Украинский геометрический сборник

выпуск 4

издательство харьковского университета

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ УССР

УКРАИНСКИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК

ВЫПУСК 4

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ХАРЬКОВСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА имени А. М. ГОРЬКОГО
Харьков 1967

513
У45

РЕСПУБЛИКАНСКИЙ МЕЖВЕДОМСТВЕННЫЙ СБОРНИК НАУЧНЫХ РАБОТ ПО ГЕОМЕТРИИ

В 4-й выпуск сборника входят статьи, посвященные различным вопросам геометрии в целом, геометрии многообразий, погруженных в пространства с фундаментальной группой, геометрии обобщенных пространств, теории относительности и другим областям геометрии.

Адрес редколлегии: Харьков — 77, пл. Дзержинского, 4, Харьковский университет, механико-математический факультет.

2—2—3
155—67Р

ХАРЬКОВСКАЯ КНИЖНАЯ ФАБРИКА имени ФРУНЗЕ

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

В «Украинском геометрическом сборнике» публикуются работы, содержащие новые законченные результаты научных исследований по геометрии, выполненных преимущественно в пределах УССР.

Согласно Положению о тематических сборниках, утвержденному Советом Министров УССР 7. I. 1964 г., статьи по объему не должны превышать 0,5 печатного листа (12 страниц машинописи); в отдельных случаях редколлегии дается право помещать статьи объемом до одного листа. Согласно Положению, авторы не получают гонорара за статьи, бесплатных экземпляров сборника и оттисков статей.

К каждой статье необходимо прилагать краткое изложение результатов объемом не более полутора страниц машинописи через два интервала. Редколлегия оставляет за собой право с согласия автора помещать в сборнике такое краткое изложение вместо статьи с развернутым изложением. К статьям аспирантов и соискателей ученых степеней желательно прилагать сведения о сроке предполагаемой защиты диссертации, к которой относится статья.

Рукопись должна быть четко напечатана на машинке в двух экземплярах на одной стороне листа через два интервала. Формулы, буквенные обозначения и символы должны быть вписаны от руки чернилами четко, без помарок, с ясным различием в написании прописных и строчных букв и букв разных алфавитов; строчные вписываемые буквы должны быть по размеру в полтора раза больше строчных букв машинописи. Вписываемые от руки знаки нужно размещать реже, чем в обычном письме, чтобы можно было сделать их разметку для набора; поэтому для вписываемых знаков необходимо предусмотреть достаточно места.

Сходные по написанию строчные и прописные буквы (c, k, p, s, u, v, w, x, y, z, θ, φ) подчеркиваются простым карандашом двумя черточками: прописные снизу, строчные сверху. Греческие буквы подчеркиваются снизу красным карандашом, готические — синим, векторы подчеркиваются снизу (не сверху!) одной черточкой жирно простым карандашом. Текст, выделяемый курсивом, подчеркивается волнистой линией простым карандашом. Иностранные слова вписываются на машинке с иностранным шрифтом или четко от руки чернилами и тщательно сверяются с оригиналом.

Чертежи прилагаются только в случае необходимости, хорошего качества, выполненные тушью на кальке или на плотной чертежной бумаге. На обороте каждого чертежа указывается фамилия автора, название статьи и номер чертежа. В тексте должна быть ссылка на рисунок и указано его место пометкой на поле карандашом, обведенной рамкой.

Список литературы помещается в конце статьи в порядке ссылок в тексте. Библиографические данные приводятся в следующем порядке:

для книг — инициалы и фамилия автора, полное название книги, номер тома, издательство, место и год издания;

для журнальных статей — инициалы и фамилия автора, полное название статьи, название журнала, № или название серии, № тома, № выпуска, год издания, страницы начала и конца статьи.

Не допускаются ссылки в заголовке статьи и ссылки на неопубликованные работы.

КОНИЧЕСКИЕ СЕТИ НА ПОВЕРХНОСТЯХ ВРАЩЕНИЯ

Я. П. Бланк, Н. М. Гормашева (Харьков)

Сопряженная сеть, образованная линиями касания конусов, описанных около поверхности, называется конической.

Коническая сеть на поверхности, отличной от конуса, может зависеть не более чем от четырех параметров, и это осуществляется только на поверхностях второго порядка. Не существует поверхностей, несущих конические сети, зависящие только от трех параметров. Определены все поверхности, несущие двухпараметрические и однопараметрические сети [1]. Вопрос о том, какое наибольшее конечное число конических сетей может нести поверхность, остается пока открытым.

Поверхность вращения несет коническую сеть из меридианов и параллелей. Цель настоящей статьи — отыскать все поверхности вращения, несущие конические сети, отличные от сети из меридианов и параллелей.

Отнесем поверхность вращения к сети из меридианов и параллелей:

$$x = u\cos v,\ \ y = u\sin v,\ \ z = f(u). \tag{1}$$

Пусть

$$\frac{dv}{du} = \varphi(u, v),\ \frac{\partial u}{\partial v} = \psi(u, v) \tag{2}$$

два семейства кривых, образующих коническую сеть. Условие сопряженности сети (2):

$$f''\psi + uf'\varphi = 0 \tag{3}$$

или

$$\varphi = -f''\sigma,\ \psi = uf'\sigma. \tag{4}$$

Пусть X — вершина конуса, описанного около поверхности. Вдоль линии касания

$$\mathrm{X}\xi = \mathrm{X}\,d\xi = \mathrm{X}\,d^2\xi = \mathrm{X}\,d^3\xi = 0, \tag{5}$$

где ξ — тангенциальные координаты поверхности (1):

$$\xi_1 = -f'\cos v,\ \ \xi_2 = -f'\sin v,\ \ \xi_3 = 1,\ \ \xi_4 = uf' - f. \tag{6}$$

Следовательно,

$$(\xi,\ d\xi,\ d^2\xi,\ d^3\xi) = 0. \tag{7}$$

Уравнение (7) для обоих семейств кривых (2) в силу (4) и (6) принимает вид

$$\begin{aligned} &(uf'f''\sigma^2 + 1)(f'\sigma_{uu} - 2f'f''\sigma\sigma_{uv} + f'f''^2\sigma^2\sigma_{vv}) = A, \\ &(uf'f''\sigma^2 + 1)(u^2f'^2f''\sigma^2\sigma_{uu} + 2uf'f''\sigma\sigma_{uv} + f''\sigma_{vv}) = B, \end{aligned} \tag{8}$$

где A, B — алгебраические функции σ, σ_u и σ_v с коэффициентами, зависящими только от u.

Так как поверхности, несущие континуум конических сетей, уже определены в работе Я. П. Бланка*, ограничимся отысканием поверхностей вращения с конечным числом конических сетей. Оказывается в этом случае функция σ не зависит от v.

Действительно, множитель $(uf'f''\sigma^2+1)$ можем считать отличным от нуля, так как он обращается в нуль только на поверхностях второго порядка. Система (8) разрешима относительно частных производных σ_{uv}, σ_{vv}. Написав условия совместности, получим либо тождества — и тогда поверхность несет континуум сетей, либо алгебраическое уравнение относительно σ с коэффициентами, зависящими только от u.

Теперь уравнения (8) принимают вид

$$\begin{gathered}
f'(1+uf'f''\sigma^2)\sigma''-3uf'^2f''\sigma\sigma'^2-[(6uf'f''^2+uf'^2f'''-3f'^2f'')\sigma^2-3f'']\sigma'+\\
+2f'''\sigma+(f'^2f'''+2f'f''^2-6uf''^3)\sigma^3-uf'^2f''^3\sigma^5=0,\\
u^2f'^2f''(1+uf'f''\sigma^2)\sigma\sigma''+u^2f'^2f''(1-2uf'f''\sigma^2)\sigma'^2+\\
+[(3u^2f'^2f'''+7uf'^2f''-2u^2f'f''^2)\sigma+u^2f'^2f''(uf''^2-2f'f''-2uf'f''')\sigma^3]\sigma'+\\
+f''+(u^2f'^2f^{\mathrm{IV}}+5uf'^2f'''-2u^2f'f''f'''+4f'^2f''-uf'f''^2+u^2f''^3)\sigma^2+\\
+(u^3f'^3f''f^{\mathrm{IV}}-2u^2f'^3f''f'''-2u^3f'^3f'''^2-2uf'^3f''^2+u^3f'f''^4+u^2f'^2f''^3)\sigma^4=0.
\end{gathered}\tag{9}$$

Мы получили два обыкновенных дифференциальных уравнения на две искомые функции f, σ. Первая определяет меридиан поверхности вращения, несущей коническую сеть, отличную от сети из меридианов и параллелей; вторая — саму коническую сеть. Эти уравнения инвариантны относительно замены σ на $-\sigma$. Следовательно, наряду с конической сетью, определяемой функцией σ, поверхность несет и вторую коническую сеть, соответствующую функции $-\sigma$. Наряду с σ, по (4), φ и ψ также зависят только от u. Следовательно, семейства (2) определяются уравнениями

$$v=\int\limits_{u_0}^{u}\varphi(u)\,du+\mathrm{const},\quad v=\int\limits_{u_0}^{u}\frac{\delta u}{\psi(u)}+\mathrm{const}. \tag{10}$$

Таким образом, вращая произвольную кривую (C), принадлежащую первому (соответственному второму) семейству, вокруг оси поверхности вращения, получим все семейство кривых. Вершины конусов, описанных около поверхности вдоль кривых каждого семейства, расположены на окружности с центром на оси вращения в плоскости, перпендикулярной к этой оси.

Из первых трех уравнений (5) находим координаты вершин конусов для обоих семейств конической сети:

$$\begin{gathered}
X=-\frac{\alpha\sin v+\beta\cos v}{\gamma},\\
Y=\frac{\alpha\cos v-\beta\sin v}{\gamma},\\
Z=f-\frac{f'^2\sigma\alpha}{\gamma},\\
\overline{X}=-\frac{u^2f''\sigma\alpha\sin v+u\lambda\cos v}{\mu},
\end{gathered}\tag{11}$$

* Я. П. Бланк. Конические сети. «Зап. физ.-матем. ф-та ХГУ и ХМО», т. 23, 113—141, 1952.

$$Y = \frac{u^2 f'' \sigma\alpha \cos v - u\lambda \sin v}{\mu}, \qquad (12)$$
$$\bar{Z} = f - \frac{uf'\alpha}{\mu},$$

где

$$\alpha = 1 + uf'f''\sigma^2,$$
$$\beta = uf'\sigma' - f'\sigma + 2uf''\sigma, \quad \gamma = f'^2 f''\sigma^3 + 2f''\sigma + f'\sigma',$$
$$\lambda = (uf'f''' + 2f'f'' - uf''^2)\, u\sigma^2 + u^2 f'f''\sigma\sigma',$$
$$\mu = (uf''^2 - uf'f''' - f'f'')\, u\sigma^2 + 1 - u^2 f'f''\sigma\sigma'.$$

Производная по u от функций Z и $X^2 + Y^2$ в силу первого из уравнений (9) тождественно равна нулю. Аналогично тождественно обращается в нуль производная по u функций $\bar{Z}$, $\bar{X}^2 + \bar{Y}^2$, в силу второго уравнения системы (9). Вершины конусов описывают кривые

$$Z = a, \quad X^2 + Y^2 = r^2; \qquad (13) \qquad \bar{Z} = c, \quad \bar{X}^2 + \bar{Y}^2 = R^2. \qquad (14)$$

Исключив σ' из двух уравнений (13), находим

$$\sigma^2 = \frac{(f-a)^2}{f'^2 [r^2 f'^2 - (f - a - uf')^2]}. \qquad (15)$$

Из (14) следует

$$\sigma^2 = \frac{R^2 f'^2 - (f - c - uf')^2}{u^2 f''^2 (f - c)^2}. \qquad (16)$$

Приравняв правые части в (15) и (16), получаем обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка для определения меридиана искомой поверхности вращения:

$$u^2 f''^2 (f-a)^2 (f-c)^2 = f'^2 [r^2 f'^2 - (f - a - uf')^2] \cdot [R^2 f'^2 - (f - c - uf')^2]. \qquad (17)$$

Его общий интеграл

$$u^2 = \frac{1}{(a-c)^2 + A_0^2}\Big[R^2 (f-a)^2 + r^2 (f-c)^2 - 2Rr(f-a)(f-c)\cos\left(\frac{A_0}{a-c}\ln\frac{f-c}{f-a} + A\right)\Big], \qquad (18)$$

A, A_0 — постоянные интегрирования.

Из (15), (16) следует, что найденные поверхности несут лишь две конические сети, отличные от координатной конической сети.

Таким образом, наибольшее конечное число конических сетей на поверхностях вращения равно трем. Меридиан этих поверхностей определяется уравнением (18), а сети — уравнениями (10), (4), (15).

В случае $a = c$ уравнение (18) принимает следующий вид:

$$u^2 = \frac{(f-a)^2}{A_0^2}\Big[R^2 + r^2 - 2Rr\cos\left(\frac{A_0}{f-a} + A\right)\Big]. \qquad (19)$$

Поступила 20 ноября 1966 г.

О БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ ИЗГИБАНИЯХ, НЕ ИЗМЕНЯЮЩИХ СРЕДНЕЙ КРИВИЗНЫ ПОВЕРХНОСТИ

М. Л. Гаврильченко (Одесса)

§ 1. Пусть векторным уравнением

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(x^1,\ x^2) \tag{1}$$

представлена некоторая кусочно-регулярная поверхность S; x^i — ее криволинейные координаты. Пусть, далее, $\boldsymbol{U}(x^1,\ x^2)$ — вектор смещений, а $\boldsymbol{V}(x^1,\ x^2)$ — вектор вращений при бесконечно малом изгибании S.

Они связаны, как известно [1, 2], соотношением

$$d\boldsymbol{U} = \boldsymbol{V} \times d\boldsymbol{r}. \tag{2}$$

Кроме того, формулой

$$T^{\alpha\beta} = c^{\alpha\lambda}\boldsymbol{r}^{\beta} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial x^{\lambda}} \tag{3}$$

определяется так называемый тензор изгибаний, который, как показал И. Н. Векуа [1], полностью характеризует деформацию поверхности при ее бесконечно малом изгибании.

В формуле (3) $c^{\alpha\lambda}$ — дискриминантный тензор, $\boldsymbol{r}^{\beta} = a^{\alpha\beta}\boldsymbol{r}_{\alpha}$, $\boldsymbol{r}_{\alpha} = \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^{\alpha}}$, $a^{\alpha\beta}$ — контравариантные компоненты метрического тензора [1].

Под неизменяемостью средней кривизны H поверхности S мы понимаем, как это принято в теории бесконечно малых изгибаний, что

$$\delta H = 0, \tag{4}$$

где δ — знак первой вариации (см. [1], стр. 430).

Рассматриваемые бесконечно малые изгибания представляют особый интерес для линейной теории оболочек [1, 6].

Если H выразить через коэффициенты первой и второй квадратичных форм, то (4) перепишется так:

$$a_{22}\delta b_{11} + a_{11}\delta b_{22} - 2a_{12}\delta b_{12} = 0. \tag{5}$$

Первые вариации коэффициентов второй квадратичной формы $\delta b_{\alpha\beta}$, кроме равенства (5), получившегося в силу условия поставленной задачи, удовлетворяют еще трем уравнениям, всегда имеющим место при бесконечно малом изгибании. Эти уравнения получаются вариацией уравнений Гаусса и Петерсона — Кодацци и имеют следующий вид [1]:

$$b_{22}\delta b_{11} + b_{11}\delta b_{22} - 2b_{12}\delta b_{12} = 0 \tag{6}$$

$$\frac{\partial \delta b_{11}}{\partial x^2} - \delta b_{1\lambda} \cdot \Gamma^{\lambda}_{12} = \frac{\partial \delta b_{12}}{\partial x^1} - \delta b_{2\lambda}\Gamma^{\lambda}_{11}, \tag{7}$$

$$\frac{\partial \delta b_{22}}{\partial x^1} - \delta b_{2\lambda}\Gamma^{\lambda}_{12} = \frac{\partial \delta b_{12}}{\partial x^2} - \delta b_{1\lambda}\Gamma^{\lambda}_{22}, \tag{8}$$

где Γ^{κ}_{il} — символы Кристоффеля.

Таким образом, вариации коэффициентов второй квадратичной формы удовлетворяют четырем уравнениям, из которых два — алгебраические и два — дифференциальные.

Вопрос о том, допускает или нет некоторая поверхность указанные бесконечно малые изгибания, сводится к вопросу о существовании или несуществовании нетривиального решения системы уравнений (5—8) относительно $\delta b_{\alpha\beta}$.

§ 2. Отметим, что если левую часть равенства (4) или (5) приравнять не нулю, а некоторой функции $f(x^1, x^2)$, то это будет означать, что задан закон, по которому должна изменяться средняя кривизна поверхности при ее бесконечно малом изгибании.

А решение системы (5—8) в этом случае определит такое бесконечно малое изгибание поверхности, при котором ее средняя кривизна изменяется по наперед заданному закону $f(x^1, x^2)$.

В омбилической точке, характеризующейся пропорциональностью коэффициентов первой и второй квадратичных форм, левые части уравнений (5) и (6) пропорциональны, следовательно в ней $f(x^1, x^2) = 0$.

Другими словами, справедлива

Теорема 1. *Любая регулярная поверхность, содержащая омбилические точки, может допускать только такие бесконечно малые изгибания, которые не изменяют средней кривизны поверхности в ее омбилических точках*. Точки уплощения исключаются.

Регулярность таких бесконечно малых изгибаний следует из результатов А. В. Погорелова [3], ибо поверхность в окрестности омбилической точки (если уплощения исключаются) является поверхностью положительной гауссовой кривизны.

Из сказанного, между прочим, следует, что поверхность, содержащая омбилическую точку, не допускает бесконечно малых изгибаний, при которых средняя кривизна ее изменяется на некоторую постоянную.

В дальнейшем рассмотрим случай, когда $f(x^1, x^2) = 0$. Тогда в омбилической точке (5) есть следствие (6) и, следовательно, условие (5) ничего нового не дает по сравнению с обыкновенными бесконечно малыми изгибаниями, поэтому омбилические точки мы, как правило, будем исключать из рассмотрения.

§ 3. Отнесем поверхность S к линиям кривизны. В таком случае $a_{12} = b_{12} = 0$, и равенства (5) и (6) принимают вид

$$\begin{aligned} a_{22}\delta b_{11} + a_{11}\delta b_{22} &= 0, \\ b_{22}\delta b_{11} + b_{11}\delta b_{22} &= 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Определитель системы (9) $b_{11}a_{22} - b_{22}a_{11} \neq 0$ (омбилические точки исключены), и следовательно, $\delta b_{11} = \delta b_{22} = 0$, в силу чего уравнения (7) и (8) перепишутся так:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x^1} &= \frac{\partial A}{\partial x^1}\varphi, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x^2} &= -\frac{\partial A}{\partial x^2}\varphi, \end{aligned} \tag{10}$$

где $\varphi = \delta b_{12}$, $A = \ln\sqrt{\dfrac{a_{11}}{a_{22}}}$.

Таким образом, нетривиальное бесконечно малое изгибание мы получим только в том случае, когда средний коэффициент второй квадратичной формы получит ненулевое приращение $\delta b_{12} = \varphi$, которое должно быть найдено как решение системы (10).

Условия интегрируемости (10) имеют вид

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^1 \partial x^2} \cdot \varphi = 0.$$

Отбрасывая случай $\varphi = 0$, имеем $\frac{\partial^2 A}{\partial x^1 \partial x^2} = 0$, откуда получаем, выполнив интегрирование, $a_{11}\psi_1(x^1) = a_{22} \cdot \psi_2(x^2)$, где ψ_1 и ψ_2 — произвольные функции, каждая от одной переменной.

Из последнего равенства видно, что можно так изменить масштаб на координатной сети, чтобы $a'_{11} = a'_{22}$, т. е. сеть станет изометрической. В то же время она является сетью линий кривизны. Этим, как известно [4], характеризуется изотермическая поверхность. Так как теперь $a'_{11} = a'_{22}$, то $A = 0$, и из (10) находим, что $\varphi = \delta b_{12} = C = \text{const}$. Обратно, для любой изотермической поверхности система (10) имеет решение и $\varphi = \text{const}$. Тензоры $T^{\alpha\beta}$ и $\delta b_{\alpha\beta}$ связаны соотношениями [1]

$$T^{\alpha\beta} = c^{\alpha i} c^{\beta j} \delta b_{ij}. \tag{11}$$

У нас $\delta b_{11} = \delta b_{22} = 0$, $\delta b_{12} = C$, поэтому

$$T^{11} = T^{22} = 0, \; T^{12} = -\frac{C}{\lambda}, \text{ где } \lambda = a'_{11} = a'_{22}. \tag{12}$$

Окончательный вывод сформулируем в виде такой теоремы.

Теорема 2. *Нетривиальные бесконечно малые изгибания поверхности, не изменяющие ее средней кривизны, допускают изотермические поверхности и только они. Тензор изгибания зависит от одной произвольной постоянной.*

Из этой теоремы получаем такое следствие для развертывающихся поверхностей: конусы и цилиндры допускают бесконечно малые изгибания с сохранением средней кривизны, а тангенциальные торсы — не допускают, ибо первые две поверхности — изотермические, а третья — нет [4].

После того, как найден тензор изгибаний, нахождение условий, обеспечивающих жесткость поверхности, не составляет труда.

Именно, из формул (12) видно, что при $C = 0$ тензор $T^{\alpha\beta} = 0$. При этом и $\delta b_{12} = 0$, а это значит, что на деформированной поверхности сохраняются главные направления, а потому сохраняется и сеть линий кривизны. Поверхность при этом жесткая. Мы получили такую теорему.

Теорема 3. *Любая изотермическая поверхность является жесткой относительно бесконечно малых изгибаний, если при этом первая вариация средней кривизны ее равна нулю и сохраняются главные направления хотя бы в одной точке.*

Аналогичный результат для поверхностей только *положительной* гауссовой кривизны иным путем был получен И. Н. Векуа [1], но при более слабых условиях (именно, $\delta H = 0$ только вдоль края поверхности).

§ 4. Поверхность, описываемая радиусом-вектором $V(x^1, x^2)$, если она не вырождается в линию или точку, носит название и н д и к а т р и с ы в р а щ е н и я [2, 5]. Свойства этой поверхности имеют существенное значение для характеристики бесконечно малого изгибания поверхности [2]. В случае бесконечно малых изгибаний, не изменяющих средней кривизны поверхности, индикатриса вращения может быть охарактеризована достаточно полно. Точнее, можно найти первую и вторую квадратичные формы индикатрисы вращения (коэффициенты этих форм будем обозначать через $A_{\alpha\beta}$ и $B_{\alpha\beta}$ соответственно).

Действительно, из (3) находим

$$\frac{\partial V}{\partial x^\lambda} = c_{\beta\lambda} T^{\alpha\beta} \boldsymbol{r}_\alpha, \tag{13}$$

откуда вследствие (12)

$$\frac{\partial V}{\partial x^1} = \frac{C}{\lambda} \boldsymbol{r}_1, \quad \frac{\partial V}{\partial x^2} = -\frac{C}{\lambda} \boldsymbol{r}_2. \tag{14}$$

Имея (14) и производя надлежащие вычисления, получим

$$\mathrm{I} = ds^2 = \frac{C^2}{\lambda} dx^{1^2} + \frac{C^2}{\lambda} dx^{2^2},$$

$$\mathrm{II} = -\frac{C}{\lambda} b_{11} dx^{1^2} + \frac{C}{\lambda} b_{22} dx^{2^2}. \tag{15}$$

Как показывают квадратичные формы (15), $A_{11} = A_{22}$ и $A_{12} = B_{12} = 0$, следовательно, индикатриса вращения тоже является изотермической поверхностью.

Легко подсчитать, пользуясь (15), что гауссова кривизна индикатрисы вращения K^* и гауссова кривизна поверхности (1) K связаны соотношепиям

$$K^* = -C^{-2}\lambda^2 K, \tag{16}$$

т. е. имеют противоположные знаки (либо обе равны нулю). Это усиливает сходную теорему, доказанную С. Э. Коп-Фассеном [5].

§ 5. Рассмотрим поверхность вращения, заданную уравнением

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(\rho, \theta) = \{\rho \cos\theta, \rho \sin\theta, z(\rho)\}, \tag{17}$$

где $z = z(\rho)$ — однозначная непрерывная функция класса C^2. Любая поверхность вращения является изотермической поверхностью, так что все предыдущее для нее справедливо, но сравнительная простота получающихся здесь уравнений позволяет продвинуться еще дальше.

Именно, система (10) для (17) имеет вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \rho} = \frac{dA}{d\rho} \varphi,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = 0,$$

а решением является выражение $\varphi = \delta b_{12} = C \sqrt{\frac{a_{11}}{a_{22}}} = \frac{C\sqrt{1 + z'^2}}{\rho}$, следовательно, $T^{11} = T^{22} = 0$, $T^{12} = -\frac{C}{\rho^3 \sqrt{1 + z'^2}}$, поэтому

$$\frac{\partial V}{\partial \rho} = \frac{C}{\rho} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \rho}, \quad \frac{\partial V}{\partial \theta} = -\frac{C}{\rho} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta},$$

откуда окончательно

$$V = \left\{ -\frac{C}{\rho} \cos\theta + \Omega_1; \quad -\frac{C}{\rho} \sin\theta + \Omega_2; \quad C \int \frac{z'(\rho)}{\rho^2} d\rho \right\}, \tag{18}$$

Ω_i — постоянные интегрирования.

Итак, найдено в явном виде уравнение индикатрисы вращения для любой поверхности вращения, подвергнутой бесконечно малому изгибанию с сохранением средней кривизны. Ее основные инварианты выразятся по формулам

$$K^* = \frac{-\rho^3 z' z''}{(1+z'^2)^2}, \quad 2H^* = \rho\,\frac{-z''\rho + z'(1+z'^2)}{(1+z'^2)^{3/2}}. \tag{19}$$

Несущественный множитель C мы положили равным единице.

Заметим, что индикатриса вращения не может быть минимальной поверхностью. Действительно, если $H^* = 0$, то $\rho z'' = z'(1+z'^2)$, а это равносильно пропорциональности коэффициентов первой и второй квадратичной формы поверхности (17), т. е. наличию омбилических точек, которые у нас исключены. Этот факт является в некотором роде противоположностью теоремы 4, доказанной ниже.

Основные инварианты поверхности (17) вычисляются по формулам

$$K = \frac{z' z''}{\rho(1+z'^2)^2}, \quad 2H = \frac{\rho z'' + z'(1+z'^2)}{\rho(1+z'^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{20}$$

Из (20) и (19) имеем $K^* = -\rho^4 K$ — это частный случай равенства (16) (при $C = 1$).

На тех параллелях поверхности вращения (17), где $K = 0$ (мы считаем, что они расположены изолированно), появляется возможность сравнивать средние кривизны поверхности (17) и ее индикатрисы вращения (18).

Действительно, если $K = 0$ за счет того, что $z' = 0$, то $H^* = -\rho^2 H$, т. е. они противоположны по знаку, если же $z'' = 0$, то $H^* = \rho^2 H$, т. е. они одинакового знака. Эти утверждения вытекают непосредственно из (19) и (20). Заметим еще, что индикатриса вращения (18) допускает локальное развертывание на поверхность вращения (утверждение становится очевидным, если записать первую квадратичную форму (18)).

Используя, наконец, (2) и (18), найдем вектор смещения $\boldsymbol{U}(\rho, \theta)$. Именно,

$$\boldsymbol{U} = \Omega \times \boldsymbol{r} + \Omega_0 + C\boldsymbol{U}^*,$$

где

$$\Omega = \{\Omega_1, \Omega_2, 0\},$$

$$\Omega_0 = \{\Omega_3, \Omega_4, \Omega_5\},$$

$$\boldsymbol{U}^* = \left\{-\rho\sin\theta \int \frac{z'}{\rho^2}\,d\rho;\quad \rho\cos\theta \int \frac{z'}{\rho^2}\,d\rho;\quad -\theta\right\}, \tag{21}$$

Постоянные векторы Ω и Ω_0 деформации поверхности не сообщают, поэтому их можно отбросить, и, следовательно, вектором смещений надо считать вектор $\boldsymbol{U}^*$.

Легко проверить, что основное уравнение $d\boldsymbol{r} \cdot d\boldsymbol{U}^* = 0$ для (17) и (21) выполнено.

Таким образом, найден вектор смещений для любой поверхности вращения, подвергнутой бесконечно малому изгибанию с сохранением средней кривизны; он имеет вид (21).

Поверхность, описываемую вектором смещений, будем, следуя Н. В. Ефимову [2], обозначать через Z.

Справедлива такая

Теорема 4. *Для любой поверхности вращения, подвергнутой бесконечно малому изгибанию с сохранением средней кривизны, поверхность Z является минимальной поверхностью.*

Доказательство сводится к простому нахождению H и мы его опустим. Первая квадратичная форма поверхности (21) имеет вид

$$ds^2 = \left[\int \frac{z''}{\rho}\,d\rho\right]^2 d\rho^2 + \left(1 + \left[\rho \int \frac{z'}{\rho^2}\,d\rho\right]^2 d\theta^2,\right.$$

откуда видно, что замена $d\tau^2 = \left[\int \frac{z''}{\rho}\,d\rho\right]^2 d\rho^2$ приведет ее к виду $ds^2 = d\tau^2 + \omega(\tau)\,d\theta^2$, а такая форма поверхности характеризует возможность ее локального развертывания на поверхность вращения, следовательно, поверхность Z допускает локальное развертывание на поверхность вращения.

§ 6. В заключение сделаем одно замечание относительно поверхностей отрицательной гауссовой кривизны. На таких поверхностях существует действительная ассимптотическая сеть, которую примем в качестве координатной сети. В таком случае $b_{11} = b_{22} = 0$, а $b_{12} \neq 0$, и из уравнения (6) получаем, что $\delta b_{12} = 0$, следовательно, уравнение (5) примет вид

$$a_{22}\delta b_{11} + a_{11}\delta b_{22} = 0. \qquad (22)$$

Равенство (22) показывает, что при нетривиальном бесконечно малом изгибании компоненты δb_{11} и δb_{22} должны иметь значения противоположных знаков. Если же, например, $\delta b_{22} = 0$, что равносильно сохранению семейства асимптотических линий $x^1 = \mathrm{const}$, то и $\delta b_{11} = 0$, а это значит, что изгибание тривиально.

Приходим к такому выводу: **поверхности отрицательной гауссовой кривизны не допускают нетривиальных бесконечно малых изгибаний с сохранением средней кривизны и хотя бы одного семейства асимптотических линий.**

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Н. Векуа. Обобщенные аналитические функции. Физматгиз, М., 1959.
2. Н. В. Ефимов. Качественные вопросы теории деформаций поверхностей. «Усп. матем. наук», т. 3, в. 2 (24), (1948), 47—158.
3. А. В. Погорелов. Бесконечно малые изгибания общих выпуклых поверхностей. Изд-во ХГУ, Харьков, 1959.
4. В. Ф. Каган. Основы теории поверхностей, т. II. Гостехиздат, М., 1948.
5. С. Э. Кон-Фоссен. Изгибаемость поверхностей в целом. «Усп. матем. наук», вып. 1 (1936), 33—76.
6. М. Л. Гаврильченко. Про нескінченно малі згинання поверхні, які відповідають безмоментному напруженому стану рівноваги оболонки. «Праці ОДУ», т. 152, в. 8, Одесса, 1962.

Поступила 29 августа 1966 г.

ОБ АБСОЛЮТАХ ЛИНЕЙНЫХ И ПРОЕКТИВНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУПП ЛИ

Г. Георгиев (Яссы)

В настоящей заметке автор высказывает некоторые соображения по поводу сообщения Н. И. Кованцова [3], и указывает на возможность их приложения к теории подвижного репера и к исследованиям подгрупп группы Ли.

1. Пусть локальная группа Ли G_r порядка r дана ее инвариантными формами $\omega^\alpha(u;\ du)$, $\alpha,\ \beta,\ \gamma = 1, \ldots, r$, где u^α — ее параметры. Формы ω^α удовлетворяют структурным уравнениям Маурера—Картана

$$d\omega^\alpha = \frac{1}{2} c^\alpha_{\beta\gamma}\omega^\beta \Lambda \omega^\gamma, \tag{1}$$

где $C^\alpha_{\beta\gamma}$ — структурные константы, связанные соотношениями

$$C^\alpha_{(\beta\gamma)} = 0, \quad C^\alpha_{\beta[\lambda}C^\beta_{\mu\nu]} = 0. \tag{2}$$

По первой основной теореме Ли можно найти все n-мерные реализации этой группы, если существует такая функциональная матрица $[\xi^i_\alpha(x)]$ типа $[n,\ r]$, для которой система Пфаффа

$$dx^i - \xi^i_\alpha(x)\,\omega^\alpha(u;\ du) = 0, \quad i,\ j,\ k,\ \ldots = 1, \ldots, n \tag{3}$$

является вполне интегрируемой. Необходимое и достаточное условие полной интегрируемости системы (3) записывается в виде системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка

$$\xi^j_\beta \frac{\partial \xi^i_\alpha}{\partial x^j} - \xi^j_\alpha \frac{\partial \xi^i_\beta}{\partial x^j} = C^\gamma_{\alpha\beta}\xi^i_\gamma. \tag{4}$$

Известно, что соотношения (3) представляют собой условия неподвижности точки в V_n (пространстве представлений группы G_r), или, что то же самое, являются дифференциальными уравнениями стационарной подгруппы «общей» точки в V_n.

Если рассматриваемое представление группы G_r транзитивно, то $r \geqslant n$ и в общей точке $x(x^i)$ матрица $[\xi^i_\alpha]$ будет иметь ранг n, в общем же случае в общей точке пространства V_n эта матрица имеет ранг $\rho \leqslant n,\ r$.

Множество точек (если оно не пустое), координаты которых аннулируют все миноры матрицы $[\xi^i_\alpha]$ порядка ρ, дает абсолют пространства V_n. Точки на этом абсолюте, аннулирующие все миноры порядка $\rho - 1$ этой же матрицы, если такие точки существуют, образуют его абсолют, который можно было бы назвать абсолютом второй степени пространства исходного представления, и т. д. Если обозначим через H_0 стационарную подгруппу общей точки, через H_1 — стационарную подгруппу точки первого абсолюта, через H_2 — стационарную подгруппу точки абсолюта второй степени и т. д., то, очевидно, между этими подгруппами существует следующая связь: $H_0 \supset H_1 \supset H_2 \supset \ldots$.

2. Если V_n является аналитическим представлением группы, то элементы матрицы $[\xi^i_\alpha(x)]$ суть аналитические функции от переменных x^i, и тогда

$$\xi^i_\alpha(x) = c^i_\alpha + c^i_{\alpha j} x^j + \ldots \tag{5}$$

Аппроксимируя представление первыми двумя членами разложения, заключим, что константы C^i_α и $C^i_{\alpha j}$ в силу условий (4) должны удовлетворять следующим квадратичным соотношениям [4]:

$$\begin{gathered} c^j_\alpha c^i_{\beta j} - c^j_\beta c^i_{\alpha j} = c^i_\gamma c^\gamma_{\alpha\beta}, \\ c^i_{\alpha j} c^j_{\beta k} - c^i_{\beta j} c^j_{\alpha k} = c^i_{\gamma k} c^\gamma_{\alpha\beta}. \end{gathered} \tag{6}$$

Мы получаем линейное представление группы в A_n, или иначе, имеем линейную группу Ли Г. Справедливо и обратное утверждение [4]: всякое линейное представление группы

$$\tilde{x}^i = a^i_j(u)\, x^j + a^i(u)$$

имеет своей стационарной группой (3) группу, определяющие уравнения которой суть

$$dx^i = (c^i_\alpha + c^i_{\alpha j} x^j)\, \omega^\alpha(u;\ du), \tag{7}$$

а константы c^i_α, $c^i_{\alpha j}$ удовлетворяют условиям (6).

Что касается абсолютов пространства A_n линейной группы Ли Г, то вопрос решается просто в том смысле, что абсолюты различных степеней, если они существуют, будут алгебраическими многообразиями этого пространства $M_1 \supset M_2 \supset M_3, \ldots$. Вообще говоря, M_1 состоит из одного или нескольких неприводимых многообразий. Это же справедливо и для M_2 и т. д.

3. Для проективного представления группы G_r в P_n мы имеем

$$\rho \tilde{x}^i = a^i_j(u)\, x^j,\ i,\ j,\ k,\ \ldots = 0, 1,\ \ldots,\ n, \tag{8}$$

где $[a^i_j(u)]$ — регулярная функциональная матрица, обратную которой обозначим через $[\tilde{a}^j_k]$. В (8) $\tilde{x}^i$ — абсолютные (проективные однородные) координаты точки в P_n, а x^j — ее относительные координаты. Условия неподвижности точки этого представления имеют вид

$$d\rho \tilde{x}^i = da^i_j x^j + a^i_j dx^j,$$

откуда следует

$$d\rho x^k = \tilde{a}^k_i da^i_j x^j + dx^k.$$

Положим

$$\omega^k_j(u,\ du) = \tilde{a}^k_i da^i_j,$$

тогда

$$dx^k + \omega^k_j x^j - x^k d\rho = 0.$$

Используя неоднородные проективные координаты $x^0 = 1$, $x^A = X^A (A = 1, \ldots, n)$, мы из последнего соотношения получим

$$dX^A + \omega_0^A + \omega_B^A X^B - X^A d\rho = 0, \qquad (A, B, \ldots = 1, \ldots, n)$$
$$\omega_0^0 + \omega_A^0 X^A - d\rho = 0.$$

Так как в P_n действует некоторая r-параметрическая подгруппа G_r с базисными формами ω^α $(\alpha = 1, \ldots, r)$, то мы можем положить

$$\omega_j^k (u, du) = p_{\alpha j}^k \omega^\alpha, \ p_{\alpha j}^k = \text{const}.$$

В таком случае непосредственно получаем

$$dX^A = (p_{\alpha B}^0 X^A X^B + p_{\alpha 0}^0 X^A - p_{\alpha B}^A X^B - p_{\alpha 0}^A)\, \omega^\alpha. \tag{9}$$

Введенные выше константы $p_{\alpha j}^i$, очевидно, будут удовлетворять некоторым квадратичным соотношениям, которые выводятся из условия, что система Пфаффа (9) вполне интегрируема. После выкладок получаем следующий результат ($C_{\alpha\beta}^\gamma$ — структурные константы группы G_r):

$$\begin{aligned}
&p_{\alpha 0}^0 p_{\beta 0}^0 - p_{\beta 0}^0 p_{\alpha 0}^0 - p_{\alpha A}^0 p_{\beta 0}^A + p_{\beta A}^0 p_{\alpha 0}^A = C_{\alpha\beta}^\gamma p_{\gamma 0}^0,\\
&p_{\alpha B}^0 p_{\beta 0}^0 - p_{\beta B}^0 p_{\alpha 0}^0 - p_{\alpha A}^0 p_{\beta B}^A + p_{\beta A}^0 p_{\alpha B}^A = C_{\alpha\beta}^\gamma p_{\gamma B}^0,\\
&p_{\alpha 0}^0 p_{\beta 0}^A - p_{\beta 0}^0 p_{\alpha 0}^A - p_{\alpha B}^A p_{\beta 0}^B + p_{\beta B}^A p_{\alpha 0}^B = C_{\alpha\beta}^\gamma p_{\gamma 0}^A,\\
&p_{\alpha B}^0 p_{\beta 0}^A - p_{\beta B}^0 p_{\alpha 0}^A - p_{\alpha D}^A p_{\beta B}^D + p_{\beta D}^A p_{\alpha B}^D = C_{\alpha\beta}^\gamma p_{\gamma B}^A.
\end{aligned} \tag{10}$$

Итак, при проективном представлении группы G_r (которая сейчас рассматривается как некоторая подгруппа полной проективной группы (8)) условия неподвижности точки в неоднородных координатах даются соотношениями (9), где константы $p_{\alpha\cdot}^{\cdot}$ удовлетворяют ряду тождеств (10). Очевидно и обратное, т. е. если представление группы имеет стационарную подгруппу, определяющие уравнения которой — вида (9), а константы $p_{\alpha\cdot}^{\cdot}$ удовлетворяют соотношениям (10), то это представление — проективное, т. е. является представлением вида (8).

Исследование абсолютов этого проективного представления сводится к вычислению максимального ранга ρ матрицы

$$[p_{\alpha B}^0 X^A X^B + p_{\alpha 0}^0 X^A - p_{\alpha B}^A X^B - p_{\alpha 0}^A]$$

типа $[n, r]$ для общей точки $x(X^A) \in P_n$. Аннулирование миноров порядка ρ дает систему уравнений первого абсолюта, который, очевидно, будет состоять (если система имеет решения) из ряда алгебраических неприводимых многообразий в P_n. Аналогично могут быть найдены абсолюты более высоких степеней.

Если нас интересует, как действует данная группа на семейство каких-то фигур $\{\varepsilon\}$ пространства P_n, например, коник, квадрик, линейных комплексов и т. д., то, имея стационарную подгруппу γ образа ε, можно построить представление группы G_r в пространстве V_n, в котором точки ε будут иметь стационарной подгруппой γ. Это представление не всегда будет линейным или проективным; для нахождения абсолютов этого пространства применяются положения из первого параграфа.

Приводим ниже два приложения общего характера.

4. Приложение I. Для изучения поверхностей V_p, погруженных в однородное пространство с фундаментальной группой G_r, мы располагаем очень эффективным методом подвижного репера. Расширяя нашу

проблему, предположим, что дана p-мерная дистрибуция системой уравнений

$$\theta^{i'} = \omega^{i'} - A^{i'}_{b}\omega^{b} = 0,\ a, b, \ldots = 1, \ldots, p,\ i', j', \ldots = p+1, \ldots, n, \quad (11)$$

где $A^{i'}_{b}$ зависит от точки $x \in V_n$ и вторичных параметров u^{α} стационарной подгруппы H_0. Дифференцируя внешним образом (11) и используя эти же уравнения, придем к следующей системе внешних дифференциалов:

$$d\theta^{i'} \equiv \frac{1}{2} B^{i'}_{j'k'}\theta^{j'} \wedge \theta^{k'} + B^{i'}_{bj'}\omega^{b} \wedge \theta^{j'} + \frac{1}{2} B^{i'}_{bc}\omega^{b} \wedge \omega^{c} +$$

$$+ B^{i'}_{\alpha b}\omega^{\alpha} \wedge \omega^{b} + B^{i'}_{\alpha j'}\omega^{\alpha} \wedge \theta^{j'} - dA^{i'}_{b} \wedge \omega^{b}, \quad (12)$$

где $B^{i'}_{j'k'}$, $B^{i'}_{\alpha j'}$ — многочлены первой степени от $A^{i'}_{b}$, коэффициенты $B^{i'}_{bj'}$, $B^{i'}_{\alpha b}$ — многочлены второй степени, а $B^{i'}_{bc}$ — третьей степени. Приведем значения только тех коэффициентов, которыми воспользуемся в дальнейшем:

$$B^{i'}_{\alpha b} = C^{i'}_{\alpha b} + C^{i'}_{\alpha j'} A^{j'}_{b} - C^{a}_{\alpha b}A^{i'}_{a} - C^{a}_{\alpha j'}A^{i'}_{a}A^{j'}_{b},$$

$$B^{i'}_{bj'} = C^{i'}_{bj'} + C^{i'}_{k'j'}A^{k'}_{b} - C^{a}_{bj'}A^{i'}_{a} - C^{a}_{i'j'}A^{i'}_{a}A^{i'}_{b}. \quad (13)$$

Вычисляя значение $d\theta^{i'}$ $(\mathrm{mod}\,\theta^{i'})$ для двух сдвигов — общего и внутри стационарной подгруппы H_0 точки x, принадлежащей V_p, — приходим к соотношениям

$$\delta A^{i'}_{b} - B^{i'}_{\alpha' b}\pi^{\alpha'} = 0,\ \alpha' = n+1, \ \ldots, \ r. \quad (14)$$

Легко заметить, что эти уравнения — вида (3), а так как они вполне интегрируемы, то мы получили представление группы H_0 в пространстве точек $\varepsilon(A^{i'}_{b})$ (обозначаем это пространство W_0), которое имеет $p(n-p)$ измерений. Соотношения (14) суть определяющие уравнения стационарной подгруппы $H_1 \subset H_0$. Более того, сравнивая (14), где значения $B^{i'}_{\alpha' b}$ даны (13_1), с соотношениями (9), непосредственно заключаем, что представление H_0 в W_0 является проективным.

Итак, мы установили, что с окрестностью первого порядка нашей дистрибуции ассоциируется проективный геометрический объект. Этот объект является линейным, если $C^{a}_{\alpha j'} = 0$. Последнему соотношению можно легко дать истолкование в алгебре группы G_r.

Для установления семейства канонических реперов на данном этапе (на которых действует подгруппа H_1) можно применить, например, лемму Н. М. Остиану [5], в соответствии с которой требуется определить максимальный ранг ρ матрицы $[B^{i'}_{\alpha b}]$ типа $[p(n-p),\ r-n]$ (так как $r-n$ есть порядок группы H_0), т. е. общих точек проективного представления W_0 группы H_0. Не задаваясь целью заниматься теорией подвижного репера [1], сделаем одно замечание, связанное с абсолютами представления в W_0. При исследовании матрицы $[B^{i'}_{\alpha b}]$ обычно исключаются те случаи, когда для коэффициентов $A^{i'}_{b}$ дистрибуции (11) ранг этой матрицы оказывается меньше ρ. Но такие случаи дают не что иное, как точки на абсолютах различных степеней проективного или линейного представления W_0, тем самым эти случаи получают определенную классификацию.

Отметим, что на следующих этапах алгоритма подвижного репера получаются только линейные представления соответствующих подгрупп и исключенные из общего исследования многообразия получаются с помощью изучения абсолютов этих линейных представлений. Напомню, что метод дает конечную последовательность подгрупп

$$H_0 \supset H_1 \supset \ldots \supset H_k.$$

Если $H_k = e$ (e — единичный элемент группы), то имеем единственный репер, связанный с началом p-плоскостей нашей дистрибуции. Если же $H_k \neq e$, то по теореме С. П. Финикова [6] следует, что V_p есть однородное пространство, в котором действует подгруппа, порядок которой превышает порядок H_k на $p - m_k$, где m_k — число функционально независимых инвариантов до порядка k включительно.

Отметим еще следующие два факта, которые, на мой взгляд, являются новыми:

а) все рассуждения, связанные с применением метода подвижного репера, справедливы как для инволютивных дистрибуций, когда система (11) вполне интегрируема (и через каждую точку $x \in V_n$ проходит многообразие наибольшей размерности V_p), так и для общих дистрибуций, или, другими словами, для неголономных поверхностей V_p^n;

б) с окрестностью первого порядка V_p связан проективный или линейный объект, функциональные компоненты которого являются инвариантами первого порядка на V_p, с окрестностью второго порядка связан один линейный объект и один его подобъект, функциональные компоненты которого являются инвариантами второго порядка, и т. д.

На наш взгляд, даже набросок теории исключительных случаев легче обозреть, если привлечь к рассмотрению абсолюты проективного или линейного представлений $W_0, W_1, \ldots, W_k$, а это не может не свидетельствовать о пользе такого привлечения.

5. Приложение II. Э. Картан в своей работе [2] излагает впервые теорию эквивалентности систем Пфаффа и на основе ее исследует подгруппы непрерывных псевдогрупп преобразований. Один раздел этой работы он посвящает изучению подгрупп данной группы Ли. Мы можем связать эту задачу с началом предыдущего параграфа следующим образом. Если S_n — групповое пространство группы G_n, в котором она действует просто транзитивно (через левые сдвиги), и $\omega^i(x, dx)$ — ее левоинвариантные формы, то (11) будут определяющими уравнениями ее подгруппы g_p порядка p при условиях

$$dA_b^{i'} = 0\,(\mathrm{mod}\,\theta^{j'}),\ d\theta^{i'} = 0\,(\mathrm{mod}\,\theta^{j'}) \tag{15}$$

В данном случае (12) сводится к следующему тождеству:

$$d\theta^{i'} = \frac{1}{2} B^{i'}_{j'k'}\theta^{j'} \wedge \theta^{k'} + B^{i'}_{bj'}\omega^b \wedge \theta^{j'} + \frac{1}{2} B^{i'}_{bc}\omega^b \wedge \omega^c - dA_b^{i'} \wedge \omega^b, \tag{12'}$$

и тогда условия (15) записываются очень просто

$$B^{i'}_{bc} = 0. \tag{16}$$

Напомним, что $B^{i'}_{bc}$ — многочлены третьей степени от $A_b^{i'}$, так что в пространстве W_0 компонент $A_b^{i'}$ уравнения (16) дают алгебраическое многообразие M (состоящее из одного или нескольких неприводимых многообразий $M_1, M_2, \ldots$). В частности, если $A_b^{i'} = 0$, то (16) сводятся к $C^{i'}_{bc} = 0$ — хорошо известным ограничениям на структурные константы в том случае, когда уравнения $\omega^{i'} = 0$ являются определяющими уравнениями подгруппы g_p. Напомним, наконец, что для исследования всех подгрупп данного порядка необходимо привлечь подгруппу γ наибольшего порядка, в которой подгруппа g_p является инвариантной.

Из (12) легко выводится система

$$dA_b^{i'} - B^{i'}_{j'b}\theta^{j'} = 0. \tag{17}$$

Если точка $(A_b^{i'})$ принадлежит (16), то эта система вполне интегрируема [2]. Следовательно, система

$$B^{i'}_{j'b}\theta^{j'} = 0 \tag{17'}$$

вполне интегрируема при значениях $A_b^{i'}$, принадлежащих одному из многообразий M_1, M_2, ... и является системой определяющих уравнений подгруппы γ. Это легко проверить при выборе $A_b^{i'} = 0$, когда (16) сводится к $C^{i'}_{bc} = 0$ и (17) — к системе

$$C^{i'}_{bj'}\omega^{j'} = 0. \tag{18}$$

Если матрица $[C^{i'}_{bj'}]$ типа $[p(n-p),\ n-p]$ имеет нулевой ранг, т. е. $C^{i'}_{bj'} = 0$, то наша подгруппа будет инвариантной, и тогда $\gamma = G_n$. Если же ранг этой матрицы равен $n-p$, то система (18) эквивалентна системе $\omega^{i'} = 0$ и $\gamma = g_p$. В этом последнем случае, изменяя подходящим образом корепер в V_n, мы можем привести систему (18) к виду

$$\omega^{i'_1} = 0,\ i'_1 = p+1, \ldots, n_1 < n. \tag{18'}$$

Но тогда имеют место равенства

$$C^{i'}_{aj'_2} = 0,\ a = 1, \ldots, p,\ i' = p+1, \ldots, n\ j'_2 = n_1 + 1, \ldots, n.$$

Используя теперь тождество Якоби (2), можно доказать посредством критерия Фробениуса, что система (18') вполне интегрируема. Написав структурные уравнения подгруппы γ, непосредственно заключим, что она является подгруппой наибольшего порядка, в которой g_p будет инвариантной. (Разумеется, это лишь набросок доказательства, однако мы не будем входить в подробности, чтобы не отвлекаться от основного содержания этой заметки).

Итак, определяющая система уравнений подгруппы γ — (17'). Но эта система уравнений зависит от ранга матрицы $[B^{i'}_{j'b}]$. Так как наша задача является частным случаем предыдущего приложения, именно для многообразий M_a, принадлежащих пространству W_0 размерности $p(n-p)$, которое является проективным, — мы имеем проективное представление группы γ. Исследование абсолютов этого представления посредством ранга матрицы $[B^{i'}_{j'b}]$, элементы которой даны равенствами (13) как многочлены второй степени специального вида от $A_b^{i'}$, дает различные группы γ и соответственно g_p. Для случая, когда все $B^{i'}_{j'b} = 0$ (если это возможно), мы получим инвариантные подгруппы g_p. Следует отметить, как это делает Н. И. Кованцов, что, зная абсолюты представлений (линейных, проективных и т. д.) группы, мы можем построить посредством инвариантов геометрию этих представлений. Приведенные выше приложения являются примерами того, насколько широко применение абсолютов представлений группы Ли. Наконец, я бы указал на одно их применение более общего характера, а именно к исследованию дифференцируемых многообразий, оснащенных G — структурой. В частности, эти структуры могут быть почти комплексными, эрмитовскими, симплектическими и т. д.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gh. Gheorghiev. Observaţii asupra metodei reperul mobil. Analele stiintifice ale Universitătii Jasi, t. XII (1966).
2. E. Cartan. Les sousgroupes des groupes continus de transformations. Oeuvres complètes, Partie II, Volume 2, 751—757.
3. Н. И. Кованцов. Дифференциальная геометрия пространств с фундаментальной группой. «Литовский матем. сб.», т. III_2 (1963), 217—220.
4. Г. Ф. Лаптев. Геометрия погруженных многообразий. «Тр. Московск. матем. об-ва», т. 2 (1953), 275—382.
5. Н. М. Остиану. О канонизации подвижного репера погруженного многообразия. Revue de Mathématiques pures et appliquées, т. 7 (1962), 231—240.
6. С. П. Фиников. Метод внешних форм Картана. Гостехиздат, М., 1948.

Поступила 5 марта 1966 г.

ОБ ОДНОМ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОМ СВОЙСТВЕ ПОЛЕЙ ТЯГОТЕНИЯ НУЛЕВОЙ СКАЛЯРНОЙ КРИВИЗНЫ, ДОПУСКАЮЩИХ ГРУППУ ДВИЖЕНИЙ

В. И. Денисов (Харьков)

В работах [1], [2] показано, что некоторые стационарные поля тяготения, создаваемые электромагнитным полем, обладают следующим характеристическим свойством: полная энергия пространства-времени в два раза больше энергии электромагнитного поля.

В настоящей работе показано, что подобным свойством обладают поля тяготения нулевой скалярной кривизны, допускающие группу движений.

В общей теории относительности можно построить ряд величин, определяемых как энергия, импульс, момент [3]. Они имеют вид

$$\underset{\rho}{W} = \iiint \sqrt{-g} \Big\{ (g^{4l} \underset{\rho}{\Lambda\Gamma}{}^{k}_{kl} - g^{kl} \underset{\rho}{\Lambda\Gamma}{}^{4}_{kl}) + \left(R^4_l + \frac{1}{2} R\delta^4_l\right) \underset{\rho}{\xi}{}^l + T^4_l \underset{\rho}{\xi}{}^l \Big\}\, dx^1\, dx^2\, dx^3, \tag{1}$$

где $\underset{\rho}{\Lambda\Gamma}{}^{i}_{kl}$ — асимметрия символов Кристоффеля относительно векторного поля $\underset{\rho}{\xi}{}^i$, которая выражается через асимметрию поля тяготения; R^i_l, R', T^i_l — тензор кривизны Риччи, скалярная кривизна и тензор энергии-импульса материи соответственно.

В (1) первые два члена дают величину $\underset{\rho}{W}_g$, относящуюся к полю тяготения:

$$\underset{\rho}{W}_g = \iiint \sqrt{-g} \left\{ (g^{4l} \underset{\rho}{\Lambda\Gamma}{}^{k}_{kl} - g^{kl} \Lambda\Gamma^{4}_{kl}) + \left(R^4_l + \frac{1}{2}\delta^4_b R\right) \underset{\rho}{\xi}{}^l \right\} dx^1\, dx^2\, dx^3. \tag{2}$$

Величина $\underset{\rho}{W}_M$, относящаяся к материи:

$$\underset{\rho}{W}_M = \iiint \sqrt{-g}\, T^4_l \underset{\rho}{\xi}{}^l\, dx^1\, dx^2\, dx^3. \tag{3}$$

Пусть поле тяготения допускает группу движений с векторным полем ξ_{ρ_0}. Тогда асимметрия $\underset{\rho_0}{\Lambda\Gamma}{}^{i}_{kl}$ относительно векторного поля $\xi^i_{\rho_0}$ равна нулю, т. е.

$$\underset{\rho_0}{\Lambda\Gamma}{}^{i}_{kl} = 0.$$

Поэтому (2) и (3) соответственно равны

$$\underset{\rho_0}{W_g} = \iiint \sqrt{-g}\left(R_l^4 + \frac{1}{2}\delta_l^4 R\right)\xi_{\rho_0}^l \, dx^1\, dx^2\, dx^3;$$

$$\underset{\rho_0}{W_M} = \iiint \sqrt{-g}\, T_l^4 \xi_{\rho_0}^l \, dx^1\, dx^2\, dx^3.$$

Избыток

$$\underset{\rho_0}{W_g} - \underset{\rho_0}{W_M} = \iiint \sqrt{-g}\left(R_l^4 + \frac{1}{2}\delta_l^4 R - T_l^4\right)\xi_{\rho_0}^l \, dx^1\, dx^2\, dx^3.$$

Так как R_l^i и T_l^i связаны уравнением Эйнштейна

$$R_l^i - \frac{1}{2}\delta_l^i R = T_l^i,$$

то избыток

$$\underset{\rho_0}{W_g} - \underset{\rho_0}{W_M} = \iiint \sqrt{-g}\, R \xi_{\rho_0}^4 \, dx^1\, dx^2\, dx^3. \tag{4}$$

Из (4) видно, что в точках, где $R = 0$, плотность величины $\underset{\rho_0}{W_g}$ равна плотности величины $\underset{\rho_0}{W_M}$.

Тогда, если скалярная кривизна R поля тяготения равна нулю, из (4) следует

$$\underset{\rho_0}{W_g} = \underset{\rho_0}{W_M},$$

и полная величина $\underset{\rho_0}{W}$ для системы, «поле тяготения + материя» будет:

$$\underset{\rho_0}{W} = \underset{\rho_0}{W_g} + \underset{\rho_0}{W_M} = 2\underset{\rho_0}{W_M}.$$

Итак, если поле тяготения нулевой скалярной кривизны допускает группу движений с векторным полем ξ_ρ, то полная величина $\underset{\rho_0}{W}$ системы «поле тяготения + материя» в два раза больше $\underset{\rho_0}{W_M}$. Нетрудно показать, что в такой же зависимости находятся вектор потока величины $\underset{\rho_0}{W}$ и вектор потока $\underset{\rho_0}{W_M}$.

Поэтому если поле тяготения нулевой скалярной кривизны стационарно, то полная энергия пространства-времени в два раза больше энергии материи.

Если поле тяготения нулевой скалярной кривизны однородно, то полный импульс в два раза больше импульса материи и т. д.

ЛИТЕРАТУРА

1. W. B. Bonnor. The field an Electric Current in General Relativity. Proceedings of the Physical Society, vol. 76, № 492, 891—899, 1960.

2. P. S. Florides. The electromagnetic energy and gravitational mass of a charged particle in General Relativity. Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, vol. 58, part 1, 110—118, 1962.

3. В. И. Денисов. Законы сохранения в общей теории относительности. «Укр. геометр. сб.», вып. 3, Изд-во ХГУ, Харьков, 1966.

Поступила 21 ноября 1966 г.

ПЛОТНОСТЬ И ПОТОК ЭНЕРГИИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН ЭЙНШТЕЙНА — РОЗЕНА

В. И. Денисов (Харьков)

1. Возможность излучения гравитационных волн, несущих энергию, была предсказана Эйнштейном на основе лианеризации нелинейных уравнений тяготения. В дальнейшем вопрос о гравитационных волнах неоднократно обсуждался во многих работах. Трудности связаны с отысканием точных решений нелинейных уравнений тяготения и с отсутствием удовлетворительного определения таких величин, как энергия и поток энергии поля тяготения.

Впервые предполагая, что поле тяготения цилиндрически симметрично, точное решение уравнений тяготения в вакууме было дано Эйнштейном и Розеном [1]. Затем это решение исследовалось Розеном [2], Вебером и Уилером [3] и др.

Розен пришел к следующему результату. Псевдотензор, который является мерой плотности энергии волны тяготения, всюду равен нулю, т. е. энергия поля тяготения равна нулю.

Вебер и Уилер показали, что псевдотензор равен нулю и в присутствии материи. Таким образом, результаты работ [2] и [3] состоят в следующем: псевдотензор энергии импульса цилиндрического гравитационного поля тяготения тождественно равен нулю. Из этого следует, что энергия гравитационной волны равна нулю, и полная энергия даже в присутствии материи равна нулю.

Этот результат несмотря на свою внушительность некорректен, так как при определенной энергии поля тяготения используется псевдотензор энергии-импульса. Псевдотензор энергии-импульса имеет такие существенные недостатки, что использовать его при рассмотрении вопросов общей теории относительности не имеет смысла.

В работе [4] показано, что энергия W_0 тяготения пустого пространства определяется тензором нестационарности поля тяготения и равна

$$\underset{0}{W} = \frac{1}{8\pi}\iiint \sqrt{-g}\, g^{4m} g^{kl} \left(\underset{0}{\Lambda} g_{kl,\, m} - \underset{0}{\Lambda} g_{km,\, l}\right) dx^1\, dx^2\, dx^3,$$

где $\underset{0}{\Lambda} g_{ik}$ — тензор нестационарности поля тяготения, а интегрирование производится по всему трехмерному пространству.

Плотность энергии и вектор потока энергии будут соответственно:

$$\frac{1}{8\pi}\sqrt{g_{44}}\, g^{4m} g^{kl} \left(\underset{0}{\Lambda} g_{kl,\, m} - \underset{0}{\Lambda} g_{km,\, l}\right), \tag{1}$$

$$\frac{1}{8\pi}\sqrt{g_{44}}\, g^{\rho m} g^{kl} \left(\underset{0}{\Lambda} g_{kl,\, m} - \underset{0}{\Lambda} g_{km,\, l}\right) \quad \rho = 1,\, 2,\, 3. \tag{2}$$

Из (1) и (2) видно, что энергия и поток энергии определяются тензором нестационарности поля тяготения. Плотность энергии отлична от нуля в точках, где поле тяготения нестационарно. Поэтому области пространства-времени с $T^i_k = 0$ и стационарным полем тяготения не имеют энергии и не переносят ее. Заметим, что плотность энергии (1) и полная энергия $\underset{0}{W}$ инвариантны относительно преобразований пространственных координат и преобразований временной координаты.

Вычислим по (1) и (2) плотность и поток энергии для цилиндрических гравитационных волн.

В цилиндрической системе координат метрика Эйнштейна — Розена имеет вид (см. [2])

$$ds^2 = e^{2(\nu-\psi)}(dt^2 - d\rho^2) - \rho^2 e^{-2\psi} d\varphi^2 - e^{2\psi} dz^2, \tag{3}$$

где функции ν и ψ зависят только от ρ и t,

$$x^1 = \rho, \; x^2 = \varphi, \; x^3 = z, \; x^4 = t.$$

Для метрики (3) уравнения тяготения в пустом пространстве дают

$$\begin{gathered} \psi_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}\psi_\rho - \psi_{tt} = 0, \\ \nu_\rho = \rho[\psi^2_\rho + \psi^2_t], \\ \nu_t = 2\rho\psi_\rho\psi_t. \end{gathered} \tag{4}$$

Решения уравнений (4) хорошо известны и представляют собой цилиндрические волны.

В системе координат (3) тензор нестационарности тяготения

$$\underset{0}{\Lambda} g_{ik} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^4},$$

так как поле стационарности плоского пространства-времени в данной системе координат имеет вид $\xi_0 = (0, 0, 0, 1)$.

В записи, эквивалентной (1) и (2), четырехвектор плотности и потока энергии

$$S^i = \frac{1}{8\pi}\left\{ g^{im}(\xi^l_{0,\,l})_{,\,m} - g^{kl}\underset{0}{\xi}{}^i_{k,\,l} \right\} \tag{5}$$

где $\underset{0}{\xi}{}^l$ — векторное поле с составляющими (0, 0, 0, 1). Легко показать, что

$$g^{im}(\xi^{\;l}_{0,\,l})_{,\,m} = g^{im}\frac{\partial^2 \ln\sqrt{-g}}{\partial x^m \partial x^4},$$

и

$$\xi^{\;l}_{0,\,i} = \Gamma^l_{i4}.$$

Поэтому

$$\underset{0}{\xi}{}^l_{,\,i,\,k} = \frac{\partial \Gamma^l_{i4}}{\partial x^k} - \Gamma^m_{ik}\Gamma^l_{m4} + \Gamma^l_{mk}\Gamma^m_{i4}.$$

Используя определение тензора кривизны Римана — Кристоффеля, получим

$$\underset{0}{\xi}{}^l_{,\,i,\,k} = \frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial x^4} - R^l_{ik4}.$$

Тогда

$$S^i = \frac{1}{8\pi}\left(g^{im}\frac{\partial^2 \ln \sqrt{-g}}{\partial x^m\,\partial x^4} - g^{lm}\frac{\partial \Gamma^i_{lm}}{\partial x^4} + \bar{R}^i_4\right).$$

Так как пространство пусто по предположению, то

$$S^i = \frac{1}{8\pi}\left(g^{im}\frac{\partial^2 \ln \sqrt{-g}}{\partial x^m\,\partial x^4} - g^{lm}\frac{\partial \Gamma^i_{lm}}{\partial x^4}\right).$$

Для метрики (3) $g_{ik} = 0$, если $i \neq k$, поэтому

$$S^i = \frac{1}{8\pi}\left(g^{ii}\frac{\partial^2 \ln \sqrt{-g}}{\partial x^i\,\partial x^4} - \sum_l g^{ll}\frac{\partial \Gamma^i_{ll}}{\partial x^4}\right). \tag{6}$$

Первый член в выражении (6) вычисляется просто, так как $\sqrt{-g} = re^{2(\nu-\psi)}$ для метрики (3). Преобразуем второй член. Легко видеть, что

$$\Gamma^i_{ll} = \begin{cases} \frac{1}{2}g^{ii}g_{ii,\,i} & l = i, \\ -\frac{1}{2}g^{ii}g_{ll,\,i} & l \neq i. \end{cases}$$

Тогда четырехвектор

$$S^i = \frac{1}{8\pi}\left\{g^{ii}\frac{\partial^2 \ln \sqrt{-g}}{\partial x^i\,\partial x^4} - \frac{1}{2}\left\{g^{ii}\frac{\partial}{\partial x^4}\left(g^{ii}\frac{\partial g_{ii}}{\partial x^i}\right) - \sum_{m \neq i} g^{mm}\frac{\partial}{\partial x^4}\left(g^{ii}\frac{\partial g_{mm}}{\partial x^i}\right)\right\}\right. . \tag{6'}$$

Так как метрический тензор пространства-времени (3) не зависит от φ и z, то компоненты S^2 и S^3 потока энергии тождественно равны нулю.

Найдем S^1. Умноженное на $\sqrt{g_{44}}$, S^1 дает плотность потока энергии через двумерную площадку ds_1. Из (6′) имеем:

$$S^1 = \frac{1}{8\pi}\left\{g^{11}\frac{\partial^2 \ln \sqrt{-g}}{\partial x^1\,\partial x^4} - \frac{1}{2}\left\{g^{11}\frac{\partial}{\partial x^4}\left(g^{11}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1}\right) - \sum_{m \neq 1} g^{mm}\frac{\partial}{\partial x^4}\left(g^{11}\frac{\partial g_{mm}}{\partial x^1}\right)\right\}\right. .$$

Подставляя g_{ll} из (3), получим

$$S^1 = \frac{2}{8\pi}e^{-2(\nu-\psi)}\left[\frac{\dot{\nu}}{r} - 2\dot{\psi}\psi - (\dot{\nu} - (\dot{\psi})'\right], \tag{7}$$

или в силу уравнений (4)

$$S^1 = -\frac{1}{4\pi}e^{-2(\nu-\psi)}(\nu' - \psi')^{\cdot},$$

где знак ′ над функцией означает дифференцирование по r. Плотность потока энергии

$$\sqrt{g_{44}}S^1 = -\frac{e^{-(\nu-\psi)}}{4\pi}(\dot{\nu} - \dot{\psi})^{\cdot}. \tag{8}$$

Вычислим S^4. Умноженное на $\sqrt{g_{44}}$, S^4 дает плотность энергии поля тяготения. Из (6′) следует

$$S^4 = \frac{1}{8\pi}g^{44}\frac{\partial^2 \ln \sqrt{-g}}{\partial^2 x^4} - \frac{1}{16\pi}\left\{g^{44}\frac{\partial}{\partial x^4}\left(g^{44}\frac{\partial g_{44}}{\partial x^4}\right) - \sum_{\rho=1}^{3} g^{\rho\rho}\frac{\partial}{\partial x^4}\left(g^{44}\frac{\partial g_{\rho\rho}}{\partial x^4}\right)\right\}.$$

Подставляя g_{ll} из (3), получим

$$S^4 = \frac{1}{8\pi}e^{-2(\nu-\psi)}\left[4\dot{\varphi}^2 + 2(\ddot{\nu} - \ddot{\psi})\right],$$

где знак $\cdot$ над функцией означает дифференцирование по t^4. Тогда плотность энергии поля тяготения

$$\sqrt{g_{44}}S^4 = \frac{1}{4\pi} e^{-(\nu-\psi)} [2\dot{\psi}^2 + (\ddot{\nu} - \ddot{\psi})]. \qquad (9)$$

Из (8) видно, что ориентация вектора потока энергии в точке (v, φ, z) определяется поведением временных производных $\dot{\nu}$ и $\dot{\psi}$. Поэтому если производные $\dot{\nu}$ и $\dot{\psi}$ меняют знак, то вектор потока энергии изменяет направление на противоположное. В этом заключается принципиальное отличие гравитационного излучения от электромагнитного.

Это свойство потока энергии приводит к интересным физическим следствиям, которые мы рассмотрим на примере монохроматической цилиндрической волны тяготения.

2. Для монохроматической волны решения уравнений (4) будут

$$\psi = AI_0(\omega r)\cos\omega t, \qquad (10)$$

$$\nu = \frac{1}{2} A^2\omega r\, [I_0(\omega r)\, I'_0(\omega r) + \omega r\,(I_0^2(\omega r) + I'^2_0(\omega r)) + I_0 I'_0 \cos 2\omega t],$$

где $I_0(\omega r)$ — функция Бесселя нулевого порядка, A и ω — амплитуда и частота монохроматической волны.

Тогда для ψ и ν из (10) вектор потока S' — периодическая функция t с периодом $\frac{2\pi}{\omega}$.

Найдем среднюю интенсивность потока энергии $\overline{ds}$ через границу элементарного объема за время $T = \frac{2\pi}{\omega}$

$$\overline{ds} = \frac{1}{T}\int_0^T \sqrt{-g_{44}}S^i\, ds_i\, dt,$$

где ds_i — элемент поверхности двумерной площадки. В нашем случае $ds_1 = (re^{(\nu-\psi)}\, d\varphi\, dz)$, поэтому

$$\overline{ds} = -\frac{1}{4\pi T}\int_0^T r\,(\nu' - \psi')^{\cdot}\, dt\, d\varphi\, dz = -\frac{1}{4\pi T} r\,(\nu' - \psi')\Big|_0^T d\varphi\, dz.$$

Так как ν' и ψ' периодические функции, то средняя интенсивность потока энергии в монохроматической волне тяготения равна нулю. Поток осциллирует относительно нулевого значения с частотой ω. Поэтому каждый элемент объема в среднем не излучает (сохраняет) энергию, а пространство-время в среднем замкнуто по энергии.

Легко найти среднюю плотность энергии монохроматической волны:

$$\frac{d\overset{0}{W}}{dv} = \frac{1}{8\pi T}\int_0^T r\,[4\dot{\psi}^2 + 2(\ddot{\nu} - \ddot{\psi})]\, dt,$$

где

$$dv = r\, dr\, d\varphi\, dz,$$

откуда для (10) имеем

$$\frac{d\overset{0}{W}}{dv} = \frac{4A^2\omega^2}{8\pi T} rI_0^2(\omega r)\int_0^T \sin^2\omega t\, dt = \frac{1}{4\pi} A^2\omega^2 I_0^2(\omega r). \qquad (11)$$

Распределение плотности энергии (11) показывает, что при больших частотах плотность энергии монохроматических волн локализуется в области начала координат.

Рассмотрим две монохроматические волны равных частот, сдвинутые по фазе на угол β. Функция ψ в этом случае равна

$$\psi = A_1 I_0(\omega r)\cos\omega t + A_2 I_0(\omega r)\cos(\omega t + \beta).$$

Как и в случае одной монохроматической волны, средняя интенсивность потока энергии и в этом случае равна нулю. Средняя же плотность энергии в точке

$$\frac{d\underset{0}{W}}{dv} = \frac{\omega^2}{4\pi} I_0^2(\omega r)\{A_1^2 + 2A_1A_2\cos\beta + A_2^2\}, \tag{12}$$

откуда видно, что $d\underset{0}{W}$ зависит от β.

Пусть $A_1 = A_2 = A$, тогда (12) дает

$$\frac{d\underset{0}{W}}{dv} = \frac{A^2\omega^2}{2\pi} I_0^2(\omega r)(1+\cos\beta). \tag{13}$$

Из (12) и (13) видно, что монохроматические цилиндрические волны тяготения могут интерферировать. В зависимости от β плотность энергии (13) может принимать любое значение от максимального, равного

$$\frac{d\underset{0}{W}}{dv} = \frac{\omega^2}{4\pi} I_0^2(\omega r)(A_1 + A_2)^2,$$

до минимального, равного

$$\frac{d\underset{0}{W}}{dv} = \frac{\omega^2}{4\pi} I_0^2(\omega r)(A_1 - A_2)^2.$$

Если две монохроматические волны, равных амплитуд и частот, сдвинуты по фазе на π одна относительно другой, то средняя плотность энергии и полная энергия такой системы волн равна нулю. Это естественно, так как при $A_1 = A_2$ и $\beta = \pi$ пространство-время плоско и тяготения нет.

Нетрудно показать, что в системе двух монохроматических волн тяготения возникают биения в плотности и потоке энергии, если частоты волн близки. Частота биения определяется разностью частот $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$, а период биений равен $\frac{2\pi}{\Delta\omega}$.

В заключение отметим, что свойство вектора потока энергии в вакууме изменять свое направление является характерным свойством гравитационного излучения и приводит к необычным физическим следствиям. Именно, гравитационная энергия, излученная материальной системой во время нестационарного состояния, поглощается ею обратно при возвращении в стационарное состояние. Это позволяет ответить на вопрос, поставленный Пирани в работе [5].

Предположим, что статичность и сферическая симметрия шварцшильдовской частицы нарушена внутренними силами. Пусть эта частица некоторое время излучает и, наконец, снова возвращается в прежнее состояние. Изменяется ли полная масса частицы? Из сказанного выше следует, что при возвращении в стационарное состояние частица поглощает излученную энергию, и поэтому ее полная масса не изменяется.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Einstein, N. Rosen. On Gravitational waves. Journal Franklin Institution, № 223, p. 43—54, 1937.
2. N. Rosen. Jubilee of Relativity Theory, Basel, 1956.
3. Дж. Вебер., Дж. Уилер. Реальность цилиндрических гравитационных волн Эйнштейна — Розена. Сб. «Новейшие проблемы гравитации», Изд-во иностр. лит., М., 1961.
4. В. И. Денисов. Законы сохранения в общей теории относительности. «Укр. геометр. сб.», вып. 3. Изд-во ХГУ, Харьков, 1966.
5. F. A. E. Pirani. Invariant Formulation of Gravitational Radiation Theory. Physical Review, v. 105, p. 1089—1099, 1957.

Поступила 21 ноября 1966 г.

НОРМАЛЬНЫЙ РЕПЕР n-КОМПЛЕКСА ПРЯМЫХ В n-МЕРНОМ ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В. Л. Карпенко (Киев)

Благодаря работам советских геометров к настоящему времени теория комплексов в трехмерном проективном пространстве является в достаточной степени разработанной. Московскими, вильнюсскими, томскими и киевскими геометрами создана обширная литература, освещающая различные вопросы этой теории. В 1963 г. вышла монография Н. И. Кованцова [1], в которой подводится итог проделанной работе и систематизируется материал, относящийся к теории комплексов прямых как в евклидовом, так и в проективном трехмерном пространстве.

Теория комплексов (прямых) различной размерности в многомерных проективных пространствах по-прежнему остается новой теорией, где еще предстоит многое сделать. Основные работы в этой области представлены Вильнюсской группой геометров. Так К. И. Гринцевичюсом рассмотрены гиперкомплексы прямых в четырехмерном проективном пространстве [2—3] и в многомерном проективном пространстве [4—6]. А. И. Дрейманас исследует четырехпараметрические многообразия прямых в четырехмерном проективном пространстве [7—8].

Ниже мы рассматриваем дифференциальную окрестность первого порядка луча n-комплекса в n-мерном проективном пространстве P_n. С помощью метода внешних форм Картана строится нормальный репер n-комплекса и дается его геометрическое истолкование.

В n-мерном проективном пространстве многообразие всех прямых является $2(n-1)$-мерным. Подмногообразие прямых размерности n назовем n-комплексом прямых.

Уравнения инфинитезимального смещения подвижного репера $\{A_i\}$ n-комплекса запишем в виде [9]

$$dA_i = \omega_i^j A_j,\ D\omega_i^k = [\omega_i^j \omega_j^k]\ \ (i, j, k = 1, 2, \ldots, n+1). \tag{1}$$

Уравнения (1) будут иметь тот или иной вид в зависимости от выбора сопровождающего репера. Поместим вершины A_1 и A_2 репера на луч n-комплекса. Поскольку

$$\begin{aligned} dA_1 &= \omega_1^1 A_1 + \omega_1^2 A_2 + \omega_1^3 A_3 + \cdots + \omega_1^{n+1} A_{n+1}, \\ dA_2 &= \omega_2^1 A_1 + \omega_2^2 A_2 + \omega_2^3 A_3 + \cdots + \omega_2^{n+1} A_{n+1}, \end{aligned} \tag{2}$$

то мы заключаем, что движением луча в n-комплексе управляют лишь формы

$$\omega_1^3,\ \omega_1^4, \ldots,\ \omega_1^{n+1},\ \omega_2^3,\ \omega_2^4, \ldots,\ \omega_2^{n+1}.$$

При этом только n форм являются линейно независимыми. Остальные $(n-2)$ формы будут линейно выражаться через эти линейно независимые формы:

$$\omega_1^p = \lambda_\alpha^p \omega_2^\alpha + \lambda^p \omega_1^{n+1} \quad (p = 3,\ 4,\ \ldots,\ n;\ \alpha = 3,\ 4,\ \ldots,\ n+1). \tag{3}$$

Дальнейший выбор сопровождающего репера будем делать так, чтобы это равенство приняло наиболее простой вид.

Прямые n-комплекса, проходящие через произвольную точку луча (A_1A_2), образуют конус с вершиной в этой точке. В качестве плоскости $(A_1A_2A_3)$ примем плоскость, касательную к конусу лучей n-комплекса, имеющему вершину в точке A_1. В этом случае из равенства (2) мы будем иметь

$$\omega_1^2 = \omega_1^3 = \cdots = \omega_1^{n+1} = 0,\ \omega_2^4 = \cdots = \omega_2^{n+1} = 0,\ \omega_2^3 \neq 0.$$

Но тогда из уравнений (3) следует, что

$$\lambda_3^{p_3} = 0 \quad (p_3 = 3,\ 4,\ \ldots,\ n). \tag{4}$$

Аналогично, если в качестве плоскости $(A_1A_2A_{n+1})$ выбрать плоскость, касательную к конусу лучей n-комплекса, имеющему вершину в точке A_2, мы получим

$$\lambda^p = 0 \quad (p = 3, 4, \ldots, n). \tag{5}$$

Пусть A_1 движется в любом направлении, касательном к плоскости $(A_1A_2A_3)$, но не в направлении луча (A_1A_2). Тогда точка A_2, произвольно выбранная на луче n-комплекса, будет описывать кривую, касательная к которой вместе с плоскостью $(A_1A_2A_3)$ определит некоторую трехмерную плоскость. Примем ее за трехмерную плоскость $(A_1A_2A_3A_4)$. В этом случае из равенств (2) имеем

$$\omega_1^4 = \cdots = \omega_1^{n+1} = 0,\ \omega_2^5 = \cdots = \omega_2^{n+1} = 0,\ \omega_1^3 \neq 0,\ \omega_2^4 \neq 0.$$

Но тогда из уравнений (3) следует, что

$$\lambda_4^{p_4} = 0 \quad (p_4 = 4, 5, \ldots, n). \tag{6}$$

Пусть теперь A_1 движется в любом направлении, касательном к трехмерной плоскости $(A_1A_2A_3A_4)$, но не в направлении, касательном к плоскости $(A_1A_2A_3)$. Тогда точка A_2 на луче n-комплекса будет описывать кривую, касательная к которой вместе с трехмерной плоскостью $(A_1A_2A_3A_4)$ определяет некоторую четырехмерную плоскость. Примем ее за четырехмерную плоскость $(A_1A_2A_3A_4A_5)$.

В этом случае из равенств (2) имеем

$$\omega_1^5 = \cdots = \omega_1^{n+1} = 0,\ \omega_2^6 = \cdots = \omega_2^{n+1} = 0,\ \omega_1^4 \neq 0,\ \omega_2^5 \neq 0.$$

Из уравнений (3) следует, что при этом

$$\lambda_5^{p_5} = 0 \quad (p_5 = 5,\ 6,\ \ldots,\ n). \tag{7}$$

Надо заметить, что если бы в этом случае точка A_1 допускала движение, касательное к плоскости $(A_1A_2A_3)$, то, как следует из предыдущих построений, точка A_2 двигалась бы в трехмерной плоскости $(A_1A_2A_3A_4)$ и никакой независимой точки A_5 мы добавить бы не могли.

Таким образом поступаем и далее.

Пусть, наконец, A_1 движется в любом направлении, касательном к $(n-2)$-мерной плоскости $(A_1A_2 \ldots A_{n-1})$, но не в направлении, касательном к $(n-3)$-мерной плоскости $(A_1A_2\ldots A_{n-2})$. Точка A_2 луча n-комплекса будет при этом описывать кривую, касательная к которой вместе с $(n-2)$-мерной плоскостью $(A_1A_2\ldots A_{n-1})$ определит $(n-1)$-мерную плоскость, которую мы примем за $(n-1)$-мерную плоскость $(A_1A_2\ldots A_n)$. В этом случае из равенств (2) следует

$$\omega_1^n=\omega_1^{n+1}=0,\ \omega_2^{n+1}=0,\ \omega_1^{n-1}\neq 0,\ \omega_2^n\neq 0.$$

Но из уравнений (3) следует, что при этом

$$\lambda_n^{p_n}=0\ \ (p_n=n). \tag{8}$$

Итак, мы получили ряд равенств

$$\lambda_3^{p_3}=\lambda_4^{p_4}=\cdots=\lambda_{n-1}^{p_{n-1}}=\lambda_n^{p_n}=0\ \ (p_k=k,\ k+1,\ \ldots,\ n;\ k\leqslant n) \tag{9}$$

Пусть теперь точка A_2 движется в любом направлении, касательном к плоскости $(A_2A_1A_{n+1}.)$ Тогда точка A_1 будет описывать кривую, касательная к которой вместе с плоскостью $(A_2A_1A_{n+1})$ определит некоторую трехмерную плоскость. Примем ее за трехмерную плоскость $(A_2A_1A_{n+1}A_n)$.

В этом случае из равенств (2) получаем

$$\omega_2^3=\cdots=\omega_2^n=0,\ \omega_1^3=\cdots=\omega_1^{n-1}=0,\ \omega_1^n\neq 0,\ \omega_2^{n+1}\neq 0.$$

Из уравнений (3) следует, что при этом

$$\lambda_{n+1}^{p^{n-1}}=0\ (p^{n-1}=3,4,\ \ldots,\ n-1). \tag{10}$$

Аналогично поступаем и далее.

Пусть, наконец, точка A_2 движется в любом направлении, касательном к $(n-2)$-мерной плоскости $(A_2A_1A_{n+1}A_n\ldots A_5)$, но не в направлении касательном к $(n-3)$-мерной плоскости $(A_2A_1A_{n+1}A_n\ldots A_6)$. Точка A_1 тогда описывает кривую, касательная к которой вместе с $(n-2)$-мерной плоскостью $(A_2A_1A_{n+1}A_n\ \ldots\ A_5)$ определяет $(n-1)$-мерную плоскость. Примем последнюю за $(n-1)$-мерную плоскость $(A_2A_1A_{n+1}A_n\ \ldots\ A_4)$. В этом случае из равенств (2) имеем

$$\omega_2^3=\omega_2^4=0,\ \omega_1^3=0,\ \omega_2^5\neq 0,\ \omega_1^4\neq 0.$$

А уравнения (3) показывают, что

$$\lambda_5^{p^3}=0\quad (p^3=3). \tag{11}$$

Мы получили ряд равенств

$$\lambda_5^{p^3}=\lambda_6^{p^4}=\cdots=\lambda_n^{p^{n-2}}=0\ \ (p^m=3,4,\ \ldots,\ m;\ m<n). \tag{12}$$

Внося значения коэффициентов из равенств (5), (9) и (12) в систему (3), получим

$$\begin{aligned}\omega_1^3&=\lambda_4^3\omega_2^4,\\ \omega_1^4&=\lambda_5^4\omega_2^5,\\ &\cdots\cdots\\ \omega_1^n&=\lambda_{n+1}^n\omega_2^{n+1}.\end{aligned} \tag{13}$$

Подставляя значения (13) в равенство (2), имеем

$$dA_1=\omega_1^1A_1+\omega_1^2A_2+\lambda_4^3\omega_2^4A_3+\lambda_5^4\omega_2^5A_4+\cdots+\lambda_{n+1}^n\omega_2^{n+1}A_n+\omega_1^{n+1}A_{n+1}.$$

Отсюда видно, что нормированием координат вершин $A_3, A_4, \ldots, A_n$ репера можно привести все коэффициенты λ^p_{p+1} системы (13) к значению -1:

$$\lambda^p_{p+1} = -1 \quad (p = 3,4, \ldots, n). \tag{14}$$

После проведенной канонизации система (3) принимает вид

$$\omega^p_1 + \omega^{p+1}_2 = 0 \quad (p = 3, 4, \ldots, n). \tag{15}$$

N-комплексы, для которых хотя бы один из коэффициентов λ^p_{p+1} равен нулю, являются специальными n-комплексами. Они представляют собой совокупность касательных к поверхности некоторой размерности.

Равенством (14) специальные n-комплексы из рассмотрения исключаются.

Назовем репер, компоненты инфинитезимального смещения которого связаны соотношениями (15) нормальным репером комплекса прямых в проективном пространстве P_n.

При $n = 3$ получаем нормальный репер комплекса трехмерного проективного пространства, использованный Н. И. Кованцовым [1].

Равенства (15) представляют собой дифференциальные уравнения n-комплекса, отнесенного к нормальному реперу.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. И. Кованцов. Теория комплексов. Изд-во КГУ, К., 1963.
2. К. И. Гринцевичюс. О гиперкомплексе прямых в четырехмерном проективном пространстве. Автореф. канд. дисс. Изд-во МГУ, М., 1955.
3. К. И. Гринцевичюс. О гиперкомплексе прямых в проективном пространстве P_4. ДАН СССР, № 6, 107, 1956.
4. К. И. Гринцевичюс. Гиперкомплекс прямых в многомерном проективном пространстве. Тр. 3-го Всес. матем. съезда, I, АН СССР, М., 1956.
5. К. И. Гринцевичюс. Дифференциальная окрестность второго порядка луча комплекса в многомерном проективном пространстве. Матем. сб., т. 52, вып. 4, 1960.
6. К. И. Гринцевичюс. О полном объекте комплекса прямых в многомерном проективном пространстве. Литовский матем. сб., т. II, № 1, 1962.
7. А. И. Дрейманас. О четырехпараметрическом многообразии прямых в четырехмерном проективном пространстве. Уч. зап. Вильнюсск. ун-та, 25, 1958.
8. А. И. Дрейманас. Об одном специальном случае четырехпараметрического многообразия прямых в четырехмерном проективном пространстве. Литовский матем. сб., 3, № 2, 1963.
9. С. П. Фиников. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. Гостехиздат, М.—Л., 1948.

Поступила 27 октября 1966 г.

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ КОНФИГУРАЦИЙ ДЕЗАРГА В МНОГОМЕРНЫХ ПРОЕКТИВНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Л. А. Киселевич (Киев)

Теорема Дезарга и связанная с ней конфигурация Дезарга занимают особое положение в проективной геометрии. Эта теорема является источником многих теорем проективной геометрии и фундаментом построения чисто проективным путем основных понятий проективной геометрии: гармонизма и затем проективного соответствия (по Штаудту) [1].

Несмотря на плоскостный характер теоремы Дезарга, ее невозможно доказать на основании только плоскостных аксиом — это вывод из исследований Д. Гильберта и других геометров. Д. Гильберт показал [2], что теорема Дезарга является теоремой проективного пространства и при построении аксиоматики проективной плоскости должна быть принята за аксиому. Это говорит о том, что нельзя только проективными средствами построить проективную геометрию на плоскости отдельно от проективной геометрии трехмерного пространства.

Это значение теоремы Дезарга сделало привлекательной задачу ее обобщения, которой занимались многие геометры. Чаще других встречаются в математической литературе обобщения на многомерное пространство. Различные авторы подходили к решению этой задачи по-разному, поэтому существует не единственное обобщение (см. [3—9]).

С обобщением теоремы Дезарга связано и обобщение конфигурации Дезарга.

При рассмотрении задачи обобщения теоремы Дезарга оказалось возможным построить последовательность конфигураций Дезарга в многомерных проективных пространствах. Для этого можно использовать обобщение конфигурации Дезарга на многомерное проективное пространство. В настоящей статье описывается один из способов построения последовательности конфигураций Дезарга и некоторые ее свойства.

§ 1. Конфигурация D_n

Обобщая известную конфигурацию Дезарга на многомерное проективное пространство, рассмотрим вместо пары перспективных треугольников два n-вершинника $A_1A_2 \ldots A_n$ и $A_1' A_2' \ldots A_n'$, расположенные перспективно относительно некоторого центра S. Наибольшая размерность проективного пространства, в котором можно рассматривать эти n-вершинники, равна n. За базис пространства P_n можно принять совокупность точек $S, A_1, \ldots, A_n$.

Соответствующие ребра n-вершинников A_iA_j и $A'_iA'_j$ пересекаются в точке T_{ij}. Каждые три точки T_{ij} определяют прямую, что следует из теоремы Дезарга.

Количество точек, прямых, плоскостей, ... полученного многообразия определяется следующими формулами [10]:

$$N_0 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}; \quad N_1 = \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}; \quad N_2 = \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{4!}; \ \ldots,$$

которые с помощью числа сочетаний можно записать короче:

$$N_0 = C^2_{n+2}; \ N_1 = C^3_{n+2}; \ N_2 = C^4_{n+2}; \ldots; \ N_r = C^{r+2}_{n+2}.$$

Через каждую точку многообразия проходит $n = C^1_n$ прямых C^2_n плоскостей, ..., C^r_n r-плоскостей. На каждой прямой расположены три точки, на каждой плоскости — 6 точек, ..., на каждой r-плоскости — C^2_{r+2} точек. Аналогичные свойства можно установить для прямых, плоскостей, ... многообразия, что позволяет назвать это многообразие конфигурацией. Обозначим ее D_n. Определение конфигурации в [11].

Для доказательства правильности конфигурации D_n [12] достаточно доказать, что все точки ее равноправны. Нужно взять любую точку конфигурации и показать, что ее можно считать дезарговой, т. е. можно найти соответственные n-вершинники. В [13] описан способ нахождения соответственных треугольников и дезарговой прямой при выбранном центре перспективы для конфигурации D_3.

Запись доказательства схематична: слева — точка, выбранная в качестве центра перспективы, далее, в две строки, — пара найденных n-вершинников, причем их соответственные вершины записаны в одном столбце

$$S\begin{cases} A'_1A'_2 \ldots A'_n \\ A_1A_2 \ldots A_n \end{cases}$$

$$A_i\begin{cases} A_1A_2 \ldots A_{i-1}SA_{i+1} \ldots A_n \\ T_{1,i}T_{2,i} \ldots T_{i-1,i}A'_iT_{i,i+1} \ldots T_{i,n} \end{cases}$$

$$T_{ij}\begin{cases} A_iA'_iT_{ik} \\ A_jA'_jT_{jk} \end{cases} \quad i \neq j \neq k; \ k = 1, \ldots, n).$$

Итак, конфигурация D_n правильная. Ее можно рассматривать как обобщение конфигурации Дезарга на многомерное проективное пространство P_n.

В k-мерном пространстве P_k существуют конфигурации D_k, количество точек которых определяется по формуле (1), а количество прямых — по формуле (2):

$$N_0 = \frac{(k+1)(k+2)}{2} \qquad (1)$$

$$N_1 = \frac{k(k+1)(k+2)}{3!}. \qquad (2)$$

Индекс k — размерность конфигурации — означает число вершин k-вершинников.

§ 2. Переход от конфигурации D_n к конфигурациям меньшей размерности D_{n-1}, D_{n-2}, ...

Если от конфигурации D_n отбросить $n+1$ точку: S и A'_i $(i = 1, \ldots, n)$, то оставшееся многообразие содержит

$$N_0 = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - (n+1) = \frac{n(n+1)}{2}$$

точек. Это число соответствует формуле (1) при $k = n-1$.

При таком преобразовании конфигурации D_n отпадут n прямых SA'_i и $\frac{n(n-1)}{2}$ прямых $A'_iA'_j$. Следовательно, в полученном многообразии количество прямых равно

$$N_1 = \frac{n(n+1)(n+2)}{3!} - n - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{(n-1)\,n\,(n+1)}{3!}.$$

Это число соответствует формуле (2) при $k = n-1$.

Нетрудно убедиться, что через каждую из оставшихся точек проходит $n-1$ прямая, на каждой из которых расположены три точки. Подтверждаются и остальные свойства многообразия, позволяющие утверждать, что многообразие является конфигурацией D_{n-1}, расположенной в пространстве P_{n-1}.

Выделим в полученной конфигурации D_{n-1} центр перспективы и соответственные $(n-1)$-вершинники. Если за центр перспективы принять точку A_n, а точки $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$, соединенные с A_n прямыми, за вершины $(n-1)$-вершинника, то соответственным ему $(n-1)$-вершинником является $T_{1,n}T_{2,n}\ldots T_{n-1,n}$.

Все точки конфигурации D_n равноправны, так как конфигурация правильная. Следовательно, при переходе к D_{n-1} можно отбрасывать любые $n+1$ точек. Итак, отбрасывая от конфигурации D_n точки A_n, A'_n и $T_{i,n}$ $(i = 1, \ldots, n-1)$, получим D_{n-1}. При этом отпадут прямые $A_nA'_n$, $A_nT_{i,n}$, $T_{i,n}T_{j,n}$ $(i \neq j;\ i, j = 1, \ldots, n-1)$.

Запишем переход от D_n к D_{n-1} схематически:

$$D_n\colon\ S\begin{cases} A_1A_2\ldots A_n \\ A'_1A'_2\ldots A'_n \end{cases},\quad P_n(S, A_1, \ldots, A_n);$$

$$D_{n-1}\colon\ S\begin{cases} A_1A_2\ldots A_{n-1} \\ A'_1A'_2\ldots A'_{n-1} \end{cases},\quad P_{n-1}, \ldots, (S, A_1, A_{n-1}).$$

Аналогичным образом можно перейти от D_{n-1} к D_{n-2}:

$$D_{n-2}\colon\ S\begin{cases} A_1A_2\ldots A_{n-2} \\ A'_1A'_2\ldots A'_{n-2} \end{cases},\quad P_{n-2}(S, A_1, \ldots, A_{n-2});$$

. . . .

$$D_3\colon\ S\begin{cases} A_1A_2A_3 \\ A'_1A'_2A'_3 \end{cases},\quad P_3(S, A_1, A_2, A_3).$$

§ 3. Переход от конфигурации D_n к конфигурациям большей размерности D_{n+1}; D_{n+2}; ...

При переходе от конфигурации D_n к D_{n+1} нужно прибавить точку A_{n+1}, увеличивая при этом размерность пространства на единицу, точку A'_{n+1}, расположенную на прямой SA_{n+1}, точки $T_{i,n+1} = A_iA_{n+1} \times A'_iA'_{n+1}$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Число точек и число прямых после дополнения первоначальной конфигурации равно:

$$N_0 = \frac{(n+1)(n+2)}{2} + 1 + 1 + n = \frac{(n+2)(n+3)}{2};$$

$$N_1 = \frac{n(n+1)(n+2)}{3!} + 1 + n + n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3!},$$

что соответствует формулам (1), (2) при $k = n + 1$.

Через каждую точку полученного многообразия проходит $n + 1$ прямая, на каждой прямой расположены три точки; подтверждаются и другие свойства многообразия, позволяющие утверждать, что многообразие является конфигурацией D_{n+1} в пространстве P_{n+1}.

Переход от конфигурации D_n к конфигурациям большей размерности тоже можно записать схематически:

$$D_n\colon\ S \begin{cases} A_1 A_2 \ldots A_n \\ A_1' A_2' \ldots A_n' \end{cases},\ P_n(S,\ A_1, \ldots, A_n);$$

$$D_{n+1}\colon\ S \begin{cases} A_1 A_2 \ldots A_{n+1} \\ A_1' A_2' \ldots A_{n+1}' \end{cases},\ P_{n+1}(S,\ A_1, \ldots, A_{n+1});$$

$$D_{n+2}\colon\ S \begin{cases} A_1 A_2 \ldots A_{n+2} \\ A_1' A_2' \ldots A_{n+2} \end{cases},\ P_{n+2}(S, A_1, A_2, \ldots, A_{n+2}).$$

. . . .

§ 4. Последовательность конфигураций Дезарга

Многократно повторяя переход от конфигурации на единицу большей размерности, описанный выше, получим последовательность конфигураций Дезарга. За начальную примем конфигурацию D_3. Каждая вновь полученная конфигурация включает в себя все предыдущие, это следует из способа построения последовательности

$$D_3 \subset D_4 \subset \ldots \subset D_n \subset \ldots$$

Каждая конфигурация D_k на основании свойства числа сочетаний $C_{k+2}^{r+2} = C_{k+2}^{(k+2)-(r+2)}$ обладает свойством симметрии:

$$N_r = N_{k-r-2}.$$

По принципу двойственности в проективном пространстве P_{k-1} точке соответствует $(k-2)$-плоскость, прямой — $(k-3)$-плоскость, ..., r-плоскости — $(k-r-2)$-плоскость. Следовательно, конфигурация D_k в проективном пространстве P_{k-1} сама себе двойственна.

Из свойства симметрии каждой конфигурации вытекает ступенчатое свойство последовательности конфигураций Дезарга:

D_3	$N_0 = N_1$			
D_4	$N_0 = N_2$			
D_5	$N_0 = N_3$	$N_1 = N_2$		
D_6	$N_0 = N_4$	$N_1 = N_3$		
D_7	$N_0 = N_5$	$N_1 = N_4$	$N_2 = N_3$	
D_8	$N_0 = N_6$	$N_1 = N_5$	$N_2 = N_4$	
D_9	$N_0 = N_7$	$N_1 = N_6$	$N_2 = N_5$	$N_3 = N_6$

. . . .

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. В. Ефимов. Высшая геометрия. Физматгиз, М., 1961.
2. Д. Гильберт. Основания геометрии. ОГИЗ, 1948.
3. P. O. Bell. Generalized theorems of Desarques for n — dimensional projektive space. Proc. Amer. Math. Soc., 1955, 6, № 6, 675—681.
4. Tallini Giuseppe. Su una estensione del teorema die Desargues. Boll. Uniore mat. ital., 1956, 11, № 1, 46—48.
5. Karel Sindelar. Algebraický dukaz zobecněne Desarguesovy věty. Sb. Vysoke škoły pedagog. Olomouci. Přirod vědy, 1958, 4, 29—32.
6. Н. М. Бескин. Теорема Дезарга в n-мерном пространстве. Докл. на научн. конф. Яросл. гос. пед. ин-та, № 3, 2 (1964), 14—20.
7. Mondan Sahib Ram. Desargues'theorem in n — space I. Austral. Math. Soc. 1960, 1, № 3, 311—318.
8. Н. В. Наумович. Теорема Дезарга в n-мерном пространстве. «Тр. секции теоретической и инженерной графики», Р.-на-Д (1961), 9—21.
9. М. И. Горбунова. Обобщение теоремы Дезарга. «Изв. АН Азерб. ССР», серия физ-техн. и матем. наук, 5, 1964, 29—32.
10. D. Veronese. Behandlung der projectivischen Verhältnisse der Räume von verschiedenen Dimensionen durch das Princip der Projecirens und Scheidens. Math. Ann., XIX, 1881, 161—234.
11. Н. А. Глаголев. Проективная геометрия. Высшая школа, М., 1963.
12. Н. Ф. Четверухин. Проективная геометрия. Учпедгиз, М., 1961.
13. Б. Н. Гурьянов. Определение пар гомологических треугольников в конфигурации Дезарга. «Уч. зап. Новосиб. гос. пед. ин-та», 10, (1955), 113—116.

Поступила 1 декабря 1966 г.

ДОПОЛНЕНИЕ К СТАТЬЕ «СВЯЗЬ ВНУТРЕННЕГО И ВНЕШНЕГО ДИАМЕТРОВ ОБЩЕЙ ЗАМКНУТОЙ ВЫПУКЛОЙ ПОВЕРХНОСТИ»

Н. П. Макуха (Харьков)

Внутренним диаметром d общей замкнутой выпуклой поверхности F называется точная верхняя грань расстояний по этой поверхности между ее точками.

Внешним диаметром D общей замкнутой выпуклой поверхности F называется точная верхняя грань расстояний в пространстве между точками поверхности F.

В работе [1] доказана следующая теорема:

Теорема 1. *Внутренний и внешний диаметры общей замкнутой выпуклой поверхности связаны неравенством*

$$d \leqslant \frac{\pi D}{2}.$$

Равенство достигается на поверхностях вращения постоянной ширины.

В настоящей заметке этот результат обобщается на случай пространства n-измерений.

Теорема А. *Внутренний и внешний диаметры общей замкнутой выпуклой гиперповерхности n-мерного евклидова пространства связаны неравенством*

$$d \leqslant \frac{\pi D}{2}.$$

Равенство достигается на поверхностях постоянной ширины, имеющих ось вращения.

Доказательство этой теоремы проводится методом индукции по размерности пространства. Для $n = 3$ утверждение имеет место (теорема 1). Пусть утверждение имеет место для пространств, размерность которых меньше либо равна $n-1$. Опираясь на это, докажем теорему А.

Пусть F — $(n-1)$-мерная общая замкнутая выпуклая поверхность в n-мерном евклидовом пространстве. Пусть внутренний диаметр поверхности F реализуется между точками A и B. Рассечем поверхность F произвольной гиперплоскостью α, проходящей через точки A и B. В сечении получим некоторую $(n-2)$-мерную замкнутую выпуклую поверхность F_α, внутренний диаметр d_1 которой удовлетворяет неравенству

$$d_1 \geqslant d, \tag{1}$$

а внешний диаметр D_1 удовлетворяет неравенству

$$D_1 \leqslant D. \tag{2}$$

Для поверхности F_α в силу предположения о справедливости теоремы для пространства $(n-1)$-измерения имеем

$$2d_1 \leqslant \pi D_1. \tag{3}$$

Из неравенств (1—3) следует, что

$$2d \leqslant \pi D.$$

Следовательно, первая часть теоремы доказана.

Теперь докажем, что при $2d = \pi D$ поверхность F будет поверхностью постоянной ширины D. Для этого выберем какое-то направление $\boldsymbol{n}$ на S_{n-1} — $(n-1)$-мерной единичной сфере. Рассечем F гиперплоскостью α, параллельной направлению $\boldsymbol{n}$ и проходящей через точки A и B. Для поверхности F_α, полученной в сечении, справедливы утверждения

$$\pi D = 2d \leqslant 2d_1 \leqslant \pi D_1 \leqslant \pi D,$$

т. е. $d_1 = d$, $D_1 = D$. Тогда, по ранее высказанному предположению, поверхность F_α будет поверхностью постоянной ширины D. Таким образом, ширина F_α в направлении $\boldsymbol{n}$ равна D. Докажем, что ширина поверхности F в направлении $\boldsymbol{n}$ не превосходит D. Проведем пару опорных гиперплоскостей к поверхности F, перпендикулярных направлению $\boldsymbol{n}$. Они должны содержать опорные $(n-2)$-мерные плоскости к поверхности F_α, перпендикулярные направлению $\boldsymbol{n}$, так как в противном случае внешний диаметр поверхности F будет больше D, что противоречит предположению теоремы. Следовательно, ширина поверхности F в направлении $\boldsymbol{n}$ равна D. Ввиду произвольности выбора направления $\boldsymbol{n}$ заключаем, что F — поверхность постоянной ширины D.

Теперь докажем, что F — поверхность вращения с осью вращения AB. Рассмотрим два различных сечения поверхности F 2-мерными плоскостями β_1 и β_2, проходящими через прямую AB. В сечениях получим выпуклые кривые γ_1 и γ_2, соединяющие точки A и B, принадлежащие соответственно плоскостям β_1 и β_2. Покажем, что эти кривые совмещаются, если повернуть плоскость β_1 до совмещения с плоскостью β_2 относительно оси AB. Для этого рассмотрим 3-мерное пространство, образованное плоскостями β_1 и β_2 и прямой AB. В сечении поверхности указанным 3-мерным евклидовым пространством получим замкнутую выпуклую поверхность F_3, которая по предположению является поверхностью вращения с осью вращения AB. Меридианами F_3 являются кривые γ_1 и γ_2. Отсюда следует, что γ_1 и γ_2 совпадут, если повернуть плоскость β_1 до совмещения с плоскостью β_2. Так как в любом сечении 2-мерной плоскостью, проходящей через прямую AB, получаем одинаковые кривые, то поэтому F будет поверхностью вращения с осью вращения AB и меридианом γ_1. Этим теорема доказана.

Заметим, что если на поверхности F будет существовать k пар точек, между которыми реализуется внутренний диаметр $2d = \pi D$ и таких, что соответствующие прямые линейно независимы, то F будет поверхностью вращения относительно k-мерной плоскости. При k равном размерности поверхности F получим, что F — сфера. Эти утверждения можно доказать, опираясь на лемму 1 работы [2] и теорему A.

Справедлива также теорема, аналогичная теореме 2 работы [1].

Теорема В. *Пусть G — замкнутая выпуклая во внутреннем смысле область на выпуклой n-мерной поверхности F и d — внутренний, а D — внешний диаметры области G. Тогда внутренний и внешний диаметры области связаны неравенством*

$$2d \leqslant \pi D.$$

Равенство реализуется, если сферическое изображение области G покрывает n-мерную полусферу S_n.

Доказательство ее ведется тем же путем, что и в работе [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. П. Макуха. Связь внутреннего и внешнего диаметров общей замкнутой выпуклой поверхности. «Укр. геометр. сб.», № 2, Изд-во ХГУ, Харьков, 1966.
2. Н. П. Макуха. Одно изопериметрическое свойство шара. «Укр. геометр. сб.», № 3, Изд-во ХГУ, Харьков, 1966.

Поступила 3 ноября 1966 г.

К ТЕОРЕМЕ ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ ЗАМКНУТЫХ ВЫПУКЛЫХ МНОГОГРАННИКОВ ЧЕТЫРЕХМЕРНОГО ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

А. И. Медяник (Харьков)

Будем говорить, что пара параллельных двумерных граней многогранников P_1 и P_2 удовлетворяет условию непомещаемости, если ни одну из них нельзя параллельным переносом поместить строго внутри другой.

В статье [1] в формулировке теоремы 1 опущено дополнительное условие, а именно: либо каждая трехмерная грань одного многогранника равна соответствующей трехмерной грани другого, либо ни одна трехмерная грань не равна соответствующей. Если это условие не имеет места, то справедлива следующая теорема единственности.

Теорема. *Пусть P_1 и P_2 — замкнутые выпуклые многогранники четырехмерного евклидова пространства с попарно параллельными гранями. Пусть все пары соответствующих двумерных граней, за исключением самое большее пяти пар, удовлетворяют условию непомещаемости. Тогда многогранники P_1 и P_2 равны и параллельно расположены.*

Доказательство этой теоремы основано на лемме.

Лемма. *Число перемен знака N замкнутого выпуклого многогранника четырехмерного евклидова пространства при обходе вокруг всех двумерных граней удовлетворяет неравенству*

$$N \leqslant 4(\overline{V}_2 - \overline{V}_3),$$

где $\overline{V}_2$ — число двумерных, а $\overline{V}_3$ — число трехмерных граней, инцидентных с отмеченными ребрами.

Доказательство. Обозначим N_i число перемен знака при обходе вокруг всех вершин i-й грани. В монографии А. Д. Александрова [2] при доказательстве известной леммы Коши установлено, что

$$N_i \leqslant 4(\overline{V}_0^i - 2), \tag{1}$$

где $\overline{V}_0^i$ — число вершин граней, инцидентных с отмеченными ребрами. По принципу двойственности имеем

$$\overline{N}_i \leqslant 4(\overline{V}_2^i - 2), \tag{2}$$

где $\overline{N}_i$ — число перемен знака при обходе вокруг всех многоугольников, а $\overline{V}_2^i$ — число двумерных граней, инцидентных с отмеченными ребрами.

Просуммировав неравенства (2) по всем трехмерным граням, инцидентным с отмеченными ребрами, получим

$$N \leqslant 4(\overline{V}_2 - \overline{V}_3),$$

что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы. Пусть многогранники не равны. Отметим ребро многогранника P_1 знаком плюс, если оно длиннее соответствующего ребра P_2, и знаком минус — в противном случае (равные ребра не отмечаем совсем).

По лемме число перемен знака N удовлетворяет неравенству

$$N \leqslant 4(\bar{V}_2 - \bar{V}_3). \tag{3}$$

Так как многогранники не равны, то есть отмеченные ребра. Докажем, что $\bar{V}_3 > 5$.

Каждая трехмерная грань, инцидентная с отмеченными ребрами, должна иметь не менее трех двумерных граней, также инцидентных с отмеченными ребрами. Поэтому

$$\bar{V}_3 \geqslant 4. \tag{4}$$

Поскольку каждая двумерная грань является общей для двух трехмерных, то из неравенства (4) получаем

$$\bar{V}_2 \geqslant 6. \tag{5}$$

Из неравенства (5) и условия теоремы следует, что

$$\bar{q} \geqslant 1, \tag{6}$$

где $\bar{q}$ — число пар неравных двумерных граней, удовлетворяющих условию непомещаемости.

Из неравенства (6) и леммы А. Д. Александрова [2] вытекает, что должна существовать двумерная грань, при обходе вокруг которой получается не менее четырех перемен знака, т. е. существует двумерная грань, инцидентная хотя бы с четырьмя отмеченными ребрами. Но тогда с отмеченными ребрами инцидентны по меньшей мере шесть трехмерных граней, т. е.

$$\bar{V}_3 > 5. \tag{7}$$

Из неравенств (3) и (7) имеем

$$N < 4(\bar{V}_2 - 5). \tag{8}$$

По лемме А. Д. Александрова [2]

$$N \geqslant 4\bar{q}. \tag{9}$$

Но так как $\bar{q} \geqslant \bar{V}_2 - 5$, то неравенства (8) и (9) несовместны.

Итак, многогранники P_1 и P_2 равны и параллельно расположены. Полученный результат не может быть улучшен. Действительно, рассмотрим в четырехмерном пространстве три параллельные двумерные плоскости, не лежащие в одной гиперплоскости и расположенные друг от друга на расстоянии a. Построим в одной из плоскостей равносторонний треугольник со стороной $b (\neq a)$ и ортогонально спроектируем его на две другие плоскости. Натянем на полученные девять вершин треугольников выпуклую оболочку. Для построенного многогранника нетрудно найти, что $V_3 = 6$, $V_2 = 15$. Все трехмерные грани построенного многогранника являются призмами, в основаниях которых лежат равносторонние треугольники со стороной a или b; среди двумерных граней три равносторонних треугольника со стороной a, три — со стороной b и девять прямоугольников со сторонами a и b.

Поменяв ролями a и b, строим аналогично другой многогранник.

У построенных многогранников $v_2 - 6$ пар двумерных граней (прямоугольных) удовлетворяют условию непомещаемости, но многогранники не равны с точностью до параллельного переноса.

Заметим, что в построенном примере все пары соответствующих трехмерных граней также удовлетворяют условию непомещаемости.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Медяник. Некоторые теоремы единственности для замкнутых выпуклых поверхностей четырехмерного евклидова пространства. Зап. мех.-матем. ф-та ХГУ и ХМО, т. 31, 75—81, 1965.

2. А. Д. Александров. Выпуклые многогранники, гл. II, VI, Гостехиздат, М.—Л., 1950.

Поступила 14 ноября 1966 г.

МЕТРИЧЕСКОЕ СТРОЕНИЕ ОДНОГО КЛАССА ПРОСТРАНСТВ, СОДЕРЖАЩИХ ПРЯМЫЕ ЛИНИИ

А. Д. Милка (Харьков)

§ 1. Некоторые определения и факты

Метрическое пространство R конечно-компактно, если любое его ограниченное подмножество компактно в R. Конечно-компактное пространство имеет внутреннюю метрику, если каждая пара его точек соединяется кривой, длина которой равна расстоянию между ее концами. Эта кривая называется кратчайшей. Прямая линия (луч) в пространстве R определяется как изотермический образ в R евклидовой прямой (луча). Таким образом, любая дуга прямой (луча) есть кратчайшая. Линия, локально кратчайшая в R, называется геодезической. Треугольником в метрическом пространстве называют фигуру, состоящую из трех различных точек, вершин, и трех попарно их соединяющих кратчайших, сторон треугольника. Треугольник в пространстве R и треугольник со сторонами той же длины в евклидовой двумерной плоскости будем называть соответствующими. Очевидным образом определяется и соответствие элементов этих треугольников. Для соответствующих элементов мы употребляем сходственные обозначения. Кратчайшая с концами X и Y обозначается символом XY. Тот же символ употребляется нами и для обозначения длины кратчайшей или расстояния между точками. Треугольник с вершинами X, Y, Z и соответствующей ему плоский треугольник обозначаются символами XYZ и $X'Y'Z'$. Метрика пространства R удовлетворяет условию выпуклости, когда для любой точки O и любой пары кратчайших OA, OB в R имеет место следующий факт. Если OXY — треугольник в пространстве R, где $X \in OA$, $Y \in OB$, то в соответствующем плоском треугольнике $O'X'Y'$ угол при вершине O' есть невозрастающая функция расстояний точек X, Y от точки O. Предел этого угла при стремлении X, Y к точке O называют углом между кратчайшими OA, OB. 1-выпуклость определяется аналогично, только для сравнения берется не евклидов треугольник, а треугольник, построенный на единичной сфере евклидова пространства (см. [1]).

Всюду в дальнейшем R обозначает конечно-компактное пространство с внутренней метрикой, удовлетворяющей условию выпуклости. Легко видеть, что в пространстве R между любыми двумя кратчайшими, исходящими из общей точки, существует определенный угол и выполняется условие неналегания кратчайших. Следующие два предложения о пространстве R понадобятся нам в § 3. Оба они легко выводятся из условия выпуклости (см. [2]).

П р е д л о ж е н и е 1. Углы произвольного треугольника в R не меньше соответствующих углов плоского треугольника со сторонами той же длины.

Предложение 2. Если из внутренней точки кратчайшей в R исходит другая кратчайшая, то сумма углов, образованных ею с ветвями первой кратчайшей, равна π.

В конце параграфа введем понятие параллельности прямых в R.

Прямые p, q пространства R назовем параллельными ($p \| q'$), если выполняется следующее условие. Существует пара параллельных прямых p', q' в двумерной плоскости, изометричных p и q ($p \to p'$, $q \to q'$), такая, что для любых точек $X \in p$, $Y \in q$ и их образов $X' \in p'$, $Y' \in q'$ выполняется равенство $XY = X'Y'$.

Из предложений 1, 2 вытекает, что в условиях данного определения углы между любой из кратчайших XY и прямыми p, q равны соответствующим углам в двумерной плоскости.

§ 2. Основные результаты

Теорема 1. *Пусть R — конечно компактное пространство с внутренней метрикой, удовлетворяющей условию выпуклости. Тогда, если в R существует прямая линия, то это пространство изометрично прямому метрическому произведению вещественной прямой на пространство R^* того же типа, что и R.*

Теорема 2. *Пусть R — конечно-компактное пространство с внутренней метрикой, удовлетворяющей условию 1-выпуклости. И пусть в R существует кратчайшая длины π. Обозначим A, B концы этой кратчайшей. Тогда через каждую точку пространства R проходит кратчайшая с концами A и B. Любая пара из этих кратчайших образует в пространстве R фигуру, изометричную некоторому двуугольнику на единичной сфере трехмерного евклидова пространства.*

Для римановых метрик эти теоремы иным путем были получены В. А. Топоноговым (см. [3, 4, 5]). В случае теоремы 1 он показал [1], что R^* также риманово пространство. В связи с этим возник вопрос, остающийся пока открытым. Если пространство R не риманово, то какие из его свойств распространяются на R^*. Будет ли, например, R^* многообразием, если таковым является R. (По-видимому, ответ утвердительный). Что же касается второй теоремы, то здесь получен более сильный результат. В. А. Топоногов доказал, что если R риманово, то оно изометрично сфере евклидова пространства. Для такой изометрии в общем случае нужны дополнительные требования. Например, если пространство R n-мерно, то достаточно предположить, что в R существует n в определенном смысле независимых кратчайших длины π. Последнее условие можно заменить требованием локального характера: для каждой точки пространства R и для любой кратчайшей в R, исходящей из этой точки, существует кратчайшая с началом в той же точке, образующая с первой угол π.

Приведем еще следствия теоремы 2. Пусть R — конечно-компактное пространство с внутренней метрикой, удовлетворяющей условию 1-выпуклости. Тогда диаметр пространства R не превосходит π. Следовательно, R компактно. Периметр любого треугольника в R не превосходит 2π. Если в пространстве R существует треугольник с периметром 2π и он не сводится к двуугольнику, то треугольник есть замкнутая геодезическая. Любая дуга длины π этой геодезической есть кратчайшая.

[1] Теорема, доказанная В. А. Топоноговым, обобщает известные результаты С. Э. Кон-Фоссена.

Заметим, что теорему 2 можно, как и первую теорему, сформулировать в терминах прямых произведений пространств. В принципиальной своей части доказательство этой теоремы сходно с доказательством теоремы 1 (см. лемму 1), а в остальном проводится даже проще. Поэтому в работе приведено доказательство только первой теоремы.

§ 3. Вспомогательные результаты

Лемма 1. *Пусть p — прямая линия в пространстве R, O — точка вне этой прямой, OXY — треугольник, вершины которого X и Y принадлежат p. И пусть $O'X'Y'$ — соответствующий плоский треугольник. Тогда углы при вершинах X' и Y' этого треугольника равны соответствующим углам в треугольнике OXY.*

Доказательство. Допустим, что для угла при вершине X утверждение леммы неверно. Тогда этот угол согласно предложению 1 больше соответствующего угла в плоском треугольнике. Пусть $Z_1, Z_2 \in p$ — точки, равноудаленные от точки X, OZ_1 и OZ_2 — кратчайшие. Построим плоские треугольники $O'X'Z_1'$, $O'X'Z_2'$ с общей разделяющей их стороной, соответствующие треугольникам OXZ_1, OXZ_2. Четырехугольник $O'Z_1'X'Z_2'$ выпуклый. Это вытекает из предложений 1, 2 и того факта, что отрезок Z_1Z_2 прямой p есть кратчайшая. Если $Z_1X > XY$, то из нашего предположения и условия выпуклости следует, что угол при вершине X' четырехугольника $O'Z_1'X'Z_2'$ не превосходит некоторого числа α, меньшего π, независящего от выбора точек Z. В таком случае $OX \geqslant Z_1X \cos \alpha/2$. Но это неравенство невозможно, если Z_1X достаточно велико. Значит, предположение наше неверно.

Лемма доказана.

Лемма 2. *Если в пространстве R существует прямая линия, то через каждую точку пространства проходит и притом единственная прямая ей параллельная. Свойство параллельности прямых транзитивно: если $p \| s$, $s \| q$, то $p \| q$.*

Доказательство. Пусть p — прямая линия с естественной параметризацией в пространстве R, O — точка вне этой прямой, $\{X_n\}_{n=\dots,-1,0,1,\dots}$ — монотонная последовательность точек на p, не принадлежащих в целом одному лучу, $\{OX_n\}$ — последовательность кратчайших. Будем считать, что при $n \to \infty$ и $n \to -\infty$ кратчайшие OX_n сходятся к некоторым лучам q^+ и q^-. (Так как R конечно-компактно, то в $\{X_n\}$ всегда существует подпоследовательность с указанным свойством). Сопоставим прямой p изометричную ей прямую p' в двумерной плоскости, точке O — точку O' такую, чтобы для любой точки $X \in p$ выполнялось равенство $OX = O'X'$, где $X' \in p'$ — образ X по изометрии. На основании леммы 1 и предложения 2 такое отображение $p \to p'$, $O \to O'$ всегда возможно. Отнесем далее лучам q^+ и q^- лучи q'^+ и q'^-, соответствующие пределы отрезков $O'X_n'$. Сумма $q' = q'^+ + q'^-$ есть, очевидно, прямая, параллельная p'. Наконец, каждую из кратчайших OX и лучи q^+ и q^- отобразим изометрически на соответствующие им объекты в двумерной плоскости, причем $O \to O'$. Пусть OX^+X^- — треугольник, в котором X^+, $X^- \in p$. Из условия выпуклости и леммы 1 легко заключить, что для любой тройки точек $X \in X^+X^-$, $Z^+ \in OX^+$, $Z^- \in OX^-$ имеют место соотношения

$$XZ^+ = X'Z'^+, \ XZ^- = X'Z'^-, \ Z^+Z^- \geqslant Z'^+Z'^-,$$

где Z'^+, Z'^- — образы точек Z^+, Z^- по изометрии. Пусть последовательность из кратчайших OX, $X \in p$ сходится к одному из лучей q^+ или

q^-. И пусть последовательность точек $Z \in OX$ сходится к точке Y. Из последнего неравенства вытекает, что точки Z' образуют фундаментальную последовательность и, значит, сходятся. Очевидно, их пределом будет точка $Y' \in q'$, образ Y по изометрии. Теперь легко показать, что для любой тройки точек $X \in p$, $Y^+ \in q^+$, $Y^- \in q^-$ имеют место равенства

$$XY^+ = X'Y'^+,\ XY^- = X'Y'^-,\ Y^+Y^- = Y^+O + OY^-.$$

Докажем, к примеру, последнее из них. Так как q^+ и q^- лучи, то это равенство означает, что сумма $q = q^+ + q^-$ есть прямая линия в пространстве R. Тогда первые два из приведенных равенств выражают тот факт, что прямые p и q параллельны.

Пусть кратчайшие OX^+ и OX^- сходятся к лучам q^+ и q^-, точки $Z^+ \in OX^+$, $Z^- \in OX^-$ сходятся к точкам Y^+, Y^- (здесь X^+, $X^- \in p$). Тогда

$$Y^+O + OY^- \geqslant Y^+Y^- = \lim Z^+Z^- \geqslant \lim Z'^+Z'^- = Y'^+Y'^- = Y^+O + OY^-,$$

где X', Y', Z' — образы точек X, Y, Z по изометрии. Следовательно,

$$Y^+O + OY^- = Y^+Y^-.$$

Докажем теперь свойство транзитивности. Одновременно будет установлена единственность, о которой говорится в лемме.

Пусть r — прямая, параллельная q, проходящая через некоторую точку прямой p. В существовании такой прямой мы убедились выше. Пусть p', s', q', r' — параллельные прямые в двумерной плоскости, соответствующие прямым p, s, q, r согласно определению параллельности в R. Будем считать, что s' разделяет p' с q', а q' разделяет s' и r'. Выберем пару точек $X \in p$, $Y \in r$. Им соответствуют по изометрии точки $X' \in p'$, $Y' \in r'$. Очевидно, $XY \leqslant X'Y'$. Если теперь $X_1' \in p'$, $Y_1' \in r'$ — пара точек таких, что отрезки $X_1'Y_1'$, $X'Y'$ параллельны, то для соответствующих точек $X_1 \in p$, $Y_1 \in r$ по-прежнему $X_1Y_1 \leqslant X_1'Y_1'$. Допустим теперь, что $r \not\equiv p$. Из леммы 1 тогда следует, что расстояние X_1Y_1 сколь угодно большое, если точки X_1, Y_1 достаточно удалены от точек X и Y. Но это противоречит неравенству $X_1Y_1 \leqslant X'Y'$. Значит $r \equiv p$ и $p \parallel q$.

Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть p, s, q — параллельные прямые в пространстве R, $X \in p$, $Z \in s$, $Y \in q$ — точки на этих прямых. И пусть кратчайшие ZX и ZY перпендикулярны s. Тогда каждая из кратчайших XY перпендикулярна прямым p, q.*

Доказательство. Заметим, что кратчайшая XY может не быть единственной. Мы выбираем любую из этих кратчайших.

Выберем точку $W \in s$, достаточно удаленную от точки Z, и проведем кратчайшие WX, WY. Очевидно $WX = WY$. Пусть p^+, p^- — лучи прямой p, определяемые точкой X, α и β — углы между лучами p^+, p^- и кратчайшей XY. Так как $s \parallel p$ и расстояние WZ достаточно велико, то можно считать, что угол между лучом p^+ и кратчайшей WX близок нулю. В таком случае угол при вершине X треугольника WXY эквивалентен α. Учитывая теперь предложение 1, заключаем, что $\alpha \geqslant \pi/2$. Аналогично устанавливается неравенство $\beta \geqslant \pi/2$. Из предложения 2 тогда следует, что $\alpha = \beta = \pi/2$, т. е. что кратчайшая XY перпендикулярна прямой p. Таким же образом получаем, что XY перпендикулярна q.

Лемма доказана.

§ 4. Доказательство теоремы 1

Эта теорема — простое следствие лемм 2, 3. В доказательстве, приведенном ниже, ссылки на эти леммы особо не выделяются. Какая из лемм применяется в том или ином случае будет достаточно очевидно.

Допустим, что пространство R содержит прямую линию s. Тогда между точками в R определяются два отношения эквивалентности, которые мы обозначим L и M: XLY, если точки $X, Y \in R$ принадлежат одной прямой линии, параллельной s; XMY, если точки X, $Y \in R$ совпадают, либо кратчайшая XY перпендикулярна прямым, проходящим через ее концы параллельно s.

Классами L-эквивалентности являются прямые линии, параллельные s. Классами M-эквивалентности служат множества в R, которые было бы удобно назвать вполне геодезическими подпространствами: если XMY, то все точки кратчайшей XY принадлежат одному классу.

Пусть μ — M-класс. В классе μ можно ввести метрику, полагая расстояние между парой точек X, $Y \in \mu$ равным XY. Эта метрика является внутренней и удовлетворяет условию выпуклости, так как кратчайшая в подпространстве есть одновременно и кратчайшая в R. Классы M-эквивалентности есть конечно-компактные пространства, изометричные между собой. Их изометрия осуществляется проектированием в R вдоль прямых, параллельных s. Заметим, что проектирование в R вдоль M-классов устанавливает между этими прямыми также изометрическое соответствие.

Введем фактор-пространства $M^* = R/L$, $L^* = R/M$, их прямое произведение $\bar{R} = M^* \times L^*$ и определим метрику в этих пространствах.

Обозначая pq расстояние между элементами p, q пространства M^*, полагаем $pq = XY$, где $X \in p$, $Y \in q$ — точки на прямых p, q такие, что кратчайшая XY перпендикулярна к ним. Для $p \equiv q$ полагаем $pq = 0$. Тем самым между пространством M^* и любым из M-классов устанавливается изометрическое соответствие. Поэтому метрика pq внутренняя и удовлетворяет условию выпуклости, а пространство M^* в этой метрике конечно-компактно.

Обозначая $\mu\nu$ расстояние между элементами μ, ν пространства L^*, полагаем $\mu\nu = XY$, где $X \in \mu$, $Y \in \nu$ — точки, принадлежащие одной прямой, параллельной s. Для $\mu \equiv \nu$ полагаем $\mu\nu = 0$. Тем самым между пространством L^* и любым из L-классов, прямых линий в R, устанавливается изометрическое соответствие. Поэтому L^* изометрично прямой линии.

Метрику в $\bar{R}$ определим как прямое произведение метрик в M^* и L^*. Если $\bar{X} = (p, \mu)$, $\bar{Y} = (q, \nu)$ — точки пространства $\bar{R}$, то расстояние $\overline{XY}$ между ними определим равенством

$$\overline{XY}^2 = pq^2 + \mu\nu^2.$$

Каждая точка $X \in R$ определяет два множества в R — классы M- и L-эквивалентности, т. е. точку пространства $\bar{R}$. Обратно, каждая точка $\bar{X} \in \bar{R}$ определяет точку в R как пересечение соответствующих классов. Тем самым устанавливается соответствие между пространствами R и $\bar{R}$, которое будет, очевидно, изометрией. Пространство $\bar{R}$ и есть то пространство, о котором говорится в теореме 1.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Д. Александров. Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей. Гостехиздат, М.—Л., 1948.
2. А. Д. Милка. О внутренней метрике выпуклых гиперповерхностей. «Укр. геометр. сб.», вып. 2. Изд-во ХГУ, Харьков, 1966.
3. В. А. Топоногов. Метрическое строение римановых пространств неотрицательной кривизны, содержащих прямые линии. «Сиб. матем. ж.», т. V, № 6 (1964), 1358—1369.
4. В. А. Топоногов. Одна теорема о римановых пространствах, содержащих прямые линии. Международный конгресс математиков. Тезисы докладов. Изд-во МГУ, М., 1966.
5. В. А. Топоногов. Римановы пространства кривизны, ограниченной снизу. «Усп. матем. наук», т. XIV, вып. 1 (85) (1959), 87—130.

Поступила 31 октября 1966 г.

К ЭКВИЦЕНТРОАФФИННОЙ ТЕОРИИ НЕПЛОСКИХ КРИВЫХ В E_3

А. П. Мокляк (Умань)

В эквицентроаффинном пространстве неплоскую кривую, соприкасающиеся плоскости которой не проходят через центр пространства, можно представить себе и как векторный, и как дублетный образ. Основные эквицентроаффинные инварианты неплоской кривой, рассматриваемой как векторный образ, изучались в работах [1], [2].

Пусть векторная функция

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) \tag{1}$$

и дублетная

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) \tag{2}$$

задают одну и ту же кривую, причем каждому значению параметра соответствует заданная уравнением (2) соприкасающаяся плоскость к кривой в точке, заданной уравнением (1). Кроме того, пусть обе функции (1) и (2) достаточное число раз дифференцируемы и параметр t выбран так, что для каждого его значения имеют место тождества

$$\boldsymbol{r}\boldsymbol{r} = 1, \quad \boldsymbol{r}\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_{11}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}\boldsymbol{r}_{11} = 0, \tag{3}$$

(индекс 1 справа внизу обозначает дифференцирование по параметру t). Тогда 1) с каждой точкой кривой ассоциируется два векторных и два дублетных репера: векторный $\underset{1}{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{r}$, $\underset{2}{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{r}_1$, $\underset{3}{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{r}_{11}$ и взаимный ему дублетный $\overset{1}{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{r}$, $\overset{2}{\boldsymbol{a}}$, $\overset{3}{\boldsymbol{a}}$; дублетный $\overset{1}{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{r}$, $\overset{2}{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{r}_1$, $\overset{3}{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{r}_{11}$ и взаимный ему векторный $\underset{1}{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{r}$, $\underset{2}{\boldsymbol{b}}$, $\underset{3}{\boldsymbol{b}}$; пары взаимных реперов определяются тождественными соотношениями

$$\underset{i}{\boldsymbol{a}}\overset{j}{\boldsymbol{a}} = \underset{i}{\boldsymbol{b}}\overset{j}{\boldsymbol{b}} = \delta_i^j \; (i,\ j = 1,\ 2,\ 3), \tag{4}$$

где δ_i^j — символ Кронекера, и 2) на кривой двояким образом вводятся: а) эквицентроаффинный натуральный параметр

$$\underset{1}{s} = \int_{t_0}^{t} |\underset{1}{g}|^{\frac{1}{3}}\, dt, \quad \underset{2}{s} = \int_{t_0}^{t} |\underset{2}{g}|^{\frac{1}{3}}\, dt, \tag{5}$$

так что

$$(\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}'\boldsymbol{r}'') = 1, \quad (\boldsymbol{r}\dot{\boldsymbol{r}}\ddot{\boldsymbol{r}}) = 1, \tag{6}$$

(штрихом и точкой обозначено дифференцирование соответственно по $\underset{1}{s}$ и $\underset{2}{s}$);

б) эквицентроаффинная кривизна

$$\underset{1}{k} = \frac{\underset{1}{\alpha}}{\underset{1}{g}^{\frac{2}{3}}}, \quad \underset{2}{k} = \frac{\underset{2}{\alpha}}{\underset{2}{g}^{\frac{2}{3}}}; \tag{7}$$

в) эквицентроаффинное кручение

$$\underset{1}{\varkappa} = \frac{\underset{1}{\beta}}{\underset{1}{g}}, \quad \underset{2}{\varkappa} = \frac{\underset{2}{\beta}}{\underset{2}{g}}, \tag{8}$$

где

$$\underset{1}{g} = (\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_{11}), \quad \underset{2}{g} = (\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_{11}), \tag{9}$$

$\underset{1}{\alpha}$, $\underset{2}{\alpha}$, $\underset{1}{\beta}$, $\underset{2}{\beta}$, — выражения составленные из ковариантных производных одномерных тензоров нулевой валентности $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{r}$ [3].

Естественно, между двойственными инвариантами (5), (7) и (8) должна существовать связь. Нахождение ее и является целью настоящей работы.

1) Запишем разложения

$$\boldsymbol{r}_{111} = \underset{1}{p}\boldsymbol{r} + \underset{2}{p}\boldsymbol{r}_1 + \underset{3}{p}\boldsymbol{r}_{11}, \tag{10}$$

$$\boldsymbol{r}_{111} = \underset{1}{\pi}\boldsymbol{r} + \underset{2}{\pi}\boldsymbol{r}_1 + \underset{3}{\pi}\boldsymbol{r}_{11}. \tag{11}$$

Умножая скалярно правую и левую часть (10) на дублеты $[\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_{11}]$, $[\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}_{11}]$, $[\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}_1]$ и учитывая (9), получим выражения для коэффициентов $\underset{i}{p}$:

$$\underset{1}{p} = \frac{(\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_{11}\boldsymbol{r}_{111})}{\underset{1}{g}}; \quad \underset{2}{p} = -\frac{(\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}_{11}\boldsymbol{r}_{111})}{\underset{1}{g}}, \quad \underset{3}{p} = \frac{(\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_{111})}{\underset{1}{g}}. \tag{12}$$

Умножая скалярно правую и левую часть (11) на векторы $[\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_{11}]$, $[\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}_{11}]$, $[\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}_1]$, получим аналогичные выражения для $\underset{i}{\pi}$:

$$\underset{1}{\pi} = \frac{(\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_{11}\boldsymbol{r}_{111})}{\underset{2}{g}}; \quad \underset{2}{\pi} = -\frac{(\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}_{11}\boldsymbol{r}_{111})}{\underset{2}{g}}; \quad \underset{3}{\pi} = \frac{(\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_{111})}{\underset{2}{g}}. \tag{13}$$

Коэффициенты $\underset{i}{p}$ и $\underset{i}{\pi}$ — центроаффинные инварианты, и между ними имеют место соотношения [4], [5]:

$$\begin{gathered} \underset{1}{p} + \underset{1}{\pi} = 0, \\ \underset{3}{p} + \underset{3}{\pi} = 2\frac{1}{\underset{1}{p}}\frac{d}{dt}(\underset{1}{p}) = 2\frac{1}{\underset{1}{\pi}}\frac{d}{dt}(\underset{1}{\pi}), \\ \underset{2}{p} + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\underset{1}{p}}\frac{d}{dt}(\underset{1}{p}) - \underset{3}{p}\right) = \underset{2}{\pi} + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\underset{1}{\pi}}\frac{d}{dt}(\underset{1}{\pi}) - \underset{3}{\pi}\right). \end{gathered} \tag{14}$$

Кривизны (7) и кручения (8) можно выразить через коэффициенты $\underset{k}{p}$ и $\underset{t}{\pi}$. В самом деле,

$$\nabla_1 \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1, \tag{15}$$
$$\nabla_1\nabla_1 \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_{11} - \underset{1}{\Gamma}\boldsymbol{r}_1,$$
$$\nabla_1\nabla_1\nabla_1 \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_{111} - 3\underset{1}{\Gamma}\boldsymbol{r}_{11} + 2\underset{1}{\Gamma}{}^2\boldsymbol{r}_1 - \frac{d}{dt}(\underset{1}{\Gamma}).$$

Ковариантное дифференцирование ведется с помощью христофелева объекта [3]

$$\underset{1}{\Gamma} = \frac{1}{3}\,\frac{(\boldsymbol{r}\,\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_{111})}{\underset{1}{g}} = \frac{1}{3}\underset{3}{p} \tag{16}$$

Учитывая (15), (16) и (9) найдем

$$\underset{1}{\alpha} = \frac{(\boldsymbol{r},\, \nabla_1\nabla_1\boldsymbol{r},\, \nabla_1\nabla_1\nabla_1\boldsymbol{r})}{(\boldsymbol{r},\, \nabla_1\boldsymbol{r},\, \nabla_1\nabla_1\boldsymbol{r})} = -\frac{1}{9}\left\{9\underset{2}{p} + 2\underset{3}{p}{}^2 - 3\frac{d}{dt}(\underset{3}{p})\right\}, \tag{17}$$

$$\underset{1}{\beta} = -\frac{(\nabla_1\boldsymbol{r},\, \nabla_1\nabla_1\boldsymbol{r},\, \nabla_1\nabla_1\nabla_1\boldsymbol{r})}{(\boldsymbol{r},\, \nabla_1\boldsymbol{r},\, \nabla_1\nabla_1\boldsymbol{r})} = -\underset{1}{p}. \tag{18}$$

Аналогично получим

$$\underset{2}{\alpha} = -\frac{1}{9}\left\{9\underset{2}{\pi} + 2\underset{3}{\pi}{}^2 - 3\frac{d}{dt}(\underset{3}{\pi})\right\}, \tag{19}$$

$$\underset{2}{\beta} = -\underset{1}{\pi}. \tag{20}$$

Подставив (17) — (20) соответственно в формулы (7) и (8), будем иметь

$$\underset{1}{k} = -\frac{1}{9}\underset{1}{g}{}^{-\frac{2}{3}}\left\{9\underset{2}{p} + 2\underset{3}{p}{}^2 - 3\frac{d}{dt}(\underset{3}{p})\right\}, \tag{21}$$

$$\underset{2}{k} = -\frac{1}{9}\underset{2}{g}{}^{-\frac{2}{3}}\left\{9\underset{2}{\pi} + 2\underset{3}{\pi}{}^2 - 3\frac{d}{dt}(\underset{3}{\pi})\right\}, \tag{22}$$

$$\underset{1}{\varkappa} = -\frac{\underset{1}{p}}{\underset{1}{g}}, \tag{23}$$

$$\underset{2}{\varkappa} = -\frac{\underset{1}{\pi}}{\underset{2}{g}}. \tag{24}$$

2. Принимая во внимание (3), а также заметив, что из (3) вытекает цепочка равенств

$$\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}_{111} = -\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_{11} = \boldsymbol{r}_{11}\boldsymbol{r}_1 = -\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}_{111} = -\underset{1}{p}, \tag{25}$$

найдем произведение основных тензоров (9)

$$\underset{1}{g}\underset{2}{g} = (\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_{11})(\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_{11}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{r}\boldsymbol{r} & \boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r} & \boldsymbol{r}\boldsymbol{r}_{11} \\ \boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r} & \boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_1 & \boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_{11} \\ \boldsymbol{r}_{11}\boldsymbol{r} & \boldsymbol{r}_{11}\boldsymbol{r}_1 & \boldsymbol{r}_{11}\boldsymbol{r}_{11} \end{vmatrix} = \underset{1}{p}{}^2. \tag{26}$$

Теперь из (23) и (24), учитывая (14) и (26), получаем

$$\underset{1}{\varkappa}\underset{2}{\varkappa} = -1, \tag{27}$$

а также

$$\underset{1}{\varkappa}\underset{1}{g} = -\underset{2}{\varkappa}\underset{2}{g};\quad \underset{1}{\varkappa}^2 = \underset{2}{g} : \underset{1}{g};\quad \underset{2}{\varkappa}^2 = \underset{1}{g} : \underset{2}{g}. \tag{28}$$

Следовательно, эквицентроаффинные кручения несущественно отличаются друг от друга.

Далее (см. (5) и (28))

$$d\underset{1}{s} = |\underset{1}{g}|^{\frac{1}{3}}\, dt = |\underset{2}{\varkappa}^2\underset{2}{g}|^{\frac{1}{3}}\, dt = \underset{2}{\varkappa}^{\frac{2}{3}}\, d\underset{2}{s}. \tag{29}$$

Аналогично доказывается двойственная к (29) зависимость:

$$d\underset{2}{s} = \underset{1}{\varkappa}^{\frac{2}{3}}\, d\underset{1}{s}. \tag{30}$$

Из (14) находим

$$\underset{2}{\pi} = \underset{2}{p} - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\underset{3}{p} - \underset{3}{\pi}). \tag{31}$$

В силу (31) и очевидного тождества

$$\underset{3}{\pi}^2 = \underset{3}{p}^2 - (\underset{3}{p}^2 - \underset{3}{\pi}^2)$$

равенство (22) можно переписать так:

$$\underset{2}{k} = -\frac{1}{9}\underset{2}{g}^{-\frac{2}{3}}\left\{9\underset{2}{p} + 2\underset{3}{p}^2 - 3\frac{d}{dt}(\underset{3}{p}) - 2(\underset{3}{p}^2 - \underset{3}{\pi}^2) - \frac{3}{2}\frac{d}{dt}(\underset{3}{p} - \underset{3}{\pi})\right\},$$

или, учитывая (21), (28_3) и (27),

$$\underset{2}{k} = \underset{1}{\varkappa}^{-\frac{4}{3}}\underset{1}{k} + \frac{1}{18}\underset{2}{g}^{-\frac{2}{3}}\left\{4(\underset{3}{p}^2 - \underset{3}{\pi}^2) + 3\frac{d}{dt}(\underset{3}{p} - \underset{3}{\pi})\right\}. \tag{32}$$

Если отнести кривую к эквицентроаффинному параметру $\underset{1}{s}$ (5), то мы будем иметь в силу (6) из (12), (23), (21), (14_2) и (28_2):

$$\underset{3}{p} = 0;\quad \underset{1}{\varkappa} = -\underset{1}{p}(\underset{1}{s});\quad \underset{1}{k} = -\underset{2}{p}(\underset{1}{s});\quad \underset{3}{\pi} = 2\frac{\underset{1}{\varkappa}'}{\underset{1}{\varkappa}};\quad \underset{2}{g} = \underset{1}{\varkappa}^2. \tag{33}$$

Подставляя (33) в (32), получаем

$$\underset{2}{k} = \underset{1}{\varkappa}^{-\frac{4}{3}}(\underset{1}{s})\,\underset{1}{k}(\underset{1}{s}) - \frac{1}{9}\underset{1}{\varkappa}^{-\frac{4}{3}}(\underset{1}{s})\left\{8\left(\frac{\underset{1}{\varkappa}'(\underset{1}{s})}{\underset{1}{\varkappa}(\underset{1}{s})}\right)^2 + 3\left(\frac{\underset{1}{\varkappa}'(\underset{1}{s})}{\underset{1}{\varkappa}(\underset{1}{s})}\right)'\right\}. \tag{34}$$

Таким образом, если известны кривизны $\underset{1}{k}(\underset{1}{s})$ и кручение $\underset{1}{\varkappa}(\underset{1}{s})$ первого рода как непрерывные дифференцируемые функции натурального параметра $\underset{1}{s}$ (5), то кривизна второго рода $\underset{2}{k}$ всегда определяется. Из (32) можно получить аналогичное (34) выражение для кривизны первого рода $\underset{1}{k}$, если кривую отнести к натуральному параметру $\underset{2}{s}$.

3. Кривизна $\underset{1}{k} = -\underset{2}{p}(\underset{1}{s})$ и кручение $\underset{1}{\varkappa} = -\underset{1}{p}(\underset{1}{s})$, заданные как непрерывные функции s, определяют кривую с точностью до эквицентроаффинных точечных[1] преобразований пространства

$$\overset{*}{x}{}^i = A^i_\alpha x^\alpha,\ |A^i_j| = 1\ (i, j, \alpha = 1, 2, 3). \tag{35}$$

Это можно доказать, если ввести, например, эквицентроаффинный аналог формул типа Френе [2], [3].

Точечные эквицентроаффинные преобразования (35) эквивалентны плоскостным преобразованиям

$$\overset{*}{y}_i = a_i^\alpha y_\alpha, \quad |a_i^j| = 1 \quad (i,\ j,\ \alpha = 1,\ 2,\ 3). \tag{36}$$

Действительно, пусть дана плоскость $\boldsymbol{r}(y_1,\ y_2,\ y_3)$ и инцидентная с ней точка $\boldsymbol{r}(x^1,\ x^2,\ x^3)$. Условие инцидентности согласно (3_1) запишется в координатной форме как

$$x^\alpha y_\alpha = 1. \tag{37}$$

При преобразовании (35) пространства точка $\boldsymbol{r}$ перейдет в точку $\overset{*}{\boldsymbol{r}}$ с координатами $\overset{*}{x}{}^i = A_\alpha^i x^\alpha$, а плоскость $\boldsymbol{r}$ — в плоскость $\overset{*}{\boldsymbol{r}}$ с координатами $\overset{*}{y}_i$. Величины $\overset{*}{x}{}^i$ и $\overset{*}{y}_i$ будут, как и раньше, связаны условием инцидентности (37). Но теперь это будет иметь вид

$$A_\alpha^\beta x^\alpha \overset{*}{y}_\beta = 1. \tag{38}$$

Сравнивая с (37), находим зависимость между y_i и $\overset{*}{y}_i$:

$$y_i = A_i^\beta \overset{*}{y}_\beta. \tag{39}$$

Отсюда получаем

$$\overset{*}{y}_i = a_i^\alpha y_\alpha \, (A_\alpha^i a_y^\alpha = \delta_y^i). \tag{40}$$

Подобным же образом можно показать, что плоскостным преобразованиям (36) эквицентроаффинного пространства эквивалентны точечные преобразования (35).

Докажем, что эквицентроаффинная кривизна $\underset{2}{k} = -\underset{2}{\pi}(\underset{2}{s})$ и кручение $\underset{2}{\varkappa} = -\underset{1}{\pi}(\underset{2}{s})$, заданные как непрерывные функции $\underset{2}{s}$, определяют кривую с точностью до эквицентроаффинных преобразований.

Рассмотрим дифференциальное уравнение (11) при $t = \underset{2}{s}$:

$$\dddot{\boldsymbol{r}} + \underset{2}{k}(\underset{2}{s})\dot{\boldsymbol{r}} + \underset{2}{\varkappa}(\underset{2}{s})\boldsymbol{r} = 0. \tag{41}$$

Пусть $\eta_1(\underset{2}{s}),\ \eta_2(\underset{2}{s}),\ \eta_3(\underset{2}{s})$ — координаты дублета $\boldsymbol{r}$, определяющего искомую кривую. Тогда мы можем заменить дублетное уравнение (41) системой трех скалярных уравнений

$$\frac{d^3\eta_i}{d\underset{2}{s}^3} + \underset{2}{k}(\underset{2}{s})\frac{d\eta_i}{d\underset{2}{s}} + \underset{2}{\varkappa}(\underset{2}{s})\eta_i = 0, \ (i = 1,\ 2,\ 3), \tag{42}$$

Положим далее, что

$$\eta_i = a_i^\alpha y_\alpha, \tag{43}$$

и выберем коэффициенты a_i^j так, чтобы

$$|a_i^j| = 1. \tag{44}$$

Функции y_i должны удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\frac{d^3 y(\underset{2}{s})}{d\underset{2}{s}^3} + \underset{2}{k}(\underset{2}{s})\frac{dy(\underset{2}{s})}{d\underset{2}{s}} + \underset{2}{\varkappa}(\underset{2}{s})\,y(\underset{2}{s}) = 0, \tag{45}$$

Пусть y_1, y_2, y_3 — три независимых решения этого уравнения в интервале $(\underset{2}{s_0}, \underset{2}{s})$. Тогда определитель Вронского для системы этих решений не обращается в нуль ни в одной точке этого интервала

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ \dot{y}_1 & \dot{y}_2 & \dot{y}_3 \\ \ddot{y}_1 & \ddot{y}_2 & \ddot{y}_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Но

$$\frac{dW}{d\underset{2}{s}} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ \dot{y}_1 & \dot{y}_2 & \dot{y}_3 \\ \hat{y}_1 & \hat{y}_2 & \hat{y}_3 \end{vmatrix} = 0,$$

поскольку строки этого определителя связаны зависимостью вследствие уравнения (45).

Следовательно, $W = \mathrm{const}$, и можно выбрать такие независимые решения уравнения (45) y_1, y_2, y_3, что для этих решений

$$W = 1. \tag{46}$$

Так как для искомого дублета $\boldsymbol{r}$

$$(\boldsymbol{r}\dot{\boldsymbol{r}}\ddot{\boldsymbol{r}}) = \begin{vmatrix} \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \\ \dot{\eta}_1 & \dot{\eta}_2 & \dot{\eta}_3 \\ \ddot{\eta}_1 & \ddot{\eta}_2 & \ddot{\eta}_3 \end{vmatrix} = |a_i^{\alpha}| \cdot W = 1,$$

т. е. выполняется условие (6), то формулы (43), эквивалентные по ранее доказанному преобразованиям (35), дают решение поставленной задачи в общем виде: искомая кривая определяется с точностью до эквицентроаффинных преобразований пространства.

4. Векторы $\boldsymbol{r}$ и $\underset{3}{\boldsymbol{b}}$ (дублеты $\boldsymbol{r}_1$ и $\overset{3}{\boldsymbol{a}}$) всегда коллинеарны. Это следует из (3) и (4):

$$\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_1 = \underset{3}{\boldsymbol{b}}\overset{2}{\boldsymbol{b}} = \underset{3}{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}_1\overset{3}{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r} = \underset{3}{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{r} = 0.$$

Если α и β — вещественные не равные нулю числа, то для обыкновенной точки кривой M имеем:

$$\underset{3}{\boldsymbol{b}} = \alpha\boldsymbol{r}_1; \quad \overset{3}{\boldsymbol{a}} = \beta\boldsymbol{r}_1,$$

откуда

$$\alpha = \frac{1}{\boldsymbol{r}_{11}\boldsymbol{r}_1}; \quad \beta = \frac{1}{\boldsymbol{r}_{11}\boldsymbol{r}_1}.$$

Сравнивая с (25), получаем

$$\alpha = \frac{1}{\underset{1}{\rho}}; \quad \beta = -\frac{1}{\underset{1}{\rho}}.$$

При отнесении кривой к параметру $\underset{1}{s}$ (см. (33))

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= -\frac{1}{\underset{1}{\varkappa}}, \quad \beta = \frac{1}{\underset{1}{\varkappa}}, \\ \underset{3}{\boldsymbol{b}} &= -\frac{1}{\underset{1}{\varkappa}}\boldsymbol{r}', \quad \overset{3}{\boldsymbol{a}} = \frac{1}{\underset{1}{\varkappa}}\boldsymbol{r}'. \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

Отсюда, как из (27), следует, что развиваемая здесь и в работе [3] теория справедлива только для неплоских кривых, так как ни одно из кручений не может быть равным нулю.

Пусть при $t = \underset{1}{s}$, $\underset{1}{\varkappa} = \text{const} > 0$. Тогда, во-первых, как легко показать, наряду с равенствами

$$r''r = r''\overset{2}{a} = \underset{2}{b}r = \underset{2}{b}r'' = 0 \tag{48}$$

всегда

$$r''r'' = 0. \tag{49}$$

Геометрически это означает коллинеарность векторов r'' и $\underset{2}{b}$ (дублетов r'' и $\overset{2}{a}$). Во-вторых по формуле (34)

$$\underset{2}{k} = \underset{1}{\varkappa}^{-\frac{4}{3}}\underset{1}{k}, \tag{50}$$

т. е. кривизны кривых постоянного кручения несущественно отличаются одна от другой.

ЛИТЕРАТУРА

1. E. Salkowski. Affine Differentialgeometrie, Berlin und Leipzig (1934).
2. С. А. Пясецкий. Эквицентроаффинные инварианты пространственной кривой. «Уч. зап. Мордовского ун-та», в. 18 (1961), 175—179.
3. А. П. Мокляк. Об эквицентроаффинных инвариантах пространственных кривых. «Укр. геометр. сб.», в. 2. Изд-во ХГУ, Харьков, 1966, 70—76.
4. П. А. Широков и А. П. Широков. Аффинная дифференциальная геометрия. Физматгиз, М., 1959.
5. J. Popa. Geometrie centro-affine hyperboligue des courbes gauches, Ann. sci. Univ. Jassy 21 (1934), 78—140.

Поступила 5 сентября 1966 г.

О КИНЕМАТИКЕ НА ПЛОСКОСТИ ЛОБАЧЕВСКОГО

Л. Т. Моторный (Харьков)

В настоящей работе рассматривается групповое пространство группы движений плоскости Лобачевского.

Строится кинематическое отображение плоскости Лобачевского на трехмерное проективное пространство с кольцевым абсолютом ($^2S_3$), аналогичное кинематическому отображению Бляшке—Грюнвальда [1] евклидовой плоскости на квазиэллиптическое пространство и отображению вращений сферы на точки эллиптического пространства [2], [3].

Рассмотрены некоторые вопросы теории кривых и поверхностей в $^2S_3$ и связанные с ними вопросы кинематики на плоскости Лобачевского.

Найдены двухпараметрические движения плоскости Лобачевского и их расслоения на произведение двух однопараметрических. Этим движениям, в силу кинематического отображения, соответствуют поверхности переноса в $^2S_3$ (являющиеся здесь поверхностями вращения). Указанное отображение аналогично отображениям поверхностей переноса эллиптического [4] и квазиэллиптического пространств [5].

§ 1. Антикватернионы

Антикватернионы есть обобщенные числа вида

$$Q = q_0e_0 + q_1e_1 + q_2e_2 + q_3e_3, \tag{1.1}$$

сумма и произведения которых определяется так:

$$Q + Q' = \sum_0^3 (q_i + q_i')e_i,$$
$$QQ' = \sum q_i q_k' e_i e_k,$$
$$\lambda Q = \sum \lambda q_i e_i \tag{1.2}$$

со следующим правилом умножения единиц:

$$e_0e_i = e_ie_0 = e_i, \quad e_1^2 = e_2^2 = -e_3^2 = e_0, \quad e_ie_k = -e_ke_i,$$
$$e_1e_2 = e_3, \quad e_1e_3 = e_2, \quad e_3e_2 = e_1, \quad i, \ k = 1, \ 2, \ 3. \tag{1.3}$$

Здесь и дальше λ, q_i являются вещественными числами.

Умножение по (1.3) является ассоциативным, но вообще говоря, не коммутативным.

Назовем скалярным произведением антикватернионов

$$\langle QQ' \rangle = q_0q_0' - q_1q_1' - q_2q_2' + q_3q_3'. \tag{1.4}$$

Антикватернион

$$\tilde{Q} = q_0 e_0 - q_1 e_1 - q_2 e_2 - q_3 e_3 \tag{1.5}$$

назовем сопряженным к Q.

Введем норму Q:

$$N(Q) = Q\tilde{Q} = \langle QQ \rangle = q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2, \tag{1.6}$$

имеем

$$N(QQ') = N(Q)\,N(Q'). \tag{1.7}$$

Антикватернион с

$$Q + \tilde{Q} = 2q_0 = 0 \tag{1.8}$$

назовем вектором

$$q = q_1 e_1 + q_2 e_2 + q_3 e_3. \tag{1.9}$$

Введем скалярное

$$\langle qq' \rangle = -q_1 q_1' - q_2 q_2' + q_3 q_3' \tag{1.10}$$

и векторное

$$q \times q' = -e_1 (q_2 q_3' - q_3 q_2') - e_2 (q_3 q_1' - q_1 q_3') + e_3 (q_1 q_2' - q_2 q_1') \tag{1.11}$$

произведение векторов.

Нормированный антикватернион можно представить в виде

$$Q = \operatorname{ch} \varphi + q \operatorname{sh} \varphi, \quad qq = -1. \tag{1.12}$$

Исключение составляют антикватернионы вида

$$Q = \cos \varphi + e_3 \sin \varphi. \tag{1.13}$$

Для $Q = q_0 + q$, $Q' = q_0' + q'$ имеем

$$QQ' = q_0 q_0' + q_0 q' + q_0' q - \langle qq' \rangle + q \times q'. \tag{1.14}$$

§ 2. Связь антикватернионов с движениями в плоскости Лобачевского

С помощью антикватернионов очень удобно представлять движения в плоскости Лобачевского.

Пусть имеем векторы

$$\begin{aligned} r &= x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3, \\ r' &= x_1' e_1 + x_2' e_2 + x_3' e_3 \end{aligned} \tag{2.1}$$

и нормированный антикватернион

$$Q\tilde{Q} = N(Q) = 1. \tag{2.2}$$

Тогда преобразование $r' \to r$

$$r = \tilde{Q} r' Q \tag{2.3}$$

является линейным и ортогональным (в смысле введенного скалярного произведения) преобразованием x_i' в x_i, ибо

$$N(r) = N(\tilde{Q})\,N(r')\,N(Q) = N(r') \tag{2.4}$$

или

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = x_1'^2 + x_2'^2 - x_3'^2. \tag{2.5}$$

Далее, если r' вектор, то и r вектор:

$$r + \tilde{r} = \tilde{Q} r' Q + \tilde{Q} \tilde{r}' Q = \tilde{Q}(r' + \tilde{r}')\,Q = 0. \tag{2.6}$$

Определитель (2.3) равен $+1$.

Преобразования (2.3) образуют группу G_3.

Будем рассматривать x_i как однородные координаты точки в плоскости Лобачевского (${}^1S_2$). Тогда преобразование (2.3) x'_i в x_i есть движение в ${}^1S_2$. Действительно, по (2.5) линейные ортогональные преобразования (2.3) сохраняют абсолют плоскости Лобачевского

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0, \tag{2.7}$$

следовательно, сохраняют расстояния между точками.

Мы получили взаимно-однозначное соответствие между антикватернионами Q и движениями в плоскости Лобачевского ${}^1S_2$.

§ 3. Пространство с кольцевым абсолютом

Возьмем координаты q_i нормированного антикватерниона Q в качестве однородных координат точки в трехмерном проективном пространстве P_3. Точку, определенную через q_i в P_3, назовем снова Q.

Таким образом, установлено взаимно-однозначное соответствие между движениями (2.3) в плоскости Лобачевского и вещественными точками P_3: *проективное пространство P_3 есть групповое пространство группы G_3 движений плоскости Лобачевского ${}^1S_2$.*

Совокупность точек Q в P_3 с

$$N(Q) = 0 \tag{3.1}$$

составляет квадрику

$$\langle QQ \rangle = q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 = 0. \tag{3.2}$$

Назовем ее абсолютной квадрикой ${}^2S_3$.

При этом в P_3 возникает метрика, где под расстоянием d между двумя нормированными точками Q, Q' будем понимать

$$d^2 = (q_0 - q'_0)^2 - (q_1 - q'_1)^2 - (q_2 - q'_2)^2 + (q_3 - q'_3)^2, \tag{3.3}$$
$$\langle QQ \rangle = \langle Q'Q' \rangle = 1.$$

Так метризованное пространство P_3 есть *пространство с кольцевым абсолютом* ${}^2S_3$ (гиперболическое пространство индекса 2) [6].

Точки, для которых

$$\langle QQ' \rangle = 0, \tag{3.4}$$

назовем полярными.

Если подвергнем r, r' ортогональному преобразованию

$$r'^* = \tilde{R}'r'R', \quad r^* = \tilde{R}rR, \quad R\tilde{R} = R'\tilde{R}' = 1, \tag{3.5}$$

то вместо преобразования (2,3) получим новое

$$r^* = \tilde{Q}^* r'^* Q^* \tag{3.6}$$

с

$$Q^* = \tilde{R}'QR. \tag{3.7}$$

Этот переход от q_i к q_i^* есть антикватернионное ортогональное преобразование. Легко убедиться, что его определитель равен $+1$. Очевидно, что каждое такое преобразование можно представить в виде (3.7), надлежащим образом подобрав R, R'. Кроме того, эти преобразования сохраняют расстояние между точками в ${}^2S_3$, а следовательно, означают движения в пространстве с кольцевым абсолютом.

§ 4. Изображение прямых ${}^2S_3$ на плоскости ${}^1S_2$

Пусть Q, Q' — две полярные единичные точки ${}^2S_3$

$$\langle QQ\rangle = \langle Q'Q'\rangle = 1, \quad \langle QQ'\rangle = 0. \tag{4.1}$$

Образуем произведения

$$r = \tilde{Q}Q', \quad r' = Q'\tilde{Q}. \tag{4.2}$$

Тогда r, r' являются единичными векторами:

$$\begin{gathered} r\tilde{r} = r'\tilde{r}' = 1, \\ r + \tilde{r} = \tilde{Q}Q' + \tilde{Q}'Q = 2\langle QQ'\rangle = 0, \\ r' + \tilde{r}' = Q'\tilde{Q} + Q\tilde{Q}' = 2\langle QQ'\rangle = 0. \end{gathered} \tag{4.3}$$

Будем, как и раньше, рассматривать x_i, x_i' (координаты векторов r, r') в качестве однородных координат точек на плоскости ${}^1S_2$. Точку на ${}^1S_2$ с координатами x_i будем снова обозначать r.

Тогда каждой прямой g, проходящей через две полярные точки Q, Q', ставится во взаимно-однозначное соответствие пара точек r, r' на ${}^1S_2$. Причем точки r, r' не зависят от выбора точек Q, Q' на прямой g.

Пучку прямых в ${}^2S_3$ с центром в точке Q отвечает поле точек $\{r\}$ и поле точек $\{r'\}$, которые совмещаются движением плоскости ${}^1S_2$.

Таким образом, мы получили взаимно-однозначное отображение точек ${}^2S_3$ на движения плоскости ${}^1S_2$.

Полученное кинематическое отображение плоскости Лобачевского на точки пространства с кольцевым абсолютом имеет много общего с известным кинематическим отображением Бляшке—Грюнвальда [1] евклидовой плоскости на точки квазиэллиптического пространства, а также отображения вращений сферы (движений эллиптической плоскости) на точки эллиптического пространства S_3 [2], [3].

Движениям пространства ${}^2S_3$

$$Q^* = \tilde{R}'QR, \quad R\tilde{R} = R'\tilde{R}' = 1, \tag{4.4}$$

примененным к прямым g, соответствуют независимые друг другу движения

$$r^* = \tilde{R}rR, \quad r'^* = \tilde{R}'r'R' \tag{4.5}$$

плоскости ${}^1S_2$.

Следовательно, группа движений G_6 в пространстве ${}^2S_3$ изоморфна прямому произведению двух групп движений G_3, G_3' плоскости ${}^1S_2$.

На этот результат указал Б. А. Розенфельд [6], [7].

§ 5. Плюккеровы линейные координаты

Укажем еще на связь наших векторов r, r' с плюккеровыми линейными координатами g_{ik} прямой g прообраза пары точек (r, r') на ${}^1S_2$.

Пусть Q, Q' — две единичные полярные точки на прямой (r, r'), тогда

$$r = \tilde{Q}Q', \quad r' = Q'\tilde{Q}. \tag{5.1}$$

Следовательно, имеем

$$
\begin{aligned}
r_1 &= g_{01} + g_{23}, & r'_1 &= g_{01} - g_{23},\\
r_2 &= g_{02} + g_{31}, & r'_2 &= g_{02} - g_{31},\\
r_3 &= g_{03} - g_{12}, & r'_3 &= g_{03} - g_{12},
\end{aligned}
\tag{5.2}
$$

где g_{ik} — плюккеровы координаты прямой QQ',

r_i, r'_i — координаты векторов r, r'.

Две прямые (r, r'), $(r^* r'^*)$ в ${}^2S_3$ будем называть право-параллельными, если

$$r' = r'^*, \tag{5.3}$$

и лево-параллельными, если

$$r = r^*. \tag{5.4}$$

Для правого параллелизма имеем

$$
\begin{aligned}
g_{01} + g_{23} &= g^*_{01} + g^*_{23},\\
g_{02} + g_{31} &= g^*_{02} + g^*_{31},\\
g_{03} - g_{12} &= g^*_{03} - g^*_{12}.
\end{aligned}
\tag{5.5}
$$

Аналогично для левого параллелизма

$$
\begin{aligned}
g_{01} - g_{23} &= g^*_{01} - g^*_{23},\\
g_{02} - g_{31} &= g^*_{02} - g^*_{31},\\
g_{03} + g_{12} &= g^*_{03} + g^*_{12}.
\end{aligned}
\tag{5.6}
$$

Введенный таким образом параллелизм обладает интересным свойством: все лево-параллельные прямые к g пересекают одну и ту же пару прямолинейных образующих абсолюта, проходящих через точки пересечения прямой g с абсолютом и принадлежащих одной и той же серии прямолинейных образующих абсолюта. Аналогично и для правого параллелизма. Таким образом, этот параллелизм совпадает с параллелизмом Клиффорда (8).

Преобразование в ${}^2S_3$

$$X' = AX \tag{5.7}$$

переводит все лево-параллельные прямые друг в друга, т. е. является аналогом переноса в евклидовой геометрии. Будем называть его левым переносом.

Точно так же преобразование

$$X^* = XB \tag{5.8}$$

переводящее все правые параллели друг в друга, будем называть правым переносом.

Любое движение в ${}^2S_3$

$$X^* = AXB \tag{5.9}$$

можно представить в виде произведения левого и правого переноса.

Соответственно этому поверхностью переноса назовем поверхность, допускающую каноническое представление:

$$X(uv) = A(u)\, B(v). \tag{5.10}$$

Естественно, возникает задача нахождения поверхностей в ${}^2S_3$, которые двумя существенно различными способами представимы в виде (5.10).

Это есть обобщение известной проблемы С. Ли (9) о поверхностях переноса двойного образования евклидова пространства на пространство ${}^2S_3$.

Этой проблеме соответствует в кинематике на плоскости ${}^1S_2$ отыскание двухпараметрических движений, которые двумя существенно различными способами расслаиваются на произведение двух однопараметрических движений.

§ 6. Движения в ${}^2S_3$

Пусть в ${}^2S_3$ имеем две прямые g и g^*, (r,r'), (r^*,r'^*) — их образы на плоскости ${}^1S_2$. Будем называть правым углом δ' между прямыми g и g^*:

$$\operatorname{ch}\delta' = \langle r'r'^* \rangle \tag{6.1}$$

и левым углом δ:

$$\operatorname{ch}\delta = \langle rr^* \rangle. \tag{6.2}$$

Если прямые g и g^* пересекаются, то $\delta = \delta'$, ибо тогда

$$\langle rr^* \rangle = \langle r'r'^* \rangle. \tag{6.3}$$

Общее значение правого и левого угла будем называть тогда углом между пересекающимися прямыми.

Возьмем на g точку Q и проведем через нее прямую $\bar{g}$, право-параллельную g^*. Угол между g и $\bar{g}$ будет равен δ'. Аналогично угол между g и лево-параллельной прямой к g^*, проходящей через Q, будет равен δ.

Рассмотрим в ${}^2S_3$ движение

$$Q^* = \tilde{R}'QR, \tag{6.4}$$

где

$$R' = \operatorname{ch}\varphi' + a'\operatorname{sh}\varphi', \quad R = \operatorname{ch}\varphi + a\operatorname{sh}\varphi. \tag{6.5}$$

При этом движении каждая точка Q на прямой (aa') переходит в новую точку Q^* на прямой (aa'), т. е. движение (6.4) сохраняет прямую (aa') как целое. Сохраняется как целое и ее поляра.

Если в (6.4) R,R' представимы в виде

$$R = \cos\varphi + e_3\sin\varphi, \quad R' = \cos\varphi' + e_3\sin\varphi', \tag{6.6}$$

то движение (6.4) сохраняет неподвижной как целое прямую (e_3e_3) и ее поляру.

Если $\varphi = \varphi'$, то движение (6.4) сводится к вращению ${}^2S_3$ вокруг прямой (aa') или (e_3e_3).

Таким образом, любое движение в ${}^2S_3$ (6.4) сохраняет как целое некоторую прямую и ее поляру, т. е. любое движение можно рассматривать как винтовое.

§ 7. Однопараметрические движения на плоскости ${}^1S_2$

Рассмотрим непрерывные однопараметрические движения на плоскости ${}^1S_2$, для этого положим

$$r(t) = \tilde{Q}(t)\, r'Q(t), \quad \tilde{Q}Q = 1. \tag{7.1}$$

Единичный вектор r' мы будем предполагать неподвижным и относить к неподвижной системе координат на плоскости ${}^1S_2$, ему по (7.1) соответствует подвижная система координат, задаваемая вектором r.

В пространстве ${}^2S_3$ точка $Q = Q(t)$ описывает кривую L. С ней связан подвижный тетраэдр (сопровождающая четверка) $Q_0Q_1Q_2Q_3$. При этом Q_1 лежит на касательной к L в точке Q_0, Q_2 — на соприкасающейся плоскости к L в Q_0, а Q_3 — полюс соприкасающейся плоскости относительно абсолюта:

$$Q_0 = Q(t),$$
$$Q_1 = \frac{\dot{Q}(t)}{\sqrt{|\langle \dot{Q}\dot{Q} \rangle|}},$$
$$Q_2 = \lambda \left[\ddot{Q}(t) + \frac{\langle \dot{Q}\ddot{Q} \rangle}{|\langle \dot{Q}\dot{Q} \rangle|} Q(t) \right], \tag{7.2}$$
$$Q_3 = e_0\xi_0 - e_1\xi_1 - e_2\xi_2 + e_3\xi_3, \quad \frac{1}{\lambda^2} = \left| \frac{\langle \dot{Q}\dot{Q} \rangle \langle \ddot{Q}\ddot{Q} \rangle - \langle \dot{Q}\ddot{Q} \rangle^2}{\langle \dot{Q}\dot{Q} \rangle^3} - 1 \right|,$$

где точка означает дифференцирование по t, ξ_i — пропорциональны своим алгебраическим дополнениям в определителе

$$\left[\xi Q\dot{Q}\ddot{Q}\right], \tag{7.3}$$

причем множитель пропорциональности выберем так, чтобы

$$|\langle Q_3Q_3 \rangle| = 1. \tag{7.4}$$

Для дифференциалов dQ_i имеем

$$dQ_0 = Q_1 ds,$$
$$dQ_1 = -\langle Q_1Q_1 \rangle ds Q_0 + kQ_2 ds,$$
$$dQ_2 = -\langle Q_1Q_1 \rangle \langle Q_2Q_2 \rangle k ds Q_1 + \varkappa ds Q_3, \tag{7.5}$$
$$dQ_3 = -\langle Q_2Q_2 \rangle \langle Q_3Q_3 \rangle \varkappa ds Q_2,$$

где k, $\varkappa$ — кривизна и кручение кривой L,

$$k^2 = \left| \frac{\langle \dot{Q}\dot{Q} \rangle \langle \ddot{Q}\ddot{Q} \rangle - \langle \dot{Q}\ddot{Q} \rangle^2}{\langle \dot{Q}\dot{Q} \rangle^3} - 1 \right|, \tag{7.6}$$
$$k^2\varkappa = \frac{\left[Q\dot{Q}\ddot{Q}\dddot{Q}\right]}{\langle \dot{Q}\dot{Q} \rangle^3},$$

$ds = \sqrt{|\langle \dot{Q}\dot{Q} \rangle|}\, dt$ — элемент дуги кривой.

Формулы (7.5) являются аналогом формул Френе для кривых в евклидовом пространстве.

Касательная к кривой $Q(t)$ в ${}^2S_3$ имеет своим образом на плоскости ${}^1S_2$ пару точек p, p':

$$p(t) = \tilde{Q}(t) Q_1(t) = \frac{\tilde{Q}\dot{Q}}{\sqrt{|\langle \dot{Q}\dot{Q} \rangle|}}, \quad p'(t) = \frac{\dot{\tilde{Q}}Q}{\sqrt{|\langle \dot{Q}\dot{Q} \rangle|}}. \tag{7.7}$$

Торсу касательных к кривой $Q(t)$ соответствуют две кривые $p(t)$ и $p'(t)$ на ${}^1S_2$.

Кривые $p(t)$ и $p'(t)$ изометрично соответствуют друг другу при одинаковых значениях t.

Пусть r точка в подвижной системе координат на плоскости ${}^1S_2$:

$$r(t) = \tilde{Q}(t) r' Q(t). \tag{7.8}$$

Дифференцируя (7.8), получим, учитывая $dr' = 0$,

$$dr = d\tilde{Q} r' Q + \tilde{Q} r' dQ. \tag{7.9}$$

Заменяя в (7.9) r' по (7.8) и учитывая (7.5), получим

$$dr = (rp - pr)\,ds = 2\,(r \times p)\,ds. \tag{7.10}$$

Здесь

$$\frac{dr}{dt} = 2\,(r \times p)\,\frac{ds}{dt} \tag{7.11}$$

означает абсолютную скорость фиксированной точки в подвижной системе координат при нашем непрерывном движении.

Из

$$p = \tilde{Q}p'Q \tag{7.12}$$

следует

$$dp = \left[d\tilde{Q}p'Q + \tilde{Q}p'dQ\right] + \tilde{Q}dp'Q. \tag{7.13}$$

Выражение в скобках по (7.7) равно нулю, и мы имеем

$$dp = \tilde{Q}dp'Q. \tag{7.14}$$

Линию $p(t)$ назовем подвижной центроидой, а $p'(t)$ — неподвижной центроидой. Как уже отмечалось, обе центроиды изометричны относительно друг друга.

Из (7.14) следует, что однопараметрическое движение на ${}^1S_2$ можно представить как качение без скольжения подвижной центроиды по неподвижной.

Теперь легко получается геометрический смысл точек p, p': *в подвижной системе координат p есть мгновенный центр вращения, в котором обращается в нуль скорость.* Аналогично имеем для p' в неподвижной системе.

Если рассмотреть однопараметрическое движение в ${}^2S_3$, при котором некоторая точка описывает траекторию L (кривую $Q(t)$), то прямая (pp') и ее поляра будут мгновенными винтовыми осями движения.

Пусть $Q(t)$ — описываемая линия L в ${}^2S_3$ — есть прямая, тогда p закреплена в подвижной системе, а p' — в неподвижной, и наше движение сводится к вращению вокруг неподвижной точки.

§ 8. Винтовые линии в ${}^2S_3$

Кривыми Бертрана называются такие кривые, у которых существует линейная зависимость между кривизной и кручением

$$Ak + B\varkappa + C = 0 \tag{8.1}$$

с постоянными коэффициентами A, B, C.

Одними из самых простых кривых Бертрана в ${}^2S_3$ есть винтовые линии, кривизна k и кручение $\varkappa$ которых постоянны. Они возникают как траектории одночленной группы движений в ${}^2S_3$.

Возьмем к примеру группу движений вокруг оси (e_1e_1):

$$Q(t) = (e_0 \operatorname{ch} at - e_1 \operatorname{sh} at)\,Q'\,(e_0 \operatorname{ch} bt + e_1 \operatorname{sh} bt). \tag{8.2}$$

Тогда точка (8.2) с

$$Q' = e_0 \operatorname{ch} \alpha + e_2 \operatorname{sh} \alpha \tag{8.3}$$

описывает винтовую линию S в ${}^2S_3$. Если положить

$$\rho = a - b, \quad \sigma = a + b, \tag{8.4}$$

то получим для S

$$Q(t) = e_0 \operatorname{ch}\alpha \operatorname{ch}\rho t + e_1 \operatorname{ch}\alpha \operatorname{sh}\rho t + e_2 \operatorname{sh}\alpha \operatorname{ch}\sigma t - e_3 \operatorname{sh}\alpha \operatorname{sh}\sigma t. \qquad (8.5)$$

Следовательно, S лежит на цилиндре

$$q_0^2 - q_1^2 = \operatorname{ch}^2\alpha, \qquad (8.6)$$

или

$$q_2^2 - q_3^2 = \operatorname{sh}^2\alpha. \qquad (8.7)$$

Это линейчатая поверхность с образующими параллелями Клиффорда.

Далее имеем по (7.6)

$$\begin{aligned} k^2 &= \left| \frac{\rho^4 \operatorname{ch}^2\alpha - \sigma^4 \operatorname{sh}^2\alpha}{(\sigma^2 \operatorname{sh}^2\alpha - \rho^2 \operatorname{ch}^2\alpha)^2} - 1 \right|, \\ k^2\varkappa &= \frac{\rho\sigma(\rho^2+\sigma^2)^2 \operatorname{ch}^2\alpha - \operatorname{sh}^2\alpha}{(\rho^2 \operatorname{ch}^2\alpha - \sigma^2 \operatorname{sh}^2\alpha)^3}. \end{aligned} \qquad (8.8)$$

Для образов S на ${}^1S_2$ имеем

$$\begin{aligned} Ap(t) &= e_1(\rho \operatorname{ch}^2\alpha - \sigma \operatorname{sh}^2\alpha) + e_2(\sigma-\rho)\operatorname{ch}\alpha \operatorname{sh}\alpha \operatorname{sh}(\sigma+\rho)t - \\ &\quad - e_3(\sigma-\rho)\operatorname{ch}\alpha\operatorname{sh}\alpha\operatorname{ch}(\sigma+\rho)t, \\ Ap'(t) &= e_1(\rho \operatorname{ch}^2\alpha + \sigma \operatorname{sh}^2\alpha) + e_2(\sigma+\rho)\operatorname{ch}\alpha \operatorname{sh}\alpha \operatorname{sh}(\sigma-\rho)t - \\ &\quad - e_3(\sigma+\rho)\operatorname{ch}\alpha\operatorname{sh}\alpha\operatorname{ch}(\sigma-\rho)t, \\ A^2 &= |\rho^2 \operatorname{ch}^2\alpha - \sigma^2 \operatorname{sh}^2\alpha|. \end{aligned} \qquad (8.9)$$

Это есть круги плоскости ${}^1S_2$.

Если $\rho = 0\ (\sigma = 0)$, то кривая S есть плоское сечение цилиндра (8.6), т. е. прямая или круг в ${}^2S_3$.

Если взять группу движений вокруг оси (e_3e_3), т. е.

$$Q(t) = (e_0 \cos at - e_3 \sin at)\, Q'\, (e_0 \cos bt + e_3 \sin bt), \qquad (8.10)$$

то точка (8.10) с

$$Q' = e_0 \operatorname{ch}\alpha + e_2 \operatorname{sh}\alpha \qquad (8.11)$$

описывает тогда винтовую линию S' в ${}^2S_3$:

$$Q(t) = e_0 \operatorname{ch}\alpha \cos\rho t + e_1 \operatorname{sh}\alpha\cos\sigma t + e_2 \operatorname{sh}\alpha \sin\sigma t + e_3 \operatorname{ch}\alpha \sin\rho t, \qquad (8.12)$$

которая лежит на цилиндре

$$q_0^2 + q_3^2 = \operatorname{ch}^2\alpha. \qquad (8.13)$$

или

$$q_1^2 + q_2^2 = \operatorname{sh}^2\alpha. \qquad (8.14)$$

Выражения для кривизны k и кручения $\varkappa$ кривой S' совпадают с (8.8).

Образы S' на плоскости ${}^1S_2$ являются так же как и для S кругами плоскости Лобачевского:

$$\begin{aligned} Ap(t) &= e_1(\rho-\sigma)\operatorname{ch}\alpha\operatorname{sh}\alpha\sin(\rho+\sigma)t - e_2(\rho-\sigma)\operatorname{ch}\alpha\operatorname{sh}\alpha\cos(\rho+\sigma)t + \\ &\quad + e_3(\rho\operatorname{ch}^2\alpha - \sigma\operatorname{sh}^2\alpha), \\ Ap'(t) &= e_1(\rho+\sigma)\operatorname{ch}\alpha\operatorname{sh}\alpha\sin(\rho-\sigma)t - e_2(\rho+\sigma)\operatorname{ch}\alpha\operatorname{sh}\alpha\cos(\rho-\sigma)t - \\ &\quad - e_3(\rho\operatorname{ch}^2\alpha - \sigma\operatorname{sh}^2\alpha). \end{aligned} \qquad (8.15)$$

§ 9. Двухпараметрические движения на ${}^1S_2$

Рассмотрим непрерывное двухпараметрическое движение на плоскости ${}^1S_2$

$$r(u,\ v)=\tilde{Q}(u,\ v)\,r'\,Q(u,\ v),\quad \tilde{Q}Q=1. \tag{9.1}$$

В пространстве ${}^2S_3$ точка $Q=Q(u,\ v)$ описывает поверхность Ф. С ней связан подвижный тетраэдр Q, Q_u, Q_v, P — полюс касательной плоскости относительно абсолюта.

Положим

$$\begin{aligned} p_1&=\frac{\tilde{Q}Q_u}{\sqrt{|\mathscr{E}|}},\quad p_1'=\frac{Q_u\tilde{Q}}{\sqrt{|\mathscr{E}|}},\\ p_2&=\frac{\tilde{Q}Q_v}{\sqrt{|G|}},\quad p_2'=\frac{Q_v\tilde{Q}}{\sqrt{|G|}}, \end{aligned} \tag{9.2}$$

где $\mathscr{E}$, G — коэффициенты первой квадратичной формы поверхности

$$\begin{aligned} &\langle dQ\,dQ\rangle=\mathscr{E}\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2,\\ &\mathscr{E}=\langle Q_uQ_u\rangle,\quad F=\langle Q_uQ_v\rangle,\quad G=\langle Q_vQ_v\rangle. \end{aligned} \tag{9.3}$$

Для поверхности нулевой гауссовой кривизны p_i зависят только от u, а p_i' только от v, и мы имеем

$$Q(u,\ v)=\tilde{R}(u)\,Q(0,\ 0)\,R'(v), \tag{9.4}$$

т. е. поверхность нулевой гауссовой кривизны есть поверхность переноса:

$$Q(u,\ v)=R(u)\,R'(v). \tag{9.5}$$

Движения, которым соответствуют в ${}^2S_3$ поверхности нулевой кривизны, расслаиваются на произведение двух однопараметрических движений

$$r(u)=\tilde{R}(u)\,r'R(u),\quad r(v)=\tilde{R}'(v)\,r'R'(v). \tag{9.6}$$

В связи с этим возникает вопрос о нахождении двухпараметрических движений плоскости ${}^1S_2$, которые двумя существенно различными способами расслаиваются на произведение двух однопараметрических движений, т. е. нахождение поверхностей переноса двойного образования.

Пусть в ${}^2S_3$ задана однопараметрическая группа движений с винтовой осью (e_1e_1):

$$X=(e_0\operatorname{ch}at-e_1\operatorname{sh}at)\,Q\,(e_0\operatorname{ch}bt+e_1\operatorname{sh}bt). \tag{9.7}$$

При этом движении плоская кривая

$$\begin{gathered} q_0=u,\ q_1=0,\ q_2=p(u),\ q_3=q(u),\\ u^2-p^2+q^2=1 \end{gathered} \tag{9.8}$$

описывает *винтовую поверхность*:

$$\begin{cases} x_0=u\operatorname{ch}v,\\ x_1=u\operatorname{sh}v,\\ x_2=p(u)\operatorname{ch}\alpha v+q(u)\operatorname{sh}\alpha v,\\ x_3=p(u)\operatorname{sh}\alpha v+q(u)\operatorname{ch}\alpha v, \end{cases} \tag{9.9}$$

где

$$v=(a+b)\,t,\quad \alpha v=(a-b)\,t. \tag{9.10}$$

В частном случае, когда $\alpha = 0$, получим *поверхность вращения* с осью (e_1e_1) (движение (9.7) превращается в вращение вокруг оси (e_1e_1)):

$$\begin{cases} x_0 = u \operatorname{ch} v, \\ x_1 = u \operatorname{sh} v, \\ x_2 = p(u), \\ x_3 = q(u). \end{cases} \tag{9.11}$$

Наконец, уравнение *линейчатой поверхности* в ${}^2S_3$ можно представить в виде

$$\begin{gathered} X(u,\ v) = Q(u) \cos v + Q'(u) \sin v, \\ \langle QQ \rangle = \langle Q'Q' \rangle = 1, \quad \langle QQ' \rangle = 0. \end{gathered} \tag{9.12}$$

§ 10. Кинематическое отображение поверхностей переноса

В работе [8] были найдены все поверхности вращения, являющиеся поверхностями переноса:

$$X = A(u) B(v), \tag{10.1}$$

где

$$\begin{gathered} A(u) = e_0 \operatorname{ch} au \operatorname{ch} \alpha + e_1 \operatorname{ch}(1-a) u \operatorname{sh} \alpha + e_2 \operatorname{sh} au \operatorname{ch} \alpha + \\ + e_3 \operatorname{sh}(1-a) u \operatorname{sh} \alpha, \\ B(v) = e_0 \operatorname{sh} av \operatorname{sh} \beta + e_1 \operatorname{sh}(1-a) v \operatorname{ch} \beta + e_2 \operatorname{ch} av \operatorname{sh} \beta + e_3 \operatorname{ch}(1-a) v \operatorname{ch} \beta \end{gathered} \tag{10.2}$$

Эти поверхности образуются правым переносом винтовой линии $B(v)$ вдоль другой винтовой линии $A(u)$ в ${}^2S_3$, или левым переносом винтовой линии $A(u)$ вдоль винтовой линии $B(v)$.

На плоскости ${}^1S_2$ поверхностям (10.1) отвечают двухпараметрические движения, которые двумя различными способами расслаиваются на произведение двух однопараметрических движений, соответствующих кривым $A(u)$, $B(v)$:

$$r(u) = \tilde{A}(u) r' A(u), \quad r(v) = \tilde{B}(v) r' B(v) \tag{10.3}$$

или в развернутом виде

$$\begin{gathered} x_1 = [\operatorname{ch}^2 \alpha \operatorname{ch} 2au - \operatorname{sh}^2 \alpha \operatorname{ch} 2(1-a) u]\, x_1' - [\operatorname{sh} 2\alpha \operatorname{sh} u]\, x_2' + \\ + [\operatorname{ch}^2 \alpha \operatorname{sh} 2au + \operatorname{sh}^2 \alpha \operatorname{sh} 2(1-a) u]\, x_3', \\ x_2 = [\operatorname{sh} 2\alpha \operatorname{sh}(1-2a) u]\, x_1' + [\operatorname{ch} 2\alpha]\, x_2' - [\operatorname{sh} 2\alpha \operatorname{ch}(1-2a) u]\, x_3', \\ x_3 = [\operatorname{ch}^2 \alpha \operatorname{sh} 2au - \operatorname{sh}^2 \alpha \operatorname{sh} 2(1-a) u]\, x_1' - [\operatorname{sh} 2\alpha \operatorname{ch} u]\, x_2' + \\ + [\operatorname{ch}^2 \alpha \operatorname{ch} 2au + \operatorname{sh}^2 \alpha \operatorname{ch} 2(1-a) u]\, x_3' \end{gathered} \tag{10.4}$$

движение, соответствующее $A(u)$ и

$$\begin{gathered} x_1 = [\operatorname{sh}^2 \beta \operatorname{ch} 2av - \operatorname{ch}^2 \beta \operatorname{ch} 2(1-a) v]\, x_1' - [\operatorname{sh} 2\beta \operatorname{sh} v]\, x_2' + \\ + [\operatorname{sh}^2 \beta \operatorname{sh} 2av + \operatorname{ch}^2 \beta \operatorname{sh} 2(1-a) v]\, x_3', \\ x_2 = \operatorname{sh} 2\beta \operatorname{sh}(1-2a) v x_1' - \operatorname{ch} 2\beta x_2' - \operatorname{sh} 2\beta \operatorname{ch}(1-2a) v\, x_3', \\ x_3 = [\operatorname{sh}^2 \beta \operatorname{sh} 2av - \operatorname{ch}^2 \beta \operatorname{sh} 2(1-a) v]\, x_1' - \operatorname{sh} 2\beta \operatorname{ch} v\, x_2' + \\ + [\operatorname{sh}^2 \beta \operatorname{ch} 2av + \operatorname{ch}^2 \beta \operatorname{ch} 2(1-a) v]\, x_3' \end{gathered} \tag{10.5}$$

движение, соответствующее $B(v)$.

Эти движения можно представить как качение подвижной центроиды по неподвижной.

Движение (10.4) имеет неподвижной центроидой

$$\begin{aligned} \lambda x_1' &= \operatorname{ch}\alpha \operatorname{sh}\alpha \operatorname{sh}(1-2a)\,u, \\ \lambda x_2' &= a\operatorname{ch}^2\alpha-(1-a)\operatorname{sh}^2\alpha, \\ \lambda x_3' &= -\operatorname{ch}\alpha\operatorname{sh}\alpha\operatorname{ch}(1-2a)\,u \end{aligned} \tag{10.6}$$

и подвижной центроидой

$$\begin{aligned} \lambda x_1 &= (1-2a)\operatorname{ch}\alpha\operatorname{sh}\alpha\operatorname{sh}u, \\ \lambda x_2 &= a\operatorname{ch}^2\alpha-(1-a)\operatorname{sh}^2\alpha, \\ \lambda x_3 &= -(1-2a)\operatorname{ch}\alpha\operatorname{sh}\alpha\operatorname{ch}u, \end{aligned} \tag{10.7}$$

где

$$\lambda^2 = |a^2\operatorname{ch}^2\alpha-(1-a)^2\operatorname{sh}^2\alpha|. \tag{10.8}$$

Для движения (10.5) неподвижной центроидой служит

$$\begin{aligned} \mu x_1' &= \operatorname{ch}\beta\operatorname{sh}\beta\operatorname{sh}(1-2a)\,v, \\ \mu x_2' &= a\operatorname{sh}^2\beta-(1-a)\operatorname{ch}^2\beta, \\ \mu x_3' &= -\operatorname{ch}\beta\operatorname{sh}\beta\operatorname{ch}(1-2a)\,v, \end{aligned} \tag{10.9}$$

а подвижной центроидой служит

$$\begin{aligned} \mu x_1 &= (1-2a)\operatorname{sh}\beta\operatorname{ch}\beta\operatorname{sh}v, \\ \mu x_2 &= a\operatorname{sh}^2\beta-(1-a)\operatorname{ch}^2\beta, \\ \mu x_3 &= -(1-2a)\operatorname{ch}\beta\operatorname{sh}\beta\operatorname{ch}v, \end{aligned} \tag{10.10}$$

где

$$\mu^2 = |a^2\operatorname{sh}^2\beta-(1-a)^2\operatorname{ch}^2\beta|. \tag{10.11}$$

Это круги различных радиусов в ${}^1S_2$.

Для другого способа канонического представления поверхностей переноса (10.1) соответствующие движения будут иметь центроидами тоже круги в ${}^1S_2$, но с другими радиусами.

ЛИТЕРАТУРА

1. W. Blaschke. Ebene Kinematik. Berlin — Leipzig, 1930.
2. W. Blaschke. Kinematik und Quaternionen. Berlin — Leipzig, 1962.
3. G. Müller. Sphärische Kinematik. Berlin — Leipzig, 1964.
4. Я. П. Бланк, Л. Т. Моторный. О поверхностях переноса эллиптического пространства и кинематика на сфере. «Укр. геометр. сб.», вып. 3. Изд-во ХГУ, 1966.
5. Я. П. Бланк, Л. Т. Моторный. К проблеме В. Бляшке о поверхностях квазипереноса и их связи с кинематикой на плоскости. «Зап. мех.-матем. ф-та ХГУ и ХМО», т. 31, 3—17, 1965.
6. Б. А. Розенфельд. Неевклидовы геометрии. Гостехиздат, М., 1955.
7. Б. А. Розенфельд, И. М. Яглом, Е. У. Ясинская. Проективные метрики. «Усп. матем. наук», т. XIX, вып. 5, 51—113, 1964.
8. Л. Т. Моторный. Об обобщенных поверхностях переноса. «Укр. геометр. сб.», вып. 2, Изд-во ХГУ, 1966.
9. S. Lie. Das Abelsche Theorem und die Translationsmannigfaltigkeiten. Leipzig — Berlin, 49, 1897.

Поступила 29 октября 1966 г.

К КИНЕМАТИКЕ НЕЕВКЛИДОВЫХ ПЛОСКОСТЕЙ

Л. Т. Моторный (Харьков)

В работах [1], [2] В. Бляшке установил взаимно-однозначное соответствие между движениями евклидовой плоскости и точками трехмерного квазиэллиптического пространства. Естественно рассмотреть групповые пространства групп движений неевклидовых плоскостей, т. е. построить их кинематические отображения. Групповое пространство группы движений эллиптической плоскости (группы вращений сферы) рассматривали В. Бляшке и Г. Мюллер [3], [4]. Они построили кинематическое отображение сферы (эллиптической плоскости) на точки трехмерного эллиптического пространства.

В работе [5] было построено кинематическое отображение плоскости Лобачевского на трехмерное проективное пространство с кольцевым абсолютом. В настоящей работе обобщаются эти результаты на псевдоевклидову плоскость, а также на плоскости, дуальные евклидовой и псевдоевклидовой.

Групповое пространство группы движений псевдоевклидовой плоскости есть квазигиперболическое пространство. Плоскости, дуальные евклидовой и псевдоевклидовой, являются плоскостями соответственно в квазиэллиптическом и квазигиперболическом пространстве.

Групповое пространство группы движений квазиэллиптической (квазигиперболической) плоскости есть квазиэллиптическое (квазигиперболическое) пространство.

Построены соответствующие кинематические отображения.

Вышеизложенные результаты можно записать в виде таблицы:

Плоскость	Групповое пространство группы движений	Изоморфизм групп движений
Эллиптическая S_2	Эллиптическое S_3	$S_3 = S_2 \times S_2$
Гиперболическая ${}^1S_2$	Пространство с кольцевым абсолютом ${}^2S_3$	${}^2S_3 = {}^1S_2 \times {}^1S_2$
Евклидова R_2	Квазиэллиптическое S_3^2	$S_3^2 = R_2 \times R_2$
Псевдоевклидова ${}^1R_2$	Квазигиперболическое ${}^{11}S_3^2$	${}^{11}S_3^2 = {}^1R_2 \times {}^1R_2$
Плоскость дуальная евклидовой (квазиэллиптическая) S_2^1	Квазиэллиптическое S_3^2	$S_3^2 = S_2^1 \times S_2^1$
Плоскость дуальная псевдоевклидовой (квазигиперболическая) ${}^1S_2^1$	Квазигиперболическое ${}^{11}S_3^2$	${}^{11}S_3^2 = {}^1S_2^1 \times {}^1S_2^1$

Рассмотрены также двухпараметрические движения, соответствующие в силу кинематического отображения поверхностям переноса, и расслоения этих движений на произведения двух однопараметрических движений.

§ 1. Кинематика псевдоевклидовой плоскости

1°. Пусть имеем (полуантикватернион [6])

$$Q = q_0e_0 + q_1e_1 + \varepsilon(q_2e_2 + q_3e_3) \tag{1.1}$$

со следующим правилом умножения единиц:

$$\begin{gathered} e_0e_i = e_ie_0 = e_i, \quad e_1^2 = 1, \quad e_ie_k = -e_ke_i, \\ e_1e_2 = e_3, \quad e_1e_3 = e_2, \quad i, \quad k = 1, 2, 3; \quad \varepsilon^2 = 0. \end{gathered} \tag{1.2}$$

Полуантикватернион

$$\tilde{Q} = q_0e_0 - q_1e_1 - \varepsilon(q_2e_2 + q_3e_3) \tag{1.3}$$

назовем сопряженным к Q. Введем норму Q:

$$N(Q) = Q\tilde{Q} = \tilde{Q}Q = q_0^2 - q_1^2. \tag{1.4}$$

Будем называть вектором полуантикватернион

$$r = e_1 + \varepsilon(xe_2 + ye_3). \tag{1.5}$$

С помощью полуантикватернионов удобно представлять движения псевдоевклидовой плоскости, абсолют которой состоит из дважды взятой прямой и пары вещественных точек на ней.

Пусть имеем два вектора

$$\begin{aligned} r &= e_1 + \varepsilon(xe_2 + ye_3), \\ r' &= e_1 + \varepsilon(x'e_2 + y'e_3) \end{aligned} \tag{1.6}$$

и нормированный полуантикватернион Q

$$Q\tilde{Q} = N(Q) = 1. \tag{1.7}$$

Преобразование $r' \to r$

$$r = Qr'\tilde{Q} \tag{1.8}$$

есть взаимно-однозначное преобразование x', y' в x, y. Путь x, y — аффинные координаты точки в псевдоевклидовой плоскости. Преобразования (1.8) x', y' в x, y — движения псевдоевклидовой плоскости.

2°. Возьмем координаты q_i нормированного полуантикватерниона Q в качестве однородных координат точки в трехмерном проективном пространстве P_3.

Таким образом, установлено взаимно-однозначное соответствие между движениями (1.8) псевдоевклидовой плоскости и вещественными точками P_3: *проективное пространство P_3 есть групповое пространство группы G_3 движений псевдоевклидовой плоскости.*

Совокупность точек Q в P_3 с

$$N(Q) = 0 \tag{1.9}$$

составляет квадрику

$$q_0^2 - q_1^2 = 0. \tag{1.10}$$

Назовем ее абсолютной квадрикой. При этом в P_3 возникает метрика, где под расстоянием d между двумя точками Q, Q' будем понимать

$$d^2 = (q_0 - q_0')^2 - (q_1 - q_1')^2. \tag{1.11}$$

Для точек с $d = 0$ можно ввести псевдоевклидово расстояние. Так метризованное пространство P_3 есть квазигиперболическое пространство.

Точки, для которых

$$q_0 q_0' - q_1 q_1' = 0, \tag{1.12}$$

назовем полярными.

Если подвергнем r, r' преобразованию:

$$r'^* = \tilde{R}' r' R', \quad r^* = \tilde{R} r R, \quad R\tilde{R} = R'\tilde{R}' = 1, \tag{1.13}$$

то вместо преобразования (1.8) получим

$$r^* = \tilde{Q}^* r'^* Q^* \tag{1.14}$$

с

$$Q^* = \tilde{R}' Q R. \tag{1.15}$$

Этот переход от q_i к q_i^* есть полуантикватернионное ортогональное преобразование, сохраняющее расстояние между точками в квазигиперболическом пространстве ${}^{11}S_3^2$, следовательно, определяет движение в нем.

3⁰. Пусть Q, Q' две полярные единичные точки

$$q_0^2 - q_1^2 = q_0'^2 - q_1'^2 = 1, \; q_0 q_0' - q_1 q_1' = 0. \tag{1.16}$$

Образуем произведения

$$r = \tilde{Q} Q', \quad r' = Q' \tilde{Q}. \tag{1.17}$$

Тогда r, r' являются векторами

Будем как и раньше рассматривать x, y, x', y' (координаты векторов r, r') в качестве аффинных координат точек на псевдоевклидовой плоскости ${}^1R_2$. Точку на ${}^1R_2$ с координатами x, y будем снова обозначать r. Тогда каждой прямой g, проходящей через две полярные точки Q, Q', ставится во взаимно-однозначное соответствие пара точек r, r' на ${}^1R_2$. Причем r, r' не зависят от выбора точек Q, Q' на прямой g. Если g_{ik} — плюккеровы координаты прямой g, то

$$\begin{aligned} x &= g_{02} + g_{31}, \quad x' = g_{02} - g_{31}, \\ y &= g_{03} - g_{12}, \quad y' = g_{03} + g_{12}. \end{aligned} \tag{1.18}$$

Пучку прямых в ${}^{11}S_3^2$ с центром в Q отвечает поле точек $\{r\}$ и поле точек $\{r'\}$ на ${}^1R_2$, которые совмещаются движениями плоскости ${}^1R_2$.

Таким образом, получено взаимно-однозначное отображение точек ${}^{11}S_3^2$ на движения плоскости ${}^1R_2$.

Это кинематическое отображение псевдоевклидовой плоскости на точки квазигиперболического пространства имеет много общего с известным кинематическим отображением Бляшке-Грюнвальда [2] евклидовой плоскости на точки квазиэллиптического пространства.

Движениям пространства ${}^{11}S_3^2$

$$Q^* = \tilde{R}' Q R, \quad R\tilde{R} = R'\tilde{R}' = 1, \tag{1.19}$$

примененным к прямым g, соответствуют независимые друг от друга движения

$$r^* = \tilde{R} r R, \quad r'^* = \tilde{R}' r' R' \tag{1.20}$$

плоскости ${}^1R_2$.

Следовательно, группа движений G_6 квазигиперболического пространства ${}^{11}S_3^2$ изоморфна прямому произведению двух групп G_3, G_3' движений псевдоевклидовой плоскости.

На этот результат указал Б. А. Розенфельд [6], [7].

4°. Две прямые (rr'), $(r^*r'^*)$ в ${}^{11}S_3^2$ будем называть право-параллельными, если

$$r' = r'^*, \tag{1.21}$$

и лево-параллельными, если

$$r = r^*. \tag{1.22}$$

Для правого параллелизма имеем

$$\begin{aligned} g_{02} + g_{31} &= g_{02}^* + g_{31}^*, \\ g_{03} - g_{12} &= g_{03}^* - g_{12}^*. \end{aligned} \tag{1.23}$$

Аналогично для левого параллелизма

$$\begin{aligned} g_{02} - g_{31} &= g_{02}^* - g_{31}^*, \\ g_{03} + g_{12} &= g_{03}^* + g_{12}^*, \end{aligned} \tag{1.24}$$

если нормировка выбрана так, что $g_{01} = g_{01}^* = 1$.

Абсолют ${}^{11}S_3^2$ состоит из пары вещественных плоскостей α_1, α_2 и пары вещественных точек S_1, S_2 на линии их пересечения.

Все лево-параллельные прямые пересекают одну и ту же пару прямых, из которых одна лежит в α_1 и проходит через S_1, а вторая в α_2 и проходит через S_2. Аналогично для право-параллельных прямых. Таким образом, этот параллелизм совпадает с параллелизмом Клиффорда [8].

Преобразование в ${}^{11}S_3^2$

$$X' = AX \tag{1.25}$$

переводит все лево-параллельные прямые друг в друга. Точно так же преобразование

$$X^* = XB \tag{1.26}$$

переводит все правые параллели друг в друга. Преобразования (1.25) (1.26) будем называть соответственно левым и правым переносом.

Любое движение в ${}^{11}S_3^2$ можно представить в виде произведения левого и правого переноса.

Как и в работе [8], поверхность, допускающую каноническое представление

$$X(u, v) = A(u)\, B(v), \tag{1.27}$$

будем называть поверхностью переноса.

Естественно возникает задача нахождения поверхностей в ${}^{11}S_3^2$, которые двумя существенно различными способами представимы в виде (1.27) (обобщение проблемы S. Zie [9] на ${}^{11}S_3^2$). Этому соответствует в кинематике на плоскости ${}^1R_2$ отыскание двухпараметрических движений, которые двумя существенно различными способами расслаиваются на произведение двух однопараметрических движений.

5°. В работе [8] найдены все поверхности переноса, несущие континуум сетей переноса. Определены также поверхности вращения в ${}^{11}S_3^2$, являющиеся поверхностями переноса:

$$X = A(u)\,B(v), \tag{1.28}$$

где

$$\begin{gathered} A(u) = e_0 \operatorname{ch} u + e_1 \operatorname{sh} u + \varepsilon C u\,(e_2 \operatorname{sh} u + e_3 \operatorname{ch} u), \\ B(v) = e_0 \operatorname{ch} v + e_1 \operatorname{sh} v + \varepsilon e_2\,[B \operatorname{ch} v + (Cv + C') \operatorname{sh} v] + \\ + \varepsilon e_3\,[B \operatorname{sh} v + (Cv + C') \operatorname{ch} v] \end{gathered} \tag{1.29}$$

для поверхностей, несущих две сети переноса, и

$$\begin{gathered} A(u) = e_0 \operatorname{ch} u + e_1 \operatorname{sh} u + \varepsilon a\,[e_2 \operatorname{sh}(\alpha u + \beta) + e_3 \operatorname{ch}(\alpha u + \beta)], \\ B(v) = e_0 \operatorname{ch} v + e_1 \operatorname{sh} v + \varepsilon b\,[e_2 \operatorname{ch}(\alpha v + \beta) + e_3 \operatorname{sh}(\alpha v + \beta)] \end{gathered} \tag{1.30}$$

для поверхностей, несущих четыре сети переноса.

Для поверхностей, несущих континуум сетей переноса, имеем

$$\begin{gathered} A(u) = e_0 \operatorname{ch} u + e_1 \operatorname{sh} u + \varepsilon \sqrt{au + b}\,[e_2 \operatorname{sh}(u + \vartheta) + e_3 \operatorname{ch}(u + \vartheta)], \\ B(v) = e_0 \operatorname{ch} v + e_1 \operatorname{sh} v + \varepsilon \sqrt{av + c}\,[e_2 \operatorname{ch}(v - \vartheta) + e_3 \operatorname{sh}(v - \vartheta)]. \end{gathered} \tag{1.31}$$

Этим поверхностям соответствуют в силу кинематического отображения двухпараметрические движения, которые расслаиваются на произведение двух однопараметрических движений, соответствующих $A(u)$ и $B(v)$.

Однопараметрическое движение, соответствующее $A(u)$ в (1.29), можно записать так:

$$\begin{aligned} X &= x' \operatorname{ch} 2u - y' \operatorname{sh} 2u + 2Cu, \\ y &= -x' \operatorname{sh} 2u + y' \operatorname{ch} 2u. \end{aligned} \tag{1.32}$$

Это движение имеет неподвижной центроидой окружность радиуса $|2C|$

$$\begin{aligned} x' &= 2C \operatorname{ch} 2u, \\ y' &= 2C \operatorname{sh} 2u, \end{aligned} \tag{1.33}$$

и подвижной центроидой прямую

$$\begin{aligned} x &= 2C\,(1 + u), \\ y &= 0. \end{aligned} \tag{1.34}$$

Для второго однопараметрического движения, соответствующему $B(v)$, имеем

$$\begin{aligned} x &= x' \operatorname{ch} 2v - y' \operatorname{sh} 2v + 2\,(Cv + C'), \\ y &= -x' \operatorname{sh} 2v + y' \operatorname{ch} 2v - 2B. \end{aligned} \tag{1.35}$$

Неподвижной центроидой его служит окружность радиуса $|2C|$

$$\begin{aligned} x' &= 2C \operatorname{ch} 2v, \\ y' &= 2C \operatorname{sh} 2v, \end{aligned} \tag{1.36}$$

и подвижной — прямая

$$\begin{aligned} x &= 2\,(Cv + C + C'), \\ y &= -2B. \end{aligned} \tag{1.37}$$

Однопараметрическое движение, соответствующее $A(u)$ в (1.30), можно записать так:

$$\begin{aligned} x &= x' \operatorname{ch} 2u - y' \operatorname{sh} 2u + 2a \operatorname{ch}(\alpha u - u + \beta), \\ y &= -x' \operatorname{sh} 2u + y' \operatorname{ch} 2u + 2a \operatorname{sh}(\alpha u - u + \beta). \end{aligned} \tag{1.38}$$

Оно имеет неподвижной центроидой окружность радиуса $|2a(\alpha-1)|$

$$\begin{aligned} x' &= 2a(\alpha-1) \operatorname{ch}(\alpha u + u + \beta), \\ y' &= 2a(\alpha-1) \operatorname{sh}(\alpha u + u + \beta), \end{aligned} \tag{1.39}$$

и подвижной — окружность радиуса $|2a|$

$$\begin{aligned} x &= 2a \operatorname{ch}(\alpha u - u + \beta), \\ y &= 2a \operatorname{sh}(\alpha u - u + \beta). \end{aligned} \tag{1.40}$$

Однопараметрическое движение, соответствующее $B(v)$, имеет центроидами окружности радиусов $|2b(\alpha-1)|$ и $|2b|$. Для других способов канонического представления поверхностей (1.29), (1.30) соответствующие движения имеют своими центроидами тоже круги, но других радиусов.

Однопараметрическое движение, соответствующее $A(u)$ в (1.31), имеет вид

$$\begin{aligned} x &= x' \operatorname{ch} 2u - y' \operatorname{sh} 2u + \sqrt{au+b} \operatorname{ch} \vartheta, \\ y &= -x' \operatorname{sh} 2u + y' \operatorname{ch} 2u + \sqrt{au+b} \operatorname{sh} \vartheta. \end{aligned} \tag{1.41}$$

Это движение имеет неподвижной центроидой

$$\begin{aligned} x' &= \frac{a}{2\sqrt{au+b}} \operatorname{sh}(2u+\vartheta) \\ y' &= \frac{a}{2\sqrt{au+b}} \operatorname{ch}(2u+\vartheta), \end{aligned} \tag{1.42}$$

и подвижной центроидой

$$\begin{aligned} x &= \frac{a}{2\sqrt{au+b}} \operatorname{sh} \vartheta + \sqrt{au+b} \operatorname{ch} \vartheta, \\ y &= \frac{a}{2\sqrt{au+b}} \operatorname{ch} \vartheta + \sqrt{au+b} \operatorname{sh} \vartheta. \end{aligned} \tag{1.43}$$

Однопараметрическое движение, соответствующее $B(v)$ в (1.31), имеет вид

$$\begin{aligned} x &= x' \operatorname{ch} 2v - y' \operatorname{sh} 2v - \sqrt{av+c} \operatorname{sh} \vartheta, \\ y &= -x' \operatorname{sh} 2v + y' \operatorname{ch} 2v + \sqrt{av+c} \operatorname{ch} \vartheta. \end{aligned} \tag{1.44}$$

Оно имеет неподвижной центроидой

$$\begin{aligned} x' &= \frac{a}{2\sqrt{av+c}} \operatorname{ch}(2v-\vartheta), \\ y' &= \frac{a}{2\sqrt{av+c}} \operatorname{sh}(2v-\vartheta), \end{aligned} \tag{1.45}$$

и подвижной

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{a}{2\sqrt{av+c}}\operatorname{ch}\vartheta - \sqrt{av+c}\operatorname{sh}\vartheta,\\
y &= -\frac{a}{2\sqrt{av+c}}\operatorname{sh}\vartheta + \sqrt{av+c}\operatorname{ch}\vartheta.
\end{aligned} \tag{1.46}
$$

Параметр ϑ отвечает различным способам канонического представления поверхностей (1.31), меняя его, мы получим различные однопараметрические движения (1.41), (1.44), на которые расслаивается двухпараметрическое движение, соответствующее в силу кинематического отображения поверхностям (1.31). При этом тип центроид однопараметрических движений не меняется.

§ 2. Кинематика плоскости дуальной евклидовой

Абсолют плоскости дуальной евклидовой состоит из пары комплексно-сопряженных прямых

$$x_0^2 + x_1^2 = 0 \tag{2.1}$$

и точки их пересечения $S(0, 0, 1)$.

Будем рассматривать матрицы вида

$$A = \begin{pmatrix} a_0 + ia_1 & a_2 + ia_3 \\ 0 & a_0 - ia_1 \end{pmatrix}, \quad i^2 = -1. \tag{2.2}$$

Назовем нормой матрицы A величину определителя

$$N(A) = \begin{vmatrix} a_0 + ia_1 & a_2 + ia_3 \\ 0 & a_0 - ia_1 \end{vmatrix} = a_0^2 + a_1^2. \tag{2.3}$$

Обозначим $\tilde{A}$ матрицу

$$
\begin{gathered}
\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_0 + ia_1 & a_2 - ia_3 \\ 0 & a_0 - ia_1 \end{pmatrix},\\
\widetilde{AB} = \tilde{B}\tilde{A}.
\end{gathered} \tag{2.4}
$$

Пусть имеем нормированные матрицы

$$
\begin{gathered}
X = \begin{pmatrix} x_0 + ix_1 & x_2 \\ 0 & x_0 - ix_1 \end{pmatrix}, \quad X' = \begin{pmatrix} x'_0 + ix'_1 & x'_2 \\ 0 & x'_0 - ix'_1 \end{pmatrix},\\
A = \begin{pmatrix} a_0 + ia_1 & a_2 + ia_3 \\ 0 & a_0 - ia_1 \end{pmatrix}, \quad N(A) = N(X) = N(X') = 1.
\end{gathered} \tag{2.5}
$$

Тогда преобразование $X' \to X$

$$X = AX'\tilde{A} \tag{2.6}$$

есть взаимно-однозначное преобразование x'_i в x_i.

Будем рассматривать x_i как однородные координаты точки на плоскости (S_2^1), дуальной евклидовой. Тогда преобразование (2.6) есть движение этой плоскости. Следовательно, получено взаимно-однозначное соответствие между матрицами вида (2.2) и движениями дуальной плоскости S_2^1.

Возьмем координаты a_i нормированной матрицы A в качестве однородных координат точки A в трехмерном проективном пространстве P_3.

Таким образом, устанавливается взаимно-однозначное соответствие между движениями (2.6) дуальной плоскости S_2^1 и вещественными точками P_3:

проективное пространство P_3 есть групповое пространство группы G_3 движений дуальной плоскости S_2^1.

Совокупность точек A в P_3 с $N(A)=0$ составляет абсолютную квадрику:

$$a_0^2 + a_1^2 = 0. \tag{2.7}$$

При этом в P_3 возникает метрика, где под расстоянием d между двумя нормированными точками A, B будем понимать

$$\begin{gathered} d^2 = N(A-B) = (a_0 - b_0)^2 + (a_1 - b_1)^2, \\ a_0^2 + a_1^2 = b_0^2 + b_1^2 = 1. \end{gathered} \tag{2.8}$$

Так метризованное пространство P_3 есть *квазиэллиптическое пространство S_3^2.*

Если подвергнем X, X' преобразованию:

$$X^* = BX\tilde{B},\ X'^* = CX'\tilde{C},\ N(B) = N(C) = 1, \tag{2.9}$$

то вместо преобразования (2.6) получим новое

$$X^* = A^* X'^* A^* \tag{2.10}$$

с

$$A^* = BAC^{-1},\ CC^{-1} = E. \tag{2.11}$$

Этот переход от a_i к a_i^* есть линейное преобразование, сохраняющее расстояние между точками в квазиэллиптическом пространстве S_3^2, следовательно, означает движение в S_3^2.

Движениям (2.11) квазиэллиптического пространства S_3^2 соответствуют независимые друг другу движения (2.9) плоскости S_2^1, следовательно, *группа движений G_6 квазиэллиптического пространства S_3^2 изоморфна прямому произведению двух групп G_3, G_3' движений дуально евклидовой плоскости.*

Так как G_6 изоморфна прямому произведению двух групп движений евклидовой плоскости, то *группы движений евклидовой плоскости и плоскости ей дуальной изоморфны.*

В заключение следует отметить, что плоскость дуальна евклидовой является плоскостью в квазиэллиптическом пространстве S_3^2.

§ 3. Кинематика квазигиперболической плоскости

Плоскость квазигиперболического пространства ${}^{11}S_3^2$ может быть либо псевдоевклидовой ${}^1R_2$, либо дуальной псевдоевклидовой ${}^1S_2^1$ с абсолютом, состоящим из пары вещественных прямых

$$x_0^2 - x_1^2 = 0 \tag{3.1}$$

и их точки пересечения $S(0, 0, 1)$.

Будем рассматривать матрицы вида

$$A = \begin{pmatrix} a_0 + ea_1 & a_2 + ea_3 \\ 0 & a_0 - ea_1 \end{pmatrix}, \quad e^2 = 1. \tag{3.2}$$

Как и в § 2 введем норму матрицы A

$$N(A) = \begin{vmatrix} a_0 + ea_1 & a_2 + ea_3 \\ 0 & a_0 - ea_1 \end{vmatrix} = a_0^2 - a_1^2 \tag{3.3}$$

и матрицу $\tilde{A}$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_0 + ea_1 & a_2 - ea_3 \\ 0 & a_0 - ea_1 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{AB} = \tilde{B}\tilde{A}. \tag{3.4}$$

Пусть имеем нормированные матрицы

$$\begin{gathered} X = \begin{pmatrix} x_0 + ex_1 & x_2 \\ 0 & x_0 - ex_1 \end{pmatrix}, \quad X' = \begin{pmatrix} x_0' + ex_1' & x_2' \\ 0 & x_0' - ex_1' \end{pmatrix}, \\ A = \begin{pmatrix} a_0 + ea_1 & a_2 + ea_3 \\ 0 & a_0 - ea_1 \end{pmatrix}, \quad N(A) = N(X) = N(X') = 1. \end{gathered} \tag{3.5}$$

Тогда преобразование $X' \to X$

$$X = AX'\tilde{A} \tag{3.6}$$

есть взаимно-однозначное линейное преобразование x_i' в x_i.

Будем рассматривать x_i как однородные координаты точки квазигиперболической плоскости ${}^1S_2^1$. Тогда преобразование (3.6) есть движение плоскости ${}^1S_2^1$.

Следовательно, возникает взаимно-однозначное соответствие между матрицами вида (3.2) и движениями квазигиперболической плоскости ${}^1S_2^1$ (плоскости дуальной псевдоевклидовой).

Возьмем координаты a_i нормированной матрицы A в качестве однородных координат точки A в трехмерном проективном пространстве P_3.

Таким образом, устанавливается взаимно-однозначное соответствие между движениями (3.6) квазигиперболической плоскости ${}^1S_2^1$ и вещественными точками P_3: *проективное пространство P_3 есть групповое пространство группы G_3 движений квазигиперболической плоскости ${}^1S_2^1$.*

Совокупность точек A с $N(A) = 0$ составляет абсолютную квадрику в P_3:

$$a_0^2 - a_1^2 = 0. \tag{3.7}$$

При этом в P_3 возникает метрика, где под расстоянием d между двумя точками A, B будем понимать

$$\begin{gathered} d^2 = N(A - B) = (a_0 - b_0)^2 - (a_1 - b_1)^2, \\ a_0^2 - a_1^2 = b_0^2 - b_1^2 = 1. \end{gathered} \tag{3.8}$$

Так метризованное пространство P_3 есть *квазигиперболическое пространство ${}^{11}S_3^2$.*

Аналогично, как и в § 2, легко показать, что *группа движений G_6 квазигиперболического пространства ${}^{11}S_3^2$ изоморфна прямому произведению двух групп G_3, G_3' движений плоскости дуальной псевдоевклидовой.*

Имеем также, что *группы движений псевдоевклидовой плоскости и плоскости ей дуальной изоморфны.*

Таким образом, *группа движений квазигиперболического пространства S_3^1 изоморфна прямому произведению двух групп движений квазигиперболической плоскости.*

В заключение выражаю глубокую благодарность профессору Л. П. Бланку за полезные советы и замечания, высказанные при обсуждении этой работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. W. Blaschke. Euklidische Kinematik und nichteuklidische Geometrie. Zeitschrift für Mathematik und Physik, 60 (1911), s. 61—91, 203—204.
2. W. Blaschke. Ebene Kinematik. Berlin — Leipzig, 1930.
3. W. Blaschke. Kinematik und Quaternionen. Berlin — Leipzig, 1962.
4. W. Blaschke, G. Müller. Sphärische Kinematik und Quaternionen. Berlin — Leipzig. 1956.
5. Л. Т. Моторный. О кинематике на плоскости Лобачевского. Укр. геометр. сб., в. 4, Изд-во ХГУ, Харьков, 1967.
6. Б. А. Розенфельд. Неевклидовы геометрии. Гостехиздат, М., 1955.
7. Б. А. Розенфельд, И. М. Яглом, Е. У. Ясинская. Проективные метрики. «Усп. матем. наук», т. XIX, вып. 5, 51—113, 1964.
8. Л. Т. Моторный. Об обобщенных поверхностях переноса. «Укр. геометр. сб.», в. 2, Изд-во ХГУ, Харьков, 1966.
9. S. Lie. Das Abelsche Theorem und die Translationsmannigfaltigkeiten. Leipzig Berichte, 29, 1897.

Поступила 14 ноября 1966 г.

ОБ n-МЕРНЫХ РИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ, ДОПУСКАЮЩИХ СЕМЕЙСТВА ВПОЛНЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Ю. С. Слободян (Харьков)

Пусть n-мерное риманово пространство допускает μ-параметрическое семейство вполне геодезических гиперповерхностей. Индикатриса Эйнштейна в этом случае допускает по меньшей мере $(\mu-1)$-параметрическое семейство главных направлений [1].

Теорема. *Если полное n-мерное риманово пространство с аналитической метрикой допускает только μ-параметрическое семейство вполне геодезических гиперповерхностей, и через каждую точку пространства проходит по крайней мере $(\mu-1)$-параметрическое семейство вполне геодезических гиперповерхностей, причем существует хотя бы одна точка, в которой индикатриса Эйнштейна пространства допускает точно $(\mu-1)$-параметрическое семейство главных направлений, то либо все поверхности μ-параметрического семейства проходят через изолированное множество $(n-\mu-1)$-мерных поверхностей, либо через каждую точку пространства проходит $(\mu-1)$-параметрический пучок вполне геодезических гиперповерхностей с $(n-\mu)$-мерной «осью», и никакие две «оси» не пересекаются. Линейный элемент пространства имеет вид:*

$$dS^2 = d\sigma^2_{n-\mu} + \varphi(x^1, \ldots, x^{n-\mu})\, dS^2_\mu, \tag{1}$$

где $d\sigma^2_{n-\mu} = d\sigma^2_{n-\mu}(x^1, \ldots, x^{n-\mu})$, $dS^2_\mu = dS^2_\mu(x^{n-\mu+1}, \ldots, x^n)$; *если* $\mu > 2$, *то* dS^2_μ *имеет постоянную кривизну.*

Доказательство. Так как индикатриса в каждой точке пространства допускает по меньшей мере $(\mu-1)$-параметрическое семейство главных направлений и существует точка, в которой индикатриса допускает только $(\mu-1)$-параметрическое семейство главных направлений, то множество V тех точек, в которых индикатриса допускает семейство главных направлений, зависящее от числа параметров $\nu > \mu-1$, представляет собой на основании теоремы D [3] некоторую совокупность изолированных k-мерных поверхностей, $k = 0, \ldots, n-1$.

Выделим следующие случаи:

I. Множество V состоит из изолированных поверхностей Φ_ν, размерность которых $0 \leqslant \nu \leqslant n-\mu+1$.

II. Множество V состоит из изолированных k-мерных поверхностей, $k = 0,1 \ldots, n-1$.

Рассмотрим случай I.

Пусть множество V состоит из изолированных поверхностей Φ_ν.

Возьмем точку $M \in V$. Через M проходит $(\mu-1)$-параметрическое семейство вполне геодезических гиперповерхностей $\{F_M\}_{\mu-1}$. Так как каждая поверхность семейства ортогональна главному направлению индикатрисы и в точке M существует только $(\mu-1)$-параметрическое семейство главных направлений, образующее μ-мерную плоскость, то все поверхности $(\mu-1)$-параметрического семейства $\{F_M\}_{\mu-1}$ проходят через $(n-\mu)$-мерную вполне геодезическую поверхность. Следовательно, семейство $\{F_M\}_{\mu-1}$ образует пучок с $(n-\mu)$-мерной «осью» $F_{(n-\mu)M}$.

Возьмем точку $N \in V$, $N \in F_{(n-\mu)M}$. Через точку N также проходит $(\mu-1)$-параметрический пучок с $(n-\mu)$-мерной «осью» $F_{(n-\mu)N}$.

Возможны следующие случаи:

а) «оси» $F_{(n-\mu)M}$ и $F_{(n-\mu)N}$ пересекаются по $(n-\mu-1)$-мерной «оси» $F_{(n-\mu-1)MN}$;

б) «оси» $F_{(n-\mu)M}$ и $F_{(n-\mu)N}$ пересекаются по ν-мерной «оси» $F_{\nu MN}$, где $n-2\mu \leqslant \nu \leqslant n-\mu-2$;

с) «оси» $F_{(n-\mu)M}$ и $F_{(n-\mu)N}$ не пересекаются.

Заметим, что поверхности $F_{(n-\mu)M}$ и $F_{(n-\mu)N}$ не могут пересекаться по поверхности, размерность которой меньше $n-2\mu$. В противном случае в точках поверхности, полученной при пересечении, существовало бы число линейно независимых векторов большее n. Пространство имело бы размерность большую n.

Рассмотрим случай *а*).

Пусть «оси» $F_{(n-\mu)M}$ и $F_{(n-\mu)N}$ пересекаются по $(n-\mu-1)$-мерной поверхности $F_{(n-\mu-1)MN}$.

Возьмем точку $P \in F_{(n-\mu-1)MN}$. В точке P индикатриса допускает $(\mu-1)$-параметрическое семейство главных направлений E'_μ, ортогональное $F_{(n-\mu)M}$, и еще $(\mu-1)$-параметрическое семейство главных направлений E''_μ, ортогональное $F_{(n-\mu)N}$. Так как поверхности $F_{(n-\mu)M}$ и $F_{(n-\mu)M}$ имеют общую поверхность $F_{(n-\mu-1)MN}$, то плоскости E'_μ и E''_μ ортогональны $F_{(n-\mu-1)MN}$. Ортогонально $F_{(n-\mu-1)MN}$ может проходить только $(\mu+1)$-мерное направление. Отсюда следует, что E'_μ и E''_μ имеют общее $(\mu-1)$-мерное направление. Но E'_μ и E''_μ — плоскости главных направлений индикатрисы. Кроме того, плоскость $E_{(n-\mu-1)}$, касательная к $F_{(n-\mu-1)}$, и плоскость, ортогональная ей, исчерпывают все пространство. Таким образом в точке P индикатриса допускает μ-параметрическое семейство главных направлений, образующее $(\mu+1)$-мерную плоскость. Отсюда следует, что точка P принадлежит множеству V. Так как P была произвольной точкой поверхности $F_{(n-\mu-1)MN}$, то вся поверхность $F_{(n-\mu-1)MN}$ принадлежит множеству V.

Заметим, что случай *а*) невозможен, если размерность поверхностей, входящих в множество V, меньше $n-\mu-1$.

Возьмем точку P_0, не лежащую ни на $F_{(n-\mu)M}$, ни на $F_{(n-\mu)N}$. На $F_{(n-\mu)M}$ возьмем точку Q. Проведем через Q все поверхности, принадлежащие $(\mu-1)$-мерному пучку с «осью» $F_{(n-\mu)N}$. Получим $(\mu-2)$-параметрический пучок вполне геодезических поверхностей с $(n-\mu+1)$-мерной «осью» $F_{(n-\mu+1)MN}$. Поверхность $F_{(n-\mu)M}$ принадлежит поверхности $F_{(n-\mu+1)MN}$, так как $F_{(n-\mu)M}$ и $F_{(n-\mu)N}$ пересекаются по $(n-\mu-1)$-мерной поверхности $F_{(n-\mu-1)MN}$. Предположим также, что P_0 не принадлежит «оси» $F_{(n-\mu+1)MN}$ и что P_0 не принадлежит множеству V. Проведем через P_0 $(\mu-2)$-параметрический пучок вполне геодезических поверхностей из $(\mu-1)$-мерного пучка с «осью» $F_{(n-\mu)M}$. Обозначим его $\{F_{(\mu-2)MP_0}\}$. Проведем также через P_0 $(\mu-2)$-параметрический пучок вполне геодезических поверхностей из $(\mu-1)$-параметрического пучка с «осью» $F_{(n-\mu)N}$. Обозначим его $\{F_{(\mu-2)NP_0}\}$. Пучок $\{F_{(\mu-2)MP_0}\}$ имеет $(n-\mu+1)$-мерную «ось» $F_{(n-\mu+1)MP_0}$, пучок $F\{_{(\mu-2)NP_0}\}$ имеет $(n-\mu+1)$-мерную «ось» $F_{(n-\mu+1)NP_0}$. «Оси» $F_{(n-\mu+1)MP_0}$ и $F_{(n-\mu+1)NP_0}$ пересекаются по $(n-\mu)$-мерной поверхности $F_{(n-\mu)MN}$, так как они уже имеют общую $(n-\mu-1)$-мерную поверхность $F_{(n-\mu-1)MN}$ и еще точку P_0. Через точку P_0 проходит также по условию теоремы $(\mu-1)$-мерный пучок $\{F_{(\mu-1)P_0}\}$ с $(n-\mu)$-мерной «осью» $F_{(n-\mu)P_0}$.

Возможны следующие случаи:

1) поверхности $F_{(n-\mu)MN}$ и $F_{(n-\mu)P_0}$ пересекаются по $(n-\mu-1)$-мерной поверхности $F_{(n-\mu-1)P_0}$;

1) поверхности $F_{(n-\mu)MN}$ и $F_{(n-\mu)P_0}$ пересекаются по σ-мерной поверхности $F_{\sigma P_0}$ $n-2\mu \leqslant \sigma \leqslant n-\mu-2$.

Как было отмечено выше, поверхности $F_{(n-\mu)P_0}$ и $F_{(n-\mu)MN}$ не могут пересекаться по поверхности, размерность которой меньше $n-2\mu$.

Рассмотрим случай 1).

Пусть поверхности $F_{(n-\mu)P_0}$ и $F_{(n-\mu)MN}$ пересекаются по $(n-\mu-1)$-мерной поверхности $F_{(n-\mu-1)P_0}$.

Рассмотрим главные направления индикатрисы в точке P_0. В P_0 индикатриса допускает $(\mu-1)$-параметрическое семейство $E_{\mu P_0}$, ортогональное «оси» $F_{(n-\mu)P_0}$, и еще два $(\mu-2)$-параметрические семейства главных направлений; $F_{(\mu-1)MP_0}$, ортогональное «оси» $F_{(n-\mu+1)MP_0}$ и $E_{(\mu-1)NP_0}$, ортогональное «оси» $F_{(n-\mu+1)NP_0}$. Так как «оси» $F_{(n-\mu+1)MP_0}$ и $F_{(n-\mu+1)NP_0}$ имеют общую $(n-\mu)$-мерную поверхность $F_{(n-\mu)MN}$, то плоскости $E_{(\mu-1)MP_0}$ и $E_{(\mu-1)NP_0}$ ортогональны $F_{(n-\mu)MN}$.

Рассмотрим два случая:

$$\alpha)\ \mu=2,$$
$$\beta)\ \mu>2.$$

Начнем со случая β). Пусть $\mu>2$. В этом случае $E_{(\mu-1)MP_0}$ и $E_{(\mu-1)NP_0}$ имеют размерность большую или равную двум. Так как обе они ортогональны поверхности $F_{(n-\mu)MN}$, то у них есть общие направления, но тогда обе плоскости $E_{(\mu-1)MP_0}$ и $E_{(\mu-1)NP_0}$ лежат, по свойству главных направлений, на μ-мерной плоскости главных направлений $E_{\mu P_0}$. Так как по предположению «ось» $F_{(n-\mu)P_0}$ пересекается с поверхностью $F_{(n-\mu)MN}$ по $(n-\mu-1)$-мерной поверхности $F_{(n-\mu-1)P_0}$, то плоскость главных направлений $E_{\mu P_0}$, ортогональная «оси» $F_{(n-\mu)P_0}$, будет ортогональна поверхности $F_{(n-\mu-1)P_0}$. Но поверхности $F_{(n-\mu-1)P_0}$ ортогональна также плоскость $E_{\mu MN}$. Если «ось» $F_{(n-\mu)P_0}$ не совпадает с поверхностью $F_{(n-\mu)MN}$, то индикатриса в точке P_0 допускает μ-параметрическое семейство главных направлений, что противоречит предположению.

Таким образом, в случае β) «ось» семейства, проходящего через P_0, проходит через $(n-\mu-1)$-мерную поверхность $F_{(n-\mu-1)MN}$, полученную при пересечении двух $(n-\mu)$-мерных «осей» $F_{(n-\mu)M}$ и $F_{(n-\mu)N}$.

Рассмотрим случай α).

Пусть $\mu=2$. Через точки M и N проходят однопараметрические пучки вполне геодезических поверхностей $\{F_{1M}\}$ и $\{F_{1N}\}$ с «осями» $F_{(n-2)M}$ и $F_{(n-2)N}$ соответственно. «Оси» $F_{(n-2)M}$ и $F_{(n-2)N}$ пересекаются по $(n-3)$-мерной «оси» $F_{(n-3)MN}$. Через точку P_0 проходит поверхность F_M из семейства с «осью» $F_{(n-2)M}$ и поверхность F_N из пучка с «осью» $F_{(n-2)N}$. Поверхности F_M и F_N пересекаются по $(n-2)$-мерной поверхности $F_{(n-2)MN}$. Через точку P_0 проходит также семейство с «осью» $F_{(n-2)P_0}$. Поверхности $F_{(n-2)P_0}$ и $F_{(n-2)MN}$ пересекаются по $(n-3)$-мерной поверхности $F_{(n-3)MN}$. В точке P_0 индикатриса допускает однопараметрическое семейство главных направлений E_{2P_0}, ортогональное $F_{(n-2)P_0}$, и еще два главных направления n_M и n_N, ортогональные соответственно F_M и F_N.

Докажем, что «ось» $F_{(n-2)P_0}$ совпадает и в этом случае с поверхностью $F_{(n-2)MN}$.

Предположим обратное. Пусть поверхности $F_{(n-2)P_0}$ и $F_{(n-2)MN}$ не совпадают. Поверхности $F_{(n-3)MN}$ ортогональна двумерная плоскость главных направлений E_{2P_0} и два главных направления n_M и n_N. Так как поверхности $F_{(n-2)P^0}$ и $F_{(n-2)MN}$ не совпадают, то хотя бы одно из направлений n_M или n_N не лежит в плоскости E_{2P_0}. Пусть n_M не лежит в плоскости E_{2P_0}, а n_N принадлежит этой плоскости. Тогда поверхности F_M и F_N пересекаются ортогонально, т. е. n_M ортогонально плоскости E_{2P_0}. В противном случае индикатриса в точке P_0 допускала бы двупараметрическое семейство главных направлений, что противоречило бы выбору точки P_0. Так как n_M ортогонально также F_M, то плоскость E_{2P_0} расположена в касательном пространстве к поверхности F_M. На F_M выбираем последовательность точек $P_i \to M$, $P_i \in V$. Это можно сделать в силу строения V в этом случае. В каждой из точек P_i имеет место та же картина, что и в точке P_0. Поэтому в предельной точке M индикатриса допускает два различных однопараметрических семейства главных направлений. Одно семейство E'_{2M}, ортогональное «оси» $F_{(n-2)M}$ по условию, и второе E''_{2M}, полученное при предельном переходе для последовательности P_i. Двумерные плоскости E'_{2M} и E''_{2M} имеют общее направление. В силу свойств семейств главных направлений в точке M индикатриса допускает двупараметрическое семейство главных направлений, что противоречит выбору точки M.

Таким образом, и в случае, когда $\mu = 2$, ось однопараметрического пучка, проходящего через точку P_0, совпадает с поверхностью $F_{(n-3)MN}$.

Заметим, что если бы направление n_M лежало в плоскости E_{2P_0}, а n_N было ортогонально ей, то мы последовательности точек P_i выбирали бы на F_N.

Так как точка P_0 была произвольной точкой пространства не принадлежащей V и не лежащей на $(n-\mu+1)$-мерной «оси», которая содержит «оси» $F_{(n-\mu)M}$ и $F_{(n-\mu)N}$, то утверждение для всех таких точек доказано.

Докажем, что «оси» $(\mu-1)$-параметрических пучков вполне геодезических гиперповерхностей, проходящих через точки $(n-\mu+1)$-мерной «оси» $F_{(n-\mu+1)MN}$, содержат $F_{(n-\mu-1)MN}$.

Пусть M — произвольная точка на «оси» $F_{(n-\mu+1)MN}$.

Для доказательства достаточно поменять ролями точку P_0 и точку M, так как «ось» семейства, проходящего через P_0 по доказанному проходит через $(n-\mu-1)$-мерную поверхность, которая лежит на «оси» семейства, проходящего через точку N.

Рассмотрение подслучая 1) случая а) полностью окончено.

Рассмотрим подслучай 2) случая а).

Пусть поверхности $F_{(n-\mu)P_0}$ и $F_{(n-\mu)MN}$ пересекаются по σ-мерной поверхности $F_{\sigma P_0}$ $n-2\mu \leqslant \sigma \leqslant n-\mu-2$.

Докажем, что в этом случае через точку P_0 проходит еще некоторое конечное число $(\mu-1)$-параметрических пучков вполне геодезических поверхностей с $(n-\mu)$-мерными «осями», и среди этих пучков найдется один, «ось» которого $F_{(n-\mu)P_0}$ пересекается с поверхностью $F_{(n-\mu)MN}$ по $(n-\mu-1)$-мерной поверхности.

Доказательство. Проведем через «ось» $F_{(n-\mu)N}$ и точку P_0 $(\mu-2)$-параметрическое семейство вполне геодезических гиперповерхностей. Обозначим, согласно предыдущему, «ось» этого семейства $F_{(n-\mu+1)NP_0}$. «Оси» $F_{(n-\mu)P_0}$ и $F_{(n-\mu+1)NP_0}$ пересекаются по σ_0-мерной поверхности $F_{\sigma_0 P_0}$, $n-2\mu+1 \leqslant \sigma_0 \leqslant n-\mu+1$. Плоскость главных направлений $E_{\mu P_0}$, ортогональная «оси» $F_{(n-\mu)P_0}$, будет ортогональна поверхности $F_{\sigma_0 P_0}$. Поверхности $F_{\sigma_0 P}$, ортогональна также $(\mu-1)$-мерная плоскость главных направлений $E_{(\mu-1)NP_0}$, ортогональная поверхности $F_{(n-\mu+1)NP_0}$. Если плоскость $E_{(\mu-1)NP_0}$ не лежит на плоскости $E_{\mu P_0}$, то $E_{(\mu-1)NP_0}$ и $E_{\mu P_0}$ не могут иметь общих направлений. В противном случае индикатриса в точке P_0 допускала бы семейство главных направлений, зависящее от числа параметров большего $\mu-1$. Если $E_{(\mu-1)NP_0}$ лежит на $E_{\mu P_0}$, то «оси» $F_{(n-\mu)P_0}$ и $F_{(n-\mu)MN}$ пересекаются по $(n-\mu-1)$-мерной поверхности, что противоречит предположению. Таким образом, плоскости $E_{(\mu-1)NP_0}$ и $E_{\mu P_0}$ имеют общей только точку P_0. Индикатриса в точке P_0 допускает $(\mu-1)$-параметрическое семейство главных направлений и ортогональное ему $(\mu-2)$-параметрическое семейство главных направлений. Оба эти семейства ортогональны поверхности $F_{\sigma_0 P_0}$. Возьмем точку N_1, близкую к точке N, но не лежащую ни на $F_{(n-\mu)N}$, ни на $F_{(n-\mu+1)NP_0}$, $N_1 \in V$. Через точку N_1 проходит $(\mu-1)$-параметрический пучок с «осью» $F_{(n-\mu)N_1}$. Проведем через точку P_0 все вполне геодезические поверхности, принадлежащие пучку с «осью» $F_{(n-\mu)N_1}$. Получим $(\mu-2)$-параметрический пучок вполне геодезических гиперповерхностей с «осью» $F_{(n-\mu+1)N_1P_0}$. В точке P_0 ортогонально этой «оси» существует $(\mu-2)$-параметрический пучок главных направлений, образующий $(\mu-1)$-мерную плоскость $E_{(\mu-1)N_1P_0}$.

Как и в подслучае 1) случая a), выделим два случая

$$\alpha)\ \mu=2,$$
$$\beta)\ \mu>2.$$

Рассмотрим сначала случай β). Пусть $\mu>2$. Рассмотрим пересечение поверхности $F_{\sigma_0 P_0}$ и «оси» $F_{(n-\mu+1)N_1P_0}$. Размерность поверхности $F_{\sigma_1 P_0}$, полученной при пересечении, равна некоторому числу σ_1, причем $n-3\mu+2\leqslant\sigma_1\leqslant\sigma_0-1$. Ортогонально поверхности $F_{\sigma_1 P_0}$ существуют три взаимно ортогональные семейства главных направлений. Размерность одного из них равна μ, размерность каждого из остальных равна $\mu-1$. В сумме размерность всех трех семейств главных направлений равна $3\mu-2$. Выбирая аналогично точке N_1 точки $N_2,\ldots,N_k$, мы получим в точке P_0 $k+1$ семейство главных направлений, общей размерностью $(k+1)\mu-k$, ортогональных поверхности $F_{\sigma_k P_0}$, размерность которой $n-(k+1)\mu+k\leqslant\sigma_k\leqslant\sigma_{k-1}-1$. Число k выбираем настолько большим, чтобы величина $n-(k+2)\mu+k+1-\sigma_{k+1}$ была отрицательной. Таким образом мы получили, что в n-мерном римановом пространстве в точке P_0 существует число независимых векторов, большее n, что невозможно. Итак, общая размерность семейств главных направлений меньше величины $(k+1)\mu-k$. Если ни одно из $(\mu-2)$-параметрических семейств главных направлений не лежит на $(\mu-1)$-параметрическом семействе, то индикатриса в точке P_0 допускает несколько $(\mu-1)$-параметрических семейств главных направлений. Выбираем теперь аналогичную точкам N_k последовательность точек $N'_k\to N$. Для каждой точки N'_k в точке P_0 получим $(\mu-2)$-параметрическое семейство вполне геодезических гиперповерхностей. В точке P_0 существует сходящаяся последовательность таких семейств. На основании леммы [3] ее можно продолжить $(\mu-1)$-параметрического семейства; «ось» этого семейства $F'_{(n-\mu)P_0}$ лежит на $(n-\mu+1)$-мерной «оси» $F_{(n-\mu+1)NP_0}$. «Ось» $F'_{(n-\mu)P_0}$ и поверхность $F_{(n-\mu)MN}$, имея общую точку, пересекаются по $(n-\mu-1)$-мерной поверхности $F_{(n-\mu-1)P_0}$.

Аналогично исследуется и случай α).

Пусть $\mu=2$. Выбираем точку $N_1\in V$ так, чтобы она не лежала на поверхности, проходящей через «оси» $F_{(n-2)M}$ и $F_{(n-2)N}$. Проводим через точку N_1 и P_0 вполне геодезическую поверхность $F_{N_1P_0}$. Поверхность $F_{N_1P_0}$ пересекает $F_{(n-3)NP_0}$ по поверхности $F_{(n-4)NP_0}$. Выбирая дальше аналогично точки $N_2, \ldots, N_{n-2}$, получим, что либо индикатриса в точке P_0 не допускает больше однопараметрических семейств главных направлений и тогда ортогонально каждому главному направлению проходит вполне геодезическая поверхность, либо индикатриса допускает в точке P_0 некоторое число $\sigma \leqslant n/2$ однопараметрических семейств главных направлений. Выбирая последовательность точек $N'_k \to N$, получим, что в P_0 пространство допускает несколько различных однопараметрических семейств вполне геодезических поверхностей. «Ось» одного из них лежит на поверхности F_N и пересекается с $F_{(n-2)MN}$ по $(n-3)$-мерной поверхности $F_{(n-3)P_0}$.

Таким образом, мы свели рассмотрение подслучая 2) к подслучаю 1).

Рассмотрение случая *a*) полностью окончено. Доказано, что если в пространстве найдутся две $(n-\mu)$-мерные «оси», пересекающие друг друга по $(n-\mu-1)$-мерной поверхности $F_{(n-\mu-1)}$, то все «оси» $(\mu-1)$-параметрических пучков проходят через поверхность $F_{(n-\mu-1)}$.

Установлено также, что пространство может допускать некоторое конечное число ν-параметрических пучков вполне геодезических поверхностей $\nu \leqslant \mu$. Если для каждого μ-параметрического семейства найдутся две «оси», пересекающие друг друга по $(n-\mu-1)$-мерной поверхности $F_{(n-\mu-1)}$, то все «оси» этого семейства проходят через поверхность $F_{(n-\mu-1)}$.

Рассмотрим случай *в*). Пусть «оси» $F_{(n-\mu)M}$ и $F_{(n-\mu)N}$ пересекаются по ν-мерной поверхности $F_{\nu MN}$, $n-2\mu \leqslant \nu \leqslant n-\mu-2$.

Возьмем точку $P_0 \in V$, $P_0 \in F_{(n-\mu)M}$, $P_0 \in F_{(n-\mu)N}$. Проведем через точку P_0 $(\mu-1)$-параметрическое семейство вполне геодезических гиперповерхностей. Обозначим «ось» этого семейства $F_{(n-\mu)P_0}$. Проведем через «ось» $F_{(n-\mu)P_0}$ и точку $P \in F_{\nu MN}$ $(\mu-2)$-параметрическое семейство вполне геодезических поверхностей с «осью» $F_{(n-\mu+1)PP_0}$. В точке P имеем μ-мерную плоскость главных направлений E'_μ, ортогональную «оси» $F_{(n-\mu)M}$, μ-мерную плоскость главных направлений E''_μ, ортогональную $F_{(n-\mu)N}$ и $(\mu-1)$-мерную плоскость $E'_{\mu-1}$, ортогональную $F_{(n-\mu+1)PP_0}$.

Выбирая аналогичным образом точки $P_i \to P$, устанавливаем, что на $(n-\mu+1)$-мерной «оси» лежат еще две «оси» $(\mu-1)$-параметрических пучков: «ось» $F_{(n-\mu)P_i}$ $(\mu-1)$-параметрического семейства, проходящего через точку P_i, и «ось» $F_{(n-\mu)P}$ $(\mu-1)$-параметрического семейства, проходящего через точку P. Теперь возможны два случая:

1) «оси» $F_{(n-\mu)P_i}$ и $F_{(n-\mu)P}$ пересекаются по $(n-\mu-1)$-мерной поверхности $F_{(n-\mu-1)PP_i}$; но это уже рассмотренный случай а);

2) «оси» $F_{(n-\mu)P_i}$ и $F_{(n-\mu)P}$ не имеют ни одной общей точки, а это случай *c*).

Рассмотрим случай *c*).

Пусть «оси» $F_{(n-\mu)M}$ и $F_{(n-\mu)N}$ не имеют ни одной общей точки.

Докажем, что никакие две «оси» $(\mu-1)$-параметрических пучков вполне геодезических поверхностей не пересекаются, и на каждой $(n-\mu+1)$-мерной «оси» лежит однопараметрическое семейство $(n-\mu)$-мерных «осей».

Возьмем на «оси» $F_{(n-\mu)M}$ точку $P \in V$ и проведем через «ось» $F_{(n-\mu)N}$ и точку P $(\mu-2)$-параметрическое семейство вполне геодезических гиперповерхностей $\{F_{(\mu-2)MP}\}$. Это семейство образует пучок с $(n-\mu+1)$-мерной «осью» $F_{(n-\mu+1)P}$. «Ось» $F_{(n-\mu)M}$ либо 1) пересекается с «осью» $F_{(n-\mu+1)P}$ по некоторой ν-мерной поверхности $n-2\mu+1 \leqslant \nu \leqslant n-\mu+1$, либо 2) — полностью лежит на $F_{(n-\mu+1)P}$.

Рассмотрим оба случая отдельно.

В случае 1) выбираем последовательность точек $N_i \to N$, $N_i \in V$, $N_i \in F_{(n-\mu+1)N_kP}$, где $F_{(n-\mu+1)N_kP}$ — «ось» $(\mu-2)$-параметрического пучка вполне геодезических гиперповерхностей, проходящего через точку P и через «оси» тех $(\mu-1)$-параметрических пучков, которые содержат точки $N, N_1, \ldots, N_{i-1}$. Так как индикатриса в точке P допускает только $(\mu-1)$-параметрические семейства главных направлений, то последовательность $(\mu-2)$-параметрических семейств вполне геодезических гиперповерхностей образует в точке P на основании леммы [3] $(\mu-1)$-параметрическое семейство, и «ось» этого семейства $F'_{(n-\mu)P}$ лежит на $F_{(n-\mu+1)P}$. «Оси» $F'_{(n-\mu)P}$ и $F_{(n-\mu)N}$ могут либо пересекаться по $(n-\mu-1)$-мерной поверхности, либо вовсе не пересекаться. Во всяком случае на каждой $(n-\mu+1)$-мерной «оси» лежит однопараметрическое семейство $(n-\mu)$-мерных «осей».

Случай 1), таким образом, сводится к случаю 2).

Рассмотрим случай 2). Известно, что на каждой $(n-\mu+1)$-мерной «оси» лежит однопараметрическое семейство $(n-\mu)$-мерных «осей». Если никакие две «оси» этого семейства не пересекаются между собою, теорема доказана, если же найдутся две $(n-\mu)$-мерные «оси», пересекающие друг друга, то они могут пересекаться только по $(n-\mu-1)$-мерной «оси». Но это уже рассмотренный случай a).

Окончено рассмотрение случая c), а вместе с ним и случая I.

Рассмотрим случай II.

Пусть множество V представляет собой некоторую совокупность изолированных k-мерных поверхностей $k=0, 1, \ldots, n-1$.

Возьмем точку $M \in V$. В силу строения множества V точку M можно окружить такой окрестностью U, в которую не попадет ни одна точка множества V. Следовательно, для всех точек U либо все «оси» $(\mu-1)$-параметрических пучков проходят через фиксированную $(n-\mu-1)$-мерную поверхность, либо никакие две из них не пересекаются.

Рассмотрим точку Q множества V. Так как V представляет собой совокупность изолированных поверхностей,то во всякой окрестности точки Q есть бесчисленное множество точек, не принадлежащих V. Возьмем последовательность точек $P_i \to Q$, $P_i \in V$.

Так как вполне геодезические поверхности, проходящие через точки P_i, образовывали пучки с $(n-\mu)$-мерными осями $F_{(n-\mu)P_i}$, то и в точке Q в силу аналитичности главных направлений индикатрисы получим $(\mu-1)$-мерный пучок с $(n-\mu)$-мерной «осью» $F_{(n-\mu)Q}$. Как показано выше, все «оси» $F_{(n-\mu)P_i}$ проходят через $(n-\mu-1)$-мерную поверхность $F_{(n-\mu-1)P}$, или никакие две из них не пересекаются. Так как $P_i \to Q$, то «оси» $F_{(n-\mu)P_i}$ сходятся к «оси» $F_{(n-\mu)Q}$. «Ось» $F_{(n-\mu)Q}$ в силу аналитичности семейства «осей» также либо проходит через $F_{(n-\mu-1)P}$, либо не пересекается ни с какой другой «осью» $(\mu-1)$-параметрического пучка.

Изучение расположения вполне геодезических поверхностей семейства полностью окончено.

Перейдем к доказательству второй части теоремы. Найдем вид линейного элемента пространства.

Рассмотрим случаи:

I. Пространство допускает только двупараметрическое семейство вполне геодезических гиперповерхностей.

II. Пространство допускает только μ-параметрическое, $\mu > 2$, семейство вполне геодезических гиперповерхностей.

В каждом из этих случаев возможны два следующих подслучая:

1) поверхности μ-параметрического семейства проходят через фиксированную $(n-\mu-1)$-мерную поверхность;

2) поверхности $(\mu-1)$-параметрических семейств, проходящих через точки пространства, образуют пучки с $(n-\mu)$-мерными «осями», и никакие две «оси» не пересекаются между собой.

Рассмотрим подслучай 2) случая I.

Пусть пространство допускает двупараметрическое семейство вполне геодезических поверхностей. Через каждую точку пространства проходит однопараметрический пучок вполне геодезических гиперповерхностей с $(n-2)$-мерной «осью». Никакие две «оси» не пересекаются между собою, причем на каждой вполне геодезической гиперповерхности лежит однопараметрический пучок $(n-2)$-мерных «осей».

Зафиксируем точку пространства M, «ось» семейства $F_{(n-2)M}$, проходящую через M, и некоторую поверхность F_M этого пучка. Проведем через M ортогональную траекторию γ всех «осей», лежащих на F_M. При изменении поверхности пучка с «осью» $F_{(n-2)M}$ кривая γ опишет некоторую двумерную поверхность Φ_{2M}. С другой стороны, в точке M существует двумерная поверхность Φ'_{2M}, ортогональная всем «осям» всех однопараметрических пучков вполне геодезических поверхностей. Докажем, что поверхности Φ_{2M} и Φ'_{2M} совпадают. В самом деле, поверхности Φ_{2M} и Φ'_{2M} касаются друг друга в точке M. Если на Φ_{2M} существует точка N, не лежащая на Φ'_{2M}, то ортогональная траектория γ_N, проходящая через точку N, не лежит на Φ'_{2M}. Но в таком случае на γ_N найдется точка P, в которой γ_N пересекает «ось», проходящую через точку P, не ортогонально, что противоречит определению кривой γ_N.

Докажем, что вполне геодезические поверхности пересекают Φ_{2M} по геодезическим линиям, т. е. линии γ являются геодезическими линиями в смысле метрики Φ_{2M}.

В самом деле, так как вполне геодезические поверхности пересекают поверхность Φ_{2M} по линиям γ, то при переносе вектора $\boldsymbol{a}$, касательного к γ, из точки M в близкую точку M' вдоль γ в смысле метрики пространства мы получим вектор $\boldsymbol{a}'$ касательный к вполне геодезической поверхности в точке M'. Так как поверхности семейства пересекают Φ_{2M} ортогонально, то проекция $\boldsymbol{a}'$ на касательную площадку Φ_{2M} в точке M' коллинеарна вектору $\tilde{\boldsymbol{a}}$, касательному к γ в точке M'. Длины этих векторов совпадают с точностью до малых порядка выше второго. Но это и означает параллельный перенос вдоль γ вектора $\boldsymbol{a}$ в смысле метрики поверхности Φ_{2M}.

Через каждую точку пространства проходит поверхность, аналогичная Φ_{2M}. Мы можем выбрать за координатные поверхности пространства «оси» однопараметрических пучков и поверхности Φ_{2M}.

Линейный элемент пространства при этом примет вид

$$dS^2 = d\sigma_{n-2}^2 + d\sigma_2^2,$$

где $d\sigma_{n-2}^2$ — линейный элемент $(n-2)$-мерной «оси», зависящий только от $x^1, \ldots x^{n-2}$, $d\sigma_2^2$ — линейный элемент поверхности Φ_{2M}; $d\sigma_2^2$ зависит от всех координат пространства.

Докажем, что $d\sigma_2^2$ имеет вид

$$d\sigma_2^2 = \varphi(x^1, \ldots, x^{n-2})\, dS_2^2,$$

где dS_2^2 — двумерный линейный элемент, зависящий только от x^{n-1} и x^n.

Действительно, зафиксируем две близкие поверхности Φ'_{2M} и Φ''_{2M}. Возьмем на Φ'_{2M} точки M_1 и N_1 и точки M'_1 и N'_1 так, чтобы длина отрезка M_1N_1 равнялась длине отрезка $M'_1N'_1$. Соединим точки M_1 и M'_1 некоторой кривой δ так, чтобы она была ортогональна отрезку M_1N_1 и отрезку $M'_1N'_1$. Существует однопараметрическое семейство вполне геодезических гиперповерхностей, для которого кривая δ служит ортогональной траекторией. В силу выбора поверхностей Φ'_{2M} и Φ''_{2M} точкам M_1, N_1, M'_1, N'_1 на поверхности Φ''_{2M} отвечают соответственно точки M_2, N_2, M'_2, N'_2.

Так как ортогональные траектории семейства вполне геодезических поверхностей устанавливают между ними изометрическое соответствие, то равным отрезкам M_1N_1 и $M'_1N'_1$ отвечают равные отрезки M_2N_2 и $M'_2N'_2$. Следовательно, соответствие между поверхностями конформное с коэффициентом конформности, зависящим только от точки на «оси» однопараметрического пучка. Это и доказывает утверждение.

Рассмотрим подслучай 1) случая I.

Пусть все вполне геодезические поверхности двупараметрического семейства проходят через фиксированную $(n-3)$-мерную поверхность $F_{(n-3)}$.

Найдем вид линейного элемента пространства в этом случае. Для этого из каждой точки поверхности $F_{(n-3)}$ проведем все геодезические линии δ, ортогональные $F_{(n-3)}$, и отложим на них равные отрезки длины x^1. Концы этих отрезков опишут $(n-1)$-мерный «цилиндр» Φ_{n-1}, все точки которого находятся на одинаковом расстоянии от поверхности $F_{(n-3)}$.

Докажем, что «цилиндр» Φ_{n-1} допускает двупараметрическое семейство вполне геодезических (в смысле метрики «цилиндра») гиперповерхностей.

Вполне геодезические гиперповерхности пространства ортогонально (вследствие построения «цилиндра») пересекают его по $(n-2)$-мерным поверхностям Φ_{n-2}. Так как пространство допускает двупараметрическое семейство вполне геодезических гиперповерхностей, то на «цилиндре» существует двупараметрическое семейство поверхностей Φ_{n-2}. Докажем, что поверхности Φ_{n-2} являются вполне геодезическими в смысле метрики Φ_{n-1}. В самом деле, возьмем произвольную кривую γ на Φ_{n-2} и вектор $\boldsymbol{a}$, касательный к γ в точке M. Вектор $\boldsymbol{a}$ лежит в касательном пространстве к вполне геодезической поверхности пространства. После переноса его вдоль γ в смысле метрики пространства в близкую точку M' вектор $\boldsymbol{a}$ перейдет в вектор $\boldsymbol{a}'$, лежащий тоже в касательной площадке к вполне геодезической поверхности пространства. Проекция вектора $\boldsymbol{a}'$ на касательное пространство к Φ_{n-1} будет лежать в касательном пространстве к Φ_{n-2}, так как вполне геодезические поверхности пространства пересекают «цилиндр» Φ_{n-1} ортогонально. Это и означает, что γ является вполне геодезической в смысле метрики «цилиндра».

Так как вполне геодезические поверхности пространства имеют общей только поверхность $F_{(n-3)}$, то на основании первой части теоремы мы можем утверждать, что поверхности Φ_{n-2} расположены однопараметрическими пучками, причем «оси» этих пучков не пересекаются.

В силу доказанного подслучая 2) случая I линейный элемент «цилиндра» Φ_{n-1} имеет вид

$$d\sigma_{n-1}^2 = d\sigma_{n-3}^2(x^1, \ldots, x^{n-2}) + \varphi(x^1, \ldots, x^{n-2})\, d\sigma_2^2(x^1, x^{n-1}, x^n), \qquad (2)$$

где $d\sigma_{n-3}^2$ — линейный элемент «оси» Φ_{n-3}, $d\sigma_2^2$ — линейный элемент двумерной поверхности, лежащей на Φ_{n-1} и ортогональной «осям» Φ_{n-3}.

Введем в пространстве следующую систему координат: за координатные поверхности возьмем построенные «цилиндры» и одно из семейств координатных линий — геодезические линии δ, ортогональные цилиндрам.

Линейный элемент пространства при этом примет вид

$$dS^2 = dx^{1^2} + d\sigma_{n-1}^2, \tag{3}$$

где $d\sigma_{n-1}^2$ определяется соотношением (2).

Докажем, что $d\sigma_{n-1}^2$ имеет вид

$$d\sigma_{n-1}^2 = \varphi_1(x^1)\,[d\sigma_{n-3}^2(x^2, \ldots, x^{n-2}) + \\ + \varphi_2(x^2, \ldots, x^{n-2})\,d\sigma_2^2(x^{n-1}, x^n)]. \tag{4}$$

Возьмем два близких «цилиндра» Φ'_{n-1} и Φ''_{n-1}. На Φ'_{n-1} зафиксируем две геодезические в смысле метрики «цилиндра» Φ'_{n-1} поверхности Φ'_{n-2} и Φ''_{n-2}. На Φ'_{n-2} возьмем точку M_1 и проведем в точке M_1 двумерную поверхность Φ_2, ортогональную «осям» семейств вполне геодезических поверхностей «цилиндра». Поверхность Φ'_{n-2} пересекает поверхность Φ_2 по геодезической линии γ_1 в смысле поверхности Φ_2. На линии γ_1 возьмем точку N_1. Пусть расстояние M_1N_1 равно α. Поверхность Φ''_{n-2} пересекает Φ_2 по геодезической линии γ'_1. На линии γ'_1 возьмем еще две точки M'_1 и N'_1 так, чтобы расстояние M_1N_1 было равно расстоянию $M'_1N'_1$. На Φ_2 соединим точки M_1 и M'_1 произвольной кривой δ такой, чтобы она была ортогональна линии γ_1 в точке M_1 и γ'_1 в точке M'. Кривая δ будет служить ортогональной траекторией однопараметрического семейства поверхностей Φ_{n-2}, а вместе с тем и ортогональной траекторией однопараметрического семейства вполне геодезических гиперповерхностей пространства.

Устанавливая изометрическое соответствие между вполне геодезическими поверхностями пространства, кривая δ переведет поверхность Φ'_{n-2} в поверхность Φ''_{n-2} и отрезок γ_1 в отрезок γ'_1. На «цилиндре» Φ''_{n-1} поверхности Φ'_{n-2} отвечает поверхность $\tilde{\Phi}'_{n-2}$, полученная при пересечении «цилиндра» Φ''_{n-1} той вполне геодезической поверхностью пространства, которая при пересечении с Φ'_{n-1} дала Φ'_{n-2}; аналогично поверхности Φ''_{n-2} на «цилиндре» Φ''_{n-1} отвечает поверхность $\tilde{\Phi}''_{n-2}$. Проведем через точки M_1 и M'_1 геодезические линии пространства, ортогональные «цилиндру» Φ'_{n-1}. Они пересекут «цилиндр» Φ''_{n-1} соответственно в точках M_2 и M'_2.

Проведем из точки M_2 двумерную поверхность Φ''_2, ортогональную «осям» однопараметрических пучков вполне геодезических поверхностей в смысле метрики Φ''_{n-1}. При этом отрезку γ_2 на Φ''_2 отвечает равный ему отрезок γ'_2 на этой же поверхности, и поверхности $\tilde{\Phi}'_{n-2}$ отвечает изометричная ей поверхность $\tilde{\Phi}''_{n-2}$. Соответствие между поверхностями Φ'_{n-2} и $\tilde{\Phi}'_{n-2}$ и поверхностями Φ_2 и Φ''_2 конформное с коэффициентом конформности, зависящим только от переменной x^1. Но всякое смещение по цилиндру можно разложить на сумму двух смещений: на смещение по «осям» однопараметрических пучков вполне геодезических гиперповерхностей «цилиндра» и на смещение по поверхностям, ортогональным этим осям. Отсюда и вытекает вид (4) линейного элемента цилиндра. Соотношение (3) дает линейный элемент пространства.

Заметим, что в случае $n = 3$ поверхность $F_{n-\mu-1}$ переходит в точку, «цилиндр» Φ_{n-1} переходит в сферу; и мы получаем теорему, доказанную в [3—4].

Рассмотрим случай II.

Пусть $\mu > 2$. Сначала рассмотрим подслучай 2) случая II. Пусть поверхности $(\mu - 1)$-параметрических семейств образуют пучки с $(n - \mu)$-

мерными «осями» и никакие две «оси» не пересекаются между собой. Причем на каждой $(n-\mu+1)$-мерной «оси» $(\mu-2)$-параметрического пучка вполне геодезических гиперповерхностей, проходящего через $(n-\mu)$-мерную «ось» и некоторую точку, не лежащую на этой «оси», лежит однопараметрическое семейство $(n-\mu)$-мерных «осей».

Зафиксируем точку M. Через M проходит $(n-\mu)$-мерная «ось» $F_{(n-\mu)M}$. Возьмем точку N_1, не лежащую на «оси» $F_{(n-\mu)M}$. Проведем через «ось» $F_{(n-\mu)M}$ и точку N_1 «ось» $F_{(n-\mu+1)N_1}$ $(\mu-2)$-параметрического семейства вполне геодезических гиперповерхностей из $(\mu-1)$-параметрического семейства, проходящего через «ось» $F_{(n-\mu)M}$. На поверхности $F_{(n-\mu+1)N_1}$ проведем ортогональную траекторию γ_1 $(n-\mu)$-мерных «осей», лежащих на $F_{(n-\mu+1)N_1}$. Возьмем точку N_2, $N_2 \in F_{(n-\mu+1)N_1}$. Проведем через точку N_2 и «ось» $F_{(n-\mu+1)N_1}$ $(n-\mu+2)$-мерную поверхность $F_{(n-\mu+2)N_2}$ — «ось» $(\mu-3)$-параметрического семейства вполне геодезических поверхностей из $(\mu-2)$-параметрического семейства с «осью» $F_{(n-\mu+1)N_1}$. Поверхность $F_{(n-\mu+2)N_2}$ содержит однопараметрическое семейство «осей» $F_{(n-\mu+1)N_1}$. Из каждой точки линии γ_1 проведем ортогональные траектории γ_2 поверхностей $F_{(n-\mu+1)}$. При этом получим двумерную поверхность Φ_2, составленную из траекторий γ_2. Продолжая аналогичное построение, мы, таким образом, через μ шагов построим некоторую μ-мерную поверхность Φ_μ.

Поверхность Φ_μ обладает тем свойством, что всякая ортогональная траектория семейства вполне геодезических гиперповерхностей лежит на поверхности Φ_μ. Действительно, можно непосредственно записать уравнение поверхности Φ'_μ ортогональной всем $(n-\mu)$-мерным «осям» и доказать, как это было сделано в случае I, что всякая ортогональная траектория γ лежит на поверхности Φ'_μ, или, другими словами, что поверхности Φ_μ и Φ'_μ совпадают между собою. А так как ортогональные траектории семейства вполне геодезических гиперповерхностей лежат на поверхности Φ'_μ, то они переводят «ось» семейства в некоторую другую «ось» семейства. Вполне геодезические гиперповерхности пересекают поверхность Φ_μ по $(\mu-1)$-мерным поверхностям $\Phi_{\mu-1}$. Поверхности $\Phi_{\mu-1}$ являются вполне геодезическими гиперповерхностями в смысле метрики поверхности Φ_μ. Так как пространство допускает μ-параметрическое семейство вполне геодезических гиперповерхностей, то через каждую точку поверхности Φ_μ проходит $(\mu-1)$-параметрическое семейство вполне геодезических гиперповерхностей в смысле ее метрики.

Рассмотрим несколько подробнее поверхность Φ_μ. Через каждую ее точку проходит $(\mu-1)$-параметрическое семейство вполне геодезических поверхностей. Следовательно, через каждую точку в направлении каждого $(\mu-1)$-мерного элемента поверхности Φ_μ проходит вполне геодезическая поверхность. Но тогда через каждую точку поверхности Φ_μ в направлении каждого двумерного элемента проходит двумерная вполне геодезическая поверхность. Кривизна поверхности Φ_μ по двумерным площадкам не зависит от направления площадки, но тогда кривизна не зависит и от точки [1]. Поверхность Φ_μ обладает постоянной кривизной.

Выбирая $(n-\mu)$-мерные «оси» и поверхности Φ_μ за координатные поверхности пространства, линейный элемент пространства можно записать в виде

$$dS^2 = d\sigma^2_{n-\mu}(x^1, \ldots, x^{n-\mu}) + d\sigma^2_\mu(x^1, \ldots, x^n), \tag{5}$$

где $d\sigma^2_{n-\mu}$ — линейный элемент $(n-\mu)$-мерной «оси», $d\sigma^2_\mu$ — линейной элемент μ-мерной поверхности Φ_μ, обладающей при фиксированных $x^1, \ldots, x^{n-\mu}$ постоянной кривизной.

Докажем, что $d\sigma^2_{n-\mu}$ имеет вид

$$d\sigma^2_{n-\mu} = \varphi(x^1, \ldots, x^{n-\mu})\, dS^2_\mu(x^{n-\mu+1}, \ldots, x^n), \tag{6}$$

где dS^2_μ обладает постоянной кривизной.

Действительно, зафиксируем две близкие поверхности Φ'_μ и Φ''_μ. Ортогональные траектории вполне геодезических гиперповерхностей пространства устанавливают одновременно изометрическое соответствие между вполне геодезическими поверхностями поверхностей Φ'_μ и Φ''_μ одновременно. Двум равным отрезкам на поверхности Φ'_μ отвечают два равных отрезка на Φ''_μ. Соответствие между поверхностями Φ'_μ и Φ''_μ конформное с коэффициентом конформности, зависящим от $x^1, \ldots, x^{n-\mu}$. Отсюда следует, что линейный элемент пространства имеет вид (6).

Рассмотрим подслучай 1) случая II.

Пусть все вполне геодезические гиперповерхности пространства проходят через $(n-\mu-1)$-мерную вполне геодезическую поверхность $F_{(n-\mu-1)}$. Найдем линейный элемент такого пространства.

Рассмотрим поверхность Φ_{n-1}, все точки которой находятся на равном расстоянии от поверхности $F_{(n-\mu-1)}$. Так как вполне геодезические поверхности пространства пересекают поверхность Φ_{n-1} ортогонально, то $(n-2)$-мерные поверхности Φ_{n-2}, полученные при пересечении, будут вполне геодезическими в смысле метрики «цилиндра» Φ_{n-1}.

Вследствие того, что пространство допускает μ-параметрическое семейство вполне геодезических гиперповерхностей, поверхность Φ_{n-1} допускает также μ-параметрическое семейство вполне геодезических гиперповерхностей. Так как вполне геодезические поверхности пространства имеют общей только поверхность $F_{(n-\mu-1)}$, то поверхности Φ_{n-2} расположены пучками с $(n-\mu-1)$-мерными «осями» $\Phi_{(n-\mu-1)}$. Никакие две «оси» $\Phi_{(n-\mu-1)}$ не пересекаются между собою. На основании изложенного в подслучае 2) случая II можно утверждать, что линейный элемент «цилиндра» Φ_{n-1} имеет вид

$$d\sigma^2_{n-1} = d\sigma^2_{(n-\mu-1)}(x^1, \ldots, x^{n-\mu}) + \\ + \varphi(x^1, \ldots, x^{n-\mu})\, dS^2_\mu(x^1, x^{n-\mu+1}, \ldots, x^n),$$

где $d\sigma^2_{(n-\mu-1)}$ — линейный элемент оси $\Phi_{(n-\mu-1)}$, dS^2_μ — линейный элемент поверхности Φ_μ, лежащей на «цилиндре» Φ_{n-1} и ортогональной «осям» $\Phi_{n-\mu-1}$. Аналогично случаю 2) можно доказать, что соответствие между «цилиндрами» конформное.

Выбирая геодезические линии пространства, ортогональные цилиндрам, за координатные линии пространства и за одно из семейств координатных поверхностей — сами «цилиндры», мы видим, что линейный элемент пространства имеет вид:

$$dS^2 = dx^{1^2} + \varphi_1(x^1)\,[d\sigma^2_{n-\mu-1}(x^2, \ldots, x^{n-\mu}) + \\ + \varphi_2(x^2, \ldots, x^{n-\mu})\, dS^2_\mu(x^{n-\mu+1}, \ldots, x^n)],$$

где dS^2_μ обладает постоянной кривизной.

Обратная теорема. *Если линейный элемент пространства приводится к виду*

$$dS^2 = d\sigma^2_{n-\mu}(x^1, \ldots, x^{n-\mu}) + \\ + \varphi(x^1, \ldots, x^{n-\mu})\, dS^2_\mu(x^{n-\mu+1}, \ldots, x^n), \tag{7}$$

где dS^2_μ обладает постоянной кривизной, если $\mu > 2$, то такое пространство допускает μ-параметрическое семейство вполне геодезических гиперповерхностей.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $\mu = 2$. Линейный элемент (7) можно записать в этом случае так:

$$dS^2 = d\sigma^2_{n-2}(x^1, \ldots, x^{n-2}) + \\ + \varphi(x^1, \ldots, x^{n-2})\, dS^2_2(x^{n-1}, x^n). \tag{7'}$$

Специализируем систему координат на поверхности Φ_2 с линейным элементом dS^2_2. Так как все остальные функции, входящие в (7′), не зависят от x^{n-1}, x^n, то на поверхности Φ_2 можно ввести полугеодезическую параметризацию. В этой координатной системе dS^2_2 можно записать следующим образом:

$$dS^2_2 = dx^{n-1^2} + \varphi(x^{n-1}, x^n)\, dx^{n^2}. \tag{8}$$

Геодезическими линиями на этой поверхности являются линии $x^n = \mathrm{const}$. От координаты x^n зависит только функция φ. Вычислив объекты связности пространства (7′) с учетом (8), нетрудно убедиться, что

$$\Gamma^n_{ij} \equiv 0, \text{ если } i, j = 1, \ldots, n-1. \tag{9}$$

Но последнее соотношение является достаточным признаком того, что в пространстве поверхности $x^n = \mathrm{const}$ вполне геодезические [1]. На поверхности Φ_2 существует двупараметрическое семейство геодезических линий.

Произвольную геодезическую линию поверхности Φ_2 мы можем выбрать за координатную. Для нее будет иметь место соотношение (9). Но это означает, что через произвольную геодезическую линию поверхности Φ_2 проходит вполне геодезическая поверхность. Пространство допускает двупараметрическое семейство вполне геодезических поверхностей.

Рассмотрим случай $\mu > 2$.

Аналогично случаю $\mu = 2$ специализируем координатную систему на поверхностях Φ_μ с линейным элементом dS^2_μ.

Так как поверхности Φ_μ обладают постоянной кривизной, то координатную систему на них можно выбрать таким образом, чтобы

$$dS^2_\mu = dx^{1^2} + \varphi_1(x^1)\{dx^{2^2} + \varphi_2(x^2)[dx^{3^2} + \cdots + \varphi_{\mu-1}(x^{\mu-1})\, dx^{\mu^2}]\}. \tag{10}$$

В этом соотношении введены следующие обозначения:

$$x^{n-\mu+\alpha} = x^\alpha \quad (\alpha = 1, \ldots, \mu).$$

Функции φ_σ, $\sigma = 1, \ldots, \mu-1$ удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{d^2 \ln \varphi_\sigma}{dx^{\sigma^2}} + \frac{1}{2}\left(\frac{d \ln \varphi_\sigma}{dx^\sigma}\right)^2 = -2K_0. \tag{11}$$

В самом деле, для того чтобы убедиться, что пространство с линейным элементом (10) обладает постоянной кривизной, достаточно подсчитать компоненты тензора Римана пространства. При этом в силу (11) получим

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = K_0(g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma} - g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta}),$$

что является необходимым и достаточным условием пространства постоянной кривизны.

Вычисляя компоненты объекта связности для линейного элемента (7), учитывая (10), получим

$$\Gamma^n_{ij} \equiv 0 \quad (i, j = 1, \ldots, n-1).$$

Это означает, что поверхности $x^n = \text{const}$ вполне геодезические гиперповерхности пространства. Пространство с линейным элементом (10) допускает μ-параметрическое семейство вполне геодезических $(\mu - 1)$-мерных поверхностей. Каждой такой поверхности соответствует вполне геодезическая гиперповерхность пространства. Пространство, таким образом, допускает μ-параметрическое семейство вполне геодезических гиперповерхностей, что и требовалось доказать.

ЛИТЕРАТУРА

1. Э. Картан. Геометрия римановых пространств. ОНТИ НКТП, М.— Л, 1936.
2. А. Лихнерович. Теория связности в целом и группы голономии. Изд-во иностр. лит., 1962.
3. Ю. С. Слободян. О трехмерных римановых пространствах, допускающих семейства вполне геодезических поверхностей. Вестн. ХГУ, серия механико-математическая, т. 31. Изд-во ХГУ, Харьков, (1965), 111—118.
4. Ю. С. Слободян. Исправление к статье «О трехмерных римановых пространствах», допускающих семейства вполне геодезических поверхностей. «Укр. геометр. сб.», вып. 2, Изд-во ХГУ, Харьков, (1966).

Поступила 14 ноября 1966 г.

НЕГОЛОНОМНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ V_n^m НУЛЕВОЙ ВНЕШНЕЙ КРИВИЗНЫ

В. В. Слухаев (Томск)

Рассмотрим неголономное многообразие V_n^m [1], погруженное в n-мерное евклидово пространство E_n. В этом пространстве можно определить V_n^m как поле m-мерных плоскостей $\{\pi\}$, заданных в каждой точке A некоторой n-мерной области G пространства E_n.

Элементом этого геометрического образа [2] является пара: точка A и плоскость π. Плоскость π будем называть касательной плоскостью V_n^m в точке A, а $(n-m)$-мерную плоскость, проходящую через точку A ортогонально π будем называть оснащением V_n^m и обозначать буквой B.

Кривые, касательные к которым в точке A лежат в плоскости π элемента $\{A, \pi\}$, называются допустимыми кривыми V_n^m [1]. Совокупность одномерных полей $\{A, \pi\}$, заданных вдоль всех допустимых кривых L, является подмногообразием V_n^m в смысле определения из [2]. Это подмногообразие будем называть главным подмногообразием V_n^m.

Векторное поле $\{A, \boldsymbol{v}\}$ называется принадлежашим V_n^m, если в каждой точке A вектор $\boldsymbol{v}$ касается некоторой допустимой кривой.

А. Миллер [3] определил параллельно переносимое векторное поле в системе плоскостей, заданных вдоль некоторой кривой C в E_3. В этой статье определение А. Миллера обобщается на E_n и рассматриваются V_n^m, обладающие абсолютным параллелизмом Миллера (они названы V_n^m нулевой внешней кривизны). Доказывается, что существует тензор $\Delta^{\alpha}_{\beta LM}$, такой, что обращение его в нуль является необходимым и достаточным условием для того, чтобы V_n^m имело нулевую внешнюю кривизну. В статье (теорема 2) указывается способ построения всех V_n^m нулевой внешней кривизны.

В заключение показано, что все V_n^m нулевой внешней кривизны имеют нулевую внутреннюю кривизну в смысле В. В. Вагнера [1] и доказывается, что для совпадения параллельного переноса Миллера и параллельного переноса В. В. Вагнера [1] необходимо и достаточно, чтобы тензор Схоутена [1] был равен нулю.

Неголономность многообразия V_n^m специально не оговаривается, т. е. голономные V_n^m мы считаем частным случаем неголономных.

§ 1. Основной тензор V_n^m

Совместим начало метрического подвижного репера пространства E_n с точкой A, а векторы $\boldsymbol{I}_1, \boldsymbol{I}_2, \ldots, \boldsymbol{I}_m$ расположим в касательной плоскости π многообразия V_n^m. Тогда векторы $\boldsymbol{I}_{m+1}, \boldsymbol{I}_{m+2}, \ldots, \boldsymbol{I}_n$ расположатся в оснащении B. Условимся пользоваться тремя сериями индексов:

$$\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu = 1, 2, \ldots, m;$$
$$i, j, k, = m+1, \ m+2, \ldots, n;$$
$$L, M, N = 1, 2, \ldots, n-1, n.$$

Тогда деривационные формулы метрического репера примут вид

$$dA = \omega^\alpha I_\alpha + \omega^k I_k,$$
$$dI_\alpha = \omega_\alpha^\beta I_\beta + \omega_\alpha^k I_k,$$
$$dI_k = \omega_k^\alpha I_\alpha + \omega_k^j I_j. \tag{1}$$

Причем матрица $\| \omega_L^M \|$ — кососимметрична, т. е.

$$\omega_L^M + \omega_M^L = 0 \tag{2}$$

и выполняются следующие уравнения структуры;

$$D\omega^\alpha = [\omega^\beta \omega_\beta^\alpha] + [\omega^i \omega_i^\alpha], \tag{I}$$
$$D\omega^i = [\omega^\beta \omega_\beta^i] + [\omega^k \omega_k^i], \tag{II}$$
$$D\omega_\alpha^\beta = [\omega_\alpha^\gamma \omega_\gamma^\beta] + [\omega_\alpha^k \omega_k^\beta], \tag{III}$$
$$D\omega_\alpha^k = [\omega_\alpha^\gamma \omega_\gamma^k] + [\omega_\alpha^i \omega_i^k], \tag{IV}$$
$$D\omega_k^j = [\omega_k^L \omega_L^j]. \tag{V}$$

При нашем выборе репера формы ω^L, ω_α^k — главные [2], так как при $\omega^L = \omega_\alpha^k = 0$ элемент $\{A, \pi\}$ неподвижен. Соответствующие вторичные формы равны нулю [2]

$$\pi^L = 0, \ \pi_\alpha^k = 0. \tag{3}$$

Так как область G n-мерная, то формы ω^L — линейно независимые, а остальные главные формы ω_α^k являются их линейными комбинациями

$$\omega_\alpha^k = \Gamma_{\alpha L}^k \omega^L. \tag{4}$$

Дифференцируя эти равенства внешним образом, находим

$$[d\Gamma_{\alpha L}^k - \Gamma_{\gamma L}^k \omega_\alpha^\gamma - \Gamma_{\alpha M}^k \omega_L^M + \Gamma_{\alpha L}^i \omega_i^k, \ \omega^L] = 0.$$

Разрешая эти уравнения по лемме Картана [4] и полагая $\omega^L = 0$: $\omega_L^M = \pi_L^M$, получим

$$\delta\Gamma_{\alpha L}^k = \Gamma_{\gamma L}^k \pi_\alpha^\gamma + \Gamma_{\alpha M}^k \pi_L^M - \Gamma_{\alpha L}^i \pi_i^k. \tag{5}$$

Отсюда видно, что величины $\Gamma_{\alpha L}^k$ являются компонентами тензора [5]. Будем называть его основным тензором V_n^m. Тензор $\Gamma_{\alpha L}^k$ естественным образом распадается на два подтензора

$$\delta\Gamma_{\alpha\beta}^k = \Gamma_{\gamma\beta}^k \pi_\alpha^\gamma + \Gamma_{\alpha\gamma}^k \pi_\beta^\gamma - \Gamma_{\alpha\beta}^i \pi_i^k,$$
$$\delta\Gamma_{\alpha i}^k = \Gamma_{\gamma i}^k \pi_\alpha^\gamma + \Gamma_{\alpha j}^k \pi_i^j - \Gamma_{\alpha i}^j \pi_j^k.$$

(Здесь учтены равенства (3)).

Рассмотрим случаи, когда один из этих тензоров обращается в нуль.

1. Если $\Gamma_{\alpha\beta}^k = 0$, то

$$\omega_\alpha^k \equiv 0 \pmod{\omega^i}. \tag{6}$$

Из уравнений структуры (II) найдем, что система уравнений $\omega^i = 0$ в этом случае вполне интегрируема, т. е. определяет семейство поверхностей. Учитывая (6) и (1) при смещении вдоль каждой из этих поверхностей, имеем $d\pi \| \pi$. Это означает, что при $\Gamma_{\alpha\beta}^{k} = 0$ неголономное многообразие V_n^m вырождается в $(n-m)$-параметрическое семейство m-плоскостей.

2. Если $\Gamma_{\alpha i}^{k} = 0$, то

$$\omega_\alpha^k \equiv 0 \pmod{\omega^\alpha}.$$

Проведя аналогичные рассуждения, получим, что в этом случае неголономное многообразие V_n^{n-m}, образованное элементами $\{A, B\}$, вырождается в семейство $(n-m)$-плоскостей. Следовательно, существует m-параметрическое семейство $(n-m)$-плоскостей, ортогональных V_n^m. Этот класс V_n^m является обобщением неголономных поверхностей V_3^2, ортогональных прямолинейной конгруэнции (см. [6]).

В заключение параграфа отметим, что главное подмногообразие V_n^m определяется в нашем репере системой уравнений

$$\omega^i = 0, \tag{7}$$

в общем случае не вполне интегрируемой.

§ 2. Абсолютный параллелизм Миллера на V_n^m

Если векторное поле $\{\boldsymbol{v}\}$ принадлежит V_n^m, то

$$\boldsymbol{v} = v^\alpha \boldsymbol{I}_\alpha. \tag{8}$$

Абсолютным дифференциалом $\delta \boldsymbol{v}$ вектора $\boldsymbol{v}$ назовем проекцию обычного дифференциала $d\boldsymbol{v}$ на касательную плоскость π.

Дифференцируя (8), получим

$$d\boldsymbol{v} = (dv^\alpha + v^\beta \omega_\beta^\alpha)\, \boldsymbol{I}_\alpha + v^\alpha \omega_\alpha^k \boldsymbol{I}_k. \tag{9}$$

Первый член в правой части этой формулы и есть абсолютный дифференциал.

$$\delta \boldsymbol{v} = (dv^\alpha + v^\beta \omega_\beta^\alpha)\, \boldsymbol{I}_\alpha. \tag{10}$$

Обобщая определение из [3], будем говорить, что *векторное поле* $\{\boldsymbol{v}\}$ — *параллельно переносимо в смысле Миллера вдоль кривой* C (необязательно допустимой кривой V_n^m), если вдоль этой кривой $\delta \boldsymbol{v} = 0$.

Из (10) следует, что уравнения параллельного переноса Миллера имеют вид

$$dv^\alpha + v^\beta \omega_\beta^\alpha = 0. \tag{11}$$

Будем говорить, что V_n^m *обладает абсолютным параллелизмом Миллера*, если по произвольно заданному начальному вектору $\boldsymbol{v}_0$ можно построить векторное поле $\{\boldsymbol{v}\}$, параллельно переносимое в смысле Миллера вдоль любой кривой C пространства E_n. Ясно, что в этом случае система уравнений (10) должна быть вполне интегрируема.

Дифференцируем (11) внешним образом:

$$[dv^\beta \omega_\beta^\alpha] + v^\beta [\omega_\beta^\gamma \omega_\gamma^\alpha] + v^\beta [\omega_\beta^k \omega_k^\alpha] = 0$$

Подставляя в эти уравнения dv^β (11) и учитывая, что коэффициенты v^β — произвольны, получаем условие интегрируемости системы (11).

$$\Omega_\alpha^\beta \equiv [\omega_\alpha^k \omega_k^\beta] = 0. \tag{12}$$

Подставляя сюда выражения для ω_α^k из (4) и учитывая (2), получим:

$$\Delta_{\alpha LM}^\beta [\omega^L \omega^M] = 0, \tag{13}$$

где

$$\Delta_{\alpha LM}^\beta = \frac{1}{2} (\Gamma_{\alpha L}^k \Gamma_{kM}^\beta - \Gamma_{\alpha M}^k \Gamma_{kL}^\beta). \tag{14}$$

Учитывая, что $\Gamma_{kM}^\beta = -\Gamma_{\beta M}^k$, с помощью (5) находим после некоторых преобразований

$$\delta\Delta_{\alpha LM}^\beta = \Delta_{\gamma LM}^\beta \pi_\alpha^\gamma + \Delta_{\alpha NM}^\beta \pi_L^N + \Delta_{\alpha LN}^\beta \pi_M^N - \Delta_{\alpha LM}^\gamma \pi_\gamma^\beta. \tag{15}$$

Отсюда видно, что система величин $\Delta_{\alpha LM}^\beta$ образует тензор. Из (12) и (14) видно, что этот тензор кососимметричен по каждой паре индексов (α, β) и (L, M). Из (12) и (13) видно, что условием полной интегрируемости системы уравнений (11) является обращение в нуль тензора $\Delta_{\alpha LM}^\beta$. Этот результат можно сформулировать в виде теоремы

Теорема 1. *Для того, чтобы неголономное многообразие V_n^m обладало абсолютным параллелизмом Миллера, необходимо и достаточно, чтобы тензор $\Delta_{\alpha LM}^\beta$ был равен нулю.*

Определение 1. *Тензор $\Delta_{\alpha LM}^\beta$ назовем тензором внешней кривизны V_n^m.*

Определение 2. *Неголономные многообразия V_n^m, обладающие абсолютным параллелизмом Миллера будем называть V_n^m нулевой внешней кривизны.*

§ 3. V_n^m нулевой внешней кривизны

Прежде всего заметим, что на V_n^m нулевой внешней кривизны и только на них параллельный перенос Миллера не зависит от пути. Из (9) и (10) следует, что вектор $\boldsymbol{v}_1$ в точке A_1, получающийся из вектора $\boldsymbol{v}_0$ в точке A_0 параллельным переносом Миллера, равен

$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_0 + \int_{A_0}^{A_1} v^\alpha \omega_\alpha^k \boldsymbol{I}_k.$$

Интеграл в этой формуле не завит от пути тогда и только тогда, когда подынтегральное выражение есть полный дифференциал, или, что то же самое, когда внешний дифференциал подынтегрального выражения тождественно равен нулю [4]. Находим

$$D(v^\alpha \omega_\alpha^k \boldsymbol{I}_k) = \{[dv^\beta \omega_\beta^k] + v^\alpha [\omega_\alpha^\beta \omega_\beta^k]\} \boldsymbol{I}_k + v^\alpha [\omega_k^\beta \omega_\alpha^k] \boldsymbol{I}_\beta.$$

Так как вектор $\boldsymbol{v}$ переносится параллельно от A_0 к A_1, то должны выполняться условия (11). Отсюда получаем, что выражение в фигурных скобках равно нулю и

$$D(v^\alpha \omega_\alpha^k \boldsymbol{I}_k) = v^\alpha [\omega_k^\beta \omega_\alpha^k] \boldsymbol{I}_\beta. \tag{16}$$

В силу того, что векторы I_β линейно независимы, а коэффициенты v^α произвольны, выражение (16) тождественно равно нулю тогда и только тогда, когда выполнено условие (12), т. е. когда V_n^m имеет нулевую внешнюю кривизну.

Определение 3. *Поверхности при смещении элемента $\{A, \pi\}$ вдоль которых имеем $d\pi \parallel \pi$ (а следовательно, и $dB \parallel B$), назовем эквидирекционными поверхностями V_n^m.*

Теорема 2. *Для того, чтобы неголономное многообразие V_n^m имело нулевую внешнюю кривизну, необходимо и достаточно, чтобы V_n^m имело $(n-p)$-параметрическое семейство p-мерных эквидирекционных поверхностей, причем $p \geqslant m$.*

Необходимость. Если V_n^m имеет нулевую внешнюю кривизну, то (12) должно выполняться при любых α и β. Будем считать, что из всех серий форм $(\omega_k^1, \omega_k^2, \ldots, \omega_n^m)$ наибольший ранг имеет серия ω_k^1. Обозначим через q число линейных зависимостей между формами ω_k^1. Равенство (12) запишем для $\beta = 1$.

$$[\omega_\alpha^k \omega_k^1] = 0.$$

Если все формы ω_k^1 линейно независимы ($q = 0$), то, применив лемму Картана, получим

$$\omega_\alpha^k = \Lambda_\alpha^{ki} \omega_i^1, \tag{17}$$

т. е.

$$\omega_\alpha^k \equiv 0 \, (\mathrm{mod}\, \omega_i^1).$$

Из (VI) находим, что при этих условиях система линейно-независимых уравнений $\omega_i^1 = 0$ вполне интегрируема, т. е. определяет $(n-m)$-параметрическое семейство m-мерных поверхностей, при смещении вдоль которых, как следует из (17) и (1), имеем $d\pi \parallel \pi$. Для случая, когда $q = 0$, необходимость доказана. Если $q = 1$ и между формами существует линейная зависимость $a^i \omega_i^1 = 0$, то, произведя замену базиса в оснащении $I_n^* = a^k I_k$, получим, $dI_n^* = a^k \omega_k^1 I_1 + \cdots + \omega_n^{n-1} I_{n-1}$. Отсюда следует, что такой заменой базиса можно сделать $\omega_n^1 = 0$. Тогда в (17) формы ω_α^k будут выражены через $(n-m-1)$ независимую форму. Все рассуждения останутся прежними, только размерность эквидирекционных поверхностей повысится на единицу. По индукции легко доказать необходимость для любого q.

Достаточность. Пусть $q = 0$, тогда осуществим следующее построение: зададим $(n-m)$ однопараметрических семейств гиперповерхностей $S_{m+1}, S_{m+2}, \ldots, S_n$. В пересечении мы получим произвольное $(n-m)$-параметрическое семейство m-мерных поверхностей (Σ). Зададим векторное поле $\{I_k\}$ так, чтобы при смещении вдоль каждой из гиперповерхностей семейства S_k вектор I_k был бы параллелен сам себе (в смысле параллелизма в E_n). Тогда в каждой точке A мы получим «букет» векторов I_k, причем при смещении вдоль каждой из m-мерных поверхностей семейства Σ букет будет состоять из равных и параллельных векторов. Проведем в каждой точке A m-плоскость π, ортогональную букету I_k в этой точке, и расположим векторы I_α в этой m-плоскости. Таким образом, можно построить любое V_n^m, имеющее семейство эквидирекционных m-поверхностей. Докажем, что построение V_n^m имеет нулевую внешнюю кривизну. При смещении вдоль каждой из гиперповерхностей семейства S_k будем иметь

$$\omega_k^1 = \omega_k^2 = \cdots = \omega_k^n = 0.$$

Так как семейство гиперповерхностей должно задаваться одним уравнением Пфаффа, то получим

$$\lambda_{k1}\omega_k^1 = \lambda_{k2}\omega_k^2 = \cdots = \lambda_{kn}\omega_k^n \text{ (по } k \text{ не суммировать!).} \tag{18}$$

Легко проверить с помощью (IV), что каждое из уравнений $\omega_k^\alpha = 0$ (при фиксированных k и α) действительно вполне интегрируемо, если выполняется (18). Пусть каждое из семейств гиперповерхностей S_k определяется уравнением $\omega_k^1 = 0$ соответственно. Тогда семейство Σ, получающееся в их пересечении, определяется системой уравнений

$$\omega_k^1 = 0, \tag{19}$$

которая вполне интегрируема в силу (IV) и (18). Вычислим формы Ω_α^β (см. (12)) при условиях (18). Так как ω_α^k и ω_k^β пропорциональны ω_k^1, то:

$$\Omega_\alpha^\beta = [\omega_\alpha^k \omega_k^\beta] = 0.$$

Отсюда и из (13) следует, что $\Delta_{\alpha LM}^\beta = 0$ и построенное V_n^m действительно имеет нулевую внешнюю кривизну.

При $q \neq 0$ схема доказательств остается без изменения, только семейств гиперповерхностей нужно задавать не $(n-m)$, а $(n-m-q)$, на одном из этих семейств построить q векторов $\boldsymbol{I}_{m+1}, \boldsymbol{I}_{m+2}, \ldots, \boldsymbol{I}_{m+q}$ таких, что при смещении вдоль каждой гиперповерхности семейства, каждый из этих векторов был бы параллелен сам себе. Тогда в (19) будет $(n-m-q)$ независимых уравнений и т. д. Теорема доказана.

Замечание 1. При построении V_n^m нулевой внешней кривизны векторы $\boldsymbol{I}_k$ могут быть и не ортогональны между собой. Это повлияет только на формы ω_k^i, которые не имеют значения при вычислении Ω_α^β.

Опираясь на эту теорему, легко показать, что если V_n^m имеет $(n-p)$-параметрическое семейство p-мерных эквидирекционных поверхностей $(p < m)$, то оно вмещает V_n^p нулевой внешней кривизны. (Вмещает в том смысле, что в каждой точке A касательная плоскость V_n^p лежит внутри касательной плоскости V_n^m).

§ 4. Связь параллельного переноса Миллера с параллельным переносом В. В. Вагнера на V_n^m

Заметим, прежде всего, что система величин $\Delta_{\alpha\lambda\mu}^\beta$, как следует из (15) и (3), образует тензор. Этот тензор называется *тензором Схоутена* [1] и в случае голономности V_n^m становится тензором кривизны m-мерных поверхностей, на которые расслаивается голономное V_n^m.

В. В. Вагнер определил параллельно переносимые векторные поля $\{\boldsymbol{v}\}$ вдоль допустимых кривых V_n^m (т. е. вдоль кривых главного подмногообразия $\omega^i = 0$), как векторные поля, для которых вдоль этих кривых $\delta\boldsymbol{v} = 0$ [1]. Он же доказал, что необходимым и достаточным условием для существования абсолютного параллелизма на главном подмногообразии V_n^m является обращение в нуль некоторого тензора (тензора кривизны [1]). Этот тензор мы будем называть *тензором внутренней кривизны* V_n^m.

Вдоль кривых главного подмногообразия $\omega^i = 0$ параллельный перенос Миллера совпадает с параллельным переносом В. В. Вагнера. Следовательно, V_n^m *нулевой внешней кривизны имеют и нулевую внутреннюю кривизну*, и все V_n^m, имеющие семейство эквидирекционных поверхностей размерности $p \geqslant m$, являются примерами V_n^m нулевой внутренней кривизны.

Замечание 2. В. В. Вагнер рассматривал V_3^2, имеющее семейство эквидирекционных поверхностей (см. [1, § 18]), и доказал, что оно имеет нулевую внутреннюю кривизну.

Он доказал также, что параллельный перенос вдоль кривых главного подмногообразия индуцирует некоторый закон параллельного перенесения векторов вдоль любых кривых в E_n [1]. Этот параллельный перенос мы получим, если найдем, при каких $x_{\beta i}^{\alpha}$ система уравнений

$$dv^{\alpha} + v^{\beta}(\omega_{\beta}^{\alpha} + x_{\beta i}^{\alpha}\omega^i) = 0 \tag{20}$$

может быть вполне интегрируемой (при $x_{\beta i}^{\alpha} = 0$ получается параллельный перенос Миллера),

Дифференцируя (20) внешним образом, подставляя в полученное выражение dv^{α} из (20) и приравнивая нулю коэффициенты при $[\omega^{\lambda}\omega^{\mu}]$, получим в качестве одного из условий интегрируемости системы (20) следующее выражение:

$$\Delta_{\beta\lambda\mu}^{\alpha} = x_{\beta i}^{\alpha}(\Gamma_{\lambda\mu}^{i} - \Gamma_{\mu\lambda}^{i}). \tag{21}$$

Здесь слева записаны компоненты тензора Схоутена, а справа в скобках — компоненты тензора неголономности [1]. Из уравнений (21) видно, что $x_{\beta i}^{\alpha} = 0$ является единственным решением тогда и только тогда, когда тензор Схоутена равен нулю и ранг R матрицы $\| \Gamma_{\lambda\mu}^{i} - \Gamma_{\mu\lambda}^{i} \|$ равен числу уравнений $C_m^2 = \frac{m(m-1)}{2}$. *В этом и только в этом случае параллельный перенос В. В. Вагнера будет совпадать с параллельным переносом Миллера.*

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Вагнер. Дифференциальная геометрия неголономных многообразий. VIII международный конкурс на соискание премии им. Н. И. Лобачевского. Отчет. Казань (1939), 195—262.

2. Р. Н. Щербаков. О методе репеража подмногообразий. «Геометр. сб»., 3 (Труды Томского ун-та, 168), 5—11, 1963.

3. A. Miller. Le parallélisme au sens de Levi — Civita dans un sisteme de plans. Serieri matematice. Ed. Acad. R. P. Romine, 235—249, 1959.

4. С. П. Фиников. Метод внешних форм Картана. Гостехиздат, М. Л., 1948.

5. Г. Ф. Лаптев. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. «Тр. Московск. матем. об-ва», т. 2, 275—382, 1953.

6. V. «Vagner. Über V_3^2 von der Krümming Null in R_3.» Матем, сб., т. 4 (46), в. 2, 333—338. 1938.

Поступила 6 июля 1966 г.

РИМАНОВЫ МЕТРИКИ С ЗАДАННЫМ ПОЛЕМ ТЕНЗОРА КРИВИЗНЫ

М. А. Улановский (Харьков)

В заметке [1] показано, что теорема о единственности аффинной связности, соответствующей заданным полям тензоров кривизны и кручения [2], неверна. Цель настоящей статьи — показать, что эта теорема неверна и в классе римановых пространств.

Покажем, что на многообразии X_n любой размерности n можно построить поле тензора $R^i_{j,\,kl}$, служащего тензором кривизны для ∞ попарно неэквивалентных римановых метрик. Именно, в случае $n = 2$ это утверждение справедливо для любого отличного от нуля поля $R^i_{j,\,kl}$, удовлетворяющего простым алгебраическим условиям. Для произвольной размерности n можно, как и в [1], построить соответствующий пример в виде прямого произведения многообразий X_2, X_{n-2}, снабженных римановыми метриками. Действительно, мы можем менять метрику на $X_n = X_2 \times X_{n-2}$, варьируя метрику на X_2 так, чтобы поле тензора кривизны на X_2 оставалось неизменным (см. [2]).

Итак, достаточно рассмотреть подробно случай $n = 2$. Но прежде сделаем следующее замечание. Метрика ds^2, как известно, позволяет отождествить тензоры $R^i_{j,\,kl}$ и $R_{ij,\,kl}$. Однако задачи определения метрики по полям $R^i_{j,\,kl}$ и $R_{ij,\,kl}$ совершенно различны: не зная dS^2, мы не можем сопоставить, например, с заданным тензором $R_{ij,\,kl}$ определенный тензор $R^i_{j,\,kl}$. В частности, для того, чтобы при $n = 2$ задать $R_{ij,\,kl}$, нужно указать одну произвольную функцию выбранных координат, тогда как задание $R^i_{j,\,kl}$ равносильно указанию трех функций (столько же, сколько необходимо для задания метрики ds^2). Мы считаем заданным поле тензора $R^i_{j,\,kl}$. Все вопросы в настоящей статье рассматриваются «в малом».

Пусть на X_2 задано поле тензора $R^i_{j,\,kl}$. Запишем компоненты $R^i_{j,\,kl}$ в виде матрицы

$$R = \begin{pmatrix} R^1_{1,\,12} & R^1_{2,\,12} \\ R^2_{1,\,12} & R^2_{2,\,12} \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что (если искомая форма ds^2 существует) след $\operatorname{sp} R$ этой матрицы равен нулю. С другой стороны, предполагая $\operatorname{sp} R = 0$, мы в любой точке $M \in X_2$ найдем семейство базисов, в которых R кососимметрична (если определитель $\det R > 0$), либо имеет вид $R = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$ (если $\det R < 0$; при замене базиса R преобразовывается по формуле $\det A \cdot R' = ARA^{-1}$, где A — матрица преобразования базисов, $\det A$ — ее определитель). Очевидно, в первом случае нужно искать риманову форму ds^2, а во втором — псевдориманову с сигнатурой $(+,\ -)$. В дальнейшем будем предполагать, что $\det R > 0$ и $\operatorname{sp} R = 0$. Заметим, что все последующие рассуждения без существенных изменений переносятся на псевдориманов случай.

Базис в произвольной точке $M \in X_2$, в котором R кососимметрична, очевидно, должен быть составлен из двух взаимно-ортогональных векторов одинаковой длины (в смысле искомой метрики ds^2). Вместе с тем легко видеть, что семейство таких базисов (получаемых один из другого гомотетиями и «вращениями») по данной матрице R восстанавливается однозначно. Но, указав один такой базис в точке $M \in X_2$, мы определяем dS^2 с точностью до скалярного множителя $\lambda(M)$. Таким образом, любые метрики dS_1^2 и dS_2^2, соответствующие заданному на X_2 полю $R^i_{j,\ kl}$, конформны в каждой точке $M \in X_2$; искомая форма ds^2 может быть записана в виде

$$ds^2 = \lambda(M)\, ds_0^2,$$

где форму ds_0^2 можно считать заданной.

Для определения $\lambda(M)$ приведем ds_0^2 к изотермическому виду; в соответствующих локальных координатах

$$ds_0^2 = e^{2\sigma}(dx^2 + dy^2)$$

(таким образом, по полю $R^i_{j,\ kl}$ можно восстановить изотермические координаты искомой метрики). После простых вычислений получим

$$R = \begin{pmatrix} 0 & \Delta\sigma \\ -\Delta\sigma & 0 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$. Очевидно,

$$ds^2 = e^{2(\sigma_0 + h)},$$

где σ_0 — заданная функция, h — произвольная гармоническая функция ($\Delta h = 0$). Мы получили, таким образом, ∞ искомых метрик.

Покажем, что в нетривиальном случае ($R(x, y) \not\equiv 0$) все метрики (1), соответствующие различным h, не могут быть эквивалентными.

Рассмотрим псевдогруппу Φ преобразований X_2, сохраняющих инвариантным поле $R^i_{j,\ kl}$: $\varphi \in \Phi$, если

$$\varphi^* : R^i_{j,\ kl}(M) \to R^i_{j,\ kl}(\varphi M),$$

где φ^* — отображение соответствующих тензорных пространств, порожденное точечным отображением $\varphi : M \to \varphi M$. Покажем, что Φ конечна: ее преобразования могут зависеть не более, чем от трех параметров. Это немедленно следует из того, что $\varphi \in \Phi$ можно рассматривать, как движения риманова пространства с невырожденной метрикой

$$\pm R_{ij}\, du^i du^j,$$

где R_{ij} — тензор Риччи (в изотермических координатах x, y $R_{11} = R^2_{1,\ 12} = -\Delta\sigma$, $R_{22} = R^1_{2,\ 12} = -\Delta\sigma$, $R_{12} = 0$). С другой стороны, как показано в [2], все аффинные связности с заданными полями тензоров кривизны и кручения могут быть получены из одной такой связности преобразованиями Φ. Соответствующее доказательство дословно переносится на случай римановых структур. Любая форма ds^2, соответствующая заданному полю $R^i_{j,\ kl}$, может быть получена из некоторой фиксированной формы ds_0^2 следующим образом: если

$$ds^2 = g_{ij}\, du^i du^j, \quad ds_0^2 = g^{(0)}_{ij}\, du^i du^j,$$

то

$$g_{ij}(M) = \varphi^* g^0_{ij}(\varphi^{-1}M)$$

(φ^* — отображение пространств симметричных 2-тензоров, порожденное точечным отображением φ). Поскольку Φ конечна и зависит не более, чем от трех параметров a, b, c,

$$ds^2 = e^{2\sigma_0}(dx^2 + dy^2)\, e^{2h(x,\ y,\ a,\ b,\ c)},$$

где h — определенная функция от x, y и параметров a, b, c; но, очевидно, что h не может исчерпать совокупность произвольных гармонических функций, а, следовательно, построенная таким образом форма ds^2 — всех форм, соответствующих заданному полю $R^i_{j,\ kl}$.

Рассмотрим один пример. Пусть метрика

$$ds_0^2 = e^{2\sigma_0}(dx^2 + dy^2)$$

имеет постоянную кривизну:

$$K_0 = e^{-2\sigma_0}\Delta\sigma_0 = \text{const}.$$

Тогда для любого $h \neq \text{const}$, $\Delta h = 0$, кривизна метрики (1):

$$K = e^{2(\sigma_0 + h)}\Delta\sigma_0 = e^{-2h}\cdot K_0 \neq \text{const},$$

и метрика (1) не эквивалентна ds_0^2.

В заключение заметим следующее. Мы видели, что по заданному на X_2 полю тензора кривизны можно найти координаты x, y, в которых матрица R, составленная из компонент этого тензора, имеет кососимметричную форму. С геометрической точки зрения R определяет инфинитезимальное преобразование однородной группы голономии O_2, соответствующее «бесконечно малому циклу». Однако ввиду коммутативности O_2 (одночленной ортогональной группы) преобразование, связанное с конечным циклом γ, можно выразить через указанные инфинитезимальные преобразования. Так, формула Гаусса дает

$$\alpha = -\iint\limits_{D_\gamma} \Delta\sigma\, dx\, dy \quad (\Delta\sigma = R^1_{2,\ 12} = -R^2_{1,\ 12}),$$

где α — угол поворота вектора, D_γ — область, ограниченная контуром γ. Поэтому различные метрики (1), построенные выше, имеют не только общее поле тензора кривизны (преобразования, соответствующие бесконечно малым циклам), но и общие преобразования группы голономии, соответствующие любому конечному циклу. Таким образом, на X_2 (а значит, и на X_n при произвольном n) можно так задать отображение множества допустимых циклов в ортогональную группу, что этому отображению будут соответствовать попарно не эквивалентные метрики, его порождающие.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. А. Улановский. О тензорах кривизны и кручения пространства аффинной связности. «Укр. геометр. сб.», в. 3. Изд-во ХГУ, Харьков, 1966.

2. Ж. Фавар. Курс локальной дифференциальной геометрии. Изд-во иностр. лит., М., 1960.

Поступила 24 октября 1966 г.

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ИЗГИБАНИЙ ВЫПУКЛЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ С РАЗРЕЗОМ

Л. А. Шор (Харьков)

Поверхность F называется выпуклой поверхностью с разрезом, если она получается из полной выпуклой поверхности $\overline{F}$ путем удаления из нее некоторой неразбивающей ее элементарной ([1, гл. III, § 1, 1:1]) кривой Γ, называемой разрезом. Край R поверхности F с разрезом Γ дважды покрывает кривую Γ. Точнее, при обходе каждой связной компоненты края R поверхности F в заданном направлении каждая компонента регулярности кривой Γ проходится дважды: первый раз в одном направлении — второй раз в противоположном.

А. Д. Александров ([2, гл. V, § 2]) поставил вопрос об изгибаемости выпуклых многогранников с разрезом в классе всех выпуклых многогранников и указал, что исследование может быть проведено методом склеивания. Некоторые результаты в этом направлении были получены в статье [3]. В настоящей работе рассматривается вопрос об изгибаемости выпуклых поверхностей (в частности выпуклых многогранников) с разрезом в классе R всех выпуклых поверхностей с разрезом (соответственно в классе $R_м$ всех выпуклых многогранников с разрезом), т. е. без разведения края.

Будем говорить, что *выпуклая поверхность F с разрезом допускает нетривиальное изометрическое отображение в классе R всех выпуклых поверхностей с разрезом, если существует хотя бы одна изометричная, но не равная* ей выпуклая поверхность F' с разрезом. Если же существует непрерывное семейство изометричных, но не равных между собой выпуклых поверхностей F_t $(t \in [0,1])$ с разрезом, содержащее выпуклую поверхность F $(F = F_{t|t=0})$, то будем говорить, что выпуклая поверхность F с разрезом изгибаема в классе R. Наконец, если существует непрерывное семейство изометричных между собой выпуклых поверхностей F_t $(t \in [0,1])$ с разрезом, содержащее неравные между собой поверхности*

$$F = F_{t\,|t=0} \text{ и } F' = F_{t\,|t=1},$$

то будем говорить, что поверхность F наложима на поверхность F' в классе R.

Аналогично определим нетривиальное изометрическое отображение, изгибаемость и наложимость выпуклых многогранников в классе $R_м$ всех выпуклых многогранников с разрезом.

---

* Т. е. изометрия F и F' не сводится к движению.

Всюду в этой работе полную выпуклую поверхность $\bar{F}$ будем предполагать либо замкнутой, либо бесконечной с полной кривизной, равной 2π. На бесконечных выпуклых поверхностях будем допускать разрезы, уходящие в бесконечность. К выпуклым поверхностям относим также дважды покрытые плоские выпуклые области.

Теорема 1. *Для того чтобы выпуклый многогранник P (конечный или бесконечный) с конечным разрезом Γ был изгибаем в классе $R_м$, необходимо и достаточно, чтобы разрез Γ содержал квазигеодезическую $\tilde{\Gamma}$, соединяющую две вершины A_1 и A_2 многогранника P, кривизны (площади сферических изображений) которых $\geqslant \pi$.*

Доказательство достаточности. Отождествим все совмещенные в пространстве точки края P, не лежащие на $\tilde{\Gamma}$. Многогранник P перейдет при этом в многогранник $\tilde{P}$ с разрезом по квазигеодезической $\tilde{\Gamma}$. Край многогранника $\tilde{P}$ состоит из двух совмещенных в пространстве ломаных $\tilde{\Gamma}_1$ и $\tilde{\Gamma}_2$, соединенных в точках A_1 и A_2. Будем отсчитывать дугу s ломаной $\tilde{\Gamma}_1$ от A_1 к A_2, а дугу ломаной $\tilde{\Gamma}_2$ от A_2 к A_1. Пусть σ — длина ломаной $\tilde{\Gamma}$ и

$$\frac{s}{\sigma} = t, \ t \in [0,1].$$

Точку ломаной $\tilde{\Gamma}_i$, соответствующую дуге s, будем обозначать $X_i(s)$ Зафиксируем некоторое $t \in [0,1]$ и отождествим точки

$$X_i\left(\frac{\sigma t}{2} + s\right) \ \text{и} \ X_i\left(\frac{\sigma t}{2} - s\right) \qquad 0 < s \leqslant \frac{\sigma t}{2}, \ i = 1,2,$$
$$X_1(s) \ \text{и} \ X_2[\sigma - (s - \sigma t)] \qquad \sigma t \leqslant s \leqslant \sigma.$$

Так как каждый участок края многогранника $\tilde{P}$ имеет на многограннике $\tilde{P}$ неотрицательный поворот, то в результате этих отождествлений получим гомеоморфное двумерной сфере (или плоскости) многообразие G_t с многогранной метрикой положительной кривизны. Многообразие G_t реализуется замкнутым (или бесконечным с полной кривизной, равной 2π) выпуклым многогранником $\bar{P}_t$. Разрезав многогранник $\bar{P}_t$ по ломаной Γ_t, соответствующей по построению ломаной Γ, получим выпуклый многогранник P_t, изометричный, но не равный многограннику P. Непрерывному изменению параметра t в сегменте $[0,1]$ соответствует изгибание многогранника P в классе $R_м$.

Доказательство необходимости. Пусть многогранник P изгибаем в классе $R_м$. Без ограничения общности можно считать, что разрез Γ состоит из одной связной компоненты. Допустим, что существует такое изгибание многогранника P в классе $R_м$ и такие совмещенные в пространстве точки X_1 и X_2 края P, что соответствующие им по изгибанию точки X_{1t} и X_{2t} края P_t также совмещены в пространстве. Точка $X \in \Gamma$, в которой совмещены точки X_1 и X_2, разбивает Γ на две компоненты Γ_1 и Γ_2. Так как в точке X не происходит раздвижения совмещенных в ней точек X_1 и X_2 края P, то [4]* многогранник P есть часть изгибаемого в классе $R_м$ многогранника с разрезом по одной из ломаных Γ_1 и Γ_2. Отсюда следует, что если многогранник P изгибаем в класе $R_м$,

* Легко видеть, что теорема об изгибаемости многосвязных выпуклых поверхностей (многогранников) справедлива и в том случае, когда изгибания рассматриваются в классе R (в классе $R_м$).

то он является частью изгибаемого в классе $R_м$ многогранника $\tilde{P}$ с разрезом $\tilde{\Gamma}$ такого, что при любом изгибании многогранника $\tilde{P}$ в классе $R_м$ каждая пара совмещенных точек его края расходится.

Покажем теперь, что разрез $\tilde{\Gamma}$ многогранника $\tilde{P}$ является квазигеодезической с концами в вершинах многогранника $\bar{\tilde{P}} = \bar{P}$, имеющих кривизну $\geqslant \pi$.

Прежде всего заметим, что ломаная $\tilde{\Gamma}$ является простой ломаной. Если бы она имела точку ветвления, то при достаточно малом изгибании многогранника $\tilde{P}$ ломаные $\tilde{\Gamma}_t \subset \tilde{P}_t$ тоже имели бы точку ветвления. В точке ветвления ломаной $\tilde{\Gamma}_t$ совмещено не менее трех точек края многогранника $\tilde{P}_t$. Никакие две из них не могут оставаться с изменением t неизменно совмещенными. Поэтому при изгибании $\tilde{P}_t$ точка ветвления должна непрерывно перемещаться по $\tilde{\Gamma}_t$. Так как почти все точки края многогранника гладкие, то при сколь угодно малом изгибании многогранника $\tilde{P}$ полный угол в точке ветвления Γ_t окажется больше 2π, что противоречит выпуклости многогранника $\tilde{P}_t$.

Пусть Y произвольная точка края многогранника $\tilde{P}$. При изгибании $\tilde{P}$ точка Y непрерывно скользит по другим точкам края. Так как почти все точки края гладкие и многогранники $\tilde{P}_t$ выпуклые, то угол, образованный сторонами края P в точке Y, должен быть $\leqslant \pi$. Отсюда следует, что $\tilde{\Gamma}$ квазигеодезическая и ее концы имеют кривизну $\geqslant \pi$.

Следствие. Бесконечный выпуклый многогранник с конечным разрезом изгибаем в классе $R_м$ тогда и только тогда, когда он является дважды покрытой бесконечной плоской прямоугольной полуполосой с разрезом, содержащим конечную сторону A_1A_2 полуполосы.

Теорема 2. *Для того, чтобы бесконечный выпуклый многогранник P с бесконечным разрезом Γ был изгибаем в классе $R_м$, необходимо и достаточно, чтобы ломаная Γ содержала бесконечную квазигеодезическую $\tilde{\Gamma}$, выходящую из вершины A_1 многогранника $\bar{P}$, имеющей кривизну $\geqslant \pi$.*

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1.

Покажем, что существуют выпуклые многогранники с разрезом, неизгибаемые в классе $R_м$, но допускающие в этом классе нетривиальные изометрические отображения. Примером такого многогранника является конечный выпуклый многогранник P с разрезом Γ, удовлетворяющий следующим условиям:

1. Ломаная Γ соединяет две вершины A_1 и A_2 многогранника $\bar{P}$ и через другие его вершины не проходит.

2. Кривизны вершин A_1 и A_2 равны $\frac{5}{4}\pi$.

3. Ломаная Γ состоит из двух кратчайших одинаковой длины, имеющих общую точку B и образующих между собой угол равный $\frac{3}{4}\pi$.

Действительно, так как ломаная Γ не является квазигеодезической, то многогранник P неизгибаем в классе $R_м$. Однако он допускает в этом классе нетривиальное изометрическое отображение. Чтобы построить его, обозначим через Γ_1^* и Γ_2^* совмещенные в пространстве ломаные, образующие край многогранника P. Точку ломаной Γ_i^*, $i = 1,2$, совмещенную с точкой B ломаной Γ, обозначим через B_i. В силу условий 1 и 3 повороты ломаных Γ_1^* и Γ_2^* сосредоточены в точках B_1 и B_2, равны по абсолютной величине $\frac{\pi}{4}$ и противоположны по знаку. Пусть для определенности положительный поворот имеет ломаная Γ_2^* в точке B_2.

Произведем отождествление точек края мрогогранника P так, чтобы при этом отрезки $A_1B_1 \subset \Gamma_1^*$ и $A_2B_2 \subset \Gamma_2^*$ склеились между собой. Полученное при этом гомеоморфное сфере двумерное многообразие G' имеет многогранную метрику положительной кривизны (суммы углов во всех отождествленных точках края $\leqslant 2\pi$). Следовательно, оно реализуется замкнутым выпуклым многогранником $\overline{P}'$. Сделав на $\overline{P}'$ разрез по ломаной Γ', соответствующей по построению ломаной Γ, получим выпуклый многогранник P' с разрезом, изометричный, но не равный многограннику P.

Аналогично можно построить пример бесконечного выпуклого многогранника с бесконечным разрезом неизгибаемого в классе $R_м$, но допускающего в этом классе нетривиальное изометрическое отображение.

Теорема 3. *Если элементарная кривая Γ, лежащая на полной выпуклой поверхности $\overline{F}$, не разбивает $\overline{F}$ и содержит квазигеодезическую $\widetilde{\Gamma}$, соединяющую две конические точки поверхности $\overline{F}$, кривизны которых $\geqslant \pi$, то поверхность F с разрезом Γ изгибаема в классе R.*

Теорема 4. *Если элементарная кривая Γ, лежащая на полной бесконечной выпуклой поверхности $\overline{F}$, не разбивает $\overline{F}$ и содержит бесконечную квазигеодезическую $\widetilde{\Gamma}$, выходящую из конической точки, кривизна которой $\geqslant \pi$, то поверхность F с разрезом Γ изгибаема в классе R.*

Доказательства теорем 3 и 4 аналогичны доказательству достаточности в теореме 1. Следует лишь заменить слова ломаная и многогранник словами кривая и поверхность.

Следующий пример показывает, что существуют выпуклые поверхности с разрезом, не являющимся квазигеодезической линией, изгибаемые в классе R.

Пусть F — выпуклая поверхность с разрезом по простой кривой L с концами в точках A_1 и A_2. Обозначим через $\varphi_r(s)$ и $\varphi_l(s)$ соответственно правый и левый повороты на поверхности $\overline{F}$ участка кривой L от точки A_1 до точки $X(s)$, соответствующей дуге s (дуга s отсчитывается от точки A_1; $0 \leqslant s \leqslant \sigma$, где σ — длина кривой L). Пусть выполнены следующие два условия:

1) Кривизны точек A_1 и A_2 равны π.

$$2)\ \varphi_r(s) = \begin{cases} ks & 0 < s \leqslant \frac{1}{3}\sigma, \\ \frac{2}{3}k\sigma + \alpha - ks & \frac{1}{3}\sigma < s \leqslant \frac{2}{3}\sigma, \\ 2\alpha - \frac{2}{3}k\sigma + ks & \frac{2}{3}\sigma < s \leqslant \sigma, \end{cases}$$

$$\varphi_l(s) = ks, \quad 0 < s \leqslant \sigma,$$

$$k = \text{const}, \quad \alpha = \text{const}, \quad 2\alpha + \frac{4}{3}k\sigma \leqslant 2\pi.$$

Кривая L не является квазигеодезической на поверхности $\overline{F}$, так как правый поворот ее участка $X\left(\frac{\sigma}{3}\right)X\left(\frac{2}{3}\sigma\right)$ отрицателен. Однако поверхность F с разрезом L допускает изгибание в классе R, которое строится так же, как в доказательстве теоремы 1. Отметим только, что многообразие G_t будет иметь положительную кривизну при $t \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$.

В заключение рассмотрим вопрос о наложимости в классе R выпуклой поверхности с разрезом на дважды покрытую плоскую область с разрезом по краю области.

Теорема 5. *Для того, чтобы выпуклая поверхность F с конечным разрезом Γ была наложима в классе R на дважды покрытую плоскую область Q с разрезом по краю области, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

1. Кривая Γ содержит квазигеодезическую $\tilde{\Gamma}$, соединяющую две конические точки A_1 и A_2 поверхности $\bar{F}$, кривизны которых не меньше π.

2. На поверхности $\bar{F}$ есть простая квазигеодезическая Γ_1, соединяющая две точки C и D края F, лежащие на $\tilde{\Gamma}$, при этом:*

a) $\Gamma \subset \Gamma_1 + \tilde{\Gamma}$;

b) *кроме точек C и D кривые Γ_1 и $\tilde{\Gamma}$ не имеют общих точек;*

c) *кривизна поверхности $\bar{F}$ сосредоточена на кривых Γ_1 и $\tilde{\Gamma}$;*

d) *на каждом участке кривой Γ_1 левый и правый повороты ее равны между собой. В точках C и D кривая Γ_1 делит пополам углы, образованные ветвями $\tilde{\Gamma}$ в этих точках;*

e) *Пусть $\tilde{F}$ поверхность, полученная из F склеиванием совмещенных участков края, не принадлежащих $\tilde{\Gamma}$, тогда точки C и D делят край $\tilde{F}$ на две части $\overline{CD}$ и $\overline{\overline{CD}}$ равной длины. При этом, если l дуга кривых $\overline{CD}$ и $\overline{\overline{CD}}$, отсчитываемая от точки C к точке D, и $\varphi_1(l)$ и $\varphi_2(l)$ повороты участков кривых $\overline{CD}$ и $\overline{\overline{CD}}$ от точки C до точек, соответствующих дуге l, то*

$$\varphi_1(l) = \varphi_2(l).$$

Доказательство достаточности. В силу теоремы 3 существует непрерывное семейство изометричных поверхности F поверхностей $F_t \subset R \left(t = \frac{s}{\sigma} \in [0,1]; \ F_0 = F; \ s — \text{дуга кривой } \tilde{\Gamma}, \text{ отсчитываемая от точки } A_1, \text{ к точке } A_2, \ \sigma — \text{длина } \tilde{\Gamma}\right)$. Докажем, что при $t_C = \frac{s_C}{\sigma}$, где s_C — дуга, соответствующая точке C, поверхность F_{t_C} является дважды покрытой плоской областью с разрезом по краю.

Действительно, кривая $\tilde{\Gamma}_{t_C}$, полученная в результате отождествления точек края F, и кривая Γ_{1t_C} образуют простую замкнутую кривую L_{t_C}, разбивающую многообразие G_{t_C} на две области G_1 и G_2. В силу условия $2c$ кривизна многообразия G_{t_C} сосредоточена полностью на кривой L_{t_C}. В силу условий $2d$ и $2e$ на каждом участке кривой L_{t_C} правый и левый повороты ее равны между собой. Отсюда следует, что реализующая многообразие G_{t_C} замкнутая выпуклая поверхность $\bar{F}_{t_C}$, является дважды покрытой плоской областью, край которой состоит из кривых $\tilde{\Gamma}_{t_C}$ и Γ_{1t_C}. Разрезав поверхность $\bar{F}_{t_C}$ по кривой Γ_{t_C}, соответствующей по построению кривой Γ, получим выпуклую поверхность F_{t_C} с разрезом, являю-

* Точки C и D могут быть совмещены в пространстве.

щуюся дважды покрытой плоской выпуклой областью с разрезом по краю области.

Доказательство необходимости. Пусть выпуклая поверхность F с конечным разрезом Γ наложима в классе R на дважды покрытую плоскую выпуклую область Q с разрезом Γ', лежащим на краю Λ области Q. Как и для многогранников, разрез Γ содержит простую кривую $\tilde{\Gamma}$ такую, что при изгибании F любые две точки края F, совмещенные на $\tilde{\Gamma}$, расходятся, а точки края F, совмещенные на $\Gamma - \tilde{\Gamma}$, остаются совмещенными и при изгибании F. Концы $\tilde{\Gamma}$ лежат в конических точках $\bar{F}$, имеющих кривизну не меньше π. Кривой $\tilde{\Gamma}$ соответствует на Q участок разреза, который обозначим $\tilde{\Gamma}'$. Кривая $\tilde{\Gamma}'$, как часть границы Λ выпуклой области Q, на каждом своем участке имеет неотрицательный поворот. В силу изгибаемости дважды покрытой области Q с разрезом $\tilde{\Gamma}'$ в классе R полные углы в точках C' и D' — концах кривой $\tilde{\Gamma}'$, не больше π. Необходимость условия 1 доказана.

Участку $\Lambda - \tilde{\Gamma}'$ границы выпуклой области Q на поверхности $\bar{F}$ соответствует квазигеодезическая Γ_1, соединяющая две точки C и D края F. При этом, очевидно, выполнены условия $2a$ и $2b$. Так как вся кривизна дважды покрытой области Q сосредоточена на ее границе Λ, то выполнено также условие $2c$. Наконец, условия $2d$ и $2e$ выполнены в силу того, что левый и правый повороты Λ на каждом участке равны между собой и в каждой вершине дважды покрытой области Q кривая Λ делит угол пополам.

Теорема доказана.

Теорема 6. *Для того, чтобы бесконечная выпуклая поверхность F с бесконечным разрезом Γ была наложима в классе R на дважды покрытую плоскую область Q с разрезом по краю области, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

1. Кривая Γ содержит бесконечную квазигеодезическую $\tilde{\Gamma}$, выходящую из конической точки, кривизна которой $\geqslant \pi$.

2. На поверхности $\bar{F}$ есть простая бесконечная квазигеодезическая Γ_1, выходящая из некоторой точки $C \in \tilde{\Gamma}$, при этом:

a) *кроме точки C кривые Γ_1 и $\tilde{\Gamma}$ не имеют общих точек;*

b) $\Gamma \subset \Gamma_1 + \tilde{\Gamma}$;

c) *кривизна поверхности $\bar{F}$ сосредоточена на кривых Γ_1 и $\tilde{\Gamma}$;*

d) *на каждом участке кривой Γ_1 левый и правый повороты ее равны между собой. Кривая Γ_1 делит пополам угол, образованный ветвями $\tilde{\Gamma}$ в точке C;*

e) *выполнено равенство*

$$\varphi_1(l) = \varphi_2(l),$$

в котором $\varphi_1(l)$ и $\varphi_2(l)$ определены аналогично тому, как это сделано в условии теоремы 5.

Доказательство теоремы 6 аналогично доказательству теоремы 5.

ЛИТЕРАТУРА

1. П. С. Александров. Комбинаторная топология. Гостехиздат, М., 1947.
2. А. Д. Александров. Выпуклые многогранники. Гостехиздат, М.—Л,. 1950.
3. Л. А. Шор. Об изгибании выпуклых многогранников с разрезом. УМЖ, т. 16, № 4, 1964.
4. Л. А. Шор. Об изгибаемости многосвязных выпуклых поверхностей, «Усп. матем. наук», т. XV, вып. 5 (95), 1960.

Поступила 31 октября 1966 г.

ЛИНЕЙЧАТО-ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ КАНОНИЧЕСКОГО РЕПЕРА ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ ПСЕВДОКОНФОРМНОГО ПРОСТРАНСТВА

Р. Юнусметов (Киев)

В работе строятся канонические реперы гиперповерхности четырехмерного псевдоконформного пространства как в случае, когда эта гиперповерхность является общей, так и в случаях, когда она имеет тот или иной частный вид. Каждому из этих случаев соответствует комплекс прямых в трехмерном проективном пространстве либо с простыми, либо с кратными инфлекционными центрами.

Отмечаются некоторые иные классы гиперповерхностей — каналовые поверхности и циклиды Дюпена.

Со времени выхода в свет Эрлангенской программы Клейна (1872) геометрию пространства рассматривают как теорию инвариантов соответствующей группы преобразований этого пространства. В этой программе отмечено, что линейчатая геометрия трехмерного проективного пространства P_3 изоморфна геометрии псевдоконформного пространства ${}^2C_4$ [2]. Поэтому результаты, полученные в конформной дифференциальной геометрии, могут быть использованы при изучении линейчатых многообразий пространства P_3.

Рассмотрим в проективном пространстве P_3 точечный репер $N_1N_2N_3N_4$, нормированный условием $(N_1N_2N_3N_4) = 1$.

Введем обозначения

$$p_1 = [N_1N_2], \quad p_2 = [N_1N_3], \quad p_3 = [N_1N_4],$$
$$p_4 = [N_2N_3], \quad p_5 = [N_2N_4], \quad p_6 = [N_3N_4],$$

где $p_1, \ldots, p_6$ — аналитические ребра репера (под аналитической прямой мы понимаем шесть плюккеровых координат этой прямой). Выпишем уравнения инфинитезимального смещения репера $N_1N_2N_3N_4$

$$dN_{i'} = \omega_{i'}^{j'} N_{j'}, \quad i', j' = 1, \ldots, 4.$$

Тогда произвольная аналитическая прямая p проективного пространства может быть представлена в виде

$$p = \eta^i p_i \quad (i = 1, \ldots, 6), \tag{1}$$

где

$$\eta^1 = p^{12}, \quad \eta^3 = p^{14}, \quad \eta^5 = p^{24},$$
$$\eta^2 = p^{13}, \quad \eta^4 = p^{24}, \quad \eta^6 = p^{34}.$$

Коэффициенты η^i этого разложения будут плюккеровыми координатами p. Они удовлетворяют условию Плюккера

$$\eta^1\eta^6 - \eta^2\eta^5 + \eta^3\eta^4 = 0. \qquad (2)$$

Положим

$$\eta^1 = \frac{1}{2}(x^6 - x^5), \quad \eta^4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^2 - x^4),$$
$$\eta^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^3 - x^1), \quad \eta^5 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^3 + x^1),$$
$$\eta^3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^2 + x^4), \quad \eta^6 = (x^6 + x^5).$$

В таком случае уравнение квадрики Плюккера (2) имеет вид

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 - (x^4)^2 - (x^5)^2 + (x^6)^2 = 0. \qquad (3)$$

Рассмотрим четырехмерное псевдоевклидово пространство индекса 2, отнесенное к системе прямоугольных координат. Уравнение гиперсферы в таком пространстве имеет вид

$$(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 - (x_3 - a_3)^2 - (x_4 - a_4)^2 - r^2 = 0.$$

Обозначим

$$\frac{\xi^1}{\xi^0} = a_1, \quad \frac{\xi^2}{\xi^0} = a_2, \quad \frac{\xi^3}{\xi^0} = -a_3, \quad \frac{\xi^4}{\xi^0} = -a_4,$$
$$-\frac{2\xi^5}{\xi^0} = a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 - a_4^2 - r^2.$$

Шесть чисел ξ^i называются гексасферическими координатами гиперсферы. Точку пространства можно считать гиперсферой нулевого радиуса; в таком случае гексасферические координаты точек удовлетворяют уравнению.

$$\Phi = (\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 - (\xi^3)^2 - (\xi^4)^2 + 2\xi^0\xi^5 = 0. \qquad (4)$$

Левая часть этого уравнения называется квадратичной формой Дарбу. Полярной формой от квадратичной формы Φ называется выражение (скалярное произведение гиперсфер A и $\overline{A}$):

$$(A\overline{A}) = \xi^1\overline{\xi}^1 + \xi^2\overline{\xi}^2 - \xi^3\overline{\xi}^3 - \xi^4\overline{\xi}^4 + \xi^0\overline{\xi}^5 + \overline{\xi}^0\xi^5. \qquad (5)$$

Равенство

$$(A\overline{A}) = 0 \qquad (6)$$

означает, что две гиперсферы A и $\overline{A}$ являются ортогональными. Если точка M принадлежит гиперсфере A, то должны выполняться равенства

$$(MM) = 0, \quad (MA) = 0.$$

Квадратичная форма Дарбу с помощью подстановки

$$\xi^1 = y^1, \quad \xi^3 = y^3, \quad \xi^0 = \frac{1}{2}(y^6 - y^5),$$
$$\xi^2 = y^2, \quad \xi^4 = y^4, \quad \xi^5 = (y^6 + y^5)$$

приводится к каноническому виду

$$(y^1)^2 + (y^2)^2 - (y^3)^2 - (y^4)^2 - (y^5)^2 + (y^6)^2 = 0. \qquad (7)$$

Если положим

$$x^i = y^i \quad (i = 1, \ldots, 6), \qquad (8)$$

то квадрика Плюккера (3) совпадет с квадрикой Дарбу (7).

Четырехмерным псевдоконформным пространством ${}^2C_4$ называется псевдоевклидово пространство индекса 2, дополненное несобственной точкой, фундаментальной группой которого является 15-членная группа сферических преобразований.

В качестве сопровождающего репера такого пространства возьмем репер, образованный двумя точками A_0 и A_5 и четырьмя проходящими через них линейно независимыми гиперсферами A_1, A_2, A_3 и A_4. Наш выбор сопровождающего репера определяется равенствами

$$(A_0A_0) = (A_5A_5) = (A_0A_h) = (A_5A_h) = 0, \quad (A_0A_5) = 1, \qquad (9)$$
$$(A_hA_\beta) = g_{h\beta}, \quad (h,\ \beta = 1,\dots,4),$$

где $g_{h\beta}$ — тензор угловой метрики в ${}^2C_4$ или просто метрический тензор.

Уравнения инфинитизимального перемещения элементов этого репера имеют вид

$$dA_\alpha = \Omega_\alpha^\gamma A_\gamma \quad (\alpha,\ \gamma = 0,1,\dots,5) \qquad (10)$$

Дифференцируя уравнения (9) и учитывая равенства (10), найдем уравнения, определяющие конформную группу

$$\Omega_0^5 = \Omega_5^0 = \Omega_0^0 + \Omega_5^5 = 0, \quad \Omega_h^0 + g_{h\beta}\Omega_5^\beta = 0 \qquad (11)$$
$$\Omega_h^5 + g_{h\beta}\Omega_0^\beta = 0, \quad dg_{h\beta} = g_{hk}\Omega_\beta^k + g_{k\beta}\Omega_h^k. \quad (k = 1,\dots,4)$$

Условия интегрируемости системы (10) имеют вид

$$(\Omega_\alpha^\gamma)' = [\Omega_\alpha^\lambda \Omega_\lambda^\gamma] \quad (\lambda = 0,1,\dots,5). \qquad (12)$$

В конформном пространстве аналитической прямой (1) соответствует аналитическая точка A; Последнюю можно представить в виде

$$A = \xi^\gamma A_\gamma, \qquad (13)$$

где ξ^γ — гексасферические координаты, связанные соотношением (4). Соответствие между точками псевдоконформного пространства и прямыми проективного пространства в работе [1] давалось следующим соотношением:

$$\eta^i p_i = \xi^\gamma A_\gamma. \qquad (14)$$

Между координатами η^i и ξ^γ установлены соотношения, определяемые (8). Если внести в (14) значения ξ^γ и сравнить коэффициенты при одинаковых координатах η^i, то можно получить формулы перехода для базисов обоих пространств, а отсюда — установить связь между компонентами смещения соответствующих реперов.

Многие соотношения будут иметь вид, несколько отличный от того, какой дан в работе [1]. В самом деле, между плюккеровыми координатами η^i прямой в проективном пространстве и гексасферическими координатами точки псевдоконформного пространства у нас существуют следующие связи:

$$\xi^0 = \eta^1, \qquad \xi^3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\eta^5 + \eta^2),$$
$$\xi^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\eta^5 - \eta^2), \quad \xi^4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\eta^3 - \eta^4), \qquad (15)$$
$$\xi^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\eta^4 + \eta^3), \quad \xi^5 = \eta^6.$$

Если подставим значения ξ^γ в уравнение (14) и сравним коэффициенты при одинаковых координатах η^i, то придем к таким формулам перехода для базисов обоих пространств:

$$
\begin{aligned}
&p_1 = A_0, && p_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_2 - A_4),\\
&p_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_3 - A_1), && p_5 = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_3 + A_1),\\
&p_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_2 + A_4), && p_6 = A_5,
\end{aligned}
$$

или

$$
\begin{aligned}
&A_0 = p_1, && A_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(p_5 + p_2),\\
&A_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(p_5 - p_2), && A_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(p_3 - p_4),\\
&A_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(p_4 + p_3), && A_5 = p_6.
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Легко видеть, что координаты вершин «гиперсферы» (16) удовлетворяют следующим соотношениям (чтобы их получить, надо по формулам (16) подсчитать координаты сферы A_i в репере p_j, это будут величины η^j, после чего, найдя ξ^i по формулам (15), подставить их в квадратичную форму Дарбу):

$$
\begin{gathered}
(A_0A_0) = (A_5A_5) = (A_0A_h) = (A_5A_h) = 0,\\
(A_1A_1) = (A_2A_2) = 1, \quad (A_3A_3) = (A_4A_4) = -1,\\
(A_0A_5) = 1, \quad (A_hA_\beta) = 0 \quad h \neq \beta.
\end{gathered}
\tag{17}
$$

Такой репер называется репером Картана [3]. Уравнения (11) принимают вид

$$
\begin{aligned}
&\Omega_5^1 = -\Omega_1^0, && \Omega_1^5 = -\Omega_0^1, && \Omega_1^2 = -\Omega_2^1,\\
&\Omega_5^2 = -\Omega_2^0, && \Omega_2^5 = -\Omega_0^2, && \Omega_1^3 = \Omega_3^1,\\
&\Omega_5^3 = \Omega_3^0, && \Omega_3^5 = \Omega_0^2, && \Omega_1^4 = \Omega_4^1,\\
&\Omega_5^4 = \Omega_4^0, && \Omega_4^5 = \Omega_0^4, && \Omega_2^3 = \Omega_3^2,\\
&\Omega_3^4 = -\Omega_4^3, && \Omega_2^4 = \Omega_4^2, && \Omega_i^i = 0.
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Дифференцируя (16) и сравнивая коэффициенты при одинаковых A_γ, мы найдем связь между формами Ω_α^γ и ω_i^j. Собирая все результаты, будем иметь: (аналогичные результаты приведены М. А. Акивисом в работе [2].):

$$
\begin{aligned}
&\Omega_0^1 = -\Omega_1^5 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\omega_2^3 + \omega_1^4), && \Omega_1^0 = -\Omega_5^1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\omega_3^2 + \omega_4^1),\\
&\Omega_0^2 = -\Omega_2^5 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\omega_2^4 - \omega_1^3), && \Omega_2^0 = -\Omega_5^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\omega_4^2 - \omega_3^1),\\
&\Omega_0^3 = +\Omega_3^5 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\omega_2^3 - \omega_1^4), && \Omega_3^0 = \Omega_5^3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\omega_3^2 - \omega_4^1),\\
&\Omega_0^4 = \Omega_4^5 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\omega_2^4 + \omega_1^3), && \Omega_4^0 = \Omega_5^4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\omega_4^2 + \omega_3^1),
\end{aligned}
\tag{19}
$$

$$
\begin{gathered}
\Omega_1^2 = -\Omega_2^1 = \frac{1}{2}(\omega_2^1 - \omega_1^2 + \omega_4^3 - \omega_3^4),\\
\Omega_1^3 = \Omega_3^1 = \frac{1}{2}(\omega_2^2 + \omega_4^4 - \omega_1^1 - \omega_3^3),
\end{gathered}
$$

$$\Omega_1^4 = \Omega_4^1 = \frac{1}{2}(\omega_2^1 + \omega_1^2 - \omega_4^3 - \omega_3^4),$$

$$\Omega_2^3 = \Omega_3^2 = \frac{1}{2}(\omega_1^2 + \omega_2^1 + \omega_4^3 + \omega_3^4),$$

$$\Omega_2^4 = \Omega_4^2 = \frac{1}{2}(\omega_1^1 + \omega_4^4 - \omega_2^2 - \omega_4^4),$$

$$\Omega_3^4 = -\Omega_4^3 = \frac{1}{2}(\omega_2^1 - \omega_1^2 + \omega_3^4 - \omega_4^3),$$

$$\Omega_0^0 = -\Omega_5^5 = (\omega_1^1 + \omega_2^2).$$

Пусть Σ — гиперповерхность псевдоконформного пространства. Совместим текущую точку M с вершиной репера A_0. Если точка A_0 гиперповерхности закреплена, то дифференциалы du^1, du^2, du^3, определяющие положение точки A_0, будут равны нулю. В этом случае компоненты инфинитезимального смещения репера будут зависеть лишь от параметров, определяющих его изменение при закрепленной точке.

Назовем эти параметры вторичными параметрами, а компоненты смещения, зависящие лишь от дифференциалов этих параметров,— вторичными формами.

Если точка закреплена, то имеем $\Omega_0^1 = 0$, $\Omega_0^2 = 0$, $\Omega_0^3 = 0$, $\Omega_0^4 = 0$. Формы Пфаффа Ω_0^i называются главными формами. Так как они содержат лишь три дифференциала du^1, du^2, du^3, то одна из них линейно выражается через другие

$$\Omega_0^4 = a\Omega_0^1 + b\Omega_0^2 + c\Omega_0^3.$$

Если выберем A_4 так, чтобы $(A_4 dA_0) = 0$, то будем иметь

$$\Omega_0^4 = 0, \tag{20}$$

следовательно,

$$a = b = c = 0.$$

Продолжая уравнение (20), получим

$$\Omega_i^4 = a_{ij}\Omega^j, \quad a_{ij} = a_{ji}, \quad (i, j = 1, 2, 3). \tag{21}$$

В результате неполной канонизации репера, которая приводит к реперу (21), главными становятся также и формы Ω_i^4. (При полной канонизации репера все вторичные параметры выражаются через главные параметры u^1, u^2, u^3 и все вторичные формы становятся равными нулю). Продифференцируем внешним образом уравнения (21). Получим следующий закон изменения коэффициентов a_{ij} при изменении вторичных форм π_i^j.

$$\begin{aligned}
\delta a_{11} &= -a_{11}\pi_0^0 + 2a_{12}\pi_1^2 + 2a_{13}\pi_1^3 + \pi_4^0,\\
\delta a_{12} &= -a_{12}\pi_0^0 - (a_{11} - a_{22})\pi_1^2 + a_{13}\pi_2^3 + a_{23}\pi_1^3,\\
\delta a_{13} &= -a_{13}\pi_0^0 + (a_{11} + a_{33})\pi_1^3 + a_{12}\pi_2^3 + a_{23}\pi_1^2,\\
\delta a_{23} &= -a_{23}\pi_0^0 + (a_{22} + a_{33})\pi_2^3 + a_{12}\pi_1^3 - a_{13}\pi_1^2,\\
\delta a_{22} &= -a_{22}\pi_0^0 - 2a_{12}\pi_1^2 + 2a_{23}\pi_2^3 + \pi_4^0,\\
\delta a_{33} &= -a_{33}\pi_0^0 + 2a_{13}\pi_1^3 + 2a_{23}\pi_2^3 - \pi_4^0,
\end{aligned} \tag{22}$$

Сопоставив гиперповерхности псевдоконформного пространства с комплексами линейчатого пространства, мы осуществим канонизацию репера одним из следующих пяти способов:

$$\begin{aligned} &1)\ a_{11} = a_{33} = 1, \quad a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0, \quad a_{22} = c \neq 0,\\ &2)\ a_{22} = a_{11} = a_{33} = a_{12} = a_{13} = a_{23} = 1,\\ &3)\ a_{11} = a_{33} = a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0, \quad a_{22} = 1,\\ &4)\ a_{11} = a_{33} = a_{13} = a_{23} = a_{12} = 1, \quad a_{22} = 0,\\ &5)\ a_{11} = a_{33} = a_{13} = 1, \quad a_{12} = a_{23} = a_{22} = 0. \end{aligned} \tag{23}$$

Ниже мы покажем, что первый способ фиксаций параметров приводит к каноническому реперу гиперповерхности общего типа. Другие способы фиксации приводят к каноническим реперам гиперповерхностей некоторых частных типов.

Рассмотрим пучок гиперсфер, касающихся гиперповерхности в рассматриваемой точке A_0. Каждая гиперсфера этого пучка имеет гексасферические координаты $\lambda A_0 + A_4$, где λ — параметр. Пересечение такой гиперсферы с гиперповерхностью с точностью до бесконечно малых высшего порядка определяется уравнением

$$(\lambda A_0 + A_4,\ d^2 A_0) = 0$$

или

$$\lambda[-(\Omega_0^1)^2 - (\Omega_0^2)^2 + (\Omega_0^3)^2] - (\Omega_0^1\Omega_1^4 + \Omega_0^2\Omega_2^4 + \Omega_0^3\Omega_3^4) = 0.$$

Вводя обозначения

$$\varphi^0 = (\Omega_0^1)^2 + (\Omega_0^2)^2 - (\Omega_0^3)^2, \quad \varphi^1 = \Omega_0^1\Omega_1^4 + \Omega_0^2\Omega_2^4 + \Omega_0^3\Omega_3^4,$$

перепишем последнее равенство в виде

$$\psi = -\lambda\varphi^0 + \varphi^1 = 0. \tag{24}$$

Если трактовать Ω_0^i как точечные проективные координаты, то из уравнения (24) видно, что в каждой точке гиперповерхности существует линейный пучок конусов второго порядка, внутренним образом связанных с поверхностью. Эти конусы имеют общие образующие, дающие инвариантные направления.

Подставим вместо Ω_i^4 их значения из уравнения (21), получим

$$\begin{aligned} (a_{11} + \lambda)(\Omega_0^1)^2 + (a_{22} + \lambda)(\Omega_0^1)^2 + (a_{33} - \lambda)(\Omega_0^3)^2 + 2a_{12}\Omega_0^1\Omega_0^2 + \\ + 2a_{13}\Omega_0^3\Omega_0^1 + 2a_{23}\Omega_0^2\Omega_0^3 = 0. \end{aligned} \tag{25}$$

Найдем прежде всего аналог главных направлений, для этого, дифференцируя (25) по Ω_0^1, Ω_0^2, Ω_0^3, будем иметь

$$\begin{aligned} (a_{11} + \lambda)\,\Omega_0^1 + a_{12}\Omega_0^2 + a_{13}\Omega_0^3 = 0,\\ a_{12}\Omega_0^1 + (a_{22} + \lambda)\,\Omega_0^2 + a_{23}\Omega_0^3 = 0,\\ a_{13}\Omega_0^1 + a_{23}\Omega_0^2 + (a_{33} - \lambda)\,\Omega_0^3 = 0. \end{aligned} \tag{26}$$

Исключая формы Ω_0^1, Ω_0^2, Ω_0^3, одновременно не равные нулю, получим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} a_{11} + \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} + \lambda & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{27}$$

Отсюда найдем три экстремальных значения параметра λ. Направления, соответствующие этим значениям, мы и назовем главными направлениями, огибающие этих направлений называются линиями кривизны гиперповерхности.

Окрестности первого и второго порядков точки определяют первую и вторую квадратичные формы

$$\varphi^0 = (\Omega_0^1)^2 + (\Omega_0^2)^2 - (\Omega_0^3)^2$$
$$\varphi^1 = (A_4 d^2 A_0) = -(\Omega_0^1\Omega_1^4 + \Omega_0^2\Omega_2^4 + \Omega_0^3\Omega_3^4). \tag{28}$$

Найдем теперь аналог главных кривизн. С этой целью возьмем отношение двух квадратичных форм, назовем нормальной кривизной гиперповерхности и обозначим через k_n

$$k_n = \frac{\varphi^1}{\varphi^0}. \tag{29}$$

Продифференцируем это по Ω_0^1, Ω_0^2, Ω_0^3, считая $k_n = \mathrm{const}$, получим

$$\begin{aligned} (a_{11} + k_n)\,\Omega_0^1 + a_{12}\Omega_0^2 + a_{13}\Omega_0^3 &= 0 \\ a_{12}\Omega_0^1 + (a_{22} + k_n)\,\Omega_0^2 + a_{23}\Omega_0^3 &= 0 \\ a_{13}\Omega_0^1 + a_{23}\Omega_0^2 + (a_{33} - k_n)\,\Omega_0^3 &= 0, \end{aligned} \tag{30}$$

исключая Ω_0^i, будем иметь

$$\begin{vmatrix} a_{11} + k_n & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} + k_n & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} - k_n \end{vmatrix} = 0. \tag{31}$$

Уравнение (31) определяет три нормальных конформных кривизны гиперповерхности. Назовем эти кривизны главными кривизнами гиперповерхности и обозначим их соответственно через k_1, k_2, k_3. Они соответствуют линиям гиперповерхности, дифференциальные формы Ω_0^1, Ω_0^2, Ω_0^3 которых удовлетворяют уравнениям (30). Сравнивая (26) с равенствами (30), заметим, что такие линии необходимо являются линиями кривизны, при этом

$$\lambda = k_n.$$

Из способа нахождения линий кривизны видим, что для таких линий нормальные кривизны оказываются стационарными. Нормальная кривизна линии кривизны равна корню характеристического уравнения.

Кубическое уравнение (31) определяет три симметричных функции его корней

$$K = k_1 k_2 k_3, \quad P = k_1 k_2 + k_3 k_2 + k_1 k_3, \quad H = k_1 + k_2 + k_3.$$

Функцию K назовем полной кривизной гиперповерхности, P — промежуточной кривизной, H — средней кривизной. Они представляют собой некоторые относительные инварианты гиперповерхности.

Пусть репер фиксирован первым способом (23). В таком случае гиперповерхность определяется системой уравнений

$$\Omega_0^4 = 0, \quad \Omega_1^4 = \Omega_0^1, \quad \Omega_2^4 = c\Omega_0^2, \quad \Omega_3^4 = \Omega_0^3, \tag{32}$$

а их продолжения имеют вид:

$$
\begin{aligned}
\Omega_0^0 &= \alpha_1\Omega_0^1 + \alpha_2\Omega_0^2 + \alpha_3\Omega_0^3,\\
\Omega_1^2 &= \gamma_1\Omega_0^1 + \gamma_2\Omega_0^2 + \gamma_3\Omega_0^3\\
\Omega_1^3 &= -\frac{b_3}{2}\Omega_0^1 - \frac{b_5}{2}\Omega_0^2 - \frac{b_6}{2}\Omega_0^3,\\
\Omega_2^3 &= p_1\Omega_0^1 + p_2\Omega_0^2 + p_3\Omega_0^3,\\
\Omega_4^0 &= \beta_1\Omega_0^1 + \beta_2\Omega_0^2 + \beta_3\Omega_0^3,\\
dc &= q_1\Omega_0^1 + q_2\Omega_0^2 + q_3\Omega_0^3,
\end{aligned}
\tag{33}
$$

где

$$
\alpha_1 = \frac{b_1 + b_6}{2}, \quad \alpha_3 = \frac{b_3 + d_5}{2}, \quad \beta_2 = \frac{d_5 - b_2}{2},
$$

$$
\alpha_2 = \frac{b_2 + d_5}{2}, \quad \beta_1 = \frac{b_6 - b_1}{2}, \quad \beta_3 = \frac{d_6 - b_3}{2},
$$

$$
\gamma_1 = \frac{b_2}{1-c}, \quad \gamma_3 = \frac{b_5}{1-c}, \quad p_2 = -\frac{d_4}{1+c},
$$

$$
\gamma_2 = \frac{b_1}{1-c}, \quad p_1 = -\frac{b_5}{1+c}, \quad p_3 = -\frac{d_5}{1+c},
$$

$$
q_1 = b_4 - \frac{c(b_1 + b_6) - (b_6 - b_1)}{2}, \quad q_2 = c_4 - \frac{c(b_2 + d_5) - (b_6 - b_1)}{2},
$$

$$
q_3 = d_4 - \frac{c(b_3 + d_6) - (d_6 - b_3)}{2}.
$$

Продифференцируем внешним образом уравнения (33), получаем следующий закон изменения параметров $\alpha_1, \ldots, q_3$, при изменении вторичных форм:

$$
\begin{aligned}
&\delta\alpha_1 + \pi_1^0 = 0, && \delta\beta_1 + \pi_1^0 = 0, && \delta\gamma_1 - \pi_2^0 = 0,\\
&\delta\alpha_2 + \pi_2^0 = 0, && \delta\beta_2 + c\pi_2^0 = 0, && \delta\gamma_2 - \pi_1^0 = 0,\\
&\delta\alpha_3 + \pi_3^0 = 0, && \delta\beta_3 - \pi_3^0 = 0, && \delta\gamma_3 = 0,\\
&\frac{1}{2}\delta b_3 - \pi_3^0, = 0, && \delta p_1 = 0, && \delta q_1 = 0,\\
&\delta b_5 = 0, && \delta p_2 - \pi_3^0 = 0, && \delta q_2 = 0,\\
&\delta b_6 - \pi_1^0 = 0, && \delta p_3 - \pi_2^0 = 0, && \delta q_3 = 0.
\end{aligned}
$$

Фиксируем вторичные параметры так, чтобы получить равенства $b_6 = \gamma_1 = p_2 = 0$ или, что то же самое, $b_2 = b_6 = d_4 = 0$. При этом $\pi_1^0 = \pi_2^0 = \pi_3^0 = 0$.

Введем обозначения

$$
b_6 = \alpha, \quad d_5 = \beta, \quad d_6 = \gamma, \quad b_5 = s, \quad b_4 = q, \quad c_4 = k, \quad d_4 = r.
$$

В таком случае уравнения движения реперов принимают вид:

$$
\begin{aligned}
2\Omega_0^0 &= \alpha\Omega_0^1 + \beta\Omega_0^2 + (\gamma + q)\Omega_0^3,\\
\Omega_1^2 &= \frac{s}{1-c}\Omega_0^2 + \frac{k}{1-c}\Omega_0^3,\\
2\Omega_1^3 &= -\gamma\Omega_0^1 - k\Omega_0^2,\\
\Omega_2^3 &= -\frac{k}{1+c}\Omega_0^1 - \frac{\beta}{1+c}\Omega_0^3,\\
2\Omega_4^0 &= -\alpha\Omega_0^1 + \beta\Omega_0^2 + (q - \gamma)\Omega_0^3,\\
2dc &= [(2s - \alpha)(1+c)]\Omega_0^1 + [\text{[illegible]}]\Omega_0^2 + [(q - \gamma) - c(q + \gamma)]\Omega_0^3.
\end{aligned}
\tag{34}
$$

Все коэффициенты уравнений (34) являются инвариантными. Полученный репер назовем каноническим репером гиперповерхности. Уравнения линий кривизны в этом репере имеют вид

$$\Omega_0^1 = \Omega_0^3 = 0, \quad \Omega_0^2 = \Omega_0^3 = 0, \quad \Omega_0^1 = \Omega_0^2 = 0.$$

При движении точки A_0 по первой линии кривизны $\Omega_0^1 = \Omega_0^2 = 0$ имеем

$$(A_3 A_0) = 0, \quad (A_3\, dA_0) = 0, \quad (A_3\, d^2 A_0) = 0.$$

Это равенство показывает, что гиперсфера A_3 имеет с этой линией соприкосновение 2-го порядка.

Аналогично гиперсферы A_2 и A_1 имеют соприкосновение 2-го порядка соответственно со второй и с третьей линиями кривизны.

В каноническом репере инвариантные квадратичные формы будут иметь вид

$$\varphi^0 = (\Omega_0^1)^2 + (\Omega_0^2)^2 - (\Omega_0^3)^2,$$
$$\varphi_1 = -[(\Omega_0^1)^2 + c\,(\Omega_0^2)^2 + (\Omega_0^3)^2], \tag{35}$$

а кривизны соответственно равны

$$k_1 = 1 \quad k_2 = c, \quad k_3 = -1,$$
$$K = -c, \quad P = -1, \quad H = c. \tag{*}$$

Пусть репер фиксирован (2—5) способами. В таком случае мы имеем частные классы гиперповерхностей. Каждой из этих поверхностей в P_3 соответствует комплекс соответственно с одним двойным, двумя двойными, с тройным и с четырехкратным инфлекционными центрами.

Действительно, используя формулы перехода (19), имеем

$$\varphi^0 = (\Omega_0^1)^2 + (\Omega_0^2)^2 - (\Omega_0^3)^2 = 2\,(\omega_2^3\omega_1^4 + (\omega_2^4)^2), \tag{36}$$
$$\varphi^1 = -[\Omega_0^1\Omega_1^4 + \Omega_0^2\Omega_2^4 + \Omega_0^3\Omega_0^4] = \frac{1}{\sqrt{2}}\,[(\omega_1^2 - \omega_3^4)\,\omega_2^3 + (\omega_2^1 - \omega_4^3)\,\omega_1^4 +$$
$$+ (\omega_2^2 + \omega_3^3 - \omega_1^1 - \omega_1^4)\,\omega_2^4].$$

Отсюда видно, что первая квадратичная форма гиперповерхности равна первой квадратичной форме комплекса, умноженной на 2, а вторая квадратичная форма гиперповерхности равна второй квадратичной форме коплекса, умноженной на $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Теперь мы можем найти соотношение между нашими коэффициентами a_{ij} и коэффициентами α, β, γ, p, q, r работы [1] (последние коэффициенты не следует путать с коэффициентами α, β, γ, ..., входящими в формулы (34)).

Для этого возьмем квадратичную форму (36), подставляя вместо Ω_1^4, Ω_2^4, Ω_3^4 их значения из уравнения (21), имеем

$$-[a_{11}(\Omega_0^1)^2 + a_{22}(\Omega_0^2)^2 + a_{33}(\Omega_0^3)^2 + 2a_{13}\Omega_0^1\Omega_0^3 + 2a_{23}\Omega_0^2\Omega_0^3 + 2a_{12}\Omega_0^1\Omega_0^2] =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\,[(\omega_1^2 - \omega_3^4)\,\omega_2^3 + (\omega_2^1 - \omega_4^3)\,\omega_1^4 + (\omega_2^2 + \omega_3^3 - \omega_1^1 - \omega_4^4)\,\omega_2^4]. \tag{36'}$$

Для линейчатого комплекса, отнесенного к произвольному нормальному тетраэдру, имеют место следующие соотношения:

$$\omega_1^3 + \omega_2^4 = 0, \quad \omega_1^2 - \omega_3^4 = p\omega_2^3 + \alpha\omega_1^4 + \beta\omega_2^4,$$
$$\omega_2^1 - \omega_4^3 = \alpha\omega_2^3 + q\omega_1^4 - \gamma\omega_2^4, \tag{37}$$
$$\omega_2^2 + \omega_3^3 - \omega_1^1 - \omega_4^4 = \beta\omega_2^3 - \gamma\omega_1^4 + r\omega_2^4.$$

Подставляя в левую часть уравнения (36′) вместо Ω_0^1, Ω_0^2, Ω_0^3 их значения из уравнения (19), внося в правую часть формы (37) и сравнивая коэффициенты при произведениях независимых форм ω_2^3, ω_1^4, ω_2^4, будем иметь

$$p = \sqrt{2}\left(a_{13} - \frac{a_{11} + a_{33}}{2}\right), \quad 2\alpha = \sqrt{2}\,(a_{33} - a_{11}),$$

$$q = -\sqrt{2}\left(a_{13} + \frac{a_{11} + a_{33}}{2}\right), \quad \beta = \sqrt{2}\,(a_{12} - a_{23}),$$

$$r = -\sqrt{2}\,a_{22}, \qquad \gamma = -\sqrt{2}\,(a_{12} + a_{23}).$$

Берем канонизацию 1), получим $p = -\sqrt{2}$, $q = -\sqrt{2}$, $\alpha=\beta=\gamma=0$, $r = 2\sqrt{2}a_{22} \neq 0$. Видим, что репер канонизирован иначе, чем это сделано в [1], хотя, как и в указанной работе, две вершины сопровождающего репера помещены в точки прикосновения одной из трех главных поверхностей комплекса (это обеспечивается равенствами $\beta = \gamma = 0$).

При канонизации 2) получаем

$$p = 0, \quad q = -2\sqrt{2}, \quad r = -2\sqrt{2}, \quad \alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = -2\sqrt{2}.$$

Равенства $p = \beta = 0$ означают, что каждый луч комплекса содержит один двойной инфлекционный центр, причем вершина координатного тетраэдра помещена в этот центр (см. [1], а также уравнение инфлекционных центров, которое выписано ниже).

Канонизация 3) даст

$$p = q = 0, \quad r = -2\sqrt{2}, \quad \alpha = 0, \quad \beta = \gamma = 0.$$

Равенство $p = q = \beta = \gamma = 0$ показывает, что луч содержит два двойных инфлекционных центра, в которые сейчас помещены вершины координатного тетраэдра.

Осуществляя канонизацию 4), получаем

$$p = 0, \quad q = -2\sqrt{2}, \quad r = 0, \quad \alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = -2\sqrt{2}.$$

Если принять во внимание уравнение

$$qt^4 + 2\gamma t^3 - (2\alpha - r)\,t^2 + 2\beta t + p = 0,$$

определяющее инфлекционные центры, то последние равенства показывают, что мы имеем дело с комплексом, каждый луч которого содержит тройной инфлекционный центр, причем этот центр у нас совмещен с вершиной координатного тетраэдра.

Наконец, при канонизации 5) имеем

$$p = 0, \quad q = -2\sqrt{2}, \; r = \alpha = 0, \; \beta = \gamma = 0.$$

Из уравнения, определяющего инфлекционные центры, видно, что на каждом луче комплекса содержится четырехкратный инфлекционный центр, с которым мы совместили вершину координатного тетраэдра. Этим высказанное выше утверждение оказывается полностью доказанным.

Гиперповерхностям с теми или иными частными значениями кривизн соответствуют те или иные частного вида комплексы.

Если $K = P = H = 0$, то все главные кривизны обратятся в нуль $k_1 = k_2 = k_3 = 0$. Уравнения (32) принимают вид

$$\Omega_1^4 = 0, \quad \Omega_2^4 = 0, \quad \Omega_3^4 = 0.$$

Тогда мы имеем

$$(A_4A_0) = 0, \quad (A_4\,dA_0) = 0, \quad (A_4\,d^2A_0) = 0.$$

Это уравнение означает, что гиперсфера A_4 является соприкасающейся гиперсферой любой кривой гиперповерхности, проходящей через точку A_0. Отсюда следует, что гиперсфера A_4 в произвольной точке гиперповерхности имеет с ней соприкосновение 2-го порядка, т. е. гиперповерхность есть гиперсфера. В P_3 этому соответствует линейный комплекс.

Если $K=0$, $H=0$, $P=1$, то $k_1=1$, $k_2=0$ $k_3=-1$, и гиперповерхность определится уравнениями

$$\Omega_0^4 = 0, \quad \Omega_1^4 = \Omega_0^1, \quad \Omega_2^4 = 0, \quad \Omega_3^4 = -\Omega_0^3. \tag{37'}$$

В этом случае

$$a_{11} = 1, \quad a_{33} = -1, \quad a_{22} = a_{12} = a_{23} = 0, \quad p = q = \beta = \gamma = 0, \quad \alpha \neq 0$$

гиперповерхности, определяемой уравнениями (37′), в P_3 соответствует комплекс проективного вращения (комплекс с двумя двойными инфлекционными центрами на каждом луче).

Пусть, например, инварианты, принадлежащие третьей дифференциальной окрестности, равны нулю (см. 34)

$$\alpha = \beta = \gamma = r = s = q = k = 0.$$

Уравнения (34) принимают вид

$$\Omega_0^0 = 0,\ \Omega_1^2 = 0,\ \Omega_1^3 = 0,\ \Omega_2^3 = 0,\ \Omega_4^0 = 0,\ c - \text{const}. \tag{38}$$

Уравнения инфинитезимального смещения репера имеют вид

$$\begin{aligned} dA_0 &= \Omega_0^1A_1 + \Omega_0^2A_2 + \Omega_0^3A_3, & dA_3 &= \Omega_3^0A_0 + \Omega_0^3A_1 + \Omega_0^3A_5,\\ dA_1 &= \Omega_1^0A_0 + \Omega_0^1A_4 - \Omega_0^1A_5, & dA_4 &= \Omega_0^1A_1 + c\Omega_0^2A_2 - \Omega_0^3A_4,\\ dA_2 &= \Omega_2^0A_0 + c\Omega_0^2A_4 - \Omega_0^2A_5, & dA_5 &= -\Omega_1^0A_1 - \Omega_2^0A_2 + \Omega_3^0A_3. \end{aligned} \tag{39}$$

Дифференцируя внешним образом уравнения (38), получим

$$\Omega_1^0 = a\Omega_0^1, \quad \Omega_2^0 = b\Omega_0^2, \quad \Omega_3^0 = m\Omega_0^3.$$

Пусть точка A_0 движется вдоль линии кривизны $\Omega_0^1 = \Omega_0^3 = 0$. В таком случае мы из уравнений (39) получаем

$$d(-cA_0 + A_4) = 0, \quad dA_1 = 0, \quad dA_3 = 0.$$

Это означает, что вдоль линии кривизны $\Omega_0^1 = \Omega_0^3 = 0$ соприкасающиеся гиперсферы A_1A_3 и $(-cA_0 + A_4)$ остаются постоянными, т. е. линии $\Omega_0^1 = \Omega_0^3 = 0$ являются окружностями, по которым пересекаются гиперсферы A_1, A_3, $(-cA_0 + A_4)$. Значит, первое семейство линий кривизны $\Omega_0^1 = \Omega_0^3 = 0$ является окружностями.

Аналогично можно показать, что вторая и третья линии кривизны являются окружностями. Таким образом, мы получили гиперповерхность, у которой три семейства линий кривизны — окружности. Но это означает, что отмеченные гиперповерхности есть циклиды Дюпена. Циклиде в трехмерном проективном пространстве соответствует комплекс, у которого три главных поверхности являются демиквадриками.

Пусть теперь выполнены равенства

$$\alpha = s = \beta = k = r = 0, \quad -\gamma + q = (\gamma + q)\,c.$$

В таком случае мы имеем (см. 34)

$$\Omega_3^4 = (\gamma + q)\,\Omega_0^3, \quad \Omega_1^2 = 0, \quad \Omega_1^3 = \frac{1}{2}\gamma\Omega_0^1,$$
$$\Omega_2^3 = 0, \quad \Omega_4^0 = c\,(\gamma + q)\,\Omega_0^3, \; dc = 0,$$

продолжение нам даст

$$\Omega_1^0 = \mu\Omega_0^1, \quad \Omega_2^0 = \sigma\Omega_0^2, \quad \Omega_3^0 = m\Omega_0^3, \quad d\gamma = n\Omega_0^3. \tag{40}$$

Докажем, что гиперповерхность есть каналовая. Действительно, канонический репер у такой гиперповерхности определяется такими деривационными уравнениями:

$$\begin{aligned}
dA_0 &= \Omega_0^0 A_0 + \Omega_0^1 A_1 + \Omega_0^2 A_2 + \Omega_0^3 A_3,\\
dA_1 &= \Omega_1^0 A_0 + \Omega_1^3 A_3 + \Omega_1^4 A_4 - \Omega_0^1 A_5,\\
dA_2 &= \Omega_2^0 A_0 + \Omega_2^4 A_4 - \Omega_0^2 A_5,\\
dA_3 &= \Omega_3^0 A_0 + \Omega_1^3 A_1 + \Omega_3^4 A_4 + \Omega_0^3 A_5,\\
dA_4 &= \Omega_4^0 A_0 + \Omega_1^4 A_1 + \Omega_2^4 A_2 - \Omega_3^4 A_3,\\
dA_5 &= -\Omega_1^0 A_1 - \Omega_2^0 A_2 + \Omega_3^0 A_3.
\end{aligned} \tag{41}$$

Пусть точка A_0 движется по линии $\Omega_0^1 = \Omega_0^3 = 0$. В таком случае, учитывая (40) и (41), имеем:

$$\begin{aligned}
&dA_0 = \Omega_0^2 A_2, && dA_3 = 0,\\
&dA_1 = 0, && dA_4 = c\Omega_0^2 A_2,\\
&dA_2 = \Omega_2^0 A_0 + \Omega_2^4 A_4 + \Omega_0^2 A_5, && dA_5 = \Omega_2^0 A_2.
\end{aligned}$$

Отсюда находим

$$d(-cA_0 + A_4) = 0, \quad dA_1 = 0, \quad dA_3 = 0.$$

Эти равенства показывают, что три соприкасающихся гиперсферы A_1, A_3 и $(-cA_0 + A_4)$ вдоль линии кривизны $\Omega_0^1 = \Omega_0^3 = 0$ остаются постоянными, т. е. эта линия является окружностью, по которой пересекаются гиперсферы A_1, A_3, $(-cA_0 + A_4)$. Значит, линии кривизны $\Omega_0^1 = \Omega_0^3 = 0$ являются окружностями.

Исследуемая гиперповерхность — каналовая, образующими которой являются указанные линии кривизны.

Каналовым поверхностям в проективном пространстве соответствуют комплексы, у которых одна главная поверхность является демиквадрикой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. И. Кованцов. Теория комплексов. Изд-во КГУ, К., 1963.
2. М. А. Акивис. Конформно-дифференциальная геометрия многоморфных поверхностей. Автореф. докт. дисс., М., 1964.
3. Э. Картан. Пространства аффинной, проективной и конформной связности. Изд-во Казанского ун-та, Казань, 1962.

Поступила 27 октября 1966 г.

СОДЕРЖАНИЕ

Редактор *Л. Ф. Кизилова*
Техредактор *Л. Т. Мемот*
Корректоры *В. Н. Коцева, М. Ф. Зозуля*

Сдано в набор 5/I 1967 г. Подписано к печати 5/VIII-1967 г. БЦ 45533. Формат $70\times108^1/_{16}$. Объем: 7,5 физ. печ. л., 10,5 усл. печ. л., 8,5 уч.-изд. л. Заказ 7-12. Тираж 700. Св. ТПУ 1967 г. поз. 155 Цена 57 коп.

Отпечатано с матриц Книжной ф-ки им. Фрунзе в типографии № 16 Областного управления по печати. Харьков, Университетская, № 16. Зак. 3688.