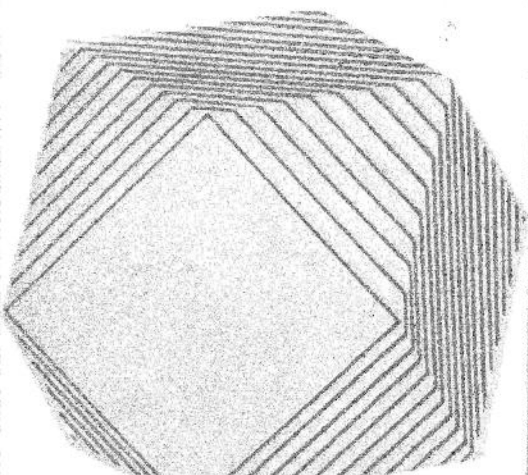
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ
УКРАИНЫ ISSN 0135-6992

УКРАИНСКИЙ геометрический СБОРНИК

35 | 92



ОСНОВ

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ УКРАИНЫ
ХАРЬКОВСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
И ОРДЕНА ДРУЖБЫ НАРОДОВ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. А.М. ГОРЬКОГО

УКРАИНСКИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК

Республиканский
межведомственный
научный
сборник

Основан в 1965 г.

ВЫПУСК 35

ХАРКІВ
ВИДАВНИЦТВО «ОСНОВА» ПРИ ХАРКІВСЬКОМУ
ДЕРЖАВНОМУ УНІВЕРСИТЕТІ
1992

УДК 514

Статьи посвящены в основном геометрии в целом. Рассматриваются погружения метрик, близких к погружаемым; изометрические погружения 2-мерных метрик в E4 с заданным гауссовым кручением; связи между бесконечно малыми изгибаниями разных порядков; вполне омбилические подмногообразия в грассмановом многообразии; кривизны асимптотических линий на погруженной в E5 области 3-мерного пространства Лобачевского и др.

Для научных работников математических специальностей.

Статті присвячені в основному геометрії в цілому. Розглянуто занурення метрик, близьких до занурених; ізометричні занурення 2-мірних метрик в E4 з заданим гаусовим скрутом; зв'язки між нескінченно малими згинаннями різних порядків; цілком омбілічні підмногостатності в грасмановій многостатності; кривини асимптотичних ліній на зануреній в E5 області 3-мірного простору Лобачевського та ін.

Для науковців математичних спеціальностей.

Відповідальний за випуск Л.М.Ушакова.

Адреса редакційної колегії: 310077 Харків, пл.Свободи, 4, Харківський університет, механіко-математичний факультет, кафедра геометрії, тел. 45-74-92

У $\frac{1602050000-104}{226-92}$ 55-92

ПАМЯТИ АЛЕКСАНДРА СЕРГЕЕВИЧА ЛЕЙБИНА

12 марта 1990 г. ушел из жизни Александр Сергеевич Лейбин, человек, теснейшим образом связанный с «Украинским геометрическим сборником». Александр Сергеевич был бессменным ответственным секретарем сборника с момента основания журнала в 1964 г. до выхода в свет его 32 выпуска в 1989 г. Работа над сборником занимала огромное место в жизни Александра Сергеевича, но в жизни сборника Александр Сергеевич занимал едва ли меньшее место. Качество сборника является во многом его заслугой.

Наверное, нет в стране ученого-геометра, который не знал бы Александра Сергеевича. Это был внимательный, тактичный, доброжелательный, отдающий всего себя людям человек. Он помогал и начинающим и маститым авторам, вычитывал их статьи, формулировал не всегда удачно записанные мысли, делая их более понятными. «Счастье не в том, чтобы брать, а в том, чтобы отдавать», - так говорил Александр Сергеевич. Так он жил, так учил жить людей, которые были рядом с ним.

Александр Сергеевич - автор многих научных работ. В первой своей геометрической работе [1] А.С.Лейбин предложил прибор для построения взаимно полярных кривых (полярограф). Бой построил конечную замкнутую поверхность без особенностей, гомеоморфную проективной плоскости, причем нашел для нее две формы - симметричную и асимметричную. Гильберт и Кон-Фоссен в книге «Наглядная геометрия» (издание третье. М.: Наука, 1981) подробно рассматривают симметричную поверхность Бойя и ставят задачу описания ее сферического изображения. Полное решение этой задачи дал А.С.Лейбин [2]. Он доказал также изгибаемость всякой выпуклой поверхности с краем (представляющим собой жорданову кривую), которая может быть получена из полной выпуклой поверхности путем удаления области с положительной кривизной [3].

Аналитическая функция $\omega=f(z)$, где $z=x_1+ix_2$, $\omega=x_3+ix_4$, $i=\sqrt{-1}$, соответствует в евклидовом пространстве E^4 двумерная аналитическая поверхность F^2, имеющая в декартовых координатах $x_j\,(j=\overline{1,4})$ уравнения $x_3=u(x_1,x_2)$, $x_4=v(x_1,x_2)$, причем функции u и v удовлетворяют условиям Коши-Римана. Свойства поверхности F^2 впервые изучали Коммерель и Эйзенхарт. А.С.Лейбин [4] нашел геометрические характеристики поверхности F^2, связанные с паратактическими поворотами пространства E^4; затем он их использовал при изучении поверхности с гиперплоскостью ортогональной симметрии.

Целый ряд статей А.С.Лейбина, опубликованных в «Украинской геометрической сборнике» (1969-1975 гг.), посвящен изучению в евклидовом пространстве E^n алгебраических гиперповерхностей с конечными группами симметрий. Особенно его интересовали комбинаторные свойства таких гиперповерхностей в том случае, когда гиперплоскости симметрии входят в их состав. В своих докладах на конференции по геометрии «в целом» (Симферополь, 1980г.) и на IX Всесоюзной геометрической конференции (Кишинев, 1988г.) А.С.Лейбин рассматривал однородные многогранники в пространстве E^4 с симметрией правильного 4-симплекса. Соответствующие результаты опубликованы частично [5].

А.С.Лейбин интересовался также вопросами истории математики [6], начертательной геометрии [7].

Он был и замечательным педагогом. Написанная им совместно с Д.З.Гордевским книга [8] широко используется во многих вузах нашей страны. Александр Сергеевич воспитал много учеников, некоторые из них защитили докторские и кандидатские диссертации.

С 1961 по 1972 гг. А.С.Лейбин заведовал кафедрой общей математики Харьковского университета. Умный, истинно интеллигентный, чуткий и добрый человек, Александр Серргеевич создал на кафедре дух благожелательности, взаимного уважения, доверия и истинного коллективизма.

Работать с ним было легко и интересно. Он умел освобождать сотрудников кафедры от необходимости делать ненужное (и такое бывало) и четко и честно делать необходимое, умел сглаживать острые углы в их взаимоотношениях.

Обладая незаурядной музыкальностью, играя на фортепиано, прекрасно зная классическую музыку, Александр Сергеевич принимал активное участие в культурной жизни университета. Он являлся организатором и руководителем университетского хорового ансамбля студентов; с участием преподавателей им был с успехом проведен ряд тематических музыкально-литературных вечеров, посвященных Пушкину, Чайковскому, Могучей Кучке, Бетховену, Шуберту.

Все, знавшие Александра Сергеевича, с благодарностью и большой теплотой вспоминают годы общения с ним.

Список литературы: 1. *Лейбін А.С.* Полярограф - прилад для побудови взаємно полярних кривих//Геометр.зб., 1940. II. С.109-114. 2. *Лейбин А.С.* Сферическое отображение поверхности Бойя//Зап. науч.-иссл. ин-та мат. и мех. ХГУ и Харьк. мат.об-ва. 1950. 20. С.127-154. 3. *Лейбин А.С.* Об изгибаемости поверхности с краем//Успехи мат. наук. 1950. 5, N5. С.149-159. 4. *Лейбин А.С.* Геометрическое определение аналитической функции, связанное с паратактическими поворотами четырехмерного пространства//Зап. мех.-мат. фак. ХГУ и Харьк. мат. об-ва. 1965. 31. С.61-74. 5. *Лейбин А.С., Гурин А.М.* Однородные звездчатые многогранники в E^4//IX Всесоюзная геометрическая конференция. Кишинев, 1988, сентябрь: Тез. сообщ., 1988. С.182. 6. *Гайдук Ю.М., Лейбін О.С.* Математична діяльність М.І.Гулака//З історії вітчизняного природознавства. К., 1964. С.51-62. 7. *Лейбин А.С.* Изображения и геометрические преобразования. Х., 1954. 51 С. 8. *Гордевский Д.З., Лейбин А.С.* Популярное введение в многомерную геометрию. Х., 1964. 192 С.

Редколлегия

УДК 514

Ю. А. Аминов

О КРИВИЗНАХ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ЛИНИЙ НА ПОГРУЖЕННОЙ В E^5 ОБЛАСТИ ТРЕХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА ЛОБАЧЕВСКОГО

Кручение асимптотической линии на двумерной поверхности отрицательной гауссовой кривизны K в трехмерном евклидовом пространстве E^3 выражается через гауссову кривизну этой поверхности. Если $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ - кручения асимптотических линий первого и второго семейств, то по теореме Бельтрами-Эннепера $\varkappa_i=\pm\sqrt{-K}$, причем $\varkappa_1=-\varkappa_2$.

В этой работе рассмотрим асимптотические линии на области пространства Лобачевского L^3, погруженной в пятимерное евклидово пространство E^5 в виде регулярного подмногообразия. Через каждую точку погруженной области проходит четыре асимптотические линии. Пусть γ - одна из асимптотических линий. Как кривая в E^5 она имеет четыре кривизны: k_1, k_2, k_3 и k_4. Мы покажем, что они не произвольны. Пусть $\xi_1,\dots,\xi_5$ - натуральный репер γ, s - длина дуги и φ - угол, который составляет вектор ξ_3 с нормальной плоскостью к погруженной области L^3. Будем считать, что кривизна L^3 равна -1.

Теорема. *На погруженной области пространства Лобачевского L^3 в E^5 вторая кривизна асимптотической линии $k_2\geq 1$, причем $k_2=1/\cos\varphi$, вторая и третья кривизны связаны неравенством $k_3\geq\left|\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{1}{k_2}\right)\right|$, и если $k_3\neq 0$, то четвертая кривизна выражается через k_2 и k_3:*

$$k_4=\pm k_2\pm\frac{\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{1}{k_3}\dfrac{d\varphi}{ds}\right)+k_3\mathrm{tg}\varphi\left(1-\dfrac{1}{k_3^2}\left(\dfrac{d\varphi}{ds}\right)^2\right)}{\sqrt{1-\dfrac{1}{k_3^2}\left(\dfrac{d\varphi}{ds}\right)^2}}$$

Таким образом, не любая кривая в E^5 может быть асимптотической линией на погруженной в E^5 области пространства Лобачевского L^3.

Заметим, что у асимптотических линий в известном примере Шура [1] погружения области L^n и E^{2n-1} при $n=3$ кривизны следующие: $k_2=1$, $k_3=k_4=0$.

Доказательство теоремы. Пусть n_1 и n_2 - поле базисов единичных нормалей, составленных из векторов, параллельно переносимых в нормальном расслоении вдоль γ. Известно, что такое поле базисов вдоль кривой всегда можно построить. Так как γ - асимптотическая линия, то $(\xi_2 n_\alpha)=0$. Отсюда следует, что $\left(\xi_1\dfrac{dn_\alpha}{ds}\right)=0$, где $\dfrac{d}{ds}$ - дифференцирование по длине дуги γ. Векторы $b_\alpha=\dfrac{dn_\alpha}{ds}$, $\alpha=1,2$, лежат в плоскости из касательного пространства, ортогональной ξ_1. Эту плоскость обозначим через M^2, а операцию проектирования на M^2 - через P. Пусть $n(x)$ - единичное векторное поле вдоль γ, нормальное к подмногообразию. Обозначим через ψ отображение, сопоставляющее $n(x)$ векторное поле $P\dfrac{dn(x)}{ds}$. Отображение ψ естественно называть дифференциально асимптотическим. Имеет место лемма, установленная в [2, с. 408].

Лемма. *Отображение ψ является ортогональным, в частности, векторы b_1 и b_2 - единичные и ортогональные друг другу.*

Следовательно, b_1 и b_2 образуют ортонормированный базис плоскости M^2. Используем уравнение Френе $\dfrac{d\xi_2}{ds}=-k_1\xi_1+k_2\xi_3$. Умножая правую и левую части этого уравнения скалярно на n_α и используя асимптотичность γ, получим $-(\xi_2 b_\alpha)=k_2(\xi_3 n_\alpha)$. Следовательно, $1=(\xi_2 b_1)^2+(\xi_2 b_2)^2=k_2[(\xi_3 n_1)^2+(\xi_3 n_2)^2]=k_2^2\cos^2\varphi$.
Поэтому $k_2=1/\cos\varphi$ (1).

Точно такое же выражение можно получить для кривизны асимптотической линии на погруженной области n-мерного пространства Лобачевского в E^{2n-1}, т.е. кривизна k_2

асимптотической линии γ на погруженной области L^n в E^{2n-1} равна обратной величине к косинусу угла φ, образуемого вектором ξ_3 из натурального базиса γ с нормальным пространством подмногообразия.

Пусть a - единичный вектор, направленный вдоль проекции ξ_3 на нормальную плоскость к подмногообразию и b - единичный и ортогональный ему вектор из той же плоскости, причем

$$a=\cos\theta n_1+\sin\theta n_2,$$
$$b=-\sin\theta n_1+\cos\theta n_2.$$

Используем также лежащий в M^2 и, как мы покажем ниже, ортогональный ξ_2 вектор $C=-\sin\theta b_1+\cos\theta b_2$. Имеют место следующие выражения для производных векторов a и b вдоль γ:

$$\frac{da}{ds} = b\frac{d\theta}{ds} - \xi_2,$$
$$\frac{db}{ds} = -a\frac{d\theta}{ds} + c. \qquad (2)$$

Выражение для $\frac{db}{ds}$ получается просто из определения векторов a, b и c. Дифференцируя выражение a, получим $\frac{da}{ds} = b\frac{d\theta}{ds} + \cos\theta b_1+\sin\theta b_2$. Покажем, что $\cos\theta b_1+\sin\theta b_2=-\xi_2$. Используем выражения n_1 и n_2 через a и b:

$$n_1=\cos\theta a-\sin\theta b,$$
$$n_2=\sin\theta a+\cos\theta b.$$

Из определения вектора a имеем $(\xi_3 a)=\cos\varphi$, $(\xi_3 b)=0$. Следовательно,

$-(\xi_2 b_1)=k_2(\xi_3 n_1)=k_2(\xi_3 a)\cos\theta=\cos\theta,$

$-(\xi_2 b_2)=k_2(\xi_3 n_2)=k_2(\xi_3 a)\sin\theta=\sin\theta.$

Поэтому $-\xi_2=\cos\theta b_1+\sin\theta b_2$. Таким образом, уравнения (2) доказаны. Используем уравнения Френе

$$\frac{d\xi_3}{ds} = -k_2\xi_2+k_3\xi_4,$$
$$\frac{d\xi_4}{ds} = -k_3\xi_3+k_4\xi_5,$$
$$\frac{d\xi_5}{ds} = -k_4\xi_4.$$

Обозначим $(\xi_i a)=\cos\varphi_i$. Угол φ_3 совпадает с ранее введенным углом φ. Умножая скалярно на a правую и левую части уравнений Френе и используя (2), получим

$$\frac{d\cos\varphi_3}{ds} = k_3\cos\varphi_4,$$
$$\frac{d\cos\varphi_4}{ds} = (\xi_4 b)\frac{d\theta}{ds} - \frac{k_3}{k_4} + k_4\cos\varphi_5, \qquad (3)$$
$$\frac{d\cos\varphi_5}{ds} = (\xi_5 b)\frac{d\theta}{ds} - k_4\cos\varphi_4.$$

Из первого уравнения и (1) получаем выражение $k_3 = \frac{1}{\cos\varphi_4}\,\frac{d}{ds}(\frac{1}{k_2})$. Найдем теперь выражение k_4 через k_2 и k_3. Умножив уравнения Френе скалярно на b и применив (2), получим

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{(\xi_3 c)}{\cos\varphi} + k_3\frac{(\xi_4 b)}{\cos\varphi},$$
$$\frac{d(\xi_4 b)}{ds} = -\cos\varphi_4\frac{d\theta}{ds} + (\xi_4 c) + k_4(\xi_5 b), \qquad (4)$$
$$\frac{d(\xi_5 b)}{ds} = -\cos\varphi_5\frac{d\theta}{ds} + (\xi_5 c) - k_4(\xi_4 b).$$

Векторы a, b и c ортогональны к ξ_1 и ξ_2, поэтому они определяют то же трехмерное линейное пространство, что и ξ_3, ξ_4 и ξ_5. Вектор ξ_3 раскладывается через векторы a и c: $\xi_3 = a\cos\varphi + c\sin\varphi$, при этом φ может быть как положительным, так и отрицательным. Первое из уравнений (4) записывается в виде

$$\frac{d\theta}{ds} = \mathrm{tg}\varphi + k_3\frac{(\xi_4 b)}{\cos\varphi} \qquad (5)$$

Вектор b ортогонален ξ_3, поэтому он лежит в плоскости векторов ξ_4 и ξ_5. Запишем: $b = \cos\sigma\xi_4 + \sin\sigma\xi_5$. Матрица перехода от базиса ξ_3, ξ_4, ξ_5 к базису a, b, c имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} (\xi_3 a) & (\xi_4 b) & (\xi_5 a) \\ (\xi_3 b) & (\xi_4 b) & (\xi_5 b) \\ (\xi_3 c) & (\xi_4 c) & (\xi_5 c) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & (\xi_4 a) & (\xi_5 a) \\ 0 & \cos\sigma & \sin\sigma \\ \sin\varphi & (\xi_4 c) & (\xi_5 c) \end{bmatrix}.$$

При этом возможны два случая: базис a, b и c имеет ту же ориентацию, что и ξ_3, ξ_4 и ξ_5, или противоположную. В первом случае матрица A имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi\sin\sigma & -\sin\varphi\cos\sigma \\ 0 & \cos\sigma & \sin\sigma \\ \sin\varphi & -\sin\varphi\sin\sigma & \cos\varphi\cos\sigma \end{bmatrix}.$$

Тогда $\cos\varphi_4 = \sin\sigma\sin\varphi$, $\cos\varphi_5 = -\sin\varphi\cos\sigma$. Первое уравнение системы (3) в предположении $\sin\varphi \neq 0$, $k_3 \neq 0$ можно записать в виде $\sin\sigma = -\frac{1}{k_3}\frac{d\varphi}{ds}$. Вектор d принадлежит нормальной плоскости подмногообразия и плоскости, проходящей через ξ_4 и ξ_5. Поэтому пересечением этих плоскостей является прямая с направляющим вектором b. Совпадать эти плоскости не могут, так как вектор ξ_3 не может быть ортогональным к нормальной плоскости. Угол, который составляет прямая пересечения этих плоскостей с ξ_4, т. е. угол σ, выражается через кривизны асимптотической линии k_3 и k_2. Уравнение (6) для производной θ записывается в виде $\frac{d\theta}{ds} = \operatorname{tg}\varphi + k_3\frac{\cos\sigma}{\cos\varphi}$, т. е. $\frac{d\theta}{ds}$ тоже может быть найдено с помощью k_2 и k_3. Третье уравнение системы (5) записывается в таком виде:

$$\frac{d\sin\sigma}{ds} = \cos\sigma(\sin\varphi\frac{d\theta}{ds} + \cos\varphi - k_4).$$

Подставим сюда выражения $\sin\sigma=-\frac{1}{k_3}\frac{d\varphi}{ds}$, $\cos\sigma=\pm\sqrt{1-\sin^2\sigma}$, $\frac{d\theta}{ds}$. После элементарных преобразований получим

$$k_4 = k_2 \pm \frac{\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{k_3}\frac{d\varphi}{ds}\right) + \left(1-\frac{1}{k_3^2}\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2\right)}{\sqrt{1-\frac{1}{k_3^2}\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2}}.$$

Во втором случае матрица A имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi\sin\sigma & \sin\varphi\cos\sigma \\ 0 & \cos\sigma & \sin\sigma \\ \sin\varphi & \sin\varphi\sin\sigma & -\cos\varphi\cos\sigma \end{bmatrix}.$$

Имеем $\cos\varphi_4=-\sin\varphi\sin\sigma$, $\cos\varphi_5=\sin\varphi\cos\sigma$. Тогда $\sin\sigma=\frac{1}{k_3}\frac{d\varphi}{ds}$, а выражение $\frac{d\theta}{ds}$ остается прежним. С помощью третьего уравнения системы (4) получим

$$k_4 = -k_2 \pm \frac{\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{k_3}\frac{d\varphi}{ds}\right) + \left(1-\frac{1}{k_3}\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{k_3}\frac{d\varphi}{ds}\right)^2}}.$$

Теорема доказана. Введем дифференцирование $\frac{d}{dt} = \frac{1}{k_3}\frac{d}{ds}$. Тогда выражение k_4 можно записать в более кратком виде:

2-381

$$k_4 = k_2\left[\pm 1 \pm \frac{k_3\left(\dfrac{d^2\sin\varphi}{dt^2}\right)+\sin\varphi}{\sqrt{1-\left(\dfrac{d\varphi}{ds}\right)^2}}\right].$$

Рассмотрим теперь особый случай: $\sin\varphi=0$, т.е. ξ_3 лежит в нормальном пространстве, тогда $k_2=1$. Используем первое уравнение системы (3): $0=\frac{d\cos\varphi}{ds}=k_3\cos\varphi_4$. Пусть $k_3\neq 0$, тогда вектор ξ_4 определен, и, следовательно, $\cos\varphi_4=(\xi_4 a)=0$. Вектор a совпадает с ξ_3. Вектор ξ_5 тоже определен (можем считать, что ξ_5 является векторным произведением ξ_1, ξ_2, ξ_3 и ξ_4) и $\cos\varphi_5=0$. Второе и третье уравнения системы (3) запишутся в виде $(\xi_4 b)\frac{d\theta}{ds}=k_3$, $(\xi_5 b)\frac{d\theta}{ds}=0$. Так как мы предполагаем, что $k_3\neq 0$, то $\frac{d\theta}{ds}\neq 0$, тогда $(\xi_5 b)=0$, т.е. $\sin\sigma=0$. Вектор $b=\pm\xi_4$. Следовательно, $\xi_5=-\pm C$. Используем уравнения

$$\frac{d\xi_4}{ds}=-k_3\xi_3+k_4\xi_5,$$
$$\frac{db}{ds}=-a\frac{d\theta}{ds}+C=-\xi_3\frac{d\theta}{ds}+C.$$

Отсюда следует, что $k_4=\pm 1$.

Итак, если $k_2=1$ и $k_3\neq 0$, то $k_4=\pm 1$. Если же $k_3=0$, то асимптотическая лежит в трехмерном пространтве; можем считать, что $k_4=0$.

Второй особый случай имеет место при выполнении равенства: $\left(\frac{1}{k_3}\frac{d\varphi}{ds}\right)^2=1$, $\sin\sigma=\pm 1$. Используя второе уравнение системы (4) и вид матрицы A, получим $k_4=\pm k_2$. Наконец, рассмотрим интересный случай $k_2=\mathrm{const}\neq 1$. Пусть $k_3\neq 0$, тогда из первого уравнения системы(4) следует $\cos\varphi_4=0$, $\sin\sigma=0$. Вектор $\xi_4=\pm b$, т.е. вектор ξ_4 лежит в нормальной плоскости. Выражение для k_4, установленное в теореме, записывается в простой форме:

$$k_4=\pm k_2\pm k_3\sqrt{k_2^2-1}.$$

Список литературы: 1. *Schur F. Über die Deformation der Räume constanter Riemannschen Krümmungsmasses*//Math. Ann. 1886. 27, 170. P.163-176. 2. *Аминов Ю.А.* Изометрические погружения областей n-мерного пространства Лобачевского в (2n-1)-мерное евклидово пространство//Мат. сб. 1980. 111, N3. С. 402-433.

Поступила в редколлегию 27.11.90

УДК 514.112.3

В. А. Залгаллер

ОДНО НЕРАВЕНСТВО ДЛЯ ОСТРОУГОЛЬНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

В депонированной работе [1] Г. А. Лось предложил путь к решению старинного вопроса о размещении в треугольнике трех неналегающих кругов максимальной площади. Однако в [1] решить этот вопрос не удалось. Решение дается в статье В. А. Залгаллера и Г. А. Лося, помещенной в настоящем сборнике. Преодоление одного из трудоемких этапов опирается на предлагаемое в настоящей заметке неравенство, имеющее также самостоятельный интерес.

Одним из трудоемких мест служит доказательство, что так называемые круги Мальфатти имеют меньшую суммарную площадь, чем вписанный круг и два дополняющих его круга, вложенные в меньшие из углов треугольника. Цель настоящей заметки - установить самостоятельно интересное неравенство, позволяющее резко сократить упомянутый шаг в работе [1].

Теорема. *Для остроугольного треугольника с углами 2α, 2β, 2γ справедливо неравенство*

$$\frac{(1+\mathrm{tg}\alpha)^4+(1+\mathrm{tg}\beta)^4+(1+\mathrm{tg}\gamma)^4}{(1+\mathrm{tg}\alpha)^2(1+\mathrm{tg}\beta)^2(1+\mathrm{tg}\gamma)^2}\le C+\frac{2}{3}(\mathrm{tg}^4\alpha+\mathrm{tg}^4\beta+\mathrm{tg}^4\gamma), \tag{1}$$

где

$$C=\frac{9}{(\sqrt{3}+1)^2}-\frac{2}{9}\approx 0,98355. \tag{2}$$

Равенство в (1) достигается только для равностороннего треугольника.

Доказательству предпошлем две леммы.

Лемма 1. *В промежутке $0,4\le x\le 1$ гладкая функция*

$$f(x)=\frac{4}{3}x^4+\frac{(1-x^2)^4}{24x^4}-\frac{8x^2}{(1+2x-x^2)^2}-\frac{(1+2x-x^2)^2}{4x^2(1+x)^4} \tag{3}$$

строго убывает на участке $0,4\le x\le\frac{1}{\sqrt{3}}$ и строго возрастает на участке $\frac{1}{\sqrt{3}}\le x\le 1$. Поэтому в промежутке $0,4\le x\le 1$ функция f достигает абсолютного минимума в единственной точке $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$. Этот минимум равен

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{2}{9}-\frac{9}{(\sqrt{3}+1)^2}=-C. \tag{4}$$

Доказательство. Обозначим через $A(x)$ сумму двух первых

2*

слагаемых правой части (3) и через $B(x)$ - сумму двух остальных слагаемых. Прямые вычисления позволяют придать производным $A'(x)$ и $B'(x)$ вид

$$A'(x)=\frac{(3x^2-1)(11x^6+3x^4+x^2+1)}{6x^6},$$

$$B'(x)=-\frac{(3x^2-1)(11x^9+49x^8+140x^7+148x^6+194x^5+214x^4+140x^3+52x^2+11x+1}{2x^3(1+x)^5(1+2x-x^2)^3}$$

откуда

$$f'(x)=A'(x)+B'(x)=(3x^2-1)\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}, \qquad (5)$$

где

$\varphi(x)=-11x^{17}+11x^{16}+118x^{15}+14x^{14}-474x^{13}-546x^{12}+301x^{11}+1091x^{10}+$
$+892x^9+424x^8-132x^7-408x^6-234x^5+22x^4+89x^3+47x^2+11x+1;$

$\psi(x)=6x^5(1+x)^5(1+2x-x^2)^3.$

Справедливость леммы 1 следует из (5) и того факта, что при $0{,}4\le x\le 1$ заведомо $\varphi(x)>0$ и $\psi(x)>0$. Последнее из этих двух неравенств очевидно, а в первом можно убедиться, например, представляя $\varphi(x)$ в виде суммы положительных и неотрицательных на участке $0{,}4\le x\le 1$ слагаемых: $\varphi(x)=(1-x^3)^6(22x^4+68x^3+39x^2)+(1-x^8)^2+$
$+11x(1-x^7)^2+8x^2(1-x^6)^2+21x^3(1-x^5)^2+220x^{16}(x-0{,}4)+320x^9(x-0{,}4)+$
$+x^{16}(408x^2-65)+x^8(441x^2-70)+x^8(141x^3-9)+x^{19}(132-39x-68x^2-22x^3)+$
$+3x^{17}+x^{11}(940+814x-55x^2-579x^3-913x^4-167x^5).$

Лемма 2. *Теорема справедлива в классе равнобедренных остроугольных треугольников.*

Действительно, пусть 2α, 2α, $2(\frac{\pi}{2}-2\alpha)$ - углы равнобедренного остроугольного треугольника. При этом $\frac{\pi}{8}<\alpha<\frac{\pi}{4}$. Обозначим $\operatorname{tg}\alpha=x$, $\sqrt{2}-1<x<1$. Тогда неравенство (1) приобретает для нашего треугольника вид

$$\frac{8x^2}{(1+2x-x^2)^2}+\frac{(1+2x-x^2)^2}{4x^2(1+x)^4}\le C+\frac{2}{3}\left(2x^4+\frac{(1-x^2)^4}{16x^4}\right),$$

и справедливость леммы 2 следует из леммы 1.

Доказательство теоремы. Пусть p, R, r соответственно - полупериметр, радиусы описанного и вписанного кругов рассматриваемого треугольника. Как известно [2, с. 30], значения $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\beta$, $\operatorname{tg}\gamma$ суть три корня уравнения $py^3-(4R+r)y^2+py-r=0$. За счет подобия будем считать, что

$$4R+r=1. \qquad (6)$$

Тогда основные симметрические функции:

$$\sigma_1=\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta+\mathrm{tg}\gamma=\frac{1}{p},$$

$$\sigma_2=\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta+\mathrm{tg}\beta\,\mathrm{tg}\gamma+\mathrm{tg}\gamma\,\mathrm{tg}\alpha=1,$$

$$\sigma_3=\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta\,\mathrm{tg}\gamma=\frac{r}{p}.$$

Это позволяет выразить через r и p любой симметрический многочлен от $\mathrm{tg}\alpha$, $\mathrm{tg}\beta$, $\mathrm{tg}\gamma$. В частности, $\mathrm{tg}^4\alpha+\mathrm{tg}^4\beta+\mathrm{tg}^4\gamma=\frac{1}{p^4}(4rp^2+2p^4-4p^2+1)$,

$(1+\mathrm{tg}\alpha)^4+(1+\mathrm{tg}\beta)^4+(1+\mathrm{tg}\gamma)^4=\frac{1}{p^4}(4rp^2(3p+1)-7p^4-8p^3+2p^2+4p+1)$,

$(1+\mathrm{tg}\alpha)(1+\mathrm{tg}\beta)(1+\mathrm{tg}\gamma)=\frac{1}{p}(r+2p+1)$.

Очертим область значений r и p для остроугольных треугольников, удовлетворяющих (6). Из неравенства $R\geq 2r$ (см. [2, с.8]) и (6) имеем $0<r\leq\frac{1}{9}$. При фиксированных r и $R=(1-r)/4$ значение p (см. [2, с. 12-13]) может изменяться в пределах от

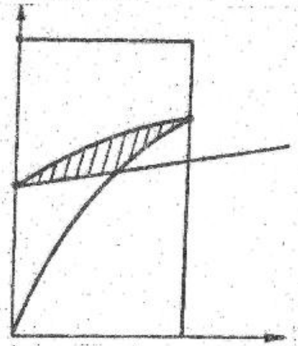
$$p_{min}(r)=\sqrt{\frac{1}{8}+\frac{9r}{4}-\frac{27r^2}{8}-\frac{1-9r}{8}\sqrt{1-10r+9r^2}}$$

до

$$p_{max}(r)=\sqrt{\frac{1}{8}+\frac{9r}{4}-\frac{27r^2}{8}-\frac{1-9r}{8}\sqrt{1-10r+9r^2}},$$

причем p_{max} достигается для равнобедренных остроугольных треугольников. Заметим попутно, что $p<\pi R=\pi(1-r)/4<\frac{\pi}{4}<1$.

Остроугольность треугольника (см. [2, с.38]) влечет $p>2R+r=(1+r)/2$. Таким образом, областью значений r, p служит область Ω, изображенная на рисунке.



Рассмотрим в области Ω функцию

$$\Phi(r,p)=\frac{2}{3}(\mathrm{tg}^4\alpha+\mathrm{tg}^4\beta+\mathrm{tg}^4\gamma)-\frac{(1+\mathrm{tg}\alpha)^4+(1+\mathrm{tg}\beta)^4+(1+\mathrm{tg}\gamma)^4}{(1+\mathrm{tg}\alpha)^2(1+\mathrm{tg}\beta)^2(1+\mathrm{tg}\gamma)^2}=$$

$$=\frac{2}{3p^4}(4rp^2+2p^4-4p^2+1)-\frac{4rp^2(3p+1)-7p^4-8p^3+2p^2+4p+1}{(r+2p+1)^2p^2}.$$

Имеем $\frac{3}{2}p^2(r+2p+1)^3\frac{\partial\Phi}{\partial r}=4r^3+12r^2(2p+1)+6r(-p^3+9p^2+8p+2)+(7+36p+42p^2-22p^3-57p^4)>0$. Из $\frac{\partial\Phi}{\partial r}>0$ следует, что $\Phi(r,p)$ принимает наименьшее значение на левой границе области Ω – на кривой p_{max}, т. е. для равнобедренного остроугольного треугольника. И теорема следует из леммы 2.

Список литературы: 1. *Лось Г. А.* Оптимизационная задача Мальфатти. Деп. Укр. НИИНТИ 0: 07.88. 86 С. 2. *Солтан В.П., Мейдман С.И.* Тождества и неравенства в треугольнике. Кишинев, 1982. 69 С.

Поступила в редколлегию 03.02.90

УДК 514.112.3

В. А. Залгаллер, Г. А. Лось

РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ МАЛЬФАТТИ

Первоначальный план этой статьи принадлежит Г. А. Лосю [4]. Однако депонированная работа [4] содержала существенные пробелы. Длительная переписка авторов настоящей статьи позволила совместно эти пробелы выявить и восполнить.

История вопроса и основной результат. В 1803 г. Мальфатти [12] поставил вопрос: как в заданном треугольнике разместить три неналегающих круга наибольшей суммарной площади?

Алгебраически речь идет о выборе 9 переменных (шесть координат центров и три радиуса), дающих максимум сумме квадратов радиусов, при соблюдении 12 ограничений типа неравенств. Девять из неравенств линейные (условия расположения центров с определенной стороны от каждой из сторон треугольника на расстоянии, не меньшем радиуса), а три - нелинейные (условия неналегания кругов). Алгебраический подход к задаче малоперспективен. При фиксированном треугольнике максимальный набор кругов (их радиусы лежат в замкнутом промежутке $[0, R]$, где R - радиус вписанного круга) по компактности существует.

Геометрически очевидно, что в максимальном наборе нет кругов нулевого радиуса. Но лучшее расположение кругов может зависеть от вида треугольника.

Эта задача элементарной геометрии оставалась нерешенной, что не раз отмечалось [11; 13; 5, с. 93; 8, с. 245-247; 2, с. 23-25; 7, с. 150-153]. В настоящей статье излагается ее решение. При простоте окончательного результата доказательство потребовало различных подходов к встречающимся случаям, а на одном из этапов - компьютерных вычислений.

Мы обозначаем углы этого треугольника через 2α, 2β, 2γ, соответствующие им вершины - через A, B, C. В формулировке основного результата предполагается, что

$$0<\alpha\le\beta\le\gamma<\frac{\pi}{2}. \qquad (1)$$

Основной результат. Три неналегающих круга максимальной суммарной площади располагаются в треугольнике следующим образом. Круг K_1 вписан в треугольник ABC. Круг K_2 касается сторон AB, AC и круга K_1. Круг K_3 при $\sin\alpha\ge\operatorname{tg}^{\beta}/_2$ касается сторон BA, BC и круга K_1 (схема 1 на рис. 1), а при $\sin\alpha\le\operatorname{tg}^{\beta}/_2$ касается сторон AB, AC и круга K_2 (схема 2 на рис. 1). При $\sin\alpha=\operatorname{tg}^{\beta}/_2$ существенно разных максимальных расположений два.

Жесткие системы. Систему из трех неналегающих кругов в треугольнике называем *жесткой*, если каждый из кругов нельзя при неизменном положении двух других непрерывно сдвигать в треугольнике, увеличивая его радиус и не нарушая при этом неналегания кругов. Решение задачи Мальфатти достаточно искать только в классе жестких систем.

Лемма. *Каждый из кругов жесткой системы имеет не менее трех точек касания с другими кругами или сторонами треугольника, причем эти точки касания не умещаются на одной замкнутой полуокружности границы рассматриваемого круга.*

Действительно, при нарушении этих условий легко указать направление при сдвиге в котором радиус круга допускает увеличение. Из леммы следует, что каждый круг жесткой системы касается одной из сторон.

Две жесткие системы назовем *комбинаторно одинаковыми*, если сторонам первого треугольника и кругам в нем можно так сопоставить соответственно стороны второго треугольника и круги в нем, что сопоставление это будет взаимно однозначным, а наличие или отсутствие общей точки у пары «сторона и круг» или «два круга» при сопоставлении сохраняется.

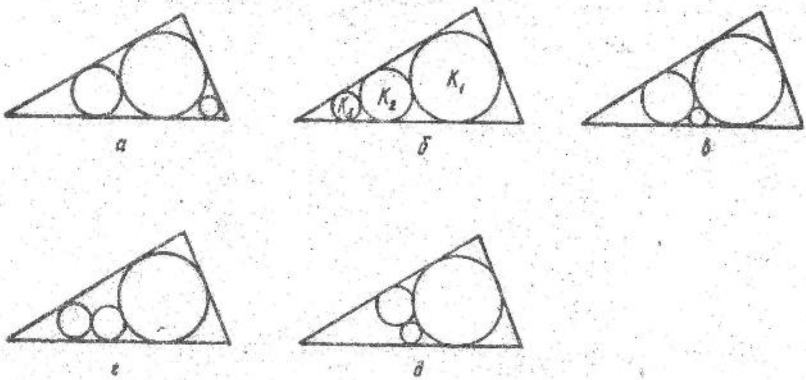


Рис. 1

Теорема. *Существует только четырнадцать комбинаторно не одинаковых жестких систем. Они изображены в виде схем 1–14 на рис. 1, рис. 2.*

Доказательство. 1. Допустим, что в жесткой системе есть круг, касающийся трех сторон треугольника (рис. 1). Свободная от него зона треугольника распадается на три части. Если два оставшихся круга лежат в разных частях – приходим к схеме *1*. Если оба оставшихся круга лежат в одной части, то либо каждый из них касается двух сторон треугольника, что ведет к схеме *2*, либо один касается двух сторон треугольника, а другой – одной, что ведет к схеме *3* или схеме *4* (в зависимости от того, касаются или нет первые два круга между собой), либо каждый из них касается только одной из сторон треугольника – схема *5*.

2. Допустим, что каждый из трех кругов касается ровно двух сторон треугольника. Если центры кругов лежат на разных биссектрисах, то либо все три круга попарно касаются – схема *6* (рис. 2), либо один касается двух других, которые не касаются друг друга, – схема *7*. Если центры двух кругов лежат на одной биссектрисе, – приходим к схеме *8*. Размещение трех центров на одной биссектрисе в предположениях 2) исключено.

3. Допустим, что два из кругов касаются каждый двух сторон треугольника, а третий – лишь одной стороны. Тогда либо первые два круга касаются – схемы *9* и *10*, либо не касаются – схемы *11* и *12*.

4. Если один круг касается двух, а остальные – одной из

сторон, приходим только к схеме *13*, а если каждый круг касается всего одной стороны - к схеме *14*.

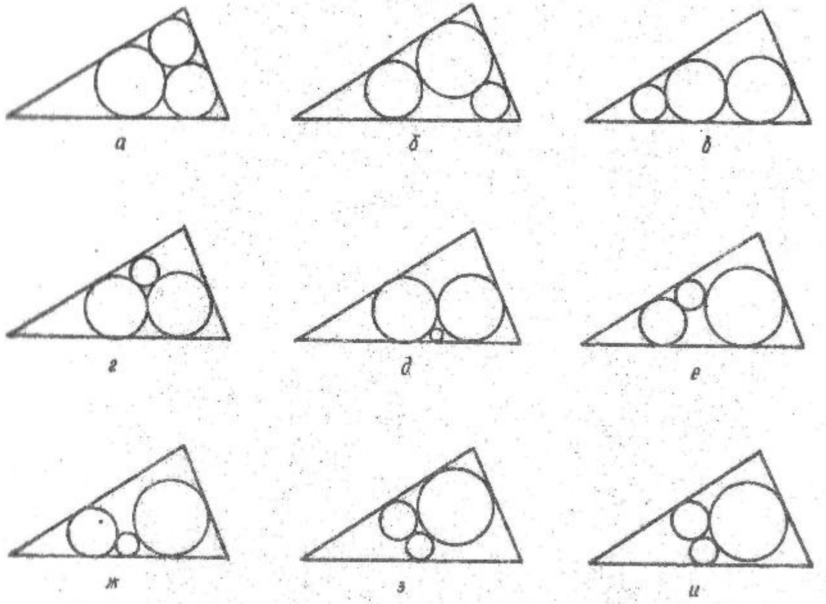


Рис. 2

Сравнение схем 1 и 2. В схеме *1* круги K_2, K_3 целесообразно помещать в двух меньших углах треугольника; в схеме *2* оба круга K_2 и K_3 - в наименьшем угле. Если в угол 2δ вписан круг K радиуса R, то круг, вписанный в тот же угол ближе к вершине и касающийся круга K, имеет радиус x, который легко вычисляется. Из рис. 3 находим, что $R/\sin\delta - R - x = x/\sin\delta$, откуда

$$x = R\,\frac{1-\sin\delta}{1+\sin\delta} = R\,\frac{(1-\operatorname{tg}\frac{\delta}{2})^2}{(1+\operatorname{tg}\frac{\delta}{2})^2}\,. \qquad (2)$$

Площади круга K_1 радиуса R и круга K_2 в схемах *1* и *2* одинаковы. Чтобы схема *1* давала большую площадь кругов, чем схема *2*, необходимо и достаточно, чтобы радиус круга K_3 в схеме *1* был больше, чем в схеме *2*, т. е.

3- 381

$$R\left(\frac{1-\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}}{1+\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}}\right)^2 \geq R\left(\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}\right)^2,$$

что, учитывая (1), равносильно $\sin\alpha \geq \mathrm{tg}\beta/2$.

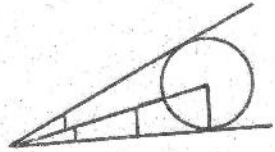


Рис. 3

Теперь для доказательства основного результата нам предстоит исключить возможность достижения абсолютного максимума площади трех кругов в положениях схем 3-14.

Исключение схемы 3. Рассмотрим равнобедренный треугольник, рис. 4, с размещенными в нем кругами K_1, K_2, K_3 и двумя вспомогательными кругами K_4, K_5. Для их радиусов:

$$R_2 = R_1\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha} = R_1\mathrm{ctg}^2\beta,$$

$$R_3 = \frac{R_1R_2}{(\sqrt{R_1}+\sqrt{R_2})^2} = \frac{R_2}{(1+\mathrm{ctg}\beta)^2},$$

$$R_4 = R_1\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha},$$

$$R_5 = R_2\frac{1-\sin\beta}{1+\sin\beta} = R_2\mathrm{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right).$$

За счет подобия считаем $R_1=1$.

Положим $\alpha=0,462$. При таком α $R_2\approx2,808$, $R_3\approx0,381$, $R_4\approx0,383$, $R_5\approx0,809$, т. е. $R_4>R_3$, $R_5>R_3$. При уменьшении угла α радиус R_3 убывает, а радиус R_4 возрастает. Поэтому при $\alpha\leq0,462$ сохраняется неравенство $R_4>R_3$. Убедимся, что при $\alpha\geq0,462$ сохраняется неравенство $R_5>R_3$. Действительно,

$$\frac{\sqrt{R_5}-\sqrt{R_3}}{\sqrt{R_2}} = \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right) - \frac{1}{1+\mathrm{ctg}\beta} = \frac{1-x}{1+x} - \frac{2x}{1+2x-x^2},$$

где $x=\mathrm{tg}\beta/2$. При $\alpha\geq0,462$ имеем $x_0=\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{8} - \frac{\alpha}{4}\right) \leq \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{8} - 0,1155\right)\approx$ $\approx0,2845$. Но при $0\leq x\leq x_0$

$$\frac{1-x}{1+x} - \frac{2x}{1+2x-x^2} > 0,$$

поэтому $R_5>R_3$.

Пусть теперь ΔABC не обязательно равнобедренный. Для определенности считаем $\angle B \le \angle C$. Тогда при $\alpha \le 0,462$ площадь увеличивается заменой K_3 на K_4, а при $\alpha \ge 0,462$ - заменой K_3 на K_5.

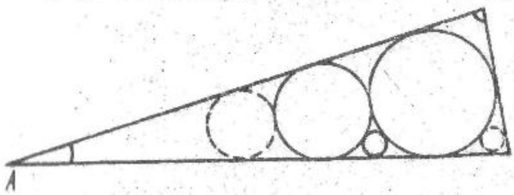


Рис. 4

Исключение схемы 4 осуществлено ниже совместно с исключением схемы *11*.

Исключение схемы 5. Обратимся к рис. 5. За счет выбора обозначений считаем $\angle B \le \angle C$. Допустим, что $\angle A \ge \pi/3$. Тогда $\angle B \le \angle A$ и круг K_1 можно отразить в биссектрисе угла C, а затем - увеличить.

Допустим теперь, что $\angle A < \pi/3$. Проведем общую касательную T к кругам K_1, K_2. Ввиду $\angle A < \pi/3$ хоть один из углов φ, ψ будет больше, чем $\angle A$. Пусть для определенности $\varphi > \angle A$. В этом случае круг K_1 можно отразить относительно биссектрисы угла ψ, а затем увеличить.

Исключение схемы 6. Теорема. *Сумма площадей кругов, размещенных в треугольнике по схеме 6, всегда меньше площади кругов, размещенных по схеме 1.*

Это утверждение с компьютерным подтверждением приводилось в [10] и упрощалось в [9]. Но наличие специально написанной заметки [3] позволяет ограничиться совсем краткой выкладкой.

Круги, размещенные по схеме *6*, называются кругами Мальфатти (см. [1, прибавление *E* и 8, с. 11]). Если 2α, 2β, 2γ - углы треугольника, а R - радиус вписанного круга, то, как показано в [11] (и независимо в [4]), радиусы кругов Мальфатти

$$\rho_\alpha = \frac{R}{2}\,\frac{\left(1+\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}\right)\left(1+\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}\right)}{1+\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}},$$

$$\rho_\beta = \frac{R}{2}\,\frac{\left(1+\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\right)\left(1+\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}\right)}{1+\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}},$$

$$\rho_\gamma = \frac{R}{2}\,\frac{\left(1+\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\right)\left(1+\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}\right)}{1+\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}}.$$

Заметим, что

3*

$$\left(1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)^2 = 2\,\frac{1+\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = 2\,\frac{1+\cos 2\tilde{\alpha}}{1+\sin 2\tilde{\alpha}} = \frac{4}{(1+\operatorname{tg}\tilde{\alpha})^2},$$

где $2\tilde{\alpha}=\frac{\pi}{2}-\alpha$. Отсюда

$$\rho_\alpha^2 = R\frac{(1+\operatorname{tg}\tilde{\alpha})^2}{(1+\operatorname{tg}\tilde{\beta})^2(1+\operatorname{tg}\tilde{\gamma})^2}, \tag{3}$$

где $\tilde{\alpha}=\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}$; $\tilde{\beta}=\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}$; $\tilde{\gamma}=\frac{\pi}{4}-\frac{\gamma}{2}$.

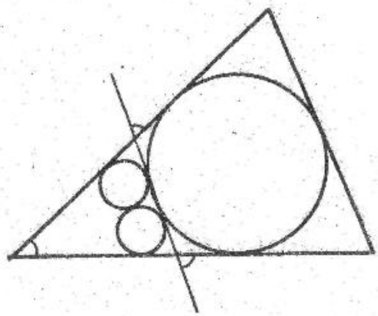


Рис. 5

Если после размещения в треугольнике вписанного круга разместить в свободных» углах треугольника по максимально возможному кругу, то их радиусы

$$R_\alpha = R\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha};\ R_\beta = R\frac{1-\sin\beta}{1+\sin B};\ R_\gamma = R\frac{1-\sin\gamma}{1+\sin\gamma}.$$

Заметим, что $R_\alpha=R\operatorname{tg}^2\tilde{\alpha}$.

Для доказательства теоремы достаточно убедиться, что $\rho_\alpha^2+\rho_\beta^2+\rho_\gamma^2 < R^2+\frac{2}{3}(R_\alpha^2+R_\beta^2+R_\gamma^2)$, т. е. что

$$\frac{(1+\operatorname{tg}\tilde{\alpha})^4+(1+\operatorname{tg}\tilde{\beta})^4+(1+\operatorname{tg}\tilde{\gamma})^4}{(1+\operatorname{tg}\tilde{\alpha})^2(1+\operatorname{tg}\tilde{\beta})^2(1+\operatorname{tg}\tilde{\gamma})^2} < 1+\frac{2}{3}\left(\operatorname{tg}^4\tilde{\alpha}+\operatorname{tg}^4\tilde{\beta}+\operatorname{tg}^4\tilde{\gamma}\right), \tag{4}$$

где $2\tilde{\alpha}$, $2\tilde{\beta}$, $2\tilde{\gamma}$ согласно (3) суть углы некоторого остроугольного треугольника. Но строгое неравенство (4) следует из доказанного в [3] для остроугольных треугольников неравенства

$$\frac{(1+\operatorname{tg}\tilde{\alpha})^4+(1+\operatorname{tg}\tilde{\beta})^4+(1+\operatorname{tg}\tilde{\gamma})^4}{(1+\operatorname{tg}\tilde{\alpha})^2(1+\operatorname{tg}\tilde{B})^2(1+\operatorname{tg}\tilde{\gamma})^2} \le C+\frac{2}{3}\left(\operatorname{tg}^4\tilde{\alpha}+\operatorname{tg}^4\tilde{\beta}+\operatorname{tg}^4\tilde{\gamma}\right),$$

где $C = 9(\sqrt{3}+1)^{-2} - 2/9 \approx 0{,}98355 < 1$.

Исключение схемы 7. Допустим, что максимум площади кругов достигнут при их расположении по схеме 7 (рис. 6). Радиус x можно варьировать. Радиусы y и z определяются значением x. При этом x,

y связаны соотношением $x\,\mathrm{ctg}\gamma + 2\sqrt{xy} + y\,\mathrm{ctg}\beta = \alpha$, откуда

$$y' = -\frac{\sqrt{xy}\,\mathrm{ctg}\gamma + y}{\sqrt{xy}\,\mathrm{ctg}\beta + x} < 0,$$

$$y'' = \frac{-(x^2\mathrm{ctg}\gamma + xy\,\mathrm{ctg}\beta + 2x\sqrt{xy})\,y' + (y^2\mathrm{ctg}\beta + (\mathrm{ctg}\gamma)\,xy + 2y\sqrt{xy}}{2\sqrt{xy}(\sqrt{xy}\,\mathrm{ctg}\beta + x)^2} > 0.$$

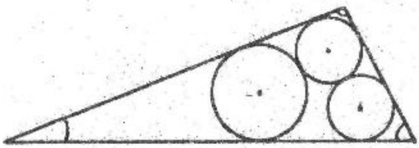


Рис. 6

Аналогично $z''>0$. Теперь для суммы квадратов радиусов $L(x) = x^2+y(x)^2+z(x)^2$ имеем $\frac{d^2L}{dx^2} = 2(1+y'^2+z'^2+yy''+zz'') > 0$.

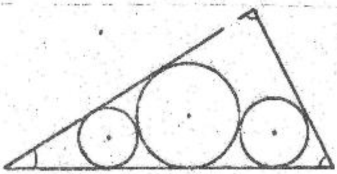


Рис. 7

Положительность $\frac{d^2L}{dx^2}$ противоречит предположению о максимальности площади.

Исключение схемы 8. Допустим, что максимум площади достигнут при расположении кругов по схеме 8 (рис. 7). При этом (как в случае схемы 7) $y''>0$. Кроме того, $z=x\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}$, откуда $z''=0$. Поэтому для $L(x) = x^2+y(x)^2+z(x)^2$ снова $\frac{d^2L}{dx^2} > 0$, что противоречит предположению о максимуме.

Исключение схемы 9. Теорема. *Суммарная площадь трех кругов не может достигать абсолютного максимума при их расположении по схеме 9.*

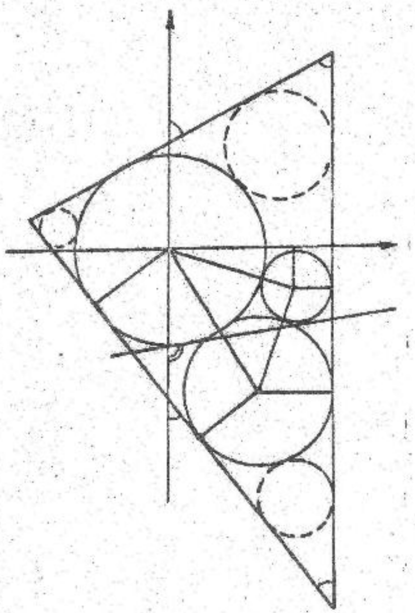


Рис. 8

Доказательство. 1. Допустим, что такой максимум достигнут при расположении трех кругов K_1, K_2, K_3 по схеме *9* (рис. 8). Введем оси координат x, y, расположив их, как указано на рис. 8. За счет подобия считаем фиксированным радиус первого круга $R_1=1$. Всю конфигурацию можно характеризовать углами α, β, γ и одним линейным размером O_1D, который нам будет удобно обозначать $O_1D = 2t^2-1$.

Рассмотрим вспомогательные круги K_4, K_5, K_6 (рис. 8). (Не исключается налегание кругов K_4 и K_3 и расположение точки С ниже оси x, перпендикулярной AC). Из предполагаемой максимальности следует

$$R_3 > R_4, \ R_3 > R_5, \ R_3 > R_6, \tag{5}$$

иначе замена K_3 на больший (или равный) из кругов K_4, K_5, K_6 ведет к увеличению площади трех кругов (или к уже исключенным схемам).

2. Из жесткости схемы *9* следует, что центр O_3 расположен ниже оси x, иначе круг K_3 можно было бы, сдвигая вверх, увеличить. Кроме того, $R_3<R_1$. Действительно, в секторе $\angle BAC$ вслед

[illegible] кругом K_0 лежат два круга K_1, K_3, и если бы было $R_3 \geq R_1$, то круг K_3 можно было бы, сдвигая вдоль AC, увеличить. Поэтому $R_3<R_1$, $R_1<O_1D=2t^2-1<R_1+2R_3$, т. е.

$$R_3<1,\ R_3>t^2-1,\ 1<t<\sqrt{2}. \tag{6}$$

3. Проведем нижнюю общую касательную T к кругам K_1 и K_3 (рис. 6). Образуемый ею с осью y угол ψ удовлетворяет неравенству $\psi<2\gamma$, так как при $\psi \geq 2\gamma$ было бы $R_4 \geq R_3$. Из $\psi>2\alpha$ следует $\alpha<\gamma$, а потому $\alpha<\pi/4$.

4. Наша ближайшая цель - извлечь из неравенств (5) и жесткости схемы по возможности более тесные ограничения на углы α, β, γ и параметр t. Предварительно выразим радиусы R_2, R_3, R_4, R_5, R_6 через α, β, γ, t.

5. Докажем, что

$$R_2=\left(\frac{t-\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^2. \tag{7}$$

Из трапеции $O_1Q_1Q_2O_2$ имеем $Q_1Q_2=2\sqrt{R_1R_2}=2\sqrt{R_2}$. С другой стороны, $Q_1Q_2=AN-NQ_1-AQ_2=(2t^2-1+\frac{1}{\cos 2\alpha})/\sin 2\alpha-\mathrm{tg}\,2\alpha-R_2\mathrm{ctg}\,\alpha$. Приравнивание этих двух значений Q_1Q_2 дает квадратное уравнение для $\sqrt{R_2}$, откуда получаем (3).

Аналогично

$$R_4 = \left(\frac{t-\sin\gamma}{\cos\gamma}\right)^2. \tag{8}$$

Кроме того,

$$R_5 = R_2\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha} = \left(\frac{t-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}\right)^2, \tag{9}$$

$$R_6 = R_1\frac{1-\sin\beta}{1+\sin\beta} = \mathrm{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right). \tag{10}$$

6. Сложнее доказывается равенство

$$R_3=t^2\left(\frac{t-\sin\alpha}{1+\cos\alpha-t\sin\alpha}\right)^2. \tag{11}$$

Из $1<t<\sqrt{2}$ и $0<\alpha<\pi/4$ следует

$$t-\sin\alpha>0,\ 1+\cos\alpha-t\sin\alpha>0. \tag{12}$$

Докажем (11). Из $\Delta O_1O_3D_3$ находим $O_3D_3=\sqrt{(R_1+R_3)^2-(O_1D-R_3)^2}=2t\sqrt{R_3-t^2+1}$. Из трапеции $O_2P_2P_3O_3$ имеем $P_2P_3=2\sqrt{R_2R_3}$. С другой стороны,

$$P_2P_3=DA-AP_2-DP_3=MD\mathrm{ctg}\,2\alpha-R_2\mathrm{ctg}\,\alpha-O_3D_3=\frac{2t(1-t\sin\alpha)}{\cos\alpha}-2t\sqrt{R_3-t^2+1}.$$

Приравнивая два выражения для P_2P_3, получаем уравь.ние

$$\cos\alpha\sqrt{t^2z^2-t^2+1}=m_2-m_1z, \tag{13}$$

где $tz=\sqrt{R_3}$, $m_1=t-\sin\alpha$, $m_2=1-t\sin\alpha$. После возведения (13) в квадрат

$$z^2(m_1^2-t^2\cos^2\alpha)-2m_1m_2z+m_2^2+(t^2-1)\cos^2\alpha=0. \tag{14}$$

Поскольку $m_1^2m_2^2-(m_1^2-t^2\cos^2\alpha)(m_2^2+(t^2-1)\cos^2\alpha)=m_1^2\cos^2\alpha$, то

$$z=\frac{m_1(m_2\pm\cos\alpha)}{m_1^2-t^2\cos^2\alpha}. \tag{15}$$

Тогда $m_1(m_2-m_1z)=-zt^2\cos^2\alpha\mp m_1\cos\alpha$, но из уравнения (13) следует, что $m_2-m_1z>0$. Это обязывает в (15) выбрать знак минус. Поэтому

$$R_3=t^2\frac{m_1^2(m_2-\cos\alpha)^2}{(m_1^2-t^2\cos^2\alpha)^2}. \tag{16}$$

Имеет место (отличное от стандартного разложения разности квадратов) тождество $m_1^2-t^2\cos^2\alpha=(m_2-\cos\alpha)(1+\cos\alpha-t\sin\alpha)$, поэтому из (16) следует (11). Выводя (16), мы считаем старший коэффициент в (14) отличным от нуля. По непрерывной зависимости обеих частей равенства (11) от t и α это равенство сохраняется и для тех пар t, α, для которых $m_1^2-t^2\cos^2\alpha=0$.

7. Из $R_5<R_3$, учитывая (9), (11), (2), имеем $1+\cos\alpha-t\sin\alpha<t(1+\sin\alpha)$. Отсюда следует, что при фиксированном t

$$\alpha>\alpha_0(t)=\arccos\frac{t-1}{\sqrt{4t^2+1}}-\arccos\frac{1}{\sqrt{4t^2+1}}, \tag{17}$$

где $\alpha_0(t)$ - корень уравнения $1+\cos\alpha-t\sin\alpha=t(1+\sin\alpha)$.

8. При фиксированном t значение R_3 достигает максимума $\bar{R}_3(t)$ при наименьшем α, т.е.

$$\sqrt{\bar{R}_3(t)}=\frac{t(t-\sin\alpha_0(t))}{1+\cos\alpha_0(t)-t\sin\alpha_0(t)}. \tag{18}$$

9. При фиксированном t

$$\frac{t-\sin\gamma}{\cos\gamma}=\sqrt{R_4}<\sqrt{R_3}<\sqrt{\bar{R}_3(t)}. \tag{19}$$

Геометрически очевидно (см. рис. 9), что при фиксированном $O_1D=2t^2-1$ движению точки C по прямой p сверху вниз соответствует возрастание γ от 0 до $\pi/2$. При этом радиус R_4 сначала убывает (до попадания центра O_4 на линию O_1D), а затем возрастает. Достигнутый минимум $\min R_4=(O_1D-1)/2=t^2-1$.

Обозначим через $t_1\approx1{,}3000$ корень уравнения $t^2-1=\bar{R}_3(t)$. При $t>t_1$ соблюдение неравенства (19) невозможно, так как даже минимум (по γ) левой части (19) превосходит правую. Поэтому далее считаем t лежащим в пределах $1<t<t_1\approx1{,}3000$.

При $t\in(1,t_1)$ из (19) следует

$$\gamma_0(t)<\gamma<\gamma_1(t), \tag{20}$$

где

$$\gamma_0(t)=\arccos\frac{\sqrt{\bar{R}_3(t)}}{\sqrt{\bar{R}_3(t)+1}}-\arccos\frac{t}{\sqrt{\bar{R}_3(t)+1}},$$

$$\gamma_1(t)=\arccos\frac{\sqrt{\bar{R}_3(t)}}{\sqrt{\bar{R}_3(t)+1}}+\arccos\frac{t}{\sqrt{\bar{R}_3(t)+1}},$$

– два корня уравнения $t-\sin\gamma=\sqrt{\bar{R}_3(t)}\cos\gamma$. Значение γ_1 соответствует положению, когда сторона *BC* касается круга K_3, так что круг K_4 совпадает с K_3. Дальнейшее увеличение γ сделает невозможной замену K_3 на K_4.

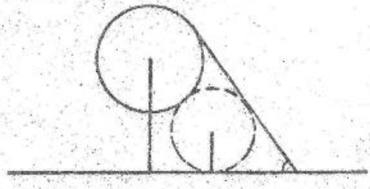


Рис. 9

10. Из неравенства $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)=\sqrt{R_4}<\sqrt{R_3}<\sqrt{\bar{R}_3(t)}$ следует

$$\beta>\beta_0'(t)=\frac{\pi}{2}-2\operatorname{arctg}\sqrt{\bar{R}_3(t)}. \tag{21}$$

11. Табл. 1 показывает характер функции α_0, γ_0, β_0', $\alpha_0+\beta_0'+\gamma_0$, в частности – их монотонность. Обозначим через $t_0\approx1,198342$ – корень уравнения $\alpha_0(t)+\beta_0'(t)+\gamma_0(t)=\pi/2$. Поскольку $\alpha_0+\beta_0'+\gamma_0>\pi/2$ противоречит $\alpha+\beta+\gamma=\pi/2$, то соблюдение неравенств (5) при жесткой схеме 9 возможно только при $t_0<t<t_1$.

Таблица 1[1]

t	$\alpha_0(t)$	$\gamma_0(t)$	$\beta_0'(t)$	$\alpha_0+\beta_0+\gamma_0$
1,00	0,464	0,841	0,841	$>\pi/2$
1,05	0,423	0,848	0,719	$>\pi/2$
1,10	0,385	0,855	0,602	$>\pi/2$
1,15	0,350	0,861	0,489	$>\pi/2$
$t_0\approx1,198342$	0,3188325	0,8668877	0,3850767	$\pi/2$
1,20	0,318	0,867	0,382	$<\pi/2$
1,25	0,288	0,873	0,280	$<\pi/2$
$t_1\approx1,3000$	0,259	0,878	0,184	$<\pi/2$

[1]Значения в большинстве клеток округлены до трех знаков, достаточных для вывода.

При этом должны выполняться неравенства $\alpha_0(t)<\alpha<\alpha_1'(t)$, $\beta_0'(t)<\beta<\beta_1(t)$, $\gamma_0(t)<\gamma<\gamma_1(t)$, где $\alpha_1'(t)=\pi/2-\gamma_0(t)-\beta_0'(t)$; $\beta_1(t)=\pi/2-\gamma_0(t)-\alpha_0(t)$. Двусторонние ограничения углов α и β можно в части диапазона t несколько сузить.

При фиксированном t и жесткости схемы наибольшее значение $\alpha_1''(t)$ угла α достигается в предельном (уже не жестком) положении, когда центр круга K_3 лежит на O_1D, т.е. когда $R_3=t^2-1$. При таком значении R_3 из равенства (11) находим

$$\alpha_1''(t)=\arccos\frac{\sqrt{t^2-1}}{t^2-\sqrt{t^2-1}}. \tag{22}$$

Очевидно, $\alpha<\alpha_1''(t)$. Эта оценка сверху для α точнее, чем $\alpha_1'(t)$ при $1,24509\le t\le 1,3$. При таких t $\beta>\beta_0''(t)=\pi/2-\gamma_1(t)-\alpha_1''(t)$. Оценка $\beta>\beta_0''(t)$ точнее оценки $\beta>\beta_0'(t)$ при $1,282019\le t\le 1,3$.

12. Окончательно при жесткой схеме 9 выполняются неравенства

$$t_0<t<t_1,\ \alpha_0(t)<\alpha<\alpha_1(t),\ \beta_0(t)<\beta<\beta_1(t), \tag{23}$$

где $\alpha_1(t)=\min(\alpha_1'(t),\ \alpha_1''(t))$; $\beta_0(t)=\max(\beta_0'(t),\ \beta_0''(t))$.

Треугольники и расположение кругов K_1, K_2, K_3, удовлетворяющие требованиям (23), будем называть *локализованными*. Табл. 2 дает их численные характеристики.

13. Для завершения доказательства теоремы достаточно доказать следующую лемму.

Лемма. В каждом локализованном расположении суммарная площадь кругов K_1, K_2, K_3 возрастет, если заменить их кругами, расположенными по схеме 1, т.е.

$$V_1=\rho_1^2+\rho_2^2+\rho_3^2-(R_1^2+R_2^2+R_3^2)>0, \tag{24}$$

где ρ_1 – радиус вписанного в треугольник круга, а

$$\rho_2=\rho_1\mathrm{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right),\quad \rho_3=\rho_1\mathrm{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right).$$

14. Значение ρ_1 легко выразить через R_1 и R_2, сравнив два представления длины AC: $AC = R_1\mathrm{ctg}\beta + 2\sqrt{R_1R_2}+R_2\mathrm{ctg}\alpha$, $AC = \rho_1\mathrm{ctg}\alpha+\rho_1\mathrm{ctg}\beta$. Учтем, что $R_1=1$ и обозначим $V_2=V_1(\mathrm{ctg}\alpha+\mathrm{ctg}\beta)^2R_2^{-1}$. Нам достаточно показать, что $V_2>0$.

$$V_2=\left(\frac{\mathrm{ctg}\beta}{\sqrt{R_2}}\quad\sqrt{R_2}\mathrm{ctg}\alpha+2\right)^2 p(\alpha,\beta)-\left(\frac{1}{R_2}+(1+q(t,\alpha))R_2\right)\left(\mathrm{ctg}\alpha+\mathrm{ctg}\beta\right)^2,$$

где $p(\alpha,\beta)=1+\mathrm{tg}^4\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)+\mathrm{tg}^4\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)$;

$$q(t,\alpha)=\left(\frac{R_3}{R_2}\right)^2=\left(\frac{t\cos\alpha}{1+\cos\alpha-t\sin\alpha}\right)^4.$$

Таблица 2

t	$\alpha_0(t)$	$\alpha_1(t)$	$\beta_0(t)$	$\beta_1(t)$
1,198342	0,31883	0,31883	0,38508	0,38508
1,20	0,31779	0,32211	0,38161	0,38593
1,205	0,31467	0,33196	0,37119	0,38849
1,21	0,31157	0,34176	0,36083	0,39103
1,215	0,30849	0,35150	0,35053	0,39355
1,22	0,30543	0,36119	0,34029	0,39605
1,225	0,30239	0,37082	0,33010	0,39853
1,23	0,29938	0,38040	0,31988	0,40100
1,235	0,29638	0,38992	0,30991	0,40345
1,24	0,29341	0,39939	0,29991	0,40588
1,24509	0,29040	0,40897	0,28978	0,40834
1,25	0,28752	0,39479	0,28007	0,41070
1,255	0,28461	0,38051	0,27025	0,41308
1,26	0,28172	0,36540	0,26048	0,41544
1,262019	0,28056	0,36075	0,25655	0,41639
1,265	0,27885	0,35245	0,27095	0,41779
1,27	0,27599	0,33865	0,29491	0,42012
1,275	0,27316	0,32501	0,31866	0,42244
1,28	0,27034	0,31152	0,34220	0,42474
1,285	0,26755	0,29818	0,36551	0,42702
1,29	0,26477	0,28500	0,38862	0,42929
1,295	0,26201	0,27196	0,41153	0,43153
1,30000	0,25927	0,25927	0,43389	0,43389

15. Неравенство $V_2>0$ будем проверять при различных t, $\alpha\in(\alpha_0,\alpha_1)$, $\beta\in(\beta_0,\beta_1)$ на следующем пути. Пусть t фиксировано и $\alpha_0\le\alpha\le\alpha_1$, $\beta_0\le\beta\le\beta_1$. Ввиду $\dfrac{\partial p}{\partial\alpha}<0$, $\dfrac{\partial p}{\partial\beta}<0$, $\dfrac{\partial q}{\partial\alpha}>0$: $p(\alpha,\beta)\ge p=p(\alpha_1,\beta_1)$, $q(\alpha,\beta)\le q=q(t,\alpha_1)$, откуда

$$V_2\ge V_3=C(R_2,\alpha,\beta)+p(R_2\operatorname{ctg}^2\alpha+2\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta+\frac{\operatorname{ctg}^2\beta}{R_2})-a_0(R_2)(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta)^2,$$

где $C(R_2,\alpha,\beta)=4p(1+\sqrt{R_2}\operatorname{ctg}\alpha+\dfrac{\operatorname{ctg}\beta}{\sqrt{R_2}})$; $a_0(R_2)=(1+q)R_2+\dfrac{1}{R_2}$.

Из (7) следует $\dfrac{\partial R_2}{\partial\alpha}<0$, поэтому $r_0\le R_2\le r_1$, где

$$r_0=\left(\frac{t-\sin\alpha_1}{\cos\alpha_1}\right)^2,\quad r_1=\left(\frac{t-\sin\alpha_0}{\cos\alpha_0}\right)^2,$$

откуда $C(R_2,\alpha,\beta)\ge C=4p(1+\sqrt{r_0}\operatorname{ctg}\alpha_1+\dfrac{\operatorname{ctg}\beta_1}{\sqrt{r_1}})$,

$$V_3\ge V_4=C-(a_1(R_2)\operatorname{ctg}^2\alpha+2a_2(R_2)\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta+a_3(R_2)\operatorname{ctg}^2\beta),$$

где $a_1(R_2)=a_0(R_2)-pR_2$; $a_2(R_2)=a_0(R_2)-p$; $a_3(R_2)=a_0(R_2)\dfrac{p}{R_2}$;

4*

достаточно показать, что $V_4>0$.

16. Во всех случаях дальнейшего счета окажется, что $\lambda=\mathrm{ctg}^2\alpha_1+2\mathrm{ctg}\alpha_1\mathrm{ctg}\beta_1-(p-1)\mathrm{ctg}^2\beta_0>0$. Поэтому

$$\frac{\partial^2 V_4}{\partial R_2^2}=-\frac{2}{R_2^3}(\mathrm{ctg}^2\alpha+2\mathrm{ctg}\alpha\mathrm{ctg}\beta-(p-1)\mathrm{ctg}^2\beta)\le-\frac{2\lambda}{R_2^3}<0.$$

Отсюда следует, что неравенство $V_4>0$ достаточно проверить при $R_2=r_0$ и $R_2=r_1$.

Кроме того, во всех случаях окажется, что коэффициенты $a_1(r_0)$, $a_2(r_0)$, $a_3(r_0)$, $a_1(r_1)$, $a_2(r_1)$, $a_3(r_1)$ положительны. Поэтому достаточно прямым счетом убедиться, что $V_5>0$, $V_6>0$, где

$$V_5=C-(a_1(r_0)\mathrm{ctg}^2\alpha_0+2a_2(r_0)\mathrm{ctg}\alpha_0\mathrm{ctg}\beta_0+a_3(r_0)\mathrm{ctg}^2\beta_0);$$

$$V_6=C-(a_1(r_1)\mathrm{ctg}^2\alpha_0+2a_2(r_1)\mathrm{ctg}\alpha_0\mathrm{ctg}\beta_0+a_3(r_1)\mathrm{ctg}^2\beta_0).$$

17. При $t_0\le t\le 1,225$ и $1,28\le t\le t_1$ достаточно в качестве α_0, α_1, β_0, β_1 брать значения из табл. 2; результаты счета приведены в табл. 3. Они подтверждают неравенства $V_5>0$ и $V_6>0$ в этих зонах изменения t.

Таблица 3

t	V_5	V_6
1,198342	14,36	14,36
1,20	13,65	13,67
1,205	11,53	11,57
1, 1	9,40	9,41
1,215	7,25	7,19
1,22	5,08	4,88
1,225	2,86	2,47

t	V_5	V_6
1,28	3,30	2,63
1,285	5,67	5,25
1,29	8,11	7,88
1,295	10,66	10,57
1,3000	13,30	13,30

18. На оставшемся участке $1,225\le t\le 1,28$ достаточно рассматривать отдельно четыре сочетания возможных ограничений:

I) $\alpha_0\le\alpha\le(\alpha_0+\alpha_1)/2$, $\beta_0\le\beta\le(\beta_0+\beta_1)/2$,

II) $\alpha_0\le\alpha\le(\alpha_0+\alpha_1)/2$, $(\beta_0+\beta_1)/2\le\beta\le\beta_1$,

III) $(\alpha_0+\alpha_1)/2\le\alpha\le\alpha_1$, $\beta_0\le\beta\le(\beta_0+\beta_1)/2$,

IV) $(\alpha_0+\alpha_1)/2\le\alpha\le\alpha_1$, $(\beta_0+\beta_1)/2\le\beta\le\beta_1$,

где α_0, α_1, β_0, β_1 заданы в табл. 2. Результаты счета приведены в табл. 4:

Таблица 4

t	I		II		III		IV	
	V_5	V_6	V_5	V_6	V_5	V_6	V_5	V_6
1,225	9,11	6,90	8,32	8,27	8,50	8,25	7,64	7,55
1.23	8,18	7,81	6,96	6,83	7,61	7,22	6,50	6,32
1,235	6,97	6,42	5,70	5,49	6,51	5,93	5,37	5,09
1,24	5,68	4,89	4,41	4,09	5,36	4,56	4,24	3,86
1,24509	4,27	3,18	3,06	2,61	4,13	3,05	3,11	2,60
1,25	4,68	3,48	3,48	2,99	4,22	3,05	3,25	2,70
1,255	5,07	3,80	3,94	3,42	4,32	3,07	3,44	2,88
1,26	5,43	4,10	4,43	3,90	4,42	3,12	3,70	3,14
1,262019	5,56	4,21	4,63	4,10	4,45	3,14	3,83	3,27
1,265	6,10	5,02	5,21	4,75	4,95	3,89	4,33	3,84
1,27	7,01	6,26	6,22	5,85	5,84	5,09	5,25	4,86
1,275	7,94	7,44	7,27	6,99	6,79	6,28	6,26	5,96
1,28	8,91	8,58	8,37	8,16	7,84	7,49	7,39	7,16

Положительность всех значений V_5, V_6 завершает доказательство теоремы.

Исключение схемы 10. Наименьший круг (схема *10*, рис. 2) можно заменить ему симметричным относительно прямой, соединяющей центры двух других кругов, а затем увеличить его, не выходя из ΔABC.

Исключение схем 11 и 4. Теорема. *Суммарная площадь кругов не может достигать максимума при их размещении по схеме 11.*

Доказательство. Пусть круги K_1, K_2, K_3 размещены в треугольнике по схеме *11* (рис. 10). Проведем прямую MN - общую касательную кругов K_1 и K_2. Точка N лежит вправо от A, иначе круг K_3 допускал бы увеличение и схема не была бы жесткой. Для дальнейшего несущественно, лежит точка N на отрезке AC или правее C. Рассмотрим отдельно две возможности.

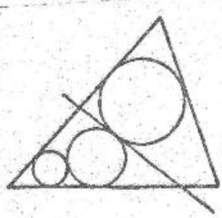


Рис. 10

1. Пусть прямая MN не имеет общих точек с кругом K_3 (рис. 10). Рассмотрим круги K_3, K_2 в ΔAMN, обозначив их радиусы через x, y. Величина $L(x)=x^2+y(x)^2$ - строго выпуклая функция от x. Поэтому малым изменением x, что не выведет K_2, K_3 из ΔAMN, можно увеличить их суммарную площадь.

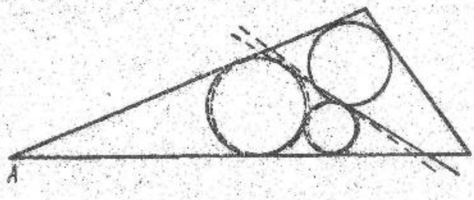


Рис. 11

2. Пусть MN пересекает K_3 (или касается K_3) (рис. 11). Проведем общую касательную PQ кругов K_2, K_3. Если в ΔAPQ углы $\angle A \le \angle Q$, то, «переложив» круг K_2 из угла Q в угол A, мы получим возможность увеличить круг K_1 и с ним – суммарную площадь кругов. Наконец, если $\angle A > \angle Q$, то мы немного повернем прямую PQ вокруг центра круга K_2. Повернем настолько мало, чтобы, во-первых, в $\Delta AP'Q'$ сохранилось неравенство $\angle A > \angle Q'$, во-вторых, чтобы вписанный в $\Delta AP'Q'$ круг K_3' (он изображен на рис. 11 пунктиром) не заставил круг K_2' выйти из ΔABC. (Последнее существенно для случая, когда точка Q' лежит правее точки C.) Сумма L квадратов радиусов кругов K_3, K_2 меньше, чем кругов K_3', K_2'. Это следует из того, что в $\Delta AP'Q'$ величина L – выпуклая функция радиуса x круга K_3, а положение K_3', K_2' отвечает абсолютному максимуму L ввиду $\angle A > \angle Q'$. Заменяя K_3, K_2 на K_3', K_2', мы увеличим суммарную площадь трех кругов.

Теорема. *Суммарная площадь кругов не может достигать максимума при их расположении по схеме 4.*

Действительно, схема 11 превращается в схему 4, когда круг K_1 является вписанным. Это отличие схемы 4 не препятствует проведению для нее доказательства, дословно повторяющего приведенное для схемы 11.

Исключение схемы 12. Допустим, что максимум площади достигнут при расположении кругов по схеме 12 (рис. 12). Будем варьировать радиус x, сохраняя неизменной точку касания D. При этом радиусы x, y связаны соотношением $2\sqrt{xy}+y\,\mathrm{ctg}\beta=DB$. Отсюда

$$y'=-\frac{y}{\sqrt{xy}\,\mathrm{ctg}\beta+x}<0,$$

$$2(\sqrt{xy}\,\mathrm{ctg}\beta+x)^2y''=2y+\frac{y^2}{\sqrt{xy}}\mathrm{ctg}\beta-y'(\sqrt{xy}\,\mathrm{ctg}\beta+2x)>0,$$

т. е. $y''>0$. Аналогично $z''>0$, и потому для функции

$L(x)=x^2+y(x)^2+z(x)^2$ имеем $\dfrac{d^2L}{dx^2}>0$, что противоречит предположению о минимуме площади.

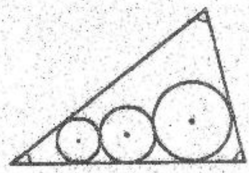


Рис. 12

Исключение схемы 13. Теорема. *Абсолютный максимум суммарной площади трех кругов не может достигаться при их расположении по схеме 13.*

Доказательство. Допустим, что такой максимум достигнут при расположении кругов K_1, K_2, K_3 по жесткой схеме 13 (рис. 13). При этом

1. Должно выполняться неравенство $\beta>\alpha$. Иначе можно отразить круг K_3 относительно биссектрисы угла 2γ, после чего увеличить K_2. Поэтому

$$\frac{\pi}{2}-\gamma=\alpha+\beta>2\alpha. \tag{25}$$

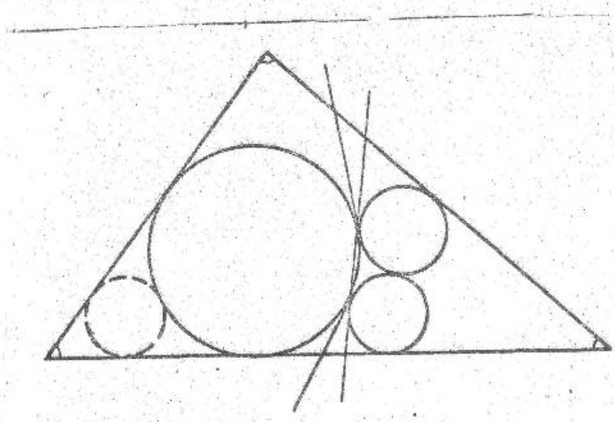


Рис. 13

2. Лучи l_1, l_2 общих касательных кругов K_1, K_2 и K_1, K_3 достигают соответственно лучей AC и AB, а потому и общая

касательная T достигает лучей AC и AB, образуя с ними углы φ и ψ.

3. Должно выполняться неравенство

$$\varphi<2\alpha. \qquad (26)$$

Иначе круг K_2 можно отразить в биссектрисе угла ψ, после чего увеличить его (если $\varphi>2\alpha$) или придти к уже исключенной схеме II (если $\varphi=2\alpha$).

4. Каждый из кругов K_2, K_3 должен быть больше круга K_4.

5. Если круги K_2, K_3 заменить двумя меньшими кругами, равными K_4, сохраняя их касание между собой, а также сохранив касание нижнего из них со стороной AC, но отказавшись от касания верхнего со стороной AB (рис. 14), то новый угол φ' будет меньше прежнего:

$$\varphi'<\varphi. \qquad (27)$$

В справедливости неравенства (27) легко убедиться, если разбить процесс уменьшения кругов K_2, K_3 на следующие шаги. Сначала уменьшаем круг K_2 до нужного размера, сохраняя точку его касания с имевшейся прямой T. Затем вдвигаем его до касания с K_1 и AC, это заставляет повернуть T с уменьшением угла φ. Потом уменьшаем до нужного размера круг K_3, сохраняя точку его касания с кругом K_1. Угол φ опять убывает. Наконец, «перекатываем по K_1» уменьшенный круг K_3 к уменьшенному K_2. Угол φ снова убывает.

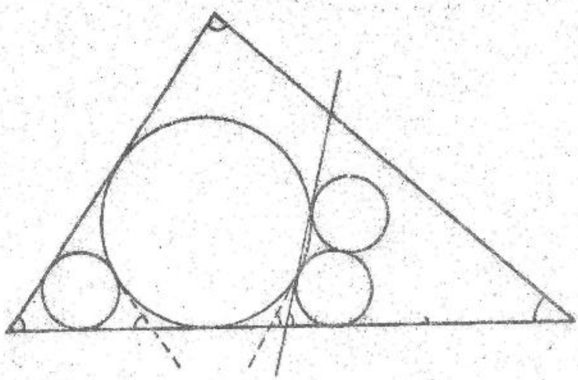


Рис. 14

6. Теперь, используя (27), (25) и рис. 14, имеем

$$\varphi>\varphi'>\frac{\pi}{2}-\gamma>2\alpha, \qquad (28)$$

что противоречит (2).

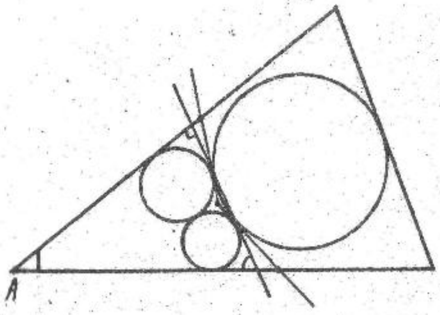


Рис. 15

Исключение схемы 14. Пусть круги расположены по жесткой схеме 14 (рис. 15). За счет выбора обозначений считаем $\angle A$ наименьшим из углов треугольника. Поэтому $\angle A \le \pi/3$. Ввиду жесткости схемы лучи общих касательных LN, LM достигают лучей AC, AB, а потому и общая касательная T кругов K_1, K_2 достигает лучей AC, AB. Пусть для определенности $\varphi \ge \psi$.

Ввиду $\angle A \le \pi/3$ имеем $\varphi \ge \angle A$. Отразив круг K_1 относительно биссектрисы угла ψ, мы сможем затем увеличить круг K.

Список литературы: 1. *Адамар Ж.* Элементарная геометрия, ч. 1. Планиметрия. М., 1957. 608 с. 2. *Балк Г. Д., Балк М. Б.* Испытание на правдоподобие//Квант. 1972. N1. С. 20-25. 3. *Залгаллер В. А.* Одно неравенство для остроугольных треугольников//Укр. геометр. сб. 1991. Вып. 34. С. 10-25. 4. *Лось Г. А.* Оптимизационная задача Мальфатти//Деп. Укр НИИНТИ 05.07.88. 86 с. Реф. журн. Мат. 1988, 11А813. 5. *Саати Т.* Целочисленные методы оптимизации и связанные с ними экстремальные проблемы. М., 1973. 302 с. 6. *Харазишвили А. Б.* Введение в комбинатроную геометрию. Тбилиси, 1985. 149 с. 7. *Dörrie H.* Triumph der Mathematik (Hundert berühmte Probleme aus zwei Jahrtausend mathematischer Kultur) Physica-Verlag, Würzburg 1958, 391 c. (Англ. перевод: 100 Great Problems of Elementary Mathematics. Dover, New-York, 1965). 8. *Eves H.* A survey of geometry. 2//Allon and Bacon. 1965. P.50-66. 9. *Gabai H., Liban E.* On Goldberg's inequality associated with Malfatti problem//Mathematics Magazine. 1967. 41, N5. P.251-252. 10. *Goldberg M.* On the original Malfatti problem//Mathematics Magazine. 1967. 40, N5. P.241-247. 11. *Lob H., Richmond H.W.* On the solutions of Malfatti problem for a triangle//Proc.London Math.Soc. 1930. 2, N30. P.287-301. 12. *Malfatti C.* Memoria sopra una problema stereotomico//Memoria di Matematica e di Fisica della Societa Italiana della Scienze. 1803. 10, N.1. P.235-244. 13. *Procissi A.* Questioni connesse col problema di Malfatti e bibliografia//Period.Math. 1932. 4 N12. P.189-205.

Поступила в редколлегию 19.11.90

8- 181

УДК 514

В. Ф. Игнатенко

ОБ УРАВНЕНИИ СПЕЦИАЛЬНОЙ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ С БЕСКОНЕЧНЫМ МНОЖЕСТВОМ ПЛОСКОСТЕЙ КОСОЙ СИММЕТРИИ

Пусть $(m-1)$-мерная алгебраическая поверхность F_n порядка n в вещественном пространстве E^m инвариантно относительно бесконечной группы G, порожденной косыми отражениями относительно плоскостей и не допускающей расширения; N - множество всех направлений симметрии, определяемых векторами. Будем считать, что N содержит, по крайней мере, три различные G-орбиты направлений симметрии; Π^α, Π^β, Π^γ - линейные оболочки размерностей $\alpha\geq\beta\geq\gamma$ любых трех из таких G-орбит, причем $\Pi^\alpha\cap\Pi^\beta\cap\Pi^\gamma=0$ и число $h<\alpha+\beta+\gamma$, где h есть размерность $\Pi^h=\Pi^\alpha+\Pi^\beta+\Pi^\gamma$. Среди выделенных G находятся, в частности, группы с несвободными алгебрами инвариантов (А. Е. Залесский [1], А. Е. Велесько [2]). Выберем декартову систему координат $Ox_i\,(i=\overline{1,m})$ так, что оси $Ox_\tau\in\Pi^h\,(\tau=\overline{1,h})$. Обозначим через B множество всех плоскостей симметрии поверхности F_n, соответствующее направлениям симметрии произвольной из трех вышеуказанных G-орбит. Уравнение поверхности F_n можно записать так:

$$\sum_{j=0}^{p(\varphi)} \Phi_j(x_i)\varphi^{p(\varphi)-j}(x_i)=0; \tag{1}$$

множество B состоит из диаметральных плоскостей квадрики с уравнением $\varphi=c$ [3], т. е. $B=B(\varphi)$.

Взаимное расположение $\omega\geq3$ линейных оболочек G-орбит направлений симметрии зависит от многочлена Φ_0 [4]. Его строение во многом и выясняется в настоящей заметке. Имеет место

Теорема. *В уравнении (1) поверхности F_n многочлен Φ_0 зависит только от переменных $x_{h+1},\dots,x_m$.*

В работе [5, п. 2.2] высказано предположение, что число $p(\varphi)$ одно и то же для всех трех квадратичных форм φ. Здесь это предположение подтверждается. Из теоремы вытекает

Следствие. *Для заданной поверхности F_n функция $p(\varphi)$ постоянна.*

Доказательство теоремы. Не нарушая общности, поверхность F_n определим любым из следующих уравнений [6]:

$$\sum_{j=0}^{r} R_j(Y_2^2, Y_3^2, z_{\lambda+\sigma}, x_\gamma)A^{r-j}=0,\ p=r; \tag{2}$$

$$\sum_{j=0}^{s} S_j(Y_1^2, Y_3^2, z_k, x_\gamma) B^{s-j}=0, \quad p=s; \tag{3}$$

$$\sum_{j=0}^{t} T_j(Y_1^2, Y_2^2, z_k, z_{\lambda+\sigma}, x_\gamma) Y_3^{2(t-j)}=0, \quad p=t \tag{4}$$

где $\gamma=\overline{h+1, m}$ и

$$A=y_1^2+\sum_{k=1}^{\lambda} \xi_k(x_\gamma) z_k; \tag{5}$$

$$B=y_2^2+\sum_{\sigma=1}^{\mu} \zeta_\sigma(x_\gamma) z_{\lambda+\sigma}; \tag{6}$$

многочлены R_j, S_j, T_j и линейные функции ξ_k, ζ_σ зависят от указанных в скобках переменных.

В (2) - (6) переменные x_τ переобозначены: $\Pi^\alpha=\Pi^1(y_1)\oplus\Pi^\lambda(z_k)$, $\Pi^\beta=\Pi^1(y_2)\oplus\Pi^\mu(z_{\lambda+\sigma})$, $\Pi^\gamma=\Pi^1(y_3)\oplus\Pi^\omega$, причем ω - плоскость $\Pi^\omega=\Pi^\gamma\cap(\Pi^\alpha+\Pi^\beta)$. Множество N не содержит векторов Π^λ и Π^μ.

Пусть уравнения

$$z_{\omega+\varepsilon}=\sum_{q=1}^{\omega} a_{\varepsilon q} z_q, \quad \varepsilon=\overline{1, \lambda-\omega}, \tag{7}$$

$$z_{\lambda+\sigma}=\sum_{q=1}^{\omega} b_{\sigma q} z_q, \quad \sigma=\overline{1, \mu}, \tag{8}$$

задают Π^ω в $\Pi^{\lambda+\mu}=\Pi^\lambda\oplus\Pi^\mu$. Если $\lambda=\omega$, то Π^ω определяется уравнением (8). На основании (7) и (8) выберем в $\Pi^{\lambda+\mu}$ новую систему координат:

$$\begin{gathered} z_q=z'_q, \quad q=\overline{1, \omega}, \\ z_{\omega+\varepsilon}=z'_{\omega+\varepsilon}+\sum_{q=1}^{\omega} a_{\varepsilon q} z'_q, \\ z_{\lambda+\sigma}=z'_{\lambda+\sigma}+\sum_{q=1}^{\omega} b_{\sigma q} z'_q. \end{gathered} \tag{9}$$

Обозначим через f аффинное преобразование E^m, определяемое формулами (9) при неизменных переменных, которые в них не входят. Подвергнув этому преобразованию любое из уравнений (2) - (4), получим

$$\sum_{j=0}^{t} P_j(Y_1^2, Y_2^2, z'_{\vartheta+\varepsilon}, z'_{\lambda+\sigma}, x_\gamma) C^{t-j} = 0, \qquad (10)$$

где квадратичная форма

$$C = Y_3^2 + \sum_{q=1}^{\vartheta} \chi_q z'_q. \qquad (11)$$

Плоскости множества $B(C)$ являются диаметральными плоскостями конуса с уравнением $C=0$. Согласно лемме 2 работы [3], в формуле (11) линейные функции χ_q зависят только от x_γ, т.е.

$$\chi_q = \chi_q(x_\gamma). \qquad (12)$$

В [7] доказано, что формы R_j являются многочленами от B, Y_3^2 и x_γ:

$$R_j = R_j(B, Y_3^2, x_\gamma), \quad j=\overline{0,r}. \qquad (13)$$

Функциональный коэффициент при Y_3^{2t} в (2) обозначим через $\mathcal{D}$. На основании (2) и (13) многочлен

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}(A, B, x_\gamma). \qquad (14)$$

При этом

$$f(\mathcal{D}) = P_0. \qquad (15)$$

Пусть l есть степень многочлена $\mathcal{D}$ относительно двух переменных A и B - согласно (14). Так как формы ξ_k (а также ζ_σ) линейно независимы (группа G не допускает расширения), то в силу (5) и (6) многочлен $f(\mathcal{D})$ содержит $(z'_1)^l$, что при $l>0$ противоречит (15). Следовательно, равенство (14) упрощается:

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}(x_\gamma) = P_0. \qquad (16)$$

Теперь коэффициент при Y_1^{2r} в (10) обозначим через Q. С учетом (12) формы

$$P_j = P_j(A_0, B_0, x_\gamma), \quad j=\overline{0,t} \qquad (17)$$

где $A_0 = Y_1^2 + \sum_{\varepsilon=1}^{\lambda-\vartheta} \xi_{\vartheta+\varepsilon} z'_{\vartheta+\varepsilon}$ и B_0 есть B при замене $z_{\lambda+\sigma}$ на $z'_{\lambda+\sigma}$. Значит,

$$Q = Q(B_0, C, z'_{\vartheta+\varepsilon}, x_\gamma). \qquad (18)$$

Согласно (2) и (10)

$$f^{-1}(Q) = R_0. \qquad (19)$$

Из формул (9), (18) и (19) следует, что

$$Q = Q(x_\gamma) = R_0. \qquad (20)$$

Наконец, коэффициент при Y_2^{2s} в (10) обозначим через H. Тогда на основании (17)

$$H = H(A_0, C, z'_{\lambda+\sigma}, x_\gamma). \qquad (21)$$

Так как
$$f^{-1}(H)=S_0, \tag{22}$$
то (21) принимает вид
$$H=H(A_0, C, x_\gamma). \tag{23}$$
С другой стороны, в уравнении (3)
$$S_0=S_0(A, y_3^2, x_\gamma). \tag{24}$$

Пусть степень S_0 относительно y_1^2, y_3^2 равна $r_1>0$, $t_1>0$ соответственно. В силу (16) и (20) $r_1<r$ и $t_1<t$. Согласно (2) функциональный коэффициент при $y_1^{2r_1}$ в (24) зависит от z_k, что исключается строением S_0. Значит, $r_1=0$ и $S_0=S_0(y_3^2, x_\gamma)$. Формулы (22) и (23) дают $H=H(C, x_\gamma)$. Снова использовав (22), получим
$$H=H(x_\gamma)=S_0. \tag{25}$$

Соотношения (16), (20), (25) показывают справедливость теоремы.

Перейдем к доказательству следствия. В уравнении (2) функциональные коэффициенты при z_1^{s-j} $(1\le j\le s)$ содержит y_1^2. На основании теоремы член $R_0(\xi_1 z_1')^r$ должен входить как слагаемое в левую часть уравнения (10). Значит, число $r\le t$. Аналогично - левая часть (2) содержит
$$P_0\left(\sum_{q=1}^{\upsilon} \chi_q z_q\right)^t. \tag{26}$$
Поэтому $t\le r$. Итак, число $r=t$. Далее, многочлен
$$S_0\left[\sum_{\sigma=1}^{\mu} \zeta_\sigma\left(\sum_{q=1}^{\upsilon} b_{\sigma q} z_q'\right)\right]^s$$
также входит в (10), т.е. $s\le t$. Но и $t\le s$, поскольку (3) имеет (26). Таким образом, число $r=s=t$.

Отметим, что левая часть уравнения (2) содержит многочлен
$$R_0\left(\sum_{k=1}^{\lambda} \xi_k z_k\right)^r+S_0\left(\sum_{\sigma=1}^{\mu} \zeta_\sigma z_{\lambda+\sigma}\right)^r, \tag{27}$$
который в (10) определяет слагаемое (26), если z_q заменить на z_q'. Из (9), (26), (27) находим следующую формулу:
$$R_0\left(\xi_q+\sum_{\varepsilon=1}^{\lambda-\upsilon} a_{\varepsilon q}\xi_{\upsilon+\varepsilon}\right)^r+S_0\left(\sum_{\sigma=1}^{\mu} b_{\sigma q}\zeta_\sigma\right)^r=P_0\chi_q^r,\quad q=\overline{1,\upsilon}.$$
Список литератутыы: 1. Zaleskii A.E. The fixed algebra of a group

generated by reflections is not always free // Arch.Math. 1983. 41, N5. P.434-437. 2. *Велесько А.Е.* Об инвариантах квадратичных групп и групп, порожденных псевдоотражениями // Весці АН БССР. 1986. N2. С.17-21. 3. *Игнатенко В.Ф.* Алгебраические поверхности с бесконечным множеством плоскостей косой симметрии. I // Укр. геометр. сб. 1989. Вып.32. С.47-60. 4. *Игнатенко В.Ф.* О специальных алгебраических поверхностях с бесконечным множеством плоскостей косой симметрии // Укр. геометр. сб. 1990. Вып.33. С.52-55. 5. *Игнатенко В.Ф.* Специальные алгебраические поверхности с симметриями. 1988. Деп. в УкрНИИНТИ, 29 с.05.07.88, N1768-Ук 88. 6. *Игнатенко В.Ф.* О геометрической теории инвариантов групп, порожденных отражениями // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Пробл. геометрии. 1989. Т21. С.155-208. 7. *Игнатенко В.Ф.* Алгебраические поверхности с бесконечным множеством плоскостей косой симметрии. II // Укр. геометр. сб. 1991. Вып.34. С.20-32.

Поступила в редколлегию 05.11.90

УДК 514

О. В. Кузнецов

О ЛОКАЛЬНЫХ ИЗОМЕТРИЧЕСКИХ ПОГРУЖЕНИЯХ ДВУМЕРНЫХ МЕТРИК В E^4 С ЗАДАННЫМ ГАУССОВЫМ КРУЧЕНИЕМ

Вопрос об изометрических погружениях двумерных метрик в евклидовы пространства при различных условиях, налагаемых на эти погружения, является одним из центральных вопросов геометрии в «целом». В этом плане хорошо известны работы А. Д. Александрова, Н. В. Ефимова, А. В. Погорелова о погружении двумерных метрик в E^3. В работах [2-4] рассматривались погружения двумерных метрик в E^4.

Гауссово кручение является единственным инвариантом нормальной связности поверхности, аналогичным кривизне касательной связности, т. е. гауссовой кривизне. Поэтому естественен вопрос об изометрическом погружении двумерных метрик с заданным гауссовым кручением. Впервые этот вопрос был рассмотрен Ю. А. Аминовым в работе [2], где была доказана теорема о том, что любая аналитическая метрика имеет локальное изометрическое погружение в E^4 в виде аналитической поверхности F^2, гауссово кручение которой в каждой точке является заданной аналитической функцией.

Целью настоящей работы является рассмотрение локальных изометрических погружений двумерных метрик без условия аналитичности. Получен такой результат:

Теорема. *Двумерная метрика* $ds^2=dr^2+G(r,\varphi)d\varphi^2$ *класса* C^5 *локально реализуется в* E^4 *в виде поверхности* $F^2\in C^4$, *гауссово кручение которой есть заданная функция* $\varkappa(r,\varphi)$ *класса* C^3.

Постановка задачи Коши для системы дифференциальных уравне-

... Гаусса-Кодацци-Риччи. Вспомогательные формулы и леммы.

Пусть метрика $ds^2=dr^2+G(r,\varphi)d\varphi^2$ задана в области $R(\delta,\tilde{B})$: ..., $\varphi_1+\tilde{B}(r-r_0)\le\varphi\le\varphi_2-\tilde{B}(r-r_0)$, где $\varphi_1<0<\varphi_2$, $\tilde{B}>0$, $\delta>0$ – некоторые числа. Для данной метрики система уравнений Кодацци-Риччи имеет вид

$$\frac{\partial L^1_{12}}{\partial r}-\frac{\partial L^1_{11}}{\partial\varphi}=\mu_{21/1}L^2_{12}-\mu_{21/2}L^2_{11}-\frac{1}{2G}\frac{\partial G}{\partial r}L^1_{12},$$
$$\frac{\partial L^2_{12}}{\partial r}-\frac{\partial L^2_{11}}{\partial\varphi}=\mu_{12/2}L^1_{11}-\mu_{12/1}L^1_{12}-\frac{1}{2G}\frac{\partial G}{\partial r}L^2_{12},$$
$$\frac{\partial L^1_{22}}{\partial r}-\frac{\partial L^1_{12}}{\partial\varphi}=\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial r}L^1_{11}+\frac{1}{2G}\frac{\partial G}{\partial r}L^1_{22}-\frac{1}{2G}\frac{\partial G}{\partial\varphi}L^1_{12}-\mu_{21/2}L^2_{12}+\mu_{21/1}L^2_{22},\qquad(1)$$
$$\frac{\partial L^2_{22}}{\partial r}-\frac{\partial L^2_{12}}{\partial\varphi}=\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial r}L^2_{11}+\frac{1}{2G}\frac{\partial G}{\partial r}L^2_{22}-\frac{1}{2G}\frac{\partial G}{\partial\varphi}L^2_{12}-\mu_{12/2}L^2_{12}+\mu_{12/1}L^1_{22},$$
$$\frac{\partial\mu_{21/2}}{\partial r}-\frac{\partial\mu_{21/1}}{\partial\varphi}=-\kappa\sqrt{G}.$$

Здесь через L^1_{11}, L^2_{11}, L^1_{12}, L^2_{12}, L^1_{22}, L^2_{22} обозначены коэффициенты вторых квадратичных форм, через $\mu_{12/1}$, $\mu_{12/2}$ – коэффициенты кручения. Система (1) состоит из пяти уравнений на семь неизвестных функций. Чтобы избавиться от неопределенности, возьмем в качестве $\mu_{21/1}$ некоторую произвольную функцию класса C^4 и из последнего уравнения найдем $\mu_{21/2}$. Далее точно так же, как это делалось в работе [2], выразим L^1_{11} и L^2_{11} через L^1_{12}, L^2_{12}, L^1_{22}, L^2_{22}. Для этого используем уравнение Гаусса и условие равенства гауссова кручения заданной функции:

$$L^1_{11}L^1_{22}+L^2_{11}L^2_{22}=KG+(L^1_{12})^2+(L^2_{12})^2;\qquad(2)$$
$$L^1_{11}L^2_{12}-L^2_{11}L^1_{12}=\kappa\sqrt{G}-\frac{1}{G}(L^1_{12}L^2_{22}-L^2_{12}L^1_{22}).\qquad(3)$$

Если $\Delta=L^1_{12}L^1_{22}+L^2_{12}L^2_{22}\ne0$, то из уравнений (2) и (3) получим выражения для L^1_{11} и L^2_{11}, подставив которые в (1), будем иметь

$$\frac{\partial L^1_{12}}{\partial r}-a_{11}\frac{\partial L^1_{12}}{\partial\varphi}-a_{12}\frac{\partial L^2_{12}}{\partial\varphi}-a_{13}\frac{\partial L^1_{22}}{\partial\varphi}-a_{14}\frac{\partial L^2_{22}}{\partial\varphi}=F^1_1+\sigma_1,$$
$$\frac{\partial L^1_{12}}{\partial r}-a_{21}\frac{\partial L^1_{12}}{\partial\varphi}-a_{22}\frac{\partial L^2_{12}}{\partial\varphi}-a_{23}\frac{\partial L^1_{22}}{\partial\varphi}-a_{24}\frac{\partial L^2_{22}}{\partial\varphi}=F^1_2+\sigma_2,$$
$$\frac{\partial L^1_{22}}{\partial r}-\frac{\partial L^1_{12}}{\partial\varphi}=F_3,\qquad(4)$$
$$\frac{\partial L^2_{22}}{\partial r}-\frac{\partial L^2_{12}}{\partial\varphi}=F_4.$$

где $a_{11}=\frac{1}{\Delta}\left(-L^1_{11}L^1_{22} + KG + 3(L^1_{12})^2 + (L^2_{12})^2 - \frac{(L^2_{22})^2}{G}\right)$;

$$a_{12}=\frac{1}{\Delta}\left(-L^1_{11}L^2_{22} + 2L^1_{12}L^2_{12} + \frac{L^1_{22}L^2_{22}}{G}\right);$$

$$a_{13}=\frac{1}{\Delta}\left(-L^1_{11}L^1_{12} + \frac{L^1_{12}L^2_{22}}{G}\right);$$

$$a_{14}=\frac{1}{\Delta}\left(-L^1_{11}L^2_{12} + \kappa\sqrt{G} - \frac{2L^1_{12}L^2_{22}}{G} + \frac{L^2_{12}L^1_{22}}{G}\right);$$

$$a_{21}=\frac{1}{\Delta}\left(-L^2_{11}L^1_{22} + 2L^1_{12}L^2_{12} + \frac{L^2_{22}L^1_{22}}{G}\right);$$

$$a_{22}=\frac{1}{\Delta}\left(-L^2_{11}L^2_{22} + KG + 3(L^2_{12})^2 + (L^1_{12})^2 - \frac{(L^1_{22})^2}{G}\right);$$

$$a_{23}=\frac{1}{\Delta}\left(-L^2_{11}L^1_{12} - \kappa\sqrt{G} + \frac{L^1_{12}L^2_{22}}{G} - \frac{2L^2_{12}L^1_{22}}{G}\right);$$

$$a_{24}=\frac{1}{\Delta}\left(-L^2_{11}L^2_{12} + \frac{L^1_{12}L^1_{22}}{G}\right);$$

$$-\sigma_1=\frac{1}{\Delta}\left[\frac{\partial(KG)}{\partial\varphi}L^1_{12} + \frac{\partial(\kappa\sqrt{G})}{\partial\varphi}L^2_{22} + \frac{\partial(G^{-1})}{\partial\varphi}\left(L^2_{12}L^1_{22}L^2_{22} - L^1_{12}(L^2_{22})^2\right)\right];$$

$$-\sigma_2=\frac{1}{\Delta}\left[\frac{\partial(KG)}{\partial\varphi}L^2_{12} - \frac{\partial(\kappa\sqrt{G})}{\partial\varphi}L^1_{22} + \frac{\partial(G^{-1})}{\partial\varphi}\left(L^1_{12}L^1_{22}L^2_{22} - L^2_{12}(L^1_{22})^2\right)\right].$$

Правые части системы (1) обозначены через F^1_1, F^1_2, F_3, F_4. Обозначим L^1_{12}, L^2_{12}, L^1_{22}, L^2_{22} через L_1, L_2, L_3, L_4 соответственно. Введем векторы $L=(L_1, L_2, L_3, L_4)$ и $F=(F^1_1+\sigma_1, F^1_2+\sigma_2, F_3, F_4)$, тогда систему (4) можно переписать в векторном виде:

$$\frac{\partial L}{\partial r} + \bar{A}\frac{\partial L}{\partial\varphi} = F. \qquad (4')$$

Тип этой системы определяется с помощью характеристического уравнения матрицы:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & -a_{14} \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} & -a_{24} \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

которое имеет вид

$$\lambda^4 - y\lambda^3 + \left(-\frac{3}{G} - 3Gz\right)\lambda^2 - x\lambda + z=0. \qquad (5)$$

Введем выражения: $A=(L^1_{12})^2+(L^2_{12})^2$, $B=L^1_{12}L^2_{22}-L^2_{12}L^1_{22}$, $T=(L^1_{22})^2+(L^2_{22})^2$. В этом случае коэффициенты x, y, z можно пезаписать следующим образом:

$$x = \frac{3A+KG}{G\Delta} - \frac{1}{\Delta^3}\left((KG + A)^2 A + 2B(KG + A)\left(\kappa\sqrt{G} - \frac{B}{G}\right) + \left(\kappa\sqrt{G} - \frac{B}{G}\right)^2 T\right),$$

$$y = -\frac{1}{\Delta}\left(3A + KG - \frac{T}{G}\right),$$

$$z = -\frac{1}{\Delta^2 G}\left((KG + A)A + \left(\kappa\sqrt{G} - \frac{B}{G}\right)B\right).$$

Между величинами A, B, Δ, T существует зависимость

$$AT=\Delta^2+B^2. \tag{6}$$

Система (4) будет иметь гиперболический тип, если все корни уравнения (5) будут действительными и различными.

Лемма 1. *Для системы дифференциальных уравнений (4) можно задать начальные условия таким образом, что на начальной линии $r=r_0$, а также в некоторой достаточно малой области R^1 переменных $(r, \varphi, L_1, L_2, L_3, L_4)$ данная система будет иметь гиперболический тип.*

Доказательство. Рассмотрим характеристическое уравнение. Покажем, что начальные условия можно задать так, что это уравнение на линии $r=r_0$ станет биквадратным. Непосредственно можно убедиться, что если $x=0$, $y=0$, $z>0$, то (5) будет иметь четыре вещественных различных корня.

Формально положим $x=0$ и $y=0$. Не нарушая общности, можно считать, что $G(r_0,\varphi)=1$,

$$x = \frac{3A+K}{\Delta} - \frac{1}{\Delta^3}\left(A^3 + 2A^2K + AK^2 + (2A + 2K)(\kappa B - B^2) + (\kappa - B)^2 T\right)=0,$$

$$y = -\frac{1}{\Delta}(3A + K - T)=0.$$

Из второго неравенства следует, что

$$T=3A+K. \tag{7}$$

В силу того что $T>0$, необходимо наложить условие $3A+K>0$. Из формулы (6) следует

$$\Delta^2=AT-B^2=3A^2+AK-B^2. \tag{8}$$

С помощью (7) и (8) равенство $x=0$ можно привести к виду

$$4AB^2 - 4\kappa AB - (8A^3 + 4A^2K - 3\kappa^2 A - \kappa^2 K) = 0. \tag{9}$$

Аналогично неравенство $z>0$ преобразовывается в неравенство

$$B^2-\kappa B-(A^2+AK)>0. \tag{10}$$

Значит, для того чтобы уравнение (5) имело на начальной линии четыре вещественных различных корня, необходимо, чтобы на этой линии одновременно выполнялись (7), (8), (9), (10), а также $3A+K>0$ и $3A^2+AK-B^2>0$. Покажем, что такие начальные условия можно задать.

Действительно, положим $A(r_0,\varphi)=A_0=\dfrac{-K(r_0,\varphi)}{2}+g(\varphi)$. Здесь $g(\varphi)$ есть некоторая положительная функция. Из определения величины A следует, что $g>\dfrac{K}{2}$. Из (9) получаем, что $B_0=\dfrac{\kappa}{2}\sqrt{\dfrac{4g^3-4Kg^2+(K^2-\kappa^2)g}{2g-K}}$. Для того, чтобы выражение B_0 имело смысл, нужно потребовать выполнения неравенства

$$4g^3-4Kg^2+(K^2-\kappa^2)g>0. \qquad (11)$$

Подставив A_0 и B_0 в (10), получим

$$\frac{8g^3-12Kg^2+6(K^2-\kappa^2)g-K^3+\kappa^2K}{4(2g-K)}>0,$$

откуда

$$8g^3-12Kg^2+6(K^2-\kappa^2)g-K^3+\kappa^2K>0. \qquad (12)$$

Аналогично из неравенства $3A^2+AK-B^2>0$ получаем:

$$\frac{8g^3-12Kg^2+(6K^2+2\kappa^2)g-K^3+\kappa^2K}{4(2g-K)}+\chi\sqrt{\frac{4g^3-4Kg^2+(K^2-\kappa^2)g}{2g-K}}>0. \qquad (13)$$

Потребуем, чтобы

$$8g^3-12Kg^2+(6K^2+2\kappa^2)g-K^3+\kappa^2K>0. \qquad (14)$$

Тогда если $\kappa\geq 0$, то неравенство $3A^2+AK-B^2>0$ справедливо при любом g, удовлетворяющем (14). Пусть $\kappa<0$. В этом случае, избавившись от радикала, получим такое неравенство:

$$\frac{1}{16(2g-K)^2}\{64g^6-192Kg^5+(240K^2-96\kappa^2)g^4+(160\kappa^2K-160K^3)g^3+(60K^4-$$
$$-96K^2\kappa^2+36\kappa^4)g^2+(-12K^5+24\kappa^2K^3-12\kappa^4K)g+(K^6-2\kappa^2K^4+\kappa^4K^2)\}>0. \qquad (15)$$

Обозначим через M наибольшую из точных верхних граней на множестве $R(\delta,\tilde{B})$ для модулей коэффициентов при степенях g в неравенствах (11), (12), (14), а также в выражении, стоящем в фигурных скобках в (15). Указанные точные верхние грани, а значит, и число M, существуют в силу того, что данные коэффициенты непрерывны, а множество $R(\delta,\tilde{B})$ компактно. Возьмем $g>M+1$, тогда (11), (12), (13) будут выполнены, и тем самым мы зададим A_0 и B_0, для которых справедливы $3A+K>0$, $3A^2+AK-B^2>0$ и (7), (8), (9), (10). Зная A_0 и B_0, легко перейдем от них к $L^1_{12}(r_0,\varphi)$, $L^2_{12}(r_0,\varphi)$, $L^1_{22}(r_0,\varphi)$, $L^2_{22}(r_0,\varphi)$: $L^1_{12}(r_0,\varphi)$ задаём произвольно, $L^2_{12}=\pm\sqrt{A_0-(L^1_{12})^2}$, L^1_{22} и L^2_{22} получаем из системы

$$L^1_{12}L^1_{22}+L^2_{12}L^2_{22}=\Delta,$$
$$-L^2_{12}L^1_{22}+L^1_{12}L^2_{22}=B_0.$$

Покажем теперь, что найдется такая достаточно малая область $R'\subset R^6$, где уравнение (5) будет иметь четыре вещественных различных корня. Действительно, будем рассматривать коэффициенты x, y, и вблизи линии $r=r_0$, т. е. пусть $|x|\le\varepsilon_1$, $|y|\le\varepsilon_1$, $\varepsilon_2\le z\le N$, где $0<\varepsilon_1<1$, $\varepsilon_2>0$.

Подстановкой $\lambda=\mu+\frac{y}{4}$ приведем уравнение (5) к виду

$\mu^4+a\mu^2+b\mu+c=0$.

Из алгебры известно (см. [5]), что уравнение четвертой степени имеет четыре различных действительных корня при выполнении таких условий:

I) $D=R(F(\lambda),\ F'(\lambda))>0$,

где $F(\lambda)$ - многочлен, соответствующий рассматриваемому уравнению; $F'(\lambda)$ - его производная; $R(F(\lambda),\ F'(\lambda))$ - результант;

II) $a<0$;

III) $a^2-4c>0$.

Проиэзь дя необходимые выкладки, получим $D=D_1+d$, где

$$d=720G^4z^5+3264G^2z^4+5344z^3+\frac{3264z^2}{G^2}+\frac{720z}{G};$$

$$D_1=108G^3y^3z^4+(108G^3x^2+180Gy^2-432G^2xy)z^3+(-27y^4-54Gxy^3+9G^2x^2y^2+$$
$$+180y^2+180Gx^2-1056xy)z^2+(\frac{-54xy^3}{G}+\frac{108y^2}{G^3}+12x^2y^2-54Gx^3y-432xy+$$
$$+\frac{180x^2}{G})z+(-27x^4-\frac{54x^3y}{G}-4x^3y^3+\frac{8x^2y^2}{G^2}+\frac{108x^2}{G^4}).$$

Оценим d снизу. Для определенности будем считать, что $0<N<1$. Заменяя все степени z на ε_2^5, каждое из числовых коэффициентов на 720, получаем

$$d\ge\frac{720\varepsilon_2^5\cdot\sum\limits_{k=1}^{5}G^{2(k-1)}}{G^4}.$$

Оценим $|D_1|$ сверху. Пользуясь неравенством треугольника, заменяя все степени z на N, все одночлены вида x^ky^l $(k,\ l=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ на ε_1^2, получим

$$|D_1|\le\varepsilon_1^2N(216G^3+441G^2+468G+1707+\frac{234}{G}+\frac{180}{G^3})+(31+\frac{54}{G}+\frac{8}{G^2}+\frac{108}{G^4}).$$

Далее, заменяя все числа, стоящие при степенях G, на 1707, получим

$$|D_1|<\frac{1707\varepsilon_1^2}{G^4}\left\{N\sum_{k=1}^{7}G^k+\sum_{k=2}^{4}G^k+1\right\}.$$

Отсюда следует такое неравенство:

$$|D_1| < \frac{1707\varepsilon_1^2\cdot(N+1)\cdot\sum\limits_{k=1}^{8} G^{k-1}}{G^4}$$

Очевидно, что

$$d-|D_1| > \frac{720\varepsilon_2^5\cdot\sum\limits_{k=1}^{5} G^{2(k-1)}}{G^4} - \frac{1707\varepsilon_1^2\cdot(N+1)\cdot\sum\limits_{k=1}^{8} G^{k-1}}{G^4}. \qquad (16)$$

Потребовав, чтобы (16) было положительным, получим такую оценку:

$$\varepsilon_1^2 < \frac{240\varepsilon_2^5}{569(N+1)}\left\{G-1+\frac{1+\sum\limits_{k=1}^{4} G^{2(k-1)}}{\sum\limits_{k=1}^{8} G^{k-1}}\right\}. \qquad (17)$$

Задав ε_2 и N, можно для достаточно малой области Ω переменных (r,φ) подобрать ε_1 так, чтобы выполнялось (17). При т..их ε_1, ε_2, N в силу очевидного неравенства $D>d-|D_1|$ D будет положительным.

Существование указанных ε_1, ε_2, N влечет за собой существование к которой достаточно м..й области R_1^1 переменных $(r,\varphi,L_1,L_2,L_3,L_4)$, в которой $D>0$.

Нетрудно проверить, что $a<0$ при всех $z\geq 0$. Условие $a^2-4c>0$ дает еще одну оценку:

$$\varepsilon_1^2 < \frac{3\varepsilon_2^2(G^4+G^2+1)}{(G^3N+2G^2+G)}. \qquad (18)$$

Точно так же, подобрав ε_1, ε_2, N, удовлетворяющие (18), мы зададим область $R_2'\subset\mathbb{R}^6$, в которой $a^2-4c>0$. Искомая область R' есть пересечение $R_1'\cap R_2'$.

Аналогичные оценки получаются в случаях, когда $\varepsilon_2\geq 1$ или $N\geq 1$, $0<\varepsilon_2\leq 1$.

Лемма 2. *Пусть элементы* a_{ij} $(i,j=1,2,3,4)$ *матрицы* $\bar{A}$ *в системе дифференциальных уравнений* (4′) *являются действительными функциями класса* C^k *в области* $R'\subset\mathbb{R}^6$, *о которой говорилось в лемме 1.*

Тогда собственные значения λ_i $(i=1,2,3,4)$ *и компоненты каждого собственного вектора* $\vec{P}_i$, *соответствующего собственному* значению λ_l, *также будут иметь класс регулярности* C^k *в области* $R''\subset R'$.

Действительно, так как $a_{ij}\in C^k(R')$, то и коэффициенты x, y, z характеристического уравнения (5) будут принадлежать классу $C^k(R')$. Из формул Феррари, а также из того, что в R' (5) имеет четыре действительных различных корня, следует, что корни λ_l ($l=1,2,3,4$) будут принадлежать классу $C^k(R')$. Найдя по известным правилам компоненты векторов $\vec{P}_l$ ($l=1,2,3,4$), нетрудно убедиться, что $P_{lj}\in C^k$ в некоторой области $R''\subset R'$.

Лемма 3. *Пусть функции* P_{ij} *заданы в области* $R''\subset R^6$, *о которой говорилось в лемме 2. Тогда существует число* $a>0$, *такое, что* $|\det(P_{ij})|\ge a$.

Действительно, так как собственные векторы матрицы $\bar{A}$ линейно независимы в области R'', то $\det(P_{ij})\neq 0$.

Рассмотрим замыкание $[R'']$ множества R''. В силу малости R'' замыкание $[R'']$ компактно. Функция $|\det(P_{ij})|$ непрерывна, значит, достигает на $[R'']$ своих точных граней. Искомое число $a=\inf\limits_{[R'']}|\det(P_{ij})|$. Если окажется, что $a=0$, то возьмем любое замкнутое множество $\tilde{R}''\subset \mathrm{int}R''$, где $\mathrm{int}R''$ - внутренность R''. На $\tilde{R}''$ $a\neq 0$, в противном случае нарушилось бы условие гиперболичности системы (4).

Прежде чем приступить к доказательству основной теоремы, сформулированной во введении, запишем формулировку теоремы 7 из [8]. Эта теорема может быть сформулирована так:

Пусть система дифференциальных уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} (a_{ij}U_{j,x}+b_{ij}U_{j,y})=g_i \quad (i,j=1,\dots,n) \qquad (8.1)$$

является системой квазилинейных уравнений и имеет гиперболический тип. Пусть $\sum\limits_{j=1}^{n} (P_{ij}U_{j,x}+\lambda_i U_{j,y})=r_i$ *- нормальная форма (8.1) и пусть выполняются такие условия: для данного сегмента* g *оси* OY *и данных положительных чисел* δ, B_0, Ω, $\bar{\Omega}_1$, a, $B\ge B_0$, $B'\ge B$.

а) *Функции* $P_{ij}(x,y,U)$, $\lambda_i(x,y,U)$, $r_i(x,y,U)$ *непрерывны и имеют непрерывные частные производные первого и второго порядков в области* $R_\Omega(\delta,B_0)$: $0\le x\le\delta$, $Y_-+B_0(x)\le y\le Y_+-B_0(x)$, $|U-U^0|\le\Omega$, *где* $Y_-<0<Y_+$ *- концы сегмента* g; U^0 *- значение начальной функции* $U(0,y)=\bar{U}(y)$ *в точке* $y=0$,

b) $|\det(P_{ij})|\geq a$ *на* $R_\Omega(\delta,B_0)$,

c) $|\lambda_i(x,y,U)|\leq B$ *и* $|\omega(x,y,U)|\leq B'$ *на* $R_\Omega(\delta,B_0)$, *где* ω *есть каждая из функций* P_{ij}, λ_i, r_i, *а также их первых частных производных по всем переменным,*

d) $\bar{U}(y)$ *непрерывна и имеет непрерывные первые и вторые производные на любом подмножестве сегмента* g,

e) $|\bar{U}_i(y)-\bar{U}_i(0)|\leq\frac{\Omega}{2}$ *и* $|\frac{d}{dy}\bar{U}_i(y)|\leq\Omega_1$, *если* $(0,y)\in g$.

Тогда в некоторой области $R(\delta_1,B)$ *существует решение* $U(x,y)$ *для (8.1). Это решение удовлетворяет начальному условию* $U(0,y)=\bar{U}(y)$ *и имеет непрерывные первые и вторые частные производные.*

Доказательство основной теоремы.

В силу леммы 1 можно задать начальные условия для системы так, что на начальной линии, а также вблизи ее указанная система будет иметь гиперболический тип. Начальные функции $L^1_{12}(r_0,\varphi)$, $L^2_{12}(r_0,\varphi)$, $L^1_{22}(r_0,\varphi)$, $L^2_{22}(r_0,\varphi)$ выбираем таким образом, чтобы выполнялись условия (d) и (e) теоремы 7.

В силу леммы 2 существует область R'', в которой функции λ_i и P_{ij} $(i,j=1,2,3,4)$ будут принадлежать классу C^2, тогда и $r_i=\sum_{j=1}^{4}P_{ij}F_j$ также будут принадлежать классу C^2 в R''. На множестве R'', очевидно, можно выполнить и условие (c). Наконец, в силу леммы 3 в R'' выполняется условие (b).

Из сказанного выше следует, что в достаточно малой окрестности точки $(r_0,0)$ существует решение системы (4), т.е. определяются коэффициенты вторых квадратичных форм, принадлежащие классу C^2. Значит, в силу теоремы Бонне в E^4 найдется поверхность F^2, которая реализует нашу метрику.

Для поверхности F^2 справедливы разложения Гаусса и Вайнгартена, выписав которые, нетрудно убедиться, что радиус-вектор поверхности принадлежит классу C^4.

Список литературы: 1. *Аминов Ю.А.* Кручение двумерных поверхностей в евклидовых пространствах//Укр. геометр. сб. 1975. Вып. 17. С. 3-14. 2. *Аминов Ю.А.* О поверхностях в E^4 со знакопостоянным гауссовым кручением//Укр. геометр. сб. 1988. Вып. 31. С. 3-14. 3. *Позняк Э.Г.* Изометрические погружения двумерных метрик в евклидовы пространства//Успехи мат. наук. 1973. 28, N5. С. 47-76. 4. *Розендорн Э.Г.* О полных поверхностях отрицательной кривизны $K\leq-1$ в евклидовых пространствах E^3 и E^4//Мат. сб. 1962. 58, N4. С. 453-478. 5. *Сушкевич А.К.* Вища алгебра, ч. 1. X., 1964. С. 177-183. 6. *Douglis A.* Some Existence Theorems for Hyperbolic

Systems of Partial Differential Equations//Comm. Pure. and Appl. Math. 1952. 5. P.119-154.

Поступила в редколлегию 20.11.90

УДК 514

В. В. Макеев

ВПИСАННЫЕ СИМПЛЕКСЫ ВЫПУКЛОГО ТЕЛА

В [1] доказано, что в регулярно замкнутую кривую на плоскости можно вписать треугольник, положительно гомотетичный данному. В [2] этот результат обобщен на гладкие замкнутые выпуклые поверхности в $\mathbb{R}^n$. Ниже доказана одна родственная теорема и рассмотрены некоторые близкие задачи.

Теорема. *Для любой гладкой точки M границы выпуклого тела $K \subset \mathbb{R}^n$ найдется невырожденный вписанный в K симплекс с вершиной в точке M, подобный заданному n-мерному симплексу.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда M — точка строгой выпуклости.

Пусть Π — опорная к телу K плоскость в точке M. Проведем из M лучи $l_1,\dots,l_n$, идущие по ребрам произвольного фиксированного невырожденного n-мерного симплекса Δ с вершиной в точке M. Нужно доказать, что существует такой поворот A вокруг точки M, что отрезки, высекаемые телом K на лучах $A(l_1),\dots,A(l_n)$, имеют наперед заданные положительные отношения.

Обозначим через $A_1\subset SO(n)$ множество таких поворотов A вокруг точки M, что для $1\le i\le n$ тело K высекает на луче $A(l_i)$ отрезок положительной длины $f_i(A)$. По построению A_1 — открытое подмножество $SO(n)$. Пусть $\pi=SO(n)\to S^{n-1}$ — стандартное расслоение со слоем $SO(n-1)$. Очевидно, что $\pi(A_1)\neq A_1$. Значит, сужение π: $\pi^{-1}(\pi(A_1))\to\pi(A_1)$ тривиально и имеется коммутативная диаграмма:

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[rr, hook] \arrow[dr, "\pi"'] & & \pi(A_1)\times SO(n-1) \arrow[dl, "\pi_1"] \\ & \pi(A_1) & \end{tikzcd}$$

где π_1 — проекция на первый сомножитель, а горизонтальное отображение — включение.

Определим отображение $F: A_1\to\Delta$, где Δ — открытый $(n-1)$-мерный симплекс в R^n, выделенный ограничениями $x_1>0,\dots,x_n>0$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i=1$

по формуле $F(A)=(f_1(A),\ldots, f_n(A))/\sum_{i=1}^{n} f_i(A)$.

Докажем, что F сюрьективно. Для этого докажем, что для любой точки $x\in\Delta$ и всюду плотного множества тел K прообраз $F^{-1}(x)$ есть гладкое подмногообразие в A_1, кобордантное стандартно вложенному $SO(n-1)$.

Пусть D^n - стандартный шар в R^n с опорной плоскостью Π в точке $M\in\partial D^n$, лежащей по ту же сторону от Π, что и тело K. Тело K можно получить из D^n гладкой деформацией K_t, $t\in[0,1]$, в классе выпуклых тел с гладкой границей и опорной плоскостью Π в граничной точке M (например, $K_t=tK+(1-t)D^n$). Зафиксируем $x\in\Delta$. Любая из вышеописанных деформаций K_t порождает отображение $\Phi:A_1\times[0,1]\to\Delta$. При этом по соображениям общего положения для плотного множества тел K и деформаций K_t точка x является регулярным значением отображения Φ. Поэтому $\Phi^{-1}(x)$ - пленка в $A_1\times[0,1]$, соединяющая $F^{-1}(x)$ для шара D^n и тела K на основаниях $A_1\times 0$ и $A_1\times 1$. Все координаты точки x положительны, поэтому вследствие строгой выпуклости всех рассматриваемых тел в точке M пленка $\Phi^{-1}(x)$ лежит в компактной части $A_1\times[0,1]$ и поэтому сама компактна.

Для шара D^n прообраз $F^{-1}(x)$ есть стандартно вложенная подгруппа $SO(n-1)\hookrightarrow A_1\hookrightarrow SO(n)$.

Вложение $SO(n-1)\hookrightarrow A_1$ не бордантно нулю, так как сквозное отображение $SO(n-1)\hookrightarrow A_1\hookrightarrow \pi(A_1)\times SO(n-1)\xrightarrow{\pi_2} SO(n-1)$, где π_2 проекция на второй сомножитель, имеет степень один. Следовательно, для плотного множества тел K прообраз $F^{-1}(x)$ не пуст, а значит, он не пуст для всех тел K из рассматриваемого класса.

Случай произвольной гладкой точки $M\in\partial K$ получается теперь стандартным предельным переходом. Гладкость тела в точке M для доказательства существенно - она обеспечивает, что предельный симплекс не вырождается в точку.

Замечания. 1. Гипотеза Кнастера [3] утверждает, что для любых n точек $A_1,\ldots,A_n$ стандартной сферы $S^{n-1}\subset R^n$ и непрерывной функции $f:S^{n-1}\to R$ найдется такой поворот a сферы, что $f(a(A_1))=\ldots=f(a(A_n))$. Приведенные выше рассуждения доказывают эту гипотезу в случае, если один из уровней функции f является большой сферой на S^{n-1}.

2. Попытки перенести задачу Кнастера на многообразие с краем

приводит к следующей постановке [4], [5]. Пусть в компактном выпуклом теле K в $\mathbb{R}^n$ выделены k точек $A_1,\dots,A_k$. Верно ли, что для любой неотрицательной непрерывной обращающейся в 0 на ∂K функции $f:K\to R$ найдутся такие конгруэнтные выбранным точки $B_1,\dots,B_k\in K$, что $f(B_1)=\dots=f(B_k)$?

Приведенные выше рассуждения дают положительный ответ на поставленный вопрос, если $k=n$, когда K - шар и радиус проходящей через точки $A_1,\dots,A_n$ сферы не превосходит радиуса K.

[illegible] Верно ли, что для любого гладкого вложения $f:S^{n-1}\to R^n$ и точки $M\in S^{n-1}$ найдутся такие точки $A_1,\dots,A_n\in S^{n-1}$, что $f(M), f(A_1),\dots,f(A_n)$ есть симплекс, подобный заданному?

Близкая задача получается при попытке обобщить известную теорему Шнирельмана [6] о возможности вписать квадрат в простую кусочно C^2-гладкую замкнутую кривую на плоскости. Верно ли, что для любого непрерывного вложения $f:S^{n-1}\to R^n$ найдутся такие точки $A_1,\dots,A_{2n}\in S^{n-1}$, что $f(A_1),\dots,f(A_{2n})$ - вершины правильного октаэдра. В [7] это утверждение доказано при $n=3$, когда $f(S^2)$ - граница выпуклого тела.

Список литературы: 1. *Kramer Horst, Nemeth A.B.* Triangles inscribed in smooth closed arcs.//Rev. annal. numer. et theor. approxim. 1972. 1. P.63-71. 2. *Макеев В.В.* Степень отображения в некоторых задачах комбинаторной геометрии//Укр. геометр. сб. 1987. Вып. 30. С. 62-66. 3. *Knaster B.* Problem P.4// Colloq. Math. 1947, 1. P.30-31. 4. *Fenn R.A.* The table theorem//Bull London Math. Soc. 1970, 2. P.73-76. 5. *Kronheimer E.H., Kronheimer P.B.* The tripos problem//J. London Math. Soc. 1981, 24, N1. P.182-192. 6. *Шнирельман Л.Г.* О некоторых геометрических свойствах замкнутых кривых//Успехи мат. наук. 1944. Вып. 10. С.34-44. 7. *Pucci C.* Sulla inscrivibilità di un ottaedro regolare in un insieno convesso limitato dello spazio ordinario//Atti. Acad. Naz. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. 1956. 21. P.61-65.

Поступила в редколлегию 26.02.90

УДК 514

П. Е. Марков

О ПОГРУЖЕНИИ МЕТРИК, БЛИЗКИХ К ПОГРУЖАЕМЫМ

1. Пусть X - n-мерное, $n \geq 1$, ориентируемое $C^{r+2,\lambda}$-многообразие, $r \geq 0$, $0 \leq \lambda \leq 1$, E - $(n+p)$-мерное, $p \geq 1$, евклидово пространство. Через $E(X)$, $T(X)$, $T^*(X)$, $S^kT^*(X)$, $\Lambda^kT^*(X)$, соответственно, обозначаются расслоения: тривиальное со слоем E, касательное, кокасательное, k-линейных симметрических форм, k-линейных кососимметрических форм. Через $S^2T^+(X)$ будем

обозначать подрасслоение положительно определенных форм в $S^2T^*(X)$. В обозначениях расслоений мы часто будем опускать символ X. Для заданного расслоения или подрасслоения $P(X)$ через $P_X(X)$ или просто P_X будем обозначать его слой над точкой $x\in X$. Для векторного расслоения $V(X)$ через $V'(X)$ будем обозначать расслоение, каждым слоем которого является $T(V_X)$. сли $P(X)$ - подрасслоение расслоения $V(X)$, то каждый слой P_X является подмногообразием пространства V_X, а $T(P_X)$ канонически вкладывается в V'_X. Подрасслоение в $V'(X)$, каждым слоем которого является $T(P_X)$, будем обозначать через $P'(X)$ и называть производным расслоением $P(X)$.

Для всякого расслоения или подрасслоения $P(X)$ через $C^{r,\lambda}(X,P(X))$, $r\geq 0$, $0\leq\lambda\leq 1$, обозначается множество всех $C^{r,\lambda}$-сечений. Через $D^{r,\lambda}(X,E)$ будем обозначать подмножество всех $C^{r,\lambda}$-погружений $X\to E$. При $\lambda=0$ вместо $C^{r,\lambda}$ и $D^{r,\lambda}$ будем писать C^r и D^r. Под бесконечно малой (б.м.) деформацией сечения $f\in C^{r,\lambda}(X,P)$ будем понимать семейство сечений $f_t\in C^{r,\lambda}(X,P)$, $-\varepsilon<t<\varepsilon$, $\varepsilon>0$, такое, что $f_0=f_t$, производная $\delta f=\left.\frac{df_t}{dt}\right|_{t=0}\in C^{r,\lambda}(X,P')$ и операция δ перестановочна с операцией дифференцирования по локальным координатам на X. При этом δf называется вариацией сечения f.

Сечения из $C^{r,\lambda}(X,S^2T^+(X))$ называются метриками на X. Обозначая через $I(z)$ метрику, индуцированную погружением $z\in D^{r,\lambda}(X,E)$, мы получим отображение $I:D^{r,\lambda}(X,E)\to$ $\to C^{r-1,\lambda}(X,S^2T^+(X))$. В дальнейшем, говоря о погружениях, мы будем предполагать, что $r\geq 2$, $0<\lambda<1$. В этом случае, как показано в работе [1], можем считать, что $I(D^{r,\lambda}(X,E))\subset C^{r,\lambda}(X,S^2T^+)$. Метрику $ds^2\in C^{r,\lambda}(X,S^2T^+)$ будем называть погружаемой в E, если найдется погружение $z\in D^{r,\lambda}(X,E)$, для которого $ds^2=I(z)$.

Мы рассмотрим вопрос о погружаемости метрик, близких[1] к погружаемым. Известно [2], что при достаточно большом r и малом p множество погружаемых метрик нигде не плотно в $C^{r,\lambda}(X,S^2T^+(X))$. Поэтому при таких r и p естественным является вопрос о погружаемости метрик лишь из некоторого подрасслоения расслоения S^2T^+. В п. 11 (теорема 4) покажем, что метрика ds_0^2 риманова произведения p сфер обладает окрестностью в $C^{2,\lambda}(X,S^2T^+)$, всякая

[1]Топология в $C^{r,\lambda}(X,S^2T^+)$ вводится в п. 9.

метрика из которой, конформно эквивалентная[2] ds_0^2, погружаема в E. Этот результат является иллюстрацией теоремы 3 из п. 10, в которой указанный вопрос рассматривается для метрик из произвольного подрасслоения $K(X)$ расслоения $S^2T^+(X)$.

Задача о погружаемости метрик $C^{r,\lambda}(X,K(X))$ эквивалентна задаче о существовании отображения $C^{r,\lambda}(X,K)\to D^{r,\lambda}(X,E)$, обратного к I. Естественным подходом к ее решению является применение теоремы о неявной функции. По этой теореме, если производная Фреше $I_z':C^{r,\lambda}(X,E)\to C^{r,\lambda}(X,K'(X))$ отображения I в точке $z\in D^{r,\lambda}(X,E)$ имеет непрерывный правый обратный оператор $I_z'^{-1}:C^{r,\lambda}(X,K(X))\to C^{r,\lambda}(X,E)$, то всякая метрика из некоторой окрестности метрики $I(z)$ в $C^{r,\lambda}(X,K)$ погружаема в E. Формально, вместо $I_z':C^{r,\lambda}(X,E)\to C^{r,\lambda}(X,K')$ мы должны писать $I_z':T_zD^{r,\lambda}(X,E)\to T_{I(z)}C^{r,\lambda}(X,K)$, где $T_zD^{r,\lambda}(X,E)$ и $T_{I(z)}C^{r,\lambda}(X,K)$ линейные пространства, касательные к $D^{r,\lambda}(X,E)$ и $C^{r,\lambda}(X,K)$ в точках z и $I(z)$. Доказательство корректности использованной здесь замены приводится в п. 9. Поскольку $I(z)=dz^2$, то $I_z'(U)=2dz\cdot dU$, и мы приходим к задаче отыскания для произвольно заданного сечения $\sigma\in C^{r,\lambda}(X,K')$ сечения $U\in C^{r,\lambda}(X,E)$, удовлетворяющего уравнению

$$2dz\cdot dU=\sigma. \qquad (1)$$

К этому же уравнению сводится задача о б. м. деформации погружения с заданной вариацией метрики. В связи с этим первая часть работы (пп. 3-8) посвящена задаче о б. м. деформации погружения с заданной вариации метрики.

В случае регулярного овалоида в E^3 эта задача рассматривалась Г. Вейлем [4]. Им доказано существование указанной деформации для всякой формы σ. А. В. Погорелов [5, пар. 6] распространил результат Г. Вейля на случай двумерной поверхности рода 0 в трехмерном римановом пространстве. С. Е. Климентов [6] получил необходимые и достаточные условия существования таких б. м. деформаций для замкнутых поверхностей рода $p\geq 1$ положительной внешней кривизны в римановом пространстве. В многомерном случае Дж. Нэшем [7] и Г. Джиноббиеи [8] доказано, что при $p>\frac{n(n+1)}{2}$ погружение $z\in D^{r,\lambda}(X,E)$ допускает б. м. деформации с любым наперед заданным сечением $\sigma\in C^{r,\lambda}(X,S^2T^*)$.

В данной работе в п. 3 мы выведем формулы для вариаций

[2]Конформная эквивалентность в этой работе означает поточечную конформность в терминологии Дж. Л. Каждана и Ф. У. Уорнера [3].

некоторых величин, определяемых метрикой при б. м. деформации метрики. В п. 7 рассмотрим варьированную систему уравнений Гаусса, Петерсона-Кодацци и Риччи для б. м. деформаций погружения с заданной вариацией метрики и покажем (теорема 1), что всякому решению этой системы в случае односвязного X соответствует единственная (с точностью до тривиальной) вариация погружения. При этом мы получим явную формулу, выражающую вариацию погружения через решение указанной системы. В п. 8 (теорема 2) мы установим, что для погружения z с типовым числом $\theta(z)\geq 4$ варьированные уравнения Кодацци и Риччи являются следствиями варьированных уравнений Гаусса.

Всюду в работе используются методы внешних форм и тензорного анализа над группой $SO(n)$. Изложение ведется в неголономном репере. В п. 2 вводятся определяемые этим репером формы связности и формы кривизны. В пп. 4-6 выводятся уравнения Гаусса, Кодацци и Риччи для поверхностей класса $C^{r,\lambda}$, $r\geq 2$, $0<\lambda<1$, в E. В классическом смысле эти уравнения справедливы только для поверхностей класса C^3. Их вывод в классе $C^{2,\lambda}$ дается в п. 6 и опирается на теорию потоков де Рама. Необходимые факты из этой теории приводятся в п. 5.

2. Под локальным $C^{r,\lambda}$-корепером на X будем понимать всякий набор $\tau=\{\tau^i\}_{i=1}^{n}$ сечений из $C^{r,\lambda}(U,T^*(U))$, где U - окрестность на X, линейно независимых в каждой точке $x\in U$. Всюду будем предполагать, что в каждой точке всякие два локальных корепера связаны ортогональной матрицей с определителем, равным +1. Говоря о тензорах, мы будем иметь в виду тензоры относительно специальной ортогональной группы $SO(n)$. Через $SO(X)$ будем обозначать подрасслоение над X, каждым слоем которого является $SO(n)$. Для заданного локального $C^{r,\lambda}$-корепера τ равенствами[3]

$$d\tau^i=\tau^k\wedge\varphi^i_k, \quad \varphi^i_k+\varphi^k_i=0 \tag{2}$$

однозначно определяется система 1-форм $\varphi^i_k\in C^{r-1,\lambda}(U,T^*(U))$, задающая аффинную связность на X, которую мы будем обозначать через φ. Здесь и далее d - знак внешнего дифференциала. Коэффициенты Γ^i_{jk}, определяемые из разложения $\varphi^i_j=\Gamma^i_{jk}\tau^k$, называются символами Кристоффеля связности φ. По формам связности определяются формы кривизны $\theta^i_j\in C^{r-2,\lambda}(U,\Lambda^2T^*(U))$ равенством $\theta^i_j=d\varphi^i_j-\varphi^i_k\wedge\varphi^k_j$. Разложение $\theta^i_j=\frac{1}{2}R^i_{jkl}\tau^k\wedge\tau^l$ однозначно определяет

[3]Всюду индексы i, j, k, l, m пробегают множество $\{1,\dots,n\}$. По повторяющимся в одночленах индексам проводится суммирование.

тензор кривизны с компонентами R^i_{jkl} $(R^i_{jkl}=-R^i_{jlk})$.

Для всякой функции $f\in C^1(U,\mathbb{R})$, через $f_{|i}$ обозначаем частные производные относительно корепера τ, определяемые из разложения $df=f_{|i}\tau^i$. Обычными формулами определяются ковариантные производные относительно связности Φ. Например, если $T=T_{ij}\tau^i\otimes\tau^j$, то ковариантной производной тензора T является тензор $T_{ij,k}\tau^i\otimes\tau^j\otimes\tau^k$, компоненты которой определяются формулой $T_{ij,k}=T_{ij|k}-\Gamma^l_{ik}T_{lj}-\Gamma^l_{jk}T_{il}$. Как и в случае голономного репера, справедлива формула, связывающая компоненты альтернированной второй ковариантной производной тензора с компонентами самого тензора и компонентами тензора кривизны; например, для тензора T она имеет вид $T_{ij,kl}-T_{ij,lk}=R^m_{ikl}T_{mj}+R^m_{jkl}T_{im}$.

Всякая метрика $ds^2\in C^{r,\lambda}(X,S^2T^+(X))$ в окрестности каждой точки $x\in X$ однозначно (с точностью до линейного преобразования с матрицей из $C^{r,\lambda}(X,SO(X))$) определяет локальный $C^{r,\lambda}$-корепер τ, для которого $ds^2=\tau^i\otimes\tau^i$. Будем говорить, что этот корепер порождается метрикой ds^2.

3. Рассмотрим б. м. деформацию $\{ds^2_t\}_{t\in(-\varepsilon,\varepsilon)}$, $\varepsilon>0$, метрики $ds^2\in C^{r,\lambda}(X,S^2T^+)$. Пусть $\tau_t=\{\tau^i_t\}$ - локальный корепер, порожденный метрикой ds^2_t. Так как коэффициенты форм τ^i_t выражаются через коэффициенты метрики ds^2_t линейно, то формы τ^i_t обладают той же гладкостью, что и метрика ds^2_t, как относительно t, так и относительно $x\in X$. Следовательно, τ^i_t является б. м. деформацией корепера τ. Найдем вариацию $\delta\tau^i$. Пусть $\delta ds^2=2\sigma_{ij}\tau^i\otimes\tau^j$, $\sigma_{ij}=\sigma_{ji}$. Полагая $\delta\tau^i=s^i_k\tau^k$ и варьируя равенство $ds^2=\tau^i\otimes\tau^i$, будем иметь $2\sigma_{ij}=s^i_j+s^j_i$. Отсюда выводится, что $s^i_j=\sigma_{ij}+\pi_{ij}$, где $\pi_{ij}=-\pi_{ji}\in C^{r,\lambda}(U,\mathbb{R})$. Таким образом, вариацией δds^2 вариации $\delta\tau^i$ определяются однозначно с точностью до слагаемого $\pi_{ij}\tau^j$. Наличие этого слагаемого обусловлено тем, что б. м. деформация корепера τ определяется б. м. деформацией метрики ds^2 с точностью до суперпозиции с преобразованием вида $\mathcal{P}_t\tau$, где $\mathcal{P}_t\in C^{r,\lambda}(U,SO(U))$; при этом $(\pi_{ij})=\delta\mathcal{P}$. Исключая деформации вида $\mathcal{P}_t\tau$, можем считать, что $\pi_{ij}=0$. В итоге будем иметь

$$\delta\tau^i=\sigma_{ik}\tau^k. \qquad (3)$$

Варьируя (2), дифференцируя (3) и вычитая результаты, будем иметь $(\delta\Phi^i_k+d\sigma_{ik}-\Phi^l_i\sigma_{lk}-\Phi^l_k\sigma_{il})\wedge\tau^k=0$. По лемме Картана отсюда следует, что $\delta\Phi^i_k+d\sigma_{ik}-\Phi^l_i\sigma_{lk}-\Phi^l_k\sigma_{il}=C^i_{kl}\tau^l$, где $C^i_{kl}=C^i_{lk}$, или

$$\delta\varphi^i_k+\sigma_{ik,l}\tau^l=C^i_{kl}\tau^l. \tag{4}$$

Учитывая, что $\delta\varphi^i_k=-\delta\varphi^k_i$, симметризуя (4) по индексам i, k, получим $C^i_{kl}+C^k_{il}=2\sigma_{ik,l}$, откуда выводится, что $C^i_{kl}=\sigma_{ik,l}+\sigma_{il,k}-\sigma_{kl,i}$. Подставляя в (4), будем иметь

$$\delta\varphi^i_j=(\sigma_{ik,j}-\sigma_{jk,i})\tau^k. \tag{5}$$

Для вариаций форм кривизны справедливы равенства

$$\delta\theta^i_j=d\delta\varphi^i_j+\delta\varphi^i_k\wedge\varphi^k_j+\varphi^i_k\wedge\delta\varphi^k_j=(\sigma_{ik,jl}-\sigma_{jk,il})\tau^l\wedge\tau^k. \tag{6}$$

Первое из них непосредственно следует из определения θ^i_j, второе - из (5) и следующих преобразований:

$$\begin{aligned}\delta\theta^i_j=\,&d\sigma_{il,j}\wedge\tau^l-d\sigma_{jl,i}\wedge\tau^l+\sigma_{il,j}\tau^k\wedge\varphi^l_k-\sigma_{jl,i}\tau^k\wedge\varphi^l_k-\\&-\varphi^k_j\sigma_{il,k}\wedge\tau^l+\varphi^k_j\sigma_{kl,i}\wedge\tau^l+\varphi^i_k\sigma_{kl,j}\wedge\tau^l-\varphi^i_k\sigma_{jl,k}\wedge\tau^l=\\&=(\sigma_{il,j|m}-\Gamma^k_{lm}\sigma_{ik,j}-\Gamma^k_{jm}\sigma_{il,k}-\Gamma^k_{im}\sigma_{kl,j})\tau^m\wedge\tau^l-\\&-(\sigma_{jl,i|m}-\Gamma^k_{lm}\sigma_{jk,i}-\Gamma^k_{jm}\sigma_{kl,i}-\Gamma^k_{im}\sigma_{jl,k})\tau^m\wedge\tau^l=\\&=(\sigma_{il,jm}-\sigma_{jl,im})\tau^m\wedge\tau^l.\end{aligned}$$

4. Рассмотрим погружение $z\in D^{r,\lambda}(X,E)$, $r\geq 2$, $0<\lambda<1$. Если $\{\xi_i\}_{i=1}^n$ - локальный $C^{r,\lambda}$-репер на X, дуальный кореперу τ, порожденному метрикой $I(z)$, то сечения $e_i=z_*(\xi_i)\in C^{r-1,\lambda}(X,E)$ в каждой точке x образуют ортонормированный репер в E, лежащий в касательной плоскости в точке $z(x)$ к поверхности $z(X)$. При этом

$$dz=\tau^i e_i. \tag{7}$$

Через $n_\alpha\in C^{r-1,\lambda}(X,E)$ будем обозначать[4] локальный ортонормальный базис нормального расслоения $z(X)$. Разложение дифференциалов de_i, dn_α по базису $\{e_i, n_\alpha\}$ в E приводит к формулам Гаусса-Вейгартена:

$$de_i=\varphi^k_i e_k+\omega^\alpha_i n_\alpha,\quad dn_\alpha=-\omega^\alpha_i e_i+\kappa^\beta_\alpha n_\beta, \tag{8}$$

где $\omega^\alpha_i, \kappa^\beta_\alpha\in C^{r-2,\lambda}(X,T^*(X))$, $\kappa^\beta_\alpha=-\kappa^\alpha_\beta$. 1-формы ω^α_i κ^β_α называются формулами погружения и кручения соответственно. Если $r\geq 3$, то, дифференцируя внешне (7) и (8), приходим к уравнениям Гаусса, Петерсона-Кодацци и Риччи:

$$\begin{cases}\omega^\alpha_i\wedge\omega^\alpha_j=\theta^i_j,\\ d\omega^\alpha_i=\varphi^k_i\wedge\omega^\alpha_k+\omega^\beta_i\wedge\kappa^\alpha_\beta,\\ d\kappa^\beta_\alpha=\omega^\beta_i\wedge\omega^\alpha_i+\kappa^\gamma_\alpha\wedge\kappa^\beta_\gamma,\\ \omega^\alpha_i\wedge\tau^i=0.\end{cases} \tag{9}$$

5. При $r=2$ внешнее дифференцирование формул (8) в классическом смысле не определено. В этом случае мы будем использовать «обобщенное» дифференцирование в смысле де Рама. Пусть U -

[4]Всюду в этой работе $\alpha, \beta, \gamma=1, \ldots, p$.

[открытое] множество с компактным замыканием в фиксированной [коорд]инатной окрестности на X, $\overset{0}{C}{}^{\infty}(U, \Lambda^q T^*(X))$ – пространство [от]ображений в $\Lambda^q T^*(X)$ с компактными носителями, содержащимися в U. [Ка]ждая форма $\omega \in C^0(X, \Lambda^q T^*)$ определяет непрерывный поток $\bar{\omega}: \overset{0}{C}{}^{\infty}(U, \Lambda^{n-q} T^*) \to \mathbb{R}$ степени q по формуле $\bar{\omega}(\varphi)=\int_U w\wedge\varphi$, $\varphi\in\overset{0}{C}{}^{\infty}(U, \Lambda^{n-q}T^*)$ [9, гл. 3]. Граница $b\bar{\omega}$ потока $\bar{\omega}$ есть поток степени $q+1$, определяемый формулой $b\bar{\omega}[\varphi]=\bar{\omega}[d\varphi]$, $\varphi\in\overset{0}{C}{}^{\infty}(U, \Lambda^{n-q-1}T^*)$. Легко видеть, что $bb\bar{\omega}=0$. Дифференциал потока $\bar{\omega}$ определяется формулой $d\bar{\omega}=(-1)^{q+1}b\bar{\omega}$. Форму $\Omega\in\overset{0}{C}(U, \Lambda^{q+1}T^*)$ назовем непрерывным внешним дифференциалом формы $\omega\in\overset{0}{C}(X, \Lambda^q T^*)$ на U, если поток $\bar{\Omega}=d\bar{\omega}$. Через интеграл последнее равенство записывается в виде

$$\int_U \Omega\wedge\varphi=(-1)^{q+1}\int_U w\wedge d\varphi \qquad \forall\varphi\in\overset{0}{C}{}^{\infty}(U, \Lambda^{n-q-1}T^*)$$

(см. также [10]). Будем обозначать $\Omega=d\omega$. Легко показать, что непрерывный внешний дифференциал (если он существует) определяется формой ω однозначно, имеет локальный характер и не зависит от системы координат в U, а значит, может быть определен в каждой точке $x\in X$. При этом $dd\omega=0$, и если $\omega\in C^1(X, \Lambda^q T^*)$, то $d\omega$ совпадает с обычным внешним дифференциалом.

В этом пункте мы докажем две леммы, используемых в дальнейшем. Первая представляет собой удобную для нас переформулировку одной из теорем де Рамма, вторая – распространение правила дифференцирования произведения на случай обобщенного дифференциала.

Лемма 1. *Если многообразие X односвязно*[5], *то для всякой формы $\omega\in C^{0,\lambda}(X,T^*)$, для которой $d\omega=0$, найдется функция $f\in C^{1,\lambda}(X,\mathbb{R})$, для которой $\omega=df$.*

Доказательство. Зафиксируем покрытие X односвязными координатными окрестностями с компактными замыканиями. Пусть U – одна из таких окрестностей. Так как $d\omega=0$, то $b\bar{\omega}=0$. По теореме де Рама [9, с. 131] поток $\bar{\omega}$ гомологичен потоку $\bar{\alpha}$, определяемому некоторой формой $\alpha\in C^{\infty}(U,T^*)$. Это значит, что $\bar{\omega}=\bar{\alpha}+b\bar{g}$, где $b\bar{g}$ – граница некоторого потока $\bar{g}$ нулевой степени. Поскольку $b\bar{\omega}=0$ и

[5] *Односвязность в этой работе означает, что любая простая замкнутая кривая на X гомотопна точке.*

$bb\bar{g}=0$, то $b\bar{\alpha}=0$. В силу гладкости α отсюда следует, что $\bar{\alpha}=b\bar{h}$, где $\bar{h}$ - поток нулевой степени, определяемый функцией $h\in C^{\infty}(U,\mathbb{R})$. Таким образом, $\bar{\omega}=b(\bar{h}+\bar{g})$. Полагая $\bar{h}+\bar{g}=\bar{f}$, будем иметь $\bar{\omega}=b\bar{f}$ и, значит, $\bar{\omega}$ ограничивает поток $\bar{f}$. По упомянутой теореме де Рама можем считать, что $\bar{f}$ определяется функцией $f\in C^{\infty}(U,\mathbb{R})$. Прямая проверка показывает, что в качестве f можно взять $f(x)=\int_{x_0}^{x}\omega$, где интеграл берется по любому пути в U, соединяющему точку x с произвольно фиксированной точкой $x_0\in U$ (и не зависит от этого пути).

Если теперь V - координатная окрестность, имеющая с U непустое пересечение, то на $U\cap V$ указанный интеграл не зависит от пути и, значит, может быть продолжен на $U\cup V$. Отсюда следует, что функция f может быть определена на всем X. Так как $\omega\in C^{0,\lambda}(X,T^*)$, то $f(x)=\int_{x_0}^{x}\omega\in C^{1,\lambda}(X,\mathbb{R})$.

Лемма доказана.

Лемма 2. *Если форма $\omega\in C^0(X,\Lambda^qT^*)$ имеет непрерывный внешний дифференциал $d\omega$, то для всякой формы $\psi\in C^1(X,\Lambda^rT^*)$, $q,r\geq 0$, справедливо равенство $d(\omega\wedge\psi)=d\omega\wedge\psi+(-1)^q\omega\wedge d\psi$.*

Доказательство. В силу локального характера непрерывного внешнего дифференциала достаточно доказать требуемое равенство на координатной окрестности U с компактным замыканием. Так как множество $\overset{0}{C}{}^{\infty}(U,\Lambda^rT^*(U))$ плотно в $C^1(U,\Lambda^qT^*(U))$, то достаточно доказать его для случая, когда $\psi\in\overset{0}{C}{}^{\infty}(U,\Lambda^rT^*(U))$. В этом случае по определению $d\omega$ для всякой формы $\varphi\in\overset{0}{C}{}^{\infty}(U,\Lambda^{n-q-r-1}T^*)$ имеем

$$\int_U d\omega\wedge(\psi\wedge\varphi)=(-1)^{q+1}\int_U\omega\wedge d(\psi\wedge\varphi).$$

Раскрывая $d(\psi\wedge\varphi)$, получим

$$\int_U(d\omega\wedge\psi+(-1)^q\omega\wedge d\psi)\wedge\varphi=(-1)^{q+r+1}\int_U\omega\wedge\psi\wedge d\varphi,$$

откуда вытекает требуемое.

6. Вернемся к уравнениям (9). Покажем, что (9_{1-3}) справедливы и при $r=2$, если внешний дифференциал понимать в смысле предыдущего пункта. Так как $d^2e_i=0$, то в координатной окрестности U с компактным замыканием для всякой формы

$\psi\in\overset{0}{C}{}^\infty(U,\Lambda^{n-2}T^*)$ из первой формулы (8) получаем

$$\int\limits_U(\varkappa_i^k e_k+\omega_i^\alpha n_\alpha)\wedge d\varphi=0.$$

В силу плотности $\overset{0}{C}{}^\infty(U,\Lambda^{n-2}T^*)$ в $\overset{0}{C}{}^1(U,\Lambda^{n-2}T^*)$ это равенство справедливо и для всякой формы $\varphi\in\overset{0}{C}{}^1(U,\Lambda^{n-2}T^*)$. Интегрируя по частям и используя (8), приходим к равенству

$$\int\limits_U[\varkappa_i^j\wedge d(\varphi e_j)+\omega_i^\alpha\wedge d(\varphi n_\alpha)-(\varkappa_i^k\wedge\varkappa_k^j-\omega_i^\alpha\wedge\omega_j^\alpha)\wedge\varphi e_j-(\varkappa_i^k\wedge\omega_k^\alpha+\omega_i^\beta\wedge\kappa_\beta^\alpha)\wedge\varphi n_\alpha]=0.$$

Пусть $a_1,\ldots,a_{n+p}$ - фиксированный ортонормальный базис в E, $e_i=e_i^\rho a_\rho$, $n_\alpha=n_\alpha^\rho a_\rho$, $\rho=1,\ldots,n+p$. Полагая в последнем интегральном равенстве $\varphi=e_i^\rho\psi$, $\psi\in\overset{0}{C}{}^1(U,\Lambda^{n-2}T^*)$, умножая результат на a_ρ, после суммирования по ρ получим

$$\int\limits_U\varkappa_i^j\wedge d\psi=\int\limits_U(-\varkappa_k^j\wedge\varkappa_j^k+\omega_j^\alpha\wedge\omega_i^\alpha)\wedge\psi.$$

Если в том же интегральном равенстве положить $\varphi=n_\alpha^\rho\psi$, то получим

$$\int\limits_U\omega_i^\alpha\wedge d\psi=\int\limits_U(\varkappa_i^k\wedge\omega_k^\alpha+\omega_i^\beta\wedge\kappa_\beta^\alpha)\wedge\psi.$$

Два последних интегральных тождества справедливы для всякой формы $\psi\in\overset{0}{C}{}^1(U,\Lambda^{n-2}T^*)$, а значит, и всякой формы $\psi\in\overset{0}{C}{}^\infty(U,\Lambda^{n-2}T^*)$. Из них вытекают (9_1) и (9_2) на U, а значит, и на X. Аналогичными рассуждениями из (8_2) выводится равенство (9_3).

7. Рассмотрим б. м. деформацию погружения $z\in D^{r,\lambda}(X,E)$, $r\geq 2$, с $\delta I(z)=\sigma$. Из известных теорем о дифференцировании по параметру под знаком интеграла вытекает перестановочность операций варьирования и обобщенного внешнего дифференцирования. Варьируя уравнения (9), приходим к следующей системе уравнений относительно вариаций форм погружения и кручения:

$$\begin{cases}\delta\omega_i^\alpha\wedge\omega_j^\alpha+\omega_i^\alpha\wedge\delta\omega_j^\alpha=\delta\theta_j^i,\\ d\delta\omega_i^\alpha=\delta\varkappa_i^k\wedge\omega_k^\alpha+\varkappa_i^k\wedge\delta\omega_k^\alpha+\delta\omega_i^\beta\wedge\kappa_\beta^\alpha+\omega_i^\beta\wedge\delta\kappa_\beta^\alpha,\\ d\delta\kappa_\alpha^\beta=\delta\omega_i^\beta\wedge\omega_i^\alpha+\omega_i^\beta\wedge\delta\omega_i^\alpha+\delta\kappa_\alpha^\gamma\wedge\kappa_\gamma^\beta+\kappa_\alpha^\gamma\wedge\delta\kappa_\gamma^\beta,\\ \delta\omega_i^\alpha\wedge\tau^i+\omega_i^\alpha\wedge\delta\tau^i=0,\end{cases}\tag{10}$$

где вариации $\delta\tau^i$, $\delta\varkappa_j^i$, $\delta\theta_j^i$ определяются заданной формой σ по формулам (3), (5) и (6).

Теорема 1. *Если многообразие X односвязно, то всякому* решению $\delta\omega_i^\alpha, \delta\kappa_\alpha^\beta \in C^{r-2,\lambda}(X,T^*(X))$ системы (10) соответствует б.м. деформация погружения z с заданной вариацией σ метрики $I(z)$. При этом поле $\delta z \in C^{r,\lambda}(X,E)$ и определяется формулой

$$\delta z(x)=\int_{x_0}^{x}(\delta\tau^k e_k+dz\cdot\int_{x_0}^{x}(\frac{1}{2}\delta\vartheta_k^i[e_k,e_i]+\delta\omega_i^\alpha[e_i,n_\alpha]+\frac{1}{2}\delta\kappa_\alpha^\beta[n_\alpha,n_\beta]))$$

однозначно с точностью до слагаемого вида $\Omega\cdot z+\omega$, где x_0 - произвольная точка на X, и каждый из интегралов берется по произвольной кривой на X, соединяющей x_0 с точкой $x\in X$, $[,]$ - знак внешнего умножения в E, Ω - произвольный постоянный бивектор, ω - произвольный постоянный вектор в E, $\Omega\cdot z$ - внутреннее произведение бивектора на вектор.

Доказательство. Если обозначить подынтегральное выражение внутреннего интеграла через P, то в силу (8), (9) и (10) для всякой формы $\varphi\in \overset{0}{C}{}^{\infty}(U,\Lambda^{n-2}T^*)$ имеем

$$\int_U P\wedge d\varphi=\int_U(\frac{1}{2}\ \delta\vartheta_k^i[e_k,e_i]+\delta\omega_i^\alpha[e_i,n_\alpha]+\frac{1}{2}\ \delta\kappa_\alpha^\beta[n_\alpha,n_\beta])\wedge d\varphi=$$

$$=\int_U(\frac{1}{2}\ \delta\vartheta_k^i\wedge d([e_k,e_i]\varphi)-\frac{1}{2}\ \delta\vartheta_k^i\wedge[de_k,e_i]\wedge\varphi-\frac{1}{2}\ \delta\vartheta_k^i\wedge[e_k,de_i]\wedge\varphi+$$

$$+\delta\omega_i^\alpha\wedge d([e_i,n_\alpha]\varphi)-\delta\omega_i^\alpha\wedge[de_i,n_\alpha]\wedge\varphi-\delta\omega_i^\alpha\wedge[e_i,dn_\alpha]\wedge\varphi-$$

$$-\frac{1}{2}\ \delta\kappa_\beta^\alpha\wedge d([n_\alpha\wedge n_\beta]\varphi)+\frac{1}{2}\ \delta\kappa_\beta^\alpha\wedge[dn_\alpha\wedge n_\beta]\wedge\varphi+\frac{1}{2}\ \delta\kappa_\beta^\alpha\wedge[n_\alpha,dn_\beta]\wedge\varphi)=$$

$$=\frac{1}{2}\ \{\int_U\ \delta\vartheta_j^i\wedge d([e_i,e_j]\varphi)+\int_U\ (\delta\vartheta_k^i\wedge\vartheta_j^k+\vartheta_k^i\wedge\delta\vartheta_j^k-\delta\omega_i^\alpha\wedge\omega_j^\alpha-$$

$$-\omega_i^\alpha\wedge\delta\omega_j^\alpha)\wedge([e_j,e_i]\varphi)\}+\int_U\ \delta\omega_i^\alpha\wedge d([e_i,n_\alpha]\varphi)-$$

$$-\int_U\ (\delta\vartheta_i^k\wedge\omega_k^\alpha+\vartheta_i^k\wedge\delta\omega_k^\alpha+\delta\omega_i^\beta\wedge\kappa_\beta^\alpha+\omega_i^\beta\wedge\delta\kappa_\beta^\alpha)\wedge([e_i,n_\alpha]\varphi)-$$

$$-\frac{1}{2}\ \{\int_U\ (\delta\kappa_\beta^\alpha\wedge d([n_\alpha,n_\beta]\varphi)-\int_U\ (\delta\omega_i^\alpha\wedge\omega_i^\beta+\omega_i^\alpha\wedge\delta\omega_i^\beta+\delta\kappa_\beta^\gamma\wedge\kappa_\gamma^\alpha+$$

$$+\kappa_\beta^\gamma\wedge\delta\kappa_\gamma^\alpha)\wedge([n_\alpha,n_\beta]\varphi)\}=0.$$

По лемме 1 это означает, что $P=dv$, где $v\in C^{r-1,\lambda}(X,\Lambda^2E)$. Если теперь положить $q=\delta\tau^k e_k+v dz$, то, пользуясь (7), (8), (3), (5), (10_1), будем иметь $dq=d\delta\tau^k e_k-\delta\tau^i\wedge e_i+P\wedge dz=(d\delta\tau^k-\delta\tau^i\wedge\vartheta_i^k-\tau^i\wedge\delta\vartheta_i^k)e_k+$

$+(\delta\omega^{\alpha}_{i}\wedge\tau^{i}+\omega^{\alpha}_{i}\wedge\delta\tau^{i})n_{\alpha}=0,\ q\cdot dz=(\delta\tau^{k}\tau^{i})e_{k}e_{i}=\delta\tau^{i}\tau^{i}=\sigma_{ik}\tau^{k}\tau^{i}=\frac{1}{2}\sigma.$ Отсюда следует, что $U=\int\limits_{x_0}^{x} q \in C^{r,\lambda}(X,E)$ удовлетворяет уравнению (1). Если теперь положить $z_t=z+tU$, то получим б. м. деформацию погружения z с $\delta z=U$ и $\delta I(z)=\sigma$.

Для доказательства единственности допустим, что заданному решению системы (10) соответствуют два различных решения $\delta_1 z$ и $\delta_2 z$ уравнения (1). Тогда разность $\delta_2 z-\delta_1 z$ является изгибающим полем поверхности $z(X)$ в E с нулевыми вариациями форм погружения и кручения. Используя теорему 2 работы [11], нетрудно показать, что в этом случае $\delta_2 z-\delta_1 z=\Omega z+\omega$. Теорема доказана.

6. Из (9) следует, что $\omega^{\alpha}_{i}=b^{\alpha}_{ij}\tau^{j}$, $b^{\alpha}_{ij}=b^{\alpha}_{ji}$. Форма $II^{\alpha}=b^{\alpha}_{ij}\tau^{i}\tau^{j}\in C^{r-2,\lambda}(X,S^2T^*)$ называется второй основной формой поверхности $z(X)$ относительно нормали n_{α}. Если в точке $x\in X$ среди форм $II^{\alpha}(x)$ имеется только q линейно независимых, то базис $\{n_{\alpha}\}$ нормального расслоения можно выбрать так, чтобы $II^{q+1}(x)=\ldots=II^{p}(x)=0$. В этом случае $\omega^{q+1}_{i}(x)=\ldots=\omega^{p}_{i}(x)=0$. В дальнейшем базис $\{n_{\alpha}\}$ считается выбранным именно таким образом. Для каждого $\nu=1,\ldots,q$ определим линейное отображение $\omega^{\nu}_{x}:T_x(X)\to T_x(X)$, полагая $\omega^{\nu}_{x}(u)=\langle\omega^{\nu}_{i},u\rangle\xi_{i}$, где $u\in T_x$, $\langle\omega^{\nu}_{i},u\rangle$ - спаривание. Целое число $\theta=\theta(x)$ называется типовым числом Аллендорфера погружения z в точке x, если существует θ векторов $u_1,\ldots,u_{\theta}\in T_x$, для которых $q\cdot\theta$ векторов $\omega^{\nu}_{x}(u_1),\ldots,\omega^{\nu}_{x}(u_{\theta})$, $\nu=1,\ldots,q$, линейно независимы, и не существует большего числа векторов с этим свойством [12, с. 317]. При глобальном рассмотрении типовым числом погружения будем называть число $\theta(z)=\inf\limits_{x\in X}\theta(x)$.

Понятие типового числа введено К. Б. Аллендорфером в работе [13], где доказана неизгибаемость регулярной поверхности в E с $\theta\geq 3$, $q=p$ и установлено, что при $\theta\geq 4$ уравнения Петерсона-Кодацци и Риччи являются следствиями уравнений Гаусса. Простое доказательство последнего результата имеется в статье Ш.-Ш. Черна и Р. Оссермана [14]. Погружения с большими типовыми числами рассматривались также в работах О. Ковальского [15] и Р. Гарднера [16]. Погружения с $\theta(z)=1,2$ рассматривались Н. Н. Яненко [17]. Мы установим аналог упомянутой теоремы Аллендорфера для системы (10).

Теорема 2. *Если $z\in D^3(X,E)$, $\theta(z)\geq 4$, то всякому решению $\{\delta\omega_i^\alpha\}$ системы (10_1) соответствует и притом единственное решение $\{\delta\omega_i^\alpha,\delta\kappa_\beta^\alpha\}$ системы уравнений (10_{1-3}).*

Доказательство проведе по схеме работы [14]. Оно опирается на следующие леммы.

Лемма 3. *Если $\theta(z)\geq 2$, $q=\mathrm{const}$, то каждая точка на поверхности $z(X)$ обладает окрестностью, содержащейся в некотором $(n+q)$-мерном евклидовом пространстве.*

Лемма 4. *Если $\{\psi_1^\alpha,\ldots,\psi_r^\alpha\}$ – система из rp линейно независимых форм из T_X^*, $\varphi^\alpha\in\Lambda^s T_X^*$, $s<r$, то из равенства $\varphi^\alpha\wedge\psi_h^\alpha=0$, $h=1,\ldots,r$, следует, что все $\varphi^\alpha=0$.*

Доказательства этих лемм приведены в [14]. Лемма 3 позволяет без нарушения общности считать, что $q=p$. Дифференцируя внешним образом уравнения (10_1), используя их же, а также (9) и определение θ_j^i, приходим к равенству

$$\Omega_i^\alpha\wedge\omega_i^\alpha-\omega_i^\alpha\wedge\Omega_j^\alpha=0, \tag{11}$$

где обозначено

$$\Omega_i^\alpha=d\delta\omega_i^\alpha-\delta\Phi_i^k\wedge\omega_k^\alpha\delta\Phi_i^k\wedge\delta\omega_k^\alpha-\delta\omega_i^\beta\wedge\kappa_\beta^\alpha. \tag{12}$$

Так как $\theta(z)\geq 4$, то существует, по крайней мере, $4p$ линейно независимых форм из $\{\omega_i^\alpha\}$. Будем считать, что это ω_1^α, ω_2^α, ω_3^α, ω_4^α. Полагая в (11) $i=1$, $j=2$, умножая внешне на $(2p-1)$-форму $\omega_1^1\wedge\ldots\wedge\omega_1^p\wedge\omega_2^1\ldots\wedge\omega_2^{\alpha-1}\wedge\omega_2^{\alpha+1}\wedge\ldots\wedge\omega_2^p$, получим $\Omega_1^\alpha\omega_1^1\wedge\ldots\wedge\omega_1^p\wedge\omega_2^1\ldots\wedge\omega_2^p=0$. Аналогично выводятся равенства $\Omega_1^\alpha\omega_1^1\wedge\ldots\wedge\omega_1^p\wedge\omega_3^1\wedge\ldots\wedge\omega_3^p=0$, $\Omega_1^\alpha\omega_1^1\wedge\ldots\wedge\omega_1^p\wedge\omega_4^1\ldots\wedge\omega_4^p=0$. Отсюда следует, что если формы $\omega_1^\alpha,\ldots,\omega_4^\alpha$ дополнить до базиса в T_X^*, то в разложении Ω_1^α по этому базису каждый член содержит множителем ω_1^α, а значит, $\Omega_1^\alpha=\kappa_\beta^\alpha\wedge\omega_1^\beta$, где $\kappa_\beta^\alpha\in T_X^*$. Проведя аналогичные рассуждения с формами Ω_2^α, Ω_3^α, Ω_4^α, получаем

$$\Omega_h^\alpha=\kappa_{\beta h}^\alpha\wedge\omega_h^\beta,\quad h=1,\ldots,4, \tag{13}$$

где $\kappa_{\beta h}^\alpha\in T_X^*$, суммирования по h нет. Подставляя эти выражения в (11), будем иметь

$$(\kappa_{\beta h}^\alpha+\kappa_{\alpha h}^\beta)\wedge\omega_h^\beta\wedge\omega_g^\alpha=0,\quad h,g=1,\ldots,4,\ h\neq g, \tag{14}$$

суммирования по h, g нет. Следовательно, форма $\kappa_{\beta h}^\alpha+\kappa_{\alpha g}^\beta$ имеет вид $\kappa_{\beta h}^\alpha+\kappa_{\alpha g}^\beta=a_{\gamma hg}^\alpha\omega_h^\gamma+b_{\gamma hg}^\beta\omega_g^\gamma$, где $a_{\gamma hg}^\alpha$ и $b_{\gamma hg}^\beta$ – некоторые функции.

Заметим, что при одновременной перестановке индексов h,g и α, β л. ая часть последнего равенства не изменяется. Совершая такую перестановку, используя линейную независимость форм ω_h^α и ω_g^β, получим $a^\alpha_{\gamma hg}=b^\alpha_{\gamma gh}$ и, значит, $\kappa^\alpha_{\beta h}+\kappa^\beta_{\alpha g}=a^\alpha_{\gamma hg}\omega^\gamma_h+a^\beta_{\gamma gh}\omega^\gamma_g$. Вычитая это равенство из равенства, получаемого из него заменой индекса h на индекс $f\neq g,h$, и прибавляя к результату равенство, получаемое заменой g на f, после переобозначения индексов будем иметь $\kappa^\alpha_{\beta g}+\kappa^\beta_{\alpha h}=(a^\alpha_{\gamma hg}-a^\alpha_{\gamma hf})\omega^\gamma_h-(a^\beta_{\gamma fh}-a^\beta_{\gamma fg})\omega^\gamma_h+(a^\beta_{\gamma gh}+a^\alpha_{\gamma gf})\omega^\gamma_g$, где $f,g,h=1,\dots,4$ – различны. Заменяя здесь индекс f на отличный от f,g,h индекс $t\in\{1,\dots,4\}$ и вычитая результаты, найдем $a^\alpha_{\gamma ht}=a^\alpha_{\gamma gf}$. Следовательно, можем обозначить $a^\alpha_{\beta hg}=a^\alpha_{\beta h}$, и значит, $\kappa^\alpha_{\beta h}+\kappa^\beta_{\alpha g}=a^\alpha_{\gamma h}\omega^\gamma_h+a^\beta_{\gamma g}\omega^\gamma_g$.

Положив теперь $\lambda^\alpha_{\beta h}=\kappa^\alpha_{\beta h}-a^\alpha_{\gamma h}\omega^\gamma_h$, получим $\lambda^\alpha_{\beta h}+\lambda^\beta_{\alpha g}=0$. Отсюда выводится, что $\lambda^\alpha_{\beta 1}=\dots\lambda^\alpha_{\beta 4}$. Значит, можем обозначить $\lambda^\alpha_{\beta h}=\lambda^\alpha_\beta=-\lambda^\beta_\alpha$ и из (13) будем иметь $\Omega^\alpha_h=\lambda^\alpha_\beta\wedge\omega^\beta_h+\sum\limits_\beta a^\alpha_{\gamma h}\omega^\gamma_h\wedge\omega^\beta_h$. Если справа учесть только слагаемые без повторений, то можно записать

$$\Omega^\alpha_h=\lambda^\alpha_\beta\wedge\omega^\beta_h+\sum_{\alpha<\beta}(a^\alpha_{\gamma h}-a^\alpha_{\beta h})\omega^\gamma_h\wedge\omega^\beta_h. \tag{15}$$

С другой стороны, подставляя $\kappa^\alpha_{\beta h}=\lambda^\alpha_\beta+a^\alpha_{\beta h}\omega^\gamma_h$ в (14), получим $a^\alpha_{\gamma h}\omega^\gamma_h\wedge\omega^\beta_h\wedge\omega^\alpha_g+a^\alpha_{\gamma h}\omega^\gamma_g\wedge\omega^\beta_h\wedge\omega^\alpha_g=0$. Так как слагаемые здесь линейно независимы, то $(a^\alpha_{\gamma h}\omega^\gamma_h\wedge\omega^\beta_h\wedge\omega^\alpha_g=0$, и по лемме 4 $a^\alpha_{\gamma h}\omega^\gamma_h\wedge\omega^\beta_h=0$, $h=1,\dots,4$. Отсюда следует, что $a^\alpha_{\gamma h}=a^\alpha_{\beta h}$, и из (15) находим $\Omega^\alpha_h=\lambda^\alpha_\beta\wedge\omega^\beta_h$, $h=1,\dots,4$. Если теперь в (11) положить $j=h\in\{1,2,3\}$, а индекс i считать произвольным, то получим $(\Omega^\alpha_i-\lambda^\alpha_\beta\wedge\omega^\beta_i)\wedge\omega^\alpha_h=0$. В силу леммы 4 отсюда выводится, что $\Omega^\alpha_i=\lambda^\alpha_\beta\wedge\omega^\beta_i$. Если воспользоваться (12) и обозначить $\lambda^\alpha_\beta=-\delta\kappa^\alpha_\beta$, то получим равенство (10_2).

Дифференцируя (10_2) и пользуясь $(10_{1,2})$, (6) и (9), будем иметь $(d\delta\kappa^\alpha_\beta-\delta\omega^\alpha_k\wedge\omega^\beta_k-\omega^\alpha_k\wedge\delta\omega^\beta_k-\delta\kappa^\gamma_\beta\wedge\kappa^\alpha_\gamma-\kappa^\gamma_\beta\wedge\delta\kappa^\alpha_\gamma)\wedge\omega^\beta_i=0$. Воспользовавшись леммой 4, получим уравнение (10_3).

Покажем, что по данному решению $\{\delta\omega^\alpha_i\}$ уравнений (10_1) решение $\{\delta\omega^\alpha_i,\delta\kappa^\alpha_\beta\}$ системы $(10_{1,2})$ определяется однозначно. Пусть $\{\delta\omega^\alpha_i,\delta\tilde\kappa^\alpha_\beta\}$ – еще одно решение системы $(10_{1,2})$. Тогда для разности $\delta\tilde\kappa^\alpha_\beta-\delta\kappa^\alpha_\beta$ из (10_2) получаем $(\delta\tilde\kappa^\alpha_\beta-\delta\kappa^\alpha_\beta)\wedge\omega^\alpha_i=0$. Применяя лемму 4, будем иметь $\delta\tilde\kappa^\alpha_\beta=\delta\kappa^\alpha_\beta$. Теорема доказана.

Заметим, что равенство (10_3) является следствием $(10_{1,2})$ и при $\theta(z)\geq 3$. Из доказанной теоремы следует, что для погружений $\theta(z)\geq 4$ задача о б.м. деформациях с заданной вариацией метрики носит чисто алгебраический характер.

9. В этом пункте мы введем топологию в пространстве тензорных $C^{r,\lambda}$-полей на многообразии X и установим изоморфность пространств $T_{I(z)}C^{r,\lambda}(X,K)$ и $C^{r,\lambda}(X,K')$ (см. п. 1). В дальнейшем предполагаем, что многообразие X компактно. Тогда многообразие $SO(X)$ также компактно. Предположим, что на $SO(X)$ зафиксирована некоторая риманова метрика ρ. Каждое тензорное $C^{r,\lambda}$-поле t ранга s со значениями в k-мерном векторном пространстве может быть отождествлено с инвариантной функцией класса $C^{r,\lambda}$ на $SO(X)$ со значениями в некотором kn^s-мерном векторном пространстве W. Поэтому мы можем рассматривать t как сечение $C^{r,\lambda}(SO(X),W)$. Зафиксируем в W норму $|\cdot|$ и определим норму $\|\cdot\|_0$ в $C^0(SO(X),W)$ равенством $\|t\|_0=\sup\limits_{x\in SO(X)}|t(x)|$. Отождествляя канонически каждый тензор с соответствующей полилинейной формой, определим норму $\|\cdot\|_{r,\lambda}$ в $C^{r,\lambda}(SO(X),W)$ равенством

$$\|t\|_{r,\lambda}=\sum_{h=0}^{r}\|D^h t\|_0+\sup_{x_1,x_2\in SO(X)}\frac{|D^r t(x_1)-D^r t(x_2)|}{\rho^\lambda(x_1x_2)},$$

где $D^h t$ - абсолютный дифференциал h-го порядка сечения $t\in C^{r,\lambda}(SO(X),W)$, $D^0t=t$. Стандартными рассуждениями устанавливается, что относительно этой нормы $C^{r,\lambda}(SO(X),W)$ является банаховым пространством. Для векторного расслоения $V(X)$ нормой сечения из $C^{r,\lambda}(X,V(X))$ будем называть норму соответствующего сечения в $C^{r,\lambda}(SO(X),W)$. Если $P(X)$ - подрасслоение расслоения $V(X)$, то нормой сечения $t\in C^{r,\lambda}(X,P(X))$ будем называть его норму в $C^{r,\lambda}(X,V(X))$. Топологию, порождаемую введенной нормой, будем называть $C^{r,\lambda}$- топологией.

Рассмотрим пространство $C^{r,\lambda}(X,S^2T^*(X))$. Относительно $C^{r,\lambda}$ топологии множество $C^{r,\lambda}(X,S^2T^+(X))$ является открытым в $C^{r,\lambda}(X,S^2T^*(X))$. Для всякого подрасслоения $K(X)$ в S^2T^+ и всякой формы $ds^2\in K(X)$ имеем $T_{ds^2}C^{r,\lambda}(X,K)\subset T_{ds^2}C^{r,\lambda}(X,S^2T^+)$ $=T_{ds^2}C^{r,\lambda}(X,S^2T^*)$. Но $T_{ds^2}C^{r,\lambda}(X,S^2T^*)$ изоморфно пространству $C^{r,\lambda}(X,S^2T^*)$. Поэтому, с точностью до изоморфизма, можем записать

$I_{ds^2}(X,K)\in C^{r,\lambda}(X,S^2T^*)$. Если $v\in T_{ds^2}C^{r,\lambda}(X,K)$, то как элемент пространства $C^{r,\lambda}(X,S^2T^*)$, v имеет вид $v=\frac{d\sigma_t}{dt}\big|_{t=0}$, где $\sigma_t\in C^{r,\lambda}(X,K)$, $-\varepsilon<t<\varepsilon$, $\sigma_0=ds^2$. Для всякой точки $x\in X$ имеем $\sigma_t(x)\in K_x$ и, значит, $\frac{d\sigma_t(x)}{dt}\big|_{t=0}\in K'_x$. Следовательно, $v\in C^{r,\lambda}(X,K'(X))$, т. е. с точностью до изоморфизма, $T_{ds^2}C^{r,\lambda}(X,K)\subset C^{r,\lambda}(X,K')$.

Пусть теперь $v\in C^{r,\lambda}(X,K'(X))$. Для всякой точки $x\in X$ имеем $v(x)\in K'_x=TK_x$ и, значит, $v(x)=\frac{d\sigma_t(x)}{dt}\big|_{t=0}$, где $\sigma_t(x)\in K_x$, $-\varepsilon<t<\varepsilon$. Так как v - поле класса $C^{r,\lambda}$, то $\sigma_t:X\to K(X)$ - сечение класса $C^{r,\lambda}$ и, значит, $\sigma_t\in C^{r,\lambda}(X,K(X))$. Полагая $\tilde\sigma_t=\sigma_t-\sigma_0+ds^2$, получим $v=\frac{d\tilde\sigma_t}{dt}\big|_{t=0}$, $\tilde\sigma_t\in C^{r,\lambda}(X,K(X))$ при $-\varepsilon<t<\varepsilon$, $\sigma_0=ds^2$. Следовательно, $v\in T_{ds^2}C^{r,\lambda}(X,K(X))$, и $C^{r,\lambda}(X,K'(X))\subset T_{ds^2}C^{r,\lambda}(X,K(X))$. Таким образом, пространства $T_{ds^2}C^{r,\lambda}(X,K(X))$ и $C^{r,\lambda}(X,K'(X))$ изоморфны.

Рассмотрим теперь пространства $C^{r,\lambda}(X,E)$. Относительно $C^{r,\lambda}$-топологии множество погружений $D^{r,\lambda}(X,E)$ открыто в $C^{r,\lambda}(X,E)$ и, значит, для всякого $z\in D^{r,\lambda}(X,E)$ пространства $T_zD^{r,\lambda}(X,E)$ и $C^{r,\lambda}(X,E)$ изоморфны. Отсюда вытекает корректность записи $I'_z:C^{r,\lambda}(X,E)\to C^{r,\lambda}(X,K')$ из п. 1.

10. Следующая теорема представляет собой одну из геометрических форм классической теоремы о неявной функции.

Теорема 3. *Пусть многообразие X односвязно и компактно, $K(X)$ - связное подрасслоение в $S^2T^+(X)$, $z\in D^{r,\lambda}(X,E)$, $r\ge 2$, $0<\lambda<1$, $I(z)\in K(X)$. Если поверхность $z(X)$ обладает жесткостью первого порядка в E и для всякой формы $\sigma\in C^{r,\lambda}(X,K'(X))$ погружение z допускает б.м. деформацию в E с $\delta I(z)=\sigma$, то в $C^{r,\lambda}$-топологии метрика $I(z)$ обладает окрестностью в $C^{r,\lambda}(X,K(X))$, любая метрика из которой погружаема в E.*

Доказательство. Мы должны доказать разрешимость уравнения $I(\tilde z)=ds^2$ для всякой метрики $ds^2\in C^{r,\lambda}(X,K(X))$, достаточно близкой к $I(z)$. Докажем это при дополнительных условиях на решение:

$$\tilde z(x_0)=\rho_0,\quad \tilde e_i(x_0)=a_i,\quad \tilde n_\alpha(x_0)=b_\alpha, \tag{16}$$

где $x_0\in X$; ρ_0 - заданный вектор в E; $\{a_i,b_\alpha\}$ - заданный ортонормальный базис в E, $\tilde e_i,\tilde n_\alpha$ определяются для $\tilde z$ так же, как в п. 4. Множество всех $\tilde{z}\in C^{r,\lambda}(X,E)$, удовлетворяющих условиям (15), обозначим через $C_0^{r,\lambda}(X,E)$. Так как $C_0^{r,\lambda}(X,E)$ замкнуто в $C^{r,\lambda}(X,E)$, оно является банаховым пространством относительно нормы, индуцированной из $C^{r,\lambda}(X,E)$. Множество $D_0^{r,\lambda}(X,E)=C_0^{r,\lambda}(X,E)\cap D^{r,\lambda}(X,E)$ открыто в $C_0^{r,\lambda}(X,E)$, и, значит, $T_zD_0^{r,\lambda}(X,E)=T_{\tilde{z}}C_0^{r,\lambda}(X,E)\subset C^{r,\lambda}(X,E)$.

Не ограничивая общности, можем считать, что погружение z удовлетворяет условиям (16), так как этого можно добиться наложением движения пространства E. Если $\{z_t\}_{t\in(-\varepsilon,\varepsilon)}$ – б. н. деформация погружения z, $z_t\in D_0^{r,\lambda}(X,E)$, то $\delta z\in T_zD_0^{r,\lambda}(X,E)$, и

$$\delta z(x_0)=0,\quad \delta e_i(x_0)=0,\quad \delta n_\alpha(x_0)=0. \qquad (17)$$

По условию теоремы погружение z допускает б. н. деформацию в E с $\delta I(z)=\sigma$ для всякой формы $\sigma\in C^{r,\lambda}(X,K')$. Значит, для всякой $\sigma\in C^{r,\lambda}(X,K')$ уравнение (1) имеет решение в классе $C^{r,\lambda}(X,E)$. Если U – такое решение, то для всякого бивектора $\Omega=\mathrm{const}$ и всякого вектора $\omega=\mathrm{const}$ в E поле $U+\Omega\cdot z+\omega$ – также решение. При подходящем выборе Ω и ω можем считать, что решение U удовлетворяет условиям (17) при $\delta z=U$. Покажем, что в этом случае решение уравнения (1) единственно. Если U_1 и U_2 – решения уравнения (1), удовлетворяющие условиям (17), то их разность $U=U_2-U_1$ удовлетворяет уравнению б. н. изгибаний поверхности $z(X)$ в E. По условию поверхность $z(X)$ обладает жесткостью первого порядка в E, значит, изгибающее поле U тривиально. Из (17) теперь следует, что $U=0$. Таким образом, уравнение (1) имеет и притом единственное решение в пространстве $T_zD_0^{r,\lambda}(X,E)$ для произвольно заданной формы $\sigma\in C^{r,\lambda}(X,K')$.

Легко видеть, что производной Фреше отображения $I:D_0^{r,\lambda}(X,E)\to C^{r,\lambda}(X,K(X))$ в точке z является оператор $I'_z:T_zD_0^{r,\lambda}(X,E)\to C^{r,\lambda}(X,K')$, действующий по правилу $I'_z(U)=2dz\cdot dU$. Только что проведенные рассуждения показывают, что для всякой $\sigma\in C^{r,\lambda}(X,K')$ уравнение $I'_z(U)=\sigma$ однозначно разрешимо относительно U. По известной теореме теории линейных операторов, $(I'_z)^{-1}$ непрерывен, и доказываемая теорема вытекает из классической теоремы о неявной функции (см. например, [17, с 40]).

11. Пусть $X_1,\dots,X_p$ – C^∞-многообразия, диффеоморфные сферам размерностей $\nu_1,\dots,\nu_p\geq 2$ соответственно, ds_α^2 – метрика сферы радиуса r_α на X_α. На произведении $X=X_1\times\ldots\times X_p$ рассмотрим метрику

$ds^2=ds_1^2+\ldots+ds_p^2$. Обозначим $n=\nu_1+\ldots+\nu_p$.

Теорема 4. *Метрика* $ds_0^2\in C^\infty(X, S^2T^+(X))$ *в* $C^{2,\lambda}$-*топологии обладает окрестностью в* $C^{2,\lambda}(X, S^2T^+(X))$, *каждая метрика из которой, конформно эквивалентная метрике* ds_0^2, *погружаема в евклидово пространство* E *размерности* $n+p$.

Доказательство. В работе [19] доказано, что метрика ds_0^2 погружаема в E, причем соответствующее погружение $z:X\to E$ имеет вид $z=z_1+\ldots+z_p$, где $z_\alpha:X_\alpha\to E_\alpha$ – погружение метрики ds_0^2 в виде гиперсферы; $E=E_1\times\ldots\times E_p$. В работе [20] доказано, что поверхность $z(X)$ обладает жесткостью первого порядка в E. По теореме 3 остается доказать, что если $K(X)$ – подрасслоение в $S^2T^+(X)$ метрик, конформно эквивалентных метрике ds_0^2, то для всякой формы $\sigma\in C^{2,\lambda}(X, K'(X))$ погружение z допускает б. м. деформацию в E с вариацией метрики $\delta ds_0^2=\sigma$. По теореме 1 достаточно доказать разрешимость системы (10) для рассматриваемого погружения и формы $\sigma\in C^{2,\lambda}(X, K'(X))$.

Встречающиеся ниже индексы i_α, j_α, k_α будем считать изменяющимися от $\sum\limits_{\beta=0}^{\alpha}\nu_\beta+1$ до $\sum\limits_{\beta=0}^{\alpha+1}\nu_\beta$ $(\nu_0=0)$. Выберем корепер τ так, чтобы $\tau^{i_\alpha}\in C^\infty(X_\alpha, T^*(X_\alpha))$. Тогда, в силу единственности связности θ, $\theta^{i_\alpha}_{j_\beta}=0$ при $\alpha\neq\beta$. Для дуального репера ξ имеем $\xi_{i_\alpha}(f)=0$, если $f\in C^1(X_\beta,\mathbb{R})$, и $\beta\neq\alpha$. Поэтому $e_{i_\alpha}=\xi_{i_\alpha}(z)=\xi_{i_\alpha}(z_\alpha)$. В качестве нормалей n_α для поверхности $z(X)$ мы можем взять векторы $\frac{1}{r_\alpha}z_\alpha$. В этом случае из формул Гаусса и Вейнгартена находим

$$\kappa^\alpha_\beta=0,\quad \omega^\alpha_i=\frac{1}{r_\alpha}\,\delta_{ij_\alpha}\tau^{j_\alpha}. \tag{18}$$

Всякая метрика $ds^2\in C^{2,\lambda}(X, K(X))$ имеет вид $ds^2=\psi^2 ds_0^2$, где $\psi\in C^{2,\lambda}(X,\mathbb{R})$, $\psi\neq0$. Отсюда следует, что всякая форма $\sigma\in C^{2,\lambda}(X, K')$ имеет вид $\sigma=\varphi ds_0^2$, где $\varphi\in C^{2,\lambda}(X,\mathbb{R})$. Значит, $\sigma_{ij}=\varphi\delta_{ij}$. Из (5) и (6) находим

$$\delta\theta^i_j=(\varphi_{,j}\delta_{ik}-\varphi_{,i}\delta_{jk})\tau^k,\quad \delta\Theta^i_j=(\delta_{ik}\varphi_{,jl}-\delta_{jk}\varphi_{,il})\tau^l\wedge\tau^k. \tag{19}$$

Положим

$$\delta\omega^\alpha_i=-r_\alpha\varphi_{,ik}\tau^k,\quad \delta\kappa^\alpha_\beta=\frac{r_\beta}{r_\alpha}\,\varphi_{,i_\alpha}\tau^{i_\alpha}-\frac{r_\alpha}{r_\beta}\,\varphi_{,i_\beta}\tau^{i_\beta} \tag{20}$$

и покажем, что так определенные формы $\delta\omega^\alpha_i$ и $\delta\kappa^\alpha_\beta$ удовлетворяют системе (10).

Пусть $A^i_j=\delta\omega^\alpha_i\wedge\omega^\alpha_j+\omega^\alpha_i\wedge\delta\omega^\alpha_j-\delta\theta^i_j$. При $i=i_\beta$, $j=j_\gamma$, $\beta,\gamma=1,\ldots,p$, из формул (18) - (20) получаем $A^{i_\beta}_{j_\gamma}=\delta\omega^\gamma_{i_\beta}\wedge\omega^\gamma_{j_\gamma}+\omega^\beta_{i_\beta}\wedge\delta\omega^\beta_{j_\gamma}-\delta\theta^{i_\beta}_{j_\gamma}=$ $=\varphi_{,j_\gamma k}\tau^k\wedge\tau^{i_\beta}-\varphi_{,i_\beta k}\tau^k\wedge\tau^{j_\gamma}-\delta_{i_\beta k}\,\varphi_{,j_\gamma l}\tau^l\wedge\tau^k+\delta_{j_\gamma k}\,\varphi_{,i_\beta l}\tau^l\wedge\tau^k=0.$ Следовательно, равенство (10_1) выполняется. Рассмотрим равенство (10_2). Обозначим $B^\alpha_i=-d\delta\omega^\alpha_i+\delta\varkappa^k_i\wedge\omega^\alpha_k+\varkappa^k_i\wedge\delta\omega^\alpha_k+\delta\omega^\beta_i\wedge\kappa^\alpha_\beta+\omega^\beta_i\wedge\delta\kappa^\alpha_\beta$. При $i=i_\gamma$, $\gamma=1,\ldots,p$, в силу леммы 2 и формул (18) - (20), имеем

$$B^\alpha_{i_\gamma}=r_\alpha\varphi_{,i_\gamma l|k}\tau^k\wedge\tau^l+r_\alpha\Gamma^m_{kl}\varphi_{,i_\gamma m}\tau^k\wedge\tau^l+\frac{1}{r_\alpha}(\varphi_{,i_\gamma m}\delta_{m_\alpha l}-$$

$$-\varphi_{,m_\alpha}\delta_{i_\gamma l})\delta_{m_\alpha k}\tau^l\wedge\tau^k-\Gamma^m_{i_\gamma k}\varphi_{,ml}\tau^k\wedge\tau^l+\frac{1}{r_\gamma}\delta_{i_\gamma k_\gamma}\tau^k\wedge(\frac{r_\gamma}{r_\alpha}\varphi_{,l_\alpha}\tau^{l_\alpha}-$$

$$-\frac{r_\alpha}{r_\gamma}\varphi_{,l_\gamma}\tau^{l_\gamma})=\frac{1}{2}r_\alpha(\varphi_{,i_\gamma lk}-\varphi_{,i_\gamma kl})\tau^k\wedge\tau^l-\frac{r_\alpha}{r^2_\gamma}\varphi_{,l_\gamma}\tau^{i_\gamma}\wedge\tau^{l_\gamma}.$$

Так как $\frac{r_\alpha}{2}(\varphi_{,i_\gamma lk}-\varphi_{,i_\gamma kl})\tau^k\wedge\tau^l=\frac{r_\alpha}{2}R^m_{i_\gamma lk}\varphi_{,m}\tau^k\wedge\tau^l=-r_\alpha\theta^m_{i_\gamma}\varphi_{,m}=$

$=-r_\alpha\theta^{m_\gamma}_{i_\gamma}\varphi_{,m_\gamma}=-r_\alpha\omega^\gamma_{m_\gamma}\wedge\omega^\gamma_{i_\gamma}\varphi_{,m_\gamma}=-\dfrac{r_\alpha}{r^2_\gamma}\varphi_{,m_\gamma}\tau^{m_\gamma}\wedge\tau^{i_\gamma}$, то $B^\alpha_{i_\gamma}=0$, и, значит, равенство (10_2) также выполняется. Рассмотрение уравнений (10_3) и (10_4) не представляет затруднений и поэтому здесь опускается.

Теорема доказана.

Список литературы: 1.*Сабитов И.Х., Шефель С.З.* О связях между порядками гладкости поверхности и ее метрики//Сиб. мат. журн. 1976. N4. C.916-926. 2.*Громов М.Л., Рохлин В.А.* Вложения и погружения в римановой геометрии//Успехи мат. наук. 1970. **25**, N5. C. 3-62. 3.*Каждан Д.Л., Уорнер Ф.У.* Скалярная кривизна и конформная деформация римановой структуры//Исследования по метрической теории поверхностей. М., 1980. С.81-108. 4.*Вейль Г.* Об определении замкнутой выпуклой поверхности ее линейным элементом//Успехи мат. наук. 1948. **3**, N2. C.159-190. .*Погорелов А.В.* Внешняя геометрия выпуклых поверхностей. М., 1969. 760 с. 6.*Климентов С.Б.* О деформациях замкнутых поверхностей рода p≥1 с заданным бесконечно малым изменением метрики//Мат. сб. 1979. **108**, N3. C.307-325. 7.*Нэш Дж.* Проблема вложений для римановой геометрии//Успехи мат. наук. 1971. **26**, N4. C.216. 8.*Jacobowitz H.* Implicit function theorems and isometric embeddings//Ann. of Math. 1972. **95**, N2. P.191-225. 9.*Де Рам Ж.* Дифференцируемые многообразия. М., 1956. 250 с. 10.*Боровский Ю.Е.* Вполне интегрируемые системы Пфаффа//Изв. вузов. 1959. N2. C.28-40. 11.*Марков П.Е.* Бесконечно малые изгибания высших порядков многомерных поверхностей в пространствах постоянной кривизны//Мат. сб. 1987. **133** (175), N1 (5). C.84-85. 12.*Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. М., 1981. **2**, 416 с. 13.*Allendorfer C.B.* Rigidity for spaces of class greater than one//Amer. Journ. of Math. 1939. **61**. P.633-644. 14.*Chern S.-S., Osserman R.* Remarks on the Riemannian of a minimal Submanifold//Lectur Notes in Math. 894. Geom. Symp. 1980. P.49-90. 15.*Kowalski O.* Some algebraic theorems on vector-valued forms and their geometric applications//Colloq. Math. 1972. **26**.

P. 89–92. 16. *Gardner R.B.* New vienpoints in the Geometry of Submanifolds of R^N//Bul. Amer. Math. Soc. 1977. 83, N1. P.1–35. 17. *Яненко Н.Н.* Некоторые необходимые признаки изгибаемых поверхностей V_m в $(m+q)$-мерном евклидовом пространстве//Тр. семинара по векторному и тензорному анализу. 1952. 9. С. 236–287. 18. *Обен Ж.-П., Экланд И.* Прикладной нелинейный анализ. М., 1988. 512 с. 19. *Мур Дж.Д.* Изометрические погружения римановых произведений// Исследования по метриче кой теории поверхностей. М., 1980. С. 264–276. 20. *Марков П.Е.* Бесконечно малые изгибания некоторых многомерных поверхностей//Мат. заметки. 1980. 27, N3. С. 469–476.

Поступила в редколлегию 14.11.89

УДК 514

Л. А. Масальцев

ТЕОРЕМЫ ИНЦИДЕНТНОСТИ В ПРОСТРАНСТВАХ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ

Напомним формулировку классической теоремы, доказанной итальянским математиком Чевой в 17 в.

Теорема Чевы. *Пусть точки A_1, B_1, C_1 лежат соответственно на сторонах BC, AC, BA треугольника ABC. Для того, чтобы отрезки AA_1, BB_1, CC_1 пересекались в одной точке, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение* $\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1$.

Ниже предлагаем два варианта доказательства аналога теоремы Чевы для треугольника на гиперболической плоскости, образованного отрезками геодезических, а также простое доказательство для геодезического треугольника на сфере.

Рассмотрим гиперболическую плоскость $H^2(-1)$ в проективной модели Ф. Клейна. В этой реализации она задана как внутренность круга $|z|<1$ с метрикой $\rho(x,y)$ [1, с. 30],

$$\operatorname{ch}^2\rho(x,y)=\frac{(1-(x,y))^2}{(1-|x|^2)(1-|y|^2)}, \tag{1}$$

где $(x,y)=x_1y_1+x_2y_2$ - скалярное произведение в евклидовой плоскости E^2. Для удобства рассматриваем гиперболическую плоскость кривизны -1. Клейнова модель гиперболической геометрии наиболее удобна для доказательства свойств инцидентности, поскольку геодезические в этой модели представлены в виде евклидовых отрезков внутри единичного круга.

Теорема 1. *Пусть $\{a,b,c\}$ - геодезический треугольник $H^2(-1)$ и пусть три точки $a'\in bc$, $b'\in ac$, $c'\in ab$ лежат на сторонах этого треугольника. Тогда три геодезические aa', bb', cc' пересекаются в одной точке в том и только том случае, когда*

9*

$$\frac{\mathrm{sh}a'b}{\mathrm{sh}a'c}\cdot\frac{\mathrm{sh}b'c}{\mathrm{sh}b'a}\cdot\frac{\mathrm{sh}c'a}{\mathrm{sh}c'b}=1. \tag{2}$$

Здесь через $a'b$ для краткости обозначено расстояние на гиперболической плоскости $\rho(a'b)$.

Доказательство 1. Рассмотрим геодезический треугольник с вершинами в точках a, b, c в круге $|z|<1$ в проективной модели. Геодезические при этом будут совпадать с отрезками евклидовых прямых. На стороне bc возьмем точку $a'=\dfrac{b+\lambda_3 c}{1+\lambda_3}$, где $\lambda_3=\dfrac{|b-a'|}{|a'-c|}$ есть отношение евклидовых длин. Вычислим отношение $\mathrm{sh}^2\rho(b,a')/\mathrm{sh}^2\rho(c,a')$. Используя выражение для метрики (1), получим

$$\mathrm{sh}^2\rho(x,y)=\frac{|x|^2+|y|^2-|x|^2|y|^2+(x,y)^2-2(x,y)}{(1-|x|^2)(1-|y|^2)}.$$

После некоторых преобразований имеем

$$\mathrm{sh}^2\rho(b,a')=\lambda_3^2\cdot\frac{|b|^2+|c|^2-2(bc)-|b|^2|c|^2+(bc)^2}{(1-|b|^2)((1+\lambda_3)^2-|b+\lambda_3 c|^2)},$$

$$\mathrm{sh}^2\rho(c,a')=\frac{|b|^2+|c|^2-2(bc)-|b|^2|c|^2+(bc)^2}{(1-|c|^2)((1+\lambda_3)^2-|b+\lambda_3 c|^2)}.$$

Отсюда получим, что

$$\frac{\mathrm{sh}^2a'b}{\mathrm{sh}^2a'c}=\frac{\mathrm{sh}^2\rho(a',b)}{\mathrm{sh}^2\rho(a',c)}=\lambda_3^2\frac{1-|c|^2}{1-|b|^2}. \tag{3}$$

Аналогичные соотношения можно записать для двух других сторон треугольника. Перемножая их, получим с помощью классической теоремы Чевы утверждение (2).

Доказательство 2. Известно, что в метрике (1) расстояние между двумя точками m, n внутри единичного круга можно вычислить по формуле $\rho(m,n)=\frac{1}{2}|\ln[m,n,\alpha,\beta]|$, где α, β - точки пересечения хорды mn с окружностью $|z|=1$, а через $[m,n,\alpha,\beta]=\dfrac{|m-\alpha|}{|n-\alpha|}\cdot\dfrac{|n-\beta|}{|m-\beta|}$ обозначено двойное отношение.

Рассмотрим отрезок ab - одну из сторон треугольника abc, и пусть $\lambda_3=\dfrac{|a-c'|}{|b-c'|}$. Вычислим $\mathrm{sh}\rho(a,c')$ и $\mathrm{sh}\rho(b,c')$ (рис. 1):

$$\mathrm{sh}\rho(a,c')=\mathrm{sh}\tfrac{1}{2}|\ln[a,c',\alpha,\beta]|=\frac{1}{2}\left(\left|\frac{a-\alpha}{\alpha-c'}\cdot\frac{c'-\beta}{\beta-\alpha}\right|^{\frac{1}{2}}-\left|\frac{a-\alpha}{\alpha-c'}\cdot\frac{c'-\beta}{\beta-\alpha}\right|^{-\frac{1}{2}}\right)=$$

$$=\frac{|a-\alpha|\cdot|c'-\beta|-|\alpha-c'|\cdot|a-\beta|}{2\left|(\alpha-c')(a-\beta)(a-\alpha)(c'-\beta)\right|^{\frac{1}{2}}}=$$

$$=\frac{|a-\alpha|\left(\frac{1}{1+\lambda_3}|a-b|+|b-\beta|\right)-\left(|a-\alpha|+\frac{\lambda_3}{1+\lambda_3}|a-b|\right)\left(|a-b|+|b-\beta|\right)}{2\left|(\alpha-c')(a-\beta)(a-\alpha)(c'-\beta)\right|^{\frac{1}{2}}}=$$

$$=\frac{-|a-b|\left(\frac{\lambda_3}{1+\lambda_3}|a-\alpha|+\frac{\lambda_3}{1+\lambda_3}|a-b|+|b-\beta|\right)}{2\left|(a-\alpha)(c'-\beta)(\alpha-c')(a-\beta)\right|^{\frac{1}{2}}}=$$

$$=\frac{-\lambda_3|a-b||\alpha-\beta|}{2(1+\lambda_3)\left|(a-\alpha)(c'-\beta)(\alpha-c')(a-\beta)\right|^{\frac{1}{2}}}.$$

Аналогично получим

$$\operatorname{sh}\rho(b,c')=-\frac{1}{1+\lambda_3}\cdot\frac{|a-b||\alpha-\beta|}{2\left|(b-\alpha)(c'-\beta)(\alpha-c')(b-\beta)\right|^{\frac{1}{2}}}.$$

Поэтому отношение $\operatorname{sh}\rho(a,c')/\operatorname{sh}\rho(b,c')$ равно

$$\frac{\operatorname{sh}\rho(a,c')}{\operatorname{sh}\rho(b,c')}=\lambda_3\sqrt{\frac{(b-\alpha)(b-\beta)}{(a-\alpha)(a-\beta)}}.$$

Поскольку величина $I(b)=|(b-\alpha)(b-\beta)|$ есть степень точки b относительно круга $|z|=1$, то

$$\frac{\operatorname{sh}\rho(a,c')}{\operatorname{sh}\rho(b,c')}=\lambda_3\left(\frac{I(b)}{I(a)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Теперь перемножая аналогичные равенства для остальных сторон геодезического треугольника и пользуясь плоской теоремой Чевы, получим утверждние (2).

Изложим простое доказательство теоремы Чевы для сферы кривизны 1. Идея этого доказательства в частном случае, когда трансверсальными геодезическими являются медианы, есть в книге Ж. Адамара [2].

Теорема 2. *Пусть $\{a,b,c\}$ - геодезический треугольник в $S^2(1)$ и пусть три точки $a'\in bc$, $b'\in ac$, $c'\in ab$ лежат на сторонах этого треугольника. Тогда три геодезические aa', bb', cc' пересекаются в одной точке в том и только том случае, когда*

$$\frac{\sin a'b}{\sin a'c}\cdot\frac{\sin b'c}{\sin b'a}\cdot\frac{\sin c'a}{\sin c'b}=1. \tag{4}$$

Здесь через $a'b$ для краткости обозначено расстояние на сфере $S^2(1)$ между точками a' и b.

Рис.1

Доказательство. Пусть O - центр сферы $S^2(1)$, вложенной в трехмерное евклидово пространство. Рассмотрим плоский треугольник в объемлющем пространстве с вершинами в точках a, b, c. Если спроектировать из центра сферы геодезические на плоский треугольник, то они перейдут в отрезки прямых, пересекающихся в одной точке. Рассмотрим сторону $\overline{bc}$ плоского треугольника (рис. 2) и докажем, что она делится в соотношении

$$\lambda_3 = \frac{\sin a'b}{\sin a'c} = \frac{\overline{bD}}{\overline{Dc}}, \tag{5}$$

где $a'b$ и $a'c$ - длины дуг геодезических на сфере. В самом деле, в ΔObc имеем $\frac{\overline{bD}}{\overline{Dc}} = \frac{S\Delta bDO}{S\Delta cDO} = \frac{\sin a'b}{\sin a'c}$. Перемножая подобные соотношения для двух других сторон треугольника и используя плоскую теорему Чевы, получим (4).

С помощью теоремы 2 проверяется хорошо известное свойство медиан, биссектрис и высот сферического геодезического треугольника пересекаться в одной соответствующей точке [2].

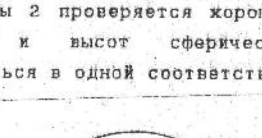


Рис. 2

В самом деле, для медиан это очевидно. Для биссектрис, используя сферическую теорему синусов, имеем

$$\frac{\sin ab'}{\sin ab} = \frac{\sin B/2}{\sin\varphi} = \frac{\sin B/2}{\sin(\pi-\varphi)} = \frac{\sin b'c}{\sin bc} \text{ (рис. 3).}$$

Отсюда получим

$$\lambda_2 = \frac{\sin ab'}{\sin b'c} = \frac{\sin ab}{\sin bc}.$$

Для двух других сторон аналогично получим отношения

$$\lambda_1 = \frac{\sin ca'}{\sin a'b} = \frac{\sin ac}{\sin ab};\ \lambda_3 = \frac{\sin bc'}{\sin c'a} = \frac{\sin bc}{\sin ac}.$$

Очевидно, что $\lambda_1\lambda_2\lambda_3=1$ и по теореме 2 биссектрисы пересекаются в одной точке. Для высот сферического треугольника

$$\lambda_2 = \frac{\sin b'a}{\sin b'c} = \frac{\operatorname{tg}C}{\operatorname{tg}A};\ \lambda_3 = \frac{\operatorname{tg}A}{\operatorname{tg}B};\ \lambda_1 = \frac{\operatorname{tg}B}{\operatorname{tg}C}.$$

Опять произведение $\lambda_1\lambda_2\lambda_3=1$ и, следовательно, высоты пересекаются в одной точке.

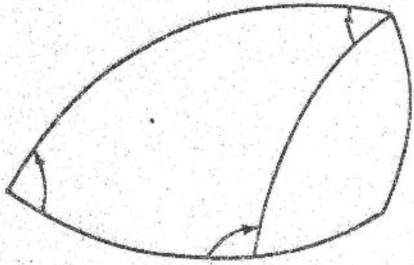


Рис. 3

С помощью формул (3) и (5) можно установить, пользуясь геодезическим отображением на плоскость, аналог теоремы Менелая для гиперболической плоскости и сферы. Приведем их формулировки.

Теорема 3. *Пусть $\{a,b,c\}$ – геодезический треугольник в $H^2(-1)$ и пусть три точки $a'\in bc$, $b'\in ac$, $c'\in ab$ лежат на сторонах (или их продолжениях) этого треугольника. Тогда три точки a', b', c' лежат на одной геодезической в том и только в том случае, когда*

$$\frac{\operatorname{sh}a'b}{\operatorname{sh}a'c}\cdot\frac{\operatorname{sh}b'c}{\operatorname{sh}b'a}\cdot\frac{\operatorname{sh}c'a}{\operatorname{sh}c'b} = 1.$$

Теорема 4. *Пусть $\{a,b,c\}$ – геодезический треугольник в $S^2(1)$ и пусть три точки $a'\in bc$, $b'\in ac$, $c'\in ab$ лежат на сторонах этого треугольника (или их продолжениях). Тогда три точки a', b', c' лежат на одном большом круге тогда и только тогда, когда*

$$\frac{\sin a'b}{\sin a'c}\cdot\frac{\sin b'c}{\sin b'a}\cdot\frac{\sin c'a}{\sin c'b} = 1.$$

В евклидовом случае теоремы Чевы и Менелая допускают обобщение на случай трехмерного пространства [4]. Теорема Менелая, например, обобщается следующим образом: если плоскость μ пересекает ребра AB, BC, CD и AD тетраэдра $ABCD$ в точках A_1, B_1, C_1, D_1, то

$$\frac{AA_1}{A_1B}\cdot\frac{BB_1}{B_1C}\cdot\frac{CC_1}{C_1D}\cdot\frac{DD_1}{D_1A}=\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4=1, \qquad (6)$$

и обратно, если для четырех точек A_1, B_1, C_1, D_1, лежащих соответственно на ребрах AB, BC, CD и AD тетраэдра, выполено (6), то эти четыре точки лежат в одной плоскости.

Это утверждение допускает обобщение на случай гиперболического $H^3(-1)$ и сферического $S^2(1)$ пространств.

Теорема 5. *Пусть $\{a,b,c,d\}$ – геодезический тетраэдр в гиперболическом пространстве $H^3(-1)$. Если плоскость μ пересекает ребра тетраэдра ab, bc, cd, da в точках c', d', a', b' соответственно, то*

$$\frac{\operatorname{sh} ac'}{\operatorname{sh} c'b}\cdot\frac{\operatorname{sh} bd'}{\operatorname{sh} d'c}\cdot\frac{\operatorname{sh} ca'}{\operatorname{sh} a'd}\cdot\frac{\operatorname{sh} db'}{\operatorname{sh} b'a}=1 \text{ (рис. 4)}. \qquad (7)$$

Обратно, если для четырех точек c', d', a', b', лежащих соответственно на ребрах ab, bc, cd, da геодезического тетраэдра, выполнено условие (7), то эти четыре точки лежат в одной гиперболической плоскости.

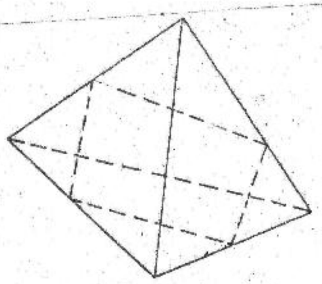


Рис. 4

Доказательство. В модели Ф. Клейна «геодезический» тетраэдр гиперболического пространства налагается на евклидовый. При этом для каждого из ребер ab, bc, cd, da выполняется условие вида (3). Если эти четыре равенства перемножить, то получим следующее условие:

$$\frac{\operatorname{sh}ac'}{\operatorname{sh}c'b}\cdot\frac{\operatorname{sh}bd'}{\operatorname{sh}d'c}\cdot\frac{\operatorname{sh}ca'}{\operatorname{sh}a'd}\cdot\frac{\operatorname{sh}db'}{\operatorname{sh}b'a}=\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4$$

Поэтому если четыре точки лежат в одной гиперболической плоскости, а значит, и в одной евклидовой, то выполнено условие (6), а вслед за ним (7). Обратно, выполнение (7) влечет (6) при определенном понимании отношения отрезков, и обратное утверждение теоремы 5 следует из теоремы работы [4].

Заметим, что прямое утверждение теоремы 5 можно доказать с помощью равенств вида $\frac{\operatorname{sh}ac'}{\operatorname{sh}c'b}=\frac{\operatorname{sh}h_a}{\operatorname{sh}h_b}$, где h_a – расстояние точки a от гиперболической плоскости μ. Эти равенства легко выводятся из формул гиперболической геометрии.

В сферическом пространстве проводится подобное рассуждение с использованием формулы (5).

Теорема 6. *Пусть $\{a,b,c,d\}$ – геодезический тетраэдр в $S^3(1)$. Если большая сфера μ пересекает ребра ab, bc, cd, da тетраэдра в точках c', d', a', b', соответственно, то*

$$\frac{\sin ac'}{\sin c'b}\cdot\frac{\sin bd'}{\sin d'c}\cdot\frac{\sin ca'}{\sin a'd}\cdot\frac{\sin db'}{\sin b'a}=1. \tag{8}$$

Обратно, если для четырех точек c', d', a', b', лежащих соответственно на ребрах ab, bc, cd, da геодезического тетраэдра, выполнено условие (8), *то эти четыре точки лежат на одной большой сфере.*

В статье [4] приводится также вариант пространственного обобщения теоремы Чевы. Это утверждение также допускает аналог для пространств постоянной кривизны $H^3(-1)$ и $S^3(1)$. Сформулируем его для $H^3(-1)$.

Теорема 7. *Пусть m – точка внутри геодезического тетраэдра $\{a,b,c,d\}$ в пространстве постоянной кривизны $H^3(-1)$. Пусть a', b', c', d' – точки пересечения геодезических плоскостей $\{m,c,d\}$, $\{m,d,a\}$, $\{m,a,b\}$, $\{m,b,c\}$ с ребрами ab, bc, cd, da соответственно. Тогда*

$$\frac{\operatorname{sh}aa'}{\operatorname{sh}a'b}\cdot\frac{\operatorname{sh}bb'}{\operatorname{sh}b'c}\cdot\frac{\operatorname{sh}cc'}{\operatorname{sh}c'd}\cdot\frac{\operatorname{sh}dd'}{\operatorname{sh}d'a}=1. \tag{9}$$

Обратно, если для четырех точек a', b', c', d', лежащих на соответствующих ребрах выполнено условие (9), *то плоскости $\{a',c,d\}$, $\{b',d,a\}$, $\{c',a,b\}$, $\{d',b,c\}$ проходят через общую точку.*

Доказательство. *Необходимость.* В проективной модели Клейна четыре точки a', b', c', d' лежат в одной евклидовой плоскости. Эта плоскость проходит через отрезки $a'c'$ и $b'd'$. Значит, эти точки лежат в одной гиперболической плоскости, и по теореме 5 выполнено условие (9).

Достаточность доказывается так же, как в теореме 5, с использованием евклидова варианта этого утверждения и формул вида (3).

Формулу (3) можно употребить для доказательства аналога известного свойства трансверсалей плоского треугольника: пусть в ΔABC проведены три трансверсали AA_1, BB_1, CC_1, пересекающиеся в одной точке O, внутри треугольника. Тогда $\frac{OA_1}{AA_1}+\frac{OB_1}{BB_1}+\frac{OC_1}{CC_1}=1$. Соответствующий аналог для геодезического треугольника в гиперболической плоскости $H^2(-1)$ будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{\mathrm{ch}OA\,\mathrm{sh}OA_1}{\mathrm{sh}AA_1}+\frac{\mathrm{ch}OA\,\mathrm{sh}OB_1}{\mathrm{sh}BB_1}+\frac{\mathrm{ch}OC\,\mathrm{sh}OC_1}{\mathrm{sh}CC_1}=1.$$

Замечание 1. В несколько ином виде теоремы Чевы и Менелая для гиперболической плоскости сформулированы в книге В.Ф.Кагана [5]. Их формулировка использует понятие угла параллельности отрезка $\Pi(a)=\tilde{a}$ и выглядит следующим образом: $\mathrm{ctg}\tilde{a}_1\mathrm{ctg}\tilde{b}_1\mathrm{ctg}\tilde{c}_1=$ $=\mathrm{ctg}\tilde{a}_2\mathrm{ctg}\tilde{b}_2\mathrm{ctg}\tilde{c}_2$, где a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 - отрезки сторон треугольника, разделенные чевианами. Доказательство использует формулы тригонометрии для гиперболической плоскости. Поскольку имеет место равенство $\mathrm{sh}\frac{a}{k}=\mathrm{ctg}\tilde{a}$, то легко видеть, что формулировки теорем Чевы и Менелая для гиперболической плоскости данной статьи равносильны сформулированным в книге В.Ф.Кагана [5].

Замечание 2. Поскольку всякое риманово пространство, допускающее геодезическое отображение на евклидово пространство, есть пространство постоянной кривизны [3, с.501], то среди римановых пространств непостоянной кривизны, вероятно, нет аналогов классических теорем Чевы и Менелая.

Список литературы: 1. *Апанасов Б.Н.* Дискретные группы преобразований и структуры многообразий. Новосибирск, 1983. 240с. 2. *Адамар Ж.* Элементарная геометрия. Ч.2. М., 1958. 650с. 3. *Рашевский П.К.* Риманова геометрия и тензорный анализ. М., 1967. 664с. 4. *Эрдниев Б., Манцаев Н.* Теоремы Чевы и Менелая//Квант. 1990. N3. С.56-59. 5. *Каган В.Ф.* Основания геометрии. Ч.1. М., 1949. 492с.

Поступила в редколлегию 11.10.90

УДК 514.172.45

А.И. Недяник

К ВОПРОСУ О КОНЕЧНОСТИ ЧИСЛА КОМБИНАТОРНЫХ ТИПОВ БЕСКОНЕЧНЫХ ВЫПУКЛЫХ МНОГОГРАННИКОВ С РАВНОУГОЛЬНЫМИ ГРАНЯМИ

В статье А.И.Гурина [1] доказывается теорема о конечности числа бесконечных выпуклых многогранников с равноугольными гранями (с точностью до комбинаторной эквивалентности). Нами предлагается простое решение данного вопроса во всей его полноте, т.е. без исключения из рассмотрения остроугольных граней. Устанавливается, кроме того, что все такие многогранники с полной кривизной 2π получаются однотипно из некоторых замкнутых выпуклых многогранников с равноугольными гранями. Это простое решение основано на тонком методе, развитом в работе А.Д.Милки [2], применимость которого в общем случае, из-за наличия одноугольников, казалась проблематичной. В отличие от решения для случая, когда одноугольники отсутствуют, которое по существу содержится, если перейти к сферическому изображению, в теореме А.Д.Милки о конечности числа сетей на сфере с равноугольными вершинами (см. [2]).

Постановка вопроса. В отличие от статьи А.И.Гурина вместо так называемого исходного многогранника нам понадобится другое понятие. Бесконечный (полный) выпуклый многогранник с равноугольными гранями называется *неприводимым*, если число принадлежащих ему одноугольных граней нельзя уменьшить (посредством отождествления его сторон) с сохранением равноугольности всех других граней и выпуклости самого многогранника (отсутствие условных ребер). В каждой вершине неприводимого многогранника, отличного от трехгранного угла, имеется не более одного одноугольника. В самом деле, два смежных по бесконечному ребру одноугольника всегда можно заменить, очевидно, одним. А несмежных одноугольников, инцидентных одной и той же вершине, быть не может, так как в противном случае сумма всех плоских углов в ней была бы больше 360° (начиная с $m\geq 2$ углы каждого бесконечного m-угольника, которые в этом случае должны прилегать к четырем бесконечным ребрам наших одноугольников, не меньше 90°).

Следует подчеркнуть, что число одноугольников не всегда можно уменьшить до нуля. Рассмотрим, например, многогранник, состоящий из двух равносторонних треугольников ABC и BCD (двугранный угол при ребре BC равен $\gamma<180°$), четырех двуугольных граней с прямыми углами, смежных данным треугольникам по свободным ребрам, и двух одноугольных граней в вершинах A и D. При удалении обоих одноугольников (путем отождествления их сторон) треугольники ABC и BCD получающегося многогранника будут лежать при его реализации в одной плоскости, т. е. ребро BC станет условным.

Любой бесконечно выпуклый многогранник с равноугольными гранями можно получить соответствующего неприводимого, вклеивая недостающее число одноугольников. Поэтому каждый неприводимый многогранник, имеющий хотя бы одну одноугольную грань, порождает по сути счетную серию бесконечных выпуклых многогранников с равноугольными гранями. А значит, с точностью до бесконечных серий, рассматриваемый вопрос сводится к вопросу о конечности числа комбинаторных типов неприводимых многогранников.

Теорема. *За исключением трех бесконечных серий существует лишь конечное число комбинаторно различных неприводимых бесконечных выпуклых многогранников с равноугольными гранями.* (Бесконечные серии будут получены в ходе доказательства этой теоремы).

Вспомогательные результаты. Пусть в вершине V неприводимого многогранника сходится p конечных граней и q бесконечных. Угол конечной равноугольной грани с n вершинами равен $\pi-\frac{2\pi}{n}$, а бесконечной m-равноугольной $\beta_m=\pi-\frac{\pi}{m}+\delta$, где $\delta>0$ - избыток угла грани (по отношению к минимально возможному значению $\pi-\frac{\pi}{m}$). А значит, для кривизны K_V справедливо соотношение

$$K_V+\delta_V=\sum_1^p \frac{2\pi}{n_i}+\sum_1^q \frac{\pi}{m_j}-\pi(p+q-2)>0, \qquad (1)$$

где δ_V - избыток вершины. Для вершин, к которым бесконечные грани не подходят, $\delta_V=0$. Так как $n_i\geq3$ и каждое $m_j\geq2$, за исключением, может быть, одного, равного 1 (в силу неприводимости многогранника), то из (1) следует, что $p+q<6$, т. е. валентность любой вершины неприводимого многогранника не больше пяти (трехгранный угол при этом не рассматривался, но утверждение верно и для него).

При $q=0$ решение (1) в натуральных числах (n_i) по существу очевидны, так как угол конечного равноугольника равен углу соответствующего правильного многоугольника. Все они содержатся в таблице, которая помещена в книге В. А. Залгаллера [3, с. 9-10]. Кроме того, с ее помощью можно получить решения (1) и при $q \neq 0$, полагая $\frac{\pi}{m_j} = \frac{2\pi}{n_{p+j}}$, т. е. $2m_j = n_{p+j}$. Причем, даже в случае, когда одно из m_j равно 1, если $p+q>3$ (он сводится, очевидно, к случаю $p+q-1$). Если же $p+q=3$ и, скажем, $m_1=1$, то две остальные грани в рассматриваемой вершине - бесконечные и, значит, решением (1) является тройка чисел $\bar{1}$, $\bar{m}_0$, m (черта указывает на то, что соответствующая грань - бесконечная), где m_0 и m - любые натуральные числа, удовлетворяющие условию $m \geq m_0 \geq 2$.

Основная лемма. *Сумма избытков δ_i всех вершин любого бесконечного выпуклого многогранника с равноугольными гранями равна $2\pi-K$, где K - полная кривизна многогранника.*

Доказательство. Пусть v, g и s - число вершин, ребер и граней многогранника соответственно и пусть a_n - число конечных n-угольников, принадлежащих ему, а b_m - число бесконечных m-угольников. Сумма всех плоских углов нашего многогранника, очевидно, равна

$$\sum_n \pi(n-2)a_n + \sum_m \pi(m-1)b_m + \sum_1^v \delta_i,$$

где δ_i - избыток i-й вершины. Но поскольку $\sum_n \pi a_n + \sum_m \pi(m-1)b_m = 2g$,

то $\sum_n \pi(n-2)a_n + \sum_m \pi(m-1)b_m = 2\pi(g-s)$ или по формуле Эйлера $2\pi(v-1)$. Таким образом, сумма всех плоских углов многогранника равна $2\pi(v-1) + \sum_1^v \delta_i$. Поэтому $K = 2\pi v - [2\pi(v-1) + \sum_1^v \delta_i] = 2\pi - \sum_1^v \delta_i$. Отсюда и следует утверждение леммы.

Из основной леммы следует, что для бесконечного выпуклого многогранника с полной кривизной 2π сумма избытков всех его вершин равна нулю. А значит, на таком многограннике одноугольных граней нет совсем, а сумма углов любой бесконечной m-угольной грани $(m>1)$ в точности равна $\pi(m-1)$, т. е. все его бесконечные ребра параллельны. Стало быть, из двух усеченных экземпляров многогранника (сечение проводится перпендикулярно бесконечным ребрам) можно составить замкнутый выпуклый многогранник с равноугольными гранями, теорема о конечности для которых доказана Ю.А.Пряхиным [4]. Так как каждый замкнутый выпуклый многогранник с равноугольными гранями или правильногранный, или получается из правильногранного с сохранением комбинаторного строения параллельными сдвигами граней (см. теорему 4 в [2]), то это позволяет найти все бесконечные выпуклые многогранники с равноугольными гранями, полная кривизна которых равна 2π, воспользовавшись результатом, полученным в [3].

Заметим еще, что если под δ_i понимать избыток не вершины, а избыток углов его грани (он больше нуля только для бесконечных граней), то утверждение леммы остается в силе для любого бесконечного выпуклого многогранника, в частности, с равноугольными вершинами (см. [5]). В этом случае оно просто равносильно, если перейти к сферическому изображению, теореме Гаусса-Бонне для соответствующего сферического многоугольника.

Из основной леммы следует, что $\sum\limits_{V} (K_V+\delta_V)=2\pi$, причем $\tilde{K}_V=K_V+\delta_V$ не зависит, как видно из соотношения (1), от δ_V и положительно. Будем называть $\tilde{K}_V$ предельной кривизной вершины V ($K_V=\tilde{K}_V$ при $\delta_V=0$). В отличие от обычной кривизны предельная кривизна любой вершины бесконечного выпуклого многогранника с равноугольными гранями полностью и однозначно определяется ее комбинаторным типом, т.е. сходящимися в ней гранями, и бесконечными в том числе, хотя углы последних могут иметь разную величину.

В случае конечности числа типов вершин их предельная кривизна отделена от нуля некоторым положительным числом и, значит, по основной лемме число вершин всякого неприводимого многогранника ограничено сверху. А так как валентность вершины не больше пяти, то отсюда следует, что число таких многогранников конечно. Поэтому для доказательства теоремы достаточно рассмотреть те типы вершин, которые входят в бесконечные серии вершин. Получить их можно непосредственно из уже упоминавшейся таблицы В.А.Залгаллера бесконечных серий вершин неприводимых многогранников, воспользовавшись соображением относительно решения (1). При этом типы вершин, к которым подходят только конечные грани, содержатся, как отмечалось, в самой таблице В.А.Залгаллера: (3, 6, n), (4, 4, n), (3, 3, 3, n). Производными от них для случая, когда в вершине сходятся и бесконечные грани, являются $(3,\ 6,\ \bar{m})$, $(4,\ 4,\ \bar{m})$ и $(3,\ 3,\ 3,\ \bar{m})$, если вместо конечного n-угольника взять бесконечный m-равноугольник, $(3,\ 3,\ \bar{m})$, $(3,\ \bar{3},\ \bar{m})$ и $(\bar{2},\ \bar{2},\ \bar{m})$, если дополнительно вместо 6-угольника и 4-угольника берется бесконечный 3-угольник и 2-угольник соответственно. Кроме того, имеется также серия $(3,\ \bar{2},\ \bar{m})$ - производная от $(3,\ 4,\ n)$, отсутствующая в таблице В.А.Залгаллера только потому, что при $n \geq 12$ не существует соответствующего выпуклого трехгранного угла, хотя решение (1) при любом n существует (таковыми являются и типы $(3,\ 3,\ n)$ и $(3,\ 5,\ n)$, но они не могут дать бесконечных серий в нашем случае, так как 3 и 5 - нечетные числа). К бесконечным сериям относится и найденный выше тип $(\bar{1},\ \bar{m}_0,\ \bar{m})$. Все эти типы приведены в отдельной таблице, где рядом с типами вершин приводятся их предельные кривизны. Учтена при этом и возможность наличия в соответствии с понятием неприводимого многогранника одноугольников в четырехгранных вершинах (они взяты в скобки).

Следуя А.Д.Милке [2], будем называть n-угольник с $n \geq 42$ особой гранью неприводимого многогранника. Как видно из таблицы В.А.Залгаллера, две различные особые грани не могут иметь друг с другом общих вершин. То же самое верно и для бесконечных граней с $m \geq 21$ $(=42:2)$. Бесконечные m-равноугольные грани с $m \geq 21$ также будем называть особыми. Заметим, что в вершине типа $(\bar{1},\ \bar{m}_0,\ \bar{m})$ может быть только одна особая грань (m-угольная), потому что при $m, m_0 \geq 21$ рассматриваемые многогранники вообще не могут иметь вершин такого типа. Тем самым любые две особые грани не могут иметь друг с другом общих вершин.

Доказательство теоремы.

Поскольку две различные особые грани не имеют общих вершин и по основной лемме сумма приведенных кривизн всех вершин равна 2π, то, как видно из нашей таблицы, на многограннике может быть не более двух особых граней, в том числе не более одной конечной особой грани. Действительно, если конечных особых граней две, то полная кривизна многогранника $\sum\limits_V (K_V+\delta_V) \geq 2\cdot 2\pi > 2\pi$ (см. левую часть таблицы), что невозможно. Если бы имелось три бесконечные особые грани, то $\sum\limits_V (K_V+\delta_V) \geq 3\cdot\pi > 2\pi$ (см. правую часть таблицы), что тоже невозможно. И, наконец, если бы была одна конечная особая грань и одна бесконечная, то $\sum_{V} (K_V+\delta_V)\geq 2\pi+\pi>2\pi$, что также невозможно.

Итак, по основной лемме возможны такие наборы особых граней: 1) одна конечная особая грань, 2) одна бесконечная особая грань, 3) две бесконечные особые грани. В случае отсутствия особых граней число комбинаторно различных неприводимых многогранников, как отмечалось выше, конечно (при $n<42$, $m<21$ для числа вершин неприводимого многогранника получается оценка: $v\leq 1722$; для сравнения заметим, что при $n<12$, $m<12$ $v\leq 264$). Поэтому нам достаточно рассмотреть случаи, когда особые грани имеются.

1. Имеется конечная особая грань. В ситуации, которую рассматривает А.Д.Милка в своей работе, этот случай был тривиален, поскольку давал лишь конечное число комбинаторно различных многогранников (в силу того, что каждая вершина данной особой грани должна быть соединена хотя бы одним ребром с вершиной, ей не принадлежащей, общее число которых не более чем $2\pi/c$, где c нижняя грань (приведенных) кривизн неособых вершин). Но в нашей ситуации к конечной особой грани могут подходить и бесконечные грани. Ими могут быть, как видно из таблицы, только треугольная и двуугольная грани. Однако первая возможность исключается, поскольку при наличии вершины типа $(\bar{2}, \bar{3}, n)$ в образовавшийся свободный угол, меньший $8\pi/21$, никакую бесконечную грань вклеить нельзя. Значит, все вершины особой грани имеют тип $(\bar{2}, \bar{2}, n)$, а сам многогранник комбинаторно эквивалентен усеченному конусу с конечным основанием. Это дает первую бесконечную серию, о которой говорится в теореме.
Существуют, конечно, и бесконечные выпуклые многогранники с вершинами типа $(\bar{2}, \bar{1}, \bar{2}, n)$, но все они не являются, очевидно, неприводимыми.

2. Имеется одна бесконечная особая грань. Этот случай рассматривается аналогично предыдущему. Отличие в том, что бесконечные треугольные грани здесь могут быть, но они могут подходить лишь к крайним конечным ребрам особой грани. То есть двуугольник, подходящий к конечному ребру, все равно найдется, а тогда, как видно из нашей таблицы, и ко всем другим конечным ребрам особой грани должны подходить двуугольные грани. Стало быть, опять приходим к неприводимому многограннику, комбинаторно эквивалентному усеченному конусу, но уже с бесконечным основанием. Это дает вторую бесконечную серию, о которой гово-

...ются в теореме. При этом многогранники с вершинами типа ($\tilde{2}$, $\bar{1}$, $\tilde{2}$, $\tilde{m}$) тоже существуют, но все они, очевидно, приводимы.

Если к конечным ребрам особой грани подходят только конечные грани, то вершины, не принадлежащие ей, имеют ограниченную в совокупности некоторым положительным числом предельную кривизну, т.е. их конечное число и, значит, число вершин особой грани не может быть сколь угодно большим. Это рассуждение сохраняет свою силу и тогда, когда конечные грани подходят ко всем конечным ребрам особой грани, кроме двух крайних.

3. Имеются две особые грани (бесконечные). Число вершин конечных граней может быть неограниченным, как следует из сказанного только что, лишь тогда, когда имеются ребра, соединяющие вершины данных особых граней, не инцидентные их бесконечным ребрам. Но тогда, как следует из нашей таблицы, обязательно найдется правильный треугольник или прямоугольник, которому такое конечное ребро принадлежит.

Тип вершины и ее предельная кривизна $\tilde{K}$		Тип вершины и ее предельная кривизна $\tilde{K}$	
3, 6, n 4, 4, n 3, 3, 3, n 3, $\bar{3}$, n $\tilde{2}$, $\bar{1}$, $\tilde{2}$, n	$\frac{2\pi}{n}$	3, 6, $\tilde{m}$ 4, 4, $\tilde{m}$ 3, 3, 3, $\tilde{m}$ 3, $\bar{3}$, ($\bar{1}$), $\tilde{m}$ $\tilde{2}$, ($\bar{1}$), $\tilde{2}$, $\tilde{m}$ 4, $\tilde{2}$, ($\bar{1}$), $\tilde{m}$	$\frac{\pi}{m}$
$\bar{1}$, $\tilde{m}_0$, $\tilde{m}$ ($m \ge m_0 \ge 2$)	$\frac{\pi}{m}+\frac{\pi}{m_0}$	3, $\tilde{2}$, ($\bar{1}$), $\tilde{m}$	$\frac{\pi}{m}+\frac{\pi}{6}$

Если это прямоугольник, то концами ребра являются вершины типа (4, 4, $\tilde{m}$), поскольку вершина (4, $\tilde{2}$, ($\bar{1}$), $\tilde{m}$) может быть инцидентна только бесконечному ребру особой грани. Поэтому к каждому конечному ребру каждой из двух особых граней подходит тоже прямоугольник. Значит, плоскости особых граней параллельны, т.е. получающийся многогранник представляет собой прямую призму с бесконечными основаниями. Это дает третью (и последнюю) бесконечную серию, о которой говорится в теореме.

Покажем теперь, что случай, когда конечное ребро (обозначим его через A_1B_1) принадлежит треугольнику, невозможен. Действительно, валентность хотя бы одной из вершин: A_1 или B_1 –

11-381

не меньше четырех. А так как в таблице нет пятигранных вершин, то эта валентность в точности равна четырем. Пусть A_1 - четырехгранная вершина. По предположению, она не инцидентна бесконечному ребру особой грани. Поэтому в свободный угол к ребру A_1B_1 можно подклеить только треугольник $A_1A_2B_1$ (тип вершины A_1 - $(3, 3, 3, \bar{m})$). Стало быть, вершина B_1 - тоже четырехгранная. К ребру B_1A_2 в свободный угол можно подклеить тоже только треугольник $B_1B_2A_2$ (тип вершины B_1 - $(3, 3, 3, \bar{m})$). Продолжая этот процесс, получим цепочку треугольников с вершинами того же типа: $A_1, A_2, A_3, \ldots$, принадлежащих одной особой грани, и $B_1, B_2, B_3, \ldots$, принадлежащих другой особой грани. Поскольку грани бесконечны, то процесс этот заведомо обрывается по достижении вершины, инцидентной бесконечному ребру, скажем, вершины A_K. Как видно из таблицы, в свободный угол при этой вершине с ребром A_KB_{K-1} можно вклеить только бесконечную треугольную или двуугольную грань (тип вершины A_K - $(3, \bar{3}, \bar{m})$ или $(3, \bar{2}, \bar{m})$). Но тогда в вершине B_{K-1} сходятся, не считая особой грани, два треугольника и еще одна бесконечная грань, что невозможно (такого типа вершин в таблице нет совсем). Теорема доказана.

Замечание. По аналогии с [3, с. 14] бесконечный выпуклый многогранник с равноугольными гранями называется простым, если он не допускает рассечения плоскостью на два других многогранника с равноугольными гранями (сечение должно идти по ребрам). Как и у неприводимого многогранника, в каждой вершине простого не может быть двух одноугольников. И хотя для многогранного угла оба определения тоже равносильны, в случае усеченных конусов это уже не так. Если $A_1, A_2, \ldots, A_{2K}$, например, - последовательные вершины бесконечного основания, не инцидентные бесконечным ребрам, то при любом $k \geq 1$ (и большом m) существует бесконечный выпуклый многогранник с равноугольными гранями, у которого вершины A_1 и A_{2K} типа $(\bar{2}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{m})$, а все вершины $A_2, A_3, \ldots, A_{2K-1}$ типа $(\bar{2}, \bar{2}', \bar{m})$, где угол грани $\bar{2}$ - прямой, а $\bar{2}'$ равен $\beta > 90°$. Все его прямоугольные двуугольные грани образуют с основанием равные двугранные углы. При $k=1$ этот многогранник - составной, при $k > 1$ - простой. Аналогичное построение можно осуществить также для конечной четноугольной грани-основания. Обобщается оно и на случай любого числа вершин $(\bar{2}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{m}(n))$. Из этих примеров видно, почему для нас понятие неприводимого многогранника оказалось предпочтительней.

Список литературы: 1. *Гурин А. М.* Бесконечные выпуклые многогранники с равноугольными гранями//Укр. геометр. сб. 1991. Вып. 34. С. 12-36. 2. *Милка А. Д.* Почти правильные многогранники//Исследования по геометрии «в целом» и математическому анализу. Новосибирск, 1987. С. 136-141. 3. *Залгаллер В. А.* Выпуклые многогранники с правильными гранями//Зап. науч. семинаров ЛОМИ. 1966. N2. 220с. 4. *Пряхин Ю. А.* Выпуклые многогранники, грани которых равноугольны или сложены из равноугольных//Зап. науч. семинаров ЛОМИ. 1974. 45. С. 111-112. 5. *Гурин А. М.* Бесконечные выпуклые многогранники с равноугольными гранями//Укр. геометр. сб. 1984. Вып. 27. С. 26-237.

Поступила в редколлегию 13.11.89

УДК 514

Ю. А. Николаевский

ВПОЛНЕ ОМБИЛИЧЕСКИЕ ПОДМНОГООБРАЗИЯ В $G(2,n)$. II

Настоящая статья является продолжением [1], где была сформулирована теорема о классификации вполне омбилических подмногообразий размерности ≥ 3 в многообразии Грассмана $G(2,n)$. С одной стороны, ее доказательство опиралось на две леммы, а с другой стороны, формулировка теоремы конкретизировалась в утверждениях а) и б). Здесь будут доказаны эти леммы и утверждения.

Подмногообразие $N^l \subset M^n$ называется *вполне омбилическим*, если его вторая квадратичная форма пропорциональна первой: $h(X,Y)=g(X,Y)H$, где h – вторая квадратичная форма, g – метрика в M (и индуцированная в N), $H=\frac{1}{l}\,\mathrm{Tr}h$ – вектор средней кривизны, X и Y – произвольные векторные поля, касательные к N. Вполне омбилическое подмногообразие называется *вполне геодезическим*, если $H=0$ (и $h=0$), *внешней сферой*, если $H\neq0$ и $DH=0$ (где D – дифференцирование в нормальной связности), *существенно вполне омбилическим*, если $DH\neq0$.

Имеет место

Теорема. *Пусть* $F^l\subset G(2,n)$ $(l\geq3)$ – *вполне омбилично. Тогда либо*

1. F^l – *вполне геодезично, либо*

2. F^l – *внешняя сфера – она является малой сферой на а) сфере-диагонали* $S^{l+1}\subset G^+(2,n)$ *или на б) стандартной сфере* $S^{l+1}\subset G^+(2,n)$, *либо*

3. F^l - *существенно вполне омбилично и тогда а) F^l - вполн омбилическая гиперповерхность непостоянной средней кривизны $S^l\times S^1\subset G(2,n)$ или б) F^l - вполне омбилическое подмногообрази постоянной средней и секцио ной кривизны в $S_1^{l+1}\times S_2^{l+1}\subset G(2,n)$.*

Участвующие в формулировке теоремы вполне геодезически сферы и произведения сфер являются типичными геодезически подмногообразиями в $G(2,n)$ (см. результаты Чена-Нагано в [1]).

Формулы Гаусса-Кодацци для вполне омбилического подмногообразия имеют вид:

$$\tilde{R}(X,Y,Z,T)=R(X,Y,Z,T)+\alpha^2(g(X,Z)g(Y,T)-g(X,T)g(Y,Z)), \qquad (1)$$

$$\tilde{R}(X,Y,Z,\xi)=g(Y,Z)g(D_XH,\xi)-g(X,Z)g(D_YH,\xi), \qquad (2)$$

где $\tilde{R}$ и R - тензоры кривизны M и N соответственно; $\alpha=\|H\|$ - средняя кривизна подмногообразия $N\subset M$; X, Y, Z, T - касательные, ξ - нормальные векторные поля вдоль N.

Мы рассматриваем существенно вполне омбилические подмногообразия в многообразии Грассмана $G(2,n)=SO(n)/SO(n-2)\times SO(2)$ $(n\geq 4)$.

Касательное пространство $\mathfrak{M}=T_0G(2,n)$ можно отождествить с пространством прямоугольных $(n-2)\times 2$-матриц, на котором определены «тройная скобка Ли»: $[[X,Y],Z]=(XY'-YX')Z-Z(X'Y-Y'X)$, тензор кривизны: $\tilde{R}(X,Y)Z=-[[X,Y],Z]$, скалярное произведение: $g(X,Y)=\mathrm{Tr}(XY')$, действие группы изотропии $SO(n-2)\times SO(2)$: $\mathrm{Ad}_{U+V}X=VXU'$, $U\in SO(n-2)$, $V\in SO(2)$, сохраняющее $\tilde{R}$, скобку и g (здесь $X,Y,Z\in\mathfrak{M}$, $'$ обозначает транспонирование, Tr - след).

Через DH, DDH и т.д. будем обозначать линейные оболочки соответствующих производных вектора H в нормальной связности. Одномерное пространство, порожденное вектором H, бкдем обозначать (H).

В [1] сформулированы следующие леммы.

Лемма 1. *Пусть подпространство $\mathfrak{S}\subset\mathfrak{M}$ размерности $q\geq 3$ касается вполне геодезической сферы в $G(2,n)$. Тогда с точностью до действия группы изотропии в $\mathfrak{M}$ оно натянуто на векторы*

а) $$\left[\begin{array}{c|c} \underbrace{10\ldots0}_{q} & 0\ldots0 \\ 0\ldots0 & 0\ldots0\end{array}\right],\ \left[\begin{array}{c|c} \underbrace{010\ldots0}_{q} & 0\ldots0 \\ 0\ldots0 & 0\ldots0\end{array}\right],\ \ldots,\ \left[\begin{array}{c|c} \underbrace{0\ldots01}_{q} & 0\ldots0 \\ 0\ldots0 & 0\ldots0\end{array}\right] \quad (q\leq n-2)$$

или на векторы

б) $\begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix}10\ldots0\\0\ldots0\end{matrix}}_{q} & \Big| & \underbrace{\begin{matrix}0\ldots0\\10\ldots0\end{matrix}}_{q} & \Big| & \begin{matrix}0\ldots0\\0\ldots0\end{matrix}\end{pmatrix},\ldots,\ \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix}0\ldots01\\0\ldots0\end{matrix}}_{q} & \Big| & \underbrace{\begin{matrix}0\ldots0\\0\ldots01\end{matrix}}_{q} & \Big| & \begin{matrix}0\ldots0\\0\ldots0\end{matrix}\end{pmatrix}$ $(q\leq n/2-1)$

Лемма 2. *Пусть подпространство $6\subset\mathfrak{M}$ касается вполне омбилического подмногообразия размерности $l\geq3$ в $G(2,n)$.*

Тогда либо

а) с точностью до действия группы изотропии в $\mathfrak{M}$ оно натянуто на векторы

$$X_1=\left(\begin{array}{c|c|c|c}\underbrace{\begin{matrix}10\ldots0\\0\ldots0\end{matrix}}_{l-1} & \begin{matrix}0\\0\end{matrix} & \begin{matrix}0\\0\end{matrix} & \begin{matrix}0\ldots0\\0\ldots0\end{matrix}\end{array}\right)\qquad X_2=\left(\begin{array}{c|c|c|c}\underbrace{\begin{matrix}010\ldots0\\0\ldots0\end{matrix}}_{l-1} & \begin{matrix}0\\0\end{matrix} & \begin{matrix}0\\0\end{matrix} & \begin{matrix}0\ldots0\\0\ldots0\end{matrix}\end{array}\right)$$

$$X_{l-1}=\left(\begin{array}{c|c|c|c}\underbrace{\begin{matrix}0\ldots01\\0\ldots0\end{matrix}}_{l-1} & \begin{matrix}0\\0\end{matrix} & \begin{matrix}0\\0\end{matrix} & \begin{matrix}0\ldots0\\0\ldots0\end{matrix}\end{array}\right),\qquad X_l=\left(\begin{array}{c|c|c|c}\underbrace{\begin{matrix}0\ldots0\\0\ldots0\end{matrix}}_{l-1} & \begin{matrix}a\\0\end{matrix} & \begin{matrix}0\\b\end{matrix} & \begin{matrix}0\ldots0\\0\ldots0\end{matrix}\end{array}\right)$$

$ab\neq0$.

При этом $D_{X_i}H=0$ $(i=1,2,\ldots,l-1)$ в точке O, а векторы $D_{X_l}H$ и H коллинеарны вектору

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c}\underbrace{\begin{matrix}10\ldots0\\0\ldots0\end{matrix}}_{l-1} & \begin{matrix}b\\0\end{matrix} & \begin{matrix}0\\-a\end{matrix} & \begin{matrix}0\ldots0\\0\ldots0\end{matrix}\end{array}\right)\qquad \textit{либо}$$

б) с точностью до действия группы изотропии в $\mathfrak{M}$ оно натянуто на векторы

$$X_i=\left(\begin{array}{c|c|c|c|c}\overbrace{\begin{matrix}0\ldots0a0\ldots0\\0\ldots\ldots\ldots0\end{matrix}}^{l+1} & \begin{matrix}0\\0\end{matrix} & \overbrace{\begin{matrix}0\ldots\ldots\ldots0\\0\ldots0b0\ldots0\end{matrix}}^{l+1} & \begin{matrix}0\\0\end{matrix} & \begin{matrix}0\ldots0\\0\ldots0\end{matrix}\end{array}\right)\qquad \begin{matrix}i=1,2,\ldots,l;\ a^2\neq b^2;\\ ab\neq0.\end{matrix}$$

$$\uparrow i \qquad\qquad\qquad \uparrow l+i+1$$

При этом

$$H=\left(\begin{array}{c|c|c|c|c}\underbrace{\begin{matrix}0\ldots0\\0\ldots0\end{matrix}\ \begin{matrix}q\\0\end{matrix}}_{l+1} & \underbrace{\begin{matrix}0\ldots0\\0\ldots0\end{matrix}\ \begin{matrix}0\\r\end{matrix}}_{l+1} & \begin{matrix}0\ldots0\\0\ldots0\end{matrix}\end{array}\right),\ qr\neq0;$$

$$
D_{X_i}H=\left(\begin{array}{c|c|c|c|c}
\overbrace{0\ldots 0b0\ldots 0}^{l+1} & 0 & \overbrace{0\ldots\ldots\ldots\ldots 0}^{l+1} & 0 & 0\ldots 0\\
0\ldots\ldots\ldots 0 & 0 & 0\ldots 0{-a}0\ldots 0 & 0 & 0\ldots 0
\end{array}\right)c_i,
$$

$$
\qquad\qquad\uparrow i \qquad\qquad\qquad\qquad \uparrow l+i+1
$$

$c_i\neq 0$; $i=1,2,\ldots,l$;

$D_{X_i}D_{X_j}H=0$ *при* $i\neq l$, *компонента вектора* $D_{X_i}D_{X_j}H$, *ортогональная к пространству* $(H)\dot{+}DH$, *одна и та же при всех* $i=1,2,\ldots,l$ *и равна*

$$
\left(\begin{array}{c|c|c|c|c}
\underbrace{0\ldots 0}_{l+1} & r & \underbrace{0\ldots 0}_{l+1} & 0 & 0\ldots 0\\
0\ldots 0 & 0 & 0\ldots 0 & -q & 0\ldots 0
\end{array}\right)c,\quad c\neq 0
$$

и, наконец, $D_{X_i}D_{X_j}D_{X_k}H$ *лежит в пространстве* $(H)\dot{+}DH\dot{+}DDH$ *при всех* $i,j,k=1,2,\ldots,l$. *В частности,* $a=\mathrm{const}$, *так как* $DH\perp H$.

Мы будем придерживаться сквозной нумерации параграфов (вместе с [1]), нумерация формул и ссылок на литературу - самостоятельная.

3. Доказательство лемм.

Доказательство леммы 1. Согласно теореме Картана [2], касательное пространство ко вполне геодезическому многообразию в симметрическом пространстве является тройной системой Ли. Поскольку мы рассматриваем задачу "в точке", можно брать вместо многообразия Грассмана $SO(n)/S(O(n-2)\times O(2))$ многообразие Грассмана $O(n)/O(n-2)\times O(2)$ (это : м удобнее, так как шире группа изотропии).

Рассмотрим несколько случаев.

а) В $\mathfrak{G}$ есть матрица ранга 1. Действуя группой изотропии, приводим ее к виду

$$
X=\begin{pmatrix}10\ldots 0\\ 00\ldots 0\end{pmatrix}
$$

(полярное разложение матрицы [3]). Теперь для любого $Y\perp X$

$$
Y=\left(\begin{array}{c|c}0 & \ldots u\\ a & \ldots v\end{array}\right)
$$

$u,v\in E^{n-3}$, $a\in R$, должны иметь $-[[Y,X],X]=cY$ ($c>0$ - кривизна нашей сферы). Отсюда следует, что $c=1$, $v=0$.

Вычисляя теперь $-[[X,Y],Y]=cX$, получаем, что $au=0$. Поскольку Y выбирался произвольно и $\dim\mathfrak{G}\geq 3$, будет $a=0$, т. е. $\mathfrak{G}$ натянуто на l векторов вида

$$\begin{pmatrix} * \ldots\ldots * \\ 0 \ldots\ldots 0 \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что теперь уже $\mathfrak{G}$ - тройная система Ли постоянной кривизны. Действием группы изотропии приходим к а) леммы 1.

б) Все матрицы из $\mathfrak{G}$ имеют ранг 2, но существует матрица с равными сингулярными числами. Действуя группой изотропии, получим

$$X=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0\ldots\ldots 0 \\ 0 & 1 & 0\ldots\ldots 0 \end{array}\right).$$

Для $Y\in\mathfrak{G}$, $Y\perp X$ вида

$$Y=\left(\begin{array}{cc|c} a & b & u \\ d & -a & v \end{array}\right)$$

$(u, v\in E^{n-4};\ a, b, d\in R)$ имеем $-[[Y,X],X]=cY$ $(c>0)$, $\frac{c}{2}=c\|X\|^{-2}$ - кривизна нашей сферы, т. е.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 2(b-d) & u \\ 2(d-b) & 0 & v \end{array}\right)=cY.$$

При $c\neq 1$ получаем противоречие с $\dim\mathfrak{G}\geq 3$. Тогда $a=b=d=0$. Из равенства $-[[X,Y],Y]=\frac{1}{2}X\|Y\|^2$ получим, что $\|u\|=\|v\|$, $\langle u, v\rangle=0$. Выбирая любой $Y\in\mathfrak{G}$, $Y\perp X$ (и считая, что $\|Y\|^2=2$), действием подгруппы $O(n-4)\subset O(n-2)\times I_2\subset(n-2)\times O(2)$ группы изотропии приведем Y к виду

$$Y=\left(\begin{array}{cc|cc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 0\ldots\ldots 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\ldots\ldots 0 \end{array}\right).$$

Теперь для всякого $Z\perp X, Y$ из $\mathfrak{G}$ будет $-[[Z,Y],Y]=2Z$, $-[[Y,Z],Z]=Y\cdot\|Z\|^2$. Поэтому

$$Z=\left(\begin{array}{cc|cc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & w \\ 0 & 0 & 0 & 0 & y \end{array}\right)$$

$w, y\in E^{1-4}$, $\|w\|=\|y\|$, $\langle W, y\rangle=0$. Действуя дальше таким же образом до исчерпания $\mathfrak{G}$, обнаружим, что тройная система Ли натянута на векторы

$$\left(\begin{array}{cc|cc|c|cc|c} a_1 & 0 & a_2 & 0 & & a_q & 0 & 0\ldots\ldots 0 \\ 0 & a_1 & 0 & a_2 & & 0 & a_q & 0\ldots\ldots 0 \end{array}\right),$$

a_1, $a_2, \ldots,$ a_q - всевозможные вещественные числа. Действием подгруппы $O(2q)\subset O(n-2)\times I_2\subset O(n-2)\times O(2)$ группы изотропии приходим к б) леммы 1.

в) Все матрицы из $\mathfrak{G}$ имеют ранг 2 и попарно различные сингулярные числа. Возьмем $X\in\mathfrak{G}$ произвольно и приведем ее к виду

$$X=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0\ldots 0 \\ 0 & \lambda & 0\ldots 0 \end{array}\right),$$

$\lambda>1$. Для любого $Y\perp X$ из $\mathfrak{G}$ будет

$$Y=\left(\begin{matrix} a & b \\ d & r \end{matrix}\;\middle|\;\begin{matrix} u \\ v \end{matrix}\right),$$

(u, $v\in E^{n-4}$, $a, b, d, r\in\mathbb{R}$, $a+r\lambda=0$). Получим $-[[Y,X],X]=cY$ $(c>0)$, откуда

$$\left(\begin{matrix} 0 & b(\lambda^2+1)-2\lambda d \\ d(\lambda^2+1)-2\lambda b & 0 \end{matrix}\;\middle|\;\begin{matrix} u \\ \lambda^2 v \end{matrix}\right)=cY.$$

Если $c\neq1$, λ^2, то легко видеть, что $\dim\mathfrak{G}\leq2$. При $c=\lambda^2$ будет $\dim\mathfrak{G}=1$ (т. е. $Y=0$). Наконец, при $c=1$ получим $\lambda=2$, $a=r=0$, $v=0$, $b=d$. Вычисляя теперь $[[X,Y],Y]$, получаем, что $\|u\|=b\sqrt{3}$ для всякого Y из $\mathfrak{G}$, $Y\perp X$. Отсюда $\dim\mathfrak{G}\leq2$. Противоречие.

Лемма 1 доказана.

Доказательство леммы 2. Мы условимся обозначать одной и той же буквой векторные поля и их значения в точке $O\in G(2,n)$. В силу [4] в размерности $l\geq4$ вполне омбилическое и не вполне геодезическое подмногообразие конформно плоско. Выберем в окрестности точки O ортонормированный базис $\{X_i\}_{i=1}^{l}$ главных направлений Риччи: $\mathrm{Ric}(X_i,X_j)=r_i\delta_{ij}$. Приравнивая нулю тензор Вейля, получим

$R(X_i,X_j)X_k=0$ при i,j,k попарно неравных, $R(X_i,X_j)X_j=\mu_{ij}X_i$, где $\mu_{ij}=(r_i+r_j)/(n-2)-r/(n-1)(n-2)$; r - скалярная кривизна.

Теперь из уравнений Кодацци (2) получаем $[\tilde R(X_i,X_j)X_k]^{\perp}=0$, $[\tilde R(X_i,X_j)X_j]^{\perp}=D_{X_i}H$ (i,j,k различны). Наконец, используя уравнение Гаусса (1), находим

$$\begin{cases}\tilde R(X_i,X_j)X_k=0,\\ \tilde R(X_i,X_j)X_j=(\mu_{ij}-\alpha^2)X_i+D_{X_i}H \\ \tilde R(X_i,X_j)X_j-\tilde R(X_i,X_k)X_k=(\mu_{ij}-\mu_{ik})X_i\end{cases} \tag{3}$$

(здесь $\alpha^2=g(H,H)$; i,j,k различны).

Условие существенной вполне омбиличности означает, что $DH\neq0$, т. е. хотя бы при одном $i=1,2,\ldots,l$ справедливо

$$[\tilde R(X_i,X_j)X_j]^{\perp}\neq0. \tag{4}$$

Условия (3, 4) выполнены и при $l=3$, так как в этом случае тензор Вейля тождественно равен нулю.

Вид тензора кривизны $\tilde R$ многообразия Грассмана $G(2,n)$ в точке O нам известен, это позволяет построить все подпространства $\mathfrak{G}\subset T_OG(2,n)$, удовлетворяющие условиям (3, 4).

Выберем в $\{X_i\}_{i=1}^{l}$ три вектора, среди которых есть хотя бы один такой, что $D_{X_i}H\neq 0$. Пусть это будут X_1, X_2, X_3. Для них выполнены условия (3,4) (теперь уже μ_{ij} и $D_{X_i}H$ не имеют геометрического смысла), которые можно переписать в виде

$$\begin{cases}\tilde{R}(X_i,X_j)X_k=0\\ \tilde{R}(X_i,X_j)X_j-\tilde{R}(X_i,X_k)X_k=c_{jk}X_i\end{cases}, \qquad (3')$$

i, j, k попарно различны,

$$\tilde{R}(X_i,X_j)X_j\notin(X_1,X_2,X_3) \qquad (4')$$

хотя бы при одном $i=1,2,3$ (условие (4'), вообще говоря, сильнее условия (4)).

Векторы X_i являются $(n-2)\times 2$-матрицами. Непосредственно проводим вычисления в соответствии с (3',4') по такому плану:

1) среди матриц X_1, X_2, X_3 есть матрица ранга 1;

2) среди X_1, X_2, X_3 нет матрицы ранга 1, но есть матрица с равными сингулярными числами;

3) среди X_1, X_2, X_3 нет матриц, описанных в 1) и 2).

С точностью до действия группы изотропии в $\mathfrak{M}=T_0G(2,n)$ получаем в случае 1):

а) $X_1=\left[\begin{array}{cccc|ccc}1&0&0&0&0&\ldots&0\\0&0&0&0&0&\ldots&0\end{array}\right]$, $X_2=\left[\begin{array}{cccc|ccc}0&1&0&0&0&\ldots&0\\0&0&0&0&0&\ldots&0\end{array}\right]$,

$X_3=\left[\begin{array}{cccc|ccc}0&0&a&0&0&\ldots&0\\0&0&0&b&0&\ldots&0\end{array}\right]$, $ab\neq 0$, $a^2+b^2=1$;

в случае 2) таких троек $\{X_1,X_2,X_3\}$ нет; в случае 3):

б) $X_1=\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc}a&0&0&0&0&0&0&\ldots&0\\0&0&0&b&0&0&0&\ldots&0\end{array}\right]$, $X_2=\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc}0&a&0&0&0&0&0&\ldots&0\\0&0&0&0&b&0&0&\ldots&0\end{array}\right]$,

$X_3=\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc}0&0&a&0&0&0&0&\ldots&0\\0&0&0&0&0&b&0&\ldots&0\end{array}\right]$, $ab\neq 0$, $|a|\neq|b|$, $a^2+b^2=1$.

Если $l=3$, то пространство $\mathfrak{G}$ уже найдено.

Пусть $l>3$.

а) Произвольный вектор X_k с $k>3$ имеет вид

$$X_k=\left[\begin{array}{cc|cc|c}0&0&\mu b&c&u\\q&r&d&-\mu a&v\end{array}\right],$$

где q, r, μ, c, $d\in\mathbb{R}$; u, v - $(n-6)$ - мерные вектор-строки, причем $\|X_k\|=1$. Вычисляя $\tilde{R}(X_1,X_2)X_k=-[[X_1,X_2],X_k]=0$, получим, что $q=r=0$. Далее из $\tilde{R}(X_1,X_3)X_k=0$ находим, что $c=\mu=0$, а из $\tilde{R}(X_3,X_k)X_1=0$ - $d=0$. Наконец, из $\tilde{R}(X_3,X_k)X_k-\tilde{R}(X_3,X_1)X_1=\nu X_3$ получаем, что $v=0$, т. е.

12-381

$$X_k=\left(\begin{array}{cc|cc|c} 0 & 0 & \hat{} & 0 & \ldots u \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\ldots 0 \end{array}\right),\quad \|u\|=1.$$

Легко видеть, что действием группы изотропии базис $\{X_i\}_{i=1}$ приводится к виду а) лемы 2 (с точностью до перенумерации $X_3\leftrightarrow X_l$. Теперь из уравнений Кодацци $D_{X_i}H=[\tilde{R}(X_i,X_j)X_j]^{\perp}=0$ при $i<l$ ($j\neq i$ произвольно) и

$$D_{X_l}H=\left(\begin{array}{c|c|c|c} 0\ldots 0 & b & 0 & 0\ldots 0 \\ \hline 0\ldots 0 & 0 & -a & 0\ldots 0 \end{array}\right)\cdot(-ab).$$

Найдем вектор средней кривизны H в точке O. Пусть

$$H=\left(\begin{array}{c|c|c|c} 0\ldots 0 & \nu b & t & y \\ \hline x & s & -\nu a & z \end{array}\right),$$

где y, z - $(n-l-2)$-мерные; x - l-мерная вектор-строка; $\nu, s, t\in\mathbb{R}$.

Из уравнений Кодацци (2) имеем для трех ортонормированных векторных полей X, Y, Z, касательных к N, и для любого нормального поля ξ: $\tilde{R}(X,Y,Z,\xi)=0$. Дифференцируя это уравнение вдоль векторного поля X, получим $\tilde{R}(H,Y,Z,\xi)-g(\xi,H)\tilde{R}(X,Y,Z,X)=0$. В частности, при $\xi\perp H$ получаем $(\tilde{R}(H,Y)Z)^{\perp}$ коллинеарен H. Подставляя точку O, а в качестве Y и Z сначала X_i, X_j $(i\neq j<l)$, потом X_i, X_l $(i<l)$ и, наконец, X_l, X_i $(i<l)$, получим $s=t=0$, $x=0$.

С другой стороны, при $\xi=H$ получим

$\tilde{R}(H,Y,Z,H)=\alpha^2\tilde{R}(X,Y,Z,X)$.

Теперь возьмем вместо полей Y и Z поля $(Y+Z)/\sqrt{2}$ и $(Y-Z)/\sqrt{2}$. Получим $\tilde{R}(H,Y,Y,H)-\tilde{R}(H,Z,Z,H)=\alpha^2(\tilde{R}(X,Y,Y,X)-\tilde{R}(X,Z,Z,X))$.

Теперь положим $X=X_1$, $Y=X_2$, $Z=X_l$ и в точке O получим $\nu^2b^2+\|y\|^2-a^2\|y\|^2-b^2\|z\|^2=\alpha^2(1-a^2)$, откуда, учитывая, что $\|X_l\|^2=a^2+b^2=1$, $\|H\|^2=\nu^2+\|y\|^2+\|z\|^2=\alpha^2$, имеем $z=0$. Итак,

$$H=\left(\begin{array}{c|c|c|c} 0\ldots 0 & \nu b & 0 & y \\ \hline 0\ldots 0 & 0 & -\nu a & 0\ldots 0 \end{array}\right).$$

Возьмем теперь в уравнении Кодацци векторы X и Y ортонормированные, а нормальное векторное поле ξ выберем ортогональным к H и $D_{X_l}H$. Тогда $\tilde{R}(X,Y,Y,\xi)=0$. Дифференцируя это равенство вдоль X и полагая $X=X_i\,(i<l)$ в точке O, получим $\tilde{R}(H,Y,Y,\xi)=0$, т. е. $(\tilde{R}(H,Y)Y)^{\perp}$ компланарен H и $D_{X_l}H$ для любого касательного вектора Y. Выбирая теперь $Y=X_j$ $(j<l)$, получим, что либо $y=0$, $\nu\neq 0$, и тогда $(H)\|DH$, либо $\nu=0$, $y\neq 0$.

Покажем, что второй случай невозможен. Действительно, при этом, как видно, $D_{X_1}H\perp H$, т.е. $DH\perp H$. Если это выполнено в окрестности точки O, то дифференцируя равенство $\tilde R(X,Y,Y,H)=0$ вдоль X, получим (X и Y ортонормированы): $-\alpha^2\tilde R(X,Y,Y,X)+\tilde R(H,Y,Y,H)+\tilde R(X,Y,Y,D_XH)=0$. В точке O берем $X=X_1$, $Y=X_1$. Тогда $-\alpha^2a^2+\alpha^2+\|D_{X_1}H\|^2=0$. Но $\alpha^2-\alpha^2a^2=\alpha^2b^2\ge 0$, $\|D_XH\|^2=a^2b^2>0$ - противоречие. Если же в сколь угодно близкой к O точке $DH\not\perp H$, то $DH\| H$ (в силу вышесказанного), и по непрерывности это будет выполнено и в точке O (т.е. получим, что $H|_O=0$).

Итак,

$$H=\left(\begin{array}{c|c|c|c} 0\ldots 0 & \alpha b & 0 & 0\ldots 0 \\ \hline 0\ldots 0 & 0 & -\alpha a & 0\ldots 0 \end{array}\right)$$

и $DH\perp H$.

Часть а) леммы 2 доказана.

б) Произвольный вектор X_k с $k>3$ имеет вид

$$X_k=\left(\begin{array}{c|c|c} bz & y & u \\ \hline x & -az & v \end{array}\right),$$

где x, y, z - 3-вектор-строки; u, v - $(n-8)$-мерные вектор-строки; $\|X_k\|=1$. Вычисляя $\tilde R(X_i,X_k)X_j=0$ (где $i\ne j$ пробегают всевозможные пары из $\{1,2,3\}$), получаем $x=y=z=0$. Далее из $\tilde R(X_1,X_k)X_k-\tilde R(X_1,X_2)X_2=\nu X_1$ получаем, что $u\perp v$ и $\|u\|=a$. Поэтому действием группы изотропии в точке O можно привести вектор X_k к виду

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a\ 0\ \ldots\ 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\ b\ 0\ldots 0 \end{array}\right).$$

Действуя аналогично и далее, получим, что векторы $\{X_i\}_{i=1}^{l}$ в O имеют тот же вид, который указан в б) леммы 2 (с точностью до действия группы изотропии в $\mathfrak{M}=T_OG(2,n)$).

Вычисляя $D_{X_i}H=\tilde R(X_i,X_j)X_j]^1$, получим в нуле

$$\begin{array}{ccc} & \downarrow i & \downarrow l+i \\ D_{X_i}H=ab(a^2-b^2) & \left(\begin{array}{c|c|c} 0\ldots 0\ b\ 0\ldots 0 & 0\ldots\ldots\ldots 0 & 0\ldots 0 \\ \hline 0\ldots\ldots\ldots 0 & 0\ldots 0\ -a\ 0\ldots 0 & 0\ldots 0 \end{array}\right) \\ & \underbrace{\qquad\qquad}_{l} & \underbrace{\qquad\qquad}_{l} \end{array}$$

Найдем вектор средней кривизны H и его производные в нормальной связности до 3-го порядка. Заметим, что

$$\tilde R(X_i,X_j,X_k,X_r)=g(X_i,X_r)g(X_j,X_k)-g(X_i,X_k)g(X_j,X_r).$$

Отсюда вследствие уравнений Гаусса получаем

12 r

$$R(X_i, X_j, X_k, X_r) = (1+\alpha^2)(g(X_i, X_r)g(X_j, X_k) - g(X_i, X_k)g(X_j, X_r)).$$

В окрестности нашей точки O будет $H\neq 0$, $DH\neq 0$ (существенная вполне омбиличность!) и пространство DH более, чем одномерно. Значит, для близких к O точек при надлежащем выборе системы координат касательное пространство к N^l будет иметь такой же вид, как и выше. Поэтому свойство тензора кривизны выполняется и в окрестности точки O. Из этого так же следует, что любое инвариантно записанное равенство, выполненное в точке O, будет иметь место и в окрестности точки O.

Отсюда заключаем, что, во-первых, N^l (локально) изометрично сфере S^l, во-вторых, $\alpha=\mathrm{const}$. Из последнего условия имеем $0=X(\alpha^2)=X(g(H,H))=2g(H,D_XH)$, т. е. $H\perp DH$.

Пусть

$$H=\left(\begin{array}{c|c|c} 0\ldots0 & r & w \\ \hline q & 0\ldots0 & m \end{array}\right), \text{ в точке } O,$$

где q, r - l-мерные вектор-строки; w, m - $(n-2-2l)$-мерные вектор-строки (такой вид следует из того, что $H\perp DH$). По формуле Кодацци $\tilde{R}(X,Y,Y,H)=0$ для ортонормированных касательных векторных полей X и Y. Дифференцируя это равенство вдоль векторного поля X и пользуясь уравнением Кодацци и видом тензора кривизны в нашем случае, получаем $0=-\alpha^2+\tilde{R}(H,Y,Y,H)+\|D_XH\|^2$, откуда $\tilde{R}(H,Y,Y,H)=\alpha^2-\|D_XH\|^2$. Вычисляя в точке O, получаем $a^2\|w\|^2+b^2\|m\|^2+b^2\|q\|^2+a^2\|r\|^2-2ab\langle q,v\rangle\langle r,v\rangle=\alpha^2(a^4+b^4)-a^2b^2(a^2-b^2)^2$ (здесь $\langle , \rangle$ и $\|.\|$ евклидовы в пространствах соответствующей размерности), в нуле:

$$Y=\left(\begin{array}{c|c|c} av & 0\ldots0 & 0\ldots0 \\ \hline 0\ldots0 & bv & 0\ldots0 \end{array}\right),$$

v - единичный l-мерный вектор-строка.

Отсюда $\langle q,v\rangle\langle r,v\rangle=0$ при любом v (так как больше v никуда не входит). Поэтому $q=0$ или $r=0$. Дифференцируя теперь $\tilde{R}(X,Y,Y,H)=0$ вдоль Y (и учитывая, что $D_XH\perp D_YH$ в O, а, значит, и в окрестности), получим $\tilde{R}(X,H,Y,H)=0$ при $X\perp Y$. Положив

$$X=\left(\begin{array}{c|c|c} au & 0\ldots0 & 0\ldots0 \\ \hline 0\ldots0 & bu & 0\ldots0 \end{array}\right) \text{ в } O,$$

где u - единичный l-мерный вектор-строка и $u\perp v$, найдем (учитывая, что $q=0$ или $r=0$): $(b\langle v,r\rangle-a\langle v,q\rangle)(b\langle u,r\rangle-a\langle u,q\rangle)=0$ при любых $u\perp v$. Из этого уже следует, что $q=r=0$, т. е.

$$H=\begin{array}{c}\left(\begin{array}{ccc|ccc|c} 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & w \\ \hline 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & m \end{array}\right) \text{ в } O. \\ \underbrace{\qquad\qquad}_{1}\ \underbrace{\qquad\qquad}_{1}\end{array}$$

Далее, пусть ξ - векторное поле, нормальное к N и такое, что $\xi\perp H, DH$. Из уравнений Кодацци $\tilde{R}(X,Y,Z,\xi)=0$ для любых трех касательных векторных полей X, Y, Z. Продифференцируем это равенство вдоль векторного поля U: $\tilde{R}(H,Y,Z,\xi)g(U,X)+$ $+\tilde{R}(X,H,Z,\xi)g(U,Y)+\tilde{R}(X,Y,H,\xi)g(U,Z)+\tilde{R}(X,Y,Z,D_U\xi)=0$.

Положим здесь $U=X$, $X\perp Z, Y$ и $Y\perp Z$. Тогда, как легко видеть, $\tilde{R}(H,Y,Z,\xi)=0$ при $Y\perp Z$, откуда в силу первого тождества Бианки будет $\tilde{R}(Y,Z,H,\xi)=0$ (здесь уже несущественно, что $Y\perp Z$). Поэтому третье слагаемое в нашей сумме всегда равно нулю.

Возьмем теперь $Z=Y$, а U, X, Y ортонормированными. Тогда $0=\tilde{R}(X,Y,Y,D_U\xi)=g(D_XH,D_U\xi)=-g(D_UD_XH\xi)$ (поскольку $\xi\perp DH$). Поэтому $D_UD_XH\subset H\dot{+}DH$ при $U\perp X$.

Наконец, возьмем $U=X\perp Z=Y$, $\|X\|=\|Y\|=1$. Получим $\tilde{R}(H,Y,Y,\xi)+$ $+\tilde{R}(X,Y,Y,D_X\xi)=0$, т. е. $\tilde{R}(H,Y,Y,\xi)-g(D_XD_XH,\xi)=0$, или $\tilde{R}(H,Y)Y-D_XD_XH\subset$ $\subset H\dot{+}DH$ (для любых $X\perp Y$, $\|X\|=\|Y\|=1$).

Таким образом, нормальная к $(H)\dot{+}DH$ компонента η поля D_XD_XH не зависит от выбора единичного экторного поля X и равна нормальной к $(H)\dot{+}DH+T_0N$ компоненте поля $\tilde{R}(H,Y)Y$ (которая, кстати, тоже не зависит от единичного векторного поля Y). В частности, в точке O получаем

$$\eta=\begin{array}{c}\left(\begin{array}{ccc|ccc|c} 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & (a^2-\tau)w \\ \hline 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & (b^2-\tau)m \end{array}\right), \quad \tau=(a^2w^2+b^2m^2)/(w^2+m^2). \\ \underbrace{\qquad\qquad}_{1}\ \underbrace{\qquad\qquad}_{1}\end{array}$$

Далее, дифференцируя установленное ранее равенство $\tilde{R}(H,Y,Z,\xi)=0$ (для $Y\perp Z$, $\|Y\|=\|Z\|=1$, $\xi\perp HDH$ вдоль Z, получим $\tilde{R}(D_ZH,Y,Z,\xi)+\tilde{R}(H,Y,H,\xi)+\tilde{R}(H,Y,Z,D_Z\xi)=0$.

Последнее слагаемое, как легко проверить, тождественно равно нулю, первое равно нулю в точке O (так как $\tilde{R}(D_Z\dot{H},Y)Z\in TN+DH$). Отсюда следует, что $\tilde{R}(H,Y,H,\xi)=0$, поэтому $w\perp m$ (вычисляем в точке O). Теперь уже действием группы изотропии приводим векторы из T_0N^1, H, DH и η в O к виду б) леммы 2.

Осталось еще доказать, что $DDDH\subset(H)\dot{+}DH\dot{+}DDH$. Для этого, очевидно, надо доказать, что $D_\eta \subset (H) \dotplus DH \dotplus \eta$.

Пусть ν - векторное поле, нормальное к N и такое, что $\nu \perp (H) \dotplus DH \dotplus DDH$. Тогда, поскольку, как было установлено, для единичного векторного поля Y, касательного к N, $\tilde{R}(H,Y)Y \in (H) \dotplus DH \dotplus \eta$, будем иметь $\tilde{R}(H,Y,Y,\nu)=0$.

Дифференцируя это равенство вдоль произвольного векторного поля U, касательного к N, получим $\tilde{R}(H,Y,Y,D_U\nu)=0$, т. е. $D_U\nu \perp \eta$ (то, что $D_U\nu \perp H$ и DH легко установить из определения ν). А это значит, что $D_U\eta \perp \nu$, т. е. $D_U\eta \in (H) \dotplus DH \dotplus \eta$.

Лемма 2 доказана.

4. **Доказательство утверждений.**

Здесь будут доказаны утверждения, конкретизирующие теорему (и имеющие самостоятельный смысл).

Утверждение а). Пусть $F^l \subset S^l \times E^1$ $(l \geq 2)$ - вполне омбилическая гиперповерхность непостоянной средней кривизны. Тогда F^l является «поверхностью вращения», т. е. состоит из малых сфер $S^{l-1}(R) \subset S^l$, центры которых лежат на одной образующей цилиндра $S^l \times E^1$, а радиусы зависят от евклидова параметра на E^1 по формуле $\cos R = Ae^t + Be^{-t}$, где A, B - постоянные $(A^2+B^2 \neq 0$ и $AB < 1/4)$ (рис. 1, [1]).

Утверждение б). Пусть $F^l \subset S_1^{l+1} \times S_2^{l+1}$ $(l \geq 3)$ - существенно вполне омбилическое подмногообразие средней и секционной кривизн. Тогда F^l является косой «диагональю» в произведении двух малых сфер $S_i^l \subset S_i^{l+1}$ (разного радиуса). Точнее, если ввести на сферах-сомножителях одну и ту же систему координат (u^i) на S_1^{l+1} и (v^i) на S_2^{l+1} (географически-конформную), в которой метрика сферы имеет вид $ds^2 = (du^1)^2 + 4\sin^2 u^1 \cdot \Sigma_{i=2}^{l+1}(du^i)^2/(1+\Sigma_{i=2}^{l+1}(u^i)^2)^2$, то F^l задается как $u^1=R$, $v^1=r$, $u^2=v^2, \ldots, u^{l+1}=v^{l+1}$, причем $0<R \neq r<\pi$ и хотя бы одно из чисел R и $r \neq \pi/2$ (рис. 2, [1]).

Доказательство утверждения а). Будем считать, что сфера S^l имеет радиус 1. Хорошо известно, что конформное преобразование сохраняет омбиличность подмногообразий [6]. Легко убедиться, что произведение $M=S^l \times E^1$ конформно-плоско (точнее, глобально конформно диффеоморфно евклидову пространству E^{l+1} с выколотой точкой).

Действительно, метрика на $E^{l+1} \setminus \{0\}$ в сферических координатах имеет вид $de^2=dr^2+r^2ds_1^2$, где ds_1^2 - метрика единичной сферы. Поэтому $r^{-2}de^2=(d\ln r)^2+ds_1^2$. Замена $t=\ln r$ дает в правой части метрику стандартно параметризованного пространства M. Омбилические гиперплоскости в евклидовом пространстве хорошо известны: это гиперпространства и гиперсферы. Их образы в M при описанном выше конформном соответствии - это как раз омбилические «поверхности вращения», описанные в условии, а также вполне геодезические подмногообразия: S^l и $S^{l-1}\times E^1$.

Утверждение а) доказано.

Доказательство утверждения б). Введем обозначение $M=S_1^{l+1}\times S_2^{l+1}$. Поскольку F^l имеет постоянную секционную кривизну, получим, что для любых трех ортонормированных касательных векторов X, Y и Z будет $R(X,Y)Z=0$, $R(X,Y)Y-R(X,Z)Z=0$. Используя уравнения Кодацци, получим $\tilde R(X,Y)Z=0$, $\tilde R(X,Y)Y-\tilde R(X,Z)Z=0$ (здесь $\tilde R$ - тензор кривизны объемлющего произведения сфер $S_1^{l+1}\times S_2^{l+1}$). Для касательного к F^l вектора X обозначим через X' и X'' его проекции на касательные пространства к сферам S_1 и S_2 соответственно и будем писать: $X=(X'|X'')$. Тогда будем иметь (учитывая вид тензора кривизны $\tilde R$):

$$\begin{cases} \langle Y',Z'\rangle X'-\langle X',Z'\rangle Y'=\langle Y'',Z''\rangle X''-\langle X'',Z''\rangle Y''=0, \\ (\|Y'\|^2-\|Z'\|^2)X'-\langle X',Y'\rangle Y'+\langle X',Z'\rangle Z'=0, \\ (\|Y''\|^2-\|Z''\|^2)X''-\langle X'',Y''\rangle Y''+\langle X'',Z''\rangle Z''=0 \end{cases} \qquad (7)$$

для любых трех ортонормированных векторов X, Y, и Z ($\langle\cdot,\cdot\rangle$ и $\|\cdot\|$ - в метрике произведения или соответствующих сфер - безразлично).

Если проекция касательного пространства к F^l на одну из сфер - нулевая, то из уравнений Кодацци сразу следует, что $DH=0$, что противоречит существенной омбиличности. Поэтому обе проекции - ненулевые, и мы можем выбрать ортонормированный базис $\{X_i\}_{i=1}^{l}$ в касательном пространстве в какой-то точке $Q\in F^l$, такой, что $X_i'\neq0$ и $X_i''\neq0$ при всех $i=1,2,\dots,l$. Тогда из первой пары равенств (7) следует, что либо все X_i' коллинеарны, либо все попарно ортогональны; та же альтернатива имеется для X_i''. Однако случай, когда все X_i' коллинеарны и все X_i'' коллинеарны, невозможен, поскольку $l\geq3$. Если все X_i' коллинеарны, а X_i'' попарно ортогональны, то повернем наш базис так, чтобы $X_1'\neq0$, $X_2'=\dots X_l'=0$. Тогда в силу ортонормированности $\langle X_i'',X_j''\rangle=0$ при $j\neq i$, $\|X_i''\|=1$ при $i>1$, $\|X_1''\|=1-\|X_1'\|<1$. Подставляя в последнее уравнение системы (7) $Y=X_1$, $Z=X_i$, $X=X_j$ $(i\neq j>1)$, получим $X_j''=(\|X_1'\|^2-1)=0$, откуда $X_j=0$, что противоречит условию $l\geq 3$.

Значит, X'_i (и X''_i) попарно ортогональны. Из (7) следует, что и ортонормированы, т.е. $\langle X'_i, X'_j\rangle=a^2\delta_{ij}$, $\langle X''_i, X''_j\rangle=b^2\delta_{ij}$ (где $a^2+b^2=1$; $a, b>0$). Таким образом, для любых двух ортонормированных векторов $X=(X'|X'')$, $Y=(Y'|Y'')$ из T_QF^l имеем $\langle X', Y'\rangle=\langle X'', Y''\rangle=0$, $\|X'\|^2=\|Y'\|^2=a^2>0$, $\|X''\|^2=\|Y''\|^2=b^2>0$, $a^2+b^2=1$.

Значит, в точке Q можно выбрать такой ортонормированный базис в T_QM, что касательное пространство T_QF натянуто на векторы

$$\{X_i=(\overbrace{0\ldots0\ \underset{\uparrow_i}{a}\ 0\ldots0}^{l+1} \mid \overbrace{0\ldots0\ \underset{\uparrow_{l+i+1}}{b}\ 0\ldots0}^{l+1})\}_{i=1}^{l}.$$

Из уравнений Кодацци $D_XH=(\tilde{R}(X,Y)Y)^\perp$ для ортонормированных касательных к F^l векторных полей X и Y. В точке Q

$$D_{X_i}H=(\overbrace{0\ldots0\ \underset{\uparrow_i}{b}\ 0\ldots0}^{l+1} \mid \overbrace{0\ldots0\ \underset{\uparrow_{l+i+1}}{-a}\ 0\ldots0}^{l+1})\cdot ab(a^2-b^2).$$

Учитывая, что $\alpha^2=\|H\|^2=\mathrm{const}$, имеем $H\perp DH$, в частности, в точке Q:

$$H=(\overbrace{0\ldots0\ w}^{l+1} \mid \overbrace{0\ldots0\ m}^{l+1}),$$

$w, m\in\mathbb{R}$, можно считать: $w, m\geq 0$ и хотя бы одно из них $\neq 0$.

Далее, из уравнений Кодацци и в силу $H\perp DH$ имео[…] $\tilde{R}(X, Y, Y, H)=0$ для ортонормированных векторных полей X и Y[…] касательных к F^l. Дифференцируя это равенство вдоль X, использу[…] уравнения Кодацци и то, что $H\perp DH$, получим $\tilde{R}(H, Y, Y, H)+\|D_XH\|^2=\alpha^2$[…] частности, в точке Q:

$$b^2w^2-a^2m^2=a^2b^2(b^2-a^2). \qquad (8)$$

Заметим, что никакие другие соотношения, кроме этого [...] $a^2+b^2=1$, не связывают числа a, b, m, w, так как, как буд[…] показано, семейство вполне омбилических подмногообраз[…] существенно двупараметрическое. Вложим произведение M сфер [...] евклидово пространство $E^{2l+4}=E_1^{l+2}\times E_2^{l+2}$. Пусть h^{FM}, h^{ME}, h^{FE} вторые квадратичные формы подмногообразий $F^l\subset S^{l+1}\times S^{l+}$[…] $S^{l+1}\times S^{l+1}\subset E^{2l+4}$ и $F^l\subset E^{2l+4}$ соответственно. Тогда для любых дв[…] касательных к F^l векторов X, Y будем име[…] $h^{FE}(X, Y)=h^{FM}(X, Y)+h^{ME}(X, Y)$. Пусть n^1 и n^2 - нормальные единичн[…] векторные поля к сферам $S_1^{l+1}\subset E_1^{l+2}\subset E^{2l+4}$, и $S_2^{l+1}\subset E_2^{l+2}\subset E^{2}$[…] соответственно. Тогда, как легко видеть, для любых касательны[…] $S_1^{l+1}\times S_2^{l+1}$ векторов $A=(A'|A'')$ и $B=(B'|B'')$ будет $h^{ME}(A,$[…]

$=\langle A', B'\rangle n^1+ \langle A'', B''\rangle n^2$ (здесь $\langle , \rangle$ – в E^{2l+4}). А это значит, что если X и Y – касательны к F^l, то $h^{FE}(X,Y)=H\langle X,Y\rangle+n^1\langle X',Y'\rangle+$ $+n^2\langle X'',Y''\rangle$. Если $X\perp Y$, то в силу вышесказанного $h^{FE}(X,Y)=0$.

Таким образом, подмногообразие $F^l\subset E^{2l+4}$ вполне омбилично. Очевидно, оно не является областью на плоскости (так как лежит в M), значит, F^l есть сфера S^l в некотором евклидовом подпространстве $E^{l+1}\subset E^{2l+4}$. Это евклидово пространство можно получить, взяв касательное l-мерное пространство T_QF^l в произвольной точке $Q\in F^l$ и вектор средней кривизны F^l (вектор средней кривизны H^{FE} как подмногообразие в E^{2l+4} !) в этой точке. Для единичного вектора $X\in T_QF$ имеем $h^{FE}(X,X)=H+a^2n^1+b^2n^2$. Это и есть вектор средней кривизны H^{FE}.

Выберем теперь прямоугольную декартову систему координат $(x^i)_{i=1}^{2l+4}$ в E^{2l+4} так, чтобы Q попала в начало координат: $Q=O$, подмногообразие M задавалось в виде

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{l+1}(x^i)^2+(x^{l+2}-1)^2=1,\\ \sum_{i=l+3}^{2l+3}(x^i)^2+(x^{2l+4}-1)^2=1,\end{cases} \tag{9}$$

касательное пространство T_QF^l было натянуто на векторы

$$(a\ 0\ldots\ldots0\ 0\ 0\ |\ b\ 0\ldots\ldots0\ 0\ 0),$$

$$(0\ a\ 0\ldots0\ 0\ 0\ |\ 0\ b\ 0\ldots0\ 0\ 0),$$

$$\vdots$$

$$\underbrace{(0\ldots\ldots0\ a\ 0\ 0}_{l+2}\ |\ \underbrace{0\ldots\ldots0\ b\ 0\ 0)}_{l+2}.$$

Тогда

$$n^1=(0\ldots\ldots0\ 1\ |\ 0\ldots\ldots\ldots0\ 0),$$

$$n^2=(0\ldots\ldots0\ 0\ |\ 0\ldots\ldots\ldots0\ 1),$$

$$H=\underbrace{(0\ldots\ldots0\ \nu\ 0}_{l+2}\ |\ \underbrace{0\ldots\ldots\ldots0\ m\ 0)}_{l+2},$$

где $\nu, m\in\mathbb{R}$; $\nu, m\geq 0$, $\nu^2+m^2>0$.

Поэтому наше подмногообразие F^l лежит в пересечении произведения сфер (9) и $(l+1)$-мерного подпространства E^{l+1}, заданного, как

$x^i=ay^i$, $\quad x^{l+2+i}=by^i$, $i=1,2,\ldots,l$;

$x^{l+1}=\nu t$, $\quad x^{2l+3}=mt$,

13-381

$$x^{l+2}=a^2t,\ x^{2l+4}=b^2t$$

(здесь $y^1,\ldots y^l,t$ - параметризация). Пространство E^{l+1} - общего положения, поэтому размерность пересечения как раз равна l, т.е. F^l - область в $M\cap E^{l+1}$.

Повернем теперь систему координат в E^{2l+4} около центра произведения $M=S_1^{l+1}\times S_2^{l+1}$ в двумерных плоскостях (x^{l+1},x^{l+2}) и (x^{2l+3},x^{2l+4}) так, чтобы наше пространство E^{l+1} задавалось уравнениями $x^i=ay^i$ $(i=1,\ldots,l)$, $x^{l+2+i}=by^i$ $(i=1,\ldots,l)$, $x^{l+1}=C_1t$, $x^{l+2}=C_2$, $x^{2l+3}=C_3t$, $x^{2l+4}=C_4$, где C_1, C_2, C_3, C_4 - некоторые константы:

$$C_1=(w^2-a^2b^2)(w^2+a^4)^{-1/2},\ C_2=(\sqrt{w^2+a^4}-w)(w^2+a^4)^{-1/2},$$

$$C_3=(m^2-a^2b^2)(m^2+b^4)^{-1/2},\ C_4=(\sqrt{m^2+b^4}-m)(m^2+b^4)^{-1/2}.$$

Тогда, как легко проверить из (8), $bC_1=aC_3$. Введя параметр $y^{l+1}=C_3t/b$, получим $x^{l+1}=ay^{l+1}$, $x^{2l+3}=by^{l+1}$.

Подставим теперь наше выражение для $\{x^i\}_{i=1}^{2l+4}$ в (9). Получим:

$$a^2\Sigma_{i=1}^{l+1}(y^i)^2=2C_2-C_2^2,$$

$$b^2\Sigma_{i=1}^{l+1}(y^i)^2=2C_4-C_4^2.$$

Из (8) легко видеть, что $b^2(2C_2-C_2^2)=a^2(2C_4-C_4^2)$, т.е. два уравнения пропорциональны.

Введем на произведении M наших сфер географически-конформную систему координат:

$$x^i=2u^{i+1}\sin u^1\varphi(u),\ x^{l+2+i}=2v^{i+1}\sin v^1\varphi(v),\ i=1,2,\ldots,l,$$

$$x^{l+1}=(1-\Sigma_{i=2}^{l+1}(u^i)^2)\sin u^1\varphi(u),$$

$$x^{2l+3}=(1-\Sigma_{i=2}^{l+1}(v^i)^2)\sin v^1\varphi(v),$$

$$x^{l+2}=1-\cos u^1,\ x^{2l+4}=1-\cos v^1,$$

где $\varphi(u)=\varphi(u^2,\ldots,u^{l+1})=(1+\Sigma_{i=2}^{l+1}(u^i)^2)^{-1}$.

В этой параметризации уравнение подмногообразия $F^l\subset M=S_1^{l+1}\times S_2^{l+1}$ запишется в виде $\cos u^1=w(w^2+a^4)^{-1/2}$, $\cos v^1=m(m^2+b^4)^{-1/2}$, $u^i=v^i$ $(i>1)$, так как $a\sin v^1=b\sin u^1$ из (8). Обозначая через $u^1=R$, $v^1=r$ радиусы соответствующих малых сфер, получим $R=\mathrm{arctg}(a^2/w)$, $r=\mathrm{arctg}(b^2/m)$ $(R\neq r$, так как иначе $a=b)$.

Утверждение б) доказано.

Список литературы: 1. *Николаевский Ю.А.* Вполне омбилические подмногообразия в $G(2,n)$. I//Укр. геометр. сб. 1991. Вып. 34. С.22-46. 2. *Хелгасон С.* Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. М., 1964. 536 с. 3. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М., 1967. 576 с. 4. *Myazawa T.*, *Chuman G.* On certain subspaces of Riemannian reccurent spaces//Tensor. 1972.

[illegible], P.25[illegible]-260. 5. *Эйзенхарт Л.П.* Риманова геометрия. М., 1948. [illegible] 316. 6. *Chen B.-Y.* Geometry of submanifolds and its applications. 1981. Tokyo, 1981. 96 p.

Поступила в редколлегию 30.10.89

УДК 514

Б. В. Новиков

О СТРОЕНИИ ПОДМНОЖЕСТВ ВЕКТОРНОЙ РЕШЕТКИ, ЗАМКНУТЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО СЛОЖЕНИЯ

Известно (см., напр., [1]), что каждое замкнутое относительно сложения подмножество множества $\mathbb{N}$ неотрицательных целых чисел, наибольший общий делитель которого равен 1, содержит все натуральные числа, превосходящие m (число Фробениуса). В какой степени это свойство переносится на векторные решетки? Оказывается, с точностью до невырожденного линейного преобразования такое обобщение возможно. Именно, пусть S - замкнутое относительно сложения подмножество векторной решетки $\mathbb{N}^r$ (множество всех r-мерных векторов с неотрицательными целочисленными координатами). Предположим, что S конечно порождено в том смысле, что в S существует такое конечное подмножество A, что каждый элемент из S является суммой элементов из A. Далее, для произвольного подмножества $T\subset\mathbb{R}^r$ через $\mathrm{con}T$ обозначим замкнутый выпуклый конус с вершиной в начале координат, натянутый на T; через $[T]$ - совокупность целочисленных точек, содержащихся в T. Основным результатом статьи является

Теорема. *Если множество $S\subset\mathbb{N}^r$ удовлетворяет перечисленным выше условиям, то существует такое невырожденное линейное преобразование φ пространства $\mathbb{R}^r$ в себя, что $\varphi S\subseteq\mathbb{N}^r$ и $\varphi S\supseteq a+[\mathrm{con}\varphi S]$ для некоторого $a\in\varphi S$.*

Для бесконечно порожденных подмножеств получается более слабое утверждение (см. предложения 3 и 4).

Доказательство теоремы имеет смешанный алгебро-геометрический характер. В частности, упомянутое выше множество S удобно рассматривать как подполугруппу полугруппы $\mathbb{N}^r$ (необходимые сведения из алгебры можно найти в [2]). При этом запись $S=\langle a^{(1)},\ldots,a^{(n)}\rangle$ означает, что S как полугруппа порождена

137

элементами $a^{(1)},\ldots,a^{(n)}$.

Через $\mathbb{R}^r_+$ будем обозначать замкнутый положительный ортант векторного пространства $\mathbb{R}^r$. Суммой $A+B$ подмножеств $A,B\subset\mathbb{R}^r$ называется множество $\{a+b\mid a\in A,\ b\in B\}$; в частности, $nA=\{a_1+\ldots+a_n\mid a_i\in A\}$. Орты пространства $\mathbb{R}^r$ обозначаются через $e^{(i)}=(0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$, где 1 стоит на i-м месте ($i=1,\ldots,r$).

Подполугруппу из $\mathbb{N}^r$ назовем обьемной, если она не содержится в собственном подпространстве пространства $\mathbb{R}^r$.

Предложение 1. *Полугруппа $S\subseteq\mathbb{N}^r$ либо является обьемной, либо изоморфно вкладывается в $\mathbb{N}^{r-1}$.*

Доказательство. Если S не обьемна, то она содержится в полугруппе T всех натуральных точек некоторого $(r-1)$-мерного подпространства, определяемого уравнением $\alpha_1x_1+\ldots+\alpha_rx_r=0$. Пусть, например, $\alpha_r\neq0$. Тогда определен мономорфизм $(x_1,\ldots,x_r)\to(x_1,\ldots,x_{r-1})$ полугруппы T в $\mathbb{N}^{r-1}$, ограничение которого на S и является искомым вложением.

Ясно, что $n\geq r$, если S - обьемная полугруппа. Предложение 1 можно длоказать следующим утверждением:

Предложение 2. *Если полугруппа $S=\langle a^{(1)},\ldots,a^{(r)}\rangle\subseteq\mathbb{N}^r$ обьемна, то $S\cong\mathbb{N}^r$.*

Доказательство. Пусть

$$\sum_{i=1}^{r}\alpha_i a^{(i)}=\sum_{i=1}^{r}\beta_i a^{(i)}$$

- определяющее соотношение полугруппы S. Тогда $(\gamma_1,\ldots,\gamma_r)A=0$, где $\gamma_i=\beta_i-\alpha_i$, $A=(a_j^{(i)})_{i,j=1}^r$. Так как S обьемна, то $\det A\neq0$. Следовательно, $\gamma_i=0$ $(i\leq r)$ и S свободна, т.е. изоморф з $\mathbb{N}^r$.

Назовем полугруппу $T\in\mathbb{N}^r$ густой, если существует такой $f\in T$, что $f+e^{(i)}\in T$ для всех $i\leq r$. Густая полугруппа, очевидно, является обьемной. Для обращения этого утверждения нам понадобится

Лемма. *Пусть $B=(b_{ij})_{i,j=1}^r$ - верхняя треугольная матрица со строго положительной диагональю и $b_{ij}\leq0$ при $1\leq i<j\leq r$. Тогда для обратной матрицы $B^{-1}=(\tilde{b}_{ij})_{i,j=1}^r$ (которая, очевидно, тоже будет верхней треугольной) выполняются неравенства $\tilde{b}_{ij}\geq0$ при $1\leq i<j\leq r$.*

Доказательство.[1] Без потери общности можно считать, что $b_{ii}=1$ для всех $i\leq r$. Тогда $B=I-B_0$, где I - единичная матрица, а B_0

[1]Этим доказательством автор обязан М.И.Табачникову.

- верхняя треугольная с нулевой диагональю. Поскольку $B_0^r=0$, то $B^{-1}=I+B_0+\ldots+B_0^{r-1}$. Так как элементы матрицы B_0, стоящие над диагональю, неотрицательны, то это же верно и для суммы $I+B_0+\ldots+B_0^{r-1}$ ч. и т. д.

Предложение 3. *Любая объемная полугруппа $S=\langle a^{(1)},\ldots,a^{(n)}\rangle\subseteq\mathbb{N}^r$ изоморфна густой.*

Доказательство. Пусть G - группа частных полугрупп S. Так как $G\subseteq\mathbb{Z}^r$ и S объемна, то G - свободная абелева группа ранга r. Пусть $B=(b_{ij})_{i,j=1}^r$ - матрица, строки которой образуют базис группы G. Сложением строк и умножением строки на -1 можно добиться, чтобы B стала верхней треугольной (целочисленной) матрицей с положительной диагональю и неположительными элементами над диагональю. Пусть $\psi:G\to\mathbb{Z}^r$ - изоморфизм, переводящий каждый вектор $(b_{ij})_{j=1}^n$ в $e^{(i)}$, $T=\psi S$. Тогда $\psi(c)=cB^{-1}$ для любого $c\in\mathbb{N}^r$ и согласно лемме $\psi(c)\in\mathbb{N}^r$. В частности, $T\subseteq\mathbb{N}^r$. Поскольку $\mathbb{Z}^r$ является группой частных для T, то $e^{(i)}=m^{(i)}-n^{(i)}$ для некоторых $m^{(i)}$, $n^{(i)}\in T$. Но тогда для любого $i\in r$

$$\sum_{j=1}^{r} n^{(j)}+e^{(i)}=\sum_{j\neq i} n^{(j)}+m^{(i)}\in T,$$

т. е. полугруппа T является густой, ч. и т. д.

Таким образом, мы можем в дальнейшем считать, что полугруппа S - густая. Введем дополнительные обозначения.

Если A - подмножество в $\mathbb{R}^r$, то через $\tilde{A}$ обозначим замыкание в $\mathbb{R}^r$ его выпуклой оболочки. Симплексом назовем множество вида $K(a,n)=a+nK(0,1)$, где $K(0,1)=\{0,e^{(1)},\ldots,e^{(r)}\}$, $a\in\mathbb{N}^r$, $n\in\mathbb{N}$. Гиперплоскость, проходящую через точки $a+ne^{(1)},\ldots,a+ne^{(r)}$, назовем опорной гиперплоскостью симплекса $K(a,n)$; ее уравнение имеет вид $x_1+\ldots+x_r=a_1\ldots a_r+n$.

Под конусом будем понимать выпуклое замкнутое подмножество $C\subseteq\mathbb{R}^r$, такое, что $\alpha x\in C$ для любых $\alpha\in\mathbb{R}_+$, $x\in C$. Конус, не содержащийся ни в какой гиперплоскости, назовем объемным.

Предложение 4. *Пусть $S=\langle a^{(1)},\ldots,a^{(n)}\rangle$ - густая полугруппа в $\mathbb{N}^r$. Тогда $[u+c]\subseteq S$ для некоторого элемента $u\in S$ и некоторого объемного конуса $C\subset\mathbb{R}^r$.*

Доказательство. Согласно положению 3 полугруппа S содержит симплекс $K(f,1)$ для некоторого $f=(f_1,\ldots,f_r)\in S$. Тогда для любого

$n\in\mathbb{N}$ она содержит симплекс $K(n,f,n)=nK(f,1)$. Легко проверяется, что при $n\geq f_1+\ldots+f_r$ симплексы $nK(f,1)$ и $(n+1)K(f,1)$ имеют непустое пересечение. Введем обозначения: $\sigma=f_1+\ldots+f_r$, $C=\operatorname{con}K(f,1)$, $D=(\sigma+1)f+C$. Покажем, что $[D]\subseteq S$. Для этого достаточно убедиться, что

$$D\subseteq K=\bigcup_{n=1}^{\infty}\overline{K(nf,n)}.$$

Заметим сначала, что D является замыканием множества D' линейных комбинаций вида

$$(\sigma+1)f+\alpha_1(f+e^{(1)})+\ldots+\alpha_r(f+e^{(r)}), \tag{1}$$

где $\alpha_i\geq 0$. Пусть $x=(x_1,\ldots,x_r)\in D'$. Тогда x представим в виде (1), т. е.

$$x_i=f_i(\sigma+1+\alpha_1+\ldots+\alpha_r)+\alpha_i, \tag{2}$$

для каждого $i\leq r$. С другой стороны, найдется натуральное m такое, что x лежит между опорными гиперплоскостями симплексов $mK(f,1)$ и $(m+1)K(f,1)$, т. е.

$$m(\sigma+1)<x_1+\ldots+x_r\leq(m+1)(\sigma+1). \tag{3}$$

Из (2) и (3) получаем $\alpha_1+\ldots+\alpha_r\geq m-\sigma$, откуда $x_i\geq f_i(\sigma+1+m-\sigma)=(m+1)f_i$. Таким образом, $x\in\overline{K((m+1)f,m+1)}$ и $D'\subseteq K$. Из замкнутости K следует $D\subseteq K$.

Следующее утверждение (в совокупности с предложением 3) является алгебраической переформулировкой доказываемой теоремы:

Предложение 5. *Всякая конечно порожденная густая подполугруппа $S\subseteq\mathbb{N}^r$ содержит идеал вида $I=v+[\operatorname{con}S]$ для некоторого $v\in S$.*

Доказательство. То, что множество I является идеалом (если, конечно, $I\subseteq S$), очевидно.

Пусть D - множество, определенное в доказательстве предположения 4. Тогда $[D]+x\subseteq S$ для любого $x\in S$, откуда

$$E=\bigcup_{x\in S}([D]+x)\subseteq S.$$

Заметим, что поскольку для любого натурального $m\geq\sigma$

$$mf=(\sigma+1)f+\frac{m-\sigma-1}{\sigma+1}\sum_{i=1}^{r}f_i(f+e^{(i)}),$$

то согласно (1) $mf\in D$ при $m>\sigma$. Выберем теперь m настолько большим, чтобы $mf+\alpha_1a^{(1)}+\ldots+\alpha_na^{(n)}\in D$, как только $|\alpha_i|<1$ для всех $i\leq n$ (очевидно, это всегда можно сделать, поскольку n конечно), и покажем, что множество $I=[mf+\operatorname{con}S]\subseteq E$.

Поскольку $I=[mf+\mathrm{con}S]$ и $E=\bigcup_{x\in S}(D+x)$, то достаточно убедиться, что $mf+\mathrm{con}S\subseteq\bigcup_{x\in S}(D+x)$. Но это действительно так: если $\beta_i\in\mathbb{R}_+$, то $mf+\beta_1 a^{(1)}+\ldots+\beta_n a^{(n)}\in D+[\alpha_1]a^{(1)}+\ldots+[\alpha_n]a^{(n)}\subseteq\bigcup_{x\in S}(D+x)$, где $[\alpha]$, как обычно, обозначает целую часть числа α.

Доказанная теорема перестает быть верной для бесконечно порожденных полугрупп. Так, например, если $a^{(i)}=(\frac{1}{2}i(i+1),i)\in\mathbb{N}^2$ $(i=1,2,\ldots)$, то $\mathrm{con}S=\mathbb{R}_+^2$, однако, очевидно, что S не содержит подмножества, геометрически конгруэнтного $\mathbb{N}^2$.

Список литературы: 1.*Redei L.* Theorie der endlich erzeugbaren kommutativen Halbgruppen. Würzburg, 1963. 120 S. 2.*Клиффорд А., Престон Г.* Алгебраическая теория полугрупп, 1. М., 1972. 120с

Поступила в редколлегию 02.06.89

УДК 514

С.И. Окрут

РИМАНОВЫ МНОГООБРАЗИЯ С ОБОБЩЕННОЙ АКСИОМОЙ ПЛОСКОСТЕЙ

В 1926 г. Эли Картан ввел аксиому p-плоскостей. Риманово многообразие M размерности $n\geq 3$ удовлетворяет аксиоме p-плоскостей (p - целое, фиксированное, $2\leq p\leq n$), если для любой точки x из M и для любого p-мерного подпространства $Q\subset T_xM$ существует p-мерное вполне геодезическое подмногообразие W, проходящее через x, такое, что $T_xW=Q$. Э. Картан показал, что римановы многообразия, удовлетворяющие аксиоме p-плоскостей, - это в точности пространства постоянной кривизны. Впоследствии различными авторами (в [1] имеется обзор литературы) рассматривались ослабления аксиомы p-плоскостей в том направлении, что от подмногообразия W требовалось меньше, чем вполне геодезичность (например, внешняя сфера).

В этой работе рассматривается следующее обобщение аксиомы Картана. Риманово многообразие M^n удовлетворяет аксиоме (l,s)-плоскостей ($2\leq l\leq s<n$ и l,s - фиксированные), если для любой точки x из M и для любого l-мерного подпространства $Q\subset T_xM$ существует вполне геодезическое подмногообразие W^s, проходящее

через x, такое, что $Q\subset T_xW$. Очевидно, что риманово многообразие, удовлетворяющее аксиоме (l,s)-плоскостей, будет удовлетворять и аксиоме (k,s)-плоскостей, если $k<l$. Класс римановых пространств с аксиомой (l,s)-плоскостей, как показывает следующий пример, шире класса пространств постоянной кривизны. Скрещенное произведение произвольного риманова многообразия F^{m-1}, dt^2 на пространство постоянной кривизны M_C^{n-m+1}, $d\theta_C^2$ удовлетворяет аксиоме $(n-m, n-1)$-плоскостей. Метрическая форма и ковариантные производные для скрещенного произведения $M^n=F^{m-1}\times_\varphi M_C^{n-m+1}$ имеют такой вид ([2], гл. 9):

$$ds^2=dt^2(u)+\varphi^2(u)d\theta_C^2(x),\ u=(u',\dots,u^{m-1}),\ x=(x',\dots,x^{n-m+1}),$$

$$\nabla_{U^h}V^h=(\nabla_U^h V)^h, \tag{1}$$

$$\nabla_{X^v}U^h=\nabla_{U^h}X^v=\frac{1}{\varphi}\langle U,\mathrm{gr}\varphi\rangle_h X^v, \tag{2}$$

$$\nabla_{X^v}Y^v=-\varphi\langle X,Y\rangle_v(\mathrm{gr}\varphi)^h+(\nabla_X^v Y)^v, \tag{3}$$

где U^h и X^v - это горизонтальный и вертикальный лифты векторных полей U на F и X на M_C соответственно (римановой субмерсией является проектирование на F); здесь $\langle.,.\rangle_h$, ∇^h и $\langle.,.\rangle_v$, ∇^v - это римановы метрические тензоры и ковариантные дифференциалы на F и на M_C соответственно. Из формул (1)-(3) следует, что, если W^{n-m} - вполне геодезическое подмногообразие в M_C, то $F\times W$ - вполне геодезическое подмногообразие в M. Поскольку M_C - пространство постоянной кривизны, то оно удовлетворяет аксиоме $(n-m)$-плоскостей. Поэтому для любого $(n-m)$-мерного подпространства Q касательного пространства T_xM можно выбрать вполне геодезическое подмногообразие W^{n-m} в M_C, касающееся проекции Q на T_xM_C. Умножив его на F, получим $(n-1)$-мерное вполне геодезическое подмногообразие в M, содержащее Q в своем касательном пространстве.

Скрещенные произведения прямой на пространство постоянной кривизны называются субпроективными пространствами [3].

В этой работе описывается структура риманова тензора кривизны многообразия M^n, удовлетворяющего аксиоме $(n-2, n-1)$-плоскостей (лемма 2). Следующая теорема описывает строение римановой метрики такого многообразия.

Теорема 2. *Если риманово многообразие M^n $(n\geq 4)$ удовлетворяет аксиоме $(n-2,\ n-1)$-плоскостей, то существует всюду плотное открытое подмногообразие, в окрестности каждой точки которого* метрическая форма представима в виде

$ds^2=du^2+\varphi^2(u)\,d\theta_C^2(x',\dots,x^{n-1})$, где $d\theta_C^2$ – метрическая форма пространства постоянной кривизны.

Для произвольного тензора R, обладающего теми же алгебраическими свойствами, что и оператор преобразования кривизны риманова многообразия, назов.м вектор X R-замкнутым, если для любых векторов U и V из ортогонального дополнения к X выполняется равенство $R(U,V)X=0$. Для фиксированного вектора Z ковариантная производная оператора преобразования кривизны $(\nabla_Z R)(.,.)$ сохраняет тип тензора R и имеет те же алгебраические свойства, что и тензор R ([4]).

Лемма 1. *Если X и Y – неколлинеарные, единичные, неортогональные R-замкнутые векторы из одного касательного пространства, то каждый вектор из линейной оболочки $L=L(X,Y)$ является R-замкнутым и для любых единичных векторов Z и W из L и любого вектора U из ортогонального дополнения $L^\perp$ выполняется равенство $R(U,Z)Z=R(U,W)W$.*

Доказательство. Для любых U, $V\in L^\perp$ из R-замкнутости X и Y сразу имеем

$$R(U,V)(aX+bY)=0 \tag{4}$$

для любого вектора $aX+bY$. Кроме того, $\langle R(X,Y)U,V\rangle=\langle R(U,V)X,Y\rangle=0$, $\langle R(X,Y)U,Y-\langle Y,X\rangle X\rangle=\langle R(U,Y-\langle Y,X\rangle X)X,Y\rangle=0$ из R-замкнутости X, аналогично из R-замкнутости Y $\langle R(X,Y)U,X-\langle X,Y\rangle Y\rangle=0$. Так как X и Y – неколлинеарные, то

$$R(X,Y)U=0. \tag{5}$$

Из первого тождества Бьянки и (5) следует, что

$$R(U,X)Y=R(U,Y)X. \tag{6}$$

Так как X и Y – R-замкнутые векторы, то $R(U,Y)X=R(U,Y-\langle Y,X\rangle X)X+\langle Y,X\rangle R(U,X)X=\langle Y,X\rangle R(U,X)X$, $R(U,X)Y=\langle X,Y\rangle R(U,Y)Y$.

Учитывая (6) и условие неортогональности X и Y, получим

$$R(U,X)X=R(U,Y)Y. \tag{7}$$

Пусть $Z\in L$ и $\langle Z,aX+bY\rangle=0$, тогда

$$R(U,Z)(aX+bY)=aR(U,Z-\langle Z,X\rangle X)X+a\langle Z,X\rangle R(U,X)X+bR(U,Z-\langle Z,Y\rangle Y)Y+$$
$$b\langle Z,Y\rangle R(U,Y)Y=\langle Z,aX+bY\rangle R(U,X)X=0.$$

Здесь использовалась R-замкнутость векторов X и Y и формула (7). Таким образом, вектор $aX+bY$ R-замкнутый. И, наконец, если единичные вектора Z и W принадлежат L и ортогональны, то тем не менее $R(U,Z)Z=\frac{1}{2}R(U,Z+W)(Z+W)=R(U,W)W$.

14-3 81

Здесь дважды использовалась формула (7) для неортогональных векторов. Лемма доказана.

Лемма 2. *Если риманово многообразие M^n удовлетворяет аксиоме $(n-2,\ n-1)$-плоскостей, то в каждой точке x из M^n касательное пространство разлагается в прямую ортогональную сумму $(n-1)$мерного подпространства Ψ и одномерного Φ, такого, что для секционных кривизн верно следующее:*

$$k(X\wedge Y)=k(Z\wedge W),\ k(X\wedge U)=k(Z\wedge U) \tag{8}$$

и, кроме того,

$$R(X,Y)U=0, \quad (\nabla_U R)(X,Y)U=0 \tag{9}$$

для любых векторов $X,\ Y,\ Z,\ W$ из Ψ и вектора U из Φ.

Доказательство. Для любого $(n-2)$-мерного подпространства Q в T_xM существует вполне геодезическое подмногообразие W_1^{n-1} такое, что $Q\subset T_xW_1$. Докажем индукцией, что можно построить не менее чем $n-1$ вполне геодезических взаимно ортогональных гипермногообразий, проходящих через x. Если построено W_i $(i=1,\dots,k)$ таких гипермногообразий и $k<n-1$, то ортогональное дополнение P к пересечению всех T_xW_i имеет размерность k и по условию леммы существует вполне геодезическое гипермногообразие W_{k+1}, содержащее в своем касательном пространстве подпространство P, и поэтому ортогональное всем W_i. Таким образом, в каждой точке существует набор взаимно ортогональных вполне геодезических гипермногообразий W_i $(i=1,\dots,s\geq n-1)$, и можно считать, что больше не существует вполне геодезического подмногообразия, ортогонального всем построенным W_i. Пусть X_i - ортогональные к W_i векторы. Так как $s\geq n-1$, то существует ненулевое подпространство Q^{s+2-n}, натянутое на векторы $V_1,\dots,V_{s+2-n}$ из линейной оболочки $L=L(x_1,\dots,x_s)$ такого положения, что для всевозможных наборов $X_{i_1},\dots,X_{i_{s+2-n}}$

$$\langle V_1\wedge\dots\wedge V_{s+2-n},X_{i_1}\wedge\dots\wedge X_{i_{s+2-n}}\rangle\neq 0, \tag{10}$$

т. е. в Q не существует векторов, ортогональных одновременно хотя бы одному набору $s+2-n$ ортов X_i, в частности, Q не содержит векторов X_i. Подпространство $Q\oplus L^{\perp}$ имеет размерность 2. По аксиоме $(n-2,\ n-1)$ существует вполне геодезическое подмногообразие W, такое, что ортогональный ему единичный вектор Z лежит в $Q\oplus L^{\perp}$. В разложении $Z=V+\alpha^iX_i$, где $V\in L^{\perp}$, не все α^i равны нулю, так как по построению ортогональных к L вполне геодезических гипермногообразий нет (если же $s=n$, то это следует из того, что Z - ненулевой вектор). Из (10) следует, что существует не менее $(n-$

1) коэффициентов a^i, отличных от нуля (для определенности можно считать $i=1,\dots,n-1$). Если вектор V - нулевой, то определим $\Phi=L(X_1,\dots,X_{n-1})^{\perp}$, в противном случае - $\Phi=L(X_1,\dots,X_{n-2},Z)^{\perp}$. В обоих случаях Φ - одномерное подпространство. Причем $Z\in\Phi^{\perp}=:\Psi$ и для любого X_i из Ψ $\langle Z,X_i\rangle\neq 0$ и пары векторов Z и X_i - неколлинеарные. По лемме 1 все векторы из Ψ являются R-замкнутыми и $\nabla_U R$-замкнутыми, где единичный вектор $U\in\Phi$, а также выполняются следующие равенства:

$$k(X\wedge Y)=\langle R(X,Y)Y,X\rangle=\langle R(X,Z)Z,X\rangle=\langle R(Z,W)W,Z\rangle=k(Z\wedge W)=:k,$$

$$k(U\wedge Y)=\langle R(U,Y)Y,U\rangle=\langle R(U,Z)Z,U\rangle=k(U\wedge Z)=:\kappa.$$

Здесь X, Y, и Z, W - любые пары ортов из Ψ, $\langle X,Y\rangle=0$. В любой паре плоскостей из Ψ такие векторы можно выбрать. Для любых ортогональных векторов X, $Y\in\Psi$ из R, $\nabla_U R$-замкнутости X и Y получим $R(X,Y)U=R(U,Y)X+R(X,U)Y=0$, $(\nabla_U R)(X,Y)U=(\nabla_U R)(U,Y)X+(\nabla_U R)(X,U)Y=0$, что и завершает доказательство леммы.

Пусть ρ - оператор кривизны, задаваемый следующим образом: $\langle\rho(X\wedge Y),W\wedge Z\rangle=\langle R(X,Y)Z,W\rangle$.

Лемма 3. *Пусть в точке риманова многообразия имеется разложение $T_xM^n=\Phi\oplus\Psi^{n-1}$, тогда следующие условия эквивалентны:*

1) *$k(\Psi\wedge\Psi)=k$, $k(\Phi\wedge\Psi)=\kappa$, $R(\Psi,\Psi)\Phi=0$, где k и κ - константы;*

2) *$R(X,A)B=\langle B,JA\rangle X-\langle B,X\rangle JA$, где J - самосопряженный оператор на T_xM, такой, что $JA=\kappa\,\mathrm{pr}A+k\,\mathrm{ort}A$, операторы pr и ort суть операторы проектирования на Φ и Ψ соответственно;*

3) *для оператора кривизны ρ подпространства $\Psi\wedge\Psi$ и $\Psi\wedge\Phi$ являются собственными и отвечают собственным значениям k и κ соответственно.*

Доказательство. Импликация 2) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 1) - очевидные. Для доказательства импликации 1) $\Rightarrow$ 2) достаточно показать, что для любых единичных ортогональных векторов X, Y, принадлежащих Ψ, $R(U,X)Y=0$. Учитывая, что $R(\Psi,\Psi)\Phi=0$, достаточно показать, что $\langle R(U,X)Y,U\rangle=0$. Последнее следует из того, что, по условию 1),

$$\left\langle R\left(U,\frac{X+Y}{\sqrt{2}}\right)\frac{X+Y}{\sqrt{2}},U\right\rangle=\langle R(U,X)X,U\rangle=\langle R(U,Y)Y,U\rangle.$$

Лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть M^n $(n\geq 4)$-риманово многообразие, в каждой точке которого касательное пространство разлагается в прямую ортогональную сумму $(n-1)$-мерного подпространства Ψ и одномерного пространства Φ, такие, что выполнены следующие условия:*

147

$k(X\wedge Y)=k(Z\wedge W)\neq k(X\wedge U)=k(Z\wedge U)$, $R(X,Y)U=(\nabla_U R)(X,Y)U=0$ *для любых векторов X, Y, Z, W из Ψ и вектора U из Φ, тогда локально M^n есть скрещенное произведение прямой на пространство постоянной кривизны.*

Доказательство. По лемме 3 в каждой точке x из M имеется разложение

$$\Lambda^2 T_x M=\Psi\wedge\Psi\dot{\oplus}\Psi\wedge\Phi,\quad T_x M=\Psi\dot{\oplus}\Phi \tag{11}$$

на собственные подпространства оператора ρ, отвечающие двум различным собственым значениям $k=k(\Psi\wedge\Psi)$ и $\kappa=k(\Phi\wedge\Psi)$. Таким образом, разложение касательного пространства на подпространства Ψ и Φ - единственное в каждой точке, а k и κ являются гладкими функциями. Лишь одно собственное подпространство (по условию $n\geq4$)1, а именно, $\Psi\wedge\Psi$, имеет нулевой общий аннулятор (т. е. множество векторов Z из $T_x M$, таких, что $Z\wedge\Xi=0$, где Ξ - всевозможные собственные бивекторы, отвечающие одному и тому же собственному значению). Пусть Ξ_i ($i=1,\dots, C^2_{n-1}$) - набор базисных полей собственных бивекторов из $\Psi\wedge\Psi$, рассматриваемых как кососимметрические операторы на $T_x M$. Их общее ядро (т. е. решение системы линейных уравнений, гладко зависящей от точки на M вида $\Xi_i(U)=0$) есть гладкое распределение на M всюду, где размерность решения - постоянная. А так как в каждой точке указанная система эквивалентна системе $X_i\wedge X_j(U)=\langle U,X_j\rangle X_i-\langle U,X_i\rangle X_j=0$ $(1\leq i<j\leq n-1)$, то пространство решений - всюду одномерное и совпадает с подпространством Φ, фигурирующим в (11). Таким образом, Φ, а следовательно, и Ψ образуют гладкие ортогональные распределения.

Пусть U - единичное векторное поле из распределения Φ, а X, Y, Z - единичные ортогональные векторные поля из Ψ. Из второго тождества Бьянки $\underset{X,U,Y}{S}(\nabla_X R)(U,Y)Z=0$, производя дифференцирования и применяя выражение для R из леммы 3, получим

$$(\kappa-k)\langle\nabla_X Z,U\rangle Y-(\kappa-k)\langle\nabla_Y Z,U\rangle X=0.$$

Так как X и Y - линейно независимые и $\kappa\neq k$, то

$$\langle\nabla_X Z,U\rangle=0. \tag{12}$$

Отсюда следует, что распределение Ψ - инволютивное. Второе тождество Бьянки $\underset{X,U,Y}{S}(\nabla_X R)(U,Y)Y=0$ с учетом леммы 3 и формулы (12) эквивалентно следующему выражению:

$(\kappa-k)\operatorname{ort}\nabla_X U+(X\kappa+(\kappa-k)\langle\nabla_U X,U\rangle)U+((\kappa-k)\langle\nabla_Y U,Y\rangle-Uk)X=0$ или, учитывая линейную независимость полей U и X, это эквивалентно

$$X\kappa+(\kappa-k)\langle\nabla_U X,U\rangle=0, \tag{13}$$

$$<\nabla_X U, X>+<\nabla_Y U, Y>= \frac{Uk}{\kappa-k} =:2f. \tag{14}$$

Так как поля $\frac{X+Y}{\sqrt{2}}$ и $\frac{X-Y}{\sqrt{2}}$ - также единичные и ортогональные, то, применяя формулу (12),

$$0=\frac{1}{2}<\nabla_{X+Y}U, X-Y>=\frac{1}{2}<\nabla_X U, X>-<\nabla_Y U, Y>. \tag{15}$$

Из формул (12), (14), (15) следует, что

$$\nabla_X U=fX, \tag{16}$$

$$\alpha(X, Y)=f<X, Y>U, \tag{17}$$

где α - вторая основная форма для интегрального многообразия распределения Ψ. Уравнение Гаусса для интегрального многообразия дает выражение для секционной кривизны в индуцированной римановой метрике $k(X\wedge Y)=k+f^2$, по теореме Шура интегральные многообразия M_C являются пространствами постоянной кривизны $c=k+f^2$. Равенство $R(X, Y)U=0$ с учетом формул (16) и (12) эквивалентно тому, что $(Xf)Y-(Yf)X=0$, т.е. функция f - постоянная на каждом интегральном многообразии M_C распределения Ψ. Из условия теоремы $(\nabla_U R)(X,Y)U=$ $=(\kappa-k)(<\nabla_U U,Y>X-<\nabla_U U,X>Y)=0$. Таким образом, $\nabla_U U=0$ и интегральные кривые поля U суть геодезические. Выберем координаты x^i ($i=1,\ldots,$ $n-1$) на интегральном многообразии M_C, проходящем через некоторую точку x из M. Пусть $ds^2= du^2+g_{ij}dx^i dx^j$ - первая квадратичная форма для M в полугеодезической системе координат с базовой параллелью M_C. По формуле (16)

$$\frac{\partial}{\partial u}g_{ij}=2fg_{ij}, \quad \varphi:=\exp\int_0^u f(t)dt,$$

получим, что $ds^2=du^2+\varphi^2(u)d\theta_C^2(x',\ldots,x^{n-1})$, где $d\theta_C^2$ - метрическая форма пространства постоянной кривизны. Теорема доказана.

Из примера в начале статьи немедленно получаем

Следствие. *Если риманово многообразие удовлетворяет условиям теоремы 1, то оно удовлетворяет и аксиоме* ($n-2,n-1$)*-плоскостей.*

Доказательство теоремы 2. По леммам 2 и 3 риманово многообразие M есть дизъюнктивное объединение открытого подмногообразия N, удовлетворяющего условиям теоремы 1, и множества точек F, в которых секционные кривизны - равные. Так как пространство постоянной кривизны локально является скрещенным произведением прямой на пространство постоянной кривизны, то, по теореме 1, объединение N и внутренности F доставляет множество, удовлетворяющее заключению теоремы 2.

Список литературы: 1.*Dirk van Lindt, Verstraelen.* A survey on axioms of submanifolds in Riemannian and Kaehlerian geometry //Coll. Math.1987(88). 54, N2. p.193-213. 2. *Бессе А.* Многообразия Эйнштейна. М., 1990. 2. 384 с. 3. *Камышанский Н.Г.*, Солодовников А.С. Полуприводимые аналитические пространства «в целом» //Успехи мат. наук. 35. 5 (215). 1980. С.3-51. 4. *Кобаяси Ш.*, *Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. М., 1981. 1. 344 с.

Поступила в редколлегию ?9.11.90

УДК 514.11

А. И. Петрунин

О ТРИАНГУЛЯЦИИ, СОГЛАСОВАННОЙ С ПОКРЫТИЕМ

Выпуклым многогранником в E^n, как обычно, называем выпуклую оболочку непустого конечного множества точек, а многогранным множеством – непустое пересечение конечного числа замкнутых полупространств или все E^n. В ряде исследований может быть полезен следующий результат.

Теорема. *Пусть каждой точке $x\in M$ выпуклого многогранника $M\subset E^n$ сопоставлен открытый n-мерный шар $B(x,f(x))$ с центром x и радиусом $f(x)>0$. Никаких предположений о характере функции $f:M\to(0,\infty)$ не делается. Тогда существует конечная триангуляция многогранника M (т.е. разбиение его на симплексы, прилегающие по целым граням), такая, что каждый ее симплекс (произвольной размерности $0,1,\dots,\dim M$) покрывается объединением шаров, соответствующих вершинам x_i этого симплекса.*

Доказательству предпошлем лемму.

Лемма. *Если существует точка q, которую покрывает каждый из открытых шаров $B_i=B(O_i,R_i)$ с центром во всех вершинах симплекса $\Delta=O_1O_2\dots O_k$, то объединение этих шаров покрывает симплекс Δ.*

Доказательство. Рассмотрим сферическое отображение симплекса Δ на стандартную единичную сферу S^{n-1}. Пусть S_i - образ вершины O_i. Очевидно, $\bigcup_{i=1}^{k} S_i=S^{n-1}$.

Обозначим $L_j=\{x\in E^n \mid x\ne q\ \frac{\overline{qx}}{|\overline{qx}|}\in S_j\}$. Тогда $\bigcup_{j=1}^{k}=E^n\setminus q$, $\bigcup_{j=1}^{k}(\Delta\cap L_j)=\Delta\setminus q$. Но каждая часть $\Delta\cap L_j$ симплекса Δ покрывается шаром $B(O_j,R_j)$. Действительно, из $x\in\Delta\cap L_j$ следует, что скалярное произведение $\langle qx,O_jx\rangle\le 0$, т.е. $\angle O_jxq\ge\pi/2$, а в треугольнике против большего угла лежит большая сторона, откуда $O_jx\le O_jq<R_j$.

Приступим к доказательству теоремы.

1) Из компактности многогранника M и каждой его грани произвольной размерности $0,1,\dots,\dim M$ следует существование такого конечного множества $A=\{O_1,\dots,O_m\}$ различных точек $O_j\in M$, что любая грань Γ покрывается теми шарами $B(O_j,f(O_j))$, для которых $O_j\in A\cap\Gamma$.

Доказательству предпошлем лемму.

Лемма. *Если существует точка q, которую покрывает каждый из открытых шаров $B_i=B(O_i,R_i)$ с центрами во всех вершинах симплекса $\Delta=O_1O_2\dots O_k$, то объединение этих шаров покрывает симплекс Δ.*

Доказательство. Рассмотрим сферическое отображение симплекса Δ на стандартную единичную сферу S^{n-1}. Пусть S_i - образ вершины O_i. Очевидно, $\bigcup\limits_{i=1}^{k} S_i=S^{n-1}$.

Обозначим $L_j=\{x\in E^n \mid x\neq q \ \frac{\overline{qx}}{|\overline{qx}|}\in S_j\}$. Тогда $\bigcup\limits_{j=1}^{k}=E^n\setminus q$, $\bigcup\limits_{j=1}^{k}(\Delta\cap L_j)=$ $=\Delta\setminus q$. Но каждая часть $\Delta\cap L_j$ симплекса Δ покрывается шаром $B(O_j,R_j)$. Действительно, из $x\in\Delta\cap L_j$ следует, что скалярное произведение $<\overline{qx},\overline{O_jx}>\le 0$, т.е. $\angle O_jxq\ge\pi/2$, а в треугольнике против большего угла лежит большая сторона, откуда $O_jx\le O_jq<R_j$.

Приступим к доказательству теоремы.

1) Из компактности многогранника M и каждой его грани произвольной размерности $0,1,\dots,\dim M$ следует существование такого конечного множества $A=\{O_1,\dots,O_m\}$ различных точек $O_j\in M$, что любая грань Γ покрывается теми шарами $B(O_j,f(O_j))$, для которых $O_j\in A\cap\Gamma$.

2) Пусть A - указанное множество. Мы докажем, что существует требуемая теоремой триангуляция многогранника M с вершинами симплексов только в точках множества A.

3) Будем обозначать $R_i=f(O_i)$, $B_i=B(O_i,R_i)$. Назовем степенью точки $p\in E^n$ относительно шара B_i величину $\rho_i(p)=|O_ip|^2-R_i^2$. Очевидно справедливы следующие утверждения.

1^0. Множество $\Pi_{ij}=\{p\in E^n \mid \rho_i(p)\le\rho_j(p)\}$ при $i\neq j$ является замкнутым полупространством, а при $i=j$ совпадает с E^n.

2^0. Если $p\in B_i$ и $<\overline{pO_i},\overline{pq}>\le 0$, то $\rho_i(q)\ge|pq|^2$.

3^0. Если $p\in B_i$ и $<\overline{pO_i},\overline{pq}>\ge 0$, то $\rho_i(q)<|pq|^2$.

4) Обозначим $Z_i=\{p\in E^n \mid \rho_i(p)\le\rho_j(p)$ при всех $j\}$. Тогда $Z_i=\bigcap\limits_j\Pi_{ij}$. Тем самым каждое Z_i, если оно не пусто, есть многогранное множество. Каждая точка $p\in E^n$ принадлежит хотя бы одному Z_i. Далее, не трудно видеть, что пересечение $Z_{i_1}\cap\dots\cap Z_{i_\lambda}$ любого числа Z_i, если оно непусто, есть многогранное множество размерности не

выше $n-1$. Таким образом, непустые Z_i образуют разбиение пространства E^n. Многогранные множества вида $Z_{i_1}\cap\ldots\cap Z_{i_\lambda}$ будем называть гранями разбиения.

5) Малым шевелениям (сокращениям) радиусов R_i соответствует малое шевеление полупространства Π_{ij}. Такими «шевелениями радиусов» (не теряя свойств покрытия граней шарами B_i) можно добиться, чтобы описанное в 4) разбиение пространства E^n на многогранные множества было локально «предельно простым», т. е. чтобы по каждой грани разбиения коразмерности s прилегало ровно $s+1$ множество. Далее считаем разбиение именно таким.

6) Покажем теперь, что из $Z_{i_1}\cap Z_{i_2}\cap\ldots\cap Z_{i_\lambda}\neq\varnothing$ следует, что точки $O_{i_1},\ldots,O_{i_\lambda}$ служат вершинами невырожденного, т. е. ($\lambda-1$)-мерного, симплекса. Действительно, пусть $q\in\bigcap\limits_{\alpha=1}^{\lambda}Z_{i_\alpha}$. Рассмотрим множество номеров $I=\{i\in\{1,\ldots,m\}\,|\,q\in Z_i\}$. Очевидно, $I=\{i_1,\ldots,i_\lambda,\ldots i_\mu\}$. Если симплекс $O_{i_1}\ldots O_{i_\lambda}$ - вырожденный, то и симплекс $O_{i_1}\ldots O_{i_\mu}$ - вырожденный (т. е. размерности ниже $\mu-1$). Но тогда грань минимальной размерности, содержащая q, имеет коразмерность не выше $\mu-2$, что противоречит 5).

7) Докажем, что при $Z_{i_1}\cap\ldots\cap Z_{i_\lambda}\neq\varnothing$ объединение шаров $B_{i_1}\cup\ldots\cup B_{i_\lambda}$ покрывает симплекс $\Delta=O_{i_1},\ldots,O_{i_\lambda}$. Пусть $q\in\bigcap\limits_{\alpha=1}^{\lambda}Z_{i_\alpha}$ и p - ближайшая к q точка многогранника M (не исключается $p=q$). Допустим, что хотя бы при одном α точка $p\notin B_{i_\alpha}$. Из того, что p - ближайшая к q, следует, что $\langle p\vec{q}, pO_{i_\alpha}\rangle\leq 0$. Но точка $p\in M$, и поэтому существует содержащий p шар B_i с центром $O_i\in\Gamma$, где Γ - грань минимальной размерности, содержащая p. Но тогда $\langle p\vec{O}_i, p\vec{q}\rangle=0$, и согласно 2^0, 3^0 из 3) имеем $p_{i_\alpha}(q)\geq|pq|^2>p_i(q)$, что противоречит $q\in Z_{i_\alpha}$. Значит, точка $p\in\bigcap\limits_{\alpha=1}^{\lambda}B_{i_\alpha}$, откуда по лемме заключаем, что $\bigcup\limits_{\alpha=1}^{\lambda}B_{i_\alpha}\supset\Delta$.

8) Разбиению E^n на многогранные множества Z_i сопоставим «двойственный» этому разбиению абстрактный симплициальный комплекс K: каждому множеству Z_i сопоставляем вершину X_i комплекса K, а каждой грани $Z_{i_1}\cap Z_{i_2}\cap\ldots\cap Z_{i_\lambda}\neq\varnothing$ разбиения сопоставляем ($\lambda-1$)-симплекс. После чего осуществляем кусочно-линейное отображение $\Pi:K\to E^n$, отображающее вершины по правилу $\Pi(X_i)=O_i$ и линейное в пределах каждого симплекса из K.

Мы утверждаем, что П есть гомеоморфизм комплекса K на многогранник M. Если это будет доказано, то ясно, что отображение $\Pi: K \to M$ задает в M требуемое теоремой симплициальное разбиение.

9) Мы докажем утверждение о гомеоморфности отображения $\Pi: K \to M$ индукцией по $\dim M$. При $\dim M=0$ оно очевидно. Пусть $\dim M=\nu$, а утверждение верно для всех выпуклых многогранников, размерности $0, 1, 2, \ldots, \nu-1$.

10) Граничным $(n-1)$-симплексам из K соответствуют лучи в разбиении E^n на Z_i, уходящие в бесконечность. Рассмотрим такой луч L. Пусть l - прямая, содержащая L. Припишем каждой точке p на l координату $x(p)$ (линейно) так, чтобы $|x(p)|$ было расстоянием от p до начала луча L и если $p \in L$, то $x(p) \geq 0$. Пусть $L=Z_1 \cap Z_2 \cap \ldots \cap Z_n$, тогда при $p \in L$ будет $\rho_1(p)=\rho_2(p)=\ldots=\rho_n(p) \leq \rho_i(p)$ при $i \notin \{1, 2, \ldots, n\}$ Следовательно, $\sqrt{\rho_1(p)}-x(p)=\ldots=\sqrt{\rho_n(p)}-x(p) \leq \sqrt{\rho_i(p)}-x(p)$. Устремив p к бесконечности, получим (если $s(a)$ - прямоугольная проекция a на l)

$$x[s(O_1)]=\ldots=x[s(O_n)] \leq x[s(O_i)]. \qquad (1)$$

Из того, что симплекс $O_1O_2\ldots O_n$ не вырожден (см. п. 6) и соотношений (1) следует, что $O_1O_2\ldots O_n$ лежит на одной из $(n-1)$-граней многогранника M.

Таким образом, при отображении П граница ∂K отображается в ∂M. Применив индуктивное предположение для каждой $(n-1)$-грани, получаем, что ∂K отображается на ∂M гомеоморфизмом. (Дело в том, что если продолжить $(n-1)$-грани до гиперплоскости и, сохраняя ее направление, отодвигать ее от многогранника, то предельное разбиение этой плоскости множествами Z_i совпадает с тем ее разбиением, которое делается только для шаров, чьи центры лежат на этой грани).

Отсюда сразу следует, что при отображении П каждая точка многогранника M накрывается хотя бы один раз. А с учетом ориентации (когда учитывается «знак» накрытия) - алгебраически ровно один раз. Остается доказать, что в действительности каждая точка накрывается отображением П только один раз.

Пусть $q \in M$ накрывается хотя бы два раза, тогда среди накрывающих ее симплексов существуют два, накрывающие ее с противоположной ориентацией. Соединим эти симплексы кривой в какой-нибудь геометрической реализации K в E^n, проходящей только через симплексы коразмерности 0 или 1. Так как соединенные симплексы отображались с противоположной ориентацией, то найдется $(n-1)$-симплекс, при проходе через который по кривой меняется ориентация.

11) **Предложение.** *В комплексе К не существует (n-1)-симплекса, такого, что прилегающие к нему два n-симплекса отображаются в М с разными ориентациями.*

Доказательство. Предположим Δ - образ такого (n-1)-симплекса; тогда обе вершины, образующие с ним n-симплексы, лежат по одну сторону гиперплоскости, содержащей Δ. Рассмотрим разбиение пространства, которое получается при помощи только $n+2$ шаров с центрами в вершинах этих двух n-симплексов. Как и в общем разбиении, здесь симплексу Δ будет соответствовать отрезок, и его будут ограничивать вершины, соответствующие прилегающим к ним n-симплексам. Проведем к Δ радиальную ось, т.е. $I=\bigcap_{i\neq j;\,O_iO_j\in\Delta}\Pi_{ij}$.

Это будет прямая, перпендикулярная гиперплоскости симплекса Δ. На I лежит отрезок, соответствующий Δ, однако если взять на точку a бесконечно удаленную в сторону, противоположную той стороне гиперплоскости симплекса Δ, по которую лежат две вершины, то получим, что для a будет $\rho_i(a)=\rho_j(a)$ при $i\neq j$, $O_i,O_j\in\Delta$ и эта величина меньше значения степеней точек для обеих из составляющих вершин. То есть Δ соответствует луч - противоречие.

Отсюда каждая точка М накрывается ровно один раз.

Теорема доказана.

Поступила в редколлегию 19.12.89

УДК 514

В. Ю. Ровенский

ВПОЛНЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ СЛОЕНИЯ, БЛИЗКИЕ К РИМАНОВЫМ

В работе рассматривается $(n+\nu)$-мерное риманово многообразие $M^{n+\nu}$ $(\nu, n.0)$ с ν-мерным слоением $\{L^{\nu}\}$ (см. [1]). в [2] доказана теорема, что если листы - полные и вполне геодезические, а смешанная секционная кривизна

$$K(x, y)=\mathrm{const}>0 \quad (x\in TL,\ y\in TL^{\perp}), \tag{1}$$

то

$$\nu<\rho(n), \tag{2}$$

где $\rho(n)-1$ - максимальное число непрерывных поточечно линейно независимых векторных полей на сфере S^{n-1}.

В [3] замечено, что неравенство (2) - точное, но нарушается при замене (1) более слабым условием:

$$K(x,y)>0 \quad (x\in TL,\ y\in TL^{\perp}), \tag{3}$$

В данной работе доказана справедливость неравенства (2) для вполне геодезического слоения с условием (3) и "близкого" в определенном смысле к риманову или конформному.

Важную информацию о слоении $\{L\}$ содержит вторая фундаментальная форма $h^{\perp}:TL^{\perp}\times TL^{\perp}\to TL$ ортогонального распределения $TL^{\perp}$ и соответствующий симметричный оператор $W^{\perp}(x):TL^{\perp}\to TL^{\perp}(x\in TL)$, заданные формулами (см. [1]): $h^{\perp}(y,z)=\frac{1}{2}(\nabla_y z+\nabla_z y)^{\tau}$, $\langle W^{\perp}(x)y,z\rangle=\langle h^{\perp}(y,z),x\rangle$. Для риманова слоения $h^{\perp}$ и $W^{\perp}(x)$ - нулевые, а для конформного - $W^{\perp}(x)$ является гомотетией.

Обозначим через $K_{\min}(p)$ - минимум смешанной секционной кривизны слоения в точке $p\in M$.

Теорема. *Пусть $M^{n+\nu}$ $(\nu,n>0)$ - риманово многообразие со слоением $\{L^{\nu}\}$ на полные вполне геодезические листы, и в каждой точке $p\in M$ выполнено*

$$|W^{\perp}(x)y|^2\le K_{\min}(p) \quad (x\in T_pL,\ y\in T_pL^{\perp},|x|=|y|=1). \tag{4}$$

Тогда если а) $\nu\ge\rho(n)$ б) $M,\{L\}$ - келеровы многообразия и $\nu>2$ при n кратном 4, то $K_{\min}=0$ и $\{L\}$ - риманово слоение.

Следствие. *Пусть $M^{n+\nu}$ $(\nu,n>0)$ - риманово многообразие с вполне геодезическим слоением $\{L^{\nu}\}$, и на полном листе L_0 выполнено*

$$|W^{\perp}(x)y|^2\le K(x,y) \quad (x\in TL_0,\ y\in TL_0^{\perp},|x|=|y|=1). \tag{5}$$

Тогда $\nu<\rho(n)$, а если $M,\{L\}$ - келеровы многообразия, то $\nu=2$ и n кратно 4.

Замечания. 1. Оценка размерности листа в келеровом случае теоремы и следствия точна ввиду существования римановой субмерсии с 2-мерными вполне геодезическими слоями $CP^1\subset CP^{2m+1}\xrightarrow{\ \Pi\ }HP^m$ (см. [4]). 2. Условие (5) можно ослабить следующим требованием: существует такая точка $p\in L_0$, что вдоль любой естественно параметризованной геодезической $\gamma:R\to L_0$, $(\gamma(0)=p)$ выполнено $|W^{\perp}(\dot\gamma(t))y|^2\le K(\dot\gamma(t),y)$ $\quad (y\in T_{\gamma(t)}L_0^{\perp},\ |y|=1,\ t\in R)$. 3. Теорема и следствие (а также теоремы 3, 4 [3]) допускают естественное усиление для слоений, близких к конформным.

Теорема'. *Пусть $M^{n+\nu}$ $(\nu,n>0)$ - риманово многообразие со слоением $\{L^{\nu}\}$ на полные вполне геодезические листы, и существует гладкий линейный функционал $\beta:TL\to R$ с условием*

$$|W^{\perp}(x)y-\beta(x)y|^2\le K_{\min}(p) \quad (x\in T_pL,\ y\in T_pL^{\perp},|x|=|y|=1).$$

15-У

Тогда если а) $\nu\geq\rho(n)$ ($\nu=1$, n-нечетное), б) $M,\{L\}$ - келеровы многообразия и $\nu>2$ в случае n кратно 4, ($\nu=2$, n не кратно 4), то $k_{min}=0$, и слоение - конформно (риманово).

Следствие'. *Пусть $M^{n+\nu}$ $(\nu, n, 0)$ - риманово многообразие с вполне геодезическим слоением $\{L^{\nu}\}$, и для полного листа L_0 существует гладкий линейный функционал $\beta:TL\to R$ с условием*

$$|W^{\perp}(x)y-\beta(x)y|^2\leq K(x,y)\quad (x\in TL_0,\ y\in TL_0^{\perp}, |x|=|y|=1).$$

Тогда $\nu<\rho(n)$, а если $M,\{L\}$ - келеровы многообразия, то $\nu=2$ и n кратно 4.

Доказательство теоремы и следствия. В [2,5] для вполне геодезического слоения $\{L\}$ на M определен билинейный оператор $B:TL\times TL^{\perp}\to TL^{\perp}$ по формуле

$$B(x,y)=(\nabla_y\bar{x})^{\perp}\quad (x\in TL,\ y\in TL^{\perp}), \tag{6}$$

где $\bar{x}\subset TL$ - гладкое локальное поле векторов, содержащее x, причем справедливо равенство

$$(\nabla_x B)(x,y)+B(x,B(x,y))+R(y,x)x=0. \tag{7}$$

Обозначим через $B^{+}(x,\cdot)$ и $B^{-}(x,\cdot)$ симметричную и кососимметричную по y части оператора (6) и заметим, что $B^{+}(x,\cdot)=-W^{\perp}(x)$. Выделяя в (7) симметричную и кососимметричную по y части, получим систему уравнений

$$\begin{gathered}(\nabla_x B^{+})(x,y)+B^{+}(x,B^{+}(x,y))+B^{-}(x,B^{-}(x,y))+R(y,x)x=0,\\ (\nabla_x B^{-})(x,y)+B^{+}(x,B^{-}(x,y))+B^{-}(x,B^{+}(x,y))=0.\end{gathered} \tag{8}$$

Если $\nu\geq\rho(n)$ ($\nu>2$ для n кратного 4 в келеровом случае), то для каждой точки $p\in L$ найдутся единичные векторы $x\in T_pL$, $y T_pL^{\perp}$ и число λ, с условием $B^{-}(x,y)=\lambda y$, причем благодаря кососимметричности $B^{-}(x,\cdot)$, выполнено $\lambda=0$ и, в частности, $\det B^{-}(x,\cdot)=0$. Действительно, если оператор $B^{-}(x,\cdot)$ не имеет собственного вектора при любом ненулевом $x\in T_pL$, то выберем ортонормированный базис $\{e_i\}\subset T_pL$, и, следуя [2], построим ν линейно независимых векторных полей $\{v_i\}$, касающихся сферы $S^{n-1}\subset T_pL^{\perp}$ по правилу $v_i(y)=B^{-}(e_i,y)$. В келеровом случае существование собственного вектора оператора B^{-} обеспечивает следующая

Лемма [6]. *Пусть $I:R^{\nu}\to R^{\nu}$, $I:R^{n}\to R^{n}$ - комплексные структуры на евклидовых пространствах, $D:R^{\nu}\times R^{n}\to R^{n}$ - билинейный оператор со свойством $D(Ix,y)=ID(x,y)$. Тогда при $\nu>2$ существуют единичные векторы $x\in R^{\nu}$, $y\in R^{n}$ и число λ со свойством $D(x,y)=\lambda y$.*

Отметим, что для риманова слоения (8а) принимает простой вид $B^{-}(x,B^{-}(x,y))+R(y,x)x=0$, и для найденных векторов x, y сразу получаем $K(x,y)=0$, т. е. $k_{\min}(p)=0$.

Рассмотрим (8б) вдоль естественно параметризованной геодезической $\gamma:R\to L$ ($\gamma(0)=p$, $\dot\gamma(0)=x$),

$$(B_t^-)'+B_t^+B_t^-+B_t^-B_t^+=0, \tag{9}$$

где $B_t^+=B^+(\dot\gamma(t),\cdot)$, $B_t^-=B^-(\dot\gamma(t),\cdot)$. Из (9) нетрудно вывести формулу

$$B_t^-=\exp\left(-\int_0^t B_t^+dt\right)\cdot B_0^-\exp\left(-\int_0^t B_t^+dt\right), \tag{10}$$

позволяющую утверждать, что $\ker B_t^-$ имеет не зависимую от t размерность $m=\dim\ker B_0^->0$ и является гладким подрасслоением $TL^\perp$ вдоль γ. Поэтому можно построить гладкие векторные поля $\{y_i(t)\}_{1\le i\le m}\subset T_{\gamma(t)}L^\perp$ с условием

$$y_i(t)\in\ker B_t^-,\ (y_i(t),y_j(t))=\delta_{ij},\ y_i(t)'\perp\ker B_t^-. \tag{11}$$

Подставляя $y_i(t)$ в (9) и принимая во внимание $B_t^-y_i(t)=0$, $(B_t^-)'y_i(t)=(B_t^-y_i(t))'-B_t^-(y_i(t)')=-B_t^-(y_i(t)')$, получим равенства $B_t^-(y_i(t)'-B_t^+y_i(t))=0$, $(1\le i\le m)$, из которых ввиду (11) следует:

$$y_i(t)'=B_t^+y_i(t)-\sum_{k=1}^{m}\alpha_{ik}(t)y_k(t). \tag{12}$$

Умножая (12) скалярно на $y_j(t)$, находим

$\alpha_{ij}(t)=(B_t^+y_i(t),y_j(t))$ $(1\le i,j\le m)$.

В (8а) вдоль $\dot\gamma$ подставим $y_i(t)$ и после скалярного умножения на $y_j(t)$ с учетом (12) получим матричное дифференциальное уравнение Риккати:

$$A_t'+2A_t^2+(R_t-D_t)=0, \tag{13}$$

где $A_t=(\alpha_{ij}(t))$; $R_t=(r_{ij}(t)=(R(y_i(t),\dot\gamma(t))\dot\gamma(t),y_j(t))$; $D_t=(\alpha_{ij}(t)=B_t^+y_i(t),B_t^+y_j(t))$ - симметричные матрицы порядка m, непрерывные по t, причем $R_t\ge k_{\min}(\gamma(t))E\ge D_t$ в силу (4). В частности, из (13) при $i=j$ имеем

$$\alpha_{ii}(t)'+2\alpha_{ii}(t)^2+[2\sum_{k\ne i}\alpha_{ik}(t)^2+(r_{ii}(t)-\alpha_{ii}(t))]=0. \tag{14}$$

В случае (5) в квадратных скобках (14) положительная функция, и дифференциальное уравнение Риккати (14) не может иметь непрерывное решение $\alpha_{ii}(t)$ для $-\infty<t<+\infty$. Противоречие доказывает следствие.

В случае (4) в квадратных скобках (14) - неотрицательная функция, и единственное непрерывное для $-\infty<t<\infty$ решение $\alpha_{ii}(t)$ уравнения (14) равно нулю, т.е. $\alpha_{ii}(t)=\alpha_{ij}(t)=0$, $r_{ii}(t)-\alpha_{ii}(t)=0$ $(1\le i, j\le m)$. Но тогда из (13) для $i\ne j$ получаем $r_{ij}(t)-\alpha_{ij}(t)=0$. Иными словами, $A_t=0$, $R_t=D_t=k_{\min}(\gamma(t))E$. Из полученных равенств и (4) вытекает: $B_t^+ y_i(t)=\sqrt{k_{\min}(\gamma(t))}\,y_i(t)$, т.е. $k_{\min}(\gamma(t))-(B_t^+ y_i(t), y_i(t))^2=0$. Ввиду произвольности точки p выполнено $k_{\min}=0$ и, благодаря (4), $W^{\perp}(x)=-B^+(x,\cdot)=0$ $(x\in TL)$. Следовательно, $\{L\}$ - риманово вполне геодезическое слоение, теорема доказана.

Теорема' и следствие' доказываются аналогично, потому, что (13) можно преобразовать к виду

$A_t'+A_t^2+[(R_t-\tilde{D}_t)+(A_t-\beta(t)E)^2]=0$, где $\beta(t)=\beta(\dot{\gamma}(t))$; $\tilde{D}_t=((B_t^+ y_i(t)-\beta(t)y_i(t), B_t^+ y_j(t)-\beta(t)y_j(t)))$, причем в квадратных скобках неотрицательно (положительно) определенная симметричная матрица.

Список литературы: 1. *Tondeur P.* Foliations on Riemanian manifolds. New York, 1988. 247 p. 2. *Ferus D.* Totally geodesic foliations//Math. Ann. 1970. 188, N4. P.313-316. 3. *Ровенский В.Ю.* Вполне геодезические слоения//Сиб. мат. журн. 1982. 23, N3. С.217-219. 4. *Escobales R.* Riemanian submersions from complex projective space//J. Diff. Geom. 1978. 13. P.93-107. 5. *Dombrowski P.* Jacobi fields, totally geodesic foliations and geodesic differential forms//Result. math. 1979. 1. P.156-194. 6. *Ровенский В.Ю.* Характеризация вполне геодезических подмногообразий S^m и CP^m//Укр. геометр. сб. 1985. Вып. 28. С.106-116.

Поступила в редколлегию 15.10.90

УДК 514

И. Х. Сабитов

О СВЯЗЯХ МЕЖДУ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫМИ ИЗГИБАНИЯМИ РАЗНЫХ ПОРЯДКОВ

1. В теории изгибаний одним из еще не решенных до конца вопросов является установление взаимосвязей между изгибаниями и бесконечно малыми (б. м.) изгибаниями поверхностей. Не останавливаясь на общем описании задач такого характера (см. об этом в [1]), упомянем два известных результата: 1) если поверхность обладает жесткостью 1-го или 2-го порядка, то она не допускает аналитических по параметру изгибаний (см., напр., [2]); 2) если поверхность обладает жесткостью 3-го порядка и при этом известно, что она может иметь только одно линейно независимое поле нетривиального б. м. изгибания 1-го порядка, то в этом случае она также неизгибаема в классе аналитических по параметру деформаций (см. работу Н. В. Ефимова [3]).

В данной работе, во-первых, введем более широкое определение деформаций, которые будем называть б.м. изгибаниями порядка (k, n), во-вторых, обобщим результат из [3] в двух направлениях: а) заменим в нем условие единственности линейн независимого поля б.м. изгибания 1-го порядка более общим, а именно, потребуем, чтобы любое существующее для поверхности поле б.м. изгибания было продолжимо в б.м. изгибание 2-го порядка, и в этих условиях в предположении жесткости 3-го порядка получим жесткость любого порядка (k, n), $k \ge 1$, в частности, аналитическую по параметру неизгибаемость (это условие действительно обобщает условие работы [ ], так как в ней все поля б.м. изгибаний имеют вид $z = Cz_0$, $C = \mathrm{const}$, и все они продолжимы в б.м. изгибания 2-го порядка вместе с единственным линейно независимым полем z_0); б) в предположении основного условия работы [3] — единственности линейно независимого поля б.м. изгибания 1-го порядка — получим, что из жесткости любого порядка $m \ge 3$ следует жесткость относительно б.м. изгибаний высших порядков (k, n), $km \le n$, в частности, аналитическая неизгибаемость.

Кроме теоремы 1, остальные результаты работы были анонсированы в [4] и частично изложены в [1].

Аналогичные вопросы в классах гладкости рассмотрены также в работах [5, 6].

2. Пусть поверхность S с радиус-вектором $r = r(u, v)$ подвергается деформации S_t, описываемой в виде

$$r(u, v, t) = r(u, v) + t^k z_k(u, v) + \ldots + t^n z_n(u, v) + h_n(u, v; t), \qquad (1)$$

где $1 \le k \le n$, t — параметр деформации; $z_i(u, v)$, $k \le i \le n$, и $h_n(u, v; t)$ — векторные фукции, причем $h_n(u, v; t)$, $\frac{\partial h_n}{\partial u}$, $\frac{\partial h_n}{\partial v} = o(t^n)$, $t \to 0$, равномерно на каждом компакте внутри области задания $r(u, v)$; что касается условий на гладкость, то нам всюду будет достаточна гладкость класса C^1. Деформацию (1) назовем б.м. изгибанием порядка (k, n), если длины кривых на S_t изменяются на порядок $o(t^n)$ по сравнению с длинами на S. Из этого определения немедленно получаем условие $dr dz_k = 0$, т.е. z_k определяет для поверхности поле ее б.м. изгибания 1-го порядка в обычном смысле. В определении нетривиального б.м. изгибания порядка (k, n) сразу же вводится условие, что z_k определяет нетривиальное б.м. изгибание 1-го порядка. Тогда получаем, что для нетривиального б.м. изгибания порядка (k, n) изменение пространственных расстояний между точками поверхности будет точного порядка

$O(t^n,k)$ (если поверхность не является областью на плоскости), а расстояния по поверхности изменяются на порядок $o(t^n)$, $t\to0$. Мотивацию для такого определения и его связь с общепринятыми определениями б.м. изгибаний высшего порядка см. в [1], здесь только укажем, что любой начальный отрезок ряда, дающего аналитическое по параметру изгибание поверхности S, является б.м изгибанием соответствующего порядка (k,n). Кроме того, отметим, что нетривиальное в общепринятом смысле б.м. изгибание порядка $n\ge1$ (см., напр., [2]) в наших обозначениях является нетривиальным б.м. изгибанием порядка $(1,n)$.

Замечание. В работе [7] дан пример изгибаемого каркаса, являющегося, тем не менее, жестким относительно б.м. изгибаний 3-го порядка. В связи с этим примером в [7] ставится проблема нахождения такого определения жесткости N-го порядка, чтобы, среди прочих естественных условий, из жесткости N-го порядка следовала жесткость (N+1)-го порядка и, в частности, чтобы получалась аналитическая неизгибаемость. Введенное выше понятие б.м. изгибания порядка (k,n) позволяет предложить следующее определение жесткости N-го порядка: если поверхность допускает нетривиальное б.м. изгибание порядка (k,kN) с некоторым $k\ge1$, то она называется нежесткой (в общем смысле) N-го порядка; соответственно, жесткость N-го порядка (в общем смысле) означает, что поверхность не допускает нетривиальных б.м. изгибаний порядка (k,kN) ни при каком $k\ge1$.

3. Систему уравнений, определяющих поля б.м. изгибаний порядка (k,n), выпишем для деформации

$$r(u,v;t)=r(u,v)+2t^k z_k(u,v)+\ldots+2t^n z_n(u,v)+o(t^n). \tag{2}$$

Тогда условие $dr_t^2-dr^2=o(t^n)$ приводит к уравнениям

$$\begin{aligned}
&dr\,dz_k=0,\\
&dr\,dz_{2k-1}=0,\\
&dr\,dz_{2k}+dz_k^2=0,\\
&dr\,dz_j+\sum_{i=k}^{j-k} dz_i\,dz_{j-i}=0,
\end{aligned} \tag{3}$$

$(2k+1\le j\le n)$.

В частности, для б.м. изгибаний порядка $(1,m)$: $r(u,v;t)=r(u,v)+2t\tilde z_1(u,v)+\ldots+2t^m\tilde z_m(u,v)+o(t^m)$ мы должны иметь следующую систему уравнений:

$$
\begin{aligned}
&d r d\tilde{z}_1=0,\\
&d r d\tilde{z}_2+d\tilde{z}_1^2=0, \qquad\qquad (4)\\
&d r d\tilde{z}_j+\sum_{i=1}^{j-k} d\tilde{z}_i d\tilde{z}_{j-i}=0,\ 3\le j\le m.
\end{aligned}
$$

Упомянутые в п. 1 основные утверждения будем доказывать в положительном варианте, т. е. не будем доказывать, что нет искомых изгибаний, а докажем, что если искомые изгибания есть, то конструктивно можно построить и б. м. изгибания меньшего порядка. Это значит, что, имея некоторое решение z_j, $k\le j\le n$, системы (3), можно сконструировать новые функции $\tilde{z}_j$, $1\le j\le m$, дающие решение системы (4). Чтобы подчеркнуть богатство не изученных еще алгебраических свойств системы (3), отметим, что восстановление б. м. изгибаний вида (2) по решениям системы (3) проводится неоднозначно. Например, по решению z_3, z_4, 0, z_6 системы (3) с $k=3$, $n=6$ можно построить бесконечное число соответствующих им б. м. изгибаний вида $r(u,v;t)=r(u,v)+2t^k\tilde{z}_k+2t^m\tilde{z}_m+2t^n\tilde{z}_n+o(t^n)$ с любым набором $k\ge 2$, $k<m<2k=n$, положив $\tilde{z}_k=z_3$, $\tilde{z}_m=z_4$, $\tilde{z}_n=z_6$. Далее, отметим также, что существует способ, дающий возможность получения решений новых систем вида (3) на основании известных решений одной системы, а именно: в каком-нибудь б. м. изгибании (1), соответствующем данному решению какой-либо системы (3), надо сделать замену параметра $t=\tau^p(1+a\tau^q+\ldots)$, где числа $p>0$, $q>0,\ldots$ подбираются так, чтобы относительно τ получалось разложение $r(u,v;\tau)$ по целым степеням τ; получаемая при этом деформация вида (2) будет содержать при τ^i коэффициенты $\tilde{z}_i$, линейно выражаемые через z_j, и они будут решениями соответствующей им системы вида (3). Именно таким путем и будет доказана теорема 2.

4. В этом пункте мы впервые получим первое обобщение результата работы [3].

Теорема 1. *Пусть поверхность S такова, что любое ее б. м. изгибание порядка (1,1) продолжимо в б. м. изгибание порядка (1,2). Тогда, если для S существует б. м. изгибание порядка (k,n), $k\ge 1$, $n\ge 3k$, то существуют и б. м. изгибания порядка (1,3).*

Следствие. *В указанных в теореме условиях из жесткости 3-го порядка следует аналитическая (по параметру деформации) неизгибаемость поверхности.*

Доказательство теоремы. Если $k=1$, то часть (1,3) б. м. изгибания порядка $(1,n)$, $n\ge 3$, и будет искомым б. м. изгибанием

16-381

порядка (1,3). Пусть $k>2$. Выпишем из системы (3) часть уравнений до номера $j=3k$:

$$
\begin{aligned}
& dr dz_k=0, \\
& \ldots\ldots \\
& dr dz_{2k-1}=0,\ dz_{k+1} \\
& dr dz_{2k}+dz_k^2=0, \\
& dr dz_{2k+1}+2dz_k dz_{k+1}=0, \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& dr d\tilde{z}_{3k}+dz_k dz_{2k}+dz_{k+1}dz_{2k-1}+\ldots+dz_{2k}dz_k=0.
\end{aligned} \tag{5}
$$

В последнем уравнении системы (5) каждое произведение $dz_i dz_{3k-i}$, $k+1<i<2k-1$, представимо в виде $2dz_i dz_{3k-i}=(dz_i+dz_{3k-i})^2-dz_i^2-dz_{3k-i}^2$. Все поля z_k, $z_{k+1},\ldots,z_{2k-1}$ удовлетворяют уравнению вида $drdz=0$, и поэтому они и их суммы являются полями б. м. изгибания 1-го порядка. Значит, по условию теоремы существуют поля $\bar{z}_i$ и $\bar{z}$ $\bar{z}_{k,i}$ с условиями

$$d\bar{z}_i^2=-dr\bar{z}_i,\quad (d\bar{z}_i+d\bar{z}_{3k-i})^2=-dr d\bar{z}_{k,i},\quad (k\le i\le 2k-1),$$

т.е. поля, дающие продолжения в б. м. изгибания 2-го порядка соответствующих полей б. м. изгибаний 1-го порядка. В таком случае последнее уравнение системы можно переписать в виде

$$dr d(\tilde{z}_{3k}+\sum_i \bar{z}_i-\sum_i \bar{z}_{k,i})+2dz_k dz_{2k}=0.$$

Следовательно, поля $\tilde{z}_1=z_k$, $\tilde{z}_2=z_{2k}$, $\tilde{z}_3=z_{3k}+\sum\limits_i \bar{z}_i-\sum\limits_i \bar{z}_{k,i}$

определяют искомое нетривиальное б. м. изгибание порядка (1,3):

$r(u,v;t)=r(u,v)+2t\tilde{z}_1+2t^2\tilde{z}_2+2t^3\tilde{z}_3+o(t^3)$. Теорема доказана.

Замечание. По-видимому, верно следующее обобщение теоремы 1: *Если для поверхности S любое ее б. м. изгибание 1-го порядка продолжимо в б. м. изгибание n рядка $(1,m)$ и существует б. м. изгибание порядка (k,n), $k\ge 1$, $n\ge k(m+1)$, то S допускает б. м. изгибания порядка $(1, m+1)$.*

В настоящее время это предложение доказано Н. Г. Перловой.

5. Перейдем к другому обобщению результата работы [3].

Теорема 2. Пусть о полях z нетривиальных б. м. изгибаний 1-го порядка поверхности S известно следующее: существует поле z_0 такое, что каждое поле z или линейно зависит от z_0, т. е. $z=\mathrm{const}\cdot z_0$, или же z поточечно параллельно z_0, т. е. существует непрерывная функция $a(u,v)$, такая, что $z=az_0$, причем в этом случае множество точек $z_0\ne 0$ предполагается связным (и если на поверхности есть плоские области, то на них заранее предполагается $a(u,v)=\mathrm{const}$). Тогда, если для поверхности существует б. м. изгибание порядка (k,n), $k\geq 1$, то существует и б. м. изгибание порядка $(1,m)$ с $km\leq n$.

Следствие. *Если для поверхности S, удовлетворяющей условиям теоремы 2, известна ее жесткость какого-нибудь порядка $(1,m)$, $m\geq 1$, то S является жесткой относительно любых б.м. изгибаний порядка (k,n) с $n\geq km$, в частности, S не допускает аналитических по параметру изгибаний.*

Доказательство начнем с леммы, устанавливающей, что на самом деле в условиях теоремы всегда $z=az_0$, $a=\mathrm{const}$.

Лемма. *В условиях теоремы 2 функция $a(u,v)$ или постоянна или ее можно изменить на некотором множестве точек так, что она станет всюду постоянной с сохранением свойства $z=az_0$.*

Как было условлено, поверхности и поля б. м. изгибаний предполагаются C^1-гладкими. Поэтому в точках, где $z_0\neq 0$, функция $a(u,v)$ имеет непрерывные частные производные 1-го порядка. Из равенства $drdz=0$ имеем $da(z_0dr)=0$. Допустим, $(z_0dr)=0$. Предполагая поверхность S локально заданной в виде $(u,v,f(u,v))$, из равенств $drdz_0=0$, $(z_0dr)=0$, получим, что или $z_0=0$ или $\frac{\partial f}{\partial u}=\mathrm{const}$, $\frac{\partial f}{\partial v}=\mathrm{const}$. Следовательно, поверхность S разбивается на подмножества трех видов: подмножество с $z_0=0$, область $S_1: z_0\neq 0$, состоящая, в свою очередь, из областей, где $da=0$, и из областей, где поверхность S плоская. Получаем, что a является на S_1 кусочно-постоянной, и так как она непрерывна, а область S_1 связна, то она всюду на S_1 постоянна. Далее, в точках, где $z_0=0$, можем изменить значение функции a на ее постоянное значение из S_1, после чего получим $a=\mathrm{const}$ всюду на S.

Продолжим доказательство. Пусть б. м. изгибание порядка (k,n) дано в виде (2). Если $k=1$, то утверждение теоремы очевидно. Пусть $k\geq 2$. Если $n<2k$, то утверждаемый в теореме порядок $m=1$, так как $km\leq n<2k$. Пусть $2k\leq n<3k-1$. Поля z_j, $k\leq j<2k-1<n$, удовлетворяют уравнению $drdz_j=0$, следовательно, в силу условий теоремы и леммы имеем $z_j=c_jz_0$; для простоты считаем $z_k=z_0$, так что $c_k=1$. Тогда деформация (2) имеет вид

$$r(u,v;t)=r(u,v)+2(t^k+c_{k+1}t^{k+1}+\ldots+c_{2k-1}t^{2k-1})z_0+$$
$$+2t^{2k}z_{2k})+\ldots+2t^nz_n+o(t^n) \tag{6}$$

Положим $t_1^k=t^k+c_{k+1}t^{k+1}+\ldots+c_{2k-1}t^{2k-1}$ или $t=t_1-(c_{k+1}/k)t_1^2+\ldots$ В таком случае деформация (6) принимает вид

$$r(u,v;t_1)=r(u,v)+2t_1^k z_0+2t_1^{2k} z_{2k}+2t_1^{2k+1} z^1_{2k+1}+\ldots+$$
$$+2t^n z_n^{(1)}+o(t_1^n),\ t_1\to 0. \qquad (7_1)$$

Так как $dr_t^2-dr^2=o(t^n)$, $t\sim t_1$, то и $dr_{t_1}^2-dr^2=o(t_1^n)$, т. е. деформация (7_1) тоже является б. м. изгибанием порядка $(1,m)$ с $m=2$ имеет вид $r(u,v;\tau)=r(u,v)+2\tau z_0+2\tau^2 z_{2k}+o(\tau^2)$, $\tau=t_1^k$. Пусть теперь $n\geq 3k$. Разобьем промежуток от $3k$ до n на интервалы $[ik,(i+1)k-1)$ с изменением i от 3 до целой части n/k. Покажем, как совершать индукционный переход. Пусть замены параметров $t=t(t_1)$, $t_1=t_1(t_2)$, ..., $t_{i-1}=t_{i-1}(t_i)$ привели деформацию (6) к виду

$$r(u,v;t_i)=r(u,v)+2t_i^k z_0+\ldots+2t_i^{(i+1)k} z^{(i-1)}_{(i+1)k}+2t_i^{(i+1)k+1} z^{(i)}_{(i+1)k+1}+$$
$$+\ldots+2t_i^n z_n^{(i)}+o(t_i^n),\ t_i\to 0. \qquad (7_i)$$

Если $n\leq(i+2)k-1$, то $km\leq n<(i+2)k$, $m<i+1$ и искомое б. м. изгибание порядка $(1,m)$ имеет вид $r(u,v;\tau)=r(u,v)+2\tau z_0+2\tau^2 z_{2k}+$ $+\ldots+2\tau^m z_{mk}^{(m-1)}++o(\tau^m)$, $\tau=t_i^k\to 0$.

Если же $n\geq(i+2)k$, то в силу $dr_{t_i}^2-dr^2=o(t_i^n)$ выполнены уравнения

$$drdz^{(i)}_{(i+1)k+1}=0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$drdz^{(i)}_{(i+2)k-1}=0.$$

Следовательно, $z_j^{(i)}=c_j^i z_0$, $(i+1)k+1\leq j\leq(i+2)k-1$. Положив $t_{i+1}^k=t_i^k+$ $+\sum\limits_j c_j^i t_j^i$, получаем $t_i=t_i(t_{i+1})=t_{i+1}-\dfrac{c^{(i)}_{(i+1)k+1}}{k}t_{i+1}^{ik+2}$, после чего б. м. изгибания порядка (k,n) $r(u,v;t_{i+1})=r(u,v)+2t_{i+1}^k z_0+2t_{i+1}^{2k} z_{2k}+$ $+\ldots+2t_{i+1}^{(i+1)k} z^{(i)}_{(i+1)k}+\ldots+2t_{i+1}^n z_n^{(i)}+o(t_{i+1}^n)$ позволяет определить другое б. м. изгибание порядка $(1,m)$ $r(u,v;\tau)=r(u,v)+2\tau z_0+$ $+2\tau^2 z_{2k}+\ldots+2\tau^m z_{mk}^{(m-1)}+o(\tau^m)$, где $\tau=t_{i+1}^k$ и $km\leq n$. Теорема доказана.

Список литературы: 1. *Сабитов И. Х.* Локальная теория изгибаний поверхностей// Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. ВИНИТИ, 48, 1989. С. 20-62. 2. *Ефимов Н. В.* Качественные вопросы теории деформации поверхностей// Успехи мат. наук. 1948. 3, N2. С. 45-158. 3. *Ефимов Н. В.* Некоторые предложения о жесткости и неизгибаемости// Успехи мат. наук. 1952. 7, N5. С. 215-224. 4. *Сабитов И. Х.* Некоторые задачи и результаты в локальной теории изгибаний. Всесоюзная конференция по геометрии «в целом»// Сб. тез. Новосибирск, 1987. С. 102. 5. *Перлова Н. Г.* О соотношении между жесткостью 3 или 4 порядка и аналитической неизгибаемостью поверхностей// Деп. ВИНИТИ. 1989. N6302-В89. 6. *Перлова Н. Г.* О соотношении между жесткостью k-го порядка и аналитической неизгибаемостью поверхностей// Укр. геометр. сб. 1991. Вып. 34. С. 10-20. 7. *Connely R., Servatius H.* Higher order rigidity - what is proper definition? Cornell Univ., Preprint, 1992. 17 p.

Поступила в редколлегию 21.12.89

УДК 514

В. М. Савельев

О ГРАССМАНОВОМ ОБРАЗЕ ЧЕТЫРЕХМЕРНОГО ПОДМНОГООБРАЗИЯ В E^6

Введение. Изучение грассманова образа подмногообразия в евклидовом пространстве содержалось в работах Ю. А. Аминова, А. А. Борисенко и Ю. А. Николаевского [1-4]. В работе [1] были рассмотрены двумерные поверхности F^2 в четырехмерном евклидовом пространстве E^4 и исследована связь геометрических свойств грассманова образа F^2 с видом проекций F^2 на трехмерные пространства $E^3(N, \vec{t})$, проведенные через нормальное пространство N в точке $x \in F^2$ и один касательный вектор t в этой точке. Проекцию F^2 на $E^3(N, \vec{t})$ будем обозначать через $\tilde{F}^2$. В общем случае $\tilde{F}^2$ имеет особенность в точке x. Было установлено, что вид особенности $\tilde{F}^2$ в точке x связан со значением кривизны $\bar{K}$ грассманова многообразия $G_{2,4}$ для площадки, касательной к грассманову образу поверхности F^2 в соответствующей точке. В работе [1] была введена классификация поверхностей $F^2 \subset E^4$ по грассманову образу: поверхность F^2 с гиперболическим грассмановым образом, если $\bar{K}<1$; параболическим, если $\bar{K}=1$, и эллиптическим, если $\bar{K}>1$. Классификация многомерных подмногообразий была предложена в работе Ю. А. Аминова [5]. В работе [1] были установлены виды особенностей $\tilde{F}^2$ в зависимости от значений $\bar{K}$ (см. рисунки из этой работы). Соответствующие типы особенностей будем также называть гиперболическими, параболическими и эллиптическими.

В нашей работе рассматривается 4-мерная поверхност F^4 в E^6. Пусть точка $x \in F^4$, n_1, n_2 - базис нормальной плоскости N_X^2. Далее, пусть $e_i = \frac{\partial K}{\partial u_i}$, $i=\overline{1,4}$, - базис касательного пространства $T_X F^4$, причем в выбранной точке x этот базис ортонормальный.

Пусть $t = t^i e_i$ - единичный вектор в касательном пространстве $T_X F^4$. Рассмотрим вектор

$$\rho^{\alpha} = -g^{ik} L^{\alpha}_{kj} t^j e_i \qquad (1)$$

(α фиксировано). Здесь L^{α}_{kj} - коэффициенты второй квадратичной формы относительно нормали n_{α}. Для данного направления t и g векторов n_{β} по формуле (1) получим g векторов ρ^{β} (g - точечная коразмерность поверхности, т. е. число линейно независимых вторых квадратичных форм). Можно легко проверить, что подпространство $R_X(t)$ в T_XF^4, порождаемое векторами ρ^β, не зависит от выбора полуортогонального репера $(x, e_i, n_\beta, n_\delta)$.

Возьмем вектор $v=v^ie_i$. Тогда $v\rho^\alpha=-L^\alpha_{ij}v^it^j$.

Два касательных направления t и v называются сопряженными, если для любого $\alpha: L^\alpha_{ij}v^it^j=0$; подпространство $L_k(x)$ сопряжено направлению t, если любой вектор $v\in L_k(x)$ сопряжен t.

Справедливо следующее утверждение [6]:

Теорема А. *Если в точке $x\in F^n\subset E^{n+p}$ направлению t сопряжено k-мерное пространство $L_k(x)$, то подпространство $R_X(t)$ имеет размерность $n-k$ и является ортогональным дополнением к $L_k(x)$ в пространстве T_XE^n.*

Будем предполагать, что в рассматриваемой точке не все коэффициенты вторых квадратичных форм равны нулю, т. е. эта точка не является точкой уплощения. Тогда подпространство $R_X(t)$ может иметь размерность 2 или 1.

Поэтому для поверхности $F^4\subset E^6$ в точке, отличной от точки уплощения, получаем два случая: 1) направлению $t\in T_XF^4$ сопряжено 2-мерное направление (плоскость) $\Pi_2(x)$, 2) направлению $t\in T_XF^4$ сопряжено 3-мерное подпространство $L_3(x)$.

Рассматриваются сечения поверхности $F^4\subset E^6$ четырехмерным пространством, проведенным через нормальную плоскость в точке $x\in F^4$ и двумерное подпространство $L_2(x)\in T_XF^4$ (в первом случае $L_2(x)=R_X(t)$; во втором случае $L_2(x)=\{t, \tau\}$, где $\tau\in L_3(x)$). Затем полученная двумерная поверхность в четырехмерном пространстве проектируется на трехмерное пространство, проведенное через нормальную плоскость в данной точке и вектор $\tau=L_2(x)$. В результате проведенной процедуры сечения с последующим проектированием получаем поверхность $\tilde{F}^2(\tau)$. При этом локальное поведение двумерной поверхности $\tilde{F}^2(\tau)$ в окрестности особой точки можно описать тремя типами особых точек проекций, упомянутых выше, двумерной поверхности $F^2\subset E^4$: гиперболическим, параболическим и эллиптическим. Изучается связь типов особенностей в точке x поверхностей $\tilde{F}^2(\tau)$ с кривизной грассманова многообразия $G_{2,6}$ для двумерных площадок из касательного пространства грассманова образа поверхности $F^4\subset F^6$.

грассманово отображение $\psi: F^4 \to G_{2,6}$ индуцирует отображение ψ_* касательного пространства к F^4 в касательное пространство $G_{2,6}$. При этом имеем $X=\psi_*(t)$, $Y=\psi_*(\tau)$ - касательные векторы к грассманову образу. Пусть $\bar{K}(X,Y)$ - кривизна многообразия $G_{2,6}$ вдоль грассманова образа площадки $L_2(x)$.

В работе доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть направление* t *сопряжено двумерному пространству. Тогда трем типам особенности поверхностей* $\tilde{F}^2(\tau)$ *(эллиптический, параболический, гиперболический) соответствуют три области изменения* $\bar{K}(X,Y)$: $\bar{K}(X,Y)>1$, $\bar{K}(X,Y)=1$ *и* $\bar{K}(X,Y)<1$.

Справедливо обратное утверждение.

Теорема 2. *Пусть направление* t *сопряжено двумерному пространству. Тогда трем областям изменения* $\bar{K}(X,Y)$: $\bar{K}(X,Y)>1$, $\bar{K}(X,Y)=1$ *и* $\bar{K}(X,Y)<1$ *- соответствуют три типа особенностей поверхности* $\tilde{F}^2(\tau)$: *эллиптический, параболический, гиперболический.*

Теорема 3. *Пусть направлению* t *сопряжено трехмерное подпространство. Тогда поверхность* $\tilde{F}^2(\tau)$ *имеет или параболический, или гиперболический тип особенности, и* $\bar{K}(X,Y)\le 1$.

Теорема 4. *Если секционная кривизна поверхности* $F^4 \subset E^6$ *для всякой двумерной площадки положительна, то* $\bar{K}(X,Y)\le 1$.

В пункте 2 рассматривается конкретная четырехмерная поверхность $S^2(1)\times S^2(1)$ в E^6, которая является метрическим произведением двумерных сфер S^2, каждая из которых лежит в некотором E^3. Кривизна этого подмногообразия лежит в интервале $[0,1]$, причем граничные значения достигаются. Рассматривается грассманов образ данной поверхности. Установлено: метрика $d\rho^2$ грассманова образа Γ^4 подмногообразия $S^2(1)\times S^2(1)\subset E^6$ совпадает с метрикой $S^2(1)\times S^2(1)$, т. е. Γ^4 изометрична $S^2(1)\times S^2(1)$.

1. Пусть Γ^4 - грассманов образ $F^4\subset E^6$. В работе [2] показано, что кривизна $\bar{K}$ грассманова многообразия $G_{K,n+k}$ для площадки, касательной к грассманову образу Γ^n подмногообразия F^n в евклидовом пространстве E^{n+k}, выражается через вторые квадратичные формы данного подмногообразия $F^n\subset E^{n+k}$. Мы непосредственно эту формулу не будем использовать ввиду ее громоздкости. Воспользуемся формулой [1]:

$$\bar{K}(X,Y)=\frac{2(TrA_1A_1^*+TrA_2A_2^*)}{4Tr(XX^*)Tr(YY^*)-[Tr(XY^*+YX^*)]^2}, \qquad (2)$$

где $\bar{K}(X,Y)$ – кривизна $G_{k,\,n+k}$ для площадки, определяемой касательными X, Y; $\Lambda_1=XY^*-YX^*$; $\Lambda_2=X^*Y-Y^*X$; Tr – след матрицы (звездочка обозначает транспонирование матрицы). Там же в [2] показано, что касательный вектор z_m грассманову образу Γ^n подмногообразия $F^n\subset E^{n+k}$ задается $k\times n$ матрицей $\|L^p_{ml}\|$, $p=\overline{1,k}$, $l=\overline{1,n}$. В дальнейшем мы будем придерживаться следующих обозначений: $L^1_{ij}=a_{ij}$, $L^2_{ij}=b_{ij}$.

Найдем кривизну $G_{2,6}$ для площадки, определяемой касательными векторами:

$$X_1=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14}\end{pmatrix}, \qquad X_2=\begin{pmatrix}a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ b_{12} & b_{22} & b_{23} & b_{24}\end{pmatrix}.$$

Нетрудно найти

$$\Lambda_1=\begin{pmatrix}0 & T_{12|12}\\ -T_{12|12} & 0\end{pmatrix};\quad \Lambda_2=\begin{pmatrix}0 & R_{1212} & R_{1213} & R_{1214}\\ -R_{1212} & 0 & R_{1223} & R_{1224}\\ -R_{1213} & -R_{1223} & 0 & R_{1234}\\ -R_{1214} & -R_{1224} & -R_{1234} & 0\end{pmatrix},$$

$$Tr(X_1X_1^*)=(a_{11}^2+a_{12}^2+a_{13}^2+a_{14}^2+b_{11}^2+b_{12}^2+b_{13}^2+b_{14}^2),$$
$$Tr(X_2X_2^*)=(a_{12}^2+a_{22}^2+a_{23}^2+a_{24}^2+b_{12}^2+b_{22}^2+b_{23}^2+b_{24}^2),$$
$$Tr(X_1X_2^*+X_2X_1^*)=2(a_{11}a_{12}+a_{12}a_{22}+a_{13}a_{23}+a_{14}a_{24}+$$
$$+b_{11}b_{12}+b_{12}b_{22}+b_{13}b_{23}+b_{14}b_{24}).$$

Здесь $R_{ijkl}=(a_{ik}a_{jl}-a_{il}a_{jk})+(b_{ik}b_{jl}-b_{il}b_{jk})$ – компоненты тензора кривизны, а $T_{1212}=(a_{11}b_{12}-a_{12}b_{11}+a_{12}b_{11}+a_{12}b_{22}-a_{22}b_{12}+$ $+a_{13}b_{23}-a_{23}b_{13}+a_{14}b_{24}-a_{24}b_{14})$.

Следовательно, кривизна $\bar{K}(X_1X_2)$ для площадки, касательной к грассманову образу поверхности $F^4\subset E^6$, будет равна

$$\bar{K}(X_1,X_2)=\frac{P^2+T^2_{12|12}}{P^2+T^2_{12|12}+4A} \qquad (3)$$

Здесь $P^2=R^2_{1212}+R^2_{1213}+R^2_{1214}+R^2_{1223}+R^2_{1224}+R^2_{1234}$ и $A=(a_{11}b_{22}-$ $-a_{22}b_{11})^2+4(a_{12}b_{11}-a_{11}b_{12})(a_{12}b_{22}-a_{22}b_{12})+(a_{13}b_{12}-a_{11}b_{23}+a_{23}b_{11}-$ $-a_{12}b_{13})^2+4(a_{13}b_{11}-a_{11}b_{13})(a_{23}b_{12}-a_{12}b_{23})+(a_{14}b_{12}-a_{11}b_{24}+a_{24}b_{11}-$ $-a_{12}b_{24})^2+4(a_{14}b_{11}-a_{11}b_{14})(a_{24}b_{12}-a_{12}b_{24})+(a_{14}b_{22}-a_{12}b_{24}+a_{24}b_{12}-$ $-a_{22}b_{14})^2+4(a_{14}b_{12}-a_{12}b_{14})(a_{24}b_{12}-a_{12}b_{24})+(a_{14}b_{23}-a_{13}b_{24}+a_{24}b_{13}-$ $-a_{23}b_{14})^2+4(a_{14}b_{13}-a_{13}b_{14})(a_{24}b_{23}-a_{23}b_{24})$. (4)

Мы видим, что кривизна зависит от выражения A. Если $A>0$, то $\bar{K}(X_1,X_2)<1$, если $A<0$, то $\bar{K}(X_1X_2)>1$, и если $A=0$, то $\bar{K}(X_1X_2)=1$.

Пусть направление $\vec{t}$ сопряжено двумерному подпространству $\Pi_2(x)\subset T_xF^4$. Пусть плоскость $R_X(t)$ есть плоскость переменных x_1 и x_2, а плоскость $\Pi_2(x)$ есть плоскость переменных x_3 и x_4. При таком выборе системы координат получим: $a_{13}=a_{14}=a_{23}=a_{24}=b_{13}=b_{14}=b_{24}=0$. Тогда секционная кривизна $G_{2,6}$ вдоль грассманова образа площадки $R_X(t)$ будет определяться выражением

$$A=(a_{11}b_{22}-a_{22}b_{11})^2+4(a_{12}b_{11}-a_{11}b_{12})(a_{12}b_{22}-a_{22}b_{12}). \qquad (5)$$

Докажем теорему 1. Пусть оси координат в касательной плоскости выбраны, как и выше, плоскость $R_X(t)$ есть плоскость переменных x_1 и x_2, а плоскость $\Pi_2(x)$ есть плоскость переменных x_3 и x_4. Тогда с точностью до бесконечно малых третьего порядка относительно x_i, $i=1,2$, уравнения сечения поверхности $F^4\subset E^6$ четырехмерным пространством $E^4(N_X^2, R_X(t))$ имеют вид:

$$\tilde{x}_5=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2,$$
$$\tilde{x}_6=b_{11}x_1^2+2b_{12}x_1x_2+b_{22}x_2^2.$$

Рассмотрим проекцию полученной двумерной поверхности на трехмерное пространство $E^3(N,\tau)$, где вектор τ выберем вдоль направления оси x_2. Для проекции $\tilde{F}^2(\tau)$ получим уравнения

$$\tilde{x}_5=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2,$$
$$\tilde{x}_6=b_{11}x_1^2+2b_{12}x_1x_2+b_{22}x_2^2, \qquad (6)$$
$$\tilde{x}_2=x_2.$$

Будем говорить, что повверхность, которая локально задается в виде (6), имеет особенность эллиптического типа, если $\Delta=(a_{11}b_{22}-a_{22}b_{11})^2+4(a_{12}b_{11}-a_{11}b_{12})(a_{12}b_{22}-a_{22}b_{12})<0$; параболического типа, если $\Delta=0$.

Мы видим, что выражение для Δ совпадает с выражением для A. Отсюда и следует доказательство теоремы 1. Доказательство теоремы 2 также следует из рассмотрения выражения для A и Δ.

Пусть теперь направлению t сопряжено трехмерное подпространство $L_3(x)\subset T_XF^4$. Тот факт, что в этом случае $\bar{K}(X,Y)\le 1$, содержатся в лемме из работы [4]. Мы докажем первую часть теоремы.

Направим ось переменных x_1 вдоль вектора $R_X(t)$, ось переменных x_2 - вдоль вектора $\tau\in L_3(x)$. Оси x_3 и x_4 разместим в подпространстве $L_3(x)$ ортогонально вектору τ. При таком выборе системы координат уравнения поверхности $F^4\subset E^6$ запишутся в виде:

$$x_5=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+2a_{23}x_2x_3+2a_{24}x_2x_4+2a_{34}x_3x_4+a_{33}x_3^2+a_{44}x_4^2,$$
$$x_6=b_{11}x_1^2+b_{22}x_2^2+2b_{23}x_2x_3+2b_{24}x_2x_4+2b_{34}x_3x_4+b_{33}x_3^2+b_{44}x_4^2.$$

17-381

В сечении поверхности $F^4 \subset E^6$ четырехмерным пространством $E^4(N, x_1, x_2)$, проходящим через нормальную плоскость N в точке x, оси x_1 и x_2, получим поверхность

$$\tilde{x}_5 = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2,$$
$$\tilde{x}_6 = b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2.$$

Для проекции $F^2(\tau)$ имеем

$$\tilde{x}_2 = x_2,$$
$$\tilde{x}_5 = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2,$$
$$\tilde{x}_6 = b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2.$$

В этом случае $\Delta = (a_{11}b_{22} - a_{22}b_{11})^2 \geq 0$. Отсюда и следует утверждение теоремы 3.

Заметим, что если у нас заданы две квадратичные формы, то одну из них мы можем ортогональным преобразованием привести к диагональному виду. Пусть для определенности это будет форма $b_{ij}x_ix_j$. В этом случае из (4) следует, что $\Delta = (a_{11}b_{22} - a_{22}b_{11})^2 + 4a_{12}^2b_{11}b_{22} + b_{11}^2(a_{23}^2 + a_{24}^2) + b_{22}^2(a_{13}^2 + a_{14}^2)$. Имеем $\Delta = (a_{11}b_{22} - a_{22}b_{11})^2 + 4a_{12}^2b_{11}b_{22} = (a_{11}b_{22} + a_{22}b_{11})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)b_{11}b_{22}$.

Если секционная кривизна поверхности $F^4 \subset E^6$ для всех двумерных площадок из касательного пространства T_xF^4 больше нуля, то и $K_{12} = a_{12}a_{22} - a_{12}^2 + b_{11}b_{22} > 0$. Могут быть два случая:

1) $a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ и $b_{11}b_{22}$ имеют разные знаки, тогда $\Delta > 0$;

2) $a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ и $b_{11}b_{22}$ имеют одинаковые знаки, (и оба выражения положительны), тогда тоже получается $\Delta > 0$.

2. Грассманов образ поверхности $F^4 = S^2 \times S^2 \subset E^6$.

Рассмотрим четырехмерную поверхность $F^4 = S^2 \times S^2 \subset E^6$, заданную в виде стандартного погружения:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1,$$
$$x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 = 1,$$

и найдем ее грассманов образ.

Параметризуем эту поверхность следующим образом:

$$x_1 = \cos u_1 \sin u_2, \quad x_4 = \cos u_3 \sin u_4,$$
$$x_2 = \sin u_1 \sin u_2, \quad x_5 = \sin u_3 \sin u_4,$$
$$x_3 = \cos u_2, \quad x_6 = \cos u_4.$$

Найдем теперь первую и две вторых квадратичные формы нашей поверхности.

Пусть $\vec{r} = \vec{r}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ - радиус-вектор поверхности. Тогда имеем с едующие касательные векторы:

$$\vec{r}_{u_1}=\begin{pmatrix}-\sin u_1\sin u_2\\ \cos u_1\sin u_2\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix};\quad \vec{r}_{u_2}=\begin{pmatrix}\cos u_1\cos u_2\\ \sin u_1\cos u_2\\ -\sin u_2\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix};$$

$$\vec{r}_{u_3}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\\ -\sin u_3\sin u_4\\ \cos u_3\sin u_4\\ 0\end{pmatrix};\quad \vec{r}_{u_4}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\\ \cos u_3\cos u_4\\ \sin u_3\cos u_4\\ -\sin u_4\end{pmatrix}.$$

Отсюда имеем $g_{11}=\sin^2 u_2$, $g_{22}==1$, $g_{33}=\sin^2 u_4$, $g_{44}=1$, $g_{12}=g_{13}=g_{14}=$ $=g_{23}=g_{24}=g_{34}=0$. Нетрудно проверить, что нормалями к данной поверхности будут векторы

$$\vec{n}_1=\begin{pmatrix}\cos u_1\sin u_2\\ \sin u_1\sin u_2\\ \cos u_2\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix};\quad \vec{n}_2=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\\ \cos u_3\sin u_4\\ \sin u_3\sin u_4\\ \cos u_4\end{pmatrix}.$$

Поэтому получаем следующие две вторые квадратичные формы: $II_1=\sin^2 u_2 du_1^2+du_2^2$, $II_2=\sin^2 u_4 du_3^2+du_4^2$. Найдем грассманов образ поверхности $S^2\times S^2\subset E^6$.

Как известно, $G_{2,6}$ снабжается метрикой $dp^2=\sum\limits_{i_1<i_2}(dp^{i_1 i_2})^2$, где $\vec{p}^{i_1 i_2}$ - плюккеровы координаты нормальной плоскости. Для $S^2\times S^2$ имеем следующие плюккеровы координаты нормальной плоскости:

$p^{12}=0$, $p^{13}=0$, $p^{14}=\cos u_1\sin u_2\cos u_3\sin u_4$, $p^{15}=\cos u_1\sin u_2\sin u_3\sin u_4$, $p^{16}=\cos u_1\sin u_2\cos u_4$, $p^{23}=0$, $p^{24}=\sin u_1\sin u_2\cos u_3\sin u_4$, $p^{45}=p^{46}=p^{56}=0$, $p^{25}=\sin u_1\sin u_2\sin u_3\sin u_4$, $p^{26}=\sin u_1\sin u_2\cos u_4$, $p^{34}=\cos u_2\cos u_3\sin u_4$, $p^{35}=\sin u_3\sin u_4\cos u_2$, $p^{36}=\cos u_2\cos u_4$.

Эти вычисления показывают, что грассманов образ Γ^4 поверхности $S^2\times S^2\subset E^6$ лежит в E^9.

Метрика грассманова многообразия $G_{2,6}$ индуцирует на грассмановом образе Γ^4 свою метрику, коэффиценты которой вычисляются по формулам (см. [2])

$$G_{11}=\sum_{\alpha=1}^{2}(L^{\alpha}_{1j})^2 g^{jj}=\sin^4 u_2\cdot\frac{1}{\sin^2 u_2}=\sin^2 u_2,\quad G_{22}=\sum_{\alpha=1}^{2}(L^{\alpha}_{2j})g^{jj}=1,$$

177

$$G_{33}=\sum_{\alpha=1}^{2}(L^{\alpha}_{3j})^2 g^{jj}=\sin^2 u_4,\quad G_{44}=\sum_{\alpha=1}^{2}(L^{\alpha}_{4j})^2 g^{jj}=1.$$

Поэтому метрика грассманова образа поверхности есть $dp^2_{\Gamma^4}=\sin^2 u_2 du_1^2+du_2^2+\sin^2 u_4 du_3^2+du_4^2$.

Мы получили, что грассманов образ поверхности $S^2\times S^2\subset E^6$ изометричен самой поверхности.

Известно, что секционная кривизна $S^2\times S^2\subset E^6$ принадлежит промежутку [0, 1] (включая концы). Поскольку наша поверхность есть поверхность с 4-мя главными направлениями, кривизна грассманова многообразия $G_{2,6}$ для площадки, касательной к грассманову образу поверхности $S^2\times S^2\subset E^6$, тоже принадлежит промежутку [0, 1] (см. [2]). более того, грассманов образ вполне геодезичен (см. 1), поэтому из формулы Гаусса следует, что внешняя кривизна грассманова образа есть нуль.

Список литературы: 1. *Аминов Ю.А.* О грассмановом образе двумерных поверхностей в четырехмерном евклидовом пространстве// Укр. геометр. сб. 1980. Вып. 23. С. 3-6. 2. *Аминов Ю.А.* Изометрические погружения областей n-мерного пространства Лобачевского в (2n-1)-мерное евклидово пространство // Мат. сб. 1980. III. Вып. 3. С. 402-433. 3. *Николаевский Ю.А.* О поверхностях, кривизна грассманова образа которых не меньше 1// Укр. геометр. сб. 1990. Вып. 33. С. 77-91. 4. *Борисенко А.А.*, *Николаевский Ю.А.* Классификация точек трехмерных поверхностей по грассманову образу//Укр. геометр. сб. 1989. Вып. 32. С. 11-27. 5. *Аминов Ю.А.* Проблемы вложения: геометрические и топологические аспекты// Итоги науки и техники. Проблемы геометрии. 13. М., 1982. 6. *Базылев В.Т.* Геометрия дифференцируемых многообразий. М., 1989. 150с.

Поступила в редколлегию 01.12.89

УДК 514

П. И. Совертков

ПРИМЕРЫ ПОЛНЫХ СЕДЛОВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ, ГОМЕОМОРФНЫХ КРЕНДЕЛЮ С ОДНОЙ УДАЛЕННОЙ ТОЧКОЙ

В [1, 2, с. 390] приведены примеры полных седловых поверхностей в трехмерном евклидовом пространстве, гомеоморфных кренделю, из которого удалено произвольное число точек $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $n\geq 2$, $n\in N$. Вопрос о существовании полной седловой поверхности, гомеоморфной кренделю с одной удаленной точкой, оставался открытым. В настоящей заметке приводятся примеры таких поверхностей, т. е. поверхностей с одной бесконечно удаленной точкой.

Построим вначале поверхность F_0, гомеоморфную тору с одной удаленной точкой (рис. 1):

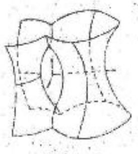


Рис. 1

Рассмотрим гиперболические параболоиды:

$$F_1: \quad -y+5=z^2-x^2,$$

$$F_2: \quad y-15=z^2-x^2.$$

Поверхности F_1 и F_2 пересекаются в плоскости $y=10$ по гиперболе γ_1: $y=10$, $z^2-x^2=-5$.

Пусть поверхность F получена из F_1 и F_2 следующим образом: от F_1 отрезана часть, лежащая в полупространстве $y>10$, от F_2 отрезана часть, лежащая в полупространстве $y<10$; оставшиеся части поверхностей F_1 и F_2 склеены по гиперболе γ_1. Вдоль γ_1 полученная поверхность имеет ребро.

К полученной поверхности F приклеим гиперболический параболоид F_3: $y+5=z^2-x^2$.

Поверхности F и F_3 пересекаются в плоскости $y=0$ по гиперболе γ_2: $y=0$, $z^2-x^2=5$.

Пусть поверхность F_0 получена из F и F_3 следующим образом: от F_3 отрезана часть, лежащая в полупространстве $y>0$, от поверхности F отрезана часть, лежащая в полупространстве $y<0$; оставшиеся части поверхностей F_3 и F склеены по гиперболе γ_2. Вдоль γ_2 полученная поверхность имеет ребро.

Аналогично [2, с. 390] покажем, что полученную поверхность можно сгладить. Сгладим ребро γ_2.

Полуплоскость R: $x=0$, $z\geq 0$ пересечет поверхность F_0 над отрезком $-2\leq y\leq 2$ по кривой L_1, заданной уравнением

$$z=\varphi_0(y)=\begin{cases}\sqrt{y+5}, & y\in[-2,0],\\ \sqrt{-y+5}, & y\in[0,2].\end{cases} \qquad (1)$$

Над отрезком $[-1,1]$ зададим функцию $z=\iota(y)=a_0+a_2y^2+a_4y^4+a_6y^6$ такую, что выполняются равенства

$$
\begin{aligned}
f(-1)&=\varphi_0(-1)=2\,,\\
f'(-1)&=\varphi_0'(-1)=\frac{1}{2^2}\,,\\
f''(-1)&=\varphi_0''(-1)=-\frac{1}{2^5}\,,\\
f'''(-1)&=\varphi_0'''(-1)=\frac{3}{2^8}\,.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Равенства (2) определяют систему:

$$
\begin{cases}
a_0+a_2+a_4+a_6=2\\
-2a_2-4a_4-6a_6=\dfrac{1}{2^2}\\
2a_2+12a_4+30a_6=-\dfrac{1}{2^5}\\
-24a_4+120a_6=\dfrac{3}{2^2}
\end{cases}
\tag{3}
$$

Используя решение системы (3), найдем функцию

$$
f(y)=2\frac{681}{2^{12}}-\frac{907}{2^{12}}y^2+\frac{283}{2^{12}}y^4-\frac{57}{2^{12}}y^6.
\tag{4}
$$

На интервале $-2<y<2$ зададим функцию

$$
z=\varphi(y)=\begin{cases}\varphi_0(y), & y\in(-2,-1)\cup(1,2),\\ f(y), & y\in[1,1].\end{cases}
\tag{5}
$$

Из (1), (4), (5) следует, что $\varphi\in C^3$, $\varphi>0$, $\varphi''<0$.

В полосе $U: -2<y<2$, $-\infty<x<+\infty$ на плоскости oxy определим функцию $z=\sqrt{x^2+\varphi^2(y)}$.

Ее графиком будет сглаживающая поверхность класса C' отрицательной кривизны, так как $z_{xx}z_{yy}-z^2_{xy}=\dfrac{\varphi''\varphi^3}{(x^2+\varphi^2)^2}<0$.

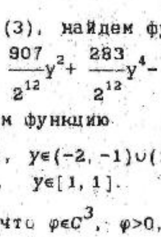


Рис. 2

Ребро γ_1 поверхности сглаживается аналогично.

В качестве второго примера аналогичной поверхности можно рассмотреть поверхность F_0', полученную склеиванием частей однополостного гиперболоида F_4: $x^2+(y-2)^2-z^2=1$, и гиперболического параболоида F_5: $y+3=z^2+x^2$ (рис. 2).

Замечание. Процесс сглаживания ребра поверхности F_0' является более сложным, чем сглаживание ребер поверхности F_0. Объясняется это следующим образом. В случае поверхности F_0 к ребру поверхности в плоскости подходят две симметричные параболы. В случае поверхности F_0' приходится сглаживать кривую, состоящую из двух различных кривых: гиперболы и параболы. Для этого находится решение линейной системы из восьми уравнений. Увеличивая число однополостных гиперболоидов $x^2+[y-(4m-2)]^2-z^2=1$, $m=1,2,\ldots,k$, $k\in N$, приклеивая их последовательно и сглаживая ребра, получим полную седловую поверхность, гомеоморфную кренделю с k дырками и одной бесконечно удаленной точкой (рис. 3).

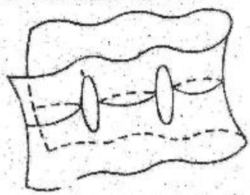


Рис. 3

Список литературы: 1. *Hadamard I.* Les surfaces à conrberes opposees et leurs lignes geodésiques//I. Math. Pures et appl. 5, (1898). P.27-73. 2. *Бекельман И.Я., Вернер А.Л., Кантор Б.Е.* Введение в дифференциальную геометрию в целом. М., 1973. 440с.

Поступила в редколлегию 08.01.90

УДК 517.95

В. Г. Ткачев

НЕКОТОРЫЕ ОЦЕНКИ СРЕДНЕЙ КРИВИЗНЫ НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ, ЗАДАННЫХ НАД ОБЛАСТЯМИ В R^n

1. В настоящей статье обсуждаются свойства средней кривизны вводимого ниже класса непараметрических поверхностей, включающего в себя, например, поверхности постоянной средней кривизны и поверхности, удовлетворяющие уравнению капиллярности.

В дальнейшем рассматриваются только ориентированные поверхности, задаваемые как графики над фиксированной областью $\Omega\subset R^n$, причем направление вектора нормали к поверхности выбирается согласованным с положительным направлением $(n+1)$-й координаты в объемлющем пространстве R^{n+1}. Будем обозначать через $x_1, x_2, \ldots x_{n+1}$ стандартный набор координатных функций в $(n+1)$-мерном евклидовом пространстве R^{n+1} и договоримся считать под R^n гиперплоскость в R^{n+1}, определяемую уравнением $x_{n+1}=0$. Всюду ниже, если не оговорено противное, под $H=H(t)$ понимается непрерывная неубывающая функция. Определим поверхность $\mathcal{F}$ как график C^2-решения $f(x)=f(x_1,\ldots,x_n)$ уравнения

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big/\sqrt{1+|\nabla f|^2}\right)=nH(f(x)) \tag{1}$$

в области Ω. Хорошо известно тогда, что $H(f(x))$ определяет среднюю кривизну поверхности $\mathcal{F}$ в точке $x\in\Omega$.

Пусть $\bar{\Omega}$ - замыкание области Ω в R^n и P, Q суть непустые подмножества в $\bar{\Omega}$, $P\cap Q=\varnothing$.

Для фиксированного $\alpha\geq1$ введем α-емкость конденсатора $(P, Q; \Omega)$ (см. [1]), полагая

$$\mathrm{cap}_\alpha(P, Q; \Omega)=\inf\int_\Omega|\nabla\varphi|^\alpha dx, \quad dx=dx_1\ldots dx_n, \tag{2}$$

где точная нижняя грань берется по всем локально-липшицевым в Ω, непрерывным в $\bar{\Omega}$, финитным функциям $\varphi(x):\bar{\Omega}\to[0;1]$, равным 0 на Q и 1 на P соответственно. Говорят [2, с.59], что компактное множество P имеет нулевую емкость, если существует замкнутое множество Q и $Q\cap P=\varnothing$ такое, что дополнение $R^n\setminus Q$ - ограниченное множество и выполнено $\mathrm{cap}_n(P, Q; R^n)=0$. Замкнутое множество $P\subset R^n$ имеет емкость нуль, если таковым является всякое его компактное подмножество.

Справедлива следующая оценка для интегральной средней кривизны введенного класса поверхностей.

Теорема 1. *Пусть P - компактное подмножество области Ω и $f(x)$ - решение уравнения (1) в области Ω. Тогда для любого $\alpha\geq2$ справедливо неравенство*

$$\int_P|H(f(x))|^\alpha dx\leq\left(\frac{\alpha}{n}\right)^\alpha \mathrm{cap}_\alpha(P, \partial Q; \Omega). \tag{3}$$

Следствие 1. Пусть $f(x)$ - решение (1), определенное всюду в R^n, за исключением, быть может, замкнутого множества P емкости нуль. Тогда средняя кривизна $H(f(x))\equiv0$ всюду в $R^n\setminus P$. В частности, если

а) $2\leq n\leq7$, то $f(x)$ - линейная функция,

б) $H(t)$ - строго монотонная, то $f(x)\equiv\mathrm{const}$ при любом n.

В двумерном случае, если $H(t)$ знакопостоянна, $H'(t)\geq 0$ и множество P пусто, утверждение а) доказано Ченгом и Яу в [3] методом, базирующемся на оценках скорости роста объема геодезического шара на римановых многообразиях.

Доказательству теоремы 1 предпошлем вспомогательное утверждение.

Лемма 1. *Пусть $H(t):R\to R$ - непрерывная монотонная функция. Тогда для любого $\varepsilon>0$ найдется функция $H_\varepsilon(t)\in C^\infty(R)$, $H'_\varepsilon(t)\geq 0$, такая, что выполнено*

$$\begin{aligned} &(i)\quad |H_\varepsilon(t)|\leq|H(t)|;\\ &(ii)\quad |H_\varepsilon(t)-H(t)|\leq\varepsilon,\ \forall t\in R. \end{aligned}\tag{4}$$

Доказательство. Нетрудно заметить, что общий случай легко приводится к функции $H(t)$, заданной на интервале $[0,+\infty]$, $H(0)=0$ и $H(t)>0$ при $t>0$. Можно считать также, что $H(t)$ не ограничена при $t\to+\infty$ (в противном случае рассуждения меняются незначительно). Рассмотрим последовательность точек $\alpha_k\in R$, задаваемую условием

$$\alpha_k=\max_{H(t)\leq\frac{\varepsilon k}{2}}\{t\};\qquad \alpha_0=0.$$

Ясно, что α_k строго возрастают и все точки α_k конечны. Положим,

$$\sigma(t)=\begin{cases}\exp(1-t^{-2});0<t\leq1;\\ 0,\ t=0.\end{cases}$$

Нетрудно видеть, что $\sigma(t)\in C^\infty[0;1]$. Искомая функция $H_\varepsilon(t)$ примет тогда вид

$$H_\varepsilon(t)=\begin{cases}0,0\leq t\leq\alpha_1\\ H(\alpha_i)+\frac{\varepsilon}{2}\sigma\left(\dfrac{t-\alpha_i}{\alpha_{i+1}-\alpha_i}\right),\ t\in[\alpha_i;\alpha_{i+1}].\end{cases}$$

Вернемся к доказательству теоремы 1. Пусть $\varepsilon>0$ и $H_\varepsilon(t)$ - соответствующая аппроксимация функции $H(t)$, удовлетворяющая неравенствам (4). Зафиксируем функцию $\varphi=\varphi(x)$, допустимую в вариационной задаче (2) для вычисления емкости конденсатора $(P,\partial\Omega;\Omega)$. Из (1) вытекает справедливость равенства

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\varphi^\alpha(x)H_\varepsilon^{(\alpha-1)}(f(x))\frac{fx_i}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}\right)=n\varphi^\alpha(x)H_\varepsilon^{(\alpha-1)}(f(x))H(f(x))+$$

$$+(\alpha-1)|H_\varepsilon(f(x))|^{\alpha-2}\varphi^\alpha(x)H'_\varepsilon(f)\frac{|\nabla f|^2}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}+$$

18-381

$$+\alpha\varphi^{\alpha-1}(x)H_\varepsilon^{(\alpha-1)}(f(x))\sum_{i=1}^{n}\frac{\varphi_{x_i}f_{x_i}}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}},$$

где через $H_\varepsilon^{(\alpha)}(t)$ обозначен $H_\varepsilon(t)|H_\varepsilon(t)|^{\alpha-1}$ и $\varphi_{x_i}=\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$. Учитывая условие (1) из (4) и монотонность $H_\varepsilon(t)$, приходим к неравенству

$$\varphi^\alpha|H_\varepsilon(f)|^\alpha\le\frac{\alpha\varphi^{\alpha-1}}{n}|H_\varepsilon(f)|\left(\sum_{i=1}^{n}\varphi_{x_i}^2\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\varphi^\alpha H_\varepsilon^{(\alpha-1)}(f)\frac{f x_i}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}\right).$$

Проинтегрируем полученное выражение и применим формулу Стокса. В результате получим

$$\int\limits_\Omega\varphi^\alpha(x)|H_\varepsilon(f(x))|^\alpha dx=\frac{\alpha}{n}\int\limits_\Omega\varphi^{\alpha-1}(x)|H_\varepsilon(f(x))|^{\alpha-1}|\nabla\varphi|dx.$$

Принимая во внимание, что $\varphi(x)\equiv 0$ при $x\in P$, с помощью неравенства Коши приходим к соотношению

$$\int\limits_P|H_\varepsilon(f(x))|^\alpha dx\le\left(\frac{\alpha}{n}\right)^\alpha\int\limits_\Omega|\nabla\varphi(x)|^\alpha dx.$$

Используя (ii) из (4) и переходя к пределу при $\varepsilon\to 0$, находим, что

$$\int\limits_P|H(f(x))|^\alpha dx\le\left(\frac{\alpha}{n}\right)^\alpha\int\limits_\Omega|\nabla\varphi(x)|^\alpha dx.$$

Переход к точной нижней грани по всем допустимым в (2) функциям $\varphi(x)$ в последнем неравенстве завершает доказательство теоремы.

Доказательство следствия 1 опирается на известное свойство n-параболичности евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, а именно, что любой компакт $P\subset\mathbb{R}^n$ имеет нулевую n-емкость относительно бесконечности в $\mathbb{R}^n$.

Зафиксируем ограниченное открытое множество $Q\subset\mathbb{R}^n$, такое, что $\bar{Q}\cap P=\varnothing$. Пусть $B=B(0;R)$ - шар с центром в начале координат и радиусом R, выбираемым так, чтобы выполнялось включение $B\supset\bar{Q}\cup P$. Рассмотрим произвольно функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$, являющиеся допустимыми при $\alpha=n$ в задаче (2) для конденсаторов $(\bar{Q},\partial B;\mathbb{R}^n\setminus\bar{B})$ и $(P,\bar{Q}\cup\partial B;\mathbb{R}^n\setminus(\bar{B}\cap\bar{Q}))$ соответственно. Отсюда вытекает, что функция $\varphi_1(x)(1-\varphi_2(x))$ допустима для конденсатора $(\bar{Q},\partial B\cup P;\mathbb{R}^n\setminus(\bar{B}\cap P))$. По определению емкости,

$$\operatorname{cap}_n(\bar{Q}, \partial B\cup P; \mathbb{R}^n\setminus(\bar{B}\cap P)) \le \int\limits_{B(0;R)} |\nabla\varphi_1(1-\varphi_2)-\varphi_1\nabla\varphi_2|^n dx \le$$

$$\le 2^{n-1}\int\limits_{B(0;R)} |\nabla\varphi_1|^n dx + 2^{n-1}\int\limits_{B(0;R)\setminus\bar{Q}} |\nabla\varphi_2|^n dx,$$

так как $\nabla\varphi_2 \equiv 0$ на Q. Переходя в последнем неравенстве к точным нижним граням по функциям $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$, получим

$$2^{1-n}\operatorname{cap}_n(\bar{Q}, \partial B\cup P; \mathbb{R}^n\setminus(\bar{B}\cup P)) \le$$

$$\le \operatorname{cap}_n(\bar{Q}, \partial B; \mathbb{R}^n\setminus\bar{B}) + \operatorname{cap}_n(P, \bar{Q}\cup\partial B; \mathbb{R}^n\setminus(\bar{B}\cup\bar{Q})). \qquad (5)$$

Так как $\bar{Q}\cap P=\varnothing$, то по известному (см., например, [2, с. 61]) свойству множеств нулевой емкости последнее слагаемое в (5) обращается в нуль.

Для оценки емкости конденсатора $(\bar{Q}, \partial B; \mathbb{R}^n\setminus\bar{B})$ применим стандартные рассуждения. Зафиксируем $r=\max\limits_{x\in Q}|x|$, $R>r$, и рассмотрим функцию $\varphi(x)$, равную 1 и 0 на множествах $B(0;R)$ и $\mathbb{R}^n\setminus B(0;R)$ соответственно и имеющую вид $\varphi(x)=(\ln\frac{R}{|x|})(\ln\frac{R}{r})^{-1}$ внутри шарового слоя $B(0;R)\setminus B(0;R)$. Ясно, что $\varphi(x)$ допустима для конденсатора $(\bar{Q}, \partial B; \mathbb{R}^n\setminus\bar{B})$ и нужная оценка будет иметь вид

$$\operatorname{cap}_n(\bar{Q}, \partial B; \mathbb{R}^n\setminus\bar{B}) \le \frac{1}{\left(\ln\frac{R}{r}\right)^n}\int\limits_{B(0;R)\setminus B(0;R)} \frac{dx}{|x|^n} = \frac{\omega_n}{\left(\ln\frac{R}{r}\right)^{n-1}},$$

где ω_n – $(n-1)$-мерная мера Лебега единичной сферы $\partial B(0;1)$.

Теперь, принимая во внимание оценку (3) для $\alpha=n$, получим

$$\int\limits_Q |H(f(x))|^n dx \le \frac{\omega_n}{\left(\ln\frac{R}{r}\right)^{n-1}}$$

для произвольно достаточно большого R. Следовательно, устремляя $R\to\infty$, получим $|H(f(x))|\equiv 0$ на множестве Q. Так как Q взято произвольно из $\mathbb{R}^n\setminus P$, то $H(f(x))\equiv 0$ при $x\in\mathbb{R}^n\setminus P$. Утверждение б) следует сразу же из строгой монотонности $H(t)$. В случае, когда $H(t)$ не обязательно строго монотонна в окрестности своего нуля, получаем, что $f(x)$ задает график минимальной поверхности над $\mathbb{R}^n\setminus P$. Справедливость требуемого утверждения а) вытекает тогда из известных результатов Бомбиери и др. [4] и Дж. Саймсона [5].

2. Излагаемые далее утверждения говорят о том, что естест-ве характеристикой поведения средней кривизны решений урав-нения (1) является расстояние до границы области существования.

18*

Теорема 2. *Пусть $f(x)$ – решение уравнения (1) в области $\Omega\in\mathbb{R}^n$. Тогда*

$$\sup_{x\in\Omega}|H(f(x))|\operatorname{dist}(x;\partial\Omega)\le 1. \tag{6}$$

В случае, когда $f(x)$ описывает график максимальной полусферы над шаром $B(0;R)$, в (6) достигается равенство.

Следствие 2. *Пусть $f(x)$ – решение уравнения (1) в шаре $B(0;R)$ радиуса R с центром в нуле. Тогда $|H(f(0))|\le\frac{1}{R}$.*

Данное утверждение в случае поверхностей постоянной или отграниченной от нуля средней кривизны получено С. Н. Бернштейном [6] и Р. Финном [7] соответственно.

Р. Финном в [8] подробно исследуются свойства поверхностей, описывающих явление капиллярности, являющихся частным случаем в (1), когда правая часть есть линейная функция $H=at+b$, где a и b – постоянные и $a>0$. Формулируемое ниже утверждение дает в упомянутом случае несколько иную, чем в [8], оценку для поведения таких решений.

Следствие 3. *Пусть $H(t):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ – строго возрастающая функция и $f(x)$ – решение (1) с правой частью $H(t)$ в области $\Omega\subset\mathbb{R}^n$. Тогда справедлива оценка*

$$H^{-1}\left(-\frac{1}{\operatorname{dist}(x,\partial\Omega)}\right)\le f(x)\le H^{-1}\left(\frac{1}{\operatorname{dist}(x,\partial\Omega)}\right),\quad H^{-1}\circ H(t)=t.$$

Представляет также интерес установить точное значение функционала в правой части (6) для произвольной и тем более некомпактной области Ω. Ниже приводится частичное решение этой задачи для специального вида областей Ω.

А именно рассмотрим два класса областей в пространстве $\mathbb{R}^n$. Для произвольного целого ρ, где $1\le\rho\le n$, обозначим через $\Pi_{n,\rho}$ цилиндрический слой, который с точностью до движения и гомотетии пространства $\mathbb{R}^n$ имеет вид координатного произведения $\Pi_{n,\rho}=\gamma^{n-\rho}\times\mathcal{D}^\rho(a)$, где $\gamma^{n-\rho}$ – $(n-\rho)$-мерная плоскость и $\mathcal{D}^\rho(a)$ – ρ-мерный диск радиуса $a>0$. Обозначим через $\mathcal{D}(a;b)=\mathcal{D}^n(b)\setminus\mathcal{D}^n(a)$ – шаровой слой ширины $(b-a)$ с внутренним радиусом $a>0$.

Справедлива

Теорема 3. *Пусть Ω совпадает с некоторой из областей $\Pi_{n,\rho}$. Тогда для любого решения $f(x)$ уравнения (1) в области $\Omega=\Pi_{n,\rho}$ выполнено*

$$\sup_{x\in\Omega}|H(f(x))|\operatorname{dist}(x;\partial\Omega)\le\frac{\rho}{n}, \tag{7}$$

и равенство достижимо, например, когда $f(x)$ описывает гипер-

поверхность постоянной средней кривизны: $f(x)=[1-\sum_{i=1}^{\rho}x_i^2]^{\frac{1}{2}}$.

В случае, когда Ω есть шаровой слой $\mathcal{D}(a;b)$, справедлива оценка

$$\sup_{x\in\Omega}|H(f(x))|\operatorname{dist}(x;\partial\Omega)\le\frac{1}{2}\cdot\frac{n}{n-1} \tag{8}$$

Замечание. В случае $n=2$ существуют поверхности постоянной средней кривизны над $\mathcal{D}(a;b)$, для которых значение функционала в левой част (8) равно 1/2. Для $n\ge3$ значение 1/2 асимптотически достигается для семейства поверхностей постоянной средней кривизны над $\mathcal{D}(a;b)$ при $a\to0$. Т. е. указанная в (8) оценка в известном смысле точна при $n\to\infty$.

Доказательство теоремы 2. Пусть $z\in\Omega$ и $B(z;R)$ – шар максимального радиуса, вписанный в Ω с центром в z. Если $H\ne0$ (тривиальный для (6) случай), то в силу следствия 1 $R<+\infty$. Обозначим через $S_\lambda(r)$ n-мерную сферу в $\mathbb{R}^{n+1}$ с центром в точке $(z_1;\ldots;z_n;\lambda)$ и радиусом r, $r<R$. Рассмотрим произвольное решение $f(x)$ уравнения (1) в Ω со средней кривизной $H(f(x))$, и пусть F – график этого решения. Ясно, что для достаточно больших чисел $\lambda>f(z)$ пересечение $F\cap S_\lambda(r)$ пусто. Найдем точную нижнюю грань λ_0 таких значений параметра λ. Так как шар $B(z,r)$ лежит компактно в $B(z,R)$, то сфера $S_{\lambda_0}(r)$ касается поверхности F в некоторой точке $(x_0;f(x_0))$, где $|x_0-z|<r$, причем нормальные векторы сферы и поверхности F в точке касания имеют противоположные направления. Сравнивая главные кривизны обеих поверхностей и учитывая, что сфера $S_{\lambda_0}(r)$ лежит всюду не ниже F, получим неравенство на средние кривизны $H(f(x))\le H_S=\frac{1}{r}$. Используя теперь свойство монотонности $H(t)$ и тот факт, что точка $(z;f(z))$ поверхности F лежит не выше, чем точка касания $(x_0;f(x_0))$, т. е. $f(x_0)\ge f(z)$, найдем $H(f(z))\le H(f(x_0))\le\frac{1}{r}$. Переходя к пределу при $r\to R$ в последнем неравенстве, получим $H(f(z))\operatorname{dist}(z;\partial\Omega)\le1$.

Неравенство в обратную сторону доказывается аналогичным образом для значений параметра $\lambda<f(z)$, откуда и следует справедливость (6).

Доказательство теоремы 3 базируется на расширенном принципе сравнения средних кривизн для касающихся, не обязательно компактных, поверхностей. Рассмотрим сначала случай области вида $\Omega=\Pi_{n,p}$, где $1\le p\le n-1$ (случай $p=n$ опускается, так как для него $\Pi_{n,n}$ – шар и оценка (7) превращается в (6)). Используя эквивариантные свойства средней кривизны гиперповерхности в R^{n+1} при преобразованиях подобия и движения, можно считать, что $\Pi_{n,p}$ имеет вид цилиндрического слоя

$$\Pi_{n,p}=\left\{x=(x_1;\ldots;x_n)\in R^n:\ \sum_{i=1}^{\rho} x_i^2<1\right\}.$$

Рассмотрим произвольно $z\in\Pi_{n,p}$ и положим $R=\mathrm{dist}(z,\partial\Pi)$. Обозначим через v и w проекции вектора $x\in R^{n+1}$ на взаимно ортогональные подпространства R^{n+1}: $V=\left\{x\in R^{n+1}:x_i=0,\ 1\le i\le\rho\right\}$ и $W=\left\{x\in R^{n+1}:x_i=0,\ \rho+1\le i\le n+1\right\}$ соответственно. Рассмотрим далее λ-параметрическое семейство торов

$$\mathcal{T}_\lambda(M)=\left\{x=(w;v)\in R^{n+1}:\ |w|^2+(|v-\lambda e_{n+1}|-M)^2=r^2\right\},$$

где r и M - фиксированные числа такие, что $0<r<R<M<+\infty$. Из представления тора $\mathcal{T}_\lambda(M)$ видно, что его проекция вдоль координатного вектора e_{n+1} есть компактное строго внутреннее подмножество слоя $\Pi_{n,p}$.

Пусть $f(x)$ - произвольное решение (1) в $\Pi_{n,p}$ и пусть λ_0 - точная нижняя грань чисел λ, для которых $\mathcal{T}_\lambda(M)$ лежит строго выше графика F. Как и выше, убеждаемся, что $\lambda_0<+\infty$ и $\mathcal{T}_{\lambda_0}(M)$ касается F в некоторой точке $(x_0;f(x_0))$, где $x_0\in R^n$ лежит строго внутри проекции тора $\mathcal{T}_{\lambda_0}(M)$ вдоль направления e_{n+1}. Сравнивая среднюю кривизну поверхности F в точке касания со средней кривизной $H_{\mathcal{T}}$ тора $\mathcal{T}_{\lambda_0}(M)$, приходим к неравенству $H(f(x_0))\le H_{\mathcal{T}}(x_0)$.

Пусть X_0 имеет разложение $x_0=w_0+v_0$. Путем непосредственных вычислений средней кривизны тора находим

$$H_{\mathcal{T}}(x_0)=\frac{1}{r}\left(\frac{p}{n}+\frac{n-p}{n}\,\frac{|v_0-\lambda_0 e_{n+1}|-M}{|v_0-\lambda_0 e_{n+1}|}\right)\le\frac{1}{r}\left(\frac{p}{n}+\frac{n-p}{n}\,\frac{r}{M+r}\right).$$

Далее $f(x_0)\ge f(z)$, так как точка $(z;f(z))$ лежит ниже любой точки тора, в том числе и точки $(x_0;f(x_0))$. Следовательно,

$$H(f(x_0))\le H(f(x_0))\le\frac{1}{r}\left(\frac{p}{n}+\frac{n-p}{n}\,\frac{r}{M+r}\right)$$

и после предельных переходов $M\to+\infty$, $r\to R$ получим

$$H(f(z))\le\frac{p}{n}\,\frac{1}{R}=\frac{p}{n}\,\frac{1}{\mathrm{dist}(z;d\Omega)}.$$

Нетрудно проверить, что функция $f_1(x)=-f(x)$ является также решением уравнения (1) с правой частью $H_1(t)=-H_1(-t)$ и $H_1'(t)\ge0$. Следовательно,

$$-H(f(z))\le\frac{p}{n}\frac{1}{\mathrm{dist}(z;d\Omega)}$$

и доказательство первого случая закончено.

Для доказательства (8) в случае $\Omega=D(a,b)$, $0<a<b$, рассмотрим произвольно $z\in D(a,b)$ и $f(x)$ - решение уравнения (1) в Ω. Рассмотрим нижнюю часть горизонтального тора

$$\Phi(R;\rho)=\left\{x\in R^{n+1}:x_{n+1}^2+\left(R-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2=\rho^2\right\},$$

который является фигурой вращения в R^{n+1} для дуги окружности, задаваемой уравнением $g(t)=-(\rho^2-(R-t)^2)^{\frac{1}{2}}$. Средняя кривизна тора вычисляется по общей формуле для осесимметрических поверхностей, в которой полагаем $x=(x_1,\dots,x_n;x_{n+1})$, $t=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}$,

$$H_\Phi(x)=\frac{1}{nt^{n-1}}\frac{d}{dt}\left(\frac{g'(t)t^{n-1}}{\sqrt{1+g'^2(t)}}\right)=\frac{nt-R(n-1)}{n\rho t}.$$

На области определения, $R-\rho<t<R+\rho$, нетрудно оценить среднюю кривизну

$$H_\Phi(x)\le H_{\Phi,\max}=\frac{R+n\rho}{n\rho(R+\rho)}.$$

Положим, $\rho_0=\mathrm{dist}(z,\partial\Omega)-\varepsilon$, $R_0=|z|$, где $\varepsilon>0$ достаточно мало. Заметим, что поверхность $\Phi(\rho_0,R)$ проектируется вдоль e_{n+1} строго внутрь $D(a,b)$, и, используя прием, описанный выше, получим неравенство на средние кривизны

$$H(f(z))\le\frac{R_0+n\rho_0}{n\rho_0(R_0+\rho_0)}$$

или, учитывая, что $\mathrm{dist}(z;\partial\Omega)\le|z|$,

$$H(f(z))\,\mathrm{dist}(z;\partial\Omega)\le\frac{|z|+n\rho_0}{n|z|+n\rho_0}\frac{\mathrm{dist}(z;\partial\Omega)}{\mathrm{dist}(z;\partial\Omega)-\varepsilon}.$$

Устремляя $\varepsilon\to0$, найдем $\rho_0\to\mathrm{dist}(z;\partial\Omega)$, т.е.

$$H(f(z))\,\mathrm{dist}(z;\partial\Omega)\le\frac{|z|+n\,\mathrm{dist}(z;\partial\Omega)}{n(|z|+\mathrm{dist}(z;\partial\Omega))}\le\frac{1+n}{2n}.$$

Неравенство снизу доказывается аналогично для $f_1(x)=-f(x)$.

3. **Пример.** *Пусть* $H(t)=c(1-t^n)^{-\frac{1}{n}}$, *где* $c>0$. *Тогда* $H'(t)\ge0$. *Рассмотрим поверхность вращения в* R^{n+1}, *задаваемую графиком*

функции $x_{n+1}=g(|x|)$, $|x|=\rho=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}$, *со средней кривизной, равной* $H(|x|)$. *Функция* $g=g(\rho)$ *должна удовлетворять уравнению*

$$\frac{1}{n\rho^{n-1}}\frac{d}{d\rho}\left(\frac{g'(\rho)\rho^{n-1}}{\sqrt{1+g'^2(\rho)}}\right)=H(\rho)=c(1-\rho^n)^{-\frac{1}{n}}.$$

Решая последнее уравнение относительно $g(\rho)$ и полагая $g'(\rho)=0$, получим

$$\frac{g'(\rho)\rho^{n-1}}{\sqrt{1+g'^2(\rho)}}=\int\limits_0^\rho nct^{n-1}(1-t^n)^{-\frac{1}{n}}dt=\frac{cn}{n-1}\left(1-(1-\rho^n)^{\frac{n-1}{n}}\right)$$

или

$$\frac{g'(\rho)}{\sqrt{1+g'^2(\rho)}}=\frac{cn}{n-1}\,\frac{1-(1-\rho^n)^{\frac{n-1}{n}}}{\rho^{n-1}}=\frac{cn}{n-1}\,\varphi(\rho).$$

Непосредственно проверяется, что

$$\varphi'(\rho)=\frac{n-1}{\rho^n}\,\frac{1-(1-\rho^n)^{\frac{1}{n}}}{(1-\rho^n)^{\frac{1}{n}}}>0$$

при $0\le\rho<1$. Следовательно, искомая функция $g(\rho)$ на интервале существования является выпуклой и монотонно возрастающей при $0\le\rho<\rho_0$, где ρ_0 определяется из условия $\lim\limits_{t\to\rho_0-0} g'(t)=+\infty$ или $\varphi(\rho_0)\frac{cn}{n-1}=1$. Беря в качестве области единичный шар, т. е. $\rho_0=1$, находим $\frac{cn}{n-1}=1$ или $c=\frac{n-1}{n}$. Наконец, из перечисленных свойств функций $g(t)$ и $\varphi(t)$ вытекает, что $H(\rho)=H_1(g(\rho))$, где $H_1'(t)\ge 0$, т. е. $x_{n+1}=g(|x|)$ является решением уравнения (1) в единичном шаре с центром в нуле, для которого

$$\lim_{|x|\to1} H_1 g(|x|)=\lim_{\rho\to1}\frac{n-1}{n}(1-\rho^n)^{-\frac{1}{n}}=+\infty.$$

При этом важно отметить, что само решение $g(\rho)$ необходимо ограничено.

4. Отмеченная выше возможность сингулярного поведения средней кривизны при подходе к любой точке границы области существования становится невозможной для изолированных особенностей. А именно справедлива

Теорема 4. *Пусть Ω - область в $\mathbb{R}^n$ и $q\in\Omega$ - фиксированная точка. Пусть $f(x)$ - решение (1) в области $\Omega\setminus\{q\}$. Тогда $H(f(x))$ - ограниченная в окрестности точки q функция и выполнено*

$$\limsup_{x\to q} |H(f(x))| \le \frac{1}{\operatorname{dist}(q;\partial\Omega)}. \tag{9}$$

Доказательство. Не ограничивая общности, можем считать $q=0$. Положим $R=\operatorname{dist}(0;\partial\Omega)$ и $\Omega_1=B(0;R)\setminus\{0\}$ - подобласть в Ω. Построим сначала специальную гиперповерхность постоянной кривизны над областью $D(a;b)$, где $0<a<b<R$ и $D(a;b)=B(0;b)\setminus\overline{B(0;a)}$. Рассмотрим решение уравнения

$$\frac{1}{n\rho^{n-1}}\frac{d}{d\rho}\left(\frac{\rho^{n-1}g'(\rho)}{\sqrt{1+g'^2(\rho)}}\right)=h$$

с выбираемым ниже $h=h(a;b)=\mathrm{const}>0$ и с граничными условиями

$$\lim_{\rho\to a+0} g'(\rho)=-\infty,\quad \lim_{\rho\to b-0} g'(\rho)=+\infty. \tag{10}$$

График функции $g=g(\rho)$ является поверхностью вращения $\mathfrak{F}(a;b)$ со средней кривизной $D(a;b)$, заданной над областью $D(a;b)$. При этом указанные граничные условия влекут, что всюду вдоль границы $\partial D(a;b)$ касательное к $\mathfrak{F}(a;b)$ пространство проходит ортогонально к пространству $\{x_{n+1}=0\}$. Для $a<\rho<b$

$$\frac{g'(\rho)}{\sqrt{1+g'^2(\rho)}}=h\rho+c\rho^{1-n},$$

где постоянная $c=c(a;b)$ определяется из граничных условий. Используя (10), находим

$$\begin{cases} ah+ca^{1-n}=-1;\\ bh+cb^{1-n}=1,\end{cases}$$

откуда получаем

$$h=h(a;b)=\frac{a^{n-1}+b^{n-1}}{b^n-a^n}; \tag{11}$$

$$c=c(a;b)=\frac{(ab)^{n-1}(a+b)}{b^n-a^n}.$$

При этом минимум поверхности $\mathfrak{F}(a;b)$ приходится на сферу $S(\rho_0)$ радиуса ρ_0, где $g'(\rho_0)=0$ или

$$\rho_0=\rho_0(a;b)=\left[\frac{a^{n-1}b^{n-1}(a+b)}{a^{n-1}+b^{n-1}}\right]^{\frac{1}{n}}.$$

Зафиксируем a и b так, что $0<a<b<R$, и рассмотрим поверхность $\mathfrak{F}(a;b)$, определяемую параметрами a, b в соотношениях (11). Пусть

$\mathscr{G}_\lambda(a;b)$ означает $\mathscr{G}(a;b)$, смещенную на $\lambda\in\mathbb{R}$ вдоль направления координатного вектора e_{n+1}. Пусть $f(x)$ - произвольное решение (1) в Ω_1 и пусть λ_0 - точная нижняя грань тех чисел $\lambda>f(x_0)$ (для фиксированного $x_0\in\Omega_1$), для которых $\mathscr{G}_\lambda(a;b)$ лежит строго выше поверхности F, определяемой решением $f(x)$. Так как глобальный минимум $\mathscr{G}_{\lambda_0}(a;b)$ приходится на сферу $S(\rho_0)$, для $\rho_0=\rho_0(a;b)$, то, повторяя рассуждения п. 2, получим неравенство на средние кривизны

$$\max_{z\in S(\rho_0(a;b))} |H(f(z))|\le h(a;b)|=\frac{a^{n-1}+b^{n-1}}{b^n-a^n}$$

Нетрудно заметить, что выражение в правой части последнего неравенства есть убывающая функция при $a\to 0$. При этом

$$\lim_{a\to 0}\rho_0(a;b)=\lim_{a\to 0}\left[\frac{a^{n-1}b^{n-1}(a+b)}{a^{n-1}+b^{n-1}}\right]^{\frac{1}{n}}=0,$$

и поэтому во всем проколотом шаре $B(0;\rho_0(a;b))\setminus\{0\}$ выполнено

$$\sup_{z\in B(0;\rho_0)\setminus\{0\}} |H(f(z))|\le \frac{a^{n-1}+b^{n-1}}{b^n-a^n}\le\frac{1}{b-a},$$

т. е.

$$\lim_{z\to 0}\sup|H(f(z))|\le\lim_{a\to 0}\frac{1}{b-a}=\frac{1}{b}.$$

Переходя в полученном неравенстве к пределу при $b\nearrow R$, получим требуемое соотношение, и теорема доказана.

5. В этом пункте мы отказываемся от требования монотонного возрастания функции $H(t)$. Тогда вопрос классификации целых (т. е. определенных во всем пространстве $\mathbb{R}^n$) решений уравнения с правой частью $H(t)$ становится содержательным даже в размерности $n=2$. Приведем примеры, характеризующие широту указанного класса решений

а) любая функция вида $f(x)=f(x_1,\dots,x_n)=\varphi(a_1x_1,\dots,a_nx_n)$, где $\varphi(t)$ - дважды дифференцируемая функция одного переменного и a_i - постоянные числа;

б) любая функция вида $v(x)=\varphi(\sum_{i=1}^{\rho}(x-a_i)^2)$, где $\varphi'(0)=0$, $a_i=\mathrm{const}$ и ρ - целое, такое, что $2\le\rho\le n$;

в) при больших значениях n, например, $n\ge7$, существуют отличные от а) и б) примеры минимальных (т. е. $H=0$) графиков. Приведем некоторое продвижение этой задачи для двумерного случая. Положим $\operatorname{osc}_{x\in M} f(x)$ - осцилляция функции $f(x)$ в множестве $M\in\mathbb{R}^n$, т. е.

$$\underset{x\in M}{OSC} f(x)=\sup_{x\in M} f(x) - \inf_{x\in M} f(x).$$

Теорема 5. *Пусть $f(x)=f(x_1;x_2)-C^3$ - решение уравнения (1) в плоскости $\mathbb{R}^2$ с правой частью $H(t)$. Предположим, что $H(t)$ не меняет знака и выполнено условие*

$$\text{(i)}\ |\nabla f(x)|\neq 0;\ \underset{x\in\mathbb{R}^2}{OSC}\arg\nabla f(x)<+\infty.$$

Тогда $f(x)$ - функция одного переменного, т.е. найдутся постоянные ρ_1; ρ_2 и функция $\varphi(t)\in C^2(\mathbb{R}^2)$, такие, что выполнено $f(x_1;x_2)=\varphi(\rho_1 x_1+\rho_2 x_2)$.

Доказательство. Расширим для наших целей понятие 2-емкости для риманова многообразия $(F;dS^2)$ с метрикой $dS^2=\sum\limits_{i,j=1}^{2} g_{ij}dx_i dx_j$, где $g_{ij}=g_{ij}(x)$ - компоненты метрического тензора и $x=(x_1;x_2)\in\mathbb{R}^2$. Например, для графика функции $f=f(x_1;x_2)$ класса $C^1(\mathbb{R}^2)$, рассматриваемого как поверхность в $\mathbb{R}^3$, компоненты $g_{ij}(x)$ имеют вид

$$g_{ij}(x)=\delta_{ij}+f_{x_i}f_{x_j}, \tag{12}$$

где δ_{ij} - символ Кронекера. Для двух замкнутых непересекающихся множеств $P,Q\subset\mathbb{R}^2$ положим [9]:

$$\mathrm{cap}_F(P;Q)=\inf\int\limits_{\mathbb{R}^2}\sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\sqrt{g}\,dx_1dx_2, \tag{13}$$

где $g=\det\|g_{ij}\|$, $\|g^{ij}\|$ - матрица, обратная к $\|g_{ij}\|$, и точная нижняя грань берется по всем липшицевым функциям с компактным носителем, таким, что $\varphi=1$ на P и $\varphi=0$ на Q. Говорят, что многообразие $(F;dS^2)$ имеет параболический тип, если для любого компакта $P\subset\mathbb{R}^2$ существует последовательность $D_k\subset\mathbb{R}^2$ открытых множеств с компактными замыканиями, таких, что $P\subset D_k\subset D_{k+1}$, $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} D_k=\mathbb{R}^2$,

$$\lim_{k\to\infty}\mathrm{cap}_F(P;\mathbb{R}^2\setminus D_k)=0.$$

Хорошо известно следующее свойство [3], [10] графиков в $\mathbb{R}^3$ со средней кривизной одного знака.

Лемма. *Пусть $F=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3: x_3=f(x_1,x_2)\}$ - график функции $f(x_1;x_2)$ со средней кривизной $H(x)$, не меняющей знака в $\mathbb{R}^2$. Тогда $(F;dS_F^2)$ имеет параболический тип как многообразие с индуцируемой*

19*

из $\mathbb{R}^2$ метрикой вида (12).

Рассмотрим любое целое решение (1), удовлетворяющее условиям теоремы. Положим,

$$A=\frac{\nabla f}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}:\ \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2;\quad <A;B>=\sum_{i=1}^{2} A_i B_i .$$

Тогда после дифференцирования тождества (1) по переменным x_i, $i=1,2$, и элементарных преобразований получим

$$0=f_{x_1}\operatorname{div}\frac{\partial A}{\partial x_2}-f_{x_2}\operatorname{div}\frac{\partial A}{\partial x_1}=\operatorname{div}\left(f_{x_1}\frac{\partial A}{\partial x_2}-f_{x_2}\frac{\partial A}{\partial x_1}\right)+$$
$$+\left[<\frac{\partial A}{\partial x_1};\nabla f_{x_2}> - <\nabla f_{x_1};\frac{\partial A}{\partial x_2}>\right], \tag{14}$$

Далее

$$\frac{\partial A}{\partial x_i}=\frac{\sqrt{g}\ \nabla f_{x_i}-\dfrac{\partial A}{\partial x_i}\sqrt{g}}{g},$$

откуда получаем, что выражение в квадратных скобках в (14) обращается в нуль. Кроме того,

$$f_{x_1}\frac{\partial A}{\partial x_2}-f_{x_2}\frac{\partial A}{\partial x_1}=\frac{1}{\sqrt{g}}\left(f_{x_1}\nabla f_{x_2}-f_{x_2}\nabla f_{x_1}\right)-$$
$$-\frac{\nabla f}{g}\left(f_{x_1}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x_2}-f_{x_2}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x_1}\right)=\frac{g-1}{\sqrt{g}}\left(\nabla\theta-\frac{\nabla f<\nabla f;\nabla\theta>}{g}\right),$$

где $\theta(x)=\operatorname{arctg}\left(\dfrac{f_{x_1}}{f_{x_2}}\right)$ - определенная при всех $x\in\mathbb{R}^2$ (в силу (1)) функция класса $C^2(\mathbb{R}^3)$. В наших обозначениях из (14) и (15) находим

$$\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{g-1}{\sqrt{g}}\sum_{j=1}^{2} g^{ij}\frac{\partial\theta}{\partial x_j}\right)=0. \tag{16}$$

Из последнего соотношения видно, что (16) представляет собой линейное по $\theta(x)$ эллиптическое уравнение дивергентного типа, родственное уравнению Лапласса-Бельтрами. При этом в силу условия (1) функция $\theta=\theta(x)$ является ограниченным решением уравнения (16). Покажем, что $\theta(x_1,x_2)$=const. С этой целью применим рассуждения, развиваемые в [9]. Зафиксируем произвольно постоянную $c=\theta(q)$, где $q\in\mathbb{R}^2$, и обозначим через O_C компоненту связности множества, на котором $\theta(x)>c$. Предположим, что ∂O_C не пусто, и рассмотрим функцию $\psi(x)=\theta(x)-c$ на O_C и равную 0 при $x\in\mathbb{R}^2\setminus O_C$. Зафиксируем произвольно компакт $P\in O_C$ и рассмотрим исчерпание $\mathbb{R}^2$ открытыми множествами $D_k\supset P$, для которого

$$\lim_{k\to\infty} \operatorname{cap}_F(P;\mathbb{R}^2\setminus D_k)=0.$$

Существование такого исчерпания вытекает из условия теоремы 5 и упомянутой выше леммы. Для любой липшицевой функции $\varphi(x)$, допустимой в вариационной задаче (13) для вычисления емкости конденсатора $(P;\mathbb{R}^2\setminus D_k)$, в силу (16) будет

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\varphi^2 w(x) \frac{g-1}{\sqrt{g}} \sum_{j=1}^{2} g^{ij} \frac{\partial w}{\partial x_j} \right) dx_1 dx_2 =$$

$$=\int\limits_{\mathbb{R}^2} \left(\sum_{i,j=1}^{2} \varphi^2 \frac{g-1}{\sqrt{g}} g^{ij} \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_j} + 2\varphi w \frac{g-1}{\sqrt{g}} \sum_{i,j=1}^{2} g^{ij} \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) dx_1 dx_2. \quad (17)$$

Заметим далее, что

$$\left(\sum_{i,j=1}^{2} g^{ij} \lambda_i \mu_j \right)^2 \le \left(\sum_{i,j=1}^{2} g^{ij} \lambda_i \lambda_j \right) \left(\sum_{i,j=1}^{2} g^{ij} \mu_i \mu_j \right)$$

для любой положительно определенной матрицы $\|g^{ij}\|$ и чисел λ_i, μ_j, $1\le i,j\le 2$, и, применяя соответствующее неравенство Коши к (17), получим

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} \varphi^2 \sum_{i,j=1}^{2} g^{ij} \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_j} \frac{g-1}{\sqrt{g}} dx_1 dx_2 \le$$

$$\le 4 \int\limits_{\mathbb{R}^2} w^2 \sum_{i,j=1}^{2} g^{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \frac{g-1}{\sqrt{g}} dx_1 dx_2.$$

Вспоминая, что функция $w(x)$ ограничена, например: $|w(x)|\le M$, и на множестве P выполнено $\varphi(x)=1$, из последнего неравенства найдем

$$\int\limits_{P} \sum_{i,j=1}^{2} g^{ij} \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_j} \frac{g-1}{\sqrt{g}} dx_1 dx_2 \le$$

$$\le 4M^2 \int\limits_{O_C} \sum_{i,j=1}^{2} g^{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \sqrt{g}\, dx_1 dx_2,$$

что после перехода к точной нижней грани по всем допустимым функциям $\varphi(x)$ дает

$$\int\limits_{P} \sum_{i,j=1}^{2} g^{ij} \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_j} \frac{g-1}{\sqrt{g}} dx_1 dx_2 \le 4M^2 \operatorname{cap}_F(P;\mathbb{R}^2\setminus D_k).$$

В силу свойств исчерпания $\{D_K\}$ правая часть последнего неравенства может быть сделана сколь угодно малой, т. е.

$$\sum_{i,j=1}^{2} g^{ij} \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_j} \frac{|\nabla f|^2}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}=0 \qquad (18)$$

для $x\in P$, и так как $P\subset O_C$ выбрано произвольно, то (18) выполнено для всех $x\in O_C$. Из условия (i) и положительной определенности формы $\sum_{i,j=1}^{2} g^{ij}\xi_i\xi_j$ получаем

$$|\nabla\theta(x)|\equiv 0,\ x\in O_C,$$

и поэтому $\theta\equiv$const на O_C. Последнее означает, что существуют постоянные ρ_1, ρ_2, не равные нулю одновременно, для которых всюду в O_C выполнено $\rho_2 f_{x_1}-\rho_1 f_{x_2}\equiv 0$. Решая это линейное дифференциальное уравнение, получим требуемое утверждение.

Список литературы: 1. *Гольдштейн В.М., Решетняк Ю.Г.* Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения. М., 1983. 284 с. 2. *Решетняк Ю.Г.* Пространственные отображения с ограниченным искажением. Новосибирск, 1982. 285 с. 3. *Cheng S.Y., Yau S.T.* Differential equations on Riemannian manifolds and their geometric applications//Comm. Pure & Appl. Math. 1975. 28, N3. P.333-354. 4. *Bombieri E., de Giorgi E., Guisty E.* Minimal cones and the bernstein problem//Invent. Math. 1969.7, N3. P.243-268. 5. *Simons I.* Minimal varieties Riemannian manifolds//Ann. Math. 1968. 88, N1. P.62-105. 6. *Bernstein S.N.* Sur les surfaces definies an moyen de leur courbure moyenne on totale//Ann. École Nat. Sup. 1909. 27. P.233-256. 7. *Finn R.* Remarks relevant to minimal surfaces and to surfaces of prescribed mean curvature//I. Analyse Math. 1965. 14. P.139-160. 8. *Финн Р.* Равновесные капиллярные поверхности. Математическая теория. М., 1989. 312 с. 9. *Миклюков В.М.* Об одном новом подходе к теореме Бернштейна и близким вопросам уравнений типа минимальных поверхностей//Мат. сб. 1979. 108, 150, N2. С. 268-289. 10. *Кессельман В.М.* О римановых многообразиях p-параболического типа//Изв. вузов. Математика. 1985. N4. С. 81-83.

Поступила в редколлегию 31.10.89

УДК 514

А. Л. Ямпольский

О СИЛЬНОЙ СФЕРИЧНОСТИ МЕТРИКИ САСАКИ СФЕРИЧЕСКОГО КАСАТЕЛЬНОГО РАССЛОЕНИЯ

Введение. Пусть M^n означает n-мерное риманово многообразие. Его метрика называется сильно ν-сферической, если в каждой точке $Q \in M^n$ существует ν-мерное подпространство $\mathcal{L}_Q^{\nu} \subset T_Q M^n$, такое, что оператор кривизны метрики M^n удовлетворяет условию:

$$R(X,Y)Z=k(\langle Y,Z\rangle X-\langle X,Z\rangle Y),\ k=\mathrm{const}>0, \tag{1}$$

для каждого $Y\in\mathfrak{L}_Q^\nu$ и любых $X,Z\in T_QM^n$. Число ν называется индексом сферичности, k - показателем сферичности.

При $k=0$ метрика называется сильно ν-параболической.

Как известно [1], если ν постоянно на M^n (а мы рассматриваем только такой случай), то подпространства $\mathfrak{L}^\nu$ образуют интегрируемое распределение на M^n, и его интегральные подмногообразия являются ν-мерными вполне геодезическими подмногообразиями в M^n постоянной секционной кривизны k.

В статье Борисенко А.А. и автора [2] рассматривались римановы многообразия, касательное расслоение которых с метрикой Сасаки имеют постоянный индекс сильной параболичности. Было доказано, что если ν-индекс сильной параболичности метрики Сасаки TM^n, то ν четно и метрически $M^n=M_1^{n-\nu/2}\times E^{\nu/2}$, а $TM^n=TM_1^{n-\nu/2}\times E^\nu$.

Борисенко А.А. высказал гипотезу, что аналогичный результат для T_1M^n $(n\geq3)$ не имеет места. То есть сильно-сферическое распределение на T_1M^n при $n\geq3$ тривиально. Мы доказываем эту гипотезу принекоторых ограничениях на показатель сферичности.

Таким образом, цель данной работы состоит в описании многообразий, метрика Сасаки сферического касательного расслоения которых имеет постоянный индекс сферичности ν.

В размерности n 2 известно, что если M^2 есть стандартная сфера S^2, то T_1S^2 имеет постоянную секционную кривизну 1/4 [3]. Это значит, что в смысле определения (1) индекс $\nu=3$, а показатель $k=1/4$. В статье доказаны

Теорема 1. *Пусть метрика Сасаки T_1M^n сильно ν-сферична с показателем сферичности k. Справедливы утверждения:*

а) $\nu=1$ тогда и только тогда, когда M^2 имеет постоянную гауссову кривизну $K\neq1$ и $k=K^2/4$;

б) $\nu=3$ тогда и только тогда, когда M^2 имеет постоянную кривизну $K=1$ и $k=1/4$;

в) $\nu=0$ в остальных случаях.

Теорема 2. *Пусть метрика Сасаки T_1M^n $(n\geq3)$ сильно ν-сферична с показателем сферичности k. Если $k=1/3$ и $k\neq1$, то $\nu=0$.*

Замечание. В размерности $n=3$ теорема 2 верна в предположении, что $k\notin\{1/4,1\}$.

Обозначим через (M^n, K) пространство постоянной кривизны K.

Теорема 3. *Пусть метрика Сасаки $T_1(M^n, K)$ $(n\geq 3)$ сильно ν-сферична с показателем сферичности k. Справедливы утверждения:*

а) $\nu=1$ тогда и только тогда, когда $K=1$, $k=1/4$;

б) $\nu=0$ в остальных случаях.

1. Предварительные сведения и результаты.

Пусть (M^n, g) - риманово многообразие. Линейный элемент метрики Сасаки TM^n имеет вид $d\tau^2=g_{ik}dq_idq^k+ g_{ik}D\xi^i d\xi^k$, где $(q^1, \ldots, q^n)$ - локальные координаты на M^n, ξ^i - координаты касательных векторов в естественном базисе $(\partial/\partial q_i)$, а $d\xi^i=d\xi^i+\Gamma^i_{jk}\xi^j dq^k$. Введя обозначения $dq=dq^i\partial/\partial q^i$, $\xi=\xi^i\partial/\partial q^i$, мы можем переписать формулу для линейного элемента метрики Сасаки в виде

$$d\tau^2=\langle dq, dq\rangle+\langle D\xi, D\xi\rangle, \tag{2}$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ - обозначение для скалярного произведения векторов в метрике g.

Пусть $Q=(q^1, \ldots, q^n)$, $\xi=(\xi^1, \ldots, \xi^n)$ - произвольная точка TM^n. Произвольный касательный вектор $\tilde{X}$ к TM^n в точке (Q,ξ) имеет вид $\tilde{X}=\tilde{X}^i\partial/\partial q^i+\tilde{X}^{n+i}\partial/\partial\xi^i$. Определены два отображения [4] $\Pi_*: T_{(Q,\xi)}TM^n\to T_QM^n$ и $K: T_{(Q,\xi)}TM^n\to T_QM^n$, действующие в локальных координатах следующим образом: $\Pi_*\tilde{X}=\tilde{X}^i\partial/\partial q^i$; $K\tilde{X}=(\tilde{X}^{n+i}+\Gamma^i_{jk}\tilde{X}^j\xi^k)\dfrac{\partial}{\partial q^i}$.

Относительно этих отображений имеет место разложение $T_{(Q,\xi)}TM^n=H_{(Q,\xi)}TM^n\oplus V_{(Q,\xi)}TM^n$, где $H_{(Q,\xi)}=\mathrm{Ker}K$, $V_{(Q,\xi)}TM^n=\mathrm{Ker}\Pi_*$.

В соответствии с этим, любой касательный вектор $\tilde{X}$ к TM^n представляется в виде $\tilde{X}=X^H+U^V$, где $X, U\in T_QM^n$, а $X^H\in H_{(Q,\xi)}TM$, $U^V\in V_{(Q,\xi)}TM^n$, причем в локальных координатах $X^H=X^i\partial/\partial q^i-\Gamma^i_{jk}X^j\xi^k\partial/\partial\xi^i$.

Если обозначить через $\langle\langle,\rangle\rangle$ скалярное произведение касательных к TM^n векторов в метрике Сасаки, то из (2) легко получить выражение

$$\langle\langle\tilde{X}, \tilde{Y}\rangle\rangle=\langle\Pi_*\tilde{X}, \Pi_*\tilde{Y}\rangle+\langle K\tilde{X}, K\tilde{Y}\rangle. \tag{3}$$

$H_{(Q,\xi)}$ и $V_{(Q,\xi)}$ называются соответственно горизонтальным и вертикальным подпространствами в точке (Q,ξ), а так как $X^H\in H_{(Q,\xi)}$, $U^V=V_{(Q,\xi)}$, то X^H называется горизонтальным лифтом вектора X, а U^V - вертикальным лифтом вектора U в точку (Q,ξ).

Вертикальные векторы касательны слою, горизонтальные - ортогональны слою.

Касательное расслоение единичных векторов T_1M^n есть подрасслоение TM^n, определяемое условием $<\xi,\xi>=1$. Метрика на T_1M^n определяется как метрика гиперповерхности в TM^n.

Единичной нараллелью к T_1M^n в каждой точке $(Q,\xi)\in T_1M^n$ служит вектор ξ^V.

Таким образом, вектор $\tilde{X}\in T_{(Q,\xi)}TM^n$ будет касаться T_1M^n в той же точке тогда и только тогда, когда $<K\tilde{X},\xi>=0$. Верно и обратное: любой вектор $\tilde{X}$ вида $\tilde{X}=X^H+U^V$, где $X\in T_QM^n$, а $u\in L_Q^{\perp}(\xi)$ - ортогональному дополнению вектора ξ в T_QM^n, принадлежит $T_{(Q,\xi)}T_1M^n$.

В дальнейшем большими латинскими буквами X, Y, Z... будем обозначать векторы из T_QM^n, а малыми u, v, x, y... - векторы из $L_Q^{\perp}(\xi)$.

Лемма 1 [5]. *В каждой точке $(Q,\xi)\in T_1M^n$ тензор кривизны $\tilde{R}$ метрики Сасаки T_1M^n определяется следующими формулами:*

$$\langle\tilde{R}(X^H,Y^H)Z^H,U^H\rangle=<R(X,Y)Z,U>+\frac{1}{4}<R(X,U)\xi,R(Z,Y)\xi>+$$

$$+\frac{1}{4}<R(X,Z)\xi,R(Y,U)\xi>+\frac{1}{2}(X,Y)\xi,R(Z,U)\xi>,$$

$$\langle\tilde{R}(X^H,Y^H)Z^H,u^V\rangle=\frac{1}{2}<(\nabla_Z R)(X,Y)\xi,u>,$$

$$\langle\tilde{R}(X^H,y^V)Z^H,u^V\rangle=\frac{1}{2}<R(X,Z)y,u>-\frac{1}{4}<R(\xi,y)Z,R(\xi,u)X>,$$

$$\langle\tilde{R}(X^H,Y^H)z^V,u^V\rangle=<R(X,Y)z,u>+\frac{1}{4}<R(\xi,z)X,R(\xi,u)Y>-$$

$$-\frac{1}{4}<R(\xi,z)Y,R(\xi,u)X>,$$

$$\langle\tilde{R}(x^V,y^V)z^V,U^H\rangle=0,$$

$$\langle\tilde{R}(x^V,y^V)z^V,u^V\rangle=<y,z><x,u>-<x,z><y,u>,$$

где R - тензор кривизны M^n в точке Q.

Используя результат леммы 1, легко получить необходимые и достаточные условия сильной сферичности метрики Сасаки T_1M^n.

Пусть $\tilde{\mathfrak{X}}^V$ - сильно сферическое распределение на T_1M^n. Тогда в произвольной точке (Q,ξ) вектор $\tilde{Y}\in\tilde{\mathfrak{X}}^V_{(Q,\xi)}$ представим в виде $\tilde{Y}=h^H+v^V$, полагая, что $h\in\Pi_*\tilde{\mathfrak{X}}^V_{(Q,\xi)}$, $v\in K\tilde{\mathfrak{X}}^V_{(Q,\xi)}$, $<v,\xi>=0$.

Лемма 2. *Для того чтобы метрика Сасаки T_1M^n была сильно V-сферической, необходимо и достаточно, чтобы в каждой точке*

20-381

$(Q,\xi)\in T_1M^n$ *для каждой пары векторов* h, v *из* $\Pi_*\tilde{\mathfrak{X}}^v$ *и* $K\tilde{\mathfrak{X}}^v$ *соответственно и любых* $X,Y,Z\in T_QM^n$; $u,w,x\in L_Q^{\perp}(\xi)$ *выполнялись следующие условия:*

1) $\langle R(X,Y)h,Z\rangle-\frac{1}{4}\langle R(Y,h)\xi,R(X,Z)\xi\rangle+\frac{1}{4}\langle R(X,h)\xi,R(Y,Z)\xi\rangle+$
$+\frac{1}{2}\langle R(X,Y)\xi,R(h,Z)\xi\rangle-\frac{1}{2}\langle(\nabla_ZR)(X,Y)\xi,v\rangle-k(\langle Y,h\rangle\langle X,Z\rangle-\langle X,h\rangle\langle Y,Z\rangle)=0,$

2) $\frac{1}{2}\langle R(v,u)X,Z\rangle-\frac{1}{4}\langle R(\xi,v)Z,R(\xi,u)X\rangle+\frac{1}{2}\langle(\nabla_ZR)(\xi,u)X,h\rangle+$
$+k\langle u,v\rangle\langle X,Z\rangle=0,$

3) $\frac{1}{2}\langle R(w,u)h,Z\rangle-\frac{1}{4}\langle R(\xi,w)Z,R(\xi,u)h\rangle+k\langle w,u\rangle h,Z\rangle=0,$

4) $(1-k)(\langle u,v\rangle\langle w,x\rangle-\langle u,x\rangle\langle w,v\rangle)=0.$

Доказательство получается применением к формуле (1) результатов леммы 1 при различных комбинациях лифтов. Ввиду простоты, по громоздкости подробное доказательство мы опускаем.

В размерности n=2 тензор кривизны метрики Сасаки T_1M^n выписывается особенно просто в специальной системе координат на M^2. Пусть (l_1,l_2) - взаимно ортогональные векторы в T_QM^2. Составим l_2 с вектором ξ и свяжем с (l_1,l_2) риманову нормальную систему координат в окрестности точки Q на M^2. Назовем такую систему координат ξ-специальной.

Лемма 3 [6]. *В* ξ*-специальной системе координат тензор кривизны метрики Сасаки* T_1M^2 *имеет вид* $\tilde R_{1212}=K(1-\frac{3}{4}K)$, $\tilde R_{1213}=\frac{1}{2}\frac{\partial K}{\partial q^1}$, $\tilde R_{1223}=\frac{1}{2}\frac{\partial K}{\partial q^2}$, $\tilde R_{1313}=K^2/4$, $\tilde R_{1223}=0$, $\tilde R_{2323}=K^2/4$, *где* $K(q^1,q^2)$ *- гауссова кривизна* M^2.

Заметим, что аналитическую ξ-специальную систему координат можно выбрать и на M^n $(n\ge3)$.

2. Доказательство основных результатов

Доказательство теоремы 1. Выбрав на M^2 ξ-специальную систему координат, мы можем переписать условие сильной сферичности (1) в виде следующей системы уравнений: $\tilde R_{IJLS}\tilde y^S=k(\delta_{IL}\delta_{JS}-\delta_{IS}\delta_{JL})\tilde y^S$, $I,J,L,S=1,2,3$.

В этой системе $\tilde y^1=h^1$, $\tilde y^2=h^2$, $\tilde y^3=v^1$ ввиду специального выбора координат, а I,J,L произвольны. Пользуясь леммой 3, выпишем эту систему при некоторых комбинациях индексов (I,J,L):

$(1,2,1)$: $K(1-\frac{3}{4}K)h^2+\frac{1}{2}\frac{\partial K}{\partial q^1}v^1=kh^2;$

$$(1,2,2):\ -K(1-\frac{3}{4}K)h^1+\frac{1}{2}\frac{\partial K}{\partial q^2}v^1=-kh^1;$$

$$(1,3,1):\ \frac{1}{2}\frac{\partial K}{\partial q^1}h^1+\frac{K^2}{4}v^1=kv^2;$$

$$(1,3,3):\ -\frac{K^2}{4}h^1=-kh^1;$$

$$(2,3,3):\ -\frac{K^2}{4}h^2=-kh^2.$$

Из (1, 3, 3) и (2, 3, 3) следует, что либо $i)$ $K^2/4=k$, либо $ii)$ $h^1=0$, $h^2=0$. В силу того что $k=\mathrm{const}$, а точка на M^2 выбиралась произвольно, то $i)$ означает, что $K=2\sqrt{k}=\mathrm{const}$, а, следовательно, $\frac{\partial K}{\partial q^1}=0$, $\frac{\partial K}{\partial q^2}=0$.

Полагая в системе $k=K^2/4$, сведем ее к виду

$$(1,2,1):\ K(1-K)h^2=0;$$

$$(1,2,2):\ K(1-K)h^1=0.$$

Очевидно, что при $K=0$ и $K=1$ система удовлетворяется тождественно. $K=0$ отбрасываем, так как по условию $k>0$. Итак, при $K=1$, $k=1/4$ индекс сильной сферичности $\nu=3$. Утверждение б) доказано. Если же $K\neq1$, то $h^1=h^2=0$. Таким образом, распределение $\tilde{\mathfrak{X}}^\nu$ оказывается одномерным, $\nu=1$, вертикальным, а показатель сферичности $k=K^2/4$. В случае $ii)$ из (1, 2, 1) и (1, 2, 2) следует, что если $K(q^1,q^2)\neq\mathrm{const}$, то $v^1=0$ и, следовательно, $\tilde{\mathfrak{X}}$ - нулевое распределение.

Если же $K(q^1,q^2)=K=\mathrm{const}$, то из (1, 3, 1) следует равенство $k=K^2/4$. Таким образом, $\nu=1$ и $k=K^2/4$. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2.

Так как по условию $k\neq1$, то, полагая в уравнении 4) леммы 2 $u=v$, $w=x$, а x выбрав ортогональным v ($n\geq3$), получим равенство $(1-K)|v|^2|x|^2=0$. В силу произвола x последнее равенство влечет $v=0$.

Таким образом, если искомое распределение существует, то оно горизонтально.

Пусть $\tilde{\mathfrak{X}}^\nu$ - искомое горизонтальное сильно-сферическое распределение на T_1M^n.

Лемма 4. *Если в каждой точке $\tilde{Q}=(Q,\xi)$ подпространство $\tilde{\mathfrak{X}}^\nu$ содержит вектор ξ^H, то M^n имеет постоянную секционную кривизну, равную 1, а $k=1/4$.*

2 от

Доказательство. Рассмотрим в точке $Q\in M^n$ линейный оператор $R(\cdot,\xi)\xi: L_Q^{\perp}(\xi)\to L_Q^{\perp}(\xi)$. Он симметричен, поэтому существует ортонормированный базис $\{e_1,\dots,e_{n-1}\}$ в точке Q, состоящей из собственных векторов этого оператора. Очевидно, что его собственные числа K_α $(\alpha=1,\dots,n-1)$ суть секционные кривизны M^n в направлении площадок $(\xi\wedge e_\alpha)$. Таким образом,

$$R(e_\alpha,\xi)\xi=K_\alpha e_\alpha,\quad \alpha=1,\dots,n-1. \tag{4}$$

Рассмотрим в точке Q ортогональную систему координат $\{e_1,\dots,e_{n-1},\xi\}$.

Пусть h - произвольный вектор $\Pi_*\tilde{Z}$.

Положим в уравнении 3) леммы 2, что $z=h$, $w=e_\alpha$, $u=e_\beta$. Тогда получим, что $\frac{1}{4}\langle R(e_\alpha,\xi)h, R(e_\beta,\xi)h\rangle=k\delta_{\alpha\beta}$.

Следовательно, векторы $f_\alpha=\frac{1}{2\sqrt{k}}\,R(e_\alpha,\xi)h$ ортонормированы, причем $\langle f_\alpha, h\rangle=0$.

Рассмотрим в точке Q новый ортонормированный базис $\{f_1,\dots f_{n-1},h\}$. Поскольку базисы $\{\{e_\alpha\},\xi\}$ и $\{\{f_\alpha\},h\}$ ортонормированы, то матрица перехода от одного базиса к другому ортогональна. Легко видеть, что ее элементы имеют вид $a_{\alpha\beta}=\frac{1}{2\sqrt{k}}\langle R(e_\alpha,\xi)h, e_\beta\rangle$; $a_{\alpha n}=\frac{1}{2\sqrt{k}}\langle R(e_\alpha,\xi)h,\xi\rangle$, $a_{n\beta}=h^\beta$, $a_{nn}=h^n$.

Ввиду ортогональности матрицы $\begin{pmatrix} a_{\alpha\beta} & a_{\alpha n}\\ a_{n\beta} & a_{nn}\end{pmatrix}$ $(\alpha,\beta=1,\dots,n-1)$ найдем $\sum\limits_{\alpha=1}^{n-1} a_{\alpha\beta}^2+a_{\alpha\beta}^2=1$ или $\sum\limits_{\alpha=1}^{n-1}\frac{1}{4k}\langle R(e_\alpha,\xi)h, e_\beta\rangle^2=1-(h^\beta)^2$. Учитывая симметрии тензора кривизны, получим $\frac{1}{4k}\sum\limits_{\alpha=1}^{n-1}\langle R(e_\beta,h)\xi, e_\alpha\rangle^2=1-(h^\beta)^2$.

Последнее равенство, очевидно, означает, что в точке Q

$$\frac{1}{4k}|R(e_\beta,h)\xi|^2=1-(h^\beta)^2,\quad \beta=1,\dots,n-1. \tag{5}$$

С другой стороны, если положить в уравнении 1) леммы 2, что $z=x=e_\beta$, $y=h$, то получим равенство

$$\langle R(e_\beta,h)h, e_\beta\rangle=-\frac{3}{4}|R(e_\beta,h)\xi|^2=k(1-(h^\beta)^2). \tag{6}$$

Умножим (5) на $3k$ и сложим с (6). Получим $\langle R(e_\beta,h)h,e_\beta\rangle=$ $=4k(1-(h^\beta)^2)$.

Последнее равенство означает, что $K_{h\wedge e_\beta}=4k=\mathrm{const}$.

Так как h - произвольный вектор из $\Pi_*\tilde{\mathcal{E}}^{\nu}$, а по условию $\tilde{\mathcal{E}}^{\nu}\ni\xi^H$, то, полагая $h=\xi$, находим, что

$$K_{\xi\wedge e_\beta}=4k. \tag{7}$$

Пусть теперь u - произвольный единичный вектор из $L_Q^{\perp}(\xi)$. Тогда для $K_{\xi\wedge u}$ с учетом (4) и ортонормированности базиса $\{e_\alpha\}$ получим выражение $K_{\xi\wedge u}=\langle R(\xi,u)u,\xi\rangle=\langle R(\xi,e_\alpha)e_\beta,\xi\rangle u^\alpha u^\beta=\sum\limits_{\alpha=1}^{n-1} K_\alpha(u^\alpha)^2$.

Принимая во внимание (7), получаем $K_{\xi\wedge u}=4k$.

В силу произвола выбора вектора ξ последнее равенство означает, что M^n имеет постоянную секционную кривизну, равную $4k$.

С другой стороны, полагая в уравнении 3) леммы 2, что $h=\xi$, $z=\xi$, $u=v=e_\beta$, получим $\frac{1}{4}\,|R(\xi,e_\beta)\xi|^2=k$. Учитывая выбор базиса, находим, что $\frac{1}{4}K_\beta^2=k$. В сравнении с (7) это означает, что $k=\frac{1}{4}$.

Следовательно, секционная кривизна M^n равна 1. Лемма доказана.

Лемма 5. *Если $k>1/3$, то распределение $\tilde{\mathcal{E}}^{\nu}\ni\xi^H$, а следовательно, $\nu=0$.*

Доказательство. Пусть h - произвольный вектор из $\Pi_*\tilde{\mathcal{E}}^{\nu}_{\tilde{Q}}$, $\tilde{Q}=(Q,\xi)$.

Введем в окрестности точки Q систему координат, описанную в лемме 4. Полагая в уравнении 1) леммы 2, что $y=e_\alpha$, $x=z=\xi$, получим $\langle R(e_\alpha,\xi)\xi,h\rangle-\frac{3}{4}\langle R(h,\xi)\xi,R(e_\alpha,\xi)\xi\rangle-kh^a=0$. Учитывая (4), приходим к системе равенств

$$(K_\alpha-\frac{3}{4}K_\alpha^2-k)h^\alpha=0 \quad (\alpha=1,\dots,n-1). \tag{8}$$

Если ни одна из кривизн $K_\alpha=0$ не является корнем уравнения

$t-\frac{3}{4}t^2-k=0,$

то $h^\alpha=0$, $\alpha=1,\dots,n-1$. Так как $k>1/3$, то уравнение (9) не имеет решений. Следовательно, $h=\xi$. По лемме 4, однако, в этом случае $k=1/4$. Противоречие. Значит, $h=0$ и распределение тривиально. Лемма доказана.

Применение лемм 4, 5 доказывает теорему 2.

Доказательство теоремы 3. Пусть (M^n,K) $(n\geq3)$ - многообразие постоянной кривизны K. Тогда $R(X,Y)Z=K(\langle Y,Z\rangle X-\langle X,Z\rangle Y)$ для любых касательных к M^n векторов.

Из формулы 4) леммы 2 следует, что если $k\neq 1$, то $\nu=0$.

Если $k=1$, то из постоянства кривизны M^n и при $X=Z(|Z|=1)$, $u=\nu$ из уравнения 2) леммы 2 следует равенство $\frac{1}{4}\ |R(\xi,\nu)Z|^2-|\nu|^2=0$.

Выбирая Z ортогональным ξ и ν одновременно, получаем, что $\nu=0$.

Таким образом, $\tilde{\mathfrak{X}}^\nu$ горизонтально. В уравнении 3) леммы 2 положим $Z=w$, а w выберем из ортогонального дополнения к произвольному вектору u. Используя постоянство кривизны, придем к равенству $\frac{K}{2}(1-\frac{K}{2})<\hat{u},h>=0$.

Тривиально проверяется, что $K=0$ влечет $k=0$, что недопустимо. Если $K=2$, то, полагая в 3) леммы 2, что $Z=u$, а w ортогонально u, получим $<h,w>=0$. Если $K\neq 0$ и $K\neq 2$, то $<h,u>=0$ для любого u, ортогонального ξ. Следовательно, $h=\xi$ и можно применить лемму 4.

Таким образом, $\tilde{\mathfrak{X}}^\nu$ не тривиально, если $\tilde{\mathfrak{X}}^\nu=\xi^H$, $\nu=1$, $k=1/4$, $K=1$.

Легко проверить, что верно и обратное.

Теорема доказана.

Доказательство замечания. Рассмотрим в окрестности точки O на M^n систему координат, описанную в лемме 4. Пусть $K_1=K_{\xi\wedge e_1}$, $K_2=K_{\xi\wedge e_2}$ являются решениями уравнения (8). Тогда $K_1=\frac{2}{3}(1+\sqrt{1-3k})$, $K_2=\frac{2}{3}(1-\sqrt{1-3k})$, где $0<k\leq 1/3$. Полагая в уравнении 1) леммы 2, что $x=z=e_1$, $y=\xi$, а затем $x=z=e_2$, $y=\xi$, получаем $R_{1213}(1-\frac{3}{4}K_1)h^2=0$, $R_{1223}(1-\frac{3}{4}K_2)h^1=0$.

Случай $h^1=h^2=0$ рассмотрен в лемме 4 и приводит к значению $k=1/4$, что противоречит условию.

Пусть $R_{1213}=R_{1223}=0$. Тогда, полагая в уравнении 3) леммы 2, что $u=w=e_1$, $z=e_2$, а затем $u=w=e_2$, $z=e$, получим $kh^2=0$, $kh^1=0$, что возвращает нас в условия леммы 4. Наконец, если $R_{1213}=0$, а $R_{1223}\neq 0$, то $h^2=0$. Тогда, полагая в 1)$_м$ леммы 2, что $x=z=e_2$, $y=\xi$, получим равенство $R_{1223}(1-\frac{3}{4}K_2)h^1=0$. Следовательно, $h^1=0$ и мы снова попадаем в условия применимости леммы 4. Случай $R_{1223}=0$, $R_{1213}\neq 0$ рассматривается аналогично.

Список литературы: 1.*Maltz R.* The Nullity spaces of curvature-like tensors// J.Diff. Geom. 1972. 7. P.519-523. 2.*Борисенко*

А.А., *Ямпольский А.Л.* О цилиндричности касательных расслоений сильно-параболических метрик и сильно-параболических поверхностей// Укр. геометр. сб. 1986. Вып. 29. С.12-32. 3. *Klingenberg W.*, *Sasaki S.* On the tanglut sphere bundle of a 2-sphere. Tohoky Math. Journ. 1975. 27. P.45-57. 4. *Громолл Д.*, *Клингерберг В.*, *Мейер В.* Риманова геометрия в целом. М.: Мир, 1971. 343 с. 5. *Борисенко А.А.*, *Ямпольский А.Л.* Секционная кривизна метрики Сасаки T_1M^n// Укр. геометр. сб. 1987. Вып. 30. С.10-17. 6. *Ямпольский А.Л.* К геометрии касательных расслоений римановых многообразий// Укр. геометр. сб. 1981. Вып. 24. С.129-132.

Поступила в редколлегию 22.11.90

СОДЕРЖАНИЕ

РЕФЕРАТЫ

УДК 514

О КРИВИЗНАХ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ЛИНИЙ НА ПОГРУЖЕННОЙ В E^5 ОБЛАСТИ ТРЕХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА ЛОБАЧЕВСКОГО /*Ю. А. Аминов*//Укр. геометр. сб. 1992. Вып. 35. С. 5 – 10.

Предполагается, что некоторая область 3-мерного пространства Лобачевского с кривизной, равной -1, погружена в E^5. Известно, что на погруженной области через каждую точку проходят четыре асимптотических линии. Доказывается, что вторая кривизна асимптотической линии $k_2=\dfrac{1}{\cos\varphi}$, где φ - угол, который составляет вектор ξ_3 из натурального репера асимптотической линии с нормальной плоскостью подмногообразия. Третья кривизна k_3 удовлетворяет неравенству $k_3\ge\left|\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{1}{k_2}\right)\right|$, и если $k_3\neq0$, то четвертая кривизна выражается через k_2 и k_3. Таким образом, не любая кривая в E^5 может быть асимптотической линией на погруженной в E^5 области пространства Лобачевского.

Библиогр.: 2 назв.

УДК 514.112.3

ОДНО НЕРАВЕНСТВО ДЛЯ ОСТРОУГОЛЬНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ /В. А. Залгаллер//Укр. геометр. сб. 1992. Вып. 35. С. 11 - 14.

Доказано неравенство, связывающее тангенсы половин углов треугольника, необходимое для решения задачи Мальфатти.

Ил. 1. Библиогр.: 2 назв.

УДК 514.112.3

РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ МАЛЬФАТТИ/В. А. Залгаллер, Г. А. Лось//Укр. геометр. сб. 1992. Вып. 35. С. 14 - 33.

Впервые решена старинная задача Мальфатти о размещении в треугольнике трех неналегающих кругов наибольшей суммарной площади.

Табл. 4. Ил. 15. Библиогр.: 13 назв.

УДК 514

ОБ УРАВНЕНИИ СПЕЦИАЛЬНОЙ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ С БЕСКОНЕЧНЫМ МНОЖЕСТВОМ ПЛОСКОСТЕЙ КОСОЙ СИММЕТРИИ

/В.Ф. Игнатенко//Укр. геометр. сб. 1992. Вып. 35. С. 34-38.

Пусть G есть бесконечная группа, порожденная косыми отражениями относительно гиперплоскостей, в вещественном пространстве E^m; Π^α, Π^β, Π^γ - линейные оболочки размерностей α, β, γ трех G-орбит направлений симметрии, причем $\Pi^\alpha \cap \Pi^\beta \cap \Pi^\gamma = 0$ и $\dim(\Pi^\alpha + \Pi^\beta + \Pi^\gamma) < \alpha+\beta+\gamma$. Устанавливаются некоторые особенности уравнения алгебраической гиперповерхности, инвариантной относительно группы G.

Библиогр.: 7 назв.

УДК 514

О ЛОКАЛЬНЫХ ИЗОМЕТРИЧЕСКИХ ПОГРУЖЕНИЯХ ДВУМЕРНЫХ МЕТРИК В E^4 С ЗАДАННЫМ ГАУССОВЫМ КРУЧЕНИЕМ/О.В. Кузнецов//Укр. геометр. сб. 1992. Вып. 35. С. 38-47.

Пусть в некоторой области $R(\delta, B)$ переменных (r, φ): $0 \le r \le \delta$, $\varphi_1 + B(r-r_0) \le \varphi \le \varphi_2 - B(r-r_0)$, где $\delta > 0$, $B > 0$, $\varphi_1 < 0 < \varphi_2$ - числа, заданы метрика $ds^2 = dr^2 + G(r, \varphi)d\varphi^2$ и функция $\kappa(r, \varphi)$. Рассматривается задача об изометрическом погружении метрики ds^2 в E^4 с заданным гауссовым кручением κ. Доказана

Теорема. *Метрика ds^2 класса C^5 локально реализуется в виде поверхности F^2 класса C^4, гауссово кручение которой есть заданная функция $\kappa(r, \varphi)$ класса C^3.*

Библиогр.: 6 назв.

УДК 514.172

ВПИСАННЫЕ СИМПЛЕКСЫ ВЫПУКЛОГО ТЕЛА/В.В. Макеев//Укр. геометр. сб. 1992. Вып. 35. С. 47-49.

Теорема. *Для любой гладкой точки M границы выпуклого тела $K \subset R^n$ найдется невырожденный вписанный в K симплекс с вершиной в точке M, подобный заданному n-мерному симплексу.*

Рассматриваются близкие задачи и ставятся нерешенные вопросы.

Библиогр.: 7 назв.

УДК 514

О ПОГРУЖЕНИИ МЕТРИК, БЛИЗКИХ К ПОГРУЖАЕМЫМ/П.Е. Марков//Укр. геометр. сб. 1992. Вып. 35. С. 49-67.

Для $C^{r,\lambda}$-погружения $z: X \to E$, $r \ge 2$, $0 < \lambda < 1$, n-мерного, $n \ge 1$, односвязного $C^{r+2,\lambda}$-многообразия X в евклидово пространство E в $C^{r,\lambda}$-топологии окрестностью, в которой каждая метрика из заданного подрасслоения метрик $C^{r,\lambda}$-погружаема в E. В частности, доказывается, что метрика ds_0^2 риманова произведения p сфер размерностей $\nu_1,\dots,\nu_p\geq 2$ обладает в $C^{2,\lambda}$-топологии окрестностью, любая метрика из которой, конформно эквивалентная ds_0^2, погружаема в E с $\dim E=\nu_1+\dots+\nu_p+p$. Доказательства опираются на исследование варьированной системы уравнений Гаусса-Кодацци-Риччи при бесконечно малой деформации поверхности $z(X)$ в E с заданной вариацией метрики.

Библиогр.: 20 назв.

УДК 514

ТЕОРЕМЫ ИНЦИДЕНТНОСТИ В ПРОСТРАНСТВАХ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ/Л. А. Масальцев//Укр. геометр. сб. 1992. Вып. 35. С. 67-74.

Рассматриваются некоторые аналоги классических теорем Менелая и Чевы для гиперболической плоскости, сферы и трехмерных гиперболического и сферического пространств.

Ил. 4. Библиогр.: 5 назв.

УДК 514.172.45

К ВОПРОСУ О КОНЕЧНОСТИ ЧИСЛА КОМБИНАТОРНЫХ ТИПОВ БЕСКОНЕЧНЫХ ВЫПУКЛЫХ МНОГОГРАННИКОВ С РАВНОУГОЛЬНЫМИ ГРАНЯМИ /А. И. Медяник//Укр. геометр. сб. 1992. Вып. 35. С. 75-83.

Бесконечный (полный) выпуклый многогранник с равноугольными гранями, т.е. такой, что все углы каждой его грани равны между собой, называется неприводимым, если число принадлежащих ему одноугольных граней нельзя уменьшить (отождествлением их сторон) с сохранением равноугольности всех других граней и выпуклости самого многогранника (отсутствие условных ребер). Любой бесконечный выпуклый многогранник с равноугольными гранями можно получить из соответствующего неприводимого путем вклеивания недостающего числа одноугольников. Доказывается, что число комбинаторно различных неприводимых многогранников конечно, не считая трех бесконечных серий усеченных конусов с конечным или бесконечным основанием и прямых призм с бесконечными основаниями. Устанавливается также, что все без исключения бесконечные выпуклые многогранники с равноугольными гранями с полной кривизной 2π являются производными замкнутых выпуклых многогранников с равноугольными гранями. Доказательство проводится с помощью метода А.Д. Милки из РЖ Мат 1988, 3А830.

Табл. 1. Библиогр.: 5 назв.

УДК 514

ВПОЛНЕ ОМБИЛИЧЕСКИЕ ПОДМНОГООБРАЗИЯ В $G(2,n)$. II /Ю.А. Николаевский//Укр. геометр. сб. 1992. Вып. 35. С. 83-99.

Статья является продолжением работы «Вполне омбилические подмногообразия в $G(2,n)$. I» («Украинский геометрический сборник», вып. 34, 1991 г.). Проведено доказательство вспомогательных и дифференциально-геометрических утверждений для классификации упомянутых подмногообразий.

Библиогр.: 6 назв.

УДК 514

О СТРОЕНИИ ПОДМНОЖЕСТВ ВЕКТОРНОЙ РЕШЕТКИ, ЗАМКНУТЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО СЛОЖЕНИЯ /Б.В. Новиков//Укр. геометр. сб. 1992. Вып. 35. С. 99-103.

Исследуя строение аддиктивных полугрупп, порождаемых конечными множествами n-мерных векторов с целочисленными положительными координатами. Доказано, что каждая такая полугруппа содержит подполугруппу, изоморфную выпуклой оболочке (в целочисленно решетке) этой полугруппы.

Библиогр.: 6 назв.

УДК 514

РИМАНОВЫ МНОГООБРАЗИЯ С ОБОБЩЕННОЙ АКСИОМОЙ ПЛОСКОСТЕЙ /С.И. Окрут//Укр. геометр. сб. 1992. Вып. 35. С. 103-110.

В работе вводится класс римановых многообразий, удовлетворяющих аксиоме (l,s)-плоскостей, которая является обобщением аксиомы p-плоскостей Картана. Устанавливается структура кривизны и римановой метрики многообразия, обладающего аксиомой $(n-2,n-1)$-плоскостей.

Библиогр.: 4 назв.

УДК 514.11

О ТРИАНГУЛЯЦИИ, СОГЛАСОВАННОЙ С ПОКРЫТИЕМ /А.М. Петрунин// Укр. геометр. сб. 1992. Вып. 35. С. 110-114.

Если каждой точке x выпуклого многогранника $M\subset E^n$ сопоставлен открытый шар с центром в x и радиусом $f(x)$, где f - любая положительная функция, то M можно разбить на симплексы так, что каждый симплекс будет накрываться теми из шаров, чьи центры лежат в вершинах симплексов.

УДК 514

ВПОЛНЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ СЛОЕНИЯ, БЛИЗКИЕ К РИМАНОВЫМ /В.Ю.Ровенский// Укр. геометр. сб. 1992. Вып. 35. С.

Изучается связь кривизны и топологии вполне геодезических слоений, близких к римановым.

Основной результат дополняет известную теорему Д. Феруса о вполне геодезических слоениях.

Библиогр.: 6 назв.

УДК 514

О СВЯЗЯХ МЕЖДУ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫМИ ИЗГИБАНИЯМИ РАЗНЫХ ПОРЯДКОВ /И.Х.Сабитов// Укр. геометр. сб. 1992. Вып. 35. С. 118-124.

Устанавливается, что если поверхность имеет только одно нетривиальное независимое поле бесконечно малых изгибаний первого порядка, то из жесткости порядка $n\geq3$ вытекает жесткость любого порядка $m\geq n$, в частности, аналитическая по параметру неизгибаемость; все рассмотрения ведутся в классе C^1. Попутно дается новый подход к определению бесконечно малых изгибаний высших порядков.

Библиогр.: 6 назв.

УДК 514

О ГРАССМАНОВОМ ОБРАЗЕ ЧЕТЫРЕХМЕРНОГО ПОДМНОГООБРАЗИЯ В E^6 /В.М.Савельев// Укр. геометр. сб. 1992. Вып. 35. С. 125-132.

Расcматривается четырехмерное подмногообразие F^4 в 6-мерном евклидовом пространстве E^6. Выясняется связь кривизны грассманова многообразия $G_{2,6}$ вдоль грассманова образа двумерной площадки из касательного пространства к $F^4\subset E^6$ с проекцией четырехмерного сечения на трехмерные пространства.

Библиогр.: 6 назв.

УДК 514

ПРИМЕРЫ ПОЛНЫХ СЕДЛОВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ, ГОМЕОМОРФНЫХ КРЕНДЕЛЮ С ОДНОЙ УДАЛЕННОЙ ТОЧКОЙ/П.И.Соверткок// Укр. геометр. сб. 1992.

Вып. 35. С. 132–135.

Приведены примеры полных седловых поверхностей, гомеоморфных кренделю с k дырками, из которого удалена одна точка.

Ил. 3. Библиогр.: 2 назв.

УДК 517.95

НЕКОТОРЫЕ ОЦЕНКИ СРЕДНЕЙ КРИВИЗНЫ НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ, ЗАДАННЫХ НАД ОБЛАСТЯМИ В R^n/В.Г.Ткачев// Укр. геометр. сб. 1992. Вып. 35. С. 135–150.

Рассматриваются вопросы поведения средней кривизны поверхностей, заданных в виде графика $x_{n+1}=f(x)$ над произвольной областью Ω в R^n. Доказывается, например, что если средняя кривизна H есть непрерывная монотонно возрастающая функция координаты x_{n+1} в R^{n+1}, то выполняются следующие утверждения:

а) если $\Omega=R^n$, то $H=0$, т.е. график является минимальной поверхностью;

б) если $\partial\Omega\neq\varnothing$, то справедливо неравенство

$$\sup_{x\in\Omega}|H(f(x))|\cdot\mathrm{dist}(x;\partial\Omega)\leq 1. \qquad (*)$$

Исследуются различные частные случаи областей Ω, для которых получены точные значения константы в правой части неравенства (*).

Библиогр.: 10 назв.

УДК 514

О СИЛЬНОЙ СФЕРИЧНОСТИ МЕТРИКИ САСАКИ СФЕРИЧЕСКОГО КАСАТЕЛЬНОГО РАССЛОЕНИЯ/А.Л.Ямпольский// Укр. геометр. сб. 1992. Вып. 35. С. 150–159.

Пусть M^n означает n-мерное риманово многообразие. Его метрика называется сильно ν-сферической, если в каждой точке $Q\in M^n$ существует ν-мерное подпространство $\mathfrak{L}^{\nu}_{Q}\subset T_QM^n$, такое, что оператор кривизны метрики M^n удовлетворяет условию: $R(X,Y)Z=k(\langle Y,Z\rangle X-\langle X,Z\rangle Y)$, где $k=\mathrm{const}>0$, $Y\in\mathfrak{L}^{\nu}_{Q}$, $X,Z\in T_QM^n$. Число ν называется индексом сферичности, k – показателем сферичности.

В работе доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть метрика Сасаки T_1M^n сильно ν-сферична с показателем сферичности k. Справедливы утверждения:*

а) $\nu=1$ тогда и только тогда, когда M^2 имеет постоянную гаус-

сову кривизну $K \neq 1$ и $k = K^2/4$;

б) $\nu = 3$ тогда и только тогда, когда M^2 имеет постоянную кривизну $K = 1$ и $k = 1/4$;

в) $\nu = 0$ в остальных случаях.

Теорема 2. *Пусть метрика Сасаки $T_1 M^n$ $(n \geq 3)$ сильно ν-сферична с показателем сферичности k. Если $k \neq 1/3$ и $k \neq 1$, то $\nu = 0$.*

Обозначим через (M^n, K) пространство постоянной кривизны K.

Теорема 3. *Пусть метрика Сасаки $T_1(M^n, K)$ $(n \geq 3)$ сильно ν-сферична с показателем сферичности k. Справедливы утверждения:*

а) $\nu = 1$ *тогда и только тогда, когда* $K = 1$, $k = 1/4$;

б) $\nu = 0$ *в остальных случаях.*

В размерности $n = 3$ теорема 2 верна при $k \notin \{1/4, 1\}$.

Библиогр.: 6 назв.

СБОРНИК НАУЧНЫХ ТРУДОВ

УКРАИНСКИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК

ВЫПУСК 35

Редактор *Н.С. Калинина*
Художественный редактор *В.Е. Петренко*
Технический редактор *Л.Т. Ена*
Корректор *Л.П. Сыч*

Сдано в печать с оригинал-макета 02.02.93. Формат 60x84 1/16. Бум. тип. № 2. Гарнитура литературная. Печать офсетная. Усл.печ.л.10,5. Усл.кр.-отт.10,25. Уч.-изд.л.10. Изд.№ 2146. Зак.№ 381.

Издательство "Основа" при Харьковском государственном университете.
310005 Харьков, пл.Восстания, 17.

Харьковское арендное полиграфическое предприятие.
310093 Харьков, ул.Свердлова, 115.