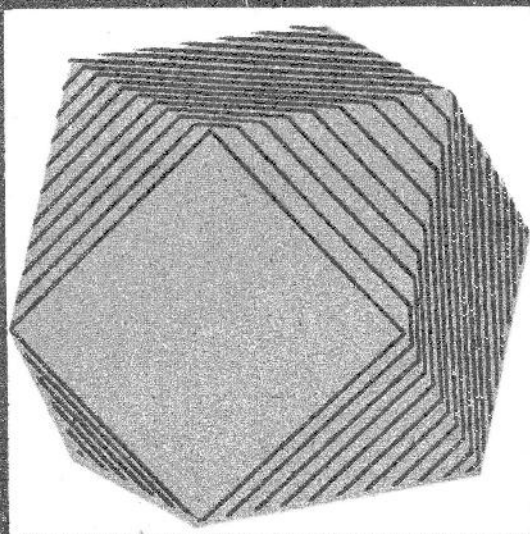


УКРАИНСКИЙ геометрический СБОРНИК

30|87



МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ УССР
ХАРЬКОВСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
И ОРДЕНА ДРУЖБЫ НАРОДОВ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени А. М. ГОРЬКОГО

УКРАИНСКИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК

Республиканский
межведомственный
научный сборник

Основан в 1965 г.

ВЫПУСК 30

Харьков
Издательство при Харьковском
государственном университете
издательского объединения
«Вища школа»
1987

Сборник посвящен в основном геометрии в целом и классической дифференциальной геометрии. Рассматриваются полные параболические поверхности; алгебраические поверхности с симметрией, заданные однородным полиномом; многогранники с равноугольными вершинами; минимальные поверхности с заданным краем; триангуляции тора; изгибания поверхностей с заданными краевыми условиями; особенности на поверхности отрицательной кривизны. Имеются статьи, относящиеся к теории касательного расслоения многообразий, к геометрии линейчатой, комбинаторной, обобщенных пространств.

Для научных работников математических специальностей.

Редакционная коллегия: А. В. Погорелов (отв. ред.), Я. П. Бланк (зам. отв. ред.), А. С. Лейбин (отв. секр.), Ю. А. Аминов, А. А. Борисенко, В. Ф. Игнатенко, Н. И. Кованцов, Е. А. Косачевская, А. Д. Милка, В. И. Михайловский, Н. С. Синюков, М. А. Улановский

Ответственный за выпуск *А. С. Лейбин*

Адрес редакционной коллегии: 310077, Харьков-77, пл. Дзержинского, 4, Харьковский университет, механико-математический факультет, кафедра геометрии, тел. 45-74-92

Редакция литературы по естественным наукам и филологии
Зав. редакцией *Е. П. Иващенко*

ОБ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЯХ,
ЗАДАННЫХ ОДНОРОДНЫМ ПОЛИНОМОМ

Известно, что если поверхность задана явно однородным полиномом, который является произведением линейных множителей, то гауссова кривизна поверхности неположительна [1]. Естественно было бы ожидать, что если полином — произведение квадратичных множителей, которые не разлагаются на линейные, то гауссова кривизна поверхности будет неотрицательна. Однако это не так, что следует из примера поверхности, заданной в виде $z = (x^2 + 2xy + 2y^2)(x^2 + 10xy + 26y^2)$. На прямой $y = 0$, в точках, где $x \neq 0$, гауссова кривизна поверхности отрицательна. Можно доказать, что на поверхности, заданной произведением квадратичных множителей, есть точки положительной гауссовой кривизны, так как от них можно отрезать шапочку плоскостью, параллельной плоскости x, y [2], и указанная поверхность имеет знакопеременную гауссову кривизну.

Естественно было бы выяснить, при каких дополнительных условиях такие поверхности имеют неотрицательную кривизну. На этот вопрос отвечает

Теорема 1. Пусть F — алгебраическая поверхность в евклидовом пространстве E^3 , заданная в виде

$$z = \prod_{i=1}^n (a_{11}^i x^2 + 2a_{12}^i xy + a_{22}^i y^2), \quad (1)$$

где $a_{11}^i a_{22}^i - (a_{12}^i)^2 > 0$. Если выполняется одно из равносильных условий: 1) $a_{11}^i a_{22}^i - (a_{12}^i)^2 \geq (a_{11}^i + a_{22}^i)^2/6$; 2) $2 - \sqrt{3} \leq k_1^i/k_2^i \leq 2 + \sqrt{3}$, где k_1^i, k_2^i — главные кривизны эллиптического параболоида $z = a_{11}^i x^2 + 2a_{12}^i xy + a_{22}^i y^2$ в начале координат, то поверхность F имеет неотрицательную гауссову кривизну и является полной выпуклой поверхностью.

Смысл дополнительного требования заключается в том, чтобы указанные эллиптические параболоиды не очень сильно отличались от параболоидов вращения.

Сферическим изображением поверхности, заданной однородным полиномом, может быть, в частности, восьмая часть сферы, высекаемая тремя взаимно перпендикулярными большими окружностями, как, например, для поверхности $z = x^3 + y^3$. Однако для поверхностей знакопостоянной кривизны на сферическое изображение существуют ограничения. Справедлива

Теорема 2. Пусть F — поверхность знакопостоянной кривизны, заданная явно уравнением $z = P(x, y)$, где правая часть — однородный полином степени n . Если гауссова кривизна K поверхности

1) $K \leq 0$, то а) при нечетном n сферическое изображение есть подмножество сферы, которое содержит четверть сферы, ограниченную двумя взаимно перпендикулярными большими окружностями. Если сферическое изображение совпадает с четвертью сферы, то полином, задающий поверхность, имеет вид $z = (\alpha_1 x + \beta_1 y)^{r_1} (\alpha_2 x + \beta_2 y)^{r_2+1} R(x, y)$, где r_1, r_2 — нечетные числа; $R(x, y)$ — однородный полином, который не имеет линейных множителей; б) при четном n сферическое изображение есть большая полусфера;

2) Если $K \geq 0$, $K \neq 0$, то сферическое изображение есть большая полусфера;

3) Если $K \equiv 0$, то при n нечетном — дуга большой окружности длины $\pi/2$, при n четном — большая полуокружность.

Пусть F — алгебраическая поверхность, заданная однородным полиномом:

$$z = P(x, y), \quad (2)$$

m — число различных линейных множителей, входящих в полином. Тогда справедлива

Теорема 3. Полная абсолютная кривизна поверхности (2) удовлетворяет неравенству

$$\iint |K| dS \geq 2\pi |m - 1|.$$

Равенство выполняется тогда и только тогда, когда гауссова кривизна поверхности знакопостоянна.

Повернем оси координат так, чтобы ось x не совпадала с асимптотической прямой, задаваемой линейным множителем полинома P . Введем параметризацию $x = ty$, $z = y^n P(t)$. Минимальное число различных действительных корней $P'(t)$, отличных от корней $P(t)$, равно $|m - 1|$. Из хода доказательства условия равенства в теореме 3 непосредственно следует, что гауссова кривизна поверхности (2) знакопостоянна тогда и только тогда, когда при любом повороте осей координат полином $P'(t)$ имеет минимальное число различных действительных корней.

Утверждение Н. В. Ефимова [1] удовлетворяет этому условию. Действительно, если $P(x, y)$ имеет только линейные множители, то все корни полиномов $P(t)$, $P'(t)$ действительны и при любом повороте системы координат число действительных корней $P'(t)$, отличных от корней $P(t)$, равно $m - 1$.

Доказательство теоремы 1. Разложим функцию z по степеням $x^{2n-i}y^i$:

$$z = a_{11}^1 \dots a_{11}^n x^{2n} + 2 \sum_{i=1}^n a_{11}^1 \dots a_{12}^i \dots a_{11}^n \cdot x^{2n-1} y +$$

$$\begin{aligned}
& + \left(4 \sum_{i>j=1}^n a_{11}^1 \dots a_{12}^j \dots a_{12}^i \dots a_{11}^n + \sum_{i=1}^n a_{11}^1 \dots a_{22}^i \dots \right. \\
& \dots a_{11}^n \Big) x^{2n-2} y^2 + \dots + \left(4 \sum_{i>j=1}^n a_{22}^1 \dots a_{12}^j \dots a_{12}^i \dots a_{22}^n + \right. \\
& \left. + \sum_{i=1}^n a_{22}^1 \dots a_{11}^i \dots a_{22}^n \right) x^2 y^{2n-2} + 2 \left(\sum_{i=1}^n a_{22}^1 \dots a_{12}^i \dots \right. \\
& \left. \dots a_{22}^n \right) x y^{2n-1} + a_{22}^1 \dots a_{22}^n y^{2n}.
\end{aligned}$$

Найдем гауссову кривизну поверхности в точках прямой $y = 0$; ее знак совпадает со знаком $z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2$,

$$\begin{aligned}
z_{xx} &= 2n(2n-1) a_{11}^1 \dots a_{11}^n x^{2n-2} + \dots \\
z_{xy} &= 2(2n-1) \sum a_{11}^1 \dots a_{12}^i \dots a_{11}^n x^{2n-2} + \dots \\
z_{yy} &= 2 \left(4 \sum_{i>j=1}^n a_{11}^1 \dots a_{12}^j \dots a_{12}^i \dots a_{11}^n + \sum_{i=1}^n a_{11}^1 \dots \right. \\
& \left. \dots a_{22}^i \dots a_{11}^n \right) x^{2n-2} + \dots
\end{aligned}$$

При $y = 0$

$$\begin{aligned}
z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 &= [16n(2n-1) a_{11}^1 \dots a_{11}^n \sum_{i>j=1}^n a_{11}^1 \dots a_{12}^j \dots \\
& \dots a_{12}^i \dots a_{11}^n + 4n(2n-1) a_{11}^1 \dots a_{11}^n \sum_{i=1}^n a_{11}^1 \dots a_{22}^i \dots \\
& \dots a_{11}^n - 4(2n-1)^2 \left(\sum a_{11}^1 \dots a_{12}^i \dots a_{11}^n \right)^2] x^{2(2n-2)}.
\end{aligned}$$

Коэффициент a_0 при $x^{2(2n-2)}$ можно записать в виде

$$\begin{aligned}
a_0 &= 4(2n-1) \left[\sum_{i=1}^n n(a_{11}^i a_{22}^i - 2(a_{12}^i)^2) \left(\prod_{l \neq i=1}^n a_{11}^l \right)^2 + \right. \\
& \left. + \left(\sum_{i=1}^n a_{11}^1 \dots a_{12}^i \dots a_{11}^n \right)^2 \right].
\end{aligned}$$

Для неотрицательности a_0 достаточно потребовать выполнения неравенств

$$a_{11}^i a_{22}^i - 2(a_{12}^i)^2 \geq 0. \quad (3)$$

Тогда гауссова кривизна поверхности вдоль оси x будет неотрицательной. Чтобы гауссова кривизна была неотрицательной во всех точках плоскости, достаточно выполнения аналогичных неравенств при любом повороте системы координат на плоскости x, y . Так как при повороте $a_{11}^i a_{22}^i - (a_{12}^i)^2$ остается инвариантным, то достаточно взять максимальное значение a_{12}^i и потребовать выполнения неравенства (3) в этой системе координат, что обеспечит выполнение неравенства (3) в любой системе координат. Выберем систему

координат так, чтобы $a_{12}^i = 0$. После поворота системы координат на угол $\varphi = \pi/4$ получаем систему координат, в которой $a_{12}^{i'}$ максимально и равно $a_{12}^{i'} = (a_{11}^i - a_{22}^i)/2$. Тогда (3) переписывается следующим образом:

$$(a_{11}^i)^2 + (a_{22}^i)^2 - 4a_{11}^i a_{22}^i \leq 0. \quad (4)$$

В выбранной системе координат a_{11}^i, a_{22}^i — это главные кривизны поверхности $z = a_{11}^i x^2 + 2a_{12}^i xy + a_{22}^i y^2$. Решая неравенство (4), получим

$$2 - \sqrt{3} \leq k_1^i/k_2^i \leq 2 + \sqrt{3}. \quad (5)$$

Вычисляя главные кривизны в произвольной системе координат и подставляя в (4), получим, что коэффициенты $a_{11}^i, a_{12}^i, a_{22}^i$ в произвольной прямоугольной системе координат удовлетворяют неравенствам

$$a_{11}^i a_{22}^i - (a_{12}^i)^2 \geq (a_{11}^i + a_{22}^i)^2/6. \quad (6)$$

Эти неравенства и обеспечат неотрицательность гауссовой кривизны поверхности F . Так как поверхность полная и на ней есть точки положительной кривизны, то F — выпуклая поверхность [2].

Условия $a_{11}^i a_{22}^i - (a_{12}^i)^2 > 0$ являются необходимыми для неотрицательности кривизны и ее положительности хотя бы в одной точке. Действительно, если в разложении однородного полинома есть хотя бы один линейный множитель, то на поверхности лежит прямая. Если на полной поверхности неотрицательной кривизны лежит прямая, то поверхность с точки зрения внутренней геометрии будет метрическим цилиндром [3], а поэтому и цилиндрической поверхностью [4], которая задается в виде $z = (ax + by)^n$.

Доказательство теоремы 2. Осуществим поворот осей x, y так, чтобы $a_0 \neq 0, a_n \neq 0$, т. е. чтобы у полинома не было множителей x^i, y^j . На плоскости x, y положительным направлением вращения будет направление поворота на меньший угол, которое совмещает положительную полуось x с положительной полуосью y . Вместо сферического изображения поверхности $z = f(x, y)$ рассмотрим нормальное изображение $p = f_x, q = f_y$. Так как f — однородный полином, то образом луча при нормальном изображении будет луч, исходящий из начала координат, или начало координат. Если степень полинома n — четное число, то образ противоположных лучей — противоположные лучи; если n — нечетное число, то противоположные лучи своим образом дважды покрывают один луч. Поэтому достаточно рассматривать образ лучей, которые заполняют полуплоскость.

Луч называется особым, если его образом является начало координат. Луч — особый тогда и только тогда, когда на нем

$f_x = f_y = 0$. Если образом луча будет луч, то он называется неособым. На таких лучах $\text{grad } f \neq 0$. При вращении неособого луча вокруг начала координат в положительном направлении его образ при нормальном изображении вращается: при гауссовой кривизне $K < 0$, $K \neq 0$ в отрицательном направлении; при $K \geq 0$, $K \neq 0$ в положительном направлении. Иная ситуация будет при рассмотрении образа особого луча. Пусть луч $l_0: x = \alpha_0 t, y = \beta_0 t$ — особый. Тогда $f_x = (\beta_0 x - \alpha_0 y)^m \Theta(x, y)$, $f_y = (\beta_0 x - \alpha_0 y)^m \times T(x, y)$, $f(x, y) = (\beta_0 x - \alpha_0 y)^{m+1} S(x, y)$, где Θ, T, S — однородные полиномы, не содержащие множителя $(\beta_0 x - \alpha_0 y)$.

Если луч l стремится к особому лучу l_0 , то его нормальный образ S стремится к лучу S_0 , который лежит на прямой, перпендикулярной к прямой $\beta_0 x - \alpha_0 y = 0$. Это справедливо не только для особого луча, но и для любого луча $l_0: x = \alpha_0 t, y = \beta_0 t, t \geq 0$, если $(\beta_0 x - \alpha_0 y)$ — линейный множитель $f(x, y)$.

1) Пусть $K < 0$ (отметим, что при $K \geq 0$ не может быть линейных множителей) и пусть m — четно. Тогда предельное положение луча S не зависит от направления вращения луча l к лучу l_0 . Поэтому при прохождении луча l в положительном направлении через луч l_0 нормальный образ проходит через луч S_0 и продолжает дальше вращаться в отрицательном направлении, т. е. нормальный образ будет вести себя так же, как в окрестности нормального образа неособого луча.

При нечетном m предельное положение луча S зависит от направления вращения луча l к лучу l_0 . При положительном направлении вращения луч S стремится к лучу S'_0 , при отрицательном — к лучу S_0 , противоположному лучу S'_0 , так как при прохождении через луч l_0 производные f_x, f_y меняют знак на противоположный в силу нечетности m . Поэтому при прохождении луча l в положительном направлении через луч l_0 нормальный образ терпит скачок. Сначала луч S стремится в отрицательном направлении к лучу S'_0 , а потом продолжает вращение в отрицательном направлении от луча S_0 . Итак, каждому линейному множителю четной кратности в разложении полинома f соответствует скачок.

Пусть l_1, l_2 — два соседних особых луча плоскости x, y , которым соответствуют скачки, т. е. между ними нет лучей, которым соответствуют скачки. При положительном вращении от луча l_1 к l_2 нормальный образ вращается в отрицательном направлении от луча m_1 к лучу m_2 . При прохождении луча l_2 луч нормального изображения движется от луча m'_2 в направлении луча m_1 . До дальнейшего скачка (если нет других скачков, то это будет луч l'_1 , противоположный лучу l_1) нормальный образ лежит в угле между m'_2 и m_1 и полностью его покрывает. Иначе в этом секторе нормальный образ терпел бы скачок и особый луч, соответствующий скачку, лежал бы в секторе между лучами l_1, l_2 , что противоречило бы тому, что лучи l_1, l_2 — соседние. Поэтому нормальное изображение заполнило одну из полуплоскостей, определяемую лучами

m_2, m'_2 . Эти полуплоскости не совпадают, и их объединение больше полуплоскости. Отсюда следует, что сферическое изображение содержит четверть сферы.

Если скачков нет, то луч в нормальном образе вращается в отрицательном направлении, причем начальное и конечное положения совпадают. Отсюда следует, что нормальное изображение должно совпасть с большой полусферой.

Если нормальный образ имеет один скачок, то при вращении луча от особого луча l к l' образ вращается от S к S' и нормальный образ, по крайней мере, заполняет полуплоскость.

Рассмотрим предельный случай, когда нормальный образ совпадает с полуплоскостью, а соответственно сферический образ — с четвертью сферы. Ось x направим по лучу скачка. Полуплоскость нормального изображения совпадает с полуплоскостью $x \geq 0$. Тогда $f(x, y) = y^{r+1}S(x, y)$, где r — нечетно; $S(x, y)$ — однородный полином, который не имеет линейных множителей четной кратности, так как есть лишь один скачок, $\deg S(x, y) = n - r - 1$. Степень полинома f нечетна, так как сферическое изображение совпадает с четвертью сферы. Поэтому степень полинома $S(x, y)$ также нечетна. Введем параметризацию $x = ty$, тогда $z = y^n P(t)$; $\deg P = n - r - 1$, $f_x = y^{n-1}P'$. Из выбора системы координат и нечетности n следует, что $P' \geq 0$. Поэтому P может иметь только единственный действительный корень. В силу выполнения условия $P' \geq 0$ корень может иметь только нечетную кратность. Поэтому $P(t) = (t - c)^{r_1}R(t)$, где $R(t)$ — полином, имеющий только комплексные корни. Возвращаясь к старой системе координат, получим, что $f(x, y) = (\alpha_1 x + \beta_1 y)^{r_1+1}(\alpha_2 x + \beta_2 y)^{r_2} \times R(x, y)$, где r_1, r_2 — нечетные, а полином $R(x, y)$ не имеет линейных множителей.

Нетривиальным примером такой поверхности может быть поверхность, заданная уравнением $z = x^2 y^3 (x^2 + y^2)$.

Теорема точна, так как в сферическом изображении поверхности неположительной кривизны может быть любой сектор полусферы, ограниченный двумя большими полуокружностями, проходящими через полюс полусферы и содержащий четверть сферы. Примером такой поверхности является поверхность $z = y(x + \alpha y)^2(x + \beta y)^2$ ($\alpha < \beta$).

Доказательство теоремы 3. Введем параметризацию $x = ty$, $z = y^n P(t)$. Координатные оси на плоскости x, y выберем так, чтобы они не совпадали с асимптотическими прямыми, задаваемыми линейными множителями многочлена $P(x, y)$. Тогда $z_x = y^{n-1}P'(t)$. То есть кратность нормального покрытия луча оси y равна числу различных действительных корней $P'(t)$, отличных от корней $P(t)$. При повороте осей координат таким, чтобы они не совпадали с асимптотическими прямыми, линейные множители переходят в линейные, квадратичные — в квадратичные. Поэтому не изменяется число действительных корней многочлена $P(t)$. И во всех случаях $P'(t)$ имеет не менее $|m - 1|$ различных

действительных корней. Если перейдем от нормального изображения к сферическому, то соответственное число раз покроется полусфера. Отсюда следует, что $\iint |K| dS \geq 2\pi |m - 1|$.

I. Пусть F — поверхность знакопостоянной кривизны.

Тогда при любом повороте осей координат многочлен $P'(t)$ имеет минимальное число действительных корней, равное $|m - 1|$.

1) Пусть $K \leq 0$ и число действительных корней $P'(t)$ $\mu > m - 1$. Тогда либо между соседними действительными корнями P лежит два корня P' , либо P' имеет действительный корень вне промежутка корней $P(t)$.

Пусть $c_1 < \xi_1 < \xi_2 < c_2$, где c_1, c_2 и ξ_1, ξ_2 — два соседних корня $P(t)$ и $P'(t)$ соответственно. Для определенности, на сегменте $[c_1, c_2]$ пусть $P(t) > 0$. Так как с точностью до положительного множителя гауссова кривизна совпадает с $\left(\frac{nP}{P'} - t\right)'$, то из непо-

ложительности гауссовой кривизны следует, что $\left(\frac{nP}{P'} - t\right)' \geq 0$.

Поэтому $\lim_{t \rightarrow \xi_j + 0} \left(\frac{nP}{P'} - t\right) = -\infty$, $\lim_{t \rightarrow \xi_j - 0} \left(\frac{nP}{P'} - t\right) = +\infty$. Отсюда следует, что P' на сегменте $[\xi_1, \xi_2]$ меняет знак на противоположный. Это противоречит предположению, что корни ξ_1, ξ_2 — соседние. Аналогичное рассуждение показывает, что нет корней $P'(t)$ вне промежутка корней $P(t)$. Тем самым показано, что при любом повороте осей соответствующий этой системе координат полином $P'(t)$ имеет минимальное число действительных корней $\mu = |m - 1|$. Но так как $z_x = y^{n-1}P'(t)$, то кратность покрытия луча на оси y при нормальном изображении равна $|m - 1|$. А так как ось y может быть любая прямая плоскости, то $\iint |K| dS = |m - 1|$.

2) Если $K \geq 0$, то $m = 0$, поверхность выпукла и $\iint K dS = 2\pi$; при $K = 0$, ($m = 1$), поверхность — цилиндр и $\iint K dS = 0$.

II. Пусть $\iint |K| dS = 2\pi |m - 1|$.

Пусть число линейных множителей $m > 1$. Рассмотрим два соседних луча: l_1, l_2 на плоскости x, y ; определяемые линейными множителями, лучи ограничивают сектор величины φ . Им отвечают действительные корни t_1, t_2 многочлена $P(t)$. Так как между корнями t_1, t_2 всегда есть корень $P'(t)$ и $z_x = y^{n-1}P'(t)$, то между лучами l_1, l_2 найдется луч l , нормальное изображение которого совпадает с лучом оси y . Будем поворачивать систему координат так, чтобы ось x не лежала в секторе, ограниченном лучами l_1, l_2 и симметричными лучами l'_1, l'_2 . Тогда нормальное изображение покроеет угол $\pi - \varphi$, со сторонами, перпендикулярными лучам l_1, l_2 . Суммируя сферическое изображение секторов, на которые асимптотические прямые разбивают плоскость x, y , получим, что

$\iint |K| dS \geq 2\pi |m - 1|$. Но по условию, $\iint |K| dS = 2\pi (m - 1)$. Отсюда следует, что нормальное изображение любого сектора точно совпадает с углом величины $(\pi - \varphi)$, образованным лучами, перпендикулярными лучам l_1, l_2 . Это возможно лишь при $K \leq 0$. Если $m = 1$, то, по условию, $\iint |K| dS = 0$ и $K = 0$. При $m = 0$ любой луч является нормальным изображением, так как систему координат можно выбирать произвольно и $z_x = y^{n-1} P'(t)$, а $P'(t)$ — многочлен нечетной степени и всегда имеет действительный корень. Поэтому $\iint |K| dS \geq 2\pi$, но по условию $\iint |K| dS = 2\pi$. То есть нормальное, а значит, и сферическое изображение поверхности является взаимно однозначным образом поверхности. Поэтому гауссова кривизна знакопостоянна. Но так как на поверхности есть точки положительной кривизны, то $K \geq 0$.

Список литературы: 1. Ефимов Н. В. Качественные вопросы теории деформации поверхностей «в малом» // Тр. мат. ин-та АН СССР 30. — 1949. — 127 с. 2. Погорелов А. В. Внешняя геометрия выпуклых поверхностей. — М.: Наука, 1969. — 759 с. 3. Кон-Фоссен С. Э. Некоторые вопросы дифференциальной геометрии в целом. — М.: Физматгиз, 1959. — 256 с. 4. Борисенко А. А. О строении непрерывной поверхности, содержащей прямую // Укр. геометр. сб. — 1973. — Вып. 14. — С. 21—24.

Поступила в редколлегию 05.11.85

А. А. БОРИСЕНКО, А. Л. ЯМПОЛЬСКИЙ
 СЕКЦИОННАЯ КРИВИЗНА МЕТРИКИ САСАКИ T_1M^n

Пусть TM^n означает касательное расслоение n -мерного риманова многообразия M^n с метрикой g . На TM^n имеется естественная риманова метрика (метрика Сасаки), обозначаемая Tg . Если в каждом слое ограничиться векторами единичной длины (или длины $\lambda > 0$), то получим подрасслоение $T_1M^n(T_\lambda M^n)$, называемое сферическим касательным расслоением. Индуцированная метрикой Tg метрика G на $T_\lambda M^n$ называется метрикой Сасаки T_1M^n . Целью данной работы является получение достаточных условий неотрицательности секционной кривизны метрики G .

Соглашение об индексах. Все индексы, обозначаемые малыми буквами (кроме p и q), принимают значения от 1 до n . Индексы $p, q = 1, \dots, n-1$; $A, B, C, D = 1, \dots, 2n$; $I, J = 1, \dots, 2n-1$.

§ 1. Формулировка результатов. Теорема 1. Пусть X, Y, U, W, ξ — единичные векторы, касательные к M^n в точке Q , причем $\langle X, Y \rangle = \langle U, W \rangle = 0$, $\langle U, \xi \rangle = \langle W, \xi \rangle = 0$. Если

$$\frac{\langle (\nabla_X R)(\xi, W)X, Y \rangle^2}{|R(\xi, W)X|^2} + \frac{\langle (\nabla_Y R)(\xi, U)Y, X \rangle^2}{|R(\xi, U)Y|^2} +$$

$$+ \frac{\lambda^2}{4} [3 \langle R(X, Y)W, U \rangle - \lambda^2 \langle R(\xi, U)X, R(\xi, W)Y \rangle + \\ + \frac{\lambda^2}{2} \langle R(\xi, U)Y, R(\xi, W)X \rangle]^2 \leq K_{XY} - \frac{3\lambda^2}{4} |R(X, Y)\xi|^2,$$

где R — тензор кривизны M^n , K_{XY} — его секционная кривизна, то $T_\lambda M^n$ в точке $\bar{Q} = (Q, \lambda\xi)$ имеет неотрицательную секционную кривизну.

Замечание. При $n=2$ это условие является необходимым и достаточным.

Введем обозначения:

$$M = \sup_{\substack{|X \wedge Y|=1 \\ |\xi|=1}} |R(X, Y)\xi|, \quad M_\nabla = \sup_{\substack{|X \wedge Y|=1 \\ |U \wedge W|=1 \\ |\xi|=1}} \frac{|\langle \nabla_X R \rangle(\xi, W)X, Y|}{|R(\xi, W)X|},$$

$$\mu = \inf_{|X \wedge Y|=1} K_{XY}.$$

Теорема 2. а) Если $\lambda^2 M \leq \frac{4}{3} \left[\sqrt[3]{1 + \frac{3}{4} \frac{m - 2M_\nabla^2}{M}} - 1 \right]$, то $T_\lambda M^n$ имеет неотрицательную секционную кривизну.

б) Если 1) $0 \leq \mu \leq 1/6$, 2) $M^2 \leq \mu/6$, 3) $M_\nabla^2 \leq \mu/6$, то $T_1 M^n$ имеет неотрицательную секционную кривизну.

§ 2. Предварительные сведения. Пусть (x^i) — система локальных координат в окрестности произвольной фиксированной точки $Q \in M^n$. Тогда векторы $(\partial/\partial x^i)_Q$ составляют естественный базис касательного к M^n пространства $T_Q M^n$. Если $\xi \in T_Q M^n$, то $\xi = \xi^i (\partial/\partial x^i)_Q$ и набор величин (x^i, ξ^i) задает локальные координаты точки $\bar{Q} = (Q, \xi) \in TM^n$, которые называются естественными индуцированными координатами. Рассматривая x^i и ξ^i как независимые функции, получим систему локальных координат в некоторой окрестности точки $\bar{Q}$. Естественный базис $T_{\bar{Q}} TM^n$ состоит из векторов $(\partial/\partial x^i, \partial/\partial \xi^i)$, и любой вектор $\bar{X} \in T_{\bar{Q}} TM^n$ имеет вид $\bar{X} = \bar{X}^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \bar{X}^{n+i} \frac{\partial}{\partial \xi^i}$. Сасаки [1] определил риманову метрику на TM^n , имеющую в локальных координатах (x^i, ξ^i) вид

$$\begin{cases} Tg_{ij} = g_{ij} + \Gamma_{is}^\alpha \Gamma_{t, \alpha} \xi^s \xi^t, \\ Tg_{in+j} = \Gamma_{is, j} \xi^s, \\ Tg_{n+i, n+j} = g_{ij}, \end{cases}$$

где g_{ij} — метрический тензор M^n ; Γ_{is}^α — символы Кристоффеля римановой связности M^n . Обозначим через $\langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle$ скалярное произведение векторов в метрике Tg . Не трудно проверить, что

$$\langle \langle \bar{X}, \bar{Y} \rangle \rangle = g_{ij} \bar{X}^i \bar{Y}^j + g_{\alpha\beta} (\bar{X}^{n+\alpha} + \Gamma_{sv}^\alpha \bar{X}^s \xi^v) (\bar{Y}^{n+\beta} + \Gamma_{t\mu}^\beta \bar{Y}^t \xi^\mu) = \langle \pi_* \bar{X}, \pi_* \bar{Y} \rangle + \langle K\bar{X}, K\bar{Y} \rangle,$$

где $\pi_* \tilde{X} = \tilde{X}^i \partial / \partial x^i$ — дифференциал проекции $\pi: TM^n \rightarrow M^n$; $K\tilde{X} = (\tilde{X}^{n+i} + \tilde{\Gamma}_{sv}^i \tilde{X}^s \xi^v) \partial / \partial x^i$ — отображение связности [2].

Вложение $T_1 M^n$ в TM^n задается условием единичности касательного вектора: $g_{ij} \xi^i \xi^j = 1$, что позволяет считать одну из координат, например ξ^n , зависящей от оставшихся координат: $x^1, \dots, x^n, \xi^1, \dots, \xi^{n-1}$. Пусть y^A — локальные координаты TM^n , x^I — локальные координаты $T_1 M^n$. Тогда вложение $T_1 M^n$ в TM^n можно записать так:

$$\begin{aligned} y^1 &= x^1, \dots, y^n = x^n, y^{n+1} = x^{n+1} (= \xi^1), \dots, \\ y^{2n-1} &= x^{2n-1} (= \xi^{n-1}) \\ y^{2n} &= y^{2n}(x^1, \dots, x^n, x^{n+1}, \dots, x^{2n-1}). \end{aligned}$$

Не трудно проверить, что в этом случае метрика Сасаки $T_1 M^n$ имеет вид [3]:

$$\begin{cases} G_{ik} = g_{ik} + \Gamma_{is}^{\alpha} \Gamma_{kt}^{\alpha} \xi^t \xi^s + \Gamma_{\alpha t, n} \xi^{\alpha} A_k + \Gamma_{\alpha k, n} \xi^{\alpha} A_i + g_{nn} A_i A_k, \\ G_{in+p} = \Gamma_{\alpha t, p} \xi^{\alpha} + \Gamma_{\alpha t, n} \xi^{\alpha} B_p + g_{nn} A_i B_p, \\ G_{n+q, n+p} = g_{pq} + g_{np} B_q + g_{nq} B_p + g_{nn} B_p B_q, \end{cases}$$

где $A_k = \partial y^{2n} / \partial x^k$; $B_p = \partial y^{2n} / \partial x^{n+p} (= \partial y^{2n} / \partial \xi^p)$. A_k и B_p легко найти, продифференцировав ковариантно равенство $g_{ij} \xi^i \xi^j = 1$.

Тогда получится, что $A_k = -\frac{1}{\xi^n} \Gamma_{ik}^j \xi^i \xi_j$, $B_p = -\frac{\xi_p}{\xi^n}$, где $\xi_i = g_{is} \xi^s$.

Известно [4], что единичной нормалью к $T_1 M^n$ в M^n в точке (Q, ξ) служит вектор $N = \xi^V$ — вертикальный лифт вектора ξ в точку $\bar{Q} = (Q, \xi)$. Следовательно, вектор $\tilde{X} \in T_{\bar{Q}} TM^n$ касается $T_1 M^n$ тогда и только тогда, когда $\langle K\tilde{X}, \xi \rangle = 0$, т. е. $K\tilde{X} \in L_{\bar{Q}}^{\perp}(\xi)$. Обозначим через K_1 ограничение отображения связности K на векторы, касательные к $T_1 M^n$. Тогда $K_1: T_{\bar{Q}} T_1 M^n \rightarrow L_{\bar{Q}}^{\perp}(\xi)$. Пусть $\bar{X}, \bar{Y} \in T_{\bar{Q}} TM^n$. Если через $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ обозначать скалярные произведения векторов в метрике G , то получим

$$\langle \langle \bar{X}, \bar{Y} \rangle_1 = \langle \pi_* \bar{X}, \pi_* \bar{Y} \rangle + \langle K_1 \bar{X}, K_1 \bar{Y} \rangle.$$

Под горизонтальным лифтом вектора $X \in T_Q M^n$ в точку $\bar{Q} = (Q, \xi) \in T_1 M^n$ будем понимать горизонтальный лифт вектора X в точку $\bar{Q}$ в объемлющем пространстве TM^n . Аналогично для вектора $X \in L_{\bar{Q}}^{\perp}(\xi)$ будем понимать вертикальный лифт в $T_{\bar{Q}} T_1 M^n$ как вертикальный лифт в TM^n . Для упрощения обозначений различать лифты в $TT_1 M^n$ и $T_1 TM^n$ будем по контексту.

§ 3. Вторая квадратичная форма $T_1 M^n \subset TM^n$ и тензор кривизны $T_1 M^n$. Для вычисления второй квадратичной формы вложения $T_1 M^n \subset TM^n$ понадобятся компоненты римановой связности метрики Tg .

Лемма 1 [1]. Символы Кристоффеля римановой связности метрики Сасаки TM^n равны:

$$\begin{aligned}\bar{\Gamma}_{n+b \ n+c}^A &= 0, \quad \bar{\Gamma}_{n+bc}^a = -\frac{1}{2} R_{cb\lambda}^a \xi^\lambda, \\ \bar{\Gamma}_{n+bc}^{n+a} &= \Gamma_{bc}^a + \frac{1}{2} \Gamma_{\mu h}^a R_{cb\lambda}^h \xi^\lambda \xi^\mu, \\ \bar{\Gamma}_{bc}^a &= \Gamma_{bc}^a - \frac{1}{2} (R_{b\mu\lambda}^a \Gamma_{\lambda c}^h + R_{c\mu\lambda}^a \Gamma_{\lambda b}^h) \xi^\lambda \xi^\mu \\ \bar{\Gamma}_{bc}^{n+a} &= \frac{1}{2} \left(R_{bc\lambda}^a + R_{cb\lambda}^a + 2 \frac{\partial \Gamma_{bc}^a}{\partial x^\lambda} \right) \xi^\lambda \\ &\quad - \frac{1}{2} \Gamma_{\nu h}^a (R_{b\mu\lambda}^h \Gamma_{\lambda c}^l + R_{c\mu\lambda}^h \Gamma_{\lambda b}^l) \xi^\lambda \xi^\mu \xi^\nu,\end{aligned}$$

где $R_{b\ c\lambda}^a$ — тензор кривизны метрики g ; Γ_{bc}^a — символы Кристоффеля римановой связности метрики g .

Лемма 2. Матрица Ω второй квадратичной формы вложения $T_1 M^n \subset TM^n$ имеет вид

$$\Omega = \left[\begin{array}{c|c} g_{ij} - G_{ij} & -G_{i \ n+p} \\ \hline -G_{n+p \ j} & -G_{n+p \ n+p} \end{array} \right].$$

Следствие 1. Если $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ — касательные к $T_1 M^n$ векторы, то $\Omega(\bar{X}, \bar{Y}) = -\langle K_1 \bar{X}, K_1 \bar{Y} \rangle$.

Следствие 1'. Если $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ — касательные к $T_\lambda M^n$ векторы, то $\Omega_\lambda(\bar{X}, \bar{Y}) = -\frac{1}{\lambda} \langle K_1 \bar{X}, K_1 \bar{Y} \rangle$.

Доказательство. Как уже отмечалось в § 2, локальные координаты $(x^1, \dots, x^{2n-1})$ $T_1 M^n$ можно выбрать так, что если $y^1, \dots, y^{2n}$ — локальные координаты TM^n , то вложение $T_1 M^n \subset TM^n$ примет вид

$$\begin{aligned}y^1 &= x^1, \dots, y^n = x^n; \quad y^{n+1} = x^{n+1} (= \xi^1), \dots, \\ y^{2n-1} &= x^{2n-1} (= \xi^{n-1}), \quad y^{2n} = y^{2n}(x^1, \dots, x^{2n-1}),\end{aligned}$$

причем $\frac{\partial y^{2n}}{\partial x^k} = -\frac{1}{\xi_n} \Gamma_{jk}^i \xi_i \xi^j$, $\frac{\partial y^{2n}}{\partial x^{n+p}} = -\frac{\xi_p}{\xi_n}$, где $\xi_i = g_{is} \xi^s$.

Прямым вычислением проверяется справедливость следующих равенств:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 y^{2n}}{\partial x^k \partial x^m} &= -\frac{1}{\xi_n} \left\{ G_{km} - g_{km} + \frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial x^m} \xi_i \xi^j + \Gamma_{jk}^i \Gamma_{im, s} \xi^s \xi^j + \right. \\ &\quad \left. + (\Gamma_{nm, s} A_k + \Gamma_{nk, s} A_m) \xi^s \right\}; \\ \frac{\partial^2 y^{2n}}{\partial x^m \partial x^{n+p}} &= -\frac{1}{\xi_n} \{ G_{m \ n+p} + (\Gamma_{nm, s} B_p + \Gamma_{pm, s}) \xi^s \}; \\ \frac{\partial^2 y^{2n}}{\partial x^{n+p} \partial x^{n+q}} &= -\frac{1}{\xi_n} G_{n+p \ n+q}.\end{aligned}$$

Обозначим через $\tilde{\nabla}$ ковариантное дифференцирование в римановой связности метрики Tg . Тогда компоненты искомой второй квадратичной формы будут равны [5]:

$$\Omega_{IJ} = Tg_{AB} \tilde{\nabla}_I \left(\frac{\partial y^A}{\partial x^J} \right) N^B = \tilde{\nabla}_I \left(\frac{\partial y^A}{\partial x^J} \right) N_A,$$

где N^B — координаты единичной нормали к $T_1 M^n$ в TM^n ; $N_A = = Tg_{AB} N^B$. Так как единичной нормалью к $T_1 M^n$ в TM^n в точке $\bar{Q} = (Q, \xi)$ служит вектор $\xi^V = (0, \dots, 0; \xi^1, \dots, \xi^n)$, то легко проверить, что $\{N_A\} = \{G_{a\lambda}^b \xi^\lambda \xi_b; \xi_a\}$. Воспользовавшись леммой 1, получим

$$\begin{aligned} \Omega_{ij} &= \left[\frac{\partial^2 y^a}{\partial x^i \partial x^j} + \tilde{\Gamma}_{CD}^a \frac{\partial y^C}{\partial x^i} \frac{\partial y^D}{\partial x^j} \right] N_a + \left[\frac{\partial^2 y^{n+a}}{\partial x^i \partial x^j} + \tilde{\Gamma}_{CD}^{n+a} \frac{\partial y^C}{\partial x^i} \frac{\partial y^D}{\partial x^j} \right] N_{n+a} = \\ &= \left[\Gamma_{ij}^a - \frac{1}{2} (R_{ih\mu}^a \Gamma_{\lambda j}^h + R_{jh\mu}^a \Gamma_{\lambda i}^h) \xi^\lambda \xi^\mu - \frac{1}{2} R_{in\lambda}^a \xi^\lambda \frac{\partial y^n}{\partial x^i} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} R_{in\lambda}^a \xi^\lambda \frac{\partial y^{2n}}{\partial x^i} \right] \Gamma_{ia}^s \xi^i \xi_s + \left[-\frac{1}{2} (R_{i\lambda j}^a + R_{j\lambda i}^a) \xi^\lambda + \frac{\partial \Gamma_{ij}^a}{\partial x^\lambda} \xi^\lambda - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \Gamma_{vh}^a (R_{ih\mu}^h \Gamma_{\lambda j}^i + R_{jh\mu}^h \Gamma_{\lambda i}^i) \xi^\lambda \xi^\mu \xi_v + \left(\Gamma_{nj}^a + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2} \Gamma_{\mu h}^a R_{jn\lambda}^h \xi^\lambda \xi^\mu \right) \frac{\partial y^{2n}}{\partial x^i} + \left(\Gamma_{ni}^a + \frac{1}{2} \Gamma_{\mu h}^a R_{in\lambda}^h \xi^\lambda \xi^\mu \right) \frac{\partial y^{2n}}{\partial x^j} \right] \xi_a + \\ &\quad + \frac{\partial^2 y^{2n}}{\partial x^i \partial x^j} \xi_n = -\frac{1}{2} (R_{i\lambda j}^a + R_{j\lambda i}^a) \xi^\lambda \xi_a + \left[\frac{\partial \Gamma_{ij}^a}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial \Gamma_{il}^a}{\partial x^j} + \right. \\ &\quad \left. + \Gamma_{ls}^a \Gamma_{ij}^s - \Gamma_{js}^a \Gamma_{il}^s \right] \xi^s \xi^\lambda + g_{ij} - G_{ij} = \frac{1}{2} [R_{i\lambda j}^a - R_{j\lambda i}^a] \xi^\lambda \xi_a + \\ &\quad + g_{ij} - G_{ij} = g_{ij} - G_{ij}; \\ \bar{\Omega}_{in+p} &= \left[\frac{\partial^2 y^a}{\partial x^i \partial x^{n+p}} + \tilde{\Gamma}_{CD}^a \frac{\partial y^C}{\partial x^i} \frac{\partial y^D}{\partial x^{n+p}} \right] N_a + \left[\frac{\partial^2 y^{n+a}}{\partial x^i \partial x^{n+p}} + \right. \\ &\quad \left. + \tilde{\Gamma}_{CD}^{n+a} \frac{\partial y^C}{\partial x^i} \frac{\partial y^D}{\partial x^{n+p}} \right] N_{n+a} = \left[-R_{i\lambda p}^a \xi^\lambda - \frac{1}{2} R_{in\lambda}^a \xi^\lambda \right] \Gamma_{ia}^s \xi^i \xi_s + \\ &\quad + \left[\Gamma_{ip}^a + \frac{1}{2} \Gamma_{h\mu}^a R_{ip\lambda}^h \xi^\lambda \xi^\mu + \Gamma_{in}^a B_p + \frac{1}{2} \Gamma_{h\mu}^a R_{in\lambda}^h \xi^\lambda \xi^\mu B_p \right] \xi_a + \\ &\quad + \frac{\partial^2 y^{2n}}{\partial x^i \partial x^{n+p}} \xi_n = (\Gamma_{ip, \lambda} + \Gamma_{in, \lambda} B_p) \xi^\lambda - \\ &\quad - (G_{in+p} + \Gamma_{ip, \lambda} + \Gamma_{in, \lambda} B_p) \xi_\lambda = -G_{in+p}; \\ \bar{\Omega}_{n+p, n+q} &= \frac{\partial^2 y^{2n}}{\partial x^{n+p} \partial x^{n+q}} = -G_{n+p, n+q}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Доказательства следствий ввиду простоты опускаем.

Тензор кривизны $\bar{R}$ метрики Сасаки TM^n вычислен в [6]. Следовательно, тензор кривизны $\bar{R}$ метрики Сасаки $T_\lambda M^n$ можно вычислить по формуле Гаусса:

$$\langle \langle \bar{R}(X, \bar{Y}) \bar{Z}, U \rangle \rangle_1 = \langle \langle \bar{R}(X, \bar{Y}) \bar{Z}, U \rangle \rangle + \\ + \Omega(\bar{X}, U) \Omega(\bar{Y}, \bar{Z}) - \Omega(\bar{X}, \bar{Z}) \Omega(\bar{Y}, U).$$

Заметим, что если один из векторов горизонтален, то $\Omega(\bar{X}, \bar{Z}) = 0$. Действительно, если $\bar{X} = X^H$, то $\Omega(X^H, \bar{Z}) = -\frac{1}{\lambda} \langle K_1 \cdot X^H, K_1 \bar{Z} \rangle = 0$, так как $K_1 X^H = 0$. Используя [6], сформулируем:

Лемма 3. Тензор кривизны $\bar{R}$ метрики Сасаки $T_\lambda M^n$ в точке $\bar{Q} = (Q, \lambda \xi)$ равен:

$$\begin{aligned} \langle \langle \bar{R}(X^H, Y^H) Z^H, U^H \rangle \rangle_1 &= \langle \langle \bar{R}(X^H, Y^H) Z^H, U^H \rangle \rangle = \\ &= \langle R(X, Y) Z, U \rangle + \frac{\lambda^2}{4} \langle R(Z, Y) \xi, R(X, U) \xi \rangle + \\ &+ \frac{\lambda^2}{4} \langle R(X, Z) \xi, R(Y, U) \xi \rangle + \frac{\lambda^2}{2} \langle R(X, Y) \xi, R(Z, U) \xi \rangle; \\ \langle \langle \bar{R}(X^H, Y^H) Z^H, U^V \rangle \rangle_1 &= \langle \langle \bar{R}(X^H, Y^H) Z^H, U^V \rangle \rangle = \\ &= \frac{\lambda}{2} \langle (\nabla_Z R)(X, Y) \xi, U \rangle; \\ \langle \langle \bar{R}(X^H, Y^H) Z^V, U^V \rangle \rangle_1 &= \langle \langle \bar{R}(X^H, Y^H) Z^V, U^V \rangle \rangle = \\ &= \langle R(X, Y) Z, U \rangle + \frac{\lambda^2}{4} \langle R(\xi, Z) X, R(\xi, U) Y \rangle - \\ &- \frac{\lambda^2}{4} \langle R(\xi, Z) Y, R(\xi, U) X \rangle; \\ \langle \langle \bar{R}(X^H, Y^V) Z^H, U^V \rangle \rangle_1 &= \langle \langle \bar{R}(X^H, Y^V) Z^H, U^V \rangle \rangle = \\ &= \frac{1}{2} \langle R(X, Z) Y, U \rangle - \frac{\lambda^2}{4} \langle R(\xi, Y) Z, R(\xi, U) X \rangle; \\ \langle \langle \bar{R}(X^V, Y^V) Z^V, U^H \rangle \rangle_1 &= \langle \langle \bar{R}(X^V, Y^V) Z^V, U^H \rangle \rangle = 0; \\ \langle \langle \bar{R}(X^V, Y^V) Z^V, U^V \rangle \rangle &= \frac{1}{\lambda^2} (\langle Y, Z \rangle \langle X, U \rangle - \\ &- \langle X, Z \rangle \langle Y, U \rangle), \end{aligned}$$

где $\langle R(X, Y) Z, U \rangle$ — тензор кривизны M^n ;

$$\langle (\nabla_Z R)(X, Y) \xi, U \rangle = \nabla_s R_{ijkl} X^k Y^l \xi^i U^j Z^s.$$

§ 4. Доказательства теорем. Доказательство теоремы 1.

Пусть $\bar{X}, \bar{Y}$ — единичные взаимно ортогональные векторы, касательные к $T_\lambda M^n$ в точке $\bar{Q} = (Q, \lambda \xi)$ (ξ — единичный вектор). Тогда секционная кривизна $K_{\bar{X}\bar{Y}}$ в направлении элементарной площадки векторов $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ будет:

$$\bar{K}_{\bar{X}\bar{Y}} = \langle \langle R(X, Y) Y, X \rangle \rangle_1.$$

Введем обозначения: $X_H = \pi_* \bar{X}$, $Y_H = \pi_* \bar{Y}$, $X_V = K_1 \bar{X}$, $Y_V = K_1 \bar{Y}$. Легко проверить, что любой вектор $\bar{X}$ представляется в виде $\bar{X} = (X_H)^H + (X_V)^V$. Воспользовавшись этим разложением и результатом леммы 3, получим следующее выражение для секционной кривизны $T_1 M^n$:

$$\begin{aligned} \bar{K}_{\bar{X}\bar{Y}} = & \langle R(X_H, Y_H)Y_H, X_H \rangle - \frac{3\lambda^2}{4} |R(X_H, Y_H)\xi|^2 + \\ & + 3\langle R(X_H, Y_H)Y_V, X_V \rangle - \lambda^2 \langle R(\xi, X_V)X_H, R(\xi, Y_V)Y_H \rangle + \\ & + \frac{\lambda^2}{4} |R(\xi, Y_V)Y_H + R(\xi, X_V)Y_H|^2 + \lambda \langle (\nabla_{Y_H} R)(X_H, Y_H) \times \\ & \times \xi, X_V \rangle - \lambda \langle \nabla_{X_H} R)(X_H, Y_H)\xi, X_V \rangle + \\ & + \frac{1}{\lambda^2} (|X_V|^2 |Y_V|^2 - \langle X_V, Y_V \rangle^2). \end{aligned} \quad (1)$$

Потребуем $\bar{K}_{\bar{X}\bar{Y}} \geq 0$ и рассмотрим случай площадки общего положения, т. е. такой, что $X_H \neq 0$, $Y_H \neq 0$, $X_V \neq 0$, $Y_V \neq 0$. Введем обозначения: $X = X_H/|X_H|$, $Y = Y_H/|Y_H|$, $U = X_V/|X_V|$, $W = Y_V/|Y_V|$, $\alpha = |X_V|/|X_H|$, $\beta = |Y_V|/|Y_H|$.

Заметим, что в плоскости ортонормальных векторов $\bar{X}\bar{Y}$ ортогональным преобразованием векторы $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ переводятся в векторы с ортогональными проекциями:

$$\langle X_H, Y_H \rangle = 0, \quad \langle X_V, Y_V \rangle = 0. \quad (2)$$

Поэтому считаем данные $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ удовлетворяющими (2). В этих условиях (1) примет вид

$$\begin{aligned} \bar{K}_{\bar{X}\bar{Y}} = & |X_H|^2 |Y_H|^2 \left\{ K_{XY} - \frac{3\lambda^2}{4} |R(X, Y)\xi|^2 + \right. \\ & + [3\langle R(X, Y)W, U \rangle - \lambda^2 \langle R(\xi, U)X, R(\xi, W)Y \rangle + \\ & + \frac{\lambda^2}{2} \langle R(\xi, U)Y, R(\xi, W)X \rangle] \alpha \beta + \frac{\lambda^2}{4} |R(\xi, U)Y|^2 \alpha^2 + \\ & + \frac{\lambda^2}{4} |R(\xi, W)X|^2 \beta^2 + \lambda \langle (\nabla_Y R)(X, Y)\xi, U \rangle \alpha - \\ & \left. - \lambda \langle (\nabla_X R)(X, Y)\xi, W \rangle \beta + \frac{1}{\lambda^2} \alpha^2 \beta^2 \right\}. \end{aligned}$$

Выражение в фигурных скобках рассмотрим как многочлен относительно α и β . В обозначениях по соответствию он имеет вид

$$\begin{aligned} & a_0 + a_1 \alpha \beta + a_2 \alpha^2 + a_3 \beta^2 + a_4 \alpha + a_5 \beta + \frac{1}{\lambda^2} \alpha^2 \beta^2 = \\ & = \frac{1}{\lambda^2} \left(\alpha \beta + \frac{\lambda^2 a_1}{2} \right)^2 + a_2 \left(\alpha + \frac{a_4}{2a_2} \right)^2 + a_3 \left(\beta + \frac{a_5}{2a_3} \right)^2 + \\ & + a_0 - \frac{\lambda^2 a_1^2}{4} - \frac{a_4^2}{4a_2} - \frac{a_5^2}{4a_3}. \end{aligned}$$

Следовательно, для неотрицательности секционной кривизны в ситуации общего положения достаточно потребовать, чтобы было

$$a_0 - \frac{\lambda^2 a_1^2}{4} - \frac{a_4^2}{4a_2} - \frac{a_5^2}{4a_3} \geq 0.$$

Восстанавливая содержание обозначений, получим утверждение теоремы, так как легко проследить, что более частные случаи расположения элементарной площадки являются следствиями полученного неравенства.

Доказательство теоремы 2. а) Огрубим неравенство теоремы 1 с учетом введенных перед формулировкой теоремы 2 обозначений. Получим

$$2M_\nabla^2 + \frac{\lambda^2}{4} \left[3M + \frac{3}{2} \lambda^2 M^2 \right]^2 + \frac{3\lambda^2}{4} M^2 \leq \mu. \quad (3)$$

Положим $\lambda^2 M = t$. Тогда получится цепочка неравенства:

$$\begin{aligned} 3t \left(1 + \frac{1}{2} t \right)^2 + t &\leq \frac{4(\mu - 2M_\nabla^2)}{3M}; \quad \frac{3}{4} t^3 + 3t^2 + 4t \leq \\ &\leq \frac{4(\mu - 2M_\nabla^2)}{3M}; \quad \frac{3}{4} \left(\left(t + \frac{4}{3} \right)^3 - \frac{64}{27} \right) \leq \frac{4}{3} \frac{\mu - 2M_\nabla^2}{M}; \\ t &\leq \frac{4}{3} \left[\sqrt[3]{1 + \frac{3}{4} \frac{\mu - 2M_\nabla^2}{M}} - 1 \right], \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

б) При $\lambda = 1$ достаточное условие неотрицательности секционной кривизны для $T_1 M^n$ имеет вид

$$2M_\nabla^2 + \left(\frac{3M^2}{4} \right) \left[1 + \left(1 + \frac{M}{2} \right)^2 \right] \leq \mu. \quad (4)$$

Из условия 3) следует, что $2M_\nabla^2 \leq \mu/3$. Из условий 1) и 2) следует, что $M^2 \leq 1/36$. Поэтому $(3M^2/4) [1 + (1 + M/2)^2] \leq (\mu/8) [1 + (1 + 1/12)^2] = (\mu/8) (313/144) < 2\mu/3$.

Таким образом, условие (4) является следствием условий 1)–3). Теорема доказана.

Список литературы: 1. *Sasaki S.* On the differential geometry of tangent bundle of Riemannian manifold. I // *Tohoku Math. J.*—1958.—10, N 3.—Р. 338–354. 2. *Dombrowski P.* On the geometry of tangent bundle // *Journ. für die reine und angew. Math.*—1962.—210.—Р. 73–88. 3. Ямпольский А. Л. Кривизна метрики Сасаки сферических касательных расслоений // *Укр. геометр. сб.*—1985.—Вып. 28.—С. 132–145. 4. *Sasaki S.* On the differential geometry of tangent bundle of Riemannian manifold. II // *Tohoku Math. J.*—1962.—14, N 1.—Р. 146–155. 5. Эйзенхарт Л. П. Риманова геометрия.—М.: Изд-во иностр. лит.—1948.—316 с. 6. *Kowalski O.* Curvature of induced Riemannian metrics on the tangent bundle of a Riemannian manifold // *Journ. für die reine und angew. Math.*—1971.—250.—Р. 124–129.

Поступила в редколлегию 20.07.85

О МИНИМУМЕ ПЛОЩАДИ ПОВЕРХНОСТИ С ЗАДАННЫМ ГРАНИЧНЫМ КОНТУРОМ В ПСЕВДОЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В псевдоевклидовом пространстве $E^{n,k}$ индекса k введем координаты $x_1, x_2, \dots, x_n$, в которых линейный элемент имеет вид $dx_1^2 + \dots + dx_{n-k}^2 - dx_{n-k+1}^2 - \dots - dx_n^2$. Пусть $r = r(u, v)$ — радиус-вектор гладкой поверхности F . Площадь поверхности F будем определять выражением $S(F) = \int_D \sqrt{|EG - F^2|} du dv$, где E, F, G — коэффициенты первой квадратичной формы; D — область изменения параметров u и v .

Пусть E^n — евклидово пространство с теми же координатами, что и в $E^{n,k}$. Тогда под евклидовой площадью поверхности F в псевдоевклидовом пространстве $E^{n,k}$ будем понимать площадь поверхности в евклидовом пространстве E^n , заданной тем же радиусом-вектором $r(u, v)$, что и поверхность F .

Аналогичный смысл вкладывается в понятия евклидовой длины, евклидовой окружности и т. д.

Заметим, что евклидова площадь поверхности F не меньше $S(F)$.

Теорема 1. Пусть L — кусочно-гладкая замкнутая кривая в псевдоевклидовом пространстве $E^{n,k}$ ($1 \leq k \leq n-1$). Тогда существует двумерная кусочно-гладкая поверхность сколь угодно малой площади, ограниченная кривой L .

Лемма 1. Пусть ABC — треугольник в трехмерном псевдоевклидовом пространстве с линейным элементом $dx^2 + dy^2 - dz^2$. Тогда существует кусочно-гладкая поверхность сколь угодно малой площади, имеющая общую границу с треугольником ABC .

Доказательство. Покажем сначала, что любая область на плоскости, касательной к изотропному конусу, имеет нулевую площадь.

Пусть вершина изотропного конуса находится в точке (x_0, y_0, z_0) ; (a, b, c) — точка на изотропном конусе, отличная от вершины. Запишем уравнение касательной плоскости, проходящей через точку (a, b, c) , в виде

$$z = \frac{a-x_0}{c-z_0}x + \frac{b-y_0}{c-z_0}y + \frac{a(x_0-a) + b(y_0-b) - c(z_0-c)}{c-z_0}.$$

Вычислим коэффициенты первой квадратичной формы, учитывая при этом, что $(a-x_0)^2 + (b-y_0)^2 - (c-z_0)^2 = 0$. Получим

$$E = 1 - z_x^2 = 1 - \left(\frac{a-x_0}{c-z_0} \right)^2 = \left(\frac{b-y_0}{c-z_0} \right)^2;$$

$$F = -z_x z_y = -\frac{(a-x_0)(b-y_0)}{(c-z_0)^2};$$

$$G = 1 - z_y^2 = 1 - \left(\frac{b-y_0}{c-z_0}\right)^2 = \left(\frac{a-x_0}{c-z_0}\right)^2.$$

Тогда $EG - F^2 = 0$, поэтому область на касательной плоскости к изотропному конусу имеет нулевую площадь.

Для доказательства леммы рассмотрим несколько случаев расположения треугольника ABC .

1. Пусть треугольник ABC лежит в некоторой плоскости α , параллельной плоскости xy . Впишем в треугольник ABC евклидову окружность. Пусть O — ее центр, r — евклидов радиус. Построим отрезок ON , параллельный оси Oz , евклидова длина которого равна r . Поверхность, составленная из треугольников NAB , NBC и NCA , имеет нулевую площадь, так как все эти треугольники лежат в касательных плоскостях к изотропному конусу с вершиной в точке N (рис. 1).

2. Пусть теперь треугольник ABC лежит в некоторой плоскости α , параллельной оси Oz .

Разобьем плоскость α на евклидовы квадраты, одна из диагоналей которых параллельна оси Oz , а евклидова длина сторон квадратов равна d . Обозначим через G объединение квадратов, полностью лежащих в треугольнике ABC , а через G' — дополнение множества G в треугольнике ABC . Пусть ε — произвольное положительное число. Выберем d таким образом, чтобы евклидова площадь множества G' была меньше ε . Следовательно, $S(G') < \varepsilon$.

Заменим каждый квадрат, лежащий в треугольнике ABC , поверхностью нулевой площади с той же границей, что и квадрат. Эта поверхность строится следующим образом. Пусть $P_1 P_2$ — диагональ квадрата, параллельная оси Oz . Обозначим координаты точек P_1 и P_2 соответственно через (a, b, c_1) и (a, b, c_2) .

Пусть $c_2 < c_1$. Построим замкнутую поверхность Γ , являющуюся объединением двух конических областей:

$$z = c_1 - \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}, (c_1 + c_2)/2 \leq z \leq c_1$$

$$z = c_2 + \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}, c_2 \leq z \leq (c_1 + c_2)/2.$$

Граница квадрата лежит на поверхности Γ и разбивает ее на две части. Каждая из этих частей является поверхностью нулевой площади, имеющей общую границу с квадратом.

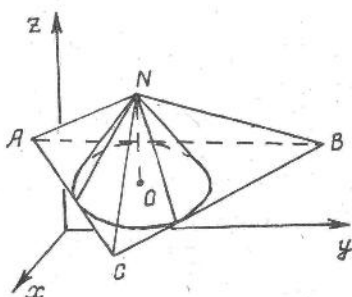


Рис. 1

Таким образом, граница области G может служить границей поверхности нулевой площади. Объединение этой поверхности и области G' является поверхностью, имеющей границей треугольник ABC , площадь которой меньше ε (рис. 2).

3. Пусть, наконец, ABC — треугольник, лежащий в произвольной плоскости α не параллельной оси Oz . Через каждую точку X границы треугольника ABC проведем луч l_X с началом в точке X и сонаправленный с осью Oz . Возьмем плоскость β , параллельную плоскости xy и пересекающую все лучи l_X . Треугольник ABC проектируется лучами, сонаправленными с осью Oz , в треугольник $A_1B_1C_1$, лежащий в плоскости β . Пусть Φ — поверхность, являющаяся объединением четырехугольников AA_1C_1C , CC_1B_1B , AA_1B_1B

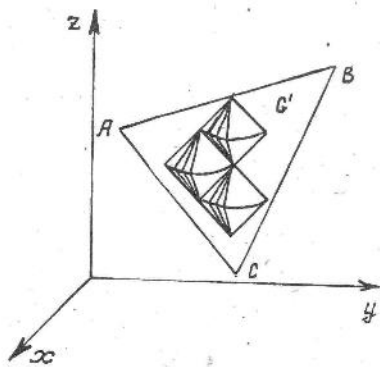


Рис. 2

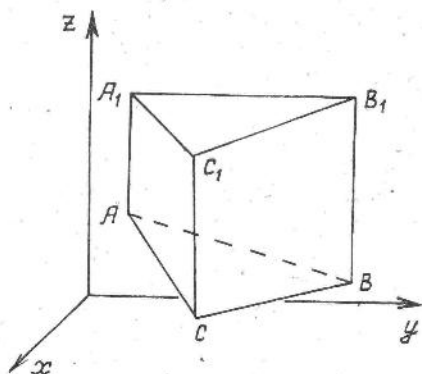


Рис. 3

и треугольника $A_1B_1C_1$ (рис. 3). Так как каждый из четырехугольников AA_1C_1C , CC_1B_1B , AA_1B_1B можно разбить на два треугольника, то поверхность Φ составлена из шести треугольников, параллельных оси Oz , и треугольника, параллельного плоскости xy . Каждый из этих треугольников будет служить границей поверхности, площадь которой меньше $\varepsilon/7$, где ε — произвольное наперед заданное число. Объединение этих поверхностей и будет кусочно-гладкой поверхностью с граничным треугольником ABC и площадью меньшей ε . Лемма доказана.

Заметим теперь, что лемма 1 верна и для треугольника в трехмерном псевдоевклидовом пространстве индекса 2.

Лемма 2. Пусть α — двумерная плоскость в $E^{n,k}$, Δ — треугольник в плоскости α . Тогда существует поверхность сколь угодно малой площади с той же границей, что и у треугольника Δ .

Доказательство. Если α — изотропная плоскость, то площадь треугольника Δ , лежащего в плоскости α , равна нулю.

Пусть теперь α не является изотропной плоскостью. Тогда α — либо евклидова плоскость, либо псевдоевклидова плоскость индекса 1 или 2. Через произвольную точку O плоскости α проведем $(n-2)$ -мерную плоскость, ортогональную плоскости α . Обо-

значим ее через β . Так как α — неизотропная, то β тоже не изотропная*. Возьмем в плоскости α ортогональные векторы e_1 и e_2 .

Рассмотрим два случая.

1. Пусть α — евклидова плоскость. Выберем вектор e_3 в плоскости β такой, что $e_3^2 < 0$.

2. Если α — псевдоевклидова плоскость индекса 1 или 2, то возьмем вектор e_3 в плоскости β такой, что $e_3^2 > 0$.

Тогда векторы e_1, e_2, e_3 образуют базис трехмерного псевдоевклидова пространства индекса 1 или 2, в котором лежит плоскость α .

Лемма 2 вытекает теперь из леммы 1.

Доказательство теоремы 1. Разобьем кривую L точками $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}$ на n дуг одинаковой евклидовой длины. Пусть X — произвольная точка дуги $A_i A_{i+1}$. Объединение всевозможных отрезков $A_i X$, соединяющих фиксированную точку A_i с точками дуги $A_i A_{i+1}$, является кусочно-гладкой поверхностью, граница которой состоит из дуги $A_i A_{i+1}$ и прямолинейного отрезка $A_i A_{i+1}$. Обозначим эту поверхность через Φ_i .

Пусть ε — произвольное положительное число. Выберем n настолько большим, чтобы евклидова площадь каждой поверхности Φ_i была меньше $\frac{\varepsilon}{2n-2}$. Следовательно, $S(\Phi_i) < \frac{\varepsilon}{2n-2}$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$).

Построим многогранную поверхность, составленную из треугольников $\Delta_i = A_0 A_i A_{i+1}$ ($i = 1, \dots, n-2$) и ограниченную замкнутой ломаной с вершинами в точках $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}$. По лемме 2 можно построить поверхность F_i , у которой граница будет та же, что и у треугольника Δ_i , а площадь $S(F_i) < \frac{\varepsilon}{2n-2}$ ($i = 1, \dots, n-2$). Объединение поверхностей $F_1, F_2, \dots, F_{n-2}, \Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$ является кусочно-гладкой поверхностью, площадь которой меньше ε , а границей служит кривая L .

В связи с доказанной теоремой возникает вопрос: можно ли через заданный контур провести регулярную поверхность нулевой площади? Оказывается, что не для всякой кривой это можно сделать, а именно, имеет место

Теорема 2. Пусть L — гладкая замкнутая кривая в трехмерном псевдоевклидовом пространстве с линейным элементом $dx^2 + dy^2 - dz^2$. Для того чтобы через кривую L можно было провести регулярную поверхность нулевой площади, необходимо и достаточно, чтобы касательный вектор в каждой точке кривой не являлся времениподобным.

Докажем сначала необходимость. Пусть F — регулярная поверхность нулевой площади, проходящая через кривую L . Предположим, что касательный вектор кривой L в некоторой точке m_0 времениподобен. В окрестности точки m_0 на поверхности F введем

* См.: Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ. — М.: Наука, 1967. — С. 165.

координаты u и v такие, что $v=0$ вдоль кривой L , а координатные линии $u = \text{const}$ ортогональны кривой L . Пусть $r(u, v)$ — радиус-вектор поверхности F . Так как F — поверхность нулевой площади, то $r_u^2 r_v^2 - (r_u r_v)^2 = 0$. В точке m_0 вектор r_v коллинеарен касательному вектору кривой L в этой точке, а векторы r_u и r_v ортогональны. Следовательно, в точке m_0 будет $r_u r_v^2 = 0$, а $r_v^2 < 0$. Поэтому в этой точке $r_u = 0$, что невозможно, так как вектор, ортогональный к времениподобному вектору, всегда является пространственноподобным.

Докажем теперь достаточность. Пусть касательный вектор кривой L в каждой точке не является времениподобным. Обозначим через $\rho(u) = (x(u), y(u), z(u))$ радиус-вектор кривой L . Тогда $\rho_u^2 = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 \geq 0$. Построим вдоль кривой L векторное поле $\xi(u) = (x_u z_u + y_u |\rho_u|, y_u z_u - x_u |\rho_u|, x_u^2 + y_u^2)$, где $|\rho_u| = \sqrt{\rho_u^2}$. Тогда $\xi^2 = 0$ и $(\rho_u, \xi) = 0$. Рассмотрим теперь поверхность $r(u, v) = \rho(u) + v\xi(u)$, проходящую через кривую L . Вычислим коэффициенты F и G первой квадратичной формы этой поверхности

$$F = (\rho_u + v\xi_u, \xi) = 0, \quad G = \xi^2 = 0.$$

Следовательно, $EG - F^2 = 0$, т. е. $r(u, v)$ — поверхность нулевой площади.

Из теоремы 1 следует, что в псевдоевклидовом пространстве $E^{n,k}$ ($1 \leq k \leq n-1$) не существует устойчивых двумерных минимальных поверхностей, отличных от поверхностей нулевой площади.

Поступила в редколлегию 20.05.85

РЕАЛИЗАЦИЯ СЕТЕЙ ВЫПУКЛЫХ МНОГОГРАННИКОВ
С РАВНОУГОЛЬНЫМИ ВЕРШИНАМИ. 5

Предлагаемая статья является завершающей в работе по составлению полного перечня выпуклых многогранников с равноугольными вершинами [1—7]. Здесь найдены все многогранники, содержащие треугольные грани типа $(4, 6, n) - (5, 6, n)$, и все многогранники, содержащие четырехугольные грани. Таким образом, рассмотрены возможные варианты последовательного построения всех многогранников с равноугольными вершинами, которые имеют исходными грани типов, перечисленных в таблице типов граней [1], и доказана основная теорема о замкнутых многогранниках [7].

Приведем наиболее часто употребляемые обозначения: $M_{1,l}$ — замкнутый многогранник с равноугольными вершинами (схемы многогранников приведены в таблице). Символ $[k, l]$ означает ребро, соединяющее вершины k и l ; $\{k, l\}$ — двугранный угол при ребре; $v(n)$ — мера плоского угла n -гранной вершины. $\theta[k, l] = v(k) + v(l)$ — сумма плоских углов в концах ребра $[k, l]$; $\theta(k, l, m, n)$ — сумма внутренних углов грани (k, l, m, n) .

§ 1. Грани $(4, 6, n)$. Лемма 1. Грань $(4, 6, 6')$ принадлежит лишь многогранникам $M_{1.63} - M_{1.69}$.

Доказательство. По свободному ребру $[4, 6]$ исходной грани $(4, 6, 6')$ можно подклеить треугольник $(4, 6, n)$ или четырехугольник $(4, 6, 3, 3)$.

1. Подклеим $(4, 6, n)$. По свободному ребру $[4, 6']$ можно подклеить $(4, 6', \alpha)$ или $(4, 6', 3, 3)$.

1.1. Подклеим $(4, 6', \alpha)$. Затем подклеим: $(n, 4, \alpha)$, $(6, 6', k)$, $\alpha = 4$ или 5 , (n, α, k_1) , $(\alpha, 6', k_2)$ и $(n, 6, k_4)$. По свободному ребру $[k_4, 6]$ нельзя подклеить четырехугольника $(k_4, 6, 3, 3)$, так как тогда и по ребру $[6, k]$ тоже придется подклеить $(k, 6, 3, 3)$ и получим свободный угол $[3, 3, 3]$, и аналогично п. 1.1.1.1 леммы 2 [7] все продолжения сети дадут противоречия. Подклеим треугольники $(k_4, 6, n_1)$ и $(n_1, 6, k)$. Аналогично и по $[k, 6']$ можно подклеить лишь треугольник $(k, 6', \alpha_1)$ и затем $(\alpha_1, 6', k_3)$.

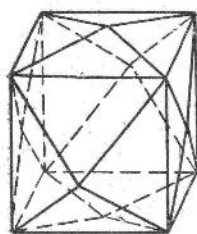
Пусть $k = 4$. Подклеим (n_1, k, α_1) и (n_1, α_1, k_3) . Если n_1 — семигранная вершина, то блок можно достроить треугольниками до блока со свободными ребрами $[n_i, k_j]$ (всего шесть ребер), а затем к каждому свободному ребру подклеить блок из трех четырехугольников — две грани $(n_i, k_j, 3, 3)$ с общим ребром $[3, 3]$ и одна грань $(n_i, 3, k_j, 3)$. Теперь снова край блока состоит из шести ребер $[n_i, k_j]$. Подклеив упомянутый блок, составленный из треугольников, получим замкнутую сеть, но ее нельзя реализовать* многогранником M . Для остальных значений n_1 построение сети можно выполнять лишь треугольниками.

Пусть $k = 5$. По $[n_1, k]$ нельзя подклеить четырехугольника, так как немедленно попадем в условия п. 1.1.1.1 леммы 2 [7]. Если подклеим треугольник, то затем нужно подклеить еще один треугольник к вершине k . Получим цикл треугольников с общей вершиной k , откуда $v(6) = v(6')$ и n_i, α_i не могут иметь семи и более ребер, а дальнейшее построение можно выполнять лишь треугольниками.

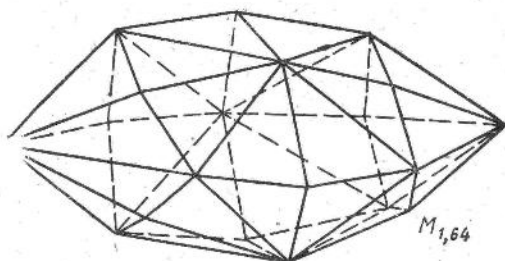
Осталось рассмотреть сети, составленные только из треугольников. Здесь удобно выделить блоки по четыре и пять граней. Вершины края пятигранных блоков могут быть лишь шестигранными, а вершины четырехгранных блоков — шести-, восьми- или десятигранными (последние две возможности относятся к случаю, когда сеть строится только из четырехгранных блоков). Все возможные прилегания таких блоков дадут искомые сети. Из них лишь сети ребер многогранников $M_{1.63} - M_{1.69}$ реализуемы.

1.2. Подклеим $(4, 6', 3^2)$. К свободному углу $[3, 4, n]$ нужно подклеить четырехугольник, что даст свободный угол $[3, 3, 3]$ и по лемме 2 п. 1.1.1.1 [7] все продолжения сети приведут к противоречиям.

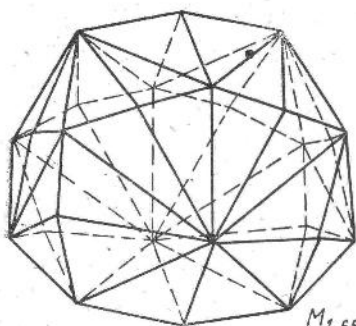
* Для проверки реализуемости сети многогранником M решается система уравнений, связывающих плоские и двугранные углы предполагаемого многогранника. Способы решения таких систем приведены в [3—5].



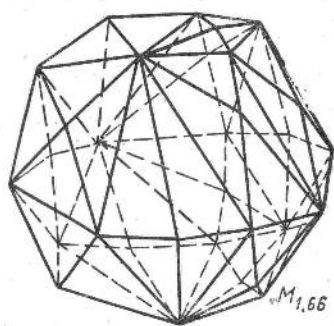
$M_{1,63}$



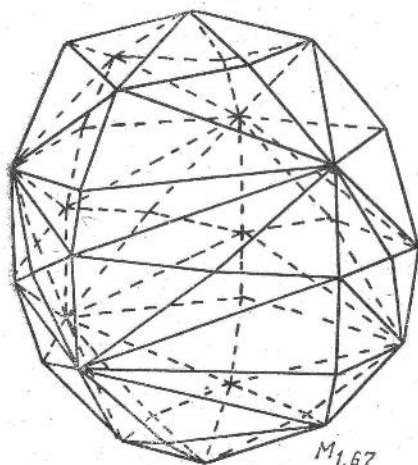
$M_{1,64}$



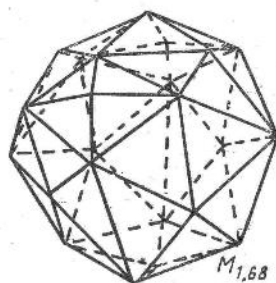
$M_{1,65}$



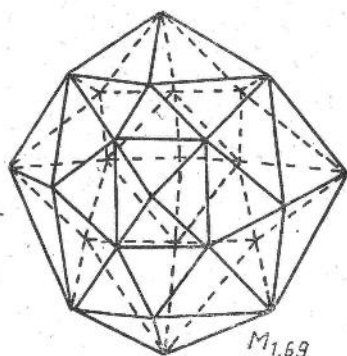
$M_{1,66}$



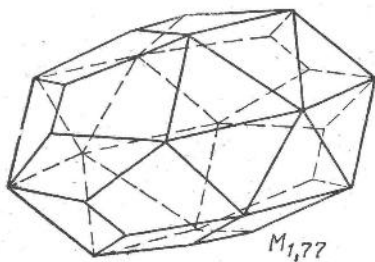
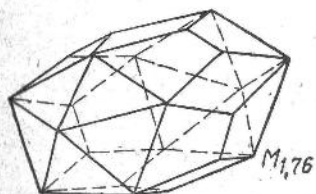
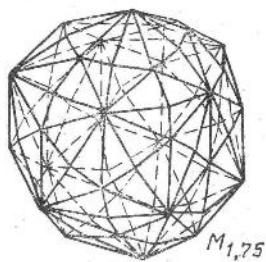
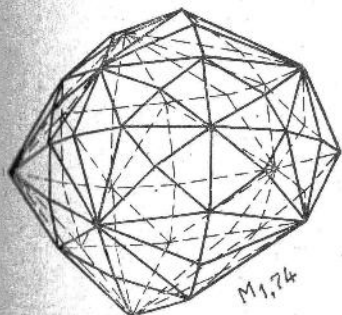
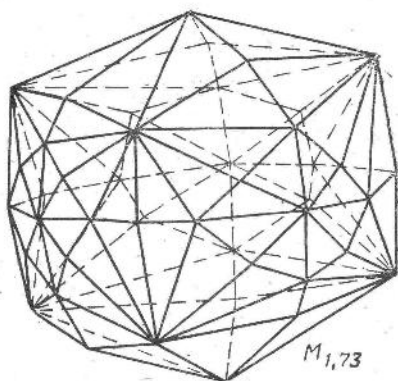
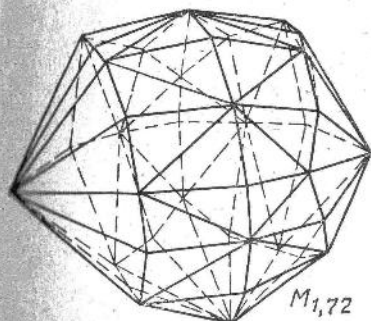
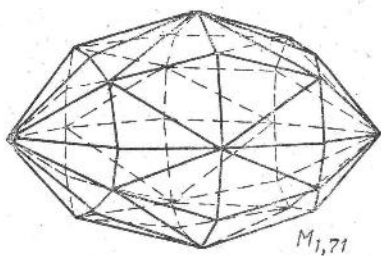
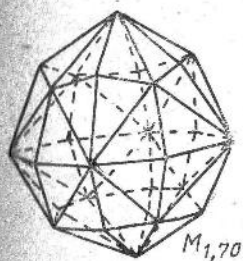
$M_{1,67}$

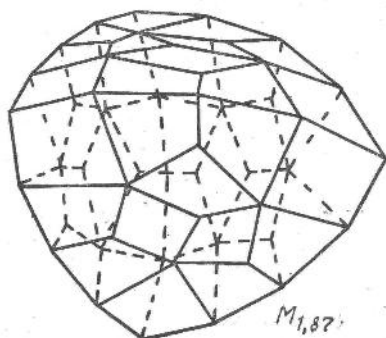
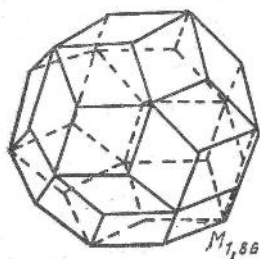
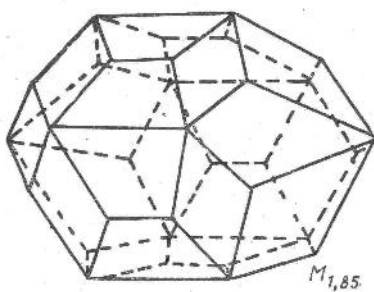
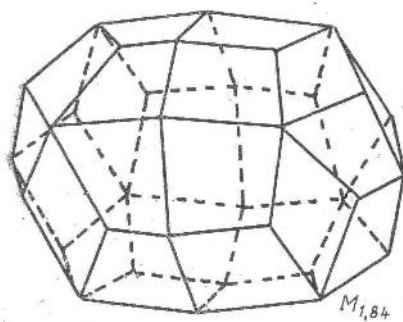
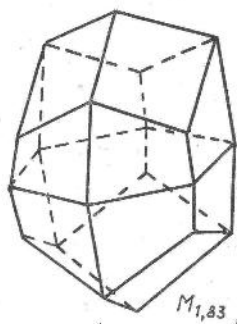
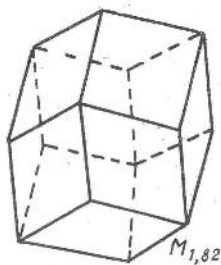
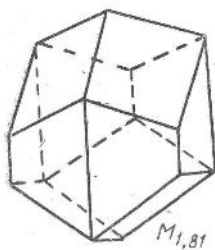
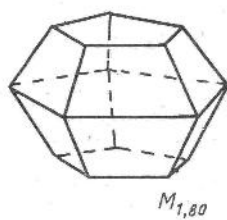
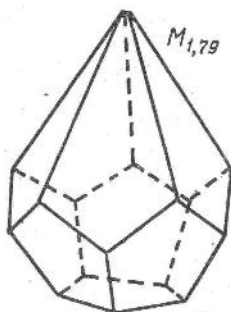
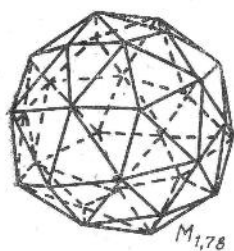


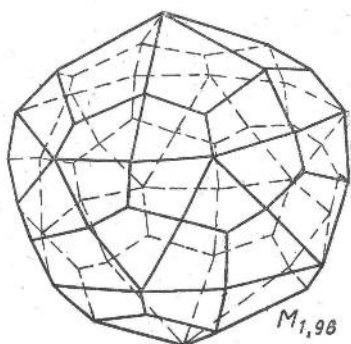
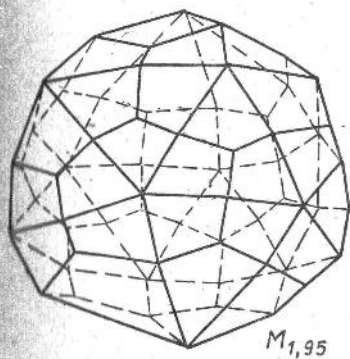
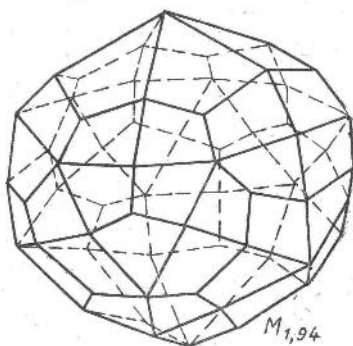
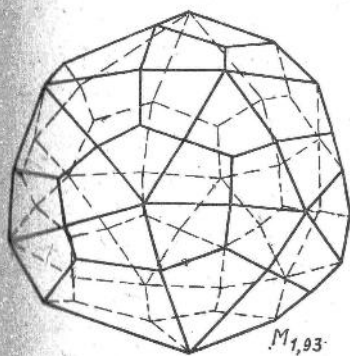
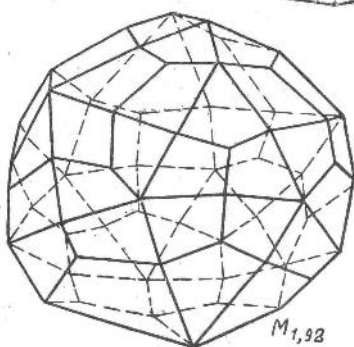
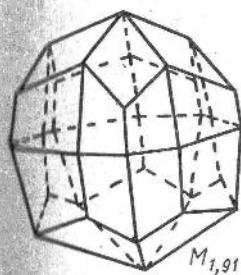
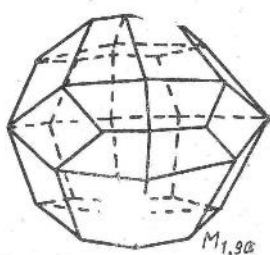
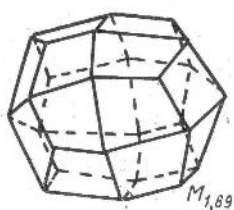
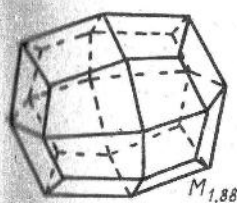
$M_{1,68}$



$M_{1,69}$







2. Подклеим $(4, 6, 3^2)$. Если по $[4, 6']$ подклеим треугольник, то в силу равноправности вершин 6 и $6'$ в построениях сетей получим блок п. 1.2. Подклеим $(4, 6', 3', 3')$. По свободному углу $\{3', 4, 3\}$ можно подклеить четырехугольник или пятиугольник. Но пятиугольник исключен [3]. Подклеим $(3', 4, 3, y)$. Затем можно подклеить $(6, 6', k)$, $k = 4$ или 5.

2.1. $k = 4$. Тогда с учетом п. 1 можно подклеить $(6, k, 3^2)$ и $(k, 6', 3', 3')$. Затем подклеим: $(y, 3, 3, z)$, $z = 4, 5$, $(z, 3, 6, 3'')$, $(3'', 6, 3, z_1)$ и $(\gamma, z_1, 3'', z)$. Пусть $z = 4$. Если $\gamma = 3$, то $v(z) = v(6)$ и $\theta(z, 3'', z_1, \gamma) < 2\pi$. Если $\gamma = 4$ или 5, то по $[y, z, \gamma]$ можно подклеить лишь треугольники, но треугольники типа $(y, 4, 4)$ и $(y, 4, 5)$ уже не участвуют в построениях.

Пусть $z = 5$. Тогда $\gamma = 3''$. Поскольку $\theta[\gamma, z] < \pi$, то, подклеив $[y, z, \alpha]$, необходимо подклеить (α, z, γ) , а такой тип грани уже исключен из рассмотрения. Подклеив $(y, z, 3'')$, получим $v(3'') = v(\gamma)$, т. е. $\theta[z, \gamma] = \pi$, что противоречит $\theta[z, \gamma] = \theta[3, 6] < \pi$.

2.2. $k = 5$. Если по $[6, k]$ подклеим треугольник $(6, k, \alpha)$, то и по $[\alpha, 6]$ нужно подклеить треугольник $(\alpha, 6, k_1)$. Наконец, четырехугольник $(3, 6, k_1, 3)$ образует свободную ломаную $[y, 3'']$, что исключает дальнейшее построение. Остается подклеить четырехугольник по $[6, k]$, что дает условия п. 2.1. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Грань $(4, 6, n)$ при $n \geq 7$ принадлежит лишь многогранникам $M_{1,70} - M_{1,75}$.*

Доказательство здесь проводится аналогично доказательству леммы 1. Здесь также только треугольники образуют замкнутые сети, которые можно реализовать многогранниками с равноугольными вершинами. При этом вершины края многогранных углов из четырех граней могут быть лишь шести-, восьми- или десятигранными. Различные прилегания этих блоков дадут сети искомым многогранников. Все найденные сети реализуемы многогранниками — это $M_{1,70} - M_{1,75}$. Лемма 2 доказана.

§ 2. Грани $(4, 7, n)$. Лемма 3. *Грань $(4, 7, 7')$ не принадлежит многограннику M .*

Доказательство. По свободному ребру $[4, 7]$ можно подклеить $(4, 7, n)$ или $(4, 7, 3, 3)$.

1. Подклеим $(4, 7, n)$. Тогда и по $[4, 7']$ нужно подклеить треугольник $(4, 7', \alpha)$, так как четырехугольник приведет к образованию свободного угла $\{3, 3, 3\}$, все продолжения которого согласно п. 1.1.1.1 леммы 2 [7] дают противоречия. Затем следует подклеить: $(\alpha, 4, n)$, $(7, 7', k)$, $(7', \alpha, k_1)$, (α, n, k_2) и $(n, 7, k_3)$. Если теперь к одному из свободных ребер $[k, 7]$ или $[k, 7']$ подклеить треугольник, то получим цикл треугольников вокруг семигранной вершины. Тогда $v(7) = v(4)$ и $\theta(4, 7, 7') < \pi$. Подклеим четырехугольники: $(k_3, 7, 3^2)$, $(7, k, 3^2)$, $(3, 7, 3, k_4)$, $(k_1, 7', 3', 3')$, $(7', k, 3', 3')$, $(3', 7', 3', k_5)$. Если к $[3, k, 3']$ (k — четырехгранная вершина) подклеим пятиугольник, то он будет иметь общую вершину с треугольником, что исключено [3].

Подклеим четырехугольник: $(3', k, 3, \gamma)$ к $[3, k, 3']$. Затем следует подклеить: $(\gamma, 3', 3', k_5)$ и $(\gamma, 3, 3, k_4)$. Отсюда $v(3) = v(3')$ и $v(7) = v(7') = v(\gamma)$. Следовательно, n и α могут быть лишь семигранными. Полученный блок симметричным образом дотраивается до блока со свободными ребрами $[k_i, z_j]$. Замкнутую сеть получим, если подклеим исходный блок из восьми треугольников. Но ее нельзя реализовать многогранником M .

2. Подклеим $(4, 7, 3, 3)$ и $(4, 7', 3', 3')$. С учетом необходимых условий, найденных в п. 1, дальнейшее построение будет таким: $(7, 7', k)$, $(7, k, 3^2)$ и $(k, 7', 3', 3')$, где $k = 4$. К свободным углам $[3', 4, 3']$ и $[3', k, 3]$ можно подклеить четырехугольники $(3', 4, 3, y)$ и $(3', k, 3, y_1)$, поскольку пятиугольник исключен [3]. Затем подклеим: $(y, 3^2, z)$, $(z, 3, 7, 3'')$, $(y_1, 3^2, z_1)$, $(z_1, 3, 7, 3'')$ и $(3'', 7, 3'', x)$. Поскольку $x, z = 4$ или 5 , то подклеим $(z, 3'', x, \gamma)$. Дальнейший перебор вариантов продолжения сети аналогичен п. 2.1 леммы 1. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. Грань $(4, 7, n)$ при $n > 7$ не принадлежит многограннику M .

Доказательство проводится аналогично лемме 3 с использованием средств, полученных в лемме 2 [7]. Приведем схему доказательства.

1. Получаем блок из восьми треугольников (лемма 3 п. 1) и отмечаем, что по $[7, k]$ и $[n, k]$ можно подклеить лишь четырехугольники. Затем к $[3', k, 3]$ необходимо подклеить $(3', k, 3, y)$. Но, как и в лемме 3, получаем равенство $v(3) = v(3')$, откуда следует $v(7) = v(n)$, т. е. $\theta(4, 7, n) < \pi$.

2. Блок из двух треугольников $(4, 7, n)$ и $(7, n, k)$, продолженный четырехугольниками, аналогично п. 2 леммы 3 не принадлежит многограннику M . Лемма 4 доказана.

§ 3. Грани $(5, 6, n) - (5, 6, n)$.

Лемма 5. Грань $(5, 5', 5'')$ принадлежит лишь икосаэдру и многограннику $M_{1,76}$.

Доказательство. По свободным ребрам исходной грани можно подклеить треугольники или четырехугольники.

1. Подклеим два треугольника $(5, 5', \alpha)$ и $(5, 5'', n)$. Если теперь к $[\alpha, 5]$ или $[n, 5]$ подклеить четырехугольник, то нужно подклеить и ко второму ребру четырехугольник — получили свободный угол $[3, 3, 3]$ и аналогично лемме 2 п. 1.1.1.1 [7] получим противоречие. Подклеим $(n, 5, \alpha_1)$ и $(\alpha_1, 5, \alpha)$. Это дает равенство $v(n) = v(\alpha)$ — все плоские углы края образовавшегося блока из пяти треугольников равны. По $[5', 5'']$ можно подклеить треугольник или четырехугольник.

1.1. Подклеим четырехугольник $(5', 5'', 3^2)$. Тогда и по $[5'', n]$ нужно подклеить четырехугольник $(3, n, 5'', 3)$ (треугольник $(n, 5'', x)$ будет иметь $v(x) = v(5) < 60^\circ$, что исключает возможность какой-либо подклейки к образовавшемуся свободному углу $[3, 5'', x]$), а по $[3, 5'', 3]$ — $(3, 5'', 3, \alpha_2)$. Аналогичным образом подклеиваются четырехугольники и к остальным свободным ребрам

исходного блока из пяти треугольников — до образования края блока из пяти свободных ребер $[\alpha_i, \alpha_j]$. Замкнутую сеть получим, подклеив уже известный блок из пяти треугольников. Это сеть многогранника $M_{1,76}$. Легко отметить схожесть ее с сетью многогранника $M_{1,52}$ [7], но реализуемость ее проверяется с помощью решения системы уравнений.

1.2. Подклеим треугольник. Затем нужно подклеить еще два треугольника (например, вокруг вершины $5''$), что дает равенство всех плоских углов 60° . Правильные треугольники образуют икосаэдр.

2. Поклеим $(5, 5'', n)$, $(3, 5, 5', 3)$ и $(5', 5'', 3', 3')$. Если подклеим треугольник по $[n, 5]$, то затем следует подклеить четырехугольник, и получим свободный угол $[3, 3, 3]$, который согласно лемме 2 п. 1.1.1.1 [7] исключает продолжения сети. Подклеим $(n, 5, 3'', 3'')$. Из равенства $v(n) = v(5')$ следует $v(3) = v(3')$. Значит, нужно подклеить $(3, 5, 3'', n_1)$. Затем подклеим: $(n_1, 3^2, 5_1)$, $(5_1, 3, 5', 3)$ и $(3, 5', 3', \gamma)$. По свободному ребру $[n, 5'']$ можно подклеить четырехугольник $(n, 5'', 3', 3')$ (треугольник даст равенство $v(5) = v(5') < 60^\circ$, откуда следует $\theta(5, 5', 3, 3) < 2\pi$). А подклеив $(3', 5'', 3', n_2)$ и $(n_2, 3', 3', \gamma)$, получим равенство $v(\gamma) = v(5'') < 60^\circ$, т. е. по свободному углу $[\gamma, 3, 5_1]$ ничего нельзя подклеить.

3. Если по всем свободным ребрам исходного треугольника $(5, 5', 5'')$ подклеить четырехугольники, то сумма его углов будет меньше π , что исключено. Лемма 5 доказана.

Лемма 6. *Грань $(5, 5', 6)$ принадлежит лишь многограннику $M_{1,77}$.*

Доказательство. Возможны три варианта исходных блоков.

1. Если к исходной грани подклеим два треугольника по свободным ребрам $[5, 6]$ и $[5, 5']$, то затем нужно подклеить еще два треугольника до образования цикла из пяти граней вокруг вершины 5. Плоские углы края блока равны между собой и меньше 60° . Следовательно, подклеив к вершине $5'$ два треугольника, получим равенство всех углов граней, а значит, $\theta(5, 5', 6) < \pi$.

2. Подклеим $(6, 5', k)$, $(5', 5, 3^2)$ и $(5, 6, 3', 3')$. Затем подклеим: $(k, 5', 3^2)$, $(3, 5', 3, k_1)$, $(k_1, 3^2, 5'_1)$, $(5'_1, 3, 5, 3)$ и $(3', 5, 3, y)$. По свободному углу $[y, 3, 5'_1]$ ничего нельзя подклеить, так как $\theta[3, y] = \theta[3', 6] < \pi$, а $v(5_1) < 60^\circ$.

3. Осталось рассмотреть такое продолжение: $(6, 5', k)$, $(5', 5, 3, 3)$, $(5, 6, \alpha)$. По свободным ребрам $[5, \alpha]$ и $[5', k]$ можно подклеить четырехугольники, а по $[\alpha, 6]$ и $[k, 6]$ — лишь треугольники. В результате получим цикл из шести треугольников (общая вершина 6), который можно достроить до сети многогранника $M_{1,77}$, подклеив шесть блоков по три четырехугольника и еще один блок из шести треугольников — аналогично построенное.

ним п. 1.1 леммы 5. Для проверки реализуемости сети решается соответствующая система уравнений. Лемма 6 доказана.

Лемма 7. Грани $(5, 5', n)$ при $n > 6$ не принадлежат многограннику M .

Доказательство выполняется аналогично лемме 6. Замкнутые сети будем получать в продолжениях исходного блока третьего варианта, но они не реализуются многогранниками M . Лемма 7 доказана.

Лемма 8. Грани $(5, 6, 6')$ принадлежат лишь многограннику $M_{1,78}$.

Доказательство. Возможны три варианта исходных блоков.

1. Подклеим $(5, 6, n)$ и $(5, 6', \alpha)$. По $[n, 5]$ и $[\alpha, 5]$ можно подклеить лишь треугольники. Образовавшийся цикл из пяти треугольников с общей вершиной 5 можно продолжать треугольниками, в итоге получим сеть многогранника $M_{1,78}$. Его можно реализовать многогранником с правильными вершинами.

2. Подклеим $(5, 6, n)$ и $(5, 6', 3^2)$. Затем подклеим: $(5, n, 3^2)$, $(3, 5, 3, n_1)$, $(n_1, 3^2, 5_1)$, $(5_1, 3, 6', 3)$. С другой стороны блока построение такое: $(6, 6', 5_2)$, $(5_2, 6, 3^2)$, $(3, 6', 3, 5_3)$, $(5_3, 3^2, n_2)$. Если по $[n_2, 5_3]$ подклеим четырехугольник, то вершина 5_3 станет правильной (так как она четырех- или пятигранная) и продолжение по углу $[5_3, 3, 5_1]$ исключено.

Если по $[n_2, 5_3]$ подклеим треугольник $(n_2, 5_3, 6_1)$, то затем можно подклеить $(5_3, 6_1, n_3)$. На этот раз получим свободную ломаную $[n_3, 5_3, 3, 5_1]$ и дальнейшее построение исключено.

3. Подклеим $(5, 6, 3^2)$, $(5, 6', 3', 3')$ и $(6, 6', k)$. С учетом рассмотренных п. 1 и п. 2 можно подклеить: $(k, 6, 3^2)$ и $(k, 6', 3', 3')$. По $[3, 6]$ можно подклеить четырехугольник лишь так, чтобы не получить свободного угла $[3, 3, 3]$. Подклеим $(6, 3, y, 3'')$ и $(3'' 6, 3, y_1)$, где $y, y_1 = 4$ или 5. Затем подклеим $(y, 3'', y_1, \gamma)$ и $(y, 3^2, \kappa)$.

Если $y = 4, \gamma \neq 3$, то по $[\gamma, y, \kappa]$ ничего нельзя подклеить, так как $\theta[\gamma, y, \kappa] < 222^\circ$. Если $\gamma = 3$, то $v(y) = v(6)$, а значит, $\theta(y, 3'', y_1, \gamma) < 2\pi$.

Пусть $y = 5$. Тогда $\gamma = 3''$. И снова получим противоречия в построениях сети. Действительно, четырехугольник, подклеенный по $[y, \kappa]$, дает равенство $v(\gamma) = v(3'')$ (по равным двугранным углам), т. е. $(y, \gamma, y_1, 3'')$ — ромб, что противоречит оценке $\theta[\gamma, y_1] = \theta[3, 6] < \pi$; треугольник же $(y, \kappa, 6'_1)$ и потом подклеенный четырехугольник $(6'_1, y, \gamma, \gamma_1)$ дают равенства $\theta[6'_1, \gamma_1] = \theta[y_1, 3'']$, $\theta[3, 6] = \theta[\gamma, y_1]$, откуда $\theta(\gamma, y, 3'', y_1) < 2\pi$. Лемма 8 доказана.

Лемма 9. Грань $(5, 6, 7)$ не принадлежит многограннику M .

Для доказательства леммы воспользуемся доказательством леммы 8. В п. 1 получим противоречие, как только треугольники составят конус из пяти граней, — тогда $v(6) = v(7)$, а $\theta(5, 6, 7) <$

$< \pi$; в пп. 2, 3 оставшуюся свободной шестигранную вершину можно считать семигранной, — тогда доказательство повторяется дословно. Возможно, четвертое положение трех исходных граней — к (5, 6, 7) подклеиваем (5, 6, n) и (5, 7, 3^2). В этом случае выполняем построение вокруг вершины 7 до образования свободного угла $[5, 3, 5]$, что дает противоречие. Лемма 9 доказана.

§ 4. **Четырехугольные грани.** В [3] установлено, что грани типа $(3^3, n)$ принадлежат лишь кубу ($n = 3$), многограннику $M_{1,79}$ ($n = 5$) и серии многогранников, двойственных антипризмам. Здесь рассмотрим продолжения остальных четырехугольных граней.

Лемма 10. *Грань $(3^2, 4, n)$ принадлежит лишь многогранникам $M_{1,80}$ и $M_{1,81}$.*

Доказательство. 1. Пусть n — четырехгранная вершина. Тогда $v(n) = v(4)$, по $[4, n]$ можно подклеить лишь $(4, n, 3^2)$, а по $[3, 4]$ — лишь четырехугольник $(3, 4, z, y)$, где $y, z = 3, 4, 5$.

1.1. $y = 3$.

1.1.1. $z = 4$. Затем подклеим: $(3, 4, z, 3)$, $(3^4, x)$ (например, так, чтобы получить $[3, 3, n]$), $(n, 3^2, z_1)$, $(z, 3, x, y)$, и, подклеив $(z_1, 3, x, y)$ (при $x = 3$), получим цепь четырехугольников, огибающую пятиугольник. Достроив симметричный ей блок, получим сеть многогранника $M_{1,80}$ — дважды усеченная правильная пятиугольная бипирамида. При $x = 4$ $y = 3$ и $\theta[y, x] > \pi$, что исключено. При $x = 5$ $y = 3'$. Подклеим (y, z, y, x_1) и $(x, y, x_1, 3'')$. Теперь $v(y) = v(3'')$, вершина x — правильная и $\theta[y, x] > \pi$, что исключено.

1.1.2. $z = 5$. Поскольку $v(z) = v(4) > 60^\circ$ и двугранный угол $\{4, z\}$ — общий вершин 4 и z , а $\{3, z\} = \{3, 4\}$, то $\{z, y\} > \pi$.

1.2. $y = 4$. Тогда $z = 3'$ и можно подклеить $(3, 4, z, y_1)$ и $(y_1, z, y, 3)$. Следовательно, $v(y) = v(4)$, $v(z) = v(3)$ и все вершины блока правильные. Блок достраивается до сети многогранника $M_{1,81}$ с правильными вершинами.

1.3. $y = 5$. Тогда $z = 3'$, $y_1 = 5$ и, подклеив $(y_1, z, y, 3')$, $(y_1, 3^2, \omega)$, $(\omega, 3, n, 3')$, получим равенство $v(\omega) = v(y_1)$. Отсюда $v(3) = v(3')$, $v(y) = v(4)$, что невозможно, так как вершины 4 и y теперь правильные.

2. Пусть $n = 5$. Тогда по $[5, 4]$ можно подклеить $(5, 4, 3^2)$ или $(5, 4, 4', 3')$.

2.1. Подклеим $(5, 4, 3^2)$. Если по $[4, 3]$ подклеим пятиугольник, то вершины 4 и 5 станут правильными, но $(3^2, 4, 5)$ и $(3^4, 4)$ не принадлежат одному многограннику с правильными вершинами. Подклеим четырехугольник $(4, 3, y, \omega)$. Пусть $y = 3$. Тогда в блоке будет свободный угол $[3, 3, 3]$, который допускает подклейку пятиугольника $(3^4, x)$, $x = 3, 4, 5$. Покажем, что для всех значений x получаются противоречия в построениях сетей. Если $x = 3$, то, подклеив вокруг пятиугольника единственно возможное — четырехугольники, получим равенство $v(4) = v(n)$, что аналогично

п. 1.1.2 этой леммы исключено. Пусть $x = 4$. Тогда необходимо подклеить $(n, 3, x, \gamma)$, $(\omega, y, 3, 4_1)$ и $(4_1, 3, x, \xi)$. Вершины ξ и γ не могут быть трехгранными, так как иначе получим противоречие аналогично п. 1.1.2 этой леммы — для $\xi = 3$ или противоречие п. 2.1 этой леммы — для $\gamma = 3$. В случае $\xi = \gamma = 4'' \theta(3, 4, \omega, y) < 2\pi$. Пусть $x = 5$. Выполним построения аналогично случаю $x = 4$. Здесь по $[3, y, \omega]$ нельзя подклеить пятиугольник, так как тогда вершина n станет правильной, что дает противоречие п. 2.1 этой леммы. Поскольку $\gamma = 3'$, $\theta[\gamma, x] = \theta[3, 4]$ и $\theta[y, \omega] = \theta[x, \xi]$, то $\xi = 4'$. Но тогда из $\theta[x, \xi] = \theta[3, n]$ следует $\theta(x, 3, n, \gamma) < 2\pi$.

2.1.1. $y = 4'$. Пусть $\omega = 3'$, тогда $v(4) = v(y)$ — по двугранным углам, а значит, дальнейшее построение сети может быть только таким: $(y, 3^2, n_1)$, $(n_1, 3, n, 3'')$, $(3, 4, \omega, y_1)$. — y_1 — четырехгранная, так как другие варианты исключаются аналогично п. 1.1.2 этой леммы, $(y_1, \omega, y, 3)$, $(3, y, n_1, 3)$, $(y_1, 3^2, n_2)$, $(n_2, y_1, 3^2)$, $(n_2, 3, n_1, 3'')$, $(n_2, 3, n, 3'')$ (n_i — только пятигранные), $(n, 3', x, 3'')$, $(x, 3'', n_1, 3'')$ и $(x, 3'', n_2, 3'')$ — получаем замкнутую сеть, где $x = 3'$. Из равенств $\theta[3, n] = \theta[3'', x]$ и $n = 5$ следует $\theta(n, 3'', x, 3'') < 2\pi$.

Пусть $\omega = 4''$. По $[y, 3, 3]$ можно подклеить $(y, 3^2, z)$ (пятиугольник немедленно дает противоречие) и подклеим $(z, 3, 5, 3')$. Если к вершине ω подклеить еще три таких же блока (предварительно исключив из него одну грань $(4, 3^2, 5)$ — со сводным ребром $[3, 3]$), то при $z = 5$, подклеив $(3^4, z, 3', \xi)$, $(\xi, 3', 5, 3')$, и так как n_1 и n_2 — только пятигранные, — $(\xi, 3', z_1, 3')$ и $(\xi, 3', n_1, 3')$, получим замкнутую сеть. Сеть нельзя реализовать многогранником M , так как $v(5) > v(\xi)$, а $\{5, 3\} < \{5, 3'\}$ и поскольку ξ — четырехгранная, то должно быть $v(5) < v(\xi)$.

Другие варианты продолжения исходного блока из пяти граней сразу дают противоречия. Так, если $z \geq 6$, то $\theta(4, 3, y, \omega) < \pi$. А если вместо $(\omega, y, 3, 4_1)$ подклеим $(\omega, y, 4'', 3')$, то по двугранным углам $v(4) = v(4'')$, следовательно, $v(3'') = v(3)$ и вершины $4, 4''$ и 5 — правильные. Тогда из $(z, 3, 5, 3')$ следует $\theta[\omega, y] = \theta[5, 3] = \pi$, что исключено.

При $\omega > 4 \theta(5, 3', z, 3) < 2\pi$.

2.1.2. $y = 5'$. По свободному углу $[y, 3, 3]$ можно подклеить пятиугольник или четырехугольник. Если подклеим пятиугольник, то, выполняя построения вокруг пятиугольника, будем получать противоречия, как в п. 2.1. Действительно, подклеив $(3^4, n)$, сразу получим противоречие, а подклеив $(3^2, n, 4_1)$ и убедившись, что по $[n, 4_1]$ можно подклеить лишь такой же четырехугольник, и подклеив его — снова придем к противоречию.

Подклеим четырехугольник $(y, 3^2, z)$. Противоречия в построениях сетей ребер искомым многогранников M будут возникать аналогично рассмотренным в п. 2, но после подклейки достаточно большого числа граней к исходному блоку.

2.2. Подклеим $(5, 4, 4', 3')$.

2.2.1. По $[4, 3]$ подклеим пятиугольник $(3^4, 4)$. Тогда будет $210^\circ > \theta[4', 3'] = \theta[3, 3] > 210^\circ$.

2.2.2. Подклеим $(4, 3, y, \omega)$. Но здесь $y \neq 3$, так как по свободному углу $[y, 3, 3]$ нельзя подклеить пятиугольник, что следует из оценки п. 2.2.1 этой леммы. Напомним, что $v(3) < 105^\circ$. Это означает, что грань $(3, 4, \omega, y)$ не может иметь типа $(3, 4^2, 5)$ или $(3, 4, 5, 4)$.

Подклеим $(y, 3, 3, z)$, $z = 4''$ или $5'$.

2.2.2.1. $y = 4'''$, $z = 5'$. Подклеим $(z, 3, n, 3'')$. Пусть $\omega = 3''$. Тогда по $[\omega, 4, 4']$ нужно подклеить $(\omega, 4, 4', \kappa)$, где κ — четырехгранная вершина, и так как $\theta[y, 3] = \theta[\kappa, 4'] < \pi$, $v(3) < 105^\circ$ и $v(y) = v(4)$, то $\theta(3, 3, 4, n) < 2\pi$.

Пусть $\omega = 4^{IV}$. Тогда $\kappa = 3'$, $v(\omega) = v(n)$ — попадаем в условия противоречия п. 1.1.2 этой леммы.

Поскольку другие значения ω и z при $y = 4'''$ исключены, то п. 2.2.2.1 рассмотрен полностью.

2.2.2.2. $y = 5'$, $z = 4''$, $\omega = 3''$. Тогда $\kappa = 4'''$. Подклеим $(z, 3, n, 3'')$. Возможны три случая: $v(3) = v(\omega)$, $v(3) > v(\omega)$, $v(3) < v(\omega)$. Если $v(3) = v(\omega)$, то $v(3') = v(3'')$, следовательно, $\theta[4, 4'] = \theta[3, z]$ и $\theta(3, 3, y, z) < 2\pi$.

Если $v(3) > v(\omega)$, то $v(y) > v(n)$, следовательно, $v(z) < v(4)$, а по двугранным углам $v(3'') < v(\omega)$. Получаем неравенство $v(3'') < v(3)$, что вместе с неравенством $v(z) < v(4)$ противоречит равенству $\theta[3, 4] = \theta[3'', z]$.

Пусть $v(3) < v(\omega)$. Тогда снова получим противоречие равенству $\theta[3, 4] = \theta[3'', z]$. Действительно, будет $v(y) < v(n)$, $v(z) > v(4)$, $v(3'') > v(\omega)$ и $v(3'') > v(3')$.

Все возможные продолжения сети при $y = 5'$ рассмотрены.

3. $n \geq 6$. С ростом n усложняется перебор вариантов продолжения исходного блока, поскольку противоречия в построениях сетей ребер выявляются, как правило, после получения замкнутого цикла граней вокруг вершины n . Но ни один из способов продолжения исходного блока не дает сети ребер многогранника M . Лемма 10 доказана.

Лемма 11. Грань $(3, 4, 3', n)$ принадлежит лишь многогранникам $M_{1.82}$, $M_{1.83}$, $M_{1.84}$.

Доказательство. 1. Пусть n — четырехгранная вершина. Тогда $v(n) = v(4)$ и по $[3, 4]$ можно подклеить лишь четырехугольник, поскольку у пятиугольника вершина 4 была бы правильной и, значит, $v(3) = v(3')$, $\theta[3, 4] = \pi$, что противоречило бы условию $\theta[3, 4] > \pi$ — для суммы углов при одном ребре пятиугольника. И по остальным свободным ребрам грани $(3, 4, 3', n)$ подклеим четырехугольники. Получим блок из пяти граней. Его можно двумя способами дополнить до многогранника M . Первый способ (потребуем, чтобы грани блока были ромбами) заключается в подклейке симметричного ему блока относительно плоскости, проходящей через свободные ребра, параллельные ребрам исходной грани, а затем подклеиваем два четырехугольника в оставшиеся

свободные углы при вершинах 4 и n . Полученная сеть реализуется ромбоэдром $M_{1.82}$. Второй способ заключается в дополнении исходного блока из пяти граней четырехугольниками до образования замкнутой цепи четырехугольников вокруг замкнутого цикла с общей вершиной 3. Его можно рассматривать как усеченную тремя плоскостями шестигранную пирамиду. Затем он дополняется симметричным ему блоком относительно плоскости основания пирамиды. Получили многогранник $M_{1.83}$.

2. Пусть n — пятигранная вершина. Замкнутые сети будем получать, построив исходную грань $(3, 4, 3', n)$ четырехугольниками до замкнутого цикла граней с общей вершиной 4 и четырьмя свободными углами, а по свободным углам подклеим четырехугольники. Дальнейшие продолжения полученного блока дают восемь сетей предполагаемых многогранников, но лишь одна реализуется многогранником M . Это — $M_{1.84}$.

3. $n \geq 6$. Здесь получаемые сети имеют только два типа граней: $(3, 4, 3, n)$ и $(3, 4, 4, 4)$. Поскольку все вершины должны быть правильными, то сети нельзя реализовать многогранниками M . Лемма 11 доказана.

Лемма 12. Грань $(3, 3, 5, n)$ принадлежит лишь многограннику $M_{1.85}$.

Доказательство. Прежде всего отметим, что случай $n \geq 5$ немедленно дает противоречие.

Пусть $n = 5$. Тогда в построениях сетей могут участвовать либо грани $(3, 3, 5, 5)$ и $(3, 5, 3, 5)$, либо $(3, 3, 5, 5)$ и $(3^4, k)$. Первый комплект дает многогранник $M_{1.85}$. Второй комплект не дает замкнутой сети. В самом деле, если $k = 3$, то $\theta(3^2, 5^2) < 2\pi$. Если $k = 4$, то получим цепь четырехугольников, охватывающую пятиугольник и свободный угол $[4, k, 4]$. Поскольку число граней цепи нечетно, а $\theta[4, k] < \pi$, то снова $\theta(3^2, 5^2) < 2\pi$. Если $k = 5$, то аналогично случаю $k = 4$ получим свободный угол $[4, k, 3']$. Здесь доказывается, что $v(3') = v(3'')$, все пятигранные вершины — правильные и равные k . Это дает противоречие: $\theta(5, 3, k, 3') > 2\pi$. Лемма 12 доказана.

Лемма 13. Грань $(3, 5, 3, n)$ принадлежит лишь многогранникам $M_{1.86}$ и $M_{1.87}$.

Доказательство. 1. Пусть $n = 5$. По свободному ребру $[3, 5]$ можно подклеить пятиугольник или четырехугольник. Если подклеим пятиугольник, то затем нужно подклеить еще четыре таких же пятиугольника, что дает равенство противоположных вершин исходного четырехугольника, а значит, $\theta[3, 5] = \pi$, что противоречит условию $\theta[3, 5] > \pi$ — для суммы двух соседних углов пятиугольника.

Рассмотрим продолжение четырехугольниками. Цикл граней с общей вершиной 5 может состоять только из граней типа $(3, 5, 3, n)$ или содержать и другие грани. В первом случае окончание построения даст три замкнутые сети, из которых лишь одна — $M_{1.86}$ реализуется многогранником M . Это — ромбоэдр. Второй

случай дает сеть многогранника $M_{1.87}$. Его реализуемость проверяется при помощи решения соответствующей системы уравнений, связывающей его плоские и двугранные углы.

2. Пусть $n > 5$. Тогда все продолжения дают противоречия. Лемма 13 доказана.

Лемма 14. Грани $(3, 4^2, n)$ и $(3, 4, n, 4)$, где $n \geq 4$, принадлежат лишь многогранникам $M_{1.88} - M_{1.96}$.

Доказательство. Пусть $n = 4$. Тогда обе грани имеют один и тот же тип — $(3, 4^3)$, где четырехгранные вершины, вообще говоря, различны. Замкнутые циклы из таких четырехугольников с общей четырехгранной вершиной n могут быть двух видов: 1) каждая вершина, противолежащая n , трехгранная; 2) некоторые трехгранные вершины принадлежат двум граням.

Продолжение циклов первого вида возможно циклами первого вида — получим многогранник $M_{1.88}$, или второго вида — получим многогранник $M_{1.89}$. Если в продолжениях циклов второго вида принимают участие циклы из четырехугольников $(3, 4, 5, 4)$ и $(3, 4^2, 5)$ — общая пятигранная вершина, то получим еще три сети, из которых можно реализовать лишь сети многогранников $M_{1.90}$ и $M_{1.91}$.

Пусть $n = 5$. На сфере возможны только пять различных сетей ребер, составленных из граней типа $(3, 4, 5, 4)$, $(3, 4^2, 5)$. Все они реализуются многогранниками M . Это — $M_{1.92} - M_{1.96}$. Лемма 14 доказана.

Как уже отмечалось, настоящей работой завершается решение задачи по перечислению всех выпуклых многогранников с равноугольными вершинами. Коротко итоговый результат можно сформулировать следующим образом.

Найден полный перечень с точностью до комбинаторной эквивалентности, выпуклых многогранников с равноугольными вершинами — в перечне 104 замкнутых многогранника, 26 бесконечных многогранника и три бесконечные серии — конусов и многогранников, двойственных призмам и антипризмам.

Список литературы: 1. Гурин А. М. О выпуклых многогранниках с равноугольными вершинами // Укр. геометр. сб. — 1980. — Вып. 23. — С. 34—41. 2. Гурин А. М. Бесконечные выпуклые многогранники с равноугольными вершинами // Укр. геометр. сб. — 1981. — Вып. 24. — С. 26—32. 3. Гурин А. М. Оценка числа замкнутых выпуклых многогранников с равноугольными вершинами // Укр. геометр. сб. — 1982. — Вып. 25. — С. 22—30. 4. Гурин А. М. Реализация сетей выпуклых многогранников с равноугольными вершинами. 1 // Укр. геометр. сб. — 1983. — Вып. 26. — С. 41—48. 5. Гурин А. М. Реализация сетей выпуклых многогранников с равноугольными вершинами. 2 // Укр. геометр. сб. — 1984. — Вып. 27. — С. 22—26. 6. Гурин А. М. Реализация сетей выпуклых многогранников с равноугольными вершинами. 3 // Укр. геометр. сб. — 1985. — Вып. 28. — С. 26—43. 7. Гурин А. М. Реализация сетей выпуклых многогранников с равноугольными вершинами. 4 // Укр. геометр. сб. — 1986. — Вып. 29. — С. 32—47.

Поступила в редколлегию 04.03.85

О НЕКОТОРЫХ КУБИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЯХ С БЕСКОНЕЧНЫМ МНОЖЕСТВОМ ПЛОСКОСТЕЙ КОСОЙ СИММЕТРИИ

Пусть в вещественном евклидовом пространстве E^{11} задана координатная система началом O и осями x_i ($i = 1, \overline{5}$), y_j , z_l ($j = 1, 2, 3$). А. Е. Залесский [1] построил пример бесконечной линейной группы G_8 , порожденной девятью отражениями, в пространстве E^{11} , алгебра инвариантов которой не является свободной; размерность линейной оболочки всех направлений симметрии равна восьми. При этом действие G_8 с образующими a_j , b_l , c_l определяется такими формулами: $r_j(y_j) = -y_j$, $a_1(x_1) = x_1 + 2y_1 + 2z_1$, $a_1(y_1) = -y_1 - 2z_2$, $b_1(x_2) = x_2 + 2y_1 + 2z_1$, $b_1(y_1) = -y_1 - 2z_1$, $a_2(x_3) = x_3 + 2y_2 + 2z_3$, $a_2(y_2) = -y_2 - 2z_3$, $b_2(x_4) = x_4 + 2y_2 + 2z_2$, $b_2(y_2) = -y_2 - 2z_2$, $a_3(x_5) = x_5 + 2y_3 + 2z_2$, $a_3(y_3) = -y_3 - 2z_2$, $b_3(x_1) = x_1 + 2y_3 + 2z_1$, $b_3(x_3) = x_3 + 2y_3 + 2z_1$, $b_3(y_3) = -y_3 - 2z_1$.

На других переменных образующие a_j , b_l , c_l действуют тождественно. Пространство инвариантов третьей степени G_8 порождается пространством многочленов третьей степени от z_l и формами

$$F_1 = 2z_1z_3x_3 + 2z_1z_2x_4 - z_1y_2^2 + 2z_2z_3x_5 - z_3y_3^2, \quad F_2 = 2z_1z_2x_1 + 2z_1x_3 + 2z_2x_5 - z_1y_1^2 - z_2y_3^2, \quad F_3 = 2z_2z_3x_1 + 2z_1z_3x_2 - 2z_2z_3x_3 - 2z_2x_4 - z_3y_1^2 + z_2y_2^2.$$

Уравнения $F_j = c$ (1) задают в E^{11} базисные поверхности-цилиндры Z_j с образующими, параллельными координатным λ -плоскостям ($\lambda = 3, 4, 2$ соответственно $j = 1, 2, 3$). Направляющие этих цилиндров есть кубические поверхности Φ_j с уравнениями (1) в μ -плоскостях Π^μ ($\mu = 11 - \lambda$).

Цель настоящей заметки — на основании уравнения (1) с использованием диаметральных квадрики найти все плоскости косой симметрии поверхностей Φ_j , направления симметрии которых параллельны координатной 8-плоскости $\Pi_0^8(x_i, y_j)$.

1°. Рассмотрим в $\Pi^8(x_3, x_4, x_5, y_2, y_3, z_1, z_2, z_3)$ поверхность Φ_1 . Обозначим через α_u плоскость симметрии Φ_1 по направлению симметрии $u = (0, 0, u_3, u_4, u_5, 0, v_2, v_3, 0, 0, 0)$. Так как $F_1(u) = 0$, то направление u является асимптотическим для Φ_1 . Поэтому диаметральная квадрика $D_2(u)$, сопряженная u , распадается на α_u и плоскость $\beta_u \parallel u$ (см. [2]). Уравнение $D_2(u)$ при $x_1 = x_2 = y_1 = 0$ имеет вид

$$u_3z_1z_3 + u_4z_1z_2 + u_5z_2z_3 - v_2y_2z_1 - v_3y_3z_3 = 0. \quad (2)$$

Значит, плоскости α_u , β_u проходят через точку O и определяются в Π^8 уравнениями

$$\alpha_2y_2 + \alpha_3y_3 + \gamma_1z_1 + \gamma_2z_2 + \gamma_3z_3 = 0, \quad (3)$$

$$\beta_2y_2 + \beta_3y_3 + \delta_1z_1 + \delta_2z_2 + \delta_3z_3 = 0 \quad (4)$$

соответственно. В пространстве E^{11} уравнение (3) задает плоскость симметрии (уже размерности 10) цилиндра Z_1 по направлению симметрии u . Коэффициенты уравнений (2)–(4) связаны соотношениями

$$\alpha_2\beta_2 = \alpha_3\beta_3 = \gamma_1\delta_1 = \gamma_2\delta_2 = \gamma_3\delta_3 = \alpha_2\beta_3 + \alpha_3\beta_2 = \gamma_1\beta_3 + \gamma_3\beta_1 = \gamma_2\beta_3 + \gamma_3\beta_2 + \alpha_2\delta_2 = \gamma_3\beta_2 + \alpha_2\delta_3 = 0, \quad (5)$$

$$u_3 = \gamma_1\delta_3 + \delta_1\gamma_3, \quad (6)$$

$$u_4 = \gamma_1\delta_2 + \delta_1\gamma_2, \quad (7)$$

$$u_5 = \gamma_2\delta_3 + \gamma_3\delta_2, \quad (8)$$

$$v_2 = -\alpha_2\delta_1 - \beta_2\gamma_1, \quad (9)$$

$$v_3 = -\gamma_3\beta_3 - \alpha_3\delta_3. \quad (10)$$

В случае $\alpha_2 \neq 0$, $\beta_2 = 0$ из (5) находим $\beta_3 = \delta_2 = \delta_3 = 0$; согласно (8) и (10), $u_5 = v_3 = 0$. Поскольку α_u проходит через 3-плоскость $\Pi^3(x_3, x_4, x_5) \in \Phi_1$, вектор $u \nparallel \Pi^3$ ($v_2 \neq 0$). На основании (9) коэффициент $\delta_1 \neq 0$. Следовательно, уравнение (4) упрощается до $z_1 = 0$; $\gamma_1 = 0$, что дает $\alpha_3 = 0$. Положив $\alpha_2 = \delta_1 = 1$, из (6), (7), (9) получим $u_3 = \gamma_3$, $u_4 = \gamma_2$, $v_2 = -1$. Итак, уравнение (3) принимает вид

$$y_2 + u_4 z_2 + u_3 z_3 = 0. \quad (11)$$

Каждый вектор 3-плоскости $\Pi_0^3(x_3, x_4, y_2) \in \Phi_1$, не параллельный 2-плоскости $\Pi^2(x_3, x_4)$, задает направление симметрии плоскости симметрии поверхности Φ_1 . Все такие плоскости проходят через 5-плоскость $\Pi^5(x_3, x_4, x_5, y_3, z_1) \in \Phi_1$; $\Pi^2 = \Pi_0^3 \cap \Pi^5$. При $u_3 = 0$, $u_4 = 1$ имеем $b_2(y_2)$ — подразумевается формула $b_2(y_2) = -y_2 - 2z_2$.

Если $\alpha_2 = \beta_2 = 0$, то $v_2 = 0$. Пусть $\alpha_3 \neq 0$, $\beta_3 = 0$. Тогда, согласно (5), $\delta_1 = \delta_2 = 0$; снова β_u в Π^8 является координатной плоскостью ($z_3 = 0$, $\delta_3 = 1$). На основании (6)–(8) и (10) $u_3 = \gamma_1$, $u_4 = 0$, $u_5 = \gamma_2$ и $v_3 = -1$ ($\alpha_3 = 1$). При этом уравнение (3) принимает вид

$$y_3 + u_3 z_1 + u_5 z_2 = 0. \quad (12)$$

Направления симметрии определяются всеми векторами 3-плоскости $\Pi_1^3(x_3, x_5, y_3) \in \Phi_1$, не параллельными 2-плоскости $\Pi_0^2(x_3, x_5)$. Соответствующие плоскости симметрии проходят через 5-плоскость $\Pi_0^5(x_3, x_4, x_5, y_2, z_3) \in \Phi_1$; $\Pi_0^2 = \Pi_1^3 \cap \Pi_0^5$, $\Pi^3 = \Pi^5 \cap \Pi_0^5$. При $u_3 = 0$, $u_5 = 1$ и $u_3 = 1$, $u_5 = 0$ получаем $a_3(x_5)$, $a_3(y_3)$, $b_3(x_3)$, $b_3(y_3)$.

Если $\alpha_3 = \beta_3 = 0$, то $v_3 = 0$, что невозможно ($u \nparallel \Pi^9$). Если же $\alpha_3 = 0$, $\beta_3 \neq 0$, то $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$; значит, $u \parallel \alpha_u$ ($z_3 = 0$). Аналогично исключается случай $\alpha_2 = 0$, $\beta_2 \neq 0$.

2°. Возьмем теперь в $\Pi^7(x_1, x_2, x_5, y_1, y_3, z_1, z_2)$ поверхность Φ_2 ; α_u — ее плоскость симметрии по направлению симметрии

$\mathbf{u} = (u_1, u_2, 0, 0, u_5, v_1, 0, v_3, 0, 0, 0)$, $F_2(\mathbf{u}) = 0$. Диаметральная квадрика $D_2(\mathbf{u})$ при $x_3 = x_4 = y_2 = z_3 = 0$ определяется уравнением $u_1 z_1 z_2 + u_2 z_1^2 + u_5 z_2^2 - v_1 y_1 z_1 - v_3 y_3 z_2 = 0$. Поэтому уравнения (3) и (4) при

$$\gamma_3 = \delta_3 = 0 \quad (13)$$

задают в Π^7 плоскости α_u и $\beta_u \parallel \mathbf{u}$ — линейные компоненты $D_2(\mathbf{u})$. Как и в п. 1°, с учетом (5)–(10) и (13), убеждаемся, что невозможны такие случаи: $\alpha_1 = 0, \beta_1 \neq 0$; $\alpha_1 = \beta_1 = \alpha_3 = \beta_3 = 0, \alpha_1 = \beta_1 = \alpha_4 = 0, \beta_3 \neq 0$. Если $\alpha_1 \neq 0, \beta_1 = 0$, то уравнения $z_1 = 0$ и

$$y_1 + u_2 z_1 + u_1 z_2 = 0 \quad (14)$$

задают в Π^7 плоскости β_u и α_u соответственно ($\alpha_1 = \delta_1 = 1, v_1 = -1$). Каждый вектор координатной 3-плоскости переменных x_1, x_3, y_1 с координатой $v_1 \neq 0$ определяет направление симметрии. Если же $\alpha_1 = \beta_1 = \beta_3 = 0, \alpha_3 \neq 0$ (оставшаяся возможность), то, положив $\alpha_3 = \delta_2 = 1$, находим $u_1 = \gamma_1, u_2 = 0, u_5 = \gamma_2, v_1 = 0, v_3 = -1$ и, в частности, в Π^7 уравнения $\beta_u (z_2 = 0)$ и α_u :

$$y_3 + u_1 z_1 + u_5 z_2 = 0. \quad (15)$$

Любой вектор 3-плоскости $\Pi_2^3(x_1, x_5, y_3)$, не параллельный 2-плоскости $\Pi_1^2(x_1, x_5)$, задает направление симметрии плоскости симметрии Φ_2 . Эти плоскости проходят через 5-плоскость $\Pi_1^5(x_1, x_3, x_5, y_1, z_3) \in \Phi_2$; $\Pi_1^5 = \Pi_2^3 \cap \Pi_1^5$. Вектору $\mathbf{u} \mid u_1 = 1, u_5 = 0$ соответствуют $b_3(x_1)$ и $b_3(y_3)$. Отметим, что $b_3(y_3)$ получены раньше в п. 1°.

3°. Поверхность Φ_3 лежит в $\Pi^9(x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, z_1, z_2, z_3)$; ее плоскость симметрии α_u имеет направление симметрии $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4, 0, v_1, v_2, 0, 0, 0, 0)$; $F_3(\mathbf{u}) = 0$. Уравнение диаметальной квадрики $D_2(\mathbf{u})$:

$$u_1 z_3 z_3 + u_2 z_1 z_3 - u_3 z_2 z_3 - u_4 z_2^2 - v_1 y_1 z_3 + v_2 y_2 z_2 = 0. \quad (16)$$

Квадрика $D_2(\mathbf{u})$ распадается на плоскости α_u и $\beta_u \parallel \mathbf{u}$; они определяются уравнениями (3) и (4), если в их левых частях $\alpha_3 y_3, \beta_u y_3$ заменить на $\alpha_2 y_2, \beta_2 y_2$ соответственно. При этом коэффициенты (3), (4), (16) удовлетворяют таким соотношениям:

$$\begin{aligned} \alpha_1 \beta_1 &= \alpha_2 \beta_2 = \gamma_1 \delta_1 = \gamma_3 \delta_3 = \alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1 = \alpha_1 \delta_1 + \gamma_1 \beta_1 = \\ &= \alpha_1 \delta_2 + \gamma_2 \beta_1 = \alpha_2 \delta_1 + \gamma_1 \beta_2 = \alpha_2 \delta_3 + \beta_2 \gamma_3 = \gamma_1 \delta_2 + \gamma_2 \delta_1 = 0, \\ u_3 &= \gamma_1 \delta_3 + \gamma_3 \delta_1, u_4 = -\gamma_2 \delta_2, v_1 = -\alpha_1 \delta_3 - \gamma_3 \beta_1, v_2 = \\ &= \alpha_2 \delta_2 + \gamma_2 \beta_2 \text{ и } u_1 - u_3 = \gamma_2 \delta_3 + \gamma_3 \delta_2. \end{aligned} \quad (17)$$

Пусть $\alpha_1 = \beta_1 = \beta_2 = 0, \alpha_2 \neq 0$. Тогда $\delta_2 \neq 0, \gamma_1 = \delta_1 = \delta_3 = 0$ — соотношение (17) принимает вид $\gamma_3 = u_1 - u_3 (\alpha_2 = \delta_2 = 1)$; $u_2 = 0, u_4 = -\gamma_2, v_1 = 0, v_2 = 1$. Значит, направле-

ния симметрии задают все векторы 4-плоскости $\Pi^4(x_1, x_3, x_4, y_2)$ с координатой $y_2 \neq 0$; β_1 совпадает с координатной плоскостью ($z_2 = 0$) и α_u определяется уравнением

$$y_2 - u_4 z_2 + (u_1 - u_3) z_3 = 0. \quad (18)$$

Векторы $u \mid u_1 - u_3 = 1, u_4 = 0$ и $u \mid u_1 = 0, u_3 = -1, u_4 = 0$ дают $a_2(y_2)$ и $a_2(x_3)$ соответственно.

Поверхность Φ_3 есть цилиндр с образующей, параллельной прямой $l: x_1 - x_3 = 0, x_2 = 0, \dots, z_3 = 0$. Диаметральная квадратика $D_2(u) \mid u \parallel l$ является неопределенной. Поэтому плоскости симметрии цилиндра Φ_3 по направлению симметрии l не охватываются уравнением (18); каждая плоскость $\alpha_u \parallel l$. Если выбрать новую координатную ось $Ox'_3 \parallel l$ при неизменных других осях ($Ox'_1 = Ox_1, \dots, Oz'_3 = Oz_3$), то в уравнении Φ_3 нужно положить $x_1 = x'_1 + x'_3, x_2 = x'_2, \dots, z_3 = z'_3$; вектор $u = (u'_1, u'_2, u'_3, u'_4, 0, v'_1, v'_2, 0, 0, 0, 0)$ задает направление симметрии плоскости симметрии α_u цилиндра Φ_3 . Преобразованное уравнение Φ_3 не содержит x'_3 ; направляющая цилиндра Φ_3 лежит в плоскости $\Pi^8_1(x'_1, x'_2, x'_4, y'_1, y'_2, z'_1, z'_2, z'_3)$. Уравнение $\alpha_u \mid u' \parallel \Pi^8_1$ принимает вид $y'_2 - u'_4 z'_2 + u'_1 z'_3 = 0$. В случае $\alpha_1 \neq 0, \beta_1 = 0$ имеем $\beta_2 = \delta_1 = \delta_2 = 0$ и $u_1 - u_3 = \gamma_2, u_2 = \gamma_1, u_4 = 0, v_1 = -1, v_2 = 0$ ($\alpha_1 = \delta_3 = 1$). Каждый вектор с координатой $v_1 \neq 0$ 4-плоскости $\Pi^4(x_1, x_2, x_3, y_1)$ задает направление симметрии; уравнения

$$y_1 + u_2 z_1 + (u_1 - u_3) z_2 = 0 \quad (19)$$

и $z_3 = 0$ определяют в Π^9 плоскости α_u и β_u соответственно.

Все другие случаи невозможны ($\alpha_1 = 0, \beta_1 \neq 0; \alpha_2 = 0, \beta_2 \neq 0$ и $\alpha_2 = \beta_2 = 0$ при $\alpha_1 = \beta_1 = 0$).

Таким образом, уравнения (11), (12), (14), (15), (18), (19) определяют соответственно в μ -плоскостях Π^μ ($\mu = 8, 7, 9$) все плоскости симметрии α_u поверхностей Φ_j ($j = 1, 2, 3$).

Множество всех общих 10-мерных плоскостей симметрии цилиндров Z_i бесконечно. Оно содержит плоскости с уравнением $y_3 + u_5 z_2 = 0$ и лишь три плоскости ($y_j = 0$) — по направлениям симметрии u , выделенным в пп. 1°—3°.

Примечание. Пусть F есть $(m - \frac{1}{2})$ -мерная алгебраическая поверхность в евклидовом пространстве E^m ; G_v — бесконечная группа, порожденная косыми отражениями относительно плоскостей. Строение F с группой G_v рассмотрено в работе [3]; поверхности Φ_j относятся к случаю, когда v -мерная линейная оболочка всех направлений симметрии задает v -асимптотическое направление для F , а любая v -плоскость, ей параллельная, пересекает F по $(v - 1)$ -квадрикам. При этом уравнение F имеет вид

$$\sum_{j=0}^s A_j(\dot{x}_v) \zeta^{s-j} = 0,$$

где $\zeta = \sum_{p=1}^{\tau} a_p x_p^2 + 2 \sum_{k=1}^{\nu} \xi_k(x_\gamma) x_k$, $\deg \xi_k \leq 1$, $n \geq \deg A_j + 2(s-j)$,
 $1 \leq \tau \leq \nu < m$, $\gamma = \nu + 1$, m . Плоскости симметрии Φ_j можно
 найти с помощью многочленов типа ζ .

Список литературы: 1. *Zaleskii A. E.* The fixed algebra of a group generated by reflections is not always free // *Arch. Math.*— 1983.— 41, N 5.— P. 434—437. 2. *Игнатенко В. Ф.* Некоторые приложения диаметральной теории алгебраической поверхности в пространстве E^m // *Укр. геометр. сб.*— 1984.— Вып. 27.— С. 49—53. 3. *Игнатенко В. Ф.* О диаметральных плоскостях и плоскостях косо́й симметрии алгебраической поверхности пространства E^m // *Укр. геометр. сб.*— 1977.— Вып. 20.— С. 35—46.

Поступила в редколлегию 20.10.85

С. Б. КЛИМЕНТОВ

**О ПРОДОЛЖЕНИИ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ ИЗГИБАНИЙ
ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ ОДНОСВЯЗНОЙ ПОВЕРХНОСТИ
ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ ПРИ КРАЕВЫХ УСЛОВИЯХ**

1. Предлагаемая статья посвящена решению краевых задач для бесконечно малых (б. м.) изгибаний k -го порядка (k -изгибаний) и непрерывных изгибаний односвязной локально-выпуклой поверхности S положительной внешней кривизны $K \geq \text{const} > 0$, расположенной в трехмерном пространстве V_3 постоянной кривизны. Рассматривается также вопрос о продолжении k -изгибаний, удовлетворяющих некоторому краевому условию, в непрерывные изгибания, удовлетворяющие аналогичному краевому условию*.

Б. м. изгибания первого порядка поверхности S при краевых условиях, линейно содержащих вариации нормальной кривизны и геодезического кручения края $\mathcal{L} = \partial S$, изучались И. Н. Векуа [1]. Впоследствии Г. С. Бархиным и В. Т. Фоменко [2—4] получены условия неизгибаемости и однозначной определенности поверхности S при краевом условии

$$\lambda(s) \Delta k_{nR} + \mu(s) \Delta \tau_{gR} = \sigma(s), \quad \lambda^2 + \mu^2 \neq 0, \quad (1)$$

где s — дуговая абсцисса; R — заданное на краю $\mathcal{L}$ непрерывное поле направлений; Δk_{nR} , $\Delta \tau_{gR}$ — изменения нормальной кривизны и геодезического кручения поверхности S в точках края $\mathcal{L}$ в направлении R при изометрическом преобразовании (см. также [5]). Некоторые частные результаты работ [2—4] ранее были получены К. М. Беловым [6, 7]. Имеется также большое количество работ по краевым задачам другого типа для непрерывных и б. м. изгиба-

* Последняя задача предложена автору А. В. Погореловым и И. Х. Сабитовым.

ний первого порядка, с которыми результаты настоящей статьи непосредственно не связаны, поэтому их обзор здесь не приводится.

В настоящей работе рассматриваются условия как наличия, так и отсутствия непрерывных изгибаний поверхности S с нелинейными краевыми условиями, обобщающими (1), а также новые по своей постановке краевые задачи для k -изгибаний. Подход к решению рассматриваемых задач дает установленная в [8] взаимосвязь между k -изгибаниями поверхности S и решениями варьированной системы уравнений Гаусса — Петерсона — Кодаци (Г.П.К.), а также развитые в [5] методы решения нелинейных краевых задач для неканонических эллиптических систем.

2. Формулировка результатов. Под поверхностью S понимаем погружение класса $C_{\alpha}^{n+2}(\bar{D})$, $n \geq 1$, $0 < \alpha < 1$, замкнутого круга $\bar{D} = \{z: |z| \leq 1\}$, $z = u^1 + iu^2$, комплексной z -плоскости в пространство V_3 . В работе рассматриваются k -изгибания и изометрические преобразования поверхности S с сохранением класса регулярности поверхности. Поле R и фигурирующие в краевых условиях функции предполагаем класса C_{α}^{n*} (если это функции нескольких аргументов, то по совокупности аргументов). Символ $\|\cdot\|_{n,\alpha}$ обозначает стандартную норму в банаховом пространстве C_{α}^n (см., например, [1, гл. 1]).

Исследуются следующие краевые условия.

Для изометрических преобразований и непрерывных изгибаний:

$$\lambda(s) \Delta k_{nR} + \mu(s) \Delta \tau_{gR} = f(s, \Delta k_{nR}, \Delta \tau_{gR}) + \sigma(s), \quad (2)$$

$$\lambda^2 + \mu^2 \neq 0, \quad \|f\|_{n,\alpha} = o(\|\Delta k_{nR}\|_{n,\alpha} + \|\Delta \tau_{gR}\|_{n,\alpha});$$

$$\lambda_t(s) \Delta k_{nR} + \mu_t(s) \Delta \tau_{gR} = f_t(s, \Delta k_{nR}, \Delta \tau_{gR}), \quad (3)$$

$$\lambda_t^2 + \mu_t^2 \neq 0, \quad f_0 \equiv 0, \quad \|f_t\|_{n,\alpha} = o(\|\Delta k_{nR}\|_{n,\alpha} + \|\Delta \tau_{gR}\|_{n,\alpha}),$$

равномерно по t , где $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, $\varepsilon > 0$, — параметр изгибания, отображения λ_t , μ_t , f_t вещественного отрезка $]-\varepsilon; \varepsilon[$ в банахово пространство C_{α}^n класса C^m по Фреше.

Для k -изгибаний:

$$\lambda^l(s) \delta^l k_{nR} + \mu^l(s) \delta^l \tau_{gR} = f^l(s, \delta^1 k_{nR}, \delta^1 \tau_{gR}, \dots, \delta^k k_{nR},$$

$$\delta^k \tau_{gR}) + \sigma^l(s), \quad (\lambda^l)^2 + (\mu^l)^2 \neq 0, \quad l = 1, 2, \dots, k;$$

$$\|f^l\|_{n,\alpha} = o(\|\delta^1 k_{nR}\|_{n,\alpha} + \dots + \|\delta^k \tau_{gR}\|_{n,\alpha}). \quad (4)$$

Обозначим $\Gamma = \partial D$; $\tau \in \Gamma$ — аффикс точки контура Γ , соответствующей точке $s = s(\tau)$ на $\mathcal{L}$; $\lambda(\tau) \equiv \lambda(s(\tau))$, $\mu(\tau) \equiv \mu(s(\tau))$

* Классы C_{α}^n можно заменить на классы С. Л. Соболева W_{ρ}^n , $\rho > 2$ (подробнее об этом см. [5]).

и т. д. и $= (2\pi)^{-1} \Delta_{\Gamma} \arg (\mu(\tau) + i\lambda(\tau))$, $i^2 = -1$, $\Delta_{\Gamma} f$ — приращение функции $f = f(\tau)$ при однократном обходе контура Γ в положительном направлении; аналогично определим κ^l , $l = 1, 2, \dots, k$. $\kappa^0 = \kappa_0$ при малом t ; обозначим через $j_R(S) \equiv j_R$ индекс поверхности S относительно поля R , который использовал С. Э. Кондорин [9, с. 52—56]. Воспроизведем определение j_R .

Пусть поверхность S и ее край $\mathcal{U}$ ориентированы так, что при обходе кривой $\mathcal{U}$ в положительном направлении положительная (внутренняя) сторона поверхности S лежит слева. Зададим в некоторой точке $P \in \mathcal{U}$ направление поля R стрелкой (при этом из имеющихся двух возможностей выберем одну). Обозначим через ν угол, образованный этой стрелкой и направлением касательной к кривой $\mathcal{U}$ в точке P . Отсчет угла производим от касательной до стрелки против хода часов. В силу ориентированности поверхности S угол ν определен с точностью до угла, кратного 2π . Выберем произвольно одно из его значений; полученное таким образом значение угла будем непрерывно продолжать, перемещая точку P вдоль кривой $\mathcal{U}$ в положительном направлении. Индекс $j_R(S)$, являющийся топологическим инвариантом, определим формулой $j_R(S) = (2\pi)^{-1} \Delta_{\mathcal{U}} \nu + 2$.

Обозначим через $C_{\alpha}^n(\bar{D})$ банахово пространство комплексных вектор-функций $g = \{g^1; \dots; g^k\}$ класса $C_{\alpha}^n(\bar{D})$ с нормой $\|g\|_{n, \alpha} = \sup_{l=1, \dots, k} \|g^l\|_{n, \alpha}$.

Отметим, что k -изгибание тривиально тогда и только тогда, когда первая вариация второго основного тензора $b_{s\beta}$ равна нулю: $\delta^1 b_{s\beta} = 0$; k -изгибание есть k -движение (т. е. набор полей скоростей по порядку k движения поверхности как твердого тела) тогда и только тогда, когда $\delta^l b_{s\beta} = 0$, $l = 1, 2, \dots, k$ [8]. В связи с последним обстоятельством, k -изгибания, имеющие одинаковые вариации $\delta^l b_{s\beta}$, $l = 1, 2, \dots, k$, будем называть отличающимися на k -движение и отождествлять их, считая несущественно отличными.

Теорема 1. Если $\kappa^l \geq j_R$, $\|\sigma^l\|_{n, \alpha} \leq \delta$, $l = 1, 2, \dots, k$, где $\delta > 0$ — константа, определяемая поверхностью S и функциями μ^1, μ^2, f^1 , то малые в норме $C_{\alpha}^{n+2}(\bar{D})$ k -изгибания поверхности S , удовлетворяющие краевому условию (4), представляют собой $(2\kappa^1 - 2j_R + 1) \times \dots \times (2\kappa^k - 2j_R + 1)$ -мерное вложенное C^n -подмногообразие M^k банахова пространства $C_{\alpha}^{n+2}(\bar{D})$. Если $\sigma^1 \neq 0$, то многообразие M^k не содержит тривиальных k -изгибаний поверхности S ; если $\sigma^1 \equiv f^1 \equiv 0$, то тривиальные k -изгибания образуют $(2\kappa^2 - 2j_R + 1) \times \dots \times (2\kappa^k - 2j_R + 1)$ -мерное подмногообразие M_0^k многообразия M^k .

Если функции f^l в (4) зависят только от $\delta^1 \kappa_{nR}, \dots, \delta^{l-1} \tau_{gR}$, то $\delta^l \kappa_{nR}, \dots, \delta^k \tau_{gR}$ не зависят, то снимается условие $\|\sigma^l\|_{n, \alpha} \leq \delta$, $l = 1, \dots, k$, и уточняется глобальная структура многообразия M^k , а именно, в этом случае M^k будет C^n -диффеоморфно

евклидову пространству соответствующей размерности и содержит все k -изгибания поверхности S , удовлетворяющие (4).

Если $\kappa^1 < j_R$, то поверхность S допускает не более одного нетривиального k -изгибания, удовлетворяющего (4); если $\kappa^1 < j_R$, $\sigma^l \equiv 0$, $l = 1, \dots, k$, то все k -изгибания поверхности S удовлетворяющие (4), есть k -движения.

Замечание. Если функции f^l в (4) существенно зависят от $\delta^v k_{nR}$ либо $\delta^v \tau_{gR}$, $v \geq l$, то этот результат является новым даже для б. м. изгибаний первого порядка.

Теорема 2. Если $\kappa \geq j_R$, то все нетривиальные изометрические преобразования поверхности S , удовлетворяющие краевому условию (2) и близкие к S в норме $C_{\alpha}^{n+2}(\bar{D})$, образуют $(2\kappa - 2j_R + 1)$ -мерное C^n -подмногообразие банахова пространства $C_{\alpha}^{n+2}(\bar{D})$ (отдельная поверхность рассматривается как точка этого пространства). Если $\sigma \equiv 0$, то поверхность S принадлежит этому многообразию, в противном случае не принадлежит.

При $\kappa < j_R$ существует не более одного нетривиального изометрического преобразования поверхности S , удовлетворяющего (2).

Теорема 3. Пусть $\kappa_0 \geq j_R$. Тогда всякому непостоянному отображению $\rho = \rho(t)$ класса C^m малого отрезка $] -\varepsilon; \varepsilon[$, $\varepsilon > 0$, в евклидово пространство E^r , $r = 2\kappa_0 - 2j_R + 1$, такому, что $\rho(0) = 0$, однозначно соответствует нетривиальное изгибание поверхности S класса C^m по параметру, удовлетворяющее краевому условию для $\forall t \in] -\varepsilon; \varepsilon[$.

При $\kappa_0 < j_R$ поверхность S при краевом условии (3) неизгибаема.

Теорема 4. k -изгибание класса $C_{\alpha}^{n+2}(\bar{D})$ поверхности S , удовлетворяющее краевым условиям (4), продолжаемо в конечное изгибание класса C^k по параметру, удовлетворяющее краевому условию вида (3), тогда и только тогда, когда $\lambda^l \equiv \lambda_0$, $\mu^l \equiv \mu_0$, $\kappa_0 \geq j_R$, $l = 1, \dots, k$; при этом

1) если существует краевое условие (3) такое, что условия (4) получают его варьированием, то всякое решение задачи (4) продолжается в решение задачи (3) при одной и той же функции f_l в правой части (3);

2) если такого краевого условия (3) не существует, то для каждого k -изгибания, подчиненного (4), определяется свое условие (3) такое, что данное k -изгибание продолжается в изгибание, удовлетворяющее (3).

3. Преобразование краевых условий. Система уравнений Г.П.К., записанная для поверхности S^* , изометричной поверхности S и одинаково с S ориентированной, приводится [2—4] (параметризация $(u^1; u^2)$ поверхности S без ограничения общности считается изотермически сопряженной [1, гл. 2]) к виду

$$\partial_z \omega + q_1(z, \omega) \partial_z \omega + q_2(z, \omega) \partial_z \bar{\omega} + A(z, \omega) \omega + B(z, \omega) \bar{\omega} = 0, \quad (5)$$

где $w(z) = (\sqrt{g})^{-1} (b_{22} - b_{11} + 2ib_{12})$ — комплексная функция изгибаний, $l^2 = -1$; $b_{s\beta}$ — второй основной тензор поверхности S^* ; g — дискриминант метрики поверхности S ; $|q_1| + |q_2| \leq \text{const} < 1$; $w, \bar{w} \in D$; q_1, q_2, A, B (вещественно) аналитически зависят от $w, \bar{w}$.

Варирированная система Г. П. К. соответственно приводится к виду [8]:

$$\begin{aligned} \delta_l^l(\delta^l w) + q_1(z, w) \partial_z(\delta^l w) + q_2(z, w) \partial_{\bar{z}}(\delta^l w) + A_0(z, w) \delta^l w + \\ + B_0(z, w) \overline{\delta^l w} + G^{l-1}(z, w, \delta^1 w, \dots, \delta^{l-1} w) = 0, \\ l = 1, \dots, k, \end{aligned} \quad (6)$$

где $w = w(z)$ — решение уравнения (5), соответствующее поверхности S^* ; $\delta^l w = (\sqrt{g})^{-1} (\delta^l b_{22} - \delta^l b_{11} + 2i\delta^l b_{12})$ — l -я вариация комплексной функции изгибаний; A_0, B_0, G^{l-1} аналитически зависят от $w, \bar{w}, \delta^1 w, \dots, \delta^{l-1} w$, а также от первых производных по $z, \bar{z}$ этих функций; $G^0 \equiv 0$.

В уравнении (6), записанном для k -изгибаний поверхности S , $w(z) \equiv 0, q_1 = q_2 \equiv 0$.

Образ поля направлений R в параметрической плоскости z будем также обозначать через R . В z -плоскости $R \in C_\alpha^n(\Gamma)$. Пусть γ — угол между выбранным направлением R в данной точке контура Γ и положительным направлением оси u^1 . Справедливы [2—4] формулы:

$$\begin{aligned} (\sqrt{g})^{-1} l(\gamma) \Delta k_{nR} = \text{Re} \{ \overline{\alpha_1(\tau)} w(\tau) \} + \prod(w, \tau), \\ a^{-1} l(\gamma) \Delta \tau_{gR} = \text{Re} \{ \overline{\alpha_2(\tau)} w(\tau) \} + \\ + a^{-1} \prod(w, \tau) (-b \cos 2\gamma + c \sin 2\gamma), \end{aligned} \quad (7)$$

где $l(\gamma) = g_{11} \cos^2 \gamma + 2g_{12} \sin \gamma \cos \gamma + g_{22} \sin^2 \gamma$; $g_{s\beta}$ — метрический тензор поверхности S ; $2a = g_{11} + g_{22}$; $b = g_{12}$, $2c = g_{11} - g_{22}$; $\prod(w, \tau) = -\sqrt{K} + \sqrt{K + |w|^2}$; K — внешняя кривизна поверхности S ; $\alpha_1(\tau) = -\cos 2\gamma + i \sin 2\gamma$; $\alpha_2(\tau) = \sin 2\gamma + i \cos 2\gamma + a^{-1}(b + ic)$.

Из формул (7) получаем выражения вариаций $\delta^l k_{nR}, \delta^l \tau_{gR}$ через вариации комплексной функции изгибаний (при $w(z) \equiv 0$):

$$\begin{aligned} (\sqrt{g})^{-1} l(\gamma) \delta^l k_{nR} = \text{Re} \{ \overline{\alpha_1(\tau)} \delta^l w(\tau) \} + \varphi^l(\tau, \delta^1 w, \dots, \delta^{l-1} w), \\ a^{-1} l(\gamma) \delta^l \tau_{gR} = \text{Re} \{ \overline{\alpha_2(\tau)} \delta^l w(\tau) \} + \psi^l(\tau, \delta^1 w, \dots, \delta^{l-1} w), \end{aligned}$$

где $\varphi^1 = \psi^1 \equiv 0$; $\|\varphi^l\|_{n, \alpha} = o(\|\delta w\|_{n, \alpha}^{l-1})$, $l = 2, \dots, k$.

С помощью формул (7) краевое условие (2) приводится к виду

$$\text{Re} \{ \overline{\alpha(\tau)} w(\tau) \} + \varphi(\tau, w(\tau)) = \chi(\tau); \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \alpha(\tau) = -\lambda \sqrt{g} \cos 2\gamma + \mu (b + a \sin 2\gamma) + \\ + i [\lambda \sqrt{g} \sin 2\gamma + \mu (c + a \cos 2\gamma)] \in C_\alpha^n(\Gamma); \quad (9) \\ \varphi, \chi \in C_\alpha^n; \|\varphi(\tau, w(\tau))\|_{n, \alpha} = o(\|w\|_{n, \alpha}). \end{aligned}$$

Аналогично преобразуются краевые условия (4):

$$\operatorname{Re} \{ \overline{\alpha^l(\tau)} \delta^l w \} + v^l(\tau, \delta^1 w, \dots, \delta^k w) = \chi^l(\tau), \quad l = 1, 2, \dots, k, \quad (10)$$

где α^l выражаются через λ^l, μ^l по формулам (9), $v^l, \chi^l \in C_\alpha^n$,

$$\|v^l(\tau, \delta^1 w(\tau), \dots, \delta^k w(\tau))\|_{n, \alpha} = o(\|\delta w\|_{n, \alpha}^k). \quad (11)$$

Далее без ограничения общности будем считать $|\alpha| = 1, |\alpha^l| = 1, l = 1, \dots, k$ (этого можно добиться делением (8) и (10) соответственно на $|\alpha|, |\alpha^l|$).

Отметим также следующие формулы [4]:

$$q = \operatorname{Ind} \alpha = (2\pi)^{-1} \Delta_\Gamma \arg \alpha = \kappa - j_R; \quad \operatorname{Ind} \alpha^l = \kappa^l - j_R.$$

4. Доказательство теоремы 1. Отыскание k -изгибаний поверхности S , удовлетворяющих краевым условиям (4), эквивалентно нахождению решений краевой задачи (10) для системы дифференциальных уравнений (6). Тривиальным k -изгибаниям соответствуют решения $\delta^1 w, \dots, \delta^k w$, такие, что $\delta^1 w \equiv 0$, а k -движениям — $\delta^1 w = \dots = \delta^k w \equiv 0$ [8].

Если $q(l) = \operatorname{Ind} \alpha^l = \kappa^l - j_R \geq 0, l = 1, \dots, k$, то вопрос о разрешимости в классе $C_\alpha^n(\bar{D})$ системы (6) при краевых условиях (10) эквивалентен вопросу о разрешимости следующей системы интегродифференциальных уравнений [5] (с учетом $w \equiv 0$):

$$\begin{aligned} \Omega^l &\equiv \delta^l w + P^l(A_0 \delta^l w + B_0 \overline{\delta^l w}) + P^l(G^{l-1}(z, \delta^1 w, \dots, \delta^{l-1} w)) - \\ &- S^l(v^l(\tau, \delta^1 w(\tau), \dots, \delta^k w(\tau))) = \Phi^l(z), \quad l = 1, 2, \dots, k, \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$P^l f(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_D \left[\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} + \frac{z^{2q(l)+1} \overline{f(\zeta)}}{1 - \bar{\zeta}z} \right] d\xi d\eta,$$

$$\xi = \xi + i\eta; \quad S^l f(z) = \frac{z^{q(l)}}{2\pi i} \int_\Gamma f(\tau) \frac{\tau + z}{\tau - z} \frac{d\tau}{\tau} -$$

обобщенный оператор Шварца, в котором контурный интеграл понимается в смысле главного значения; $\{\Phi^l(z)\}_{l=1}^k$ — произвольный, голоморфный вектор класса $C_\alpha^n(\bar{D})$, являющийся решением краевой задачи:

$$\operatorname{Re} \{ \tau^{-q(l)} \Phi^l(\tau) \} = \chi^l(\tau), \quad \tau \in \Gamma. \quad (13)$$

Далее банахово пространство голоморфных функций класса $C_\alpha^n(\bar{D})$ будем обозначать через A_α^n .

Систему (12) коротко запишем в виде $\Omega(\delta w) = \Phi$. Оператор Ω действует из банахова пространства $C_\alpha^n(\bar{D})$ k -мерных комплексных вектор-функций в это же пространство. Если правая часть

принадлежит в A_α^n , то вектор δw есть решение класса $C_\alpha^n(\bar{D})$ системы (6), удовлетворяющее краевым условиям (10) [5].

Покажем, что при достаточно малой норме $\|\delta w\|_{n,\alpha}$ производная Фреше оператора Ω есть изоморфизм банахова пространства $C_\alpha^n(\bar{D})$.

Несколькокомпонентно дифференциал Фреше $\Omega'(h)$ оператора Ω запишем в виде

$$h^l + P^l(A_0 h^l + B_0 \bar{h}^l) + P^l(\omega_1^l h^1 + \dots + \omega_k^l h^k) - S^l(v_1^l h^1 + \dots + v_k^l h^k), \quad l = 1, \dots, k, \quad (14)$$

где в силу структуры функций G^{l-1} и соотношений (11)

$$\begin{aligned} \|\omega_s^l\|_{n-1,\alpha} &= O(\|\delta w\|_{n,\alpha}^k), \\ \|v_s^l\|_{n,\alpha} &= O(\|\delta w\|_{n,\alpha}^k), \quad s = 1, \dots, k. \end{aligned} \quad (15)$$

Первые два слагаемых выражения (14) обозначим $\Lambda_1^l h^l$, а вторые два $\Lambda_2^l h^l$. Линейный оператор Λ_1^l для $\forall l = 1, \dots, k$ является изоморфизмом банахова пространства $C_\alpha^n(\bar{D})$ [1, с. 297, 312], а линейный оператор $\Lambda_2^l: C_\alpha^n(\bar{D}) \rightarrow C_\alpha^n(\bar{D})$ в силу (15) имеет сколь угодно малую норму при достаточно малой норме $\|\delta w\|_{n,\alpha}^k$ [1, с. 39, 312], откуда следует изоморфность оператора Ω' (см., например, [10, с. 229]).

Нуль есть неподвижная точка оператора Ω ; применяя теорему о неявной функции, получаем локальную диффеоморфность оператора Ω в окрестности нулевой точки пространства $C_\alpha^n(\bar{D})$ [11, гл. 2, § 7]. Таким образом, система (12) разрешима при любой правой части, достаточно малой в норме $C_\alpha^n(\bar{D})$, а решения задачи (13) при достаточно малых нормах $\|\sigma^l\|_{n,l}$, $l = 1, \dots, k$ могут быть выбраны сколь угодно малыми. Поскольку размерность пространства решений краевой задачи (13) для голоморфного вектора Φ есть $(2q(1) + 1) \times \dots \times (2q(k) + 1)$ [1, с. 231], отсюда следует утверждение теоремы при $\kappa^l \geq j_R$; доказательство того факта, что M^k — вложенное подмногообразие, аналогично соответствующим рассуждениям из [5] (о подмногообразиях банаховых пространств см. [12], также [5]).

Если функции f^l в (4) зависят только от $\delta^1 k_{nR}, \dots, \delta^{l-1} \tau_{gR}$, то функции v^l в (10) зависят только от $\delta^1 w, \dots, \delta^{l-1} w$. В этом случае система (12) упрощается и ее решение сводится к последовательному (при $l = 1, 2, \dots, k$) решению линейных фредгольмовых интегральных уравнений, в связи с чем снимается условие малости правых частей (12), а следовательно, и функций σ^l , $l = 1, 2, \dots, k$. Формулы (12) при этом устанавливают диффеоморфизм всего пространства решений краевой задачи (13) и множества решений задачи (6), (10), что позволяет уточнить глобальное строение многообразия M^k .

Утверждение теоремы в случае $\kappa^1 < j_R$ непосредственно следует из результатов работы [5].

Теорема 1 доказана.

Доказательство теорем 2 и 3 аналогично, только вместо системы (12) применяется одно интегродифференциальное уравнение:

$$\Omega w \equiv w + P^q(q_1(z, w) \partial_z w + q_2(z, w) \partial_z \bar{w} + A(z, w)w + B(z, w)\bar{w}) - S^q(\Phi(\tau, w)) = \Phi(z), \quad (16)$$

где $\Phi(z)$ — какое-либо голоморфное решение краевой задачи $\operatorname{Re}\{\tau^{-1}\Phi(\tau)\} = \chi(\tau)$, $\tau \in \Gamma$.

5. Доказательство теоремы 4. Множество M решений уравнений Г.П.К. для поверхности S^* , изометричной S и ординаково с ней ориентированной, есть аналитическое бесконечномерное подмногообразие банахова пространства $C_\alpha^n(\bar{D})$, моделируемое в банаховом пространстве A_α^n [13]. При $\kappa_n \geq j_R$ оператор Ω , стоящий в левой части (16), осуществляет координатное отображение многообразия M в A_α^n в окрестности точки $w = 0 \in M$ [5]. Вариации $\Omega^1, \dots, \Omega^k$ оператора Ω есть те операторы, которые фигурируют в левых частях (12); к ним применимы все рассуждения из доказательства теоремы 1. В связи с этим если функции Φ и Φ^l соответственно в правых частях (16) и (12) связаны соотношением

$$\Phi = t\Phi^1 + t^2\Phi^2 + \dots + t^k\Phi^k + o(t^k),$$

то изгибание, удовлетворяющее краевым условиям (3) или (2) (t — параметр изгиба), будет порождать k -изгибание, удовлетворяющее краевым условиям вида (4), где

$$\lambda^l \equiv \lambda_0, \mu^l \equiv \mu_0, l = 1, 2, \dots, k, \quad (17)$$

$f^l = f^l(s, \delta^1 k_{nR}, \dots, \delta^{l-1} \tau_{gR})$, причем условия (4) будут вариациями условия (3) (соответственно (2)); обратно, если выполнено (17), то изгибание, полученное решением уравнения (16), будет продолжать k -изгибание, полученное решением системы (12) [8], откуда следует утверждение 1) теоремы 4.

Утверждение 2) доказывается аналогично, только в краевых условиях (4) при этом функции $f^l(s, \delta^1 k_{nR}, \dots, \delta^k \tau_{gR})$ будем считать известными величинами (поскольку заданы $\delta^1 k_{nR}, \dots, \delta^k \tau_{gR}$) и включим их в $\sigma^l(s)$. Рассматриваемое k -изгибание при этом будет удовлетворять краевому условию:

$$\lambda(s) \delta^l k_{nR} + \mu(s) \delta^l \tau_{gR} = \sigma^l(s), l = 1, \dots, k,$$

для которого соответствующее краевое условие (3) выглядит так:

$$\lambda(s) \Delta k_{nR} + \mu(s) \Delta \tau_{gR} = t\sigma^1 + t^2\sigma^2 + \dots + t^k\sigma^k. \quad (18)$$

Построив теперь с помощью уравнения (16), в правой части которого $\Phi = t\Phi^1 + \dots + t^k\Phi^k$, изгибание, удовлетворяющее кра-

ному условию (18), аналогично предыдущему в качестве его первых k вариаций будем иметь исходное k -изгибание, удовлетворяющее краевым условиям (4).

Теорема 4 доказана.

Список литературы: 1. Векун И. Н. Обобщенные аналитические функции. — М.: Физматгиз, 1959. — 628 с. 2. Бархин Г. С., Фоменко В. Т. Об изгибании поверхностей положительной кривизны при некоторых краевых условиях: Докл. АН СССР. — 1961. — 140, № 5. — С. 987—989. 3. Бархин Г. С., Фоменко В. Т. Об однозначной определенности кусочно-регулярной поверхности положительной кривизны с краевыми условиями: Докл. АН СССР. — 1963. — 152, № 5. — С. 1023—1026. 4. Фоменко В. Т. Об изгибании и однозначной определенности поверхностей положительной кривизны с краем // Мат. сб. — 1964. — 63, № 3. — С. 409—425. 5. Климентов С. Б. Об одном способе построения решений краевых задач теории изгибаний поверхностей положительной кривизны // Укр. геометр. сб. — 1986. — Вып. 29. — С. 56—62. 6. Белов К. М. Об однозначной определенности поверхностей положительной кривизны с краем: Докл. АН СССР. — 1959. — 127, № 2. — С. 239—241. 7. Белов К. М. Некоторые замечания о неизгибаемости поверхностей положительной кривизны с краем: Докл. АН СССР. — 1960. — 131, № 3. — С. 475—477. 8. Климентов С. Б. О продолжении бесконечно малых изгибаний высших порядков односвязной поверхности положительной кривизны // Мат. заметки. — 1984. — 36. — Вып. 3. — С. 393—403. 9. Кон-Фоссен С. Э. Некоторые вопросы дифференциальной геометрии в целом. — М.: Физматгиз, 1959. — 303 с. 10. Колмогоров А. М., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1976. — 542 с. 11. Ниренберг Л. Лекции по нелинейному функциональному анализу. — М.: Мир, 1977. — 232 с. 12. Ленг С. Введение в теорию дифференцируемых многообразий. — М.: Мир, 1967. — 203 с. 13. Климентов С. Б. О строении множества решений основных уравнений теории поверхностей // Укр. геометр. сб. — 1982. — Вып. 25. — С. 69—82.

Поступила в редколлегию 25.06.85

Б. Д. КОТЛЯР

ОБ ОДНОМ ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ НЕРАВЕНСТВЕ

1. Хорошо известно неравенство Боннезена, усиливающее изопериметрическое неравенство [1] (см. также [2]).

Пусть на плоскости простая замкнутая кривая длины L ограничивает область G площади F и r , R — радиусы наибольшего вписанного в $\bar{G}$ (замыкание G) и наименьшего описанного вокруг $\bar{G}$ кругов соответственно; тогда

$$L^2 - 4\pi F \geq \pi^2 (R - r)^2. \quad (1)$$

Это неравенство допускает существенное усиление, позволяющее заменить круги иными плоскими множествами.

Теорема. Если кривая длины l ограничивает выпуклое замкнутое множество $g \in R$ площади f , λ — максимальное значение t , при котором tg можно поместить в $\bar{G}$ ортогональным преобразованием,

Λ — минимальное значение t , при котором $\bar{G}$ можно поместить в tg ортогональным преобразованием, то

$$L^2 f^2 - 16\pi^2 Ff \geq 4\pi^2 f^2 (\Lambda - \lambda)^2. \quad (2)$$

Отметим, что (1) сразу следует из (2) (достаточно считать g кругом единичного радиуса).

Следствие 1. Пусть a — длина большой полуоси наибольшего эллипса с эксцентриситетом ϵ , содержащегося в $\bar{G}$, A — длина большой полуоси наименьшего эллипса с эксцентриситетом ϵ , содержащего $\bar{G}$; тогда

$$(2LE(\epsilon)/\pi) - 4\pi F\sqrt{1-\epsilon^2} \geq \pi^2(1-\epsilon^2)(A-a)^2, \quad (3)$$

где $E(t)$ — полный эллиптический интеграл второго рода.

Следствие 2. Пусть a_n — длина стороны наибольшего правильного n -угольника, содержащегося в $\bar{G}$, A_n — длина стороны наименьшего правильного n -угольника, содержащего $\bar{G}$; тогда

$$4 \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} \left(\left(\frac{L}{\pi} \right)^2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} - \frac{4}{n} F \right) \geq (A_n - a_n)^2. \quad (4)$$

Конечно, (1) следует из (3) при $\epsilon = 0$ и из (4) получается предельным переходом. Отметим, что во всех случаях речь идет о подобных (но не всегда гомотетичных) описанных и вписанных фигурах.

2. Доказательство теоремы. Сначала считаем G выпуклым множеством. Пусть dg означает кинематическую плотность (см., например, [3, гл. 6]); тогда по известной формуле Пуанкаре ([3, гл. 7])

$$\int ndg = 4Ll, \quad (5)$$

где n означает число точек пересечения G и g ; если m_k — кинематическая мера множества положений g , при которых dg имеет ровно k общих точек с ∂G , то из (5) следует, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2k \cdot m_{2k} = 4Ll. \quad (6)$$

Из формулы Бляшке [3, гл. 7] следует, что $\int_{G \cap g \neq \emptyset} dg = 2\pi(F + f) + Ll$, т. е.

$$\sum_{k=1}^{\infty} m_{2k} = 2\pi(F + f) + Ll. \quad (7)$$

Из (6) и (7) вытекает: $\sum_{k=2}^{\infty} m_{2k} \cdot (k-1) = Ll - 2\pi(F + f)$; следовательно,

$$Ll - 2\pi(F + f) \geq 0. \quad (8)$$

Заменяем множество g классом множеств tg , $t \in (0, +\infty)$; обозначая через $l(M)$ и $f(M)$ соответственно периметр и площадь множества M , получаем $l(tg) = tl(g)$, $f(tg) = t^2 f(g)$. Считая, что $G \cap S(tg) \neq \emptyset$, где S — ортогональное преобразование $\mathcal{R}^2$, получаем из (8):

$$2\pi f t^2 - L l t + 2\pi F < 0. \quad (9)$$

Рассмотрим квадратный трехчлен $\varphi(t) = 2\pi f t^2 - L l t + 2\pi F$. Очевидно, что $\varphi(0) > 0$ и $\varphi(+\infty) > 0$; в то же время найдется такое значение t_0 , что при некотором $S \in O(2)$ будет $G \cap S(t_0 g) \neq \emptyset$ и, следовательно (по (9)), $\varphi(t) < 0$. Значит, дискриминант

$$\Delta = L^2 l^2 - 16\pi^2 F f. \quad (10)$$

Обозначая корни φ через t_1 , t_2 и учитывая, что в силу (9) $\varphi(\lambda) < 0$, $\varphi(\Lambda) < 0$ (λ , Λ определены в п. 1), найдем

$$0 < t_1 = \frac{Ll - \sqrt{\Delta}}{4\pi f} \leq \lambda \leq \Lambda \leq \frac{Ll + \sqrt{\Delta}}{4\pi f} = t_2 < +\infty.$$

Из последних неравенств получаем $\sqrt{\Delta} \geq Ll - 4\pi f \lambda$; $\sqrt{\Delta} \geq 4\pi f \Lambda - Ll$, т. е. $\sqrt{\Delta} \geq 2\pi f (\Lambda - \lambda)$. Отсюда и из (10) следует неравенство (2).

Если G не является выпуклым множеством, то рассмотрим выпуклую оболочку $G^* = \text{conv } G$; обозначим соответствующие величины для G^* через L^* , F^* , Λ^* , λ^* . Применяя (2) к множеству G^* , найдем

$$L^{*2} l^2 - 16\pi^2 F^* f \geq 4\pi^2 f^2 (\Lambda^* - \lambda^*)^2;$$

учитывая, что $L^* \leq L$, $F^* \geq F$, $\Lambda^* \geq \Lambda$, $\lambda^* \leq \lambda$, получаем $L^{*2} l^2 - 16\pi^2 F^* f \geq L^{*2} l^2 - 16\pi^2 F^* f \geq 4\pi^2 f^2 (\Lambda^* - \lambda^*)^2 \geq 4\pi^2 f^2 (\Lambda - \lambda)^2$. Этим доказательство теоремы завершается.

Доказательство следствия 1. При заданном $\varepsilon \in [0, 1]$ положим $g = \{x \equiv (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2/a_1^2 + x_2^2/b_1^2 \leq 1\}$, где $a_1^2 = 1/(\pi \times \sqrt{1-\varepsilon^2})$, $b_1^2 = \sqrt{1-\varepsilon^2}/\pi$; тогда $f = \pi a_1 b_1 = 1$; $l = 4a_1 E(\varepsilon)$, где $E(t)$ — полный эллиптический интеграл второго рода. Подставляя эти значения в (2) и учитывая, что $A = \Lambda a_1$, $a = \lambda a_1$, получаем (3).

Доказательство следствия 2. Принимаем, что g является правильным n -угольником со стороной длины 1: при этом $l = n$; $f = \frac{n}{4} \text{ctg } \frac{\pi}{n}$. Результат следует из (2).

3. Сделаем еще одно замечание относительно неравенства (2). Предположим, что G и g — замкнутые выпуклые множества; тогда левая часть (2) симметрична относительно множеств G и g , а в правую часть характеристики этих множеств входят различным образом. Однако легко придать неравенству (2) иную форму. Введенные ранее величины λ и Λ будем обозначать λ_g и Λ_g соответственно. Аналогично, через λ_G обозначим максимальное значение t , при котором для некоторого $S_1 \in O(2)$ будет $S_1(tG) \subset g$; через Λ_G обо-

значим минимальное значение t , при котором для некоторого $S_2 \in O(2)$ будет $S_2(tG) \supset g$. Ясно, что

$$\Lambda_G = 1/\lambda_g; \lambda_G = 1/\Lambda_g. \quad (11)$$

Подставляя первое из равенств (11) в (2), получаем

$$L^2 l^2 - 16\pi^2 F f \geq 4\pi^2 f^2 \cdot (1 - \lambda_g \lambda_G)^2 / \lambda_G^2. \quad (9)$$

Аналогично найдем

$$L^2 l^2 - 16\pi^2 F f \geq 4\pi^2 F^2 (1 - \lambda_G \lambda_g)^2 / \lambda_g^2.$$

Перемножив два последних неравенства, получим

Следствие 3. Если G и g — замкнутые выпуклые множества, то

$$L^2 l^2 - 16\pi^2 F g \geq 4\pi^2 F f (1 - \lambda_g \lambda_G)^2 / \lambda_g \lambda_G. \quad (12)$$

Неравенство (12) имеет уже полностью симметричный характер относительно множеств G и g .

Список литературы: 1. Bonnesen T. Les problèmes des isopérimètres et des isopéripheques. — Paris: Gauthier — Villars. — 1920. — 169 p. 2. Бураго Ю. Д., Залгаллер В. А. Геометрические неравенства. — Л.: Наука. — 1980. — 288 с. 3. Сантало Л. Интегральная геометрия и геометрические вероятности. — М.: Наука. — 1983. — 67 с.

Поступила в редакцию 03.10.85

УДК 513.519.1

С. А. ЛАВРЕНЧЕНКО

НЕПРИВОДИМЫЕ ТРИАНГУЛЯЦИИ ТОРА *

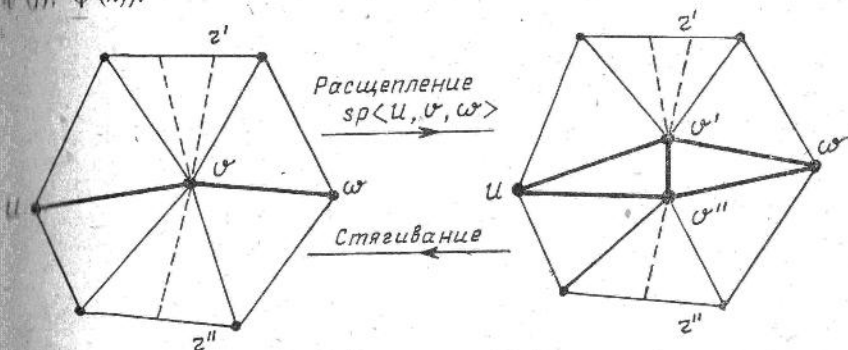
По теореме Штейница [1] все триангуляции сферы порождаются из одной триангуляции с четырьмя вершинами некоторыми последовательностями операций вершинного расщепления, которое будет определено в п. 1. Теорема Барнетта [2] утверждает, что все триангуляции проективной плоскости могут порождаться последовательностями операций вершинного расщепления из двух неприводимых триангуляций. В предлагаемой работе получен аналогичный результат для тора: показано, что все триангуляции тора порождаются из 21-й неприводимой триангуляции последовательностями тех же самых операций вершинного расщепления**.

1. **О п р е д е л е н и я.** *Графом* называется топологическое пространство со структурой 0-мерного или 1-мерного симплициального комплекса; его 0-мерные симплексы называются вершинами, а 1-мерные — ребрами. Топологическая укладка графа G на 2-мер-

* Дипломная работа автора под руководством доцента И. Х. Сабитова в МГУ (1984 г.).

** По сообщению Д. Барнетта автору все неприводимые триангуляции тора также независимо были получены Б. Грюнбаумом (B. Grünbaum) и Р. А. Дюком (R. A. Duke); результаты, однако, не были опубликованы.

многообразия M^2 , разбивающая M^2 на области (грани), называется *триангуляцией* многообразия M^2 с графом G , если каждая область ограничена ровно тремя вершинами и тремя ребрами и две любые области либо имеют одну общую вершину, либо одно общее ребро, либо не имеют общих элементов графа. Из этого определения следует, что в триангуляции нет ребер, у которых оба конца совпадают («петель») и не существует двух различных ребер, соединяющих одну и ту же пару вершин («кратных ребер»). Триангуляции T^1 и T^2 называются изоморфными, если существует взаимно однозначное отображение φ множества вершин T^1 на множество вершин T^2 такое, что в T^1 есть ребро $[i, j]$ (грань $i j k$) тогда и только тогда, когда в T^2 есть ребро $[\varphi(i), \varphi(j)]$ (грань $\varphi(i), \varphi(j), \varphi(k)$).



Звездой вершины v — обозначение: $St(v)$ — триангуляции многообразия называется объединение всех граней, содержащих v . Хорошо известно, что звезда любой вершины триангуляции многообразия гомеоморфна диску. Цикл из n ребер триангуляции называется n -циклом. Пусть вершины u и w делят границу $\partial St(v)$ на два пути (т. е. ломанные без самопересечений, состоящие из ребер и вершин триангуляции) r' и r'' , так что $r' \cup r'' = \partial St(v)$, $r' \cap r'' = \{u, w\}$. Операция *вершинного расщепления* звезды $St(v)$ триангуляции вдоль ребер $[v, u]$ и $[v, w]$ — обозначение: $sp\langle u, v, w \rangle$ — определяется как замена диска $St(v)$ диском $St(v') \cup St(v'')$, который состоит из двух новых вершин v' , v'' и треугольных граней $v'v''u$, $v'v''w$, а также из треугольных граней, определяемых v' и ребрами из r' , v'' и ребрами из r'' (рисунки). Например, триангуляции T_a^1, T_b^1, T_c^1 (табл. 1) получаются из T^1 соответственно расщеплениями $sp\langle 4, 7, 6 \rangle$, $sp\langle 1, 7, 4 \rangle$, $sp\langle 2, 7, 5 \rangle$. Обратная к расщеплению $sp\langle u, v, w \rangle$ операция называется *стягиванием* ребра $[v', v'']$. Триангуляции, ни к какому ребру которых нельзя применить стягивание, получая при этом снова триангуляцию, называются *неприводимыми*. Любая триангуляция тора, очевидно, порождается из некоторой неприводимой триангуляции посредством какой-то последовательности (вообще говоря, не единственной) расщеплений.

Все неприводимые триангуляции тора, обозначенные через T ($1 \leq i \leq 21$), представлены в табл. 1 наряду с некоторыми другими интересными триангуляциями, о которых пойдет речь в работе. Триангуляции изображены на стандартной развертке тора в виде квадрата с отождествленными противоположными сторонами (имеется в виду, что отождествлены обе пары противоположных сторон). Для каждой триангуляции в табл. 1 указаны порядки групп автоморфизмов триангуляции и ее графа, обозначаемые соответственно через Γ и G (автоморфизмом триангуляции называется ее изоморфизм на себя). При помощи ЭВМ эти группы найдены автором в явном виде.

2. Леммы. Установим свойства неприводимых триангуляций тора, на основании которых ниже будет предложен алгоритм их нахождения. Из [3, лемма 3] немедленно следует

Лемма 1. *Неприводимыми триангуляциями тора являются только те триангуляции, у которых каждое ребро входит в некоторый негомологичный нулю 3-цикл.*

Рассмотрим два 3-цикла, пересекающихся ровно в одной вершине v . Пусть при некоторой упорядоченной (по отношению к $St(v)$) нумерации ребер, смежных с v , номера ребер, принадлежащих первому 3-циклу, суть $n'_1 < n'_2$, второму — $n''_1 < n''_2$. Будем говорить, что эти 3-циклы пересекаются трансверсально, если $n'_1 < n''_1 < n'_2 < n''_2$ (или $n''_1 < n'_1 < n''_2 < n'_1$).

Лемма 2. *Если два 3-цикла триангуляции тора пересекаются трансверсально, то они негомологичны.*

Доказательство. Из трансверсальности следует, что индекс пересечения сглаженных путей, соответствующих данным 3-циклам, равен ± 1 (в общем положении). С другой стороны, известно ([4], очевидно, пути — ломаные — без нарушений всех нужных свойств можно сгладить), что индекс пересечения гомологичных замкнутых путей на торе равен нулю. Лемма 2 доказана.

Известна следующая лемма (см. [5]):

Лемма 3. *Пусть для каждой вершины данного плоского строго выпуклого многоугольника помечена одна диагональ, из нее исходящая. Тогда найдутся, по меньшей мере, две помеченные диагонали, пересекающиеся во внутренней точке данного многоугольника.*

Лемма 4. *Для каждой вершины v неприводимой триангуляции тора найдется пара 3-циклов, трансверсально пересекающихся в v , которые негомологичны нулю и друг другу.*

Доказательство. По лемме 1 для любой вершины $u \in \partial St(v)$ ребро $[v, u]$ входит в некоторый негомологичный нулю 3-цикл (v, u, w) , где $w \in \partial St(v)$. Следовательно, для каждой вершины $u \in \partial St(v)$ существует ребро триангуляции, соединяющее эту вершину с какой-то несоседней с u вершиной на $\partial St(v)$. Пометим для каждой вершины $u \in \partial St(v)$ по одному такому ребру. Непрерывно отображая $\partial St(v)$ вместе с помеченными ребрами в плоский строго выпуклый многоугольник так, чтобы граница

и $St(u)$ гомеоморфно отображилась на границу этого многоугольника, а ребра — в отрезки, по лемме 3 получаем два 3-цикла, пересекающихся в u трансверсально. Применение леммы 2 завершает доказательство.

Лемма 5. Если сделать разрезы по двум негомологичным нулю друг другу 3-циклам триангуляции тора, пересекающимся ровно в одной вершине, то получим развертку тора, гомеоморфную диску с 5 вершинами и 6 ребрами триангуляции на границе.

Доказательство. Разрезав тор по одному из данных 3-циклов, получим связное многообразие D_1^2 с эйлеровой характеристикой нуль, край которого состоит из двух не связанных друг с другом компонент. Ниже будет дважды использовано то обстоятельство, что компактное ориентируемое связное двумерное многообразие с точностью до гомеоморфизма определяется эйлеровой характеристикой и числом компонент связности края (см. [6, 7]). В силу этого D_1^2 гомеоморфно цилиндру — сфере с двумя вырезанными дисками B_1 и B_2 , границы которых не пересекаются. По условию, второй из данных 3-циклов негомологичен нулю и первому 3-циклу, значит, он соединяет две вершины на D_1^2 , принадлежащие границам разных вырезанных дисков B_1 и B_2 . Следовательно, разрезание D_1^2 вдоль второго 3-цикла дает связное многообразие D_2^2 с эйлеровой характеристикой 1, край которого связан, поэтому (в силу отмеченного выше обстоятельства из [6, 7]) D_2^2 гомеоморфно диску. Лемма 5 доказана.

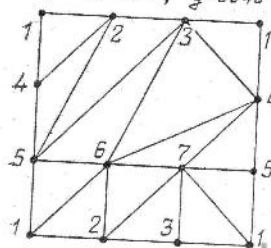
Из лемм 4 и 5 вытекает

Следствие 1. Для любых двух вершин неприводимой триангуляции тора v и u будет $St(v) \cap St(u) \neq \emptyset$.

По лемме 4 через каждую вершину v неприводимой триангуляции тора проходят два 3-цикла, негомологичных нулю и друг другу и трансверсально пересекающихся в v . Согласно лемме 5, разрезав по этим 3-циклам, получим развертку исходной неприводимой триангуляции в виде квадрата с 5 вершинами триангуляции на границе. Например, у всех разверток в табл. 1 граничные вершины суть 1, 2, 3, 4 и 5. Полученную в результате указанных разрезов развертку назовем *стандартной разверткой* для вершин v ; сама вершина v на такой стандартной развертке изображается четырьмя угловыми точками (вершина 1 на всех развертках табл. 1).

На развертке назовем *внутренним* такое ребро, оба конца которого лежат внутри квадрата. Внутреннее ребро $[u, w]$ назовем *выходящим на границу*, если на границе квадрата найдется вершина x такая, что есть ребра $[x, u]$ и $[x, w]$, причем 3-цикл (x, u, w) негомологичен нулю. Например, на стандартной для вершины 1 развертке триангуляции T^1 (табл. 1) внутреннее ребро [6, 7] выходит на границу, так как 5 — граничная вершина и 3-цикл (5, 6, 7) негомологичен нулю; можно найти еще и такие циклы: (3, 4, 7), (1, 6, 7). Из леммы 1 вытекает

$T^1 t=42, g=5040$



$T_{\alpha}^1 t=3, g=144$

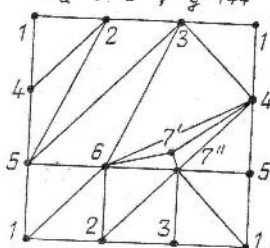
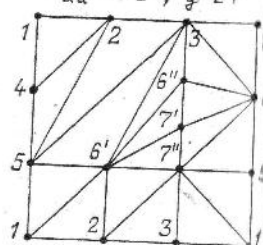
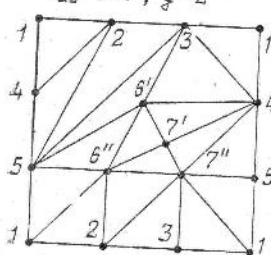


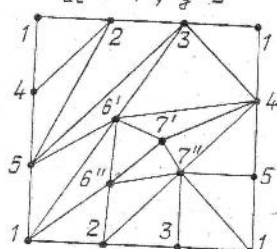
Таблица 1
 $T_{\alpha\alpha}^1 t=2, g=24$



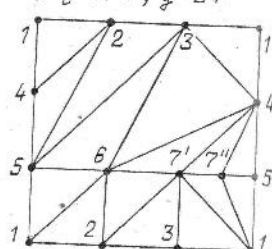
$T_{ab}^1 t=1, g=2$



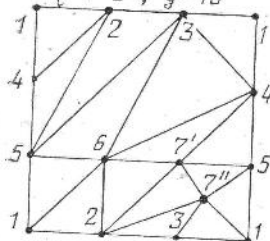
$T_{ac}^1 t=1, g=2$



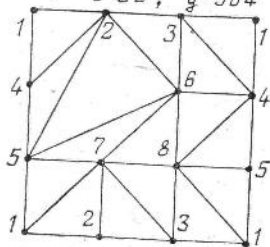
$T_b^1 t=2, g=24$



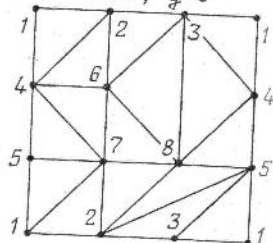
$T_c^1 t=2, g=16$



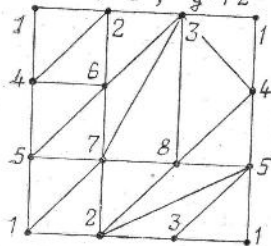
$T^2 t=32, g=384$



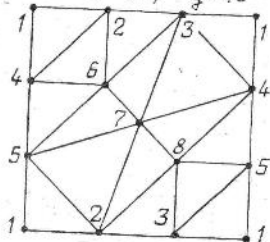
$T^3 t=4, g=8$



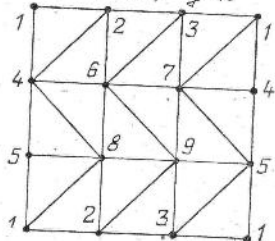
$T^4 t=6, g=72$

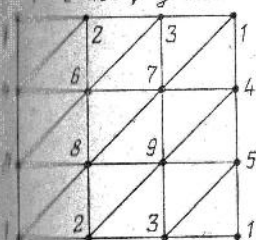
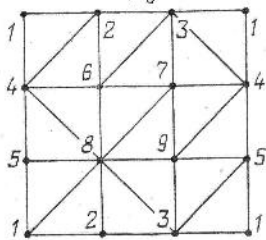
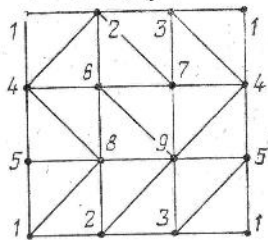
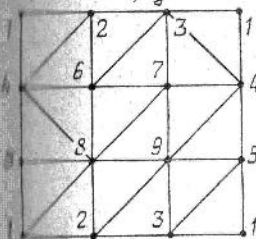
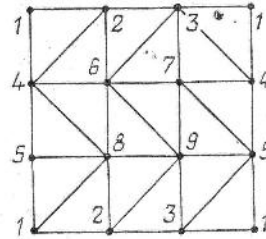
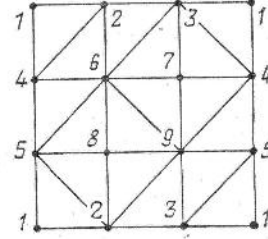
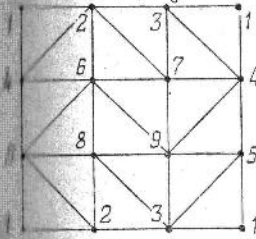
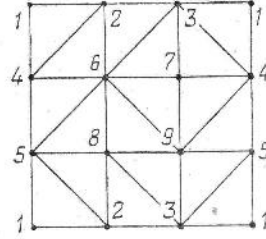
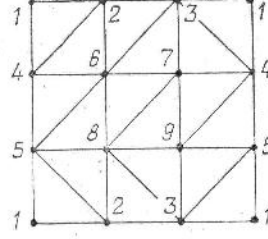
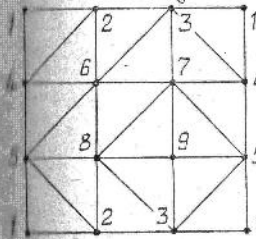
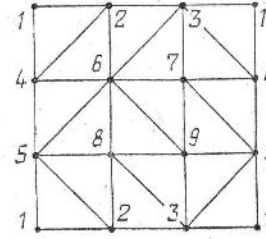
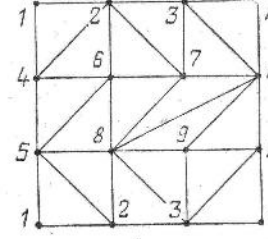


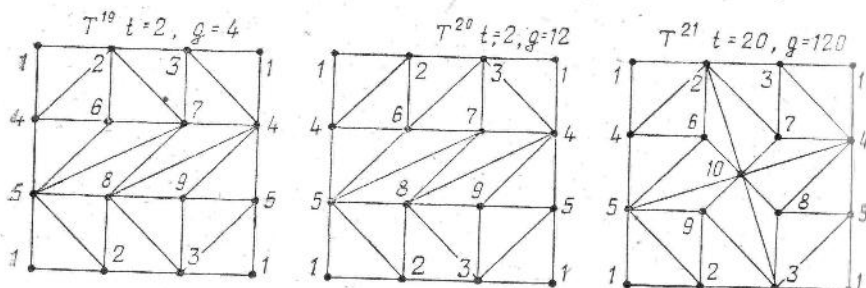
$T^5 t=4, g=48$



$T^6 t=18, g=18$



$T^7 \quad t=108, \quad g=1296$

 $T^8 \quad t=12, \quad g=72$

 $T^9 \quad t=2, \quad g=4$

 $T^{10} \quad t=4, \quad g=8$

 $T^{11} \quad t=2, \quad g=2$

 $T^{12} \quad t=12, \quad g=48$

 $T^{13} \quad t=2, \quad g=4$

 $T^{14} \quad t=2, \quad g=2$

 $T^{15} \quad t=1, \quad g=1$

 $T^{16} \quad t=4, \quad g=8$

 $T^{17} \quad t=2, \quad g=4$

 $T^{18} \quad t=2, \quad g=4$




Следствие 2. На стандартной развертке любой неприводимой триангуляции тора каждое внутреннее ребро обязано выходить на границу.

Степенью вершины v называется число ребер, содержащих v .

Лемма 6. Степень каждой вершины i любой неприводимой триангуляции тора не превосходит 20.

Доказательство. Предположим противное. Тогда на стандартной для i развертке найдется угловая точка, из которой исходит внутрь квадрата, по меньшей мере, четыре ребра, идущие подряд в $St(i)$: $[i, j]$, $[i, k]$, $[i, l]$ и $[i, m]$. В таком случае внутренние ребра $[j, k]$ и $[l, m]$, согласно теореме Жордана, не могут одновременно выходить на границу без пересечения ребер по внутренним точкам. Полученное противоречие доказывает лемму 6.

Лемма 7. Число вершин V у любой неприводимой триангуляции T тора ограничено одной константой, не зависящей от выбора T .

Доказательство. Зафиксируем одну вершину v_0 триангуляции T . Согласно следствию 1, для любой отличной от v_0 вершины i либо существует ребро $[v_0, i]$, либо есть вершина j такая, что существуют ребра $[v_0, j]$ и $[j, i]$. Таким образом, все вершины T суть следующие: v_0 вместе с вершинами $\partial St(v_0)$ и $\partial St(i)$ при всех $i \in \partial St(v_0)$. Тогда из леммы 6 следует, что $V \leq 1 + 20 + 20^2$. (Однако эта оценка не является наилучшей, из теоремы следует, что $V \leq 10$).

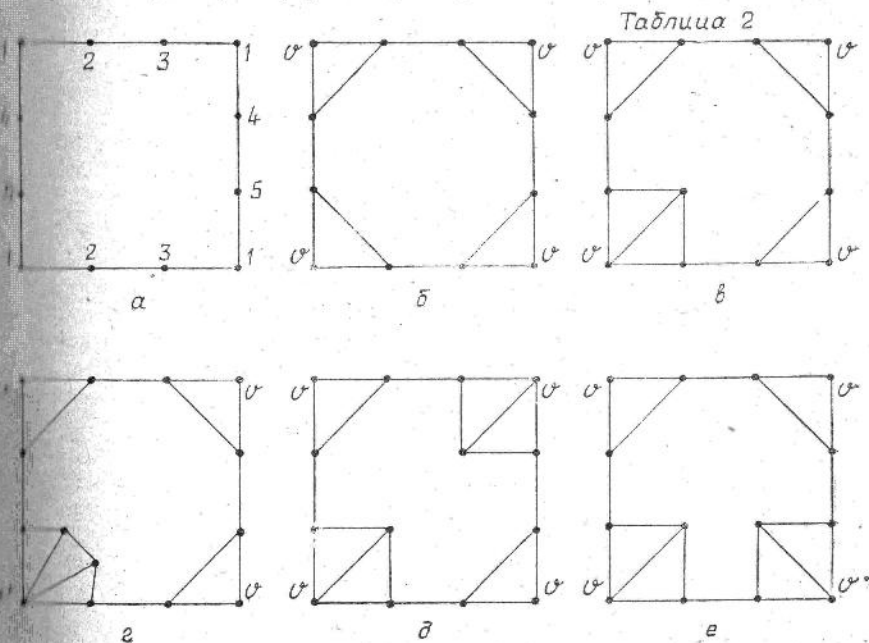
3. Построение всех неприводимых триангуляций тора. В этом разделе излагается алгоритм нахождения всех неприводимых триангуляций тора, точнее, их стандартных разверток.

По леммам 4, 5 любая неприводимая триангуляция может быть представлена стандартной разверткой, поэтому будем отправляться от квадрата с отождествленными противоположными сторонами, имеющего на границе 5 вершин и 6 ребер будущей триангуляции, внутри которого нет ни одной вершины и ни одного ребра. Этот фрагмент стандартной развертки, который изображен на табл. 2, схема a , назовем фрагментом начального уровня. Для восстановления из него разверток всех неприводимых триангуляций дальнейшие разветвления делаются по следующим предписаниям:

1. Зафиксировать какое-то ребро $[u, w]$ полученного фрагмента, к которому примыкает менее двух граней, и, поскольку в любой триангуляции тора к каждому ребру примыкают ровно две грани,

пристроить к нему треугольник (имеется в виду топологический треугольник, т. е. его стороны не обязательно прямые, но обязательно непрерывные линии на развертке) всевозможными допустимыми и комбинаторно различными способами.

2. Если на полученном фрагменте имеются внутренние ребра (одно или несколько), не выходящие на границу, то все они должны быть выведены на границу всевозможными допустимыми и комбинаторно различными способами. Вывести внутреннее ребро $[u, w]$ фрагмента на границу — значит зафиксировать на его границе какую-то вершину x будущей триангуляции и провести ребра $[x, u]$



и $[x, w]$ (если их еще не было) так, чтобы 3-цикл (x, u, w) не ограничивал области квадрата (например, см. в табл. 1: на T^1 для ребра $[6, 7] — u = 6, w = 7 —$ будет $x = 1, 3$ или 5).

Алгоритм состоит в следующем. К фрагменту начального уровня применяется предписание 1. В результате соответствующего разветвления получается набор фрагментов разверток, который назовем первым уровнем. После этого к каждому фрагменту первого уровня согласно следствию 2 применяется предписание 2, и в результате разветвления получают фрагменты второго уровня, причем требуется, чтобы каждый фрагмент первого (предыдущего) уровня, в котором нет внутренних ребер, не выходящих на границу, перешел во фрагмент второго (следующего) уровня без изменений. К каждому фрагменту второго уровня снова применяется предписание 1, в результате чего получают фрагменты третьего уровня, применение к которым предписания 2 с вышеуказанным

требованием дает фрагменты четвертого уровня и т. д. В любом текущем фрагменте для каждого 3-цикла (x_1, x_2, x_3) , ограничивающего область исходного квадрата, считается, что есть грань $x_1x_2x_3$.

Что касается условий окончания разветвлений, то указанные предписания 1 и 2 больше не применяются к полученному фрагменту, во-первых, если этот фрагмент не может быть фрагментом никакой неприводимой триангуляции, т. е. в нем есть петли, кратные ребра или какое-то внутреннее ребро нельзя вывести на границу без образования петель, кратных ребер или пересечения ребер по их внутренним точкам и, во-вторых, если этот фрагмент уже представляет из себя триангуляцию (если она неприводима, то фрагмент заносится в отдельный каталог).

Среди найденных неприводимых триангуляций могут, конечно, оказаться изоморфные, поэтому после завершения перебора в полученном каталоге надо оставить только по одному представителю от каждого класса изоморфных триангуляций. Описанный алгоритм корректен в силу леммы 7.

Изложенный алгоритм можно существенно упростить. Из формулы Эйлера следует [8], что среднее арифметическое степеней всех вершин любой триангуляции тора равно 6. Поэтому для любой неприводимой триангуляции T тора могут представиться только следующие три случая:

Случай 1. В триангуляции T есть вершина v степени 4.

Случай 2. В триангуляции T нет вершин степени 4, но есть вершина v степени 5.

Случай 3. Каждая вершина триангуляции T имеет степень 6. Вспомним, что для каждой вершины v неприводимой триангуляции тора существует стандартная для v развертка. Значит, описанный алгоритм можно выполнить отдельно для каждого из трех случаев и отправляться надо от следующих начальных уровней: табл. 2, схема б — для случая 1, схема в — для случая 2, схемы г, д и е — для случая 3. В случае 1 для каждого 4-цикла (x_1, x_2, x_3, x_4) полученного фрагмента, ограничивающего область $\mathfrak{D}$ квадрата с вершиной $u \in \mathfrak{D}$, предполагается, что есть грани ux_1x_2 , ux_2x_3 , ux_3x_4 и ux_4x_1 . В случае 3 существенно используется то обстоятельство, что степени всех вершин равны 6 — если из какой-то вершины на фрагменте исходят 6 ребер, то можно сразу нарисовать ее звезду.

Выполнение этого алгоритма позволило получить полный каталог стандартных разверток всех (с точностью до изоморфизма) неприводимых триангуляций тора. Итак, доказана

Теорема. *Существует ровно 21 неприводимая триангуляция тора, а именно: триангуляции T_i ($1 \leq i \leq 21$), представленные на табл. 1.*

Заметим попутно, что выполнение по существу такого же алгоритма для проективной плоскости N_1 привело автора к новому доказательству упомянутой в начале статьи теоремы Барнетта. (Стан-

дартная развертка неприводимой триангуляции N_1 получается после разрезания по какому-нибудь негомологичному нулю 3-циклу).

4. Примеры. Покажем, как можно находить триангуляции тора, получаемые вершинными расщеплениями из некоторой триангуляции T . Этот поиск существенно упрощается, если известна группа автоморфизмов $\text{Aut}(T)$ триангуляции T . В самом деле, если какой-то автоморфизм из $\text{Aut}(T)$ отображает ребра $[i, j]$, $[i, k]$ на ребра $[i_1, j_1]$, $[i_1, k_1]$, то, очевидно, триангуляции $\text{sp}\langle j, i, k \rangle(T)$ и $\text{sp}\langle j_1, i_1, k_1 \rangle(T)$ изоморфны. Группа $\text{Aut}(T^1)$ действует транзитивно на множестве вершин, и стабилизатор любой вершины изоморфен циклической группе Z_6 . Следовательно, T_a^1 , T_b^1 , T_c^1 исчерпывают с точностью до изоморфизма все триангуляции тора, получаемые одним произвольным расщеплением из T^1 . Итак, доказано

Предложение 1. Триангуляции T^1 , T_a^1 , T_b^1 , T_c^1 , T^2 , T^3 , T^4 и T^5 (табл. 1) исчерпывают все триангуляции тора с числом вершин $V \leq 8$.

Граф называется n -связным, если из него необходимо удалить не менее n вершин, чтобы он распался на отдельные, не связанные друг с другом компоненты или стал тривиальным (тривиальным называется граф, состоящий из одной изолированной вершины). Триангуляция называется n -связной, если ее граф n -связен.

Найдем, например, множество всех 4-связных триангуляций, получаемых из 3-связной T_a^1 одним расщеплением. Триангуляция T_a^1 является 3-связной, так как достаточно удалить 3 вершины — 4, 7'', 6 — границы $\partial \text{St}(7')$, чтобы граф триангуляции T_a^1 распался на не связанные друг с другом компоненты. Значит, для того чтобы триангуляция $\text{sp}\langle u, v, w \rangle(T_a^1)$ была 4-связной, необходимо, чтобы она принадлежала множеству $\Omega_1(\text{St}(7'))$ всех (с точностью до изоморфизма) триангуляций, получаемых из T_a^1 одним расщеплением $\text{sp}\langle u, v, w \rangle$ таким, что $u = 7'$, $v \in \partial \text{St}(7')$ и $w \notin \partial \text{St}(7')$, т. е. ломаная, состоящая из двух ребер $[u, v]$ и $[v, w]$, должна трансверсально пересекать границу диска $\text{St}(7')$. Группа $\text{Aut}(T_a^1)$ изоморфна циклической группе Z_3 с образующей (1) (2 3 5) (4 7'' 6) (7'). Поскольку вершины 4 и 7'' посредством соответствующих автоморфизмов можно перевести в вершину 6, а вершина 7' инвариантна относительно действия группы $\text{Aut}(T_a^1)$, то для получения множества $\Omega_1(\text{St}(7'))$ достаточно ограничиться следующими расщеплениями звезды $\text{St}(6)$: $\text{sp}\langle 7', 6, 3 \rangle$, $\text{sp}\langle 7', 6, 5 \rangle$, $\text{sp}\langle 7', 6, 1 \rangle$, $\text{sp}\langle 7', 6, 2 \rangle$. Нетрудно убедиться, что триангуляции $\text{sp}\langle 7', 6, 3 \rangle(T_a^1) = T_{aa}^1$, $\text{sp}\langle 7', 6, 5 \rangle(T_a^1) = T_{ab}^1$, $\text{sp}\langle 7', 6, 1 \rangle(T_a^1) = T_{ac}^1$ и $\text{sp}\langle 7', 6, 2 \rangle(T_a^1)$ являются 4-связными и триангуляции T_{aa}^1 и $\text{sp}\langle 7', 6, 2 \rangle \times (T_a^1)$ изоморфны. Следовательно, множество $\Omega_1(\text{St}(7')) = \{T_{aa}^1$,

T_{ab}^1, T_{ac}^1 совпадает с искомым множеством всех 4-связных триангуляций, получаемых из 3-связной T_a^1 одним расщеплением.

Согласно [8], будем говорить, что граф триангуляции тора укладывается на торе единственным образом, если все его укладки на торе изоморфны между собой (как триангуляции тора). У всех данных в [8] примеров триангуляций тора, графы которых укладываются на торе неединственным образом, наименьшее число вершин — 19. Естественно возникает вопрос — насколько можно уменьшить это число?

Предложение 2. *Наименьшее число вершин, могущее быть у триангуляции тора, граф которой укладывается на торе неединственным образом, равно 9.*

Доказательство. Графы всех триангуляций тора с числом вершин $V \leq 8$, согласно предложению 1, укладываются на торе единственным образом. С другой стороны, неизоморфные триангуляции T_{ab}^1 и T_{ac}^1 (их неизоморфность следует из того факта, что в T_{ab}^1 есть грань, содержащая только вершины степени 7, именно — грань 4, 5, 7", а в T_{ac}^1 такой грани нет) с девятью вершинами имеют изоморфные графы. Изоморфизм графов этих триангуляций может быть задан в явном виде следующей перестановкой вершин:

$$\begin{matrix} T_{ab}^1: (1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6' & 6'' & 7' & 7'') \\ T_{ac}^1: (5 & 3 & 2 & 7'' & 1 & 6'' & 6' & 7' & 4) \end{matrix}$$

Список литературы: 1. Steinitz E., Rademacher H. Vorlesungen über die Theorie der Polyeder.— Berlin: Springer.— 1934.— S. 20—25. 2. Barnette D. Generating the triangulations of the projective plane // J. Combin. Theory.— 1982.— В 33.— Р. 222—230. 3. Barnette D. All triangulations of the projective plane are geometrically realizable in E^4 // Israel J. Math.— 1983.— 44.— Р. 75—87. 4. Шварц Дж. Дифференциальная геометрия и топология.— М.: Мир, 1970.— 224 с. 5. Александров А. Д. Выпуклые многогранники.— М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1950.— 428 с. 6. Александров П. С., Ефремович В. А. Очерк основных понятий топологии.— М.; Л.: ОНТИ 1936.— 93 с. 7. Бакельман И. Я., Вернер А. Л., Кантор Б. Е. Введение в дифференциальную геометрию «в целом».— М.: Наука, 1973.— 440 с. 8. Negami S. Uniqueness and faithfulness of embedding of toroidal graphs // Discrete Math.— 1983.— 44.— Р. 161—180.

Поступила в редколлегию 21.03.84

УДК 514.172

В. В. МАКЕЕВ

**СТЕПЕНЬ ОТОБРАЖЕНИЯ В НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ
КОМБИНАТОРНОЙ ГЕОМЕТРИИ**

Понятие степени отображения неоднократно применялось разными авторами для доказательства теорем комбинаторной геометрии [1—3]. Рассмотрим еще два таких применения.

1. Пусть на стандартной сфере $S^{n-1} \subset R^n$ с центром в начале координат зафиксировано покрытие этой сферы ее $n+1$ измеримыми подмножествами F_i и пусть зафиксировано компактное выпуклое тело $K \subset R^n$. Свяжем с этим покрытием непрерывное отображение $\Phi: R^n \rightarrow \Delta$, где Δ есть n -мерный симплекс в R^{n+1} , определенный как $\Delta = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in R^{n+1} | x_i \geq 0 \text{ при } i = 1, \dots, n+1, \sum_{i=1}^{n+1} x_i = 1\}$. Обозначим через $C(F_i)$ конус над F_i

с вершиной в центре сферы и положим для каждого $a \in R^n$: $\Phi(a) = (V(K \cap (C(F_1) + a)), \dots, V(K \cap (C(F_{n+1}) + a))) \cdot (\sum_{i=1}^{n+1} V(K \cap (C(F_i) + a)))^{-1}$, т. е. координатами точки $\Phi(a)$ служат доли объема тела K , попавшие в конусы $C(F_i)$ после того, как эти конусы параллельно перенесли так, чтобы их общей вершиной была точка a .

Под стандартным разбиением сферы S^{n-1} будем понимать ее покрытие замкнутыми множествами, являющимися центральными проекциями гиперграней вписанного в S^{n-1} правильного симплекса.

В [4, 5] показано, что для стандартного разбиения сужение отображения Φ на достаточно большой шар D^n обладает свойством $\Phi(\partial D^n) \subset \partial \Delta$, а отображение пар $\Phi: (D^n, \partial D^n) \rightarrow (\Delta, \partial \Delta)$ имеет степень один, а потому Φ сюръективно. Кроме этого результата в дальнейшем понадобится

Лемма. Пусть покрытие сферы S^{n-1} состоит из $n+1$ замкнутых множеств $F_1, \dots, F_{n+1}$, причем $\bigcap_{i=1}^{n+1} F_i = \emptyset$. Тогда существует такое $N > 0$, что при $|a| > N$ заведомо $\Phi(a) \in \partial \Delta$.

Доказательство. Определим на S^{n-1} непрерывную функцию f , положив $f(x)$ равным угловому расстоянию от точки $x \in S^{n-1}$ до самого удаленного от x множества F_i . При этом $\delta = \inf_{x \in S^{n-1}} f(x) > 0$. Пусть некоторая внутренняя точка тела K со-

вмещена в центр O сферы S^{n-1} . По выбору δ для любого отличного от нуля $a \in R^n$ сферическая шапочка S^{n-1} с центром в $-a/|a|$ и угловым радиусом δ не задевает хотя бы одного из множеств F_i , поэтому $K \subset \bigcup_{i \neq i} (C(F_i) + a)$ при $|a| > \frac{\text{diam } K}{\sin \delta}$, следовательно, $\Phi(a) \in \partial \Delta$.

Под деформацией F_i множества $F \subset S^{n-1}$ будем понимать такое однопараметрическое семейство $F_t (t \in [0, 1])$ подмножеств S^{n-1} , что $F_0 = F$ и F_t непрерывно в метрике Хаусдорфа зависит от параметра t , который будем понимать как время. Под деформацией покрытия $S^{n-1} = \bigcup_{i=1}^k F_i$ понимаем такую совокупность деформаций множеств F_i , что вместе они в любой момент времени образуют покрытие сферы S^{n-1} .

Прибавлением расширяющегося шара с центром в некоторой точке множества любое подмножество $F \subset S^{n-1}$ можно продеформировать в S^{n-1} . Соответственно любое покрытие S^{n-1} можно продеформировать в тривиальное покрытие: $F_i = S^{n-1}$ при всех i .

Теорема 1. Пусть покрытие $S^{n-1} = \bigcup_{i=1}^{n+1} F_i$ сферы замкнутыми множествами получено деформацией из стандартного разбиения S^{n-1} . Если при такой деформации множества $(F_i)_t$ все время оставались замкнутыми и их общее пересечение в любой момент времени было пусто, то $\Phi(R^n) = \Delta$.

Доказательство. Любую деформацию замкнутого множества $F \subset S^{n-1}$ можно-сколь угодно близко в метрике Хаусдорфа ρ приблизить такой деформацией в классе замкнутых множеств, оставляя прежними F_0 и F_1 , что для любого открытого $G \subset S^{n-1}$ величина $\mu_{n-1}(G \cap F_t)$ будет непрерывно зависеть от t , где μ_{n-1} — площадь на S^{n-1} . Для этого достаточно множества F_t заменить замыканиями их $\varepsilon(t)$ -окрестностей, где $\varepsilon(t)$ — непрерывная на $[0, 1]$ функция; $\varepsilon(0) = \varepsilon(1) = 0$; при $t \in (0, 1)$ всегда $\varepsilon(t) > 0$; $\varepsilon(t) > \rho(F_0, F_t)$ и при достаточно малых t $\varepsilon(t) > \rho(F_t, F_{1-t})$. Последнее требование к $\varepsilon(t)$ обеспечивает непрерывность $\mu_{n-1}(G \cap F_t)$ при $t = 0$ и $t = 1$; во всех остальных точках отрезка $[0, 1]$ непрерывность очевидна. Если новые деформации достаточно близки к исходным, то, очевидно, для них также выполняется условие $\bigcap_{i=1}^{n+1} (F_i)_t = \emptyset$ при $t \in [0, 1]$. В дальнейшем считаем, что деформация покрытия обладает вышеуказанным свойством непрерывности изменения меры пересечения с открытыми множествами.

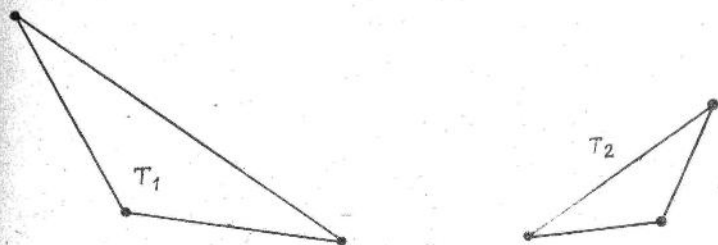
Так как в процессе деформации множества $(F_i)_t$ остаются замкнутыми, непрерывно изменяются в метрике Хаусдорфа и в любой момент времени $\bigcap_{i=1}^{n+1} (F_i)_t = \emptyset$, то, по соображениям компактности и лемме, существует постоянная N , которая обслуживает сразу всю деформацию совокупности F_i , т. е. при $|a| > N$ выполняется $\Phi_i(a) \in \partial\Delta$.

Пусть D_N — шар в R^n радиуса N с центром в начале. По определению деформации покрытия F_i отображение $\Phi_i: (D_N, \partial D_N) \rightarrow (\Delta, \partial\Delta)$ есть гомотопия отображения пар. Как уже упоминалось, для стандартного разбиения сферы S^{n-1} отображение $\Phi_0: (D_N, \partial D_N) \rightarrow (\Delta, \partial\Delta)$ имеет степень один. Поэтому $\Phi_1: (D_N, \partial D_N) \rightarrow (\Delta, \partial\Delta)$ имеет степень один, а значит, Φ_0 сюръективно.

Теорема 2. Пусть $S^{n-1} = \bigcup_{i=1}^{n+1} F_i$ — покрытие сферы S^{n-1} ее $n+1$ замкнутыми подмножествами и для некоторых индексов i и j выполняется условие $F_i \cap F_j = \emptyset$. Тогда это покрытие нельзя продеформировать в стандартное так, чтобы в любой момент времени t было $\bigcap_{i=1}^{n+1} (F_i)_t = \emptyset$.

Доказательство. Для выпуклого тела K и покрытия (F_i) , $i = 1, \dots, n + 1$, отображение $\Phi: R^n \rightarrow \Delta$ не является отображением на, так как в ту точку симплекса Δ , у которой $x_i = x_j = 1/2$, ничего не переходит, ибо выпуклое тело нельзя покрыть двумя пересекающимися в единственной точке замкнутыми конусами $C(F_i)$ и $C(F_j)$, поместив в каждой из них половину объема тела. Следовательно, по теореме 1 это покрытие нельзя продеформировать в стандартное так, чтобы в любой момент времени было $\bigcap (F_i)_t = \emptyset$.

2. В [6] доказано, что на плоскости во всякую гладкую замкнутую кривую можно вписать треугольник, положительно гомотетичный данному. Условие гладкости существенно: в треугольник T_1 нельзя вписать положительно гомотетичный T_2 треугольник (рисунк).



Перенесем результат [6] на n -мерные гладкие выпуклые замкнутые поверхности:

Теорема 3. Во всякое выпуклое тело $K \subset R^n$ с гладкой границей ∂K можно вписать симплекс, положительно гомотетичный данному. При $n \geq 3$ такой симплекс может быть не единственным.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай строго выпуклого тела K . Пусть $D = \{x \in R^n \mid |x| \leq 1\}$ — стандартный единичный шар в R^n , а $i: D \rightarrow D$ — тождественное отображение шара на себя. Определим непрерывное отображение $f: D \rightarrow K$ следующим образом. Для $x \in \partial D$ в качестве $f(x)$ выберем точку на границе K с той же внешней нормалью. В качестве $f(0)$ выберем произвольную внутреннюю точку K . Продолжим отображение f на K , доопределив его на отрезках OX , где $X \in \partial D$, по линейности. Рассмотрим соединяющую i и f линейную гомотопию $f_t = t \cdot f + (1-t) \cdot i$, где $0 \leq t \leq 1$. Очевидно, $f_0 = i$ и $f_1 = f$. По определению f_t для любого t тело $f_t(D)$ строго выпукло и имеет гладкую границу.

Пусть Δ — описанный в п. 1 симплекс в R^{n+1} . Пусть T — симплекс, который мы хотим вписать в K посредством положительной гомотетии. Выберем внутри T некоторую точку и проведем из нее лучи $l_1, \dots, l_{n+1}$ во все вершины симплекса T . Определим непрерывное отображение $\Phi: D \times [0, 1] \rightarrow \Delta$ по следующему правилу. Для $(x, t) \in D \times [0, 1]$ проведем через точку $f_t(x) \in f_t(D)$ параллельные и одинаково направленные с l_i лучи и обозначим

через $x_i(t)$ длину отсекаемого на l^i телом $f_i(D)$ отрезка. Из гладкости $f_i(D)$ следует, что одно из чисел $x_i(t)$ всегда больше нуля.

Положим $\Phi(x, t) = (x_1(t), \dots, x_{n+1}(t)) / \sum_{i=1}^{n+1} x_i(t)$.

Из строгой выпуклости $f_i(D)$ следует, что отображение Φ непрерывно, а из выпуклости $f_i(D)$ следует, что $\Phi(\partial D \times [0, 1]) \subset \partial \Delta$. Для доказательства теоремы достаточно доказать, что $\Phi(D \times 1) = \Delta$. Покажем, что сужение $\Phi: (D \times 1, \partial D \times 1) \rightarrow (\Delta, \partial \Delta)$ имеет степень один. Так как это сужение гомотопно $\Phi(D \times 0, \partial D \times 0) \rightarrow (\Delta, \partial \Delta)$, то достаточно доказать, что последнее имеет степень один. Но $\Phi: \text{int } D \times 0 \rightarrow \Delta$ есть гомеоморфизм, так как для любого невырожденного n -мерного симплекса существует единственный положительно гомотетичный ему симплекс, вписанный в шар D .

Пусть K — произвольное выпуклое тело с гладкой границей и K_i — последовательность строго выпуклых тел с гладкой границей, сходящаяся к телу K в метрике Хаусдорфа. Пусть T_i — положительно гомотетичный T , вписанный в K_i симплекс. Так как все $T_i \subset K_i$, то из последовательности T_i можно выделить сходящуюся к положительно гомотетичному T симплексу T' подпоследовательность. По построению все вершины T' лежат на границе, и из гладкости K следует невырожденность T' , так как для всякой точки $T' \subset K$ одно из определенных выше чисел $x_i > 0$.

З а м е ч а н и е. Как видно из доказательства, теорема может быть распространена на произвольные выпуклые тела, опорный конус которых в каждой граничной точке содержит внутри себя один из лучей l_i .

Список литературы: 1. Stein S. An application of topology to convex bodies // Math. Ann. — 1956. — V. 132. — P. 148—149. 2. Steinhau H. Quelques applications des principes topologiques a la géométrie des corps convexes // Fund. Math. — 1955. — V. 41. — P. 284—290. 3. Grünbaum B. On some properties of convex sets // Colloq. Math. — 1961. — V. 8. — P. 39—42. 4. Кесельман В. О. Об одном свойстве деления измеримых множеств ортантами: Тез. докл. Всесоюз. конф. — Львов. — 1981. — С. 113—114. 5. Макеев В. В. Теорема о делении объема выпуклого тела плоскостями // Геометрия. — 1984. — 120 с. 6. Kramer Horst, Nemeth A. B. Triangles inscribed in smoth closed arcs // Rev. annal. numer. et theor. approxim. — 1972. — V. 1. — P. 63—71.

Поступила в редколлегию 28.05.88

УДК 513

В. В. МОЖАРСКИЙ

**РЕБРО ВОЗВРАТА ПЕРВОГО РОДА С ТОЧКОЙ
АСИМПТОТИЧЕСКОГО ТИПА**

Пусть аналитическая поверхность σ отрицательной гауссовой кривизны несет на себе особую линию γ без особых точек и точек распрямления, причем γ обладает особенностью порядка 2. По-

следнее означает, что существует такая аналитическая параметризация $r(s, v)$ поверхности σ , что вторая производная r по направлению, ортогональному γ , отлична от нуля. Предположим далее, что на γ существует конечный предел $a(s)$ гауссовой кривизны σ (s — длина дуги γ), а соприкасающаяся плоскость γ касается σ в том смысле, что содержит в себе в качестве полуплоскости контингент σ в соответствующей точке γ . Ранее* рассматривалось строение сети асимптотических поверхности σ вблизи особой линии γ , обладающей перечисленными выше свойствами. Оказалось, что если $b(s) \neq 0$ всюду на γ , где $b(s) = a(s) + \kappa^2(s)$, а κ — кручение γ (γ в этом случае названа* ребром возврата первого рода), то γ огибает оба семейства асимптотических σ . Если же $b(s) \equiv 0$ (ребро возврата асимптотического типа в соответствии с*) и γ не имеет точек уплощения, то γ трансверсально пересекает асимптотические одного семейства, не имея общих точек с асимптотическими второго семейства.

Интересно рассмотреть также случай, когда $b(s) = 0$ лишь в одной точке γ (не ограничивая общности, можно предполагать, что $b(0) = 0$ и $b(s) \neq 0$ при $s \neq 0$), т. е. случай, когда на ребре возврата первого рода имеется точка асимптотического типа. Очевидно, для этого достаточно рассмотреть лишь окрестность точки $s = 0$, ибо строение сети асимптотических при $s \neq 0$ описывается результатами работы*. В настоящей работе будет доказана

Теорема. Пусть аналитическая поверхность σ несет на себе линию γ с особенностью порядка 2, причем на γ нет особых точек, а также точек распрямления и уплощения. Предположим, что соприкасающаяся плоскость γ касается поверхности σ , на γ существует конечный предел $a(s)$ гауссовой кривизны σ , причем $b(0) = 0$, $b(s) \neq 0$ при $s \neq 0$ (где $b(s) = a(s) + \kappa^2(s)$, κ — кручение γ) и $b_{ss}(0) \neq 0$. Тогда через точку $s = 0$ особой линии γ проходит асимптотическая по одной асимптотической из каждого семейства асимптотических поверхности σ и при этом одна из асимптотических касается γ , в то время как другая асимптотическая трансверсально пересекает γ .

Для доказательства выберем следующую параметризацию $r(s, v)$ поверхности σ . В качестве параметра s возьмем длину дуги кривой γ , за линии v примем сечения поверхности σ нормальными плоскостями кривой γ , причем параметр v выберем таким образом, чтобы $v = 0$ на γ и $r_{vv} \neq 0$ на γ . Будем предполагать, что $r \in C^\infty$. Тогда $r(s, v)$ можно представить в виде

$$r(s, v) = \rho(s) + \sum_{j=2}^{\infty} r_j(s) v^j, \quad (1)$$

где через $\rho(s)$ обозначен радиус-вектор кривой γ . Далее через κ и κ будем обозначать кривизну и кручение γ , а через τ, ν, β —

* Можарский В. В. Линия с особенностью порядка 2 на поверхности отрицательной гауссовой кривизны // Укр. геометр. сб.—1983.— Вып. 26.— С. 110—119.

орты касательной, главной нормали и бинормали γ . В силу предположений теоремы

$$k(s) \neq 0, \kappa(s) \neq 0, (\tau r_j) = 0, \forall j \geq 2. \quad (2)$$

Было показано*, что если соприкасающаяся плоскость γ касается σ , то

$$r_2 = \alpha v, \alpha(s) \neq 0 \quad (3)$$

и $a(s) = \lim_{v \rightarrow 0} K(s, v) = -k\alpha^{-3}(\beta r_3)^2 - \kappa^2$ (где K — гауссова кривизна σ), причем значение $a(s)$ не зависит от направления, по которому приближаемся к соответствующей точке γ . Следовательно,

$$b(s) = a(s) + \kappa^2(s) = -k\alpha^{-3}(\beta r_3)^2. \quad (4)$$

Дважды дифференцируя (1) по s и по v , находим с учетом (2), (3) функции

$$l = (r_{ss}r_sr_v) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=2}^{\infty} l_{ij} s^i v^j, \quad m = (r_{sv}r_sr_v) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=2}^{\infty} m_{ij} s^i v^j, \\ n = (r_{vv}r_sr_v) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=2}^{\infty} n_{ij} s^i v^j, \quad (5)$$

где

$$l_{02} = -\frac{k_0}{2}(\beta_0 r_{30}), \quad m_{02} = \kappa_0 \alpha_0^2, \quad n_{02} = \frac{\alpha_0}{2}(\beta_0 r_{30}), \\ l_{12} = -\frac{k'_0}{2}(\beta_0 r_{30}) - \frac{k_0}{2}(\beta r_3)_0', \quad n_{12} = -\frac{\alpha'_0}{2}(\beta_0 r_{30}) - \frac{\alpha_0}{2}(\beta r_3)_0',$$

а нижний индекс 0 означает, что значение соответствующей функции берется при $s=0$. Поскольку $b(0)=0$, то (см. (2)–(4)) $(\beta r_3)_0 = 0$. Отсюда, а также из условия $b_{ss}(0) \neq 0$ следует $(\beta r_3)_0' \neq 0$. Но это означает, что

$$l_{02} = n_{02} = 0, \quad m_{02} \neq 0, \quad l_{12} \neq 0, \quad n_{12} \neq 0. \quad (6)$$

Рассмотрим аналитическую функцию

$$\Delta = m^2 - \ln = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=4}^{\infty} \left[\sum_{p=0}^i \sum_{r=2}^{j-2} (m_{pr} m_{i-p, j-r} - l_{pr} n_{i-p, j-r}) \right] s^i v^j. \quad (7)$$

Так как $\Delta = v^4 \Delta_1$, $\Delta_1 \in C^\omega$ и $\Delta_1(0, 0) = m_{02} \neq 0$, то функция $\sqrt{\Delta}$ является аналитической. Следовательно, $\sqrt{\Delta}$ можно представить в виде

$$\sqrt{\Delta} = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=2}^{\infty} (m_{ij} + h_{ij}) s^i v^j. \quad (8)$$

Возводя (8) в квадрат и сравнивая полученное разложение Δ с (7), находим

$$\sum_{p=0}^i \sum_{r=2}^{j-2} (2h_{pr} m_{i-p, j-r} + h_{pr} h_{i-p, j-r} + l_{pr} n_{i-p, j-r}) = 0, \quad i \geq 0, j \geq 4. \quad (9)$$

* Можарский В. В. Линия с особенностью порядка 2 на поверхности отрицательной гауссовой кривизны // Укр. геометр. сб.—1983.—Вып. 26.—С. 110–119.

Отсюда, принимая во внимание (6), при $i = 0, j = 4$ имеем $2m_{02}h_{02} + h_{02}^2 = 0$. В дальнейшем нас будет интересовать поведение обоих семейств, асимптотических поверхности σ . Поэтому, не ограничивая общности, можно считать $h_{02} = 0$ (10), так как этого всегда можно добиться изменением порядка рассмотрения семейств асимптотических. Тогда, поскольку $m_{02} \neq 0$, (9) представляют собой рекуррентные соотношения, позволяющие однозначно определить все коэффициенты h_{ij} , $i \geq 0, j \geq 2$. В частности, при $i = 0, j = 5$ и $i = 1, j = 4$ получаем соответственно

$$h_{03} = 0, h_{12} = 0. \quad (11)$$

Уравнение асимптотических линий поверхности σ имеет вид

$$lds^2 + 2mds dv + ndv^2 = 0. \quad (12)$$

Для одного из семейств асимптотических $v_s = f_1(s, v) g_1^{-1}(s, v)$, где

$$f_1 = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (2m_{i,j+2} + h_{i,j+2}) s^i v^j, \quad g_1 = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} n_{i,j+2} s^i v^j. \quad (13)$$

Следовательно, асимптотические этого семейства являются интегральными кривыми дифференциального уравнения $s_v = \mu(s, v)$, где $\mu = g_1 f_1^{-1}$. Поскольку $g_1, f_1 \in C^\infty$ и $f_1(0, 0) = 2m_{02} \neq 0$, то $\mu \in C^\infty$. Это означает, что задача Коши $s_v = \mu(s, v)$, $s(0) = 0$ имеет единственное решение, т. е. через точку $s = 0$ особой линии проходит единственная асимптотическая рассматриваемого семейства.

Далее, μ представима в виде $\mu = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \mu_{ij} s^i v^j$. Подставляя разложения f_1, g_1 в выражение для μ и учитывая (10), находим $\mu_{00} = 0, \mu_{01} = -n_{12}(2m_{02})^{-1}, \mu_{10} = -n_{03}(2m_{03})^{-1}$.

Пусть во внутренних координатах асимптотическая линия рассматриваемого семейства, проходящая через точку $s = 0$ ребра возврата, задается функцией $s = s(v)$. Тогда $s(v) = s_1 v + s_2 v^2 + o(v^2)$. Подстановка этого равенства вместе с разложением μ в уравнение $s_v = \mu$ дает $s_1 = 0, s_2 = -n_{03}(4m_{02})^{-1}$. Следовательно, радиус-вектор рассматриваемой асимптотической можно представить в виде $r(s(v), v) = \rho_0 + (s_2 \tau + \frac{1}{2} \alpha_0 \nu_0) v^2 + o(v^2)$. Поскольку $\alpha_0 \neq 0$, то это означает, что данная асимптотическая не касается особой линии.

Из (12) следует, что второе семейство асимптотических задается дифференциальным уравнением:

$$v_s = f_2(s, v) g_1^{-1}(sv), \quad (14)$$

где $f_2 = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} h_{i,j+2} s^i v^j$, а g_1 определяется с помощью (13). В силу (6), (10) точка $s = v = 0$ является особой точкой дифференциаль-

ного уравнения (14). Исследуем поведение интегральных кривых (14) в окрестности особой точки. Для этого сделаем в (14) замену переменных $v = x$, $s = y - n_{03}n_{12}^{-1}x$. В результате получаем

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\xi(x, y)}{y + \eta(x, y)}, \quad (15)$$

где

$$\xi(x, y) = \frac{1}{n_{12}} \sum_{i=2}^{\infty} \sum_{p=0}^i \xi_{ip} x^{i-p} y^p, \quad \eta(x, y) = \frac{1}{n_{12}} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{p=0}^i \eta_{ip} x^{i-p} y^p, \quad (16)$$

$$\xi_{ip} = \sum_{j=p}^i (-1)^{j-p} C_j^p \left(\frac{n_{03}}{n_{12}} \right)^{i-p} h_{j, i-j+2}, \quad i \geq 0, \quad 0 \leq p \leq i; \quad (17)$$

$$\xi_{ip} = 0, \quad i \geq 0, \quad p > i \text{ или } i < 0;$$

$$\eta_{ip} = N_{ip} + \frac{n_{03}}{n_{12}} \xi_{ip}; \quad (18)$$

$$N_{ip} = \sum_{j=p}^i (-1)^{j-p} C_j^p \left(\frac{n_{03}}{n_{12}} \right)^{i-p} n_{j, i-j+2}, \quad i \geq 0, \quad 0 \leq p \leq i; \quad (19)$$

$$N_{ip} = 0, \quad i \geq 0, \quad p > i \text{ или } i < 0.$$

Из (17), учитывая (10), (11), находим $\xi_{00} = \xi_{10} = \xi_{11} = 0$ (20)

Аналогично

$$N_{00} = N_{10} = 0, \quad N_{11} = n_{12} \neq 0. \quad (21)$$

В дальнейшем потребуется

Лемма 1. Пусть при любых $m, n \geq 0$ определены величины x_{mn}, y_{mn} . Тогда для произвольных i, p таких, что $i \geq 0, 0 \leq p \leq i$ имеет место соотношение

$$\begin{aligned} \sum_{j=p}^i \sum_{r=0}^j \sum_{q=2}^{i-j+2} (-1)^{j-p} C_j^p \left(\frac{n_{03}}{n_{12}} \right)^{i-p} x_{rq} y_{j-r, i-j+4-q} = \\ = \sum_{\beta=0}^p \sum_{\alpha=\beta}^{i-p+\beta} X_{\alpha\beta} Y_{i-\alpha, p-\beta}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} X_{\alpha\beta} = \sum_{j=\beta}^{\alpha} (-1)^{j-\beta} C_j^{\beta} \left(\frac{n_{03}}{n_{12}} \right)^{j-\beta} x_{j, \alpha-j+2}, \quad Y_{\alpha\beta} = \sum_{j=\beta}^{\alpha} (-1)^{j-\beta} C_j^{\beta} \times \\ \times \left(\frac{n_{03}}{n_{12}} \right)^{j-\beta} y_{j, \alpha-j+2} \end{aligned}$$

при $\alpha \geq 0, 0 \leq \beta \leq \alpha$ и $X_{\alpha\beta} = 0, Y_{\alpha\beta} = 0$ при $\alpha \geq 0, \beta > \alpha$, или $\alpha < 0, \beta$ — произвольное.

Доказательство. Обозначим

$$S_{ip} = \sum_{j=p}^i \sum_{r=0}^j \sum_{q=2}^{i-j+2} (-1)^{j-p} C_j^p \left(\frac{n_{03}}{n_{12}} \right)^{i-p} x_{rq} y_{i-r, i-j+4-q}.$$

Изменяя порядок суммирования, находим $S_{ip} = S_{ip}^1 + S_{ip}^2$, где

$$S_{ip}^1 = \sum_{r=0}^{p-1} \sum_{j=p}^i \sum_{q=2}^{i-j+2} (-1)^{j-p} C_j^p \left(\frac{n_{03}}{n_{12}} \right)^{i-p} x_{rq} y_{i-r, i-j+4-q}, \quad p \geq 1; \quad S_{i0}^1 = 0;$$

$$S_{ip}^2 = \sum_{r=p}^i \sum_{j=r}^i \sum_{q=2}^{i-j+2} (-1)^{j-p} C_j^p \left(\frac{n_{03}}{n_{12}} \right)^{i-p} x_{rq} y_{i-r, i-j+4-q}.$$

Снова изменив порядок суммирования и сделав замену индекса суммирования $j = \alpha + r$, при $p \geq 1$ получаем

$$S_{ip}^1 = \sum_{r=0}^{p-1} \sum_{q=2}^{i-p+2} x_{rq} \sum_{\alpha=p-r}^{i-q-r+2} (-1)^{\alpha+r-p} C_{\alpha+r}^p \left(\frac{n_{03}}{n_{12}} \right)^{\alpha+r-p} y_{\alpha, i-r-q+4-\alpha}.$$

Поскольку $C_{\alpha+r}^p = \sum_{\beta=0}^p C_{\alpha}^{\beta} C_r^{p-\beta}$ и $C_r^{p-\beta} = 0$ при $\beta < p - r$, $C_{\alpha}^{\beta} = 0$ при $\alpha < \beta$, то

$$\begin{aligned} S_{ip}^1 &= \sum_{r=0}^{p-1} \sum_{q=2}^{i-p+2} x_{rq} \sum_{\beta=p-r}^p (-1)^{\beta+r-p} C_r^{p-\beta} \left(\frac{n_{03}}{n_{12}} \right)^{\beta+r-p} \sum_{\alpha=\beta}^{i-q-r+2} (-1)^{j-\beta} \times \\ &\quad \times C_j^{\beta} \left(\frac{n_{03}}{n_{12}} \right)^{j-\beta} y_{\alpha, i-q-r+2-\alpha+2} = \\ &= \sum_{r=0}^{p-1} \sum_{q=2}^{i-p+2} \sum_{\beta=p-r}^p (-1)^{\beta+r-p} C_r^{p-\beta} \left(\frac{n_{03}}{n_{12}} \right)^{\beta+r-p} x_{rq} Y_{i-q-r+2, \beta}. \end{aligned}$$

Так как $C_r^{p-\beta} = 0$ при $\beta < p - r$, то окончательно

$$S_{ip}^1 = \sum_{r=0}^{p-1} \sum_{q=2}^{i-p+2} \sum_{\beta=0}^p (-1)^{\beta+r-p} C_r^{p-\beta} \left(\frac{n_{03}}{n_{12}} \right)^{\beta+r-p} x_{rq} Y_{i-q-r+2, \beta}.$$

С помощью аналогичных рассуждений устанавливаем

$$S_{ip}^2 = \sum_{r=p}^i \sum_{q=2}^{i-r+2} \sum_{\beta=0}^p (-1)^{\beta+r-p} C_r^{p-\beta} \left(\frac{n_{03}}{n_{12}} \right)^{\beta+r-p} x_{rq} Y_{i-q-r+2, \beta}.$$

Но, по определению, $Y_{i-q-r+2, \beta} = 0$ при $q > i - r + 2$. Следовательно,

$$S_{ip}^2 = \sum_{r=p}^i \sum_{q=2}^{i-p+2} \sum_{\beta=0}^p (-1)^{\beta+r-p} C_r^{p-\beta} \left(\frac{n_{03}}{n_{12}} \right)^{\beta+r-p} x_{rq} Y_{i-q-r+2, \beta}$$

и

$$S_{ip} = \sum_{r=0}^i \sum_{q=2}^{i-p+2} \sum_{\beta=0}^p (-1)^{\beta+r-p} C_r^{p-\beta} \left(\frac{n_{03}}{n_{12}} \right)^{\beta+r-p} x_{rq} Y_{i-q-r+2, \beta}.$$

Изменив порядок суммирования и сделав замену индекса суммирования $q = \alpha - r + 2$, учитывая, что $C_r^{p-\beta} = 0$ при $r < p - \beta$, найдем

$$S_{ip} = \sum_{\beta=0}^p \sum_{r=p-\beta}^i \sum_{\alpha=r}^{i-p+r} (-1)^{\beta+r-p} C_r^{p-\beta} \left(\frac{n_{03}}{n_{12}} \right)^{\beta+r-p} x_{r, \alpha-r+2} Y_{i-\alpha, \beta}.$$

Поскольку $Y_{i-\alpha, \beta} = 0$ при $i - \alpha < \beta$, а из $r > i - \beta$ следует

$$\begin{aligned} i - \alpha < \beta, \text{ то } S_{ip} &= \sum_{\beta=0}^p \sum_{r=p-\beta}^{i-\beta} \sum_{\alpha=r}^{i-\beta} (-1)^{\beta+r-p} C_r^{p-\beta} \left(\frac{n_{03}}{n_{12}} \right)^{\beta+r-p} x_{r, \alpha-r+2} \times \\ &\times Y_{i-\alpha, \beta} = \sum_{\beta=0}^p \sum_{\alpha=p-\beta}^{i-\beta} Y_{i-\alpha, \beta} \sum_{r=p-\beta}^{\alpha} (-1)^{r-(p-\beta)} C_r^{p-\beta} \left(\frac{n_{03}}{n_{12}} \right)^{r-(p-\beta)} \times \\ &\times x_{r, \alpha-r+2} = \sum_{\beta=0}^p \sum_{\alpha=p-\beta}^{i-\beta} X_{\alpha, p-\beta} Y_{i-\alpha, \beta}. \end{aligned}$$

Наконец, заменив индекс суммирования β на $p - \beta$, получим

$$S_{ip} = \sum_{\beta=0}^p \sum_{\alpha=\beta}^{i-p+\beta} X_{\alpha\beta} Y_{i-\alpha, p-\beta},$$

что и доказывает лемму.

Введем обозначения:

$$L_{ip} = \sum_{j=p}^i (-1)^{j-p} C_j^p \left(\frac{n_{03}}{n_{12}} \right)^{j-p} l_{j, i-j+2}, \quad i \geq 0, \quad 0 \leq p \leq i;$$

$$M_{ip} = \sum_{j=p}^i (-1)^{j-p} C_j^p \left(\frac{n_{03}}{n_{12}} \right)^{j-p} m_{j, i-j+2}, \quad i \geq 0, \quad 0 \leq p \leq i;$$

$$L_{ip} = 0, M_{ip} = 0, \text{ если } i \geq 0, p \geq i \text{ или } i < 0. \quad (22)$$

Из (6) следует $L_{00} = 0, M_{00} = m_{02} \neq 0$ (23).

Рассмотрим для произвольных i, p таких, что $i \geq 0, 0 \leq p \leq i$ равенства (9) вида

$$\sum_{r=0}^i \sum_{q=2}^{i-j+2} (2h_{rq}n_{j-r, i-j+4-q} + h_{rq}h_{j-r, i-j+4-q} + l_{rq}n_{j-r, i-j+4-q}) = 0$$

при $p \leq j \leq i$. Умножая эти равенства на $(-1)^{i-p} C_i^p \left(\frac{n_{03}}{n_{12}} \right)^{i-p}$ и суммируя по j от p до i , получаем в силу леммы 1 и (17), (19), (22)

$$\sum_{\beta=0}^p \sum_{\alpha=\beta}^{i-p+\beta} (2\xi_{\alpha\beta} M_{i-\alpha, p-\beta} + \xi_{\alpha\beta} \xi_{i-\alpha, p-\beta} + L_{\alpha\beta} N_{i-\alpha, p-\beta}) = 0. \quad (24)$$

Найдем функцию $\varphi(x)$, обладающую тем свойством, что $\varphi(0) = 0$ и $\varphi(x) + \eta(x, \varphi(x)) \equiv 0$. Поскольку $F(x, y) = y + \eta(x, y)$ является аналитической функцией, $F_y \neq 0$ в некоторой окрестности начала координат и $\varphi(x)$ служит решением уравнения $F(x, \varphi(x)) \equiv 0$, то φ — аналитическая функция и ее можно представить в виде

$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j x^j$. Тогда при $p \geq 2$

$$\varphi^p = \sum_{j=p}^{\infty} \psi_{pj} x^j, \quad (25)$$

где $\psi_{pj} = \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_p = j, \\ k_1, \dots, k_p \geq 1}} \varphi_{k_1} \dots \varphi_{k_p}$, $p \leq j$.

Условимся также, что $\psi_{pj} = 0$ при $p > 1$, и, кроме того, введем обозначения $\psi_{1j} = \varphi_j$, $\psi_{0j} = 0$ при $j \geq 1$, $\psi_{10} = 0$, $\psi_{00} = 1$. Тогда, очевидно, формула (25) справедлива и при $p = 0$, $p = 1$. Из определения коэффициентов ψ_{pj} следует, что при $p \geq 2$ будет $\psi_{pj} = \psi_{pj}(\varphi_1, \dots, \varphi_{j-p+1})$. Кроме того, эти коэффициенты удовлетворяют соотношению

$$\sum_{\alpha=q}^r \psi_{q\alpha} \psi_{p, r-\alpha+p} = \psi_{q+p, r+p}, \quad (26)$$

что легко проверить, воспользовавшись методом математической индукции. Подставляя соотношение (25) в (16), находим

$$\eta(x, \varphi(x)) \equiv \frac{1}{n_{12}} \sum_{i=2}^{\infty} \left(\eta_{i0} + \sum_{j=1}^{i-1} \eta_{i-j+1,1} \varphi_j \right) + \sum_{p=2}^i \sum_{j=p}^i \eta_{i-j+p, p} \psi_{pj} x^i.$$

Тогда из тождества $\varphi(x) + \eta(x, \varphi(x)) \equiv 0$ следует

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_i = -\frac{1}{n_{12}} \left(\eta_{i0} + \sum_{j=1}^{i-1} \eta_{i-j+1,1} \varphi_j + \sum_{p=2}^i \sum_{j=p}^i \eta_{i-j+p, p} \psi_{pj} \right), \quad i \geq 2.$$

Очевидно, в правую часть последнего равенства входят коэффициенты φ_j с индексом $j \leq i-1$. Это означает, что здесь получены рекуррентные соотношения, позволяющие однозначно определить все коэффициенты φ_i . Воспользовавшись соотношениями (18), (20) и (21), убеждаемся, что эти соотношения приводятся к виду

$$\sum_{p=0}^i \sum_{j=p}^i N_{i-j+p, p} \psi_{pj} + \frac{n_{03}}{n_{12}} \sum_{p=0}^i \sum_{j=p}^i \xi_{i-j+p, p} \psi_{pj} = 0. \quad (27)$$

Сделав теперь в уравнении (15) замену $y = z + \varphi(x)$, находим

$$\frac{dx}{dz} = \frac{\xi^*}{z - \varphi' \xi^* + \varphi + \eta^*}, \quad (28)$$

где $\xi^*(x, z) = \xi(x, z + \varphi(x))$, $\eta^*(x, z) = \eta(x, z + \varphi(x))$. Рассмотрим аналитическую функцию $\xi^*(x, 0) = \xi(x, \varphi(x)) = \sum_{j=2}^{\infty} a_j x^j$. Подставляя (25) в (16) и учитывая (20), имеем

$$a_i = \frac{1}{n_{12}} \sum_{p=0}^i \sum_{j=p}^i \xi_{i-j+p, p} \psi_{pj}. \quad (29)$$

Но тогда из (27) следует

$$n_{03} a_i + \sum_{p=0}^i \sum_{j=p}^i N_{i-j+p, p} \psi_{pj} = 0. \quad (30)$$

Лемма 2. Пусть при любых $m, n \geq 0$ определены величины x_{mn} , y_{mn} и для любого $i \geq 0$ будет

$$S_i = \sum_{q=0}^i \sum_{r=q}^i y_{rq} \sum_{\alpha=q}^{i-r+q} \sum_{p=0}^{i-r+q-\alpha} \sum_{j=p}^{i-r+q-\alpha} x_{i-r+q-\alpha-j+p, p} \psi_{q\alpha} \psi_{pj}.$$

Тогда $S_i = \sum_{p=0}^i \sum_{j=p}^i \psi_{p, i-j+p} \sum_{\beta=0}^p \sum_{\alpha=\beta}^{i-p+\beta} y_{\alpha\beta} x_{j-\alpha, p-\beta}.$

Доказательство. Введем новый индекс $\gamma = i + q - \alpha - j + p$ и изменим порядок суммирования:

$$S_i = \sum_{q=0}^i \sum_{r=q}^i y_{rq} \sum_{p=0}^{i-r} \sum_{\gamma=p+r}^i x_{\gamma-r, p} \sum_{\alpha=q}^{i-\gamma+q} \psi_{q\alpha} \psi_{p, i-\gamma+q-\alpha+p}.$$

Воспользуемся формулой (26) и заменим индексы суммирования q, r, p, γ соответственно на $\beta, \alpha, p - \beta, j$:

$$S_i = \sum_{\beta=0}^i \sum_{\alpha=\beta}^i \sum_{p=\beta}^{i-\alpha+\beta} \sum_{j=p-\beta+\alpha}^i y_{\alpha\beta} x_{j-\alpha, p-\beta} \psi_{p, i-j+p}.$$

Для завершения доказательства леммы 2 достаточно изменить в последнем выражении порядок суммирования.

Введя обозначения $W_{rq} = 2M_{rq} + \xi_{rq} - \frac{n_{03}}{n_{12}} L_{rq}$, $a_0 = a_1 = 0$, рассмотрим для произвольного $i \geq 0$ выражения

$$A_i = \sum_{q=0}^i \sum_{r=q}^i \sum_{\alpha=q}^{i-r+q} W_{rq} \psi_{q\alpha} a_{i-r+q-\alpha}.$$

Тогда $A_i = A_i^1 + A_i^2$, где

$$A_i^1 = \sum_{q=0}^i \sum_{r=q}^i \sum_{\alpha=q}^{i-r+q} (2M_{rq} + \xi_{rq}) \psi_{q\alpha} a_{i-r+q-\alpha}, \quad (31)$$

$$A_i^2 = \frac{1}{n_{12}} \sum_{q=0}^i \sum_{r=q}^i \sum_{\alpha=q}^{i-r+q} L_{rq} \psi_{q\alpha} (-n_{03} a_{i-r+q-\alpha}). \quad (32)$$

Подставим (29) в (31) и применим лемму 2:

$$A_i^1 = \frac{1}{n_{12}} \sum_{p=0}^i \sum_{j=p}^i \psi_{p, i-j+p} \sum_{\beta=0}^p \sum_{\alpha=\beta}^{i-p+\beta} (2M_{j-\alpha, p-\beta} + \xi_{j-\alpha, p-\beta}) \xi_{\alpha\beta}.$$

Аналогично подстановкой (30) в (32) и применением леммы 2 получаем

$$A_i^2 = \frac{1}{n_{12}} \sum_{p=0}^i \sum_{j=p}^i \psi_{p, i-j+p} \sum_{\beta=0}^p \sum_{\alpha=\beta}^{i-p+\beta} L_{\alpha\beta} N_{j-\alpha, p-\beta}.$$

Следовательно,

$$A_i = \frac{1}{n_{12}} \sum_{p=0}^i \sum_{j=p}^i \psi_{p, i-j+p} \sum_{\beta=0}^p \sum_{\alpha=\beta}^{i-p+\beta} (2\xi_{\alpha\beta} M_{j-\alpha, p-\beta} + \xi_{\alpha\beta} \xi_{j-\alpha, p-\beta} + L_{\alpha\beta} N_{j-\alpha, p-\beta}).$$

Применяя (24), убеждаемся, что для произвольного $i \geq 0$ $A_i \equiv 0$. По определению величин A_i для $i \geq 1$ будет

$$A_i = W_{00} a_i + \sum_{r=1}^i W_{r0} a_{i-r} + \sum_{q=1}^i \sum_{r=q}^i \sum_{\alpha=q}^{i-r+q} W_{rq} \psi_{q\alpha} a_{i-r+q-\alpha}.$$

Предположим, что $a_j = 0$ для любого $j < i$. Тогда из последнего равенства следует $A_i = W_{00} a_i$. Но в силу (23), (20) $W_{00} = 2m_{02} \neq 0$, и поскольку $A_i = 0$, то $a_i = 0$. Так как по определению $a_0 = 0$, то $a_i = 0$ при произвольном $i \geq 0$. Это означает, что $\xi(x, \varphi(x)) \equiv 0$. Следовательно, функция $\tilde{\xi}(x, z) = z^{-1} \xi^*(x, z)$ является аналитической. Но тогда будет аналитической и функция $f(x, z) = \tilde{\xi} [1 - \varphi' \tilde{\xi} + z^{-1} (\varphi + \eta^*)]^{-1}$, так как по определению φ функция $z^{-1} (\varphi + \eta^*) \in C^\omega$. Поскольку сокращением числителя и знаменателя на z уравнение (28) приводится к виду $x_z = f(x, z)$, то существует единственное решение (28), удовлетворяющее начальному

условию $x(0) = 0$. Предположим, что это решение представлено в виде $x(z) = x_1 z + x_2 z^2 + o(z^2)$. Подстановка этого разложения в (28) дает $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{2} \xi_{22} = -n_{12} l_{12} (4m_{02})^{-1} \neq 0$. Переходя от координат x, z к координатам s, v , убеждаемся, что через точку $s = 0$ особой линии проходит асимптотическая рассматриваемого семейства, которая во внутренних координатах задается уравнением $v = v(s)$, где $v(s) = v_2 s^2 + o(s^2)$, а $v_2 = x_2 \neq 0$. Подстановка этого соотношения в $r(s, v)$ дает радиус-вектор этой асимптотической как пространственной кривой: $r(s, v(s)) = \rho_0 + s \tau_0 + \frac{1}{2} k_0 v s^2 + o(s^2)$. Следовательно, данная асимптотическая касается особой линии $v = 0$.

Для того чтобы убедиться в единственности такой асимптотической, необходимо проверить, что линия $z = 0$ или (в координатах s, v) $s = -\frac{n_{03}}{n_{12}} v + \sum_{i=2}^{\infty} \varphi_i v^i$ не является асимптотической.

Для этого достаточно показать, что (12) не обращается тождественно в нуль на этой линии. Но при $n_{03} \neq 0$ справедливо соотношение $lds^2 + 2mds dv + ndv^2 = [-2m_{02} n_{03} n_{12}^{-1} + o(v^0)] dv^2 \neq 0$. Далее, если $n_{03} = 0$ и $\varphi_j = 0$ при $j < r$, $\varphi_r \neq 0$, то несложно проверить, что $n_{0j} = 0$ при $j < r + 2$, $n_{0, r+2} \neq 0$ и, кроме того, $lds^2 + 2mds dv + ndv^2 = [r m_{02} \varphi_r v^{r+1} + o(v^{r+1})] dv^2 \neq 0$. Наконец, если $\varphi_i = 0$ при любом $i \geq 0$, то и $n_{0j} = 0$ при любом натуральном j , а рассматриваемая линия совпадает с координатной линией $s = 0$. Но так как эта линия плоская, то $a(0) = 0$ и $\kappa(0) = 0$. Последнее же исключено условиями доказываемой теоремы.

Поступила в редколлегию 21.03.85

В. И. МЯГКОВ

БЕЗЫНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ КОМПЛЕКСА
С ЧЕТЫРЕХКРАТНЫМ БЕСКОНЕЧНО УДАЛЕННЫМ
ИНФЛЕКЦИОННЫМ ЦЕНТРОМ

Настоящая заметка является продолжением статьи [1], посвященной комплексам с симметричным расположением инфлекционных центров относительно центра луча комплекса.

Каждый луч комплекса будет иметь четырехкратный бесконечно удаленный инфлекционный центр при выполнении условий

$$p = 0, \alpha = 0, 2k\beta + q = 0, \gamma = 0, k^2r \neq 0. \quad (1)$$

Уравнения такого комплекса — обозначим его через Σ_4 , — отнесенного к нормальному сопровождающему трехграннику [2], имеют вид

$$\omega^2 = k\omega_3^1, \quad \omega_1^2 = \beta\omega_3^2, \quad dk = -2k\beta\omega_3^1, \quad -\omega^3 + k\omega_1^3 = \beta\omega^1 + r\omega_3^3. \quad (2)$$

Дифференцируя внешним образом три последних уравнения системы (2), получим

$$\begin{aligned} [d\beta, \omega_3^2] + (1 + \beta^2) [\omega_3^1, \omega_3^2] &= 0, \quad k [d\beta, \omega_3^1] = 0, \\ (-1 - \beta^2) [\omega_3^1, \omega_3^1] + 2\beta r [\omega_3^1, \omega_3^2] + [d\beta, \omega_3^1] + [dr, \omega_3^2] &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Система (2) не является системой в инволюции. Регулярная цепь ее интегральных элементов не строится ни в каком базисе. Осуществим частичное продолжение [3] системы (2). Из (3) следует

$$d\beta = (-1 - \beta^2) \omega_3^1. \quad (4)$$

Присоединим к (2) уравнение (4). Из (3) вытекает, что дифференциал функции r имеет следующее разложение по базисным формам:

$$dr = -2\beta r \omega_3^1 + y_3 \omega_3^2, \quad (5)$$

где y_3 — произвольный коэффициент. А это означает [3], что система (2), (4) является системой в инволюции и ее максимально общее решение существует с произволом в одну функцию одного аргумента. Регулярная цепь интегральных элементов строится, например, в базисе $\{\omega_3^2, \omega_3^1, \omega^1\}$.

Таким образом, комплекс Σ_4 существует с произволом в одну функцию одного аргумента.

Так как каждый луч комплекса определяется тремя параметрами, то выделение трех полных дифференциалов с помощью линейной комбинации базисных форм $\omega_3^1, \omega_3^1, \omega_3^2$ значительно облегчило бы изучение геометрических свойств комплекса (2), необходимых для его безынтегрального представления. Осуществить такое выделение исходя только из уравнений (2), (4), (5) оказывается практически невозможным.

В предлагаемой заметке исходя из (2), (4), (5) удастся выделить только два полных дифференциала. Исходя же из геометрических свойств конгруэнций прямых комплекса Σ_4 и построения вспомогательной кривой будет найдено его безынтегральное представление.

Непосредственной проверкой можно убедиться в справедливости тождеств $D\omega_3^1 \equiv 0$, $D(\sqrt{k} \omega_3^2) \equiv 0$. Из них, в силу теоремы Пуанкаре [3], следует, что сами формы ω_3^1 и $\sqrt{k} \omega_3^2$ являются полными дифференциалами. Обозначим их так:

$$\omega_3^1 = du, \quad \sqrt{k} \omega_3^2 = d\theta. \quad (6)$$

Из системы (2), (4), учитывая (6), получим

$$dk = -2k\beta du, \quad d\beta = (-1 - \beta^2) du. \quad (7)$$

Проинтегрируем систему (7):

$$k = C_2 / \cos^2(C_1 - u), \quad \beta = \operatorname{tg}(C_1 - u), \quad (8)$$

где C_1 и C_2 — постоянные интегрирования.

Обратимся к уравнению (5). Учитывая найденные функции k , β и соотношения (6), получим

$$dr = -2r \operatorname{tg}(C_1 - u) du + \frac{1}{\sqrt{C_2}} y_3 \cos(C_1 - u) d\theta. \quad (9)$$

При $\theta = \text{const}$ из (9) получаем $r = C_3 / \cos^2(C_1 - u)$; C_3 — постоянная величина при фиксированном θ , поэтому для всех лучей комплекса надо считать $C_3 = \varphi(\theta)$, где φ — произвольная функция одного аргумента. Из (9) легко определяется и функция y_3 . Окончательно

$$r = \varphi(\theta) / \cos^2(C_1 - u), \quad y_3 = \sqrt{C_2} \varphi'(\theta) / \cos^3(C_1 - u). \quad (10)$$

Введем в рассмотрение новый ортонормированный репер:

$$\begin{aligned} i &= e_1 \sin(C_1 - u) + e_3 \cos(C_1 - u), \quad j = -e_2, \\ k &= e_1 \cos(C_1 - u) - e_3 \sin(C_1 - u). \end{aligned} \quad (11)$$

Решим (11) относительно e_i :

$$\begin{aligned} e_1 &= i \sin(C_1 - u) + k \cos(C_1 - u), \quad e_2 = -j, \\ e_3 &= i \cos(C_1 - u) - k \sin(C_1 - u). \end{aligned} \quad (12)$$

Найдем дифференциалы векторов (11). Опуская все промежуточные выкладки, в которых используются (2), (6), (8) и (12), окончательный результат можно представить в виде

$$di = -j \frac{1}{\sqrt{C_2}} d\theta, \quad dj = i \frac{1}{\sqrt{C_2}} d\theta, \quad dk = 0. \quad (13)$$

Это означает, что вектор k постоянен для всех лучей комплекса Σ_4 , а векторы i, j зависят только от одного аргумента θ , и для всех лучей конгруэнции $\theta = \text{const}$ векторы i, j, k постоянны.

Общее смещение центра луча $dA = \omega^i e_i$ комплекса Σ_4 , используя (2), (6) и (12), представим в таком виде:

$$\begin{aligned} dA &= i(\theta) \frac{k\beta - r}{\sqrt{C_2}} \cos^2(C_1 - u) d\theta - j(\theta) \frac{C_2}{\cos^2(C_1 - u)} du + \\ &+ k \left(\frac{\omega^1}{\cos(C_1 - u)} - \frac{k\beta - r}{\sqrt{C_2}} \sin(C_1 - u) \cos(C_1 - u) d\theta \right). \end{aligned} \quad (14)$$

Рассмотрим конгруэнцию $\theta = \text{const}$ лучей этого комплекса, обозначим ее через Θ . Для лучей конгруэнции Θ векторы i, j, k постоянны. Внося в (14) $d\theta = 0$, найдем, что центры лучей конгруэнции Θ лежат в плоскости (обозначим ее через $\Pi(\Theta)$), ортогональной вектору $i(\theta)$; каждая такая плоскость $\Pi(\Theta)$ параллельна постоянному вектору k .

Рассмотрим лучи, определяемые условиями $\theta = \text{const}$, $u = \text{const}$. Внося $d\theta = 0$, $du = 0$ в (14), найдем, что $dA \parallel k$. Отсюда следует, что центры лучей $\theta = \text{const}$, $u = \text{const}$ в плоскости $\Pi(\Theta)$ лежат на прямой — обозначим ее через $l(\theta, u)$, — параллельной вектору k .

Для выяснения взаимного положения этих прямых в плоскости $\Pi(\theta)$ между прямыми $l(\theta, u)$ и $l(\theta, u + du)$ определим расстояние:

$$dh = (dA, i) = \frac{-C_2}{\cos^2(C_1 - u)} du,$$

откуда $h = C_2 \operatorname{tg}(C_1 - u) + C_4$.

Постоянной интегрирования C_4 определяется начало отсчета в плоскости $\Pi(\theta)$, т. е. определяется та прямая, от которой измеряется расстояние h до остальных прямых $l(\theta, u)$ этой плоскости. Положим $C_4 = 0$. Тогда начальный луч в плоскости $\Pi(\theta)$ определится условием $u = C_1$.

Для того чтобы выяснить взаимное положение в пространстве плоскостей $\Pi(\theta)$, на общее смещение (14) центра луча наложим два ограничения: $u = C_1$, $\omega^1 = 0$ (15). При этих условиях точка A описывает кривые, лежащие в плоскостях, ортогональных вектору k . Действительно, учитывая (8), (10) и внося (15) в (14), получим

$$dA = -i(\theta) \frac{\varphi(\theta)}{\sqrt{C_2}} d\theta. \quad (16)$$

От переменной θ перейдем к новой переменной s , положив

$$-\frac{\varphi(\theta)}{\sqrt{C_2}} d\theta = ds. \quad (17)$$

Пусть $\theta = \theta(s)$ — какое-либо решение уравнения (17). (После перехода от θ к s нужно в обозначениях $\Pi(\theta)$ и $l(\theta, u)$ формально θ заменить на s).

Обозначим $1/\varphi(\theta(s)) = k^*(s)$ (18). Поскольку функция φ была произвольной функцией аргумента θ , то $k^*(s)$ следует считать произвольной функцией нового аргумента s . Учитывая (17) и (18), можно записать (16) и (13) в таком виде:

$$\begin{aligned} dA &= i(s) ds, \\ di(s) &= j(s) k^*(s) ds, \\ dj(s) &= -i(s) k^*(s) ds. \end{aligned} \quad (19)$$

Этой системой определяется плоская кривая L , параметр s является ее длиной дуги, $k^*(s)$ — кривизной. Векторы $i(s)$ и $j(s)$ служат векторами касательной и нормали соответственно. Для того чтобы построить плоскость $\Pi(s)$, нужно через точку, лежащую на кривой L , провести плоскость, ортогональную вектору касательной $i(s)$.

Заметим, что в силу условий (15) кривая L ортогонально пересекает все начальные прямые $l(s, u)$ плоскостей $\Pi(s)$. Такова геометрическая связь между фиксацией $C_4 = 0$ и ограничениями (15).

Теперь можно дать безынтегральное представление комплекса Σ_4 , заданного уравнениями (2).

Для того чтобы построить комплекс Σ_4 (с четырехкратным бесконечно удаленным инфлекционным центром), достаточно взять произвольную плоскую кривую L , заданную уравнением $k^* = k^*(s)$ (s — длина дуги, $k^*(s)$ — кривизна кривой). Пусть $i(s)$, $j(s)$ — векторы касательной и нормали, k — вектор нормали к плоскости кривой L .

Через точку $M(s)$, лежащую на кривой L , ортогонально вектору $i(s)$ проведем плоскость $\Pi(s)$ и в ней возьмем прямую $l(s, u)$, удаленную (в направлении вектора j) от точки $M(s)$ на $h = C_2 \operatorname{tg}(C_1 - u)$ (20). Через каждую точку этой прямой $l(s, u)$ в направлении вектора $e_3 = i \cos(C_1 - u) - k \sin(C_1 - u)$ проведем пучок параллельных прямых. Двупараметрическая совокупность таких параллельных пучков и составит искомый комплекс Σ_4 .

Теперь можно дать геометрическую интерпретацию той произвольной функции одного аргумента, которая определяла произвольное существование комплекса Σ_4 : ею можно считать $k^*(s)$ — кривизну произвольно выбранной плоской кривой L . Для доказательства правильности найденного безынтегрального представления комплекса (2) необходимо найти систему дифференциальных уравнений комплекса Σ_4 и показать ее полное совпадение с (2).

Отправляясь от произвольной плоской кривой $M = M(s)$, построим комплекс Σ_4 . К каждой точке $A = M(s) + jh(u) + kv$, определяемой тремя параметрами s, u, v , присоединим ортонормированный репер (12). Используя (19), (11) и (20), получим $dA = \Omega^i e_i$, $de_i = \Omega_j^i e_j$. Сами формы Ω^i , Ω_j^i удовлетворяют тождествам $\Omega_i^i + \Omega_j^j = 0$ и имеют вид

$$\begin{aligned}\Omega^1 &= (1 - hk^*) \sin(C_1 - u) ds + \cos(C_1 - u) dv, & \Omega^2 &= \frac{C_2}{\cos^2(C_1 - u)} du j \\ \Omega^3 &= (1 - hk^*) \cos(C_1 - u) ds - \sin(C_1 - u) dv, \\ \Omega_1^2 &= -k^* \sin(C_1 - u) ds, & \Omega_3^1 &= du, & \Omega_3^2 &= -k^* \cos(C_1 - u) ds.\end{aligned}\quad (21)$$

Поскольку параметры s, u, v независимы, то дифференциальные формы $\Omega^1, \Omega_3^1, \Omega_3^2$ могут быть приняты за базисные, и все остальные формы будут допускать единственное разложение по этим трем базисным. Так как формы Ω^2 и Ω_1^1 зависят только от одного дифференциала du , то они пропорциональны. Обозначим коэффициент пропорциональности буквой λ :

$$\Omega^2 = \lambda \Omega_3^1. \quad (22)$$

Аналогично из пропорциональности форм Ω_1^2 и Ω_3^2 найдем

$$\Omega_1^2 = \mu \Omega_3^2. \quad (23)$$

Здесь

$$\lambda = \frac{C_2}{\cos^2(C_1 - u)}, \quad \mu = \operatorname{tg}(C_1 - u). \quad (24)$$

Вычислим $d\lambda$ и разложим формы $d\lambda$ и $-\Omega^3 + \lambda\Omega_1^2$ по базисным. Используя (21) и (24), получим

$$d\lambda = -2\lambda\mu\Omega_3^1, \quad -\Omega^3 + \lambda\Omega_1^2 = \mu\Omega_1^1 + \nu\Omega_3^2. \quad (25)$$

Объединяя (22), (23), (25), получаем систему, которая с точностью до обозначения совпадает с системой (2). Правильность безынтегрального представления комплекса Σ_4 или (2) доказана.

Список литературы: 1. Мягков В. И. Комплексы с симметричным расположением инфлекссионных центров // Укр. геометр. сб.— 1984.— Вып. 27.— С. 93—97. 2. Кованцов Н. И. Теория комплексов.— К.: Вища шк. Изд-во при Киев. ун-те, 1963.— 292 с. 3. Фиников С. П. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии.— М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1948.— 432 с.

Поступила в редколлегию 23.04.84

В. В. ПЕЛИПЕНКО

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ РЕШЕНИЙ ТИПА
СТАЦИОНАРНЫХ ВОЛН УРАВНЕНИЯ СИНУС-ГОРДОНА

Нелинейное уравнение в частных производных

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \sin z, \quad (1)$$

получившее название уравнения синус-Гордона, широко применяется в физике при описании волновых процессов различной природы [1]. Это уравнение имеет глубокий геометрический смысл. Как было показано Д. Гильбертом [2], на регулярных поверхностях постоянной отрицательной кривизны -1 в E^3 два семейства асимптотических линий образуют чебышевскую сеть [3]. При этом сетевой угол $z(x, y)$ сети асимптотических линий, принятых за координатные линии x и y на этих поверхностях, удовлетворяет уравнению (1), а их линейный элемент в асимптотических координатах имеет вид

$$dS^2 = dx^2 + 2\cos z dx dy + dy^2. \quad (2)$$

Для сохранения регулярности поверхности угол z должен удовлетворять требованию $0 < z < \pi$ (3). Но уравнение (1) не имеет регулярных решений на всей плоскости xy , удовлетворяющих условиям (3) [2], так что в E^3 не существует полной регулярной поверхности постоянной отрицательной кривизны. Этот факт озна-

чает, что вся плоскость Лобачевского не погружаема регулярно и изометрически в E^3 .

Тем не менее, как было доказано Э. Г. Позняком [4], каждому регулярному (класса C^n , $n \geq 4$) решению z уравнения (1), заданному на всей плоскости xy , можно сопоставить в E^3 поверхность, с радиус-вектором класса C^{n-1} , имеющую в регулярных точках кривизну -1 , для которой угол между асимптотическими линиями, принятыми за координатные, является данным решением z уравнения (1). Точкам, в которых решение z кратно π , т. е. $z = k\pi$ (k — целое), соответствуют особые точки поверхности, ограничивающие ее регулярные части. Другими словами, точки $z = k\pi$ решения соответствуют естественным границам регулярно и изометрически погружаемых в E^3 в виде этой поверхности частей плоскости Лобачевского (см. также [5]).

В связи с приведенной интерпретацией решений уравнения (1) возникает возможность геометрического исследования их свойств. В данной работе устанавливается характеристическое геометрическое свойство важных с физической точки зрения решений уравнения (1), описывающих стационарные волны, т. е. имеющих вид

$$z = z(x + by), \quad (4)$$

где b — постоянная (см., например, [1]). Кроме того, найдены части плоскости Лобачевского, соответствующие в указанном выше смысле всем таким решениям.

Теорема 1. Пусть в E^3 дана поверхность кривизны -1 , соответствующая согласно теореме Э. Г. Позняка [4] некоторому регулярному решению z уравнения (1), заданному на всей плоскости xy , за координатные линии на которой приняты асимптотические линии. Пусть относительно этой поверхности известно, что две ее произвольные асимптотические линии одного из семейств могут быть совмещены движением. Тогда z является решением типа стационарных волн (4). Обратно, решениям (4) соответствуют поверхности кривизны -1 , любые две асимптотические линии которой из одного семейства конгруэнтны.

Доказательство. Докажем прямое утверждение теоремы. Фиксируем произвольную асимптотическую линию поверхности $x = x_1$, где x_1 — постоянная. Тогда по условиям теоремы любая другая асимптотическая линия $x = x_2$ этого же семейства может быть совмещена движением с первой. Следовательно, между точками обеих асимптотических линий можно установить взаимно однозначное соответствие, при котором расстояние между произвольными двумя точками одной асимптотической линии, взятое вдоль нее, равно расстоянию между соответствующими им точками второй. При этом, если точка (x_1, y_1) соответствует точке (x_2, y_2) , то точке $(x_1, y_1 + a)$, где a — произвольная постоянная, соответствует либо точка $(x_2, y_2 + a)$, либо точка $(x_2, y_2 - a)$.

Пусть при совмещении асимптотических линий $x = x_1$ и $x = x_2$ точки $(x_1, y_1 + a)$ переходят в точки $(x_2, y_2 + a)$. В силу конгруэнт-

ности асимптотических линий их кривизны в соответствующих точках равны. Но кривизна асимптотических линий на рассматриваемой поверхности выражается согласно формулам $1/\rho_g = -z_x$ для линий $x = \text{const}$ и $1/\rho_g = z_y$ для линий $y = \text{const}$, так что

$$z_x(x_1, y_1 + a) = z_x(x_2, y_2 + a) \quad (5)$$

при любых a . Из (5) следует, что для всех x и y

$$z_x(x, y) = z_1(y + B_1(x)), \quad (6)$$

где $B_1(x)$ — некоторая функция от x , а z_1 — некоторая функция от $y + B_1(x)$. Но согласно (6)

$$z_{xy}(x, y) = z_2(y + B_1(x)), \quad (7)$$

где z_2 — некоторая функция аргумента $y + B_1(x)$. Поскольку $z(x, y)$ является решением уравнения (1), то $\sin z$ в силу (7) также зависит лишь от $y + B_1(x)$. Следовательно, $z(x, y)$ — функция этого же аргумента:

$$z(x, y) = z_3(y + B_1(x)). \quad (8)$$

Продифференцируем (8) по x и сопоставим с (6); получим

$$B_1'(x) = \frac{z_1(y + B_1(x))}{z_4(y + B_1(x))}, \quad (9)$$

где

$$z_4(y + B_1(x)) = \frac{dz_3(y + B_1(x))}{d(y + B_1(x))}.$$

Но равенство (9) выполняется для всех x и y лишь при условии, что обе его части являются постоянными величинами, т. е. когда $B_1(x) = bx + x_0$, где x_0 , b — постоянные. Следовательно, согласно (8) решение z уравнения (1) имеет вид (4). Аналогично рассматривается случай, когда при совмещении асимптотических линий $x = x_1$ и $x = x_2$ точки $(x_1, y_1 + a)$ переходят в точки $(x_2, y_2 - a)$.

Обратно, любому решению (4) соответствует в E^3 поверхность, имеющая в регулярных точках кривизну -1 , любые две асимптотические линии которой из одного семейства могут быть совмещены движением. Действительно, пусть $x = x_1$ и $x = x_2$ — две произвольные асимптотические линии. Согласно (4) $z(x_1, y) = z(x_2, y - (x_2 - x_1)/b)$, так что кривизна $-z_x$ асимптотической линии $x = x_1$ в точке y равна кривизне асимптотической линии $x = x_2$ в точке $y - (x_2 - x_1)/b$. Как известно, кручение асимптотических линий одного семейства на поверхностях кривизны -1 постоянно и равно по модулю единице. Расстояние между точками y_1 и y_2 асимптотической линии $x = x_1$, взятое вдоль нее, равно $|y_2 - y_1|$ и, следовательно, равно расстоянию между соответствующими им точками $y_1 - (x_2 - x_1)/b$ и $y_2 - (x_2 - x_1)/b$ асимптотической линии $x = x_2$. Но пространственная кривая в E^3 с точностью до положения в пространстве задается своими кривизной

и кручением, следовательно, асимптотические линии $x = x_1$ и $x = x_2$ конгруэнтны. Теорема полностью доказана.

З а м е ч а н и е 1. Согласно доказательству обратного утверждения теоремы можно ограничиться рассмотрением лишь первой из двух ситуаций, указанных при доказательстве прямого утверждения теоремы, когда при совмещении асимптотических линий $x = x_1$ и $x = x_2$ точкам $(x_1, y_1 + a)$ соответствуют точки $(x_2, y_2 + a)$.

Введем замену переменных $t = x + by$. Тогда уравнение (1) для решений (4) перейдет в обыкновенное дифференциальное уравнение $z_{tt} = (\sin z)/b$, эквивалентное уравнению $z_t = \sqrt{2(c - \cos z)}/b$, где c — постоянная, так что решения (4) можно записать в неявном виде:

$$t = \int_{z_0}^z \frac{dz'}{\sqrt{2(c - \cos z')/b}}. \quad (10)$$

Выясним, какие части плоскости Лобачевского дают при изометрическом погружении в E^3 поверхности, соответствующие решениям (10).

Теорема 2. Решению (10) уравнения (1) соответствует поверхность, реализующая в E^3 следующие части плоскости Лобачевского:

1. При $|c| = 1$, $|b| = 1$ — окружность; при $|c| = 1$, $|b| \neq 1$ — часть плоскости Лобачевского, заключенную между геодезической линией и эквидистантной ей линией кривизны $2\sqrt{|b|/(|b| + 1)}$.
2. При $|c| > (1 + b^2)/2|b|$ — кольцо, заключенное между концентрическими окружностями с кривизнами $\sqrt{2(c + 1)b/|b + 1|}$ и $\sqrt{2(c - 1)b/|b - 1|}$; при $1 < |c| < (1 + b^2)/2|b|$ — часть плоскости Лобачевского, заключенную между двумя эквидистантами, расположенными по одну сторону от соответствующей им геодезической линии, с кривизнами $\sqrt{2(c + 1)b/|b + 1|}$ и $\sqrt{2(c - 1)b/|b - 1|}$; при $c = (1 + b^2)/2|b| > 1$ — часть плоскости Лобачевского, заключенную между орициклами с общей бесконечно удаленной точкой.
3. При $|c| < 1$ — часть плоскости Лобачевского, заключенную между двумя эквидистантами, расположенными по разные стороны от соответствующей им геодезической линии, одинаковой кривизны $\sqrt{2(c - 1)b/(|b| + 1)}$ при $b < 0$ и $\sqrt{2(c + 1)b/(b + 1)}$ при $b > 0$.

Доказательство. Вычислим геодезическую кривизну $1/\rho_g|_{z=z_0}$ линий $z = z_0$ ($z_0 = \text{const}$) на поверхности, соответствующей решению (4). Согласно (10)

$$\left. \frac{dz}{dt} \right|_{z=z_0} = \sqrt{\frac{2(c - \cos z_0)}{b}}. \quad (11)$$

Для решений (4) $z_x = z_t$, $z_y = bz_t$ так что, проводя вычисления, скажем, по формуле Бонне (см., например, [6]), в силу (11) получим:

$$\frac{1}{\rho_g} \Big|_{z=z_0} = \sqrt{2(c - \cos z_0)b/(b^2 - 2b \cos z_0 + 1)}.$$

Следовательно, для решений (4) прямым $z = z_0$ плоскости xy соответствуют линии постоянной кривизны на плоскости Лобачевского. В зависимости от соотношения постоянных b и c , а также значения $\cos z_0$ это будут либо орициклы, либо эквидистанты, либо геодезические линии, либо окружности. Нетрудно показать, что в метрике (2) расстояние между любыми двумя фиксированными линиями $z = z_0$ и $z = \bar{z}_0$, где $z_0, \bar{z}_0$ — постоянные, для решений (4) является для данных линий величиной постоянной. При c больше, равно или меньше по модулю единицы характер зависимости решения (10) от t существенно различен (см., например, [1]).

При $|c| = 1$ поверхность в E^3 кривизны -1 , соответствующая решению (10), имеет единственную линию нерегулярности $z = k\pi$. При $|c| = 1$ и $|b| \neq 1$ линиям $z = z_0$ отвечают на плоскости Лобачевского эквидистанты, кривизна которых монотонно изменяется от нуля при $z_0 \rightarrow k\pi + \pi$ или $z_0 \rightarrow k\pi - \pi$ до значения $2\sqrt{b}/(|b| + 1)$ при $z_0 \rightarrow k\pi$. Таким образом, каждая из регулярных частей указанной поверхности есть результат изометрического регулярного погружения в E^3 части плоскости Лобачевского, заключенной между геодезической линией и эквидистантной ей линией кривизны $\sqrt{2|b|}/(|b| + 1)$, на которой $z = k\pi$. При $|c| = 1$, $|b| = 1$ линиям $z = z_0$ соответствуют на плоскости Лобачевского орициклы, заполняющие орикруг. На орицикле, ограничивающем этот орикруг, $z = k\pi$.

При $|c| > 1$ решение (10) монотонно изменяется по t от $-\infty$ до $+\infty$. Рассмотрим регулярную часть поверхности, соответствующей решению (10), заключенную между линиями $z = 2\pi k$ и $z = 2\pi k + \pi$, где k — любое целое. При $|c| > (1 + b^2)/2|b|$ линиям $z = z_0$ ($2\pi k < z_0 < 2\pi k + \pi$) соответствуют на плоскости Лобачевского окружности ($1/\rho_g|_{z=z_0} > 1$), с монотонно изменяющейся кривизной от значения $\sqrt{2(c+1)b}/|b+1|$ при $z_0 \rightarrow 2\pi k + \pi$ до значения $\sqrt{2(c-1)b}/|b-1|$ при $z_0 \rightarrow 2\pi k$. Как уже отмечалось, линии $z = \text{const}$ находятся на постоянном расстоянии друг от друга, что в данном случае означает концентричность указанных окружностей. Аналогично при $1 < |c| < (1 + b^2)/2|b|$ линиям $z = z_0$ отвечают эквидистанты с кривизной, монотонно изменяющейся между указанными величинами. Следовательно, в данном случае имеем часть плоскости Лобачевского, заключенную между двумя эквидистантными к одной геодезической линиями, расположенными по одну от нее сторону. Наконец, при $|c| = (1 + b^2)/2b$ линии $z = z_0$ являются орициклами при изменении z_0 от $2\pi k$ до $2\pi k + \pi$ и заполняют часть плоскости Лоба-

чевского, заключенную между орициклами с общей бесконечно удаленной точкой.

При $|c| < 1$ решение (1) является периодической функцией t , изменяющейся в пределах от $-2 \arcsin \sqrt{(1+|c|)/2}$ до $2 \arcsin \sqrt{(1+|c|)/2}$, так что соответствующая поверхность кривизны -1 имеет счетное число линий $z = 0$. Рассматривая линии $z = z_0$ заключенные между двумя соседними линиями $z = 0$, заметим, что им на плоскости Лобачевского соответствуют эквидистанты, а при $|z| = 2 \arcsin \sqrt{(1+|c|)/2}$ — геодезическая линия. При этом максимальное значение кривизны указанных эквидистант, равное $\sqrt{2(|c|+1)b/(|b|+1)}$, достигается при $z_0 \rightarrow 0$.

Теорема полностью доказана.

Сделаем несколько замечаний.

З а м е ч а н и е 2. При $|c| > (1+b^2)/2|b|$ и $|b| = 1$ одна из концентрических окружностей, ограничивающая соответствующую часть плоскости Лобачевского, вырождается в точку, т. е. получаем круг с выколотым центром.

З а м е ч а н и е 3. При $|c| = 1$ решение (10) можно записать в виде

$$z = 4 \operatorname{arctg} \left\{ \exp \left[\pm (x + by) / \sqrt{|b|} \right] \right\} + k\pi, \quad (12)$$

где k — четное при $b > 0$ и нечетное — при $b < 0$. Решение (12) называется односолитонным решением уравнения (1). В физических приложениях оно описывает распространение уединенных стационарных волн, сохраняющих при взаимодействии друг с другом индивидуальные свойства. Из теоремы 2 следует, что геометрическая интерпретация односолитонного решения неединичной амплитуды, когда $|b| \neq 1$, качественно отлична от случая единичного солитона, когда $|b| = 1$.

З а м е ч а н и е 4. При равных по модулю, но противоположных по знаку значениям параметров b или c решению (10) соответствует одна и та же поверхность. Различие лишь в том, что направление обхода на одном из семейств асимптотических линий при изменении знака параметра изменяется на противоположное.

З а м е ч а н и е 5. При $|b| = 1$ решениям (10) соответствуют хорошо известные поверхности вращения кривизны -1 [7]. Эти поверхности исследовались еще в работах Ф. Миндинга [8] и Э. Бельтрами [9].

Список литературы: 1. Скотт Э. Волны в активных и нелинейных средах в приложении к электронике. — М.: Сов. радио, 1977. — 368 с. 2. Hilbert D. Über Flächen von Konstanter Gausscher Krümmung. — Trans. Amer. Soc. — 1901. — V. 2. — S. 87—99. 3. Чебышев П. Л. О кройке одежды // Успехи мат. наук. — 1946. — 1. Вып. 2. — С. 38—42. 4. Позняк Э. Г. Геометрическая интерпретация регулярных решений уравнения $z_{xy} = \sin z$ // Диф. уравнения. — 1979. — 15, № 7. — С. 1332—1336. 5. Позняк Э. Г. Геометрическое исследование, связанные с уравнением $z_{xy} = \sin z$ // Пробл. геометрии. Итоги науки и техники. — М.: Наука, 1977. — 8. — С. 225—241. 6. Букреев Б. Я. Планиметрия Лобачевского в аналитическом изложении // М.;

11. Гостехтеоретиздат, 1951.— 127 с. 7. Грибков И. В. Построение некоторых регулярных решений уравнения «синус-Гордона» с помощью поверхностей постоянной отрицательной кривизны.— Вестн. Моск. ун-та, сер. матем.— 1977.— № 4.— С. 78—83. 8. Minding F. Über die Biegung Krümmenflächen // T. rein und angew. Math.— 1838.— V. 18.— S. 7—12. 9. Beltrami E. Sulla superficie di rotazione che Serve di tipo alle superficie pseudosferiche // Giorn. di Math.— 1872.— V. 10, Opere II.— P. 12—16.

Поступила в редколлегию 13.02.84

ЗАМЕЧАНИЯ О ПОЛНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ
ПОВЕРХНОСТЯХ

Поверхность M^l в римановом пространстве $\bar{M}$ называется параболической, если для каждой нормали $\xi \in TM^\perp$ вторая квадратичная форма A_ξ имеет ранг меньше, чем l .

В [1, 2] доказана теорема, что если M^l — полная параболическая поверхность в сфере S^m (1) с кривизной S Риччи не меньше $l-1$, то M^l является вполне геодезической большой сферой S^l .

В статье показано, что неравенство для кривизны Риччи достаточно предполагать лишь в одной точке максимального ранга (теорема 1). Неравенство для кривизны Риччи можно ослабить, сделав дополнительное предположение о ранге вторых квадратичных форм (теорема 2).

Теорема 1. Пусть M^l — полная параболическая поверхность в сфере S^m (1) и в некоторой точке $a \in M$ с условием $r(a) = r$ все кривизны Риччи не меньше $l-1$. Тогда M^l является большой сферой S^l .

Теорема 2. Пусть M^l — полная поверхность а) в S^m (1), б) келерова в CP^m (1) с кривизной Риччи больше а) $l-2$, б) $l/4$. Тогда, если максимальный ранг вторых квадратичных форм, а) $r < l - v(l)$; б) $r < l$, то M^l является вполне геодезической а) S^l , б) $CP^{l/2}$.

Последовательность $v(l)$ определена правилом (см. [3]) $v(l) = \max\{t : t < \rho(l-t)\}$, где $\rho(n) - 1$ — максимальное число непрерывных поточечно линейно независимых векторных полей на сфере $S^{(n-1)}$. Справедливы соотношения: $v(l) < 2 \log_2(l) + 1$; $v(2^b) = 0$, ($b = 0, 1, \dots$). Поэтому для размерностей $l = 2^b$ теорема 2 усиливает результат А. А. Борисенко. Так как у поверхности M^l с неположительной внешней q -мерной кривизной $\bar{\gamma}_q \leq 0$ (q — четное) ранг r и коразмерность p связаны [1] соотношением $r \leq 2p(q-1)$, то из теоремы 2 выводится

Следствие 1. Пусть M^l — полная поверхность а) в S^m , б) келерова в CP^m с кривизной Риччи больше а) $l-2$, б) $l/4$,

и условием $\bar{\gamma}_q \leq 0$. Тогда, если коразмерность $ap < (l - v(l))/2(q-1)$, б) $p < l/2(q-1)$, то M' — вполне геодезическая. Для доказательства теоремы 1 понадобится

Лемма. Пусть M' — полная параболическая поверхность в S^m (1). Тогда для любой единичной нормали ξ ранга r вторая квадратичная форма A_ξ имеет нулевую сигнатуру.

Заметим, что аналогичное утверждение для сильнопараболических поверхностей (с нуль-индексом $v > 0$) доказано в [4].

Доказательство леммы. Пусть $\xi_0 \in T_a M^\perp$ — единичная нормаль ранга r и $L_0 \subset M$ — большая $(l-r)$ -мерная сфера (образующая), вдоль которой ξ_0 стационарна и, следовательно, A_{ξ_0} имеет постоянный ранг и сигнатуру [1]. Продолжим ξ_0 гладким полем единичных нормалей $\{\xi\}$ над $U \subset M$ — трансверсальной к L_0 окрестностью точки a . Можно считать $r(\xi) = r$. Пусть $\{L\}$ — семейство $(l-r)$ -мерных образующих на M , построенных для $\{\xi\}$ аналогично образующей L_0 . Тогда окрестность $W \subset M$ точки a гладко расслоена частями $\{L\}$. Обозначим через $-W$ антиподальное множество для W на S^m . Очевидно, $-W$ является открытым l -мерным подмногообразием, окрестностью точки $-a$ в M' . В силу сказанного

$$A_{\xi_a} = A_{-\xi_{-a}} = -A_{\xi_{-a}}. \quad (1)$$

Как замечено выше, сигнатуры квадратичных форм A_{ξ_a} , $A_{\xi_{-a}}$ равны. Поэтому из (1) получаем, что A_{ξ_a} имеет нулевую сигнатуру (одинаковое количество положительных и отрицательных собственных чисел), что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы 1. Предположим противное, т. е. что у поверхности M' ранг $r > 0$. В силу предположения о кривизне Риччи вторая квадратичная форма вектора средней кривизны в точке a положительно определена на подпространстве, ортогональном векторам сильной параболичности [5]. Следовательно, параболичность в точке a является сильной параболичностью ($v_a = l - r_a$), и для нормалей $\xi \in T_a M^\perp$ ранга r , близких к вектору средней кривизны, выполнено $A_\xi \geq 0$, что противоречит лемме. Следовательно, $r = 0$ и M' — вполне геодезическая, и теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. а) Предположим противное, т. е. $r > 0$. Пусть ξ_0 — единичная нормаль ранга r и $L_0 \subset M$ — большая $(l-r)$ -мерная сфера (образующая). В силу формул Гаусса и известного строения тензора кривизны S^m получаем условия на секционные кривизны вдоль L_0 :

$$\begin{aligned} K(x, y) &\leq 1 \\ K(x, u) &= 1 \quad (x, u \in TL_0, y \in TL_0^\perp). \end{aligned} \quad (2)$$

Из требования на кривизну Риччи и (2) вытекает неравенство для смешанной секционной кривизны вдоль образующей L_0 :

$$K(x, y) > 0, \quad (x \in TL_0, y \in TL_0^\perp). \quad (3)$$

В случае (3) M_i однозначно проектируется вдоль L_0 и $r \geq 1 - v$ (1) [3], что противоречит условиям.

Случай (6) рассматривается аналогично.

Список литературы: 1. *Борисенко А. А.* О внешне геометрических свойствах параболических поверхностей и топологических свойствах седловых поверхностей в симметрических пространствах ранга один // *Мат. сб.*— 1981.— 116, № 3.— С. 440—457. 2. *Борисенко А. А.* О полных параболических поверхностях // *Укр. геометр. сб.*— 1985.— Вып. 28.— С. 8—19. 3. *Ровенский В. Ю.* Характеризация вполне геодезических подмногообразий S^m и CP^m // *Укр. геометр. сб.*— 1985.— Вып. 28.— С. 106—116. 4. *Dajczer M., Gromoll D.* On Spherical Submanifolds with nullity // *Proc. AMS.*— 1985.— V. 93, N 1.— P. 99—100. 5. *Abe K.* Some remarks on a class of submanifolds in Space Forms of Nonnegative curvature // *Math. Ann.*— 1980.— V. 247.— P. 275—278.

Поступила в редколлегию 29.08.85

М. Р. РОГОВОЙ

ОБ ОДНОМ ИНВАРИАНТЕ ПОВЕРХНОСТИ
В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Известно, что множество нормалей поверхности в E_3 вдоль линии кривизны образует развертывающуюся линейчатую поверхность. Следовательно, нормали поверхности в двух бесконечно близких точках A и A^* ее линии кривизны пересекаются (с точностью до бесконечно малых высшего порядка) и поэтому лежат в одной плоскости. Таким образом, при бесконечно малом перемещении вдоль линии кривизны из точки A в точку A^* нормаль поверхности в точке A^* лежит в нормальной плоскости α поверхности, определяемой нормалью поверхности в точке A и касательной к линии кривизны в этой точке.

Если из точки A переместиться по поверхности в направлении, не совпадающем с направлением линии кривизны, то нормаль поверхности в бесконечно близкой точке A^* не будет лежать в плоскости α ; она отклонится от нее на некоторый угол $d\psi$. Определим величину этого угла.

Пусть $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ — радиус-вектор точки A поверхности; $\mathbf{n} = (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) / |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|$ — единичный вектор нормали поверхности в точке A .

Искомый угол $d\psi$ — это угол между нормалью $\mathbf{n} + d\mathbf{n}$ поверхности в точке A^* и нормальной плоскостью α в точке A , определяемой векторами $\mathbf{n}$, $d\mathbf{r}$.

Рассмотрим векторное произведение $\mathbf{n} \times d\mathbf{r}$; этот вектор составляет с вектором $\mathbf{n} + d\mathbf{n}$ угол $\frac{\pi}{2} - d\psi$. Поэтому скалярное произведение этих двух векторов

$$(\mathbf{n} \times d\mathbf{r}) \cdot (\mathbf{n} + d\mathbf{n}) = |\mathbf{n} \times d\mathbf{r}| |\mathbf{n} + d\mathbf{n}| \sin(d\psi).$$

Но левая часть этого равенства представляет собой смешанное произведение векторов $\mathbf{n}$, $d\mathbf{r}$, $d\mathbf{n}$, а правая — эквивалентна величине $ds d\psi$, где ds — дифференциал дуги кривой, по которой происходит перемещение от точки A к точке A^* .

Таким образом, $(\mathbf{n}, d\mathbf{r}, d\mathbf{n}) = ds d\psi$ и

$$d\psi = (\mathbf{n}, d\mathbf{r}, d\mathbf{n})/ds. \quad (1)$$

Пусть E , F , G и L , M , N — коэффициенты первой и второй квадратичных форм поверхности, тогда [1]

$$\mathbf{n}_u = \alpha_{11}\mathbf{r}_u + \alpha_{12}\mathbf{r}_v, \quad \mathbf{n}_v = \alpha_{21}\mathbf{r}_u + \alpha_{22}\mathbf{r}_v, \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \frac{-LG + MF}{EG - F^2}, & \alpha_{12} &= \frac{LF - ME}{EG - F^2}, \\ \alpha_{21} &= \frac{NF - MG}{EG - F^2}, & \alpha_{22} &= \frac{-NE + MF}{EG - F^2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Подставляя в (1) $d\mathbf{r} = \mathbf{r}_u du + \mathbf{r}_v dv$, $d\mathbf{n} = \mathbf{n}_u du + \mathbf{n}_v dv$ и воспользовавшись формулами (2) и (3), получим

$$d\psi = \frac{(LF - ME) du^2 + (LG - NE) du dv + (MG - NF) dv^2}{\sqrt{EG - F^2} ds^2}. \quad (4)$$

Угол $d\psi$ назовем углом отклонения нормали поверхности.

Определение. Отношение угла отклонения нормали поверхности при бесконечно малом перемещении по поверхности к дифференциалу дуги этого перемещения назовем нормальным отклонением поверхности в данном направлении [2].

Обозначим нормальное отклонение через χ :

$$\chi = \frac{d\psi}{ds} = \frac{(\mathbf{n}, d\mathbf{r}, d\mathbf{n})}{ds^2} \quad (5)$$

или, принимая во внимание (4),

$$\chi = \frac{(LF - ME) du^2 + (LG - NE) du dv + (MG - NF) dv^2}{\sqrt{EG - F^2} ds^2}. \quad (6)$$

Нетрудно установить, что точно по такой же формуле вычисляется кручение геодезической линии на поверхности [3].

В самом деле, пусть τ , γ , β — единичные векторы касательной, главной нормали и бинормали некоторой линии на поверхности в точке A . Тогда

$$\frac{dv}{ds} = -k\tau - \kappa\beta, \quad (7)$$

где k и κ — кривизна и кручение кривой.

Для геодезической линии главная нормаль $\mathbf{v}$ коллинеарна нормали $\mathbf{n}$ поверхности $\mathbf{v} = \pm \mathbf{n}$ (8). Умножая (7) скалярно на β , находим

$$\begin{aligned}\kappa &= -\beta \cdot \frac{d\mathbf{v}}{ds} - (\tau \times \mathbf{v}) \cdot \frac{d\mathbf{v}}{ds} = -\left(\frac{d\mathbf{r}}{ds} \times \mathbf{v}\right) \cdot \frac{d\mathbf{v}}{ds} = \\ &= -\frac{(d\mathbf{r}, \mathbf{v}, d\mathbf{v})}{ds^2} = \frac{(\mathbf{v}, d\mathbf{r}, d\mathbf{v})}{ds^2}\end{aligned}$$

или, принимая во внимание (8), для геодезической линии

$$\kappa = \frac{(\mathbf{n}, d\mathbf{r}, d\mathbf{n})}{ds^2}. \quad (9)$$

Сравнивая (9) и (1), заключаем: $\chi = \kappa$.

Таким образом, установлено, что нормальное отклонение поверхности в данной точке и данном направлении равно кручению геодезической линии, идущей из этой точки в этом направлении.

Числитель в формуле (6) представляет собой левую часть уравнения линий кривизны поверхности. Следовательно, в направлении линии кривизны нормальное отклонение поверхности равно нулю.

Если отнести поверхность к линиям кривизны, тогда $F = M = 0$, и формула (6) приобретает вид

$$\chi = \frac{LG - NE}{\sqrt{EG}} \cdot \frac{du dv}{ds^2}. \quad (10)$$

Индикатриса нормальных отклонений — геометрическое место концов $P(x, y)$ отрезков $AP = 1/\sqrt{\chi}$ в касательной плоскости поверхности в точке A — запишется уравнением

$$\left(\frac{L}{E} - \frac{N}{G}\right)xy = \pm 1; \quad (11)$$

оси Ax и Ay направлены по касательным к линиям кривизны.

Индикатриса нормальных отклонений (11) представляет собой пару равнобочных сопряженных гипербол, асимптотами которых служат касательные к линиям кривизны.

Главными направлениями индикатрисы (11) являются биссектрисы координатных углов $y = \pm x$, а главными значениями нормальных отклонений

$$\chi_{1,2} = \pm \frac{1}{2} \left(\frac{L}{E} - \frac{N}{G} \right); \quad (12)$$

если учесть, что главные кривизны поверхности $k_1 = L/E$, $k_2 = N/G$, то формула (12) запишется так:

$$\chi_{1,2} = \pm (k_1 - k_2).$$

В омбилической точке поверхности нормальное отклонение в любом направлении равно нулю.

Список литературы: 1. *Погорелов А. В.* Дифференциальная геометрия.— М. : Наука, 1969.— 176 с. 2. *Роговой М. Р.* К дифференциальной геометрии неголономной гиперповерхности // Укр. геометр. сб.— 1969.— Вып. 7.— С. 98—108. 3. *Бюшгенс С. С.* Дифференциальная геометрия.— М. ; Л. : Гостехтеоретиздат, 1940.— 300 с.

Поступила в редколлегию 22.12.84

О. И. РУДНИЦКИЙ
НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА БАЗИСНЫХ ИНВАРИАНТОВ
УНИТАРНОЙ ГРУППЫ $W(K_5)$

Пусть в шестимерном унитарном пространстве U^6 задана координатная система началом O и ортонормированным базисом e_l ($l = \overline{1, 6}$), вектор $z = \sum z_l e_l$. Отражения второго порядка относительно гиперплоскостей с уравнениями

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 = 0, \quad z_2 - z_3 = 0, \quad z_3 - z_4 = 0, \quad z_1 - \omega z_2 = 0, \\ z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 + z_6 = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где ω есть первообразный корень третьей степени из единицы, задают унитарную группу $W(K_5)$ [1, 2]. Все 45 гиперплоскостей симметрии имеют уравнения

$$\begin{aligned} z_i - \omega^{k_0} z_j = 0, \quad \sum_i \omega^{k_l} z_i = 0; \\ \sum_i k_i \equiv 0 \pmod{3}; \quad k_5 = k_6; \quad k_0, \quad k_i = \overline{1, 3}; \quad i, j = \overline{1, 4}, \quad i < j. \end{aligned} \quad (2)$$

Поворот f вокруг 4-плоскости, определяемый формулами

$$x_i = z_i, \quad x_5 = \frac{1}{\sqrt{2}}(z_3 + z_6), \quad x_6 = \frac{1}{\sqrt{2}}(z_5 - z_6),$$

переводит (2) в

$$\begin{aligned} x_i - \omega^{k_0} x_j = 0, \quad \sum_i \omega^{k_l} x_i + \sqrt{2} \omega^{k_5} x_5 = 0; \\ \sum_i k_i + 2k_5 \equiv 0 \pmod{3}. \end{aligned} \quad (3)$$

Множество всех многочленов, инвариантных относительно $W(K_5)$, образует алгебру $I(W(K_5))$, порожденную формами степеней $m_p = 4, 6, 10, 12, 18$ ($p = \overline{1, 5}$; $m_1 < m_2 < \dots < m_5$). [1].

Пусть $\sigma \in W(K_5)$ — отражения относительно гиперплоскостей с уравнениями (3), s — единичный вектор нормали одной из них. Тогда многочлены

$$J_{2r} = \sum_{\sigma \in W(K_5)} (x, \sigma s)^{2r}, \quad r \geq 1, \quad x = (x_p), \quad p = \overline{1, 5}, \quad (4)$$

принадлежат алгебре $I(W(K_5))$; они относятся к типу многочленов Погорелова [3]. В [4] анонсирована следующая

Теорема. Многочлены J_r , являющиеся образующими алгебры $I(W(K_5))$ только при $r = 3, 6, 9$.

В настоящей заметке приводится ее доказательство, при этом соответствующие базисные формы $J_r(W(K_5))$ находятся в явном виде.

Доказательство. Запишем множество σ_2 всех нормальных векторов гиперплоскостей симметрии:

$$\pm \frac{\varepsilon \omega^t}{\sqrt{2}} (e_i - \omega^{k_i} e_i), \pm \frac{\omega^t}{\sqrt{6}} \left(\sum_i \omega^{k_i} e_i + \sqrt{2} \omega^{k_5} e_5 \right);$$

$$\varepsilon = \sqrt{-1}, t = \overline{1, 3}.$$

Если $m_{p_0} (1 \leq p_0 \leq 5)$ не делится на 3, то $\sum_{i=1}^3 \omega^{im_{p_0}} = 0$; поэтому из (4) получаем $J_4 = J_{10} = 0$.

На основании (4) многочлены J_r ($r = 3, 6, 9$) имеют следующий развернутый вид (с точностью до постоянного множителя):

$$J_6 = - \sum x_i^6 + x_5^6 + 10 \sum_{i < j} x_i^3 x_j^3 + 5 \sqrt{2} x_5^3 \sum x_i^3 + 90 x_5^2 \prod x_i, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} J_{12} = & 61 \sum x_i^{12} + 16 x_5^{12} - 4400 \sum x_i^9 x_j^3 + 110 \sqrt{2} x_5^9 \sum x_i^3 + \\ & + 880 \sqrt{2} x_5^9 \sum x_i^3 + 18942 \sum_{i < j} x_i^6 x_j^6 + 1848 x_5^6 \sum x_i^6 + \\ & + 4620 \sum_{i < k} x_i^6 x_j^3 x_k^3 + 36960 x_5^6 \sum_{i < j} x_i^3 x_j^3 + 9240 \sqrt{2} x_5^3 \sum x_i^6 x_j^3 + \\ & + 92400 \prod x_i^3 + 184800 \sqrt{2} x_5^3 \sum_{i < j < k} x_i^3 x_j^3 x_k^3 + (23760 x_5^2 \sum x_i^6 + \\ & + 257900 x_5^2 \sum_{i < j} x_i^3 x_j^3 + 166320 \sqrt{2} x_5^2 \sum x_i^3 + 47520 x_5^8) \prod x_i + \\ & + (124740 \sqrt{2} x_5 \sum x_i^3 + 1247400 x_5^4) \prod x_i^2, \quad (9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{18} = & 820 \sum x_i^{18} - 64 x_5^{18} - 223176 \sum x_i^{15} x_j^3 - 204 \sqrt{2} x_5^{15} \sum x_i^{15} - \\ & - 13056 \sqrt{2} x_5^{15} \sum x_i^3 + 5072613 \sum x_i^{12} x_j^6 - 18564 x_5^6 \sum x_i^{12} - \\ & - 148512 x_5^{12} \sum x_i^6 - 13297570 \sum_{i < j} x_i^9 x_j^9 - 97240 \sqrt{2} x_5^9 \sum x_i^9 - \\ & - 46410 \sum_{i < k} x_i^{12} x_j^3 x_k^3 - 92820 \sqrt{2} x_5^9 \sum x_i^{12} x_j^3 - \\ & - 2970240 x_5^{12} \sum_{i < j} x_i^3 x_j^3 - 510510 \sum x_i^9 x_j^6 x_k^3 - \\ & - 1021020 \sqrt{2} x_5^9 \sum x_i^9 x_j^6 - 4084080 x_5^6 \sum x_i^9 x_j^3 - \\ & - 8168160 \sqrt{2} x_5^9 \sum x_i^6 x_j^3 - 2144142 \sum_{i < j < k} x_i^6 x_j^6 x_k^6 - \\ & - 1715136 x_5^6 \sum_{i < j} x_i^9 x_j^6 - (10210200 \sum x_i^6 + 42882840 \sum_{i < j} x_i^3 x_j^3 + \\ & + 1715313600 \sqrt{2} x_5^3 \sum x_i^3 + 6861254400 x_5^9) \prod x_i^3 - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -20\,420\,400\sqrt{2}x_5^3 \sum_{j < k} x_i^3 x_j^3 x_k^3 - 163\,363\,200\sqrt{2}x_5^9 \sum_{i < j < k} x_i^3 x_j^3 x_k^3 - \\
& -85\,765\,680\sqrt{2}x_5^3 \sum_{i < j} x_i^3 x_j^3 x_k^3 - 343\,062\,720x_5^6 \sum_{j < k} x_i^3 x_j^3 x_k^3 - \\
& - (128\,520x_5^2 \sum x_i^{12} + 1\,175\,040x_5^{14} + 9\,189\,180x_5^2 \sum x_i^9 x_j^3 + \\
& + 7\,351\,344\sqrt{2}x_5^5 \sum x_i^9 + 26\,732\,160\sqrt{2}x_5^{11} \sum x_i^9 + \\
& + 31\,505\,760x_5^2 \sum_{i < j} x_i^3 x_j^3 + 63\,011\,520x_5^8 \sum x_i^3 + \\
& + 275\,675\,400x_5^2 \sum_{j < k} x_i^3 x_j^3 x_k^3 + 220\,540\,320\sqrt{2}x_5^5 \sum x_i^3 x_j^3 + \\
& + 551\,350\,800x_5^8 \sum_{i < j} x_i^3 x_j^3 + 1\,929\,727\,800\sqrt{2}x_5^5 \sum_{i < j < k} x_i^3 x_j^3 x_k^3) \prod x_i - \\
& - 2\,412\,159\,750x_5^2 \prod x_i^4 - (413\,513\,100x_5^4 \sum x_i^6 + 441\,080\,640x_5^{10} + \\
& + 2\,315\,673\,360x_5^4 \sum_{i < j} x_i^3 x_j^3 + 1\,323\,241\,920\sqrt{2}x_5^7 \sum x_i^3 + \\
& + 41\,351\,310\sqrt{2}x_5 \sum x_i^6 x_j^3 + 231\,567\,336\sqrt{2}x_5 \sum_{i < j < k} x_i^3 x_j^3 x_k^3 + \\
& + 2\,506\,140\sqrt{2}x_5 \sum x_i^9) \prod x_i^2; \quad (7)
\end{aligned}$$

индексы $i, j, k = \overline{1, 4}$ различны в каждом члене каждой суммы и удовлетворяют неравенствам, указанным под знаком суммы.

Буркгард [5] доказал (см. [1]), что базисные формы алгебры $I(W(K_5))$ могут быть записаны так:

$$P_4 = y_5^4 + 8y_5 \sum y_i^3 + 48 \prod y_i, \quad (8)$$

$$P_6 = -8 \sum y_i^6 + y_5^6 + 80 \sum_{i < j} y_i^3 y_j^3 - 20y_5^3 \sum y_i^3 + 360y_5^2 \prod y_i, \quad (9)$$

$$\begin{aligned}
P_{10} = & y_5 \sum y_i^2 y_j^3 - y_5^4 \sum_{i < j} y_i^3 y_j^3 + 9y_5^2 \prod y_i^2 - (2 \sum y_i^6 - 2 \sum_{i < j} y_i^3 y_j^3 - \\
& - y_5^3 \sum y_i^3 - y_5^6) \prod y_i - 6y_5 \sum_{i < j < k} y_i^3 y_j^3 y_k^3, \quad (10)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{12} = & -4 \sum y_i^9 y_j^3 + 16 \sum_{i < j} y_i^6 y_j^3 - 8 \sum_{j < k} y_i^3 y_j^3 y_k^3 + 5y_5^6 \sum_{i < j} y_i^2 y_j^3 - \\
& - y_5^3 \sum y_i^6 y_j^3 - 102y_5^3 \sum_{i < j < k} y_i^3 y_j^3 y_k^3 + 168 \prod y_i^3 + (30y_5^2 \sum y_i^6 + \\
& + 78y_5^2 \sum_{i < j} y_i^3 y_j^3 - 33y_5^5 \sum y_i^3 + 3y_5^8) \prod y_i - (108y_5 \sum y_i^2 - \\
& - 243y_5^4) \prod y_i^2, \quad (11)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{18} = & -\sum y_i^{12} y_j^6 + 2 \sum_{i < j} y_i^9 y_j^3 + 2 \sum_{j < k} y_i^{12} y_j^3 y_k^3 - 2 \sum y_i^9 y_j^6 y_k^3 + \\
& + 2y_5^3 \sum y_i^9 y_j^3 + 6 \sum_{i < j < k} y_i^6 y_j^3 y_k^3 - y_5^6 \sum_{i < j} y_i^6 y_j^3 - (8 \sum y_i^6 - 8 \sum_{i < j} y_i^3 y_j^3 + \\
& + 168y_5^3 \sum y_i^3 - 96y_5^6) \prod y_i^3 - 8y_5^3 \sum_{j < k} y_i^9 y_j^3 y_k^3 - 4y_5^9 \sum_{i < j < k} y_i^3 y_j^3 y_k^3 + \\
& + 4y_5^3 \sum_{i < j} y_i^6 y_j^3 y_k^3 + 10y_5^6 \sum_{j < k} y_i^3 y_j^3 y_k^3 - (24y_5^2 \sum_{i < j} y_i^6 y_j^3 - 6y_5^2 \sum y_i^9 y_j^3 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 12y_5^5 \sum y_i^6 y_j^3 - 12y_5^2 \sum_{i < k} y_i^6 y_j^3 y_k^3 - 6y_5^8 \sum_{i < j} y_i^3 y_j^3 + 90y_5^5 \sum_{i < j < k} y_i^3 y_j^3 y_k^3) \prod y_i + \\
& + 315y_5^3 \prod y_i^4 + (27y_5^4 \sum y_i^6 + 3y_5^{10} + 108y_5^4 \sum_{i < j} y_i^3 y_j^3 - 18y_5^7 \sum y_i^3 + \\
& + 18y_5 \sum y_i^3 y_j^3 - 72y_5 \sum_{i < j < k} y_i^3 y_j^3 y_k^3 - 12y_5 \sum y_i^9) \prod y_i^2. \quad (12)
\end{aligned}$$

Отметим, что в (12) уточнен явный вид многочлена P_{18} , приведенного в [5, с. 209], следующим образом: коэффициенты 12, -36, 12, -27 при одночленах $y_5^8 \sum y_i^4 y_j^4 y_k y_m$, $y_5^7 \sum y_i^5 y_j^5 y_k^2 y_m^2$, $y_5 \sum y_i^{11} y_j^2 y_k^2 y_m^2$, $y_5 \sum y_i^5 y_j^5 y_k^5 y_m^2$ ($m = 1, 4$) заменены на 6, -18, -12, -72 соответственно.

Пусть

$$J'_{2r} = g(J_{2r}), \quad (13)$$

где g — центроаффинное преобразование, определяемое формулами

$$y_i = -x_i, y_5 = \frac{1}{\sqrt{2}} x_5, y_6 = \frac{1}{\sqrt{2}} x_6. \quad (14)$$

Тогда (5)–(12) и (14) дают соотношения

$$\begin{aligned}
J'_6 &= P_6, 16J'_{12} = 50880P_{12} + 61P_6^2 - 45P_4^3, 16J'_{18} = \\
&= -261643392P_{18} - 205P_6^3 + 189P_4^3P_6 - 794304P_6P_{12} + \\
&+ 1334016P_{10}P_4^2.
\end{aligned}$$

Они показывают, что формы J'_{2r} ($r = 3, 6, 9$) не являются многочленами от P_{m_p} ($m_p < 2r$). Поэтому, согласно (13), формы J_{2r} — базисные инварианты. Теорема доказана.

Рассмотрим еще один способ построения базисных инвариантов группы $W(K_5)$. Отражения второго порядка относительно гиперплоскостей с уравнениями (1) и $z_4 - z_5 = 0$ порождают унитарную группу Митчелла $W(K_6)$ в шестимерном пространстве U^6 [1]. Образующие F_{m_l} алгебры $I(W(K_6))$ степеней $m_l = 6, 12, 18, 24, 30, 42$ принадлежат и алгебре $I(W(K_5))$; они могут быть представлены в виде (4) при $\sigma \in W(K_6)$. Действуя преобразованием $g \circ f$ на формы F_{m_l} ($l_0 = 1, 3$) и полагая $y_6 = 0$, в частности, получим

$$\begin{aligned}
F'_6 &= P_6, F'_{18} = 7\,462\,912 \sum y_i^{18} - 75\,371 y_5^{18} - 1\,219\,956\,400 \sum y_i^{15} y_j^3 + \\
&+ 304\,988\,160 y_5^3 \sum y_i^{15} + 631\,380 y_5^{15} \sum y_i^3 + 27\,677\,884\,416 \sum y_i^{12} y_j^6 + \\
&+ 853\,052\,928 y_5^6 \sum y_i^{12} + 853\,944 y_5^{12} \sum y_i^6 - 72\,688\,844\,800 \sum_{i < j} y_i^9 y_j^9 + \\
&+ 316\,613\,440 y_5^9 \sum y_i^9 - 760\,381\,440 \sum_{i < k} y_i^{12} y_j^3 y_k^3 + \\
&+ 190\,095\,360 y_5^3 \sum y_i^{12} y_j^3 - 253\,584\,240 y_5^{12} \sum_{i < j} y_i^3 y_j^3 - \\
&- 8\,364\,195\,840 \sum y_i^3 y_j^6 y_k^3 + 2\,091\,048\,960 y_5^3 \sum y_i^9 y_j^9 -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2\,875\,192\,320 y_5^6 \sum y_i^3 y_j^3 + 2\,777\,174\,400 y_5^9 \sum y_i^6 y_j^3 - \\
& -35\,129\,622\,528 \sum_{i < j < k} y_i^6 y_j^3 y_k^6 - 12\,075\,807\,744 y_5^6 \sum_{i < j} y_i^6 y_j^6 - \\
& - (167\,283\,916\,800 \sum y_i^6 + 702\,592\,450\,560 \sum_{i < j} y_i^3 y_j^3 - \\
& - 3\,512\,962\,252\,800 y_5^3 \sum y_i^3 + 4\,830\,323\,097\,600 y_5^6) \prod y_i^3 + \\
& + 41\,800\,979\,200 y_5^3 \sum_{i < k} y_i^3 y_j^3 y_k^3 + 55\,543\,488\,000 y_5^6 \sum_{i < j < k} y_i^3 y_j^3 y_k^3 + \\
& + 175\,648\,112\,640 y_5^3 \sum_{i < j} y_i^6 y_j^3 y_k^3 - 241\,516\,154\,880 y_5^6 \sum_{i < k} y_i^6 y_j^3 y_k^3 - \\
& - (526\,417\,920 y_5^2 \sum y_i^{12} + 50\,141\,160 y_5^{14} + 37\,638\,881\,280 y_5^2 \sum y_i^9 y_j^3 - \\
& - 9\,409\,720\,320 y_5^5 \sum y_i^9 - 4\,557\,833\,280 y_5^{11} \sum y_i^3 + \\
& + 129\,047\,592\,960 y_5^2 \sum_{i < j} y_i^6 y_j^3 + 21\,675\,962\,880 y_5^8 \sum y_i^6 + \\
& + 1\,129\,166\,438\,400 y_5^2 \sum_{i < k} y_i^6 y_j^3 y_k^3 - 282\,291\,609\,600 y_5^5 \sum y_i^6 y_j^3 + \\
& + 189\,664\,675\,200 y_5^8 \sum_{i < j} y_i^3 y_j^3 - 2\,470\,051\,584\,000 y_5^5 \sum_{i < j < k} y_i^3 y_j^3 y_k^3) \prod y_i - \\
& - 9\,880\,206\,336\,000 y_5^2 \prod y_i^4 - (635\,156\,121\,600 y_5^4 \sum y_i^6 + \\
& + 75\,424\,789\,440 y_5^{10} + 3\,556\,874\,280\,960 y_5^4 \sum_{i < j} y_i^3 y_j^3 - \\
& - 889\,218\,570\,240 y_5^7 \sum y_i^3) \prod y_i^2.
\end{aligned}$$

При этом

$$\begin{aligned}
F_{18} = & -11\,471\,708\,160 P_{18} - 14\,576 P_6^3 - 60\,795 P_4^3 P - \\
& - 31\,127\,040 P_6 P_{12} + 89\,622\,720 P_{10} P_4^2.
\end{aligned}$$

Список литературы: 1. Shephard G. C., Todd J. A. Finite unitary reflection groups // Canad. J. Math.—1954.—6, N 2.—P. 274—304. 2. Cohen A. M. Finite complex reflection groups // Ann. scient. Ec. Norm. Sup.—1976.—4.—P. 379—436. 3. Игнатенко В. Ф. О геометрической теории инвариантов групп, порожденных отражениями // International Conference on Intuitive Geometry (Abstracts), Balatonszéplak, Hungary.—1985.—P. 49. 4. Рудницкий О. И. О базисных инвариантах унитарной группы $W(K_5)$: Тез. докл. Первой конф. по комбинаторной геометрии и ее приложениям, Батуми, 1985.—С. 56. 5. Burkhardt H. Untersuchungen aus dem Gebiete der hyperelliptischen Modulfunctionen. Zweiter Theil // Math. Annalen.—1891.—38.—S. 161—224.

Поступила в редколлегию 01.10.85

АЛГОРИТМИЧЕСКАЯ ПРОВЕРКА ИЗГИБАЕМОСТИ ПОДВЕСОК

1. Об изгибаемости невыпуклых многогранников известны два общих факта: 1) среди них бывают изгибаемые; 2) почти все многогранники типа сферы являются неизгибаемыми (см. часть II в книге [1]). Но поскольку для конкретно данного невыпуклого многогранника нет сколько-нибудь общих критериев изгибаемости, то представляется естественным искать алгоритмические способы проверки изгибаемости. Работы в этом направлении уже ведутся (см. статью Р. Коннелли «Некоторые предположения и нерешенные вопросы в теории изгибаний» в [1]). В предлагаемой статье указывается один такой алгоритм, довольно эффективно работающий для проверки изгибаемости подвесок (бипирамид), который в принципе может быть обобщен на случай более общих многогранников.

2. Основой алгоритма является формула для расстояния между вершинами двух тетраэдров с общим основанием и известными длинами ребер. Пусть l_{ij} — длина ребер, соединяющих вершины с номерами i и j (рис. 1); длину ребра $\langle 1, 2 \rangle$ обозначим через x . Далее, пусть S_{123} — площадь треугольника $\langle 1, 2, 3 \rangle$, V_{1234} и V_{1235} — объемы соответствующих тетраэдров. Тогда расстояние d_{45} между вершинами 4 и 5 вычисляется по формуле

$$d_{45}^2 = l_{34}^2 + l_{35}^2 + \frac{D + 36\varepsilon V_{1234}V_{1235}}{2S_{123}^2}, \quad (1)$$

где

$$D = \frac{1}{8} \begin{vmatrix} 2l_{23}^2 & x^2 - l_{23}^2 - l_{13}^2 & l_{25}^2 - l_{35}^2 - l_{23}^2 \\ x^2 - l_{23}^2 - l_{13}^2 & 2l_{13}^2 & l_{35}^2 + l_{13}^2 - l_{15}^2 \\ l_{24}^2 - l_{23}^2 - l_{34}^2 & l_{13}^2 - l_{14}^2 - l_{15}^2 & 0 \end{vmatrix},$$

а $\varepsilon = \pm 1$ в зависимости от того, лежат ли вершины 4 и 5 по разные или по одну сторону от плоскости треугольника $\langle 1, 2, 3 \rangle$ (если одна из вершин 4 и 5 или обе они лежат на плоскости основания, то соответствующий объем равен нулю и величина ε значения не имеет).

Выведем эту формулу. Пусть A и B — проекции вершин 4 и 5 на плоскость треугольника $\langle 1, 2, 3 \rangle$, h_4 и h_5 — высоты рассматриваемых тетраэдров. Обозначим через l_i векторы, идущие от вершины i к вершине j . Очевидно,

$$d_{45}^2 = |AB|^2 + (h_4 + \varepsilon h_5)^2. \quad (2)$$

Из равенства $|AB| = |L_{54}| \sin \alpha$, где $\alpha = \angle(5, 4, A) = \angle(B, 5,$

4) — угол между вектором L_{i4} и единичным вектором $(L_{32} \times L_{31}) / 2S_{123}$, находим

$$|AB|^2 = (l_{54} \times (l_{32} \times l_{31}))^2 / 4S_{123}^2, \quad (3)$$

$$h_4 = 3V_{1234} / S_{123}, \quad h_5 = 3V_{1235} / S_{123}.$$

С другой стороны, $l_{54} = l_{53} + l_{34}$, поэтому с учетом формул двойного векторного произведения и скалярного произведения двух векторных произведений получаем

$$\begin{aligned} |AB|^2 &= l_{35}^2 - \frac{(l_{35} l_{32} l_{31})^2}{4S_{123}^2} + l_{34}^2 - \frac{(l_{34} l_{32} l_{31})^2}{4S_{123}^2} + \\ &+ 2 \frac{(l_{53} \times (l_{31} \times l_{32}))(l_{34} \times (l_{31} \times l_{32}))}{4S_{123}^2} = \\ &= l_{35}^2 - \frac{36V_{1235}^2}{4S_{123}^2} + l_{34}^2 - \frac{36V_{1234}^2}{4S_{123}^2} + \frac{1}{2S_{123}^2} \times \\ &\times (l_{31}(l_{53}l_{32}) - l_{32}(l_{53}l_{31})) \cdot (l_{31}(l_{34}l_{32}) - l_{32}(l_{34}l_{31})), \end{aligned}$$

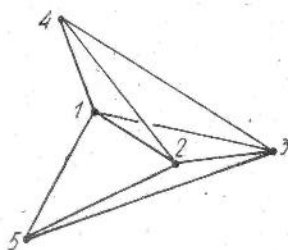


Рис. 1

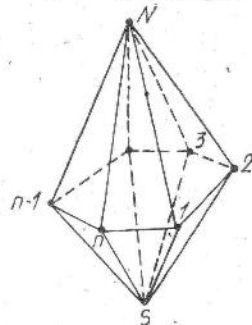


Рис. 2

откуда, выражая скалярные произведения через длины сторон соответствующих треугольников и учитывая (2) и (3), приходим к (1).

3. Объясним теперь работу алгоритма. Пусть рис. 2 изображает комбинаторную модель подвески с полюсами N и S и с экватором, представляющим собой n -угольник с вершинами $1, 2, 3, \dots, n$.

Проведем из вершины 1 всевозможные диагонали экватора: $\langle 1, 3 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, \dots, \langle 1, n-1 \rangle$. Обозначим пространственное расстояние между вершинами 1 и 3 через x_1 и на первом шаге с помощью формулы (1) вычислим расстояние NS между полюсами подвески, считая N и S вершинами тетраэдров с общим основанием $\langle 1, 2, 3 \rangle$. Пусть $NS = y = y(x_1)$. На втором шаге вычисляем расстояние между вершинами 1 и 4, считая 1 и 4 вершинами тетраэдров с общим основанием $\langle 3, N, S \rangle$. Пусть расстояние $l_{14} = x_2 = x_2(x_1)$. На третьем шаге вычисляем расстояние x_3 между 1 и 5, беря за основу треугольник $\langle 4, N, S \rangle$. Продолжая этот процесс, после $n-3$ шагов вычислим расстояние x_{n-3} между вершинами 1 и $n-1$. На последнем, $(n-2)$ -м, шаге находим расстояние $x_{n-2} = l_{1n}$, считая, что l

и n являются вершинами тетраэдров с общим основанием $\langle n-1, N, S \rangle$. Очевидно, если подвеска изгибается, то при изменении $x_1 = l_{13}$ расстояние x_{n-2} необходимо должно оставаться равным l_{1n} , так как $\langle 1, n \rangle$ — это ребро подвески, а если подвеска не изгибается, то при изменении x_1 расстояние x_{n-2} должно изменяться — происходит разрыв подвески (утверждение основано на том факте, что при постоянстве расстояния между полюсами подвеска может изгибаться только в вырожденных случаях с вращением вокруг оси NS , см. [2]).

4. Указанный алгоритм был реализован на ЭВМ студентом МГУ В. Богдановым и опробован на нескольких конкретных подвесках как неизгибаемых, так и заведомо изгибаемых (на октаэдрах Брикара). Результаты работы программы приведены в табл. 1, 2.

Таблица 1

Вычисления для октаэдра Брикара

Значения	
x_1	$x_{n-2} = x_2$
6,5082039	2,9999972
6,5282039	2,9999968
6,5482039	3,0000022
6,5682039	2,9999985
6,5882039	2,9999976
6,6082039	3,0000017
6,6282039	2,9999982
6,6482039	2,9999995
6,6682039	2,9999972
6,6882039	3,0000013
6,7082039	2,9999988
6,7282039	2,9999967
6,7482039	3,0000013
6,7682039	3,0000011
6,7882039	3,0000017
6,8082039	3,0000016
6,8282039	2,9999967
6,8482039	2,9999988
6,8682039	2,9999969
6,8882039	3,0000004
6,9082039	2,9999985

Таблица 2

Вычисления для выпуклого октаэдра

Значения	
x_1	$x_{n-2} = x_n$
1,2142136	0,58444603
1,2342136	0,62173017
1,2542136	0,65994814
1,2742136	0,69909510
1,2942136	0,73917298
1,3142136	0,78019013
1,3342136	0,82215963
1,3542136	0,86510021
1,3742136	0,90903446
1,3942136	0,95399022
1,4142136	0,99999967
1,4342136	1,0471013
1,4542136	1,0953368
1,4742136	1,1447564
1,4942136	1,1954167
1,5142136	1,2473811
1,5342137	1,3007272
1,5542136	1,3388688
1,5742136	1,3272983
1,5942136	1,3146822
1,6142136	1,3009557

Исходные данные:

$$\begin{array}{ll}
 l_{12} = 6 & l_{23} = 3 \\
 l_{34} = 6 & l_{14} = 3 \\
 l_{1N} = 3 & l_{2N} = \sqrt{33} \\
 l_{3N} = 6 & l_{4N} = \sqrt{12} \\
 l_{1S} = 6 & l_{2S} = \sqrt{12} \\
 l_{3S} = 3 & l_{4S} = \sqrt{33}
 \end{array}$$

Исходные данные:

$$\begin{array}{ll}
 l_{12} = 1 & l_{23} = 1 \\
 l_{34} = 1 & l_{14} = 1 \\
 l_{1N} = 1 & l_{2N} = 1 \\
 l_{3N} = 1 & l_{4N} = 1 \\
 l_{1S} = \sqrt{1,5} & l_{2S} = 1 \\
 l_{3S} = \sqrt{1,5} & l_{4S} = \sqrt{2} \\
 x_1 = \sqrt{2} & x_2 = 1
 \end{array}$$

В обеих таблицах подчеркнуты исходные x_1 и вычисленные значения x_2 для конкретно взятого октаэдра; реальные значения x_2 в начальный момент равны соответственно 3 и 1, таким образом, погрешность вычисления — между 10^{-6} и $3 \cdot 10^{-7}$. Значения x_1 изменялись с шагом 0,02 в обе стороны на 10 шагов как в сторону возрастания, так и в сторону убывания. Видно, что длина ребра (1, 4) для октаэдра Брикара — случай изгибаемой подвески — практически изменяется в пределах ошибки вычислений (максимальное отклонение от 3 равно $33 \cdot 10^{-7}$). В то же время для выпуклого октаэдра (случай неизгибаемой подвески) порядок изменения длины ребра (1, 4) тот же 10^{-2} , что и у x_1 .

5. Идея применения этого алгоритма к более общим многогранникам следующая: надо ввести в рассмотрение одно или несколько пространственных расстояний между вершинами, не принадлежащими одному ребру, с таким выбором этих вершин, чтобы задание этих расстояний и длин ребер однозначно (с точностью до движения) определяло многогранник в пространстве, а затем организовать такой вычислительный процесс, чтобы в его конце вычислялось расстояние d между какой-нибудь парой вершин с общим ребром. Варьируя введенные расстояния и прослеживая за изменением d , приходим к выводу: если d изменяется «сильно», то изгибания нет, а если d изменяется «мало», то изгибание есть. Но для окончательного вывода нужно, конечно, каким-то образом учесть влияние неизбежных ошибок вычисления.

Список литературы: 1. Исследования по метрической теории поверхностей. — М.: Мир, 1980. — 180 с. 2. Сабитов И. Х. Описание изгибаний вырождающихся подвесок // Мат. заметки. — 1983. — 33, № 6. — С. 901—914.

Поступила в редколлегию 28.12.83

Л. Н. СЕРГИЕНКО

О ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ «ПРЯМЕЙШИХ» ЛИНИЯХ НЕЛИНЕЙНОГО
НЕГОЛОНОМНОГО МНОГООБРАЗИЯ В E_4

Уравнением Монжа по терминологии С. Ли называется уравнение вида $\Phi(x, y, z; dx, dy, dz) = 0$, однородное степени $k > 1$ относительно дифференциалов [1].

Рассмотрим интегральные кривые системы двух монжевых уравнений в четырехмерном евклидовом пространстве:

$$\Phi_1(x_i; dx_i) = 0,$$

$$\Phi_2(x_i; dx_i) = 0,$$

однородных степени $m, n > 1$ соответственно относительно дифференциалов (здесь и всюду в дальнейшем $i = 1, 2, 3, 4$).

Поделив на dt в соответствующей степени каждое уравнение системы, получим

$$\begin{aligned}\Phi_1(x_i; x'_i) &= 0, \\ \Phi_2(x_i; x'_i) &= 0.\end{aligned}\quad (1)$$

Касательные к множеству интегральных кривых этой системы, проходящих через фиксированную точку $A(x_i)$ пространства, образуют двумерный конус, уравнения которого

$$\begin{aligned}\Phi_1(x_i; X_i - x_i) &= 0, \\ \Phi_2(x_i; X_i - x_i) &= 0.\end{aligned}\quad (2)$$

Двумерная плоскость, касательная к конусу вдоль образующей (x'_i) , определяется уравнениями

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^4 \Phi_{1x'_k}(X_k - x_k) &= 0, \\ \sum_{k=1}^4 \Phi_{2x'_k}(X_k - x_k) &= 0.\end{aligned}$$

Нормальная 2-плоскость к конусу определяется векторами $N_1 = \{\Phi_{1x'_i}\}$ и $N_2 = \{\Phi_{2x'_i}\}$; уравнение нормальной 2-плоскости:

$$X_i - x_i = \alpha \Phi_{1x'_i} + \beta \Phi_{2x'_i}.$$

1. Параллельный перенос векторов, направленных по образующим конуса Монжа. Пусть γ — интегральная кривая системы двух монжевых уравнений (1). Касательные к γ являются образующими конусов Монжа. Пусть точка $A(x_i)$ принадлежит кривой γ . В точке A есть конус Монжа V (2), одна из образующих которого t_1 служит касательной к интегральной кривой γ . Рассмотрим образующую t конуса V , не совпадающую, вообще говоря, с t_1 . Пусть единичный вектор τ задает направление образующей t , $\tau = \{x'_i\}$. В точке A' , принадлежащей кривой γ и бесконечно близкой к точке A , рассмотрим образующую t' конуса Монжа V' , бесконечно близкую к образующей t , $t' = t + dt$. Направление τ' образующей t' будет $\tau' = \tau + d\tau$. Уравнения касательной 2-плоскости к конусу Монжа V вдоль образующей t запишутся так:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^4 \Phi_{1x_k}(X_k - x_k) &= 0, \\ \sum_{k=1}^4 \Phi_{2x_k}(X_k - x_k) &= 0.\end{aligned}\quad (3)$$

Спроектируем вектор τ' на касательную 2-плоскость (3). Вектор проекции (обозначим его через m) лежит на прямой пересечения касательной 2-плоскости (3) и гиперплоскости, натянутой на векторы n_1 , n_2 и $\tau + d\tau$ (векторы n_1 и n_2 составляют ортонормированный базис нормальной 2-плоскости); $m = \alpha n_1 + \beta n_2 + \gamma(\tau + d\tau)$.

Бесконечно малый угол между векторами τ и m (обозначим его через $\delta\sigma$) равен смешанному произведению векторов τ, m, n_1, n_2 : $\delta\sigma = \{\tau, m, n_1, n_2\}$.

Угол $\delta\sigma$ назовем абсолютным углом между бесконечно близкими образующими конусов Монжа. Если абсолютный угол между двумя бесконечно близкими образующими равен нулю, скажем, что образующие абсолютно параллельны. Так вводится понятие параллельного переноса образующих конусов Монжа.

Пусть $\delta\sigma = 0$, отсюда $\{\tau, d\tau, N_1, N_2\} = 0$.

Таким образом, равенство нулю абсолютного угла $\delta\sigma$ равносильно тому, что

$$\begin{vmatrix} \dot{x}_1 & \dot{x}'_1 & \Phi_{1\dot{x}_1} & \Phi_{2\dot{x}_1} \\ \dot{x}_2 & \dot{x}'_2 & \Phi_{1\dot{x}_2} & \Phi_{2\dot{x}_2} \\ \dot{x}_3 & \dot{x}'_3 & \Phi_{1\dot{x}_3} & \Phi_{2\dot{x}_3} \\ \dot{x}_4 & \dot{x}'_4 & \Phi_{1\dot{x}_4} & \Phi_{2\dot{x}_4} \end{vmatrix} = 0.$$

Если теперь вдоль интегральной кривой γ системы двух уравнений Монжа (1) переносить касательный к ней вектор, то уравнение параллельного переноса запишется так:

$$\begin{vmatrix} x'_1 & x''_1 & \Phi_{1x'_1} & \Phi_{2x'_1} \\ x'_2 & x''_2 & \Phi_{1x'_2} & \Phi_{2x'_2} \\ x'_3 & x''_3 & \Phi_{1x'_3} & \Phi_{2x'_3} \\ x'_4 & x''_4 & \Phi_{1x'_4} & \Phi_{2x'_4} \end{vmatrix} = 0. \quad (4)$$

Последнее уравнение является уравнением геодезических «прямейших» линий системы уравнений (1) [2]. Действительно,

а) уравнение геодезических «прямейших» линий, полученное в работе [2], записывалось так: $r'' = \lambda_1 N_1 + \lambda_2 N_2$ (штрих—производная по s). Таким образом, вектор r'' лежит в нормальной 2-плоскости к конусу Монжа, следовательно, векторы r', r'', N_1 и N_2 лежат в одной гиперплоскости, т. е. $\{r', r'', N_1, N_2\} = 0$;

б) обратно, если $\{r', r'', N_1, N_2\} = 0$, значит, векторы r', r'', N_1 и N_2 лежат в одной гиперплоскости, но вектор r' ортогонален векторам N_1, N_2 и r'' , следовательно, вектор r'' лежит в нормальной 2-плоскости, т. е. $r'' = \lambda_1 N_1 + \lambda_2 N_2$.

Теорема 1. При параллельном переносе вектора, касательного к геодезической «прямейшей» линии, вдоль этой геодезической он остается касательным к ней, и это свойство является определяющим для геодезической «прямейшей».

2. Геодезическая кривизна. Проекцию вектора $\frac{d^2 r}{ds^2}$ на касательную 2-плоскость к конусу Монжа назовем геодезической кривизной интегральной кривой.

Введем в рассмотрение ортонормированный базис m_1, m_2, n_1, n_2 , где векторы m_1, m_2 лежат в касательной 2-плоскости к конусу Монжа $(m_1 = \frac{dr}{ds}, m_2 = \frac{\delta r}{\delta s})$, а векторы n_1, n_2 — в нормальной 2-плоскости. Тогда

$$\frac{d^2 r}{ds^2} = \frac{d\tau}{sd} = M_1 m_1 + M_2 m_2 + N_1 n_1 + N_2 n_2.$$

Вектор $\frac{d\tau}{ds}$ ортогонален вектору τ , поэтому $M_1 = 0$ и $r'' = M_2 m_2 + N_1 n_1 + N_2 n_2$.

Проектуя векторы последнего равенства на касательную 2-плоскость к конусу Монжа, получим $k_g = M_2$, где k_g — геодезическая кривизна кривой, радиус-вектор которой $r = r(s)$;

$$M_2 = (r'', m_2) = \sum_{k=1}^4 \frac{d^2 x_k}{ds^2} \frac{\delta x_k}{\delta s}. \quad (5)$$

Вектор m_2 лежит в касательной 2-плоскости к конусу Монжа, поэтому $(m_2, N_1) = 0$ и $(m_2, N_2) = 0$; в силу ортогональности векторов m_1 и m_2 будет $(m_1, m_2) = 0$. Запишем эти равенства в координатной форме:

$$\sum_{k=1}^4 \Phi_{1x'_k} \frac{\delta x_k}{\delta s} = 0,$$

$$\sum_{k=1}^4 \Phi_{2x'_k} \frac{\delta x_k}{\delta s} = 0,$$

$$\sum_{k=1}^4 \frac{dx_k}{ds} \frac{\delta x_k}{\delta s} = 0.$$

Присоединив к этим трем уравнениям условие $\sum_{k=1}^4 \left(\frac{\delta x_k}{\delta s}\right)^2 = 1$, получим систему четырех уравнений для определения величин $\frac{\delta x_i}{\delta s}$. Разрешив эту систему относительно $\frac{\delta x_i}{\delta s}$, получим

$$\frac{\delta x_i}{\delta s} = \pm \frac{\Delta_i}{\sqrt{\sum_{k=1}^4 \Delta_k^2}}, \text{ где}$$

$$\Delta_1 = - \begin{vmatrix} \Phi_{1x'_4} & \Phi_{1x'_2} & \Phi_{1x'_3} \\ \Phi_{2x'_4} & \Phi_{2x'_2} & \Phi_{2x'_3} \\ x_4 & x_2 & x_3 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2 = - \begin{vmatrix} \Phi_{1x'_1} & \Phi_{1x'_4} & \Phi_{1x'_8} \\ \Phi_{2x'_1} & \Phi_{2x'_4} & \Phi_{2x'_8} \\ x'_1 & x'_4 & x'_8 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_3 = - \begin{vmatrix} \Phi_{1x'_1} & \Phi_{1x'_2} & \Phi_{1x'_4} \\ \Phi_{2x'_1} & \Phi_{2x'_2} & \Phi_{2x'_4} \\ x'_1 & x'_2 & x'_4 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_4 = - \begin{vmatrix} \Phi_{1x'_1} & \Phi_{1x'_2} & \Phi_{1x'_3} \\ \Phi_{2x'_1} & \Phi_{2x'_2} & \Phi_{2x'_3} \\ x'_1 & x'_2 & x'_3 \end{vmatrix}.$$

Подставляя найденные величины в равенство (5), находим, что геодезическая кривизна

$$k_g = \pm \sum_{i=1}^4 x'_i \frac{\Delta_i}{\sqrt{\sum_{k=1}^4 \Delta_k^2}} =$$

$$= \pm \frac{1}{\sqrt{\sum_{k=1}^4 \Delta_k^2}} \begin{vmatrix} \Phi_{1x'_1} & \Phi_{1x'_2} & \Phi_{1x'_3} & \Phi_{1x'_4} \\ \Phi_{2x'_1} & \Phi_{2x'_2} & \Phi_{2x'_3} & \Phi_{2x'_4} \\ x'_1 & x'_2 & x'_3 & x'_4 \\ x''_1 & x''_2 & x''_3 & x''_4 \end{vmatrix}.$$

Приравняв нулю геодезическую кривизну, получим уравнение (4), которое является уравнением геодезических «прямейших» линий. Верно и обратное, т. е. вдоль геодезических «прямейших» линий $k_g = 0$.

Теорема 2. Вдоль геодезических «прямейших» линий и только вдоль них геодезическая кривизна равна нулю.

Список литературы: 1. Lie S. Geometrie der Berührungstransformationen — Leipzig.: B. G. Teubner, 1896.—696 S. 2. Сергиенко Л. Н. Геодезические линии системы интегральных кривых двух уравнений Монжа в E_4 // Укр. геометр. сб. — 1979. — вып. 22. — С. 128—131.

Поступила в редколлегию 03.11.84

УДК 513

М. А. УЛАНОВСКИЙ

ОДНОРОДНЫЕ ЛОРЕНЦОВЫ ПРОСТРАНСТВА. I

Рассматривается связное лоренцово пространство V_n — дифференцируемое многообразие, в котором задана квадратичная дифференциальная форма ds^2 сигнатуры $(+ - - \dots -)$. Пространство V_n — однородное, если в нем транзитивно действует группа Ли

преобразований, сохраняющая инвариантной фундаментальную форму ds^2 — группа движений G_r (строго говоря, для дальнейшего было бы достаточно, чтобы G_r была группой конформных преобразований метрики ds^2).

Лоренцово V_n называется хронологически ориентированным, если конусы $ds^2 \geq 0$ касательных пространств $T_x(V_n)$ ($x \in V_n$) разбиты на выпуклые конусы (полуконусы) K_x и $K_{\bar{x}}$ так, что конусы K_x образуют непрерывное на V_n семейство. В дальнейшем предполагается, что рассматриваемое V_n хронологически ориентировано (что всегда возможно для однородного V_n). Как известно, в хронологически ориентированном V_n можно определить бинарное отношение $<$ так: $a < b$, если точки a, b можно соединить такой кусочно-гладкой дугой $\varphi(t)$, что в каждой ее точке касательный вектор (направленный от a к b) принадлежит $K_{\varphi(t)}$ (если $\varphi: [0, 1] \rightarrow V_n$ — дуга, соединяющая a и b , $\varphi(0) = a$, $\varphi(1) = b$, то касательный вектор $d\varphi/dt$ принадлежит $K_{\varphi(t)}$).

С локальной точки зрения $<$ есть отношение порядка; однако в целом для V_n это может быть неверным. Известны примеры, в которых отношение $<$ максимально: для любых a, b из V_n $a < b$ (множество пар $(a; b) \in V_n \times V_n$ таких, что $a < b$, совпадает с $V_n \times V_n$). Цель настоящей заметки — сформулировать некоторые условия, достаточные для того, чтобы отношение $<$ в однородном V_n было максимальным.

В дальнейшем иногда будет применяться терминология, имеющая определенную физическую окраску: так $a < b$ будет читаться: a предшествует b (событие a причинно предшествует событию b); «будущее» F_a точки a — множество точек x таких, что $a < x$ (аналогично определяется «прошлое» P_a точки a).

Перенесем место действия из лоренцова V_n в пространство группы движений G_r . Сделать это можно стандартным способом, пользуясь канонической проекцией: $f: G_r \rightarrow G/H_0 = V_n$, где H_0 — стационарная подгруппа относительно фиксированной точки $o \in V_n$. При этом по определению $g < h$ (g, h — точки из G_r), если $f(g) < f(h)$. Тем самым в пространстве G_r определяется следующая конструкция: в касательном пространстве $T_e(G_r)$ единицы e группы G_r определен конус K_e — прообраз конуса K_o , $o \in V_n$ в отображении $df: T(G_r) \rightarrow T(V_n)$. Заметим, что K_e — выпуклый конус, граница которого удовлетворяет уравнению $\varphi(x) = 0$, где φ — квадратичная форма сигнатуры $(+ \dots - 0 \dots 0)$. Незначительно ослабляя это условие, будем предполагать выполненными только требования: K_e — произвольный замкнутый выпуклый конус; множество внутренних векторов K_e не пусто. Не исключаются и тривиальные случаи: K_e — полупространство, или $K_e = T_e(G_r)$.

Если h — максимальное линейное подпространство, входящее в K_e , то следовало бы согласно определению K_e как прообраз K_o , $o \in V_n$, предположить, что h — подалгебра алгебры Ли g_r группы G_r (g_r можно отождествить с касательным $T_e(G_r)$). Более

того, присоединенное представление группы H_0 , соответствующей h , оставляет инвариантным конус K_e . Однако в дальнейшем изложении эти условия не используются, так как можно показать, что без ущерба для рассматриваемых ниже бинарных отношений в G , конус K_e можно заменить конусом $K'_e \supset K_e$, удовлетворяющим этим условиям.

Группа G , ниже предполагается связной, поскольку рассматривается только компонента единицы G_r . Конус $K_e \subset T_e(G_r)$ очевидно образом определяет на G_r два поля конусов: поле $K_x^{(g)}$, $x \in G_r$, инвариантное относительно левых сдвигов ($x \rightarrow ax$), и правоинвариантное поле $K_x^{(d)}$. Каждое из этих полей, в свою очередь, определяет бинарное отношение соответственно $\prec(g)$ и $\prec(d)$. Определяются указанные отношения так же, как это описано выше для V_n . Очевидно, отношение $\prec(g)$ левоинвариантно: если $x \prec(g) y$, то для любого $a \in G$, $ax \prec(g) ay$; аналогичным свойством обладает и $\prec(d)$. Особую роль в дальнейшем играет «будущее» единицы e : $F_e^{(g)}(F_e^{(d)}) = \{x; e \prec(g) x (e \prec(d) y)\}$ (конечно, все утверждения для F_e переносятся на «прошлое» единицы P_e). Ниже будущее единицы обозначается через F_e , поскольку имеет место.

Лемма 1. $F_e^{(g)} = F_e^{(d)}$; при этом F_e — полугруппа.

Доказательство. Пусть $e \prec(g) x$, $e \prec(g) y$; так как отношение $\prec(g)$ левоинвариантно, то $x \cdot e \prec(g) xy$. А так как отношение $\prec(g)$ транзитивно, $e \prec(g) x \prec(g) xy$, то $xy \in F_e^{(g)}$, т. е. $F_e^{(g)}$ — полугруппа. Рассмотрим отображение $G_r \rightarrow G_r$: $x \rightarrow x^{-1}$. Касательное отображение переводит K_e в противоположный конус $K_e^- \subset T_e(G_r)$; легко видеть, что поле конусов $K_x^{(g)}$ при этом перейдет в правоинвариантное поле конусов $K_x^{(d)}$ (направленных в прошлое). Поэтому очевидно, что отношение $e \prec(g) a$, равносильно $a^{-1} \prec(d) e$; умножая справа на a , получим $e \prec(d) a$ следовательно, $F_e^{(g)} \subset F_e^{(d)}$.

Очевидно, отношение $\prec(g)$ (а вместе с ним и $\prec(d)$, а также $\prec$ в лоренцовом V_n) максимально тогда и только тогда, когда полугруппа F_e исчерпывает всю группу G_r : $F_e = G_r$.

Большое значение для исследования будущего единицы F_e имеет некоторое подмножество M , определенное следующим образом.

Определение. Местом множество всех элементов a группы G_r , обладающих тем свойством, что соответствующее преобразование ada присоединенной группы (отображение $T_e(G_r) \rightarrow T_e(G_r)$, порожденное отображением $x \rightarrow axa^{-1}$ в группе G_r) переводит конус K_e в такой конус $ada(K_e)$, что выпуклое замыкание объединения $K_e \cup ada(K_e)$ исчерпывает алгебру Ли g_r — касательное $T_e(G_r)$ (выпуклое замыкание конуса L , или любого множества векторов L , есть множество конечных линейных комбинаций $\sum \lambda_i l_i$, $\lambda_i \geq 0$, $l_i \in L$).

Лемма 2. Множество M не содержит граничных точек будущего единицы F_e .

Очевидно, M — открытое (вообще говоря, не связанное) множество. Пусть $a \in F_e$, l — произвольное векторное поле, определенное в некоторой окрестности U точки a , причем $l \in K_x^{(g)}$, $x \in U$. Если $\varphi: [0; 1] \rightarrow U$ — дуга линии тока поля l , $\varphi(0) = a$, $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = l$ (дуга, ориентированная от точки a в будущее согласно отношению $\prec(g)$), то $\varphi(1)$ также принадлежит F_e . В силу симметрии $F_e^{(g)} = F_e^{(d)} = F_e$; это же справедливо для векторного поля m , $m \in K_x^{(d)}$. Очевидно, данное утверждение справедливо и для «ломаной», исходящей из точки a , звенья которой суть линии тока полей, принадлежащих или $K_x^{(g)}$, или $K_x^{(d)}$; ее конец также принадлежит F_e . Легко видеть, что в силу определения множества M для любого $x \in M$ выпуклое замыкание объединения $K_x^{(g)} \cup K_x^{(d)}$ исчерпывает $T_x(G_r)$. Поэтому доказательство леммы 2 может быть легко получено из следующего утверждения:

Лемма 3. Пусть в некоторой окрестности U точки a дифференцируемого многообразия X_n задано множество L векторных полей такое, что в каждой точке $x \in U$ выпуклое замыкание множества векторов этих полей исчерпывает касательное пространство $T_x(X_n)$. Рассматриваются «ломаные» $\varphi(t)$ — всевозможные кусочно-гладкие дуги с началом в точке a , представляющие собой конечные объединения линий тока векторных полей из L : $\varphi: [0; 1] \rightarrow U$, $\varphi(0) = a$, $0 < t_1 < t_2 < \dots < 1$, для $t \in [t_i; t_{i+1}]$ $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = l_i$, $l_i \in L$, звенья ломаной ориентированы направлениями векторов l_i). Тогда множество концов $\varphi(1)$ ломаных $\varphi(t)$ содержит некоторую окрестность точки a .

Доказательство леммы 3, в свою очередь, может быть получено из следующего утверждения:

Лемма 4. Пусть в некоторой окрестности U точки $a \in X_n$ задано n гладких (C_1) векторных полей $l_1, \dots, l_n$, образующих в каждой точке $x \in U$ базис касательного $T_x(X_n)$; пусть также $r = \lambda_1 l_1 + \dots + \lambda_n l_n$, где $\lambda_i = \text{const} > 0$. Тогда на линии тока вектора r существует отрезок с началом в точке a , каждая точка которого совпадает с концом некоторой ломаной (также имеющей началом точку a), построенной так, как в лемме 3, из множества векторных полей $L = (l_1, \dots, l_n)$.

Для доказательства леммы 4 достаточно, например, ввести в некоторой окрестности точки a локальные координаты $x^1, \dots, x^n$ так, чтобы в точке a было $l_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$, и рассмотреть множество ломаных, исходящих из a , звенья которых соответствуют определенному порядку векторов $l_1, \dots, l_n$, например: 1-е звено — линия тока l_1 , 2-е — l_2 и т. д. Если не требовать, чтобы эти звенья были ориентированы согласно направлениям l_i , то множе-

ство концов указанных ломаных содержит некоторую окрестность точки a , так как якобиан для зависимости между локальными координатами и параметрами звеньев равен 1 в точке a . В частности, и каждая точка некоторого отрезка линии тока поля r , упомянутой в лемме, достигается точно одной такой ломаной. В то же время элементарные алгебраические соображения (основанные на том, что якобиева матрица упомянутой выше зависимости близка к единичной в малой окрестности точки a) показывают, что для достаточно малого отрезка линии тока поля r соответствующие параметры звеньев положительны, т. е. точки этого отрезка достигаются ломаными, ориентированными соответственно направлениям $l_1, \dots, l_n$.

Заметим, что в действительности утверждение леммы 4 справедливо для любого отрезка линии тока поля r , принадлежащего заданной окрестности U . Далее, в условиях леммы 3 к заданному множеству L векторных полей можно присоединить поле r , т. е. любую выпуклую комбинацию n независимых векторных полей из L , что делает утверждение леммы 3 очевидным. Отметим также, что для доказательства леммы 2 следует рассмотреть и тот случай, когда граничная точка a множества F_e не принадлежит F_e . Здесь вопрос легко решается с помощью ломаных, исходящих из точки a и ориентированных в прошлое (противоположно направлениям конусов $K_x^{(g)}$, $K_x^{(d)}$); поскольку концы этих ломаных также заполняют некоторую окрестность точки a , хотя бы один из них принадлежит F_e , следовательно, и $a \in F_e$.

Следствие. Если M_1 — связная компонента множества M , то либо $M_1 \cap F_e = \emptyset$, либо $M_1 \subset F_e$.

Сущность предлагаемого в данной заметке условия, достаточного для того, чтобы отношение $<$ было максимальным, сводится к простому утверждению:

Теорема 1. Если для некоторого связного открытого множества M_1 , $M_1 \subset M$, $M_1 \cap F_e \neq \emptyset$ и $M_1 \cap P_e \neq \emptyset$, то отношения $<(g)$, $<(d)$ максимальны.

Действительно, в этом случае $M_1 \subset F_e \cap P_e$. Пусть $t \in M_1$; существует окрестность U_t точки t такая, что для каждого $x \in U_t$ будет $e <(g) x <(g) e$. Пусть U_e — окрестность единицы e такая, что $U_e \cdot t \in U_t$; тогда $e <(g) U_e \cdot t$, причем отношение справедливо для каждой точки $U_e \cdot t$. В то же время, умножая слева на U_e отношение $t <(g) e$, получим $U_e \cdot t < U_e$, следовательно, $e <(g) U_e$ — единица e предшествует каждой точке некоторой своей окрестности. Но тогда и каждая точка $x \in G_r$ предшествует каждой точке некоторой своей окрестности, множество граничных точек F_e пусто и, поскольку $F_e \neq \emptyset$, $F_e = G_r$.

Сформулируем теперь в терминах присоединенной группы условие, достаточное для выполнения требований теоремы 1.

Разобьем множество всех векторов алгебры g_r (касательного $T_e(G_r)$) на два класса. Вектор $l \in g_r$ отнесем к первому классу,

если одночленная подгруппа $\exp(lt)$, касательная к l , имеет пустое пересечение с множеством M ; в противном случае отнесем l ко второму классу. Рассмотрим сначала признак (необходимое условие) для вектора первого класса.

Теорема 2. Если l — вектор первого класса, то в g_r существует конус L (вообще говоря не выпуклый), обладающий свойствами: $L \supset K_e$, L не содержит внутренних векторов конуса K_e^- и L инвариантен относительно $\text{ad } \exp(lt)$.

Действительно, L можно определить формулой

$$L = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \text{ad } \exp(lt) \cdot K_e.$$

Очевидно, $L \supset K_e$; если бы L содержал внутренний вектор конуса K_e^- , то для некоторого $t_0 \in \mathbb{R}$ конус $\text{ad } \exp(lt_0) \cdot K_e$ также содержал бы этот вектор, и выпуклое замыкание $K_e \cup \text{ad } \exp(lt_0) \cdot K_e$ исчерпывало бы g_r . Наконец,

$$\text{ad } \exp(lt_0) \cdot L = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \text{ad } \exp(t + t_0) K_e = L.$$

Пусть K_e содержит вектор l_1 , принадлежащий второму классу; заменив, если это необходимо, l_1 на $l_1 t$, можно предположить, что $\exp l_1 \in M$ (заметим, что в этом случае и $\exp(-l_1) \in M$). Пусть l_2 — также вектор второго класса, но принадлежащий конусу K_e^- и $\exp l_2 \in M$. Очевидно, следующее условие обеспечивает выполнение всех требований теоремы 1: существует непрерывная деформация $\varphi: [0; 1] \rightarrow g_r$ вектора l_1 в вектор l_2 ($\varphi(0) = l_1$, $\varphi(1) = l_2$), обладающая свойством $\exp \varphi(t) \in M$, $t \in [0; 1]$. Таким образом, справедлива.

Теорема 3. Если существует непрерывная деформация $\varphi: [0; 1] \rightarrow g_r$ такая, что $\varphi(0) \in K_e$, $\varphi(1) \in K_e^-$ и для каждого $t \in [0; 1]$ $\exp \varphi(t) \in M$, то отношения $\prec(g)$ и $\prec(d)$ в G_r максимальны.

В заключение рассмотрим некоторые примеры.

1. Пусть G_s — связная и односвязная неабелева группа Ли, содержащая $(r-1)$ -мерную подгруппу Ли H_{r-1} , не являющуюся нормальным делителем; g_r — алгебра Ли группы G_s , h_{r-1} — ее подалгебра, соответствующая H_{r-1} . Рассмотрим в $g_r = T_e(G_r)$ конус K_e , совпадающий с одним из полупространств g_r , ограниченных гиперплоскостью h_{r-1} . Легко показать, что соответствующие отношения $\prec$ не максимальны (рассмотреть одномерное факторпространство G_r/H_{r-1}). Интересно отметить, что в этом случае K_e и K_e^- заведомо содержат векторы второго класса, но каждый вектор $h \in h_{r-1}$ есть вектор первого класса, поэтому деформация, описанная в теореме 3, не существует.

2. Рассмотрим однородную метрику $ds^2 = k_{11}e^{-2u}(dx^2 + dz^2) + k_{22}e^{-4u}(dy + xdz)^2 + k_{44}du^2$, $k_{ii} = \text{const.}$ * Операторы алгебры Ли

* Петров А. З. Пространства Эйнштейна. — М.: Физматгиз, 1961. — 70 с.

группы движений G_5 этой метрики как группы преобразований V_4 , суть $X_1 = -\frac{\partial}{\partial x} + z\frac{\partial}{\partial y}$, $X_2 = \frac{\partial}{\partial y}$, $X_3 = \frac{\partial}{\partial z}$, $X_4 = \frac{\partial}{\partial u} + x\frac{\partial}{\partial x} + 2y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}$, $X_5 = -\frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{z^2 - x^2}{2}\frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial z}$ (заметим, что для определения однородной метрики достаточно записать ее в любой локальной форме; впрочем, в данном примере можно считать, что $(x, y, z, u) \in R_4$).

Как легко видеть, метрика эта будет лоренцевой в следующих случаях:

- 1) $\text{sign } k_{11} = \text{sign } k_{44} = -\text{sign } k_{22}$;
- 2) $\text{sign } k_{11} = \text{sign } k_{22} = -\text{sign } k_{44}$.

В первом случае отношение $\prec$ максимально, во втором случае $\prec$ есть отношение порядка (более того, V_4 — глобально гиперболическое пространство). Приведем только доказательство первого утверждения, поскольку оно основано на теоремах этой заметки.

Легко проверить, что в рассматриваемом ниже первом случае конус K_e содержит в качестве внутреннего вектора базисный вектор X_2 . Деформацию, описанную в теореме 3, построим в подалгебре (X_1, X_2, X_3) со структурой $(X_1, X_2) = (X_1, X_3) = 0$, $(X_1, X_3) = -X_2$. Каждый вектор этой подалгебры, кроме векторов вида $t \cdot X_2$, принадлежит второму классу, в чем можно убедиться с помощью теоремы 2, ограничиваясь рассмотрением инфинитезимальных преобразований присоединенной группы, либо рассматривая конечные преобразования этой группы: $x' = x$, $y' = y + cx - az$, $z' = z$. Пусть $l \in K_e$; деформацию $\varphi(t)$ можно задать формулой $\varphi(t) = l - tX_2$, $0 \leq t \leq t_0$ (легко видеть, что при некотором $t = t_0$ будет $\varphi(t_0) \in K_e$). Действительно, $\text{ad exp } \varphi(t) = \text{ad exp } l$, $\varphi(t) \in M$.

Заметим, что с помощью дословно таких же рассуждений можно получить несколько более общий результат. Пусть X — отличный от нуля вектор центра алгебры Ли g_r , причем X — внутренний вектор конуса K_e . Если конус K_e содержит хотя бы один вектор второго класса, то отношения $\prec(g)$, $\prec(d)$ в G_r максимальны.

Поступила в редколлегию 05.12.83

УДК 513

В. Т. ФОМЕНКО

О СТРОЕНИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ КОРАЗМЕРНОСТИ ДВА,
НЕСУЩИХ СОПРЯЖЕННУЮ СЕТЬ БЕЗ КРУЧЕНИЯ

Рассмотрим в $(n + 2)$ -мерном евклидовом пространстве E^{n+2} поверхности F^n класса C^3 коразмерности два. Если на F^n заданы n семейств $\{l_i\}_1^n$ линий l_i так, что через каждую точку поверх-

ности проходит одна линия любого семейства и касательные векторы t_i , $i = 1, n$, к этим линиям линейно независимы, то говорят, что на F^n задана сеть линий. Сеть на F^n называют сопряженной, если в каждой точке поверхности любая пара касательных направлений к линиям сети является сопряженной относительно произвольной второй квадратичной формы поверхности в данной точке.

Для поверхностей, несущих сопряженную сеть, можно указать условия, при которых поверхность целиком лежит в своей сопрягающейся плоскости или в известном смысле расслаивается на картановы многообразия и поверхности, удовлетворяющие условиям обобщенной теоремы Серге [1]. В настоящей работе в терминах инвариантных характеристик сети $\{l_i\}_1^n$ формулируется достаточное условие представления поверхности F^n в виде произведения гиперповерхностей евклидовых пространств.

Обозначим через T_x^n и N_x^2 соответственно касательную и нормальную плоскости поверхности в точке x .

Нормальным кручением $\kappa_N(x, t)$ поверхности F^n в точке x по направлению t назовем кручение в точке x линии пересечения поверхности трехмерной плоскостью, проходящей через N_x^2 в направлении t . Будем говорить, что сеть $\{l_i\}_1^n$ на F^n является сетью без кручения, если нормальное кручение поверхности F^n по направлению t_i ($i = \overline{1, n}$), касательном к l_i в точке x , равно нулю для всех x , $x \in F^n$. Для каждого вектора t_i , касательного к l_i в точке x , определен вектор нормальной кривизны $k_N(x, t_i)$ с началом в точке x , лежащим в плоскости N_x^2 . Для любой пары неасимптотических на F^n направлений, определяемых векторами t_i и t_j , касательными в точке x к линиям l_i , l_j сети $\{l_i\}_1^n$, определим сетевой угол $\varphi_{ij}(x)$ в нормальном расслоении как угол между векторами $k_N(x, t_i)$ и $k_N(x, t_j)$, $i, j = \overline{1, n}$, в нормальной плоскости N_x^2 . Сеть $\{l_i\}_1^n$ будем называть специальной, если сетевые углы $\varphi_{ij}(x)$ в нормальном расслоении определены и не зависят от выбора точки x на поверхности F^n , и она может быть принята в качестве координатной сети на F^n .

Пусть E^k и E^l — два евклидовых пространства размерности k, l с декартовыми прямоугольными координатами $(x^1, x^2, \dots, x^k)$, $(y^1, y^2, \dots, y^l)$ соответственно. Говорят, что евклидово пространство $E^{k+l} \equiv E^k \times E^l$ является римановым произведением пространств E^k, E^l , если в E^{k+l} введены декартовы координаты $(x^1, \dots, x^k, y^1, \dots, y^l)$, порождающие в E^{k+l} метрическую форму $ds^2 = \sum_{i=1}^k (dx^i)^2 + \sum_{j=1}^l (dy^j)^2$. Если поверхности F^p и F^q , $p < k, q < l$, лежат соответственно в E^k и E^l , то произведение $E^k \times E^l$ порождает в пространстве E^{k+l} поверхность $F^{p+q} = F^p \times F^q$, являющуюся римановым произведением F^p, F^q с индуцированной на $F^p \times F^q$ метрикой пространства $E^k \times E^l$.

Имеет место следующая

Теорема. Для того чтобы поверхность F^n допускала специальную сопряженную сеть без кручения, необходимо и достаточно, чтобы поверхность F^n представлялась в виде риманова произведения:

$$F^n = F^k \times F^{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \left[\frac{n}{2} \right],$$

двух гиперповерхностей F^k, F^{n-k} , несущих сопряженные сети соответственно в E^{k+1}, E^{n-k+1} ; при этом линии сети гиперповерхностей не касаются асимптотических направлений.

Доказательство проводится на основе рассмотрения уравнений Гаусса — Петерсона — Кодацци — Риччи с использованием формул для нормальной кривизны и нормального кручения поверхности.

1. Предварительные сведения. Пусть n -мерная поверхность F^n задана в E^{n+2} уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2, \dots, u^n)$, где параметры $(u^1, u^2, \dots, u^n)$ принадлежат некоторой области D . Обозначим через $ds^2 = g_{ij} du^i du^j$, $g_{ij} = (\partial_i \mathbf{r}, \partial_j \mathbf{r})$, метрическую форму поверхности F^n . Пусть $\{n_\alpha\}_1^2$ — оснащение поверхности F^n , определенное двумя векторными полями единичных нормалей F^n , ортогональных между собой в каждой точке поверхности. Вторые квадратичные формы поверхности F^n относительно $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ и линейную форму кручения нормальных полей $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ обозначим соответственно через

$$II_1 = b_{ij} du^i du^j; \quad b_{ij} = -(\partial_i \mathbf{r}, \partial_j \mathbf{n}_1);$$

$$II_2 = c_{ij} du^i du^j; \quad c_{ij} = -(\partial_i \mathbf{r}, \partial_j \mathbf{n}_2);$$

$$\omega_{12} = \mu_i du^i; \quad \mu_i = (\mathbf{n}_1, \partial_i \mathbf{n}_2) = -(\partial_i \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2).$$

Известно, что тензорные поля $g_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, \mu_i$ на поверхности F^n в E^{n+2} связаны между собой уравнениями Гаусса — Петерсона — Кодацци — Риччи

$$\nabla_{[k} b_{j]i} = -\mu_{[k} c_{j]i}, \quad i, j, k = \overline{1, n}; \quad (1)$$

$$\nabla_{[k} c_{j]i} = \mu_{[k} b_{j]i}, \quad i, j, k = \overline{1, n}; \quad (2)$$

$$b_{[ik} b_{j]l} + c_{[ik} c_{j]l} = R_{ij, kl}, \quad i, j, k, l = \overline{1, n}; \quad (3)$$

$$\nabla_{[k} \mu_{j]} = g^{lh} b_{l[k} c_{j]h}, \quad j, k = \overline{1, n}. \quad (4)$$

Условие сопряженности направлений ξ^i и η^i на F^n при заданном оснащении $\{n_\alpha\}_1^2$ эквивалентно выполнению соотношений:

$$b_{ij} \xi^i \eta^j = 0, \quad c_{ij} \xi^i \eta^j = 0. \quad (5)$$

Координатная сеть сопряжена тогда и только тогда, когда

$$b_{ij} = c_{ij} = 0, \quad i \neq j; \quad (6)$$

при этом условия (5) не зависят от выбора оснащения $\{n_\alpha\}_1^2$. Фор-

мулы для вычисления нормальной кривизны $k_N(x, t)$ и нормального кручения $\kappa_N(x, t)$ поверхности F^n в точке x по направлению $t = \{t^1, t^2, \dots, t^n\}$ имеют вид

$$k_N(x, t) = (g_{ij}t^i t^j)^{-1} [(b_{ij}t^i t^j)^2 + (c_{ij}t^i t^j)^2]^{1/2}; \quad (7)$$

$$\kappa_N(x, t) = (g_{ij}t^i t^j)^{-\frac{1}{2}} \left[-\mu_i t^i + \frac{(b_{ij}\nabla_k c_{lm} - c_{ij}\nabla_k b_{lm}) t^i t^j t^k t^l t^m}{(b_{ij}t^i t^j)^2 + (c_{ij}t^i t^j)^2} \right], \quad (8)$$

где тензоры g_{ij} , b_{ij} , c_{ij} , μ_i и ковариантные производные $\nabla_k b_{lm}$, $\nabla_k c_{lm}$ подсчитываются в точке $x = (x^1, x^2, \dots, x^n)$. Формула (8) имеет смысл, если $k_N(x, t) \neq 0$. Вывод формул (6), (7) приводится так же, как в работе [2].

Из формулы (8) следует, что координатная сеть является сетью без кручения тогда и только тогда, когда

$$(b_{ii}^2 + c_{ii}^2) \mu_i = b_{ii} \nabla_i c_{ii} - c_{ii} \nabla_i b_{ii}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (9)$$

Из определения специальной сопряженной сети и формулы (7) следует, что координатная сеть является специальной сопряженной сетью тогда и только тогда, когда для заданного оснащения $\{n_\sigma\}_1^2$ суще твуют постоянные φ_{ij} такие, что

$$\cos \varphi_{ij} (b_{ii} c_{jj} - b_{jj} c_{ii}) = \sin \varphi_{ij} (b_{ii} b_{jj} + c_{ii} c_{jj}); \quad i, j = \overline{1, n}. \quad (10)$$

В самом деле, если вектор $k_N(x, t_i)$ нормальной кривизны поверхности в направлении координатной линии образует с вектором n_i угол ψ_i , то в силу формулы (7) будет

$$\cos \varphi_i = b_{ii}/g_{ii}; \quad \sin \psi_i = c_{ii}/g_{ii}.$$

Полагая $\varphi_{ij} = \psi_j - \psi_i$, находим

$$\cos \varphi_{ij} = \frac{b_{ii} b_{jj}}{g_{ii} g_{jj}} + \frac{c_{ii} c_{jj}}{g_{ii} g_{jj}}; \quad \sin \varphi_{ij} = \frac{b_{ii} c_{jj}}{g_{ii} g_{jj}} - \frac{c_{ii} b_{jj}}{g_{ii} g_{jj}}.$$

Так как специальная сопряженная сеть характеризуется тем и только тем свойством, что φ_{ij} постоянны на F^n , то отсюда следует справедливость формул (10).

2. Оснащение Родрига на поверхностях из множества R_c . Пусть R_c — множество поверхностей F^n из E^{n+2} , несущих специальную сопряженную сеть без кручения. Оснащение $\{n_\sigma\}_1^2$ назовем оснащением Родрига на F^n , если $\omega_{12} \equiv (n_1, dn_2) = 0$.

Лемма 1. На поверхностях F^n из множества R_c существует оснащение Родрига.

Доказательство. Примем специальную сопряженную сеть без кручения $\{l_i\}_1^n$ на F^n в качестве координатной сети. Так как в направлении координатных линий нормальная кривизна $k_N(x, t_i) \neq 0$ отлична от нуля, то в качестве вектора единичной нормали к поверхности F^n выберем $n_1 = k_N(x, t_1)/k_N(x, t_1)$. Таким

образом, на F^n определено регулярное оснащение $\{n_\sigma\}_1^2$. Покажем, что оно является оснащением Родрига. Так как в рассматриваемом случае $b_{11} \neq 0$, $c_{11} = 0$, то условие (10) переписывается в виде

$$\cos \varphi_{1j} \cdot c_{jj} = \sin \varphi_{1j} \cdot b_{jj}, \quad j = \overline{2, n}. \quad (11)$$

В таком случае условия (9) дают $[(\cos \varphi_{1j})^2 b_{jj}^2 + (\sin \varphi_{1j})^2 c_{jj}^2] \mu_i = \sin \varphi_{1j} \cdot b_{ij} \partial_j b_{jj} - \sin \varphi_{1j} \cdot b_{jj} \partial_j b_{ij} = 0$. Если $b_{ii} \neq 0$, то отсюда получаем $\mu_i \equiv 0$. Если $b_{ii} = 0$, то $c_{ii} \neq 0$ и из формулы (9) следует $\mu_i = 0$. Таким образом, $\omega_{12} \equiv 0$, что и доказывает лемму.

3. Строение основных форм поверхности F^n из множества R_c в оснащении Родрига. Лемма 2. *На поверхностях F^n из множества R_c существует оснащение Родрига $\{n_\sigma^*\}_1^2$, для которого основные формы имеют вид*

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^{k_1} g_{ij}(u^1, \dots, u^{k_1}) du^i du^j + \sum_{\alpha, \beta=k_1+1}^n g_{\alpha\beta}(u^{k_1+1}, \dots, u^n) du^\alpha du^\beta;$$

$$\Pi_1^* \equiv -(dr, dn_1^*) = \sum_{i=1}^{k_1} b_{ii}^*(u^1, \dots, u^{k_1}) du^i du^i;$$

$$\Pi_2^* \equiv -(dr, dn_2^*) = \sum_{\alpha=k_1+1}^n c_{\alpha\alpha}^*(u^{k_1+1}, \dots, u^n) du^\alpha du^\alpha;$$

$$\omega_{12}^* \equiv (n_1^*, dn_2^*) = 0, \quad \text{где } 1 \leq k_1 \leq n.$$

Доказательство. Отнесем поверхность F^n из множества R_c к специальной сопряженной координатной сети $\{l_i\}_1^n$ без кручения. Выберем оснащение Родрига $\{n_\sigma\}_1^2$ на F^n таким образом, чтобы $b_{ii} \neq 0$, $i = \overline{1, n}$. Этого всегда можно добиться путем поворота произвольно фиксированного оснащения Родрига $\{\tilde{n}\}_1^2$ на некоторый постоянный угол. В самом деле, пусть $\tilde{b}_{ij}$, $\tilde{c}_{ij}$ — коэффициенты вторых квадратичных форм поверхности F^n в оснащении $\{\tilde{n}\}_1^2$, существование которого доказано леммой 1. Выберем число α_0 так, чтобы $\cos \varphi_{1j} + \alpha_0 \sin \varphi_{1j} \neq 0$, $j = \overline{2, n}$. Преобразуем оснащение $\{\tilde{n}\}_1^2$ в оснащение Родрига $\{n_\sigma^*\}_1^2$, повернув репер $\{\tilde{n}_\sigma\}$, $\sigma = 1, 2$, на угол $\varphi_0 = \arctg \alpha_0$. Тогда $n_1^* = \tilde{n}_1 \cos \varphi_0 + \tilde{n}_2 \sin \varphi_0$; $n_2^* = -\tilde{n}_1 \sin \varphi_0 + \tilde{n}_2 \cos \varphi_0$.

В силу (11) имеем $\tilde{b}_{ii} = \sqrt{\tilde{b}_{ii}^2 + \tilde{c}_{ii}^2} \cos \varphi_{1i}$, $\tilde{c}_{ii} = \sqrt{\tilde{b}_{ii}^2 + \tilde{c}_{ii}^2} \sin \varphi_{1i}$.

Так как коэффициенты вторых квадратичных форм преобразуются по формулам $b_{ii} = \tilde{b}_{ii} \cos \varphi_0 + \tilde{c}_{ii} \sin \varphi_0 = \sqrt{\tilde{b}_{ii}^2 + \tilde{c}_{ii}^2} \cos (\varphi_{1i} - \varphi_0)$; $c_{ii} = -\tilde{b}_{ii} \sin \varphi_0 + \tilde{c}_{ii} \cos \varphi_0 = \sqrt{\tilde{b}_{ii}^2 + \tilde{c}_{ii}^2} \sin (\varphi_{1i} - \varphi_0)$, то, учитывая, что $\cos \varphi_{1i} + \alpha_0 \sin \varphi_{1i} \neq 0$, находим $b_{ii} \neq 0$, $i = \overline{1, n}$.

Так как координатная сеть — специальная, сопряженная, то в выбранном оснащении при условии $b_{ii} \neq 0$, $i = \overline{1, n}$, в силу (11) будет

$$c_{ii} = \lambda_i b_{ii}, \quad \lambda_i = \text{const}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (12)$$

При этом из уравнения Риччи (4) следует, что коэффициенты первой и вторых квадратичных форм связаны соотношением

$$g^{hi} (b_{ij} c_{hk} - b_{ik} c_{hj}) = 0, \quad j, k = \overline{1, n}.$$

В силу (12) это соотношение перепишем в виде

$$g^{ik} b_{ij} b_{kk} (\lambda_k - \lambda_j) = 0, \quad j, k = \overline{1, n}.$$

Учитывая, что $b_{ii} \neq 0$, $i = \overline{1, n}$, отсюда находим

$$g^{ik} (\lambda_j - \lambda_k) = 0, \quad j, k = \overline{1, n}. \quad (13)$$

Так как в оснащении Родрига $\mu_i = 0$, $i = \overline{1, n}$, то уравнения Кодацци (1), (2) при $i = j$ дают

$$\nabla_i b_{ki} = \nabla_k b_{ii}; \quad \nabla_i c_{ki} = \nabla_k c_{ii}; \quad i \neq k;$$

или в развернутом виде:

$$\begin{aligned} \partial_i b_{ik} - \Gamma_{ii}^k b_{kk} - \Gamma_{ik}^i b_{ii} &= \partial_k b_{ii} - 2\Gamma_{ik}^i b_{ii}; \\ \partial_i c_{ik} - \Gamma_{ii}^k c_{kk} - \Gamma_{ik}^i c_{ii} &= \partial_k c_{ii} - 2\Gamma_{ik}^i c_{ii}. \end{aligned}$$

В силу (12) и условия $b_{ik} = c_{ik} = 0$, $i \neq k$, эти соотношения дают:

$$\begin{aligned} -\Gamma_{ii}^k b_{kk} - \Gamma_{ik}^i b_{ii} &= \partial_k b_{ii} - 2\Gamma_{ik}^i b_{ii}; \\ -\lambda_k \Gamma_{ii}^k b_{kk} - \lambda_i \Gamma_{ik}^i b_{ii} &= \lambda_i \partial_k b_{ii} - 2\Gamma_{ik}^i \lambda_i b_{ii}. \end{aligned}$$

Умножая первое соотношение на λ_i и вычитая из второго, находим

$$(\lambda_i - \lambda_j) \Gamma_{ii}^i = 0, \quad i, j = \overline{1, n}. \quad (14)$$

Пусть $\Lambda_1 \equiv \lambda_1 = \dots = \lambda_{k_1} \neq \lambda_\alpha$, $\alpha = \overline{k_1 + 1, n}$, где $k_1 \leq n$. Покажем, что

$$g_{1\alpha} = g_{2\alpha} = \dots = g_{k_1\alpha} = 0, \quad \alpha = \overline{k_1 + 1, n}. \quad (15)$$

Обратимся к формулам (13). Так как $\lambda_i \neq \lambda_\alpha$, $i = 1, k_1$, $\alpha = \overline{k_1 + 1, n}$, то $g^{1\alpha} = g^{2\alpha} = \dots = g^{k_1\alpha} = 0$, $\alpha = \overline{k_1 + 1, n}$.

Учитывая, что $\|g^{ij}\|_{i,j=\overline{1,n}}^{-1} = \|g_{ij}\|_{i,j=\overline{1,n}}$, находим

$$g_{i\alpha} = \frac{\Delta_{i\alpha}^{n-1}}{\det \|g^{ij}\|}, \quad 1 \leq i \leq k_1; \quad k_1 + 1 \leq \alpha \leq n,$$

где

$$\Delta_{i\alpha}^{(n-1)} = \begin{vmatrix} g^{11} & g^{12} & \dots & g^{1k_1} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ g^{i-1,1} & g^{i-1,2} & \dots & g^{i-1,k_1} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ g^{i+1,1} & g^{i+1,2} & \dots & g^{i+1,k_1} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ g^{k_1,1} & g^{k_1,2} & \dots & g^{k_1,k_1} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & g^{k_1+1,k_1+1} & \dots & g^{k_1+1,\alpha-1} & g^{k_1+1,\alpha+1} & \dots & g^{k_1+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & g^{n,k_1+1} & \dots & g^{n,\alpha-1} & g^{n,\alpha+1} & \dots & g^{nn} \end{vmatrix}$$

Вычисление определителя $\Delta_{i\alpha}^{(n-1)}$ $(n-1)$ -го порядка проведем разложением его по первым $(k_1 - 1)$ строкам. В первом слагаемом этого разложения второй множитель равен нулю как содержащий первую нулевую колонку, все остальные слагаемые в разложении определителя $\Delta_{i\alpha}^{(n-1)}$ также равны нулю, так как первый множитель, являясь определителем порядка $(k_1 - 1)$, содержит нулевую колонку. Таким образом, $\Delta_{i\alpha}^{(n-1)} = 0$ при $1 \leq i \leq k_1, k_1 + 1 \leq \alpha \leq n$. Отсюда следует, что $g_{i\alpha} = 0, i = \overline{1, k_1}, \alpha = \overline{k_1 + 1, n}; 1 \leq k_1 \leq n$. С другой стороны, при $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{k_1} \neq \lambda_\alpha, \alpha = \overline{k_1 + 1, n}, k_1 \leq n$, из формул (4) следует

$$\Gamma_{\alpha\alpha}^i = \Gamma_{ii}^\alpha = 0, i = \overline{1, k_1}, \alpha = \overline{k_1 + 1, n}. \quad (16)$$

Преобразуем формулы (16) с учетом формул (15); имеем

$$\Gamma_{\alpha\alpha}^i = g^{i\beta} \Gamma_{\beta,\alpha\alpha} = \sum_{j=1}^{k_1} g^{ij} \Gamma_{j,\alpha\alpha} = 0, \alpha = \overline{k_1 + 1, n}, i = \overline{1, k_1}; \quad (17)$$

$$\Gamma_{ii}^\alpha = g^{\alpha\beta} \Gamma_{\beta,ii} = \sum_{\gamma=k_1+1}^n g^{\alpha\gamma} \Gamma_{\gamma,ii} = 0; \alpha = \overline{k_1 + 1, n}, i = \overline{1, k_1}. \quad (18)$$

Так как $\det \|g^{ij}\|_{i,j=\overline{1,k_1}} \neq 0; \det \|g^{\alpha\gamma}\|_{\alpha\gamma=\overline{k_1+1,n}} \neq 0$, то из формул (17), (18) находим

$$\Gamma_{j,\alpha\alpha} = \Gamma_{\alpha,ii} = 0, j = \overline{1, k_1}, \alpha = \overline{k_1 + 1, n}. \quad (19)$$

Отсюда следует, что

$$\partial_j g_{\alpha\alpha} - 2\partial_\alpha g_{\alpha j} = 0, j = \overline{1, k_1}, \alpha = \overline{k_1 + 1, n};$$

$$\partial_\alpha g_{jj} - 2\partial_j g_{\alpha j} = 0, j = \overline{1, k_1}, \alpha = \overline{k_1 + 1, n}.$$

В силу формул (15) $\partial_\alpha g_{j\alpha} = \partial_j g_{\alpha j} = 0, j = \overline{1, k_1}, \alpha = \overline{k_1 + 1, n}$, поэтому последние соотношения дают $\partial_j g_{\alpha\alpha} = \partial_\alpha g_{jj} = 0$, что означает

$$g_{jj} = g_{jj}(u^1, u^2, \dots, u^{k_1}), j = \overline{1, k_1};$$

$$g_{\alpha\alpha} = g_{\alpha\alpha}(u^{k_1+1}, \dots, u^n), \alpha = \overline{k_1 + 1, n}. \quad (20)$$

Рассмотрим теперь следующую систему уравнений, являющуюся подсистемой уравнений Кодацци:

$$\nabla_{\beta} b_{ij} = \nabla_i b_{j\beta}, \quad i, j = \overline{1, k_1}, \quad \beta = \overline{k_1 + 1, n};$$

$\nabla_{\beta} c_{ij} = \nabla_i c_{j\beta}$, $i \neq j$. Раскрывая знак ковариантного дифференцирования и учитывая, что $b_{i\beta} = 0$, $i \neq \beta$, перепишем эту систему уравнений в виде

$$\Gamma_{\beta j}^i b_{ii} = \Gamma_{ij}^{\beta} b_{\beta\beta}, \quad i, j = \overline{1, k_1}, \quad \beta = \overline{k_1 + 1, n};$$

$\Gamma_{\beta j}^i c_{ii} = \Gamma_{ij}^{\beta} c_{\beta\beta}$, $i \neq j$. Учитывая, что $c_{ii} = \lambda_i b_{ii}$, $\lambda_i = \text{const}$, отсюда находим

$$(\lambda_i - \lambda_{\beta}) b_{\beta\beta} \Gamma_{ij}^{\beta} = 0, \quad i, j = \overline{1, k_1}, \quad \beta = \overline{k_1 + 1, n}, \quad i \neq j.$$

Так как $\lambda_i \neq \lambda_{\beta}$, $i = \overline{1, k_1}$, $\beta = \overline{k_1 + 1, n}$, $b_{\beta\beta} \neq 0$, то

$$\Gamma_{ij}^{\beta} = 0, \quad i, j = \overline{1, k_1}, \quad \beta = \overline{k_1 + 1, n}, \quad i \neq j.$$

Так как $g^{i\beta} = g^{2\beta} = \dots = g^{k_1\beta}$, $\beta = \overline{k_1 + 1, n}$, то последнее соотношение равносильно следующему: $\sum_{\gamma=\overline{k_1+1}}^n g^{\beta\gamma} \Gamma_{\gamma,ij} = 0$, $\beta = \overline{k_1 + 1, n}$,

$ij = \overline{1, k_1}$, $i \neq j$. Отсюда, учитывая, что $\det \|g^{\beta\gamma}\|_{\beta, \gamma=\overline{k_1+1, n}} \neq 0$, находим $\Gamma_{\gamma,ij} = 0$, что дает $\partial_{\gamma} g_{ij} - \partial_i g_{\gamma j} - \partial_j g_{\gamma i} = 0$, $ij = \overline{1, k_1}$, $i \neq j$, $\gamma = \overline{k_1 + 1, n}$. В силу формул (15) отсюда получаем $\partial_{\gamma} g_{ij} = 0$, т. е.

$$g_{ij} = g_{ij}(u^1, u^2, \dots, u^{k_1}), \quad ij = \overline{1, k_1}, \quad i \neq j. \quad (21)$$

Аналогично, рассматривая подсистему уравнений Кодацци $\Delta_i b_{\alpha\beta} = \nabla_{\alpha} b_{i\beta}$, $i = \overline{1, k_1}$, $\alpha, \beta = \overline{k_1 + 1, n}$, $\alpha \neq \beta$; $\nabla_i c_{\alpha\beta} = \nabla_{\alpha} c_{i\beta}$, находим

$$g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}(u^{k_1+1}, \dots, u^n), \quad \alpha, \beta = \overline{k_1 + 1, n}; \quad \alpha \neq \beta. \quad (22)$$

Обратимся теперь к уравнениям Кодацци вида $\nabla_{\beta} b_{ii} = \nabla_i b_{\beta i}$, $i = \overline{1, k_1}$, $\beta = \overline{k_1 + 1, n}$; $\nabla_i b_{\beta\beta} = \nabla_{\beta} b_{i\beta}$ или в развернутом виде: $\partial_{\beta} b_{ii} - 2\Gamma_{\beta i}^i b_{ii} = \partial_i b_{\beta i} - \Gamma_{i\beta}^i b_{ii} - \Gamma_{ii}^{\beta} b_{\beta\beta}$; $\partial_i b_{\beta\beta} - 2\Gamma_{i\beta}^{\beta} b_{\beta\beta} = \partial_{\beta} b_{i\beta} - \Gamma_{i\beta}^{\beta} b_{\beta\beta} - \Gamma_{\beta\beta}^i b_{ii}$. Отсюда в силу соотношений (16) находим, что $\partial_{\beta} b_{ii} - \Gamma_{\beta i}^i b_{ii} = 0$; $\partial_i b_{\beta\beta} - \Gamma_{i\beta}^{\beta} b_{\beta\beta} = 0$, $i = \overline{1, k_1}$, $\beta = \overline{k_1 + 1, n}$. Подсчитаем $\Gamma_{i\beta}^i$, $\Gamma_{i\beta}^{\beta}$ при условиях (15), (20), (21): $\Gamma_{i\beta}^i = g^{i\alpha} \Gamma_{\alpha, i\beta} =$

$$= \sum_{l=1}^{k_1} g^{il} \Gamma_{l, i\beta} + \sum_{\gamma=\overline{k_1+1}}^n g^{i\gamma} \Gamma_{\gamma, i\beta} = \sum_{l=1}^{k_1} g^{il} \Gamma_{l, i\beta} = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{k_1} g^{il} (\partial_{\beta} g_{li} + \partial_i g_{l\beta} - \partial_l g_{i\beta}) = 0.$$

$$\text{Аналогично находим } \Gamma_{i\beta}^{\beta} = g^{\beta\alpha} \Gamma_{\alpha, i\beta} = \sum_{l=1}^{k_1} g^{\beta l} \Gamma_{l, i\beta} + \sum_{\gamma=\overline{k_1+1}}^n g^{\beta\gamma} \Gamma_{\gamma, i\beta} = \sum_{\gamma=\overline{k_1+1}}^n g^{\beta\gamma} \frac{1}{2} (\partial_{\beta} g_{\gamma i} + \partial_i g_{\gamma\beta} - \partial_{\gamma} g_{i\beta}) = 0.$$

Тогда рассматриваемые уравнения Кодацци дают

$$\partial_\beta b_{ii} = \partial_i b_{\beta\beta} = 0, \quad i = \overline{1, k_1}, \quad \beta = \overline{k_1 + 1, n},$$

что означает

$$b_{ii} = b_{ii}(u^1, u^2, \dots, u^{k_1}), \quad i = \overline{1, k_1}; \quad b_{\beta\beta} = b_{\beta\beta}(u^{k_1+1}, \dots, u^n), \\ \beta = \overline{k_1 + 1, n}. \quad (23)$$

Таким образом, если $\lambda_1 = \dots = \lambda_{k_1} \neq \lambda_\alpha$, $\alpha = \overline{k_1 + 1, n}$, то в силу формул (20), (21), (23) основные формы поверхности F^n принимают вид

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^{k_1} g_{ij}(u^1, u^2, \dots, u^{k_1}) du^i du^j + \\ + \sum_{\alpha,\beta=k_1+1}^n g_{\alpha\beta}(u^{k_1+1}, \dots, u^n) du^\alpha du^\beta; \\ \Pi_1 = \sum_{i=1}^{k_1} b_{ii}(u^1, u^2, \dots, u^{k_1}) du^i du^i + \\ + \sum_{\alpha=k_1+1}^n b_{\alpha\alpha}(u^{k_1+1}, \dots, u^n) du^\alpha du^\alpha; \\ \Pi_2 = \sum_{i=1}^{k_1} \Lambda_i b_{ii}(u^1, u^2, \dots, u^{k_1}) du^i du^i + \\ + \sum_{\alpha=k_1+1}^n \lambda_\alpha b_{\alpha\alpha}(u^{k_1+1}, \dots, u^n) du^\alpha du^\alpha; \quad \omega_{12} \equiv 0.$$

Обозначая через $\Lambda_1 \equiv \lambda_{k_0+1} = \dots = \lambda_{k_1}$, $k_0 = 0$;

$$\Lambda_2 \equiv \lambda_{k_1+1} = \dots = \lambda_{k_2};$$

$$\Lambda_{p+1} \equiv \lambda_{k_p+1} = \dots = \lambda_{k_{p+1}}, \quad k_{p+1} = n; \quad \Lambda_i \neq \Lambda_j, \quad i \neq j,$$

и проводя сходные рассуждения для любой группы значений $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_{p+1}$, заключаем, что основные формы поверхности имеют вид:

$$ds^2 = \sum_{l=0}^p \left(\sum_{i,j=k_l+1}^{k_{l+1}} g_{ij}(u^{k_l+1}, \dots, u^{k_{l+1}}) du^i du^j \right); \\ \Pi_1 = \sum_{l=0}^p \left(\sum_{i=k_l+1}^{k_{l+1}} b_{ii}(u^{k_l+1}, \dots, u^{k_{l+1}}) du^i du^i \right); \\ \Pi_2 = \sum_{l=0}^p \left(\Lambda_l \sum_{i=k_l+1}^{k_{l+1}} b_{ii}(u^{k_l+1}, \dots, u^{k_{l+1}}) du^i du^i \right); \\ \omega_{12} \equiv 0. \quad (24)$$

Покажем, что при сделанных предположениях $p \leq 1$. Пусть $p \geq 2$,

Тогда, не нарушая в общности, можно считать $\Lambda_1 \neq \Lambda_2$, $\Lambda_1 \neq \Lambda_3$, $\Lambda_2 \neq \Lambda_3$, причем

$$\begin{aligned} g_{ij} &= g_{ij}(u^1, \dots, u^{k_1}), \quad 1 \leq i, j \leq k_1; \\ g_{\alpha\beta} &= g_{\alpha\beta}(u^{k_1+1}, \dots, u^{k_2}), \quad k_1+1 \leq \alpha, \beta \leq k_2; \\ g_{\sigma\tau} &= g_{\sigma\tau}(u^{k_2+1}, \dots, u^{k_3}), \quad k_2+1 \leq \sigma, \tau \leq k_3. \end{aligned} \quad (25)$$

Обратимся к уравнению Гаусса:

$$b_{tt}b_{ss} + c_{tt}c_{ss} = R_{ts,ts}, \quad t \neq s.$$

Подсчитаем $R_{ts,ts}$ при $t \leq k_1$, $s \geq k_1+1$.

Имеем $R_{ts,ts} = \frac{1}{2}(\partial_{ts}g_{ts} - \partial_{ss}g_{tt} + \partial_{ts}g_{ts} - \partial_{tt}g_{ss}) + g^{\alpha\beta}\Gamma_{ts,\alpha} \times$
 $\Gamma_{ts,\beta} - g^{\alpha\beta}\Gamma_{tt,\alpha}\Gamma_{ss,\beta}$. Так как в условиях (25) при $t \leq k_1$, $s \geq k_1+1$,

$$\begin{aligned} g_{ts} &= 0, \quad \partial_{ss}g_{tt} = \partial_{tt}g_{ss} = 0; \quad \Gamma_{ts,\beta} = 0, \quad \beta = \overline{1, n} \\ \Gamma_{tt,\alpha} &= \frac{1}{2}(\partial_t g_{\alpha t} + \partial_t g_{\alpha t} - \partial_{\alpha} g_{tt}) = 0 \quad \text{при } \alpha \geq k_1+1; \quad 1 \leq t \leq k_1; \\ \Gamma_{ss,\beta} &= \frac{1}{2}(\partial_s g_{\beta s} + \partial_s g_{\beta s} - \partial_{\beta} g_{ss}) = 0 \quad \text{при } \beta \leq k_1, \quad s \geq k_1+1; \\ g^{\alpha\beta} &= 0 \quad \text{при } \alpha \neq \beta, \quad \text{то } R_{ts,ts} = 0 \quad \text{при } t \geq k_1, \quad s \geq k_1+1. \end{aligned}$$

Тогда из уравнения Гаусса и формул (24) находим

$$\begin{aligned} b_{tt}b_{ss} + \Lambda_1 b_{tt} \cdot \Lambda_2 b_{ss} &= 0, \quad 1 \leq t \leq k_1, \quad k_1+1 \leq s \leq k_2; \\ b_{tt}b_{ss} + \Lambda_1 b_{tt} \cdot \Lambda_3 b_{ss} &= 0, \quad 1 \leq t \leq k_1, \quad k_2+1 \leq s \leq k_3. \end{aligned}$$

Так как $b_{tt}b_{ss} \neq 0$, то $1 + \Lambda_1\Lambda_2 = 0$, $1 + \Lambda_1\Lambda_3 = 0$ и потому $\Lambda_2 = -\Lambda_3$, что противоречит предположению.

Следовательно, формулы (24) принимают вид

$$\begin{aligned} ds^2 &= \sum_{i,j=1}^{k_1} g_{ij}(u^1, u^2, \dots, u^{k_1}) du^i du^j + \\ &+ \sum_{\alpha,\beta=k_1+1}^n g_{\alpha\beta}(u^{k_1+1}, \dots, u^n) du^\alpha du^\beta; \\ \Pi_1 &= \sum_{i=1}^{k_1} b_{ii}(u^1, u^2, \dots, u^{k_1}) du^i du^i + \\ &+ \sum_{\alpha=k_1+1}^n b_{\alpha\alpha}(u^{k_1+1}, \dots, u^n) du^\alpha du^\alpha; \\ \Pi_2 &= \Lambda_1 \sum_{i=1}^{k_1} b_{ii}(u^1, \dots, u^{k_1}) du^i du^i + \\ &+ \Lambda_2 \sum_{\alpha=k_1+1}^n b_{\alpha\alpha}(u^{k_1+1}, \dots, u^n) du^\alpha du^\alpha; \\ \omega_{12} &\equiv 0; \quad \Lambda_1 \neq \Lambda_2; \quad 1 \leq k_1 < n. \end{aligned} \quad (26)$$

В случае $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = \Lambda_1$ будет $\Pi_2 = \Lambda_1 \Pi_1$.

Повернем оснащение Родрига $\{n_\sigma\}_1^2$ на угол $\psi_1 = \text{arctg } \Lambda_1$. Тогда для нового оснащения $\{n_\sigma^*\}_1^2$ получим

$$n_1^* = n_1 \cos \psi_1 + n_2 \sin \psi_1; \quad n_2^* = -n_1 \sin \psi_1 + n_2 \cos \psi_1.$$

Подсчитаем коэффициенты b_{ij}^* , c_{ij}^* , μ_i^* основных форм в новом оснащении; найдем

$$b_{ii}^* = b_{ii} \cos \psi_1 + c_{ii} \sin \psi_1 = b_{ii} (\cos \psi_1 + \Lambda_1 \sin \psi_1) = \frac{b_{ii} (1 + \Lambda_1^2)}{\sqrt{1 + \Lambda_1^2}} \neq 0;$$

$$c_{ii}^* = -b_{ii} \sin \psi_1 + c_{ii} \cos \psi_1 = b_{ii} \frac{(-\Lambda_1 + \Lambda_1)}{\sqrt{1 + \Lambda_1^2}} = 0, \quad 1 \leq i \leq k_1;$$

$$\mu_i^* = \mu_i + \partial_i \psi_1 = 0; \quad 1 \leq i \leq n.$$

Покажем, что $b_{ii}^* = 0$ при $i \geq k_1 + 1$. Для этого рассмотрим уравнения Гаусса в виде

$$b_{ii}^* b_{ss}^* + c_{ii}^* c_{ss}^* = R_{ts,ts}.$$

Так как $R_{ts,ts} = 0$ при $1 \leq t \leq k_1$, $s \geq k_1 + 1$, n ; $c_{ii}^* = 0$, $1 \leq i \leq k_1$, то $b_{ii}^* b_{ss}^* = 0$, где $b_{ii}^* \neq 0$ при $1 \leq i \leq k_1$. Отсюда следует, что $b_{ss}^* = 0$, $s \geq k_1 + 1$, что и доказывает лемму.

4. Строение поверхностей из множества R_c . Лемма 3. Всякая поверхность F^n из множества R_c либо является гиперплоскостью, либо является римановым произведением вида $F^k \times F^{n-k}$, $k = 1, 2, \dots, \left[\frac{n}{2} \right]$, где $F^k \subset E^{k+1}$, $F^{n-k} \subset E^{n-k+1}$.

Доказательство. Выберем на F^n специальную сопряженную сеть без кручения в качестве координатной сети, а в качестве оснащения $\{n_\sigma\}_1^2$ возьмем оснащение Родрига, существование которого доказано леммой 2. В случае $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n$ имеем $k_1 = n$ и потому $\Pi_2 \equiv 0$, $\omega_{12} \equiv 0$. Это означает, что $(n_1; \partial_i n_2) = (\partial_i r; \partial_i n_2) = 0$, $i, j = 1, n$. Так как $(n_2, \partial_i n_2) = 0$ и $\{\partial_i r; n_1; n_2\}$, $i = 1, n$, образуют базис в E^{n+2} , то $\partial_i n_2 = 0$, т. е. $n_2 = n_2^0 = \text{const}$. Тогда $(\partial_i r; n_2^0) = \partial_i (r; n_2^0) = 0$, и потому $(r; n_2^0) = \text{const}$. Следовательно, радиус-вектор поверхности F^n удовлетворяет уравнению гиперплоскости $E^{n+1} \subset E^{n+2}$ и, значит, $F^n = (F^0 \subset E^1) \times (F^n \subset E^{n+1})$. В случае $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{k_1} = \Lambda_1$, $\lambda_{k_1+1} = \dots = \lambda_n = \Lambda_2$, $\Lambda_1 \neq \Lambda_2$, основные формы поверхности принимают вид, указанный в лемме 2. Для простоты индекс $(\times)$ в этих формулах будем опускать. Коэффициенты g_{ij} , b_{ij} , c_{ij} , μ_i связаны на F^n уравнениями Гаусса — Кодацци — Риччи. Выпишем эти уравнения с учетом свойств g_{ij} , b_{ij} , c_{ij} , μ_i .

Уравнение Гаусса имеет вид

$$R_{ij,pl} = b_{ip} b_{jl} - b_{il} b_{jp} + c_{ip} c_{jl} - c_{il} c_{jp}; \quad i, j, p, l = \overline{1, n}.$$

Покажем, что $R_{ij,p\alpha} \equiv 0$, если $i, j, p \leq k_1$; $\alpha \geq k_1 + 1$.

Имеем

$$R_{ij,p\alpha} = \frac{1}{2} (\partial_{i\alpha} g_{jp} - \partial_{j\alpha} g_{ip} - \partial_{ip} g_{j\alpha} + \partial_{jp} g_{i\alpha}) + g^{\sigma\tau} \Gamma_{\sigma,[i\alpha} \Gamma_{\tau,j]p} = \\ = g^{\sigma\tau} \frac{1}{2} (\partial_{\alpha} g_{\sigma i} + \partial_i g_{\sigma\alpha} - \partial_{\sigma} g_{i\alpha}) \cdot \frac{1}{2} (\partial_p g_{\tau j} + \partial_j g_{\tau p} - \partial_{\tau} g_{jp})_{[i]j]p} = 0.$$

Теперь покажем, что компоненты $R_{ij,kl}$ при $i, j, p, l \leq k_1$ являются функциями от $(u^1, u^2, \dots, u^{k_1})$. Действительно,

$$R_{ij,pl} = \frac{1}{2} (\partial_{il} g_{jp} [ij], [pl]) + (g^{\sigma\tau} \Gamma_{\sigma,il} \Gamma_{\tau,jp} [ij]).$$

Так как

$$g^{\sigma\tau} \Gamma_{\sigma,il} \Gamma_{\tau,jp} = \sum_{m,i=1}^{k_1} g_{mt} \Gamma_{m,il} \Gamma_{t,jp} + \sum_{\alpha,\beta=k_1+1}^n g^{\alpha\beta} \Gamma_{\alpha,il} \Gamma_{\beta,jp},$$

где $\Gamma_{\alpha,il} = \Gamma_{\beta,jl} = 0$ при $\alpha, \beta \geq k_1 + 1$; $i, j, l \leq k_1$, то $R_{ij,pl}$ вычисляется только по метрической форме $\sum_{i,j=1}^{k_1} g_{ij} du^i du^j$ и потому является функцией от $(u^1, u^2, \dots, u^{k_1})$. Далее находим, что

$$R_{ij,\alpha\beta} = 0 \text{ при } i, j \leq k_1; \alpha, \beta \geq k_1 + 1.$$

Аналогично убеждаемся, что

$$R_{i\alpha,\beta\gamma} = 0 \text{ при } i \leq k_1; \alpha, \beta, \gamma \geq k_1 + 1$$

и $R_{\alpha\beta,\gamma\delta}$ вычисляется по метрической форме $\sum_{\alpha,\beta=k_1+1}^n g_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta$. Таким образом, уравнение Гаусса для поверхности F^n в E^{n+2} в рассматриваемом случае есть объединение уравнений Гаусса, составленных для гиперповерхностей F^{k_1} , E^{k_1+1} и F^{n-k_1} в E^{n-k_1+1} , имеющих соответственно основные формы:

$$F^{k_1}: ds_{F^{k_1}}^2 = \sum_{i,j=1}^{k_1} g_{ij}(u^1, u^2, \dots, u^{k_1}) du^i du^j;$$

$$E^{k_1}: ds_{E^{k_1}}^2 = \sum_{i=1}^{k_1} b_{ii}(u^1, u^2, \dots, u^{k_1}) du^i du^i;$$

$$F^{n-k_1}: ds_{F^{n-k_1}}^2 = \sum_{\alpha,\beta=k_1+1}^n g_{\alpha\beta}(u^{k_1+1}, \dots, u^n) du^\alpha du^\beta;$$

$$E^{n-k_1}: ds_{E^{n-k_1}}^2 = \sum_{\alpha=k_1+1}^n c_{\alpha\alpha}(u^{k_1+1}, \dots, u^n) du^\alpha du^\alpha.$$

Уравнения Кодацци имеют вид $\partial_{[i} b_{j]l} - \Gamma_{[i}^l b_{j]l} = 0$, $j \neq l$; $\partial_{[i} c_{j]l} - \Gamma_{[i}^l c_{j]l} = 0$, $j \neq l$, где символы Кристоффеля Γ_{jk}^i вычисляются по метрике поверхности F^n . Поскольку $b_{jl} = 0$ при $j > k_1$, $c_{jl} = 0$ при $j \leq k_1$, эта система переписывается в виде $\partial_{[i} b_{j]l} - \Gamma_{[i}^l b_{j]l} = 0$,

$j \leq k_1$, $1 \leq i, j \leq n$; $\partial_{[i} c_{j]l} - \Gamma_{[il}^j c_{j]l} = 0$, $j > k_1$; $1 \leq i, l \leq n$. Рассмотрим первую систему при $l > k_1$. Так как при $l > k_1$ будет $\partial_i b_{jl} = 0$, $\partial_j b_{il} = 0$, то система примет вид $-\Gamma_{[il}^j b_{j]l} = 0$ или $\Gamma_{[il}^j b_{j]l} = 0$. Подсчет показывает, что при $l > k_1$, $j \neq l$, $j \leq k_1$, $\Gamma_{il}^j = 0$. Следовательно, первая группа уравнений Кодацци имеет вид

$$\partial_{[i} b_{j]l} - \Gamma_{[il}^j b_{j]l} = 0; \quad i, j, l \leq k_1,$$

где символы Γ_{il}^j , вычисленные по метрической форме поверхности F^n , совпадают со значениями символов Γ_{il}^j , вычисленными по метрической форме $\sum_{i,j=1}^{k_1} g_{ij}(u^1, u^2, \dots, u^{k_1}) du^i du^j$. Аналогично убеждаемся, что вторая группа уравнений Петерсона — Кодацци имеет вид

$$\partial_{[i} c_{j]l} - \Gamma_{[il}^j c_{j]l} = 0; \quad i, j, l \geq k_1 + 1,$$

где Γ_{il}^j вычисляются по метрической форме:

$$\sum_{\alpha, \beta=k_1+1}^n g_{\alpha\beta}(u^{k_1+1}, \dots, u^n) du^\alpha du^\beta.$$

Таким образом, уравнения Кодацци поверхности F^n в E^{n+2} в рассматриваемом случае представляют объединение систем уравнений Кодацци, выписанных для поверхностей $F^{k_1} \subset E^{k_1+1}$ и $F^{n-k_1} \subset E^{n-k_1+1}$ с основными формами, заданными формулами (27). Уравнение Риччи в рассматриваемом случае выполняется тождественно.

Так как восстановление поверхности F^n в E^{n+2} сводится к решению системы уравнений Гаусса — Кодацци — Риччи, а последняя представляет собой объединение основных уравнений поверхности F^{k_1} в E^{k_1+1} и F^{n-k_1} в E^{n-k_1+1} , то нахождение F^n в E^{n+2} равносильно в данном случае нахождению F^{k_1} в E^{k_1+1} , F^{n-k_1} в E^{n-k_1+1} и представления F^n в виде риманова произведения $F^{k_1} \times F^{n-k_1}$, $k_1 = 1, 2, \dots, \left[\frac{n}{2} \right]$, причем на F^{k_1} и F^{n-k_1} координатная сеть не имеет асимптотических направлений. Лемма доказана.

Список литературы: 1. Акивис М. А. Многомерная дифференциальная геометрия. — Калинин: Изд-во Калинин. ун-та, 1977. — 88 с. 2. Фоменко В. Т. Некоторые свойства двумерных поверхностей с нулевым нормальным кручением в E^4 // Мат. сб. — 1978. — 106, № 4. — С. 589—603.

Поступила в редколлегию 14.10.85

СОДЕРЖАНИЕ

Борисенко А. А., Николаевский Ю. А. Об алгебраических поверхностях, заданных однородным полиномом	3
Борисенко А. А., Ямпольский А. Л. Секционная кривизна метрики Сасаки T_1M^n	10
Горох В. П. О минимуме площади поверхности с заданным граничным контуром в псевдоевклидовом пространстве	18
Гурин А. М. Реализация сетей выпуклых многогранников с равно-угольными вершинами. 5	22
Игнатенко В. Ф. О некоторых кубических поверхностях с бесконечным множеством плоскостей косой симметрии	37
Климентов С. Б. О продолжении бесконечно малых изгибаний высших порядков односвязной поверхности положительной кривизны при кра-евых условиях	41
Котляр Б. Д. Об одном геометрическом неравенстве	49
Лавренченко С. А. Неприводимые триангуляции тора	52
Макеев В. В. Степень отображения в некоторых задачах комбинаторной геометрии	62
Можарский В. В. Ребро возврата первого рода с точкой асимптоти-ческого типа	66
Мягков В. И. Безынтегральное представление комплекса с четырех-кратным бесконечно удаленным инфлекционным центром	76
Пелипенко В. В. Геометрическая интерпретация решений типа стацио-нарных воли уравнения синус-Гордона	81
Ровенский В. Ю. Замечания о полных параболических поверхностях	87
Роговой М. Р. Об одном инварианте поверхности в евклидовом про-странстве	89
Рудницкий О. И. Некоторые свойства базисных инвариантов унитарной группы $W(K_5)$	92
Фоменко В. Т. О строении поверхностей коразмерности два, несущих сопряженную сеть без кручения	96
Сабитов И. Х. Алгоритмическая проверка изгибаемости подвесок	109
Сергиенко Л. Н. О геодезических «прямейших» линиях нелинейного неголономного многообразия в E_4	112
Улановский М. А. Однородные лоренцовы пространства. 1	116