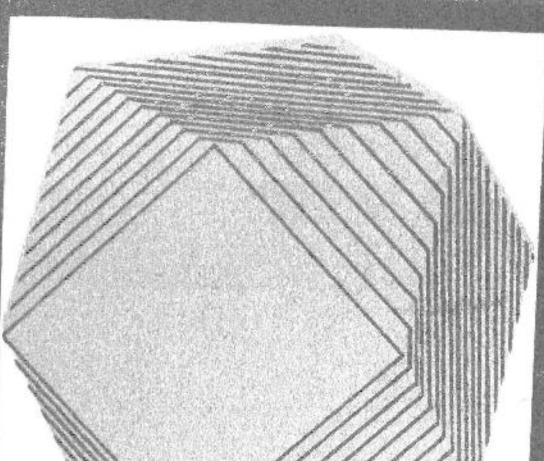
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ СССР
ПО НАРОДНОМУ ОБРАЗОВАНИЮ

ISSN 0135-6992

УКРАИНСКИЙ геометрический СБОРНИК

34|91



«ОСНОВА»

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ СССР ПО НАРОДНОМУ ОБРАЗОВАНИЮ

ХАРЬКОВСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
И ОРДЕНА ДРУЖБЫ НАРОДОВ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. А. М. ГОРЬКОГО

УКРАИНСКИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК

Республиканский
межведомственный
научный
сборник

Основан в 1965 г.

ВЫПУСК 34

ХАРЬКОВ
ИЗДАТЕЛЬСТВО «ОСНОВА» ПРИ ХАРЬКОВСКОМ
ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ
1991

УДК 514

Основная часть статей посвящена геометрии «в целом» евклидовых и неевклидовых пространств разной размерности. Рассмотрены геодезические линии на выпуклых поверхностях, конечные и бесконечные малые изгибания поверхности, вопросы абстрактной теории выпуклости, алгебраические поверхности с симметрией.

Для преподавателей, научных работников и специалистов.

Ответственный за выпуск *Л. Н. Сергиенко*

Адрес редакционной коллегии: 310077 Харьков, пл. Дзержинского, 4, Харьковский университет, механико-математический факультет, кафедра геометрии, тел. 45-74-92

Редакция естественнонаучной литературы.
Зав. редакцией *Е. П. Иващенко*

У $\frac{1602050000-038}{М\ 226\ (04)-91}$ 56-91

УДК 514

Ю. А. АМИНОВ

ОДНА ОЦЕНКА СНИЗУ ДЛЯ ОБЪЕМА 4-МЕРНОГО ЗАМКНУТОГО МНОГООБРАЗИЯ

Согласно теореме Маргулиса, доказательство которой изложено в [1], если кривизна замкнутого ориентируемого n-мерного многообразия M^n удовлетворяет неравенствам $-1 \leqslant K < 0$, то существует такая постоянная C_n, зависящая только от размерности, что объем многообразия $\operatorname{vol}(M^n) \geqslant C_n$.

В этой работе при $n = 4$ даем простое, основанное на других идеях доказательство существования такой оценки при меньших ограничениях на многообразие и с конкретной постоянной C_4.

Теорема 1. *Пусть секционная кривизна замкнутого ориентируемого 4-мерного риманова многообразия M^4 удовлетворяет неравенствам $-1 \leqslant K \leqslant 1$. Пусть произведение кривизн ортогональных площадок неотрицательно и хотя бы в одной точке все кривизны отличны от нуля. Тогда для объема многообразия $\operatorname{vol}(M^4)$ имеет место оценка снизу*

$$\operatorname{vol}(M^4) > \frac{4\pi^2}{9}. \tag{1}$$

Для доказательства теоремы используем формулу Аллендорфера—Вейля для характеристики Эйлера — Пуанкаре. В случае $n = 4$ эта формула имеет вид

$$\chi = \frac{1}{32\,(2\pi)^2} \int\limits_{M^4} \varepsilon^{i_1 i_2 i_3 i_4} \varepsilon^{j_1 j_2 j_3 j_4} R_{i_1 i_2 j_1 j_2} R_{i_3 i_4 j_3 j_4} \frac{dv}{g},$$

где g — детерминант метрического тензора; R_{ijke} — тензор Римана M^4. Подынтегральное выражение можно записать в виде

$$\sum_{i_1, \ldots, i_4} \{4R_{i_1 i_2 i_1 i_2} R_{i_3 i_4 i_3 i_4} - 16 R_{i_2 i_1 i_1 i_3} R_{i_2 i_4 i_4 i_3} + 4\,(R_{i_1 i_2 i_3 i_4})^2\} \frac{1}{g},$$

где индексы i_1, i_2, i_3, i_4 — различные. Выберем некоторую точку на многообразии и в этой точке оценим подынтегральное выражение. В выбранной точке средний член с помощью изменения системы координат можно обратить в нуль тем же способом, что и при доказательстве теоремы Милнора о характеристике M^4. Поэтому, если произведение кривизн двумерных перпендикулярных площадок неотрицательно и в какой-то точке положительно, то подынтегральное выражение неотрицательно и хотя бы в одной точке положительно. Поэтому $\chi \geqslant 1$.

Оценим подынтегральное выражение сверху. В выбранной точке его можно записать в виде

$$32 \frac{1}{g} \{R_{1212} R_{3434} + R_{1313} R_{2424} + R_{1414} R_{3232} + \\ + (R_{1234})^2 + (R_{1342})^2 + (R_{1423})^2\}. \tag{2}$$

Для компонент тензора Римана в ортогональной системе координат при условии, что кривизна двумерных площадок удовлетворяет неравенствам $\delta \leqslant K \leqslant 1$, М. Берже установил следующие оценки [2]:

$$|R_{ijik}| \leqslant \frac{1}{2}(1-\delta),\ j \neq k,$$

$$|R_{ijkl}| \leqslant \frac{2}{3}(1-\delta),\ (i,\ j) \neq (kl).$$

При получении этих оценок не требуется, чтобы δ было положительно. Следовательно, если выполнены неравенства $-1 \leqslant K \leqslant 1$, то для различных индексов $i,\ j,\ k,\ l$ имеет место неравенство $|R_{ijkl}| \leqslant \frac{4}{3}$.

Используя полученное неравенство на эйлерову характеристику, находим

$$1 \leqslant \chi \leqslant \frac{1}{32\,(2\pi)^2}\, 32 \cdot 3\left(1+\frac{16}{9}\right) \mathrm{vol}\,(M^4),$$

что и доказывает наше утверждение.

Если кривизна на всем многообразии удовлетворяет либо неравенствам $-1 \leqslant K \leqslant 0$, либо $0 \leqslant K \leqslant 1$, то можно воспользоваться более точной оценкой $|R_{ijkl}| \leqslant \frac{2}{3}$ [2, 3]. Кроме того, если воспользоваться тождеством Бианки $R_{1234}+R_{1342}+R_{1423}=0$, то получим оценку $(R_{1234})^2+(R_{1342})^2+(R_{1423})^2 \leqslant \frac{8}{9}$. Следовательно, в этом случае объем M^4 оценивается снизу большим числом: $\mathrm{vol}\,(M^4) \geqslant 4\pi^2/\left(3+\frac{8}{9}\right)$.

Для сравнения заметим, что объем 4-мерной единичного радиуса сферы S^4 равен $\frac{8}{3}\pi^2$. Далее, если F_1 и F_2 — две замкнутые ориентируемые поверхности с отрицательной эйлеровой характеристикой и с метрикой ds_i^2 постоянной отрицательной кривизны -1, то их топологическое произведение M^4 с метрикой $ds^2 = ds_1^2 + ds_2^2$ имеет секционную кривизну $-1 \leqslant K \leqslant 0$. Правда, в каждой точке существуют площадки с нулевой кривизной — одно из условий теоремы не выполнено. Объем $\mathrm{vol}\,(M^4)$ равен произведению площадей F_i. Площадь каждой поверхности не меньше 2π. Поэтому $\mathrm{vol}\,(M^4) \geqslant 4\pi^2$.

Милнор и Тэрстон отметили в [4], что объем четномерного пространства M^{2k} постоянной кривизны согласно формуле Аллендорфера — Вейля равен произведению половины объема единичной $2k$-мерной сферы $\frac{\mathrm{vol}\,(S^{2k})}{2}$ на целое число $|\chi\,(M^{2k})|$.

В работе С. В. Буяло [5] установлена

Теорема. *Существует такая постоянная $C(n) > 0$, что если для n-мерного, $n \geqslant 2$, замкнутого вещественно-аналитического многообразия M^n с кривизной $-1 \leqslant K \leqslant 0$ выполняется неравенство $\mathrm{vol}(M^n) \leqslant C(n)$, то фундаментальная группа содержит инвариантную свободную абелеву группу ранга $k \geqslant 1$.*

Из этой теоремы следует, что универсальное накрывающее пространство $\widetilde{M}^n$ изометрично прямому метрическому произведению $V \times E^k$ некоторого пространства V на евклидово пространство E^k.

В следующей теореме 2, как и в сформулированной теореме из [5], налагается условие на объем многообразия.

Теорема 2. *Пусть в каждой точке секционная кривизна M^4 для всех площадок удовлетворяет либо неравенству $-1 \leqslant K \leqslant 0$, либо $0 \leqslant K \leqslant 1$. Пусть объем многообразия $\mathrm{vol}(M^4) \leqslant \frac{4}{9}\pi^2$. Тогда в касательном пространстве T_p каждой точки p существует либо 1) вектор X, такой, что оператор кривизны $R_{XY} = 0$ для всех $Y \in T_p$, либо 2) трехмерное подпространство T^3, такое, что $\langle R(Y, Z)W, X\rangle = 0$ для Y, Z, $W \in T^3$ и любого $X \in T_p$.*

В случае 1) распределение нуль-пространств оператора кривизны вполне интегрируемо, его интегральные многообразия вполне геодезичны и плоские. В случае 2) распределение пространств T^3 интегрируемо.

Доказательство. Если $\mathrm{vol}(M^4) \leqslant \frac{4}{9}\pi^2$ и кривизна ортогональных площадок одного знака или нуль, то $\chi = 0$. Следовательно, подынтегральное выражение (2) в формуле Аллендорфера — Вейля тождественно равно нулю и имеют место равенства

$$R_{1212}R_{3434} = 0, \quad R_{1313}R_{2424} = 0, \quad R_{1414}R_{3232} = 0; \tag{3}$$

$$R_{1234} = R_{1342} = R_{1423} = 0. \tag{4}$$

Кроме того, в силу выбора специальной системы координат, который производится при доказательстве теоремы Милнора, имеют место и следующие равенства:

$$R_{1213} = R_{1214} = R_{1223} = R_{1224} = R_{1332} = R_{3114} = 0. \tag{5}$$

Все возможные случаи выполнения системы (3)—(4) можно представить в виде подслучаев, которые будем различать с помощью двух букв: латинской и греческой. Первое уравнение из системы (3) дает два случая: а) $R_{1212} = 0$, б) $R_{3434} = 0$. Два других уравнения системы (3) дают четыре подслучая, которые отметим греческими буквами:

$$\alpha)\ R_{1313} = 0,\ R_{1414} = 0, \quad \beta)\ R_{1313} = 0,\ R_{3232} = 0,$$
$$\gamma)\ R_{2424} = 0,\ R_{1414} = 0, \quad \delta)\ R_{2424} = 0,\ R_{3232} = 0.$$

Рассмотрим случай выполнения равенств a) и α). Пусть $X = e_1$ — координатный орт. Рассмотрим кривизну любой площадки $K(X, Y)$, проходящей через вектор X и вектор $Y = \{Y^i\}$;

$$K(X, Y) = R_{1i1j}Y^iY^j = R_{1212}(Y^2)^2 + R_{1313}(Y^3)^2 + R_{1414}(Y^4)^2 + \\ + 2R_{1314}Y^3Y^4 + 2R_{1214}Y^2Y^4 + 2R_{1312}Y^3Y^2.$$

В силу уравнений a), α) и (5) $K(X, Y) = 0$ для любого Y. Более того, покажем, что для любых индексов i, j и k имеют место равенства $R_{1ijk} = 0$. Имеем

$R_{1i1i} = 0$ в силу a) и α),

$R_{1i1j} = 0$ при $i \neq j$ в силу (5),

$R_{1ijk} = 0$ при i, j, k различных, не равных 1, в силу (4).

Поэтому рассмотрим компоненты тензора Римана, такие, что среди индексов i, j, k есть два одинаковых, т. е. R_{1iji}. В силу (5) $R_{12j2}=0$. Остаются компоненты R_{13j3}, $j=2$, 4 и R_{14j4}, $j=2$, 3. Из них $R_{1323}=0$ в силу (5). Остаются компоненты R_{1343}, R_{1424}, R_{1434}. Рассмотрим в касательном пространстве трехмерную гиперплоскость, проведенную через орты e_1, e_3, e_4. Пусть единичный вектор $d=\{d^i\}$ из этой гиперплоскости. Тогда кривизна двумерной площадки σ, ортогональной d, равна

$$K(\sigma)=(d^1,\ d^3,\ d^4)\begin{bmatrix} R_{3434} & R_{1434} & R_{1343} \\ \ast & R_{1414} & R_{3141} \\ \ast & \ast & R_{1313}\end{bmatrix}\begin{pmatrix} d^1 \\ d^3 \\ d^4\end{pmatrix}=$$
$$=d^1(R_{3434}d^1+2R_{1434}d^3+2R_{1343}d^4).$$

По условию теоремы требуется, чтобы $K(\sigma)$ сохраняла знак в точке, а это будет лишь в том случае, когда $R_{1434}=R_{1343}=0$. Аналогично, рассматривая кривизны площадок из пространства e_1, e_2, e_4, покажем, что $R_{1424}=0$. Таким образом, в случае a), α) существует вектор $X=$ $=e_1$ такой, что $R_{ijkl}X^iY^jZ^kW^l=0$ для всех векторов Y, Z, W. Это означает, что оператор кривизны $R_{XY}=0$ для всех $Y\in T_p$. Множество всех таких X образует линейное подпространство N из T_p, которое называется нуль-пространством оператора кривизны. В работе [6] установлено, что если на открытом подмножестве U риманова многообразия размерность нуль-пространства постоянна, то распределение $p\to N$ интегрируемо на U, интегральные многообразия плоские. В работе [7] показывается, что они вполне геодезические.

Рассмотрим случай a), β). Кривизна любой площадки из трехмерного пространства e_1, e_2, e_3 находится по формуле

$$(d^1,\ d^2,\ d^3)\begin{bmatrix} R_{2323} & R_{1323} & R_{1232} \\ \ast & R_{1313} & R_{1213} \\ \ast & \ast & R_{1212}\end{bmatrix}\begin{pmatrix} d^1 \\ d^2 \\ d^3\end{pmatrix}=0,$$

так как в силу уравнений a), β) и (5) все компоненты матрицы равны нулю. Более того, покажем, что $R_{4jkl}=0$ для всех i, j, $k\leqslant 3$. Если i, j, k различны, то это следует из (4). Рассмотрим компоненты с двумя одинаковыми индексами: R_{41j1}, R_{42j2}, R_{43j3}. Среди них $R_{4121}=$ $=R_{4131}=R_{4212}=0$ в силу (5). Равенство нулю компонент R_{4232}, R_{4313}, R_{4323} покажем, используя условие сохранения знака кривизны в точке. Кривизна площадки σ, проведенной в пространстве e_2, e_3, e_4 и ортогональной вектору $d=(d^2,\ d^3,\ d^4)$, имеет вид

$$K(\sigma)=(d^2,\ d^3,\ d^4)\begin{bmatrix} R_{3434} & R_{2434} & R_{2343} \\ \ast & R_{2424} & R_{3242} \\ \ast & \ast & R_{2323}\end{bmatrix}\begin{pmatrix} d^2 \\ d^3 \\ d^4\end{pmatrix}.$$

Пусть $d^2=0$. Так как $R_{2323}=0$, то $K(\sigma)=R_{2424}(d^3)^2+2R_{3242}d^3d^4$. Так как $K(\sigma)$ не меняет знак, то $R_{3242}=0$. Аналогично, вычисляя кривизну площадки, ортогональной $(d^2,\ 0,\ d^4)$, получим $R_{2343}=0$. Рассматривая кривизны площадок пространства, проведенного через e_1, e_3, e_4, получим $R_{4313}=0$. Таким образом, в случае a), β) существует трехмерное пространство T^3, проведенное через e_1, e_2, e_3, такое, что для любого вектора $X \in T_p$ и Y, Z и $W \in T^3$ выполняется равенство

$$\langle R(X, Y) Z, W \rangle = 0. \tag{6}$$

Пусть этот случай имеет место в некоторой области пространства. Покажем, что распределение пространств T^3 либо интегрируемо, либо в каждой точке существует нуль-пространство оператора кривизны размерности $\geqslant 1$. Для этого так же, как и при доказательстве интегрируемости распределения нуль-пространств, используем тождества Бианки. Однако при этом будут необходимы дополнительные соображения. Пусть векторное поле A такое, что в каждой точке $A \in T^3$. Значком θ будем обозначать циклическую подстановку векторов Z, W, A. Рассмотрим ковариантную производную в направлении вектора A от левой части (6) и затем произведем циклическую подстановку над векторами Z, W, A:

$$\begin{aligned}\theta\nabla_A \langle R(X, Y) Z, W \rangle = \theta \langle (\nabla_A R)(X, Y) Z, W \rangle + \theta \langle R(\nabla_A X, Y) Z, W \rangle + \\ + \theta \langle R(X, \nabla_A Y) Z, W \rangle + \theta \langle R(X, Y) \nabla_A Z, W \rangle + \\ + \theta \langle R(X, Y) Z, \nabla_A W \rangle = 0.\end{aligned} \tag{7}$$

Первое слагаемое в правой части (7) равно нулю в силу тождеств Бианки, второе и третье — в силу равенств (6). Действительно, например, второе слагаемое расписывается в виде

$$\langle R(\nabla_A X, Y) Z, W \rangle + \langle R(\nabla_Z X, Y) W, A \rangle + \langle R(\nabla_W X, Y) A, Z \rangle.$$

Каждый член этого выражения в скобках содержит три вектора из T^3, поэтому в силу (6) равен нулю. Итак, в правой части (7) остаются только два последних слагаемых, которые можно расписать в виде шести слагаемых и затем привести к виду

$$\begin{aligned}\langle R(X, Y) \nabla_A Z - \nabla_Z A, W \rangle + \langle R(X, Y) \nabla_Z W - \nabla_W Z, A \rangle + \\ + \langle R(X, Y) \nabla_W A - \nabla_A W, Z \rangle.\end{aligned}$$

Допустим, векторное поле X ортогонально к пространству T^3. Запишем разложения $\nabla_A Z - \nabla_Z A = \sigma_1 X + \cdots$, $\nabla_Z W - \nabla_W Z = \sigma_2 X + \cdots$, $\nabla_W A - \nabla_A W = \sigma_3 X + \cdots$, где σ_i — числовые коэффициенты (характеризующие неголономность распределения T^3), а точками заменены векторы, лежащие в пространстве T^3. Равенство (7) можно записать в виде

$$\langle R(X, Y) X, \sigma_1 W + \sigma_2 A + \sigma_3 Z \rangle = 0. \tag{8}$$

Пусть векторы W, A и Z линейно независимы. Вектор $P = \sigma_1 W + \sigma_2 A + \sigma_3 Z$ будет отличен от нуля, если хотя бы одно число σ_i отлично от нуля. Равенства (6) и (8) означают, что оператор кривизны $R_{PQ} = 0$ для всех $Q \in T_p$, т. е. имеет место случай 1. Если же $P = 0$, то все $\sigma_i = 0$. Это означает, что выполнены условия интегрируемости распределения плоскостей T^3.

Во всех других случаях $a), \gamma) - b), \delta)$ имеет место либо случай 1, либо случай 2, что устанавливается так же, как в рассмотренных выше случаях. Теорема 2 доказана.

Список литературы: 1. *Бураго Ю. Д., Залгаллер В. А.* Геометрические неравенства. Л. ; М, 1980. 288 с. 2. *Berger M.* Sur quelques varietes riemanniennes suffisamment pinceer // Bull. Soc. M ath. France. 1960. **88.** P. 57—71. 3. *Tsagas G.* A relation between Killing tensor fields and negative pinched manifolds // Proc. Amer. Math. Soc. 1969. **22.** P. 416—418. 4. *Milnor J., Thuston W.* Characteristic numbers of 3-manifolds. L'Enseignement math. 1977. **23,** N 3—4. P. 249—254. 5. *Буяло С. В.* Многообразия неположительной кривизны с малым объемом/ Мат. заметки. 1981. **29,** № 2. С. 243—252. 6. *Chern S. S., Kuiper N.* Some theorems on the isometric imbedding of compact Riemannian manifolds in Euclidean space // Ann. of Math. 1952. **56.** P. 422—430. 7. *Maltz R.* The nullity spaces of curvature-like tensors // J. Dif. Geom. 1972. **7,** N 3—4. P. 519—523.

Поступила в редколлегию 08.12.89

УДК 514

А. А. БОРИСЕНКО, Л. Н. СЕРГИЕНКО

О СТРОЕНИИ БЕСКОНЕЧНОЙ ПОЛНОЙ ВЫПУКЛОЙ ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ В E^4 С ОГРАНИЧЕННОЙ СРЕДНЕЙ КРИВИЗНОЙ

Строение полной бесконечной выпуклой гиперповерхности F, имеющей постоянную среднюю кривизну H, в евклидовом пространстве E^n известно — это прямое произведение линейного подпространства на сферу, т. е. цилиндр [1].

А. В. Погорелов значительно ослабил условия на F в E^3, сняв требование постоянства средней кривизны: он доказал, что если на бесконечной полной выпуклой поверхности средняя кривизна $a < H < 2a$, где $a = \text{const} > 0$, то поверхность — цилиндрическая [2].

В настоящей заметке доказывается

Теорема. *Если на бесконечной полной выпуклой гиперповерхности F в E^4 средняя кривизна $1 - \varepsilon \leqslant H \leqslant 1$, где $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 10^{-11}$, то F — цилиндрическая гиперповерхность.*

Доказательство. Пусть F не является цилиндрической. Тогда F гомеоморфна гиперплоскости. Пусть V — предельный конус гиперповерхности F. Поместим начало координат O в вершину V. Некоторый луч предельного конуса примем за положительную полуось x^4 в прямоугольной декартовой системе координат. Проведем через ось x^4 двумерную плоскость. Она пересечет F по некоторой кривой. Отметим на этой кривой последовательность точек $O_1, \ldots, O_n, \ldots$, удаляющихся на бесконечность при $n \to \infty$.

Обозначим через F_n — гиперповерхность, которая получается из F сдвигом, совмещающим точку O_n с точкой O. Не ограничивая общности, можно считать, что $F_n \xrightarrow[n\to\infty]{} F'$, где F' — выпуклая гиперповерхность, удельная средняя кривизна которой лежит в пределах $1 - \varepsilon \leqslant H_{F'} \leqslant 1$, где $0 \leqslant \varepsilon < 10^{-11}$. В предельный конус F' будет входить прямая. Следовательно, F' — цилиндрическая гиперповерхность.

Пересечем F' гиперплоскостью α, перпендикулярной x^4. В сечении получим 2-мерную поверхность G, у которой удельная средняя кривизна $\frac{3}{2}(1 - \varepsilon) \leqslant H_G \leqslant \frac{3}{2}$.

Пусть G — замкнутая поверхность. Ее можно аппроксимировать выпуклой замкнутой C^2-поверхностью G_{ε_1}, содержащей внутри G, со средней кривизной в пределах $\frac{3}{2}(1-\varepsilon)-\varepsilon_1$ и $\frac{3}{2}+\varepsilon_1$ при любом ε_1. По теореме, доказанной В. И. Дискантом в работе [3], G_{ε_1} можно поместить внутрь шара радиуса $\frac{2}{3}-C\varepsilon_2\ln\varepsilon_2$, где $\varepsilon_2=\frac{3}{2}\varepsilon+\varepsilon_1$ и $0\leqslant\varepsilon_2\leqslant 10^{-10}$. Следовательно, F можно поместить внутрь цилиндра, у которого направляющей является сфера радиуса $\frac{2}{3}-C\varepsilon_2\ln\varepsilon_2$, а образующие параллельны x^4. Взяв радиус чуть больше $\left(R=\frac{2}{3}-\right.$ $\left.-C\varepsilon_2\ln\varepsilon_2+\delta\right)$, получим, что F лежит строго внутри такого цилиндра. Пересечем цилиндр гиперплоскостью $x^4=-a^2$. При достаточно большом a^2 гиперплоскость F расположена над 3-плоскостью $x^4=-a^2$. Дополним полуцилиндр, расположенный над $x^4=-a^2$, 3-полусферой и полученную выпуклую гиперповерхность обозначим через Φ. Будем смещать Φ в направлении $x^4>0$. В некоторый момент Φ коснется полусферой гиперповерхности F. В этой точке $H\geqslant\frac{1}{2/3-C\varepsilon_2\ln\varepsilon_2+\delta}$. Это противоречит тому, что $H\leqslant 1$.

Пусть G — бесконечная поверхность. Тогда это цилиндр [2]. Пересечем его 2-плоскостью, перпендикулярной образующим. В сечении получим кривую g, удельный поворот которой $3(1-\varepsilon)\leqslant k\leqslant 3$. Кривая g — замкнутая и гладкая. Ее можно аппроксимировать выпуклой кривой g_{ε_3}, содержащей внутри g и имеющей кривизну $3(1-\varepsilon)-\varepsilon_3\leqslant k_{\varepsilon_3}\leqslant 3+\varepsilon_3$. Так как ε_3 можно выбрать сколь угодно малым, то g можно поместить внутрь круга радиуса $\frac{1}{3(1-\varepsilon)}$. Значит, G можно поместить внутрь прямого кругового цилиндра, лежащего в гиперплоскости α. Следовательно, гиперповерхность F лежит строго внутри цилиндра, который является прямым произведением окружности радиуса $\frac{1}{3(1-\varepsilon)}+\delta$ на 2-плоскость. Пересечем его гиперплоскостью $x^4=-b^2$. При достаточно большом b^2 гиперповерхность F будет расположена над гиперплоскостью $x^4=-b^2$. Дополним полуцилиндр, расположенный над гиперплоскостью $x^4=-b^2$, прямым произведением 2-полусферы на прямую. Полученную выпуклую гиперповерхность обозначим через Ψ. Строго внутри Ψ будет расположена гиперповерхность F. Будем смещать Ψ в направлении $x^4>0$. В точке касания гиперповерхностей F и Ψ средняя кривизна H будет >1. Полученное противоречие доказывает теорему.

Список литературы: 1. *Cheng S. J., Yau S. T.* Differential equations on Riemannian manifolds and their geometric applications // Communs Pure and App. Math. 1975. **28,** N 3. P. 333—354. 2. *Погорелов А. В.* О средней кривизне бесконечной полной выпуклой поверхности // Докл. АН СССР. 1971. **197,** № 4. С. 788—789. 3. *Дискант В. И.* Выпуклые поверхности с ограниченной средней кривизной / Сиб. мат. журн. 1971. **12,** № 3. С. 659—663.

Поступила в редколлегию 25.12.89

УДК 514

В. Г. БОРОДИН

ТРЕХМЕРНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ НЕПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ С МАЛЫМ РАДИУСОМ ИНЪЕКТИВНОСТИ

1.1. В настоящей работе доказано, что существует такая положительная константа, что если радиус инъективности трехмерного замкнутого риманова многообразия с секционными кривизнами $-1 \leqslant K \leqslant 0$ всюду не превосходит этой константы, то многообразие является специальным графовым и его метрика локально расщепляется.

Как известно, радиус инъективности в точке p риманова многообразия неположительной кривизны V равен половине длины кратчайшей петли в V с вершиной в точке p.

Ориентируемое трехмерное многообразие V называется графовым, если существуют такие вложенные непересекающиеся двумерные торы T_k в V, что каждая компонента V_i дополнения трубчатой окрестности объединения $\underset{k}{U}T_k$ является S^1-расслоением.

Если же расслоения V_i имеют особенности, т. е. являются слоениями Зейферта, то V будем называть обобщенным графовым многообразием.

Известно [1], что слоение Зейферта является графовым многообразием. Однако для формулировки основного результата нам удобно допускать в качестве компонент графова многообразия именно слоения Зейферта.

Пусть V — ориентированное обобщенное графово многообразие. Тогда каждая компонента V_i и ее край канонически ориентированы: V_i индуцирует ориентацию из V, а краю dV_i присваивается ориентация, которая при добавлении к ней внутренней нормали в качестве последнего вектора репера совпадает с ориентацией компоненты V_i. Каждая компонента края dV_i является двумерным тором с расслоением на окружности, которое индуцировано из V_i. Многообразие V может быть получено из своих компонент V_i склейкой посредством диффеоморфизмов граничных торов. Так как класс диффеоморфизма многообразия V зависит только от изотопических классов склеивающих диффеоморфизмов, то можно считать, что каждый диффеоморфизм A: $T_i \to T_j$ задается линейным отображением с $A \in GL(2, \mathbf{Z})$ и $|\det A| = 1$. При переходе к другим координатам на граничных торах матрица линейного отображения изменяется. Будем выбирать системы координат на этих торах специальным образом. Опишем этот процесс. Пусть V_i есть слоение Зейферта, край которого не пуст и состоит из торов. Слоение Зейферта V_i конечнолистно накрывается $\tilde{V}_i \to V_i$ тривиальным расслоением на окружности $\tilde{V}_i = W_i \times S^1$ (см. [2]). Пусть W_i — сечение слоения V_i, которое накрывается поверхностью $\tilde{W}_i$. Первый базисный вектор нашей системы координат на граничном торе отвечает слою слоения V_i, а второй вектор соответствует граничной окружности сечения W_i.

О п р е д е л е н и е. *Многообразие V^* будем называть специальным графовым, если его ориентирующее накрывающее V является обобщенным графовым и при этом*

1) *преобразование $V \to V$ накрытия $V \to V^*$ сохраняет систему торов $\{T_k\}$ в V и структуру слоения на окружности;*

2) *эйлерова характеристика $\chi(F_i)$ базы слоения V_i-орбиобразия F_i — неположительна;*

3) *каждое преобразование, задающее склейку компонент, задается одной из матриц* $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Замечание. Если край dV_i пуст, т. е. $V_i = V$, то эйлерова характеристика $e(V) = 0$. Доказательство этого факта имеется в [3]. Определения и свойства инвариантов $e(V)$ и $\chi(F_i)$ можно найти в [2].

Будем говорить, что метрика риманова многообразия V локально расщепляется, если существует такое открытое всюду плотное подмножество V', что каждая точка обладает окрестностью, изометричной нетривиальному метрическому произведению. Основной результат работы состоит в следующем.

1.2. **Теорема.** *Существует такая положительная константа ε, что если связное трехмерное закмнутое риманово многообразие V с секционными кривизнами $-1 \leqslant K \leqslant 0$ имеет всюду радиус инъективности* Inj Rad $\leqslant 0 \to \varepsilon$, *то его метрика локально расщепляется, а само многообразие V является специальным графовым многообразием.*

1.3. *Замечание.* Если многообразие V - плоское, то утверждение теоремы следует из теорем 4.3 и 5.3 работы [2]. Поэтому в дальнейшем считаем, что V — неплоское многообразие.

1.4. С л е д с т в и е. *Пусть замкнутое трехмерное риманово многообразие V имеет секционные кривизны $-1 \leqslant K \leqslant 0$. Если хотя бы в одной его точке кривизны Риччи по всем направлениям отрицательны, то найдется такая точка $p \in V$, что радиус инъективности* Inj Rad$(p) > \varepsilon$.

1.5. Пусть g — риманова метрика на многообразии V. Обозначим через $\sigma_g = \sup\limits_{p \in V} \{\text{Inj Rad}\,(p)\}$.

Говорят, что семейство метрик $\{g_\delta\}_{\delta>0}$ на многообразии V коллапсирует с ограниченной кривизной, если $\sigma_{g\delta} \to 0$ при $\delta \to 0$, а секционные кривизны семейства метрик остаются ограниченными.

В работе [4] анонсировано, что существует такой критический радиус $\varepsilon(n)$, зависящий только от размерности, что если радиус инъективности Inj Rad $\leqslant \varepsilon\,(n)$ всюду на римановом многообразии V размерности n, то это многообразие допускает так называемую F-структуру положительного ранга. В частности, отсюда следует [4], что многообразие V допускает семейство метрик, коллапсирующее с ограниченной кривизной. Аналогичными дополнениями к теореме 1.2 являются следующие утверждения, доказательства которых можно найти в [3].

1.6. **Теорема.** *Каждое специальное графово многообразие допускает такое коллапсирующее семейство метрик $\{g_\delta\}$ с секционными кривиз-*

нами $-1 \leqslant K \leqslant 0$, *что минимум объемов этих метрик равен нулю.*

1.7. Следствие. *Если замкнутое трехмерное многообразие* V *допускает риманову метрику с секционными кривизнами* $-1 \leqslant K \leqslant \leqslant 0$ *и радиусом инъективности* $\mathrm{Inj\,Rad} \leqslant \varepsilon$ *всюду на* V, *то на этом многообразии существует коллапсирующее семейство метрик* $\{g_\delta\}$ *с секционными кривизнами* $-1 \leqslant K \leqslant 0$ *и объемами этих метрик, стремящимися к нулю при* $\delta \to 0$.

2. *Вспомогательные сведения.* Доказательства утверждений, сформулированных в этом пункте, можно найти в [5].

2.1. Пусть V — замкнутое трехмерное многообразие неположительной кривизны. Его универсальное накрывающее X является многообразием Адамара, т. е. полным односвязным многообразием неположительной кривизны. Группа $\Gamma = \pi_1(V)$ действует дискретно и равномерно изометриями на X как группа преобразований накрытия (см. [5, п. 2.1]).

Для каждой изометрии $\gamma : X \to X$ рассмотрим функцию смещения $d_\gamma(x) = d(x, \gamma, x)$, $x \in X$, где d — расстояние в X. Множество $\mathrm{MIN}(\gamma) = \{x \in X : d_\gamma(x) = \inf d_\gamma\}$ называется минимальным множеством изометрии γ. Хорошо известно [5, п. 1.3], что функция смещения изометрии γ многообразия Адамара выпукла, поэтому минимальное множество изометрии γ выпукло, содержит все точки минимума функции смещения d_γ и эта функция постоянна на нем.

Изометрия называется гиперболической, если ее минимальное множество не пусто и минимум функции смещения положителен. Если V — замкнутое многообразие, то группа $\Gamma = \pi_1(V)$, действующая на универсальном накрывающем, состоит из гиперболических изометрий (см. [5, п. 8.2]).

2.2. **Лемма** [5, с. 81]. *Пусть* γ — *гиперболическая изометрия, тогда ее минимальное множество изометрично произведению* $D \times R$, *где множество* D *выпукло, а каждая геодезическая* $d \times R$, $d \in D$, *инвариантна под действием* γ. *Изометрия* γ *действует на своем минимальном множестве как (1, сдвиг).*

Геодезическую $d \times R$, $d \in D$, будем называть направляющей $\mathrm{MIN}(\gamma)$.

2.3. **Лемма** [5, п. 7.1]. *Пусть* A — *абелева подгруппа в* Γ. *Тогда ее минимальное множество* $\mathrm{MIN}(A) = \bigcap_{\gamma \in A} \mathrm{MIN}(\gamma)$ *не пусто и изометрично произведению* $D \times R^k$, *где* $k \geqslant 0$, D *выпукло,* k — *ранг подгруппы* A. *При этом группа* A *действует на своем минимальном множестве изометриями вида (1, сдвиг) равномерно на втором сомножителе, т. е.* $d \times R^k/A$ — *компакт для* $d \in D$.

2.4. **Лемма** [5, с. 80]. *Пусть изометрия* γ *многообразия Адамара* X *сохраняет выпуклое замкнутое множество* D, *а нормальная геодезическая* $c : [0, \infty) \to X$ *ортогональна* D *в точке* $c(0) = c \cap D$. *Тогда функция смещения* $d_\gamma(t) = d\gamma c(t)$ *не убывает на* $[0, \infty)$.

3. *Подгруппы, порожденные короткими изометриями.* 3.1. Для числа $t > 0$ и точки x риманова многообразия X полагаем $\tilde{\Gamma}_t(x) = \{\gamma \in \Gamma : d_\gamma(x) \leqslant t\}$, $\Gamma_t(x)$ — подгруппа в Γ, порожденная множеством $\tilde{\Gamma}_t(x)$.

Если минимум функции смещения изометрии γ не превосходит числа t, то изометрию будем называть t-короткой.

3.2. **Лемма Маргулиса** (см. [5, п. 8.3]). *Существует такая постоянная $\mu(n)$, зависящая только от размерности n риманова многообразия X, что если его секционные кривизны удовлетворяют неравенству $-1 \leqslant K \leqslant 0$, то для любых точки $x \in X$ и числа $\mu \leqslant \mu(n)$ группа $\Gamma_\mu(x)$ почти нильпотента, т. е. содержит нильпотентную подгруппу конечного индекса.* (Число $\mu(n)$ будем называть константой Маргулиса, группу $\Gamma_\mu(x)$ для $\mu \leqslant \mu(n)$ — группой Маргулиса).

3.3. *Замечание.* В нашем случае, когда группа Γ состоит из гиперболических изометрий, группа $\Gamma_\mu(x)$ является почти абелевой. Это следует из того, что любая нильпотентная группа, действующая на многообразии Адамара дискретно, является абелевой [5, с. 89].

3.4. Пусть связное замкнутое трехмерное риманово многообразие V с секционными кривизнами $-1 \leqslant K \leqslant 0$ имеет всюду радиус инъективности Inj Rad $\leqslant \mu/2$, где $\mu = \mu\,(3)$ — константа Маргулиса. Тогда для любой точки x его универсального накрывающего X группа $\Gamma_\mu\,(x)$ нетривиальна и по лемме Маргулиса почти абелева. Так как группа Γ действует на многообразии X свободно, то ранг k свободной абелевой подгруппы конечного индекса в $\Gamma_\mu\,(x)$ не меньше единицы, т. е. $k = 1, 2, 3$.

Если группа Γ содержит свободную абелеву подгруппу ранга три, то многообразие X изометрично $\mathbf{R}^3$. Это вытекает из леммы 2.3.

3.5. **Лемма.** *Если группа $\Gamma_\mu(x)$ содержит свободную абелеву подгруппу ранга один конечного индекса, то группа $\Gamma_\mu(x)$ является бесконечной циклической.*

Доказательство. По условию леммы группа $\Gamma_\mu(x)$ содержит бесконечную циклическую подгруппу конечного индекса. Можно считать, что упомянутая подгруппа является нормальной в $\Gamma_\mu(x)$. Следовательно, по [5, п. 7.7] многообразие X содержит инвариантную под действием группы $\Gamma_\mu(x)$ геодезическую, на которой эта группа действует равномерно. Поэтому группа $\Gamma_\mu(x)$ изоморфна группе $\mathbf{Z}$. Лемма доказана.

3.6. **Лемма.** *Если группа $\Gamma_\mu(x)$ содержит свободную абелеву подгруппу ранга два конечного индекса, то группа $\Gamma_\mu(x)$ либо изоморфна группе $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$, либо содержит подгруппу индекса два, изоморфную группе $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$.* (Это утверждение доказывается аналогично лемме 3.5).

3.7. Свойство максимальности. Если размерность минимального множества сохраняющей ориентацию трехмерного многообразия Адамара X изометрии γ больше единицы и геодезическая $c \subset \mathrm{MIN}(\gamma)$ инвариантна под действием γ, то любая геодезическая в X, параллельная c, лежит в $\mathrm{MIN}(\gamma)$.

Действительно, так как размерность минимального множества сохраняющей ориентацию трехмерного многообразия X изометрии γ больше единицы, то голономия изометрии γ тривиальна на $\mathrm{MIN}(\gamma)$. Поэтому, если геодезическая в X параллельна c, то по лемме 2.4 эта геодезическая лежит в $\mathrm{MIN}(\gamma)$.

4. *Основные леммы.* 4.1. Подмножество $W \subset X$ называют точно инвариантным относительно действия группы Γ, если для любой изометрии $\gamma \in \Gamma$ либо $\gamma(W) = W$, либо $\gamma(W) \cap W = \varnothing$.

Плоскостью в X будем называть вполне геодезическое подмногообразие в X, изометричное $\mathbf{R}^2$.

Почти абелеву подгруппу группы Γ будем называть ε-короткой, если у нее найдутся ε-короткие образующие. Ясно, что это свойство сохраняется при внутренних автоморфизмах группы Γ.

4.2.1. **Лемма.** *Пусть V — неплоское трехмерное замкнутое риманово многообразие с секционными кривизнами $-1 \leqslant K \leqslant 0$ и плоскости Π_i, $i = 1, 2$, в универсальном накрывающем X инвариантны под действием μ-коротких подгрупп $A_i \subset \Gamma$, изоморфных группе $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$, где $\mu = \mu(3)$ — константа Маргулиса. Тогда, если плоскости Π_1, Π_2 пересекаются, то они совпадают.*

Доказательство. Заметим, что изометрии группы A_i действуют на плоскости Π_i сдвигами. В частности, их функции смещения постоянны на этой плоскости. Это следует из леммы 2.3.

Допустим, что утверждение леммы неверно, т. е. $\Pi_1 \neq \Pi_2$, $\Pi_1 \cap \Pi_2 \neq \varnothing$. Пусть α_i, β_i есть μ-короткие образующие группы A_i, x — произвольная точка геодезической $c = \Pi_1 \cap \Pi_2$. Возьмем ту из изометрий α_2, β_2, направляющая минимального множества которой не параллельна c. Пусть это α_2. Согласно п. 3.6 вторые степени изометрий α_1, β_1, α_2 коммутируют. Следовательно, группа $\Gamma_\mu(x)$ содержит подгруппу, изоморфную группе $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$, так как направляющая $\mathrm{MIN}(\alpha_2)$ не параллельна плоскости Π_1. Отсюда следует, что многообразие V является плоским. Противоречие показывает, что наше допущение неверно, таким образом, лемма доказана.

4.2.2. Следствие. *Пусть многообразие V, как в условии леммы 4.2.1. Если плоскость Π в универсальном накрывающем X инвариантна под действием μ-короткой подгруппы A в Γ, изоморфной группе $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$, то плоскость Π точно инвариантна.*

Действительно, μ-короткая подгруппа $\gamma A \gamma^{-1} \subset \Gamma$, изоморфная группе $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$, сохраняет $\gamma(\Pi)$ и следствие становится очевидным.

4.3. Пусть F означает либо плоский двумерный тор, либо плоскую бутылку Кляйна. Под разрезанием многообразия V вдоль вложения $i : F \to V$ понимается взятие метрического пополнения у дополнения $V \setminus i(F)$. Присоединенные при этом точки образуют либо связное, если вложение i — одностороннее, либо состоящее из двух компонент, если i — двустороннее, многообразие F', двулистно накрывающее $i(F)$.

Пусть $f : F \to V$ — вполне геодезическое и изометрическое погружение. Погружение f будем называть ε-коротким, если образ фундаментальной группы $\pi_1(F)$ при гомоморфизме, индуцированном отображением f в группе Γ, является ε-короткой группой. (Это определение корректно, так как зависит только от соответствующего класса сопряженности в группе Γ).

4.4. Пусть неплоское трехмерное замкнутое риманово многообразие V^* с секционными кривизнами $-1 \leqslant K \leqslant 0$ имеет всюду радиус инъективности $\mathrm{Inj\,Rad} \leqslant \mu/8$, где $\mu = \mu(3)$ — константа Маргулиса.

Рассмотрим ориентирующее накрывающее V многообразия V^* и разрежем V вдоль всех $\mu/2$-коротких вложений плоской бутылки Кляйна. Заметим, что каждое $\mu/2$-короткое погружение плоской бутылки Кляйна в V с конечной кратностью накрывает $\mu/2$-короткое вложение бутылки Кляйна (см. следствие 4.2.2). После разрезания получим связное многообразие V', край которого состоит из вложенных торов. Очевидно, что Inj Rad $\leqslant \mu/4$ всюду на V'. Из п. 3 и построения V' следует, что группа Маргулиса $\Gamma_{\mu/2}(x)$ для любой точки x универсального накрывающего X' изоморфна либо группе $\mathbf{Z}$, либо $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$.

4.5. *Замечание.* Граница dX' состоит из плоскостей, инвариантных под действием μ-коротких подгрупп, изоморфных $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$, и на каждой из них действует, по крайней мере, один $\mu/2$-короткий сдвиг.

Следующие две леммы являются ключевыми в доказательстве теоремы 1.2.

4.6. **Лемма.** *Если для некоторой точки $x_0 \in X'$ группа Маргулиса $\Gamma_{\mu/2}(x_0)$ изоморфна группе $\mathbf{Z}$, то точка x_0 принадлежит минимальному множеству нетривиальной $\mu/2$-короткой изометрии γ.*

Доказательство. Допустим противное. Тогда по предыдущему замечанию точка x_0 не принадлежит границе dX'. Выберем из конечного множества $\tilde{\Gamma}_{\mu/2}(x_0)\setminus \mathrm{id}$ ту изометрию α, размерность минимального множества которой наибольшая. Это множество конечно, так как группа Γ действует дискретно. Из точки x_0 опустим на минимальное множество изометрии α перпендикуляр c и введем на нем естественный параметр t, $c(0) = c \cap \mathrm{MIN}(\alpha)$. Пусть число t_0 таково, что $c(t_0) = x_0$. Продолжим перпендикуляр c за точку x_0. Возможны два случая:

а) продолжение перпендикуляра c пересекает граничную плоскость многообразия X', пусть $c(t')$ — граничная точка;

б) продолжение отрезка c есть луч $c: [0, \infty) \to X'$.

Рассмотрим множество $T = \{t \geqslant t_0 : \tilde{\Gamma}_{\mu/2}(c(t)) \subset \tilde{\Gamma}_{\mu/2}(x_0)\}$. Множество T не пусто. Из дискретности действия группы Γ следует, что множество T открыто или в $[t_0, t']$, или в $[t_0, \infty)$. Докажем, что существует такое число $t^* > t_0$, что $\tilde{\Gamma}_{\mu/2}(c(t^*)) \not\subset \tilde{\Gamma}_{\mu/2}(x_0)$.

Случай а). Если имеет место включение для любого $t \in [t_0, t']$, то найдется нетривиальная $\mu/2$-короткая изометрия $\alpha' \in \tilde{\Gamma}_{\mu/2}(x_0)$, которая сохраняет граничную плоскость многообразия X', т. е. в точке $c(t')$ ее функция смещения достигает минимума. Изометрии α, α' куммутируют, следовательно, по [5, п. 7.1] изометрия α' сохраняет $\mathrm{MIN}(\alpha)$ и ее функция смещения не убывает вдоль перпендикуляра c (см. лемму 2.4), т. е. $x_0 \in \mathrm{MIN}(\alpha')$, что невозможно.

Случай б). Пусть $T = [t_0, \infty)$. Если размерность минимального множества изометрии α равна единице, то по выбору α размерность минимального множества изометрии $\alpha_i \in \tilde{\Gamma}_{\mu/2}(x_0)\setminus \mathrm{id}$ также равна единице, т. е. $\mathrm{MIN}(\alpha_i) = \mathrm{MIN}(\alpha)$. По лемме 2.4. функция d_{α_i} не убывает вдоль луча c, следовательно, она возрастает вдоль c, так как $x_0 \notin \mathrm{MIN}(\alpha_i)$ и функция смещения выпукла. Поэтому найдется такое $t > t_0$, что $\Gamma_{\mu/2}(c(t)) = e$, что невозможно.

Пусть размерность $\mathrm{MIN}(\alpha)$ больше единицы. Так как группа $\Gamma_{\mu/2}(x_0)$ изоморфна группе $\mathbf{Z}$, то для любой $\alpha_i \in \tilde{\Gamma}_{\mu/2}(x_0) \setminus \mathrm{id}$ найдутся такие целые, отличные от нуля m и n, что $\alpha_i^m = \alpha^n$. Из неравенства треугольника имеем $d_{\alpha_i^m} \leqslant m \cdot d_{\alpha_i}$. По свойству максимальности $\mathrm{MIN}(\alpha^n) = \mathrm{MIN}(\alpha)$. Поэтому левая часть неравенства неограниченно возрастает вдоль c. Следовательно, функция смещения любой нетривиальной изометрии из конечного множества $\tilde{\Gamma}_{\mu/2}(x_0)$ начинает строго возрастать, начиная с некоторого $t \geqslant t_0$. Таким образом, мы приходим к противоречию (см. предыдущий абзац).

Пусть t_1 — наименьшее предельное значение множества T. Тогда $t_1 > t_0$ и по выбору t_1 множество $\tilde{\Gamma}_{\mu/2}(c(t_1)) \setminus \mathrm{id}$ содержит изометрию $\gamma_1 \in \tilde{\Gamma}_{\mu/2}(x_0)$ и $\gamma_2 \notin \tilde{\Gamma}_{\mu/2}(x_0)$. Изометрии γ_1, γ_2 коммутируют, поэтому γ_2 сохраняет $\mathrm{MIN}(\gamma_1)$.

Если $\mathrm{MIN}(\gamma_1) = \mathrm{MIN}(\alpha)$, то по лемме 2.4 получаем, что функция смещения не убывает для $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$. Следовательно, $\gamma_2 \in \tilde{\Gamma}_{\mu/2}(x_0)$ — противоречие.

Если $\mathrm{MIN}(\gamma_1) \neq \mathrm{MIN}(\alpha)$, то размерность минимального множества изометрии α больше единицы, $\mathrm{MIN}(\alpha) = \mathrm{MIN}(\alpha^n)$ для любого целого, отличного от нуля числа n, и $\gamma_1^m = \alpha^n$ для некоторых целых, не равных нулю m и n (это ранее было доказано). Изометрия γ_2 коммутирует с изометрией $\gamma_1^m = \alpha^n$, поэтому функция смещения изометрии γ_2 не убывает для $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$. Следовательно, наше допущение неверно и точка x_0 принадлежит минимальному множеству нетривиальной $\mu/2$-короткой изометрии.

4.7. Пусть группа Маргулиса $\Gamma_{\mu/2}(x_0)$ изоморфна группе $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ для $x_0 \in X'$. Тогда точка x_0 принадлежит минимальному множеству нетривиальной $\mu/2$-короткой изометрии.

Доказательство этой леммы во многом сходно с 4.6, подробности можно найти в [3, лемма 4.4].

4.8. Нетривиальную изометрию будем называть квазиклиффордовым сдвигом, если размерность ее минимального множества совпадает с размерностью объемлющего пространства.

Следствие. *Каждая точка $x \in X'$ принадлежит минимальному множеству $\mu/2$-короткой квазиклиффордовой изометрии.*

Доказательство. Допустим противное, т. е. найдется точка $x_0 \in X'$, которая не принадлежит минимальному множеству никакой квазиклиффордовой изометрии, минимум функции смещения которой не превосходит числа $\mu/2$.

Пусть $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ — квазиклиффордовы сдвиги из конечного множества $\tilde{\Gamma}_{\mu/2}(x_0)$. Так как их минимальные множества замкнуты, то существует шар B_1 с центром в точке x_0, не имеющий общих точек с минимальными множествами изометрий γ_i для $i = 1, 2, \ldots, k$. Если в множестве $\tilde{\Gamma}_{\mu/2}(x_0)$ нет квазиклиффордовых сдвигов, то нас устроит произвольный шар B_1 с центром в точке x_0. Пусть B_2 — такой шар с центром в точке x_0, что для любой точки x' шара B_2 выполнено $\tilde{\Gamma}_{\mu/2}(x') \subset \tilde{\Gamma}_{\mu/2}(x_0)$ (см. лемму 5.1).

Обозначим через B наименьший из шаров B_1 и B_2. По леммам 4.6 и 4.7 все точки шара B принадлежат конечному числу минимальных множеств гиперболических изометрий, отличных от квазиклиффордовых сдвигов. Это, очевидно, невозможно. Противоречие показывает, что наше допущение неверно, т. е. каждая точка универсального накрывающего принадлежит минимальному множеству квазиклиффордовой изометрии, минимум функции смещения которой не превосходит числа $\mu/2$. Следствие доказано.

4.9. **Лемма.** *Пусть M — минимальное множество $\mu/2$-короткой квазиклиффордовой изометрии α. Если $M \neq X'$, то граница dM состоит из плоскостей, инвариантных под действием $\mu/2$-коротких подгрупп, изоморфных группе $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$.*

Доказательство. Пусть x_0 — граничная точка M. Тогда по следствию 4.8 и свойству максимальности получаем, что x_0 принадлежит минимальному множеству такой $\mu/2$-короткой изометрии β, что направляющие $\mathrm{MIN}(\alpha)$ и $\mathrm{MIN}(\beta)$ не параллельны. Следовательно, группа A, порожденная изометриями α, β, изоморфна группе $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$. По лемме 2.3 через точку x_0 проходит плоскость Π, инвариантная под действием A. Поэтому $\Pi \subset M$ и так как M — выпуклое множество, то Π — граничная плоскость M.

5. *Завершение доказательства теоремы 1.5.1.* Пусть неплоское ориентируемое трехмерное риманово многообразие V с секционными кривизнами $-1 \leqslant K \leqslant 0$ имеет всюду радиус инъективности $\mathrm{Inj\,Rad} \leqslant \mu/4$.

Пусть $\{K\}$ — все гомотопические классы отображений двумерного тора в V, каждый из которых содержит $\mu/2$-короткое вложение плоского двумерного тора T. Из каждого класса K выберем по одному такому $\mu/2$-короткому вложению тора $f : T \to V$. Рассмотрим множество торов в V, параллельных $f(T)$. Это множество изометрично либо произведению $[0, t] \times T$, возможно, $t = 0$, либо $[0, t) \times T$. Из соответствующего класса K выберем такое $\mu/2$-короткое вложение тора T в V, что $f(T)$ есть тор $t/2 \times T$. Это вложение будем называть средним.

5.2. Пусть $i : F \to V$ есть либо $\mu/2$-короткое вложение плоской бутылки Кляйна, либо $\mu/2$-короткое среднее вложение плоского двумерного тора. Прообраз $i(F)$ в универсальном накрывающем X многообразия V распадается на плоскости, инвариантные под действием $\mu/2$-коротких, почти абелевых подгрупп ранга два. Каждая такая плоскость по следствию 4.2.2 точно инвариантна относительно действия группы Γ. Разрежем X вдоль всех таких плоскостей. После разрезания X распадается на компоненты связности, каждая из которых точно инвариантна и, согласно лемме 4.9, следствию 4.8 и свойству максимальности, является подмножеством множества $\mu/2$-короткой квазиклиффордовой изометрии. Поэтому метрика X локально расщепляется, а значит, и метрика V локально расщепляется.

Замечание. Если компоненты W_1 и W_2 имеют общую граничную плоскость Π, которая накрывает односторонне вложенную в V бутылку Кляйна, то объединение $W_1 \cup W_2$ есть подмножество минимального множества $\mu/2$-короткого квазиклиффордова сдвига. Это следует из того, что имеется изометрия, которая есть композиция сдвига вдоль геодезической $c \subset \Pi$ и поворота X вокруг e на угол π.

5.3. Разрежем V вдоль $\mu/2$-коротких средних вложений плоского двумерного тора. Пусть V_0 — произвольная компонента связности, на которые распалось V, и W — связная компонента прообраза V_0 в универсальном накрывающем X. Подмножество W согласно п. 5.2 точно инвариантно относительно действия группы Γ, следовательно, имеется инъективное отображение $f: W/St(W) \to V$, где $St(W)$ — множество изометрий, сохраняющих W. Естественно рассматривать V_0 как фактор-пространство $W/St(W)$.

Согласно п. 5.2 компонента W является выпуклым замкнутым подмножеством минимального множества $\mu/2$-короткой квазиклиффордовой изометрии γ, которая сохраняет W. По лемме 2.2 получаем, что W изометрично произведению $W' \times \mathbf{R}$. При этом γ действует на W как (1, сдвиг). Следовательно, в проекции $W \to V_0$ возникает естественное слоение на окружности. В работе [6] Эпстейн доказал, что всякое разбиение на окружности компактного трехмерного многообразия есть слоение Зейферта. В [3] доказано, что эйлерова характеристика $\chi(F_0)$ орбиобразия F_0 слоения Зейферта неположительна.

5.4. Рассмотрим граничную плоскость Π компоненты W, которая накрывает тор $i(T)$. Эта плоскость инвариантна под действием $\mu/2$-короткой подгруппы, изоморфной группе $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$.

Возможны два случая:

а) смежные с плоскостью Π компоненты W_j принадлежат минимальным множествам различных $\mu/2$-коротких квазиклиффордовых изометрий γ_j;

б) компоненты W_j принадлежат минимальному множеству одной $\mu/2$-короткой квазиклиффордовой изометрии γ.

Рассмотрим на плоскости Π два семейства параллельных прямых L_j. В случае а) прямые семейства L_j инвариантны под действием изометрии γ_j. В случае б) прямые семейства L_1 инвариантны под действием γ, а прямые семейства L_2 инвариантны под действием $\mu/2$-короткой образующей группы, сохраняющей плоскость Π, при условии, что $L_1 \neq L_2$.

Пусть $W_0 \subset W$ есть фундаментальная область компоненты V_0. На каждой граничной плоскости компоненты выберем по такой прямой P семейства L_2 (см. предыдущий абзац), которая имеет не пустое пересечение с W_0. Пусть $\{P\} = f(P)$, где $f \in \Gamma$, причем $f(W) = W$ и f действуют тривиально на втором сомножителе $W = W' \times \mathbf{R}$. Рассмотрим сечение S компоненты W, край которого совпадает с $\{P\}$. Тогда при проекции $W \to V_0$ образ $S \cap W_0$ есть сечение s компоненты V_0.

Очевидно (см. п. 1.1), что преобразование, задающее склейку компонент, при таком выборе сечения s задается одной из матриц $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

5.5. Пусть многообразие V^* неориентируемо. Обозначим через h преобразование накрытия $V \to V$. Вложения, вдоль которых мы разрезали V, выбирались средними, поэтому h сохраняет систему торов $\{i(T)\}$ и структуру слоения на окружности.

5.6. Доказательство следствия 1. Если допустить, что радиус инъективности не превосходит $\mu/8$ всюду на V, то по теореме 1 метрика V локально расщепляется, т. е. в каждой точке есть направление, в котором кривизна Риччи равна нулю. Что противоречит условию следствия 1.

Список литературы: 1. *Soma T.* The Gromov invariant of links // Inven. Math. 1981. **64**. P. 445—454.2. *Скотт П.* Геометрии на трехмерных многообразиях. М., 1986. 120 с. 3. *Бородин В. Г.* Трехмерные многообразия неположительной кривизны с малым радиусом инъективности. Л., 1988. Рук. деп. ВИНИТИ, № 5264-В88. 4. *Chelger J., Gromov M.* Collapsing riemannian manifolds while Keeping their curvature bounded // I. Differ. Geom. 1986. **23**, N 3. P. 309—346. 5. *Ballman W., Gromov M., Schroeder V.* Manifolds of Nonpositive Curvature // Progr. in Math, Birkhäuser. 1985. 61 s. 6. *Epstein D. B. A.* Periodic flows on 3-manifolds// Ann. Math., 1972. **95**. P. 66—82.

Поступила в редколлегию 20.11.89

УДК 512.54

С. В. БУЯЛО

ГРАФЫ, СВЯЗАННЫЕ С МНОГООБРАЗИЕМ АДАМАРА И ГРУППАМИ ЕГО ИЗОМЕТРИЙ

0. Введение. Строение риманова многообразия в целом существенно зависит от того, как устроено его подмножество, где радиус инъективности достаточно мал. Фундаментальную роль в описании таких подмножеств играет утверждение, известное как лемма Маргулиса [1—3]. Оно приводится ниже для случая, когда секционные кривизны неположительны.

Напомним, что многообразием Адамара называется полное односвязное риманово многообразие неположительной секционной кривизны.

Пусть Γ — группа изометрий риманова многообразия X, $\delta_\gamma : X \to R$ — функция смещения изометрии γ, т. е. $\delta_\gamma(x) = d(x, \gamma(x))$, где d — расстояние в X. Для $\varepsilon > 0$ и $x \in X$ обозначим через $\widetilde{\Gamma}_\varepsilon(x) = \{\gamma \in \Gamma : \delta_\gamma(x) \leqslant \varepsilon\}$, через $\Gamma_\varepsilon(x)$ — подгруппу в Γ, порожденную множеством $\widetilde{\Gamma}_\varepsilon(x)$.

0.1. **Предложение** (лемма Маргулиса). *Для каждого натурального n существует такая постоянная $\mu(n) > 0$, что справедливо следующее. Пусть X — n-мерное многообразие Адамара с секционными кривизнами $-1 \leqslant K \leqslant 0$ и Γ — дискретная группа изометрий X. Тогда для любых $0 < \varepsilon \leqslant \mu(n)$ и $x \in X$ группа $\Gamma_\varepsilon(x)$ почти нильпотентна, т. е. содержит нильпотентную подгруппу конечного индекса.*

Настоящая работа содержит описание формализма применения леммы Маргулиса в различных вопросах теории многообразий неположительной кривизны. Его суть состоит в том, что вводится структура графа на множестве An почти нильпотентных подгрупп дискретной группы Γ изометрий многообразия Адамара X. Лемма Маргулиса позволяет параметризовать некоторое подмножество в An многообразием X. Тем самым возникает возможность ввести понятие связности (в смысле графов) в множестве Ап, хотя при этом не используется никакая топология. Уже сам этот формализм почти автоматически дает следующий результат.

0.2. **Теорема.** *Пусть M — n-мерное полное риманово многообразие с секционными кривизнами $-1 \leqslant K \leqslant 0$ и удовлетворяющее аксиоме видимости. Тогда существует такая точка $p \in M$, что радиус инъективности* $\mathrm{InjRad}(p) \geqslant \frac{1}{2}\mu(n)$.

Напомним, что в случае, когда секционные кривизны у M неположительны, радиус инъективности $\mathrm{Inj\,Rad}: M \to R$ в точке p равен половине длины нетривиальной кратчайшей геодезической петли с вершиной в p. Напомним также, что многообразие M неположительной кривизны удовлетворяет аксиоме видимости, или, коротко, является многообразием видимости, если его универсальное накрывающее $\tilde{M}$ не содержит евклидовых вполне геодезических полуплоскостей (одна из десяти эквивалентных формулировок [3]).

Утверждение, аналогичное теореме 0.2, ранее было известно лишь при дополнительных условиях $K < 0$ и $\mathrm{Inj\,Rad} \to 0$ [3, п. 8.4], последнее условие несколько слабее требования конечности объема.

Доказательство теоремы 0.2 использует представление фундаментальной группы $\pi_1(M)$ как группы Γ изометрий универсального накрывающего $\tilde{M}$. При этом изометрии из группы Γ действуют на $\tilde{M}$ без неподвижных точек. Рассмотрим более общую ситуацию, когда Γ — дискретная группа изометрий многообразия Адамара X. Теперь изометрии из Γ могут иметь неподвижные точки в X. Как известно, множество $\mathrm{Fix}(\gamma)$ неподвижных точек изометрии γ является полным, вполне геодезическим подмногообразием в X. Если $\mathrm{Fix}(\gamma) \neq \varnothing$, то изометрия γ имеет конечный порядок и называется эллиптической. Обозначим через $\delta_\Gamma : X \to R$, $\delta_\Gamma(x) = \min\{\delta_\gamma(x) : \gamma \in \Gamma \setminus \mathrm{id}\}$. Функция δ_Γ является Γ-инвариантной и определяет функцию $X/\Gamma \to R$. В случае, когда $X/\Gamma = M$ — многообразие, последняя равна удвоенному радиусу инъективности многообразия M.

0.3. **Теорема.** *Пусть n-мерное, $n \geqslant 3$, многообразие Адамара удовлетворяет аксиоме видимости и имеет секционные кривизны $-1 \leqslant K \leqslant 0$, Γ — дискретная группа изометрий X. Если размерность множества неподвижных точек любой нетривиальной изометрии из Γ не превосходит 1, то* $\sup \delta_\Gamma \geqslant \frac{1}{2}\mu(n)$.

0.4. **Теорема.** *Пусть $n = 2$ или 3, X — n-мерное многообразие Адамара с секционными кривизнами $-1 \leqslant K \leqslant 0$ и удовлетворяющее аксиоме видимости, Γ — дискретная группа изометрий X. Тогда* $\sup\delta_\Gamma \geqslant \frac{1}{4}\mu(n)$.

По-видимому, последнее утверждение верно для всех $n \geqslant 2$. Ранее был известен [4] аналогичный результат при дополнительных условиях $K < 0$ и конечности объема X/Γ. В случае $n = 2$ вместо выполнения аксиомы видимости достаточно потребовать, чтобы X было не плоским.

1. Формализм графов. В дальнейшем X — n-мерное многообразие Адамара с секционными кривизнами $-1 \leqslant K \leqslant 0$, Γ — дискретная группа изометрий X, $X(\infty)$ — абсолют X [3]. Как известно, на множестве $X \cup X(\infty)$ имеется топология, которая на X совпадает с исходной и в которой $X \cup X(\infty)$ гомеоморфно n-мерному замкнутому шару. Изометрии многообразия X продолжаются до гомеоморфизмов шара $X \cup X(\infty)$.

1.1. Ориентированные графы.

1.1.1. Обозначим через An совокупность всех нетривиальных, почти нильпотентных подгрупп в Γ. Отношение включения $a \subset a'$ превращает An в ориентированный граф: вершины a и a' соединяются ребром $a \to a'$.

1.1.2. Для $x \in X$ и $\varepsilon > 0$ пусть множество $\tilde{\Gamma}_\varepsilon(x)$ и группа $\Gamma_\varepsilon(x)$, как во введении. Для любой точки $x \in X$ существует такая ее окрестность U_x, что для всех $x' \in U_x$ выполняется $\tilde{\Gamma}_\varepsilon(x') \subset \tilde{\Gamma}_\varepsilon(x)$, а значит, $\Gamma_\varepsilon(x') \subset \Gamma_\varepsilon(x)$. При данном $\varepsilon > 0$ фиксируем для каждой точки $x \in X$ такую окрестность U_x. Совокупность $\{U_x\}_{x \in X}$ образует открытое покрытие многообразия X.

Для любого подмножества $X' \subset X$ отношение $\{x' \in U_x\}$, где x, $x' \in X'$, превращает X' в граф: точки x' и x соединяются ребром. Если X' линейно связно как топологическое подпространство пространства X, то как граф оно связно: путь в графе X', соединяющий две вершины, легко построить, выбирая конечное подпокрытие из покрытия множествами вида U_x пути в подпространстве X', соединяющего соответствующие точки.

1.1.3. Граф инвариантов. Обозначим через Fn совокупность множеств неподвижных точек в $X \cup X(\infty)$ всех подгрупп из An. Отношение включения $f \subset f'$ превращает Fn в ориентированный граф: вершины f и f' соединяются ребром $f \leftarrow f'$. Этот граф будем называть графом инвариантов групп из An. Его вполне достаточно для доказательства теоремы 0.2. Теорема 0.3 использует более сложные инварианты, чем множества неподвижных точек.

1.2. Отображения графов.

1.2.1. Пусть $0 < \varepsilon \leqslant \mu(n)$. Обозначим через X_ε множество $\{x \in X : \delta\gamma(x) \leqslant \varepsilon\}$. Тогда каждая группа $\Gamma_\varepsilon(x)$, $x \in X_\varepsilon$, нетривиальна и согласно лемме Маргулиса почти нильпотентна. Отображение $\Gamma_\varepsilon : X_\varepsilon \to \mathrm{An}$, сопоставляющее точке x группу $\Gamma_\varepsilon(x)$, сохраняет структуры графов: если (x', x) — ребро в графе X_ε, то, например, $x' \in U_x$, а значит, $\Gamma_\varepsilon(x') \subset \Gamma_\varepsilon(x)$, т. е. $\Gamma_\varepsilon(x') \to \Gamma_\varepsilon(x)$ — ребро в графе An.

1.2.2. Отображение $\mathrm{Fix} : \mathrm{An} \to \mathrm{Fn}$, сопоставляющее каждой группе $a \in$ An ее множество неподвижных точек, сохраняет структуры ориентированных графов: если $a \to a'$ — ребро в графе An, то $a \subset a'$, поэтому $\mathrm{Fix}(a) \supset \mathrm{Fix}(a')$, т. е. $\mathrm{Fix}(a) \to \mathrm{Fix}(a')$ — ребро в графе Fn.

1.2.3. Таким образом, возникает отображение $\mathrm{Fix} \circ \Gamma_\varepsilon : X_\varepsilon \to \mathrm{Fn}$, сохраняющее структуры графов

1.3. Действия группы Γ.

1.3.1. Группа Γ действует на графе Ап сопряжениями: $(\gamma, a) \to \gamma a \gamma^{-1}$, где $a \in$ Ап, $\gamma \in \Gamma$. Это действие, очевидно, сохраняет структуру ориентированного графа.

1.3.2. Группа Γ действует на X : $(\gamma, x) \to \gamma(x)$. Так как Γ действует изометриями, то она сохраняет множество X_ε и при этом $\tilde{\Gamma}_\varepsilon(\gamma(x)) = \gamma \cdot \tilde{\Gamma}_\varepsilon(x) \cdot \gamma^{-1}$. Поэтому Γ действует на X_ε, сохраняя структуру графа, и отображение $\Gamma_\varepsilon : X_\varepsilon \to$ Ап эквивариантно относительно указанных действий.

1.3.3. Каждая изометрия $\gamma \in \Gamma$ продолжается до гомеоморфизма пространства $X \cup X(\infty)$. При этом для $a \in$ Ап выполняется $\gamma(\mathrm{Fix}(a)) = \mathrm{Fix}(\gamma \cdot a \cdot \gamma^{-1})$. Поэтому группа Γ действует на Fn, сохраняя структуру ориентированного графа, и отображение Fix : Ап $\to$ Fn эквивариантно относительно указанных действий.

1.3.4. Таким образом, отображение $\mathrm{Fix} \circ \Gamma_\varepsilon : X_\varepsilon \to$ Fn эквивариантно относительно действий группы Γ на графах X_ε и Fn.

2. *Доказательство теоремы 0.2*. Пусть X — универсальное риманово накрывающее для многообразия M, группа $\Gamma = \pi_1(M)$ действует дискретно изометриями на X так, что $X/\Gamma = M$. Изометрии из $\Gamma \setminus \mathrm{id}$ могут быть двух типов: гиперболические, т. е. такие, которые имеют инвариантные прямые, и параболические, т. е. такие, функции смещения которых не имеют точек минимума в X. Согласно [3, п. 7.9] любая подгруппа $a \in$ Ап может быть одной из следующих:

2.1. $a \cong \mathbf{Z}$ и состоит из гиперболических изометрий с общей инвариантной прямой;

2.2. a состоит из параболических изометрий, и $\mathrm{Fix}(a)$ — точка в $X(\infty)$.

Заметим, что если изометрия γ сохраняет прямую $l \subset X$, то функция смещения δ_γ неограниченно возрастает вдоль любого луча с вершиной на l, не лежащего в l. Это следует из того, что функция δ_γ выпукла и X не содержит евклидовых вполне геодезических полуплоскостей. В частности, в случае 2.1 множество $\mathrm{Fix}(a)$ — пара точек в $X(\infty)$ — концы инвариантной для a прямой.

Покажем, что образ Fix(Ап) графа Ап дискретен в графе Fn. Действительно, если $a \to a'$ ребро в Ап, то $\mathrm{Fix}(a) \supset \mathrm{Fix}(a')$. Если $\mathrm{Fix}(a)$ — точка, то $\mathrm{Fix}(a') = \mathrm{Fix}(a)$. Если $\mathrm{Fix}(a)$ — пара точек, то группа a' содержит подгруппу $a \cong \mathbb{Z}$, состоящую из гиперболических изометрий. Поэтому $a' \cong Z$, состоит из гиперболических изометрий и $\mathrm{Fix}(a) = \mathrm{Fix}(a')$.

Допустим, что $\sup(\mathrm{Inj\,Rad}) < \frac{1}{2}\mu(n)$. Тогда найдется такое $\varepsilon \leqslant \mu(n)$, что $\sup \delta_\Gamma < \varepsilon$, а значит, $X_\varepsilon = X$. Согласно предыдущему, образ $\mathrm{Fix} \circ \Gamma_\varepsilon(X)$ связен и дискретен в графе Fn, поэтому отображение $\mathrm{Fix} \circ \Gamma_\varepsilon : X \to$ Fn постоянно. Так как группа Γ сохраняет X, а $\mathrm{Fix} \circ \Gamma_\varepsilon$ эквивариантно относительно действий Γ, то Γ сохраняет вершину $f = \mathrm{Fix} \circ \Gamma_\varepsilon(X)$. Если f — точка в $X(\infty)$, то, поскольку X не содержит евклидовых вполне геодезических плоскостей, функции смещения всех изометрий из $\Gamma \setminus \mathrm{id}$ строго возрастают вдоль любой прямой $c : R \to X$, $c(-\infty) = f$. Если f — пара точек в $X(\infty)$, то Γ сохраняет множество P прямых в X с концами в f. Тогда P изометрично произведению $D \times R$, где D выпукло и ограничено и Γ сохраняет некоторую прямую $l \subset P$ (подробнее об этом см. п. 3.1.5). Поэтому функции смещения всех изометрий из $\Gamma \setminus \mathrm{id}$ неограниченно возрастают вдоль любого луча с вершиной на l, не лежащего в l. В обоих случаях получаем противоречие с предположением конечности супремума функции δ_Γ. Теорема доказана.

3. Доказательство теоремы 0.3. 3.1. Некоторые сведения о почти нильпотентных подгруппах в Γ.

Минимальным множеством изометрии $\gamma : X \to X$ называется множество $\mathrm{MIN}(\gamma) = \{x \in X : \delta_\gamma(x) = \inf \delta_\gamma\}$. Как известно [3], минимальное множество гиперболической изометрии не пусто и изометрично метрическому произведению $D \times R$, где D выпукло.

3.1.1. **Лемма.** *Если группа Γ содержит коммутирующие гиперболическую γ и параболическую γ' изометрии, то X содержит евклидову вполне геодезическую полуплоскость.*

Доказательство. Так как γ и γ' коммутируют, то изометрия γ' сохраняет множество $\mathrm{MIN}(\gamma) = D \times R$ и его расщепление. Поэтому γ' действует на D как параболическая изометрия, а значит выпуклое множество D не ограничено. Пусть $h \subset D$ — луч. Тогда $h \times R \subset D \times R$ — требуемая полуплоскость. Лемма доказана.

3.1.2. **Лемма.** *Если почти нильпотентная группа a содержит гиперболическую и параболическую изометрии, то она содержит коммутирующие гиперболическую и параболическую изометрии.*

Доказательство. Так как гиперболические и параболические изометрии имеют бесконечный порядок, то можно считать, что группа a нильпотентна. Если степень нильпотентности $\deg a = 1$, то утверждение очевидно. Пусть $\deg a > 1$. Тогда группа $a^{[\deg a - 1]}$ лежит в центре a и согласно [3, п. 7.6] состоит из параболических и эллиптических изометрий. Если центр a содержит параболическую изометрию, то утверждение очевидно. Если это не так, то пусть $\gamma \neq \mathrm{id}$ — эллиптическая изометрия из центра группы a. Тогда a сохраняет вполне геодезическое подпространство $\mathrm{Fix}(\gamma)$, причем $\dim \mathrm{Fix}(\gamma) < \dim X$. Индукция по размерности завершает доказательство.

3.1.3. Следствие. *Если X — многообразие видимости, то ни одна группа $a \in \mathrm{An}$ не содержит одновременно гиперболическую и параболическую изометрии.*

3.1.4. **Лемма.** *Пусть X — многообразие видимости, группа $a \in \mathrm{An}$ содержит параболическую изометрию. Тогда множество $\mathrm{Fix}(a)$ не пусто и является точкой на абсолюте $X(\infty)$.*

Доказательство. Группа a содержит нормальную нильпотентную подгруппу N конечного индекса. Для параболической изометрии γ множество $\mathrm{Fix}(\gamma)$ является точкой на абсолюте [3, п. 6.8], поэтому $\mathrm{Fix}(\gamma^k) = \mathrm{Fix}(\gamma)$ для всех $k \neq 0$. Пусть целое $k \neq 0$ таково, что $\gamma^k \in N$. Тогда $\sigma(\mathrm{Fix}(\gamma)) = \sigma(\mathrm{Fix}(\gamma^k)) = \mathrm{Fix}(\sigma\gamma^k\sigma^{-1})$ для всех $\sigma \in a$, и при этом $\sigma\gamma^k\sigma^{-1} \in N$. Поэтому можно считать, что a — нильпотентная группа. Если центр a содержит параболическую изометрию, то утверждение очевидно. Если это не так, то пусть $\gamma \neq \mathrm{id}$ — эллиптическая изометрия из центра a (см. п. 3.1.2). Тогда группа a сохраняет вполне геодезическое подпространство $\mathrm{Fix}(\gamma)$, причем $\dim \mathrm{Fix}(\gamma) < \dim X$. Индукция по размерности завершает доказательство.

3.1.5. **Лемма.** *Пусть X удовлетворяет аксиоме видимости, множество $f \subset X(\infty)$ состоит из двух различных точек. Существует такая прямая l в X, концы которой образуют множество f, что любая изометрия $\gamma \in \Gamma$ сохраняет f тогда и только тогда, когда γ сохраняет l.*

Доказательство. Согласно [3, п. 4.14] существует прямая в X с концами в f, при этом любые две такие прямые параллельны. Поэтому объединение P всех таких прямых изометрично $D \times R$, где D выпукло. Так как X удовлетворяет аксиоме видимости, то D ограничено, в частности, D имеет единственный центр d_0, т. е. такую точку, где достигается минимум функции $r(x) = \max\limits_{y \in D} d(x, y)$. Любая изометрия $\gamma \in \Gamma$, которая сохраняет f, сохраняет множество P и его расщепление, поэтому действует как изометрия на D. Тогда $\gamma(d_0 \times \mathbb{R}) = d_0 \times \mathbb{R}$. Если γ сохраняет прямую $d_0 \times \mathbb{R}$, то, очевидно, γ сохраняет ее концы f. Лемма доказана.

3.2. Граф инвариантов. Поскольку группа Γ может содержать эллиптические изометрии, то множество $\mathrm{Fix}(a)$ неподвижных точек группы $a \in \mathrm{An}$ может быть пустым. Например, это так, если a — группа изометрий прямой, порожденная двумя отражениями. Поэтому граф инвариантов для доказательства теоремы 0.3 выбирается иначе, чем ранее.

3.2.1. Для группы $a \in \mathrm{An}$ обозначим через $I(a)$ совокупность концов в $X(\infty)$ всех инвариантных для a прямых в X. На множестве $\mathrm{In} = \bigvee\limits_{a \in \mathrm{An}} I(a)$ (несвязное объединение) отношение включения $i \subset i'$ вводит структуру ориентированного графа: вершины i и i' соединяются ребром $i \leftarrow i'$.

3.2.2. В произведении $\mathrm{Fn} \times \mathrm{In}$ выделим подмножество $\widetilde{\mathrm{FIn}}$, состоящее из всех таких пар $\{f; i\}$, что $f = \mathrm{Fix}(a)$, $i = I(a)$, где $a \in \mathrm{An}$. Структуры ориентированных графов на Fn и In превращают $\widetilde{\mathrm{FIn}}$ в ориентированный граф: вершины $g = \{f; i\}$ и $g' = \{f'; i'\}$ соединяются ребром $g \to g'$ тогда и только тогда, когда $f \to f'$ и $i \to i'$. Это означает, что $f \supset f'$ и $i \supset i'$. Если X — многообразие видимости, то граф $\widetilde{\mathrm{FIn}}$ не содержит вершин вида $\{\varnothing; \varnothing\}$. Однако этот граф слишком обширен для наших целей.

3.2.3. Введем на $\widetilde{\mathrm{FIn}}$ отношение эквивалентности: $\{f; i\} \sim \{f'; i'\}$ тогда и только тогда, когда или $f = f'$ — не пустое множество, или $f = f' = \varnothing$, $i = i'$. Это отношение согласовано со структурой ориентированного графа в том смысле, что если g и g' — представители различных классов эквивалентности и $g \to g'$ — ребро в $\widetilde{\mathrm{FIn}}$, то не существует представителей из этих классов, соединенных противоположно ориентированным ребром. Поэтому на фактор-множестве $\mathrm{FIn} = \widetilde{\mathrm{FIn}}/\sim$ возникает структура ориентированного графа: вершины $g, g' \in \mathrm{FIn}$ соединяются ребром $g \to g'$, если существуют представители

$\{f; i\} \in g$, $\{f'; i'\} \in g'$, для которых $\{f; i\} \to \{f'; i'\}$. Для вершин из FIn будем пользоваться обозначениями $g = \{f; \cdot\}$, если f не пусто, и $g = \{\varnothing; i\}$ в противном случае.

3.2.4. Группа Γ действует на графе FIn и очевидное отображение $\mathrm{FI} : \mathrm{An} \to \mathrm{FIn}$ сохраняет структуры ориентированных графов и эквивариантно относительно действий Γ.

3.3. Группы, связанные с графом FIn.

3.3.1. Для вершины f графа Fn обозначим через $a_f = \{\gamma \in \Gamma : f \subset \mathrm{Fix}(\gamma)\}$. Тогда a_f является единственной максимальной группой среди всех групп $a \subset \Gamma$, для которых $f \subset \mathrm{Fix}(a)$. В частности, если $f \subset \mathrm{Fix}(a)$, где $a \subset \mathrm{An}$, то $a \subset a_f$. Ясно, что группа a_f сохраняет вершину f.

Аналогично, для вершины i графа In множество $a_i = \{\gamma \in \Gamma : i \subset I(\gamma)\}$ является единственной максимальной группой среди всех групп $a \subset \Gamma$, для которых $i \subset I(a)$.

3.3.2. Для вершины g графа FIn определим группу a_g так: если $g = \{f; \cdot\}$, где f не пусто, то $a_g = a_f$; если $g = \{\varnothing; i\}$, то $a_g = a_i$. Ясно, что если $g = \mathrm{FI}(a)$, где $a \in \mathrm{An}$, то $a \subset a_g$, и что группа a_g сохраняет вершину g.

3.3.3. Подгруппу $a \subset \Gamma$ будем называть малой, если $\mathrm{Fix}(a) = \mathrm{Fix}(\gamma)$ для всех $\gamma \in a \setminus \mathrm{id}$. Ясно, что любая нетривиальная подгруппа малой группы является малой. Вершину g графа FIn будем называть минимальной, если $g = \{f; \cdot\}$, где $f \cap X$ не пусто, и группа a_g — малая.

3.3.4. Пусть $\varepsilon > 0$. Для каждой изометрии $\gamma : X \to X$ множество $C^\varepsilon(\gamma) = \{x \in X : \delta_\gamma(x) \leqslant \varepsilon\}$ выпукло. Для подгруппы $a \subset \Gamma$ определим множества $C^\varepsilon(a) = \bigcup_{\gamma \in a \setminus \mathrm{id}} C^\varepsilon(\gamma)$ и $G^\varepsilon(a) = \partial C^\varepsilon(a)$. Тогда для любой точки $x \in G^\varepsilon(a)$ и любой изометрии $\gamma \in a \setminus \mathrm{id}$ выполняется $\delta_\gamma(x) \geqslant \varepsilon$. При этом существует такая изометрия $\gamma' \in a$, что $\delta_{\gamma'}(x) = \varepsilon$.

Если g — вершина графа FIn, то через $C^\varepsilon(g)$, $G^\varepsilon(g)$ будем обозначать соответственно множества $C^\varepsilon(a_g)$, $G^\varepsilon(g)$.

3.3.5. **Лемма.** *Пусть* $0 < \varepsilon \leqslant \mu(n)$, g — *минимальная вершина графа* FIn. *Тогда для любой точки* $x \in C^\varepsilon(g)$ *или в графе* FIn *имеется ребро* $g \to \mathrm{FI} \circ \Gamma_\varepsilon(x)$, *или* $g = \mathrm{FI} \circ \Gamma_\varepsilon(x)$.

Доказательство. Пусть $x \in C^\varepsilon(g)$. Существует изометрия $\gamma \in a_g \setminus \mathrm{id}$ с $\delta_\gamma(x) \leqslant \varepsilon$, поэтому $\gamma \in \Gamma_\varepsilon(x)$. Так как группа a_g — малая, то $\mathrm{Fix}(a_g) = \mathrm{Fix}(\gamma) \supset \mathrm{Fix}(\Gamma_\varepsilon(x))$.

Пусть $g = \mathrm{FI}(a)$, где $a \in \mathrm{An}$. Тогда $a \subset a_g$ — малая группа и $g' = \{f; \cdot\}$, где $f = \mathrm{Fix}(\gamma)$. Обозначим $g' = \mathrm{FI} \circ \Gamma_\varepsilon(x)$. Если $g' = \{f'; \cdot\}$, где f' не пусто, то $f \supset f'$. Поэтому $g = g'$ или $g \to g'$ — ребро в графе FIn. Если $g' = \{\varnothing; i'\}$, где i' — концы в $X(\infty)$ всех инвариантных для $\Gamma_\varepsilon(x)$ прямых, то $i' \subset I(\gamma)$. Пусть $\tilde{a}$ — циклическая группа, порожденная изометрией γ. Тогда $\tilde{a} \subset a_g$ — малая группа и $\tilde{a} \in \mathrm{An}$. Поэтому вершина $\tilde{g} = (\mathrm{Fix} \times I)(\tilde{a})$ графа $\widetilde{\mathrm{FIn}}$ (см. п. 3.2.2) лежит в классе эквивалентности g и ясно, что $\tilde{g} \to g'$ — ребро в $\widetilde{\mathrm{FIn}}$.

По определению графа FIn, это означает, что $g \to g'$ — его ребро. Лемма доказана.

3.3.6. **Лемма.** *Пусть* $0 < \varepsilon \leqslant \mu(n)$, g — *вершина графа* FIn, *вида* $\{f;\ \cdot\}$, f *не пусто. Если* $\sup \delta_\Gamma < \varepsilon$, *то множество* $\mathrm{FI} \circ \Gamma_\varepsilon (G^\varepsilon(g)) \subset \subset \mathrm{FIn}$ *не содержит минимальных вершин.*

Доказательство. Допустим, что это не так, и $g' = \mathrm{FI} \times \times \Gamma_\varepsilon(x)$ — минимальная вершина для некоторой точки $x \in G^\varepsilon(g)$. Найдется изометрия $\gamma \in a_g$ с $\delta_\gamma(x) = \varepsilon$, поэтому $\gamma \in \Gamma_\varepsilon(x)$. Согласно 3.3.2 $\Gamma_\varepsilon(x) \subset a_{g'}$. Так как f не пусто, то $a_g = a_f$, поэтому $f \subset \mathrm{Fix}(\gamma)$. Поскольку группа $a_{g'}$ — малая и $\gamma \in \Gamma_\varepsilon(x) \subset a_{g'}$, то $f \subset \mathrm{Fix}(a_{g'})$. Поэтому $a_{g'} \subset a_f = a_g$. Тогда

$$\delta_\Gamma(x) = \delta_{\Gamma_\varepsilon(x)}(x) \geqslant \delta_{a_{g'}}(x) \geqslant \delta_{a_g}(x) = \varepsilon,$$

что противоречит условию. Лемма доказана.

3.4. Вершины и ребра графа FIn.

3.4.1. Лемма. *Каждая вершина графа* FIn *имеет один из следующих пяти типов:* $g = \{f;\ \cdot\}$ *и*

(1) f — *прямая в* X *и ее концы в* $X(\infty)$;

(2) f — *точка в* X;

(3) f — *точка в* $X(\infty)$;

(4) f — *пара различных точек в* $X(\infty)$;

(5) $g = \{\varnothing;\ i\}$ *и* i — *пара различных точек в* $X(\infty)$.

При этом если $g = \mathrm{FI}(a)$, *где* $a \in \mathrm{An}$, *то группа* a *конечная* $\leftrightarrow g$ *имеет тип* (1) *или* (2);

группа a *содержит параболическую изометрию* $\leftrightarrow g$ *имеет тип* (3);

группа a *содержит гиперболическую изометрию* $\leftrightarrow g$ *имеет тип* (4) *или* (5).

Доказательство. Согласно следствию 3.1.3 группа a не может содержать гиперболическую и параболическую изометрии одновременно. Если a не содержит параболических изометрий, то она является кристаллографической группой ранга k [4, предложение 2.3]. Так как X удовлетворяет аксиоме видимости, то $k \leqslant 1$. Поскольку, согласно условию теоремы 0.3, размерность множества неподвижных точек любой нетривиальной изометрии из Γ не превосходит 1, это доказывает импликацию «$\Rightarrow$» в случаях, когда группа a — конечная или содержит гиперболическую изометрию. Если a содержит параболическую изометрию, то по лемме 3.1.4 множество $\mathrm{Fix}(a)$ — точка в $X(\infty)$. Таким образом, граф FIn, кроме перечисленных, других типов вершин не имеет.

Ясно, что если g — вершина типа (1) или (2), то группа a — конечная. Если g — вершина типа (3), то группа a содержит параболическую изометрию, так как иначе a была бы кристаллографической ранга 1. Если g — вершина типа (4) или (5), то группа a бесконечная и не содержит параболических изометрий. Поэтому a — кристаллографическая группа ранга 1. Лемма доказана.

3.4.2. Любая вершина графа FIn типа (1) является, очевидно, минимальной. Если размерность многообразия X — четная и группа

Γ сохраняет ориентацию, то все вершины типа (2) и только они являются минимальными.

3.4.3. **Лемма.** *В графе* FI(An) *могут быть ребра только следующих типов* : (1) → (2), (1) → (3), (1) → (4), (1) → (5), (2) → (5), (4) → → (5).

Доказательство. Из определения графа FIn следует, что этот граф, кроме перечисленных в условии, может содержать еще ребра типов (3) → (5) и (4) → (3). Пусть $a \to a'$ — ребро в An. Тогда $\mathrm{Fix}(a) \supset \supset \mathrm{Fix}(a')$ и $I(a) \supset I(a')$. Поэтому наличие в графе FI (An) ребер типа (3) → (5) или (4) → (3) означало бы существование в An группы, содержащей одновременно гиперболическую и параболическую изометрии. Это противоречит следствию 3.1.3. Лемма доказана.

3.4.4. **Лемма.** *Граф* FI (An) *не содержит последовательностей ребер вида* $g_1 \leftarrow g \to g_2$, $g \to g_1 \leftarrow g'$, *где* g_1, g_2 — *различные вершины типа* (5), *а* g, g' — *различные вершины типа* (4).

Доказательство. Если $g \to g_1 = \mathrm{FI}\,(a \to a_1)$ — ребро графа FI (An) типа (4) → (5), то группа a является подгруппой в a_1 и ее неподвижные точки совпадают с концами инвариантных прямых группы a_1. Отсюда и вытекает утверждение леммы.

3.4.5. **Лемма.** *Пусть* $0 < \varepsilon \leqslant \mu(n)$, $x \in X_\varepsilon$, $\mathrm{FI} \circ \Gamma_\varepsilon(x)$ — *вершина графа* FIn *типа* (5). *Существует гиперболическая изометрия* $\gamma \in \Gamma_\varepsilon(x)$ *с* $\min\delta_\gamma \leqslant 2\varepsilon$.

Доказательство. Группа $\Gamma_\varepsilon(x)$ является кристаллографической ранга 1, поэтому обладает инвариантной прямой l. Если множество $\tilde{\Gamma}_\varepsilon(x)$ содержит гиперболическую изометрию, то минимум ее функции смещения $\leqslant \varepsilon$. В противном случае это множество содержит, по крайней мере, две эллиптические изометрии γ_1, γ_2, которые действуют на прямой l отражениями. Рассмотрим точку x', ближайшую к x на прямой l. Поскольку группа $\Gamma_\varepsilon(x)$ сохраняет l, то $\tilde{\Gamma}_\varepsilon(x) \subset \subset \tilde{\Gamma}_\varepsilon(x')$ и точка x' лежит в пересечении интервалов длины ε на прямой l, середины которых являются неподвижными точками изометрий γ_1, γ_2. Поэтому композиция $\gamma = \gamma_1 \cdot \gamma_2$ является гиперболической изометрией с $\min\delta_\gamma \leqslant 2\varepsilon$. Лемма доказана.

3.4.6. **Лемма.** *Пусть* $0 < \varepsilon \leqslant \frac{1}{2}\mu(n)$. *Тогда граф* $\mathrm{FI} \circ \Gamma_\varepsilon(X_\varepsilon)$ *не содержит последовательностей ребер вида* $g_1 \leftarrow g \to g_2$, *где различные вершины* g_1, g_2 *имеют тип* (5), *а вершина* g — *тип* (2).

Доказательство. Пусть $g_1 = \{\varnothing; i_1\}$ — вершина типа (5). Согласно лемме 3.1.5 в X существует прямая l_1 с концами i_1, инвариантная для группы a_{g_1}. Если $g = \{f;\ \cdot\}$ — вершина типа (2) и $g \to g_1$ ребро в графе FI (An), то найдется группа $a \in \mathrm{An}$, $\mathrm{FI}(a) = g$, сохраняющая множество i_1. Поэтому a сохраняет прямую l_1, а тогда $f \in l_1$.

Таким образом, если в графе $\mathrm{FI} \circ \Gamma_\varepsilon(X_\varepsilon)$ имеется указанная в условии последовательность ребер, инвариантные для групп a_{g_1}, a_{g_2} прямые l_1 и l_2 пересекаются в точке f, где $g = \{f;\ \cdot\}$. По лемме 3.5.4 в группах a_{g_1}, a_{g_2} имеются сдвиги этих прямых на расстояние $\leqslant 2\varepsilon \leqslant \leqslant \mu(n)$. По лемме Маргулиса, эти сдвиги порождают группу, содержащую кристаллографическую группу ранга $\geqslant 2$,что для многообразий видимости невозможно. Лемма доказана.

3.4.7. Следствие. *Пусть* $0 < \varepsilon \leqslant \frac{1}{2}\mu(n)$, $V \subset X_\varepsilon$ — *линейно связное подмножество. Если граф* $\mathrm{FI} \circ \Gamma_\varepsilon(V)$ *не содержит вершин типа* (1), *то* $\mathrm{FI} \circ \Gamma_\varepsilon(V)$ *содержит не более одной вершины типа* (4) *и не более одной вершины типа* (5).

Действительно, граф $\mathrm{FI} \circ \Gamma_\varepsilon(V)$ связен. Поэтому утверждение вытекает из лемм 3.4.3, 3.4.4 и 3.4.6.

3.4.8. **Лемма.** *Пусть* $0 < \varepsilon \leqslant \mu(n)$, $V \subset X_\varepsilon$ — *линейно связное подмножество. Если граф* $\mathrm{FI} \circ \Gamma_\varepsilon(V)$ *не содержит вершин типа (1) и содержит вершину* g *типа (3), то* $\mathrm{FI} \circ \Gamma_\varepsilon(V) = g$.

Это вытекает из связности графа $\mathrm{FI} \circ \Gamma_\varepsilon(V)$ и леммы 3.4.3.

3.5. Минимальные вершины графа FIn.

3.5.1. **Лемма.** *Пусть* $g = \{f;\ \cdot\}$ — *минимальная вершина графа* FIn, *число* $\varepsilon > 0$. *Существует такая постоянная* $R = R(\varepsilon, g)$, *зависящая только от* ε *и порядка группы* a_g, *что множество* $C^\varepsilon(g)$ *(см. п. 3.3.4) содержится в трубчатой окрестности* $U_R(f) = \{x \in X : d(x, f) \leqslant R\}$ *множества* f.

Доказательство. Пусть изометрия $\gamma \in a_g \setminus \mathrm{id}$, $x \in f$, $f_x^\perp$ — подпространство в касательном пространстве T_xX, ортогональное f. Так как $\gamma(x) = x$, то γ действует на $f_x^\perp$ как ортогональное преобразование. Согласно условию изометрия γ не имеет неподвижных векторов в $f_x^\perp \setminus \{0\}$. Поэтому функция смещения для γ имеет положительный минимум на единичной сфере в $f_x^\perp$, причем этот минимум зависит только от порядка γ. Утверждение леммы теперь очевидно.

3.5.2. Пусть $g = \{f;\ \cdot\}$ — минимальная вершина. Так как множество $C^\varepsilon(\gamma)$, $\gamma \in \Gamma$, выпукло, то для любой точки $x \in C^\varepsilon(g)$ отрезок $[xx']$ лежит в $C^\varepsilon(g)$, где x' — ближайшая к x точка из f. Более того, любой луч в X с вершиной на f, ортогональный f, пересекает множество $C^\varepsilon(g)$ по отрезку. В этом смысле множество $C^\varepsilon(g)$ звездно относительно f. Поэтому его граница $G^\varepsilon(g)$ и дополнение $X \setminus C^\varepsilon(g)$ линейно связны, если $\dim X \geqslant 3$ или $\dim X = 2$ и группа Γ сохраняет ориентацию.

3.5.3. **Лемма.** *Пусть* $0 < \varepsilon \leqslant \mu(n)$, g — *минимальная вершина графа* FIn. *Допустим, что граф* $\mathrm{FI} \circ \Gamma_\varepsilon(G^\varepsilon(g))$ *не содержит минимальных вершин. Тогда он не содержит вершин типа (3).*

Доказательство. Так как множество $V = G^\varepsilon(g)$ линейно связно, то граф $\mathrm{FI} \circ \Gamma_\varepsilon(V)$ связен. Допустим, что он содержит вершину g' типа (3). Тогда по лемме 3.4.8 $\mathrm{FI} \circ \Gamma_\varepsilon(V) = g'$. Пусть $g' = \{f';\ \cdot\}$, где f' — точка в $X(\infty)$, $g = \{f;\ \cdot\}$. Согласно лемме 3.3.5 в графе FIn имеется ребро $g \to g'$, поэтому g — вершина типа (1) и f' — один из концов прямой f. Будем рассматривать f как геодезическую $f: R \to X$, причем $f(-\infty) = f'$.

Так как граф $\mathrm{FI} \circ \Gamma_\varepsilon(V)$ не содержит вершину g, то для любой точки $x \in V$ существует изометрия $\gamma \notin a_g$ с $\delta_\gamma(x) \leqslant \varepsilon$. Поскольку $\Gamma_\varepsilon(x) \subset a_{g'}$, то $\gamma \in a_{g'}$. Пусть $\tilde{x}$ — ближайшая к x точка на прямой f, число $R = R(\varkappa, g)$, как в лемме 3.5.1. Тогда $\delta_\gamma(\tilde{x}) \leqslant 2R + \varepsilon$. Так как любую точку $\tilde{x} \in f \cap X$ можно представить как ближайшую к некоторой точке $x \in V$, а функции смещения изометрий из $a_{g'} \setminus a_g$ строго возрастают вдоль f, то находим последовательность попарно различных изометрий $\gamma_i \in a_{g'} \setminus a_g$, которые смещают некоторую фиксированную точку на $f \cap X$ на расстояние, ограниченное числом $2R + \varepsilon$. Это противоречит дискретности действия группы Γ. Лемма доказана.

3.5.4. **Предложение.** *Пусть $0 < \varepsilon \leqslant \frac{1}{2}\mu(n)$, g — вершина графа* FIn *типа* (1). *Допустим, что граф* $\mathrm{FI} \circ \Gamma_\varepsilon(G^\varepsilon(g))$ *не содержит минимальных вершин. Тогда для любой вершины g' из этого графа группа $a_{g'}$ сохраняет g.*

Доказательство. Пусть $V = G^\varepsilon(g)$. По условию граф $\mathrm{FI} \circ \Gamma_\varepsilon(V)$ не содержит вершин типа (1), по лемме 3.5.3 он не содержит вершин типа (3), а по следствию 3.4.7 содержит не более одной вершины типа (4) или типа (5). Пусть $g = \{f; \cdot\}$, где f — прямая в X и ее концы в $X(\infty)$, $g' \in \mathrm{FI} \circ \Gamma_\varepsilon(V)$. По лемме 3.3.5 в графе FIn имеется ребро $g \to g'$.

1. Пусть $g' = \{f'; \cdot\}$ — вершина типа (4), прямая l' с концами f', как в лемме 3.1.5. Тогда $f \supset f'$, и поскольку группа a_g сохраняет концы f' прямой f, а f — единственная прямая с концами f', инвариантная для a_g, то $f = l'$. Поэтому группа $a_{g'}$ сохраняет прямую f, а значит, и вершину g графа FIn. Если к тому же граф $\mathrm{FI} \circ \Gamma_\varepsilon(V)$ содержит вершину g'' типа (5), $g'' = \{\varnothing; i''\}$, то в силу связности и леммы 3.4.3 он содержит ребро $g' \to g''$. Как и в лемме 3.4.4, получаем, что $l'' = l'$, а значит, группа $a_{g''}$ сохраняет прямую l' и вершину g графа FIn.

2. Если $g_0 \to g'$ — ребро графа $\mathrm{FI} \cdot \Gamma_\varepsilon(V)$ типа (2) $\to$ (5), то по лемме 3.4.6 группа a_{g_0} сохраняет вершину g', поэтому $a_{g_0} \subset a_{g'}$. Теперь если группа $a_{g'}$ сохраняет вершину g, то a_{g_0} также сохраняет вершину g. Из связности графа $\mathrm{FI} \circ \Gamma_\varepsilon(V)$ и п. 1 вытекает утверждение предложения в случае, когда $\mathrm{FI} \circ \Gamma_\varepsilon(V)$ содержит вершину типа (4).

3. Допустим, что граф $\mathrm{FI} \circ \Gamma_\varepsilon(V)$ содержит различные вершины g_1, g_2 типа (2). Так как в FIn имеются ребра $g \to g_i$, то точки $f_i \in f$, где $g_i = \{f_i; \cdot\}$, $i = 1, 2$. Из связности графа $\mathrm{FI} \circ \Gamma_\varepsilon(V)$ и леммы 3.4.3 следует, что существует вершина $g' \in \mathrm{FI} \circ \Gamma_\varepsilon(V)$ типа (5), для которой $g_1 \to g \leftarrow g_2$. Поэтому точки f_1, f_2 лежат на инвариантной прямой l' вершины g', а значит, $l' = f$, и группа $a_{g'}$ сохраняет вершину g. Как и в п.2, получаем утверждение предложения для этого случая.

4. Допустим, что $\mathrm{FI} \circ \Gamma_\varepsilon(V) = g'$, где $g' = \{f'; \cdot\}$ — вершина типа (2). Тогда $f' \in f$. Как и в доказательстве леммы 3.5.3, для любой точки $\tilde{x} \in f$ находим изометрию $\gamma \in a_{g'} \setminus a_g$, смещающую эту точку на расстояние $\leqslant 2R(\varepsilon, g) + \varepsilon$. Так как группа $a_{g'}$ сохраняет точку f', то функции смещения изометрий из $a_{g'} \setminus a_g$ строго возрастают вдоль каждого из лучей на f с вершиной f'. Как и в лемме 3.5.3, получаем противоречие с дискретностью действия группы Γ. Поэтому граф $\mathrm{FI} \circ \Gamma_\varepsilon(V)$ не может вырождаться в вершину типа (2).

5. Остается рассмотреть случай, когда граф $\mathrm{FI} \circ \Gamma_\varepsilon(V)$ содержит вершину g' типа (5) и при этом или $\mathrm{FI} \circ \Gamma_\varepsilon(V) = \{g'\}$, или $\mathrm{FI} \times \Gamma_\varepsilon(V) = \{g'' \to g'\}$, где g'' — вершина типа (2). Согласно п. 2 в любом случае множество $\Gamma_\varepsilon(V)$ содержится в группе $a_{g'}$.

Допустим, что $a_{g'}$ не сохраняет вершину g. Пусть l' — прямая в X с концами i', где $g' = \{\varnothing; i'\}$, инвариантная для $a_{g'}$. Так как в графе FIп имеется ребро $g \to g'$, то в группе a_g существует нетривиальная изометрия, которая сохраняет i', а значит, и прямую l'. Поэтому прямые f и l' либо совпадают, либо пересекаются под прямым углом. Но $f \neq l'$, поскольку группа $a_{g'}$ не сохраняет вершину g. Пусть $x_0 = f \cap l'$. Как и в лемме 3.5.3, для любой точки $\tilde{x} \in f$ находим изометрию $\gamma \in a_{g'} \setminus a_g$, смещающую эту точку на расстояние $\leqslant 2R + \varepsilon$. Так как группа $a_{g'}$ сохраняет прямую l', а l' и f пересекаются ортогонально, то функции смещения всех изометрий из $a_{g'} \setminus a_g$ не убывают и не ограничены вдоль каждого из лучей на f с вершиной x_0. Как в лемме 3.5.3, получаем противоречие с дискретностью действия группы Г. Поэтому группа $a_{g'}$ сохраняет вершину g. Предложение доказано.

3.5.5. **Лемма.** *Допустим, что* $\sup \delta_\Gamma < \varepsilon \leqslant \frac{1}{2}\mu(n)$. *Тогда множества вида* $C^\varepsilon(g)$ *для различных вершин* g *типа* (1) *графа* $\mathrm{FI} \circ \Gamma_\varepsilon(X_\varepsilon)$ *не пересекаются. В частности, множество*

$$Y = X \setminus \bigcup \{C^\varepsilon(g) : g \in \mathrm{FI} \circ \Gamma_\varepsilon(X_\varepsilon) \text{ — вершина типа } (1)\}$$

линейно связно.

Доказательство. Пусть $g \in \mathrm{FI} \circ \Gamma_\varepsilon(X_\varepsilon)$ — вершина типа (1). По лемме 3.3.6 граф $\mathrm{FI} \circ \Gamma_\varepsilon(G^\varepsilon(g))$ не содержит минимальных вершин. Поэтому согласно предложению 3.5.4 для любой вершины $g' \in \mathrm{FI} \circ \Gamma_\varepsilon(G^\varepsilon(g))$ группа $a_{g'}$ сохраняет вершину g'.

Пусть $g_1 = \{f_1; \cdot\}$, $g_2 = \{f_2; \cdot\}$ — различные вершины графа $\mathrm{FI} \circ \Gamma_\varepsilon(X_\varepsilon)$ типа (1). Тогда, поскольку $f_1 \neq f_2$, по лемме 3.1.5 концы этих прямых не совпадают. Поэтому ни одно из множеств $C^\varepsilon(g_i)$, $i = 1, 2$, не содержится в другом. Если эти множества пересекаются, то пересекаются и их границы $G^\varepsilon(g_i)$, $i = 1, 2$. Тогда для любой точки $x \in G^\varepsilon(g_1) \cap G^\varepsilon(g_2)$ группа $a_{g'}$, где $g' = \mathrm{FI} \circ \Gamma_\varepsilon(x)$, сохраняет как вершину g_1, так и вершину g_2. Но такое невозможно, так как концы прямых f_1 и f_2 не совпадают, а группа $a_{g'}$ нетривиальна. Лемма доказана.

3.6. Доказательство теоремы 0.3. Допустим, что $\sup\delta_\Gamma < \varepsilon \leqslant \frac{1}{2}\mu(n)$. Тогда $X_\varepsilon = X$. Пусть множество $Y \subset X$, как в лемме 3.5.5. Тогда это множество линейно связно, Г инвариантно, и по построению граф $\mathrm{FI} \circ \Gamma_\varepsilon(Y)$ не содержит вершин типа (1). По следствию 3.4.7 и лемме 3.4.8 этот граф содержит не более одной вершины каждого из типов (3), (4) и (5), причем если нет вершин типа (5), то в $\mathrm{FI} \circ \Gamma_\varepsilon(Y)$ не более одной вершины типа (2). Так как граф $\mathrm{FI} \circ \Gamma_\varepsilon(V)$ связен и Г-инвариантен, то в любом случае он содержит вершину, которую сохраняет вся группа Г. Тогда Г имеет в $X \cup X(\infty)$ инвариантную прямую или точку. Как и в доказательстве теоремы 0.2, получаем противоречие с конечностью супремума $\sup\delta_\Gamma$. Поэтому $\sup\delta_\Gamma \geqslant \geqslant \frac{1}{2}\mu(n)$. Теорема доказана.

3.7. Доказательство теоремы 0.4. Считаем, переходя при необходимости к подгруппе индекса 2, что группа Γ сохраняет ориентацию. Если $n = 3$, то размерность множества неподвижных точек любой нетривиальной изометрии из Γ не превосходит 1 и утверждение следует из теоремы 0.3. Если $n = 2$, то граф FIn не содержит вершин типа (1) и для него справедливы утверждения следствия 3.4.7 и леммы 3.4.8. Доказательство в этом случае завершается, как в п. 3.6, при этом роль множества Y играет само многообразие X.

Список литературы: 1. *Бураго Ю. Д., Залгаллер В. А.* Геометрические неравенства. Л., 1980. 288 с. 2. *Buser P., Rarcher H.* Cromov's almost flat manifolds. Asterique. 1981. **81**. 148 S. 3. *Ballmann W., Gromov M., Schroeder V.* Manifolds of nonpositive curvature // Progr. Math. Birkhäuser. 1985. **61**. S. 10—15. 4. *Gromov M.* Manifolds of negative curvature // J. Diff. Geom. 1978. **13**, N 2. P. 223—230. 5. *Буяло С. В.* Объем и фундаментальная группа многообразия неположительной кривизны // Мат. сб. 1983. **122** (164), № 2(10). С. 142—156.

Поступила в редколлегию 19.06.89

УДК 514.17

А. М. ГУРИН

БЕСКОНЕЧНЫЕ ВЫПУКЛЫЕ МНОГОГРАННИКИ С РАВНОУГОЛЬНЫМИ ГРАНЯМИ

Строение замкнутых выпуклых многогранников в R^3 с правильными гранями было изучено в работах Н. Джонсона [1] и В. А. Залгаллера [2]. Расширение этого класса за счет допущения граней, разбитых на правильные «условными» ребрами (без введения новых вершин), рассмотрено Б. А. Ивановым [3] и завершено Ю. А. Пряхиным [4]. Строение выпуклых многогранников с равноугольными, а также с «паркетными» гранями (разбитыми условными ребрами на равноугольные) рассмотрено Ю. А. Пряхиным [5], а с равноугольными вершинами — автором [6—10].

Обратимся к бесконечным выпуклым многогранникам с ограниченными гранями, понимая под этим состоящую из нигде не сгущающихся ограниченных многоугольных граней некомпактную границу выпуклого тела в R^3. Таких многогранников с правильными гранями (даже при допущении условных ребер) не существует (см. [2]). Нет их и с равноугольными гранями, это следует из лемм 2—4 [5].

Многогранники, у которых одновременно и число граней бесконечно, и некоторые из граней не ограничены, мы рассматривать не будем.

Обратимся к выпуклым многогранникам с конечным числом граней, некоторые из которых бесконечны. Среди них могут быть, в частности, многогранники с равноугольными вершинами и многогранники с равноугольными гранями. Первые представляют мало нового ввиду следующего результата.

Лемма. *Каждый бесконечный многогранник с равноугольными вершинами совместим с одним из замкнутых многогранников с равноугольными вершинами так, что все его ограниченные грани совпадут с соответственными гранями замкнутого многогранника, а бесконечные грани при совмещении с ограниченными образуют край того или иного выпуклого многогранника с краем. Бесконечный же многогранник с равноугольными гранями (рис. 1) может не иметь себе подобного прототипа среди замкнутых многогранников с равноугольными гранями.*

Первое предложение леммы проверяется сопоставлением бесконечных [6] и замкнутых [7, 8, 9, 10] многогранников с равноугольными вершинами. Второе предложение устанавливается непосредственно по приведенному на рис. 1 примеру.

Настоящая работа посвящена вопросу о возможном строении бесконечных выпуклых многогранников с равноугольными гранями.

Будем обозначать бесконечную равноугольную грань символом β_n, где n равно числу конечных ребер. Величина плоского угла $\theta(\beta_n)$ грани имеет произвол изменения в пределах от $\pi n/(n+1)$ до π. Следовательно, если вершина многогранника инцидентна бесконечному ребру, то последнее можно заменить (или расщепить) гранью β_0. Этот процесс, вообще говоря, неограничен, поэтому будем говорить об исходном типе вершины A, понимая под этим, что исключены все расщепления бесконечных ребер, инцидентных вершине A, которые не ведут к вырождению вершины. Например, тип вершины $(\beta_1, \beta_2, 3)$ означает трехгранную вершину, которой инцидентно одно бесконечное ребро (рис. 2, *а*); тип вершины $(\beta_0, \beta_1, \beta_1)$ означает трехгранную вершину, которой инцидентны два бесконечных ребра (рис. 2, *б*), которые не могут быть объединены в одно ребро при помощи удаления грани β_0, так как это ведет к вырождению вершины, т. е. это исходные типы вершин.

Бесконечный выпуклый многогранник с равноугольными гранями будем называть исходным, если его вершины, инцидентные бесконечным ребрам, являются исходными вершинами.

Теорема. *С точностью до комбинаторной эквивалентности существует только конечное число различных бесконечных выпуклых исходных многогранников с равноугольными гранями, кроме трех серий многогранников, представители которых изображены на рис. 3.*

Заметим, что символ, например $(\beta_2, \beta_2, 3)$ или сокращенно $(\beta_2^2, 3)$, можно трактовать двумя способами. Один из них — это исходный тип вершины (рис. 4, *а*), второй — вершина, которой не инцидентны бесконечные ребра (рис. 4, *б*). Такие вершины будем относить к исходным типам вершин. Множество типов вершин, которым инцидентны лишь ограниченные равноугольные грани, совпадает с типами вершин, перечисленными для правильногранных многогранников [2]. Найдем типы вершин, которым инцидентна хотя бы одна бесконечная равноугольная грань.

Лемма 1. *Возможные исходные типы вершин многогранника с равноугольными гранями содержатся в табл. 1, а в табл. 2 перечислены типы вершин, которые имеют лишь одну бесконечную грань.*

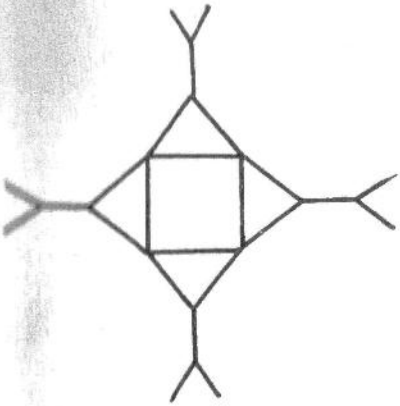


Рис. 1

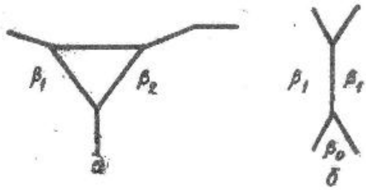


Рис. 2

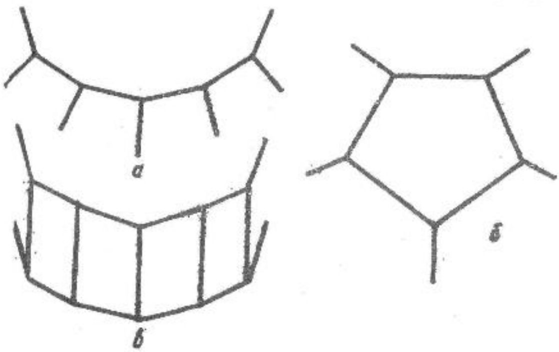


Рис. 3

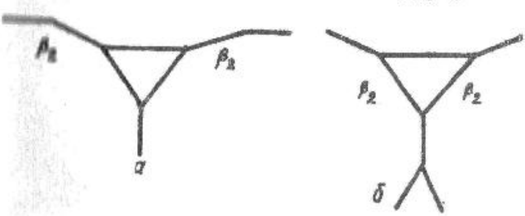


Рис. 4

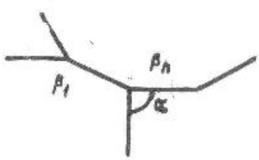


Рис. 5

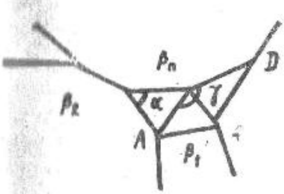


Рис. 6

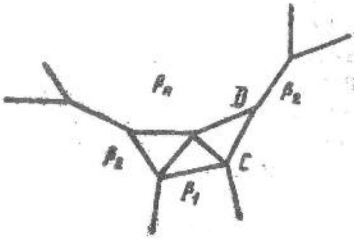


Рис. 7

Таблица 1

$(\beta_0, \beta_0, \beta_0)$; $(\beta_0, \beta_k, \beta_n)$, $k, n=\overline{1, \infty}$;
(β_1, β_1, n), $n=\overline{3, \infty}$; $(\beta_1, \beta_1, \beta_n)$, $n=\overline{2, \infty}$;
$(\beta_1, \beta_1, 3, n)$, $n=3, 4, 5$; (β_1, β_2, n), $n=\overline{3, 11}$;
$(\beta_1, \beta_2, \beta_n)$, $n=2, 3, 4$; $(\beta_1, \beta_2, 3, 3)$;
(β_1, β_3, n), $n=\overline{3, 7}$; $(\beta_1, \beta_3, 3, 3)$;
(β_1, β_4, n), $n=\overline{3, 6}$; $(\beta_1, \beta_4, 3, 3)$;
(β_1, β_5, n), $n=3, 4, 5$; ... ; (β_1, β_8, n), $n=3, 4, 5$;
(β_1, β_m, n), $n=3, 4$, $m=\overline{9, \infty}$; (β_2, β_2, n), $n=3, 4, 5$;
(β_2, β_3, n), $n=3, 4$; (β_2, β_4, n), $n=3, 4$;
$(\beta_2, \beta_n, 3)$, $n=\overline{5, \infty}$; $(\beta_3, \beta_n, 3)$, $n=\overline{3, 10}$;
$(\beta_4, \beta_n, 3)$, $n=4, 5, 6$.

Таблица 2

$(\beta_2, 3, n)$, $n=\overline{4, \infty}$; $(\beta_2, 3, 3, n)$, $n=3, 4, 5$;
$(\beta_2, 3, n, 3)$, $n=3, 4, 5$; $(\beta_2, 4, n)$, $n=\overline{4, 11}$;
$(\beta_2, 5, n)$, $n=5, 6, 7$; $(\beta_3, 3, n)$, $n=\overline{4, 23}$;
$(\beta_3, 3, 3, n)$, $n=3, 4$; $(\beta_3, 3, n, 3)$, $n=3, 4$;
$(\beta_3, 4, n)$, $n=\overline{4, 7}$; $(\beta_3, 5, 5)$;
$(\beta_4, 3, n)$, $n=\overline{4, 14}$; $(\beta_4, 3, 3, n)$, $n=3, 4$;
$(\beta_4, 3, n, 3)$, $n=3, 4$; $(\beta_4, 4, n)$, $n=4, 5, 6$;
$(\beta_5, 3, n)$, $n=\overline{5, 11}$; $(\beta_m, 3, 3, 3)$, $m=\overline{5, \infty}$;
$(\beta_n, 4, 4)$, $n=\overline{5, \infty}$; $(\beta_n, 4, 5)$, $n=\overline{5, 8}$;
$(\beta_6, 3, n)$, $n=\overline{5, 10}$; $(\beta_7, 3, n)$, $n=\overline{5, 9}$;
$(\beta_8, 3, n)$, $n=\overline{5, 8}$; $(\beta_9, 3, n)$, $n=\overline{5, 8}$;
$(\beta_{10}, 3, n)$, $n=\overline{5, 8}$; $(\beta_{11}, 3, n)$, $n=\overline{5, 7}$; ... ;
$(\beta_{20}, 3, n)$, $n=\overline{6, 7}$; $(\beta_m, 3, n)$, $n=6$, $m=\overline{21, \infty}$.

Лемма. 2. *Вершина* $(\beta_0, \beta_1, \beta_n)$, *начиная с* $n \geqslant 5$, *принадлежит лишь серии многогранников, представитель которой изображен на рис. 3, а.*

Доказательство. По свободному углу α (рис. 5) можно подклеить лишь бесконечную грань. Пусть $n \geqslant 5$, тогда угол α будет меньше 120°, следовательно, можно подклеить лишь грань β_1. Этот процесс ограничивается лишь значением n. Лемма доказана.

Лемма 3. *Вершина* $(\beta_0, \beta_2, \beta_n)$ *не принадлежит многограннику с равноугольными гранями, начиная с* $n \geqslant 11$.

Доказательство. Пусть $n \geqslant 11$, тогда по свободному углу α (рис. 6) можно подклеить лишь ограниченную грань, а именно треугольник. Угол γ равен $\theta(\beta_2)$, т. е. его пределы изменения такие: $[\theta(\beta_2), 135°]$. Имеем варианты подклейки: $6, 7, 3+3, \beta_2$. В вершине A

сумма новых плоских углов граней может быть только меньше 180°, так как уже есть по крайней мере 180°. Кроме того, один из плоских углов будет принадлежать бесконечной грани, т. е. его величина не меньше 90°. Значит, если к вершине A, кроме бесконечной грани, подклеивается ограниченная, то это треугольник, а по свободному углу γ имеем подклейку $3+3$ (рис. 6). Вершина C уже определенно имеет минимум углов граней: $3+3+\beta_1+\beta_1$, т. е. вторая грань β_1 на самом деле подклеивается по ребру DC. Но тогда в вершине D имеем 315° — как минимум. Следовательно, в наборе граней вершины C вторая бесконечная грань не может быть β_1, иначе ее бесконечное ребро совместится с конечным ребром грани β_n. Пусть вторая бесконечная грань — β_2 (рис. 7). Получили свободный угол, который имеет одну сторону бесконечной, но бесконечную грань нельзя подклеить, так как величина плоского угла равна 60°. Пусть вторая бесконечная грань — β_3. Наметилась периодичность построений вокруг грани β_n. Но при $n \geqslant 11$ сумма плоских углов в вершине D будет больше или равна 360°.

Поскольку второй способ подклейки грани β_1 в вершине A — без ограниченной грани, ведет к противоречию, то подклеим вместо β_1 грань β_2. Сразу отметим, что β_3 исключается аналогично предыдущему, начиная с $n \geqslant 11$. Если же подклеим β_2, то n может быть как угодно большим (рис. 8), но зато получим свободный угол, который имеет одну сторону бесконечной. Подклейка по нему бесконечной грани исключена ввиду его равенства 60°. Лемма доказана.

Лемма 4. *Вершины* $(\beta_0, \beta_3, \beta_n)$, $(\beta_0, \beta_4, \beta_n)$, $(\beta_0, \beta_5, \beta_n)$ *не принадлежат многограннику с равноугольными гранями, начиная с* n, *равного соответственно* 11, 7, 5.

Доказательство. Рассмотрим вершину типа $(\beta_0, \beta_3, \beta_n)$. Этот тип вершины образует свободный угол, к которому аналогично случаю для вершины $(\beta_0, \beta_2, \beta_n)$ следует подклеить ограниченную грань. И, начиная с $n \geqslant 11$, в новой вершине будет больше или равно 360°. В случае типов вершин $(\beta_0, \beta_4, \beta_n)$ и $(\beta_0, \beta_5, \beta_n)$ сумма соответствующих углов в новой вершине будет больше или равной 360°, начиная с n соответственно 7 и 5.

Лемма 5. *Вершина* (β_1, β_1, n), *начиная с* $n \geqslant 12$, *принадлежит лишь серии многогранников, представитель которой изображен на рис. 3, б; вершина* $(\beta_1, \beta_1, \beta_n)$, *начиная с* $n \geqslant 5$, *принадлежит лишь серии многогранников, представитель которой изображен на рис.3,а.*

Доказательство здесь аналогично доказательству леммы 2.

Лемма 6. *Вершина* (β_1, β_m, n) *при* $n = 3$ *и* $m \geqslant 11$ *не принадлежит многограннику с равноугольными гранями, а при* $n = 4$ *и* $m \geqslant 9$ *принадлежит лишь серии многогранников, представитель которой изображен на рис. 3, в.*

Доказательство. Рассмотрим случай $n = 3$ (рис. 9). Исходная трехгранная вершина имеет в сумме больше 330° плоских углов. Вершина A инцидентна бесконечному ребру, следовательно, в ее составе по крайней мере две бесконечные грани β_1, а ограниченных граней может быть либо две, либо одна. Если вторая бесконечная грань в вершине A есть β_1, то ограниченных граней в вершине A ровно две,

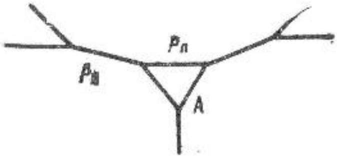


Рис. 8

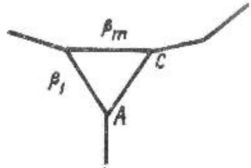


Рис. 9

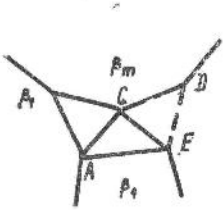


Рис. 10

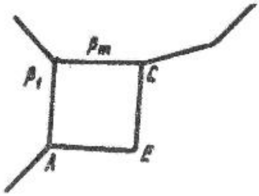


Рис. 11

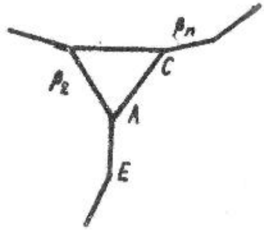


Рис. 12

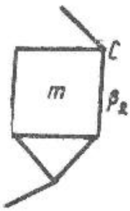


Рис. 13

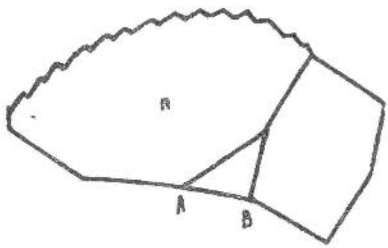


Рис. 14

что следует из того, что в противном случае β_1 образует свободный угол с гранью β_m, в который ничего нельзя подклеить с сохранением выпуклости ввиду образующих угла: одно бесконечное ребро и одно конечное. Поскольку в вершине A уже есть треугольник, а $\theta(\beta_1) \geqslant 105°$, то вторая ограниченная грань может быть лишь треугольником. Причем треугольник можно подклеить лишь так, чтобы не замкнуть вершину C (рис. 10), так как в противном случае плоский угол треугольника будет равен плоскому углу грани β_1, что невозможно. Замкнуть вершину C можно лишь третьим треугольником (пунктир). К вершине E уже нельзя подклеить ограниченную грань, следовательно, бесконечная грань, подклеенная к вершине E, будет инцидентна и вершине D. Уже отмечалось, что β_1 и β_2, примененные в аналогичных ситуациях, составят с гранью β_m углы, в которые ничего нельзя подклеить. А, начиная с $m \geqslant 11$, при подклейке грани β_3 сумма углов в вершине D будет больше или равной 360°.

Пусть теперь вторая бесконечная грань в вершине A есть β_2. Она, как и β_1, не может выйти на грань β_m, замкнув или не замкнув вершину C. Введем вторую ограниченную грань в вершине A. Это может быть лишь треугольник. Затем подклеивается еще один треугольник к вершине C (рис. аналогичен рис. 10) и устанавливается теперь, что к ребру ED ничего нельзя подклеить, так как единственная возможность — бесконечная грань β_1 — образует с гранью β_m свободный угол, в который ничего нельзя подклеить. Наконец, любая замена второй бесконечной грани на грань β_i, где $i = 3, \ldots$, исключена ввиду одного из противоречий: либо β_i выходит на грань β_m, и при $m \geqslant 11$ сумма плоских углов в вершине C больше или равна $360°$; либо β_i отделена от β_m в вершине A второй ограниченной гранью, и тогда в вершине A при $m \geqslant 11$ сумма углов больше или равна $360°$.

Рассмотрим случай $n = 4$ (рис. 11), здесь свободный угол вершины C имеет пределы изменения $(90°, 108°)$. Но подклеивается только одна грань — только ограниченная и только четырехугольник. Поэтому в вершине A из бесконечных граней может быть подклеена еще только β_k, где $k = m$. Действительно, подклеив β_1, необходимо затем и в вершине E подклеить вторую грань β_1, что даст сумму углов в вершине $360°$, а подклеив грань β_k, где $k \geqslant 2$, получим в вершине E сумму углов не меньше $300°$, что исключает подклейку какой-либо еще грани к вершине E. Поскольку число четырехугольников определяется лишь значением m грани β_m, а значение k определяется числом четырехугольников, то $k = m$. Получили бесконечную серию многогранников (рис. 3, *в*). Лемма доказана.

Лемма 7. *Вершина* $(\beta_2, \beta_n, 3)$, *начиная с* $n \geqslant 11$, *не принадлежит многограннику с равноугольными гранями.*

Доказательство. Вершина типа $(\beta_2, \beta_n, 3)$ может быть образована двумя способами: либо грани β_2 и β_n граничат по конечному ребру, либо — по бесконечному. Первый случай фактически рассмотрен в ходе доказательства леммы 3. Рассмотрим второй случай (рис. 12). Свободный угол вершины C имеет пределы изменения $[120°, 135°)$. Если подклеить бесконечную грань β_2, то получим один свободный угол, образованный бесконечным ребром и конечным ребром, равный по величине $60°$, т. е. грань β_2 нельзя подклеить к вершине C. Аналогично получим противоречие, если подклеим грань β_1. Начиная с $n \geqslant 11$, подклейка грани β_i, где $i = 3, \ldots$, составит в вершине C сумму плоских углов, больше или равную $360°$. Из ограниченных граней допустимы лишь такие: 6 и 7. Если подклеим одну из них, то в вершине A сумма плоских углов будет не меньше $300°$. Следовательно, подклеенная грань проходит по ребру AE. Но тогда ее плоский угол равен $\theta(\beta_n)$, что невозможно. Лемма доказана.

Лемма 8. *Вершины* $(\beta_m, 3, n)$, $n = 5, 6$, $(\beta_m, 3, 3, 3)$ *и* $(\beta_2, 3, m)$, *начиная с* m, *равного соответственно 11, 11, 4, не принадлежат многогранникам с равноугольными гранями; а вершина* $(\beta_m, 4, 4)$, *начиная с* $m \geqslant 9$, *принадлежит лишь серии многогранников, представитель которой изображен на рис. 3, в.*

Доказательство. Что касается бесконечных серий типов вершин $(\beta_m, 3, n)$, $(\beta_m, 3, 3, 3)$ и $(\beta_m, 4, 4)$, где m не ограничено, то каждая из бесконечных граней, входящих в состав вершины, имеет тот или иной край с бесконечным ребром, тип вершины которой описан в леммах 2—7 и там же указано ограничение на m. Осталось рассмотреть вершину (β_2, 3, m), $m = 4$, ... (рис. 13). Свободный угол вершины C может быть заклеен только бесконечной гранью, начиная с $m = 4$. При этом величина свободного угла вершины C равна 60°, что исключает подклейку какой-либо бесконечной грани. Лемма доказана.

Лемма 9. *Бесконечный многогранник с равноугольными гранями не имеет вершин типа* (3, 6, n), (4, 4, n), (3, 3, 3, n) *при* n, *большем или равном соответственно 12, 30, 42.*

Для доказательства леммы воспользуемся доказательством лемм 2—4 [2], уточнив их в той части, где варианты продолжения построения могут быть расширены при помощи бесконечных граней.

Вершина (4^2, n). Место очередного квадрата в цепи квадратов, подклеенных к большой грани, нельзя занять бесконечной гранью, так как она будет иметь по крайней мере два конечных ребра, а тогда сумма плоских углов в вершине составит больше 360°. Нельзя одну бесконечную грань подклеить к поясу квадратов,так как он замкнут, а если подклеим грань β_1, то необходимо еще одну грань β_1 подклеить, и сумма плоских углов в вершине станет не меньшей 360°, если же подклеим β_2, то в образовавшийся свободный угол нельзя подклеить ни ограниченной грани, ни бесконечной так, чтобы сумма плоских углов была меньше 360°.

Вершина (3, 6, n). Если к свободному углу вершины A (рис. 14) подклеим бесконечную грань — ею может быть только β_2, то в вершине B образуется свободный угол, в который нельзя подклеить никакой грани из-за того, что величина его меньше 60°.

Вершина (3^3, n). К наружному краю пояса П [2] не может быть подклеена одна бесконечная грань, так как он замкнут. Подклейка двух граней, даже если одна из них ограниченная, даст добавку плоских углов в вершине не менее 180°, что ведет к нарушению выпуклости вершины. Лемма доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы. Такой многогранник имеет суммарную кривизну вершин, не превосходящую 2π, и его конечная часть ограничивается бесконечными гранями. После исключения бесконечных серий типов вершин, составленных только из ограниченных граней, можно составить только конечное число вариантов блоков из ограниченных равноугольных граней, суммарная кривизна вершин которых не превосходила бы 2π.Край блока будет иметь конечное число ребер, к которому, в силу ограничений лемм 2—8 можно подклеить лишь конечное число наборов бесконечных граней. Теорема доказана.

Список литературы: 1. *Johnson N. W.* Convex polyhedra with regular faces // Canad. J. Math. 1966. **18**, N 1. P. 169—200. 2. *Залгаллер В. А.* Выпуклые многогранники с правильными гранями // Зап. науч. сем. ЛОМИ. 1967. 2. 220 с. 3. *Иванов Б. А.* Многогранники с гранями, сложенными из правильных многоугольников // Укр. геометр.сб. 1971. Вып. 10. С. 20—34. 4. *Пряхин Ю. А.* О выпуклых многогранниках с правильными гранями // Укр. геометр. сб. 1973. Вып. 14. С. 83—88. 5. *Пряхин Ю. А.* Выпуклые многогранники, грани которых равноугольны или сложены из равноугольных // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. 1974. **45**. С. 111—112. 6. *Гурин А.М.* Реализация сетей выпуклых многогранников с равноугольными вершинами, ч. 1 // Укр. геометр. сб. 1983. Вып. 26. С. 41—48. 7. *Гурин А. М.* Реализация сетей выпуклых многогранников с равноугольными вершинами, ч. 2 // Укр. геометр. сб. 1984. Вып. 27. С. 22—26. 8. *Гурин А. М.* // Реализация сетей выпуклых многогранников с равноугольными вершинами, ч. 3 // Укр. геометр. сб. 1985. Вып. 28. С. 26—43. 9. *Гурин А. М.* Реализация сетей выпуклых многогранников с равноугольными вершинами, ч. 4 // Укр. геометр. сб. 1986. Вып. 29. С. 32—47. 10. *Гурин А. М.* Реализация сетей выпуклых многогранников с равноугольными вершинами, ч. 5 // Укр. геометр. сб. 1987. Вып. 30. С. 22—36.

Поступила в редколлегию 23.11.87

УДК 514

А. А. ДУДКИН

КРУЧЕНИЕ ПОДМНОГООБРАЗИЯ РИМАНОВА МНОГООБРАЗИЯ

1. В работах [1—3] введены понятия кручений двумерной поверхности F^2 в p-мерном евклидовом пространстве E^p, обращение каждого из которых в ноль во всех точках необходимо, а при некоторых дополнительных условиях и достаточно для того, чтобы F^2 лежала в трехмерной плоскости. В [1] изучаются двумерные поверхности в E^p и кручение в точке определено через характеристики, связанные с эллипсом нормальной кривизны поверхности в этой точке. В [2—3] рассматриваются двумерные поверхности в E^4 и используется понятие нормального кручения в точке для данного направления.

Для случая подмногообразия M^n риманова многообразия M^p с индуцированной из M^p метрикой известны понятия риманова кручения и гауссова кручения [4, с. 250], которые совпадают, если M^p — евклидово пространство E^p. Обращение в ноль этого кручения есть лишь необходимое условие «уплощения» поверхности M^n в $E^{n+1} \subset E^p$.

Введенное ниже, в п. 2, понятие бивектора кручения связано с «уплощением» M_n (п. 3), с минимальными M^2 в M^p (п. 4) и с понятием гауссова кручения (п. 5).

Заметим, что полученные в п. 3 результаты об «уплощении» M^n допускают обобщение по коразмерности k-содержащего его вполне геодезического $M^{n+k} \subset M^p$ (в п. 3 $k = 1$), а полученные в п. 4 результаты о минимальности M^2 — по размерности n подмногообразия M^n. Для этого можно ввести подходящим образом понятие поливектора кручения соответствующего порядка $m \geqslant 2$.

В [5] доказана используемая в п. 3.

Теорема. *M^n в S^p, все точки которого являются аксиальными точками, или может быть вложено в плоское S^{n+1}, или является развертывающимся M^n.*

Здесь S^p — пространство постоянной кривизны; вполне геодезическое подмногообразие S^{n+1} в S^p называется в [5] плоским S^{n+1} в S^p; M^n в S^p называется развертывающимся [5, с. 165], если оно образовано всеми соприкасающимися плоскими S^{n-1} некоторой кривой пространства S^p. Точка $x \in M^n$ называется аксиальной, если все нормальные составляющие полей $\nabla_Y X$ в точке x для любых векторных полей $X, Y \in TM^n$ коллинеарны, но не все равны нулю; здесь ∇ — связность Леви—Чивита в M^p.

2. *Определение бивектора кручения.* Пусть в касательном $T_x M^n$ подмногообразия M^n риманова многообразия M^p заданы одномерное и двумерное направления: t и σ соответственно. Пусть X, Y, Z — векторные поля на M^n, причем векторы X_x, Y_x полей X и Y в точке $x \in M^n$ лежат в σ и линейно независимы, а вектор Z_x имеет направление t. Обозначим через $\alpha_x(X, Z)$ вторую основную форму для M^n в точке x, следуя [6], т. е. $\alpha_x(X, Z)$ — нормальная составляющая поля $\nabla_Z X$ в точке x. Тогда *бивекторкручения* $\rho(x, t, \sigma)$ определим с точностью до знака формулой

$$\rho(x, t, \sigma) = \frac{\alpha_x(X, Z) \wedge \alpha_x(Y, Z)}{|X_x \wedge Y_x| \, |Z_x|^2}. \tag{1}$$

Очевидно, ρ не зависит от выбора полей X и Y, определяющих в точке x двумерное направление σ, и от поля Z, определяющего в точке x направление t.

3. *Уплощение подмногообразия.* **Теорема 1.** *Если M^n лежит во вполне геодезическом M^{n+1} в M^p, то бивектор кручения $\rho(x, t, \sigma)$ тождественно равен нулю.*

Доказательство. Так как M^{n+1} вполне геодезическое, то векторное поле $\nabla_{Y'}X'$ лежит в TM^{n+1} для всех $X', Y' \in TM^{n+1}$ (см., например, [6, с. 61—62]). Поэтому $\alpha_x(X, Y)$ коллинеарен единственной нормали к T_xM^n в T_xM^{n+1} при любых $X, Y \in TM^n$. Поэтому из (1) $\rho(x, t, \sigma) \equiv 0$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Если M^n — подмногообразие пространства S^p постоянной кривизны и $\rho(x, t, \sigma) \equiv 0$, но $\alpha_x \neq 0$ для некоторых X_x, $Y_x \in T_xM^n$, то M^n либо лежит во вполне геодезическом $S^{n+1} \subset S^p$, либо является развертывающимся в S^p.*

Доказательство. В силу теоремы из [5], сформулированной в п. 1, достаточно доказать, что все векторы $\alpha_x(V, W)$ (в точке x) коллинеарны, т. е. что для любых $X, Y, V, W \in TM^n$ будет

$$\alpha_x(X, Y) \wedge \alpha_x(V, W) = 0. \tag{2}$$

Так как $\rho \equiv 0$, из (1) $\alpha_x(X, Y) \wedge \alpha_x(X, W) = 0$, $\alpha_x(X, W) \wedge \alpha_x(V, W) = 0$. Отсюда вытекает (2), если $\alpha_x(X, W) \neq 0$. Аналогично получаем (2), если $\alpha_x(Y, V) \neq 0$. Пусть теперь $\alpha_x(X, W) = \alpha_x(Y, V) = 0$. Поскольку $\rho \equiv 0$, то из (1) $\alpha_x(X, Y + W) \wedge \alpha_x(V, Y + W) = 0$, и так как α_x билинейна, то вновь приходим к (2). Теорема доказана.

Замечание 1. Если $\alpha_x \equiv 0$ на M^n в условиях теоремы 2, то M^n — вполне геодезическое в M^p.

Замечание 2. В условии теоремы 2 в каждой точке x вместо бесконечного числа равенств $\rho(x, t, \sigma) = 0$ достаточно требовать лишь выполнения конечного числа равенств: для направлений t и σ, определяемых базисными векторными полями в окрестности точки $x \in M^n$.

4. *Минимальные подмногообразия.* **Теорема 3.** *Двумерное подмногообразие M^2 риманова M^p с $\rho(x, t) \neq 0$ будет минимальным тогда и только тогда, когда бивектор кручения $\rho(x, t)$ не зависит от направления t; (направление σ не указано, поскольку в каждой точке на M^2 оно единственно).*

Доказательство. Если векторные поля X, Y, Z на M^2 выбрать так, что в точке x пара X_x, Y_x ортонормирована и $|Z_x| = 1$, то $Z_x = uX_x + vY_x$, где $u^2 + v^2 = 1$. Введем обозначения: $\alpha_{11} = \alpha_x(X, X)$, $\alpha_{12} = \alpha_x(X, Y)$, $\alpha_{22} = \alpha_x(Y, Y)$. Вектор средней кривизны $H = 0$ тогда и только тогда, когда $\alpha_{11} + \alpha_{22} = 0$. Из формулы (1)

$$\rho(x, t) = \alpha_{11} \wedge \alpha_{12}u^2 + \alpha_{11} \wedge \alpha_{22}uv + \alpha_{12} \wedge \alpha_{22}v^2. \qquad (3)$$

Пусть M^2 — минимальное, т. е. $H = 0$. Из (3) $\rho(x, t) = \alpha_{11} \wedge \alpha_{12}(u^2 + v^2) = \alpha_{11} \wedge \alpha_{12}$, т. е. ρ не зависит от t.

Пусть теперь $\rho(x, t)$ не зависит от u и v в (3). Тогда

$$\begin{cases} \alpha_{11} \wedge \alpha_{22} = 0, \\ \alpha_{11} \wedge \alpha_{12} = \alpha_{12} \wedge \alpha_{22} = \rho \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_{11} = \lambda\alpha_{22}, \ \alpha_{12} \wedge \alpha_{22} \neq 0, \\ \alpha_{12} \wedge \alpha_{22}(\lambda + 1) = 0. \end{cases}$$

Следовательно, $\lambda = -1$ и $\alpha_{11} = -\alpha_{22}$, или $H = 0$. Теорема доказана.

5. *Связь бивектора кручения с гауссовым кручением.* Пусть $e_1, \ldots, e_n, q_1, \ldots, q_{p-n}$ — ортонормированный базис в T_xM^p, где $x \in M^n$, а $e_i \in T_xM^n$. Пусть γ^β_{ij} — коэффициенты второй основной формы относительно данной нормали q_β, т. е.

$$\alpha_{ij} = \gamma^\beta_{ij}q_\beta, \qquad (4)$$

где $\alpha_{ij} = \alpha_x(e_i, e_j)$. Согласно Э. Картану [1, с. 248—250] γ^β_{ij} суть коэффициенты разложения

$$\omega^\beta_i = \gamma^\beta_{ij}\omega^j \qquad (5)$$

форм Эйлеровых кривизн ω^β_i по ортогональному кобазису ω^j касательного пространства T_xM^n. Компоненты тензора гауссова кручения подмногообразия M^n получаются в разложении форм гауссова кручения $\sum_{m=1}^{n} \omega^\beta_m \wedge \omega^\delta_m$ по формам $\omega^i \wedge \omega^j$ [4]. Из (5)

$$\sum_{m=1}^{n} \omega^\beta_m \wedge \omega^\delta_m = \sum_{m=1}^{n} \gamma^\beta_{im}\gamma^\delta_{jm}\omega^i \wedge \omega^j. \qquad (6)$$

Для площадки σ_{ij}, натянутой на e_i и e_j, из (1) и (4)

$$\sum_{m=1}^{n} \rho(x, e_m, \sigma_{ij}) = \sum_{m=1}^{n} \alpha_{im} \wedge \alpha_{jm} = \sum_{\substack{m=1 \\ \beta, \delta}}^{n} \gamma^\beta_{mi}\gamma^\delta_{mj}q_\beta \wedge q_\delta. \qquad (7)$$

Из (6) и (7) следует, что *координаты бивектора* $\sum_{m=1}^{n} \rho(x, e_m, \sigma_{ij})$ *суть те компоненты тензора гауссова кручения, что соответствуют площадке* σ_{ij} *(с точностью до знака).*

Список литературы: 1. *Аминов Ю. А.* Кручение двумерных поверхностей в евклидовых пространствах // Укр. геометр. сб.1975. Вып. 17. С. 3—14. 2. *Кадомцев С. В.* Исследование некоторых свойств нормального кручения двумерной поверхности в четырехмерном пространстве. М., 1975. С. 267—278. 3. *Фоменко В. Т.* Некоторые свойства двумерных поверхностей с нулевым кручением в E^4 // Мат. сб. 1978. **106.** № 4. С. 589—603. 4. *Картан Э.* Риманова геометрия в ортогональном репере. М., 1960. 306 с. 5. *Схоутен И. А., Стройк Д. Дж.* Введение в новые методы дифференциальной геометрии. М., 1948. 345 с. 6. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. М., 1981. 2. 414с.

Поступила в редколлегию 19.06.89

УДК 514

В. Ф. ИГНАТЕНКО

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ С БЕСКОНЕЧНЫМ МНОЖЕСТВОМ ПЛОСКОСТЕЙ КОСОЙ СИММЕТРИИ. II

Настоящая статья является продолжением [1]. Зададим в вещественном пространстве E^m декартову систему координат

$$Oy_1 \ldots y_{m_1} z_1 \ldots z_{m_2} x_1 \ldots x_{m_3} \; (m_1 + m_2 + m_3 = m).$$

Пусть F_n есть $(m-1)$-мерная поверхность порядка n, инвариантная относительно бесконечной группы G, порожденной косыми отражениями относительно плоскостей; μ_j — плоскости $\Pi^{\mu_j} = \Pi^{d_j} \oplus \Pi^{\gamma_j}$ $(j = \overline{0, q}$, $q = 1$ или $2)$ — линейные оболочки $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{u})$ орбит направлений симметрии $\boldsymbol{u}$ (через γ_j-плоскости Π^{γ_j} проходят сопряженные векторам Π^{d_j} плоскости симметрии [2]). Если $q = 2$ и Π^{γ_j} $(\gamma_0 \geqslant \gamma_1 \geqslant \gamma_2)$ проходят через одну прямую d, то $d = \Pi^{\gamma_2} \cap (\Pi^{\gamma_0} + \Pi^{\gamma_1})$ [3]. Здесь (п. 1°) дается полное решение задачи о взаимном расположении трех γ_j-плоскостей Π^{γ_j}. Имеет место

Теорема 1. *Если γ_j-плоскости Π^{γ_j} $(j = 0, 1, 2)$ не проходят через одну прямую, то их расположение может быть произвольным, а именно: при любом расположении Π^{γ_j} существует такой инвариант некоторой G, группа симметрий которого не допускает расширения.*

При доказательстве теоремы 1 построены в явном виде инварианты G. Другими словами, получены уравнения специальных поверхностей F_n, инвариантных относительно G; выделены фактически и множества B_{μ_j} плоскостей симметрии F_n, соответствующие Π^{μ_j}.

В п. 2° найдены системы образующих колец инвариантов ряда групп G. Для формулировки результатов введем необходимые обозначения. Пусть группы G_k $(k = \overline{1, 9})$ имеют, соответственно, такие Π^{γ_j} $(\gamma_0 = \lambda,\ \gamma_1 = \mu,\ \gamma_2 = \nu)$:

1) $\Pi^{\lambda} = \Pi^{\lambda}(z_i)$, $i = \overline{1, \lambda}$; $\Pi^{\mu} = \Pi^{\mu}_0(z_1, z_{\lambda+t})$, $t = \overline{1, \mu-1}$ $(q = 1)$;

2) Π^{λ}, Π^{μ}_0, $\Pi^{\nu} = \Pi^{\nu}_0(z_1, z_{\alpha})$, $\alpha = \overline{\lambda + \mu, \lambda + \mu + \nu - 2}$;

3) Π^{λ}, Π^{μ}_0, $\Pi^{\nu} = \Pi^{\nu}_1(z_{\lambda}, z_{\alpha})$; 4) Π^{λ}, Π^{μ}_0, $\Pi^{\nu} = \Pi^{\nu}_2(z_{\lambda+1}, z_{\alpha})$;

5) Π^{λ}, Π^{μ}_0, $\Pi^{\nu} = \Pi^{\nu}_3(z_{\lambda}, z_{\lambda+1}, z_{\alpha'})$, $\alpha' = \overline{\lambda + \mu, \lambda + \mu + \nu - 3}$;

6) Π^λ, $\Pi^\mu = \Pi_1^\mu(z_{\lambda+\sigma})$, $\sigma = \overline{1, \mu}$ $(q = 1)$; 7) Π^λ, Π_1^μ, Π_1^ν;
8) Π^λ, Π_1^μ, Π_2^ν; 9) Π^λ, Π_1^μ, Π_3^ν.

Подчеркнем, что здесь о группах G_k $(k = \overline{1, 9})$ известно только следующее: они принадлежат множеству групп симметрий G; γ_j-плоскости Π^{γ_j} $(j = \overline{0, q} \leqslant 2)$ удовлетворяют вышеуказанным условиям.

Запишем следующие квадратичные формы:

$$A = \sum_{p=1}^{d_0} a_p y_p^2 + \sum_{i=1}^{\lambda} \xi_i(x_\gamma) z_i, \ \gamma = \overline{1, m_3},$$

$$B = \sum_{h=1}^{d_1} b_h y_{d_0+h}^2 + \sum_{t=1}^{\mu-1} \zeta_{\lambda+t}(x_\gamma) z_{\lambda+t},$$

$$C = \sum_{\rho=1}^{d_2} c_\rho y_{d_0+d_1+\rho}^2 + \sum_{\beta=0}^{\nu-2} \chi_{\lambda+\mu+\beta}(x_\gamma) z_{\lambda+\mu+\beta},$$

$$H = \zeta_1(x_\gamma) z_1 + B, \quad H_\varepsilon = \chi_\varepsilon(x_\gamma) z_\varepsilon + C, \quad \varepsilon = 1, \lambda, \lambda+1;$$

B_0 и C_0 (C_1) есть формы B и C при $t = \sigma = \overline{1, \mu}$ и $\beta = \overline{0, \nu-3}$ $(\beta = \overline{1, \nu-1})$; далее, $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, $\tilde{B}_0$, $\tilde{H}$ — формы A, B, B_0, H, если ξ_t $(\xi_1 = f)$, $\zeta_{\lambda+t}$, $\zeta_1 = g$ зависят от переменных $y_{d_0+d_1+\rho}$ и x_γ $(d_0 + d_1 + d_2 = m_1)$.

Теорема 2. *Кольца инвариантов групп G_k $(k = \overline{1, 9})$ имеют, соответственно, такие системы образующих:*

1) $\tilde{A}f + \tilde{B}g$, $y_{d_0+d_1+\rho}$ $(\rho = \overline{1, d_2})$, x_γ $(\gamma = \overline{1, m_3})$;

2) $A\zeta_1\chi_1 + B\xi_1\chi_1 + C\xi_1\zeta_1, x_\gamma$; 3) $A\zeta_1 + B\xi_1 + c^{-1}C\xi_\lambda$, x_γ $(\chi_\lambda = c\zeta_1)$; $A\zeta_1\chi_\lambda + B\xi_1\chi_\lambda + C\xi_\lambda\zeta_1$, x_γ $(\chi_\lambda \neq c\zeta_1)$; 4) $A\zeta_1 + B\xi_1 + c^{-1}C\zeta_{\lambda+1}$, x_γ $(\chi_{\lambda+1} = c\xi_1)$; $A\varsigma_1\chi_{\lambda+1} + B\xi_1\chi_{\lambda+1} + C\xi_1\varsigma_{\lambda+1}$, x_γ $(\chi_{\lambda+1} \neq c\xi_1)$; 5) $A\zeta_1 + B\xi_1 + c_1^{-1}C\xi_\lambda$, x_γ $(\chi_\lambda = c_1\zeta_1$, $\chi_{\lambda+1} = c_2\xi_1$, $\xi_\lambda = c_1c_2^{-1}\zeta_{\lambda+1})$; 6) $\tilde{A}$, $\tilde{B}_0$, $y_{d_0+d_1+\rho}$, x_γ; 7) $A\chi_\lambda + C_1\xi_\lambda$, B_0, x_γ;
8) A, $B_0\chi_{\lambda+1} + C_1\zeta_{\lambda+1}$, x_γ; 9) $A\chi_\lambda + c^{-1}B_0\chi_{\lambda+1} + C_0\xi_\lambda$, x_γ $(\zeta_{\lambda+1} = c\xi_\lambda)$; $A\zeta_{\lambda+1}\chi_\lambda + B_0\xi_\lambda\chi_{\lambda+1} + C_0\xi_\lambda\zeta_{\lambda+1}$, x_γ $(\zeta_{\lambda+1} \neq c\xi_\lambda)$;

если линейные оболочки двух $G_{k'}(u)$-орбит $(1 \leqslant k' \leqslant 9)$ пересекаются по прямой Oz_i $(1 \leqslant i \leqslant \lambda + 1)$, то отношение линейных функций, стоящих при z_i в соответствующих квадратичных формах, не равно постоянной c.

Плоскости симметрии, отражения относительно которых принадлежат G_k, являются диаметральными плоскостями квадрик со следующими уравнениями:

1) $\tilde{A} = 0$, $\tilde{H} = 0$; 2) $A = 0$, $H = 0$, $H_1 = 0$;
3) $A = 0$, $H = 0$, $H_\lambda = 0$; 4) $A = 0$, $H = 0$, $H_{\lambda+1} = 0$;
5) $A = 0$, $H = 0$, $\chi_\lambda z_\lambda + \chi_{\lambda+1} z_{\lambda+1} + C_0 = 0$; 6) $\tilde{A} = 0$, $\tilde{B}_0 = 0$;
7) $A = 0$, $B_0 = 0$, $\chi_\lambda z_\lambda + C_1 = 0$; 8) $A = 0$, $B_0 = 0$,
$\chi_{\lambda+1} z_{\lambda+1} + C_1 = 0$; 9) $A = 0$, $B_0 = 0$, $\chi_\lambda z_\lambda + \chi_{\lambda+1} z_{\lambda+1} + C_0 = 0$.

Теорема 2 дает канонические уравнения (K-уравнения) поверхностей F_n с группами G_k $(k=\overline{1,\ 9})$, а также плоскости симметрии этих F_n.

1°. Пусть $\Pi^s=\Pi^\lambda+\Pi^\mu$, $\Pi^v=\Pi^\nu \cap \Pi^s$, $0<v\leqslant\nu$, $\tau=\nu-v$, $d_j=1$ $(j=0,\ 1,\ 2)$. Зададим поверхность F_n уравнением

$$R\left(y_1^2+\sum_{i=1}^{\lambda}\xi_i z_i\right)+S\left(y_2^2+\sum_{\sigma=1}^{\mu}\zeta_\sigma z_{\lambda+\sigma}\right)+T\left(y_3^2+\sum_{k=1}^{\tau}\chi_k z_{\lambda+\mu+k}\right)=c, \quad (1)$$

где неопределенные многочлены R, S, T и линейные функции ξ_i, ζ_σ, χ_k зависят от переменных x_γ $(\gamma=\overline{1,\ m_3})$.

Рассмотрим такие случаи.

1.1. $s=\lambda+\mu$, $\Pi^v\cap\Pi^\lambda=\Pi^1(z_\lambda)$, $\Pi^v\cap\Pi^\mu=0$. Из теоремы 8 работы [1] следует, что в уравнении (1)

$$R=R_0\chi'_\lambda, \quad T=R_0\xi_\lambda. \quad (2)$$

Линейная функция $\chi'_\lambda\neq c\xi_\lambda$. Пусть $(v-1)$-плоскость $\Pi^v\ominus\Pi^1(z_\lambda)$ определяется в Π^s уравнениями

$$\begin{gathered} z_{v+\rho}=\sum_{r=1}^{v-1}a_{\rho r}z_r,\ \rho=\overline{0,\ \lambda-v}, \\ z_{\lambda+\sigma}=\sum_{r=1}^{v-1}b_{\sigma r}z_r, \quad \sigma=\overline{1,\ \mu}. \end{gathered} \quad (3)$$

На основании (3) перейдем в Π^s к новой системе координат

$$\begin{gathered} z_r=z_r, \quad r=\overline{1,\ v-1}, \\ z_{v+\rho}=z'_{v+\rho}+\sum_{r=1}^{v-1}a_{\rho r}z'_r, \\ z_{\lambda+\sigma}=z'_{\lambda+\sigma}+\sum_{r=1}^{v-1}b_{\sigma r}z'_r. \end{gathered} \quad (4)$$

Найдем R, S, T и ξ_i, ζ_σ, при которых (1) с учетом (2) и (4) принимает вид

$$R\left(y_1^2+\sum_{\rho=0}^{\lambda-v}\xi_{v+\rho}z'_{v+\rho}\right)+S\left(y_2^2+\sum_{\sigma=1}^{\mu}\zeta_\sigma z'_{\lambda+\sigma}\right)+$$
$$+T\left(y_3^2+\sum_{r=1}^{v-1}\chi'_r z'_r+\sum_{k=1}^{\tau}\chi_k z_{\lambda+\mu+k}\right)=c. \quad (5)$$

Согласно (1), (4) и (5) положим

$$\chi'_r=\xi_r+\sum_{\rho=0}^{\lambda-v}a_{\rho r}\xi_{v+\rho}=\lambda_1\sum_{\sigma=1}^{\mu}b_{\sigma r}\zeta_\sigma,\ r=\overline{1,\ v-1}, \quad (6)$$

где числовой параметр $\lambda_1\neq0$. Тогда $R_0\xi_\lambda=R_0\chi'_\lambda+\lambda_1^{-1}S$, т. е. в уравнении (5) многочлен

$$S=\lambda_1R_0(\xi_\lambda-\chi'_\lambda). \quad (7)$$

Уравнение (5) и формулы (6), (7) показывают, что расположение v-плоскости Π^v может быть любым. Множества B_{μ_j} плоскостей симметрии поверхности F_n находятся по теоремам 2, 7 [1]. В частности,

B_{μ_0} состоит из диаметральных плоскостей цилиндра с уравнением $y_1^2 + \sum_{i=1}^{\lambda} \xi_i z_i = c$.

1.2. $s = \lambda + \mu$, $\Pi^v \cap \Pi^\lambda = 0$, $\Pi^v \cap \Pi^\mu = \Pi^1(z_{\lambda+1})$. В уравнении (1)

$$S = S_0 \chi'_{\lambda+1}, \quad T = S_0 \zeta_{\lambda+1}. \tag{8}$$

Линейная функция $\chi'_{\lambda+1} \neq c\zeta_{\lambda+1}$. Пусть (3) — уравнения в Π^s некоторой $(v-1)$-плоскости $\Pi^v \ominus \Pi^1(z_{\lambda+1})$. В новой системе координат, определяемой формулами (4), уравнение (5) при (6) и (8) задает поверхность F_n — соотношения (2) не выполняются. Из (1), (5), (6), (8) следует, что многочлен

$$R = S_0 (\zeta_{\lambda+1} - \lambda_1^{-1} \chi'_{\lambda+1}). \tag{9}$$

Значит, для каждой v-плоскости Π^v существует поверхность F_n, группа симметрий G которой — зависящая от выбора Π^v — не допускает расширения.

1.3. $s = \lambda + \mu - 1$, $\Pi^\lambda \cap \Pi^\mu = \Pi^1(z_\lambda)$, $\Pi^v \cap \Pi^\lambda = \Pi^v \cap \Pi^\mu = 0$.

При этом

$$R = R_0 \zeta'_\lambda, \quad S = R_0 \xi_\lambda. \tag{10}$$

Если $v = \lambda$, то $\lambda = \mu = \nu$, что здесь невозможно. Следовательно, $v < \lambda$ $(\mu \leqslant \lambda)$. Запишем в Π^s уравнения Π^v

$$\begin{gathered} z_{v+\varepsilon} = \sum_{p=1}^{v} c_{\varepsilon p} z_p, \ \varepsilon = \overline{1, \lambda - v}, \\ z_{\lambda+t} = \sum_{p=1}^{v} d_{tp} z_p, \ t = \overline{1, \mu - 1}. \end{gathered} \tag{11}$$

Выберем в Π^s новые координатные оси Oz'_p. Согласно (11) формулы преобразования координат имеют вид

$$\begin{gathered} z_p = z'_p, \ p = \overline{1, v}, \\ z_{v+\varepsilon} = z'_{v+\varepsilon} + \sum_{p=1}^{v} c_{\varepsilon p} z'_p, \\ z_{\lambda+t} = z'_{\lambda+t} + \sum_{p=1}^{v} d_{tp} z'_p. \end{gathered} \tag{12}$$

Заменив в (1) σ индексом t и z_p, $z_{v+\varepsilon}$, $z_{\lambda+t}$ правыми частями (12), при $k = \overline{0, \tau - 1}$ получим

$$R_0 \zeta'_\lambda \Big(y_1^2 + \sum_{\varepsilon=1}^{\lambda-v} \xi_{v+\varepsilon} z'_{i+\varepsilon}\Big) + R_0 \xi_\lambda \Big(y_2^2 + \sum_{t=1}^{\mu-1} \zeta_t z_{\lambda+t}\Big) +$$

$$+ T \Big(y_3^2 + \sum_{p=1}^{v} \tilde{\chi}_p z'_p + \sum_{k=0}^{\tau-1} \chi_k z_{\lambda+\mu+k}\Big) = c; \tag{13}$$

линейные функции

$$\tilde{\chi}_p = \xi_p + \sum_{\varepsilon=1}^{\lambda-v} c_{\varepsilon p} \xi_{v+\varepsilon} = \lambda_2 \sum_{t=1}^{\mu-1} d_{tp} \zeta_t, \ \lambda_2 \neq 0. \tag{14}$$

На основании (10), (13) и (14) многочлен

$$T = R_0 (\zeta'_\lambda + \lambda_2^{-1} \xi_\lambda). \tag{15}$$

Итак, расположение Π^v $(v<\lambda)$ может быть произвольным.

1.4. $s=\lambda+\mu-1$, $\Pi^\lambda \cap \Pi^\mu=\Pi^1(z_\lambda)$, $\Pi^v \cap \Pi^\lambda=\Pi^1(z_1)$, $\Pi^v \cap \Pi^\mu=0$.

Наряду с (10) справедливы формулы

$$R=R_1\chi_1'', \ T=R_1\xi_1. \tag{16}$$

Далее, многочлен T находится по формуле (15), которая выполняется одновременно с (10) и (16), если, например, $R_0=R_1$, $\xi_1=\zeta_\lambda'+\lambda_2^{-1}\xi_\lambda$, $\zeta_\lambda'=\chi_1''$. Уравнение вида (13) поверхности F_n записывать не будем. Как и в п. 1.3, число $v<\lambda$; ограничений на выбор Π^v нет.

1.5. $s=\lambda+\mu-1$, $\Pi^\lambda \cap \Pi^\mu=\Pi^1(z_\lambda)$, $\Pi^v \cap \Pi^\lambda=0$, $\Pi^v \cap \Pi^\mu=\Pi^1(z_{\lambda+1})$.

Формулы (8) и (10) имеют место при $R_0=S_0$, $\chi_{\lambda+1}'=\xi_\lambda$, $\zeta_{\lambda+1}=\zeta_\lambda'+\lambda_1^{-1}\xi_\lambda$ $(\lambda_1=\lambda_2)$. Эти соотношения определяют связь между множествами B_{μ_j} плоскостей симметрии F_n, которые зависят и от выбора Π^v $(v<\lambda)$.

1.6. $s=\lambda+\mu-1$, $\Pi^\lambda \cap \Pi^\mu=\Pi^1(z_\lambda)$, $\Pi^v \cap \Pi^\lambda=\Pi^1(z_1)$, $\Pi^v \cap \Pi^\mu=\Pi^1(z_{\lambda+1})$.

При этом выполняются (8), (10) и (16). Если $R_0=R_1=S_0$, то $\chi_1''=\zeta_\lambda'$, $\zeta_{\lambda+1}=\xi_1$, $\xi_\lambda=\lambda_1\ (\xi_1-\chi_1'')$, $\xi_1\neq c\chi_1''$. Полученные зависимости не противоречат п. 1.5.

Ничего нового не вносят следующие случаи.

1.7. $s=\lambda+\mu$, $\Pi^v \cap \Pi^\lambda=\Pi^v \cap \Pi^\mu=0$ (см. [4]).

1.8. $s=\lambda+\mu$, $\Pi^v \cap \Pi^\lambda=\Pi^1(z_1)$, $\Pi^v \cap \Pi^\mu=\Pi^1(z_{\lambda+1})$.

Теорема 1 доказана.

Пусть G_0 есть порожденная отражениями группа, алгебра инвариантов которой не является свободной. А. Е. Залесский [5] впервые построил в E^{11} пример группы G_0; ее охватывает случай 1.7 [6]. А. Е. Велесько [7] доказал, что минимальная размерность пространства E^m, в котором существуют группы G_0, равна восьми. Пример G_0 в E^8 определяют общие плоскости симметрии конусов с уравнениями $x_3(2x_1z_1+y_1^2)+x_1y_3^2=0$, $x_3(2x_2z_2+y_2^2)+x_2y_3^2=0$, $x_2(2x_1z_1+y_1^2)-x_1(2x_2z_2+y_2^2)=0$ (см. [7]). Эта группа также соответствует 1.7; $\lambda=\mu=\nu=v=1$, Π^ν есть прямая с уравнением $z_1=z_2$ в $\Pi^2(z_1, z_2)$.

2°. Перейдем к изучению колец инвариантов групп G на языке теории поверхностей F_n.

2.1. $G=G_1$. Уравнение произвольной поверхности F_n, инвариантной относительно G_1, допускает любой из следующих видов [2]:

$$\sum_{j=0}^{s} R_j\,(y_{d_0+h},\ y_{d_0+d_1+\rho},\ z_{\lambda+t},\ x_\gamma)\,\tilde{A}^{s-j}=0, \tag{17}$$

$$\sum_{i=0}^{s} S_j\,(y_p,\ y_{d_0+d_1+\rho},\ z_i,\ x_\gamma)\,\tilde{H}^{s-j}=0,\ i>1; \tag{18}$$

многочлены R_j, S_j зависят от указанных в скобках переменных, причем $R_0 = R'_0 g^s$, $S_0 = R'_0 f^s$, $g \neq cf$.

Докажем, что уравнение (17) можно записать так:

$$\sum_{j=0}^{s} P_j (y_{d_0+d_1+\rho}, x_\gamma) (\tilde{A} g + \tilde{B} f)^{s-j} = 0. \tag{19}$$

При $\tilde{A} = fz_1 + D$ уравнение (17) имеет вид

$$\sum_{j=0}^{s} \Big(\sum_{k=0}^{j} C_{s-k}^{s-j} R_k D^{j-k} \Big) (fz_1)^{s-j} = 0. \tag{20}$$

Аналогично запишем уравнение (18)

$$\sum_{j=0}^{s} \Big(\sum_{k=0}^{j} C_{s-k}^{s-j} S_k \tilde{B}^{j-k} \Big) (gz_1)^{s-j} = 0. \tag{21}$$

Из (20), (21) получаем соотношения

$$\sum_{k=0}^{j} C_{s-k}^{s-j} R_k D^{j-k} f^{s-j} = \sum_{k=0}^{j} C_{s-k}^{s-j} S_k \tilde{B}^{j-k} g^{s-j}, \quad j = \overline{0,\ s}. \tag{22}$$

Следовательно,

$$R_j = R'_j g^{s-j}, \ S_j = S'_j f^{s-j}, \tag{23}$$

Запишем в виде (21) уравнение (19)

$$\sum_{j=0}^{s} \Big[\sum_{k=0}^{j} C_{s-k}^{s-j} P_k (\tilde{B} f + Dg)^{j-k} (fgz_1)^{s-j} = 0. \tag{24}$$

Будем теперь считать, что в (24) P_k являются неопределенными многочленами от всех переменных. Убедимся в существовании многочленов $P_j = P_j (y_{d_0+d_1+\rho},\ x_\gamma)$, при которых уравнение (17) — или (18) — представимо в виде (24). Рассмотрим соотношения

$$\sum_{k=0}^{j} C_{s-k}^{s-j} R_k D^{j-k} = \sum_{k=0}^{j} C_{s-k}^{s-j} P_k (\tilde{B} f + Dg)^{j-k} g^{s-j}, \tag{25}$$

$$\sum_{k=0}^{j} C_{s-k}^{s-j} S_k \tilde{B}^{j-k} = \sum_{k=0}^{j} C_{s-k}^{s-j} P_k (\tilde{B} f + Dg)^{j-k} f^{s-j}, \ j = \overline{0,\ s}, \tag{26}$$

из которых следует, в частности, (23). Приравняв в (25) и (26) функциональные коэффициенты при D^{j-k} и $\tilde{B}^{j-k}$ соответственно, получим с учетом (23)

$$P_0 = R'_0 = S'_0, \ P_j = R'_j - \sum_{k=0}^{j-1} C_{s-k}^{s-j} P_k (\tilde{B} f)^{j-k} =$$

$$= S'_j - \sum_{k=0}^{j-1} C_{s-k}^{s-j} P_k (Dg)^{j-k}, \ j > 0. \tag{27}$$

Значит, $P_j = P_j (y_{d_0+d_1+\rho},\ x_\gamma)$ и находятся по формулам (27). Соотношения, определяемые (27), выполняются на основании (22).

Верно и обратное: если поверхность F_n задана уравнением (19), то она инвариантна относительно группы G_1; (19) есть K-уравнение F_n.

Из работ [1, 2] и уравнения (19) следует, что при $m < 7$ кольцо инвариантов произвольной группы, порожденной косыми отражениями, является конечно порожденным (см. [8], гл. 3).

2.2. $G = G_2$. Прямая $d = \Pi^1(z_1) = \Pi^\nu \cap \Pi^\lambda + \Pi^\mu)$ [3]. Запишем такое уравнение F_n [2]:

$$\sum_{j=0}^{s} T_j(y_p, y_{d_0+h}, z_i, z_{\lambda+t}, x_\gamma) H_1^{s-j} = 0, \ i > 1. \tag{28}$$

Уравнения (17), (18) и, следовательно, (19) также будут задавать F_n, если $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, $\tilde{H}$ заменить формами A, B, H соответственно. При этом

$$R_0 = T'_0\chi_1^s, \quad T_0 = T'_0\xi_1^s, \quad S_0 = T''_0\chi_1^s, \quad T_0 = T''_0\zeta_1^s, \quad T'_0 \neq T''_0; \tag{29}$$

отношение любых двух из линейных функций ξ_1, ζ_1, χ_1 не равно постоянной c. Из (17), (29) находим $R'_0 = R''_0\chi_1^s$, т. е.

$$R_0 = R''_0\zeta_1^s\chi_1^s. \tag{30}$$

K — уравнение поверхности F_n имеет вид

$$\sum_{j=0}^{s} Q_j(x_\gamma)(A\zeta_1\chi_1 + B\xi_1\chi_1 + C\xi_1\zeta_1)^{s-j} = 0. \tag{31}$$

Действительно, применим результат п. 2.1 к каждой паре линейных оболочек Π^λ, Π^μ, Π^ν — с использованием (17), (18), (28). Наряду с модифицированным уравнением (19) получим

$$\sum_{j=0}^{s} L_j(A\chi_1 + C\xi_1)^{s-j} = 0, \tag{32}$$

$$\sum_{j=0}^{s} M_j(H\chi_1 + C\zeta_1)^{s-j} = 0; \tag{33}$$

многочлены L_j и M_j не зависят от переменных, входящих в A, C и H, C. Уравнение (33) следует из (19) и (32). Согласно (19) и (32)

$$P_j = P'_j\chi_1^{s-j}, \quad L_j = L'_j\zeta_1^{s-j}. \tag{34}$$

В самом деле, приравняв функциональные коэффициенты при A^s, получим $P_0\zeta_1^s = L_0\chi_1^s$. Так как $\zeta_1 \neq c\chi_1$, то имеем (34) при $j = 0$. Далее, $\zeta_1^{s-1}[(s-1)P_0B\xi_1 + P_1] = \chi_1^{s-1}[(s-1)L_0C\xi_1 + L_1]$. Поэтому выполняются соотношения (34) при $j = 1$. Аналогично рассматривается случай $j > 1$.

Итак,

$$\sum_{j=0}^{s} P'_j(A\zeta_1\chi_1 + B\xi_1\chi_1)^{s-j} = 0, \tag{35}$$

$$\sum_{j=0}^{s} L'_j(A\zeta_1\chi_1 + C\xi_1\zeta_1)^{s-j} = 0. \tag{36}$$

Левые части уравнений (35) и (36) представимы в виде многочленов относительно $A\zeta_1\chi_1$. Использовав (30), (31) и (35), (36), получим

$$Q_0 = R''_0 = P'_0 = L'_0, \quad Q_j = P'_j - \sum_{k=0}^{j-1} C_{s-k}^{s-j} Q_k \cdot (C\xi_1\zeta_1)^{j-k} =$$

$$= L'_j - \sum_{k=0}^{j-1} C_{s-k}^{s-j} Q_k (B\xi_1\chi_1)^{j-k}, \ j > 0. \tag{37}$$

Следовательно, $Q_j = Q_j(x_\gamma)$ и поверхность F_n определяется уравнением (31).

2.3. $G = G_3$. В (28) вместо H_1 поставим H_λ $(i < \lambda)$. На основании п. 2.1 имеем следующее уравнение F_n:

$$\sum_{j=0}^{s} D_j(y_{d_0+h}, z_{\lambda+t}, x_\gamma)(A\chi_\lambda + C\xi_\lambda)^{s-j} = 0, \ \chi_\lambda \neq c\xi_\lambda. \tag{38}$$

В случае $\lambda_\lambda = c_1\zeta_1$ из (19), (38) находим, что поверхность F_n может быть задана K-уравнением

$$\sum_{j=0}^{s} D'_j(x_\gamma)(A\zeta_1 + B\xi_1 + c_1^{-1}C\xi_\lambda)^{s-j} = 0. \tag{39}$$

Если же $\chi_\lambda \neq c_1\zeta_1$, то $P_j = P''_j\chi_\lambda^{s-j}$, $D_j = D''_j\zeta_1^{s-j}$. K-уравнение F_n принимает вид

$$\sum_{j=0}^{s} \theta_j(x_\gamma)(A\zeta_1\chi_\lambda + B\xi_1\chi_\lambda + C\xi_\lambda\zeta_1)^{s-j} = 0, \tag{40}$$

где $\theta_0 = P''_0 = D''_0$, $\theta_j = P''_j - \sum\limits_{k=0}^{j-1} C_{s-k}^{s-j}\theta_k \cdot (C\zeta_\alpha\zeta_1)^{j-k} = D''_j - \sum\limits_{k=0}^{j-1} C_{s-k}^{s-j} \times$ $\times \theta_k(B\xi_1\chi_\lambda)^{j-k}$, $j > 0$.

Пусть $G = G'_3$, если $\Pi^v = \Pi^{v-1} \oplus \Pi^{\tau+1}(z_\lambda, z_{\lambda+\mu+\beta})$, $v > 1$, $\beta = \overline{0, \tau-1}$ (п. 1°); Π^λ и Π^μ — прежние. Тогда любое из уравнений (39), (40) при новом β задает поверхность F_n, инвариантную относительно соответствующей группы G'_3. Но оно не будет ее K-уравнением; скажем, многочлен $A\zeta_1\chi_\lambda + B\xi_1\chi_\lambda + C\xi_\lambda\zeta_1$ и переменные x_γ не порождают кольцо инвариантов группы G'_3.

2.4. $G = G_4$. Пусть уравнение (28) определяет поверхность F_n, если H_1 заменим формой $H_{\lambda+1}$ $(i = \overline{1, \lambda})$. Уравнение

$$\sum_{j=0}^{s} K_j(y_p, z_i, x_\gamma)(H\chi_{\lambda+1} + C\zeta_{\lambda+1}) = 0, \ i > 1,$$

также задает F_n. С учетом (18) его можно переписать так:

$$\sum_{j=0}^{s} K'_j(y_p, z_i, x_\gamma)(B\chi_{\lambda+1} + C\zeta_{\lambda+1})^{s-j} = 0, \ i = \overline{1, \lambda}. \tag{41}$$

Рассмотрев (19) и (41), получим такие K-уравнения F_n:

$$\sum_{j=0}^{s} \Phi_j(x_\gamma)(A\zeta_1 + B\xi_1 + c_2^{-1}C\zeta_{\lambda+1})^{s-j} = 0, \ \chi_{\lambda+1} = c_2\xi_1; \tag{42}$$

$$\sum_{j=0}^{s} \Phi'_j(x_\gamma)(A\zeta_1\chi_{\lambda+1} + B\xi_1\chi_{\lambda+1} + C\xi_1\zeta_{\lambda+1})^{s-j} = 0, \ \chi_{\lambda+1} \neq c_2\xi_1. \tag{43}$$

Доказательство этого утверждения не отличается от соответствующих доказательств в пп. 2.2, 2.3.

2.5. $G = G_5$. В уравнениях (39), (40) и (42), (43) квадратичную форму C заменим C_0. Пусть поверхность F_n определяется уравнениями (39) и (42). Тогда $D'_0 = \Phi_0$; сравнив функциональные коэффициенты при C_0^s, получим $\xi_\lambda = c_1c_2^{-1}\zeta_{\lambda+1}$. Следовательно, (39) — или (42) — есть K-уравнение поверхности F_n.

Объединение (39), (43) дает $D'_j = D''_j \chi_{\lambda+1}^{s-j}$. При этом $\chi_{\lambda+1} = c\xi_1$, что невозможно. Аналогично исключается случай двух уравнений (40) и (42).

Пусть, наконец, поверхность F_n задана уравнениями (40) и (43). Тогда приходим уже́ к соотношению $\xi_\lambda \zeta_1 \chi_{\lambda+1} = \xi_1 \zeta_{\lambda+1} \chi_\lambda$, т. е. $\chi_\lambda = c\zeta_1$.

Отметим, что теперь ясна причина условий, налагаемых в п. 1.6 на многочленные и линейные функции при построении специальной поверхности F_n, инвариантной относительно группы G_5.

2.6. $G = G_6$. В работе [9] приведен следующий результат: функции $R_j\ (j = \overline{0, s})$ в уравнении (17) поверхности F_n являются многочленами от $\tilde{B}_0,\ y_{d_0+d_1+\rho},\ x_\gamma$.

Дадим здесь его доказательство. Уравнение (18) задает поверхность F_n, если положить $i = \overline{1, \lambda}$ и $\tilde{H}$, s заменить $\tilde{B}_0$, ω соответственно; вообще говоря, $\omega \neq s$ и линейные множители не входят в R_0, S_0. Пусть $d_0 = d_1 = a_1 = b_1 = 1$, что сохраняет общность рассуждений. Член $y_2^{2(\omega-k)}$, $0 \leqslant k \leqslant \omega$ могут содержать несколько многочленов $\{R_j\}$. Пусть, для определенности, только R_0, R_1 имеют степень $2(\omega - k)$ относительно y_2. Тогда

$$R_0 = A_1 y_2^{2(\omega-k)} + B_1,\ R_1 = A_2 y_2^{2(\omega-k)} + B_2, \tag{44}$$

где многочлены B_1, B_2 не содержат $y_2^{2(\omega-k)}$. Из (17), (18), (44) находим

$$S_k = A'_1 \tilde{A}^s + A'_2 \tilde{A}^{s-1}. \tag{45}$$

В формуле (45) многочлены A'_1, A'_2 зависят только от $y_{d_0+d_1+\rho}$, x_γ. Значит, $S_k = S_k(\tilde{A},\ y_{d_0+d_1+\rho},\ x_\gamma)$ и $R_j = R_j(\tilde{B}_0,\ y_{d_0+d_1+\rho},\ x_\gamma)$.

2.7. $G = G_7$. Согласно п. 2.1, поверхность F_n определяется уравнением

$$\sum_{j=0}^{s} N_j (y_{d_0+h},\ z_{\lambda+\sigma},\ x_\gamma)(A\chi_\lambda + C_1\xi_\lambda)^{s-j} = 0,\ \chi_\lambda \neq c\xi_\lambda. \tag{46}$$

Оно является K-уравнением F_n, если $N_j\ (j = \overline{0, s})$ — многочлены от B_0 и x_γ, см. п. 2.6.

2.8. $G = G_8$. Снова использовав пп. 2.1, 2.6, получим такое K-уравнение поверхности F_n:

$$\sum_{j=0}^{\omega} N'_j (B_0\chi_{\lambda+1} + C_1\zeta_{\lambda+1}) = 0,\ \chi_{\lambda+1} \neq c\zeta_{\lambda+1}, \tag{47}$$

где N'_j суть многочлены от A, x_γ.

2.9. $G = G_9$. Из (46), (47) видно, что $s = \omega$. Как и в п. 2.3, находим следующие K-уравнения F_n:

$$\sum_{j=0}^{s} \Psi_j(x_\gamma)(A\chi_\lambda + c^{-1}B_0\chi_{\lambda+1} + C_0\xi_\lambda)^{s-j} = 0,\ \zeta_{\lambda+1} = c\xi_\lambda;$$

$$\sum_{j=0}^{s} \Psi'_j(x_\gamma)(A\zeta_{\lambda+1}\chi_\lambda + B_0\xi_\lambda\chi_{\lambda+1} + C_0\xi_\lambda\zeta_{\lambda+1})^{s-j} = 0,\ \zeta_{\lambda+1} \neq c\xi_\lambda.$$

Теорема 2 доказана.

Список литературы: 1. *Игнатенко В. Ф.* Алгебраические поверхности с бесконечным множеством плоскостей косой симметрии. I // Укр. геометр. сб. 1989. Вып. 32. С. 20—39. 2. *Игнатенко В. Ф.* Строение инвариантов бесконечных групп, порожденных косыми отражениями. Симферополь, 1987. 21 с. Деп. в УкрНИИНТИ 13.07.78, № 1988 — Ук87. 3. *Игнатенко В. Ф.* О специальных алгебраических поверхностях с бесконечным множеством плоскостей косой симметрии // Укр. геометр. сб. 1990. Вып. 33. С. 55—61. 4. *Игнатенко В. Ф.* Специальные алгебраические поверхности с симметриями. Симферополь, 1988. 29 с. Деп. в УкрНИИНТИ 05.07.88, № 1768—Ук88. 5. *Zalesskii A. E.* The fixed algebra of a group generated by reflections is not alvays free // Arch. Math. 1983. 41. P. 434—437. 6. *Игнатенко В. Ф.* Об инвариантах одной группы, порожденной косыми отражениями в E^{11} // Укр. геометр. сб. 1988. Вып. 31. С. 59—62. 7. *Велесько А. Е.* Об инвариантах квадратичных групп и групп, порожденных псевдоотражениями // Весці АН БССР. 1986, № 2. С. 17—21. 8. *Дьедонне Ж., Керрол Дж., Мамфорд Д.* Геометрическая теория инвариантов. М., 1974. 280 с. 9. *Игнатенко В. Ф.* О строении инвариантов бесконечных групп, порожденных отражениями. Симферополь, Москва, 1986. 27 с. Деп. в ВИНИТИ 07.08.86, № 5608—В86.

Поступила в редколлегию 20.09.89

УДК 513.81

С. Б. КЛИМЕНТОВ

НЕКОТОРЫЕ ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ПОГРУЖАЕМОСТИ В ЦЕЛОМ МЕТРИК ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ

1. Введение. Приведем краткий обзор результатов по реализуемости заданных в круге метрик положительной кривизны поверхностью трехмерного евклидова пространства E^3.

Непосредственным следствием теоремы А. Д. Александрова о склеивании является следующая теорема о реализуемости заданной в круге общей выпуклой метрики общей выпуклой поверхностью трехмерного евклидова пространства.

Теорема 1 [1, с. 295]. *Всякая гомеоморфная кругу выпуклая область на выпуклой поверхности изометрична шапке.*

Результаты А. В. Погорелова о регулярности выпуклой поверхности с регулярной метрикой положительной кривизны [2, гл. 2] влекут за собой уточнение теоремы I в случае регулярных метрик.

Теорема 2. [2, с. 121]. *Пусть в гомеоморфной кругу области D, ограниченной кривой Γ, задана регулярная метрика с положительной гауссовой кривизной. Пусть геодезическая кривизна кривой Γ относительно заданной метрики неотрицательна. Тогда существует регулярная выпуклая шапка, реализующая эту метрику. Если заданная метрика принадлежит классу C^n, $n \geqslant 2$, то шапка принадлежит классу C_α^{n-1}, $0 < \alpha < 1$. Если метрика аналитическая, то шапка аналитическая.*

Утверждение этой теоремы о регулярности получило уточнение в работах И. Х. Сабитова [3], И. Г. Николаева и С. З. Шефеля [4].

Э. Г. Позняком [5] установлена реализуемость в E^3 посредством аналитической поверхности любого геодезического круга полной двумерной аналитической метрики без сопряженных точек (при отсутствии ограничений на знак кривизны этой метрики).

Реализация в целом метрик положительной кривизны поверхностью, подчиненной внешним условиям, рассматривалась в [2, 6].

Многие результаты по изгибаниям поверхностей положительной кривизны могут быть перетолкованы как результаты о погружениях метрик, близких к погружаемым; мы здесь не будем их касаться.

Теперь несколько слов о нереализуемых в E^3 двумерных метриках. Э. Г. Позняком [7] приведены примеры заданных на сфере и в круге регулярных метрик, нереализуемых в E^3 поверхностью класса C^2. Некоторая модификация идеи работы [7] позволила построить заданные в круге непогружаемые в целом метрики положительной кривизны [8], хотя локальная погружаемость регулярных метрик положительной кривизны следует из теоремы 2 (см. также [9]). Здесь следует отметить, что А. В. Погореловым построены примеры локально непогружаемых регулярных метрик, что указывает на возможность принципиально различных причин непогружаемости в целом метрик положительной и знакопеременной кривизны.

Все это делает естественной задачу дальнейшего поиска достаточных условий погружаемости в целом диффеоморфных кругу многообразий положительной кривизны.

В настоящей заметке доказывается, что диффеоморфное кругу регулярное риманово многообразие положительной кривизны K:

$$K \geqslant \varkappa = \text{const} > 0, \tag{1}$$

погружаемо в E^3 в виде регулярной поверхности, если оно имеет «медленно изменяющуюся гауссову кривизну» либо если оно имеет достаточно малую площадь (с любым поведением геодезической кривизны края). Используемый метод — доказательство разрешимости уравнений Гаусса—Петерсона—Кодацци (Г.П.К.), что автоматически распространяет результаты на погружения в трехмерное пространство постоянной кривизны K_0; на гауссову кривизну K при этом вместо (I) налагается условие

$$K - K_0 \geqslant \text{const} > 0 \tag{2}$$

((1) и (2) — условия эллиптичности системы Г.П.К.). Ниже говорится о погружениях в E^3.

2. *Формулировка результатов.* Пусть $\overline{D} = \{z : |z| \leqslant 1\}$ — замкнутый единичный круг комплексной z — плоскости, $z = x + iy$, $i^2 = -1$;

$$ds^2 = \Lambda(x, y)(dx^2 + dy^2) \tag{3}$$

— заданная в $\overline{D}$ риманова метрика, $\Lambda \in C^k_\alpha(\overline{D})$, $k \geqslant 3$, $0 < \alpha < 1$, (либо $\Lambda \in W^k_p(\overline{D})$, $k \geqslant 3$, $p > 2$) *, гауссова кривизна K которой удовлетворяет в $\overline{D}$ условию (1).

Обозначим через $G \subset D$, $\partial G \in C^{k+1}_\alpha$ произвольную односвязную подобласть круга D, через $\operatorname{mes} G$ — меру области G в z — плоскости,

* В заметке используются стандартные обозначения функциональных пространств и норм в них; дальнейшее изложение ведется в предположении $\Lambda \in C^k_\alpha$; в случае $\Lambda \in W^k_p$ рассуждения почти дословно повторяются.

через $(D; ds^2)$; $(G; ds^2)$ — римановы многообразия, полученные заданием римановой метрики (3) соответственно на круге D либо на области G.

Теорема 3. *Существует константа* $\varepsilon > 0$, *определяемая константой* $\varkappa$ *в* (1), *функцией* $\Lambda(x; y)$ *и ее частными производными до третьего порядка такая, что при* $\operatorname{mes} G < \varepsilon$ (4) *риманово многообразие* $(G; ds^2)$ *изометрически погружаемо в* E^3 *в виде поверхности класса* $C^k_\alpha(G)$.

Замечания. 1) Теорема 3 содержательна только если многообразие $(D; ds^2)$ нереализуемо в E^3 регулярной поверхностью.

2) В неравенстве (1) под $\operatorname{mes} G$ можно очевидно понимать и меру многообразия $(D; ds^2)$.

3) По техническим соображениям в формулировке теоремы 3 удобнее говорить о римановом многообразии $(G; ds^2)$, а не $(\bar{G}; ds^2)$, что эквивалентно, так как функция $\Lambda(x; y)$ всегда продолжима за границу ∂D с сохранением регулярности и неравенства вида (1), а вследствие этого можно считать, что область G всегда допускает расширение за свою границу (во всех ее точках) с сохранением неравенства (4).

Теорема 4. *Существует константа* $\delta > 0$, *определяемая постоянной* $\varkappa$ *в* (1) *и* $\| \partial_{\bar z} \ln \Lambda \|_{L_p(\bar D)}$ *(здесь* p *— любое конечное число, большее двух), такая, что если*

$$\| \operatorname{grad} K(x; y) \|_{L_p(\bar D)} < \delta, \tag{5}$$

то риманово многообразие $(D; ds^2)$ *изометрически погружаемо в* E^3 *в виде поверхности класса* C^k_α.

3. Комплексная запись уравнений Г. П. К. При доказательстве теорем 3 и 4 используется специальная комплексная форма записи уравнений Г. П. К., которая приводится в этом пункте. Введем обозначения: S — регулярная поверхность класса C^3 в E^3, параметризованная в D; b^j_i — смешанные компоненты второго основного тензора поверхности S; $H > 0$ — средняя кривизна поверхности S; $w(z) = \frac{1}{2}(b^1_1 - b^2_2 - 2ib^1_2)$. Будем считать, что метрика (1) — первая квадратичная форма поверхности S.

Известно [10, с. 193], что уравнения Г. П. К. для поверхности S можно записать в виде

$$\frac{\partial H}{\partial \bar z} - \frac{1}{\Lambda} \frac{\partial (\Lambda w)}{\partial z} = 0, \tag{6}$$

причем $\frac{\partial}{\partial \bar z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$; $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$;

$$H = \sqrt{K + |w|^2}. \tag{7}$$

Подставим (7) в (6). Выполнив дифференцирования по $\bar z$ и z, используя результат этого дифференцирования и комплексно-сопряженное равенство, исключим $\partial_z \bar w$. Окончательно получим

$$\begin{gathered} \partial_{\bar z} w + q_1(z; w)\,\partial_z w + q_2(z; w)\,\partial_{\bar z} \bar w + \\ + A(z; w)\,w + B(z; w)\,\bar w + F(z; w) = 0, \end{gathered} \tag{8}$$

где

$$q_1(z;w) = -\frac{2\sqrt{K+|w|^2}\,\overline{w}}{4K+3|w|^2};$$

$$q_2(z;w) = -\frac{w^2}{4K+3|w|^2};$$

$$A(z;w) = \frac{4\partial_{\bar z}\ln\Lambda\,(K+|w|^2) - K_{\bar z}}{4K+3|w|^2};$$

$$B(z;w) = \frac{2\sqrt{K+|w|^2}}{4K+3|w|^2}\,\partial_z \ln \Lambda w \tag{9}$$

$$F(z;\omega) = -\frac{2K_z\sqrt{K+|w|^2}}{4K+3|w|^2}.$$

Нетрудно убедиться, что для $\forall z \in \overline{D}$ и для всякого фиксированного w имеет место оценка

$$|q_1(z;w)| + |q_2(z;w)| \leqslant q_0(|w|) < 1,$$

где

$$q_0(|w|) = \frac{|w|}{2\sqrt{\varkappa+|w|^2} - |w|}, \tag{10}$$

$\varkappa$ — константа из неравенства (1), $q_0(|w|) \to 1$ при $|w| \to \infty$.

Таким образом, система в комплексной записи (8) эллиптична в $\overline{D}$ на каждом решении, но вообще говоря неравномерно эллиптична на множестве всех ее решений. Отметим также, что A, B, F равномерно по w ограничены.

По решению $w(z)$ уравнения (8), с помощью уравнения Гаусса чисто алгебраически восстанавливается второй основной тензор поверхности S [10, с. 192—193], таким образом, доказательство разрешимости системы Г.П.К. эквивалентно доказательству разрешимости уравнения (8), которое в связи с этим будем называть комплексной формой уравнений Г.П.К.

4. Доказательство теоремы 3. При $K = \text{const} > 0$ уравнение (8) имеет очевидное решение $w(z) = 0$, так что если метрика

$$ds_0^2 = \Lambda_0(x;y)(dx^2+dy^2) \in C_\alpha^k(\overline{D}) \tag{11}$$

постоянной положительной кривизны, то риманово многообразие $(D; ds_0^2)$ изометрически погружаемо. Опираясь на это замечание, доказательство теоремы 3 проводим методом параметрического продолжения. Следуя [12], рассмотрим непрерывное (в норме $C_\alpha^k(\overline{D})$) семейство метрик

$$ds_t^2 = \Lambda_0^{1-t}\Lambda^t(dx^2+dy^2) \tag{12}$$

класса $C_\alpha^k(\overline{D})$. При $t=0$ имеем погружаемую метрику (11) постоянной положительной кривизны, при $t=1$ — рассматриваемую в условии теоремы метрику (3). Пусть K_t — гауссова кривизна метрики (12). Для $\forall t \in [0, 1]$ и $\forall (x;y) \in \overline{D}$ будет

$$K_t \geqslant \text{const} > 0,$$

где константа от t не зависит [10, с. 193; 11, с. 169]. Не ограничивая общности, можем считать, что эта константа совпадает с $\varkappa$ из (1).

Уравнение (8), записанное для метрики (12), будем обозначать через $(8)_t$, а его решение, при желании подчеркнуть его зависимость от t, через w_t.

Рассмотрим интегродифференциальное уравнение:

$$\Omega_t(w) \equiv w(z) + T(q_1(z; w)\,\partial_z w + q_2(z; w)\,\partial_{\bar z}\bar w + A(z; w)\,w + B(z; w)\,\bar w + F(z; w)) = 0, \qquad (13)_t$$

где $Tf(z) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_G \frac{f(t)}{t-z}\,dx\,dy, \quad t = x + iy; \quad G \subset D$ — произвольная односвязная подобласть круга D с границей класса C_α^{k+1} и удовлетворяющая условию (4); коэффициенты q_1, q_2, A, B, F определены формулами (9) с участием метрики (12). Всякое решение класса $W_p^1(\bar G)$ уравнения $(13)_t$ будет решением уравнения $(8)_t$ (так как $(8)_t$ получается из $(13)_t$ дифференцированием по $\bar z$), в связи с чем параметрическое продолжение будет проводиться для уравнения $(13)_t$. Для этого, естественно, необходимы априорные оценки для решения $w = w_t(z)$, вывод которых — наша ближайшая цель.

Далее через $C_1(\varepsilon), C_2(\varepsilon), \ldots$ обозначаются не зависящие от t и w константы, бесконечно малые при $\varepsilon \to 0$ через $L_1, L_2, \ldots$ — константы, не зависящие от w, t и ε. Любая константа C оценивается сверху некоторой константой L и все постоянные L оцениваются через $Q = \max\limits_{t \in [0;1]} \|\Lambda^t \Lambda_0^{1-t}\|_{C^3(\bar D)} = Q$.

Лемма 1. *При* $f(t) \in L_p(\bar G)$, $p > 2$,

$$|Tf(z)| \leqslant C_1(\varepsilon)\,\|f\|_{L_p(\bar G)} \leqslant C_2(\varepsilon)\,\|f\|_{C(\bar G)},$$

где константы C_1, C_2 *зависят только от* p, ε *и стремятся к нулю при* $\varepsilon \to 0$.

Лемма 1 есть непосредственное следствие неравенства Гёльдера и абсолютной непрерывности интеграла Лебега.

Далее для сокращения записи полагаем

$$\|\ \|_{C(\bar G)} = \|\ \|_C; \quad \|\ \|_{L_p(\bar G)} = \|\ \|_p;$$

$$\|\ \|_{W_p^1(\bar G)} = \|\ \|_{1,p}.$$

Лемма 2. *Пусть* $w = w_t(z)$ — *решение уравнения* (13). *Существуют константы* L_1 *и* L_2, $L_1 > L_2 > 0$, *такие что при надлежащем выборе* $p > 2$ и $\varepsilon > 0$ *из неравенства*

$$\|w_t\|_{1,p} \leqslant L_1 \qquad (14)$$

следует неравенство

$$\|w_t\|_{1,p} \leqslant L_2, \ \forall t \in [0; 1]. \qquad (15)$$

Выбор ε *и* p *определяется величиной* Q.

Доказательство леммы 2. Пока что $p > 2$ не фиксируем; выбор p уточним несколько ниже. Число $\varepsilon > 0$ также пока не фиксируем, далее дважды будет уточняться, насколько малым оно должно быть.

Отметим, что из (9) следует $\|F\|_p \leqslant L_3$ (16), где L_3 от L_1 и p не зависит.

Из (13) и леммы 1 получаем следующую оценку для $w \in W_p^1(\overline{G})$:

$$\|w\|_C \leqslant C_1(\varepsilon)\|w\|_{1,p} + C_2(\varepsilon)\|w\|_C + C_3(\varepsilon)\|F\|_p.$$

Отсюда, при достаточно малом ε (таком, что $C_2(\varepsilon) < 1$; первое уточнение значения ε):

$$\|w\|_C \leqslant C_4(\varepsilon)\|w\|_{1,p} + C_5(\varepsilon)\|F\|_p. \tag{17}$$

Продифференцируем (в смысле С. Л. Соболева) уравнение $(13)_t$ по переменной z; получим

$$w_z + \Pi(q_1 w_z + q_2 \overline{w_z}) + \Pi(Aw + B\overline{w}) + \Pi F = 0, \tag{18}$$

где $\Pi = \partial_z T$ — двумерный сингулярный интегральный оператор.

Для дальнейших рассуждений понадобится следующее вспомогательное утверждение [12, с. 87—88].

Лемма 3. *При $p > 2$ и достаточно близком к двум имеют место неравенства*

$$q_0\|\Pi\|_p < 1;$$

$$1 - q_0\|\Pi\|_p \geqslant \frac{1}{2}(1 - q_0), \tag{19}$$

где $\|\Pi\|_p$ — норма непрерывного линейного оператора $\Pi : L_p(\overline{G}) \to L_p(\overline{G})$; $q_0 = q_0(|w|)$ определено формулой (10). *В силу предположения* (14) $q_0 = q_0(L_1) < 1$.

В дальнейшем $p > 2$ считаем выбранным настолько близко к двум, что для $\forall w$, удовлетворяющего неравенству (14), выполнено утверждение леммы 3 (таким образом, выбор p поставлен в зависимость от L_1; далее L_1 будет выбрано лишь в зависимости от Q, так что и p окончательно определяется лишь в зависимости от этой величины).

Отметим, что из (10) непосредственно следует неравенство:

$$\frac{1}{1 - q_0} \leqslant 2 + \frac{3\|w\|_C^2}{2\varkappa}, \tag{20}$$

где $\varkappa$ — константа из (1).

Выведем оценку для $\|w_z\|_p$. Из (18) и (9) находим

$$\|w_z\|_p \leqslant \frac{1}{1 - q_0\|\Pi\|_p}(L_4\|w\|_p + L_5\|F\|_p).$$

Воспользовавшись (19) и (20), отсюда получим

$$\|w_z\|_p \leqslant 2\left(2 + \frac{3}{2\varkappa}\|w\|_C^2\right)(L_6\|w\|_C + L_5\|F\|_p). \tag{21}$$

Из (21) и (8) следует оценка для $\|w_{\bar z}\|_p$:

$$\|w_{\bar z}\|_p \leqslant 2\left(2 + \frac{3}{2\varkappa}\|w\|_C^2\right)(L_6\|w\|_C + L_5\|F\|_p) + L_7\|w\|_C + \|F\|_p. \tag{22}$$

Из (17) и (22) будем иметь:

$$\|w\|_{1,p} \leqslant C_4(\varepsilon)\|w\|_{1,p} + C_5(\varepsilon)\|F\|_p +$$

$$+ \left(8 + \frac{6}{\varkappa}\|w\|_C^2\right)(L_6\|w\|_C + L_5\|F\|_p) + L_7\|w\|_C + \|F\|_p,$$

откуда, раскрыв скобки и приняв во внимание (16), получим

$$\|w\|_{1,p} \leqslant C_4(\varepsilon)\|w\|_{1,p} + L_8\|w\|_C^3 + L_9\|w\|_C^2 + L_{10}\|w\|_C + L_{11}. \quad (23)$$

Оценив в правой части (23) $\|w\|_C$ с помощью (17) и учитывая (14), преобразуем (23) к виду

$$\|w\|_{1,p} \leqslant C_6(\varepsilon)\|w\|_{1,p} + L_{12}, \quad (24)$$

где явное выражение констант $C_6(\varepsilon)$ и L_{12} через предыдущие константы устанавливается без труда. Здесь это явное выражение не приводится, так как оно не важно, важно лишь то, что константа $C_6(\varepsilon)$ зависит от L_1, а константа L_{12} от L_1 и p не зависит; L_{12} зависит от Q.

Положим теперь $L_2 = 2L_{12}$, $L_1 = 2L_2$, а ε таким, что справедливо (17) и $C_6(\varepsilon) \leqslant 1/2$ (второе уточнение значения ε); тогда, при условии, что $p = p(L_1)$ таково, что справедлива лемма 3, из (24) следует (15).

Лемма 2 доказана.

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы 3. Будем считать, что $\varepsilon > 0$ настолько мало, что справедлива лемма 2; фигурирующее ниже число $p > 2$ выбираем из тех же соображений.

Покажем, что уравнение $(13)_t$ разрешимо при $\forall t \in [0; 1]$ в классе $W_p^1(\overline{G})$.

Обозначим через $P \subseteq [0; 1]$ связное, содержащее нуль множество тех значений параметра t, для которых уравнение $(13)_t$ разрешимо, а через $P_1 \subseteq P$ — связное, содержащее нуль множество тех же значений параметра $t \in P$, при которых уравнение $(13)_t$ разрешимо и его решение удовлетворяет неравенству (15).

Лемма 4. *Множество P_1 открыто в* $[0; 1]$ *и решение* $w = w_t(z)$ *для* $t \in P_1$ *непрерывно зависит от* t.

Доказательство леммы 4. Оператор $\Omega_t(w)$, определяемый левой частью уравнения (13), аналитически по Фреше отображает $[0; 1] \times W_p^1(\overline{G})$ в $W_p^1(\overline{G})$, что легко усматривается из (9), (12), (13) и свойств оператора T (см. [12, с. 54]). Производная Фреше оператора Ω_t для $\forall t \in P_1$ и $w = w_t(z) \in W_p^1(\overline{G})$ такого, что $t \in P_1$, есть изоморфизм банахова пространства $W_p^1(\overline{G})$ (см. [13, лемма 4]; условие (15) здесь обеспечивает равномерную по $t \in P_1$ оценку для $q_0(|w|)$ из (10)). По теореме о неявной функции [14, гл. 2, § 7] получаем, что уравнение (13) разрешимо в классе $W_p^1(\overline{G})$ для $\forall t$ из некоторого связного открытого в $[0; 1]$ множества $P_2 \supset P_1$, причем решение $w = w_t(z)$ непрерывно (в норме $W_p^1(\overline{G})$) зависит от $t \in P_2$. В силу последнего обстоятельства, существует связное, открытое в $[0; 1]$ множество P_3 такое, что $P_2 \supset P_3 \supset P_1$ и для всякого $t \in P_3$ выполнено неравенство (14). Но тогда по лемме 2 для $\forall t \in P_3$ выполнено (15), откуда $P_3 = P_1$ и P_1 — открыто.

Лемма 4 доказана.

Лемма 5. $P = P_1$.

Доказательство леммы 5. Поскольку множество P_1 открыто в $[0; 1]$, оно открыто в P. В силу (15) множество P_1 замкнуто в P. Поскольку P и P_1 связны и имеют непустое пересечение, $P = P_1$.

Лемма 5 доказана.

Покажем теперь, что P замкнуто, тогда $P = [0; 1]$.

Поскольку на всем P имеет место оценка (15), а коэффициенты (9) и их частные производные по w, $\overline{w}$ равномерно по w и t ограничены, доказательство замкнутости P повторяет соответствующее рассуждение из доказательства теоремы 3 работы [14].

По решению класса $W_p^1(\overline{G})$ уравнений Г. П. К. однозначно (с точностью до движения) восстанавливается в E^3 поверхность класса $W_p^3(\overline{G}) \subset C^2_{\frac{p-2}{p}}(\overline{G})$ с метрикой (3) (см. [15]), которая в силу (1) и $\Lambda \in C_\alpha^k(\overline{D})$ будет класса $C_\alpha^k(D)$ (см. [3]).

Теорема 3 доказана.

5. *Доказательство теоремы 4.* Покажем, что уравнение (13) имеет решение класса $W_p^1(\overline{D})$ $(G = D)$, если выполнено (5), где $\delta > 0$ достаточно мало. Будем рассматривать нелинейный оператор Ω в (13) как оператор двух аргументов — $w \in W_p^1(\overline{D})$ и $K_z \in L_p(\overline{D})$:

$$\Omega = \Omega(w; K_z): W_p^1(\overline{D}) \times L_p(\overline{D}) \to W_p^1(\overline{D}), \tag{25}$$

при фиксированных функциях $\Lambda(z)$ и $K(z)$. Из свойств оператора T следует, что оператор (25) аналитичен по Фреше по этим двум аргументам, причем, очевидно, $\Omega(0; 0) = 0$ [12, гл. I, § 6].

Дифференциал Фреше оператора Ω по w в точке $w = 0$, $K_z = 0$ имеет вид

$$\Omega'_w(0; 0)\, h = h(z) + T(\tilde{A}(z)\, h), \tag{26}$$

где $\tilde{A}(z) = \partial_{\bar{z}} \ln \Lambda \in L_p(\overline{D})$ (ст. (9)).

Линейный оператор (26) является изоморфизмом банахова пространства $W_p^1(\overline{D})$ [12, с. 167]. Отсюда так же, как и в доказательстве теоремы 3, по теореме о неявной функции для достаточно малого δ (которое определяется $\|\tilde{A}\|_{L_p(\overline{D})}$ и от $K(z)$ не зависит) получаем разрешимость уравнения (13) в классе $W_p^1(\overline{D})$ и погружаемость $(\overline{D}; ds^2)$ в виде поверхности $S \in W_p^3(\overline{D})$. Поскольку $\Lambda \in C_\alpha^k(\overline{D})$, $S \in C_\alpha^k(D)$ [3].

Теорема 4 доказана.

Список литературы: 1. *Александров А. Д.* Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей. М.; Л., 1948. 387 с. 2. *Погорелов А.В.* Внешняя геометрия выпуклых поверхностей. М., 1969. 759 с. 3. *Сабитов И. Х.* Регулярность выпуклых поверхностей с регулярной в классах Гельдера метрикой // Сиб. мат. журн. 1976. **17**, № 4. С. 907—915. 4. *Николаев И. Г., Шефель С.З.* Выпуклые поверхности с положительной ограниченной удельной кривизной и априорные оценки для решений уравнений Монжа—Ампера // Сиб. мат. журн. 1985. **27**, № 4. С. 120—136. 5. *Позняк Э. Г.* Реализация в целом двумерных аналитических метрик знакопеременной кривизны // Укр. геометр. сб. 1970. Вып. 7. С. 89—97. 6. *Гейсберг С. П.* Реализация выпуклой поверхности с краем по данной метрике // Укр. геометр. сб. 1970. Вып. 7. С. 11—18. 7. *Позняк Э. Г.* Примеры регулярных метрик на сфере и в круге, нереализуемых в классе дважды непрерывно дифференцируемых поверхностей // Вестн. Моск. ун-та, сер. мат., 1960. № 2. С. 3—5. 8. *Громов М. Л., Рохлин В. А.* Вложения и погружения в римановой геометрии // Успехи мат. наук. 1970. **25**, вып. 5. С. 3—62. 9. *Сабитов И. Х.* Об одной схеме последовательных приближений для погружений двумерных метрик в E^3 // Сиб. мат. журн. 1978. **19**, № 6. С.1358—1380. 10. *Векуа И. Н.* Основы тензорного анализа и теории ковариантов. М., 1978. 296 с. 11. *Вейль Г.* Об определении замкнутой выпуклой поверхности ее линейным элементом // Успехи мат. наук. 1948. 3, вып. 2. С. 159—190. 12. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции. М., 1959. 628 с. 13. *Ниренберг Л.* Лекции по нелинейному функциональному анализу. М., 1977. 232 с. 14. *Климентов С. Б.* Об одном способе построения решений краевых задач теории изгибаний поверхностей положительной кривизны // Укр. геометр. сб. 1986. Вып. 29. С. 56—82. 15. *Климентов С. Б.* Глобальная формулировка основной теоремы теории n-мерных поверхностей в m-мерном пространстве постоянной кривизны // Укр. геометр. сб. 1979. Вып. 22. С. 64—81.

Поступила в редколлегию 08.12.88

УДК 514

А. И. КРИВОРУЧКО

О ГРУППАХ, ПОРОЖДЕННЫХ ДИСКРЕТНЫМИ МНОЖЕСТВАМИ ОТРАЖЕНИЙ

В работах [1—3] изучается строение фигур в евклидовом пространстве E^n, имеющих недискретные множества плоскостей косой симметрии.

При изучении фигур с дискретными множествами плоскостей симметрии возникает следующий вопрос: можно ли утверждать, что группа G, порождаемая отражениями в E^n, дискретна, если дискретно множество всех отражений, принадлежащих G?

В настоящей заметке показывается, что при $n = 3$ ответ на этот вопрос положителен, если G — центроаффинная группа. Строятся примеры нецентроаффинных недискретных групп, порожденных отражениями в E^3, содержащих лишь дискретные множества отражений. Отсюда получаются аналогичные примеры центроаффинных групп в E^4.

1°. Топологические свойства любого множества M аффинных преобразований пространства E^n будем рассматривать относительно топологии непрерывной группы всех аффинных преобразований E^n. В этом смысле дискретность M эквивалентна любому из следующих условий:

а) Относительно некоторой (а тогда и любой) аффинной системы координат пространства E^n множество всех $n \times (n+1)$-матриц, соответствующих преобразованиям, принадлежащим M, дискретно в евклидовой топологии пространства $R^{n(n+1)}$, где R — координатная прямая.

б) Если $(c; e_1, \ldots, e_n)$ — некоторый репер в E^n с началом в точке c и базисными векторами e_i, $i = \overline{1, n}$, то во множестве реперов $\{(\varphi(c); \varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)) : \varphi \in M\}$ всякая последовательность, сходящаяся в естественном смысле к реперу из этого же семейства, стабилизируется (т. е. все члены такой последовательности, за исключением, быть может, их конечного числа, совпадают между собой).

в) Для некоторого (а тогда и для любого) n-симплекса Δ в E^n множество симплексов $\{\varphi(\Delta) : \varphi \in M\}$ с метрикой Хаусдорфа на нем, дискретно (но не обязательно замкнуто в пространстве всех n-симплексов, лежащих в E^n).

Под отражением в E^n будем понимать отражение относительно произвольной k-плоскости $(0 \leqslant k < n)$ в направлении некоторой дополнительной, не обязательно ортогональной, $(n-k)$-плоскости (см. [4, с. 130]).

Если φ-аффинное преобразование E^n, τ — отражение относительно P в направлении L, то $\varphi\tau\varphi^{-1}$ — отражение относительно $\varphi(P)$ в направлении $\varphi(L)$. В частности, если и φ — отражение, то $\varphi^{-1} = \varphi$ и поэтому $\varphi\tau\varphi$ является отражением.

Пусть M — некоторое множество преобразований. Через $\langle M\rangle$ будем обозначать порождаемую этим множеством группу.

Если H — некоторая группа, $M \subset H$ и $\varphi^{-1}M\varphi$ содержится в M для любого φ, принадлежащего H, то M называется H-инвариантным.

Отметим, что если M порождает H и квадрат каждого элемента из M является единицей группы H (например, если M состоит из отражений), то H-инвариантность M эквивалентна тому, что $\varphi\tau\varphi \in M$ для любых φ и τ из M.

Теорема. *Центроаффинная группа G преобразований пространства E^3, порожденная дискретным G-инвариантным множеством отражений, дискретна.*

Доказательство. Пусть семейство A отражений, порождающее G, дискретно и G-инвариантно. Каждое φ, принадлежащее A, является либо отражением относительно некоторой плоскости, содержащей фиксированную точку c, либо отражением относительно прямой, проходящей через c, либо отражением σ относительно точки c. Проверим, что $\langle\{\sigma\} \cup A\rangle$ дискретна. Пусть A_1 — семейство всех принадлежащих A отражений относительно прямых, A_2 — семейство всех принадлежащих A отражений относительно плоскостей. $\langle\{\sigma\} \cup A\rangle = \langle\{\sigma\} \cup A_2 \cup \sigma A_1\rangle$. Поэтому достаточно проверить, что группа G', порожденная семейством $A' = A_2 \cup \sigma A_1$, дискретна. σA_1 дискретно и состоит из отражений относительно плоскостей. Поэтому A' — дискретное семейство отражений относительно плоскостей. Проверим, что A' инвариантно относительно G'. Если φ и τ принадлежат A_1, то и $\varphi\tau\varphi$ принадлежит A_1 и поэтому $(\sigma\varphi)(\sigma\tau)(\sigma\varphi) = \sigma(\varphi\tau\varphi) \in \sigma A_1$. Если же $\varphi \in A_1$, $\tau \in A_2$, то $(\sigma\varphi)\tau(\sigma\varphi) = \varphi\tau\varphi \in A_2$ и $\tau(\sigma\varphi)\tau = \sigma(\tau\varphi\tau)$. Но $\tau\varphi\tau \in A_1$. Отсюда следует G'-инвариантность A'.

Предположим, что G' недискретна. Тогда A' бесконечно. В самом деле, всякое φ, принадлежащее G', в силу G'-инвариантности A' можно представить в виде произведения конечного числа попарно различных элементов, принадлежащих A'. Покажем это. Пусть $\varphi = \ldots\varphi_1\varphi_2\ldots\varphi_k\cdot\varphi_1\ldots$, где $\varphi_i \in A'$. Тогда $\varphi = \ldots\varphi_1\varphi_2\ldots(\varphi_1\varphi_1)\cdot\varphi_k\times \times\varphi_1\ldots = \ldots\varphi_1\varphi_2\ldots\varphi_1(\varphi_1\varphi_k\varphi_1)\ldots = \ldots\varphi_1\varphi_2\ldots\varphi_1\varphi_k' = \ldots = \ldots = \ldots = \ldots(\varphi_1\varphi_2\varphi_1)\ldots\varphi_k' = \ldots = \ldots\varphi_2\ldots\varphi_k'\ldots$, где $\varphi_i' \in A'$. При этом число сомножителей уменьшилось. Повторяя, если нужно, это преобразование произведения, за конечное число шагов мы представим φ в виде произведения попарно различных элементов, принадлежащих A'. Поэтому если A' конечно, то G' конечна и, следовательно, дискретна.

Через $T(P, L)$ будем обозначать отражение относительно P в направлении L. Предположим, что в A' найдутся отражения $\varphi_i =$

$= T(P_i, L_i)$ $(i = \overline{1,3})$ относительно плоскостей, имеющих единственную общую точку. В силу бесконечности A' найдется $\varphi_4 = T(P_4, L_4)$, такое, что либо P_4 не совпадает ни с одной P_i, либо L_4 не параллельна ни одной L_i, где $i = \overline{1, 3}$. В силу дискретности и G'-инвариантности A' в G' найдется проколотая окрестность U единичного преобразования такая, что $\varphi\varphi_i\varphi^{-1} = \varphi_i$ для каждого $\varphi \in U$ и $i = \overline{1, 4}$. При этом можно считать, что вещественные части собственных значений всех φ из U положительны.

Зафиксируем $\varphi \in U$. В базисе (e_1, e_2, e_3), где $e_i \parallel P_j \cap P_k$ для попарно различных i, j, k, принимающих значения 1, 2, 3, φ имеет матрицу $\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, где $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1$. Если λ_1, λ_2 и λ_3 попарно различны, то φ имеет лишь три инвариантных направления и три инвариантных плоскости, что противоречит существованию φ_4. Поэтому можно считать, что $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$. Отсюда для $i = 1, 2, 4$ имеем $L_3 \parallel P_i, L_i \parallel P_3$. Но в таком случае всякое ψ, принадлежащее U, имеет матрицу $D(\lambda_\psi) = \mathrm{diag}(\lambda_\psi, \lambda_\psi, (\lambda_\psi)^{-2}, 0 < \lambda_\psi \neq 1$.

Пусть теперь отражение $\varphi = T(P, L)$ принадлежит A' и не совпадает ни с одним φ_i, $i = \overline{1, 4}$. В G' найдется проколотая окрестность W единичного преобразования такая, что $\psi\varphi\psi^{-1} = \varphi$ для каждого ψ из W. Поэтому найдется $\psi \in U$ такое, что $\psi(P) = P$, $\psi(L) \parallel L$. Отсюда $e_3 \parallel P$, $L \parallel P_3$.

Таким образом, для каждого $\varphi = T(P, L)$, принадлежащего A', либо $\varphi = \varphi_3$, либо $P \parallel e_3$ и $L \parallel P_3$. Но тогда ни одно ψ из U не является произведением отражений, принадлежащих A'. В самом деле, e_3 является для ψ собственным вектором с положительным собственным значением, не равным 1; для всякого же $\varphi \in A'$ вектор e_3 — собственный вектор с собственным значением, равным 1 или —1.

Следовательно, все плоскости отражений семейства A' параллельны некоторому вектору e. Предположим, что в A' найдутся отражения $\varphi_i = T(P_i, L_i)$, $i = 1,2$, для которых направляющие векторы u_1 и u_2 прямых L_1 и L_2 соответственно и вектор e не компланарны. Тогда, как и выше, получаем, что в базисе (u_1, u_2, e) каждое ψ из G', принадлежащее некоторой проколотой окрестности единичного преобразования, имеет матрицу $D(\lambda_\psi)$, где $0 < \lambda_\psi \neq 1$. Но ни одно такое ψ не является произведением отражений из семейства A'.

Остается рассмотреть случай, когда все плоскости отражений семейства A' параллельны некоторому вектору e_1, а все направления отражений параллельны некоторой плоскости K, которая при этом параллельна e_1. Зафиксируем репер $(c; e_1, e_2, e_3)$, для которого $e_2 \parallel K$ и $e_3 \not\parallel K$; пусть B — множество всех $T(P, L)$, для которых $L \parallel K$, $e_1 \parallel P$, $c \in P$. Выберем произвольное $T(P, L) \in B$. Тогда L имеет направляющий вектор с координатами $(\alpha, 1, 0)$, P задается уравнением $x_2 - \beta x_3 = 0$, а $T(P, L)$ имеет матрицу

$$\Delta(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} 1 & -2\alpha & 2\alpha\beta \\ 0 & -1 & 2\beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Сопоставим выбранному $T(P, L)$ точку (α, β) координатной плоскости R^2; производя такое сопоставление для каждого $T(P, L) \in B$, мы определим взаимно однозначное соответствие между элементами B и точками R^2. Непосредственным вычислением показывается следующее: пусть φ и ψ принадлежат B, a и b — сопоставленные им точки в R^2; тогда отражение $\psi\varphi\psi$ принадлежит B и сопоставленная этому отражению точка симметрична в R^2 точке a относительно точки b.

Обозначим через F множество всех точек плоскости R^2, сопоставленных указанным способом отражениям, принадлежащим A'. Тогда F дискретно в силу дискретности A', а так как $\psi\varphi\psi \in A'$ для любых φ и ψ из A', то F симметрично относительно каждой своей точки. На F действует группа H параллельных переносов, являющихся произведениями четного чила отражений относительно точек, принадлежащих F. H дискретна в силу дискретности F. Если F лежит на некоторой прямой, то найдется вектор p такой, что каждый перенос, принадлежащий H, является переносом на вектор, кратный p. Отсюда, если a — некоторая точка, принадлежащая F, то F состоит из всех точек вида $a + {}^1/_2 mp$, где m — произвольное целое число. Отметим, что необходимость рассмотрения множества на прямой, симметричного относительно каждой своей точки, возникает и в [1] при изучении плоских фигур с бесконечным семейством осей косой симметрии. Предположим теперь, что F не лежит на прямой. Тогда найдутся такие линейно независимые векторы p и q, что H является группой параллельных переносов на векторы вида $mp \times nq$, где m и n — произвольные целые числа. Зафиксируем $a \in F$. Если $z \in F$, то $2\overrightarrow{az} = mp + nq$ и поэтому в репере $(a; p, q)$ точка z имеет координаты, кратные ${}^1/_2$.

Таким образом, с точностью до аффинной эквивалентности F содержится в целочисленной решетке плоскости. Поэтому найдется 2×2-матрица Q, такая, что A' содержится во множестве B' всех принадлежащих B отражений, имеющих матрицы вида $\Delta(\alpha, \beta)$, где $(\alpha, \beta) = (m, n)Q$, а m, n — произвольные целые числа. Для доказательства теоремы достаточно теперь проверить, что $\langle B' \rangle$ дискретна.

Пусть φ_i принадлежит B' и имеет матрицу $\Delta(\alpha_i, \beta_i)$, $i = 1, 2$. Тогда $\varphi_1 \cdot \varphi_2$ имеет матрицу

$$\Delta(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{pmatrix} 1 & 2\alpha & 2\gamma \\ 0 & 1 & 2\beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$, $\beta = \beta_1 - \beta_2$, $\gamma = \alpha\beta + (\alpha_1\beta - \beta_1\alpha)$, $(\alpha_1, \beta_1) = (m_1, n_1)Q$, $(\alpha, \beta) = (m, n)Q$, а m_1, n_1, m, n — целые числа; поэтому

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha_1 & \beta_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m & n \\ m_1 & n_1 \end{vmatrix} \cdot |Q|$$

и $\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta$ кратно $|Q|$.

Пусть теперь ψ_i для $i = 1, 2$ имеет матрицу $\Delta(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$, где $(\alpha_i, \beta_i) = (m_i, n_i)Q$, $\gamma_i = \alpha_i\beta_i + l_i|Q|$, m_i, n_i, l_i — целые числа. Тогда $\psi_1\psi_2$ имеет матрицу $\Delta(\alpha_1 + \alpha_2, \beta_1 + \beta_2, \gamma)$, где

$$\gamma = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + 2\alpha_1\beta_2 + (l_1 + l_2) \cdot |Q| = (\alpha_1 + \alpha_2)(\beta_1 + \beta_2) + \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 + (l_1 + l_2)|Q| = (\alpha_1 + \alpha_2)(\beta_1 + \beta_2) + l|Q|;$$

так как $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1$ кратно $|Q|$, то l — целое.

Следовательно, всякое преобразование, принадлежащее $\langle B' \rangle$, с определителем, не равным -1, имеет метрицу вида $\Delta(\alpha, \beta, \alpha\beta \times l \,|\, Q \,|)$, где (α, β) принадлежит дискретному множеству в R^2, а l — целое. Но семейство таких матриц дискретно. Теорема доказана.

Следствие 1. *Недискретная группа, порожденная отражениями относительно плоскостей (или прямых) пространства E^3, имеющих общую точку, содержит недискретное множество таких отражений.*

Доказательство. Пусть G — группа, порожденная отражениями относительно плоскостей в E^3, имеющих общую точку. Множество M всех принадлежащих G отражений относительно плоскостей G-инвариантно и порождает G. Поэтому если M дискретно, то и G дискретна. Случай, когда G порождается отражениями относительно прямых, рассматривается аналогичным образом.

Отсюда получаем, что если фигура F в E^3 инвариантна относительно недискретной центроаффинной группы, порожденной отражениями, то эта фигура является объединением орбит одной из центроаффинных однопараметрических групп, указанных в [2, 3].

Следствие 2. *Группа G преобразований евклидовой плоскости, порожденная дискретным G-инвариантным семейством отражений, дискретна. Поэтому недискретная группа преобразований E^2, порожденная отражениями относительно прямых, содержит недискретное семейство таких отражений.*

2°. Приведем примеры, показывающие, что полученные результаты не переносятся на группы нецентроаффинных преобразований пространства E^3, так же, как и на группы центроаффинных преобразований E^4.

Пусть $\varphi_1\langle m, n, l\rangle$ — отражение в E^3 относительно плоскости $x_3 = n + \sqrt{3}l$ в направлении вектора с координатами $(m, \sqrt{3}n - l, 1)$; $\varphi_2\langle m, n, l\rangle$ — отражение в E^4 относительно 3-плоскости $x_3 = (n + \sqrt{3}\,l)x_4$ в направлении вектора с координатами $(m, \sqrt{3}\,n - l, 1, 0)$; $\varphi_3\langle m, n, l\rangle$ — отражение в E^3 относительно прямой $x_2 + n - \sqrt{3}\,l = x_3 = 0$ в направлении плоскости $x_1 + mx_2 + (\sqrt{3}\,n + l)x_3 = 0$; $\varphi_4\langle m, n, l\rangle$ — отражение в E^4 относительно 2-плоскости, содержащей начало координат и прямую

$$x_2 + n - \sqrt{3}l = x_3 = x_4 - 1 = 0$$

в направлении 2-плоскости

$$x_1 + mx_2 + (\sqrt{3}n + l)\, x_3 = x_4 = 0;$$

наконец, $\varphi_5\langle m, n, l\rangle$ — отражение в E^4 относительно прямой $\frac{x_1}{m} = \frac{x_2}{n + \sqrt{3}l} = \frac{x_3}{1} = \frac{x_4}{0}$ в направлении 3-плоскости $x_3 - (\sqrt{3}n - l)\, x_4 = 0$.

Для каждого $i = \overline{1, 5}$ обозначим через N_i семейство всех отражений $\varphi_i\langle m, n, l\rangle$, где m, n, l — произвольные целые числа. Тогда: 1) N_i замкнуто, инвариантно относительно $\langle N_i\rangle$ и дискретно; 2) группа $\langle N_i\rangle$ недискретна и является группой с восьмью образующими, которые могут быть выбраны в N_i; 3) N_i — семейство всех отражений, принадлежащих замыканию группы $\langle N_i \rangle$. Следовательно, это замыкание, будучи несчетным, не порождается отражениями (см. с [5], где доказывается, что если линейная группа порождается отражениями относительно гиперплоскостей, то и ее замыкание в топологии Зарисского порождается такими отражениями), 4) всякая алгебраическая гиперповерхность, инвариантная относительно $\langle N_i \rangle$, является цилиндрической.

Отметим, что все оси отражений семейства N_3 параллельны и лежат в одной 2-плоскости; все оси отражений семейства N_5 проходят через общую точку и лежат в трехмерном подпространстве пространства E^4; аналогичным свойством обладают 2-плоскости отражений семейства N_4.

Докажем сформулированные утверждения для семейства N_1.

Пусть φ — отражение в E^3 отосительно плоскости $x_3 = \gamma$ в направлении вектора с координатами $(\alpha, \beta, 1)$. Тогда φ имеет матрицу

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2\alpha & 2\alpha\gamma \\ 0 & -1 & -2\beta & 2\beta\gamma \\ 0 & 0 & -1 & 2\gamma \end{array}\right). \qquad (1)$$

Сопоставим такому отражению точку $(\alpha, \beta, \gamma) \in R^3$. Для $j = 1, 2$ пусть φ_j — отражение относительно плоскости $x_3 = \gamma_j$ и $\varphi_3 = \varphi_2\varphi_1\varphi_2$. Тогда φ_3 — отражение относительно некоторой плоскости $x_3 = \gamma_3$; при этом если a_j — точка в R^3, сопоставленная указанным способом отражению φ_j для $j = \overline{1, 3}$, то непосредственным вычислением проверяется, что a_2 — середина отрезка $[a_1; a_3]$. Но множество F_1 всех точек, сопоставленных отражениям семейства N_1, является решеткой в R^3, так как

$$\begin{pmatrix} m \\ \sqrt{3}n - l \\ n + \sqrt{3}l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & -1 \\ 0 & 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m \\ n \\ l \end{pmatrix}.$$

Следовательно, N_1 замкнуто, дискретно и $\langle N_1 \rangle$ — инвариантно, а $\langle N_1 \rangle$ порождается восьмью отражениями, которым сопоставлены вершины какого-нибудь фундаментального параллелепипеда решетки F_1.

Пусть теперь

$$\varphi_1 = \varphi_1\langle 1, m, n \rangle, \ \varphi_2 = \varphi_1\langle 0, m, n \rangle,$$
$$\varphi_3 = \varphi_1\langle 0, 0, 0 \rangle, \ \varphi_4 = \varphi_1\langle 1, 0, 0 \rangle,$$

где m, n — целые числа. Непосредственным вычислением проверяется, что $\varphi_1\varphi_2\varphi_3\varphi_4$ — параллельный перенос на вектор $-2(m + \sqrt{3}\,n)e_1$. Среди чисел вида $m + \sqrt{3}n$ имеются сколь угодно малые отличные от нуля числа. Отсюда следует, что $\langle N_1 \rangle$ недискретна, а всякое замкнутое множество, инвариантное относительно $\langle N_1 \rangle$, цилиндрично.

Пусть G_1 — замыкание группы $\langle N_1 \rangle$ в непрерывной группе всех аффинных преобразований пространства E^3. Если φ принадлежит $\langle N_1 \rangle$ и имеет хотя бы одно собственное значение, отличное от 1, то

φ — произведение нечетного числа отражений, принадлежащих N_1; но тогда непосредственно проверяется, что φ имеет матрицу вида

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2\alpha & \varepsilon \\ 0 & 1 & -2\beta & \delta \\ 0 & 0 & -1 & 2\gamma \end{array}\right), \tag{2}$$

где $(\alpha, \beta, \gamma) \in F_1$. Предположим, что φ — отражение, принадлежащее группе G_1. Тогда в силу замкнутости F_1 преобразование φ имеет матрицу вида (2). Следовательно, $\varphi(e_i) = e_i$ для $i = 1, 2$ и поэтому φ — отражение относительно плоскости $x_3 = \gamma$. Но в таком случае матрица (2) совпадает с матрицей (1). Учитывая, что (α, β, γ) принадлежит F_1, получаем, что $\varphi \in N_1$.

Отметим, что замыкание H_1 группы $\langle N_1 \rangle$ в топологии Зарисского содержит все отражения относительно плоскостей, параллельных плоскости $x_3 = 0$. В самом деле, множество всех принадлежащих H_1 отражений относительно плоскостей, параллельных плоскости $x_3 = 0$, замкнуто в топологии Зарисского, так как каждое такое отражение имеет матрицу вида (1). Все элементы матрицы (1) являются многочленами относительно α, β и γ. Поэтому множество M' всех точек (α, β, γ), сопоставленных отражениям, принадлежащим M, замкнуто в топологии Зарисского пространства R^3. Но M' содержит решетку F_1 и поэтому совпадает с R^3. Отсюда следует, что H_1 — орбита любой точки пространства E^3 совпадает с этим пространством и поэтому всякий инвариант группы $\langle N_1 \rangle$ является константой.

Свойства группы $\langle N_3 \rangle$ доказываются аналогичным образом. Свойства групп $\langle N \rangle_2$, $\langle N_4 \rangle$, $\langle N_5 \rangle$ вытекают из свойств групп $\langle N_1 \rangle$, $\langle N_3 \rangle$.

3°. Семейство A аффинных преобразований пространства E^n назовем дискретно действующим (или глобально дискретным, в соответствии с [6]), если для каждой точки $z \in E^n$ множество $A(z) = \{\varphi(z) : : \varphi \in A\}$ с евклидовой топологией на нем дискретно.

Если A дискретно действует в E^n, то A — дискретное множество преобразований. В самом деле, пусть Δ — симплекс в E^n с вершинами $a_0, \ldots, a_n$ и для каждой его вершины a_i во множестве $\{\varphi(a_i) : \varphi \in A\}$ всякая сходящаяся последовательность точек стабилизируется. Тогда множество всех реперов вида $(\varphi(a_0); \varphi(\overrightarrow{a_0a_1}), \ldots, \varphi(\overrightarrow{a_0a_n}))$, где $\varphi \in A$, дискретно.

Следующий пример показывает, что дискретная группа преобразований плоскости E^2, порожденная отражениями относительно прямых, может не быть дискретно действующей и содержать при этом лишь дискретно действующее множество отражений.

Зафиксируем на плоскости систему координат. Пусть N_6 — семейство всех отражений плоскости, имеющих матрицы

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2m & 2mn \\ 0 & -1 & 2n \end{array}\right),$$

где m, n — произвольные целые числа. Проверим, что N_6 действует дискретно. Пусть (x, y) — координаты произвольной точки в E^2 и для любого натурального i пусть $x_i = x - 2m_iy + 2m_in_i$, $y_i =$

$= -y + 2n_i$, где m_i, n_i — целые числа. Предположим, что $(x_i, y_i) \to$ $\to (\alpha, \beta)$ при $i \to \infty$. Тогда $n_i = \text{const}$ для всех достаточно больших i. Так как $x - 2m_i (y - n_i) \to \alpha$ при $i \to \infty$ и $y - n_i$ можно считать константой, то $x_i = \text{const}$ для всех достаточно больших i. Получаем, что последовательности координат x_i и y_i стабилизируются.

Семейство N_6 инвариантно относительно порождаемой группы $\langle N_6 \rangle$, и в силу следствия 2 эта группа дискретна. Покажем, что $\langle N_6 \rangle$ не является дискретно действующей.

Прямым вычислением проверяется, что $\langle N_6 \rangle$ содержит все преобразования с матрицами

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2m & 2l \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right),$$

где m, l могут принимать любые целые значения. Но тогда в $\langle N_6 \rangle$-орбите точки a с координатами (x_0, y_0) лежат все точки, координаты (x, y) которых определяются равенствами $x = x_0 + 2my_0 + 2l$, $y = y_0 + 2$. Если координата y_0 точки a иррациональна, то в $\langle N_6 \rangle$-орбите точки a лежит недискретное подмножество прямой $y = y_0 + 2$, так как для иррационального y_0 множество всех чисел вида $2my_0 + 2l$ недискретно на координатной прямой.

Так же, как и для группы $\langle N_1 \rangle$, доказывается, что N_6— множество всех отражений, принадлежащих $\langle N_6 \rangle$.

Список литературы: 1. *Игнатенко В. Ф.* О строении фигуры с бесконечным множеством плоскостей косой симметрии // Теория функций и ее прил. 1985. С. 56—59. 2. *Криворучко А. И.* Фигуры с недискретными семействами гиперплоскостей косой симметрии // Укр. геометр. сб. 1988. Вып. 31. С. 73—76. 3. *Криворучко А. И.* О непрерывных группах, порожденных отражениями относительно прямых. Симферополь, 1987. 7 с. Деп. в УкрНИИНТИ, № 1571—Ук87. 4. *Розенфельд Б. А.* Многомерные пространства. М., 1966. 648 с. 5. *Сысоева Т. Ю.* Редуктивные линейные алгебраические группы, порожденные квазиотражениями // Сердика. Бълг. мат. списание. 1975. 1. С. 337—345. 6. *Балтаг И. А.* Методы построения дискретных групп преобразований симметрии пространства Минковского. Кишинев, 1987. 196 с.

Поступила в редколлегию 05.10.89

УДК 514

В. Т. ЛИСИЦА

ПОГРУЖЕНИЕ n-МЕРНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ МЕТРИК В ВИДЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ В ПРОСТРАНСТВА ЛОБАЧЕВСКОГО

Данная работа является небольшим дополнением к работе [1], в которой были изучены n-мерные цилиндрические поверхности в пространстве Лобачевского. Эти поверхности являются сильно параболическими [2, 3] и обладают некоторыми дополнительными свойствами. Напомним определение цилиндрических поверхностей, данное в [1].

Пусть H^{l+p-k} — либо орисфера, либо эквидистанта, либо вполне геодезическое пространство Лобачевского в пространстве Лобачевского $L^{l+p-k+1}$, F^{l-k} — полная регулярная поверхность в многообразии H^{l+p-k}. Проведем через точки поверхности F^{l-k} полные геодезические в направлении нормалей к H^{l+p-k} в пространстве $L^{l+p-k+1}$. У нас получится поверхность F^{l-k+1}. Пусть теперь $L^{l+p-k+1}$ вложено как вполне геодезическое подпространство в пространство L^{l+p}. В пространстве L^{l+p} через точки поверхности F^{l-k+1} проведем пространства Лобачевского L^{k-1}, перпендикулярные к $L^{l+p-k+1}$. В L^{l+p} над поверхностью F^{l-k+1} получится поверхность F^{l}, которую будем называть цилиндрической.

Поверхность F^{l-k}, над которой построена цилиндрическая поверхность F^{l}, будем называть базой поверхности F^{l}. Подмногообразие F^{l-k} является вполне омбилическим в F^{l}.

В работе [1] доказано, что метрика цилиндрических поверхностей в L^{l+p} имеет вид

$$ds^2 = ds_1^2 + \varphi^2 (x_1, \ \dots \ , x_k)\, ds_2^2, \tag{1}$$

где ds_1^2 — метрика k-мерного пространства Лобачевского L^k, компоненты которой зависят только от переменных $x_1, \ \dots \ , x_k$, ds_2^2 — метрика базы F^{l-k}, компоненты которой зависят от переменных $x_{k+1}, \ \dots \ , x_l$, функция φ в специальной системе координат будет или e^{-x_1}, или $\operatorname{ch} x_1$.

Напомним некоторые известные определения.

Через $T_q F^l$ обозначим касательное пространство к поверхности F^l, лежащей в римановом пространстве R^n, в точке $q \in F^l$, n — единичная нормаль к поверхности в точке q. Внешним нуль-индексом поверхности F^l в точке q называется число $\nu\ (q) = \dim L(q)$, где $L\ (q) \subset \subset T_q F^l$ — максимальное подпространство, такое, что для любого $Y \in L(q)$ выполняется равенство $A\ (q, n) Y = 0$, где $A\ (q, n)$ — матрица второй квадратичной формы поверхности F^l относительно произвольной нормали n в точке q.

Пусть R^l — риманово многообразие, $R\ (X;\ Y)Z$ — его тензор кривизны. Внутренним нуль-индексом многообразия R^l называется число $\mu(q) = \dim M\ (q)$, где $M\ (q)$ — максимальное подпространство касательного пространства $T_q R^l$, такое, что для всех $Y \in M\ (q)$ выполняется равенство

$$R\ (X;\ Y)Z = -C(\langle X;\ Z\rangle Y - \langle Y;\ Z\rangle X) \tag{2}$$

при всех $X, Z \in T_q R^l$. В [4] изучено локальное строение метрик, тензор кривизны которых обладает свойством (2). В этой работе доказано, что если G — открытая область в R^l, на которой внутренний индекс $\mu\ (q)$ постоянен и равен k, то распределение $M(q)$ интегрируемо, а его слои являются областями на k-мерных вполне геодезических подмногообразиях постоянной кривизны C. Назовем эти k-мерные подмногообразия образующими L^k.

Мы будем рассматривать случай, когда $C = -1$. Полную метрику R^l будем называть k-цилиндрической, если для нее выполняется свойство (2), существует поверхность F^{l-k}, ортогональная распределению $M(q)$. Поверхность F^{l-k} — вполне омбилическая при $k < l-1$; при $k = l-1$ кривая, ортогональная слоям $M(q)$, имеет постоянную кривизну.

Как доказано в [1], такую метрику можно привести к виду (1), где $\varphi = \operatorname{ch} x_1$; e^{-x_1}.

А. А. Борисенко высказал предположение, что k-цилиндрические метрики допускают погружение в пространство Лобачевского L^{l+p} в виде цилиндрической поверхности. Высказанную гипотезу подтверждает доказываемая ниже

Теорема. *Пусть дана k-цилиндрическая метрика R^l. Если*

1) $\varphi = e^{-x_1}$ *и база ds_2^2 погружается в E^{l-k+p} с внешним нуль-индексом $\nu = 0$, или*

2) $\varphi = \operatorname{ch} x_1$ *и база ds_2^2 погружается в L^{l-k+p} с внешним нуль-индексом $\nu = 0$, то R^l можно погрузить в L^{l+p} в виде цилиндрической поверхности.*

Доказательство. Пусть база с метрикой ds_2^2 погружается в $E^{l-k+p}(L^{l-k+p})$ в виде поверхности F^{l-k} с внешним нуль-индексом $\nu = 0$. Пространство E^{l-k+p} можно в целом вложить в пространство $L^{l-k+p+1}$ в виде орисферы (L^{l-k+p} вкладывается в $L^{l-k+p+1}$ в виде плоскости Лобачевского или поверхности равных расстояний) [5].

Пространства E^{l-k+p} или L^{l-k+p} обозначим через H^{l-k+p}. В пространстве $L^{l-k+p+1}$ к H^{l-k+p} проведем геодезические в направлении нормалей к H^{l-k+p}. Тогда метрика пространства $L^{l-k+p+1}$ будет иметь вид $ds^2 = dx_1^2 + e^{-2x_1}(dx_2^2 + \cdots + dx_{l-k+p+1}^2)$ (если $H^{l-k+p} = E^{l-k+p}$) или $ds^2 = dx_1^2 + \operatorname{ch}^2 x_1 (dx_2^2 + \cdots + dx_{l-k+p+1}^2)$ (если $H^{l-k+p} = L^{l-k+p}$). Над поверхностью F^{l-k} будет построена линейчатая поверхность F^{l-k+1}. Ее метрика будет иметь вид

$$ds^2 = dx_1^2 + \varphi^2(x_1)\, ds_2^2,$$

где $\varphi(x_1) = e^{-x_1}$; $\operatorname{ch} x_1$.

Построим теперь над F^{l-k+1} в L^{l+p} цилиндрическую поверхность с k-мерными образующими, как это было описано выше. Тогда полученная поверхность F^l будет иметь заданную цилиндрическую метрику [1].

Теорема доказана.

Отметим, что коразмерность p цилиндрической поверхности равна коразмерности p погружения базы ds_2^2 в евклидово пространство или пространство Лобачевского. В случае, когда внешний нуль индекс погружения базы не равен нулю, образующие цилиндрической поверхности будут иметь размерность, большую, чем k.

В заключение сделаем следующее замечание. В работе [6] было доказано, что класс сильно параболических поверхностей у́же, чем класс сильно параболических метрик. Данная работа вместе с работой [1] позволяет выделить подкласс сильно параболических метрик, которые с точностью до изометрии находятся во взаимно однозначном соответствии с некоторым подклассом сильно параболических поверхностей в пространстве Лобачевского.

Список литературы: 1. *Борисенко А. А.* О цилиндрических многомерных поверхностях в пространстве Лобачевского // Укр. геометр. сб. 1990. Вып. 33. С. 18—27. 2. *Борисенко А. А.* О внешне геометрических свойствах параболических поверхностей и топологических свойствах седловых поверхностей в симметрических пространствах ранга один // Мат. сб. 1981. **116**, № 3. С. 440—457. 3. *Ferus D.* Totally geodesic foliations // Math. Ann. 1970. **188**, N 4. P. 313—317. 4. *Maltz R.* The nullity spaces of curvature-like tensors // Journ. Diff. Geom. 1972. **7**, N 3—4. P. 519—523. 5. *Нут Ю. Ю.* Геометрия Лобачевского в аналитическом изложении. М., 1961. 310 с. 6. *Борисенко А. А., Ушаков В. Г.* Об изометрическом погружении сильно параболических метрик в классе сильно параболических поверхностей // Укр. геометр. сб. 1990. Вып. 33. С. 27—36.

Поступила в редколлегию 14.09.89

УДК 514.013

А. И. МЕДЯНИК

ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ ДЛЯ РЕГУЛЯРНЫХ ЗАМКНУТЫХ ВЫПУКЛЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

В постановке К. Миранды [1, 2] вопрос о существовании замкнутой выпуклой поверхности S с заданной функцией главных радиусов кривизны $R_1(n)$ и $R_2(n)$ сводится к задаче о разрешимости уравнения

$$R_1R_2 + \Phi(R_1 + R_2,\ R_1R_2,\ n) + cn = \varphi(n), \tag{1}$$

где c — постоянный вектор, связанный с искомой поверхностью S, т. е. тоже искомый. Стало быть, решением уравнения (1) является пара (S, c). Благодаря этой особенности можно считать, что правая часть уравнения удовлетворяет условию

$$\int\limits_{\Omega} n\,\varphi(n)\,d\omega = 0, \tag{2}$$

где Ω — единичная сфера; $d\omega$ — элемент ее площади. В случае проблемы Христоффеля или Минковского такое условие, как известно, — необходимое (условие замкнутости поверхности). Здесь же у него иная роль: вместе с условием принадлежности S пространству $\Sigma_{n,\lambda}$ всех овалоидов класса $C^{n,\lambda}$, проходящих через начало координат в R^3 и имеющих ось z своей внутренней нормалью, оно обеспечивает единственность решения (S, c). Существование последнего обеспечивается условием типа неравенства на φ и другими ограничениями на функцию $\Phi(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5)$, определенную в области $D = \{\eta_i \mid 0 < 4\eta_2 \leqslant \eta_1^2\}$ в R^5.

Так, характерным для теорем существования, доказанных К. Миранда, является ограничение на самое функцию Φ:

$$a_0 + A_0\eta_2^{\mu} \leqslant \Phi \leqslant a_1 + A_1\eta_2^{\mu}, \tag{3}$$

где a_0, A_0, a_1, A_1 ($a_1 \geqslant a_0$, $A_1 \geqslant A_0$) — произвольные вещественные числа и $0 < \mu \leqslant 1$. Общим для них является также условие монотонности функции Φ по первым двум переменным: $\Phi_1 \geqslant 0$, $\Phi_2 \geqslant 0$ (последнее можно заменить условием $\Phi_2 \geqslant a - 1$, $a > 0$, используя наличие в левой части уравнения (1) слагаемого R_1R_2, но существа дела это не меняет). Что касается вторых производных функции Φ, то ограничения на них в теоремах К. Миранды самые разные.

Предлагаемая статья посвящена дальнейшему исследованию вопросов существования для регулярных замкнутых выпуклых поверхностей, необходимость которого объясняется следующим соображением.

Исходя из вида функции Φ, условие монотонности для нее, о котором говорилось выше, естественно. Однако ему, например, не удовлетворяет функция $\Phi = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ $\Big($удовлетворяющая, кстати, условию типа (3): $0 < \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{R_1 R_2}\Big)$. Вместе с тем эта функция — монотонно возрастающая по R_1 и R_2, поскольку $\frac{\partial \Phi}{\partial R_1} = \frac{R_2^2}{(R_1 + R_2)^2}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial R_2} = \frac{R_1^2}{(R_1 + R_2)^2}$. Поэтому вопрос о распространении результатов К. Миранды на случай функций Φ, удовлетворяющих условиям $\frac{\partial \Phi}{\partial R_1} \geqslant 0$, $\frac{\partial \Phi}{\partial R_2} \geqslant 0$, вполне уместен. К таким функциям относятся и те, для которых $\Phi_1 \geqslant 0$, $\Phi_2 \geqslant 0$, что видно из соотношений $\frac{\partial \Phi}{\partial R_1} = \Phi_1 + R_2 \Phi_2$, $\frac{\partial \Phi}{\partial R_2} = \Phi_1 + R_1 \Phi_2$. Но не только они, как показывает наш пример. Возможностью отказа от предположения $\Phi_1 \geqslant 0$, которое в отличие от условия $\Phi_2 \geqslant 0$, не является для подхода К. Миранды существенным и объясняется целесообразность перехода к требованию монотонности Φ по переменным R_1 и R_2.

Начнем с доказательства вспомогательного утверждения, аналогичного теореме 5.IV из [2], об обратимости функционального соответствия (по Каччиопполи). Для каждого $S \in \sum_{m+2,\lambda}$ и каждого вектора c равенство (1) определяет отображение σ функционального пространства $\sum'_{m+2,\lambda} = R^3 \times \sum_{m+2,\lambda}$ в пространство $\Omega^{m,\lambda}$ функций класса $C^{m,\lambda}$, заданных на сфере $\Omega : \varphi = \sigma(S, c)$. Обращение этого отображения — по данной функции $\varphi \in \Omega^{m,\lambda}$ установить существование пары (S, c), удовлетворяющей (1), — суть рассматриваемой проблемы.

Лемма 1. *Пусть функция $\Phi(R_1 + R_2, R_1 R_2, n)$ принадлежит классу $C^{m+1,\lambda}$ $(m \geqslant 2)$ и для нее $\frac{\partial \Phi}{\partial R_1} \geqslant 0$, $\frac{\partial \Phi}{\partial R_2} \geqslant 0$,*

$$\sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial R_i \partial R_j} \lambda_i \lambda_j \leqslant 0. \tag{4}$$

Предположим, кроме того, что $\Phi_{22} < 0$ и

$$\Delta_n \Phi + 2\Phi - \Phi_{22}^{-1} \nabla_n (\Phi_2) \leqslant \chi_0 (R_1 R_2) + \chi_1 (R_1 R_2)(R_1 + R_2)^{\nu}, \tag{5}$$

где $\chi_0 \geqslant -2R_1 R_2$ и $\chi_1 \geqslant 0$ — непрерывные функции, $0 \leqslant \nu < 2$ и ∇_n, Δ_n — соответственно первый и второй дифференциальные па-

раметры Бельтрами, которые надо вычислять, представляя Φ_2 и Φ как функции только одного n.

Пусть далее Ω_0 — связная подобласть в $\Omega^{m,\lambda}$, содержащая хотя бы одну точку $\varphi_0 = \sigma(S_0, c_0)$ с $S_0 \in \sum_{m+2,\lambda}$, и для каждой подобласти $\Omega_1 \subset \Omega_0$, ограниченной в $\Omega^{m,\lambda}$, можно определить постоянную ρ, такую, что $R_1R_2 + \frac{1}{R_1R_2} \leqslant \rho$ для каждого вероятного решения уравнения (1) с $\varphi \in \Omega_1$. Тогда для любого $\varphi \in \Omega_0$ это уравнение допускает решение $(S, c) \in \sum'_{m+2,\lambda}$.

Доказательство. Все условия леммы, за исключением ограничений на производные функции Φ по R_1 и R_2, совпадают по существу с соответствующими условиями теоремы 5.IV. К. Миранды. В частности, условие (5) — это лишь другая форма требования к функции $F = R_1R_2 + \Phi$. Поэтому для завершения доказательства достаточно показать, что для F выполнены остальные два условия теоремы 5.IV — существование положительной оценки снизу для F_2 и для выражения $F_1^2 + (R_1 + R_2)F_1F_2 + R_1R_2F_2^2$.

Раскладывая последнее на множители $F_1 + R_2F_2$ и $F_1 + R_1F_2$, видим, что оно равно $\frac{\partial F}{\partial R_1}\frac{dF}{dR_2} = \left(R_2 + \frac{\partial \Phi}{dR_1}\right)\left(R_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial R_2}\right) = R_1R_2 + R_1\frac{\partial \Phi}{\partial R_1} + R_2\frac{\partial \Phi}{\partial R_2} + \frac{\partial \Phi}{\partial R_1}\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial R_2}$, что больше $1/\rho$, так как по условию $\frac{\partial \Phi}{\partial R_1} \geqslant 0$, $\frac{\partial \Phi}{\partial R_2} \geqslant 0$ и $R_1R_2 + \frac{1}{R_1R_2} \leqslant \rho$. Значит, $F_1^2 + (R_1 + R_2)F_1F_2 + R_1R_2F_2^2 > \frac{1}{\rho}$, что и требовалось доказать.

Для получения оценки снизу для F_2 достаточно, очевидно, показать, что $\Phi_2 \geqslant 0$. Докажем это.

Найдем сначала производные функции Φ, как функции переменных R_1 и R_2, по направлению $l = \{R_2 - R_1, R_1 - R_2\}$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial l} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial R_2} - \frac{\partial \Phi}{\partial R_1}\right), \text{ если } R_1 > R_2;$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial l} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial R_2} - \frac{\partial \Phi}{\partial R_1}\right), \text{ если } R_1 < R_2; \tag{6}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial l^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial R_1^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial R_1 \partial R_2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial R_2^2}. \tag{7}$$

Правая часть равенства (7) представляет собой частный случай (4) при $\lambda_1 = -\lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Поэтому $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial l^2} \leqslant 0$. И так как Φ симметрична по переменным R_1 и R_2, то $\frac{\partial \Phi}{\partial l} \geqslant 0$. Отсюда и из (6) следует, что $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial R_2} - \frac{\partial \Phi}{\partial R_1}\right)(R_1 - R_2)^{-1} \geqslant 0$. Подставляя в это неравенство вместо $\frac{\partial \Phi}{\partial R_1}$ и $\frac{\partial \Phi}{\partial R_2}$ их выражения через Φ_1 и Φ_2, получаем $\Phi_2 \geqslant 0$. В силу непрерывности Φ_2 это верно и при $R_1 = R_2$. Лемма доказана.

Из доказательства видно, что утверждение леммы 1 останется справедливым, если требование вогнутости Φ по переменным R_1 и R_2 заменить условием неположительности правой части равенства (7). Или можно вместо этого потребовать: $\Phi_2 \geqslant 0$ (и даже $\Phi_2 \geqslant a-1$, $a = \text{const} > 0$,) как у К. Миранды.

Теорема 1. *Пусть функция Φ принадлежит классу $C^{m+1,\lambda}(m \geqslant 2)$ и для нее выполняются условие (3) с A_0 и A_1, не равными одновременно нулю, и все условия леммы 1. Тогда уравнение (1) допускает одно и только одно решение $(S, c) \in \sum'_{m+2,\lambda}$ для любого $\varphi \in \Omega^{m,\lambda}$, удовлетворяющего условию (2) и неравенству*

$$\inf \varphi > b_1 + \frac{B_1}{B_0}\left(\frac{1}{q} - 1\right)(\sup \varphi + b_0), \tag{8}$$

где $B_0 = \frac{1}{4}\max(3A_1 - 7A_0, -7A_0, 3A_1)$, $B_1 = \frac{3}{4}\max(A_1 - A_0, -A_0, A_1)$, $b_0 = \max\left(0, \frac{1}{4}(3a_1 - 7a_0)\right)$, $b_1 = \frac{1}{4}(7a_1 - 3a_0)$, *а число q принадлежит интервалу* (0, 1) *и определяется равенством*

$$\frac{B_0}{1-q} = \left(\frac{\sup\varphi + b_0}{q}\right)^{1-\mu}, \tag{9}$$

причем в случае $\mu = 1$ предполагается еще, что

$$B_0 < 1, \ \frac{B_1(1 + A_1 + B_1')}{1 - B_0} < 1 + A_0 - B_1', \tag{10}$$

где $B_1' = \frac{3}{4}(A_1 - A_0)$.

Доказательство. Начнем с получения априорных оценок для R_1R_2 сверху и снизу. Для этого введем на сфере Ω координаты ϑ $(0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi)$ и $\psi\,(0 \leqslant \psi \leqslant 2\pi)$ так, чтобы $cn = |c|\cos\vartheta$. Тогда $d\omega = \sin\vartheta d\psi d\nu$. Умножая (1) на n и интегрируя по Ω, получим с учетом (2) и $\int\limits_\Omega R_1R_2 n\,d\omega = 0$ для составляющей $\cos\vartheta$ вектора n:

$$\int\limits_0^\pi\int\limits_0^{2\pi} \Phi\cos\vartheta\sin\vartheta d\psi d\vartheta + |c|\int\limits_0^\pi\int\limits_0^{2\pi}\cos^2\vartheta\sin\vartheta d\psi d\vartheta = 0$$

или после упрощений

$$2\pi\int\limits_0^\pi \Phi\cos\vartheta\sin\vartheta d\vartheta + \frac{4\pi}{3}|c| = 0.$$

Отсюда

$$|c| = -\frac{3}{2}\int\limits_0^\pi \Phi\cos\vartheta\sin\vartheta d\vartheta = -\frac{3}{2}\int\limits_0^\pi(\Phi - a_0)\cos\vartheta\sin\vartheta d\vartheta.$$

Используя ограничение (3) для Φ, имеем

$$|c| \leqslant \frac{3}{4}(a_1 - a_0) + \frac{3}{4}A_1(\sup R_1R_2)^\mu, \text{ если } A_0 \geqslant 0;$$

$$|c| \leqslant \frac{3}{4}(a_1 - a_0) - \frac{3}{4}A_0(\sup R_1R_2)^\mu, \text{ если } A_1 \leqslant 0;$$

$$|c| \leqslant \frac{3}{4}(a_1 - a_0) + \frac{3}{4}(A_1 - A_0)(\sup R_1R_2)^{\mu}, \text{ если } A_0 < 0 < A_1, \text{ то}$$

есть (в обозначениях доказываемой теоремы)

$$|c| \leqslant b_1 - a_1 + B_1(\sup R_1R_2)^{\mu}. \tag{11}$$

Теперь из (1) на основании (3) и (11) получаем следующее неравенство, переходя от b_1, B_1, к b_0, B_0:

$$\sup R_1R_2 \leqslant \sup \varphi + b_0 + B_0(\sup R_1R_2)^{\mu}.$$

Отсюда после подстановки вместо B_0 его значения из (9) имеем

$$\frac{q \sup R_1R_2}{\sup \varphi + b_0} - 1 \leqslant (1-q)\left[\left(\frac{q \sup R_1R_2}{\sup \varphi + b_0}\right)^{\mu} - 1\right].$$

Из последнего неравенства видно, что его левая часть не может быть положительной, так как по условию $q < 1$, $\mu \leqslant 1$. Поэтому

$$\sup R_1R_2 \leqslant \frac{\sup \varphi + b_0}{q}, \tag{12}$$

где q определяется равенством (9). В частности, при $\mu = 1$, как следует из (9), $q = 1 - B_0$, и для R_1R_2 получается следующая оценка сверху:

$$\sup R_1R_2 \leqslant \frac{\sup \varphi + b_0}{1 - B_0}. \tag{13}$$

Подставляя (12) в (11), получаем после преобразования с помощью (9) следующую оценку для модуля вектора c:

$$|c| \leqslant b_1 - a_1 + \frac{B_1}{B_0}\left(\frac{1}{q} - 1\right)(\sup \varphi + b_0). \tag{14}$$

Запишем теперь равенство (1) в точке минимума R_1R_2. Тогда с помощью условия (3) получим

$$\inf R_1R_2 + A_1(\inf R_1R_2)^{\mu} \geqslant \inf \varphi - (|c| + a_1).$$

Отсюда получается оценка R_1R_2 снизу, поскольку в силу условия (8) теоремы и неравенства (14) $\inf \varphi - (|c| + a_1) > 0$.

Таким образом, существует постоянная ρ, такая, что $R_1R_2 + \frac{1}{R_1R_2} \leqslant \rho$. Поэтому для завершения доказательства первого утверждения (существование решения) достаточно доказать существование связной подобласти Ω_0 (см. формулировку леммы 1).

Для произвольного $R > 0$ положим

$$\varphi_0(n) = R^2 + \Phi(2R, R^2, n) - \frac{3}{4\pi}\int_{\Omega} \Phi(2R, R^2, x)\, nx\, d\omega_x. \tag{15}$$

Так как $\int_{\Omega} n(nx)\, d\omega_n = \frac{4\pi}{3}x$, что проверяется непосредственно, то функция $\varphi_0(n)$ удовлетворяет условию (2). Далее, для нее, используя ограничения (3), получаем

$$\inf \varphi_0 \geqslant R^2 + R^{2\mu}(A_0 - B_1') + \frac{1}{4}(7a_0 - 3a_1),$$

$$\sup \varphi_0 \leqslant R^2 + R^{2\mu}(A_1 + B_1') + \frac{1}{4}(7a_1 - 3a_0).$$

При достаточно большом R будет $\inf \varphi_0 > \sup \varphi$. Возьмем R настолько большим, чтобы, кроме этого неравенства, для функции $\varphi_0(n)$ выполнялось условие

$$\inf \varphi_0 > b_1 + \frac{B_1}{B_0}\left(\frac{1}{q} - 1\right)(\sup \varphi_0 + b_0), \tag{16}$$

где q — то же самое, что и в (8). При $\mu < 1$ это можно сделать, поскольку в силу (8) $\frac{B_1}{B_0}\left(\frac{1}{q} - 1\right) < 1$ и, значит, левая часть (16) растет по R быстрее правой. Если $\mu = 1$, то указанное неравенство справедливо в силу условия (10).

Определим теперь, следуя [1], область Ω_0 как семейство функций $\varphi(n, \delta)$, зависящее от параметра $\delta \in [0, 3]$

$$\varphi(n, \delta) = \begin{cases} (1 - \delta)\varphi_0(n) + \delta \inf \varphi_0, & 0 \leqslant \delta \leqslant 1; \\ (2 - \delta) \inf \varphi_0 + (\delta - 1) \sup \varphi, & 1 \leqslant \delta \leqslant 2; \\ (3 - \delta) \sup \varphi + (\delta - 2)\varphi(n), & 2 \leqslant \delta \leqslant 3. \end{cases}$$

Область Ω_0 связна в $\Omega^{m, \lambda}$, причем $\varphi(n, 0) = \varphi_0(n)$, $\varphi(n, 3) = \varphi(n)$. Все функции $\varphi(n, \delta)$ удовлетворяют условию (2), так как ему удовлетворяют $\varphi(n)$ и $\varphi_0(n)$. Кроме того, все они удовлетворяют условию

$$\inf \varphi(n, \delta) > b_1 + \frac{B_1}{B_0}\left(\frac{1}{q} - 1\right)(\sup \varphi(n, \delta) + b_0). \tag{17}$$

Действительно, $\inf\varphi(n, \delta) = \inf\varphi_0$, $\sup \varphi(n, \delta) \leqslant \sup\varphi_0$ при $0 \leqslant \delta \leqslant 1$ и, значит, справедливость (17) следует из неравенства (16), поскольку $\frac{B_1}{B_0}\left(\frac{1}{q} - 1\right) < 1$. Если же $2 \leqslant \delta \leqslant 3$, то $\inf\varphi(n, \delta) \geqslant \inf\varphi(n)$, а $\sup\varphi(n, \delta) = \sup\varphi(n)$, и поэтому (17) непосредственно следует из условия (8). В последнем промежутке $(1 \leqslant \delta \leqslant 2)$ неравенство (17) справедливо по доказанному при $\delta = 1$ и $\delta = 2$, причем $\inf\varphi(n, \delta) = \sup\varphi(n, \delta) = (2 - \delta)\inf\varphi_0 + (\delta - 1)\sup\varphi$, т. е. левая и правая части этого неравенства — линейные выражения относительно δ, откуда и следует его справедливость при всех $1 < \delta < 2$. Имеют, наконец, место при всех $0 \leqslant \delta \leqslant 3$ априорные оценки для R_1R_2 сверху (12) и модуля вектора c (14) с заменой в них $\sup\varphi$ на $\sup\varphi(n, \delta)$, что вытекает из требования $\inf\varphi_0 \geqslant \sup\varphi$ при выборе R, в силу которого $\sup\varphi(n, \delta) \geqslant \sup\varphi$ для любого δ. Тем самым для R_1R_2 имеет место и положительная оценка снизу при всех $0 \leqslant \delta \leqslant 3$.

По построению Ω_0 — связная подобласть $\Omega^{m, \lambda}$. Ей принадлежит точка $\varphi_0 = \sigma(S_0, c_0)$, где S_0 — сфера радиуса R, $c_0 = -\frac{3}{4\pi}\int\limits_{\Omega} \Phi(2R, R^2, n)\, n d\omega$, и точка φ. А значит, по лемме 1 уравнение (1) допускает решение $(S, c) \in \sum'_{m+2, \lambda}$.

Для доказательства единственности решения (S, c) введем в (1) параметр α $(0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$:

$$R_1R_2 + \alpha\Phi(R_1 + R_2, R_1R_2, n) + cn = \varphi(n). \tag{18}$$

Для функции $\alpha\Phi$, очевидно, выполняются все условия леммы 1, а для $\varphi(n)$ неравенство

$$\inf\varphi > \alpha b_1 + \frac{B_1}{B_0}\left(\frac{1}{q} - 1\right)(\sup\varphi + \alpha b_0). \tag{19}$$

Включим $\varphi(n)$, как и выше, в семейство $\varphi(n, \delta)$, $0 \leqslant \delta \leqslant 3$. Для всех функций семейства выполняется условие (19). Поэтому при любых α и δ ($0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, $0 \leqslant \delta \leqslant 3$) уравнение (18) имеет решение. В частности, при $\alpha = \delta = 0$ его решением является сфера радиуса R (вектор c при этом нулевой). И это решение — единственное. Следовательно, по теореме К. Миранды 6.11 из [1] решение (S, c) уравнения (1), совпадающее с решением (18) при $\alpha = 1$, $\delta = 3$, — тоже единственное. Теорема доказана полностью.

Замечание. Хотя теорема 1 доказана нами в предположении, что A_0 и A_1 одновременно не обращаются в нуль, но она верна и в этом случае, если условия (8) и (9) понимать надлежащим образом. Дело в том, что при $A_0 = A_1 = 0$ будет $B_1 = B_0 = 0$ и поэтому (8) теряет смысл. Но из условия (9) видно, что при $B_0 \to 0$ число $q \to 1$. И, значит, $\left(\frac{1}{q} - 1\right) \to 0$. Стало быть, если в (8) перейти к пределу при A_0 и A_1, стремящимся к нулю, то получим $\inf\varphi > b_1$. При этом неравенства (11) и (14) примут вид $|c| \leqslant b_1 - a_1$, а неравенства (12) и (13) $-\sup R_1R_2 \leqslant \leqslant \sup\varphi + b_0$, т. е. то же самое, что получается из уравнения (1) в этом случае непосредственно. А это означает, что теорема 1 верна и в случае одновременного обращения в нуль A_0 и A_1, если рассматривать его как предельный при $A_0 \to 0$, $A_1 \to 0$. В частности, при $a_0 = a_1 = 0$ получается решение проблемы Минковского ($\Phi \equiv 0$). Условие (8) при этом принимает вид: $\inf\varphi > 0$, т. е. становится тривиальным.

Теорема 1 представляет собой аналог теоремы К. Миранды 5.VI из [2]. Их условия различаются ограничениями на Φ, о чем говорилось в самом начале, и на φ. Последнее в [2] имеет следующий вид при $\mu < 1$:

$$\inf\varphi > b_1 + B_1\left[\left(\frac{\sup\varphi + b_0}{q}\right)^{\mu},\ \left(\frac{B_0}{1-q}\right)^{\frac{\mu}{1-\mu}}\right],$$

где b_0, b_1, B_0, B_1 — те же, что и в (8), а q — некоторое число из интервала (0, 1), вообще говоря, не удовлетворяющее соотношению (9), из-за чего ограничение на φ снизу получается более сильным (в отличие от случая $\mu = 1$). Тем самым теорема 1 позволяет распространить теоремы существования К. Миранды на более широкий класс функций Φ и φ. И, в частности, на некоторые функции $\Phi(R_1 + R_2, R_1R_2, n)$, для которых не выполняется условие $\Phi_1 \geqslant 0$. Условиям доказанной теоремы удовлетворяет, например, функция $\Phi = \left(\frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}\right)^{\alpha}$, $0 < \alpha < 1$. Для нее $\frac{\partial\Phi}{\partial R_1} > 0$, $\frac{\partial\Phi}{\partial R_2} > 0$, $\sum \frac{\partial^2\Phi}{\partial R_i \partial R_j}\lambda_i\lambda_j \leqslant 0$, $\Phi_{22} < 0$ и $0 < \Phi \leqslant \leqslant 2^{-\alpha}(R_1R_2)^{\alpha/2}$.

Условие же $\Phi_2 \geqslant 0$ по существу. С этой целью и предполагалась вогнутость Φ по переменным R_1 и R_2, что необходимо даже при выполнении (3). В самом деле, для $\Phi = R_1R_2\left[\frac{3}{2} - \frac{4R_1R_2}{(R_1+R_2)^2}\right]$ имеем: $\frac{1}{2}R_1R_2 \leqslant \Phi < \frac{3}{2}R_1R_2$, $\frac{\partial\Phi}{\partial R_1} = \frac{R_2}{2(R_1+R_2)^3}[3R_1^2 + R_2(9R_1^2 - 7R_1R_2 + 3R_2)] > 0$, $\frac{\partial\Phi}{\partial R_2} = \frac{R_1}{2(R_1+R_2)^3}[3R_2^2 + R_1(3R_1^2 - 7R_1R_2 + 9R_2^2)] > 0$, $\Phi_{22} = \frac{-8}{(R_1+R_2)^2} < 0$. Но $\Phi_2 = \frac{3R_1^2 - 10R_1R_2 + 3R_2^2}{2(R_1+R_2)^2}$ принимает, очевидно, и отрицательные значения. Причина в том, что $\frac{\partial^2\Phi}{\partial l^2} = \frac{4R_1R_2 - 11(R_1-R_2)^2}{2(R_1+R_2)^2}$ (см. (7)) принимает значения разных знаков. Поэтому требование $\Phi_{22} < 0$ для неотрицательности Φ_2 ничего не дает, что подтверждается непосредственно проверяющимся соотношением $\frac{\partial^2\Phi}{\partial l^2} = \frac{1}{2}(R_1 - R_2)^2\Phi_{22} - \Phi_2$. Нижеследующая лемма показывает, как это последнее требование можно снять.

Лемма 2. *Утверждение леммы 1 остается в силе, если условия $\Phi_{22} < 0$ и (5) в ее формулировке заменить такими: для всякого решения (S, c) уравнения (1) $|c| \leqslant c_0$,* где c_0 — некоторая постоянная, и

$$\frac{|\Phi_{22}|}{(1+\Phi_2)^2}(1 + \nabla_n(\Phi)) + \frac{\sqrt{\nabla_n(\Phi_2)}}{1+\Phi_2}\left(1 + \sqrt{\nabla_n(\Phi)}\right) + |\Delta_n\Phi| \leqslant \chi_0 + (R_1+R_2)^\nu\chi_1, \tag{20}$$

где χ_0 и χ_1 — неотрицательные непрерывные функции R_1R_2, $0 \leqslant \nu < 2$.

Доказательство. В работе [2] с помощью условий $\Phi_{22} < 0$ и (5) получается оценка для $R_1 + R_2$ сверху. Поэтому с учетом доказательства леммы 1 достаточно показать, что то же самое можно сделать и при измененных условиях.

Положим, $F(R_1+R_2,\ R_1R_2,\ n) = R_1R_2 + \Phi(R_1+R_2,\ R_1R_2,\ n)$ и рассмотрим оператор $F_1\Delta\psi + F_2\Delta^*\psi$, где

$$\Delta^*\psi = \frac{1}{w}\left(\frac{\partial}{\partial u}\frac{N\psi_u - M\psi_v}{w} - \frac{\partial}{\partial v}\frac{M\psi_u - L\psi_v}{w}\right)$$

(Δ^* получается из выражения для Δ путем замены на L, M и N соответственно коэффициентов e, f и g третьей квадратичной формы, при этом u и v — координаты на S, $w = \sqrt{eg - f^2}$). В точке, где $R_1 + R_2$ достигает максимума,

$$F_1\Delta(R_1+R_2) + F_2\Delta^*(R_1+R_2) = \frac{gF_1 + NF_2}{w^2}(R_1+R_2)_{uu} - 2\frac{fF_1 + MF_2}{w^2}(R_1+R_2)_{uv} + \frac{eF_1 + LF_2}{w^2}(R_1+R_2)_{vv}.$$

Вычисляя, находим следующее выражение для дискриминанта: $\frac{1}{w_2} \times [F_1^2 + (R_1+R_2)F_1F_2 + R_1R_2F_2^2]$. Как следует из доказательства леммы 1, он положителен, а значит, рассматриваемый оператор —

эллиптический. Поэтому в точке максимума R_1+R_2 будет $F_1\Delta(R_1+R_2)+F_2\Delta^*(R_1+R_2)\leqslant 0$. Воспользуемся этим для получения нужной оценки.

В [3] показано, что в точке, где R_1+R_2 достигает максимума, $\Delta^*(R_1+R_2)\geqslant(R_1+R_2)^2-4R_1R_2+\Delta R_1R_2$. Поэтому $F_1\Delta(R_1+R_2)+F_2\Delta^*(R_1+R_2)\geqslant F_1\Delta(R_1+R_2)+F_2\Delta R_1R_2+F_2[(R_1+R_2)^2-4R_1R_2]$. Так как по условию $R_1R_2\leqslant\rho$, $F_2\geqslant 1$ (см. доказательство леммы 1), то на основании доказанного отсюда имеем

$$\sup(R_1+R_2)^2\leqslant 4\rho-F_1\Delta(R_1+R_2)-F_2\Delta R_1R_2. \qquad (21)$$

В точке, в которой обращаются в нуль первые производные R_1+R_2, справедливо равенство

$$\Delta F=F_1\Delta(R_1+R_2)+F_2\Delta R_1R_2+$$
$$+\sum_{i=1}^{3}F_{i+2}\Delta\xi_i+\sum_{i,k=0}^{3}F_{i+2,k+2}\nabla(\xi_i,\xi_k),$$

где ξ_1, ξ_2, ξ_3 — компоненты единичной нормали n, а $\xi_0=R_1R_2$. Непосредственно проверяется, что

$$\sum_{i,k+1}^{3}F_{i+2,k+2}\nabla(\xi_i,\xi_k)+\sum_{i=1}^{3}F_{i+2}\Delta\xi_i=\Delta_nF,$$
$$\sum_{j=1}^{3}F_{2,j}\nabla(R_1R_2,\xi_j)=\nabla_n(R_1R_2,F_2).$$

Тем самым ΔF можно преобразовать к виду $\Delta F=F_1\Delta(R_1+R_2)+F_2\Delta R_1R_2+F_{22}\nabla(R_1R_2)+2\nabla_n(R_1R_2,F_2)+\Delta_nF$. С помощью последнего равенства неравенство (21) принимает такой вид:

$$\sup(R_1+R_2)^2\leqslant 4\rho-\Delta F+F_{22}\nabla(R_1R_2)+2\nabla_n(R_1R_2,F_2)+\Delta_nF. \qquad (22)$$

Как известно, $\Delta n=-2n$. Поэтому из (1) получаем $\Delta F=\Delta\varphi+2cn$, т. е. в силу сделанных предположений

$$|\Delta F|\leqslant\|\varphi\|_{\varrho^2}+2c_0. \qquad (23)$$

Далее, согласно определению

$$\nabla(p,q)=\frac{1}{w^2}[gp_uq_u-f(p_uq_v+p_vq_u)+ep_vq_v],$$
$$\nabla(p)=\nabla(p,p),\ \nabla(p\pm q)=\nabla(p)\pm 2\nabla(p,q)+\nabla(q).$$

Кроме того, $|\nabla(p,q)|\leqslant\sqrt{\nabla(p)\nabla(q)}\leqslant\frac{1}{2}[\nabla(p)+\nabla(q)]$. Воспользуемся этими соотношениями для оценки оставшихся слагаемых в правой части (22).

Из (1) находим сначала производные R_1R_2 по u и v в точке, где R_1+R_2 достигает максимума

$$(R_1R_2)_u=\left(\varphi_u-\frac{\partial F}{\partial u}-cn_u\right)F_2^{-1},$$
$$(R_1R_2)_v=\left(\varphi_v-\frac{\partial F}{\partial v}-cn_v\right)F_2^{-1},$$

где $\partial F/\partial u$ и $\partial F/\partial v$ — производные F, которая рассматривается только как функция от n. С помощью этого $\nabla(R_1R_2)$ представляется в виде $\nabla(R_1R_2) = \nabla(\varphi - F(n) - cn) F_2^{-2}$. Применим свойства дифференциального параметра ∇, тогда получим $\nabla(R_1R_2) \leqslant 3[\nabla(\varphi) + \nabla_n(F) + \nabla(cn)] F_2^{-2}$. Но, как показывают вычисления, $\nabla(cn) = |c|^2 - \frac{1}{w^2}(cn_u n_v)^2$. Значит, для $\nabla(R_1R_2)$ справедливо неравенство $\nabla(R_1R_2) \leqslant 3[\nabla(\varphi) + \nabla_n(F) + c_0^2] F_2^{-2}$. Отсюда с учетом того, что $F_2 = 1 + \Phi_2$, $F_{22} = \Phi_{22}$, с помощью условия (20) получаем

$$|F_{22}|\nabla(R_1R_2) \leqslant 3(1 + c_0^2 + \|\varphi\|_{\Omega^2}) \sup[\chi_0 + (R_1 + R_2)^\nu \chi_1]. \quad (24)$$

Поскольку $|\nabla_n(R_1R_2, F_2)| \leqslant \sqrt{\nabla(R_1R_2)\nabla_n(F_2)}$ и, как можно показать, $\sqrt{\nabla(R_1R_2)}$ не больше $[\sqrt{\nabla(\varphi)} + \sqrt{\nabla_n(F)} + c_0] F_2^{-1}$, то

$$|\nabla_n(R_1R_2, F_2)| \leqslant \sqrt{\nabla_n(F_2)}\,[\sqrt{\nabla(\varphi)} + \sqrt{\nabla_n(F)} + c_0] F_2^{-1}.$$

Поэтому из условия (20) вытекает следующая оценка:

$$|\nabla_n(R_1R_2, F_2)| \leqslant (1 + c_0 + \|\varphi\|_{\Omega^2}^{1/2}) \sup[\chi_0 + (R_1 + R_2)^\nu \chi_1]. \quad (25)$$

И, наконец,

$$|\Delta_n F| \leqslant \sup[\chi_0 + (R_1 + R_2)^\nu \chi_1]. \quad (26)$$

Усиливая (22) с помощью оценок (23) — (26), получим неравенство вида $\sup(R_1 + R_2)^2 \leqslant C_1 \sup(R_1 + R_2)^\nu + C_2$, где C_1 и C_2 — некоторые постоянные. Из него и вытекает существование для $R_1 + R_2$ оценки сверху, так как по предположению $\nu < 2$. Лемма доказана.

Как видно из доказательства теоремы 1, получение в нем оценки для модуля вектора c основано на ограничениях (2), (3) и (9). Поэтому из леммы 2 можно вывести следующую теорему, представляющую собой по существу усиление теоремы 5.VIII К. Миранды из [2].

Теорема 2. *Утверждение теоремы 1 остается в силе, если вместо условий $\Phi_{22} < 0$ и (5) в ее формулировке предположить, что для любого $\alpha \in [0, 1]$ будет*

$$\frac{\alpha|\Phi_{22}|}{(1 + \alpha\Phi_2)^2}(1 + \alpha^2\nabla_n(\Phi)) + \frac{\alpha\sqrt{\nabla_n(\Phi_2)}}{1 + \alpha\Phi_2}(1 + \alpha\sqrt{\nabla_n(\Phi)} + \alpha|\Delta_n\Phi| \leqslant \chi_0 + (R_1 + R_2)^\nu \chi_1, \quad (27)$$

где χ_0 и χ_1 — непрерывные неотрицательные функции R_1R_2, $0 \leqslant \nu < 2$.

Следствие. *Пусть функция φ удовлетворяет условию (2) и неравенству*

$$\inf\varphi > \frac{9}{32}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{64}{9}\sup\varphi}\right). \quad (28)$$

Тогда уравнение

$$R_1R_2 + \frac{2R_1R_2}{R_1 + R_2} + cn = \varphi(n), \ \varphi \in \Omega^{m,\lambda} \quad (29)$$

допускает одно и только одно решение $(S, c) \in \sum'_{m+2,\lambda}$.

Доказательство. В области определения функции $\Phi(R_1 + R_2, R_1R_2) = \frac{2R_1R_2}{R_1 + R_2}$ имеем: $\frac{\partial\Phi}{\partial R_1} = \frac{2R_2^2}{(R_1 + R_2)^2} > 0$, $\frac{\partial\Phi}{\partial R_2} = \frac{2R_1^2}{(R_1 + R_2)^2} > 0$,

$\sum \frac{\partial^2 \Phi}{\partial R_i \partial R_j} = -4\,(R_2\lambda_1 - R_1\lambda_2)^2\,(R_1 + R_2)^{-3} \leqslant 0$. Кроме того, $\Phi_{22} = 0$, $\Delta_n \Phi = \nabla_n(\Phi) = \nabla_n(\Phi_2) \equiv 0$. Поэтому для Φ выполняются все условия леммы 2, причем условие (20) и, значит, (27) с $\chi_0 = \chi_1 = 0$. Далее, поскольку, очевидно, $0 < \Phi \leqslant \sqrt{R_1 R_2}$, то в (3) можно положить $a_0 = a_1 = 0$, $A_0 = 0$, $A_1 = 1$, $\mu = 1/2$. А тогда $b_0 = b_1 = 0$, $B_0 = B_1 = \frac{3}{4}$. Решая уравнение (9) относительно q, находим его корень из интервала $(0, 1)$: $q = 1 - \frac{9}{32 \sup \varphi}\left(\sqrt{1 + \frac{64}{9}\sup\varphi} - 1\right)$. С помощью него правая часть неравенства (28), как нетрудно убедиться, представима в виде $\left(\frac{1}{q} - 1\right)\sup\varphi$. Значит, для функции $\varphi(n)$ выполняется условие (8). Применяя теорему 2, получаем наше утверждение.

Это следствие представляет интерес в связи с тем, что функция Φ в уравнении (29) является обратной величиной средней кривизны H поверхности S.

Поскольку теорема 2 позволяет снять ограничение $\Phi_{22} < 0$, фигурирующее в теореме 1, то появляется возможность распространить ее на случай $\mu > 1$.

Теорема 3. *Утверждение теоремы 2 справедливо и при* $\mu \geqslant 1$, *если вместо условия* (8) *потребовать*

$$\inf\varphi > b_1 + \frac{B_1}{B_0'}\left(1 - \frac{1}{q}\right)(\sup\varphi + b_0), \tag{30}$$

где $B_0' = A_0 - \frac{3}{4}A_1 > 0$, *а* $q > 1$ — *решение уравнения*

$$\frac{B_0'}{q-1} = \left(\frac{q}{\sup\varphi + b_0}\right)^{\mu-1}, \tag{31}$$

и, кроме того, условие (10) заменить таким:

$$A_0 - B_1' \geqslant \frac{B_1}{B_0'}\left(1 - \frac{1}{q}\right)(A_1 + B_1'). \tag{32}$$

Доказательство. По условию теоремы числа A_0 и A_1 положительны. Поэтому $B_1 = \frac{3}{4}A_1$ (см. условие теоремы 1). Как и в доказательстве теоремы 1, получаем неравенство (11). Затем из уравнения (1) с помощью (3) и (11) находим $\sup R_1R_2 + B_0' \sup R_1R_2^{\mu} \leqslant \sup\varphi + b_0$. Выражая B_0' из (31), преобразуем это неравенство к виду

$$\frac{q\sup R_1R_2}{\sup\varphi + b_0} - 1 \leqslant (q-1)\left[1 - \left(\frac{q\sup R_1R_2}{\sup\varphi + b_0}\right)^{\mu}\right].$$

Так как $q > 1$, а $\mu \geqslant 1$, то отсюда получается оценка R_1R_2 сверху:

$$\sup R_1R_2 \leqslant \frac{\sup\varphi + b_0}{q}.$$

После этого из (11) получаем такую оценку для $|c|$:

$$|c| \leqslant b_1 - a_1 + \frac{B_1}{B_0'}\left(1 - \frac{1}{q}\right)(\sup \varphi + b_0). \tag{33}$$

Сравнивая (30) и (33), видим, что $\inf \varphi > |c| + a_1$. Значит, как и в доказательстве теоремы 1, можно получить оценку $R_1 R_2$ снизу. А по условию (32) число R в (15) можно выбирать настолько большим, что для функции $\varphi_0(n)$ будет выполняться условие

$$\inf \varphi_0 > b_1 + \frac{B_1}{B_0'}\left(1 - \frac{1}{q}\right)(\sup \varphi_0 + b_0),$$

где q — то же самое, что и в (30), что позволяет завершить доказательство этой теоремы точно так же, как доказательство теоремы 1. Надо только всюду, где необходимо, заменить B_0 на B_0'. Теорема доказана.

Замечание. Условие (32) при $A_0 = A_1$ заведомо выполняется, так как в этом случае $B_1' = 0$ и по условию (30) $\frac{B_1}{B_0'}\left(1 - \frac{1}{q}\right) < 1$. Отсюда, в частности, следует, что при $\mu = 1$ теорема 3 дает результат, качественно отличный от того, который получается из теоремы 2.

В заключение отметим, что по доказанному в [4, с. 84] условию (10) в наших теоремах можно придать другую форму:

$$1 \leqslant \frac{1 + A_1}{1 + A_0} < \frac{1}{6}\left(\sqrt{9 + 120t} - 3\right),$$

где $t = \min[1,\ 1 + A_1,\ (1 + A_0)^{-1}]$.

Список литературы: 1. *Miranda C.* Su un problema di geometria differentiale in grande per gli ovaloidi // Ann. Mat. Pura ed Appl. 1970. 87. С. 237—269. 2. *Miranda C.* Aggiunde ederrata corrige alla memoria «Su un problema di geometria differentiale in grande per gli ovaloidi» // Ann. Mat. Pura ed Appl. 1971. 88. С. 349—355. 3. *Miranda C.* Su un problema di Minkowski // Rend. Sem. Mat. ROMA. 1939. 3. С. 96—108. 4. *Медяник А. И.* Об одной теореме К. Миранды // Укр. геометр. сб. 1978. Вып. 21. С. 81—85.

Поступила в редколлегию 20.11.89

УДК 513.813

Й. МИКЕШ, В. С. СОБЧУК

О ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЯХ 3-СИММЕТРИЧЕСКИХ РИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

Риманово пространство V_n называется симметрическим, если ковариантная производная тензора кривизны равна нулю: $R^h_{ijk,l}=0$. Отсюда следует, что $R^h_{ijk,[lm]}=0$ (квадратные скобки — знак альтернирования), и поэтому

$$R^h_{\alpha jk}R^\alpha_{ilm}+R^h_{i\alpha k}R^\alpha_{jlm}+R^h_{ij\alpha}R^\alpha_{klm}-R^\alpha_{ijk}R^h_{\alpha lm}=0,$$

т. е. симметрические пространства являются полусимметрическими. Последнее условие является решающим в теореме Н. С. Синюкова [1], которая утверждает, что симметрические пространства непостоянной кривизны не допускают нетривиальных геодезических отображений. Очевидно, что полусимметрическими являются также 2-симметрические V_n: $R^h_{ijk,\,lm}=0$. Исходя из этого, в [2] доказано, что 2-симметрические V_n непостоянной кривизны не допускают нетривиальных отображений.

Задача исследования 3-симметрических римановых пространств существенно усложняется, так как эти пространства не являются полусимметрическими.

Примеры 3-симметрических, отличных от 2-симметрических, римановых пространств приведены, например, в работе [2, с. 27, 28].

Теорема. *3-симметрические римановы пространства $V_n (n>2)$, отличные от пространств постоянной кривизны, а также Риччи 3-симметрические V_n $(n>4)$, отличные от пространств Эйнштейна, не допускают нетривиальных геодезических отображений.*

Доказательство. Начнем со второго утверждения. Пусть $V_n (n>4)$ — Риччи 3-симметрическое:

$$R_{ij,\,klm}=0, \tag{1}$$

отличное от пространства Эйнштейна: $R_{ij}\neq\rho g_{ij}$. Пространство V_n допускает нетривиальное геодезическое отображение тогда и только тогда, когда совместна система [1]

$$a_{ij,\,k}=\lambda_{(i}g_{j)k}, \tag{2}$$

относительно симметрического тензора a_{ij} и ненулевого вектора λ_i, где круглые скобки — знак симметрирования. Из (1) следует

$$R_{ij,\,kl[ms]}=0. \tag{3}$$

Как показано в [2], при $n>4$ (вероятно, и при $n=4$) из (3) и (2) следует, что либо а):

$$R_{ij,\,kl}=\alpha g_{ij}g_{kl}+\beta g_{ik}g_{jl}+\gamma g_{il}g_{jk} \tag{4}$$

либо б):

$$\lambda_{i,j}=\mu g_{ij},\ \mu=\mathrm{const}. \tag{5}$$

Рассмотрим случай а). Альтернируя (4) по i, j, находим $\beta=\gamma$, и поэтому из (4) следует, что $R_{ij,\,[kl]}=0$. Как показано в [3], отсюда следует (5).

В силу (5) дифференциальные продолжения условий интегрируемости уравнений (2) имеют вид:

$$a_{\alpha(i}R^{\alpha}_{j)kl,msr}=\lambda_{(i}T_{j)klmsr}, \tag{6}$$

где обозначено

$$T_{jklmsr}=R_{jmkl,\,sr}+R_{jskl,\,mr}+R_{jrkl,\,ms}. \tag{7}$$

Свертка (6) с g^{lm} в силу (1), (7) и тождества Бианки дает

$$2R_{jk,\,sr}+R_{jk,\,rs}-R_{ks,\,jr}-R_{kr,\,js}=0. \tag{8}$$

Альтернируя (8) по s, r, получим $R_{jk,\,sr}=R_{jk,\,rs}$, в силу чего альтернация (8) по j, s дает $R_{kj,\,sr}=R_{ks,\,jr}$. Следовательно, тензор $R_{jk,sr}$ симметричен по всем индексам и поэтому из (8) следует, что $R_{jk,st}=0$.

Но как показано в [3], Риччи 2-симметрические V_n, отличные от пространств Эйнштейна, не допускают нетривиальных геодезических отображений. Вторая часть теоремы доказана.

Так как из 3-симметричности V_n следует его Риччи 3-симметричность, то остается рассмотреть случай, когда выполнены условия

$$R^h_{ijk,\,lmp}=0 \tag{9}$$

и

$$R_{ij}=\frac{R}{n}g_{ij}. \tag{10}$$

Как показано в [4], для пространств Эйнштейна, допускающих нетривиальные геодезические отображения, имеют место соотношения:

$$\lambda_{i,j}=\mu g_{ij}+Ba_{ij}, \tag{11}$$

$$\mu_{,i}=2B\lambda_i,\quad B=\frac{R}{n\,(n-1)}=\mathrm{const}. \tag{12}$$

Условия интегрируемости уравнений (11) имеют вид:

$$\lambda_\alpha R^\alpha_{ijk}=B\lambda_{[k}g_{j]i}. \tag{13}$$

Из (9) следует, что $R_{hijk,\,l[mp]}=0$, т. е.

$$R_{\alpha ijk,\,l}R^\alpha_{hmp}+R_{h\alpha jk,\,l}R^\alpha_{imp}+R_{hi\alpha k,\,l}R^\alpha_{jmp}+$$
$$+R_{hij\alpha,\,l}R^\alpha_{kmp}+R_{hijk,\,\alpha}R^\alpha_{lmp}=0. \tag{14}$$

Свертывая (14) с λ^p и учитывая (13), при $B\neq 0$ находим

$$\lambda^\alpha(R_{\alpha ijk,\,l}g_{mh}+R_{h\alpha jk,\,l}g_{mi}+R_{hi\alpha k,\,l}g_{mj}+$$
$$+R_{hij\alpha,\,l}g_{mk}+R_{hijk,\,\alpha}g_{ml})=\lambda_hR_{mijk,\,l}+\lambda_iR_{hmjk,\,l}+$$
$$+\lambda_jR_{himk,\,l}+\lambda_kR_{hijm,\,l}+\lambda_lR_{hijk,\,m}. \tag{15}$$

Из (10) следует, что $R_{ij,\,k}=0$, поэтому свертка (15) с g^{hm} в силу тождества Бианки приводит к равенству:

$$\lambda^\alpha(nR_{\alpha ijk,\,l}-R_{\alpha ljk,\,i})=0,$$

из которого следует

$$\lambda^\alpha R_{\alpha ijk,\,l}=0. \tag{16}$$

Отсюда в силу тождества Бианки получаем $\lambda^\alpha R_{hijk,\alpha}=0$. Поэтому (15) принимает вид:

$$\lambda_hR_{mijk,\,l}+\lambda_iR_{hmjk,\,l}+\lambda_jR_{himk,\,l}+\lambda_kR_{hijm,\,l}+\lambda_lR_{hijk,\,m}=0. \tag{17}$$

Нетрудно показать, что из (11), (12) и $\lambda_\alpha\lambda^\alpha=0$ следует, что $B=0$. Поэтому при $B\neq 0$ будет $\lambda_\alpha\lambda^\alpha\neq 0$. Учитывая это, свернем (17) с λ_h и в силу (16) получим $R_{mijk,\,l}=0$. Но симметрические V_n непостоянной кривизны не допускают не тривиальных геодезических отображений.

Следовательно, $B=0$. В этом случае (11) и (12) принимают вид (5). Поэтому имеет место (6), откуда в силу (9) находим $T_{jklmsr}=0$, т. е. $R_{jmkl,\,sr}+R_{jskl,\,mr}+R_{jrkl,\,ms}=0$ (18). Дифференцируя ковариантно по x^r тождество Бианки, получим

$$R_{jmkl,\,sr}+R_{mskl,\,jr}+R_{sjkl,\,mr}=0. \tag{19}$$

Альтернируя (18) по s, r, находим $R_{jmkl,\,[sr]}=0$.

В силу этого, если (19) просимметрировать по s, r, а (18) проальтернировать по j, m и результаты сложить, то получим $R_{jmkl,sr}=0$. Но 2-симметрические римановы пространства непостоянной кривизны не допускают нетривиальных геодезических отображений. Теорема полностью доказана.

Список литературы: 1. *Синюков Н. С.* Геодезические отображения римановых пространств. М., 1979. 255 с. 2. *Микеш Й.* Геодезические иголоморфно-проективные отображения специальных римановых пространств. Канд. дис. ... наук. Одесса, 1978. 107 с. 3. *Микеш Й.* О геодезических отображениях Риччи 2-симметрических римановых пространствах // Мат. заметки. 1980. 28, № 2. С. 313—317. 4. *Микеш Й.* О геодезических отображениях пространств Эйнштейна // Мат. заметки. 1980. 28, № 2. С. 935—938.

Поступила в редколлегию 16.05.88

УДК 514

Ю. А. НИКОЛАЕВСКИЙ

ВПОЛНЕ ОМБИЛИЧЕСКИЕ ПОДМНОГООБРАЗИЯ В $G(2, n)$ I

1. Хорошо известно, что вполне геодезические подмногообразия в симметрическом пространстве полностью определяются своим касательным пространством в одной точке, причем это касательное пространство должно быть тройной системой Ли. Таким образом, вопрос о классификации вполне геодезических подмногообразий в симметрическом пространстве сводится к чисто алгебраической задаче. С другой стороны, для класса вполне омбилических подмногообразий, являющегося естественным расширением класса вполне геодезических подмногообразий, такого удобного критерия нет. Этим, по-видимому, объясняется тот факт, что классификация вполне омбилических подмногообразий проведена лишь для пространств постоянной кривизны и КРОСП'ов. В настоящей работе дается классификация вполне омбилических подмногообразий размерности $\geqslant 3$ в многообразиях Грассмана $G(2, n)$.

Пусть M^n — риманово многообразие, N^l — его подмногообразие, $\tilde{\nabla}$ и ∇ — римановы связности на M и N соответственно, g — метрика. Для касательных к N векторных полей X и Y *вторая квадратичная форма* подмногообразия $N \subset M$ определяется как

$$h(X, Y) = \tilde{\nabla}_X Y - \nabla_X Y.$$

Вектор средней кривизны $H = \frac{1}{l} Trh$, а средняя кривизна $\alpha = \sqrt{g(H, H)}$. Для нормального к N векторного поля ξ будет

$$\tilde{\nabla}_X \xi = -A_\xi X + D_X \xi,$$

где A_ξ — билинейный симметрический оператор, действующий в касательном к N пространстве, причем $g(A_\xi X, Y) = g(h(X, Y), \xi)$, а D_X — ковариантная производная в нормальной связности. *Первое нормальное подпространство* N_1 определяется как ортогональное дополнение в нормальном к N пространстве к множеству векторов ξ, таких, что $A_\xi = 0$.

Подмногообразие $N \subset M$ называется *вполне омбилическим*, если $h(X, Y) = Hg(X, Y)$ для любых векторов X и Y, касательных к N; *внешней сферой*, если оно вполне омбилично, $H \neq 0$ и вектор средней кривизны параллелен в нормальной связности; *вполне геодезическим*, если $H = 0$, т. е. $h = 0$. Мы будем называть *существенно вполне омбилическим подмногообразием* вполне омбилическое подмногообразие, не являющееся вполне геодезическим и внешней сферой.

Сводка результатов о вполне омбилических многообразиях в симметрических пространствах содержится в работе Чена [1].

Пусть $\tilde{R}$ и R — тензоры кривизны связностей $\tilde{\nabla}$ и ∇ соответственно. Тогда уравнения Гаусса — Кодацци запишутся в виде:

$$\tilde{R}(X, Y, Z, T) = R(X, Y, Z, T) + \alpha^2 (g(X, Z) g(Y, T) - \\ - g(X, T) g(Y, Z)), \tag{1}$$

$$\tilde{R}(X, Y, Z, \xi) = g(Y, Z) g(D_X H, \xi) - g(X, Z) g(D_Y H, \xi) \tag{2}$$

для векторных полей X, Y, Z, T, касательных к N и ξ-нормального.

Будем обозначать через $G(m, n)$, $m \leqslant n$, многообразие Грассмана m-мерных подпространств с учетом ориентации проходящих через начало координат $O \in E^n$. Оно является компактным симметрическим пространством: $G(m, n) = SO(n)/S(O(m) \times O(n-m))$ [2]. Многообразия Грассмана $G(m, n)$ и $G(n-m, n)$ изометричны.

Классификация вполне геодезических подмногообразий в многообразии Грассмана $G(2, n)$ проведена в [3] Ченом и Нагано.

Теорема А. *Всякое вполне геодезическое подмногообразие в грассмановом многообразии $G(2, n)$ является либо*

1) *произведением сфер $S^q \times S^r$, $q + r = n - 2$, $n - 2 \geqslant q$, $r \geqslant 0$, либо*

2) *многообразием Грассмана $G(2, n-1)$, либо*

3) *комплексным проективным пространством CP^m, $2m = [n/2] - 1$, либо*

4) *вполне геодезично в одном из перечисленных пространств.*

Зафиксируем в пространстве E^n подпространство E^k и прямую, проходящую через начало координат и лежащую в E^k. Множество двумерных плоскостей (с учетом ориентации), проходящих через эту прямую и лежащих в E^k, образует вполне геодезическое подмногообразие в $G(2, n)$, изометричное сфере. Будем называть его стандартной сферой.

Заметим, что сферы — сомножители в 1) теоремы А как раз являются стандартными.

Приведем пример еще одной вполне геодезической сферы в $G(2, n)$. Рассмотрим два ортогональных евклидовых подпространства $E_1^{m+1} \perp \perp E_2^{m+1} \subset E^n$, $m \leqslant n/2 - 1$. Зафиксируем в них ортонормированные базисы $(x^1, \ldots, x^{m+1})$ и $(x^{m+2}, \ldots, x^{2m+2})$ соответственно. Тогда подмножество в $G(2, n)$, образованное всевозможными плоскостями, натянутыми на векторы $\sum_{i=1}^{m+1}(a_i x^i)$ и $\sum_{i=1}^{m+1}(a_i x^{i+m})$, где (a_i) — всевозможные вещественные числа, вполне геодезично и изометрично сфере. По-другому его можно описать, как диагональ вполне геодезического подмногообразия $S^m \times S^m \subset G(2, n)$, или как «вещественную часть» вполне геодезического подмногообразия $CP^m \subset G(2, n)$. Для краткости будем ссылаться на эту сферу-диагональ. Заметим, что стандартные сферы и сферы-диагонали неконгруэнтны.

Справедлива следующая

Теорема. *Пусть* $F^l \subset G(2, n)$ $(l \geqslant 3)$ — *вполне омбилическое подмногообразие. Тогда либо*

1) F^l — *вполне геодезично; либо*

2) F^l — *внешняя сфера, и тогда оно является малой сферой либо а) на стандартной сфере* $S^{l+1} \subset G(2, n)$;

либо б) на сфере-диагонали $S^{l+1} \subset G(2, n)$; *либо*

3) F^l — *существенно вполне омбилично, и тогда оно является либо а) существенно вполне омбилической гиперповерхностью (т. е. непостоянной средней кривизны) во вполне геодезическом произведении* $S^l \times \gamma$ *стандартной сферы на геодезическую в* $G(2, n)$;

либо б) существенно вполне омбилическим подмногообразием постоянной средней кривизны, изометричным сфере, во вполне геодезическом произведении $S^{l+1} \times S^{l+1}$ *стандартных сфер.*

Для полноты классификационной теоремы опишем существенно вполне омбилические подмногообразия из 3а) и 3б). Очевидно, что омбиличность и существенная омбиличность наследуются из объемлющего пространства. Для подмногообразия 3а), переходя к универсальной накрывающей, получаем

Утверждение. а) Пусть $F^l \subset S^l \times E^1$ $(l \geqslant 2)$ — вполне омбилическая гиперповерхность непостоянной средней кривизны. Тогда F^l является «поверхностью вращения», т. е. состоит из малых сфер $S^{l-1}(R) \subset S^l$, центры которых лежат на одной образующей цилиндра $S^l \times E^1$, а радиусы зависят от евклидова параметра на E^1 по формуле $\cos R = Ae^t + Be^{-t}$, где A, B — постоянные ($A^2 + B^2 \neq 0$ и $AB < 1/4$) (рис. 1: F_1 соответствует $B = 0$, $F_2 : B \neq 0$; сфера изображена кругом, его границу надо стянуть в точку).

Утверждение б). Пусть $F^l \subset S_1^{l+1} \times S_2^{l+1}$ $(l \geqslant 3)$ — существенно вполне омбилическое подмногообразие постоянных средней и секционной кривизн. Тогда F^l является «косой диагональю» в произведении двух малых сфер $S_i^l \subset S_i^{l+1}$ (разного радиуса). Точнее, если ввести на сферах-сомножителях одну и ту же систему координат (u^i) на S_1^{l+1} и (v_i) на S_2^{l+1} (географически-конформную), в которой метрика сферы имеет вид $ds^2 = (du^1)^2 + \sin^2 u^1 \cdot 4\left(\sum_{i=2}^{l+1}(du^i)^2\right)/\left(1 + \sum_{i=2}^{l+1}(u^i)^2\right)^2$, то F^l задается как $u^1 = R$, $v^1 = r$, $u^2 = v^2$, $u^3 = v^3$, $\ldots$, $u^{l+1} = v^{l+1}$, причем $0 < R \neq r < \pi$ и хотя бы одно из чисел R и $r \neq \pi/2$ (рис. 2).

Замечания. 1. Согласно [4], всякая внешняя сфера в локально симметрическом пространстве является малой сферой во вполне геодезическом пространстве постоянной кривизны. Таким образом п. 2 теоремы по сути дела утверждает, что любая вполне геодезическая сфера размерности $\geqslant 4$ в $G(2, n)$ является либо стандартной, либо диагональю (это верно и в размерности 3).

2. Вопрос о вполне омбилических гиперповерхностях достаточно полно исследован Ченом в [5]. Во многих работах этого автора упоми-

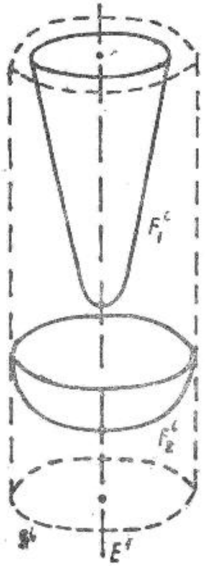


Рис. 1

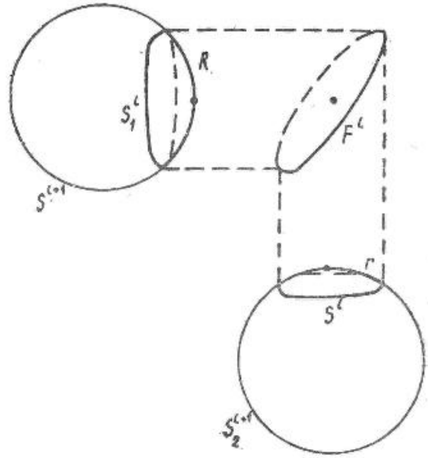


Рис. 2

нается о существовании существенно вполне омбилических гиперповерхностей в цилиндре над сферой. Утверждение а) дает их полное описание. Заметим, что аналогичный результат имеет место и для цилиндра над пространством Лобачевского, только зависимость радиуса малой сферы от «высоты» будет другой ($\mathrm{ch} R = A \cos t + B \sin t$).

3. Теорема дает также описание вполне омбилических подмногообразий в пространствах CP^n (ср. [6]) и $S^q \times S^r$, так как вполне омбиличность наследуется при вполне геодезическом вложении.

4. Утверждение б) является контрпримером сразу к двум гипотезам Б.-Й. Чена: VII.4.1 и VII.5.1 в [1] — о том, что существенно вполне омбилическое подмногообразие в локально симметрическом пространстве лежит в конформно-плоском вполне геодезическом подмногообразии и о том, что омбилическое подмногообразие постоянной средней кривизны является внешней сферой соответственно.

5. Хотя теорема носит локальный характер и будет доказываться локальными средствами, ясно, что она справедлива для любого «сколь

угодно большого» вполне омбилического подмногообразия F^l (в частности, для полного). Это объясняется тем очевидным фактором, что области вполне геодезичности ($H = 0$, $\alpha = 0$), внешней сферичности ($DH = 0$, $\alpha = \text{const} \neq 0$), области существенной омбиличности типа а) ($DH \neq 0, \bar{\nabla}\alpha \neq 0$) и типа б) ($DH \neq 0$, $\| D_X H \|^2 > \varepsilon > 0$ для единичного X, $\alpha = \text{const}$) не могут иметь общих предельных точек (относительно соотношений в скобках см. доказательства).

Пусть $F^m \subset E^n$ — регулярное ориентируемое подмногообразие в евклидовом пространстве. Построим в каждой точке касательную l-мерную плоскость и перенесем все эти плоскости параллельно в начало координат $O \in E^n$. Полученное подмножество в $G(m, n)$ называется грассмановым образом $\Gamma(F^m)$ подмногообразия F^m. Если F^m является C^2-регулярным и внешний нуль-индекс в смысле Черна—Кейпера равен нулю в каждой точке, то грассманов образ будет регулярным m-мерным подмногообразием в $G(m, n)$. Если это естественное требование выполнено, то будем говорить о невырожденности грассманова образа.

Подмногообразия со вполне омбилическим грассмановым образом изучались в [7—9]. Доказано, в частности, что если грассманов образ изотропного подмногообразия вполне омбиличен, то оно имеет параллельную вторую квадратичную форму, и, значит, грассманов образ вполне геодезичен [10] (изотропным подмногообразием называется такое подмногообразие, что в каждой точке $\|h \mid (X, X)\|$ не зависит от выбора единичного касательного вектора X). Параллельность второй квадратичной формы означает, что $\bar{\nabla}h = 0$, где $(\bar{\nabla}_X h)(Y, Z) = D_X \times$ $\times (h(Y, Z)) - h(\nabla_X Y, Z) - h(Y, \nabla_X Z)$ для касательных векторных полей X, Y, Z.

Из теоремы легко выводится

Следствие. *Пусть $F^l \subset E^{l+2}$ ($l \geqslant 3$) — регулярное подмногообразие с невырожденным вполне омбилическим грассмановым образом. Тогда грассманов образ вполне геодезичен, и, значит, F^l — гиперповерхность, произведение гиперповерхностей или комплексная гиперповерхность.*

Действительно, если грассманов образ вполне омбиличен и не вполне геодезичен, то его размерность $\leqslant l - 1$. Далее применяется классификационная теорема для подмногообразий с вполне геодезическим грассмановым образом, доказанная в [11].

Отметим, что при $l = 2$ в многообразии Грассмана $G(2, 4) =$ $= S_1^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) S_2^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ есть вполне геодезическое подмногообразие, изометричное произведению $S^1 \times S^2$, а потому в силу утверждения а) есть существенно вполне омбилическое подмногообразие $F^2 \subset G(2, 4)$. По нему согласно теореме Ю. А. Аминова [12] можно восстановить «грассманов прообраз» $F^2 \subset E^4$ (вообще говоря, неоднозначно).

Для доказательства теоремы нам понадобится ряд лемм. Сделаем некоторые предварительные замечания [13]. Введем в пространстве E^n прямоугольную декартову систему координат $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$. Зафиксируем двумерное подпространство π_0: $x^1 = \cdots = x^{n-2} = 0$.

Если π — близкое к π_0 двумерное подпространство, то оно задается системой уравнений $\{x^\mu = \xi_1^\mu x^{n-1} + \xi_2^\mu x^n\}_{\mu=1}^{n-2}$, $2n-4$ чисел $\{\xi_i^\mu\}_{\mu=1}^{n-2}, {}_{i=1}^{2}$ являются локальными координатами в окрестности точки $\pi_0 \in G(2, n)$, при этом $\xi_i^\mu(\pi_0) = 0$. На многообразии Грассмана $G(2, n)$ транзитивно действует группа $SO(n)$. Группа изотропии точки $\pi_0 = O \in G(2, n)$ — это подгруппа $S(O(n-2)\times O(2)) \subset SO(n)$ матриц

$$\left(\begin{array}{c|c} U & 0 \\ \hline 0 \ldots 0 & V \end{array}\right),$$

где $U \in O(n-2)$, $V \in O(2)$ и $\det U \cdot \det V = 1$. Разложение Картана, соответствующее этой подгруппе, есть $\mathfrak{o}(n) = \mathfrak{o}(n-2) + \mathfrak{o}(2)) + \mathfrak{m}$, где $\mathfrak{o}$ — алгебра Ли кососимметрических матриц, а $\mathfrak{m}$ — касательное пространство к $G(2, n)$ в нуле, т. е. пространство матриц вида

$$\left(\left(\begin{array}{c|c} 0 & -X' \\ \hline X & 0 \end{array}\right),\ X - ((n-2)\times 2) \text{ матрицы}\right),$$

где штрих означает транспонирование.

Для удобства будем отождествлять касательный вектор из $\mathfrak{m}$ с соответствующей $(n-2)\times 2)$ — подматрицей X.

В $\mathfrak{m}$ определяется действие группы изотропии $S(O(n-2)\times O(2))$ по правилу $Ad_{U\times V}X = VXU'$ $(X \in \mathfrak{m},\ U \in O(n-2),\ V \in O(2),\ \det U \cdot \det V = 1)$; Ad — инвариантное скалярное произведение: $g(X, Y) = T_r(X, Y')$ $(X, Y \in \mathfrak{m})$; тройная скобка Ли: $[[X, Y], Z] = (XY' - YX')Z - Z(X'Y - Y'X)$; тензор кривизны: $\tilde{R}(X, Y)Z = -[[X, Y], Z]$.

Лемма 1. *Пусть — подпространство $\xi \in \mathfrak{m}$ размерности $q \geqslant 3$ касается вполне геодезической сферы в $G(2, n)$. Тогда с точностью до действия группы изотропии в $\mathfrak{m}$ оно натянуто на векторы*

$$\text{а)}\ \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{1\ 0 \ldots 0}_{q} & 0 \ldots 0 \\ \hline 0 \ldots 0 & 0 \ldots 0 \end{array}\right),\quad \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{0\ 1\ 0 \ldots 0}_{q} & 0 \ldots 0 \\ \hline 0 \ldots 0 & 0 \ldots 0 \end{array}\right), \ldots,$$

$$\left(\begin{array}{c|c} \underbrace{0 \ldots 0\ 1}_{q} & 0 \ldots 0 \\ \hline 0 \ldots 0 & 0 \ldots 0 \end{array}\right)\ (q \leqslant n-2)$$

или на векторы

$$\text{б)}\ \left(\begin{array}{c|c|c} 1\ 0 & 0 \ldots 0 & 0 \ldots 0 \\ \hline \underbrace{0 \ldots 0}_{q} & \underbrace{1 \ldots 0}_{q} & 0 \ldots 0 \end{array}\right), \ldots, \left(\begin{array}{c|c|c} 0\ 1 & 0 \ldots 0 & 0 \ldots 0 \\ \hline 0 \ldots 0 & 0 \ldots 1 & 0 \ldots 0 \end{array}\right)$$

$$(q \leqslant n/2 - 1).$$

Лемма 2. *Пусть подпространство* $\mathfrak{c} \subset \mathfrak{m}$ *касается существенно вполне омбилического подмногообразия размерности* $l \geqslant 3$ *в* $G(2,\ n)$.

Тогда либо

а) *с точностью до действия группы изотропии в* $\mathfrak{m}$ *оно натянуто на векторы*

$$X_1 = \left(\begin{array}{c|c|c|c} 1\ 0\dots0 & 0 & 0 & 0\dots0 \\ \hline \underbrace{0\dots0}_{l-1} & 0 & 0 & 0\dots0 \end{array}\right),\quad X_2 = \left(\begin{array}{c|c|c|c} 0\ 1\ 0\dots0 & 0 & 0 & 0\dots0 \\ \hline \underbrace{0\dots0}_{l-1} & 0 & 0 & 0\dots0 \end{array}\right), \dots,$$

$$X_{l-1} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} 0\dots0\ 1 & 0 & 0 & 0\dots0 \\ \hline \underbrace{0\dots0}_{l-1} & 0 & 0 & 0\dots0 \end{array}\right),\quad X_l = \left(\begin{array}{c|c|c|c} 0\dots0 & a & 0 & 0\dots0 \\ \hline \underbrace{0\dots0}_{l-1} & 0 & b & 0\dots0 \end{array}\right),$$

$$ab \neq 0.$$

При этом $D_{X_i}H = 0$ $(i = 1,\ 2,\ \dots,\ l-1)$ *в точке* 0, *векторы* $D_{X_l}H$ и H *коллинеарны вектору*

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} 0\dots0 & b & 0 & 0\dots0 \\ \hline \underbrace{0\dots0}_{l-1} & 0 & -a & 0\dots0 \end{array}\right);\ \text{либо}$$

б) *с точностью до действия группы изотропии в* $\mathfrak{m}$ *оно натянуто на векторы*

$$X_i = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} \overbrace{0\dots0\ a\ 0\dots0}^{l+1} & 0 & \overbrace{0\dots0}^{l+1} & 0 & 0\dots0 \\ \hline \underset{\uparrow i}{0\dots0} & 0 & 0\dots0\ \underset{\uparrow l+i+1}{b}\ 0\dots0 & 0 & 0\dots0 \end{array}\right),$$

$$i = 1,\ 2,\ \dots\ l;\ a^2 \neq b^2;\ ab \neq 0.$$

При этом

$$H = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} \overbrace{0\dots0 & q}^{l+1} & \overbrace{0\dots0 & 0}^{l+1} & 0\dots0 \\ \hline 0\dots0 & 0 & 0\dots0 & r & 0\dots0 \end{array}\right),\ qr \neq 0;$$

$$D_{X_i}H = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} \overbrace{0\dots0\ b\ 0\dots0}^{l+1} & 0 & \overbrace{0\dots0}^{l+1} & 0 & 0\dots0 \\ \hline \underset{\uparrow i}{0\dots0} & 0 & 0\dots0\ \underset{\uparrow l+i+1}{(-a)}\ 0\dots0 & 0 & 0\dots0 \end{array}\right) c_i,$$

$$c_i \neq 0;\ i = 1,\ \dots,\ l$$

$D_{X_i}D_{X_j}H = 0$ *при* $i \neq j$, *компонента вектора* $D_{X_i}D_{X_i}H$, *ортогональная к пространству* $H + DH$, *одна и та же при всех* $i = 1,\ 2,\ \dots,\ l$ *и равна*

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c|c} 0\dots0 & r & 0\dots0 & 0 & 0\dots0 \\ \hline 0\dots0 & 0 & 0\dots0 & -q & 0\dots0 \end{array}\right) c,\ c \neq 0;$$

и, наконец, $D_{X_i}D_{X_j}D_{X_k}H$ *лежит в пространстве* $H \dot{+} DH \dot{+} DDH$ *при всех* $i, j, k = 1, 2, \ldots, l$. *В частности,* $\alpha = \mathrm{const}$, *так как* $DH \perp H$.

2. Доказательство теоремы. Рассмотрим сначала случай 2, когда подмногообразие является внешней сферой. По замечанию 1 достаточно доказать, что всякая вполне геодезическая сфера размерности $q \geqslant 4$ в $G(2, n)$ — стандартная или диагональ. Транзитивным действием группы $SO(n)$ можно сделать так, чтобы сфера $S^q \subset G(2, n)$ проходила через точку $0 \in G(2, n)$. Действуя элементом группы изотропии в точке 0 (рассматриваемым как элемент из $SO(n)$) и применяя лемму 1, получим вид касательного пространства $\mathfrak{c} = T_0S^q \subset T_0G(2, n)$. Действуя экспоненциальнымм отображением Exp: $\mathfrak{c} \to G(2, n)$, найдем саму сферу S^q. Рассмотрим случай а). Для кососимметрической $(n \times n)$-матрицы

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{0}} & -u' & 0 \\ & & 0 & 0 \\ \hline u & 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{0}} \\ 0 & 0 & & \end{array}\right) \quad (u \in E^q)$$

имеем

$$U = \mathrm{Exp}\, A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} Q & 0 & -u' \sin r/r & 0 \\ \hline 0 & I_{n-q} & 0 & 0 \\ \hline \frac{\sin r}{r} u & 0 \ldots 0 & \cos r & 0 \\ \hline 0 \ldots 0 & 0 \ldots 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

где Q — $(q \times q)$ — симметрическая матрица; $r = \| u \|$. Матрице $U \in SO(n)$ соответствует точка на многообразии Грассмана $G(2, n)$, изображаемая двумерным подпространством, натянутым на векторы Ux^{n-1}, Ux^n, т. е. на два последних вектор-столбца матрицы U. Понятно, что такое двумерное пространство лежит всегда (при любом $u \in E^q$) в $(q+2)$-мерном подпространстве $x^{q+1} = \ldots = x^{n-2} = 0$ и всегда содержит прямую — ось x^n. Обратно, для каждого такого двумерного подпространства можно подобрать соответствующий вектор u из E^q. Значит, сфера S^q — стандартна.

Аналогично для случая б) получим

$$A = \left(\begin{array}{ccc|cc} \multicolumn{3}{c|}{\multirow{3}{*}{0}} & -u' & 0 \\ & & & 0 & -u' \\ & & & 0 & 0 \\ \hline u & 0 & 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{0}} \\ 0 & u & 0 & & \end{array}\right),$$

$$
U = \operatorname{Exp} A = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c}
Q & 0 & 0 & -u' \frac{\sin r}{r} & 0 \\
\hline
0 & Q & 0 & 0 & -u' \frac{\sin r}{r} \\
\hline
0 & 0 & I_{n-2q} & 0 & 0 \\
\hline
\frac{\sin r}{r} u & 0 & 0 & \cos r & 0 \\
\hline
0 & \frac{\sin r}{r} u & 0 & 0 & \cos r
\end{array}\right);
$$

где Q — симметрическая $(q \times q)$-матрица; $r = \| u \|$. Точка многообразия Грассмана $G(2, n)$, соответствующая матрице $U \in SO(n)$, — это плоскость, натянутая на векторы Ux^{n-1}, Ux^n. Отсюда сразу видно, что получается сфера-диагональ, построенная, исходя из пространств $(x^1, \ldots, x^q, x^{n-1})$ и $(x^{q+1}, \ldots, x^{2q}, x^n)$. Случай 2 теоремы исчерпан.

Пусть теперь $F^l \subset G(2, n)$ существенно вполне омбилично. Нам потребуется следующий результат Эрбахера [14]:

Теорема Б. *Пусть $F^l \subset E^N$ — регулярное подмногообразие, N_1— его первое нормальное подрасслоение. Если в нормальном расслоении NF^l существует подрасслоение $\tilde{N}F^l$, такое, что оно*

1) *содержит* N_1;

2) *замкнуто относительно дифференцирования в нормальной связности, т. е.* $D\tilde{N} \subset \tilde{N}$;

3) *его слой имеет постоянную размерноть k, то подмногообразие F^l лежит целиком в евклидовом пространстве $E^{l+k} \subset E^N$, натянутом на касательное пространство $T_Q F^l$ и подпространство $\tilde{N}_Q F^l$ в любой точке $Q \in F^l$ (все такие E^{l+k} совпадают).*

В нашем случае для а) условиям 1), 2), 3) теоремы Б удовлетворяет одномерное подрасслоение H, для б) — $(l+2)$-мерное подрасслоение $H \dotplus DH \dotplus DDH$ (см. лемму 2). Однако объемлющее пространство не позволяет применить теорему Б. Это все же удается сделать, вложив $G(2,n)$ в евклидово пространство. Действительно, многообразие Грассмана $G(2, n)$ является симметрическим R-пространством и поэтому допускает изометрическое эквивариантное вложение в евклидово пространство с параллельной второй квадратичной формой [15—16]. Явный вид такого вложения описан в [17]. Для подмногообразия $F^l \subset G(2, n) \subset E^N$ вычисляем вторую квадратичную форму и подбираем подходящее подрасслоение $\tilde{N}$ в нормальном расслоении. Далее применяем теорему Б и находим пересечение евклидова подпространства $T_Q F^l \dotplus \tilde{N}_Q \subset E^N$ в точке $Q \in F^l$ и вложенного многообразия Грассмана $G(2, n) \subset E^N$. Это пересечение и будет вполне геодезическим произведением в а) стандартной сферы и геодезической в $G(2, n)$ и в б) двух стандартных сфер размерностей $l+1$.

Для действия по такой схеме введем следующие обозначения: $\nabla^F = \nabla$, $\nabla^G = \tilde{\nabla}$, ∇^0 — римановы связности на F^l, $G(2, n)$ и в E^N соответственно; h^{FG}, h^{GE}, h^{FE} — вторые квадратичные формы вложений подмногообразий $F^l \subset G(2, n)$, $G(2, n) \subset E^N$ и $F^l \subset E^N$ соответственно; аналогично определяются обозначения A^{FG}, A^{GE}, A^{FE} и D^{FG}, D^{GE}, D^{FE}.

Для касательных к F^l векторных полей X и Y имеем

$$h^{FE}(X, Y) = h^{FG}(X, Y) + h^{GE}(X, Y) = Hg(X, Y) + h^{GE}(X, Y). \quad (3)$$

Нормальное расслоение NF^l к подмногообразию $F^l \subset F^N$ естественно распадается в прямую сумму $(NF^l \cap TG(2, n)) \dot{+} NG(2, n)$. Обозначим их через L_1 и L_2 соответственно. Будем писать $\xi \in L_i$, имея в виду, что векторное поле ξ является сечением подрасслоения L_i.

Пусть $\xi_1 \in L_1$. Имеем

$$\nabla^0_X \xi_1 = \nabla^G_X \xi_1 + h^{GE}(X, \xi_1) = -A^{FE}_{\xi_1} X + D^{FE}_X \xi_1.$$

Отсюда

$$D^{FE}_X \xi_1 = \nabla^G_X \xi_1 + h^{GE}(X, \xi_1) + A^{FE}_{\xi_1} X = -A^{FG}_{\xi_1} X + \\ + D^{FG}_X \xi_1 + h^{GE}(X, \xi_1) + A^{FE}_{\xi_1} X.$$

Но $A^{FE}_{\xi_1} X = A^{FG}_{\xi_1} X$. Поэтому

$$D^{FE}_X \xi_1 = D^{FG}_X \xi_1 + h^{GE}(X, \xi_1), \ \xi_1 \in L_1. \quad (4)$$

Для $\xi_2 \in L_2$ имеем $\nabla^0_X \xi_2 = -A^{GE}_{\xi_2} X + D^{GE}_X \xi_2 = -A^{FE}_{\xi_2} X + D^{FE}_X \xi_2$, откуда

$$D^{FE}_X \xi_2 = A^{FE}_{\xi_2} X - A^{GE}_{\xi_2} X + D^{GE}_X \xi_2. \quad (5)$$

Пусть S — подрасслоение в $L_1 = NF^l \cap TG(2, n)$, замкнутое относительно дифференцирования в D^{FG}, имеющее (хотя бы локально) постоянную размерность слоев и содержащее поле H вектора средней кривизны $F^l \subset G(2, n)$. В случае а) в качестве S возьмем одномерное расслоение — поле H, в случае б) — $(l+2)$-мерное: $S = H \dot{+} D^{FG} H \dot{+} D^{FG} D^{FG} H$.

Определим теперь подрасслоение $\tilde{N}$ в NF^l (в E^N) как $S \dot{+} \dot{+} \operatorname{Span}(h^{GE}(X, Y)) \dot{+} \operatorname{Span}(h^{GE}(X, S)) \dot{+} \operatorname{Span}(h^{GE}(S, S))$, где Span обозначает линейную оболочку при всевозможных значениях аргументов h^{GE}.

Тогда подрасслоение $\tilde{N}$:

1) содержит первое нормальное пространство $N_1 = H \dot{+} \operatorname{Span}(h^{GE}(X, Y))$ подмногообразия $F^l \subset E^N$;

2) имеет (локально) постоянную размерность слоев.

Осталось проверить, что $D^{FE} \tilde{N} \subset \tilde{N}$; тогда можно применять теорему Б. Пусть $\eta \in NF^l$, $\eta \perp \tilde{N}$. Разложим векторное поле η на касательную и нормальную к $TG(2, n)$ компоненты: $\eta = \eta_1 + \eta_2$, $\eta_1 \in L_1$, $\eta_2 \in L_2$. Тогда $\eta_1 \perp S$, $\eta_2 \perp h^{GE}(X, Y)$, $h^{GE}(X, S)$, $h^{GE}(S, S)$. Далее для $\xi \in \tilde{N}$ имеем $\xi = \xi_1 + \xi_2$, $\xi_1 \in L_1$, $\xi_2 \in L_2$, причем $\xi_1 \in S$, $\xi_2 \in \operatorname{Span}(h^{GE}(X, Y)) \dot{+} \operatorname{Span}(h^{GE}(X, S)) \dot{+} \operatorname{Span}(h^{GE}(S, S))$. Достаточно проверить, что $g(D^{FE}_X \xi_i, \eta_j) = 0$ для любого касательного к F^l векторного поля X и при всех парах $i, j = 1, 2$. В силу (4) и (5)

$$g(D^{FE}_X \xi_1, \eta_1) = g(D^{FG}_X \xi_1, \eta_1) = 0, \text{ так как } D^{FG} \xi_1 \in S \perp \eta_1;$$

$g(D_X^{FE}\xi_1,\ \eta_2) = g(h^{GE}(X,\ \xi_1),\ \eta_2) = 0$, так как $h^{GE}(X,\ \xi_1) \in h^{GE}(X,\ S) \perp \eta_2$; $g(D_X^{FE}\xi_2,\ \eta_2) = g(D_X^{GE}\xi_2,\ \eta_2)$.

Но вложение $G(2,\ n) \subset E^N$ имеет параллельную вторую квадратичную форму. Если $\{X_i\}$ — базис в TF^l, $\{n_\mu\}$ — базис в S, то $\xi_2 = f^{ij}h^{GE}(X_i,\ X_j) + f^{i\mu}h^{GE}(X_i,\ n_\mu) + f^{\mu\nu}h^{GE}(n_\mu,\ n_\nu)$ (где f^{ij}, $f^{i\mu}$, $f^{\mu\nu}$ — функции). Поэтому $D_X^{GE}\xi_2 = (Xf^{ij})\,h^{GE}(X_i,\ X_j) + (Xf^{i\mu})\,h^{GE}(X_i,\ n_\mu) + (Xf^{\mu\nu})\,h^{GE}(n_\mu,\ n_\nu) + f^{ij}D_X^{GE}(h^{GE}(X_iX_j)) + f^{i\mu}D_X^{GE}(h^{GE}(X_i,\ n_\mu)) + f^{\mu\nu}D_X^{GE}(h^{GE}(n_\mu,\ n_\nu))$. Первые три слагаемых, очевидно, лежат в $\tilde{N}$. Кроме того, для $A,\ B \in TG(2,\ n)$ имеем

$$D_X^{GE}(h^{GE}(A,\ B)) = h^{GE}(\nabla_X^G A,\ B) + h^{GE}(A,\ \nabla_X^G B).$$

Если $A \in TF^l$, то $\nabla_X^G A = \nabla_X^F A + Hg(X,\ A) \in S + TF^l$. Если $A \in S$, то $\nabla_X^G A = -AX + D_X^{FG}A \in S + TF^l$. Значит, и три последних слагаемых лежат в $\tilde{N}$. Отсюда $g(D_X^{FE}\xi_2,\ \eta_2) = 0$. Наконец, $g(D_X^{FE}\xi_2,\ \eta_1) = -g(A_{\xi_2}^{GE}X,\ \eta_1) = -g(h^{GE}(X,\ \eta_1),\ \xi_2)$. Значит, осталось доказать, что

$$\begin{aligned} &g(h^{GE}(X,\ \eta_1),\ h^{GE}(Y,\ Z)) = 0,\\ &g(h^{GE}(X,\ \eta_1),\ h^{GE}(Y,\ \xi_1)) = 0,\\ &g(h^{GE}(X,\ \eta_1),\ h^{GE}(\xi_1,\ \xi_1')) = 0 \end{aligned} \tag{6}$$

для любых касательных к F^l векторных полей X, Y и Z, векторных полей ξ_1 и $\xi_1' \in S$ и векторного поля $\eta_1 \in L_1$, $\eta_1 \perp S$.

Пусть $Q \in F^l$ — произвольная точка. Действием группы $SO(n)$ на $G(2,\ n)$ поместим ее в точку $0 \in G(2,\ n)$ (поскольку вложение $G(2,\ n) \subset E^N$ не только изометрично, но и эквивариантно, т. е. группа изометрий $SO(n)$ является подгруппой в $O(N)$, внешнегеометрические свойства при действии $SO(n)$ сохраняются). Действуя группой изотропии, приведем касательное пространство $T_QF^l \subset T_QG(2,\ n)$ и пространство S_Q к описанному в лемме 2 виду (в каждом из случаев а), б)).

Вложение $G(2,\ n)$ в E^N (точнее, $G(2,\ n)/\mathbf{Z}_2 = O(n)/O(n-2) \times O(2)$, это нам не важно, так как наши рассмотрения локальны) строится так [17]. Пусть

$$E = \left(\begin{array}{c|c} 2I_{n-2} & 0 \\ \hline 0\ldots0 & -(n-2)\,I_2 \end{array}\right)\frac{1}{n}.$$

Тогда $i(U) = UEU'$ — симметрическая матрица из E^N (для $U \in O(n)$), где $N = n(n+1)/2$, метрика в E^N задается как $g(A,\ B) = \mathrm{Tr}(AB)$, где A и B — симметрические $(n+2)\times(n+2)$-матрицы. При этом поскольку $VEV' = E$ для любой V из группы изотропии $O(n) \times O(2)$ и обратно, отображение $i\colon O(n+2) \to E^N$ индуцирует вложение $i\colon G(2,\ n) \to E^N$ — в пространство симметрических $(n+2)\times(n+2)$-матриц. Образ $i(G(2,\ n))$ лежит в гиперсфере $S^{N-1} \subset E^N$ и обладает всеми перечисленными свойствами.

Легко видеть, что $i(O) = I_nEI_n' = E$.

Пусть $A \in T_0G(2, n) = \mathfrak{m}$, A — $((n-2) \times 2)$-матрица. Выпустим геодезическую в $G(2, n)$ из точки 0 в направлении вектора A. Если

$$T = \left(\begin{array}{c|c} 0 & -A' \\ \hline A & 0 \end{array}\right),$$

то геодезическая есть множество левых смежных классов точек кривой $U(t) = \operatorname{Exp}(tT)$ в $O(n)$. Отсюда $U(t) = I_n + tT + \frac{t^2}{2}T^2 + \bar{o}(t^2)$, поэтому $i(U(t)) = (I_n + tT + \frac{t^2}{2}T^2 + \bar{o}(t^2))E\,(I_n - tT + \frac{t^2}{2}T^2 + \bar{o}(t^2)) = E + t(TE - ET) + t^2(\frac{1}{2}T^2E + \frac{1}{2}ET^2 - TET) + \bar{o}(t^2)$.
Касательный вектор

$$di|_O(A) = TE - ET = \left(\begin{array}{c|c} 0 & A' \\ \hline A & 0 \end{array}\right).$$

Вторая квадратичная форма $h^{GE}|_O(A, A)$ равна нормальной компоненте вектора $\nabla_A^0 U(t)|_0$, т. е.

$$h^{GE}|_O(A, A) = \left(\begin{array}{c|c} -A'A & 0 \\ \hline 0 & AA' \end{array}\right),$$

отсюда

$$h^{GE}|_0(A, B) = \frac{1}{2}\left(\begin{array}{c|c} -(A'B + B'A) & 0 \\ \hline 0 & AB' + BA' \end{array}\right) \tag{7}$$

для $A_1B \in T_0G(2, n)$.
Начиная с этого момента, рассмотрим случаи а) и б) леммы 2 по отдельности.

а) Пользуясь утверждением а) леммы 2, получаем, что

$$\eta_1|_O = \left(\begin{array}{c|c|c|c} 0\ldots0 & 0 & * & * \\ \hline * & * & 0 & * \end{array}\right)$$

и непосредственно проверяем (6). В силу произвольности выбора точки на подмногообразии $F^l \subset E^N$ приходим к ситуации применимости теоремы Б. Имеем, что наше подмногообразие F^l лежит в пересечении аффинного подпространства $di|_0(T_0F^l) \dotplus \tilde{N}|_O$, проходящего через точку $E = i(O) \in E^N$ и образа $i(G(2, n))$ многообразия Грассмана при описанном выше вложении. Пространство $\mathscr{L} = di|_O \times \times (T_OF_l) \dotplus \tilde{N}|_O$ есть подпространство пространства симметрических $(n \times n)$-матриц вида

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} Q & 0 & 0 & u' & 0 \\ \hline 0\ldots0 & q & 0\ldots0 & 0\ldots0 & x \\ \hline 0\ldots0 & 0 & 0\ldots0 & 0 & 0 \\ \hline u & 0 & 0\ldots0 & -r & 0 \\ \hline 0\ldots0 & x & 0\ldots0 & 0 & -q \end{array}\right) \begin{array}{l}]\,l \\ ]\,1 \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ll} \underbrace{\qquad\quad}_{l} & \underbrace{\qquad}_{1} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \end{array} \end{array}, \tag{8}$$

где Q — произвольная симметрическая $(l\times l)$-матрица; u — произвольный l-мерный вектор-строка, $x,\ q\in \boldsymbol{R}$, $r=\mathrm{Tr}Q$. Его размерность равна

$$\frac{l(l+1)}{2}+l+2=\frac{(l+1)(l+2)}{2}+1.$$

Пересечение его с $i(G(2,n))$ — это множество точек на многообразии Грассмана, являющихся левыми смежными классами таких ортогональных $(n\times n)$-матриц U, что $UEU'-E\in\mathscr{L}$.

Найдем такие матрицы $U\in SO(n)$. Из линейной алгебры известно, что в левом смежном классе ортогональной матрицы найдется матрица вида

$$\left(\begin{array}{c|c} D & -B' \\ \hline B & C\end{array}\right),$$

где $D'=D$, $C'=C$ — $((n-2)\times(n-2))$ и (2×2)-матрицы соответственно, B — $((n-2)\times 2)$-матрица. Из ортогональности этой матрицы (которую будем по-прежнему обозначать через U) получаем

$$\begin{gathered} D^2+B'B=I_{n-2},\\ C^2+BB'=I_2,\\ BD=CB.\end{gathered}$$

Далее,

$$UEU'-E=\left(\begin{array}{c|c} -B'B & B'C \\ \hline CB & BB'\end{array}\right).$$

Сравнивая эту матрицу с (8) и используя ортогональность U, получаем, что для матриц U, близких к единичной (т. е. к точке $O\in G(2,n)$), будет

$$B=\left(\begin{array}{c|c|c} z & 0 & 0\ldots 0 \\ \hline \underbrace{0\ldots 0}_{l} & \gamma & 0\ldots 0\end{array}\right),\quad C=\begin{pmatrix}\sqrt{1-\delta^2} & 0\\ 0 & \sqrt{1-\gamma^2}\end{pmatrix},$$

где $\gamma\in\boldsymbol{R}$, $|\gamma|>1$; z — l-мерный вектор-строка; $\delta=\|z\|<1$. Тогда

$$UEU'-E=$$

$$=\left(\begin{array}{c|c|c|c|c} -(z_iz_j) & 0 & 0 & z'\sqrt{1-\delta^2} & 0 \\ \hline 0 & -\gamma^2 & 0 & 0 & \gamma\sqrt{1-\gamma^2} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline z\sqrt{1-\delta^2} & 0 & 0 & \delta & 0 \\ \hline \underbrace{0}_{l} & \underbrace{\gamma\sqrt{1-\gamma^2}}_{1} & 0 & 0 & \gamma^2 \end{array}\right)\begin{array}{l}\}l\\ \}1\\ \\ \\ \\ \end{array}\quad(9),$$

т. е. матрица вида (8). Возьмем теперь $t=\arcsin\gamma$, $y=z\dfrac{\arcsin\delta}{\delta}$, $r=\|y\|=\arcsin\delta$. Положим

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c} y & 0 & 0\dots 0 \\ \hline \underbrace{0}_{l} & t & 0\dots 0 \end{array}\right) \in T_O G(2,\ n).$$

Тогда

$$i\,(\mathrm{Exp}\,A) - E =$$

$$= \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} I_n + \frac{\cos r - 1}{r^2}(y_i y_j) & 0 & 0\dots 0 & y'\,\frac{\sin r \cos r}{r} & 0 \\ \hline 0\dots 0 & -\sin^2 t & 0\dots 0 & 0 & \sin t \cos t \\ \hline 0\dots 0 & 0 & 0\dots 0 & 0 & 0 \\ \hline y\,\frac{\sin r \cos r}{r} & 0 & 0\dots 0 & \sin^2 r & 0 \\ \hline \underbrace{0\dots 0}_{l} & \underbrace{\sin t \cos t}_{1} & 0\dots 0 & 0 & \sin^2 t \end{array}\right)\begin{array}{l} \}\,l \\ \}\,1 \\ \\ \\ \\ \end{array}.$$

Из определения l-мерного вектора y и чисел r и t видно, что эта матрица совпадает с (9). Отсюда, поскольку i: $G(2,\ n) \to E^N$ — вложение, следует, что матрицы U и $\mathrm{Exp}A$ определяют одну и ту же точку на многообразии Грассмана $G(2,\ n)$. Легко видеть, что установленное соответствие между ортогональными матрицами и векторами A из $T_0G(2,\ n)$, описанными выше, взаимнооднозначно (по крайней мере, локально). А это значит, что пересечение $\mathscr{L} \cap i\,(G(2,\ n))$ есть экспонента подпространства $(n \times 2)$-матриц вида

$$\left(\begin{array}{c|c|c} y & 0 & 0\dots 0 \\ \hline 0\dots 0 & t & 0\dots 0 \end{array}\right) \text{ в } T_O G(2,\ n),$$

где y — произвольный l-мерный вектор; $t \in \boldsymbol{R}$.

Это подпространство, очевидно, образует тройную систему Ли и, значит, его экспонента вполне геодезична в $G(2,\ n)$. Вычисляя эту экспоненту и используя рассуждения, аналогичные тем, которые приводились в доказательстве случая 2 теоремы, убеждаемся, что искомое подмногообразие в $G(2,\ n)$ есть вполне геодезическое произведение стандартной l-мерной сферы на геодезическую в $G(2,\ n)$.

Итак, в силу теоремы Б, $F^l \subset S^l \times E^1 \subset G(2,\ n)$, причем в силу вполне геодезичности $S^l \times E^1 \subset G(2,\ n)$, имеем существенно вполне омбилическое подмногообразие $F^l \subset S^l \times E^1$.

б) Из леммы 2 заключаем, что

$$(TF^l + S)\,|_O = \left(\left(\begin{array}{c|c|c} u & 0\dots 0 & 0\dots 0 \\ \hline \underbrace{0\dots 0}_{l+1} & \underbrace{v}_{l+1} & 0\dots 0 \end{array}\right) : u,\ v \in \boldsymbol{R}^{l+1}\right).$$

Тогда

$$\mathfrak{n}_1\,|_o = \left(\begin{array}{c|c|c} 0\dots 0 & * & * \\ \hline \underbrace{*}_{l+1} & \underbrace{0\dots 0}_{l+1} & * \end{array}\right),$$

и равенства (6) проверяются непосредственно; верно даже более сильное утверждение: $h^{GE}(\xi_1, \eta_1) \perp h^{GE}(\xi_1', \xi_1'')$ для $\xi_1\xi_1', \xi_1'' \in (TF^l + S)|_O$ в силу формулы (7).

В силу произвольности выбора точки на подмногообразии $F^l \subset E^N$ можно применять теорему Б. Как и в а), вычисляем $\mathscr{L} = di|_O(T_OF^l) + \tilde{N}_O$, это подпространство симметрических $(n\times n)$-матриц вида

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c|c} Q & 0 & 0\dots0 & u' & 0 \\ \hline 0 & R & 0\dots0 & 0 & v' \\ \hline 0\dots0 & 0\dots0 & 0\dots0 & 0\dots0 & 0\dots0 \\ \hline u & 0\dots0 & 0\dots0 & r & 0 \\ \hline 0\dots0 & v & 0\dots0 & 0 & q \end{array}\right), \tag{10}$$

где Q и R — симметрические $(l+1)\times(l+1)$-матрицы; u и v — $(l+1)$-мерные вектор-строки; $r, q \in \boldsymbol{R}$ и $r + q + \mathrm{Tr}Q + \mathrm{Tr}R = 0$. Его размерность равна $2(l+1)(l+2)/2 + 2(l+1) + 1 = l^2 + 5l + 5$.

Пересечение $\mathscr{L} \cap i(G(2, n))$ содержит подмногообразие F^l. Как и в доказательстве случая а), получаем, что этому пересечению соответствуют точки многообразия Грассмана $G(2, n)$, являющиеся левыми смежными классами по подгруппе $SO(n-2)\times SO(2) \subset SO(n)$ матриц $U \in SO(n)$, таких, что $UEU' - E \in \mathscr{L}$.

Представляя U в виде

$$\left(\begin{array}{c|c} D & -B' \\ \hline B & C \end{array}\right),$$

где $D' = D$; $C' = C$ — $((n-2)\times(n-2))$ и (2×2)-матрицы соответственно; B — $((n-2)\times 2)$-матрица; получаем из условий $U'U = I_n$ и $UEU' - E \in \mathscr{L}$: $D^2 + B'B = I_{n-2}$, $C^2 + BB' = I_2$, $BD = CB$

и

$$\left(\begin{array}{c|c} -B'B & B'C \\ \hline CB & BB' \end{array}\right) \in \mathscr{L}.$$

Как и выше, для U, близких к единичной матрице (т. е. к точке $0 \in G(2, n)$), получаем

$$B = \Bigl(\overbrace{\begin{array}{c} z \\ \hline 0\dots0 \end{array}}^{l+1}\Big|\overbrace{\begin{array}{c} 0\dots0 \\ \hline w \end{array}}^{l+1}\Big|\begin{array}{c} 0\dots0 \\ \hline 0\dots0 \end{array}\Bigr), \quad C = \begin{pmatrix} \sqrt{1-\delta^2} & 0 \\ 0 & \sqrt{1-\gamma^2} \end{pmatrix},$$

где $z, w \in E^{l+1}$ — вектор-строки; $\delta = \|z\| < 1$, $\gamma = \|w\| < 1$.

Возьмем теперь

$$A = \Bigl(\overbrace{\begin{array}{c} u \\ \hline 0\dots0 \end{array}}^{l+1}\Big|\overbrace{\begin{array}{c} 0\dots0 \\ \hline v \end{array}}^{l+1}\Big|\begin{array}{c} 0\dots0 \\ \hline 0\dots0 \end{array}\Bigr) \in (T_OF^l + S)|_O \cup T_OG(2, n),$$

где $u = z\dfrac{\arcsin\delta}{\delta}$, $v = w\dfrac{\arcsin\gamma}{\gamma}$.

Тогда $i(\operatorname{Exp} A) = UEU'$, т. е. матрицы U и $\operatorname{Exp} A$ определяют одну и ту же точку на $G(2, n)$.

Таким образом, $F^l \subset \operatorname{Exp}[(TF^l + S)|_O]$. Очевидно, $(TF^l + S)|_O$ есть тройная система Ли в $T_O G(2, n)$, поэтому его экспонента вполне геодезична в $G(2, n)$. Вычисляя ее, как при доказательстве случая 2 теоремы, получаем произведение двух $(l+1)$-мерных стандартных сфер. Значит, в силу теоремы Б $F^l \subset (S_1^{l+1} \times S_2^{l+1}) \subset G(2, n)$, т. е. F^l — существенно вполне омбилическое подмногообразие в произведении двух равных сфер.

Теорема доказана.

Во второй части работы будут даны доказательства лемм 1, 2 и утверждений а) и б).

Список литературы: 1. *Chen B.-Y.* Geometry of submanifolds and it's applications. N-.Y., 1981. 120 p. 2. *Хелгасон С.* Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. М., 1964. 100 с. 3. *Chen B.-Y., Nagano T.* Totally geodesic submanifolds of symmetric spaces. I // Duke Math. J. 1977. **44.** P. 745—755. 4. *Chen B.-Y.* Extrinsic spheres in Riemannian manifolds // Houston J. Math. 1979. **5.** P. 319—324. 5. *Chen B.-Y.* Classification of totally umbilical submanifolds in symmetric spaces // J. Austral. Math. Soc. 1980. **30.** P. 129—136. 6. *Chen B.-Y., Ogiue K.* Two theorems on Kaehler manifolds // Michigan Math. J. 1974. **21.** P. 225—229. 7. *Pak J. S., Kim J. J.* Isotropic immersions with totally geodesic Gauss image // Tensor. 1986. **43.** P. 167—174. 8. *Itoh T.* Isotropic submanifolds in a Euclidean space // Proc. of Japan Acad. 1986. **A62.** P. 382—385. 9. *Kim J. J.* Submanifolds with totally umbilical Gauss map // Kyungpook Math. J. 1987. 27. P. 15—26. 10. *Vilms J.* Submanifolds of Euclidean space with parallel second fundamental form // Proc. Amer. Math. Soc. 1972. **32,** N 1. P. 263—267. 11. *Николаевский Ю. А.* Классификация многомерных подмногообразий в евклидовом пространстве со вполне геодезическим грассмановым образом : Докл. АН СССР. М., 1990. **314,** № 2. 5 с. 12. *Аминов Ю. А.* Определение поверхности в 4-мерном евклидовом пространстве по ее грассманову образу // Мат. сб. 1981. **117** (159), № 2. С. 147—160. 13. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. М., 1981. 2. 140 с. 14. *Erbacher J. A.* Reduction of the codimension of an isometric immersion // J. Diff. Geom. 1971. **5,** N 3—4. P. 333—340. 15. *Nagano T.* Transformation groups on compact symmetric spaces // Trans. Amer. Math. Soc. 1965. 118, N 6. P 428—453. 16. *Takeuchi M., Kobayashi S.* Minimal imbeddings of R-spaces // J. Diff. Geom. 1968. **2,** N 2, P 203—215. 17. *Kobayashi S.* Isometric imbeddings of compact symmetric spaces // Tohoku Math. J. 1968. **20,** N 1. P. 21—25.

Поступила в редколлегию 30.10.89

УДК 514

Н. Г. ПЕРЛОВА

О СООТНОШЕНИИ МЕЖДУ ЖЕСТКОСТЬЮ к-го ПОРЯДКА И АНАЛИТИЧЕСКОЙ НЕИЗГИБАЕМОСТЬЮ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Из работ Н. В. Ефимова [1, 2] известно: из жесткости 1-го или 2-го порядка регулярной поверхности следует ее аналитическая неизгибаемость; из жесткости 3-го порядка поверхности, допускающей только одно линейно независимое бесконечно малое изгибание 1-го порядка, следует ее аналитическая неизгибаемость.

В настоящей работе доказывается, что поверхность класса C^3, допускающая только одно линейно независимое бесконечно малое изгибание 1-го порядка и обладающая жесткостью k-го порядка ($k \geqslant 2$), является аналитически неизгибаемой.

Этот результат следует также из более общего результата, полученного И. Х. Сабитовым [3], доказательство которого, еще не опубликованное, основано на другой идее.

Теорема. *Если регулярная поверхность класса C^3 допускает одно и только одно линейно независимое бесконечное малое изгибание 1-го порядка, то из жесткости k-го порядка ($k \geqslant 2$) этой поверхности следует ее аналитическая неизгибаемость.*

Для доказательства теоремы будет использована следующая алгебраическая

Лемма. *Если постоянные* $\underset{i}{\overset{m}{A}}$ $(m = 2, 3, \ldots; i = mn, mn+1, \ldots, (m+1)n-1; n = 2, 3, \ldots)$ *определяются посредством возвратных формул*

$$\underset{i}{\overset{m}{A}} = \sum_{j=n}^{i-(m-1)n} \underset{j}{\overset{1}{A}} \underset{i-l}{\overset{m-1}{A}}, \tag{1}$$

$n = 2, 3, \ldots,$

где $\underset{n}{\overset{1}{A}}, \underset{n+1}{\overset{1}{A}}, \ldots, \underset{2n-1}{\overset{1}{A}}$ *— произвольные постоянные, то справедливы равенства*

$$\underset{i}{\overset{m}{A}} = \sum_{l=n}^{i-(m-1)n} \underset{l}{\overset{1}{A}} \underset{i-l}{\overset{m-1}{A}} = \sum_{l=2n}^{i-(m-2)n} \underset{l}{\overset{2}{A}} \underset{i-l}{\overset{m-2}{A}} = \ldots = \sum_{l=(m-1)n}^{i-n} \underset{l}{\overset{m-1}{A}} \underset{i-l}{\overset{1}{A}}.$$

Доказательство. Используя (1) и изменяя порядок суммирования, найдем

$$\sum_{l=jn}^{i-(m-j)n} \underset{l}{\overset{j}{A}} \underset{i-l}{\overset{m-j}{A}} = \sum_{l=jn}^{i-(m-j)n} \underset{l}{\overset{j}{A}} \Bigl(\sum_{p=n}^{i-l-(m-j-1)n} \underset{p}{\overset{1}{A}} \underset{i-l-p}{\overset{m-j-1}{A}} \Bigr) =$$
$$= \sum_{l+p=(j+1)n}^{i-(m-j-1)n} \Bigl(\sum_{p=n}^{l+p-jn} \underset{p}{\overset{1}{A}} \underset{l}{\overset{j}{A}} \Bigr) \underset{i-l-p}{\overset{m-j-1}{A}} = \sum_{l+p=(j+1)n}^{i-(m-j-1)n} \underset{l+p}{\overset{j+1}{A}} \underset{i-l-p}{\overset{m-j-1}{A}}.$$

Полагая здесь последовательно $j = 1, 2, \ldots, m-2$, получим требуемые равенства.

Доказательство теоремы. Аналитическое изгибание поверхности будем отыскивать в виде

$$\bar{r}^*(u, v, \varepsilon) = \bar{r}(u, v) + \varepsilon \underset{1}{\bar{z}}(u, v) + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \underset{2}{\bar{z}}(u, v) + \ldots +$$
$$+ \frac{1}{n!}\varepsilon^n \underset{n}{\bar{z}}(u, v) + \ldots .$$

Так как $\bar{r}^*(u, v, \varepsilon)$ — изгибание, поля $\underset{1}{\bar{z}}, \underset{2}{\bar{z}}, \ldots$ удовлетворяют бесконечной системе уравнений

$$\begin{cases} d\underset{1}{\bar{z}}\, d\bar{r} = 0, \\ d\underset{2}{\bar{z}}\, d\bar{r} + d\underset{1}{\bar{z}}^2 = 0, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \sum\limits_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^i\, d\underset{n-i}{\bar{z}}\, d\underset{i}{\bar{z}} = 0, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{cases}$$

где $\bar{z}_0 = \bar{r}$.

По полям $\underset{1}{\bar{z}}, \underset{2}{\bar{z}}, \ldots$ однозначно определяются поля $\underset{1}{\bar{y}}, \underset{2}{\bar{y}}, \ldots$, удовлетворяющие уравнениям

$$\begin{cases} d\underset{1}{\bar{z}} = [\underset{1}{\bar{y}}\, d\bar{r}], \\ d\underset{2}{\bar{z}} = [\underset{2}{\bar{y}}\, d\bar{r}] + [\underset{1}{\bar{y}}\, d\underset{1}{\bar{z}}], \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ d\underset{n}{\bar{z}} = \sum\limits_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^i\, [\underset{n-i}{\bar{y}}\, d\underset{i}{\bar{z}}], \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{cases}$$

При этом

$$\begin{cases} \underset{n}{\bar{y}}\, u = \sum\limits_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^i \left(\underset{n-i}{\alpha}\, \underset{i}{\bar{z}}_u - \underset{n-i}{\beta}\, \underset{i}{\bar{z}}_v\right), \\ \underset{n}{\bar{y}}_v \sum\limits_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^i \left(\underset{n-i}{\gamma}\, \underset{i}{\bar{z}}_u - \underset{n-i}{\alpha}\, \underset{i}{\bar{z}}_v\right), \quad n = 1, 2, \ldots, \end{cases}$$

а функции $\underset{i}{\alpha}, \underset{i}{\beta}, \underset{i}{\gamma}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ удовлетворяют бесконечной системе уравнений

$$\begin{cases} L\underset{i}{\gamma} - 2M\underset{i}{\alpha} + N\underset{i}{\beta} + \sqrt{g} \sum\limits_{l=1}^{i-1} C_i^l \left(\underset{l}{\beta}\, \underset{i-l}{\gamma} - \underset{l}{\alpha}\, \underset{i-l}{\alpha}\right) = 0, \\ \underset{i}{\alpha}_v - \underset{i}{\gamma}_u = \Gamma_{11}^1 \underset{i}{\gamma} - 2\Gamma_{12}^1 \underset{i}{\alpha} + \Gamma_{22}^1 \underset{i}{\beta}, \\ \underset{i}{\alpha}_u - \underset{i}{\beta}_v = \Gamma_{11}^2 \underset{i}{\gamma} - 2\Gamma_{12}^2 \underset{i}{\alpha} + \Gamma_{22}^2 \underset{i}{\beta}, \end{cases}$$

$i = 1, 2, \ldots$

Совершая замену неизвестных функций по формулам

$$\underset{i}{\alpha} = i!\, \underset{i}{\tilde{\alpha}}, \quad \underset{i}{\beta} = i!\, \underset{i}{\beta}, \quad \underset{i}{\gamma} = i!\, \underset{i}{\gamma}$$

и обозначая $\underset{i}{\tilde\alpha}$, $\underset{i}{\tilde\beta}$, $\underset{i}{\tilde\gamma}$ вновь через $\underset{i}{\alpha}$, $\underset{i}{\beta}$, $\underset{i}{\gamma}$, получим

$$\left\{\begin{aligned} &L\underset{i}{\gamma}-2M\underset{i}{\alpha}+N\underset{i}{\beta}+\sqrt{g}\sum_{l=1}^{i-1}(\underset{l}{\beta}\underset{i-l}{\gamma}-\underset{l}{\alpha}\underset{i-l}{\alpha})=0,\\ &\underset{i}{\alpha_v}-\underset{i}{\gamma_u}=\Gamma_{11}^1\underset{i}{\gamma}-2\Gamma_{12}^1\underset{i}{\alpha}+\Gamma_{22}^1\underset{i}{\beta},\\ &\underset{i}{\alpha_u}-\underset{i}{\gamma_v}=\Gamma_{11}^2\underset{i}{\gamma}-2\Gamma_{12}^2\underset{i}{\alpha}+\Gamma_{22}^2\underset{i}{\beta},\end{aligned}\right. \tag{2}$$
$$i=1,\ 2,\ \ldots$$

Так как по условию поверхность обладает жесткостью k-го порядка, то из уравнений (2), где $i=1, 2, .., k$, следует, что $\underset{1}{\alpha}=\underset{1}{\beta}=\underset{1}{\gamma}=0$.

Для доказательства аналитической неизгибаемости используем метод полной математической индукции. Предположим, что $\underset{i}{\alpha}=\underset{i}{\beta}=\underset{i}{\gamma}=0$ при $i=1, 2, .., n-1$, и в этом предположении докажем, что $\underset{n}{\alpha}=\underset{n}{\beta}=\underset{n}{\gamma}=0$. Тогда из предыдущего будет следовать, что $\underset{i}{\alpha}=\underset{i}{\beta}=\underset{i}{\gamma}=0$ для любого i.

При $\underset{l}{\alpha}=\underset{l}{\beta}=\underset{l}{\gamma}=0$ для $l=1, 2, .., n-1$ рассмотрим уравнения (2). Сейчас и в дальнейшем выписывать будем только первое уравнение (2). Сейчас и в дальнейшем выписывать будем только первое уравнение из каждой тройки уравнений (2), подразумевая всякий раз всю тройку уравнений

$$L\underset{i}{\gamma}-2M\underset{i}{\alpha}+N\underset{i}{\beta}=0,\ n\leqslant i\leqslant 2n-1,$$
$$L\underset{i}{\gamma}-2M\underset{i}{\alpha}+N\underset{i}{\beta}+\sqrt{g}\sum_{l=n}^{i-n}(\underset{l}{\beta}\underset{i-l}{\gamma}-\underset{l}{\alpha}\underset{i-l}{\alpha})=0,\ i\geqslant 2n. \tag{3}$$

Так как поверхность допускает только одно линейно независимое бесконечно малое изгибание 1-го порядка, то при $n\leqslant i\leqslant 2n-1$ будет

$$\underset{i}{\alpha}=\underset{i}{\overset{1}{A}}\underset{1}{\xi},\ \underset{i}{\beta}=\underset{i}{\overset{1}{A}}\underset{1}{\eta},\ \underset{i}{\gamma}=\underset{i}{\overset{1}{A}}\underset{1}{\zeta},$$

где $\underset{i}{\overset{1}{A}}=\mathrm{const}$, а функции $\underset{1}{\xi}$, $\underset{1}{\eta}$, $\underset{1}{\zeta}$ удовлетворяют уравнению $L\underset{1}{\zeta}-2M\underset{1}{\xi}+N\underset{1}{\eta}=0$.

Пусть теперь $2n\leqslant i\leqslant 3n-1$. Так как при этом $n\leqslant l\leqslant i-n$, то $n\leqslant l\leqslant 2n-1$, $n\leqslant i-l\leqslant 2n-1$, а потому уравнение (3) имеет вид

$$L\underset{i}{\gamma}-2M\underset{i}{\alpha}+N\underset{i}{\beta}+\sqrt{g}\sum_{l=n}^{i-n}\underset{l}{\overset{1}{A}}\underset{i-l}{\overset{1}{A}}(\underset{1}{\eta}\underset{1}{\zeta}-\underset{1}{\xi}^2)=0.$$

Отсюда следует

$$\underset{i}{\alpha} = \overset{2}{\underset{i}{A}}\underset{2}{\xi} + \overset{1}{\underset{i}{A}}\underset{1}{\xi},\ \underset{i}{\beta} = \overset{2}{\underset{i}{A}}\underset{2}{\eta} + \overset{1}{\underset{i}{A}}\underset{1}{\eta},\ \underset{i}{\gamma} = \overset{2}{\underset{i}{A}}\underset{2}{\zeta} + \overset{1}{\underset{i}{A}}\underset{1}{\zeta},$$

где $\overset{1}{\underset{i}{A}}$ — произвольные постоянные; $\overset{2}{\underset{i}{A}} = \sum\limits_{l=n}^{i-n} \overset{1}{\underset{l}{A}}\overset{1}{\underset{i-l}{A}}$, а функции $\underset{2}{\xi}$, $\underset{2}{\eta}$, $\underset{2}{\zeta}$ удовлетворяют уравнению $L\underset{2}{\zeta} - 2M\underset{2}{\xi} + N\underset{2}{\eta} + \sqrt{g}\,(\underset{1}{\eta}\underset{1}{\zeta} - \underset{1}{\xi}^2) = 0$.

Осуществляя индукцию по j, докажем, что при $jn \leqslant i \leqslant (j+1)n - 1$ для любого натурального j любое решение уравнения (3) имеет вид

$$\underset{i}{\alpha} = \sum_{m=1}^{j} \overset{m}{\underset{i}{A}}\underset{m}{\xi},\ \underset{i}{\beta} = \sum_{m=1}^{j} \overset{m}{\underset{i}{A}}\underset{m}{\eta},\ \underset{i}{\gamma} = \sum_{m=1}^{j} \overset{m}{\underset{i}{A}}\underset{m}{\zeta},$$

где $\overset{m}{\underset{i}{A}}$ определяются по формулам (1); $\overset{1}{\underset{i}{A}}$ — произвольные постоянные, а функции $\underset{m}{\xi}$, $\underset{m}{\eta}$, $\underset{m}{\zeta}$ удовлетворяют уравнениям

$$L\underset{m}{\zeta} - 2M\underset{m}{\xi} + N\underset{m}{\eta} + \sqrt{g}\sum_{l=1}^{m-1}(\underset{l}{\eta}\underset{m-l}{\zeta} - \underset{l}{\xi}\underset{m-l}{\xi}) = 0,$$

$m = 1, 2, \ldots, j$.

Предположим, что верны формулы

$$\underset{i}{\alpha} = \sum_{m=1}^{s} \overset{m}{\underset{i}{A}}\underset{m}{\xi},\ \underset{i}{\beta} = \sum_{m=1}^{s} \overset{m}{\underset{i}{A}}\underset{m}{\eta},\ \underset{i}{\gamma} = \sum_{m=1}^{s} \overset{m}{\underset{i}{A}}\underset{m}{\zeta}$$

при $sn \leqslant i \leqslant (s+1)n - 1$, где $s = 1, 2, \ldots, j-1$, и в этом предположении докажем, что они верны при $s = j$.

Пусть $jn \leqslant i \leqslant (j+1)n - 1$. Тогда из $n \leqslant l \leqslant i - (j-1)n$ следует $(j-1)n \leqslant i - l \leqslant jn - 1$; из $i - (j-1)n + 1 \leqslant l \leqslant i - (j-2)n$ следует $(j-2)n \leqslant i - l \leqslant (j-1)n - 1$ и т. д.; из $i - 2n + 1 \leqslant l \leqslant i - n$ следует $n \leqslant i - l \leqslant 2n - 1$. Поэтому

$$\begin{aligned}\sum_{l=n}^{i-n}(\underset{l}{\beta}\underset{i-l}{\gamma} - \underset{l}{\alpha}\underset{i-l}{\alpha}) &= \sum_{l=n}^{i-(j-1)n}\Big(\underset{l}{\beta}\sum_{m=1}^{j-1}\overset{m}{\underset{i-l}{A}}\underset{m}{\zeta} - \underset{l}{\alpha}\sum_{m=1}^{j-1}\overset{m}{\underset{i-l}{A}}\underset{m}{\xi}\Big) + \\ &+ \sum_{l=i-(j-1)n+1}^{i-(j-2)n}\Big(\underset{l}{\beta}\sum_{m=1}^{j-2}\overset{m}{\underset{i-l}{A}}\underset{m}{\zeta} - \underset{l}{\alpha}\sum_{m=1}^{j-2}\overset{m}{\underset{i-l}{A}}\underset{m}{\xi}\Big) + \ldots + \\ &+ \sum_{l=i-2n+1}^{i-n}\Big(\underset{l}{\beta}\overset{1}{\underset{i-l}{A}}\underset{1}{\zeta} - \underset{l}{\alpha}\overset{1}{\underset{i-l}{A}}\underset{1}{\xi}\Big). \qquad (4)\end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\begin{gathered} i - (j-1)n + 1 \leqslant 2n \leqslant i - (j-2)n, \\ i - (j-2)n + 1 \leqslant 3n \leqslant i - (j-3)n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ i - 2n + 1 \leqslant (j-1)n \leqslant i - n, \end{gathered}$$

найдем коэффициент при $\underset{1}{\eta}\underset{j-1}{\zeta} - \underset{1}{\xi}\underset{j-1}{\xi}$ в (4) равен $\sum\limits_{l=n}^{i-(j-1)n}\overset{1}{\underset{l}{A}}\overset{j-1}{\underset{i-l}{A}} = \overset{j}{\underset{i}{A}}$; коэффициент при $\underset{2}{\eta}\underset{j-2}{\zeta} - \underset{2}{\xi}\underset{j-2}{\xi}$ равен $\sum\limits_{l=2n}^{i-(j-2)n}\overset{2}{\underset{l}{A}}\overset{j-2}{\underset{i-l}{A}}$, что в силу леммы равно $\overset{j}{A}_{i}$ и т. д.; коэффициент при $\eta_{j-1}\zeta_{1} - \xi_{j-1}\xi_{1}$ равен

$$\sum_{l=(j-1)n}^{i-n} \overset{j-1}{A}_{l}\, \overset{1}{A}_{i-l}, \text{ что в силу леммы равно } \overset{j}{A}_{i}.$$

Коэффициент при $\eta_{1}\zeta_{j-2} - \xi_{1}\xi_{j-2}$ в (4) равен $\sum\limits_{l=n}^{i-(j-2)n} \overset{1}{A}_{l}\, \overset{j-2}{A}_{i-l} = \overset{j-1}{A}_{i}$; коэффициент при $\eta_{2}\zeta_{j-3} - \xi_{2}\xi_{j-3}$ равен $\sum\limits_{l=2n}^{i-(j-3)n} \overset{2}{A}_{l}\, \overset{j-3}{A}_{i-l}$, что в силу леммы равно $\overset{j-1}{A}_{i}$ и т. д.; коэффициент при $\eta_{j-2}\zeta_{1} - \zeta_{j-2}\zeta_{1}$ равен $\sum\limits_{l=(j-2)n}^{i-n} \overset{j-2}{A}_{l}\, \overset{1}{A}_{i-l}$, что в силу леммы равно $\overset{j-1}{A}_{i}$.

Наконец, коэффициент при $\eta_{1}\zeta_{1} - \zeta_{1}^{2}$ в (4) равен $\sum\limits_{l=n}^{i-n} \overset{1}{A}_{l}\, \overset{1}{A}_{i-l} = \overset{2}{A}_{i}$.

Таким образом, выражение (4) можно записать в виде $\sum\limits_{l=n}^{i-n}(\beta_{l}\gamma_{i-l} - \alpha_{l}\alpha_{i-l}) = \overset{j}{A}_{i}\sum\limits_{l=1}^{j-1}(\eta_{l}\zeta_{j-l} - \xi_{l}\xi_{j-l}) + \overset{j-1}{A}_{i}\sum\limits_{l=1}^{j-2}(\eta_{l}\zeta_{j-1-l} - \xi_{l}\xi_{j-1-l}) + \ldots + \overset{2}{A}_{i}(\eta_{1}\xi_{1} - \xi_{1}^{2})$,

что в силу индуктивного предположения равно

$$\overset{j}{A}_{i}\sum_{l=1}^{j-1}(\eta_{l}\zeta_{j-l} - \xi_{l}\xi_{j-l}) - L(\overset{j-1}{A}_{i}\zeta_{j-1} + \overset{j-2}{A}_{i}\zeta_{j-2} + \ldots + \overset{2}{A}_{i}\zeta_{2}) +$$
$$+ 2M(\overset{j-1}{A}_{i}\xi_{j-1} + \overset{j-2}{A}_{i}\xi_{j-2} + \ldots + \overset{2}{A}_{i}\xi_{2}) - N(\overset{j-1}{A}_{i}\eta_{j-1} +$$
$$+ \overset{j-2}{A}_{i}\eta_{j-2} + \ldots + \overset{2}{A}_{i}\eta_{2}).$$

Следовательно, уравнение (3) при $jn \leqslant i \leqslant (j+1)n - 1$ имеет вид

$$L(\gamma_{i} - \sum_{m=2}^{j-1}\overset{m}{A}_{i}\zeta_{m}) - 2M(\alpha_{i} - \sum_{m=2}^{j-1}\overset{m}{A}_{i}\xi_{m}) + N(\beta_{i} - \sum_{m=2}^{j-1}\overset{m}{A}_{i}\eta_{m}) +$$
$$+ \sqrt{g}\,\overset{j}{A}_{i}\sum_{l=1}^{j-1}(\eta_{l}\zeta_{j-l} - \xi_{l}\xi_{j-l}) = 0,$$

откуда следует

$$\alpha_{i} = \sum_{m=1}^{j}\overset{m}{A}_{i}\xi_{m},\ \beta_{i} = \sum_{m=1}^{j}\overset{m}{A}_{i}\eta_{m},\ \gamma_{i} = \sum_{m=1}^{i}\overset{m}{A}_{i}\zeta_{m},$$

$jn \leqslant i \leqslant (j+1)n-1$, $\overset{1}{\underset{i}{A}}$ — произвольные постоянные, а функции $\underset{m}{\xi}$, $\underset{m}{\eta}$, $\underset{m}{\zeta}$ удовлетворяют уравнениям

$$L\underset{m}{\zeta} - 2M\underset{m}{\xi} + N\underset{m}{\eta} + \sqrt{g}\sum_{l=1}^{m-1}(\underset{l}{\eta}\underset{m-l}{\zeta} - \underset{l}{\xi}\underset{m-l}{\xi}) = 0,$$

$m = 1, 2, \ldots, j$.

Полагая в (2) последовательно $i = n, n+1, \ldots, (k+1)n-1$, получим, что любое решение этой системы при условии $\underset{l}{\alpha} = \underset{l}{\beta} = \underset{l}{\gamma} = 0$ для $l = 1, 2, \ldots, n-1$ выражается по формулам

$$\underset{i}{\alpha} = \sum_{m=1}^{s}\overset{m}{\underset{i}{A}}\underset{m}{\xi},\ \underset{i}{\beta} = \sum_{m=1}^{s}\overset{m}{\underset{i}{A}}\underset{m}{\eta},\ \underset{i}{\gamma} = \sum_{m=1}^{s}\overset{m}{\underset{i}{A}}\underset{m}{\zeta},$$

$sn \leqslant i \leqslant (s+1)n-1$, $s = 1, 2, \ldots, k$, через решение системы уравнений

$$\left\{\begin{array}{l}
L\underset{1}{\zeta} - 2M\underset{1}{\xi} + N\underset{1}{\eta} = 0,\\
\underset{1}{\xi}_v - \underset{1}{\zeta}_u = \Gamma_{11}^1\underset{1}{\zeta} - 2\Gamma_{12}^1\underset{1}{\xi} + \Gamma_{22}^1\underset{1}{\eta},\\
\underset{1}{\xi}_u - \underset{1}{\eta}_v = \Gamma_{11}^2\underset{1}{\zeta} - 2\Gamma_{12}^2\underset{1}{\xi} + \Gamma_{22}^2\underset{1}{\eta},\\
L\underset{2}{\zeta} - 2M\underset{2}{\xi} + N\underset{2}{\eta} + \sqrt{g}(\underset{1}{\eta}\underset{1}{\zeta} - \underset{1}{\xi}^2) = 0,\\
\underset{2}{\xi}_v - \underset{2}{\zeta}_u = \Gamma_{11}^1\underset{2}{\xi} - 2\Gamma_{12}^1\underset{2}{\xi} + \Gamma_{22}^1\underset{2}{\eta},\\
\underset{2}{\xi}_u - \underset{2}{\eta}_v = \Gamma_{11}^2\underset{2}{\zeta} - 2\Gamma_{12}^2\underset{2}{\xi} + \Gamma_{22}^2\underset{2}{\eta},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
L\underset{k}{\zeta} - 2M\underset{k}{\xi} + N\underset{k}{\eta} + \sqrt{g}\sum_{l=1}^{k-1}(\underset{l}{\eta}\underset{k-l}{\zeta} - \underset{l}{\xi}\underset{k-l}{\xi}) = 0,\\
\underset{k}{\xi}_v - \underset{k}{\zeta}_u = \Gamma_{11}^1\underset{k}{\xi} - 2\Gamma_{12}^1\underset{k}{\xi} + \Gamma_{22}^1\underset{k}{\eta},\\
\underset{k}{\xi}_u - \underset{k}{\eta}_v = \Gamma_{11}^2\underset{k}{\zeta} - 2\Gamma_{12}^2\underset{k}{\xi} + \Gamma_{22}^2\underset{k}{\eta}.
\end{array}\right. \tag{5}$$

В силу жесткости k-го порядка система (5) имеет лишь такое решение, где $\xi = \eta = \zeta = 0$. Следовательно, $\underset{n}{\alpha} = \underset{n}{\beta} = \underset{n}{\gamma} = 0$, что и требовалось доказать.

Список литературы: 1. *Ефимов Н. В.* Качественные вопросы теории деформации поверхностей // Успехи мат. наук. 1948. 3, № 2/24. С. 45—158. 2. *Ефимов Н. В.* Некоторые предложения о жесткости и несгибаемости // Успехи мат. наук. 1948. 7, № 5/51. С. 215—224. 3. *Сабитов И. Х.* Некоторые результаты и задачи локальной теории изгибаний // Всесоюз. конф. по геометрии «в целом». Тез. Новосибирск : Ин-т. мат. СО АН СССР. 1987. С. 108.

Поступила в редколлегию 22.05.89

УДК 514

М. А. УЛАНОВСКИЙ

ЛОРЕНЦЕВЫ МНОГООБРАЗИЯ С ОДНОРОДНЫМИ ПРОСТРАНСТВЕННОПОДОБНЫМИ СЕЧЕНИЯМИ

В настоящей заметке изучается лоренцево многообразие V_n размерности $n \geqslant 3$, удовлетворяющее условиям: V_n допускает группу G движений такую, что орбита каждой точки x представляет собой пространственноподобное $(n-1)$-мерное подмногообразие; фундаментальная форма V_n удовлетворяет уравнениям Эйнштейна с гидродинамическим тензором энергии-импульса. Доказано, что такое V_n не может быть геодезически полным. Изучается вопрос о возможности вложения V_n в лоренцево многообразие V'_n той же размерности, удовлетворяющее некоторым условиям.

В последующих рассуждениях по существу используются два и только два свойства гидродинамического тензора энергии-импульса.

1) В силу уравнений Эйнштейна с гидродинамическим тензором энергии-импульса форма Риччи метрики V_n положительна на каждом времениподобном и изотропном векторе касательного расслоения $T(V_n)$.

2) Гидродинамический тензор энергии-импульса определяет с точностью до знака поле единичного времениподобного вектора $U(x) = (U^i)$: $T_{ij} = (p+\varepsilon)U_iU_j - pg_{ij}$. Очевидно, это поле инвариантно относительно движений группы G.

Эти свойства и входят в условия приведенных ниже утверждений.

Сформулируем подробнее требования, которые предъявляются к лоренцеву многообразию V_n, $n \geqslant 3$.

А1) V_n предполагается хронологически ориентированным многообразием класса C^∞, $n \geqslant 3$: изотропные конусы непрерывным образом разбиты на полуконусы K_x^+ и K_x^- (в терминологии, принятой в ОТО, K_x^+ — конус направлений «в будущее», K_x^- — «в прошлое»).

А2) В V_n действует C^∞-гладким образом группа движений G, представляющая собой связную группу Ли, причем орбита Gx каждой точки $x \in V_n$ — представляет собой дифференцируемое подмногообразие V_n коразмерности 1 с пространственноподобными касательными $(n-1)$-плоскостями.

В определении дифференцируемого подмногообразия возможны разночтения; здесь принято определение, изложенное, например, в [1]. Заметим, что согласно этому определению для каждой точки $x \in V_n$ существует окрестность ω с локальными координатами t, $x^1, \ldots, x^{n-1}$, в которых пересечение орбиты Gx с ω определяется уравнением $t = 0$.

Орбиты Gx однозначно определяют на V_n поле $n(x)$ единичных ортогональных к орбитам векторов, направленных «в будущее». Легко видеть, что линии тока поля $n(x)$ представляют собой времениподобные геодезические (воспользовавшись тем, что движения группы G сохраняют длины отрезков этих линий, легко привести в локальных координатах метрику V_n к виду $dS^2 = d\sigma^2 (t, x^1, \ldots, x^{n-1}, dx^1 \ldots dx^{n-}$ откуда и следует утверждение).

Докажем несколько простых утверждений, в которых предполага ется, что V_n удовлетворяет условиям А1) и А2).

Лемма 1. *Если V_n связно, то каждая (непродолжаемая) лин тока поля $n(x)$ имеет непустое пересечение с каждой орбитой групп движений; следовательно, объединение всех линий тока поля $n(x$ пересекающих фиксированную орбиту Gx_0, совпадает с V_n.*

Доказательство. Пусть γ_1 и γ_2 — линии тока поля $n(x$ пересекающие орбиту Gx_0, $x_1 \in Gx_0 \cap \gamma_1$, $x_2 \in Gx_0 \cap \gamma_2$, орбита G пересекает линию γ_1, $y_1 \in Gy \cap \gamma_1$. Существует $g \in G$ такое, что $gx_1 =$ $= x_2$; очевидно, $gy_1 \in Gy \cap \gamma_2$, следовательно, каждая орбита, пересе кающая γ_1, пересекает и γ_2. Пусть U — объединение всех линий тока поля $n(x)$, пересекающих орбиту Gx_0. Покажем, что U — компонента V_n, следовательно, $U = V_n$. Множество U открыто и замкнуто в V_n. Действительно, пусть точка z принадлежит замыканию U. Как легко видеть, существуют окрестность ω точки z и координаты t, $x^1 \ldots x^{n-1}$ в ω, $-a < t < a$, $\Sigma x^{i^2} < r^2$, такие, что $t = \text{const}$ — пересечения орбит с ω, $x^i = \text{const}$, $i = 1, \ldots, n-1$, — линии тока поля $n(x)$. Окрестность ω содержит точку $x_0 (t_0, x_0^1 \ldots x_0^{n-1}) \in U$, вместе с ней — орбиту $t = t_0$ и линии тока $x^i = \text{const}$, принадлежащие U, следовательно, $\omega \subset U$.

Лемма 2. *Если V_n связно и односвязно, то каждая орбита группы движений пересекает каждую линию тока поля $n(x)$ не более чем в одной точке.*

Доказательство. Пусть $\gamma: [t_1; t_2] \to V_n$ — отрезок линии тока поля $n(x)$ длиной $l > 0$, концы которого принадлежат одной и той же орбите группы G. Из определения дифференцируемого многообразия, принятого в этой заметке, следует, что, не ограничивая общности рассуждений, можно предположить: отрезок γ не содержит ни одной пары точек, отличной от пары концов и также принадлежащей орбите. Пусть U — объединение орбит всех точек отрезка γ: очевидно, U совпадает также с объединением отрезков $g\gamma$, $g \in G$. Из леммы 1 легко следует, что $U = V_n$. Действительно, отрезок γ допускает продолжение в виде полной времениподобной геодезической, целиком принадлежащей U. Это очевидно, если $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$: в этом случае γ — периодическая геодезическая с периодом l. В общем случае существует $g \in G$, для которого $g\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$. Очевидно, что отрезок $g\gamma: [t_1; t_2] \to$ $\to V_n$ — продолжение геодезического отрезка $\gamma: [t_1; t_2] \to V_n$ также длины l и т. д., причем $g\gamma \subset U$. Итак, множество U — объединение непродолжаемых линий тока поля $n(x)$, пересекающих фиксированную орбиту (содержащую $\gamma(t_1)$ и $\gamma(t_2)$). Следовательно, $U = V_n$. Легко видеть, что в этом случае V_n представляет собой расслоение над окружностью, что противоречит требованию односвязности V_n. Действительно, пусть $g\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$. Соединим элемент g связной группы G с ее единицей e путем $\varphi(t)$: $\varphi(t_1) = e$, $\varphi(t_2) = g$. Кривая $\varphi^{-1}(t)\gamma(t)$ — простая замкнутая дуга, пересекающая каждую орбиту в одной и только одной точке.

Легко видеть, что в силу доказанных утверждений связное и односвязное V_n диффеоморфно декартовому произведению $X_{n-1} \times R$, а одномерные слои $t = \text{const}$, $t \in R$, — орбиты группы G, а одномерные слои $x = \text{const}$, $x \in X_{n-1}$, — траектории поля $n(x)$. При этом каноническая проекция конуса направлений «в будущее» K_x^+ каждой точки на R есть положительная полуось R^+. Очевидно, каждая непространственноподобная кривая в V_n пересекает каждую орбиту не более чем в одной точке.

Пример. *Рассмотрим плоскость R_2 с метрикой (постоянной кривизны) $dS^2 = e^{-2x}dt^2 - dx^2$.* Пусть конусы K_x^+ определены условиями $dS^2 \geqslant 0$, $dt \geqslant 0$. Непродолжаемая времениподобная кривая $t = e^{2x}$ пересекает не все пространственноподобные линии семейства $t = \text{const}$. В этом случае не выполнено условие А2): линии $t = \text{const}$ не являются орбитами какой-либо подгруппы движений метрики dS^2.

Лемма 3. *Если V_n связно и односвязно, то каждая (непродолжаемая) непространственноподобная кривая пересекает каждую орбиту в одной и только одной точке. Следовательно, орбиты — сечения Коши, V_n — глобально гиперболическое пространство.*

Доказательство. Пусть φ — непродолжаемая непространственноподобная кривая. Через произвольную точку $x_0 \in \varphi$ проведем геодезическую $\gamma(t)$ — линию тока поля $n(x)$. Предположим, что параметр t геодезической $\gamma(t)$ соответствует векторам поля; в частности, параметр t растет при смещении вдоль $\gamma(t)$ «в будущее». Пусть орбита точки $\gamma(t_1)$ не пересекает кривую φ, причем $t_1 > t_0$, $\gamma(t_0) = x_0$. Обозначим через t_2 точную верхнюю грань значений $t \geqslant t_0$, таких, что орбита каждой точки отрезка $(t_0; t)$ геодезической $\gamma(t)$ пересекает кривую φ. С помощью локальных координат легко показать, что существует число $\varepsilon > 0$, для которого при любом $t \in (t_2 - \varepsilon; t_2 + \varepsilon)$ каждый непространственноподобный луч, исходящий из точки $\gamma(t)$ и направленный «в будущее», пересекает орбиту каждой точки $\gamma(t')$, $t \leqslant t' < t_2 + \varepsilon$. Пусть $t_2 - \varepsilon < t < t_2$; кривая φ пересекает орбиту точки $\gamma(t)$ в некоторой точке y: $y \in G\gamma(t) \cap \varphi$. Для некоторого $g \in G$ будет $gy = \gamma(t)$; луч $g(\varphi)$ (с началом в $\gamma(t)$), направленный «в будущее», пересекает орбиту каждой точки $\gamma(t_1)$, $t < t' < t_2 + \varepsilon$. Следовательно, и кривая $g^{-1}(g\varphi) = \varphi$ также пересекает орбиты точек $\gamma(t')$, $t < t' < t_2 + \varepsilon$, что противоречит определению t_2.

Лемма 4. *Пусть $\gamma\ [t_1; t_2] \to V_n$ — отрезок времениподобной геодезической, представляющей собой линию тока поля $n(x)$. Длина l отрезка γ равна точной верхней грани длин непространственноподобных дуг, соединяющих точки орбиты $G\gamma(t_1)$ с точками орбиты $G\gamma(t_2)$ (V_n предполагается односвязным).*

Доказательство. Очевидно, упомянутая выше точная верхняя грань не изменится, если ограничиться множеством дуг, соединяющих фиксированную точку $\gamma(t_1)$ с точками орбиты $G\gamma(t_2)$. Множество точек пересечения этих дуг с орбитой $G\gamma(t_2)$ компактно. Действительно, если бы множество концов последовательности непространственноподобных дуг, соединяющих точку $\gamma(t_1)$ с точками орбиты $G\gamma(t_2)$, сходилось в некоторой точке $x \in G\gamma(t_2)$, то предельная дуга (некоторой последовательности) соединяла бы $\gamma(t_1)$ с x. Если последовательность концов не имеет предельной точки в $G\gamma(t_2)$, то существует предельная непространственноподобная дуга, не пересекающая орбиту $G\gamma(t_2)$, что противоречит лемме 3 (определение и свойства предела последовательности непространственноподобных дуг с фиксированным началом см. в работах [2, 3]). Поскольку в глобально гиперболическом многообразии множество непространственноподобных дуг, соединяющих точки двух компактных множеств, компактно, функционал l — длина дуги в метрике dS^2 — достигает точной верхней грани (напомним, что длина предельной дуги не меньше верхнего предела длин дуг последовательности).

Легко видеть, что дуга, на которой осуществляется упомянутая верхняя грань, может быть только отрезком геодезической, ортогональной каждой из двух заданных орбит, следовательно, только отрезком линии тока поля $n(x)$.

Следствие. *Каждая непродолжаемая линия тока поля $n(x)$ не содержит ни одной пары сопряженных точек.*

Если форма Риччи метрики V_n положительна на каждом касательном векторе полной геодезической (времениподобной или изотропной), то, как известно, эта геодезическая содержит, по крайней мере, одну пару сопряженных точек [3, 4]. Следовательно справедлива.

Теорема 1. *Если форма Риччи связного и односвязного V_n, удовлетворяющего условиям* A1, A2, *положительна на каждом времениподобном векторе касательного расслоения $T(V_n)$, то V_n не может быть геодезически полным.*

Замечание. Легко видеть, что теорема 1 справедлива и для неодносвязных V_n: достаточно применить ее к универсальному накрывающему многообразию.

Метрику V_n называют сингулярной, если V_n не может быть вложено в геодезически полное многообразие V'_n той же размерности. Очевидно, из изложенного выше не следует, что метрика V_n, удовлетворяющего условиям теоремы 1, сингулярна.

Пример. *Рассмотрим евклидово R_4 с метрикой:* $dS^2 = e^{-2x}dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$. Это многообразие — V'_4 — может быть вложено в геодезически полное декартово произведение лоренцева V_2 постоянной кривизны и евклидова E_2, поскольку R_2 с метрикой $dS^2 = e^{-2x}dt^2 - dx^2$ изометрично открытому многообразию полного V_2 с постоянной кривизной. Многообразие V'_4 содержит подмногообразие V_4, удовлетворяющее условиям теоремы 1 и определенное неравенством: $|t| < e^x$. В V'_4 действует группа преобразований (подгруппа полной группы движений): $x' = x + a$, $y' = y + b$, $z' = z + c$, $t' = e^a t$. Ее орбиты $t = Ce$.

Легко проверить, что в $V_4(|C| < 1)$ орбиты пространственноподобны: очевидным образом проверяются и другие условия теоремы.

1. Заметим, что орбиты граничных точек V_4 изотропны.

Рассматривая вопрос о возможности вложения V_n в геодезически полное многообразие, нужно иметь в виду следующее обстоятельство. Пусть V_4 удовлетворяет условиям теоремы 1; любое открытое подмногообразие V_4 (представляющее собой объединение орбит своих точек) удовлетворяет тем же условиям. При этом и V_4 и его подмногообразие геодезически неполны. В то же время несложные примеры показывают, что открытое подмногообразие пространства с сингулярной метрикой, удовлетворяющего условиям теоремы 1, может быть вложено в геодезически полное многообразие (для построения примера можно, в частности, использовать метрику Фридмана).

Рассмотрим следующую ситуацию. Пусть V_n — открытое подмногообразие лоренцева V'_n. Предположим, что пара $(V'_n;\ V_n)$ удовлетворяет условиям:

В1) V'_n — хронологически ориентированное многообразие класса C^∞;

В2) в V'_n действует C^∞-гладким образом связная группа движений G' так, что в каждой точке $x \in V'_n$ линейное подпространство $H(x)$ касательного $Tx(V'_n)$, натянутое на векторы инфинитезимальных преобразований группы G', имеет коразмерность $k \geqslant 1$;

В3) Открытое подмногообразие V'_n инвариантно относительно преобразований группы G', и ограничения этих преобразований на V_n составляют группу G, удовлетворяющую в V_n условиям А2.

Пусть z — одна из граничных точек V_n. Из соображений непрерывности следует, что для подпространства $H(z)$ инфинитезимальных преобразований группы G' справедливо одно из следующих предположений:

1) $H(z)$ — пространственноподобное подпространство коразмерности 1.

2) Коразмерность $H(z)$ больше единицы.

3) $H(z)$ — изотропное подпространство коразмерности 1.

Согласно приведенным выше соображениям представляется целесообразным рассмотреть только случаи 2) и 3). При этом предполагается, что и V'_n удовлетворяет условиям, которые заведомо выполняются, если метрика V'_n удовлетворяет уравнениям Эйнштейна с гидродинамическим тензором энергии-импульса: существование G'-инвариантного поля единичных времениподобных векторов $U(x)$, положительность формы Риччи для каждого непространственноподобного вектора.

Теорема 2. *Если пара $(V'_n;\ V_n)$ удовлетворяет условиям* В1), В2), В3) *и на V'_n определено G' — инвариантное поле времениподобных векторов $U(x)$, то в граничной точке z подмногообразия V_n коразмерность $H(z)$ не может быть больше 1.*

Пусть z — граничная точка V_n. Проведем через z пространственноподобный $(n-1)$-мерный «диск» S—лист гиперповерхности с внутренними координатами $x^1 \ldots x^{n-1}$. С помощью линий тока поля $U(x)$ определим локальные координаты $t,\ x^1 \ldots x^{n-1}$ очевидным образом: t — длина линии тока поля $U(x)$ от точки ее пересечения с диском $S = (0,\ x^1 \ldots x^{n-1})$ — до точки $(t,\ x^1 \ldots x^{n-1})$. «Цилиндрическую» окрестность ω точки z определим неравенствами $-a < t < a$, $\Sigma x^{i^2} < r^2$. Докажем лемму, в которой условия теоремы 2 предполагаются выполненными.

Лемма 5. *Существуют сколь угодно малые значения a и r, при которых справедливо утверждение: орбита некоторой точки x_0 $(t_0$,*

$x_0^1, \ldots, x_0^{n-1}) \in V_n$ *имеет непустое пересечение в* ω *с каждой координатной линией* t *(линией тока поля* $U(x)$*).*

Доказательство. Окрестность ω заведомо содержит некоторую точку $x_0 \in V_n \cap \omega$. Пусть орбита этой точки — Gx_0 — не пересекает линию $x^i = x_1^i$, $i = 1, \ldots, (n-1)$. Соединим (в диске S) точки $(0, x_0^1 \ldots x_0^{n-1})$ и $(0, x_1^1, \ldots, x_1^{n-1})$ «прямолинейным» отрезком $x^i = (1-\alpha)\, x_0^i + \alpha x_1^i$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Не ограничивая общности, можно предположить, что для каждого $\alpha \in [0;\ 1]$ линия $x^i = (1-\alpha)\, x_0^i + \alpha x_1^i$ (координатная линия t) пересекает орбиту Gx_0; легко видеть, что однозначно определен «подъем» отрезка, соответствующего $\alpha \in [0;\ 1]$, в орбиту точки Gx_0 (началом в точке x_0). Элементарные оценки показывают, что упомянутый «подъем» целиком принадлежит ω при подходящем выборе отношения r/a и точки x_0, достаточно близкой к точке z; столь же легко показать, что любой последовательности $\alpha_k \to 1$ соответствует расходящаяся последовательность Коши в орбите Gx_0 относительно внутренней метрики Gx_0. Это противоречит тому обстоятельству, что внутренняя метрика Gx_0 — полная как однородная риманова (положительно определенная) метрика.

Определим некоторое преобразование $S(t)$: $V'_n \to V'_n$: каждая точка $x \in V'_n$ перемещается по линии тока поля $U(x)$ на длину t (при $t > 0$ — «в будущее», при $t < 0$ — «в прошлое»). Преобразование $S(t)$ коммутирует с преобразованиями группы G'; это следует из инвариантности поля $U(x)$ относительно G. Легко видеть, что $S(t)$ — гладкое отображение. Более того, для каждой точки $x \in V'_n$ и достаточно малого $\varepsilon > 0$ преобразования $S(t)$, $|t| < \varepsilon$, регулярны в некоторой окрестности точки x (при $t = 0$ якобиан $S(t)$ равен 1).

Доказательство теоремы 2. Пусть z — граничная точка V_n, ω — ее окрестность, упомянутая в лемме 5. Некоторая орбита G в V_n пересекает (в окрестности ω) все линии тока поля $U(x)$; в частности, она пересекает линию тока, которой принадлежит z, в некоторой точке $x \in V_n$. Не ограничивая общности, можно предположить, что преобразование, переводящее точку z в точку x — $S(t)$ — регулярно в точке z. Обратное преобразование $S^{-1}(t)$ регулярно в точке x. В то же время, поскольку преобразование $S(t)$ коммутирует с преобразованиями группы, касательное отображение $dS^{-1}(t)$ переводит гиперплоскость инфинитезимальных движений $H(x)$ в плоскость $H(z)$, следовательно, коразмерность $H(z)$, как и $H(x)$, равна единице.

Теорема 3. *Пусть пара* $(V'_n; V_n)$ *удовлетворяет условиям* B1, B2, B3, V'_n *геодезически полно, на* V'_n *определено* G'*-инвариантное поле единичных времениподобных векторов* $U(x)$ *и форма Риччи метрики* V'_n *положительна для каждого изотропного вектора. Если* z *— граничная точка подмногообразия* V_n, *то орбита* $G'z$ *не может быть изотропным дифференцируемым подмногообразием (коразмерности 1) пространства* V'_n.

Докажем сначала утверждение, принадлежащее локальной геометрии. Предположим, что орбита $G'z$ изотропна: касательные гиперплоскости к $G'z$ изотропны (очевидно, достаточно потребовать, чтобы была изотропной касательная гиперплоскость $H(z)$ в точке z). Тогда в каждой точке x орбиты $G'z$ однозначно определено одномерное подпространство $H_1(x) \subset H(x)$ изотропных касательных векторов. Через каждую точку орбиты $G'z$ проходит единственная линия тока поля $H_1(x)$.

Лемма 6. *Линии тока поля $H_1(x)$ представляют собой изотропные геодезические (объемлющего пространства V_n').*

Таким образом, орбита $G'z$ представляет собой «линейчатую поверхность» — объединение изотропных геодезических.

Доказательство. Пусть $\gamma(s)$, $\gamma(0) = z$, — луч линии тока поля $H_1(x)$ с началом в точке z; для определенности предположим, что он направлен в «будущее» ($\gamma'(0) \in K_z^+$). Если лемма 6 неверна, то (в силу однородности $G'z$) любой сколь угодно малый отрезок $\gamma(s)$, $0 \leqslant s \leqslant \alpha$, этого луча не является отрезком изотропной геодезической. Как известно, в этом случае $\gamma(0) < \gamma(\alpha)$: начало отрезка $\gamma(0)$ хронологически предшествует концу $\gamma(\alpha)$. Это значит, что существует строго времениподобная дуга $\varphi(s)$, соединяющая концы $\gamma(0)$ и $\gamma(\alpha)$: $\varphi(0) = \gamma(0)$, $\varphi(1) = \gamma(\alpha)$, $\varphi'(0) \in K_z^+$ (в частности, можно считать, что φ — времениподобная геодезическая). Пусть ω — «цилиндрическая» окрестность точки z с координатами $t, x^1, \ldots, x^{n-1}$, в которых орбита $G'z \cap \omega$ определена уравнением $t = 0$, причем полупространство $dt \geqslant 0$ касательного $T_z(V_n')$ содержит конус K_z^+. Не ограничивая общности, можно предположить, что и дуга $\gamma(s)$, $0 \leqslant s \leqslant \alpha$, и дуга $\varphi(s)$, $0 \leqslant s \leqslant 1$), принадлежит ω, причем $\varphi(s)$ не имеет других точек пересечения с $G'z_z' \cap \omega$, кроме концов $\varphi(0)$ и $\varphi(1)$. Легко заметить противоречие: для координаты $t(s)$ точки $\varphi(s)$, $s \in [0; 1]$, $dt(0) > 0$, следовательно, $t(s) > 0$, $0 < s < 1$; с другой стороны, и $dt(1) > 0$, следовательно, для s, достаточно близких к 1 ($s < 1$), $t(s) < 0$.

Докажем еще одно утверждение, в котором предполагается, что орбита $G'z$ изотропна и выполнены условия теоремы 3.

Лемма 7. *Через каждую точку орбиты $G'z$ проходит непродолжаемая (в V_n') изотропная геодезическая, принадлежащая $G'z$.*

Доказательство. Пусть продолжение отрезка изотропной геодезической $\gamma(s)$, $\gamma(0) = z$, (принадлежащего $G'z$) содержит точку, не принадлежащую $G'z$. Как легко видеть, можно предположить, что все точки $\gamma(s)$, $0 \leqslant s < s_0$, принадлежат $G'z$, тогда как $\gamma(s_0)$ не принадлежит $G'z$. Очевидно, $\gamma(s_0)$ — граничная точка подмногообразия V_n; согласно лемме 5 подпространство инфинитезимальных преобразований группы G' в точке $\gamma(s_0)$ — $H(\gamma(s_0))$ — имеет коразмерность 1. Это же утверждение справедливо и для каждой точки некоторой окрестности точки $\gamma(s_0)$. Рассматривая «цилиндрическую» окрестность ω точки $\gamma(s_0)$ с координатами $t, x^1, \ldots, x^{n-1}$, в которых уравнения $t = \mathrm{const}$ определяют листы орбит группы G', легко убедиться, что $\gamma(s_0) \in G'z$ (поскольку ω заведомо содержит точки геодезического отрезка $\gamma(s)$, $s < s_0$).

Доказательство. теоремы 3. Пусть орбита $G'z$ изотропна; $G'z$ содержит полную геодезическую $\gamma(s)$. Поскольку форма Риччи на

V'_n положительна для каждого изотропного вектора, $\gamma(s)$ содержит пару сопряженных точек. Как известно, в этом случае существует строго времениподобная дуга $\varphi(s)$, соединяющая точки изотропной геодезической $\gamma(s)$, например, $\gamma(0)$, $\gamma(1)$; более того, каждая окрестность отрезка $\gamma(s)$, $0 \leqslant s \leqslant 1$, содержит такую дугу. Предположим для определенности, что $\gamma(0) \leqslant \gamma(1)$; для упомянутой выше дуги $\varphi(s)$ будет $\varphi(0) = \gamma(0)$, $\varphi(1) = \gamma(1)$, и $\varphi(s)$ также ориентирована (от точки $\varphi(0)$ до $\varphi(1)$) «в будущее». Рассмотрим окрестность ω точки $\varphi(0)$ с координатами $t, x^1, \ldots, x^{n-1}$, в которых уравнение $t = 0$ определяет орбиту $G'z \cap \omega$ и конус $K^{+}_{\varphi(0)}$ принадлежит полупространству $dt \geqslant 0$. Для каждой точки $\gamma(s)$, $0 \leqslant s \leqslant 1$, существует преобразование $g \in G'$, переводящее $\gamma(0)$ в $\gamma(s)$ (очевидно, геодезическая $\gamma(s)$ инвариантна относительно g). Отрезок $\gamma(s)$, $0 \leqslant s \leqslant 1$, может быть покрыт конечным числом окрестностей $\omega_i = g_i\omega$, $g_i \in G'$, $i = 1, \ldots, m$. В каждой из окрестностей ω_i определим координаты $t, x^1, \ldots, x^{n-1}$ (переносом с помощью g_i). Можно предположить, что дуга $\varphi(s)$ принадлежит объединению $Ug_i\omega$. Если $\varphi(s)$ не содержит точек пересечения с орбитой $G'z$, отличных от концов $\varphi(0)$ и $\varphi(1)$, то, повторяя доказательство леммы 6, легко получить противоречие: в окрестности $\omega_1 = \omega$ координата каждой точки $\varphi(s)$ — $t(s)$ — положительна, это же утверждение справедливо и в каждой окрестности ω_i, но в ω_m координата $t(s)$ должна быть отрицательной.

Список литературы: 1. *Громол Д., Клингенберг В., Мейер В.* Риманова геометрия в целом. М., 1971. 343 с. 2. *Улановский М. А.* Упорядоченные псевдоримановы пространства // Укр. геометр. сб. 1970. Вып. 9. С. 96—110. 3. *Бим. Дж., Эрлих П.* Глобальная лоренцева геометрия. М., 1985. 400 с. 4. *Улановский М. А.* Экспоненциальное отображение в псевдоримальных пространствах физического типа // Укр. геометр. сб. 1974. Вып. 16. С. 97—118.

Поступила в редколлегию 28.11.88

УДК 514

В. Г. УШАКОВ

БАЗА СИЛЬНО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО РИМАНОВА МНОГООБРАЗИЯ

Пусть Q — точка риманова многообразия M и T_QM — касательное пространство к M в Q. Вектор $y \in T_QM$ называется нуль-вектором, если $\forall x \in T_QM$ $R(x, y) = 0$, где $R(x, y)$ — преобразование кривизны риманова многообразия M. Множество всех нуль-векторов образует векторное пространство $N(Q)$; оно называется нуль-пространством, а его размерность — внутренним нуль-индексом $\mu(Q)$. Риманово многообразие M называется сильно k-параболическим, если $\mu(Q) = k$ во всех точках $Q \in M$.

Известно, что распределение нуль-пространств $N(Q)$ в этом случае голономно, а слои — k-мерные подмногообразия, касательные к $N(Q)$, — являются плоскими и вполне геодезическими [1, 2]. Слой, проходящий через точку Q, будем обозначать через $L(Q)$.

Подмногообразие $M^l \subset M^{l+k}$ назовем базой сильно k-параболического риманова многообразия M^{l+k}, если M^l трансверсально слою $L(Q)$ в каждой своей точке Q.

Риманово многообразие M^{l+k} называется k-цилиндрическим, если в некоторой системе координат квадрат линейного элемента M^{l+k} представим в виде

$$ds^2 = ds_1^2 + (du^{l+1})^2 + \ldots + (du^{l+k})^2,$$

где ds_1 — линейный элемент l-мерного подмногообразия, высекаемого из M^{l+k} уравнениями $u^{l+1} = \ldots = u^{l+k} = 0$. Иногда говорят также, что M^{l+k} является прямым метрическим произведением $M^l \times \times E^k$, где E^k — плоское.

Риманово многообразие M^{l+k} называется k-цилиндроконическим, если в некоторой системе координат квадрат линейного элемента M^{l+k} представим в виде: $ds^2 = ds_1^2 (u^{l+1} + 1)^2 + (du^{l+1})^2 + \ldots + (du^{l+k})^2$, где ds_1 — линейный элемент l-мерного подмногообразия, высекаемого из M^{l+k} уравнениями $u^{l+1} = \ldots = u^{l+k} = 0$.

Строго говоря, определяемый объект следовало бы назвать $(k-1)$-цилиндром над 1-конусом. Но коничность не бывает более чем одномерной (в доказательстве леммы 3 мы увидим, почему). Поэтому в случае появления коничности будем говорить о k-цилиндроконичности, понимая, что речь идет о $(k-1)$-цилиндре над 1-конусом. Заметим, что при изучении вырождения линейчатых поверхностей в евклидовом пространстве возникают аналогичные объекты: k-цилиндр и $(k-1)$-цилиндр над 1-конусом [3].

Будем говорить, что в касательном пространстве $T_Q M^l$ риманова многообразия M^l есть пара сопряженных подпространств U и V, если $T_Q M^l = U + V$ и оператор кривизны M^l таков, что $R(V, V)U = = R(U, U)V = 0$.

Теорема. *Пусть M^l $(l \geqslant 3)$ — C^4 риманово многообразие, в касательном пространстве которого отсутствуют сопряженные подпространства. Предположим также, что M^l удовлетворяет одному из следующих условий:*

а) *l нечетно, и секционная кривизна не обращается в нуль;*

б) *тензор кривизны M^l знакоопределен как квадратичная форма на пространстве всех бивекторов из $T_Q M^l$.*

Тогда любое сильно k-параболическое риманово многообразие M^{l+k} с базой M^l является k-цилиндрическим или k-цилиндроконическим.

В работе [2] А. Розенталь доказал аналогичную теорему, в которой условие отсутствия сопряженных подпространств заменено требованием полноты многообразия. В отличие от [2] результат нашей статьи носит локальный характер.

С другой стороны, А. А. Борисенко изучал поверхности в евклидовом пространстве, не являющиеся базой никакой нетривиальной сильно параболической поверхности даже локально [4]. Им было доказано, что если в касательном пространстве регулярной поверхности F^l отсутствуют сопряженные во внешнем смысле подпространства*

* Подпространства $U, V \subset T_Q F^l$ называются внешне сопряженными, если $T_Q F^l = U + V$ и $A(U, V) = 0$, где A — вторая фундаментальная форма.

и выполнено одно из требований: а) секционная кривизна F^l положительна; б) секционная кривизна F^l отрицательна, и l нечетно; в) секционная кривизна F^l отрицательна, и точечная коразмерность вложения (размерность пространства вторых квадратичных форм) $p > \frac{l(l+2)}{4}$; г) в $T_Q F^l$ отсутствуют асимптотические направления, и l нечетно, то любая сильно параболическая поверхность с базой F^l либо k-цилиндр, либо $(k-1)$-цилиндр над 1-конусом. А. А. Борисенко высказал также предположение о справедливости теоремы, доказываемой в данной статье [4].

Сравнение двух теорем (А. А. Борисенко и автора) позволяет предположить, что последняя справедлива при более слабом условии в пункте а): при $k_{\text{секц}} > 0$ требование нечетности l излишне.

Удобным инструментом для исследования сильно параболического многообразия на вырожденность (цилиндричность, цилиндроконичность) является конулевой оператор [2, 5]. Через $N^{\perp}(Q)$ будем обозначать ортогональное дополнение нуль-пространства $N(Q)$ в касательном пространстве $T_Q M^{l+k}$.

Конулевым оператором называется линейное отображение $B: N(Q) \times N^{\perp}(Q) \to N^{\perp}(Q)$, задаваемое правилом $(\xi, x) \to \text{пр}_{N^{\perp}(Q)}(\nabla_x \tilde{\xi})$, где $\nabla \tilde{\xi}$ — ковариантная производная произвольного гладкого нуль-векторного поля $\tilde{\xi}$, совпадающего в точке Q с вектором ξ, а $\text{пр}_{N^{\perp}(Q)}$ — ортогональная проекция $T_Q M^{l+k}$ на $N^{\perp}(Q)$. Образ (ξ, x) при отображении B будем обозначать через $B_{\xi}(x)$. Далее мы будем допускать некоторую вольность речи, называя конулевым оператором отображение B_{ξ}.

Для доказательства корректности определения необходимо установить независимость $B_{\xi}(x)$ от выбора нуль-векторного поля $\tilde{\xi}$. В самом деле, пусть дано два нуль-векторных поля $\tilde{\xi}_1$ и $\tilde{\xi}_2$, совпадающих в точке Q. Выбрав в окрестности изучаемой точки подвижный базис нуль-пространств $\{e_\alpha\}_{\alpha=1}^{k}$, можно разложить $\tilde{\xi}_1 = \xi_1^{\alpha} e_\alpha$, $\tilde{\xi}_2 = \xi_2^{\alpha} e_\alpha$. Тогда

$$B_{\tilde{\xi}_1}(x) - B_{\tilde{\xi}_2}(x) = \text{пр}_{N^{\perp}(Q)} (\nabla_x (\tilde{\xi}_1 - \tilde{\xi}_2)) =$$

$$= \text{пр}_{N^{\perp}(Q)} ((\nabla_x (\xi_1^{\alpha} - \xi_2^{\alpha}))\, e_\alpha) + (\xi_1^{\alpha} - \xi_2^{\alpha})\, \text{пр}_{N^{\perp}(Q)} (\nabla_x e_\alpha) = 0.$$

Первое слагаемое равно нулю в силу ортогональности e_α и $N^{\perp}(Q)$, а второе — в силу того, что $(\xi_1^{\alpha} - \xi_2^{\alpha})|_Q = 0$. Корректность определения доказана.

Заметим, что конулевой оператор B_{ξ} аналогичен оператору A_{ξ}, ассоциированному со второй фундаментальной формой поверхности F^l относительно нормали ξ (оператору Вейнгартена). При этом $N^{\perp}(Q)$ соответствует касательное пространство $T_Q F^l$; $N(Q)$ — нормальное пространство $T_Q^{\perp} F^l$; утверждению о корректности определения B_{ξ} — предложение 3.3 [6, гл. VII, с. 22]. Отличие заключается в том, что в нашем случае распределение $N^{\perp}(Q)$ не обязательно голономно.

Линейный оператор называется скалярным оператором, если он пропорционален тождественному.

Теорема непосредственно следует из трех лемм.

Лемма 1. *Пусть $M^{l+k}(l \geqslant 3)$ — C^4-гладкое сильно k-параболическое риманово многообразие, через точку Q которого проходит база M^l, удовлетворяющая либо условию а), либо условию б) теоремы. Тогда любой конулевой оператор в точке Q диагонализуем.*

Лемма 2. *Пусть M^{l+k} $(l \geqslant 3)$ — C^4-гладкое сильно k-параболическое риманово многообразие, в точке Q которого некоторый конулевой оператор диагонализуем, но не скалярен. Тогда в касательном пространстве T_QM^l произвольной базы $M^l \ni Q$ существуют сопряженные подпространства.*

Лемма 3. *Пусть M^{l+k} $(l \geqslant 2)$ — C^4-гладкое сильно k-параболическое многообразие. Если в каждой точке некоторой базы все конулевые операторы скалярны, то M^{l+k} — либо k-цилиндрическое, либо k-цилиндроконическое.*

При доказательстве неоднократно будет использоваться формула [2, теорема 2.3], на которую мы будем ссылаться как на «основное уравнение»: произвольный конулевой оператор B_ξ, заданный в точке Q сильно k-параболического риманова многообразия M^{l+k} $(l \geqslant 3)$, удовлетворяет равенству

$$\underset{x,\,y,\,z}{\sigma}\ R(x, y)\, B_\xi(z) = 0, \text{ где } x,\ y,\ z \in N^\perp(Q),$$

σ — альтернация по x, y, z.

Доказательство леммы 1 проведем в два этапа. Вначале установим, что из условия леммы следует вещественность всех собственных значений конулевого оператора. Затем покажем, что все неприводимые инвариантные подпространства имеют размерность 1, что и означает диагонализуемость [7].

I этап. *Случай* а): l нечетно, секционная кривизна базы M^l в точке Q не обращается в нуль. Последнее условие эквивалентно следующему: секционная кривизна M^{l+k} по любой 2-мерной площадке из $N^\perp(Q)$ не обращается в нуль. В самом деле, из сильной параболичности многообразия следует, что значение тензора кривизны на векторах из T_QM^{l+k} совпадает со значениями тензора кривизны на проекциях этих векторов на $N^\perp(Q)$. Из нечетности l следует существование хотя бы одного вещественного собственного значения конулевого оператора. Справедлив следующий аналог теоремы 4.2 [2]: если в точке $Q \in M^{l+k}$ секционная кривизна по площадкам из $N^\perp(Q)$ не обращается в нуль и существует вещественное собственное значение конулевого оператора, то и все собственные значения этого оператора вещественны. (В теореме 4.2 требуется, чтобы существующее вещественное собственное значение было нулевым). Доказательство, предложенное в [2], воспроизводится практически дословно. Приведем его здесь для полноты изложения. Итак, пусть у характеристического многочлена $\det(B - \lambda E)$ кроме делителя $(\lambda - a)$ есть делитель $(\lambda^2 - b\lambda - c)$. Тогда существует вектор $x \in N^\perp(Q)$: $(B^2 - b \cdot B - c \cdot E)\, x = 0$. Положим $v_1 = x$, $v_2 = B(x)$, v_3 — собственный вектор, соответствующий a. Учитывая, что $0 = B^2(v_1) - b \cdot B(v_1) - cv_1 = B(v_2) - bv_2 - cv_1$, получим $B(v_1) = v_2$, $B(v_2) = cv_1 + bv_2$, $B(v_3) = av_3$. Основное уравнение, умноженное на v_3, даст

$$\langle \underset{v_1, v_2, v_3}{\sigma} R(v_1, v_2) B(v_3), v_3\rangle = cR(v_3 v_1 v_1 v_3) + bR(v_3 v_1 v_2 v_3) + \\ + R(v_2 v_3 v_2 v_3) = 0.$$

Используя это равенство, получим

$$(4c + b^2) R(v_2 v_3 v_2 v_3) = b^2 R(v_2 v_3 v_2 v_3) + 4c[cR(v_1 v_3 v_1 v_3) + \\ + bR(v_1 v_3 v_2 v_3)] = R(2cv_1 + bv_2, v_3, 2cv_1 + bv_2, v_3).$$

Так как секционная кривизна не обращается в нуль, то $R(v_2, v_3, v_2, v_3)$ и $R(2cv_1 + bv_2, v_3, 2cv_1 + bv_2, v_3)$ имеют одинаковый знак, откуда $4c + b^2 > 0$. Но это равенство в точности означает, что у $\lambda^2 - b\lambda - c$ два вещественных корня. Итак, все собственные значения оператора B вещественны.

Случай б): тензор кривизны на M^l знакоопределен как квадратичная форма на пространстве всех бивекторов из $T_Q M^l$. По вышеизложенным соображениям это условие эквивалентно такому: тензор кривизны M^{l+k} знакоопределен как квадратичная форма на пространстве всех бивекторов из $N^\perp(Q)$. Тогда теорема 4.5 [2] гарантирует существование, по меньшей мере, одного вещественного собственного значения конулевого оператора, а аналог теоремы 4.2, доказанный в случае а), обеспечивает вещественность всех остальных собственных значений.

II этап. Предположим противное.

1°. Существует неприводимое инвариантное подпространство размерности $\geqslant 3$. Тогда существуют три вектора v_1, v_2, v_3 из $N^\perp(Q)$, для которых $B_\xi(v_1) = \lambda v_1 + v_2$, $B_\xi(v_2) = \lambda v_2 + v_3$, $B_\xi(v_3) = \lambda v_3$, где λ — соответствующее собственное значение. Основное уравнение и 1 тождество Бианки, примененные к векторам v_1, v_2, v_3, дают $0 = R(v_1, v_2)B_\xi(v_3) + R(v_3, v_1)B_\xi(v_2) + R(v_2, v_3)B_\xi(v_1) = R(v_3, v_1)v_3 + R(v_2, v_3)v_2$. Умножив скалярно это равенство на v_3, получим $\langle R(v_2, v_3)v_2, v_3\rangle = 0$, что означает равенство нулю секционной кривизны по площадке $v_2 \wedge v_3$, что, в свою очередь, противоречит условию леммы.

2°. Существует неприводимое инвариантное подпространство размерности 2. Тогда существуют три вектора v_1, v_2, v_3 из $N^\perp(Q)$, для которых $B_\xi(v_1) = \lambda v_1 + v_2$, $B_\xi(v_2) = \lambda v_2$, $B_\xi(v_3) = \mu v_3$, где векторы v_1 и v_2 из 2-мерного инвариантного подпространства с собственным значением λ, а вектор v_3 из другого инвариантного подпространства, причем λ и μ могут совпадать. Опять применим основное уравнение и 1 тождество Бианки: $0 = \mu R(v_1, v_2)v_3 + \lambda R(v_3, v_1)v_2 + \lambda R(v_2, v_3)v_1 + R(v_2, v_3)v_2 = (\mu - \lambda)R(v_1, v_2)v_3 + R(v_2, v_3)v_2$. Умножив скалярно это равенство на v_3, придем к тому же противоречию.

Итак, все неприводимые инвариантные подпространства конулевого оператора имеют размерность 1. Лемма 1 доказана.

Доказательство леммы 2. Выберем в $N^\perp(Q)$ базис из собственных векторов конулевого оператора B_ξ, расположив их в порядке неубывания собственных значений. В этом базисе матрица оператора B_ξ диагональна. Обозначим собственные векторы через $\{w_i\}_{i=1}^l$, а соответствующие собственные значения — через $\{\lambda_i\}_{i=1}^l$ $(\lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_l)$. Так как существуют по меньшей мере два различных собственных значения, то подпространства $U = \mathrm{span}\,(w_1, \ldots, w_r)$ и $V = \mathrm{span}\,\{w_{r+1}, \ldots, w_l\}$ — ненулевые, где r таково, что $\lambda_1 = \ldots = \lambda_r < \lambda_{r+1}$. Докажем, что U и V образуют пару сопряженных подпространств $N^\perp(Q)$, т. е. $R(U, U)V = R(V, V)U = 0$. Тогда по использованным в ходе леммы 1 соображениям подпространства $\tilde{U}, \tilde{V} \subset T_Q M^l$, являющиеся прообразами U и V при ортогональном проектировании $T_Q M^l$ на $N^\perp(Q)$, образуют пару сопряженных подпространств уже в $T_Q M^l$, что завершает доказательство леммы.

Более точно, докажем следующее утверждение: если компонента тензора кривизны $R_{ijpq} \neq 0$ (не ограничивая общности, считаем $j > i \leqslant p < q$), то $\lambda_i = \lambda_p$ и $\lambda_j = \lambda_q$. Это, конечно, влечет сопряженность U и V, так как $\forall\, u_1, u_2 \in U$, $\forall\, v_1, v_2 \in V$ будет $R(u_1, u_2)v_1 = R(v_1, v_2)u_1 = 0$ в силу того, что собственные значения u_1 и u_2 равны λ_1, а собственные значения v_1 и v_2 больше λ_1.

Получим несколько вспомогательных тождеств. Основное уравнение, примененное к собственным векторам w_i, w_j, w_p, дает $\lambda_p R_{ijpq} + \lambda_j R_{pijq} + \lambda_i R_{jpiq} = 0$. Вычитая из этого уравнения I тождество Бианки, умноженное на λ_i, и используя симметрию тензора кривизны, получаем

$$(\lambda_p - \lambda_i)\, R_{ijpq} = (\lambda_j - \lambda_i)\, R_{ipjq}. \tag{1}$$

Дважды используя (1) и симметрии тензора кривизны, выпишем следующую цепочку равенств: $(\lambda_p - \lambda_i) R_{ijpq} = (\lambda_j - \lambda_i) R_{ipjq} = -(\lambda_i - \lambda_j) R_{jqip} = -(\lambda_q - \lambda_j) R_{jiqp} = (\lambda_j - \lambda_q) R_{ijpq}$, которая дает

$$(\lambda_i + \lambda_j - \lambda_p - \lambda_q)\, R_{ijpq} = 0. \tag{2}$$

Предположим теперь, что $R_{ijpq} \neq 0$ $(j > i \leqslant p < q)$, а значит,

$$\lambda_i + \lambda_j - \lambda_p - \lambda_q = 0. \tag{3}$$

В силу монотонности собственных значений возможны два случая.

1°. $\lambda_i = \lambda_p$. Тогда $\lambda_j = \lambda_q$, что и требовалась доказать.

2°. $\lambda_i < \lambda_p$. Тогда из (1), учитывая $R_{ijpq} \neq 0$, получим $R_{ipjq} \neq 0$. Переобозначение индексов в (2) дает $(\lambda_i + \lambda_p - \lambda_j - \lambda_q) R_{ipjq} = 0$, откуда $\lambda_i + \lambda_p - \lambda_j - \lambda_q = 0$. Сложим последнее равенство с равенством (3) и получим $\lambda_i = \lambda_q$. Но из монотонности собственных значений $\lambda_i < \lambda_p \leqslant \lambda_q$. Пришли к противоречию. Лемма 2 доказана.

Доказательство леммы 3. Зададим на многообразии M^{l+k} подвижный ортонормированный репер следующим образом. В каждой точке Q базы M^l выберем репер так, чтобы первые l векторов образовывали базис $N^\perp(Q)$; оставшиеся k векторов автоматически образуют базис $N(Q)$. При этом репер должен гладко зависеть от точки базы. В произвольную точку $P \in M^{l+k}$ перенесем репер параллельно в связности M^{l+k} из точки $Q = L(P) \cap M^l$ по кривой γ, целиком лежащей в слое $L(P)$. В силу вполнегеодезичности слоя $L(P)$ [2] последние k векторов по-прежнему будут образовывать базис $N(Q)$, а значит, первые l — базис $N^\perp(Q)$. Корректность выбора репера в точке $P \notin M^l$ (независимость от кривой γ) следует из того, что слой $L(P)$ — плоский [1].

Обозначим полученный репер через $\{e_a\}_{a=1}^{l+k}$. Через ω^a, ψ^a_b, Ω^a_b будем обозначать соответственно формы смещения, связности и кривизны многообразия M^{l+k}, связанные с подвижным репером соотношениями $\omega^a(e_b) = \delta^a_b$, $de_a = \psi^b_a e_b$, $d\omega^a = -\psi^a_b \wedge \omega^b$, $\Omega^a_b = d\psi^a_b + \psi^a_c \wedge \psi^c_b$ [8]. Здесь и далее индексы изменяются в следующих пределах: $a, b, c = \overline{1, l+k}$; $i, j, p = \overline{1, l}$; $\alpha, \beta, \gamma, \delta = \overline{l+1, l+k}$. В выбранном репере условия сильной параболичности M^{l+k} примут вид $\Omega^a_\alpha = 0$, формы связности будут разлагаться только по первым l формам смещения: $\psi^a_b = \Gamma^a_{bi}\omega^i$, т. е. $\Gamma^a_{b\alpha} = 0$. Аналогичные построения для 3-мерного сильно 1-параболического многообразия проводились в [9].

Покажем, что из скалярности конулевого оператора B в точке $Q \in M^{l+k}$ следует его скалярность в некоторой окрестности точки Q в нуль-слое $L(Q)$. Для этого, следуя идее Розенталя (см. доказательство теоремы 3.1 [2]), выпишем систему дифференциальных уравнений на B. Уравнение структуры и сильная параболичность многообразия дают $0 = \Omega^i_\alpha = d\psi^i_\alpha + \psi^i_a \wedge \psi^a_\alpha$. Подействуем на вектор e_β:

$$d\psi^i_\alpha(e_\beta) + \psi^i_a(e_\beta)\,\psi^a_\alpha - \psi^a_\alpha(e_\beta)\,\psi^i_a = d\,(\Gamma^i_{\alpha j}\,\omega^j)(e_\beta) =$$
$$= (d_{e_\beta}\Gamma^i_{\alpha j})\,\omega^j + \Gamma^i_{\alpha j}\,d\omega^j(e_\beta) = (d_{e_\beta}\Gamma^i_{\alpha j} + \Gamma^i_{\alpha p}\Gamma^p_{\beta j})\,\omega^j = 0.$$

При проведении выкладок мы воспользовались тем, что формы связности ψ^a_b разлагаются только по конулевым формам смещения ($\Gamma^a_{b\alpha} = 0$). Так как слой $L(Q)$ — плоский, то в нем можно задать прямоугольную декартову систему координат $(u^{l+1}, \ldots, u^{l+k})$, причем $\left.\frac{\partial}{\partial u^\alpha}\right|_Q = e_\alpha$. В этой системе координат полученное уравнение имеет вид

$$\frac{\partial B^i_{\alpha j}}{\partial u^\beta} = -\,B^i_{\alpha p}\,B^p_{\beta j}. \tag{4}$$

Здесь через $B^i_{\alpha j}\,(=\Gamma^i_{\alpha j})$ обозначен (i, j)-элемент матрицы конулевого оператора B_{e_α} в выбранной системе координат.

Легко проверить, что система дифференциальных уравнений в частных производных (4) совместна, и поэтому по значениям $B^i_{\alpha j}$ в какой-либо фиксированной точке можно восстановить $B^i_{\alpha j}$ в окрестности. По каждой координате эта система является уравнением Риккати. Считаем, что в точке Q базы M^l координаты $u^\alpha = 0$, конулевой оператор скаляреп, т. е. $B^i_{\alpha j}(0) = \lambda_\alpha(0)\,\delta^i_j$. Выпишем решение системы (4) в явном виде:

$$B^i_{\alpha j}(u^{l+1}, \ldots, u^{l+k}) = \frac{\lambda_\alpha(0)\,\delta^i_j}{\lambda_\beta(0)\,u^\beta + 1}.$$

Таким образом, из скалярности конулевых операторов в Q следует скалярность конулевых операторов в тех точках слоя $L(Q)$, где последние определены ($\lambda_\alpha(0)u^\alpha + 1 \neq 0$). Розенталь, пользуясь дополнительным предположением полноты M^{l+k}, заключал, что все $\lambda_\alpha(0) = 0$, что в свою очередь эквивалентно цилиндричности метрики (теорема разложения де Рама [10, гл. IV, § 6]).

Теперь покажем, что из условий леммы следует голономность распределения пространств $N^\perp(Q)$. В самом деле, теорема Фробениуса утверждает, что голономность распределения $N^\perp(Q)$ равносильна обращению в нуль $\langle [e_i, e_j], e_\alpha \rangle$, где $[e_i, e_j]$ — скобка Ли векторных полей e_i и e_j. Так как $\langle [e_i, e_j], e_\alpha \rangle = \langle d_{e_i} e_j - d_{e_j} e_i, e_\alpha \rangle = (\psi^a_j(e_i) - \psi^a_i(e_j)) \langle e_a, e_\alpha \rangle = \Gamma^\alpha_{ji} - \Gamma^\alpha_{ij} = -\Gamma^j_{\alpha i} + \Gamma^i_{\alpha j} = -B^j_{\alpha i} + B^i_{\alpha j} = 0$, распределение голономно. Здесь мы воспользовались антисимметричностью форм ψ^a_b и симметричностью матрицы $\{B^i_{\alpha j}\}^l_{i,j=1}$

Выберем новую базу $\tilde{M}^l$, касательную к распределению $N^\perp(Q)$. Для этой базы $N(Q)$ — нормальные пространства. Докажем, что нормальная связность $\tilde{M}^l \subset M^{l+k}$ — плоская, откуда будет следовать существование на $\tilde{M}^l$ набора k взаимно ортогональных нормальных единичных векторных полей, каждое из которых параллельно в нормальной связности [11, с. 99] (сравни [3, с. 24]). В самом деле, форма кривизны нормальной связности $\tilde{\Omega}^\alpha_\beta = d\psi^\alpha_\beta + \psi^\alpha_\gamma \wedge \psi^\gamma_\beta = d\psi^\alpha_\beta + \psi^\alpha_a \wedge \psi^a_\beta - \psi^\alpha_i \wedge \psi^i_\beta = \Omega^\alpha_\beta - \psi^\alpha_i \wedge \psi^i_\beta = 0$ в силу сильной параболичности ($\Omega^\alpha_\beta = 0$) и скалярности конулевых операторов ($\psi^i_\alpha = \lambda_\alpha \omega^i$).

Итак, на $\tilde{M}^l$ существуют взаимно ортогональные единичные векторные поля $\tilde{e}_\alpha$, параллельные в нормальной связности. Возьмем их в качестве нового базиса $N(Q)$. Введем на базе $\tilde{M}^l$ произвольные координаты v^i, а в каждом слое прямоугольную декартову систему координат v^α с центром в точке базы и с ортами $\tilde{e}_\alpha$. В каждой точке $Q \in M^{l+k}$ определен ортонормированный репер $e_1, \ldots, e_l, \tilde{e}_{l+1}, \ldots, \tilde{e}_{l+k}$. С этого места через e_a будем обозначать именно этот репер. Тогда $\psi^\alpha_\beta = 0$ (равносильно параллельности векторных полей e_α в нормальной связности $\tilde{M}^l \subset M^{l+k}$); $\psi^i_\alpha = \lambda_\alpha \omega^i$ (скалярность конулевых операторов). Будем искать явный вид функций $\lambda_\alpha(v^a)$. Из структурного уравнения и сильной параболичности ($\Omega^i_\alpha = 0$) получим $d\psi^i_\alpha = \Omega^i_\alpha + \psi^\beta_\alpha \wedge \psi^i_\beta + \psi^j_\alpha \wedge \psi^i_j = \lambda^\alpha \omega^j \wedge \psi^i_j$. С другой стороны, $d\psi^i_\alpha = d(\lambda_\alpha \omega^i) = d\lambda_\alpha \wedge \omega^i + \lambda_\alpha d\omega^i = d\lambda_\alpha \wedge \omega^i + \lambda_\alpha \omega^j \wedge \psi^i_j + \lambda_\alpha \omega^\beta \wedge \psi^i_\beta = d\lambda_\alpha \wedge \omega^i + \lambda_\alpha \omega^j \wedge \psi^i_j + \lambda_\alpha \lambda_\beta \omega^\beta \wedge \omega^i$.

Сравнивая полученные выражения, найдем $(d\lambda_\alpha + \lambda_\alpha \lambda_\beta \omega^\beta) \wedge \omega^i = 0$. Так как размерность $N^\perp(Q)$ не меньше 2, то $d\lambda_\alpha + \lambda_\alpha \lambda_\beta \omega^\beta = 0$, откуда $d_{e_i} \lambda_\alpha = 0$, $d_{e_\beta} \lambda_\alpha = -\lambda_\alpha \lambda_\beta$. Следовательно,

$$\lambda_\alpha(v^1, \ldots, v^{l+k}) = \frac{\lambda_\alpha(0)}{\lambda_\beta(0) v^\beta + 1},$$

где $\lambda_\alpha(0)$ — значение функции λ_α в какой-либо точке базы (а значит, и на всей базе).

Далее возможны два различных случая.

1°. Все $\lambda_\alpha(0)=0$. Тогда $\psi_\alpha^i=0$, $\psi_\beta^\alpha=0$. Квадрат линейного элемента базы $ds_1^2=\sum_i [\omega^i(v',\ldots,v^l,0,\ldots,0)]^2$ (так как $ds_1=\omega^i(v',\ldots,v^l,0,\ldots,0)\,e_i$). Квадрат линейного элемента M^{l+k} будет

$$ds^2=\sum_i [\omega^i(v^1,\ldots,v^{l+k})]^2+\sum_\alpha [\omega^\alpha(v',\ldots,v^{l+k})]^2.$$

Вычислим зависимость ω^i, ω^α от координат: $d\omega^\alpha=0$, $d\omega^i=-\psi_j^i\wedge\omega^j$, поэтому $\omega^\alpha(v',\ldots,v^{l+k})=dv^\alpha$, $\omega^i(v^1,\ldots,v^{l+k})=\omega^i(v',\ldots,v^l,0,\ldots,0)$. Таким образом, $ds^2=\sum_i[\omega^i(v^1,\ldots,v^l,0,\ldots,0)]^2+\sum(dv^\alpha)^2=ds_1^2+(dv^{l+1})^2+\ldots+(dv^{l+k})^2$ и M^{l+k} k-цилиндрично.

2°. Хотя бы одно из $\lambda_\alpha(0)\neq 0$. Тогда определен ненулевой нуль-вектор $\xi=\sum_\alpha \lambda_\alpha(0)\,e_\alpha$ и его орт $\xi^0=\frac{\xi}{|\xi|}$. Нетрудно показать, что для любого нуль-вектора η, ортогонального вектору ξ, конулевой оператор $B_\eta=0$. Можно сказать, что направление вектора ξ является направлением коничности, а направления векторов из $\xi^\perp$ — направлениями цилиндричности. Как и обещалось в начале статьи, направление коничности единственно.

Из постоянства λ_α на базе следует существование ортогонального преобразования каждого из нуль-пространств $N(Q)$ $(Q)\in\tilde{M}^l$) с постоянными коэффициентами, такого, что новый вектор $e_{l+1}=\xi^0$. В новом базисе по-прежнему $\psi_\beta^\alpha=0$, $\psi_\alpha^i=\lambda_\alpha\omega^i$, но $\lambda_\alpha=0$ при $\alpha\neq l+1$. Функции

$$\lambda_\alpha(v',\ldots v^{l+k})=\frac{\delta_\alpha^{l+1}\lambda_{l+1}(0)}{\lambda_{l+1}(0)\,v^{l+1}+1}.$$

Не ограничивая общности, можно сказать, что $\lambda_{l+1}(0)=1$ (это вопрос выбора базы $\tilde{M}^l$) и $\lambda_\alpha(v',\ldots,v^{l+k})=\frac{\delta_\alpha^{l+1}}{v^{l+1}+1}$.

Для вычисления линейного элемента M^{l+k} необходимо найти зависимость ω^i, ω^α от координат. Так как

$$d\omega^\alpha=-\psi_i^\alpha\wedge\omega^i-\psi_\beta^\alpha\wedge\omega^\beta=\sum_i\psi_\alpha^i\wedge\omega^i=$$

$$=\sum_i\frac{\delta_\alpha^{l+1}}{v^{l+1}+1}\,\omega^i\wedge\omega^i=0,$$

то $\omega^\alpha(v^1,\ldots,v^{l+k})=dv^\alpha$. С другой стороны, $d\omega^i=-\psi_j^i\wedge\omega^j-\psi_\alpha^i\wedge\omega^\alpha=-\psi_j^i\wedge\omega^j-\frac{\delta_\alpha^{l+1}}{v^{l+1}+1}\,\omega^i\wedge\omega^\alpha$.

Отсюда $d_{e_\lambda}\omega^i=\frac{\delta_\alpha^{l+1}}{v^{l+1}+1}\,\omega^i$, что дает $\omega^i(v^1,\ldots,v^{l+k})=(v^{l+1}+1)\times\omega^i(v^1,\ldots,v^l,0,\ldots,0)$. Поэтому $ds^2=\sum_i[\omega^i(v^1,\ldots,v^{l+k})]^2+$

$$+\sum[\omega^\alpha(v^1,\ldots,v^{l+k})]^2=\sum[\omega^i(v',\ldots,\ v^l,\ 0,\ldots,\ 0)]^2(v^{l+1}+1)^2+$$
$$+\sum(dv^\alpha)^2=(v^{l+1}+1)^2\,ds_1^2+(dv^{l+1})^2+\ldots+(dv^{l+k})^2.$$

В этом случае M^{l+k} будет k-цилиндроконичным. Лемма 3 доказана.

Список литературы: 1. *Chern S. S., Kuiper N. H.* Some theorems on the isometric imbedding of compact Riemannian manifolds in Euclidean space // Annals of Math. 1952. 56, N 3. P. 422—430. 2. *Rosental A.* Riemannian manifolds of constant nullity // Michigan Math. J. 1967. 14, P. 469—480. 3. *Борисенко А. А., Ушаков В. Г.* Об одном характеристическом свойстве многомерных цилиндрических поверхностей // Укр. геометр. сб. 1988. Вып. 31. С. 19—26. 4. *Борисенко А. А.* Об однозначной определенности многомерных подмногообразий в евклидовом пространстве по грассманову образу // Мат. заметки. В печати. 5. *Ferus D.* Totally geodesic foliations // Math. Ann. 1970. 188. P. 313—316. 6. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. М., 1981. 2. 416 с. 7. *Архангельский А. В.* Конечномерные векторные пространства. М., 1982. 248 с. 8. *Berger E., Bryant R., Griffiths Ph.* The Gauss equation and rigidity of isometric embeddings // Duke Math. J. 1983. 50, N 3. P. 803—892. 9. *Борисенко А. А., Ушаков В. Г.* Об изометрическом погружении сильно параболических метрик в классе сильно параболических поверхностей // Укр. геометр. сб. 1990. Вып. 33. С. 27—36. 10. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. М., 1981. 1. 344 с. 11. *Chen B. Y.* Geometry of submanifolds M. Dekker. New York, 1973. 253 p.

Поступила в редколлегию 09.11.89

УДК 514

А. Л. ЯМПОЛЬСКИЙ

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ПРОЕКЦИЙ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ МЕТРИКИ САСАКИ TCP^n И T_1CP^n

1. *Формулировка результата.* Сасаки [1] отметил, что проекция геодезической касательного или сферического касательного расслоений пространства постоянной кривизны на базу характеризуется тем, что ее кривизны k_1 и k_2 постоянны, а $k_3 = \ldots = k_n = 0$. Более того, в последствие удалось дать полное описание геодезических касательного и сферического касательного расслоений над пространственными формами, т. е. над сферой S^n, плоскостью E^n и плоскостью Лобачевского L^n [2, 3].

Надь П. [4] показал, что для касательного и сферического касательного расслоений симметрического пространства геодезические проектируются в кривые, у которых все кривизны $k_1, \ldots, k_n$ постоянны.

Цель данной работы состоит в доказательстве следующего утверждения.

Теорема. *Если* Γ — *геодезическая* TCP^n *или* T_1CP^n, *то* $\pi_0\Gamma$ — *кривая в* CP^n, *для которой кривизны* $k_1, \ldots, k_5$ *постоянны, а* $k_6 = \cdots = k_{2n} = 0$.

Поскольку Азо [5] доказал, что геодезические TM^n и T_1M^n проектируются в одни и те же кривые, то будем в дальнейшем рассматривать геодезические в T_1CP^n.

2. *Замечание о геодезических симметрических пространств.* Пусть $\Gamma(\sigma) = \{x(\sigma), y(\sigma)\}$ — кривая в T_1M^n, σ — ее натуральный параметр, $\gamma(\sigma) = \pi_0\Gamma(\sigma)$ — проекция $\Gamma(\sigma)$ на базу. Параметр σ для кривой γ не является натуральным.

Однако, если S — натуральный параметр γ, то $dS^2 = (1 - c^2)\, d\sigma^2$, где c — постоянная [2]. Обозначим через «$'$» ковариантную производную по параметру σ. Тогда уравнение геодезических в T_1M^n может быть записано в виде [1]

$$x'' = R(y, y')\, x', \quad y'' = -c^2 y, \tag{1}$$

где $c^2 = \|y'\|^2$, $R(y, y')$ оператор кривизны M^n.

Легко проверить, что c^2 есть постоянная величина вдоль γ.

Пусть M^n-симметрическое пространство. Это означает, что $R'(y, y')\, x' \equiv 0$.

Лемма 1. *Если $\gamma(\sigma) = \pi_0\Gamma$ — проекция геодезической T_1M^n симметрического пространства M^n и $\{x(\sigma)\}$ — ее параметрическое уравнение, то $p+1$ производная $\gamma(\sigma)$ удовлетворяет соотношениям:*

$$\text{а) } x^{(p+1)} = R^p(y, y')\, x',$$
$$\text{б) } x^{(p+1)} = R(y, y')\, x^{(p)}.$$

Доказательство. Продифференцируем ковариантно первое уравнение системы. Получим $x''' = R'(y, y')\, x' + R(y', y')\, x' + R(y, y'')\, x' + R(y, y')\, x''$.

Учитывая симметричность M^n, второе уравнение (1) и косую симметрию тензора кривизны, находим, что

$$x''' = R(y, y')\, x''. \tag{2}$$

Повторив эту операцию $p-2$ раз, получим утверждение б) леммы.

С другой стороны, подставив в (2) выражение для x'' из первого уравнения системы (1), получим, что $x''' = R^2(y, y')\, x'$, где $R^2(y, y')$ — квадрат оператора кривизны M^n. Повторив эту операцию $p-2$ раз, докажем утверждение а) леммы.

Следствие 1. *Если $\Gamma(\sigma)$ — геодезическая T_1M^n симметрического пространства M^n, то все кривизны $\gamma(\sigma) = \pi_0\Gamma(\sigma)$ постоянны.*

Доказательство (см. также [4]). Действительно, из леммы 1 (б) следует, что $\langle x^{(p+1)}, x^{(p)}\rangle = 0$. Это означает, что $\|x^{(p)}\| = \mathrm{const}$.

Пусть $\xi_1(s), \ldots, \xi_n(s)$ — репер Френе вдоль $x(\sigma)$. Тогда, учитывая аффинную связь параметров s и σ, из формул Френе, найдем:

$$x' = (1 - c^2)^{1/2}\, \xi_1,$$
$$x'' = (1 - c^2)\, k_1\xi_2.$$

Но $\|x''\| = \mathrm{const}$. Следовательно, $k_1 = \mathrm{const}$.

Поэтому $x''' = (1 - c^2)^{3/2}\, k_1(-k_1\xi_1 + k_2\xi_3)$.

Но $\|x'''\| = \mathrm{const}$. Поэтому $k_1^2 + k_2^2 = \mathrm{const}$. Следовательно, $k_2 = \mathrm{const}$. Продолжая этот процесс, завершим доказательство.

Следствие 2. *Если $\Gamma(\sigma) = \{x(\sigma), y(\sigma)\}$ — геодезическая T_1M^n и M^n — симметрическое пространство, то оператор кривизны*

$R(y, y')$ *действует на векторы репера Френе кривой* $\gamma(\sigma) = \pi_0\Gamma(\sigma)$ *как дифференцирование:* $R(y, y')\xi_p = (1-c^2)^{1/2}\{-k_{p-1}\xi_{p-1} + k_p\xi_{p+1}\}$.

Доказательство проводится индукцией по p.

Предложение. *Если* $\Gamma(\sigma) - \{x(\sigma), y(\sigma)\}$ *— геодезическая* TM^n *и* M^n *симметрическое пространство, то секционная кривизна* M^n *вдоль кривой* $\pi_0\Gamma$ *в направлении элементарной площадки векторов* (y, y') *постоянна.*

Доказательство. По определению действительно

$$k_{yy'} = \frac{\langle R(y, y')y', y\rangle}{\|y\|^2\|y'\|^2 - \langle y, y'\rangle^2}.$$

Но y — единичное векторное поле, поэтому $\langle y, y'\rangle = 0$, $\|y'\|^2 = c^2$, $\|y\|^2 = 1$. Следовательно, $k_{yy'} = \frac{1}{c^2}\langle R(y, y')y', y\rangle$.

Отсюда немедленно выводим, что $k'_{yy'} = 0$.

Замечание. Для геодезических в TM это утверждение так же верно.

3. *Характеризация проекций геодезических* $TCP^n\,(T_1CP^n)$. Поскольку CP^n является симметрическим пространством, то для геодезических $TCP^n\,(T_1CP^n)$ справедливы все утверждения п. 2, в частности, лемма 1. Покажем, что для проекций геодезических $TCP^n\,(T_1CP^n)$ все кривизны, начиная с k_6 — нулевые.

Оператор кривизны CP^n имеет вид $R(x, y)z = \frac{k}{4}(\langle y, z\rangle x - \langle x, z\rangle y + \langle Iy, z\rangle Ix - \langle Ix, z\rangle Iy + 2\langle x, Iy\rangle Iz$, где I — оператор комплексной структуры, для которого $I^2 = -E$, $\langle x, Iy\rangle = -\langle Ix, y\rangle$.

Обозначим через $S(x, y)$ оператор типа оператора кривизны сферы, т. е. $S(x, y)z = \langle y, z\rangle x - \langle x, z\rangle y$.

Тогда оператор кривизны CP^n может быть записан в виде:

$$R(x, y)z = \frac{k}{4}\{S(x, y) + S(Ix, Iy) + 2\langle x, Iy\rangle I\}z$$

или

$$R(x, y) = \frac{k}{4}\{S(x, y) + S(Ix, Iy) + 2mI\},$$

где $m = \langle x, Iy\rangle$.

Лемма 2. *Пусть* $S(x, y)$ *— оператор кривизны единичной сферы,* $p^2 = \|x \wedge y\|^2$ *— норма бивектора* $x \wedge y$. *Тогда* $S^3 + p^2S \equiv 0$.

Доказательство. Введем обозначения: $\langle y, z\rangle = a$, $\langle x, z\rangle = b$. Тогда $S(x, y)z = ax - by$;

$$S^2(x, y)z = S(x, y)S(x, y)z = S(x, y)(ax - by) = aS(x, y)x - bS(x, y)y;$$

$$S^3(x, y)z = S(x, y)S^2(x, y)z = S(x, y)(aS(x, y)x - bS(x, y)y) = \langle y, (aS(x, y)x - bS(x, y)y)\rangle x - \langle x, (aS(x, y)x - bS(x, y)y\rangle y = a\langle S(x, y)x, y\rangle x + b\langle S(x, y)y, x\rangle y = -\langle S(x, y)y, x\rangle(ax - by).$$

Но $\langle S(x, y)y, x\rangle = \|x \wedge y\|^2$. Следовательно, $S^3 + p^2S \equiv 0$. Лемма доказана.

Замечание. Для пространства постоянной кривизны k оператор S' удовлетворяет тождеству $S^3 + k^2p^2S = 0$.

Доказательство аналогично предыдущему.

Следствие (*см. так же* [2, 3]. *Если* $\Gamma(\sigma)$ — *геодезическая в касательном расслоении пространства постоянной кривизны, то кривизны кривой* $\gamma(\sigma) = \pi_0\Gamma(\sigma)$, *начиная с* k_3 — *нулевые.*

Доказательство. По лемме 1 (а) $x^{(IV)} = S^3(y, y')x'$. Из формул Френе с учетом постоянства кривизн находим

$$x^{(IV)} = (1-c^2)^2\{k_1k_2k_3\xi_4 - k_1(k_1^2 + k_2^2)\xi_2\}. \tag{3}$$

С другой стороны,

$S^3(y, y') = -p^2S(x, y)$, поэтому $x^{(IV)} = -p^2S(x, y)x' = -p^2x''$ **(4)**,

Из формул Френе $x'' = k_1(1-c^2)\xi_2$.

Сравнивая (3) и (4), получим

$$(1-c^2)^2k_1k_2k_3\xi_1 + (p^2k_1(1-c^2) - (1-c^2)k_1(k_1^2+k_2^2))\xi_2 = 0.$$

Так как ξ_1 и ξ_2 линейно независимы, то отсюда заключаем, что $k_3 = 0$.

Лемма 3. *Оператор кривизны* $\boldsymbol{C}P^n$ *удовлетворяет тождествам:*

$$R^{2s} = a_sR^2 + b_sIR + c_sE,$$
$$R^{2s+1} = \alpha_sIR^2 + \beta_sR + \gamma_sI,$$

где a_s, b_s, c_s, α_s, β_s, γ_s — *некоторые коэффициенты.*

Для доказательства последнего утверждения нам понадобится «таблица умножения» операторов $S(x, y)$, $S(Ix, Iy)$, I. Для сокращения записи обозначим операторы $S(x, y)$ и $S(Ix, Iy)$ через A и B соответственно.

Лемма 4. *Операторы* $A(= S(x, y))$, $B(= S(Ix, Iy))$, I *перемножаются согласно таблице*

	A	B	I
A	A^2	mIB	IB
B	mIA	B^2	IA
I	IA	IB	$-E$

Доказательство. Рассмотрим $AB = S(x, y)S(Ix, Iy)$;

$$S(x, y)S(Ix, Iy)z = S(x, y)(\langle Iy, z\rangle Ix - \langle Ix, z\rangle Iy) =$$
$$= \langle y, \langle Iy, z\rangle Ix - \langle Ix, z\rangle Iy\rangle x - \langle x, \langle Iy, z\rangle Ix, -\langle Ix, z\rangle Iy\rangle y =$$
$$= \langle y, Ix\rangle\langle Iy, z\rangle x + \langle Ix, z\rangle\langle x, Iy\rangle y =$$
$$= mI(\langle Iy, z\rangle Ix - \langle Ix, z\rangle Iy) = mIS(Ix, Iy).$$

Таким образом, $AB = mIB$.

Аналогично доказываются остальные равенства.

Доказательство леммы 3. Заметим, что из таблицы умножения следует, что $(A + B)I = I(A + B)$, т. е. операторы $A + B$ и I коммутируют. Поэтому для степени оператора $R = \frac{k}{4}\{(A + B) + 2mI\}$ справедливы числовые формулы возведения в степень, т. е.

$$R^3(x, y) = \left(\frac{k}{4}\right)^3 \{(A + B)^3 - 8m^3I + 6m(A + B)I(A + B + 2mI)\}.$$

Заметим, что $A + B + 2mI = \frac{4}{k}R$, $A + B = \frac{4}{k}R - 2mI$.

Поэтому $R^3 = \left(\frac{k}{4}\right)^3 \left\{(A + B)^3 + \frac{24}{k}IR^2 + 12m^2R - 8m^3I\right\}$ **(5).**

Более того, $(A + B)^3 = A^3 + B^3 + AB^2 + BA^2 + ABA \times + BAB + A^2B + B^2A$.

Используя таблицу умножения, найдем, что $AB^2 = ABB = mIB^2$, $BA^2 = mIA^2$, $ABA = -m^2A$, $BAB = -m^2B$, $A^2B = AAB = mAIB = mIB^2$, $B^2A = mIA^2$.

Кроме того, по лемме 2 $A^3 = -p^2A$, $B^3 = -p^2B$.

Таким образом,

$$\begin{aligned}(A + B)^3 &= -p^2(A + B) + mI(B^2 + A^2) - m^2(A + B) + \\ &+ mI(A^2 + B^2) = (p^2 + m^2)(A + B) + mI(A^2 + B^2).\end{aligned} \tag{6}$$

Заметим, что $R^2 = \left(\frac{k}{4}\right)^2 \left\{(A + B)^2 - 4m^2E + 2mI(A + B)\right\} = \left(\frac{k}{4}\right)^2 \{A^2 + B^2 + 3mI(A + B) - 4m^2E\}$.

Из последнего равенства следует, что

$$\begin{aligned}A^2 + B^2 &= \left(\frac{4}{k}\right)^2 R^2 - 3mI\left(\frac{4}{k}R - 2mI\right) - 4m^2E = \\ &= \left(\frac{4}{k}\right)^2 R^2 - \frac{12m}{k}IR - 10m^2E.\end{aligned}$$

Подставляя это выражение в (6), найдем, что $(A + B)^3$ является линейной комбинацией операторов IR^2, R и I.

Подставляя эту линейную комбинацию в (5), получим, что

$$R^3 = \alpha_1 IR^2 + \beta_1 R + \gamma_1 I, \tag{7}$$

где $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ — некоторые, вообще говоря, ненулевые коэффициенты.

Дальнейшие степени оператора R вычислим, используя (7):

$$\begin{aligned}R^4 = R^3R &= \alpha_1 IR^3 + \beta_1 R^2 + \gamma_1 IR = \\ &= \alpha_1 I(\alpha_1 IR^2 + \beta_1 R + \gamma_1 I) + \beta_1 R^2 + \gamma_1 IR = \\ &= (-\alpha_1^2 + \beta_1)R^2 + (\alpha_1\beta_1 + \gamma_1)IR - \alpha_1\gamma_1 E = \\ &= a_2R^2 + b_2IR + c_2E.\end{aligned}$$

Продолжая этот процесс, завершим доказательство леммы 3.

Доказательство основной теоремы. Согласно леммам 1 и 3

$$\begin{aligned}x^{(2s)} &= a_s x''' + b_s I x'' + c_s x', \\ x^{(2s+1)} &= \alpha_s I x''' + \beta_s x'' + c_s I x'.\end{aligned} \tag{8}$$

Рассмотрим первое уравнение системы (8) для $s=2, 3$. По формулам Френе $x^{(4)}=(1-c^2)^2 k_1 k_2 k_3 k_4 \xi_5 +$ л. к. (ξ_1, ξ_3), где л. к. означает линейную комбинацию с постоянными коэффициентами векторов репера Френе ξ_1, ξ_3, в то время как

$$x''' = \text{л. к.}\,(\xi_1),\ x' = \text{л. к.}\,(\xi_1),\ x'' = \text{л. к.}\,(\xi_2). \tag{9}$$

Следовательно, при $s=2$ из первого уравнения (8) получаем равенство:

$$\text{л. к.}\,(\xi_1, \xi_3) + \text{л. к.}\,(l\xi_2) + k_1 \dots k_4 \xi_5 = 0. \tag{10}$$

Если коэффициент при $l\xi_2$ равен нулю, то $k_4=0$ и теорема доказана. Пусть коэффициент при $l\xi_2$ — ненулевой.

При $s=3$ по формулам Френе

$$x^{(6)} = (1-c^2)^3 k_1 \dots k_6 \xi_7 + \text{л. к.}\,(\xi_1, \xi_3, \xi_5).$$

Принимая во внимание (9), находим, что

$$\text{л. к.}\,(\xi_1, \xi_3, \xi_5) + \text{л. к.}\ l\xi_2 + k_1 \dots k_6 \xi_7 = 0. \tag{11}$$

Выражая из (10) вектор $l\xi_2$ и подставляя его в (11), получим л. к. $(\xi_1, \xi_3, \xi_5) + k_1 \dots k_6 \xi_7 = 0$.

Так как векторы репера Френе линейно независимы, то из последнего равенства заключаем, что в общем случае $k_6 = 0$, а, следователь но, и все остальные кривизны нулевые. Теорема доказана.

Примечание. Автор выражает признательность проф. Борисенко А. А. за указание на неточность, допущенную в доказательстве анонсированного ранее результата [6].

Список литературы: 1. *Sasaki S.* On the geometry of tangent bundle of a Riemannian manifold // Tohoku Math. Journ. 1958. **10.** P. 338—354. 2. *Sasaki S.* Geodesics on the tangent sphere bundles over space forms // Journ. reine angew. math. 1976. **288.** P. 106—120. 3. *Sato K.* Geodesics on the tangent bundles over space forms / Tensor. 1978. **32.** P. 5—10. 4. *Nagy P.* Geodesics on the tangent sphere bundle of a Riemannian manifold // Geom. Dedic. 1978. **7,** N 2. P. 233—244. 5. *Azo K.* Anote on the projection curves of geodesics of the tangent and tangent sphere bundles // Math. Repts Toyama Univ. 1988. **11.** P. 179—185. 6. *Ямпольский А. Л.* Характеризация проекций геодезических TCP^n // X Всесоюз. геометр. конф. Тез. докл./ Новосибирск, 1989. 120 с.

Поступила в редколлегию 16.10.89

СОДЕРЖАНИЕ

СБОРНИК НАУЧНЫХ ТРУДОВ

УКРАИНСКИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК

Выпуск 34

Редактор *Н. С. Калинина*
Художественный редактор *Т. П. Короленко*
Технический редактор *Г. П. Александрова*
Корректор *Л. П. Сыч*

ИБ № 14317

Сдано в набор 26.12.90. Подписано в печать 06.06.91. Формат $60 \times 90^1/_{16}$. Бум. газетная. Гарнитура литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 8,25. Усл. кр.-отт. 8,5. Уч.-изд. л. 10. Тираж 400 экз. Изд. № 2007. Зак. 498. Цена 2 р.

Издательство «Основа» при Харьковском государственном университете. 310003 Харьков, ул. Университетская, 16

Отпечатано с матриц книжной фабрики им. М. В. Фрунзе в Харьковской городской типографии № 16. 310003 Харьков, ул. Университетская, 16
Зак. 831.

РЕФЕРАТЫ

УДК 514

Одна оценка снизу для объема 4-мерного замкнутого многообразия / Ю. А. Аминов // Укр. геометр. сб. 1991. Вып. 34. С. 3—8.

Рассматривается замкнутое ориентируемое 4-мерное многообразие M^4, секционные кривизны которого удовлетворяют неравенствам $-1 \leqslant K \leqslant 1$. Если произведение кривизн ортогональных площадок неотрицательно и хотя бы в одной точке все кривизны отличны от нуля, то для объема M^4 получена оценка $\mathrm{vol}(M^4) > \frac{4}{9}\pi^2$. Установлена также теорема о локальном строении многообразия с малым объемом, кривизны которого в каждой точке одного знака.

Библиогр.: 7 назв.

УДК 514

О строении бесконечной полной выпуклой гиперповерхности в E^4 с ограниченной средней кривизной / А. А. Борисенко, Л. Н. Сергиенко // Укр. геометр. сб.1991. Вып. 34. С. 8—9.

Доказана

Теорема. Если на бесконечной полной выпуклой гиперповерхности F в E^4 средняя кривизна $1 - \varepsilon \leqslant H \leqslant 1$, где $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 10^{-11}$, то F — цилиндрическая гиперповерхность.

Библиогр.: 3 назв.

УДК 514

Трехмерные многообразия неположительной кривизны с малым радиусом инъективности / В. Г. Бородин // Укр. геометр. сб. 1991. Вып. 34. С. 10—19.

Доказано, что если радиус инъективности в каждой точке замкнутого трехмерного риманова многообразия с ограниченными секционными кривизнами не превосходит некоторой абсолютной константы, то многообразие является специальным графовым и его метрика локально расщепляется.

Библиогр.: 6 назв.

УДК 512.54

Графы, связанные с многообразием Адамара и группами его изометрий / С. В. Буяло // Укр. геометр. сб. 1991. Вып. 34. С. 19—31.

Многообразию Адамара X и дискретной группе его изометрий Γ сопоставляются три графа, множество вершин первого из них — само X, второго — все почти нильпонентные подгруппы в Γ, третьего — геометрические инварианты вершин второго графа, такие, как множества неподвижных точек, совокупности инвариантных прямых и т. д. Группа Γ действует на всех трех графах, и имеются отображения этих графов, эквивариантные относительно этих действий. Этот формализм позволяет дать простое доказательство следующей теоремы. Пусть M — n-мерное полное риманово многообразие с секционными кривизнами $-1 \leqslant K \leqslant 0$ и удовлетворяющее аксиоме видимости. Тогда существует такая точка $p \in M$, что радиус инъективности $\mathrm{Inj\,Rad}\,(p) \geqslant c\,(n)$, где постоянная $c(n) > 0$, зависит только от n. Приведены и другие результаты, полученные с помощью указанного формализма.

Библиогр. : 5 назв.

УДК 514.17

Бесконечные выпуклые многогранники с равноугольными гранями / А. М. Гурин // Укр. геометр. сб. 1991. Вып. 34. С. 31—39.

Рассматриваются в евклидовом трехмерном пространстве выпуклые многогранники, у котсрых каждая грань имеет равные плоские углы.

Ил. 14. Библиогр.: 10 назв.

УДК 514

Кручение подмногообразия риманова многообразия / А. А. Дудкин // Укр. геометр. сб. 1991. Вып. 34. С. 39—42.

Для подмногообразия M^n риманова многообразия M^q, используя только первую и вторую основные формы M^n, вводится понятие бивектора кручения в точке $x \in M^n$ для данных одномерного и двумерного направлений из $T_x M^n$. Устанавливается связь его с понятием гауссова кручения. Доказано: 1) равенство нулю бивектора кручения необходимо, а в случае, когда M^n — не развертывающаяся поверхность пространства постоянной кривизны и с ненулевой второй основной формой, то и достаточно для «уплощения» M^n в некоторое вполне геодезическое M^{n+1} в M^q; 2) независимость ненулевого бивектора кручения от направления при $n = 2$ характеризует минимальные M^2 в M^q.

Библиогр.: 6 назв.

УДК 514

Алгебраические поверхности с бесконечным множеством плоскостей косой симметрии II / В. Ф. Игнатенко // Укр. геометр. сб. 1991. Вып. 34. С. 42—51.

Пусть G есть бесконечная группа, порожденная косыми отражениями относительно гиперплоскостей, в вещественном пространстве E^m; μ_j -плоскости $\Pi^{\mu_j} = \Pi^{d_j} \oplus \Pi^{\gamma_j}$ $(j = \overline{0, q} = 1$ или $2)$ — линейные оболочки $G(u)$-орбит направлений симметрии u (через γ_j-плоскости Π^{γ_j} проходят сопряженные векторам Π^{d_j} гиперплоскости симметрии). Дается полное решение задачи о взаимном расположении трех Π^{γ_j}. Найдены системы образующих колец инвариантов ряда групп G.

Библиогр.: 9 назв.

УДК 513.81

Некоторые достаточные условия погружаемости в целом метрик положительной кривизны / С. Б. Климентов // Укр. геометр. сб. 1991. Вып. 34. С. 51—59.

Доказывается, что диффеоморфное кругу регулярное риманово многообразие положительной, отграниченной от нуля гауссовой кривизны погружаемо в трехмерное евклидово пространство в виде регулярной поверхности, если оно имеет малую L_p — норму градиента гауссовой кривизны, $p > 2$, либо если оно имеет достаточно малую площадь (с любым поведением геодезической кривизны края).

Библиогр.: 16 назв.

УДК 514

О группах, порожденных дискретными множествами отражений / А. И. Криворучко // Укр. геометр. сб. 1991. Вып. 34. С. 59—66.

Доказывается, что центроаффинная группа G, порождаемая дискретным G-инвариантным множеством отражений евклидова пространства E^3, дискретна. Строятся аффинные недискретные группы, порожденные отражениями в E^3, но содержащие лишь дискретные множества отражений.

Библиогр.: 6 назв.

УДК 514

Погружение n-мерных цилиндрических метрик в виде цилиндрических поверхностей в пространства Лобачевского / В. Т. Лисица // Укр. геометр. сб. 1991. Вып. 34. С. 66—69.

Введено определение l-мерных k-цилиндрических метрик и доказано, что k-цилиндрические метрики допускают погружение в виде k-цилиндрических поверхностей в пространство Лобачевского L^{l+p}, где коразмерность p погружения совпадает с коразмерностью погружения базы цилиндрической метрики в евклидово пространство или пространство Лобачевского.

Библиогр.: 6 назв.

УДК 514.013

Теоремы существования для регулярных замкнутых выпуклых поверхностей / А. И. Меданик // Укр. геометр. сб. 1991. Вып. 34. С. 69—80.

С помощью метода К. Миранды, развитого в РЖ Мат. 1972, 1А 1121 и 2А 917, исследуются вопросы существования для замкнутых выпуклых поверхностей, главные радиусы кривизны которых $R_1(n)$ и $R_2(n)$ удовлетворяют уравнению вида $R_1R_2 + \Phi(R_1 + R_2, R_1R_2, n) + cn = \varphi(n)$, где c — постоянный вектор, связанный с искомой поверхностью, а для $\varphi(n)$ имеет место условие замкнутости. При этом, в отличие от работ К. Миранды, не предполагается, что $\Phi_1 \geqslant 0$. Вместо этого условия требуется неотрицательность первых производных функции Φ по R_1 и R_2. Частным случаем доказанной общей теоремы является теорема существования для уравнения, функция Φ в котором равна обратной величине средней кривизны поверхности. Рассматривается также вопрос о распространении отдельных результатов К. Миранды на случай, когда Φ растет как $(R_1R_2)^{\mu}$, где $\mu > 1$.

Библиогр.: 4 назв.

УДК 513.813

О геодезических отображениях 3-симметрических римановых пространств / Й. Микеш, В. С. Собчук // Укр. геометр. сб. 1991. Вып. 34. С. 80—82.

Доказано, что 3-симметрические римановы пространства непостоянной кривизны, а также Риччи 3-симметрические римановы пространства, отличные от пространств Эйнштейна, не допускают нетривиальных геодезических отображений.

Библиогр.: 5 назв.

УДК 514

Вполне омбилические подмногообразия в $G(2, n)$. I. / Ю. А. Николаевский // Укр. геометр. сб. 1991. Вып. 34. С. 83—98.

Хорошо известно, что всякое вполне омбилическое подмногообразие в пространстве постоянной кривизны является малой сферой или вполне геодезично. Б.-Й. Ченом классифицированы вполне омбилические подмногообразия в КРОСП'ах (79—80 гг.): в частности, все они являются внешними сферами, т. е. имеют параллельный вектор средней кривизны H (либо вполне геодезично).

В работе классифицированы вполне омбилические подмногообразия F^l размерности $l \geqslant 3$ в «следующем по сложности» неприводимом симметрическом пространстве — многообразии Грассмана $G(2,n)$. Такие подмногообразия либо 1) вполне геодезичны (Чен, Нагано — 77 г.) либо 2) внешние сферы (малые сферы во вполне геодезических сферах — описано их расположение в $G(2, n)$), либо 3) существенно вполне омбиличны ($H \neq 0$, $\nabla^{\perp} H \neq 0$): тогда это или а) омбилическая гиперповерхность непостоянной средней кривизны во вполне геодезическом $S^l \times S^1 \subset G(2, n)$, или б) «косая диагональ» — диагональ произведения двух малых сфер разного радиуса во вполне геодезическом $S^{l+1} \times S^{l+1} \subset G(2, n)$ — она имеет постоянные среднюю и секционную кривизны.

Полностью описаны подмногообразия 3а) и 3б). Последнее из них дает отрицательный ответ на две гипотезы Чена. Показано, что подмногообразие $F^l \subset E^{l+2}$ ($l \geqslant 3$) с вполне омбилическим грассмановым образом имеет вполне геодезический грассманов образ и подпадает под классификацию (Николаевский — 90 г.).

Ил. 2. Библиогр.: 17 назв.

УДК 514

О соотношении между жесткостью k-го порядка и аналитической неизгибаемостью поверхностей / Н. Г. Перлова // Укр. геометр. сб. 1991. Вып. 34. С. 98—104.

Доказывается, что поверхность класса C^3, допускающая только одно линейно независимое бесконечно малое изгибание 1-го порядка и обладающая жесткостью k-го порядка ($k \geqslant 2$), является аналитически неизгибаемой. Этот результат может быть получен также из более общего результата И. Х. Сабитова (Тез.

докл. Всесоюз. конф. по геометрии «в целом». Новосибирск, 1987), доказательство которого, еще не опубликованное, основано на другой идее.
Библиогр.: 3 назв.

УДК 514

Лоренцевы многообразия с однородными пространственноподобными сечениями / М. А. Улановский // Укр. геометр. сб. 1991. Вып. 34. С. 105—112.

Изучаются лоренцевы многообразия V_n, фундаментальный тензор которых удовлетворяет уравнениям Эйнштейна с гидродинамическим тензором энергии-импульса и допускает группу движений с пространственноподобными орбитами коразмерности 1. Рассматриваются вопросы геодезической полноты и возможность вложения V_n' в лоренцево V_n', удовлетворяющее некоторым условиям.
Библиогр.: 4 назв.

УДК 514

База сильно параболического риманова многообразия / В. Г. Ушаков // Укр. геометр. сб. 1991. Вып. 34. С. 112—121.

Выделен класс метрик, которые могут быть базой только тривиальной (цилиндрической, цилиндроконической) сильно параболической метрики. Результат носит локальный характер. Основным инструментом исследования является конулевой оператор.
Библиогр.: 11 назв.

УДК 514

Характеризация проекций геодезических метрики Сасаки TCP^n и T_1CP^n / А. Л. Ямпольский // Укр. геометр. сб. 1991. Вып. 34. С. 121—126.

Рассматриваются кривые, являющиеся проекциями геодезических метрики Сасаки касательного и сферического касательного расслоений комплексного проективного пространства. Основной результат составляет

Теорема. Если Г — геодезическая TCP^n (T_1CP^n), то π_0 Г — кривая в CP^n, для которой кривизны $k_1, \ldots, k_5$ постоянны, а $k_6 = \ldots = k_{2n} = 0$.
Библиогр.: 5 назв.