A_5)$ , и  $N = xA_1 + yA_2 + A_5$  — произвольная точка плоскости  $(A_1A_2A_5)$ . Если гиперплоскость  $\sigma$  огибает некоторую гиперповерхность  $\Sigma$ , а точка  $N$  является точкой прикосновения гиперплоскости  $\sigma$  к гиперповерхности  $\Sigma$ , то

$$(\sigma dN) = 0.$$

Отсюда вытекает, что

$$(ta_{14} - ty - a_{15})\omega_2^3 + (x - a_{25} + ta_{24})\omega_1^4 + (tx + ta_{34} + y - a_{35})\omega_2^4 = 0 \quad (4.2)$$

В силу линейной независимости форм  $\omega_2^3, \omega_1^4, \omega_2^4$  из равенства (4.2) имеем

$$\begin{aligned} t(a_{14} - y) - a_{15} &= 0, \\ t(a_{34} + x) + y - a_{35} &= 0, \\ ta_{24} + x - a_{25} &= 0. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Определим из двух последних равенств этой системы значения  $x$  и  $y$  и подставим их в первое равенство. Тогда

$$a_{24}t^3 - (a_{35} + a_{34})t^2 + (a_{15} - a_{14})t + a_{15} = 0. \quad (4.4)$$

Уравнение (4.4) показывает, что существуют три гиперплоскости, которые проходят через плоскость  $(A_1A_2A_5)$  псевдоконгруэнции и огибают некоторые гиперповерхности. Эти гиперповерхности будем называть фокальными гиперповерхностями псевдоконгруэнции и обозначать  $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ . Соответственно гиперплоскости, определяемые уравнением (4.4), назовем фокальными гиперплоскостями псевдоконгруэнции.

Поскольку гиперплоскость  $\sigma = (A_1A_2A_5A_3) + t(A_1A_2A_5A_4)$  соответствует в нормальной корреляции точке  $M = A_1 + tA_2$  луча гиперкомплекса, то уравнение (4.4) определяет на луче гиперкомплекса три точки, которые назовем точками совмещения луча гиперкомплекса.

## § 5. ГИПЕРКОМПЛЕКСЫ С ПРОСТЫМИ ТОЧКАМИ СОВМЕЩЕНИЯ

Рассмотрим гиперкомплексы, точки совмещения которых простые (не совпадают). В этом случае уравнение (4.4) имеет различные корни. Каждой точке совмещения в нормальной корреляции соответствует фокальная гиперплоскость псевдоконгруэнции, описываемой инвариантной плоскостью  $(A_1A_2A_5)$ . В силу того, что точки совмещения простые, псевдоконгруэнция имеет различные фокальные гиперповерхности.

Покажем, что при помощи произвольной псевдоконгруэнции с различными фокальными гиперповерхностями можно получить гиперкомплекс с простыми точками совмещения. Действительно, пусть двумерная плоскость  $(A_1A_2A_5)$  описывает псевдоконгруэнцию с различными фокальными гиперповерхностями  $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ . Уравнения этой псевдоконгруэнции можно записать в виде

$$\begin{aligned} \omega_1^3 &= a'_1\omega_2^3 + a'_2\omega_1^4 + a'_3\omega_2^4, \\ -\omega_5^3 &= a'_{14}\omega_2^3 + a'_{24}\omega_1^4 + a'_{34}\omega_2^4, \\ -\omega_5^4 &= a'_{15}\omega_2^3 + a'_{25}\omega_1^4 + a'_{35}\omega_2^4, \end{aligned} \quad (5.1)$$

где  $a'_1, a'_2, a'_3, a'_{14}, a'_{24}, a'_{34}, a'_{15}, a'_{25}, a'_{35}$  — некоторые коэффициенты.

Рассмотрим гиперкомплекс, образованный произвольной прямой  $(A_1A_2)$  плоскости  $(A_1A_2A_5)$ . Уравнение этого гиперкомплекса можно записать в виде

$$\omega_1^3 = a_1\omega_2^3 + a_2\omega_1^4 + a_3\omega_2^4 + a_4\omega_1^5 + a_5\omega_2^5.$$

Тогда, учитывая уравнение (5.1<sub>1</sub>), получаем  $a_4 = a_5 = 0$ . Следовательно, плоскость  $(A_1A_2A_5)$  является инвариантной плоскостью данного гиперкомплекса. Идя тем же путем, что и в § 1 при построении нормального репера, найдем

$$a_1 = a_2 = 0.$$

Исключая из совокупности прямых  $(A_1A_2)$  плоскости  $(A_1A_2A_5)$  те прямые, которые касаются фокальных гиперповерхностей  $\Sigma_1$ ,  $\Sigma_2$ ,  $\Sigma_3$ , мы можем пронормировать координаты вершины  $A_3$  или  $A_4$  репера так, что

$$a_3 = -1.$$

После этого уравнение гиперкомплекса принимает вид

$$\omega_1^3 + \omega_2^4 = 0.$$

Дифференцируя это уравнение внешним образом, получим систему уравнений (2.1). Из системы (2.1), учитывая уравнения (5.1<sub>2</sub>) и (5.1<sub>3</sub>), находим

$$a_{44} = a_{45} = a_{55} = 0.$$

Отсюда следует, что на луче рассматриваемого гиперкомплекса имеются точки совмещения, которые определяются уравнением (4.4). В силу того, что псевдоконгруэнция (5.1) имеет различные фокальные гиперповерхности, корни уравнения (4.4) различны и, значит, точки совмещения на луче гиперкомплекса совпадать не могут.

Итак, совокупность прямых, не касающихся фокальных гиперповерхностей, плоскости псевдоконгруэнции с различными фокальными гиперповерхностями образует гиперкомплекс с простыми точками совмещения. Для дальнейшей канонизации сопровождающего репера поместим вершину  $A_1$  и  $A_2$  в точки совмещения. Тогда из уравнения (4.4) получим:

$$a_{15} = a_{24} = 0. \quad (5.2)$$

При этом гиперплоскости  $(A_1A_2A_5A_3)$  и  $(A_1A_2A_5A_4)$ , соответствующие точкам  $A_1$  и  $A_2$  в нормальной корреляции, оказываются совмещенными с фокальными гиперплоскостями псевдоконгруэнции (5.1). Поместим вершину  $A_5$  репера в точку прикосновения гиперплоскости  $(A_1A_2A_5A_3)$  с фокальной гиперповерхностью. Тогда

$$(A_1A_2A_3A_5dA_5) = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\omega_5^4 = 0, \quad a_{25} = a_{35} = 0. \quad (5.3)$$

Дальше сопровождающий репер можно канонизировать, например, так, как это сделала В. Г. Сычева [2] для случая псевдоконгруэнций с различными фокальными гиперповерхностями.

## § 6. ГИПЕРКОМПЛЕКСЫ С ДВОЙНОЙ ТОЧКОЙ СОВМЕЩЕНИЯ

Если луч гиперкомплекса содержит двойную точку совмещения, то уравнение (4.4) имеет двойной корень. Отсюда следует, что инвариантная плоскость  $(A_1A_2A_5)$  описывает псевдоконгруэнцию с двумя фокальными гиперповерхностями. Покажем, что при помощи произвольной псевдоконгруэнции с двумя фокальными гиперповерхностями можно получить гиперкомплекс с двойной точкой совмещения.

Действительно, пусть  $(A_1A_2A_5)$  — плоскость псевдоконгруэнции с двумя фокальными гиперповерхностями. Уравнения этой псевдоконгруэнции можно записать в виде (5.1).

Рассмотрим гиперкомплекс, образованный произвольной прямой  $(A_1A_2)$ , не касающейся фокальных гиперповерхностей, плоскости  $(A_1A_2A_5)$ . Уравнение этого гиперкомплекса можно записать в виде

$$\omega_1^3 = a_1\omega_2^3 + a_2\omega_2^4 + a_3\omega_2^4 + a_4\omega_1^3 + a_5\omega_2^5.$$

Отсюда, учитывая уравнение (5.1<sub>1</sub>),

$$a_4 = a_5 = 0.$$

Идя тем же путем, что и в § 1 при построении нормального репера, получим

$$a_1 = a_2 = 0, \quad a_3 = -1.$$

Теперь уравнение гиперкомплекса принимает вид

$$\omega_1^3 + \omega_2^4 = 0.$$

Дифференциальным продолжением этого уравнения является система (2.1). Из системы (2.1), учитывая уравнения (5.1<sub>2</sub>) и (5.1<sub>3</sub>), находим

$$a_{44} = a_{45} = a_{55} = 0.$$

Поскольку исходная псевдоконгруэнция имеет двойную фокальную гиперповерхность, то одна из фокальных гиперплоскостей также является двойной. Поэтому уравнение (4.4) имеет двойной корень и, следовательно, луч рассматриваемого гиперкомплекса содержит двойную точку совмещения.

Итак, совокупность прямых, не касающихся фокальных гиперповерхностей, плоскости псевдоконгруэнции с двумя фокальными гиперповерхностями образует гиперкомплекс с двойной точкой совмещения. Помещая вершину  $A_1$  репера в двойную точку совмещения, а вершину  $A_2$  в простую точку совмещения, из уравнения (4.4) получим

$$a_{15} = a_{24} = a_{35} = a_{14} = 0, \quad (a_{25} + a_{34} \neq 0). \quad (6.1)$$

Если вершину  $A_5$  поместим в точку прикосновения фокальной гиперплоскости ( $A_1A_2A_5A_3$ ) с фокальной гиперповерхностью, то

$$(A_1A_2A_5A_3dA_5) = 0$$

и, значит,

$$\omega_3^4 = 0, \quad a_{25} = a_{35} = 0. \quad (6.2)$$

## § 7. ГИПЕРКОМПЛЕКСЫ С ТРОЙНОЙ ТОЧКОЙ СОВМЕЩЕНИЯ

В этом случае на луче гиперкомплекса имеется тройная точка совмещения. При этом уравнение (4.4) имеет тройной корень, откуда следует, что плоскость ( $A_1A_2A_5$ ) описывает псевдоконгруэнцию с одной фокальной гиперповерхностью.

Покажем, что при помощи произвольной псевдоконгруэнции с одной фокальной гиперповерхностью можно получить гиперкомплекс с тройной точкой совмещения.

Действительно, пусть ( $A_1A_2A_5$ ) — плоскость псевдоконгруэнции с одной фокальной гиперповерхностью. Уравнения этой псевдоконгруэнции можно записать в виде (5.1).

Рассмотрим гиперкомплекс, образованный произвольной прямой ( $A_1A_2$ ), не касающейся фокальной гиперповерхности, плоскости ( $A_1A_2A_5$ ). Уравнение этого гиперкомплекса запишем следующим образом:

$$\omega_1^3 = a_1\omega_2^3 + a_2\omega_1^4 + a_3\omega_2^4 + a_4\omega_1^5 + a_5\omega_2^5.$$

Учитывая уравнение (5.1<sub>1</sub>), получаем

$$a_4 = a_5 = 0.$$

Идя тем же путем, что и в § 1 при построении нормального репера, получим

$$a_1 = a_2 = 0, \quad a_3 = -1.$$

Теперь уравнение гиперкомплекса принимает вид

$$\omega_1^3 + \omega_2^4 = 0.$$

Дифференциальным продолжением этого уравнения является система (2.1). Из этой системы, учитывая уравнения (5.1<sub>2</sub>) и (5.1<sub>3</sub>), находим

$$a_{44} = a_{45} = a_{55} = 0.$$

Поскольку исходная псевдоконгруэнция имеет тройную фокальную гиперповерхность, то уравнение (4.4) имеет тройной корень. Следовательно, на луче рассматриваемого гиперкомплекса существует тройная точка совмещения.

Итак, совокупность прямых, не касающихся фокальной гиперповерхности, плоскости псевдоконгруэнции с одной фокальной гиперповерхностью образует гиперкомплекс с тройной точкой совмещения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. С. П. Филиков. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. ГИТГЛ, М.—Л., 1948.
2. В. Г. Сычева. Канонические реперы конгруэнций прямых в четырехмерном проективном пространстве  $P_4$ . Труды МИИТа, вып. 190, 1965, 69—88.
3. В. Г. Сычева. О некоторых специальных классах конгруэнций прямых в четырехмерном проективном пространстве  $P_4$ . Уч. зап. Орехово-Зуевск, пед. ин-та, 22, № 3, 1964, 64—72.
4. В. Г. Сычева. О каноническом репере конгруэнций прямых в  $P_4$ . Уч. зап. Орехово-Зуевск, пед. ин-та, 22, № 3, 1964, 73—78.
5. К. И. Гринцевичус. О гиперкомплексе прямых в проективном пространстве  $P_4$ . ДАН СССР, № 6, 107, 1956.

Поступила 13 марта 1967 г.

## БЕЗЫНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДВУХ КОМПЛЕКСОВ ПРОЕКТИВНОГО ВРАЩЕНИЯ

Л. А. Киселевич (Киев)

При канонизации репера, который используется для исследования различных геометрических многообразий, в частности комплексов, обычно ограничиваются общими рассмотрениями, исключая частные классы многообразий. Между тем, исключенные случаи часто представляют большой интерес и заслуживают специального исследования.

Целью настоящей статьи и является исследование с точностью до безынтегрального представления двух таких исключенных комплексов.

В монографии [1] и в статье [2] Н. И. Кованцов рассматривает канонический репер  $A_1A_2A_3A_4$  комплекса прямых в трехмерном проективном пространстве, отнесенный к главным поверхностям комплекса.

Если вершины  $A_1, A_2$  репера помещены на луч комплекса, а плоскости  $A_1A_2A_3$  и  $A_1A_2A_4$  соответствуют этим точкам в нормальной корреляции и пронормированы определенным образом координаты вершин, то главные формы  $\omega_1^3, \omega_2^3, \omega_1^4, \omega_2^4$  связаны соотношением

$$\omega_1^3 + \omega_2^4 = 0. \quad (1)$$

Дифференцируя (1) внешним образом и воспользовавшись леммой Картана, получим

$$\begin{aligned} \omega_1^2 - \omega_3^4 &= p\omega_2^3 + \alpha\omega_1^4 + \beta\omega_2^4; \\ \omega_2^1 - \omega_4^3 &= \alpha\omega_2^3 + q\omega_1^4 - \gamma\omega_2^4; \\ \omega_2^2 + \omega_3^3 - \omega_1^1 - \omega_4^4 &= \beta\omega_2^3 - \gamma\omega_1^4 + r\omega_2^4. \end{aligned} \quad (2)$$

Дальнейшая канонизация репера фиксирует параметры второй дифференциальной окрестности  $p, q, r, \alpha, \beta, \gamma$  следующим образом:

$$p = q = 1; \quad \beta = \gamma = r = 0; \quad \alpha — \text{инвариант}, \quad (3)$$

где равенства  $\beta = \gamma = 0$  означают, что вершины  $A_1$  и  $A_2$  помещены в точки прикосновения координатной главной поверхности, при этом  $p = q = 1$ . Нормированием координат репера получено  $r = 0$ . Равенство  $r = 0$  показывает, что ребра  $A_1A_4$  и  $A_2A_3$  полярно сопряжены относительно квадрики Ли координатной главной поверхности. Случай  $\alpha = \pm 1$  исключен из рассмотрения.

Канонизация репера фиксирует и часть параметров третьей дифференциальной окрестности (уравнения которой см. [1], стр. 76) следующим образом:

$$r_1 = r_2 = 0; \quad h = \frac{1 + \alpha^2}{4\alpha} (p_3 - q_3) \quad (4)$$

где  $r_1 = r_2 = 0$  означает, что ребра  $A_1A_3, A_2A_4$  являются касательными к линиям прикосновения координатной главной поверхности; а  $h = \frac{1 + \alpha^2}{4\alpha} (p_3 - q_3)$  определенным образом закрепляет ребро  $A_3A_4$ . Кроме того, проведено нормирование координат вершин  $(A_1A_2A_3A_4) = 1$ .

Такая канонизация выделяет семь инвариантов третьей дифференциальной окрестности, обращение которых в нуль приводит к тетраэдральному комплексу.

Дифференциальные уравнения четвертой дифференциальной окрестности луча комплекса, общий вид которых привести в настоящей статье не представляется возможным в связи с их громоздкостью, содержат 15 коэффициентов. Для канонического репера все эти коэффициенты являются инвариантами. Рассматривая указанный тетраэдральный комплекс, получим только шесть из них, не равных нулю, причем они являются функциями инварианта  $\alpha$ . Любопытен тот факт, что все инварианты четвертой дифференциальной окрестности обращаются в нуль при  $\alpha = \pm 1$  и при этом получены две непротиворечивые системы дифференциальных уравнений инфинитезимального смещения репера, определяющие некоторые линейные комплексы. Полученные комплексы относятся к классу  $C_{22}$  [1, 4] и являются вырождениями упомянутого тетраэдрального комплекса.

Но при канонизации репера в [1, 2] случай  $\alpha = \pm 1$  был исключен, так как он приводит к кратному корню характеристического уравнения главных поверхностей [1, стр. 78]:

$$\begin{vmatrix} 1-s & 1 & 0 \\ 1 & 1-s & 0 \\ 0 & 0 & -2s \end{vmatrix} = 0, \quad s_1 = 2, \quad s_{2,3} = 0. \quad (5)$$

Одна из главных поверхностей, соответствующая корню  $s_1 = 2$ , вполне определена. Ее уравнения:  $\omega_2^3 - \omega_1^4 = 0$ ;  $\omega_2^4 = 0$ . Кратному корню  $s_{2,3} = 0$  соответствует бесчиссленное множество главных поверхностей:  $\omega_2^3 + \omega_1^4 = 0$ .

При канонизации репера необходимо учесть, что вершины  $A_1, A_2$ , расположенные на луче комплекса, подчинены условию гармонической сопряженности с парой кратных инфлексионных центров и в выборе данных точек на луче существует некоторый произвол. Следовательно, произвол выбора одной из этих точек определяет произвол самого репера.

В настоящей статье исследованы оба полученных комплекса, имеющие много общего, и описано их геометрическое строение. При этом использован метод Картана [5].

### § 1. КОМПЛЕКС, ПОЛУЧЕННЫЙ ПРИ $\alpha = 1$

Комплекс, определяемый значениями (3), (4) параметров второй и третьей дифференциальных окрестностей и обращением в нуль инвариантов третьей и четвертой дифференциальной окрестностей, при  $\alpha = 1$  характеризуется следующей системой уравнений инфинитезимального смещения репера:

$$\begin{aligned} \omega_1^3 + \omega_2^4 &= 0; \quad \omega_1^2 = \omega_2^1; \\ \omega_3^4 &= \omega_4^3 = \omega_1^2 - \omega_2^3 - \omega_1^4; \\ \omega_1^1 &= \omega_2^2 = \omega_3^3 = \omega_4^4 = 0; \\ \omega_3^1 &= \omega_3^2 = \omega_4^1 = \omega_4^2 = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Исследуем строение этого комплекса.

Уравнение инфлексионных центров [1, стр. 76] рассматриваемого комплекса имеет вид

$$t^4 - 2t^2 + 1 = 0.$$

Отсюда  $t = \pm 1$ . Следовательно, луч этого комплекса имеет два кратных инфлексионных центра:

$$I_1 = A_1 + A_2, \quad I_2 = A_1 - A_2. \quad (7)$$

Дифференцируя  $I = A_1 + tA_2$ , находим, что

$$dI = t\omega_1^3 I + (t\omega_2^3 - \omega_2^4) A_3 + (\omega_1^4 + t\omega_2^4) A_4 \quad (8)$$

перемещается в плоскости  $\sigma = (IA_3A_4)$ , которая в силу  $d\sigma \equiv 0 \pmod{\sigma}$  является неподвижной.

Итак, поверхности, описываемые кратными инфлексионными центрами, являются плоскостями.

Значит, полученный комплекс отличается от комплекса проективного вращения, описанного в [1, 3], и является некоторым частным случаем этого класса комплексов. В общем случае инфлексионные центры комплекса проективного вращения описывают линейчатые фокальные поверхности конгруэнции  $W$  и их построение (безынтегральное представление) связано с этой конгруэнцией.

Из уравнений (6) следует, что  $d[A_3A_4] = 0$ , т. е. прямая  $A_3A_4$  неподвижна. Найдем на этой прямой неподвижные точки. Любая точка  $M$  прямой  $A_3A_4$  может быть представлена в виде  $M = A_3 + \lambda A_4$ . Используя (6), находим  $dM = \omega_3^4(A_4 + \lambda A_3) + d\lambda A_4$ . Отсюда  $dM \equiv 0 \pmod{M}$  при  $\lambda = \pm 1$ . Итак, на прямой  $A_3A_4$  неподвижны точки

$$M_1 = A_3 - A_4, \quad M_2 = A_3 + A_4. \quad (9)$$

Если закрепить неподвижно точку  $I_2$ , т. е.  $dI_2 \equiv 0 \pmod{I_2}$  и, следовательно, из (8)  $\omega_2^4 = -\omega_2^3$ ,  $\omega_1^4 = -\omega_2^3$ , то из того же соотношения (8)  $dI_1 = \omega_1^2 I_1 + 2\omega_2^3(A_3 - A_4)$ . Это означает, что  $I_1$  описывает неподвижную прямую  $M_1I_1$ .

Аналогично, если закреплена точка  $I_1$ , то  $I_2$  описывает неподвижную прямую  $M_2I_2$ .

Следовательно, существует соответствие между прямыми плоского пучка  $(M_1)$ , расположенного в плоскости  $(I_1A_3A_4)$ , и прямыми плоского пучка  $(M_2)$ , расположенного в неподвижной плоскости  $(I_2A_3A_4)$ .

Рассмотрим точку  $K = I_1 + \lambda A_3$ . С помощью уравнений (6) получим

$$dK = \omega_1^2 K + (\omega_2^3 - \omega_2^4 - \lambda\omega_1^2)(A_3 - A_4) + (1 - \lambda)(\omega_2^3 - \omega_1^4)A_4 + d\lambda A_3.$$

При  $\lambda = 1$  точка  $K_1 = I_1 + A_3$  описывает неподвижную прямую  $M_1K_1$ . Аналогичным способом находим, что точка  $K_2 = I_2 + A_3$  описывает неподвижную прямую  $M_2K_2$ .

Неподвижные прямые можно считать соответственными прямыми пучков  $(M_1)$ ,  $(M_2)$ . Итак, существует две пары соответственных неподвижных прямых пучков  $(M_1)$ ,  $(M_2)$ :  $M_1K_1$  и  $M_2K_2$ ;  $M_1A_3$  и  $M_2A_3$ .

Три пары прямых  $M_1I_1$  и  $M_2I_2$ ,  $M_1K_1$  и  $M_2K_2$ ,  $M_1A_3$  и  $M_2A_3$  задают соответствие плоских пучков  $(M_1)$ ,  $(M_2)$ . Это соответствие является проективным, так как четвертые гармонические к трем заданным прямым этих пучков  $M_1F_1$  и  $M_2F_2$ , где  $F_1 = K_1 + A_3$ ,  $F_2 = K_2 + A_3$ , оказываются соответственными:

$$d[M_1F_1] = (\omega_2^3 + \omega_1^4)([M_1F_1] + 3[A_3A_4]),$$

$$d[M_2F_2] = (\omega_2^3 + \omega_1^4)([M_2F_2] - [A_3A_4]).$$

На основании вышеизложенных фактов можно следующим образом описать построение комплекса.

1) Некоторую неподвижную прямую трехмерного проективного пространства принимаем за прямую  $A_3A_4$ . Это приводит к соотношениям

$$\omega_3^1 = \omega_3^2 = \omega_4^1 = \omega_4^2 = 0. \quad (10)$$

2) На указанной прямой выбираем две неподвижные точки  $M_1 = A_3 - A_4$  и  $M_2 = A_3 + A_4$ . Неподвижность этих точек обуславливается соотношениями

$$\omega_3^4 = \omega_4^3, \quad \omega_3^3 = \omega_4^4. \quad (11)$$

3) Фиксируем две неподвижные плоскости  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ , проходящие через прямую  $A_3A_4$ . Инфлексионные центры  $I_1 = A_1 + A_2$  и  $I_2 = A_1 - A_2$  принимаем соответственно за текущие точки плоскостей  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ . Это условие определит соотношения

$$\omega_1^2 = \omega_2^1, \quad \omega_1^1 = \omega_2^2. \quad (12)$$

4) Прямые  $M_1K_1$  и  $M_2K_2$ , где  $K_1 = I_1 + A_3$ ,  $K_2 = I_2 + A_3$ , принимаем за неподвижные. При этом получим следующие соотношения:

$$\omega_3^4 = \omega_1^2 - \omega_2^3 - \omega_1^4, \quad \omega_1^1 - \omega_4^4 = \omega_1^3 + \omega_2^4. \quad (13)$$

5) Устанавливаем соответствие между прямыми  $M_1I_1$  и  $M_2I_2$  так, чтобы неподвижность одной из них влекла за собой неподвижность другой. Тогда необходимо

$$\omega_1^3 + \omega_2^4 = n(\omega_2^3 + \omega_1^4).$$

6) Соответствие трех пар прямых  $M_1A_3$  и  $M_2A_3$ ,  $M_1K_1$  и  $M_2K_2$ ,  $M_1I_1$  и  $M_2I_2$  определяет проективное соответствие двух плоских пучков ( $M_1$ ) и ( $M_2$ ), расположенных в плоскостях ( $I_1A_3A_4$ ) и ( $I_2A_3A_4$ ). Четвертыми гармоническими к трем заданным прямым этих пучков являются прямые  $M_1F_1$  и  $M_2F_2$ , где  $F_1 = K_1 + A_3$  и  $F_2 = K_2 + A_3$ . Соответствие прямых  $M_1F_1$  и  $M_2F_2$  является следствием предыдущих соотношений. Четверка гармонических элементов одного пучка, соответствует четверка гармонических элементов другого пучка, следовательно, пучки проективны (по Штаудту).

7) Если совместить касательную плоскость к конусу ( $A_1$ ) с координатной плоскостью ( $A_1A_2A_3$ ), то в соотношении  $\omega_1^3 + \omega_2^4 = n(\omega_2^3 + \omega_1^4)$  коэффициент  $n$  обратится в нуль и

$$\omega_1^3 + \omega_2^4 = 0. \quad (14)$$

8) Репер  $A_1A_2A_3A_4$  комплекса определяется не однозначно. Его произвол определяется произволом выбора точки  $A_1$  на прямой  $A_1A_2$ . Нормирование репера так, что  $(A_1A_2A_3A_4) = 1$ , приводит к обращению в нуль всех форм с одинаковыми индексами:

$$\omega_1^1 = \omega_2^2 = \omega_3^3 = \omega_4^4 = 0. \quad (15)$$

Из уравнений (3) в силу (10) — (15)  $p = q = \alpha = 1; \beta = \gamma = r = 0$ . Тогда уравнение, определяющее инфлексионные центры, показывает, что построенный комплекс имеет на каждом луче два двойных инфлексионных центра.

Из (10) — (15) видно, что каждое уравнение системы (6) объяснено геометрически.

Итак, исследуемый комплекс  $C_{22}$  представляет собой многообразие прямых, пересекающих соответственные лучи двух плоских проективных пучков ( $M_1$ ) и ( $M_2$ ) в своих инфлексионных центрах. Этим многообразием прямых является однопараметрическая совокупность линейных конгруэнций, директрисами которых являются соответственные прямые плоских пучков ( $M_1$ ) и ( $M_2$ ).

## § 2. КОМПЛЕКС, ПОЛУЧЕННЫЙ ПРИ $\alpha = -1$

Комплекс, определяемый значениями (3), (4) параметров второй и третьей дифференциальных окрестностей и обращением в нуль инвариантов третьей и четвертой дифференциальных окрестностей, при  $\alpha = -1$  характеризуется следующей системой уравнений инфинитезимального смещения тетраэдра:

$$\begin{aligned}\omega_1^3 + \omega_2^4 &= 0; \quad \omega_2^1 = -\omega_1^2; \\ \omega_3^4 &= -\omega_4^3 = \omega_1^2 - \omega_2^3 + \omega_1^4; \\ \omega_1^1 &= \omega_2^2 = \omega_3^3 = \omega_4^4 = 0; \\ \omega_3^1 &= \omega_2^2 = \omega_4^1 = \omega_4^2 = 0.\end{aligned}\tag{16}$$

Так как исследование этого комплекса аналогично предыдущему, достаточно только описать его построение.

1) Неподвижность прямой  $A_3A_4$  определяет соотношения

$$\omega_3^1 = \omega_3^2 = \omega_4^1 = \omega_4^2 = 0.\tag{17}$$

2) На этой прямой выбирается пара неподвижных точек  $M_1 = A_3 - iA_4$ ;  $M_2 = A_3 + iA_4$ . Неподвижность точек  $M_1$ ,  $M_2$  влечет за собой соотношения

$$\omega_4^3 = -\omega_3^4, \quad \omega_3^3 = \omega_4^4.\tag{18}$$

3) Выбираем две неподвижные плоскости  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ , проходящие через прямую  $A_3A_4$ . Инфлексионные центры  $I_1 = A_1 + iA_2$  и  $I_2 = A_1 - iA_2$  принимаем соответственно за текущие точки этих плоскостей. Тогда

$$\omega_2^1 = -\omega_1^2; \quad \omega_1^1 = \omega_2^2.\tag{19}$$

4) Прямые  $M_1K_1$  и  $M_2K_2$ , где  $K_1 = I_1 - A_3$  и  $K_2 = I_2 - A_3$ , принимаем неподвижные. При этом получим следующие соотношения:

$$\omega_3^4 = \omega_1^2 - \omega_2^3 + \omega_1^4, \quad \omega_1^1 - \omega_4^2 = \omega_1^3 + \omega_2^4.\tag{20}$$

5) Устанавливаем соответствие между прямыми  $M_1I_1$  и  $M_2I_2$  так, чтобы неподвижность одной из них влекла за собой неподвижность другой. Тогда

$$\omega_1^3 + \omega_2^4 = in(\omega_2^3 - \omega_1^4).$$

6) Соответствие трех пар прямых  $M_1A_3$  и  $M_2A_3$ ,  $M_1K_1$  и  $M_2K_2$ ,  $M_1I_1$  и  $M_2I_2$  определяет проективное соответствие плоских пучков  $(M_1)$  и  $(M_2)$ , расположенных в плоскостях  $(I_1A_3A_4)$  и  $(I_2A_3A_4)$ . Четвертыми гармоническими к трем заданным прямым этих пучков являются прямые  $M_1F_1$  и  $M_2F_2$ , где  $F_1 = K_1 - A_3$  и  $F_2 = K_2 - A_3$ . Соответствие прямых  $M_1F_1$  и  $M_2F_2$  является следствием предыдущих соотношений. Четверка гармонических элементов одного пучка соответствует четверке гармонических элементов другого пучка, следовательно, пучки проективны (по Штаудту).

7) Если совместить касательную плоскость к конусу  $(A_1)$  с координатной плоскостью  $(A_1A_2A_3)$ , то в соотношении  $\omega_1^3 + \omega_2^4 = in(\omega_2^3 - \omega_1^4)$  коэффициент  $n$  обратится в нуль и

$$\omega_1^3 + \omega_2^4 = 0.\tag{21}$$

8) Аналогично предыдущему, нормирование координат вершин тетраэдра так, что  $(A_1A_2A_3A_4) = 1$  приводит к

$$\omega_1^1 = \omega_2^2 = \omega_3^3 = \omega_4^4 = 0.\tag{22}$$

Из уравнений (3) в силу (17)–(22)  $p = q = 1; \alpha = -1; \beta = \gamma = r = 0$ . Тогда уравнение, определяющее инфлексионные центры, показывает, что построенный комплекс имеет на каждом луче два двойных инфлексионных центра.

*Рассматриваемый комплекс  $C_{22}$  представляет собой однопараметрическую совокупность линейных конгруэнций, директрисами которых являются соответственные прямые двух плоских проективных пучков ( $M_1$ ) и ( $M_2$ ), причем лучи комплекса пересекают эти директрисы в своих кратных инфлексионных центрах.*

Ввод. Комплексы проективного вращения, характеризующиеся обращением в нуль инвариантов третьей и четвертой дифференциальных окрестностей в каноническом репере [2], являются вырождением тетраэдрального комплекса. Отличительной чертой этих комплексов является то, что их кратные инфлексионные центры описывают неподвижные плоскости.

Рассмотренные комплексы представляют собой однопараметрическую совокупность линейных конгруэнций, директрисами которых являются соответственные прямые двух плоских проективных пучков, причем эти директрисы — геометрическое место кратных инфлексионных центров лучей комплекса.

Рассмотренные комплексы отличаются друг от друга тем, что первый является комплексом действительной области, второй — комплексом комплексной области.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Н. И. Кованцов. Теория комплексов. Изд-во КГУ, Киев, 1963.
2. Н. И. Кованцов. Канонический тетраэдр комплекса прямых в проективном пространстве. УМЖ, т. 8, 1956, № 2, 140—158.
3. Н. И. Кованцов. Безынтегральное представление некоторых специальных классов комплексов. Матем. сб., т. 38 (80), № 1, 1956, 107—128.
4. Mentré P. Sur les complexes qui présentent, sur toutes leurs droites, des singularités projectives du deuxième ordre infinitésimal, C. R. Acad. Sci. de Paris, 175, 1922, 941—943.
5. С. П. Фиников. Метод внешних форм Картана. ГИТТЛ, М.—Л., 1948.

Поступила 13 марта 1967 г.

## О МЕРАХ МНОЖЕСТВ ПАР НА ПЛОСКОСТИ, ИНВАРИАНТНЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОЕКТИВНЫХ ГРУПП ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

*A. B. Луценко, Л. М. Юртова* (Харьков)

В недавней работе Сантало [1] рассмотрел задачу нахождения всех проективных групп плоскости, зависящих от  $r \geq 4$  параметров, относительно которых множества пар элементов — множества пар точек ( $P_1 + P_2$ ), пар прямых ( $G_1 + G_2$ ), пар точка и прямая ( $P + G$ ) обладают инвариантной мерой, и задачу нахождения этих мер.

Инфинитезимальные операторы проективных групп на плоскости заданы  $\left( p = \frac{\partial z}{\partial x}, q = \frac{\partial z}{\partial y} \right)$ .

Группа, зависящая от восьми параметров:

1.1.  $p, q, xp, xq, yp, yq, x(xp + yq), y(xp + yq)$ .

Группы, зависящие от шести параметров:

2.1.  $p, q, xp, yq, xq, x(xp + yq)$ .

2.2.  $p, q, xp, yq, xq, yp$ .

Группы, зависящие от пяти параметров:

3.1.  $p, q, xq, 2xp + yq, x(xp + yq)$ .

3.2.  $p, q, xp, xq, yq$ .

3.3.  $p, q, yp, xq, xp - yq$ .

Группы, зависящие от четырех параметров:

4.1.  $p, q, xp, yq$ .

4.2.  $p, q, xq, xp + ayq$ .

4.3.  $p, q, xq, yq$ .

4.4.  $q, xp, xq, yq$ .

4.5.  $p, xp, yq, x(xp + yq)$ .

Метод относительных компонент, применяемый Сантало для нахождения мер, предполагает знание конечных преобразований группы. В связи с этим автору приходится по заданным инфинитезимальным операторам восстанавливать конечные преобразования группы. Но, как известно, такое восстановление в общем случае является чрезвычайно трудным.

В настоящей статье мы показываем как находить, применяя методы, изложенные в работах [2—4], меры указанных выше множеств геометрических элементов, непосредственно по заданным инфинитезимальным операторам группы. Для выяснения метрического смысла мер, найденных методом относительных компонент, приходится находить и выполнять подходящие замены переменных. При использовании рекомендуемых нами методов надобность в заменах отпадает.

Мы ограничимся рассмотрением типичных множеств пар элементов. Именно, мы найдем меру множества:

- 1) пар точек ( $P + P_1$ ) относительно группы 3.1;
- 2) пар «точка  $P$  и прямая  $G$ » ( $P \in G$ ) относительно группы 4.5;
- 3) пар прямых ( $G_1 + G_2$ ) относительно группы 4.4.

Использованные при этом методы обладают общностью и могут быть применены не только для восстановления всех результатов Сантало (что было нами проделано), но и при решении аналогичных задач для любых групп.

Напомним, что необходимыми и достаточными условиями инвариантности интеграла

$$\int \rho dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad (1)$$

относительно группы  $G_r$  с инфинитезимальными операторами  $X_i(f) =$   
 $= \sum_{k=1}^n \xi_i^k \frac{\partial f}{\partial x_k}$ , ( $i = 1, 2, \dots, r$ ) таковы:

$$X_i(\rho) + \rho \sum_{k=1}^n \frac{\partial \xi_i^k}{\partial x_k} = 0. \quad (2)$$

Если  $r = n$  (группа простотранзитивна), то инвариант группы существует и единственен. Если  $r > n$ , то к условиям (2) добавляются условия

$$\sum_{j=1}^n X_j(\lambda_{ij}) = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n-r),$$

где

$$X_{n+i}(f) = \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} X_j(f).$$

1. Группа  $p, q, xq, 2xp + yq, x(xp + yq)$  и множество пар точек  $(P + P_1)$ . Пары точек  $P(x, y)$  и  $P_1(x_1, y_1)$  претерпевают преобразования расширенной группы [5] с инфинитезимальными операторами

$$\begin{aligned} X_1(f) &= p + p_1, \quad X_2(f) = q + q_1, \\ X_3(f) &= xq + x_1q_1, \\ X_4(f) &= 2xp + yq + 2x_1p_1 + y_1q_1, \\ X_5(f) &= x(xp + yq) + x_1(x_1p_1 + y_1q_1). \end{aligned} \quad (3)$$

Мерой множества пар  $(P + P_1)$  является мера группы (3). Эта группа транзитивна: операторы  $X_1(f), \dots, X_4(f)$  не связаны, а

$$\begin{aligned} X_5(f) &= -xx_1X_1(f) - \frac{1}{2}(x_1y + xy_1)X_2(f) + \\ &+ \frac{1}{2}(y + y_1)X_3(f) + \frac{1}{2}(x + x_1)X_4(f). \end{aligned}$$

Условие измеримости группы выполнено, так как

$$-X_1(xx_1) - \frac{1}{2}X_2(x_1y + xy_1) + \frac{1}{2}X_3(y + y_1) + \frac{1}{2}X_4(x + x_1) \equiv 0.$$

Условия (2) приводят к уравнениям

$$\begin{aligned} X_1(\rho) &= 0, \quad X_2(\rho) = 0, \quad X_3(\rho) = 0, \\ X_4(\rho) + 6\rho &= 0, \quad X_5(\rho) + 3(x + x_1)\rho = 0. \end{aligned}$$

Отсюда (с точностью до мультипликативной константы)

$$\rho = \frac{1}{(x - x_1)^3}.$$

Таким образом, мера множества пар точек  $(P + P_1)$  относительно группы 3.1 существует и равна

$$\int (x - x_1)^{-3} dx dy dx_1 dy_1.$$

2. Группа  $p, xp, yq, x(xp + yq)$  и множество пар «точка  $P$  и прямая  $G$ » ( $P \in G$ ).

Множество «точка  $P$  и прямая  $G$ » ( $P \in G$ ) эквивалентно множеству «точка  $P$  и направление в ней». Последнее множество претерпевает преобразования продолженной группы [5], инфинитезимальными операторами которой являются

$$\begin{aligned} X_1(f) &= \frac{\partial f}{\partial x}, \quad X_2(f) = x \frac{\partial f}{\partial x} - y' \frac{\partial f}{\partial y'}, \\ X_3(f) &= y \frac{\partial f}{\partial y} + y' \frac{\partial f}{\partial y}, \\ X_4(f) &= x^2 \frac{\partial f}{\partial x} + xy \frac{\partial f}{\partial y} + (y - xy') \frac{\partial f}{\partial y'}, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $y' = \frac{dy}{dx}$ .

Мерой множества «точка  $P$  и прямая  $G$ » ( $P \in G$ ) является мера группы (4). Эта группа транзитивна: первые три оператора не связаны, а

$$X_4(f) = \left( \frac{xy}{y'} - x^2 \right) X_1(f) + \left( 2x - \frac{y}{y'} \right) X_2(f) + x X_3(f).$$

Условие измеримости выполнено, так как

$$X_1\left(\frac{xy}{y'} - x^2\right) + X_2\left(2x - \frac{y}{y'}\right) + X_3(x) \equiv 0.$$

Условия (2) приводят к уравнениям

$$\begin{aligned} X_1(p) &= 0 & X_2(p) &= 0, \\ X_3(p) + 2p &= 0, & X_4(p) + 2xp &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда

$$p = y^{-2}.$$

Таким образом, мера множества пар «точка  $P$  и прямая  $G$ » ( $P \in G$ ) относительно группы 4.5 существует и равна

$$\int y^{-2} dx dy dy'.$$

Если в интеграле произвести замену переменных

$$x = x, \quad y = y, \quad y' = -\operatorname{ctg} \varphi,$$

то получим выражение для меры

$$\int \frac{dx dy d\varphi}{y^2 \sin^2 \varphi},$$

совпадающее с полученным Сантало [1].

3. Группа  $q, xp, xq, yq$  и множество пар прямых ( $G_1 + G_2$ ).

Мерой множества пар прямых

$$G_1: u_1 x - y + u_2 = 0,$$

$$G_2: u_3 x - y + u_4 = 0$$

является мера группы  $H_4$ , индуцированной группой 4.4 и действующей в пространстве  $(u_1, u_2, u_3, u_4)$  параметров прямых [4]. Обозначим инфинитезимальные операторы группы  $H_4$  следующим образом:

$$Y_i(f) = \sum_{k=1}^4 \eta_i^k \frac{\partial f}{\partial u_k}, \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Для отыскания коэффициентов  $\eta_i^k(u_1, \dots, u_4)$  применим модификацию метода, изложенного в [4]. Коэффициенты  $\eta_i^k$  должны удовлетворять системам уравнений

$$\begin{aligned} x\eta_i^1 + \eta_i^2 + X_i(u_1x - y + u_2) &= 0, \\ x\eta_i^3 + \eta_i^4 + X_i(u_3x - y + u_4) &= 0 \end{aligned} \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (5)$$

на прямых  $y = u_1x + u_2$  и  $y = u_3x + u_4$ . Дифференцируя по  $x$  каждое из этих уравнений и решая полученные в результате дифференцирования уравнения совместно с уравнениями (5), найдем группу  $H_4$ :

$$\begin{aligned} Y_1(f) &= u_1 \frac{\partial f}{\partial u_1} + u_3 \frac{\partial f}{\partial u_3}, \\ Y_2(f) &= \frac{\partial f}{\partial u_1} + \frac{\partial f}{\partial u_3}, \\ Y_3(f) &= \frac{\partial f}{\partial u_2} + \frac{\partial f}{\partial u_4}, \\ Y_4(f) &= u_1 \frac{\partial f}{\partial u_1} + u_2 \frac{\partial f}{\partial u_2} + u_3 \frac{\partial f}{\partial u_3} + u_4 \frac{\partial f}{\partial u_4}. \end{aligned}$$

Группа  $H_4$  простотранзитивна, следовательно, измерима. Условия (2) приводят к уравнениям:

$$\begin{aligned} Y_1(\rho) + 2\rho &= 0, & Y_2(\rho) &= 0, \\ Y_3(\rho) &= 0, & Y_4(\rho) + 4\rho &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\rho = (u_1 - u_3)^{-2} (u_2 - u_4)^{-2}.$$

Таким образом, мера множества пар прямых  $(G_1 + G_2)$  относительно группы 4.4 существует и равна

$$\int \frac{du_1 du_2 du_3 du_4}{(u_1 - u_3)^2 (u_2 - u_4)^2}.$$

Если в интеграле перейти к нормальным координатам прямых

$$u_1 = -\operatorname{ctg} \varphi_0, \quad u_2 = \frac{p_0}{\sin \varphi_0},$$

$$u_3 = -\operatorname{ctg} \varphi_1, \quad u_4 = \frac{p_1}{\sin \varphi_1},$$

то получим выражение для меры

$$\int \frac{\sin \varphi_0 \sin \varphi_1}{(p_0 \sin \varphi_1 - p_1 \sin \varphi_0)^2 \sin^2(\varphi_0 - \varphi_1)} d\varphi_0 d\varphi_1 dp_0 dp_1,$$

совпадающее с полученным Сантало [1].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. L. A. Santalo. Integral geometry of the projective groups of the plane depending on more than three parameters. An. stiint. Univ. Iasi, 1965, Sec. 1a, 11b, 307—335.
2. Н. Г. Чеботарев. Произведения міри груп Лі. Зап. Харьковск. матем. об-ва, т. 14, 1937.
3. Г. И. Дринфельд. О некоторых основных формулах интегральной геометрии. Зап. Харьковск. матем. об-ва, т. 23, 1952.
4. А. В. Луценко. О мере множеств геометрических элементов и их подмножеств. «Укр. геометр. сб.», вып. 1. Изд-во ХГУ, Харьков, 1965.
5. Н. Г. Чеботарев. Теория групп Ли. Гостехиздат, М.—Л., 1940.

Поступила 28 апреля 1967 г.

---

# ОДНА ОБЩАЯ ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ЗАМКНУТЫХ ВЫПУКЛЫХ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ $n$ -МЕРНОГО ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

A. I. Медянник (Харьков)

В работе [1] с помощью теоремы о характеристическом свойстве однородной линейной функции  $n$ -переменных была доказана теорема о том, что замкнутая выпуклая гиперповерхность с аналитической опорной функцией в  $n$ -мерном евклидовом пространстве  $E_n$  является гиперсферой радиуса  $R$ , если в каждой точке главные радиусы кривизны либо равны  $R$ , либо среди них есть радиусы кривизны больше  $R$  и меньше  $R$ , но нет равных  $R$ . В настоящей работе с помощью той же теоремы будет доказана общая теорема единственности.

**Теорема.** Пусть  $F_1$  и  $F_2$  — замкнутые выпуклые гиперповерхности в  $E_n$  с аналитическими опорными функциями  $H_k(x_1, \dots, x_n)$ , ( $k = 1, 2$ ). Если при совмещении параллельным переносом точек с параллельными внешними нормалью индикаторы кривизны либо совпадают, либо не помещаются одна в другой и не соприкасаются ни в одной из общих точек, то гиперповерхности  $F_1$  и  $F_2$  равны и параллельно расположены.

Прежде чем доказывать эту теорему, докажем две леммы о невырожденных квадратичных формах. Введем необходимые обозначения. Положим

$$A(x, x) = \sum_{i, j=1}^{n-1} a_{ij} x_i x_j, \quad a_{ii} = a_{jj}.$$

Обозначим  $A$  матрицу коэффициентов  $\|a_{ij}\|$  формы  $A(x, x)$ . Пусть  $A_{ii}$  — алгебраическое дополнение элемента  $a_{ij}$ . Положим

$$A^{-1}(x, x) = \sum_{i, j=1}^{n-1} \frac{A_{ij}}{|A|} x_i x_j.$$

Обозначим  $A^{-1}$  матрицу коэффициентов  $\left\| \frac{A_{ij}}{|A|} \right\|$  формы  $A^{-1}(x, x)$ .

Так как матрица  $A$  — симметрическая, то  $A^{-1}$  — матрица обратная  $A$ . Поэтому собственные значения матрицы  $A^{-1}$  обратно пропорциональны собственным значениям матрицы  $A$ .

**Лемма 1.** Для того, чтобы разность невырожденных квадратичных форм  $A(x, x) - B(x, x)$  имела нулевое собственное значение, необходимо и достаточно, чтобы гиперповерхности  $A(x, x) = 1$  и  $B(x, x) = 1$  касались друг друга.

**Доказательство.** Необходимость. Пусть хотя бы одно из собственных значений матрицы  $A - B$  равно нулю. Это значит, что

$$|A - B| = 0. \tag{1}$$

Уравнения касательных гиперплоскостей гиперповерхностей  $A(x, x) = -1$  и  $B(x, x) = 1$  в точках  $\{x_i^0\}$  и  $\{x_j'\}$  этих гиперповерхностей имеют вид

$$\sum_{i=1}^{n-1} \left( \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij} x_j^0 \right) x_i = 1,$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} \left( \sum_{j=1}^{n-1} b_{ij} x_j' \right) x_i = 1.$$

Из (1) следует, что система уравнений

$$\sum_{i=1}^{n-1} a_{ij} x_j^0 = \sum_{i=1}^{n-1} b_{ij} x_j^0, \quad (i = 1, 2, \dots, n-1) \quad (2)$$

имеет нетривиальное решение. Значит, гиперповерхности  $A(x, x) = -1$  и  $B(x, x) = 1$  касаются друг друга в некоторой точке.

*Достаточность.* Пусть гиперповерхности касаются друг друга. Значит, система однородных уравнений (2) имеет нетривиальное решение. Но тогда справедливо (1), т. е. разность квадратичных форм  $A(x, x) - B(x, x)$  — нулевое собственное значение.

**Лемма 2.** Если гиперповерхности  $A(x, x) = 1$  и  $B(x, x) = 1$  касаются друг друга, то гиперповерхности  $A^{-1}(x, x) = 1$  и  $B^{-1}(x, x) = 1$  также соприкасаются.

*Доказательство.* Пусть согласно лемме 1  $|A - B| = 0$ . Но

$$A^{-1} - B^{-1} = B^{-1}(B - A) A^{-1}.$$

Значит,

$$|A^{-1} - B^{-1}| = 0,$$

т. е. по лемме 1 гиперповерхности  $A^{-1}(x, x) = 1$  и  $B^{-1}(x, x) = 1$  соприкасаются.

*Доказательство теоремы.* Собственные значения второго дифференциала  $d^2H$  опорной функции  $H(x_1, x_2, \dots, x_n)$  поверхности  $F$  являются с точностью до положительного множителя главными радиусами кривизны поверхности  $F$ , за исключением собственного значения тривиально равного нулю в силу положительной однородности первой степени функции  $H(x_1, \dots, x_n)$  [2]. Тривиально равному нулю собственному значению соответствует собственный вектор, ортогональный поверхности, т. е. параллельный нормали поверхности.

Зафиксируем точку  $P^0$  поверхности  $F$ . Повернем оси координат так, чтобы ось  $x_n$  стала параллельной нормали в точке  $P^0$ . Тогда в выражении второго дифференциала  $d^2H(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$  для точки  $P^0$  исчезнут члены, содержащие  $dx_n$ . Другими словами, получим квадратичную форму  $n-1$  переменных  $dx_1, \dots, dx_{n-1}$ , собственные значения которой являются главными радиусами кривизны поверхности  $F$  в точке  $P^0$ .

Введем новую систему координат, поместив начало координат в точку  $P^0$  и направив ось  $y_n$  перпендикулярно касательной плоскости в этой точке. Оси  $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$  направим так, чтобы направления  $y_1 : y_2 : \dots : y_{n-1}$  и  $dx_1 : dx_2 : \dots : dx_{n-1}$  совпадали. Тогда уравнение

$$\sum_{i,j=1}^{n-1} H_{ij}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) y_i y_j = 1, \quad \text{где } H_{ij} = \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j}$$

задает в плоскости  $y_n = 0$  гиперповерхность второго порядка, главные полуоси которой равны корням квадратным из главных кривизн поверхности  $F$  в точке  $P^0$ . Назовем такую гиперповерхность индикатором главных кривизн.

Пусть  $P_1^0$  и  $P_2^0$  — соответствующие точки гиперповерхностей  $F_1$  и  $F_2$ . Совместим параллельным переносом эти точки в точке  $P^0$ . При этом касательные гиперплоскости  $F_1$  и  $F_2$  в точке  $P^0$  совпадут. Введем в общей касательной гиперплоскости систему координат  $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ , как было сделано выше. Тогда гиперповерхности с уравнениями

$$\sum_{i,j=1}^{n-1} H_{k,ij}(x_1^0, \dots, x_n^0) \cdot y_i y_j = 1, \quad k = 1, 2 \quad (3)$$

будут индикаторами главных кривизн поверхностей  $F_1$  и  $F_2$  в точке  $P^0$ .

Если индикаторы кривизны гиперповерхностей  $F_1$  и  $F_2$  в точке  $P^0$  не помещаются одна внутри другой, то индикаторы главных кривизн также не помещаются одна внутри другой. В частности, совпадение индикаторов кривизны влечет за собой совпадение индикаторов главных кривизн.

Уравнение индикаторы кривизны гиперповерхности  $F_k$  ( $k = 1, 2$ ) в точке  $P^0$  получается из уравнения (3) заменой коэффициентов  $H_{k,ij}^0 = H_{k,ij}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$  их алгебраическими дополнениями в матрице  $\|H_{k,ij}^0\|$ , деленными на определитель этой матрицы. Поэтому согласно лемме 2 индикаторы главных кривизн в точке  $P^0$  касаются друг друга, если соприкасаются индикаторы кривизны в точке  $P^0$ .

Значит, из условия теоремы следует, что если в некоторой точке  $d^2(H_1 - H_2) \neq 0$ , то в этой точке по лемме 1 все нетривиальные собственные значения  $d^2(H_1 - H_2)$  отличны от нуля и среди них есть собственные значения разных знаков.

По теореме о характеристическом свойстве однородной линейной функции  $n$ -переменных [1]  $H_1 - H_2$  является линейной функцией, т. е. поверхности  $F_1$  и  $F_2$  равны и параллельно расположены.

Доказанная теорема является обобщением на случай  $n$ -мерного пространства теоремы А. Д. Александрова о равенстве замкнутых выпуклых поверхностей в  $E_3$  с аналитическими опорными функциями при условии, что индикаторы кривизны в точках с параллельными внешними нормальными не помещаемы одна внутри другой параллельным переносом [3].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Медянник А. Г. Одна теорема единичности для замкнутых опуклых аналитических поверхностей  $n$ -вимірного простору ДАН УРСР, № 12, 1527 — 1530, 1966.
2. Bonnesen T., Fenchel W., Theorie der konvexen Körper, New, York, Chelsea, publishing company, 1948, 61.
3. Александров А. Д. О теоремах единственности для замкнутых поверхностей. ДАН СССР, 22, № 3 (1939), 99 — 102.

Поступила 26 сентября 1967 г.

## МНОГОМЕРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА С МНОГОГРАННОЙ МЕТРИКОЙ НЕОТРИЦАТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ. I

*A. D. Милка* (Харьков)

Метрические пространства, рассматриваемые в работе, представляют обобщение двумерных многообразий с многогранной метрикой. Простейшими из этих пространств являются многомерные многогранные развертки, точнее —  $h$ -развертки. По аналогии со случаем двух измерений они определяются как конечные наборы выпуклых, не обязательно ограниченных многогранников с указанным правилом склеивания, т. е. правилом изометрического отождествления граней; развертки составляются из многогранников определенного пространства постоянной кривизны. Аналогично мы требуем, чтобы окрестности точек в развертках были циклически: локальные группы гомологий развертки изоморфны группам гомологий евклидовской сферы соответствующей размерности. Пространства с многогранной метрикой есть конечно-компактные пространства с внутренней метрикой, локально изометричные окрестностям вершин на конусах-развертках.

В работе изучаются пространства с неотрицательной кривизной. Ограничиваюсь только развертками, введем следующее определение: развертка размерности  $n$  имеет неотрицательную кривизну, если для каждой ее  $(n-2)$ -мерной грани сумма двугранных углов примыкающих к ней  $n$ -мерных граней не превосходит  $2\pi$ . Пространства с многогранной метрикой неотрицательной кривизны обладают многими свойствами, приближающими их к выпуклым гиперповерхностям-многогранникам. Метрика этих пространств, например, удовлетворяет условию выпуклости. Стоит отметить, что рассматриваемые пространства заведомо являются многообразиями только в случае двух или трех измерений. В общем случае они локально гомеоморфны полиэдрам — гомологическим многообразиям.

Двумерные развертки и многогранные метрики детально изучались А. Д. Александровым, В. А. Залгаллером и другими авторами [1, 2, 3]. Общих исследований для большего числа измерений, по-видимому, еще не проводилось. Некоторые результаты в этом направлении получены И. А. Брином [4], установившим для евклидовских компактных разверток формулу Гаусса — Бонне. В его работе не предполагалось, что рассматриваемые развертки есть гомологические многообразия. Специальный случай евклидовских трехмерных ограниченных разверток использовался Ю. А. Волковым при решении задачи о реализации двумерных многогранных метрик [5].

В заключение заметим, что необходимые сведения из внутренней геометрии метрических пространств и топологии, которые используются в работе, можно найти в монографиях [1—3, 6, 7].

### МНОГОГРАННЫЕ МЕТРИКИ

В этой, первой части работы проводится исследование общих метрических и локально-топологических свойств разверток и пространств с многогранной метрикой без ограничения на кривизну. Для разверток уста-

навливаются конечная компактность их метрик и некоторые свойства кратчайших. Кроме того, доказывается существование касательного конуса в каждой точке многогранной метрики и изучается связь элементов этого конуса и соответствующей окрестности пространства.

Развортки составляются из многогранников определенного пространства постоянной кривизны, евклидова, либо сферического пространства либо пространства Лобачевского. Поэтому в дальнейшем мы считаем, что такое пространство фиксировано, и обозначаем его символом  $\Omega$ . Случаи отступления от этого условия оговариваются особо. Основные понятия, — правило склеивания, развертка, касательный конус и др., — вводятся нами таким образом, чтобы подчеркнуть аналогию со случаем двух измерений и связь с теорией полиэдров. Поэтому во многих случаях оказалось возможным, обращаясь к наглядности, опускать соответствующие доказательства.

### § 1. Выпуклые многогранники

Примем следующее индуктивное определение для пространства  $\Omega$ . Выпуклым многогранником размерности  $n$ , или замкнутым выпуклым многогранником, называется выпуклое множество, лежащее в  $n$ -мерной плоскости, имеющее в ней внутренние точки, граница которого в этой плоскости состоит не более чем из конечного числа попарно не пересекающихся выпуклых открытых многогранников меньших размерностей, причем замыкание любого из них есть сумма многогранников, также входящих в границу. Множество внутренних, т. е. не граничных точек выпуклого многогранника размерности  $n$  называется  $n$ -мерным выпуклым открытым многогранником. Нульмерный выпуклый многогранник, замкнутый и одновременно открытый, есть точка.

Открытые многогранники можно определить иначе:  $n$ -мерная плоскость и пересечение не более чем конечного числа открытых полуплоскостей  $n$ -мерной плоскости, если оно не пусто, — выпуклые открытые многогранники размерности  $n$ .

Многогранники размерности  $k$ , входящие в границу  $n$ -мерного многогранника, называются его  $k$ -мерными открытыми гранями, или просто гранями, а их замыкания — замкнутыми гранями соответствующей размерности. Заметим, что замкнутые грани суть также выпуклые многогранники. Нульмерные и одномерные грани многогранника называются соответственно его вершинами и ребрами.

### § 2. $k$ -развертка

Пусть  $R$  — набор выпуклых открытых многогранников в пространстве  $\Omega$ . Считаем, что в этом наборе представлены многогранники всех возможных размерностей от  $m$  до  $n$ . Условимся в обозначениях:  $r^k$  — многогранник размерности  $k$ ;  $\bar{r}$  и  $\dot{r}$  — замыкание многогранника  $r$  и его граница относительно несущей плоскости;  $R^k$  (соответственно  $R_k$ ) — подмножество в  $R$  из многогранников, размерности которых не превосходят  $k$  (в точности равны  $k$ );  $\dot{Q} = \sum_{r \in R} \dot{r}$  — граница множества точек  $Q$ , где  $Q$  — набор многогранников. Заметим, что наборы многогранников (отдельные многогранники как элементы наборов) и соответствующие им множества точек пространства обозначаются одинаково. Взаимное положение фигур в пространстве, которые мы рассматриваем, будет не столь суще-

ственным. Для удобства можно принять, что многогранники расположены в  $\Omega$  так, чтобы их замыкания не пересекались.

Будем считать, что в наборе многогранников  $R$  указано правило склеивания, если задана функция  $\varphi$ , однозначно отображающая границу множества точек  $R$  в то же множество, такая, что

- a)  $\varphi R_k = R^{k-1}$ ,  $k = m + 1, \dots, n$ ;
- б) для каждой пары многогранников  $p, q$ , где  $p \in R_k$ ,  $q \in R^{k-1}$ , множество точек  $p \cap \varphi^{-1}q$  пусто, либо есть выпуклый многогранник  $p \cdot q$ , изометричный  $q$  при отображении  $\varphi^{-1}$  (будем говорить в последнем случае, что  $q$  подчинен  $p$ :  $q \prec p \sim p \succ q$ );

в) сумма  $p + \sum_{q \sim p} p \cdot q$  есть замкнутый выпуклый многогранник, гранями которого служат многогранники  $p \cdot q$ ;

г) если  $p^{k-1}, p^k, p^{k+1}$  — многогранники из  $R$ , то из соотношений  $p^{k-1} \prec p^k \prec p^{k+1}$  вытекает, что  $p^{k-1} \prec p^{k+1}$ , причем  $p^{k+1} p^{k-1} \subset \overline{p^{k+1} \cdot p^k}$ ; обратно, из соотношений  $p^{k-1}, p^k \prec p^{k+1}, p^{k+1} \cdot p^{k-1} \subset \overline{p^{k+1} \cdot p^k}$  следует, что  $p^{k-1} \prec p^k$ .

Набор выпуклых открытых многогранников с указанным в этом наборе правилом склеивания будем называть  $k$ -разверткой. Сами многогранники называются гранями, а наибольшая их размерность — размерностью  $k$ -развертки, причем нульмерные и одномерные грани считаются соответственно ее вершинами и ребрами. Каждая  $k$ -развертка, очевидно, является абстрактным клеточным комплексом. Простыми примерами  $k$ -разверток могут служить замкнутый выпуклый многогранник, его граница или подмножество его граней, размерности которых не превосходят фиксированного числа.

Функция  $\varphi$ , определяющая в наборе многогранников правило склеивания, называется функцией склеивания. С помощью этой функции множество точек  $R$  естественным образом превращается в топологическое и даже метрическое пространство. Чтобы задать топологию в  $R$ , достаточно указать окрестности точек, так как после этого открытые множества, понятия предельной точки и замыкания и ряд других топологических понятий вводятся уже известным способом.

Пусть точка  $X$  принадлежит грани  $p$ ;  $X_q = \dot{q} \cap \varphi^{-1}X$  — прообраз точки  $X$ , где  $q \prec p$ . Тогда окрестность точки  $X$  в  $k$ -развертке  $R$  определяется как сумма множеств

$$U(X) = O(X) \cap p + \sum_{q \prec p} O(X_q) \cap q,$$

где  $O(\cdot)$  — окрестность точки в пространстве  $\Omega$  (множество точек  $X_q$  может оказаться пустым, и тогда слагаемое  $\sum$  в приведенной сумме отсутствует).

В дальнейшем теоретико-множественные операции в  $k$ -развертке будут относиться к ее топологии, а не к топологии пространства  $\Omega$ . Для этой цели будут употребляться стандартные обозначения и терминология. Исключением будет символ  $\dot{p}$ , обозначающий комбинаторную границу грани  $p$  в  $k$ -развертке, точнее  $\dot{p} = \overline{p}/p$ .

Легко видеть, что любая точка в  $k$ -развертке имеет окрестность, гомеоморфную евклидовскому полигону. Заметим, что каждое из подмножеств  $R^k$  в  $R$  также является  $k$ -разверткой, если принять, что правило склеивания в  $R^k$  определяется соответствующим правилом для  $R$ . Топология  $k$ -развертки  $R^k$  совпадает с той топологией, которую индуцирует в ней объемлющая  $k$ -развертка.

### § 3. Разрезание и склеивание

Две  $k$ -развертки считаются равными, если существует гомеоморфизм между ними, переводящий изометрически грани в грани.

Пусть  $R$  и  $T$  — не равные  $k$ -развертки. Будем говорить, что  $k$ -развертка  $T$  получена разрезанием  $k$ -развертки  $R$ , если существует гомеоморфизм  $T$  на  $R$  такой, что образ каждой грани первой из них содержится в некоторой грани второй и есть многогранник, изометричный своему прообразу при гомеоморфизме  $T \rightarrow R$ .

Операцию, обратную разрезанию, можно назвать склеиванием в  $k$ -развертке.

Разумеется, склеивание в  $k$ -развертке и склеивание  $k$ -развертки из многогранников — различные понятия. Разрезание  $k$ -развертки приводит к измельчению граней. Его можно связать с переходом в симплексиальном комплексе к подразделению. В соответствии с этим склеивание в  $k$ -развертке напоминает преобразование симплексиального комплекса в комплекс кусочный.

Будем говорить, что  $k$ -развертки  $R$ ,  $T$  получаются одна из другой с помощью разрезания и склеивания, если существуют их разрезания, приводящие к равным  $k$ -разверткам.

Две  $k$ -развертки считаются эквивалентными, если они равны, или если любая из них получается из другой с помощью разрезания либо склеивания, либо с помощью обеих этих операций. Множество всех  $k$ -разверток, очевидно, распадается на непересекающиеся классы, каждый из которых состоит из эквивалентных  $k$ -разверток. Далее мы убедимся, что эквивалентные  $k$ -развертки объединяют нечто более общее, чем преобразования разрезания и склеивания. Этим общим является их метрика. Класс эквивалентных  $k$ -разверток определяет конечно-компактное пространство с внутренней метрикой, а каждый элемент класса является удобным представлением, «разверткой» этого пространства.

В определении  $k$ -разверток, приведенном нами, самосклейивание граней не допускается. Это, однако, не является большим ограничением. Результаты данной работы можно распространить и на более общие случаи  $k$ -разверток. Заметим, что самосклейивание граней всегда устраняется, если соответствующую  $k$ -развертку подвергнуть специальному двукратному разрезанию, подобно тому, как это делают для полиэдральных комплексов.

### § 4. Метрика

Пусть  $R$  — связная  $k$ -развертка. Отношение  $q \prec p$  означает, очевидно, что  $q$  принадлежит замыканию в  $R$  грани  $p$ . Множество  $\bar{p} = p + \sum_{q \prec p} q$  можно назвать замкнутой гранью  $k$ -развертки и можно говорить также, что  $q$  является гранью грани  $p$ . Из определения  $k$ -развертки вытекает, что метрика каждой грани однозначно продолжается на ее замыкание в  $R$ . Причем замкнутая грань оказывается изометричной выпуклому многограннику в  $\Omega$ , а метрики, индуцированные в подчиненных гранях, совпадают с исходными их метриками.

Введем метрику в  $k$ -развертке.

Так как  $R$  связна, то любые две точки в  $R$  соединяются ломаными, звеньями которых служат прямолинейные отрезки в замкнутых гранях. Определим длину ломаной как сумму длин ее звеньев и назовем расстоянием между точками  $X$ ,  $Y$   $k$ -развертки число  $\rho(X, Y)$ , равное точной нижней грани длин ломаных, соединяющих эти точки. Функция  $\rho(X, Y)$ ,

очевидно, является метрикой в  $R$ . Таким образом, о  $k$ -развертках можно говорить как о метрических пространствах. Легко заметить, что эквивалентные  $k$ -развертки изометричны.

Метрика  $k$ -развертки  $R$  обладает следующими свойствами.

Локальная характеристика.

Для каждой точки  $X \in R$  можно указать положительное число  $\delta = \delta(X)$  такое, что окрестность  $U_\delta(X) = \{Y \in R \mid \rho(X, Y) < \delta\}$  этой точки состоит из выпуклых подмножеств замкнутых граней, которым принадлежит  $X$ . Причем расстояние  $\rho(X, Y)$  в этой окрестности равно длине прямолинейного отрезка  $XY$ , измеренной в грани, содержащей точку  $Y$ , а сам отрезок является единственной в метрике  $\rho$  кратчайшей, соединяющей  $X$  и  $Y$ . Отсюда, в частности, следует, что топология  $k$ -развертки, введенная нами раньше, совпадает с ее метрической топологией.

Свойства метрики в целом.

Длина прямолинейного отрезка в замкнутой грани совпадает с его длиной, определяемой в метрике  $\rho$ ; каждый такой отрезок в этой метрике — геодезическая кривая. Метрика  $\rho(X, Y)$  — внутренняя. Пространство  $R$  в этой метрике конечно-компактно, и любые две точки в  $R$  соединяются кратчайшей (не обязательно единственной). Кратчайшая состоит из конечного числа звеньев, прямолинейных отрезков в замкнутых гранях  $k$ -развертки.

Локальную характеристику метрики  $\rho$  можно дополнить. Число  $\delta(X)$  можно подобрать так, чтобы выполнялись следующие предложения. Пусть  $L$  — кратчайшая в  $R$ , принадлежащая окрестности  $U_\delta(X)$  и не налагающая ни на один из прямолинейных отрезков, исходящих из точки  $X$ . И пусть  $\Delta$  — множество точек таких отрезков, проектирующих кратчайшую из  $X$ . Тогда фигура  $\Delta$  состоит из плоских треугольников в замкнутых гранях, последовательно примыкающих друг к другу. При разворачивании  $\Delta$  на двумерную плоскость в  $\Omega$  эта фигура переходит в плоский треугольник. Любая кратчайшая в  $\Delta$  есть линия, одновременно кратчайшая и в  $k$ -развертке  $R$ .

Доказательства этих утверждений о свойствах метрики достаточно простые, и мы их приводить не будем. Стоит остановиться лишь на конечной компактности. Это свойство наглядно, но оно не совсем очевидно для  $k$ -разверток, содержащих бесконечные грани. Здесь нужно рассмотреть два случая: когда  $k$ -развертка составлена из евклидовских многогранников либо когда она построена из многогранников пространства Лобачевского. Достаточно установить следующее.

Пусть дана последовательность ломаных  $\{C\}$  в  $k$ -развертке, составленных из прямолинейных отрезков в ее гранях. И пусть эти ломаные исходят из одной точки, а длины их ограничены в совокупности. Тогда множество свободных концов ломаных содержит подпоследовательность, сходящуюся в  $R$ .

В первом из указанных случаев для доказательства можно применить индукцию по размерности  $k$ -разверток. Пусть  $C$  — одна из ломаных,  $l$  — такое ее звено, открытая часть которого находится в грани  $p^n$ , а концы принадлежат границе  $\bar{p}^n$ . Допустим, что грани  $p^n$ , содержащие концы  $l$ , не являются одновременно  $(n-1)$ -мерными параллельными в замыкании  $\bar{p}^n$ . Тогда концы звена  $l$  соединяются в  $\bar{p}^n$  некоторой кратчайшей линией, ломаной  $C_l$ . С помощью леммы Буземана и Феллера легко показать, что отношение длины  $C_l$  к длине  $l$  ограничено сверху числом, которое не зависит от выбора звена  $l$  на ломаной  $C$ , ни даже от выбора самой этой ломаной. Заменяя теперь участок  $l$  на ломаной  $C_l$  ломаной  $C$ , мы получим некоторую ломаную  $\tilde{C}$  с теми же концами, что и  $C$ . Таким образом с последователь-

ностью ломаных  $\{C\}$  связывается новая последовательность  $\{\tilde{C}\}$ . Длины ломаных  $\tilde{C}$ , очевидно, равнотеменно ограничены сверху. Любая из ломаных находится в осте  $R^{n-1}$  рассматриваемой  $k$ -развертки, кроме, быть может, ее конечных и некоторого числа исключительных внутренних звеньев. Эти внутренние звенья ломаной таковы, что каждое из них без концов принадлежит  $n$ -мерной грани  $k$ -развертки, соединяя ее  $(n-1)$ -мерные параллельные грани. Поэтому в последовательности  $\{\tilde{C}\}$  не существует ломаных со сколь угодно большим числом исключительных звеньев. Возможность перехода от ломаных  $C$  к ломаным  $\tilde{C}$ , свойства которых описаны выше, и показывает, что доказательство конечной компактности  $k$ -разверток, построенных из евклидовских многогранников, легко проводится индукцией по их размерности.

В случае  $k$ -разверток, составленных из многогранников пространства Лобачевского, доказательство конечной компактности не трудно выполнить непосредственно, без применения индукции. Здесь удобно воспользоваться кэлиевой моделью пространства  $\Omega$ .

Заметим, что существование кратчайших в  $k$ -развертке вытекает из конечной компактности ее метрики и того факта, что любые две точки в ней соединяются спрямляемой кривой-ломаной.

### § 5. Касательный конус

1.  $k$ -развертка  $R$  называется конусом, если в  $R$  непусто пересечение всех замкнутых граней ненулевой размерности. Любая точка в этом пересечении называется вершиной конуса, а связная компонента множества всех вершин — вершинной фигурой. Прямолинейные отрезки в замкнутых гранях  $R$ , исходящие из его вершины и максимально продолженные в этих гранях, называются образующими конуса.

Перечислим свойства конуса.

Может оказаться, что единственной вершинной фигурой конуса служит его грань, изометрична целой плоскости в  $\Omega$ . В определенном смысле этот случай является основным. Исключение представляет конус с двумя вершинами, одновременно вершинами  $k$ -развертки, составленный из сферических многогранников. Длина любой образующей такого конуса, очевидно, равна  $\pi/\sqrt{K}$ , где  $K$  — кривизна соответствующего сферического пространства. Образующие на конусах других типов неограничены. Каждый отрезок образующей конуса есть кратчайшая. Если кратчайшая на конусе проходит через его вершину, то кратчайшая состоит из двух отрезков образующих, и эти образующие в сумме представляют кривую, кратчайшую на любом конечном участке. Конус с двумя вершинами допускает изометрическое отображение в себя, переставляющее вершины и сохраняющее инвариантно его образующие. Такая эквивалентность вершин на конусе имеет место и в общем случае. Конус с вершинной фигурой, изометричной плоскости ненулевой размерности, допускает группу движений в себе, транзитивную на множестве точек вершинной фигуры и инвариантную на каждой его грани.

Пусть  $O$  — вершина конуса  $R$ ,  $L$  — кратчайшая на этом конусе, не налагающая ни на одну из его образующих. Спроектируем  $L$  отрезками, исходящими из вершины  $O$ . Фигура  $\Delta$ , которую мы получим, будет состоять из плоских треугольников в гранях конуса. При разворачивании на двумерную плоскость в  $\Omega$  эта фигура переходит в плоский треугольник  $\Delta'$ . Легко видеть, что прямолинейные отрезки в  $\Delta'$  — образы кратчайших на конусе  $R$ . Отсюда следует, что между образующими в  $R$ , которые проектируют концы кратчайшей  $L$ , существует определенный

угол, и он равен соответствующему углу в треугольнике  $\Delta'$ . Если прямолинейные отрезки в  $R$ , проектирующие  $L$ , продолжить до образующих конуса, то и на полученной при этом фигуре любая кратчайшая кривая будет также кратчайшей в  $R$ . Множество образующих в  $R$ , которые проектируют  $L$  из точки  $O$ , при разворачивании на двумерную плоскость в  $\Omega$  переводятся в плоский угол.

Рассмотрим специальный случай конуса.

Пусть конус  $K$  составлен из многогранников евклидова пространства (евклидовский конус). И пусть  ${}^K S$  — граница единичного шара в  $K$  с центром в его вершине. Каждое из пересечений  ${}^K S$  с гранями конуса есть выпуклый открытый многогранник в сферическом пространстве кривизны единицы. Набор этих многогранников является  $k$ -разверткой, правило склеивания в которой определяется самим конусом.  $k$ -развертка  ${}^K S$ , очевидно, не зависит от выбора вершины на  $K$ : две такие  $k$ -развертки, построенные для разных вершин конуса, равны между собой. В связи с этим  ${}^K S$  мы назовем присоединенной  $k$ -разверткой конуса  $K$ . Отметим те связи, которые существуют между элементами  $K$  и  ${}^K S$ .

Точки  $k$ -развертки  ${}^K S$  взаимно однозначно соответствуют образующим конуса  $K$ . Ребра, двумерные и вообще  $(k+1)$ -мерные грани конуса также взаимно-однозначно отображаются на вершины, ребра,  $k$ -мерные грани присоединенной  $k$ -развертки. Линейные углы при  $k$ -мерных гранях, «ребрах»  $(k+2)$ -мерных граней конуса, равны линейным углам при соответствующих  $(k-1)$ -мерных «ребрах» соответствующих  $(k+1)$ -мерных граней  ${}^K S$ . Можно говорить, что грани (точки, образующие) конуса  $K$  проектируются в грани (соответственно точки) его присоединенной  $k$ -развертки.

Пусть  $L$  — кратчайшая на конусе  $K$ , не налагающая ни на одну из его образующих, и пусть  $L_S$  — ее проекция на присоединенную  $k$ -развертку. Тогда нетрудно заметить, что кривая  $L_S$  — кратчайшая в  ${}^K S$ , и ее длина (одна и та же в  $K$  и  ${}^K S$ ) равна углу на конусе между образующими, которые проектируют концы  $L$ . Обратно, если  $L$  — кратчайшая в  ${}^K S$ , длина которой меньше  $\pi$ , то фигура на конусе, составленная из образующих, проектирующихся в  $L$ , обладает следующим свойством. Любая кривая, кратчайшая в этой фигуре, кратчайшая также на конусе  $K$ . Если длина кратчайшей  $L$  равна  $\pi$ , то образующие на конусе, соответствующие ее концам, представляют вместе кривую, кратчайшую на каждом конечном участке. Множество всех образующих, которые проектируют  $L$  в этом случае, составляют на конусе  $K$  фигуру, изометричную замкнутой двумерной евклидовской полуплоскости. Причем любая кратчайшая кривая на этой фигуре есть также кратчайшая и на конусе. Заметим, что, говоря о метрике  ${}^K S$ , мы имеем в виду метрику любой ее связной компоненты. Вообще говоря, эта метрика не совпадает с угловой метрикой конуса в его вершине. Но в том случае, если присоединенная  $k$ -развертка связна и ее диаметр не превосходит  $\pi$ , такое совпадение метрик имеет место.

2. Пусть  $R$  —  $k$ -развертка. Покажем, что в каждой ее точке существует евклидовский касательный конус. Такой конус мы просто построим и установим затем, что окрестность его вершины допускает изометрическое в бесконечно малом отображение на окрестность точки в  $R$ .

Легко заметить, что каждая из точек  $k$ -развертки  $R$  имеет окрестность, изометричную окрестности вершины на некотором конусе, причем, самой точке отвечает вершина. Поэтому можно пока считать, что  $R$  — неевклидовский конус, и касательный конус строить в его вершине. В даль-

нейшем, как и прежде, символом  $\Omega$  обозначается пространство, определяющее  $k$ -развертку-конус  $R$ .

Конус  $R$  представляет набор многогранников в пространстве  $\Omega$  с указанным в этом наборе правилом склеивания. Пусть  $O$  — точка, соответствующая вершине конуса, а  $\varphi$  — функция склеивания. Будем считать, что склеивания в точке  $O$  произведены на самом деле. Иными словами, примем, что многогранники, составляющие  $R$ , расположены в  $\Omega$  так, чтобы множество точек  $\varphi^{-1}O$ , если оно не пусто, совпадало с  $O$ . Пусть  $E$  — нормальное евклидово пространство [8], связанное с точкой  $O$  пространства  $\Omega$ ,  $\times : \Omega \rightarrow E$  — соответствующее нормальное отображение. Обозначим  $O' = \times O$ . Отображение  $\times$ , как известно, геодезическое в точке  $O$ , сохраняет длины отрезков, исходящих из этой точки и углы между ними, сохраняет также двугранные углы между плоскостями, проходящими через  $O$ , и в достаточно малой окрестности точки  $O$  является гомеоморфизмом. В рассматриваемом случае можно принять, что радиус этой окрестности чуть меньше  $\pi/\sqrt{|K|}$ , где  $K$  — кривизна  $\Omega$  (для конуса, составленного из многогранников пространства Лобачевского, радиус окрестности можно считать бесконечным). Пространства  $\Omega$  и  $E$  соприкасаются в точке  $O$ . Отсюда, в частности, следует, что  $E$  — касательный конус к  $\Omega$  в этой точке, т. е. что при отображении  $\times$  в  $\delta$ -окрестности точки  $O$  имеет место  $\varepsilon$ -изометрия: для любого положительного числа  $\varepsilon$  можно указать число  $\delta > 0$ , при котором

$$|XY - X'Y'| < \varepsilon \max(OX, OY),$$

как только  $OX, OY < \delta$ , где  $X, Y \in \Omega$ ,  $X' = \times X$ ,  $Y' = \times Y$ ,  $XY$  и другие подобные выражения обозначают расстояние между точками в соответствующем пространстве.

Отобразим каждую грань  $p \subset R$ , примыкающую к точке  $O$ , с помощью функции  $\times$  в бесконечный выпуклый многогранник  $p' \subset E$  по следующему правилу. Многогранник  $p'$  состоит из точки  $O'$ , если  $O \in p$ , и открытых лучей, исходящих из  $O'$ , направленных в  $\times$ -образы точек грани  $p$ . Если  $O$  — вершина  $R$ , то ей, естественно, сопоставим нульмерный многогранник — точку  $O' = \times O$ . В окрестности точки  $O$  радиуса меньше  $\pi/\sqrt{|K|}$  точечное до отображения граней будет взаимно однозначным и продолжается до отображения их границ в пространстве  $\Omega$ . Это позволяет в построеннем наборе евклидовых многогранников ввести функцию склеивания, которую мы обозначим  $\varphi'$ . Именно, если  $Y = \varphi X$ ,  $X' = \times X$ ,  $Y' = \times Y$ , то функция  $\varphi'$  определяется сначала равенством  $Y' = \varphi' X'$ , и затем, с помощью равенства  $tY' = \varphi' tX'$ , эта функция распространяется на полные границы многогранников. Здесь  $tX'$ ,  $tY'$  — образы точек  $X'$ ,  $Y'$  при растяжении пространства  $E$  относительно центра  $O'$  с коэффициентом подобия  $t$ . Евклидовскую  $k$ -развертку-конус, определяемую функцией склеивания  $\varphi'$  мы обозначим  $K$ . Легко видеть, что функция  $\times$  определяет гомеоморфизм окрестности точки  $O$  в конусе  $R$  на соответствующую окрестность  $O'$  на  $K$ . Этот гомеоморфизм мы также будем обозначать  $\times$ . В дальнейшем символом  $WZ$  обозначается расстояние между точками  $W$  и  $Z$  на конусе  $R$ . Тот же символ употребляется для обозначения кратчайшей с концами  $W$ ,  $Z$ . Аналогичные обозначения применяются и по отношению к конусу  $K$ . Заметим, что при гомеоморфизме  $\times$  кратчайшие  $WZ$  и  $W'Z'$ , где  $W' = \times W$ ,  $Z' = \times Z$ , вообще говоря, не соответствуют друг другу.

Покажем, что в смысле метрик  $R$ ,  $K$  гомеоморфизм  $\times : R \rightarrow K$  в точке  $O$  является изометрией в бесконечно малом.

Пусть  $A, B$  — точки на конусе  $R$ ,  $A' = \times A$ ,  $B' = \times B$ . Обозначим  $\alpha$  угол между образующими в  $R$ , проектирующими  $A$  и  $B$ ,  $\alpha'$  — угол между их образами на конусе  $K$ . Докажем равенство  $\alpha = \alpha'$ .

Допустим, что один из углов, например, первый, меньший  $\pi$ . Тогда, очевидно,  $AB < OA + OB$ . Пусть  $A, \dots, X, Y, \dots, B$  — последовательные вершины кратчайшей в  $R$ , соединяющей  $A$  с  $B$ , т. е. концы прямолинейных звеньев кратчайшей  $AB$ , принадлежащих замкнутым граням конуса. И пусть  $A' \dots X'Y' \dots B'$  — ломаная, составленная из прямолинейных отрезков  $X'Y'$  в замкнутых гранях конуса  $K$ . Здесь  $X' = xX$ ,  $Y' = xY$ . Будем считать, что эти отрезки находятся в гранях, которые соответствуют граням в  $R$ , содержащим звенья  $XY$ . Очевидно, множества  $\Delta$  и  $\Delta'$  образующих в  $R$  и  $K$ , проектирующих кратчайшую  $AB$  и ломаную  $A' \dots B'$ , при гомеоморфизме  $x$  соответствуют друг другу. Поэтому углы, под которыми из точек  $O$  и  $O'$  видны отрезки  $XV$  и  $X'Y'$ , равны между собой. Отсюда легко заключить, что  $\alpha' \leq \alpha$ . В таком случае  $\alpha' < \pi$ , и, на основании предыдущего,  $\alpha < \alpha'$ . Значит,  $\alpha = \alpha'$ .

Докажем теперь основное утверждение, для чего используем построения, введенные нами при установлении равенства углов  $\alpha$  и  $\alpha'$ .

Пусть  $\delta, \varepsilon$  — пара чисел, для которой при гомеоморфизме  $x: \Omega \rightarrow E$  в  $\delta$ -окрестности точки  $O$  имеет место  $\varepsilon$ -изометрия. Будем считать, что точки  $A, B \in R$  выбраны произвольно, но с тем условием, чтобы выполнялись неравенства  $OA, OB < \delta < \pi/\sqrt{|K|}$ , и чтобы угол, под которым из точки  $O$  «видна» кратчайшая  $AB$ , был меньше  $\pi$ . Нетрудно заметить, что на множестве  $\Delta'$ , только что введенном нами, точки  $A'$  и  $B'$  соединяются кривой  $A'B'$ , кратчайшей на конусе  $K$ . Развернем фигуры  $\Delta$  и  $\Delta'$  на двумерные плоскости в  $\Omega$  и  $E$ . Будем считать, что образующие этих фигур переводятся в лучи, исходящие из  $O$  и  $O'$ , и что пары крайних лучей и образы точек  $A, A'$  и  $B, B'$  при гомеоморфизме  $x: \Omega \rightarrow E$  соответствуют друг другу. Такое допущение возможно, поскольку выполняются равенства  $\alpha = \alpha'$ ,  $OA = O'A'$ ,  $OB = O'B'$ . На основании этих же равенств кратчайшие  $AB$  и  $A'B'$  при разворачивании переходят в прямолинейные отрезки в пространствах  $\Omega$  и  $E$ , концы которых соответствуют друг другу. Теперь достаточно вспомнить условия  $OA, OB < \delta$ , чтобы записать неравенство

$$|AB - A'B'| < \varepsilon \max(OA, OB).$$

Точки  $A, B$  подчинялись еще условию: угол между образующими в  $R$ , которые проектируют эти точки, строго меньше  $\pi$ . Но если последнее требование не выполняется, мы просто имеем равенство  $AB = A'B'$ , так что неравенство, приведенное нами, справедливо для любой пары точек в  $R$ , отстоящих от точки  $O$  меньше, чем на  $\delta$ . Это показывает, что конус  $K$  — касательный конус к  $R$  в точке  $O$ .

$k$ -развертка  ${}^kS$ , соответствующая конусу  $K$ , называется присоединенной  $k$ -разверткой конуса  $R$  в его вершине  $O$ . Между образующими в  $R$  и точками его присоединенной  $k$ -развертки естественным образом устанавливается взаимно однозначное соответствие: образующая конуса  $R$  — касательная к ней образующая конуса  $K$  — проекция последней на присоединенную  $k$ -развертку  ${}^kS$ . Ранее отмечались те связи, которые существуют между элементами конуса  $K$  и его присоединенной  $k$ -разверткой. Такие же связи существуют и в паре  $R, {}^kS$ . Чтобы не повторяться, мы их всех перечислять не будем, а выделим лишь основные.

Углы между образующими в  $R$  и расстояния между их проекциями в  ${}^kS$ , если последние не превосходят  $\pi$ , совпадают. Если  $L$  — кратчайшая в  ${}^kS$ , то множество образующих на касательном конусе  $K$ , которые проектируют  $L$ , и множество соответствующих им образующих в  $R$  представляют фигуры со следующими свойствами. Любая кратчайшая на каждой из этих фигур — кратчайшая и на конусе. При разворачивании фигур на соответствующие двумерные плоскости получаются плоские углы. По от-

ношению к конусу  $R$  можно говорить о проекциях ребер, граней на соответствующие им элементы присоединенной  $k$ -развертки и также о сохранении линейных углов при «ребрах» граней этого конуса.

Пусть теперь  $R$  — произвольная  $k$ -развертка. Как уже отмечалось раньше, для каждой точки  $X \in R$  существует ее окрестность  $U_\delta(X)$ , изометрическая окрестности вершины на некотором конусе. Поэтому можно говорить об евклидовском конусе, — мы его обозначим  $K_X$ , — касательном к  $R$  в точке  $X$ , и о связях элементов окрестности  $U_\delta(X)$  и конуса  $K_X$ . По отношению к  $k$ -развертке  $R$  можно говорить также о присоединенной  $k$ -развертке  $S$  в точке  $X$ . Нам достаточно заметить следующее. Для изучения окрестности  $U_\delta(X)$  удобно ее «продолжить» до целого конуса.  $U_\delta(X)$  в такой конус вложена изометрически, служит окрестностью его вершины, и ее связи с конусом  $K_X$  и присоединенной  $k$ -разверткой  $S_X$  очень наглядны. Эти связи такие же, как и в последовательности «конус — касательный конус — присоединенная  $k$ -развертка», поскольку речь идет лишь о локальных свойствах.

### § 6. $h$ -развертка

Важный и достаточно широкий подкласс  $k$ -разверток составляют такие из них, которые по своим локальным топологическим свойствам приближаются к гладким поверхностям. Для сравнения напомним, что среди полиздротов в известной степени гладкими являются гомологические многообразия, или, как говорят еще,  $h$ -многообразия.

Введем следующее определение.

Связная  $n$ -мерная  $k$ -развертка, целочисленные локальные группы гомологий которой в каждой точке изоморфны локальным группам гомологий  $n$ -мерного евклидова пространства, называется  $n$ -мерной гомологической разверткой, или  $h$ -разверткой.

Простым примером  $n$ -мерной  $h$ -развертки может служить граница  $(n+1)$ -мерного выпуклого многогранника;  $k$ -мерный остов этой границы при  $k < n$ , напротив, хотя и является  $k$ -разверткой, не представляет  $h$ -развертки.

Конус —  $h$ -развертку будем называть  $h$ -конусом, или  $h_\Omega$  — конусом, желая подчеркнуть последним, что он составлен из многогранников пространства  $\Omega$ .

Приведем на примере  $h$ -конуса локальные свойства  $h$ -разверток.

Пусть  $R$  —  $n$ -мерный  $h$ -конус с вершиной  $O$ ,  $K$  — евклидовский конус, касательный к  $R$  в точке  $O$ . И пусть  $U_\delta(O)$  — шаровая  $\delta$ -окрестность вершины  $R$ ,  $S_\delta$  — граница этой окрестности, а  $S$  — присоединенная  $k$ -развертка. Тогда в конусе  $R$  к каждой его  $(n-1)$ -мерной грани примыкают в точности две  $n$ -мерные. Касательный конус  $K$  является  $h$ -конусом. Граница  $S_\delta$  при малом  $\delta$  и присоединенная  $k$ -развертка  $S$  являются связными гомеоморфными ( $n-1$ -мерными  $h$ -развертками, целочисленные группы гомологий которых изоморфны группам гомологий  $(n-1)$ -мерной евклидовой сферы).

Эти факты вытекают из аналогичных предложений для  $h$ -многообразий и инвариантности их гомологических свойств при гомеоморфизмах.

Заметим, что  $h$ -многообразие в общем случае, а значит и  $h$ -развертка, многообразиями не являются. На этот счет уже для четырех измерений существуют соответствующие примеры. Вместе с тем, используя известные положения, можно утверждать, что каждая дву- или трехмерная  $h$ -развертка — многообразие. При  $n \leq 3$  в только что введенных обозначениях граница  $S_\delta$ , а значит и присоединенная  $h$ -развертка  $S$ , и окрестность  $U_\delta(O)$  гомеоморфны соответственно сфере и евклидовскому шару.

### § 7. Пространства с многогранной $h$ -метрикой

Определим теперь пространства, которые мы будем называть пространствами с многогранной  $h$ -метрикой. Такие пространства, подчиненные некоторому дополнительному требованию, будут основным предметом исследований в этой работе.

Конечно-компактное пространство  $M$  с внутренней метрикой называется  $n$ -мерным пространством с многогранной  $h_2$ -метрикой, если каждая точка в  $M$  имеет окрестность, изометричную окрестности вершины на некотором  $n$ -мерном  $h_2$ -конусе.

В данном определении, по-видимому, надо пояснить выражение «конечно-компактное ... с внутренней метрикой». Это выражение означает следующее.  $M$ -метрическое пространство, и каждое ограниченное подмножество в нем компактно. Любые две точки в  $M$  соединяются спрямляемой кривой; точная нижняя грань длин подобных кривых равна расстоянию между точками. Из конечной компактности вытекают, что существует кривая, кратчайшая, для которой эта нижняя грань достигается.

Нетрудно построить примеры пространств, которые не представимы  $h$ -развертками, но являются в то же время пространствами с многогранной  $h$ -метрикой. Для этой цели можно ввести многогранники с бесконечным числом граней.

Кратчайшие в пространстве  $M$  с многогранной  $h$ -метрикой имеют достаточно простое строение. Любая из них, будучи компактным множеством в пространстве, допускает конечное покрытие из окрестностей, изометричных окрестностям вершин на некоторых  $h$ -конусах. Отсюда следует, что кратчайшие в  $M$  устроены так же, как и на  $h$ -развертках: они представляют «ломаные», составленные из конечного числа «прямолинейных» звеньев. Детальное изучение кратчайшей и ее окрестности будет проведено в следующей части работы, где рассматриваются пространства с многогранной  $h$ -метрикой неотрицательной кривизны.

Для пространства с многогранной  $h$ -метрикой, как и для  $h$ -разверток, определены понятия касательного конуса в точке и присоединенной  $h$ -развертки. Между кратчайшими в этом пространстве, исходящими из некоторой точки, углами между ними, равно как и другими элементами окрестности точки и соответствующими им объектами на касательном конусе пространства и его присоединенной  $h$ -развертке, существуют определенные связи. Поскольку рассматриваемые пространства локально представимы с помощью изометрических им  $h$ -разверток, то приводить соответствующие факты, наверное, нет необходимости.

В заключение заметим, что наименования «развертка» и «пространство с многогранной метрикой» без индекса  $h$  целесообразно сохранить за соответствующими пространствами, которые являются многообразиями. Для двух или трех измерений эти термины эквивалентны введенным ранее. Примером развертки в общем случае является граница замкнутого выпуклого многогранника.

### ЛИТЕРАТУРА

1. А. Д. Александров. Выпуклые многогранники. Гостехиздат, М.—Л., 1950.
2. А. Д. Александров. Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей. Гостехиздат, М.—Л., 1948.
3. А. Д. Александров, В. А. Залгаллер. Двумерные многообразия ограниченной кривизны. Труды матем. ин-та им. В. А. Стеклова, т. 63, Изд-во АН СССР, М.—Л., 1962.

4. И. А. Брин. Теорема Гаусса-Бонне для многогранников. УМН, т. 3, вып. 2(24) 1948, 226—227.
5. Ю. А. Волков. Существование выпуклого многогранника с данной разверткой. 1. «Вестник ЛГУ», № 19, вып. 4. Изд-во Ленинградск. ун-та, Л., 1960, 75—86.
6. Г. Зейферт, В. Трельфалль. Топология. ГОНТИ. М.—Л., 1938.
7. П. С. Александров. Комбинаторная топология. Гостехиздат, М.—Л., 1947.
8. Э. Картан. Геометрия римановых пространства ОНТИ, М.—Л., 1936.

Поступила 27 апреля 1967 г.

---

## О ВЗАИМНЫХ ПАРАХ КРИВЫХ В ЭКВИЦЕНТРОАФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

*А. П. Мокляк* (Умань)

В геометриях центроаффинных пространств применяются двойственные между собой векторные и дублетные функции.

Геометрически векторная функция  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  задает:

- 1) пространственную кривую как однопараметрическое семейство точек, определяемых концом переменного вектора  $\mathbf{r}(t)$ ;
  - 2) семейство касательных;
  - 3) семейство соприкасающихся плоскостей;
- дублетная функция  $\tilde{\mathbf{r}} = \tilde{\mathbf{r}}(t)$  задает:
- 1) развертывающуюся поверхность как огибающую однопараметрического семейства плоскостей, определяемых краем переменного дублета  $\tilde{\mathbf{r}}(t)$ ;
  - 2) семейство характеристик;
  - 3) пространственную кривую как ребро возврата.

В работах [1, 2] строились основные соотношения единой эквицентроаффинной теории пространственных кривых и торсов. Для этого одна и та же кривая одновременно рассматривалась и как однопараметрическое семейство точек, и как ребро возврата огибающей ее соприкасающихся плоскостей. Причем параметр  $t$  выбирался таким образом, что одному и тому же его значению всегда соответствовали точка  $\mathbf{r}(t)$  и соприкасающаяся плоскость  $\tilde{\mathbf{r}}(t)$  именно в этой точке.

Рассмотрение некоторых кривых, эквицентроаффинно-инвариантным образом связанных с данной кривой, а также нахождение геометрического смысла ее двойственных двойных инвариантов, полученных в [1, 2] и является целью настоящей работы.

При построениях будем пользоваться «проективной моделью» центроаффинного пространства, т. е. будем представлять его как пространство, выделенное из проективного путем фиксации некоторой точки  $O$  и неинцидентной с ней некоторой плоскости  $\omega$ , считая их принадлежащими центроаффинному пространству без инцидентных им точек, прямых или плоскостей. Точки, прямые или плоскости, инцидентные фиксированным элементам, будем считать несобственными. Будем считать, что в каждой плоскости инцидентной «центру»  $O$ , установлена эквицентроаффинная геометрия, для которой фиксированными элементами служат точка  $O$  и прямая пересечения этой плоскости с фиксированной плоскостью  $\omega$  пространства. Обыкновенные прямые, пересекающиеся в плоскости  $\omega$ , будем называть параллельными.

Несобственную прямую, проходящую через начало и конец вектора, назовем осью вектора.

Несобственную прямую пересечения начала и края дублета назовем осью дублета.

Два вектора (два дублета) будем называть коллинеарными, если их оси совпадают. Отсюда, если: 1) вектор и дублет параллельны, то их оси

пересекаются, 2) прямая и вектор параллельны, то ось вектора пересекается с прямой в плоскости  $\omega$ ; 3) прямая и дублет параллельны, то прямая пересекает ось дублета.

1. Пусть в эквицентроаффинном трехмерном действительном пространстве  $E_3$  задана неплоская кривая  $X$  с помощью векторной достаточное число раз дифференцируемой функции

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s), \quad (1)$$

где  $s$  — первого рода натуральный параметр кривой  $X$  [1].

Выпишем обе пары взаимных реперов, связанных с каждой точкой  $M$  кривой  $X$ :

- |          |   |
|----------|---|
| 1-я пара | векторный репер $(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{r}'')$ ,                                   |
|          | взаимный ему дублетный $(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{r}}^{(1)}, \bar{\mathbf{r}}^{(2)})$ ; |
| 2-я пара | дублетный репер $(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{r}}', \bar{\mathbf{r}}'')$ ,                 |
|          | взаимный ему векторный $(\mathbf{r}, \mathbf{r}^{(1)}, \mathbf{r}^{(2)})$ .                   |

(Штрихом обозначено дифференцирование по  $s$ ).

Некомпланарные векторы  $\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{r}''$  связываются эквицентроаффинным образом соотношением

$$(\mathbf{r}\mathbf{r}'\mathbf{r}'') = 1. \quad (3)$$

Отсюда после одного дифференцирования по  $s$  можно получить векторное основное дифференциальное уравнение кривой  $X$ :

$$\mathbf{r}''' + k\mathbf{r}' + x\mathbf{r} = 0, \quad (4)$$

где  $k$  и  $x$  — соответственно эквицентроаффинные первого рода кривизна и кручение кривой  $X$ .

$$k = (\mathbf{r}\mathbf{r}''\mathbf{r}'''); \quad (5)$$

$$x = -(\mathbf{r}'\mathbf{r}''\mathbf{r}'''). \quad (6)$$

Далее [2],

$$\mathbf{r}^{(2)} = -\frac{1}{x}\mathbf{r}', \quad \bar{\mathbf{r}}^2 = \frac{1}{x}\bar{\mathbf{r}}'. \quad (7)$$

Ребра основного сопровождающего базиса первого рода кривой  $X$  определяются вектором  $\mathbf{t}$  касательной, равным  $\mathbf{r}'$ , вектором  $\mathbf{n}$  первой эквицентроаффинной главной нормали, равным  $\mathbf{r}''$ , и вектором  $\mathbf{b}$  эквицентроаффинной бинормали, равным  $\mathbf{r}$ ; гранями его являются дублет  $\bar{\mathbf{t}}$  касательной, равный  $\bar{\mathbf{r}}^{(1)}$ , дублет  $\bar{\mathbf{n}}$  первой эквицентроаффинной главной нормали, равный  $\bar{\mathbf{r}}^{(2)}$ , и дублет  $\bar{\mathbf{b}}$  эквицентроаффинной бинормали, равный  $\bar{\mathbf{r}}$ :

$$\mathbf{r}' = \mathbf{t}, \quad \mathbf{r}'' = \mathbf{n}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{b}, \quad (\mathbf{tnb}) = 1; \quad (8)$$

$$\bar{\mathbf{r}}^{(1)} = \bar{\mathbf{t}}, \quad \bar{\mathbf{r}}^{(2)} = \bar{\mathbf{n}}, \quad \bar{\mathbf{r}} = \bar{\mathbf{b}}, \quad (\bar{\mathbf{tnb}}) = 1. \quad (9)$$

Производные векторов и дублетов основного сопровождающего базиса первого рода по  $s$  удовлетворяют соотношениям типа формул Френе метрической теории пространственных кривых:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}' &= \mathbf{n}, \\ \mathbf{n}' &= -\frac{1}{x}\mathbf{t} - \frac{1}{x}\mathbf{b}, \\ \mathbf{b}' &= \mathbf{t} \end{aligned} \quad (10)$$

и

$$\begin{aligned}\bar{t}' &= k\bar{n} - \bar{b}, \\ \bar{n}' &= -\bar{t}, \\ \bar{b}' &= x\bar{n}.\end{aligned}\tag{11}$$

Отсюда замечаем, что

$$(\bar{n}\bar{n}'\bar{n}'') = 1,\tag{12}$$

т. е. эквицентроаффинный натуальный параметр  $s$  второго рода кривой  $\tilde{X}$ , определяемой дублетом  $\bar{n}$ , равен натульному параметру  $s$  первого рода кривой  $X$ .

Из (11) находим дублетное основное дифференциальное уравнение кривой  $\tilde{X}$ :

$$\bar{n}''' + k\bar{n}' + (k' - x)\bar{n} = 0.\tag{13}$$

Значит, эквицентроаффинная кривизна  $\tilde{k}$  второго рода кривой  $\tilde{X}$  равна кривизне  $k$  кривой  $X$ , а между эквицентроаффинным кручением  $\tilde{x}$  второго рода кривой  $\tilde{X}$  и кручением  $x$  кривой  $X$  существует связь:

$$x + \tilde{x} = k'.\tag{14}$$

Теперь нетрудно получить, учитывая зависимости работы [2] (29), (27) и двойственную к (34), эквицентроаффинные первого рода основные инварианты кривой  $\tilde{X}$ :

$$d\tilde{s} = (k' - x)^{\frac{2}{3}} ds;\tag{15}$$

$$\tilde{x} = -\frac{1}{k' - x};\tag{16}$$

$$\tilde{k} = (k' - x)^{-\frac{4}{3}} k - \frac{1}{9}(k' - x)^{-\frac{4}{3}} \left\{ 8 \left( \frac{k'' - x'}{k' - x} \right)^2 + 3 \left( \frac{k'' - x'}{k' - x} \right)' \right\}.\tag{17}$$

Из первой пары реперов (2) и (9) — (11) замечаем, что уравнению кривой  $\tilde{X}$

$$\bar{n} = [\mathbf{r}\mathbf{r}']\tag{18}$$

противостоит уравнение кривой  $X$ 

$$\mathbf{r} = [\bar{n}\bar{n}'].\tag{19}$$

Кроме того, тройке некомпланарных векторов

$$\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{r}''\tag{20}$$

кривой  $X$  соответствует взаимная ей тройка дублетов

$$\tilde{k}\bar{n} + \bar{n}'', -\bar{n}', \bar{n};\tag{21}$$

дублетной тройке

$$\bar{n}, \bar{n}', \bar{n}''\tag{22}$$

кривой  $\tilde{X}$  соответствует взаимная ей тройка векторов:

$$kr + r'', -r', \mathbf{r}.\tag{23}$$

Кривые  $X$  и  $\tilde{X}$  полностью взаимны между собой [3].

Будем называть все плоскости, содержащие касательную к кривой в данной точке, ее касательными плоскостями.

Рассмотрим несобственную касательную плоскость. Оси векторов  $\mathbf{r} = \overline{OM}$  и  $\mathbf{r}' = \overline{ON}$  разделяют ее на четыре части — «эквицентроаффинных квадранта». Первым квадрантом будем называть квадрант, образованный лучами  $ON$  и  $OM$ , вторым — квадрант, образованный лучами  $OM$  и  $ON'$ , где  $ON'$  — луч, дополняющий луч  $ON$  до прямой, и т. д.

Третья производная радиуса-вектора  $\mathbf{r}$  точки  $M$  кривой  $X$  по натуральному параметру  $s$  вектор  $\mathbf{r}'''$  принадлежит, как показывает уравнение (4), несобственной касательной плоскости. Введем обозначение  $\mathbf{r}''' = \overline{OA_n}$ , где индекс  $n$  обозначает порядковый номер квадранта, в котором находится вектор  $\mathbf{r}'''$ .

Так как «косое» произведение трех некомпланарных векторов  $a, b, c$  равно дублетному произведению первых двух векторов, умноженному скалярно на третий вектор [4]:

$$(abc) = [ab]c,$$

то, по определению скалярного умножения дублета на вектор [4], (5) и (6) можно переписать так:

$$\underset{1}{k} = [\mathbf{rr}''] \mathbf{r}''' = \frac{\overline{OA_n}}{\overline{OC_n}}, \quad (24)$$

$$\underset{1}{x} = -\bar{\mathbf{r}}\mathbf{r}''' = -\frac{\overline{OA_n}}{\overline{OB_n}}, \quad (25)$$

где  $B_n$  и  $C_n$  — точки пересечения прямой  $OA_n$  соответственно с плоскостями  $\bar{\mathbf{r}} = [\mathbf{r}\mathbf{r}']$  и  $[\mathbf{r}\mathbf{r}'']$ .

Отсюда следует, что если третья производная радиуса-вектора  $\mathbf{r}$  точки  $M$  кривой  $X$  вектор  $\mathbf{r}'''$  находится

а) в первом квадранте, то  $k < 0, x < 0$ ;

б) во втором квадранте, то  $k > 0, x < 0$ ;

в) в третьем квадранте, то  $k > 0, x > 0$ ;

г) в четвертом квадранте, то  $k < 0, x > 0$ ;

д) ось вектора  $\mathbf{r}'''$  прямая  $OA_n$  совпадает с  $OM$ , то  $k = 0, x > 0$ .

Принимая векторы (20) основного сопровождающего базиса первого рода за «единичные» векторы эквицентроаффинной системы координат, рассмотрим отнесенные к осям этого трехгранника точки

$$N(0, 1, 0), E(0, 1, 1), Q(1, 0, 1), R(1, k, 0) \text{ и } S(x, 1, 0).$$

Объемы тетраэдров  $OMQR$  и  $ONSE$  соответственно равны  $-\frac{1}{6}k$  и  $-\frac{1}{6}x$ .

В самом деле, пусть, например,  $x = -\gamma^2 \neq 0, k = -\lambda^2 \neq 0$ , тогда  $R(1, -\lambda^2, 0), S(-\gamma^2, 1, 0)$ . Учитывая (3), получаем:

$$V_{OMQR} = \frac{1}{6} [\mathbf{r}, \mathbf{r} + \mathbf{r}''] (\mathbf{r} - \lambda^2 \mathbf{r}') = \frac{1}{6} \lambda^2 = -\frac{1}{6}k;$$

$$V_{ONSE} = \frac{1}{6} [\mathbf{r}', -\gamma^2 \mathbf{r} + \mathbf{r}'] (\mathbf{r} + \mathbf{r}'') = \frac{1}{6} \gamma^2 = -\frac{1}{6}x.$$

2. В силу полной двойственности предложений относительно «точек» и «плоскостей» в эквицентроаффинном пространстве справедливы для кривой  $X$  двойственные к (3) — (6) соотношения

$$\overset{(26)}{(\tilde{r}\tilde{r}\tilde{r})} = 1;$$

$$\overset{(27)}{\frac{\dot{r}}{2} + k\frac{\ddot{r}}{2} + x\frac{\dddot{r}}{2} = 0},$$

где  $k$  и  $x$  — соответственно эквицентроаффинные второго рода кривизна и кручение кривой  $X$ .

$$\overset{(28)}{k = (\tilde{r}\tilde{r}\tilde{r})}.$$

$$\overset{(29)}{x = -(\tilde{r}\tilde{r}\tilde{r})}.$$

(точкой обозначено дифференцирование по второго рода натуральному параметру  $s$  кривой  $X$ ).

Эквицентроаффинный параллелепипед с вершиной в точке  $O$ , гранями которого являются плоскости  $\tilde{r}, \dot{\tilde{r}}$  и  $\ddot{\tilde{r}}$ , будем называть основным сопровождающим базисом второго рода. Вводя обозначения, аналогичные обозначениям ребер и граней основного сопровождающего базиса первого рода, будем иметь, учитывая (27), вторую группу формул типа формул Френе:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{r}} &= \hat{n}, \quad \ddot{\tilde{r}} = \hat{t}, \quad \dddot{\tilde{r}} = \hat{b}, \quad (\hat{n}\hat{t}\hat{b}) = 1; \\ &\quad \hat{n} \quad \hat{t}; \\ \dot{\hat{t}} &= -k\hat{n} - x\hat{b}; \\ \dot{\hat{b}} &= \hat{n}. \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} r^{(1)} &= \hat{n}, \quad r^{(2)} = \hat{t}, \quad r = b, \quad (\hat{n}\hat{t}\hat{b}) = 1; \\ \dot{\hat{n}} &= k\hat{t} - \hat{b}; \\ \dot{\hat{t}} &= -\hat{n}; \\ \dot{\hat{b}} &= x\hat{t}, \end{aligned} \quad (31)$$

где  $\hat{n}$  — вектор второй эквицентроаффинной главной нормали.

Так как

$$\overset{(32)}{(\hat{t}\hat{t}\hat{t})} = 1,$$

то эквицентроаффинные натуральные параметры  $s$  и  $\overset{\hat{s}}{s}$  кривой  $X$  и кривой  $\hat{X}$ , описываемой концом вектора  $\hat{t}$ , равны.

Аналогично (13) — (17) запишем основные соотношения для кривой  $\hat{X}$ :

$$\overset{(33)}{\frac{\dot{\hat{t}}}{2} + k\frac{\ddot{\hat{t}}}{2} + (\frac{\dot{k}}{2} - \frac{x}{2})\frac{\dddot{\hat{t}}}{2} = 0}.$$

Значит

$$\overset{(34)}{\frac{\dot{\hat{k}}}{2} = k, \quad \frac{\dot{x}}{2} = \frac{\dot{k}}{2} - \frac{x}{2}},$$

$$\overset{(35)}{\frac{\dot{\hat{s}}}{2} = (\frac{\dot{k}}{2} - \frac{x}{2})^{\frac{2}{3}} \frac{ds}{2}}.$$

$$\overset{(36)}{\hat{k} = (\frac{\dot{k}}{2} - \frac{x}{2})^{-\frac{4}{3}} \frac{k}{2} - \frac{1}{9} (\frac{\dot{k}}{2} - \frac{x}{2})^{-\frac{4}{3}} \left\{ 8 \left( \frac{\dot{\hat{k}} - \frac{\dot{x}}{2}}{\frac{\dot{k}}{2} - \frac{x}{2}} \right)^2 + 3 \frac{d}{ds} \left( \frac{\dot{\hat{k}} - \frac{\dot{x}}{2}}{\frac{\dot{k}}{2} - \frac{x}{2}} \right) \right\}}.$$

Из очевидных уравнений

$$\hat{t} = [\bar{r}\bar{r}], \quad (37)$$

$$\bar{r} = [\hat{t}\hat{t}] \quad (38)$$

видна взаимность отношений между  $\bar{r}$  и  $\hat{t}$ .

Кривая  $\hat{X}$ , как и кривая  $\tilde{X}$ , полностью взаимна с кривой  $X$ . Взаимной системе дублетов и векторов кривой  $X$

$$\begin{array}{c} \bar{r}, \dot{\bar{r}}, \ddot{\bar{r}}; \\ \hat{t}, \dot{\hat{t}}, \ddot{\hat{t}}; \\ k\bar{r} + \bar{t}, -\dot{\bar{r}}, \ddot{\bar{r}}. \end{array} \quad (39)$$

соответствует взаимная система векторов и дублетов кривой  $\hat{X}$

$$\begin{array}{c} \hat{t}, \dot{\hat{t}}, \ddot{\hat{t}}; \\ k\bar{r} + \bar{t}, -\dot{\bar{r}}, \ddot{\bar{r}}. \end{array} \quad (40)$$

Из (27) имеем

$$\begin{array}{c} \hat{r} = -x\bar{r} - k\bar{t}. \\ 2 \quad 2 \end{array}$$

Сумма дублетов  $\bar{a} = -x\bar{r}$  и  $\bar{b} = -k\bar{t}$ , дублет  $\hat{r}$  находится следующим построением: проводим несобственную касательную плоскость до пересечения с плоскостью  $\bar{a}$  по прямой  $p$ ; другую несобственную плоскость, параллельную плоскости  $\bar{a}$ , проводим до пересечения с плоскостью  $\bar{b}$  по прямой  $g$ . Прямые  $p$  и  $g$  определят плоскость  $\hat{r}$ .

Обозначим точку пересечения оси вектора  $r = \overline{OM} = [\bar{r}\bar{r}]$  с прямой  $p$  буквой  $L$ . Объем  $V$  параллелепипеда, построенного на векторах  $\overline{OL}$ ,  $r^{(1)}$ ,  $r^{(2)}$ , будет равен с точностью до знака обратной величине эквицентроаффинного кручения второго рода или эквицентроаффинному кручению первого рода кривой  $X$ .

Действительно, по (29) имеем

$$x = -[\bar{r}\bar{r}] \frac{\hat{r}}{2} = -\bar{r}\hat{r} = -\frac{\overline{OM}}{\overline{OL}}.$$

Заменим здесь отношение векторов  $\overline{OM}$  и  $\overline{OL}$  отношением объемов эквицентроаффинных параллелепипедов, построенных на векторах  $\overline{OM}$ ,  $r^{(1)}$ ,  $r^{(2)}$  и  $\overline{OL}$ ,  $r^{(1)}$ ,  $r^{(2)}$ . Так как первый из них равен единице, а второй  $V$ , то отсюда следует, что

$$V = -\frac{1}{2}.$$

Но [2]

$$x = -1. \quad (41)$$

Значит,

$$V = -\frac{1}{2} = x.$$

Подобным же образом можно показать, что если  $F$  — точка пересечения оси вектора  $r^{(1)}$  с прямой  $g$ , то объем эквицентроаффинного параллелепипеда, построенного на векторах  $\overline{OF}$ ,  $r^{(2)}$  и  $r$ , равен с точностью до

знака обратной величине эквицентроаффинной кривизны второго рода кривой  $X$ .

3. Для неплоской кривой при  $\kappa = \mp 1$  по формулам (30) и (50) работы [2] находим

$$\begin{matrix} s &= &s, &k &= &k. \\ 2 &&1 &2 &&1 \end{matrix} \quad (42)$$

Из (7) имеем

$$r^{(2)} = \pm r', \quad \bar{r}^{(2)} = \mp \bar{r}'. \quad (43)$$

Так как по (43) и (2)

$$r''\bar{r}'' = 0, \quad (44)$$

то

$$r^{(1)} = \mp r'', \quad \bar{r}^{(1)} = \pm \bar{r}''. \quad (45)$$

Следовательно, с каждой точкой кривой постоянного единичного эквицентроаффинного кручения ассоциируются такие реперы:

векторный репер	$(r, r', r'')$ ,
взаимный ему дублетный	$(\bar{r}, \pm \bar{r}'', \mp \bar{r}')$ ;
дублетный репер	$(\bar{r}, \bar{r}', \bar{r}'')$ ,
взаимный ему векторный	$(r, \mp r'', \pm r')$ .

$$(46)$$

Первая и вторая пара взаимных реперов определяют здесь основные сопровождающие базисы первого и второго рода. Первая и вторая эквицентроаффинные главные нормали совпадают. Заметим, что главные нормали совпадают для всех кривых постоянного ненулевого эквицентроаффинного кручения первого или второго рода.

Выберем теперь из класса кривых, заданных натуральным уравнением  $x = \epsilon (\epsilon = \mp 1)$  кривую  $X$ , для каждой точки  $r(s)$  которой

$$r''' = \epsilon r. \quad (47)$$

Для такой кривой, как мы геометрически показали в п. 1,  $k = 0$ . Кроме того, в соответствии с (41), (42),

$$\begin{matrix} s &= &s; &k &= &k; &\kappa &= &-\epsilon. \\ 2 &&1 &2 &&1 &&2 &&1 \end{matrix} \quad (48)$$

Учитывая (48), найдем по формулам (15) — (17) и (32), (34) основные эквицентроаффинные инварианты первого рода кривых  $\tilde{X}$  и  $\hat{X}$ , взаимных с рассматриваемой кривой  $X$ :

$$\begin{matrix} \tilde{s} &= &s; &\tilde{k} &= &0; &\tilde{\kappa} &= &\epsilon. \\ 1 &&1 &1 &&1 &&1 &&1 \end{matrix} \quad (49)$$

$$\begin{matrix} \hat{s} &= &s; &\hat{k} &= &0; &\hat{\kappa} &= &\epsilon. \\ 1 &&1 &1 &&1 &&1 &&1 \end{matrix} \quad (50)$$

Таким образом, кривая  $X$  постоянного единичного эквицентроаффинного кручения и постоянной нулевой эквицентроаффинной кривизны и взаимные с ней кривые  $\tilde{X}$  и  $\hat{X}$  эквицентроаффинно эквивалентны между собой.

Справедливо и обратное утверждение.

Для произвольных достаточное число раз дифференцируемых функций  $k(s)$  и  $\kappa(s) \neq 0$  существует и притом единственная, с точностью до эквицентроаффинных преобразований в  $E_3$ , кривая, для которой  $k(s)$  является

эквицентроаффинной кривизной первого рода, а  $\kappa(s)$  — эквицентроаффинным кручением первого рода в точке, соответствующей натуральному параметру первого рода  $s$  [2].

Найдем кривую  $X$ , эквицентроаффинно эквивалентную своим взаимным кривым  $\tilde{X}$  и  $\hat{X}$ . Для этого проинтегрируем дифференциональное уравнение (47) при начальном условии

$$(\mathbf{r}_0 \mathbf{r}'_0 \mathbf{r}''_0) = 1.$$

Его характеристическое уравнение  $z^3 - \varepsilon = 0$  имеет корни

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt[3]{\varepsilon}; \\ z_2 &= \sqrt[3]{\varepsilon} \left( -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right); \\ z_3 &= \sqrt[3]{\varepsilon} \left( -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \right), \end{aligned}$$

или

$$z_2 = m + ni; \quad z_3 = m - ni; \quad z_1 = -(z_2 + z_3) = -2m.$$

Одним из решений уравнения (47) тогда будет

$$\mathbf{r} = a e^{-\frac{2ms}{1}} + b e^{\frac{ms}{1}} \cos ns + c e^{\frac{ms}{1}} \sin ns, \quad (51)$$

где  $a, b, c$  — некомпланарные постоянные векторы, для которых

$$\varepsilon (\mathbf{abc}) \frac{3\sqrt{3}}{2} = (\mathbf{r}_0 \mathbf{r}'_0 \mathbf{r}''_0) = 1.$$

Положим

$$\mathbf{e}_1 = \varepsilon \frac{3\sqrt{3}}{2} \mathbf{a}; \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{b}; \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{c}.$$

Принимая оси векторов  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  и  $\mathbf{e}_3$  за оси  $x, y, z$  эквицентроаффинной системы координат, получаем уравнения кривой  $X$ , отнесенной к этим осям:

$$\begin{aligned} x &= \frac{2\sqrt{3}}{9\varepsilon} e^{-\frac{2ms}{1}}; \\ y &= e^{\frac{ms}{1}} \cos ns; \\ z &= e^{\frac{ms}{1}} \sin ns. \end{aligned} \quad (52)$$

Зависимость между координатами выражается формулой

$$x(y^2 + z^2) = \frac{2\sqrt{3}}{9\varepsilon}, \quad (53)$$

т. е. кривая  $X$  расположена на поверхности (53).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. П. Мокляк. Об эквицентроаффинных инвариантах пространственных кривых. Укр. геометр. сб., вып. 2. Изд-во ХГУ, Харьков, 1966, 70—76.
2. А. П. Мокляк. К эквицентроаффинной теории неплоских кривых в  $E_3$ . Укр. геометр. сб., вып. 4. Изд-во ХГУ, Харьков, 1967, 50—56.
3. E. Salkowski. Affine Differentialgeometrie. Berlin und Leipzig (1934).
4. Я. С. Дубнов. Основы векторного исчисления, т. 2, Приложение. Гостехиздат. М.—Л., 1952.

---

## К МЕТРИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ НЕГОЛОНОМНЫХ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ В $n$ -МЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

*M. P. Роговой* (Харьков)

Метрической теорией неголономных поверхностей в трехмерном пространстве занимались А. Фосс, Р. Лилиенталь, Роджерс, Г. Дарбу, Д. М. Синцов, Я. П. Бланк, Е. Бомпиани и др. Исследования в этой области проводились С. С. Бюшгенсом, в связи с теорией векторного поля, и Н. И. Кованцовым, в связи с теорией комплексов.

Изучению метрических свойств неголономных многообразий в многомерных пространствах ряд работ посвятили Д. М. Синцов, Г. Врэнчану, Я. Схутен, В. В. Вагнер.

В настоящей статье излагаются некоторые вопросы теории кривизны и вводится понятие кручения неголономной гиперповерхности в  $n$ -мерном пространстве. Изучаются свойства многообразия нормалей неголономной гиперповерхности и линейчатых поверхностей этого многообразия, отвечающих линиям кривизны 1-го и 2-го рода.

### 1. СИСТЕМА «ТОЧКА—ГИПЕРПЛОСКОСТЬ» И НЕГОЛОНОМНЫЕ ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ. СОПРОВОЖДАЮЩИЙ РЕПЕР

Понятие неголономной гиперповерхности тесно связано с понятием системы «точка—гиперплоскость».

Пусть в  $n$ -мерном евклидовом пространстве каким-то образом введена криволинейная система координат и каждой точке  $A$  ( $u^1, u^2, \dots, u^n$ ) поставлена в соответствие по определенному закону инцидентная ей гиперплоскость  $\alpha$ . Выберем в этой гиперплоскости  $n$  единичных взаимно-ортогональных векторов  $I_1, I_2, \dots, I_{n-1}$  и присоединим к ним единичный вектор  $J_n$ , ортогональный всем этим векторам.

Репер  $AI_1I_2, \dots, I_n$  — сопровождающий репер рассматриваемой системы «точка—гиперплоскость».

Через  $\omega^i, \omega_i^k$ , ( $i, k = 1, 2, \dots, n$ ) обозначим компоненты бесконечно малого перемещения сопровождающего репера: это линейные дифференциальные формы от  $du^1, du^2, \dots, du^n$  с коэффициентами, зависящими от координат  $u^1, u^2, \dots, u^n$  точки  $A$ :

$$\begin{aligned} dA &= \omega^i I_i, \\ dI_i &= \omega_i^k I_k; \quad (i, k = 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \tag{1}$$

Из единичности и взаимной ортогональности векторов  $I_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) следует

$$\omega_i^k = -\omega^i_k, \quad (i, k = 1, 2, \dots, n), \tag{2}$$

и, кроме того, формы  $\omega^i, \omega_i^k$  должны удовлетворять уравнениям структуры евклидова пространства:

$$\begin{aligned} D\omega^i &= [\omega^i \omega_j^l], \\ D\omega_i^k &= [\omega_i^l \omega_j^k]; \quad (i, j, k = 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь символ  $D$  означает внешний дифференциал, а квадратные скобки — внешние произведения форм [6].

Для бесконечно малых перемещений в гиперплоскости  $\alpha$

$$\omega^n = 0. \quad (4)$$

Примем  $n$  линейно-независимых форм  $\omega^i$  за базисные формы и выразим все формы  $\omega_i^k$  через базисные:

$$\omega_i^k = \Gamma_{ij}^k \omega^j; \quad (i, j, k = 1, 2, \dots, n). \quad (5)$$

Условие полной интегрируемости уравнения (4) записывается так:

$$[D\omega^n \omega^n] = 0, \quad (6)$$

или, если воспользоваться уравнениями структуры (3) и формулами (5),

$$\Gamma_{ij}^n = \Gamma_{ji}^n, \quad (i, j = 1, 2, \dots, n-1; i \neq j). \quad (7)$$

Если условия интегрируемости (7) выполнены, уравнение (4) определяет гиперповерхность, для которой гиперплоскость  $\alpha$  — касательная в точке  $A$ . Гиперплоскости системы огибают в этом случае однопараметрическое семейство гиперповерхностей [3].

Если условие интегрируемости (7) не выполнено, совокупность интегральных кривых уравнения (4), проходящих через точку  $A$ , не расположена на гиперповерхности. Эта совокупность интегральных кривых, имеющих в точке  $A$  общую касательную гиперплоскость  $\alpha$ , называется неголономной гиперповерхностью. В этом случае уравнение (4) определяет в каждой точке  $A$  пространства неголономную гиперповерхность, а гиперплоскость  $\alpha$  системы, инцидентная точке  $A$ , является касательной гиперплоскостью к гиперповерхности в точке  $A$  [3].

## 2. ГЛАВНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ. КАНОНИЧЕСКИЙ РЕПЕР

Определим основные дифференциальные формы неголономной гиперповерхности. Первая дифференциальная форма выражает квадрат дифференциала дуги неголономной гиперповерхности ( $\omega^n = 0$ )

$$I = ds^2 = dA^2 = \sum_{i=1}^{n-1} (\omega^i)^2. \quad (8)$$

Вторая дифференциальная форма определяется как скалярное произведение вектора

$$d^2A = d\omega^i I_i + \omega^i \omega_k^k I_k, \quad (i = 1, 2, \dots, n-1; k = 1, 2, \dots, n), \quad (9)$$

на вектор  $I_n$

$$\Pi = (d^2AI_n) = \Gamma_{ij}^n \omega^i \omega^j, \quad (i, j = 1, 2, \dots, n-1); \quad (10)$$

она вводится обычным путем при определении кривизны кривой линии на неголономной гиперповерхности.

Кривизна нормального сечения неголономной гиперповерхности ( $\omega^n = 0$ ) в точке  $A$

$$k = -\frac{\Pi}{I} = -\frac{\Gamma_{ij}^n \omega^i \omega^j}{\sum (\omega^i)^2}, \quad (i, j = 1, 2, \dots, n-1), \quad (11)$$

зависит от направления  $\omega^1: \omega^2: \dots: \omega^{n-1}$  на гиперповерхности.

Определим главные направления — направления стационарных значений нормальных кривизн неголономной гиперповерхности [3]. С этой целью перепишем (11) в виде

$$\Gamma_{ij}^n \omega^i \omega^j + k \sum (\omega^i)^2 = 0, \quad (i, j = 1, 2, \dots, n-1). \quad (12)$$

Дифференцируя (12) по  $\omega^i$ , ( $i = 1, 2, \dots, n - 1$ ), полагая  $\frac{\partial k}{\partial \omega^i} = 0$ , получаем однородную систему линейных уравнений:

$$(\Gamma_{ij}^n + \Gamma_{ji}^n) \omega^j + 2k\omega^i = 0, \quad (i, j = 1, 2, \dots, n - 1). \quad (13)$$

Для того чтобы эта система имела ненулевое решение, потребуем обращение в нуль определителя

$$\left| \frac{1}{2} (\Gamma_{ij}^n + \Gamma_{ji}^n) + \delta_{ij}^i k \right|_{i,j=1}^{n-1} = 0, \quad (14)$$

где  $\delta_{ij}^i$  — символ Кронекера.

Уравнение (14)  $n - 1$ -й степени относительно  $k$ ; все его корни вещественны как собственные значения (с противоположным знаком) симметрической матрицы

$$\Gamma^{(1)} = \left\| \frac{1}{2} (\Gamma_{ij}^n + \Gamma_{ji}^n) \right\|_{i,j=1}^{n-1}. \quad (15)$$

Каждому корню  $k_i$ , ( $i = 1, 2, \dots, n - 1$ ) уравнения (14) отвечает направление  $\omega^1: \omega^2: \dots: \omega^{n-1}$ , определяемое системой уравнений (13). Если все корни  $k_i$  различны, имеем  $n - 1$  направлений; это главные направления неголономной гиперповерхности в точке  $A$  [3]. Как собственные направления симметрической матрицы (15), главные направления неголономной гиперповерхности взаимно-ортогональны. Выберем векторы  $I_1, I_2, \dots, I_{n-1}$  сопровождающего репера на главных направлениях, тогда тотчас следует выполнение условий

$$\Gamma_{ij}^n + \Gamma_{ji}^n = 0; \quad (i, j = 1, 2, \dots, n - 1; i \neq j). \quad (16)$$

Построенный таким образом репер и будет каноническим репером неголономной гиперповерхности.

Для канонического репера условия полной интегрируемости (7) уравнения (4) приобретают вид

$$\Gamma_{ij}^n = 0, \quad (i, j = 1, 2, \dots, n - 1; i \neq j). \quad (17)$$

Главные кривизны (экстремальные значения нормальных кривизн), как следует из (14),

$$k_i = -\Gamma_{ii}^n, \quad (i = 1, 2, \dots, n - 1), \quad (18)$$

а кривизна произвольного нормального сечения согласно формуле (11),

$$k = -\frac{\sum_{i=1}^{n-1} \Gamma_{ii}^n (\omega^i)^2}{\sum_{i=1}^{n-1} (\omega^i)^2}. \quad (19)$$

Из формулы (19) следует распространение на неголономную гиперповерхность известной формулы Эйлера [3]:

$$k = \sum_{i=1}^{n-1} k_i \cos^2 \varphi_i, \quad (20)$$

где  $\varphi_i$  — угол между касательной к рассматриваемому нормальному сечению и  $i$ -м главным направлением.

### 3. ЛИНИИ КРИВИЗНЫ 1-ГО И 2-ГО РОДА

На неголономной гиперповерхности различают два вида линий кривизны [3].

Линии кривизны 1-го рода — это линии на неголономной гиперповерхности, огибаемые главными направлениями. Их уравнения в каноническом репере:

$$\omega^1 = \omega^2 = \dots = \omega^{j-1} = \omega^{j+1} = \dots = \omega^n = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, n-1). \quad (21)$$

Линии кривизны 2-го рода — это линии на неголономной гиперповерхности, вдоль которых нормаль неголономной гиперповерхности в бесконечно близкой к  $A$  точке  $A^*$  пересекает нормаль в точке  $A$ .

Из того факта, что в направлении линий кривизны 2-го рода векторы  $I_n$  и  $I_n + dI_n$  пересекаются, нетрудно установить, что векторы  $dA$  и  $dI_n$  коллинеарны:

$$dI_n - \lambda dA = 0, \quad (22)$$

или, воспользовавшись формулами (1), (2) и (5), приходим к системе уравнений:

$$\omega^n = 0, \quad (\Gamma_{ij}^n + \delta_j^i \lambda) \omega^j = 0, \quad (i, j = 1, 2, \dots, n-1). \quad (23)$$

Для существования ненулевых решений этой однородной системы линейных уравнений ее определитель должен обратиться в нуль:

$$|\Gamma_{ij}^n + \delta_j^i \lambda|_{i,j=1}^{n-1} = 0. \quad (24)$$

Каждому из  $n-1$  корней уравнения (24) отвечает решение  $\omega^1; \omega^2; \dots; \omega^{n-1}$  системы (23), т. е. через точку  $A$  неголономной гиперповерхности проходит  $n-1$  линий кривизны 2-го рода.

Матрица

$$\Gamma^{(2)} = \{ \Gamma_{ij}^n \}_{i,j=1}^{n-1} \quad (25)$$

псевдосимметрична, так как

$$\Gamma_{ii}^n \neq 0; \quad \Gamma_{ij}^n = -\Gamma_{ji}^n, \quad (i, j = 1, 2, \dots, n-1; i \neq j);$$

корни уравнения (24) могут быть комплексными и, поэтому, в отличие от линий кривизны 1-го рода, линии кривизны 2-го рода могут быть мнимыми.

Выясним геометрический смысл величины  $\lambda$  и покажем, что она совпадает с нормальной кривизной неголономной гиперповерхности в направлении линий кривизны 2-го рода. В самом деле, для этого достаточно умножить (23) на  $\omega^i$ , просуммировать по индексу  $i$

$$\Gamma_{ij}^n \omega^i + \lambda \sum (\omega^i)^2 = 0, \quad (i, j = 1, 2, \dots, n-1), \quad (26)$$

и сравнить (26) с (11); отсюда заключаем, что  $\lambda = k$ .

Таким образом, соответственно двум видам линий кривизны, неголономная гиперповерхность обладает двумя видами главных кривизн. Главные кривизны 1-го рода  $K_i^{(1)}$ , ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ), отвечающие линиям кривизны 1-го рода, вычисляются по формулам (18). Главные кривизны 2-го рода  $k_i^{(2)}$ , ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ), отвечающие линиям кривизны 2-го рода, это корни уравнения (24).

Радиусы кривизны  $R_i^{(1)}$ ,  $R_i^{(2)}$  и центры кривизны  $C_i^{(1)}$ ,  $C_i^{(2)}$  нормальных сечений неголономной гиперповерхности в направлениях линий кривизны

1-го и 2-го рода, будем называть радиусами и центрами кривизны соответственно 1-го и 2-го рода.

Для голономной гиперповерхности ( $\Gamma_{ij}^n = 0, i \neq j$ ) линии кривизны, радиусы и центры кривизны 1-го и 2-го рода совпадают.

#### 4. ПОЛНАЯ, СРЕДНЯЯ И ГАУССОВА КРИВИЗНА НЕГОЛОННОМНОЙ ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ

Понятия полной и средней кривизны для неголономной гиперповерхности также расщепляются [3].

Полная кривизна 1-го рода (см. формулу 18) —

$$k^{(1)} = k_1^{(1)} k_2^{(1)} \dots k_{n-1}^{(1)} = (-1)^{n-1} |\Gamma_{11}^n \Gamma_{22}^n \dots \Gamma_{n-1, n-1}^n|; \quad (27)$$

средняя кривизна 1-го рода —

$$H^{(1)} = \frac{k_1^{(1)} + k_2^{(1)} + \dots + k_{n-1}^{(1)}}{n-1} = - \frac{\Gamma_{11}^n + \Gamma_{22}^n + \dots + \Gamma_{n-1, n-1}^n}{n-1}; \quad (28)$$

Полная кривизна 2-го рода (см. уравнение (24)) —

$$k^{(2)} = k_1^{(2)} k_2^{(2)} \dots k_{n-1}^{(2)} = (-1)^{n-1} |\Gamma_{ij}^n|_{i=1}^{n-1}; \quad (29)$$

средняя кривизна 2-го рода

$$H^{(2)} = \frac{k_1^{(2)} + k_2^{(2)} + \dots + k_{n-1}^{(2)}}{n-1} = - \frac{\Gamma_{11}^n + \Gamma_{22}^n + \dots + \Gamma_{n-1, n-1}^n}{n-1}. \quad (30)$$

Средние кривизны 1-го и 2-го рода неголономной гиперповерхности совпадают:  $H^{(1)} = H^{(2)} = H$ .

Для голономной гиперповерхности ( $\Gamma_{ij}^n = 0, i \neq j$ ) полные кривизны 1-го и 2-го рода совпадают. Обратное утверждение справедливо только для  $n = 3$  [1]; для  $n > 3$  из равенства  $K^{(1)} = K^{(2)}$  в общем случае не следует голономность гиперповерхности. Представляет интерес выяснить, при каких условиях это утверждение справедливо. Так, например, в четырехмерном пространстве при условии, что главные кривизны 1-го рода одинакового знака, из равенства полных кривизн 1-го и 2-го рода, как нетрудно проверить, следует голономность гиперповерхности.

Гауссовой кривизной  $K$  неголономной гиперповерхности называется отношение элемента площади  $d\sigma$  ее сферического отображения к соответствующему элементу площади  $dS$  самой гиперповерхности [1]. Из равенств (1) находим

$$dS = [\omega^1 \omega^2 \dots \omega^{n-1}], \\ d\sigma = (-1)^{n-1} [\omega_1^n \omega_2^n \dots \omega_{n-1}^n] = (-1)^{n-1} |\Gamma_{ij}^n|_{i,j=1}^{n-1} [\omega^1 \omega^2 \dots \omega^{n-1}], \quad (30)$$

откуда

$$K = \frac{d\sigma}{dS} = (-1)^{n-1} |\Gamma_{ij}^n|_{i,j=1}^{n-1}. \quad (31)$$

Из (31) и (29) следует, что

$$K = K^{(2)}, \quad (32)$$

т. е. гауссова кривизна неголономной гиперповерхности равна ее полной кривизне 2-го рода. Этот результат для неголономной поверхности в трехмерном пространстве был получен еще в 1928 г. Я. П. Бланком [2].

### 5. СТРОЕНИЕ НЕГОЛОННОМНОЙ ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ В ОКРЕСТНОСТИ 2-ГО ПОРЯДКА. КРУЧЕНИЕ

Для бесконечно малого перемещения из точки  $A$  вдоль какой-нибудь кривой неголономной гиперповерхности ( $\omega^n = 0$ ), принимая во внимание (16),

$$d^2A = (d\omega^i + \Gamma_{kj}^i \omega^k \omega^j) I_i + \Gamma_{ii}^n (\omega^i)^2 I_n, \quad (i, j, k = 1, 2, \dots, n-1). \quad (33)$$

Формула (33) не содержит величин  $\Gamma_{ij}^n$ , ( $i, j = 1, 2, \dots, n-1; i \neq j$ ), определяющих условие полной интегрируемости уравнения  $\omega^n = 0$ . Это означает, что окрестности 2-го порядка интегральных кривых уравнения  $\omega^n = 0$  не зависят от того, выполняются или не выполняются условия полной интегрируемости данного уравнения. Таким образом, кривые неголономной гиперповерхности в окрестности 2-го порядка расположены на голономной гиперповерхности.

Для неголономной поверхности в трехмерном пространстве этот результат был получен Бомпиани [5].

Голономную гиперповерхность, содержащую окрестности 2-го порядка всех кривых неголономной гиперповерхности, назовем соприкасающейся гиперповерхностью [4].

Расщепление свойств неголономной гиперповерхности происходит, однако, уже в ее окрестности 2-го порядка, в связи с тем, что в бесконечно близкой к  $A$  точке  $A^*$  касательные гиперплоскости к неголономной и соприкасающейся гиперповерхностям не совпадают. В самом деле, для неголономной гиперповерхности

$$dI_n = -\Gamma_{ij}^n \omega^j I_i, \quad (i, j = 1, 2, \dots, n-1); \quad (34)$$

для соприкасающейся гиперповерхности ( $\Gamma_{ij}^n = 0, i \neq j$ )

$$d^*I_n = -\Gamma_{ii}^n \omega^i, \quad (i = 1, 2, \dots, n-1). \quad (35)$$

Угол  $d\varphi$  между касательными гиперплоскостями к неголономной гиперповерхности и к соприкасающейся гиперповерхности в точке  $A^*$  назовем углом смежности касательных гиперплоскостей. Квадрат отношения этого угла к элементу дуги  $ds = AA^*$  назовем кручением  $\kappa$  неголономной гиперповерхности в направлении  $AA^*$ :

$$\kappa = \left( \frac{d\varphi}{ds} \right)^2. \quad (36)$$

Угол  $d\varphi$  — это угол между векторами  $I_n + dI_n$  и  $I_n + d^*I_n$ ; с точностью до бесконечно малых высшего порядка

$$d\varphi^2 = \sum_{i=1}^{n-1} (\Gamma_{ij}^n \omega^j)^2, \quad (j = 1, 2, \dots, n-1; i \neq j), \quad (37)$$

и, следовательно,

$$\kappa = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} (\Gamma_{ij}^n \omega^j)^2}{\sum_{i=1}^{n-1} (\omega^i)^2}, \quad (j = 1, 2, \dots, n-1; i \neq j). \quad (38)$$

Для голономной гиперповерхности ( $\Gamma_{ij}^n = 0, i \neq j$ ) кручение  $\kappa = 0$ \*\*

\* Формула (38) может быть представлена в виде

$$\kappa = \sum_{i=1}^{n-1} \Gamma_{ik}^n \Gamma_{ij}^{n,k} \zeta^j, \quad (k, j = 1, 2, \dots, n-1; i \neq k, i \neq j),$$

Как следует из формулы (38), кручение  $\chi$  зависит от направления на неголономной гиперповерхности. Определим стационарные значения и направления, им отвечающие. С этой целью перепишем формулу (38) в виде

$$\sum_{i=1}^{n-1} (\Gamma_{ij}^n \omega^j)^2 - \chi \sum_{i=1}^{n-1} (\omega^i)^2 = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, n-1; i \neq j); \quad (39)$$

дифференцируя (39) по  $\omega^k$ , полагая  $\frac{\partial \chi}{\partial \omega^k} = 0$ , получаем систему уравнений

$$(\Gamma_{ik}^n \Gamma_{ij}^n - \delta_j^k \chi) \omega^j = 0, \quad (i, k, j = 1, 2, \dots, n-1; i \neq k, i \neq j). \quad (40)$$

Условие совместности этой однородной системы линейных уравнений

$$|\Gamma_{ik}^n \Gamma_{ij}^n - \delta_j^k \chi|_{i, j, k=1}^{n-1} = 0, \quad (i \neq k, i \neq j). \quad (41)$$

Корни  $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_{n-1}$  уравнения (41) вещественны, как собственные значения симметрической матрицы

$$\Gamma = \|\Gamma_{ik}^n \Gamma_{ij}^n\|_{i, j, k=1}^{n-1}, \quad (i \neq k, i \neq j). \quad (42)$$

Обозначим через  $\gamma$  кососимметрическую матрицу

$$\gamma = \|(1 - \delta_j^k) \Gamma_{jk}^n\|_{j, k=1}^{n-1} \quad (43)$$

(в силу (16)  $\Gamma_{jk}^n = -\Gamma_{kj}^n$ ); тогда, очевидно,

$$\Gamma = -\|\Gamma_{ik}^n \Gamma_{ji}^n\|_{i, j, k=1}^{n-1} = -\gamma^2, \quad (i \neq k, i \neq j) \quad (44)$$

или

$$\Gamma = (\gamma \sqrt{-1})^2. \quad (45)$$

Из (45) следует, что собственные значения матрицы  $\Gamma$  равны квадратам собственных значений матрицы  $\gamma \sqrt{-1}$ ; последние определяются из уравнения

$$|(1 - \delta_j^k) \Gamma_{jk}^n \sqrt{-1} - \mu|_{j, k=1}^{n-1} = 0 \quad (46)$$

или

$$|(1 - \delta_j^k) \Gamma_{jk}^n + \mu \sqrt{-1}|_{j, k=1}^{n-1} = 0. \quad (47)$$

Собственные значения кососимметрической матрицы  $\gamma$  чисто мнимые, поэтому корни  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-1}$  уравнения (47) вещественны. Кроме того, так как значение элементарной симметрической функции  $r$ -й степени от собственных значений матрицы равно сумме ее главных миноров  $r$ -го порядка, а главные миноры нечетного порядка кососимметрической матрицы равны нулю, то коэффициенты при степенях  $\mu^{n-2}, \mu^{n-4}, \dots$  в уравнении (46) равны нулю.

Если  $n$  нечетно, уравнение (46) содержит только четные степени  $\mu$  и его корни разделяются на  $m = \frac{n-1}{2}$  равных по абсолютному значению и противоположных по знаку пар.

Если  $n$  четно, свободный член уравнения (46) равен нулю,

$$|(1 - \delta_j^k) \Gamma_{jk}^n|_{j, k=1}^{n-1} = 0, \quad (48)$$

где  $\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^{n-1}$  — компоненты единичного вектора, определяющего направление на гиперповерхности. Тензор

$$\chi_{kj} = \sum_{i=1}^{n-1} \Gamma_{ik}^n \Gamma_{ij}^n, \quad (k, j = 1, 2, \dots, n-1; i \neq k, i \neq j),$$

назовем тензором кручения неголономной гиперповерхности. Равенство нулю этого тензора является необходимым и достаточным условием голономности гиперповерхности.

как кососимметрический определитель нечетного порядка. Один из корней уравнения (46) равен нулю, а остальные  $n - 2$  корней разделяются на такие же пары, что и выше.

Пусть нумерация корней уравнения (47) такова, что

$$\mu_t = -\mu_{n-t}, \quad (49)$$

где  $t$  пробегает значения от 1 до  $m$ ;  $m = \frac{n-1}{2}$ , когда  $n$  нечетно и  $m = \frac{n}{2}$ , когда  $n$  четно.

Вернемся к уравнению (41). Его корни, как указано выше, равны квадратам корней уравнения (46); поэтому, оно в общем случае имеет  $m$  различных неотрицательных корней  $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_m$ . При этом если  $n$  нечетно, все его корни положительные и двукратные; если же  $n$  четно, один из корней, например  $\chi_m$ , равен нулю и простой.

Каждому корню уравнения (41), кроме нулевого, как корню второй степени кратности, отвечает плоский пучок направлений, определяемый системой (40). И так как матрица этой системы симметрическая, то двумерные плоскости этих пучков взаимно-ортогональны.

Итак, для случая нечетного  $n$  через данную точку  $A$  неголономной гиперповерхности проходит  $m = \frac{n-1}{2}$  взаимно-ортогональных двумерных плоскостей, обладающих тем свойством, что для любого направления, выходящего из точки  $A$  и лежащего в данной двумерной плоскости, кручение неголономной гиперповерхности есть величина постоянная; она равна значению соответствующего корня уравнения (41). Для случая четного  $n$  в точке  $A$  имеется  $m = \frac{n}{2} - 1$  таких двумерных плоскостей и одно направление с нулевым кручением неголономной гиперповерхности, ортогональное всем этим плоскостям.

Для  $n = 3$ , т. е. для неголономной поверхности в трехмерном пространстве, двумерная плоскость, обладающая указанным свойством, одна — это касательная плоскость к неголономной поверхности в точке  $A$ . Таким образом, кручение  $\kappa$  неголономной поверхности в трехмерном пространстве в данной точке  $A$  не зависит от направления на поверхности и, как легко подсчитать, равно  $(\Gamma_{12}^3)^2$ . Кручение голономной поверхности, естественно, равно нулю, ибо  $\Gamma_{12}^3 = 0$ .

Если учесть (32), то известный вывод Д. М. Синцова [1] о том, что разность между гауссовой и полной кривизнами неголономной поверхности в трехмерном пространстве равна квадрату левой части условия интегрируемости ее уравнения, получит следующую геометрическую интерпретацию. Кручение неголономной поверхности равно разности между ее полными кривизнами 2-го и 1-го рода:

$$\kappa = K^{(2)} - K^{(1)}. \quad (50)$$

## 6. ПОЛНОЕ И СРЕДНЕЕ КРУЧЕНИЕ НЕГОЛОНОМНОЙ ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ

Полным кручением неголономной гиперповерхности, по аналогии с полной кривизной, назовем произведение ее главных кручений

$$\kappa = \chi_1 \chi_2 \dots \chi_m. \quad (51)$$

Из (46) и (49), поскольку  $\mu_t^2 = \chi_t$ , ( $t = 1, 2, \dots, m$ ), следует, что полное кручение

$$\kappa = |(1 - \delta_j^k) \Gamma_{jk}^n|_{j,k=1}^{n-1}. \quad (52)$$

Средним кручением неголономной гиперповерхности назовем среднее арифметическое ее главных кручений

$$h = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_m}{m}. \quad (53)$$

Из уравнения (41) следует, что среднее кручение неголономной гиперповерхности

$$h = \frac{1}{m} \sum_{i, j=1}^{n-1} (\Gamma_{ij}^n)^2, \quad (i \neq j). \quad (54)$$

Рассмотрим матрицы, связанные с кривизной и кручением неголономной гиперповерхности.

Диагональная матрица

$$\|k^{(1)}\| = (-1)^{n-1} \|\Gamma_{11}^n, \Gamma_{22}^n, \dots, \Gamma_{n-1, n-1}^n\|; \quad (55)$$

ее собственные значения определяют главные кривизны 1-го рода, а ее определитель равен полной кривизне 1-го рода неголономной гиперповерхности.

Матрица

$$\|k^{(2)}\| = (-1)^{n-1} \|\Gamma_{ij}^n\|_{i, j=1}^{n-1}; \quad (56)$$

ее собственные значения определяют главные кривизны 2-го рода, а ее определитель равен полной кривизне 2-го рода неголономной гиперповерхности.

Матрица

$$\|x\| = \|(1 - \delta_i^j) \Gamma_{ij}^n\|_{i, j=1}^{n-1}; \quad (57)$$

квадраты ее собственных значений определяют главные кручения, а ее определитель равен кручению неголономной гиперповерхности.

Нетрудно усмотреть, что имеет место следующее матричное равенство:

$$(-1)^{n-1} \|x\| = \|k^{(2)}\| - \|k^{(1)}\|. \quad (58)$$

Из (58) следует, что для голономности гиперповерхности необходимо и достаточно, чтобы

$$\|k^{(2)}\| = \|k^{(1)}\|. \quad (59)$$

Для случая  $n = 3$ , т. е. для неголономной поверхности в трехмерном пространстве, равенство (58) переходит в равенство (50).

Отметим еще, что если среднее кручение (54) равно нулю, гиперповерхность голономная.

## 7. ИНДИКАТРИСА КРУЧЕНИЙ

В точке  $A$  неголономной гиперповерхности может быть построена индикатриса кручений. Это геометрическое место точек  $M$ , для которых отрезок  $AM = \frac{1}{V_x}$ ;  $x$  — кручение гиперповерхности в направлении  $AM$ .

Уравнение индикатрисы кручений нетрудно получить из уравнения (38). Перепишем это уравнение в виде

$$\sum_{i=1}^{n-1} \Gamma_{ij}^n \left( \frac{\omega^j}{ds} \right)^2 = x, \quad (j = 1, 2, \dots, n-1; i \neq j). \quad (60)$$

Далее, вектор

$$M = \frac{1}{V_x} \left( \frac{\omega^j}{ds} \right) I_j, \quad (j = 1, 2, \dots, n-1),$$

откуда координаты точки  $M$  относительно канонического репера

$$x^j = \frac{1}{\sqrt{\omega}} \cdot \frac{\omega^j}{ds}, \quad (j = 1, 2, \dots, n-1). \quad (61)$$

Из (60) и (61) получаем уравнение индикатрисы:

$$\sum_{i=1}^{n-1} (\Gamma_{ij}^n x^i)^2 = 1, \quad (j = 1, 2, \dots, n-1; i \neq j). \quad (62)$$

Индикатриса кручений — это квадрика  $n-2$  измерений, лежащая в касательной гиперплоскости неголономной гиперповерхности.

Пусть  $e_1, e_2, \dots, e_{n-1}$  — ортонормированный базис из собственных векторов матрицы (42). В системе координат, определяемой этим базисом, уравнение индикатрисы кручений приобретает вид

$$\sum_{t=1}^m x_t [(y^t)^2 + (y^{n-t})^2] = 1, \quad (63)$$

$$\left( m = \frac{n-1}{2}, \text{ когда } n \text{ нечетно, и } m = \frac{n}{2}, \text{ когда } n \text{ четно} \right).$$

Обозначим через  $\varphi_t$  угол между вектором  $M$  и вектором  $e_i$ , ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ); тогда

$$y^t = \frac{\cos \varphi_t}{\sqrt{\omega}}, \quad (i = 1, 2, \dots, n-1),$$

и для кручений из (63) получаем формулу, аналогичную формуле Эйлера для нормальных кривизн гиперповерхности:

$$x = \sum_{t=1}^m x_t (\cos^2 \varphi_t + \cos^2 \varphi_{n-t}). \quad (64)$$

## 8. ЛИНЕЙЧАТОЕ МНОГООБРАЗИЕ, СВЯЗАННОЕ С НЕГОЛОННОМНОЙ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЬЮ

Рассмотрим линейчатое многообразие нормалей неголономной гиперповерхности; назовем его неголономной конгруэнцией. Произвольной кривой на гиперповерхности, проходящей через точку  $A$ , отвечает линейчатая поверхность, принадлежащая неголономной конгруэнции; ее уравнение:

$$M = A + t I_n. \quad (65)$$

Касательная поверхность к этой линейчатой поверхности определяется вектором  $I_n$  и вектором

$$dM = (\omega^i + t \omega_i^n) I_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n-1), \quad (66)$$

лежащим в касательной гиперплоскости  $\alpha$  неголономной гиперповерхности.

Ищем фокальные точки неголономной конгруэнции. Фокальная точка — это такая точка  $M$  на нормали  $I_n$ , где вектор  $dM$  при изменении параметров  $\omega^1 : \omega^2 : \dots : \omega^{n-1}$  луча, принадлежащего конгруэнции, лежит в одной и той же  $(n-2)$ -мерной плоскости. Коэффициенты при векторах  $I_i$  (66) в фокальной точке должны быть линейно зависимыми и, следовательно, их внешнее произведение должно обратиться в нуль:

$$[\omega^1 + t \omega_1^n, \omega^2 + t \omega_2^n, \dots, \omega^{n-1} + t \omega_{n-1}^n] = 0. \quad (67)$$

Из (67), положив  $\frac{1}{t} = \lambda$ , получаем для фокальных точек следующее условие:

$$|\Gamma_{ii}^n + \delta_i \lambda|_{i=1}^{n-1} = 0. \quad (68)$$

Уравнение (68) совпадает с уравнением (24) для главных кривизн 2-го рода ( $\lambda = k^{(2)}$ ). Следовательно, фокальные точки неголономной конгруэнции совпадают с ее центрами кривизны 2-го рода. Этот вывод для неголономной конгруэнции прямых в трехмерном пространстве принадлежит Н. И. Кованцову [7].

Итак, в каждом центре кривизны 2-го рода  $C_j^{(2)}$  касательные плоскости к линейчатым поверхностям, принадлежащим неголономной конгруэнции, пересекают касательную гиперплоскость  $\alpha$  неголономной гиперповерхности по прямым, лежащим в одной  $(n-2)$ -мерной плоскости  $\beta_j$ .

Можно доказать, что  $(n-2)$ -мерная плоскость  $\beta_j$  — это плоскость, определяемая касательными к  $n-2$  линиям кривизны 2-го рода, кроме  $j$ -ой. В самом деле, касательные к линиям кривизны 2-го рода определяются векторами

$$d_i A = \omega^i I_i, \quad (i, j = 1, 2, \dots, n-1), \quad (69)$$

где  $\omega^i$  — ненулевое решение однородной системы (23) при  $\lambda = k_j^{(2)}$ :

$$(\Gamma_{kk}^n + \delta_{ij}^k k_j^{(2)}) \omega^i = 0, \quad (i, k = 1, 2, \dots, n-1). \quad (70)$$

Очевидно, достаточно убедиться в том, что если в системе (69) вектор  $d_i A$  заменить вектором (66), положив  $t = \frac{1}{k_j^{(2)}}$ , получим систему линейно зависимых векторов, т. е. достаточно убедиться в том, что определитель

$$\begin{vmatrix} \omega^1 & \dots & \dots & \omega^n & \dots & \dots & \omega^{n-1} \\ 1 & & & 1 & & & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega^1 & \dots & \dots & \omega^n & \dots & \dots & \omega^{n-1} \\ j-1 & & & j-1 & & & j-1 \\ \omega_1^n + k_j^2 \omega^1 & \dots & \omega_2^n + k_j^{(2)} \omega^2 & \dots & \omega_{n-1}^n + k_j^{(2)} \omega^{n-1} & & \\ \omega^1 & \dots & \dots & \omega^n & \dots & \dots & \omega^{n-1} \\ j+1 & & & j+1 & & & j+1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega^1 & \dots & \dots & \omega^n & \dots & \dots & \omega^{n-1} \\ n-1 & & & n-1 & & & n-1 \end{vmatrix} \quad (71)$$

равен нулю. Это и следует после некоторых преобразований определителя (71), если учесть, что  $\omega^i$  — миноры матрицы системы (70) — представляют собой для данного  $i$  и различных  $j$  один и тот же полином  $P_i(\lambda)$  при  $\lambda = \lambda_j$ , и использовать свойства корней уравнения (68).

Для неголономной поверхности в трехмерном пространстве линейчатые поверхности, принадлежащие неголономной конгруэнции нормалей, имеют в центре кривизны 2-го рода общую касательную плоскость и эта плоскость проходит через касательную к другой линии кривизны 2-го рода.

Рассмотрим линейчатые поверхности неголономной конгруэнции, отвечающие линиям кривизны 1-го и 2-го рода неголономной гиперповерхности.

Для произвольной линейчатой поверхности, принадлежащей неголономной конгруэнции, стрикционная точка определяется по формуле

$$t = \frac{(dA dI_n)}{dI_n^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} \omega^i \omega_i^n}{\sum_{i=1}^{n-1} (\omega_i^n)^2}; \quad (72)$$

параметр распределения —

$$p = \frac{\sqrt{dA^2 dI_n^2 - (dA dI_n)^2}}{dI_n^2} = \frac{\sqrt{\sum_{i,k=2}^{n-1} (\omega_i^n \omega_k^n - \omega_k^n \omega_i^n)^2}}{\sum_{i=1}^{n-1} (\omega_i^n)^2}; \quad (73)$$

касательная плоскость определяется вектором (66), который заменим для удобства вектором

$$T = \frac{dM}{ds} = \frac{\omega^i + t\omega_i^n}{\sum_{i=1}^{n-1} (\omega^i)^2} I_i. \quad (74)$$

Каждой линии кривизны 1-го рода

$$\omega^1 = \omega^2 = \dots = \omega^{j-1} = \omega^{j+1} = \dots = \omega^n = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, n-1), \quad (75)$$

отвечает линейчатая поверхность  $L_j^{(1)}$ .

Стрикционная точка этой поверхности определяется значением

$$t_i = -\frac{\Gamma_{ij}^n}{\sum_{i=1}^{n-1} (\Gamma_{ij}^n)^2}, \quad (j = 1, 2, \dots, n-1); \quad (72')$$

параметр распределения —

$$p_i = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} (1 - \delta_i^j) (\Gamma_{ij}^n)^2}}{\sum_{i=1}^{n-1} (\Gamma_{ij}^n)^2}, \quad (j = 1, 2, \dots, n-1); \quad (73')$$

а вектор  $T_i$ , определяющий вместе с  $I_n$  касательную плоскость к  $L_j$  в точке  $M$ ,

$$T_i = (t\Gamma_{ij}^n + \delta_i^j) I_i, \quad (i, j = 1, 2, \dots, n-1) \quad (74')$$

При произвольном  $t$  имеем систему  $n-1$  линейно независимых векторов  $T_j$ . В центре кривизны  $C_k^{(2)}$  2-го рода, при  $t = R_k^{(2)}$ , в силу установленного выше свойства линейчатых поверхностей, принадлежащих неголономной конгруэнции, система векторов  $T_j$  становится линейно зависимой и лежит в  $(n-2)$ -мерной плоскости, определяемой касательными к другим  $(n-2)$  линиям кривизны, кроме  $k$ -й.

В точке  $A$  неголономной гиперповерхности, при  $t = 0$ , вектор  $T_k$  совпадает с вектором  $I_k$ . В центре кривизны  $C_k^{(1)}$  1-го рода, при  $t = R_k^{(1)} = -\frac{1}{\Gamma_{kk}^n}$ , вектор  $T_k$  направлен по вектору

$$T'_k (1 - \delta_i^k) \Gamma_{ik}^n I_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n-1), \quad (76)$$

перпендикулярному вектору  $I_k$ ; при изменении  $t$  вектор  $T_k$ , вращаясь около точки  $A$ , остается в двумерной плоскости векторов  $I_k$  и  $T'_k$ . Отсюда следует, что, когда точка  $M$  перемещается по нормали  $I_n$  неголономной гиперповерхности от точки  $A$  к точке  $C_k^{(1)}$ , касательная плоскость к линейчатой поверхности  $L_k^{(1)}$  поворачивается на угол  $\frac{\pi}{2}$ .

Каждой линии кривизны 2-го рода в неголономной конгруэнции нормалей отвечает линейчатая поверхность  $L_j^{(2)}$ , ( $j = 1, 2, \dots, n-1$ ). Из (70) следует, что для линии кривизны 2-го рода имеют место равенства

$$\omega_j^n = -k_j^{(2)}\omega^j, \quad (i = 1, 2, \dots, n-1). \quad (77)$$

Воспользовавшись (77), нетрудно убедиться в том, что стрикционная точка (72) для поверхности  $L_j^{(2)}$  совпадает с центром кривизны  $C_j^{(2)}$ , а параметр распределения (73) обращается в нуль. Вектор  $T$  (74) приобретает вид

$$T_i = \frac{1 - tk_j^{(2)}}{\sum_{i=1}^{n-1} (\omega^i)^2} \omega_i^n I_i, \quad (i, j = 1, 2, \dots, n-1), \quad (78)$$

и при изменении  $t$  сохраняет постоянное направление, т. е. при перемещении точки  $M$  вдоль  $I_n$  касательная плоскость к поверхности  $L_j^{(2)}$  остается неизменной.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Д. М. Синцов. О системах интегральных кривых Пфаффова уравнения. Наук. зап. матем. кафедр Украины, т. III, (1928), 107—147.
2. Я. П. Бланк. Связь между гауссовой кривизной и линиями кривизны 2-го рода системы интегральных кривых уравнений Пфаффа. Сообщения Харьковск. матем. об-ва, т. II (1928), 75—76.
3. Д. М. Синцов. Свойства системы интегральных кривых Пфаффова уравнения в  $n$ -переменных. Изв. АН СССР, отд. матем. и естеств. наук, серия VII, № 10 (1931), 1275—1294.
4. В. В. Вагнер. Дифференциальная геометрия неголономных многообразий. В кн. «VIII Международный конкурс на поискание премии им. Н. И. Лобачевского», Казань, (1937), 197—262.
5. E. Bompiani. Sulle varietà analonome. Rend. dei Lincei, V. XXVII, F. 6, 1938.
6. С. П. Фиников. Метод внешних форм Картана. ОГИЗ. М., 1948.
7. Н. И. Кованцов. Теория комплексов. Изд-во КГУ, К., 1963.

Поступила 20 февраля 1967 г.

## ГЕОДЕЗИЧЕСКОЕ СООТВЕТСТВИЕ КОНФОРМНО-ПЛОСКИХ РИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

Д. И. Розенфельд (Одесса)

В ряде работ [1—3] было исследовано геодезическое отображение некоторых классов римановых пространств, включающих в себя частные случаи конформно-плоских  $V_n$ . Однако задача геодезического отображения всего класса конформно-плоских  $V_n$  ранее не ставилась. В настоящей работе получены необходимые условия для конформно-плоских  $V_n$  ( $n > 2$ ), допускающих нетривиальное геодезическое отображение (н. г. о.) на произвольные  $\bar{V}_n$ , и показано, что субпроективные пространства основного типа являются единственными конформно-плоскими  $V_n$  ( $n > 3$ ), которые допускают н. г. о. на конформно-плоские  $\bar{V}_n$ .

### § 1. НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ КОНФОРМНО-ПЛОСКИХ $V_m$ , ДОПУСКАЮЩИХ Н. Г. О. НА ПРОИЗВОЛЬНЫЕ $\bar{V}_n$

1. Пусть риманово пространство  $\bar{V}_n$  ( $n > 2$ ) с метрическим тензором  $g_{ij}$  допускает н. г. о., определяемое градиентом  $\psi_i$ , на конформно-плоское  $V_n$  с метрическим тензором  $g_{ij}$ . Как известно [4], между тензорами кривизны любых двух геодезически соответствующих римановых пространств  $\bar{V}_n$  и  $V_n$  в общих по отображению координатах имеют место соотношения

$$\bar{R}_{ijk}^h = R_{ijk}^h + \delta_k^h \psi_{ij} - \delta_j^h \psi_{ik}, \quad (1)$$

и тензор кривизны конформно-плоского  $V_n$  имеет строение

$$R_{hijk} = \frac{1}{n-2} (g_{hk} R_{ij} - g_{hj} R_{ik} + g_{ij} R_{hk} - g_{ik} R_{hj}) + \\ + \frac{R}{(n-1)(n-2)} (g_{hj} g_{ik} - g_{hk} g_{ij}), \quad (2)$$

( $R_{ij}$  — тензор Риччи;  $R = R_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta}$  — скалярная кривизна). Поэтому соотношения (1) можно представить в форме

$$\bar{R}_{hijk} = \bar{g}_{hk} A_{ij} - \bar{g}_{hj} A_{ik} + \frac{1}{n-2} \bar{g}_{hj} (R_{ik}^a g_{ij} - R_{jk}^a g_{ij}), \quad (3)$$

где

$$\psi_{ij} = \psi_{i,j} - \psi_i \psi_j; \quad A_{ij} = \frac{R_{ij}}{n-2} - \frac{R g_{ij}}{(n-1)(n-2)} + \psi_{ij}. \quad (4)$$

Индекс  $h$  в (3) опущен с помощью тензора  $\bar{g}_{ij}$ . Запятая в  $\psi_{i,j}$  (и всюду в дальнейшем) — знак ковариантной производной в  $V_n$ .

Условия интегрируемости уравнений геодезического отображения

$$\bar{g}_{ij,k} = 2\psi_k \bar{g}_{ij} + \psi_j \bar{g}_{ik} + \psi_i \bar{g}_{jk}, \quad (5)$$

эквивалентные тождеству  $\bar{R}_{hijk} + \bar{R}_{ihkj} = 0$  [4], вследствие (3) принимают вид

$$\begin{aligned} \bar{g}_{hk} A_{ij} - \bar{g}_{hi} A_{ik} + \bar{g}_{ik} A_{hj} - \bar{g}_{ij} A_{hk} + \frac{1}{n-2} \bar{g}_{ha} (R^a_{ik} g_{ij} - R^a_{ij} g_{ik}) + \\ + \frac{1}{n-2} \bar{g}_{ia} (R^a_{kh} g_{ij} - R^a_{ij} g_{hk}) = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Свертывая (6) сначала с  $g^{hi}$ , а затем с  $g^{hk}$ , устанавливаем, что имеет место симметрия

$$\begin{aligned} \bar{g}_{ia} \psi_i^a &= \bar{g}_{ia} \psi_i^a; \quad \bar{g}_{ia} A_j^a = \bar{g}_{ia} A_i^a; \quad \bar{g}_{ia} R_j^a = \bar{g}_{ja} R_i^a \\ (\psi_i^a &= \psi_{\beta i} g^{\beta a}; \quad A_i^a = A_{\beta i} g^{\beta a}; \quad R_i^a = R_{\beta i} g^{\beta a}) \end{aligned}$$

и справедливы соотношения

$$\frac{1}{n-2} \bar{g}_{ia} R_j^a = \frac{r}{n} A_{ij} + \frac{s}{n} \bar{g}_{ij} + \frac{t}{n(n-2)} g_{ij}, \quad (7)$$

где  $r = \bar{g}_{ab} g^{ab}$ ;  $s = -A_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta}$ ;  $t = \bar{g}_{\alpha\beta} R^a_{\gamma\beta} g^{\gamma\beta}$ .

Применяя к тензору (3) тождество  $\bar{R}_{hijk} = \bar{R}_{jkhk}$ , будем иметь

$$\bar{g}_{hk} A_{ij} + \frac{1}{n-2} \bar{g}_{ha} R^a_{ik} g_{ij} = \bar{g}_{ij} A_{hk} + \frac{1}{n-2} \bar{g}_{ia} R^a_{ij} g_{hk}.$$

Если в этом равенстве заменить  $\frac{1}{n-2} \bar{g}_{ia} R_i^a$  по (7), затем к обеим частям его прибавить  $-\frac{1}{n^2} r s g_{hk} g_{ij}$ , то найдем

$$\left( \bar{g}_{hk} - \frac{r}{n} g_{hk} \right) \left( A_{ij} + \frac{s}{n} g_{ij} \right) = \left( \bar{g}_{ij} - \frac{r}{n} g_{ij} \right) \left( A_{hk} + \frac{s}{n} g_{hk} \right),$$

откуда при н. г. о. следует единственная возможность

$$A_{ij} + \frac{s}{n} g_{ij} = \lambda \left( \bar{g}_{ij} - \frac{r}{n} g_{ij} \right). \quad (8)$$

На основании (7) и (8) тензор (3) приобретает вид

$$\bar{R}_{hijk} = \lambda (\bar{g}_{hk} \bar{g}_{ij} - \bar{g}_{hi} \bar{g}_{jk}) + \mu (g_{hk} g_{ij} - g_{hi} g_{jk}), \quad (9)$$

где  $\mu = \frac{t}{n(n-2)} - \frac{r(\lambda r + s)}{n^2}$ .

Таким образом, получена основная

**Лемма.** Для того, чтобы конформно-плоское  $V_n$  ( $n > 2$ ) допускало н. г. о. на произвольное  $\bar{V}_n$ , необходимо, чтобы имело место соотношение (9).

2. В качестве следствий доказанной леммы получим несколько соотношений, которые нам понадобятся в дальнейшем.

Будем считать  $\mu \neq 0$ . Случай  $\mu = 0$  не представляет интереса, ибо тогда, как показывает (9),  $\bar{V}_n$  есть пространство постоянной кривизны.

Продифференцируем ковариантно в  $\bar{V}_n$  тензор (9), используя при этом уравнения

$$g_{ij|k} = -2\psi_k g_{ij} - \psi_j g_{ik} - \psi_i g_{jk} \quad (5')$$

(« | » — знак ковариантной производной в  $\bar{V}_n$ ), затем заменим выражения вида  $\mu (g_{hk}g_{ij} - g_{hj}g_{ik})$  на основании (9). Таким образом найдем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \bar{R}_{hijk|l} = & \left( \frac{\mu_l}{\mu} - 4\psi_l \right) \bar{R}_{hijk} + \left( \lambda_l - \frac{\lambda}{\mu} \mu_l + 4\lambda\psi_l \right) (\bar{g}_{hk}\bar{g}_{ij} - \\ & - \bar{g}_{hj}\bar{g}_{ik}) - \psi_i [\bar{R}_{hilk} - \lambda (\bar{g}_{hk}\bar{g}_{il} - \bar{g}_{hj}\bar{g}_{kl})] - \psi_j [\bar{R}_{hilk} - \\ & - \lambda (\bar{g}_{hk}\bar{g}_{il} - \bar{g}_{hl}\bar{g}_{ik})] - \psi_k [\bar{R}_{hiji} - \lambda (\bar{g}_{hi}\bar{g}_{ij} - \bar{g}_{hj}\bar{g}_{ii})] - \\ & - \psi_h [\bar{R}_{klij} - \lambda (\bar{g}_{kl}\bar{g}_{ij} - \bar{g}_{lk}\bar{g}_{ji})], \end{aligned} \quad (10)$$

где  $\lambda_l = \frac{\partial \lambda}{\partial x^l}$ ;  $\mu_l = \frac{\partial \mu}{\partial x^l}$ .

Применение в  $\bar{V}_n$  тождества Бианки, уравнений (10) и тождеств

$$\bar{R}_{hijk} + \bar{R}_{hjki} + \bar{R}_{hkij} = 0; \quad \bar{R}_{hijk} + \bar{R}_{ihjk} = 0 \quad (*)$$

приводит к соотношениям

$$u_i \bar{R}_{hijk} + u_j \bar{R}_{hikl} + u_k \bar{R}_{huij} + (\lambda_l - \lambda u_l) (\bar{g}_{hk}\bar{g}_{ij} - \bar{g}_{hj}\bar{g}_{ik}) + (\lambda_j - \lambda u_j) (\bar{g}_{hi}\bar{g}_{ik} - \bar{g}_{hk}\bar{g}_{ii}) + (\lambda_k - \lambda u_k) (\bar{g}_{hj}\bar{g}_{ii} - \bar{g}_{hi}\bar{g}_{ij}) = 0, \quad (11)$$

где  $u_k = \frac{\mu_k}{\mu} - 2\psi_k$  — градиентный вектор.

Свернем (11) с  $\bar{g}^{hk}$ ; будем иметь

$$u_i \bar{R}_{ij} - u_j \bar{R}_{ii} + (n-2)[(\lambda_l - \lambda u_l) \bar{g}_{ij} - (\lambda_j - \lambda u_j) \bar{g}_{ii}] + u_a \bar{R}_{ilj}^a = 0. \quad (12)$$

Наконец, в результате свертывания (12) с  $\bar{g}^{ij}$ , получим

$$2u_a \bar{R}_l^a = (n-1)(n-2)\lambda_l + (\bar{R} - (n-1)(n-2)\lambda) u_l. \quad (13)$$

**Замечание.** Для того чтобы  $u_k = 0$ , необходимо и достаточно, чтобы  $\lambda_k = 0$ .

Действительно, если  $u_k = 0$ , то из (13) сразу видно, что и  $\lambda_k = 0$ .

Обратно, если  $\lambda_k = 0$ , то (поскольку  $\mu \neq 0$ ) из (11) и (9) вытекает

$$u_i (g_{hk}g_{ij} - g_{hj}g_{ik}) + u_j (g_{hi}g_{ik} - g_{hk}g_{ii}) + u_k (g_{hj}g_{ii} - g_{hi}g_{ij}) = 0,$$

откуда после свертывания с  $\bar{g}^{hk}$  и  $\bar{g}^{il}$  следует  $u_k = 0$ .

Подчеркнем, что при доказательстве основной леммы на пространство  $V_n$  было наложено лишь условие (2). Таким строением тензора кривизны обладают не только конформно-плоские  $V_n$  ( $n > 2$ ), но и все трехмерные римановы пространства  $V_3$ . Поэтому все рассуждения настоящего параграфа применимы и к любому  $V_3$ , допускающему н. г. о.

## § 2. ГЕОДЕЗИЧЕСКОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ КОНФОРМНО-ПЛОСКИХ $V_n$ НА КОНФОРМНО-ПЛОСКИЕ $\bar{V}_n$

**Теорема.** Для того чтобы конформно-плоское  $V_n$  ( $n > 3$ ) допускало н. г. о. на конформно-плоское  $\bar{V}_n$ , необходимо и достаточно, чтобы  $V_n$  и  $\bar{V}_n$  были субпроективными пространствами основного типа.

**Доказательство.** Достаточность. Конформно-плоские  $V_n$  ( $n > 2$ ) включают в себя все субпроективные пространства (см. [5], [6]). Из рассмотрений в [6] следует, что основные субпроективные  $V_n$  являются эквидистантными пространствами и, следовательно [1], допускают н. г. о. Субпроективные  $V_n$  могут допускать н. г. о. только на субпроективные  $\bar{V}_n$ . Это непосредственно вытекает из определения субпроективного пространства [5].

Исключительные субпроективные  $V_n$  (отличные от плоских) характеризуются тем, что их тензор кривизны имеет вид [6]

$$R_{hijk} = Q(\lambda)(g_{hk}\lambda_i\lambda_j - g_{hi}\lambda_i\lambda_k + g_{ij}\lambda_h\lambda_k^i - g_{ik}\lambda_h\lambda_j), \quad (Q \neq 0),$$

$$\lambda_{i,j} = 0,$$

где  $\lambda_i$  — изотропный градиентный вектор. Отсюда легко получаем:

$$R_{hijk,l} = \frac{Q_l}{Q} R_{hijk}; \quad \left( Q_l = \frac{\partial Q}{\partial x^l} \right),$$

а это означает, что исключительные субпроективные пространства принадлежат классу рекуррентных  $V_n$  и, следовательно [7], не допускают н. г. о.

Итак, основные субпроективные  $V_n$  ( $n > 2$ ) допускают н. г. о. только на основные субпроективные  $\bar{V}_n$ .

Необходимость. Рассмотрим полученные в § 1 условия применительно к конформно-плоскому  $V_n$  ( $n > 3$ ), допускающему н. г. о. на конформно-плоское  $\bar{V}_n$ .

1. Предположим сперва, что в (11) — (13)  $u_k \neq 0$ . Подставим в (12) выражение для тензора кривизны конформно-плоского  $\bar{V}_n$ . Принимая во внимание (13) и то, что  $n > 3$ , будем иметь

$$u_k \bar{R}_{ij} - u_i \bar{R}_{jk} = v_k \bar{g}_{ij} - v_j \bar{g}_{ik}, \quad (14)$$

где

$$v_k = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\bar{R}}{n-1} + (n-2)\lambda \right) u_k - (n-2)\lambda_k \right]. \quad (15)$$

Свертывание (14) сначала с  $\bar{g}^{ij}$ , затем с  $u^k = u_a \bar{g}^{ak}$  дает

$$\begin{aligned} \bar{R} u_k &= u_a \bar{R}_k^a + (n-1)v_k; \\ u_a u^a \bar{R}_{ij} - u_i \bar{R}_j^a u_j &= v_a u^a \bar{g}_{ij} - u_i v_j, \end{aligned}$$

откуда вследствие симметрии по  $i, j$  получим

$$v_k = s u_k. \quad (16)$$

Из (14), (16) и симметрии тензора  $R_{ij} - S \bar{g}_{ij}$  находим

$$\bar{R}_{ij} = S \bar{g}_{ij} + T u_i u_j. \quad (17)$$

Сравнение (15) с (16) показывает, что  $\lambda = \lambda(u)$ .

Если подставить (17) и (9) в (12) и учесть, что  $\lambda_k = \lambda'_u u_k$ , то обнаружим

$$\begin{aligned} [S + (n-2)\lambda'_u - (n-1)\lambda] (u_k \bar{g}_{ij} - u_j \bar{g}_{ik}) &= \\ = \mu u_3 \bar{g}^{\beta a} (g_{ak} g_{ij} - g_{aj} g_{ik}). \end{aligned} \quad (18)$$

Так как  $u_k \neq 0$ ,  $\mu \neq 0$  и (вследствие невырожденности тензора  $g_{ij}$ )  $u_\beta \bar{g}^{\beta a} g_{ak} \neq 0$ , то из (18) следует, что  $S + (n-2)\lambda'_u - (n-1)\lambda \neq 0$ , и (18) можно записать в виде

$$u_k \bar{g}_{ij} - u_j \bar{g}_{ik} = \sigma_k g_{ij} - \sigma_j g_{ik}, \quad (18')$$

где  $\sigma_k = \frac{\mu \bar{g}^{\beta a} u_3 g_{ak}}{S + (n-2)\lambda'_u - (n-1)\lambda} \neq 0$ .

После свертывания (18') сначала с  $g^{ij}$ , затем с  $u^k = u_a \bar{g}^{ak}$  найдем, что  $\sigma_k = au_k$ , причем  $a \neq 0$ . Учитывая это и симметрию тензора  $g_{ij} - ag_{ij}$ , из (18') имеем

$$\bar{g}_{ij} = ag_{ij} + bu_i u_j, \quad (19)$$

где инвариант  $b$  отличен от нуля при н. г. о.

Докажем теперь две леммы, с помощью которых завершим рассмотрение случая  $u_k \neq 0$ .

**Лемма 1.** Если риманово пространство  $\bar{V}_n$  ( $n > 2$ ) допускает н. г. о. на риманово пространство  $V_n$ , и метрические тензоры этих пространств связаны условием (19), где инвариантны  $a$  и  $b$  отличны от нуля, то  $V_n$  и  $\bar{V}_n$  являются эквидистантными пространствами.

**Доказательство.** Совместное рассмотрение уравнений (5) и условий (19) дает:

$$(a_k - 2a\phi_k)g_{ij} + (b_k - 2b\psi_k)u_i u_j + b(u_{i,k}u_j + u_{j,k}u_i) = a(\psi_i g_{ik} + \psi_k g_{ij}) + bu_k(u_i \psi_j + u_j \psi_i), \quad (20)$$

где  $a_k = \frac{\partial a}{\partial x^k}$ ;  $b_k = \frac{\partial b}{\partial x^k}$ .

Свертывая (20) поочередно с  $g^{ii}$ ,  $g^{ik}$ ,  $u^i u^i$  и  $u^i u^k$  (где  $u^i = u_a g^{ai}$ ) и обозначая  $\Delta_1 u = u_a u_b g^{ab}$ ,  $(\Delta_1 u)_k = \frac{\partial (\Delta_1 u)}{\partial x^k}$ , получим систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} na_k + \Delta_1 u b_k + b(\Delta_1 u)_k - 2((n+1)a + b\Delta_1 u)\psi_k &= Au_k; \\ a_k + \frac{1}{2}b(\Delta_1 u)_k - ((n+3)a + b\Delta_1 u)\psi_k &= Bu_k; \\ \Delta_1 u a_k + (\Delta_1 u)^2 b_k + b\Delta_1 u(\Delta_1 u)_k - 2\Delta_1 u(a + b\Delta_1 u)\psi_k &= Cu_k; \\ \frac{1}{2}b\Delta_1 u(\Delta_1 u)_k - \Delta_1 u(a + b\Delta_1 u)\psi_k &= Du_k, \end{aligned} \quad (21)$$

где  $A = 2b\psi_a u^a$ ;  $B = (3b\psi_a - b_a)u^a - b\Delta_2 u$ ;  $\Delta_2 u = u_a, \psi g^{ab}$ ;  $C = 2\psi_a u^a (a + b\Delta_1 u)$ ;  $D = (3a + 2b + b\Delta_1 u)\psi_a u^a - (a_a + b_a)u^a - bu_a, \psi u^a u^b$ .

Дальнейшее рассмотрение проведем отдельно для неизотропного и изотропного градиента  $u_k$ .

Если  $\Delta_1 u \neq 0$ , то определитель системы (21), как нетрудно проверить (учитывая, что  $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$  и  $n > 2$ ), отличен от нуля. Поэтому градиенты  $a_k$ ,  $b_k$ ,  $\psi_k$ ,  $(\Delta_1 u)_k$  и  $u_k$  коллинеарны, т. е.  $a$ ,  $b$ ,  $\Delta_1 u$  и  $\psi$  — функции только от  $u$ , и условия (19) можно записать так:

$$\bar{g}_{ij} = a(u)g_{ij} + b(u)u_i u_j. \quad (19')$$

Уравнения (20) после умножения на  $u^j$  и суммирования по  $j$  принимают вид

$$u_{i,j} = E(u)g_{ij} + F(u)u_i u_j, \quad (22)$$

где  $E = \frac{a\psi'_u}{b}$ ;  $F = \frac{1}{b\Delta_1 u} \left[ (3a + 4b\Delta_1 u)\psi'_u - a'_u - b'_u\Delta_1 u - \frac{(\Delta_1 u)'_u}{2} \right]$ .

Условия (19') не изменят своего вида, если заменить в них  $u$  на  $u(\varphi)$  ( $u'_\varphi \neq 0$ ). Так как

$$u_i = u'_\varphi \varphi_i; \quad \varphi_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}; \quad u_{i,j} = u''_\varphi \varphi_i \varphi_j + u'_\varphi \varphi_{i,j},$$

то (22) запишем так:

$$u''_\varphi \varphi_i \varphi_j + u'_\varphi \varphi_{i,j} = E(u(\varphi))g_{ij} + F(u(\varphi))u'^2_\varphi \varphi_i \varphi_j. \quad (22')$$

Выбрав  $u(\varphi)$  так, чтобы  $u''_\varphi - F(u(\varphi))u'^2_\varphi = 0$ , получим из (22') (ср. с [6])

$$\varphi_{i,j} = \rho g_{ij}, \quad (23)$$

где  $\rho = \frac{a\psi'_u}{bu'_\varphi} \neq 0$  (ибо  $a \neq 0$  и  $\psi'_u \neq 0$ ), а это означает [1], что  $V_n$  есть эквидистантное пространство. Из строения условий (19), уравнений (5') и проведенных здесь рассуждений ясно, что  $\bar{V}_n$  также является эквидистантным пространством.

Пусть теперь  $\Delta_1 u = 0$ . В этом случае из первых двух уравнений системы (21) вытекает, что  $a = a(u)$  и  $\psi = \psi(u)$ .

Учитывая это, запишем (20) в таком виде:

$$(a'_u - 2a\psi'_u) u_k g_{ij} + u_i (bu_{i,k} - a\psi'_u g_{ik} - 2b\psi'_u u_i u_k + \frac{1}{2} u_i b_k) + \\ + u_j (bu_{i,k} - a\psi'_u g_{ik} - 2b\psi'_u u_i u_k + \frac{1}{2} u_i b_k) = 0. \quad (20')$$

Поскольку  $u_k \neq 0$ , то существует вектор  $z^k$  такой, что  $u_k z^a \neq 0$ . Умножим (20') на  $z^k$ , затем просуммируем по  $k$ . Допуская  $a'_u - 2a\psi'_u \neq 0$ , получим для невырожденного тензора  $g_{ij}$  представление  $g_{ij} = u_i y_j + u_j y_i$ , где  $y_i$  — вектор; а это невозможно при  $n > 2$ . Значит,  $a'_u - 2a\psi'_u = 0$ , и (20') возможно только при условии

$$bu_{i,k} - a\psi'_u g_{ik} - 2b\psi'_u u_i u_k + \frac{1}{2} u_i b_k = 0. \quad (24)$$

Отсюда видно, что  $u_i b_k = u_k b_i$ , т. е.  $b = b(u)$ , и (24) принимает вид

$$bu_{i,k} = a\psi'_u g_{ik} + \left(2b\psi'_u - \frac{1}{2} b'_u\right) u_i u_k. \quad (24')$$

Умножим, далее, (24') на  $u^k$  и просуммируем по  $k$ , учитывая при этом условие  $\Delta_1 u = 0$ . Тогда получим  $a\psi'_u = 0$ , но это невозможно, так как  $a \neq 0$  и  $\psi'_u \neq 0$ . Следовательно, случай  $\Delta_1 u = 0$  невозможен.

**Лемма 2.** Конформно-плоские эквидистантные  $V_n$  ( $n > 2$ ) необходимо являются субпроективными пространствами основного типа.

Доказательство. В уравнениях (23), характеризующих эквидистантные  $V_n$ ,  $\varphi_i \neq 0$  и  $\rho \neq 0$ . Поэтому, умножая (23) на  $\varphi^j = \varphi_a g^{aj}$  и суммируя по  $j$ , находим  $\frac{1}{2} (\Delta_1 \varphi)_i = \rho \varphi_i$ , откуда ясно, что  $\Delta_1 \varphi \neq 0$  и  $\Delta_1 \varphi$  и  $\rho$  — функции только от  $\varphi$ .

Условия интегрируемости уравнений (23) вследствие (2) имеют вид

$$\varphi_k R_{ij} - \varphi_i R_{jk} + \Phi_k g_{ij} - \Phi_j g_{ik} = 0, \quad (25)$$

где  $\Phi_k = \varphi_a R_k^a - \left(\frac{R}{n-1} + (n-2) \rho'_\varphi\right) \varphi_k$ .

Аналогично тому, как из (14) получено (17), здесь из (25) получим

$$R_{ij} = Pg_{ij} + Q\varphi_i \varphi_j. \quad (26)$$

Поскольку в любом конформно-плоском  $V_n$  выполняются условия [4]

$$R_{ij,k} - R_{ik,j} = \frac{1}{2(n-1)} (R_k g_{ij} - R_j g_{ik}); \quad R_k = \frac{\partial R}{\partial x^k}, \quad (27)$$

то совместное рассмотрение (26) и (27) дает

$$\left(P_k - \frac{R_k}{2(n-1)}\right) g_{ij} - \left(P_i - \frac{R_j}{2(n-1)}\right) g_{ik} + Q_k \varphi_i \varphi_j - \\ - Q_j \varphi_i \varphi_k + Q (\varphi_{i,k} \varphi_j - \varphi_{i,j} \varphi_k) = 0, \quad (28)$$

где  $P_k = \frac{\partial P}{\partial x^k}$ ;  $Q_k = \frac{\partial Q}{\partial x^k}$ .

Свертывая (28) сначала с  $g^{ij}$ , а затем с  $\varphi^k$ , находим

$$(n-1) \left(P_k - \frac{R_k}{2(n-1)}\right) + \Delta_1 \varphi Q_k - \left[Q_a \varphi^a - Q \left(\frac{1}{2} (\Delta_1 \varphi'_\varphi) - \Delta_2 \varphi\right)\right] \varphi_k = 0; \quad (29)$$

$$\left(P_a - \frac{R_a}{2(n-1)}\right) \varphi^a g_{ij} - \left(P_i - \frac{R_j}{2(n-1)}\right) \varphi_i + Q_a \varphi^a \varphi_i \varphi_j - \\ - \Delta_1 \varphi \varphi_i Q_j + Q \left[\frac{1}{2} (\Delta_1 \varphi)' \varphi_i \varphi_j - \Delta_1 \varphi \varphi_{i,j}\right] = 0. \quad (30)$$

Из симметрии по  $i, j$  в (30) вытекает

$$\varphi_i \left( P_i - \frac{R_i}{2(n-1)} + \Delta_1 \varphi Q_i \right) = \varphi_j \left( P_j - \frac{R_j}{2(n-1)} + \Delta_1 \varphi Q_j \right)$$

или, учитывая (29),

$$\varphi_i \left( P_i - \frac{R_i}{2(n-1)} \right) = \varphi_j \left( P_j - \frac{R_j}{2(n-1)} \right);$$

откуда следует

$$P - \frac{R}{2(n-1)} = f(\varphi). \quad (31)$$

Из (29) и (31) видно (напомним:  $\Delta_1 \varphi \neq 0$ ), что  $Q = Q(\varphi)$ .

Если свернем (26) с  $g^{ij}$ , то будем иметь

$$R = nP + Q\Delta_1 \varphi. \quad (32)$$

Так как  $\Delta_1 \varphi$  и  $Q$  — функции только от  $\varphi$ , то из (31) и (32) ясно, что  $P = P(\varphi)$  — и (26) принимает вид

$$R_{ij} = P(\varphi) g_{ij} + Q(\varphi) \varphi_i \varphi_j, \quad (\Delta_1 \varphi \neq 0).$$

Следовательно [6], конформно-плоские эквидистантные  $V_n$  являются субпроективными пространствами основного случая.

Из равенства (19) и леммы 1 и 2 ясно, что для случая  $u_k \neq 0$  необходимость доказана.

2. Предположим теперь, что  $u_k = 0$ .

В этом случае  $\lambda_k = 0$ ,  $\lambda = c = \text{const}$  (см. замечание в конце § 1), и свертывание (10) с  $\bar{g}^{hk}$  дает

$$\begin{aligned} \bar{R}_{ij|k} &= -2\psi_k \bar{R}_{ij} - \psi_j \bar{R}_{ik} + 2nc\psi_k \bar{g}_{ij} - \psi_i \bar{R}_{jk} + \\ &+ (n-2)c(\psi_j \bar{g}_{ik} + \psi_i \bar{g}_{jk}) - \psi_a (\bar{R}_{ij|k}^a + \bar{R}_{jk|k}). \end{aligned} \quad (33)$$

В результате свертывания (33) с  $\bar{g}^{ij}$  найдем

$$4\psi_a \bar{R}_k^a = 2((n^2 + n - 2)c - \bar{R})\psi_k - R_k. \quad (34)$$

Из (33) и тождества (\*) (см. п. 2 § 1) следует

$$\bar{R}_{ij|k} - \bar{R}_{ik|j} = -\psi_k \bar{R}_{ij} + \psi_j \bar{R}_{ik} + (n+2)c(\psi_k \bar{g}_{ij} - \psi_i \bar{g}_{jk}) - 3\psi_a \bar{R}_{aj}^a. \quad (35)$$

Используя строение тензора кривизны конформно-плоского  $\bar{V}_n$  и уравнения вида (27), представим (33) и (35) соответственно в форме

$$\begin{aligned} \bar{R}_{ij|k} &= -\frac{2(n-1)}{n-2} \psi_k \bar{R}_{ij} - \frac{n-3}{n-2} (\psi_j \bar{R}_{ik} + \psi_i \bar{R}_{jk}) + \\ &+ 2 \left[ \left( nc + \frac{\bar{R}}{(n-1)(n-2)} \right) \psi_k - \frac{1}{n-2} \psi_a \bar{R}_k^a \right] \bar{g}_{ij} + \left[ \frac{1}{n-2} \psi_a \bar{R}_i^a + \right. \\ &\left. + \left( (n-2)c - \frac{\bar{R}}{(n-1)(n-2)} \right) \psi_j \right] \bar{g}_{ik} + \left[ \frac{1}{n-2} \psi_a \bar{R}_i^a + \left( (n-2)c - \right. \right. \\ &\left. \left. - \frac{\bar{R}}{(n-1)(n-2)} \right) \psi_i \right] \bar{g}_{jk}; \end{aligned} \quad (33')$$

$$\psi_k \bar{R}_{ij} - \psi_i \bar{R}_{jk} + \bar{\Phi}_k \bar{g}_{ij} - \bar{\Phi}_j \bar{g}_{ik} = 0, \quad (35')$$

где

$$\bar{\Phi}_k = \frac{n-2}{n+1} \left[ \frac{3}{n-2} \psi_a \bar{R}_k^a - \left( (n-2)c + \frac{3\bar{R}}{(n-1)(n-2)} \right) \psi_k + \frac{\bar{R}_k}{2(n-1)} \right]. \quad (36)$$

Из (35') вытекает

$$\bar{\Phi}_k = -\bar{P} \psi_k, \quad (37)$$

$$\bar{R}_{ij} = \bar{P} \bar{g}_{ij} + \bar{Q} \psi_i \psi_j. \quad (38)$$

Сравнение (34), (36) и (37) показывает

$$\bar{R} = \bar{R}(\psi); \quad \bar{P} = \bar{P}(\psi).$$

Совместное рассмотрение (38), (33') и (39) приводит к уравнению

$$\begin{aligned} U(\psi) \psi_k \bar{g}_{ij} + \left[ \bar{Q} \psi_{j+k} + \frac{1}{2} \psi_j \bar{Q}_k + 2\bar{Q} \psi_i \psi_k + H(\psi) \bar{g}_{ik} \right] \psi_i + \\ + \left[ \bar{Q} \psi_{i+k} + \frac{1}{2} \psi_i \bar{Q}_k + 2\bar{Q} \psi_i \psi_k + H(\psi) \bar{g}_{ik} \right] \psi_j = 0. \end{aligned}$$

Поскольку  $\psi_k \neq 0$ , то аналогично тому, как из (20') получено (2), здесь из (40) получим

$$\bar{Q} \psi_{i+k} + \frac{1}{2} \psi_i \bar{Q}_k + 2\bar{Q} \psi_i \psi_k + H(\psi) \bar{g}_{ik} = 0,$$

откуда следует  $\bar{Q} = \bar{Q}(\psi)$ , а это вместе с (39) позволяет записать (3) в виде

$$\bar{R}_{ij} = \bar{P}(\psi) \bar{g}_{ij} + \bar{Q}(\psi) \psi_i \psi_j.$$

Следовательно [6], и в случае  $u_k = 0$  конформно-плоское  $\bar{V}_n$ , допускающее и. г. о. на конформно-плоское  $V_n$ , есть субпроективное пространство и притом основного типа (субпроективные пространства исключительного типа не допускают и. г. о.). Теорема доказана.

В заключение выражаю глубокую благодарность Н. С. Синюкову за постановку задачи и руководство при ее решении.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Н. С. Синюков. Эквидистантные римановы пространства. Научный ежегодник Одесского университета. 1957, 133—135.
2. Н. С. Синюков. Об одном инвариантионом преобразовании римановых пространств с общими геодезическими. ДАН СССР, т. 137, № 6, 1961, 1312—1314.
3. Г. И. Кручикович. Геодезическое соответствие полуправильных римановых пространств. ДАН СССР, т. 152, № 1, 1963, 43—45.
4. Л. П. Эйзенхарт. Риманова геометрия. Изд-во иностр. лит., М., 1948.
5. В. Ф. Каган. Субпроективные пространства. Физматгиз, М., 1961.
6. Г. И. Кручикович. О пространствах В. Ф. Кагана. Приложение к книге В. Ф. Кагана «Субпроективные пространства», 163—198.
7. Н. С. Синюков. О геодезическом отображении римановых пространств. Труды третьего Всесоюзного математического съезда, т. 1, Изд-во АН СССР, М., 1956, 167—168.

Поступила 19 декабря 1968 г.

## *n*-МЕРНЫЙ АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ С. П. ОЛОВЯНИШНИКОВА

*E. P. Сенькин* (Харьков)

В работе [1] доказано следующее утверждение.

**Лемма 1.** Пусть в  $m$ -мерной плоскости  $n$ -мерного евклидова пространства ( $m \leq n$ ) дана общая замкнутая выпуклая  $(m-1)$ -мерная поверхность  $F$ . Обозначим через  $\Phi$  изометрический образ  $F$ , расположенный в пространстве размерности  $k$  ( $m \leq k \leq n$ ). Пусть  $r(x, y)$  — расстояние между точками  $x, y \in F$  в пространстве, а  $\rho(x, y)$  — расстояние между соответствующими по изометрии точками на  $\Phi$ . Тогда, если для любой пары точек на  $F$  имеет место неравенство  $\rho(x, y) \geq r(x, y)$ , то  $F$  равна  $\Phi$ .

Используя эту лемму, можно распространить теорему С. П. Оловянинникова о многогранниках [2] на случай  $n$ -мерного евклидова пространства.

**Теорема.** Замкнутая выпуклая гиперповерхность  $n$ -мерного евклидова пространства, изометрична многограннику, есть равный ему многогранник.

В случае трехмерного пространства равенство следует из теоремы Коши. Для пространств более высокого числа измерений этот вопрос решается тривиально, так как уже в четырехмерном пространстве многогранный угол неизгибаem.

**Лемма 2.** Пусть  $F$  — выпуклая гиперповерхность  $n$ -мерного евклидова пространства,  $G$  — открытое множество на ней. Тогда, если  $G$  имеет сферическое изображение положительной меры, то  $G$  не изометрично плоскому множеству.

В трехмерном пространстве эта лемма является простым следствием теоремы Гаусса — Бонне.

**Доказательство.** Так как  $G$  имеет сферическое изображение положительной меры, то всегда найдется точка  $x \in G$  такая, что опорная гиперплоскость  $P$  имеет с  $F$  лишь одну общую точку  $x$ . Причем некоторая окрестность  $U$  точки  $x$  проектируется на  $P$  однозначно. Пересечем гиперплоскостью  $Q$ , параллельной  $P$  и достаточно близкой к  $P$ . В сечении получим замкнутую выпуклую  $(n-2)$ -мерную поверхность  $L$ . Предположим, что  $G$  изометрично плоскому множеству. Пусть  $U^*$  — изометрический образ  $U$  в плоскости и  $L^*$  — образ  $L$ . Покажем, что область  $U^*$ , ограниченная  $L^*$ , — выпуклая. Предположим противное. Тогда найдется достаточно малый отрезок  $s^* \subset U^*$ , лежащий вне  $W^*$ , с концами  $c_0 \in L^*, d_0 \in L^*$ . Пусть  $s$  — кривая в  $U$ , соответствующая  $s^*$ . Спроектируем  $s$  и  $W$  на плоскость  $Q$ . Пусть  $\sigma$  и  $\Sigma$  — проекции  $s$  и  $W$  на  $Q$ . Рымляемая кривая  $\sigma$  лежит вне  $\Sigma$  и имеет концы  $c_0 \in L, d_0 \in L$ . По теореме Буземана — Феллера длина  $\sigma$  больше длины кратчайшей  $l$ , соединяющей точки  $c_0, d_0$  на  $L$ . Поэтому длина  $s$  больше длины  $l$ . Пусть  $l^*$  — образ  $l$ . Но длина  $s^*$  равна длине  $s$ . Следовательно, длина  $s^*$  больше длины  $l^*$ , чего не может быть, так как  $s^*$  — отрезок. Полученное

противоречие и доказывает выпуклость  $W^*$ . Возьмем произвольные точки  $a^*, b^* \in L^*$ . Отрезок, соединяющий точки  $a^*$  и  $b^*$ , имеет своим прообразом в  $U$  кривую, соединяющую  $a$  и  $b$ , следовательно, расстояние между точками  $a$  и  $b$  не больше расстояния между точками  $a^*$  и  $b^*$ , причем заведомо меньше, если отрезок  $a^*b^*$  лежит внутри  $W^*$ . Следовательно  $L^*$  не равны, что противоречит лемме 1.

**Следствие 1.** *Если  $G$  не плоско, но ограничено плоской замкнутой поверхностью, то  $G$  не изометрично плоскому множеству.*

**Следствие 2.** *Если  $G$  ограничено и некоторая плоскость, опорная к  $F$ , имеет общие точки с  $G$ , но не пересекает границу  $G$ , то  $G$  не изометрично плоскому множеству.*

Пусть  $G$  — открытое множество на поверхности  $F$  выпуклого тела, изометричное плоскому множеству,

Назовем точку  $x \in G$  неплоской, если она не имеет двумерной плоской окрестности.

**Лемма 3.** *Всякая неплоская точка  $x \in G$  лежит внутри открытое прямолинейного отрезка  $t \subset G$ , целиком состоящего из неплоских точек, причем концы  $t$  лежат на границе  $G$ .*

**Доказательство.** Пусть  $P$  — опорная гиперплоскость, проходящая через  $x$ ,  $L$  — граница плоской грани  $P \cap F$ ,  $L'$  — связная компонента множества  $L \cap G$ , содержащая точку  $x$ . Проведем через  $x$  произвольную двумерную плоскость  $P_1 \subset P$ . Пусть  $L''$  — связная компонента границы плоской двумерной грани  $L' \cap P_1$ , содержащая точку  $x$ .

Предположим, что ни для какой двумерной плоскости  $L''$  не является отрезком, оба конца которого лежат на границе  $G$ . Тогда в  $P$  существует  $(n-2)$ -мерная плоскость  $P_2$ , опорная к  $L'$  и имеющая с  $L''$  а следовательно, и с  $G$  лишь одну общую точку. Повернем достаточно мало плоскость  $P$  вокруг плоскости  $P_2$  так, чтобы открытая полуплоскость, содержащая точки  $G$ , перестала пересекать  $F$ . Тогда, либо плоскость  $P$  будет иметь с  $F$  лишь одну общую точку  $x$ , либо  $P$  отрежет от  $F$  горбушку. В первом случае, в силу следствия 2  $G$  должно быть не изометрично плоскому множеству. Во втором случае приходим к тому же заключению в силу следствия 1.

Докажем теорему. Пусть замкнутая выпуклая гиперповерхность изометрична выпуклому многограннику  $P$  и  $G$  получено из  $F$  отбрасыванием образов вершин многогранника  $P$ . Так как  $G$  локально изометрично плоским множествам, то в силу леммы 3 неплоские точки  $G$  лежат лишь на конечном числе прямых. Следовательно,  $F$  есть многогранник.

**Замечание.** Утверждение, аналогичное лемме 1, имеет место и для бесконечно малых деформаций выпуклой поверхности.

Пусть в  $m$ -мерной плоскости  $n$ -мерного евклидова пространства ( $m < n$ ) дана общая замкнутая строго выпуклая  $(m-1)$ -мерная поверхность  $F$ . Пусть  $r(x, y)$  — расстояние в пространстве между точками  $x, y \in F$ . Тогда любая бесконечно малая деформация поверхности  $F$ , удовлетворяющая условию  $\dot{r} \geq 0$ , должна сводиться к движению, т. е.  $\dot{r} = 0$ . Точка означает производную по времени  $t$  при  $t = 0$ . Доказательство основано на следующей лемме.

**Лемма 4.** *Пусть  $Q$  — плоская замкнутая выпуклая кривая, не содержащая прямолинейных отрезков;  $x, y$  — произвольные точки кривой  $Q$ ;  $r(x, y)$  — расстояние между точками  $x, y$ . Тогда, если длины всех дуг кривой  $Q$  стационарны, то при  $t = 0$  из неравенства  $\dot{r} \geq 0$  следует  $\dot{r} = 0$ .*

Для конечных деформаций эта лемма доказана в работе [3]. Доказательство для бесконечно малых деформаций аналогично, достаточно лишь конечные приращения заменить скоростями.

Пусть  $F$  подвергается бесконечно малой деформации при условии  $\lambda > 0$ . Пусть  $x, y$  — произвольные точки  $F$ . Проведем через  $x, y$  двумерную плоскость. В сечении получим выпуклую кривую, удовлетворяющую условиям леммы 4. Следовательно, для всех точек кривой  $\dot{r} = 0$ . Так как  $x$  и  $y$  — произвольные точки  $F$ , то и для всех точек поверхности  $\dot{r} = 0$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Е. П. Сенькин. Об одном свойстве изометрических преобразований выпуклой поверхности в пространство высшего числа измерений. Укр. геометр. сб., вып. 3. Изд-во ХГУ, Харьков, 1966.
2. С. П. Оловянишников. Обобщение теоремы Коши о выпуклых многогранниках. Матем. сб., т. 18, (60): 3, 1946.
3. Е. П. Сенькин. Об изгиблении общих выпуклых поверхностей с границей. Вестник ЛГУ, № 19, 1960.

*Поступила 28 апреля 1967 г.*

---

## О ЧЕТЫРЕХМЕРНЫХ РИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ, ДОПУСКАЮЩИХ СЕМЕЙСТВА ДВУМЕРНЫХ ВПОЛНЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Ю. С. Слободян (Харьков)

В работе [4] выяснена структура полных римановых пространств с аналитической метрикой, допускающих  $\mu$ -параметрические ( $\mu \geq 2$ ) семейства трехмерных вполне геодезических поверхностей.

В настоящей работе выясняется структура полных четырехмерных римановых пространств с аналитической метрикой, допускающих четырех- и пятипараметрические семейства двумерных вполне геодезических поверхностей.

1. Введем понятие индикатрисы кривизны пространства в точке  $P$  по двумерным площадкам и рассмотрим некоторые ее свойства. Двумерная площадка, проходящая через точку  $P$ , может быть определена с помощью бивектора [2]. Если через  $p^{ij}$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ) обозначим нормированные компоненты бивектора площадки, то система бивекторов

$$\omega_{ij} = \sum_{(kl)} R_{ijkl} p^{kl}, \quad (i, j, k, l = 1, \dots, n) \quad (1)$$

дает вращение, определяемое этой площадкой. Кривизна пространства  $K$  тогда определяется формулой

$$K = \omega^{ij} p_{ij} = \sum_{(ij)} (kl) R_{ijkl} p^{ij} p^{kl}.$$

Рассмотрим в евклидовом пространстве  $C_2^n$  измерений  $E_N$  следующую поверхность  $\Phi$  второго порядка:

$$\sum_{(ij)} (kl) R_{ijkl} p^{ij} p^{kl} = 1. \quad (2)$$

Поверхность  $\Phi$  назовем индикатрисой кривизны пространства по двумерным площадкам. Кривизну пространства в точке  $P$  по площадке  $p^{ij}$  можно определить следующим образом.

Проведем в  $E_N$  из точки  $P$  вектор с координатами  $p^{ij}$  и продолжим его до пересечения с поверхностью  $\Phi$  в точке  $Q$ . При этом кривизна пространства

$$K = \frac{1}{(PQ)^2}.$$

Действительно, координаты точки  $Q$  будут  $\rho p^{ij}$ . Подставляя их в уравнение (2), получим

$$\rho^2 \sum_{(ij)} (kl) R_{ijkl} p^{ij} p^{kl} = 1 = \rho^2 K.$$

Рассмотрим введенную выше индикатрису. Для четырехмерного пространства она имеет вид

$$\sum_{(ij)} (kl) R_{ijkl} p^{ij} p^{kl} = 1, \quad (i, j, k, l = 1, \dots, 4). \quad (2')$$

Поверхность (2') в шестимерном евклидовом пространстве  $E_6$  определяет некоторую поверхность второго порядка. Рассмотрим те направления  $E_6$ , которые отвечают бивекторам четырехмерного пространства. Для того, чтобы вектор в  $E_6$  можно было рассматривать как бивектор  $E_4$ , необходимо и достаточно, чтобы его компоненты удовлетворяли следующему уравнению:

$$p^{34}p^{12} + p^{31}p^{24} + p^{14}p^{23} = 0. \quad (2'')$$

Это уравнение дает конус второго порядка.

**Лемма 1.** Максимальная размерность плоскости, полностью лежащей на конусе (2''), равна трем.

Доказательство проведем от противного. Пусть на конусе (2'') лежит четырехмерная плоскость. Предположим, что ее можно определить следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} p^{12} &= a_1p^{13} + a_2p^{14} + a_3p^{23} + a_4p^{24}, \\ p^{34} &= b_1p^{13} + b_2p^{14} + b_3p^{23} + b_4p^{24}. \end{aligned}$$

Подставляя значения  $p^{12}$  и  $p^{34}$  в уравнение (2''), получим

$$(a_1p^{13} + a_2p^{14} + a_3p^{23} + a_4p^{24}) \times (b_1p^{13} + b_2p^{14} + b_3p^{23} + b_4p^{24}) + \\ + p^{31}p^{24} + p^{14}p^{23} = 0.$$

Так как четырехмерная плоскость полностью лежит на конусе, то это уравнение тождественно удовлетворяется относительно  $p^{ij}$ . Приравнивая коэффициенты при степенях  $p^{ij}p^{kl}$  к нулю, получим требуемый результат.

Аналогично рассматривается случай, когда четырехмерная плоскость задана следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} p^{12} &= a_1p^{14} + a_2p^{24} + a_3p^{23} + a_4p^{34}, \\ p^{13} &= b_1p^{14} + b_2p^{24} + b_3p^{23} + b_4p^{34} \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

**Лемма 2.** На конусе (2'') лежит трехпараметрическое семейство трехмерных плоскостей  $E_3$ . Двумерные плоскости, отвечающие тем векторам, которые лежат на некоторой плоскости семейства  $E_3$ , либо проходят через фиксированную прямую, либо ортогональны фиксированному направлению.

Пусть трехмерная плоскость задана следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} p^{12} &= a_1p^{23} + a_2p^{24} + a_3p^{34}; \\ p^{13} &= b_1p^{23} + b_2p^{24} + b_3p^{34}; \\ p^{14} &= c_1p^{23} + c_2p^{24} + c_3p^{34}. \end{aligned}$$

Подставляя значения  $p^{12}$ ,  $p^{13}$ ,  $p^{14}$  из этой системы в уравнение (2''), получим

$$p^{34}(a_1p^{23} + a_2p^{24} + a_3p^{34}) - p^{24}(b_1p^{23} + b_2p^{24} + b_3p^{34}) + \\ + p^{23}(c_1p^{23} + c_2p^{24} + c_3p^{34}) = 0.$$

Приравнивая нулю коэффициенты при произведениях  $p^{ij}p^{kl}$  получим, что

$$\begin{aligned} c_1 &= b_2 = a_3 = 0, \\ b_3 &= a_2, \quad c_3 = -a_1, \quad c_2 = b_1. \end{aligned}$$

И, таким образом, имеем следующее трехпараметрическое семейство трехмерных плоскостей

$$\begin{aligned} p^{12} &= a_1p^{23} + a_2p^{24}; \\ p^{13} &= b_1p^{23} + a_2p^{34}, \\ p^{14} &= b_1p^{24} - a_1p^{34}, \end{aligned} \quad (\alpha')$$

Компоненты бивектора, лежащего на плоскостях этого семейства, имеют вид

$$(a_1 p^{23} + a_2 p^{24}, b_1 p^{23} + a_2 p^{34}, b_1 p^{24} - a_1 p^{34}, p^{23}, p^{24}, p^{34}).$$

Найдем уравнения двумерных плоскостей в  $E_4$ , соответствующих этим бивекторам. Для этого выберем базисные векторы данного бивектора.

За базисные векторы найденных бивекторов можно выбрать следующие [2]:

$$\begin{aligned} e_1 & (-a_1 p^{23} - a_2 p^{24}, 0, p^{23}, p^{24}); \\ e_2 & \left( \frac{-b_1 p^{23} + a_2 p^{34}}{p^{23}}, -1, 0, \frac{p^{34}}{p^{23}} \right). \end{aligned}$$

Всякий вектор, лежащий в искомой двумерной плоскости, раскладывается по этим двум векторам. Отсюда

$$\begin{aligned} x^1 & = -\lambda_1 (a_1 + a_2 p^{24}) - \lambda_2 (b_1 + a_2 p^{34}); \\ x^2 & = -\lambda_2; \\ x^3 & = -\lambda_1; \\ x^4 & = \lambda_1 p^{24} + \lambda_2 p^{34}. \end{aligned}$$

Исключая параметры  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , получим

$$\begin{aligned} x^1 & = -x^3 (a_1 + a_2 p^{24}) - x^2 (b_1 + a_2 p^{34}); \\ x^4 & = x^3 p^{24} - x^2 p^{34}. \end{aligned}$$

Докажем, что все эти плоскости лежат в фиксированном трехмерном пространстве, т. е. ортогональны фиксированному (зависящему только от  $a_1, a_2, a_3$ ) направлению. Найдем это направление.

Сначала найдем все двумерные плоскости, ортогональные ( $\alpha$ ). Для этого приравняем нулю скалярное произведение вектора  $x$  и некоторого вектора  $y$  ( $y^1, y^2, y^3, y^4$ ).

$$\begin{aligned} -y^1 [a_1 (a_1 + a_2 p^{24}) - a_2 (b_1 + a_2 p^{34})] - y^2 \lambda_2 - y^3 \lambda_1 + \\ + y^4 (\lambda_1 p^{24} + \lambda_2 p^{34}) = 0. \end{aligned}$$

Приравнивая коэффициенты при  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  нулю, получим

$$\begin{aligned} -y^1 (a_1 + a_2 p^{24}) + y^3 + y^4 p^{24} &= 0; \\ -y^1 (b_1 + a_2 p^{34}) - y^2 + y^4 p^{34} &= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Эта система уравнений должна выполняться тождественно относительно  $p^{24}, p^{34}$ , откуда

$$\begin{aligned} -y^1 a_2 + y_4 &= 0; \\ -y^1 a_1 + y_3 &= 0; \\ -y^1 b_1 - y_2 &= 0. \end{aligned}$$

Это и есть уравнение искомой прямой.

Если трехмерные плоскости заданы системой уравнений

$$p^{23} = a_1 p^{12} + a_2 p^{13} + a_3 p^{14};$$

$$p^{24} = b_1 p^{12} + b_2 p^{13} + b_3 p^{14};$$

$$p^{34} = c_1 p^{12} + c_2 p^{13} + c_3 p^{14},$$

то подставляя, как и в предыдущем случае, эти значения в (2''), получим

$$\begin{aligned} p^{23} &= a_1 p^{12} + a_2 p^{13}; \\ p^{24} &= b_1 p^{12} + b_2 p^{14}; \\ p^{34} &= b_1 p^{13} - a_2 p^{14}. \end{aligned} \tag{3'}$$

Отсюда находим двумерные плоскости

$$\begin{aligned} x^3 &= -x^1 (a_1 + a_2 p^{13}) + x^2 p^{13}; \\ x^4 &= -x^1 (b_1 + a_2 p^{14}) + x^2 p^{14}. \end{aligned}$$

Приравнивая нулю коэффициенты при степенях  $p^{13}$ ,  $p^{14}$ , получим, что все двумерные плоскости проходят через одну прямую

$$x^3 + x^1 a_1 = 0;$$

$$x^2 - x^1 a_2 = 0;$$

$$x^4 + x^1 b_1 = 0.$$

Трехмерные плоскости бивекторов вида

$$p^{12} = a_1 p^{23} + a_2 p^{24} + a_3 p^{14};$$

$$p^{13} = b_1 p^{23} + b_2 p^{24} + b_3 p^{14};$$

$$p^{34} = c_1 p^{23} + c_2 p^{24} + c_3 p^{14}$$

не лежат на конусе (2"). В этом нетрудно убедиться непосредственной подстановкой.

2. Пусть теперь через точку  $P$  проходит  $\mu$ -параметрическое семейство двумерных вполне геодезических поверхностей. Ортогональные траектории этого семейства устанавливают между его отдельными поверхностями изометрическое соответствие. Отсюда следует, что кривизна пространства в точке  $P$  по площадкам, касающимся вполне геодезических поверхностей, постоянна. Вполне геодезические поверхности могут касаться только тех бивекторов, которые принадлежат одновременно индикаторисе (2') и сфере, радиус которой равен кривизне пространства по площадкам касательным к вполне геодезическим поверхностям.

**Лемма 3.** Если в четырехмерном римановом пространстве существует трехмерная аналитическая поверхность  $F_3$ , на которой лежит по меньшей мере двупараметрическое семейство двумерных вполне геодезических поверхностей пространства, причем через каждую точку поверхности  $F_3$  проходит хотя бы однопараметрическое семейство двумерных вполне геодезических поверхностей, то сама поверхность  $F_3$  является вполне геодезической поверхностью пространства.

В самом деле, в работах [3, 5] доказано, что двумерные вполне геодезические поверхности либо проходят через одну точку, либо расположены пучками, и «оси» пучков не пересекаются. Но тогда всякая геодезическая линия поверхности  $F_3$  лежит на вполне геодезической поверхности и, следовательно, совпадает с геодезической линией пространства.

**Теорема 1.** Если полное четырехмерное риманово пространство с аналитической метрикой допускает только четырехпараметрическое семейство двумерных вполне геодезических поверхностей, причем поверхности семейства проходят по главным направлениям индикаторис и через каждую точку пространства проходит по меньшей мере одно двупараметрическое семейство и существует хотя бы одна точка, в которой индикаториса допускает только двупараметрическое семейство главных направлений, то либо а) все поверхности семейства содержат одну точку, либо б) через каждую точку пространства проходит двупараметрический пучок вполне геодезических поверхностей с одномерной «осью», и никакие две «оси» не пересекаются, или же в) пространство допускает однопараметрическое семейство трехмерных вполне геодезических поверхностей постоянной кривизны.

Линейный элемент пространства приводится к одному из следующих видов:

в случае а)

$$dS^2 = dx^{12} + \varphi(x^1) dS_3^2(x^2, x^3, x^4), \quad (3)$$

где  $dS_3^2$  — линейный элемент трехмерной поверхности постоянной кривизны,

в случае б)

$$dS^2 = dx^{1^2} + \varphi(x^1) dS_3^2(x^2, x^3, x^4), \quad (4)$$

где  $dS_3^2$  — линейный элемент некоторой трехмерной поверхности, в случае в)

$$dS^2 = dS_3^2(x^1, x^2, x^3) + \varphi(x^1, \dots, x^4) dx^{4^2}, \quad (5)$$

где  $dS_3^2$  обладает постоянной кривизной.

**Доказательство.** Возьмем точку  $P$ , в которой индикатриса допускает только двупараметрическое семейство главных направлений. Трехмерные пространства главных направлений  $E_{3P}$  имеют либо вид (2), либо (3). Таким образом, возможны два следующие случая.

I. Все вполне геодезические поверхности, проходящие через точку  $P$ , содержат одну геодезическую линию, т. е. мы имеем пучок вполне геодезических поверхностей с одномерной «осью».

II. Все вполне геодезические поверхности, проходящие через точку  $P$ , образуют некоторую трехмерную вполне геодезическую в точке  $P$  поверхность  $F_{3P}$ . В силу леммы 3 поверхность  $F_{3P}$  является вполне геодезической поверхностью пространства.

Рассмотрим случай I.

Пусть все поверхности, проходящие через точку  $P$ , образуют пучок с «осьью»  $\delta_P$ .

Возьмем точку  $Q$ , близкую к точке  $P$ . Все вполне геодезические поверхности, проходящие через  $Q$ , образуют в силу аналитичности семейства [4] тоже пучок с «осьью»  $\delta_Q$ .

Имеем две возможности

- 1) «оси»  $\delta_P$  и  $\delta_Q$  пересекаются в точке  $M$ ,
- 2) «оси»  $\delta_P$  и  $\delta_Q$  вовсе не пересекаются.

Рассмотрим первый случай.

Пусть «оси»  $\delta_P$  и  $\delta_Q$  пересекаются в точке  $M$ . Докажем, что в точке  $M$  индикатриса допускает семейство главных направлений, зависящее более чем от двух параметров.

Действительно, если у трехмерных пространств  $E_{3P}$  и  $E_{3Q}$  соответствующих  $\delta_P$  и  $\delta_Q$  есть общее направление, утверждение доказано в силу свойств главных направлений. Если у пространств  $E_{3P}$  и  $E_{3Q}$  такого направления нет, то они полностью ортогональны друг другу. И тогда поверхности, соответствующие  $E_{3Q}$  не могут в силу доказанной леммы 2 иметь общую геодезическую.

Возьмем точку  $P_0$ , близкую к  $P$  и  $Q$ ,  $P_0 \in \delta_P$ ,  $P_0 \in \delta_Q$ . Через  $P_0$  проходит поверхность  $F_P$  из семейства с «осьью»  $\delta_P$  и поверхность  $F_Q$  из семейства с осью  $\delta_Q$ . Кроме того, через  $P_0$  проходит пучок с осью  $\delta_{PQ}$ . В точке  $P_0$  имеем, таким образом, двупараметрическое семейство главных направлений  $E_{P_0}$  и, кроме него, еще два главные направления:  $n_P$ , касательное к поверхности  $F_P$  и  $n_Q$ , касательное к поверхности  $F_Q$ . Поверхности  $F_P$  и  $F_Q$ , имея две общие точки  $P$  и  $Q$ , пересекаются по геодезической  $\delta_{PQ}$ .

Докажем, что  $\delta_{PQ}$  совпадает с  $\delta_{P_0}$ .

Предположим, что  $\delta_{PQ}$  не совпадает с  $\delta_{P_0}$ , тогда по меньшей мере одно из направлений  $n_P$  или  $n_Q$  ортогонально  $E_{P_0}$ . Пусть для определенности  $n_P$  ортогонально  $E_{P_0}$ . Выбирая на  $F_P$  последовательность точек  $P_{0i} \rightarrow P$ , получим в каждой точке последовательности  $P_{0i}$  ту же картину, что и в точке  $P_0$ . По непрерывности и в точке  $P$  получим два трехмерных пространства главных направлений  $E'_{3P}$  и  $E''_{3P}$ . В  $E'_{3P}$  лежат векторы ортогональные  $E''_{3P}$ , что невозможно, так как в этом случае либо в точке  $P_0$  вполне геодезические поверхности не будут образовывать пучка (лемма 2),

либо индикатриса в точке  $P$  допускает более чем двупараметрическое семейство главных направлений.

Таким образом, линия пересечения поверхностей  $F_P$  и  $F_Q$  совпадает с осью  $\delta_{P_0}$ .

Рассмотрим случай 2). Пусть «оси»  $\delta_P$  и  $\delta_Q$  не пересекаются. Рассмотрим все «оси», имеющиеся в пространстве. Если никакие две из них не пересекаются, то утверждение доказано, причем на каждой двумерной вполне геодезической поверхности лежит однопараметрическое семейство «осей».

Действительно, через точку  $P$  проходит «ось»  $\delta_P$ , через точку  $Q$  — «ось»  $\delta_Q$ . Возьмем точку  $P_0$ , близкую к точкам  $P$  и  $Q$ ,  $P_0 \in \delta_P$ ,  $P_0 \in \delta_Q$ . Через  $P_0$  проходит «ось»  $\delta_{P_0}$ . В точке  $P_0$  индикатриса, как и в случае I), допускает двупараметрическое семейство главных направлений  $E_{3P_0}$  и еще два главных направления  $n_P$  и  $n_Q$ , касательные к  $F_P$  и  $F_Q$ . Выбирая, как и в предыдущем случае, последовательность точек  $P_{i_0}$  сходящуюся к точке  $P$  либо  $Q$ , получим, что либо в этой точке индикатриса допускает семейство главных направлений, зависящее от большего числа параметров, либо в точке  $P_0$  поверхности не образуют пучка.

Рассмотрим случай II.

Пусть поверхности, проходящие через точку  $P$  образуют трехмерную вполне геодезическую силу леммы З поверхность  $F_{3P}$ . Возьмем точку  $Q \in F_{3P}$ , близкую к точке  $P$ . Поверхности, проходящие через точку  $Q$  образуют трехмерную вполне геодезическую поверхность  $F_{3Q}$ . В точке  $Q$  индикатриса допускает двупараметрическое семейство главных направлений  $E_{3Q}$ , соответствующее  $F_{3Q}$  и еще однопараметрическое семейство главных направлений  $E_{2Q}$ , соответствующее тем вполне геодезическим поверхностям поверхности  $F_{3P}$ , которые проходят через точку  $Q$ .

Докажем, что  $E_{3Q}$  касается поверхности  $F_{3P}$ .

Предположим, что это неверно. Тогда  $E_{2Q}$  ортогональна  $E_{3Q}$ , в противном случае индикатриса в точке  $Q$  допускала бы семейство главных направлений, зависящее более чем от двух параметров. Аналогичная картина должна иметь место и в точке  $P$ . Но тогда в точке  $P$  индикатриса допускает две трехмерные взаимно ортогональные плоскости главных направлений. Следовательно, двупараметрическое семейство вполне геодезических поверхностей, проходящее через точку  $Q$ , не может быть ортогонально фиксированному направлению (поверхности этого семейства образуют пучок с одномерной «остью»).

Найдем вид линейного элемента пространства.

Сначала рассмотрим тот случай, когда все двумерные вполне геодезические поверхности проходят через фиксированную точку  $M$ .

Построим геометрическое место точек, равноудаленных от точки  $M$ . Получим некоторую трехмерную «сферу»  $\Phi_3$  с центром в точке  $M$ . Геодезические линии сферы  $\Phi_3$  являются линиями пересечения ее с вполне геодезическими поверхностями пространства [5]. Так как ортогональные траектории семейства вполне геодезических поверхностей устанавливают между отдельными поверхностями изометрическое соответствие, то сфера  $\Phi_3$  обладает свободной подвижностью вокруг каждой своей точки. Она является, таким образом, пространством постоянной кривизны.

Выбирая за координатные поверхности построенные сферы и за одно из семейств координатных линий — радиусы этих сфер, получим, что линейный элемент пространства запишется в виде

$$dS^2 = dx^{1^2} + \varphi(x^1) dS_3^2(x^2, x^3, x^4), \quad (3)$$

где  $d, S_3^2$  — линейный элемент сферы.

Рассмотрим случай, когда «оси» однопараметрических пучков не пересекаются.

Выберем на одной из «осей» точку  $M$  и проведем трехмерную поверхность  $\Phi_3$  ортогональную всем «осям». Всякая ортогональная траектория вполне геодезических поверхностей, которая касается  $\Phi_3$ , полностью лежит на этой поверхности. Таким образом, ортогональные траектории семейства вполне геодезических поверхностей переводят «ось» семейства в «ось» того же семейства. Так как вполне геодезические поверхности пересекают поверхности  $\Phi_3$  ортогонально, то линии, полученные при этом пересечении будут геодезическими линиями поверхности  $\Phi_3$  [4].

Зафиксируем две близкие поверхности  $\Phi'_3$  и  $\Phi''_3$ . На поверхности  $\Phi'_3$  возьмем четыре точки  $M'$ ,  $N'$ ,  $P'$ ,  $Q'$  так, чтобы

$$M'N' = P'Q'$$

в смысле метрики поверхности  $\Phi_3$ . Проведем через точки  $M'$ ,  $N'$ ,  $P'$ ,  $Q'$  геодезические линии пространства — «оси» семейств вполне геодезических поверхностей. Они пересекут поверхность  $\Phi''_3$  соответственно в точках  $M''$ ,  $N''$ ,  $P''$ ,  $Q''$ . На поверхности  $\Phi'_3$  проведем геодезические этой поверхности  $M'N'$  и  $P'Q'$ , проведем также некоторую линию  $\gamma$ , ортогональную  $M'N'$  в точке  $M'$  и  $P'Q'$  в точке  $P'$ . Выберем однопараметрическое семейство вполне геодезических поверхностей, для которого линия  $\gamma$  служит ортогональной траекторией. Ортогональные траектории этого семейства переводят «ось» семейства в «ось», поэтому они будут переводить отрезок  $M''N''$  в отрезок  $P''Q''$ . Соответствие между поверхностями  $\Phi'_3$  и  $\Phi''_3$  конформное.

Выбирая «оси» за одно из семейств координатных линий и поверхности  $\Phi_3$  за одно из семейств координатных поверхностей, получим, что линейный элемент пространства можно записать в следующем виде:

$$dS^2 = dx^{1^2} + \varphi(x^1) dS_3^2(x^2, x^3, x^4), \quad (4)$$

где  $dS_3^2$  — линейный элемент поверхности  $\Phi_3$ .

Рассмотрим, наконец, тот случай, когда пространство допускает однопараметрическое семейство трехмерных вполне геодезических поверхностей постоянной кривизны.

Следуя методу Картана [1, стр. 176] нетрудно показать, что линейный элемент пространства можно записать в виде:

$$dS^2 = d\sigma_3^2(x^1, x^2, x^3) + \varphi(x^1, \dots, x^4) dx^{4^2}, \quad (5)$$

где  $d\sigma_3^2$  — линейный элемент трехмерной поверхности постоянной кривизны.

**Обратная теорема.** Если линейный элемент пространства имеет вид (3), (4) или (5), то такое пространство допускает четырехпараметрическое семейство двумерных вполне геодезических поверхностей.

Доказательство этой теоремы, в случае, когда линейный элемент пространства имеет вид (5), очевидно.

Вид линейного элемента (3) является частным случаем (4). Достаточно поэтому доказать теорему для пространств с линейным элементом (4).

Введем на поверхности  $\Phi_3$  обобщенную полугеодезическую систему координат [1]. Тогда линейный элемент поверхности примет следующий вид:

$$dS_3^2 = \varphi(x_0^1) [dx^{2^2} + a_{\alpha\beta}(x^2, x^3, x^4) dx^\alpha dx^\beta] \\ (\alpha, \beta = 3, 4).$$

Линии  $x^3 = \text{const}$ ,  $x^4 = \text{const}$  являются геодезическими линиями на поверхности  $\Phi_3$ . С другой стороны, символы Кристоффеля, вычисленные для метрики пространства, имеют следующий вид:

$$\Gamma_{ij}^\alpha \equiv 0 \quad (\alpha = 3, 4, i, j = 1, 2).$$

Этого достаточно, чтобы считать поверхность  $x^3 = \text{const}$ ,  $x^4 = \text{const}$  вполне геодезической. Но мы можем включить в координатную систему поверхности  $\Phi_3$  произвольную геодезическую. Так как поверхность  $\Phi_3$  допускает четырехпараметрическое семейство геодезических линий, то пространство допускает четырехпараметрическое семейство двумерных вполне геодезических поверхностей.

*Теорема 2. Если полное четырехмерное риманово пространство с аналитической метрикой допускает пятипараметрическое семейство вполне геодезических поверхностей, причем через каждую точку пространства проходит по меньшей мере трехпараметрическое семейство, и каждая вполне геодезическая поверхность ортогональна главному направлению индикатрисы, то либо такое пространство допускает двупараметрическое семейство трехмерных вполне геодезических поверхностей постоянной кривизны, либо само является пространством постоянной кривизны.*

*Доказательство.* Так как через каждую точку пространства проходит трехпараметрическое семейство вполне геодезических поверхностей, то индикатриса в каждой точке допускает по меньшей мере трехпараметрическое семейство главных направлений.

Докажем, что если каждую точку пространства проходит трехпараметрическое семейство вполне геодезических поверхностей, то индикатриса не может в условиях теоремы допускать только трехпараметрическое семейство главных направлений ни в одной точке пространства.

В самом деле, если индикатриса в точке  $P$  допускает только трехпараметрическое семейство главных направлений  $E_4$ , то каждому из них отвечает вполне геодезическая поверхность. Следовательно, все главные направления индикатрисы лежат на конусе  $(2'')$ , что противоречит лемме 2. Если плоскость  $E_4$  пересекает конус  $(2'')$  по  $i$ -мерному конусу  $K_i$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ , то на этом конусе не может лежать трехпараметрическое семейство образующих.

Если индикатриса в каждой точке пространства допускает пятипараметрическое семейство главных направлений, то это заведомо пространство постоянной кривизны.

Таким образом, в пространстве существует хотя бы одна точка, в которой индикатриса допускает только четырехпараметрическое семейство главных направлений  $E_5$ . Плоскость  $E_5$  может пересекать конус  $(2'')$  по  $i$ -мерному конусу  $K_i$ ,  $i = 0, 1, 2, 3, 4$ . Если плоскость  $E_5$  и конус  $(2'')$  пересекаются по  $j$ -мерному конусу  $K_j$ ,  $j = 0, 1, 2, 3$ , то, как доказано выше, на этом конусе не может лежать трехпараметрическое семейство образующих. Если  $E_5$  и конус  $(2'')$  пересекаются по четырехмерному конусу  $K_4$ , то всякой образующей конуса  $K_4$  отвечает вполне геодезическая поверхность.

Докажем, что на конусе  $K_4$  лежит однопараметрическое семейство трехмерных образующих.

Пусть плоскость  $E_5$  задана следующим уравнением:

$$p^{12} = \alpha_1 p^{13} + \alpha_2 p^{14} + \alpha_3 p^{23} + \alpha_4 p^{24} + \alpha_5 p^{34}.$$

Подставим в это уравнение семейство плоскостей  $(\alpha')$ , заведомо лежащих на конусе  $(2'')$ . (Заметим, что для плоскостей  $(\beta')$  исследование прово-

дится аналогично). При этом получим

$$\begin{aligned} a_1 p^{23} + a_2 p^{24} &= \alpha_1 (b_1 p^{23} + a_3 p^{34}) + \\ &+ \alpha_2 (b_1 p^{24} - a_1 p^{34}) + \alpha_3 p^{23} + \alpha_4 p^{24} + \alpha_5 p^{34} = 0. \end{aligned}$$

Приравнивая коэффициенты при степенях  $p^{ij}$  нулю, получим

$$\alpha_1 - \alpha_1 b_1 = \alpha_3, \quad (\gamma')$$

$$\alpha_2 - \alpha_2 b_1 = \alpha_4, \quad (\gamma'')$$

$$\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_2 \alpha_1 = -\alpha_5. \quad (\gamma''')$$

Одно из этих уравнений является следствием двух других. Действительно, из первых двух уравнений вытекает, что

$$\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_2 \alpha_1 = \alpha_4 \alpha_1 - \alpha_3 \alpha_2.$$

Вычитая это уравнение из  $(\gamma''')$  получим

$$\alpha_5 = \alpha_4 \alpha_1 - \alpha_3 \alpha_2,$$

но это уравнение выполняется в силу  $(2'')$ .

Пусть теперь в точке  $P$  индикатриса допускает только четырехпараметрическое семейство главных направлений. На конусе  $(2'')$  лежит однопараметрическое семейство трехмерных плоскостей  $E_3$ . Возможны два случая.

I. Все вполне геодезические поверхности, соответствующие тем главным направлениям, которые лежат в  $E_3$ , проходят через фиксированную геодезическую линию. В точке  $P$  имеем однопараметрическое семейство таких линий.

II. Все вполне геодезические поверхности, соответствующие главным направлениям  $E_3$ , образуют трехмерную вполне геодезическую поверхность  $F_3$ .

Рассмотрим случай I.

Пусть вполне геодезические поверхности, соответствующие направлениям  $E_3$ , имеют общую «ось»  $\delta_P$ , и таких «осей» имеется однопараметрическое семейство  $\{\delta_P\}$ .

Возьмем точку  $Q$  близкую к точке  $P$ . Через  $Q$  также проходит трехпараметрическое семейство двумерных вполне геодезических поверхностей. Расположены они таким же образом, как и поверхности, проходящие через точку  $P$ , т. е. в точке  $Q$  мы имеем некоторое однопараметрическое семейство «осей»  $\{\delta_Q\}$ . Проведем через точку  $Q$  все те поверхности, которые проходят через точку  $P$ . Таких поверхностей имеем однопараметрическое семейство  $\{F_{2PQ}\}$ . Поверхности семейства  $\{F_{2PQ}\}$ , имея общие точки  $P$  и  $Q$ , имеют общую геодезическую  $\delta_{PQ}$ .

Рассмотрим теперь главные направления индикатрисы в точке  $Q$ . В точке  $Q$  индикатриса допускает трехпараметрическое семейство главных направлений  $E_4$  и еще однопараметрическое семейство главных направлений, соответствующее семейству  $\{F_{2PQ}\}$ . Но мы можем в качестве точки  $Q$  взять произвольную точку пространства. В результате получим, что пространство обладает свободной подвижностью вокруг точки  $P$ . Так как точка  $P$  была произвольной точкой пространства, то оно обладает свободной подвижностью около каждой своей точки, т. е. является пространством постоянной кривизны.

Рассмотрим случай II.

Пусть все двумерные вполне геодезические поверхности, проходящие через точку  $P$ , образуют однопараметрическое семейство трехмерных вполне геодезических поверхностей  $\{F_{3P}\}$ . Через каждую точку пространства проходит по меньшей мере одна такая поверхность. Возьмем

точку  $Q$  близкую к  $P$ . Через  $Q$  проходит поверхность  $F_{3PQ}$ . С другой стороны, через точку  $Q$  проходит однопараметрическое семейство трехмерных вполне геодезических поверхностей  $\{F_{nQ}\}$ . Рассмотрим главные направления индикатрисы в точке  $Q$ . В точке  $Q$  индикатриса допускает трехпараметрическое семейство главных направлений  $E_4$ , соответствующее  $\{F_{3Q}\}$  и еще однопараметрическое семейство главных направлений  $E_2$ , соответствующее тем вполне геодезическим поверхностям, которые лежат на  $F_{3PQ}$  и проходят через точку  $Q$ . Плоскость  $E_2$  лежит на  $E_4$ ; в противном случае пространство обладало бы постоянной кривизной. А это означает, что трехмерные вполне геодезические поверхности обладают постоянной кривизной.

Найдем «в малом» вид линейного элемента пространства. Как показано в работе [4] линейный элемент риманова пространства, допускающего двупараметрическое семейство трехмерных вполне геодезических поверхностей, имеет вид

$$dS^2 = dx^{1^2} + \varphi_1(x^1, x^2) dx^{2^2} + \\ + \varphi_2(x^1, x^2) [dx^{3^2} + \varphi_3(x^3, x^4) dx^{4^2}]. \quad (6)$$

Линейный элемент вполне трехмерной геодезической поверхности при этом

$$ds^2 = dx^{1^2} + \varphi_1(x^1, x^2) dx^{2^2} + \varphi_2(x^1, x^2) dx^{3^2},$$

где  $\zeta^3$  — длина геодезической в пространстве  $(x^3, x^4)$ . Для того, чтобы пространство с линейным элементом  $ds^2$  обладало постоянной кривизной, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие равенства:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x^2} = 0, \quad \varphi_2 = \varphi_1 \varphi_2^1(x^2), \\ \frac{\partial^2 \ln \varphi_1}{\partial x^{1^2}} = \frac{d^2 \ln \varphi_2^1}{\partial x^{2^2}} = -2K, \quad (7)$$

$K = \text{const}$ ,

в чем нетрудно убедиться, вычислив компоненты тензора Римана для метрики  $ds^2$ . Это и доказывает теорему.

Верно и обратное утверждение.

Если линейный элемент пространства имеет вид (6) с условиями (7), то такое пространство допускает пятипараметрическое семейство двумерных вполне геодезических поверхностей.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Э. Картан. Геометрия римановых пространств. ОНТИ, М.—Л., 1936.
2. П. А. Широков. Тензорное исчисление. Изд-во Казанск. ун-та, Казань, 1961.
3. Ю. С. Слободян. О трехмерных римановых пространствах, допускающих семейства вполне геодезических поверхностей. Вестн. Харьковск. ун-та, серия мех.-матем., т. 33, 1965.
4. Ю. С. Слободян. О четырехмерных римановых пространствах, допускающих семейства трехмерных вполне геодезических поверхностей. Укр. геометр. сб., вып. 2, Изд-во ХГУ, Харьков, 1966.
5. Ю. С. Слободян. Поправка к статье «О трехмерных римановых пространствах, допускающих семейства вполне геодезических поверхностей». Укр. геометр. сб., вып. 2, Изд-во ХГУ, Харьков, 1966.

*Поступила 28 апреля 1967 г.*

---

## КОНЕЧНОСТЬ ЧИСЛА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ОДНОРОДНЫХ МНОГОГРАННИКОВ С НЕНУЛЕВОЙ ПЛОТНОСТЬЮ

*С. П. Соловьев* (Харьков)

Односвязный многогранник называется однородным, если все его грани правильные многоугольники, а любые две вершины могут быть переведены друг в друга при помощи преобразований симметрии так, что при этом многогранник переходит сам в себя. Назовем однородный многогранник элементарным, если он не имеет кратных вершин, ребер или граней. Все известные в настоящее время элементарные однородные многогранники перечислены в [1, табл. 7]. Примеры неэлементарных однородных многогранников можно найти в [1, табл. 6].

Рассмотрим многоугольник, вписанный в окружность. Зададим направление обхода на окружности и выберем одну из вершин  $A$  и одну из сторон, исходящую из  $A$ , многоугольника за исходные. Если угол между касательной к окружности в  $A$  и этой стороной меньше  $\frac{\pi}{2}$  (больше  $\frac{\pi}{2}$ ), будем считать, что сторона имеет положительное (отрицательное) направление. Если же угол равен  $\frac{\pi}{2}$ , будем считать сторону неориентированной. Количество пересечений луча, исходящего из центра окружности в любом направлении, со сторонами многоугольника с учетом их направления назовем плотностью многоугольника. Плотность вершины многоугольника будем считать равной 1 или -1, если обе исходящие из нее стороны имеют соответственно положительную или отрицательную ориентацию. Плотность вершины равна 0, если исходящие из нее стороны имеют противоположную ориентацию. Будем считать плотность многоугольника равной 0, если некоторые его стороны проходят через центр окружности. Плотностью  $a$  вершины однородного многогранника будем называть плотность его вершинной фигуры. Изменением ориентации окружности всегда можно получить плотность вершинной фигуры  $a \geq 0$ . В силу однородности

$$\sum_{i=1}^B a_i = aB,$$

где  $B$  — количество вершин многогранника.

Каждой грани ориентируемого однородного многогранника будем приписывать ориентацию соответствующей ей стороны вершинной фигуры. Очевидно, что заданием ориентации одной вершинной фигуре полностью задается ориентация всех вершинных фигур и граней многогранника. Число пересечений, которое дают грани многогранника с лучом, проведенным из его центра в любом направлении, называется плотностью многогранника. При этом учитывается плотность граней и их ориентация. Например, при пересечении луча с сердцевиной пятиугольной звезды будем считать плотность 2 или -2. Плотность  $i$ -й грани обозначим  $c_i$ , а плотность многогранника —  $D$ . Если некоторые грани однородного многогранника проходят через его центр, то будем плотность его считать равной 0, а эти грани — неориентированными плотности 0.

Плотность ребра, инцидентного двум граням с положительной (отрицательной) ориентацией равна 1 (или  $-1$ ). Если ребро инцидентно двум граням с противоположной ориентацией, то его плотность будем считать равной 0. Если одна из граней, инцидентная данному ребру, неориентирована, то плотность ребра будем считать равной 1 или  $-1$  соответственно ориентации второй грани. Если обе грани неориентированы, то плотность ребра равна 0.

Для каждого ориентируемого однородного многогранника справедлива обобщенная формула Эйлера

$$\sum_{i=1}^B a_i - \sum_{i=1}^P b_i + \sum_{i=1}^{\Gamma} c_i = 2D,$$

где  $a_i$  — плотность  $i$ -го ребра,  $P$  и  $\Gamma$  — соответственно количество ребер и граней многогранника [1, § 6].

Все вершины однородного многогранника лежат на сфере, центр которой является центром тяжести многогранника [2]. Из этого утверждения и самого определения однородного многогранника  $R$  непосредственно следует, что выпуклой оболочкой  $R$  является выпуклый многогранник, вершины которого переходят друг в друга при помощи преобразований симметрии, причем многогранник переходит сам в себя. Из результатов работы [4] следует, что выпуклые оболочки однородных многогранников могут иметь число вершин, равное только 4, 6, 8, 12, 20, 24, 30, 48, 60 и 120, без учета бесконечных серий призм и антипризм. Причем с числом вершин 4, 6, 8, 20, 30, 48 и 120 существует только по одному типу, с числом вершин 12 — три типа и с числом вершин 24 и 60 по четыре типа выпуклых оболочек. Так как элементарный однородный многогранник не имеет кратных вершин, то число его вершин  $B = 4, 6, 8, 12, 20, 24, 30, 48, 60, 120$ .

**Теорема 1.** Каждой вершине элементарного однородного многогранника может быть инцидентно не более 15 граней.

**Доказательство.** Пусть каждой вершине элементарного однородного многогранника  $R$  инцидентно  $S$  граней (ребер). Возьмем на сфере  $C$ , описанной вокруг  $R$ , произвольную его вершину  $A_0$ . Из нее выходит  $S$  ребер  $R$  длины  $l$ , концы которых дают еще  $S$  вершин  $R$ , которые мы обозначим через  $A_i$  ( $i = 1, 2, \dots, S$ ). Все  $A_i$  лежат на одной окружности. Из каждой вершины  $A_i$  опишем на сфере окружность внешнего радиуса  $l$ . Каждая такая окружность содержит  $S$  вершин  $R$ , т. е. всего  $S^2$  вершин. При этом  $A_0$  считается  $S$  раз, так как все  $S$  окружностей пересекаются в  $A_0$ . Между собой эти окружности могут иметь еще максимум  $C_S^2$  пересечений в вершинах  $R$ . Следовательно, число образованных вершин удовлетворяет неравенству

$$S^2 - (S - 1) - C_S^2 \leq B. \quad (1)$$

А так как  $B \leq 120$ , то  $S \leq 15$ .

Если же вершины  $A_i$  лежат на большом круге  $C$ , то тогда  $S$  ребер, исходящих из  $A_0$ , пересекутся в точке  $A'$ , диаметрально противоположной точке  $A_0$ . Это возможно лишь в том случае, когда в сечении  $R$  плоскостью, проходящей через его центр и два ребра, выходящие из  $A_0$ , получается квадрат. В этом случае (1) перепишется так

$$S^2 - 2(S - 1) - 2S \leq B$$

и при  $S \leq 120$ ,  $S \leq 13$ . Теорема доказана.

**Следствие 1.** Так как  $B$  может принимать только 10 различных значений, то при каждом значении  $B$  мы получим из (1) следующие ограничения для  $S_{\max}$ :

$B$	4	6	8	12	20	24	30	48	60	120
$S_{\max}$	3	4	4	5	6	7	8	10	11	15

**Следствие 2.**  $R$  не может иметь своей гранью многоугольник, число сторон которого выражается простым числом  $N > S_{\max}$  или числом кратным  $N$ .

**Доказательство.** Количество  $n$ -угольных граней  $R$

$$\Gamma_n = \frac{S_n B}{n} \quad (2)$$

должно быть целым числом. Здесь  $S_n$  — количество  $n$ -угольных граней, инцидентных одной вершине. Величина  $B$  выражается числами, кратными только трем простым числам 2, 3 и 5. Если  $n = N > S_{\max}$ , то  $S_n$  должно быть кратно  $N$ , т. е.  $S_n \geq S_N > S_{\max}$ . Это в силу теоремы 1 невозможно. Для каждого  $B$  мы имеем следующие значения для  $N_{\min}$ :

$B$	4	6	8	12	20	24	30	48	60	120
$N_{\min}$	5	5	5	7	7	11	11	11	13	17

В дальнейшем мы будем пользоваться следующими утверждениями.

**Лемма 1.** Если вершине элементарного однородного многогранника  $R$  инцидентно  $S_n \{n\}$ \*, то вершинам каждого  $\{n\}$  инцидентно не менее  $\frac{n(S_n - 1)}{2} \{n\}$ .

**Доказательство.** Каждой вершине  $\{n\}$  инцидентно  $S_n - 1 \{n\}$ , каждый из которых может иметь не более двух общих вершин с исходным  $\{n\}$ . Следовательно, всем его  $n$  вершинам инцидентно  $\{n\}$ :

$$\Gamma'_n \geq \frac{n(S_n - 1)}{2}. \quad (3)$$

Очевидно, что количество всех  $\{n\}$   $R$

$$\Gamma_n \geq \Gamma'_n + 1. \quad (4)$$

В дальнейшем мы исключаем из рассмотрения значения  $B = 4, 6, 8$ , так как многогранники с таким числом вершин имеют эйлерову характеристику  $\chi \geq 0$ . Все они рассмотрены в [3] и [4].

**Лемма 2.** Если элементарный однородный многогранник имеет  $B$  вершин, то он не может иметь своей гранью  $\{n\}$  при  $n > \frac{B}{2}$ .

**Доказательство.** Если  $S_n = 1$ , то  $\Gamma_n < \frac{B \cdot 1}{B/2} = 2$ , т. е.  $\Gamma_n = 1$ . Очевидно, что  $\Gamma_n \neq 1$ . Пусть  $S_n \geq 2$ , тогда  $\Gamma_n > 3$ , которые уже дают количество вершин  $B' > B$ . Следовательно, наше утверждение верно.

**Лемма 3.** Если элементарный однородный многогранник, отличный от призмы и антпризмы, имеет своей гранью  $\{n\}$ , то  $\Gamma_n > \frac{n}{2}$ .

\* В дальнейшем вместо «правильный  $n$ -угольник» будем писать  $\{n\}$ , а вместо «правильная  $n$ -угольная звезда плотности  $d$ » —  $\left\{\frac{n}{d}\right\}$ .

**Доказательство.** Ребра многогранника, не принадлежащие  $\{n\}$ , но инцидентные его вершинам, образуют по крайней мере  $n$  вершин, не-инцидентных этому  $\{n\}$ . Каждая из этих вершин должна принадлежать другому какому-то  $\{n\}$ . Но одному  $\{n\}$  может принадлежать не более чем две из этих вершин. Следовательно, многогранник уже имеет  $\frac{n}{2} + 1$   $\{n\}$ .

Из леммы 2 непосредственно следует

**Лемма 4.** Элементарный однородный многогранник, имеющий  $B = 12$ , может иметь своими гранями только  $\{n\}$  при  $n \leq 6$ .

**Лемма 5.** Элементарный однородный многогранник, имеющий  $B = 20$  и отличный от призмы и антипризмы, может иметь своими гранями только  $\{n\}$  при  $n < 6$ .

**Доказательство.** В силу леммы 2  $n \leq 10$ . Пусть  $n = 10$ , тогда  $S_{10} = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ . В силу леммы 3  $S_{10} \neq 1, 2$ . В силу леммы 1  $S_{10} \neq 3, 4, 5, 6$ , т. е.  $\Gamma_{10} < \Gamma'_{10}$ . Из следствия 2 теоремы 1 и формулы (2) заключаем, что  $n \neq 9$  и  $n \neq 7$ . Согласно (2), (3) и (4)  $n \neq 8$ . Пусть  $n = 6$ , тогда  $S > 3$ . Возможны следующие случаи:

- а)  $S_6 = 3; S_8 = 3$ ; б)  $S_6 = 3; S_4 = 1, 2, 3$ ; в)  $S_6 = 3; S_5 = 1, 2, 3$ ;
- г)  $S_6 = 3; S_4 = 1; S_5 = 1, 2$ ; д)  $S_6 = 3; S_4 = 2; S_5 = 1$ . (5)

При  $S_6 = 6$  мы имели бы правильный многогранник. В случаях а) — д)  $\Gamma_6 = 10$ . Каждому  $\{6\}$  инцидентно минимум 6  $\{6\}$ . При этом образуется [с учетом (5)] минимум 6 вершин, каждая из которых должна быть инцидентна трем  $\{6\}$ . Это невозможно.

**Лемма 6.** Элементарный однородный многогранник, отличный от призмы и антипризмы и имеющий  $B = 24$ , не может иметь своей гранью  $\{n\}$  при  $n > 8$  и  $n = 7$ .

**Доказательство.** Согласно леммам 1, 2 и формуле (2)  $n \leq 8$ . Если  $n = 7$ , то  $S_7 = 7$ . Это должен быть правильный многогранник, что невозможно [2].

**Лемма 7.** Элементарный однородный многогранник, отличный от призмы и антипризмы и имеющий  $B = 30$ , не может иметь своей гранью  $\{n\}$  при  $n > 10$  и  $n = 8, 9$ .

**Доказательство.** Согласно леммам 1, 2 и формуле (2)  $n \leq 10$ . Пусть  $n = 9$ , тогда  $S_9 = 3, 6, 9$ . Случай  $S_9 = 6, 9$  невозможен в силу леммы 1. Если  $S_9 = 3$ , то возможны два случая: а) каждые два  $\{9\}$  имеют только одну общую вершину; б) каждые два  $\{9\}$  имеют общее ребро. Случай а) невозможен в силу леммы 1, а случай б) — в силу нечетности числа сторон  $\{9\}$ . Пусть  $n = 8$ , тогда  $S_8 = 4, 8$ . При  $S_8 = 8$  уже 8  $\{8\}$  при одной вершине образуют минимум 29 вершин. Оставшиеся 22  $\{8\}$  должны быть подклеены к этим восьми так, чтобы при этом образовалась лишь одна новая вершина. Это невозможно. При  $S_8 = 4, \Gamma_8 = 15$ , а одному  $\{8\}$ , согласно лемме 1, инцидентно не менее 12  $\{8\}$ , т. е. для реализации замкнутого многогранника можно использовать еще всего лишь два  $\{8\}$ . Это невозможно, так как каждому из вышеупомянутых 12  $\{8\}$  должно быть инцидентно по крайней мере два  $\{8\}$ .

**Лемма 8.** Элементарный однородный многогранник, имеющий  $B = 48$  и отличный от призмы и антипризмы, не может иметь своей гранью  $\{n\}$  при  $n > 10$ .

**Доказательство.** По лемме 2  $n \leq 24$ . В силу следствия 2 теоремы 1  $n \neq 11, 13, 17, 19, 22, 23$ . По лемме 1  $n \neq 14, 15, 16, 18, 20, 21, 24$ . Пусть  $n = 12$ , тогда  $S_{12} = 1, 2, \dots, 10$ . Случай  $S_{12} \geq 3$  невозможен в силу леммы 1. По лемме 3  $S_{12} \neq 1$ . При  $S_{12} = 2$  возможны два случая: а) каждые два  $\{12\}$  имеют общее ребро; б) каждые два  $\{12\}$  имеют только одну общую вершину. Случай б) невозможен в силу леммы 1. В случае а) каждому  $\{12\}$  инцидентно 6  $\{12\}$ , т. е. ко всем оставшимся

свободным вершинам мы можем подклейть только один {12}. Что невозможно.

**Лемма 9.** Элементарный однородный многогранник, отличный от призмы и антипризмы и имеющий  $B = 60$ , не может иметь своей грани  $\{n\}$  при  $n > 12$  и  $n = 11$ .

**Доказательство.** По лемме 2  $n \leq 30$ . В силу леммы 1  $n \neq 13, 14, 16, 17, 18, 19, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29$ . Пусть  $n=30$ . Тогда при  $S_{30}=1$  имеем призму или антипризму, а  $S_{30} \geq 2$  невозможно в силу лемм 1, 3 и формулы (2). Пусть  $n=20$ . Тогда  $1 \leq S_{20} \leq 3$  невозможно в силу леммы 3, а  $4 \leq S_{20} \leq 11$  невозможно по лемме 1. Пусть  $n=15$ . Тогда по лемме 3  $S_{15} \neq 1$ , а по лемме 1  $S_{15} \neq 2, 3, \dots, 11$ . При  $n=11$  мы имели бы правильный однородный многогранник.

**Лемма 10.** Элементарный однородный многогранник, отличный от призмы и антипризмы и имеющий  $B = 120$ , не может иметь своими гранями  $\{n\}$  при  $n > 16$ .

**Доказательство.** По лемме 2  $n \leq 60$ . Согласно следствию 2 теоремы 1  $n \neq 17, 19, 23, 29, 31, 34, 37, 38, 41, 43, 46, 47, 51, 53, 57, 58, 59$ . Согласно леммам 1, 3 и формуле (2)  $n \neq 18, 21, 22, 25, 26, 27, 28, 32, 33, 35, 36, 39, 42, 45, 48, 49, 50, 52, 54, 55, 56$ . Пусть  $n=20$ . Тогда  $S_{20} \neq 1$  по лемме 3, а  $S_{20} \geq 2$  невозможно в силу леммы 1. Если  $n=30$ , то  $S_{30} \neq 1, 2, 3$  по лемме 3, а  $S_{30} \geq 4$  невозможно в силу леммы 1. Аналогичные доказательства для  $n=40$  и  $n=60$ .

Используя результаты лемм 1—10, мы получим следующие ограничения для  $n$  и  $S_n$ :

1.  $B = 12, 3 \leq n \leq 6, S_5 = 5, S_6 = 2;$
2.  $B = 20, 3 \leq n \leq 5, S_3 = 3;$
3.  $B = 24, 3 \leq n \leq 8, n \neq 7, S_5 = 5;$
4.  $B = 30, 3 \leq n \leq 10, n \neq 8, 9, S_4 = 2, 4, 6, S_7 = 7, S_{10} = 2;$
5.  $B = 48, 3 \leq n \leq 10, S_5 = 5, 10, S_7 = 7, S_9 = 3, 6, 9, S_{10} = 5, 10;$
6.  $B = 60, 3 \leq n \leq 12, n \neq 11, S_7 = 7, S_9 = 2, 4, 6, 8, 10, S_9 = 3, 6, 9, S_{12} = 2, 3, 4;$
7.  $B = 120, 3 \leq n \leq 16, S_7 = 7, 14, S_9 = 3, 6, 9, 12, 15, S_{11} = 11, S_{13} = 13, S_{14} = 7, 14, S_{16} = 2, 4, 6, 8, 10.$

Назовем условной кривизной в вершине однородного многогранника число  $\delta = 2\pi - \sum_{i=1}^S \alpha_i$ , где  $\alpha_i = \frac{\pi(n_i - 2)}{n_i}$  — плоские углы граней, прилегающих к одной вершине, причем плоские углы  $\{n/d\}$  заменяются плоскими углами  $\{n\}$ . Соотношение между условной кривизной в вершине однородного многогранника, его эйлеровой характеристикой и количеством вершин устанавливает

**Теорема 2.** Эйлерова характеристика однородного многогранника  $R$  равна произведению количества его вершин на условную кривизну в вершине, деленному на  $2\pi$ .

**Доказательство.** Используя формулу Эйлера

$$B - P + \Gamma = \chi$$

и известные соотношения между элементами  $R$ , легко получить соотношение между  $S_i, n, B$  и  $\chi$  [4]:

$$\sum \frac{S_i}{n_i} = \frac{S-2}{2} + \frac{\chi}{B}. \quad (5)$$

Умножая левую и правую часть (5) на  $2\pi$  и используя очевидное равенство  $\sum S_i = S$ , получим

$$2\pi \left( \sum \frac{S_i}{n_i} - \sum \frac{S_i}{2} + 1 \right) = \frac{2\pi \chi}{B}$$

или

$$2\pi - \sum \frac{\pi S_i (n_i - 2)}{n_i} = \frac{2\pi \chi}{B}. \quad (6)$$

Слева в равенстве (6) стоит выражение для условной кривизны. Следовательно

$$\chi = \frac{\delta B}{2\pi}. \quad (7)$$

Из (7) видно, что  $\chi$  и  $\delta$  всегда одного знака.

Случай, когда  $\chi \geq 0$ , были рассмотрены в работах [3] и [4]. В настоящее время известно 42 элементарных однородных многогранников с  $\chi < 0$ .

Решая уравнение (7) в целых числах, мы получим характеристики для однородных многогранников. Так как  $B$  принимает только 10 различных значений, а  $3 \leq n \leq 16$  и  $3 \leq S \leq 15$ , то решений этого уравнения будет конечное число, т. е. мы получим конечное число наборов многоугольников, которые могут служить гранями однородного многогранника. Для реализации их в виде однородных многогранников нужно задать все возможные вершинные фигуры, т. е. все возможные порядки склеивания многоугольников. Пусть длина ребра однородного многогранника равна 1. Будем вписывать в окружность радиуса 1 ломаные, звеньями которых являются диагонали  $\{n\}$  или  $\left\{\frac{n}{d}\right\}$  из данного набора многоугольников, инцидентных одной вершине. Для многоугольника  $\left\{\frac{n}{d}\right\}$  длина диагонали равна  $2 \cos \frac{d\pi}{n}$ . Кроме того, мы должны перебрать все возможные порядки следования друг за другом звеньев ломаной. Если ломаная замкнется, то звезда вершины однородного многогранника будет плоской, т. е. многогранник будет вырожденным. Нас будут интересовать вершинные фигуры, для которых  $r < 1$ . Уменьшая  $r$ , мы можем добиться такого положения, когда ломаная замкнется. Если же при уменьшении  $r$  ломаная не замыкается, то многогранника с данным набором граней и порядком их следования друг за другом не существует. Примером может служить набор граней из {6}, {8} и {10} при  $s = 3$  и  $S_6 = S_8 = S_{10} = 1$ . Их диагонали, равные соответственно  $2 \cos \frac{\pi}{6}$ ,  $2 \cos \frac{\pi}{8}$  и  $2 \cos \frac{\pi}{10}$ , образуют треугольник, который не может быть вписан в окружность радиуса  $r < 1$ . При уменьшении  $r$  мы можем получить или конечное число замкнутых многоугольников (например, вершинные фигуры икосаэдра и большого икосаэдра) или бесконечно много замкнутых многоугольников (например, пересеченный параллелограмм). В последнем случае радиус описанной окружности

$$\max \cos \frac{d_i \pi}{n_i} \leq r < 1.$$

Очевидно, что в этом случае плотность вершинной фигуры равна 0, а  $S$  — четное число, причем количество  $n_i$ -угольных граней с положительной ориентацией равно количеству таких же граней с отрицательной ориентацией, т. е. плотность многогранника равна 0.

Полученные результаты мы выразим в виде следующей теоремы.

**Теорема 3.** Существует только конечное число элементарных однородных многогранников с ненулевой плотностью.

Спроектируем ребра ориентируемого однородного многогранника из его центра на описанную сферу. Тогда сумма площадей сферических многоугольников с учетом их ориентации должна быть кратной площади поверхности сферы. Это есть одно из необходимых условий существования элементарного однородного многогранника. Площади сферических  $\left\{ \frac{n}{d} \right\}$  легко выражаются через радиус  $r$  описанной окружности вокруг вершинной фигуры. Если ребро однородного многогранника равно 1, то площадь сферического  $\left\{ \frac{n}{d} \right\}$

$$S_{\{n/d\}} = \left[ n \arccos \left( 1 - \frac{2 \cos^2 \frac{d\pi}{n}}{r^2} \right) - (n-2d)\pi \right] \cdot \frac{1}{4(1-r^2)}.$$

Таким способом мы можем найти все ориентируемые элементарные однородные многогранники с ненулевой плотностью.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. H. S. M. Coxeter, M. S. Longuet-Higgins, J. C. P. Miller. Uniform polyhedra, Philos. trans. roy. soc., London, 246, № 916, ser. A, 401—450, 1954.
2. H. S. M. Coxeter. Regular polytopes. London, 1948.
3. С. П. Солов. Одна теорема об однородных многогранниках, Укр. геометр. сб., вып. 2, Изд-во ХГУ, Харьков, 1966.
4. С. П. Солов. О количестве однородных многогранников с неотрицательной эйлеровой характеристикой. Укр. геометр. сб., вып. 3, Изд-во ХГУ. Харьков, 1966.

Поступила 26 апреля 1967 г.

## О ПОВЕРХНОСТЯХ ПЕРЕНОСА ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА

*T. N. Трыкова* (Харьков)

Группа движений гиперболического пространства, как известно, не имеет подгруппы вещественных переносов, поэтому для построения аналого поверхностей переноса в геометрии Лобачевского следует исходить из иного определения этих поверхностей.

Поверхности переноса евклидова пространства представляют собой поверхности, несущие цилиндрическую сеть, т. е. сопряженную сеть, составленную из линий касания описанных около поверхности цилиндров. В гиперболическом пространстве им соответствуют поверхности, несущие такую сопряженную сеть, у которой вдоль каждой линии, принадлежащей любому из двух семейств сети, касательные к линиям второго семейства представляют собой параллели Лобачевского.

Следовательно, аналогом поверхностей переноса в гиперболическом пространстве является поверхность, несущая коническую сеть, у которой вершины конусов сети расположены на абсолюте. В этом смысле поверхности переноса гиперболического пространства исследованы в работе [1].

В настоящей статье решается вопрос об отыскании поверхностей переноса в классе поверхностей вращения гиперболического пространства.

### I. Уравнение абсолюта гиперболического пространства

$$x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0$$

можно преобразовать к виду

$$y_0 y_2 - y_1 y_3 = 0,$$

положив

$$\begin{aligned} y_0 &= x_0 + x_1, \\ y_1 &= x_2 + ix_3, \\ y_2 &= x_0 - x_1, \\ y_3 &= x_2 - ix_3. \end{aligned}$$

Проективное преобразование

$$\begin{aligned} \rho y_0 &= e^y y'_0, \\ \rho y_1 &= y'_1, \\ \rho y_2 &= e^{-y} y'_2, \\ \rho y_3 &= y'_3 \end{aligned} \tag{1}$$

оставляет инвариантным абсолют и точечно-инвариантной прямую

$$y_0 = 0, y_2 = 0,$$

В координатах  $x_i$  (1) имеет вид

$$\begin{aligned}\rho x_0 &= \operatorname{ch} yx'_0 + \operatorname{sh} yx'_1, \\ \rho x_1 &= \operatorname{sh} yx'_0 + \operatorname{ch} yx'_1, \\ \rho x_2 &= x'_2, \\ \rho x_3 &= x'_3.\end{aligned}\quad (2)$$

Преобразование (2) есть вращение гиперболического пространства вокруг прямой  $x_0 = 0, x_1 = 0$ .

В качестве образующей поверхности вращения возьмем в плоскости  $x'_1 = 0$  кривую

$$x'_0 = x, \quad x'_3 = p(x), \quad x'_2 = q(x).$$

Тогда из уравнений (2) получим уравнения поверхности вращения в гиперболическом пространстве

$$\begin{aligned}\rho x_0 &= x \operatorname{ch} y, \\ \rho x_1 &= x \operatorname{sh} y, \\ \rho x_2 &= p(x), \\ \rho x_3 &= q(x).\end{aligned}\quad (3)$$

II. Поверхность с конической сетью можно определить уравнениями

$$\begin{aligned}\lambda x_0 &= U_0(u) - V_0(v), \\ \lambda x_1 &= U_1(u) - V_1(v), \\ \lambda x_2 &= U_2(u) - V_2(v), \\ \lambda x_3 &= u - v,\end{aligned}\quad (4)$$

при этом координатными линиями поверхности служат линии конической сети.

Вершины конусов расположены на линиях

$$x_i = \frac{dU_i}{du}, \quad x_i = \frac{dV_i}{dv}.$$

По определению, эти линии принадлежат абсолюту. Следовательно,

$$\begin{aligned}U'^2 - U'^2 - U'^2 &= 1, \\ V_0'^2 - V_1'^2 - V_2'^2 &= 1.\end{aligned}\quad (5)$$

С другой стороны, искомая поверхность должна быть поверхностью вращения. Поэтому ее можно представить также и в виде (3).

Из уравнений (3) и (4) следует, что

$$\frac{D\left(\frac{x_2}{x_3}, \frac{x_3^2}{x_0^2 - x_1^2}\right)}{D(u, v)} = 0. \quad (6)$$

В работе [1] были найдены все поверхности переноса гиперболического пространства с бесконечным числом сетей переноса. Поэтому ограничимся конечного числа сетей.

В этом случае одночленная группа вращений переводит линии конической сети в линии этой же сети, т. е. оставляет сеть инвариантной. Из (2) следует, что при вращении точки  $(x_0, x_1, x_2, x_3)$  вокруг оси  $x_0 = x_1 = 0$  отношение  $\frac{x_2}{x_3}$  остается постоянным. Следовательно,

$$\frac{U'_2}{U'_3} = \alpha, \quad \frac{V'_2}{V'_3} = \beta, \quad (7)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  постоянные, или

$$\begin{aligned}U_2 &= \alpha u + \alpha_1, \\ V_2 &= \beta v + \beta_1,\end{aligned}\quad (8)$$

$\alpha_1, \beta_1$  — постоянные.

Учитывая (7), запишем соотношение (5) следующим образом:

$$\begin{aligned} U_0^2 - U_1^2 &= 1 + \alpha^2, \\ V_0^2 - V_1^2 &= 1 + \beta^2. \end{aligned} \quad (9)$$

Принимая во внимание (7), (8), (9), приводим уравнение (6) к виду

$$(\alpha - \beta) [(U_0 - V_0)^2 - (U_1 - V_1)^2] + (\beta u - \alpha_1 - \beta_1) [(U_0 - V_0) U'_0 - (U_1 - V_1) U'_1] + (\alpha v - \alpha_1 + \beta_1) [(U_0 - V_0) V'_0 - (U_1 - V_1) V'_1] = 0. \quad (10)$$

Дифференцируя (10) по  $u$  и  $v$ , получим

$$\begin{aligned} &[(\alpha - \beta) u + \alpha_1 - \beta_1] (U''_0 V'_0 - U''_1 V'_1) + \\ &+ [(\alpha - \beta) v + \alpha_1 - \beta_1] (U'_0 V''_0 - U'_1 V''_1) = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Разделим (11) на  $U_0 V_0 \neq 0$  и продифференцируем результат по  $u$  и  $v$ . Получим

$$\left\{ [(\alpha - \beta) u + \alpha_1 - \beta_1] \frac{U''_0}{U'_0} \right\}' \left( \frac{V'_1}{V'_0} \right)' + \left( \frac{U'_1}{U'_0} \right)' \left\{ [(\alpha - \beta) v + \alpha_1 - \beta_1] \frac{V''_1}{V'_0} \right\}' = 0. \quad (12)$$

Разделив (12) на произведение

$$\left( \frac{U'_1}{U'_0} \right)' \left( \frac{V'_1}{V'_0} \right)' \neq 0,$$

получим соотношения

$$\begin{aligned} &[(\alpha - \beta) u + \alpha_1 - \beta_1] U''_1 = c_0 U'_1 + c_1 U'_0, \\ &[(\alpha - \beta) v + \alpha_1 - \beta_1] V''_1 = -c_0 V'_1 + c_1 V'_0, \end{aligned} \quad (13)$$

где  $c, c_0, c_1$  — постоянные. Из (12), (13) следует

$$\begin{aligned} &[(\alpha - \beta) u + \alpha_1 - \beta_1] U''_0 = c_1 U'_1 + c_2 U'_0, \\ &[(\alpha - \beta) v + \alpha_1 - \beta_1] V''_0 = c V'_1 - c_2 V'_0. \end{aligned} \quad (14)$$

Если в уравнениях (7<sub>1</sub>), (13<sub>1</sub>), (14<sub>1</sub>) положить

$$\begin{aligned} U'_0 &= \sqrt{1 + \alpha^2} \operatorname{ch} U, \\ U'_1 &= \sqrt{1 + \alpha^2} \operatorname{sh} U, \end{aligned} \quad (15)$$

придем к уравнению

$$c_0 \operatorname{th}^2 U + (c - c_1) \operatorname{th} U - c_2 = 0. \quad (16)$$

Так как  $U$  не может быть постоянным, то из (16) следует

$$c_0 = 0, c = c_1, c_2 = 0. \quad (17)$$

Из (13<sub>1</sub>), (14<sub>1</sub>), (15), (17) следует

$$U = \frac{c}{\alpha - \beta} \ln |(\alpha - \beta) u + \alpha_1 - \beta_1| + \gamma,$$

где  $\gamma$  — постоянная.

Следовательно,

$$\begin{aligned} U'_0 &= \sqrt{1 + \alpha^2} \operatorname{ch} \left[ \frac{c}{\alpha - \beta} \ln |(\alpha - \beta) u + \alpha_1 - \beta_1| + \gamma \right], \\ U'_1 &= \sqrt{1 + \alpha^2} \operatorname{sh} \left[ \frac{c}{\alpha - \beta} \ln |(\alpha - \beta) u + \alpha_1 - \beta_1| + \gamma \right], \\ U'_2 &= \alpha, \\ U'_3 &= 1. \end{aligned} \quad (18)$$

Проинтегрировав уравнения (18), находим

$$\begin{aligned} U_0 &= \frac{1}{2ab(\alpha-\beta)} [V\sqrt{1+\alpha^2}(b\gamma U_1^a + a\gamma^{-1}U_1^b) + h], \\ U_1 &= \frac{1}{2ab(\alpha-\beta)} [V\sqrt{1+\alpha^2}(b\gamma U_1^a - a\gamma^{-1}U_1^b) + h], \\ U_2 &= \frac{\alpha}{\alpha-\beta}(U_1 - \alpha_1 + \beta_1), \\ U_3 &= \frac{1}{\alpha-\beta}(U_1 - \alpha_1 + \beta_1). \end{aligned} \quad (19)$$

где  $h$  — постоянная.

Здесь введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} (\alpha-\beta)u + \alpha_1 - \beta_1 &= u_1, \\ 1 + \frac{c}{\alpha-\beta} &= a, \quad 1 - \frac{c}{\alpha-\beta} = b. \end{aligned}$$

Обозначив  $(\alpha-\beta)v + \alpha_1 - \beta_1 = v_1$ , аналогично найдем

$$\begin{aligned} V_0 &= \frac{1}{2ab(\alpha-\beta)} [V\sqrt{1+\beta^2}(b\gamma_1 V_1^a + a\gamma_1^{-1}V_1^b) + h_1], \\ V_1 &= \frac{1}{2ab(\alpha-\beta)} [V\sqrt{1+\beta^2}(b\gamma_1 V_1^a - a\gamma_1^{-1}V_1^b) + h_1], \\ V_2 &= \frac{\beta}{\alpha-\beta}(V_1 - \alpha_1 + \beta_1), \\ V_3 &= \frac{1}{\alpha-\beta}(V_1 - \alpha_1 + \beta_1), \end{aligned} \quad (20)$$

где  $h_1$  и  $\gamma_1$  — постоянные.

Подставив (19) и (20) в (10) и (11) находим, что

$$h = h_1.$$

Из уравнений (4), (19) (20) следует

$$\begin{aligned} \lambda x_0 &= \frac{1}{2ab} [V\sqrt{1+\alpha^2}(b\gamma U_1^a + a\gamma^{-1}U_1^b) - V\sqrt{1+\beta^2}(b\gamma_1 V_1^a + a\gamma_1^{-1}V_1^b)], \\ \lambda x_1 &= \frac{1}{2ab} [V\sqrt{1+\alpha^2}(b\gamma U_1^a - a\gamma^{-1}U_1^b) - V\sqrt{1+\beta^2}(b\gamma_1 V_1^a - a\gamma_1^{-1}V_1^b)], \\ \lambda x_2 &= aU_1 - \beta V_1, \\ \lambda x_3 &= U_1 - V_1. \end{aligned} \quad (21)$$

Уравнение (21) можно представить в виде

$$\begin{aligned} ab(\alpha-\beta)^2(x_0^2 - x_1^2) &= (1+\alpha^2)(x_2 - \beta x_3)^2 + (1+\beta^2)(x_2 - \alpha x_3)^2 - \\ &- V(1+\alpha^2)(1+\beta^2)[\gamma^{-1}\gamma_1(x_2 - \beta x_3)^b(x_2 - \alpha x_3)^a + \\ &+ \gamma\gamma_1^{-1}(x_2 - \beta x)^a(x_2 - \alpha x_3)^b]. \end{aligned}$$

Это уравнение представляет собой искомое уравнение поверхности переноса гиперболического пространства в классе поверхностей вращения.

Поверхность (21) несет две сети переноса. Действительно, касательная плоскость, проведенная в любой точке поверхности (21), пересекает окружности, на которых лежат вершины конусов, в двух точках. Отсюда и следует утверждение о наличии двух сетей переноса.

Настоящая работа выполнена под руководством Я. П. Бланка, за что автор выражает ему сердечную благодарность.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Я. П. Бланк. Аналог поверхностей переноса в геометрии Лобачевского. «Зап. физ.-матем. ф-та ХГУ и ХМО», т. XXV, серия 4, 1957.
2. Ф. Клейн. Нееевклидова геометрия. ОНТИ, М.—Л., 1936.
3. Б. А. Розенфельд. Нееевклидовы геометрии. Гостехиздат, М., 1955.

Поступила 28 апреля 1967 г.

## ГОМОМОРФИЗМЫ ПРОСТРАНСТВ АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ

*М. А. Улановский* (Харьков)

Как известно, два пространства аффинной связности  $A_n$  и  $B_n$  эквивалентны, если существует диффеоморфизм  $\varphi: A_n \rightarrow B_n$ , сохраняющий параллелизм векторов касательных пространств. Представляется естественным рассмотреть также произвольные дифференцируемые отображения базисных многообразий, сохраняющие параллелизм [3]. Такое отображение  $\varphi: A_n \rightarrow B_n$  естественно назвать в общем случае гомоморфизмом; по-видимому, не потребуют объяснений также общепринятые термины «изоморфизм», «эндоморфизм», «автоморфизм».

В настоящей работе излагаются некоторые глобальные свойства гомоморфизмов.

Пусть  $X_m$  — дифференцируемое многообразие размерности  $m$ . Структура пространства аффинной связности, заданная на  $X_m$ , определяет правило «параллельного переноса» векторов касательных пространств вдоль любой кусочно-гладкой дуги  $\gamma \subset X_m$ . Пусть на многообразии  $X_n$  также задана аффинная связность. Дифференцируемое отображение  $\varphi: X_m \rightarrow X_n$  назовем гомоморфизмом, если выполнено требование: пусть  $x, y$  — произвольные точки из  $X_m$ ,  $\gamma$  — любая дуга, их соединяющая,  $\xi$  — любой вектор из  $T_m^{(x)}$  (касательного пространства в точке  $x$ ) и  $\eta \in T_m^{(y)}$  — вектор, параллельный  $\xi$  вдоль  $\gamma$ , тогда векторы  $\varphi(\xi)$  и  $\varphi(\eta)$  касательных пространств многообразия  $X_n$  в точках  $\varphi(x)$  и  $\varphi(y)$  должны быть параллельны вдоль дуги  $\varphi(\gamma)$  (здесь, как и в дальнейшем, мы обозначаем одинаково как отображения многообразий, так и индуцированные ими отображения касательных пространств).

Это определение можно сформулировать также следующим образом. Параллельный перенос вдоль дуги  $\gamma$  определяет изоморфизм  $S_\gamma$  касательных векторных пространств:

$$S_\gamma: T_m^{(x)} \rightarrow T_m^{(y)}.$$

Сохраняя обозначение  $S$  для соответствующих изоморфизмов касательных пространств многообразия  $X_n$ , получим диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} T_m^{(x)} & \xrightarrow{S_\gamma} & T_m^{(y)} \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \\ T_n^{\varphi(x)} & \xrightarrow{S_{\varphi(\gamma)}} & T_n^{\varphi(y)}. \end{array} \quad (1)$$

Отображение  $\varphi$  — гомоморфизм  $X_m$  в  $X_n$ , если эта диаграмма коммутативна для любой дуги  $\gamma \subset X_m$  с концами  $x$  и  $y$ .

Пусть  $H^{(x)}$  ( $x \in X_m$ ) — ядро отображения касательных пространств:  $\varphi: T_m^{(x)} \rightarrow T_n^{\varphi(x)}$  (т. е. максимальное линейное подпространство  $T_m^{(x)}$  такое, что  $\varphi H^{(x)} = 0$ ). Из коммутативности диаграммы (1) немедленно следует, что  $S_\gamma H^{(x)} \subset H^{(y)}$ ; но так как  $S_\gamma$  — изоморфизм, очевидно и  $S_\gamma^{-1} H^{(y)} \subset H^{(x)}$ , откуда  $S H^{(x)} = H^{(y)}$ . Тем самым доказана

**Теорема 1.** Ранг гомоморфизма  $\varphi$  связного пространства  $X_m$  в произвольное многообразие аффинной связности  $X_n$  есть величина постоянная. Ядро  $H^{(x)}$  соответствующего отображения касательных пространств образует абсолютно параллельное распределение на  $X_m$ .

Здесь под рангом отображения  $\varphi$  подразумевается, как обычно, ранг отображения касательного векторного пространства (или ранг соответствующей якобиевой матрицы).

Пусть  $U_k$  — вполне геодезическое подмногообразие  $X_m$ ,  $T^{(x)}(U_k)$  — подпространство  $T_m^{(x)}(x \in U_k)$ , касательное к  $U_k$ . Как известно, отображение  $S_\gamma$  (1), где дуга  $\gamma$  взята в  $U_m$ , переводит  $T^{(x)}(U_k)$  в  $T^{(y)}(U_k)$  в то же время  $\varphi$  отображает  $T^{(x)}(U_k)$  и  $T^{(y)}(U_k)$  на касательные плоскости  $\varphi(U_k)$  — образа подмногообразия  $U_k$  в пространстве  $X_n$ . Из коммутативности диаграммы (1) следует, что параллельный перенос  $S_\gamma$  также отображает касательную плоскость к  $\varphi(U_k)$  в точке  $\varphi(x)$  на касательную плоскость к  $\varphi(U_k)$  в точке  $\varphi(y)$ . Следовательно,  $\varphi(U_k)$  — вполне геодезическая поверхность пространства  $X_n$ . Так же легко убедиться, что для любой вполне геодезической поверхности  $V_i \subset X_n$   $\varphi^{-1}(V_i)$  есть вполне геодезическая поверхность пространства  $X_m$ . Таким образом, имеет место

**Теорема 2.** Гомоморфизм  $\varphi$  отображает вполне геодезические подмногообразия пространства  $X_m$  на вполне геодезические подмногообразия пространства  $X_n$ . Прообраз вполне геодезического подмногообразия пространства  $X_n$  есть вполне геодезическое подмногообразие пространства  $X_m$ .

В частности,  $\varphi(X_m)$  — образ пространства  $X_m$  — есть вполне геодезическое подмногообразие пространства  $X_n$ .

Добавим к сказанному, что мы считаем целесообразным принять в качестве основы самого определения вполне геодезической поверхности понятие гомоморфизма. Именно, пусть  $X_n$  — пространство аффинной связности; подмножество  $W \subset X_n$  естественно назвать вполне геодезическим подмногообразием  $X_n$ , если существует пространство аффинной связности  $X_m$  и гомоморфизм  $\varphi: X_m \rightarrow X_n$  ранга  $m$  такой, что  $\varphi(X_m) = W$ .

Пусть теперь  $\varphi$  — произвольное дифференцируемое отображение  $X_m$  в  $X_n$  и на  $X_n$  задана структура аффинной связности. Существует ли на многообразии  $X_m$  аффинная связность, для которой заданное отображение  $\varphi$  служит гомоморфизмом? Если образ  $\varphi(X_m)$  не является вполне геодезическим подмногообразием  $X_n$ , то ответ, очевидно, отрицательный. Предположим теперь, что  $\varphi(X_m)$  совпадает с  $X_n$ . Докажем теорему.

**Теорема 3.** Если  $\varphi$  — дифференцируемое отображение постоянного ранга  $m$  многообразия  $X_m$  на пространство аффинной связности  $X_n$ , то на  $X_m$  существует аффинная связность (не единственная), для которой  $\varphi$  — гомоморфизм.

В локальном плане теорема очевидна. Чтобы доказать ее в целом для произвольных  $X_m$  и  $X_n$ , рассмотрим расслоенные пространства  $A_{2m}$  и  $A_{2n}$ , базисными пространствами которых служат  $X_m$  и  $X_n$ , а слоями — касательные пространства этих многообразий. Заданное отображение  $\varphi$  индуцирует отображение  $\varphi: A_{2m} \rightarrow A_{2n}$ , а также отображения векторных пространств  $\varphi: T_{2m} \rightarrow T_{2n}$  — касательных пространств многообразий  $A_{2m}$  и  $A_{2n}$ . Соответственно условиям теоремы, ядро  $H_{m-n}$  отображения касательных пространств многообразия  $X_m$  имеет размерность  $m - n \geq 0$ ; легко видеть, что ядро отображения пространства  $T_{2m}$  имеет размерность  $2(m - n)$ , причем  $H_{2(m-n)}$  пересекается с «вертикальным подпространством»  $F_m$  пространства  $T_{2m}$  ( $F_m$  — касательное пространство указанного выше слоя  $A_{2m}$ ) по подпространству  $K_{m-n}$  размерности  $m - n$ . Наша задача — построить гладкое поле «горизонтальных» площадок  $P_m$

размерности  $m$  в касательных пространствах  $T_{2m}$  так, чтобы  $F_m \cap P_m = 0$  и  $\varphi(P_m) = Q_n$ , где  $Q_n$  — горизонтальные площадки, определяющее структуру аффинной связности на  $X_n$ . Но, в силу сказанного о ядре  $H_{2(m-n)}$ , полный прообраз  $\varphi^{-1}(Q_n)$  в  $T_{2m}$  имеет размерность  $n + (2m - 2n) = 2m - n$ ;  $\varphi^{-1}(Q_n)$  пересекается с вертикальным подпространством  $F_m$  по указанному выше подпространству  $K_{m-n}$ .

Итак, мы имеем гладкое (в силу гладкости  $\varphi$ ) поле подпространств  $\varphi^{-1}(Q_n) \subset T_{2m}$ ; в каждом подпространстве отмечена вертикальная площадка  $K_{m-n}$ . Мы должны выбрать в каждом  $\varphi^{-1}(Q_n)$  площадку  $P_m$  так, чтобы  $P_m \cap K_{m-n} = 0$ . Множество всех таких площадок в каждом  $\varphi^{-1}(Q_n)$  гомеоморфно евклидовому пространству размерности  $m$  ( $2m - n$ ). Действительно, выберем в  $\varphi^{-1}(Q_n)$  базис  $l_1 \dots l_{2m-n}$  так, чтобы  $l_{m+1} \dots l_{2m-n}$  составили базис  $K_{m-n}$ . После этого каждая площадка размерности  $m$ , не пересекающая  $K_{m-n}$ , может быть задана уравнениями  $x^a = a_j^a x^j$ , где  $x^a, x^j$  — компоненты вектора в выбранном базисе,  $a = m+1, \dots, 2m-n$ ,  $j = 1 \dots m$ . Таким образом, рассматриваемое множество гомеоморфно (при очевидном определении топологии) евклидовому пространству  $m$  ( $2m-n$ ) — матриц  $\{a_j^a\}$ .

Рассмотрим теперь расслоенное пространство всех горизонтальных площадок подпространств  $\varphi^{-1}(Q_n)$  с базой  $A_{2m}$  и стандартным слоем, гомеоморфным евклидовому пространству. В силу общей теоремы о косях произведениях с «заполненным» слоем [1] в этом расслоенном пространстве существует глобальное сечение — гладкое поле горизонтальных площадок, определяющее искомую связность.

Частным случаем доказанной теоремы ( $n = 0$ ,  $X_n$  — точка) является известная теорема о существовании аффинной связности на произвольном дифференцируемом многообразии [2].

Рассмотрим прямое произведение двух пространств аффинной связности:  $X_{m+n} = X_m \times X_n$ . На  $X_{m+n}$  известным образом определяется структура аффинной связности. Ее легко описать и с помощью понятия гомоморфизма. Именно, пусть  $p_1, p_2$  — естественные проекции  $X_{m+n}$  на  $X_m$  и  $X_n$  соответственно. Связность на  $X_{m+n}$  однозначно определяется требованием:  $p_1$  и  $p_2$  должны быть гомоморфизмами на заданные пространства аффинной связности  $X_m$  и  $X_n$ . Таким образом, соотношения между упомянутыми структурами можно описать диаграммой:

$$\begin{array}{ccc}
 & S_{p_1 \gamma} & \\
 T_m^{(p_1 x)} & \xrightarrow{\quad} & T_m^{(p_1 y)} \\
 p_1 \uparrow & & \uparrow p_1 \\
 & S_\gamma & \\
 T_{m+n}^{(x)} & \xrightarrow{\quad} & T_{m+n}^y \\
 p_2 \downarrow & & \downarrow p_2 \\
 & S_{p_2 \gamma} & \\
 T_n^{(p_2 x)} & \xrightarrow{\quad} & T_n^{(p_2 y)}
 \end{array} \tag{2}$$

где  $T_m^{(p_1 x)}, T_n^{(p_2 x)}, T_{m+n}^{(x)}$  — касательные к  $X_m, X_n, X_{m+n}$  пространства,  $S_\gamma$  — изоморфизм касательных пространств, порожденный параллельным переносом вдоль дуги  $\gamma \subset X_{m+n}$  с концами  $x$  и  $y$ . Две части этой диаграммы, содержащие 1-ю, 2-ю, 3-ю и 4-ю строчки соответственно, коммутативны в силу определения гомоморфизма.

Рассмотрим теперь вполне геодезические поверхности пространства  $X_{m+n}$ . Очевидно, проекции такой поверхности на  $X_m$  и  $X_n$  суть также вполне геодезические поверхности. Далее, легко видеть, что прямое произведение вполне геодезических поверхностей  $U \subset X_m$  и  $V \subset X_n$  (т. е. множество пар  $[u, v]$ , где  $u \in U, v \in V$ ) есть вполне геодезическая поверх-

ность в  $X_{m+n}$ . Наконец, геодезические линии в  $X_{m+n}$  можно описать следующим образом: пусть  $\gamma_1$  — геодезическая в  $X_m$ ,  $\gamma_2$  — геодезическая в  $X_n$  (вместо одной из них можно взять точку); выберем произвольным образом аффинные параметры  $s_1$  и  $s_2$  этих геодезических. Самая общая геодезическая  $\gamma$  пространства  $X_{m+n}$  может быть получена как совокупность точек вида  $\gamma(s) = [\gamma(s_1), \gamma(s_2)]$ , где  $s = s_1 = s_2$  — аффинный параметр геодезической  $\gamma$  (как известно, аффинный параметр определен с точностью до линейной подстановки; меняя  $s_1$  и  $s_2$ , мы получим все геодезические вполне геодезической 2-поверхности, представляющей собой прямое произведение  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ ). Из этого построения, в частности, следует, что произведение геодезических полных пространств аффинной связности есть геодезически полное пространство (пространство аффинной связности геодезически полно, если любую геодезическую можно продолжить до сколь угодно больших значений заранее выбранного аффинного параметра).

Прямое произведение  $X_{m+n} = X_m \times X_n$  может содержать также вполне геодезические поверхности, не совпадающие с указанными выше (в частности, не представляющие собой прямых произведений подмногообразий из  $X_m$  и  $X_n$ ). Рассмотрим, в частности, подмногообразие  $W_m \subset X_{m+n}$  однозначно проектирующееся на  $X_m$ ; таким образом, ограничение  $p_1$  на  $W_m$  есть диффеоморфизм  $W_m$  на  $X_m$ . Произведем некоторые изменения в диаграмме (2). Именно, заменим  $T_{m+n}^{(x)}$  и  $T_{m+n}^{(y)}$  (2-я строка) на их подпространства  $T_m^{(x)}(W)$ ,  $T_m^{(y)}(W)$ , касательные к  $W_m$ ; дугу  $S_\gamma$

возьмем на  $W_m$ . Стрелка  $\rightarrow$  теперь, вообще говоря, теряет смысл: параллельный перенос  $S_\gamma$  не переводит  $T_m^{(x)}(W)$  в  $T_m^{(y)}(W)$ . Но предположим, что  $W_m$  — вполне геодезическая поверхность. Тогда  $S_\gamma$  снова приобретает смысл; изменив направление стрелок  $p_1$  ( $p_1$  взаимно однозначно), получим диаграмму:

$$\begin{array}{ccc}
 T_m^{(p_1 x)} & \xrightarrow{S_{p_1 \gamma}} & T_m^{(p_1 y)} \\
 p_1^{-1} \downarrow & & \downarrow p_1^{-1} \\
 T_m^{(x)}(W) & \xrightarrow{S_\gamma} & T_m^{(y)}(W) \\
 p_2 \downarrow & & \downarrow p_2 \\
 T_n^{(p_2 x)} & \xrightarrow{S_{p_2 \gamma}} & T_n^{(p_2 y)}
 \end{array} \tag{3}$$

Из отмеченной выше коммутативности частей диаграммы (2) очевидным образом следует коммутативность диаграммы (3) в целом. А это значит, что отображение

$$p_2 p_1^{-1}: X_m \rightarrow X_n$$

есть гомоморфизм. Столь же просто доказывается, что  $W_m$  — вполне геодезическая поверхность, если  $p_2 p_1^{-1}$  — гомоморфизм.

По-видимому, естественно назвать любую поверхность  $W_m$ , однозначно проектирующуюся на  $X_m$ , графиком соответствующего отображения  $p_2 p_1^{-1}$ . Таким образом, имеет место

**Теорема 4.** Пусть  $M_m$  — поверхность в  $X_{m+n} = X_m \times X_n$ , для которой ограничение отображения  $p_1: W_m \rightarrow X_m$  есть диффеоморфизм. Для того чтобы  $W_m$  служила графиком гомоморфизма  $\varphi: X_m \rightarrow X_n$ , необходимо и достаточно, чтобы  $W_m$  была вполне геодезической поверхностью.

Эта теорема позволяет связать некоторые свойства гомоморфизмов со свойствами вполне геодезических поверхностей. Так, геометрически очевидной становится

**Теорема 5.** Пусть  $\varphi^*$  — гомоморфизм некоторой области  $\Omega \subset X_m$  в пространство аффинной связности  $X_n$  («локальный» гомоморфизм  $X_m$  в  $X_n$ ). Существует не более чем одно продолжение  $\varphi^*$  на  $X_m$  — гомоморфизм  $\varphi : X_m \rightarrow X_n$ , ограничение которого на  $\Omega$  совпадает с  $\varphi^*$ .

Действительно, легко видеть, что две вполне геодезические поверхности  $W_m$  и  $W'_m$  с общей частью, проекцией которой служит область  $\Omega$ , совпадают.

Предположим теперь, что в  $X_{m+n}$  существует связная вполне геодезическая поверхность  $W_m$  такая, что  $p_1 W_m = X_m$ . Покажем, что отображение  $p_1 : W_m \rightarrow X_m$  взаимно однозначно, если  $X_m$  односвязно.

Действительно, пусть  $w_1, w_2$  — произвольные точки из  $W_m$ . Соединим  $p_1 w_1$  и  $p_1 w_2$  какой-либо дугой  $l \subset X_m$ . Легко видеть, что по заданным  $w_1, T_m^{(w_1)}(W)$ ,  $l$  можно однозначно восстановить дугу  $p_1^{(-1)}(l) \subset W_m$ , соединяющую  $w_1$  и  $w_2$ ; вместе с ней легко построить достаточно узкую «полосу» поверхности  $W_m$ , содержащую  $p_1^{(-1)}(l)$  и однозначно проектирующуюся на  $X_m$ . Если  $\gamma$  — дуга, также соединяющая  $p_1 w_1$  и  $p_1 w_2$  и достаточно близкая к  $l$ , то построенная таким же образом дуга  $p_1^{-1}(\gamma)$  лежит в указанной полосе и ее конец необходимо совпадает с  $w_2$ . Если существует точка  $v \in W_m$  такая, что  $p_1 v = p_1 w_2$ , то указанная выше кривая  $l$  и проекция любой дуги, соединяющей  $w_1$  и  $v$ , не могут принадлежать одному гомотопическому классу. Итак, имеет место

**Теорема 6.** Если  $W_m$  — вполне геодезическая поверхность пространства  $X_{m+n} = X_m \times X_n$  такая, что  $p_1 W_m = X_m$  и  $X_m$  связано и односвязно, то  $p_1 : W_m \rightarrow X_m$  — диффеоморфизм.

Вопрос о возможности продолжения «локальной» вполне геодезической поверхности мы рассмотрим в простейшем случае аналитических  $X_m$  и  $X_n$ . Легко видеть, что при этом условии  $X_{m+n}$  также аналитично; аналитично и любое вполне геодезическое подмногообразие  $W_m \subset X_{m+n}$ . Чтобы убедиться в последнем, достаточно записать (в малом) уравнения  $W_m$  в нормальных геодезических координатах. Следовательно, и любой гомоморфизм  $\varphi : X_m \rightarrow X_n$  аналитичен.

Пусть  $W_m^*$  — вполне геодезическая поверхность,  $p_1 W_m^* = \Omega \subset X_m$ ,  $x$  — точка из  $\Omega$  и  $\xi_1 \in T_m^{(x)}$ . Проведем из точки  $x$  геодезическую дугу  $\gamma_1$  в направлении  $\xi_1$ . Существует ли в  $X_{m+n}$  геодезическая дуга  $\gamma$ , касающаяся поверхности  $W_m^*$  в точке  $w$  ( $p_1 w = x$ )? Для построения  $\gamma$  найдем единственный вектор  $\xi$  в  $T_m^{(w)}(W^*)$  такой, что  $p_1 \xi = \xi_1$  и проведем через точку  $p_2 w \in X_n$  геодезический луч  $\gamma_2$  в направлении  $\xi_2 = p_2 \xi$ . Аффинные параметры этих геодезических согласуем условием  $\frac{\partial}{\partial s_1} = \xi_1$ ,  $\frac{\partial}{\partial s_2} = \xi_2$ ; пусть при этом  $0 < s_1 < a$  на  $\gamma_1$ ,  $\gamma_1(0) = x$ . Искомая геодезическая дуга  $\gamma$  представляет собой, соответственно сказанному выше, совокупность точек вида  $\gamma(s) = [\gamma_1(s_1), \gamma_2(s_2)]$  при  $s = s_1 = s_2$ . Однако неизвестно, можно ли геодезический луч  $\gamma_2$  продолжить до значения  $s_2 = a$  ( $\gamma_2(0) = p_2 w$ ). Это, во всяком случае, возможно, если  $X_n$  геодезически полно. При этом же условии, если мы проведем через точку  $x$  геодезическую ломаную  $l_1$ , мы всегда найдем геодезическую ломаную  $l$ , накрывающую  $l_1$  и касательную к  $W_m^*$  в точке  $w$ . Ломаная  $l$  определится однозначно условием: касательная площадка  $T_m^{(w)}(W^*)$ , переносимая параллельно вдоль  $l$ , всюду содержит вектор, касательный к  $l$ .

Пусть теперь  $x \in \Omega$ ,  $y$  — любая точка из  $X_m$ . Легко видеть, что любые две точки связного  $X_m$  можно соединить геодезической ломаной с конечным числом звеньев — достаточно рассмотреть любую дугу, соединяющую эти точки, покрыть ее конечным числом выпуклых нормальных геодезических окрестностей и соответственно этому покрытию «вписать» в эту дугу

ломаную. Пусть  $l_1$  — ломаная, соединяющая  $x$  и  $y$ . По ломаной  $l_1$  мы восстановим накрывающую ломаную  $l$ , удовлетворяющую указанным выше условиям. Более того, к ломаной  $l$  примыкает вполне геодезическая полоса, т. е. вполне геодезическая поверхность  $P$ , однозначно проектирующаяся в некоторую достаточно узкую полосу, содержащую  $l_1$ . Чтобы убедиться в этом, достаточно покрыть  $l$  конечным числом выпуклых нормальных геодезических окрестностей  $\omega_i$ . Легко видеть, что поверхность  $W_m^* \cap \omega_i$  можно продолжить вдоль окрестностей  $\omega_i$  в силу аналитичности  $X_{m+n}$ . Далее, окрестности  $\omega_i$  могут быть выбраны таким образом, что полоса  $P$  будет однозначно проектироваться на  $X_m$  (заметим, что касательная площадка  $T_m^{(\omega)}(W^*)$ , параллельно переносимая вдоль  $l$ , нигде не содержит «вертикальных» векторов, т. е. векторов  $\eta$ , для которых  $p_1\eta = 0$ ).

Пусть теперь  $l'_1$  — какая-нибудь ломаная, соединяющая  $x$  и  $y$  и близкая к  $l_1$ ; в частности, предположим, что  $l'_1 \subset p_1 P$ . Очевидно, на  $P$  существует геодезическая ломаная  $l'$ , накрывающая  $l'_1$ ; это и есть единственная ломаная, удовлетворяющая принятым выше условиям. Отсюда, как в доказательстве теоремы 6, получим, что (в случае односвязного  $X_n$ ) любой точке  $y \in X_m$  соответствует одна точка  $v \in X_{m+n}$  — конец ломаной  $l'$ ; положение точки  $v$  не зависит от выбора ломаной  $l_1$ . Геометрическое место точек  $v \in X_{m+n}$ , соответствующих всем  $y \in X_m$ , и образует искомую вполне геодезическую поверхность  $W_m$  — продолжение «локальной» поверхности  $W_m^*$ . Итак, имеет место

**Теорема 7.** Пусть  $X_m$  и  $X_n$  — аналитические пространства аффинной связности.  $X_m$  связно и односвязно и  $X_n$  геодезически полно. Тогда любой локальный гомоморфизм  $\varphi^*: \Omega \rightarrow X_n$  ( $\Omega$  — область в  $X_m$ ) можно продолжить (единственным способом) до гомоморфизма  $\varphi: X_m \rightarrow X_n$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Стинрод. Топология косых произведений. Изд-во иностр. лит., М., 1953.
2. А. Ильнерович. Теория связностей в целом и группы голономий. Изд-во иностр. лит., М., 1960.
3. М. А. Улановский. Группа движений и эпдоморфизмы пространства аффинной связности. «Мат. сб.», 58 (100), 3, 1962, 281—288.

Поступила 27 апреля 1967 г.

# ОБ ИЗГИБАЕМОСТИ ВЫПУКЛЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ С КРАЕМ

Л. А. Шор (Харьков)

## § 1. Введение

1. В настоящей работе дается доказательство эффективно проверяемых необходимых и достаточных условий изгибающей способности общих выпуклых поверхностей с краем ограниченной вариации поворота в классе выпуклых поверхностей. Эти условия были сформулированы нами ранее [1]. В данной статье они обобщаются на более широкий класс поверхностей.

Относительно поверхностей предполагается, что они либо конечны, либо кривизна границы их выпуклой оболочки равна  $2\pi$ . Помимо ограниченности вариации поворота на край поверхности налагаются, вообще говоря, еще некоторые условия, которые будут сформулированы ниже.

1.1. Напомним, что выпуклая поверхность  $F$  называется изгибающейся в классе всех выпуклых поверхностей (в дальнейшем просто изгибающейся), если каждому значению параметра  $t \in [0,1]$  со-поставлена выпуклая поверхность  $F_t$  и изометрическое отображение  $f_t$  поверхности  $F$  на  $F_t$ , причем выполнены следующие условия:

1.1.1 Поверхность  $F_0 = F$  и отображение  $f_0$  есть тождественное отображение поверхности  $F$  на себя.

1.1.2 При  $t \neq 0$  отображение  $f_t$  не сводится к движению или к движению и отражению.

1.1.3 Поверхности  $F_t$  и отображения  $f_t$  образуют непрерывное семейство, т. е. при каждом  $t_0 \in [0,1]$  и для каждой точки  $X \in F$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f_t(X) = f_{t_0}(X).$$

Если выполнены только условия 1.1.1 и 1.1.2, то говорят, что поверхность  $F$  нетривиально изометрична поверхности  $F_t$ .

Как показал А. В. Погорелов [2], замкнутые выпуклые поверхности и полные бесконечные выпуклые поверхности с кривизной, равной  $2\pi$ , неизгибаются. Вопрос об изгибающей способности многосвязных выпуклых поверхностей сводится [3] к вопросу об изгибающей способности выпуклых поверхностей, граница которых является простой кривой. Поэтому в дальнейшем будем предполагать, что поверхность  $F$  ограничена простой кривой  $\Gamma$  (замкнутой или бесконечной), имеющей ограниченную вариацию поворота\*.

1.2. Дополнение поверхности  $F$  до границы  $\bar{F}$  ее выпуклой оболочки развертывается на плоскость, превращаясь при этом в гомеоморфную замкнутому кругу или замкнутой полуплоскости область  $Q$ , вообще говоря, многолистную. Границу области  $Q$  обозначим через  $L$ . Под克莱ивание области  $Q$  к поверхности  $F$ , задаваемое отображением  $\phi$  границы  $\Gamma$  по-

\* Кривая  $\Gamma$  к поверхности не причисляется.

верхности  $F$  на границу  $L$  области  $Q$ , называется **тривиальным**, если в результате его получается поверхность  $\bar{F}$ . Следуя А. Д. Александрову [4], будем говорить, что имеет место деформация тривиального под克莱ивания  $(Q_t, \psi_t)$ , если каждому значению параметра  $t \in [0,1]$  поставлена область  $Q_t$  и отображение  $\psi_t$  границы  $\Gamma$  поверхности  $F$  на границу  $L_t$  области  $Q_t$ , причем выполнены следующие условия (помимо условий теоремы А. Д. Александрова «о склеивании» [5]):

1.2.1. Под克莱ивание  $(Q_0, \psi_0)$  тривиально.

1.2.2. Не все под克莱ивания тождественны между собой.

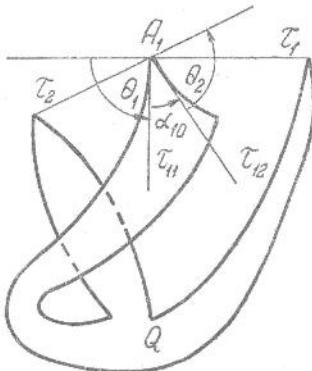


Рис. 1.

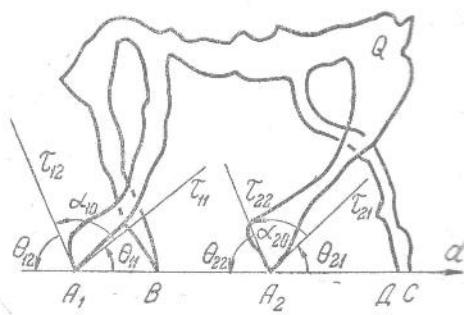


Рис. 2.

1.2.3. При каждом  $t_0 \in [0,1]$  замкнутые области  $Q_t$  сходятся к замкнутой области  $Q_{t_0}$  так, что для каждой точки  $X \in \Gamma$  имеет место равенство

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \psi_t(X) = \psi_{t_0}(X).$$

Как показано в работе [6], для того чтобы выпуклая поверхность  $F$  была изгибаемой в классе всех выпуклых поверхностей, необходимо и достаточно, чтобы существовала деформация  $(Q_t, \psi_t)$  соответствующего ей тривиального под克莱ивания.

1.3. Условимся обозначать соответствующие при отображении  $\psi$  точки кривых  $\Gamma$  и  $L$  одинаковыми буквами. Конические точки поверхности  $\bar{F}$ , лежащие на кривой  $\Gamma$ , обозначим через  $A_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) и назовем их точками типа  $A$ . Пусть  $\alpha_{i0}$  угол между ветвями кривой  $L$  в точке  $A_i$  со стороны области  $Q$  и  $\alpha_i$ , угол между ветвями кривой  $\Gamma$  в точке  $A_i$  на поверхности  $F$ .

1.4.1. Пусть  $F$  общая выпуклая поверхность. Соответствующая ей по тривиальному под克莱иванию область  $Q$  может оказаться многолистной. Пусть  $M$  некоторое множество точек в области  $Q$ . Множество точек плоскости, над которым расположено множество  $M$ , обозначим  $\bar{M}$ . Выпуклую оболочку плоской области  $\bar{Q}$  обозначим  $\bar{Q}$ . Ориентируем области  $Q$  и  $\bar{Q}$ , выбрав в качестве положительного направления их обхода такое, при котором внутренние точки лежат слева. Обозначим полукасательные к границе  $Q$  в точке  $A_i$  через  $\tau_{i1}$  и  $\tau_{i2}$ , причем  $\tau_{i1}$  касаются тех ветвей границы  $Q$ , которые выходят из точек  $A_i$  в положительном направлении (рис. 1 и 2).

1.4.2. Пусть на кривой  $L$  имеется только одна точка  $A_1$  типа  $A$ , причем она является существенной вершиной области  $\bar{Q}$ . Обозначим полукасательные к границе  $\bar{Q}$  в точке  $A_1$  через  $\tau_1$  и  $\tau_2$ . Пусть при этом  $\tau_2$  ка-

сается той ветви границы  $\bar{Q}$ , которая выходит из точки  $A_1$  в положительном направлении обхода (рис. 1).

Условимся понимать под углом, образованным одним лучом с другим, угол, на который надо повернуть против часовой стрелки первый луч, чтобы он совпал со вторым. Обозначим угол, образованный продолжением  $\tau_1$  за точку  $A_1$  с полукасательной  $\tau_{11}$ , через  $\theta_1$  и угол, образованный полукасательной  $\tau_{12}$  с продолжением полукасательной  $\tau_2$  за точку  $A_1$ , через  $\theta_2$ .

1.4.3. Пусть на кривой  $L$  имеется конечное или бесконечное число точек  $A_i$  типа  $A$ , причем существует одна и только одна опорная прямая  $a$  к области  $\bar{Q}$ , проходящая через все точки типа  $A$  (рис. 2). Выберем на прямой  $a$  положительное направление так, чтобы область  $\bar{Q}$  лежала слева от неё. Каждая точка  $A_i$  делит прямую  $a$  на две полуправые:  $a_{i1}$ , идущую в положительном направлении, и  $a_{i2}$ , идущую в отрицательном направлении. Обозначим угол, образованный полуправой  $a_{i1}$  с полукасательной  $\tau_{i1}$ , через  $\theta_{i1}$  и угол, образованный полукасательной  $\tau_{i2}$  с полуправой  $a_{i2}$ , через  $\theta_{i2}$ .

1.5. Выделим из множества всех выпуклых поверхностей три класса:  $K_1$ ,  $K_2$  и  $K_3$ .

1.5.1. К классу  $K_1$  отнесём конечные поверхности, полная кривизна которых равна  $4\pi$ , и бесконечные поверхности, полная кривизна которых равна  $2\pi$ .

1.6. К классу  $K_2$  отнесём поверхности  $F$ , удовлетворяющие следующим условиям:

1.6.1. Кривая  $\Gamma$  гомеоморфна окружности и её кривизна\* на поверхности  $\bar{F}$  сосредоточена в одной точке  $A_1$  типа  $A$ .

1.6.2. Над точкой  $\tilde{A}_1$  нет других точек кривой  $L$  кроме точки  $A_1$ .

1.6.3. Точка  $\tilde{A}_1$  является существенной вершиной области  $\bar{Q}$ , т. е. угол  $\alpha'$ , образованный полукасательными  $\tau_2$  и  $\tau_1$ , меньше  $\pi$ .

1.6.4. Выполнены неравенства для углов

$$\alpha_{10} < \alpha_{11} \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \min(2\pi - \alpha_{10} - \alpha_{11}, \pi) < \min(\theta_1, \theta_2) \quad (2)$$

1.7. К классу  $K_3$  отнесём поверхности  $F$ , для которых выполнены следующие условия:

1.7.1. Кривая  $\Gamma$  гомеоморфна окружности и ее кривизна на поверхности  $\bar{F}$  сосредоточена в конечном числе  $n \geq 1$  точек  $A_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) типа  $A$ .

1.7.2. Над точкой  $\tilde{A}_i$  нет других точек кривой  $L$  кроме точки  $A_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

1.7.3. При  $n = 1$  через точку  $\tilde{A}_1$  проходит одна и только одна опорная прямая  $a$  к области  $\bar{Q}$ , причем, каковы бы ни были точки  $C$  и  $D$  кривой  $L$ , лежащие на прямой  $a$  с разных сторон от точки  $A_1$ , ориентации  $Q$  и  $\bar{Q}$ , определенные одним и тем же порядком обхода точек  $A_1$ ,  $B$  и  $C$ , противоположны.

При  $n > 1$  все точки  $\tilde{A}_i$  лежат на одной прямой  $a$  опорной к области  $\bar{Q}$ . На прямой  $a$  не существует трех различных точек кривой  $L$ , среди которых хотя бы две типа  $A$ , таких, что ориентации областей  $Q$  и  $\bar{Q}$ , определенные одним и тем же порядком обхода этих точек, совпадают.

\* Здесь и в дальнейшем под кривизной кривой понимается площадь её сферического изображения.

#### 1.7.4. Выполнены неравенства

$$\frac{1}{2}(2\pi - \alpha_{i_0} - \alpha_{i_1}) < \min(\theta_{i_1}, \theta_{i_2}), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

1.8. Теорема 1. Если выпуклая поверхность  $F$  принадлежит одному из классов  $K_1, K_2, K_3$ , то она неизгибаема и, более того, не может быть предельной для нетривиально изометричных ей выпуклых поверхностей.

Множество неизгибаемых выпуклых поверхностей не исчерпывается поверхностями, принадлежащими классам  $K_1, K_2$  и  $K_3$ . Соответствующие примеры построены в статьях [7, 8, 9]. Поэтому чтобы сформулировать необходимые и достаточные условия изгибаемости приходится наложить некоторые дополнительные ограничения на край поверхности.

Введем следующее определение. Пусть  $X_s = X(s)$  ( $0 \leq s \leq 1$ ) и  $Y_t = Y(t)$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) две плоские кривые ограниченной вариации, исходящие из точки  $O$ . Назовем угол  $\alpha$  между ними вложенным углом, если существует такое  $\delta > 0$ , что при всех  $s \in (0, \delta]$  и  $t \in (0, \delta]$  угол  $\alpha(s, t) = \angle X_s O Y_t$  в треугольнике  $X_s O Y_t$  удовлетворяет неравенству

$$\alpha(s, t) \geq \alpha.$$

Заметим, что угол  $\alpha$  между кривыми  $X(s)$  и  $Y(t)$  тогда и только тогда является вложенным, когда внутри угла  $\alpha$  между полукасательными к этим кривым в точке  $O$  нет точек кривых, соответствующих  $s \in [0, \delta]$ ,  $t \in [0, \delta]$ .

1.9. Выделим из множества всех выпуклых поверхностей класс  $K$ , к которому отнесём выпуклые поверхности, удовлетворяющие хотя бы одному из следующих условий 1.9.1—1.9.12. При перечислении этих условий в скобках после каждого будем указывать какие условия, описывающие классы  $K_1, K_2, K_3$ , ему противоположны.

1.9.1. Кривая  $\Gamma_1$  гомеоморфна прямой и ее кривизна на поверхности  $F$  не равна нулю (1.5.1, 1.6.1, 1.7.1).

1.9.2. Число вершин  $A_i$  типа  $A$  бесконечно (1.5.1., 1.6.1., 1.7.1).

1.9.3. Кривизна кривой  $\Gamma$  с исключенными точками  $A_i$  типа  $A$  не равна нулю (1.5.1, 1.6.1, 1.7.1).

1.9.4. Хотя бы три точки  $A_i, A_k, A_l$  границы  $L$  области  $Q$  не лежат на одной прямой (1.7.3).

1.9.5. Хотя бы над одним из отрезков  $\tilde{A}_i \tilde{A}_k$  лежат внутренние точки области  $Q$  (1.7.3).

1.9.6. Хотя бы над одной из сторон  $\tilde{A}_i \tilde{A}_k$  границы области  $\bar{Q}$  лежит такая точка  $B$ , кривой  $L$ , не являющаяся ее точкой возврата, что ориентации  $Q$  и  $\bar{Q}$ , определенные одним и тем же порядком обхода точек  $A_i, A_k$  и  $B$ , совпадают (1.7.3).

1.9.7. Хотя бы одна из вершин  $A_i$  области  $Q$  лежит внутри области  $\bar{Q}$  (1.6.3, 1.7.3).

1.9.8. Хотя бы через одну из вершин  $\tilde{A}_i$  проходит единственная опорная прямая к  $\bar{Q}$ , причем на ней по разные стороны от точки  $\tilde{A}_i$  лежат такие точки  $B$  и  $C$  кривой  $L$ , не являющиеся ее точками возврата, что ориентации областей  $Q$  и  $\bar{Q}$ , определенные одним и тем же порядком обхода точек  $A_i, B$  и  $C$ , совпадают (1.7.3).

1.9.9. Хотя бы над одной из вершин  $\tilde{A}_i$  области  $\bar{Q}$  лежит, кроме точки  $A_i$ , еще некоторая другая точка  $B$  кривой  $L$ , не являющаяся ее точкой возврата (1.6.2, 1.7.2).

1.9.10. Выполнено хотя бы одно из неравенств

$$\alpha_{i_0} \geq \alpha_{i_1},$$

причем в случае  $\alpha_{i_0} = \alpha_{i_1}$ , угол  $\alpha_{i_0}$  является вложенным (неравенство (1)).

1.9.11. Выполнено хотя бы одно из условий

$$\frac{1}{2}(2\pi - \alpha_{i_0} - \alpha_{i_1}) \geq \min(\theta_{i_1}, \theta_{i_2}),$$

причем в случае

$$\theta_{ik} = \min(\theta_{i_1}, \theta_{i_2}) = \frac{1}{2}(2\pi - \alpha_{i_0} - \alpha_{i_1}),$$

угол  $\alpha_{i_0}$  является вложенным и на полуправой  $a - a_{ik}$  лежит хотя бы одна точка кривой  $L$ , не являющаяся ее точкой возврата, или на открытой полуправой  $a_{ik}$  лежит хотя бы одна точка типа  $A$ , отличная от  $A_i$  (неравенство (3)).

1.9.12. Имеется только одна вершина  $A_1$  типа  $A$ , в которой выполнено условие

$$\frac{1}{2}\min(2\pi - \alpha_{i_0} - \alpha_{i_1}, \pi) \geq \min(\theta_1, \theta_2),$$

причем в случае

$$\begin{aligned} \theta_k &= \min(\theta_1, \theta_2) = \\ &= \frac{1}{2}\min(2\pi - \alpha_{i_0} - \alpha_{i_1}, \pi) \end{aligned}$$

угол  $\alpha_{i_0}$  является вложенным и на полукасательной  $\tau_k$  лежит хотя бы одна точка кривой  $L$ , не являющаяся ее точкой возврата (неравенство (2)).

**Теорема 2.** Если выпуклая поверхность  $F$  принадлежит классу  $K_4$ , то она изгибаemа.

Как видно из условий 1.9.1 — 1.9.12, дополнительные требования, налагаемые на край поверхности, принадлежащей классу  $K_4$ , состоят в том, что некоторые точки кривой  $L$  не должны быть точками возврата и в некоторых случаях углы  $\alpha_{i_0}$  должны быть вложенными. Поэтому, если ограничиться рассмотрением только таких выпуклых поверхностей, у которых граница  $L$  области  $Q$  не имеет точек возврата и в случае  $\alpha_{i_0} = \alpha_{i_1}$  углы  $\alpha_{i_0}$  являются вложенными (такие поверхности назовем поверхностями типа  $\Phi$ ), то для них из теорем 1 и 2 следует

**Теорема 3.** Поверхность типа  $\Phi$  неизгибаemа тогда и только тогда, когда она принадлежит одному из классов  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$ .

Доказательства теорем 1 и 2 даются соответственно в § 2 и § 3.

1.10. В доказательствах теорем 1 и 2 существенно используются следующие леммы.

**Лемма 1.** Пусть  $\widehat{CD}$  и  $\widehat{CE}$  две плоские кривые ограниченной вариации поворота, имеющие общую точку  $C$  и равные длины, которые обозначим через  $\sigma$ . Введем на кривых  $\widehat{CD}$  и  $\widehat{CE}$  дуговую координату  $s$ ,  $s \in [0, \sigma]$ , отсчитываемую на обеих кривых от точки  $C$ . Пусть  $X(s)$  и  $Y(s)$  точки кривых  $\widehat{CD}$  и  $\widehat{CE}$ , соответствующие дуге  $s$ ;  $\varphi(s)$  и  $\vartheta(s)$  левые повороты их открытых участков  $CX(s)$  и  $CY(s)$ ;  $\varphi_1$  — вариация поворота кривой  $\widehat{CD}$ . Обозначим через  $\alpha$  угол, образованный кривыми  $\widehat{CE}$  и  $\widehat{CD}$  в точке  $C$  (рис. 3). Пусть функция

$$\gamma(s) = \vartheta(s) - \varphi(s) - \alpha, \quad (\gamma(0) = -\alpha \leq 0)$$

монотонно не возрастает при  $s \in [0, \sigma]$ . Пусть  $\tau$  полукасательная к кривой  $\widehat{CD}$  в точке  $D$ . Проведем через  $D$  полуправую  $n$  так, чтобы угол,

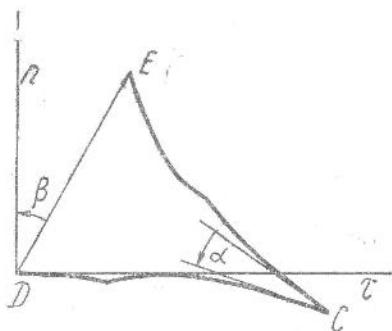


Рис. 3.

образованный  $\tau$  и  $n$  был равен  $\frac{\pi}{2}$ . Обозначим через  $\beta$  угол, образованный вектором  $\overrightarrow{DE}$  с полупрямой  $n$ . Тогда

1. Если  $4\varphi_1 - \gamma(s) < 2\pi$ , то

$$\beta > -\varphi_1. \quad (4)$$

2а. Если  $\varphi_1 < \frac{\pi}{8}$  и  $-\gamma(s) \leq \pi$ , то

$$\beta \leq -\frac{1}{2}\gamma(s) + \varphi_1. \quad (5)$$

2б. Если кроме того прямая, на которой лежит полукасательная  $\tau$  является опорной прямой к кривой  $\widehat{CD}$  и полуплоскость, в которую она направлена полупрямая  $n$ , не содержит точек кривой  $\widehat{CD}$ , то

$$\beta > 0.$$

2в. Равенство

$$\beta = -\frac{1}{2}\gamma(s) + \varphi_1 \quad (6)$$

имеет место тогда и только тогда, когда  $\varphi_1 = 0$  и функция  $\gamma(s)$  имеет вид

$$\gamma(s) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq s \leq s', \\ \gamma(s) & \text{при } s' < s \leq \sigma. \end{cases}$$

**Доказательство.** Докажем сначала утверждение 1. Проекция  $D'E'$  вектора  $\overrightarrow{DE}$  на ось  $d$ , образующую с полукасательной  $\tau$  угол  $\varphi_1$ , равна

$$D'E' = DE \sin(\beta + \varphi_1). \quad (7)$$

С другой стороны, проектируя на ось  $d$  кривые  $\widehat{CD}$  и  $\widehat{CE}$ , получим

$$\begin{aligned} D'E' &= \int_0^\sigma \cos(\varphi(s) - \varphi(s) + \varphi_1) ds - \int_0^\sigma \cos(\varphi(s) + \alpha - \vartheta(s) + \varphi_1) ds = \\ &= 2 \int_0^\sigma \sin\left(\varphi(s) - \varphi(s) + \varphi_1 - \frac{1}{2}\gamma(s)\right) \sin \frac{1}{2}(-\gamma(s)) ds. \end{aligned} \quad (8)$$

Из условия леммы следует, что интеграл, стоящий в правой части равенства (8), положителен. Поэтому, сравнив равенства (7) и (8), получим оценку (4).

Перейдем к доказательству утверждения 2б. Спроектировав вектор  $\overrightarrow{DE}$  и кривые  $\widehat{CD}$  и  $\widehat{CE}$  на ось  $d_1$ , направленную по полукасательной  $\tau$ , получим равенство

$$\begin{aligned} DE \sin \beta &= 2 \int_0^\sigma \sin\left(\varphi(s) - \varphi(s) - \frac{1}{2}\gamma(s)\right) \sin \frac{1}{2}(-\gamma(s)) ds = \\ &= 2 \int_0^\sigma \cos(\varphi(s) - \varphi(s)) \sin^2\left(\frac{1}{2}\gamma(s)\right) ds + \int_0^\sigma \sin(\varphi(s) - \varphi(s)) \sin(-\gamma(s)) ds. \end{aligned} \quad (9)$$

Обозначим первый из интегралов в правой части последнего равенства через  $I_1$ , второй через  $I_2$ . В силу условия леммы  $I_1 > 0$ . Для оценки интеграла  $I_2$  применим к нему вторую теорему о среднем

$$I_2 = \sin(-\gamma(s)) \int_0^\sigma \sin(\varphi(s) - \varphi(s)) ds.$$

Так как по условию 2б ось  $d_1$  является опорной прямой к кривой  $\widehat{CD}$ , то

$$\int_{s^*}^{\sigma} \sin(\varphi(s) - \varphi(s)) ds \geq 0$$

и, следовательно,  $I_2 \geq 0$ . Из полученных оценок для  $I_1$  и  $I_2$  и равенства (9) следует, что  $\beta > 0$ .

Докажем теперь утверждения 2а и 2в.

Спроектировав вектор  $\overline{DE}$  и кривые  $\widehat{CD}$  и  $\widehat{CE}$  на ось  $q$ , положительное направление которой образует с полукасательной  $\tau$  угол равный  $\varphi_1 - \frac{1}{2}\gamma(s)$ , получим равенство

$$DE \sin\left(\varphi_1 - \frac{1}{2}\gamma(s) - \beta\right) = 2 \int_0^{\sigma} \sin\left[\varphi_1 - (\varphi(s) - \varphi(s)) + \frac{-\gamma(s) + \gamma(s)}{2}\right] \times \\ \times \sin \frac{1}{2}(-\gamma(s)) ds. \quad (10)$$

Обозначим интеграл, стоящий в правой части равенства (10), через  $I$ . Из условий леммы следует, что подинтегральная функция в нем кусочно непрерывна и неотрицательна. Поэтому  $\sin\left(\varphi_1 - \frac{1}{2}\gamma(s) - \beta\right) \geq 0$  и неравенство (5) доказано.

Из равенства (10) следует, что равенство (6) имеет место тогда и только тогда, когда подинтегральная функция в интеграле  $I$  тождественно равна нулю. В силу монотонности функции  $\sin \frac{1}{2}(-\gamma(s))$  на интервале  $0 \leq s \leq \sigma$  для этого необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства

$$\gamma(s) = 0, \quad 0 \leq s \leq s', \\ [\varphi_1 - (\varphi(s) - \varphi(s))] + \frac{1}{2}(-\gamma(s) + \gamma(s)) = 0 \quad s' < s \leq \sigma, \quad (11)$$

где  $s'$  — некоторое значение  $s$  из интервала  $[0, \sigma]$ . В силу неотрицательности обоих слагаемых в равенстве (11) оно эквивалентно двум следующим:

$$\gamma(s) = \gamma(s), \quad s' < s \leq s; \\ \varphi_1 = \varphi(s) - \varphi(s), \quad s' < s \leq s. \quad (12)$$

Так как  $\varphi(0) = 0$ , то равенство (12) возможно тогда и только тогда, когда  $\varphi_1 = 0$ . Утверждение 2в доказано.

**Лемма 2.** Пусть выпуклая поверхность  $F$  с границей  $\Gamma$  является предельной для последовательности изометрических ей выпуклых поверхностей  $F_n$  с границами  $\Gamma_n$ . Пусть  $M$  открытое множество на кривой  $\Gamma$ , концы составляющих интервалов которого не являются точками типа  $A$  и  $M_n$ , соответствующие ему по изометрии между  $F$  и  $F_n$ , множества на  $\Gamma_n$ . Пусть  $\omega(M)$ ,  $\omega(M_n)$  означает кривизну (площадь сферического изображения) множества  $M$ ,  $M_n$  на поверхности  $F$ , соответственно  $F_n$ . Тогда имеет место равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \omega(M_n) = \omega(M).$$

Доказательство этой леммы основано на известной теореме А. Д. Александрова [5, гл. V, § 2, теорема 2] и проводится аналогично доказательству леммы 2 из [10].

**Лемма 3.** Пусть  $(Q_0, \psi_0)$  тривиальное под克莱ивание поверхности  $F$  и пусть последовательность под克莱иваний  $(Q_n, \psi_n)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) поверхности  $F$  сходится к  $(Q_0, \psi_0)$ .

Пусть  $M_0$  открытое множество на границе  $Q_0$  и пусть  $M_n = \psi_n \psi_0^{-1}(M_0)$ . Тогда, если  $\varphi(M_n)$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) поворот границы области  $Q_n$  с внутренней стороны  $Q_n$  на множестве  $M_n$ , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(M_n) = \varphi(M_0).$$

Доказательство леммы 3 основано на лемме 2 и совпадает с доказательством леммы 3 в работе [10].

## § 2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

2.1. Заметим прежде всего, что поверхности, принадлежащие классу  $K_1$ , не допускают нетривиальных изометрических отображений и потому ~~также~~ более неизгибаются.

Действительно, предположим, что поверхность  $F$ , принадлежащая классу  $K_1$ , допускает нетривиальное изометрическое отображение. Тогда помимо тривиального под克莱ивания  $(Q_0, \psi_0)$  она имеет еще нетривиальное под克莱ивание  $(Q_1, \psi_1)$ . В силу условия 1.5.1 и известной теоремы А. Д. Александрова ([5], гл. IX, § 2, теорема 3), сумма поворотов любых соответствующих по отображению  $\psi_0$  участков границ поверхности  $F$  и области  $Q_0$  равна нулю. Аналогично равна нулю сумма поворотов любых соответствующих по отображению  $\psi_1$  участков границ поверхности  $F$  и области  $Q_1$ . Отсюда следует, что любые соответствующие по отображению  $\psi_1 \psi_0^{-1}$  участки границ областей  $Q_0$  и  $Q_1$  имеют равные повороты. Поэтому отображение  $\psi_1 \psi_0^{-1}$  границы  $Q_0$  на границу  $Q_1$  можно рассматривать как наложение и, следовательно, под克莱ивания  $(Q_0, \psi_0)$  и  $(Q_1, \psi_1)$  совпадают. Последнее, однако, противоречит нетривиальности под克莱ивания  $(Q_1, \psi_1)$ .

2.2. Доказательство теоремы 1 для поверхностей, принадлежащих классам  $K_2$  и  $K_3$ , проводится методом аналогичным методу, использованному в [10] для доказательства неизгибаемости выпуклых многогранников. Изменения и дополнения, возникающие при обобщении этого метода на произвольные выпуклые поверхности с краем ограниченной вариации поворота, полностью проявляются в доказательстве теоремы 1 для поверхностей класса  $K_2$ . Поэтому, чтобы не увеличивать чрезмерно объема статьи, приведем только это доказательство.

2.3. Пусть выпуклая поверхность  $F$  принадлежит классу  $K_2$ . Отметим следующие ее свойства, вытекающие из принадлежности ее этому классу.

2.3.1. В силу условий 1.6.1, 1.6.3 и 1.6.4 существует такое  $\varepsilon > 0$ , что выполняются следующие неравенства

$$\alpha_{11} + \alpha_{10} < 2\pi - \varepsilon, \quad (13)$$

$$\alpha' < \pi - \varepsilon, \quad (14)$$

$$\alpha_{10} < \alpha_{11} - \varepsilon, \quad (15)$$

$$\frac{1}{2} \min(2\pi - \alpha_{10} - \alpha_{11}, \pi) < \min(\theta_1, \theta_2) + \varepsilon. \quad (16)$$

2.3.2. Так как кривая  $L$  имеет поворот ограниченной вариации, то существует такое  $\delta_1 > 0$ , что у открытых участков  $l_1$  и  $l_2$  кривой  $L$ , выходящих из точки  $A_1$  и имеющих длину  $\delta_1$ , вариация поворота меньше  $\varepsilon_1 \ll \varepsilon$ . Пусть для определенности участок  $l_1$  выходит из точки  $A_1$  в положительном направлении кривой  $L$ .

2.3.3. В силу условия 1.6.2. существует такое  $\delta_2 > 0$ , что над  $\delta_2$  — окрестностью точки  $\tilde{A}_1$ , нет точек кривой  $L - l_1 - l_2$ . Так как кривая  $\Gamma$  не имеет кратных точек, то существует такое  $\delta_3 > 0$ , что расстояние в пространстве от точки  $A_1$  до участка  $\phi_0^{-1}(L - l_1 - l_2)$  кривой  $\Gamma$  больше  $\delta_3$ .

2.3.4. В силу условия 2.3.3. существует такое положительное  $\delta \ll \min(\delta_2, \delta_3)$ , что  $4\delta$  — окрестность точки  $A_1$ , видна из всех точек кривой  $L - l_1 - l_2$  под углом меньше  $\varepsilon_1$ . Участок кривой  $L$ , лежащей над  $\delta$  — окрестностью точки  $A_1$ , обозначим через  $L_1$ , участок  $L - L_1$  обозначим через  $L^*$ .

2.4. Допустим, что поверхность  $F$  является предельной для множества нетривиально изометрических ей выпуклых поверхностей  $F_t^*$ .

Пусть  $M'$  и  $M''$  две любые точки кривой  $\Gamma$ ,  $M_t$  и  $M_t''$  — их образы на  $\Gamma_t$  при изометрическом отображении  $f_t$  поверхности  $F$  на поверхность  $F_t$ . Пусть  $r(M', M'')$ ,  $r(M_t, M_t'')$  — расстояния в пространстве между точками  $M'$  и  $M''$ ,  $M_t'$  и  $M_t''$ . Пусть  $\varphi(L^*)$ ,  $\varphi(L_1)$  и  $\varphi(L_t^*)$ ,  $\varphi(L_{1,t})$  — повороты кривых  $L^*$ ,  $L_1$  и  $L_t^*$ ,  $L_{1,t}$  со стороны  $Q$  и соответственно  $Q_t$ . Пусть длина кривой  $L$  равна  $\sigma$ .

Так как поверхность  $F$  является предельной для множества поверхностей  $F_t$ , то найдется такое значение  $T$  параметра  $t$ , что для поверхности  $F_T$  выполнены следующие неравенства:

$$|r(M'_T, M''_T) - r(M', M'')| < \delta, \quad (17)$$

$$-\frac{\delta}{\sigma} < \varphi(L_{1,T}) - \varphi(L_1) \leq 0, \quad (18)$$

$$0 \leq \varphi(L_T^*) - \varphi(L^*) < \frac{\delta}{\sigma}. \quad (19)$$

Отметим, что выполнение неравенств (18) и (19) вытекает из леммы 3.

2.5. Область  $Q$  может быть преобразована в область  $Q_T$  следующим построением. Разрежем кривую  $L$  в точке  $A_1$  и присоединим к разрезанной кривой ее концы  $A'_1$  и  $A''_1$ . Пусть при этом  $A'_1$  является концом участка  $l_1$  и  $A''_1$  — концом участка  $l_2$ . Второй конец участка  $l_1$  обозначим  $B_1$ , второй конец участка  $l_2$  обозначим  $B_2$ . Разрезанную кривую  $L$  с присоединенными к ней концами обозначим через  $\Lambda_1$ .

Деформируем участок  $l_1$  кривой  $\Lambda$  так, чтобы он стал конгруэнтен участку  $l_{1,T}$  кривой  $L_T$ . Поворот полученной при этом кривой  $\Lambda_1$  в точке  $B_1$  сделаем равным повороту кривой  $L$  в точке  $B_1$ . Конец кривой  $\Lambda_1$ , соответствующий точке  $A'_1$ , обозначим  $A'_{11}$ , участок кривой  $\Lambda_1$ , полученный из  $l_1$ , обозначим  $l'_{1,T}$ . Деформируем далее участок  $\widehat{A'_{11}B_2}$  кривой  $\Lambda_1$  так, чтобы он стал конгруэнтен участку  $A_{1,T}B_{2,T}$  кривой  $L_T$ . Поворот полученной при этом кривой  $\Lambda_2$  в точке  $B_2$  сделаем равным повороту кривой  $L_T$  в точке  $B_{2,T}$ . Конец кривой  $\Lambda_2$ , соответствующий точке  $A'_1$ , обозначим  $A'_{12}$ . Деформируем участок  $l_{2,T}$  кривой  $L_T$ . Поворот полученной при этом кривой  $\Lambda_3$  в точке  $B_2$  сделаем равным повороту кривой  $L_T$  в точке  $B_{2,T}$ . Конец кривой  $\Lambda_3$ , соответствующий точке  $A''_1$ , обозначим  $A''_{11}$ .

По построению кривая  $\Lambda_3$  конгруэнтна кривой  $L_T$ . Поэтому точки  $A'_{12}$  и  $A''_{11}$  совмещены и, следовательно, должно иметь место равенство

$$\overline{A'_1 A'_{11}} + \overline{A'_{11} A'_{12}} + \overline{A''_{11} A''_1} = 0. \quad (20)$$

Покажем, однако, что равенство (20) невозможно.

\* В частности, если множество  $F_t$  является непрерывным семейством и  $F = F_0$ , то  $F$  изгибаеома.

2.6. Обозначим через  $n$  полупрямую, направленную по нормали к кривой  $l_1$  в точке  $A'_1$  во внутреннюю сторону  $Q$  (рис. 4). Покажем, что угол  $\beta_1$ , образованный вектором  $\overrightarrow{A'_1 A''_1}$  с полупрямой  $n$ , удовлетворяет неравенству

$$-\varepsilon_1 < \beta_1 < \frac{1}{2} \min(\varphi(l_{1,T}) - \varphi(l_1), \pi) + \varepsilon_1. \quad (21)$$

2.6.1. Проведем через точку  $A'_1$  полупрямую  $g$  так, чтобы угол, образованный полупрямыми  $n$  и  $g$ , был равен  $\varepsilon_1$ . Обозначим через  $R$  бесконечную кривую, составленную из участка  $l_1$  кривой  $L$ , полукасательной  $p$

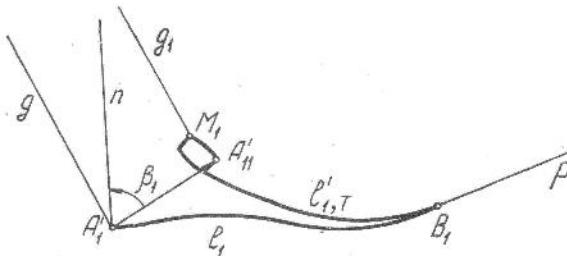


Рис. 4.

к участку  $l_1$  в точке  $B_1$  и полупрямой  $g$ . Гомеоморфную замкнутой полуплоскости бесконечную область, ограниченную кривой  $R$  и лежащую справа от нее при движении по  $l_1$  от  $B_1$  к  $A'_1$ , обозначим через  $U$ . Общую часть области  $U$  и  $3\delta$  — окрестности точки  $A_1$ , обозначим через  $V$ .

Если  $\varphi(l_{1,T}) - \varphi(l_1) < \pi$ , то неравенство (21) непосредственно следует из утверждения 2 леммы 1. Если же  $\varphi(l_{1,T}) - \varphi(l_1) > \pi$ , то неравенство (21) следует из того, что, как будет доказано ниже, точка  $A''_1 \in V$ .

2.7.1. Так как

$$\varphi(l_{1,T}) - \varphi(l_1) < 2\pi - \alpha_{10} - \alpha_{11},$$

то, в силу 2.3.2 и неравенства (13), к кривым  $l_1$  и  $l'_{1,T}$  применимо утверждение 1 леммы 1. Поэтому

$$\beta_1 > -\varepsilon_1.$$

2.7.2. Из 2.3.2 и неравенства (18) следует, что точка  $A''_1$  принадлежит  $3\delta$  — окрестности точки  $A_1$ , и кривая  $l'_{1,T}$  не имеет других общих точек с полупрямой  $p$ , кроме точки  $B_1$ .

2.7.3. Докажем, что кривая  $l_{1,T}$  не имеет кратных точек, расстояние между которыми во внутренней метрике области  $Q_T$  больше нуля. Предположим, вопреки доказываемому, что точки  $M'_T$  и  $M''_T$  кривой  $l_{1,T}$  совмещены (т. е. расположены над одной и той же точкой плоскости) и расстояние между ними в метрике  $Q_T$  больше нуля. Из этого предположения следует, что поворот открытого участка  $M'_T M''_T$  кривой  $l_{1,T}$  не меньше  $\pi$  и, значит, в силу 2.4.2 и неравенства (18) имеют место следующие оценки

$$\rho_{Q_T}(M'_T, A_{1,T}) < 2\delta, \rho_{Q_T}(M''_T, A_{1,T}) < 2\delta, \rho_{Q_T}(M'_T, M''_T) < 2\delta,$$

в которых  $\rho_{Q_T}$  означает расстояние между точками в метрике  $Q_T$ . Отсюда и из 2.3.3, 2.3.4 и неравенства (17) следует, что расстояния в метрике  $Q_T$  от точек  $M'_T$ ,  $M''_T$  до кривой  $L_T - l_{1,T} - l_{2,T}$  больше  $\delta$ . Соединим точки  $M'_T$  и  $M''_T$  кратчайшей в области  $Q_T$ . Длина ее меньше  $2\delta$  и потому она не может иметь общих точек с кривой  $L_T - l_{1,T} - l_{2,T}$ . Отрицательный

поворот со стороны  $Q_T$  участка  $l_{1,T} + l_{2,T}$  кривой  $L_T$  меньше  $\pi$ . Так как кратчайшая в  $Q_T$  может проходить только по тем участкам границы  $Q_T$ , которые имеют со стороны  $Q_T$  неположительный поворот, то из изложенного следует, что поворот кратчайшей  $M'_T M''_T$  меньше  $\pi$ .

Итак, если две точки  $M'_T$  и  $M''_T$  кривой  $l_{1,T}$  совмещены, то расстояние между ними в метрике  $Q_T$  равно нулю.

2.7.4. Пусть  $M(s)$  и  $M_T(s)$  точки кривых  $l_1$  и  $l'_{1,T}$ , соответствующие дуге  $s$ , отсчитываемой от точки  $B_1$ ;  $\varphi(s)$  и  $\varphi_T(s)$  — повороты открытых участков  $\widehat{B_1 M}(s)$  и  $\widehat{B_1 M_T}(s)$  этих кривых со стороны  $Q$  и  $Q_T$  соответственно\*. Тогда, в силу утверждения 2 леммы 1, если

$$\varphi_T(s) - \varphi(s) \leq \pi - \varepsilon_1, \quad (22)$$

то участок  $\widehat{B_1 M_T}(s)$  кривой  $l'_{1,T}$  лежит в области  $U$ . Пусть  $s_1$  — верхняя грань значений  $s$ , для которых выполняется неравенство (22). Проведем через точку  $M_1 = M_T(s_1)$  кривой  $l'_{1,T}$  полуправую  $g_1$ , параллельную и одинаково направленную с полуправой  $g$  (рис. 4). Обозначим через  $R_1$  кривую, составленную из полуправых  $g$  и  $g_1$  и участка  $\widehat{B_1 M_1}$  кривой  $l'_{1,T}$ . Обозначим через  $U_1$  гомеоморфную замкнутой полуплоскости область, лежащую справа от кривой  $R_1$ , если двигаться по  $l'_{1,T}$  из  $B_1$  в  $M_1$ . Правый поворот кривой  $R_1$  в точке  $M_1$  больше  $-\frac{\pi}{2} - 2\varepsilon_1$  и меньше  $\frac{\pi}{2}$ . Так как вариация поворота кривой  $l_{1,T}$  меньше  $2\pi$  и отрицательная часть ее поворота со стороны  $Q_T$  ([11] стр. 220) меньше  $\varepsilon_1$ , то участок  $\widehat{M_1 A'_{11}}$  кривой  $l'_{1,T}$  не имеет с полуправой  $g_1$  общих точек кроме точки  $M_1$ . Так как, кроме того, внутренние точки области  $Q_T$  примыкают к участку  $l_{1,T}$  справа (при движении из  $B_{1,T}$  в  $A_{1,T}$ ), то в достаточно малой окрестности точки  $M_1$  точки участка  $\widehat{M_1 A'_{11}}$  кривой  $l'_{1,T}$  лежат в области  $U_1$ .

2.7.5. Допустим, что участок  $\widehat{M_1 A'_{11}}$  выходит из области  $U_1$ . Тогда, в силу 2.7.2 и 2.7.5., участок  $\widehat{M_1 A'_{11}}$  имеет такую точку  $M'$ , которая, во-первых, совмещена с некоторой внутренней точкой  $M''$  участка  $\widehat{B_1 M_1}$  и, во-вторых, является концом некоторой части участка  $\widehat{M_1 A'_{11}}$ , лежащей целиком вне  $U_1$ . Отсюда и из 2.7.3 следует, что точка  $M''$  является предельной для внутренних точек области  $Q_T$ , расположенных как слева так и справа от кривой  $l_{1,T}$ . Последнее, однако, невозможно, так как кривая  $l_{1,T}$  является частью границы  $Q_T$ \*\*.

Итак, участок  $\widehat{M_1 A'_{11}}$  целиком принадлежит области  $U_1$ . Так как  $U_1 \subset U$  и согласно 2.7.2 точка  $A'_{11}$  принадлежит  $3\delta$  — окрестности точки  $A_1$ , то точка  $A'_{11} \in V$ .

2.7.6. Из 2.7.5 и леммы 1 следует, что

$$\overline{A'_1 A'_{11}} = 0$$

тогда и только тогда, когда кривые  $l_1$  и  $l_{1,T}$  конгруэнтны.

\* Будем считать, что кривая  $\Lambda_1$  и область  $Q_T$  расположены так, что участки  $l_{1,T}$  и  $l'_{1,T}$  совмещены.

\*\* Некоторые участки кривой  $L_t$  могут быть «склесны» между собой. Внутренние точки таких участков не являются предельными для внутренних точек области  $Q_T$ . Но вследу, где внутренние точки  $Q_T$  примыкают к кривой  $L_t$ , они лежат только по одну сторону от заданного направления ее обхода.

2.8. Обозначим через  $\beta_2$  угол, образованный полупрямой  $n$  с вектором  $\overline{A''_{11}A''_1}$ . Аналогично оценке (21) получим для угла  $\beta_2$  оценку

$$\alpha_{10} - \varepsilon_1 < \beta_2 < \alpha_{10} + \frac{1}{2} \min(\varphi(l_2, r) - \varphi(l_2), \pi) + \varepsilon_1. \quad (23)$$

При этом

$$\overline{A''_{11}A''_1} = 0$$

тогда и только тогда, когда  $l_2$  и  $l_2, r$  конгруэнтны.

2.9. Обозначим через  $\beta$  угол, образованный полукасательной  $\tau'$  с вектором  $\overline{A'_{11}A'_{12}}$ . Докажем, что имеет место неравенство

$$\frac{\pi}{2} - \varepsilon_1 < \beta < \frac{\pi}{2} + \alpha' + \varepsilon_1. \quad (24)$$

Если повороты кривых  $L_T$  и  $L$  на участках  $\widehat{B_{1,T}B_{2,T}}$  и  $\widehat{B_1B_2}$  (включая повороты в концах участков) различаются в конечном числе точек, то это утверждение доказывается так же, как для многогранников ([10], 4.4., неравенство (26)).

2.9.1. Для того чтобы доказать неравенство (24) в общем случае, разделим участок  $\widehat{B_1B_2}$  кривой  $\Lambda_1$  на  $n$  равных частей точками  $X_{1n} = B_1, X_{2n}, X_{3n}, \dots, X_{n+1,n} = B_2$ . Повернем по часовой стрелке вокруг точки  $X_1$  участок  $\widehat{A'_{11}X_1}$  кривой  $\Lambda_1$  на угол  $\Delta\varphi_{1n}$ , равный разности поворотов кривых  $L_T$  и  $L$  в точке  $X_{1n}$ . Кривая  $\Lambda_1$  перейдет при этом в кривую  $\Lambda_{1n}$ . Точку кривой  $\Lambda_{1n}$ , соответствующую точке  $A'_{11}$  кривой  $\Lambda_1$ , обозначим  $A_{1n}$ . Повернем по часовой стрелке вокруг точки  $X_{2n}$  участок  $\widehat{A_{1n}X_{2n}}$  кривой  $\Lambda_{1n}$  на угол  $\Delta\varphi_{2n}$ , равный разности поворотов кривых  $L_T$  и  $L$  на участках  $X_{1n,T}X_{2n,T}$  и  $X_{1n}X_{2n}$ \*. Кривая  $\Lambda_{1n}$  перейдет при этом в кривую  $\Lambda_{2n}$ . Конец кривой  $\Lambda_{2n}$ , соответствующий точке  $A'_{11}$  кривой  $\Lambda_1$ , обозначим  $A_{2n}$ . Проведем аналогичное построение во всех точках  $X_{3,n}, X_{4,n}, \dots, X_{n+1,n}$ . Окончив его, получим кривую  $\Lambda_{n+1,n}$ . Конец кривой  $\Lambda_{n+1,n}$ , соответствующий точке  $A'_{11}$  кривой  $\Lambda$ , обозначим  $A_{n+1,n}$ .

Из 2.7.2 и оценки (18) следует, что все точки  $A_{in}$  ( $i = 1, 2, \dots, n+1$ ) принадлежат  $4\delta$  — окрестности точки  $A_{11}$ . Поэтому, согласно 2.3.4, углы, образованные полукасательной  $\tau'$  с векторами  $\overline{A_{in}A_{i+1,n}}$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, n$ ;  $A_{0n} \equiv A'_{11}$ ), больше  $\frac{\pi}{2} - \varepsilon_1$  и меньше  $\frac{\pi}{2} + \alpha' + \varepsilon_1$ . В силу неравенства (14), отсюда следует, что все векторы  $\overline{A_{in}A_{i+1,n}}$  направлены в одну открытую полуплоскость и угол  $\beta_n$ , образованный полукасательной  $\tau'$  с вектором

$$\overline{A'_{11}A_{n+1,n}} = \sum_{i=0}^n \overline{A_{in}A_{i+1,n}},$$

удовлетворяет неравенству

$$\frac{\pi}{2} - \varepsilon_1 < \beta_n < \frac{\pi}{2} + \alpha' + \varepsilon_1. \quad (25)$$

2.9.2. Допустим, что разность поворота кривых  $L_T$  и  $L$  на участках  $\widehat{B_{1,T}B_{2,T}}$  и  $\widehat{B_1B_2}$  (включая повороты в концах участков) больше некоторого  $\varepsilon_2 > 0$ . Оценим при этом предположении длину вектора  $\overline{A'_{11}A_{n+1,n}}$ . Для этого

\* Повороты берутся со стороны областей  $Q_T$  и  $Q$ . В повороты участков  $\widehat{X_{kn,T}X_{k+1,n}}$  и  $\widehat{X_{kn}X_{k+1,n}}$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) включаются соответственно повороты в точках  $X_{k+1,n,T}$  и  $X_{k+1,n}$  и не включаются повороты в точках  $X_{kn,T}$  и  $X_{kn}$ .

спроектируем его, а также векторы  $\overline{A_{in}A_{i+1,n}}$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) на ось  $q$ , направленную по биссектрисе угла между полукасательными  $\tau'$  и  $\tau''$ . При этом получим

$$A'_{11}A_{n+1,n} \geq \text{пр}_q \overline{A'_{11}A_{n+1,n}} = \sum_{i=0}^n \text{пр}_q \overline{A_{in}A_{i+1,n}} > \sum_{i=0}^n A_{in}A_{i+1,n} \cdot \sin \varepsilon_1. \quad (26)$$

Так как, согласно 2.9.1, все точки  $A_{in}$  принадлежат  $4\delta$ -окрестности точки  $A_1$ , и, согласно 2.3.3, все точки  $X_{in}$  лежат вне  $\delta_2$  окрестности точки  $A_1$ , то

$$A_{in}A_{i+1,n} > \frac{2}{\pi} (\delta_2 - 4\delta) \Delta \varphi_{i+1,n} (i = 0, 1, \dots, n). \quad (27)$$

Из оценок (26) и (27), учитывая неравенство

$$\sum_{i=0}^n \Delta \varphi_{i+1,n} > \varepsilon_2,$$

получим

$$A'_{11}A_{n+1,n} > \frac{2}{\pi} (\delta_2 - 4\delta) \varepsilon_2 \cdot \sin \varepsilon_1. \quad (28)$$

2.9.3. При  $n \rightarrow \infty$  последовательность кривых  $A_{n+1,n}$  сходится к кривой  $\Lambda_2$ , последовательность точек  $A_{n+1,n}$  сходится к точке  $A'_{12}$ . Переходя к пределу в неравенстве (25), получим неравенство (24). В силу оценки (28), равенство

$$\overline{A'_{11}A'_{12}} = 0$$

может иметь место тогда и только тогда, когда участки  $\widehat{B_1B_2}$  и  $\widehat{B_{1,T}B_{2,T}}$  кривых  $L$  и  $L_T$  конгруэнтны и повороты кривых  $L$  и  $L_T$  в точках  $B_i$  и  $B_{i,T}$  ( $i = 1, 2$ ) равны между собой.

2.10. Так как, по предположению, поверхность  $F_T$  нетривиально изометрична поверхности  $F$ , то под克莱вание  $(Q_T, \varphi_T)$  нетривиально. Поэтому хотя бы один из векторов  $\overline{A'_1A'_{11}} = \mathbf{b}_1$ ,  $\overline{A'_{11}A'_{12}} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{A''_{11}A''_1} = \mathbf{b}_2$  не равен нулю. Из неравенств (14), (15), (16), (21), (22) и (23) следует \*, что векторы  $\mathbf{b}_1$ ,  $\mathbf{b}_2$ ,  $\mathbf{b}$ , направлены в одну открытую полуплоскость и потому равенство (20) невозможно.

Доказательство теоремы 1 для поверхностей класса  $K_2$  завершено.

### § 3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2

3.1. Доказательство теоремы 2 сводится к установлению достаточности каждого из условий 1.9.1—1.9.12 для изгибаеомости поверхности. Достаточность условий 1.9.4—1.9.12 доказывается так же как и в случае многогранников [10, § 4]. Поэтому приведем здесь доказательства только для условий 1.9.1—1.9.3.

Если кривая  $\Gamma$  бесконечна и выполнено хотя бы одно из условий 1.9.2, 1.9.3, то заведомо выполнено и условие 1.9.1. Поэтому, доказывая достаточность условий 1.9.2 и 1.9.3, будем предполагать кривую  $\Gamma$  простой замкнутой кривой. Условие 1.9.1 рассмотрим последним.

3.2. Достаточность условия 1.9.2. Допустим, что число вершин  $A_i$  типа  $A$  поверхности  $F$  бесконечно. Если не все вершины  $A_i$  области  $Q$  лежат на одной прямой опорной к области  $Q$ , то поверхность  $F$  изгибаеома в силу одного из условий 1.9.4, 1.9.5, 1.9.7. Поэтому остается рассмотреть случай, когда все вершины  $A_i$  области  $Q$  лежат на одной прямой опорной к области  $Q$ .

\* Ср. [10, 4.9].

Так как число вершин  $A_i$  на кривой  $L$  бесконечно, а сама кривая  $L$  ненечна, то на ней имеется хотя бы одна точка сгущения этих вершин. Обозначим ее через  $B$ . Возьмем открытый участок  $\widehat{B'B''}$  кривой  $L$ , содержащий точку  $B$  и столь малый, что вариация поворота каждой из его открытых частей  $\widehat{B'B}$  и  $\widehat{B'B''}$  меньше  $\pi$ . Хотя бы один из открытых участков  $\widehat{B'B}$  и  $\widehat{B'B''}$  содержит три различные точки  $A_i$ ,  $A_k$  и  $A_l$  типа  $A$ . Так как вариация поворота участка  $\widehat{A_i A_k A_l}$  кривой  $L$  меньше  $\pi$  и точки  $A_i$ ,  $A_k$  и  $A_l$  лежат на одной прямой опорной к  $\bar{Q}$ , то один и тот же порядок обхода этих точек по границам  $Q$  и  $\bar{Q}$  определяет одну и ту же ориентацию  $Q$  и  $\bar{Q}$ . Следовательно, в силу условия 1.9.8, поверхность  $F$  изгибаема.

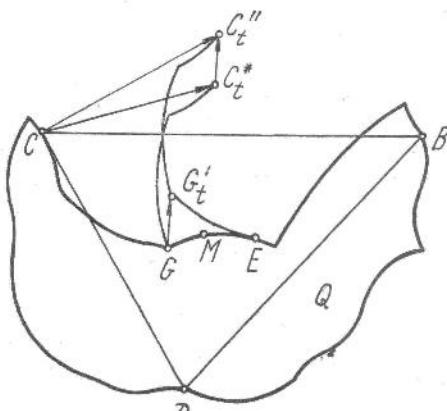


Рис. 5.

3.3.2. Не существует ни одного  $\lambda$  участка кривой  $L$ , лежащего строго внутри  $\bar{Q}$ .

Доказательство изгибаемости поверхности  $F$  проведем отдельно для каждого случая.

3.4.1. Рассмотрим случай 3.3.1. Обозначим некоторый  $\lambda$  участок, лежащий строго внутри  $\bar{Q}$ , через  $l$ . На участке  $l$  найдем такую точку  $M$ , каждая достаточно малая окрестность которой является  $\lambda$  участком. Так как точка  $M$  лежит строго внутри  $\bar{Q}$ , то на кривой  $L$  можно найти три точки  $B$ ,  $C$  и  $D$  такие, что точка  $M$  лежит строго внутри треугольника  $BCD$ . Точки  $B$ ,  $C$  и  $D$  можно выбрать так, чтобы они были гладкими и не являлись точками типа  $A$ .

Предположим для определенности, что ориентации области  $Q$  и треугольника  $BCD$ , определенные одним и тем же порядком обхода точек  $B$ ,  $C$  и  $D$ , совпадают\*, и при обходе  $Q$  в положительном направлении за точкой  $B$  следует точка  $C$  (рис. 5).

3.4.2. Обозначим через  $\delta$  длину наименьшего из прямолинейных отрезков  $MB$ ,  $MC$  и  $MD$  и через  $\epsilon$  наименьший из углов между прямыми  $MB$ ,  $MC$  и  $MD$  и сторонами треугольника  $BCD$ . В силу 3.4.1, имеем  $\delta > 0$ ,  $\epsilon > 0$ . Возьмем на участке  $l$  две точки  $E$  и  $G$  такие, что участок  $\widehat{EG} \subset l$  содержит точку  $M$  и его длина  $s_0$  удовлетворяет неравенству

$$s_0 < \frac{\epsilon \delta}{4\pi^2}. \quad (29)$$

\* Случай, когда ориентации противоположны, рассматривается аналогично.

Заметим сразу, что участок  $\widehat{EG} \subset l$  лежит внутри треугольника  $BCD$  и виден из его вершин под углами  $< \frac{1}{4}\pi$ .

Точки  $B$ ,  $C$  и  $D$  разбивают кривую  $L$  на три части  $\widehat{BC}$ ,  $\widehat{CD}$  и  $\widehat{DB}$ . Пусть для определенности  $\widehat{EG} \subset \widehat{BC}$  и точка  $E$  расположена на  $\widehat{BC}$  между точками  $B$  и  $G$ .

3.4.3. Обозначим дугу кривой  $L$ , отсчитываемую от точки  $C$  в положительном направлении, через  $s$  ( $0 \leq s \leq \sigma$ , где  $\sigma$  длина кривой  $L$ ); левый поворот участка  $\widehat{CM}(s)$  кривой  $L$  через  $\varphi(s)$  и кривизну открытого участка  $\widehat{CM}(s)$  кривой  $\Gamma$  через  $\omega(s)$ . Пусть точке  $E$  соответствует значение дуги  $s$  равное  $s_1$ . Обозначим через  $\gamma(s)$  функцию, определенную следующим образом:

$$\gamma(s) = \begin{cases} 0 & 0 \leq s \leq s_1, \\ \omega(s) - \omega(s_1) & s_1 < s \leq s_1 + s_0, \\ \omega(s_1 + s_0) - \omega(s_1) & s_1 + s_0 < s \leq \sigma. \end{cases}$$

Введем систему прямоугольных декартовых координат  $x$ ,  $y$ . Начало системы поместим в точке  $C$ , ось  $x$  направим по касательной к кривой  $L$  в точке  $C$  в сторону возрастания дуги  $s$ , ось  $y$  направим по внутренней нормали. Рассмотрим семейство кривых  $L'_t$ ,  $t \in [0, 1]$ , определяемых в этой системе координат уравнениями

$$\begin{aligned} x'_t(s) &= \int_0^s \cos(\varphi(s) + t\gamma(s)) ds, \\ y'_t(s) &= \int_0^s \sin(\varphi(s) + t\gamma(s)) ds, \end{aligned} \quad s \in [0, \sigma].$$

Эти кривые, как известно [12, гл. IV, § 8], спрямляемы и параметр  $s$  является для них длиной дуги. При  $t > 0$  они незамкнуты. Точки  $C$  кривой  $L$  на кривой  $L'_t$  соответствуют две точки: одна из них, которую обозначим  $C'_t$ , соответствует дуге  $s = 0$ , вторая —  $C''_t$  соответствует дуге  $s = \sigma$ . В каждой точке кривые  $L'_t$  имеют правую и левую полукасательные. Поворот открытого участка  $\widehat{C'_t M'_t}(s)$  кривой  $L'_t$  равен  $\varphi(s) + t\gamma(s)$ .

3.4.4. Докажем, что если  $t$  достаточно мало, то поворачивая участки  $\widehat{C'_t D'_t}$  и  $\widehat{B'_t C''_t}$  кривой  $L'_t$  вокруг точек  $D_t$  и  $B_t$  так, чтобы левые повороты кривой  $L'_t$  в точках  $D_t$  и  $B_t$  возрастили, можно совместить точки  $C'_t$  и  $C''_t$ .

Отметим, что при всех  $t > 0$  участок  $\widehat{C'_t E'_t}$  кривой  $L'_t$  совпадает с участком  $\widehat{CE}$  кривой  $L$ . Участок  $\widehat{G'_t C''_t}$  кривой  $L'_t$  конгруэнтен участку  $\widehat{GC}$  кривой  $L$ . Он может быть получен из участка  $\widehat{GC}$  путем поворота его вокруг точки  $G$  по часовой стрелке на угол  $\beta_t = (\omega(s_1 + s_0) - \omega(s_1)) \cdot t$  и параллельного переноса на вектор  $\overrightarrow{GG'_t}$  (рис. 5). Обозначим положение, которое займет точка  $C$  после поворота участка  $GC$  на угол  $\beta_t$  через  $C_t^*$ . Из построения следует, что

$$\overline{CC''_t} = \overline{CC_t^*} + \overline{GG'_t}.$$

Оценим угол  $C''CC_t^*$  между векторами  $\overline{CC_t''}$  и  $\overline{CC_t^*}$ , рассматриваемый как в теории проекций. Для этого оценим сначала длины векторов  $\overline{CC_t^*}$  и  $\overline{GG_t'}$ . Из 3.4.2 и 3.4.3 следует, что

$$\begin{aligned} CC_t^* &= 2CG \sin \frac{\omega(s_1 + s_0) - \omega(s_1)}{2} t > 2(\delta - s_0) \frac{\omega(s_1 + s_0) - \omega(s_1)}{\pi} t, \\ GG_t' &= \left| \int_{s_1}^{s_1+s_0} (e^{i(\varphi(s)+t\gamma(s))} - e^{i\varphi(s)}) ds \right| \leq \int_{s_1}^{s_1+s_0} |e^{it\gamma(s)} - 1| ds < s_0 t \gamma(s_1 + s_0) = \\ &= s_0 t (\omega(s_1 + s_0) - \omega(s_1)). \end{aligned}$$

Используя найденные оценки, а также неравенство (29), получим

$$\angle C''CC_t^* \leq \arcsin \frac{GG_t'}{CC_t^*} < \frac{\varepsilon}{8}.$$

Угол, образованный вектором  $\overline{CG}$  с вектором  $\overline{CC_t^*}$ , равен

$$\frac{\pi}{2} - \frac{\omega(s_1 + s_0) - \omega(s_1)}{2} t.$$

Поэтому при

$$t < \frac{\varepsilon}{8(\omega(s_1 + s_0) - \omega(s_1))}$$

угол, образованный вектором  $\overline{CG}$  с вектором  $\overline{CC_t''}$ , удовлетворяет неравенству

$$\frac{\pi}{2} - \frac{3}{16}\varepsilon < \angle C_t CG < \frac{\pi}{2} + \frac{1}{16}\varepsilon. \quad (30)$$

Согласно 3.4.2, угол, образованный вектором  $\overline{CD}$  с вектором  $\overline{CG}$ , больше  $\frac{3}{4}\varepsilon$  и меньше  $\pi - \frac{3}{4}\varepsilon$ . Отсюда и из неравенства (30) следует, что угол, образованный вектором  $\overline{CD}$  с вектором  $\overline{CC_t''}$ , больше  $\frac{\pi}{2} + \frac{9}{16}\varepsilon$  и меньше  $\frac{3}{2}\pi - \frac{11}{16}\varepsilon$ . Следовательно, в треугольнике  $C''CD$  угол в вершине  $C$  больше  $\frac{\pi}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$  и потому

$$C''D > CD.$$

Аналогично доказывается, что при достаточно малых  $t$ , в треугольнике  $BCC_t''$  угол в вершине  $C$  меньше  $\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2}$  и угол в вершине  $B$  меньше  $\frac{\varepsilon}{2}$ , и, следовательно,

$$BC > BC_t''.$$

Будем поворачивать участок  $\widehat{C'_t D_t}$  кривой  $L'_t$  вокруг точки  $D_t$  по часовой стрелке. При этом левый поворот кривой  $L'_t$  в точке  $D_t$  возрастает. Следовательно, согласно предположению, сделанному в 3.4.1, угол треугольника  $C'_t D_t B_t$  в точке  $D_t$  убывает. При этом точка  $C'_t$  будет монотонно приближаться к точке  $B_t$  до тех пор, пока она не окажется на одной прямой с точками  $D_t$  и  $B_t$ . Углы треугольника  $CDB$  больше  $\varepsilon > 0$ . Разность длин отрезков  $BC$  и  $B_t C_t''$  может быть сделана сколь угодно малой за счет выбора  $t$ . Поэтому, если  $t$  достаточно мало, то найдется такое  $\gamma_{1,t}$  ( $0 < \gamma_{1,t} < \varepsilon$ ), что при повороте участка  $\widehat{C'_t D_t}$  вокруг точки  $D_t$  на угол  $C'_t D_t \hat{C}_t = \gamma_{1,t}$  получим

$$C_t B_t = C'' B_t.$$

Теперь будем поворачивать против часовой стрелки вокруг точки  $B_t$  участок  $\widehat{B_t C_t''}$  кривой  $L'_t$ . При этом в треугольнике  $C_t'' D_t B_t$  угол в точке  $B_t$  будет убывать. Точка  $C_t''$  будет приближаться к точке  $D_t$  и при повороте участка  $\widehat{B_t C_t''}$  вокруг точки  $B_t$  на угол  $C_t'' B_t \hat{C}_t$  точка  $C_t''$  совместится с точкой  $\hat{C}_t$ . Отождествив их, получим замкнутую кривую  $L_t$ . При достаточно малых  $t$  кривая  $L_t$  ограничивает некоторую область  $Q_t$ . Выполнение условий подклевания для области  $Q_t$  всюду, кроме точки  $C_t$ , следует непосредственно из построения. Выполнение условий подклевания в точке  $C_t$  следует из того, что область  $Q_t$  также можно построить, поменяв роли точек  $B_t$  и  $C_t$ . Непрерывность семейства областей  $Q_t$  вытекает из непрерывности семейства кривых  $L'_t$ .

Изгибаеомость поверхностей в случае 3.3.1 доказана.

3.5.1. Рассмотрим случай 3.3.2. Обозначим через  $h_1$  и  $h_2$  соответственно наибольшую и наименьшую ширину выпуклой оболочки области  $Q$ . В силу определения  $\lambda$  участков кривой  $L$  на ней можно найти такой  $\lambda$ -

участок, что длина его меньше  $\frac{4}{\pi} h_2$  и сумма вариации его поворота и кривизны его прообраза на поверхности  $\bar{F}$  меньше

$$\alpha = \min \left( \operatorname{arctg} \frac{h_2}{h_1}, -\frac{\pi}{8} \right).$$

Пусть  $\widehat{C_1 C_2}$  один из таких  $\lambda$ -участков. В силу 3.3.2 множество точек участка  $\widehat{C_1 C_2}$ , лежащих на границе  $\bar{Q}$ , несчетно. Множество угловых точек кривой  $L$  не более чем счетно. Поэтому среди точек участка  $\widehat{C_1 C_2}$ , лежащих на границе  $\bar{Q}$ , можно найти такую гладкую точку  $B$ , которая разбивает его на два  $\lambda$ -участка.

3.5.2. Обозначим через  $g'$  опорную прямую к  $\bar{Q}$  в точке  $B$  и через  $g''$  — опорную прямую к  $\bar{Q}$  параллельную прямой  $g'$  (рис. 6). На прямой  $g''$  возьмем некоторую точку  $D$ , принадлежащую кривой  $L$ . Точки  $B$  и  $D$  разбивают кривую  $L$  на две части:  $L_1$  и  $L_2$ , длина каждой из которых больше  $h_2$ . Поэтому точки  $B$  и  $D$  разделяют точки  $C_1$  и  $C_2$ . Пусть для определенности, точка  $C_2 \in L_2$  и  $L_2$  выходит из точки  $B$  в положительном направлении.

Участки кривой  $\Gamma_i$ , соответствующие по подклеванию участкам  $L_i$  кривой  $L$ , обозначим  $\Gamma_i$  ( $i = 1, 2$ ). Обозначим через  $s$  дугу кривой  $L_i$ , отсчитываемую от точки  $D$  на кривой  $L_1$  в положительном направлении обхода области  $Q$  и на кривой  $L_2$  — в отрицательном направлении обхода. Пусть точке  $C_i$  соответствует дуга  $s_i$ , и пусть точке  $B$  соответствует на кривой  $L_i$  дуга  $\varphi_i$ . Обозначим через  $\psi_i(s)$  поворот со стороны  $Q$  открытого участка  $DM(s)$  кривой  $L_i$  и через  $\omega_i(s)$  кривизну открытого участка  $DM(s)$  кривой  $\Gamma_i$ . Обозначим через  $\gamma_i(s)$  функции, определенные следую-

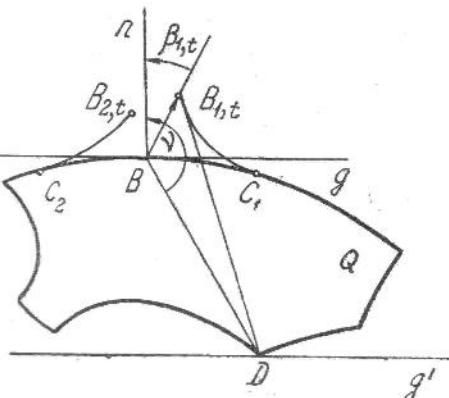


Рис. 6.

щими условиями:

$$\gamma_i(s) = \begin{cases} 0 & 0 \leq s \leq s_i, \\ \omega_i(s) - \omega_i(s_i) & s_i < s \leq \sigma_i, \end{cases} \quad i = 1, 2.$$

3.5.3. Введем прямоугольные системы координат  $x_1, y_1$  и  $x_2, y_2$ \*. Начала обеих систем поместим в точке  $D$ , ось  $x_i$  направим по полукасательной к кривой  $L_i$ , ось  $y_i$  по внутренней (относительно  $Q$ ) нормали к кривой  $L_i$  ( $i = 1, 2$ ). Построим два семейства кривых  $L_{i,t}$  ( $t \in [0, 1]$ ),  $i = 1, 2$ , определив их следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} x_{i,t}(s) &= \int_0^s \cos(\varphi_i(s) + t\gamma_i(s)) ds, \\ y_{i,t}(s) &= \int_0^s \sin(\varphi_i(s) + t\gamma_i(s)) ds. \end{aligned} \quad (31)$$

Кривые  $L_{i,t}$  спрямляются и параметр  $s$  является для них длиной дуги. В каждой точке они имеют правую и левую полукасательные.

Обозначим точки кривых  $L_{i,t}$ , соответствующие точкам  $D, C_i, B$  кривых  $L_i$ , через  $D_{i,t}, C_{i,t}, B_{i,t}$ . Поворот открытого участка  $\widehat{D_i M_i}(s)$  кривой  $L_{i,t}$  равен  $\varphi_i(s) + t\gamma_i(s)$ . Участок  $\widehat{D_i C_{i,t}}$  кривой  $L_{i,t}$  совпадает с участком  $\widehat{D C_i}$  кривой  $L_i$ . Участки  $\widehat{C_i B_i}$  и  $\widehat{C_{i,t} B_{i,t}}$  кривых  $L_i$  и  $L_{i,t}$ , в силу 3.5.1, удовлетворяют условиям утверждения 2 леммы 1. Поэтому угол  $\beta_{1,t}$ , образованный вектором  $\overrightarrow{B B_{1,t}}$  с внешней нормалью  $n$  к области  $Q$  в точке  $B$ , удовлетворяет неравенству

$$0 < \beta_{1,t} < \pi. \quad (32)$$

Аналогично, угол  $\beta_{2,t}$ , образованный  $n$  с вектором  $\overrightarrow{B B_{2,t}}$ , удовлетворяет неравенству

$$0 < \beta_{2,t} < \pi. \quad (33)$$

В силу 3.5.1 и 3.5.2 угол  $\nu$ , образованный вектором  $\overrightarrow{B D}$  с  $n$ , удовлетворяет неравенству

$$\frac{\pi}{2} + \nu < \nu < \frac{3}{2}\pi - \nu. \quad (34)$$

Из неравенств (32), (33) и (34) следует, что в треугольнике  $BB_{1,t}D$  угол в точке  $B$  больше  $\frac{\pi}{2}$ .

Ввиду непрерывной дифференцируемости функций (31) по параметру  $t$  отсюда следует, что при достаточно малых значениях  $t$  длина отрезка  $DB_{i,t}$  ( $i = 1, 2$ ) является монотонно возрастающей непрерывной функцией параметра  $t$ . Поэтому, если  $t_1 > 0$  достаточно мало, то для  $t \in [0, t_1]$  определена однозначная непрерывная функция  $T = T(t)$  такая, что

$$DB_{2,t} = DB_{1,t}.$$

Зафиксируем некоторое  $t \in [0, t_1]$ . Повернем без изменения формы кривую  $L_{1,t}$  вокруг точки  $D_t$  против часовой стрелки на угол  $\eta_t = \angle B_{1,t} D_t B_{2,t}(t)$ . Точка  $B_{1,t}$  совместится при этом с точкой  $B_{2,t}(t)$ .

\* Очевидно, система  $x_1, y_1$  — правая,  $x_2, y_2$  — левая.

и кривые  $L_{1,t}$  и  $L_{2,t}$  образуют при этом замкнутую кривую  $L_t$ . Если  $t_1$  достаточно мало, то при  $t \in [0, t_1]$  кривая  $L_t$  ограничивает некоторую плоскую область  $Q_t$ .

Область  $Q_t$  удовлетворяет условиям подклеивания к поверхности  $F$ . Действительно, выполнение условий подклеивания во всех точках кривой  $L_t$ , кроме точки  $B_t$ , следует непосредственно из построения. Покажем, что поворот  $\varphi_t(B_t)$  кривой  $L_t$  со стороны  $Q_t$  в точке  $B_t$  положителен. В силу построения области  $Q_t$  имеет место равенство

$$\varphi_t(B_t) + \tau_t = (\omega_1(z_1) - \omega_1(s_1))t + (\omega_2(z_2) - \omega_2(s_2))T(t). \quad (35)$$

Так как при малых  $t$  угол  $\tau_t$  заведомо меньше  $\frac{\pi}{2}$ , то

$$\tau_t < \frac{\pi}{2} \sin \tau_t = \frac{\pi}{2} \frac{B_{1,t} B_{2,t}}{2DB_{1,t}}.$$

Отсюда, учитывая оценки

$$\begin{aligned} DB_{1,t} &> DB \geq h_2, \\ B_{1,t} B_{2,t} &\leq B_{1,t} B + BB_{2,t} < \\ &< (\omega_1(z_1) - \omega_1(s_1))t + \frac{4}{\pi}h_2 + (\omega_2(z_2) - \omega_2(s_2))T(t) \cdot \frac{4}{\pi}h_2, \end{aligned}$$

получим

$$\tau_t < (\omega_1(z_1) - \omega_1(s_1))t + (\omega_2(z_2) - \omega_2(s_2))T(t).$$

Откуда и из равенства (35) следует, что

$$\varphi_t(B_t) > 0.$$

Так как поворот кривой  $L$  в точке  $B$  был равен нулю, то условие подклеивания в точке  $B_t$  выполнено.

Непрерывность семейства областей  $Q_t$  следует непосредственно из построения. Изгибающаяся поверхности в случае 3.3.2 доказана.

3.6. Пусть для поверхности  $F$  выполнено условие 1.9.1. При этом возможны два случая:

- 1) На кривой  $L$  есть хотя бы одна точка типа  $A$ .
- 2) На кривой  $L$  есть хотя бы один  $\lambda$ -участок.

Рассмотрим только случай 2) (случай 1) рассматривается аналогично).

Пусть участок  $\widehat{B_1 B_2} \subset L$  является  $\lambda$ -участком. Точки  $B_1$  и  $B_2$  разбивают кривую  $L$  на три части: два бесконечных участка  $L_1$  и  $L_2$  с концами  $B_1$  и  $B_2$  соответственно и участок  $L_3 = \widehat{B_1 B_2}$ . Пусть  $l$  произвольная часть участка  $L_3$ ,  $\varphi(l)$  — ее поворот со стороны области  $Q$  и  $\omega(l)$  кривизна на поверхности  $\bar{F}$  участка  $\varphi^{-1}(l)$  кривой  $\Gamma$ .

Будем деформировать кривую  $L$  в простую кривую  $L_t$  следующим образом. Участок  $L_1$  кривой  $L$  оставим без изменения. Участок  $L_3$  деформируем в  $L_{3,t}$  так, чтобы поворот  $\varphi_t(l_t)$  каждого участка  $l_t \subset L_{3,t}$  был равен  $\varphi(l) + \omega(l) \cdot t$ . Участок  $L_3$  перенесем параллельно на вектор  $\widehat{B_2 B_1}$ . При этом полный поворот кривой  $L_t$  равен полному повороту кривой  $L$ . Если  $t$  достаточно мало, то кривая  $L_t$  ограничивает гомеоморфную полу-плоскости область  $Q_t$ , для которой выполнены условия подклеивания к поверхности  $F$ . Непрерывность деформации  $Q$  в  $Q_t$  очевидна. Достаточность условия 1.9.1 доказана.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Л. А. Шор. Об изгибаеомости выпуклых поверхностей с границей. ДАН СССР, т. 135, № 5, 1960.
2. А. В. Погорелов. Однозначная определенность общих выпуклых поверхностей. Изд-во АН УССР, Киев, 1952.
3. Л. А. Шор. Об изгибаеомости многосвязных выпуклых поверхностей. УМН, XV, вып. 5(95), 1960.
4. А. Д. Александров. Выпуклыи многогранники. Гостехиздат, М.—Л., 1950.
5. А. Д. Александров. Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей. Гостехиздат, М.—Л., 1948.
6. Л. А. Шор. О деформациях тривидального под克莱ивания. «Укр. геометр. сб.», вып. 3, Изд-во ХГУ, Харьков, 1966.
7. Л. А. Шор. Пример неизгибаеомой выпуклой поверхности, предельной для ей изометричных. УМН, XV, вып. 4(94), 1960.
8. Л. А. Шор. Об однозначной определенности и об изгибаеомости некоторых выпуклых поверхностей с краем. ДАН СССР, т. 134, № 1, 1960.
9. Л. А. Шор. Пример дисконтинуума нетривиально изометричных между собой выпуклых поверхностей. УМН, XVII, вып. 5(107), 1962.
10. Л. А. Шор. Об изгибании выпуклых многогранников с границей. «Матем. сб.», 45(87) : 4, 1958, 471—488.
11. А. Д. Александров и В. А. Залгаллер. Двумерные многообразия ограниченной кривизны. Изд-во АН СССР, 1962.
12. С. Сакс. Теория интеграла. Изд-во иностр. лит., М., 1949.

Поступила 17 апреля 1967 г.

УДК 513

Кривые ограниченной вариации поворота в многообразиях ограниченной кривизны, заданных обобщенным чебышевским элементом.  
Бакельман И. Я., Эпштейн Л. А. «Украинский геометрический сборник», вып. 5—6, 1968, стр. 10—20.

Статья посвящена изучению кривых ограниченной вариации поворота в многообразиях ограниченной кривизны в смысле А. Д. Александрова. Как известно, метрика  $\rho$  такого многообразия может быть задана в положительном квадранте  $Q$  евклидовой плоскости  $u, v$  обобщенным чебышевским линейным элементом

$$ds^2 = du^2 + 2 \cos \tau(u, v) du dv + dv^2,$$

где

$$\varphi \{ \tau(u, v) \} < \frac{\pi}{2}; \quad \tau(0, v) = \tau(u, 0) = \frac{\pi}{2}.$$

Основным результатом статьи является следующая

**Теорема.** Если простая кривая  $l$ , расположенная в квадранте  $Q$  и заданная в нем уравнениями  $u = u(t)$ ,  $v = v(t)$ , имеет ограниченную вариацию поворота на евклидовой плоскости  $u, v$  и вариация  $\tau(u(t), v(t))$  вдоль кривой  $l$  ограничена, то в обобщенной чебышевской метрике  $\rho$  она имеет поворот ограниченной вариации.

Доказательство этой теоремы основано на приближении метрики  $\rho$  и кривой  $l$  сходящимися к ним последовательностями регулярных метрик  $\rho_n$  и регулярных кривых  $l_n$ . В нем использованы полученные в работе оценки интеграла от модуля геодезической кривизны регулярной кривой в регулярной чебышевской метрике.

В статье формулируются также условия, при выполнении которых кривая, имеющая ограниченную вариацию поворота в метрике  $\rho$ , будет иметь ограниченную вариацию поворота на евклидовой плоскости.

Библиографических ссылок 3.

УДК 513

Конические сети на поверхностях третьего порядка.  
Блажк Я. П., Паньков Г. В., Рокотянская В. В., «Украинский геометрический сборник», вып. 5—6, 1968, стр. 21—29.

В статье исследуется вопрос о существовании на поверхностях третьего порядка сетей Петерсона, т. е. сопряженных сетей, образованных линиями касания описанных около поверхности конусов.

Доказано, что из 23 типов поверхностей третьего порядка, содержащихся в классификации Шлеффи, 20 типов несут на себе конические сети. Именно, линейчатые поверхности несут  $\infty^2$  сетей. Поверхности с четырьмя коническими точками или эквивалентными им особенностями несут  $\infty^1$  сетей. Поверхность с двумя особыми точками несет коническую сеть, и вершины конусов одного семейства лежат на прямой, соединяющей эти точки.

Бипланарная точка  $B$ , понижющая класс поверхности на четыре или больше единиц, порождает коническую сеть, и вершины конусов одного семейства лежат на прямой пересечения касательных плоскостей в  $B$ . Унипланарная точка  $U$  также порождает коническую сеть, и каждая из прямых пересечения поверхности с касательной плоскостью в  $U$  служит геометрическим местом вершин конусов сети.

Из поверхностей третьего порядка без особых точек три конические сети несут тетраэдрально-симметрические поверхности. Общая же поверхность третьего порядка без особенностей не несет конических сетей. Это доказано на примере диагональной поверхности.

Таблица 2. Библиографических ссылок 3.

УДК 513

О поверхностях ограниченной внешней кривизны. Бураго Ю. Д., «Украинский геометрический сборник», вып. 5—6, 1968, стр. 29—43.

Пусть  $F$  — поверхность в  $E^3$ ,  $n(p)$  — число локально опорных к  $F$  плоскостей с нормалью  $p$ ,  $\mu^+(F) = \int n(p) d\sigma_p$ , где интегрирование ведется по площади единичной сферы. Основной результат: поверхность с конечной площадью, допускающая локально явное задание и такая, что  $\mu^+(F) < \infty$ ,  $\mu^+(X) < 2\pi$  при всех  $X \in F$ , является по своей внутренней геометрии многообразием ограниченной кривизны в смысле А. Д. Александрова. Кроме того, дан необходимый и достаточный признак приближаемости поверхности вместе с ее метрикой многогранниками.

Библиографических ссылок 16.

УДК 513

Оценка деформации выпуклой поверхности в зависимости от изменения ее внутренней метрики. Волков А. Ю. «Украинский геометрический сборник», вып. 5—6, 1968, стр. 44—69.

В статье дается решение проблемы С. Э. Кон-Фоссена об оценке степени отклонения двух замкнутых выпуклых поверхностей от равенства в зависимости от их отклонения от изометрии.

Статья разбита на две главы. В первой главе излагается вывод оценки изменения высот точек выпуклой шапочки над плоскостью ее края при изменении ее внутренней метрики. Во второй главе получена оценка деформации замкнутой выпуклой поверхности при изменении ее внутренней метрики.

Библиографических ссылок 4.

УДК 513

**О вычислении аффинной дуги и аффинной площади.** Дринфельд Г. И.  
 «Украинский геометрический сборник», вып. 5—6, 1968, стр. 70—73.

Рассматривается аффинная группа преобразований

$$\bar{x}_i = \sum_k a_{ik} x + b_i, \quad (i, k = 1, 2, 3)$$

при условии, что

$$\sum_k a_{ik} = \Delta, \quad \Delta = \text{Det} \| a_{ik} \| \neq 0.$$

Для этой подгруппы Ватапебе получил выражение аффинной дуги кривой в виде

$$\int \left( \begin{vmatrix} \dot{x}_1 & \ddot{x}_1 \\ \dot{x}_2 & \ddot{x}_2 \\ \dot{x}_3 & \ddot{x}_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \dot{x}_2 & \ddot{x}_2 \\ \dot{x}_3 & \ddot{x}_3 \\ \dot{x}_1 & \ddot{x}_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \dot{x}_3 & \ddot{x}_3 \\ \dot{x}_1 & \ddot{x}_1 \\ \dot{x}_2 & \ddot{x}_2 \end{vmatrix} \right)^{1/3} dt$$

и распространил его на  $n$ -мерный случай, не касаясь при этом вопроса единственности. В данной работе этот результат получен при помощи прямых методов отыскания интегрального инварианта данной группы преобразований, и доказана его единственность.

Автор полагает, что его вычисления применимы и для  $n$ -мерного случая.

Библиографических ссылок 3.

УДК 513

**О геометрическом образовании алгебраических гиперповерхностей четвертого порядка.** Игнатенко В. Ф., «Украинский геометрический сборник», вып. 5—6, 1968, стр. 74—77.

В данной работе показывается, что произвольная гиперповерхность четвертого порядка евклидова пространства  $E_m (m \geq 3)$  может быть образована как геометрическое место точек пересечения элементов связки центральных кривых  $2^{m-1}$ -го порядка, каждая из которых есть линия пересечения  $m-1$  центральных гиперповерхностей второго порядка с общим центром, с соответственными элементами проективной си связки гиперповерхностей третьего порядка.

Как частный случай показывается возможность геометрического образования центральной гиперповерхности четвертого порядка  $F_4$  общего вида при помощи связки центральных кривых  $2^{m-1}$ -го порядка, каждая из которых есть линия пересечения  $m-1$  центральных гиперповерхностей второго порядка с общим центром в центре гиперповерхности  $F_4$ , с соответственными элементами проективной ей связки центральных гиперповерхностей второго порядка, центры которых также совпадают с центром гиперповерхности  $F_4$ .

В статье доказывается также, что произвольная гиперповерхность четвертого порядка евклидова пространства  $E_m (m \geq 3)$  есть геометрическое место точек пересечения элементов связки параллельных прямых с соответственными элементами проективной ей связки гиперповерхностей третьего порядка.

Библиографическая ссылка 1.

УДК 513

**О гиперплоскостях ортогональной симметрии алгебраических гиперповерхностей.** Игнатенко В. Ф., «Украинский геометрический сборник», вып. 5—6, 1968, стр. 78—84.

В работе получены следующие основные результаты.

1. Если  $\alpha$  и  $\beta$  — две различные гиперплоскости симметрии гиперповерхности  $F_n$ , то гиперплоскость, симметричная одной из них относительно другой, также будет гиперплоскостью симметрии этой гиперповерхности.

2. Пусть прямая  $\alpha$  ортогональна гиперплоскости  $\alpha$ . Если центральная гиперповерхность  $F_{2n-1}$  симметрична одной из них, то она симметрична другой и хотя бы одна из них принадлежит  $F_{2n-1}$ .

Пусть  $F_n^*$  — гиперповерхность, удовлетворяющая условию; если через  $(m-2)$ -плоскость проходит не меньше двух ее гиперплоскостей симметрии, то среди них есть две взаимно ортогональные.

3. Если через некоторую  $(m-2)$ -мерную плоскость  $\Pi_{m-2}$  проходит более двух гиперплоскостей симметрии гиперповерхности  $F_{2n}$ , то все другие, не проходящие через плоскость  $\Pi_{m-2}$  гиперплоскости симметрии гиперповерхности  $F_{2n}$ , если они существуют, 2-ортогональны этой плоскости.

4. Если центральная гиперповерхность четного порядка  $F_{2n}^*$  имеет гиперплоскость симметрии не 2-ортогональную  $(m-2)$ -мерной плоскости, через которую проходит более двух гиперплоскостей симметрии этой гиперповерхности, то гиперповерхность  $F_{2n}^*$  состоит из  $n$  концентрических гиперсфер.

Библиографических ссылок 3.

УДК 513

Гиперкомплексы прямых с совпадающими основными точками и с точками совмещения в четырехмерном проективном пространстве.  
Карпенко В. Л., «Украинский геометрический сборник», вып. 5—6, 1968, стр. 85—92.

В четырехмерном проективном пространстве  $P_4$  рассматривается пятипараметрическое многообразие прямых  $A_1A_2$ , называемое гиперкомплексом. Как установлено К. И. Гриневичусом [5] гиперкомплекс прямых имеет инвариантную двумерную плоскость  $(A_1A_2A_5)$ , называемую касательным пространством.

В работе устанавливаются аналитические условия, при которых на луче  $(A_1A_2)$  существует неподвижная (основная) точка  $M$ , при этом лучи гиперкомплекса описывают гиперконус с вершиной  $M$ . Устанавливается коррелятивное соответствие, по которому каждой точке  $M$  ставится в соответствие гиперплоскость  $\sigma$  (нормальная корреляция).

Рассмотрены гиперкомплексы, для которых каждая точка  $M$  луча  $(A_1A_2)$  является основной. В этом случае инвариантная плоскость  $(A_1A_2A_5)$  описывает трехпараметрическое многообразие двумерных плоскостей (псевдоконгруэнции). Если

$$\sigma = (A_1A_2A_5A_3) \dashv t (A_1A_2A_5A_4)$$

— произвольная гиперплоскость, проходящая через инвариантную плоскость  $(A_1A_2A_5)$ , и  $M$  — соответствующая ей точка по нормальной корреляции, то устанавливается, что существует три гиперплоскости  $\sigma$ , которые проходят через плоскость  $(A_1A_2A_3)$  и, следовательно, три точки  $M$  на луче гиперкомплекса  $(A_1A_2)$ , которые названы точками совмещения луча гиперкомплекса.

Показано, что гиперкомплексы прямых с различными и совпадающими точками совмещения можно получить при помощи псевдоконгруэнций определенного вида.

Библиографических ссылок 5.

УДК 513

Безынтегральное представление двух комплексов проективного вращения. Киселевич Л. А., «Украинский геометрический сборник», вып. 5—6, 1968, стр. 93—98.

В настоящей статье исследованы два однотипных комплекса проективного вращения, являющиеся вырождениями тетраэдрического комплекса, рассмотренного Н. И. Ковалевым в монографии 4 «Теория комплексов».

Указанные комплексы отличаются от уже изученных комплексов проективного вращения тем, что кратные инфlectionные центры луча описывают неподвижные плоскости. В статье описано построение (безынтегральное представление) этих комплексов.

Библиографических ссылок 5.

УДК 513

О мерах множеств пар на плоскости, инвариантных относительно проективных групп преобразований. Луценко А. В., Юртова Л. М., «Украинский геометрический сборник», вып. 5—6, 1968, стр. 99—102.

В случае, если группа непрерывных преобразований задана инфинитезимальными операторами, для отыскания мер геометрических множеств методом относительных компонент, применяемым Сантало, необходимо восстанавливать конечные преобразования группы, что является весьма сложной задачей.

В работе указан для множеств пар геометрических элементов — пар точек ( $P_1 \dashv P_2$ ), пар прямых ( $G_1 + G_2$ ), пар точка и прямая ( $P \dashv G$ ) — метод нахождения мер этих множеств непосредственно по инфинитезимальным операторам заданной группы.

Библиографических ссылок 5.

УДК 513

Многомерные пространства с многогранной метрикой неотрицательной кривизны. І. Мілка А. Д., «Украинский геометрический сборник», вып. 5—6, 1968, стр. 103—114.

Статья является первой частью работы, посвященной исследованию многомерных пространств с многогранной метрикой неотрицательной кривизны. Эти пространства обладают свойствами, характерными для внутренней метрики выпуклых гиперповерхностей многогранников. Одним из таких свойств, например, оказывается условие выпуклости.

Проводится предварительное изучение метрики рассматриваемых пространств, в частности, разверток, без ограничения на их кривизну. Устанавливается конечная компактность разверток и в общем случае выясняется строение кратчайших и доказывается существование касательного конуса. Большое внимание уделяется определению основных понятий — правила склеивания, развертки, пространства с многогранной метрикой. Развертка представляет конечный набор выпуклых открытых многогранников различных размерностей в пространстве постоянной кривизны с указанным в этом наборе правилом склеивания, т. е. правилом изотермического отождествления граней; окрестности точек развертки цикличны: ее локальные группы гомологий те же, что у евклидова пространства соответствующей размерности. Пространство с многогранной метрикой определяется как такое конечно-компактное пространство с внутренней метрикой, которое локально изометрично разверткам.

Библиографических ссылок 8.

УДК 513

Одна общая теорема единственности для аналитических замкнутых выпуклых гиперповерхностей  $n$ -мерного евклидова пространства.  
Медяник А. И., «Украинский геометрический сборник», вып. 5—6, 1968, стр. 115—117.

Доказывается теорема:

Пусть  $F_1$  и  $F_2$ —замкнутые выпуклые гиперповерхности в  $E_n$  с аналитическими опорными функциями  $H_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $k = 1, 2$ . Если при совмещении параллельным переносом точек с параллельными внешними нормальми индикатрисы кривизны либо совпадают, либо не помещаются одна в другой и не соприкасаются ни в одной из общих точек, то гиперповерхности  $F_1$  и  $F_2$  равны и параллельно расположены.

Библиографических ссылок 3.

УДК 513

О взаимных парах кривых в эквицентроаффинном пространстве  $E_3$ .  
Мокляк А. П., «Украинский геометрический сборник», вып. 5—6, 1968, стр. 118—125.

Работа примыкает по своему содержанию к опубликованным в «Украинском геометрическом сборнике» статьям автора под названиями «Об эквицентроаффинных инвариантах пространственных кривых» (вып. 2) и «К эквицентроаффинной теории неплоских кривых в  $E_3$ » (вып. 4). В ней рассмотрены некоторые кривые, инвариантным образом связанные с данной кривой, и выяснен геометрический смысл ее двойственных двойных инвариантов

Библиографических ссылок 4.

УДК 513

К метрической теории неголономных гиперповерхностей в  $n$ -мерном пространстве. Роговой М. Р., «Украинский геометрический сборник», вып. 5—6, 1968, стр. 126—138.

В статье излагаются вопросы теории кривизны неголономных гиперповерхностей в  $n$ -мерном пространстве; обобщаются некоторые результаты, известные для неголономных поверхностей в трехмерном пространстве.

Вводятся понятия кручения неголономной гиперповерхности, тензора кручения, индикатрисы кручений и изучаются их свойства. Например, доказывается, что для нечетного  $n$  через данную точку неголономной гиперповерхности проходит  $\frac{n-1}{2}$  двумерных плоскостей, обладающих тем свойством, что для направлений, выходящих из этой точки и принадлежащих данной двумерной плоскости, кручение неголономной гиперповерхности есть величина постоянная. В частности, для неголономной поверхности в трехмерном пространстве кручение в данной точке не зависит от направления на поверхности.

Изучаются свойства многообразия нормалей неголономной гиперповерхности и прилежащих ей линейчатых поверхностей, отвечающих линиям кривизны 1-го и 2-го рода.

Библиографических ссылок 7.

УДК 513

Геодезическое соответствие конформно-плоских римановых пространств. Розенфельд Д. И., «Украинский геометрический сборник», вып. 5—6, 1968, стр. 139—146.

В работе рассматривается нетривиальное геодезическое отображение римановых пространств на конформно-плоские пространства.

Доказана следующая Теорема. Для того чтобы конформно-плоское  $V_n$  ( $n > 3$ ) допускало нетривиальное геодезическое отображение на конформно-плоское  $V_n$ , необходимо и достаточно, чтобы  $V_n$  и  $\bar{V}_n$  были субпроективными пространствами основного типа.

Библиографических ссылок 7.

УДК 513

$n$ -мерный аналог теоремы С. П. Оловянинщикова. Сенькин Е. П., «Украинский геометрический сборник», вып. 5—6, 1968, стр. 147—149.

В работе распространяется на случай многомерного пространства известная теорема С. П. Оловянинщикова о том, что выпуклая поверхность, изометрическая замкнутому выпуклому многограннику; есть равный ему многогранник.

Библиографических ссылок 3.

УДК 513

**О четырехмерных римановых пространствах, допускающих семейства двумерных вполне геодезических поверхностей.** Слободян Ю. С., «Украинский геометрический сборник», вып. 5—6, 1968, стр. 150—159.

В работе исследуется структура полных римановых четырехмерных пространств с аналитической метрикой, допускающих семейства двумерных вполне геодезических поверхностей.

Вводится понятие индикатрисы кривизны риманова пространства по двумерным площадкам. Доказываются следующие теоремы.

**Теорема 1.** Если полное четырехмерное риманово пространство с аналитической метрикой допускает только четырехпараметрическое семейство двумерных вполне геодезических поверхностей, причем поверхности семейства проходят по главным направлениям индикатрисы, и через каждую точку пространства проходит по меньшей мере одно двухпараметрическое семейство, и существует хотя бы одна точка, в которой индикатриса допускает только двухпараметрическое семейство главных направлений, то либо а) все поверхности семейства проходят через одну точку, либо б) через каждую точку проходит двухпараметрический пучок вполне геодезических поверхностей с одномерной «осью» и никакие две «оси» не пересекаются, или же в) пространство допускает однопараметрическое семейство трехмерных вполне геодезических поверхностей постоянной кривизны.

**Теорема 2.** Если полное четырехмерное риманово пространство с аналитической метрикой допускает пятипараметрическое семейство вполне геодезических поверхностей, причем через каждую точку пространства проходит по меньшей мере трехпараметрическое семейство, и каждая вполне геодезическая поверхность проходит по главному направлению индикатрисы, то либо такое пространство допускает двухпараметрическое семейство трехмерных вполне геодезических поверхностей постоянной кривизны, либо само является пространством постоянной кривизны.

Библиографических ссылок 5.

УДК 513

**Конечность числа элементарных однородных многогранников с ненулевой плотностью.** Соловьев С. П., «Украинский геометрический сборник», вып. 5—6, 1968, стр. 160—166.

В работе рассматриваются элементарные однородные многогранники с ненулевой плотностью. Доказывается, что в вершине такого многогранника может сходиться не более 15 граней и каждая из этих граней является не более чем 16-угольником. Устанавливается обобщенная формула Декарта, т. е. соотношение между эйлеровой характеристикой, количеством вершин и условной кривизной в вершине однородного многогранника. Основным результатом работы является

**Теорема.** Существует только конечное число элементарных однородных многогранников с ненулевой плотностью.

Библиографических ссылок 4.

УДК 513

**О поверхностях переноса гиперболического пространства.** Трыковська Т. Н., «Украинский геометрический сборник», вып. 5—6, 1968, стр. 167—170.

В работе найдены все поверхности вращения гиперболического пространства, являющиеся одновременно поверхностями переноса этого пространства, т. е. несущие коническую сеть, у которой вершины конусов расположены на абсолюте. Доказано, что найденные поверхности несут две сети переноса.

Библиографических ссылок 3.

УДК 513

**Гомоморфизмы пространств аффинной связности.** Улановский М. А., «Украинский геометрический сборник», вып. 5—6, 1968, стр. 171—176.

В статье вводится понятие гомоморфизма, как произвольного дифференцируемого отображения  $m$ -мерного многообразия  $X_m$  на  $n$ -мерное многообразие  $X_n$ , сохраняющее параллелизм, изучаются глобальные свойства гомоморфизмов.

Основные результаты работы заключаются в следующих теоремах.

**Теорема 3.** Если  $\varphi$  — дифференцируемое отображение постоянного ранга  $p$  многообразия  $X_m$  на пространство аффинной связности  $X_n$ , то на  $X_m$  существует аффинная связность (не единственная), для которой  $\varphi$  — гомоморфизм.

Под рангом отображения  $\varphi$  подразумевается ранг отображения касательного векторного пространства.

**Теорема 7.** Пусть  $X_m$  и  $X_n$  — аналитические пространства аффинной связности,  $X_m$  связано и односвязно и  $X_n$  геодезически полно. Тогда любой локальный гомоморфизм  $\varphi^*: \Omega \rightarrow X_n$  ( $\Omega$  — область в  $X_m$ ) можно продолжить (единственным способом) до гомоморфизма  $\varphi: X_m \rightarrow X_n$ .

Библиографических ссылок 3.

В работе рассматриваются непрерывные изгибания выпуклых поверхностей  $F$  с краем  $\Gamma$  ограниченной вариации поворота в классе всех выпуклых поверхностей. Поверхности могут быть как конечные так и бесконечные с полной кривизной границы их выпуклой оболочки равной  $2\pi$ .

Дополнение поверхности  $F$  до границы  $\bar{F}$  ее выпуклой оболочки развертывается на плоскость, превращаясь, вообще говоря, в многогранную область  $Q$  с границей  $L$ . Соответствующие по под克莱иванию точки кривых  $\Gamma$  и  $L$  обозначим одинаковыми буквами. Пусть  $A_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) конические точки поверхности  $\bar{F}$ , лежащие на кривой  $\Gamma$ . Угол между ветвями кривой  $\Gamma$  в точке  $A_i$  со стороны поверхности  $F$  обозначим  $\alpha_{i1}$ , и угол между ветвями кривой  $L$  в точке  $A_i$  со стороны области  $Q$  обозначим  $\alpha_{i0}$ . Будем говорить, что угол  $\alpha_{i0}$  является вложенным, если исходящие из точки  $A_i$  ветви кривой  $L$  в достаточно малой окрестности точки  $A_i$  не входят внутрь угла, между полукасательными в этой точке.

Назовем выпуклую поверхность  $F$  поверхностью типа  $\Phi$ , если ее край не имеет точек возврата и в случае  $\alpha_{i0} = \alpha_{i1}$  угол  $\alpha_{i0}$  является вложенным. В зависимости от расположения площади сферического изображения кривой  $\Gamma$  на поверхности  $\bar{F}$ , соотношений между углами  $\alpha_{i0}$  и  $\alpha_{i1}$  и вида многогранной области  $Q$  из множества всех выпуклых поверхностей выделяется четыре непересекающихся класса  $K_1, K_2, K_3$  и  $K_4$ . Каждая поверхность типа  $\Phi$  относится к одному из этих классов.

Доказываются следующие теоремы.

**Теорема 1.** Если выпуклая поверхность  $F$  принадлежит одному из классов  $K_1, K_2, K_3$ , то она неизгибаема и, более того, не может быть предельной для нетривиально изометричных ей выпуклых поверхностей.

**Теорема 2.** Если выпуклая поверхность  $F$  принадлежит классу  $K_4$ , то она изгибаема.

Из теорем 1 и 2 следует

**Теорема 3.** Поверхность типа  $\Phi$  неизгибаема тогда и только тогда, когда она принадлежит одному из классов  $K_1, K_2, K_3$ .

Исследование проводится методом склеивания.

Рисунков 6. Библиографических ссылок 12.

## СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
Я. П. Бланк, Е. П. Сенькин. Обзор работ по геометрии на Украине за 50 лет (1917—1967)	3
И. Я. Бакельман, Л. А. Эпштейн. Кривые ограниченной вариации поворота в многообразиях ограниченной кривизны, заданных обобщенным чебышевским линейным элементом I	10
Я. П. Бланк, Г. В. Паньков, В. В. Рокотянская. Конические сети на поверхностях третьего порядка	21
Ю. Д. Бураго. О поверхностях ограниченной внешней кривизны	29
Ю. А. Волков. Оценка деформации выпуклой поверхности в зависимости от изменения ее внутренней метрики	44
Г. И. Дринфельд. О вычислении аффинной дуги и аффинной площади	70
В. Ф. Игнатенко. О геометрическом образовании алгебраических гиперповерхностей четвертого порядка	74
В. Ф. Игнатенко. О гиперплоскостях ортогональной симметрии алгебраических гиперповерхностей	78
В. Л. Карпенко. Гиперкомплексы прямых с совпадающими основными точками и с точками совмещения в четырехмерном проективном пространстве	85
Л. А. Киселевич. Безынтегральное представление двух комплексов проективного вращения	93
А. В. Луценко, Л. М. Юртова. О мерах множеств пар на плоскости, инвариантных относительно проективных групп преобразований	99
А. Д. Милка. Многомерные пространства с многогранной метрикой неотрицательной кривизны. I	103
А. И. Медяник. Одна общая теорема единственности для аналитических замкнутых выпуклых гиперповерхностей $n$ -мерного евклидова пространства	115
А. П. Мокляк. О взаимных парах кривых в эквицентроаффинном пространстве	118
М. Р. Роговой. К метрической теории неголономных гиперповерхностей в $n$ -мерном пространстве	126
Д. И. Розенфельд. Геодезическое соответствие конформно-плоских римановых пространств	139
Е. П. Сенькин. $n$ -мерный аналог теоремы С. П. Оловянинщика	147
Ю. С. Слободян. О четырехмерных римановых пространствах, допускающих семейства двумерных вполне геодезических поверхностей	150
С. П. Соловьев. Конечность числа элементарных однородных многогранников с ненулевой плотностью	160
Т. Н. Трыкова. О поверхностях переноса гиперболического пространства	167
М. А. Улановский. Гомоморфизмы пространств аффинной связности	171
Л. А. Шор. Об изгибающей способности выпуклых поверхностей с краем	177

Редактор Е. П. Иващенко  
Техредактор Г. П. Александрова  
Корректоры М. И. Лелюк, М. Ф. Зозуля

Сдано в набор 8/I 1968 г. Подписано к печати 10/VII 1968 г. БЦ 50315. Формат  
70×108 1/16. Объем 12,75 физ. печ. л.; 17,9 усл. печ. л.; 17,1 уч.-изд. л. Зак. 8-11.  
Тираж 700. Цена 1 р. 71 коп. ТПУ 1968 г. поз. 51.

Отпечатано с матриц Книжной ф-ки им. Фрунзе в типографии № 16 Областного  
управления по печати, Харьков, 3, Университетская, 16. Зак. 2509.