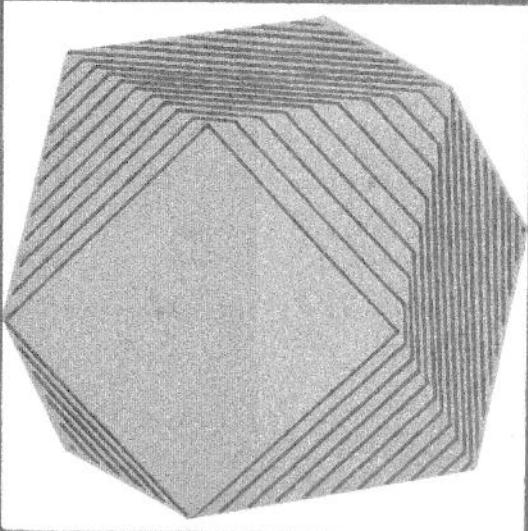


УКРАИНСКИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК

32 | 89



СОДЕРЖАНИЕ

<i>Аминов Ю. А.</i> Одна теорема единственности для кривых в E^3 -тригонометрических полиномах	3
<i>Борисенко А. А., Николаевский Ю. А.</i> Классификация точек трехмерных поверхностей по грасманову образу	11
<i>Горох В. П.</i> О минимальных поверхностях постоянной гауссовой кривизны в псевдоримановой сфере	27
<i>Денисон В. И.</i> Общее решение уравнений относительного движения в поле плоской волны Титогами	34
<i>Долженков В. А.</i> О средней кривизне поверхности в n -мерном пространстве. I	39
<i>Игнатенко В. Ф.</i> Алгебраические поверхности с бесконечным множеством плоскостей косой симметрии. I.	47
<i>Кованцов И. И., Тадеев Н. А.</i> Об одном определении канонической плоскости поверхности в проективном пространстве	60
<i>Козлов С. Е.</i> Трехмерное уплощение поверхности при совпадении двух ее интегральных характеристик	65
<i>Лавренченко С. А.</i> О числе треугольных укладок помеченного графа на проективной плоскости	71
<i>Макеев В. В.</i> Об универсальных покрышках и проекциях тел постоянной ширины	84
<i>Медяник А. И.</i> О разрешимости одного уравнения для замкнутых выпуклых поверхностей	88
<i>Микеш Й., Старко Г. А.</i> О гиперболически сасакиевых и эквидистантных гиперболически келеровых пространствах	92
<i>Перельман Г. Я.</i> Пример полной седловой поверхности в R^4 с отделенной от пуля гауссовой кривизной	99
<i>Рошенский В. Ю.</i> Условия разложения линейчатых и параболических поверхностей в S^m и CP^n	103
<i>Сергинко Л. И.</i> Линии кривизны двумерного нелинейного неголономного многообразия в E_4	115
<i>Улановский М. А.</i> Однородные лоренцевы многообразия	118
<i>Фоменко В. Т.</i> Общая формула решений уравнений Петерсона—Коддаци на гиперсфере	124
<i>Ямпольский А. Л.</i> Экстремальные значения секционной кривизны метрики Сасаки $T_1(M^n, K)$	127

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ СССР
ПО НАРОДНОМУ ОБРАЗОВАНИЮ
ХАРЬКОВСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
И ОРДЕНА ДРУЖБЫ НАРОДОВ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. А. М. ГОРЬКОГО

**УКРАИНСКИЙ
ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ
СБОРНИК**

**Республиканский
межведомственный
научный
сборник**

Основан в 1965 г.

ВЫПУСК 32

**ХАРЬКОВ
ИЗДАТЕЛЬСТВО ПРИ ХАРЬКОВСКОМ
ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ
1989**

УДК 514

Сборник посвящен в основном геометрии в целом и классической дифференциальной геометрии. Рассматриваются минимальные поверхности постоянной гауссовой кривизны в псевдоримановой сфере, средняя кривизна поверхности в n -мерном пространстве, алгебраические гиперповерхности с бесконечным множеством гиперплоскостей косой симметрии, треугольные укладки помеченного графа на проективной плоскости, универсальные покрышки и проекции тел постоянной ширины, гиперболически сасакиевые и эквидистантные гиперболические кэлеровы пространства, однородные лоренцевы многообразия, экстремальные значения секционной кривизны метрики Сасаки сферического касательного расслоения риманова пространства постоянной кривизны и др. Изучаются классификация точек трехмерных поверхностей по Грассманову образцу, решение уравнений относительно движения в поле плоской волны тяготения, метрическое строение линейчатых и параболических поверхностей с дополнительными условиями на кривизну.

Для научных работников математических специальностей.

Редакционная коллегия: А. В. Погорелов (отв. ред.),
Я. П. Бланк (зам. отв. ред.), А. С. Лейбин (отв. секр.), Ю. А. Аминов,
А. А. Борисенко, В. Ф. Игнатенко, Н. И. Кованцов, Е. В. Косачевская,
А. Д. Милка, В. И. Михайловский, Н. С. Синюков, М. А. Улановский

Ответственный за выпуск А. С. Лейбин

Адрес редакционной коллегии: 310077 Харьков, пл. Дзержинского, 4, Харьковский университет, механико-математический факультет, кафедра геометрии, тел. 45-74-92

Редакция литературы по естественным наукам и филологии
Зав. редакцией Е. П. Иващенко

СБОРНИК НАУЧНЫХ ТРУДОВ

УКРАИНСКИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК

Выпуск 32

Редактор Н. С. Калинина, художественный редактор Т. П. Короленко,
технический редактор Г. П. Александрова, корректор В. Л. Светличная

ИБ № 12554

Сдано в набор 29.12.88. Подписано в печать 16.06.89. БЦ 15769. Формат 60×90/16. Бум. тип. № 2. Гарнитура литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 8,5. Усл. кр.-отт. 8,75. Уч.-изд. л. 9,9. Тираж 500 экз. Изд. № 1722. Зак. 9-41. Цена 1 р. 40 к.

Издательство при Харьковском государственном университете 310003 Харьков, ул. Университетская, 16.

Отпечатано с матриц книжной фабрики им. М. В. Фрунзе в Харьковской городской типографии № 16, 310003 Харьков, ул. Университетская, 16. Зак. 123.

1802050000-050
M 226(04)-89
420-89

© Харьковский государственный
университет, 1989

**ОДНА ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ КРИВЫХ
В E^3 -ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ**

В этой работе рассматриваются кривые в E^3 с компонентами радиуса-вектора в виде тригонометрических полиномов от некоторого параметра t :

$$r(t) = \sum_{p=-n}^n C_p \frac{1}{p} e^{ipt}, \quad p \neq 0, \quad (1)$$

где C_p — постоянные комплексные векторы с тремя компонентами, удовлетворяющие условию $C_{-p} = -\bar{C}_p$. Черта сверху означает комплексное сопряжение. Такие кривые мы будем называть тригонометрическими полиномами. Имеет место

Теорема. Если кривая γ — тригонометрический полином третьей степени имеет постоянную кривизну: $k = \text{const} \neq 0$, то γ — дуга окружности.

Заметим, что в нашей работе* рассмотрены кривые — тригонометрические полиномы от длины дуги. Была доказана теорема о том, что тригонометрический полином длины дуги произвольной степени с постоянной кривизной или с постоянным кручением является дугой окружности.

Используем формулу дифференциальной геометрии $k^2 = |r'r''|^2 / |r'|^6$. Имеем

$$r' = i \sum_{p=-3}^3 C_p e^{ipt}, \quad r'' = - \sum_{p=-3}^3 C_p p e^{ipt}.$$

Будем предполагать, что вектор $C_3 \neq 0$. Случай $C_3 = 0$ рассмотрим в конце статьи. Рассмотрим многочлен

$$|r'|^2 = - \sum_{p_1, p_2 = -3}^3 (C_{p_1} C_{p_2}) e^{i(p_1 + p_2)t} = - \sum_{p=-6}^6 \alpha_p e^{ipt},$$

где коэффициенты $\alpha_p = \sum_{p_1 + p_2 = p} (C_{p_1} C_{p_2})$ в развернутом виде можно записать так:

$$\begin{aligned} \alpha_6 &= C_3^2, \\ \alpha_5 &= 2(C_3 C_2), \\ \alpha_4 &= 2(C_3 C_1) + C_2^2, \\ \alpha_3 &= 2(C_2 C_1), \\ \alpha_2 &= 2(C_3 C_{-1}) + C_1^2, \\ \alpha_1 &= 2(C_3 C_{-2}) + 2(C_2 C_{-1}), \\ \alpha_0 &= 2(C_3 C_{-3}) + 2(C_2 C_{-2}) + 2(C_1 C_{-1}). \end{aligned} \quad (2)$$

* Аминов Ю. А. О замкнутых кривых — тригонометрических полиномах длины дуги // Исследования по геометрии и математическому анализу. Новосибирск, 1988. С. 10—37.

Далее рассмотрим векторное произведение r' и r'' :

$$[r' r''] = -i \sum_{p_1, p_2=-3}^3 p_2 [C_{p_1} C_{p_2}] e^{i(p_1+p_2)t} = -i \sum_{p=-5}^5 d_p e^{ipt},$$

где векторы $d_p = \sum_{p_1+p_2=p} p_2 [C_{p_1} C_{p_2}]$ в подробной записи имеют вид

$$\begin{aligned} d_5 &= [C_2 C_3], \\ d_4 &= [C_1 C_3] 2, \\ d_3 &= [C_1 C_2], \\ d_2 &= [C_{-1} C_3] 4, \\ d_1 &= [C_{-1} C_2] 3 + [C_{-2} C_3] 5, \\ d_0 &= [C_{-1} C_1] 2 + [C_{-2} C_2] 4 + [C_{-3} C_3] 6. \end{aligned} \quad (3)$$

Числитель выражения для k^3 запишем в следующем виде:

$$|[r' r'']|^2 = - \sum_{p_1, p_2=-5}^5 (d_{p_1} d_{p_2}) e^{i(p_1+p_2)t} = - \sum_{p=-10}^{10} \gamma_p e^{ipt}.$$

Коэффициенты $\gamma_p = \sum_{p_1+p_2=p} (d_{p_1} d_{p_2})$ в развернутой записи такие:

$$\begin{aligned} \gamma_{10} &= d_5^2, \\ \gamma_9 &= 2(d_5 d_4), \\ \gamma_8 &= 2(d_5 d_3) + d_4^2, \\ \gamma_7 &= 2(d_5 d_2) + 2(d_4 d_3), \\ &\dots \end{aligned} \quad (4)$$

В дальнейшем будем предполагать, что $k = 1$. Тогда вопрос о существовании кривой с $k = 1$ указанного вида сводится к вопросу о равенстве двух многочленов:

$$\left(\sum_{p=-6}^6 \alpha_p e^{ipt} \right)^3 = \sum_{p=-10}^{10} \gamma_p e^{ipt}. \quad (5)$$

В левой части равенства стоит полином 18-й степени, а в правой — 10-й степени. Поэтому $\alpha_6 = 0$, $\alpha_5 = 0$, $\alpha_4 = 0$, $\gamma_{10} = 0$, $\alpha_3^3 = \gamma_9$. Первые три уравнения дают

$$\begin{aligned} C_3^2 &= 0, \\ (C_2 C_3) &= 0, \\ 2(C_3 C_1) + C_2^2 &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Если комплексный вектор C_3 записать в виде действительной и мнимой части: $C_3 = a + ib$, то условие $C_3^2 = 0$ означает выполнение двух действительных уравнений $a^2 = b^2$, $(ab) = 0$. Мы предполагаем, что $C_3 \neq 0$. Ортонормированный базис координатной системы e_1, e_2, e_3 возьмем так, что e_1 будет направлено по a , e_2 — по b и e_3 ортогонально a и b . Тогда можем записать: $C_3 = a_3 (e_1 + ie_2)$, где $a_3 \neq 0$ — положительное число. Уравнение $(C_3 C_2) = 0$ означает, что $C_2 = a_2 (e_1 + ie_2) + c_2 e_3$, где a_2 и c_2 — некоторые комплексные числа.

ные числа. Уравнение $\gamma_{10} = 0$ автоматически выполнено в силу уравнений (6). Действительно, $\gamma_{10} = d_5^2 = ([C_2C_3][C_2C_3]) = C_2^2C_3^2 - (C_2C_3)^2 = 0$.

Рассмотрим γ_9 . Покажем, что $\gamma_9 = 0$:

$$\gamma_9 = 2(d_5d_4) = 4([C_2C_3][C_1C_3]) = 4(C_2C_1)C_3^2 - 4(C_2C_3)(C_3C_1) = 0.$$

Так как $\gamma_8 = \alpha_3^3$, то $\alpha_3 = 0$, т. е. $(C_2C_1) = 0$. Разложение $|r'|^2$ по степеням e^{it} имеет член старшей степени, равный $-\alpha_2 e^{2it}$. Поэтому $\gamma_8 = \gamma_7 = 0$, $\gamma_6 = \alpha_2^3$.

Если вычислить коэффициенты γ_8 и γ_7 , то они будут равны нулю в силу предыдущих соотношений. Рассмотрим γ_6 :

$$\begin{aligned} \gamma_6 &= 2(d_5d_1) + 2(d_4d_2) + d_3^2 = 2\{([C_2C_3], 3[C_{-1}C_2] + \\ &+ 5[C_{-2}C_3]) + 8([C_1C_3], [C_{-1}C_3])\} + ([C_1C_2])^2 = 2\{-3C_2^2(C_3C_{-1}) - \\ &- 8(C_1C_3)(C_3C_{-1})\} + C_2^2C_2^2 = C_2^2[2(C_3C_{-1}) + C_1^2] = C_2^2\alpha_2. \end{aligned}$$

Так как $\gamma_6 = \alpha_2^3$, то имеет место уравнение $\alpha_2^3 = C_2^2\alpha_2$. Таким образом, имеются две возможности I : $\alpha_2 = 0$; II : $\alpha_2^2 = C_2^2$. Рассмотрим сначала случай I. В этом случае в разложении $|r'|^2$ членом старшей степени является $-\alpha_1 e^{it}$. Поэтому $\gamma_5 = \gamma_4 = 0$, $\gamma_3 = \alpha_1^3$. Рассмотрим

$$\begin{aligned} \gamma_5 &= 2\{(d_5d_0) + (d_4d_1) + (d_3d_2)\} = 2\{([23], 2[-11] + \\ &+ 4[-22] + 6[-33]) + 2([13], [-12]3 + 5[-23]) + \\ &+ 4([12], [-13])\} = 2\{2(C_2C_{-1})(C_3C_1) - 4C_2^2(C_3C_{-2}) - \\ &- 10(C_1C_3)(C_3C_{-2}) - 4(C_2C_{-1})(C_1C_3)\}, \end{aligned}$$

где мы использовали обозначения $[ij] = [C_iC_j]$.

Используя (6), получим

$$\gamma_5 = -2(C_1C_3)\{2(C_3C_{-2}) + 2(C_2C_{-1})\} = -2(C_1C_3)\alpha_1.$$

Так как $\gamma_5 = 0$, то $(C_1C_3)\alpha_1 = 0$. Если $\alpha_1 = 0$, то $|r'|^2 = -\alpha_0$. В этом случае параметр t с точностью до множителя является длиной дуги. Доказательство в [1] теоремы о том, что кривая с постоянной кривизной есть окружность, основывается на однородной системе, имеющей место и в том случае, когда t пропорционально длине дуги. Поэтому будем предполагать, что $\alpha_1 \neq 0$. Следовательно, $(C_1C_3) = 0$. Из последнего уравнения системы (6) следует $C_2^2 = 0$. Используя полученные условия, можем записать векторы C_b в виде

$$\begin{aligned} C_3 &= \alpha_3(e_1 + ie_2), \\ C_2 &= \alpha_2(e_1 + ie_2), \\ C_1 &= \alpha_1(e_1 + ie_2) + c_1e_3. \end{aligned}$$

Отсюда следует $(C_2C_1) = 0$. Запишем коэффициент γ_4 :

$$\begin{aligned} \gamma_4 &= 2\{(d_5d_{-1}) + (d_4d_0) + (d_3d_1)\} + d_2^2 = 2\{(-[23], 3[1 - \\ &- 2]) + 5[2 - 3]) + 2([13], 2[-11] + 4[-22] + 6[-33]) + \\ &+ ([12], 3[-12] + 5[-23])\} + 16([-13])^2. \end{aligned}$$

Используя условия на векторы C_k , находим $\gamma_4 = -8(C_3C_{-1})(C_1^2 + 2(C_3C_{-1})) = -8(C_3C_{-1})\alpha_2$. Но мы рассматриваем случай I, когда $\alpha_2 = 0$. Поэтому условие $\gamma_4 = 0$ не дает нам новой информации. Коэффициент γ_3 имеет вид

$$\begin{aligned}\gamma_3 &= 2 \{(d_5d_{-2}) + (d_4d_{-1}) + (d_3d_0) + (d_2d_1)\} = 2 \{-4[23][1-3] - 2([13], 3[1-2] + 5[2-3]) + ([12], 2[-11] + \\ &+ 4[-22] + 6[-33]) + 4([-13], 3[-12] + 5[-23])\} = \\ &= 2 \{-6C_1^2(C_3C_{-2}) - 2(C_2C_{-1})C_1^2 - 12(C_3C_{-1})(C_2C_{-1}) - 20(C_3C_{-2}) \times \\ &\times (C_3C_{-1})\} = -2 \{(C_3C_{-2})(6C_1^2 + 20(C_3C_{-1})) + (C_2C_{-1})(2C_1^2 + \\ &+ 12(C_3C_{-1}))\}.\end{aligned}$$

Так как $\alpha_2 = 0$, то $2(C_3C_{-1}) + C_1^2 = 0$. Поэтому

$$\begin{aligned}\gamma_3 &= -2 \{(C_3C_{-2})(6C_1^2 - 10C_1^2) + (C_2C_{-1})(2C_1^2 - 6C_1^2)\} = \\ &= 8C_1^2 \{(C_3C_{-2}) + (C_2C_{-1})\} = 4C_1^2\alpha_1.\end{aligned}$$

С другой стороны, $\gamma_3 = \alpha_1^3$. Так как $\alpha_1 \neq 0$, то $\alpha_1^2 = 4C_1^2$ (8). В дальнейшем нам понадобятся выражения коэффициентов γ_2 , γ_1 и γ_0 через α_0 и α_1 . Имеем

$$\begin{aligned}-|r'|^6 &= (\alpha_1 e^{it} + \alpha_0 + \alpha_{-1} e^{-it})^3 = \alpha_1^3 e^{3it} + 3\alpha_1^2 \alpha_0 e^{2it} + \\ &+ 3(\alpha_0^2 \alpha_1 + \alpha_1^2 \alpha_{-1}) e^{it} + 6\alpha_0 |\alpha_1|^2 + \alpha_0^3 + \dots,\end{aligned}\quad (9)$$

где точками заменены члены с отрицательными показателями e^{it} . С другой стороны, найдем выражение γ_2 через векторы C_i :

$$\begin{aligned}\gamma_2 &= 2 \{(d_5d_{-3}) + (d_4d_{-2}) + (d_3d_{-1}) + (d_2d_0)\} + d_1^2 = \\ &= 2 \{-([23][-1-2]) - 8([13][1-3]) - ([12], 3[1-2] + \\ &+ 5[2-3]) + 4([-13], 2[-11] + 4[-22] + 6[-33])\} + \\ &+ 9([-12])^2 + 30([-12][-23]) + 25([-23])^2.\end{aligned}$$

Скалярные произведения векторных произведений мы разложим по формуле аналитической геометрии $(lab)(cd) = (ac)(bd) - (ad) \times (bc)$. Введем обозначения $(C_iC_{-i}) = \rho_i$. Сгруппируем члены, содержащие (C_3C_{-1}) и (C_3C_{-2}) . Тогда получим

$$\begin{aligned}\gamma_2 &= -16(C_3C_{-1})(\rho_1 + \rho_2 + \rho_3) - 2(C_3C_{-2})((C_2C_{-1}) + 16(C_2C_{-1})) - \\ &- 25(C_3C_{-2})^2 - 9(C_2C_{-1})^2 = -8(C_3C_{-1})\alpha_0 - 34(C_3C_{-2})(C_2C_{-1}) - \\ &- 25(C_3C_{-2})^2 - 9(C_2C_{-1})^2.\end{aligned}$$

Сделаем замену $(C_2C_{-1}) = -(C_3C_{-2}) + \frac{\alpha_1}{2}$. Тогда получим

$$\gamma_2 = -8(C_3C_{-1})\alpha_0 - 8(C_3C_{-2})\alpha_1 - \frac{9}{4}\alpha_1^2.$$

Поэтому имеет место уравнение

$$-8((C_3C_{-1})\alpha_0 + (C_3C_{-2})\alpha_1) - \frac{9}{4}\alpha_1^2 = 3\alpha_1^2\alpha_0. \quad (10)$$

Далее рассмотрим коэффициент γ_1 :

$$\gamma_1 = 2 \{ (d_5 d_{-4}) + (d_4 d_{-3}) + (d_3 d_{-2}) + (d_2 d_{-1}) + (d_1 d_0) \}.$$

Сгруппируем члены в выражении γ_1 в три группы: содержащие $(C_2 C_{-1})$, $(C_3 C_{-1})$ и $(C_3 C_{-2})$. Тогда получим

$$\gamma_1 = 2 \{ - (C_2 C_{-1})(22\rho_3 + 6\rho_1 + 12\rho_2) - 8(C_3 C_{-1})(C_2 C_{-3}) + (C_3 C_{-2}) - (C_3 C_{-2})(14\rho_1 + 20\rho_2 + 50\rho_3) \}.$$

Сделаем замену $(C_2 C_{-1}) = - (C_3 C_{-2}) + \frac{\alpha_1^2}{2}$. Используя выражение γ_1 из (9), получим уравнение

$$2 \{ -4(C_3 C_{-1})\bar{\alpha}_1 - 4(C_3 C_{-2})\alpha_0 - \alpha_1(3\rho_1 + 6\rho_2 + 11\rho_3) \} = 3\alpha_1(\alpha_0^2 + |\alpha_1|^2). \quad (11)$$

Скалярные произведения $(C_3 C_{-1})$ и $(C_3 C_{-2})$ можно выразить через коэффициенты α_k . Имеем уравнение $\alpha_2 = 0 = 2(C_3 C_{-1}) + C_1^2$. Используя (8), получим

$$-2(C_3 C_{-1}) = C_1^2 = \frac{\alpha_1^2}{4}. \quad (12)$$

Подставив это выражение в (10), мы найдем

$$8(C_3 C_{-2}) = -2\alpha_1\alpha_0 - \frac{9}{4}\alpha_1. \quad (13)$$

Подставив выражения $(C_3 C_{-1})$ и $(C_3 C_{-2})$ из (12) и (13), мы придем к уравнению

$$2|\alpha_1|^2 + \alpha_0^2 = \frac{9}{4}\alpha_0 - 2[3\rho_1 + 6\rho_2 + 11\rho_3]. \quad (14)$$

Наконец, рассмотрим выражение для γ_0 , которое имеет наиболее тромоздкий вид:

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= 2 \sum_{k=1}^5 (d_k d_{-k}) + d_0^2 = -4(5\rho_1\rho_2 + 10\rho_1\rho_3 + 13\rho_2\rho_3) - \\ &- 4\rho_1^2 - 16\rho_2^2 - 36\rho_3^2 - 14(C_{-1}C_2)(C_1C_{-2}) - 46(C_{-2}C_3)(C_2C_{-3}) - \\ &- 30[(C_{-1}C_2)(C_2C_{-3}) + (C_{-2}C_1)(C_3C_{-2})]. \end{aligned} \quad (15)$$

Так как $\alpha_1 = 2(C_3 C_{-1}) + 2(C_2 C_{-1})$, то можем найти

$$(C_2 C_{-1}) = \alpha_1 \left(\frac{\alpha_0}{4} + \frac{25}{32} \right). \quad (16)$$

Обозначим $I = -4(5\rho_1\rho_2 + 10\rho_1\rho_3 + 13\rho_2\rho_3) - 4\rho_1^2 - 16\rho_2^2 - 36\rho_3^2$.

Подставив выражения (12), (13), (16) в (15), получим $I = \alpha_0^3 + |\alpha_1|^2(2\alpha_0 - 1)$. С помощью уравнения (14) исключим $|\alpha_1|^2$. Получим

$$\begin{aligned} I &= \alpha_0^3 + (2\alpha_0 - 1) \left[\frac{9}{8}\alpha_0 - \frac{\alpha_0^2}{2} - 3\rho_1 - 6\rho_2 - 11\rho_3 \right] = \\ &= T - \frac{9}{8}\alpha_0 + 3\rho_1 + 6\rho_2 + 11\rho_3, \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$T = \frac{11}{4} \alpha_0^2 - 2\alpha_0(3\rho_1 + 6\rho_2 + 11\rho_3) = \\ = -(\rho_1^2 + 13\rho_2^2 + 33\rho_3^2 + 14\rho_1\rho_2 + 34\rho_1\rho_3 + 46\rho_2\rho_3).$$

Легко проверить, что имеет место следующее неожиданное равенство: $I - T = -\frac{3}{4} \alpha_0^2$. Уравнение (17) дает

$$-3\alpha_0^2 = 3\rho_1 + 15\rho_2 + 35\rho_3. \quad (18)$$

С помощью уравнения (14) найдем $12|\alpha_1|^2 = -3\rho_1 - 15\rho_2 - 35\rho_3 = 3\alpha_0^2$. Следовательно, $\alpha_0^2 = 4|\alpha_1|^2$ (19). Запишем полученные уравнения $\alpha_0^2 = 4|\alpha_1|^2$, $\alpha_1^2 = 4C_1^2$, $\alpha_2 = 0$ с помощью компонент векторов C_k . Принимая во внимание (7), можем записать:

$$\begin{aligned}\rho_1 &= -(C_1 \bar{C}_1) = -(2|a_1|^2 + |c_1|^2), \\ \rho_2 &= -(C_2 \bar{C}_2) = -2|a_2|^2, \\ \rho_3 &= -2a_3^2.\end{aligned}$$

Следовательно, коэффициенты α_0 и α_1 имеют вид

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= -2[2(|a_1|^2 + |a_2|^2 + a_3^2) + |c_1|^2], \\ \alpha_1 &= -4(a_3 \bar{a}_2 + a_2 \bar{a}_1).\end{aligned} \quad (20)$$

Поэтому уравнения $\alpha_1^2 = 4C_1^2 = 4c_1^2$ и $\alpha_2 = 0$ перепишутся так: $4(a_3 \bar{a}_2 + a_2 \bar{a}_1)^2 = c_1^2$, $4a_3 \bar{a}_1 + c_1^2 = 0$. Следовательно,

$$(a_3 \bar{a}_2 + a_2 \bar{a}_1)^2 = -a_3 \bar{a}_1, \quad |c_1|^2 = 4a_3 |a_1|. \quad (21)$$

Так как $\alpha_1^2 = 4c_1^2$, то $|\alpha_1| = 4\sqrt{a_3 |a_1|}$. Уравнение (19) с учетом (20) дает

$$2(|a_1|^2 + |a_2|^2 + a_3^2) + |c_1|^2 = 4\sqrt{a_3 |a_1|}. \quad (22)$$

С помощью уравнения (21) найдем выражение $|a_2|$ через $|a_1|$ и a_3 . Положим $a_k = |a_k| e^{i\varphi_k}$, где φ_k — аргументы комплексных чисел a_k , $k = 1, 2$. Из уравнения (21) следует, что $|a_2| \neq 0$. Иначе и $a_1 = 0$, что влечет $\alpha_1 = 0$. В этом случае $|r'|^2 = -\alpha_0$ и теорема доказана. Пусть $a_2 \neq 0$. Обозначим $\theta = \varphi_1 - 2\varphi_2$. Тогда уравнение (21) можно записать так:

$$a_3^2 e^{i\theta} + |a_1|^2 e^{-i\theta} = -a_3 |a_1| \left(2 + \frac{1}{|a_2|^2} \right). \quad (23)$$

Правая часть является отрицательным числом. Поэтому мнимая часть слева $(a_3^2 - |a_1|^2) \sin \theta = 0$. Если $a_3 = |a_1|$, то $2 \cos \theta = -2 - \frac{1}{|a_2|^2}$. Модуль левой части меньше или равен 2, а правой — больше 2, что невозможно. Поэтому $\sin \theta = 0$. Так как правая часть уравнения (23) отрицательна, то $\theta = \pi$. Из (23) на-

ходим $|a_2|^2 = a_3|a_1|/(a_3 - |a_1|)^2$. Выражения $|c_1|^2$ и $|a_2|^2$ подставим в уравнение (22). Тогда получим

$$(|a_1| + a_3)^2 + \frac{a_3|a_1|}{(a_3 - |a_1|)^2} = 2\sqrt{a_3|a_1|}.$$

Для величины $x = \sqrt{a_3|a_1|}$ можем записать квадратное уравнение: $x^2 - 2Bx + AB = 0$, где $A = (|a_1| + a_3)^2$ и $B = (|a_1| - a_3)^2$. Если $a_1 = 0$, то $\alpha_1 = 0$ и теорема доказана. При условии $a_1 \neq 0$, дискриминант уравнения для x , равный $B(B - A) < 0$. Поэтому это уравнение не имеет действительных решений. Теорема в случае I доказана.

Рассмотрим случай II: $\alpha_2^2 = C_2^2$. Можем считать, что $\alpha_2 \neq 0$. Покажем, что $\alpha_1 = 0$. Ранее мы нашли выражение $\gamma_5 = -2(C_1C_3)\alpha_1$. Имеет место уравнение $-2(C_1C_3)\alpha_1 = 3\alpha_2^2\alpha_1$. Предполагая, что $\alpha_1 \neq 0$ и используя условие $\alpha_2^2 = C_2^2$, получим $3C_2^2 + 2(C_1C_3) = 0$ (24). С другой стороны, уравнение $\alpha_4 = 0$ имеет вид

$$C_2^2 + 2(C_3C_1) = 0. \quad (25)$$

Из уравнений (24), (25) следует $C_2^2 = 0$, т. е. $\alpha_2 = 0$, что противоречит нашему предположению. Поэтому $\alpha_1 = 0$. Имеем разложение $|r'|^2 = -(\alpha_2 e^{2it} + \alpha_0 + \alpha_{-2} e^{-2it})$. Векторы C_k удовлетворяют следующей системе однородных уравнений:

$$\begin{aligned} C_3^2 = 0, \quad (C_2C_3) = 0, \quad 2(C_3C_1) + C_2^2 = 0, \quad (C_2C_1) = 0, \\ (C_3C_{-2}) + (C_2C_{-1}) = 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Нетрудно найти выражения коэффициентов γ_k :

$$\begin{aligned} \gamma_6 = \alpha_2^3, \quad \gamma_5 = 0, \quad \gamma_4 = 3\alpha_2^2\alpha_0, \quad \gamma_3 = 0, \\ \gamma_2 = 3\alpha_2(\alpha_0^2 + |\alpha_2|^2), \quad \gamma_1 = 0, \quad \gamma_0 = \alpha_0^3 + 6\alpha_0|\alpha_2|^2. \end{aligned} \quad (27)$$

Можно найти выражение коэффициента $\gamma_4 = -2(C_3C_1)\alpha_0 - 8 \times (C_3C_{-1})\alpha_2$. Из условия $\alpha_4 = 0$ следует $-2(C_3C_1) = C_2^2 = \alpha_2^2$. Поэтому $-4(C_3C_{-1}) = \alpha_2\alpha_0$. Так как $\alpha_2 = 2(C_3C_{-1}) + C_1^2$, то имеет место уравнение

$$\alpha_2(2 + \alpha_0) = 2C_1^2. \quad (28)$$

Учитывая уравнения (26), найдем выражение

$$\begin{aligned} \gamma_3 = -4(C_3C_1)[(C_2C_{-3}) + (C_1C_{-2})] + 8(C_2C_{-1})[2(C_3C_{-1}) + \\ + C_1^2] = 8(C_2C_{-1})\alpha_2. \end{aligned}$$

Так как $\gamma_3 = 0$, $\alpha_2 \neq 0$, $(C_2C_{-1}) = 0$, а поэтому и $(C_3C_{-2}) = 0$. Вектор C_2 имеет вид $C_2 = c_2e_3$, $c_2 \neq 0$. Так как $(C_1C_2) = 0$, то $c_1 = 0$. Находим коэффициент γ_2 :

$$\begin{aligned} \gamma_2 = -4(C_3C_{-1})[4\rho_1 + 7\rho_2 + 12\rho_3] - 2(C_3C_1)\alpha_{-2} - \\ - 2C_1^2[3\rho_3 + 8\rho_2] = \alpha_2\alpha_0[4\rho_1 + 7\rho_2 + 12\rho_3] + \\ + \alpha_2^2\alpha_{-2} - \alpha_2(2 + \alpha_0)(3\rho_2 + 8\rho_3) = 2\alpha_2\alpha_0^2 + \alpha_2^2\alpha_{-2} - \\ - 2\alpha_2(3\rho_2 + 8\rho_3) = 3\alpha_2(\alpha_0^2 + |\alpha_2|^2). \end{aligned}$$

Здесь мы использовали выражения коэффициентов γ_k из (27) и (28). После сокращения на $\alpha_2 \neq 0$ получим

$$-2(3\rho_2 + 8\rho_3) = \alpha_0^2 + 2|\alpha_2|^2. \quad (29)$$

Уравнение $\gamma_1 = 0$ выполняется автоматически в силу вида векторов C_k . Вычисление коэффициента γ_0 приводит к уравнению

$$\begin{aligned} -4\{13\rho_2\rho_3 + 10\rho_1\rho_3 + 5\rho_1\rho_2\} - 4\rho_1^2 - 36\rho_3^2 - 16|\alpha_2|^4 - \\ - |\alpha_2|^2\alpha_0^2 + (\alpha_0 + 2)^2|\alpha_2|^2 = \alpha_0^3 + 6|\alpha_2|^2\alpha_0. \end{aligned} \quad (30)$$

Заметим, что $|\alpha_2|^2 = \rho_2^2$. Поэтому та часть выражения в левой части выписанного уравнения, которая квадратична по ρ_i , совпадает с величиной I , введенной при рассмотрении случая I. С помощью (30) получим $I = \alpha_0^3 + 2|\alpha_2|^2(\alpha_0 - 2)$. Используем также величину T , введенную выше, и которая связана с величиной I соотношением $I = T - \frac{3}{4}\alpha_0^2$. Тогда получим

$$\begin{aligned} \frac{11}{4}\alpha_0^2 - 2\alpha_0(3\rho_1 + 6\rho_2 + 11\rho_3) - \frac{3}{4}\alpha_0^2 + 4|\alpha_2|^2 = \\ = \alpha_0^3 + 2|\alpha_2|^2\alpha_0 = -2\alpha_0(3\rho_2 + 8\rho_3). \end{aligned} \quad (31)$$

В последнем равенстве мы использовали (29). Из (31) находим $2\alpha_0^2 - 6\alpha_0(\rho_1 + \rho_2 + \rho_3) + 4|\alpha_2|^2 = 0$. Так как $\alpha_0 = 2(\rho_1 + \rho_2 + \rho_3)$, то отсюда находим уравнение $\alpha_0^2 = 4|\alpha_2|^2$, которое аналогично уравнению (19). С помощью этого соотношения заменим α_0^2 в (29). Тогда получим

$$-2(3\rho_2 + 8\rho_3) = 6|\alpha_2|^2. \quad (32)$$

Но $\alpha_2^2 = C_2^2 = c_2^2$. Поэтому $|\alpha_2|^2 = |c_2|^2 = -(C_2 C_{-2}) = -\rho_2$. Уравнение (32) перепишется так: $-6\rho_2 - 16\rho_3 = -6\rho_2$, т. е. $\rho_3 = 0$. Но это невозможно, так как a_3 , по предположению, не равно нулю. Теорема в случае II доказана.

В заключение рассмотрим случай $C_3 = 0$. При этом условии утверждение теоремы было доказано И. Шаповаловой. Рассматриваемая кривая является тригонометрическим полиномом второй степени. В этом случае в разложении $-|r'|^2$ коэффициент α_p с наибольшим индексом p есть α_4 , а коэффициент γ_p с наибольшим индексом есть $\gamma_6 = \alpha_2^3$. Следовательно, $\alpha_4 = 0$, $\alpha_3 = 0$. Это означает $C_2^2 = 0$, $(C_2 C_1) = 0$. Далее имеем $\alpha_2^3 = \gamma_6 = ([C_1 C_2])^2 = C_1^2 C_2^2 - (C_1 C_2)^2 = 0$. Поэтому и $\alpha_2 = C_1^2 = 0$. Установленные условия на C_k влекут $\gamma_5 = \gamma_4 = 0$, $\alpha_1^3 = \gamma_3$. Однако $\gamma_3 = 2(d_5 d_6) = 2([C_1 C_2] [C_{-1} C_1] 2 + 4[C_{-2} C_2]) = 4(-|C_1|^2(C_1 C_2) + C_1^2(C_2 C_{-1})) + 8((C_1 C_{-2}) \times C_1^2 + (C_1 C_2) |C_2|^2) = 0$. Следовательно, $\alpha_1 = 0$. Теорема доказана полностью.

Поступила в редакцию 16.11.87

А. А. БОРИСЕНКО, Ю. А. НИКОЛАЕВСКИЙ

КЛАССИФИКАЦИЯ ТОЧЕК ТРЕХМЕРНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ПО ГРАССМАНОВУ ОБРАЗУ

Сферическое изображение двумерных поверхностей в трехмерном евклидовом пространстве играет существенную роль в изучении их строения. Для многомерных поверхностей произвольной коразмерности аналогичную роль играет грассманов образ поверхности в многообразии Грассмана $G(m, n)$ [1—4].

В этой работе изучается грассманов образ трехмерной поверхности в E^5 и l -мерной поверхности $F^l \subset E^{l+2}$. Ю. А. Аминов [5] вводил классификацию точек поверхности $F^2 \subset E^4$ по кривизне k_σ многообразия Грассмана $G(2,4)$ по площадке, касательной к грассманову образу поверхности; при этом выделялись точки, для которых а) $k_\sigma > 1$; б) $k_\sigma = 1$; в) $k_\sigma < 1$. Аналогичная классификация точек многомерных поверхностей по грассманову образу была предложена в [6].

С другой стороны, существует аффинная классификация точек F^2 в E^4 , основанная на аффинной эквивалентности соприкасающихся параболондов к поверхности F^2 . Здесь также выделяется три различных аффинных класса, канонический вид соприкасающегося параболоида для точек каждого из классов следующий:

$$a) \begin{cases} x_3 = 2x_1x_2 \\ x_4 = x_1^2 - x_2^2 \end{cases}; \quad b) \begin{cases} x_3 = 2x_1x_2, \\ x_4 = x_2^2 \end{cases}; \quad v) \begin{cases} x_3 = x_1^2 \\ x_4 = x_2^2 \end{cases}.$$

А. А. Борисенко доказал эквивалентность аффинной и грассмановой классификаций.

Нами показано, что конечная аффинная классификация существует и для точек поверхностей $F^3 \subset E^5$. Классификация точек осуществляется по элементарным делителям пучка вторых квадратичных форм и по числу асимптотических направлений поверхности одновременно; всего выделяется 12 различных аффинных классов, грассманов образ которых не вырожден [7]:

№ п/п	Элементарные делители	Канонический вид пучка квадратичных форм	Число асимптотических направлений
1	2	3	4
1. a.	$\lambda - \lambda_1, \lambda - \lambda_2, \lambda - \lambda_3$	$x_2^2 + x_3^2; x_1^2 + x_3^2$	0
6.	$\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \lambda_1$	$-x_2^2 + x_3^2; -x_1^2 + x_3^2$	4

1	2	3	4
II а. б.	$\lambda - \lambda_1, \lambda - \lambda_1, \lambda - \lambda_3$ $\lambda_1 \neq \lambda_3$	$x_3^2; x_1^2 + x_2^2$ $x_3^2; -x_1^2 + x_2^2$	0 2
III а. (выр.) б.	$\lambda - \lambda_1, \lambda - \lambda_1, \lambda - \lambda_1$	0; $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ 0; $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$	0 Вещественный конус (∞)
IV	$\lambda - \lambda_1, \lambda^2 - 2\alpha\lambda +$ $+ (\alpha^2 + \beta^2)$ $\beta \neq 0$	$-x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2;$ $x_1^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 - x_3^2$	2
V а. б.	$(\lambda - \lambda_1)^2, \lambda - \lambda_3$ $\lambda_1 \neq \lambda_3$	$x_2^2 + x_3^2; 2x_1x_2 - x_2^2$ $x_2^2 - x_3^2; 2x_1x_2 - x_2^2$	1 3
VI	$(\lambda - \lambda_1)^2, \lambda - \lambda_1$	$x_2^2; 2x_1x_2 + x_3^2$	1
VII	$(\lambda - \lambda_1)^3$	$2x_2x_3; x_2^2 + 2x_1x_3$	2
VIII 1- парараб.	пучок вырожден	$2x_2x_3; 2x_1x_3$	1 направление и плоскость

При этом не учитываются случаи вырождения, которые сводятся к классификации точек $F^2 \subset E^4$, $F^2 \subset E^3$.

Пусть $F^l \subset E^{l+p}$ — регулярная l -мерная поверхность в $l+p$ -мерном евклидовом пространстве. Построим в каждой точке поверхности F^l касательное пространство и перенесем его параллельно в точку $O \in E^{l+p}$ — начало координат. Множество полученных l -мерных плоскостей, рассматриваемых как точки многообразия Грасмана $G(l, l+p)$, называется грасмановым образом поверхности F^l . Отображение Γ , ставящее в соответствие точке q поверхности F^l точку многообразия Грасмана $G(l, l+p)$, соответствующую l -мерной касательной плоскости в точке q к F^l , будем называть грасмановым отображением.

Внешний нуль-индекс $\mu(q)$ регулярной поверхности F^l в точке q — это размерность максимального линейного подпространства, в касательном пространстве к поверхности, соответствующего нулевому собственному значению второй квадратичной формы поверхности относительно произвольной нормали.

Нетрудно показать, что если внешний нуль-индекс регулярной поверхности F^l в данной точке q равен нулю, то отображение Грассмана Γ в окрестности $U(q)$ точки q имеет максимальный ранг и тогда грассманов образ $\Gamma(F^l \cap U(q))$ является гладким l -мерным подмногообразием в $G(l, l+p)$. Мы будем считать это предположение выполненным на протяжении всей работы.

Нас будет интересовать кривизна многообразия Грассмана $G(l, l+2)$ по двумерным площадкам, касательным к $\Gamma(F^l)$ в точке $\Gamma(q) \in G(l, l+2)$. В случае $l=2$ такая площадка — одна, поэтому достаточно рассмотреть секционную кривизну $G(2,4)$ по этой площадке. В случае $l=3$ касательное пространство $T_{\Gamma(q)}\Gamma(F^3)$ трехмерно, поэтому сужение тензора кривизны многообразия Грассмана $G(3,5)$ на это пространство можно полностью охарактеризовать сужением на него же тензора Риччи $G(3,5)$. Во избежание громоздких формулировок в рамках этой работы под тензором Риччи многообразия $G(3,5)$ везде будем понимать именно это его сужение на касательное пространство к $\Gamma(F^3)$.

Объектом нашего исследования будут главные кривизны Риччи многообразия $G(3,5)$ в точке $\Gamma(q)$, где q — точка на регулярной поверхности $F^3 \subset E^5$. Таких кривизн — три. Они, как известно, содержат максимальную и минимальную секционную кривизну $G(3,5)$ по площадкам из $T_{\Gamma(q)}\Gamma(F^3)$. Поскольку по теореме Вонга [8] секционная кривизна k_σ многообразия Грассмана заключена в пределах от 0 до 2: $k_\sigma \in [0,2]$, то и главные кривизны k_1, k_2 и k_3 тоже будут лежать в этом отрезке.

Имеет место

Теорема. Пусть $F^3 \subset E^5$ — регулярная поверхность, $q \in F^3$ и внешний нуль-индекс поверхности F^3 в точке q равен нулю. Тогда в зависимости от типов элементарных делителей пучка вторых квадратичных форм поверхности F^3 в точке q , главные кривизны Риччи многообразия Грассмана $G(3,5)$ в точке $\Gamma(q)$ по площадкам, касательным к грассманову образу поверхности F^3 , удовлетворяют следующим оценкам:

№ п/п	Элементарные делители	Канонический вид пучка вторых квадратичных форм	Главные кривизны тензора Риччи
1	2	3	4
I а, б	$\lambda = \lambda_1; \lambda = \lambda_2;$ $\lambda = \lambda_3;$ $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \lambda_1$	$\pm x_2^2 + x_3^2; \pm x_1^2 + x_3^2$	$0 \leq k_1, k_2 < 1;$ $0 < k_3 < 2$
II а, б	$\lambda = \lambda_1; \lambda = \lambda_1;$ $\lambda = \lambda_3;$ $\lambda_1 \neq \lambda_3$	$x_3^2; \pm x_1^2 + x_2^2$	$0 \leq k_1, k_2 < 1;$ $k_3 = 1$

1	2	3	4
III а, б вы- рожд.	$\lambda - \lambda_1, \lambda - \lambda_1,$ $\lambda = \lambda_1$	$0; x_1^2 + x_2^2 \pm x_3^2$	$k_1 = k_2 = k_3 = 1$
IV	$\lambda - \lambda_1,$ $\lambda^2 - 2\alpha\lambda + (\alpha^2 + \beta^2)$ $\beta \neq 0$	$-x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2;$ $x_1^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 - x_3^2$	$0 < k_1, k_2 < 1;$ $1 < k_3 < 2$
V а, б	$(\lambda - \lambda_1)^2, \lambda - \lambda_3$ $\lambda_1 \neq \lambda_3$	$x_2^2 \pm x_3^2; 2x_1x_2 - x_2^2$	$0 < k_1, k_2 < 1$ $1 < k_3 < 2$
VI	$(\lambda - \lambda_1)^2, \lambda - \lambda_1$	$x_2^2; 2x_1x_2 + x_2^2$	$0 < k_1 < 1;$ $k_2 = k_3 = 1$
VII	$(\lambda - \lambda_1)^3$	$2x_2x_3; x_2^2 + 2x_1x_3$	$0 < k_1, k_2 < 1;$ $1 < k_3 < 2$
VIII 1- параб.	пучок вырожден	$2x_2x_3; 2x_1x_3$	$0 < k_1, k_2 < 1;$ $k_3 = 1$

Границы изменения главных кривизн k_i при различных элементарных делителях различны, а случаи II и VIII отличаются тем, что двумерные площадки, на которых достигается кривизна I, касаются различных вполне геодезических подмногообразий: в случае II — трехмерной сферы $S^3 \subset G(3,5)$, в случае VIII — двумерной сферы $S^2 \subset G(2,4) \subset G(3,5)$.

Если для точки поверхности $F^3 \subset E^5$ главные кривизны k_i удовлетворяют одному из неравенств в формулировке теоремы, а в случаях II и VIII различаются касательные площадки, и это устойчиво относительно невырожденных аффинных преобразований пространства, то однозначно определяются вид элементарных делителей пучка вторых квадратичных форм и с точностью до числа асимптотических направлений определяется аффинный класс точки.

1. Пусть $q \in F^l \subset E^{l+2}$, F^l — регулярная поверхность и $\mu(q) = 0$. Систему координат в E^{l+2} выберем так, чтобы точка q совпадала с началом координат $O \in E^{l+2}$, а касательное пространство $T_q F^l$ — с подпространством (x_1, \dots, x_l) в E^{l+2} . Через (Ax, x) и (Bx, x) обозначим вторые квадратичные формы поверхности F^l в точке O относительно нормалей x_{l+1} и x_{l+2} . В дальнейшем, если это не будет вызывать недоразумений, будем опускать аргу-

менты у квадратичной формы и отождествлять ее с соответствующей симметрической матрицей. Поверхность F^l в окрестности точки O задается уравнениями

$$\begin{aligned}x_{l+1} &= f_1(x_1, \dots, x_l); \\x_{l+2} &= f_2(x_1, \dots, x_l),\end{aligned}$$

причем функции f_1, f_2 — регулярны и $f_\mu(0) = \left. \frac{\partial f_\mu}{\partial x_i} \right|_0 = 0$ ($\mu = 1, 2$; $i = 1, \dots, l$). Коэффициенты форм A и B есть:

$$a_{ij} = \left. \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_i \partial x_j} \right|_0, \quad b_{ij} = \left. \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_i \partial x_j} \right|_0.$$

Если построить касательное пространство $T_{x^0} F^l$ в точке $x^0 = (x_1^0, \dots, x_l^0, f_1(x_1^0, \dots, x_l^0), f_2(x_1^0, \dots, x_l^0)) \in F^l$ и перенести его параллельно в начало координат, то получено подпространство можно задать двумя уравнениями:

$$\begin{cases} x_{l+1} = \sum_{i=1}^l \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \right|_{x^0} x^i; \\ x_{l+2} = \sum_{i=1}^l \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_i} \right|_{x^0} x^i. \end{cases}$$

Поэтому гравсмановым образом точки $x^0 \in F^l$ будет точка $\Gamma(x^0)$ с локальными координатами:

$$\left(\begin{array}{c} \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \frac{\partial f_1}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f_1}{\partial x_l} \right|_{x^0} \\ \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_1}, \frac{\partial f_2}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f_2}{\partial x_l} \right|_{x^0} \end{array} \right)$$

в $G(l, l+2)$. В частности, $\Gamma(0) = 0$ в соответствии с выбором системы координат в E^{l+2} .

Отсюда видно, что касательным пространством к $\Gamma(F^l)$ в точке $\Gamma(x^0)$ является l -мерное линейное пространство, натянутое на векторы

$$z_I = \left(\begin{array}{c} \left. \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \partial x_j}, \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2 \partial x_j}, \dots, \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_l \partial x_j} \right|_{x^0} \\ \left. \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial x_j}, \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2 \partial x_j}, \dots, \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_l \partial x_j} \right|_{x^0} \end{array} \right) \in T_{\Gamma(x^0)} G(l, l+2).$$

В частности, в точке O попросту имеем

$$z_I = \begin{pmatrix} a_{1j} a_{2j} \dots a_{lj} \\ b_{1j} b_{2j} \dots b_{lj} \end{pmatrix}.$$

Будем обозначать вектор-строки матриц A и B через a_I и b_I соответственно. Тогда $z_I = \begin{pmatrix} a_I \\ b_I \end{pmatrix}$.

Грассманово отображение $\Gamma: F^l \rightarrow G(l, l+2)$ индуцирует гомоморфизм касательных пространств $\Gamma_*: T_0 F^l \rightarrow T_0 G(l, l+2)$. Из предыдущего видно, что этот гомоморфизм действует так

$\Gamma_*(x_i) = z_i$. Если $u \in T_0 F^l$, $u = \sum_{i=1}^l u_i x_i$, то

$$\Gamma_*(u) = \sum_{j=1}^l u_j z_j = \begin{pmatrix} \langle a_1, u \rangle \langle a_2, u \rangle \cdots \langle a_l, u \rangle \\ \langle b_1, u \rangle \langle b_2, u \rangle \cdots \langle b_l, u \rangle \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где \langle , \rangle — евклидово скалярное произведение в E^l .

Рассмотрим теперь секционную кривизну многообразия Грассмана $G(l, l+2)$ в точке O вдоль площадки, натянутой на два касательных к $G(l, l+2)$ вектора T^1 и T^2 . По формуле Вонга [8] секционная кривизна равна:

$$k_\sigma = \frac{\text{Tr}(\Lambda_1 \Lambda_1^*)/2 + \text{Tr}(\Lambda_2 \Lambda_2^*)/2}{\text{Tr}(T^1 T^{1*}) \text{Tr}(T^2 T^{2*}) - (\text{Tr}(T^1 T^{2*}))^2}, \quad (2)$$

где Tr обозначает след матрицы; $*$ — транспонирование; $\Lambda_1 = T^1 T^{2*} - T^2 T^{1*}$ и $\Lambda_2 = T^{1*} T^2 - T^{2*} T^1$ — кососимметрические 2×2 -и $l \times l$ -матрицы соответственно.

В дальнейшем для матрицы P будем обозначать ее ij -й элемент $[P]_{ij}$.

Вычисление секционной кривизны по формуле (2) можно упростить, если заметить, что для любых квадратных матриц Q и R $\text{Tr}(QR^*)$ есть сумма произведений соответствующих элементов матриц Q и R , в частности, $\text{Tr}(QQ^*)$ есть сумма квадратов элементов матрицы Q . Если матрица Q кососимметрическая, то $\text{Tr}(QQ^*)/2$ есть попросту сумма квадратов элементов матрицы Q , стоящих над главной диагональю, в частности $\text{Tr}(\Lambda_1 \Lambda_1^*)/2 = ([\Lambda_1]_{12})^2$.

Лемма 1. Пусть $F^l \subset E^{l+2}$ — регулярная поверхность с невырожденным грассмановым образом. Тогда

а) Каждому вещественному корню уравнения $\det(A - \lambda B) = 0$ соответствует направление в касательном пространстве к грассманову образу поверхности, для которого по любой проходящей через него двумерной площадке секционная кривизна многообразия Грассмана $G(l, l+2)$ не большие единицы.

б) Каждой паре комплексно-сопряженных корней соответствует двумерная площадка, по которой секционная кривизна многообразия Грассмана $G(l, l+2)$ большие единицы.

В случае, когда рассматривается трехмерная поверхность F^3 в евклидовом пространстве E^5 , имеет место

Лемма 2. Пусть $F^3 \subset E^5$ — регулярная поверхность с невырожденным грассмановым образом. Тогда из трех главных кривиз Риччи многообразия Грассмана $G(3,5)$, на касательных векторах к грассманову образу поверхности F^3 , по крайней мере, две не превосходят единицы.

Для доказательства этих лемм воспользуемся понятием сопряженных направлений. Будем называть направления v_1 и v_2 сопря-

женными (относительно пучка $A - \lambda B$), если $\langle Av_1, v_2 \rangle = \langle Bv_1, v_2 \rangle = 0$, направление v_1 и подпространство L сопряженными, если v_1 сопряжено любому вектору из L . Ясно, что при аффинных преобразованиях в $T_0 F^l$ сопряженность сохраняется.

Лемма 3. Пусть направление v сопряжено подпространству $L \subset T_0 F^l$ размерности $l-1$. Тогда секционная кривизна многообразия Грассмана $G(l, l+2)$ по площадке $(\Gamma_* v, \Gamma_* w)$, где w — любой вектор из L , не превосходит единицы.

Доказательство. Ортогональную систему координат в $T_0 F^l$ выберем так, чтобы подпространство L совпадало с (x_3, x_4, \dots, x_l) ; не ограничивая общности, можно считать, что вектор w есть единичный вектор оси x_2 .

В силу сопряженности v и L получим $Av \perp L$, $Bv \perp L$. Отсюда $v \perp A(L)$, $v \perp B(L)$. Но $A(L)$ есть подпространство, натянутое на векторы $a_2 = Ax_2$, $a_3 = Ax_3$, \dots , $a_l = Ax_l$. Отсюда получаем $\langle v, a_j \rangle = 0$, $j = 2, 3, \dots, l$. То же верно и для $\langle v, b_1 \rangle$. Тогда по формуле (1) имеем

$$\Gamma_*(v) = \begin{pmatrix} (v, a_1) & 0 & \dots & 0 \\ (v, b_1) & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Возьмем

$$T^1 = \Gamma_*(v) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \dots & 0 \\ \beta & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

где для удобства обозначено $\alpha = (v, a_1)$, $\beta = (v, b_1)$;

$$T^2 = \Gamma_*(w) = \Gamma_*(x_2) = z_2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Применим формулу (2) для подсчета секционной кривизны $G(l, l+2)$ по площадке (T^1, T^2) : $\text{Tr}(\Lambda_1 \Lambda_1^*)/2 = (\alpha b_{12} - \beta a_{12})^2$. $\text{Tr}(\Lambda_2 \times \Lambda_2^*)/2 = \sum_{j=2}^l (\alpha a_{2j} + \beta b_{2j})^2$. Выражение в знаменателе: $\text{Tr}(T^1 T^{1*}) \times \text{Tr}(T^2 T^{2*}) - (\text{Tr}(T^1 T^{2*}))^2 = \sum_{j=2}^l (a_{2j}^2 + b_{2j}^2)(\alpha^2 + \beta^2) + (\alpha b_{12} - \beta a_{12})^2$.

Вычитая теперь из числителя знаменатель, имеем

$$\begin{aligned} & (\alpha b_{12} - \beta a_{12})^2 + \sum_{j=2}^l [(\alpha a_{2j} + \beta b_{2j})^2 - (\alpha^2 + \beta^2)(a_{2j}^2 + b_{2j}^2)] - \\ & - (\alpha b_{12} - \beta a_{12})^2 = - \sum_{j=2}^l (\alpha b_{2j} - \beta a_{2j})^2 \leq 0. \end{aligned}$$

Значит, $k_s \leq 1$. Лемма доказана.

Из леммы 3 получается доказательство утверждения а) леммы 1. Действительно, если λ_0 — вещественный корень полинома $\det(A - \lambda_0 B) = 0$, то существует ненулевой вектор $v \in T_0 F^l$ такой, что $Av = \lambda_0 Bv$. В качестве L возьмем $l-1$ -мерное подпространство, ортогональное к Av (и к Bv). Тогда v и L сопряжены.

Пусть теперь z — комплексный корень многочлена $\det(A - \lambda B) = 0$. Тогда существует комплексный l -мерный вектор $p + iq$ такой, что $(A - zB)(p + iq) = 0$. Выберем в $T_0 F^l$ ортонормированную систему координат так, чтобы вектор p был равен единичному вектору на оси x_l и плоскость pq совпадала бы с координатной плоскостью $x_{l-1}x_l$. Имеем

$$p = (0, 0, \dots, 0, 1), \quad q = (0, \dots, 0, q_{l-1}, q_l).$$

Из того, что $(A - zB)(p + iq) = 0$, получаем, что четыре вектора $Ap = a_l$, $Bp = b_l$, $Aq = q_{l-1}a_{l-1} + q_l a_l$, $Bq = q_{l-1}b_{l-1} + q_l b_l$ компланарны. Значит, и векторы a_{l-1} , b_{l-1} , a_l и b_l — компланарны. Без нарушения общности можно считать, что

$$\begin{aligned} a_{l-1} &= \alpha a_l + \beta b_l, \\ b_{l-1} &= \gamma a_l + \delta b_l. \end{aligned} \tag{3}$$

Тогда берем

$$T^1 = \Gamma_*(p) = \begin{pmatrix} a_l \\ b_l \end{pmatrix}, \quad T^2 = \Gamma_*(x_{l-1}) = \begin{pmatrix} \alpha a_l + \beta b_l \\ \gamma a_l + \delta b_l \end{pmatrix}$$

и считаем секционную кривизну $G(l, l+2)$ вдоль двумерной плоскости, натянутой на T^1 и T^2 по формуле (2): $(\text{Tr } \Lambda_1 \Lambda_1^*)/2 = (\gamma a_l^2 + + (\delta - \alpha) \langle a_l, b_l \rangle - \beta b_l^2)^2$. $(\text{Tr } (\Lambda_2 \Lambda_2^*))/2 = (\beta - \gamma)^2 \sum_{i,j=2}^l (a_{ii} b_{ji} - a_{ij} b_{ii})^2 = (\beta - \gamma)^2 (a_l^2 b_l^2 - \langle a_l, b_l \rangle^2)$. Выражение, стоящее в знаменателе формулы (2), равно: $\text{Tr}(T^1 T^{1*}) \text{Tr}(T^2 T^{2*}) - (\text{Tr}(T^1 T^{2*}))^2 = (a_l^2 + b_l^2)((\alpha^2 + \gamma^2)a_l^2 + (\beta^2 + \delta^2)b_l^2 + 2(\alpha\beta + \gamma\delta)\langle a_l, b_l \rangle) - (\alpha a_l^2 + + (\beta + \gamma)\langle a_l, b_l \rangle + \delta b_l^2)^2$. Вычитая из числителя знаменатель, получим $(\langle a_l b_l \rangle^2 - a_l^2 b_l^2)[4\beta\gamma + (\delta - \alpha)^2]$. Покажем, что выражение в квадратных скобках отрицательно.

Из того, что двумерной плоскости $(p, q) = (x_{l-1}x_l)$ соответствует комплексный корень уравнения $\det(A - \lambda B) = 0$, заключаем, что дискриминант квадратного по λ уравнения

$$\det \begin{pmatrix} a_{l-1} & -\lambda b_{l-1} \\ a_{l-1} & -\lambda b_{l-1} \end{pmatrix} = 0$$

отрицателен. Из соотношений (3) получаем, что он равен $(\alpha M - \delta M)^2 - 4\beta M(-\gamma M)$, где через M обозначено $\gamma a_l^2 + (\delta - \alpha) \times a_{ll} b_{ll} - \beta b_{ll}^2$. Тогда $M^2((\alpha - \delta)^2 + 4\beta\gamma) < 0$.

Лемма 1 доказана.

Доказательство леммы 2. Рассмотрим главные кривизны Риччи многообразия $G(3, 5)$ на касательном пространстве к $\Gamma(F^3)$ в точке $O \in G(3, 5)$. В трехмерном случае секционная кривизна полностью определяется тензором Риччи, а имеем: $k_a = (N_{ij}\Delta^i\Delta^j)/(g_{ij}\Delta^i\Delta^j)$, где Δ^i — координаты бивектора, натянутого на векторы $x, y \in T_0 F^3$, $k_a = k_a(\Gamma_* x, \Gamma_* y)$, N_{ij} — компоненты тензора Риччи, g_{ij} — компоненты метрического тензора на $G(3, 5)$.

Главные кривизны Риччи определяются из уравнения $\det(N - kg) = 0$. По утверждению б) леммы 1 сразу получаем, что форма $N - g$ неположительно определена на двумерном пространстве бивекторов Δ таких, что $\Delta^1 v_1 + \Delta^2 v_2 + \Delta^3 v_3 = 0$.

Одновременно диагонализуя N и g , получим

$$N = R \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{pmatrix} R^*, \quad g = RR^*,$$

где $R \in GL(3, \mathbb{R})$. Поскольку $N - g$ неположительно определена на двумерной плоскости, то это же верно и для

$$\begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда видно, что две из трех главных кривизн k_i не превосходят единицы. Лемма 2 доказана.

Лемма 4. Пусть $F^l \subset E^{l+2}$ — регулярная поверхность с невырожденным грассмановым образом. Тогда

1) Если ограничение пучка вторых квадратичных форм на двумерную площадку в касательном пространстве к поверхности имеет аффинный тип

$$6) \quad \begin{cases} x_{l+1} = 2x_{l-1}x_l \\ x_{l+2} = x_l^2 \end{cases} \quad \text{или} \quad b) \quad \begin{cases} x_{l+1} = x_{l-1}^2 \\ x_{l+2} = x_l^2 \end{cases},$$

то секционная кривизна k_σ многообразия Грассмана $G(l, l+2)$ вдоль площадки $\Gamma_*(\sigma)$ строго меньше 2, хотя, может быть, сколь угодно близка к 2.

2) Если ограничение на двумерную касательную площадку σ пучка вторых квадратичных форм имеет аффинный тип

$$a) \quad \begin{cases} x_{l+1} = 2x_{l-1}x_l \\ x_{l+2} = x_{l-1}^2 - x_l^2 \end{cases}, \quad \text{то секционная кривизна } G(l, l+2) \text{ вдоль}$$

$\Gamma_*(\sigma)$ может принимать значение 2.

Доказательство. 1). Ортонормированную систему координат в $T_0 F^l = \{x_1, x_2, \dots, x_l\}$ можно выбрать так, чтобы площадка σ , о которой говорится в формулировке леммы, совпала с двумерной плоскостью $\{x_{l-1}x_l\}$. Поскольку пучок вторых квадратичных форм имеет тип б) или в), то можно выбрать такую нормаль, что соответствующая вторая квадратичная форма (обозначим ее через A) на площадке $\sigma = \{x_{l-1}x_l\}$ будет вырождена. Выберем теперь оси x_{l-1} и x_l так, чтобы диагонализовать форму A на площадке σ . Тогда

$$A = \left(\begin{array}{c|c} * & * \\ \hline * & \begin{array}{c|c} * & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \end{array} \right); \quad B = (b_{ij})_{i,j=1}^l.$$

Посчитаем секционную кривизну по площадке $\Gamma_*(\sigma) = (T^1 T^2)$, где

$$T^1 = \Gamma_*(x_{l-1}) = \begin{pmatrix} a_{l-1,1} & \dots & a_{l-1,l-1} & 0 \\ b_{l-1,1} & \dots & b_{l-1,l-1} & b_{l-1,l} \end{pmatrix},$$

$$T^2 = \Gamma_*(x_l) = \begin{pmatrix} a_{ll} & \dots & a_{ll-2} & 0 & 0 \\ b_{ll} & \dots & b_{ll-2} & b_{ll-1} & b_{ll} \end{pmatrix}.$$

Выберем в площадке $\Gamma_*(\sigma)$ ортогональные в метрике $G(l, l+2)$ векторы, взяв линейные комбинации векторов T^1 и T^2 : $T^1 = T^1$, $\tilde{T}^2 = T^2 + \alpha T^1$, где α выбирается из условия $\text{Tr}(\tilde{T}^1 \tilde{T}^{2*}) = 0$. Введем обозначения для компонент векторов \tilde{T}^1 и \tilde{T}^2 :

$$\tilde{T}^1 = \begin{pmatrix} u & 0 \\ v & \gamma \end{pmatrix}; \quad \tilde{T}^2 = \begin{pmatrix} c & 0 \\ d & \delta \end{pmatrix},$$

где u, v, c, d — $l-1$ -мерные векторы; γ и δ — числа: $\gamma = b_{l-1,l}$, $\delta = b_{ll} + \alpha b_{l-1,l}$.

Теперь посчитаем секционную кривизну по формуле (2): $(\text{Tr} \times (\Lambda \Lambda_1^*))/2 = \langle u, d \rangle - \langle v, c \rangle^2 = M_1$, $M_1 \geq 0$, M_1 не зависит от γ и δ .

$$(\text{Tr}(\Lambda_2 \Lambda_2^*))/2 = M_2 + \sum_{i=1}^{l-1} (\gamma d_i - \delta v_i)^2 = M_2 + \|\gamma d - \delta v\|^2,$$

$M_2 \geq 0$ не зависит от γ и δ .

Знаменатель формулы (2), с одной стороны, равен $\text{Tr}(\tilde{T}^1 \tilde{T}^{1*}) \times \text{Tr}(\tilde{T}^2 \tilde{T}^{2*}) = (\|u\|^2 + \|v\|^2 + \gamma^2)(\|c\|^2 + \|d\|^2 + \delta^2)$ (учтена ортогональность \tilde{T}^1 и \tilde{T}^2), с другой, формально:

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\tilde{T}^1 \tilde{T}^{1*}) \text{Tr}(\tilde{T}^2 \tilde{T}^{2*}) - (\text{Tr}(\tilde{T}^1 \tilde{T}^{2*}))^2 = \\ = M_3 + \|u\delta - cv\|^2 + \|v\delta - d\gamma\|^2, \end{aligned}$$

где через M_3 обозначено неотрицательное слагаемое, не зависящее от γ и δ . Из формулы (2)

$$k_\sigma - 1 = \frac{M_1 + M_2 - M_3 - \|\delta u - \gamma c\|^2}{(\|u\|^2 + \|v\|^2 + \gamma^2)(\|c\|^2 + \|d\|^2 + \delta^2)}.$$

Кривизна равна 2 только в том случае, когда последнее выражение максимально и равно единице. Но для его максимальности необходимо, чтобы $\gamma = \delta = 0$ (иначе, заменив их на $\gamma/2$ и $\delta/2$, мы уменьшим знаменатель и не уменьшим числитель, т. е. увеличим всю дробь). Поэтому $k_\sigma = 2$ только в случае, когда $\gamma = \delta = 0$. Возвращаясь к выражению γ и δ через коэффициенты матриц A и B , получаем $b_{l-1,l} = b_{ll} = 0$. Значит, обе матрицы A и B имеют вид

$$\left(\begin{array}{c|cc} * & & \\ \hline & \begin{array}{c|c} * & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \end{array} \right).$$

Теперь уже $T^1 = \begin{pmatrix} * & a_{l-1, l-1} & 0 \\ * & b_{l-1, l-1} & 0 \end{pmatrix}$, $T_2 = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Возьмем $\tilde{T}^1 = T^1$, $\tilde{T}^2 = T^1 + \beta T^2$, β выберем из условия ортогональности $\text{Tr}(\tilde{T}^1 \tilde{T}^{2*}) = 0$. Как и выше, для краткости введем обозначения:

$$\tilde{T}^1 = \begin{pmatrix} u & \gamma & 0 \\ v & \delta & 0 \end{pmatrix}; \quad \tilde{T}^2 = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$u, v, c, d - l - 2$ -мерные векторы; $\gamma = a_{l-1, l-1}$, $\delta = b_{l-1, l-1}$.

Применяем формулу (2). Ищем первое слагаемое в числителе: $(\text{Tr}(\Lambda_1 \Lambda_1^*))/2 = M_1 \geq 0$, не зависит от γ и δ . Второе слагаемое: $(\text{Tr}(\Lambda_2 \Lambda_2^*))/2 = M_2 + \|\gamma c + \delta d\|^2$, $M_2 \geq 0$, не зависит от γ и δ . В знаменателе $\text{Tr}(\tilde{T}^{1*} \tilde{T}^1) \text{Tr}(\tilde{T}^2 \tilde{T}^{2*}) = M_3 + (\gamma^2 + \delta^2)(\|c\|^2 + \|d\|^2)$, $M_3 \geq 0$, не зависит от γ и δ . Тогда

$$k_\sigma - 1 = \frac{M_1 + M_2 - M_3 - \|\gamma c + \delta d\|^2}{M_3 + (\gamma^2 + \delta^2)(\|c\|^2 + \|d\|^2)}.$$

Из соображений, аналогичных приведенным выше, получаем, что необходимым условием достижения верхней границы $k_\sigma = 2$ является равенство $\gamma = \delta = 0$, т. е. $a_{l-1, l-1} = b_{l-1, l-1} = 0$. Это противоречит предположению леммы. Строится пример близости k_σ к 2. При $l = 3$ он будет предъявлен ниже.

Утверждение 1) леммы 4 доказано.

2) Возьмем

$$A = \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}.$$

В качестве σ возьмем площадку $(x_{l-1} x_l)$. На этой площадке пучок $A - \lambda B$ имеет аффинный тип в).

$G(l+2, l)$ вдоль площадки, натянутой на векторы

$$T^1 = \Gamma_*(x_{l-1}) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad T^2 = \Gamma_*(x_l) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Секционная кривизна равна двум. 2) доказано. Лемма 4 доказана. Из нее непосредственно следует

Лемма 5. Если одна из главных кривизн Риччи многообразия $G(3, 5)$ вдоль касательного пространства $T_0 \Gamma(F^3)$ к грассманову образу поверхности равна 2, то пучок вторых квадратичных форм $A - \lambda B$ поверхности F^3 имеет комплексный корень.

2. В дальнейшем будем рассматривать случай $l = 3$, т. е. $F^3 \subset E^6$. Получим выражение компонент тензора Риччи N и метрического тензора g многообразия $G(3, 5)$, ограниченных на касательное пространство $T_0 \Gamma(F^3)$ к грассманову образу поверхности F^3 через коэффициенты вторых квадратичных форм A и B .

Пусть P — квадратная матрица. Через P^\vee будем обозначать присоединенную матрицу, т. е. матрицу, составленную из алгебраических дополнений к элементам матрицы P .

Лемма 6. 1. $(P^*)^\nabla = (P^\nabla)^*$. 2. Матрица, присоединенная к симметрической, также симметрическая. 3. $(PQ)^\nabla = P^\nabla Q^\nabla$, в частности, $(P^2)^\nabla = (P^\nabla)^2$.

Если P — 3×3 -матрица, то 4. $\det(P^\nabla) = (\det P)^2$. 5. Матрица, присоединенная к кососимметрической, — симметрическая. 6. $P^\nabla \nabla = P \det P$.

Имеет место

Лемма 7. Главные кривизны тензора Риччи являются корнями уравнения

$$\det[(A^\nabla + B^\nabla)^2 + (AB - BA)^\nabla - k(A^2 + B^2)^\nabla] = 0. \quad (4)$$

Доказательство проводится непосредственным вычислением по формуле (2). Получаем:

$$N = (A^\nabla + B^\nabla)^2 + (AB - BA)^\nabla; \quad g = (A^2 + B^2)^\nabla. \quad (5)$$

Обозначим левую часть (4) через $F(k)$. Ищем главные кривизны, т. е. надо исследовать нули $F(k)$. Из леммы 2 и геометрического смысла корней $F(k)$ получаем

Лемма 8. Функция $F(k)$ обладает следующими свойствами: 1) $F(k)$ — полином степени 3. 2) Все корни $F(k)$ вещественны и лежат на отрезке $[0, 2]$. 3) $F(0) > 0$, $F(2) < 0$. 4) $F(k)$ имеет не менее двух корней на отрезке $[0, 1]$.

Корни функции $F(k)$ инвариантны относительно ортогональных преобразований в касательном и нормальном пространствах и относительно гомотетии в объемлющем пространстве. Пусть A и B непропорциональны. Выберем ось x_4 так, чтобы матрица A была вырождена, а базис (x_1, x_2, x_3) в $T_0 F^3$ — так, чтобы A была диагональна. Тогда гомотетией с соответствующим коэффициентом формы A и B приводятся к каноническому виду:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad B = (b_{ij})_{i,j=1}^3. \quad (6)$$

При этом

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda B) = & -\lambda b_{11}a + \lambda^2(a(b_{11}b_{22} - b_{12}^2) + \\ & + (b_{11}b_{33} - b_{13}^2)) - \lambda^3 \det B. \end{aligned} \quad (7)$$

Пользуясь (5) и (6), рассмотрим $N - g$. Поскольку $F(1) = \det(N - g)$, это позволит нам судить о расположении корней $F(k)$ на $[0, 2]$.

Имеем

$$\begin{aligned} (A^\nabla + B^\nabla)^2 - B^\nabla \cdot B = & A^\nabla \cdot A + A^\nabla \cdot B^\nabla + (A^\nabla \cdot B^\nabla)^* = \\ = & \begin{pmatrix} a^2 + 2a(b_{22} - b_{33} - b_{23}) & a(b_{23}b_{13} - b_{12}b_{33}) & a(b_{12}b_{23} - b_{13}b_{22}) \\ a(b_{23}b_{13} - b_{12}b_{33}) & 0 & 0 \\ a(b_{12}b_{23} - b_{13}b_{22}) & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (8.1)$$

$$(AB - BA)^\nabla = \begin{pmatrix} b_{23}(a-1)^2 & ab_{13}b_{23}(1-a) & b_{12}b_{23}(a-1) \\ ab_{13}b_{23}(1-a) & a^2b_{13}^2 & -ab_{12}b_{13} \\ b_{12}b_{23}(a-1) & -ab_{12}b_{13} & b_{12}^2 \end{pmatrix}. \quad (8.2)$$

Найдем g . Из (6) следует, что

$$\begin{aligned} (A^2 + B^2)^\nabla &= \begin{pmatrix} b_1^2 & \langle b_1, b_2 \rangle & \langle b_1, b_3 \rangle \\ \langle b_1, b_2 \rangle & b_2^2 & \langle b_2, b_3 \rangle \\ \langle b_1, b_3 \rangle & \langle b_2, b_3 \rangle & b_3^2 \end{pmatrix} + \\ &+ \begin{pmatrix} b_3^2 + a^2b_2^2 + a^2 - a^2\langle b_1, b_2 \rangle - \langle b_1, b_3 \rangle \\ -a^2\langle b_1, b_2 \rangle & a^2b_1^2 & 0 \\ -\langle b_1, b_3 \rangle & 0 & b_1^2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (8.3)$$

Первая из этих матриц есть $B^{2\nabla}$. По лемме 6 она равна $B^{\nabla 2}$. В итоге

$$N - g =$$

$$\left| \begin{array}{c|c|c} 2ab_{13}b_{33} - 4ab_{23}^2 - a^2b_{12}^2 - a^2b_{22}^2 - b_{13}^2 - b_{33}^2 & 2ab_{13}b_{23} - ab_{12}b_{33} + a^2b_{11}b_{12} + a^2b_{12}b_{22} & 2ab_{12} + b_{23} - ab_{13}b_{22} + b_{11}b_{13} + b_{13}b_{33} \\ \hline 2ab_{13}b_{23} - ab_{12}b_{33} + a^2b_{11}b_{12} + a^2b_{12}b_{22} & -a^2b_{11}^2 - a^2b_{12}^2 & -ab_{12}b_{13} \\ \hline 2ab_{12}b_{23} - ab_{13}b_{22} + b_{11}b_{13} + b_{13}b_{33} & -ab_{12}b_{13} & -b_{11}^2 - b_{13}^2 \end{array} \right| \quad (8)$$

Рассмотрим два частных случая:

1) В пучке $A - \lambda B$ есть форма ранга 1. Будем считать, что ось при приведении к виду (6) выбиралась так, чтобы $\text{rg } A = 1$. Тогда $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. В плоскости (x_1x_3) выберем базис так, чтобы $b_{13} = 0$,

при этом A не изменится. $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 \\ b_{12} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & b_{23} & b_{33} \end{pmatrix}$. Положим $\varepsilon = k-1$ и вычислим с помощью (8) $\det(N - kg)$. Он равен:

$$\begin{aligned} \det((N - g) - eg) &= -\varepsilon [b_{11}^2b_{33}^2(b_{11}^2b_{23}^2 + b_{11}^2b_{33}^2 + b_{12}^2b_{33}^2) + \\ &+ \varepsilon d((b_{11}^2 + b_{12}^2)b_{33}^2 + (b_{23}^2 + b_{33}^2)b_{11}^2) + \varepsilon^2d^2], \end{aligned}$$

где $\det(A^2 + B^2) > 0$.

Дискриминант квадратного трехчлена в скобках равен $\varepsilon^4(b_{11}^2b_{33}^2 + b_{12}^2b_{33}^2 + b_{23}^2b_{11}^2)^2$. Отсюда его корни $\varepsilon_1 = -\frac{b_{11}^2b_{33}^2}{d},$

$\varepsilon_2 = -\frac{b_{11}^2b_{33}^2 + b_{12}^2b_{33}^2 + b_{23}^2b_{11}^2}{d}$. Поскольку $\varepsilon_1, \varepsilon_2 < 0$, то $k_1, k_2 < 1$.

Сверхдопущение, что $k_1 = 1$. Рассматривая случаи $\varepsilon_1 = 0, \varepsilon_2 = 0$ и учитывая, что b_{11}, b_{12} и b_{23}, b_{33} не могут одновременно равняться нулю,

так как иначе отличен от нуля внешний нуль-индекс, получаем, что равенство единице k_1 или k_2 возможно лишь в следующих случаях:

- а) $b_{11} = b_{33} = 0, k_1 = k_2 = k_3 = 1;$
- б) $b_{11} = 0, b_{33} \neq 0$ или, наоборот, $k_1 = k_3 = 1, 0 < k_2 < 1;$
- в) $b_{11}, b_{33} \neq 0, k_3 = 1, 0 < k_1, k_2 < 1.$

2) Рассмотрим еще случай, когда $b_{11} = 0$ в каноническом виде

(6) форм A и B . Посчитаем, используя (8), $F(1) = \det(N - g)$. Если обозначить $\alpha = [N - g]_{12}$, $\beta = [N - g]_{13}$, то $\det(N - g) = (ab_{12}\beta - b_{13}\alpha)^2 \geq 0$. Если имеет место строгое неравенство, т. е. $F(1) > 0$, то по лемме 8 получаем $0 < k_1, k_2 < 1, k_3 = 1$. Если же $F(1) = 0$, то, вычисляя $F'(1)$, убеждаемся, что $F'(1) < 0$, и по лемме 8 будем иметь $0 < k_1, k_2 < 1, k_3 = 1$.

3. Доказательство теоремы. Используя доказанные выше леммы, установим приведенные в теореме границы главных кривизн Риччи многообразия Грассмана G (3.5) вдоль касательного пространства к грассманову образу $\Gamma(F^3)$ регулярной поверхности F^3 в зависимости от элементарных делителей пучка $A - \lambda B$ вторых квадратичных форм в рассматриваемой точке.

Габ. По лемме 2 $0 < k_1, k_2 < 1$. Покажем, что в пределах каждого из двух аффинных классов I и I б k_3 может меняться в интервале $(0, 2)$.

Ia. Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & M & 0 \\ M & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4M & 0 & 1 \\ 0 & -M & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $M > 1$. $\det(A - \lambda B) = -\lambda^3 M + 2\lambda M = 1$. Этот кубический трехчлен: при $\lambda \rightarrow \pm\infty$ стремится к $\pm\infty$; при $\lambda = 0$ равен -1 ; при $\lambda = 1$ равен $M - 1 > 0$. Значит, $\det(A - \lambda B)$ имеет три различных вещественных корня.

В нашем случае ось x является асимптотическим направлением поверхности. Поэтому пучок $A - \lambda B$ действительно характеризует аффинный класс I а.

Вычисляем секционную кривизну $G(3, 5)$ по площадке $\Gamma_*(x_2, x_3)$:

$$T^1 = \begin{pmatrix} M & 0 & 1 \\ 0 & -M & 0 \end{pmatrix}, T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда при $M \rightarrow +\infty$, $k_\sigma = \frac{8M^2 + 1}{4M^2 + 2} \rightarrow 2$, значит, и $k_3 \rightarrow 2$.

Iб. Положим

$$A = \begin{pmatrix} M^6 + 1 & M^3 & 0 \\ M^3 & M^2 + 1 & -M \\ 0 & -M & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -M^9 & 0 & M \\ 0 & M^3 & 0 \\ M & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M > 0,$$

$$\det(A - \lambda B) = \lambda^3 M^5 - \lambda^2 (M^{12} + M^4 + M^2) + \lambda (2M^5 - M^3) + 1.$$

Этот кубический трехчлен: при $\lambda \rightarrow \pm\infty$ стремится к $\pm\infty$; при $\lambda = 0$ равен 1, при $\lambda = 1$ отрицателен, если взять M достаточно большим. Таким образом, имеем три вещественных корня. Поскольку A положительно определена, асимптотических направлений поверх-

ность не имеет, т. е. пучок $A - \lambda B$ характеризует аффинный класс Iб. Вычисляем секционную кривизну $G(3,5)$ по площадке $\Gamma_a(x_2, x_3)$:

$$T^1 = \begin{pmatrix} M^3 & M^2 + 1 & -M \\ 0 & M^3 & 0 \end{pmatrix}, \quad T^2 = \begin{pmatrix} 0 & -M & 1 \\ M & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

При $M \rightarrow +\infty$ $k_\sigma = \frac{8M^8 + 2M^6 + 1}{4M^8 + M^6 (\dots) + (\dots)} \rightarrow 2$, значит, и $k_3 \rightarrow 2$.

Отметим, что в силу леммы 5 k_3 не может равняться 2. С другой стороны, если обе матрицы A и B взять диагональными, то получим $0 < k_1, k_2, k_3 \ll 1$ (это следует из работы [4]).

На б. В пучке $A - \lambda B$ есть форма ранга 1. Приводя формы A и B к каноническому виду (6) и используя формулу (7) для $\det(A - \lambda B)$, получим, что коэффициенты при λ^0 и λ^1 равны 0, коэффициент при λ^2 равен $b_{11}b_{33} \neq 0$, так как элементарные делители пучка не все совпадают. Тогда в соответствии с вышеизложенным имеем $0 < k_1, k_2 < 1, k_3 = 1$. Кривизна $k_3 = 1$ достигается на плоскости, натянутой на векторы $T^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, которые расположены в трехмерной плоскости векторов $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$.

Покажем, что эта плоскость является касательной к вполне геодезическому многообразию $S^3 \subset G(3,5)$, изометричному единичной трехмерной сфере.

Действительно, грассманово многообразие $G(3,5) = SO(5) / SO(3) \times SO(2)$ и касательное пространство к $G(3,5)$ представляется кососимметрическими матрицами вида

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \end{array} \left| \begin{array}{cc} -t_{11} & -t_{21} \\ -t_{12} & -t_{22} \\ -t_{13} & -t_{23} \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right..$$

Подмногообразие симметрического пространства G/H является вполне геодезическим тогда и только тогда, когда касательное пространство m удовлетворяет следующему условию:

$$[[m, m], m] \subset m, \quad (9)$$

где $[\cdot, \cdot]$ — скобка Ли в алгебре Ли группы G [9]. Для грассманова многообразия скобка Ли есть коммутатор кососимметрических матриц.

На непосредственного подсчета видно, что для подпространства

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -c_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -c_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

выполняется условие (9). Это подпространство является касательным пространством к $G(3,4) = S^3$.

III а.б. В пучке есть нулевая форма. Тогда по формуле (4) $k_\sigma = 1$ и $k_1 = k_2 = k_3 = 1$.

IV. Пользуясь леммами 16), 5 и 2, получим, что $0 \leq k_1, k_2 \leq 1$, $1 < k_3 \leq 2$.

V а. б. Пучок $A - \lambda B$ имеет двукратный корень, но в нем нет матриц ранга 1. Приводя формы к виду (6) и пользуясь (7), получим $ab_{11} = 0$, $a(b_{11}b_{22} - b_{12}^2) + (b_{13}b_{33} - b_{13}^2) \neq 0$.

Отсюда $b_{11} = 0$. В соответствии с вышесказанным и по лемме 5 имеем $0 \leq k_1, k_2 < 1$, $1 \leq k_3 < 2$.

VI. Пучок $A - \lambda B$ имеет трехкратный корень и, кроме того, содержит форму ранга 1. В соответствии с (7) $\{b_{11}b_{33} = 0\}$. Без $\{\det B \neq 0\}$

нарушения общности можно считать, что $b_{11} = 0$, $b_{33} \neq 0$. Тогда, учитывая рассмотренный выше частный случай I б, когда в пучке $A - \lambda B$ есть матрица ранга 1, получим, что $0 < k_1 < 1$, $k_2 = k_3 = 1$.

VII. Пучок $A - \lambda B$ имеет трехкратный корень, но в нем нет матрицы ранга 1. По формуле (7)

$$\begin{cases} ab_{11} = 0 \\ a(b_{11}b_{22} - b_{12}^2) + (b_{11}b_{33} - b_{13}^2) = 0; \\ \det B \neq 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения имеем $b_{11} = 0$, тогда из второго $a = -c^2$, $b_{13} = cb_{12}$. При этом $\det B = -b_{12}^2(b_{33} - 2cb_{23} + c^2b_{22})$. С другой стороны, условие $F(1) = 0$ в частном случае 2) $b_{11} = 0$ записывается в виде: $a(b_{12}(b_{12}b_{23} - b_{13}b_{22})) - b_{13}(b_{13}b_{23} - b_{12}b_{33}) = 0$. Подставляя $a = -c^2$, $b_{13} = cb_{12}$, получим $cb_{12}^2(-cb_{23} + c^2b_{22} - cb_{23} + b_{33}) = -c\det B \neq 0$. Значит, в данном случае имеем $0 \leq k_1, k_2 < 1 < k_3 < 2$.

VIII. Отличие этого случая от предыдущего в том, что $\det B = 0$. Отсюда и $F(1) = 0$. Поэтому $0 \leq k_1, k_2 < 1$, $k_3 = 1$. Кривизна $k_3 = 1$ достигается на плоскости, натянутой на векторы $T^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $T^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Рассуждая, как и в случае II, получим, что эта плоскость касается вполне геодезической сферы $S^2 \subset G(2, 4)$.

Касательные пространства к сфере S^3 в случае II и к сфере S^1 пересекаются по одномерному направлению. Поэтому площадки, на которых достигается $k_3 = 1$ в случаях II и VIII, различны.

Теорема доказана.

Список литературы: 1. Leichweiss K. Zur Riemannschen geometrie in Grassmannschen Mannigfaltigkeiten // Math. A. 1961. 78 S. 334—366. 2. Hoffman D., Osserman R. The geometry of the generalized Gauss map // Memoirs AMS. 1980. 28, № 236, P. 20—30. 2. Wong Y. C. Differential geometry of the Grassmann manifolds // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1967. 57. P. 589—594. 4. Аминов Ю. А. Изометрические погружения областей n -мерного пространства Лобачевского в $(2n - 1)$ -мерное евклидово пространство // Мат. сб. 1980. 3, № 3. С. 402—433. 5. Аминов Ю. А. О грависмановом образе двумерной поверхности

в четырехмерном евклидовом пространстве // Укр. геометр. сб. 1980. Вып. 28. С. 3—16. 6. Аминов Ю. А. Проблемы вложений: геометрические и топологические аспекты // Пробл. геометр. 13 (Итоги науки и техники. ВИНТИИ АН СССР). М., 1982. С. 119—156. 7. Борисенко А. А., Николаевский Ю. А. Классификация точек многомерных поверхностей: Тез. Всесоюз. конф. по геометрии, «в целом». Новосибирск, 1987. С. 16. 8. Wong Y. C. Sectional curvatures of Grassmann manifolds // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1968. 60, N 1, P. 75 — 79. 9. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. М., 1981. Т. 2. 416 с.

Поступила в редакцию 02.09.87

УДК 514

В. П. ГОРОХ

О МИНИМАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ ПОСТОЯННОЙ ГАУССОВОЙ КРИВИЗНЫ В ПСЕВДОРИМАНОВОЙ СФЕРЕ

В ряде работ рассматривался вопрос о нахождении двумерных минимальных поверхностей постоянной гауссовой кривизны в римановых пространствах постоянной кривизны. В работе [1] Пинл доказал, что в n -мерном евклидовом пространстве не существует двумерных минимальных поверхностей постоянной ненулевой гауссовой кривизны. Ю. Г. Лумисте [2] нашел все двумерные минимальные поверхности постоянной гауссовой кривизны в эллиптических и гиперболических пространствах размерностей 3, 4, 5. Вопросы классификации двумерных минимальных поверхностей постоянной кривизны посвящены также работы [3, 4].

Аналогичный вопрос можно рассматривать и для поверхностей в псевдоримановых пространствах постоянной кривизны. В работе [7] доказано, что не существует двумерных минимальных поверхностей постоянной ненулевой гауссовой кривизны в псевдоевклидовом пространстве $E^{4,1}$. В настоящей работе находятся двумерные минимальные поверхности постоянной гауссовой кривизны в четырехмерной псевдоримановой сфере (пространство де Ситтера) положительной кривизны, сигнатура которой равна (3, 1).

Пусть $E^{n,1}$ — псевдоевклидово пространство с квадратичной формой $dx_1^2 + \dots + dx_{n-k}^2 - dx_{n-k+1}^2 - \dots - dx_n^2 = \frac{1}{K_0}$. Через $S^{n,k}(K_0)$ будем обозначать n -мерную псевдориманову сферу кривизны $K_0 > 0$ в псевдоевклидовом пространстве $E^{n+1,1}$, задаваемую уравнением

$$x_1^2 + \dots + x_{n-k+1}^2 - x_{n-k+2}^2 - \dots - x_n^2 = \frac{1}{K_0}.$$

Под двумерной поверхностью в $S^{n,k}(K_0)$ понимается двумерное дифференцируемое подмногообразие класса C^4 , на котором индуцируется невырожденная метрика.

Приведем примеры двумерных минимальных поверхностей постоянной гауссовой кривизны в $S^{4,1}(K_0)$.

1. Тор Клиффорда T_1 . Поверхность T_1 зададим радиусом-вектором в псевдоевклидовом пространстве $E^{5,1}$:

$$\mathbf{r}(u, v) = \frac{1}{\sqrt{2K_0}} (\cos u, \sin u, \cos v, \sin v, 0).$$

Поверхность T_1 лежит в евклидовой сфере $S^3(K_0) \subset S^{4,1}(K_0)$. Гауссова кривизна поверхности T_1 равна нулю и она является минимальным подмногообразием в $S^{4,1}(K_0)$.

2. Рассмотрим поверхность T_2 , заданную радиусом-вектором в $E^{5,1}$:

$$\mathbf{r}(u, v) = \frac{1}{\sqrt{2K_0}} (0, \cos u, \sin u, \operatorname{ch} v, \operatorname{sh} v).$$

Поверхность T_2 лежит в псевдоримановой сфере $S^{3,1}(K_0) \subset S^{4,1}(K_0)$. T_2 — минимальное подмногообразие в $S^{4,1}(K_0)$. Гауссова кривизна поверхности T_2 равна нулю. По аналогии с тором Клиффорда поверхность T_2 назовем псевдоримановым тором Клиффорда.

Теорема. Пусть V^2 — двумерная минимальная поверхность в $S^{4,1}(K_0)$. Пусть гауссова кривизна K поверхности V^2 постоянна и отлична от K_0 . Тогда $K = 0$ и поверхность V^2 с точностью до движения в $S^{4,1}(K_0)$ является либо тором Клиффорда T_1 , либо псевдоримановым тором Клиффорда T_2 .

Для доказательства теоремы рассмотрим два случая.

I. V^2 — пространственнонаподобная минимальная поверхность в $S^{4,1}(K_0)$.

По аналогии с [5, с. 252] введем на поверхности ортогональные координаты, связанные с индикаторисой нормальной кривизны. Пусть N_x^2 — нормальное пространство поверхности V^2 в произвольной точке x . Каждому направлению τ в касательном пространстве поверхности V^2 в точке x в нормальном пространстве N_x^2 соответствует вектор нормальной кривизны поверхности в данном направлении $\mathbf{k}(\tau)$. Когда τ пробегает всевозможные направления в касательном пространстве, конец вектора $\mathbf{k}(\tau)$, отложенного от точки x , описывает в N_x^2 замкнутую кривую — индикаторису нормальной кривизны. В силу минимальности поверхности V^2 индикаториса нормальной кривизны симметрична относительно точки x . Функция $\mathbf{k}^2(\tau)$ достигает максимума при некоторых направлениях τ_1 и τ_2 и минимума — при направлениях τ'_1 и τ'_2 . При этом $\mathbf{k}(\tau_1) = -\mathbf{k}(\tau_2)$ и направления τ_1 и τ_2 взаимно ортогональны. Возьмем теперь на поверхности V^2 координатные линии $v = \text{const}$ и $u = \text{const}$, имеющие в каждой точке x соответственно направления τ_1 и τ_2 . Поверхность T_2 лежит в псевдоримановой сфере $S^{3,1}(K_0) \subset S^{4,1}(K_0)$. Векторы $\mathbf{k}(\tau_1)$ и $\mathbf{k}(\tau'_1)$ взаимно ортогональны. Направим нормали \mathbf{n}_1 и \mathbf{n}_2 к поверхности V^2 по векторам $\mathbf{k}(\tau_1)$ и $\mathbf{k}(\tau'_1)$ соответственно. Пусть $\mathbf{k}^2(\tau_1) = a^2$, $\mathbf{k}^2(\tau'_1) = -b^2$. Тогда первая квадратичная форма поверхности V^2 записывается в виде $ds^2 = Edu^2 + Gdv^2$, а вторые квадратичные формы равны: $\Pi(\mathbf{n}_1) = aE du^2 - aGdv^2$, $\Pi(\mathbf{n}_2) = -b\sqrt{EG}du dv$. Для гауссовой кривизны поверхности V^2 спра-

недлива формула: $K = b^2 - a^2 + K_0$. Обозначим через v_1 и v_2 коэффициенты кручения: $v_1 = (n_1, n_{2u})$, $v_2 = (n_1, n_{2v})$. Тогда система уравнений Гаусса — Кодашчи — Риччи [6, с. 254] для поверхности V запишется в виде:

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left[\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u \right], \quad (1)$$

$$(aE)_v = b\sqrt{EG}v_1, \quad (2)$$

$$(bE)_u = -a\sqrt{EG}v_1, \quad (3)$$

$$(aG)_u = -b\sqrt{EG}v_2, \quad (4)$$

$$(bG)_v = a\sqrt{EG}v_2, \quad (5)$$

$$(v_1)_v - (v_2)_u = 2ab\sqrt{EG}. \quad (6)$$

Обозначим через P разность $K - K_0$. Предположим, что $P = \text{const} \neq 0$. Так как $P = b^2 - a^2$, то $a^2 + b^2 \neq 0$.

Складывая уравнение (2), умноженное на a , с уравнением (3), умноженным на b , получим $(aa_v + bb_v)E + (a^2 + b^2)E_v = 0$. Поэтому $\ln \sqrt{a^2 + b^2}_v = 0$. Следовательно, $E = \frac{\Phi_1(u)}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Аналогично из уравнений (4) и (5) находим: $G = \frac{\Phi_2(v)}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Переформулировкой параметров u и v можно добиться, чтобы $E = G = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Предположим сначала, что $a \neq 0$, $b \neq 0$. Тогда из (1) и (2) находим

$$v_1 = \frac{Pa_v}{(P + 2a^2)\sqrt{P + a^2}}, \quad v_2 = -\frac{Pa_u}{(P + 2a^2)\sqrt{P + a^2}}.$$

Подставив v_1 и v_2 (6), получим

$$\left(\frac{Pa_v}{(P + 2a^2)\sqrt{P + a^2}} \right)_v + \left(\frac{Pa_u}{(P + 2a^2)\sqrt{P + a^2}} \right)_u = \frac{2a\sqrt{P + a^2}}{\sqrt{P + 2a^2}}. \quad (7)$$

Из уравнения (1) находим

$$\left(\frac{aa_u}{P + 2a^2} \right)_u + \left(\frac{aa_v}{P + 2a^2} \right)_v = \frac{K}{\sqrt{P + 2a^2}}. \quad (8)$$

Используя (8), из уравнения (7) находим

$$a_u^2 + a_v^2 = -\frac{(P + a^2)(2a^4 + 2Pa^2 - PK)}{P\sqrt{P + 2a^2}} = 2A.$$

Уравнение (8) запишем в виде:

$$a_{uu} + a_{vv} = \frac{K(P + 2a^2)^{3/2} - 2(P - 2a^2)A}{a(P + 2a^2)} = B.$$

Таким образом, функция a удовлетворяет системе двух уравнений:

$$a_u^2 + a_v^2 = 2A, \quad (9)$$

$$a_{uu} + a_{vv} = B, \quad (10)$$

Рассмотрим два случая. Пусть $A \neq 0$. Продифференцируем уравнение (9) по u и по v :

$$a_u a_{uu} + a_v a_{uv} = A' a_u, \quad (11)$$

$$a_u a_{uv} + a_v a_{vv} = A' a_v. \quad (12)$$

Вычтем из уравнения (11), умноженного на a_u , уравнение (12), умноженное на a_v . Подставив в полученное соотношение a_u^2 и a_{vv} из (9) и (10), найдем $2Aa_{uu} + (B - 2A')a_u^2 + 2A(A' - B) = 0$. Складывая уравнение (11), умноженное на a_v с уравнением (13), умноженным на a_u , и учитывая (9) и (10), получим

$$2Aa_{uv} = (2A' - B)a_u a_v. \quad (14)$$

Дифференцируя уравнение (10) по u и по v , получим

$$a_{uuu} + a_{uuv} = B' a_u, \quad (15)$$

$$a_{uuv} + a_{vvv} = B' a_v. \quad (16)$$

Продифференцировав уравнение (11) по u , а уравнение (12) — по v , сложим полученные соотношения:

$$\begin{aligned} & a_{uu}^2 + 2a_{uu}^2 + a_{vv}^2 + (a_{uuu} + a_{uuv})a_u + \\ & + (a_{uuv} + a_{vvv})a_v = A''(a_u^2 + a_v^2) + A'(a_{uu} + a_{vv}). \end{aligned} \quad (17)$$

Учитывая (9), (10), (15) и (16), из (17) находим

$$2a_{uu}^2 - 2Ba_{uu} + 2a_{uv}^2 = 2A(A'' - B') + B(A' - B). \quad (18)$$

Подставляя a_{uu} из (13) и a_{uv} из (14) в (18) и учитывая (10), получим

$$2A(A'' - B') + (2A' - B)(B - A') = 0. \quad (19)$$

Подставим в (19) выражения для функций A , B и их производных. После преобразований получим

$$\begin{aligned} & 8(8P + 19K)a^{10} + 24P(8P + 19K)a^8 + 2P(104P^2 + \\ & + 255PK + 10K^2)a^6 + 4P^2(24P^2 + 65PK + 10K^2)a^4 + P^3(16P^2 + \\ & + 58PK + 25K^2)a^2 + P^4K(4P + 5K) = 0. \end{aligned}$$

Заметим, что коэффициенты при степенях a не обращаются одновременно в ноль. Следовательно, a является корнем алгебраического уравнения с постоянными коэффициентами. Поэтому $a = \text{const}$, что невозможно в силу предположения $2A = a_u^2 + a_v^2 \neq 0$.

Пусть теперь $A = 0$ в некоторой области D . Тогда $a_u = 0$, $a_v = 0$. Следовательно, $a = \text{const}$. Но $K - K_0 = b^2 - a^2$, поэтому $b = \text{const}$. Тогда $E = G = \text{const}$. Следовательно, $K = 0$. Из условия $A = 0$ получим $a^2 = K_0$. Тогда $b = 0$, что противоречит предположению.

2. Пусть $b = 0$ в некоторой области D . Первая квадратичная форма поверхности V^2 примет вид: $ds^2 = \frac{1}{V K_0 - K} (du^2 + dv^2)$. Поэтому $K = 0$. Следовательно, $E = G = \frac{1}{V K_0}$, $a = \sqrt{V K_0}$. Тогда вторые квадратичные формы поверхности V^2 равны: $\Pi^1 = du^2 - dv^2$, $\Pi^2 = 0$. Из уравнений Кодаци получим: $v_1 = 0$, $v_2 = 0$. Тогда поверхность V^2 представляет собой тор Клиффорда T_1 , лежащий в евклидовой сфере $S^3(K_0) \subset S^{4,1}(K_0)$.

II. V^2 — времениподобная минимальная поверхность в $S^{4,1}(K_0)$. Пусть (\tilde{u}, \tilde{v}) — изотермические координаты на поверхности V^2 . Тогда в координатах $u = \tilde{u} + \tilde{v}$, $v = \tilde{u} - \tilde{v}$ первая квадратичная форма поверхности V^2 примет вид: $ds^2 = 2F du dv$. Пусть n_1, n_2 — ортормированный базис нормалей к поверхности V^2 , а L_{ij}^{σ} ($i, j, \sigma = 1, 2$) — коэффициенты вторых квадратичных форм поверхности V^2 относительно нормалей n_1 и n_2 . Из условия минимальности поверхности V^2 следует: $L_{12}^1 = 0$, $L_{12}^2 = 0$. Тогда система уравнений Гаусса — Кодаци — Риччи для поверхности V^2 запишется в виде:

$$K = \frac{F_u F_v - FF_{uv}}{F^3}, \quad (20)$$

$$(L_{11}^1)_v = v_2 L_{11}^2, \quad (21)$$

$$(L_{22}^1)_u = v_1 L_{22}^2, \quad (22)$$

$$(L_{11}^2)_v = -v_2 L_{11}^1, \quad (23)$$

$$(L_{22}^2)_u = -v_1 L_{22}^1, \quad (24)$$

$$(v_1)_v - (v_2)_u + \frac{1}{F} (L_{11}^1 L_{22}^2 - L_{22}^1 L_{11}^2) = 0. \quad (25)$$

Здесь K — гауссова кривизна поверхности V^2 ; v_1, v_2 — коэффициенты кручения: $v_1 = (n_1, n_{2u})$, $v_2 = (n_1, n_{2v})$.

Сложив уравнение (21), умноженное на L_{11}^1 , с уравнением (23), умноженным на L_{11}^2 , получим $(L_{11}^1)_v L_{11}^1 + (L_{11}^2)_v L_{11}^2 = 0$. Следовательно, $(L_{11}^1)^2 + (L_{11}^2)^2 = \Phi_1(u)$. Из уравнений (22) и (24) аналогичным образом получим $(L_{22}^1)^2 + (L_{22}^2)^2 = \Phi_2(v)$.

Для поверхности V^2 имеет место разложение Гаусса [6, с. 254]:

$$\mathbf{r}_{,11} = -L_{11}^1 n_1 - L_{11}^2 n_2, \quad (26)$$

$$\mathbf{r}_{,22} = -L_{22}^1 n_1 - L_{22}^2 n_2, \quad (27)$$

$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ — радиус-вектор поверхности V^2 , а запятая с индексом 1 и 2 обозначает ковариантную производную по отношению к метрическому тензору поверхности V^2 по u и v соответственно.

Из (26) и (27) следует $\mathbf{r}_{,11}^2 = (L_{11}^1)^2 + (L_{11}^2)^2$, $\mathbf{r}_{,22}^2 = (L_{22}^1)^2 + (L_{22}^2)^2$. Используя условий $\mathbf{r}_{,11}^2 = 0$, $\mathbf{r}_{,22}^2 = 0$ получим $\mathbf{r}_{,11}^2 = \mathbf{r}_{uu}^2$, $\mathbf{r}_{,22}^2 = \mathbf{r}_{vv}^2$. Следовательно, $\mathbf{r}_{uu}^2 = \Phi_1(u)$, $\mathbf{r}_{vv}^2 = \Phi_2(v)$.

Гауссова кривизна поверхности V^2 находится по формуле

$$K = -\frac{L_{11}^1 L_{22}^1 + L_{11}^2 L_{22}^2}{F^2} + K_0. \quad (28)$$

По условию $P = K - K_0 = \text{const} \neq 0$. Следовательно, $(L_{11}^1)^2 + (L_{11}^2)^2 \neq 0$, $(L_{22}^1)^2 + (L_{22}^2)^2 \neq 0$. Поэтому $r_{uu}^2 \neq 0$, $r_{uv}^2 \neq 0$. Следовательно, можно выбрать параметры u и v так, чтобы $\Phi_1(u) = 1$, $\Phi_2(v) = 1$. Тогда $(L_{11}^1)^2 + (L_{11}^2)^2 = 1$, $(L_{22}^1)^2 + (L_{22}^2)^2 = 1$. Направим нормаль n_1 по вектору r_{11} . Тогда $L_{11}^1 = 0$. Следовательно, $(L_{11}^1)^2 = 1$. Не теряя общности, можно считать, что $L_{11}^1 = 1$. Положим $L_{22}^1 = \cos \varphi$, $L_{22}^2 = \sin \varphi$. Из (28) получим $P = -\frac{\cos \varphi}{F^2}$. Следовательно, $F = e \left(-\frac{\cos \varphi}{P} \right)^{1/2}$, где e равно 1 или -1 . Так как $P \neq 0$, то $\cos \varphi \neq 0$. Тогда из (24) получим $v_1 = -\varphi_u$. Из уравнения (23) следует: $v_2 = 0$. Из (25) теперь находим

$$\varphi_{uv} = e \sin \varphi \left(-\frac{P}{\cos \varphi} \right)^{1/2}. \quad (29)$$

Подставив выражение для F в (11), получим

$$K = -\frac{e}{2P} \left(-\frac{P}{\cos \varphi} \right)^{3/2} \left(\frac{\varphi_u \varphi_v}{\cos \varphi} + \varphi_{uv} \sin \varphi \right). \quad (30)$$

Из (30) с учетом (29) следует

$$\varphi_u \varphi_v = e ((2K - P) \cos^2 \varphi + P) \left(-\frac{\cos \varphi}{P} \right)^{1/2}. \quad (31)$$

Пусть сначала $(2K - P) \cos^2 \varphi + P \neq 0$. Тогда $\varphi_u \varphi_v \neq 0$. Из (29) и (31) получим

$$\frac{\varphi_{uv}}{\varphi_u \varphi_v} = -\frac{P \operatorname{tg} \varphi}{(2K - P) \cos^2 \varphi + P}. \quad (32)$$

Уравнение (32) запишем в виде:

$$(\ln |\varphi_u|)_v = \left(\ln \frac{|\cos \varphi|}{((2K - P) \cos^2 \varphi + P)^{1/2}} \right)_v.$$

Поэтому

$$\varphi_u = \Phi(u) \frac{\cos \varphi}{((2K - P) \cos^2 \varphi + P)^{1/2}}. \quad (33)$$

Используя (33), из (31) найдем

$$\varphi_v = e \left(-\frac{\cos \varphi}{P} \right)^{1/2} \frac{((2K - P) \cos^2 \varphi + P)^{1/2}}{\Phi(u) \cos \varphi}. \quad (34)$$

Продифференцировав (34) по u и учитывая (33), получим

$$\Psi_{uv} = \begin{cases} \frac{\varepsilon}{2} \left(-\frac{\cos \varphi}{P} \right)^{1/2} \left[-\frac{2\Phi'(u)}{\Phi^2(u)} \frac{(2K-P)\cos^2 \varphi + P)^{3/2}}{\cos \varphi} - (5(2K-P)\cos^2 \varphi - P) \operatorname{tg} \varphi \right] \\ \text{при } (2K-P)\cos^2 \varphi + P > 0, \\ -\frac{\varepsilon}{2} \left(-\frac{\cos \varphi}{P} \right)^{1/2} \left[-\frac{2\Phi'(u)}{\Phi^2(u)} \cdot \frac{((P-2K)\cos^2 \varphi - P)^{3/2}}{\cos \varphi} + (5(2K-P)\cos^2 \varphi - P) \operatorname{tg} \varphi \right] \\ \text{при } (2K-P)\cos^2 \varphi + P < 0. \end{cases} \quad (35)$$

Из (30) и (35) находим

$$\frac{\sin \varphi (5(2K-P)\cos^2 \varphi - 3P)}{((2K-P)\cos^2 \varphi + P)((2K-P)\cos^2 \varphi + P)^{1/2}} = -\frac{2\Phi'(u)}{\Phi^2(u)}. \quad (36)$$

Так как $\Phi_u \neq 0$, то из (36) следует

$$\frac{d}{d\varphi} \frac{\sin \varphi (5(2K-P)\cos^2 \varphi - 3P)}{((2K-P)\cos^2 \varphi + P)^{3/2}} = 0. \quad (37)$$

Тогда из (37) получим $(2K-P)(5K+8P)\cos^2 \varphi = P(19K-8P)$. Следовательно, $\cos \varphi = \text{const}$. Но это противоречит условию $\Phi_u \Psi_v \neq 0$.

Пусть теперь $(2K-P)\cos^2 \varphi + P = 0$ в некоторой области D . По условию $P \neq 0$, следовательно, $2K-P \neq 0$. Тогда $\cos^2 \varphi =$

$= \frac{P}{2K} = \text{const}$. Тогда $F = \text{const}$. Но $ds^2 = 2F du dv$, следова-

тельно, $K = 0$. Тогда $\cos^2 \varphi = 1$. Поэтому $\sin \varphi = 0$. Так как $K_0 =$

$= \frac{P}{F}$, то $\cos \varphi = 1$. Тогда первая квадратичная форма поверхности за-

нимается в виде $ds^2 = \frac{\varepsilon}{V K_0} du dv$, вторые квадратичные формы равны:

$\Pi^1 = du^2 + dv^2$, $\Pi^2 = 0$, а коэффициенты кручения v_1 и v_2 равны нулю. Значит, поверхность V^2 является псевдоримановым тором Клиффорда T_* .

Замечания. 1. Известно, что в евклидовой сфере S^4 радиуса 1 существует минимальная поверхность, гомеоморфная сфере, и имеющая постоянную гауссову кривизну $K = 1/3$ (поверхность Веронезе). Из доказанной теоремы следует, что в псевдоримановой сфере $S^{4,2}(1)$ не существует аналога поверхности Веронезе. Но в псевдоримановой сфере $S^{4,2}(1)$ такую поверхность можно построить. Она задается в псевдоевклидовом пространстве $E^{6,2}$ радиусом-век-

тиком

$$F(u, v, w) = \left(\sqrt{3}uv, \frac{\sqrt{3}}{2}(u^2 - v^2), \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + 2w^2), \sqrt{3}uw, \sqrt{3}vw \right)$$

под условием $u^2 + v^2 + w^2 = 1$.

Можно проверить, что эта поверхность является минимальным подмногообразием в псевдоримановой сфере $S^{4,2}(1)$. Ее гауссова кривизна равна $1/3$.

2. Минимальные поверхности постоянной гауссовой кривизны $K = K_0$ будут указаны в следующей работе.

Список литературы: 1. *Pinl M. Minimalflächen fester Gaußschen Krümmung*// Math. Annalen. 1958. 136. S. 34—40. 2. Лужисте Ю. Г. К теории двумерных минимальных поверхностей. II. Поверхности постоянной кривизны// Уч. зап. Тартуск. ун-та. 1961. Вып. 102. С.16—28. 3. *Chen B. Y. Minimal surfaces with constant Gauss curvature*// Proc. Amer. Math. Soc. 1972. 34. P. 504 — 508. 4. *Kenmotsu K. Minimal surfaces with constant curvature in 4-dimensional space forms*// Proc Amer. Math. Soc. 1983. 89, № 1. P. 133—138. 5. Картан Э. Риманова геометрия в ортогональном репере. М., 1960. 307 с. 6. Эйзенхарт П. Л. Риманова геометрия. М., 1948. 316 с. 7. Горох В. П. О двумерных минимальных поверхностях в псевдоевклидовом пространстве// Укр. геометр. сб. 1987. Вып. 31. С. 18—28.

Поступила в редакцию 05.10.87

УДК 530.12; 531.51

В. И. ДЕНИСОВ

ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ОТНОСИТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ
В ПОЛЕ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ ТЯГОТЕНИЯ

Известно, что действие поля тяготения на систему свободных пробных частиц проявляется в их относительном движении. Уравнения относительного движения, в геометрии — уравнения Якоби, имеют вид

$$\frac{D^2 p^l}{Ds^2} + R_{jkl}^l u^j p^k u^l = 0, \quad (1)$$

где s — канонический параметр опорной геодезической γ , относительно которой рассматривается движение пробных частиц; $p^l(s)$ — вектор смещения частицы относительно γ ; u^l — касательный вектор γ ; $\frac{D}{Ds}$ — символ ковариантного дифференцирования вдоль опорной геодезической; R_{jkl}^l — тензор кривизны пространства-времени.

Уравнения (1) в пространстве-времени плоской волны тяготения исследовались в [1—8]. В этих работах уравнения относительного движения решаются на выделенных тем или иным образом временнеподобных геодезических либо в приближении слабого поля [1—4], либо в случае специального вида функций, определяющих метрику плоской волны тяготения [5—8].

Цель данной работы — найти решения уравнений (1) в случае общей метрики плоской волны тяготения на произвольной времениподобной геодезической γ . Способ, которым можно решить эту задачу, состоит в следующем.

Доказывается, что в пространстве-времени плоской волны тяготения существует двумерная вполне геодезическая поверхность такая, что для любой заданной времениподобной геодезической γ указанного пространства-времени найдется в определенном смысле эквивалентная ей геодезическая $\bar{\gamma}$, принадлежащая σ . Затем устанавливается соответствие между решениями уравнений относительного движения на «стандартной» геодезической $\bar{\gamma}$ и решением этих же уравнений на γ . Тогда, указав фундаментальную систему решений уравнений (1) на $\bar{\gamma}$, можно перенести эти решения на геодезическую γ .

Пусть W — пространство-время плоской, в смысле Бонди [9], волны тяготения. В специальной системе координат метрика W имеет вид

$$ds^2 = 2dx^0 dx^1 + g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \quad \alpha, \beta = 2, 3, \quad (2)$$

где $g_{\alpha\beta}(x^1)$ — функции класса C^2 , такие, что сигнатура метрики равна 2. Такая метрика называется общей метрикой плоской волны тяготения.

Пространство-время (2) допускает непрерывную пятипараметрическую группу движений, которая может быть задана следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{x}^0 &= x^0 + a^0 - b_\alpha x^\alpha - \frac{1}{2} b_\alpha b_\beta G^{\alpha\beta}(x^1), \\ \tilde{x}^1 &= x^1, \\ \tilde{x}^\alpha &= x^\alpha + a_\alpha + b_\beta G^{\alpha\beta}(x^1), \end{aligned} \quad (3)$$

где \tilde{x}^i — образ точки x^i ; a^0, a^α, b_α — параметры группы; $G^{\alpha\beta}(x^1) = \int g^{\alpha\beta}(t) dt$, где $g^{\alpha\beta}$ — элементы матрицы, обратной матрице $g_{\alpha\beta}$.

Наличие группы движений в пространстве-времени (2) позволяет определить в W понятие эквивалентных геодезических. Именно, геодезические в W эквивалентны, если существует движение (3), имеющее эти геодезические.

Выделим теперь множество неэквивалентных времениподобных геодезических W .

Так как группа движений (3) транзитивна по x^0, x^2, x^3 , то можно считать, что каждая геодезическая выходит из точки, принадлежащей уравнению $x^0 = x^2 = x^3 = 0$. Далее, так как W допускает пятипараметрическую группу движений, то уравнения геодезических в W допускают пять первых интегралов, один из которых имеет вид

Из (2) следует, что для времениподобной геодезической эта постоянная должна быть отлична от нуля, иначе геодезическая либо одномерна, либо изотропна.

Группа движений (3) определяет соответствие между u^i — касательными векторами эквивалентных геодезических. Нетрудно до-

казать, что если в начальной точке геодезической γ компоненты u^2, u^3 касательного вектора геодезической отличны от нуля, то существует движение, переводящее γ в геодезическую $\bar{\gamma}$, в начальной точке которой $\bar{u}^2 = \bar{u}^3 = 0$.

Докажем теперь, что геодезическая $\bar{\gamma}$ принадлежит поверхности σ : $x^2 = x^3 = 0$. Для этого достаточно доказать, что σ — вполне геодезическая поверхность в W . Последнее следует из того, что нормали к σ имеют вид $n_i = (0, 0, 1, 0)$; $n_i = (0, 0, 0, 1)$, а

символы $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ при $\alpha, \beta, \gamma = 2, 3$ в метрике (2) тождественно равны нулю. Тогда векторы n_i, n_i переносятся вдоль σ параллельно и внешние кривизны σ равны нулю, что гарантирует вполнегеодезность σ .

Так как σ — вполне геодезическая поверхность, то геодезическая $\bar{\gamma}$, выходя из точки $\in \sigma$ в направлении, касательном к σ , принадлежит σ , что и требовалось доказать.

Таким образом доказано, что любая времениподобная геодезическая γ метрики (2) эквивалентна геодезической $\bar{\gamma}$, принадлежащей вполнегеодезической поверхности σ . Следовательно, множество неэквивалентных времениподобных геодезических W — множество времениподобных геодезических поверхностей σ .

Пусть $\bar{\gamma}$ — времениподобная геодезическая, лежащая в σ . Из условия нормировки касательного вектора \bar{u}^i этой геодезической следует, что $\bar{u}^i = (-1/2c, c, 0, 0)$. Тогда уравнение $\bar{\gamma}$ в канонической параметризации имеет вид $\bar{x}^0(s) = -s/2c, \bar{x}^1(s) = cs + x^1(0), \bar{x}^2 = \bar{x}^3 = 0$.

Предположим теперь, что $\bar{p}^i(s)$ — решение уравнений (1) на геодезической $\bar{\gamma}$ в W . Тогда кривая $\bar{x}^i(s) = \bar{x}^i(s) + \varepsilon \bar{p}^i(s)$, где ε — малая постоянная, является геодезической в W с точностью до членов порядка ε .

Действуя на $\bar{x}^i(s)$ группой движений (3), получаем кривую, которая также является геодезической с точностью до членов порядка ε . Поэтому векторное поле $p^i(s)$, определяемое выражениями

$$\begin{aligned} p^0(s) &= \bar{p}^0(s) - b_\alpha \bar{p}^\alpha(s) - \frac{1}{2} b_\alpha b_\beta g^{\alpha\beta} \bar{p}^1(s), \\ p^1(s) &= \bar{p}^1(s), \\ p^\alpha(s) &= \bar{p}^\alpha(s) + b_\beta g^{\alpha\beta} \bar{p}^1(s), \end{aligned} \quad (4)$$

является решением уравнений (1) на геодезической γ :

$$\begin{aligned} x^0(s) &= a^0 - s/2c - \frac{1}{2} b_\alpha b_\beta \int_{x^1(0)}^{x^1} g^{\alpha\beta}(t) dt, \\ x^1(s) &= x^1(0) + cs, \\ x^\alpha(s) &= a^\alpha + b_\beta \int_{x^1(0)}^{x^1} g^{\alpha\beta}(t) dt. \end{aligned} \quad (5)$$

Постоянные, которые входят в уравнения геодезической (5), имеют простой смысл: $a^0, a^\alpha, x^1(0)$ определяют координаты начальной точки \bar{y} ; c, b_α задают начальное направление геодезической, причем $u_\alpha(0) = cb_\alpha$.

Выражения (4) определяют соответствие между решением уравнений (1) на геодезической \bar{y} и решением этих же уравнений на y . Так как это соответствие является взаимно однозначным, то задача решения уравнений относительного движения на произвольной временнодобной геодезической (5) в пространстве-времени W сведена к решению этих уравнений на «стандартной» геодезической \bar{y} .

Решение уравнений (1) на «стандартной» геодезической \bar{y} можно найти следующим образом.

Рассмотрим образ геодезической \bar{y} , который получается в результате действий на нее инфинитезимальным преобразованием группы (3).

Так как векторы Киллинга, определяющие инфинитезимальные операторы группы (3), на поверхности σ имеют вид

$$\begin{aligned}\xi_1^i &= \delta_0^i, \quad \xi_2^i = \delta_2^i, \quad \xi_3^i = \delta_3^i, \\ \xi_4^i &= \delta_2^i \int_{x^1(0)}^{x^1} g^{22}(t) dt + \delta_3^i \int_{x^1(0)}^{x^1} g^{23}(t) dt, \\ \xi_5^i &= \delta_2^i \int_{x^1(0)}^{x^1} g^{32}(t) dt + \delta_3^i \int_{x^1(0)}^{x^1} g^{33}(t) dt,\end{aligned}$$

то образ y^* стандартной геодезической \bar{y} определяется выражением $y^*(s) = x^i(s) + \Delta^v \xi^i_v$, где Δ^v — б. м. постоянные; $v = 1, 2, \dots, 5$.

Первая y^* является геодезической с точностью до членов первого порядка по Δ^v . Поэтому поле $\Delta^v \xi^i_v(s)$ — решение уравнений (1) на \bar{y} .

В силу линейности уравнений относительного движения каждое из полей ξ^i является решением (1) на геодезической \bar{y} .

Известно [10], что множество решений уравнений (1) в четырехмерном Римановом пространстве представляет собой восьмимерное линейное векторное пространство. При этом множество полей $p^i(s)$, обращающихся в нуль при $s = 0$, четырехмерно; множество полей $\bar{p}^i(s)$, стационарных от нуля в начальной точке геодезической, также четырехмерно.

Таким образом, найдено пять векторных полей, удовлетворяющих уравнению (1). Недостающие три векторных поля находятся следующим образом.

Из-за того, что векторное поле ξ^i — ковариантно постоянное в метрике \bar{g} , можно видеть, что поле $s \cdot \xi^i$ удовлетворяет (1) на \bar{y} . Далее, решив (1) последовательно $\bar{p}^i = \bar{u}^i(s)$, $\bar{p}^i = s\bar{u}^i(s)$, убеждаемся, что эти поле удовлетворяют уравнению относительного движения.

Поэтому фундаментальная система решений уравнения (1) на геодезической $\bar{\gamma}$ в метрике (2) имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{p}_1^i &= \delta_0^i; \quad \bar{p}_2^i = \delta_2^i; \quad \bar{p}_3^i = \delta_3^i; \quad \bar{p}_4^i = \bar{u}^i; \quad \bar{p}_5^i = s\delta_0^i; \\ \bar{p}_6^i &= s\bar{u}^i; \quad \bar{p}_7^i = \delta_2^i \int g^{22}(t) dt + \delta_3^i \int g^{23}(t) dt; \\ \bar{p}_8^i &= \delta_2^i \int g^{32}(t) dt + \delta_3^i \int g^{33}(t) dt. \end{aligned} \quad (6)$$

Геометрический смысл полей (6) можно определить так.

Известно, что поле $p^i(s)$, удовлетворяющее уравнению (1) на геодезической γ , можно получить геодезической вариацией γ [10]. Исходя из этого легко доказать, что поля $\bar{p}^i(s)$, $v = 1, \dots, 4$ определяются геодезической вариацией $\bar{\gamma}$ по координатам начальной точки. Поля $\bar{p}^i(s)$ при $v = 5, \dots, 8$ определяются геодезической вариацией $\bar{\gamma}$ по начальному направлению.

Подставляя (6) в (4), получим фундаментальную систему решений уравнений относительного движения на произвольной временнеподобной геодезической (5) общего пространства-времени плоской волны тяготения.

Найденные решения уравнений (1) позволяют исследовать характер относительного движения системы свободных пробных частиц в поле плоской однородной волны тяготения общего вида — без жесткой детализации ее метрики и опорной геодезической.

Кроме этого, анализ этих решений позволяет установить ряд свойств в целом пространства-времени (2), в частности, свойств его геодезических.

Список литературы: 1. Вебер Дж. Общая теория относительности и гравитационные волны. М., 1962. 271 с. 2. Борисова Л. Б. Относительные колебания пробных частиц в сопутствующих системах координат // ДАН СССР. 225, № 4. 1975. С. 786—789. 3. Захаров В. Д., Борисова Л. Б. Система пробных частиц в поле плоских гравитационных волн. I // Изв. вузов. Физика. 1976. № 12. С. 108—111. 4. Захаров В. Д., Борисова Л. Б. Система пробных частиц в поле плоских гравитационных волн. II // Изв. вузов. Физика. 1976. № 12. С. 111—117. 5. Действие плоских гравитационных волн на систему свободных частиц / Л. Б. Борисова, В. Д. Захаров, Н. И. Колосницын, К. П. Станюкович / Пробл. теории гравитации и элементар. частиц. 1977. Вып. 8. С. 32—37. 6. Сидоров В. М. Относительное смещение свободных частиц в поле сильной гравитационной волны // ДАН СССР. 1976. 231, № 1. С. 82—85. 7. Борисова Л. Б. Поведение свободных частиц в поле сильных гравитационных волн // Пробл. теории гравитации и элементар. частиц. 1978. Вып. 9. С. 110—116. 8. Кочкин Р. А. Поведение пробных частиц в поле периодической гравитационной волны // Тез. докл. VI Сов. гравитац. конф. М., 1984. С. 220—222. 9. Захаров В. Д. Гравитационные волны в теории тяготения Эйнштейна. М., 1972. 199 с. 10. Милнор Дж. Теория Морса. М., 1965. 184 с.

Поступила в редакцию 16.02.87

В. А. ДОЛЖЕНКОВ

**О СРЕДНЕЙ КРИВИЗНЕ ПОВЕРХНОСТИ
В n -МЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ. I**

В [1, 2] приведены основные результаты относительно средних кривизн для гиперповерхностей класса C^2 .

В рассматриваемой работе обобщено понятие средней кривизны без требования регулярности гиперповерхности. Одновременно будет распространено понятие абсолютной средней кривизны на случай n -мерного евклидова пространства. Под гиперповерхностью $f: Q \rightarrow E^n$ будем понимать вложение $(n-1)$ -мерного компактного ориентированного многообразия Q в n -мерное евклидово пространство E^n .

В дальнейшем будем пользоваться следующими постоянными обозначениями: σ_k — k -мерная плоскость, $dm(\sigma_k)$ — плотность множества плоскостей размерности k , O_k — площадь единичной k -мерной сферы, ∂Q — граница Q , для дифференциальных форм рассматриваем внешнее произведение.

Обозначим через T_f — триангуляцию на Q , соответствующую изображению $f: Q \rightarrow E^n$, через Δ_i^{n-1} — $(n-1)$ -мерные элементы триангуляции. Для каждого Δ_i^{n-1} имеется внутренняя триангуляция с элементами Δ_{ij}^{n-2} размерности $(n-2)$. Соответственно для каждого Δ_{ij}^{n-2} также существует внутренняя триангуляция с элементами размерности $(n-3)$ и так далее. Если Δ_i^{n-1} и Δ_j^{n-1} имеют общую $(n-2)$ -мерную грань, то ее будем обозначать через Δ_{ij}^{n-2} .

Пусть (f, Q) — невырожденное квазилинейное вложение Q в E^n . Тогда $f(\Delta_i^{n-1}) = \nabla_i^{n-1}$ — $(n-1)$ -мерный симплекс, грань многогранника (f, Q) . Две грани ∇_i^{n-1} и ∇_j^{n-1} могут иметь общую $(n-2)$ -мерную грань ∇_{ij}^{n-2} , которую в дальнейшем будем называть $(n-2)$ -мерным ребром многогранника (f, Q) . Вдоль этого ребра определяется двугранный угол φ (см. [2]). При этом $-\pi < \varphi < \pi$.

Так как рассматривается вложение $(n-1)$ -мерного компактного многообразия Q в E^n , то в сечении $(f, Q) \cap \sigma_2$ почти всегда будет конечное или конечное число кривых, для каждой из которых определено понятие поворота кривой (см. [3]) $H_1^2((f, Q) \cap \sigma_2)$ и вариации поворота $M_1^2((f, Q) \cap \sigma_2)$.

Приложение 1. Пусть Q — $(n-1)$ -мерное компактное ориентированное многообразие, (f, Q) — вложение Q в E^n , $H_1^2((f, Q) \cap \sigma_2)$ — сумма поворотов компонент сечения $(f, Q) \cap \sigma_2$, а $M_1^2((f, Q) \cap \sigma_2)$ — сумма вариаций поворота этого сечения. Число

$$H_1^2(f, Q) = \frac{O_1 O_0}{O_{n-1} O_{n-2}} \int H_1^2((f, Q) \cap \sigma_2) dm(\sigma_2)$$

назовем первой средней кривизной отображения (f, Q) , а число

$$M_1^n(f, Q) = \frac{O_1 O_0}{O_{n-1} O_{n-2}} \int M_1^2((f, Q) \sqcap \sigma_2) dm(\sigma_2) -$$

первой абсолютной средней кривизной отображения (f, Q) .

Замечание. Данное определение несколько отличается от определения абсолютной средней интегральной кривизны, рассмотренной в работах [4, 5].

Теорема 1. Пусть (f, Q) — невырожденное квазилинейное вложение $(n-1)$ -мерного компактного ориентированного многообразия Q в E^n , T_f — соответствующая f триангуляция на Q , $\{\nabla_{ij}^{n-2}\}$ — множество $(n-2)$ -мерных ребер (f, Q) , не принадлежащих $(f, \partial Q)$, $I(\nabla_{ij}^{n-2})$ — объем ребра ∇_{ij}^{n-2} , Φ_{ij} — величина угла при этом ребре. Тогда

$$H_1^n(f, Q) = \frac{1}{n-1} \sum_{ij} (\pi - \Phi_{ij}) I(\nabla_{ij}^{n-2}),$$

$$M_1^n(f, Q) = \frac{1}{n-1} \sum_{ij} |\pi - \Phi_{ij}| I(\nabla_{ij}^{n-2}),$$

где суммирование ведется по всему множеству ребер $\{\nabla_{ij}^{n-2}\}$.

Доказательство. Рассмотрим одно $(n-2)$ -мерное ребро ∇_{ij}^{n-2} многогранника (f, Q) , а ∇_i^{n-1} и ∇_j^{n-1} — грани при этом ребре. Пусть F — угол при этом ребре, образованный гранями ∇_i^{n-1} и ∇_j^{n-1} ; B — его величина; β — величина угла $F \sqcap \sigma_2$, F_1 — смежный угол при этом же ребре, $T = F \cup F_1$ — развернутый угол, $B_T = \pi$ — его величина, $\beta_T(\sigma_2)$ — величина угла $T \sqcap \sigma_2$ и $\beta_T(\sigma_2) = \pi$. Тогда имеем

$$\frac{O_1 O_0}{O_{n-1} O_{n-2}} \int \beta_T(\sigma_2) dm(\sigma_2) = \frac{O_1 O_0 B_T}{O_{n-1} O_{n-2}} \int N dm(\sigma_2),$$

где N — число точек пересечения плоскости σ_2 с ребром ∇_{ij}^{n-2} .

Так как (см. [1], 14. 70)

$$\int N dm(\sigma_2) = \frac{O_n O_{n-1}}{O_2 O_1} I(\nabla_{ij}^{n-2}),$$

то

$$\frac{O_1 O_0}{O_{n-1} O_{n-2}} \int \beta_T(\sigma_2) dm(\sigma_2) = \frac{O_0 O_n}{O_{n-2} O_2} B_T I(\nabla_{ij}^{n-2}).$$

Учитывая, что $2\pi O_{n-2} = (n-1) O_n$, получим

$$\frac{O_1 O_0}{O_{n-1} O_{n-2}} \int \beta_T(\sigma_2) dm(\sigma_2) = \frac{1}{n-1} B_T I(\nabla_{ij}^{n-2}).$$

В силу аддитивности рассматриваемого интеграла отсюда следует

$$\frac{O_1 O_0}{O_{n-1} O_{n-2}} \int \beta_T(\sigma_2) dm(\sigma_2) = \frac{1}{n-1} (\pi - B) I(\nabla_{ij}^{n-2}).$$

Пусть (f, Q) — многогранник, $\{\nabla_{ij}^{n-2}\}$ — множество $(n-2)$ -мерных ребер (f, Q) , не принадлежащих $(f, \partial Q)$. Тогда, согласно предыдущему, будет:

$$\frac{1}{n-1} \sum_{ij} (\pi - \varphi_{ij}) I(\nabla_{ij}^{n-2}) = \frac{O_1 O_0}{O_{n-1} O_{n-2}} \int H_1^2((f, Q) \cap \sigma_2) dm(\sigma_2).$$

Таким образом,

$$H_1^n(f, Q) = \frac{1}{n-1} \sum_{ij} (\pi - \varphi_{ij}) I(\nabla_{ij}^{n-2}).$$

Аналогично доказывается второе равенство. Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть Q — $(n-1)$ -мерное компактное ориентированное многообразие, (f, Q) вложение Q в E^n , ∂Q граница Q . Тогда

$$H_1^n(f, Q) = \frac{O_0}{O_{n-1}} \int H_1^{n-1}((f, Q) \cap \sigma_{n-1}) dm(\sigma_{n-1}),$$

$$M_1^n(f, Q) = \frac{O_0}{O_{n-1}} \int M_1^{n-1}((f, Q) \cap \sigma_{n-1}) dm(\sigma_{n-1}).$$

Доказательство. Докажем методом математической индукции. При $n=3$, согласно определению 1, имеем

$$H_1^3(f, Q) = \frac{O_0}{O_2} \int H_1^2((f, Q) \cap \sigma_2) dm(\sigma_2).$$

Предположим, что теорема верна для $n=k$, т. е.

$$H_1^k(f, Q) = \frac{O_0}{O_{k-1}} \int H_1^{k-1}((f, Q) \cap \sigma_{k-1}^k) dm(\sigma_{k-1}^k),$$

где в верхний индекс у плоскости σ_{k-1}^k показывает, в каком измерении рассматривается плоскость.

Докажем, что

$$H_1^{k+1}(f, Q) = \frac{O_0}{O_k} \int H_1^k((f, Q) \cap \sigma_k^{k+1}) dm(\sigma_k^{k+1}).$$

Так как, согласно определению 1,

$$H_1^k(f, Q) \cap \sigma_k^{k+1} = \frac{O_1 O_0}{O_{k-1} O_{k-2}} \int H_1^2((f, Q) \cap \sigma_2^k) dm(\sigma_2^k),$$

$$\begin{aligned} \int H_1^k((f, Q) \cap \sigma_k^{k+1}) dm(\sigma_k^{k+1}) &= \frac{O_1 O_0}{O_{k-1} O_{k-2}} \times \\ &\times \int H_1^2((f, Q) \cap \sigma_2^k) dm(\sigma_2^k) \cdot dm(\sigma_k^{k+1}) = \\ &= \frac{O_1 O_0}{O_{k-1} O_{k-2}} \int H_1^2((f, Q) \cap \sigma_2^{k+1}) dm(\sigma_2^{k+1}) dm(\sigma_{k[2]}^{k+1}). \end{aligned}$$

Мы воспользовались равенством (см. [1]):

$$dm(\sigma_2^k) dm(\sigma_k^{k+1}) = dm(\sigma_2^{k+1}) dm(\sigma_{k[2]}^{k+1}),$$

где $\sigma_{k[2]}^{k+1}$ — k -мерная плоскость, содержащая фиксированную двумерную плоскость.

Так как

$$\int dm(\sigma_{k[2]}^{k+1}) = \frac{O_{k-2}}{O_0},$$

то

$$\int H_1^k((f, Q) \cap \sigma_k^{k+1}) dm(\sigma_k^{k+1}) = \frac{O_k}{O_0} H_1^{k+1}(f, Q).$$

Таким образом,

$$H_1^{k+1}(f, Q) = \frac{O_0}{O_k} \int H_1^k((f, Q) \cap \sigma_k^{k+1}) dm(\sigma_k^{k+1}).$$

Тем самым доказательство первого равенства по индукции завершено.

Аналогично доказывается второе равенство.

Теорема доказана.

Лемма 1. Пусть S_{n-1} — $(n-1)$ -мерная сфера радиуса r , $n \geq 2$. Тогда

$$M_1^n(S_{n-1}) = H_1^n(S_{n-1}) = O_{n-1} r^{n-2}.$$

Доказательство. Докажем методом математической индукции. При $n=2$ имеем окружность S_1 , для которой $M_1^2(S_1) = H_1^2(S_1) = 2\pi$, а, следовательно, $M_1^2(S_1) = H_1^2(S_1) = O_1 \cdot r^0$. Предположим, что лемма верна для $n=k-1$, т. е. $M_1^{k-1}(S_{k-2}) = H_1^{k-1}(S_{k-2}) = O_{k-2} \cdot r^{k-3}$.

Согласно теореме 2 имеем

$$H_1^k(S_{k-1}) = \frac{O_0}{O_{k-1}} \int H_1^{k-1}(S_{k-1} \cap \sigma_{k-1}) dm(\sigma_{k-1}).$$

Так как $S_{k-1} \cap \sigma_{k-1}$ — сфера размерности $(k-2)$ и радиуса $(r^2 - \rho^2)^{1/2}$, где ρ — расстояние от центра сферы S_{k-1} до σ_{k-1} , то, учитывая (см. [1], 12.40) $dm(\sigma_{k-1}^k) = d\rho dO_{k-1}$, где dO_{k-1} — элемент площади единичной $(k-1)$ -мерной сферы, получим

$$\begin{aligned} H_1^k(S_{k-1}) &= \frac{O_0 O_{k-2} O_{k-1}}{O_{k-1}} \int_0^r (r^2 - \rho^2)^{(k-3)/2} d\rho = \\ &= O_0 O_{k-2} r^{k-2} \int_0^{\pi/2} (\cos t)^{k-2} dt = O_{k-1} r^{k-2}. \end{aligned}$$

Таким образом, $H_1^k(S_{k-1}) = O_{k-1} r^{k-2}$.

Так как $H_1^k(S_{k-1}) = M_1^k(S_{k-1})$, то тем самым доказательство леммы завершено.

Теорема 3. Пусть Q — $(n-1)$ -мерное компактное ориентированное многообразие, (f, Q) — вложение Q в E^n , ∂Q граница Q .

$n = 3$. Тогда

$$H_1^n(f, Q) = \frac{O_{r-1} O_{r-2} \dots O_0}{O_{n-1} O_{n-2} \dots O_{n-r}} \int H_1^r((f, Q) \cap \sigma_r^n) dm(\sigma_r^n),$$

$$M_1^n(f, Q) = \frac{O_{r-1} O_{r-2} \dots O_0}{O_{n-1} O_{n-2} \dots O_{n-r}} \int M_1^r((f, Q) \cap \sigma_r^n) dm(\sigma_r^n),$$

$$r = 2, 3, \dots, n - 1.$$

Доказательство. Покажем, что, применяя последовательно теорему 2, можно получить следующее выражение:

$$H_1^n(f, Q) = c \int H_1^r((f, Q) \cap \sigma_r^n) dm(\sigma_r^n), \quad (1)$$

где $c = \text{const}$.

Действительно, согласно теореме 2

$$H_1^n(f, Q) = \frac{O_0}{O_{n-1}} \int H_1^{n-1}((f, Q) \cap \sigma_{n-1}^n) dm(\sigma_{n-1}^n),$$

$$H_1^{n-1}((f, Q) \cap \sigma_{n-1}^n) = \frac{O_0}{O_{n-2}} \int H_1^{n-2}((f, Q) \cap \sigma_{n-2}^{n-1}) dm(\sigma_{n-2}^{n-1}).$$

Тогда

$$H_1^n(f, Q) = \frac{O_0^2}{O_{n-1} O_{n-2}} \int H_1^{n-2}((f, Q) \cap \sigma_{n-2}^{n-1}) dm(\sigma_{n-2}^{n-1}) dm(\sigma_{n-1}^n).$$

Так как (см. [1])

$$dm(\sigma_{n-2}^{n-1}) dm(\sigma_{n-1}^n) = q \cdot dm(\sigma_{n-2}^n),$$

где $q = \text{const}$, то получим

$$H_1^n(f, Q) = c \int H_1^{n-2}((f, Q) \cap \sigma_{n-2}^n) dm(\sigma_{n-2}^n). \quad (2)$$

Повторяя аналогичные рассуждения с (2), придем к выражению (1).

Найдем коэффициент c непосредственным подсчетом, взяв в качестве гиперповерхности сферу S_{n-1} единичного радиуса. Пусть O — центр S_{n-1} . Так как S_{n-1} — $(n-1)$ -мерная сфера, σ_r — r -мерная плоскость и ρ — расстояние от центра O до σ_r , то $S_{n-1} \cap \sigma_r$ — $(n-r-1)$ -мерная сфера с радиусом $(1-\rho^2)^{1/2}$.

Как известно (см. лемму 1), $H_1^n(S_{n-1}) = O_{n-1}$, $H_1^n(S_{n-1} \cap \sigma_r) = O_{n-1}(1-\rho^2)^{(n-2)/2}$ и (см. [1]) $dm(\sigma_r^n) = dV_{n-r} dm(\sigma_{n-r}[0])$, где dV_{n-r} — элемент объема $(n-r)$ -мерной плоскости, перпендикулярной σ_r в точке ее пересечения с σ_r , и при этом

$$dV_{n-r} = \rho^{n-r-1} dO_{n-r-1} d\rho,$$

т. е. dV_{n-r} — элемент площади $(n-r-1)$ -мерной единичной сферы. Для граевинова многообразия (см. [1, 6]) имеем

$$dm(\sigma_{n-r}[0]) = \frac{O_{n-1} O_{n-2} \dots O_{n-r}}{O_{r-1} O_{r-2} \dots O_1 O_0}.$$

Учитывая, что

$$\int_0^1 (1 - \rho^2)^{(r-2)/2} \rho^{n-r-1} d\rho = \frac{O_{n-1}}{O_{n-r-1} O_{r-1}},$$

получим

$$H_1^n(S_{n-1}) = \frac{c O_{r-1} O_{n-r-1} O_{n-1} O_{n-2} \dots O_{n-r}}{O_{n-r-1} O_{r-1} O_{r-1} O_{r-2} \dots O_1 O_0},$$

Отсюда

$$c = \frac{O_{r-1} O_{r-2} \dots O_1 O_0}{O_{n-1} O_{n-2} \dots O_{n-r}}.$$

Аналогично доказывается второе равенство. Теорема доказана.

Теорема 4. Если (f, Q) — выпуклая $(n-1)$ -мерная гиперповерхность без края, то

$$M_1^n(f, Q) = H_1^n(f, Q) = \frac{(n-2) O_1 O_0}{O_{n-2} O_{n-3}} m(\sigma_2),$$

где $m(\sigma_2)$ мера множества двумерных плоскостей, пересекающих (f, Q) .

Доказательство. Согласно определению 1

$$H_1^n(f, Q) = \frac{O_1 O_0}{O_{n-1} O_{n-2}} \int H_1^2((f, Q) \cap \sigma_2) dm(\sigma_2).$$

Так как почти всегда в сечении будет выпуклая кривая, то $M_1^2((f, Q) \cap \sigma_2) = H_1^2((f, Q) \cap \sigma_2) = 2\pi$. Следовательно,

$$M_1^n(f, Q) = H_1^n(f, Q) = \frac{2\pi O_1 O_0}{O_{n-1} O_{n-2}} m(\sigma_2).$$

Учитывая $(n-2) O_{n-1} = 2\pi O_{n-3}$, получим

$$M_1^n(f, Q) = H_1^n(f, Q) = \frac{(n-2) O_1 O_0}{O_{n-2} O_{n-3}} m(\sigma_2).$$

Теорема доказана.

Пусть (f, Q) — $(n-1)$ -мерная гиперповерхность класса C^2 . Тогда в каждой точке (f, Q) существуют главные нормальные кривизны k_1, k_2, \dots, k_{n-1} . Обозначим $d\sigma$ — элемент площади гиперповерхности (f, Q) . Как известно, интеграл средней кривизны гиперповерхности $\hat{H}_1^n(f, Q)$ определяется по формуле

$$\hat{H}_1^n(f, Q) = \frac{1}{n-1} \int (k_1 + k_2 + \dots + k_{n-1}) d\sigma.$$

Обозначим

$$\hat{M}_1^n(f, Q) = \frac{1}{n-1} \int |k_1 + k_2 + \dots + k_{n-1}| d\sigma.$$

Лемма 2. Пусть (f, Q) — регулярная поверхность класса C^2 в L^3 . Тогда

$$H_1^3(f, Q) = \tilde{H}_1^3(f, Q), M_1^3(f, Q) = \tilde{M}_1^3(f, Q).$$

Доказательство. Рассмотрим регулярную поверхность (f, Q) класса C^2 . Так как интеграл $\iint (k_1 + k_2) d\sigma$ — аддитивная функция, то в качестве (f, Q) можно рассматривать достаточно малую окрестность U_ε точки $M \in (f, Q)$. Пусть n — нормальный вектор к поверхности (f, Q) в точке M , k_1 и k_2 — главные нормальные кривизны поверхности в этой точке. Пусть σ_2 — плоскость, проходящая через точку M и пересекающая (f, Q) по кривой γ , составляющей угол α с первым главным направлением, φ — угол между нормальным вектором плоской кривой γ и вектором n в точке M ; k_γ — кривизна кривой γ на поверхности (f, Q) ; k_γ^0 — нормальная кривизна в том же направлении; ds — элемент длины кривой γ , r — расстояние от начала координат до плоскости σ_2 , ϑ и θ — элементы углы. При этом $dm(\sigma_2) = d\rho d\varphi d\theta \sin \theta$.

Рассмотрим интеграл

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \iint_{U_\varepsilon} H_1^2(\gamma) dm(\sigma_2) = \frac{1}{2\pi} \iint_{U_\varepsilon} k_\gamma ds dm(\sigma_2) = \\ & = \frac{1}{2\pi} \iint_{U_\varepsilon} \frac{k_\gamma ds d\rho d\varphi}{\cos \varphi} = \frac{1}{2\pi} \iint_{U_\varepsilon} (k_1 \cos^2 \alpha + k_2 \sin^2 \alpha) dO_2 d\sigma = \\ & = \frac{1}{2\pi} \iint_{U_\varepsilon} \int_0^\pi \int_0^\pi (k_1 \cos^2 \alpha + k_2 \sin^2 \alpha) d\alpha \sin \theta d\theta d\sigma. \end{aligned}$$

Было учтено, что $d\sigma = ds d\varphi / \cos \varphi$ — элемент площади поверхности, $\alpha = \varphi \pm \pi/2$ и, следовательно, $d\alpha = d\varphi$. Кроме того, при переходе от α от $-\pi$ до π дважды учитывается кривизна кривой γ . Поэтому пределы интегрирования для α уменьшены в два раза.

Так как

$$\int_0^\pi k_1 \cos^2 \alpha d\alpha = \frac{\pi k_1}{2}, \quad \int_0^\pi k_2 \sin^2 \alpha d\alpha = \frac{\pi k_2}{2}, \quad \int_0^\pi \sin \theta d\theta = 2,$$

то получим

$$\frac{1}{2\pi} \iint_{U_\varepsilon} H_1^2(\gamma) dm(\sigma_2) = \frac{1}{2} \iint (k_1 + k_2) d\sigma,$$

$H_1^3(f, Q) = \tilde{H}_1^3(f, Q)$. Учитывая, что $M_1^2(\gamma) = \int |k_\gamma| ds$, и, повторяющиеся рассуждения, получим $M_1^3(f, Q) = \tilde{M}_1^3(f, Q)$.

Теорема 5. Пусть (f, Q) — $(n - 1)$ -мерная регулярная поверхность класса C^2 в E^n . Тогда $H_1^n(f, Q) = \tilde{H}_1^n(f, Q)$, $M_1^n(f, Q) = \tilde{M}_1^n(f, Q)$.

Доказательство. В силу леммы 2 будет

$$H_1^3((f, Q) \cap \sigma_3) = \tilde{H}_1^3((f, Q) \cap \sigma_3), \quad M_1^3((f, Q) \cap \sigma_3) = \tilde{M}_1^3((f, Q) \cap \sigma_3).$$

Согласно теореме 3

$$H_1^n(f, Q) = \frac{O_2 O_1 O_0}{O_{n-1} O_{n-2} O_{n-3}} \int H_1^3((f, Q) \cap \sigma_3^n) dm(\sigma_3^n),$$

$$M_1^n(f, Q) = \frac{O_2 O_1 O_0}{O_{n-1} O_{n-2} O_{n-3}} \int M_1^3((f, Q) \cap \sigma_3^n) dm(\sigma_3^n).$$

Согласно (14.10) (см. [1])

$$\tilde{H}_1^n(f, Q) = \frac{O_2 O_1 O_0}{O_{n-1} O_{n-2} O_{n-3}} \int \tilde{H}_1^3((f, Q) \cap \sigma_3^n) dm(\sigma_3^n),$$

$$\tilde{M}_1^n(f, Q) = \frac{O_2 O_1 O_0}{O_{n-1} O_{n-2} O_{n-3}} \int \tilde{M}_1^3((f, Q) \cap \sigma_3^n) dm(\sigma_3^n).$$

Сравнивая выражения, получим доказательство теоремы.

Для определения абсолютной средней кривизны гиперповерхности (f, Q) не обязательно накладывать требование, что отображение $f : Q \rightarrow E^n$ — вложение. Поэтому в определении 1 для первой абсолютной средней кривизны $M_1^n(f, Q)$ можно рассматривать в качестве f непрерывное отображение (см. [7]).

Определение 2. Если $M_1^n(f, Q) < \infty$, то (f, Q) будем называть поверхностью ограниченной абсолютной средней интегральной кривизны или, сокращенно, ПОАСИК.

Как и в трехмерном случае для сечений гиперповерхности класса ПОАСИК имеет место

Теорема 6. Пусть (f, Q) — ПОАСИК в E^n . Тогда почти для всех плоскостей σ_2 ($(f, Q) \cap \sigma_2 \neq \emptyset$) сечение $(f, Q) \cap \sigma_2$

1) содержит не более счетного множества компонент, каждая из которых содержит внутренние точки (f, Q) ;

2) каждая из таких компонент либо гомеоморфна окружности, не имеющей общих точек с границей, либо простой дуге, только концы которой принадлежат границе $\partial(f, Q)$;

3) множество компонент, каждая из которых гомеоморфна окружности или простой дуге, концы которой принадлежат различным компонентам границы $\partial(f, Q)$, не более чем конечно;

4) для любого $\delta > 0$ множество компонент, имеющих общие точки с $(f, Q) \setminus U_\delta(\partial(f, Q))$, не более чем конечно; здесь $U_\delta(\partial(f, Q))$ δ -окрестность границы $\partial(f, Q)$;

5) все эти компоненты представляют собой кривые ограниченной вариации поворота, сумма вариаций поворота которых конечна.

Список литературы: 1. Сантало Л. Интегральная геометрия и геометрические вероятности. М., 1983. 150 с. 2. Хадвигер Л. Лекции об объеме, площади поверхности и изопериметрии. М., 1966. 87 с. 3. Александров А. Д., Залгаллер В. А. Двумерные многообразия ограниченной кривизны // Тр. МИАН СССР. 1962. 58. С. 25—37. 4. Данелич И. А. Интегральное представление абсолютной средней интегральной кривизны многогранной поверхности в вытекающие из него следствия // Сиб. мат. журн. 1966. 7, № 4. С. 10—26. 5. Позняков В. А. Интегральное представление абсолютной средней интегральной кривизны поверхности в трехмерном пространстве Лобачевского // Вопр. методики и теории мат. Курск, 1971. С. 58—80. 6. Kobayashi S., Nomizu K. Основы дифференциальной геометрии. II. М., 1981. 416 с. 7. Николич И. А. Поверхности Фреше ограниченной абсолютной средней интегральной кривизны // Сиб. мат. журн. 1973. 14, № 3. С. 498—524.

Поступила в редакцию 06.08.87

В. Ф. ИГНАТЕНКО

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ С БЕСКОНЕЧНЫМ
МНОЖЕСТВОМ ПЛОСКОСТЕЙ КОСОЙ СИММЕТРИИ. I

Пусть в m -мерном евклидовом пространстве E^m задана $(m-1)$ -мерная нецилиндрическая алгебраическая поверхность F_n порядка μ с бесконечным множеством B_μ плоскостей косой (в частности, притяжательной) симметрии. Направления симметрии плоскостей B_μ выражаются векторами и образуют множество N_μ ; μ -плоскость Π^μ — это линейная оболочка. В декартовых координатах x_i ($i = \overline{1, m}$) зададим поверхность F_n уравнением

$$\sum_{j=0}^n \varphi_j(\mathbf{x}) = 0, \quad (1)$$

где φ_j есть формы степеней j от координат вектора $\mathbf{x} = (x_i)$. Уравнение $\varphi_0 = 0$ определяет асимптотический конус K_n поверхности F_n в вершинной в начале координат 0. Отражения относительно плоскостей B_μ порождают бесконечную группу G_μ . Если группа G_μ представлена в произведение бесконечной группы G_μ' и некоторой конечной группы (см. [1]), то последняя исключается из рассмотрения; в этом случае считаем $G_\mu = G_\mu'$. Пусть $N_\lambda \subseteq N_\mu$ — бесконечная $G_\mu(u)$ -инвариантная подгруппа некоторого элемента $u \in N_\mu$; λ — плоскость $\Pi^\lambda(x_k) \subseteq \Pi^\mu$, $k = \overline{1, m}$, $\lambda = \overline{1, \mu}$. Плоскости B_μ по направлениям N_λ образуют множество B_λ и определяют группу $G_\lambda \subseteq G_\mu$. Индексы λ и μ поставленные при символах, скажем, B_μ , N_μ , Π^μ , G_μ и т. д., — направления симметрии являются неасимптотическими и неасимптотичными; λ и μ соответствуют двум различным типам асимптотических направлений. Строение поверхностей F_n , инвариантных относительно групп G_μ и G_μ' , рассматривалось в [2, 3]. Основная цель, которой ставится эта статья — дать подробные (в отдельных случаях — модифицированные) доказательства результатов указанных работ [4].

1°. Имеет место очень важная

Лемма 1. Линейная оболочка Π^λ множества N_λ поверхности F_n является суммой таких 2-плоскостей Π_α^2 ($\alpha = \overline{1, p}$), что каждая 2-плоскость, параллельная любой из 2-плоскостей Π_α^2 и не лежащая на F_n , пересекает ее по вещественным и, может быть, мнимым коникам с общей симметрией (у них общие оси и соответствующие направления симметрии).

Эта лемма получена в работах [2, 3] (в [2] множество $B_\lambda = B_\lambda^c$). Независимо от [3] для конуса K_n ее доказал А. Е. Залесский [5], если G_λ — приводимая неразложимая группа. Более точно, основной результат работы [5] заключается в следующем: приводимая неразложимая линейная группа характеристики O , которая порождена псевдоотражениями, замкнута в топологии Зарисского и не содержит трансвекций, представима в виде произведения позлементно перестановочных групп, каждая из которых содержится в подходящей ортогональной группе. В [6] идея доказательства леммы 1, данного в [7], перенесена на случай инвариантности относительно G_λ m -мерной фигуры, которая компактна или при несчетном N_λ неограничена и замкнута.

Установим первоначально строение множества B_λ , содержащего параллельные плоскости (пересекающиеся плоскости также могут входить в B_λ); при этом найдем общее уравнение соответствующей поверхности F_n . Здесь под общим уравнением F_n подразумеваем ее общее каноническое уравнение.

Теорема 1. Пусть множество B_λ^c поверхности F_n содержит параллельные плоскости. Тогда поверхность F_n можно задать уравнением

$$\sum_{i=0}^s A_i(x_\nu)(a_1x_1^2 + \cdots + a_{\lambda-1}x_{\lambda-1}^2 + cx_\lambda)^{s-i} = 0,$$

где $n = 2s$, $\nu = \overline{\lambda+1, m}$. Плоскости симметрии поверхности F_n по направлениям векторов N_λ^c являются диаметральными плоскостями квадрики с уравнением $a_1x_1^2 + \cdots + a_{\lambda-1}x_{\lambda-1}^2 + cx_\lambda = 0$.

Доказательство. Множество B_λ^c состоит из диаметральных плоскостей F_n . Диаметральная плоскость, сопряженная вектору $u = (u_i)$, определяется уравнением

$$\sum_i \left(\frac{\partial \Phi_n}{\partial x_i} \right)_{x=u} x_i + \varphi_{n-1}(u) = 0. \quad (2)$$

Пусть B_λ^c содержит две параллельные плоскости по направлениям симметрии u и v с уравнениями

$$\left(\frac{\partial \Phi_n}{\partial x_1} \right)_{x=p} x_1 + \varphi_{n-1}(p) = 0; \quad (3)$$

вектор $p = u$ или v . Обозначим через Π^2 2-плоскость, параллельную u и v . Будем считать $Ox_1 \parallel u$, $Ox_2 \parallel \Pi^2$; тогда $x_\alpha = c_\alpha$ ($\alpha =$

$\pi = \overline{1, m}$ — уравнения Π^2 , вектор $v = (v_1, v_2, 0, \dots, 0)$. По лемме 1 кривая $C_n = \Pi^2 \cap F_n$ порядка n распадается на параболы с общей симметрией ($n = 2s$). Поэтому в Π^2 ее задает уравнение

$$\sum_i a_i f^{s-i} = 0, \quad (4)$$

где $f = x_1^3 + ax_2 + b$ и $a \neq 0$; b, a_i — числа; $f^0 = 1$. Диаметр C_n , приложенный к вектору v , определяется уравнением (3) при $p = v$. Согласно (4), его уравнение имеет вид $2v_1 x_1 + av_2 = 0$ (5). На основании (4) уравнение (1) перепишем так:

$$\sum_i A_i(x_\alpha) \psi^{s-i} = 0; \quad (6)$$

многочлен $\psi = x_1^2 + \psi'(x_\alpha) x_2 + \psi''(x_\alpha)$, $\deg A_i \leq 2j$, $A_0 = a_0$, $\deg \psi' \leq 1$, $\deg \psi'' \leq 2$. Значит, в (5) число a зависит от c_α , если $\deg \psi' = 1$. Но уравнение (3), не содержащее x_α , исключает этот случай, т. е. $\psi' = 0$.

Уравнения (2) и (6) показывают, что все диаметральные плоскости F_n параллельны оси Ox_2 . Следовательно, на Ox_2 лежит несобственная фундаментальная точка F_n [3, п. 1°]. Любой вектор Π^2 , не параллельный Ox_2 , задает направление симметрии поверхности F_n . Ему сопряжена диаметральная плоскость F_n с уравнением вида (3). При $\lambda > 2$ существует плоскость симметрии $\pi \nparallel \Pi^2$ ($0 \in \pi$) по направлению симметрии $\omega \nparallel \Pi^2$ ($\omega \parallel \Pi_c^\lambda$). Так как π является диаметральной плоскостью F_n , то $Ox_2 \parallel \pi$. Если $\Pi_0^2 = \sigma(\Pi^2)$, где $\sigma \in \Omega$ — отражение относительно π , то кривая $\sigma(C_n) \in \Pi_0^2$ состоит из парабол (как и C_n). Несобственная точка $\sigma(C_n)$ лежит на Ox_2 . При соответствующем выборе $Ox_3 \parallel \Pi_0^2$ получим следующее уравнение поверхности F_n :

$$\sum_i B_i(x_{i'}) \chi^{s-i} = 0, \quad (7)$$

где $\chi = x_1^3 + a' x_2 + \chi'(x_{i'})$, $\deg B_i \leq 2j$, $B_0 = c$, $\deg \chi' \leq 2$, $\chi^0 = \psi^0 = 1$, $i' = 1, 4, \dots, m$. Из (6), (7) находим, что многочлен ψ' имеет $a' x_2$. Это дает строение ψ' (и χ'), определяемое B_λ^c . Если $i' = 1$, то $\psi' = d_0 x_3^2 + \dots + d_{\lambda-3} x_{\lambda}^2 + \psi(x_y)$, $A_j = A_j(x_y)$, $y = 1, m$. Теорема доказана.

Теорема 2. Если множество B_λ поверхности F_n содержит диаметральные плоскости с асимптотическими для нее направлениями симметрии, то F_n можно задать уравнением

$$\sum_{i=0}^s B_i(x_y) (b_1 x_1^2 + \dots + b_{\lambda-1} x_{\lambda-1}^2 + c x_\lambda)^{s-i} = 0,$$

$n, y = \overline{k+1, m}$. Плоскости B_λ не являются вырожденными диаметральными плоскостями V_u ($u \in N_\lambda$) поверхности F_n .

Доказательство. Пусть поверхность F_n симметрична относительно плоскостей семейства, определяемого уравнением $x_1 = c$

(8), соответствующие направления симметрии параллельны 2-плоскости $\Pi^2(x_1, x_2)$. Каждая не лежащая на F_n 2-плоскость $\Pi_0^2 \parallel \Pi^2$ пересекает F_n по кривой C_{2s} порядка $2s < n$ с уравнением (4). Значит, уравнение F_n имеет вид

$$\sum_i Z_j(x_\alpha) x^{s-i} = 0, \quad (9)$$

где многочлен $\kappa = x_1^2 + \kappa'(x_\alpha) + \kappa''(x_\alpha)$, $n \geq \deg Z_j + (s-j) \deg \kappa$, $\alpha = \overline{3, m}$. Так как диаметры C_{2s} определяются в Π_0^2 уравнением (8), то $\deg \kappa' = 0$.

Предположим, что $\lambda > 2$. Тогда B_λ содержит бесконечное множество семейств параллельных плоскостей. Поэтому бесконечно множество плоскостей симметрии, проходящих через начало координат O . Отразив Π^2 и семейство (8) относительно любой плоскости B_λ , содержащей O , по ее направлению симметрии $\mu \parallel \Pi^\lambda - \Pi^2$, получим 2-плоскость Π_1^2 и новое семейство параллельных плоскостей, направления симметрии которых определяются векторами Π_1^2 . Так как произвольному направлению N_λ сопряжена только одна плоскость симметрии, то 2-плоскости Π^2 и Π_1^2 пересекаются по оси Ox_2 — она задает асимптотическое направление для C_{2s} . Следовательно, имеем пучок 2-плоскостей с осью Ox_2 ; каждый вектор любой из них, не параллельный Ox_2 , принадлежит N_λ . Поэтому $\kappa'' = a_0 x_1^2 + \dots + a_{\lambda-3} x_\lambda^2 + \tilde{\kappa}(x_\nu)$, $Z_j = Z_j(x_\nu)$, $\gamma = \lambda + 1$, m . Если плоскость симметрии, проходящая через O , является вырожденной диаметральной плоскостью V_μ поверхности F_n , то она входит в состав асимптотического конуса K_n [8]. Уравнение (9) поверхности F_n показывает, что $\{V_\mu\} \cap B_\lambda = \emptyset$. Теорема доказана.

Из теорем 1 и 2 следует характеристический признак параболоида: если при $\lambda = m$ неприводимая над полем комплексных чисел вещественная алгебраическая поверхность имеет параллельные плоскости симметрии, то она является параболоидом.

2°. Пусть векторы N_μ задают неасимптотические направления для поверхности F_n ($N_\mu = N_\mu^c$). Решим полностью задачу нахождения ее общего уравнения; выясним строение множеств N_μ^c и B_μ^c . При этом между элементами N_μ^c и B_μ^c установим взаимно однозначное соответствие; указанные множества определяют G_μ^c .

Теорема 3. *Если множество B_λ^c поверхности F_n не содержит параллельных плоскостей, то F_n определяется уравнением*

$$\sum_{j=0}^s D_j(x_\nu) \left(\sum_{p=1}^t a_p x_p^2 + 2 \sum_{k=1}^{\lambda} \xi_k(x_\nu) x_k \right)^{s-j} = 0,$$

где $n = 2s$, все $a_p \neq 0$, $\deg \xi_k \leq 1$, $1 \leq t \leq \lambda \leq m$, $\gamma = \lambda + 1$, m . Множество B_λ^c состоит из диаметральных плоскостей квадрики с уравнением

$$\sum_{p=1}^t a_p x_p^2 + 2 \sum_{k=1}^{\lambda} \xi_k(x_\nu) x_k = 0.$$

Доказательство. Направлениям множества N_λ^c поверхности F_n без параллельных плоскостей симметрии, принадлежащих B_λ^c , сопряжены диаметральные $(\lambda - 1)$ -плоскости $(\lambda - 1)$ -поверхности $\Pi_0^{\lambda-1} \cap F_n$. Если $\lambda = 2$, то каждая 2-плоскость, параллельная Π_0^2 , пересекает F_n по коникам (лемма 1). При $\lambda > 2$ возьмем такое бесконечное подмножество N_λ^c , линейная оболочка которого представляет собой $(\lambda - 1)$ -плоскость $\Pi_0^{\lambda-1}$. В случае $\lambda > 3$ предположим, что $F_n^{\lambda-2} = \Pi_0^{\lambda-1} \cap F_n$ ($\Pi_0^{\lambda-1} \parallel \Pi^{\lambda-1}$) распадается на вещественные и мнимые $(\lambda - 2)$ -квадратики с общей симметрией. Считая $\Pi_0^{\lambda-1} \parallel Ox_\beta$ ($\beta = 1, \lambda - 1 > 1$), получим такое уравнение $F_n^{\lambda-2}$ в $\Pi_0^{\lambda-1}$ при подходящем выборе Ox_β :

$$\sum_j a_j g^{s-j} = 0; \quad (10)$$

квадратичный многочлен $g = \sum_{\beta'} b_{\beta'} x_{\beta'}^2 + \sum_{\beta} c_\beta x_\beta + d$, $1 < \beta' < \lambda - 1$, $b_{\beta'} \neq 0$, $g^0 = 1$. Значит, уравнение поверхности F_n имеет вид

$$\sum_j D_j(x_{\beta'}) \xi^{s-j} = 0, \quad (11)$$

т.е. $\xi = \sum_{\beta'} b_{\beta'} x_{\beta'} + \sum_{\beta} \xi_\beta(x_{\beta'}) x_\beta + \xi_\lambda(x_{\beta''})$, $\deg D_j \leq 2j$, $D_0 = a_0$, $\deg \xi_\lambda \leq 1$, $\deg \xi_\lambda < 2$, $\xi^0 = 1$, $\beta'' = \overline{\lambda, m}$. Коэффициенты c_β , d многочлена g определяются ξ_β , ξ_λ и $\Pi_0^{\lambda-1}$.

В силу строения N_λ^c через каждую прямую $\Pi_0^{\lambda-1}$ неасимптотичного для F_n направления проходит 2-плоскость, не принадлежащая $\Pi_0^{\lambda-1}$ пересекающая F_n по коникам. Такой 2-плоскостью будем считать координатную $\Pi_0^2(x_{\lambda-1}, x_\lambda)$. При этом уравнение (11) записаем так:

$$\sum_i H_i(x_{i'}) \eta^{s-i} = 0; \quad (12)$$

т.е. $\eta = b_{11} x_{\lambda-1}^2 + b_{12} x_{\lambda-1} x_\lambda + b_{22} x_\lambda^2 + b_{13}(x_{i'}) x_{\lambda-1} + b_{23}(x_{i'}) x_\lambda + b_{14}(x_{i'}) + \eta''(x_{i'})$, $b_{11}^2 + b_{12}^2 + b_{22}^2 > 0$, $\deg b_{13}$ (и b_{23}) ≤ 1 , $\deg \eta'' \leq 2$, $i' = i \neq \lambda - 1, \lambda$; $\beta = \beta' < \lambda - 1$, $\gamma = \overline{\lambda + 1, m}$. Так как $\beta' = \overline{\lambda, m}$, то все одночлены (12), имеющие $x_{\lambda-1}$, находятся без использования D_s . Многочлен $\xi_\lambda = cx_\lambda^2 + \xi'(x_\lambda) x_\lambda + \xi''(x_\lambda)$, $\deg \xi'' \leq 1$, $\deg \xi'' < 2$. Если $a_0 = H_0 = 1$ и $b_{\lambda-1} \neq 0$, что сохраняет единицу, то коэффициенты при $x_{\lambda-1}^{2s}$, $x_{\lambda-1}^{2s-2} x_\lambda^2$, $x_{\lambda-1}^s x_\lambda^s$, $x_{\lambda-1}^{2s-2} x_\lambda$ дают равенства: $b_{\lambda-1} = b_{11}$, $c = b_{22}$, $b_{12} = a$ ($\xi_{\lambda-1} = ax_\lambda + \dots$), $b_{14} = \xi'$. Значит, $D_j = D_j(x_{i'})$, $j > 0$; $\Pi_0^{\lambda-1}$ пересекает F_n по $(\lambda - 1)$ -коникам в общей симметрии. Теорема доказана.

На теоремы 3 следует характеристический признак центральной квадратичной неприводимой над полем комплексных чисел вещественная алгебраическая поверхность, инвариантная относительно группы G_m , не имеет параллельных плоскостей симметрии, то

она является центральной квадрикой. В случае мнимого асимптотического конуса K_n (дополнительное условие) получаем признак эллипсоида.

Вообще говоря, Π_c^{λ} принадлежит такой λ' -плоскости $\Pi_c^{\lambda'} (\lambda' > \lambda)$, что любая $\Pi_0^{\lambda'} \parallel \Pi_c^{\lambda'}$ пересекает F_n по $(\lambda' - 1)$ -квадрикам с общей симметрией. Для получения общего уравнения поверхности F_n достаточно рассмотреть $\Pi_c^{\mu_0}$, где $\mu_0 = \max \{\lambda'\}$, $\mu_0 \geq \lambda$. Из теорем 1 и 3 находим, что некоторая μ' -плоскость $\Pi_c^{\mu'}(x_r), r = \overline{1, p} \leq \left[\frac{\mu'}{2} \right] - 1$ -линейных оболочек множеств $N_{\mu_j}^c \subset N_{\mu'}$ соответственно (числа μ_j при $j > 0$ аналогичны μ_0); $N_{\mu'}^c$ и $B_{\mu'}^c$ определяют группу $G_{\mu'}^c$. При этом справедлива

Теорема 4. Общее уравнение поверхности F_n , инвариантной относительно группы $G_{\mu'}^c$, можно записать так: $F(f_j, x_{\mu'+1}, \dots, x_m) = 0, j = \overline{0, p} \leq \left[\frac{\mu'}{2} \right] - 1, n = 2s$, где квадратичные многочлены $f_0(x_1, \dots, x_m), f_1(x_{\mu_0+1}, \dots, x_{\mu_0+\mu_1}), \dots, f_p(x_{\mu'-\mu_p+1}, \dots, x_m)$ содержат все указанные в скобках переменные (и зависят еще от $x_{\mu'+1}, \dots, x_m$), F есть многочлен от всех своих аргументов, имеющий степень s относительно f_j ; при заданном j μ_j -плоскость $\Pi_0^{\mu_j} \parallel \Pi_c^{\mu_j}$ пересекает F_n по $(\mu_j - 1)$ -квадрикам с общей симметрией. Плоскости симметрии поверхности F_n по направлениям векторов $N_{\mu_j}^c$ являются диаметральными плоскостями квадрик с уравнениями $f_j = 0$; при $p > 0$ эти квадрики — цилиндры.

И наоборот, если поверхность F_n задана уравнением вида $F = 0$, то она инвариантна относительно группы $G_{\mu'}^c$; диаметральные плоскости вышеуказанных квадрик являются плоскостями симметрии F_n , принадлежащими ее множеству диаметральных плоскостей.

3°. Найдем общее уравнение поверхности F_n , инвариантной относительно группы G_{μ}^t . Индекс t означает, что линейная оболочка произвольной $G_{\mu}^t(\mu)$ -орбиты вектора $\mu \in N_{\mu}^t$ — скажем, Π_t^{λ} — удовлетворяет такому условию: хотя бы одна λ -плоскость, не лежащая на F_n и параллельная Π_t^{λ} , не пересекает F_n по $(\lambda - 1)$ -квадрикам.

Теорема 5. Если поверхность F_n инвариантна относительно группы G_{λ}^t , то число $\lambda > 2$ и уравнение F_n допускает вид

$$\sum_{j=0}^s P_j(x_{\gamma})(x_1 \dots x_{\gamma})^{s-j} = 0,$$

где $n \geq \deg P_j + \lambda(s - j)$, $\gamma = \overline{\lambda + 1, m}$. Множество B_{λ}^t состоит из плоскостей симметрии поверхности с уравнением $x_1 \dots x_{\lambda} = c \neq 0$.

Доказательство. На основании теоремы 2 параллельные плоскости не входят в множество B_h^t . При этом Π_h^t есть сумма трех 2-плоскостей, что каждая 2-плоскость с собственной точкой F_n параллельна любой 2-плоскости этой суммы, пересекает F_n по коникам (лемма 1). Рассмотрим первоначально случай $\lambda = m = \theta$. Пусть $E^3 = \Pi^2(x_1, x_2) + \Pi_0^2(x_2, x_3)$; каждая из указанных плоскостей не лежит на F_n и параллельна $n' > n$ векторам множества M_h^t (коллинеарные векторы не различаются). Обозначим через Π_h^t плоскость с уравнением $x_3 = h$, такую, что $\Pi_h^t \cap F_n \neq \emptyset$ в E^3 . Кривая C_{2s}^h ($2s < n$) определяется в Π_h^t уравнением (10), если в η добавить одночлен $b_0 x_1 x_2$. Поэтому уравнение F_n имеет вид

$$\sum_j A_j(x_3) \xi^{s-j} = 0; \quad (13)$$

многочлен $\eta = \xi_{11}(x_3) x_2^2 + \xi_{12}(x_3) x_1 x_2 + \xi_{22}(x_3) x_3^2 + \xi_{13}(x_3) x_1 + \xi_{23}(x_3) x_2 + \xi_{33}(x_3)$, $n \geq \deg A_j + (s-j) \deg \xi$. Согласно выбору Π_0^2 , уравнение (13) перепишем так:

$$\sum_i B_i(x_1) \eta^{s-i} = 0, \quad (14)$$

т.е. $\eta = \eta_{11}(x_1) x_2^2 + \eta_{12}(x_1) x_1 x_2 + \eta_{22}(x_1) x_3^2 + \eta_{13}(x_1) x_1 + \eta_{23}(x_1) x_2 + \eta_{33}(x_1)$, $n \geq \deg B_i + (s-i) \deg \eta$. Здесь ξ и η не имеют неизвестного множителя — многочлена от x_3 и x_1 соответственно.

Плоскость симметрии F_n , сопряженную η , зададим уравнением

$$\sum_{i=1}^3 p_i(u) x_i + p_4(u) = 0. \quad (15)$$

Тогда $p_1 p_3 \neq 0$ в случае $\eta \parallel \Pi^2$. Действительно, если, например, $p_1 = 0$, то $\xi_{11}, \xi_{22}, \xi_{23}$ равны тождественно нулю и (13) становится уравнением вида (6); F_n имеет параллельные плоскости симметрии, что исключается. Следовательно, кривая C_{2s}^h распадается на центральные коники; уравнение (15) при $x_3 = h$ определяет две оси симметрии. Так как p_1 и p_3 не зависят от h , то, в частности, многочлены $\xi_{11}, \xi_{12}, \xi_{22}$ постоянны: $\xi_{11} = b_1, \xi_{12} = b_0, \xi_{22} = b_1$, $A_j(h) = a_j$. Аналогично находим $\eta_{11} = b_{11}, \eta_{12} = b_{12}, \eta_{22} = b_{12}$ (см. (12) и (14)).

Такие две плоскости симметрии пересекаются по прямой l (их симметрии симметрии параллельны Π^2). Так как центры кривых симметрии лежат на l , то любая плоскость B_3^t по направлению симметрии Π^2 проходит через l . При этом существует $\sigma_0 \in G_3^t | \sigma_0(\Pi^2) \ni l$ (такой $\sigma_0(\Pi^0) = \Pi_0^2$ и $Ox_3 = l$, получим $p_3 = p_4 = 0$). Поэтому $p_1 = 0$.

Если все плоскости B_3^t по направлениям симметрии $\eta \parallel \Pi_0^2$ проходят через Ox_1 (что сохраняет общность), то они определяются уравнением (15) при $p_1 = p_4 = 0$. Значит, $\eta_{13} = \eta_{23} = 0$. Поскольку

ку Π^2 и Π^2 пересекают F_n по несобственным прямым, скажем, k -кратности q , несобственная точка оси Ox_2 является $2q$ -кратной точкой F_n . Следовательно, Ox_2 не задает направления симметрии. Диаметры кривой C_{2s}^t — ее оси симметрии — являются попарно сопряженными; поэтому уравнения $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$ не определяют плоскостей симметрии F_n . Так как число несобственных прямых F_n не больше n , то произвольный элемент $\sigma \in G_3^t$ каждую из указанных плоскостей переводит в координатную плоскость. Значит, старшая форма уравнений (13) и (14) содержит член $x_1 x_2 x_3$. Поэтому $b_1 = b_2 = b_{11} = b_{22} = 0$ и, следовательно, $A_0 = h_0 x_3^3$, $n = 3s$. Сравнение (13) и (14) показывает строение всех $A_j = h_j x_3^{s-j}$ ($j > 0$); h_j — вещественные числа. При этом $\deg \xi_{33} = \deg \eta_{33} = 0$, $P_j = h_j$.

В случае $\lambda = 3 < m$ существует 3-плоскость $\Pi_0^3 \not\subset F_n$ с уравнениями $x_\gamma = c_\gamma$ ($\gamma = 4, \overline{m}$), не пересекающая F_n по 2-квадрикам. Значит, вторая поверхность $\Pi_0^3 \cap F_n$ определяется в Π_0^3 уравнением

$$\sum_i d_i (x_1 x_2 x_3)^{s-i} = 0, \quad (16)$$

где d_i — вещественные числа. Строение Π_i^3 показывает, что все плоскости B_3^t проходят через одну $(m-3)$ -плоскость, которую будем считать параллельной Ox_γ . На основании (16) получаем такое уравнение F_n :

$$\sum_i [P_j(x_\gamma) + P_j'(x_i)] (x_1 x_2 x_3)^{s-i} = 0; \quad (17)$$

$P_j(x_1, x_2, x_3, c_\gamma) = 0$, $i = 1, \overline{m}$. Из (17) следует, что каждая 3-плоскость, параллельная Π_i^3 , не пересекает F_n по 2-квадрикам; поэтому $P_j'(x_i) = 0$.

Если $3 < \lambda < m$, то предположим, что существует $(\lambda-1)$ -плоскость $\Pi^{\lambda-1} \parallel \Pi_i^3$, пересекающая F_n по тетраэдральным $(\lambda-2)$ -поверхностям. Тогда, как и выше, получим нужное уравнение поверхности F_n . Теорема доказана.

Тетраэдральная поверхность с уравнением $x_1 \dots x_m = c \neq 0$ инвариантна относительно группы $D_m' \simeq D_m \subset G_m^t$. Из теоремы 5 находим характеристический признак этой поверхности: если неприводимая над полем комплексных чисел вещественная алгебраическая поверхность инвариантна относительно группы G_m^t , то она является тетраэдральной поверхностью. Его формулировка допускает замену G_m^t на группу G_m , содержащую D_m' как единственную не приводимую конечную группу симметрий.

Пусть μ -плоскость $\Pi_i^\mu(x_r)$, $r = \overline{1, \mu}$, разлагается в прямую сумму μ -плоскостей $\Pi_i^{\mu_j}$ ($j = 0, p$), которые являются линейными обобщениями орбит $N_{\mu_j}^t$ ($\mu_0 = \lambda$). С помощью теоремы 5 устанавливаем, что число $p \leq \left[\frac{\mu}{3} \right] - 1$ и любая μ_k -плоскость ($0 < k < p$)

не лежащая на поверхности F_n и параллельная Π_{μ}^{λ} , пересекает F_n по вещественным и, может быть, мнимым тетраэдральным ($\mu_k = -1$)-поверхностям. При этом существенно используется следующее: плоскость симметрии π поверхности F_n , скажем, по направлению $u \in N_{\mu}^t$ является компонентой сопряженной u диаметральной квадрики поверхности, определяемой уравнением $x_1 \dots x_v = c$; далее, координатную систему можно выбрать так, что произвольная π параллельна осям Ox_{v+1}, \dots, Ox_m . Итак, имеет место

Теорема 6. Общее уравнение поверхности F_n , инвариантной относительно группы G_{μ}^t , можно записать так:

$$F(\xi_j, x_{\mu+1}, \dots, x_m) = 0, \quad j = \overline{0, p} < \left[\frac{\mu}{3} \right] - 1,$$

где $\xi_0 = x_1 \dots x_{\mu_0}$, $\xi_1 = x_{\mu_0+1} \dots x_{\mu_0+\mu_1}$, $\xi_p = x_{\mu-\mu_0+1} \dots x_{\mu}$; F есть многочлен от всех своих аргументов, его степень относительно ξ_j не превосходит $\left[\frac{n}{3} \right]$. Плоскости симметрии поверхности F_n по направлениям векторов орбит $N_{\mu_j}^t$ являются плоскостями симметрии поверхностей с уравнениями $\xi_j = c$ соответственно.

Справедливо и обратное утверждение: если поверхность F_n задана уравнением вида $F = 0$, то она инвариантна относительно группы G_{μ}^t .

4°. Пусть направления симметрии являются асимптотическими для поверхности F_n , причем линейная оболочка каждой $G_{\mu}(u)$ -орбиты вектора $u \in N_{\mu}$, например Π^{λ} , удовлетворяет следующему условию: хотя бы одна λ -плоскость, не лежащая на F_n и параллельная Π^{λ} , пересекает F_n по $(\lambda - 1)$ -квадрикам с общей симметрией. Выделим этот случай тем, что в соответствующих обозначениях $t, 3^o$ вместо t поставим индекс s . А. Е. Велесько [9] доказал существование групп G_{μ} с бесконечно порожденными кольцами инвариантов. В основе его конструкции лежит известный пример Нагаты линейной группы, кольцо инвариантов которой бесконечно порождено. Из теорем 4 и 6 следует, что каждая такая G_{μ} является группой G_{μ}^s . Выясним первоначально строение множества B_{λ}^s .

Теорема 7. Поверхность F_n без параллельных плоскостей симметрии, инвариантная относительно группы G_{λ}^s , определяется уравнением

$$\sum_{j=0}^s R_j(x_v) \xi^{s-j} = 0,$$

$$\xi = \sum_{p=1}^{\tau} a_p x_p^2 + 2 \sum_{k=1}^{\lambda} \xi_k (x_v) x_k, \quad 1 < \tau < \lambda < m,$$

$a_p \neq 0$, $2s > n \geq \deg R_j + 2(s-j)$, $\deg \xi_k \leq 1$, $v = \lambda + 1, m$. Множество B_{λ}^s состоит из диаметральных плоскостей квадрики с уравнением $\xi = 0$.

Эта теорема аналогична теореме 3. Соответствующие поверхности существенно отличаются своими геометриями, хотя их уравнения и близки по форме.

Доказательство. Установим строение B_λ^s с использованием диаметральных поверхностей. Согласно условию на G_λ^s , запишем уравнение F_n :

$$\sum_i R_i(x_v) \zeta^{s-i} = 0; \quad (18)$$

многочлен $\zeta = \sum_{p=1}^t \xi_p(x_v) x_p^2 + 2 \sum_{k=2}^\lambda \xi_k(x_v) x_k$, все $\xi_p \neq 0$ и ξ_p, ξ_k не имеют непостоянного множителя.

Плоскость симметрии π_u , сопряженную вектору $u \parallel \Pi_s^\lambda$ ($u_v = 0$), зададим уравнением

$$\sum_i p_i(u) x_i + p_{m+1}(u) = 0. \quad (19)$$

Если $x_v = c_v$ — уравнения $\Pi_0^\lambda \parallel \Pi_s^\lambda$, то $(\lambda - 1)$ -поверхность $\Pi_0^\lambda \cap F_n$ симметрична относительно $(\lambda - 1)$ -плоскости $\Pi_0^\lambda \cap \Pi_u$, определяемой в Π_0^λ уравнением

$$\sum_k p_k(u) x_k + \sum_v p_v(u) c_v + p_{m+1}(u) = 0. \quad (20)$$

Согласно виду ζ , уравнение (20) перепишем так:

$$\sum_p \xi_p(c_v) u_p x_p + \sum_k \xi_k(c_v) u_k = 0. \quad (21)$$

Из (20), (21) следует, что

$$p_h(u) \equiv 0, h = \overline{\tau + 1, \lambda}. \quad (22)$$

На основании (20) коэффициенты при x_p в (21) не зависят от c_v . Значит, многочлены $\xi_p = a_p \zeta'(x_v)$, где a_p — числа, $\deg \zeta' \geq 0$.

В случае $\zeta' \equiv 1$ находим следующее уравнение диаметральной поверхности $D_{n'-1}(u)$ порядка $n' - 1$:

$$\left(\sum_p a_p u_p x_p + \sum_k \xi_k u_k \right) \sum_{j=0}^{s-1} (s-j) \zeta^{s-j-1} R_j = 0; \quad (23)$$

здесь n' есть степень (18) без многочлена R_s . Поскольку π_u является компонентой $D_{n'-1}(u)$ [10], уравнение (23), с учетом (19) и (22), принимает вид

$$\left[\sum_{i \neq h} p_i(u) x_i + p_{m+1}(u) \right] \rho(u, x) = 0. \quad (24)$$

В (23) и (24) не все функциональные коэффициенты при x_p равны тождественно нулю согласно (21). Сравнив их, получим

$$\rho = \delta(u) \sum_{j=0}^{s-1} (s-j) \zeta^{s-j-1} R_j. \quad (25)$$

Уравнение (24) показывает, что $\deg p = n' - 2$; при этом (23) и (25) дают $\deg \xi_k < 1$. Положим

$$\xi_k = \sum_{\gamma} b_{k\gamma} x_{\gamma} + b_k, \quad k = \overline{1, \lambda}. \quad (26)$$

Тогда уравнение (19) становится таким:

$$\sum_p a_p u_p x_p + \sum_{\gamma} (\sum_k b_{k\gamma} u_k) x_{\gamma} + \sum_k b_k u_k = 0. \quad (27)$$

Подставив значения ξ_k , определенные формулами (26), в многочлен $\zeta = \xi$, получим, что уравнение (27) задает диаметральную плоскость квадрики Φ_2 с уравнением $\zeta = 0$, сопряженную вектору u .

Следовательно, диаметральные плоскости Φ_2 , сопряженные векторам $u | u_{\gamma} = 0$, составляют множество B_{λ}^s ; векторы Π_s^{μ} , не определяющие асимптотических направлений для Φ_2 , принадлежат N_{λ}^s . Из уравнения (27) видно, что при $\tau < \lambda$ плоскости B_{λ}^s содержат оси Ox_h .

Если $\deg \zeta' > 0$, то член $\sum_p a_p u_p x_p$ в уравнении (23) и правая часть формулы (25) приобретают множитель ζ' . Поэтому все ξ_k имеют множитель ζ' , что исключается. Теорема доказана.

Плоскости множества B_{λ}^s проходят через одну точку, скажем, O ; тогда все $b_k = 0$. Коэффициенты при x_{γ} в уравнении (27) могут обращаться тождественно в нуль. Если это имеет место в случае $\gamma = \gamma_0$, то $b_{k\gamma_0} = 0$. Выберем оси координат так, что в (27) числа $b_{k\gamma_1} = 0$, $\gamma_1 = \overline{\lambda + 1}$, $m' < m$. Любая из плоскостей B_{λ}^s содержит оси $Ox_{\tau+1}, \dots, Ox_{m_0}$, где $m_0 = \lambda$ или $m' > \lambda$. При этом предполагается, что плоскости $B_{\lambda}^s(m_0 - \tau)$ параллельны и только; многочлены

$$\xi_k = \xi_k(x_{\gamma_2}), \quad \gamma_2 = \overline{m_0 + 1, m}. \quad (28)$$

Множество N_{μ}^s при $\mu > \lambda$ состоит из нескольких орбит; μ -плоскость Π_s^{μ} является суммой различных μ_j -плоскостей $\Pi_s^{\mu_j}$ ($j = \overline{0, q}$), $\mu_j > \lambda$. Так как множество B_{λ}^s инвариантно относительно всей группы G_{μ}^s , то справедлива

Лемма 2. *Если $\mu > \lambda$, то $m_0 = m'$ и μ_r -плоскость $\Pi_s^{\mu_r}$ ($0 < r < q$) параллельна $(m' - \tau)$ -плоскости $\Pi^{m'-\tau}(x_{\tau+1}, \dots, x_{m'})$.*

Плоскости $B_{\mu_r}^s$ параллельны осям Ox_p ($p = \overline{1, \tau}$), которые заносят направления симметрии N_{λ}^s . Так как векторы $\Pi^{\lambda-\tau}(x_h)$ не входят в N_{λ}^s , то возможен случай $\Pi^{\lambda-\tau} \cap \Pi_s^{\mu_r} \neq 0$. Следовательно, $\Pi^{\lambda-\tau}$ не будет, вообще говоря, прямой суммой $\Pi_s^{\mu_j}$.

Рассмотрим теперь μ_1 -плоскость $\Pi_s^{\mu_1}(x_l)$, $l = \overline{\alpha + 1, \alpha + \mu_1 - m'} (\alpha > \tau, \alpha + \mu_1 > \lambda)$. Уравнение F_n (с учетом леммы 2)

принимает вид

$$\sum_{j=0}^{s'} S_j(x_0) \Theta^{s'-j} = 0, \quad (29)$$

где

$$\Theta = \sum_{\beta=\lambda+1}^{\tau_0} a_\beta x_\beta^2 + 2 \sum_l \Theta_l(x_{v'}) x_l, \quad n \geq \deg S_i + 2(s' - j), \quad S_0 \neq 0,$$

$$\lambda + 1 \leq \tau_0 \leq \alpha + \mu_1, \quad v = i \neq l, \quad v' = \overline{\alpha + \mu_1 + 1, m}.$$

Пусть $\Pi_s^\lambda \cap \Pi_s^{\mu_1} = \Pi^\varepsilon(x_\omega)$, $w < \lambda$. Любая прямая, параллельная каждой из осей Ox_ω , либо лежит на поверхности Φ_2 (п. 4°), либо пересекает ее в одной точке. Поэтому Ox_ω не задают направлений симметрии и, значит, степень x_ω в Θ равна единице. Для определенности,

$$w = \overline{\alpha + 1}, \quad \varepsilon \leq \lambda. \quad (30)$$

Многочлены Θ_l не содержат x_ω . Левая часть (29) имеет одночлены $x_v x_\omega$ ($v \neq w$) в степени s' ($j = 0$). Так как в (18) их наибольшая степень равна s , то число $s' = s$. Приравняв функциональные коэффициенты при x_ω^s уравнений (18) и (29), получим

$$R_0 \xi_\omega^s = S_0 \Theta_\omega^s. \quad (31)$$

Следовательно, многочлены R_0 , S_0 (как и ξ_ω , Θ_ω) зависят только от переменных x_v , $v' = \overline{\alpha + \mu_1 + 1, m}$.

Так как поверхность F_n отлична от цилиндра, то $\xi_\omega \neq c \xi_{w_1}$ ($\alpha + 1 \leq w_1, w_2 \leq \varepsilon$), если $\varepsilon > d + 1$, см. (30). Поскольку (29) является видоизмененным уравнением (18), из (31) находим $R_0 = S_0$ и $\xi_{w_1} = \Theta_{w_1}$, $\xi_{w_2} = \Theta_{w_2}$. Значит имеет место

Лемма 3. В случае $\varepsilon > \alpha + 1$ выполняются соотношения $R_0 = S_0$ и $\xi_{w'} = \Theta_{w'}$, где $w' \in \{w\}$.

Пусть $m_1 = \max \{\lambda'\}$, где λ' есть размерность $\Pi_s^{\lambda'} \parallel \Pi_s^\lambda$ ($\lambda' \geq \lambda$), пересекающей F_n по $(\lambda' - 1)$ -квадрикам с общей симметрией. Введем аналогично число $m_2 = \max \{\mu'_i\}$ для $\Pi_s^{\mu'_i} \parallel \Pi_s^{\mu_1}$ ($\mu'_i \geq \mu_1$). Будем считать $\lambda = m_1$ и $\mu = m_2$; $\Pi_s^{m_1}$, $\Pi_s^{m_2}$ соответствуют множествам $N_{m_1}^s$, $N_{m_2}^s$.

Теорема 8. $\dim(\Pi_s^{m_1} \cap \Pi_s^{m_2}) \leq 1$.

Доказательство. Предположим, что $\Pi_s^{m_1}$ и $\Pi_s^{m_2}$ пересекаются по p -плоскости ($p > 1$), которая параллельна оси Ox_ω , $w = \overline{\alpha + 1}, \varepsilon = \alpha + p$. На основании леммы 3 $\xi = \xi_0 + z$, $\Theta = \Theta_0 + z$, (32), где $z = 2 \sum_w \xi_\omega x_\omega$. Уравнение F_n имеет вид

$$\sum_{k=0}^s \left(\sum_{h=0}^k C_{s-k}^h R_h \xi_0^{k-h} \right) z^{s-i} = 0. \quad (33)$$

Перепишем его так:

$$\sum_{j=0}^s \left(\sum_{k=0}^j C_{s-k}^{s-j} S_k \Theta_0^{j-k} \right) z^{s-j} = 0; \quad (34)$$

$$\sum_{k=0}^j C_{s-k}^{s-j} R_k \xi_0^{j-k} = \sum_{k=0}^j C_{s-k}^{s-j} S_k \Theta_0^{j-k}, \quad j = \overline{0, s}. \quad (35)$$

Возьмем уравнение

$$\sum_{j=0}^s P_j(x_{\gamma'}) (\xi_0 + \Theta_0 + z)^{s-j} = 0, \quad \gamma' = \overline{\alpha + \mu_1 + 1, m}. \quad (36)$$

Оно допускает вид

$$\sum_{j=0}^s \left[\sum_{k=0}^j C_{s-k}^{s-j} P_k (\xi_0 + \Theta_0)^{j-k} \right] z^{s-j} = 0. \quad (37)$$

Убедимся, что существуют многочлены $P_j(x_{\gamma'})$, при которых каждое из уравнений (33), (34) представимо в виде (37).

Считая в (37) P_k неопределенными многочленами от x_i ($i = \overline{1, m}$), рассмотрим соотношения

$$\sum_{k=0}^j C_{s-k}^{s-j} R_k \xi_0^{j-k} = \sum_{k=0}^j C_{s-k}^{s-j} P_k (\xi_0 + \Theta_0)^{j-k}. \quad (38)$$

Из них однозначно находятся P_k как многочлены от ξ_0 , Θ_0 и R_k (или S_k). В частности, $P_0 = R_0(x_{\gamma'})$. Выберем натуральное $r \mid 1 \leq r \leq s$. Согласно (35) и (38), P_1 равен любому из многочленов $R_1 - sR_0\Theta_0$, $S_1 - sR_0\xi_0$ ($r = 1$), которые не содержат переменных ($k' \in \{k\}$) и $x_{l'} (l' \in \{l\})$ соответственно. Значит, $P_1 = P_1(x_{\gamma'})$. Предположим, что в случае $r > 2$ $P_j = P_j(x_{\gamma'})$, если $j \mid 1 < j < r \leq s$. В левой и правой частях (38), $j = r$, функциональные коэффициенты при $\xi_0^{j'} (j' = \overline{0, r})$ одинаковы. Следовательно,

$$P_r = R_r - \sum_{k=0}^{r-1} C_{s-k}^{s-r} P_k \Theta_0^{r-k}. \quad (39)$$

Аналогично, с учетом (35), находим

$$P_r = S_r - \sum_{k=0}^{r-1} C_{s-k}^{s-r} P_k \xi_0^{r-k}. \quad (40)$$

Так как $x_{k'}$ и $x_{l'}$ не входят в правые части формул (39) и (40), то $P_r = P_r(x_{\gamma'})$.

Из уравнения (36) видно, что любая из $(m - \alpha - \mu_1)$ -плоскостей с уравнениями $x_{\gamma'} = c_{\gamma'}$ пересекает F_n по $(m - \alpha - \mu_1 - 1)$ -квадрикам. Поскольку это невозможно, $\dim(\Pi_s^{m_1} \cap \Pi_s^{m_2}) \leq 1$ ($\alpha = m_1$, $\mu_1 = m_2$). Теорема доказана.

Так как доказательство теоремы 8 основано на существовании ненулевой части z многочленов ξ и Θ , см. (32), то при $\Pi_s^{m_1} \cap \Pi_s^{m_2} = \emptyset$ будет $\xi_e \neq \Theta_e$ и $R_0(x_{\gamma'}) = R'_0 \Theta_e^s$, $S_0(x_{\gamma'}) = R'_0 \xi_e^s$ (41).

Теперь уравнения (33) и (34) при $\Pi_s^{m_1} \cap \Pi_s^{m_2} \neq 0$ запишем так:

$$\sum_{l=0}^s R_l(x_\gamma) [\sum_{\rho=1}^\tau a_\rho x_\rho^2 + 2 \sum_{k=1}^\lambda \xi_k(x_{\gamma_2}) x_k]^{s-l} = 0, \quad (42)$$

$$\sum_{l=0}^s S_l(x_\nu) [\sum_{\beta=\lambda+1}^{\tau_0} a_\beta x_\beta^2 + 2 \sum_{i=\lambda}^{\lambda+\mu_1-1} \Theta_i(x_{\gamma'}) x_i]^{s-l} = 0, \quad (43)$$

где R_0, S_0 удовлетворяют условиям (41); $\gamma = \overline{\lambda + 1}, m, 1 \leq \tau < \lambda$, $\lambda + 1 \leq \tau_0 \leq \lambda + \mu_1 - 1$, $\gamma' = \overline{\lambda + \mu_1}, m, v = i \neq l$ и $\gamma_2 = \overline{m' + 1}$. Следовательно, уравнение поверхности F_n , инвариантной относительно группы $G_\mu | \Pi_s^{m_1} \cap \Pi_s^{m_2} \neq 0$, приводится к любому из видов (42) и (43).

Список литературы: 1. Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. М., 1972. 334 с. 2. Игнатенко В. Ф. Алгебраические поверхности с бесконечным множеством плоскостей косой симметрии в пространстве E^m // Дифференц. геометрия многообразий фигур. 1976. Вып. 7. С. 34—39. 3. Игнатенко В. Ф. О диаметральных плоскостях и плоскостях косой симметрии алгебраической поверхности пространства E^m // Укр. геометр. сб. 1977. Вып. 20. С. 35—46. 4. Игнатенко В. Ф. О строении инвариантов бесконечных групп, порожденных отражениями. Симферополь, 1986. 27 с. Деп. в ВИНИТИ 07.08.86, № 5608—86. 5. Залесский А. Е. Приводимые линейные группы, порожденные псевдоотражениями // Вестн АН БССР. 1983. № 5. С. 3—9. 6. Игнатенко В. Ф. О строении фигуры с бесконечным множеством плоскостей косой симметрии // Теория функций и ее прил. Кемерово, 1985. С. 56—59. 7. Игнатенко В. Ф. Некоторые вопросы геометрической теории инвариантов групп, порожденных ортогональными и косыми отражениями // Итоги науки и техники. Сер. Пробл. геометр. 1984. 16. С. 195—229. 8. Игнатенко В. Ф., Лейбин А. С. К случаю вырождения уравнения диаметральной плоскости симметричной поверхности в E^m // Укр. геометр. сб. 1975. Вып. 17. С. 58—62. 9. Велеско А. Е. Существование групп, порожденных отражениями, с бесконечно порожденными кольцами инвариантов // Докл. АН БССР. 1986. 30, № 2. С. 105—107. 10. Игнатенко В. Ф. Некоторые приложения диаметральной теории алгебраической поверхности в пространстве E^m // Укр. геометр. сб. 1984. Вып. 27. С. 49—53.

Поступила в редакцию 27.10.87

УДК 514

Н. И. КОВАНЦОВ, П. А. ТАДЕЕВ

ОБ ОДНОМ ОПРЕДЕЛЕНИИ КАНОНИЧЕСКОЙ
ПЛОСКОСТИ ПОВЕРХНОСТИ В ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

При изучении локальных свойств поверхностей в проективном пространстве с каждой исследуемой точкой обычно связывают иерархии простейшие геометрические образы: точки, прямые, кривые второго порядка. Особый интерес в проективно-дифференциальной геометрии поверхностей представляет канонический пучок прямых [1]. Известно множество эквивалентных определений прямых канонического пучка (см., напр., [1 — 3]).

В настоящей работе найдены две новые конструкции, приводящие к известным прямым канонического пучка — прямой Картана и оси Чеха. С помощью этих конструкций выделены некоторые семейства инвариантных кривых. На основании одной из приведенных конструкций отмечено, что определение нормали Фубини, предложенное Бомпиани в работе [4] и цитируемое Фубини и Чехом в книге [3], является неверным.

Рассмотрим в трехмерном проективном пространстве P_3 поверхность σ , отнесенную к нормальному реперу С. П. Финикова [2]. Деривационные уравнения поверхности σ в этом случае имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial u} &= \frac{1}{2} \frac{\partial \ln \gamma}{\partial u} M + M_1, \quad \frac{\partial M}{\partial v} = \frac{1}{2} \frac{\partial \ln \beta}{\partial v} M + M_2, \\ \frac{\partial M_1}{\partial u} &= BM - \frac{1}{2} \frac{\partial \ln \gamma}{\partial u} M_1 + \beta M_2, \quad \frac{\partial M_1}{\partial v} = lM + \frac{1}{2} \frac{\partial \ln \beta}{\partial v} M_1 + M_3, \\ \frac{\partial M_2}{\partial u} &= kM + \frac{1}{2} \frac{\partial \ln \gamma}{\partial u} M_2 + M_3, \quad \frac{\partial M_2}{\partial v} = AM + \gamma M_1 - \frac{1}{2} \frac{\partial \ln \beta}{\partial v} M_2, \\ \frac{\partial M_3}{\partial u} &= A\beta M + kM_1 + BM_2 - \frac{1}{2} \frac{\partial \ln \gamma}{\partial u} M_3, \quad \frac{\partial M_3}{\partial v} = B\gamma M + AM_1 + \\ &\quad + IM_2 - \frac{1}{2} \frac{\partial \ln \beta}{\partial v} M_3, \end{aligned} \quad (1)$$

Коэффициенты в этой системе связаны некоторыми соотношениями, которые выписывать не будем.

1. Прямая Картана. Пусть на поверхности σ некоторая кривая C , проходящая через точку M , задана уравнениями $u = u(t)$, $v = v(t)$. Пусть P_0 — бесконечно близкая к M точка, лежащая на кривой C . Асимптотическая линия u (соответственно v), проходящая через точку M , пересекается с асимптотической линией v (соответственно u), проходящей через точку P_0 , в точке P_1 (соответственно P_2).

Рассмотрим две плоскости π_1 и π_2 , образованные следующим образом: π_1 определяется точками M , P_1 и касательной в P_1 к асимптотической линии u ; π_2 определяется точками M , P_2 и касательной в P_2 к асимптотической линии v .

Касательная к асимптотической u в точке P_1 определяется парой точек P_1 и $P_1^1(u)$, где

$$\begin{aligned} P_1 &= M + M_u u' dt + \frac{1}{2} (M_{uu} u'^2 + M_u u'') dt^2 + \frac{1}{3!} (M_{uuu} u'^3 + \\ &+ 3M_{uu} u' u'' + M_u u''') dt + \frac{1}{4!} (M_{uuuu} u'^4 + 6M_{uuu} u'^2 u'' + \\ &+ 3M_{uu} u'^2 + 4M_{uu} u' u''' + M_u u^{IV}) dt + \dots, \\ P_1^1(u) &= M_u u' + (M_{uu} u'^2 + M_u u'') dt + \frac{1}{2} (M_{uuu} u'^3 + \\ &+ 3M_{uu} u' u'' + M_u u''') dt^2 + \frac{1}{3!} (M_{uuuu} u'^4 + 6M_{uuu} u'^2 u'' + \\ &+ 3M_{uu} u'^2 + 4M_{uu} u' u''' + M_u u^{IV}) dt^3 + \dots \end{aligned} \quad (2)$$

Членами обозначены члены с не интересующими нас коэффициен-

Учитывая уравнения (I), соотношения (2) можно представить в виде

$$P_1 = \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\partial \ln \gamma}{\partial u} u' dt + \dots \right) M + (u' dt + \frac{1}{2} u'' dt^2 + \dots) M_1 + \\ + \left(\frac{1}{2} \beta u'^2 dt^2 + \left(\frac{1}{6} (\beta_u + \frac{1}{2} \beta \frac{\partial \ln \gamma}{\partial u}) u'^3 + \frac{1}{2} \beta u' u'' \right) dt^3 + \dots \right) M_2 + \\ + \left(\frac{1}{6} \beta u'^3 dt^3 + \left(\frac{1}{12} \beta_u u'^4 + \frac{1}{4} \beta u'^2 u'' \right) dt^4 \right) M_3,$$

$$P'_1(u) = \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \ln \gamma}{\partial u} u' + \dots \right) M + (u' + u'' dt + \dots) M_1 + \left(\beta u'^2 dt + \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{2} (\beta_u + \frac{1}{2} \frac{\partial \ln \gamma}{\partial u} \beta) u'^3 + \frac{3}{2} \beta u' u'' \right) dt^2 + \dots \right) M_2 + \\ + \left(\frac{1}{2} \beta u'^3 dt^2 + \left(\frac{1}{3} \beta_u u'^4 + \beta u'^2 u'' \right) dt^3 + \dots \right) M_3.$$

Опуская громоздкие вычисления, запишем уравнение плоскости π_1 в репере MM_1M_2 в окончательном виде:

$$\left(\frac{1}{12} \beta u'^3 dt^2 + \dots \right) x - \left(\frac{1}{3} u'^2 dt + \left(\frac{1}{4} \frac{\partial \ln \beta}{\partial u} u'^3 + \frac{5}{6} u' u'' \right) dt^3 + \right. \\ \left. + \dots \right) y + \left(\frac{1}{2} u' + \left(\frac{1}{6} \frac{\partial \ln \gamma \beta^2}{\partial u} u'^2 + u'' \right) dt + \dots \right) z = 0$$

(x, y, z) — неоднородные проективные координаты $x = \frac{x'}{x^6}$, $y = \frac{y'}{y^6}$,
 $z = \frac{z'}{z^6}$.

Аналогично уравнение плоскости π_2 можно представить в виде

$$\left(\frac{1}{3} v'^2 dt + \left(\frac{1}{4} \frac{\partial \ln \gamma}{\partial v} v'^3 + \frac{5}{6} v' v'' \right) dt^2 + \dots \right) x - \left(\frac{1}{12} \gamma v'^3 dt^2 + \right. \\ \left. + \dots \right) y + \left(-\frac{1}{2} v' - \left(\frac{1}{6} \frac{\partial \ln \beta \gamma^2}{\partial v} v'^2 + v'' \right) dt + \dots \right) z = 0.$$

Прямая пересечения плоскостей π_1 и π_2 определяется точками M и $A = (\cdot)M + \lambda^1 M_1 + \lambda^2 M_2 + \lambda^3 M_3$, где

$$\lambda^1 = \frac{1}{6} u'^2 v' + \left[\frac{1}{24} \gamma v'^3 u' + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{6} \frac{\partial \ln \beta \gamma^2}{\partial v} v'^2 + v'' \right) u'^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} \frac{\partial \ln \beta}{\partial u} u'^3 + \frac{5}{6} u' u'' \right) v' \right] dt + \dots,$$

$$\lambda^2 = \frac{1}{6} v'^2 u' + \left[\frac{1}{24} \beta u'^3 v' + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{6} \frac{\partial \ln \gamma \beta^2}{\partial u} u'^2 + u'' \right) v'^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} \frac{\partial \ln \gamma}{\partial v} v'^3 + \frac{5}{6} v' v'' \right) u' \right] dt + \dots,$$

$$\lambda^3 = \frac{1}{6} v'^3 u'^2 dt + \left[\frac{1}{3} \left(\frac{1}{4} \frac{\partial \ln \beta}{\partial u} u'^3 + \frac{5}{6} u' u'' \right) v'^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4} \frac{\partial \ln \gamma}{\partial v} v'^3 + \frac{5}{6} v' v'' \right) u'^2 \right] dt + \dots$$

При движении точки P_0 по кривой C эта прямая будет описывать конус K , к числу образующих которого будет принадлежать и касательная в точке M к кривой C .

Уравнение касательной плоскости к конусу K вдоль этой образующей (при $dt = 0$) будет иметь вид

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ \lambda^1 & \lambda^2 & \lambda^3 \\ \lambda_{du}^{1'} & \lambda_{du}^{2'} & \lambda_{du}^{3'} \end{vmatrix} = 0$$

или после упрощения

$$\frac{1}{3} v'^2 x - \frac{1}{3} v' y + \left[\frac{1}{8} (\beta - \gamma v'^3) + \left(\frac{1}{6} \frac{\partial \ln \gamma \beta^2}{\partial u} - \frac{3}{8} \frac{\partial \ln \beta}{\partial u} \right) v' + \left(\frac{3}{8} \frac{\partial \ln \gamma}{\partial v} - \frac{1}{6} \frac{\partial \ln \gamma^2 \beta}{\partial v} \right) v'^2 + \frac{1}{4} v'' \right] z = 0 \quad (3)$$

(здесь положено $u = t \Rightarrow u' = 1, u'' = 0$).

В зависимости от выбора кривой C эта плоскость может занимать любое положение в связке плоскостей с центром M ($x = y = z = 0$). Выберем в качестве такой кривой ту или иную из кривых Серге [2]. Соответствующие этим кривым три плоскости [4] будут заданы уравнениями

$$\begin{aligned} \varepsilon \sqrt[3]{\frac{\beta}{\gamma}} x - y + \frac{1}{8} \left[\frac{\partial \ln \beta \gamma^2}{\partial u} - \varepsilon \sqrt[3]{\frac{\beta}{\gamma}} \frac{\partial \ln \gamma \beta^2}{\partial v} \right] z = 0, \\ \varepsilon^2 \sqrt[3]{\frac{\beta}{\gamma}} x - y + \frac{1}{8} \left[\frac{\partial \ln \beta \gamma^2}{\partial u} - \varepsilon^2 \sqrt[3]{\frac{\beta}{\gamma}} \frac{\partial \ln \gamma \beta^2}{\partial v} \right] z = 0, \\ \sqrt[3]{\frac{\beta}{\gamma}} x - y + \frac{1}{8} \left[\frac{\partial \ln \beta \gamma^2}{\partial u} - \sqrt[3]{\frac{\beta}{\gamma}} \frac{\partial \ln \gamma \beta^2}{\partial v} \right] z = 0 \end{aligned}$$

(в этих уравнениях учтено, что $v' = \varepsilon \sqrt[3]{\frac{\beta}{\gamma}}, v'' = \frac{1}{3} v' \left(\frac{\partial \ln \frac{\beta}{\gamma}}{\partial u} + v' \frac{\partial \ln \frac{\beta}{\gamma}}{\partial v} \right), \varepsilon = \sqrt[3]{1}$).

Легко убедиться в том, что эти три плоскости пересекаются по прямой:

$$x = \frac{1}{8} \frac{\partial \ln \gamma \beta^2}{\partial v} z, \quad y = \frac{1}{8} \frac{\partial \ln \beta \gamma^2}{\partial u} z, \quad (4)$$

т. е. по прямой Картана [2].

Н. Бомпиани в работе [4] (на эту работу и на содержащийся в ней результат ссылаются Фубини и Чех в своей известной монографии [3]) утверждает, что все плоскости (у нас они определены уравнением (3)) пересекаются по одной прямой — проективной нормали (нормали Фубини). Мы видим, что это утверждение Бомпиани является ошибочным.

2. Ось Чеха. Рассмотрим теперь две плоскости π_1 и π_2 , образованные следующим образом: π_1 определяется точками M, P_1 и

касательной в P_1 к асимптотической линии семейства v ; π'_2 определяется точками M , P_2 и касательной в P_2 к асимптотической семейства u .

Аналогично п. 1. получим, что уравнения плоскостей π_1 и π'_2 имеют соответственно вид

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{3} \beta u'^3 dt^2 + \left(\frac{1}{2} \beta u'^2 u'' + \frac{1}{12} \beta_u u'^4 \right) dt^3 + \dots \right) x - (u'^2 dt + \right. \\ & \left. + u'u'' dt^2 + \dots) y + \left(u' + \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \ln \gamma}{\partial u} u'^2 + \frac{1}{2} u'' \right) dt + \dots \right) z = 0, \right. \\ & \left. (v'^2 dt + v'v'' dt^2 + \dots) x - \left(\frac{1}{3} v' \gamma dt^2 + \left(\frac{1}{2} \gamma v'^2 v'' + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + \frac{1}{12} \gamma_v v'^4 \right) dt^3 + \dots \right) y + \left(-v' - \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \ln \beta}{\partial v} v'^2 + \frac{1}{2} v'' \right) dt + \right. \\ & \left. \left. \left. + \dots \right) z = 0. \right. \end{aligned}$$

Прямая пересечения плоскостей π_1 и π'_2 определяется точкой M и точкой $A' = (\cdot)M + \mu^1 M_1 + \mu^2 M_2 + \mu^3 M_3$, где

$$\begin{aligned} \mu^1 &= u'^2 v' + \left(\frac{1}{3} \gamma u' v'^3 + \frac{1}{2} \frac{\partial \ln \beta}{\partial v} u'^2 v'^2 + \frac{1}{2} u'^2 v'' + \right. \\ &\quad \left. + u'u''v' \right) dt + \dots, \\ \mu^2 &= v'^2 u' + \left(\frac{1}{3} \beta v' u'^3 + \frac{1}{2} \frac{\partial \ln \gamma}{\partial u} v'^2 u'^2 + \frac{1}{2} v'^2 u'' + v'v''u' \right) dt + \dots, \\ \mu^3 &= u'^2 v'^2 dt + (v'^2 u'u'' + u'^2 v'v'') dt^2 + \dots. \end{aligned}$$

При движении точки P_0 по кривой C эта прямая описывает конус K' , к числу образующих которого принадлежит и касательная к C в точке M . Уравнение касательной плоскости к конусу K' вдоль этой образующей имеет вид

$$v'^2 x - v'y + \left[\frac{1}{3} (\beta - \gamma v'^3) + \frac{1}{3} \frac{\partial \ln \gamma}{\partial u} v' - \frac{1}{2} \frac{\partial \ln \beta}{\partial v} v'^2 + \frac{1}{2} v'' \right] z = 0. \quad (5)$$

Плоскости (5), соответствующие кривым Серге, пересекаются по прямой

$$x = \frac{1}{6} \frac{\partial \ln \gamma \beta^2}{\partial v} z, \quad y = \frac{1}{6} \frac{\partial \ln \beta \gamma^2}{\partial u} z, \quad (6)$$

т. е. по оси Чеха [2]. Прямая Картана и ось Чеха определяют каноническую плоскость поверхности [2].

3. Некоторые семейства инвариантных кривых и ось Чеха. Для четырех плоскостей π_1 , π_2 , π'_1 и π'_2 мы рассмотрели (п. 1 и п. 2) только два способа их попарного пересечения. Проведем построения аналогичные п. 1, для плоскостей π_1 и π'_2 . Эти плоскости пересекаются по прямой, которая также описывает конус, если точка движется по кривой C . В отличие от п. 1 или п. 2, к числу образующих этого конуса принадлежит прямая, определяемая точками M .

$N = (\cdot) M + \frac{1}{3} M_1 + \frac{1}{2} v' M_2$. Уравнение касательной плоскости к конусу вдоль этой прямой имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{1}{16} v'^2 x - \frac{1}{9} v' y + \left[\frac{1}{36} \beta - \frac{1}{12} \gamma v'^3 + \frac{1}{18} \frac{\partial \ln \gamma \beta^2}{\partial u} v' - \right. \\ & \left. - \frac{1}{12} \frac{\partial \ln \beta}{\partial v} - \frac{1}{8} \frac{\partial \ln \beta}{\partial v} v' + \frac{1}{12} v'' \right] z = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Возьмем теперь в качестве кривых C линии $\beta du^3 - 3\gamma dv^3 = 0$ (8).

Тогда три плоскости (7), соответствующие кривым (8), пересекаются по прямой

$$x = \frac{1}{6} \frac{\partial \ln \gamma \beta^2}{\partial v} z, \quad y = \frac{1}{8} \frac{\partial \ln \beta \gamma^2}{\partial u} z,$$

принадлежащей канонической связке [1].

Поступая аналогичным образом с плоскостями π_2 и π'_1 , придем к инвариантным линиям $3\beta du^3 - \gamma dv^3 = 0$ (9)

$$x = \frac{1}{8} \frac{\partial \ln \gamma \beta^2}{\partial v} z, \quad y = \frac{1}{6} \frac{\partial \ln \beta \gamma^2}{\partial u} z.$$

Теорема. Соприкасающиеся плоскости кривых (8) и (9) пересекаются по оси Чеха.

Список литературы: 1. Кованцов Н. И. Канонический пучок как образ проективной симметрии на поверхности // Укр. мат. журн. 1953. 5, № 1. С. 99—119. 2. Фиников С. П. Проективно-дифференциальная геометрия. М., 1937. 63 с. 3. Fubini G., Cech E. Introduction geometrie projective differentielle des surfaces. Paris, Gauthier villars et Cie, 1931. 291 p. 4. Bompiani H. Determinazioni varie delle normali proiettive di una superficie// Atti Reale Accademia Nazional dei Lincei. Rendiconti. Cllassedi Science fisiche, matematiche e naturali. 1929. 6, № 9. P. 39—44.

Поступила в редакцию 08.12.86

УДК 514.7

С. Е. КОЗЛОВ

**ТРЕХМЕРНОЕ УПЛОЩЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ ПРИ СОВПАДЕНИИ
ДВУХ ЕЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК**

1*. Пусть $M \subset R^n$ — погруженная двумерная ориентированная гладкая поверхность в евклидовом пространстве ($n \geq 3$). Интеграл

$$\int_M K^*(x) dA,$$

$K^*(x)$ — кривизна Черна-Лашофа поверхности M в точке x (см. [1]); dA — форма площади на M , называется абсолютной кривизной поверхности M .

Сферическое отображение $g: M \rightarrow G_{2,n}$ сопоставляет каждой точке $x \in M$ положительно ориентированное касательное пространство $T_x M$, рассматриваемое как элемент грассманова многообразия $G_{2,n}$. Отображение g индуцирует на M форму метрики ds_0^2 сферического изображения и соответствующую ей форму площади dA_0 . Через A_0 обозначим площадь $g(M)$.

В [2] для $n = 4$ и в [1] для произвольного n доказано, что

$$\int_M K^*(x) dA \ll \int_M dA_0 = A_0.$$

Теорема 1. Пусть $M \subset R^n$ — погруженная двумерная ориентированная гладкая поверхность ($n \geq 3$) с отличным от нуля вектором средней кривизны H . Кроме того, будем предполагать, что поверхность полна, не содержит прямых и

$$\int_M K^*(x) dA = A_0. \quad (1)$$

Тогда M лежит в некотором трехмерном подпространстве пространства R^n .

Замечание. 1) Если сохранить все условия теоремы, кроме требования $H \neq 0$, то утверждение теоремы становится неверным. Пример — соответствующая минимальная поверхность. В этом случае абсолютная кривизна и площадь сферического изображения совпадают с интегралом по поверхности M от модуля гауссовой кривизны (см. п. 3°, теорема 2).

2) Условие об отсутствии на M прямых тоже существует. Рассмотрим полную кривую $\gamma \subset R^3$ с отличными от нуля кривизной κ и кручением τ . Пусть $M = \gamma \times R^1 \subset R^4$, где R^1 ортогонально к R^3 . Тогда $|H| = \kappa/2 \neq 0$, поверхность, очевидно, не помещается ни в какое трехмерное подпространство R^4 , а площадь сферического изображения и абсолютная кривизна поверхности M обращаются в нуль (см. п. 3°, теорема 2).

2°. Введем обозначения и напомним некоторые определения.

В окрестности точки $x \in M$ рассмотрим полкасательного к M ортонормированного репера $\{e_1, e_2\}$. Через B обозначим вектороподобную вторую форму погружения $M \subset R^n$. Положим

$$B(e_i, e_j) = (\nabla_{e_i} e_j)^N = (\nabla_{e_i} e_j)^N = B_{ij}, \quad i, j = 1, 2; \quad \Delta = (B_{11} - B_{22})/2, \quad H = (B_{11} + B_{22})/2. \quad (2)$$

В нормальном пространстве $N_x M$ рассмотрим единичную сферу $S^{n-3}(x) = \{n | n \in N_x M, |n| = 1\}$. Кривизной Чеба-Лашофа поверхности M в точке x называют величину

$$K^*(x) = \frac{n-2}{\omega_{n-3}} \int_{S^{n-3}(x)} |K(x, n)| dA_{n-3} \quad (3)$$

где ω_{n-3} обозначает $(n-3)$ -мерный объем сферы $S^{n-3}(x)$, $dA_{n-3} = d\text{Vol}(S^{n-3}(x))$, $K(x, n) = \det \langle B, n \rangle = \langle B_{11}, n \rangle \langle B_{22}, n \rangle -$

— $\langle B_{12}, n \rangle^2$ — кривизна Липшица—Киллинга поверхности M по отношению к нормали n .

В [2] вычислена форма площади сферического изображения dA_2 . Другой подход к выводу этой формулы позволяет получить ее в удобном для нас виде (см. [3], IV, I):

$$dA_0 = [K^2 + 4(|H \wedge \Delta|^2 + |H \wedge B_{12}|^2)]^{\frac{1}{2}} dA, \quad (4)$$

где K — гауссова кривизна поверхности M .

3°. Доказательство основной теоремы 1 опирается на ряд вспомогательных утверждений.

Теорема 2. Необходимым и достаточным условием справедливости равенства (1) является требование: в каждой точке $x \in M$ либо $H = 0$, либо $H \parallel \Delta \parallel B_{12}$. (5)

Доказательство. Фиксируем точку $x \in M$. В нормальном пространстве $N_x M$ рассмотрим ортормированный базис n_i , $1 < i < n - 2$, диагонализирующий квадратичную форму $\det \langle B, n \rangle$ (базис Отсуки). Тогда

$$K(x, n) = \det \langle B, n \rangle = \sum_{i=1}^{n-2} K_i (\alpha^i)^2, \quad (6)$$

где

$$n = \sum_{i=1}^{n-2} \alpha^i n_i, \quad \sum_{i=1}^{n-2} (\alpha^i)^2 = 1, \quad K_i = K(x, n_i).$$

Из ([2], 5, (8)) следует, что

$$K^* < \sum_{i=1}^{n-2} |K_i| < \frac{dA_0}{dA}, \quad (7)$$

причем в первом из этих неравенств равенство достигается тогда и только тогда, когда

$$\left| \sum_{i=1}^{n-2} K_i \right| = \sum_{i=1}^{n-2} |K_i|. \quad (8)$$

Пусть имеет место (1). Тогда в (7) стоят равенства и все кривизны K_i имеют один знак. Из теоремы Гаусса и формулы (4) следует

$$\begin{aligned} |K| &= \left| \sum_{i=1}^{n-2} K_i \right| = \sum_{i=1}^{n-2} |K_i| = K^* = \frac{dA_0}{dA} = [K^2 + \\ &+ 4(|H \wedge \Delta|^2 + |H \wedge B_{12}|^2)]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (9)$$

Тем самым справедливо (5), и необходимость доказана.

Пусть выполнено условие (5). Если $H = 0$, то

$$\begin{aligned} K_i &= K(x, n_i) = \langle B_{11}, n_i \rangle \langle B_{22}, n_i \rangle - \langle B_{12}, n_i \rangle^2 = \langle H + \\ &+ \Delta, n_i \rangle \langle H - \Delta, n_i \rangle - \langle B_{12}, n_i \rangle^2 = \langle H, n_i \rangle^2 - \\ &- \langle \Delta, n_i \rangle^2 - \langle B_{12}, n_i \rangle^2 \ll 0. \end{aligned}$$

Значит, выполнено равенство (8) и

$$K^* = \sum_{i=1}^{n-2} |K_i| = |\sum_{i=1}^{n-2} K_i| = |K| = dA_0/dA. \quad (10)$$

Если $H \neq 0$, то можно построить ортонормированный базис $N_x M$, в котором $n_1 = H/|H|$. Из (5) следует, что для произвольного $n = \sum_{i=1}^{n-2} n_i \alpha^i$ будет

$$\begin{aligned} K(x, n) &= \det \langle B, n \rangle = \langle H, n \rangle^2 - \langle \Delta, n \rangle^2 - \langle B_{12}, n \rangle^2 = \\ &= (\alpha^1)^2 K(x, n_1) = (\alpha^1)^2 K_1. \end{aligned}$$

Тем самым справедливо (10). Теорема доказана.

Лемма 1. Пусть гауссова кривизна поверхности $M \subset R^n$ отлична от нуля и выполнено требование $H \neq 0, H \parallel \Delta \parallel B_{12}$ (11). Тогда M лежит в некотором трехмерном подпространстве пространства R^n .

Доказательство. В [3], IV, I) это утверждение доказано в более общей ситуации римановых пространств постоянной секционной кривизны. Условия (11) можно сформулировать инвариантно (вне зависимости от выбора e_1, e_2) в следующей форме: эллипс нормальной кривизны (э. н. к.) поверхности $M \subset R^n$ помещается на прямой, содержащей вектор H . Но тогда лемма 1 прямо следует из работы [4].

4°. При дополнительном условии отличия от нуля гауссовой кривизны поверхности M теорема 1 являлась бы непосредственным следствием теоремы 2 и леммы 1. Дальнейшие построения позволяют снять предположение $K \neq 0$.

Повернем ракер $\{e_1, e_2\}$ в $T_x M$ на угол $\varphi: e(\varphi) = \cos \varphi e_1 + \sin \varphi e_2, e_\perp(\varphi) = -\sin \varphi e_1 + \cos \varphi e_2$. Рассмотрим параметризацию э. н. к. (см. [3], III, (3)):

$$\begin{aligned} \varphi \rightarrow B(e(\varphi), e(\varphi)) &= B(\varphi) = H + \Delta(\varphi) = H + \\ &+ (\cos 2\varphi \Delta + \sin 2\varphi B_{12}), \\ B(e(\varphi), e_\perp(\varphi)) &= B_{12}(\varphi) = B_{12} \cos 2\varphi - \Delta \sin 2\varphi. \end{aligned} \quad (12)$$

Далее везде будем предполагать, что выполнено условие (11). В этом случае существует такое поле направлений в TM , что $B_{12}(\varphi) = 0$. И если $|B_{12}| + |\Delta| \neq 0$ в точке x , то это поле будет гладким в некоторой окрестности точки x . Так как $K = \det \langle B, n \rangle = |H|^2 - |\Delta|^2 - |B_{12}|^2$, где $n = H/|H|$, то

$$|B_{12}|^2 + |\Delta|^2 \neq 0 \Leftrightarrow |H|^2 - K > 0. \quad (13)$$

Точки, в которых $K = |H|^2$, являются омбилическими по отношению к любой нормали. Из (11) следует, что в таких точках $K > 0$. Таким образом, в окрестностях неомбилических точек можно так выбрать ракеров $\{e_1, e_2\}$, что

$$\begin{aligned} H(\varphi) &= H + \Delta \cos 2\varphi, \quad B_{12} = 0, \quad B_{11} = kn, \quad B_{22} = \bar{k}n, \quad n \\ &= H/|H| \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь первое направление ($\varphi = 0$) соответствует верхней (по отношению к n) точке э. и.к., а второе ($\varphi = \frac{\pi}{2}$) — нижней точке э.и.к., так что $k = \max_{\varphi} \langle B(\varphi), n \rangle = \langle B(0), n \rangle > 0$, $\tilde{k} = \min_{\varphi} \langle B(\varphi), n \rangle = \langle B\left(\frac{\pi}{2}\right), n \rangle$, $k > \tilde{k}$. Эти направления являются главными направлениями на поверхности M по отношению к нормали n . Если из M выкинуть омбилические точки, то оставшееся открытое множество расслаивается на два семейства линий кривизны, первое из которых соответствует максимальной кривизне $k > 0$, второе — минимальной \tilde{k} .

Лемма 2. Пусть для поверхности $M \subset R^n$ выполнено условие (11) и $\gamma(s)$, $a \leq s \leq b$ — линия кривизны второго семейства (s — натуральный параметр). Тогда γ лежит в некотором трехмерном подпространстве пространства R^n .

Доказательство. Пусть $x \in \gamma$. Распространим репер $(e_1, e_2 = \dot{\gamma})|_x$ на некоторую окрестность точки x так, чтобы $(\nabla_j e_i)^T|_x = 0$. Тогда в силу (11) $B_{11} = kn$, $B_{12} = \tau n$, $B_{22} = kn$, $K = k\tilde{k} - \tau^2$, причем в точке x будет: $\tau = 0$, $k > 0$ и из ([5], 4.1.1.) следует $\nabla_1 B_{12} - \nabla_2 B_{11} = \nabla_1 B_{22} - \nabla_2 B_{12} = 0$.

Спроектируем последнее равенство на вектор $n_\perp \in N_x M$, $n_\perp \perp n$:

$$\begin{aligned} \tau \langle \nabla_1 n, n_\perp \rangle - k \langle \nabla_2 n, n_\perp \rangle &= 0, \\ \tilde{k} \langle \nabla_1 n, n_\perp \rangle - \tau \langle \nabla_2 n, n_\perp \rangle &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Так как $\tau = 0$ и $k > 0$ в точке x , $\langle \nabla_2 n, n_\perp \rangle = 0$, и вектор n , переносится параллельно в NM вдоль кривой γ . Пусть теперь $e_2 = \dot{\gamma}$ вдоль γ . Тогда с учетом (14)

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} (e_1 \wedge e_2 \wedge n) &= \nabla_2 (e_1 \wedge e_2 \wedge n) = B_{12} \wedge e_2 \wedge n + e_1 \wedge B_{22} \wedge n + \\ &+ e_1 \wedge e_2 \wedge \nabla_2 n = e_1 \wedge \tilde{R}n \wedge n + e_1 \wedge e_2 \wedge (\nabla_2 n)^T = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, вдоль γ будет $e_1 \wedge e_2 \wedge n = \text{const}$ (16), откуда следует утверждение леммы.

Замечание. Это рассуждение, по существу, содержит доказательство леммы 1. Действительно, если $K = k\tilde{k} - \tau^2 \neq 0$, то из (15) следует: $\langle \nabla_1 n, n_\perp \rangle = \langle \nabla_2 n, n_\perp \rangle = 0$. Это означает, что вектор n постоянен в NM вдоль всей поверхности M , поэтому и $e_1 \wedge e_2 \wedge n = \text{const}$ вдоль M .

5°. Докажем теорему 1. Каждой точке $x \in M$ соответствует канонический тривектор $\tau = e_1 \wedge e_2 \wedge n$, $n = H/|H|$, который естественно ассоциируется с элементом гравитанова многообразия $G_{3,n}$. Ответствие $x \rightarrow \tau$ задает отображение $g_3: M \rightarrow G_{3,n}$. Нам достаточно показать, что $g_3 = \text{const}$. Предположим, что выполнены все посылки теоремы 1, кроме условия отсутствия на M прямых, и $\tau \neq \text{const}$. Покажем, что в этом случае на поверхности M существует прямая.

Множество $\tilde{M} = \{x \in M \mid K(x) \neq 0\}$ распадается на открытые компоненты связности F_α . Количество этих компонент не более чем счетно. По лемме 1 отображение $g_3|_{F_\alpha} = \text{const}$. Пусть $g_3(y) \neq g_3(z)$. Рассмотрим кривую c на M , соединяющую y и z . Тогда кривая $g_3 \circ c$ соединяет на $G_{3,n}$ точки $\tau(y)$ и $\tau(z)$. Так как множество $g_3(\bigcup_\alpha \text{clos } F_\alpha)$ не более чем счетно, то на кривой c найдется точка x такая, что $g_3(x) \notin g_3(\bigcup_\alpha \text{clos } F_\alpha)$ (17). Тогда $K(x) = 0$,

точка x — неомбилическая и через нее проходит линия кривизны γ второго семейства. Вдоль всей кривой γ $K = 0$, так как противное противоречило бы выбору точки x — (17) и лемме 2 — (16). Следовательно, любая точка на γ — неомбилическая, и в ее окрестности можно ввести поле репера (e_1, e_2) , касательного к линиям кривизны. Тогда выполнены соотношения (14) и на кривой γ будет $\tilde{k} = 0$, $K = k\tilde{k} = 0$, $k > 0$ (18). Выпишем деривационные формулы:

$$\begin{cases} \nabla_1 e_1 = k_g e_2 + B_{11}, \\ \nabla_1 e_2 = -k_g e_1 + B_{12}, \end{cases} \quad \begin{cases} \nabla_2 e_1 = \tilde{k}_g e_2 + B_{12}, \\ \nabla_2 e_2 = -\tilde{k}_g e_1 + B_{22}. \end{cases} \quad (19)$$

Здесь k_g и \tilde{k}_g — геодезические кривизны линий кривизны первого и второго семейств. Уравнения Петерсона—Кодацци можно записать в следующем виде: $\nabla_2 k = k_g(k - \tilde{k})$, $-\nabla_1 \tilde{k} = \tilde{k}_g(k - \tilde{k})$ (20). Из (18), (20) следует, что на кривой γ будет $\nabla_1 K = \nabla_1(k\tilde{k}) = -k^2 \tilde{k}_g$. Так как ни одна точка γ не принадлежит $\bigcup_\alpha \text{clos } F_\alpha$, то

из последнего равенства следует, что $\tilde{k}_g = 0$ вдоль γ . Поэтому из (19) получаем $\nabla_2 e_2 = 0$ вдоль γ , а значит, кривая γ есть часть прямой. Все точки на γ неомбилические, поверхность M полна, следовательно, неограниченно продолжая линию кривизны γ , мы получаем прямую, лежащую на M . Последнее противоречит условию теоремы 1. Значит, $g_3 = \text{const}$, что и требовалось доказать.

Список литературы. 1. Hoffman D., Osserman R. The areas of the generalized Gaussian image and the Stability of minimal Surfaces in R^n and S^n // Math Ann. 1982. 260. P. 437—452. 2. Wintergen P. On the total curvature of surfaces in E^4 // Collog. Math. 1978. 39. P. 289—296. 3. Козлов С. Е. Сферические отображения поверхностей в гравитановы расслоения над римановыми многообразиями: Дис. ... канд. техн. наук. Л., 1986. 129 с. Машинопись. 4. Амиров Ю. А. Кручение двумерных поверхностей в евклидовых пространствах // Укр. геометр. сб. 1975. Вып. 18. С. 3—14. 5. Саймонс Дж. Минимальные подмножества римановых многообразий // Целочисленные потоки и минимальные поверхности. М., 1973. С. 132—197.

Поступила в редакцию 27.10.87

С. А. ЛАВРЕНЧЕНКО

**О ЧИСЛЕ ТРЕУГОЛЬНЫХ УКЛАДОК ПОМЕЧЕННОГО ГРАФА
НА ПРОЕКТИВНОЙ ПЛОСКОСТИ**

1. В настоящей работе будут использоваться терминология и обозначения работ [1, 2].

Граф называется *помеченным*, если его вершины отличаются одна от другой какими-либо метками. Как и в [2], для данного помеченного графа G обозначим через $\tau(G, M^2)$ число всех попарно различных треугольных укладок (триангуляций) $T^i(G)$ графа G на связном компактном 2-мерном многообразии (2-многообразии) M^2 , причем две триангуляции $T^{i_1}(G)$ и $T^{i_2}(G)$ с графом G будем считать *различными* (записывается $T^{i_1}(G) \neq T^{i_2}(G)$), если в G найдется такой цикл (u, v, w) из трех ребер, вершины которого имеют метки u, v и w , что в триангуляции $T^{i_1}(G)$ есть грань uvw , а в триангуляции $T^{i_2}(G)$ нет грани uvw (т.е. в ней 3-цикл (u, v, w) не ограничивает грань). Таким образом, $i = \overline{1, \tau(G, M^2)}$. Известно [3, с. 240—241] (в этом нетрудно убедиться при помощи формулы Эйлера), что если дана любая триангуляция проективной плоскости N_1 (т.е. неориентируемого замкнутого 2-многообразия рода 1), то связность ее графа равна или 3, или 4, или 5. В предлагаемой работе получены инфинитно точные верхние оценки числа $\tau(G(T), N_1)$ в зависимости от связности $\kappa(G(T))$ графа $G(T)$ триангуляции T проективной плоскости N_1 , причем исследованы все возможные значения связности:

Теорема 1. Пусть T — любая триангуляция проективной плоскости N_1 за исключением двух неприводимых триангуляций B^1 и B^2 Барнетта, представленных на табл. 1 и 2*). (Таким образом, $\kappa(G(T)) \in \{3, 4, 5\}$.) Тогда при $\kappa(G(T)) = 3, 4$ или 5 имеют место, соответственно, неравенства

$$\tau(G(T), N_1) \leq 6, 2 \text{ или } 1, \quad (1.1)$$

причем для каждого значения связности κ соответствующее равенство в (1.1) достигается на бесконечном семействе триангуляций.

Для исключительных триангуляций имеют место равенства

$$\tau(G(B^1), N_1) = 12, \tau(G(B^2), N_1) = 6.$$

Доказательство этой теоремы будет проведено в п. 4.

Замечание 1. Результат теоремы 1 анонсирован автором в [4]. В случае $\kappa = 5$ теорема 1 эквивалентно переформулируется следующим образом: *граф каждой 5-связной неизоморфной B^1 триангу-*

* На табл. 1 и 2 проективная плоскость изображается в виде шестиугольника, все пары противоположных сторон которого отождествлены в соответствии с тем, как указывают метки.

ящии проективной плоскости укладывается на проективной плоскости однозначно.*)

Случай максимальной (для N_1) связности 5 был исследован также С. Негами [5, теорема 1] другим методом.

Замечание 2. Теорема 1 является шагом в направлении обобщения на случай проективной плоскости теоремы Хэсслерера Уитни [6], утверждающей, что каждый 3-связный, укладываемый на сфере S_0 , граф G имеет однозначно определенный дуальный граф. Значит, G укладывается на сфере однозначно, т. е. $\tau(G, S_0) \leq 1$.

Замечание 3. Что касается тора S_1 , то С. Негами [7] показал, что ровно с тремя исключениями каждый тороидальный граф максимальной (для S_1) связности 6 укладывается на S_1 обязательно треугольно и однозначно. А для связности 5 автором [8] построено бесконечное семейство графов G , для каждого из которых существуют по меньшей мере две не только различные, а даже неизоморфные триангуляции тора $T^1(G)$ и $T^2(G)$. Для связностей $\kappa(G) = 3$ и 4 автором [2] получены инфинитно точные верхние оценки числа $\tau(G, S_1)$.

2. Леммы. Комбинаторное определение трансверсальности пересечения дано в [1, с. 54]. Операция $sp\langle u, v, w \rangle$ расщепления триангуляции вдоль ребер $[v, u]$ и $[v, w]$ введена в [1, с. 53]. Эта операция преобразует триангуляции 2-многообразия M^2 снова в триангуляции M^2 ; она состоит в том, что в триангуляции делается разрез вдоль ребер $[v, u]$ и $[v, w]$, и образующаяся дыра заклеивается двумя новыми гранями $uv'v''$ и $vw'w''$. Таким образом, при расщеплении $sp\langle u, v, w \rangle$ вместо вершины v создается новое ребро $[v', v'']$. Обратная к $sp\langle u, v, w \rangle$ операция называется стягиванием ребра $[v', v'']$ и обозначается $sh\langle v', v'' \rangle$.

Граф триангуляции T обозначается через $G(T)$.

Лемма 1. Пусть $T^1(H) \neq T^2(H)$ — две различные триангуляции замкнутого 2-многообразия M^2 с графом H , и пусть $\tau(H, M^2) = 2$. Тогда если в $T^1(H)$ найдутся две трансверсально пересекающиеся в вершине v пары ребер $([v, x], [v, y])$ и $([v, u], [v, w])$, такие, что в триангуляции $T^2(H)$ имеется грань xvy , то $\tau(G(sp\langle u, v, w \rangle (T^1(H))), M^2) = 1$.

Доказательство. Граф $G(sp\langle u, v, w \rangle (T^1(H)))$ обозначим через H_1 . Предположим противное — существуют две различные триангуляции $T^1(H_1) \neq T^2(H_1)$. Тогда (см. [2, доказательство леммы 2]) триангуляции $sh\langle v', v'' \rangle (T^1(H_1))$ и $sh\langle v', v'' \rangle (T^2(H_1))$ будут различными триангуляциями с графом H , а поскольку $\tau(H, M^2) = 2$, то $sh\langle v', v'' \rangle (T^1(H_1)) = T^1(H)$ [или $T^2(H)$] и $sh\langle v', v'' \rangle (T^2(H_1)) = T^2(H)$ [или, соответственно, $T^1(H)$]. Принимая во внимание условие, что пары ребер $([v, u], [v, w])$ и $([v, x], [v, y])$ пересекаются трансверсально в $T^1(H)$, по [2, лемма 4] заключаем, что $T^2(H_1)$ не может содержать грани $xv'y$ и $xv''y$. Учитывая то обстоятельство, что в процессе стягивания новых граней не обра-

* Здесь и далее имеется в виду однозначно с точностью до изотопии сохраняющей метки всех вершин графа.

ется, получаем противоречие с условием, что в $T^2(H)$ есть грань xuy . Лемма 1 доказана.

Установим сейчас одну лемму, дающую практическую возможность улучшать верхнюю оценку из [2, лемма 3]. Предположим, что все условия [2, лемма 3] выполнены. Пусть J — некоторое целое положительное число, и пусть s — некоторое целое положительное число, меньшее q . Предположим, что система

$$\bigcirc_{n=1}^s \text{sp}_{n, j}(T_0) = T_{s, j} \quad (j = \overline{1, J}) \quad (2.3)$$

состоит из J последовательностей таких трансверсальных для p -угольника D_0 триангуляции T_0 расщеплений, что для каждого $j = \overline{1, J}$ в триангуляции $T_{s, j}$ существует некоторый инвариантный $(p+s)$ -угольник $E_{0, j}$ с разделяющей границей, содержащий $D_{s, j}$, где $D_{s, j}$ обозначает s -й потомок p -угольника D_0 относительно (2.3). (Заметим, что так как все расщепления из (2.3) трансверсальны, то $(p+s)$ -угольник $E_{0, j}$ ограничен тем же самым числом ребер, что и $D_{s, j}$). Тогда обозначим через $\Omega_{q, j}^s(D_0)$ семейство триангуляций, которое получается из семейства $\Omega_q(D_0)$ заменой всех триангуляций вида

$$\left(\bigcirc_{n=s+1}^q \text{sp}_{n, j}^{(\text{tr})} \right) \bigcirc \left(\bigcirc_{n=1}^s \text{sp}_{n, j} \right) (T_0) \in \Omega_q(D_0)$$

всевозможные триангуляции вида

$$\left(\bigcirc_{n=s+1}^q \text{sp}_{n, j}^{(\text{tr})} \right) \bigcirc \left(\bigcirc_{n=1}^s \text{sp}_{n, j} \right) (T_0),$$

где $j = \overline{1, J}$, и для каждого $n = \overline{s+1, q}$ символ $\text{sp}_{n, j}^{(\text{tr})}$ обозначает произвольное трансверсальное расщепление для $(n-s-1)$ -го потомка $(p+s)$ -угольника $E_{0, j} \subset T_{s, j}$ относительно последовательности $\bigcirc_{n=s+1}^q \text{sp}_{n, j}^{(\text{tr})}$ (примененной к $T_{s, j}$).

Лемма 2. Пусть выполнены все условия [2, лемма 3] и все предположения, допущенные при определении семейства $\Omega_{q, j}^s$. Тогда $\tau(G(T_L), M^2) \leq \max_{T \in \Omega_{q, j}^s(D_0)} \tau(G(T), M^2)$.

Доказательство. В [2, доказательство леммы 3] из последовательности [2, (4.1)] была получена последовательность [2, (4.4)], которая может быть записана следующим образом:

$$T_L = \tilde{T}_L = \left(\bigcirc_{i=q_1+1}^L \widetilde{\text{sp}}_{n_i} \right) \bigcirc \left(\bigcirc_{i=s_1+1}^{q_1} \widetilde{\text{sp}}_{n_i} \right) \bigcirc \left(\bigcirc_{i=1}^{s_1} \widetilde{\text{sp}}_{n_i} \right) (T_0),$$

где $q_1 > s$ и последовательность

$$\bigcirc_{i=1}^{s_1} \widetilde{\text{sp}}_{n_i} (T_0) = \tilde{T}_{s_1} \quad (2.4)$$

состоит из s трансверсальных и s_1-s внутренних расщеплений. Как было показано в [2, доказательство леммы 3], можно опустить все s_1-s внутренних расщеплений и получить из (2.4) следующую последовательность, состоящую из s трансверсальных расщеплений:

$$\bigcirc_{n=1}^s \widehat{\text{sp}}_{n_i}(T_0) = \tilde{T}_s. \quad (2.5)$$

Могут представиться только следующие два случая.

Случай 1. Последовательность (2.5) отличается от последовательности (2.3) для каждого $j = \overline{1, J}$. Тогда, рассуждая так же, как в [2, доказательство леммы 3], получим последовательность [2, (4.6)]. Если $q_2 = q^*$, то триангуляция \tilde{T}_{q_2} (см. [2, (4.6)]) принадлежит семейству $\Omega_{q_2, J}^s(D_0)$. Если $q_2 > q$, то \tilde{T}_{q_2} порождается последовательностью расщеплений из некоторой триангуляции, принадлежащей $\Omega_{q_2, J}^s(D_0)$. Значит, мы можем завершить доказательство таким же образом, как [2, доказательство леммы 3].

Случай 2. Последовательность (2.5) не отличается от последовательности (2.3) для некоторого $k \in \{1, \dots, J\}$. Значит, $\tilde{T}_s = T_{s, k}$ и $\tilde{D}_s = D_{s, k}$, где \tilde{D}_s обозначает s -й потомок многоугольника D_0 относительно последовательности (2.5). Тогда, по условию, существует инвариантный $(p+s)$ -угольник $\tilde{E}_{0, k}$ с разделяющей границей, содержащей \tilde{D}_s в триангуляции \tilde{T}_s (см. (2.5)). В силу [2, (2.3)] имеем

$$\overline{\tilde{T}_s \setminus \tilde{D}_s} = \overline{\tilde{T}_{s_1} \setminus \tilde{D}_{s_1}}, \quad (2.6)$$

где \tilde{D}_{s_1} обозначает s_1 -й потомок многоугольника D_0 относительно (2.4). Значит, можно рассмотреть $(p+s)$ -угольник $\tilde{E}_0 \subset \tilde{T}_{s_1}$, соответствующий $(p+s)$ -угольнику $E_{0, k} \subset \tilde{T}_s$. Принимая во внимание, что $\tilde{D}_{s_1} \subseteq E_0 \subset \tilde{T}_{s_1}$, $\tilde{D}_s \subseteq E_{0, k} \subset \tilde{T}_s$, и то обстоятельство, что D_0 инвариантен (следовательно, оба многоугольника \tilde{D}_{s_1} и \tilde{D}_s инвариантны), а также учитывая условие, что $(p+s)$ -угольник $E_{0, k}$ инвариантен, мы выводим из (2.6), что $(p+s)$ -угольник \tilde{E}_0 инвариантен. Итак, можно применить [2, лемма 3] к последовательности

$$T_L = \tilde{T}_L = \left(\bigcirc_{i=q_1+1}^L \widetilde{\text{sp}}_{n_i} \right) \circ \left(\bigcirc_{i=s_1+1}^{s_1} \widetilde{\text{sp}}_{n_i} \right) (\tilde{T}_{s_1}) \quad (2.7)$$

с $(p+s)$ -угольником $\tilde{E}_0 \subset \tilde{T}_{s_1}$. Получаем, что

$$\tau(G(T_L), M^2) = \tau(G(\tilde{T}_L), M^2) \ll \max_{T \in \Omega_{q-s}^s(\tilde{E}_0)} \tau(G(T), M^2). \quad (2.8)$$

* Значение символа q_k и других см. в [2, доказательство леммы 3].

В силу вышесказанного $\overline{T_s \setminus E_{0,k}} = \overline{\tilde{T}_{s_1} \setminus \tilde{E}_0}$, и, кроме этого, многоугольники $E_{0,k}$ и \tilde{E}_0 инвариантны. Поэтому

$$\max_{T \in \Omega_{q-s}(\tilde{E}_0)} \tau(G(T), M^2) = \max_{T \in \Omega_{q-s}(E_{0,k})} \tau(G(T), M^2). \quad (2.9)$$

Нетрудно заметить, что $\Omega_{q-s}(E_{0,k}) \subseteq \Omega_{q,s}(D_0)$. Следовательно,

$$\max_{T \in \Omega_{q-s}(E_{0,k})} \tau(G(T), M^2) \leq \max_{T \in \Omega_{q,s}(D_0)} \tau(G(T), M^2). \quad (2.10)$$

Из (2.8), (2.9) и (2.10) вытекает лемма 2.

3. Порождение триангуляций проективной плоскости N_1 . Не каждое ребро триангуляции 2-многообразия можно стянуть, произведя при этом снова триангуляцию, так как по определению в триангуляции не может быть кратных ребер (см. [1, п.1] или [2, п.1]). Триангуляция замкнутого 2-многообразия называется *неприводимой*, если никакое ее ребро нельзя стянуть, производя в результате снова триангуляцию. Очевидно, каждая триангуляция T 2-многообразия M^2 может быть преобразована последовательным стягиванием тех ребер, стягивание которых продуцирует снова триангуляцию (ясно, что стягивание таких ребер не изменяет топологический тип триангуляции), к какой-то неприводимой триангуляции 2-многообразия M^2 . Таким образом, каждая триангуляция T 2-многообразия M^2 может быть порождена из некоторой неприводимой триангуляции M^2 (возможно из нескольких неприводимых триангуляций) последовательностью расщеплений, обратных к стягиваниям, проделанным при упрощении T (вообще говоря, такая последовательность не единственна). Операция расщепления лежит в корне нашего исследования благодаря теореме Барнетта [9], утверждающей, что существуют ровно две неприводимые триангуляции проективной плоскости N_1 , а именно триангуляции B^1 и B^2 , показанные на табл. 1 и 2 соответственно (проективная плоскость изображается в виде шестиугольника, все три пары противоположных сторон которого отождествляются в соответствии с тем, как предписывают метки).

Найдем некоторые интересные семейства триангуляций проективной плоскости, порождаемые из неприводимых триангуляций Барнетта B^1 и B^2 расщеплениями специального типа. При этом будем принимать во внимание тот очевидный факт, что если существует автоморфизм триангуляции T , отображающий пару ребер $(v_1, u_1), (v_1, w_1)$ на пару ребер $(v_2, u_2), (v_2, w_2)$, то триангуляции $\langle u_1, v_1, w_1 \rangle (T)$ и $\text{sp} \langle u_2, v_2, w_2 \rangle (T)$ изоморфны.

Рассмотрим триангуляцию B^1 (см. табл. 1). Можно проверить, что для каждой вершины v среди автоморфизмов группы $\text{Aut}(B^1)$ является *циклическое вращение звезды* $\text{St}(v)$, т. е. автоморфизм, отображающий v на себя и действующий как циклическая перестановка вершин на границе $\partial \text{St}(v)$. Отсюда следует, в частности, что каждую вершину можно отобразить в любую вершину посредством действия группы $\text{Aut}(B^1)$. Значит, каждая пара ребер $[u_1, v_1, w_1]$ может быть получена посредством $\text{Aut}(B^1)$ из пары

([6, 4], [6, 5]) или пары ([6, 4], [6, 1]). Таким образом, триангуляции $B_a^1 = \text{sp}\langle 4, 6, 5 \rangle(B^1)$ и $B_b^1 = \text{sp}\langle 4, 6, 1 \rangle(B^1)$ (табл. 1) суть все (с точностью до изоморфизма) триангуляции, порождаемые одним произвольным расщеплением из B^1 .

Рассмотрим триангуляцию B_a^1 . Из симметрии представления этой триангуляции на табл. 1 замечаем, что триангуляции $B_{aa}^1 = \text{sp}\langle 6'', 6', 3 \rangle(B_a^1)$ и $B_{ab}^1 = \text{sp}\langle 6'', 6', 2 \rangle(B_a^1)$ (табл. 1) суть все (с точностью до изоморфизма) триангуляции, порождаемые из B_a^1 расщеплением вида $\text{sp}\langle 6'', v, w \rangle$, где v обозначает произвольную вершину на $\partial \text{St}(6'')$, а w обозначает произвольную вершину, не принадлежащую $\text{St}(6'')$. Заметим, что семейство $\{B_{aa}^1, B_{ab}^1\}$ совпадает с семейством всех (с точностью до изоморфизма) 4-связных триангуляций (т. е. с 4-связными графами), порождаемых из триангуляции B_a^1 связности 3 одним расщеплением.

Рассмотрим триангуляцию B^2 (см. табл. 2). Очевидно, для $v \in \{4, 5, 6\}$ в группе $\text{Aut}(B^2)$ найдется автоморфизм, переводящий вершину v в вершину 4. Кроме того, автоморфизм (1 2 7 3) (4) (5 6) является циклическим вращением звезды $\text{St}(4)$. Значит, для $v \in \{4, 5, 6\}$ каждая пара ребер $\{v, u\}, \{v, w\}$ может быть получена посредством действия $\text{Aut}(B^2)$ из некоторой пары $\{4, 2\}, \{4, x\}$, где x символизирует соответствующую вершину. Кроме этого, для каждой вершины $v \in \{1, 2, 3, 7\}$ найдется автоморфизм, переводящий v в 7. Далее, автоморфизм (1 3 2) (4 5 6) (7) действует на $\text{St}(7)$ как итерированное *) циклическое вращение. Значит, для $v \in \{1, 2, 3, 7\}$ каждая пара ребер $\{v, u\}, \{v, w\}$ может быть получена посредством действия $\text{Aut}(B^2)$ из некоторой пары $\{7, 2\}, \{7, x\}$ или $\{7, 4\}, \{7, x\}$. Итак, принимая во внимание, что

$$\begin{aligned} \text{sp}\langle 2, 4, 7 \rangle(B^2) &\cong \text{sp}\langle 2, 7, 4 \rangle(B^2), \\ \text{sp}\langle 2, 4, 7 \rangle(B^2) &\cong \text{sp}\langle 2, 7, 4 \rangle(B^2), \\ \text{sp}\langle 2, 4, 3 \rangle(B^2) &\cong \text{sp}\langle 2, 7, 3 \rangle(B^2), \\ \text{sp}\langle 2, 4, 1 \rangle(B^2) &\cong \text{sp}\langle 2, 7, 4 \rangle(B^2), \\ \text{sp}\langle 4, 7, 1 \rangle(B^2) &\cong \text{sp}\langle 2, 7, 6 \rangle(B^2) \end{aligned}$$

(символ \cong обозначает изоморфность триангуляций), заключаем, что все (с точностью до изоморфизма) триангуляции, порождаемые из B^2 одним произвольным расщеплением, суть следующие: $B_a^2 = \text{sp}\langle 4, 7, 2 \rangle(B^2)$, $B_b^2 = \text{sp}\langle 4, 7, 5 \rangle(B^2)$, $B_c^2 = \text{sp}\langle 4, 7, 1 \rangle(B^2)$ и $B_d^2 = \text{sp}\langle 2, 7, 3 \rangle(B^2)$ (табл. 2).

Наконец, рассмотрим триангуляцию B_a^2 (табл. 2). Изобразив эту триангуляцию так, как на рисунке, из ее симметрии видим, что семейство всех (с точностью до изоморфизма) триангуляций, порождаемых из B_a^2 таким расщеплением $\text{sp}\langle 7'', v, w \rangle$, что $v \in \{7, 1, 2\}$ и $w \in \{7, 1, 2\}$, будет следующим: $\{B_{aa}^2, B_{ab}^2, B_{ac}^2, B_{ad}^2\}$ (см. табл. 2), где $B_{aa}^2 = \text{sp}\langle 7'', 7', 5 \rangle(B_a^2)$, $B_{ab}^2 = \text{sp}\langle 7'', 7', 1 \rangle(B_a^2)$, $B_{ac}^2 = \text{sp}\langle 7'', 7', 0 \rangle(B_a^2)$, $B_{ad}^2 = \text{sp}\langle 7'', 7', 3 \rangle(B_a^2)$. Заметим, что

*) Т. е. применение для раза n

Таблица 1

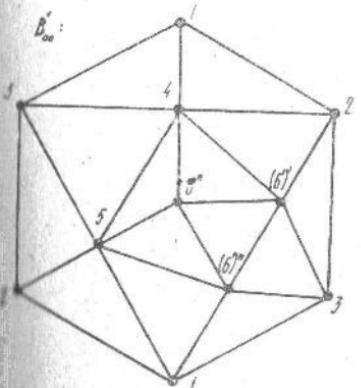
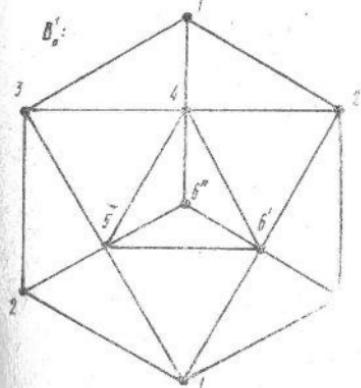
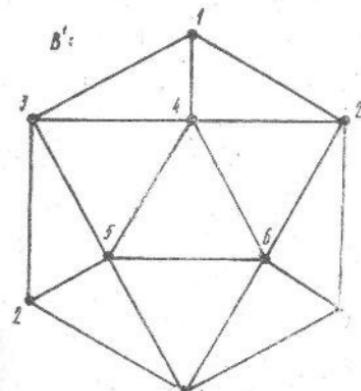
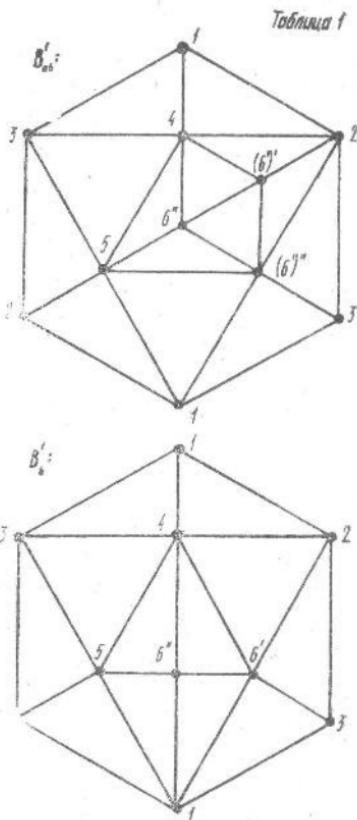
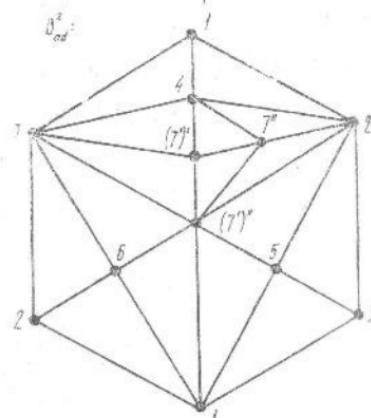
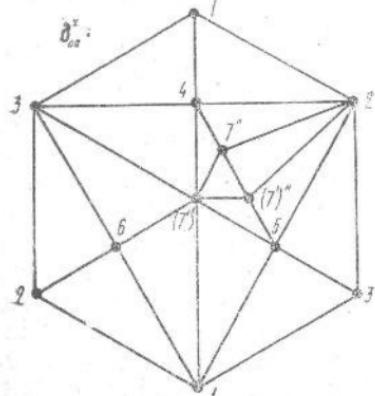
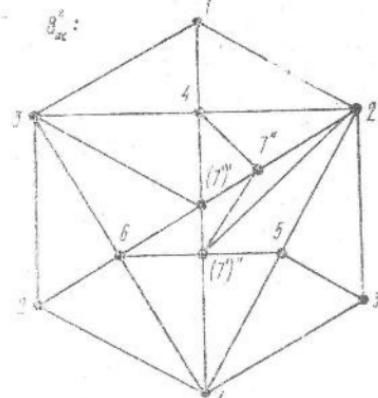
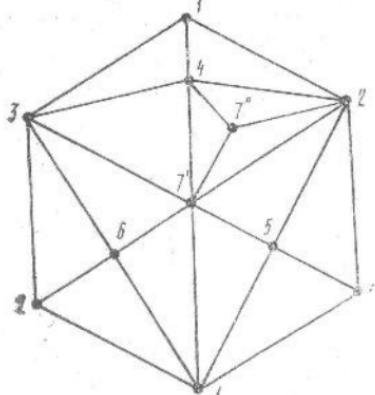
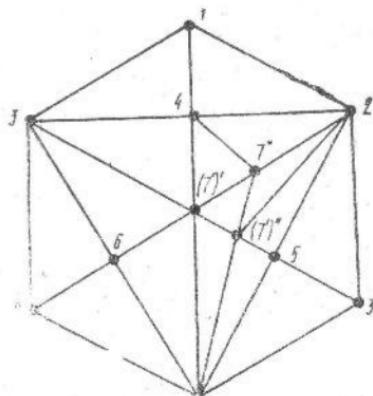
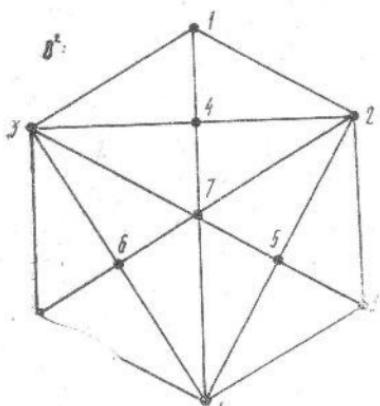


табл. 1, 2 в явном виде найдены все укладки помеченного графа $\sigma(T)$ на N_1 . (В общем случае соответствующий алгоритм нахождения всех попарно различных триангуляций 2-многообразия данным помеченный графом описан также в [2] и [11], в [11] можно найти соответствующие программы на языке Фортран-77).



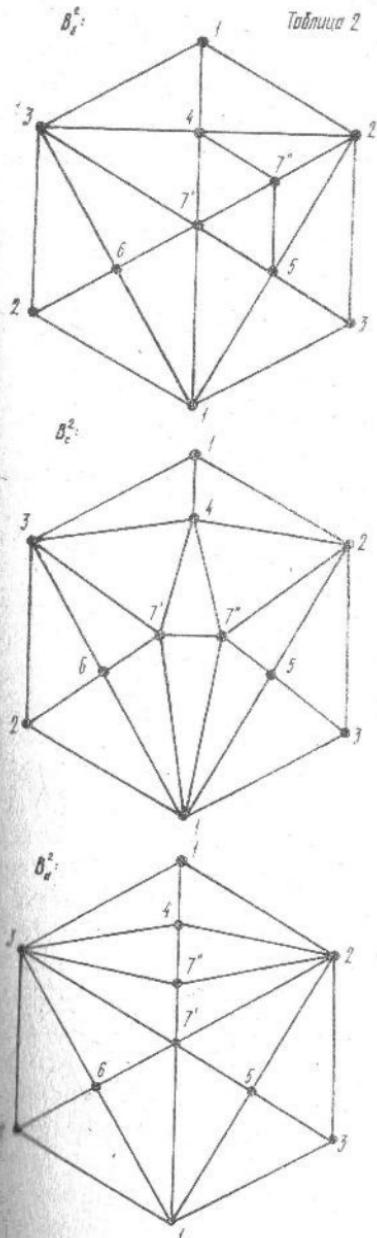
мейство $\{B_{aa}^2, B_{ab}^2, B_{ac}^2, B_{ad}^2\}$ совпадает с семейством всех (с точностью до изоморфизма) 4-связных триангуляций, порождаемых из триангуляции B_a^2 связности 3 одним расщеплением.

Для каждой триангуляции T из табл. 1 и 2 в [10] определены числа $\tau(G(T), N_1)$; эти результаты приведены в табл. 3 (определение связностей $\kappa(G(T))$ не вызывает затруднений). Более того, в [10] для каждой триангуляции T из



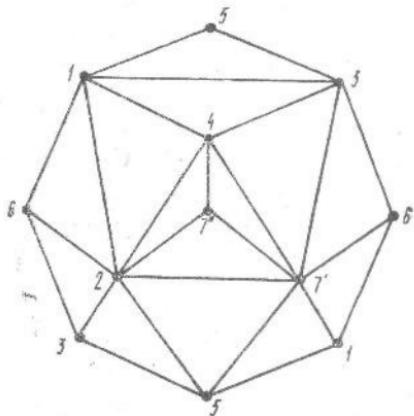
4. Доказательство теоремы 1. Схему доказательства см. в табл. 3. По теореме Барнетта все триангуляции проективной плоскости N_1 порождаются последовательностями расщеплений из двух неприводимых триангуляций B^1 и B^2 (эти две триангуляции представлены в верхнем ряду табл. 3). Эти две триангуляции явля-

Таблица 2



ются исключительными, и мы замечаем из табл. 3, что для них теорема 1 справедлива.

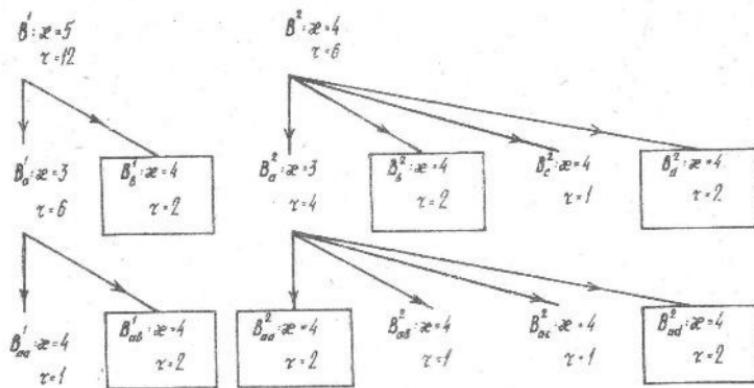
Триангуляции B_a^1 , B_b^1 , B_a^2 , B_b^2 , B_c^2 и B_d^2 представлены в среднем (горизонтальном) ряду табл. 3. Заметим, что для этих шести триангуляций теорема 1 справедлива. Все триангуляции проективной плоскости, кроме B^1 и B^2 , получаются из этих шести триангуля-



ций последовательностями расщеплений, поскольку, как было показано в п. 3, триангуляции B_a^1 , B_b^1 , B_a^2 , B_b^2 , B_c^2 , B_d^2 суть все (с точностью до изоморфизма) триангуляции, порождаемые из B^1 и B^2 одним произвольным расщеплением. Итак, наша задача — доказать теорему 1 для всех триангуляций, порождаемых из шести триангуляций среднего ряда табл. 3 последовательностями расщеплений. Три случая $\kappa = 3, 4$ или 5 будут рассмотрены по очереди.

Случай $\kappa = 3$. Заметим, что $\tau(G(T)) \leq 6$ для каждой триангуляции T среднего ряда табл. 3. Таким образом, в силу леммы 21 для всех триангуляций, порождаемых последовательностями расщеплений из триангуляций среднего ряда табл. 3, утверждаемое в теореме 1 неравенство (1.1) в случае $\kappa = 3$ доказано.

Таблица 3



Чтобы построить бесконечное семейство таких триангуляций T с $\kappa(G(T)) = 3$, что $\tau(G(T), N_1) = 6$, достаточно увеличивать число вершин, последовательно триангулируя инвариантный*) 3-угольник $D(4, 6', 5)$ в триангуляции B_a^1 (см. табл. 1).

Случай $\kappa = 4$. Заметим, что $\tau(G(T), N_1) \leq 2$ для каждой триангуляции T среднего ряда табл. 3 кроме B_a^1 и B_a^2 . Значит, в силу [2, лемма 2] неравенство (1.1) в случае $\kappa = 4$ доказано для триангуляций, порождаемых из B_b^1 , B_b^2 , B_c^2 или B_d^2 последовательностями расщеплений. Таким образом, остается доказать, что для каждой 4-связной триангуляции T , получаемой последовательностью расщеплений из B_a^1 или B_a^2 , тоже будет $\tau(G(T), N_1) \leq 2$. Легко видеть, что семейства $\{B_{aa}^1, B_{ab}^1\}$ и $\{B_{aa}^2, B_{ab}^2, B_{ac}^2, B_{ad}^2\}$, определенные в п. 3, с точностью до изоморфизма совпадают соответственно с семействами $\Omega_1(D(4, 6', 5))$ и $\Omega_1(D(4, 2, 7'))$, причем предполагается, что диски $D(4, 6', 5)$ и $D(4, 2, 7')$ принадлежат соответственно триангуляциям B_a^1 и B_a^2 . Гонятно, что диски $D(4, 6', 5)$ и $D(4, 2, 7')$ являются инвариантными 3-угольниками с разделяющими границами в триангуляциях B_a^1 и B_a^2 соответственно. Таким образом, можно применить [2, лемма 3] и получить из нее, что для каждой 4-связной триангуляции T , порождаемой последовательностью расщеплений из триангуляции B_a^1 или B_a^2 связности 3, соответственно имеем

$$\tau(G(T), N_1) \leq \max_{T^* \in \Omega_1(D(4, 6', 5))} \tau(G(T^*), N_1) = 2$$

или

$$\tau(G(T), N_1) \leq \max_{T^* \in \Omega_1(D(4, 2, 7'))} \tau(G(T^*), N_1) = 2.$$

Построим бесконечное семейство таких триангуляций T с $\kappa(G(T)) = 4$, что их помеченные графы $G(T)$ укладываются на

* Инвариантность звезды вершины степени 3 очевидна.

ровно двумя способами. Пусть f обозначает цепь, состоящую из двух ребер $[5, 6']$ и $[6'', 6']$, в триангуляции B_b^1 (см. табл. 1). Поскольку эти ребра входят ровно в два 3-цикла каждое, то 4-угольник $D(4, 6', 1, 5)$ инвариантен. Кроме того, из табл. 3 усматриваем, что $\tau(G(B_b^1), N_1) = 2$. Таким образом, чтобы построить бесконечное семейство таких триангуляций T с $\tau(G(T)) = 4$, что $\tau(G(T), N_1) = 2$, достаточно последовательно добавлять вершины x_i на цепи f и проводить ребра $[x_i, 4]$ и $[x_i, 1]$.

Случай $\kappa = 5$. Рассмотрим средний ряд табл. 3. Подобно предыдущему случаю, надо доказать, что для каждой 5-связной триангуляции T , порождаемой последовательностью расщеплений из одной (или, быть может, нескольких) из триангуляций среднего ряда табл. 3, будет $\tau(G(T), N_1) = 1$.

Сперва докажем, используя лемму 1, что для 5-связных триангуляций T , порождаемых последовательностями расщеплений из триангуляций B_b^1 , B_b^2 и B_d^2 (обведенных в рамку в табл. 3), будет $\tau(G(T), N_1) = 1$.

Рассмотрим инвариантный 4-угольник $D(4, 6', 1, 5)$ с разделяющей границей в триангуляции B_b^1 . Заметим (см. табл. 1), что для каждого трансверсального для $D(4, 6', 1, 5)$ расщепления $sp \langle u, v, w \rangle$ пара ребер $([v, u], [v, w])$ пересекает трансверсально по меньшей мере одну из следующих пар ребер:

$([v, x], [v, y]) = ([5, 2], [5, 4]), ([5, 3], [5, 1]), ([6', 3], [6', 4]), ([6', 2], [6', 1]), ([4, 5], [4, 2]), ([4, 6'], [4, 3]), ([1, 2], [1, 6'])$ или $([1, 3], [1, 5])$. С другой стороны, согласно результатам работы [10] (в которой для каждой триангуляции T из табл. 1 и 2 найдены в явном виде все укладки помеченного графа $G(T)$ на N_1), триангуляция $T^2(G(B_b^1))$ содержит грани $xy = 254, 153, 36'4$ и $16'2$. Поскольку все условия леммы 1 выполнены, выводим, что для каждой триангуляции $T^* \in \Omega_1(D(4, 6', 1, 5))$ будет $\tau(G(T^*), N_1) = 1$. Таким образом, в силу [2, лемма 3], для каждой 5-связной триангуляции T , порождаемой последовательностью расщеплений из B_b^1 , будет

$$\tau(G(T), N_1) \leq \max_{T^* \in \Omega_1(D(4, 6', 1, 5))} \tau(G(T^*), N_1) = 1.$$

Рассматривая инвариантные 4-угольники $D(4, 2, 5, 7') \subset B_b^3$ и $D(1, 2, 7', 3) \subset B_d^2$ с разделяющими границами, можно применить [2, леммы 3] с леммой 1, как и выше, и получить, что для связных триангуляций T , порождаемых последовательностями расщеплений из B_b^2 или B_d^2 , тоже имеет место равенство $\tau(G(T), N_1) = 1$.

Что касается триангуляции B_c^2 , то $\tau(G(B_c^2), N_1) = 1$ (см. табл. 1), поэтому в силу [2, лемма 2] для триангуляций T , порождаемых последовательностями расщеплений из B_c^2 , будет $\tau(G(T), N_1) = 1$. Итак, только две триангуляции — B_a^1 и B_a^2 — среднего ряда табл. 3 остаются нерассмотренными. Применим к ним лемму 2.

Рассмотрим B_a^2 . В качестве T_0 и D_0 , фигурирующих в лемме 2, возьмем соответственно триангуляцию B_a^2 и 3-угольник $D(4, 2, 7') \subset B_a^2 = T_0$ (см. табл. 2). Пусть D_1 обозначает 1-й потомок многоугольника D_0 относительно какого-то расщепления sp_1 , трансверсального для D_0 . Заметим, что 4-угольники $D(4, 2, (7''), (7'))$ в триангуляциях $B_{aa}^2, B_{ab}^2, B_{ac}^2$ и B_{ad}^2 являются 1-ми потомками многоугольника D_0 относительно расщеплений $\text{sp}(7'', 7', 5), \text{sp}(7'', 7', 1), \text{sp}(7'', 7', 6)$ и $\text{sp}(7'', 7', 3)$ соответственно. Сначала найдем все (с точностью до изоморфизма) триангуляции семейства $\Omega_2(D_0)$. В п. 3 показано, что триангуляции $B_{aa}^2, B_{ab}^2, B_{ac}^2$ и B_{ad}^2 (см. нижний ряд табл. 3) суть все (с точностью до изоморфизма) триангуляции, порождаемые из $T_0 = B_a^2$ одним расщеплением, трансверсальным для $D_0 = D(4, 2, 7')$. Кроме этого, как легко видеть из симметрии представления триангуляции B_a^2 , показанного на рисунке, для каждой триангуляции T_1 , получаемой из T_0 одним трансверсальным для D_0 расщеплением sp_1 , существует такой изоморфизм φ триангуляции T_1 на $B_{aa}^2, B_{ab}^2, B_{ac}^2$ или B_{ad}^2 , который отображает D_1 на 4-угольник $D(4, 2, (7''), (7'))$ (соответственно в триангуляции $B_{aa}^2, B_{ab}^2, B_{ac}^2$ или B_{ad}^2). Поэтому для каждого расщепления $\text{sp}(u, v, w)$, трансверсального для $D_1 \subset T_1$, расщепление $\text{sp}(\varphi(u), \varphi(v), \varphi(w))$ будет расщеплением триангуляции $B_{aa}^2, B_{ab}^2, B_{ac}^2$ или B_{ad}^2 , трансверсальным для 4-угольника $D(4, 2, (7''), (7'))$. Итак, семейство $\Omega_2(D_0)$ (с точностью до изоморфизма) принадлежит семейству таких триангуляций, которые порождаются из $B_{aa}^2, B_{ab}^2, B_{ac}^2$ или B_{ad}^2 одним расщеплением, трансверсальным для 4-угольника $D(4, 2, (7''), (7'))$. Теперь переходим к семейству $\Omega_{2,J}(D_0)$ (см. п. 2). Пусть система (2.3) последовательностей расщеплений состоит из двух последовательностей (т. е. пусть $J = 2$), одна из которых, в свою очередь, состоит из одного (т. е. пусть $s = 1$) расщепления $\text{sp}_{1,1} = \text{sp}(7'', 7', 5)$, а другая — из расщепления $\text{sp}_{1,2} = \text{sp}(7'', 7', 3)$, т. е. $T_{1,1} = \text{sp}_{1,1}(T_0) = B_{aa}^2, T_{1,2} = \text{sp}_{1,2}(T_0) = B_{ad}^2$. В качестве $E_{0,1}$ возьмем 4-угольник $D(4, 2, 5, (7')) \subset B_{aa}^2$. Тогда $E_{0,1}$ будет содержать 1-й потомок многоугольника D_0 (относительно $\text{sp}_{1,1}$), т. е. многоугольник $D_{1,1} = D(4, 2, (7''), (7')) \subset B_{aa}^2$. Далее, в качестве $E_{0,2}$ возьмем 4-угольник $D(1, 2, (7''), 3) \subset B_{ad}^2$. Тогда $E_{0,2}$ будет содержать 1-й потомок многоугольника D_0 (относительно $\text{sp}_{1,2}$), т. е. многоугольник $D_{1,2} = D(4, 2, (7''), (7')) \subset B_{ad}^2$.

Подобно предыдущему (случай $x = 4$), обосновывается, что 4-угольники $E_{0,1}$ и $E_{0,2}$ инвариантны, а так как они к тому же с разделяющими границами, то, значит, мы перешли к семейству $\Omega_{2,2}^1(D_0)$ в полном соответствии с п. 2. Поэтому можно применить лемму 2. Пусть \max обозначает

$$\max_{T^* \in \Omega_{2,2}^1(D_0)} \tau(G(T^*), N_1).$$

Чтобы применить лемму 2, надо определить \max . Используя лемму 1, как и выше, можно установить, что для каждой триангуляции T^* , порождаемой из B_{aa}^2 или B_{ad}^2 одним расщеплением, трансверсальным соответственно для $E_{0,1}$ или $E_{0,2}$, будет $\tau(G(T^*), N_1) = 1$. Кроме этого, $\tau(G(B_{ab}^2), N_1) = \tau(G(B_{ac}^2), N_1) = 1$ (см. табл. 3). Итак, принимая во внимание [2, лемма 2], заключаем, что $\max = 1$. Таким образом, в силу леммы 2, для каждой 5-связной триангуляции T , порождаемой из B_a^2 последовательностью расщеплений, будет $\tau(G(T), N_1) = 1$.

Наконец, рассмотрим B_a^1 . В качестве T_0 и D_0 берем соответственно триангуляцию B_a^1 и 3-угольник $D(4, 6', 5) \subset B_a^1 = T_0$ (см. табл. 1). В качестве семейства $\Omega_{q, j}^s(D_0)$ леммы 2 берем семейство $\Omega_{2,1}^1(D_0)$, причем полагаем $\text{sp}_{1,1} = \text{sp}\langle 6'', 6', 2 \rangle$. Итак, $T_{1,1} = \text{sp}_{1,1}(T_0) = B_{ab}^1$. В качестве $E_{0,1}$ берем 4-угольник $D(4, 2, (6''), 5)$ в триангуляции B_{ab}^1 . Тогда $E_{0,1}$ будет содержать 1-й потомок многоугольника D_0 (относительно $\text{sp}_{1,1}$), т.е. многоугольник $D_{1,1} = D(4, (6'')^{ul}, (6''), 5) \subset B_{ab}^1$. Аргументация для B_a^1 аналогична приведенной выше аргументации для B_a^2 .

Таким образом, для всех 5-связных триангуляций T , порожденных последовательностями расщеплений из шести триангуляций среднего ряда табл. 3, будет $\tau(G(T), N_1) = 1$.

Известно [3], что существует бесконечно много 5-связных триангуляций проективной плоскости. Поэтому равенство $\tau(G(T), N_1) = 1$ достигается на бесконечном семействе триангуляций T связности 5.

Доказательство теоремы 1 завершено.

Примечание. Недавно проф. Сейя Негами сообщил автору, что в статье [12] им тоже была построена бесконечная последовательность 5-связных графов G , для каждого из которых существуют по меньшей мере две неизоморфные триангуляции $T^1(G)$ и $T^2(G)$ тора (см. замечание 3).

Список литературы:

1. Лавренченко С. А. Неприводимые триангуляции тора // Укр. геометр. сб. 1987. Вып. 30. С. 52–62.
2. Лавренченко С. А. О числе треугольных укладок вершинно-помеченного графа на торе // Укр. геометр. сб. 1988. Вып. 31. С. 76–90.
3. Negami S. Unique and faithful embeddings of projective-planar graphs // J. of Graph Theory. 1985. 9. P. 235–243.
4. Лавренченко С. А. О числе треугольных укладок помеченного графа на многообразии: Совм. расшир. заседания семинара по геометрии в целом и науч. семинара кафедры мат. анализа, посвящ. 75-летию со дня рождения В. Б. Ефимова // Вестн. Моск. ун-та, 1986. Сер. мат. и механ. № 5. С. 96–97.
5. Negami S. Uniquely and faithfully embeddable projective-planar triangulations // J. of Combin. Theory. Ser. B. 1984. 36. P. 189–193.
6. Whitney H. Congruent graphs and the connectivity of graphs // Amer. J. Math. 1932. 54. P. 160–168.
7. Negami S. Uniqueness and faithfulness of embedding of toroidal graphs // Discrete Math. 1983. 44. P. 161–180.
8. Lavrenchenko S. An infinite set of torus triangulations of connectivity 5 whose graphs are not uniquely embeddable in the torus // Discrete Math. 1987. 66. P. 299–301.
9. Barnette D. Generating the triangulations of the projective plane // J. of Combin. Theory. Ser. B. 1982. 33. P. 222–230.
10. Лавренченко С. А. Таблицы всех существенных различных триангуляций проективной плоскости с некоторыми интерес-

ными графами. М., 1988. 22 с. Деп. в ВИНИТИ 25.01.89, № 613-В89.
11. Лавренченко С. А. Перечисление в явном виде всех автоморфизмов не-
приводимых триангуляций тора и всех укладок на тор помеченных графов
этих триангуляций. Х., 1987. 57 с. Деп. В УкрНИИНТИ 01.10.87, № 2779—
Ук87. 12. Negami S. Construction of graphs which are not uniquely and not
faithfully embeddable in surfaces // Yokohama Math. j. 1985. 33. P. 67—91.

Поступила в редакцию 29.09.87

ОБ УНИВЕРСАЛЬНЫХ ПОКРЫШКАХ И ПРОЕКЦИЯХ ТЕЛ ПОСТОЯННОЙ ШИРИНЫ

Обозначим через $M^e(N)$ класс n -мерных центрально симметричных многогранников, описанных вокруг шара диаметра $1 + e$ и имеющих $2N$ граней; $M^0(N)$ будем обозначать через $M(N)$.

Назовем множество $X \subset R^n$ универсальной покрышкой, если любое подмножество в R^n диаметра 1 может быть покрыто образом X при некотором движении. В размерностях 2 и 3 удалось построить такие универсальные покрышки, которые можно разбить соответственно на 3 и 4 части диаметра < 1 , и тем самым решить в этих размерностях проблему Борсука о возможности разбиения любого ограниченного подмножества в R^n на $n + 1$ частей меньшего диаметра [1—4]. В работе [5] доказано, что при $N > \frac{n(n+1)}{2}$ все элементы $M(N)$ не являются универсальными покрышками в R^n .

Теорема 1. Все элементы $M^e(N)$ при $N \leq (\cos e)^{1-n}$ являются универсальными покрышками.

Под опорной функцией подмножества в R^n относительно некоторой точки будем понимать сужение обычной опорной функции на единичную сферу S^{n-1} с центром в этой точке.

Лемма 1. Опорная функция H тела K постоянной ширины 1 в R^n относительно центра его описанной сферы наименьшего радиуса r удовлетворяет условию Липшица с постоянной

$$\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}} \leq \sqrt{\frac{n-1}{4(n+1)}}.$$

Действительно, для $e \in S^{n-1}$ будет $\min(H(e), H(-e)) \geq \frac{1}{2}$, так как $H(e) + H(-e) = 1$, и можно считать, что $H(e) \geq \frac{1}{2}$. Пусть O — центр описанной сферы K , A — некоторая точка K в опорной плоскости, отвечающей вектору e , а $\varphi(e)$ — угол между OA и e . Тогда $OA \cdot \cos \varphi(e) \geq \frac{1}{2}$, и для $e_1 \in S^{n-1}$, составляющего угол φ_1 с e , будет $H(e_1) \geq OA \cdot \cos(\varphi(e) + \varphi_1) = OA \cdot \cos \varphi(e) - OA \cdot \sin \frac{\varphi_1}{2} \cdot \sin \left(\varphi(e) + \frac{\varphi_1}{2} \right) \geq H(e) - \varphi_1 \cdot OA \times$

$\times \sin\left(\phi(e) + \frac{\varphi_1}{2}\right)$, откуда следует оценка $\max_{e \in S^{n-1}} OA \cdot \sin \phi(e)$ для искомой постоянной Липшица. Но $OA \cdot \sin \phi(e) = OA \times \sqrt{1 - \cos^2 \phi(e)} < \sqrt{r^2 - \frac{1}{4}}$; это неравенство следует из теоремы Юнга.

Лемма 2. Пусть $A \subset S^{n-1}$ измеримо и $\mu(A) > \frac{N-1}{N} \mu(S^{n-1})$; тогда любые N точек сферы S^{n-1} вращением сферы можно поместить в A .

Пусть μ_1 — нормированная мера Хаара на группе вращений $SO(n)$. Положим $A_i = \{a \in SO(n) \mid$ образ i -й точки при вращении a не попадает в $A\}$. Тогда $\mu_1(A_i) = 1 - \mu(A)/\mu(S^{n-1}) < \frac{1}{N}$, и для доказательства леммы 2 достаточно взять любой элемент множества $SO(n) \setminus \bigcup_{i=1}^N A_i$ положительной меры.

Доказательство теоремы 1. Пусть многогранник $m \in M^\varepsilon(N)$ и $e_1, \dots, e_N \in S^{n-1}$ — направляющие векторы N , прямых перпендикулярных парам параллельных граней m , с общим началом в центре описанной сферы тела K постоянной ширины.

Рассмотрим множество $A = \{e \in S^{n-1} \mid H(e) = \frac{1}{2}\}$. Это симметричное относительно центра сферы множество, разделяющее S^{n-1} на две центрально-симметричные части. Обозначим через A_ε окрестность A радиуса $\varepsilon > 0$, а через μ — стандартную меру площади на S^{n-1} . По изопериметрическим соображениям [6] $\mu(S^{n-1} \setminus A_\varepsilon)$ не больше удвоенной меры сферической шапки диаметра $\cos \varepsilon$, которая меньше площади полусферы диаметра $\cos \varepsilon$, равной $(\cos \varepsilon)^{n-1} \mu(S^{n-1})$. По условию теоремы 1 $\mu(A_\varepsilon) > 1 - (\cos(\varepsilon))^{n-1} > 1 - \frac{1}{N}$, поэтому по лемме 2 векторы e_1, \dots, e_N , а вместе с ними и многогранники m одновременно можно повернуть так, что они все попадут в A_ε , но тогда по лемме 1 $|H(e_i) - \frac{1}{2}| \leq \varepsilon \sqrt{\frac{n-1}{4(n+1)}} < \frac{\varepsilon}{2}$, и повернутый многогранник m покрывает K .

Замечания. Очевидно, теорема 1 с доказательством допускает следующие обобщения.

1. Если $N \ll \left(\cos \frac{\varepsilon}{\sqrt{4r^2-1}}\right)^{1-n}$, то любой многогранник $m \in M^\varepsilon(N)$ является покрышкой для тел постоянной ширины с радиусом описанной сферы $\ll r$.

2. Пусть измеримое $A \subset SO(n)$ и $N \ll \mu_1(A) \cdot (\cos \varepsilon)^{1-n}$. Тогда для многогранника $m \in M^\varepsilon(N)$ с общим центром O с описанной сферой произвольного тела постоянной ширины K найдется такой поворот $a \in A$ вокруг O , что $K \subset am$, т. е. m является A -покрышкой, следя терминологии [7, с. 73].

3. В условиях замечания 2 $\mu_1 \{a \in SO(n) \mid K \subset am\} \geq 1 - N \times (\cos \varepsilon)^{1-n}$.

2. Следующая теорема типа теоремы Дворецкого [8] о почти шаровой проекции уточняет в специальном случае для тел постоянной ширины оценку размерности объемлющего пространства. Обозначим через $n(\varepsilon)$ минимальное число элементов симметричной относительно центра ε -сети на сфере $S^{n-1} \subset R^n$ с угловой метрикой.

Теорема 2. При $N \geq \min \left(\frac{1}{2} n \sqrt{\frac{\varepsilon}{1+2\varepsilon}}, 1 - \log_{\cos \frac{\varepsilon}{2+3\varepsilon}} \left(\frac{1}{2} n \times \right. \right.$

$\left. \times \left(\frac{\varepsilon}{2+3\varepsilon} \right) \right) \text{ любое тело постоянной ширины в } R^N \text{ обладает } \varepsilon\text{-асферической } n\text{-мерной ортогональной проекцией.}$

Докажем, что заключение теоремы 2 справедливо, если $N \geq \frac{1}{2} n \sqrt{\frac{\varepsilon}{1+2\varepsilon}}$.

Лемма 3. Любой n -мерный многогранник $m \in M(N)$ покрывает некоторую ортогональную n -мерную проекцию любого N -мерного тела постоянной ширины.

Доказательство. Зафиксируем разложение $R^N = R^n \oplus \bigoplus R^{N-n}$ в прямую сумму двух ортогональных подпространств. Пусть $\pi: R^n \oplus R^{N-n} \rightarrow R^n$ — проекция на первое слагаемое. Для $m \in M(N)$ рассмотрим многогранное множество $\pi^{-1}(m)$. Обозначим через P_i слой единичной толщины $-\frac{1}{2} \leq x_i \leq \frac{1}{2}$, где $n+1 \leq i \leq N$. Множество $M = \pi^{-1}(m) \cap P_{n+1} \cap \dots \cap P_N$ является многогранником из $M(2N-n)$; покажем, что это — универсальная покрышка в R^N .

Если M — не универсальная покрышка, то по теореме 1 работы [9] возникает непрерывное отображение $F: SO(N) \rightarrow S^{N-n-1}$. Так как по построению значения F не меняются при вращении M вокруг m , то возникает непрерывное отображение $F: SO(N) / SO(N-n) = V_{n,N} \rightarrow S^{N-n-1}$, которое будем обозначать той же буквой F . По построению F обладает свойством: $F(vt) = -F(v)$, где t — инволюция замены знака у векторов репера $v \in V_{n,N}$, что противоречит лемме 1 работы [10] о том, что не существует G -гомоморфизма k -связного пространства в k -мерное клеточное пространство, на которых конечная группа G действует свободно. Лемма 3 доказана.

Рассмотрим n -мерную ортогональную проекцию тела $K \subset R^N$ постоянной ширины 1 , которая может быть покрыта многогранником $m \in M(N)$, ограниченным опорными плоскостями к n -мерному единичному шару в точках некоторой инвариантной относительно центра $\sqrt{\frac{\varepsilon}{1+2\varepsilon}}$ -сети из $n \left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{1+2\varepsilon}} \right)$ элементов.

Покажем, что диаметр $m \leq 1 + \frac{\varepsilon}{2+\varepsilon}$. Действительно, для всей исходящей из центра шара прямой l найдется точка из выбранной сети, угловое расстояние от которой до точки пересече-

ния l со сферой не более $\sqrt{\frac{\varepsilon}{1+2\varepsilon}}$. Касательная гиперплоскость в точке a высекает на l (считая от центра) отрезок длины не более

$$\begin{aligned} \frac{1}{2 \cos \sqrt{\frac{\varepsilon}{1+2\varepsilon}}} &= \frac{1}{2 \sqrt{1 - \sin^2 \sqrt{\frac{\varepsilon}{1+2\varepsilon}}}} < \frac{1}{2 \sqrt{1 - \frac{\varepsilon}{1+2\varepsilon}}} = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}} < \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\varepsilon}{2+2\varepsilon}\right) < \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\varepsilon}{2+\varepsilon}\right), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Итак, выбранная n -мерная проекция тела постоянной ширины содержится в шаре диаметра $d_1 < 1 + \frac{\varepsilon}{2+\varepsilon}$. Так как эта проекция есть тело постоянной ширины, то она содержит гомотетичный выбранному шару диаметра $d_2 = 2 - d_1 > 1 - \frac{\varepsilon}{2+\varepsilon}$ [11, задача 90]. Отношение диаметров двух вышеупомянутых шаров с общим центром

$$\frac{d_1}{d_2} < \frac{1 + \frac{\varepsilon}{2+\varepsilon}}{1 - \frac{\varepsilon}{2+\varepsilon}} = 1 + \varepsilon.$$

Покажем, что заключение теоремы 2 справедливо, если $N \geq 1 - \log_{\cos \frac{\varepsilon}{2+3\varepsilon}} \left(\frac{1}{2} n \left(\frac{\varepsilon}{2+3\varepsilon} \right) \right)$. Для этого покажем, что ε — асферична существующая по теореме 1 n -мерная проекция тела постоянной ширины 1 в R^n , которая содержится в многограннике $m \in M^{2+3\varepsilon}(N)$, ограниченном опорными плоскостями к n -мерному шару диаметра $1 + \frac{\varepsilon}{2+3\varepsilon}$ в точках некоторой инвариантной относительно центра $\frac{\varepsilon}{2+3\varepsilon}$ -сети из $2N = n \left(\frac{\varepsilon}{2+3\varepsilon} \right)$ элементов. Как видно из доказательства первой части теоремы 2, достаточно проверить, что $\text{diam}(m) < \frac{2+2\varepsilon}{2+\varepsilon}$, но по доказанному ранее $\text{diam}(m) \leq \left(1 + \frac{\varepsilon}{2+3\varepsilon}\right) / \left(\sqrt{1 - \frac{\varepsilon}{2+3\varepsilon}}\right)^2 = \sqrt{1 + \frac{\varepsilon}{2+3\varepsilon}} / \sqrt{1 - \frac{\varepsilon}{2+3\varepsilon}} = \sqrt{\frac{1+2\varepsilon}{1+\varepsilon}} < 1 + \frac{\varepsilon}{2+2\varepsilon} < \frac{2+2\varepsilon}{2+\varepsilon}$.

Замечания 1. Сравним две оценки размерности N , данные теоремой 2. Асимптотика функции $n(\varepsilon)$ интенсивно изучалась [12]. Очевидно, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ $n(\varepsilon) \sim \frac{c(n)}{\varepsilon^{n-1}}$, где $c(n)$ — плотность укладки R^{n-1} равными шарами. Поэтому, как показывают простые вычисления, первая оценка $N \sim \frac{1}{2} \frac{c(n)}{(V\varepsilon)^{n-1}}$, а вторая оценка $N \sim$

$\sim -\frac{8(n-1) \ln \varepsilon}{\varepsilon^2}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Первая оценка асимптотически лучше при $n \leq 5$, а вторая — при $n \geq 6$.

2. Для второй оценки из теоремы 2 справедливы все замечания, сделанные к теореме 1.

Список литературы: 1. Pál J. Über ein elementares Variationsproblem Danske Videnskab. Selskab. // Math. Fys. Meddelseb. 3. 1920. №2. S. 10—35. 2. Borsuk K. Drei Sätze über die n -dimensionale Sphäre // Fundamenta Math. 1933. 20. S. 177—190. 3. Gale D. On inscribing n -dimensional sets in a regular n -simplex // Proc. Amer. Math. Soc. 1953. 4. P. 222—225. 4. Grünbaum B. A simple proof of Borsuks conjecture in three dimensions // Proc. Cambridge Philos Soc. 1957. 53. P. 776—778. 5. Макеев В. В. Универсальные покрышки. II. // Укр. геометр. сб. 1982. Вып. 25. С. 82—86. 6. Мильман В. Д. Новое доказательство теоремы Дворецкого о сечениях выпуклых тел // Функциональный анализ и прил. 1971. № 5 (2). С. 28—37. 7. Данцер Л. и др. Теорема Хелли/Л. Данцер, Б. Грюнбаум, В. Кли. М., 1968. С. 30—45. 8. Dvoretzky A. Some results on convex bodies and Banach spaces // Proc. Internat. Sympos. on Linear spaces. Jerusalem. 1960. P. 123—160. 9. Макеев В. В. Универсальные покрышки. I // Укр. геометр. сб. 1981. Вып. 24. С. 70—79. 10. Макеев В. В. О некоторых свойствах непрерывных отображений сфер и задачах комбинаторной геометрии // Геометр. вопр. теории функций и множеств. Калинин, 1986. С. 75—85. 11. Яглом И. М., Болтянский В. Г. Выпуклые фигуры. М., 1951. 340 с. 12. Роджерс К. Укладки и покрытия. М., 1968. С. 7—28.

Поступила в редакцию 14.04.87

УДК 514.013

А. И. МЕДЯНИК

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ
ДЛЯ ЗАМКНУТЫХ ВЫПУКЛЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

В предыдущей работе [1] рассматривался вопрос о сводимости общей задачи существования для замкнутых выпуклых поверхностей с заданной функцией f главных радиусов кривизны R_1, R_2 ($R_1 > R_2$) и единичной нормали n к уравнению К. Миранды вида

$$R_1 R_2 + \Phi(R_1 R_2, R_1 + R_2, n) + cn = \varphi(n), \quad (1)$$

где c — неизвестный постоянный вектор, а $\varphi(n)$ удовлетворяет условию замкнутости. При этом оказалось, что функция Φ должна иметь следующий вид:

$$\Phi = \int_0^v \frac{f(u^{2m/2}, t, n)}{(\alpha_1 - \alpha_2)t} \left[\left(\frac{v}{t} \right)^{\alpha_1} - \left(\frac{v}{t} \right)^{\alpha_2} \right] dt, \quad (2)$$

где $u = \frac{\sqrt{R_1 R_2}}{R_1 + R_2}$; $v = R_1 + R_2$; f — положительно однородная функция степени m относительно компонент вектора n , $\alpha_1 + \alpha_2 = 2m + 1$, $\alpha_1 > \alpha_2 > 0$. В связи с этим возникает вопрос о ра-

пространении теорем существования для уравнения (1), доказанных в [2, 3], на случай, когда функция Φ имеет указанный вид, с заменой в них условий на Φ подходящими условиями на f (и входящие в (2) параметры).

Напомним для удобства условия, которым удовлетворяет функция пяти переменных в теоремах К. Миранды (см. [3]):

$$A_0(R_1R_2)^\mu \leq \Phi \leq A_1(R_1R_2)^\mu, \quad (3)$$

где A_0 , A_1 и μ ($0 < \mu < 1$) — постоянные;

$$\Phi_1 \geq a - 1 \quad (a = \text{const} > 0), \quad \Phi_2 \geq 0; \quad (4)$$

$$\sum_{i, k \neq 2} \Phi_{ik} \lambda_i \lambda_k \leq 0; \quad (5)$$

$$\Phi_1 < 0, \quad \Delta_n \Phi + 2\Phi - \Phi_{11}^{-1} \nabla_n \Phi_1 \leq \chi_0 + \chi_1 (R_1 + R_2)^{2-v}, \quad (5')$$

где ∇_n , Δ_n — первый и второй дифференциальные параметры Бельтрами, которые надо вычислять, представляя Φ и Φ_1 как функции одного n , а $\chi_0(R_1R_2)$ и $\chi_1(R_1R_2)$ — непрерывные функции и $0 < v < 2$.

Лемма 1. Если $\alpha_1 < 2\mu$ и

$$A_0(R_1R_2)^\mu \leq \frac{\int}{(2\mu - \alpha_1)(2\mu - \alpha_2)} \leq A_1(R_1R_2)^\mu, \quad (6)$$

то интеграл в (2) существует и функция Φ удовлетворяет условию (3).

Для доказательства леммы 1 достаточно убедиться в том, что

$$\begin{aligned} & \int_0^v \frac{(u^2 t^2)^\mu}{(\alpha_1 - \alpha_2) t} \left[\left(\frac{v}{t} \right)^{\alpha_1} - \left(\frac{v}{t} \right)^{\alpha_2} \right] dt = \frac{u^{2\mu}}{\alpha_1 - \alpha_2} \left[\frac{v^{\alpha_1/2\mu - \alpha_1}}{2\mu - \alpha_1} - \right. \\ & \left. - \frac{v^{\alpha_2/2\mu - \alpha_2}}{2\mu - \alpha_2} \right] \Big|_0^v = \frac{(u^2 v^2)^\mu}{(2\mu - \alpha_1)(2\mu - \alpha_2)} = \frac{(R_1 R_2)^\mu}{(2\mu - \alpha_1)(2\mu - \alpha_2)}. \end{aligned}$$

Лемма 2. Для производных функции Φ вида (2) по первым двум аргументам при условиях леммы 1 справедливы соотношения:

$$\Phi_1 = \int_0^v \frac{tf_1}{(\alpha_1 - \alpha_2)v^2} \left[\left(\frac{v}{t} \right)^{\alpha_1} - \left(\frac{v}{t} \right)^{\alpha_2} \right] dt;$$

$$\Phi_2 = \int_0^v \frac{f_2}{(\alpha_1 - \alpha_2)v} \left[\left(\frac{v}{t} \right)^{\alpha_1} - \left(\frac{v}{t} \right)^{\alpha_2} \right] dt;$$

$$\Phi_{11} = \int_0^v \frac{t^3 f_{11}}{(\alpha_1 - \alpha_2)v^4} \left[\left(\frac{v}{t} \right)^{\alpha_1} - \left(\frac{v}{t} \right)^{\alpha_2} \right] dt.$$

Доказательство. Найдем сначала производные функций Φ по u и v :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi}{\partial u} &= \int_0^v \frac{2utf_1}{\alpha_1 - \alpha_2} \left[\left(\frac{v}{t} \right)^{\alpha_1} - \left(\frac{v}{t} \right)^{\alpha_2} \right] dt; \\ \frac{\partial \Phi}{\partial v} &= \int_0^v \frac{f}{(\alpha_1 - \alpha_2) t} \left[\frac{\alpha_1 v^{\alpha_1-1}}{t^{\alpha_1}} - \frac{\alpha_2 v^{\alpha_2-1}}{t^{\alpha_2}} \right] dt = \\ &= \int_0^v \frac{2u^2 t f_1 + f_2}{\alpha_1 - \alpha_2} \left[\frac{v^{\alpha_1-1}}{t^{\alpha_1}} - \frac{v^{\alpha_2-1}}{t^{\alpha_2}} \right] dt.\end{aligned}$$

Подставляя эти значения в выражения для первых производных

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= \frac{\partial \Phi}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial (R_1 R_2)} = \frac{1}{2uv^2} \frac{\partial \Phi}{\partial u}, \\ \Phi_2 &= \frac{\partial \Phi}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial (R_1 + R_2)} + \frac{\partial \Phi}{\partial v} = -\frac{u}{v} \frac{\partial \Phi}{\partial u} + \frac{\partial \Phi}{\partial v},\end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= \int_0^v \frac{tf_1}{(\alpha_1 - \alpha_2)v^2} \left[\left(\frac{v}{t} \right)^{\alpha_1} - \left(\frac{v}{t} \right)^{\alpha_2} \right] dt, \\ \Phi_2 &= \int_0^v \frac{f_2}{(\alpha_1 - \alpha_2)v} \left[\left(\frac{v}{t} \right)^{\alpha_1} - \left(\frac{v}{t} \right)^{\alpha_2} \right] dt,\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Справедливость утверждения леммы для производной Φ_{11} следует из того, что при дифференцировании по первому аргументу, как видно из сравнения представлений для Φ и Φ_1 , подынтегральное выражение (с f_1 вместо f) умножается на $\left(\frac{t}{v}\right)^2$.

Теорема 1. Пусть $f(R_1 R_2, R_1 + R_2, n) \in C^{m+1, \lambda}$, $m \geq 2$, — положительно однородная функция первой степени относительно компонент вектора n , удовлетворяющая условию (6) с $A_0 > 0$ и $\alpha_1 < 2\mu$. И пусть $f_1 > 0$, $f_2 > 0$ и $\sum_{i, k \neq 2} f_{ik} \lambda_i \lambda_k \leq 0$. Тогда уравнение (1) с функцией Φ вида (2) допускает одно и только одно решение (S, c) класса $C^{m+2, \lambda}$ для любой функции φ класса $C^{m, \lambda}$, которая удовлетворяет условию замкнутости и условию

$$A_1 < \frac{4 \inf \varphi}{3 (\inf \varphi + \sup \varphi)^\mu}, \quad \mu < 1.$$

Результат остается в силе и при $\mu = 1$, если $A_0 = 0$ и

$$A_1 < \min \left[\frac{\sqrt{129} - 9}{6}, \frac{4 \inf \varphi}{3 (\inf \varphi + \sup \varphi)} \right].$$

Доказательство. Из леммы 1 следует, что функция Φ , определяемая равенством (2), удовлетворяет условию (3). На основании леммы 2 заключаем, что Φ удовлетворяет условию (4). Докажем, что для нее выполняется и условие (5). Имеем

$$\sum_{l, k \neq 2} \Phi_{lk} \lambda_l \lambda_k = \int_0^v \frac{M_f}{(\alpha_1 - \alpha_2) t} \left[\left(\frac{v}{t} \right)^{\alpha_1} - \left(\frac{v}{t} \right)^{\alpha_2} \right] dt, \quad (7)$$

где

$$M_f = \left(\frac{t}{v} \right)^4 f_{11} \lambda_1^2 + 2 \left(\frac{t}{v} \right)^2 \sum_{k=3}^5 f_{1k} \lambda_1 \lambda_k + \sum_{l, k=3}^5 f_{lk} \lambda_l \lambda_k.$$

Так как по условию теоремы $\sum_{l, k \neq 2} f_{lk} \lambda_l \lambda_k < 0$, то и $M_f < 0$, поскольку, если обозначить $\left(\frac{t}{v} \right)^2 \lambda_1$ через $\bar{\lambda}_1$, выражение для M_f совпадет по форме с фигурирующим в условии. Поэтому подынтегральное выражение в (7) неположительно. А значит, $\sum_{l, k \neq 2} \Phi_{lk} \lambda_l \lambda_k < 0$, что и требовалось доказать. Утверждение нашей теоремы следует теперь из теорем 4 и 5, полученных в 3.

На тех же соображениях основано доказательство следующей теоремы.

Теорема 2. Теорема 1 остается в силе и в случае, когда функция f не зависит явно от n , если условие $\sum_{l, k \neq 2} f_{lk} \lambda_l \lambda_k < 0$ заменить условием $f_{11} < 0$.

Дело в том, что при этом в силу условия (6) для функции Φ вда (2) будет выполняться условие (5') в соответствующих частях теорем 4 и 5, так как тогда $\Delta_n \Phi = \nabla_n \Phi_1 = 0$.

Условиям теоремы 2 при $\mu < 1$ удовлетворяет, например, функция $f = (R_1 R_2)^\mu f_1 (R_1 + R_2)$, где f_1 — неубывающая ($f'_1 \geq 0$) положительная функция, ограниченная сверху постоянной, меньшей

$$\frac{4(2\mu - \alpha_1)(2\mu - \alpha_2) \inf \varphi}{3(\sup \varphi + \inf \varphi)^\mu}.$$

Замечание 1. Небезынтересно отметить, что в условиях теорем 1 и 2 производные Φ_{12} и Φ_{22} также просто выражаются через производные f_{12} и f_{22} , а именно:

$$\Phi_{12} = \int_0^v \frac{tf_{12}}{(\alpha_1 - \alpha_2) v^3} \left[\left(\frac{v}{t} \right)^{\alpha_1} - \left(\frac{v}{t} \right)^{\alpha_2} \right] dt,$$

$$\Phi_{22} = \int_0^v \frac{tf_{22}}{(\alpha_1 - \alpha_2) v^2} \left[\left(\frac{v}{t} \right)^{\alpha_1} - \left(\frac{v}{t} \right)^{\alpha_2} \right] dt.$$

Замечание 2. Теоремы 1 и 2 остаются справедливыми и при $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, когда функция Φ представляется в виде

$$\Phi = \int_0^v \frac{f(u^{2/2}, t, n)}{t} \left(\frac{v}{t}\right)^\alpha \ln \frac{v}{t} dt. \quad (8)$$

Напомним, что для определения вида Φ надо сначала указать решение $F(v, t)$ соответствующего однородного уравнения [1, с. 108], удовлетворяющее условиям $F(t, t) = 0$, $F'_t(t, t) = 1$. При $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ $F(v, t) = \frac{v^\alpha}{t^{\alpha-1}} \ln \frac{v}{t}$.

Вычисления в этом случае показывают, что

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \int_0^v \frac{tf_{11}}{v^2} \left(\frac{v}{t}\right)^\alpha \ln \frac{v}{t} dt; \\ \Phi_2 &= \int_0^v \frac{f_{12}}{v} \left(\frac{v}{t}\right)^\alpha \ln \frac{v}{t} dt; \quad \Phi_{11} = \int_0^v \frac{t^3 f_{111}}{v^4} \left(\frac{v}{t}\right)^\alpha \ln \frac{v}{t} dt; \\ \Phi_{12} &= \int_0^v \frac{t^2 f_{122}}{v^3} \left(\frac{v}{t}\right)^\alpha \ln \frac{v}{t} dt; \quad \Phi_{22} = \int_0^v \frac{tf_{222}}{v^2} \left(\frac{v}{t}\right)^\alpha \ln \frac{v}{t} dt. \end{aligned}$$

Кроме того, для функции Φ вида (8) справедлива лемма 1 (с $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$).

Список литературы: 1. Медянник А. И. О сводимости общей задачи существования для замкнутых выпуклых поверхностей к уравнению К. Миранды // Укр. геометр. сб. 1986. Вып. 29. С. 103—112. 2. Miranda C. Aggiunde ed corige alla memoria «Su un problema di geometria differentiale in grande per gli ovaloidi» // Ann. Math. Pura ed Appl. 1971. 88. Р. 349 — 355. 3. Медянник А. И. Дополнение к статье «Об одной теореме К. Миранды» // Укр. геометр. сб. 1985. Вып. 28. С. 79—82.

Поступила в редакцию 03.11.80

УДК 514

И. МИКЕШ, Г. А. СТАРКО

**О ГИПЕРБОЛИЧЕСКИ САСАКИЕВЫХ И ЭКВИДИСТАНТНЫХ
ГИПЕРБОЛИЧЕСКИ КЕЛЕРОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ**

В работах [1, 2] рассмотрены некоторые вопросы теории «классических» сасакиевых и келеровых пространств; найдены в некоторой системе координат метрики сасакиевых и эквидистантных основного типа келеровых пространств.

Настоящая работа посвящена аналогичным вопросам теории гиперболически сасакиевых и гиперболически келеровых про-

странств. Часть приведенных здесь результатов, полученных нами, включена в учебное пособие [3].

Исследование носит локальный характер. Все рассматриваемые функции считаются достаточно гладкими.

1. В теории римановых пространств V_n играют большую роль пространства с дополнительными структурами, которые возникают в теоретической физике. Такими являются, в частности, «классические» пространства Келера и Сасаки, а также гиперболически келеровы и гиперболически сасакиевые пространства [3 — 8].

Определение 1. Четномерное риманово пространство K_n называется гиперболически келеровым пространством, если в нем наряду с метрическим тензором $g_{ij}(x)$ существует структура $F_i^h(x)$, удовлетворяющая условиям

$$(a) F_k^h F_i^k = \delta_i^h, (b) g_{kl} F_j^k + g_{kj} F_l^k = 0, (c) F_{i,j}^h = 0, \quad (1)$$

где δ_i^h — символы Кронекера, «,» обозначает ковариантную производную по связности K_n , $h, i, j, \dots = 1, 2, \dots, n$.

Определение 2. Нечетномерное риманово пространство S_n называется гиперболически сасакиевым пространством, если в нем наряду с метрическим тензором $g_{ij}(x)$ существует структура $F_i^h(x)$, удовлетворяющая условиям:

$$(a) F_k^h F_i^k = \delta_i^h - X^h X_i, (b) F_k^h X^k = 0,$$

$$(c) X^k X_k = 1, (d) g_{kl} F_j^k + g_{kj} F_l^k = 0, (e) F_{i,j}^h = X^h g_{ij} - \delta_j^h X_i, \quad (2)$$

где $X_i \equiv X^h g_{ih}$ — некоторый вектор.

Дифференцируя (2 а), легко установить, что $F_i^h = X_{,i}^h$. Указанное определение сасакиевых пространств переопределено. Покажем справедливость следующего предложения:

Теорема 1. Риманово пространство является гиперболически сасакиевым тогда и только тогда, когда в нем существует векторное поле $X^h(x)$, удовлетворяющее условиям

$$(a) X^k X_k = 1, (b) X_{i,j} + X_{j,i} = 0, (c) X_{,ij}^h = X^h g_{ij} - \delta_j^h X_i, \quad (3)$$

где $X_i \equiv X^h g_{ih}$.

Действительно, пусть риманово пространство является сасакиевым, т. е. в нем существует структура F_i^h , удовлетворяющая условию (2). Учитывая, что по необходимости $F_i^h = X_{,i}^h$ выражения (2 в, г, д) запишутся в форме (3). Необходимость доказана.

Докажем достаточность, — что из (3) следуют формулы (2). Положим $F_i^h \equiv X_{,i}^h$. Тогда (3) запишутся в виде (2 в, г, д). Ковариантно дифференцируя (3 а), учитывая (3), получим соотношение (2 б). Аналогичным образом, дифференцируя полученное, находим (2 в). Теорема 1 доказана.

Т. Леви-Чивита [9], изучая движения механических систем, пришел к понятию геодезических отображений. Геодезическими отображениями келеровых пространств занимались многие авторы

(см. [2]). Они установили, что келеровы пространства при некоторых дополнительных условиях не допускают нетривиальных геодезических отображений.

Нам удалось показать [10], что келеровы пространства, допускающие нетривиальные геодезические отображения, являются по необходимости эквидистантными. Такое заключение можно сделать и относительно гиперболически келеровых пространств.

Определение 3 [11]. Риманово пространство называется эквидистантным, если в нем существует ненулевое векторное поле $\xi^h(x)$, удовлетворяющее следующим условиям:

$$\xi_{,i}^h = \rho \delta_i^h, \quad (4)$$

где $\rho(x)$ — некоторый инвариант. Если $\rho \neq 0$, то оно называется эквидистантным основного типа.

Эквидистантные основного типа римановы пространства всегда допускают нетривиальные геодезические отображения [11]. Учитывая свойство (1а), векторное поле ξ^h в эквидистантном гиперболически келеровом пространстве по необходимости удовлетворяет условиям

$$\xi_{,i}^h = \xi_{,k}^j F_j^h F_i^k. \quad (5)$$

Векторные поля, удовлетворяющие условиям (5), называют аналитическими.

2. Как известно, в гиперболически келеровом пространстве K_n можно выбрать систему координат так, что

$$F_b^a = -F_{b+m}^{a+m} = \delta_b^a, \quad F_{b+m}^a = F_b^{a+m} = 0, \quad (6)$$

где $a, b, \dots = 1, 2, \dots, m; m = n/2$. Эту систему координат будем называть канонической.

Учитывая (1), легко убедиться в том, что для метрического тензора g_{ij} и символов Кристоффеля Γ_{hij}

$$\left(\Gamma_{hij} = (\partial_h g_{ij} + \partial_i g_{hj} - \partial_j g_{hi})/2; \partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x^i} \right)$$

в канонической системе координат справедливы соотношения

$$g_{ab} = g_{a+m b+m} = 0, \quad (7)$$

$$\Gamma_{abc} = \Gamma_{a+m b c} = \Gamma_{a b + m c + m} = \Gamma_{a+m b+m c+m} = 0. \quad (8)$$

Условия (8) эквивалентны следующей системе уравнений:

$$(a) \partial_b g_{a+m c} = \partial_c g_{a+m b}, \quad (b) \partial_{b+m} g_{a c + m} = \partial_{c+m} g_{a b + m}. \quad (9)$$

Ненулевые компоненты символов Кристоффеля тогда выражаются следующим образом:

$$\Gamma_{a b c + m} = \partial_a g_{b c + m}, \quad \Gamma_{a + m b + m c} = \partial_{a+m} g_{b+m c}. \quad (10)$$

Отметим, что если метрика риманова пространства в некоторой системе координат удовлетворяет условиям (7) и (9), то оно по необходимости гиперболически келерово, структура которого в этой же системе координат выражается формулами (6).

3. Рассмотрим невырожденное преобразование координат $x'^h = x^h(x^1, x^2, \dots, x^n)$ (11) гиперболически келерова пространства K_n , при котором функции x'^h удовлетворяют условиям: $\frac{\partial x'^a}{\partial x^{b+m}} = \frac{\partial x'^{a+m}}{\partial x^b} = 0$, т. е. когда

$$(a) x'^a = x^a(x^1, x^2, \dots, x^m) \text{ и } (b) x'^{a+m} = x^{a+m}(x^{1+m}, x^{2+m}, \dots, x^n). \quad (12)$$

Формулы (12a) и (12b) являются в свою очередь автономными преобразованиями координат $(x^1, \dots, x^m) \rightarrow (x'^1, \dots, x'^m)$ и $(x^{1+m}, \dots, x^n) \rightarrow (x'^{1+m}, \dots, x'^n)$ соответственно.

При этом преобразовании каноническая система координат переходит в каноническую. Такое преобразование назовем аналитическим.

Теорема 2. Для ненулевого аналитического вектора $\xi^h(x)$ в гиперболически келеровом пространстве существует каноническая система координат, в которой компоненты этого вектора имеют значения

$$\xi^h = e_1 \delta_1^h + e_2 \delta_{1+m}^h, \quad (13)$$

где $e_1, e_2 = 0, 1; e_1 + e_2 \neq 0$.

Доказательство. Рассмотрим ненулевой аналитический вектор ξ^h , удовлетворяющий условиям (5), в канонической системе координат гиперболически келерова пространства K_n . Эти условия в канонической системе координат в силу (6), (8) принимают вид: $\partial_{b+m} \xi^a = \partial_b \xi^{a+m} = 0$, т. е. $\xi^a = \xi^a(x^1, \dots, x^m)$, $\xi^{a+m} = \xi^{a+m}(x^{1+m}, \dots, x^n)$.

При аналитическом преобразовании (11) компоненты вектора $\xi^h(x)$ преобразуются по закону

$$(a) \xi'^a = \xi^b \frac{\partial x'^a}{\partial x^b}, (b) \xi'^{a+m} = \xi^{b+m} \frac{\partial x'^{a+m}}{\partial x^{b+m}}. \quad (14)$$

Нетрудно показать, что можно найти подходящее аналитическое преобразование канонических систем координат такое, что любые компоненты аналитического векторного поля $\xi^h(x)$ можно преобразовать в другие наперед заданные компоненты:

$$\xi'^a = \xi^a(x'^1, \dots, x'^m), \quad \xi'^{a+m} = \xi^{a+m}(x'^{1+m}, \dots, x'^n),$$

читывая, что $\xi'^a \neq 0 \Leftrightarrow \xi^a \neq 0$ и $\xi'^{a+m} \neq 0 \Leftrightarrow \xi^{a+m} \neq 0$. Такая причина, очевидно, сводится к решению автономных систем линейных неоднородных уравнений в частных производных (14a) и (14b).

В частности, можно найти аналитическое преобразование (11) такое, что компоненты ненулевого вектора ξ^h в новой системе координат будут выражаться следующим образом:

$$\xi'^a = e_1 \delta_1^a, \quad \xi'^{a+m} = e_2 \delta_{1+m}^{a+m}$$

$e_1 = 1$, если $\xi^a \neq 0$; $e_2 = 1$, если $\xi^{a+m} \neq 0$; иначе $e_1, e_2 = 0$. Поскольку $\xi^h \neq 0$, то $e_1 + e_2 \neq 0$.

Теорема 2 доказана.

4. Теорема 3. В любом эквидистантном основного типа гиперболически келеровом пространстве K_n существует система координат, в которой структура F выражается формулами (6), а метрический тензор g_{ij} — формулами $g_{ab} = g_{a+m b+m} = 0$, $g_{a b+m} = \partial_{a b+m} G$ (15), где $G = \exp(x^1 + x^{1+m}) \cdot f(x^2, x^3, \dots, x^m, x^{2+m}, x^{3+m}, \dots, x^n)$.

Как мы уже сказали, эквидистантное основного типа пространство характеризуется наличием вектора ξ^h , удовлетворяющего (4) при $\rho \neq 0$. Изучая условия интегрируемости условий (4) в гиперболически келеровом пространстве, легко убедиться, что $\rho = \text{const}$. После нормализации вектора ξ^h можем считать что $\rho = 1$. Следовательно, уравнения (4) примут вид:

$$\xi^h_{,i} = \delta_i^h. \quad (16)$$

Очевидно, что вектор ξ^h является аналитическим и на основании теоремы 2 дальнейшее исследование можно вести в канонической системе координат, причем

$$\xi^h = e_1 \delta_1^h + e_2 \delta_{1+m}^h, \quad e_1, e_2 = 0, 1; \quad e_1 + e_2 \neq 0.$$

В этой системе координат условия 16 записуются так:

$$e_1 \Gamma_{1i}^h + e_2 \Gamma_{1+m i}^h = \delta_i^h,$$

где Γ_{ij}^h — символы Кристоффеля 2-го рода. Опуская индекс h с помощью метрического тензора, получим

$$e_1 \Gamma_{1i} + e_2 \Gamma_{1+m i} = g_{ij}. \quad (17)$$

Учитывая (7), (8) и (10), соотношение (17) приводится к виду:

$$e_1 \partial_1 g_{b c+m} = g_{b c+m}, \quad e_2 \partial_{1+m} g_{b+m c} = g_{b+m c}. \quad (18)$$

Так как $g_{b c+m} \neq 0$, отсюда следует, что $e_1 = e_2 = 1$. Интегрируя (18), получим

$$g_{a b+m} = \exp(x^1 + x^{1+m}) \bar{g}_{a b+m}, \quad (19)$$

где функции \bar{g}_{ab+m} не зависят от x^1 и x^{1+m} .

Предварительно положим

$$\bar{g}_{11+m} \equiv f(x^2, x^3, \dots, x^r, x^{2+m}, x^{3+m}, \dots, x^n). \quad (20)$$

Полагая в (9а) $a = b = 1$ и $c = (= 2, \dots, m)$ и учитывая (19) и (20), $\bar{g}_{1+m r} = \partial_r f$ (21). Аналогично в (9б) положим $a = b = 1$ и $c = r$: $\bar{g}_{1 r+m} = \partial_{r+m} f$ (22). Если в (9б) положить $a = r$, $b = 1$, $c = s (= 2, \dots, m)$, то в силу предыдущего получим $\bar{g}_{r s+m} = \partial_{r s+m} f$ (23).

Легко заметить, что условия (8) — (23) можно записать в форме (15).

Тем самым доказательство теоремы 3 завершено.

С другой стороны, формулы (15) носят и достаточный характер.

Легко убедиться, что если $f \in C^3$, то формулы (15) (при условии, что $\det g_{ij} \neq 0$) порождают эквидистантное основного типа гиперболически келерово пространство, структура которого каноническая.

В качестве примера укажем, что произвольная функция $f \in C^3$, для которой $f(0) \neq 0$, $\partial_r f(0) = 0$, $\partial_{r+m} f(0) = 0$, $\partial_{rs+m} f(0) = \delta_{rs}$, в окрестности точки $M(0)$ порождает гиперболически келерово пространство K_n , так как $\det g_{ij}(0) \neq 0$ и в силу непрерывности в некоторой окрестности точки $M(0)$ $\det g_{ij} \neq 0$.

Таким образом, метрики всех эквидистантных основного типа гиперболически келеровых пространств можно построить при помощи соотношений (15) и подходящем выборе функции f указанных переменных.

Таким образом, построен большой класс гиперболически келеровых пространств, допускающих нетривиальные геодезические отображения.

Эти пространства допускают также нетривиальные голоморфно-проективные отображения [12], так как тензор

$$a_{ij} = k g_{ij} + \xi_i \xi_j - \xi_h F_i^h \xi_h F_i^h,$$

где k — постоянная, выбранная так, чтобы $\det a_{ij} \neq 0$, удовлетворяет основным уравнениям теории голоморфно-проективных отображений гиперболически келеровых пространств [12].

5. Известно [11], что метрика эквидистантного основного типа пространства в некоторой системе координат принимает следующую форму: $ds^2 = dy^1 + \varphi(y^1) ds^2$ (24), где φ — некоторая непостоянная функция от y^1 , $ds^2 = \bar{g}_{\alpha\beta}(y) dy^\alpha dy^\beta$ — метрическая форма некоторого $(n-1)$ -мерного риманова пространства \bar{V}_{n-1} , $\alpha, \beta = 2, 3, \dots, n$.

Метрика, полученная в теореме 3, приводится к виду (23) при помощи следующего преобразования координат:

$$\begin{aligned} y^1 &= \sqrt{2|f|} \cdot \exp(x^1 + x^{1+m}); \\ y^{1+m} &= \sqrt{2|f|} \cdot \exp(x^1 - x^{1+m}), \\ y^a &= x^a (a \neq 1, 1+m). \end{aligned}$$

Непосредственным вычислением находим, что в новой системе координат \bar{y} функция φ и метрический тензор $\bar{g}_{\alpha\beta}$ риманова пространства \bar{V}_{n-1} имеют строение:

$$\begin{aligned} \varphi(y^1) &= (y^1)^2, \quad \bar{g}_{1+m 1+m} = -1/(y^{1+m})^2, \\ \bar{g}_{1+m s+m} &= -\partial_s f / (2f y^{1+m}), \\ \bar{g}_{s+m s+m} &= \partial_{s+m} f / (2f y^{1+m}), \quad \bar{g}_{sr} = -\partial_s f \cdot \partial_r f / (4f^2), \\ \bar{g}_{sr+m} &= \partial_{sr+m} f / (2f) - \partial_s f \partial_{r+m} f / (4f^2), \\ \bar{g}_{s+m r+m} &= -\partial_{s+m} f \cdot \partial_{r+m} f / (4f^2). \end{aligned} \tag{25}$$

Легко найти компоненты F_i^h в этой системе координат.

6. Можно убедиться, что между эквидистантными основного типа гиперболически келеровыми пространствами и гиперболически сасакиевыми пространствами существует непосредственная связь.

Теорема 4. Для того чтобы эквидистантное пространство основного типа, отнесенное к канонической системе координат (24), было гиперболически келеровым, необходимо и достаточно, чтобы $\Phi = (y^1)^2$ и \bar{V}_{n-1} являлось гиперболически сасакиевым пространством S^{n-1} .

Приложение. Функция Φ определена с точностью до постоянного множителя.

Доказательство. Изучая основные уравнения (1), определяющие гиперболически келерово пространство K_n , в системе координат (24) при $\Phi \neq \text{const}$ убедимся, что по необходимости $\Phi = (y^1)^2$ с точностью до постоянного множителя и

$$F_1^1 = 0, F_1^\alpha = \frac{1}{y^1} \bar{X}^\alpha, F_\alpha^1 = y_1 \bar{X}_\alpha, F_\beta^\alpha = \bar{X}_{\beta\alpha}, \quad (26)$$

где «» — ковариантная производная в \bar{V}_{n-1} , $\bar{X}^\alpha(y^2, y^3, \dots, y^n)$ — вектор, удовлетворяющий условиям (3) в пространстве \bar{V}_{n-1} , и на основании теоремы 1 это пространство является гиперболически сасакиевым.

С другой стороны, предположив, что $\Phi = (y^1)^2$ и \bar{V}_{n-1} является гиперболически сасакиевым пространством, формулы (26) порождают в V_n структуру F_i^h , удовлетворяющую в V_n условиям (1). Следовательно, V_n является гиперболически келеровым пространством.

Теорема 4 доказана.

Таким образом, формулы (25) дают строение метрик (в некоторой системе координат) всех гиперболически сасакиевых пространств.

Список литературы:

1. Микеш Й. О сасакиевых и эквидистантных келеровых пространствах // ДАН СССР. 1986. 291, № 1. С. 33—36.
2. Микеш Й. Об эквидистантных келеровых пространствах // Мат. заметки. 1985. 38. № 4. С. 616—633.
3. Синюков Н. С. и др. Голоморфно-проективные отображения келеровых пространств / Н. С. Синюков, И. Н. Курбатова, Й. Микеш, Одесса, 1986. С. 69.
4. Jano K. Differential Geometry of complex and almost complex structures // Pergamon Press. 1965. Р. 10—30.
5. Кобалси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. I. М., 1981. 344 с.; II. М., 1981. 416 с.
6. Широкий А. П. Структуры на дифференцируемых многообразиях // Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия. 1967. М., 1969. С. 29—77.
7. Goldberg S., Jano K. Integrability of almost cosymplectic structures // Pacific J. Math. 1969. 31, N 2. Р. 373—382.
8. Кириченко В. Ф. Аксиома Ф-голоморфных плоскостей в контактной метрической геометрии // Изв. АН СССР, сер. мат. 1984. 48, № 4. С. 711—734.
9. Levi-Civita T. Sulle trasformazioni delle quazioni dinamiche // Ann. di Math. 1896, Ser. 2, 24. Р. 255—300.
10. Микеш Й. О геодезическом отображении Риччи 2-симметрических римановых пространств // Мат. заметки. 1980. 29, № 2. С. 313—317.
11. Синюков Н. С. Геодезические отображения римановых пространств. М., 1979. С. 35—48.
12. Курбатова И. Н. К задаче о квазиголоморфно-проективных отображениях в K -пространствах. М., 1979. С. 16—27. Деп. в ВИНИТИ 02.07.79. № 2429—Деп.

Поступила в редакцию 07.07.87

ПРИМЕР ПОЛНОЙ СЕДЛОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ В R^4
С ОТДЕЛЕННОЙ ОТ НУЛЯ ГАУССОВОЙ КРИВИЗНОЙ

1. Напомним, что полная поверхность в евклидовом пространстве называется седловой, если у нее не существует локально строго опорной гиперплоскости ни в одной точке. Седловые поверхности имеют внутреннюю метрику неположительной кривизны (здесь и далее все поверхности предполагаются по меньшей мере C^2 -регулярными). Согласно С. З. Шефелю [1] для метрик неположительной кривизны естественными являются именно погружения в виде седловых поверхностей. В R^3 поверхность с отрицательной гауссовой кривизной обязательно седловая. По теореме Н. В. Ефимова [2] кривизна такой поверхности не может быть отделена от нуля. В R^4 известны (Э. Р. Розендорн [3]) примеры поверхностей с отрицательной и отделенной от нуля гауссовой кривизной, но эти поверхности не являются седловыми. Мы построим полную седловую аналитическую поверхность в R^4 с отделенной от нуля гауссовой кривизной. Заметим, что в построенном примере на поверхности есть точки, в которых относительно некоторых нормалей вторая квадратичная форма вырождается. Не исключено, что этим свойством обладает любая седловая поверхность в R^4 с отделенной от нуля кривизной.

Будем строить искомую поверхность, задавая ее уравнением вида $r(x, y) = (x, y, \alpha_1(\zeta), \alpha_2(\zeta))$ (1), где $\zeta = x + iy$, а x и y — декартовы координаты на двумерной плоскости, причем ζ пробегает всю плоскость, за исключением дискретного множества; функции α_1 и α_2 — гармонические в этих координатах, а их производные α'_1 и α'_2 по комплексной переменной ζ мероморфны на всей плоскости. Внутренняя и внешняя полнота такой поверхности очевидны.

Покажем, что так заданная поверхность является седловой. Ясно, что

$$\begin{aligned} r_x &= (1, 0, \operatorname{Re} \alpha_1'(\zeta), \operatorname{Re} \alpha_2'(\zeta)), \\ r_y &= (0, 1, -\operatorname{Im} \alpha_1'(\zeta), -\operatorname{Im} \alpha_2'(\zeta)), \\ r_{xx} &= (0, 0, \operatorname{Re} \alpha_1''(\zeta), \operatorname{Re} \alpha_2''(\zeta)), \\ r_{xy} &= (0, 0, -\operatorname{Im} \alpha_1''(\zeta), -\operatorname{Im} \alpha_2''(\zeta)), \\ r_{yy} &= (0, 0, -\operatorname{Re} \alpha_1''(\zeta), -\operatorname{Re} \alpha_2''(\zeta)). \end{aligned} \quad (2)$$

Таким образом, $r_{xx} + r_{yy} = 0$ и, значит, для любой нормали n

$$(r_{xx} n)(r_{yy} n) - (r_{xy} n)^2 < 0. \quad (3)$$

Теперь седлообразность устанавливается так же, как это делалось в [4, с. 231] для поверхностей в R^3 . Приведем для полноты соответствующее рассуждение.

Пусть у поверхности есть локально строго опорная гиперплоскость, скажем, заданная уравнением $x_4 = 0$ в координатах (x_1, x_2, x_3, x_4) в R^4 . Пусть $\delta > 0$ столь мало, что цилиндр $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq \delta$ высекает на поверхности компактный кусок, содержащий точку $(0, 0, 0, 0)$ и лежащий, за исключением этой точки, в полупространстве $x_4 < 0$. Пусть $\varepsilon > 0$ столь мало, что у всех граничных точек этого куска поверхности $x_4 < -\varepsilon$. Натянем на сферу $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \delta$, $x_4 = 0$ сегмент трехмерной сферы высоты ε в полупространстве $x_4 \geq 0$ и станем опускать его по координате x_4 до первого касания с поверхностью. По выбору ε точка касания будет лежать внутри сегмента. В точке касания касательная плоскость к поверхности содержитя в касательной гиперплоскости к сфере, и вторая квадратичная форма поверхности относительно той ее нормали, которая является нормалью к сегменту, будет положительно определена, что противоречит (3). Таким образом, поверхность, заданная уравнением (1), является седловой.

Выясним теперь, что означает отделенность гауссовой кривизны от нуля. По теореме Гаусса ввиду (3) кривизна в любой точке рассматриваемой поверхности неположительна. Остается лишь позаботиться, чтобы она не обращалась в ноль и не стремилась к нулю, когда ζ стремится к одному из полюсов α'_1 или α'_2 , или к бесконечности. Обращение кривизны в ноль означает, что для любой нормали n в данной точке $(r_{xx}n)^2 + (r_{xy}n)^2 = 0$, т. е. ввиду (3) $r_{xx} = 0$ и $r_{xy} = 0$, или $\alpha''_1 = \alpha''_2 = 0$. Из формул (2) и теоремы Гаусса следует, что отделенность от нуля гауссовой кривизны в окрестности полюса α'_1 , скажем, будет обеспечена, если в этой окрестности $(\alpha'_1)^2 = O(\alpha''_1)$ (т. е. если это простой полюс α'_1), а α''_1 — регулярна. Исследование поведения кривизны при $\zeta \rightarrow \infty$ можно не проводить, если дополнительно предположить, что α'_1 и α'_2 — 1-периодичные по x и по y функции. В этом случае сама поверхность периодическая, и ее кривизна не приближается к нулю.

2. Итак, задача свелась к построению функций α'_1 и α'_2 , заданных на всей комплексной плоскости, за исключением дискретного набора точек и обладающих следующими свойствами: 1. α'_1 и α'_2 — гармонические функции; 2. α'_1 и α'_2 — мероморфные функции, имеющие лишь простые полюсы; 3. α'_1 и α'_2 — 1-периодичны по x и по y ; 4. α''_1 и α''_2 не имеют общих нулей и полюсов.

Построим сначала одну функцию ψ , обладающую свойствами 1, 2, 3. Заметим, что функция $\psi_0(\zeta) = \operatorname{Re} [\ln(\zeta + 2\varepsilon) - 2 \ln(\zeta + \varepsilon) + 2 \ln(\zeta - \varepsilon) - \ln(\zeta - 2\varepsilon)] = \operatorname{Re} [\ln(1 + 4\varepsilon^2 / (\zeta + \varepsilon)^2) \times (\zeta - 2\varepsilon)]$ обладает свойствами 1, 2 и дополнительно $\psi_0(\zeta) = O(\zeta^{-3})$.

Ввиду последнего свойства ряд $\sum_{k,l \in \mathbb{Z}} \psi_0(\zeta + k + il)$ сходится к функции $\psi(\zeta)$, обладающей свойствами 1, 2, 3.

Теперь в качестве α'_1 можно взять функцию ψ , а в качестве α'_2 — функцию, полученную из ψ сдвигом переменной $\zeta \rightarrow \zeta - \zeta_0$, не переводящим никакой нуль или полюс ψ' в нуль или полюс ψ'' .

Замечание. Рассмотрим в R^3 поверхность с уравнением $r(x, y) = (x, y, \psi(\zeta))$, где ψ — построенная выше функция. Эта поверхность седловая, ее гауссова кривизна неположительна во всех точках, но есть точки, где она обращается в ноль (это следует из теоремы Н. В. Ефимова). Эта поверхность похожа на плоскость, из которой вверх и вниз вытягиваются периодично расположенные острые рога. Примерно такой вид имеют и проекции на трехмерные пространства поверхности в R^4 , которую мы построили.

3. На построенной поверхности есть точки, в которых эллипс нормальных кривизн вырождается в отрезок. Возможно, такие точки должны быть на любой полной седловой поверхности в R^4 с отделенной от нуля гауссовой кривизной. Однако при повышении размерности объемлющего пространства это заведомо не так. В этом пункте мы построим полную седловую поверхность в R^6 с невырождающимся эллипсом нормальных кривизн и отделенной от нуля гауссовой кривизной.

Искомую поверхность будем задавать уравнением $r(x, y) = (x, y, \alpha_1(\zeta), \alpha_2(\zeta), \alpha_3(\zeta), \alpha_4(\zeta))$, где ζ и α_j имеют тот же смысл, что и в п. 2. Рассуждая как в п. 2, получаем, что такая поверхность является седловой и имеет отделенную от нуля гауссову кривизну, если α_j имеют лишь простые полюсы, α_j — 1-периодичны по x и y , и α_j'' не имеют общих нулей и полюсов. Из формул (2), переписанных для случая поверхности в R^6 , следует, что эллипс нормальных кривизн вырождается в точке ζ тогда и только тогда, когда попарные отношения четырех комплексных чисел $\alpha_j''(\zeta)$ вещественны. Будем искать функции α_j в виде $\alpha_1(\zeta) = -\psi_1(\zeta)$, $\alpha_2(\zeta) = \psi_1(\zeta - \zeta_1)$, $\alpha_3(\zeta) = \psi_1(\zeta - \zeta_2)$, $\alpha_4(\zeta) = \psi_1(\zeta - \zeta_3)$, где ψ_1 — функция, обладающая теми же свойствами, что и построенная в п. 2 функция ψ , и вдобавок такая, что ψ_1'' не имеет кратных корней. Существование такой функции установлено в доказанной ниже лемме. Покажем, что для почти всех значений параметра $(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) \in C^3$ функции α_j'' ни в одной точке $\zeta \in C$ не будут иметь вещественные отношения.

Пусть $M \subset C^3$ — открытое множество тех значений параметра $(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$, при которых каждая точка $\zeta \in C$ может быть нулем или полюсом лишь одной из функций α_k'', α_j'' (с тем очевидным исключением, что полюс α_j'' является полюсом ее производной α_j'''). Ясно, что $C^3 \setminus M$ имеет меру нуль. Докажем, что множество значений параметра $(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) \in M$, при которых в какой-нибудь точке $\zeta \in C$ $\alpha_1''(\zeta) \neq 0, \infty$ и $\alpha_2''(\zeta)/\alpha_1''(\zeta), \alpha_3''(\zeta)/\alpha_1''(\zeta), \alpha_4''(\zeta)/\alpha_1''(\zeta) \in R$, имеет меру нуль. Пусть D — дискретное множество нулей и полюсов α_1'' . Рассмотрим отображение $(C \setminus D) \times M \rightarrow C^3$, ставящее в соответствие четверке $(\zeta, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ тройку $(\alpha_2''(\zeta)/\alpha_1''(\zeta), \alpha_3''(\zeta)/\alpha_1''(\zeta), \alpha_4''(\zeta)/\alpha_1''(\zeta))$. Вычислив дифференциал этого отображения, нетрудно установить, используя определение M , что оно трансверсально к $R^3 \subset C^3$. Следовательно, прообразом R^3 является гладкое пятимерное многообразие, и его проекция в M заполняет там по теореме Сарда множество меры нуль. Рассуждая аналогично, можно пока-

зать, что множество значений параметра $(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) \in M$, при которых в какой-нибудь точке $\zeta \in C$ $\alpha''_2(\zeta) \neq 0, \infty$ и $\alpha'_1(\zeta)/\alpha''_2(\zeta)$, $\alpha'_3(\zeta)/\alpha''_2(\zeta)$, $\alpha''_4(\zeta)/\alpha''_2(\zeta) \in R$, имеет меру нуль. Теперь ясно, что если $(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) \in M$ лежит вне этих двух множеств меры нуль, то в каждой точке $\zeta \in C$ отношение каких-то двух из $\alpha''_j(\zeta)$ не ве-щественно, что и требовалось.

Для построения функции ψ_1 с вышеуказанными свойствами докажем следующее утверждение.

Лемма. Пусть $f_1(\zeta), f_2(\zeta)$ — мероморфные на C функции, 1-периодичные по x и по y , и такие, что множества нулей и полюсов f_1 и f_2 дизъюнкты. Тогда $\exists \delta_0 > 0$: $\forall t \in (0, \delta_0)$ — функция $f_{(t)}(\zeta) = f_1(\zeta) + (1+t)f_2(\zeta)$ не имеет кратных нулей.

Если в утверждение леммы подставить $f_1(\zeta) = \psi''(\zeta)$, $f_2(\zeta) = \psi''(\zeta - \zeta_0)$, где ψ — построенная в п. 2 функция, $\zeta \rightarrow \zeta - \zeta_0$ — сдвиг, не переводящий нули и полюсы ψ'' в нули и полюсы ψ' , то можно взять $\psi_1(\zeta) = \psi(\zeta) + (1+t) \cdot \psi(\zeta - \zeta_0)$ с каким-нибудь $t \in (0, \delta_0)$.

Доказательство леммы. Пусть утверждение леммы неверно и существуют последовательности $t_k \rightarrow 0$ и $\zeta_k \in C : f_{(t_k)}(\zeta_k) = f'_{(t_k)}(\zeta_k) = 0$. Заметим, что полюсы f_1 и f_2 не могут быть предельными точками для ζ_k , так как в их окрестностях $f_{(t_k)}(\zeta)$ не обращается в ноль. Так как $f_{(t_k)}$ периодичны по x и по y , то можно считать, что $\zeta_k \rightarrow 0$. Разложим $f_1(\zeta)$ и $f_2(\zeta)$ в ряд Тейлора в окрестности нуля: $f_1(\zeta) = a_0 + a_1\zeta + \dots$; $f_2(\zeta) = b_0 + b_1\zeta + \dots$. Так как $f_{(t_k)}(\zeta_k) = f'_{(t_k)}(\zeta_k) = 0$, то $f_{(0)}(0) = f'_{(0)}(0) = 0$ и, значит, $a_0 + b_0 = a_1 + b_1 = 0$. Имеем $f_{(t_k)}(\zeta) = f_{(0)}(\zeta) + t_k f_2(\zeta) = (b_n + a_n)\zeta^n + O(\zeta^{n+1}) + t_k(b_0 + O(\zeta))$, где $b_n + a_n \neq 0$, $n \geq 2$. Ясно, что $f_{(0)}(\zeta) \neq 0$, так как у f_1 и f_2 разные полюсы. Заметим, что $b_0 \neq 0$, так как иначе $a_0 = 0$ и f_1 имела бы общий с f_2 нуль. Так как $f_{(t_k)}(\zeta_k) = 0$, то $t_k \sim c\zeta_k^n$. Но с другой стороны, если $f'_{(t_k)}(\zeta_k) = 0$, то $n(b_n + a_n)\zeta_k^{n-1} + t_k b_1 = O(\zeta_k^n)$, откуда $b_n + a_n = 0$, вопреки их выбору. Лемма доказана.

Замечание. Поскольку на построенной поверхности выполняется тождество $r_{xx} + r_{yy} = 0$, из невырожденности эллипсов нормальных кривизн следует также, что каждая точка поверхности содержит строго внутри своего эллипса нормальных кривизн.

Список литературы: 1. Шефель С. З. Вполне регулярные изометрические погружения в евклидово пространство // Сиб. мат. журн. 1970. 11, № 2, С. 15—25. 2. Ефимов Н. В. Возникновение особенностей на поверхностях отрицательной кривизны // Мат. сб. 1964. 64 (106) : 2. С. 56—88. 3. Розендорф Э. Р. О полных поверхностях отрицательной кривизны $K < -1$ в евклидовых пространствах E_3 и E_4 // Мат. сб. 1962. 58 (100) : 4. С. 58—77. 4. Бакельман И. Я. и др. Введение в дифференциальную геометрию «в целом» // И. Я. Бакельман, А. Л. Вернер, Б. Е. Кантор. М., 1973. 150 с.

Поступила в редакцию 31.10.86

**УСЛОВИЯ РАЗЛОЖЕНИЯ ЛИНЕЙЧАТЫХ
И ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ В S^m И CP^m**

В работе указаны условия на кривизну, при которых линейчатая или параболическая поверхность в сфере S^m или комплексном проективном пространстве CP^m разлагается в метрическое произведение.

Определение 1. Линейчатой поверхностью называется C^2 -гладкое подмногообразие M^{n+v} ($n, v > 0$) риманова пространства \bar{M} вместе с C^1 -слоением $\{L\}$ на v -мерные полные вполне геодезические в M листы (образующие). В случае келерова многообразия \bar{M} будем называть M^{n+v} келеровой линейчатой поверхностью, если M^{n+v} , $\{L\}$ — келеровы подмногообразия.

Образующие линейчатой поверхности в сфере S^m кривизны 1 являются большими сферами; если же келерова M^{n+v} расположена в проективном пространстве CP^m с голоморфной кривизной 4, то образующие $\{L = CP^{v/2}\}$.

Определение 2. Регулярную поверхность $M \subset \bar{M}$ назовем t -однозначно проектируемой вдоль образующей $L \subset M$, если t — наименьшее целое число, такое, что для некоторой точки $a \in L$ существует подпространство $T_a M^\perp$ размерности $\text{codim } M - t$, которое при $\bar{\nabla}$ — параллельном переносе по любому пути в L остается трансверсальным M . При $t = 0$ получаем однозначную проектируемость вдоль L (см. [1]), если же пространство $T_a M^\perp$ остается нормальным к M , то поверхность развертывается вдоль L .

Определение 2 удобно для исследования поверхности в окрестности одной образующей, а в случае пространства \bar{M} постоянной кривизны равносильно определению работы [2].

Известно, что линейчатая поверхность в S^m с положительной смешанной секционной кривизной однозначно проектируется и размерность образующих $v < \rho(n)$ (см. [1, 3]), где $\rho(n) = 1$ — максимальное число непрерывных поточечно линейно независимых векторных полей на сфере S^{n-1} . Последовательность $\rho(n)$ вычисляется по формуле $\rho((\text{нечет}) 2^{4b+c}) = 8b + 2^c$, $b \geq 0$, $0 < c < 3$, из которой, например, следует неравенство

$$\tilde{\rho}(n) \stackrel{\text{def}}{=} \max \{\rho(t) : t \leq n\} \leq 2 + 2 \log_2 n.$$

В работе предполагается для $M^{n+v} \subset S^m$ условие

$$\|A_\xi\|^2 = \text{tr}(A_\xi^2) \leq 2, \quad \xi \in TM^\perp, \quad |\xi| = 1, \quad (1)$$

обеспечивающее неотрицательность смешанной секционной кривизны, и при больших v получаем метрическое разложение поверхности. В сфере эталоном линейчатой поверхности, являющейся метрическим произведением, служит многообразие Серге

$M^{n+v} = f(S^v \times S^n) \subset S^{n+v+nv}$, $f: (u_0, \dots, u_v, v_0, \dots, v_n) \rightarrow (u_0 v_0, \dots, u_v v_j, \dots, u_v v_n)$, где $\{u_i\}, \{v_j\}$ — координаты точек единичных сфер $S^v \subset R^{v+1}$, $S^n \subset R^{n+1}$. Такое многообразие Сере v -однозначно проектируется вдоль образующих каждого из двух семейств $f(\{u\} \times S^n)$, $f(S^v \times \{v\})$. Аналогично определяется комплексное многообразие Сере в проективном пространстве CP^m .

Теорема 1. Пусть $M^{n+v} \subset \bar{M}$ — линейчатая поверхность, удовлетворяющая условиям (1),

$$\bar{R}(y, x)x = x^2y, \quad x \in TL, \quad y \in TL^\perp, \quad (2)$$

$$\bar{R}(x, y)z = 0, \quad x \in TL, \quad y \in TM, \quad z \perp x \wedge y, \quad (3)$$

и существует такое целое $m \in [1, n]$, что кривизна Риччи

$$Ric_M \geq \dim M - (m + 1). \quad (4)$$

Тогда, если M^{n+v} t -однозначно проектируется вдоль $\{L\}$ с $t \geq vm$, то M^{n+v} локально изометрична произведению $M_1^m \times M_2^{(n-m)+v}$, где M_2 — линейчатая поверхность, развертывающаяся вдоль $\{L\}$.

Оказывается, что условие $v > \max\{\rho(l) : n - m < l < n\}$ достаточно для того, чтобы линейчатая поверхность $M^{n+v} \subset \bar{M}$ со свойствами (1) — (3) была t -однозначно проектируемой вдоль $\{L\}$ с $t \geq v m$.

Следствие 1. Пусть $M^{n+v} \subset \bar{M}$ — линейчатая поверхность, удовлетворяющая условиям (1) — (3). Тогда, если $v > \bar{r}(n)$, то M^{n+v} локально изометрична произведению $L \times M_2^n$ и $\text{codim } M \geq v n$. В случае $\bar{M} = S^m$ и $\text{codim } M = v n$ поверхность конгруэнтна области многообразия Сере.

С линейчатыми поверхностями тесно связаны поверхности с внешним нуль-индексом $\mu > 0$, а также введенные Борисенко А. А. параболические поверхности, у которых максимальный ранг вторых квадратичных форм меньше $\dim M$ (см. [2, 4]). Напомним известное

Определение 3. Для s -мерного подпространства $U_s \subset T_a M^\perp$ рассмотрим билинейную форму $h(U_s) = P \cdot h: T_a M \times T_a M \rightarrow U_s$, где h — вторая основная форма поверхности $M^l \subset \bar{M}^{l+p}$, $P: T_a M^\perp \rightarrow U_s$ — ортопроектор. Тогда s — нуль-индекс в точке a задается формулой $\mu_s(a) = \min \{\dim N(U_s) : U_s \subset T_a M^\perp\}$, где $N(U_s)$ — нуль-пространство формы $h(U_s)$, и s — нуль-индекс M^l равен $\mu_s = \min \mu_s(a)$.

Заметим, что $\mu = \mu_p < \dots < \mu_1 = l - r$.

Многообразие Сере в сфере при $v \neq n$ является параболической поверхностью ранга $r = 2 \min\{v, n\}$, для которой $\mu_1 = \mu_2 + 1$.

Теорема 2. Пусть $M^l \subset \bar{M}^{l+p}$ — полная поверхность, в точках которой выполнены условия

$$\bar{R}(y, x)x = x^2 \cdot y, \quad x, y \in TM, \quad x \perp y; \quad (5)$$

$$\bar{R}(x, y)z = 0, \quad x, y \in TM, \quad z \perp x \wedge y, \quad (6)$$

и одно из следующих требований: а) (1); б) $K_M \geq 0$,

$$\mu_1 < \mu_2 + 1; \text{ в) } R_{IM} \geq l - 2, \mu_1 < \mu_2 + 1. \quad (7)$$

Тогда, если $0 < r \leq l - \bar{\rho}(l)$, то M^l локально-изометрична

$$a), b) M_1^{l/2} \times S^{l-r/2}, \text{ в) } M_1^l \times S^{l-1}, r = 2,$$

и коразмерность $p \geq \frac{r}{2} \left(l - \frac{r}{2} \right)$. В случае $\bar{M} = S^{l+p}$ и $p = \frac{r}{2} \left(l - \frac{r}{2} \right)$ поверхность конгруэнтна многообразию Сегре.

Разложение келеровых линейчатых и параболических поверхностей происходит при меньших требованиях как на размерность v , так и на кривизну.

Теорема 1'. Пусть M^{n+v} — келерова линейчатая поверхность в келеровом многообразии (\bar{M}, I) , удовлетворяющая (1), (2), и

$$\bar{R}(x, y) z \parallel Iz, x \in TL, y \in TM, z \perp x \wedge Ix \wedge y \wedge Iy. \quad (8)$$

Тогда, если $v > 2$, то M^{n+v} локально-изометрична произведению $L \times M_2^n$ и $\text{codim } M \geq v n$. В случае $\bar{M} = CP^m$ и $\text{codim } M = v n$ поверхность конгруэнтна области многообразия Сегре.

Теорема 2'. Пусть M^l — полная келерова поверхность в келеровом многообразии (\bar{M}^{l+p}, I) , в точках которой выполнено

$$\bar{R}(y, x) x = x^2 y + 3(y, Ix) Ix, x, y \in TM, x \perp y; \quad (9)$$

$$\bar{R}(x, y) z \parallel Iz, x, y \in TM, z \in TM^\perp, \quad (10)$$

и справедливо одно из следующих требований:

$$a) |h(x, y)| < 1, x, y \in TM, |x| = |y| = 1;$$

б) (би)секционная кривизна M^l неотрицательная;

$$в) R_{IM} \geq l.$$

(11)

Тогда, если $0 < r < l$, то M^l изометрична произведению

$$a), б) M_1^{l/2} \times CP^{l/2-r/4}; в) M_1^l \times CP^{l/2-1}, r = 4,$$

и коразмерность $p \geq \frac{r}{2} \left(l - \frac{r}{2} \right)$. В случае $M = CP^{(l+p)/2}$ и $p =$

$= \frac{r}{2} \left(l - \frac{r}{2} \right)$ поверхность конгруэнтна многообразию Сегре.

Сформулированные результаты дополняют, а в некоторых случаях усиливают утверждения работ [1 — 5]. Оценка размерности образующей в следствии I точная, так как любую v -окрестность, где $v < \rho(n)$, большой v -мерной сферы в S^{n+v} можно регулярно расслоить на большие v -мерные сферы [6]. Оценка $v > 2$ в теореме I' — точная ввиду существования субмерсии с вполне геодезическими слоями $CP^1 \subset CP^{2n+1} \xrightarrow{\pi} HP^n$ (см. [7]).

Доказательство теоремы I разобьем на этапы.

1. Для линейчатой поверхности, следяя [8], определим билинейный оператор $B : TL \times TL^\perp \rightarrow TL^\perp$ по формуле

$$B(x, y) = P(\nabla_y \tilde{x}), x \in TL, y \in TL^\perp, \quad (12)$$

где $\bar{x} \subset TL$ — локальное поле векторов, содержащее x ; $P : TM \rightarrow TL^\perp$ — ортопроектор. Так как M^{n+p} не является однозначно проектируемой вдоль образующей L , то найдутся единичные векторы $x \in T_a L$, $v \in T_a M^\perp$, такие, что при $\bar{\nabla}$ -параллельном переносе по геодезической $\gamma \subset L$ ($\dot{\gamma}(0) = x$) в момент t_0 вектор \bar{v} становится касательным $\bar{v} \in T_{\gamma(t_0)} M$. Поле Якоби $y(t)$ ($y(t_0) = \bar{v}$), индуцированное вдоль γ вполне геодезическим слоением $\{L\}$, ввиду (2) задается формулой $y(t) = (\cos t)\bar{y} + (\sin t)(\bar{B}(x, y) + h(x, y))$, где четкой обозначены $\bar{\nabla}$ -параллельные поля вдоль γ . На основании предположения $(\cos t_0)\bar{y} + (\sin t_0)(\bar{B}(x, y) + h(x, y)) = \bar{v}$ и условий $y \perp v$, $B(x, y) \perp v$, получаем $h(x, y) \parallel v$, $B(x, y) = \lambda y$, где можно считать $\lambda = -\operatorname{ctg}(t_0) < 0$ и $t_0 \in (0, \pi/2]$.

2. Покажем, что $\lambda = 0$ и нормаль v при $\bar{\nabla}^\perp$ -параллельном переносе вдоль $\gamma(t)$ ($0 < t < \pi/2$) равномерно поворачивается в \bar{M} на угол $\pi/2$. В этом пункте обобщается метод [1] на экстремальный случай неотрицательной смешанной секционной кривизны.

Пусть $v(t) \in T_{\gamma(t)} M^\perp$ — единичное $\bar{\nabla}^\perp$ -параллельное поле нормалей над γ , содержащее $v(0) = v$. Отождествим евклидовы пространства $(T_\gamma L)^\perp$ (все нормали к L в \bar{M}) с R^{n+p} на основании $\bar{\nabla}$ -параллельного переноса вдоль γ . Тогда полю $v(t)$ соответствует гладкая кривая на единичной сфере $S^{n+p-1} \subset R^{n+p}$. Расстояние между точками $v(0)$, $v(t_0)$ на S^{n+p-1} равно $\pi/2$, поскольку векторы $v(0)$, $v(t_0)$ ортогональны. Поэтому длина рассматриваемой кривой

$$l = \int_0^{t_0} |\bar{\nabla}_\gamma v(t)| dt$$

не меньше $\pi/2$. Из определения поля $v(t)$ следует $\bar{\nabla}_\gamma v(t) = -A_{v(t)}\dot{\gamma}$, и ввиду (1) получаем $|\bar{\nabla}_\gamma v(t)| \leq 1$. Значит, $l \leq t_0$, что с учетом предыдущего и условия $0 < t_0 < \pi/2$ дает равенства $t_0 = \pi/2$, $\lambda = 0$, $|A_{v(t)}\dot{\gamma}| = 1$. Кроме того, $v(t)$ — четверть большой окружности на сфере S^{n+p-1} , т. е. $v(t) = (\cos t)\bar{v} + (\sin t)\bar{z}_1$, где $\bar{\nabla}$ — параллельное поле \bar{z}_1 вдоль γ содержит единичный вектор $z_1 = -A_v x$.

3. Установим «отщепление» вдоль γ касательного поля $z_1(t) = \bar{\nabla}_\gamma v(t) = (\cos t)\bar{z}_1 - (\sin t)\bar{v}$. Для удобства выделим следующее очевидное утверждение:

Лемма 1. Пусть $w(t)$ — поле Якоби в \bar{M} с условием (2) вдоль геодезической $\gamma \subset L$; \bar{v} — $\bar{\nabla}$ -параллельное поле вдоль γ . Тогда, если векторы $w(0)$, $\bar{\nabla}_{\gamma(0)} w(t)$ ортогональны \bar{v} , то $w(t) \perp \bar{v}$, $(\forall t)$.

Так как производная $\bar{\nabla}_\gamma z_1(t) = \bar{\nabla}_\gamma z_1(t) + h(\dot{\gamma}, z_1(t)) = -v(t)$ ортогональна $T_\gamma(t) M$, то $\bar{\nabla}_\gamma z_1(t) = 0$, $h(\dot{\gamma}, z_1(t)) = v(t)$. Поэтому из (1), (2) и уравнений Гаусса получаем $R(z_1(t), \dot{\gamma})\dot{\gamma} = 0$. Если вектор $w \in T_a L^\perp$ ортогонален z_1 , то и $h(x, w)$ ортогонален v , так как $(h(x, w), v) = (A_v x, w) = -(z_1, w) = 0$. Значит, каждое индуцированное $\{L\}$ поле Якоби $w(t)$ ($w(0) \perp z_1$) вдоль γ для любых t ортогонально \bar{v} в силу леммы 1. В частности, векторы $w(\pi/2)$

$\bar{\nabla}_{\dot{\gamma}(\pi/2)} w(t)$ в точке $\gamma(\pi/2)$ ортогональны $\bar{v} = z_1(\pi/2)$. Следовательно, ортогональное дополнение к $z_1(\pi/2)$ в $T_{\gamma(\pi/2)} L^\perp$ является инвариантным подпространством относительно линейного оператора $B(\gamma(\pi/2), \cdot)$. Так как поле нормалей $v(t)$ на любом отрезке t длины $\pi/2$ поворачивается в M на угол $\pi/2$, то для любого t ортогональное дополнение к $z_1(t)$ в $T_{\gamma(t)} L^\perp$ составляет инвариантное подпространство относительно оператора $B(\dot{\gamma}(t), \cdot)$.

4. Покажем, что нормаль $v(\pi/2)$ при $\bar{\nabla}$ -параллельном переносе по любой геодезической $\gamma_1 \subset L$ ($\gamma_1(0) = \gamma(\pi/2)$, $\gamma_1(0) \perp \dot{\gamma}(\pi/2)$) остается нормалью. Пусть $u \in T_{\gamma(\pi/2)} L$ — произвольный единичный вектор, ортогональный $\dot{\gamma}(\pi/2)$. Так как $|A_{v(\pi/2)} \dot{\gamma}(\pi/2)| = 1$, то в силу (1) выполнено $A_{v(\pi/2)} u = 0$. Значит, для любого $w \in T_{\gamma(\pi/2)} L^\perp$ вектор $h(u, w)$ ортогонален $v(\pi/2)$: $(h(u, w), v(\pi/2)) = (A_{v(\pi/2)} u, w) = 0$. Отсюда и из леммы 1 следует стационарность нормали $v(\pi/2)$ вдоль γ_1 .

5. Покажем, что z_1 при $\bar{\nabla}$ -параллельном переносе вдоль любой геодезической на L с началом a становится нормалью в момент $t = \pi/2$. Для любого единичного вектора $u \in T_a L$ ($u \perp x$) и числа $\varepsilon \approx 0$ рассмотрим геодезическую $\gamma_\varepsilon \subset L$ ($\gamma_\varepsilon(0) = a$, $\dot{\gamma}_\varepsilon(0) = (\cos \varepsilon) x + (\sin \varepsilon) u$). При некотором $t_1 \approx \pi/2$ точка $\gamma_\varepsilon(t_1)$ принадлежит гиперповерхности в L вида $\exp(U)$, где U состоит из векторов $T_{\gamma(\pi/2)} L$, ортогональных $\dot{\gamma}(\pi/2)$. Как показано выше, нормаль $v(\pi/2)$ стационарна вдоль геодезической, соединяющей точки $\gamma(\pi/2)$ и $\gamma_\varepsilon(t_1)$. В силу (3) результат $\bar{\nabla}$ -параллельного переноса z_1 по контуру треугольника $a \gamma(\pi/2) \gamma_\varepsilon(t_1)$ совпадает с z_1 . Поэтому z_1 при $\bar{\nabla}$ -параллельном переносе по γ_ε становится нормалью в момент $t = t_1$.

Покажем, что $t_1 = \pi/2$. Найдется индуцированное слоением $\{L\}$ поле Якоби $y_\varepsilon(t)$ вдоль γ_ε с началом $y_\varepsilon(0) = z_1$. Производная этого поля в точке t_1 имеет вид $\bar{\nabla}_{\dot{\gamma}_\varepsilon(t_1)} y_\varepsilon(t) = u_1 + v_1$ ($u_1 \in T_{\gamma_\varepsilon(t_1)} L^\perp$, $v_1 \in T_{\gamma_\varepsilon(t_1)} M^\perp$), и в силу (2) поле $y_\varepsilon(t)$ задается формулой $y_\varepsilon(t) = \cos(t_1 - t) \bar{y}_0 + \sin(t_1 - t) (\bar{u}_1 + \bar{v}_1)$, где \bar{y}_0 , \bar{u}_1 , \bar{v}_1 — $\bar{\nabla}$ -параллельные поля вдоль γ_ε , содержащие векторы $y_0 = y_\varepsilon(t_1)$, u_1 , v_1 . При $t = 0$ получим равенство

$$(\cos t_1) \bar{y}_0 + (\sin t_1) (\bar{u}_1 + \bar{v}_1) = z_1. \quad (13)$$

Учитывая ортогональность \bar{v}_1 , \bar{z}_1 векторам \bar{y}_0 , \bar{u}_1 , например, в точке $\gamma_\varepsilon(t_1)$, из (13) находим

$$(\sin t_1) \bar{v}_1 = z_1, \quad (\cos t_1) y_0 + (\sin t_1) u_1 = 0. \quad (14)$$

Значит, u_1 параллелен $y_0 \neq 0$, т. е. y_0 — собственный вектор линейного оператора $B(\gamma_\varepsilon(t_1), \cdot)$. Как показано выше, собственное число должно быть нулевым: $u_1 = B(\gamma_\varepsilon(t_1), y_0) = 0$. Но тогда из (14) следует $\cos t_1 = 0$ и $t_1 = \pi/2$, что и требовалось показать.

6. Установим «отщепление» z_1 . Построим вдоль γ_ε , как и в случае γ , $\bar{\nabla}$ -параллельное поле $z_\varepsilon(t)$ ($z_\varepsilon(0) = z_1$), на котором кривизна $R(z_\varepsilon(t), \dot{\gamma}_\varepsilon) \dot{\gamma}_\varepsilon = 0$. В силу произвольности u при построении γ_ε

получаем $R(z_1, u)u = 0$ ($u \in T_a L$). Как показано выше, $(n-1)$ -мерное подпространство V_1 векторов из $T_a L^\perp$, ортогональных z_1 , инвариантно относительно линейных операторов $B(u, \cdot)$ ($u \in T_a L$). Отметим, что z_1 не ортогонален y :

$$(z_1, y) = (-A_v x, y) = -\langle h(x, y), v \rangle = -\langle v, v \rangle \neq 0.$$

7. Установим «отщепление» m -мерного распределения $Z \subset TL^\perp$. Так как подпространство V_1 векторов, ортогональных z_1 , инвариантно относительно операторов $B(u, \cdot)$, то можно повторить описанный процесс, пока не получим $s \geq 1$ линейно независимых единичных векторов $z_i \in T_a L^\perp$ ($1 \leq i \leq s$) с условиями $R(z_i, u)u = 0$, причем ортогональное дополнение $V_a \subset T_a L^\perp$ и $Z_a = z_1 \wedge \cdots \wedge z_s$ инвариантно относительно операторов $B(u, \cdot)$ и не содержит их вещественных собственных векторов. Можно считать, $(z_i, z_j) = \delta_{ij}$.

Обозначим через $\{\xi_{i\alpha} = h(x_\alpha, z_i)\}$ единичные нормали в точке a , где $\{x_\alpha\}_{1 \leq \alpha \leq v}$ — ортонормированный базис $T_a L$. Так как выполнено $A_{\xi_{i\alpha}} x_\alpha = z_i$, то ввиду (1) получаем $A_{\xi_{i\alpha}} x_\beta = 0$ ($\alpha \neq \beta$). Отсюда следует

$$\langle h(x_\alpha, z_i), h(x_\beta, z_j) \rangle = 0, \quad \alpha \neq \beta \vee i \neq j,$$

т. е. нормали $\{\xi_{i\alpha}\}$ образуют ортонормированную систему векторов и порождают v -мерное подпространство $N_1 \subset T_a M^\perp$.

Так как при $\bar{\nabla}$ -параллельном переносе вдоль геодезической $\gamma_a \subset L$ ($\dot{\gamma}_a(0) = x_0$) нормаль $\xi_{i\alpha}$ коснется M^{n+v} в момент $t = \pi/2$, то ввиду t -однозначной проектируемости M^{n+v} вдоль L с $t \geq v m$ получаем $s \geq m$. В силу уравнений Гаусса и (2) смешанная секционная кривизна линейчатой поверхности не больше 1, и поэтому кривизна Риччи $R_{i\alpha} \leq \dim M - (s+1) \leq \dim M - (m+1)$.

Сравнивая предыдущее неравенство с (4), получаем $s = m$ и

$$R(w, u)u = u^2 w, \quad R(z, u)u = 0 \quad (u \in T_a L, w \in V_a, z \in Z_a).$$

Ввиду произвольности точки a построены регулярные подразделения $Z \subset TL^\perp$, $\dim Z = m$; $V \subset TL^\perp$, $\dim V = n - m$, причем V будет $\bar{\Delta}$ -параллельно вдоль $\{L\}$, а ортогональное дополнение N_2 к N_1 в TM^\perp будет $\bar{\Delta}$ -параллельно вдоль образующих $\{L\}$.

8. Докажем, что распределения Z , $V \oplus TL$ интегрируемы, а их интегральные многообразия — вполне геодезические в M^{n+v} . Отсюда и из теоремы разложения де Рама будет следовать, что M^{n+v} локально изометрична произведению $M_1^n \times M_2^{(n-m)+v}$, причем интегральными многообразиями для $V \oplus TL$ будут линейчатые развертывающиеся вдоль $\{L\}$ поверхности.

Воспользуемся уравнениями Кодатти, которые в случае (3) таковы

$$(\tilde{\nabla}_x h)(z, y) = (\tilde{\nabla}_z h)(x, y), \quad x \in TL, \quad z \in TM, \quad y \perp x \wedge z. \quad (15)$$

Будем обозначать через $y_i \subset V$, $z_i \subset Z$ локальные поля. В уравнениях (15) сделаем вычисления при $z = z_i$, $y = y_i$:

$$\begin{aligned} (\tilde{\nabla}_x h)(z_i, y_i) &= \nabla_x^\perp(h(z_i, y_i)), \\ (\tilde{\nabla}_{z_i} h)(x, y_i) &= -h(\nabla_{z_i} x, y_i) - h(x, \nabla_{z_i} y_i), \end{aligned} \quad (16)$$

и найдем проекцию векторов (16) на нормаль $\xi_s = h(x, z_s)$:

$$\begin{aligned} (h(x, \nabla_{z_j} y_i) \xi_s) &= (A_{\xi_s} x, \nabla_{z_j} y_i) = -(\nabla_{z_j} z_s, y_i), \\ (\nabla_x^\perp (h(z_j, y_i)), \xi_s) &= \nabla_x (A_{\xi_s} z_j, y_i) = 0, \\ (h(\nabla_{z_j} x, y_i) \xi_s) &= (A_{\xi_s} y_i, \nabla_{z_j} x) = 0. \end{aligned}$$

Поэтому $((\tilde{\nabla}_x h)(z_j, y_i), \xi_s) = 0$, $((\tilde{\nabla}_{z_j} h)(x, y_i), \xi_s) = (\nabla_{z_j} z_s, y_i)$, и в силу произвольности i получаем $\nabla_{z_j} z_s \perp V$.

Аналогично с помощью (15) докажем: $\nabla_{z_j} z_s \perp TL$. Пусть $w \subset TL$, $w \perp x$, $\nabla_x w = 0$. Тогда нетрудно вычислить:

$$\begin{aligned} (\tilde{\nabla}_{z_j} h)(x, w) &= h(\nabla_{z_j} x, w) - h(x, \nabla_{z_j} w), \\ (\tilde{\nabla}_x h)(z_j, w) &= \nabla_x^\perp (h(z_j, w)), \\ (h(x, \nabla_{z_j} w), \xi_s) &= (z_s, \nabla_{z_j} w) = -(\nabla_{z_j} z_s, w), \\ (\nabla_x^\perp (h(z_j, w)), \xi_s) &= 0, \quad (h(w, \nabla_{z_j} x), \xi_s) = 0. \end{aligned}$$

Поэтому $(\nabla_{z_j} z_s, w) = 0$ и, значит, $\nabla_{z_j} z_s \perp TL$. Следовательно, $\nabla_{z_j} z_s \subset Z$, что означает интегрируемость Z и вполне геодезичность в M^{n+v} интегральных многообразий.

Рассуждая так же для (15) с $z = v_i$, $y = v_i$, получим $\nabla_{v_i} v_j \subset V \oplus TL$. Как показано выше, $\nabla_x v_i \subset V$, и поле v_i вдоль $\{L\}$ касается подмногообразия 1-параметрической вариации $\{L_t\}$, т. е. $[x, v_i] \subset V \oplus TL$. Отсюда вытекает: $\nabla_{v_i} x = \nabla_x v_i - [x, v_i] \subset V \oplus TL$. Следовательно, распределение $V \oplus TL$ интегрируемо и интегральные многообразия — вполне геодезические в M^{n+v} . Интегральные многообразия M_2 — линейчатые поверхности с образующей $\{L\}$, так как V инвариантно относительно оператора (12); M_2 развертыиваются вдоль $\{L\}$, поскольку N_2 стационарно вдоль $\{L\}$, а Z и N_1 «меняются» местами при $\bar{\nabla}$ -дифференцировании вдоль $\{L\}$.

Доказательство следствия I опирается на следующее достаточное условие существования вещественных собственных значений оператора (12):

Лемма 2 [8]. Пусть $B : R^v \times R^n \rightarrow R^n$ — билинейный оператор и $v > p(n)$. Тогда существуют единичные векторы $x \in R^v$, $y \in R^n$ и число $\lambda < 0$, удовлетворяющие $B(x, y) = \lambda y$.

Поэтому при выполнении условий следствия I распределение $Z = TL^\perp$ и M^{n+v} изометрична произведению $L \times M_2^n$. Обозначим через $\{x_\alpha\}$, $\{z_i\}$ ортонормированные базисы $T_a L$ и $T_a L^\perp$. Как и в доказательстве теоремы 1, получаем, что $\{h(x_\alpha, z_i)\}$ образуют ортонормированную систему векторов из $T_a M^\perp$, т. е. $\text{codim } M \geq v n$. Если $\bar{M} = S^m$ и $\text{codim } M = v n$, то $\{h(x_\alpha, z_i)\}$ — ортонормированный базис $T_a M^\perp$, и в силу предыдущего векторы из TL^\perp — асимптотические, т. е. слои $\{a\} \times M_2$ — области больших сфер в S^m . Тогда M^{n+v} конгруэнтна области многообразия Серре в силу следующего факта:

Теорема жесткости погружений. Пусть $i_1, i_2: M \subset S^m$ — два изометрических вложения риманова многообразия M в сферу S^m кривизны I , и существует такая изометрия $f: M \rightarrow M$, что f поднимается до линейной изометрии нормальных расслоений $\bar{f}: N_1 \rightarrow N_2$, сохраняющей вторые квадратичные формы. Тогда существует движение F сферы S^m такое, что $F \cdot i_1 = i_2 \cdot f$.

Доказательство теоремы 1' проводится аналогично с учетом того, что в келеровом случае оператор (12) обладает свойством $B(x, y) = IB(x, y)$ и при $v > 2$ всегда имеет вещественный собственный вектор (см. [1, лемма 3]).

Доказательство теоремы 2 разобьем на этапы.

1. В силу (6) и теоремы I работы [4] для произвольной единичной нормали $\xi_0 \in T_a M^\perp$ ранга $r(\xi_0) = r$ через точку a проходит единственная образующая $L_0 \subset M^l$ ($\text{Reg } A_{\xi_0}^L = T_a L_0$ — вполне геодезическое полное подмногообразие \bar{M}), вдоль которой нормаль ξ_0 стационарна и имеет постоянный ранг. Разнесем ξ_0 по геодезическим $\exp(tw)$ ($w \in T_a L^\perp$, $|w| = 1$) ∇^\perp — параллельно на окрестность точки a . Ввиду полуунпрерывности снизу функции ранга можно считать, что полученные нормали $\{\xi\}$ также имеют ранг r и, следовательно, определяют r -параметрическое семейство образующих $\{L\}$ на M^l с тем же условием стационарности нормалей. Семейство $\{L\}$ составляет вполне геодезическое слоение M^l , по крайней мере, в окрестности U_a точки a , и там определен билинейный оператор по формуле (12). В силу условия на r и леммы 2 найдутся единичные векторы $x \in T_a L$, $y \in T_a L^\perp$ и число $\lambda < 0$ такие, что $B(x, y) = -\lambda y$. Пусть $y(t)$ ($y(0) = y$) — поле Якоби, индуцированное $\{L\}$ вдоль геодезической $\gamma_0 \subset L_0$ ($\gamma_0(0) = x$). Ввиду (5) и $\bar{\nabla}_x y(t) = -\lambda y + h(x, y)$ поле $y(t)$ задается формулой $y(t) = (\cos t + \lambda \times \sin t)\bar{y} + (\sin t)\bar{v}$, $v = h(x, y)$, где \bar{y} , \bar{v} — $\bar{\nabla}$ -параллельные поля вдоль γ_0 , содержащие y , v . В отличие от ситуации для линейчатых поверхностей теоремы 1 вектор v может быть и нулевым.

2. В случае $v = 0$ установим «отщепление» единичного вектора z_1 , параллельного $A_{\xi_0} y$. Обозначим через L_s образующую и через ξ_s — нормаль из $\{\xi\}$, отвечающие точке $a_s = \exp(sy)$ для малых s . Справедлива формула: $\xi_s = \xi_0 + s\bar{w} + o(s)$, где ξ_0 , \bar{w} — $\bar{\nabla}$ -параллельные поля вдоль a_s , содержащие векторы ξ_0 , $w = -A_{\xi_0} y$. Поле $y(t)$ индуцируется геодезической вариацией $Q(s, t)$ ($|s| \ll \varepsilon$, $0 < t \ll t_0$) со следующими свойствами: $\gamma_s = Q(s, \cdot) \subset L_s$ ($\gamma_s(0) = a_s$). Из равенства $y(t_0) = 0$ ($t_0 = \arctg(-\lambda) \in (0, \pi/2]$) следует, что точка $q_\varepsilon = \gamma_\varepsilon(t_0)$ лежит в ε^2 -окрестности точки $\bar{q} = \gamma_0(t_0)$. Обозначим через ξ_ε' нормаль в точке q_ε , полученную $\bar{\nabla}$ -параллельным переносом ξ_ε вдоль $\gamma_\varepsilon \subset L_\varepsilon$, и рассмотрим $\bar{\nabla}$ -параллельное поле $\bar{\xi}_\varepsilon = \xi_0 + \varepsilon\bar{w}$ вдоль γ_0 . Заметим, что $\bar{\nabla}$ -параллельный перенос любого вектора по контуру $qaa_\varepsilon q_\varepsilon$ «прямоугольника» $Q(s, t)$ отличается от аналогичного переноса по контуру $qaa_\varepsilon q$ геодезического треугольника в \bar{M} на величину порядка ε^2 . В силу того что $\bar{R}(\gamma_0, \bar{y}) \times \bar{\xi}_\varepsilon = 0$ и $S_{\Delta(qaa_\varepsilon)} \approx \varepsilon$, результат $\bar{\nabla}$ -параллельного переноса

по контуру $\bar{q}aa_\varepsilon q$ отличается от начального значения на величину порядка ε^2 . Так как векторы ξ_ε и ξ'_ε перпендикулярны M^1 , то их разность $\xi_\varepsilon - \xi'_\varepsilon$, перенесенная в точку q и поделенная на ε , равная \bar{w} с точностью до величины порядка ε , с такой же точностью перпендикулярна M^1 . Ввиду произвольности $\varepsilon \approx 0$ вектор \bar{w} — нормаль в точке q . Значит, нормаль \bar{w} в точке q становится касательным вектором при $\bar{\nabla}$ -параллельном переносе по γ_0 в точку a . Отсюда, как и в доказательстве теоремы 1, получаем $t_0 = \pi/2$, $\lambda = 0$ и единичная нормаль $v_1 \parallel \bar{w}$ в точке $\gamma_0(\pi/2)$ включается в ∇^\perp -параллельное поле нормалей вдоль γ_0 вида $v_1(t) = (\cos t) \times \times v_1(0) + (\sin t) \bar{v}_1$. Тогда для единичного касательного ∇ -параллельного поля вдоль γ_0 : $z_1(t) = \bar{\nabla}_{\dot{\gamma}_0} v_1(t) = (\cos t) \bar{z}_1 - (\sin t) \bar{v}_1$, $z_1 \in \bar{v}_1$ — выполнены равенства $R(z_1(t), \dot{\gamma}_0) \dot{\gamma}_0 = 0$, $h(\dot{\gamma}_0, z_1(t)) = -v_1(t)$, $z_1 \parallel A_{\xi_\varepsilon} y$. Как и в доказательстве теоремы 1, получаем, что ортогональное дополнение к z_1 в $T_a L^\perp$ инвариантно относительно оператора $B(x, \cdot)$.

Для единичной нормали $\xi_\varepsilon = (\cos \varepsilon) \bar{\xi}_0 + (\sin \varepsilon) v_1$, $\varepsilon \approx 0$, в точке q оператор квадратичной формы A_{ξ_ε} имеет ранг r . В силу (1) и равенства $|A_{\xi_\varepsilon} \gamma_0(\pi/2)| = 1$ получаем $A_{\xi_\varepsilon} u = 0$, $u \perp \dot{\gamma}_0(\pi/2)$. Поэтому ядро A_{ξ_ε} , $\varepsilon \approx 0$, содержит векторы из $T_q L$, ортогональные $\dot{\gamma}_0(\pi/2)$. При этом $\dot{\gamma}_0(\pi/2)$ не лежит в ядре A_{ξ_ε} , так как нормаль v_1 не стационарна вдоль γ_0 . Следовательно, v_1 остается нормалью при $\bar{\nabla}$ -параллельном переносе по геодезическим вида $\gamma_1 \subset L_0$, $\dot{\gamma}_1(0) \perp \dot{\gamma}_0(\pi/2)$. Обозначим через $\{L(\varepsilon)\}$ однопараметрическое семейство образующих на M^1 , отвечающих нормалям $\{\xi_\varepsilon\}$ в точке q . В силу предыдущего каждая $L(\varepsilon)$, $\varepsilon \neq 0$, пересекает L_0 по $(v-1)$ -мерному вполне геодезическому подмногообразию, ортогональному вектору $\dot{\gamma}_0(\pi/2)$ в точке q . Поэтому поле Якоби $y_1(t) \in T_{\gamma_0(t)} L^\perp$ ($y_1(\pi/2) = 0$), индуцированное семейством $\{L(\varepsilon)\}$, задается формулой $y_1(t) = (\cos t) \bar{y}_1$, где \bar{y}_1 — $\bar{\nabla}$ -параллельное вдоль γ_0 поле, содержащее вектор y_1 . Отсюда получаем $R(y_1(t), \dot{\gamma}_0) \dot{\gamma}_0 = y_1(t)$, $h(\dot{\gamma}_0, y_1(t)) = 0$. Векторы y_1 и z_1 ортогональны как собственные векторы симметрического оператора $R(\cdot, x) x : T_a L^\perp \rightarrow T_a L^\perp$ с различными собственными значениями 1 и 0. Заметим, что единичная нормаль $\xi_\varepsilon / |\xi'_\varepsilon|$ в точке q_ε отличается от нормали $\xi_\varepsilon = (\cos \varepsilon) \bar{\xi}_0 + (\sin \varepsilon) v_1$ в точке $q = \gamma_0(\pi/2)$ на величину порядка ε^2 , а расстояние между q_ε и q имеет порядок ε^2 . Поэтому поле Якоби $y_1(t)$ индуцировано образующими $\{L\}$, можно считать, что $y_1 = y$ в точке a и выполнено $B(x, y_1) = 0$. Аналогично, рассматривая другие геодезические $\gamma \subset L_0$, $\gamma(0) = a$, получаем, что векторы из $T_a L^\perp$, ортогональные z_1 , составляют инвариантное подпространство относительно операторов $B(u, \cdot)$ ($u \in T_a L$) и выполнены равенства

$$R(y_1, u) u = L(u, y_1) = 0, \\ B(u, y_1) = 0, R(z_1, u) u = z_1, u \in T_a L, |u| = 1. \quad (17)$$

3. В случае $v \neq 0$ установим «отщепление» единичного вектора z_1 , параллельного $A_{\nu}x$. Как и в доказательстве теоремы I, получаем, что нормаль $v_1(0) = v/|v|$ при ∇^{\perp} -параллельном переносе вдоль $\gamma_0(t)$ ($0 < t < \pi/2$) равномерно поворачивается в M на угол $\pi/2$. Поэтому $\lambda = 0$ и ∇^{\perp} -параллельное поле $v_1(t)$ имеет вид $v_1(t) = (\cos t)v_1(0) + (\sin t)\bar{z}_1$ ($z_1 \in T_a L^{\perp}$), где $\bar{v}_1(0)$, \bar{z}_1 — $\bar{\nabla}$ -параллельные поля вдоль γ_0 , содержащие векторы $v_1(0)$, $z_1 \parallel A_{\nu}x$. Значит, единичное касательное поле $z_1(t) = \bar{\nabla}_{\dot{\gamma}_0} v_1(t) = (\cos t)\bar{z}_1 - (\sin t)\bar{v}_1(0)$ является ∇ -параллельным вдоль γ_0 , и выполнены равенства $R(z_1(t), \gamma_0)|_{\gamma_0} = 0$, $h(\gamma_0, z_1(t)) = -v_1(t)$. Ввиду невырожденности A_{ξ_0} на $T_a L^{\perp}$ найдется единичный вектор $y_1 \in T_a L^{\perp}$, удовлетворяющий условию $A_{\xi_0} y_1 \parallel z_1$. Обозначим через $y_1(t)$ ($y_1(0) = y_1$) поле Якоби вдоль γ_0 , индуцированное $\{L\}$. Как и в случае $v = 0$, построим «прямоугольник» $Q(s, t)$ из геодезических $\gamma_s \subset L_s$, индуцирующий $y_1(t)$, и после ∇^{\perp} -параллельного переноса ξ_0 по контуру $Q(s, t)$ получим нормаль $\xi_0 + ev_1(\pi/2) + o(\epsilon)$ в точке q_8 . Значит, $A_{\xi_0}(y_1(\pi/2)) = 0$ и ввиду невырожденности A_{ξ_0} на TL^{\perp} вектор $y_1(\pi/2) = 0$, что означает $y_1(t) = (\cos t)\bar{y}_1$. Как и выше, получаем инвариантность ортогонального дополнения к z_1 в $T_a L^{\perp}$ относительно оператора $B(x, \cdot)$.

Рассматривая другие геодезические $\gamma \subset L_0$ ($\gamma(0) = a$), как и в случае $v = 0$, получаем равенства (17) и инвариантность ортогонального дополнения к z_1 в $T_a L^{\perp}$ относительно операторов $B(u, \cdot)$ ($u \in T_a L^{\perp}$).

4. Покажем, что «отщепления» векторов $\{z_i\}$ можно выполнить $r/2$ раз. Обозначим через V_2 ортогональное дополнение к $z_1 \wedge z_2$ в $T_a L^{\perp}$ и определим билинейный оператор $B_2 = P_2 B : T_a L \times V_2 \rightarrow V_2$, где $P_2 : T_a L^{\perp} \rightarrow V_2$ — ортопроектор, B — оператор (12), построенный по $\{L\}$. В силу условия на ранг r и леммы 2 оператор B_2 имеет вещественный собственный вектор $B_2(x, y) = \lambda y$ для некоторых единичных векторов $x \in T_a L$, $y = T_a L^{\perp}$ и числа $\lambda < 0$. Ввиду инвариантности подпространства $V_2 \oplus \{y_1\}$ относительно оператора (12) выполнено: $B(x, y) = \lambda y + \mu y_1$. Поэтому поле Якоби $y(t)$ ($y(0) = y$), индуцированное $\{L\}$ вдоль геодезической $\gamma_0 \subset L_0$ ($\dot{\gamma}_0(0) = x$), задается формулой $y(t) = (\cos t + \lambda \sin t)\bar{y} + (\sin t)(\mu \bar{y}_1 + \bar{v})$ ($v = h(x, y)$), где \bar{y} , \bar{y}_1 , \bar{v} — $\bar{\nabla}$ -параллельные поля вдоль γ_0 . Возможны два случая: $v = 0$ и $v \neq 0$.

Если $v = 0$, то при $t_0 = \arccot(-\lambda) \in (0, \pi/2]$ выполнено $y(t_0) = (\sin t_0)\mu y_1$. Так как индуцированное $\{L\}$ поле Якоби $y(t)$ не может быть параллельно \bar{y}_1 ни при каком t , то $\mu = 0$ и $y(t) = (\cos t + \lambda \sin t)\bar{y}$. Как и при отщеплении z_1 , получаем для $y_2 = y_2 \parallel A_{\xi_0} y$:

$$R(y_2, u)u = B(u, y_2) = 0, \quad R(z_2, u)u = z_2 \quad (u \in T_a L, |u| = 1), \quad (18)$$

а также инвариантность относительно операторов $B(u, \cdot)$ ортогонального дополнения к $z_1 \wedge z_2$ в $T_a L^{\perp}$. Отметим, что y_2 и y_1 линейно независимы. Ввиду невырожденности A_{ξ_0} на $T_a L^{\perp}$ векторы

$A_{\xi_0}y_2$, $A_{\xi_0}y_1$ тоже линейно независимы, что означает линейную независимость векторов z_2 и z_1 .

Если $v \neq 0$, то при $\bar{t}_0 = \operatorname{arccot}(-\lambda) \in (0, \pi/2)$ получаем касательный вектор $y(t_0) = (\sin t_0)(\mu \bar{y}_1 + \bar{v})$. Так как поле \bar{y}_1 вдоль γ_0 касается M^l , то \bar{v} в точке $\gamma_0(t_0)$ касается M^l . Используя (1), как и выше, получаем $t_0 = \pi/2$, $\lambda = 0$ и единичное \bar{V}^\perp -параллельное поле нормалей $v_2(t)$ ($v_2(0) = v/\|v\|$), которое равномерно поворачивается в \bar{M} вдоль $\gamma_0(t)$ ($0 < t < \pi/2$) на угол $\pi/2$. Положим $z_2 = -A_{v_2(0)}x$ и найдем единичный вектор y_2 , удовлетворяющий свойству $A_{\xi_0}y_2 \parallel z_2$. Как и выше для z_1 , получаем, что y_2 остается касательным при \bar{V}^\perp -параллельном переносе вдоль L_0 и выполнены равенства (18). Из условий $h(x, y) \parallel v_2(0)$, $h(x, z_1) \parallel v_1(0)$, $y \perp z_1$ следует линейная независимость $v_2(0)$ и $v_1(0)$. Поэтому $z_2 = -A_{v_2(0)}x$ и $z_1 = -A_{v_1(0)}x$ тоже линейно независимы, что ввиду невырожденности A_{ξ_0} на $T_a L^\perp$ означает линейную независимость y_2 и y_1 .

В итоге за $r/2$ шагов мы построим в $T_a L^\perp$ единичные векторы $\{z_i\}$, $\{y_i\}$ ($1 \leq i \leq r/2$) со следующими свойствами: $\{z_i\}$ линейно порождают $r/2$ -мерное подпространство $Z_a \subset T_a L^\perp$ и $R(z, u)u = 0$ ($u \in T_a L$, $z \in Z_a$); $\{y_i\}$ линейно порождают $r/2$ -мерное подпространство $Y_a \subset T_a L^\perp$, ортогональное Z_a и инвариантное относительно операторов (12), и $R(y, u)u = y$ ($u \in T_a L$, $y \in Y_a$, $|u| = 1$). При этом $A_{\xi_0}y_i \parallel z_i$, ($\forall i$). Аналогичные векторы $\{z_i\}$, $\{y_i\}$ строятся для точек, близких к a , и поэтому в окрестности a получаем $r/2$ -мерные распределения Z , Y из TL^\perp с соответствующими условиями на кривизну, причем Y ортогонально Z и \bar{V}^\perp — параллельно вдоль образующих $\{L\}$.

5. Докажем, что распределения Z , $W = Y \oplus TL$ определяют разложение M^l в метрическое произведение $M_1^{l/2} \times S^{l-r/2}$. Как и в доказательстве теоремы I, получаем интегрируемость Z , W в окрестности a и вполне геодезичность в M^l интегральных многообразий. По теореме разложения де Рама окрестность точки a изометрична произведению $M_1^{l/2} \times M_2^{l-r/2}$.

Тензор кривизны вполне геодезической M_1 в M^l получается ограничением тензора кривизны M^l . Как показано выше, $R(y, x)x = y$, $R(z, x)x$, $x \in TL$, $y \in Y$, $z \in Z$, и поэтому с учетом (5) нормальное пространство к M_1 стационарно вдоль $\{L\}$ и кривизна $0 < K(x, w) < 1$ ($x \in TL$, $w \in TL^\perp \setminus (Y \cup Z)$). Отсюда следует, что разложение в окрестности точки a не зависит от выбора начальной нормали ξ_0 ранга r . Мы получили, что разложение $M_1^{l/2} \times M_2^{l-r/2}$ корректно определено на открытом множестве $G \subset M^l$ точек максимального ранга r . В силу предыдущего $(l-r/2)$ -мерные подмногообразия M_1 в \bar{M} имеют внешний нуль-индекс $\mu(M_1) \geq l-r$, причем ядро любой нормали $\xi \in TM^\perp$ ранга r принадлежит нуль-пространству M_1 и касается полного вполне геодезического подмногообразия размерности $l-r$ на M_1 . Так как из условия на ранг следует, что $l-r \geq \rho(\dim M_1 - \mu(M_1))$, то по теореме

Феруса [8] будет $\mu(M_1) = \dim M_1$, и M_1 — вполне геодезическая в \bar{M} . В силу (2) поверхности M_1 имеют постоянную секционную кривизну и локально изометричны сфере $S^{l-r/2}$. Как и в доказательстве теоремы I, получаем оценку коразмерности $p \geq \frac{r}{2} \left(l - \frac{r}{2} \right)$.

В силу непрерывности тензора кривизны и второй основной формы M^l полученное разложение продолжается и на границу ∂G области G . Используя специальный базис в точках ∂G (см. с. 108), получаем нормаль $\xi_\varepsilon = \varepsilon_1 \xi_{11} + \dots + \varepsilon_{r/2} \xi_{r/2, r/2}$ ранга r при малых $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{r/2})$. Поэтому точки ∂G имеют ранг r . Так как G открыта и замкнута в M^l , то $G = M^l$. Мы показали, что M^l локально изометрична произведению $M^{l/2} \times S^{l-r/2}$.

В случае $p = \frac{r}{2} \left(l - \frac{r}{2} \right)$, как и в доказательстве теоремы I, получаем конгруэнтность $M^l \subset S^m$ многообразию Сегре.

Случай б), в) рассматриваются аналогично.

Доказательство теоремы 2'. Как и в доказательстве теоремы 2, строим r -параметрическое семейство образующих $\{L\}$, которые составляют вполне геодезическое слоение M^l в окрестности точки a . Покажем, что оператор (12) этого слоения в точке a обладает свойством

$$B(x, Iy) = B(Ix, y) = IB(x, y), \quad x \in T_a L, \quad y \in T_a L^\perp. \quad (19)$$

Из уравнений Кодатти и (6) с учетом ∇^\perp -параллельности в точке a поля нормалей $\{\xi\}$ вытекает равенство $(\tilde{\nabla}_x A_\xi) y = (\tilde{\nabla}_y A_\xi) x; x \in T_a L, y \in T_a L^\perp$.

Обозначим через $\bar{x} \in x$ поле из TL , через $\bar{y} \in y$ — поле из TL^\perp . С учетом равенства $A_\xi I = -IA_\xi$, выполненного для келеровой поверхности, получаем

$$\begin{aligned} A_{\xi_0} B(x, Iy) &= -(\tilde{\nabla}_{Iy} A_\xi) x = -(\tilde{\nabla}_x A_\xi) Iy = -\nabla_x (A_\xi Iy) + \\ &\quad + A_{\xi_0} (\nabla_x Iy) = I [\nabla_x (A_\xi \bar{y}) - A_{\xi_0} (\nabla_x \bar{y})] = \\ &= I (\tilde{\nabla}_x A_\xi) y = I (\tilde{\nabla}_y A_\xi) x = -IA_{\xi_0} (\nabla_y \bar{x}) = A_{\xi_0} IB(x, y). \end{aligned}$$

Так как A_{ξ_0} невырожден на $T_a L^\perp$, то из предыдущих преобразований вытекает: $B(x, Iy) = IB(x, y)$. Из келеровости M^l , $\{L\}$ и определения (12) следует также равенство $B(Ix, y) = IB(x, y)$, и в итоге получаем (19). В [9] показано, что билинейный оператор $B(x, y)$ со свойством (19) всегда имеет вещественный собственный вектор. С учетом этого факта доказательство в келеровом случае аналогично вещественному случаю теоремы 2.

Список литературы: 1. Ровенский В. Ю. Квазиразвертывающиеся и параболические поверхности в сфере // ДАН СССР. 1984. № 2. С. 286—288. 2. Ровенский В. Ю. Характеризация вполне геодезических подмногообразий S^m и CP^m // Укр. геометр. сб. 1985. Вып. 28. С. 106—116. 3. Борисенко А. А. О внешних геометрических свойствах параболических поверхностей и топологических свойствах седловых поверхностей в симметрических пространствах ранга один // Мат. сб. 1981. № 116, № 3. С. 440—457. 4. Борисенко А. А. Об экстремальных свойствах компактных параболических поверхностей в римано-

вом пространстве // Мат. сб. 1987. 133, № 1. С. 112—126. 5. Ровенский В. Ю. Замечания о полных параболических поверхностях // Укр. геометр. сб. 1987. Вып. 30. С. 87—89. 6. Ровенский В. Ю. Вполне геодезические слоения / Сиб. мат. журн. 1982. 23, № 3. С. 217—219. 7. Escobales R. Riemannian submersions from complex projective space // J. Diff. Geom. 1978. 13. P. 93—107. 8. Ferus D. Totally geodesic foliations // Math. Ann. 1970. 188, № 4. P. 313—316. 9. Abe K. Application of Riccati type differential equation to Riemannian manifold writh totally geodesic distribution // Tohoku Math. J. 1973, 25, N 4. P. 425 — 444.

Поступила в редакцию 09.11.87

Л. Н. СЕРГИЕНКО

**ЛИНИИ КРИВИЗНЫ ДВУМЕРНОГО НЕЛИНЕЙНОГО
НЕГОЛОНОМНОГО МНОГООБРАЗИЯ В E_4**

Уравнением Монжа по терминологии С. Ли называется уравнение вида $\Phi(x_1, \dots, x_n; dx_1, \dots, dx_n) = 0$, однородное степени $k > 1$ относительно дифференциалов [1].

До появления работ Д. М. Синцова было очень немного результатов по геометрии монжевых уравнений. Д. М. Синцов выделил из общего множества интегральных кривых монжева уравнения $\Phi(x, y, z; dx, dy, dz) = 0$ аналоги асимптотическим линиям, линиям кривизны и геодезическим линиям классической теории поверхностей [2].

Некоторые результаты Д. М. Синцова даются в работе [3], но получены они новыми методами. В этой работе нелинейным неголономным многообразием в 3-мерном евклидовом пространстве (C_3^2 в E_3) названо поле конических пучков направлений, определяющих в каждой точке некоторую коническую поверхность. В статье рассматривается также теория параллельного переноса в C_3^2 .

В работах [4—6] найдены уравнения геодезических и кусpidальных линий системы двух монжевых уравнений в 4-мерном евклидовом пространстве, геодезическая кривизна интегральной кривой, получена система двух уравнений Монжа, описывающая 4-комплекс прямых, рассмотрена теория параллельного переноса в C_4^2 .

В настоящей заметке на случай двумерного неголономного многообразия в E_4 обобщается теорема Менье, рассматриваются линии кривизны.

Рассмотрим интегральные кривые системы двух монжевых уравнений в 4-мерном евклидовом пространстве:

$$\Phi_1(x_1, \dots, x_4; dx_1, \dots, dx_4) = 0,$$

$$\Phi_2(x_1, \dots, x_4; dx_1, \dots, dx_4) = 0,$$

однородных относительно дифференциалов степени $m, n > 1$ соответственно.

Поделив на dt в соответствующей степени каждое уравнение системы, получим $\Phi_1(x_i; x'_i) = 0, \Phi_2(x_i; x'_i) = 0$ (1), здесь и всюду в дальнейшем $i = 1, 2, 3, 4$.

Касательные к множеству интегральных кривых этой системы, проходящих через фиксированную точку $A(x_i)$ пространства, образуют двумерный конус, уравнения которого

$$\Phi_1(x_i; X_i - x_i) = 0, \quad \Phi_2(x_i; X_i - x_i) = 0. \quad (2)$$

Двумерная плоскость, касательная к конусу вдоль образующей (x'_i) , определяется уравнениями

$$\sum_{k=1}^4 \Phi_{1x'_k}(X_k - x_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^4 \Phi_{2x'_k}(X_k - x_k) = 0. \quad (3)$$

Нормальная 2-плоскость к конусу определяется векторами $N_1 = \{\Phi_{1x'_i}\}$ и $N_2 = \{\Phi_{2x'_i}\}$; уравнения нормальной 2-плоскости:

$$X_i - x_i = \lambda \Phi_{1x'_i} + \mu \Phi_{2x'_i}. \quad (4)$$

1. Обобщение теоремы Менье. Пусть γ — интегральная кривая системы уравнений (1); $r = r(s)$ — радиус-вектор γ ; k_1 — ее первая кривизна; вектор $\tau = \frac{dr}{ds}$; вектор t_2 перпендикулярен вектору τ , имеет единичную длину и лежит в соприкасающейся 2-плоскости к кривой γ (вектор t_2 назовем вектором главной нормали кривой).

Для кривой γ справедливо $\frac{d^2r}{ds^2} = \tau' = k_1 t_2$ (5).

Перейдем в нормальной 2-плоскости (4) к ортонормированному базису:

$$n_1 = \frac{N_1}{\|N_1\|}, \quad n_2 = \frac{N_2 + \lambda N_1}{\|N_2 + \lambda N_1\|}, \quad \text{где } \lambda = -\frac{(N_1, N_2)}{\|N_1\|^2}.$$

Пусть векторы m_1, m_2 образуют ортонормированный базис касательной 2-плоскости (3). Тогда $\frac{d^2r}{ds^2} = an_1 + bn_2 + cm_1 + dm_2$.

Спроектировав векторы последнего равенства (с учетом формулы (5)) на нормальную 2-плоскость (4), получим

$$k \cos \varphi = \sqrt{\frac{((N_1, r'') N_2 - (N_2, r'') N_1)^2}{\|N_1\|^2 \|N_2\|^2 - (N_1, N_2)^2}},$$

где φ — угол между вектором t_2 и нормальной 2-плоскостью (4), штрих — производная по s .

После непосредственной проверки (используя лишь равенство $\sum_{k=1}^4 x''_k \Phi_{x'_k} = - \sum_{k=1}^4 x'_k \Phi_{x_k}$) убеждаемся, что правая часть последнего равенства не зависит от производных второго порядка, т. е. в точке $A(x_i)$ для всех интегральных кривых, имеющих одну и ту же касательную, $k_1 \cos \varphi = \text{const} = k_n$. Величину k_n назовем нормальной кривизной кривой.

Векторы N_1, N_2 и t определяют нормальную гиперплоскость α конуса Монжа (2). Совокупность интегральных кривых $\{\gamma_0\}$ лежащих в α , назовем нормальным сечением системы (1), определенным

вектором τ . Для кривой γ_0 вектор главной нормали t_2 лежит в нормальной 2-плоскости к конусу Монжа, следовательно, нормальная кривизна интегральной кривой, имеющей общую с кривой γ_0 касательную, равна первой кривизне кривой нормального сечения γ_0 .

2. Задача определения экстремальных радиусов. Введем в рассмотрение радиус кривизны R :

$$\frac{1}{R} = k_n = \sqrt{\frac{((N_1, \tau'') N_2 - (N_2, \tau'') N_1)^2}{(N_1)^2; (N_2)^2 - (N_1, N_2)^2}} = f(x_i; x'_i).$$

Зафиксируем точку $A(x_i)$ и будем искать направления, в которых нормальная кривизна достигает экстремального значения. Условия экстремума:

$$\sum_{k=1}^4 \frac{\partial f}{\partial x'_k} \frac{dx'_k}{dt} = 0, \quad \sum_{k=1}^4 \Phi_{1x'_k} \frac{dx'_k}{dt} = 0,$$

$$\sum_{k=1}^4 \Phi_{2x'_k} \frac{dx'_k}{dt} = 0, \quad \sum_{k=1}^4 x'_k \frac{dx'_k}{dt} = 0,$$

откуда

$$\begin{vmatrix} x'_1 & x'_2 & x'_3 & x'_4 \\ \Phi_{1x'_1} & \Phi_{1x'_2} & \Phi_{1x'_3} & \Phi_{1x'_4} \\ \Phi_{2x'_1} & \Phi_{2x'_2} & \Phi_{2x'_3} & \Phi_{2x'_4} \\ f_{x'_1} & f_{x'_2} & f_{x'_3} & f_{x'_4} \end{vmatrix} = 0. \quad (6)$$

Если присоединить к последнему уравнению два уравнения Монжа, получим три уравнения для нахождения экстремальных направлений (отношений $x'_1 : x'_2 : x'_3 : x'_4$).

3. Линии кривизны 1-рода. Назовем линиями кривизны 1-го рода те интегральные кривые системы (1), которые в каждой точке в качестве касательной имеют направления, соответствующие экстремальным радиусам.

Уравнения (6) вместе с системой (1) являются системой, определяющей дифференциальные уравнения линий кривизны 1-го рода. Действительно, x_4 , например, можно принять за независимую переменную и для определения трех функций $x_1(x_4)$, $x_2(x_4)$ и $x_3(x_4)$ использовать три дифференциальных уравнения (уравнения (1), (6)) первого порядка, из которых линии кривизны 1-го рода определяются с тремя произвольными постоянными.

4. Линии кривизны 2-го рода. Линиями кривизны 2-го рода назовем те интегральные кривые системы (1), вдоль которых нормальные 2-плоскости к конусу Монжа в бесконечно близких точках пересекаются по прямой.

Нормальная 2-плоскость, бесконечно близкая к нормальной 2-плоскости (4), определяется векторами $N_1 + dN_1 = \{\Phi_{1x'_i} + d\Phi_{1x'_i}\}$, $N_2 + dN_2 = \{\Phi_{2x'_i} + d\Phi_{2x'_i}\}$. Условие ее пересечения по прямой с 2-плоскостью (4): $aN_1 + bN_2 + c(N_1 + dN_1) + e(N_2 + dN_2) = 0$.

Отсюда

$$\begin{vmatrix} \Phi_{1x'_1} & \Phi_{2x'_1} & d\Phi_{1x'_1} & d\Phi_{2x'_1} \\ \Phi_{1x'_2} & \Phi_{2x'_2} & d\Phi_{1x'_2} & d\Phi_{2x'_2} \\ \Phi_{1x'_3} & \Phi_{2x'_3} & d\Phi_{1x'_3} & d\Phi_{2x'_3} \\ \Phi_{1x'_4} & \Phi_{2x'_4} & d\Phi_{1x'_4} & d\Phi_{2x'_4} \end{vmatrix} = 0.$$

Присоединив к последнему уравнению два уравнения Монжа, получим для определения трех функций $x_1(x_4)$, $x_2(x_4)$, $x_3(x_4)$ три дифференциальных уравнения (два уравнения первого порядка и одно уравнение — второго), из которых линии кривизны 2-го рода определяются с четырьмя произвольными постоянными.

Уравнения линий кривизны 2-го рода можно получить иначе. В работе [5] были получены уравнения кусpidальных линий системы (1), вдоль которых касательные 2-плоскости к конусам Монжа в бесконечно близких точках пересекаются по прямой. Так как касательные 2-плоскости пересекаются не в точке, а по прямой, то и ортогональные к ним нормальные 2-плоскости также пересекаются по прямой, а значит, кусpidальные линии являются и линиями кривизны 2-го рода.

Список литературы: 1. Lie S. Geometrie der Berührungstransformationen. Leipzig. 1896. 696S. 2. Синцов Д. М. Работы по неголономной геометрии. К., 1972. 296 с. 3. Wagner U. Differential geometry of non-linear non-holonomic manifolds in the three-dimensional Euclidean space // Mat. сб. 1940. № 8 (50). С. 3—40. 4. Сергиенко Л. Н. Геодезические линии системы интегральных кривых двух уравнений Монжа в E^4 // Укр. геометр. сб. 1979. Вып. 22. С. 128—131. 5. Сергиенко Л. Н. К геометрии монжевых уравнений в четырехмерном евклидовом пространстве // Укр. геометр. сб. 1981. Вып. 26. С. 126—128. 6. Сергиенко Л. Н. О геодезических «прямейших» линиях нелинейного неголономного многообразия в E^4 // Укр. геометр. сб. 1987. Вып. 30. С. 112—116.

Поступила в редакцию 08.12.86

УДК 514

М. А. УЛАНОВСКИЙ

ОДНОРОДНЫЕ ЛОРЕНЦЕВЫ МНОГООБРАЗИЯ

Изучение геометрии окрестностей геодезических, в частности, сопряженных точек геодезических — один из основных инструментов геометрии в целом как для римановых, так и для лоренцевых пространств. Существуют, однако, серьезные отличия в этих вопросах между лоренцевыми и римановыми многообразиями. Одно из этих обстоятельств поясним следующим примером. Простейшее условие существования сопряженных точек на геодезической γ — положительность формы Риччи $R_{ij} \xi^i \xi^j$, где ξ^i — касательный вектор γ . В случае римановой метрики это условие может быть существенно усилено требованием: $R_{ij} \xi^i \xi^j > \text{const} > 0$ для нормиро-

ванного вектора ξ ($|\xi| = 1$), что гарантирует существование сопряженной точки для каждой точки $a \in \gamma$. Аналогичное требование просто не имеет смысла для изотропной геодезической, так как в этом случае $|\xi| = 0$. Поэтому локальные условия могут обеспечить для полной изотропной геодезической только существование, по крайней мере, одной пары сопряженных точек. По-видимому, в связи с подобными трудностями известные результаты по геометрии в целом лоренцевых многообразий [1, 2] содержат в качестве условий, кроме характеристик тензора кривизны или тензора Риччи, те или иные требования к глобальной структуре. В настоящей заметке показано, что для класса однородных лоренцевых пространств можно избавиться от этих требований глобального характера.

Рассматривается связное лоренцево многообразие U_n . Предполагается, что V_n «хронологически ориентировано»: конусы $ds^2 > 0$ (будем считать, что сигнатура фундаментальной формы $ds = (+ - \dots -)$) непрерывным образом разбиты на полуконусы K^+ и K^- . При этом K^+ (K^-) в терминологии, имеющей известную физическую интерпретацию, называют конусами направлений в будущее (в прошлое). Считают, что $a \ll b$ (a, b — точки из V_n), если a и b можно соединить непространственноподобной дугой, ориентированной «в будущее» от a к b ; соответственно, $a < b$, если существует времеподобная дуга, соединяющая a и b и ориентированная от a к b . Принято говорить, что a причинно (соответственно, хронологически) предшествует b . Отношение \ll называется максимальным, если для любых a, b из V_n $a \ll b$ или $b \ll a$. Отметим, что существуют многочисленные примеры односвязных V_n с максимальным отношением \ll ; наиболее известный из них — односвязное V_n с метрикой Гёделя.

Рассматривается связное однородное лоренцево многообразие V_n ; предполагается, что в V_n аналитически и транзитивно действует группа движений G_r . Основной результат — следующая

Теорема. Пусть V_n — связное однородное лоренцево многообразие с транзитивной группой движений G_r . Если на каждой изотропной геодезической γ существует пара точек a, b таких, что $a < b$, то справедливо одно из следующих утверждений.

A) Отношение \ll в V_n максимально.

B) V_n диффеоморфно декартовому произведению $X_{n-1} \times R$, где R — вещественная ось; X_{n-1} компактно и $(n-1)$ -мерные слои $r = \text{const}$ ($r \in R$) пространственноподобны.

Отметим, что условие $\text{Ric}\xi > 0$, где Ric — форма Риччи; ξ — касательный вектор полной изотропной геодезической γ , обеспечивает существование на γ пары сопряженных точек a_1, b_1 , из чего известным образом следует существование на γ пары точек a, b таких, что $a < b$. Поэтому из сформулированной теоремы следует

Следствие. Если в однородном V_n для любого изотропного вектора ξ $\text{Ric}\xi > 0$, то либо справедливо одно из утверждений A), B), либо V_n геодезически неполно.

Отметим также, что условие $\text{Ric}\xi > 0$ может быть заменено несколько более слабыми условиями [1, 2].

Доказательство теоремы основано на утверждении, приведенном в заметке [3]. Это утверждение может быть сформулировано так: если в лоренцевом V_n на каждой изотропной геодезической γ для каждой точки $a \in \gamma$ существует точка $b \in \gamma$ такая, что $a < b$, то либо V_n содержит замкнутую непространственноподобную дугу, либо справедливо утверждение В). Легко видеть, что первое предположение влечет за собой условие А) [4]. Доказательство теоремы построено следующим образом. Предполагается, что А) не справедливо; из чего следует: V_n не содержит замкнутых или самопересекающихся изотропных геодезических. Если на каждой изотропной геодезической γ для каждой точки $a \in \gamma$ существует точка $b \in \gamma$, такая, что $a < b$, то в силу упомянутого результата выполняется утверждение В). Поэтому далее предполагается, что существует, по крайней мере, одна изотропная геодезическая γ и точка $a \in \gamma$ такая, что γ не содержит точки b , для которой $a < b$. Доказывается, что эти предположения приводят к противоречию.

Итак, в дальнейшем доказательстве приняты условия: в связном однородном V_n каждая изотропная геодезическая содержит пару точек a, b таких, что $a < b$; отношение $<$ в V_n не максимально; V_n содержит, по крайней мере, одну изотропную геодезическую γ такую, что для некоторой точки $a \in \gamma$ не существует точки $b \in \gamma$ такой, что $a < b$.

В силу хронологической ориентации V_n каждая непространственноподобная, в частности, изотропная геодезическая γ как множество точек линейно упорядочена причем согласно сформулированным условиям отношение порядка на γ совпадает с отношением причинного порядка \ll . Однако для того, чтобы отделить случаи $a = b$, а также $a < b$, ниже для точек фиксированной геодезической γ будет применяться обозначение: $a \prec b$ — точка a предшествует b в силу ориентации γ , но $a \neq b$

Для каждой изотропной геодезической γ определим точку $p(\gamma)$ как точную верхнюю грань (соответственно ориентации γ) точек a таких, что существует точка $b \in \gamma$, которой хронологически предшествует точка a : $a < b$. Условимся писать $p(\gamma) = -\infty$ или $p(\gamma) = +\infty$, если, соответственно, на γ не существуют точки с указанным выше свойством или это свойство выполнено для каждой точки $a \in \gamma$. Согласно принятым условиям, для каждой изотропной геодезической $p(\gamma) \neq -\infty$ и существует, по крайней мере, одна геодезическая, для которой $p(\gamma) \neq +\infty$.

Лемма 1. Для любой точки $O \in V_n$ множество изотропных геодезических γ , для которых $O \in \gamma$, $p(\gamma) \prec O$, не пусто.

Доказательство. Пусть γ_1 — изотропная геодезическая, для которой $p(\gamma_1) \neq +\infty$; существует точка $x \in \gamma_1$ такая, что $p(\gamma_1) \prec x$. Очевидно, геодезическая $g\gamma_1$, где g — движение группы G_r , переводящее точку x в точку O , принадлежит указанному в лемме множеству (каждое движение группы G_r сохраняет ориентацию геодезических; при этом $gp(\gamma) = p(g\gamma)$ — точка $p(\gamma)$ переходит в точку $p(g\gamma)$).

Обозначим через $H_m(O)$ линейное замыкание (в касательном

пространстве $T_O(V_n)$ точки O) множества касательных векторов к тем изотропным геодезическим γ , для которых $\gamma \in O$ и $p(\gamma) \prec \prec O$ ($m \ll n$). Легко видеть, что площадки $H_m(x)$, $x \in V_n$, образуют m -распределение, инвариантное относительно группы G_r : $gH(x) = H(gx)$, $x \in V_n$, $g \in G_r$.

Лемма 2. Если для изотропной геодезической γ $p(\gamma) \neq +\infty$, то в каждой точке $x \in \gamma$ касательный вектор γ принадлежит $H_m(x)$.

Таким образом, площадка $H_m(x)$ может быть определена как линейное замыкание множества векторов, касательных к тем изотропным геодезическим, которые проходят через точку x и для которых $p(\gamma) \neq +\infty$.

Доказательство. Как и всякое G_r -инвариантное распределение, поле площадок $H_m(x)$ — аналитическое; каждая изотропная геодезическая γ — также аналитическое одномерное подмногообразие. Если $p(\gamma) \neq +\infty$, то для каждой точки $x \in \gamma$, $p(\gamma) \prec x$, касательный вектор геодезической γ $\xi \in T_x(V_n)$ — принадлежит (по определению $H_m(x)$) подпространству $H_m(x)$, откуда легко заключить, что это же справедливо для каждой точки геодезической γ .

Пусть γ_k , $k = 1 \dots \infty$, — некоторая последовательность изотропных геодезических, содержащих фиксированную точку O . По определению последовательность γ_k сходится к изотропной геодезической γ , если последовательность касательных векторов ξ_k (к геодезическим γ_k в $T_O(V_n)$) сходится к ненулевому касательному вектору ξ геодезической γ . Выберем какую-либо нормировку для изотропных векторов в $T_O(V_n)$; например, можно выбрать произвольную положительно определенную квадратичную форму в $T_O(V_n)$ и потребовать, чтобы $|\xi_k| = |\xi| = 1$ в соответствующей метрике. В этом случае, если для определенности ξ_k , ξ направлены «в прошлое», γ_k тогда и только тогда сходится к γ , когда $\xi_k \rightarrow \xi$.

Лемма 3. Пусть последовательность γ_k изотропных геодезических ($\gamma_k \in O$) сходится к геодезической γ , ξ_k , ξ — нормированные (как указано выше) и направленные в прошлое касательные векторы к геодезическим γ_k , ξ в касательном $T_O(V_n)$, $\xi_k \rightarrow \xi$; пусть также s — положительное вещественное число такое, что геодезическая γ содержит точку $x(s')$ (со значением s' аффинной дуги, однозначно определенной касательным вектором ξ и условием $x(0) = O$) для каждого s' , $0 < s' \leq s$. Тогда из условия $s_k \rightarrow s$ ($k \rightarrow \infty$) следует, что последовательность точек $x_k(s_k) \in \gamma_k$ (соответствующих таким же образом определенным аффинным дугам s_k) сходится к точке $x(s)$.

Доказательство стандартно. Для достаточно малых s утверждение следует из классической теоремы о зависимости решений дифференциальных уравнений от начальных условий. Если s_0 — точная верхняя грань значений s , для которых лемма 3 справедлива, то применение той же теоремы к достаточно малой окрестности точки s_0 (если геодезическая может быть продолжена до этой точки) позволит продолжить утверждение до значений s больших, чем s_0 .

Лемма 4. Пусть дополнительно к условиям леммы 3 известно, что для каждого $k \in N$ будет $p(\gamma_k) \preceq x_k(s_k)$. Тогда и $p(\gamma) \preceq x(s)$.

Доказательство. Предположим, что $x(s) \prec p(s)$. Тогда существует число s' такое, что $s' < s$, $x(s) \prec y(s') \prec p(\gamma)$ ($y(s') \in \gamma$), и (по определению $p(\gamma)$) точка $z \in \gamma$ такая, что $y(s') \prec z$. Поскольку множество точек $(a; b)$ таких, что $a < b$, открыто в $V_n \times V_n$, существуют окрестности ω_y (точки $y(s')$) и ω_z (точки z), для которых $\omega_y \subset \omega_z$ (каждая точка ω_y хронологически предшествует каждой точке из ω_z). Легко видеть, что существуют последовательности точек $y_k(s'_k) \in \gamma_k$, $z_k \in \gamma_k$ такие, что $s'_k < s_k$, $s'_k \rightarrow s'$, $y_k(s'_k) \rightarrow y(s')$, $z_k \rightarrow z$. Очевидно, при достаточно больших k будет $y_k(s'_k) \in \omega_y$, $z_k \in \omega_z$. Получим $p(\gamma_k) \preceq x_k(s_k) \prec y_k(s'_k) < z_k$, что противоречит определению $p(\gamma_k)$.

Лемма 5. Если последовательность изотропных геодезических γ_k , $\gamma_k \ni O$, сходится к геодезической γ , то $p(\gamma) \preceq \liminf p(\gamma_k)$ (в частности, утверждается, что $\liminf p(\gamma_k)$ — определенная точка геодезической γ ; понятие \liminf очевидным образом определяется отношением \prec на γ).

Лемма 5 — очевидное следствие леммы 4. Если, например, $\liminf p(\gamma_k) \in \gamma$ и $\liminf p(\gamma_k) \prec p(\gamma)$, то легко построить последовательность точек $x_k \in \gamma_k$ такую, что $x_k \rightarrow x \in \gamma$, $p(\gamma_k) \prec x_k$ и $x \prec p(\gamma)$, что противоречит лемме 4.

Для произвольной точки $O \in V_n$ рассмотрим соответствующую стационарную подгруппу $S(O)$ группы G_r (с неподвижной точкой O) и ее естественное линейное представление в касательном пространстве $T_O(V_n) = s(O)$.

Лемма 6. Ограничение линейной группы $s(O)$ на инвариантное линейное подпространство $H_m(O)$ есть компактная линейная группа; на $H_m(O)$ существует положительно определенная квадратичная форма, инвариантная относительно $s(O)$.

Доказательство. Согласно определению $H_m(O)$ существует базис $\xi_1 \dots \xi_m$ подпространства $H_m(O)$ такой, что векторы ξ_i (направленные в прошлое) определяют изотропные геодезические γ_i , $i = 1 \dots m$, для которых $p(\gamma_i) \prec O$. Если множество векторов $s(O) \xi_i$, $i = 1 \dots m$, ограничено в $H_m(O)$, то с помощью эллипсоида минимального объема, содержащего это множество, легко определить искомую $s(O)$ -инвариантную и положительно определенную квадратичную форму. Если это предположение не выполнено, то легко построить последовательность $s_k \xi_i$ (i фиксировано, $k = 1 \dots \infty$) такую, что $|s_k \xi_i| \rightarrow \infty$ в некоторой метрике на $H_m(O)$. Не ограничивая общности, можно считать, что $p(\gamma_i) \preceq \exp_O \xi_i$; но соотношение $|s_k \xi_i| \rightarrow \infty$ очевидным образом противоречит лемме 5.

Пользуясь леммой 6, определим способ измерения длины дуги на каждой изотропной геодезической, для которой $p(\gamma) \neq +\infty$, инвариантной относительно группы G_r . Выберем в плохадке $H_m(O)$ (в фиксированной точке O) положительно определенную квадратичную форму $d\sigma_m^2(O)$, инвариантную относительно стационарной подгруппы $s(O)$; с ее помощью определим $|\xi|$ каждого вектора $\xi \in H_m(O)$. Модуль произвольного вектора $\xi' \in H_m(x)$ в каждой точке $x \in V_n$ определим равенством $|\xi'| = |g\xi|$, где g — какое-либо преобразование группы G_r , переводящее точку x в точку $O: gx = O$.

Это определение не зависит от выбора g : если $hx = O$, то $h = Sg$, $S \in S(O)$ и $|h\xi'| = |Sg\xi'| = |g\xi'|$.

Очевидно, длину дуги каждой кривой, касающейся во всех своих точках $x(t)$ площадок $H_m(x(t))$, можно определить формулой $l = \int |\xi(t)| dt$, где $\xi(t)$ — касательный вектор, соответствующий параметру t . Определенная таким образом длина дуги инвариантна относительно движений G_r , поскольку инвариантна норма вектора — $|\xi|$.

Подробнее эти выкладки можно описать следующим образом. Пусть система независимых линейных форм $\omega^1 \dots \omega^n$ адаптирована к распределению $H_m(x)$: площадки $H_m(x)$ определяются уравнениями $\omega^{m+1} = \dots = \omega^n = 0$ (инвариантными относительно G_r). Квадратичная форма $d\sigma_m^2(O)$ (в касательном $T_O(V_n)$) имеет вид $d\sigma_m^2(O) = a_{ij}\omega^i\omega^j$, $i, j = 1 \dots m$. Результат ее переноса в произвольную точку $x \in V_n$ зависит от g , $gx = O$: $d\sigma^2 = a_{\alpha\beta}(g)\omega^\alpha\omega^\beta$, $\alpha, \beta = 1 \dots n$. Однако ограничение этой формы на площадку $H_m(x)$ — $d\sigma_m^2(x) = a_{\alpha\beta}\omega^\alpha\omega^\beta|_{\omega^{m+1} = \dots = \omega^n = 0}$ — не зависит от g и инвариантно относительно G_r .

Лемма 7. Для фиксированной точки $O \in G_r$ множество длин дуг $(p(\gamma), O)$ (γ — изотропная геодезическая, $O \in \gamma$, $p(\gamma) \prec O$), вычисленных с помощью формы $d\sigma_m^2(x)$, ограничено сверху.

Доказательство. Из леммы 5 следует, что множество точек $p(\gamma)$, $\gamma \ni 0$, $p(\gamma) \prec 0$, принадлежит некоторой области с компактным замыканием. Из той же леммы следует и более точное утверждение: относительно любой римановой метрики, определенной и полной на V_n (как известно, такие метрики всегда существуют), множество длин дуг $(p(\gamma), O)$ ограничено сверху. Очевидно, в области $\Omega \ni p(\gamma)$, имеющей компактное замыкание, отношение $d\sigma_m^2/dr^2$ (рассматриваемое на площадках $H_m(x)$; dr^2 — упомянутая полная риманова метрика) ограничено сверху; доказательство леммы после этого замечания тривиально.

Доказательство теоремы. Пусть a — точная верхняя грань длин дуг $(p(\gamma), O)$ ($\gamma \ni O$, $p(\gamma) \prec 0$; здесь и далее длины дуг — в метрике $d\sigma_m^2(x)$). Существует число $\varepsilon > 0$ такое, что все изотропные геодезические γ , касательные к площадкам $H_m(x)$, могут быть продолжены от точки O в будущее на длину, не меньшую ε . Пусть длина дуги $(p(\gamma), U)$ не меньше, чем $a - \varepsilon/2$, $p(\gamma) \prec O$. Перепесем (движением из G_r) точку x_1 такую, что длина Ox_1 ($O \prec x_1$) равна ε , в положение O : $gx_1 = O$. Очевидно, длина дуги $(p(\gamma), O)$ геодезической $g\gamma$ больше, чем a . Полученное противоречие и доказывает теорему.

Список литературы: 1. Хокинг С., Эллис Дж. Крупномасштабная структура пространства-времени. М., 1977. 120 с. 2. Бим Дж., Эрлих П. Глобальная лоренцева геометрия. М., 1985. 202 с. 3. Улановский М. Экспоненциальное отображение в псевдоримановых пространствах физического типа // Укр. геометр. сб. 1974. Вып. 16. С. 97—118. 4. Улановский М. Конформно полные лоренцевы многообразия // Укр. геометр. сб. 1981. Вып. 24. С. 122—129.

Поступила в редакцию 12.10.87

ОБЩАЯ ФОРМУЛА РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ПЕТЕРСОНА-КОДАЦЦИ НА ГИПЕРСФЕРЕ

Пусть S^n , $n \geq 2$, — гиперсфера (или ее односвязная часть) единичного радиуса в $(n+1)$ -мерном евклидовом пространстве E^{n+1} , заданная в локальных координатах уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u)$, $u = (u^1, u^2, \dots, u^n)$. Рассмотрим на поверхности S^n систему уравнений Петерсона—Кодаци, записанную в локальной карте (u^i) относительно искомого симметрического дважды ковариантного тензора a_{ij} в виде $\nabla_k a_{ij} = 0$, $i, j, k = \overline{1, n}$ (1), где ∇_k — знак ковариантной производной в метрике $g_{ij} = (\partial_i \mathbf{r}, \partial_j \mathbf{r})$ по переменной u^k . Система уравнений (1) имеет решение $b_{ij} = (\partial_i \mathbf{r}, \mathbf{n})$, где \mathbf{n} — единичный вектор нормали к S^n , совпадающее с коэффициентами второй квадратичной формы S^n . Уравнения Петерсона—Кодаци имеют большое значение в теории гиперповерхностей в E^{n+1} . Например, решение a_{ij} , отличное от b_{ij} и удовлетворяющее уравнениям Гаусса, порождает отличное от движения изометрическое преобразование любого односвязного куска гиперповерхности в E^{n+1} . В настоящей работе для гиперповерхности S^n выводится общая формула решений системы (1), дается их геометрическая интерпретация и отмечается существование решений системы (1), обладающих наперед заданными свойствами.

1. Будем говорить, что гиперповерхность F^n в E^{n+1} преобразована в гиперповерхность \tilde{F}^n с сохранением ее грассманова образа, если в соответствующих точках $M \in F^n$ и $\tilde{M} \in \tilde{F}^n$ нормали к поверхностям F^n и \tilde{F}^n параллельны. Такие преобразования поверхности F^n будем называть G -преобразованиями, а вектор $\mathbf{z} = \mathbf{r}^* - \mathbf{r}$, где \mathbf{r}, \mathbf{r}^* — радиусы-векторы точек M и \tilde{M} соответственно, будем называть полем смещений. В этом пункте считаем, что тангенциальная \mathbf{z}_t и нормальная \mathbf{z}_n составляющие поля \mathbf{z} являются, соответственно, полями класса C^2 и C^3 , а решения системы (1) принадлежат классу C^1 .

Геометрический смысл решений системы (1) дается следующей теоремой.

Теорема 1. Всякое ненулевое решение a_{ij} системы (1) на S^n порождает G -преобразование гиперповерхности S^n , отличное от параллельного переноса в E^{n+1} , с полем смещения

$$\mathbf{z}(M) = \int_{\widetilde{M_0 M}} g^{i\alpha}(u) a_{\alpha j}(u) \partial_i \mathbf{r}(u) du^j + \mathbf{z}_0, \quad M \in S^n, \quad (2)$$

где M_0 — фиксированная на S^n точка; \mathbf{z}_0 — произвольный постоянный вектор; интегрирование ведется по любой регулярной

кривой, соединяющей на S^n точки M_0 и M ; обратно, всякое G -преобразование гиперповерхности S^n ; отличное от параллельного переноса в E^{n+1} , порождает на S^n ненулевое решение системы (1).

Общий вид решений системы (1) на S^n указывается в следующей теореме.

Теорема 2. Общее решение класса C^1 уравнений Петерсона-Кодицци на S^n дается формулой

$$a_{ij} = -g_{\nu i} \{ \partial_i (\tilde{b}^{\nu k} \partial_k c) + \Gamma_{i\alpha}^{\nu} \tilde{b}^{\alpha k} \partial_k c + b_{ij} c \}, \quad (3)$$

где c — произвольно заданная на S^n функция класса C^3 , $\Gamma_{i\alpha}^{\nu}$ — символы Кристоффеля 2-го рода поверхности S^n в метрике g_{ij} , $\tilde{b}^{\nu k}$ — элементы матрицы, обратной к $\|b_{ij}\|$.

Доказательство теорем 1, 2. Рассмотрим G -преобразование гиперповерхности F^n : $r = r(u)$ с полем смещения $z = z(u)$. Пусть $\{a^\alpha, c\}$ — коэффициенты разложения вектора z по базису $\{\partial_\alpha, n\}$. Уравнения G -преобразований поверхности F^n в терминах искомых функций a^α, c ($\alpha = 1, n$) получим, считая, что вектор $\partial_i z$ ортогонален вектору n в каждой точке поверхности F^n . Положим $\partial_i z = a_i^\alpha \partial_\alpha r$, тогда

$$a_i^\alpha = \partial_i a^\alpha + \Gamma_{i\alpha}^\beta a^\nu - c g^{\alpha\beta} b_{\beta i} \quad (4), \quad a^\nu = -\tilde{b}^{\nu k} \partial_k c \quad (5).$$

Учитывая, что для поля z класса C^2 выполняется условие $\partial_{[ij]} z = 0$, отсюда получаем систему уравнений, описывающую G -преобразования поверхности F^n :

$$\partial_{[i} a_{j]}^k + \Gamma_{[i}^\beta a_{j]}^\alpha = 0 \quad (6), \quad b_{k[i} a_{j]}^k = 0 \quad (7).$$

Введем в рассмотрение функции $a_{ik} = g_{k\alpha} a_i^\alpha$ (8); с их помощью уравнения (6), (7) можно переписать в виде

$$\nabla_{[i} a_{j]}^k = 0 \quad (9), \quad b_{k[i} a_{j]}^k = 0 \quad (10).$$

Так как на S^n в конформных координатах имеем $b_{ij}^k = \Lambda \delta_j^k$, где $\Lambda \neq 0$, δ_j^k — символ Кронекера, то уравнение (10) эквивалентно условию $a_{[ij]} = 0$. Последнее означает симметричность тензора a_{ij} . Поэтому уравнения (9), (10) на S^n совпадают с уравнениями Петерсона—Кодицци. Так как $\det \|g_{ij}\| \neq 0$, то из формулы (8) находим $a_i^\alpha = g^{\alpha\beta} a_{\beta i}$. Положим $z_i = a_i^\alpha \partial_\alpha r$. В силу системы (1) поля z_i удовлетворяют условию $\partial_{[i} z_{j]} = 0$ и поэтому можно считать $z_i = \partial_i z$. В силу односвязности гиперповерхности S^n поле z восстанавливается по формуле $z(M) = \int_{M_0 M} \partial_i z du^i + c$, что совпадает

с формулой (2); при этом, если $a_{ij} \in C^1$, то $z \in C^2$; $z_n \in C^3$. С другой стороны, по полю смещений z , ($z \in C^2$, $z_n \in C^3$), G -преобразование гиперповерхности S^n решение системы (1) восстанавливается по формулам (4), (8), при этом $a_{ij} \in C^1$, что и доказывает теорему 1. Теорема 2 непосредственно вытекает из формул (8), (4), (6) и условия $a_{ij} = a_{ji}$.

Из теорем 1, 2 непосредственно вытекает

Следствие. Всякая, заданная на S^n функция с класса C^3 , $c \not\equiv 0$, порождает отличное от тождественного G -преобразование гиперповерхности S^n в E^{n+1} с полем смещения z класса C^2 , нормальная составляющая z_n которого принадлежит классу C^3 .

Отметим, что аналог формулы 2 в случае $n = 2$ встречается в монографии*.

2. Пусть S_f^n , $n \geq 2$, — односвязный кусок гиперсферы в E^{n+1} , заданный уравнением $z = f(x^1, x^2, \dots, x^n)$, где $(x^1, x^2, \dots, x^n) \in D$, D — область класса $C^{k,\alpha}$, $k \geq 3$, $0 < \alpha < 1$.

Назовем G -преобразование S_f^n ареальным (AG -преобразованием), если сохраняется n -мерный объем любой области на S_f^n .

Имеет место

Теорема 3. Пусть φ — заданная на ∂S_f^n функция класса $C^{k,\alpha}$, $k \geq 3$, $0 < \alpha < 1$, удовлетворяющая условию $\|\varphi\|_{k,\alpha} \leq M$, где $M > 0$ — константа, определяемая поверхностью S_f^n . Тогда среди всех решений системы (1), определенных формулой (3), существует решение класса $C^{k,\alpha}$, $k \geq 3$, $0 < \alpha < 1$, порождающее AG -преобразование S_f^n с полем смещения z , нормальная составляющая которого вдоль ∂S_f^n совпадает с функцией φ , при этом $z_n \in C^{k,\alpha}$, $z_\tau \in C^{k-1,\alpha}$, $k \geq 3$, $0 < \alpha < 1$.

Обозначим через $d\sigma$ и $d\sigma^*$ элементы n -мерного объема поверхности S_f^n и S_f^{n*} ; внешнюю n -форму $\omega = d\sigma^* - d\sigma$ будем называть изменением элемента объема поверхности S_f^n при ее преобразовании в поверхность S_f^{n*} . Будем говорить, что поверхность S_f^n защемлена вдоль ∂S_f^n , если $z_n|_{\partial S_f^n} = 0$.

Теорема 4. Пусть ω — заданная на S_f^n внешняя n -форма класса $C^{k-2,\alpha}$, $k \geq 3$, $0 < \alpha < 1$, удовлетворяющая условию $\|\omega\|_{k-2,\alpha} \leq M$, где $M > 0$ — константа, определяемая поверхностью S_f^n . Тогда среди всех решений системы (1), определяемых формулой (3), существует решение класса $C^{k,\alpha}$, $k \geq 3$, $0 < \alpha < 1$, порождающее G -преобразование поверхности S_f^n при условии защемления S_f^n вдоль ∂S_f^n с заданным изменением ω элемента n -мерного объема $d\sigma$.

Доказательство теорем 3, 4. В силу формул (3), (4), (5) нахождение функции c сводится к решению краевой задачи: $Wc = \partial_\alpha (V \bar{g} \bar{b}^{\alpha\beta} \partial_\beta c) + 2Hc = F(\sigma, c)$ в D ; $c = \varphi$ на ∂D , где H — средняя кривизна S_f^n ; $F(\sigma, c)$ — некоторый нелинейный оператор; $\omega = \sigma dx^1 dx^2 \dots dx^n$, $g = \det \|g_{ij}\|$. Используя тот факт, что уравнение $Wc = 0$ имеет не обращающееся в ноль решение $c_0 = 1/\sqrt{g}$, заменой искомой функции $\tilde{c} = c/c_0$ приводим указанную задачу к виду $W_1 \tilde{c} = F_1(\sigma, \tilde{c})$ в D ; $\tilde{c} = \varphi$ на ∂D ; где к оператору W_1 применим принцип максимума. Методом последовательных приближений доказывается при сделанных предположениях разрешимость полученной задачи в классе $C^{k,\alpha}$, $k \geq 3$, $0 < \alpha < 1$.

Поступила в редакцию 10.12.87

* Векуа И. Н. Обобщенные аналитические функции. М., 1959. 153 с.

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ СЕКЦИОННОЙ КРИВИЗНЫ МЕТРИКИ САСАКИ $T_1(M^n, K)$

В предлагаемой работе найдены точные границы изменения секционной кривизны метрики Сасаки сферического касательного расслоения пространств постоянной кривизны. К настоящему моменту эти границы известны в двух случаях: а) если базовое многообразие есть стандартная двумерная сфера S^2 , то секционная кривизна метрики Сасаки $T_1 S$ постоянна и равна $1/4$ [1]; б) если базовое многообразие есть стандартная n -мерная сфера S^n ($n \geq 3$), то нижняя граница секционной кривизны метрики Сасаки $T_1 S^n$ равна 0, а верхняя равна $5/4$ [2].

Обозначим через (M^n, K) риманово многообразие постоянной секционной кривизны K , через $T_1(M^n, K)$ — его сферическое касательное расслоение, через \bar{K}_{\min} и \bar{K}_{\max} — наибольшее и наименьшее значения секционной кривизны метрики Сасаки $T_1(M^n, K)$.

Теорема. Экстремальные значения секционной кривизны метрики Сасаки $T_1(M^n, K)$ равны:

а) для $n = 2$

$$\bar{K}_{\min} = \begin{cases} K(1 - 3K/4), & K \in (-\infty, 0] \cup (1, +\infty); \\ K^2/4, & K \in (0, 1]; \end{cases}$$

$$\bar{K}_{\max} = \begin{cases} K^2/4, & K \in (-\infty, 0] \cup (1, +\infty), \\ K(1 - 3K/4), & K \in (0, 1]; \end{cases}$$

б) для $n \geq 3$

$$\bar{K}_{\min} = \begin{cases} K(1 - 3K/4), & K \in (-\infty, 0] \cup (4/3, +\infty), \\ 0, & K \in (0, 4/3); \end{cases}$$

$$\bar{K}_{\max} = \begin{cases} K + \frac{K^2(K-5)^2}{4(K^2-4K-1)}, & K \in (-\infty, (3 - \sqrt{17})/2], \\ 1, & K \in ((3 - \sqrt{17})/2, 2/3], \\ K + \frac{K^2}{4(2K-1)}, & K \in (2/3, (5 + \sqrt{17})/2], \\ K^2/4, & K \in ((5 + \sqrt{17})/2, +\infty). \end{cases}$$

Ниже приводится графическое изображение найденных экстремумов.

§ 1. Предварительные сведения и результаты. Пусть M^n — риманово многообразие, TM^n — его касательное расслоение. Из TTM^n определены отображения π_* и C , являющиеся соответственно дифференциалом проекции расслоения $\pi: TM^n \rightarrow M^n$ и отображенiem связности [3, 4]. Если $\tilde{X} \in T_{(q, v)} TM^n$, то $\pi_* \tilde{X} \in T_q M^n$, $C\tilde{X} \in T_v M^n$. Введем обозначения: $X_H = \pi_* \tilde{X}$, $X_V = C\tilde{X}$ и будем называть X_H и X_V горизонтальной и вертикальной проекциями вектора \tilde{X} .

Пусть \ll, \gg означает скалярное произведение в метрике Сасаки TM^n . Тогда по определению [3] $\ll \bar{X}, \bar{Y} \gg = \langle X_H, Y_H \rangle + \langle X_V, Y_V \rangle$, где \langle , \rangle означает скалярное произведение касательных векторов в метрике базы. Горизонтальные и вертикальные подпространства в этой метрике ортогональны.

Аналогичную структуру имеет и сферическое касательное расщепление. Отображение C_1 определяется как ограничение C на TT_1M^n . Если $\bar{X} \in T_{(Q, \xi)}T_1M^n$, то $\pi_*\bar{X} \in T_QM^n$, $C_1\bar{X} \in L_Q^\perp(\xi)$, где $L_Q^\perp(\xi)$ означает ортогональное дополнение к вектору ξ в касательном пространстве T_QM^n . Вводя обозначения $X_H = \pi_*\bar{X}$, $X_V = C_1\bar{X}$, мы можем записать скалярное произведение в метрике Сасаки T_1M^n следующим образом: $\ll \bar{X}, \bar{Y} \gg = \langle X_H, Y_H \rangle + \langle X_V, Y_V \rangle$ (1), где \langle , \rangle , как и для TM^n , означает скалярное произведение в метрике базы, причем $\langle X_V, \xi \rangle = \langle Y_V, \xi \rangle = 0$ (2).

Лемма 1 [5]. Пусть \bar{X}, \bar{Y} — единичные взаимно ортогональные векторы, касательные к T_1M^n в точке $\bar{Q} = (Q, \xi)$. Секционная кривизна $\bar{K}_{\bar{X}\bar{Y}}$ метрики Сасаки T_1M^n в двумерном направлении (\bar{X}, \bar{Y}) равна:

$$\begin{aligned} \bar{K}_{\bar{X}\bar{Y}} = & \langle R(X_H, Y_H)Y_H, X_H \rangle - 3|R(X_H, Y_H)\xi|^2/4 + \\ & + 3\langle R(X_H, Y_H)Y_V, X_V \rangle - \langle R(\xi, X_V)X_H, R(\xi, Y_V)Y_H \rangle + \\ & + |R(\xi, Y_V)X_H + R(\xi, X_V)Y_H|^2/4 + \langle (\nabla_{Y_H}R)(X_H, Y_H)\xi, X_V \rangle - \\ & - \langle (\nabla_{X_H}R)(X_H, Y_H)\xi, Y_V \rangle + |X_V|^2|Y_V|^2 - \langle X_V, X_V \rangle^2, \end{aligned}$$

где $R(X, Y)Z$ — тензор кривизны M^n , X_V, Y_V удовлетворяют (2).

Для случая многообразия постоянной кривизны и удачного выбора базиса касательного к (M^n, K) пространства формула леммы 1 может быть приведена к более простому виду. А именно, пусть (Q, ξ) — произвольная точка $T_1(M^n, K)$. В качестве n -го координатного направления на M^n выберем направление ξ . Остальные $n-1$ направление выберем путем процесса ортогонализации. Тогда в точке Q компоненты метрического тензора M^n будут равны δ_{ij} ($i, j = 1, \dots, n$) и скалярное произведение в лемме 1 станет евклидовым. Каждый касательный вектор к T_1M^n в точке (Q, ξ) будет задаваться $2n-1$ координатой: $\bar{X} = \{X^1, X^2, \dots, X^n; X^{n+1}, \dots, X^{2n-1}\}$, $\bar{Y} = \{Y^1, Y^2, \dots, Y^n, Y^{n+1}, \dots, Y^{2n-1}\}$. При этом $X_H = \{X^1, \dots, X^n\}$, $X_V = \{X^{n+1}, \dots, X^{2n-1}; 0\}$, $\xi = \{0, \dots, 0; 1\}$. В этих условиях формула леммы 1 примет вид:

Лемма 2 [2]. Пусть \bar{X}, \bar{Y} — единичные взаимно ортогональные векторы, касательные к $T_1(M^n, K)$ в точке $\bar{Q} = (Q, \xi)$. Секционная кривизна $\bar{K}_{\bar{X}\bar{Y}}$ метрики Сасаки $T_1(M^n, K)$ в двумерном направлении (\bar{X}, \bar{Y}) равна

$$\bar{K}_{\bar{X}\bar{Y}} = \sum_{p=1}^q \sum_{q=2}^{n-1} [K(B^{p,q})^2 + K(3-K)B^{p,q}B^{n+p,n+q}] +$$

$$+ (B^{n+p} n+q)^2] + K(1 - 3K/4) \sum_{p=1}^{n-1} (B^{n-p})^2 + (K^2/4) \sum_{p=1}^{n-1} (B^{n-p})^2 + \\ + (K^2/4) \left(\sum_{p=1}^{n-1} B^{n-p} \right)^2,$$

где $B^{IJ} = X^I Y^J - X^J Y^I$ ($I, J = 1, \dots, 2n-1$) — компоненты простого бивектора, составленного из координат векторов \bar{X}, \bar{Y} .

Заметим, что ортонормированность пары (\bar{X}, \bar{Y}) означает единичность бивектора $\{B^{IJ}\}$, т. е.

$$\sum_{I=1}^J \sum_{I=2}^{2n-1} (B^{IJ})^2 = 1. \quad (3)$$

Еще одно выражение для секционной кривизны метрики Сасаки $T_1(M^n, K)$ получим, пользуясь выражением для тензора кривизны $(M^n, K), R(X, Y)Z = K(\langle Y, Z \rangle X - \langle X, Z \rangle Y)$ (4).

Прежде заметим, что поскольку секционная кривизна зависит только от данной двумерной плоскости, а не от векторов, ее задающих, то в плоскости ортонормированных векторов \bar{X}, \bar{Y} можно выбрать такую пару векторов, что $\langle X_V, Y_V \rangle = 0, \langle X_H, Y_H \rangle = 0$ (5) и при этом секционная кривизна не изменится. Поэтому в дальнейшем будем полагать, что векторы нашей элементарной площадки удовлетворяют условиям (5).

С учетом (2), (4) и (5) формула леммы 1 преобразуется к виду

$$\begin{aligned} K_{\bar{X}\bar{Y}} = & K|X_H|^2|Y_H|^2 + K(3-K)[\langle X_H, X_V \rangle \langle Y_H, Y_V \rangle - \\ & - \langle X_H, Y_V \rangle \langle Y_H, X_V \rangle] + |X_V|^2|Y_V|^2 + (K^2/4)[\langle Y_V, X_H \rangle - \\ & - \langle X_V, Y_H \rangle]^2 + \langle \xi, X_H \rangle^2|Y_V|^2 + \langle \xi, Y_H \rangle^2|X_V|^2 - \\ & - (3K^2/4)\langle Y_H, \xi \rangle^2|X_H|^2 + \langle X_H, \xi \rangle^2|Y_H|^2]. \end{aligned} \quad (6)$$

§ 2. Доказательство теоремы. Пункт а) теоремы является тривиальным следствием леммы 2, и поэтому его доказательство опущено. Графически результат п. а) представлен на рис. 1, где сплошная линия соответствует максимуму, а пунктирная — минимуму $\bar{K}_{\bar{X}\bar{Y}}$.

Пункт б). Доказательство проведем в несколько этапов. А именно, разобьем все множество элементарных площадок векторов \bar{X}, \bar{Y} , касательных к $T_1(M^n, K)$, на 5 типов следующим образом:

а) горизонтальный тип: $X_V = 0, Y_V = 0$;

б) вертикальный тип: $X_H = 0, Y_H = 0$;

в) квазигоризонтальный тип: $Y_V = 0$ или $X_V = 0$;

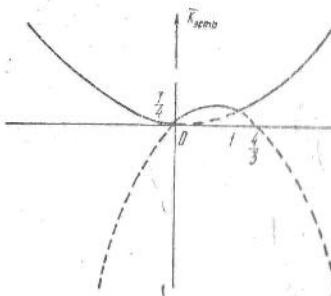


Рис. 1

- г) квазивертикальный тип: $Y_H = 0$ или $X_H = 0$;
 д) общий тип: $X_H \neq 0$, $Y_H \neq 0$, $X_V \neq 0$, $Y_V \neq 0$.

Найдем, далее, наибольшее и наименьшее значение $\bar{K}_{\bar{X}\bar{Y}}$ в направлении каждого из указанных типов площадок и, наконец, сравнив полученные экстремумы между собой, найдем глобальный минимум и максимум секционной кривизны $\bar{K}_{\bar{X}\bar{Y}}$ по всем возможным площадкам.

а) Горизонтальный тип.

Так как \bar{X} и \bar{Y} нормированы, то из (1) следует, что $\|\bar{X}\|^2 = |X_H|^2 + |X_V|^2 = |X_H|^2 = 1$, $\|\bar{Y}\|^2 = |Y_H|^2 + |Y_V|^2 = |Y_H|^2 = 1$. Поэтому формула (6) примет вид $\bar{K}_{\bar{X}\bar{Y}} = K - (3K^2/4)[\langle \xi, X_H \rangle^2 + \langle \xi, Y_H \rangle^2] = K - (3K^2/4)(\cos^2 \varphi + \cos^2 \psi)$, где $\varphi = \widehat{\langle \xi, X_H \rangle}$, $\psi = \widehat{\langle \xi, Y_H \rangle}$. Отсюда находим экстремальные значения:

$$K = K, \quad \bar{K} = K - 3K^2/4; \quad (7)$$

б) вертикальный тип. В этом случае из формулы (6) находим

$$\bar{K}_{\bar{X}\bar{Y}} = 1. \quad (8)$$

Рассмотрению оставшихся типов предпошлем доказательство того, что на площадках векторов, горизонтальные проекции которых не ортогональны вектору ξ , экстремальные кривизны имеют только два значения: $\bar{K} = K(1 - 3K/4)$, $\bar{K} = K^2/4$. Действительно, рассмотрим формулу леммы 2 как функцию $2(2n - 1)$ координат векторов элементарной площадки и будем искать экстремальные значения этой функции при условиях:

$$\varphi_1 = \sum_{I=1}^{2n-1} (X^I)^2 - 1 = 0; \quad \varphi_2 = \sum_{I=1}^{2n-1} (Y^I)^2 - 1 = 0; \quad \varphi_3 = \sum_{I=1}^{2n-1} X^I Y^I = 0. \quad (9)$$

Пусть $\Phi = \bar{K}_{\bar{X}\bar{Y}} - \lambda\varphi_1 - \mu\varphi_2 - \nu\varphi_3$ — функция Лагранжа. Путем простого, но громоздкого вычисления (которое по этой причине опускается) найдем, что если \bar{X}_0, \bar{Y}_0 дают экстремум функции Φ , то в точке (\bar{X}_0, \bar{Y}_0) условный экстремум $\bar{K}_{\bar{X}\bar{Y}}$ равен параметру λ (или μ) функции Лагранжа, причем в точке экстремума параметр ν равен 0.

Так как секционная кривизна зависит от площадки, определяемой данной парой векторов, то «экстремальную» пару можно так повернуть в «экстремальной плоскости», что координаты этой пары векторов будут удовлетворять условиям (5):

$$\sum_{I=1}^n X^I Y^I = 0, \quad \sum_{p=1}^{n-1} X^{n+p} Y^{n+p} = 0. \quad (10)$$

Рассмотрим теперь в точке экстремума два уравнения:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial X^n} = K \left(1 - \frac{3K}{4} \right) \sum_{p=1}^{n-1} B^{np} Y_0^p + \frac{K^2}{4} \sum_{p=1}^{n-1} B^{n,n+p} Y_0^{n+p} \lambda X_0^n = 0, \\ \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial Y^n} = K \left(1 - \frac{3K}{4} \right) \sum_{p=1}^{n-1} B^{np} (-X_0^p) + \frac{K^2}{4} \sum_{p=1}^{n-1} B^{n,n+p} (-X_0^n) - \mu Y_0^n = 0. \end{cases}$$

Распишем бивекторы через координаты и выпишем систему уравнений относительно X_0^n и Y_0^n .

Воспользовавшись равенствами (9), (10), приходим к системе уравнений:

$$\begin{aligned} X_0^n [K(1 - 3K/4) - K(1 - K)|Y_0|^2 - \lambda] &= 0, \\ Y_0^n [K(1 - 3K/4) - K(1 - K)|X_0|^2 - \mu] &= 0. \end{aligned}$$

Если $X_0^n \neq 0$ (или $Y_0^n \neq 0$), то $\lambda = K(1 - 3K/4) - K(1 - K)|Y_0|^2$ (или $\mu = K(1 - 3K/4) - K(1 - K)|X_0|^2$).

Следовательно, экстремальные значения будут

$$K = K(1 - 3K/4), \bar{K} = K^2/4. \quad (11)$$

Эти экстремумы найдены при условии, что X_0^n и Y_0^n одновременно не обращаются в 0. Все дальнейшее исследование имеет смысл проводить, если $X_0^n = 0, Y_0^n = 0$. Это означает, что $\langle X_H, \xi \rangle = 0, \langle Y_H, \xi \rangle = 0$ (12);

в) квазигоризонтальный тип ($Y_V = 0$). Формула (6) с учетом (12) примет вид $K_{\bar{X}\bar{Y}} = K|X_H|^2|Y_H|^2 + (K^2/4)\langle X_V, Y_H \rangle^2$. Но так как $|Y_H| = \|\bar{Y}\| = 1$, то $\bar{K}_{\bar{X}\bar{Y}} = K|X_H|^2 + (K^2/4)\cos^2 \varphi |X_V|^2$. Поскольку $|X_H|^2 + |X_V|^2 = 1$, то полученное выражение можно рассматривать как квадратичную форму на единичной сфере. Отсюда находим два экстремальных значения $\bar{K}_{\bar{X}\bar{Y}}$: $\bar{K} = K, \bar{K} = K^2/4$ (13);

г) квазивертикальный тип ($Y_H = 0$). Исследование дословно повторяет исследование квазигоризонтального типа. В результате найдем еще два экстремума: $K = 1, \bar{K} = K^2/4$;

д) общий тип. Покажем, что исследование на экстремум $\bar{K}_{\bar{X}\bar{Y}}$ при любом n сводится к исследованию на экстремум $\bar{K}_{\bar{X}\bar{Y}}$ при $n = 3$. Для этого еще более специализируем базис касательного к M^n пространства. А именно, пусть $E_n = \xi, E_1 = X_V/|X_V|, E_2 = Y_V/|Y_V|$, а E_3, E_4, \dots, E_{n-1} — произвольное дополнение $\{E_1, E_2, E_n\}$ до ортонормированного базиса $T_Q M^n$. Тогда $X_V = \{X^{n+1}, 0, \dots, 0\}, Y_V = \{0, Y^{n+2}, 0, \dots, 0\}$, где, очевидно, $X^{n+1} = |X_V|, Y^{n+2} = |Y_V|$. В то же время

$$X_H = X^1 E_1 + X^2 E_2 + \sum_{t=3}^{n-1} X^t E_t + X^n E_n,$$

$$Y_H = Y^1 E_1 + Y^2 E_2 + \sum_{t=3}^{n-1} Y^t E_t + Y^n E_n.$$

В этих условиях $\sum_{p=1}^q \sum_{q=2}^{n-1} (B^{n+p n+q})^2 = (B^{n+1 n+2})^2$,

$$\sum_{p=1}^q \sum_{q=2}^{n-1} B^{p q} \cdot B^{n+p n+q} = B^{12} \cdot B^{n+1 n+2}, \quad \sum_{p=1}^{n-1} B^{p n+p} = B^{1 n+1} + B^{2 n+2}.$$

Поэтому формула леммы 2 примет вид

$$\begin{aligned} \bar{K}_{\bar{X}\bar{Y}} &= K(B^{12})^2 + K(3-K)B^{12}B^{n+1 n+2} + (B^{n+1 n+2})^2 + \\ &+ (K^2/4)(B^{1 n+1} + B^{2 n+2})^2 + K(1 - 3K/4)[(B^{n-1})^2 + (B^{n-2})^2] + \\ &+ (K^2/4)[(B^{n n+1})^2 + (B^{n n+2})^2] + K \sum_{p=1}^q \sum_{q=3}^{n-1} (B^{p q})^2 + \\ &+ K(1 - 3K/4) \sum_{p=3}^{n-1} (B^{n p})^2 + (K^2/4) \sum_{p=3}^{n-1} (B^{n n+p})^2. \end{aligned} \quad (14)$$

Пусть \bar{K}_{\max} означает максимум $\bar{K}_{\bar{X}\bar{Y}}$ при любых \bar{X}, \bar{Y} для данного K , т. е. при фиксированном K выполняется неравенство: $K_{\max} - \bar{K}_{\bar{X}\bar{Y}} \geq 0$ для любой ортонормированной пары $(\bar{X}, \bar{Y}) \in T_{(o, g)} T_1 M^n$. Последнее неравенство с учетом формул (3) и (14) может быть переписано в виде

$$\begin{aligned} \bar{K}_{\max} \sum_{I=1}^J \sum_{J=2}^{2n-1} (B^{IJ})^2 - \bar{K}_{\bar{X}\bar{Y}} &= \{\bar{K}_{\max} [(B^{12})^2 + (B^{1 n+1})^2 + \\ &+ (B^{2 n+2})^2 + (B^{n+1 n+2})^2 + (B^{1 n})^2 + (B^{2 n})^2 + (B^{n n+1})^2 + (B^{n n+2})^2] - \\ &- [K(B^{12})^2 + K(3-K)B^{12}B^{n+1 n+2} + (B^{n+1 n+2})^2 + (K^2/4)(B^{1 n+1} + \\ &+ B^{2 n+2})^2 + K(1 - 3K/4)[(B^{1 n})^2 + (B^{2 n})^2] + (K^2/4)[(B^{n n+1})^2 + \\ &+ (B^{n n+2})^2]\} - (\bar{K}_{\max} - K) \sum_{p=1}^q \sum_{q=3}^{n-1} (B^{p q})^2 + [\bar{K}_{\max} - \\ &- K(1 - 3K/4)] \sum_{p=3}^{n-1} (B^{n p})^2 + (\bar{K}_{\max} - K^2/4) \sum_{p=3}^{n-1} (B^{n n+p})^2 + \\ &+ \bar{K}_{\max} \sum_{*} (B^{IJ})^2 \geq 0. \end{aligned} \quad (15)$$

В последней сумме * означает суммирование по всем оставшимся индексам.

Поскольку бивектор B^{IJ} в этой формуле подразумевается произвольным, то легко проверить, что при его соответствующем выборе можно обратить в нуль (при $n \geq 3$) все группы слагаемых, кроме какой-либо одной. Таким образом, \bar{K}_{\max} , являясь максимумом $\bar{K}_{\bar{X}\bar{Y}}$, должна обеспечивать неотрицательность каждой из групп слагаемых. Это означает, что

$$\bar{K}_{\max} \geq \max \{K, K(1 - 3K/4), K^2/4, 0\}, \quad (16)$$

а также \bar{K}_{\max} должна обеспечивать неотрицательность группы слагаемых, отмеченных в формуле (15) фигурной скобкой. В свою очередь, эта группа слагаемых соответствует некоторому $T_1(M^3, K) \subset$

$\subset T_1(M^3, K)$. Найденные экстремумы для площадок горизонтального и квазигоризонтального типа удовлетворяют неравенству (16). Наша задача тем самым сводится к нахождению экстремумов $\bar{K}_{\bar{X}\bar{Y}}$ на $T_1(M^3, K)$ и сравнения их с уже найденными.

Аналогичное рассуждение можно привести для минимума $\bar{K}_{\bar{X}\bar{Y}}$. Различие будет лишь в том, что \bar{K}_{\min} на $T_1(M^3, K)$ должно будет удовлетворять другому «априорному» неравенству:

$$\bar{K}_{\min} < \min \{K(1 - 3K/4), 0\}. \quad (17)$$

Итак, приступим к изучению экстремумов $\bar{K}_{\bar{X}\bar{Y}}$ на $T_1(M^3, K)$ при следующих ограничениях:

$$\begin{aligned} X_H \neq 0, X_V \neq 0, Y_H \neq 0, Y_V \neq 0, \langle X_H, \xi \rangle = \langle Y_H, \xi \rangle = \\ = \langle X_V, \xi \rangle = \langle Y_V, \xi \rangle = \langle X_V, Y_V \rangle = \langle X_H, Y_H \rangle = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Введем в рассмотрение единичные векторы: $X = X_H / |X_H|$, $Y = Y_H / |Y_H|$, $\eta = X_V / |X_V|$, $\zeta = Y_V / |Y_V|$. Так как выполнены равенства (18) и размерность касательного к M^3 пространства равна 3, то взаимное расположение векторов X , Y , η , ζ , ξ может иметь два варианта, которые отличаются ориентацией репера (X, Y, ξ) . При этом ориентация репера (η, ζ, ξ) может всегда считаться правой. Так как в случае постоянства кривизны базового многообразия значение $\bar{K}_{\bar{X}\bar{Y}}$, вычисленное по формуле леммы 1, не изменяется при замене ξ на $-\xi$.

Учитывая условия (18), формула (6) примет вид

$$\begin{aligned} \bar{K}_{\bar{X}\bar{Y}} = K |X_H|^2 |Y_H|^2 + K(3 - K) (\xi, X, Y) |X_H| |Y_H| |X_V| |Y_V| + \\ + |X_V|^2 |Y_V|^2 + \frac{K^2}{4} (\langle X, \zeta \rangle |X_H| |Y_V| - \langle Y, \eta \rangle |X_V| |Y_H|)^2, \end{aligned} \quad (19)$$

где (ξ, X, Y) — смешанное произведение трех векторов.

Вариант A: $(\xi, X, Y) = +1$. В силу единичности векторов \bar{X} и \bar{Y} имеем условия:

$$\begin{cases} |X_H|^2 + |X_V|^2 = 1; \\ |Y_H|^2 + |Y_V|^2 = 1. \end{cases}$$

Они позволяют ввести в рассмотрение параметры α и β следующим образом: $|X_H| = \cos \alpha$, $|X_V| = \sin \alpha$, $|Y_H| = \cos \beta$, $|Y_V| = \sin \beta$. При этом, естественно, $\alpha, \beta \in (0, \pi/2)$ (20). Наконец, через φ обозначим угол между векторами X и η . Тогда формула (19) примет вид

$$\begin{aligned} \bar{K}_{\bar{X}\bar{Y}} = K \cos^2 \alpha \cos^2 \beta + \frac{1}{4} K(3 - K) \sin 2\alpha \sin 2\beta + \sin^2 \alpha \sin^2 \beta + \\ + \frac{K^2}{4} \sin^2 \varphi \sin^2(\alpha + \beta) = \frac{1}{4} [(K + 1) + (K - 1) \cos 2\alpha + \\ + (K - 1) \cos 2\beta + (K + 1) \cos 2\alpha \cos 2\beta + \\ + K(3 - K) \sin 2\alpha \sin 2\beta + K^2 \sin^2 \varphi \sin^2(\alpha + \beta)]. \end{aligned} \quad (21)$$

Для решения нашей задачи достаточно исследовать последнюю функцию переменных параметров α , β и φ на экстремум, принимая K в качестве фиксированного параметра.

В дальнейшем для сокращения записи вместо $\bar{K}_{\bar{x}\bar{y}}$ будем употреблять \bar{K} .

Заметим, что \bar{K} тем больше, чем больше $\sin^2 \varphi$. Таким образом, максимум \bar{K} нужно искать при условии $\sin^2 \varphi = 1$, а минимум — при $\sin^2 \varphi = 0$. Выпишем необходимые условия экстремума \bar{K} :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{K}}{\partial \alpha} &= (1/4) [-2(K-1)\sin 2\alpha - 2(K+1)\sin 2\alpha \cos 2\beta + \\ &+ 2K(3-K)\cos 2\alpha \sin 2\beta + K^2 \sin^2 \varphi \sin 2(\alpha + \beta)] = 0; \\ \frac{\partial \bar{K}}{\partial \beta} &= (1/4) [-2(K-1)\sin 2\beta - 2(K+1)\cos 2\alpha \sin 2\beta + \\ &+ 2K(3-K)\sin 2\alpha \cos 2\beta + K^2 \sin^2 \varphi \sin 2(\alpha + \beta)] = 0. \end{aligned}$$

Из этих уравнений найдем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{K}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \bar{K}}{\partial \beta} &= (1/2) [-(K-1)(\sin 2\alpha + \sin 2\beta) + (K(3-K) - \\ &- (K+1))(\sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha) + \\ &+ K^2 \sin^2 \varphi \sin 2(\alpha + \beta)] = 0, \\ \frac{\partial \bar{K}}{\partial \alpha} - \frac{\partial \bar{K}}{\partial \beta} &= (1/2) [-(K-1)(\sin 2\alpha - \sin 2\beta) - (K(3-K) + \\ &+ (K+1))(\sin 2\alpha \cos 2\beta - \sin 2\beta \cos 2\alpha)] = 0. \end{aligned}$$

После стандартных тригонометрических преобразований получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta)[(K-1)\cos(\alpha - \beta) + (K^2 \cos^2 \varphi - 2K + 1) \times \\ \times \cos(\alpha + \beta)] &= 0; \\ \sin(\alpha - \beta)[(K-1)\cos(\alpha + \beta) + (-K^2 + 4K + 1) \times \\ \times \cos(\alpha - \beta)] &= 0. \end{aligned}$$

Поскольку $(\alpha, \beta) \in (0, \pi/2)$, то отсюда следуют два варианта:

- i) $\begin{cases} \sin(\alpha - \beta) = 0; \\ (K-1)\cos(\alpha - \beta) + (K^2 \cos^2 \varphi - 2K + 1) \cos(\alpha + \beta) = 0; \end{cases}$
- ii) $\begin{cases} (K-1)\cos(\alpha - \beta) + (K^2 \cos^2 \varphi - 2K + 1) \cos(\alpha + \beta) = 0; \\ -K^2 + 4K + 1 \cos(\alpha - \beta) + (K-1) \cos(\alpha + \beta) = 0. \end{cases}$

Рассмотрим вариант i).

Ввиду (20) из первого уравнения следует, что $\alpha = \beta$. Тогда из второго уравнения найдем $\cos 2\beta = (K-1)/(2K-1-K^2 \cos^2 \varphi)$ (22).

Решение существует при условии

$$|(K-1)/(2K-1-K^2 \cos^2 \varphi)| < 1. \quad (23)$$

Так как $\alpha = \beta$ и $\sin^2 2\beta = 1 - \cos^2 2\beta$, то, подставляя (22) в (21), получим

$$\bar{K} = (1/4)[-K^2 + 4K + 1 + (K-1)^2/(2K-1) - K^2 \cos^2 \varphi] + K^2 \sin^2 \varphi.$$

Отсюда находим наименьшее значение \bar{K} (при $\sin^2 \varphi = 0$):

$$\bar{K} = K(1 - K/4) \text{ при } K < 0, K \geq 2 \text{ (см. (23))} \quad (24)$$

и наибольшее значение \bar{K} (при $\sin^2 \varphi = 1$):

$$\bar{K} = K + K^2/4(2K-1) \text{ при } K < 0, K \geq 2\beta \text{ (см. (23)).} \quad (25)$$

Рассмотрим вариант *ii*). Будем решать раздельно две системы этого варианта при $\sin^2 \varphi = 0$ и $\sin^2 \varphi = 1$:

$$\sin^2 \varphi = 0: \begin{cases} \cos(\alpha - \beta) + (K-1)\cos(\alpha + \beta) = 0; \\ (-K^2 + 4K + 1)\cos(\alpha - \beta) + (K-1)\cos(\alpha + \beta) = 0. \end{cases}$$

Система имеет решение, если $(K-1)^2 - (-K^2 + 4K + 1)(K-1) = 0$, т. е., при $K = 0, 1, 4$. Случай $K = 0$ и $K = 1$ тривиальны. При $K = 4$ имеем $\cos(\alpha - \beta) + 3\cos(\alpha + \beta) = 0$. Отсюда найдем, что $2\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = 0$. В то же время при $K = 4$ и $\sin^2 \varphi = 0$ формула (21) примет вид $\bar{K} = (2\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)^2$. Таким образом, находим наименьшее значение: $\bar{K} = 0$ при $K = 4$ (26),

$$\sin^2 \varphi = 1: \begin{cases} (K-1)\cos(\alpha - \beta) - (2K-1)\cos(\alpha + \beta) = 0; \\ (-K^2 + 4K + 1)\cos(\alpha - \beta) + (K-1)\cos(\alpha + \beta) = 0. \end{cases}$$

Решение системы существует, если $(K-1)^2 - (2K-1)(-K^2 + 4K + 1) = 0$. Последнее уравнение приводится к виду: $-2K(K^2 - 5K + 2) = 0$. Решение $\bar{K} = 0$ тривиально. Пусть K удовлетворяет уравнению $K^2 - 5K + 2 = 0$ (27). Тогда второе уравнение системы есть следствие первого и после тригонометрических преобразований из первого уравнения получим $\cos\alpha\cos\beta = \frac{3K-2}{K}\sin\alpha\sin\beta$.

Отсюда $\cos(\alpha + \beta) = \frac{2(K-1)}{K}\sin\alpha\sin\beta$, $\sin^2(\alpha + \beta) = 1 - \frac{4(K-1)^2}{K^2}\sin^2\alpha\sin^2\beta$. Подставляя последние выражения в (21), получим $\bar{K} = K^2/4 + (2/K)(-2K+1)(K^2-5K+2)\sin^2\alpha\sin^2\beta$. Так как \bar{K} удовлетворяет (27), то отсюда получаем максимальное значение \bar{K} :

$$\bar{K} = K^2/4 \text{ при } K = (5 \pm \sqrt{17})/2. \quad (28)$$

Исследование варианта *A* закончено.

Вариант *B*: $(\xi, X, Y) = -1$. Обозначая через φ угол между векторами Y и η , формулу для \bar{K} приведем к виду

$$\begin{aligned}\bar{K} = & (1/4)[K+1+(K-1)\cos 2\alpha+(K-1)\cos 2\beta+ \\ & +(K+1)\cos 2\alpha \cos 2\beta-K(3-K)\sin 2\alpha \sin 2\beta+ \\ & +K^2 \cos^2 \varphi \sin^2(\alpha-\beta)].\end{aligned}\quad (29)$$

Аналогично варианту A системы

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{K}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \bar{K}}{\partial \beta} = 0; \\ \frac{\partial \bar{K}}{\partial \alpha} - \frac{\partial \bar{K}}{\partial \beta} = 0 \end{array} \right.$$

приводится к виду

$$\begin{cases} \sin(\alpha+\beta)[- (K-1) \cos(\alpha-\beta) + (K^2 - 4K - 1) \cos(\alpha+\beta)] = 0; \\ \sin(\alpha-\beta)[- (K^2 \sin^2 \varphi - 2K + 1) \cos(\alpha-\beta) - (K-1) \cos(\alpha+\beta)] = 0. \end{cases}$$

Имеем два варианта:

- i) $\begin{cases} \sin(\alpha-\beta) = 0; \\ - (K-1) \cos(\alpha-\beta) + (K^2 - 4K - 1) \cos(\alpha+\beta) = 0; \end{cases}$
- ii) $\begin{cases} - (K-1) \cos(\alpha-\beta) + (K^2 - 4K - 1) \cos(\alpha+\beta) = 0; \\ (K^2 \sin^2 \varphi - 2K + 1) \cos(\alpha-\beta) + (K-1) \cos(\alpha+\beta) = 0. \end{cases}$

Рассмотрим вариант i). Из первого уравнения системы с учетом (10) следует, что $\alpha = \beta$, а из второго найдем



Рис. 2

$$\cos 2\beta = (K-1)/(K^2 - 4K - 1). \quad (30)$$

Решение существует при условии, что

$$|(K-1)|/(K^2 - 4K - 1) \ll 1. \quad (31)$$

Используя (30), найдем, что

$$\sin^2 \beta = (K^2 - 5K)/2(K^2 - 4K - 1). \quad (32)$$

При $\alpha=\beta$ формула (29) преобразуется к виду

$$\bar{K} = K \cos^4 \beta - K(3-K) \sin^2 \beta \cos^2 \beta + \sin^4 \beta = (-K^2 + 4K + 1) \sin^4 \beta + (K^2 - 5K) \sin^2 \beta + K.$$

Подставляя в последнее выражение значение $\sin^2 \beta$ (32), найдем

$$\bar{K} = K + K^2(K-5)^2/4(K^2 - 4K - 1). \quad (33)$$

Найденный экстремум существует при (см. (31)) $K < (3 - \sqrt{17})/2$, $0 < K < (3 + \sqrt{17})/2$, $K > 5$.

Исследование варианта *ii*) новых экстремумов не дает.

Сравнение на соответствующих промежутках экстремальных значений K , задаваемых формулами (7), (8), (11), (13), (17), (24), (25), (33), дает сформулированный в теореме результат. Наиболее наглядно найденный результат можно изобразить графически (рис. 2). На графике

$$F_1 = K + K^2(K - 5)^2/4(K^2 - 4K - 1), F_2 = 1, F_3 = K + K^2/4(2K - 1), F_4 = K^2/4, f_1 = K(1 - 3K/4), f_2 = 0.$$

Список литературы: 1. *Klingenber W., Sasaki S.* On the tangent sphere bundle of $a^2 = \text{sphere}$ // *Tohoku Math. Journ.* 1975. 27. P. 45–57. 2. Ямпольский А. Л. Кривизна метрики Сасаки сферических касательных расслоений // Укр. геометр. сб. 1985. Вып. 28. С. 132–145. 3. *Dombrowski P.* On the geometry of tangent bundle // *Journ. reine angew. Math.* 1962. 210, № 1, 2. P. 73–88. 4. Громолл Д. и др. Риманова геометрия в целом / Д. Громолл, В. Клингенберг, В. Мейер. М., 1972. 343 с. 5. Борисенко А. А., Ямпольский А. Л. Секционная кривизна метрики Сасаки T_1M^n // Укр. геометр. сб. 1987. Вып. 30. С. 10–17.

Поступила в редакцию 01.09.87