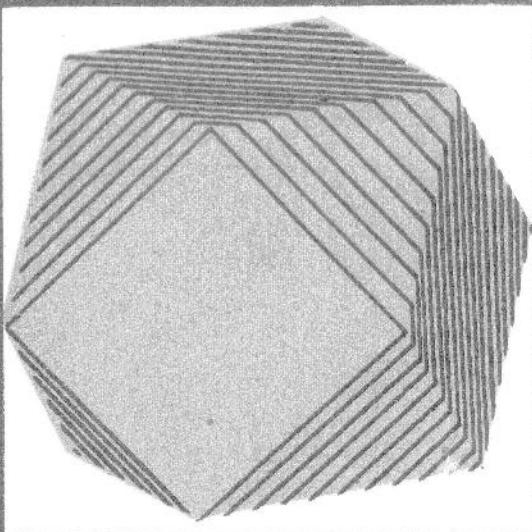


УКРАИНСКИЙ геометрический СБОРНИК

33 | 90



ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ СССР ПО НАРОДНОМУ ОБРАЗОВАНИЮ
ХАРЬКОВСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
И ОРДЕНА ДРУЖБЫ НАРОДОВ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. А. М. ГОРЬКОГО

УКРАИНСКИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК

Республиканский
межведомственный
научный
сборник

Основан в 1965 г.

ВЫПУСК 33

ХАРЬКОВ
ИЗДАТЕЛЬСТВО «ОСНОВА» ПРИ ХАРЬКОВСКОМ
ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ
1990

Сборник посвящен геометрии в целом. Рассматриваются функционально-вырожденные погружения плоскости Лобачевского в E^4 ; цилиндрические многомерные поверхности в пространстве Лобачевского; изометрические погружения сильно параболических метрик в классе сильно параболических поверхностей; римановы гильбертовы подмногообразия неположительной внешней кривизны; подмногообразия, кривизна гессманова образа которых не меньше 1; косые расслоения Хопфа; устойчивость минимальной поверхности в псевдоевклидовом пространстве; пересечения аффинных диаметров выпуклого тела и другие вопросы геометрии.

Для научных работников математических специальностей.

Редакционная коллегия: А. В. Погорелов (отв. ред.), А. А. Борисенко (зам. отв. ред.), Л. Н. Омельченко (отв. секр.), Ю. А. Аминов, В. Ф. Игнатенко, Е. А. Косячевская, А. И. Медянник, А. Д. Милка, В. И. Михайловский, Н. С. Синюков, М. А. Улановский

Ответственный за выпуск Л. Н. Омельченко

Адрес редакционной коллегии: 310077 Харьков, пл. Дзержинского, 4, Харьковский университет, механико-математический факультет, кафедра геометрии, тел. 45-74-92

Редакция литературы по естественным наукам и филологии

Зав. редакцией Е. П. Иващенко

У 1602050000 - 021
М 226 (04) - 50 - 90

© Харьковский государственный
университет, 1990

Г. М. АЛЛАЕВ, В. И. МИХАИЛОВСКИЙ

**О БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ ИЗГИБАНИЯХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА
ГЛАДКИХ ВЫПУКЛЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ,
ПОДЧИНЕННЫХ ВДОЛЬ КРАЯ КОНИЧЕСКИМ ВТУЛОЧНЫМ СВЯЗЯМ**

В работах [4, 5] исследовались бесконечно малые изгибаия регулярных класса C^2 поверхностей вращения положительной [4] и отрицательной [5] гауссовой кривизны, на которые вдоль края были наложены конические втулочные связи.

В настоящей работе результаты [4] обобщаются на случай гладких выпуклых поверхностей вращения.

Полученные результаты сформулированы и доказаны в виде теоремы.

Теорема. На произвольной замкнутой гладкой выпуклой поверхности вращения Φ , полюса которой не являются точками уплощения, существует лишь счетное множество параллелей γ_n , каждая из которых рассекает поверхность Φ на две части так, что одна из них Φ_{γ_n} допускает нетривиальные бесконечно малые изгибаия, в процессе которых все точки ее края γ_n (параллели γ_n) перемещаются по направлению заданной соосной с поверхностью конической втулке K_a . Последовательность таких параллелей γ_n сходится к параллели γ^* , которая обладает свойствами 1) касательный конус к поверхности Φ вдоль параллели γ^* ортогонален втулке K_a ; 2) поверхность Φ_{γ^*} , которую отсекает от поверхности Φ параллель γ^* , в указанном классе деформаций обладает жесткостью первого порядка.

Доказательство. Следуя методу Кон-Фоссена [1] отнесем радиус-вектор произвольной точки поверхности вращения к подвижному трехграннику $\{0, \vec{k}, \vec{a}(v), \vec{a}'(v)\}$, где \vec{k} — единичный постоянный вектор, направленный по оси вращения; $\vec{a}(v)$ — единичный вектор, перпендикулярный к оси вращения, который с изменением v описывает окружность единичного радиуса с центром на оси вращения и длиной дуги, равной v . Векторы \vec{k} и $\vec{a}(v)$ определяют меридианную плоскость.

Радиус вектор произвольной точки поверхности вращения относительно выбранного тэак координатного базиса можно представить в следующем виде:

$$\vec{x}(u, v) = u \vec{k} + \rho(u) \vec{a}(v), \quad 0 \leq v \leq 2\pi, \quad 0 \leq u \leq b,$$

где $\rho = \rho(u)$ — уравнение меридиана поверхности вращения. Линии $u = \text{const}$ являются параллелями, линии $v = \text{const}$ — меридианами.

Поскольку поверхность Φ выпуклая, гладкая и ее полюсы не являются точками уплощения поверхности Φ , то

$$\rho(u) \in C^1, \quad \rho(0) = \rho(b) = 0, \quad \rho'(u) > 0, \quad 0 < u < b, \quad (1)$$

$\rho'(u)$ — монотонно убывающая функция, при этом $\rho'(u) \rightarrow +\infty$ при $u \rightarrow 0$ и $\rho'(u) \rightarrow -\infty$ при $u \rightarrow b$.

Пусть

$$\vec{z}(u, v) = \varphi(u, v) \vec{k} + \psi(u, v) \vec{a}(v) + \chi(u, v) \vec{a}'(v) \quad (2)$$

— поле бесконечно малого изгибаия поверхности Φ . Для поверхности вращения вектор-функция $\vec{z}(u, v)$, а следовательно, и скалярные функции $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$, $\chi(u, v)$ являются периодическими функциями относительно переменной v с периодом $T = 2\pi$. Поэтому, разложив функции $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$, $\chi(u, v)$ в ряды Фурье

$$\begin{aligned} \varphi(u, v) &= \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{n1}(u) \cos nv + \varphi_{n2}(u) \sin nv; \quad \psi(u, v) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_{n1}(u) \cos nv + \\ &+ \psi_{n2}(u) \sin nv; \quad \chi(u, v) = \sum_{n=0}^{\infty} \chi_{n1}(u) \cos nv + \chi_{n2}(u) \sin nv \end{aligned} \quad (3)$$

для определения коэффициентов Фурье $\varphi_{ni}(u)$, $\psi_{ni}(u)$, $\chi_{ni}(u)$ ($i = 1, 2$) из основной системы дифференциальных уравнений, описывающей бесконечно малые изгибаия поверхности Φ :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \rho'(u) \frac{\partial \psi}{\partial u} = 0; \quad \psi + \frac{\partial \chi}{\partial v} = 0; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \rho'(u) \left(\frac{\partial \psi}{\partial v} - \chi \right) + \rho(u) \frac{\partial \chi}{\partial u} = 0, \quad (4)$$

получим такую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi'_{n1}(u) + \rho'(u) \psi'_{n1}(u) = 0, \\ \varphi'_{n2}(u) + \rho'(u) \psi'_{n2}(u) = 0, \\ n(\varphi_{n2}(u) + \rho'(u)[n\psi_{n2}(u) - \chi_{n1}(u)] + \rho(u)\chi'_{n1}(u)) = 0, \\ \psi_{n1}(u) + n\chi_{n2}(u) = 0, \\ \psi_{n2}(u) - n\chi_{n1}(u) = 0, \\ -n\varphi_{n1}(u) + \rho'(u)[-n\psi_{n1}(u) - \chi_{n2}(u)] + \rho(u)\chi'_{n2}(u) = 0. \end{array} \right. \quad (5)$$

Исключив из этой системы функции $\psi_{n1}(u)$ и $\psi_{n2}(u)$, получим уравнения

$$\varphi'_{n1}(u) - n\rho'(u)\chi'_{n2}(u) = 0, \quad (6.1)$$

$$\varphi'_{n2}(u) + n\rho'(u)\chi'_{n1}(u) = 0, \quad (6.2)$$

$$n\varphi_{n2}(u) + (n^2 - 1)\chi_{n1}(u) + \rho(u)\chi'_{n1}(u) = 0, \quad (6.3)$$

$$-n\varphi_{n1}(u) + (n^2 - 1)\chi_{n2}(u) + \rho(u)\chi'_{n2}(u) = 0. \quad (6.4)$$

Поскольку уравнения (6.1), (6.3) формально могут быть получены из (6.2), (6.4) заменой n на $-n$, то очевидно, что для рассматриваемой задачи достаточно провести исследования системы, состоящей из уравнений:

$$\begin{aligned} \varphi'_n(u) + n\rho'(u)\chi'_n(u) &= 0; \quad n\varphi_n(u) + (n^2 - 1)\rho'(u)\chi_n(u) + \\ &+ \rho(u)\chi'_n(u) = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Сегмент поверхности Φ , отсекающийся параллелью $\gamma: u = c$ и соответствующий значениям $u \in [0, c]$, $c < a$, будем обозначать через Φ_c или Φ_c .

Заметим, что из условия непрерывности изгибаия следует, что в полюсе функции $\varphi_n(u)$ и $\chi_n(u)$ обращаются в нуль.

Краевое условие, при котором нужно интегрировать систему (7) в случае, когда на поверхность $\tilde{\Phi}$ вдоль края $u = \tilde{u}$ наложены связи, определяемые конической втулкой K_α , можно представить в виде [5]

$$n\chi_n(\tilde{u}) - \operatorname{tg} \alpha \varphi_n(\tilde{u}) = 0, \quad (8)$$

где α — угол, который образуют прямолинейные образующие втулки K_α с осью вращения.

Так как $\varphi_n(0) = \chi_n(0) = 0$, то краевое условие (8) с учетом первого уравнения системы (7) можно представить в таком виде:

$$\int_0^{\tilde{u}} (\rho'(u) + \operatorname{ctg} \alpha) \chi_n(u) du = 0. \quad (9)$$

Очевидно, для доказательства первой части теоремы достаточно доказать, что на промежутке $[0, b]$ существует лишь счетное множество таких значений $u = u_n$, что система дифференциальных уравнений (7) при целых $n \geq 2$ имеет на промежутке $[0, u_n]$ нетривиальное ограниченное решение, удовлетворяющее краевому условию (8) или, то же самое, условию (9).

Обозначим через $u = u^*$ то значение u , при котором

$$\rho'(u^*) + \operatorname{ctg} \alpha = 0. \quad (10)$$

Рассмотрим интеграл

$$J(u) = \int_0^u (\rho'(u) + \operatorname{ctg} \alpha) \chi'_n(u) du, \quad u \geq u^*. \quad (11)$$

Разобьем промежуток интегрирования $[0, u]$ на два промежутка $[0, u^*]$ и $[u^*, u]$. Тогда

$$J(u) = \int_0^{u^*} (\rho'(u) + \operatorname{ctg} \alpha) \chi'_n(u) du + \int_{u^*}^u (\rho'(u) + \operatorname{ctg} \alpha) \chi'_n(u) du. \quad (12)$$

Так как функция $\rho'(u)$ монотонно убывает, а $\chi'_n(u)$ для $u \in (0, b)$ [2], то

$$J(u^*) = \int_0^{u^*} (\rho'(u) + \operatorname{ctg} \alpha) \chi'_n(u) du > 0$$

$$J(u^*) = \frac{\varphi_n(u^*)}{n} + \operatorname{ctg} \alpha \chi_n(u^*) = A,$$

где A — некоторое положительное число.

Поскольку $\int_{u^*}^u (\rho'(u) + \operatorname{ctg} \alpha) \chi'_n(u) du$ при $u \rightarrow b$ монотонно убывает от 0 до $-\infty$, то для каждого целого $n \geq 2$ найдется только одно такое значение $u = u_n$, что $\int_{u^*}^u (\rho'(u) + \operatorname{ctg} \alpha) \chi'_n(u) du = -A$, а следовательно,

$$J(u_n) = \int_0^{u_n} (\rho'(u) + \operatorname{ctg} \alpha) \chi'_n(u) du. \quad (13)$$

Докажем, что последовательность $\{u_n\}$ монотонно убывает, т. е. $u_m < u_k$ для $m > k$.

Согласно определению u_m и u_k имеем $J(u_m) = 0$, $J(u_k) = 0$.

Рассмотрим интеграл

$$J_{km} = \int_{u_k}^{u_m} (\rho'(u) + \operatorname{ctg} \alpha) \chi'_k(u) du. \quad (14)$$

Поскольку $\chi'_k(u) > 0$ на $(0, u)$, а $u = u_m$ и $u = u_k$ принадлежат промежутку $[u^*, b]$, на котором $\rho'(u) + \operatorname{ctg} \alpha < 0$, то подынтегральная функция в равенстве (14) на указанном промежутке интегрирования принимает отрицательные значения. Поэтому, исходя из свойств определенного интеграла, для доказательства того факта, что последовательность $\{u_n\}$ монотонно убывает, достаточно показать, что для $m > k$ выполняется неравенство

$$J_{km} = \int_{u_k}^{u_m} (\rho'(u) + \operatorname{ctg} \alpha) \chi'_k(u) du > 0. \quad (15)$$

Поскольку $J(u_k) = 0$, то

$$J_{km} = \int_{u_k}^{u_m} (\rho'(u) + \operatorname{ctg} \alpha) \chi'_k(u) du = \int_0^{u_m} (\rho'(u) + \operatorname{ctg} \alpha) \chi'_k(u) du. \quad (16)$$

Обозначим $\rho'(u) + \operatorname{ctg} \alpha = q(u)$. Тогда равенство (16) запишется в виде

$$J_{km} = \int_0^{u_m} q(u) d\chi_k(u). \quad (17)$$

Так как $q(u)$ — непрерывная функция, а $\chi_k(u)$ — функция ограниченной вариации, то J_{km} есть интеграл Стильеса.

Разобьем точками $u_0 = 0 < u_1 < u_2 < \dots < u_{l-1} < u_l = u_m$ промежуток $[0, u_m]$ на части и, положив $\lambda = \max \Delta u_j$ ($j = \overline{0, l-1}$) запишем интегральную сумму для интеграла Стильеса (17):

$$J_{km} = \int_0^{u_m} q(u) d\chi_k(u) + \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{j=1}^{l-1} q(u_{j+1}) [\chi_k(u_{j+1}) - \chi_k(u_j)]. \quad (18)$$

Преобразуем эту сумму следующим образом:

$$J_{km} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left\{ \sum_{j=0}^{l-1} q(u_{j+1}) [\chi_k(u_{j+1}) - \chi_k(u_j)] = \right.$$

$$\left. = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left\{ q(u_m) \chi_k(u_m) - \sum_{j=1}^{l-1} [q(u_{j+1}) - q(u_j)] \chi_k(u_j) \right\}. \quad (19) \right.$$

Поскольку функция $\rho'(u)$ монотонно убывает, то

$$\Delta q(u_j) = q(u_{j+1}) - q(u_j) = \rho'(u_{j+1}) - \rho'(u_j) < 0.$$

Поэтому

$$-\sum_{j=1}^{l-1} \Delta q(u_j) \chi_k(u_j) > 0. \quad (20)$$

Как известно [3], для всех $u \in (0, u_m)$ при $m > k$ выполняется неравенство

$$\frac{\chi'_k(u)}{\chi_k(u)} \leq \frac{\chi'_m(u)}{\chi_m(u)}.$$

Так как $\chi_n(u) > 0$ для всех $u \in (0, b)$, то из неравенства (17) находим

$$\left(\frac{\chi_k(u)}{\chi_m(u)} \right)' \leq 0.$$

Отсюда следует, что для $u_m > u$

$$\frac{\chi_k(u)}{\chi_m(u)} > \frac{\chi_k(u_m)}{\chi_m(u_m)}. \quad (21)$$

Учитывая неравенство (21), получаем

$$J_{km} > \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left\{ q(u_m) \chi_k(u_m) - \sum_{j=1}^{l-1} \frac{\chi_k(u_m)}{\chi_m(u_m)} \chi_m(u_j) \Delta q(u_j) \right\} =$$

$$= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\chi_k(u_m)}{\chi_m(u_m)} \left\{ q(u_m) \chi_m(u_m) - \sum_{j=1}^{l-1} \chi_m(u_j) [q(u_{j+1}) - q(u_j)] \right\} =$$

$$= \frac{\chi_k(u_m)}{\chi_m(u_m)} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left\{ \sum_{j=0}^{l-1} q(u_{j+1}) [\chi_m(u_{j+1}) - \chi_m(u_j)] \right\} = \frac{\chi_k(u_m)}{\chi_m(u_m)} \int_0^{u_m} q(u) d\chi_m =$$

$$= \frac{\chi_k(u_m)}{\chi_m(u_m)} \int_0^{u_m} (\rho'(u) + \operatorname{ctg} \alpha) \chi'_m(u) du = 0.$$

Таким образом, $J_{km} > 0$. Значит, последовательность $\{u_n\}$ монотонно убывает. Поскольку эта последовательность ограничена снизу (так как $u_n \geq u^*$ для всех n), то она имеет предел.

Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u^*$. Для нахождения этого предела воспользуемся равенством (8). Если принять во внимание второе уравнение системы (7), равенству (8) можно придать следующий вид:

$$\rho(u_n) \frac{\chi'_n(u_n)}{(n^2 - 1)\chi_n(u_n)} + \rho'(u_n) + \frac{n^2}{n^2 - 1} \operatorname{ctg} \alpha = 0. \quad (22)$$

Так как при любом фиксированном $c \in (u^*, b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\chi'_n(c)}{(n^2 - 1)\chi_n(c)} = 0$ (см. [3]), то, переходя к пределу в равенстве (22), получим $\rho'(\tilde{u}) + \operatorname{ctg} \alpha = 0$. Отсюда, учитывая равенство (10) и монотонность функции $\rho'(u)$, приходим к выводу, что $\tilde{u} = u^*$.

Теорема доказана.

При доказательстве теоремы можно также воспользоваться идеями работы [6].

Список литературы: 1. Кон-Фоссен С. Э. Некоторые вопросы дифференциальной геометрии в целом. М., 1959. 160 с. 2. Александров А. Д. О бесконечно малых изгибаниях нерегулярных поверхностей // Мат. сб. 1936. 1, вып. 43, № 3. С. 307—321. 3. Андрейчин Е. Р., Сабитов И. Х. Обобщение теоремы Рембса на общие выпуклые поверхности вращения // Укр. геометр. сб. 1983. Вып. 26. С. 13—24. 4. Михайловский В. И., Шеркузев М. Бесконечно малые изгибы первого порядка поверхностей вращения положительной Гауссовой кривизны при конических втулочных связях. Дифф. геометрия многообразий // Сб. науч. тр. Ташкент, 1980. С. 34—45. 4. Михайловский В. И. Нескінченно малі згинання поверхонь обертання від'ємної кривизни при конічних втулочных в'язях // Докл. АН. 1962. № 8. 80 с. 6. Милка А. Д. О точках относительной нежесткости выпуклой поверхности вращения // Укр. геометр. сб. 1965. Вып. 1. С. 65—74.

Поступила в редакцию 12.12.88

УДК 514

Ю. А. АМИНОВ

О ФУНКЦИОНАЛЬНО-ВЫРОЖДЕННЫХ ПОГРУЖЕНИЯХ ПЛОСКОСТИ
ЛОБАЧЕВСКОГО В E^4

Функционально-вырожденной поверхностью F^2 в E^4 будем называть такую поверхность, у которой параметры эллипса нормальной кривизны α, β, a, b — координаты его центра α, β в нормальной плоскости, и величины полуосей a, b являются некоторыми функциями от одной функции $t(P)$ точки P поверхности, т. е. $\alpha = \alpha(t), \beta = \beta(t), a = a(t), b = b(t)$. Этот класс является обобщением класса поверхностей, допускающих движение по себе вдоль некоторого семейства линий.

Рассмотрим изометрические погружения областей плоскости Лобачевского L^2 с кривизной $K = -1$ в четырехмерное евклидово пространство E^4 с нулевым гауссовым кручением. В этом случае одна из полуосей, например, $b = 0$. Эллипс кривизны вырождается в отрезок.

Теорема. Не существует регулярного класса C^6 изометрического погружения всей плоскости L^2 в E^4 с нулевым гауссовым кручением в виде функционально-вырожденной поверхности.

Заметим, что если область L^2 погружена в E^3 , то на ней выполняются соотношения $\beta = b = 0$, а в силу формулы Картана для гауссовой кривизны $K = \alpha^2 + \beta^2 - a^2 - b^2$ имеет место $-1 = \alpha^2 - a^2$. Это означает, что такие поверхности являются функционально-вырожденными. Поэтому теорема содержит в себе теорему Гильберта о поверхностях постоянной отрицательной кривизны.

1. Погружения областей L^2 в E^4 с нулевым гауссовым кручением рассматривались нами в [1, 4]. В этом случае на поверхности можно ввести ортогональные координаты u_1, u_2 , в которых линейный элемент примет вид $ds^2 = \cos^2\Theta (\sin^2\omega du_1^2 + \cos^2\omega du_2^2)$, причем

$$\alpha = \frac{\operatorname{ctg} \omega}{\cos \theta}, \quad \beta = \operatorname{tg} \theta, \quad a = \frac{1}{\sin \omega \cos \theta}.$$

Таким образом, для функционально-вырожденного погружения можем считать, что $\omega = \omega(\Theta)$. Система уравнений погружения Гаусса — Кодаци — Риччи для погружения плоскости Лобачевского L^2 в E^4 с нулевым гауссовым кручением имеет вид двух дифференциальных уравнений второго порядка на функции ω и Θ [1]:

$$\omega_{u_1 u_1} - \omega_{u_1 u_1} - (\operatorname{tg} \theta \operatorname{tg} \omega \theta_{u_2})_{u_1} - (\operatorname{tg} \theta \operatorname{ctg} \omega \theta_{u_1})_{u_1} = \cos^2 \Theta \sin \omega \cos \omega, \quad (1)$$

$$\left(\frac{\operatorname{ctg} \omega \theta_{u_1}}{\cos \theta} \right)_{u_2} + \left(\frac{\operatorname{tg} \omega \theta_{u_2}}{\cos \theta} \right)_{u_1} = 0. \quad (2)$$

2. В случае $\Theta = \text{const}$, который соответствует погружению в 3-мерную сферу S^3 или в E^3 , уравнение (1) отличается от уравнения погружения L^2 в E^3 только на постоянный множитель в правой части $\cos^2 \Theta$. Доказательство в этом случае следует доказательству Гильберта. Если Θ зависит от одного аргумента, например u_1 , воспользуемся другой формой записи систем (1), (2) в терминах функций H_1, H_2, H_3 и β_{12} [1]. В рассматриваемом случае эта система имеет вид

$$\frac{\partial H_1}{\partial u_1} = -\beta_{12} H_2 - \beta_{13} H_3, \quad \frac{\partial H_2}{\partial u_1} = \beta_{12} H_1, \quad \frac{\partial H_3}{\partial u_1} = \beta_{13} H_1, \quad \frac{\partial \beta_{12}}{\partial u_1} = H_1 H_2.$$

Из первых трех уравнений следует, что $H_1^2 + H_2^2 + H_3^2 = \text{const}$. Умножим четвертое уравнение на $2\beta_{12}$. Тогда, используя второе

уравнение, получим $\frac{\partial^2 \beta_{12} - H_2^2}{\partial u_1^2} = 0$. Следовательно, $\beta_{12} = \pm \sqrt{H_2^2 + c}$, где c — постоянная. Поэтому, принимая во внимание второе уравнение, получим

$$\frac{\frac{1}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial u_1}}{\sqrt{H_2^2 + c}} = \pm 1.$$

Если s_1 — длина дуги координатной линии u_1 , то $H_2 + \sqrt{H_2^2 + c} = e^{s_1 + c_1}$, где c_1 — постоянная. Правая часть при неограниченном

изменении s_1 от $-\infty$ до $+\infty$ неограничена. Но $H_2 < \text{const}$. Поэтому имеет противоречие.

В дальнейшем будем предполагать, что Θ отлично от постоянной и $\Theta_{u_i} \neq 0$, $i = 1, 2$.

Рассмотрим уравнение (2), принимая во внимание условие $\omega = \omega(\Theta)$. В этом случае его можно переписать в таком виде: $\Theta_{u_1 u_2} + \Theta_{u_1} \Theta_{u_2} [\operatorname{tg} \Theta - 2 \operatorname{ctg} 2\omega \theta] = 0$. Допустим, $\Theta_{u_i} \neq 0$. Тогда получим

$$\frac{\partial \ln \Theta_{u_i}}{\partial u_j} - \frac{\partial \ln \cos \theta}{\partial u_j} - \frac{\partial \ln \sin 2\omega}{\partial u_j} = 0,$$

где $i \neq j$. Следовательно, $\Theta_{u_i} = A_i(u_i) \sin 2\omega \cos \theta$, $i = 1, 2$, где $A_i(u_i)$ — функции от одного аргумента. Введем новые координаты на поверхности: $x = \int A_1(u_1) du_1$, $y = \int A_2(u_2) du_2$. Тогда можем записать $\theta_x = \theta_y = \sin 2\omega \cos \theta$. Далее введем координаты $p = x + y$, $q = x - y$. Находим $\theta_p = \frac{1}{2}(\theta_x + \theta_y) = \sin 2\omega \cos \theta$, $\theta_q = 0$.

Поэтому Θ является функцией только от одного аргумента p . Далее преобразуем уравнение (1). Имеем

$$\omega_{,i} = \omega_\theta A_i \sin 2\omega \cos \theta, \quad \omega_{u_i u_i} = (\omega_\theta \sin 2\omega \cos \theta)_\theta \sin 2\omega \cos \theta A_i^2 + \omega_\theta \sin 2\omega \cos \theta A_{i u_i}.$$

Перейдем к координатам x , y . Можем записать $\frac{dx}{du_1} = A_1(u_1)$. Следовательно,

$$A_{1 u_1} = A_1 x \frac{dx}{du_1} = \frac{1}{2} (A_1^2)_x.$$

Обозначим $A_1^2(u_1(x)) = a(x)$, $A_2^2(u_2(y)) = b(y)$. Выражения вторых производных от ω записываются в таком виде:

$$\omega_{u_1 u_1} = (\omega_\theta \sin 2\omega \cos \theta)_\theta \sin 2\omega \cos \theta a + \omega_\theta \sin 2\omega \cos \theta \frac{a_x}{2}.$$

Аналогичное выражение для $\omega_{u_2 u_2}$ с заменой a на b . Далее можно записать $(\operatorname{tg} \theta \operatorname{ctg} \omega_{u_1})_{u_1} = 2(\sin \theta \cos^2 \omega)_\theta \sin 2\omega \cos \theta a + \sin \theta \cos^2 \omega a_x$, $(\operatorname{tg} \theta \operatorname{tg} \omega_{u_2})_{u_2} = 2(\sin \theta \sin^2 \omega)_\theta \sin 2\omega \cos \theta b + \sin \theta \sin^2 \omega b_y$.

Обозначим $I = (\sin^2 \omega)_\theta \cos \theta$, $\psi(\theta) = \cos^2 \theta \sin 2\omega / 2$, $F_1(\theta) = (I - 2 \sin \theta \sin^2 \omega)_\theta \sin 2\omega \cos \theta$, $F_2(\theta) = -(I + 2 \sin \theta \cos^2 \omega)_\theta \sin 2\omega \cos \theta$, $F_3(\theta) = \frac{I}{2} - \sin \theta \sin^2 \omega$, $F_4(\theta) = -\frac{I}{2} - \sin \theta \cos^2 \omega$. Заметим, что $F_1 = 2(F_3)_p$, $F_2 = 2(F_4)_p$. Уравнение (1) можно переписать в таком виде:

$$F_1(\theta) b + F_2(\theta) a + F_3(\theta) b_y + F_4(\theta) a_x = \psi(\theta). \quad (3)$$

3. Рассмотрим сначала тот случай, когда a и b — постоянные. Сокращая на $\sin 2\omega \cos \theta$ и интегрируя по θ , получаем

$$\omega_\theta \sin 2\omega \cos \theta (b - a) - \sin \theta (\sin^2 \omega b + \cos^2 \omega a) = \frac{\sin \theta + c_1}{2}, \quad (4)$$

где c_1 — некоторая постоянная.

Если $a = b$, то с учетом $a > 0$ и $b > 0$ следует, что $\Theta = \text{const}$. Поэтому будем предполагать, что $a \neq b$. Уравнение (4) можно представить как линейное дифференциальное уравнение для $X = \sin^2 \omega$ ($b - a$) + a :

$$\cos \theta \frac{dX}{d\theta} - 2 \sin \theta X = \frac{\sin \theta + c_1}{2}.$$

Интегрируя это уравнение, получаем связь функций ω и Θ :

$$\sin^2 \omega b + \cos^2 \omega a = \frac{(\sin \theta + c_1)^2 + c_2}{4 \cos^2 \theta}. \quad (5)$$

Интегрируя выражение $\theta_p = \sin 2\omega \cos \theta$, получаем связь функции θ с координатами u_i :

$$\int \frac{d\theta}{\sin 2\omega \cos \theta} = p = A_1 u_1 + A_2 u_2. \quad (6)$$

4. Вернемся теперь к общему случаю, когда a и b могут являться некоторыми функциями своих аргументов. Имеет место

Лемма. Если $\Theta \not\equiv \text{const}$, то функции a и b — постоянные. Заметим, что

$$a(x) = a\left(\frac{p+q}{2}\right), \quad b(y) = b\left(\frac{p-q}{2}\right).$$

Сначала рассмотрим случай, когда обе функции a и b отличны от постоянной. Продифференцируем уравнение (3) по q четыре раза. Получим четыре однородных линейных уравнения:

$$\begin{aligned} -F_1 b' + F_2 a' - F_3 b'' + F_4 a''' &= 0; \\ F_1 b'' + F_2 a'' + F_3 b''' + F_4 a'''' &= 0; \\ -F_1 b''' + F_2 a'''' - F_3 b^{(IV)} + F_4 a^{(IV)} &= 0; \\ F_1 b^{(IV)} + F_2 a^{(IV)} + F_3 b^{(V)} + F_4 a^{(V)} &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Рассматриваем эту систему для определения F_t . Не все F_t равны нулю, так как если все $F_t = 0$, то $\psi(\theta) = 0$, а это противоречит регулярности погружения. Введем четырехмерные векторы

$$r(y) = \begin{pmatrix} -b' \\ b'' \\ -b''' \\ b^{(IV)} \end{pmatrix}, \quad \rho(x) = \begin{pmatrix} a' \\ a'' \\ a''' \\ a^{(IV)} \end{pmatrix}.$$

Должно выполняться уравнение: определитель $[r(y)r'(y)\rho(x) \times \rho'(x)] = 0$. Это означает, что между векторами имеется линейная зависимость. Зафиксируем $y = y_0$. Можем записать $\rho'(x) = \lambda(x)\rho(x) + \mu(x)r(y) + v(x)r'(y)$, где λ, μ, v — функции от x . Решая это уравнение относительно $\rho(x)$, получаем $\rho(x) = r(y)\varphi_1(x) + r'(y)\varphi_2(x) + d\varphi_3(x)$. Здесь d — некоторый вектор, не зависящий от x ; $\varphi_i(x)$ — функции от x . Следовательно, $\rho(x)$ раскладывается через три постоянных вектора $r(y), r'(y)$ и d , т. е. $\rho(x)$ лежит в некотором трехмерном пространстве E^3 , проходящем через начало координат и эти векторы.

Это означает, что найдется постоянный вектор $A = (a_1, a_2, a_3, a_4)$, ортогональный $r(x)$ при всех x . Таким образом, функция $a(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами

$$a_4 a^{(IV)} + a_3 a''' + a_2 a'' + a_1 a' = 0.$$

Покажем, что вектор $r(y)$ лежит в пространстве E^3 при всех y . Пространство E^3 и вектор $\bar{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ определены векторами $r(y), r'(y), d$, где $y = y_0$ — некоторое фиксированное число. Поэтому $(\bar{A}r(y_0)) = 0$. Умножим первое из уравнений (7) на a_1 , второе — на a_2 и т. д. и сложим. Тогда $F_1(\bar{A}r(y)) + F_3(\bar{A}r'(y)) = 0$. Поэтому функция $(\bar{A}r(y))$ удовлетворяет линейному однородному уравнению. Если $F_3 = 0$, то $F_1 = 0$ и $\sin \omega = c/\cos \Theta$. Из (7) следует, что $F_2 = kF_4$, где $k = \text{const}$. Из этих двух соотношений вытекает, что $\Theta \equiv \text{const}$.

Если $F_1^2 + F_3^2 \neq 0$, то отсюда следует, что $(\bar{A}r(y)) \equiv 0$. Таким образом, функция $b(y)$ удовлетворяет уравнению с постоянными коэффициентами $a_4 b^{(IV)} - a_3 b''' + a_2 b'' - a_1 b' = 0$.

Запишем систему уравнений

$$\begin{aligned} F_1 b + F_2 a + F_3 b' + F_4 a' &= \psi(\theta); \\ -F_1 b' + F_2 a' - F_3 b'' + F_4 a'' &= 0; \\ F_1 b'' + F_2 a'' + F_3 b''' + F_4 a''' &= 0; \\ -F_1 b''' + F_2 a''' + F_3 b^{(IV)} + F_4 a^{(IV)} &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Первое уравнение умножим на a_1 , второе на a_2 , третье на a_3 , четвертое на a_4 . Складывая их, получаем $F_1(a_1 b - a_2 b' + a_3 b'' - a_4 b''') + F_2(a a_1 + a' a_2 + a'' a_3 + a''' a_4) = \psi(\theta) a_1$. Имеем равенства

$$a_1 b - a_2 b' + a_3 b'' - a_4 b''' = c_0,$$

$$a_1 a + a_2 a' + a_3 a'' + a_4 a''' = d_0,$$

где c_0, d_0 — постоянные числа. Поэтому имеем уравнение

$$F_1(\theta) c_0 + F_2(\theta) d_0 = \psi(\theta) a_1. \quad (9)$$

Приходим к уже рассмотренному случаю, когда предполагалось, что A_i — постоянные. Покажем, что c_0 и d_0 равны нулю. Интегрируя это уравнение, находим связь функций ω и Θ :

$$\sin^2 \omega c_0 + \cos^2 \omega d_0 = \frac{a_1 (\sin \theta + c_1)^2 + c_2}{4 \cos^2 \theta}, \quad (10)$$

где c_1, c_2 — постоянные. Допустим $c_0^2 + d_0^2 \neq 0$.

Рассмотрим теперь уравнение (3) с учетом связи ω с Θ , которая дается соотношением (10). Коэффициент $F_1(\theta)$ имеет вид

$$F_1(0) = [(\sin^2 \omega)_0 \cos \theta - 2 \sin \theta \sin^2 \omega]_0 \sin 2\omega \cos \theta.$$

Так как

$$\sin^2 \omega = \frac{1}{c_0 - d_0} \left\{ \frac{a_1 (\sin \theta + c_1)^2 + c_2}{4 \cos^2 \theta} - d_0 \right\},$$

то выражение в квадратных скобках, которое совпадает с $2F_3(\theta)$,
после подстановки приобретает вид

$$2F_3(\theta) = [(\sin^2 \omega)_\theta \cos \theta - 2 \sin \theta \sin^2 \omega] = \frac{(a_1 + 4d_0) \sin \theta + c_1 a_1}{2(c_0 - d_0)}.$$

Следовательно,

$$F_1(\theta) = \frac{a_1 + 4d_0}{2(c_0 - d_0)} \cos^2 \theta \sin 2\omega.$$

Обозначим

$$\frac{a_1 + 4d_0}{4(c_0 - d_0)} = \lambda, \quad \frac{a_1 + 4c_0}{4(c_0 - d_0)} = \mu, \quad \frac{c_1 a_1}{4(c_0 - d_0)} = v.$$

Аналогичным способом находим коэффициенты при a и a_x : $F_2(\theta) = -2\mu \cos^2 \theta \sin 2\omega$, $F_4(\theta) = -(\mu \sin \theta + v)$. Уравнение (3) можно переписать в виде $2(\lambda b - \mu a) \cos^2 \theta \sin 2\omega + (\lambda \sin \theta + v)b_y - (\mu \sin \theta + v)a_x = \cos^2 \theta \sin \omega \cos \omega$.

Используя соотношение $\cos^2 \theta \sin 2\omega = (\sin \theta + c_1)_p$ и интегрируя по p , получаем $4(\lambda \sin \theta + v)b - 4(\mu \sin \theta + v)a = \sin \theta + c_3$. Последнее уравнение запишем так:

$$\Phi_1(\theta)b + \Phi_2(\theta)a = \Phi_3(\theta). \quad (11)$$

Дифференцируя по q два раза, получаем

$$-\Phi_1 b' + \Phi_2 a' = 0; \quad \Phi_1 b'' + \Phi_2 a'' = 0. \quad (12)$$

Если $\Phi_1^2 + \Phi_2^2 = 0$, то $\Theta = \text{const}$. Этот случай был рассмотрен. Поэтому $b'a'' + a'b'' = 0$ или

$$\frac{a''}{a'} = -\frac{b''}{b'}.$$

Левая часть есть функция от x , правая — от y . Поэтому эти отношения равны некоторому постоянному числу k . Если $k = 0$, то функции a и b — линейные. Этот случай рассмотрим ниже. Будем считать $k \neq 0$.

Можем найти $a = L_1 e^{kx} + L_2$, $b = M_1 e^{-ky} + M_2$, где L_i , M_i — постоянные. Подставив эти выражения в первое уравнение (12), получим связь θ с $p = x + y$:

$$\frac{\lambda \sin \theta + v}{\mu \sin \theta + v} = \sigma e^{kp},$$

где $\sigma = L_1/M_1$. Обозначим $k p \sigma = w$. Находим

$$\sin \theta = \frac{v(w-1)}{\lambda - \mu w}. \quad (13)$$

Если c_1 , а вместе с ним и v равны нулю, то отсюда следует, что $\Theta = \text{const}$. Поэтому будем считать, что $v \neq 0$. Используем соотношение

$$(\sin \theta)_p = \cos^2 \theta \sin 2\omega, \quad (14)$$

причем левую часть найдем, используя связь Θ с p (13), а для правой

используем связь ω с Θ (10). Возвышая правую и левую часть в квадрат, сокращая на знаменатель, получаем уравнение после подстановки выражения $\sin \Theta$:

$$[(\lambda - \mu)vk\omega]^2 = -4 [w^2 T_1 + 2wT_2 + T_3][w^2 N_1 + 2wN_2 + N_3],$$

где

$$\begin{aligned} T_1 &= v^2(\lambda - 2\mu) + \rho_1\mu^2, & N_1 &= -\mu(v^2 - \rho_2\mu), \\ T_2 &= \mu(v^2 - \lambda\rho_1), & N_2 &= \lambda(v^2 - \rho_2\mu), \\ T_3 &= -\lambda(v^2 - \lambda\rho_1), & N_3 &= v^2(\mu - 2\lambda) + \rho_2\lambda^2, \\ \rho_1 &= \frac{a_1c_1^2 + c_2 - 4d_0}{4(c_0 - d_0)}, & \rho_2 &= \frac{a_1c_1^2 + c_2 - 4c_0}{4(c_0 - d_0)}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что либо T_1 , либо N_1 , либо оба этих выражения равны нулю. Не ограничивая общности, можем считать $T_1 = 0$. Предположим, что $N_1 \neq 0$. Тогда обязательно $T_2 = 0$. По предположению $N_1 \neq 0$, поэтому $\mu \neq 0$. Из вида T_2 следует $v^2 - \lambda\rho_1 = 0$. Поэтому $T_3 = 0$, но это невозможно, так как выражение в левой части отлично от нуля. Поэтому считаем, что $N_1 = 0$. Если $\mu = 0$, то и $T_2 = 0$. Но тогда в правой части будет выражение, линейное по w , что невозможно. Поэтому $v^2 - \rho_2\mu = 0$, но тогда и $N_2 = 0$. Получаем, что в правой части выражение линейное по w .

5. Итак, допущение, что $c_0^2 + d_0^2 \neq 0$, приводит либо к противоречию, либо к условию $0 \equiv \text{const}$. Поэтому будем считать, что $c_0 = d_0 = 0$. Тогда и $a_1 = 0$. Интегрируя уравнения па a и b , получаем

$$\begin{aligned} a''a_4 + a_3a' + aa_2 &= \bar{c}_0 \\ b''a_4 - a_3b' + ba_2 &= \bar{d}_0, \end{aligned}$$

где \bar{c}_0 и \bar{d}_0 — постоянные. Умложим первое уравнение системы (8) на a_2 , второе на a_3 , третье на a_1 . Складывая их, получаем уравнение, аналогичное (9). Если $\bar{c}_0^2 + \bar{d}_0^2 \neq 0$, то уже рассмотренным способом придет к противоречию. Повторяя рассуждения, придет к условиям $a'' = 0$ и $b'' = 0$. Поэтому $a = \lambda x + c$, $b = \mu y + d$, где λ , μ , c , d — постоянные. Будем считать, что λ и μ отличны от нуля. Из уравнения $-F_1b' + F_2a' = 0$ следует, что

$$\lambda \cos^2 \omega - \mu \sin^2 \omega = \frac{c_1 \sin \theta + c_2}{\cos^2 \theta}. \quad (15)$$

Так как $\Theta \neq \text{const}$, то $\lambda + \mu \neq 0$. Уравнение (3) записывается в виде $F_1(\mu y + d) + F_2(\lambda x + c) + F_3\mu + F_4\lambda = \psi(\Theta)$. Так как $-F_1\mu + F_2\lambda = 0$, то $-F_3\mu + F_4\lambda = c_3$. Можем переписать уравнение в таком виде:

$$[2F_4(\lambda\rho + e)]_p = \psi(\theta) + c_3 = \left[\frac{\sin \theta + 2c_3\rho}{2} \right]_p.$$

Следовательно, $2F_4 = \frac{\sin \theta + 2c_3\rho + c_4}{2(\lambda\rho + e)}$.

С другой стороны, используя (15) и определение F_4 , находим

$$2F_4 = \frac{1}{\lambda + \mu} \{c_1 - 2\mu \sin \theta\}.$$

Сравнивая эти два выражения, находим, что

$$\sin \theta = \frac{Ap + B}{Cp + D},$$

где A, \dots, D — постоянные, причем $C = 4\mu\lambda \neq 0$. Опять используем уравнения (14) и (15). Получим

$$\frac{(AD - BC)^2}{(Cp + D)^4} = -4 [c_1 \sin \theta + c_2 + \mu \cos^2 \theta] [c_1 \sin \theta + c_2 - \lambda \cos^2 \theta].$$

Заметим, что $AD - BC \neq 0$, так как $\Theta_p \neq 0$. Обозначим $k = c_2 + \mu$, $L = c_2 - \lambda$.

Запишем выражение в первой квадратной скобке справа:

$$c_1 \sin \theta + c_2 + \mu \cos^2 \theta = \frac{1}{(Cp + D)^2} \{ -\mu (Ap + B)^2 + c_1 (Ap + B) \times \\ \times (Cp + D) + k (Cp + D)^2 \} = \frac{1}{(Cp + D)^2} \{ p^2 K_1 + p K_2 + K_3 \}, \quad (16)$$

где

$$K_1 = -\mu A^2 + c_1 AC + KC^2; \quad K_2 = -2\mu AB + c_1 (AD + BC) + \\ + 2KCD; \quad K_3 = -\mu B^2 + c_1 BD + KD^2.$$

Аналогично получим

$$c_1 \sin \theta + c_2 - \lambda \cos^2 \theta = \frac{1}{(Cp + D)^2} \{ p^2 L_1 + p L_2 + L_3 \},$$

где $L_1 = \lambda A^2 + c_1 AC + LC^2$; $L_2 = 2\lambda AB + c_1 (AD + BC) + 2CDL$; $L_3 = \lambda B^2 + c_1 BD + LD^2$. Так как произведение выражений в фигурных скобках (16), (17) должно быть постоянным, отличным от пуля, то имеем систему уравнений $K_1 L_1 = 0$, $K_1 L_2 + K_2 L_1 = 0$, $K_1 L_3 + K_2 L_2 + K_3 L_1 = 0$, $K_2 L_3 + K_3 L_2 = 0$.

Должно выполняться неравенство $K_3 L_3 \neq 0$. Не ограничивая общности, можем считать, что $K_3 = 0$. Покажем, что и $L_1 = 0$. Действительно, из второго уравнения следует, что $K_2 L_1 = 0$. Пусть $K_2 = 0$. Из третьего уравнения, так как $K_3 \neq 0$, следует, что $L_1 = 0$. Покажем, что K_2 и L_2 равны нулю. Имеем из третьего уравнения $K_2 L_2 = 0$. Если $K_2 = 0$, то из четвертого уравнения следует $L_2 = 0$. Если же $L_2 = 0$, то из четвертого уравнения следует $K_2 = 0$. Итак, имеем четыре уравнения $K_1 = L_1 = 0$, $K_2 = L_2 = 0$. Рассмотрим пару уравнений $K_1 = L_1 = 0$:

$$-\mu A^2 + c_1 AC + KC^2 = 0; \quad \lambda A^2 + c_1 AC + LC^2 = 0.$$

Так как $K - L = \mu + \lambda$, то, складывая левые части этих уравнений, получаем: $-(\mu + \lambda)A^2 + (\mu + \lambda)C^2 = 0$. Так как $\mu + \lambda \neq 0$, то $A^2 = C^2$. Далее рассмотрим пару уравнений $K_2 = L_2 = 0$: $-2\mu AB + c_1 (AD + BC) + 2KCD = 0$; $2\lambda AB + c_1 (AD + BC) + 2LCD = 0$.

Из этой системы следует $AB - CD = 0$. Поэтому $AD - BC = 0$, что противоречит предположению $\Theta_p \neq 0$. Итак, случай, когда a и b — линейные функции, невозможен.

6. Рассмотрим случай, когда одна из функций, например, $\phi = \text{const}$, а функция a отлична от постоянной. Имеем уравнения $F_1 b + F_2 a + F_4 a' = \psi$, $F_2 a' + F_4 a'' = 0$. Зафиксируем p , тогда F_1 , F_2 , F_4 и ψ — постоянные. Если $F_4 = 0$, то и $F_2 = 0$. Из уравнения $F_1 b = \psi$ следует, что $b = \text{const}$. Из уравнения $F_4 = 0$ следует, что $\cos^2 \omega = c_1 / \cos^2 \Theta$, а из $F_1 b = \psi$ следует, что $\sin^2 \omega = [(sin \Theta + c_1)^2 + C_2] / 4bc \cos^2 \Theta$. Поэтому в данном случае $\Theta = \text{const}$. Будем далее предполагать, что $F_4 \neq 0$. Следовательно,

$$\frac{a''}{a'} = -\frac{F_2}{F_4} = 2k,$$

где k — постоянное число. Будем предполагать, что $k \neq 0$. Следовательно,

$$a = \frac{1}{2k} e^{2kx+d_1} + a_0, \quad F_2 + 2kF_4 = 0.$$

Подставив в первое уравнение, получим $F_1 b + F_2 a_0 = \psi$. С помощью уравнения $F_2 + 2kF_4 = 0$ получим $2F_4 = (\cos^2 \omega)_0 \cos \Theta - 2 \sin \theta \cos^2 \omega = e^{-2kp+d_1}$, где d_1 — постоянная. С помощью уравнения $F_1 b + F_2 a_0 = \psi$ получим

$$\sin^2 \omega b + \cos^2 \omega a_0 = \frac{(\sin \theta + c_1)^2 + c_2}{4 \cos^2 \theta}. \quad (18)$$

Опять можем предполагать, что $b \neq a_0$. Выразив из последнего соотношения $\cos^2 \omega$, подставим его в F_4 . Получим

$$F_4 = -\frac{[(1+4a_0) \sin \theta + c_1]}{4(b-a_0)} = e^{-2kp+d_1}. \quad (19)$$

Это уравнение дает связь Θ с p . Проверим выполнение равенства (14). Так как мы предполагаем, что $k \neq 0$, то $1+4a_0 \neq 0$. Имеем

$$-\frac{(1+4a_0) \cos \theta \rho}{4(b-a_0)} = -2ke^{-2kp+d_1} = -\frac{(1+4a_0)}{4(b-a_0)} \sin 2\omega \cos^2 \theta.$$

Возвышая в квадрат, получаем

$$4k^2 e^{-4kp+2d_1} = A [(1+4a_0) \sin^2 \theta + 2c_1 \sin \theta + c_1^2 + c_2 - 4a_0] \times \\ \times [(1+4b) \sin^2 \theta + 2c_1 \sin \theta + c_1^2 + c_2 - 4b],$$

где $A = (1+4a_0)^2 / (b-a_0)^4$. Если оба коэффициента $(1+4a_0)$ и $(1+4b)$ отличны от нуля, то в правой части будет выражение $e^{-8kp+4d_1}$. Так как $A \neq 0$, то $1+4a_0 \neq 0$. Пусть $1+4b=0$. Тогда это уравнение не приводит к противоречию. Имеем $c_1 = 0$, $b-a_0 = -\frac{1+4a_0}{4}$. Имеем

$$4k^2 e^{-4kp+2d_1} = \frac{1}{(1+4a_0)^2} \{ (1+4a_0) \sin^2 \theta + c_2 - 4a_0 \} (c_2 - 4b).$$

Из уравнения (19) находим $\sin \theta = \rho \omega + \lambda$, где $\rho = -\frac{b-a_0}{1+4a_0} = \frac{1}{4}$, $\lambda = \frac{c_1}{1+4a_0} = 0$, $\omega = e^{-2kp+d_1}$.

Обозначим $D = c_2 - 4a_0$, $L = c_2 - 4b$. Получим

$$4k^2 e^{-4kp+2d_1} = \frac{L}{(1+4a_0)^2} \left\{ \frac{(1+4a_0)}{16} \omega^2 + D \right\}.$$

Повому $D = 0$ и $c_2 = 4a_0$. Используя (18), $b = -\frac{1}{4}$ и $c_2 = 4a_0$, получим $\operatorname{tg}^2 \Theta + \sin^2 \omega = 0$, что невозможно.

Если $k = 0$, то $F_2 = 0$, $a' = \text{const} = 2\lambda$, $F_4 = \text{const} = \mu$. Следовательно, $\cos^2 \omega = (2\mu \sin \Theta + c_1) / \cos^2 \Theta$. Подставив это выражение в уравнение $F_1 b + \mu \lambda = \psi / \Theta$, находим вторую связь ϕ и Θ : $\sin 2\omega = -4\mu \lambda / 5 \cos^2 \Theta$. Используя ранее полученное выражение для $\cos^2 \omega$, устанавливаем $\Theta = \text{const}$. Итак, лемма полностью доказана.

7. Переходим к доказательству теоремы. Приведем два способа доказательства.

Первый способ. Покажем, что угол γ между линией $\Theta = \text{const}$ и координатной линией $u_2 = \text{const}$ постоянны вдоль линии $\Theta = \text{const}$. Действительно,

$$\cos \gamma = \frac{\theta_{u_2} E}{\sqrt{\theta_{u_1}^2 G + \theta_{u_2}^2 E} \sqrt{E}} = \frac{A_2}{\sqrt{A_1^2 \cos^2 \omega + A_2^2 \sin^2 \omega \cos^2 \theta \sin \omega}}.$$

Таким образом, $\gamma = \gamma(\Theta)$. В точках $\Theta = \text{const}$ поверхность имеет одинаковые эллипсы нормальной кривизны, (т. е. эллипсы конгруэнты), которые одинаковым образом расположены относительно соответствующей точки поверхности. При изменении направления в касательной плоскости поверхности соответствующая точка на эллипсе нормальной кривизны оббегается одинаковым образом. Действительно, для направления, касательного к линии $\Theta = \text{const}$, соответствующие точки на эллипсах будут совмещаться движением. По теореме С. Б. Кадомцева [2] поверхность в этом случае допускает движение по себе вдоль линии $\Theta = \text{const}$. Семейство линий, ортогональных к линиям $\Theta = \text{const}$, составлено из геодезических линий. Мы находимся в условиях теоремы Э. Р. Розендорна [3] о геликоидальных поверхностях.

Второй способ. Имеем связь Θ с координатами u_1 , u_2 (6). Обозначим $f(\Theta) = [(\sin \Theta + c_1)^2 + c_2] / 4 \cos^2 \Theta$, тогда

$$\sin^2 \omega \cos^2 \omega = -\frac{(f(0) - A_1^2)(f(0) - A_2^2)}{A_1^2 - A_2^2}.$$

Так как $A_1^2 \neq A_2^2$, то обе скобки одновременно в ноль не обращаются. Можем записать

$$f(\Theta) - A_i = \frac{(\sin \Theta + c_0)^2 + c_1 - 4 \cos^2 \theta A_i^2}{4 \cos^2 \theta}.$$

Числитель этого выражения обозначим через $P_i(\omega)$, где $\omega = \sin \theta$. Если все нули полиномов $P_1(\omega)$ и $P_2(\omega)$ различны, то интеграл

$$\int \frac{2(A_2^2 - A_1^2) d\omega}{\sqrt{-P_1(\omega) P_2(\omega)}}$$

с учетом $|\omega| \ll 1$ есть ограниченная по модулю величина. Действительно, в окрестности точки обращения в ноль одного из полиномов $p_1(\omega)$ или $P_2(\omega)$ этот интеграл приближенно имеет вид

$$\int \frac{F(\omega) d\omega}{V \overline{\omega - \omega_0}},$$

где $F(\omega)$ — ограниченная по модулю функция. Следовательно, этот интеграл ограничен. В то же время он равен $A_1 u_1 + A_2 u_2$. Если имеем погружение всей плоскости Лобачевского, то эта величина неограничена. Пришли к противоречию. Допустим, полином $P_1(\omega)$ имеет два совпадающих нуля, т. е. можно записать $P_1 = (\omega - \omega_0)^2$. Тогда полином $P_2(\omega)$ нельзя записать в виде $(\omega - \omega_1)^2$, так как произведение полиномов $P_1 P_2$ должно быть отрицательно. Будем предполагать, что нули полинома $P_2(\omega)$ различны. Рассмотрим длину координатной линии u_1 . Она равна

$$\begin{aligned} \int V \bar{E} du_1 &= \int \cos \theta \sin \omega du_1 = \int \frac{\cos \theta \sin \omega}{\frac{\partial \theta}{\partial u_1}} d\theta = \int \frac{d\theta}{2A_1 \cos \omega} = \\ &= \int \frac{\sqrt{A_1^2 - A_2^2} \cos \theta d\theta}{A_1 \sqrt{P_2(\omega)}} = \frac{\sqrt{A_1^2 - A_2^2}}{A_1} \frac{dw}{\sqrt{P_2(\omega)}}. \end{aligned}$$

Так как нули $P_2(\omega)$ различны, то определенный интеграл, взятый по ограниченному интервалу изменения ω , будет ограниченным. В то же время длина каждой координатной линии на полной поверхности должна быть неограниченна. Полученное утверждение доказывает теорему.

Список литературы: 1. Аминов Ю. А. О погружениях n -мерного пространства Лобачевского в 2 n -мерное евклидово пространство с n полями главных направлений / Укр. геометр. сб. 1985. Вып. 28. С. 3—8. 2. Кадомцев С. Б. Исследование вопросов единственности двумерных поверхностей в евклидовых пространствах / Пробл. геометрии. 1977. 8. С. 243—256. 3. Розендорн Э. Р. К вопросу о погружении двумерных римановых метрик в четырехмерное евклидово пространство / Вестн. Моск. ун-та, сер. Математика и механика. 1979, № 2. С. 47—50. 4. Аминов Ю. А. Изометрические погружения областей n -мерного пространства Лобачевского в евклидовые пространства с плоской нормальной связностью: Модель калибровочного поля / Мат. сб. 1988. Вып. 137 : 3. С. 275—298.

Поступила в редакцию 28.11.88

УДК 514

А. А. БОРИСЕНКО, В. Г. УШАКОВ

**ОБ ИЗОМЕТРИЧЕСКОМ ПОГРУЖЕНИИ СИЛЬНО ПАРАБОЛИЧЕСКИХ
МЕТРИК В КЛАССЕ СИЛЬНО ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ**

Пусть отображение Φ_n^l ставит в соответствие каждой поверхности $F^l \subset E^n$ ее метрику, индуцированную из E^n .

В работах [1, 2] был предложен следующий подход к классификации многомерных римановых многообразий и многомерных поверхностей в евклидовом пространстве. Пусть заданы

- I. R^l — некоторый класс l -мерных римановых метрик;
 - II. S_n^l — некоторый класс l -мерных поверхностей в E^n ;
 - III. G — группа преобразований E^n , содержащая группу подобий.
- При этом R^l, S_n^l, G удовлетворяют следующим условиям: 1. $\Phi_n^l(S_n^l) \subset R^l$, т. е. каждая поверхность $F^l \in S_n^l$, несет на себе метрику из R^l . 2. Отображение $\Phi_n^l : S_n^l \rightarrow R^l$ сюръективно, т. е. каждая риманова метрика из R^l допускает изометрическое погружение в E^n в виде поверхности из S_n^l . 3. $G(S_n^l) = S_n^l$, т. е. класс S_n^l инвариантен относительно группы G . 4. Если поверхность $F^l \in (\Phi_n^l)^{-1}(R^l)$ такова, что $\Phi_n^l(G(F^l)) \subset R^l$, то $F^l \in S_n^l$.

Определение. Поверхность F^l , несущая метрику из R^l , называется *G-устойчивым погружением* этой метрики в классе R^l , если при любом преобразовании $g \in G$ образ поверхности $g(F^l)$ несет метрику из R^l .

Используя введенное определение, условие 4 можно переформулировать так: *G-устойчивое погружение* (в классе R^l) метрики из R^l принадлежит S_n^l . Заметим, что по заданным R^l и G с помощью условия 4 класс S_n^l определяется однозначно.

Введем классы сильно параболических метрик и сильно параболических поверхностей.

Определения. Для риманова многообразия M индекс дефектности (внутренний нуль-индекс) $\mu(Q)$ в точке $Q \in M$ есть размерность подпространства $T_Q(Q) = \{x \in T_QM : R(x, y) = 0 \forall y \in T_QM\}$, где T_QM — пространство, касательное к M в точке Q ; $R(x, y)$ — оператор кривизны (в локальных координатах $R(x, y) = R_{isq}^l x^i y^q$, R_{isq}^l — компоненты тензора кривизны Римана).

Для поверхности F^l в евклидовом пространстве E^n индекс относительной дефектности (внешний нуль-индекс) $v(Q)$ в точке $Q \in F^l$ есть размерность подпространства

$$T^*(Q) = \{x \in T_QF^l : A_{\xi}(x) = 0 \quad \forall \xi \in N_QF^l\},$$

где T_QF^l — касательное; N_QF^l — нормальное пространства к F^l в точке Q ; оператор $A_{\xi} : T_QF^l \rightarrow T_QF^l$ такой, что $\langle A_{\xi}(x), y \rangle = \langle A(x, y), \xi \rangle$, где $A(x, y)$ — вторая основная форма $F^l \subset E^n$, \langle , \rangle — скалярное произведение в E^n .

Эти понятия были введены в работе [3]. Риманово многообразие M^l называется сильно k -параболическим, если $\mu(Q) \geq k$ в каждой точке $Q \in F^l$. Поверхность $F^l \subset E^n$ называется сильно k -параболической, если $v(Q) \geq k$ в каждой точке $Q \in F^l$.

Далее нам будет удобно пользоваться сокращениями: k -СПМ — сильно k -параболическая метрика, k -СПП — сильно k -параболическая поверхность.

Пусть R^l — класс аналитических k -СПМ, S_n^l — класс аналитических k -СПП, а G — группа невырожденных аффинных преобразований евклидова пространства E^n . При этом n зависит от l , и конкретная

нависимость должна определяться условием 2. Условия 1 и 3 очевидным образом выполнены. Справедливость условия 4 доказана в [4]. Вопрос о выполнении условия 2 (т. е. погружается ли изометрически произвольная аналитическая k -СПМ в классе аналитических k -СПП в евклидовом пространстве произвольной размерности) до сих пор оставался открытым. В этой работе дается отрицательный ответ на этот вопрос уже в простейшем случае $l = 3, k = 1$. А именно справедлива

Теорема. Существуют аналитические сильно 1-параболические 3-мерные метрики, не погружающиеся локально в классе аналитических сильно 1-параболических поверхностей в евклидовом пространстве произвольной размерности.

Лемма 1. Сильно 1-параболическая 3-мерная аналитическая метрика зависит от трех функций двух переменных.

Лемма 2. Сильно 1-параболическая 3-мерная аналитическая метрика, погружающаяся в классе сильно 1-параболических поверхностей в евклидово пространство произвольной размерности, зависит от двух функций двух переменных.

Теорема является непосредственным следствием этих двух лемм.

Доказательства будем проводить методом подвижного репера и методом внешних форм Картана.

Все наши рассуждения относятся к локальной проблеме.

1. Доказательство леммы 1. Риманово многообразие M^l с параметризацией $\alpha: D \subset E^l \rightarrow M^l$ в каждой точке имеет стандартный голономный базис $\left\{ \frac{\partial}{\partial u^i} \right\}_1^l$, и риманова метрика задается как набор функций $g_{ij}(\alpha) = \left\langle \frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j} \right\rangle$.

Существует двойственный способ задания римановой метрики на M^l : в каждой точке выбирается ортонормированный репер $\{e_i(\alpha)\}_1^l$, гладко зависящий от α . Тогда $\langle \xi, \eta \rangle = \sum_1^l \xi^i \eta^i$, где $\xi^i = \langle e_i, \xi \rangle$ — координата вектора ξ в репере $\{e_i\}_1^l$. Репер строится в виде $e_i = -\lambda_i^l \frac{\partial}{\partial u^l}$, коэффициенты восстанавливаются по метрическому тензору g_{ij} . Справедливо и обратное: если задан набор векторов $e_i = -\lambda_i^l \frac{\partial}{\partial u^l}$ и известно, что он ортонормирован, то не составляет труда восстановить $g_{ij} = \left\langle \frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j} \right\rangle$. Таким образом, набор ортонормированных векторов $\{e_i(\alpha)\}_1^l$ является удобным способом «хранения» метрики. Для наших целей более полезным оказывается набор линейно-независимых форм $\{\omega^i(\alpha)\}_1^l$, дуальный к реперу $\{e_i(\alpha)\}_1^l$, т. е. $\omega^i(e_j) = \delta_j^i$. Заметим, что если $e_i = \lambda_i^l \frac{\partial}{\partial u^l}$, то $\omega^i = \mu_i^l du^l$, где

матрица $(\mu_i^l)_{i,l=1}^l$ обратна к $(\lambda_i^l)_{i,l=1}^l$. Дифференциал длины дуги $ds^2 =$

$= \sum_1^l (\omega^i)^2$. При этом дифференциал параметризации $d\boldsymbol{u} = du^i \frac{\partial}{\partial u^i} = \omega^i e_i$. Дифференциалы векторов репера также могут быть разложены по $\{e_i\}_1^l : de_i = \psi_i^j e_j$, $\psi_i^j + \psi_i^j = 0$; ψ_i^j — формы связности. Кроме того, на многообразии определены также формы кривизны $\Omega_i^j = \frac{1}{2} R_{isq}^j \omega^s \wedge \omega^q$, где R_{isq}^j — компоненты тензора кривизны Римана — Кристоффеля в базисе $\{e_i\}_1^l$. Формы ω^i , ψ_i^j , Ω_i^j связаны между собой следующими соотношениями:

$$d\omega^i = -\psi_i^j \wedge \omega^j, \quad \Omega_i^j = d\psi_i^j + \omega_i^k \wedge \psi_k^j, \quad \Omega_i^j + \Omega_i^j = \psi_i^j + \psi_i^j = 0. \quad (1.1)$$

Здесь d — символ внешнего дифференцирования. Система уравнений (1.1) называется уравнениями структуры риманова многообразия [5, 6].

При замыкании уравнений структуры получаются I и II тождества Бианки:

$$\Omega_i^j \wedge \omega^j = 0, \quad d\Omega_i^j = \Omega_s^j \wedge \psi_i^s - \psi_s^j \wedge \Omega_i^s. \quad (1.2)$$

Перейдем непосредственно к нашей задаче. Исследуя 1-СПМ на M^3 , мы выбираем специальным образом подвижный репер $\{e_i\}_1^3$, что налагает условия на форму кривизны Ω_i^j . Получив систему структурных уравнений, исследуем ее на инволютивность. При этом мы будем пользоваться критерием Картана инволютивности системы внешних форм, понятием продолжения системы [7].

Выберем вектор e_3 в направлении СП. Векторы e_1 и e_2 пока оставим произвольными, лишь бы репер $\{e_i\}_1^3$ был ортонормирован и гладко изменялся от точки к точке. При таком выборе подвижного репера условия СПМ будут записываться так:

$$\Omega_3^1 = \Omega_3^2 = 0. \quad (1.3)$$

Подставив это равенство в (1.2) и учитывая кососимметричность Ω_i^j по верхнему и нижнему индексам, получим

$$\Omega_2^1 \wedge \omega^1 = \Omega_2^1 \wedge \omega^2 = 0, \quad d\Omega_2^1 = 0, \quad \Omega_2^1 \wedge \psi_3^1 = \Omega_2^1 \wedge \psi_3^2 = 0. \quad (1.4)$$

Из первого уравнения системы (1.4) следует, что 2-форма Ω_2^1 разлагается по базису $\{\omega^1 \wedge \omega^2\}$ так, что $\Omega_2^1 = R \omega^1 \wedge \omega^2$ (1.5), где R — некоторая функция точки. Тогда из последнего уравнения (1.4) получаем

$$\psi_3^1 \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 = \psi_3^2 \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 = 0. \quad (1.6)$$

Для дальнейшей работы нам нужно разложить формы ψ_i^j по базису ω^i :

$$\psi_i^j = \Gamma_{sj}^i \omega^j. \quad (1.7)$$

Из (1.6) следует, что $\Gamma_{33}^1 = \Gamma_{33}^2 = 0$, т. е. интегральная кривая векторного поля e_3 (поля СП) — геодезическая. (Это, вообще говоря,

известный результат. См., например, [8]). В самом деле, дифференциал e_3 в направлении e_3 равен

$$d_{e_3} e_3 = \psi_3^i(e_3) e_i = \Gamma_{33}^i e_i = \Gamma_{33}^1 e_1 + \Gamma_{33}^2 e_2 = 0.$$

Теперь мы еще более сузим выбор репера. Вектор e по-прежнему направим по линии СП, а векторы e_1 и e_2 выберем произвольно (с условием ортонормированности и гладкости) на некоторой 2-мерной поверхности $M^2 \subset M^3$, трансверсальной линиям СП. В дальнейшем эту поверхность будем называть базой. Вдоль линий СП репер перенесем параллельно. (В силу геодезичности линий СП e_3 останется касательным, и уравнения (1.3) останутся справедливыми.) Аналитически это условие на выбор репера таково:

$$\Gamma_{33}^1 = \Gamma_{33}^2 = \Gamma_{23}^1 = 0, \quad (1.8)$$

Т. е. теперь в разложении (1.7) участвуют только формы ω^1 и ω^2 . Подставим (1.5), (1.7), (1.8) в (1.1) и второе уравнение (1.4):

$$\begin{aligned} d\omega^i &= \Gamma_{sq}^i \omega^s \wedge \omega^q, \\ d\Gamma_{2i}^1 \wedge \omega^i &+ (\Gamma_{2i}^1 \Gamma_{sq}^i + \Gamma_{3s}^1 \Gamma_{2q}^i) \omega^s \wedge \omega^q - R \omega^1 \wedge \omega^2 = 0, \\ d\Gamma_{3i}^1 \wedge \omega^i &+ (\Gamma_{3i}^1 \Gamma_{sq}^i + \Gamma_{2s}^1 \Gamma_{3q}^i) \omega^s \wedge \omega^q = 0; \\ d\Gamma_{3i}^2 \wedge \omega^i &+ (\Gamma_{3i}^2 \Gamma_{sq}^i + \Gamma_{2s}^2 \Gamma_{3q}^i) \omega^s \wedge \omega^q = 0; \\ dR \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 &+ R(\Gamma_{31}^1 + \Gamma_{32}^1) \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 = 0; \\ \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 &\neq 0. \end{aligned} \quad (1.9) \quad (1.10)$$

Система (1.9) с условием независимости (1.10) является замкнутой внешней дифференциальной системой на СПМ.

Количество независимых переменных $n = 3$, зависимых $r = 7$ (Γ_{ii} , Γ_{ij} и R). Дальнейшее рассуждение будет проводиться для 10-мерного пространства зависимых и независимых переменных.

Будем искать решение системы (1.9, 1.10), проходящее через начало координат. Для этого найдем 3-мерную площадку, касательную к решению и однозначно проектируемую на плоскость независимых переменных. По ней решение восстанавливается однозначно. Площадка ищется индуктивным способом: сначала выбирается одномерный интегральный элемент $e_1 = \text{span}\{a_1\}$, касательный к решению. Затем выбирается двумерный интегральный элемент $e_2 = \text{span}\{a_1, a_2\}$ и, наконец, трехмерный интегральный элемент $e_3 = \text{span}\{a_1, a_2, a_3\}$. При этом на выбор e_1 налагаются s_0 условий. При фиксированном e_2 на выбор e_3 налагаются $s_0 + s_1$ условий. При фиксированном e_2 на выбор e_3 налагаются $s_0 + s_1 + s_2$ условий. Пусть $s_3 = r - (s_0 + s_1 + s_2)$. Неотрицательные числа s_0, s_1, s_2, s_3 называются характерами Картана. Если система в инволюции, то решение зависит от s_0 постоянных, s_1 функций одной переменной, s_2 функций двух переменных, s_3 функций трех переменных. Правда, изучая произвол решения внешней дифференциальной системы, имеет смысл обращать внимание только на старший (по номеру) отличный от нуля характер Картана. Он в отличие от остальных инвариантен при заменах координат.

Векторы $\{\alpha_i\}_1^3$ удобно выбирать так, чтобы их проекции на плоскость независимых переменных совпадали с $\{e_i\}_1^3$. Тогда интегральный элемент e_1 удовлетворяет уравнениям $\omega^2 = \omega^3 = 0$, e_2 — уравнению $\omega^3 = 0$, а для e_3 — ω^1 , ω^2 , ω^3 любые. Такой выбор интегральных элементов облегчает подсчет характеров.

В нашей системе отсутствуют уравнения первой степени. Поэтому условия $\omega^2 = \omega^3 = 0$ на e_1 обращают в нуль все уравнения и $s_0 = 0$. Интегральный элемент e_1 произведен в пространстве зависимых переменных. Его проекция на пространство независимых переменных фиксирована. Условие $\omega^3 = 0$ дает три соотношения, т. е. на интегральный элемент e_2 налагаются $s_1 = 3$ условия. На e_3 налагаются еще 4 условия — три из квадратичных уравнений и одно из кубического; $s_2 = 4$; $s_3 = r = (s_0 + s_1 + s_2) = 0$.

Чтобы выяснить, находится ли система в инволюции, применяется критерий Картана, который состоит в следующем: вычисляются два целых числа N и Q , связанных соотношением $N \leq Q$. Если $N = Q$, то система в инволюции. Если $N < Q$, то система нуждается в продолжении. Число $Q = s_1 + 2s_2 + \dots + nS_n$. Число N вычисляется следующим образом: во внешнюю дифференциальную систему представляются дифференциалы зависимых переменных, записанные в виде линейной комбинации независимых линейных форм ω^i с коэффициентами μ_j^i , $j = \overline{1, n}$ — число независимых переменных, $i = \overline{1, r}$ — число зависимых переменных. После приведения подобных коэффициенты при независимых формах приравниваются нулю, что дает соотношения на μ_j^i . Число N равно количеству свободных параметров из набора $\{\mu_j^i\}$. Если же система на $\{\mu_j^i\}$ переопределена, то внешняя дифференциальная система не имеет решения.

Для нашей задачи число Картана $Q = s_1 + 2s_2 + 3s_3 = 11$. Наиболее общий интегральный элемент e_3 определяется уравнениями

$$\begin{aligned} d\Gamma_{21}^1 &= \alpha_1 \omega^1 + \alpha_2 \omega^2 - \Gamma_{2k}^1 \Gamma_{31}^k \omega^3; \\ d\Gamma_{22}^1 &= (\alpha_2 - \Gamma_{31}^2 \Gamma_{32}^1 + \Gamma_{32}^2 \Gamma_{31}^1 + R + (\Gamma_{21}^1)^2 + (\Gamma_{22}^1)^2) \omega^1 + \\ &+ \alpha_3 \omega^2 - \Gamma_{2k}^1 \Gamma_{32}^k \omega^3; \quad d\Gamma_{31}^1 = \alpha_4 \omega^1 + \alpha_5 \omega^2 - ((\Gamma_{31}^1)^2 + \Gamma_{32}^1 \Gamma_{31}^2) \omega^3; \\ d\Gamma_{32}^1 &= (\alpha_5 - \Gamma_{21}^1 (\Gamma_{32}^2 - \Gamma_{31}^1) + \Gamma_{22}^1 (\Gamma_{31}^2 + \Gamma_{32}^1)) \omega^1 + \alpha_6 \omega^2 - (1.11) \\ &- \Gamma_{32}^1 (\Gamma_{31}^1 + \Gamma_{32}^2) \omega^3; \quad d\Gamma_{31}^2 = \alpha_7 \omega^1 + \alpha_8 \omega^2 - \Gamma_{31}^2 (\Gamma_{31}^1 + \Gamma_{32}^2) \omega^3; \\ d\Gamma_{32}^2 &= (\alpha_9 + \Gamma_{21}^1 (\Gamma_{32}^1 + \Gamma_{31}^2) - \Gamma_{22}^1 (\Gamma_{31}^1 - \Gamma_{32}^2)) \omega^1 + \alpha_{10} \omega^2 - \\ &- ((\Gamma_{32}^2)^2 + \Gamma_{31}^2 \Gamma_{32}^1) \omega^3, \quad dR = \alpha_{10} \omega^1 + \alpha_{11} \omega^2 - R (\Gamma_{31}^1 + \Gamma_{32}^2) \omega^3, \end{aligned}$$

где $\{\alpha_i\}_1^{11}$ — произвольные независимые параметры, т. е. $N = 11$. Система в инволюции. Производят решения системы (1.9, 1.10) — четыре функции двух переменных.

Но решения нашей системы не находятся во взаимно однозначном соответствии с СПМ. В самом деле, одна и та же метрика с по-разному выбранными реперами дает разные системы. Свобода выбора репера — одна функция двух переменных: в каждой точке базы можно произвольно выбрать направление вектора e_1 в плоскости, ортогональной направлению СП. Этим семейство реперов в M^3 задается однозначно.

При этом свобода задания СПМ — три функции двух переменных.

Лемма 1 доказана.

2. Вывод системы на СПП $F^3 \subset E^{3+p}$. Для изучения поверхности $F^l \subset F^{l+p}$ также применяется метод подвижного репера. В каждой точке поверхности выбираются ортонормированные реперы $\{e_i\}$ и $\{e_\alpha\}_{i=1}^{l+p}$, являющиеся базисами касательного и нормального пространств соответственно. Для параметризации $u: D \subset E^l \rightarrow F^l \subset E^{l+p}$ дифференциал отображения u и дифференциалы самих векторов репера разлагаются по базису $\{e_i, e_\alpha\}$:

$$du = \omega^i e_i + \theta^\alpha e_\alpha, \quad de_i = \psi_i^q e_q + h_i^\alpha e_\alpha,$$

$$de_\alpha = -(h_i^\alpha)^t e_i + k_\alpha^\beta e_\beta, \quad \Psi_q^i + \Psi_i^q = 0; \quad k_\beta^\alpha + k_\alpha^\beta = 0; \quad (2.1)$$

где $\omega^i, \theta^\alpha, \psi_i^q, h_i^\alpha, k_\alpha^\beta$ — набор линейных форм в пространстве переменных u^1, \dots, u^l . Здесь и далее $i, j, m, q, r, s = \overline{1, l}; \alpha, \beta, \gamma = \overline{l+1, l+p}$. Так как u параметризует поверхность $F^l \subset E^{l+p}$, то du лежит в касательном пространстве к F^l . Поэтому $\theta^\alpha = 0$. Продифференцировав каждое из равенств (2.1), в левых частях получим нули (теорема Пуанкаре), а в правых — линейные комбинации векторов репера $\{e_i, e_\alpha\}$ (после подстановки de_i и de_α из (2.1)). Приравняв нулю коэффициенты при независимых векторах и учитывая уравнения поверхности $\theta^\alpha = 0$, получим систему уравнений Маэра — Картана [6]:

$$d\omega^i = -\psi_i^q \wedge \omega^q, \quad h_i^\alpha \wedge \omega^i = 0, \quad d\Psi_i^q + \Psi_i^q \wedge \omega^q = (h_i^\alpha)^t \wedge h_i^\alpha,$$

$$dh_i^\alpha + h_i^\alpha \wedge \psi_i^m + k_\alpha^\beta \wedge h_i^\beta = 0, \quad dk_\beta^\alpha + k_\beta^\alpha \wedge h_i^\beta = h_i^\alpha \wedge (h_i^\beta)^t. \quad (2.2)$$

Применяя лемму Картана [7] ко второму уравнению, получаем $H_{ij}^\alpha = H_{ij}^\alpha \omega^j, H_{ij}^\alpha = H_{ji}^\alpha$. Функции H_{ij}^α задают вторую фундаментальную форму поверхности $F^l \subset E^{l+p}$. Поверхность является одновременно многообразием с внутренней метрикой. Поэтому на ней также существуют формы кривизны Ω_j^i . Сравнивая второе уравнение системы (1.1) с третьим уравнением системы (2.2), получаем уравнение Гаусса $\Omega_j^i = (h_i^\alpha)^t \wedge h_i^\alpha$. Система уравнений (2.2) может быть переписана в виде

$$d\omega^i = -\psi_i^q \wedge \omega^q, \quad h_i^\alpha = H_{ij}^\alpha \omega^j, \quad H_{ij}^\alpha = H_{ji}^\alpha; \quad \Omega_j^i = (h_i^\alpha)^t \wedge h_i^\alpha,$$

$$\Omega_j^i = d\Psi_i^q + \Psi_i^q \wedge \psi_i^m; \quad dh_i^\alpha + h_i^\alpha \wedge \psi_i^m + k_\beta^\alpha \wedge h_i^\beta = 0; \quad (2.3)$$

$$dk_\beta^\alpha + k_\beta^\alpha \wedge h_i^\beta = h_i^\alpha \wedge (h_i^\beta)^t.$$

Для построения системы на СПП $F^3 \subset E^{3+p}$ специализируем репер и запишем условия СП. Вектор e_3 выбираем в направлении СП; $e_1, e_2 \in TF^3, e_\alpha \in NF^3$ произвольны (с учетом ортонормированности и гладкости). Условие СПП в таком репере примет вид

$$h_3^\alpha = 0. \quad (2.4)$$

На уравнений Гаусса получим $\Omega_3^i = 0$ (СПП несет СПМ). Следовательно, формы ψ_3^1, ψ_3^2 разлагаются только по ω^1 и ω^2 (так же, как и для метрики).

Ужесточим условия на репер. Выберем $e_1, e_2 \in TF^3$, $e_\alpha \in NF^3$ — произвольно (с учетом ортонормированности и гладкости) на некоторой базе $F^2 \subset F^3$, трансверсальной линиям СП. В каждую точку поверхности F^3 перенесем репер вдоль линий СП параллельно в связности E^{3+p} . Из условия СП (2.4) следует, что e_1, e_2 останутся в касательном, а e_α в нормальном пространствах, причем e_1, e_2 будут ортогональны e_α . Это означает, что линия СП — геодезическая не только во внутренней метрике F^3 , но и в объемлющем пространстве E^{3+p} , т. е. линии СП — прямая, а поверхность F^3 — линейчатая, причем касательное пространство стационарно вдоль образующих. Это известный результат [9, 10].

Теперь в разложении всех форм $\psi_i^i, h_i^\alpha, k_\beta^\alpha$ по базису $\{\omega^i\}$ коэффициенты при ω^s равны нулю:

$$\psi_i^i = \Gamma_{j1}^i \omega^1 + \Gamma_{j2}^i \omega^2; \quad h_i^\alpha = H_{i1}^\alpha \omega^1 + H_{i2}^\alpha \omega^2; \quad k_\beta^\alpha = K_{\beta 1}^\alpha \omega^1 + K_{\beta 2}^\alpha \omega^2. \quad (2.5)$$

Подставляя в (2.3) разложения (2.5) и условия СП (2.4), получим систему на СПП $F^3 \subset E^{3+p}$:

$$\begin{aligned} d\omega^i &= \Gamma_{jm}^i \omega^j \wedge \omega^m, \quad \Gamma_{j3}^i = 0, \quad \Gamma_{jm}^i + \Gamma_{im}^j = 0; \quad H_{ij}^\alpha = H_{ji}^\alpha, \quad H_{i3}^\alpha = 0; \\ B = R - \sum_{\alpha=1}^p [H_{11}^\alpha H_{22}^\alpha - (H_{12}^\alpha)^2] &= 0; \quad d\Gamma_{jm}^i \wedge \omega^m + L_j^i (\omega^r \wedge \omega^s) = 0; \\ dH_{11}^\alpha \wedge \omega^1 + dH_{12}^\alpha \wedge \omega^2 + L_1^\alpha (\omega^r \wedge \omega^s) &= 0; \\ dH_{21}^\alpha \wedge \omega^1 + dH_{22}^\alpha \wedge \omega^2 + L_2^\alpha (\omega^r \wedge \omega^s) &= 0; \\ A^\alpha &= H_{11}^\alpha \Gamma_{32}^1 + H_{12}^\alpha (\Gamma_{32}^2 - \Gamma_{31}^1) - H_{22}^\alpha \Gamma_{31}^2; \\ dK_{\beta 1}^\alpha \wedge \omega^1 + dK_{\beta 2}^\alpha \wedge \omega^2 + L_\beta^\alpha (\omega^r \wedge \omega^s) &= 0; \quad K_{\beta 1}^\alpha + K_{\beta 2}^\alpha = 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Здесь $L_j^i (\omega^r \wedge \omega^s)$, $L_1^\alpha (\omega^r \wedge \omega^s)$, $L_2^\alpha (\omega^r \wedge \omega^s)$ суть 2-формы, разложенные по базису $\omega^1 \wedge \omega^2, \omega^1 \wedge \omega^3, \omega^2 \wedge \omega^3$ с коэффициентами — функциями от $\Gamma_{jm}^i, H_{ij}^\alpha, K_{\beta i}^\alpha$. Эти формы легко получить. Не будем выписывать их конкретный вид, тем более, что для подсчета характеров Картона они не нужен (но нужен для подсчета N).

Система уравнений Маэра — Картана (2.2) замкнута. Следовательно, замкнута и система (2.3). В (2.6) у нас появились новые уравнения $B = A^\alpha = 0$. Их необходимо замкнуть. Выпишем содержательные уравнения замыкания системы (2.6) (остальные являются тавтологией и не влияют на изучение инволютивности):

$$\begin{aligned} d\Gamma_{jm}^i \wedge \omega^m + L_j^i (\omega^r \wedge \omega^s) &= 0; \quad dH_{11}^\alpha \wedge \omega^1 + dH_{12}^\alpha \wedge \omega^2 + L_1^\alpha (\omega^r \wedge \omega^s) = 0; \\ dH_{21}^\alpha \wedge \omega^1 + dH_{22}^\alpha \wedge \omega^2 + L_2^\alpha (\omega^r \wedge \omega^s) &= 0; \\ dK_{\beta 1}^\alpha \wedge \omega^1 + dK_{\beta 2}^\alpha \wedge \omega^2 + L_\beta^\alpha (\omega^r \wedge \omega^s) &= 0; \quad dB = 0; \quad dA^\alpha = 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Условие независимости по-прежнему

$$\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 \neq 0.$$

3. Доказательство леммы 2. Сначала разберем случай $F^3 \subset E^4$. Система (2.7) может быть переписана без индекса α ($\alpha = 1$):

$$d\Gamma_{im}^i \wedge \omega^m + L_1^i (\omega^r \wedge \omega^s) = 0; \quad dH_{11} \wedge \omega^1 + dH_{12} \wedge \omega^2 + L_1 (\omega^r \wedge \omega^s) = 0; \\ dH_{21} \wedge \omega^1 + dH_{22} \wedge \omega^2 + L_2 (\omega^r \wedge \omega^s) = 0; \quad dB = 0; \quad dA = 0. \quad (3.1)$$

В этой системе $r = 10$ зависимых переменных ($\Gamma_{im}^i = 6$, R , H_{ij} — 3). На одномерный интегральный элемент e_1 налагаются $s_0 = 2$ условия, так как в системе присутствуют два уравнения первой степени $dA = -dB = 0$. На двумерный интегральный элемент e_2 налагаются еще $s_1 = 5$ условий (при фиксированном e_1). На трехмерный интегральный элемент e_3 налагаются еще 5 условий. Но так как $s_2 \leq r - s_0 - s_1 = 3$, то $s_2 = 3$, $s_3 = 0$. (Оставшиеся два условия линейно зависят от предыдущих. Если это не так, то при подсчете N возникнет несовместная система.)

У наиболее общего интегрального элемента e_3 дифференциалы шести переменных Γ_{jk}^i задаются так же, как и в (1.11), а оставшиеся 4 дифференциала таковы:

$$\begin{aligned} dR &= \alpha_{10}\omega^1 + z\omega^2 - R(\Gamma_{31}^1 + \Gamma_{32}^2)\omega^3; \\ dH_{11} &= x_1\omega^1 + x_2\omega^2 - (H_{11}\Gamma_{31}^1 + H_{12}\Gamma_{31}^2)\omega^3; \\ dH_{12} &= \beta\omega^1 + x_3\omega^2 - (H_{11}\Gamma_{32}^1 + H_{12}\Gamma_{32}^2)\omega^3; \\ dH_{22} &= x_4\omega^1 + x_5\omega^2 - (H_{12}\Gamma_{32}^1 + H_{22}\Gamma_{32}^2)\omega^3. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Здесь $\{\alpha_i\}_1^{10}$, β — произвольные параметры, а $\{x_i\}_1^5$, z определяются из уравнений (3.1) известным способом, описанным в 1. Следовательно, $N = 11$. Система в инволюции. Наиболее общее решение зависит от трех функций двух переменных. Свобода выбора репера так же, как и для метрики, — одна функция двух переменных. Значит, свобода задания СПМ — две функции двух переменных.

Рассмотрим общий случай $F^3 \subset E^{3+p}$. В системе (2.7) присутствуют $r = 7 + 3p + p(p-1)$ зависимых переменных ($\Gamma_{jk}^i = 6$, R , $H_{ij}^a = 3p$, $K_{ij}^a = p(p-1)$). Характеры Картана $s_0 = p+1$, $s_1 = 3+2p+p(p-1)/2$, $s_2 = 3+p(p-1)/2$, $s_3 = 0$; $Q = 9 + p/2 + 3p^2/2$; $N = Q$. (Мы не будем здесь приводить подробный подсчет N). Производя решения системы равен $3 + p(p-1)/2$ функций двух переменных. Свобода выбора репера $\{e_i\}_1^8$ — одна функция двух переменных, репера $\{e_a\}_{11}^{1+p}$ — $-p(p-1)/2$ функций двух переменных. Поэтому свобода задания СПМ $F^3 \subset E^{3+p}$ — две функции двух переменных. Лемма 2 доказана полностью.

Список литературы: 1. Шеффель С. З. Поверхности в евклидовом пространстве // Мат. анализ и смежные вопросы математики. Новосибирск. 1978. С. 297—318.
 2. Шеффель С. З. Геометрические свойства погруженных многообразий // Сиб. мат. журн. 1985. Т. 26. № 1. С. 170—188. 3. Chern S. S., Kuiper N. H. Some theorems on the isometric imbedding of compact Riemannian manifolds in Euclidean spaces // Ann. of Math. 56 (1952). Р. 422—430. 4. Борисенко А. А. О многомерных параболических поверхностях в евклидовом пространстве // Укр. геом. сб. 1982. Вып. 25. С. 3—5. 5. Картан Э. Риманова геометрия в ортогональном репере. М., 1960. 308 с. 6. Berger E., Bryant R., Griffiths Ph. The Gauss

equation and rigidity of isometric embeddings // Duke Math. J. 1983. v. 50. № 3. P. 803—892. 7. Фиников С. П. Метод внешних форм Картана. М.; Минск, 1948. 432 с. 8. Maltz R. The nullity spaces of curvature-like tensors // J. Diff. Geom. (1972), P. 519—523. 9. Chern S. S., Lashof R. K. On the total curvature of immersed manifolds // Amer. J. Math., 1957. V. 79. N 2. P. 306—318. 10. Hartman P. On the isometric immersions in Euclidean space of manifolds with nonnegative sectional curvatures. II // Trans. Amer. Math. Soc. 147 (1970). P. 529—540.

Поступила в редакцию 30.09.88

УДК 514

A. A. БОРНСЕНКО

**О ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ МНОГОМЕРНЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ
В ПРОСТРАНСТВЕ ЛОБАЧЕВСКОГО**

Известно, что сильно параболические поверхности в пространствах постоянной кривизны устроены следующим образом: через каждую точку поверхности проходит вполне геодезическое подмногообразие,

вдоль которого касательное пространство стационарно [1, 2]. Аналогичное утверждение справедливо и для риманова пространства, если в точках поверхности F^l выполняется условие: $\langle R(x, y)z, n \rangle = 0$, где $x, y, z \in T_Q F^l$; n — произвольная нормаль к поверхности в точке Q ; R — оператор кривизны объемлющего пространства [3].

Выясним, как устроены полные сильно параболические поверхности в пространстве постоянной кривизны.

Внешний нуль-индекс точки поверхности $v(Q) = \dim L(Q)$, где $L(Q) \subset T_Q F^l$ — максимальное подпространство, такое, что $A(Q, n)y = 0$ для $y \in L(Q)$, $A(Q, n)$ — матрица второй квадратичной формы относительно произвольной нормали n в точке Q .

Поверхность называется сильно k -параболической, если $v(Q) > k$ для $Q \in F^l$.

Известно, что полная сильно k -параболическая поверхность неотрицательной секционной кривизны в евклидовом пространстве является цилиндром с k -мерной образующей [4]. Аналогичный результат справедлив для k -параболических поверхностей неотрицательной кривизны Риччи [5], а также для k -параболических поверхностей, тип которых $j = 0$ [5, 6].

Компактные сильно параболические поверхности в сферическом пространстве при естественных требованиях являются вполне геодезическими большими сферами. Пусть $\rho(l) — 1$ — максимальное число линейно независимых векторных полей на сфере S^{l-1} . Тогда $v(l)$ — максимальное целое число, удовлетворяющее неравенству $\rho(l - v_l) \geq v_l - 1$. Число $v(l)$ — величина порядка $\ln l$.

Ферус [1] доказал: если для полной регулярной поверхности F^l в сферическом пространстве S^{l+p} будет $v > v(l)$, то $v = l$ и F^l является вполне геодезической большой сферой S^l . Для полных кэлеровых подмногообразий в комплексном проективном пространстве из условия $v > 0$ для всех точек поверхности следует $v = l$, и поверхность является вполне геодезическим комплексным проективным пространством меньшей размерности [7]. Иная ситуация в пространстве Лобачевского. В нем много полных сильно параболических поверхностей. Любая сильно параболическая поверхность в евклидовом пространстве, особые точки которой лежат вне шара единичного радиуса, отвечает полной сильно параболической поверхности пространства Лобачевского, взятого в интерпретации Кэли — Клейна.

Пусть F^l — полная сильно $(l - 1)$ -параболическая поверхность в пространстве Лобачевского \mathcal{L}^{l+p} ; γ — кривая на F^l , ортогональная слоям сильной параболичности, ее кривизна в метрике поверхности < 1 [8]. Если для поверхности $v(Q) = k$, то существует ортогональное $L(Q)$ распределение $H(Q)$. Пусть γ — кривая, которая в каждой точке касается $H(Q)$. Для полной поверхности $F^l \subset L^{l+p}$ аналогично предыдущему модуль проекции вектора кривизны кривой на $L(Q)$ меньше либо равен 1.

Другими словами, это значит, что нормальная кривизна интегральной кривой распределения $H(Q)$ по модулю меньше либо равна 1.

В пространстве Лобачевского \mathcal{L}^{l+p} есть поверхности, аналогичные цилиндрическим поверхностям в евклидовом пространстве.

Пусть H^{l+p-k} — либо ортосфера, либо эквидистанта, либо вполне геодезическое пространство Лобачевского в пространстве $L^{l+p-k+1}$; F^{l-k} — полная регулярная поверхность в H^{l+p-k} . Проведем через точки F^{l-k} полные геодезические в направлении нормалей к H^{l+p-k} в $L^{l+p-k+1}$, получим поверхность F^{l-k+1} . Через точки поверхности F^{l-k+1} проведем пространства Лобачевского L^{k-1} , перпендикулярные к $L^{l+p-k+1}$. Полученная полная поверхность $F^l \subset L^{l+p}$ является сильно k -параболической. Назовем ее цилиндром с k -мерной образующей. Цилиндрические вложения пространства Лобачевского L^2 в L^3 рассматривались в [9].

В интерпретации Кэли — Клейна, когда F^{l-k} лежит на эквидистанте или в пространстве Лобачевского, цилиндрическая поверхность изображается цилиндром с $(k-1)$ -мерной образующей над конической поверхностью F^{l-k+1} с идеальной вершиной, лежащей вне абсолюта. Когда вершина лежит на бесконечности, будет цилиндр.

Если база F^{l-k} расположена на ортосфере, то поверхность F^l изображается цилиндром с $(k-1)$ -мерной образующей над конической поверхностью с вершиной на абсолюте. Образующие цилиндрической поверхности в евклидовом пространстве можно перевести друг в друга параллельным переносом. Аналогичным свойством обладают цилиндрические поверхности в пространстве Лобачевского. Для этих поверхностей ортогональное к слоям сильной параболичности распределение $H(Q)$ голономно.

Интегральные многообразия F^{l-k} являются вполне омбилическими на поверхности F^l , т. е. такими поверхностями, вторая квадратичная форма которых относительно произвольной нормали пропорциональна первой квадратичной форме [10].

Нормальная кривизна k_n кривых, лежащих на многообразиях F^{l-k} , постоянна и в первом случае $0 < k_n < 1$, во втором, когда F^{l-k} лежит на ортосфере, $k_n = 1$.

Метрика такой поверхности имеет вид

$$ds^2 = ds_1^2 + \varphi^2(u^1, \dots, u^k) ds_2^2, \quad (1)$$

где ds_1^2 — метрика пространства Лобачевского L^k , записанная в координатах u^1, \dots, u^k ; ds_2^2 — метрика некоторой базы F^{l-k} , функция φ в специальной системе координат равна либо $\cosh u^1$, либо e^{-u^1} .

Рассмотрим класс метрик, соответствующих сильно параболическим поверхностям в пространстве постоянной кривизны.

Пусть R^l — полное риманово многообразие. Внутренним нуль-индексом метрики R^l называется число $\mu_c(Q) = \dim L(Q) \subset T_Q R^l$, где $L(Q)$ — максимальное подпространство касательного пространства, такое, что

$$R(x, y)z = -c(\langle x, z \rangle y - \langle y, z \rangle x) \text{ для любого } y \in L(Q), \quad (2)$$

$x, z \in T_Q R^l$, $R(x, y)$ — оператор кривизны многообразия R^l . Локально эти метрики устроены следующим образом.

Лемма 1 [3]. Пусть R^l — риманово многообразие класса C^3 ; G — открытая область, на которой внутренний нуль-индекс постоянен, $\mu_c(Q) = k$. Тогда распределение $L(Q)$ интегрируемо, слои являются областями на k -мерных вполне геодезических подмногообразиях постоянной кривизны c . Для граничных точек слоя $\mu_c = k$. В любой окрестности граничной точки слоя, не принадлежащей границе многообразия, найдутся точки, для которых $\mu_c = k$.

Если R^l — полное многообразие и $\mu_c(Q_0) = k_0$ минимально для точек многообразия, то слой $\mathcal{L}(Q_0)$ является полным вполне геодезическим подмногообразием.

Справедлива

Теорема 1. Пусть R^l — полное риманово многообразие с постоянным внутренним нуль-индексом $\mu_c = k > 0$.

Если существует поверхность, ортогональная слоям вполне геодезичности $L^k(Q)$, и

1) $c > 0$, то $\mu_c = l$ и R^l локально изометрична сфере радиуса $1/\sqrt{l}$; при условии односвязности есть глобальная изометрия;

2) $c = 0$, то R^l есть метрическое произведение риманова многообразия R^{l-k} и евклидова пространства E^k ;

3) $c < 0$ (не ограничивая общности $c = -1$) и поверхность, ортогональная слою, вполне омбилическая при $k < l - 1$; при $k = l - 1$ кривая, ортогональная слою, имеет постоянную кривизну, то R^l полуправодимо и его метрика имеет вид (1), где $\Phi = \sinh^l, e^{-u^l}$.

Координатная поверхность F^{l-k+1} переменных u^1, u^{k+1}, \dots, u^l является вполне геодезической поверхностью; проведенные в каждой точке F^{l-k+1} ортогональные геодезические образуют вполне геодезические пространства Лобачевского L^{k-1} , натянутые на параллельные в R^l векторные поля.

В доказательстве теоремы используется полнота риманова многообразия в окрестности одного слоя и доказывается строение метрики в окрестности этого слоя.

Имеются аналогичные утверждения для поверхностей в пространствах постоянной кривизны.

Лемма 2. [2, 3]. Пусть F^l — регулярная сильно параболическая поверхность в пространстве постоянной кривизны $R^n(c)$; G — открытая область, на которой внешний нуль-индекс постоянен; $v(Q) = k$. Тогда распределение $L(Q)$ интегрируемо, слои являются областями на k -мерных вполне геодезических подмногообразиях объемлющего пространства, вдоль которых касательные пространства стационарны, т. е. нормаль к поверхности F^l после параллельного переноса в $R^n(c)$ вдоль слоя остается нормалью к поверхности. Для граничных точек слоя $v = k$. В любой окрестности граничной точки слоя, не принадлежащей границе поверхности, найдутся точки, для которых $v < k$. Если F^l — полная поверхность и $v(Q_0) = k_0$ минимальен для точек поверхности, то слой $L(Q_0)$ является вполне геодезическим многообразием.

Теорема 2. Пусть F^l — полная регулярная класса C^3 сильно параболическая поверхность с постоянным внешним нуль-индексом $v = k$

в односвязном пространстве постоянной кривизны $R^n(c)$. Если существует поверхность, ортогональная слоям вполне геодезичности $L^k(Q)$, и

1) $c > 0$, то $v = l$ и F^l — вполне геодезическая большая сфера в сферическом пространстве;

2) $c = 0$, то F^l есть цилиндр с k -мерной образующей в евклидовом пространстве;

3) $c < 0$ (не ограничивая общности $c = -1$) и поверхность, ортогональная слою, вполне омбилическая как подмногообразие F^l при $k < l - 1$; при $k = l - 1$ кривая, ортогональная слою, имеет постоянную геодезическую кривизну, то F^l есть цилиндрическая поверхность в пространстве Лобачевского, которая в интерпретации Кэли—Клейна изображается цилиндром с $(k - 1)$ -мерной образующей над конической поверхностью с вершиной либо на абсолюте, либо вне его.

Доказательство теоремы 1. Пусть $\mu_c(Q) = k$ и ортогональное распределение $H(Q)$ голопомно. Тогда по лемме 1 метрика R^l имеет вид

$$ds^2 = ds_1^2 + ds_2^2 = g_{ij} du^i du^j + g_{\alpha\beta} dv^\alpha dv^\beta, \quad i, j = 1, \dots, k; \\ \alpha, \beta = k + 1, \dots, l,$$

где ds_1^2 — метрическая форма вполне геодезического слоя $L^k(Q)$, изометричного пространству постоянной кривизны $R^k(c)$. Так как вторые квадратичные формы слоя $L^k(Q)$ относительно ортонормированных нормалей имеют вид

$$A_{ij}^\alpha = -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial v^\alpha} = 0, \quad (3)$$

то g_{ij} зависят только от u^1, \dots, u^k и в некоторой системе координат имеют стандартные значения.

В координатной записи условия (2) имеют следующий вид:

$$R_{\alpha\beta i} = 0; \quad (4)$$

$$R_{i\alpha i\beta} = c g_{ij} g_{\alpha\beta}; \quad (5)$$

$$R_{i\alpha\beta\gamma} = 0, \quad (6)$$

где R_{ABCD} , $A, B, C, D = 1, \dots, l$ — компоненты тензора кривизны многообразия R^l . Явно вычислив $R_{\alpha\beta i}$ через компоненты метрического тензора g_{AB} и учитывая, что $g_{\alpha i} = 0$, и (3), получим

$$\frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial u^i} \frac{\partial g_{\beta\delta}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial u^i} \frac{\partial g_{\alpha\delta}}{\partial u^i} = 0. \quad (7)$$

Коэффициенты вторых квадратичных форм поверхностей $u^i = \text{const}$ ($i = 1, \dots, k$) относительно ортонормированного базиса единичных нормалей, направленных по координатным осям u^i , имеют вид [11, с. 191]

$$A_{\alpha\beta}^i = -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial u^i}. \quad (8)$$

Запишем уравнения Риччи для ортогональных слоев F^{l-k} :

$$K_{\alpha\beta i} = R_{\alpha\beta i} - g^{\alpha\beta} (A_{\alpha\gamma}^i A_{\beta\delta}^j - A_{\alpha\delta}^i A_{\beta\gamma}^j), \quad (9)$$

где $K_{\alpha\beta i}$ — тензор кривизны нормальной связности поверхности F^{l-k} . Из (4), (7), (8) следует, что слои F^{l-k} имеют плоскую нормальную связность.

Пусть у нас будет лишь один слой F^{l-k} , ортогональный слоям сильной параболичности $L^k(Q)$. Из тех же рассуждений следует, что F^{l-k} будет иметь плоскую нормальную связность. Пусть N^i — параллельные в нормальной связности ортонормированные векторные поля вдоль F^{l-k} . Вдоль них в каждом вполне геодезическом слое будут выпущены координатные геодезические линии, координаты u^i являются нормальными координатами Ферми в каждом слое, т. е. координаты u^i точки слоя — это декартовы координаты точки касательного пространства к слою $L(Q)$ с началом координат в точке $Q \in F^{l-k}$ с ортогональным базисом N^i , которая при экспоненциальном отображении переходит в данную точку слоя; v^α — координаты на поверхности F^{l-k} ; (u^i, v^α) — координаты в римановом многообразии R^l . Докажем, что слои $u^i = \text{const}$ ($i = 1, \dots, k$) ортогональны слоям $L^k(Q)$. Рассмотрим семейство геодезических линий, выходящих в направлении векторного поля N^i , геодезическая $\gamma = \gamma(t)$ — фиксированная кривая из этого семейства, $Y(t)$ — поле Якоби вдоль геодезической γ , порожденное данным семейством. Так как $\gamma(t) \subset L(Q)$, то вдоль этой геодезической

$$R(\dot{\gamma}, Y)\dot{\gamma} = c[\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle Y - \langle \dot{\gamma}, Y \rangle \dot{\gamma}].$$

Поэтому уравнение $Y'' + R(\dot{\gamma}, Y)\dot{\gamma} = 0$, которому удовлетворяет $Y(t)$, совпадает с уравнением для полей Якоби в пространстве постоянной кривизны. Значит, поле Якоби $Y(t)$ в каждой точке $\gamma(t)$ лежит в плоскости, натянутой на векторы, полученные из векторов $Y(0)$, $\nabla_{\dot{\gamma}(0)} Y(t)$ параллельным переносом вдоль геодезической γ [12].

Так как $Y(t)$ касается слоя F^{l-k} , то $Y(0)$ ортогонален геодезической. Поле $Y(t)$ удовлетворяет следующему уравнению:

$$\nabla_{\dot{\gamma}(0)} Y(t) - \nabla_{Y(0)} N^i - [Y(t), N^i] = 0, \quad [Y(t), N^i] = 0,$$

так как $Y(t)$, N_i — векторы, касательные координатным линиям, вектор $\nabla_{Y(0)} N^i$ — касательный к слою, потому что векторное поле N^i — параллельное в нормальной связности. Поэтому вектор $\nabla_{Y(0)} Y(t)$ перпендикулярен к геодезической $\gamma(t)$. Отсюда следует, что поле Якоби $Y(t)$ перпендикулярно к геодезической при любом значении параметра. С другой стороны, $Y(t)$ является касательным векторным полем к слоям $u^i = \text{const}$ ($i = 1, \dots, k$). Поэтому в указанной системе координат $g_{ia} = 0$. Таким образом, необходимым и достаточным условием голономности ортогонального распределения $H(Q)$ является наличие хотя бы одного слоя, ортогонального вполне геодезическим слоям.

Уравнения (5), (6) в терминах второй квадратичной формы F^{l-k} переписывают следующим образом:

$$\frac{\partial A_{\alpha\beta}^l}{\partial u^l} = g^{\gamma\delta} A_{\beta\delta}^l A_{\alpha\gamma}^l + c g_{ij} g_{\alpha\beta}; \quad (10)$$

$$A_{\alpha\beta, \gamma}^l - A_{\alpha\gamma, \beta}^l = 0, \quad (11)$$

где ковариантные производные берутся в метрике слоя. Выберем так координаты в R^l , чтобы вдоль геодезической, направленной по координатной линии u^l , было $g_{ij} = \delta_{ij}$, $g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$. Тогда уравнения (10) при $i = j$, $\alpha = \beta$ имеют вид

$$\frac{\partial A_{\alpha\alpha}^l}{\partial u^l} = (A_{\alpha\alpha}^l)^2 + c. \quad (12)$$

Это есть уравнение Риккати, которое в силу полноты риманова многообразия R^l должно иметь регулярное решение на всей оси u^l . При $c = 0$ единственное такое решение $A_{\alpha\alpha}^l = 0$. В силу произвольности выбора i , α и точки слоя F^{l-k} , вторая квадратичная форма слоя тождественно равна нулю, и любой слой является вполне геодезическим подмногообразием. Отсюда следует, что R^l — метрическое произведение F^{l-k} на евклидово пространство. При $c > 0$ регулярных решений нет, и R^l локально изометрично сфере радиуса $1/\sqrt{c}$, при условии односвязности R^l оно будет глобально изометрично сфере.

При $c < 0$, $c = -k_0^2$ решение $k = A_{\alpha\alpha}^l$ имеет вид

$$k = k_0 \frac{(k(0) + k_0) + (k(0) - k_0) e^{2k_0 u^l}}{(k(0) + k_0) - (k(0) - k_0) e^{2k_0 u^l}}. \quad (13)$$

Оно будет всюду регулярным, если $k(0) \ll k_0$.

При $c = -1$ будет $k(0) \ll 1$. Геометрически это значит, что нормальная кривизна любой кривой слоя меньше либо равна единице, где под нормальной кривизной понимается модуль вектора $A(x, x)$ с компонентами $A_{\alpha\beta}^l x^\alpha x^\beta$, где x — единичный касательный к поверхности F^{l-k} вектор с компонентами x^α . Если для некоторого слоя при $c = -1$ нормальная кривизна меньше единицы, то она будет меньше единицы для всех слоев и будет стремиться к единице при уходе на бесконечность. Если для некоторого слоя она равна единице, то это справедливо для каждого слоя.

Рассмотрим случай $c = -1$. Пусть фиксированная поверхность F^{l-k} вполне омбилична. Тогда в каждой точке существует единственная нормаль n_1 , относительно которой вторая квадратичная форма нетривиальна, а относительно перпендикулярных ей нормалей n_2, \dots, n_k вторые квадратичные формы равны нулю. Пусть n_i — такие нормали в фиксированной точке $P_0 \in F^{l-k}$. Параллельно перепесем в нормальной связности нормали n_i вдоль поверхности F^{l-k} , получим нормальные поля N_i . В точках F^{l-k} будет

$$A_{\alpha\beta}^{1+i} = \mu^i A_{\alpha\beta}^1; \quad A_{\alpha\beta}^1(0) = \lambda g_{\alpha\beta}; \quad A_{\alpha\beta}^{1+i}(0) = 0. \quad (14)$$

Из (11) и (14) следует, что

$$\frac{\partial \lambda}{\partial v^\gamma} g_{\alpha\beta} - \frac{\partial \lambda}{\partial v^\beta} g_{\alpha\gamma} = 0; \quad \frac{\partial \mu^i}{\partial v^\gamma} g_{\alpha\beta} - \frac{\partial \mu^i}{\partial v^\beta} g_{\alpha\gamma} = 0. \quad (15)$$

Выбрав в произвольной точке $P \in F^{l-k}$ координаты так, чтобы $g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$, $\alpha = \beta \neq \gamma$, из (15) получим

$$\frac{\partial \lambda}{\partial v^\gamma} = 0; \quad \frac{\partial \mu^i}{\partial v^\gamma} = 0. \quad (16)$$

Поэтому с учетом (15) получим

$$\lambda = \text{const}; \quad \mu^i = 0. \quad (17)$$

Направим координатные линии u^i вдоль векторных полей N_i , причем параметр u^1 — длина геодезической, выходящей в направлении вектора N_1 .

Так как

$$\frac{\partial A_{\alpha\beta}^i}{\partial u^i} = -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^i}$$

то из (17) получим

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^2} = \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^k} = 0; \quad \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^1} = -2\lambda g_{\alpha\beta}. \quad (18)$$

Отсюда следует, что $\lambda = \lambda(u^1)$ функция только u^1 :

$$g_{\alpha\beta}(u^1, v^\alpha) = g_{\alpha\beta}(0, v^\alpha) e^{\int_0^{u^1} 2\lambda(u^1) du^1}. \quad (19)$$

Из (10) и (19) получим уравнение, совпадающее с уравнением (12): $\lambda^2 = \lambda^2 - 1$. Из (13) получим, что

$$\lambda = \frac{\lambda(0) + 1 + (\lambda(0) - 1) e^{2u^1}}{\lambda(0) + 1 - (\lambda(0) - 1) e^{2u^1}}, \quad (20)$$

где $\lambda(0)$ — значение λ на первоначальном слое при $u^1 = 0$. Обоз-

значим $e^{\int_0^{u_1} 2\lambda du^1}$ через $\Phi^2(u^1)$.

Если $\lambda(0) \neq 1$, то можно выбрать такой слой, чтобы $\lambda(0) = 0$. В этом случае $\varphi = \operatorname{ch} u^1$; при $\lambda(0) = 1$ будет $\varphi = e^{-u^1}$. Тогда метрика многообразия R^l запишется в одной из следующих форм:

$$ds^2 = ds_1^2 + \operatorname{ch}^2 u^1 g_{\alpha\beta}(v) dv^\alpha dv^\beta; \quad ds^2 = ds_1^2 + e^{-2u^1} g_{\alpha\beta}(v) dv^\alpha dv^\beta, \quad (21)$$

где ds_1^2 — метрика пространства Лобачевского в координатах u^1, \dots, u^k .

Если ортогональный слой одномерен, то для проведения тех же выводов необходимо потребовать постоянство его кривизны в R^l .

Нормальные векторные поля N^{l+1} вдоль ортогонального слоя параллельны в нормальной связности, и из (17) следует, что вторые

квадратичные формы относительно них равны нулю. Поэтому из формул Вейнгартина

$$\nabla_{\beta} N^i = -g^{\alpha\beta} A_{\beta\alpha}^i + \nabla_{\beta}^1 N^i = 0, \quad (22)$$

где ∇_{β} — ковариантная производная в римановом пространстве в координатном направлении слоя; ∇^1 — ковариантная производная нормальной связности. Значит, они параллельны в связности многообразия R^l . Координатная поверхность переменных u^1, u^{k+1}, \dots, u^l является вполне геодезической поверхностью R^l .

Риманово пространство называется полууприводимым, если его метрика в некоторой системе координат принимает вид

$$ds^2 = ds_1^2 + f ds_2^2, \quad (23)$$

где ds_1^2 и функция f зависят только от координат u^1, \dots, u^k , а квадратичная форма ds_2^2 зависит только от координат u^{k+1}, \dots, u^l [13].

Поверхность $u^i = \text{const}$ ($i = 1, \dots, k$) назовем базой расслоения.

Пространство Лобачевского является полууприводимым. Из хода доказательства теоремы 1 следует, что базой системы координат (23) в пространстве Лобачевского являются только ортосфера, эквидистанта в пространстве Лобачевского возможно и меньшей размерности или оно само.

Доказательство теоремы 2 проходит аналогично доказательству теоремы 1. Поэтому

1) $v = l$ и F^l являются большой сферой в сферическом пространстве при $c > 0$;

2) при $c = 0$ из теоремы 1 следует, что F^l есть метрическое произведение F^{l-k} на евклидово пространство E^k . Но так как евклидово пространство E^k реализовано плоскостью объемлющего евклидова пространства E^n , то F^l есть k -мерный цилиндр [14];

3) при $c = -1$ построенные в теореме 1 векторные поля N^{1+i} будут параллельны и в объемлющем пространстве Лобачевского. По формуле Вейнгартина $\tilde{\nabla}_{\alpha} N^{1+i} = \nabla_{\alpha} N^i + A(e_{\alpha}, N^i) = 0$, где $\tilde{\nabla}_{\alpha}$ — ковариантная производная в направлении ортогонального слоя в пространстве Лобачевского, e_{α} — вектор касательный к координатной линии u^{α} . Первое слагаемое равно нулю в силу (22), второе — так как $N^i \subset L(Q)$ из-за сильной параболичности поверхности. Поэтому поверхность F^{l-k} лежит в пространстве Лобачевского $L^{l+p-k+1}$. Нормальное векторное поле N^l , относительно которого вторая квадратичная форма F^{l-k} омбилична, параллельно в нормальном расслоении $F^{l-k} \subset L^{l+p-k+1}$.

В силу уравнений Кодации нормальная кривизна поверхности в каждой точке относительно любого направления постоянна и удовлетворяет неравенству $0 < k_n < 1$. Пусть n_q — ортонормированные нормали к поверхности F^{l-k} в $L^{l+p-k+1}$, ортогональные $N^1, A_{\alpha\beta}^q$ — коэффициенты вторых квадратичных форм относительно этих нормалей. Метрика, вторые квадратичные формы $A_{\alpha\beta}^q$, коэффициенты кручения μ_{qr}, α поверхности F^{l-k} в силу свойств нормального вектор-

ного поля N^l удовлетворяют уравнениям Гаусса—Петерсона—Кодади—Риччи в пространстве постоянной кривизны k_{n-1} . Поэтому существует реализация метрики F^{l-k} поверхностью \bar{F}^{l-k} в $H^{l+p-k} \subset L^{l+p-k+1}$, где H^{l+p-k} при $k_n = 0$ есть пространство Лобачевского L^{l+p-k} ; при $0 < k_n < 1$ — эквидистанта; при $k_n = 1$ — ортосфера.

Если рассматривать \bar{F}^{l-k} как поверхность в $L^{l+p-k+1}$, то все квадратичные формы и коэффициенты кручения поверхностей F^{l-k} и \bar{F}^{l-k} совпадут. Поэтому поверхности совпадают с точностью до движения. Через каждую точку \bar{F}^{l-k} проведены геодезические в направлении нормалей к H^{l+p-k} . Они образуют вполне геодезическую поверхность $F^{l-k+1} \subset L^{l+p-k+1}$; $F^{l-k+1} \subset F^l$. Через каждую точку F^{l-k+1} проходит пространство Лобачевского L^{k-1} , ортогональное $L^{l+p-k+1}$, натянутое на параллельные векторные поля N^l . Отсюда и следует, что F^l является цилиндром в пространстве Лобачевского.

- Список литературы.** 1. *Ferus D.* Totally geodesic foliation // Math. Ann. 1970. 198, N 4. P. 313—317. 2. *Борисенко А. А.* О внешних геометрических свойствах параболических поверхностей и топологических свойствах седловых поверхностей в симметрических пространствах ранга один // Мат. сб. 116 (158). № 3 (11). 1981. С. 440—457. 3. *Maltz R.* The nullity spaces of curvature-like tensors // J. Diff. Geom. 1972. 7. N 3—4. P. 519—523. 4. *Hartman P.* On isometric immersions in Euclidean space of manifolds with non negative sectional curvatures // Trans. Amer. Math. Soc. 1970. 147. P. 529—540. 5. *Борисенко А. А.* О полных параболических поверхностях в евклидовом пространстве // Укр. геом. сб. 1985. Вып. 28. С. 8—19. 6. *Борисенко А. А.* О строении l -мерных поверхностей с вырожденной второй квадратичной формой в n -мерном евклидовом пространстве // Укр. геом. сб. 1973. Вып. 13. С. 15—18. 7. *Abe K.* Application of a Riccati type differential equations to Riemannian manifold with totally geodesic distributions // Tohoku Math. J., 1973. 25. N 4. P. 425—444. 8. *Ferus D.* On isometric immersions between Hyperbolic Spaces // Mat. Ann. 1973. 205. P. 193—200. 9. *Nomizu K.* Isometric Immersions of the Hyperbolic Plane into the Hyperbolic Space // Math. Ann. 1973. 205. P. 181—192. 10. *Chen B. Y.* Geometry of submanifolds and its applications. Tokyo. 1981. v. III. 96 p. 11. Эйзенхарт Л. П. Риманова геометрия. М., 1948. 116 с. 12. Громолл Д., Клингенберг В., Майер В., Риманова геометрия в целом. М., 1981. 338 с. 13. Камышанский Н. Г., Соловьев А. С. Полуприводимые аналитические пространства «в целом» // УМН, 35. 5 (215). 1980. С. 3—51. 14. *Борисенко А. А.* О строении непрерывной поверхности, содержащей прямую // Укр. геом. сб. 1973. Вып. 14. С. 21—24.

Поступила в редакцию 30.08.88

А. В. БУШМЕЛЕВ, И. Х. САБИТОВ

КОНФИГУРАЦИОННЫЕ ПРОСТРАНСТВА ОКТАЭДРОВ БРИКАРА

Существование изгибающихся октаэдров обнаружено впервые Брикаром [1]; он же дал их полную классификацию, выделив три разных типа в зависимости от их строения. С тех пор было дано еще несколько способов нахождения изгибающихся октаэдров с описанием классов Брикара с других точек зрения [2, 3, 4]. На основе предлагаемых ниже формул тоже можно было бы выделить известные классы изгибающихся октаэдров. Однако мы займемся вопросом о строении конфигурационных пространств или множеством положений, занимаемых октаэдром в ходе его изгибания.

Оказывается, что изучение топологической и алгебро-геометрической структуры таких многообразий — достаточно содержательная задача, решение которой позволяет по-новому охарактеризовать или различать типы изгибающихся октаэдров. Кроме того, надо иметь в виду следующее: конфигурационное пространство любого изгибающегося многогранника является алгебраическим многообразием, поэтому полученное описание конфигурационных пространств изгибающихся октаэдров дает представление о том, какие сложные топологические ситуации встречаются при попытке описания таких многообразий.

1. *Основные формулы.* Рассмотрим многогранник, составленный из граней $(M_3M_1M_4)$, $(M_3M_2M_4)$, $(M_3M_1M_5)$, $(M_3M_2M_5)$. Назовем многогранник такого типа «шляпкой» $M_3M_1M_4M_2M_5$ с вершиной M_3 (рис. 1). Для описания петривиальных изгибаний «шляпки» зафиксируем в пространстве некоторую плоскость P и на ней точки M_1 , M_3 . Будем также считать, что точка M_2 всегда остается на плоскости P . При движении точки M_4 по плоскости «шляпка» некоторым способом будет изгибаться. Множество всех возможных положений такой «шляпки» будем называть ее конфигурационным пространством. Для исследования конфигурационных пространств «шляпки» введем параметры: $x = |M_1M_2|^2$, y_1 — квадрат расстояния от точки M_4 до плоскости P , y_2 — квадрат расстояния от точки M_5 до плоскости P . Они связаны следующими уравнениями:

$$y_1 = \frac{-2ab(x - (a^2 + b^2 - 2ab \cos(\alpha_1 - \beta_1))) (x - (a^2 + b^2 - 2ab \cos(\alpha_1 - \beta_1)))}{c_1(x - (a + b)^2)(x - (a - b)^2)}, \quad (1)$$

$$y_2 = \frac{-2ab(x - (a^2 + b^2 - 2ab \cos(\alpha_2 + \beta_2))) (x - (a^2 + b^2 - 2ab \cos(\alpha_2 - \beta_2)))}{c_2(x - (a + b)^2)(x - (a - b)^2)}, \quad (2)$$

$$a = |M_2M_3|; \quad b = |M_1M_3|; \quad c_1 = |M_3M_4|, \quad c_2 = |M_3M_5|; \quad \alpha_1 = \\ = M_1M_2M_4; \quad \beta_1 = M_1M_3M_4; \quad \alpha_2 = M_2M_3M_5; \quad \beta_2 = M_1M_3M_5.$$

Геометрический смысл чиселителей уравнений (1), (2) — это объемы тетраэдров $M_1M_2M_3M_4$ и $M_1M_2M_3M_5$ соответственно, а знаменателей — площадь треугольника $M_1M_2M_3$.

Всё ниже мы будем рассматривать только невырожденные изгибиания, т. е. такие, при которых с изменением параметра x изменяются y_1 и y_2 . Кроме того, введем еще две характеристики «шляпки» ω_1 и ω_2 . Плоскость Π делит пространство на два полупространства F_1 и F_2 .

Положим:

$$\omega_1 = \begin{cases} +1, & \text{если точка } M_4 \in F_1, \\ 0, & \text{если точка } M_4 \in \Pi, \\ -1, & \text{если точка } M_4 \in F_2. \end{cases}$$

$$\omega_2 = \begin{cases} +1, & \text{если точка } M_5 \in F_1, \\ 0, & \text{если точка } M_5 \in \Pi, \\ -1, & \text{если точка } M_5 \in F_2. \end{cases}$$

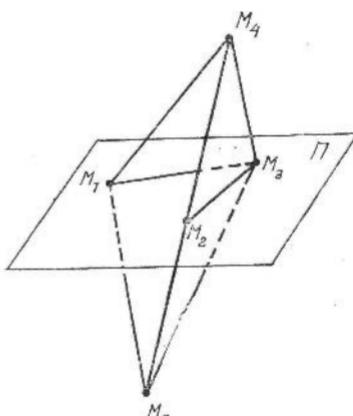


Рис. 1.

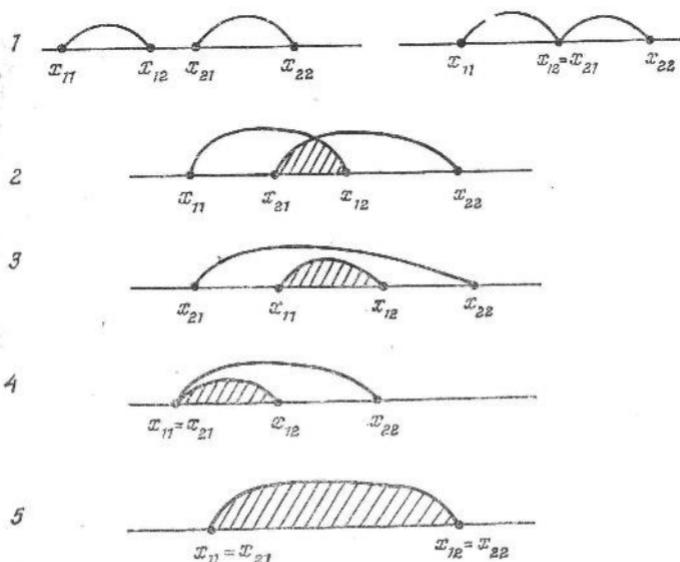


Рис. 2

Тройки чисел (x, ω_1, ω_2) полностью определяют положение «шляпки» в пространстве. Рассмотрим изгибание «шляпки». Допустимыми

значениями x назовем такие, которым соответствует реальная «шляпка». Очевидна следующая

Лемма. Множество допустимых значений совпадает с множеством $G = [x_{11}, x_{12}] \cap [x_{21}, x_{22}]$, где x_{11}, x_{12} и x_{21}, x_{22} — корни числителей уравнений (1), (2).

Для расположения отрезков $[x_{11}, x_{12}]$ и $[x_{21}, x_{22}]$ на прямой имеем пять возможных случаев (рис. 2). В первом случае конфигурационное пространство либо пусто, либо состоит из одной точки, т. е. либо такой «шляпки» вообще не существует, либо она заведомо неизгибаема. Во втором случае конфигурационное пространство гомеоморфно окружности (рис. 3). Действительно, пусть для определенности $x_{11} < x_{21} < x_{12} < x_{22}$, тогда областью допустимых значений будет отрезок $[x_{21}, x_{12}]$. Пусть $x = x_{21}$, тогда точка M_4 может располагаться двумя различными способами с $\omega_1 = +1$ и $\omega_1 = -1$. Очевидно, что комбинациям $(x_{21}, +1)$,

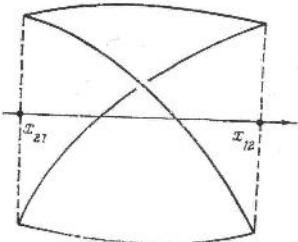


Рис. 3

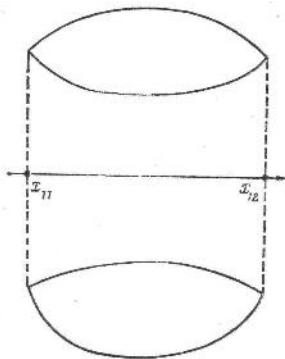


Рис. 4

$(x_{21}, -1, 0)$ соответствуют «шляпки», непереводимые друг в друга движением. Начнем изгибать «шляпку», увеличивая x . При этом имеются две возможности расположения точки M_5 : с $\omega_2 = +1$ и $\omega_2 = -1$. Таким образом, при $x \in (x_{21}, x_{12})$ имеем четыре состояния «шляпки», которым соответствуют характеристики: $(x, +1, +1)$, $(x, +1, -1)$, $(x, -1, +1)$, $(x, -1, -1)$. При дальнейшем изгибании «шляпки» x станет равным корню x_{12} и точка M_4 ляжет на плоскость, в этом случае $\omega_1 = 0$. Таким образом, ветви $(x, +1, +1)$ и $(x, -1, +1)$, $(x, +1, -1)$ и $(x, -1, -1)$ сольются (рис. 3). Введем параметр

$$\varphi = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \frac{(x - x_{21})}{(x_{12} - x_{21})}, & \text{при } \omega_1 = 1; \omega_2 = 0, 1; x \in [x_{21}, x_{12}], \\ \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \frac{(x_{12} - x)}{(x_{12} - x_{21})}, & \text{при } \omega_1 = 0, -1; \omega_2 = 1; x \in (x_{21}, x_{12}), \\ \pi + \frac{\pi}{2} \frac{(x - x_{12})}{(x_{12} - x_{21})}, & \text{при } \omega_1 = -1, \omega_2 = 0, -1; x \in [x_{21}, x_{12}], \\ \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \frac{(x_{12} - x)}{(x_{12} - x_{21})}, & \text{при } \omega_1 = 1, \omega_2 = -1; x \in [x_{21}, x_{12}], \end{cases}$$

Получили биективное отображение конфигурационного пространства на окружность: $(x, \omega_1, \omega_2) \rightarrow (\cos \varphi, \sin \varphi)$.

В третьем случае конфигурационное пространство будет гомеоморфно двум окружностям. Пусть для определенности $x_{21} < x_{11} < x_{12} < x_{22}$, тогда областью допустимых значений будет отрезок $[x_{11}, x_{12}]$. Пусть $x = x_{11}$, тогда точка M_4 будет лежать на плоскости, что соответствует $\omega_1 = 0$. Точка M_5 при этом может располагаться в пространстве двумя различными способами с $\omega_2 = -1$ и $\omega_2 = +1$. Таким образом, имеется два возможных начальных состояния «шляпки»: $(x_{11}, 0, +1)$ и $(x_{11}, 0, -1)$. При увеличении x точка M_4 может попасть как в положительное, так и в отрицательное полупространства. В этом случае будем иметь четыре возможных состояния «шляпки»: $(x, +1, +1)$, $(x, -1, -1)$, $(x, -1, +1)$, $(x, +1, -1)$. Когда x станет равным x_{12} , точка M_4 опять ляжет в плоскость и снова будет $\omega_1 = 0$. При этом ветви $(x, +1, +1)$ и $(x, -1, +1)$, $(x, -1, -1)$ и $(x, +1, -1)$ сольются. Используем параметры

$$\varphi_1 = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \frac{(x - x_{11})}{(x_{12} - x_{11})}, & \text{при } \omega_1 = 0, 1; \omega_2 = 1; x \in [x_{11}, x_{12}]; \\ \pi + \frac{\pi}{2} \frac{(x_{12} - x)}{(x_{12} - x_{11})}, & \text{при } \omega_1 = 0, -1; \omega_2 = 1; x \in (x_{11}, x_{12}] \end{cases}$$

$$\varphi_2 = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \frac{(x - x_{11})}{(x_{12} - x_{11})}, & \text{при } \omega_1 = 0, 1; \omega_2 = -1; x \in [x_{11}, x_{12}]; \\ \pi + \frac{\pi}{2} \frac{(x_{12} - x)}{(x_{12} - x_{11})}, & \text{при } \omega_1 = 0, -1; \omega_2 = -1; x \in (x_{11}, x_{12}). \end{cases}$$

Получили отображение конфигурационного пространства на две окружности (рис. 4). В этом случае конфигурационное пространство неясно, поэтому не всякие два состояния «шляпки» можно перевести друг в друга изгибанием.

В четвертом случае, когда совпадают два корня, конфигурационное пространство гомеоморфно восьмерке (рис. 5). Пусть для определенности $x_{11} = x_{21} < x_{12} < x_{22}$, тогда при $x = x_{11}$ вся «шляпка» лежит в плоскости. С увеличением x точки M_4 и M_5 могут располагаться в пространстве четырьмя различными способами: $(x, +1, +1)$, $(x, -1, -1)$, $(x, -1, +1)$, $(x, +1, -1)$. Эти ветви попарно сливаются при $x = x_{12}$. Таким образом, существует точка ветвления: $x = x_{11}$. Для отображения конфигурационного пространства на восьмерку можно выбрать параметры φ_1 и φ_2 точно так же, как и в предыдущем случае, считая, что точки $\varphi_1 = 0$ и $\varphi_2 = 0$ отождествлены.

В пятом случае, рассуждая аналогично, получаем, что конфигурационное пространство гомеоморфно двум окружностям, склеенным в двух точках (рис. 6). Выбор параметров φ_1 , φ_2 аналогичен третьему случаю. Здесь имеются две точки ветвления: $\varphi_1 = 0$ и $\varphi_2 = 0$, $\varphi_1 = \pi$ и $\varphi_2 = \pi$.

Теперь перейдем к описанию конфигурационных пространств октаэдров Брикара. Мы не занимаемся поиском изгибающихся октаэдров, а считаем, что рассматриваемые октаэдры уже изгибаются. В этом случае, как показано в работе [3], каждое положение одной «шляпки»

полностью определяет положение другой половины октаэдра. Поэтому конфигурационные пространства изгибающегося октаэдра совпадают с конфигурационным пространством его половинки — «шляпки».

Октаэдры Брикара третьего типа характеризуются тем, что в двух своих положениях весь октаэдр полностью лежит в плоскости. Таким «шляпкам» могут быть только «шляпки» с пятым типом конфигурационного пространства. Таким образом, конфигурационное пространство октаэдров Брикара третьего типа гомеоморфно двум окружностям, склеенным в двух точках (рис. 6).

Октаэдры Брикара первого и второго типов обладают осью и плоскостью симметрии соответственно, поэтому их можно считать состоящими из двух симметричных «шляпок».

При изгибе октаэдра «шляпки» будут изгибаться симметричным образом. Поэтому конфигурационные пространства октаэдров Брикара первого и второго типов будут совпадать с конфигураци-

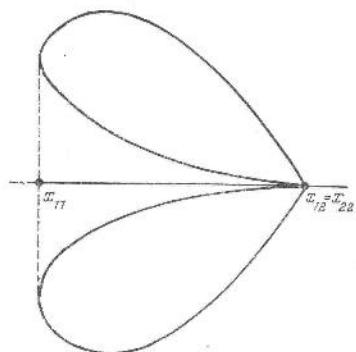


Рис. 5

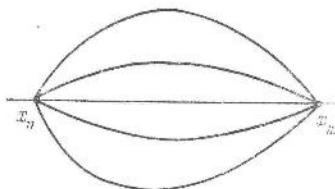


Рис. 6

онными пространствами «шляпок». Таким образом, конфигурационные пространства этих классов октаэдров Брикара могут быть второго, третьего и четвертого типов. Отметим также, что все возможные реализуются действительными октаэдрами.

В заключение приведем примеры «шляпок» с различными конфигурационными пространствами.

Пример неизгибающейся «шляпки» (конфигурационное пространство первого типа):

$$|M_3M_1| = 50; |M_3M_4| = 40; |M_3M_2| = 50; |M_3M_5| = 100; \\ |M_1M_4| = 30; |M_4M_2| = 30; |M_1M_5| = 50; |M_2M_5| = 130.$$

Пример «шляпки» октаэдра Брикара 1-го рода с конфигурационным пространством второго типа:

$$|M_3M_1| = 40; |M_3M_4| = 30; |M_3M_2| = 30; |M_3M_5| = 40; \\ |M_1M_4| = 20; |M_4M_2| = 30; |M_1M_5| = 30; |M_2M_5| = 20, \\ x_{11} = 443,8; x_{12} = 2456,2; x_{21} = 182,8; x_{22} = 1798,5.$$

Пример «шляпки» октаэдра Брикара 1-го рода с конфигурационным пространством третьего типа:

$$|M_3M_1| = 40; |M_3M_4| = 44; |M_3M_2| = 30; |M_3M_5| = 40; \\ |M_1M_4| = 20; |M_4M_2| = 30; |M_1M_5| = 30; |M_2M_5| = 20; \\ x_{11} = 190,9; x_{12} = 1673,1; x_{21} = 182,8; x_{22} = 1798,5.$$

Пример «шляпки» октаэдра Брикара 1-го рода с конфигурационным пространством четвертого типа:

$$|M_3M_1| = 40; |M_3M_4| = 44,915; |M_3M_2| = 30; |M_3M_5| = 40; \\ |M_1M_4| = 20; |M_4M_2| = 30; |M_1M_5| = 30; |M_2M_5| = 20; \\ x_{11} = 182,8; x_{12} = 1599,9; x_{21} = 182,8; x_{22} = 1798,5.$$

Пример «шляпки» октаэдра Брикара 2-го рода с конфигурационным пространством второго типа:

$$|M_3M_1| = 20; |M_3M_4| = 50; |M_3M_2| = 40; |M_3M_5| = 100; \\ |M_1M_4| = 40; |M_4M_2| = 40; |M_1M_5| = 90; |M_2M_5| = 90; \\ x_{11} = 400,8; x_{12} = 2299,2; x_{21} = 420,4; x_{22} = 2774,6.$$

Пример «шляпки» октаэдра Брикара 2-го рода с конфигурационным пространством третьего типа:

$$|M_3M_1| = 20; |M_3M_4| = 40; |M_3M_2| = 40; |M_3M_5| = 90; \\ |M_1M_4| = 40; |M_4M_2| = 40; |M_1M_5| = 90; |M_2M_5| = 90; \\ x_{11} = 458,4; x_{12} = 3141,6; x_{21} = 410,2; x_{22} = 3510,8.$$

Пример «шляпки» октаэдра Брикара 2-го рода с конфигурационным пространством четвертого типа:

$$|M_3M_1| = 20; |M_3M_4| = 45,28; |M_3M_2| = 40; |M_3M_5| = 90; \\ |M_1M_4| = 40; |M_4M_2| = 40; |M_1M_5| = 92; |M_2M_5| = 90; \\ x_{11} = 410,2; x_{12} = 2739,5; x_{21} = 410,2; x_{22} = 3510,8.$$

В заключение отметим, что деление октаэдров по типу конфигурационного пространства дает еще одну классификацию изгибаемых октаэдров.

Список литературы: 1. *Bricard R. Memoire sur la theorie de l'octaedre articule*, J. Math. Pures Appl. 3 (1897), P. 113—148. 2. *Kokotsakis A. Uber bewegliche Polyeder*, Math. Ann., 1932. Bd. 107 Hft. 4, S. 627—647. 3. *Lebesgue H. Oktaedres articules de Bricard*, Enseign. Math., ser. 2, 1967, vol 13, n. 3, P. 175—185. 4. *Connelly R. An Attack on Rigidity*. Cornell Univ., Preprint, 1974. (Есть русский перевод в книге «Исследования по метрической теории поверхностей», «Мир», 1980).

Поступила в редакцию 22.09.88

УДК 514

B. P. ГОРОХ

**ОБ УСТОЙЧИВОСТИ МИНИМАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ
В ПСЕВДОЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ**

Рассмотрим минимальные поверхности в трехмерном псевдоевклидовом пространстве $E^{3,1}$ с квадратичной формой $dx^2 + dy^2 - dz^2$. Поверхность в $E^{3,1}$ называется минимальной, если ее средняя кривизна $H = 0$. Поверхность в $E^{3,1}$ будем называть пространственно-

подобной (времениподобной), если все ее касательные плоскости пространственноподобны (времениподобны). Для произвольных векторов $a = (a_1, a_2, a_3)$ и $b = (b_1, b_2, b_3)$ в $E^{3,1}$ определим векторное произведение по формуле $[a, b] = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$. Оно отличается от векторного произведения в евклидовом пространстве только знаком последней компоненты.

Легко проверить, что для произвольных векторов a, b, c, d в псевдоевклидовом пространстве $E^{3,1}$ имеет место равенство

$$([a, b], [c, d]) = (a, d)(b, c) - (a, c)(b, d), \quad (1)$$

где круглые скобки обозначают скалярное произведение в $E^{3,1}$. Заметим, что если $r = r(u, v)$ — радиус-вектор поверхности в $E^{3,1}$ то вектор $\xi = [r_u, r_v]$ является нормальным к поверхности. Кроме того, $\xi^2 = F^2 - EG$, где E, F, G — коэффициенты первой квадратичной формы поверхности $r(u, v)$.

Как следует из теоремы Г. А. Шварца об устойчивости минимальной поверхности в евклидовом пространстве E^3 , любой кусок явно заданной минимальной поверхности дает минимум площади среди близких поверхностей при фиксированной границе Π (см. также [2]). Аналогом этого утверждения для минимальных поверхностей в псевдоевклидовом пространстве $E^{3,1}$ является

Теорема 1. Любой кусок пространственноподобной минимальной поверхности вида $z = z(x, y)$ в $E^{3,1}$ имеет наибольшую площадь среди близких пространственноподобных поверхностей с той же границей.

Для времениподобных минимальных поверхностей в псевдоевклидовом пространстве имеет место

Теорема 2. Пусть V^2 — времениподобная минимальная поверхность в $E^{3,1}$. Тогда для любой области на V^2 существует гладкая вариация в классе времениподобных поверхностей с неподвижной границей, увеличивающая площадь, и существует гладкая вариация в этом же классе поверхностей, уменьшающая площадь.

Докажем теорему 1. Пусть V^2 — пространственноподобная минимальная поверхность в $E^{3,1}$, задающаяся в виде $z = z(x, y)$. Пусть кривая Γ является границей поверхности V^2 . Включим V^2 в семейство минимальных поверхностей, получающихся из V^2 конгруэнтными сдвигами вдоль оси oz . Введем в $E^{3,1}$ криволинейные координаты (x, y, ε) , причем поверхности $\varepsilon = \text{const}$ являются поверхностями семейства, а ε -линии являются ортогональными траекториями этого семейства. Обозначим через $r(x, y, \varepsilon)$ радиус-вектор пространства $E^{3,1}$. Тогда $(r_x, r_y) = 0$, $(r_y, r_\varepsilon) = 0$. Следовательно, линейный элемент пространства запишется в виде: $ds^2 = E dx^2 + 2F dx dy + G dy^2 + T d\varepsilon^2$, где $E = r_x^2$, $F = (r_x, r_y)$, $G = r_y^2$, $T = r_\varepsilon^2$. Обозначим через \tilde{V}^2 пространственноподобную поверхность, отличную от V^2 и имеющую с V^2 общую границу Γ . Пусть уравнение поверхности \tilde{V}^2 имеет вид $\varepsilon = f(x, y)$. Обозначим через $\tilde{E}, \tilde{F}, \tilde{G}$ коэффициенты первой квадратичной формы поверхности \tilde{V}^2 . Возьмем произвольную точку $p = (x, y, \varepsilon)$, принадлежащую поверхности \tilde{V}^2 . Тогда вектор $\xi_1 = [r_x, r_y]$ является нормалью в точке p к поверхности $\varepsilon = \text{const}$, проходящей через точку p .

Векторы $r_x + \varepsilon_x r_e$ и $r_y + \varepsilon_y r_e$ — касательные к поверхности \tilde{V}^2 в точке p . Следовательно, вектор $\xi_2 = [r_x + \varepsilon_x r_e, r_y + \varepsilon_y r_e]$ является нормальным к поверхности \tilde{V}^2 в точке p . Тогда $\xi_1^2 = F^2 - EG$, $\xi_2^2 = \tilde{F}^2 - \tilde{E}\tilde{G}$. Используя (1) и учитывая, что $(r_x r_e) = 0$ и $(r_y r_e) = 0$, получим $(\xi_1, \xi_2) = F^2 - EG$. Следовательно,

$$\frac{(\xi_1, \xi_2)}{\sqrt{-\xi_1^2} \sqrt{-\xi_2^2}} = -\frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2}}. \quad (2)$$

Так как векторы ξ_1, ξ_2 являются времениподобными, то они лежат в одной и той же псевдоевклидовой плоскости. Поэтому $\xi_1^2, \xi_2^2 \leq (\xi_1, \xi_2)^2$, причем равенство имеет место только в случае коллинеарности векторов ξ_1, ξ_2 . Тогда из (2) получим

$$\sqrt{EG - F^2} \geq \sqrt{\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2}. \quad (3)$$

Покажем, что выражение $\sqrt{EG - F^2}$ не зависит от ε . Найдем коэффициенты второй квадратичной формы поверхности $\varepsilon = \text{const}$:

$$L = \frac{(r_{xx} r_e)}{\sqrt{-T}}, \quad M = \frac{(r_{xy} r_e)}{\sqrt{-T}}, \quad N = \frac{(r_{yy} r_e)}{\sqrt{-T}}.$$

Пометим, что $(r_{xx}, r_e) = (r_x, r_e)_x - (r_x, r_{ex}) = -\frac{1}{2}(r_x^2)_e = -\frac{E_\varepsilon}{2}$. Аналогично, $(r_{xy}, r_e) = -\frac{F_\varepsilon}{2}$, $(r_{yy}, r_e) = -\frac{G_\varepsilon}{2}$. Следовательно,

$$EN - 2FM + GL = -\frac{1}{2\sqrt{-T}} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} (EG - F^2). \quad (4)$$

Так как поверхность $\varepsilon = \text{const}$ — минимальная, то из (4) получаем $\frac{\partial}{\partial \varepsilon} (EG - F^2) = 0$, т. е. функция $EG - F^2$ не зависит от ε .

Интегрируя теперь неравенство (3) по области изменения параметров x и y и учитывая, что поверхность \tilde{V}^2 отлична от V^2 , получим, что площадь поверхности V^2 больше площади поверхности \tilde{V}^2 .

Докажем теорему 2. Пусть V^2 — времениподобная минимальная поверхность в $E^3, 1$; Q — произвольная область на V^2 , ограниченная приводом L . Введем на V^2 в окрестности произвольной точки $q \in Q$ изотермические координаты, в которых первая квадратичная форма поверхности примет вид $ds^2 = E(du^2 - dv^2)$, $E > 0$. В плоскости координат (u, v) возьмем квадрат $\omega = \{(u, v) : -\eta \leq u \leq \eta, -\eta \leq v \leq \eta\}$. Квадрату ω при достаточно малом $\eta > 0$ на поверхности V^2 соответствует некоторая область Ω , принадлежащая области Q .

Пусть $r(u, v)$ — радиус-вектор поверхности V^2 , $\xi(u, v)$ — единичная нормаль к V^2 . Обозначим $32 \iint_{\omega} |K| Edudv$ через A , где K — гауссова кривизна поверхности V^2 . Пусть m — натуральное число, удовлетворяющее неравенству

$$3(m+1)^2\pi^2 > A + 16\pi^2. \quad (5)$$

Рассмотрим теперь деформацию области Q , оставляющую дополнение области Ω неподвижным, а в квадрате ω заданную формулой

$$\tilde{r}(u, v, \varepsilon) = r(u, v) + \varepsilon n(u, v) \xi(u, v), \quad (6)$$

$$\text{где } n(u, v) = \left(1 + \cos \frac{(2m+1)\pi u}{\eta}\right) \left(1 + \cos \frac{\pi}{\eta} v\right).$$

Заметим, что функция $n(u, v)$ и ее производные n_u и n_v обращаются в нуль на границе квадрата ω . Следовательно, функция, которая равна $n(u, v)$ в квадрате ω и нулю на дополнении к области ω , является гладкой.

Обозначим через \tilde{E} , \tilde{F} , \tilde{G} коэффициенты первой квадратичной формы поверхности $\tilde{r}(u, v, \varepsilon)$. Тогда $\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2 = -E^2 \left(1 + \varepsilon^2 \left(2n^2 K + \frac{n_u^2 - n_v^2}{E}\right) + \dots\right)$, где многоточие обозначает выражение, в которое входит сомножителем, не ниже чем в третьей степени. Следовательно, при достаточно малом ε будет $\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2 < 0$. Таким образом, полученные при деформации области Q поверхности являются при достаточно малом ε гладкими и времениподобными. Изменение площади области Q , связанное с такой деформацией, равно

$$\begin{aligned} \delta^2 S = \iint_{\omega} \left(2 \left(1 + \cos \frac{(2m+1)\pi}{\eta} u\right)^2 \left(1 + \cos \frac{\pi}{\eta} v\right)^2 KE - \right. \\ \left. - \frac{\pi^2}{\eta^2} \left(1 + \cos \frac{(2m+1)\pi}{\eta} u\right)^2 \sin^2 \frac{\pi}{\eta} v + \right. \\ \left. + \frac{(2m+1)^2 \pi^2}{\eta^2} \sin^2 \frac{(2m+1)\pi}{\eta} u \left(1 + \cos \frac{\pi}{\eta} v\right)^2 \right) dudv. \end{aligned}$$

Заметим теперь, что

$$\begin{aligned} \left| \iint_{\omega} \left(2 \left(1 + \cos \frac{(2m+1)\pi}{\eta} u\right)^2 \left(1 + \cos \frac{\pi}{\eta} v\right)^2 KE - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\pi^2}{\eta^2} \left(1 + \cos \frac{(2m+1)\pi}{\eta} u\right)^2 \sin^2 \frac{\pi}{\eta} v \right) dudv \right| \ll A + 16\pi^2, \\ \iint_{\omega} \frac{(2m+1)^2 \pi^2}{\eta^2} \sin^2 \frac{(2m+1)\pi}{\eta} u \left(1 + \cos \frac{\pi}{\eta} v\right)^2 dudv = 3(2m+1)^2 \pi^2. \end{aligned}$$

Тогда, учитывая (5), получим $\delta^2 S > 0$, т. е. деформация области сопровождается увеличением площади.

Для получения гладкой вариации области Q , уменьшающей площадь, достаточно в предыдущем построении взять в формуле (6) функцию

$$n(u, v) = \left(1 + \cos \frac{\pi}{\eta} u\right) \left(1 + \cos \frac{(2m+1)\pi}{\eta} v\right).$$

В заключение покажем, что на любой контур L , лежащий в плоскости yz , можно натянуть гладкую времениподобную поверхность сколь угодно большой площади.

Пусть контур L ограничивает область Q . Не ограничивая общности, можно считать, что начало системы координат (x, y, z) принадлежит области Q . В плоскости yz возьмем прямоугольник $\omega = \{(y, z) : -\varepsilon < y < \varepsilon, -3\varepsilon < z < 3\varepsilon\}$. Выберем $\varepsilon > 0$ настолько малым, чтобы прямоугольник ω принадлежал области Q . Рассмотрим поверхность V_1 , заданную в прямоугольнике ω уравнением $x = f(y, z)$, где

$$f(y, z) = \frac{\varepsilon}{\pi} \left(1 + \cos \frac{(2m+1)\pi}{\varepsilon} y \right) \left(1 + \cos \frac{\pi}{3\varepsilon} z \right),$$

$m =$ натуральное число.

Объединение поверхности V_1 с дополнением прямоугольника ω в области Q обозначим через V . Покажем, что V — гладкая времениподобная поверхность, границей которой является кривая L . Действительно, функция $f(y, z)$ и ее производные f_y и f_z обращаются в нуль на границе прямоугольника. Кроме того,

$$\begin{aligned} 1 + f_y^2 - f_z^2 &= 1 + (2m+1)^2 \sin^2 \frac{(2m+1)\pi}{\varepsilon} y \left(1 + \cos \frac{\pi}{3\varepsilon} z \right)^2 - \\ &- \frac{1}{9} \sin^2 \frac{\pi}{3\varepsilon} \left(1 + \cos \frac{(2m+1)\pi}{\varepsilon} y \right)^2 > (2m+1)^2 \times \\ &\times \sin^2 \frac{(2m+1)\pi}{\varepsilon} y \left(1 + \cos \frac{\pi}{3\varepsilon} z \right)^2. \end{aligned}$$

Поэтому $1 + f_y^2 - f_z^2 < 0$. Следовательно, V — гладкая времениподобная поверхность.

Для площади S_1 поверхности V_1 имеем

$$\begin{aligned} S_1 &= \iint_{\omega} V \sqrt{1 + f_y^2 - f_z^2} dy dz > (2m+1) \iint_{\omega} \left| \sin \frac{(2m+1)\pi}{\varepsilon} y \right| \times \\ &\times \left(1 + \cos \frac{\pi}{3\varepsilon} z \right) dy dz = \frac{24\varepsilon^2(2m+1)}{\pi}. \end{aligned}$$

Поэтому за счет выбора m площадь поверхности V_1 можно сделать сколь угодно большой. Но площадь поверхности V больше площади поверхности V_1 .

Список литературы: 1. Schwarz H. A. Gesammelte Mathematische Abhandlungen. Berlin: Verlag von J. Springer, 1989. 338 S. 2. Аминов Ю. А. Минимальные поверхности. X., 1978. 126 с.

Поступила в редакцию 21.11.88

УДК 513.736

А. Н. ЗУБКОВ, В. Т. ФОМЕНКО

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ДВУМЕРНОЙ ПОВЕРХНОСТИ,
СВЯЗАННЫЕ С КРУЧЕНИЕМ

1. Основные понятия и формулировка результатов. 1.1. Пусть F^n — двумерная поверхность класса C^3 в евклидовом пространстве E^n , $n > 4$, заданная в окрестности некоторой точки $x \in F^2$ уравнением

$r = r(u^1, u^2)$, где параметры (u^1, u^2) принадлежат плоской области D .
 $r \in C^3$; $\{n_\sigma\}_{\sigma=1}^{n-2}$ — ортонормированный базис, порождающий регулярные
 в окрестности точки x оснащение поверхности F^2 единичными нормалами n_σ , $\sigma = 1, n-2$.

Рассмотрим на F^2 в точке x направление, заданное при помощи единичного вектора t , принадлежащего касательной плоскости T_x^2 к поверхности F^2 в точке x , и направление, определяемое в точке x с помощью единичного вектора ξ , $\xi \in T_x^2$, $(\xi, t) = 0$. Репер $\{t, \xi, n_1, n_2, \dots, n_{n-2}\}$ будем считать ориентированным, так же, как и репер системы координат объемлющего пространства E^n .

1.2. Пусть $R(s) = r(u^1(s), u^2(s))$ — уравнение кривой $\mathcal{L}(x; t)$ на F^2 , проходящей через точку x в направлении t , $R(s) \in C^3$, отнесенное к натуральному параметру s так, что $x = (u^1(0), u^2(0))$. Класс таких кривых обозначим через $\{\mathcal{L}(x; t)\}$. Пусть $\tau(s)$ и $\eta(s)$ — поле касательных векторов и поле тангенциальных нормалей вдоль $\mathcal{L}(x; t)$; $\tau(0) = t$, $\eta(0) = \xi$, $|\eta(s)| = |\tau(s)| = 1$.

Нормальную составляющую $k_N(x; t)$ вектора кривизны $k(s) = \tau'_s(s)$ кривой $\mathcal{L}(x; t)$ в точке x называют вектором нормальной кривизны поверхности F^2 в точке x по направлению $t = \tau(0)$, а его длину $k_N(x; t) = |\kappa_N(x; t)|$ — нормальной кривизной поверхности F^2 в точке x по направлению t [1, § 48]. Известно [2], что $k_N(x; t)$ не зависит от выбора кривой $\mathcal{L}(x; t)$ на F^2 .

Аналогично нормальную составляющую $p_N(x; t)$ вектора кривизны $p(s) = \eta'_s(s)$ поля $\eta(s)$ в точке $x \in F^2$ назовем вектором эйлеровой кривизны поверхности F^2 в точке x по направлению $t = \tau(0)$, а его длину $p_N(x; t) = |\rho_N(x; t)|$ — эйлеровой кривизной поверхности F^2 в точке x по направлению t . Нетрудно убедиться, что $p_N(x; t)$ не зависит от выбора кривых $\mathcal{L}(x; t)$, проходящих через точку $x \in F^2$ в направлении $t \in T_x^2$. Это означает, что $p_N(x; t)$ является характеристикой поверхности F^2 в точке x по направлению $t \in T_x^2$.

В дальнейшем считаем, что $k_N(x; t) \neq 0$ и $p_N(x; t) \neq 0$.

1.3. Обозначим через $\{\mathcal{L}^0(x; t)\}$ класс кривых из $\{\mathcal{L}(x; t)\}$ на F^2 , для которых геодезическая кривизна k_g в точке x равна нулю.

Рассмотрим вдоль кривой $\mathcal{L}^0(x; t) \in \{\mathcal{L}^0(x; t)\}$ поля единичных векторов $\beta(s) = \tau'_s / |\tau'_s|$ и $\delta(s) = \eta'_s / |\eta'_s|$.

Нормальную составляющую $\kappa_N(x; t)$ вектора кривизны $\kappa(s) = \beta'_s(s)$ поля $\beta(s)$ в точке x назовем вектором нормального кручения поверхности F^2 в точке x по направлению t , а нормальную составляющую $v_N(x; t)$ вектора кривизны $v(s) = \delta'_s(s)$ поля $\delta(s)$ в точке x — вектором эйлерова кручения поверхности F^2 в точке x по направлению t .

Теорема 1. Нормальная составляющая $\kappa_N(x; t)$ вектора $\kappa(x; t)$ не зависит от выбора кривых на F^2 из класса $\{\mathcal{L}^0(x; t)\}$, проходящих через точку x в направлении t .

Теорема 2. Нормальная составляющая $v_N(x; t)$ вектора $v(x; t)$ не зависит от выбора кривых на F^2 из класса $\{\mathcal{L}^0(x; t)\}$, проходящих через точку x в направлении t .

Отсюда следует, что значения $\kappa_N(x; t) = |\kappa_N(x; t)|$ и $v_N(x; t) = |\nu_N(x; t)|$ являются характеристиками поверхности F^2 в точке x по направлению t . Будем называть их соответственно нормальным кручением и эйлеровым кручением поверхности F^2 в точке x по направлению t .

На основании формул Френе [1] для нормального сечения $\mathcal{L}_N(x; t)$ поверхности F^2 в точке x по направлению t имеем $\beta'_s(s) = \kappa_N \lambda$, $|\lambda| = 1$, $(\lambda, \tau) = 0$, $(\lambda, \beta) = 0$, где $\tilde{\kappa}_N$ — кручение кривой $\mathcal{L}_N(x; t)$ в точке x , рассматриваемой в гиперплоскости $E_x^{n-1}(x; t, N_x^{n-2})$, паянной на вектор t , и нормальное пространство N_x^{n-2} к F^2 в точке x . Таким образом, $\kappa_N(x; t)$ совпадает с кручением $\tilde{\kappa}_N$ нормального сечения $\mathcal{L}_N(x; t)$ в точке x [3].

Аналогично, используя уравнения связки Шмидта [1, § 32] относительно векторного поля $\eta(s)$ вдоль кривой $\mathcal{L}_N(x; t)$, получаем, что $v_N(x; t)$ есть кручение векторного поля $\eta(s)$ вдоль $\mathcal{L}_N(x; t)$ в точке x .

1.4. Рассмотрим вдоль кривой $\mathcal{L}^0(x; t)$ векторные поля $k_N(u(s); \tau(s))$ и $p_N(u(s); \tau(s))$, где $u(s)$ — точка кривой $\mathcal{L}^0(x; t)$. Пусть

$$e(s) = \frac{k_N(u(s); \tau(s))}{|k_N(u(s); \tau(s))|} \text{ и } m(s) = \frac{p_N(u(s); \tau(s))}{|p_N(u(s); \tau(s))|}. \quad (1)$$

Следуя общей идее работы [4], введем

Определение. Направления векторов $k_N(x; t)$ и $p_N(x; t)$ переносятся параллельно в нормальном расслоении на F^2 из точки $x \in F^2$ в направлении $t \in T_x^2$, если векторы $e'_s(0)$ и $m'_s(0)$, где дифференцирование ведется по кривой $\mathcal{L}^0(x; t)$ из класса $\{\mathcal{L}^0(x; t)\}$, лежат в касательной плоскости T_x^2 .

Условия параллельного перенесения направлений векторов $k_N(x; t)$ и $p_N(x; t)$ даются следующими теоремами.

Теорема 3. Для того чтобы направление вектора нормальной кривизны $k_N(x; t)$ переносилось параллельно в нормальном расслоении на F^2 из точки x в направлении $t \in T_x^2$, необходимо и достаточно, чтобы $\kappa_N(x; t) \equiv 0$.

Теорема 4. Для того чтобы направление вектора эйлеровой кривизны $p_N(x; t)$ переносилось параллельно в нормальном расслоении на F^2 , необходимо и достаточно, чтобы $v_N(x; t) \equiv 0$.

Отсюда, в частности, следует корректность определения.

Следствие 1. Направление вектора кривизны $k_N(x; t)$ переносится параллельно в нормальном расслоении на F^2 вдоль любой геодезической на F^2 тогда и только тогда, когда $\kappa_N(x; t) \equiv 0$, $\forall x \in F^2, \forall t \in T_x^2$.

Следствие 2. Направление вектора эйлеровой кривизны $p_N(x; t)$ переносится параллельно в нормальном расслоении на F^2 вдоль любой геодезической на F^2 тогда и только тогда, когда $v_N(x; t) \equiv 0$, $\forall x \in F^2, \forall t \in T_x^2$.

2. Формулы для вычисления $k_N(x; t)$, $p_N(x, t)$, $u_N(x; t)$ и $v_N(x; t)$. Обозначим через $ds^2 = g_{ij} du^i du^j$, $g_{ij} = (\partial_i \mathbf{r}, \partial_j \mathbf{r})$, $i, j = 1, 2$, метрическую форму поверхности F^2 , а через

$$\begin{aligned} \Pi_{\sigma i} &= b_{\sigma i j} du^i du^j, \quad b_{\sigma i j} = -(\partial_i \mathbf{r}, \partial_j \mathbf{n}_{\sigma i}) = (r_{ij}, \mathbf{n}_{\sigma i}); \\ \omega_{\lambda \sigma i} &= \mu_{\lambda \sigma i} du^i, \quad \mu_{\lambda \sigma i} = -(\partial_i \mathbf{n}_{\lambda i}, \mathbf{n}_{\sigma i}) = (\partial_i \mathbf{n}_{\sigma i}, \mathbf{n}_{\lambda i}) = \\ &= \mu_{\sigma \lambda i}; \quad i, j = 1, 2, \lambda, \sigma = \overline{1, n-2}, \end{aligned} \quad (2)$$

вторые квадратичные формы и линейные формы кручения поверхности F^2 относительно нормальных полей $\mathbf{n}_{\sigma i}$, $\sigma = \overline{1, n-2}$ соответственно.

Теорема 5. Пусть точка $x \in F^2$ и единичные векторы $t \in T_x^2$ и $\xi \in T_x^2$ заданы в параметризации (u^1, u^2) на F^2 координатами (x^1, x^2) , $\{t^1, t^2\}$ и $\{\xi^1, \xi^2\}$ соответственно. Тогда имеют место формулы

$$k_N(x; t) = [\sum_{\lambda=1}^{n-2} (b_{\lambda i j} t^i t^j)^2]^{1/2}, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} u_N(x; t) &= \frac{1}{k_N^3} \left\{ \sum_{\lambda=1}^{n-2} \left[\sum_{\substack{\sigma=1 \\ \sigma \neq \lambda}}^{n-2} (b_{\sigma i j} \nabla_k b_{\lambda l m} - b_{\lambda i j} \nabla_k b_{\sigma l m} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \mu_{\lambda \sigma i} \sum_{v=1}^{n-2} b_{v l / k} b_{v l / m} \right) t^i t^j t^k t^l t^m b_{\sigma p q} t^p t^q \right]^2 \right\}^{1/2}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$p_N(x; t) = [\sum_{\lambda=1}^{n-2} (b_{\lambda i j} t^i \xi^j)^2]^{1/2}, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} v_N(x; t) &= \frac{1}{p_N^3} \left\{ \sum_{\lambda=1}^{n-2} \left[\sum_{\substack{\sigma=1 \\ \sigma \neq \lambda}}^{n-2} (b_{\lambda i j} \nabla_k b_{\lambda l m} - b_{\lambda i j} \nabla_k b_{\sigma l m} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \mu_{\lambda \sigma i} \sum_{v=1}^{n-2} b_{v l / m} b_{v l / k} \right) t^i \xi^j t^l \xi^m b_{\sigma p q} \xi^q t^p \right]^2 \right\}^{1/2}, \end{aligned} \quad (6)$$

где тензоры $b_{\lambda i j}$, $b_{\sigma i j}$, $\mu_{\lambda \sigma i}$ и их ковариантные производные $\nabla_k b_{\lambda i j m}$ и $\nabla_k b_{\sigma i l m}$, $\lambda, \sigma = \overline{1, n-2}$ относительно метрического тензора g_{ij} ($i, j = 1, n-2$) вычислены в точке $(x^1, x^2) \in F^2$.

Доказательство. Формула (3) известна (см., например, [1, § 48]). На основании формул Вейнгардтена [1, § 47] вдоль $L(x; t)$ имеем

$$n'_{\sigma i s} = -k_{\sigma i}(u; \tau) \tau - \tau_{\sigma i}(u; \tau) \eta + \sum_{\lambda=1}^{n-2} \Omega_{\lambda \sigma i}(u; \tau) \mathbf{n}_{\lambda i}, \quad \lambda = \overline{1, n-2}, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \text{где } k_{\sigma i}(u; \tau) &= b_{\sigma i j} \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds}; \quad \tau_{\sigma i}(u; \tau) = b_{\sigma i j} b^i \frac{du^j}{ds}, \quad b^i = g^{ik} (\eta, \partial_k \mathbf{r}); \\ \Omega_{\lambda \sigma i}(u; \tau) &= \mu_{\lambda \sigma i} \frac{du^i}{ds}. \end{aligned}$$

Принимая во внимание, что $(\eta, \eta'_s) = 0$, $(\eta'_s, \tau) = -(\tau'_s, \eta) = -k_g$, а $(\eta'_s, \mathbf{n}_{\lambda i}) = \tau_{\lambda i}(u; \tau)$, в силу формул (7) получаем

$$\eta'_s(s) = -k_g \tau + \sum_{\lambda=1}^{n-2} \tau_{\lambda i}(u; \tau) \mathbf{n}_{\lambda i}(u). \quad (8)$$

следует, что

$$p_N(x; t) = \sum_{\lambda=1}^{n-2} \tau_{\lambda|}(x; t) n_{\lambda|}(x),$$

и поэтому

$$p_N^2(x; t) = \sum_{\lambda=1}^{n-2} \tau_{\lambda|}^2(x; t),$$

что совпадает с формулой (5).

Найдем вектор $\kappa(s) = |\tau'_s|^{-1} (\tau''_{ss} - \beta(s) |\tau'_s|_s)$. Учитывая, что

[1] $\tau'_s = k_g(s) \eta + k_N$, где

$$k_N = \sum_{\lambda=1}^{n-2} k_{\lambda|}(u; \tau) n_{\lambda|}(u), \quad (9)$$

получим с учетом (7)

$$\begin{aligned} \tau''_{ss}(s) &= -k_N^2(u; \tau) \tau + [k_g' - \sum_{\lambda=1}^{n-2} k_{\lambda|}(u; \tau) \tau_{\lambda|}(u; \tau)] \eta + \\ &+ \sum_{\lambda=1}^{n-2} [k_{\lambda|s}(u; \tau) + \sum_{\sigma=1}^{n-2} k_{\sigma|}(u; \tau) \Omega_{\lambda\sigma|}(u; \tau)] n_{\lambda|} + k_g \eta'_s. \end{aligned}$$

Следовательно находим вектор

$$\begin{aligned} \kappa(s) &= \frac{1}{\sqrt{k_g^2 + k_N^2(u; \tau)}} \left\{ -\tau k_N^2(u; \tau) + \eta \left[k_g' - \sum_{\lambda=1}^{n-2} k_{\lambda|}(u; \tau) \tau_{\lambda|}(u; \tau) + \right. \right. \\ &+ \sum_{\lambda=1}^{n-2} [k_{\lambda|s}(u; \tau) + \sum_{\sigma=1}^{n-2} k_{\sigma|}(u; \tau) \Omega_{\lambda\sigma|}(u; \tau)] n_{\lambda|}(u) + k_g \eta'_s - \\ &\left. \left. - \frac{k_g' k_g + k_N' k_N(u; \tau)}{k_g^2 + k_N^2(u; \tau)} \left[\sum_{\lambda=1}^{n-2} k_{\lambda|}(u; \tau) n_{\lambda|}(u) + k_g \eta \right] \right] \right\}. \quad (10) \end{aligned}$$

Так как $k_g(x; t) = 0$ для кривой из класса $\{\mathcal{D}^0(x; t)\}$, то из (2) и (10) получаем

$$\begin{aligned} \kappa_N(x; t) &= |\kappa_N(x; t)| = \frac{1}{k_N^3(x; t)} \left\{ \sum_{\lambda=1}^{n-2} \left[\sum_{\substack{\sigma=1 \\ \sigma \neq \lambda}}^{n-2} (k_{\lambda|s}(x; t) k_{\sigma|}(x; t) - \right. \right. \\ &- k_{\lambda|}(x; t) k_{\sigma|s}(x; t) + k_N^2 \Omega_{\lambda\sigma|}(x; t)) k_{\sigma|}(x; t) \left. \right]^2 \right\}^{1/2}. \quad (11) \end{aligned}$$

Учитывая, что [3] $k_{\lambda|s}(x; t) = \nabla_k b_{\lambda|ij}(x) t^i t^j t^k$, $\lambda = \overline{1, n-2}$, где ковариантные производные $\nabla_k b_{\lambda|ij}$ относительно метрического тензора g_{ij} ($i, j = 1, 2$) вычислены в точке $x \in F^2$, получаем из (11) формулу (4).

Найдем вектор $\mathbf{v}(s) = |\eta'_s|^{-1} (\eta''_{ss} - \delta(s) |\eta'_s|_s)$. Дифференцируя по s обе части формулы (8), получаем

$$\begin{aligned}\eta''_{ss}(s) &= -\tau [k_g' + \sum_{\lambda=1}^{n-2} \tau_{\lambda l}(u; \tau) k_{\lambda l}(u; \tau)] + \\ &+ \eta [-k_g(s) - p_N^2(u; \tau)] + \sum_{\lambda=1}^{n-2} [\tau'_{\lambda l s}(u; \tau) - k_g(s) k_{\lambda l}(u; \tau)] + \\ &+ \sum_{\sigma=1}^{n-2} \tau_{\sigma l}(u; \tau) \Omega_{\lambda \sigma l}(u; \tau) n_{\lambda l}(u).\end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned}\mathbf{v}(s) &= \frac{1}{V_{k_g^2 + p_N^2(u; \tau)}} \left\{ -\tau \left[k_g' + \sum_{\lambda=1}^{n-2} \tau_{\lambda l}(u; \tau) k_{\lambda l}(u; \tau) \right] + \right. \\ &+ \eta [-k_g^2 - p_N^2(u; \tau)] + \sum_{\lambda=1}^{n-2} [-k_g(s) k_{\lambda l}(u; \tau) + \\ &+ \tau'_{\lambda l s}(u; \tau) + \sum_{\sigma=1}^{n-2} \tau_{\sigma l}(u; \tau) \Omega_{\lambda \sigma l}(u; \tau) n_{\lambda l} - \\ &\left. - \frac{k_g' k_g + p_N(u; \tau) p_N'(u; \tau)}{k_g^2 + p_N^2(u; \tau)} \left[-k_g \tau + \sum_{\lambda=1}^{n-2} \tau_{\lambda l}(u; \tau) n_{\lambda l} \right] \right\}. \quad (12)\end{aligned}$$

В силу того, что $k_g(x; t) = 0$ для кривой из класса $\{\mathcal{Z}^0(x; t)\}$, находим

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_N(x; t) &= |\mathbf{v}_N(x; t)| = \frac{1}{p_N^3(x; t)} \left\{ \sum_{\lambda=1}^{n-2} \left[\sum_{\substack{\sigma=1 \\ \sigma \neq \lambda}}^{n-2} (\tau'_{\lambda l s}(x; t) \tau_{\sigma l}(x; t) - \right. \right. \\ &\left. \left. - \tau_{\lambda l}(x; t) \tau'_{\lambda l s}(x; t) + p_N^2 \Omega_{\lambda \sigma l}(x; t) \tau_{\sigma l}(x; t) \right]^2 \right\}^{1/2}. \quad (13)\end{aligned}$$

Из формулы (8) на основании формул Гаусса [1, § 47] имеем

$$\begin{aligned}\tau'_{\lambda l s}(u; \tau) &= \partial_j b_{\lambda l}^k \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} b^k - k_g b_{\lambda l}^k g_{jk} \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} + \\ &+ b_{\lambda l}^k \Gamma_{jk}^\alpha b_\alpha \frac{du^j}{ds} \frac{du^i}{ds} + b_{\lambda l}^k b_k \frac{d^2 u^i}{ds^2}, \quad \lambda = \overline{1, n-2},\end{aligned}$$

где Γ_{ij}^α — символы Кристоффеля, соответствующие метрическому тензору g_{ij} ($i, j = 1, 2$). Так как для кривой $\mathcal{Z}^0(x, t)$

$$\frac{d^2 u^i(0)}{ds^2} = -\Gamma_{\alpha\beta}^i(x) \frac{du^\alpha(0)}{ds} \frac{du^\beta(0)}{ds}, \quad i = \overline{1, 2},$$

то

$$\tau'_{\lambda l s}(x; t) = \nabla_j b_{\lambda l i k} t^i t^j \xi^k, \quad \lambda = \overline{1, n-2}, \quad (14)$$

где $\nabla_j b_{\lambda l i k}$ вычислены в точке $x \in F^2$. Принимая во внимание (2) и (14), получаем из (13) формулу (6). Теорема 5 доказана.

3. Доказательство теорем 1—4. 3.1. На основании (2) и (10)

$$\begin{aligned} \kappa_N(x; t) = & \frac{1}{k_N^3(x; t)} \sum_{\lambda=1}^{n-2} \left\{ \sum_{\substack{\sigma=1 \\ \sigma \neq \lambda}}^{n-2} [(b_{\sigma|t} \nabla_k b_{\lambda|lm} - b_{\lambda|t} \nabla_k b_{\sigma|lm} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \mu_{\lambda\sigma|l} \sum_{v=1}^{n-2} b_{v|jk} b_{v|lm} t^i t^j t^k t^l t^m b_{\sigma|pq} t^p t^q] \right\} \mathbf{n}_{\lambda|}(x), \end{aligned}$$

где $b_{\sigma|t}$, $b_{\lambda|t}$, $\mu_{\lambda\sigma|l}$, $\nabla_k b_{\lambda|lm}$ и $\nabla_k b_{\sigma|lm}$, $\lambda, \sigma = \overline{1, n-2}$ вычислены в точке $x \in F^2$. Отсюда и из (3) следует утверждение теоремы 1.

3.2. С учетом (2) и (12)

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(x; t) = & \frac{1}{p_N^3(x; t)} \sum_{\lambda=1}^{n-2} \left\{ \sum_{\substack{\sigma=1 \\ \sigma \neq \lambda}}^{n-2} [b_{\sigma|t} \nabla_k b_{\lambda|t}^m - b_{\lambda|t} \nabla_k b_{\sigma|t}^m + \right. \right. \\ & \left. \left. + \mu_{\lambda\sigma|l} \sum_{v=1}^{n-2} b_{v|t}^m b_{v|jk} t^i \xi^j t^k \xi^m b_{\sigma|pq} \xi^q t^p] \right\} \mathbf{n}_{\lambda|}(x), \end{aligned}$$

где $b_{\sigma|t}$, $b_{\lambda|t}$, $b_{\lambda|t}^m$, $b_{\sigma|t}^m$, $\mu_{\lambda\sigma|t}$, $\nabla_k b_{\sigma|t}^m$ и $\nabla_k b_{\lambda|t}^m$, $\lambda, \sigma = \overline{1, n-2}$ вычислены в точке $x \in F^2$. Отсюда и из (5) следует утверждение теоремы 2.

3.3. В силу определения п. 1.4 $(e(x; t))'_s \cdot \mathbf{n}_{\lambda|}(x) = 0$, $\lambda = \overline{1, n-2}$ и, следовательно, для кривой $\mathcal{Z}^0(x; t)$ имеем $(e(x; t), \mathbf{n}_{\lambda|}(x))'_s = (n_{\lambda|s}(x), e(x; t))$, $\lambda = \overline{1, n-2}$. Отсюда и из (1) получаем систему соотношений

$$\left(\frac{k_{\lambda|}(x; t)}{k_N(x; t)} \right)'_s = \sum_{\lambda=1}^{n-2} \frac{k_{\lambda|}(x; t)}{k_N(x; t)} (n'_{\lambda|s}, n_{\lambda|}), \quad \lambda = \overline{1, n-2},$$

которую можно записать в силу (2), (7) и (9) в виде

$$\begin{aligned} & [k'_{\lambda|s}(x; t) + \sum_{\sigma=1}^{n-2} k_{\sigma|}(x; t) \Omega_{\lambda\sigma|}(x; t)] k_N^2(x; t) = \\ & = k_{\lambda|}(x; t) \sum_{\sigma=1}^{n-2} k'_{\sigma|s}(x; t) k_{\sigma|}(x; t), \quad \lambda = \overline{1, n-2}. \end{aligned} \quad (15)$$

Отсюда из (2) и (11) следует, что $\kappa_N(x; t) = 0$.

Обратно, если $\kappa_N(x; t) = 0$, то из (11), в силу (2), получаем уравнения вида (15). А это означает, что вектор $e(x; t)$ параллельно переносится в нормальном расслоении на F^2 из точки $x \in F^2$ в направлении $t \in T_x^2$. Теорема 3 доказана.

3.4. В силу определения п. 1.4 имеют место уравнения

$$(m(x; t))'_s \mathbf{n}_{\lambda|}(x) = 0, \quad \lambda = \overline{1, n-2}. \quad (16)$$

Отсюда аналогично предыдущему находим систему соотношений

$$\begin{aligned} & [\tau'_{\lambda|s}(x; t) + \sum_{\sigma=1}^{n-2} \tau_{\sigma|}(x; t) \Omega_{\lambda|\sigma}(x; t)] p_N^2(x; t) = \\ & = \tau_{\lambda|}(x; t) \sum_{\sigma=1}^{n-2} \tau'_{\sigma|s}(x; t) \tau_{\sigma|}(x; t), \quad \lambda = \overline{1, n-2}. \end{aligned} \quad (17)$$

Из (2), (13) и (17) следует тогда, что $v_N(x; t) = 0$.

Если же $v_N(x; t) = 0$, то из (2) и (13) получаем (17). А это означает что вектор $m(x; t)$ переносится параллельно в нормальном расслоении на F^2 из точки x в направлении t . Теорема 4 доказана.

Список литературы: 1. Эйзенхарт Л. П. Риманова геометрия. М., 1948. 316 с. 2 Схутен И. А., Стройк Д. Дж. Введение в новые методы дифференциальной геометрии. М., 1948. 2. 348 с. 3. Фоменко В. Т. Некоторые свойства двумерных по верхностей с нулевым нормальным кручением в E^4 // Матем. сб. 1978. 106. № 4 С. 589–603. 4. Chen Bang — Len. Geometry of submanifolds. New York. M. Dekker. 1973. 308 p.

Поступила в редакцию 30.07.81

В. Ф. ИГНАТЕНКО

О СПЕЦИАЛЬНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЯХ
С БЕСКОНЕЧНЫМ МНОЖЕСТВОМ ПЛОСКОСТЕЙ КОСОЙ СИММЕТРИИ

Пусть F_n есть вещественная $(m - 1)$ -мерная нецилиндрическая поверхность порядка n в евклидовом пространстве E^m , инвариантная относительно бесконечной группы G , порожденной косыми отражениями относительно плоскостей; μ_j -плоскости Π^{μ_j} ($j = \overline{0, p}$) — линейные оболочки бесконечных $G(\mathbf{u})$ -орбит направлений симметрии π , определяемых векторами. Будем считать, что μ_s' -плоскость $\Pi^{\mu_s'} \parallel \Pi^{\mu_s} \times \times (\mu_s' > \mu_s, 0 \leq s \leq p)$ не пересекает F_n по вещественным и, может быть, мнимым квадрикам с общей симметрией [1]. При этом размерность пересечения любых двух μ_j -плоскостей $\{\Pi^{\mu_j}\}$ не больше единицы [2].

Теорема. *Если три линейные оболочки $\Pi^{\mu_\alpha}, \Pi^{\mu_\beta}, \Pi^{\mu_\gamma}$ ($0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq p; \mu_\alpha \geq \mu_\beta \geq \mu_\gamma$) пересекаются по прямой l , то*

$$l = \Pi^{\mu_\gamma} \cap (\Pi^{\mu_\alpha} + \Pi^{\mu_\beta}). \quad (1)$$

Доказательство. Согласно формуле (14) работы [2]

$$\Pi^{\mu_j} = \Pi^{d_j} \oplus \Pi^{\eta_j}; \quad (2)$$

плоскости симметрии поверхности F_n , сопряженные векторам Π^{d_j} , проходят через Π^{η_j} . Пусть v — плоскость $\Pi^v = \Pi^{\mu_\gamma} \cap (\Pi^{\mu_\alpha} + \Pi^{\mu_\beta})$, $v \geq 1$; на основании (2)

$$\Pi^v = \Pi^{\eta_\gamma} \cap (\Pi^{\eta_\alpha} + \Pi^{\eta_\beta}). \quad (3)$$

Значит, в (1) индексы μ_α , μ_β , μ_γ можно заменить на γ_α , γ_β , γ_γ соответственно. Из (2), (3) следует, что требования $d_\alpha = d_\beta = d_\lambda = 1$, $\nu = \gamma_\gamma$ общность сохраняют. В декартовых координатах $y_\omega (\omega = 1, 2, \dots, m - \lambda - \mu - 2)$ уравнение поверхности F_n по теореме 2 [2] можно записать так:

$$\sum_{j=0}^q A_j (ay_1^2 + \sum_{i=1}^\lambda \xi_i z_i)^{q-j} = 0 \quad (4)$$

$$\sum_{j=0}^{q'} B_j (by_2^2 + \sum_{k=1}^\mu \zeta_{\lambda+k-1} z_{\lambda+k-1})^{q'-j} = 0. \quad (5)$$

Здесь прямая $l = O z_\lambda$ (O — начало координат), число $ab \neq 0$, многочлены A_j зависят только от $y_2, y_3, z_{\lambda+1}, \dots, z_{\lambda+\mu-1}, x_\omega$, многочлены B_j — от $y_1, y_3, z_1, \dots, z_{\lambda-1}, x_\omega$, а линейные функции ξ_i и ζ_k — от x_ω (по лемме 9 [2] число $m - \lambda - \mu \geq 4$).

Сравнение одночленов уравнений (4) и (5), содержащих старшие степени z_λ , дает $q = q' (j = j')$. На основании следствия теоремы 1 [2]

$$A_0 = \xi_\lambda^q A'_0 (x_\omega), \quad B_0 = \xi_\lambda^q A'_0 (x_\omega), \quad (6)$$

где $\xi_\lambda \neq \zeta_\lambda$.

Предположим, что $v > 1$; $\Pi^v = \Pi^{v-1} \oplus \Pi^1 (z_1)$. Зададим $(v-1)$ -плоскость Π^{v-1} в δ -плоскости $\Pi^\delta (z_1, \dots, z_{\lambda+\mu-1})$ уравнениями

$$\begin{aligned} z_{v+\sigma} &= \sum_{t=1}^{v-1} a_{\sigma t} z_t, \quad \sigma = \overline{0, \lambda - v}; \\ z_{\lambda+\sigma} &= \sum_{t=1}^{v-1} b_{\sigma t} z_t, \quad \sigma = \overline{1, \mu - 1}; \end{aligned} \quad (7)$$

число $\sum_\sigma b_{\sigma t}^2 > 0$ при любом t , $\text{rang } \|b_{\sigma t}\| = v-1$.

Пусть преобразование φ определяется формулами

$$\begin{aligned} z_t &= z'_t \quad (t = \overline{1, v-1}); \quad z_{v+\sigma} = z'_{v+\sigma} + \sum_{t=1}^{v-1} a_{\sigma t} z'_t; \\ z_{\lambda+\sigma} &= z'_{\lambda+\sigma} + \sum_{t=1}^{v-1} b_{\sigma t} z'_t. \end{aligned} \quad (8)$$

Уравнения (7) и формулы (8) показывают, что $\Pi^{v-1} = \Pi^{v-1} (z_1, \dots, z_{v-1}), O z_v = O z'_v, \dots, O z_{\lambda+\mu-1} = O z'_{\lambda+\mu-1}$. Теперь согласно (4), (5) и (8) получаем уравнения F_n :

$$\sum_{j=0}^q C_j (ay_1^2 + \sum_{\sigma=0}^{\lambda-v} \xi_{v+\sigma} z_{v+\sigma})^{q-j} = 0, \quad (9)$$

$$\sum_{j=0}^q D_j (by_2^2 + \sum_{k=1}^\mu \zeta_{\lambda+k-1} z_{\lambda+k-1})^{q-j} = 0, \quad (10)$$

где многочлены C_i, D_i (как и A_i, B_i) зависят только от переменных, не указанных в скобках. Из (4) — (6) и (8) — (10) следует, что

$$A_0 = C_0, \quad B_0 = D_0. \quad (11)$$

Каждое из уравнений (9) и (10) допускает вид

$$\sum_{i=0}^q P_i (cy_3^2 + \sum_s \chi_s z'_s)^{q-i} = 0; \quad (12)$$

индекс $s = 1, \dots, v-1$, λ , число $c \neq 0$, многочлены P_i зависят только от $y_1, y_2, z_v, \dots, z_{\lambda-1}, z'_{\lambda+1}, \dots, z'_{\lambda+\mu-1}, x_w$; линейные функции χ_s — от x_w .

Имеют место аналогичные (6), с учетом (11), такие соотношения:

$$\begin{aligned} A_0 &= \chi_\lambda^q A'_0(x_w), & B_0 &= \chi_\lambda^q B'_0(x_w); \\ P_0 &= \xi_\lambda^q A''_0 = \xi_\lambda^q B''_0, & \xi_\lambda &\neq \chi_\lambda \neq \zeta_\lambda. \end{aligned} \quad (13)$$

Подвернув левую часть уравнения (12) преобразованию q^{-1} , получим

$$\sum_{i=0}^q Q_i [cy_3^2 + \sum_{t=1}^{v-1} (\chi_t - \alpha_{\lambda-v, t} \chi_\lambda) z_t + \chi_\lambda z_\lambda]^{q-i} = 0, \quad (14)$$

где $Q_i = \Phi^{-1}(P_i)$, $Q_0 = P_0$; многочлены Q_i , $i > 0$, не содержат z_λ .

Используя (13), сравним функциональные коэффициенты при z_λ^{q-1} уравнений (4), (5), (14):

$$\begin{aligned} q\xi_\lambda^q \chi_\lambda^{q-1} A'_0 [cy_3^2 + \sum_{t=1}^{v-1} (\chi_t - \alpha_{\lambda-v, t} \chi_\lambda) z_t] + \chi_\lambda^{q-1} Q_1 &= \\ = q\chi_\lambda^q \xi_\lambda^{q-1} A'_0 (ay_1^2 + \sum_{t=1}^{\lambda-1} \xi_t z_t) + \xi_\lambda^{q-1} A_1 &= \\ = q\chi_\lambda^q \xi_\lambda^{q-1} B'_0 (by_2^2 + \sum_{k=2}^{\mu} \xi_{\lambda+k-1} z_{\lambda+k-1}) + \xi_\lambda^{q-1} B_1. & \end{aligned} \quad (15)$$

Полученные соотношения показывают, в частности, строение многочленов A_1, B_1, Q_1 . Выделим

$$\begin{aligned} A_1 \xi_\lambda^{q-1} &= q\chi_\lambda^q \xi_\lambda^{q-1} B'_0 (by_2^2 + \sum_{k=2}^{\mu} \xi_{\lambda+k-1} z_{\lambda+k-1}) + \\ &+ q\xi_\lambda^q \chi_\lambda^{q-1} A''_0 y_3^2 + \xi_\lambda^{q-1} A'_1(x_w). \end{aligned} \quad (16)$$

Согласно (15), правая часть (16) делится на χ_λ^{q-1} . Значит,

$$A'_1(x_w) = \chi_\lambda^{q-1} A''_0(x_w). \quad (17)$$

На основании (15) — (17) многочлен

$$\begin{aligned} Q_1 &= q\chi_\lambda \xi_\lambda^{q-1} A''_0 (ay_1^2 + \sum_{t=1}^{\lambda-1} \xi_t z_t) + q\chi_\lambda \xi_\lambda^{q-1} \times \\ &\times B'_0 (by_2^2 + \sum_{k=2}^{\mu} \xi_{\lambda+k-1} z_{\lambda+k-1}) + q\xi_\lambda^q A'_0 y_3^2 + \xi_\lambda^{q-1} A''_1(x_w). \end{aligned} \quad (18)$$

Так как $\varphi(Q_1) = P_1$ не зависит от z'_t , то (8) и (18) дают новые соотношения

$$\xi_t \xi_{\lambda}^{q-1} A''_0 = \xi_{\lambda}^{q-1} B_0 \sum_{k=2}^{\mu} b_{k-1, 1} \zeta_{\lambda+k-1}, \quad t = \overline{1, v-1}. \quad (19)$$

При $t = 1$ ($v > 2$) из (19) находим

$$A_0 = \Psi_{v\lambda}^{q-1} \sum_{k=2}^{\mu} b_{k-1, 1} \zeta_{\lambda+k-1}, \quad B_0 = \Psi_{\xi_1} \xi_{\lambda}^{q-1}, \quad (20)$$

т.е. Ψ — многочлен. Теперь из (13), (20) получим

$$\xi_{\lambda} \sum_{k=2}^{\mu} b_{k-1, 1} \zeta_{\lambda+k-1} = \xi_1 \zeta_{\lambda}. \quad (21)$$

Так как $\xi_1 \neq c \xi_{\lambda}$ (группа G не допускает расширения), то соотношение (21) невозможно в силу (13). Следовательно, число $v = 1$. Случай $v = 1$ соответствует пример поверхности F_4 , определяемой уравнением

$$\zeta_{\lambda} \chi_{\lambda} (y_1^2 + \sum_{i=1}^{\lambda} \xi_i z_i) + \chi_{\lambda} \xi_{\lambda} (y_2^2 + \sum_{\sigma=1}^{\mu-1} \zeta_{\lambda+\sigma} z_{\lambda+\sigma}) + \xi_{\lambda} \zeta_{\lambda} y_3^2 = c.$$

Теорема доказана.

Библиография: 1. Игнатенко В. Ф. О диаметральных плоскостях и плоскостях косой симметрии алгебраической поверхности пространства E^m // Укр. геом.-физ. 1977. Вып. 20. С. 35—46. 2. Игнатенко В. Ф. Строение инвариантов бесконечных групп, порожденных косыми отражениями. 1987. Деп. в УкрНИИНТИ, № 1, с. 13.07.87, № 1988 — Ук 87.

Поступила в редакцию 08.07.88

Б. Г. КАНАЕВ

СВЯЗКИ КОЛЛИНЕАЦИЙ И ДЕТЕРМИНАНТНЫЕ
РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПЛОСКОСТЕЙ В P^n

В современной теории морфизмов проективных расслоений центральную роль играет изучение их особенностей, которые рассматриваются в релятивизированной теории детерминантных многообразий в виде ранговой фильтрации $\text{Hom}(F, E)$. Определенное продвижение получено в случае, когда база расслоений E, F (ранга $m+1$ и $n+1$) является проективным пространством (см. [1, 3]) и $E \simeq U \otimes O_p(-1)$, $F \simeq V \otimes O_p$. При этом имеется геометрическая интерпретация в виде связки коллинеаций с базой P' . Основные усилия работы [1] сосредоточены на теореме о восстановлении связки по ее инвариантам, которая доказана при $p+2 < r < 2p+3$, $m = n + p$. По-прежнему не решена задача восстановления и классификации связок по инвариантам для остальных значений r . Основной целью настоящей работы

является развитие геометрического подхода к доказательству теоремы о восстановлении связок для $r \leq n - 1$, $m = n$. При этом осуществляется переход от исследования ранговой фильтрации в векторном пространстве $U^* \otimes V \cong \text{Hom}(U, V)$ к изучению многообразий, заменяемых ядрами коллинеаций в P^r , и связанными с ними детерминантами распределениями.

1. Основные определения. (1.1) Пусть E' , E — векторные расслоения над неособым многообразием X , $\text{rank } E' = m + 1$, $\text{rank } E = n + 1$. Линейной формой или коллинеацией расслоения E' в расслоение E называется морфизм $A : E' \rightarrow E$ или соответствующее сечение $A \in H^0(E^* \otimes E)$ (см. [1]).

(1.2) Далее положим $X = P^n$, $E' = U \otimes O_{P^n}(-1)$, $E = U \otimes O_{P^n}$, где U — векторное пространство размерности $n+1$. Пусть $P^n = P(U)$, тогда проективное пространство $P^n = P(U^* \otimes U)$, $N = n^2 + 2n$, является универсальным семейством коллинеаций P^n на P^n . Поэтому определено некоторое отображение $i : P^n \rightarrow P^n$, задаваемое линейным рядом, содержащимся в $|O_{P^n}(1)|$. Если этот ряд совпадает с $|O_{P^n}(1)|$, то морфизм $A : U \otimes O_{P^n}(-1) \rightarrow U \otimes O_{P^n}$ называется морфизмом эффективно параметризованной связки коллинеаций P^n на P^n с базой P^n . В этом случае $i(P^n)$ отождествляют с P^n .

(1.3) Положим $P^m = \langle A_i \rangle$, $i = 0, \dots, m$, где $A_i \in P^{n^2+2n}$. В пространстве коллинеаций P^{n^2+2n} определена ранговая фильтрация детерминанталей, соответствующая вырожденным коллинеациям

$$P^{n^2+2n} = R_0 \supset R_1 \supset \dots \supset R_{n-1}, \quad (1.3.1)$$

где $R_i = \{A \in P^{n^2+2n} \mid \text{rank } A = n - i + 1\}$. Ограничение фильтрации (1.3.1) на базу связки $\langle A_i \rangle$, $i = 0, \dots, m$, определяет на ней соответствующую фильтрацию

$$\langle A_i \rangle = X_0 \supset X_1 \supset \dots \supset X_{n-1}. \quad (1.3.2)$$

Если точка $A(y_0, \dots, y_m) \in \langle A_i \rangle$, то $X_i = \{A \in P^{n^2+2n} \mid \text{rank } \| \sum y_i A_i \| \leq n - i + 1\}$. При $m \leq n$ многообразие $X_1 - X_2$ вырожденных коллинеаций ранга n естественно вложено в P^n так, что каждой коллинеации сопоставляется ее (нуль-мерное) ядро.

Пусть K_1 — образ $X_1 - X_2$ при этом вложении, если $P(x_0, \dots, x_n) \in P^n$ и $A_i = \|a_{ijk}^i\|$, тогда

$$K_v = \{P \in P^n \mid \text{rank } \left\| \sum_{j=0}^n a_{ijk}^i x_j \right\| = m - v + 1\},$$

где $i = 0, \dots, m$, $k = 0, \dots, n$, и $\bar{K}_i = \bigcup_{v=i}^{m-1} K_v$ — замыкание K_i , $i = 1, \dots, m-1$, причем имеет место фильтрация

$$\bar{K}_1 \supset \bar{K}_2 \supset \bar{K}_3 \supset \dots \quad (1.3.3)$$

(1.4) Рассмотрим геометрическую интерпретацию связки коллинеаций.

Пусть A_i , $i = 1, \dots, m$, — линейные преобразования пространства P^n , иначе говоря, A_i — точки универсального пространства

применимых преобразований P^{n^2+2n} . Предположим, что A_i линейно независимы, тогда в P^{n^2+2n} однозначно определена m -связка коллинеаций $\langle E, A_i \rangle$, где E — единичная коллинеация. Покажем, что m -связка может быть задана следующим образом.

(1.4.1) *Предложение.* Изоморфное вложение многообразия Сергея в P^N , где $N = mn + m + n$, и вложения P^n, P^{mn+m-1} в P^N (образы P^n и P^{mn+m-1} не пересекаются) однозначно определяют m -связку коллинеаций. Наоборот, задание связки и непересекающихся вложений P^n и вложения P^{mn+m-1} однозначно определяют вложение Сергея $S_{m,n}$ в P^N .

Докажем первую часть предложения. Пусть $s(P^n) = S_0^n \subset s(P^m \times P^n) = S_{m,n}$ — фиксированное n -мерное подпространство, и $P^{N-n-1} \cap S_0^n = \emptyset$; $S_i^n \subset S_{m,n}, i = 1, \dots, m$, для определенности такие, что $P^{N-n-1} \cap S_i^n = \emptyset$, и $q: S_{m,n} \rightarrow S_0^n$ — проекция многообразия Сергея в S_0^n из центра P^{N-n-1} . Тогда точки $P_j \in P^n, j = 0, \dots, n+1$, определяют наборы точек P_j^i в каждом из $S_i^n \subset S_{m,n}, i = 0, \dots, m$, и соответственные пары точек $P_j, (s^{-1} \circ q(P_j^i)) \subset P^n, j = 0, \dots, n+1, i = 1, \dots, m$, определяют m образующих связки коллинеаций $\langle E, A_i \rangle$. (Понятно, что A_i линейно независимы).

Докажем обратное. Пусть в P^N зафиксированы вложения $P^{N-n-1}, P_i^n, i = 0, \dots, m$, такие что $P^{N-n-1} \cap P_i^n = \emptyset$, и пусть в P_0^n заданы m коллинеаций $A_i, i = 1, \dots, m$, определяющих связку $\langle E, A_i \rangle$, каждая из которых отображает набор точек P_j в набор $P_j^i, j = 0, \dots, n+1$. Тогда соответственные наборы точек $\langle P^{N-n-1}, P_j^i \rangle \cap P_i^n = \emptyset$ дают проективное отображение между пространствами P_i^n . Плоскости P^m , определяемые соответственными точками проективного отображения между P_i^n , замыкают $S_{m,n}$.

(1.4.2) *Замечание.* Доказанное предложение дает геометрическую интерпретацию свойству универсальности связки коллинеаций. Универсальное семейство коллинеаций $P^n = P(U)$ на P^n с базой $P^N = P(U^* \otimes U)$, $N = n^2 + 2n$, по определению (см. [3]) есть спаривание

$$A_0 : U \otimes (U^* \otimes U) \rightarrow U. \quad (1.4.2a)$$

В силу универсальности тензорного произведения $U \otimes (U^* \otimes U)$ существует билинейное отображение $\Phi: U \otimes (U^* \otimes U) \rightarrow U \otimes (U^* \otimes U)$. Переходя к проективизациям, получаем вложение Сергея $\Phi: (P^n \otimes P^N) \hookrightarrow P(U \otimes (U^* \otimes U))$, откуда следует, что различным вложениям $i: P^m \hookrightarrow P^N$ будут соответствовать различные связки, при этом ядро гомоморфизма A_0 можно считать таким, что $\rho(\ker A_0) \cap s(P^n \times P^N) = s(P^n \times P^{N-n-1})$. Далее ограничимся случаем $1 \leq m \leq n-1$.

(1.5) *Определение.* Детерминантной системой m -плоскостей $D(A_i)$ назовем множество тех и только тех m -плоскостей пространства P^n , каждая из которых вместе с некоторой точкой x содержит точки $A_i(x), i = 1, \dots, m$.

(1.6) *Замечание.* 1) Фактически определение (1.5) задает m -дeterminантных распределений на расслоении флагов $F = \{(x, \alpha) \in P^n \times G(m, n) \mid x \in \alpha\}$. Далее будем считать основным следующее детерминантное распределение: $D(A_i) = \{(x, \alpha) \in P^n \times G(m, n) \mid x, A_i(x) \in \alpha, \alpha \in D(A_i), x \in \alpha \bigcap_{i=1}^m A_i^{-1}(\alpha)\}$.

2) Распределение m -плоскостей $D(A_i)$ определяется любым набором линейно независимых коллинеаций $\langle E, A_i \rangle$ в m -связке $\langle E, A_i \rangle$ из пространства коллинеаций P^{n+2n} .

3) Различные связки в общем случае не могут определять одно и то же детерминантное распределение.

Распределение m -плоскостей $D(A_i)$ названо детерминантным, поскольку оно может быть получено согласно (1.4.1) линейной проекцией систем m -плоскостей многообразия $S_{m, n} \simeq P^m \otimes P^n$, вложенного по Серге в P^N .

(1.7) Рассмотрим в P^n детерминантное распределение, порожденное связкой коллинеаций $\langle E, A_i \rangle$, $i = 1, \dots, m$; $1 \ll m \ll n$. Тогда в P^n определена цепочка особенностей отображения $T: P^n \rightarrow F \hookrightarrow G_{m, n}$, где $T(x) = \langle x, A_i(x) \rangle$, $x \in P^n$ и

$$P^n = M_0 \supset M_1 \supset M_2 \supset M_3 \supset \dots, \quad (1.7.1)$$

где $M_i = \{x \in P^n \mid \dim T(x) = m - i\}$, $i = 1, \dots, m - 1$. Фильтрация (1.7.1) совпадает с (1.3.3).

Действительно, если точка $x \in P^n$ имеет координаты (x_0, \dots, x_n) , а коллинеации A_i определяются матрицами $\|a_{ik}^j\|$, где $j, k = 0, \dots, n$; $i = 1, \dots, m - 1$, то уравнения многообразий M_i могут быть записаны в виде

$$\text{rank} \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_k \\ \sum a_{0k}^1 x_k & \sum a_{1k}^1 x_k & \sum a_{nk}^1 x_k \\ \sum a_{0k}^m x_k & \sum a_{1k}^m x_k & \sum a_{nk}^m x_k \end{vmatrix} = m - i. \quad (1.7.2)$$

Многообразия M_i фильтрации (1.7.1) будем называть характеристическими многообразиями связки коллинеаций и детерминантного распределения, его порожденного.

С фильтрацией (1.7.1) характеристических многообразий естественным образом связана фильтрация многообразий нерегулярных элементов $Y_i \subset G(m - i, n)$ детерминантного распределения $D(A_i)$;

$$P^n = Y_0 \supset Y_1 \supset Y_2 \supset \dots,$$

где

$$Y_i = \{T(x) \mid T(x) = \langle x, A_i(x) \rangle, x \in M_i, \dim T(x) = m - i\}. \quad (1.7.3)$$

(1.8) *Замечание.* 1) (ср. с (1.4.1)). Пусть зафиксировано стандартное вложение Серге $s: S_{m, n} \hookrightarrow P^N$ и вложение $P^n \hookrightarrow P^N$. Тогда по m -связке однозначно восстанавливается пространство P^{n-m-1} , проекция многообразия Серге из которого определяет данную связку.

Действительно, пусть связка задана линейно независимыми коллинеациями $E, A_i, i = 1, \dots, m$, тогда из задания многообразия M_E получаем систему уравнений искомого центра проектирования P^{N-n-1} :

$$\begin{cases} x_0y_0 + y_1 \sum a_{0k}^1 x_k + \dots + y_m \sum a_{0k}^m x_k = 0; \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ x_ny_0 + y_1 \sum a_{nk}^1 x_k + \dots + y_m \sum a_{nk}^m x_k = 0. \end{cases}$$

Ситуацию, описанную выше, можно интерпретировать как отказ от фиксации спаривания A_0 (см. (1.4.2а)).

4) Пусть $s(P^n) = S^n \subset s(P^n \times P^n)$ — фиксированное n -мерное подпространство и $P^{N-n-1} \cap S^n = \emptyset$, $p: P^n \times P^n \rightarrow P^n$ — естественная проекция на второй сомножитель, тогда $\bar{K}_1 = s \circ p [s(P^n \times P^n) \cap P^{N-n-1}]$.

(1.9) Определение. Детерминантное распределение m -плоскостей назовем регулярным, если оно является проекцией $S_{m,n}$ из центра P^{N-n-1} , пересекающего $S_{m,n}$ по неособому многообразию m -мерности $m-1$.

(1.10) Частные случаи. 1) При $m=1$ система $D(A)$ является n -комплексом прямых, в частности, при $n=3$ является тетраэдральным комплексом прямых (см. [2]).

2) При $m=n-1$ с помощью распределения $D(A_i)$ можно задать график кремонова преобразования T в пространстве P^n .

В следующем разделе детально разберем случай 2.

2. О восстановлении связки коллинеаций по детерминантному распределению. Рассмотрим вопросы восстановления связки коллинеаций по ее геометрическим инвариантам.

(2.0) Предложение. Детерминантное распределение m -плоскостей в P^n однозначно определяет m -связку коллинеаций, его порождающую.

Пусть в P^N , $N = (n+1)(m+1)-1$, зафиксированы вложения P^{N-n-1} , P_0^n , в котором задано распределение D , P_l^n , такие что $P^{N-n-1} \cap P_i^n = \emptyset$; $P_i^n \cap P_l^n = \emptyset$; $i, l = 0, \dots, m$, $i \neq l$. (Если по указанным вложениям в P^N удастся восстановить многообразие Серре $S_{m,n}$, проекцией m образующих которого из центра P^{N-n-1} в P_0^n являются m -плоскости распределения, то предложение доказано (см. (1.4.1))).

Пусть (C_1, P_1^n) — точка и соответствующая ей плоскость распределения D , заданного в P_0^n , тогда пространство $P^{N+m-n} = \langle P_1^n, P^{N-n-1} \rangle$ в каждом из P_i^n , $i = 1, \dots, m$, высечет подпространство P_i^m . Выберем в каждом P_i^m по точке C_{i1} так, чтобы никакая пара точек C_{i1} не принадлежала одному и тому же пространству P^{N-n} , где $P^{N-n-1} \subset P^{N-n} \subset P^{N+m-n}$. Аналогично поступая еще с $n+1$ элементом (C_j, P_j^n) , $j = 2, \dots, n+2$, распределения D , получим в каждом из P_i^n по набору точек, которые задают проективное соответствие между

пространствами P_i^n , $i = 0, \dots, m$, что определяет многообразие Сергея $S_{m,n}$. Найдем далее коллинеации A_i , $i = 0, \dots, m$, которые задают искомую m -связку коллинеаций и порождают распределение D . Заметим, что проекции точек C_{ij} в P_0^n из P^{N-n-1} определяют m точек C_{ij} , которые вместе с точкой C_i определяют m -плоскости $P_i^m \subset D$. С другой стороны, точки C_{ij} при фиксированном i задают $n+2$ пары соответственных точек $\{(C_i, C_{ij})\}$, которые определяют коллинеацию A_i , $i = 0, \dots, m$; $j = 1, \dots, n+2$. Таким образом, в P_0^n определяется m коллинеаций A_i , $i = 1, \dots, m$, которые определяют связку $\langle E, A_i \rangle$.

Покажем, что любая другая m -плоскость распределения D порождается связкой $\langle E, A_i \rangle$. Допустим противное. Пусть m -мерная образующая многообразия Сергея $S_{m,n}$, проходящая через точку C_k , $k = 0, \dots, r$, где $(C_k, P_k^m) \in D$, спроектируется в плоскость $H_k^m \notin D$. Тогда в H_k^m лежат точки C_{ik} , $i = 0, \dots, m$ и, значит, $C_{ik} = A_i(C_k)$, т. е. (C_k, H_k^m) — элементы некоторого другого распределения D' , определяемого коллинеациями A_i . Тогда получаем, что D и D' имеют $n+2$ общих m -плоскостей, другими словами, A_i задаются парами соответственных точек $\{C_i, C_{ik}\}$, что и коллинеации A_i , чего не может быть, так как $H_k^m \neq P_k^m$, а это означает, что $A_i = A_i$. Предложение доказано.

(2.0.1) Следствие. Каждое характеристическое многообразие M_l (фильтрация (1.7.1)) детерминантного распределения m плоскостей и соответствующее ему многообразие $Y_l \subset G(m-l, n)$ однозначно определяет m -связку коллинеаций.

(2.0.2) Определение. Геометрическим инвариантом m -связки коллинеаций назовем пару (M_l, Y_l) , $l = 1, \dots, m-1$, соответственных многообразий фильтраций (1.7.1) и (1.7.3).

(2.1) Изображение коллинеаций и связок пространства P^n гиперплоскостями пространства P^{n+2n} , содержащего многообразие Сергея $S_{m,n} = s(P^{n+2n} \times P^n)$.

Рассмотрим пространство P^n с однородными координатами (x_0, \dots, x_n) и двойственное к нему пространство P^{n*} с координатами (u_0, \dots, u_n) . По определению точке $u(u_0, \dots, u_n) \in P^{n*}$ соответствует взаимно однозначно плоскость $P^{n-1} \subset P^n$ с уравнением

$$P^{n-1} : \sum_{i=0}^n u_i x_i = 0. \quad (2.1.1)$$

Аналогично, плоскости $P^{n-1} \subset P^{n*}$ с уравнением $\sum_{i=0}^n x_i u_i = 0$ ективно соответствует точка $x \in P^n$ с координатами (x_i) . Таким образом, мы имеем корреляцию между пространствами P^n и P^{n*} , которую в дальнейшем будем называть фундаментальной корреляцией и обозначать через Φ . В частности, точку $x \in P^n$, соответствующую плоскости $P^{n-1} \subset P^{n*}$ при корреляции Φ , будем обозначать через $\Phi(P^{n-1})$.

Рассмотрим отображение Сегре $s: P^{n*} \times P^n \rightarrow P^{n^2+2n}$, заданное
уравнениями

$$z_{ij} = u_i x_j, \quad i, j = 0, \dots, n, \quad (2.1.2)$$

(z_{00}, \dots, z_{nn}) — однородные координаты в P^{n^2+2n} . Пусть $A: P^n \rightarrow$
коллинеация, заданная уравнениями

$$\rho x'_i = \sum_{j=0}^n a_{ij} x_j, \quad i = 0, \dots, n. \quad (2.1.3)$$

Рассмотрим в пространстве P^{n*} плоскость с уравнением $\sum_{i=0}^n x'_i u_i = 0$.

Подставляя в это уравнение формулу (2.1.3) и учитывая (2.1.2),
находим

$$\sum a_{ij} z_{ij} = \sum_{i,j=0}^n a_{ij} u_i x_j = \sum_{i=0}^n x'_i u_i = 0. \quad (2.1.4)$$

Таким образом, коллинеации A с матрицей $\|a_{ij}\|$ пространства P^n
соответствует в P^{n^2+2n} гиперплоскость H_A с уравнением $\sum_{i,j=0}^n a_{ij} z_{ij} = 0$.

Очевидно, что это соответствие взаимно однозначно. Так как отображение Сегре $s: P^n \times P^{n*} \rightarrow S_{n,n}$ биективно, то в дальнейшем мы будем
отождествлять $P^n \times P^{n*}$ с $S_{n,n}$.

Пусть $p: P^n \times P^{n*} \rightarrow P^n$ — проекция на сомножитель прямого произведения, сопоставляющая точке с координатами $(z_{ij} = u_i x_j) \subset P^n \times P^{n*} = S_{n,n}$ точку в P^n с координатами (x_j) . Аналогично определяется проекция $q: P^n \times P^{n*} \rightarrow P^{n*}: (u_i, x_j) \mapsto u_i$. Итак, имеем две проекции $P^n \xleftarrow{p} S \xrightarrow{q} P^{n*}$, тогда равенство (2.1.4) означает, что образ произвольной точки $x \in P^n$ при коллинеации A находится, в соответствии с введенными обозначениями, по формуле

$$A(x) = \Phi(q(p^{-1}(x) \cap H_A)) \quad (2.1.5)$$

(здесь имеется в виду пересечение n -мерного пространства $P^{-1}(x)$
и гиперплоскости H_A в пространстве P^{n^2+2n}).

(2.2) Билинейное бирациональное отображение пространства P^n
в пространство P^{n*} , определяемое набором из n коллинеаций
 $A_v, v = 0, \dots, n-1$.

Пусть детерминантное распределение гиперплоскостей $D(A_v)$ регулярно. Рассмотрим рациональное отображение $T: P^n \rightarrow P^{n*}$, где
 $x \in P^n$, $T(x) = \langle x, A_v(x) \rangle$, $v = 1, \dots, n-1$, определяемое распределением $D(A_v)$ между точками пространства P^n и точками двойственного ему пространства P^{n*} . Покажем, что T бирационально.

Пусть $x^* \in P^{n*}$ — гиперплоскость общего положения распределения $D(A_v)$. Рассмотрим n плоскостей $x^*, A_v^{-1}(x^*)$, тогда искомая точка
 $x \in P^n$ есть точка их пересечения. Действительно, если $x \in A_v^{-1}(x^*)$,
тогда $A_v(x) \in x^*$, и точки $x, A_v(x)$ определяют x^* .

Пусть коллинеации A_v пространства P^n задаются матрицами $\|a_{ij}^v\|$, где $v = 1, \dots, n-1$. По построению бирациональное отображение задается равенством

$$T(x) = q(P^{-1}(x) \cap H_E \bigcap_{v=1}^{n-1} H_{A_v}), \quad (2.2.1)$$

где E — тождественная коллинеация в P^n .

Из (2.2.1) и (2.1.4) следует, что для $x(x_0, \dots, x_n) \in P^n$ точка $u(u_0, \dots, u_n) = T(x)$ находится из решений следующей системы уравнений относительно u_i :

$$\sum_{i=0}^n x_i u_i = 0; \quad \sum_{i,j=0}^n a_{ij}^v x_j u_i = 0, \quad v = 1, \dots, n-1.$$

Решая эту систему по правилу Крамера, находим формулу отображения T :

$$\begin{aligned} pu_0 &= \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \sum a_{1j}^1 x_j & \sum a_{2j}^1 x_j & \dots & \sum a_{nj}^1 x_j \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum a_{1j}^{n-1} x_j & \sum a_{2j}^{n-1} x_j & \dots & \sum a_{nj}^{n-1} x_j \end{vmatrix}, \\ pu_1 &= \begin{vmatrix} x_2 & x_3 & \dots & x_0 \\ \sum a_{2j}^1 x_j & \sum a_{3j}^1 x_j & \dots & \sum a_{0j}^1 x_j \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum a_{2j}^{n-1} x_j & \sum a_{3j}^{n-1} x_j & \dots & \sum a_{0j}^{n-1} x_j \end{vmatrix}, \\ &\dots \\ pu_n &= \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & \dots & x_{n-1} \\ \sum a_{0j}^1 x_j & \sum a_{1j}^1 x_j & \dots & \sum a_{(n-1)j}^1 x_j \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum a_{0j}^{n-1} x_j & \sum a_{1j}^{n-1} x_j & \dots & \sum a_{(n-1)j}^{n-1} x_j \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

По аналогии с (2.2.1) имеем обратное отображение

$$T^{-1}(u) = p(q^{-1}(u) \cap H_E \bigcap_{v=1}^{n-1} H_{A_v}). \quad (2.2.3)$$

Рассмотрим теперь на $S_{n,n}$ график отображения T :

$$\Gamma_T = \{(x, u) \subset S_{n,n} \mid u = T(x)\}. \quad (2.2.4)$$

Равенство (2.2.1) означает, что

$$\Gamma_T = S_{n,n} \cap H_E \bigcap_{v=1}^{n-1} H_{A_v},$$

откуда, виду того, что $\langle S_{n,n} \rangle = P^{n^2+2n}$ следует, что

$$\langle \Gamma_T \rangle = H_E \bigcap_{v=1}^{n-1} H_{A_v} = P^{n^2+2n} \subset P^{n^2+2n}. \quad (2.2.5)$$

(2.3) **Теорема.** Билинейное бирациональное отображение T (см. (2.2)) однозначно определяет связку коллинеаций $\langle B_k, E \rangle$, $k = 1, \dots, n - 1$.

Рассмотрим бирациональное отображение $T: P^n \rightarrow P^{n*}$ и его график $\Gamma^T \subset S_{n,n}$. В силу равенства (2.2.5) определено подпространство $P^{n+n} = H_E \bigcap_{v=1}^{n-1} H_{A_v} = \langle \Gamma \rangle$ в P^{n+n+2n} . Выберем теперь в P^{n+n+2n} n приватных плоскостей H_1, H_2, \dots, H_n из связки с центром P^{n+n} . Нельзя уравнения этих гиперплоскостей суть

$$H_k: \sum_{i,j=0}^n \rho_{ij}^k z_{ij} = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Тогда, поскольку $P^{n+n} = H_E \bigcap_{v=1}^{n-1} H_{A_v}$, левые части уравнений гиперплоскостей H_1, H_2, \dots, H_n в P^{n+n+2n} являются линейными комбинациями левых частей уравнений гиперплоскостей H_E, H_{A_v} , т. е. существуют такие наборы (λ^k, μ_v^k) , где $k = 1, \dots, n$; $v = 1, \dots, n-1$, что

$$\rho_{ij}^k = \lambda^k e_{ij} + \mu_v^k a_{ij}^v, \quad i, j = 0, \dots, n. \quad (2.3.1)$$

Рассмотрим теперь коллинеации B_k , $k = 1, \dots, n$ пространства P^n , задаваемые матрицами $\|\rho_{ij}^k\|$ соответственно. Тогда из (2.3.1) очевидно следует, что для $x \in P^n$ линейная оболочка точек B_k , $k = 1, \dots, n$, совпадает с линейной оболочкой точек $x, A_v(x)$, $v = 1, \dots, n-1$, т. е. с гиперплоскостью $\langle x, A_v(x) \rangle \in D(A_v)$, проходящей через точку x . Таким образом, связка коллинеаций $\langle E, B_k \rangle$ однозначно построена по отображению T . Теорема доказана.

(2.4) Характеристическая кривая $C(A, B)$ связки коллинеаций $\langle E, A, B \rangle$ и детерминантной системы $D(A, B)$ в P^3 . Рассмотрим более подробно характеристическое многообразие фильтрации (1.7.1) для случая $m = 2$, $n = 3$.

Уравнения (1.7.2) примут вид:

$$\text{rank} \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ \sum a_{0k} x_k & \sum a_{1k} x_k & \sum a_{2k} x_k & \sum a_{3k} x_k \\ \sum b_{0k} x_k & \sum b_{1k} x_k & \sum b_{2k} x_k & \sum b_{3k} x_k \end{vmatrix} = 2 \quad (2.4.1)$$

и зададут кривую степени 6 [6]. Будем обозначать ее $C(A, B)$ и называть характеристической кривой связки коллинеаций $\langle E, A, B \rangle$ и детерминантного распределения $D(A, B)$. Определим род кривой $C(A, B)$. Из (2.4.1) следует, что кривая $C(A, B)$ есть пересечение четырех кубических поверхностей. Каждые две поверхности пересекаются по распавшейся кривой степени девять, компонентами которой является кривая $C(A, B)$ и нормокривая степени три. Используя формулу [7], связывающую степень и род кривых, на которые распадается полное пересечение двух поверхностей, $2(p_1 - p) = (n, -n)(N_1 + N_2 - 4)$,

где N_1 и N_2 — степени поверхностей, нетрудно подсчитать, что ряд кривой $C(A, B)$ равен трем.

(2.5) *Предложение.* Кривая $C(A, B)$ однозначно определяет отображение T .

Доказательство. Из формулы (2.4.1) и формул (2.2.2), полученных выше, следует, что $C(A, B) \subset F_i$ для $i = 0, 1, 2, 3$, где F_i — кубические поверхности, задаваемые приравниванием к нулю правых частей уравнений (2.2.2) для $i = 0, 1, 2, 3$ соответственно. Формулы (2.2.2) означают, что поверхности F_0, F_1, F_2, F_3 составляют гомолоидальную в смысле [5] систему Φ поверхностей бирационального отображения T , т. е. любые три линейно независимые поверхности из Φ пересекаются, помимо $C(A, B)$, еще только в одной точке. Как известно [5], всякая гомолоидальная система поверхностей Φ определяет однозначно бирациональное отображение. Таким образом, нам достаточно проверить, что Φ — полная линейная система кубических поверхностей в пространстве P^3 , проходящих через $C(A, B)$.

Действительно, покажем сначала, что кривая $C(A, B)$ не лежит на квадрике. В самом деле, если $C(A, B)$ лежит на квадрике Q , то поскольку $C(A, B)$ неприводима и $\deg C(A, B) = 6$ (в силу теоремы Безу), $C(A, B)$ является полным пересечением неприводимой квадрики Q и любой из кубик $F_i, i = 0, 1, 2, 3$. Но тогда род кривой $C(A, B)$ находится по формуле

$$\begin{aligned} g &= \frac{1}{2} \deg Q \deg F_i (\deg Q + \deg F_i - 4) + 1 = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 (2 + 3 - 4) + 1 = 4 \end{aligned}$$

(см. [7, гл. IV]) вопреки тому, что $g = 3$, согласно доказанному в (2.4).

Далее, пусть C' — проекция кривой $C(A, B)$ на плоскость и достаточно общей точки $S_1 \in C(A, B)$. Тогда C' — плоская кривая степени $n = 5$ с обычными двойными точками, число которых по формуле Плюккера равно $\delta = \frac{(n-1)(n-2)}{2} = g = \frac{(5-1)(5-2)}{2} = 3 = 3$.

Обозначим эти двойные точки кривой C' через T_1, T_2, T_3 и возьмем, например, плоскость $\pi = \langle S_1, T_1, T_2 \rangle$. По построению через точку S_1 проходят две прямые $l_1 = \langle S_1, T_1 \rangle$ и $l_2 = \langle S_2, T_2 \rangle$, пересекающие $C(A, B)$ помимо точки S_1 еще в парах различных точек S_3, S_4 и S_5, S_6 соответственно. Так как $\deg C(A, B) = 6$, то пересечение $\pi \cap C(A, B)$ состоит из шести точек $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$, где точка S_6 по построению не лежит на конике $l_1 \cup l_2$. Итак, мы доказали, что найдется плоскость $\pi \subset P^3$ такая, что

$$\pi \cap C(A, B) = \{S_1, S_2, \dots, S_6\} \quad (2.5.1)$$

— шесть точек, не лежащих на конике.

Возьмем в плоскости π прямую l общего положения и на ней три произвольные точки S_7, S_8, S_9 . Если система Φ кубических поверхностей через кривую $C(A, B)$ содержит более четырех линейно незави-

венных кубик, то через точки S_7, S_8, S_9 пройдут по крайней мере линейно независимые кубики $F', F'' \in \psi$. Пусть $C' = F' \cap \pi$, $C'' = F'' \cap \pi$. Если кривые C' и C'' совпадают, то кубическая поверхность F , принадлежащая пучку, порожденному поверхностями F' и F'' , и проходящая через произвольную точку $x \in \pi \setminus C'$, необходимо содержит плоскость π , а значит, распадается на π и некоторую квадрику $Q : F = \pi \cup Q$. Но $F \notin \psi$, а значит, $F \supset C(A, B)$, а поскольку, $C(A, B) \not\subset \pi$, то следовательно, $C(A, B) \subset Q$, что противоречит доказанному выше.

Итак, $C' \neq C''$ и по построению $C' \cap C'' = \{S_1, \dots, S_6\}$. Но точки S_1, S_8, S_9 коллинеарны ($S_7, S_6, S_5 \subset l$), а тогда, как известно (см., например, [4]), оставшиеся шесть точек S_1, \dots, S_6 пересечения двух кубик F' и F'' лежат на конике вопреки (2.5.1). Полученное противоречие показывает, что система ψ содержит лишь четыре линейно независимые кубики, что и требовалось. Предложение доказано.

(2.6) **Теорема.** Характеристическая кривая $C(A, B)$ однозначно определяет связку коллинеаций $\langle E, A, B \rangle$ и детерминантное распределение $D(A, B)$.

Доказательство теоремы следует из предложения (2.5) и теоремы (2.3).

Список литературы: 1. Алексеев В. Н. О связках коллинеаций и нуль-системах проективных пространств // Изв. АН СССР. Сер. Мат. 1985. 49. № 1. С. 221—232.
 2. Коданцов Н. Н. Проективная геометрия. К., 1985. 368 с. 3. Тихомиров А. Г. О связках коллинеаций и нуль-корреляций проективного пространства / Сб. науч. тр. Яросл. пед. ин-та. 1980. № 190. С. 139—152. 4. Уокер Р. Алгебраические кривые. М., 1952. 200 с. 5. Hudson H. Cremona transformations in plane and space. Cambridge Univ. Press, 1927. 150 p. 6. Room T. G. The geometry of determinants of loci. Cambridge Univ. Press, 1938. 486 p. 7. Semple J., Roth L. Introduction to algebraic geometry. Oxford Univ. Press, 1949. 300 p.

Поступила в редакцию 22.04.88

В. Ю. РОВЕНСКИЙ
КОСЫЕ РАССЛОЕНИЯ ХОПФА

Классификация расслоений сфер на большие сферы представляет собой интересную, но почти не исследованную область. В последнее время внимание геометров к таким расслоениям усилилось в связи многообразиями Бляшке и проблемами Глюка о геодезических слоях [1—5]. В классе $\mathcal{F}(S^{2n+1})$ всех C^1 — гладких расслоений единичной сферы S^{2n+1} на большие окружности важную роль играют более узкие классы расслоений Хопфа $\mathcal{F}_0(S^{2n+1})$ и косых расслоений Хопфа $\mathcal{F}_1(S^{2n+1})$.

Определение. Пусть $J: R^{2n+2} \rightarrow R^{2n+2}$, $n \geq 1$ — линейный оператор в евклидовом пространстве со свойством $J^2 = -E$ (в некотором аффинном базисе $\{e_i\}$ задается правилом $Je_{2i-1} = e_{2i}$, $Je_{2i} = -e_{2i-1}$). Косое расслоение Хопфа состоит из пересечений S^{2n+1} плоскостями вида $x \wedge Jx$. При дополнительном требовании ортогональности оператора J (соответствующий базис $\{e_i\}$ — ортонормированный) получаем расслоение Хопфа. Иными словами, косое расслоение Хопфа получается из расслоения Хопфа путем выполнения невырожденного линейного преобразования R^{2n+2} и затем проектирования слоев обратно на S^{2n+1} . В отличие от $\mathcal{F}_0(S^{2n+1})$ [5—10] более широкий класс $\mathcal{F}_1(S^{2n+1})$ почти не изучен [4, 11, 12]. Косые расслоения Хопфа обладают наследственным свойством (A): для любой пары слоев содержащая их большая трехмерная сфера наследует косое расслоение Хопфа. Покажем, что расслоения $\mathcal{F}_1(S^{2n+1})$ характеризуются среди $\mathcal{F}(S^{2n+1})$ более слабым требованием (A1): для любой пары ортогональных слоев содержащая их большая трехмерная сфера наследует (косое) расслоение Хопфа.

Теорема 1. Пусть $f \in \mathcal{F}(S^{2n+1})$, $n = 2k$ — аналитическое расслоение со свойством (A1). Тогда f — (косое) расслоение Хопфа.

Напомним, что две большие окружности в S^{2n+1} ортогональны, если несущие их плоскости ортогональны в R^{2n+2} .

Стимулом изучения наследственных свойств косых расслоений Хопфа послужили работы [13—14] об одном частном случае многообразий Бляшке, где введен интересный класс \mathcal{F}_R аналитических расслоений сфер на большие сферы (мы ограничимся одномерным случаем).

Определение. Класс $\mathcal{F}_R(S^{2n+1})$ состоит из таких расслоений (S^{2n+1}) , для которых существует полилинейный оператор $R: R^{2n+2})^3 \rightarrow R^{2n+2}$ с алгебраическими свойствами тензора кривизны $(x, y, z) = -R(y, x, z)$, $\langle R(x, y, z), w \rangle = -\langle R(x, y, w), z \rangle$, $(x, y, z) + R(y, z, x) + R(z, x, y) = 0$ — и следующими условиями: 1) почти для каждого $x \in R^{2n+2}$ найдется такая единственная плоскость $\sigma \ni x$, что $R(x, u, x) = x^2u - (u, x)x$, $u \in \sigma$; 2) если плоскость σ несет слой, то $R(x, u, x) = x^2u - (u, x)x$, $u, x \in \sigma$.

t. e. на σ «секционная кривизна» $K_\sigma = \frac{\langle R(x, u, x), u \rangle}{x^2 u^2 - (x, u)^2}$, $x, u \in \sigma$ экстремальная и равна 1.

В работе показано, что расслоения $\mathcal{F}_R(S^{2n+1})$ обладают свойством (A1), поэтому справедлива

Теорема 2. Класс $\mathcal{F}_R(S^{2n+1})$, $n = 2k$ содержится в $\mathcal{F}_1(S^{2n+1})$ и не совпадает с $\mathcal{F}_0(S^{2n+1})$ (при $\mathcal{F}_R(S^3)$ см. [12]).

Для римановых многообразий работ [13, 14] в касательном пространстве каждой обыкновенной точки определено расслоение класса $\mathcal{F}_R(S^{2n+1})$, R — тензор кривизны многообразия. Ввиду теоремы 1 точечная информация достаточна для идентификации таких расслоений с косыми расслоениями Хопфа. Хопфовость указанных расслоений, а значит, и изометричность рассматриваемых многообразий Бляшке своим модельным пространствам, по-видимому, можно доказать локальными рассуждениями. Хотя этот факт установлен в [15] с использованием глобальных методов, развитых в [1, приложения Д, Е], но, на наш взгляд, остается интересной локальная проблема.

Гипотеза. Пусть M^{2n} — открытое риманово многообразие со следующими условиями: а) для любых $p \in M$ и ненулевого вектора $\lambda \in T_p M$ существует 2-мерная плоскость $d(\lambda) \subset T_p M$, $\lambda \in d(\lambda)$ такая, что все геодезические $\gamma \subset M$, $\gamma(0) = p$, $\dot{\gamma}(0) \in d(\lambda)$ образуют вполне геодезическую поверхность $F(p, \lambda)$ с гауссовой кривизной равной 1; б) для любых $\lambda_1, \lambda_2 \in T_p M$ поверхности $F(p, \lambda_1)$, $F(p, \lambda_2)$ либо не имеют общих точек, кроме p , либо совпадают. Тогда M^{2n} изометрично области CP^n с метрикой Фубини.

1. Топология расслоений сферы на большие окружности. Теорема 3 [2, 3]. База расслоения $f \in \mathcal{F}(S^{2n+1})$ гомеоморфна проективному пространству CP^n .

Теорема 4 [2] (о характеристическом подрасслоении). Пусть $f \in \mathcal{F}(S^{2n+1})$, A — объединение всех слоев, лежащих в произвольной большой гиперсфере $S^{2n} \subset S^{2n+1}$. Тогда а) A — гладкая гиперповерхность в S^{2n} , являющаяся гомологической сферой; б) расслоение $f: A \rightarrow M$ — гладкое, база M является гомологическим CP^{n-1} , и класс $[M]$ порождает гомологию $H_{2n-2}(CP^n, Z)$ базы f .

Каждое расслоение S^3 на большие окружности можно отождествить с подмножеством многообразия Грассмана $G(2, 4)$ двумерных плоскостей в R^4 , причем само $G(2, 4)$ изоморфно произведению $S^2 \times S^2$. Подмножества $G(2, 4)$, соответствующие $\mathcal{F}(S^3)$, представляют собой графики гладких сжимающих отображений S^2 в S^3 [4]. Из этого факта следует

Теорема 5 [4]. Каждое расслоение $f \in \mathcal{F}(S^3)$ содержит пару ортогональных слоев.

Лемма 1. Пусть $f \in \mathcal{F}(S^{2n+1})$. Тогда каждая большая сфера S^m , $m > n + 1$, содержит множество слоев гомологичное CP^{m-n-1} в базе f .

Доказательство леммы 1. Любая большая сфера $S^m \subset S^{2n+1}$ получается пересечением $2n - m + 1$ больших гиперсфер $\{S_i^{2n}\}$. Ввиду

тремы 4 каждая S_i^{2n} содержит множество слоев; M_i — подмногообразие базы CP^n , гомологичное подпространству CP^{n-1} .

Применяя теорию пересечения гомологических классов [16], получим, что $\cap M_i$ гомологично пересечению $2n - m + 1$ копий CP^{n-1} в CP^n , т. е. CP^{m-n+1} , что и требовалось доказать. Основным результатом, используемым в доказательстве теоремы 2 (см. раздел 4), является

Лемма 2. Пусть $f \in \mathcal{F}(S^{2n+1})$, $n > 1$. а) Если $S^3(\gamma_1, \gamma_2)$ — большая сфера, содержащая слои γ_1, γ_2 , и f -поля Якоби вдоль γ_1 , не касаются $S^3(\gamma_1, \gamma_2)$, то в $S^3(\gamma_1, \gamma_2) \setminus (\gamma_1 \cup \gamma_2)$ лежит слой; если в большой сфере $S^3(T)$ лежит гладкое 1-параметрическое семейство T слоев, гомеоморфное тору, и f -поля Якоби, ортогональные T , не касаются $S^3(T)$, то в $S^3(T) \setminus T$ лежит слой.

Напомним, что векторные поля, индуцированные геодезическим слоением f вдоль слоев, называются f -полями Якоби, они не имеют ней [17]. В нормальном расслоении к слою γ действует билинейный оператор дифференцирования f -полей Якоби B : $T\gamma \times T\gamma^\perp \rightarrow T\gamma^\perp$, данный правилом

$$B(x, y) = \nabla_x y(t), \quad (1)$$

$y(t)$ — f -поле Якоби с началом $y(0) = y$ вдоль геодезической γ [17]. В сфере S^{2n+1} кривизны 1 f -поля Якоби вдоль слоя γ имеет вид $y(t) = (\cos t)y + (\sin t)z$, где y, z — линейно независимые векторы, а оператор (1) не имеет собственных векторов [17]. Мы можем применять возмущение оператора (1) вдоль слоя γ на основе C^1 -возмущения расслоения f в окрестности γ [4].

Доказательство леммы 2 разобьем на 5 этапов.

1. Рассмотрим случай а). При $n = 2$ утверждение следует из леммы 1. При $n > 2$ сначала покажем, что почти в любой большой сфере $S^n \subset S^{2n+1}$, содержащей γ_1 и γ_2 , лежит еще слой. Предположим противное: некоторая большая сфера S_1^n и близкие к ней n -сфераe содержат в точности два слоя γ_1 и γ_2 . Добавимся, применяя C^1 -возмущение \tilde{f} вдоль γ_1 и γ_2 , чтобы f -поля Якоби вдоль γ_1 и γ_2 неались S_1^n . Обозначим через S_2^n большую сферу, не пересекающую S_1^n , например, ортогональную S_1^n в S^{2n+1} . Построим гладкое отображение $\Phi: S_1^n \setminus (\gamma_1 \cup \gamma_2) / \sim \rightarrow S_2^n$, где \sim означает отождествление диадальных точек в S^{2n+1} , по правилу: $\Phi(x)$ получается из пары точек пересечения S_2^n с большой $(n+1)$ -мерной сферой, содержащей слой через точку x . По лемме 1 почти для любой точки $y \in S_2^n$ большая $(n+1)$ -мерная сфера, проходящая через S_1^n и y , содержит нечетное число слоев $\{\gamma_i\}_{i>2}$, отличных от γ_1, γ_2 , которые, очевидно, пересекают S_1^n . Поэтому почти любая точка $y \in S_2^n / \sim$ принадлежит гладкому отображению $\Phi(x)$ и имеет нечетное число прообразов. Пусть y — единичная нормаль к γ_1 при $t = 0$ в S_1^n и $y(t), y(0) = y$ — f -поле Якоби вдоль оси γ_1 . Если x стремится к $\gamma_1(0)$ по нормали y , то образ $\Phi(x)$ имеет предел в S_2^n / \sim , соответствующий точке

$y'(0)^\perp \wedge y'(0)^\perp \in S_2^n$, где \perp — составляющая, перпендикулярная к S_1^n . Значит, определено продолжающее Φ отображение $\bar{\Phi}: M \rightarrow S_{2/\sim}^n$, где n -мерное многообразие M имеет две компоненты края и гомеоморфно $S_{1/\sim}^n$ с удаленными окрестностями окружностей γ_1/\sim , γ_2/\sim .

Покажем, что $\bar{\Phi}$ отображает край ∂M в $(n-1)$ -мерное подмногообразие $S_{2/\sim}^n$, возможно с особенностями. Пусть $N(t)$ — единичное нормальное расслоение к $\gamma_1(t)$ в S_1^n , и $N = \cup N(t)$ — гладкое $(n-1)$ -мерное многообразие, служащее компонентой края M . Ограничение $\bar{\Phi}$ на $N(t)$ инъективно, так как иначе найдется f -поле Якоби в S^{n+1} , у которого значение и производная в точке $\gamma_1(t)$ касаются S_1^n , что противоречит предположению. Значит, образ $\bar{\Phi}(N)$ по крайней мере $(n-2)$ -мерен. Так как f -поля Якоби с началом в $N(0)$ не пересекают $N(\pi/2)$, то ввиду аналитичности $\bar{\Phi}$ на N это означает $(n-1)$ -мерность образа $\bar{\Phi}(\partial M)$. Рассмотрим регулярное значение $y \in S_{2/\sim}^n$ отображения $\bar{\Phi}$, окрестность которого $V_y(y) \subset S_{2/\sim}^n$ делится гиперповерхностью $\bar{\Phi}(\partial M)$ на две области. Число прообразов точек одной области отличается от другой на 1, что противоречит установленной выше нечетности числа прообразов $\Phi^{-1}(y)$ для почти всех y . В частности, для $n=3$ лемма 2 в случае а) доказана.

2. В случае а) при $n > 3$ по лемме 1 найдется большая сфера S^{n+1} , содержащая, кроме γ_1 , γ_2 , еще нечетное число слоев $\{\gamma_i\}_{i>2}$. Если предположить противное, что в $S^3(\gamma_1, \gamma_2)$ нет других слоев, кроме γ_1 , γ_2 , то найдется n -мерная большая сфера в S^{n+1} , которая несет γ_1 , γ_2 и не содержит ни один из слоев $\{\gamma_i\}_{i>2}$. Противоречие с 1 этапом завершает доказательство в случае а).

3. Вдоль большой сферы S^{n+1} , содержащей $S^3(T)$, применим С4 возмущение расслоения f , в частности, учитывая соотношение размерностей, добьемся, чтобы f -поля Якоби, ортогональные T , не касались S^{n+1} . Покажем, что в S^{n+1} лежит нечетное число слоев. По теореме 4 и лемме 1 множество слоев в $S^{n+1} \setminus T$ конечно и ситуация редуцируется к пересечению двух гладких вложений CP^1 в CP^1 т. е. к множеству нулей гладкого сечения s нормального векторного расслоения ξ подмногообразия CP^1 в CP^2 . Замкнутая гладкая кривая $l \subset CP^1$, соответствующая семейству слоев T , делит CP^1 на две гомеоморфные круги области D_1 , D_2 . Условие на f -поля Якоби вдоль T означает, что сечение s имеет ненулевые производные по нормали к l . Обозначим через $l_1 \subset D_1$, $l_2 \subset D_2$ две замкнутые гладкие кривые в CP^1 на малом расстоянии от l . Так как область $D \subset D_2$, ограниченная l_2 , односвязна, то сужение $\xi|_D$ тривиальное векторное разложение, диффеоморфное $D \times R^2$.

Следовательно, сечение s над D эквивалентно гладкому отображению $\bar{s}: D \rightarrow R^2$. Ввиду предположения о производной s вдоль l число оборотов кривой $\bar{s}(l_1)$ вокруг 0 в R^2 такое же, как у кривой $\bar{s}(l_2)$. Следовательно, в R^2 существует гомотопия кривых $\bar{s}(l_1)$ и $\bar{s}(l_2)$ не задевающая 0 $\in R^2$. Иными словами, сечение s в области между

крайними l_1 и l_2 можно заменить сечением без нулей так, что новое гладкое сечение s_1 совпадает с s на замыканиях D_1 и D_2 и не имеет нулей на $CP^1 \setminus (D_1 \cup D_2)$. Так как эйлерова характеристика $\chi(\xi) = 1$ (существует гладкое сечение с 1 певырожденным нулем), то s_1 имеет четное число невырожденных нулей. Значит, и s обладает нечетным числом нулей вне окрестности кривой l , что и требовалось показать. В частности, лемма 2 при $n = 2$ в случае б) доказана.

4. В случае б) при $n \geq 3$ покажем, что для почти любой большой сферы S_1^n , содержащей $S^3(T)$, в $S_1^n \setminus T$ лежит слой. Как и выше, можно считать, что f -поля Якоби, ортогональные T , не касаются S_1^n . Предположив противное, построим, как и в случае а), гладкое отображение $\Phi: S_1^n \setminus T / \sim \rightarrow S_2^n / \sim$ со свойством, что почти любая точка $\in S_2^n$ принадлежит образу Φ и имеет нечетное число прообразов. Условие на f -поля Якоби вдоль T позволяет продолжить Φ на n -мерное многообразие M с краем $\partial M \approx S^{n-3} \times T / \sim$ и установить $(n-1)$ -мерность образа $\bar{\Phi}(\partial M)$ в S_2^n / \sim . Как и в а), получаем противоречие при переходе в S_2^n / \sim через гиперповерхность $\bar{\Phi}(\partial M)$. В частности, при $n = 3$ лемма в случае б) доказана.

5. В случае б) при $n > 3$ аналогично случаю а) (см. 2 этап) показывается, что $S^3(T) \setminus$ содержит слой.

2. *Расслоения Хопфа.* Расслоения Хопфа обладают многими замечательными свойствами. Их слои *параллельны* в смысле постоянства расстояния от одного до другого, что характеризует расслоения Хопфа среди метрических расслоений сферы [5, 7, 8]. Группа симметрий расслоения Хопфа действует транзитивно на базе и на слоях [6] и определяет необычную геометрию на сфере [10]. В [9] ставится задача нахождения единичных векторных полей наименьшего объема на компактном римановом многообразии и доказывается экстремальность хопфовского векторного поля на S^3 . Расслоения Хопфа находят применения не только в топологии и дифференциальной геометрии, но и в космологии, квантовой и гамильтоновой механике и даже в машинной графике [18–20].

Доказательство теоремы 1 в предположении, что на 3-мерных сferах из (A1) наследуются расслоения Хопфа, а $f \in \mathcal{F}(S^{2n+1})$.

1. Рассмотрим модельный случай $n = 2$. Для произвольного слоя γ_1 обозначим через $S^3(\gamma_1)$ ортогональную ему большую сферу в S^5 . Сфера $S^3(\gamma_1)$ по лемме 1 содержит слой. В силу (A1) через этот слой и γ_1 проходит 3-мерная сфера $S_{\gamma_2}^3$, наследующая расслоение Хопфа. Пусть слой γ_2 не принадлежит $S_{\gamma_1}^3$. Так как $S_{\gamma_1}^3$ и $S_{\gamma_2}^3$ пересекаются по большой окружности — слою, то без ограничения общности полагаем γ_1 этим слоем. Сфера $S_{\gamma_1}^3$, $S_{\gamma_2}^3$ пересекают $S^3(\gamma_1)$ по слоям γ_1 , γ_2 . Покажем, что γ_1 , γ_2 параллельны. Для этого зафиксируем близкий к γ_1 слой γ_3 , не принадлежащий $S_{\gamma_1}^3 \cup S_{\gamma_2}^3$, и обозначим через γ_4 , γ_5 пересечения хопковской сферы $S_{\gamma_3}^3$ с $S_{\gamma_1}^3$ и $S_{\gamma_2}^3$. Выберем базис единичных векторов $\{e_i\}$ так, чтобы $(e_1, e_2) = (e_3, e_4) = (e_5, e_6) = 0$, $\gamma_1 \subset e_1 \wedge e_2$, $\gamma_1 \cup e_3 \wedge e_4$, $\gamma_2 \subset e_5 \wedge e_6$.

Поскольку γ_1 параллелен γ_1 в $S_{\gamma_1}^3$, то для некоторого $\varphi > 0$ векторы $u = e_1 \cos \varphi + e_3 \sin \varphi$, $u' = e_2 \cos \varphi + e_4 \sin \varphi$ составляют ортонормированный базис плоскости σ_1 , несущий γ_4 . Аналогично для некоторого $\psi > 0$ векторы $v = e_1 \cos \psi + e_5 \sin \psi$, $v' = e_2 \cos \psi + e_6 \sin \psi$ составляют ортонормированный базис плоскости σ_2 , несущий γ_5 . Для параллельных слоев γ_4 , γ_5 матрица $A = \begin{pmatrix} u \cdot v & u \cdot v' \\ u' \cdot v & u' \cdot v' \end{pmatrix}$ ортогональной проекции σ_1 на σ_2 должна быть конформной, т. е. $AA^T = \lambda E$ [6]. В случае нашей матрицы A получаем два равенства $\cos \varphi \cos \psi (e_4 e_5 + e_3 e_6) + \sin \varphi \sin \psi (e_3 e_5 - e_4 e_6) = 0$, $(\cos \varphi \cos \psi + e_3 e_5 \sin \varphi \sin \psi)^2 + (e_3 e_6 \sin \varphi \sin \psi)^2 = (\cos \varphi \cos \psi + e_4 e_5 \sin \varphi \sin \psi)^2 + (e_4 e_6 \sin \varphi \sin \psi)^2$, из которых исключаем $\cos \varphi \cos \psi \sin \varphi \sin \psi$ и находим

$$[(e_3 e_6)^2 - (e_4 e_5)^2] [(e_3 e_5 - e_4 e_6)^2 + (e_4 e_5 - e_3 e_6)^2] = 0. \quad (2)$$

Из (2) следует либо $e_3 e_6 = \pm e_4 e_5$, либо $e_3 e_5 = e_4 e_6$ и $e_4 e_5 = -e_3 e_6$. В обоих случаях слои γ_1 , γ_2 параллельны. Поэтому сферы $S_{\gamma_1}^3$, $S_{\gamma_2}^3$ с наследуемыми от f расслоениями Хопфа можно однозначно включить в расслоение Хопфа f' сферы S^5 . Любой слой γ_3 расслоения f получается по тому же алгоритму, что и для f' : на пару слоев γ_1 , γ_5 в сferах $S_{\gamma_1}^3$, $S_{\gamma_5}^3$ натягивается большая сфера $S_{\gamma_3}^3$, на которой хопфовские слои определены однозначно, так как можно считать γ_3 не ортогональным γ_3 . Следовательно, $f = f'$ и теорема 1 в хопфовском случае $n = 2$ доказана.

2. Пусть $n = 2k > 2$. Для любого слоя γ_1 по лемме 1 в ортогональной большой $(4k-1)$ -мерной сфере лежат слои, а в силу (AII) через γ_1 проходит большая 3-мерная сфера $S_{\gamma_1}^3$, наследующая расслоение Хопфа. В $(4k-3)$ -мерной большой сфере, ортогональной $S_{\gamma_1}^3$ по лемме 1, лежат слои; соединяя любой из них с расслоением на $S_{\gamma_1}^3$ получаем большую 5-мерную сферу $S_{\gamma_1}^5$ с расслоением Хопфа. Повторяя этот процесс k раз, убеждаемся, что через любой слой γ_1 проходит большая сфера $S_{\gamma_1}^{2k+1}$, наследующая расслоение Хопфа. Если γ_1 не принадлежит $S_{\gamma_1}^{2k+1}$, то сферы $S_{\gamma_1}^{2k+1}$, $S_{\gamma_2}^{2k+1}$ пересекаются в $S_{\gamma_1 \cup \gamma_2}^{4k-1}$, и можно считать $\gamma_1 \subset S_{\gamma_1}^{2k+1} \cap S_{\gamma_2}^{2k+1}$. Для любого γ_3 , не принадлежащего $S_{\gamma_1}^{2k+1} \cup S_{\gamma_2}^{2k+1}$, соответствующая большая сфера $S_{\gamma_3}^{2k+1}$ с расслоением Хопфа пересекает $S_{\gamma_1}^{2k+1}$ и $S_{\gamma_2}^{2k+1}$ по слоям γ_4 и γ_5 . Большая 3-мерная сфера, натянутая на $\gamma_1 \cup \gamma_4$, пересекает большую сферу ортогональную γ_1 , по слою γ_4^1 . Как и для $n=2$ убеждаемся, что γ_5 параллелен γ_4^1 , т. е. 3-мерные сферы с расслоениями Хопфа, натянутые на $\gamma_1 \cup \gamma_4$ и $\gamma_1 \cup \gamma_5$ можно однозначно включить в расслоение Хопфа на 5-мерной сфере, натянутой на $\gamma_1 \cup \gamma_4 \cup \gamma_5$. Ввиду (AII) это хопфовское расслоение является частью f . Следовательно, натянутая на $\gamma_1 \cup \gamma_3$ большая 3-мерная сфера наследует расслоение Хопфа, γ_3 параллелен γ_1 . Ввиду произвольности γ_3 и γ_1 получаем, что f -метрическое расслоение. Отсюда следует (см. [5, 8]), что f -расслоение Хопфа.

3. Для нечетного $n = 2k + 1 > 3$, как и для четного n , получаем, что через каждый слой γ_1 проходит 2-параметрическое семейство больших $(2k + 1)$ -мерных сфер в S^{4k+3} , наследующих расслоения Хопфа. Эти сферы пересекают большую сферу S^{2k+3} , ортогональную к хопфовской большой сфере $S_{\gamma_1}^{2k+1}$, по 2-параметрическому семейству слоев изоморфичному CP^1 в базе расслоения f . Так как две $(2k + 1)$ -мерные сферы могут не пересекаться в S^{4k+3} , то наша цель — добыть недостающую размерность. Зафиксируем слой $\gamma_2 \subset S^{2k+3}$ и обозначим через S_0^{2k+1} большую сферу с расслоением Хопфа, натянутую на $\gamma_1^{2k+1} \cup \gamma_2$. Пусть $\{S_t^{2k+1}\}$ — гладкое 1-параметрическое семейство хопфовских сфер, аналогичных S_0^{2k+1} . Для любого слоя γ_3 из S_0^{2k+1} большая сфера, проходящая через γ_3 перпендикулярно S_0^{2k+1} , пересекает S_t^{2k+1} по слою, и соответствующее 1-параметрическое семейство слоев индуцирует f -поле Якоби вдоль γ_3 , перпендикулярное к S_0^{2k+1} . Выберем такой ортонормированный базис R^{4k+4} , что $\gamma_1 \subset e_1 \wedge e_2$, $S_{\gamma_1}^{2k+1} \subset e_1 \wedge \cdots \wedge e_{2k}$, $\gamma_2 \subset e_{2k+1} \wedge e_{2k+2}$ и указанное f -поле Якоби параллельно плоскости $e_{4k+3} \wedge e_{4k+4}$. Ввиду хопфовости расслоений на S_t^{2k+1} направление f - поля Якоби одинаково во всех точках $S_t^{2k+1} \setminus \gamma_1$ и по непрерывности такое же вдоль слоя γ_1 . Покажем, что плоскость $e_{4k+3} \wedge e_{4k+4}$ пересекает S^{4k+3} по слою. Пусть через e_{4k+3} проходит слой γ_x , содержащий точку x с условием $x \perp e_{4k+3}$. Представим x виде $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in e_{2k+3} \wedge \cdots \wedge e_{4k+1}$: $x_2 \in e_1 \wedge \cdots \wedge e_{2k+2}$. В случае $x_2 \neq 0$ пусть γ — любой слой в S_0^{2k+1} , ортогональный слою $\gamma \subset S_0^{2k+1}$, $\bar{\gamma} \ni x_2 / |x_2|$ (в случае $x_2 = 0$ в качестве γ берем слой γ_1). Так как γ ортогонален γ_x , то в силу (A1) натянутая на $\gamma \cup \gamma_x$ большая сфера S_x^3 наследует расслоение Хопфа. Следовательно, f -поле Якоби, которое в некоторой точке $\gamma(f)$ направлено по e_{4k+3} параллельно по $e_{4k+3} \wedge x$. Но выше показано, что такое поле Якоби лежит в плоскости $e_{4k+3} \wedge e_{4k+4}$. Значит, $x = \pm e_{4k+4}$, и плоскость $e_{4k+4} \wedge e_{4k+4}$ пересекает S^{4k+3} по слою γ_1 . Натянутая на $S_0^{2k+1} \cup \gamma_1$ большая сфера в силу (A1) наследует расслоение Хопфа. Мы показали, что через каждый слой проходит большая $(2k + 3)$ -мерная сфера, наследующая расслоение Хопфа. Далее аналогично случаю четного n получаем, что f — расслоение Хопфа.

3. Косые расслоения Хопфа. Теорема 6 [4]. Каждому $f \in \mathcal{F}(S^3)$ соответствует сжимающее отображение $\tilde{f}: S^2 \rightarrow S^2$ (см. 1) с выпуклым образом в полусфере, которое разлагается в композицию трех отображений: ортогональная проекция S^2 на плоскость через центр S^2 , сжимающее линейное отображение с одной плоскости на другую плоскость через центр S^2 , обратное отображение к проекции сферы S^2 на плоскость.

Теорема 6 позволяет стратифицировать $\mathcal{F}_1(S^3)$ на три вида:

1) линейное отображение плоскостей невырождено, существует единственная пара ортогональных слоев (см. теорему 5);

2) линейное отображение плоскостей имеет ранг 1, существует по верхность, состоящая из пар ортогональных слоев — хопфовская пленка в S^3 ;

3) линейное отображение плоскостей нулевое, а отображение постоянное, т. е. расслоение является хопфовским.

Ввиду теоремы 5 для любого расслоения $f \in \mathcal{F}(S^3)$ существует специальный ортонормированный базис $\{e_i\}$ в R^4 такой, что плоскости $e_1 \wedge e_2, e_3 \wedge e_4$ пересекают S^3 по слоям. В этом базисе каждому вектору $\lambda = (1, 0, \lambda_3, \lambda_4)$ соответствует единственный вектор $h = (0, 1, h_3, h_4)$, для которого плоскость $\lambda \wedge h$ пересекает S^3 по слою. Значит, расслоению $f \in \mathcal{F}(S^3)$ отвечает диффеоморфизм $\varphi : R^2 \rightarrow R^2, h_3 = \varphi_1(\lambda_3, \lambda_4), h_4 = \varphi_2(\lambda_3, \lambda_4)$. Например, у расслоения Хопфа отображение φ линейное и имеет вид $h_3 = \pm \lambda_4, h_4 = \mp \lambda_3$.

Лемма 3 [12]. Класс $\mathcal{F}_1(S^3)$ характеризуется в $\mathcal{F}(S^3)$ условием, что $\varphi : R^2 \rightarrow R^2$ — линейный оператор без собственных векторов.

Пусть $\{e_i\}$ — ортонормированный базис R^4 , и $\gamma_0 \subset e_1 \wedge e_2, \gamma_\infty \subset e_3 \wedge e_4$ — две ортогональные большие окружности. Пленкой косого расслоения Хопфа назовем множество $\Pi(\gamma_0, \gamma_\infty; \gamma_1)$ больших окружностей $\{\gamma_t = S^3 \cap (\lambda_t \wedge h_t)\}_{t \in \bar{R}}$, где $\lambda_t = (1, 0, t\lambda_3, t\lambda_4), h_t = (0, 1, t h_3, t h_4)$. В частном случае $h_3 = \pm \lambda_4, h_4 = \mp \lambda_3$, т. е. γ_1 параллельна γ_0 , получаем пленку расслоения Хопфа.

Лемма 4. Пусть $f \in \mathcal{F}(S^{2n+1})$ — расслоение со свойством (A). Тогда f — косое расслоение Хопфа.

Доказательство леммы 4 проведем индукцией по n . В случае $n = 1$ проверять нечего. Предположим справедливость леммы 4 для всех $i < n$ и рассмотрим $(n - 1)$ слоев общего положения у расслоения $f \in \mathcal{F}(S^{2n+1})$. Несущая их большая $(2n - 1)$ -мерная сфера S_0^{2n-1} наследует расслоение на большие окружности со свойством (A), которое по предположению индукции — косое хопфовское. Выберем в R^{2n+2} базис $\{\partial_i\}$ так, что $\{\partial_i\}_{i < 2n}$ принадлежит S_0^{2n-1} и плоскость $\partial_{2n+1} \wedge \partial_{2n+2}$ содержит слой. Заметим, что невырожденный линейный оператор $D : R^{2n+2} \rightarrow R^{2n+2}$ определяет преобразование $D' : \mathcal{F}(S^{2n+1}) \rightarrow \mathcal{F}(S^{2n+1})$ по правилу: расслоение $D'(f)$ имеет слои вида $\{D(\sigma) \cap \Pi S^{2n+1}\}$, где $\{\sigma\}$ — плоскости, несущие слои расслоения f . Очевидно, свойство (A) и класс $\mathcal{F}_1(S^{2n+1})$ сохраняются при преобразовании D' . Сделаем линейное преобразование $D_1 : R^{2n+2} \rightarrow R^{2n+2}$, при котором базис $\{\partial_i\}$ переходит в ортонормированный базис $\{e_i\}$ и большая сфера S_1^{2n-1} из подпространства $\{e_i\}_{i < 2n}$ наследует расслоение Хопфа. Кроме того, полученное расслоение f_1 обладает свойством (A), и плоскости $e_{2n+1} \wedge e_{2n+2}$ несет слой f_1 . Расслоения, наследуемые от f_1 , в силу (A) на сferах S_1^{2n-1} и $S^3 \subset e_1 \wedge e_2 \wedge e_{2n+1} \wedge e_{2n+2}$ определяют блочный вид $B = [J_{n-1}, B_2]$ матрицы оператора (1) дифференцирования f_1 -полей Якоби в точке $e_1 \in \gamma_0$, где B_2 — матрица порядка $2 \times 2, J_{n-1}$ — матрица из $n - 1$ блоков $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

На ортогональной γ_0 большой сфере S_2^{2n-1} , содержащей хопфовскую $(2n - 3)$ -мерную сферу из S_1^{2n-1} и слой из $e_{2n+1} \wedge e_{2n+2}$, ввиду

и предположения индукции наследуется от f_1 косое расслоение Хопфа, у которого порождающий линейный оператор в базисе $\{e_i\}$ имеет такой же матрицей B . Последнее объясняется применением f_1 к γ_0 и слоям на сфере S_2^{2n-1} . Следовательно, $B^2 = -E$, а значит, $B_2^2 = -E_2$, т. е. возможен линейный оператор в R^{2n+2} , при котором $\{e_i\}_{i < 2n}$ неподвижны, а плоскость $e_{2n+1} \wedge e_{2n+2}$ преобразуется в себя так, что матрица B_2 примет стандартный вид $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. При этом f_1 перейдет в расслоение f_2 со свойством (A), у которого на больших сferах в плоскостях $\{e_i\}_{i < 2n}$, $\{e_i\}_{i > 2n}$, $\{e_i\}_{i=1, 2, 2n+1, 2n+2}$ наследуются расслоения Хопфа.

Покажем, что f_2 — расслоение Хопфа. Отсюда будет следовать, что исходное f , полученное из f_2 линейным преобразованием R^{2n+2} , является косым расслоением Хопфа. Заметим, что любой слой γ расслоения f_2 , не лежащий в $e_1 \wedge e_2 \wedge e_{2n+1} \wedge e_{2n+2}$, совпадают с пересечением двух 3-мерных сфер из подпространств $\sigma(\gamma) \wedge e_1 \wedge e_2$, $(\gamma) \wedge e_{2n+1} \wedge e_{2n+2}$. Эти сферы пересекают S_1^{2n-1} и S_2^{2n-1} соответственно по слоям γ_1 и γ_2 . Наоборот, выбор слоев γ_1 , γ_2 (предполагаем, что γ_2 лежит в подпространстве $e_1 \wedge e_2 \wedge e_{2n+1} \wedge e_{2n+2} \wedge \sigma(\gamma)$ в S_1^{2n-1} , S_2^{2n-1}) однозначно определяет большую окружность γ как пересечение 3-мерных сфер из подпространств $\sigma(\gamma_1) \wedge e_1 \wedge e_2$, $\sigma(\gamma_2) \wedge e_{2n+1} \wedge e_{2n+2}$. Очевидно, расслоение Хопфа на S^{2n+1} однозначно восстанавливается по «краевым» хопфовским условиям на сferах S_1^{2n-1} , S_2^{2n-1} . Поэтому — расслоение Хопфа. Лемма 4 доказана.

Следствие 1. Пусть $B: R^{2n+2} \rightarrow R^{2n+2}$, $n \geq 1$ — невырожденный линейный оператор с условием

$$B(By) \in y \wedge By, \quad y \in R^{2n+2}. \quad (3)$$

Тогда большие окружности, полученные пересечением единичной сферы S^{2n+1} с инвариантными плоскостями $\{y \wedge By\}$, составляют косое расслоение Хопфа.

Доказательство следствия 1. В силу (3), обобщающего условие $B^2 = -E$, любые две инвариантные плоскости оператора B пересекаются лишь в нуле либо совпадают, поэтому определяют расслоение $f \in \mathcal{F}(S^{2n+1})$. Ввиду линейности B большая 3-мерная сфера, пятая на любые два слоя f , наследует расслоение на большие окружности. Для завершения доказательства нужно проанализировать случай $n = 1$ и применить лемму 4. Пусть f_1 — ограничение f на 3-мерную сферу S^3 , пятаю на два произвольных слоя f . По теореме 5 S^3 найдутся два ортогональных слоя f_1 . Ограничение оператора B на несущее S^3 подпространство R^4 в специальном базисе имеет блочную матрицу

$$B' = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} b_{33} & b_{34} \\ b_{43} & b_{44} \end{pmatrix}.$$

Прямое вычисление показывает, что отображение $\varphi: R^2 \rightarrow R^4$ линейное и задается матрицей

$$\varphi = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad a = \frac{b_{33} - b_{11}}{b_{21}}, \quad b = \frac{b_{34}}{b_{21}}, \quad c = \frac{b_{43}}{b_{21}}, \quad d = \frac{b_{44} - b_{11}}{b_{21}}.$$

Так как слои f_1 не пересекаются, то φ не имеет собственных векторов и по лемме 3 заключаем, что $f_1 \in \mathcal{F}_1(S^3)$. Условие (A) для f и лемма 4 означают, что f — косое расслоение Хопфа.

Доказательство теоремы 1 разделим на 2 этапа. На 1 этапе рассмотрим «невырожденный» случай, когда на почти всех сferах условия (A1) наследуются косые расслоения Хопфа вида 1). На 2-м этапе исследована ситуация, когда на почти всех сferах условия (A1) наследуются косые расслоения Хопфа вида 2). Оставшаяся возможность с расслоениями Хопфа была изучена в 2. Для наглядности доказательство проведем на примере $n = 2$; перенос на случай произвольного $n = 2k$ не сложен.

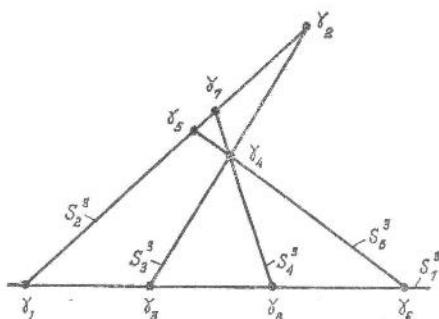
1. Предположим, что нашлась 3-мерная сфера, наследующая косое расслоение Хопфа вида 1) с единственной парой ортогональных слоев f . Ввиду аналитичности f такая же ситуация будет для почти всех 3-мерных сфер из условия (A1). Для каждого слоя γ по лемме 1 существует $(2n - 4)$ -параметрическое семейство ортогональных ему слоев $\{\gamma_\alpha\}$ и по условию (A1) — $(2n - 4)$ -параметрическое семейство сфер $\{S_\alpha^3\}$, натянутых на $\{\gamma \cup \gamma_\alpha\}$ и наследующих косые расслоения Хопфа. Ниже при локальных рассмотрениях будем считать, что эти косые расслоения Хопфа вида 1), и тогда для двух близких слоев γ, γ' соответствующие семейства сфер $\{S_\alpha^3\}, \{S_{\alpha'}^3\}$ не содержат общих представителей (иначе в общей сфере лежат две пары ортогональных слоев). Значит, выделено гладкое семейство 3-мерных сфер с косыми расслоениями Хопфа вида 1), зависящее от $(2n - 4) + 2n = 4n - 4$ параметров. Каждая такая сфера пересекает некоторое $(2n - 2)$ -мерное подмногообразие в S^{2n+1} в 1 точке, и возникает гладкое отображение $(4n - 4)$ -параметрического объекта в $(2n - 2)$ -мерный. Применив теорему Сарда, получаем, что почти через каждый слой проходит $(2n - 2)$ -параметрическое семейство 3-мерных сфер, наследующих косые расслоения Хопфа.

Покажем, что f обладает свойством (A). Зафиксируем любой слой γ с $(2n - 2)$ -параметрическим семейством 3-мерных сфер, наследующих косые расслоения Хопфа, и обозначим через R_p^{2n} пространство нормалей к γ в точке $p \in \gamma$. Касательные пространства к указанным 3-мерным сферам пересекают единичную сферу $S_p^{2n-1} \subset R_p^{2n}$ по большим окружностям, которые попарно не пересекаются и в силу соотношения размерностей расслаивают некоторую область $G_p \subset S_p^{2n-1}$. Пусть $B: R_p^{2n} \rightarrow R_p^{2n}$ — оператор (1) в точке p . Ввиду вполне геодезичности больших сфер и известного вида f -полей Якоби в сфере выполнено $B(By) \in y \wedge By$, $y \in G_p$, причем отмеченные выше окружности получаются пересечением S_p^{2n-1} с плоскостями $y \wedge By$, $y \in G_p$.

открытости $G_p \subset S_p^{2n-1}$ и линейности B теперь следует условие $(By) \in y \wedge By$, $y \in R_p^{2n}$, и по следствию 1 расслоение области G_p продолжается на S_p^{2n-1} как косое расслоение Хопфа с несущими плоскостями $\{y \wedge By\}$. Рассмотрим семейство больших 3-мерных сфер S_p^{2n+1} , которые содержат γ и в точке p касаются плоскостей $y \wedge By$, $y \in R_p^{2n}$. Ввиду аналитичности f и указанного семейства, также открытости $G_p \subset S_p^{2n-1}$ каждая такая сфера наследует косое расслоение Хопфа. Учитывая произвольность слоя γ , получаем условие (A). Для завершения доказательства в рассматриваемом случае остается применить лемму 4.

2. Рассмотрим случай $n = 2$ и предположим, что ввиду аналитичности f почти на каждой сфере условия (A1) наследуется косое расслоение Хопфа вида 2). С помощью леммы 1 и (A1) устанавливаем, что через каждый слой проходит 3-мерная сфера косым расслоением Хопфа, но для двух близких слоев указанные сферы могут совпадать, если исходные слои лежат на одной хопфовской пленке. Значит, локально можно выделить гладкое семейство 3-мерных сфер с косыми расслоениями Хопфа вида 2), зависящие от $4 - 1 = 3$

параметров. Каждая такая 3-мерная сфера пересекает некоторое 2-мерное подмногообразие в S^5 в 1 точке, и возникает гладкое отображение 3-параметрического объекта в 2-мерный. Применяя теорему Сарда, получаем, что почти каждый слой проходит 1-параметрическое семейство 3-мерных сфер, наследующих косые расслоения Хопфа. Для произвольного слоя γ_1 отметим содержащие его 3-мерные сферы S_1^3, S_2^3 с косыми расслоениями Хопфа, причем в S_2^3 имеется слой γ_2 , ортогональный γ_1 . Пусть $S_3^3 \supset \gamma_2$ — 3-мерная сфера с косым расслоением Хопфа, пересекающая S_1^3 по слою γ_3 , отличному от γ_1 . Зафиксируем некоторый слой $\gamma_4 \subset S_3^3$, отличный от γ_2 и γ_3 . Так как через γ_4 проходит 1-параметрическое семейство 3-мерных сфер с косыми расслоениями Хопфа, то можно отметить две из них S_4^3, S_5^3 , отличные от S_3^3 , которые пересекают S_2^3 по слоям γ_5, γ_7 и S_1^3 по слоям γ_6, γ_8 (см. рисунок, на котором слои обозначены точками, 3-мерные сферы — отрезками). Предположим, что γ_5, γ_7 не лежат на одной пленке косого расслоения Хопфа вместе со слоями γ_1, γ_3 (другая альтернатива будет рассмотрена ниже). Тогда $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_5, \gamma_7$ однозначно определяют косое расслоение Хопфа на S_2^3 , как видно из линейности отображения ф леммы 3. Докажем, что наследуемые S_1^3, S_2^3 косые расслоения Хопфа согласованы, т. е. их можно включить и единственным образом в косое расслоение Хопфа сферы S^5 .



Согласованность означает, что соответствующие операторы J_1, J_2 совпадают на плоскости, несущей γ_1 .

С этой целью выясним, что косое расслоение Хопфа на S^5 однозначно восстанавливается по следующим исходным данным: косому расслоению Хопфа на S^3_1 с выделенными слоями γ_1, γ_3 , ортогональному γ_1 слою γ_2 вне S^3_1 , слою γ_4 в натянутой па $\gamma_2 \cup \gamma_3$ сфере S^3_2 . Обозначим через $\{S^3_{4\alpha}\}, \{S^3_{2\alpha}\}$ 2-параметрические семейства сфер, натянутых, соответственно, на $\{\gamma_4 \cup \gamma_\alpha\}, \{\gamma_2 \cup \gamma_\alpha\}$, где $\{\gamma_\alpha\}$ — слои косого расслоения Хопфа в S^3_1 . Тогда пересечения $\{S^3_{4\alpha} \cap S^3_{2\beta}\}$ составляют косое расслоение Хопфа сферы S^3_2 , натянутой на $\gamma_1 \cup \gamma_2$. Более того, пересечения $\{S^3_{4\alpha} \cap S^3_{2\beta}\}$ при различных α, β составляют косое расслоение Хопфа f_1 сферы S^5 . Косые расслоения Хопфа, наследуемые от f_1 на сferах S^3_1, S^3_2 , по определению согласованы, но эти же расслоения наследуются на S^3_1, S^3_2 и от исходного расслоения f , что и требовалось показать. Так как любой слой γ_4 расслоения f определяется двумя сферами S^3_5, S^3_4 , пересекающими S^3_1, S^3_2 по слоям, то f восстанавливается той же конструкцией, что и для слоев γ_1, γ_3 . Следовательно, $f = f_1$, т. е. f — косое расслоение Хопфа.

Рассмотрим другую альтернативу, когда для любого слоя $\gamma_4 \subset S^3_1$ 1-параметрическое семейство 3-мерных сфер с косыми расслоениями Хопфа высекает на S^3_2 слои одной с γ_1, γ_2 пленки косого расслоения Хопфа. Ввиду аналитичности f это семейство задает всю указанную пленку, т. е. 3-мерная сфера, натянутая на $\gamma_1 \cup \gamma_4$, наследует от f косое расслоение Хопфа. Учитывая произвол слоев γ_1, γ_4 , получаем условие (4) и для завершения доказательства остается применить лемму 4.

4. Доказательство теоремы 2. Предположим $n > 1$ ($n = 1$ см. [12]) и выделим в доказательстве теоремы 2 два этапа.

1. Покажем, что в большой сфере $S^3(\gamma_1, \gamma_2)$, содержащей произвольную пару ортогональных слоев γ_1, γ_2 , лежит пленка косого расслоения Хопфа. Зафиксируем ортонормированный базис $\{e_i\}$ в R^{2n+1} , такой, что $\gamma_1 \subset e_1 \wedge e_2, \gamma_2 \subset e_3 \wedge e_4$. Для любых двух векторов $\lambda = (1, 0, \lambda_3, \lambda_4, 0, \dots, 0), h = (0, 1, h_3, h_4, 0, \dots, 0)$ вычислим секционную кривизну плоскости $\lambda \wedge h$:

$$K(\lambda, h) - 1 = \frac{\langle R(\lambda, h, \lambda), h \rangle}{\lambda^2 h^2 - \langle \lambda, h \rangle^2} - 1 = \frac{Q}{\lambda^2 h^2 - \langle \lambda, h \rangle^2}. \quad (4)$$

В силу условия 2) теоремы 2 компоненты тензора кривизны таковы $R_{121l} = \delta_{l2}, R_{212l} = \delta_{l2}, R_{313l} = \delta_{l4}, R_{434l} = \delta_{l3}$ (см. [13]), где $R_{ijkl} = \langle R(e_i, e_j, e_k), e_l \rangle$, δ_{ij} — символ Кронекера. Поэтому Q в (4) — квадратичная форма от переменных $\lambda_3, \lambda_4, h_3, h_4$:

$$Q = \sum (R_{212k} - \delta_{lk}) \lambda_l \lambda_k + \sum (R_{131p} - \delta_{lp}) h_l h_p + 2 \sum (R_{121j} + R_{211j}) \lambda_l h_p.$$

Либо $S^3(\gamma_1, \gamma_2)$ содержит слой, отличный от γ_1, γ_2 , либо имеется f — поле Якоби вдоль γ_1 или γ_2 , касающееся $S^3(\gamma_1, \gamma_2)$ (см. лемму 2). В первом случае на плоскости $\lambda \wedge h$, содержащей слой ($\gamma_3 \subset S^3(\gamma_1, \gamma_2)$,

в силу условия 2) форма Q обращается в нуль, причем благодаря экстремуму ненулевой вектор $(\lambda_3, \lambda_4, h_3, h_4)$ принадлежит ядру Q . Выберем слой γ_1 так, чтобы каждый вектор x вблизи e_1 определял единственную плоскость $\sigma \ni x$ из условия 1). Вектор $t(\lambda_3, \lambda_4, h_3, h_4)$ тоже лежит в ядре Q , и при малых t плоскость $\lambda_t \wedge h_t$, где $\lambda_t = (1, 0, t\lambda_3, \lambda_4, 0, \dots, 0)$, $h_t = (0, 1, th_3, th_4, 0, \dots, 0)$, несет слой в $S^3(\gamma_1, \gamma_2)$. Ввиду аналитичности расслоения f для всех t плоскости $\lambda_t \wedge h_t$ задают слои, а значения $t = 0$ и $t = \pm\infty$ соответствуют слоям λ_1, γ_2 . Объединение всех указанных слоев является пленкой $\Pi(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ косого расслоения Хопфа $S^3(\gamma_1, \gamma_2)$. Случай f -поля Якоби вдоль γ_1 или γ_2 , касательного $S^3(\gamma_1, \gamma_2)$, рассматривается аналогично. Ввиду аналитичности f указанная пленка $\Pi(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ существует для любой пары ортогональных слоев (γ_1, γ_2) расслоения f .

2. Покажем, что для любой пары ортогональных слоев γ_1, γ_2 на сфере $S^3(\gamma_1, \gamma_2)$ наследуется косое расслоение Хопфа. По лемме 2 либо в дополнении $S^3(\gamma_1, \gamma_2) \setminus \Pi(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ содержится слой γ_4 , либо существует f -поле Якоби вдоль некоторого слоя, скажем, γ_3 пленки $\Pi(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, которое касается $S^3(\gamma_1, \gamma_2)$ и трансверсально пленке. В первом случае слой γ_4 обеспечивает еще один вектор в ядре формы Q (см. I этап), и в итоге получаем 2-мерную плоскость в ядре Q , точкам которой соответствуют слои в $S^3(\gamma_1, \gamma_2)$. Указанное 2-параметрическое семейство слоев в силу соотношения размерностей и аналитичности f составляет расслоение f_1 всей сферы $S^3(\gamma_1, \gamma_2)$, причем из двух линейных соотношений для переменных $\lambda_3, \lambda_4, h_3, h_4$ получаем равенства $h_3 = a\lambda_3 + b\lambda_4, h_4 = c\lambda_3 + d\lambda_4$. По лемме 3 f_1 — косое расслоение Хопфа на $S^3(\gamma_1, \gamma_2)$.

Рассмотрим случай, когда имеется f -поле Якоби вдоль γ_3 , касательное $S^3(\gamma_1, \gamma_2)$ и трансверсальное пленке $\Pi(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$. Это поле индуцируется однопараметрической вариацией слоев, $o(\varepsilon)$ — близких к $S^3(\gamma_1, \gamma_2)$ и расположенных в плоскостях $\lambda_\varepsilon \wedge h_\varepsilon$, где $\lambda_\varepsilon = (1, 0, \lambda_3 + \varepsilon\lambda'_3, \lambda_4 + \varepsilon\lambda'_4, 0, \dots, 0)$, $h_\varepsilon = (0, 1, h_3 + \varepsilon h'_3 + o_3(\varepsilon), h_4 + \varepsilon h'_4 + o_4(\varepsilon), o_5(\varepsilon), \dots)$ и вектор $(\lambda'_3, \lambda'_4, h'_3, h'_4)$ не коллинеарен вектору $(\lambda_3, \lambda_4, h_3, h_4)$. Из условия на секционную кривизну и симметрией оператора R получаем уравнение $\varepsilon^2 Q' + o(\varepsilon^2) = 0$, где Q' — квадратичная форма от переменных $\lambda'_3, \lambda'_4, h'_3, h'_4$ с такими же коэффициентами, что и Q . Ввиду произвольности $\varepsilon \approx 0$ заключаем, что $Q'(\lambda'_3, \lambda'_4, h'_3, h'_4) = 0$, т. е. вектор $(\lambda'_3, \lambda'_4, h'_3, h'_4)$ лежит в ядре формы Q . Как и выше, делаем вывод, что на $S^3(\gamma_1, \gamma_2)$ наследуется косое расслоение Хопфа.

Так как ввиду аналитичности f выполнено (A1), то включение $\mathcal{F}_R(S^{2n+1}) \subset \mathcal{F}_1(S^{2n+1})$ следует из теоремы 1. В [13] приведены расслоения $f \in \mathcal{F}_R(S^3)$, не являющиеся хонфовскими, аналогичные примеры строятся для произвольного n . Теорема 2 доказана.

Список литературы: 1. Бессе А. Многообразия с замкнутыми геодезическими. М., 1981. 200 с. 2. Gluck H., Warner F., Yang C. Division algebras, fibrations of spheres by great circles and the topological determination of space by the cross behavior of its geodesics // Duke math. J. 1983. v. 50. P. 1041–1076. 3. Sato H. On topological Blaschke conjecture. I. // Geometry of geodesics and related topics. Adv. Stud in Pure Math. 3, Tokyo, 1984. P. 231–238. 4. Gluck H., Warner F. Great

- circle fibration of the three sphere // Duke Math. J. 1983, v. 50, No 1. P. 107—123.
5. Gluck H., Warner G., Ziller W. Fibrations of spheres by parallel great spheres // Ann. of Global Analysis and Geom. 1987, V. 5, N 3. P. 53—82. 6. Gluck H., Warner G., Ziller W. The geometry of the Hopf fibrations // Enseign. Math. 1980, V. 32. P. 173—198. 7. Escobales R. Riemannian foliations of the rank one symmetric spaces // Proc. AMS. 1985. V. 95. P. 495—498. 8. Gromoll D., Grove K. One-dimensional metric foliations in constant curvature spaces // Diff. Geom and Complex analis Rauch memorial Vol. 1985. P. 165—167. 9. Gluck H., Ziller W. On the volume of a unit vector field on the three sphere // Comment. Math. Helv. 1986, V. 61. P. 177—192. 10. Розенфельд Б., Атанасян С., Тимошенко Т. Геометрия расслоений Хопфа // Изв. вузов. Сер. Мат. 1987, № 6. С. 52—57. 11. Gage M. A note on the skew-Hopf fibrations // Proc. AMS. 1985. V. 93. P. 145—150. 12. Ровенский В. Ю. Геодезические слоения на трехмерной сфере // Теор. и прикл. вопр. дифф. уравнений. Караганда, 1986. С. 115—119. 13. Топоногов В. Одно характеристическое свойство четырехмерного симметрического пространства ранга 1 // Сиб. мат. журн. 1972, 13, № 4. С. 884—902. 14. Топоногов В. Экстремальные теоремы для римановых пространств с кривизной, ограниченной сверху // Сиб. мат. журн. 1974, 15, № 6. С. 1348—1371. 15. Ровенский В., Топоногов В. Геометрические характеристики комплексного проективного пространства // Геометрия и топология однородных пространств. Барнаул, 1988. С. 98—104. 16. Дольд А. Лекции по алгебраической топологии. М., 1976. 150 с. 17. Domborowski P. Jacobi fields, totally geodesic foliations and geodesic differential forms // Result. Math. 1979, V. 1. P. 156—194. 18. Bergery B., Bourguignon J. Laplacians and riemannian submersions with totally geodesic fibers // Illinois J. of Math. 1982, V. 26. P. 181—200. 19. Борисенко А. О внешне геометрических свойствах параболических поверхностей и топологических свойствах седловых поверхностей в симметрических пространствах ранга один // Мат. сб. 1981, 116. С. 440—457. 20. Kocak H., Laidlaw D. Computer Graphics and geometry of S^3 // The math. intelligencer. 1987, V. 9. P. 8—10.

Поступила в редакцию 08.10.88

УДК 514.752.2

В. В. РЫЖКОВ

О СИМПЛЕКСАХ, ВПИСАННЫХ В МАЛУЮ ДУГУ КРИВОЙ

1. Рассмотрим незамкнутую простую дугу L кривой класса C^n в E^n геометрического порядка n ; последнее означает, что никакая гиперплоскость $\pi \subset E^n$ не имеет с L более n общих точек, считая каждую точку столько раз, какова кратность пересечения в этой точке. Считаем кривую отнесенной к натуральному параметру s и пишем ее уравнение в виде $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(s)$, $0 \leq s \leq h$.

Если обозначить через $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ орты ее естественного сопровождающего n -эдра, то уравнения Френе — Серре записутся в известном виде [1]:

$$\begin{aligned}\frac{d\tau_1}{ds} &= k_1 \tau_2; \quad \frac{d\tau_i}{ds} = -k_{i-1} \tau_{i-1} + k_i \tau_{i+1}, \quad i = 2, \dots, n-1; \\ \frac{d\tau_n}{ds} &= -k_{n-1} \tau_{n-1},\end{aligned}\quad (1)$$

где $k_i = k_i(s)$, $i = 1, 2, \dots, n-1$, суть кривизны кривой (k_i — функция класса C^{n-i-1}). В силу предложения о геометрическом порядке дуги кривой можно считать, что ни одна из кривизн не имеет нулей при $s \in [0, h]$.

Пусть теперь числа $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_{n-1} < \lambda_n = 1$ образуют разбиение P отрезка $[0, 1]$; этому разбиению отвечают также обол-

находимое через P разбиение отрезка $[0, h]$ точками, $0 = \lambda_0 h < \lambda_1 h < \dots < \lambda_{n-1} h < \lambda_n h = h$ и соответствующее разбиение дуги L точками $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}(\lambda_i h)$.

Каждому разбиению P отвечает вписанный в L симплекс $S_h(P)$ с вершинами в \mathbf{x}_i . Объем этого симплекса будем обозначать через $V_h(P)$. По аналогии с тривиальным случаем $n = 2$ может быть высказана гипотеза: для дуги L класса C^n , геометрического порядка n , существует единственный вписанный в L симплекс $S_h(P)$ наибольшего объема (отвечающий некоторому определенному разбиению $P = P_{\text{кр}}$). Не располагая доказательством этой гипотезы, установим в этом сообщении некоторый ее инфинитезимальный аналог.

Для каждого фиксированного разбиения P вычислим $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{V_h(P)}{\frac{n(n+1)}{h^2}}$

и рассмотрим его как функцию P (т.е. набора λ_i). Наш основной результат состоит в доказательстве единственности $P = P_{\text{кр}}$, при котором этот предел имеет наибольшее значение.

2. Для получения значения $V_h(P)$ как функции длины дуги h и разбиения P разложим $\mathbf{x}(s)$ по формуле Тейлора

$$\mathbf{x}(s) = \mathbf{x}(0) + \mathbf{x}'(0)s + \frac{1}{2!}\mathbf{x}''(0)s^2 + \dots + \frac{1}{n!}\mathbf{x}^{(n)}(0)s^n + o(s^n). \quad (2)$$

Пользуясь деривационными формулами (1), приведем (2) к виду (где выписаны явно лишь главные члены каждого из коэффициентов при τ_i):

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(s) = \mathbf{x}(0) + \tau_1(s + \dots) + \frac{1}{2!}\tau_2(k_1 s^2 + \dots) + \frac{1}{3!}\tau_3(k_1 k_2 s^3 + \dots) + \\ + \dots + \frac{1}{(n-1)!}\tau_{n-1}(k_1 \dots k_{n-2} s^{n-1} + \dots) + \\ + \frac{1}{n!}\tau_n(k_1 \dots k_{n-1} s^n + \dots) + o(s^n). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь, краткости ради, k_i обозначают, строго говоря, $k_i(0)$.

Используя (3), найдем векторы ребер симплекса, исходя из вершины $s = 0$ как $\overrightarrow{M_0 M_i} = \mathbf{x}(\lambda_i h) - \mathbf{x}(0)$ простой заменой s на $\lambda_i h$. Выпишем сразу формулу для $V_h(P)$; не нарушая общности, считаем n -эр $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ положительно ориентированным:

$$\begin{aligned} V_h(P) = & \left| \begin{array}{cccc} \lambda_1 h & \frac{1}{2!} \lambda_1^2 k_1 h^2 & \frac{1}{3!} \lambda_1^3 k_1 k_2 h^3 \dots & \frac{1}{n!} \lambda_1^n k_1 \dots k_{n-1} h^n \\ \lambda_2 h & \frac{1}{2!} \lambda_2^2 k_1 h^2 & \frac{1}{3!} \lambda_2^3 k_1 k_2 h^3 \dots & \frac{1}{n!} \lambda_2^n k_1 \dots k_{n-1} h^n \\ \hline \lambda_{n-1} h & \frac{1}{2!} \lambda_{n-1}^2 k_1 h^2 & \frac{1}{3!} \lambda_{n-1}^3 k_1 k_2 h^3 \dots & \frac{1}{n!} \lambda_{n-1}^n k_1 \dots k_{n-1} h^n \\ h & \frac{1}{2!} k_1 h^2 & \frac{1}{3!} k_1 k_2 h^3 \dots & \frac{1}{n!} k_1 \dots k_{n-1} h^n \\ \hline & + 0(h^{\frac{n(n+1)}{2}}), & & \end{array} \right| + \end{aligned}$$

или

$$V_h(P) = \frac{1}{n!} \frac{k_1^{n-1} k_2^{n-2} \dots k_{n-1}}{1! 2! \dots n!} h^{\frac{n(n+1)}{2}} \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^n \\ \lambda_2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{n-1} & \lambda_{n-1}^2 & \dots & \lambda_{n-1}^n \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} + 0(h^{\frac{n(n+1)}{2}}),$$

т.е.

$$V_h(P) = \frac{1}{n!} \frac{k_1^{n-1} k_2^{n-2} \dots k_{n-1}}{1! 2! \dots n!} W(0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, 1) h^{\frac{n(n+1)}{2}} + 0(h^{\frac{n(n+1)}{2}}),$$

или, короче,

$$V_h(P) = \frac{1}{n!} \frac{\prod_1^{n-1} k_m^{n-m}}{\prod_1^n m!} W(P) h^{\frac{n(n+1)}{2}} + 0(h^{\frac{n(n+1)}{2}}), \quad (4)$$

где $W(P)$ обозначает определитель Вандермонда, соответствующий данному разбиению P . Фиксируя P и устремляя h к нулю, получаем

Предложение 1. При фиксированном разбиении дуги и $h \rightarrow 0$ для объема соответствующего вписанного симплекса $V_h(P)$ имеем:

1) объем $V_h(P)$ есть малая порядка $h^{\frac{n(n+1)}{2}}$ и

$$2) \sigma(P) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{V_h(P)}{h^{\frac{n(n+1)}{2}}} = \frac{1}{n!} \frac{\prod_1^{n-1} k_m^{n-m}}{\prod_1^n m!} W(P).$$

Если предположить, что дуга L принадлежит классу гладкости

C^{n+1} , то нетрудно найти главную часть остаточного члена $o(h^{\frac{n(n+1)}{2}})$; приведем его, опуская громоздкие, но очевидные выкладки:

$$V_h(P) = \sigma(P) h^{\frac{n(n+1)}{2}} + \frac{\left(\prod_1^{n-1} k_m^{n-m} \right)^*}{\prod_1^{n+1} m!} \tilde{W}(P) h^{\frac{n(n+1)}{2} + 1} + o(h^{\frac{n(n+1)}{2} + 1}),$$

где через $\tilde{W}(P)$ обозначен определитель, отличающийся от $W(P)$ заменой столбца, содержащего λ_i^n , на столбец, составленный из λ_i^{n+1} [2]:

$$(P) = \left| \begin{array}{cccc} \lambda_1 \lambda_1^2 \dots \lambda_1^{n-1} \lambda_1^{n+1} & & & \\ \lambda_2 \lambda_2^2 \dots \lambda_2^{n-1} \lambda_2^{n+1} & & & \\ \vdots & & & \\ \lambda_{n-1} \lambda_{n-1}^2 \dots \lambda_{n-1}^{n-1} \lambda_{n-1}^{n+1} & & & \\ 1 & 1 \dots 1 & 1 & \end{array} \right| = W(P)(1 + \lambda_1 + \dots + \lambda_{n-1}) \neq 0.$$

Таким образом, $V_h(P) = \sigma(P) h^{\frac{n(n+1)}{2}} + o(h^{\frac{n(n+1)}{2}+1})$, если и только если $(k_1^{n-1} k_2^{n-2} \dots k_{n-1})' = 0$; это равенство выполняется в каждой точке, когда $k_1^{n-1} \dots k_{n-1} = \text{const}$. Но это есть условие, что S — эквивалентная дуга (с точностью до постоянного множителя [3]). Таким образом, условие $k_1^{n-1} \dots k_{n-1} = \text{const}$ означает пропорциональность евклидовой и эквивалентной дуги; в другой форме оно означает, что x^{n+1} разлагается по $x', x'', \dots, x^{(n-1)}$.

Предложение 2. $V_h(P) = \sigma(P) h^{\frac{n(n+1)}{2}} + o(h^{\frac{n(n+1)}{2}+1})$, если и только если евклидова дуга и эквивалентная дуга кривой пропорциональны.

3. Перейдем к доказательству основного результата.

Лемма. Определитель Вандермонда $W(P)$ имеет в области $\lambda_1 < \dots < \lambda_{n-1} < 1$ (симплексе R^{n-1}) единственную критическую точку, в которой он принимает свое наибольшее значение.

Существование критической точки $P_{\text{кр}}$, в которой $W(P_{\text{кр}}) = \sup W(P)$, следует из того, что на границе симплекса он обращается в нуль, а внутри положителен. Остается доказать единственность критической точки.

Записывая логарифмические частные производные $W(P)$ по всем аргументам $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}$ и приравнивая их к нулю, получаем систему уравнений для определения критических точек $P_{\text{кр}}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_i} + \frac{1}{\lambda_i - \lambda_1} + \dots + \frac{1}{\lambda_i - \lambda_{i-1}} &= \frac{1}{\lambda_{i+1} - \lambda_i} + \dots + \frac{1}{\lambda_{n-1} - \lambda_i} + \\ &+ \frac{1}{1 - \lambda_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (4)$$

Будем, простоты ради, полагать, что λ_i уже суть значения λ_i в некоторой критической точке, так что равенства (4) — верные числовые равенства. При этом все слагаемые в обеих частях каждого из равенств (4) — положительные числа.

Допустим теперь, что $\{\lambda'_i\}$ — другая критическая точка для $W(P)$, так что равенства (4) удовлетворяются и при замене в них λ_i на λ'_i :

$$\frac{1}{\lambda'_i} + \frac{1}{\lambda'_i - \lambda'_{i-1}} + \dots + \frac{1}{\lambda'_i - \lambda'_{i-1}} = \frac{1}{\lambda'_{i+1} - \lambda'_i} + \dots + \frac{1}{\lambda'_{n-1} - \lambda'_i} + \frac{1}{1 - \lambda'_i}. \quad (5)$$

Покажем, что (4) и (5) могут удовлетворяться одновременно лишь при $\lambda_i = \lambda'_i$.

Заметим, во-первых, что неравенства $\lambda'_i < \lambda_i$ не могут иметь места одновременно для всех i (кроме тривиального случая совпадения всех λ'_i и λ_i : $\lambda'_i = \lambda_i$). Действительно, складывая почленно все уравнения (4), придем к

$$\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \cdots + \frac{1}{\lambda_{n-1}} = \frac{1}{1-\lambda_1} + \frac{1}{1-\lambda_2} + \cdots + \frac{1}{1-\lambda_{n-1}},$$

откуда ясно, что аналогичное равенство для λ'_i уже не может выполняться, так как при замене λ_i на λ'_i слагаемые левой части должны возрасти, а слагаемые правой части — уменьшиться. Аналогично, невозможен и случай $\lambda'_i > \lambda_i$ для всех i (исключая совпадение разбиений, т. е. $\lambda'_i = \lambda_i$). Пусть теперь для p индексов $i_1 < i_2 < \cdots < i_p$ имеют место неравенства $\lambda'_i < \lambda_i$, а для остальных q индексов $j_1 < \cdots < j_q$ — неравенства $\lambda'_j > \lambda_j$; здесь $p+q=n-1$. Выделим в системе (4) уравнения с номерами j_1, \dots, j_q и сложим их почленно; нетрудно видеть, что при этом в левой части полученного равенства будут находиться слагаемые двух видов: $\frac{1}{\lambda_j}$ и $\frac{1}{\lambda_j - \lambda_i}$ при $i < j$, которые при переходе от λ к λ' возрастают, и сумма $\sum \frac{1}{\lambda_{j_m} - \lambda_{j_b}}$; в правой части равенства будут слагаемые типов $\frac{1}{1-\lambda_j}$ и $\frac{1}{\lambda_i - \lambda_j}$, которые при замене λ на λ' не возрастают, и та же сумма $\sum \frac{1}{\lambda_{j_m} - \lambda_{j_k}}$.

При замене λ на λ' равенство не может сохраниться, что и доказывает лемму.

Формула п. 2 для $\sigma(P)$ и доказанная лемма позволяют сформулировать основной результат.

Теорема 1. В точке кривой класса C^n пространства E^n , где кривизны k_1, k_2, \dots, k_{n-1} все отличны от нуля, наибольший предел $\frac{V_h(P)}{h^{\frac{n(n+1)}{2}}}$ при $h \rightarrow 0$ и фиксированном P достигается при единственном критическом разбиении P_{kp} и равен

$$\sigma(P_{kp}) = \frac{1}{n!} \frac{k_1^{n-1} k_2^{n-2} \cdots k_{n-1}}{1! 2! \cdots n!} W(P_{kp}).$$

4. По соображениям симметрии (замена λ_i на $1-\lambda_i$) и в силу единственности P_{kp} должны иметь место равенства $\lambda_i = 1 - \lambda_{n-i}$ (в частности, при четном $n = 2m$, $\lambda_m = \frac{1}{2}$). Это позволяет умень-

уить число неизвестных в системе (4) и упростить ее. Автор нашел
решение этой системы и соответствующие значения $W(P_{kp})$ при $n =$
 $= 2, 3, 4, 5, 6$:

$$n = 2, P_{kp} = \left\{ 0; \frac{1}{2}; 1 \right\}, W(P_{kp}) = \frac{1}{4};$$

$$n = 3, P_{kp} = \left\{ 0; \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}} \right), \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{5}} \right); 1 \right\},$$

$$W(P_{kp}) = \frac{\sqrt{5}}{125};$$

$$n = 4, P_{kp} = \left\{ 0; \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{3}{7}} \right); \frac{1}{2}; \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{3}{7}} \right); 1 \right\},$$

$$W(P_{kp}) = \frac{3\sqrt{\frac{3}{7}}}{256 \cdot 343};$$

$$n = 5, P_{kp} = \left\{ 0; \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{21}}} \right); \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{21}}} \right); \right.$$

$$\left. \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{21}}} \right); \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{21}}} \right); 1 \right\},$$

$$W(P_{kp}) = \frac{5}{2^9 \cdot 3^6 \cdot 7^3 \sqrt{7}};$$

$$n = 6, P_{kp} = \left\{ 0; \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{5}{11} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{15}} \right)} \right); \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{5}{11} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{15}} \right)} \right); \right.$$

$$\left. \frac{1}{2}; \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{5}{11} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{15}} \right)} \right); \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{5}{11} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{15}} \right)} \right); 1 \right\};$$

$$W(P_{kp}) = \frac{5^3 \cdot 7 \cdot 103^2}{2^{15} \cdot 3^4 \cdot 11^9} \sqrt{\frac{14}{15}}.$$

Представляет интерес отыскание асимптотики $W(P_{kp})$ при больших n .

5. Имеется простая возможность дать оценку $W(P_{kp})$ снизу: для этого достаточно рассмотреть равномерное разбиение

$$P_{\text{равн}} = \left\{ 0; \frac{1}{n}; \frac{2}{n}; \dots, \frac{n-1}{n}; 1 \right\}.$$

В этом случае $W(P_{\text{равн}})$ вычисляется непосредственно:

$$W(P_{\text{равн}}) = \frac{1! 2! \dots n!}{\frac{n(n+1)}{n-2}}.$$

Таким образом,

$$\sigma(P_{\text{равн}}) = \frac{k_1^{n-1} k_2^{n-2} \dots k_{n-1}}{\frac{n(n+1)}{n-2}},$$

что и дает нижнюю оценку для $\sigma(P_{kp})$.

В связи с изложенным возникает задача об асимптотическом представлении $\prod_1^n k!$ при больших n ; формула Стирлинга дает лишь не-
полное решение этого вопроса.

Список литературы: 1. Синцов Д. М. Формулы Френе—Серре для плоского n -м ip -го простору // Харьк. Учен. Зап. Ун-та. 1935. 1. С. 5—19. 2. Проскуряков И. В. Сборник задач по линейной алгебре. М., 1978. 200 с. 3. Широков П. А. Широков А.-П. Аффинная дифференциальная геометрия. М., 1959. 250 с.

Поступила в редакцию 19.09.88

СОДЕРЖАНИЕ

Ллаев Г. М., Михайловский В. И. О бесконечно малых изгибаниях первого порядка гладких выпуклых поверхностей вращения, подчиненных вдоль рабы коническим втулочным связям	5
Имцов Ю. А. О функционально-вырожденных погружениях плоскости Лобачевского в E^4	8
Борисенко А. А. О цилиндрических многомерных поверхностях в пространстве Лобачевского	18
Борисенко А. А., Ушаков В. Г. Об изометрическом погружении сильно параболических метрик в классе сильно параболических поверхностей	27
Бушмелев А. В., Сабитов И. Х. Конфигурационные пространства октаэдров Брикара	36
Горох В. П. Об устойчивости минимальной поверхности в псевдоевклидовом пространстве	41
Зубков А. Н., Фоменко В. Т. Некоторые свойства двумерной поверхности, связанные с кручением	45
Ленатенко В. Ф. О специальных алгебраических поверхностях с бесконечным множеством плоскостей косой симметрии	52
Канаев Б. Г. Связки коллинеаций и детерминантные распределения плоскостей в R^n	55
Криворучко А. И. Об инвариантах бесконечных групп, порожденных отражениями относительно прямых	65
Макеев В. В. О пересечениях аффинных диаметров выпуклого тела	70
Медянник А. И. О единственности решения уравнения К. Миранды для замкнутых выпуклых поверхностей	73
Николаевский Ю. А. О поверхностях, кривизна грассманова образа которых не меньше 1	77
Окрут С. И. Римановы гильбертовы подмногообразия неположительной внешней кривизны	91
Ровенский В. Ю. Косые расслоения Хопфа	101
Рыжков В. В. О симплексах, вписанных в малую дугу кривой	114

СБОРНИК НАУЧНЫХ ТРУДОВ

**УКРАИНСКИЙ
ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ
СБОРНИК**

Выпуск 33

Редактор *А. П. Гужев*
Художественный редактор *Т. П. Короленко*
Технический редактор *Л. Т. Ена*
Корректор *Л. П. Сыч*

ИБ № 13195

Сдано в набор 04.11.89. Подписано в печать 15.03.90. Формат 60×90¹/₂. Бум.
тип. № 2. Гарнитура литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 8. Усл. кр.
отт. 8,25. Уч.-изд. л. 10. Тираж 700 экз. Изд. № 1852. Зак. 9-461. Цена 1 р. 40 к.

Издательство «Основа» при Харьковском государственном университете, 310003
Харьков, ул. Университетская, 16.
Отпечатано с матриц книжной ф-ки им. М. В. Фрунзе в Харьковской город-
ской типографии № 16, 310003 Харьков, ул. Университетская, 16.
Зак. 604,

РЕФЕРАТЫ

УДК 514

О бесконечно малых изгибаниях первого порядка гладких выпуклых поверхностей вращения, подчиненных вдоль края коническим втулочным связям / С. М. А ллаев, В. И. Михайловский // Укр. геометр. сб. 1990. Вып. 33. С. 3—8.

Доказано, что на замкнутой гладкой выпуклой поверхности вращения Φ , оюлюс которой не являются точками уплощения, существует лишь счетное множество параллелей γ_n , каждая из которых рассекает поверхность Φ на две части так, что одна из них Φ_{γ_n} допускает нетривиальные бесконечно малые изгибиания, процессе которых все точки ее края γ_n перемещаются на наперед заданной со- сной с поверхностью конической втулке K_α . Последовательность таких парал- телей γ_n сходится к параллели γ^* , которая обладает свойствами: 1) касательный конус к поверхности Φ вдоль γ^* ортогонален втулке K_α ; 2) поверхность Φ_{γ^*} , которую отсекает от поверхности Φ параллель γ^* , в указанном классе деформа- ий обладает жесткостью первого порядка

Библиогр.: 6 назв.

УДК 514

О функционально-вырожденных погружениях плоскости Лобачевского в E^4 / О. А. Аминов // Укр. геометр. сб. Вып. 33. С. 8—18.

Поверхность F^2 в E^4 называется функционально-вырожденной, если параметры эллипса нормальной кривизны α, β, a и b — координаты его центра α и β в нормальной плоскости и величины полуосей a и b — являются некоторыми функциями от одной функции $t(P)$ точки P поверхности. Этот класс поверхностей является обобщением класса поверхностей, допускающих движение по себе вдоль некоторого семейства линий. Доказывается теорема: Не существует регу- лярного класса C^0 изометрического погружения всей плоскости Лобачевского L^2 в E^4 с нулевым гауссовым кручением в виде функционально вырожденной по- верхности. Эта теорема содержит в себе теорему Гильберта о поверхностях постоянной отрицательной кривизны в E^3 .

Библиогр.: 4 назв.

УДК 514

О цилиндрических многомерных поверхностях в пространстве Лобачевского / А. А. Борисенко // Укр. геометр. сб. 1990. Вып. 33. С. 18—27.

Изучаются полные сильно параболические метрики с постоянным относи- тельным пуль-индексом $\mu_c = k$ и полные сильно параболические поверхности с постоянным внешним пуль-индексом $v = k$ в пространстве постоянной кри- визны $R^n(c)$ при условии существования поверхности, ортогональной слоям вполне геодезичности; если $c < 0$ — при дополнительном условии вполне ом- биличности ортогональной поверхности. При $c > 0$ будет $\mu_c = l$; $v = l$; при $c = 0$ риманово многообразие является метрическим произведением метрики R^{l-k} и евклидова пространства E^k , а поверхность есть цилиндр в евклидовом пространстве; при $c < 0$ метрика имеет специальный вид, а поверхность являет- ся цилиндрической поверхностью в пространстве Лобачевского.

Библиогр.: 14 назв.

УДК 514

Об изометрическом погружении сильно параболических метрик в классе сильно параболических поверхностей / А. А. Борисенко, В. Г. Ушаков // Укр. геометр. сб. 1990. Вып. 33. С. 27—36

Известно, что сильно k -параболическая поверхность в евклидовом пространстве (внешний нуль-индекс $\geq k$) несет сильно k -параболическую метрику (внутренний нуль — индекс $\geq k$). Определение внешнего $v(x)$ и внутреннего $\mu(x)$ нуль-индексов см. Кобаяси Ш., Номидзу К. «Основы дифференциальной геометрии», М. 1981, II том, стр. 316. Обратное неверно. А именно, существует аналитическая 3-мерная 1-сильно параболическая метрика, не допускающая локального изометрического погружения в евклидово пространство любой размерности в классе 3-мерных 1-сильно параболических поверхностей. Доказательство проведено с помощью метода внешних форм Картана.

Библиогр.: 10 назв.

УДК 514

Конфигурационные пространства октаэдров Брикара / А. В. Бушмелев, И. Х. Сабитов // Укр. геометр. сб. 1990. Вып. 33. С. 36—41.

Изучается пространство положений изгибающегося октаэдра и дается полная топологическая характеристика строения этого пространства.

Ил. 6. Библиогр.: 4 назв.

УДК 514

Об устойчивости минимальной поверхности в псевдоевклидовом пространстве / В. П. Горюх // Укр. геометр. сб. 1990. Вып. 33. С. 41—45.

Доказано, что любой кусок пространственноподобной минимальной поверхности вида $z = z(x, y)$ в псевдоевклидовом пространстве $E^{3,1}$ с линейным элементом $dx^2 + dy^2 - dz^2$ имеет наибольшую площадь среди близких пространственноподобных поверхностей с той же границей. Для времениподобных поверхностей доказано следующее утверждение.

Пусть V^2 — времениподобная минимальная поверхность в $E^{3,1}$. Тогда для любой области на V^2 существует гладкая вариация в классе времениподобных поверхностей с неподвижной границей, увеличивающая площадь, и существует гладкая вариация в этом же классе поверхностей, уменьшающая площадь.

Библиогр.: 2 назв.

УДК 513.736

Некоторые свойства двумерной поверхности, связанные с кручением // А. Н. Зубков, В. Т. Фоменко // Укр. геометр. сб. 1990. Вып. 33. С. 45—52.

Рассматривается двумерная поверхность F^2 класса C^3 в евклидовом пространстве E^n , $n \geq 4$. Вводятся понятия векторов нормальной кривизны $k_N(x; t)$ и эйлеровой кривизны $p_N(x; t)$ нормального $\pi_N(x; t)$ и эйлерова $v_N(x; t)$ кручения поверхности F^2 в точке x в касательном направлении t . Показывается, что эти величины являются характеристиками поверхности F^2 в точке x по направлению t , и выводятся формулы для их вычисления. Устанавливаются необходимые и достаточные условия, при которых направления векторов $k_N(x; t)$ и $p_N(x; t)$ переносятся параллельно в нормальном расслоении на F^2 из точки $x \in F^2$ в направлении t . В частности, имеет место утверждение: направление вектора эйлеровой кривизны $p_N(x; t)$ переносится параллельно в нормальном расслоении на F^2 вдоль любой геодезической на F^2 тогда и только тогда, когда $v_N(x; t) \equiv 0$, $\forall x \in F^2$, $\forall t$.

Библиогр.: 4 назв.

УДК 514

О специальных алгебраических поверхностях с бесконечным множеством плоскостей косой симметрии / В. Ф. Игнатенко // Укр. геометр. сб. 1990. Вып. 33. С. 52—55.

Устанавливается одно ограничение на взаимное расположение трех линейных оболочек G -орбит направлений симметрии для алгебраической гиперповерхности в E^n с группой симметрий G , порожденной отражениями относительно гиперплоскостей.

Библиогр.: 2 назв.

УДК 514

Связки коллинеаций и детерминантные распределения плоскостей в P^n / Б. Г. Ка-наев // Укр. геометр. сб. 1990. Вып. 33. С. 55—65.

Изучаются связи между вложениями многообразия Сегре и связками коллинеаций, детерминантными распределениями и связками.

Библиогр.: 7 назв.

УДК 514

Об инвариантах бесконечных групп, порожденных отражениями относительно прямых / А. И. Криворучко // Укр. геометр. сб. 1990. Вып. 33. С. 65—69.

Выделяются девять колец инвариантов бесконечных групп, порожденных косыми отражениями относительно прямых евклидова пространства, и доказывается, что кольцо инвариантов любой бесконечной группы, порожденной такими отражениями, содержится в одном из этих девяти колец.

Библиогр.: 7 назв.

УДК 514.172

О пересечениях аффинных диаметров выпуклого тела / В. В. Макеев // Укр. геометр. сб. 1990. Вып. 33. С. 70—73.

Хорда тела называется аффинным диаметром, если ее концы принадлежат параллельным опорным гиперплоскостям тела.

Теорема. Для любого аффинного диаметра AB выпуклого тела $K \subset R^n$ найдется пара аффинных диаметров тела K , каждый из которых пересекает AB , составляющих между собой наперед заданный угол. Для любых двух непересекающихся аффинных диаметров трехмерного выпуклого тела найдется третий аффинный диаметр, их пересекающий.

Библиогр.: 6 назв.

УДК 513.013

О единственности решения уравнения К. Миранды для замкнутых выпуклых поверхностей / Медяник А. И. // Укр. геометр. сб. 1990. Вып. 33. С. 73—77.

Устанавливается теорема единственности для замкнутых выпуклых поверхностей, главные радиусы кривизны которых удовлетворяют уравнению $R_1R_2 + \Phi(R_1R_2, R_1 + R_2, n) + cn = \Phi(n)$, где Φ — функция специального вида, Φ — заданная на единичной сфере функция, удовлетворяющая условию замкнутости, c — постоянный вектор, связанный с данной поверхностью.

Библиогр.: 4 назв.

УДК 514

О поверхности, кривизна грассманова образа которых не меньше 1 / Ю. А. Николаевский // Укр. геометр. сб. 1990. Вып. 33. С. 77—91.

Изучается кривизна многообразия Грассмана вдоль площадок, касательных к невырожденному грассманову образу регулярной поверхности. По теореме Вонга она заключена в пределах $[0; 2]$. Предельные случаи были рассмотрены ранее Мутю, Борисенко и Николаевским. Существует гипотеза, согласно которой для поверхностей размерности ≥ 3 значения описанных кривизн не могут быть все > 1 , а если все они > 1 , то поверхность является гиперповерхностью. Гипотеза доказана при некоторых ограничениях снизу на размерность поверхности.

Ил. 1. Библиогр.: 8 назв.

УДК 514.764

Римановы гильбертовы подмногообразия неположительной внешней кривизны / С. И. Окрут // Укр. геометр. сб. 1990. Вып. 33. С. 91—101.

Рассматриваются гильбертовы сильно параболические подмногообразия в римановых гильбертовых многообразиях. Доказывается, что их свойства аналогичны известным свойствам в конечномерном случае. Основной геометрический результат составляет теорема 3: полное риманово гильбертово подмногообразие неположительной внешней кривизны конечной коразмерности в гильбертовой сфере есть большая сфера.

Библиогр.: 10 назв.

УДК 514

Косые расслоения Хопфа / В. Ю. Ровенский // Укр. геометр. сб. 1990. Вып. 33. С. 101—114.

Вводится класс $F_R(S^{2n+1})$ аналитических расслоений сферы S^{2n+1} , $n \geq 1$, на большие окружности, для которых существует тензор R с алгебраическими свойствами тензора кривизны, такой, что 1) почти для каждого $x \in S^{2n+1}$ существует единственная плоскость $\sigma \ni x$, с условием $R(x, u, x) = x^2u$, ($u \perp x$, $u \notin \sigma$); 2) для плоскостей σ , натянутых на слои, выполнено условие $R(x, u, x) = x^2u$, ($u \perp x$, $u \notin \sigma$). Показывается, что $F_R(S^{2n+1})$ состоит из косых расслоений Хопфа (при $n = 1$ см. РЖМат, 1987, 11A822). Отсюда следует отрицательный ответ на высказанное в РЖМат, 1972, 11A559 предложение, что этот класс состоит из расслоений Хопфа. Доказательство опирается на следующий результат: косые расслоения Хопфа характеризуются в классе всех аналитических расслоений сферы на большие окружности свойством, что для любой пары ортогональных слоев содержащая их большая 3-мерная сфера наследует косое расслоение Хопфа.

Ил. 1. Библиогр.: 25 назв.

УДК 514.752.2

О симплексах, вписанных в малую дугу кривой / Рыжков В. В. // Укр. геометр. сб. 1990. Вып. 33. С. 114—120.

На дуге L длины h класса C^n в евклидовом E^n множество из $n+1$ точек (разбиение дуги) $P = \{0, \lambda_1 h, \dots, \lambda_{n-1} h, h\}$ $0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_{n-1} < 1$, определяет симплекс $S_h(P)$, вписанный в дугу.

Для его объема $V_h(P)$ вычисляется $\lim V_h(P) h^{-\frac{n(n+1)}{2}}$ и доказывается, что наибольшее значение его получается при единственном выборе $P = P_{kp}$. Точные значения для λ_i из P_{kp} найдены при $n = 2, 3, 4, 5, 6$.

Библиogr.: 3 назв.

**ПРАВИЛА
ОФОРМЛЕНИЯ НАУЧНЫХ ПУБЛИКАЦИЙ
ДЛЯ АВТОРОВ СБОРНИКА**

1. Рукописи статей, направляемые в редакцию сборника, должны сопровождаться разрешением на опубликование от учреждения, в котором выполнена данная работа.

2. Объем статьи не должен превышать 10-12 страниц машинописного текста, включая список литературы, таблицы.

3. Рукопись подается в двух экземплярах, напечатанная на машинке через два интервала только на черной ленте, включая сноски, таблицы и примечания на одной стороне стандартного листа белой бумаги. На полях рукописи необходимо снимом карандашом указать место расположения рисунков и таблиц. Сокращение слов в таблице не допускается.

4. В тексте разрешаются только общепринятые сокращения (т. е., и т. д., и т. п., и др.). Иностранный текст, если нет машинки с иностранным шрифтом, вписывается от руки.

5. Формулы должны быть разборчиво написаны от руки тушью или чернилами (буквы вдвое больше печатных). Следует четко разграничивать индексы и показатели степени, прописные и строчные буквы. Буквы одинакового начертания — *c, k, v, s, w, z, x, y, p* подчеркивать: прописные (большие) — двумя черточками снизу, строчные (малые) — двумя черточками сверху. Особенно аккуратно следует выписывать сходные по начертанию буквы: *h и n, l и e, g и q*. Необходимо четко отличать штрихи от единиц. Все греческие буквы обводить красным карандашом. Готический шрифт редакция просит не употреблять.

6. Иллюстративный материал (из расчета не более 5 рис. на один уч.-изд. л.) прилагается отдельно в двух экземплярах и выполняется на кальке, ватмане или фото. На обороте каждого рисунка указывается номер его, фамилия автора и название статьи. Подписи к рисункам следует прилагать на отдельном листе в конце статьи. На первых экземплярах рисунков буквенных и цифровых обозначений не давать.

7. Цифра в тексте, указывающая ссылку на литературу, заключается в квадратные скобки. В список литературы включаются только те работы, на которые ссылается автор статьи. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются.

8. В сборнике печатаются только те статьи, которые нигде не опубликованы и не переданы в редакции других журналов.

9. В конце рукописи должны быть указаны название учреждения, в котором выполнена работа, имя, отчество, фамилия автора, домашний адрес, дата, подпись