

издательство херьковского университета

У КРАИНСКИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК

ВЫПУСК

3

УКРАИНСКИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК

Выпуск 3

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ХАРЬКОВСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА имени А. М. ГОРЬКОГО
Харьков 1966

**РЕСПУБЛИКАНСКИЙ МЕЖВЕДОМСТВЕННЫЙ СБОРНИК
НАУЧНЫХ РАБОТ ПО ГЕОМЕТРИИ**

В 3-й выпуск сборника входят ряд работ по геометрии в целом, по римановой, линеаризованной геометрии, по геометрии с заданной фундаментальной группой и по другим вопросам геометрии.

Редакционная коллегия:

Акад. АН УССР проф. А. В. Погорель (ответственный редактор), проф. А. С. Смирновский (зам. ответственного редактора), доц. В. П. Баласана, проф. Я. П. Бланк, доц. Д. Э. Горбачевский, доц. В. И. Каба, проф. Н. И. Кованец, доц. А. С. Лойбак (ответственный секретарь), доц. А. В. Лозинский, доц. О. П. Сергунцов, доц. В. Н. Скрыдлов.

Адрес редакционной коллегии: Харьков-77,
пл. Дзержинского, 4, Харьковский университет,
механико-математический факультет.

ЕЩЕ РАЗ О БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ ИЗГИБАНИЯХ ЦИЛИНДРОИДОВ С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ КРАЯМИ

В. П. Белоусова, И. Г. Ильин (Киев)

В статье устанавливаются условия нежесткости и слабой жесткости боковой поверхности цилиндров. В качестве основной системы дифференциальных уравнений теории бесконечно малых изгибов используется следующая система [4]:

$$\begin{aligned} L v_1 - 2M \mu_1 + N \lambda_1 &= 0; \\ (\lambda_1)_v - (\mu_1)_u &= \Gamma_{12}^1 \lambda_1 + (\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) \mu_1 - \Gamma_{11}^2 v_1; \\ (\mu_1)_v - (v_1)_u &= \Gamma_{22}^1 \lambda_1 + (\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{21}^1) \mu_1 - \Gamma_{21}^2 v_1; \\ L v_2 - 2M \mu_2 + N \lambda_2 + 2(\lambda_1 v_1 - \mu_1^2) &= 0; \\ (\lambda_2)_v - (\mu_2)_u &= \Gamma_{12}^1 \lambda_2 + (\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) \mu_2 - \Gamma_{11}^2 v_2; \\ (\mu_2)_v - (v_2)_u &= \Gamma_{22}^1 \lambda_2 + (\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{21}^1) \mu_2 - \Gamma_{21}^2 v_2; \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} L v_n - 2M \mu_n + N \lambda_n + \sum_{i=1}^n (\lambda_i v_{n-i} - 2\mu_i \mu_{n-i} + v_i \lambda_{n-i}) &= 0; \\ (\lambda_n)_v - (\mu_n)_u &= \Gamma_{12}^1 \lambda_n + (\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) \mu_n - \Gamma_{11}^2 v_n; \\ (\mu_n)_v - (v_n)_u &= \Gamma_{22}^1 \lambda_n + (\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{21}^1) \mu_n - \Gamma_{21}^2 v_n, \end{aligned}$$

где $\lambda_i(u, v)$, $\mu_i(u, v)$, $v_i(u, v)$ определяются по формулам

$$\begin{aligned} L^* &= L + 2 \sum_{\alpha=1}^n \varepsilon^\alpha \lambda_\alpha; \\ M^* &= M + 2 \sum_{\alpha=1}^n \varepsilon^\alpha \mu_\alpha; \\ N^* &= N + 2 \sum_{\alpha=1}^n \varepsilon^\alpha v_\alpha. \end{aligned} \tag{2}$$

Если поверхность нежестка, то искомые функции характеризуют изменения коэффициентов второй квадратичной формы поверхности при бесконечно малом изгибе, что непосредственно следует из формул (2), где L^* , M^* , N^* — коэффициенты второй квадратичной формы деформированной поверхности.

Система (1) получена путем применения условий Гаусса — Петерсона — Кодаци к преобразованной поверхности. Функции λ_i , μ_i , v_i одно-

значно определяют поле вращений ω . Поэтому в случае неодносвязной поверхности, какой и является боковая поверхность цилиндриды, наличие всюду регулярных на ней решений системы (1) еще не означает жесткости поверхности, так как на ней может и не существовать однозначно определенного ими всюду регулярного поля z .

Если поверхность допускает всюду регулярные на ней решения системы дифференциальных уравнений (1), то мы будем говорить, что она обладает слабой жесткостью порядка n . Слабо жесткая поверхность является жесткой порядка n , если она допускает нетривиальные бесконечно малые изгибания того же порядка.

В статье устанавливаются условия слабой жесткости и жесткости боковой поверхности цилиндридов с параллельными краями, на граничные кривые C_1 и C_2 которых наложены связи, заставляющие нормальные кривизны этих кривых оставаться неизменными.

§ 1. Слабая жесткость и жесткость первого порядка боковой поверхности цилиндридов

Уравнение цилиндриды запишем следующим образом:

$$x(s, v) = x_1(s) + va(s),$$

где $x_1(s)$ и $a(s)$ — трижды непрерывно дифференцируемые вектор-функции от s ; s — натуральный параметр кривой, ограничивающей нижнее (или верхнее) основание цилиндриды. Раскладывая вектор образующей цилиндриды $a(s)$ по ортам естественного трехгранника этой кривой

$$a(s) = \xi\tau + \eta\nu + \zeta\beta,$$

и полагая $a' = 0\tau$, получим согласно (1) систему дифференциальных уравнений бесконечно малых изгибаний первого порядка для цилиндридов:

$$\begin{aligned} \frac{k\xi}{r_1^2 + r_2^2} v_1 &= 0; \\ \frac{\partial \lambda_1}{\partial v} - \frac{\theta}{1 + v\theta} \lambda_1 &= \frac{\partial \lambda_1}{\partial s} - \left(\frac{v\theta'}{1 + v\theta} - \frac{k\xi\tau}{r_1^2 + r_2^2} \right) \lambda_1; \\ \frac{\partial \lambda_1}{\partial v} &= -\frac{\theta}{1 + v\theta} \lambda_1, \end{aligned} \quad (3)$$

где k — кривизна граничной кривой C_1 .

Предположим, что $\theta \neq 0$ (случай цилиндра рассмотрим отдельно). Из первого уравнения системы (3) следует, что $v_1 = 0$ на всей поверхности. Если, кроме того, $r_1 = 0$, то бесконечно малое изгибание тривиально. Поэтому предположим в дальнейшем, что $r_1 \neq 0$. Тогда из третьего уравнения системы (3) найдем

$$\lambda_1 = \frac{U(s)}{1 + v\theta},$$

где $U(s)$ — произвольная функция интегрирования. Таким образом, для определенной функции λ_1 имеет место уравнение:

$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial s} - \frac{\theta}{1 + v\theta} \lambda_1 = \frac{U(s)\theta'}{1 + v\theta} - \frac{U(s)\xi\tau}{r_1^2 + r_2^2 + v(r_1^2 + r_2^2)\theta} - \frac{2U(s)v\theta'}{(1 + v\theta)^2}, \quad (4)$$

которое и будем интегрировать методом вариации произвольной функции от s . После необходимых преобразований получим

$$\lambda_1 = f(s)(1 + v\theta) - \frac{U'(s)}{\theta} + \frac{U'(s)v\theta'}{\theta(1 + v\theta)} + \frac{U(s)\theta'}{\theta^2} - \frac{U(s)k\zeta\eta}{\theta(\eta^2 + \zeta^2)}, \quad (5)$$

где $f(s)$ — вторая произвольная функция интегрирования.

Потребуем, чтобы кривизны кривых C_1 и C_2 при бесконечно малых изгибах боковой поверхности цилиндрида не изменялись. Пользуясь известным выражением для нормальной кривизны кривой на поверхности, найдем приближенное равенство, характеризующее приращение Δk нормальной кривизны кривой при бесконечно малом изгибании:

$$\Delta k \approx \varepsilon \left\{ \lambda_1 \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + 2\mu_1 \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + \nu_1 \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 \right\},$$

откуда для кривых C_1 и C_2 из условия $\Delta k = 0$ найдем

$$\lambda_1(s, 0) = \lambda_1(s, 1) = 0. \quad (6)$$

Воспользуемся краевыми условиями (6) для определения функций $U(s)$ и $f(s)$. После ряда элементарных преобразований получим

$$f(s) = -\frac{U(s)\theta'}{\theta^2(1 + \theta)}, \quad U(s) = C_1(1 + \theta) e^{-\int \frac{k\zeta\eta}{\eta^2 + \zeta^2} ds}. \quad (7)$$

Случай $1 + \theta = 0$ соответствует конусу. Предположим, что рассматриваемый цилиндрид не является конусом, т. е. что $1 + \theta \neq 0$ и преобразуем выражение (7).

Из соотношений $\mathbf{a} = \xi\boldsymbol{\tau} + \eta\boldsymbol{\nu} + \zeta\boldsymbol{\beta}$, $\mathbf{a}' = \theta\boldsymbol{\tau}$ имеем

$$\xi' - k\eta = 0, \quad \eta' + k\zeta = 0, \quad \zeta' = 0 \quad (8)$$

и, следовательно, $\zeta = \text{const}$.

Вектор нормали к боковой поверхности цилиндрида может быть представлен следующим образом:

$$[\mathbf{x}_v, \mathbf{x}_s] = (1 + v\theta)(\zeta\boldsymbol{\nu} - \eta\boldsymbol{\beta})$$

и, следовательно, вдоль кривой C_1 имеет вид

$$[\mathbf{x}_v, \mathbf{x}_s] = \zeta\boldsymbol{\nu} - \eta\boldsymbol{\beta}.$$

Обозначим через φ угол между вектором нормали к боковой поверхности цилиндрида, в произвольной точке кривой C_1 , и ортом $\boldsymbol{\nu}$ главной нормали кривой C_1 в этой же точке. Очевидно, что $\varphi = \arctg\left(-\frac{\eta}{\zeta}\right)$, откуда, принимая во внимание (8), найдем

$$\varphi' = \frac{k\zeta\eta}{\eta^2 + \zeta^2}.$$

В результате этого получим

$$\int_0^s \frac{k\zeta\eta}{\eta^2 + \zeta^2} ds = - \int_0^s \text{tg } \varphi \varphi' ds = \ln |\cos \varphi(s)| \quad (9)$$

и, следовательно,

$$U(s) = \frac{C_1(1 + \theta)}{\cos \varphi}.$$

Таким образом, решение системы (3) имеет вид

$$\nu_1 = 0; \quad \mu_1 = \frac{C_1(1+\theta)}{(1+\theta^2)\cos\varphi}; \quad \lambda_1 = \frac{C_1\theta'v(1-v)}{(1+\theta^2)\cos\varphi}. \quad (10)$$

Боковая поверхность цилиндрида при краевых условиях (6) является слабо нежесткой тогда и только тогда, если

$$\oint_C \frac{k\xi\eta ds}{\eta^2 + \xi^2} = 0, \quad (11)$$

или, что то же самое, она является слабо нежесткой тогда и только тогда, если при обходе по замкнутому контуру C_1 приращение угла между векторами нормали к поверхности цилиндрида и главной нормали кривой C_1 равно нулю.

Воспользовавшись формулами (10), с помощью предельного перехода легко убедиться в том, что боковая поверхность цилиндра при краевых условиях (6) также слабо нежестка, в то время как боковая поверхность полного конуса при тех же краевых условиях сильно жестка.

Чтобы определить поле z бесконечно малого изгибания первого порядка, воспользуемся уравнениями Гаусса и Вейнгартена для преобразованной поверхности. Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ϵ в правой и левой частях этих уравнений, в общем случае получим следующую систему:

$$\begin{aligned} z_{uu} &= \Gamma_{11}^1 z_u + \Gamma_{11}^2 z_v + \lambda_1 m + z\omega_1; \\ z_{uv} &= \Gamma_{12}^1 z_u + \Gamma_{12}^2 z_v + \mu_1 m + M\omega_1; \\ z_{vv} &= \Gamma_{22}^1 z_u + \Gamma_{22}^2 z_v + \nu_1 m + N\omega_1; \\ (\omega_1)_u &= \frac{1}{W^2} \{(-LG + MF)z_u + (LF - ME)z_v + (-\lambda_1 G + \mu_1 F)x_u + \\ &\quad + (\lambda_1 F - \mu_1 E)x_v\}; \\ (\omega_1)_v &= \frac{1}{W^2} \{(NF - MG)z_u + (-NE + MF)z_v + \\ &\quad + (\nu_1 F - \mu_1 G)x_u + (-\nu_1 E + \mu_1 F)x_v\}, \end{aligned} \quad (12)$$

где $W = \sqrt{EG - F^2}$, а $\epsilon\omega_1 = \delta m = m^* - m$ — вариация вектора нормали к поверхности при бесконечно малом изгибании.

Для цилиндридов эта система имеет вид:

$$\begin{aligned} z_{ss} &= \left(\frac{v\theta'}{1+\theta^2} + \operatorname{tg}\varphi\varphi' \right) z_s - \frac{1}{2\zeta} k \sin 2\varphi (1+\theta^2) z_v + \\ &\quad + \frac{C_1\theta'(1-v)v}{(1+\theta^2)\cos\varphi} m + k(1+\theta^2)\cos\varphi\omega; \\ z_{uv} &= \frac{\theta}{1+\theta^2} z_s + \frac{C_1(1+\theta)}{(1+\theta^2)\cos\varphi} m; \\ z_{vv} &= 0; \\ \omega_s &= -\frac{\varphi'^2 + k^2 \cos^2\varphi}{(1+\theta^2)k\cos\varphi} z_s + \frac{\cos\varphi\varphi'}{\zeta} z_v + \left\{ -\frac{C_1\theta'v(1-v)(\varphi'^2 + k^2 \cos^2\varphi)}{(1+\theta^2)^2 \cos^3\varphi k^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{C_1(1+\theta)\varphi'}{(1+\theta^2)k^2 \cos\varphi} \right\} \varphi + \left\{ \frac{C_1\theta'v(1-v)\varphi'}{(1+\theta^2)^2 k^2 \cos\varphi} - \frac{C_1(1+\theta)\cos\varphi}{(1+\theta^2)\zeta^2} \right\} a; \\ \omega_v &= -\frac{C_1(1+\theta)(\varphi'^2 + k^2 \cos^2\varphi)}{(1+\theta^2)^2 k^2 \cos^3\varphi} \varphi + \frac{C_1(1+\theta)\varphi'}{(1+\theta^2)^2 k^2 \cos\varphi} a. \end{aligned} \quad (13)$$

Интегрируя ее, из третьего уравнения найдем:

$$z_v = p(s); \quad z = p(s)v + q(s), \quad (14)$$

где $p(s)$ и $q(s)$ — пока еще произвольные функции от s .

Подставляя значения (14) во второе уравнение системы (13), выразим вектор-функцию $p(s)$ через $q(s)$:

$$p(s) = \int \theta q'(s) ds + C_1 \int \frac{(1+\theta)}{\cos \varphi} m ds, \quad (15)$$

а вектор-функцию $q(s) = z(s, 0)$ определим из первого уравнения системы (13). Так как эта функция зависит только от s и совпадает со значениями вектора z на кривой C_1 , то его можно интегрировать при $v = 0$. Продифференцировав первое уравнение по S и воспользовавшись четвертым из уравнений (13), получим обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\begin{aligned} \left(\frac{q''}{k}\right)' \frac{1}{\cos \varphi} = & \left(\frac{\varphi'^2}{k \cos \varphi} + \frac{\sin \varphi \varphi''}{k \cos^2 \varphi} - \frac{\sin \varphi \varphi' k'}{k^2 \cos^2 \varphi} + \frac{2 \sin^2 \varphi \varphi'^2}{k \cos^2 \varphi} \right) q' - \\ & - \frac{\theta}{\zeta} \sin \varphi q' - \left(\frac{\varphi'^2}{k \cos \varphi} + k \cos \varphi \right) q' - \frac{1}{\zeta} \sin \varphi \frac{C_1 (1+\theta)}{\cos \varphi} m + \\ & + \frac{C_1 (1+\theta) \varphi'}{k \zeta \cos \varphi} \tau - \frac{C_1 (1+\theta) \cos \varphi}{\zeta^2} a. \end{aligned} \quad (16)$$

На основании формул (8) и (9) можно вывести следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \sin \varphi = & -\frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 + \zeta^2}}; \quad \cos \varphi = \frac{\zeta}{\sqrt{\eta^2 + \zeta^2}}; \quad \varphi' = \frac{k \zeta \zeta'}{\eta^2 + \zeta^2}; \\ \varphi'' = & \frac{k'}{k} \varphi' + \frac{k \theta}{\zeta} \cos^2 \varphi - k^2 \sin \varphi \cos \varphi - \frac{2 \sin \varphi \varphi'^2}{\cos \varphi}. \end{aligned} \quad (17)$$

Определив из последнего θ и принимая во внимание, что

$$m = v \cos \varphi + \beta \sin \varphi; \quad \text{и} \quad a = \zeta \left(\frac{\varphi'}{k \cos^2 \varphi} \tau - \operatorname{tg} \varphi v + \beta \right); \quad (18)$$

преобразуем уравнение (16) и, после необходимых сокращений, придем к линейному дифференциальному уравнению третьего порядка

$$q'''(s) - \frac{k'}{k} q''(s) + k^2 q'(s) + \frac{C_1 (1+\theta) k}{\zeta} \beta = 0; \quad \zeta = \text{const},$$

порядок которого с помощью подстановки $q' = f$ легко может быть понижен. Таким образом окончательно задача сводится к обыкновенному линейному дифференциальному уравнению второго порядка

$$f'' - \frac{k'}{k} f' + k^2 f = -\frac{C_1 (1+\theta) k}{\zeta} \beta. \quad (19)$$

Непосредственной проверкой легко убедиться в том, что частными решениями соответствующего ему однородного уравнения являются вектор-функции $\tau(s)$ и $v(s)$, а частным решением самого уравнения (19) — вектор-функция

$$f = -\frac{C_1}{\zeta} [x_2 \tau], \quad (20)$$

и, следовательно, общее решение линейного уравнения (19) имеет вид:

$$f = C' \tau + C'' v - \frac{C_1}{\zeta} [x_2 \tau].$$

Остановимся еще на случае частного решения (20). Из обозначения следует, что в этом случае

$$q(s) = -\frac{C_1}{\zeta} \int [x_2 \tau] ds = -\frac{C_1}{\zeta} \int [x_2 dx_1],$$

и рассматриваемый цилиндрионд является нежестким тогда и только тогда, когда

$$\oint [x_2 dx_1] = 0.$$

Но это и есть условие нежесткости, найденное Н. В. Ефимовым [1] и использованное И. Г. Ильиным [2] для доказательства существования нежестких заклеенных цилиндриондов с параллельными краями. На основании (14) и (15), мы можем теперь написать соответствующее решению (20) выражение для поля z при произвольном v :

$$z = \left(-\frac{C_1}{\zeta} \int \theta [x_2 dx_1] + C_1 \int \frac{(1+\theta)}{\cos \varphi} m ds \right) v - \frac{C_1}{\zeta} \int [x_2 dx_1],$$

которое после соответственных упрощений приводит к окончательному выражению для поля z при бесконечно малых изгибаниях первого порядка:

$$z = \frac{C_1}{\zeta} \{ [ax_2] v - \int [x_2 dx_1] \}.$$

§ 2. Слабая нежесткость и жесткость второго порядка боковой поверхности заклеенных цилиндриондов

Чтобы установить условия слабой нежесткости боковой поверхности цилиндриондов при бесконечно малых изгибаниях второго порядка, проинтегрируем систему уравнений

$$\begin{aligned} (1 + v\theta) k \cos \varphi_{v_2} - \frac{2C_1^2 (1 + \theta)^2}{(1 + v\theta)^2 \cos^2 \varphi} &= 0; \\ \frac{\partial \lambda_2}{\partial v} - \frac{\theta}{1 + v\theta} \lambda_2 &= \frac{\partial \mu_2}{\partial \zeta} - \left\{ \frac{v\theta}{1 + v\theta} + \operatorname{tg} \varphi \varphi' \right\} \mu_2 - \frac{v_2}{2\zeta} k \sin 2\varphi (1 + v\theta); \\ \frac{\partial \mu_2}{\partial v} &= -\frac{\partial v}{\partial s} - \frac{\theta}{1 + v\theta} \mu_2, \end{aligned} \quad (21)$$

полученную из системы (1) для случая $n = 2$.

Естественно, что при этом краевые условия остаются прежними в том смысле, что они сводятся к требованию инвариантности нормальных кривизн кривых C_1 и C_2 при бесконечно малых изгибаниях боковой поверхности цилиндрионда, что, как мы имели возможность убедиться, равносильно требованию его заклейки. Но теперь речь идет о бесконечно малых изгибаниях второго порядка, вследствие чего к условиям (6) добавляются еще условия

$$\lambda_2(s, 0) = \lambda_2(s, 1) = 0. \quad (22)$$

Из первого уравнения системы (21) имеем:

$$v_2 = \frac{2C_1^2 (1 + \theta)^2}{(1 + v\theta)^2 k \cos^2 \varphi}. \quad (23)$$

Проинтегрировав третье уравнение этой же системы методом вариации произвольной функции от s , получим

$$\mu_2 = \frac{3C_1^2 \theta' (1 + \theta)^2 (1 + 2v\theta)}{(1 + v\theta)^3 k \cos^3 \varphi} - \frac{2C_1^2}{(1 + v\theta)^2 \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{(1 + \theta)^2}{k \cos^3 \varphi} \right) + \frac{U_2(s)}{1 + v\theta},$$

где $U(s)$ — произвольная функция интегрирования.

Пользуясь тем же методом, из второго уравнения системы (21) определим функцию λ_2 . Решение этого уравнения будем искать в следующей форме:

$$\lambda_2 = (1 + v\theta) (F_2(s) + \bar{F}_2(s, v)),$$

где $F_2(s)$ — вторая произвольная функция интегрирования, а функцию $\bar{F}_2(s, v)$ найдем путем вариирования произвольной функции $F_2(s)$.

Определив функции $U_2(s)$ и $F_2(s)$ из краевых условий (22), после элементарных, но громоздких преобразований получим окончательно:

$$\begin{aligned} \mu_2 = & -\frac{C_1^2 \theta' (1 - v) (1 - 3v)}{(1 + v\theta)^3 k \cos^3 \varphi} + \frac{C_1^2 (1 + \theta)}{(1 + v\theta)^2 k \cos^3 \varphi} \left(\frac{k'}{k} - \frac{3 \sin \varphi \varphi'}{\cos \varphi} \right) + \\ & + \frac{C_1^2 (1 + \theta)}{\zeta (1 + v\theta) \cos \varphi} \int (2 + \theta) \operatorname{tg} \varphi ds + \frac{C_2 (1 + \theta)}{(1 + v\theta) \cos \varphi}; \end{aligned} \quad (24)$$

$$\lambda_2 = v(1 - v) \left\{ \Phi(u, v) + \frac{C_1^2 \theta'}{\zeta (1 + v\theta) \cos \varphi} \int (2 + \theta) \operatorname{tg} \varphi ds + \frac{C_2 \theta'}{(1 + v\theta) \cos \varphi} \right\},$$

где $\Phi(u, v)$ — известная функция от u и v , содержание которой мы раскрывать не будем, так как она нам не понадобится в дальнейшем.

Условие

$$\oint (2 + \theta) \operatorname{tg} \varphi ds = 0 \quad (25)$$

является необходимым и достаточным для того, чтобы боковая поверхность цилиндрида при краевых условиях (6) и (22) обладала слабой жесткостью второго порядка.

Чтобы установить геометрический смысл этого условия, обозначим

$$I_2 = \frac{C_1^2}{\zeta} \oint (2 + \theta) \operatorname{tg} \varphi ds \quad (26)$$

и напомним, что $\operatorname{tg} \varphi = -\frac{\eta}{\zeta}$. Помножим обе части равенства (26) на орт бинормали $\beta = [\tau \nu]$ кривой C_1 и запишем это уравнение следующим образом:

$$\beta I_2 = -\frac{2C_1^2}{\zeta^2} \oint \left(1 + \frac{\theta}{2} \right) \eta [\tau \nu] ds;$$

или, что то же самое,

$$\beta I_2 = -\frac{2C_1^2}{\zeta^2} \oint \left(1 + \frac{\theta}{2} \right) [\tau ds; (\xi \tau + \eta \nu)]. \quad (27)$$

Заметим, что

$$\xi \tau + \eta \nu = \operatorname{pr}_{\tau \nu} a, \text{ а } \left(1 + \frac{\theta}{2} \right) dx_1 = dx_c$$

дифференциал дуги среднего сечения цилиндрида. Поэтому из равенства (27) следует, что

$$\beta I_2 = \frac{2C_1^2}{\zeta^2} \oint [\operatorname{pr}_{\tau \nu} a; dx_c],$$

откуда, принимая во внимание соотношение $\mathbf{a} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$, а также и то, что

$$[\text{пр. } \mathbf{a}; d\mathbf{x}_c] \beta = [\mathbf{a} d\mathbf{x}_c] \beta,$$

а

$$\frac{\beta}{2} \oint [\mathbf{x}_2 d\mathbf{x}_1] - \frac{\beta}{2} \oint [\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2] = -\frac{\beta}{2} \oint d[\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2] = 0,$$

получим

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{2C_1^2}{\zeta^2} \oint \left[(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1); \frac{1}{2} (d\mathbf{x}_1 + d\mathbf{x}_2) \right] = \\ &= \frac{2C_1^2}{\zeta^2} \left\{ \frac{\beta}{2} \oint [\mathbf{x}_2 d\mathbf{x}_2] - \frac{\beta}{2} \oint [\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_1] \right\}. \end{aligned}$$

Но

$$S_1 = \frac{\beta}{2} \oint [\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_1]; \quad S_2 = \frac{\beta}{2} \oint [\mathbf{x}_2 d\mathbf{x}_2],$$

где S_1 и S_2 — площади оснований цилиндрида, ограниченные кривыми C_1 и C_2 . Таким образом,

$$I_2 = \frac{2C_1^2}{\zeta^2} (S_2 - S_1);$$

и условие (25) сводится к требованию, выражаемому равенством:

$$S_1 = S_2.$$

Итак, нежесткий цилиндрида с плоскими заклеяками обладает слабой нежесткостью второго порядка тогда и только тогда, если площади его оснований равны между собой.

Изгибающее поле для бесконечно малых изгибов второго порядка можно найти, исходя из соображений, аналогичных тем, которыми мы уже пользовались при исследовании бесконечно малых изгибов первого порядка. Но соответствующая система дифференциальных уравнений будет теперь иметь вид:

$$\begin{aligned} z_{ss} &= \left(\frac{v\theta'}{1+v\theta} + \text{tg } \varphi \varphi' \right) z_s - \frac{1}{2\zeta} k \sin 2\varphi (1+v\theta) z_v + \\ &+ k(1+v\theta) \cos \varphi \omega_2 + 2\lambda_1 \omega_1 + \lambda_2 m; \\ z_{sv} &= \frac{\theta}{1+v\theta} z_s + 2\mu_1 \omega_1 + \mu_2 m; \\ z_{vv} &= v_2 m; \\ (\omega_2)_s &= \frac{-\varphi'^2 + k^2 \cos^2 \varphi}{(1+v\theta) k \cos \varphi} z_s + 2 \left\{ \frac{-\lambda_1 (\varphi'^2 + k^2 \cos^2 \varphi)}{(1+v\theta)^2 k^2 \cos^2 \varphi} + \right. \\ &+ \frac{\mu_1 \varphi'}{(1+v\theta) k \zeta} \left. \right\} z_s + \left\{ \frac{-\lambda_2 (\varphi'^2 + k^2 \cos^2 \varphi)}{(1+v\theta) k^2 \cos^2 \varphi} + \frac{\mu_2 \varphi'}{k \zeta} \right\} \tau + \\ &+ \frac{\cos \varphi \varphi'}{\zeta} z_v + 2 \left\{ \frac{\lambda_1 \varphi'}{(1+v\theta) k \zeta} - \frac{\mu_1 \cos^2 \varphi}{\zeta^2} \right\} z_v + \left\{ \frac{\lambda_2 \varphi'}{(1+v\theta) k \zeta} - \frac{\mu_2 \cos^2 \varphi}{\zeta^2} \right\} a; \\ (\omega_2)_v &= -\frac{2\mu_1 (\varphi'^2 + k^2 \cos^2 \varphi)}{(1+v\theta)^2 k^2 \cos^2 \varphi} z_s + \left\{ \frac{v_2 \varphi'}{k \zeta} - \frac{\mu_2 (\varphi'^2 + k^2 \cos^2 \varphi)}{(1+v\theta) k^2 \cos^2 \varphi} \right\} \tau + \frac{2\mu_1 \varphi'}{(1+v\theta) k \zeta} z_v + \\ &+ \left\{ -\frac{v_2 \cos^2 \varphi}{\zeta^2} + \frac{\mu_2 \varphi'}{(1+v\theta) k \zeta} \right\} a. \end{aligned} \quad (28)$$

Из третьего уравнения этой системы получим

$$z_v = -\frac{C_1^2(1+\theta)^2 m}{(1+\theta)^2 k \theta \cos^3 \varphi} + p(s),$$

откуда

$$z = \frac{C_1^2(1+\theta)^2 m}{(1+\theta)^2 k \theta \cos^3 \varphi} + p(s)v + q(s). \quad (29)$$

Таким образом, чтобы найти окончательное решение системы (28), определим две произвольные вектор-функции интегрирования $p(s)$ и $q(s)$. Для этого воспользуемся первым и вторым уравнениями системы (28), причем будем интегрировать их только при $v=0$, так как искомые функции не зависят от v .

Для упрощения выкладок обозначим

$$z(s, 0) = \frac{C_1^2(1+\theta)^2 m}{k \theta^2 \cos^3 \varphi} + q(s) = r(s). \quad (30)$$

Тогда

$$\begin{aligned} z_s(s, 0) &= r'(s); & z_{ss}(s, 0) &= r''(s); \\ z_{sv}(s, 0) &= \theta r'(s) + 2\mu_1^0 \omega_1^0 + \mu_2^0 m, \end{aligned}$$

где

$$\mu_i(s, 0) = \mu_i^0, \quad \omega_i(s, 0) = \omega_i^0.$$

Условимся в дальнейшем все величины, заданные на кривой C , отмечать, ставя вверху индекс нуль.

Из (29) имеем

$$z_{sv}(s, 0) = -\left(\frac{C_1^2(1+\theta)^2 m}{k \theta \cos^3 \varphi}\right)' + p'(s).$$

Сравнивая это значение $z_{sv}(s, 0)$ с предыдущим, найдем

$$p'(s) = \theta r'(s) + 2\mu_1^0 \omega_1^0 + \mu_2^0 m + \left(\frac{C_1^2(1+\theta)^2 m}{k \theta \cos^3 \varphi}\right)',$$

откуда

$$p(s) = \frac{C_1^2(1+\theta)^2 m}{k \theta \cos^3 \varphi} + \int (\theta r' + 2\mu_1^0 \omega_1^0 + \mu_2^0 m) ds. \quad (31)$$

Входящую в это равенство вектор-функцию ω_1^0 можно было бы определить из двух последних уравнений системы (13), но мы найдем ее по формуле

$$\omega_1 = \frac{1}{W} \{ (1+\theta) [z_v \tau] + [a z_s] \},$$

которая появляется при вычислении коэффициентов второй квадратичной формы деформированной поверхности. Воспользовавшись формулами (18), докажем, что

$$[am] = \frac{\zeta m'}{k \cos^2 \varphi},$$

и тогда на основании (20) получим

$$\omega_1 = \frac{\cos \varphi}{\zeta} ([z_v \tau] + [a q']) + \frac{C_1(1+\theta) m'}{(1+\theta) k \cos^2 \varphi},$$

и, следовательно,

$$\omega_1^0 = \frac{\cos \varphi}{\zeta} ([z_v^0 \tau] + [a q']^1). \quad (32)$$

Чтобы проинтегрировать первое уравнение системы (28), нужно знать еще вектор-функцию ω_2 . Ее можно определить из последних двух уравнений системы. Но вместо этого, чтобы упростить вычисления, мы продифференцируем обе части первого уравнения по s и подставим в него из четвертого уравнения значение $(\omega_2)_s^0$. При подстановке остальных найденных ранее величин примем во внимание краевые условия (6) и (22). Тогда после несложных преобразований найдем

$$\begin{aligned} \left(\frac{r''}{k}\right)' = & -k r' + \frac{\mu_2^0 \cos \varphi}{\zeta} \left(\frac{\varphi'}{k} \tau - \frac{\cos^2 \varphi}{\zeta} a - \sin \varphi m\right) + \\ & + \frac{2\mu_1^0 \cos \varphi}{\zeta} \left(\frac{\varphi'}{k} z_s^0 - \frac{\cos^2 \varphi}{\zeta} z_v^0 - \sin \varphi \omega_1^0\right). \end{aligned} \quad (33)$$

Принимая во внимание очевидные равенства

$$z_s^0 = q'(s) = -\frac{C_1}{\zeta} [x_2 \tau]; \quad z_v^0 = \frac{C_1}{\zeta} [a x_2],$$

а также формулы (18) и (32), легко доказать, что

$$\frac{\varphi'}{k} \tau - \frac{\cos^2 \varphi}{\zeta} a - \sin \varphi m = -\beta_1,$$

а

$$\frac{\varphi'}{k} z_s^0 - \frac{\cos^2 \varphi}{\zeta} z_v^0 - \sin \varphi \omega_1^0 = \frac{C_1}{\zeta} \{(x_2 v) \tau - (x_2 \tau) v\} = [x_2 \beta].$$

Подставляя эти выражения в (33), получим обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка, линейное относительно неизвестной вектор-функции $r^2(s)$. Понижая порядок этого уравнения с помощью подстановки

$$\tilde{f}^2(s) = r^2(s),$$

после элементарных преобразований приходим к линейному дифференциальному уравнению второго порядка

$$\tilde{f}^2'' - \frac{k'}{k} \tilde{f}^2' + k^2 \tilde{f}^2 = \frac{k \cos \varphi}{\zeta} \left\{ \frac{2C_1}{\zeta} \mu_1^0 [x_2 \beta] - \mu_2^0 \beta \right\}, \quad (34)$$

аналогичному уравнению (19) и отличающемуся от него только правой частью. После подстановки значений функций μ_1^0 и μ_2^0 это уравнение примет вид:

$$\begin{aligned} \tilde{f}^2'' - \frac{k'}{k} \tilde{f}^2' + k^2 \tilde{f}^2 = & \frac{2C_1^2 (1 + \theta) k}{\zeta^2} [x_2 \beta] + \frac{C_1^2}{\zeta} \left\{ \frac{\theta'}{\cos^2 \varphi} - \right. \\ & \left. - \frac{(1 + \theta)}{\cos^2 \varphi} \left(\frac{k'}{k} - \frac{3 \sin \varphi \varphi'}{\cos \varphi} \right) - \frac{(1 + \theta) k}{\zeta} \int (2 + \theta) \operatorname{tg} \varphi ds \right\} \beta - \frac{C_2 (1 + \theta)}{\zeta} k \beta. \end{aligned} \quad (35)$$

Чтобы найти частное решение уравнения (35), напомним, что, согласно Н. В. Ефимову [1],

$$dz^2 = [y dz] + [y dx]; \quad (36)$$

причем

$${}^1y = \frac{C_1}{\zeta} \left\{ x_1 + \frac{(1-v)}{1+v} a \right\}, \quad (37)$$

а 2y может быть найден из системы уравнений

$$\begin{cases} {}^2y_s = [{}^1y_s] + \alpha_2 x_s - \beta_2 a; \\ {}^2y_v = [{}^1y_v] + \gamma_2 x_s - \alpha_2 a. \end{cases} \quad (38)$$

Коэффициенты этих уравнений нам известны [3], так как

$$\alpha_2 = \frac{\nu_2}{W}; \quad \beta_2 = \frac{\lambda_2}{W}; \quad \gamma_2 = \frac{\nu_2}{W}.$$

Из первого уравнения системы (38) имеем

$${}^2y = \int [{}^1y_s] ds + \int \alpha_2 x_s ds - \int \beta_2 a ds + F(v),$$

а так как нас интересуют сейчас значения вектор-функции 2y только при $v = 0$, то, принимая во внимание (22), получим

$${}^2y^0 = \int [{}^1y^0 dy^0] + \int \alpha_2^0 dx_1 + C$$

и, следовательно,

$$[{}^2y^0 dx_1] = \left[\int [{}^1y^0 dy^0]; dx_1 \right] + \left[\int \alpha_2^0 dx_1; dx_1 \right] + [C; dx].$$

Заметим еще, что

$$[{}^1y^0 dy^0] = \frac{C_1^2}{\zeta^2} [x_2 dx_2]; \quad [{}^1y^0 dz^0] = \frac{C_1^2}{\zeta^2} [x_2 [x_2 dx_1]].$$

Согласно установленным выше обозначениям, $dz^0 = \int \tilde{f} ds$. Поэтому, принимая во внимание все вышесказанное, будем искать решение уравнения (35) в следующей форме:

$$\tilde{f} = \frac{C_1^2}{\zeta^2} \{ [x_2 [x_2 \tau]] + \left[\int [x_2 dx_2]; \tau \right] \} - \left[\int \alpha_2^0 dx_1; \tau \right]. \quad (39)$$

С помощью непосредственной проверки легко убедиться в том, что вектор-функция (39) действительно удовлетворяет этому уравнению.

Итак, решение уравнения (35) имеет вид:

$$\begin{aligned} \tilde{f} = & \frac{C_1^2}{\zeta^2} \{ [x_2 [x_2 \tau]] + \left[\int [x_2 dx_2]; \tau \right] \} - \left[\int \left\{ \frac{C_1^2}{\zeta} \left(\frac{\theta'}{k \cos^2 \varphi} + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{(1+\theta)}{k \cos^2 \varphi} \left(\frac{k'}{k} - \frac{3 \sin \varphi \varphi'}{\cos \varphi} \right) + \frac{(1+\theta)}{\zeta} \int (2+\theta) \operatorname{tg} \varphi ds \right) + \frac{C_2(1+\theta)}{\zeta} \right\} dx_1 \tau \}. \end{aligned}$$

Но вектор-функция $\tilde{r}(s) = \int \tilde{f}(s) ds$. Вектор-функции $\tilde{q}(s)$ и $\tilde{p}(s)$ можно найти теперь по формулам (30) и (31). Это дает возможность, основываясь на формуле (29), записать окончательное выражение для векторного поля $\tilde{z}$ при бесконечно малых изгибаниях второго порядка:

$$\tilde{z} = \frac{C_1^2(1+\theta)v^2 m}{(1+v)\zeta k \cos \varphi} + v \int (\theta \tilde{f} + 2\mu_1^0 \omega_1^0 + \mu_2^0 m) ds + \int \tilde{f} ds. \quad (40)$$

Это поле будет существовать тогда и только тогда, когда

$$\oint \dot{\mathbf{f}}^2 ds = 0.$$

Из формулы (39) следует, что это требование равносильно требованию одновременного обращения в нуль трех интегралов:

$$\oint [\mathbf{x}_2 [\mathbf{x}_2 d\mathbf{x}_1]] = 0; \quad \oint \left[\int [\mathbf{x}_2 d\mathbf{x}_2]; d\mathbf{x}_1 \right] = 0; \quad \oint \left[\int \alpha_2^0 d\mathbf{x}_1; d\mathbf{x}_1 \right] = 0.$$

Докажем, что

$$\oint \left[\int [\mathbf{x}_2 d\mathbf{x}_2]; d\mathbf{x}_1 \right] \neq 0. \quad (41)$$

Предположим, что это не так. Тогда вектор $\xi = \int \left[\int [\mathbf{x}_2 d\mathbf{x}_2]; d\mathbf{x}_1 \right]$, расположенный в плоскости кривой C_2 , описывает замкнутую кривую.

Не нарушая общности, предположим, что начало координат расположено в плоскости кривой C_2 . Тогда

$$\int [\mathbf{x}_2 d\mathbf{x}_2] = \int \sigma(s) \boldsymbol{\nu} ds;$$

где $\sigma(s)$ — площадь сектора, зачерчиваемого $\mathbf{x}_2(s)$ при изменении параметра s . Таким образом,

$$\xi(s) = \int \sigma[\boldsymbol{\nu} \boldsymbol{\tau}] ds = \int \sigma \boldsymbol{\nu} ds.$$

Обозначим через $\boldsymbol{\eta}(x)$ вектор, соединяющий точки кривых $\mathbf{x}_1(s)$ и $\xi(s)$, соответствующие одним и тем же значениям параметра s , и построим годограф вектор-функции $\boldsymbol{\eta}(s)$, откладывая значения этого вектора от начала координат.

Обозначим через $\bar{s}$ длину кривой C_1 . Так как по предположению $\xi(0) = \xi(\bar{s})$, то годограф вектор-функции $\boldsymbol{\eta}(s) = \xi(s) - \mathbf{x}_1(s)$ есть замкнутая кривая. Покажем, что точка $\boldsymbol{\eta}(0) = \boldsymbol{\eta}(\bar{s})$ является для нее особой. Действительно,

$$\boldsymbol{\eta}'(s) = \xi'(s) - \mathbf{x}_1'(s) = \sigma(s) \boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\tau},$$

откуда $\boldsymbol{\eta}'(0) = -\boldsymbol{\tau}$, а $\boldsymbol{\eta}'(\bar{s}) = \sigma(\bar{s}) \boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\tau}$. Но, согласно нашим обозначениям, $\sigma(\bar{s}) = S_2$, где S_2 — площадь кривой C_2 . А так как, согласно доказанному выше, площади оснований заклеенных цилиндридов, обладающих слабой нежесткостью второго порядка, равны между собой, то $\boldsymbol{\eta}'(\bar{s}) = S_1 \boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\tau}$.

Определим угол между касательными к кривой $\boldsymbol{\eta}(s)$ в ее особой точке. Обозначив его через α , найдем:

$$\cos \alpha = \frac{\boldsymbol{\eta}'(\bar{s}) \cdot \boldsymbol{\eta}'(0)}{|\boldsymbol{\eta}'(\bar{s})| \cdot |\boldsymbol{\eta}'(0)|} = \frac{1}{\sqrt{S_1^2 + 1}}.$$

Очевидно, что при подобном преобразовании пространства угол α не изменяется. Но из выведенной только что формулы следует, что он существенно зависит от площади кривых $\mathbf{x}_1(s)$ и $\mathbf{x}_2(s)$ и, значит, должен измениться. Полученное противоречие и доказывает справедливость неравенства (41). Но тогда на основании формулы (39) можно утверждать, что $C_1 = 0$, т. е. рассматриваемый цилиндрид обладает жесткостью второго порядка.

Итак, мы имеем следующее. В работе [2] доказано, что нежесткими по отношению к бесконечно малым изгибаниям первого порядка являются те и только те заклеенные цилиндриды, сумма площадей оснований которых равна учетверенной площади среднего сечения. При рассмотрении

слабой нежесткости второго порядка мы еще сузили этот класс, оставив в нем лишь те цилиндриды, площади оснований которых равны между собой. Теперь оказывается, что все цилиндриды, обладающие нежесткостью первого порядка, являются жесткими по отношению к бесконечно малым изгибаниям второго порядка. Однако вывод формулы (40) не является напрасным: эта формула может быть использована для определения поля $\frac{1}{2}$ при бесконечно малых изгибаниях односвязных кусков боковой поверхности цилиндрида, ограниченных двумя прямолинейными образующими и кривыми C_1 и C_2 , для которых выполняются краевые условия (6) и (22). Для этих же кусков имеет смысл задача об исследовании бесконечно малых изгибаний как угодно высокого порядка n .

§ 3. Бесконечно малые изгибания высших порядков

Для бесконечно малых изгибаний порядка n боковой поверхности цилиндрида система дифференциальных уравнений (1) имеет вид:

$$\begin{aligned} (1 + v\theta) k \cos \varphi v_\alpha + \sum_{i=1}^{\alpha-1} (\lambda_i v_{\alpha-i} - 2\mu_i v_{\alpha-i} + v_i \lambda_{\alpha-i}) &= 0; \\ \frac{\partial \lambda_\alpha}{\partial v} - \frac{\theta}{1 + v\theta} \lambda_\alpha = \frac{\partial \mu_\alpha}{\partial s} - \left\{ \frac{v\theta'}{1 + v\theta} + \operatorname{tg} \varphi \varphi' \right\} \mu_\alpha - \frac{(1 + v\theta) k \sin \varphi}{2\zeta} v_\alpha; \\ \frac{\partial \mu_\alpha}{\partial v} - \frac{\partial v_\alpha}{\partial s} &= \frac{\theta}{1 + v\theta} \mu_\alpha, \end{aligned} \quad (42)$$

где $\alpha = 1, 2, 3, \dots, n$.

Краевые условия, при которых мы будем интегрировать эту систему, согласно нашему предположению, выражаются равенствами

$$\lambda_\alpha(s, 0) = \lambda_\alpha(s, 1) = 0; \quad \alpha = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (43)$$

Из первого уравнения системы (42) непосредственно найдем

$$v_\alpha = - \frac{1}{k(1 + v\theta) \cos \varphi} \sum_{i=1}^{\alpha-1} (\lambda_i v_{\alpha-i} - 2\mu_i v_{\alpha-i} + v_i \lambda_{\alpha-i}). \quad (44)$$

Из последнего уравнения той же системы, пользуясь методом вариации произвольной функции от s , определим μ_α :

$$\mu_\alpha = \frac{U_\alpha(s)}{1 + v\theta} + \frac{1}{1 + v\theta} \int \frac{\partial v_\alpha}{\partial s} (1 + v\theta) dv; \quad (45)$$

$U_\alpha(s)$ — произвольная функция интегрирования. Подставляя выражение (45) во второе уравнение системы (42), получим дифференциальное уравнение, содержащее только одну неизвестную функцию λ_α :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda_\alpha}{\partial v} - \frac{\theta}{1 + v\theta} \lambda_\alpha = \frac{U'_\alpha(s)}{1 + v\theta} - \left\{ \frac{2v\theta'}{(1 + v\theta)^2} + \frac{\operatorname{tg} \varphi \varphi'}{1 + v\theta} \right\} U_\alpha(s) - \\ - \left\{ \frac{2v\theta}{(1 + v\theta)^2} + \frac{\operatorname{tg} \varphi \varphi'}{1 + v\theta} \right\} \tilde{U}_\alpha + \frac{\tilde{U}'_\alpha}{1 + v\theta} - \frac{(1 + v\theta)}{2\zeta} k \sin 2\varphi v_\alpha. \end{aligned}$$

Через

$$\tilde{U}_\alpha = \int \frac{\partial v_\alpha}{\partial s} (1 + v\theta) dv \quad (46)$$

здесь обозначен уже известный нам интеграл. Для интегрирования этого уравнения снова воспользуемся методом вариации произвольной функции от s . Найденное выражение для λ_α

$$\lambda_\alpha = (1 + v\theta) f_\alpha(s) - \frac{U'_\alpha(s)}{\theta} + \left\{ \frac{v\theta'}{\theta(1+v\theta)} + \frac{\theta'}{\theta^2} + \frac{\operatorname{tg} \varphi \varphi'}{\theta} \right\} U_\alpha(s) + \\ + (1 + v\theta) \left\{ F(s, v) - \frac{k \sin 2\varphi}{2\zeta} \Phi_\alpha(s, v) \right\}$$

содержит уже две произвольные функции $U_\alpha(s)$ и $f_\alpha(s)$. Функции

$$F(s, v) = \int \left\{ \frac{\tilde{U}'_\alpha}{(1+v\theta)^2} - \left[\frac{2v\theta'}{(1+v\theta)^3} + \frac{\operatorname{tg} \varphi \varphi'}{(1+v\theta)^2} \right] \tilde{U}_\alpha \right\} dv; \quad (47')$$

$$\Phi_\alpha = \int v_\alpha dv; \quad (48)$$

известны и введены только для сокращения записи.

Для определения произвольных функций интегрирования воспользуемся краевыми условиями (43). Тогда после довольно громоздких преобразований получим решение системы (42), соответствующее указанным краевым условиям, в его окончательном виде:

$$\mu_\alpha = \frac{1}{1+v\theta} \left\{ \frac{1+\theta}{\cos \varphi} [C_\alpha + C_\alpha(s)] + \int \frac{\partial v_\alpha}{\partial s} (1+v\theta) dv \right\}; \\ \lambda_\alpha = \frac{v(v-1)\theta'}{(1+v\theta)\cos \varphi} [C_\alpha + C_\alpha(s)] + (1+v\theta) F(s, v) - v(1+\theta) F(s, 1) + \\ + (v-1) F(s, 0) + \frac{k \sin 2\varphi}{2\zeta} \{ (1+v\theta) \Phi_\alpha(s, v) - \\ - v(1+\theta) \Phi_\alpha(s, 1) + (v-1) \Phi_\alpha(s, 0) \}; \quad (49) \\ \alpha = 1, 2, 3, \dots, n,$$

где

$$C_\alpha(s) = \int_0^1 \frac{\tilde{U}_\alpha \cos \varphi}{(1+v\theta)^2} dv - \frac{1}{\zeta} \int_0^s \left(k \sin \varphi \cos^2 \varphi \int_0^1 v_\alpha dv \right) ds; \quad (50)$$

$\tilde{U}_\alpha(s, v)$, $F_\alpha(s, v)$ и $\Phi_\alpha(s, v)$ — функции, определяемые обозначениями (46), (47), (48), а C_α — произвольная постоянная.

Значения функции v_α находятся по формуле (44). При рассмотрении вопроса о слабой нежесткости всей боковой поверхности заклеенного цилиндрикоид интеграл

$$I_\alpha = \frac{1}{\zeta} \oint \left(k \sin \varphi \cos^2 \varphi \int_0^1 v_\alpha dv \right) ds, \quad (51)$$

взятый по замкнутому контуру C_1 , должен обращаться в нуль. Это является необходимым и достаточным условием слабой нежесткости порядка α боковой поверхности цилиндрикоид при краевых условиях (43).

Заметим еще, что боковая поверхность цилиндра при этих же краевых условиях обладает слабой нежесткостью как угодно высокого порядка. Действительно, при $\varphi = 0$ условие

$$\oint \left(k \sin \varphi \cos^2 \varphi \int_0^1 v_\alpha dv \right) ds = 0$$

удовлетворяется тождественно. Искомые функции v_α , μ_α , λ_α вычисляются по упрощенным формулам

$$v_\alpha = -\frac{1}{k} \sum_{i=1}^{\alpha-1} (\lambda_i v_{\alpha-i} - 2\mu_i \mu_{\alpha-i} + v_i \lambda_{\alpha-i});$$

$$\mu_\alpha = C_\alpha + \int_0^1 \left(\int \frac{\partial v_\alpha}{\partial s} dv \right) dv + \int \frac{\partial v_\alpha}{\partial s} dv;$$

$$\lambda_\alpha = F(s, v) - vF(s, 1) + (v-1)F(s, v),$$

где

$$F(s, v) = \int \frac{\partial^2 v_\alpha}{\partial s^2} dv;$$

в то же время следует подчеркнуть особо, что боковая поверхность заклеенного цилиндра жестка даже по отношению к бесконечно малым изгибаниям первого порядка.

Аналогично тому, как это было сделано для бесконечно малых изгибаний первого и второго порядков, изгибающее поле при бесконечно малых изгибаниях порядка n может быть найдено путем интегрирования системы дифференциальных уравнений с частными производными, выведенной из уравнений Гаусса и Вейнгартена для деформированной поверхности с помощью сравнения коэффициентов при одинаковых степенях параметра ε . Для произвольной поверхности эта система имеет вид:

$$\begin{aligned} z_{uu}^\alpha &= \Gamma_{11}^{\alpha} z_u^\alpha + \Gamma_{11}^{\alpha} z_v^\alpha + L\omega_\alpha + 2 \sum_{i=1}^{\alpha-1} \lambda_i \omega_{\alpha-i} + \lambda_\alpha m; \\ z_{uv}^\alpha &= \Gamma_{12}^{\alpha} z_u^\alpha + \Gamma_{12}^{\alpha} z_v^\alpha + M\omega_\alpha + 2 \sum_{i=1}^{\alpha-1} \mu_i \omega_{\alpha-i} + \mu_\alpha m; \\ z_{vv}^\alpha &= \Gamma_{22}^{\alpha} z_u^\alpha + \Gamma_{22}^{\alpha} z_v^\alpha + N\omega_\alpha + 2 \sum_{i=1}^{\alpha-1} v_i \omega_{\alpha-i} + v_\alpha m; \end{aligned} \quad (52)$$

где $\alpha = 1, 2, 3, \dots, n$.

Чтобы проинтегрировать систему (52), кроме значений функций v_α , μ_α , λ_α , нам нужно еще знать вариацию ω_α порядка α вектора нормали к поверхности:

$$m^* = m + 2 \sum_{\alpha=1}^n \varepsilon^\alpha \omega_\alpha.$$

Эта необходимая нам вектор-функция ω_α может быть определена из двух последних уравнений системы:

$$\begin{aligned} (\omega_\alpha)_u &= \frac{1}{W^2} \{ (-LG + MF) z_u^\alpha + (LF - ME) z_v^\alpha + \\ &+ 2 \sum_{i=1}^{\alpha-1} [(-\lambda_i G + \mu_i F) z_u^{\alpha-i} + (\lambda_i F - \mu_i E) z_v^{\alpha-i}] + \\ &+ (-\lambda_\alpha G + \mu_\alpha F) x_u + (\lambda_\alpha F - \mu_\alpha E) x_v \}; \\ (\omega_\alpha)_v &= \frac{1}{W^2} \{ (NF - MG) z_u^\alpha + (-NE + MF) z_v^\alpha + \\ &+ 2 \sum_{i=1}^{\alpha-1} [(\nu_i F - \mu_i G) z_u^{\alpha-i} + (-\nu_i E + \mu_i F) z_v^{\alpha-i}] + \\ &+ (\nu_\alpha F - \mu_\alpha G) x_u + (-\nu_\alpha E + \mu_\alpha F) x_v \}. \end{aligned}$$

Подставляя в уравнения системы (52) значения известных функций, характеризующих бесконечно малые изгибания боковой поверхности цилиндриды, воспользуемся сокращенными обозначениями

$$\begin{aligned} P_1(s, v) &\equiv 2 \sum_{i=1}^{a-1} \lambda_i \omega_{a-i} + \lambda_a m; \\ P_2(s, v) &\equiv 2 \sum_{i=1}^{a-1} \mu_i \omega_{a-i} + \mu_a m; \\ P_3(s, v) &\equiv 2 \sum_{i=1}^{a-1} \nu_i \omega_{a-i} + \nu_a m; \\ P_4(s, v) &\equiv 2 \sum_{i=1}^{a-1} \left\{ \frac{-\lambda_i (\varphi'^2 + k^2 \cos^2 \varphi)}{(1+v\theta)^2 + k^2 \cos^2 \varphi} + \frac{\mu_i \varphi'}{(1+v\theta) k \zeta} \right\} z_s^{a-i} + \\ &\quad + 2 \sum_{i=1}^{a-1} \left\{ \frac{\lambda_i \varphi'}{(1+v\theta) k \zeta} - \frac{\mu_i \cos^2 \varphi}{\zeta^2} \right\} z_s^{a-i} + \\ &\quad + \left\{ \frac{-\lambda_a (\varphi'^2 + k^2 \cos^2 \varphi)}{(1+v\theta) k^2 \cos^2 \varphi} + \frac{\mu_a \varphi'}{k \zeta} \right\} \tau + \left\{ \frac{\lambda_a \varphi'}{(1+v\theta)} - \frac{\mu_a \cos^2 \varphi}{\zeta^2} \right\} a; \\ P_5(s, v) &\equiv (\omega_a)_v. \end{aligned} \quad (53)$$

Это даст возможность записать систему дифференциальных уравнений, путем интегрирования которой нам надлежит определить векторное поле $\vec{z}$ в следующей довольно компактной форме:

$$\begin{aligned} z_{ss}^a &= \left(\frac{v\theta'}{1+v\theta} + \operatorname{tg} \varphi \varphi' \right) z_s^a - \frac{1}{2\zeta} k \sin 2\varphi (1+v\theta) z_v^a + k (1+v\theta) \cos \varphi \omega_a + P_1(s, v); \\ z_{sv}^a &= \frac{\theta}{1+v\theta} z_s^a + P_2(s, v); \\ z_{vv}^a &= P_3(s, v); \\ (\omega_a)_s &= - \left(\frac{\varphi'^2}{k \cos \varphi} + k \cos \varphi \right) \frac{z_s^a}{1+v\theta} + \frac{\cos \varphi \varphi'}{\zeta} z_v^a + P_4(s, v); \\ (\omega_a)_v &= P_5(s, v); \end{aligned} \quad (54)$$

$a = 1, 2, 3, \dots, n.$

Из третьего уравнения этой системы получим

$$z_v^a = \int P_3(s, v) dv + \vec{P}(s),$$

откуда

$$\vec{z} = \int \left(\int P_3(s, v) dv \right) dv + \vec{P}(s) v + \vec{q}(s). \quad (55)$$

Остается найти две произвольные вектор-функции $\vec{P}(s)$ и $\vec{q}(s)$. Для сокращения записи обозначим

$$\vec{F}(s, v) \equiv \int \vec{P}_3(s, v) dv; \quad \vec{z}(s, 0) = \vec{r}(s). \quad (56)$$

Значения всех входящих в уравнения (54) функций при $v = 0$ будем, как и раньше, обозначать с помощью нуликов. Тогда

$$\begin{aligned} z_s^0 &= \vec{r}'(s); \quad z_{ss}^0 = \vec{r}''(s); \\ z_{sv}^0 &= \left(\frac{\partial \vec{F}}{\partial s} \right)^0 + \vec{P}'(s). \end{aligned}$$

С другой стороны, из второго уравнения системы (54) имеем

$$z_{sv}^0 = \theta r'(s) + P_2^0.$$

Сравнивая два полученных значения для z_{sv}^0 , найдем

$$P'(s) = \theta r'(s) - \left(\frac{\partial F}{\partial s}\right)^0 + P_2^0;$$

откуда

$$P(s) = -F^0 + \int (\theta r(s) + P_2^0) ds. \quad (57)$$

Разделив обе части первого уравнения системы (54) на коэффициент при ω_a , продифференцируем это уравнение по s и подставим в него значение вектор-функции $\omega_a(s)$. Так как искомая вектор-функция $r(s)$ не зависит от v , то будем интегрировать полученное уравнение при $v = 0$.

Подставляя в него значения производных от вектор-функции z по u и по v при $v = 0$ и принимая во внимание, что, согласно (43), $P_1^0 = 0$, после необходимых преобразований найдем

$$\frac{1}{\cos \alpha} \left(\frac{r''}{k} \right)' = - \frac{k r'}{\cos \varphi} - \frac{1}{\zeta} \sin \varphi P_2^0 + P_4^0.$$

Таким образом, даже в самом общем случае рассматриваемая задача сводится к решению обыкновенного линейного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами. Понижая порядок этого уравнения с помощью подстановки

$$\tilde{f}(s) = r'(s)$$

и заменяя условные обозначения их значениями по формулам (53), получим окончательно:

$$\tilde{f}'' - \frac{k'}{k} \tilde{f}' + k^2 \tilde{f} = \frac{k \cos \varphi}{\zeta} \left\{ 2 \sum_{i=1}^{\alpha-1} \mu_i^0 \left(\frac{\varphi'}{k} z_s^{a-i} - \frac{\cos^2 \varphi}{\zeta} z_v^{a-i} - \sin \varphi \omega_{a-i}^0 \right) - \mu_a^0 \right\}. \quad (58)$$

Отсюда следует, что при повышении порядка бесконечно малого изгиба левая часть уравнения (58) не изменяется, в то время как правая часть сводится к своего рода рекуррентной формуле.

Проинтегрировав уравнение (58), определим искомую вектор-функцию:

$$r(s) = \int \tilde{f}(s) ds$$

и, следовательно, согласно формулам (56) и (57), найдем также вектор-функции $P(s)$ и $q(s)$.

Итак, изгибающее поле при бесконечно малых изгибаниях порядка n и краевых условиях (43) может быть найдено по формуле

$$z = 2 \int \left\{ \int \left(\sum_{i=1}^{\alpha-1} \nu_i \omega_{a-i} + \nu_a m \right) dv \right\} dv + \left\{ \int \left(\theta \tilde{f} + 2 \sum_{i=1}^{\alpha-1} \mu_i^0 \omega_{a-i}^0 + \mu_a^0 m \right) ds \right\} v + \int \tilde{f}(s) ds - \left\{ 2 \int \left(\sum_{i=1}^{\alpha-1} \nu_i \omega_{a-i} + \nu_a m \right) dv \right\}^0 + C,$$

где $\alpha = 1, 2, 3, \dots, n$. На односвязном куске боковой поверхности цилиндроида, ограниченном двумя прямолинейными образующими и дугами кривых C_1 и C_2 , это поле всегда существует.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. В. Ефимов. Качественные вопросы теории деформации поверхностей. УМН, 3:2 (24), 1948. 47—158.
2. И. Г. Ильин. О жесткости боковой поверхности замкнутого цилиндроида. УМН, 5:6 (40), 1950, 145—156.
3. В. П. Білоусова, П. Л. Симокин. Деякі питання теорії нескінченно малих згинань вищих порядків. Вісник Київ. ун-ту, № 7, 58—62, 1965.
4. В. П. Белоусова и И. Г. Ильин. О бесконечно малых изгибаниях высших порядков. Тезисы докладов 2-й Всесоюзной геометрической конференции, Харьков, 1964.
5. L. Bianchi. Lezioni di Geometria Differenziale v. II, p. I, Bologna, 1929, 11—41.

Поступила в редколлегию 22 марта 1966 г.

ПОВЕРХНОСТИ ПЕРЕНОСА ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА И КИНЕМАТИКА НА СФЕРЕ

Я. П. Бланк, Л. Т. Моторный (Харьков)

В работах [1, 2] были определены все поверхности переноса (или сдвига) эллиптического пространства в классе поверхностей вращения и винтовых поверхностей. Было доказано, что они являются поверхностями переноса эллиптического пространства двойного образования — они несут две сети переноса.

В настоящей заметке мы применяем к найденным поверхностям известное кинематическое отображение, ставящее в соответствие точкам эллиптического пространства вращения евклидовой сферы вокруг ее центра. В результате получаются такие двухпараметрические вращения сферы, которые могут быть представлены двумя существенно различными способами в виде произведения двух однопараметрических вращений.

Это составляет содержание § 2. В § 1 мы приводим сводку результатов о связи, существующей между сферической кинематикой и геометрией эллиптического пространства, используемых в § 2. Эти результаты, принадлежащие различным авторам (Clifford, Study, Hjelmslev, Fubini, Blaschke, Müller) подытожены в монографиях [3, 4].

§ 1. Пусть на прямой эллиптического пространства взяты две полярно сопряженные точки X, Y^1 :

$$X = x_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3, \quad (1)$$

$$Y = y_0 + y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3, \quad (2)$$

$$X\tilde{X} = 1, Y\tilde{Y} = 1, X\tilde{Y} + Y\tilde{X} = 0,$$

где $X, \tilde{X}$ — сопряженные кватернионы.

Пусть g_{ik} ($i, k = 0, 1, 2, 3$) миноры матрицы

$$\begin{vmatrix} x_0 x_1 x_2 x_3 \\ y_0 y_1 y_2 y_3 \end{vmatrix}. \quad (3)$$

Положив

$$\begin{aligned} r_1 &= g_{01} - g_{23}, & r'_1 &= g_{01} + g_{23}, \\ r_2 &= g_{02} - g_{31}, & r'_2 &= g_{02} + g_{31}, \\ r_3 &= g_{03} - g_{12}, & r'_3 &= g_{03} + g_{12}, \end{aligned} \quad (4)$$

имеем

$$r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = 1, \quad r_1'^2 + r_2'^2 + r_3'^2 = 1. \quad (5)$$

¹ Мы обозначаем точку эллиптического пространства и соответствующий ей кватернион с нормой единица одной и той же буквой.

Уравнения (4) устанавливают взаимнооднозначное соответствие между направленными прямыми эллиптического пространства и упорядоченными парами точек евклидовой единичной сферы.

Вектор

$$R = r_1 e_1 + r_2 e_2 + r_3 e_3$$

называют левым направляющим вектором луча g , а вектор

$$R' = r'_1 e_1 + r'_2 e_2 + r'_3 e_3 —$$

— правым. Левые (правые) параллели Клиффорда имеют общий левый (правый) направляющий вектор.

Уравнения (4) можно записать так:

$$\begin{aligned} R &= Y\tilde{X} = -X\tilde{Y}, \\ R' &= \tilde{X}Y = -\tilde{Y}X. \end{aligned} \quad (6)$$

Следовательно,

$$R' = \tilde{X}RX. \quad (7)$$

Преобразования $R \rightarrow R'$ (7) образуют трехчленную группу евклидовых вращений вокруг неподвижной точки O .

Связке лучей эллиптического пространства с центром в точке X соответствует на евклидовой единичной сфере поле пар точек (R, R') . Точки R поля переходят в точки R' этого поля в результате вращения (7) сферы вокруг ее центра. Тем самым устанавливается взаимнооднозначное соответствие между точками X эллиптического пространства и вращениями евклидовой сферы вокруг ее центра.

Линии $\tilde{X}(t)$ эллиптического пространства соответствуют однопараметрические вращения сферы.

Рассмотрим две единичные концентрические сферы K, K' . Пусть K — подвижная сфера, K' — неподвижная. Как известно, вращения с одной степенью свободы сферы K по сфере K' можно осуществить путем качения подвижной центроиды по неподвижной. Точки R, R' , соответствующие касательной к $\tilde{X}(t)$, служат подвижным и неподвижным мгновенным центром вращения K по K' . Действительно, при фиксированном R на K имеем

$$dR' = d\tilde{X}RX + \tilde{X}R dX. \quad (8)$$

Для точки, полярно сопряженной с X , на касательной к $\tilde{X}(t)$ имеем

$$Y = h \frac{dX}{dt}. \quad (9)$$

Из (8) в силу (6) и (9) вытекает

$$dR' = 0.$$

Следовательно, правый направляющий вектор R' касательной к $\tilde{X}(t)$ определяет неподвижный мгновенный центр вращения. Аналогично доказывается утверждение для подвижного мгновенного центра.

Поверхность переноса (или сдвига) эллиптического пространства определяется уравнением

$$X = A(u)B(v). \quad (10)$$

¹ $Y = h \frac{dX}{dt} + kX$, $\tilde{Y} = h \frac{d\tilde{X}}{dt} + k\tilde{X}$. Подставив в (2) и воспользовавшись тем, что $X d\tilde{X} + dX \tilde{X} = 0$, имеем $k = 0$.

Линии $A(u)$ эллиптического пространства соответствуют однопараметрические вращения сферы K по сфере K' , определяемые уравнением

$$R' = \tilde{A}(u) R A(u). \quad (11)$$

Линии $B(v)$ соответствуют однопараметрические вращения сферы K' по сфере K'' , определяемые уравнением

$$R'' = \tilde{B}(v) R' B(v). \quad (12)$$

Из (11) и (12) следует

$$R'' = \overline{A(u) B(v)} R A(u) B(v). \quad (13)$$

Следовательно, поверхности переноса $A(u) B(v)$ эллиптического пространства соответствуют такие двухпараметрические вращения сферы вокруг ее центра, которые можно осуществить, подвергая сферу K однопараметрическим вращениям по сфере K' (вращения, соответствующие линии $A(u)$), а сферу K' — однопараметрическим вращениям по сфере K'' (вращения, соответствующие линии $B(v)$).

§ 2. Чтобы поверхность переноса эллиптического пространства была одновременно винтовой поверхностью, надо в формуле (10) положить [2]

$$\begin{aligned} a_0 &= \cos \frac{1-a-a}{2} u \cos \frac{\lambda+\mu}{2}, \quad b_0 = \cos \frac{1+a+a}{2} v \cos \frac{\lambda-\mu}{2}, \\ a_1 &= \sin \frac{1-a-a}{2} u \cos \frac{\lambda+\mu}{2}, \quad b_1 = \sin \frac{1+a+a}{2} v \cos \frac{\lambda-\mu}{2}, \\ a_2 &= \sin \frac{1-a+a}{2} u \sin \frac{\lambda+\mu}{2}, \quad b_2 = \cos \frac{1+a-a}{2} v \sin \frac{\lambda-\mu}{2}, \\ a_3 &= -\cos \frac{1-a+a}{2} u \sin \frac{\lambda+\mu}{2}, \quad b_3 = -\sin \frac{1+a-a}{2} v \sin \frac{\lambda-\mu}{2}. \end{aligned} \quad (14)$$

Эта же поверхность несет и вторую сеть переноса и допускает параметризацию:

$$\begin{aligned} X &= C(u_1) D(v_1), \\ c_0 &= \cos \frac{1-a+a}{2} u_1 \cos \frac{\lambda+\mu}{2}, \quad d_0 = \cos \frac{1+a-a}{2} v_1 \cos \frac{\lambda-\mu}{2}, \\ c_1 &= \sin \frac{1-a+a}{2} u_1 \cos \frac{\lambda+\mu}{2}, \quad d_1 = \sin \frac{1+a-a}{2} v_1 \cos \frac{\lambda-\mu}{2}, \\ c_2 &= \sin \frac{1-a-a}{2} u_1 \sin \frac{\lambda+\mu}{2}, \quad d_2 = \cos \frac{1+a+a}{2} v_1 \sin \frac{\lambda-\mu}{2}, \\ c_3 &= -\cos \frac{1-a-a}{2} u_1 \sin \frac{\lambda+\mu}{2}, \quad d_3 = -\sin \frac{1+a+a}{2} v_1 \sin \frac{\lambda-\mu}{2}. \end{aligned} \quad (15)$$

Подставив в матрицу (3) a_i вместо x_i из (14) и $h \frac{dx_i}{dl}$ вместо y_i по (9), находим согласно (4) координаты подвижного мгновенного центра вращения сферы K по сфере K' , соответствующего линии $A(u)$:

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{h}{2} [(1-a) \cos(\lambda+\mu) - a], \\ r_2 &= \frac{h}{2} (1-a) \sin(\lambda+\mu) \cos au, \\ r_3 &= \frac{h}{2} (1-a) \sin(\lambda+\mu) \sin au, \end{aligned} \quad (16)$$

где h — постоянная, определяемая уравнением

$$h^2 [(1-a)^2 + a^2 - 2a(1-a) \cos(\lambda+\mu)] = 4. \quad (17)$$

Таким образом, подвижная центроида сферы K — окружность (16), (17).

Аналогично находим по (4) и (14) координаты неподвижного мгновенного центра вращения сферы K по сфере K' :

$$\begin{aligned} r'_1 &= \frac{h}{2} [1 - \alpha - a \cos(\lambda + \mu)], \\ r'_2 &= \frac{ah}{2} \sin(\lambda + \mu) \cos(1 - \alpha) u, \\ r'_3 &= \frac{ah}{2} \sin(\lambda + \mu) \sin(1 - \alpha) u. \end{aligned} \quad (18)$$

Подвижная центроида сферы K' — также окружность. Координаты подвижного мгновенного центра вращения сферы K' по сфере K'' получим из формул (16), заменив в них a, α, μ на $-a, -\alpha, -\mu$. Второе представление вращений сферы с двумя степенями свободы в виде произведения вращений с одной степенью свободы получим, заменив a на $-a$. При $\alpha = 0$ винтовые поверхности переходят в поверхности вращения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. П. Бланк и Л. Т. Моторный. О поверхностях сдвига эллиптического пространства, несущих две сети сдвига. УМН, XIX 1(115), 1964, 139—142.
2. Е. А. Косачевская. Винтовые поверхности переноса и сдвига. Вестник ХГУ, № 3, серия мех.-матем. Зап. мех.-мат. ф-та и ХМО, т. 31, 1965, 42—50.
3. W. Blaschke, Kinematik und Quaternionen, Berlin, 1960.
4. H. R. Müller, Sphärische Kinematik, Berlin, 1962.

Поступила в редколлегию 13 июня 1966 года.

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

В. И. Денисов (Харьков)

В работе построены законы сохранения, которые являются естественным обобщением классических законов сохранения для случая общей теории относительности. При этом, если поле тяготения допускает группу движений, построенные законы сохранения распадаются на два закона сохранения. Один из них относится к материи, второй — к полю тяготения. Подробно рассмотрен случай поля Шварцшильда. Далее строится класс законов сохранения, которые мы называем законами сохранения вихрей.

Обычно при построении законов сохранения в общей теории относительности вводится псевдотензор энергии-импульса гравитационного поля.

Недостатки, к которым приводит использование псевдотензора энергии-импульса гравитационного поля, известны, (см., например, [1]), поэтому на их обсуждении мы останавливаться не будем. Отметим только один из недостатков законов сохранения, построенных с помощью псевдотензора: сохраняющиеся величины не инвариантны относительно преобразований:

$$\begin{aligned}\tilde{x}^\rho &= X^\rho(x^1, x^2, x^3), \quad \rho = 1, 2, 3, \\ \tilde{x}^4 &= x^4\end{aligned}\tag{0.1}$$

и

$$\begin{aligned}\tilde{x}^\rho &= x^\rho, \\ \tilde{x}^4 &= X^4(x^1, x^2, x^3, x^4).\end{aligned}$$

Другими словами, энергия, например, изменяется при замене пространственных координат, что физически неестественно.

Известно, что в тех случаях, когда поле тяготения допускает группу изометрических преобразований, можно построить законы сохранения, не вводя псевдотензор энергии-импульса гравитационного поля. При этом сохраняющиеся величины содержат только тензор энергии-импульса материи и инвариантны относительно преобразований (0.1). Следует отметить, что построенные таким образом сохраняющиеся величины по существу относятся только к материи.

Мы построим два класса законов сохранения, не предполагая, что пространство-время допускает группу движений, и не вводя псевдотензор энергии-импульса гравитационного поля.

Из законов сохранения первого класса могут быть получены законы, которые естественно назвать законами сохранения энергии, импульса момента и т. д.

Из законов сохранения второго класса могут быть выделены законы сохранения, которые мы называем законами сохранения вихрей.

Разделение законов сохранения на классы проведено по такому принципу. К первому классу отнесены сохраняющиеся величины, которые содержат T^{ik} . Второй класс составляют сохраняющиеся величины, которые содержат T^{ik} и его ковариантные производные первого порядка.

Способ, которым мы строим законы сохранения, состоит в следующем.

Пусть в четырехмерном римановом пространстве задан антисимметричный тензор второго порядка S^{ik} . Нетрудно показать, что имеет место следующее тождество:

$$S^{ik}_{;k;i} = 0. \quad (0.2)$$

Действительно, так как S^{ik} — антисимметричный тензор, имеем

$$S^{ik}_{;k} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{-g} S^{ik}).$$

Тогда

$$(S^{ik}_{;k})_{;i} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{-g} S^{ik}_{;k}) = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^k} (\sqrt{-g} S^{ik}), \quad (0.3)$$

так как производные по x^k и x^i перестановочны, а S^{ik} — антисимметричны, из (0.3) следует (0.2).

Следовательно, вектор $S^i = S^{ik}_{;k}$ имеет нулевую ковариантную дивергенцию, т. е.

$$S^i_{;i} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{-g} S^i) = 0. \quad (0.4)$$

Интегрируя (0.4) по четырехмерному пространству, выделяя координату x^4 и применяя теорему Гаусса, получим

$$\iiint \sqrt{-g} S^4 dx^1 dx^2 dx^3 = \text{const}. \quad (0.5)$$

Здесь и всюду ниже предполагается, что S_ρ достаточно быстро стремится к нулю на больших пространственных расстояниях. Выражение (0.5) преобразуем, подставляя вместо S^4 его выражение через S^{ik} из (0.3):

$$S^4 = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{-g} S^{4k}).$$

Так как S^{ik} — антисимметричный тензор, то $S^{44} \equiv 0$, поэтому

$$S^4 = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\rho} (\sqrt{-g} S^{4\rho}), \quad \rho = 1, 2, 3.$$

Тогда (0.5) будет

$$\iiint \frac{\partial}{\partial x^\rho} (\sqrt{-g} S^{4\rho}) dx^1 dx^2 dx^3 = \text{const}. \quad (0.6)$$

В (0.5) и (0.6) интегрирование ведется по всему трехмерному пространству.

Из (0.6) следует, что сохраняющаяся величина (0.5) может быть представлена в виде поверхностного интеграла. Поэтому ее значение определяется поведением g_{ik} и $S^{4\rho}$ на больших расстояниях от начала координат.

Законы сохранения, соответствующие (0.4), будем называть слабыми, так как они выполняются независимо от уравнений поля.

Закон сохранения, выполняющийся в силу уравнений поля, будем называть сильным.

Легко показать, что выражение (0.5) инвариантно относительно преобразований (0.1).

§ 1. Возьмем S^{ik} следующего вида:

$$S^{ik} = \frac{1}{x} (g^{il} \xi^k - g^{kl} \xi^i)_{,l}, \quad (1.1)$$

где ξ — векторное поле, достаточно регулярное. Так как g_{ik} — ковариантно постоянный тензор, то

$$S^i = \frac{1}{x} [g^{il} (\xi^k_{,l})_{,k} - g^{kl} \xi^i_{,l,k}]. \quad (1.2)$$

Изменяя порядок ковариантного дифференцирования в первом члене (1.2), получим

$$S^i = \frac{1}{x} [g^{il} (\xi^k_{,k})_{,l} + R^i_{l,k} \xi^k - g^{kl} \xi^i_{,k,l}]. \quad (1.3)$$

Выражение (1.3) можно записать несколько иначе:

$$S^i = \frac{1}{x} [g^{il} (\xi^k_{,k})_{,l} - (g^{kl} \xi^i_{,k,l} + R^i_{l,k} \xi^k) + 2R^i_{l,k} \xi^k]. \quad (1.4)$$

Используя уравнения поля тяготения Эйнштейна

$$R^i_k - \frac{1}{2} \delta^i_k R = x T^i_k,$$

выражение (1.4) запишем в виде

$$S^i = \frac{1}{x} g^{il} (\xi^k_{,k})_{,l} - \frac{1}{x} (g^{kl} \xi^i_{,k,l} + R^i_{l,k} \xi^k) + \frac{1}{x} \left(R^i_l + \frac{1}{2} \delta^i_l R \right) \xi^l + T^i_{l,k} \xi^k. \quad (1.5)$$

Тогда сильный закон сохранения, соответствующий (1.5), будет таким:

$$\iiint \sqrt{-g} \left\{ T^i_{l,k} \xi^k + \frac{1}{x} \left(R^i_l + \frac{1}{2} \delta^i_l R \right) \xi^l + \frac{1}{x} g^{il} (\xi^k_{,k})_{,l} - \frac{1}{x} (g^{kl} \xi^i_{,k,l} + R^i_{l,k} \xi^k) \right\} dx^1 dx^2 dx^3 = \text{const}. \quad (1.6)$$

Таким способом мы любому достаточно регулярному векторному полю ξ^i ставим в соответствие сохраняющиеся величины (1.6). Относительно физического смысла законов сохранения (1.6) в общем случае сказать что-либо трудно.

Для того чтобы придать (1.6) физический смысл, необходимо выбрать естественным образом векторное поле ξ^i . Естественно ξ^i брать таким, чтобы оно было полем группы движений плоского пространства-времени. По существу это означает следующее: в системе координат x^i , в которой задан метрический тензор g_{ik} пространства-времени, можно найти метрический тензор плоского пространства-времени. Тогда в каждой точке с координатами x^1, x^2, x^3, x^4 мы задаем поле группы движений плоского пространства-времени. Тем самым в каждой точке исходного пространства с метрикой g_{ik} определяется поле ξ^i . Группа движений плоского пространства-времени десятипараметрическая, поэтому мы имеем десять векторных полей ξ^i , которым соответствуют десять законов сохранения (1.6). Законы сохранения, соответствующие полям параллельных переносов плоского пространства-времени, естественно назвать законами сохранения энергии и импульса, а законы сохранения, соответствующие полям вращений плоского пространства-времени, естественно назвать законами сохранения момента и т. д.

Может случиться, что некоторые из полей движений плоского пространства-времени являются полями движений искривленного пространства-времени, т. е. поля тяготения. В этом случае векторное поле ξ^i является векторным полем Киллинга и два последние члена в (1.6) обращаются в нуль (см. [2]).

Тогда закон сохранения (1.6) будет:

$$\iiint \sqrt{-g} \left\{ T_l^4 \xi^l + \frac{1}{x} \left(R_l^4 + \frac{1}{2} \delta_l^4 R \right) \xi^l \right\} dx^1 dx^2 dx^3 = \text{const.} \quad (1.7)$$

Нетрудно показать, что закон сохранения в данном случае распадается на два. Один из них относится только к материи (см. [4]):

$$\iiint \sqrt{-g} T_l^4 \xi^l dx^1 dx^2 dx^3 = \text{const.} \quad (1.8)$$

Второй относится только к полю тяготения:

$$\frac{1}{x} \iiint \sqrt{-g} \left(R_l^4 + \frac{1}{2} \delta_l^4 R \right) \xi^l dx^1 dx^2 dx^3 = \text{const.} \quad (1.9)$$

Например, пусть поле тяготения стационарно. Тогда закон сохранения с соответствующим ξ^i — закон сохранения энергии материи и гравитационного поля. Он распадается на два, один из которых — закон сохранения энергии материи в собственном поле тяготения, а второй — закон сохранения энергии поля тяготения.

Рассмотрим для примера поле тяготения шара, образованного идеальной несжимаемой жидкостью постоянной плотности. Известно точное решение уравнений тяготения Эйнштейна в этом случае (см. [3]).

Энергия материи в собственном поле тяготения (см. [4])

$$E_M = M \left\{ \frac{9}{2} \sqrt{1 - \alpha^2} \frac{\arcsin \alpha - \alpha \sqrt{1 - \alpha^2}}{2\alpha^3} - \frac{1}{2} \right\},$$

здесь M — масса шара, $\alpha^2 = \frac{r_{\text{гп}}}{R}$; $r_{\text{гп}}$, R — гравитационный и геометрический радиус сферы соответственно. Найдём энергию поля тяготения. Из (1.6) следует, что она в данном случае локализована там, где есть материя. Эта энергия, как нетрудно показать, будет

$$E_g = M \left\{ \frac{3}{2} - \frac{9}{2} \sqrt{1 - \alpha^2} \frac{\arcsin \alpha - \alpha \sqrt{1 - \alpha^2}}{2\alpha^3} \right\}.$$

Полная энергия материи и гравитационного поля

$$E_{\Sigma} = E_M + E_g = M.$$

Пусть шар совершает сферически-симметричные движения. В этом случае внутренние решения уравнений поля уже не будут стационарными. Внешнее же поле стационарно в силу теоремы Биркгоффа. Тогда полная энергия

$$E_{\Sigma} = \iiint \sqrt{-g} T_l^4 \xi^l dx^1 dx^2 dx^3 + \frac{1}{x} \iiint \sqrt{-g} \left\{ g^{4l} (\xi^k_{,k,l} - (g^{kl} \xi^4_{,k,l} + R_l^4 \xi^l) + \left(R_l^4 + \frac{1}{2} \delta_l^4 R \right) \xi^l \right\} dx^1 dx^2 dx^3,$$

причем интегрирование производится по области, занятой материей. Первый член в этом выражении — энергия материи, второй — энергия поля тяготения. В отдельности энергия материи и энергия поля тяготения изменяются во времени, т. е. не сохраняются. Полная же энергия сохраняется.

Заметим, что полная энергия материи и стационарного поля тяготения по (1.7)

$$E_{\Sigma} = \frac{1}{\kappa} \iiint \sqrt{-g} 2R^4_{i} dx^1 dx^2 dx^3$$

или

$$E_{\Sigma} = \iiint \sqrt{-g} (2T^4_k - \delta^4_k T) \xi^k dx^1 dx^2 dx^3. \quad (1.10)$$

Если система координат такая, что поле движений, соответствующее стационарности, будет $\vec{\xi} = (0, 0, 0, 1)$, тогда (1.10) дает

$$E_{\Sigma} = \iiint \sqrt{-g} (T^4_4 - T^1_1 - T^2_2 - T^3_3) dx^1 dx^2 dx^3. \quad (1.11)$$

Выражение (1.11) было предложено в 1930 г. Р. Толманом для определения полной энергии материи и постоянного поля тяготения.

Пусть пространство пусто, т. е. $T^i_k = 0$. Уравнения поля (0.1) в этом случае можно записать так:

$$R^i_k = 0,$$

и законы сохранения (1.6), соответствующие пустым пространствам, будут:

$$\frac{1}{\kappa} \iiint \{g^{4l}(\xi^k_{,l}) - g^{kl}\xi^4_{,l}\} \sqrt{-g} dx^1 dx^2 dx^3 = \text{const}. \quad (1.12)$$

Интересным является вопрос об энергии поля тяготения пустого пространства. Пусть векторное поле ξ^i_0 — поле, соответствующее стационарности плоского пространства-времени. Тогда энергия поля тяготения пустого пространства

$$E = \frac{1}{\kappa} \iiint \{g^{4l}(\xi^i_{0,l}) - g^{li}\xi^4_{0,l}\} \sqrt{-g} dx^1 dx^2 dx^3. \quad (1.13)$$

Если пространство-время пусто и стационарно, его энергия поля тяготения (1.13) равна нулю, так как в этом случае ξ^i_0 — вектор Киллинга. Таким образом, энергия пустого пространства определяется нестационарностью поля тяготения.

Нетрудно провести подобное рассмотрение вопроса об импульсе поля тяготения пустого пространства, о моменте и т. д.

Рассмотрим закон сохранения энергии в случае слабого поля. Тогда метрика может быть записана так:

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2\varphi}{c^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2\varphi}{c^2}\right) (dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (1.14)$$

Здесь φ — ньютоновский потенциал тяготения, определяемый уравнением

$$\Delta\varphi = 4\pi k\rho,$$

где ρ — плотность материи.

Векторное поле, соответствующее стационарности плоского пространства-времени, в системе координат, где метрика слабого поля имеет вид (1.14), будет:

$$\xi^0 = 0; \quad \xi^4 = 1. \quad (1.15)$$

Полная энергия по (1.2) и (0.6)

$$E = \frac{1}{\kappa} \iiint \frac{\partial}{\partial x^0} [V \sqrt{-g} (g^{4l}\xi^0_{,l} - g^{0l}\xi^4_{,l})] dx^1 dx^2 dx^3.$$

Пусть метрический тензор имеет диагональный вид, тогда

$$E = \frac{1}{x} \int \int \int \frac{\partial}{\partial x^p} [V \sqrt{-g} (g^{44} \xi_{,4}^p - g^{pp} \xi_{,p}^4)] dx^1 dx^2 dx^3. \quad (1.16)$$

Ковариантные производные $\xi_{,4}^p$ и $\xi_{,p}^4$ векторного поля (1.15) в диагональной метрике:

$$\begin{aligned} \xi_{,4}^p &= \Gamma_{44}^p = g^{pp} \Gamma_{44,p} = -\frac{1}{2} g^{pp} g_{44/p}; \\ \xi_{,p}^4 &= \Gamma_{4p}^4 = g^{44} \Gamma_{4p,4} = \frac{1}{2} g^{44} g_{44/p}. \end{aligned}$$

Здесь и ниже

$$g_{44/p} = \frac{\partial g_{44}}{\partial x^p}.$$

Тогда (1.16) примет вид:

$$E = \frac{1}{x} \int \int \int -\frac{\partial}{\partial x^p} (V \sqrt{-g} g^{44} g^{pp} g_{44/p}) dx^1 dx^2 dx^3.$$

Подставляя вместо $\sqrt{-g}$, g^{44} , g^{pp} их выражения через φ , получим

$$E = \frac{1}{x} \frac{1}{c^2} \int \int \int \Delta \varphi dx dy dz.$$

Так как $\Delta \varphi = 4\pi k \rho$, полная энергия

$$E = \int \int \int \rho dx dy dz.$$

Следовательно, полная энергия материи и поля тяготения равна количеству материи, порождающей поле.

Найдем энергию тяготения в случае слабого поля. Для простоты рассмотрим случай стационарного поля. В этом случае энергия поля тяготения по (1.9)

$$E_g = \frac{1}{x} \int \int \int \sqrt{-g} \left(R_4^4 + \frac{1}{2} R \right) dx^1 dx^2 dx^3.$$

Вычисляя R_4^4 и R для метрики (1.14) и сохраняя члены второго порядка по $\frac{1}{c^2}$, получим

$$E_g = \frac{1}{xc^4} \int \int \int \varphi \Delta \varphi dx dy dz, \quad (1.17)$$

или

$$E_g = \frac{1}{2c^2} \int \int \int \varphi \rho dx dy dz.$$

Выражение (1.17) легко преобразовать к виду:

$$E_g = -\frac{1}{8\pi k c^2} \int \int \int (\nabla \varphi)^2 dx dy dz.$$

Нетрудно получить выражение для энергии поля тяготения в случае нестационарного слабого поля. Мы его не приводим, так как оно громоздко.

Заметим, что в работе [5] с помощью объекта, аналогичного (1.1), были построены псевдотензоры энергии-импульса гравитационного поля.

§ 2. Пусть T^{ik} — тензор энергии-импульса материи, g_{ik} — метрический тензор пространства-времени, ξ^i — достаточно регулярное векторное поле. Рассмотрим антисимметричный тензор второго ранга

$$S^{ik} = (T^{il} \xi^k - T^{kl} \xi^i)_{,l}.$$

Тогда, так как $T_{,k}^{ik} = 0$, имеем

$$S^{ik} = T_{,l}^{il} \xi_{,l}^k - T^{kl} \xi_{,l}^i. \quad (2.1)$$

И законы сохранения, соответствующие (2.1) будут такими:

$$\int \int \int \sqrt{-g} (T^{4l} \xi_{,l}^k - T^{kl} \xi_{,l}^4)_{,k} dx^1 dx^2 dx^3 = \text{const}. \quad (2.2)$$

Выражение (2.2) после элементарных преобразований можно записать так:

$$\int \int \int \sqrt{-g} (T^{4l} \xi_{,l}^k - T^{kl} \xi_{,k}^4 + T^{4k} \xi_{,k}^l) dx^1 dx^2 dx^3 = \text{const}. \quad (2.3)$$

Таким образом, каждому векторному полю ξ^i соответствует закон сохранения (2.3).

Выясним физический смысл законов сохранения (2.3) в простейшем случае, когда пространство-время плоско. Возьмем за ξ^i поле вращений плоского пространства-времени. Нетрудно показать, что в этом случае (2.3) примет вид

$$\int \int \int \sqrt{-g} T_{,l}^{4k} \xi_{,k}^l dx^1 dx^2 dx^3 = \text{const}. \quad (2.4)$$

В декартовой системе координат (2.4) будет

$$\int \int \int \frac{\partial T^{4k}}{\partial x^l} \cdot \frac{\partial \xi^l}{\partial x^k} dx^1 dx^2 dx^3 = \text{const}.$$

Векторные поля ξ^i , соответствующие вращениям плоского пространства-времени:

$$\begin{aligned} \xi &= (y, -x, 0), \\ \xi &= (-z, 0, x), \\ \xi &= (0, z, -y). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Тогда соответствующие законы сохранения:

$$\begin{aligned} \int \int \int \left(\frac{\partial T^{42}}{\partial x^1} - \frac{\partial T^{41}}{\partial x^2} \right) dv &= \text{const}, \\ \int \int \int \left(\frac{\partial T^{41}}{\partial x^3} - \frac{\partial T^{43}}{\partial x^1} \right) dv &= \text{const}, \\ \int \int \int \left(\frac{\partial T^{43}}{\partial x^2} - \frac{\partial T^{42}}{\partial x^3} \right) dv &= \text{const}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Эти законы сохранения мы называем законами сохранения вихрей. Легко показать, что (2.6) — следствие уравнений движения материи. Действительно, уравнения движения материи в плоском пространстве-времени будут:

$$\frac{\partial T^{ik}}{\partial x^k} = 0,$$

тогда

$$\frac{\partial T^{42}}{\partial x^4} + \frac{\partial T^{02}}{\partial x^0} = 0,$$

$$\frac{\partial T^{41}}{\partial x^4} + \frac{\partial T^{01}}{\partial x^0} = 0.$$

Дифференцируя первое выражение по x^1 , а второе по x^2 и вычитая из первого второе, получим

$$\frac{\partial}{\partial x^4} \left(\frac{\partial T^{42}}{\partial x^1} - \frac{\partial T^{41}}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x^3} \left(\frac{\partial T^{32}}{\partial x^1} - \frac{\partial T^{31}}{\partial x^2} \right) = 0. \quad (2.7)$$

Интегрируя (2.7) по четырехмерной области и применяя теорему Гаусса, получим первый закон сохранения в (2.6). Аналогично можно получить другие два закона сохранения.

Поэтому естественно законы сохранения (2.3) с соответствующим полем ξ^i считать законами вихрей в общей теории относительности.

Заметим, что законы сохранения (2.3), соответствующие векторным полям параллельных переносов плоского пространства-времени, не имеют аналогов в частной теории относительности.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. З. Петров. Понятие энергии в общей теории относительности. Сб. «Гравитация и общая теория относительности». Изд-во Казанск. гос. ун-та, Казань, 1963.
2. К. Яно, С. Бохнер. Кривизна и числа Бетти. Изд-во иностр. лит., М., 1957.
3. Диж. Синг. Общая теория относительности. Изд-во иностр. лит., М., 1963.
4. В. И. Денисов. О законах сохранения в общей теории относительности. Укр. геометр. сб., вып. 2, Изд-во ХГУ, Харьков, 1966.
5. F. N. J. Cornis. Moller's energy momentum pseudotensor and its application to the Born—Infeld model of a charged particle. Proc. Phys. Soc., Vol. 82, 1963, p. 807—815.

Поступила в редколлегию 23 мая 1966 г.

УСЛОВИЯ СОЕДИНЕНИЯ НА ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ РАЗРЫВА ПЕРВЫХ ПРОИЗВОДНЫХ МЕТРИЧЕСКОГО ТЕНЗОРА ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ

В. И. Денисов (Харьков)

В работе получены условия, которым должны удовлетворять разрывы первых производных метрического тензора пространства — времени. В приближении слабого поля полученные условия дают известные условия ньютоновской теории тяготения. В отличие от условий Лишнеровица полученные условия содержат разрывы только первых производных g_{ik} .

Пусть S — гиперповерхность, при переходе через которую производные метрического тензора g_{ik} претерпевают разрыв. Такой гиперповерхностью может быть, например, граница между двумя областями пространства, заполненными материей с различными свойствами, граница между материей и вакуумом и т. д.

Тогда на S выполняются некоторые условия соединения, которым должны удовлетворять разрывы производных g_{ik} .

Если на S тензор энергии-импульса материи имеет конечную плотность, то такую гиперповерхность мы будем называть сингулярной гиперповерхностью. Аналог сингулярной гиперповерхности в ньютоновской теории тяготения — слой [4].

Наиболее полное исследование условий соединения проведено Лишнеровицем [1].

Пусть существует система координат, в которой g_{ik} и первые производные g_{ik} непрерывны. Такую систему координат мы будем называть, следуя Лишнеровицу, допустимой.

Результат, полученный Лишнеровицем, заключается в следующем.

В допустимой системе координат на S должны выполняться условия соединения:

$$\left[R_j^i - \frac{1}{2} \delta_j^i R \right] n_i = 0. \quad (0.1)$$

Здесь и ниже знак $[]$ — разрыв выражения, стоящего внутри скобок, R_j^i , R — тензор кривизны Риччи и скалярная кривизна соответственно, n_j — четырехнормаль к S .

Если система координат получена из допустимой преобразованием класса C^1 , то в ней условия соединения по-прежнему будут иметь форму (0.1). Но в такой системе координат первые производные g_{ik} уже не будут непрерывными (см. [2, 3]).

Условия соединения (0.1) обладают существенным недостатком. Именно, в системе координат, не являющейся допустимой, условия (0.1) содержат

разрывы как первых, так и вторых производных g_{ik} . При этом разрывы вторых производных g_{ik} входят в (0.1) линейно.

Поэтому в приближении слабого поля условия (1) не дают условий соединения ньютоновской теории тяготения:

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x^p} \right] n_p = 0, \quad (0.2)$$

где $\frac{\partial \varphi}{\partial x^p}$ — градиент потенциала тяготения φ ;

n_p — пространственная нормаль к S .

В следующих разделах работы исследуются условия соединения на S . В разделе 1 изложен способ, которым получены условия соединения. В разделах 2 и 3 получены условия соединения, исследуется характер разрывов на S . Раздел 4 содержит условия соединения на сингулярной гиперповерхности. В разделе 5 показано, что в приближении слабого поля полученные условия соединения дают известные условия ньютоновской теории тяготения. В разделе 6 подробно рассмотрен случай полей тяготения сферической симметрии, коротко рассмотрено действие разрывов на пробную частицу. В разделе 7 показано, что условия соединения Лишнеровица являются следствием ковариантности уравнений Эйнштейна.

1. Пусть S — гиперповерхность разрыва производных g_{ik} . Тогда она разбивает область определения g_{ik} на две подобласти D_1 и D_2 . В каждой из D_1 и D_2 первые и вторые производные g_{ik} непрерывны, т. е. $g_{ik} \in C^2$ в D_1 и D_2 . Во всей области определения $g_{ik} \in C^0$.

Величину разрывов производных g_{ik} , например первого порядка, определим так:

$$\left[\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} \right] = \lim_{\substack{M_1 \rightarrow M \\ M_2 \rightarrow M}} \left(\frac{\partial g_{ik}(M_1)}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ik}(M_2)}{\partial x^j} \right),$$

где M , M_1 , M_2 — точки, принадлежащие S , D_1^* , D_2 соответственно.

Метод, которым мы получим условия соединения на S , состоит в следующем.

Пусть уравнения поля являются уравнениями Эйлера — Лагранжа функционала

$$I = \int L \left(A_\alpha, \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^i} \right) dx^1 dx^2 dx^3 dx^4,$$

где A_α — переменные, описывающие поле.

В случае поля тяготения это g_{ik} .

Пусть S — гиперповерхность разрыва $\frac{\partial A_\alpha}{\partial x^i}$.

Для простоты предположим, что S — не сингулярная гиперповерхность, т. е. на S нет особенностей в распределении источников поля.

Тогда

$$I = \int_{D_1} L \left(A_\alpha, \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^i} \right) d\omega_1 + \int_{D_2} L \left(A_\alpha, \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^i} \right) d\omega_2, \quad (1.1)$$

где $d\omega_i$ — элемент объема D_i .

Варьируя по A_α , получим:

$$\delta I = \int_{D_1} \left(-\frac{d}{dx^i} \frac{\partial L}{\partial A_\alpha} \right) \delta A_\alpha d\omega_1 + \int_{D_2} \left(-\frac{d}{dx^i} \frac{\partial L}{\partial A_\alpha} \right) \delta A_\alpha d\omega_2 + \\ + \int_{S_1} \frac{\partial L}{\partial A_\alpha} \delta A_\alpha n_i dS_1 + \int_{S_2} \frac{\partial L}{\partial A_\alpha} \delta A_\alpha n_i dS_2 = 0, \quad (1.2)$$

где S_1, S_2 — границы D_1, D_2 соответственно.

S_1 и S_2 имеют общую часть S . Нормали к S_1 и S_2 на S имеют противоположные направления. Поэтому и в силу полевых уравнений и краевых условий из (0.2) следует:

$$\int_S \left[\frac{\partial L}{\partial A_\alpha} \right] n_i \delta A_\alpha dS = 0;$$

так как δA_α произвольны, имеем на S

$$\left[\frac{\partial L}{\partial A_\alpha} \right] n_i = 0.$$

Это и есть условия соединения на S , которым должны удовлетворять разрывы $\frac{\partial A_\alpha}{\partial x^i}$.

2. Уравнения тяготения Эйнштейна, устанавливающие связь между метрическим тензором g_{ik} и тензором энергии-импульса материи T_{ik} , имеют вид

$$R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R = \kappa T_{ij}, \quad (2.0)$$

где $\kappa = \frac{8\pi k}{c^2}$, k, c — гравитационная постоянная Ньютона и скорость света соответственно.

Известно [5], что уравнения (4) являются уравнениями Эйлера — Лагранжа. Часть L' , содержащая первые производные g_{ik} , имеет вид:

$$L' = \sqrt{-g} g^{ik} (\Gamma_{ii}^m \Gamma_{km}^l - \Gamma_{ik}^l \Gamma_{lm}^m), \quad (2.1)$$

где Γ_{ii}^m — символы Кристоффеля второго рода, построенные из g_{ik} .

Для того чтобы получить условия соединения на S , необходимо найти

$\frac{\partial L'}{\partial \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}}$. Нетрудно показать, что

$$\frac{\partial L'}{\partial \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}} = -g_{mi} g_{nk} \frac{\partial L'}{\partial \frac{\partial g_{mn}}{\partial x^j}}. \quad (2.2)$$

Следуя работе Карниша [6], можно показать:

$$\frac{\partial L'}{\partial \frac{\partial g_{mn}}{\partial x^j}} = -\sqrt{-g} \lambda_{ij}^l e^{mntl}, \quad (2.3)$$

при этом

$$\lambda_{lr}^i = \Gamma_{lr}^i - \frac{1}{2} (\delta_l^i \Gamma_{kr}^k + \delta_r^i \Gamma_{kl}^k), \quad (2.4)$$

$$e^{mnlr} = \frac{1}{2} (g^{mn} g^{lr} - g^{ml} g^{nr} - g^{mr} g^{nl}). \quad (2.5)$$

Подставляя (2.3) (2.4) (2.5) в (2.2), после преобразований получим

$$\frac{\partial L'}{\partial \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^j}} = \sqrt{-g} \left\{ \Gamma_{ik}^j + \frac{g_{ik}}{2} (g^{jm} \Gamma_{nm}^n - g^{mn} \Gamma_{mn}^j) - \frac{\delta_l^j \Gamma_{kl}^l + \delta_k^j \Gamma_{il}^l}{2} \right\}.$$

Тогда по (1.2) условия соединения на S будут следующими:

$$\left[\Gamma_{ik}^j + \frac{g_{ik}}{2} (g^{jm} \Gamma_{nm}^n - g^{mn} \Gamma_{mn}^j) - \frac{\delta_l^j \Gamma_{kl}^l + \delta_k^j \Gamma_{il}^l}{2} \right] n_j = 0. \quad (2.6)$$

Условия (2.6) ковариантны, так как $\left[\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} \right]$ — тензор.

Выражение (1.1) можно записать таким образом:

$$\left[\Gamma_{ik}^j + \frac{g_{ik}}{2} \left(2g^{jm} \frac{\partial}{\partial x^m} \ln \sqrt{-g} + \frac{\partial}{\partial x^m} g^{jm} \right) - \frac{\delta_l^j \frac{\partial}{\partial x^k} \ln \sqrt{-g} + \delta_k^j \frac{\partial}{\partial x^l} \ln \sqrt{-g}}{2} \right] n_j = 0, \quad (2.7)$$

так как

$$\Gamma_{ml}^l = \frac{\partial}{\partial x^m} \ln \sqrt{-g},$$

$$g^{mn} \Gamma_{mn}^i = - \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{-g} g^{ik}).$$

3. Пусть $S(x^1, x^2, x^3, x^4) = 0$ — уравнение гиперповерхности разрыва. Преобразование:

$$\tilde{x}^4 = S(x^1, x^2, x^3, x^4),$$

$$\tilde{x}^p = x^p$$

делает S координатной поверхностью $\tilde{x}^4 = 0$.

В этой системе координат производные $\tilde{g}_{ik}$ по $\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3$ непрерывны [4]. На S разрывны только $\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^4}$. Заметим, что $\tilde{g}^{44} = g^{ik} n_i n_k$. Нормаль n к S будет $(0, 0, 0, 1)$.

Поэтому (2.7) можно записать так:

$$\left[\tilde{\Gamma}_{ik}^4 + \frac{\tilde{g}_{ik}}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^4} \tilde{g}^{44} + 2\tilde{g}^{44} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^4} \ln \sqrt{-\tilde{g}} \right) \right] = 0, \quad (3.1)$$

$$\left[\tilde{\Gamma}_{44}^4 + \frac{\tilde{g}_{44}}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^4} \tilde{g}^{44} + 2\tilde{g}^{44} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^4} \ln \sqrt{-\tilde{g}} \right) - \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^4} \ln \sqrt{-\tilde{g}} \right] = 0.$$

Введем обозначение:

$$\left[\frac{\partial \tilde{g}_{ik}}{\partial \tilde{x}^4} \right] = \tilde{h}_{ik}.$$

Нетрудно убедиться, что имеют место следующие равенства:

$$[\tilde{\Gamma}_{\rho\sigma}^4] = -\frac{1}{2} \tilde{g}^{44} \tilde{h}_{\rho\sigma}, \quad [\tilde{\Gamma}_{4\rho}^4] = \frac{1}{2} \tilde{g}^{4\sigma} \tilde{h}_{\rho\sigma},$$

$$[\tilde{\Gamma}_{44}^4] = \frac{1}{2} \tilde{g}^{44} \tilde{h}_{44} + \tilde{g}^{4\sigma} \tilde{h}_{4\sigma},$$

$$[\tilde{\Gamma}_{lm}^i] = \begin{cases} \frac{1}{2} \tilde{g}^{ij} \tilde{h}_{ij} & \text{при } m = 4 \\ 0 & \text{при } m \neq 4, \end{cases}$$

$$[\tilde{\Gamma}_{lm}^4 \tilde{g}^{4m}] = \frac{1}{2} \tilde{g}^{44} \tilde{g}^{ij} \tilde{h}_{ij},$$

$$[\tilde{\Gamma}_{mn}^4 \tilde{g}^{mn}] = \tilde{g}^{4i} \tilde{g}^{4j} \tilde{h}_{ij} - \frac{1}{2} \tilde{g}^{44} \tilde{h}_{ij} \tilde{g}^{ij}$$

здесь и ниже $\alpha, \beta, \rho, \sigma = 1, 2, 3$.

Подставляя эти выражения в (2.6), после простых преобразований получим

$$\tilde{g}^{44} \tilde{h}_{\rho\sigma} - \tilde{g}_{\rho\sigma} \Phi(\tilde{h}) = 0, \quad (3.2)$$

$$\tilde{g}^{4\sigma} \tilde{h}_{\rho\sigma} + \tilde{g}_{4\rho} \Phi(\tilde{h}) = 0, \quad (3.3)$$

$$\tilde{g}^{\rho\sigma} \tilde{h}_{\rho\sigma} - \tilde{g}_{44} \Phi(\tilde{h}) = 0, \quad (3.4)$$

$$\Phi(\tilde{h}) = \tilde{g}^{44} \tilde{g}^{\alpha\beta} \tilde{h}_{\alpha\beta} - \tilde{g}^{4\sigma} \tilde{g}^{43} \tilde{h}_{\alpha\beta}.$$

Десять величин $\tilde{h}_{ij}$, описывающих разрыв первых производных $\tilde{g}_{ij}$, удовлетворяют 10 уравнениям. Из этих уравнений видно, что $\tilde{h}_{44}$, $\tilde{h}_{41}$, $\tilde{h}_{42}$, $\tilde{h}_{43}$ произвольны, так как они не входят в уравнения.

Пусть $\tilde{g}^{44} \neq 0$. Это значит, что S неизотропна. Тогда легко показать, что (3.3) — следствие (3.2). Далее, умножая (3.2) на $\tilde{g}^{\rho\sigma}$, суммируя по ρ, σ и вычитая полученное из (3.4), имеем

$$(\tilde{g}^{44} \tilde{g}_{44} + \tilde{g}^{4\sigma} \tilde{g}_{4\sigma} - 2) \Phi(\tilde{h}) = 0,$$

$$\tilde{g}^{44} \tilde{g}_{44} + \tilde{g}^{4\sigma} \tilde{g}_{4\sigma} - 2 = \tilde{g}^{4i} \tilde{g}_{4i} - 2 = -1,$$

$$\Phi(\tilde{h}) = 0$$

и уравнения дают

$$\tilde{h}_{\rho\sigma} = 0.$$

Следовательно, на неизотропной поверхности разрыва общее решение системы (3.2)—(3.4) допускает произвольные значения $\tilde{h}_{44}$, $\tilde{h}_{41}$, $\tilde{h}_{42}$, $\tilde{h}_{43}$ и нулевые значения $\tilde{h}_{\rho\sigma}$.

Пусть S — изотропная гиперповерхность. Это значит, что $\tilde{g}^{44} = 0$. Тогда уравнения (3.2)—(3.4) примут вид

$$\tilde{g}^{4\sigma} \tilde{h}_{\rho\sigma} = 0,$$

$$\tilde{g}^{\rho\sigma} \tilde{h}_{\rho\sigma} = 0.$$

Это система четырех линейных уравнений с шестью неизвестными. Нетрудно показать, что ранг этой системы равен четырем. Поэтому на изотропной поверхности разрыва общее решение системы (3.2)—(3.4)

допускает произвольные значения шести величин $\tilde{h}_{ij}$ ($\tilde{h}_{44}, \tilde{h}_{41}, \tilde{h}_{42}, \tilde{h}_{43}, \tilde{h}_{\alpha\beta}, \tilde{h}_{\rho\sigma}$).

4. Пусть S — сингулярная гиперповерхность разрыва. Плотность тензора энергии-импульса на S обозначим δT_{ik} .

Нетрудно показать, что в этом случае на S должны выполняться следующие условия соединения:

$$\left[\Gamma_{ik}^j + \frac{g_{ik}}{2} (\Gamma_{lm}^n \Gamma_{nm}^l - g^{mn} \Gamma_{mn}^l) - \frac{\delta_l^j \Gamma_{kl}^l + \delta_k^j \Gamma_{il}^l}{2} \right] n_j = \kappa \delta T_{ik}. \quad (4.1)$$

Тогда, как и в случае несингулярной гиперповерхности S , условия соединения можно записать так:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \tilde{g}^{44} \tilde{h}_{\rho\sigma} + \frac{g_{\rho\sigma}}{2} \Phi(\tilde{h}) &= \kappa \delta \tilde{T}_{\rho\sigma}, \\ \frac{1}{2} \tilde{g}^{4\sigma} \tilde{h}_{\rho\sigma} + \frac{\tilde{g}_{4\sigma}}{2} \Phi(\tilde{h}) &= \kappa \delta \tilde{T}_{4\rho}, \\ -\frac{1}{2} \tilde{g}^{\rho\sigma} \tilde{h}_{\rho\sigma} + \frac{\tilde{g}_{44}}{2} \Phi(\tilde{h}) &= \kappa \delta \tilde{T}_{44}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Эта система десяти уравнений относительно шести неизвестных $h_{\alpha\beta}$. Система совместна, если на S выполняются равенства

$$\delta \tilde{T}_{ik} \tilde{g}^{4k} = 0 \text{ или } \delta \tilde{T}_i^4 = 0. \quad (4.3)$$

В системе координат, в которой S не координатная поверхность,

$$\delta T_i^k n_k = 0,$$

где n_k — нормаль к S .

Поэтому на сингулярной гиперповерхности S плотность δT_{ik} должна удовлетворять (4.3).

Умножая первое из уравнений (4.2) на $\tilde{g}^{\rho\sigma}$ и сворачивая по $\rho\sigma$, а вторые из (4.2) — на $\tilde{g}^{4\sigma}$ и сворачивая по σ , а затем складывая их, получим

$$\Phi(\tilde{h}) = \kappa \delta \tilde{T},$$

где

$$\delta T = \delta \tilde{T}_{ik} \tilde{g}^{ik}.$$

Тогда из (4.2) имеем

$$-\frac{1}{2} \tilde{g}^{44} \tilde{h}_{\rho\sigma} = \kappa \left(\delta \tilde{T}_{\rho\sigma} - \frac{\tilde{g}_{\rho\sigma}}{2} \delta \tilde{T} \right).$$

Величины разрывов первых производных g_{ik} в исходной системе координат находятся просто. Так как $\left[\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} \right]$ — тензор, то

$$\left[\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} \right] = \left[\frac{\partial \tilde{g}_{lm}}{\partial \tilde{x}^n} \right] \frac{\partial \tilde{x}^n}{\partial x^j} \frac{\partial \tilde{x}^m}{\partial x^i} \frac{\partial \tilde{x}^l}{\partial x^k}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} \right] &= h_{ik} n_j, \\ h_{ik} &= \tilde{h}_{44} n_i n_k + \tilde{h}_{4\sigma} (\delta_k^\sigma n_i + \delta_i^\sigma n_k) + \tilde{h}_{\rho\sigma} \delta_i^\rho \delta_k^\sigma, \end{aligned}$$

где n_i — четырехнормаль к S .

5. Рассмотрим условия соединения (2.6) в приближении слабого поля. Известно (см. [3]), что в этом случае

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2\varphi}{c^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2\varphi}{c^2}\right) (dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (5.1)$$

где φ — потенциал тяготения.

Нетрудно показать, что Γ_{jk}^i в приближении слабого поля будут такими:

$$\begin{aligned} \Gamma_{jk}^i &= 0, \text{ если } i \neq j \neq k; \\ \Gamma_{ij}^i &= \begin{cases} -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} & i \neq 4, \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} & i = 4, \end{cases} \quad \Gamma_{jj}^i = \begin{cases} \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} & i \neq 4, \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial x^4} & i = 4, \end{cases} \\ \Gamma_{ii}^i &= \begin{cases} -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} & i \neq 4, \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} & i = 4, \end{cases} \quad \sqrt{-g} = 1 - \frac{2\varphi}{c^2}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Рассмотрим (2.6) при $k = 4$, $i \neq 4$.

Так как $g_{4\varphi} = 0$ в (5.1), имеем

$$\left[\Gamma_{\rho 4}^k - \frac{\delta_\rho^k \frac{\partial}{\partial x^4} \ln \sqrt{-g} + \delta_4^k \frac{\partial}{\partial x^\rho} \ln \sqrt{-g}}{2} \right] n_k = 0.$$

Подставляя вместо $\Gamma_{\rho 4}^k$ и $\frac{\partial}{\partial x^\rho} \ln \sqrt{-g}$ их выражения из (5.2), имеем

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x^\rho} \right] n_4 = 0. \quad (5.3)$$

В приближении слабого поля $n_4 = 0$, поэтому условие (5.3) выполняется тождественно.

Нетрудно показать, что условия (4.1) выполняются тождественно, если $i = k \neq 4$.

В случае $i = k = 4$ имеем:

$$\frac{2}{c^2} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x^\rho} \right] n_\rho = 0. \quad (5.4)$$

Из условия (5.4) следует, что первые производные потенциала непрерывны при переходе через S .

Если S — сингулярная поверхность (слой) с плотностью материи ρ_s , то условия (4.1) дают

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x^2} \right] n_\rho = 4\pi k \rho_s. \quad (5.5)$$

Условия (5.4) и (5.5) — условия соединения на S в ньютоновской теории тяготения (см. [4]).

6. Рассмотрим подробно случай сферически-симметричного поля тяготения. Известно (например, [3]), что в этом случае

$$ds^2 = e^\nu c^2 dt^2 - e^\lambda dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (6.1)$$

где ν, λ — функции r и t .

Пусть поверхность $r = f(t)$ — поверхность разрыва первых производных ν и λ .

Тогда условия соединения (2.6) примут вид

$$\begin{aligned} & \left[\Gamma_{ik}^1 + \frac{g_{ik}}{2} (g^{1m} \Gamma_{nm}^1 - g^{mn} \Gamma_{mn}^1) - \frac{\delta_l^1 \Gamma_{kl}^1 + \delta_k^1 \Gamma_{il}^1}{2} \right] n_1 + \\ & + \left[\Gamma_{ik}^4 + \frac{g_{ik}}{2} (g^{4m} \Gamma_{nm}^4 - g^{nm} \Gamma_{mn}^4) - \frac{\delta_l^4 \Gamma_{kl}^4 + \delta_k^4 \Gamma_{il}^4}{2} \right] n_4 = 0 \quad (6.2) \\ & n_1 = 1; \quad n_4 = -\frac{\partial r}{\partial t}. \end{aligned}$$

Вычисляя Γ_{ik}^l по (6.1), получим из (6.2) условия соединения:

$$[\dot{\lambda} - \dot{\nu}] n_1 - [\lambda' - \nu'] n_4 = 0, \quad (6.3)$$

$$[e^{\nu} \nu'] n_1 - [e^{\lambda} \lambda] n_4 = 0, \quad (6.4)$$

где

$$\dot{\lambda} = \frac{\partial \lambda}{\partial t}; \quad \nu' = \frac{\partial \nu}{\partial r}.$$

Но условие (6.3) — условие непрерывности функции при переходе через S , оно выполняется тождественно (см. [4; 2]). Поэтому на S должно выполняться единственное условие, которое совпадает с условием, полученным в работе [2]. Пусть, для простоты, $r = r(t)$ — граница между вакуумом и материей. Тогда, используя общее решение уравнений (2.0), в случае сферической симметрии можно получить

$$\frac{dr}{dt} = e^{\frac{\nu-\lambda}{2}} \sqrt{-\frac{T_1^1}{T_4^4}}, \quad (6.5)$$

где T_1^1, T_4^4 — значения тензора энергии-импульса материи на границе шара, т. е. при $r = r(t)$. Выражение (6.5) определяет скорость движения границы шара в зависимости от распределений T_4^4 и T_1^1 на его поверхности. Если $T_1^1 = 0$ при $r = r(t)$, тогда $\frac{dr}{dt} = 0$, т. е. граница шара неподвижна.

Пусть материя, образующая сферу, — идеальная жидкость с уравнением состояния $p = \varphi(\rho)$; здесь p, ρ — собственное давление и собственная плотность соответственно, а $r = r(t)$ — поверхность разрыва жидкости. Тогда можно показать, что скорость распространения разрыва

$$v = \frac{dr}{dt} = e^{\frac{\nu-\lambda}{2}} \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}}.$$

Рассмотрим подробно приближение слабого поля в случае сферической симметрии. Для простоты предположим, что поверхность разрыва стационарна, т. е. $r = r_0$. Тогда на $r = r_0$ выполняется условие соединения:

$$\left[\frac{\partial \nu}{\partial r} \right] = 0,$$

т. е. $\lambda, \nu, \frac{\partial \nu}{\partial r}$ — непрерывны при переходе через $r = r_0$. Разрыв может иметь $\frac{\partial \lambda}{\partial r}$.

Пусть сфера образована идеальной несжимаемой жидкостью. Тогда [3]

$$e^\lambda = \frac{1}{1 - gr^2}, \quad r < r_0, \quad g = \frac{2m}{r_0^3},$$

$$e^\lambda = \frac{1}{1 - \frac{2m}{r}}, \quad r > r_0,$$

где m — масса сферы.

Разрыв $\frac{\partial \lambda}{\partial r}$ будет таким:

$$\left[\frac{\partial \lambda}{\partial r} \right] = \frac{3 \frac{2m}{r_0} \frac{1}{r_0}}{1 - \frac{2m}{r_0}}.$$

Если гравитационный радиус тела мал по сравнению с r_0 , то и разрыв $\frac{\partial \lambda}{\partial r}$ мал. Поэтому при $\frac{2m}{r_0} \rightarrow 0$ (слабое поле) разрыв $\frac{\partial \lambda}{\partial r} \rightarrow 0$, и первые производные λ , ν — непрерывны. Это соответствует известному утверждению о непрерывности первых производных ньютоновского потенциала.

В общем же случае, когда сфера неоднородна, имеем (см. [3]):

$$e^\lambda = \frac{1}{1 - \frac{x}{r} \int_0^r \rho(\xi) \xi^2 d\xi}, \quad r < r_0,$$

$$e^\lambda = \frac{1}{1 - \frac{2m}{r}}, \quad r > r_0,$$

где $\rho(\xi)$ — плотность материи, образующей сферу, а $2m = x \int_0^{r_0} \rho(\xi) \xi^2 d\xi$.

Тогда разрыв $\frac{\partial \lambda}{\partial r}$ будет:

$$\left[\frac{\partial \lambda}{\partial r} \right] = \frac{x \rho(r_0) r_0}{1 - \frac{2m}{r_0}}.$$

Производная $\frac{\partial \lambda}{\partial r}$ непрерывна, если $\rho(r_0) = 0$. Если же $\rho(r_0) \neq 0$, то производная $\frac{\partial \lambda}{\partial r}$ непрерывна только в приближении слабого поля.

Физические эффекты, обусловленные разрывами рассмотренного вида, могут быть изучены с помощью уравнения

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma_{kj}^i \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^j}{ds} = 0,$$

которое является уравнением движения пробной частицы. В этом уравнении $\frac{dx^i}{ds}$ — единичный вектор, касательный к геодезической мировой линии пробной частицы, S — собственное время частицы.

Будем $\frac{d^2 x^i}{ds^2}$ рассматривать как ускорение пробной частицы, а $\Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds}$ как силу, действующую на частицу.

Тогда, как только пробная частица проходит через гиперповерхность разрыва первых производных g_{ik} , она испытывает удар — действующая

сила $\Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds}$ резко изменяется, так как символы Кристоффеля Γ_{jk}^i претерпевают разрыв.

Если пробная частица движется со скоростью v такой, что $\frac{v}{c} \ll 1$, то уравнения движения таковы:

$$\frac{d^2 x^p}{dt^2} + \Gamma_{44}^p = 0, \quad p = 1, 2, 3.$$

Разрыв ускорения частицы в этом случае определяется разрывом Γ_{44}^p , величину которого нетрудно выразить через разрывы производных g_{ik} :

$$[\Gamma_{44}^p] = \left(\frac{1}{2} \tilde{h}_{44} n^p + g^{pa} \tilde{h}_{4a} \right) n_a n_4,$$

где n_i — четырехнормаль к гиперповерхности разрыва,
 $\tilde{h}_{4i}$ — см. пункт 4.

7. Следует отметить, что условия соединения (0.1), полученные Лишневичем, являются следствием ковариантности уравнений (2.0).

Так как действие гравитационного поля и материи скаляр, то при преобразовании оно не меняется. Производя преобразование координат

$$\tilde{x}^i = x^i + \xi^i,$$

где ξ^i — малые величины, зависящие от x , нетрудно получить (см. [7])

$$\delta S = \int \sqrt{-g} T^{ik} \xi_{k,i} d\omega = 0.$$

В силу уравнений движения имеем

$$\delta S = \int \sqrt{-g} (T^{ik} \xi_{i,k}) d\omega = 0. \quad (7.1)$$

Если тензор энергии — импульса разрывен на некоторой гиперповерхности, то из (7.1) следует, что на ней должны выполняться условия соединения

$$[T^{ik}] n_k = 0,$$

которые эквивалентны условиям соединения (0.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Lichnerowicz. Théories relativistes de la gravitation et de électromagnétisme, Paris, 1955.
2. W. Israel. Discontinuities in spherically symmetric gravitational fields and shells of radiation. Proceedings of Royal Society ser. A, vol. 248, N 1254, 1958, p. 404—413.
3. Д. Ж. Л. Синг. Общая теория относительности. Изд-во иностр. лит., М., 1963.
4. В. И. Смирнов. Курс высшей математики, т. IV, Гостехтеориздат, М., 1957.
5. А. Эйнштейн. Принцип Гамильтона и общая теория относительности. Сб. «Принцип относительности». М. — Л., 1935, стр. 306—314.
6. F. H. J. Cornish. Energy and momentum in general relativity, Proceedings of Royal Society ser. A, vol. 289, 1964, p. 358—371.
7. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Теория поля. Физматгиз, М., 1962.

Поступила в редколлегию 23 мая 1966 г.

НЕКОТОРЫЕ КАНОНИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ ТОЧЕК ОТНОСИТЕЛЬНО ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ЛИНЕЙНЫХ ОДНОРОДНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПРОСТРАНСТВА

Анджей Зайц (Краков)

В статье [1] Г. Н. Сакович решает функциональное уравнение

$$\theta H(x) = H(\theta^M x), \quad (1)$$

где H — искомая функция векторного аргумента $x = (x_1, \dots, x_n)$, удовлетворяющая этому уравнению при произвольном вещественном $\theta > 0$ при данной матрице M . Можно принять, что M — квазидиагональная матрица с вещественными жордановыми клетками. Сакович ввел координаты

$$\rho, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}, \quad (2)$$

являющиеся функциями от $x_1, x_2, \dots, x_n$, такие, чтобы решение H , заданное в этих координатах, имело вид

$$H(\rho, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) = \rho K(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}),$$

где K — произвольная функция. На многих примерах автор показывает способ получения этих координат, а тем самым и решения уравнения (1), но явных формул «в общем виде» он не приводит. В этой статье мы дадим такие формулы.

1. С геометрической точки зрения изложенная проблема обобщается следующим образом.

Дана некоторая однопараметрическая группа G матриц $C(\theta)$, $\theta \neq 0$, действующая в пространстве R^n линейно:

$$x' = C(\theta) x, \quad (3)$$

где $x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$. Для точек пространства R^n требуется найти координаты (2) такие, чтобы выполнялись тождества

$$\rho' = \theta \rho, \quad \varphi'_i = \varphi_i \quad (i = 1, \dots, n-1) \quad (4)$$

и отображение

$$(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (\rho, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) \quad (5)$$

было взаимно однозначно и (если это возможно) гомеоморфно.

Следуя Саковичу, будем называть эти координаты каноническими. Напомним, что если они известны, то общее решение уравнения (1) имеет вид

$$H(x) = \rho(x) K(\varphi_1(x), \dots, \varphi_{n-1}(x)), \quad x = (x_1, \dots, x_n),$$

где K — произвольная функция.

Предложение. Если известна какая-нибудь «радиальная» координата $\rho = \rho(x)$, то за канонические координаты в области определения функции $\rho(x)$ можно взять величины $\rho, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}$, где φ_i суть независимые среди величин $\tilde{\varphi}_1, \dots, \tilde{\varphi}_n$, определенных формулами

$$\tilde{\varphi} = C^{-1}[\rho(x)]x, \quad \tilde{\varphi} = (\tilde{\varphi}_1, \dots, \tilde{\varphi}_n). \quad (6)$$

Действительно, в силу (3) и (4)

$$\tilde{\varphi}' = C^{-1}(\rho')x' = C^{-1}(\theta\rho)C(\theta)x = C^{-1}(\rho)C^{-1}(\theta)C(\theta)x = C^{-1}(\rho)x = \tilde{\varphi}.$$

Значит, величины $\tilde{\varphi}_1, \dots, \tilde{\varphi}_n$ удовлетворяют тождествам (4) для «ангулярных» координат φ_i . В силу (6) обратное отображение

$$(\rho, \tilde{\varphi}_1, \dots, \tilde{\varphi}_n) \rightarrow (x_1, \dots, x_n)$$

существует и имеет вид

$$x = C(\rho)\tilde{\varphi}.$$

Если, кроме того, матричная функция $C(\theta)$ и функция $\rho(x)$ непрерывны, то это отображение будет гомеоморфизмом.

Общий вид матриц однопараметрической группы для измеримых $C(\theta)$ следующий:

$$C(\theta) = \theta^M = |\theta|^M \quad (7)$$

для $\theta > 0$ (как и в формуле (1)) и

$$C(\theta) = \left(\frac{|\theta|^{M_p}}{|\operatorname{sign} \theta \cdot |\theta|^{M_q}|} \right) \quad (8)$$

для произвольного $\theta \neq 0$, где M_p и M_q — произвольные жордановы матрицы порядков p и q соответственно, причем $p + q = n^*$.

Пусть матрица M имеет жордановы клетки вида

$$S = \begin{pmatrix} a & & & \\ 1 & a & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1a \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} A & & & \\ E & A & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & EA \end{pmatrix},$$

где $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (a, b — вещественные числа). Тогда матрица $|\theta|^M$ имеет соответственно клетки вида

$$|\theta|^S = \begin{pmatrix} |\theta|^a & & & \\ \frac{1}{1!} |\theta|^a \ln |\theta| & |\theta|^a & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \frac{1}{(n-1)!} |\theta|^a \ln^{n-1} |\theta| \dots \frac{1}{1!} |\theta|^a \ln |\theta| & |\theta|^a \end{pmatrix}.$$

* Это общий вид с точностью до автоморфизмов $F^{-1}C(\theta)F$.

$$|\theta|^L = \begin{pmatrix} |\theta|^A & & & \\ \frac{1}{1!} |\theta|^A B & |\theta|^A & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{(n-1)!} |\theta|^A B^{n-1} & \dots & \frac{1}{1!} |\theta|^A B & |\theta|^A \end{pmatrix},$$

$$|\theta|^B = \begin{pmatrix} |\theta|^a \cos(b \ln |\theta|) & |\theta|^a \sin(b \ln |\theta|) \\ -|\theta|^a \sin(b \ln |\theta|) & |\theta|^a \cos(b \ln |\theta|) \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b \ln |\theta| & 0 \\ 0 & b \ln |\theta| \end{pmatrix}.$$

Итак, чтобы получить общие явные формулы для канонических координат (2), нужно только в силу доказанного предложения найти формулу для радиальной координаты и отбросить зависимую среди величин (5). Эта задача для преобразований (3) с матрицами вида (7) или (8) не трудна: для матриц вида (7) она решена Саковичем в работе [1]. Мы это решение изложим в несколько более общем виде.

При построении функции $\rho(x)$ приходится различать несколько возможных случаев.

Первый случай: определяющая матрица M (или обе матрицы M_p, M_q в случае (8)) диагональна. Тогда принимаем

$$\rho = \text{sign } x_1 \cdot |x_1|^{\frac{1}{a_1}}. \quad (9)$$

Мы можем считать, что $a_1 \neq 0$, если только M не нулевая матрица; иначе, когда $M = 0$, является тривиальным). Подставляя (9) и (7) в (6), получаем

$$\tilde{\varphi}_1 = \text{sign } x_1 = \text{sign } \rho;$$

остальные величины $\tilde{\varphi}_2, \dots, \tilde{\varphi}_n$ независимы от ρ и между собой. Итак, в этом случае мы отбрасываем $\tilde{\varphi}_1$ и принимаем $\varphi_1 = \tilde{\varphi}_2, \dots, \varphi_{n-1} = \tilde{\varphi}_n$.

Второй случай: определяющая матрица M (или одна из матриц M_p, M_q) имеет отличное от нуля собственное число a с соответствующей жордановой клеткой размерности, по крайней мере, 2. Предположим, что эта клетка стоит на первом месте. Тогда принимаем

$$\rho = \text{sign } x_1 e^{\frac{x_2}{x_1} *}. \quad (10)$$

В таком случае $\tilde{\varphi}_2 = 0$, а остальные $\tilde{\varphi}_i$ независимы, так что можно положить $\varphi_1 = \tilde{\varphi}_1, \varphi_2 = \tilde{\varphi}_3, \dots, \varphi_{n-1} = \tilde{\varphi}_n$.

Третий случай: матрица M имеет комплексное собственное число $a + ib$. Принимаем

$$\rho = e^{-\frac{\psi}{b} **}, \quad (11)$$

где $\psi = \arg(x_1 + ix_2)$; угол ψ преобразуется, следовательно, так: $\psi' = \psi - b \ln b \pmod{2\pi}$. В этом случае $\tilde{\varphi}_2 = 0$, а остальные $\tilde{\varphi}_i$ независимы.

* См. также (12).

** Точнее говоря, так определяемое ρ преобразуется не как в (4), но следующим образом (см. (13)):

$$\rho' = |\theta| \rho \pmod{e^{\frac{2\pi}{b}}},$$

($a = b \pmod{c} \Leftrightarrow ab^{-1} = c^k$). Можно показать, что в случае $a=0$ для соответствующей клетке не существует радиальной координаты, удовлетворяющей условию (4) и такой, чтобы отображение (5) было взаимно однозначно. При $a \neq 0$ можно положить $\rho =$

$$= (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2a}}, \text{ и тогда } \rho' = |\theta| \rho.$$

Формулы (9)–(11) важны только для $x_1 \neq 0$. Если же $x_1 = 0$, то функция $\rho(x)$ строится аналогично; x_1 заменяется ближайшей по номеру отличной от нуля координатой x_m . Заметим, что в соответствующих отдельных областях определения этой функции в силу данных формул отображение будет гомеоморфно, но соединение их на всем пространстве R^n (без начала координат) в общем случае не будет гомеоморфизмом. Нетрудно показать, что канонические координаты с гомеоморфизмом (5) во всем пространстве в общем случае не существуют.

2. Теперь мы дадим явные общие формулы для канонических координат в случае многомерных клеток матрицы $|\theta|^M$.

Пусть преобразования (3) имеют вид $x' = |\theta|^S x$, т. е.

$$\begin{aligned} x'_1 &= |\theta|^a x_1, \\ x'_2 &= |\theta|^a (x_1 \ln |\theta| + x_2), \\ x'_3 &= |\theta|^a \left(x_1 \frac{1}{2!} \ln^2 \theta + x_2 \ln |\theta| + x_3 \right), \\ &\dots \dots \dots \\ x'_n &= |\theta|^a \left(x_1 \frac{1}{(n-1)!} \ln^{n-1} |\theta| + \dots + x_{n-1} \ln |\theta| + x_n \right). \end{aligned} \quad (12)$$

Тогда координату ρ строим по формуле (10), и в силу (6) получаем следующие формулы для остальных координат $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}$:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= e^{-\frac{x_2}{x_1}}, \\ \varphi_2 &= e^{-\frac{x_2}{x_1}} \left(x_3 - \frac{1}{2!} \frac{x_2^2}{x_1} \right), \\ \varphi_3 &= e^{-\frac{x_2}{x_1}} \left(x_4 - \frac{x_2}{x_1} x_3 + \frac{2}{3!} \frac{x_2^3}{x_1^2} \right), \\ &\dots \dots \dots \\ \varphi_{n-1} &= e^{-\frac{x_2}{x_1}} \left(x_n + \dots + (-1)^{n-3} \frac{1}{(n-2)!} \left(\frac{x_2}{x_1} \right)^{n-2} x_3 + (-1)^n \frac{n-2}{(n-1)!} \frac{x_2^{n-1}}{x_1^{n-2}} \right). \end{aligned}$$

Если преобразования (3) имеют вид $x' = |\theta|^L x$, т. е.

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 c + x_2 s, \\ x'_2 &= -x_1 s + x_2 c, \\ x'_3 &= x_1 c l + x_2 s l + x_3 c + x_4 s, \\ x'_4 &= -x_1 s l + x_2 c l - x_3 s + x_4 c, \\ &\dots \dots \dots \\ x'_{2n-1} &= \frac{1}{(n-1)!} x_1 c l^{n-1} + \frac{1}{(n-1)!} x_2 s l^{n-1} + \dots + x_{2n-1} c + x_{2n} s, \\ x'_{2n} &= -\frac{1}{(n-1)!} x_1 s l^{n-1} + \frac{1}{(n-1)!} x_2 c l^{n-1} + \dots - x_{2n-1} s + x_{2n} c, \end{aligned} \quad (13)$$

где $c = |\theta|^a \cos(b \ln |\theta|)$, $s = |\theta|^a \sin(b \ln |\theta|)$, $l = b \ln \theta$, то $\rho = e^{-\frac{1}{b} \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_1}}$, а для $\varphi_1, \dots, \varphi_{2n}$ получаем следующие формулы, в которых положено $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ и $\phi = \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_1}$:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= r e^{\frac{2a}{b} \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_1}}, \\ \varphi_2 &= 0, \end{aligned}$$

$$\varphi_1 = \left(-\varphi + \frac{x_1 x_2 + x_2 x_4}{r} \right) e^{\frac{2a}{b} \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_1}},$$

$$\varphi_2 = \frac{x_1 x_3 - x_2 x_5}{r} e^{\frac{2a}{b} \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_1}},$$

$$\varphi_3 = \left(\frac{1}{2} \varphi^2 - \frac{x_1 x_3 + x_2 x_4}{r} + \frac{x_1 x_5 + x_2 x_6}{r} \right) e^{\frac{2a}{b} \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_1}},$$

$$\varphi_4 = -\frac{x_1 x_4 - x_2 x_3}{r} + \frac{x_1 x_6 - x_2 x_5}{r} e^{\frac{2a}{b} \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_1}},$$

$$\dots$$

$$\varphi_{n-1} = \left[\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} r \varphi^{n-1} + (-1)^{n-2} \frac{x_1 x_3 + x_2 x_4}{r} \varphi^{n-2} + \dots + \frac{x_1 x_{2n-1} - x_2 x_{2n}}{r} \right] e^{\frac{2a}{b} \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_1}},$$

$$\varphi_n = \left[(-1)^{n-2} \frac{x_1 x_4 - x_2 x_3}{r} \varphi^{n-2} + \dots + \frac{x_1 x_{2n-1} - x_2 x_{2n-1}}{r} \right] e^{\frac{2a}{b} \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_1}}.$$

ЛИТЕРАТУРА

И. Г. Н. Сакович. Решение одного многомерного функционального уравнения. Укр. матем. журнал, т. XIII, № 2, 1961, 173—189.

Поступила в редколлегию 28 января 1966 г.

КВАЗИТЕТРАЭДРАЛЬНЫЕ КОМПЛЕКСЫ. II

Н. И. Кованцов (Киев)

В первой части работы (см. [1]) были рассмотрены квазитетраэдральные комплексы первого рода, т. е. комплексы, каждый луч которых пересекает заданную четверку поверхностей в четырех точках, составляющих заданное сложное отношение. В общем случае поверхности, о которых идет речь, не являются носителями инфлекционных центров лучей комплекса.

В упомянутой работе повторено одно неверное утверждение, которое было высказано в статье [2] и касалось расслоения комплекса в двупараметрические семейства плоских пучков. Суть заключалась в том, что единственным комплексом, допускающим четырехкратное расслоение в двупараметрические семейства плоских пучков, является будто бы только тетраэдральный комплекс. Это утверждение, основанное на не очень строгих синтетических соображениях, может быть опровергнуто с помощью соответствующих выкладок.

В настоящей работе мы показываем, что комплексы, инфлекционные центры которых описывают четыре поверхности, в общем случае не вырождаются в тетраэдральные комплексы. Они составляют достаточно широкий класс, определяемый шестью функциями одного аргумента. Мы назовем такие комплексы квазитетраэдральными комплексами третьего рода. В работе показывается, что постоянство сложного отношения четверки инфлекционных центров квазитетраэдрального комплекса третьего рода приводит только к тетраэдральному комплексу, что и отмечено в [1] в пункте С.

Наиболее замечательным свойством квазитетраэдральных комплексов третьего рода является то, что каждый из них содержит в каждом своем луче трехпараметрическую совокупность квадратичных комплексов, имеющих с ним касание третьего порядка. Это свойство полностью их характеризует. Следовательно, квазитетраэдральные комплексы третьего рода есть комплексы того класса, который нами рассмотрен в работе [3].

Известно, что если совокупность положений какого-либо инфлекционного центра комплекса вырождается в поверхность, то каждый конус лучей комплекса с вершиной в инфлекционном центре вырождается в плоский пучок, и наоборот [4]. Следовательно, в каждой точке поверхности инфлекционных центров конус вырождается в плоский пучок. В настоящей работе показывается, что каждый такой пучок принадлежит всем соприкасающимся квадратичным комплексам (этим термином мы будем обозначать квадратичные комплексы, имеющие с квазитетраэдральным комплексом касание третьего порядка). Никакие другие пучки прямых, содержащие

луча квазитетраэдрального комплекса, соприкасающимся квадратами комплекса принадлежать не могут.

Почти все выкладки проводятся в каноническом тетраэдре [4]. Почти все результаты, приводимые в настоящей работе, относятся к третьей инфлекционной окрестности луча. Через фундаментальную аналогию [4] эти результаты можно определенным образом интерпретировать в терминах геометрии гиперповерхности четырехмерного псевдоконформного пространства, в частности, в терминах, связанных с соприкасающимися циклами гиперповерхности (см. [5]).

§ 1. Основные уравнения

Приведем прежде всего деривационные уравнения произвольного комплекса в трехмерном проективном пространстве, отнесенного к его каноническому тетраэдру [4]:

$$dA_i = \omega_i^j A_j, \quad (1.1)$$

где линейные формы ω_i^j удовлетворяют уравнениям структуры проективного пространства

$$D\omega_i^j = [\omega_i^k \omega_k^j] \quad (1.2.)$$

и следующим линейным соотношениям:

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= \left(P' + \frac{1}{2}\right) \omega_2^3 + \alpha \left(R' + \frac{1}{2}\right) \omega_1^4, \\ \omega_2^1 &= \left(Q' + \frac{1}{2}\right) \omega_1^4 + \alpha \left(S' + \frac{1}{2}\right) \omega_2^3, \\ \omega_3^4 &= \left(P' - \frac{1}{2}\right) \omega_2^3 + \alpha \left(R' - \frac{1}{2}\right) \omega_1^4, \\ \omega_4^3 &= \left(Q' - \frac{1}{2}\right) \omega_1^4 + \alpha \left(S' - \frac{1}{2}\right) \omega_2^3, \\ \omega_1^1 &= -\omega_4^4 = -\frac{1}{8} s' \omega_2^3 - \frac{1}{8} b' \omega_1^4 + \frac{\alpha}{2} (3Q - P) \omega_2^4, \\ \omega_2^2 &= -\omega_3^3 = -\frac{1}{8} r' \omega_1^4 - \frac{1}{8} a' \omega_2^3 - \frac{\alpha}{2} (3P - Q) \omega_2^4, \\ da &= \frac{1}{2} [\alpha(a+s) - 2r] \omega_2^3 + \frac{1}{2} [\alpha(b+r) - 2s] \omega_1^4 + [(\alpha^2 - 1)(P - Q) - k] \omega_2^4, \\ \omega_1^3 + \omega_2^4 &= 0, \\ \omega_3^1 + \omega_4^2 &= k \omega_2^4, \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} P' &= \frac{1}{2(1-\alpha^2)} [-(1-3\alpha^2)P + (1+\alpha^2)Q], \quad a' = 3a + s, \\ Q' &= \frac{1}{2(1-\alpha^2)} [-(1-3\alpha^2)Q + (1+\alpha^2)P], \quad b' = 3b + r, \\ R' &= \frac{1}{2(1-\alpha^2)} [(1+\alpha^2)P + (3-\alpha^2)Q], \quad s' = 3s + a, \\ S' &= \frac{1}{2(1-\alpha^2)} [(1+\alpha^2)Q + (3-\alpha^2)P], \quad r' = 3r + b. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Инфлекционные центры определяются следующим уравнением четвертой степени:

$$t^4 - 2\alpha t^2 + 1 = 0. \quad (1.5)$$

Дифференцируя (1.5), найдем

$$dt = \frac{t}{2(t^2 - \alpha)} d\alpha. \quad (1.6)$$

Потребуем, чтобы каждый инфлекционный центр

$$I = A_1 + tA_2 \quad (1.7)$$

описывал поверхность, что соответствует квазитетраэдральному комплексу третьего рода. Для этого достаточно потребовать, чтобы в равенстве

$$dI = (\omega_1^1 + t\omega_2^1)I + [dt + \omega_1^2 + t(\omega_2^2 - \omega_1^1) - t^2\omega_2^1]A_2 + \\ + (\omega_1^3 + t\omega_2^3)A_3 + (\omega_1^4 + t\omega_2^4)A_4 \quad (1.8)$$

формы

$$dt + \omega_1^2 + t(\omega_2^2 - \omega_1^1) - t^2\omega_2^1, \\ \omega_1^3 + t\omega_2^3, \quad \omega_1^4 + t\omega_2^4 \quad (1.9)$$

были линейно зависимыми. Это возможно лишь тогда, когда внешнее произведение этих форм равно нулю, а так как внешнее произведение базисных форм комплекса $[\omega_2^3\omega_1^4\omega_2^1]$ отлично от нуля, то становится равным нулю коэффициент при последнем произведении:

$$\frac{1}{2}[\alpha(a+s) - 2r]t - \frac{1}{2}[\alpha(b+r) - 2s]t^3 + [(\alpha^2 - 1)(P - Q) - k]t^2 + \\ + (2t^2 - 2\alpha)\left[P' + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}t(s-a) - t^2\alpha\left(S' + \frac{1}{2}\right) - \right. \\ \left. - t^2\alpha\left(R' + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}t^3(r-b) + t^4\left(Q' + \frac{1}{2}\right) - t^2\alpha(P+Q)\right] = 0. \quad (1.10)$$

Получили некоторое уравнение 6-й степени. Представив t^6 и t^5 в виде $t^4 \cdot t^2$ и $t^4 \cdot t$, заменим затем t^4 значением $2\alpha t^2 - 1$, которое найдем из (1.5). Придем к уравнению 4-й степени, в котором снова заменим t^4 на $2\alpha t^2 - 1$, получим следующее кубическое уравнение:

$$\frac{1}{2}(3s - a - 2ab)t^3 + [(\alpha^2 - 3)(P - Q) - k - 4\alpha^2(P + 2Q)]t^2 - \\ - \frac{1}{2}(3r - b - 2\alpha a)t + 2\alpha(P + Q) = 0. \quad (1.11)$$

Оговоримся, что мы рассматриваем сейчас лишь комплексы с различными инфлекционными центрами. Поскольку полученное кубическое уравнение должно удовлетворяться координатами всех четырех инфлекционных центров, то все его коэффициенты должны обращаться в нуль:

$$3s - a - 2ab = 0, \quad 3r - b - 2\alpha a = 0, \\ (\alpha^2 - 3)(P - Q) = 0, \quad k = -6(1 - \alpha^2)P.$$

Приведенные равенства равносильны следующим:

$$3s = a + 2ab, \quad 3r = b + 2\alpha a, \\ P + Q = 0, \quad k = -6(1 - \alpha^2)P. \quad (1.12)$$

Это в точности совпадает с равенствами (26) работы [3], что позволяет нам высказать следующее предложение:

Квазитетраэдральными комплексами третьего рода являются те и только те комплексы, которые допускают в каждом луче трехпараметрическую совокупность соприкасающихся квадратичных комплексов.

Как отмечалось в [3], класс таких комплексов существует с произволом в шесть функций одного аргумента.

§ 2. Тетраэдральные комплексы

Потребуем, чтобы квазитетраэдральный комплекс третьего рода был одновременно и квазитетраэдральным второго рода, т. е. чтобы сложное отношение четверки инфлекционных центров было постоянно. В работе [4] в каноническом тетраэдре сложное отношение четверки инфлекционных центров определялось равенством

$$W = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} \quad (2.1)$$

(см. равенство (5.66) упомянутой работы). Поскольку сейчас $W = \text{const}$, то и $\alpha = \text{const}$. Из равенств (1.3) мы немедленно находим

$$2r = \alpha(a + s), \quad 2s = \alpha(b + r), \quad k = (\alpha^2 - 1)(P - Q). \quad (2.2)$$

Присоединяя сюда равенства (1.12), получаем

$$a = b = r = s = 0, \quad P = Q = k = 0, \quad (2.3)$$

а это характеризует только тетраэдральные комплексы. Таким образом, единственным комплексом, который одновременно является квазитетраэдральным комплексом второго и квазитетраэдральным комплексом третьего рода, является тетраэдральный комплекс.

Напомним, что в случае тетраэдрального комплекса каждая поверхность инфлекционных центров вырождается в плоскость — грань базисного тетраэдра, каждый же инфлекционный пучок с центром в этой плоскости располагается в плоскости, которая проходит через фиксированную точку — вершину того же базисного тетраэдра. В случае произвольного квазитетраэдрального комплекса третьего рода будем иметь два разных тетраэдра — тетраэдр, образованный касательными плоскостями к поверхностям инфлекционных центров, и тетраэдр, образованный характеристическими точками плоскостей инфлекционных пучков. Найдем эти тетраэдры.

В силу линейной зависимости форм (1.9) имеем

$$dt + \omega_1^2 + t(\omega_2^3 - \omega_1^3) - t^2\omega_2^1 = \lambda(\omega_1^3 + t\omega_2^3) + \mu(\omega_1^4 + t\omega_2^4). \quad (2.4)$$

Сопоставляя коэффициенты при формах ω_2^3 , ω_1^4 , ω_2^4 , найдем множители λ и μ :

$$\lambda = \frac{1}{6}(bt^2 - a) + \frac{1}{t}\left(-P + \frac{1}{2}\right) - \alpha t\left(P + \frac{1}{2}\right), \quad (2.5)$$

$$\mu = \frac{1}{6t}(bt^2 - a) - t^2\left(P + \frac{1}{2}\right) + \alpha\left(-P + \frac{1}{2}\right). \quad (2.6)$$

Касательная плоскость к поверхности инфлекционных центров определяется тремя неколлинеарными точками

$$A_1 + tA_2, \quad A_3 + \lambda A_2, \quad A_4 + \mu A_2, \quad (2.7)$$

ее тангенциальные координаты есть

$$\sigma = (A_1 A_3 A_4) + \mu(A_1 A_3 A_2) + \lambda(A_1 A_2 A_4) + t(A_2 A_3 A_4), \quad (2.8)$$

или

$$\sigma = -\frac{1}{2}(\alpha - t^2)(A_1 A_2, A_3 - tA_4) + (A_1 + tA_2, A_3 A_4) + \\ + \frac{1}{6}(a - bt^2)(A_1 A_2, A_3 - tA_4) + P\left(A_1 A_2, (\alpha + t^2)A_3 - \frac{1}{t}(1 + \alpha t^2)A_4\right) \quad (2.9)$$

Подставляя вместо t координаты четырех инфлекционных центров луча, получим четыре грани некоторого тетраэдра. Назовем его тетраэдром первого рода квазитетраэдрального комплекса.

Плоскость, которая соответствует инфлекционному центру I в нормальной корреляции на луче комплекса, определяется следующими тангенциальными координатами:

$$\Pi = (A_1 A_2 A_3) + t(A_1 A_2 A_4). \quad (2.10)$$

Если инфлекционный центр остается неподвижным, то все формы (1.9) обращаются в нуль. Легко показать, что в этом случае неподвижной оказывается и плоскость Π , следовательно, конус лучей с вершиной в инфлекционном центре вырождается в плоскость. Этого, конечно, и следовало ожидать, так как при вырождении пространства инфлекционных центров в поверхность конусы с вершинами в инфлекционных центрах необходимо вырождаются в плоскости (см. [4]).

Если инфлекционный центр перемещается по поверхности инфлекционных центров, то плоскость Π , несущая инфлекционный пучок, будет огибать некоторую поверхность. Точку прикосновения на такой поверхности мы найдем из равенства

$$d\Pi = (\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 + t\omega_4^4) \Pi + [dt + \omega_3^4 + t(\omega_4^4 - \omega_3^3) - t^2\omega_4^3] (A_1 A_2 A_4) + (\omega_1^1 + t\omega_2^2) (A_1 A_3 A_4) + (\omega_1^1 + t\omega_2^2) (A_4 A_2 A_3). \quad (2.11)$$

Поскольку, однако,

$$dt + \omega_3^4 + t(\omega_4^4 - \omega_3^3) - t^2\omega_4^3 = \\ = dt + \omega_1^2 + t(\omega_2^2 - \omega_1^1) - t^2\omega_2^1 - (\alpha - t^2)(t(\omega_1^3 + t\omega_2^3) + \omega_1^4 + t\omega_2^4),$$

то

$$d\Pi = (\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 + t\omega_4^4) \Pi + ((A_1 A_3 A_4) + (\lambda - \alpha t + t^3)(A_1 A_2 A_4))(\omega_1^3 + t\omega_2^3) + ((A_4 A_2 A_3) + (\mu - \alpha + t^2)(A_1 A_2 A_4))(\omega_1^4 + t\omega_2^4). \quad (2.12)$$

Отсюда видно, что характеристическая точка (точка прикосновения) определится как общая точка трех плоскостей:

$$(A_1 A_2 A_3) + t(A_1 A_2 A_4), \\ (A_1 A_3 A_4) + (\lambda - \alpha t + t^3)(A_1 A_2 A_4), \\ (A_4 A_2 A_3) + (\mu - \alpha + t^2)(A_1 A_2 A_4).$$

Координаты такой точки есть

$$\Sigma = (-\mu + \alpha - t^2) A_1 + (\lambda - \alpha t + t^3) A_2 + A_3 + t A_4,$$

или

$$\Sigma = \frac{1}{2}(\alpha - t^2)(A_1 - t A_2) + (A_3 + t A_4) + \\ + \frac{1}{6t}(\alpha - b t^2)(A_1 - t A_2) + P \left((\alpha + t^2) A_1 - \frac{1}{t}(1 + \alpha t^2) A_2 \right). \quad (2.13)$$

Придавая t значения четырех координат инфлекционных центров луча, получим второй тетраэдр, который назовем тетраэдром второго рода квазитетраэдрального комплекса.

Легко заметить, что в общем случае вершины тетраэдра второго рода не принадлежат граням тетраэдра первого рода. Действительно, взяв два

или-либо инфлекционных центра с координатами t_1, t_2 , будем иметь

$$\begin{aligned} \sigma \Sigma &= -\frac{1}{2}(2\alpha - t_1^2 - t_2^2)(t_1 + t_2), \\ \frac{1}{\alpha_1 t_2}(t_2 - t_1)(t_2 + t_1)(a + b t_1 t_2) + \frac{P}{t_1 t_2}(t_2 - t_1)(1 - t_1^2 t_2^2). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Отсюда видно, что если $t_1 = t_2$, то

$$\sigma \Sigma = 2t_1(-\alpha + t_1^2) = \pm 2t_1 \sqrt{\alpha^2 - 1} \neq 0.$$

Если же $t_1 \neq t_2$, то

$$\sigma \Sigma = \frac{1}{\alpha_1 t_2}(t_2 - t_1)(t_2 + t_1)(a + b t_1 t_2) + \frac{P}{t_1 t_2}(t_2 - t_1)(1 - t_1^2 t_2^2) \quad (2.15)$$

определяет учесть уравнение (1.5), определяющее инфлекционные центры).

Для инфлекционных корней, определяемых уравнением (1.5), справедливо одно из следующих трех равенств:

$$t_1 + t_2 = 0, \quad t_1 t_2 = 1, \quad t_1 t_2 = -1.$$

Внося их последовательно в равенство (2.15), приходим к соотношениям

$$P = 0, \quad a + b = 0, \quad a - b = 0,$$

т. е. $a = b = P = 0$, а это характеризует тетраэдральные комплексы.

Таким образом, тетраэдры второго рода совпадают с тетраэдрами первого рода только у тетраэдральных комплексов.

§ 3. Соприкасающиеся квадратичные комплексы

Трехпараметрическая совокупность соприкасающихся квадратичных комплексов, как это следует из соответствующих уравнений работы [3], определяется следующим уравнением в плюккеровых координатах:

$$\begin{aligned} &2(p^{12}p^{14} - p^{12}p^{23}) + (p^{23})^2 + (p^{24})^2 - 2\alpha p^{24}p^{13} - 2\psi p^{14}p^{23} - \\ & - \frac{2}{3}(p^{13}p^{14} - p^{13}p^{23}) - \frac{2}{3}b(p^{24}p^{23} - p^{24}p^{14}) + \nu(p^{34})^2 + \\ & + 2\left(\varphi - \frac{1}{6}k\right)p^{23}p^{34} + 2\left(\varphi + \frac{1}{6}k\right)p^{14}p^{43} + (\psi + 4\alpha P)(p^{14})^2 + \\ & + (\psi - 4\alpha P)(p^{23})^2 = 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь ψ, ν, φ — параметры. Покажем, что каждый из четырех инфлекционных пучков принадлежит всем соприкасающимся квадратичным комплексам.

Действительно, каждая прямая, принадлежащая инфлекционному пучку, определяется двумя точками — самим инфлекционным центром $I = A_1 + tA_2$ и какой-либо второй точкой, принадлежащей плоскости инфлекционного пучка $(A_1, A_2, A_3) + t(A_1, A_2, A_4)$, например точкой $S = A_3 + tA_4 + \rho A_2$ (ρ — параметр, определяющий положение прямой, принадлежащей инфлекционному пучку). Плюккерovy координаты прямой есть

$$p^{12} = \rho, \quad p^{13} = 1, \quad p^{14} = t, \quad p^{23} = t, \quad p^{24} = t^2, \quad p^{34} = 0.$$

Подставляя это в уравнение (3.1), обнаружим, что это уравнение удовлетворяется при любых значениях параметров ψ, ν, φ, ρ , а это и доказывает утверждение.

Заметим, что если взять пучок прямых в плоскости, содержащей луч комплекса, то всем соприкасающимся квадратичным комплексам из прямых пучка может принадлежать только этот луч (если пучок не инфлекционный).

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. И. Кованцов. Квазитетраэдральные комплексы. I. Укр. геометр. сб., № 1, 1965.
2. Н. И. Кованцов. Квазиспециальные комплексы. Матем. сб. т. 41 (83), № 3, 1957.
3. Н. И. Кованцов. Соприкасающийся квадратичный комплекс. Укр. матем. журнал, т. 16, № 2, 1964.
4. Н. И. Кованцов. Теория комплексов. Издательство Киевского университета, Киев, 1963.
5. М. А. Акивис. Инвариантное построение гиперповерхности конформного пространства. Матем. сб. № 31, № 1, 1952.

Поступила в редколлегию 13 июня 1966 г.

ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКОЕ СВОЙСТВО ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ

Н. П. Макуха (Харьков)

Пусть x и y — точки поверхности F . Под расстоянием $\rho(x, y)$ между точками x и y понимается точная нижняя грань длин соединяющих их дуг, лежащих на поверхности F .

Внутренним диаметром поверхности F называется точная верхняя грань расстояний между точками поверхности F .

А. Д. Александров в монографии [1] сформулировал следующую задачу: среди всех замкнутых выпуклых поверхностей данного внутреннего диаметра найти поверхность наибольшей площади. Им же высказано предположение, что этой поверхностью является дважды покрытый круг.

В настоящей заметке эта задача решается для поверхностей вращения.

Теорема. Среди поверхностей вращения, гомеоморфных сфере, со спрямляемыми меридианами при данном внутреннем диаметре наибольшую площадь имеет дважды покрытый круг.

Лемма 1. На поверхности вращения, гомеоморфной сфере, со спрямляемыми меридианом внутренний диаметр достигается между полюсами по меридиану.

Докажем лемму для регулярного случая, а затем предельным переходом распространим на поверхности вращения со спрямляемыми меридианами.

Доказательство. Пусть F — поверхность вращения со спрямляемым меридианом, гомеоморфная сфере. Пусть через точки A и B данной поверхности проходит ось вращения. Докажем, что расстояние между точками A и B не меньше расстояния между двумя произвольно выбранными точками этой же поверхности.

Пусть внутренний диаметр поверхности F достигается между точками C и D . Проведем меридианы поверхности вращения, проходящие через точки C и D . Покажем, что меридианы поверхности F будут кратчайшими между полюсами этой же поверхности. Построим последовательность регулярных поверхностей вращения $\{F_i\}$, сходящуюся к поверхности F . Известно из [2], что меридианы регулярной поверхности вращения являются кратчайшими. Так как меридиан поверхности F — спрямляемая дуга, а меридианы поверхностей $\{F_i\}$ — кратчайшие кривые, то по теореме о пределе последовательности кратчайших меридиан поверхности F будет кратчайшей.

Справедливы неравенства

$$\rho(CD) \leq \rho(CA) + \rho(AD),$$

$$\rho(CD) \leq \rho(CB) + \rho(BD).$$

Отсюда

$$\rho(CD) \leq \frac{1}{2} \{ \rho(AC) + \rho(CB) + \rho(AD) + \rho(DB) \}.$$

Но

$$\rho(AC) + \rho(CB) = \rho(AB),$$

$$\rho(AD) + \rho(DB) = \rho(AB).$$

Следовательно,

$$\rho(CD) \leq \rho(AB).$$

Так как кратчайшая $\gamma(CD)$ есть внутренний диаметр, следовательно, и кратчайшая $\gamma(AB)$ — меридиан поверхности вращения — тоже внутренний диаметр поверхности вращения F .

Доказательство теоремы. Рассмотрим поверхность вращения F , гомеоморфную сфере, меридианом которой служит спрямляемая кривая длины d . Для указанных поверхностей вращения по теореме Гюльдена площадь поверхности вычисляется по формуле $S(F) = 2\pi dr$, где r — расстояние центра тяжести меридиана до оси вращения, а d — длина меридиана. Очевидно, что площадь поверхности вращения при данном внутреннем диаметре достигает наибольшего значения при наибольшем r , которое будет максимальным в случае вырождения меридиана в дважды покрытый отрезок. Этим теорема доказана.

Пусть поверхность F обладает тем свойством, что на ней существует пара точек A и B таких, что они соединяются на поверхности F кратчайшей заданной длины d в любом направлении, кроме, быть может, множества направлений угловой меры нуль. Тогда внутренний диаметр этой поверхности F достигается между точками A и B .

Доказательство этого утверждения проводится аналогично доказательству леммы 1.

Отметим, что среди поверхностей данного внутреннего диаметра, гомеоморфных сфере, сфера не заключает максимального объема.

Построим следующий пример. Возьмем сферу F внутреннего диаметра d , пусть прямая AB — ее ось вращения. Построение новой поверхности F_1 будем делать симметрично относительно экваториальной плоскости. Заменим шаровой сегмент достаточно малой высоты, которая направлена по оси вращения, его основанием. При этом внутренний диаметр уменьшится на некоторую малую величину, зависящую от высоты сегмента. Теперь шаровой пояс, прилежащий к экватору, заменим таким усеченным конусом, чтобы внутренний диаметр полученного тела вращения F_1 был равен d . Подсчитав объемы отрезанных сегментов и объем добавленной части, полученной при замене шарового пояса усеченным конусом, увидим, что построенное тело F_1 имеет больший объем, чем шар.

Заметим, что тело максимального объема должно обладать следующим свойством: через окрестность произвольно выбранной точки поверхности F , ограничивающей это тело, проходит бесчисленное множество внутренних диаметров. Иначе, объем тела можно увеличить, не увеличивая внутреннего диаметра.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Д. Александров. Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей. Гостехиздат, М.—Л., 1948.
2. В. Ф. Каган. Основы теории поверхностей. Гостехиздат, М.—Л., 1947.

Поступила в редколлегию 27 мая 1966 г.

ТЕОРЕМЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ БЕСКОНЕЧНЫХ ВЫПУКЛЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ СО СФЕРИЧЕСКИМ ИЗОБРАЖЕНИЕМ, МЕНЬШИМ ПОЛУСФЕРЫ

А. И. Медяник (Харьков)

Пусть даны две бесконечные выпуклые поверхности F_1 и F_2 с одним и тем же сферическим изображением. Соответствующими точками поверхностей F_1 и F_2 назовем точки, в которых внешние нормали поверхностей параллельны, т. е. точки, имеющие одно и то же сферическое изображение.

Будем считать, что поверхности F_1 и F_2 допускают сильное внутреннее касание, если после совмещения параллельным переносом точек с нормальными им, их опорные функции $H_1(n)$ и $H_2(n)$ в некоторой окрестности общей точки удовлетворяют неравенству

$$|H_1(n) - H_2(n)| > c(n - n_0)^2 \quad (n \neq n_0, c = \text{const} > 0).$$

А. В. Погорелов доказал общую теорему единственности для n -мерных бесконечных выпуклых поверхностей со сферическим изображением, помещающихся строго внутри полусферы [1].

В статье [2] были доказаны теоремы единственности для бесконечных выпуклых поверхностей со сферическим изображением, заполняющим полусферу.

Таким образом, остался невыясненным случай, когда сферическое изображение меньше полусферы, но не помещается строго внутри полусферы. В настоящей статье он и будет рассмотрен.

Сначала докажем теорему для трехмерного евклидова пространства.

Теорема 1. Пусть F_1 и F_2 — бесконечные строго выпуклые поверхности трехмерного евклидова пространства, сферические изображения которых меньше полусферы, но не помещаются строго внутри полусферы. Пусть L — граница сферического изображения.

Если для опорных функций $H_1(n)$ и $H_2(n)$ поверхностей F_1 и F_2 выполняется условие

$$\lim_{n \rightarrow n^* \in L} [H_1(n) - H_2(n)] = 0, \quad (1)$$

то поверхности F_1 и F_2 либо совпадают, либо допускают сильное внутреннее касание.

Доказательство. Поскольку сферическое изображение бесконечной выпуклой поверхности выпукло [3], то сферическое изображение F_1 и F_2 помещается в некоторой полусфере. Обозначим n_0 ее полюс. Можно считать, что сферическое изображение F_1 и F_2 имеет лишь две общие точки с границей полусферы с полюсом n_0 .

Введем прямоугольные декартовы координаты x, y, z , поместив начало координат в центре единичной сферы, на которой строится сферическое изображение, и направив ось z по вектору $\mathbf{n}_0$.

Рассмотрим поверхность Φ , задаваемую в этой системе координат уравнением

$$z = h(x, y) = H_1(x, y, 1) - H_2(x, y, 1). \quad (2)$$

Если некоторая плоскость отсекает от Φ конечную часть, граница которой лежит внутри Φ , то поверхности F_1 и F_2 допускают сильное внутреннее касание [4].

Поэтому предположим, что никакая плоскость не отсекает от Φ конечной части, граница которой не содержит граничных точек самой поверхности.

Обозначим G область определения функции $h(x, y)$. Так как G получается центральным проектированием сферического изображения F_1 и F_2 на плоскость $z = 1$, а затем параллельным проектированием на плоскость $z = 0$, то G — это полоса между двумя параллельными прямыми.

Продолжим функцию $h(x, y)$ на всю плоскость x, y , положив

$$z = h^*(x, y) = \begin{cases} h(x, y), & \text{если точка } (x, y) \in G \\ 0, & \text{если точка } (x, y) \notin G. \end{cases} \quad (3)$$

Функция $h^*(x, y)$ непрерывна, что следует из равенства опорных функций F_1 и F_2 на границе сферического изображения.

Пусть Φ^* — поверхность, задаваемая уравнением (3) Φ^* является поверхностью обобщенной отрицательной кривизны. Действительно, по предположению от Φ нельзя отрезать конечной части. Но так как область G выпукла, то от Φ^* никакой плоскостью также нельзя отрезать конечной части, потому что в противном случае последней принадлежали бы только точки Φ , что противоречит предположению.

Для Φ^* выполняется также условие

$$\lim_{x^2+y^2 \rightarrow \infty} \frac{h^*(x, y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0, \quad (4)$$

так как, если точка $(x, y) \in G$ стремится к границе области G , то

$$\frac{h(x, y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \rightarrow 0.$$

Итак, для поверхности Φ^* обобщенной отрицательной кривизны выполняется условие (4). По теореме С. Н. Бернштейна [5,6] Φ^* является цилиндрической поверхностью, образующие которой параллельны плоскости x, y . Поэтому поверхность Φ также является цилиндрической поверхностью с образующими параллельными плоскости x, y . Точке (x, y, z) поверхности Φ поставим в соответствие точку единичной полусферы $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$ ($Z \geq 0$) с координатами

$$X = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+1}}, \quad Y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+1}}, \quad Z = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+1}}. \quad (5)$$

При отображении (5) прямолинейным образующим поверхности Φ соответствуют большие полуокружности единичной полусферы $Z \geq 0$. Действительно, если проекция образующей L_p на плоскость x, y имеет уравнение $y = kx + p$, то этой образующей соответствует большой полуокруг S_p , являющийся пересечением единичной полусферы $Z \geq 0$ и плоскости $kx - y - pz = 0$.

Так как вдоль образующей L_p функция, задающая Φ , постоянна, то вдоль S_p разность опорных функций $H_1(\mathbf{n})$ и $H_2(\mathbf{n})$ линейна. Действи-

не теряя общности, можно считать, что образующие Φ параллельны оси x . Пусть на L_p имеет место равенство

$$H_1(x, y, 1) - H_2(x, y, 1) = c_p. \quad (6)$$

После замены (5), если воспользоваться положительной однородностью опорных функций $H_1(n)$ и $H_2(n)$, равенство (6) приводится к виду

$$H_1(n) - H_2(n) = c_p Z, \quad n \in S_p. \quad (7)$$

Из последнего равенства и следует, что на S_p разность опорных функций $H_1(n)$ и $H_2(n)$ линейна. Так как образующие Φ параллельны оси x , то c_p есть некоторая функция только от переменной y . Пусть это будет функция $f(y)$. В новых переменных, задаваемых уравнениями (5), эта функция будет иметь вид $f\left(\frac{Y}{Z}\right)$. Поэтому равенство (7) можно переписать так:

$$H_1(n) - H_2(n) = f\left(\frac{Y}{Z}\right) Z. \quad (8)$$

Из строгой выпуклости поверхностей F_1 и F_2 вытекает непрерывность производной

$$\frac{\partial [H_1(x, y, z) - H_2(x, y, z)]}{\partial z}, \quad (9)$$

так как геометрический смысл этой производной — разность координат z соответствующих точек поверхностей F_1 и F_2 .

Вычислим эту производную, воспользовавшись формулой (8),

$$\frac{\partial [H_1(x, y, z) - H_2(x, y, z)]}{\partial z} = f\left(\frac{y}{z}\right) - f\left(\frac{y}{z}\right) \cdot \frac{y}{z}. \quad (10)$$

Из формулы (7) видно, что производная в той же точке, если к ней приближаться по дуге большого полуокружности S_p , равна

$$\frac{\partial [H_1(x, y, z) - H_2(x, y, z)]}{\partial z} = c_p. \quad (11)$$

Из сравнения формул (10) и (11), принимая во внимание, что $c_p = f\left(\frac{y}{z}\right)$, получаем

$$f\left(\frac{y}{z}\right) = 0,$$

$$f\left(\frac{y}{z}\right) = c.$$

Но так как на границе сферического изображения опорные функции поверхностей F_1 и F_2 равны, то $c = 0$. Значит,

$$H_1(n) = H_2(n),$$

т. е. поверхности F_1 и F_2 совпадают.

Теорема 2. Пусть F_1 и F_2 — бесконечные выпуклые гиперповерхности n -мерного евклидова пространства, сферическое изображение которых сферического и помещается в полусфере с полюсом n_0 . Пусть L — граница сферического изображения, не помещающаяся строго внутри полусферы.

Если для опорных функций $H_1(n)$ и $H_2(n)$ поверхностей F_1 и F_2 выполняется условие

$$\lim_{n \rightarrow n^* \in L} \frac{H_1(n) - H_2(n)}{nn_0} = 0, \quad (12)$$

то поверхности F_1 и F_2 либо совпадают, либо допускают сильное внутреннее касание.

Доказательство. Введем прямоугольные координаты $x_1, x_2, \dots, x_n$, поместив их начало в центр сферы, на которой строится сферическое изображение, и приняв за положительное направление оси x_n вектор $\mathbf{n}_0$. Рассмотрим поверхность Φ , задаваемую в выбранной системе координат уравнением

$$x_n = H_1(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 1) - H_2(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 1). \quad (13)$$

Из условия (12) получаем

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{n \rightarrow n^* \in L \\ (x) \rightarrow L'}} \frac{H_1(n) - H_2(n)}{nn_0} &= \lim_{n \rightarrow n^* \in L} \frac{H_1(n) - H_2(n)}{x_n} = \\ &= \lim_{(x) \rightarrow L'} [H_1(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 1) - H_2(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 1)] = 0, \end{aligned} \quad (14)$$

где L' — граница поверхности Φ .

Из равенства (14) следует, что край поверхности Φ лежит в одной плоскости. Поэтому, если поверхности F_1 и F_2 не допускают сильного внутреннего касания, то от Φ никакой плоскостью нельзя отрезать конечной части, значит, вся поверхность Φ лежит в одной плоскости, т. е. Φ есть часть плоскости $x_n = 0$. А отсюда уже следует, что поверхности F_1 и F_2 совпадают.

Для регулярных бесконечных выпуклых поверхностей имеет место следующая теорема.

Теорема 3. Пусть F_1 и F_2 — регулярные бесконечные выпуклые поверхности n -мерного евклидова пространства, удовлетворяющие условиям:

а) обе поверхности имеют сферическим изображением одну и ту же область G , помещающуюся в полусфере с полюсом $\mathbf{n}_0$, причем граница L области G не помещается строго внутри полусферы;

б) для опорных функций $H_1(\mathbf{n})$ и $H_2(\mathbf{n})$ поверхностей F_1 и F_2 выполняются условия

$$\lim_{n \rightarrow n^* \in L} [H_1(n) - H_2(n)] = 0 \quad \text{для } n = 3;$$

$$\lim_{n \rightarrow n^* \in L} \frac{H_1(n) - H_2(n)}{nn_0} = 0 \quad \text{для } n > 3;$$

в) индикатрисы Дюпена в точках с параллельными внешними нормальными не помещаются одна строго внутри другой параллельным переносом.

тогда поверхности F_1 и F_2 совпадают.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Погорелов. Одна общая теорема единственности для бесконечных выпуклых поверхностей. ДАН СССР, 65, № 2 (1949), 131—133.
2. А. И. Медяник. Некоторые теоремы единственности для выпуклых поверхностей, находящихся в соответствии по параллельности внешних нормалей. Укр. геометр. сб. вып. 1. Изд-во ХГУ, Харьков, 1965, 58—61.
3. А. Д. Александров, А. В. Погорелов. Однозначная определенность выпуклых поверхностей вращения. Матем. сб., 26(68):2(1950), 185.
4. А. В. Погорелов. Одно общее характеристическое свойство шара. УМН, XI:5 (71) (1956) 203—206.
5. С. Н. Бернштейн. Усиление теоремы о поверхностях отрицательной кривизны. Уч. зап. Ленинградск. ун-та, сер. матем., 15. Изд-во ЛГУ, 1948, 75—81.
6. Г. М. Адельсон-Вельский. Обобщение одной геометрической теоремы С. Н. Бернштейна. ДАН СССР, 49, № 6 (1945) 399—401.

Поступила в редколлегию 27 марта 1966 г.

О КРИВЫХ С ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИЕЙ ПОВОРОТА НА ВЫПУКЛЫХ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЯХ

А. Д. Милка (Харьков)

В данной работе изучаются кривые с ограниченной вариацией поворота на выпуклых гиперповерхностях в E_n , где $n > 3$. Эти кривые определяются по аналогии с кривыми ограниченной вариации поворота в пространстве [1; 2, гл. II].

Работа является продолжением статьи [3].

§ 1. Свойства вариации поворота кривой

Под кривой будем понимать непрерывный и однозначный образ некоторого отрезка в пространстве.

Пусть F — выпуклая гиперповерхность, L — кривая на F . Впишем в кривую L ломаную C , составленную из конечного числа кратчайших на поверхности (геодезическую ломаную). Вершины ломаной разбивают кривую L на конечное число открытых связных компонент. Пусть d_c — максимальный из диаметров этих компонент, рассматриваемых как множества на поверхности. Легко видеть, что существуют вписанные в L ломаные C , для которых значение d_c сколь угодно мало. Пусть $\bar{\omega}(C)$ — сумма дополнений до π углов при внутренних вершинах ломаной C (углы измеряются на поверхности). Определим вариацию поворота кривой L как предел

$$\omega(L) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{C: d_c < \delta} \bar{\omega}(C).$$

Если этот предел конечен, то L будем называть кривой с ограниченной вариацией поворота на поверхности.

Из теоремы о неналегании кратчайших, леммы 3 и теоремы 11 работы [3], следует, что вариация поворота геодезической ломаной C на поверхности равна $\bar{\omega}(C)$, т. е. $\omega(C) = \bar{\omega}(C)$.

Можно дать и другое определение кривой с ограниченной вариацией поворота на выпуклой гиперповерхности: считать кривую L кривой с ограниченной вариацией поворота на поверхности, если величины $\omega(C)$ равномерно ограничены по всем геодезическим ломаным, вписанным в L . Мы принимаем первое определение, как менее жесткое. Позже, однако, будет показано, что эти два определения эквивалентны.

Пусть L — кривая с ограниченной вариацией поворота на F . Тогда, очевидно, для любого положительного числа ε можно указать число $\delta > 0$ такое, что вариация поворота каждой вписанной в L ломаной C , у которой $d_c < \delta$, удовлетворяет неравенству

$$\omega(C) \leq \omega(L) + \varepsilon,$$

причем для некоторых из этих ломаных

$$\omega(C) \geq \omega(L) - \varepsilon.$$

Приведем некоторые свойства кривых с ограниченной вариацией поворота на выпуклой гиперповерхности. Эти свойства в основном совпадают со свойствами кривых с ограниченной вариацией поворота в пространстве.

Теорема 1. *Кривая с ограниченной вариацией поворота на выпуклой гиперповерхности имеет в каждой точке справа (соответственно слева) определенное направление.*

Доказательство. Допустим, что утверждение теоремы неверно и на выпуклой гиперповерхности F найдется кривая L с ограниченной вариацией поворота, которая в точке O справа не имеет определенного направления. Тогда существует последовательность точек $X_n \in L$, сходящихся к точке O справа, такая, что длины кратчайших OX_{n+1} и OX_n на поверхности связаны неравенством $OX_{n+1} < OX_n/n$, а направления кратчайших OX_{2n} и OX_{2n+1} в точке O при $n \rightarrow \infty$ сходятся к различным направлениям l_0 и l_1 , образующим между собой угол $\alpha \neq 0$ (сходимость направлений понимается в смысле метрики конуса, касательного к поверхности в точке O). Проведем кратчайшие $X_n X_{n+1}$ на поверхности F и обозначим $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ — углы при вершинах O, X_{n-1}, X_n треугольника $OX_{n-1}X_n$ на F , δ_n — угол в точке X_n между кратчайшими $X_{n-1}X_n$ и $X_n X_{n+1}$. Легко видеть, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \alpha, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0.$$

Равенство нулю последнего предела вытекает из условия

$$OX_{n+1} < OX_n/n$$

и результатов работы [3]. По теореме 12 этой же работы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = \pi - \alpha.$$

Отсюда заключаем, учитывая неравенство $|\delta_n - \gamma_n| \leq \beta_{n+1}$, что существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\pi - \delta_n) = \alpha.$$

Но этого быть не может, поскольку тогда в кривую L можно вписать геодезическую ломаную C со сколь угодно малым значением d_c и как угодно большой вариацией поворота на поверхности. Значит, кривая L в точке O справа имеет определенное направление на поверхности.

Теорема доказана.

Следствие. Из теоремы 15 работы [3] вытекает, что кривая с ограниченной вариацией поворота на выпуклой гиперповерхности в каждой точке имеет правую (соответственно левую) полукасательную.

Теорема 2. *Пусть точка O разбивает кривую L с ограниченной вариацией поворота на выпуклой гиперповерхности на две кривые L_1 и L_2 и пусть $\vartheta(O)$ — угол между направлениями L_1 и L_2 в точке O . Тогда*

$$\omega(L) = \omega(L_1) + (\pi - \vartheta(O)) + \omega(L_2).$$

Доказательство. Пусть C — ломаная на поверхности, вписанная в одну из кривых L_1 или L_2 . Легко видеть, что

$$\omega(C) \leq \omega(L) + \varepsilon,$$

где $\varepsilon \rightarrow 0$, если $d_c \rightarrow 0$. Отсюда следует, что каждая из кривых L_1 и L_2 имеет на поверхности поворот ограниченной вариации.

Пусть C_1 , C_2 и C — геодезические ломанные на поверхности, вписанные в кривые L_1 , L_2 и L . Будем считать, что значения d_{c_1} , d_{c_2} и d_c достаточно малы и

$$\omega(C_1) \sim \omega(L_1), \quad \omega(C_2) \sim \omega(L_2), \quad \omega(C) \sim \omega(L).$$

Пусть ϑ — угол на поверхности в точке O между соседними звеньями ломанных C_1 и C_2 . Согласно теоремам 12 и 13 работы [3] и теореме 1, $\vartheta \sim \vartheta(O)$. Рассматривая $C_1 + C_2$ как ломаную, вписанную в кривую L , заключаем, что

$$\omega(L_1) + (\pi - \vartheta(O)) + \omega(L_2) \sim \omega(C_1) + (\pi - \vartheta) + \omega(C_2) \leq \omega(L) + \varepsilon,$$

где $\varepsilon \rightarrow 0$, когда d_{c_1} и d_{c_2} неограниченно убывают. Следовательно, имеет место неравенство

$$\omega(L_1) + (\pi - \vartheta(O)) + \omega(L_2) \leq \omega(L).$$

Теперь убедимся в справедливости противоположного неравенства, что и будет доказана теорема.

Будем считать, что точка O не является вершиной ломаной C . В противном случае неравенство доказывается совсем просто. Пусть X_1 и X_2 — концы открытой компоненты разбиения кривой L вершинами ломаной C , содержащей точку O . Проведем кратчайшие OX_1 и OX_2 на поверхности и рассмотрим ломанные C'_1 и C'_2 , вписанные в кривые L_1 и L_2 , каждая из которых состоит из соответствующего участка ломаной C и отрезка OX_1 или OX_2 . Очевидно,

$$\omega(C'_1) \leq \omega(L_1) + \varepsilon, \quad \omega(C'_2) \leq \omega(L_2) + \varepsilon,$$

где $\varepsilon \rightarrow 0$, когда $d_i \rightarrow 0$. Обозначим α_1 , α_2 и ϑ — углы при вершинах X_1 , X_2 и O треугольника OX_1X_2 на поверхности. Очевидно, $\vartheta \sim \vartheta(O)$, если d достаточно мало, тогда из теоремы 11 работы [3] следует, что

$$\alpha_1 + \alpha_2 \sim \pi - \vartheta(O).$$

Учитывая теперь неравенство треугольника для углов между кривыми, получаем

$$\begin{aligned} \omega(L) \sim \omega(C) &\leq \omega(C'_1) + \alpha_1 + \alpha_2 + \omega(C'_2) \sim \omega(C'_1) + (\pi - \vartheta(O)) + \\ &+ \omega(C'_2) \leq \omega(L_1) + (\pi - \vartheta(O)) + \omega(L_2) + 2\varepsilon, \end{aligned}$$

откуда следует неравенство

$$\omega(L) \leq \omega(L_1) + (\pi - \vartheta(O)) + \omega(L_2).$$

Теорема доказана.

Следствие. Кривая с ограниченной вариацией поворота на выпуклой гиперповерхности может содержать не более счетного числа угловых точек.

Теорема 3. Пусть L — кривая с ограниченной вариацией поворота на выпуклой гиперповерхности, O — точка на L . Тогда справа (соответственно слева) от точки O можно указать точку A , принадлежащую L , такую, что вариация поворота любой геодезической ломаной на поверхности, вписанной в дугу $\widehat{OA}$ кривой L , а значит, и вариация поворота самой дуги, будет сколь угодно мала.

Доказательство. Будем считать, что точка O — начальная точка кривой L . Пусть ε и δ — малые положительные числа, причем δ подобрано так, что для любой вписанной в L геодезической ломаной C , у которой $d < \delta$, будет

$$\omega(C) \leq \omega(L) + \varepsilon.$$

Выберем окрестность U точки O на поверхности так, чтобы для каждой точки $X \in U$, которая соединяется с точкой O не единственной кратчайшей

на поверхности, угол в точке X между любой парой из этих кратчайших был бы меньше ε . Существование такой окрестности вытекает из теоремы 11 работы [3].

Пусть C — ломаная на поверхности, вписанная в L . Будем считать, что $d_c < \delta$ и $|\omega(C) - \omega(L)| < \varepsilon$. Можно принять, что первая после O вершина B ломаной C попадает в окрестность U . Пусть A — внутренняя точка дуги $\overline{OB}$ кривой L , AB — кратчайшая на поверхности. Учитывая выбор окрестности U и применяя теорему 10 работы [3], заключаем, что угол в точке B между отрезком OB ломаной C и кратчайшей AB не превосходит 2ε , если A достаточно близка к O . Очевидно, что точку A , близкую к O , можно выбрать таким образом, чтобы вариация поворота любой ломаной на поверхности, вписанной в дугу $\overline{OA}$ кривой L , не превосходила 4ε .

Теорема доказана.

Следствие. Кривую с ограниченной вариацией поворота на выпуклой гиперповерхности можно разбить на конечное число участков со сколь угодно малыми вариациями поворота.

Пусть L — кривая с ограниченной вариацией поворота на выпуклой гиперповерхности, X — точка на L , разбивающая кривую L на ветви L_1 и L_2 . Определим поворот кривой в точке X как дополнение до π угла в этой точке между кривыми L_1 и L_2 на поверхности. В следующем параграфе будет доказано, что кривая с ограниченной вариацией поворота на выпуклой гиперповерхности спрямляема. Отсюда вытекает, что на кривой L можно ввести строго монотонный параметр, длину дуги, и считать вариацию поворота функцией, определенной на множестве значений этого параметра. Свойства этой функции выражены в теоремах 2 и 3, и общий результат можно сформулировать так: у кривой с ограниченной вариацией поворота на выпуклой гиперповерхности вариация поворота является вполне аддитивной функцией дуги.

§ 2. Ограниченность вариации поворота кривой в пространстве

В этом параграфе будет доказано, что кривые с ограниченной вариацией поворота на выпуклой гиперповерхности спрямляемы и вариации их поворотов в пространстве ограничены. Кроме того, будет доказана теорема об аппроксимации таких кривых геодезическими ломаными на поверхности.

Пусть $B_0, B_1, \dots, B_m$ — последовательность точек на выпуклой гиперповерхности F такая, что $B_i \neq B_{i+1}$. Построим геодезические ломаные, последовательными вершинами которых служат точки B_i (такая ломаная может оказаться не единственной). Символом $C(B_0, B_1, \dots, B_m)$ мы будем обозначать произвольно выбранную одну из этих ломаных.

Лемма 1. Пусть C — геодезическая ломаная на выпуклой гиперповерхности F , последовательными вершинами которой служат точки $A_0, A_1, \dots, A_{m+1}$. Тогда существует последовательность $\bar{S}_n$ наборов точек $B_0^n, B_1^n, \dots, B_{m+1}^n$ поверхности F , сходящихся соответственно к точкам $A_0, A_1, \dots, A_{m+1}$ такая, что

1. Точки B_i^n , где $i = 1, 2, \dots, m$, — гладкие точки поверхности F .
2. Ломаные $C_n = C(B_0^n, B_1^n, \dots, B_{m+1}^n)$ сходятся к ломаной C .
3. Углы между соседними звеньями ломаных C_n на поверхности сходятся к соответствующим углам ломаной C , а полукасательные этих ломаных в точках B_0^n и B_{m+1}^n сходятся к соответствующим полукасательным ломаной C в точках A_0 и A_{m+1} .

Доказательство. Построим сначала вспомогательную последовательность S_n наборов $\bar{B}_0^n, \bar{B}_1^n, \dots, \bar{B}_{m+1}^n$ точек поверхности F , которые

сходятся к точкам $A_0, A_1, \dots, A_{m+1}$ соответственно и обладают свойствами 2 и 3, указанными в лемме. Выберем на каждом из отрезков $A_i A_{i+1}$ ломаной C по точке $\bar{B}_i$, отстоящей от точки A_i на поверхности не более, чем на ε , причем $\bar{B}_{m+1} \equiv A_{m+1}$. Выбор точек $\bar{B}_i$ мы подчиняем еще следующим требованиям. Точка $\bar{B}_{i+1}$ указывается после выбора точки $\bar{B}_i$. Угол в точке $\bar{B}_i$ между кратчайшей $\bar{B}_i A_{i+1}$ и любой из кратчайших, соединяющих точки $\bar{B}_i, \bar{B}_{i+1}$ на F , не должен превосходить ε . Угол в точке $\bar{B}_{i+1}$ между кратчайшей $\bar{B}_{i+1} A_{i+2}$ и любой из кратчайших, соединяющих точки $\bar{B}_i, \bar{B}_{i+1}$ на F , не должен отличаться более, чем на ε от угла при вершине A_{i+1} ломаной C . Возможность выбора точек $\bar{B}_i$, подчиненных указанным требованиям, вытекает из результатов работы [3].

Задаваясь теперь последовательностью положительных чисел ε_n , стремящихся к нулю, мы можем построить последовательность наборов точек $\bar{B}_0^n, \bar{B}_1^n, \dots, \bar{B}_m^n$ на поверхности F так же, как мы строили набор точек $\bar{B}_0, \bar{B}_1, \dots, \bar{B}_m$ для данного ε . Последовательность $\bar{S}_n$ наборов точек $\bar{B}_0^n, \bar{B}_1^n, \dots, \bar{B}_m^n, \bar{B}_{m+1}^n \equiv A_{m+1}$ и будет искомой вспомогательной последовательностью. Надо только убедиться, что полукасательные в точках $\bar{B}_0^n$ к ломаным $C(\bar{B}_0^n, \bar{B}_1^n, \dots, \bar{B}_{m+1}^n)$ сходятся к полукасательной к C в точке A_0 . Но это вытекает из непрерывности правой полукасательной к кратчайшей на выпуклой гиперповерхности.

Построим теперь последовательность наборов точек S_n , о которой говорится в лемме. Для этого выберем в достаточно малых окрестностях каждой из точек $\bar{B}_i^n$ по гладкой точке B_i^n . Такой выбор точек B_i^n возможен, поскольку множество гладких точек на выпуклой гиперповерхности всюду плотно. Если для каждого n эти окрестности соответственно малы, то, как легко убедиться, наборы S_n точек $B_0^n \equiv \bar{B}_0^n, B_1^n, \dots, B_m^n, B_{m+1}^n \equiv A_{m+1}$ обладают всеми свойствами, указанными в лемме.

Лемма доказана.

Теорема 4. *Кривая с ограниченной вариацией поворота на выпуклой гиперповерхности имеет ограниченной вариации поворот в пространстве.*

Доказательство. Пусть L — кривая с ограниченной вариацией поворота на выпуклой гиперповерхности F . Построим последовательность ломаных C_n , сходящихся к L , таких, что внутренние вершины этих ломаных — гладкие точки поверхности F , а вариации поворотов этих ломаных на поверхности сходятся к вариации поворота кривой L . Ломаные C_n строятся с помощью леммы 1. Можно показать, что вариации поворотов ломаных C_n в пространстве равномерно ограничены сверху (см. [2, стр. 20—21], где доказывается аналогичное утверждение). Так как ломаные C_n сходятся к кривой L , то по известной теореме вариация поворота кривой L в пространстве также ограничена.

Теорема доказана.

Теорема 5. *Кривая с ограниченной вариацией поворота на выпуклой гиперповерхности спрямляема. Если $r(s)$ — радиус-вектор точки кривой, соответствующей дуге s , то вектор-функция $r(s)$ имеет для каждого s правую (соответственно левую) производную, непрерывную справа (соответственно слева) и равную по абсолютной величине единице.*

Эта теорема есть следствие теоремы 4 и соответствующих теорем для кривых с ограниченной вариацией поворота в пространстве.

Из леммы 1 и теоремы 5 вытекает следующее утверждение.

Теорема 6. Пусть L — кривая с ограниченной вариацией поворота на выпуклой гиперповерхности F . Тогда существует последовательность геодезических ломаных на F с вершинами в гладких точках поверхности, сходящихся к L , длины которых сходятся к длине L , а вариации поворота — к вариации поворота этой кривой на поверхности F . Можно обеспечить, чтобы концы ломаных совпадали с концами кривой L , а направления ломаных в этих точках сходились бы к соответствующим направлениям кривой на поверхности.

В начале § 1 приводилось определение кривой с ограниченной вариацией поворота на выпуклой гиперповерхности, отличающееся от принятого нами определения. Из приведенной ниже теоремы вытекает, что эти два определения эквивалентны.

Теорема 7. Пусть L — кривая с ограниченной вариацией поворота на выпуклой гиперповерхности, C — геодезическая ломаная, вписанная в кривую L . Тогда вариация ломаной C на поверхности ограничена сверху числом, не зависящим от выбора ломаной C .

Доказательство. Пусть ε — положительное число. Выберем малое число $\delta > 0$ так, чтобы вариация поворота любой ломаной $\bar{C}$ на поверхности, вписанной в кривую L , удовлетворяла неравенству

$$\omega(\bar{C}) \leq \omega(L) + \varepsilon,$$

если для этой ломаной $d_{\bar{C}} < \delta$. Пусть l — длина кривой L . Из ломаной C можно выбросить не более $[l/\delta]$ звеньев так, чтобы сумма вариаций поворотов на поверхности оставшихся кусков ломаной C не превосходила $\omega(L) + \varepsilon$. А тогда, очевидно,

$$\omega(C) \leq 2\pi [l/\delta] + \omega(L) + \varepsilon.$$

Теорема доказана.

§ 3. Расстояние точки до кривой

Пусть L — кривая с ограниченной вариацией поворота на выпуклой гиперповерхности F ; A и B — концы этой кривой, $C \in F$ — точка вне кривой L . Обозначим z расстояние на поверхности точки C от точки X , принадлежащей L . Положение точки X можно характеризовать длиной x дуги AX кривой L . Тогда расстояние z оказывается непрерывной функцией длины дуги: $z = z(x)$. В этом параграфе мы изучим дифференциальные свойства функции $z = z(x)$. Будут доказаны три теоремы. Первые две являются вспомогательными, хотя представляют и самостоятельный интерес. Например, первая теорема обобщает теорему о существовании угла в сильном смысле.

Теорема 8. Пусть L и M — две кривые на выпуклой гиперповерхности F , исходящие из точки O , причем M — кратчайшая на F , а кривая L в точке O имеет определенное направление. Пусть XY — кратчайшая на поверхности, у которой $X \in L$, $Y \in M$, $X \neq O \neq Y$. Обозначим α угол в точке O между кратчайшими L и M на F , α' — угол при вершине O' плоского треугольника $O'X'Y'$ со сторонами той же длины, что и расстояния между соответствующими точками на поверхности. Тогда угол α' стремится к α , если $X \rightarrow O$, а кратчайшая XY сходится к отрезку кратчайшей M , который может и вырождаться в точку.

Доказательство. Пусть $X_n \in L$ и $Y_n \in M$ — две последовательности точек на поверхности F такие, что при $n \rightarrow \infty$ точки X_n сходятся к точке O , а Y_n — к точке Y , отличной от точки O . Пусть $X_n Y_n$ — крат-

на F , сходящиеся к отрезку OY кратчайшей M . Для доказательства теоремы достаточно установить, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha'_n = \alpha,$$

где углы α'_n определены в условиях теоремы: α'_n — это угол при вершине O' плоского треугольника $O'X'_nY'_n$ со сторонами той же длины, что и расстояния между соответствующими точками на поверхности F .

Пусть ε — малое положительное число. Выберем точку $Z \in L$, близкую к точке O , так, чтобы удовлетворить следующим требованиям. Если точка Z соединяется с точкой O не единственной кратчайшей на поверхности, то угол в точке Z между любой парой из этих кратчайших не должен превосходить $\varepsilon/2$. Если Q_1 и Q_2 — любая пара точек, принадлежащих дуге $\tilde{OZ}$ кривой L , а OQ_1 и OQ_2 — кратчайшие на F , то угол в точке O между этими кратчайшими также не должен превосходить ε . Указанный выбор точки Z возможен в силу теорем 11, 12 и 13 работы [3]. Выберем теперь настолько большое число m , чтобы при $n > m$ точки X_n выходились внутри дуги $\tilde{OZ}$ кривой L , и проведем кратчайшие OX_n , X_nZ и OZ на F . Обозначим α_n и β_n углы при вершинах O и X_n треугольника OX_nY_n , $\tilde{\xi}_n$ — угол в точке X_n между кратчайшими X_nY_n и X_nZ , η_n , μ_n и ζ_n — углы при вершинах O , X_n и Z треугольника OX_nZ на F , β'_n и ξ'_n — внутренний и внешний углы при вершине X'_n плоского треугольника $O'X'_nY'_n$, соответствующего треугольнику OX_nY_n на поверхности. Очевидно, $|\alpha_n - \alpha| \leq \varepsilon$, $\eta_n \leq \varepsilon$, а при достаточно большом m также $\zeta_n \leq \varepsilon$. По теореме 4 работы [3] имеем неравенство

$$\eta_n + \mu_n + \zeta_n \geq \pi,$$

т. е.

$$\mu_n \geq \pi - 2\varepsilon,$$

а учитывая еще лемму 4 этой работы, получаем

$$2\pi \geq \beta_n + \tilde{\xi}_n + \mu_n \geq \beta'_n + \tilde{\xi}_n + \pi - 2\varepsilon,$$

откуда

$$\tilde{\xi}'_n \geq \tilde{\xi}_n - 2\varepsilon.$$

Так как m большое и, значит, $\tilde{\xi}'_n \sim \alpha'_n$, то в конечном итоге имеем неравенства

$$\tilde{\xi}_n - 2\varepsilon \leq \tilde{\xi}'_n \sim \alpha'_n \leq \alpha_n \leq \alpha + \varepsilon.$$

Из этих неравенств и неравенства

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\xi}_n \geq \alpha - \varepsilon,$$

которое получается с помощью теоремы 5 работы [3], находим, что

$$\alpha - 3\varepsilon \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha'_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha'_n \leq \alpha + \varepsilon.$$

Поскольку выбор числа ε был произволен, то отсюда следует, что существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha'_n = \alpha.$$

Теорема доказана.

Теорема 9. Пусть L — кривая с ограниченной вариацией поворота на выпуклой гиперповерхности F , исходящая из точки O , C — точка на F

вне кривой L , X — произвольная точка кривой L , отличная от точки O . Проведем кратчайшую CX на поверхности и обозначим η и ξ — углы в точке X между этой кратчайшей и ветвями $\overline{OX}$ и $(L - \overline{OX})$ кривой L , α' — угол при вершине O' плоского треугольника $O'SX'$ со сторонами, равными расстояниям между соответствующими точками на F . Тогда существуют пределы

$$\lim_{X \rightarrow O} \xi = \lim_{X \rightarrow O} \alpha' = \alpha, \quad \lim_{X \rightarrow O} \eta = \pi - \alpha.$$

Если OC — кратчайшая на F и $\bar{\alpha}$ — угол в точке O между этой кратчайшей и кривой L , то $\bar{\alpha} \geq \alpha$, причем выполняется знак равенства, когда OC — предел некоторой последовательности из кратчайших XC . Для существования предела $\lim_{X \rightarrow O} \alpha' = \alpha$ и справедливости предыдущего утверждения относительно неравенства $\bar{\alpha} \geq \alpha$ достаточно, чтобы кривая L в точке O имела определенное направление на поверхности.

Доказательство. Пусть M_1 и M_2 — кратчайшие на поверхности F , соединяющие точки O и C , α_1 и α_2 — углы в точке O между этими кратчайшими и кривой L . Пусть $X_n \in L$ — последовательность точек, сходящихся к O , такая, что существуют кратчайшие X_nC на F , сходящиеся к M_1 . Проведем кратчайшие OX_n на поверхности и обозначим $\alpha_{n,1}$ и $\alpha_{n,2}$ — углы в точке O , которые образует кратчайшая OX_n с M_1 и M_2 . Построим плоский треугольник, соответствующий треугольнику на поверхности, образованному кратчайшими M_1 , OX_n и CX_n , и обозначим α_n — угол в этом треугольнике, соответствующий углу $\alpha_{n,1}$. Из теорем 12 и 13 работы [3] следует, что

$$|\alpha_{n,1} - \alpha_1| \leq \varepsilon_n, \quad |\alpha_{n,2} - \alpha_2| \leq \varepsilon_n,$$

где $\varepsilon_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Применяя теорему 4 той же работы получим неравенства

$$\alpha_2 + \varepsilon_n \geq \alpha_{n,2} \geq \alpha_n.$$

Согласно теореме 8 имеем $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n' = \alpha_1$. Следовательно, $\alpha_2 \geq \alpha_1$. Если еще существует последовательность из кратчайших CX , сходящихся к M_2 , то, меняя местами кратчайшие M_1 и M_2 , получим противоположное неравенство: $\alpha_1 \geq \alpha_2$, т. е. в данном случае имеет место равенство $\alpha_1 = \alpha_2$. Тем самым, очевидно, мы доказали существование предела

$$\lim_{X \rightarrow O} \alpha' = \alpha$$

и утверждение теоремы относительно неравенства $\bar{\alpha} \geq \alpha$. При этом мы использовали только тот факт, что кривая L имеет в точке O определенное направление.

Нам осталось доказать существование пределов

$$\lim_{X \rightarrow O} \xi = \alpha, \quad \lim_{X \rightarrow O} \eta = \pi - \alpha.$$

Для этого мы возвратимся к доказательству предыдущей теоремы, а именно к той ее части, где получены неравенства

$$\tilde{\xi}_n - 2\varepsilon \leq \tilde{\xi}_n' \sim \alpha_n' \leq \alpha_n \leq \alpha + \varepsilon.$$

Будем теперь считать, что кривая L имеет на поверхности поворот ограниченной вариации. Выбор точки Z мы подчиним еще требованию, чтобы поворот любой ломаной, вписанной в дугу $\overline{OZ}$ кривой L на поверхности,

был меньше ε . Это возможно на основании теоремы 3. Пусть ξ_n — угол в точке X_n между кратчайшей $X_n Y_n$ и дугой $\overline{X_n Z}$ кривой L . Легко видеть, что

$$|\bar{\xi}_n - \xi_n| \leq 2\varepsilon.$$

Учитывая теперь неравенства

$$\alpha - \varepsilon \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\xi}_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \bar{\xi}_n \leq \alpha + 3\varepsilon,$$

получим

$$\alpha - 3\varepsilon \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \xi_n \leq \alpha + 5\varepsilon,$$

откуда, поскольку ε произвольно, находим, что существует предел

$$\lim_{X \rightarrow O} \xi_n = \alpha.$$

Тем самым, очевидно, доказано и существование предела

$$\lim_{X \rightarrow O} \xi = \alpha$$

Пусть γ — угол в точке X между ветвями $\overline{OX}$ и $(L - \overline{OX})$ кривой L . Согласно лемме 4 работы [3] и неравенству треугольника для углов между направлениями в точке выпуклой гиперповерхности имеем неравенства

$$\gamma - \pi \leq \xi + \eta - \pi \leq \pi - \gamma,$$

из которых, учитывая следствие теоремы 2, находим, что

$$\lim_{X \rightarrow O} (\xi + \eta) = \pi.$$

Значит, существует предел

$$\lim_{X \rightarrow O} \eta = \pi - \alpha.$$

Теорема доказана.

Пусть $L \equiv \overline{AB}$ — кривая с ограниченной вариацией поворота на выпуклой гиперповерхности F , C — точка на F , не принадлежащая L . Будем считать, что на кривой L введено направление от A к B . Пусть X — внутренняя точка кривой L . Выберем точку $Y \in L$ справа от точки X , проведем кратчайшую CY на поверхности и обозначим ξ — угол в точке Y между этой кратчайшей и дугой $\overline{BY}$ кривой L . На основании теоремы 9 существует предел

$$\xi(X) = \lim_{Y \rightarrow X} \xi.$$

Аналогично введем обозначение и для левого предела

$$\eta(X) = \lim_{Y \rightarrow X} \eta,$$

где точка Y выбирается слева от X , а η — угол между кратчайшей CY и дугой $\overline{AY}$ кривой L . В точке A существует правое, а в B — левое предельные значения. Учитывая лемму 4 работы [3], и теорему 9, легко заключить, что в каждой гладкой точке кривой выполняется неравенство

$$\xi(X) + \eta(X) \leq \pi.$$

Это неравенство нарушается разве лишь в счетном множестве точек кривой, что вытекает из следствия теоремы 2. Если L — кратчайшая, то

приведенное неравенство выполняется в каждой внутренней ее точке. Это следует из леммы 3 и теоремы 4 работы [3] и теоремы 9.

Будем обозначать x длину дуги $\overline{AX}$ кривой L , а $z(x)$ — расстояние на поверхности F между точками C и X . Имеет место следующая теорема, описывающая дифференциальные свойства функции $z = z(x)$.

Теорема 10. *Функция $z = z(x)$ в каждой точке X кривой L имеет правую и левую производные $z^+(x)$ и $z^-(x)$ по дуге x , непрерывные соответственно справа и слева:*

$$\lim_{y \rightarrow x+0} z^+(y) = \lim_{y \rightarrow x+0} z^-(y) = z^+(x), \quad \lim_{y \rightarrow x-0} z^-(y) = \lim_{y \rightarrow x-0} z^+(y) = z^-(x).$$

Эти производные допускают следующее представление:

$$z^+(x) = -\cos \xi(X), \quad z^-(x) = \cos \eta(X).$$

Если L — кратчайшая, то всюду на L , исключая разве лишь счетное множество точек, существует производная

$$z'(x) = z^+(x) = z^-(x)$$

и почти всюду существует непрерывная вторая производная

$$z''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} [z^+(x+h) - z^+(x)] h^{-1} = \lim_{h \rightarrow 0} [z^-(x+h) - z^-(x)] h^{-1}.$$

В этом случае каждая из функций $z^+(x)$, $z^-(x)$ и $z'(x)$ имеет ограниченную вариацию.

Доказательство. Для доказательства первой части теоремы достаточно установить равенства

$$z^+(x) = -\cos \xi(X), \quad z^-(x) = \cos \eta(X)$$

и учесть теорему 9.

Пусть точка Y кривой L лежит правее точки X и пусть y — длина дуги $\overline{AY}$ на L . Построим плоский треугольник $C'X'Y'$ со сторонами, равными расстояниям между соответствующими точками на поверхности, и обозначим ξ' — угол при вершине X' этого треугольника. По теореме 9 имеем

$$\lim_{Y \rightarrow X} \xi' = \xi(X).$$

С другой стороны [4, стр. 23],

$$\cos \xi' \sim \frac{z(x) - z(y)}{XY},$$

если точка Y близка к X . При этих же условиях с помощью теоремы 5 нетрудно заключить, что

$$\frac{y-x}{XY} \sim 1.$$

Значит, существует предел

$$z^+(x) = -\lim_{y \rightarrow x} \frac{z(y) - z(x)}{y - x} = -\cos \xi(X).$$

Аналогично доказывается существование левой производной $z^-(x)$ функции $z(x)$.

Докажем вторую часть теоремы.

Пусть $L \equiv AB$ — кратчайшая на поверхности. Разобьем кривую L точками $X_1, X_2, \dots, X_n$ на достаточно малые участки $AX_1, X_1X_2, \dots,$

$X_{n-1}X_n$, X_nB и проведем кратчайшие CA , CX_1 , ..., CX_n , CB на поверхности F . Пусть $C'X'_1A'$, $C'X'_2X'_1$, ..., $C'X'_nX'_{n-1}$, $C'B'X'_n$ — треугольники в одной и той же двумерной плоскости, соответствующие треугольникам CX_1A , CX_2X_1 , ..., CX_nX_{n-1} , CBX_n на поверхности. Плоские треугольники мы располагаем так, чтобы совпадали образы кратчайших CX_i , и чтобы соседние из этих треугольников разделялись общей стороной. Из леммы 3, теоремы 4 работы [3] и того факта, что L — кратчайшая, следует, что замкнутая ломаная $Q_n \equiv C'A'X'_1X'_2 \dots X'_nB'C'$ выпуклая. Осуществляя теперь все более мелкие разбиения кратчайшей L , мы построим последовательность ломаных Q_n . Пределом этой последовательности (точнее, пределом любой ее сходящейся подпоследовательности) будет замкнутая кривая Q , проходящая через точку C' , устроенная следующим образом. Кривая Q состоит из двух прямолинейных отрезков $C'A'$ и $C'B'$ и выпуклой дуги $L' \equiv A'B'$, изометричной кратчайшей L . Если точке $X \in L$ по изометрии отвечает точка $X' \in L'$, то $C'X' = CX$, а длина дуги $A'X'$ кривой L' равна x . Обозначим $r(x)$ — радиус-вектор точки X' кривой L' , $e(x)$ — единичный вектор направления $r(x)$ (за начало отсчета векторов принимается точка C' в плоскости кривой Q). Легко проверить, что углы в точке X' между вектором $-e(x)$ и правой и левой полукасательными к L' в этой точке равны $\xi(X)$ и $\eta(X)$ соответственно. Учитывая теперь равенство

$$z(x) = |r(x)|,$$

приходим к выводу, что утверждения второй части теоремы непосредственно вытекают из дифференциальных свойств выпуклых функций (см. [5, стр. 18]).

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Д. Александров. Теория кривых на основе приближения ломаными. УМН, т. II, вып. 3 (19), 182—184, 1947.
2. А. В. Погорелов. Однозначная определенность общих выпуклых поверхностей. Изд-во АН УССР, К., 1952.
3. А. Д. Милка. О внутренней метрике выпуклых гиперповерхностей. Укр. геометр. сб., вып. 2, 1966.
4. А. Д. Александров и В. А. Залгаллер. Двумерные многообразия органической кривизны. Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, т. 63, 1962.
5. Г. Буземан. Выпуклые поверхности. Изд-во «Наука», М., 1964.

Поступила в редколлегию 10 июня 1966 г.

ХАРАКТЕРИСТИКИ МОНЖЕВА УРАВНЕНИЯ В МНОГОМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

М. А. Николаенко (Харьков)

В работе [1] рассмотрены характеристики монжева уравнения в трехмерном пространстве. В предлагаемой статье рассматриваются характеристики монжева уравнения в n -мерном евклидовом пространстве.

1. Монжево уравнение

$$\Omega(x_1 \dots x_n; dx_1 \dots dx_n) = 0, \quad (1)$$

однородное относительно дифференциалов, определяет не голономное многообразие евклидова пространства n измерений.

Геометрически монжево уравнение подчиняет каждой точке «гиперконус Монжа» (T)

$$\Omega(x; X - x) = 0,$$

прямолинейные образующие которого служат касательными системы интегральных кривых монжева уравнения, проходящих через вершину (x) «гиперконуса Монжа».

С монжевым уравнением связано нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка в n переменных:

$$F(x_1 \dots x_n; p_1 \dots p_{n-1}) = 0. \quad (2)$$

Касательные гиперплоскости

$$\sum_{i=1}^{n-1} p_i (X_i - x_i) - (X_n - x_n) = 0 \quad (3)$$

к интегральным гиперповерхностям уравнения (2), проходящим через точку (x) , огибают тот же конус (T) .

Наряду с гиперконусом (T) , образованным направлениями системы интегральных кривых монжева уравнения (1) и огибаемым множеством гиперплоскостей (3), касательных к интегральным поверхностям

$$\Phi(x) = 0$$

уравнения (2), рассмотрим гиперконус (N) , взаимный с (T) , образованный нормальными к касательным гиперплоскостям гиперконуса (T) .

Гиперплоскость, касательная к (T) , по (1) определяется уравнением

$$\sum_{v=1}^n \Omega_{x_v'} (X_v - x_v) = 0, \quad (4)$$

и уравнения ее нормали

$$\frac{X_1 - x_1}{\Omega_{x'_1}} = \dots = \frac{X_n - x_n}{\Omega_{x'_n}}. \quad (5)$$

С другой стороны, эта же нормаль определяется по (3) так:

$$\frac{X_i - x_i}{p_i} = \frac{X_n - x_n}{-1}, \quad i = 1 \dots n-1. \quad (6)$$

Из (5) и (6) следует

$$\frac{\Omega_{x'_i}}{p_i} = \frac{\Omega_{x'_n}}{-1}. \quad (6')$$

Тогда по (2) и (6) уравнение гиперконуса (N):

$$F\left(x_0; -\frac{X_i - x_i}{X_n - x_n}\right) = 0.$$

Уравнение гиперплоскости, касательной к гиперконусу (N):

$$\sum \frac{\partial F}{\partial x_v} (\bar{X}_v - x_v) = 0, \quad (7)$$

где $\bar{X}_v$ — текущие координаты гиперплоскости, или в развернутом виде

$$\sum F_{p_i} (\bar{X}_i - x_i) + (\bar{X}_n - x_n) \sum_{i=1}^{n-1} p_i F_{p_i} = 0. \quad (8)$$

Действительно,

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{\partial F}{\partial p_i} \left(-\frac{X_i - x_i}{X_n - x_n} \right)_{x_i},$$

или

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = F_{p_i} \left(-\frac{1}{X_n - x_n} \right),$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_n} = \sum \frac{\partial F}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial p_i}{\partial x_n} = \sum F_{p_i} \frac{\partial}{\partial x_n} \left(-\frac{X_i - x_i}{X_n - x_n} \right) = -\frac{1}{X_n - x_n} \sum_{i=1}^{n-1} p_i F_{p_i}.$$

Подставляя найденные выражения в (7), сокращая на $-\frac{1}{X_n - x_n}$, имеем вышеуказанное уравнение (8).

Теорема. Образующая $\bar{t}(x)$ гиперконуса (T) перпендикулярна к соответствующей касательной гиперконуса (N).

Действительно, образующая $\bar{n}(x)$ гиперконуса (N) есть нормаль гиперплоскости π , касательной к гиперконусу (T), а потому перпендикулярна к $\bar{t}(x)$ и

$$\bar{t}(x) + d_t \bar{t}(x), \quad (t = 1, \dots, n-2),$$

$$n \bar{t} = 0 \quad (a)$$

и

$$\bar{n} d_t \bar{t} = 0. \quad (b)$$

Дифференцируя (a), имеем

$$\bar{n} d_t \bar{t} + t d_t \bar{n} = 0.$$

Отсюда в силу (b)

$$t d_t \bar{n} = 0. \quad (c)$$

Из (а) и (с) следует вышеуказанное утверждение. Таким образом, имеем

$$\frac{x'_i}{F_{p_i}} = \frac{x'_n}{\sum p_i F_{p_i}} \quad (i = 1 \dots n-1). \quad (9)$$

Из соотношений (6) и (9) следует, что гиперконусы (Т) и (N) взаимны в том смысле, что образующие одного являются нормальными другого.

Замечание. Система $n-1$ уравнений (9) имеет место для всякой интегральной кривой монжева уравнения. Однако независимыми уравнениями в этой системе являются лишь первые $n-2$, последнее же — их следствие.

Действительно, запишем первые $n-2$ уравнения в следующем виде:

$$\lambda x'_i = F_{p_i} \quad (i = 1 \dots n-1).$$

Для интегральной поверхности уравнения (2) имеем

$$\lambda x'_n = \lambda \sum p_i x'_i = \sum p_i F_{p_i},$$

откуда

$$\lambda = \frac{\sum p_i F_{p_i}}{x'_n}.$$

2. Покажем, как по монжеву уравнению (1) составить соответствующее ему нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка (2).

По (6') получаем

$$\Omega_{x'_i} + p_i \Omega_{x'_n} = 0 \quad (i = 1 \dots n-1).$$

В силу однородности монжева уравнения (1) имеем

$$\sum \Omega_{x_v} \cdot x'_v \equiv k \Omega(x; x') = 0,$$

где k — степень однородности.

Из полученных n уравнений определяем x'_v как функцию x_v, p_i :

$$x'_v = \varphi_v(x_v; p_i) \quad (v = 1 \dots n; i = 1 \dots n-1).$$

и подставляем в (1):

$$\Omega(x_v; x'_v) = \Omega(x_v; \varphi_v(x_v, p_i)) \equiv F(x_v, p_i) = 0. \quad (10)$$

Обратно, исключая p_i из системы (9) и (2), получим монжево уравнение (1).

3. Покажем теперь, как выделить из системы интегральных кривых монжева уравнения специальный класс кривых, являющихся характеристиками нелинейного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка в n переменных, соответствующего монжеву уравнению.

Система обыкновенных дифференциальных уравнений характеристик нелинейного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка в n переменных

$$\frac{dx_i}{F_{p_i}} = \frac{dx_n}{\sum p_i F_{p_i}} = - \frac{dp_i}{F_{x_i} + p_i F_{x_n}}, \quad (i = 1 \dots n-1) \quad (11)$$

может быть записана следующим образом:

$$\lambda \frac{dx_i}{ds} = F_{p_i}, \quad \lambda \frac{dx_n}{ds} = \sum p_i F_{p_i}, \quad -\lambda \frac{dp_i}{ds} = F_{x_i} + p_i F_{x_n}. \quad (12)$$

Рассмотрим последние уравнения (12), так как первые выполняются для любой интегральной кривой монжева уравнения (1) вместе с уравнением

$$\lambda \frac{dx_n}{ds} = \sum p_i F_{p_i}$$

являющимся следствием этих $n-2$ уравнений.

Подставим в (12) вместо p_i их выражение по (6'):

$$\lambda \left(\frac{\Omega_{x_i'}}{\Omega_{x_n'}} \right)' = F_{x_i} - \frac{\Omega_{x_i'}}{\Omega_{x_n'}} F_{x_n}. \quad (13)$$

Для вычисления F_{x_i} и F_{x_n} воспользуемся тождеством

$$\Omega(x_v, x_v') \equiv F(x_v, p_i) = 0.$$

Берем производную от обеих частей по x_i и x_n' , принимая во внимание, что p_i являются функциями x_v и x_v' по (9) и (2):

$$\Omega_{x_i} = F_{x_i} + \sum F_{p_j} \frac{\partial p_j}{\partial x_i} \quad (i, j = 1 \dots n-1) \quad (13')$$

$$\Omega_{x_n} = F_{x_n} + \sum F_{p_j} \frac{\partial p_j}{\partial x_n}. \quad (13'')$$

Применим к (13') и (13'') соотношения (6'), (9):

$$F_{x_i} = \Omega_{x_i} + \lambda \sum x_j' \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\Omega_{x_j'}}{\Omega_{x_n'}} \right),$$

$$F_{x_n} = \Omega_{x_n} + \lambda \sum x_j' \frac{\partial}{\partial x_n} \left(\frac{\Omega_{x_j'}}{\Omega_{x_n'}} \right).$$

В силу однородности

$$\sum \Omega_{x_v'} x_v' \equiv k \Omega(x_v, x_v') = 0, \quad (a)$$

где k — степень однородности.

Дифференцируя (a), имеем

$$\sum x_v' \frac{\partial \Omega_{x_v'}}{\partial x_i} = k \Omega_{x_i}. \quad (b)$$

Тогда второе слагаемое выражения F_{x_i} преобразуется так:

$$\lambda \sum x_j' \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\Omega_{x_j'}}{\Omega_{x_n'}} \right) = \lambda \frac{k \Omega_{x_i}}{\Omega_{x_n'}}$$

и для F_{x_n}

$$\lambda \sum x_j' \frac{\partial}{\partial x_n} \left(\frac{\Omega_{x_j'}}{\Omega_{x_n'}} \right) = \lambda \frac{k \Omega_{x_n}}{\Omega_{x_n'}}.$$

Действительно,

$$\sum x_j' \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\Omega_{x_j'}}{\Omega_{x_n'}} \right) = \sum x_j' \frac{\partial \Omega_{x_j'}}{\partial x_i} \frac{1}{\Omega_{x_n'}} - \sum x_j' \Omega_{x_j'} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{\Omega_{x_n'}} \right).$$

В силу (b) первое слагаемое равно $k \Omega_{x_i}$, второе слагаемое в силу (a) равно нулю. Те же рассуждения справедливы и для второго слагаемого F_{x_n} .

Подставляя F_{x_i}, F_{x_n} в (13), имеем

$$\lambda \left(\frac{\Omega_{x_i}'}{\Omega_{x_n}'} \right)' = \Omega_{x_i} + \lambda \frac{k\Omega_{x_i}}{\Omega_{x_n}'} - \frac{\Omega_{x_i}'}{\Omega_{x_n}'} \left(\Omega_{x_n} + \lambda \frac{k\Omega_{x_n}}{\Omega_{x_n}'} \right),$$

или

$$\lambda \begin{vmatrix} \Omega_{x_n}' & (\Omega_{x_n}')' \\ \Omega_{x_i}' & (\Omega_{x_i}')' \end{vmatrix} = (\Omega_{x_n}' + k\lambda) \begin{vmatrix} \Omega_{x_i} & \Omega_{x_i}' \\ \Omega_{x_n} & \Omega_{x_n}' \end{vmatrix}. \quad (14)$$

Для определения λ дифференцируем тождество (10) по x_i' :

$$\Omega_{x_i}' = \sum F_{p_i} \frac{\partial p_i}{\partial x_i'} \quad (i, j = 1 \dots n-1)$$

или

$$\Omega_{x_i}' = -\lambda \sum x_j' \frac{\partial}{\partial x_i'} \left(\frac{\Omega_{x_j}'}{\Omega_{x_n}'} \right). \quad (15)$$

По свойству однородной функции

$$\sum x_j' \frac{\partial \Omega_{x_j}'}{\partial x_i'} = (k-1) \Omega_{x_i}'. \quad (c)$$

Выражение, стоящее в правой части (15),

$$\sum x_j' \frac{\partial}{\partial x_i'} \left(\frac{\Omega_{x_j}'}{\Omega_{x_n}'} \right) = \sum x_j' \frac{\partial \Omega_{x_j}'}{\partial x_i'} \cdot \frac{1}{\Omega_{x_n}'} - \sum x_j' \Omega_{x_j}' \frac{\partial}{\partial x_i'} \left(\frac{1}{\Omega_{x_n}'} \right).$$

Второе слагаемое в силу (a) равно нулю.

Первое слагаемое

$$\frac{1}{\Omega_{x_n}'} \sum x_j' \frac{\partial \Omega_{x_j}'}{\partial x_i'} = \frac{1}{\Omega_{x_n}'} \sum x_j' \frac{\partial \Omega_{x_j}'}{\partial x_j'}.$$

Применяя к нему (c), имеем для (15)

$$\Omega_{x_i}' + \lambda \frac{k-1}{\Omega_{x_n}'} \Omega_{x_i}' = 0,$$

откуда

$$\lambda = \Omega_{x_n}' + k\lambda,$$

и (14) принимает вид

$$\begin{vmatrix} (\Omega_{x_i}')' - \Omega_{x_i} & \Omega_{x_i}' \\ (\Omega_{x_n}')' - \Omega_{x_n} & \Omega_{x_n}' \end{vmatrix} = 0. \quad (14')$$

Аналогично имеем

$$\begin{vmatrix} (\Omega_{x_j}')' - \Omega_{x_j} & \Omega_{x_j}' \\ (\Omega_{x_n}')' - \Omega_{x_n} & \Omega_{x_n}' \end{vmatrix} = 0 \quad (14'')$$

и

$$\begin{vmatrix} (\Omega_{x_j}')' - \Omega_{x_j} & \Omega_{x_j}' \\ (\Omega_{x_i}')' - \Omega_{x_i} & \Omega_{x_i}' \end{vmatrix} = 0. \quad (14''')$$

Умножая (14') на Ω_{x_i} , (14'') на Ω_{x_j} , (14''') на Ω_{x_n} и складывая, получаем

$$A_{ijn} = \begin{vmatrix} \Omega_{x_i} & \Omega_{x_i}' & (\Omega_{x_i}')' \\ \Omega_{x_j} & \Omega_{x_j}' & (\Omega_{x_j}')' \\ \Omega_{x_n} & \Omega_{x_n}' & (\Omega_{x_n}')' \end{vmatrix} = 0. \quad (16)$$

Ввиду равноправности индексов имеем $A_{ijk} = 0$ ($i, j, k = 1 \dots n$).

Из этих C_n^3 уравнений независимыми будут лишь $n - 2$. Действительно, рассмотрим матрицу из трех столбцов и n строк:

$$\begin{pmatrix} \Omega_{x_1} & \Omega_{x'_1} & (\Omega_{x'_1})' \\ \Omega_{x_2} & \Omega_{x'_2} & (\Omega_{x'_2})' \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \Omega_{x_n} & \Omega_{x'_n} & (\Omega_{x'_n})' \end{pmatrix}. \quad (17)$$

В случае гиперкомплекса прямых

$$\Omega(x_1 x'_2 - x_2 x'_1, \dots, x_{n-1} x'_n - x_n x'_{n-1}; x'_1 \dots x'_n) = 0$$

ранг матрицы (17) равен единице. Если этот случай исключить, то по (16) ранг этой матрицы равен двум. Следовательно, существуют две линейно-независимые строки с индексами a, b , а все остальные строки являются их линейными комбинациями:

$$\begin{vmatrix} \Omega_{x_a} & \Omega_{x'_a} & (\Omega_{x'_a})' \\ \Omega_{x_b} & \Omega_{x'_b} & (\Omega_{x'_b})' \\ \Omega_{x_k} & \Omega_{x'_k} & (\Omega_{x'_k})' \end{vmatrix} = 0, \quad (18)$$

где k принимает все целочисленные значения от единицы до n , кроме значений a и b .

Все остальные уравнения системы (16) являются следствиями $n - 2$ уравнений этой системы.

Теорема. *Характеристики монжева уравнения в n переменных определяются самим уравнением (1) и системой (18) из $n - 2$ независимых обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Число произвольных постоянных интегрирования — $(2n - 3)$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. М. А. Николаенко. О характеристиках монжевых уравнений. Вестник ХГУ, № 3, серия матем., т. 31, 1965, 101—110.

Поступила в редколлегию 23 мая 1966 г.

О РЕГУЛЯРНОЙ РЕАЛИЗАЦИИ В ЦЕЛОМ ДВУМЕРНЫХ МЕТРИК ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ

Э. Г. Позняк (Москва)

В статье исследуется вопрос о регулярной реализации в целом метрики отрицательной кривизны в бесконечной полосе π . Простейшая такая полоса образуется следующим образом. Пусть τ — некоторая геодезическая в полной метрике W^- отрицательной кривизны и $\{g\}$ — семейство геодезических, ортогональных τ . Отложим на каждой геодезической этого семейства по одну сторону от τ отрезок длины a . Геометрическое место концов этих отрезков образует эквидистанту $\bar{\tau}$. Часть W^- , заключенная между τ и $\bar{\tau}$, представляет собой полосу в метрике W^- . Часть плоскости Лобачевского, заключенная между двумя эквидистантными орициклами, также представляет собой бесконечную полосу.

Метрику в каждой бесконечной полосе Π можно задать при помощи линейного элемента

$$ds^2 = dx^2 + B^2(x, y) dy^2. \quad (1)$$

При этом функция $B(x, y)$ задается в полосе $\Pi_a = \{0 \leq x \leq a, -\infty < y < \infty\}$. Предполагается, что $B(x, y)$ является в этой полосе $C^{4,1}$ -ограниченной функцией*. Кроме того, предполагается, что $\inf B > 0$ и кривизна K ограничена сверху отрицательной константой $-\frac{\pi_a}{\beta^2}$.

Справедлива следующая

Основная теорема. При сформулированных выше условиях регулярности метрика в полосе Π реализуема в E^3 посредством поверхности класса $C^{3,1}$.

Из основной теоремы вытекает следующая

Теорема о регулярной реализации геодезического круга. Пусть W^- — полная двумерная метрика отрицательной кривизны, принадлежащая классу $C^{4,1}$ **. Тогда метрика в любом геодезическом круге метрики W^- может быть реализована в E^3 посредством поверхности класса $C^{3,1}$.

Замечание. При повышении требований регулярности метрики эта метрика может быть реализована посредством поверхности соответственно большей регулярности.

* Функция $f(x, y)$ называется $C^{n,1}$ -ограниченной в полосе Π_a , если $f(x, y) \in C^{n,1}$ в Π_a и, кроме того, эта функция, ее производные до n -го порядка, а также константы Липшица по y для производных по y от производных $n-1$ порядка ограничены в Π_a . Аналогично вводится понятие функции $C^{n,1}$ -ограниченной на прямой.

** Полная метрика W^- отрицательной кривизны принадлежит классу $C^{n,1}$, если ее можно задать при помощи линейного элемента вида (1), и функция $B(x, y) \in C^{n,1}$ на всей плоскости.

§ 1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ В РИМАНОВЫХ ИНВАРИАНТАХ

Рассмотрим линейный элемент

$$ds^2 = E dx^2 + 2F dx dy + G dy^2, \quad (2)$$

кривизна K которого отрицательна. Положим $K = -k^2$.

Уравнения Петерсона — Кодаци и Гаусса для приведенных коэффициентов l , m , n второй квадратичной формы (обычные коэффициенты второй формы, деленные на $\sqrt{EG - F^2}$) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} l_y - m_x &= -\Gamma_{22}^2 l + 2\Gamma_{12}^2 m - \Gamma_{11}^2 n, \\ n_x - m_y &= -\Gamma_{22}^1 l + 2\Gamma_{12}^1 m - \Gamma_{11}^1 n, \\ ln - m^2 &= k^2. \end{aligned} \quad (3)$$

Введем новые неизвестные функции $r(x, y)$ и $s(x, y)$ с помощью соотношений

$$r = -\frac{m+k}{n}, \quad s = -\frac{m-k}{n}. \quad (4)$$

Заметим, что если линейный элемент (2) реализован посредством регулярной поверхности, то $r(x, y)$ и $s(x, y)$ представляют собой угловые коэффициенты образов асимптотических линий в параметрической плоскости xy .

Из третьего уравнения (3) и соотношений (4) вытекает, что

$$l = \frac{2krs}{s-r}, \quad m = -\frac{k(r+s)}{s-r}, \quad n = \frac{2k}{s-r}. \quad (5)$$

Подставляя выражения (5) для l , m , n в уравнения (3) Петерсона — Кодаци (уравнение Гаусса выполняется тождественно), получим после несложных вычислений следующую систему уравнений*:

$$\begin{aligned} r_x + sr_y &= A_0 + A_1 r + A_2 s + A_3 r^2 + A_4 rs + A_5 r^2 s, \\ s_x + rs_y &= A_0 + A_1 s + A_2 r + A_3 s^2 + A_4 rs + A_5 r s^2. \end{aligned} \quad (6)$$

Фигурирующие в правой части системы (6) функции $A_i(x, y)$ будут называться в дальнейшем коэффициентами правых частей системы (6). Они имеют следующее выражение:

$$\begin{aligned} A_0 &= -\Gamma_{11}^2, \quad A_1 = \Gamma_{11}^1 - \Gamma_{12}^2 + Q_x, \quad A_2 = -\Gamma_{12}^2 - Q_x, \\ A_3 &= \Gamma_{12}^1 + Q_y, \quad A_4 = -\Gamma_{22}^2 + \Gamma_{12}^1 - Q_y, \quad A_5 = \Gamma_{22}^1, \\ Q &= \frac{1}{2} \ln k. \end{aligned} \quad (6')$$

Замечание 1. Система (6) представляет собой систему квазилинейных уравнений гиперболического типа. Характеристиками этой системы являются интегральные кривые, определяемые обыкновенными дифференциальными уравнениями $\frac{dy}{dx} = r(x, y)$ и $\frac{dy}{ds} = s(x, y)$.

Замечание 2. Левые части системы (6), очевидно, представляют собой полные производные функций $r(x, y)$ и $s(x, y)$ вдоль характеристик этой системы. Эти функции называются инвариантами Римана. Поэтому

* Для линейного элемента вида $ds^2 = dx^2 + B^2(x, y) dy^2$ такая система была получена Б. Л. Рождественским (см. [1]).

естественно называть систему уравнений (6) *основными уравнениями теории поверхностей отрицательной кривизны в римановых инвариантах*.

Замечание 3. Система (6), вообще говоря, неэквивалентна системе (3) уравнений Петерсона — Кодацци и Гаусса. Однако, если решение $\{r(x, y), s(x, y)\}$ системы (6) удовлетворяет условию $r \neq s$, то l, m, n , определяемые соотношениями (5), очевидно, представляют собой решение системы (3).

§ 2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ О КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЯХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

1. Вспомогательные предложения

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \quad (7)$$

Будем предполагать, что $f(x, y)$ является $C^{1,1}$ -ограниченной в полосе Π_a функцией. Как известно, при этих условиях решение $y = y(x, \xi, \eta)$ уравнения (7), определяемое начальными данными

$$y|_{x=\xi} = \eta \quad (\text{т. е. } y(\xi, \xi, \eta) = \eta), \quad (8)$$

представляет собой функцию, заданную в области $\{0 \leq x \leq a, 0 \leq \xi \leq a, -\infty < \eta < \infty\}$, имеющую в ней непрерывные частные производные по всем аргументам x, ξ, η , причем эти производные удовлетворяют условию Липшица (см., например, [2]). Справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. Пусть функция $f(x, y)$ в полосе Π_a удовлетворяет сформулированным выше условиям. Тогда для частных производных $\frac{\partial y}{\partial \xi}$ и $\frac{\partial y}{\partial \eta}$ решения $y = y(x, \xi, \eta)$ уравнения (7) при начальных данных (8) справедливы выражения

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial \xi} &= -f(\xi, \eta) e^{\int_{\xi}^x f_y(t, y(t, \xi, \eta)) dt}, \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} &= e^{\int_{\xi}^x f_y(t, y(t, \xi, \eta)) dt}. \end{aligned} \quad (9)$$

Доказательство. Докажем, например, вторую из формул (9) (первая доказывается аналогично). Зафиксируем ξ и η и обозначим через $y(x, \xi, \eta)$ и $y(x, \xi, \eta + \Delta\eta)$ решения (7), определяемые соответственно начальными данными $y|_{x=\xi} = \eta$ и $y|_{x=\xi} = \eta + \Delta\eta$. Обозначая разность $y(x, \xi, \eta + \Delta\eta) - y(x, \xi, \eta)$ через Δy , используя уравнение (7) и лемму Адамара (см. [3]), получим

$$\frac{d\Delta y}{dx} = \varphi(x, y(x, \xi, \eta), y(x, \xi, \eta + \Delta\eta)) \Delta y, \quad (10)$$

где φ — непрерывная функция от $x, y(x, \xi, \eta)$ и $y(x, \xi, \eta + \Delta\eta)$, а, следовательно, и непрерывная функция от $\Delta\eta$. Пусть $\Delta\eta \neq 0$. Тогда из (10)

получим $\frac{d\left(\frac{\Delta y}{\Delta\eta}\right)}{dx} = \varphi \frac{\Delta y}{\Delta\eta}$. Так как $\Delta y = \Delta\eta$ при $x = \xi$, то $\left.\frac{\Delta y}{\Delta\eta}\right|_{x=\xi} = 1$. Решая

при этих начальных данных дифференциальное уравнение для $\frac{\Delta y}{\Delta \eta}$, найдем

$$\frac{\Delta y}{\Delta \eta} = e^{\int_{\xi}^{\xi+\Delta \eta} \varphi(t, y(t, \xi, \eta), y(t, \xi, \eta + \Delta \eta)) dt}$$

Переходя в этом выражении к пределу при $\Delta \eta \rightarrow 0$ и учитывая, что $\lim_{\Delta \eta \rightarrow 0} \varphi = f_y(x, y(x, \xi, \eta))$, мы убедимся в справедливости доказываемой формулы.

Из формул (9) можно получить представление для коэффициентов Липшица производных решения $y(x, \xi, \eta)$ уравнения (7) по параметрам.

Найдем, например, коэффициент Липшица L_y для производной $\frac{\partial y}{\partial \eta}$ (напомним, что L_y определяется из равенства $\left[\frac{\partial y}{\partial \eta}\right]_1^2 = L_y(\eta_2 - \eta_1)^*$).

Используя вторую из формул (9), получим

$$\left[\frac{\partial y}{\partial \eta}\right]_1^2 = \left[e^{\int_{\xi}^{\xi} f_y(t, y) dt}\right]_3 \cdot \int_{\xi}^{\xi} [f_y(t, y_2) - f_y(t, y_1)] dt,$$

где символ $[\]_3$ означает, что стоящая в квадратных скобках функция вычисляется в некоторой точке η , а y_1 и y_2 равны соответственно $y(t, \xi, \eta_1)$ и $y(t, \xi, \eta_2)$. Так как $f_y(t, y_2) - f_y(t, y_1) = L_{f_y}(y_2 - y_1)$ и $y_2 - y_1 = \left[\frac{\partial y}{\partial \eta}\right] \times (\eta_2 - \eta_1)$ то, очевидно,

$$L_y = \left[e^{\int_{\xi}^{\xi} f_y(t, y) dt}\right]_3 \cdot \int_{\xi}^{\xi} L_{f_y} \left[\frac{\partial y}{\partial \eta}\right]_3 dt. \quad (11)$$

2. Теорема существования

В этом пункте будет доказана теорема существования для систем квазилинейных уравнений гиперболического типа, имеющих следующий вид:

$$\begin{aligned} r_x + sr_y &= F_1(x, y, r, s), \\ s_x + rs_y &= F_2(x, y, r, s). \end{aligned} \quad (12)$$

Мы уже видели, что к таким системам приводятся уравнения Петерсона — Кодаци и Гаусса для поверхностной отрицательной кривизны. При этом правые части F_k представляли собой многочлены относительно неизвестных функций r и s . Ограничимся такими системами. Для правых частей F_k будем использовать также обозначение

$$F_k = \sum A_i r^i s^m. \quad (13)$$

В этом обозначении A_i — коэффициенты правых частей системы (12).

Будем считать, что функции A_i заданы в полосе Π_a и являются $C^{1,1}$ -ограниченными функциями в данной полосе. Эти условия будем называть условиями регулярности. Мы будем решать задачу Коши для

* Символом $[F]_1^2$ будем обозначать разность значений функции F в двух различных точках.

системы (12). Пару $C^{1,1}$ -ограниченных на оси ou функций $r_0(y)$ и $s_0(y)$ будем называть начальными данными задачи Коши. Для решения этой задачи используем *интегральное преобразование*.

10. **Интегральное преобразование.** Рассмотрим в полосе Π_a множество $\{R, S\}$ упорядоченных пар функций класса $C^{1,1}$. Отдельные представители таких пар будут обозначаться малыми буквами. Например, $\{\rho, \sigma\}$ означает пару функций $\{\rho(x, y), \sigma(x, y)\}$ из указанного множества. Будем считать, что при $x=0$ любая пара $\{\rho, \sigma\}$ множества $\{R, S\}$ совпадает с парой $\{r_0(y), s_0(y)\}$.

Пусть $\{\rho, \sigma\}$ — какая-либо данная пара функций из множества $\{R, S\}$. Будем говорить, что пара $\{r, s\}$ получена преобразованием пары $\{\rho, \sigma\}$ в некоторой полосе Π_h , $h \leq a$, если пара $\{r, s\}$ представляет собой в этой полосе решение задачи Коши для системы

$$\begin{aligned} r_x + \sigma r_y &= F_1(x, y, \rho, \sigma) \\ s_x + \rho s_y &= F_2(x, y, \rho, \sigma) \end{aligned} \quad (14)$$

с начальными данными $\{r_0(y), s_0(y)\}$.

Система (14) представляет собой *линейную систему* дифференциальных уравнений гиперболического типа. Характеристиками этой системы являются интегральные кривые обыкновенных уравнений

$$\frac{dy}{dx} = \rho(x, y), \quad \frac{dy}{dx} = \sigma(x, y). \quad (15)$$

Получим явное решение задачи Коши системы (14) в любой полосе Π_h , $h \leq a$ с начальными данными $\{r_0(y), s_0(y)\}$. Иными словами, получим явное выражение пары $\{r, s\}$, представляющее собой преобразование пары $\{\rho, \sigma\}$.

Пусть $\{\xi, \eta\}$ — любая фиксированная точка полосы Π_h , $h \leq a$, $y = y_1(x, \xi, \eta)$ и $y = y_2(x, \xi, \eta)$ — характеристики системы (14), проходящие через точку (ξ, η) (т. е. решения обыкновенных дифференциальных уравнений (15), определяемые начальными данными $y_1|_{x=\xi} = \eta$ и $y_2|_{x=\xi} = \eta$). Рассмотрим, например, первое уравнение системы (14) вдоль характеристики $y = y_2(x, \xi, \eta)$, угловой коэффициент которой в каждой ее точке равен $\sigma(x, y)$. Очевидно, левая часть этого уравнения представляет собой полную производную неизвестной функции $r(x, y)$ по аргументу x вдоль рассматриваемой характеристики. Правая же часть вдоль $y = y_2(x, \xi, \eta)$ — известная функция. Интегрируя эту полную производную в пределах от 0 до ξ , получим выражение для $r(\xi, \eta)$ (мы выпишем сразу аналогичную формулу для $s(\xi, \eta)$):

$$\begin{aligned} r(\xi, \eta) &= r_0(y_2(0, \xi, \eta)) + \int_0^\xi F_1(x, y_2(x, \xi, \eta)) \rho(x, y_2(x, \xi, \eta)) \times \\ &\quad \times \sigma(x, y_2(x, \xi, \eta)) dx, \\ s(\xi, \eta) &= s_0(y_2(0, \xi, \eta)) + \int_0^\xi F_2(x, y_2(x, \xi, \eta)) \rho(x, y_2(x, \xi, \eta)) \times \\ &\quad \times \sigma(x, y_2(x, \xi, \eta)) dx. \end{aligned} \quad (16)$$

Формулы (16) и представляют собой интересующее нас интегральное преобразование. Отметим, что при $\xi=0$ пара $\{r, s\}$ совпадает с парой $\{r_0(\eta), s_0(\eta)\}$.

Из проведенных выше рассуждений вытекает следующее важное замечание.

Замечание. Если имеется пара функций $\{r(x, y), s(x, y)\}$, заданных в полосе Π_h , $h \leq a$, принадлежащих классу $C^{1,1}$ и обращающихся при $x=0$ в $\{r_0(y), s_0(y)\}$, и эти функции с помощью построенного интегрального преобразования (16) переводятся в этой полосе в себя, то эта пара функций представляет собой решение в полосе Π_h задачи Коши для системы (12) с начальными данными $\{r_0(y), s_0(y)\}$.

Иными словами, решение $\{r, s\}$ задачи Коши для системы (12) с начальными данными (r_0, s_0) представляет собой неподвижный элемент класса $C^{1,1}$ интегрального преобразования (16).

2°. Вспомогательные формулы.

а) Выражения для производных. Используя правила дифференцирования интегралов по параметрам, получим из соотношений (16) следующие формулы для производных функций $r(\xi, \eta)$, $s(\xi, \eta)$ (мы приведем формулы лишь для производных $r(\xi, \eta)$):

$$\frac{\partial r}{\partial \xi} = \frac{dr_0}{dy} \cdot \frac{\partial y_2(0, \xi, \eta)}{\partial \xi} + F_1(\xi, \eta, \rho(\xi, \eta), \sigma(\xi, \eta)) + \int_0^\xi \Phi \cdot \frac{\partial y_2(x, \xi, \eta)}{\partial \xi} dx, \quad (17)$$

$$\frac{\partial r}{\partial \eta} = \frac{dr_0}{dy} \cdot \frac{\partial y_2(0, \xi, \eta)}{\partial \eta} + \int_0^\xi \Phi \cdot \frac{\partial y_2(x, \xi, \eta)}{\partial \eta} dx,$$

где $\Phi = F_{1y} + F_{1r}\rho_y + F_{1s}\sigma_y$ и аргумент y заменен на $y_2(x, \xi, \eta)$.

б) Выражение для коэффициента Липшица производной $\frac{\partial r}{\partial \eta}$. Коэффициент Липшица $L_{r\eta}$ для производной $\frac{\partial r}{\partial \eta}$ определяется из равенства

$$\left[\frac{\partial r}{\partial \eta} \right]_1^2 = L_{r\eta} (\eta_2 - \eta_1). \quad (18)$$

При преобразовании этого выражения предполагается, что F_1 имеет вид (13). Из второй формулы (17) имеем*

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial r}{\partial \eta} \right]_1^2 &= \left[\frac{dr_0}{dy} \right]_2 \left[\frac{\partial y_2(0, \xi, \eta)}{\partial \eta} \right]_1^2 + \left[\frac{dr_0}{dy} \right]_1 \left[\frac{\partial y_2(0, \xi, \eta)}{\partial \eta} \right]_1 + \\ &+ \int_0^\xi \left\{ [\Phi]_2 \left[\frac{\partial y_2}{\partial \eta} \right]_1^2 + [\Phi]_1^2 \left[\frac{\partial y_2}{\partial \eta} \right]_1 \right\} dx. \end{aligned} \quad (19)$$

Используя формулы (9), (11), (13), обозначение Δy_2 для разности $y_2(x, \xi, \eta_2) - y_2(x, \xi, \eta_1)$, получим следующие формулы:

$$\begin{aligned} \left[\frac{dr_0}{dy} \right]_1^2 &= L_{r_0y} \left[e^{\int_\xi^0 \sigma_y dt} \right]_3 (\eta_2 - \eta_1), \\ [\Phi]_1^2 &= \{ \Psi(A_i, A_{iy}, L_{A_{iy}}, \rho, \sigma, \rho_y, \sigma_y) + [F_{1r}]_2 L_{\rho_y} + [F_{1s}]_2 L_{\sigma_y} \} \Delta y_2, \\ \Delta y_2 &= \left[e^{\int_\xi^x \sigma_y dt} \right]_3 (\eta_2 - \eta_1), \\ \left[\frac{\partial y_2}{\partial \eta} \right]_1^2 &= \left\{ \left[e^{\int_\xi^x \sigma_y dt} \right]_3 \int_\xi^x L_{\sigma_y} \left[\frac{\partial y_2}{\partial \eta} \right]_3 dt \right\} (\eta_2 - \eta_1), \end{aligned} \quad (20)$$

* Символ $[f]_i$ представляет собой значение функции в точке с номером $i, i=1, 2$

в которых L_{r_0y} , $L_{A_{iy}}$, L_{ρ_y} , L_{σ_y} — соответственно коэффициенты Липшица функций r_{0y} , A_{iy} , ρ_y , σ_y , а $\Psi(A_i, A_{iy}, L_{A_{iy}}, \rho, \sigma, \rho_y, \sigma_y)$ — многочлен, аргументами которого служат указанные в круглых скобках функции, причем структура этого многочлена однозначно определяется структурой многочлена $F_1(x, y, \rho, \sigma)$.

Отметим, что значения аргументов многочлена Ψ вычисляются, вообще говоря, в различных точках. Из формул (18), (19) и (20) получаем нужное нам выражение для коэффициента Липшица L_{r_η} производной $\frac{\partial r}{\partial \eta}$ (для коэффициента L_{s_η} формула аналогична)

$$\begin{aligned} L_{r_\eta} = & L_{r_{0y}} \left[\frac{\partial y_2(0, \xi, \eta)}{\partial \eta} \right]_1 \left[e^{\int_{\xi}^0 \sigma_y dt} \right]_3 + \int_0^{\xi} \Psi \left[\frac{\partial y_2}{\partial \eta} \right]_1 \left[e^{\int_{\xi}^x \sigma_y dt} \right]_3 dx + \\ & + \left[\frac{dr_0}{dy} \right]_2 \left[e^{\int_{\xi}^0 \sigma_y dt} \right]_3 \int_{\xi}^0 L_{\sigma_y} \left[\frac{\partial y_2}{\partial \eta} \right]_3 dt + \int_{\xi}^0 \left\{ [F_{1s}]_2 L_{\sigma_y} \left[\frac{\partial y_2}{\partial \eta} \right]_1 + \right. \\ & + [\Phi]_2 \left[e^{\int_{\xi}^x \sigma_y dt} \right]_1 \int_{\xi}^x L_{\sigma_y} \left[\frac{\partial y_2}{\partial \eta} \right]_3 dt \left. \right\} \left[e^{\int_{\xi}^x \sigma_y dt} \right]_3 dx + \\ & + \int_0^{\xi} [F_{1r}]_2 \left[\frac{\partial y_2}{\partial \eta} \right]_1 L_{\rho_y} \left[e^{\int_{\xi}^x \sigma_y dt} \right]_3 dx. \end{aligned} \quad (21)$$

Замечание. Пусть $\{r(x, y), s(x, y)\}$ — решение системы (12), принадлежащее классу $C^{1,1}$. Тогда, очевидно, для этого решения имеет место интегральное преобразование (16) и поэтому для коэффициентов Липшица производных решения справедлива формула (21), в которой в правой части вместо ρ и σ должны быть подставлены r и s .

3°. Формулировка и доказательство теоремы существования. Обратимся к системе (12). Будем считать, что коэффициенты A_i правых частей этой системы удовлетворяют в Π_a условиям регулярности, а начальные данные $\{r_0, s_0\} \in C^{1,1}$ — ограниченные функции на Oy . Обозначим через L_A любую фиксированную константу, превышающую $\sup_{\Pi_a} |A_i|$, $\sup_{\Pi_a} |A_{iy}|$

и какую-либо фиксированную константу Липшица для производных A_{iy} . Пусть, далее, L_0 — любая фиксированная константа Липшица производных начальных данных. Константы M_0, N_0, M, μ, N, L удовлетворяют неравенствам

$$\begin{aligned} M_0 &\geq \sup_{-\infty < y < \infty} \{|r_0|, |s_0|\}, \quad N_0 \geq \sup_{-\infty < y < \infty} \{|r'_0|, |s'_0|\}, \quad M > M_0, \\ \mu &> \sup_{\substack{(x, y) \in \Pi_a \\ |r| \leq M, |s| \leq M}} \{|F_i|, |F_{iy}|, |F_{ir}|, |F_{is}|\}, \\ N &> \max \{N_0, N_0 M + \mu\}, \quad L > L_0. \end{aligned} \quad (22)$$

Очевидно, константы $L_A, M_0, N_0, L_0, M, \mu, N$ и L зависят лишь от коэффициентов правых частей системы (12) и начальных данных.

Теорема существования. Если коэффициенты правых частей системы (12) и начальные данные $\{r_0, s_0\}$ удовлетворяют сформулированным выше

условиям, то в некоторой полосе Π_h , $h \leq a$ существует $C^{1,1}$ -ограниченное решение $\{r, s\}$ этой системы, обращающееся в $\{r_0, s_0\}$ при $x = 0$. Для ширины h этой полосы существует оценка снизу, зависящая от коэффициентов правых частей рассматриваемой системы и от начальных данных*.

Доказательство. Обратимся к указанному ранее множеству $\{R, S\}$. Подчиним функции $\{\rho, \sigma\}$ этого множества следующим ограничениям:

$$\begin{aligned} \sup_{\Pi_a} \{|\rho|, |\sigma|\} &\leq M, \\ \sup_{\Pi_a} \{|\rho_x|, |\sigma_x|, |\rho_y|, |\sigma_y|\} &\leq N, \end{aligned} \quad (23)$$

кроме того, будем считать, что коэффициенты Липшица для производных $\{\rho_y, \sigma_y\}$ любой пары не превышают константы L . Будем искать неподвижный элемент преобразования (16) класса $C^{1,1}$. Из формул (16), (17), (21), (22), (23) вытекают следующие оценки для пары $\{r, s\}$, справедливые в любой полосе Π_h , $h \leq a$ (мы приводим оценки лишь для функции r):

$$\begin{aligned} |r| &\leq M_0 + \mu h, \quad \left| \frac{\partial r}{\partial \xi} \right| \leq N_0 M e^{N h} + \mu + \mu [1 + 2N] M e^{N h} \cdot h, \\ \left| \frac{\partial r}{\partial \eta} \right| &\leq N_0 e^{N h} + \mu [1 + 2N] e^{N h} \cdot h, \\ |L_{r\eta}| &\leq e^{2N h} \{L_0 + \Psi h + N_0 h + \mu (2 + (1 + 2N) e^{N h} \cdot h) L\}, \end{aligned} \quad (24)$$

где символом Ψ обозначено выражение, полученное из многочлена Ψ путем замены его аргументов соответственно величинами $L_A, L_A, L_A, M, M, N, N$ и каждого знака вычитания знаком сложения. Получим оценки разностей функций. Пусть $\{\rho^*, \sigma^*\}$ и $\{\rho, \sigma\}$ — две пары функций из множества $\{R, S\}$, а $\{r^*, s^*\}$ и $\{r, s\}$ — соответствующие интегральные преобразования этих пар. Так как $r_x^* + \sigma^* r_y^* = F_1(x, y, \rho^*, \sigma^*)$ и $r_x + \sigma r_y = F_1(x, y, \rho, \sigma)$, то для $\Delta r = r^* - r$ получим уравнение

$$\Delta r_x + \sigma^* \Delta r_y = \Delta F_1 - \Delta \sigma r_y,$$

где

$$\Delta F_1 = F_1(x, y, \rho^*, \sigma^*) - F_1(x, y, \rho, \sigma).$$

Интегрируя уравнение для Δr вдоль интегральной кривой уравнения $\frac{dy}{dx} = \sigma^*$, проходящей через точку (ξ, η) полосы Π_h , учитывая, что по лемме Адамара $\Delta F_1 = \varphi_1 \Delta \rho + \varphi_2 \Delta \sigma$, где $|\varphi_i| \leq \mu$, получим следующую оценку для Δr :

$$|\Delta r| \leq (\mu + N) h |\Delta \sigma| + \mu h |\Delta \rho|.$$

Используя это неравенство и аналогичное неравенство для Δs , получим оценку

$$\max \{|\Delta r|, |\Delta s|\} \leq (2\mu + N) h \cdot \max \{|\Delta \rho|, |\Delta \sigma|\}. \quad (25)$$

Отметим, что стоящие в правых частях неравенств (25) и (24) выражения представляют собой монотонно возрастающие функции h , обращающиеся при $h = 0$ соответственно в $M_0, N_0 M + \mu, N_0, L_0$ и 0. Поэтому можно указать

* Краткая схема доказательства имеется, например, в [4] для систем, заданных в конечной области без оценки снизу числа h .

такое h_0 , что при $h \leq h_0$ эти функции будут соответственно меньше величин M , N , N , L и α , где $0 < \alpha < 1$. При таком выборе h_0 (явный вид этой величины получается без труда) интегральное преобразование (16) переводит в полосу Π_{h_0} функции класса $\{R, S\}$ в функции этого же класса и является сжимающим. Отсюда вытекает, что итерационная последовательность $\{r_n, s_n\}$ ($\{r_n, s_n\}$ — преобразование пары $\{r^{n-1}, s^{n-1}\}$) будет фундаментальной. Легко убедиться, что предел $\{r, s\}$ этой последовательности существует (в силу оценок выполнены условия теоремы Арцела), представляет собой пару непрерывных функций, имеющих непрерывные производные по y , коэффициенты Липшица которых ограничены константой L . Легко также убедиться, что пара $\{r, s\}$ с помощью преобразования (16) переводится в себя. Из вида интегрального преобразования вытекает, что $r(\xi, \eta)$ имеет производную по ξ на каждой фиксированной интегральной кривой уравнения $\frac{dy}{dx} = s$ и эта производная равна $F_1(\xi, \eta, r(\xi, \eta), s(\xi, \eta))$. Поэтому в полосе Π_{h_0} имеется дифференцируемое поле нигде не вертикальных направлений (направлений интегральных кривых уравнения $\frac{dy}{dx} = s$), по которым $r(\xi, \eta)$ имеет непрерывные производные. Так как эта функция имеет, как было установлено, производную по η , коэффициенты Липшица которой ограничены в Π_{h_0} , то $r(\xi, \eta)$ есть $C^{1,1}$ — ограниченная функция в Π_{h_0} . Аналогичные выводы справедливы и для $s(\xi, \eta)$. Согласно замечанию в пункте 1^о, пара функций $\{r, s\}$ является в полосе Π_{h_0} $C^{1,1}$ -ограниченным решением системы (12).

3. Оценки разностей решений и точных констант Липшица решений

1^о. Выражение для разностей ординат решений уравнений.

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad \text{и} \quad \frac{dy}{dx} = f^*(x, y).$$

Пусть правые части указанных уравнений $C^{1,1}$ -ограниченные в полосе Π_a функции, а $y(x, \xi, \eta)$ и $y^*(x, \xi, \eta)$ — решения этих уравнений для начальных данных $y|_{x=\xi} = \eta$. Полагая $\Delta y = y^* - y$ и $\Delta f = f^*(x, y^*) - f(x, y)$ и используя лемму Адамара, получим для Δy дифференциальное уравнение

$$\frac{d\Delta y}{dx} = \Delta f + \varphi(x, y, y^*) \Delta y,$$

где $\varphi(x, y, y^*)$ — непрерывная функция, которая удовлетворяет неравенству $|\varphi| \leq \sup_{\Pi_a} |f_y|$. Так как $\Delta y = 0$ при $x = \xi$, то

$$\Delta y = \left[\int_{\xi}^x \Delta f e^{-\int_{\xi}^t \varphi(\tau, y(\tau, \xi, \eta), y^*(\tau, \xi, \eta)) d\tau} dt \right] \cdot e^{\int_{\xi}^x \varphi(t, y(t, \xi, \eta), y^*(t, \xi, \eta)) dt} \quad (26)$$

2^о. Выражение для разностей решений квазилинейных систем. Пусть имеются две системы вида (12):

$$\left. \begin{aligned} r_x + sr_y &= F_1(x, y, r, z) \\ s_x + rs_y &= F_2(x, y, r, s) \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} r_x + sr_y &= F_1^*(x, y, r, s) \\ s_x + rs_y &= F_2^*(x, y, r, s) \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Полагая $\Delta r = {}^*r - r$, $\Delta s = {}^*s - s$, $\Delta F_1 = {}^*F_1 - F_1$, получим из (27)

$$\Delta r_x + {}^*s \Delta r_y = \Delta F_1 - r_y \Delta s. \quad (28)$$

Интегрируя (28) вдоль интегральной кривой уравнения $\frac{dy}{dx} = {}^*s$ и учитывая выражение (13) для F_k и *F_k , получим для Δr и Δs выражения (выражение для Δs получается аналогично):

$$\begin{aligned} \Delta r &= \Delta r_0 + \int_0^\xi \left(\varphi_1 \Delta r + \varphi_2 \Delta s + \sum_1 {}^{**}r^m \Delta A_i \right) dx, \\ \Delta s &= \Delta s_0 + \int_0^\xi \left(\Psi_1 \Delta r + \Psi_2 \Delta s + \sum_2 {}^{**}s^m \Delta A_i \right) dx, \end{aligned} \quad (29)$$

в которых φ_1 , φ_2 , Ψ_1 , Ψ_2 представляют собой многочлены, аргументами которых служат коэффициенты правых частей первой из систем (27), решения рассматриваемых систем и производные по y от этих решений.

3°. Выражение для разностей производных решений. Вывод приводимого ниже выражения для разности $\Delta r_\xi = \frac{\partial r^*}{\partial \xi} - \frac{\partial r}{\partial \xi}$ основывается на формулах (9), (13), (17).

$$\begin{aligned} \Delta r_\xi &= -\frac{{}^*dr_0}{dy} \cdot {}^*s(\xi, \eta) \left[e^{\int_\xi^0 {}^*s_y dt} \int_\xi^0 \Delta s_y dt + e^{\int_\xi^0 s_y dt} \int_\xi^0 L_{sy} \Delta y_2 dt \right] - \\ &- \frac{{}^*dr_0}{dy} \Delta s e^{\int_\xi^0 s_y dt} - s(\xi, \eta) e^{\int_\xi^0 s_y dt} (\Delta r_{0y} + L_{r_y} \Delta y_2) + \underbrace{\varphi_1 \Delta r + \tilde{\varphi}_2 \Delta s}_{(30)} + \\ &+ \underbrace{\sum_1 {}^{**}r^m \Delta A_i}_{(30)} - \int_0^\xi \left[\Phi \{ {}^*s(\xi, \eta) \} e^{\int_\xi^x {}^*s_y dt} \int_\xi^x \Delta s_y dt + e^{\int_\xi^x s_y dt} \int_\xi^x L_{sy} \Delta y_2 dt \right] + \\ &+ e^{\int_\xi^x s_y dt} \Delta s \} + s(\xi, \eta) e^{\int_\xi^x s_y dt} \left\{ \sum \bar{D}_{0i} \Delta A_{iy} + \bar{D}_1 \Delta r + \bar{D}_2 \Delta s + \bar{D}_3 \Delta r_y + \right. \\ &\quad \left. + \bar{D}_4 \Delta s_y + \bar{D}_5 \Delta y_2 \right\} dx. \end{aligned}$$

Выражение для Δr_η отличается от выражения для Δr_ξ лишь тем, что в правой части будет отсутствовать группа слагаемых, подчеркнутых в (30) волнистой чертой. В формуле (30) величины $\bar{D}_{0i}$, $\bar{D}_1$, $\bar{D}_2$, $\bar{D}_3$, $\bar{D}_4$, $\bar{D}_5$ представляют собой многочлены вполне определенной структуры (она определяется структурой F_1), аргументами которых служат r , s , *r , *s , r_y , s_y , A_{iy} , L_{r_y} , L_{s_y} . При этом значения аргументов вычисляются в различных точках.

Замечание 1. В правой части формулы (30) и аналогичной формулы для Δr_η имеются различного вида разности, среди которых имеются и разности производных решений, но лишь по аргументу y . Эти разности содержатся как под знаком интеграла, так и в виде внеинтегральных членов. В формуле (30) и в аналогичной формуле для Δr_η такой внеинтегральной разностью производных является разность Δr_{0y} производных начальных данных.

Замечание 2. Выражения для Δs_i и Δs_j имеют вид, аналогичный (30). Для этих разностей полностью справедливо только что сделанное замечание 1.

4°. Оценки разностей решений и производных решений. Будем говорить, что две функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$ отличаются в полосе Π_a в метрике $C^{1,1}$ менее, чем на ε , если эти функции, соответствующие производные и точные константы Липшица производных этих функций по аргументу y отличаются в Π_a менее, чем на ε .

Пусть соответствующие коэффициенты правых частей систем (27) отличаются в Π_a в метрике $C^{1,1}$ менее, чем на ε . Пусть, далее, $\{r, s\}$ и $\{r^*, s^*\} \in C^{1,1}$ -ограниченные в полосе Π_a решения этих систем, определяемые начальными данными, которые отличаются на оси oy в метрике $C^{1,1}$ менее, чем на ε . При этих условиях справедливы следующие леммы.

Лемма 2. В любой полосе Π_h , $h \leq a$, указанные решения рассматриваемых систем отличаются менее, чем на $P_1 \cdot \varepsilon$, где константа P_1 определяется шириной a полосы Π_a и константами, которые соответственно превышают модули коэффициентов правых частей рассматриваемых систем, модули решений и модули производных по y решений.

Лемма 3. Пусть (ξ, η) — любая фиксированная точка полосы Π_a , $y_i(x, \xi, \eta)$ и $y_i^*(x, \xi, \eta)$ — исходящие из точки (ξ, η) одноименные характеристики рассматриваемых систем. Тогда модули разностей $\Delta y_i = y_i^* - y_i$ ординат этих характеристик меньше, чем $P_2 \cdot \varepsilon$, где константа P_2 определяется шириной a полосы Π_a и константами, которые соответственно превышают модули коэффициентов правых частей рассматриваемых систем, модули решений и модули производных по y решений.

Лемма 4. В любой полосе Π_h , $h \leq a$, производные указанных решений рассматриваемых систем отличаются менее, чем на $P_3 \cdot \varepsilon$, где константа P_3 определяется шириной a полосы Π_a и константами, которые соответственно превышают модули коэффициентов правых частей рассматриваемых систем, модули производных по y этих коэффициентов, константы Липшица этих производных, модули решений, модули производных по y решений и константы Липшица этих производных.

Приведем полное доказательство леммы 2. Пусть L_A — положительная константа, превышающая модули коэффициентов правых частей рассматриваемых систем, модули производных по y этих коэффициентов, константы Липшица этих производных, а положительные константы M , N и L соответственно превышают числа

$$\sup_{\Pi_a} \{|r|, |s|, |r^*|, |s^*|\}, \sup_{\Pi_a} \{|r_y|, |s_y|, |r_y^*|, |s_y^*|\}$$

и модули констант Липшица производных по y решений $\{r, s\}$ и $\{r^*, s^*\}$.

Из явного вида для φ_1, φ_2 (см. формулу (29)) вытекают оценки, справедливые в любой полосе Π_h , $h \leq a$:

$$|\varphi_1| < \sum L_A e M^{m+l-1}, |\varphi_2| < \sum L_A m M^{m+l-1},$$

$$|\sum_1 r^{*l} s^{*m} \Delta A_i| < (\sum_1 M^{m+l}) \cdot \varepsilon.$$

Аналогичные оценки имеют место для Ψ_1, Ψ_2 и $\sum_2 r^{*l} s^{*m} \Delta A_i$. Обозначая через D_1 число, превышающее правые части оценок для $|\varphi_1|, |\varphi_2|, |\Psi_1|$,

$|\Psi_2|$ и числа $\sum_1 M^{m+l}$, $\sum_2 M^{m+l}$, получим из (29) следующие неравенства, справедливые в любой полосе Π_h :

$$\begin{aligned} \sup_{\Pi_h} |\Delta r| &< D_1 h (\sup_{\Pi_h} |\Delta r| + \sup_{\Pi_h} |\Delta s|) + (1 + D_1 h) \varepsilon, \\ \sup_{\Pi_h} |\Delta s| &< D_1 h (\sup_{\Pi_h} |\Delta r| + \sup_{\Pi_h} |\Delta s|) + (1 + D_1 h) \varepsilon. \end{aligned} \quad (31)$$

Обозначая через h_1 то значение h , для которого величина $1 - 2D_1 h$ будет положительной, и полагая $\alpha_1 = \frac{2}{1 - 2D_1 h_1}$, получим из (31) оценку, справедливую в полосе Π_{h_1} :

$$\sup_{\Pi_{h_1}} |\Delta r| + \sup_{\Pi_{h_1}} |\Delta s| < \alpha_1 (1 + D_1 h_1) \varepsilon. \quad (32)$$

Обратимся к полосе $\Pi_{h_1, 2h_1} = \{h_1 \leq x \leq 2h_1, -\infty < y < \infty\}$. Начальные данные вдоль линии $x = h_1$ различаются, согласно неравенству (32), на величину, меньшую $\alpha_1 (1 + D_1 h_1) \varepsilon$. Поэтому в указанной полосе мы получим систему неравенств вида (31), в которых последние слагаемые в правых частях будут заменены членами $[\alpha_1 (1 + D_1 h_1) + D_1 h_1] \varepsilon$, которые меньше $\alpha_1 (1 + D_1 h_1) \varepsilon$. Рассуждая, как и выше, получим оценку

$$\sup_{\Pi_{h_1, 2h_1}} |\Delta r| + \sup_{\Pi_{h_1, 2h_1}} |\Delta s| < (\alpha_1^2 + \alpha_1) (1 + D_1 h_1) \varepsilon. \quad (33)$$

Сравнивая (32) и (33), легко усмотреть, как должна быть проведена индукция. Легко убедиться, что в любой полосе Π_h , $h \leq a$, справедлива оценка

$$\sup_{\Pi_h} |\Delta r| + \sup_{\Pi_h} |\Delta s| \leq (\alpha_1^{q_1} + \dots + \alpha_1) (1 + D_1 h_1) \varepsilon,$$

где $q_1 = \left\lceil \frac{q}{h_1} \right\rceil + 1$.

Полагая $P_1 = (\alpha_1^{q_1} + \dots + \alpha_1) (1 + D_1 h_1)$ и замечая, что константа P_1 определяется как раз теми константами, которые перечислены в формулировке леммы, мы убедимся в справедливости утверждения. Лемма 2 доказана.

Доказательство леммы 3 вытекает из формул (26) и леммы 2. Доказательство леммы 4 основывается на формуле (30), аналогичных формулах для разностей других производных, на замечаниях 1 и 2 к формуле (30). В доказательстве используются леммы 2 и 3. Рассуждения аналогичны рассуждениям в доказательстве леммы 2.

5°. **Оценки точных констант Липшица решений квазилинейной системы.** Пусть L_A — любая фиксированная положительная константа, превышающая модули коэффициентов правых частей рассматриваемой системы, модули производных по y этих коэффициентов и константы Липшица этих производных. Через M и N обозначим любые фиксированные положительные константы, которые соответственно превышают числа $\sup_{\Pi_a} \{|r|, |s|\}$ и $\sup_{\Pi_a} \{|r_y|, |s_y|\}$. Через $\bar{L}_{r_y}$ и $\bar{L}_{s_y}$ обозначим точные константы Липшица производных r_y и s_y в полосе Π_h , через L_0 — любую фиксированную константу, превышающую константы Липшица производных начальных данных.

Лемма 5. В любой полосе Π_h , $h \leq a$ справедливы оценки

$$\bar{L}_{r_y} < P_4(h)(L_0 + 1), \quad \bar{L}_{s_y} < P_4(h)(L_0 + 1), \quad (34)$$

где $P_4(h)$ зависит от a , L_A , M , N и представляет собой неубывающую функцию от h .

Доказательство этой леммы основывается на формуле (21) и замечании к этой формуле. Рассуждения аналогичны рассуждениям в доказательстве леммы 2.

4. Свойство корректности данного решения системы вида (12).

Пусть коэффициенты A_i правых частей F_i заданной системы вида (12) являются $C^{1,1}$ -ограниченными в полосе Π_a функциями и пусть $\{r, s\}$ $C^{1,1}$ -ограниченное в Π_a решение этой системы, определяемое $C^{1,1}$ -ограниченными на ou начальными данными $\{r_0, s_0\}$. При сделанных предположениях справедливы следующие леммы, выражающие свойство корректности данного решения $\{r, s\}$.

Лемма 6. Можно указать такое $\delta > 0$, что любая система вида (12), коэффициенты правых частей которой отличаются в полосе Π_a в метрике $C^{1,1}$ от коэффициентов правых частей заданной системы менее, чем на δ , имеет в этой полосе $C^{1,1}$ -ограниченное решение для любых начальных данных, отличающихся на ou в метрике $C^{1,1}$ от $\{r_0, s_0\}$ менее, чем на δ . Константа δ зависит от коэффициентов правых частей заданной системы и от данного ее решения $\{r, s\}$.

Пусть $\delta > 0$ — константа, определенная в лемме 6 для заданной системы вида (12) и ее решения $\{r, s\}$. Рассмотрим две системы вида (12), коэффициенты правых частей которых отличаются в Π_a в метрике $C^{1,1}$ от соответствующих коэффициентов правых частей заданной системы менее, чем на δ . Укажем для каждой из этих двух систем начальные данные, отличающиеся в метрике $C^{1,1}$ от начальных данных $\{r_0, s_0\}$ менее, чем на δ .

Лемма 7. Если коэффициенты правых частей указанных двух систем отличаются в полосе Π_a в метрике $C^{1,1}$ менее, чем на ε , и начальные данные отличаются на ou в метрике $C^{1,1}$ также менее, чем на ε , то решения этих систем, определяемые указанными начальными данными, отличаются менее, чем на $P \cdot \varepsilon$. Константа P зависит от коэффициентов правых частей заданной системы и ее решения $\{r, s\}$.

Доказательство леммы 6. Пусть L_A — положительная константа, превышающая по меньшей мере на Δ (Δ — некоторая фиксированная положительная константа) модули коэффициентов правых частей рассматриваемой системы, модули производных по y этих коэффициентов и константы Липшица указанных производных. Пусть, далее,

$$M_0 > \sup_{\Pi_a} \{|r|, |s|\} + \Delta, \quad N_0 > \sup_{\Pi_a} \{|r_x|, |r_y|, |r_z|, |s_y|\} + \Delta,$$

$$M > M_0 + \Delta, \quad \mu > \sup_{\Pi_a, |r| \leq M, |s| \leq M} \{|F_t|, |F_{ty}|, |F_{tz}|, |F_{ts}|\} + \Delta,$$

$$N > \max \{N_0, \mu + MN_0\} + \Delta.$$

Пусть $\bar{L}_0$ превышает по меньшей мере на Δ какую-либо фиксированную константу Липшица производных r_y и s_y в Π_a , $L_0 = P_4(a)(\bar{L}_0 + 1)$ ($P_4(h)$ — фигурирующая в лемме 5 функция), $\bar{L} > L_0 + \Delta$. Посредством констант L_A , M_0 , N_0 , M , μ , N , L_0 и $\bar{L}$ определим число h_0 так, как это указыва-

лось в доказательстве теоремы существования. Очевидно, все системы вида (12), коэффициенты правых частей которых отличаются в метрике $C^{1,1}$ в полосе Π_a от коэффициентов правых частей менее, чем на Δ (такие системы будем обозначать (12) $^\Delta$), имеют в полосе Π_{h_0} решение для любых начальных данных $\{r_0, s_0\}$, отличающихся в метрике $C^{1,1}$ менее, чем на Δ от $\{r_0, s_0\}$.

Рассмотрим любое положительное число δ_1 , удовлетворяющее условию $\delta_1 < \Delta$. Обозначим через $\{r, s\}$ решение в Π_{h_0} системы (12) для начальных данных $\{r_0, s_0\}$ и положим $\Delta r = r - r_0$, $\Delta s = s - s_0$. Согласно леммам 2 и 4 справедливы оценки

$$\sup_{\Pi_{h_0}} \{|\Delta r|, |\Delta s|\} < P_1 \delta_1, \quad \sup_{\Pi_{h_0}} \{|\Delta r_y|, |\Delta s_y|\} < P_3 \delta_1, \\ \sup_{\Pi_{h_0}} \{|\Delta r_x|, |\Delta s_x|\} < P_3 \delta_1.$$

Заметим, что так как $\delta_1 < \Delta$, то константы P_1 и P_3 не зависят от δ_1 . Очевидно, δ_1 можно выбрать столь малым, что $P_1 \delta_1 < \Delta$, $P_3 \delta_1 < \Delta$ и константа Липшица производных начальных данных $\{r_0, s_0\}$ не будет превышать $\bar{L}_0$. Но тогда в полосе Π_{h_0} некоторая константа L_{h_0} Липшица производных по y любого решения $\{r, s\}$ не будет превышать L_0 . Это вытекает из того, что $L_0 = P_4(a)(\bar{L}_0 + 1)$, а по лемме 4 константа L_h будет оцениваться числом $P_4(h_0)(\bar{L}_0 + 1)$ и $P_4(h_0) \leq P_4(a)$. При таком выборе δ_1 любое решение $\{r, s\}$ можно, очевидно, продолжить в полосу $\{h_0 \leq x \leq 2h_0, -\infty < y < \infty\}$, взяв в качестве начальных данных на линии $x = h_0$ функции $\{r(h_0, y), s(h_0, y)\}$. Повторяя эти рассуждения конечное число раз, мы завершим доказательство леммы.

Доказательство леммы 7 вытекает из лемм 6 и 2.

§ 3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ

Пусть в полосе Π_a задана метрика W^- отрицательной кривизны K посредством линейного элемента (1), причем функция $B(x, y)$ и кривизна K удовлетворяют всем условиям, при которых сформулирована основная теорема. Наряду с метрикой W^- рассмотрим метрику W_ε , определенную в Π_a посредством линейного элемента

$$ds_\varepsilon^2 = (1 + \varepsilon^2 B_x^2) dx^2 + 2\varepsilon^2 B_x B_y dx dy + (B^2 + \varepsilon^2 B_y^2) dy^2. \quad (35)$$

Отметим, что метрика W_ε реализуется посредством поверхности S_ε , задаваемой параметрическими уравнениями

$$X = \varepsilon B \cos \frac{y}{\varepsilon}, \quad Y = \varepsilon B \sin \frac{y}{\varepsilon}, \quad Z = x. \quad (36)$$

Для линейного элемента (1) система (6) однородна ($A_0 \equiv 0$). Поэтому в полосе Π_a имеется тривиальное решение $r \equiv 0$, $S \equiv 0$ системы (6).

Пусть $\delta > 0$ — число, соответствующее этому решению по лемме (6). Обратимся к линейному элементу (35). Для указанного $\delta > 0$ можно указать такое $\varepsilon_0 > 0$, что для любого ε , $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, коэффициенты правых

частей системы (6) для элемента (35) будут отличаться в метрике $C^{1,1}$ от соответствующих коэффициентов правых частей системы (6) для элемента (1) менее, чем на δ . Поскольку линейный элемент (35) реализуется посредством поверхности (36), то решение $\{r_\varepsilon, s_\varepsilon\}$ системы (6) для элемента (35) может быть найдено в явном виде, так как r_ε и s_ε — угловые коэффициенты образов асимптотических линий в параметрической плоскости xy . Легко убедиться, что

$$r_\varepsilon = \varepsilon k + O(\varepsilon^2), \quad s_\varepsilon = -\varepsilon k + O(\varepsilon^2). \quad (37)$$

Пусть ε — любое положительное число, удовлетворяющее условию $\varepsilon < \varepsilon_0$. Тогда, согласно лемме 6, система (6) для элемента (1) имеет в Π_a решение $\{r, s\}$, определяемое начальными данными $\{r_0, s_0\} \equiv \{r_\varepsilon(0, y), s_\varepsilon(0, y)\}$. Так как коэффициенты правых частей систем (6) для элементов (1) и (35) отличаются в Π_a в метрике $C^{1,1}$ менее, чем на $C\varepsilon^2$ ($C = \text{const}$), то, согласно лемме 7, решения $\{r, s\}$ и $\{r_\varepsilon, s_\varepsilon\}$ отличаются менее, чем на $P \cdot \varepsilon^2$ ($P = \text{const}$). Отсюда и из соотношения (37) вытекает, что

$$r = \varepsilon k + O(\varepsilon^2), \quad s = -\varepsilon k + O(\varepsilon^2). \quad (38)$$

Из (38) следует, что $r \neq s$ для всех достаточно малых ε . Используя соображения о связи решения $\{r, s\}$ и решений $\{l, m, n\}$ уравнений Петерсона — Кодацци и Гаусса, легко завершить доказательство теоремы.

Автор приносит глубокую благодарность Н. В. Ефимову и А. В. Погорелому за ценные идеи и внимание к выполненной работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Л. Рождественский. Система квазилинейных уравнений теории поверхностей. ДАН СССР, 143, № 1, 1962 г.
2. Л. С. Понтрягин. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Физматгиз, М., 1961.
3. И. Г. Петровский. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. ОГИЗ, М. — Л., 1947.
4. Р. Курант. Уравнения с частными производными. Изд-во «Мир», М., 1964.

Поступила в редколлегию 8 июня 1966 г.

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ИЗОМЕТРИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ВЫПУКЛОЙ ПОВЕРХНОСТИ В ПРОСТРАНСТВО ВЫСШЕГО ЧИСЛА ИЗМЕРЕНИЙ

Е. П. Сенькин (Харьков)

Теорема. Пусть в n -мерной плоскости P m -мерного евклидова пространства ($n \leq m$) дана $(n-1)$ -мерная общая замкнутая выпуклая поверхность F . Обозначим через Φ -изометрический образ F , расположенный в пространстве размерности k ($n \leq k \leq m$). Пусть $r(x, y)$ — расстояние между точками $x, y \in F$ в пространстве, а $\rho(x, y)$ — расстояние между соответствующими по изометрии точками на Φ . Тогда, если для любой пары точек на F имеет место неравенство $\rho(x, y) \geq r(x, y)$, то F равна Φ .

Доказательство основано на следующей лемме.

Лемма. Пусть F — плоская замкнутая выпуклая кривая и Φ — изометричная ей замкнутая кривая в пространстве. Пусть $r(x, y)$ — расстояние между точками $x, y \in F$ в пространстве, а $\rho(x, y)$ — расстояние между соответствующими точками на Φ . Тогда, если для любой пары точек на F имеет место неравенство $\rho(x, y) \geq r(x, y)$, то F равна Φ .

Эта лемма доказана в работе автора «Об изгибании общих выпуклых поверхностей с границей»¹ (лемма II). Правда, в упомянутой работе речь идет о деформации F в трехмерное пространство, но доказательство не зависит от размерности пространства, в котором лежит Φ .

Пусть x, y — произвольные точки F . Пересечем F двумерной плоскостью, проходящей через x, y . В сечении получим замкнутую выпуклую кривую L . В силу леммы соответствующий ей изометрический образ на Φ равен L . Следовательно, все расстояние между соответствующими точками на F и Φ равны, т. е. F и Φ — конгруэнтны.

Поступила в редколлегию 16 мая 1966 г.

¹ См. «Вестник ЛГУ», 1960, № 19.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ШИРИНЫ ОБЩЕЙ ЗАМКНУТОЙ ВЫПУКЛОЙ ПОВЕРХНОСТИ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ИЗМЕНЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОЙ СРЕДНЕЙ КРИВИЗНЫ. II

Е. П. Сенькин (Харьков)

В статье [1] получена следующая оценка для модуля разности ширины двух общих замкнутых выпуклых поверхностей H_1, H_2 в произвольном направлении n :

$$|B_1(n) - B_2(n)| \leq \frac{1}{\pi} \int_{\Omega} |F_1(H_1, d\omega) - F_1(H_2, d\omega)|,$$

где $F_1(H, \omega)$ — интегральная средняя кривизна множества на поверхности H , сферическое изображение которого совпадает с ω , интегрирование ведется по всей единичной сфере Ω .

Благодаря уточнению предыдущего метода, здесь получена более простая и сильная оценка, именно:

$$|B_1(n) - B_2(n)| \leq \frac{1}{\pi} \sup_{\omega \in \Omega} |F_1(H_1, \omega) - F_1(H_2, \omega)|.$$

Как и в предыдущем случае, оценка получается сначала для аналогичных многогранников, а затем с помощью леммы А. Д. Александрова о том, что любое число выпуклых тел можно с любой точностью аппроксимировать аналогичными многогранниками, переносится на общие выпуклые поверхности [2].

Выпуклые многоугольники называются аналогичными, если каждой стороне одного соответствует параллельная сторона другого и обратно.

Выпуклые многогранники называются аналогичными, если каждой грани одного соответствует параллельная и аналогичная грань другого и обратно.

Пусть P_1, P_2 — аналогичные многогранники. Пусть a_i, b_i — векторы соответствующих ребер, α_i — двугранные углы, дополняющие до π двугранные углы, при этих ребрах. Обозначим через $Q(n)$ — плоскость с нормалью n , а через $\Theta_i(n)$ — плоский угол, который получается в сечении угла α_i плоскостью $Q(n)$.

Рассмотрим суммы

$$\sum_i |(a_i, n)| \Theta_i(n) = 2\pi B_1(n),$$

$$\sum_i |(b_i, n)| \Theta_i(n) = 2\pi B_2(n).$$

Вычитая, получим

$$2\pi |B_1(n) - B_2(n)| = \left| \sum_i (|a_i n| - |b_i n|) \right| \Theta_i(n).$$

Эту сумму разобьем на две:

$$S_1 = \sum_{a_i > b_i} (|a_i n| - |b_i n|) \Theta_i(n),$$

$$S_2 = \sum_{a_i < b_i} (|a_i n| - |b_i n|) \Theta_i(n).$$

Обозначим $\max\{|S_1|, |S_2|\} = \sigma$, тогда $|S_1 + S_2| \leq \sigma$. Для определенности будем считать $S_1 \geq |S_2|$. Следовательно

$$2\pi |B_1(n) - B_2(n)| \leq \sigma = \sum_{a_i > b_i} (|a_i n| - |b_i n|) \Theta_i(n).$$

Но

$$\sum_{a_i > b_i} (|a_i n| - |b_i n|) \Theta_i(n) \leq \sum_{a_i > b_i} (|a_i| - |b_i|) \alpha_i,$$

а для аналогичных многогранников

$$\sum_{a_i > b_i} (|a_i| - |b_i|) \alpha_i = 2 \sup_{\omega \in \mathbb{Q}} |F_1(P_1, \omega) - F_1(P_2, \omega)|,$$

что и требовалось доказать.

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. П. Сенькин. Об устойчивости ширины общей замкнутой выпуклой поверхности в зависимости от изменения интегральной средней кривизны. Укр. геометр. сб., вып. II. Изд-во ХГУ, Харьков, 1966.
2. А. Д. Александров. К теории смешанных объемов выпуклых тел. Матем. сб., 2 (44): 5, 1937; 2 (44): 5, 1937; 3 (45): 1, 1938; 3 (45): 2, 1938.

Поступила в редколлегию 16 мая 1966 г.

О ТРЕХМЕРНЫХ РИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ, ДОПУСКАЮЩИХ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ СЕМЕЙСТВА ВПОЛНЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Ю. С. Слободян (Харьков)

Вполне геодезической поверхностью риманова пространства называется такая поверхность, геодезические линии которой являются одновременно геодезическими линиями пространства [1].

Полным римановым пространством называется такое риманово пространство, в котором всякая фундаментальная последовательность точек сходится [2].

В работе рассматриваются полные трехмерные римановы пространства гомеоморфные евклидову пространству с аналитической метрикой, допускающие семейства вполне геодезических поверхностей.

Под семейством вполне геодезических поверхностей будем понимать множество вполне геодезических поверхностей, гомеоморфное евклидовой прямой.

Две поверхности будем считать разными, если невозможно перейти от одной поверхности к другой, непрерывно меняя точку и касательное евклидово пространство в этой точке, например, поверхность, заданную уравнением

$$x^1{}^2 - x^2{}^2 = 1,$$

будем считать как две разные поверхности.

Рассмотрим индикатрису Эйнштейна [1], построенную для каждой точки пространства. Она дается уравнением

$$R_{ij}x^i x^j - R_{ij}x^i x^j = 1 \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

Это поверхность второго порядка, вполне геодезическая поверхность пространства, содержащая некоторую точку M , проходит ортогонально главным направлениям индикатрисы, построенной для этой точки. Индикатриса может допускать в M либо три различные главные M направления, либо семейство главных направлений. Пусть в точке индикатриса допускает три различные главные направления.

Теорема. Если полное трехмерное риманово пространство гомеоморфно евклидову, имеет аналитическую метрику и допускает однопараметрическое семейство вполне геодезических поверхностей, и если через каждую точку пространства проходит вполне геодезическая поверхность, то либо все поверхности семейства проходят через одну геодезическую линию, либо никакие две поверхности этого семейства не пересекаются.

Доказывается теорема с помощью следующих лемм.

Лемма 1. Множество V тех точек пространства, для которых индикатриса допускает семейства главных направлений, представляет собой некоторую совокупность изолированных точек, линий и поверхностей.

Доказательство. Множество V не имеет внутренней точки. Действительно, обозначим собственные значения индикатрисы через a, b, c . В точках множества V функция

$$f = a - b \equiv 0.$$

Собственные значения есть решения алгебраической системы уравнений с аналитическими коэффициентами, а поэтому сами являются аналитическими функциями точки. Функция f тоже аналитическая. Но если аналитическая функция обращается в нуль на множестве, имеющем внутреннюю точку, то она тождественно равна нулю во всем пространстве [3]. Более того, если функция f обращается в нуль на сходящейся последовательности k -мерных ($k = 0, 1, 2$) поверхностей, то она обращается в нуль на некоторой $(k+1)$ -мерной поверхности. Отсюда и следует лемма.

Лемма 2. Каждая поверхность сходящейся последовательности поверхностей не может пересекать предельную поверхность ортогонально, если линия пересечения поверхностей имеет предельную.

В самом деле, если каждая поверхность последовательности пересекает предельную поверхность F ортогонально, то F не может быть предельной, так как касательные плоскости к поверхностям последовательности не сходятся к касательной плоскости поверхности F .

Лемма 3. Сходящуюся последовательность вполне геодезических поверхностей можно продолжить до однопараметрического семейства.

Доказательство. Для того, чтобы пространство допускало вполне геодезические поверхности, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия [4]:

$$\begin{aligned} \bar{R}_{ijk} &= R_{\alpha\beta\gamma\delta} y^{\alpha}_{,i} y^{\beta}_{,j} y^{\gamma}_{,k} y^{\delta}_{,l}, \\ 0 &= R_{\alpha\beta\gamma\delta} y^{\alpha}_{,i} y^{\beta}_{,j} y^{\gamma}_{,k} \xi^{\delta}, \end{aligned} \quad (*)$$

где $\bar{R}_{ijk}$ — тензор Римана вполне геодезической поверхности, $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ — тензор Римана пространства, вычисленный в точках поверхности, величины ξ^{δ} , $y^{\alpha}_{,i}$ определяют касательную площадку к поверхности. Проведем геодезическую линию γ , пересекающую все поверхности последовательности. Так как метрика пространства аналитическая, то компоненты тензора Римана — аналитические функции, длины дуги s линии γ . Следовательно, и величины $y^{\alpha}_{,i}$ тоже аналитические функции s . Так как последовательность поверхностей сходится, то уравнения (*) обращаются в тождества на сходящейся последовательности точек кривой γ . В силу аналитичности условий (*) они будут обращаться в тождества и во всякой точке кривой γ . Через каждую точку γ проходит, таким образом, площадка, определяющая вполне геодезическую поверхность. Принимая длину дуги s за параметр, получим однопараметрическое семейство вполне геодезических поверхностей.

Вернемся к доказательству теоремы. Рассмотрим следующие случаи.

1. Множество V представляет собой некоторую совокупность изолированных точек.

2. Множество V представляет собой некоторую совокупность изолированных точек, линий и поверхностей.

Рассмотрим случай 1. Возьмем точку пространства $M \notin V$. Через M проходит вполне геодезическая поверхность семейства F_M . Возьмем еще одну точку $N \notin V$. Через N проходит вполне геодезическая поверхность семейства F_N .

Возможны два случая.

- а) Поверхности F_M и F_N пересекаются по геодезической δ_{MN} .
- б) Поверхности F_M и F_N не пересекаются.

Рассмотрим случай а). Докажем, что он невозможен.

На δ_{MN} возьмем точку $P \in V$. Рассмотрим в точке P вектора $\mathbf{p}_M$ и $\mathbf{p}_N$ ортогональные поверхностям F_M и F_N соответственно. Направления $\mathbf{p}_M$ и $\mathbf{p}_N$ есть главные направления индикатрисы, построенной в точке P . Так как в точке P индикатриса не допускает семейства главных направлений, то $\mathbf{p}_M$ и $\mathbf{p}_N$ взаимно ортогональны. Так как вполне геодезические поверхности пересекаются под постоянным углом, то $\mathbf{p}_M$ ортогонально $\mathbf{p}_N$ в каждой точке линии δ_{MN} . Поверхности F_M и F_N пересекаются ортогонально. Возьмем в окрестности точки P последовательности точек $\{P_i\}$, сходящуюся в точке P , $P_i \in V$. Через каждую точку последовательности $\{P_i\}$ проходит вполне геодезическая поверхность F_{P_i} . Имеем, таким образом, сходящуюся последовательность $\{F_{P_i}\}$ поверхностей F_{P_i} . Каждая поверхность последовательности $\{F_{P_i}\}$ пересекает по меньшей мере одну из поверхностей F_M или F_N . В противном случае предельная поверхность F_P имела бы особенность.

Так как множество V состоит из отдельных точек, то поверхности F_{P_i} пересекают поверхность F_M либо F_N ортогонально. Полученную последовательность поверхностей можно на основании леммы 3 продолжить до однопараметрического семейства. Каждая поверхность семейства пересекает одну из поверхностей ортогонально.

Лемма 4. Если в римановом пространстве гомотомичном евклидову пространству все поверхности однопараметрического семейства вполне геодезических поверхностей пересекают некоторую поверхность F ортогонально, то поверхность F не принадлежит семейству.

Доказательство. Пусть поверхности семейства пересекают обе поверхности F_M и F_N . В пересечении этих поверхностей поверхностями последовательности $\{F_{P_i}\}$ получим две последовательности линий $\{\delta_{MP_i}\}$ и $\{\delta_{NP_i}\}$.

Предположим, что линии семейств $\{\delta_{MP_i}\}$ и $\{\delta_{NP_i}\}$ не пересекаются и сходятся к линии δ_{MN} . Докажем, что этого не может быть. В самом деле, предельная поверхность F_P проходит в этом случае через линию δ_{MN} и пересекает поверхности F_M и F_N ортогонально. Ортогонально линии δ_{MN} в точке P существуют три взаимно ортогональных вектора, что невозможно. Таким образом, либо 1) одна из последовательностей $\{\delta_{MP_i}\}$ или $\{\delta_{NP_i}\}$ не сходится к δ_{MN} , либо 2) линии этих последовательностей пересекаются в точках δ_{MN} . Во втором случае через точку P проходят три вполне геодезические поверхности, ортогонально пересекающие друг друга. Пусть в первом случае последовательность $\{\delta_{MP_i}\}$ сходится к δ_{MN} . Тогда предельная поверхность F_P совпадает с F_N . В силу леммы 2 последовательность $\{\delta_{NP_i}\}$ не может иметь предельной линии. Продолжим последовательность $\{F_{P_i}\}$ до семейства. Возьмем точку $Q_{i_0} \in V$, близкую к F_M внутри области, ограниченной F_P , F_M , F_N . Через точку Q_{i_0} проходит поверхность семейства $F_{Q_{i_0}}$, $F_{Q_{i_0}}$ пересекает F_N по линии $\delta_{NQ_{i_0}}$. Будем считать, что через точку P уже проходят три вполне геодезические поверхности F_M , F_N и F_R , и что поверхность $F_{Q_{i_0}}$ пересекает F_M , F_N и F_R . Выберем последовательность точек $Q_i \rightarrow P$. Через точку Q_i проходят поверхности F_{Q_i} .

и мы имеем сходящуюся последовательность поверхностей. Предельная поверхность F_Q этой последовательности должна совпадать либо с F_M либо с F_N , либо с F_R . Пусть F_Q совпадает с F_N ; для достаточно больших i найдется поверхность, не совпадающая с F_{P_i} и проходящая через δ_{NP_i} , что невозможно. Аналогично доказывается лемма и в случае 2.

Рассмотрим случай б).

Пусть поверхности F_M и F_N не пересекаются. Возьмем последовательность точек $P_i \rightarrow M$. Через каждую точку P_i проходит поверхность F_{P_i} .

И мы имеем сходящуюся последовательность поверхностей. Если никакие две поверхности этой последовательности не пересекаются, то, продолжив на основании леммы 1 эту последовательность до семейства, получим однопараметрическое семейство не пересекающихся поверхностей.

Рассмотрим случай 2.

Пусть множество V представляет собой некоторую совокупность изолированных аналитических поверхностей.

Докажем следующую лемму.

Лемма 5. Если в пространстве существует хотя бы одна точка, в которой индикатриса не допускает семейств главных направлений, то множество тех же точек пространства, по которому вполне геодезические поверхности семейства пересекаются не под прямым углом, представляет собой некоторую совокупность изолированных геодезических линий.

Доказательство. Предположим сначала, что поверхности Φ , которые входят во множество V , не являются вполне геодезическими. Возьмем поверхность семейства F_M . Поверхности Φ пересекают F_M на основании леммы 2 по некоторому множеству $\{\gamma\}$ изолированных линий. Если линия пересечения F_M и F_N не совпадает ни с одной из линий множества $\{\gamma\}$, то поверхности F_M и F_N пересекаются ортогонально. Поверхности семейства, близкие к F_N , тоже пересекают поверхность F_M ортогонально. Поэтому (по лемме 4) поверхность F_M не может входить в семейство. Таким образом, поверхности семейства пересекают поверхность F_M только по геодезическим входящим во множество линий $\{\gamma\}$. Пусть F_N пересекает F_M по линии γ_1 . Так как линии множества $\{\gamma\}$ изолированы, а множество линий, по которым поверхности семейства пересекают поверхность F_M , непрерывно в силу аналитичности семейства, то все вполне геодезические поверхности семейства проходят через линию γ_1 . Вполне геодезические поверхности могут проходить также через несколько, либо даже через все линии множества $\{\gamma\}$. Линии множества $\{\gamma\}$ служат «осями» однопараметрического пучка вполне геодезических поверхностей. Каждая ось лежит на всех поверхностях семейства.

Докажем, что множество $\{\gamma\}$ единственное множество «осей».

Пусть на поверхности F_N лежит еще одна ось γ_2 семейства, не входящая в $\{\gamma\}$. В силу аналитичности семейства ось γ_2 должна лежать также и на F_M . Но тогда она входит в семейство $\{\gamma\}$.

Рассмотрим тот случай, когда множество V совпадает с вполне геодезической поверхностью F_M . Пусть поверхность F_N , $N \notin V$ пересекает поверхность F_M по линии δ_{MN} , и угол между нормалью к F_M и F_N равен $\alpha \neq 90^\circ$. Строим все поверхности семейства и выбираем среди них ту, для которой достигается наименьшее значение угла α . Пусть такой поверхностью будет поверхность F_P . Если $\min \alpha \neq 0$, то аналогично лемме 3 доказывается, что поверхность F_M не принадлежит семейству. Если $\min \alpha = 0$, то поверхность F_P совпадает с F_M . Возьмем последовательность

$\{F_{P_i}\}$ поверхностей семейства, сходящуюся к поверхности F_M . Для достаточно больших i поверхность F_{P_i} последовательности $\{F_{P_i}\}$ пересекает поверхность F_N . Так как предельная поверхность F_M по условию пересекает поверхность F_N под углом $\alpha \neq 90^\circ$, то поверхности F_{P_i} тоже будут пересекать F_N под углом $\alpha_i \neq 90^\circ$. Так как поверхность F_N не входит в множество V , то все поверхности семейства проходят через одну или несколько «осей», лежащих на F_N . Если хотя бы одна из осей не совпадет с δ_{MN} , то возьмем все поверхности, проходящие через эту ось. Получим полное однопараметрическое семейство вполне геодезических поверхностей. Поверхность F_M не принадлежит этому семейству. Пусть ось γ_1 совпадает с δ_{MN} и через каждую точку F_M переходит линия пересечения поверхностей семейства. Возьмем последовательность точек $\{P_i\}$, сходящуюся к точке $P \in \delta_{MN}$. Соответствующая последовательность $\{F_{P_i}\}$ поверхностей семейства сходится к поверхности F_M . Найдется поэтому поверхность F_{P_j} , пересекающая поверхность F_{P_i} по линии $\delta_{P_i P_j}$, причем $\delta_{P_i P_j}$ не лежит на F_M . Но тогда все поверхности семейства проходят через $\delta_{P_i P_j}$ и поверхность F_M не входит в семейство.

Замечание. Из леммы 5 следует, что вполне геодезические поверхности семейства, если V не имеет внутренней точки, не могут огибать никакой поверхности.

В самом деле, если поверхности семейства огибают некоторую поверхность, то они пересекаются под малыми углами, и по лемме 5 множество V имеет внутреннюю точку.

Пусть пространство допускает однопараметрическое семейство вполне геодезических поверхностей, но индикатриса в каждой точке пространства допускает по меньшей мере однопараметрическое семейство главных направлений. Если индикатриса в каждой точке допускает двухпараметрическое семейство главных направлений, то такое пространство обладает постоянной кривизной [1]. Поэтому будем рассматривать такие римановы пространства, индикатриса которых хотя бы в одной точке допускает только однопараметрическое семейство главных направлений. Тогда индикатриса будет допускать только однопараметрическое семейство главных направлений и в каждой точке пространства, за исключением, быть может, некоторого множества V' изолированных поверхностей, где она является сферой.

Возьмем точку $P \notin V'$. Через P проходит вполне геодезическая поверхность F_P . Возможны два случая:

1) F_P ортогональна тому главному направлению e_P , которое не входит в семейство;

2) F_P ортогональна одному из главных направлений семейства.

В первом случае вследствие аналитичности метрики вполне геодезические поверхности семейства будут проходить ортогонально тому главному направлению, которое не входит в семейство и в каждой точке пространства, за исключением некоторого изолированного множества поверхностей. В этом случае, следовательно, все поверхности семейства либо проходят через одну геодезическую, либо никакие две из них не пересекаются.

Рассмотрим случай 2). Пусть поверхность F_P проходит ортогонально одному из направлений семейства. Остальные поверхности семейства пересекают поверхность F_P по семейству геодезических $\{\delta\}$. Линии семейства $\{\delta\}$ не могут пересекаться между собою, либо проходят через одну точку.

В самом деле. Пусть δ_1 и δ_2 пересеклись в точке N . Через точку N проходит три вполне геодезические поверхности. Две из них ортогональны двум главным направлениям семейства, а третья F_N ортогональна главному направлению e_N , не входящему в семейство. Если индикатриса в точке N не является сферой, то F_N пересекает поверхности семейства ортогонально, а, следовательно, по лемме 5, не может входить в семейство. Если точка $N \in V'$, то вследствие аналитичности семейства, все точки, близкие к точке N , будут принадлежать V' . Но тогда индикатриса в каждой точке пространства есть сфера, чего по предположению не может быть.

Пусть две поверхности семейства пересекаются под углом α . Рассмотрим множество всех углов α , под которыми поверхности семейства пересекают поверхность F_N . Вследствие леммы 5 существует такая точка N , для которой $\alpha = 0$. Докажем, что хотя бы для одной вполне геодезической поверхности точка N находится на конечном расстоянии.

Допустим, что это неверно. Тогда через точку N проходит бесчисленное множество вполне геодезических поверхностей. Мы можем выбрать из него сходящуюся последовательность, продолжить ее до семейства. В результате получим, что через точку N проходит семейство вполне геодезических поверхностей, что противоречит предположению.

Пусть точка P и есть та точка, для которой $\alpha = 0$. Вследствие аналитичности семейства получим однопараметрическое семейство геодезических линий, на которых $\alpha = 0$. Это семейство дает некоторую «линейчатую» поверхность Φ . Все вполне геодезические поверхности огибают поверхность Φ . Предположим, что через каждую точку пространства проходит поверхность семейства. Возьмем две близкие геодезические δ_1 и δ_2 на поверхности Φ . Проведем две вполне геодезические поверхности F_M и F_N , касающиеся поверхности Φ в точках линий δ_M и δ_N . Поверхности F_M и F_N пересекаются по геодезической δ_{MN} . Через каждую точку окрестности линии δ_{MN} проходит линия пересечения двух вполне геодезических поверхностей. Множество точек пересечения имеет внутреннюю точку. Вследствие аналитичности семейства каждая точка пространства есть точка пересечения вполне геодезических поверхностей. Так как поверхность Φ содержит однопараметрическое семейство геодезических линий, то она разбивает пространство по меньшей мере на две части. Можно ввести на поверхности Φ ориентацию. Пусть точка P лежит во внешней части пространства относительно поверхности Φ . Возьмем точку Q во внутренней части пространства. Через Q тоже проходит две вполне геодезические поверхности, так как мы требуем, чтобы через каждую точку пространства проходила вполне геодезическая поверхность. По меньшей мере одна из вполне геодезических поверхностей, проходящая через точку Q , не может совпадать ни с одной из поверхностей, проходящих через точку P . В противном случае мы устремили бы точки P и Q к некоторой точке $R \in \Phi$. В точке R вполне геодезическая поверхность выродилась бы. Если одна из поверхностей, проходящих через точку Q , совпадает с поверхностью, которая проходит через точку P , то устремляя точки P и Q к точке R , тоже получим вырожденную поверхность гомеоморфную дважды покрытой полуплоскости. Но тогда она не может быть вполне геодезической.

Таким образом, через каждую точку пространства проходят три вполне геодезические поверхности. Продолжая аналогичные рассуждения достаточно большое число раз, мы получим, что через каждую точку пространства проходит сколь угодно большое число вполне геодезических поверхностей. Переходя к пределу, получим, что через каждую точку пространства

проходит однопараметрическое семейство вполне геодезических поверхностей, что противоречит предположению.

Если же не через всякую точку пространства проходит линия пересечения двух вполне геодезических поверхностей, то эти поверхности могут огибать некоторую «линейчатую» поверхность.

Пусть множество V имеет внутреннюю точку. Найдем вид линейного элемента пространства. Вполне геодезические поверхности семейства выберем за координатные, и на этих поверхностях выберем полугеодезическую параметризацию. Линейный элемент пространства в такой координатной системе примет вид [1]:

$$dS^2 = dx^1{}^2 + \varphi_2(x^1, x^2) dx^2{}^2 + \varphi_3(x^1, x^2, x^3) dx^3{}^2,$$

линии $x^1 = \text{const}$, $x^2 = \text{const}$ ортогональные траектории семейства.

Подсчитаем компоненты объекта связности:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= 0, & \Gamma_{12}^1 &= 0, & \Gamma_{22}^1 &= -\frac{1}{2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x^1}, \\ \Gamma_{11}^2 &= 0, & \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{2} \frac{\partial \ln \varphi_2}{\partial x^1}, & \Gamma_{22}^2 &= \frac{1}{2} \frac{\partial \ln \varphi_2}{\partial x^2}, \\ \Gamma_{11}^3 &= 0, & \Gamma_{12}^3 &= 0, & \Gamma_{22}^3 &= 0, \\ \Gamma_{23}^1 &= 0, & \Gamma_{13}^1 &= 0, & \Gamma_{33}^1 &= -\frac{1}{2} \frac{\partial \varphi_3}{\partial x^1}, \\ \Gamma_{23}^2 &= 0, & \Gamma_{13}^2 &= 0, & \Gamma_{33}^2 &= -\frac{1}{2} \frac{1}{\varphi_2} \frac{\partial \varphi_3}{\partial x^2}, \\ \Gamma_{23}^3 &= \frac{1}{2} \frac{\partial \ln \varphi_3}{\partial x^2}, & \Gamma_{13}^3 &= \frac{1}{2} \frac{\partial \ln \varphi_3}{\partial x^1}, & \Gamma_{33}^3 &= \frac{1}{2} \frac{\partial \ln \varphi_3}{\partial x^3}. \end{aligned}$$

Подсчитав компоненты тензора Риччи, получим:

$$\begin{aligned} R_{11} &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \ln \varphi_2}{\partial x^1{}^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \ln \varphi_3}{\partial x^1{}^2} + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial \ln \varphi_2}{\partial x^1} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial \ln \varphi_3}{\partial x^1} \right)^2, \\ R_{12} &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \ln \varphi_3}{\partial x^1 \partial x^2} + \frac{1}{4} \frac{\partial \ln \varphi_3}{\partial x^1} \frac{\partial \ln \varphi_3}{\partial x^2} - \frac{1}{4} \frac{\partial \ln \varphi_2}{\partial x^1} \frac{\partial \ln \varphi_3}{\partial x^2}, \\ R_{22} &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \ln \varphi_3}{\partial x^2{}^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^1{}^2} - \frac{1}{4} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x^1} \frac{\partial \ln \varphi_2}{\partial x^1} + \\ &+ \frac{1}{4} \left(\frac{\partial \ln \varphi_3}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{1}{4} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x^1} \frac{\partial \ln \varphi_3}{\partial x^1} + \frac{1}{4} \frac{\partial \ln \varphi_2}{\partial x^2} \frac{\partial \ln \varphi_3}{\partial x^2}, \\ R_{33} &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x^1{}^2} - \frac{1}{4} \frac{1}{\varphi_2} \frac{\partial \varphi_3}{\partial x^2} \frac{\partial \varphi_3}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x^2{}^2} - \frac{1}{4} \frac{\partial \varphi_3}{\partial x^1} \frac{\partial \ln \varphi_3}{\partial x^1} + \\ &+ \frac{1}{4} \frac{\partial \varphi_3}{\partial x^2} \frac{\partial \ln \varphi_3}{\partial x^2} + \frac{1}{4} \frac{\partial \varphi_3}{\partial x^1} \frac{\partial \ln \varphi_2}{\partial x^1}, \\ R_{13} &\equiv R_{23} \equiv 0. \end{aligned}$$

Предположим, что главные направления индикатрисы Эйнштейна коллинеарны главным направлениям метрического тензора. Отсюда следует, что

$$R_{12} = 0$$

и, кроме того,

$$R_3^3 = R_2^2.$$

Запишем подробно последние равенства:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \ln \varphi_3}{\partial x^1 \partial x^2} + \frac{1}{4} \frac{\partial \ln \varphi_3}{\partial x^1} \frac{\partial \ln \varphi_3}{\partial x^2} - \frac{1}{4} \frac{\partial \ln \varphi_2}{\partial x^1} \frac{\partial \ln \varphi_3}{\partial x^2} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \ln \varphi_2}{\partial x^1{}^2} + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial \ln \varphi_2}{\partial x^1} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \ln \varphi_3}{\partial x^1{}^2} + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial \ln \varphi_3}{\partial x^1} \right)^2. \quad (2)$$

Решим эту систему уравнений (в предположении, что $\frac{\partial \varphi_2}{\partial x^2} \neq 0$)

$$\frac{\partial \sqrt{\varphi_2}}{\partial x^2} = \sqrt{\varphi_2} \alpha_2^1(x^2, x^3). \quad (3)$$

Решение системы (1) — (2) будем искать в виде

$$\varphi_3 = \varphi_2 \psi_3(x^1, x^2, x^3). \quad (4)$$

Подставляя (4) в уравнение (2), получим

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \ln \psi_3}{\partial x^1{}^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial \ln \psi_3}{\partial x^1} \frac{\partial \ln \varphi_2}{\partial x^1} + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial \ln \psi_3}{\partial x^1} \right)^2 = 0. \quad (5)$$

Возможны два случая.
Рассмотрим случай 1):

$$\frac{\partial \ln \psi_3}{\partial x^1} = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\psi_3 = \psi_3(x^2, x^3).$$

Тогда по формуле (4)

$$\varphi_3 = \varphi_2(x^1, x^2) \psi_3(x^2, x^3).$$

Подставив это выражение в (3), получим

$$\frac{\partial \sqrt{\varphi_2}}{\partial x^2} \sqrt{\psi_3} + \sqrt{\varphi_2} \frac{\partial \sqrt{\psi_3}}{\partial x^2} = \sqrt{\varphi_2} \alpha_2(x^2, x^3).$$

Разделив последнее равенство на произведение $\sqrt{\psi_3} \sqrt{\varphi_2}$, получим

$$\frac{\partial \ln \sqrt{\varphi_2}}{\partial x^2} = \frac{\alpha_2}{\sqrt{\psi_3}} - \frac{\partial \ln \sqrt{\psi_3}}{\partial x^2},$$

или

$$\frac{\partial \ln \sqrt{\varphi_2}}{\partial x^2} = \psi_2(x^2).$$

Интегрируя, находим

$$\sqrt{\varphi_2} = \sqrt{\alpha_1(x^1)} e^{\int \psi_2 dx^2}.$$

Но тогда соотношение (4) дает

$$\varphi_3 = \alpha_1(x^1) \beta_2(x^2, x^3).$$

Мы также можем записать, что

$$\varphi_2 = \alpha_1(x^1) \alpha_2(x^2).$$

Линейный элемент пространства имеет вид

$$dS^2 = dx^{1^2} + \alpha_1(x^1) [dx^{2^2} + \beta_2(x^2, x^3) dx^{3^2}].$$

Вполне геодезические поверхности при этом даются уравнениями

$$x^3 = \text{const.}$$

Линейный элемент вполне геодезических поверхностей имеет вид

$$dS_2^2 = dx^{1^2} + \alpha_1(x^1) dx^{2^2},$$

а это и есть линейный элемент поверхности вращения.

Рассмотрим случай 2):

$$\frac{\partial \ln \psi_3}{\partial x^1} \neq 0. \quad (**)$$

Разделим уравнение (5) на $\frac{\partial \ln \sqrt{\psi_3}}{\partial x^1}$ и проинтегрируем:

$$\frac{\partial \sqrt{\psi_3}}{\partial x^1} = \frac{\beta_2(x^2, x^3)}{\varphi_2}. \quad (6)$$

Подставим (4) в (3):

$$\frac{\partial \ln \sqrt{\varphi_2}}{\partial x^2} + \frac{\partial \ln \sqrt{\psi_3}}{\partial x^2} = \frac{\alpha_2}{\sqrt{\psi_3}}. \quad (7)$$

Таким образом, для того, чтобы проинтегрировать систему (1) — (2), достаточно проинтегрировать (6), (7) с условием (**). Выпишем условия интегрируемости систем (6), (7):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ln \sqrt{\psi_3}}{\partial x^2 \partial x^1} - \frac{\beta_2}{\psi_3 \varphi_2} \left(\alpha_2 - \frac{\partial \ln \sqrt{\varphi_2}}{\partial x^2} \sqrt{\psi_3} \right) + \\ + \frac{1}{\sqrt{\psi_3}} \frac{\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2 \partial x^2} - \beta_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x^2}}{\varphi_2^2} = - \frac{\alpha_2}{\psi_3} \frac{\beta_2}{\varphi_2}. \end{aligned} \quad (8)$$

Рассмотрим сначала тот случай, когда

$$\frac{\partial^2 \ln \sqrt{\varphi_2}}{\partial x^1 \partial x^2} = 0.$$

Из этого уравнения следует, что

$$\varphi_2 = \alpha_1(x^1) \alpha_2(x^2).$$

Мы можем произвести следующую замену координат в пространстве:

$$\alpha_2(x^2) dx^2 = d\tilde{x}^2.$$

При такой замене координат линейный элемент пространства сохраняет свой вид, поэтому можем просто считать, что

$$\varphi_2 = \varphi_2(x^1).$$

Решим для этого случая систему уравнений (6), (7), из условий интегрируемости ее (8) следует, что

$$\beta_2 = \beta_2(x^2).$$

Система (6), (7) переписывается в следующем виде:

$$\frac{\partial \sqrt{\psi_3}}{\partial x^2} = \alpha_2(x^2, x^3), \quad (a)$$

$$\frac{\partial \sqrt{\psi_3}}{\partial x^1} = \frac{\beta_2(x^2)}{\alpha_2}. \quad (б)$$

Решим систему уравнений (a) и (б). Из уравнений (a) имеем

$$\sqrt{\psi_3} = \int \alpha_2(x^2, x^3) dx^2 + \alpha_1(x^1, x^3). \quad (в)$$

Подставляем найденное решение в уравнение (б)

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial x^1} = \frac{\beta_2(x^2)}{\varphi_2}.$$

Откуда имеем

$$\alpha_1 = \beta_2(x^2) \int \frac{1}{\varphi_2} dx^1 + \gamma_3(x^3).$$

Тогда из условия (в) получим

$$\sqrt{\psi_3} = \int \alpha_2(x^2, x^3) dx^2 + \beta_3(x^3) \int \frac{1}{\varphi_2} dx^1 + \gamma_3(x^3).$$

Можно на основании соотношения (4) записать

$$\varphi_3 = \varphi_2 \left[\int \alpha_2(x^2, x^3) dx^2 + \beta_3(x^3) \int \frac{1}{\varphi_2} dx^1 + \gamma_3(x^3) \right]^2,$$

где $\alpha_2, \beta_2, \gamma_3$ — некоторые функции.

Линейный элемент пространства имеет вид

$$dS^2 = dx^1{}^2 + \varphi_2 \left\{ dx^2 + \left[\int \alpha_2 dx^2 + \beta_3 \int \frac{1}{\varphi_2} dx^1 + \gamma_3 \right] dx^3 \right\}^2.$$

Рассмотрим случай, когда

$$\frac{\partial^2 \ln \sqrt{\varphi_2}}{\partial x^1 \partial x^2} \neq 0.$$

Тогда мы можем разрешить условия (8) относительно ψ_3 , при этом получим

$$\sqrt{\psi_3} = - \frac{\frac{\partial \beta_2}{\partial x^2} - \beta_2 \frac{\partial \ln \sqrt{\varphi_2}}{\partial x^2}}{\varphi_2 \frac{\partial^2 \ln \sqrt{\varphi_2}}{\partial x^1 \partial x^2}}. \quad (9)$$

Продифференцировав это выражение по x^1 и используя (6), получим

$$\beta_2 \left(\frac{\partial^2 \ln \sqrt{\varphi_2}}{\partial x^1 \partial x^2} \right)^2 \varphi_2 + \left(\frac{\partial \beta_2}{\partial x^2} - \beta_2 \frac{\partial \ln \sqrt{\varphi_2}}{\partial x^2} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial x^1} \left(\varphi_2 \frac{\partial^2 \ln \sqrt{\varphi_2}}{\partial x^1 \partial x^2} \right) = \frac{\beta_2}{\varphi_2} \left(\varphi_2 \frac{\partial^2 \ln \sqrt{\varphi_2}}{\partial x^1 \partial x^2} \right)^2.$$

Возможны, таким образом, два следующие случая:

$$1) \frac{\partial \beta_2}{\partial x^2} - \beta_2 \frac{\partial \ln \sqrt{\varphi_2}}{\partial x^2} = 0,$$

$$2) \frac{\partial}{\partial x^1} \left(\varphi_2 \frac{\partial^2 \ln \sqrt{\varphi_2}}{\partial x^1 \partial x^2} \right) = 0.$$

Первый случай исключается, так как тогда $\psi_3 = 0$, а, следовательно, $\varphi_3 = 0$. Но в этом случае $\text{Det } g_{ij} = 0$, что невозможно.

Во втором случае

$$\varphi_2 \frac{\partial^2 \ln \sqrt{\varphi_2}}{\partial x^1 \partial x^2} = f_2(x^2). \quad (10)$$

При этом осталось еще неиспользованным уравнение (7). С помощью (10) уравнение (9) запишется так:

$$\sqrt{\psi_3} = - \frac{\frac{\partial \beta_2}{\partial x^2} - \beta_2 \frac{\partial \ln \sqrt{\varphi_2}}{\partial x^2}}{f_2}. \quad (11)$$

Подставив значение $\frac{\partial \ln \sqrt{\psi_3}}{\partial x^2}$ в уравнение (7), получим

$$\begin{aligned} & \frac{f_2}{\frac{\partial \beta_2}{\partial x^2} - \beta_2 \frac{\partial \ln \sqrt{\varphi_2}}{\partial x^2}} \cdot \frac{\left(\frac{\partial^2 \beta_2}{\partial x^2{}^2} - \beta_2 \frac{\partial^2 \ln \sqrt{\varphi_2}}{\partial x^2{}^2} - \frac{\partial \ln \sqrt{\varphi_2}}{\partial x^2} \frac{\partial \beta_2}{\partial x^2} \right) f_2 - \left(\frac{\partial \beta_2}{\partial x^2} - \beta_2 \frac{\partial \ln \sqrt{\varphi_2}}{\partial x^2} \right) \frac{\partial \varphi_2}{\partial x^2}}{f_2^2} = \\ & = \frac{\alpha_2 f_2}{\frac{\partial \beta_2}{\partial x^2} - \beta_2 \frac{\partial \ln \sqrt{\varphi_2}}{\partial x^2}} - \frac{\partial \ln \sqrt{\varphi_2}}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

Сведем к общему знаменателю и приведем подобные члены

$$f_2 \frac{\partial^2 \beta_2}{\partial x^2} - \frac{\partial f_2}{\partial x^2} \frac{\partial \beta_2}{\partial x^2} + f_2^2 \alpha_2 = \beta_2 f_2 \frac{\partial^2 \ln \sqrt{\varphi_2}}{\partial x^2} - \beta_2 \frac{\partial \ln \sqrt{\varphi_2}}{\partial x^2} \frac{\partial f_2}{\partial x^2} + f_2 \beta_2 \left(\frac{\partial \ln \sqrt{\varphi_2}}{\partial x^2} \right)^2.$$

Деля последнее уравнение на β_2 , получим

$$\frac{1}{\beta_2} \left(f_2 \frac{\partial^2 \beta_2}{\partial x^2} - \frac{\partial f_2}{\partial x^2} \frac{\partial \beta_2}{\partial x^2} + f_2^2 \alpha_2 \right) = \frac{\partial^2 \ln \sqrt{\varphi_2}}{\partial x^2} f_2 - \frac{\partial \ln \sqrt{\varphi_2}}{\partial x^2} \frac{\partial f_2}{\partial x^2} + f_2 \left(\frac{\partial \ln \sqrt{\varphi_2}}{\partial x^2} \right)^2.$$

В правую часть последнего уравнения входят только переменные x^1 и x^2 , в левую — только переменные x^2 и x^3 , следовательно, правая часть не зависит от x^1 , левая — от x^3 , поэтому

$$\frac{1}{\beta_2} \left[\frac{\partial}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \beta_2}{\partial x^2} \right) \frac{f_2}{f_2} \right] = \alpha_2^1, \quad (12)$$

$$\frac{\partial^2 \ln \sqrt{\varphi_2}}{\partial x^2} - \frac{\partial \ln \sqrt{\varphi_2}}{\partial x^2} \frac{\partial \ln f_2}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial \ln \sqrt{\varphi_2}}{\partial x^2} \right)^2 = \psi_2(x^2), \quad (13)$$

где ψ_2 — некоторая функция.

Таким образом, для определения функций φ_2 мы имеем следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial^2 \ln \sqrt{\varphi_2}}{\partial x^1 \partial x^2} = \frac{f_2}{\varphi_2}, \quad (14)$$

$$\frac{\partial^2 \ln \sqrt{\varphi_2}}{\partial x^2} = \psi_2 + \frac{\partial \ln \sqrt{\varphi_2}}{\partial x^2} \frac{\partial \ln f_2}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial \ln \sqrt{\varphi_2}}{\partial x^2} \right)^2. \quad (15)$$

Найдем условия интегрируемости этой системы уравнений. Для этого продифференцируем (14) по x^2 , а (15) по x^1 и приравняем между собой полученное в обоих случаях

$$\frac{\frac{\partial f_2}{\partial x^2} \varphi_2 - f_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x^2}}{\varphi_2^2} = \frac{f_2}{\varphi_2} \frac{1}{f_2} \frac{\partial f_2}{\partial x^2} - \frac{2}{2\varphi_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x^2} \frac{f_2}{\varphi_2}.$$

Последнее уравнение показывает, что условия интегрируемости системы (14), (15) выполняются тождественно.

Заметим, что уравнение (12) только определяет функцию α_2^1 .

Решим систему (14), (15). Введем следующее обозначение:

$$\frac{\partial \ln \sqrt{\varphi_2}}{\partial x^2} = z. \quad (16)$$

Подставив (16) в (14) и (15), получим

$$\frac{\partial z}{\partial x^1} = \frac{f_2}{\varphi_2}, \quad (17)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x^2} = \psi_2 + z \frac{\partial \ln f_2}{\partial x^2} - z^2. \quad (18)$$

Уравнение (18) заменой

$$z = \lambda(x^1, x^2) + f(x^2)$$

сводится к уравнению Бернулли.

Решение последней системы имеет вид

$$\varphi_2 = - \frac{f_2(x^2) [a_2(x^2) + a_1(x^1)]^2}{\frac{da_2}{dx^2} \frac{da_1}{dx^1}}, \quad (19)$$

где α_1, α_2 — некоторые функции.

Зная функцию φ_2 , по формуле (9) нетрудно определить функцию ψ_3 ; функция φ_3 легко находится из соотношения (4).

В заключение выделим пример найденных выше пространств. Положив

$$\begin{aligned} \alpha_1(x^1) &= x^1, \\ \alpha_2(x^2) &= x^2, \\ f_2(x^2) &= 1, \end{aligned}$$

из соотношения (19) получим

$$\varphi_2 = -(x^2 + x^1)^2. \quad (20)$$

Тогда

$$\psi_3 = \frac{\left[\frac{\partial \beta_2}{\partial x^2} (x^1 + x^2) - \beta_2 \right]^2}{(x^1 + x^2)^2},$$

и, наконец,

$$\varphi_3 = - \left[\frac{\partial \beta_2}{\partial x^2} (x^1 + x^2) - \beta_2 \right]^2. \quad (21)$$

Докажем, что полученное пространство допускает два различные однопараметрические семейства вполне геодезических поверхностей с евклидовыми линейными элементами.

Сначала докажем, что индикатриса пространства с линейным элементом

$$dS^2 = dx^1{}^2 - (x^1 + x^2) dx^2{}^2 - \left[\frac{\partial \beta_2}{\partial x^2} (x^1 + x^2) - \beta_2 \right]^2 dx^3{}^2 \quad (22)$$

действительно допускает в каждой точке однопараметрическое семейство главных направлений. Для этого подставим значения φ_2 и φ_3 из формул (20), (21) в условия (1) — (2). Вычислим те производные функций φ_2 и φ_3 , которые входят в (1) — (2):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln \varphi_2}{\partial x^1} &= 2 \frac{\frac{\partial \beta_2}{\partial x^2}}{\frac{\partial \beta_2}{\partial x^2} (x^1 + x^2) - \beta_2}, \\ \frac{\partial^2 \ln \varphi_2}{\partial x^1{}^2} &= - \frac{\left(\frac{\partial \beta_2}{\partial x^2} \right)^2}{\left[\frac{\partial \beta_2}{\partial x^2} (x^1 + x^2) - \beta_2 \right]^2}, \\ \frac{\partial \ln \varphi_3}{\partial x^1} &= 2 \frac{1}{x^1 + x^2}, \\ \frac{\partial^2 \ln \varphi_3}{\partial x^1{}^2} &= - 2 \frac{1}{(x^1 + x^2)^2}. \end{aligned}$$

Подставив эти значения в уравнение (2), получим

$$\begin{aligned} & - \frac{\left(\frac{\partial \beta_2}{\partial x^2} \right)^2}{\left[\frac{\partial \beta_2}{\partial x^2} (x^1 + x^2) - \beta_2 \right]^2} + \frac{\left(\frac{\partial \beta_2}{\partial x^2} \right)^2}{\left[\frac{\partial \beta_2}{\partial x^2} (x^1 + x^2) - \beta_2 \right]^2} = \\ & = - \frac{1}{(x^1 + x^2)^2} + \frac{1}{(x^1 + x^2)^2}. \end{aligned}$$

Это уравнение, таким образом, превращается в тождество. Перейдем к уравнению (1). Вычислим те производные, которые входят в это уравнение.

$$\frac{\partial^2 \ln \varphi_3}{\partial x^1 \partial x^2} = 2 \frac{\frac{\partial^2 \beta_2}{\partial x^2} \left[\frac{\partial \beta_2}{\partial x^2} (x^1 + x^2) - \beta_2 \right] - \frac{\partial \beta_2}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \beta_2}{\partial x^2} (x^1 + x^2)}{\left[\frac{\partial \beta_2}{\partial x^2} (x^1 + x^2) - \beta_2 \right]^2}.$$

Или, если свести подобные члены,

$$\frac{\partial^2 \ln \varphi_3}{\partial x^1 \partial x^2} = -2 \frac{\frac{\partial^2 \beta_2}{\partial x^2} \beta_2}{\left[\frac{\partial \beta_2}{\partial x^2} (x^1 + x^2) - \beta_2 \right]^2}.$$

Далее

$$\frac{\partial \ln \varphi_3}{\partial x^2} = 2 \frac{\frac{\partial^2 \beta_2}{\partial x^2} (x^1 + x^2) + \frac{\partial \beta_2}{\partial x^2} - \frac{\partial \beta_2}{\partial x^2}}{\frac{\partial \beta_2}{\partial x^2} (x^1 + x^2) - \beta_2},$$

или

$$\frac{\partial \ln \varphi_3}{\partial x^2} = 2 \frac{\frac{\partial^2 \beta_2}{\partial x^2} (x^1 + x^2)}{\frac{\partial \beta_2}{\partial x^2} (x^1 + x^2) - \beta_2}.$$

Подставив найденные значения производных в уравнение (1), получим

$$-\frac{\frac{\partial^2 \beta_2}{\partial x^2} \beta_2}{\left[\frac{\partial \beta_2}{\partial x^2} (x^1 + x^2) - \beta_2 \right]^2} + \frac{\frac{\partial \beta_2}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \beta_2}{\partial x^2} (x^1 + x^2)}{\left[\frac{\partial \beta_2}{\partial x^2} (x^1 + x^2) - \beta_2 \right]^2} - \frac{\frac{\partial^2 \beta_2}{\partial x^2}}{\frac{\partial \beta_2}{\partial x^2} (x^1 + x^2) - \beta_2} \equiv 0.$$

Приведем это выражение к общему знаменателю

$$-\frac{\partial^2 \beta_2}{\partial x^2} \beta_2 + \frac{\partial^2 \beta_2}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \beta_2}{\partial x^2} (x^1 + x^2) - \frac{\partial^2 \beta_2}{\partial x^2} \left[\frac{\partial \beta_2}{\partial x^2} (x^1 + x^2) - \beta_2 \right] \equiv 0.$$

Приведя подобные члены, убедимся в том, что и это уравнение обращается в тождество.

Докажем, что это пространство не является евклидовым. Подсчитаем компоненты объекта связности:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= 0, & \Gamma_{12}^1 &= 0, & \Gamma_{22}^1 &= x^1 + x^2, \\ \Gamma_{11}^2 &= 0, & \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{x^1 + x^2}, & \Gamma_{22}^2 &= \frac{1}{x^1 + x^2}, \\ \Gamma_{11}^3 &= 0, & \Gamma_{12}^3 &= 0, & \Gamma_{22}^3 &= 0, \\ \Gamma_{23}^1 &= 0, & & & \Gamma_{13}^1 &= 0, \\ \Gamma_{23}^2 &= 0, & & & \Gamma_{13}^2 &= 0, \\ \Gamma_{23}^3 &= \frac{\frac{\partial^2 \beta_2}{\partial x^2} (x^1 + x^2)}{\left[\frac{\partial \beta_2}{\partial x^2} (x^1 + x^2) - \beta_2 \right]^2}, & \Gamma_{13}^3 &= \frac{\frac{\partial \beta_2}{\partial x^2}}{\frac{\partial \beta_2}{\partial x^2} (x^1 + x^2) - \beta_2}, \\ \Gamma_{31}^1 &= -\frac{\frac{\partial \beta_2}{\partial x^2} \left[\frac{\partial \beta_2}{\partial x^2} (x^1 + x^2) - \beta_2 \right]}{\frac{\partial \beta_2}{\partial x^2} (x^1 + x^2) - \beta_2}, \end{aligned}$$

$$\Gamma_{33}^2 = -\frac{1}{x^1 + x^2} \frac{\partial^2 \beta_2}{\partial x^{22}} \left[\frac{\partial \beta_2}{\partial x^2} (x^1 + x^2) - \beta_2 \right],$$

$$\Gamma_{33}^3 = \left[\frac{\partial^2 \beta_2}{\partial x^{32}} (x^1 + x^2) - \frac{\partial^2 \beta_2}{\partial x^{23}} \right] \frac{1}{\frac{\partial \beta_2}{\partial x^2} (x^1 + x^2) - \beta_2}.$$

Подсчитаем символы Кристоффеля

$$\begin{aligned} \Gamma_{11.1} &= 0, & \Gamma_{12.1} &= 0, & \Gamma_{22.1} &= (x^1 + x^2), \\ \Gamma_{11.2} &= 0, & \Gamma_{12.2} &= -(x^1 + x^2), & \Gamma_{22.2} &= -(x^1 + x^2), \\ \Gamma_{11.3} &= 0, & \Gamma_{12.3} &= 0, & \Gamma_{22.3} &= 0, \\ \Gamma_{23.1} &= 0, & & & \Gamma_{13.1} &= 0, \\ \Gamma_{23.2} &= 0, & & & \Gamma_{13.2} &= 0, \\ \Gamma_{23.3} &= \left[\frac{\partial \beta_2}{\partial x^2} (x^1 + x^2) - \beta_2 \right] \frac{\partial^2 \beta_2}{\partial x^{22}} (x^1 + x^2), \\ \Gamma_{13.3} &= -\frac{\partial \beta_2}{\partial x^2} \left[\frac{\partial \beta_2}{\partial x^2} (x^1 + x^2) - \beta_2 \right], \\ \Delta_{33.1} &= \frac{\partial \beta_2}{\partial x^2} \left[\frac{\partial \beta_2}{\partial x^2} (x^1 + x^2) - \beta_2 \right], \\ \Gamma_{33.2} &= \left[\frac{\partial \beta_2}{\partial x^2} (x^1 + x^2) - \beta_2 \right] \frac{\partial^2 \beta_2}{\partial x^{22}} (x^1 + x^2), \\ \Gamma_{33.3} &= \left[\frac{\partial \beta_2}{\partial x^2} (x^1 + x^2) - \beta_2 \right] \left[\frac{\partial^2 \beta_2}{\partial x^{32}} (x^1 + x^2) - \frac{\partial \beta_2}{\partial x^3} \right]. \end{aligned}$$

Известно, что

$$R_{hilk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{hk}}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^k \partial x^h} - \frac{\partial^2 g_{hi}}{\partial x^j \partial x^k} + \frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x^i \partial x^l} \right) + \Gamma_{il}^i \Gamma_{hk, i} - \Gamma_{ik}^i \Gamma_{hi, i},$$

(h, i, j, k, l = 1, 2, 3).

Подсчитаем компоненту R_{2323} .

$$R_{2323} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x^{22}} + \Gamma_{23}^3 \Gamma_{23.3} - \Gamma_{33}^1 \Gamma_{22.1} - \Gamma_{33}^2 \Gamma_{22.2},$$

так как остальные слагаемые равны нулю.

Или

$$\begin{aligned} R_{2323} &= 2 \left\{ \left[\frac{\partial^2 \beta_2}{\partial x^{22}} (x^1 + x^2) \right]^2 + \left[\frac{\partial \beta_2}{\partial x^2} (x^1 + x^2) - \beta_2 \right] \times \right. \\ &\quad \times \left[\frac{\partial^2 \beta_2}{\partial x^{23}} (x^1 + x^2) + \frac{\partial^2 \beta_2}{\partial x^{32}} \right] - \frac{\frac{\partial^2 \beta_2}{\partial x^{22}} (x^1 + x^2)}{\left[\frac{\partial \beta_2}{\partial x^2} (x^1 + x^2) - \beta_2 \right]} \times \\ &\quad \times \left[\frac{\partial \beta_2}{\partial x^2} (x^1 + x^2) - \beta_2 \right] \frac{\partial^2 \beta_2}{\partial x^{22}} (x^1 + x^2) - \frac{\partial \beta_2}{\partial x^2} \left[\frac{\partial \beta_2}{\partial x^2} (x^1 + x^2) - \beta_2 \right] (x^1 + x^2) - \\ &\quad \left. - \frac{1}{x^1 + x^2} \left[\frac{\partial \beta_2}{\partial x^2} (x^1 + x^2) - \beta_2 \right] \frac{\partial^2 \beta_2}{\partial x^{22}} (x^1 + x^2) \right\}. \end{aligned}$$

Приведа подобные члены, получим

$$R_{2323} = \left[\frac{\partial \beta_2}{\partial x^2} (x^1 + x^2) - \beta_2 \right] \frac{\partial^2 \beta_2}{\partial x^{32}} (x^1 + x^2) - \frac{\partial \beta_2}{\partial x^2} (x^1 + x^2) \left[\frac{\partial \beta_2}{\partial x^2} (x^1 + x^2) - \beta_2 \right],$$

или

$$R_{23\ 23} = \left[\frac{\partial \beta_2}{\partial x^2} (x^1 + x^2) - \beta_2 \right] \left(\frac{\partial^2 \beta_2}{\partial x^{2^3}} - \frac{\partial^2 \beta_2}{\partial x^2} \right). \quad (23)$$

Подсчитаем $R_{12\ 12}$,

$$R_{12\ 12} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial x^{1^2}} + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12,2},$$

или

$$R_{12\ 12} = 1 - \frac{1}{x^1 + x^2} (x^1 + x^2) \equiv 0.$$

Аналогично

$$R_{13\ 13} = \left(\frac{\partial \beta_3}{\partial x^2} \right)^2 \frac{\left(\frac{\partial \beta_2}{\partial x^2} \right)^2}{\frac{\partial \beta_2}{\partial x^2} (x^1 + x^2) - \beta_2} \cdot \left[\frac{\partial \beta_3}{\partial x^2} (x^1 + x^2) - \beta_3 \right],$$

$$R_{12\ 13} = \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial^2 g_{11}}{\partial x^2 \partial x^3} - \frac{\partial^2 g_{23}}{\partial x^{1^2}} \right) + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{13,l} - \Gamma_{23}^1 \Gamma_{11,l} \equiv 0.$$

Это равенство выполняется в силу строения метрического тензора и объекта связности пространства.

Аналогично $R_{21\ 23} = 0$.Подсчитаем $R_{13\ 32}$,

$$R_{13\ 32} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{33}}{\partial x^1 \partial x^2} + \Gamma_{13}^3 \Gamma_{23,3} - \Gamma_{33}^2 \Gamma_{12,2},$$

или

$$R_{13\ 32} = \frac{\partial^2 \beta_2}{\partial x^{2^2}} (x^1 + x^2) + \left[\frac{\partial \beta_2}{\partial x^2} (x^1 + x^2) - \beta_2 \right] \frac{\partial^2 \beta_2}{\partial x^{2^2}} -$$

$$- \frac{\frac{\partial \beta_2}{\partial x^2}}{\frac{\partial \beta_2}{\partial x^2} (x^1 + x^2) - \beta_2} \left[\frac{\partial \beta_2}{\partial x^2} (x^1 + x^2) - \beta_2 \right] \frac{\partial^2 \beta_2}{\partial x^{2^2}} (x^1 + x^2) -$$

$$- \frac{1}{x^1 + x^2} \left[\frac{\partial \beta_2}{\partial x^2} (x^1 + x^2) - \beta_2 \right] \frac{\partial^2 \beta_2}{\partial x^{2^2}} (x^1 + x^2).$$

Приведя подобные члены, получим

$$R_{13\ 32} \equiv 0.$$

Для того, чтобы пространство обладало постоянной кривизной, необходимо и достаточно, чтобы

$$R_{hilk} = K (g_{hi} g_{kl} - g_{hk} g_{il}),$$

где K — постоянная.

Возьмем значение

$$R_{12\ 12} \equiv 0 = K (x^1 + x^2)^2 \left[\frac{\partial \beta_2}{\partial x^2} (x^1 + x^2) - \beta_2 \right]^2.$$

Отсюда следует, что $K = 0$, но тогда из соотношения (23) имеем

$$\frac{\partial^2 \beta_2}{\partial x^{2^3}} - \frac{\partial^2 \beta_2}{\partial x^2} = 0.$$

При этом условии пространство обращается в евклидово.

Подсчитав компоненты тензора Риччи, получим $R_{11} \equiv 0$,

$$R_{22} = \frac{\left[\frac{\partial^3 \beta_2}{\partial x^{2^3}} (x^1 + x^2) + \frac{\partial^2 \beta_2}{\partial x^{2^2}} \left[\frac{\partial \beta_2}{\partial x^2} (x^1 + x^2) - \beta_2 \right] - \left[\frac{\partial^2 \beta_2}{\partial x^{2^2}} (x^1 + x^2) \right]^2 \right]}{\frac{\partial \beta_2}{\partial x^2} (x^1 + x^2) - \beta_2} +$$

$$+ \frac{\left[\frac{\partial^3 \beta_2}{\partial x^{2^3}} (x^1 + x^2) \right]^2}{\left[\frac{\partial \beta_2}{\partial x^2} (x^1 + x^2) - \beta_2 \right]^2} - (x^1 + x^2) \frac{\frac{\partial \beta_2}{\partial x^2}}{\frac{\partial \beta_2}{\partial x^2} (x^1 + x^2) - \beta_2} +$$

$$+ \frac{1}{x^1 + x^2} \frac{\frac{\partial^2 \beta_2}{\partial x^{2^2}} (x^1 + x^2)}{\frac{\partial \beta_2}{\partial x^2} (x^1 + x^2) - \beta_2},$$

или

$$R_{22} = R_{33} = \frac{x^1 + x^2}{\frac{\partial \beta_2}{\partial x^2} (x^1 + x^2) - \beta_2} \left(\frac{\partial^3 \beta_2}{\partial x^{2^3}} - \frac{\partial \beta_2}{\partial x^2} \right).$$

Вполне геодезические поверхности этого пространства имеют евклидов линейный элемент. Пространство допускает два различных семейства вполне геодезических поверхностей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Э. Картан. Геометрия римановых пространств. ОНТИ НКТП, М., 1936.
2. А. Лихнерович. Группы голономии и теория связности в целом. ГИИЛ, М., 1962.
3. Э. Гурса. Курс математического анализа т. II, ч. 1. ОНТИ НКТП, М., 1936.
4. Л. П. Эйзенхарт. Риманова геометрия. ГИИЛ, М., 1948.

Поступила в редколлегию 16 мая 1966 года.

НАИБОЛЬШАЯ ДЛИНА ЗАМКНУТОЙ ЭВОЛЬВЕНТЫ ОДНОГО КЛАССА КРИВЫХ

П. А. Соловьев *

(Харьков)

Известно, что плоская замкнутая кривая алгебраической длины нуль допускает единственную замкнутую эвольвенту, алгебраическая длина которой также нуль. Ограничимся среди них только такими кривыми (назовем их E^0), которые составлены из конечного числа k' выпуклых дуг, соединенных последовательно своими концами в вершинах вогнутых углов. Свойства таких кривых указаны в работе [1].

В этой статье будет доказано, что для всякой кривой E^0 данной абсолютной длины $2s$ абсолютная длина 2σ ее первой эвольвенты алгебраической длины нуль не превосходит величины $2\pi s$, т. е. при указанных условиях всегда имеет место соотношение

$$2\sigma \leq \frac{\pi}{4} 2s$$

какой бы ни была кривая E^0 . При некоторых дополнительных условиях будет получено соотношение $2\sigma \leq \frac{\pi}{k} 2s$, где k — число сторон кривой E^0 .

Эти формулы приведены в работе [1]. В настоящей же статье дается другое более корректное обоснование их, а также исследуются условия, при которых в этих формулах имеет место знак равенства.

* Профессор Павел Александрович Соловьев (1890—1945) принадлежал к харьковской довоенной геометрической школе, главой которой был академик Д. М. Сипцов. Его научно-педагогическая деятельность протекала в Харьковском университете с 1925 года. В своих лекциях он блестяще умел показать красоту излагаемой идеи, метода или результата, своей любовью к геометрии заражая слушателей. Очень много внимания он уделял школьному образованию, постоянно работая с учителями математики. П. А. Соловьев был одним из инициаторов и первых организаторов математических олимпиад для учащихся старших классов школ Харькова, ставших с 1936 года ежегодной традицией, и математических кружков, поныне работающих при университете.

Среди бумаг, оставшихся после смерти П. А. Соловьева, недавно была обнаружена его статья «Наибольшая длина замкнутой эвольвенты одного класса кривых», предназначавшаяся для опубликования в III томе издававшегося с 1938 г. Геометрического сборника кафедры геометрии ХГУ. Война помешала выходу в свет этого тома.

Названная работа в несколько сокращенном виде предлагается вниманию читателей. Ее подготовили к печати Т. Р. Довбыш-Ерохина и А. И. Медяник.

I

§ 1. ОСНОВНАЯ ЛЕММА. ЕЕ ФОРМУЛИРОВКА

Решим сначала одну вспомогательную задачу. Дан отрезок $[0, 2\pi]$ Разделим его на k' частей:

$$[\alpha^{j-1}, \alpha^j], \alpha^{j-1} \leq \alpha^j, j = 1, 2, \dots, k', \alpha^0 = 0, \alpha^{k'} = 2\pi$$

и рассмотрим k' некоторых функций $\rho^j(\alpha)$, где индекс j является порядковым номером. Пусть эти функции удовлетворяют таким условиям: они однозначны и интегрируемы (1), неотрицательны каждая на соответствующем ей отрезке $[\alpha^{j-1}, \alpha^j]$ (2).

и

$$\sum_{j=1}^{k'} \rho_M^j = s > 0, \quad (3)$$

где s — заданная постоянная, а ρ_M^j — наибольшее значение функций $\rho^j(\alpha)$ на отрезке $[\alpha^{j-1}, \alpha^j]$.

Условие (3) требует, чтобы каждая из функций $\rho^j(\alpha)$ достигала своего наибольшего значения ρ_M^j хотя бы один раз на соответствующем ей отрезке. Если же это случится не один раз, то в формулу (3) будем вводить только по одному значению ρ_M^j для каждого из k' отрезков.

Присоединим к формуле (3) еще одно условие: требуется, чтобы среди k' значений ρ_M^j было не меньше, чем k , $k \leq k'$, значений, равных наибольшему из них (4).

Если k не ограничено снизу, условие (4) тривиально, так как k может быть равно единице.

Наконец, подчиним деление отрезка $[0, 2\pi]$ и выбор функций $\rho^j(\alpha)$ еще таким условиям:

$$\sum_{j=1}^{k'} (-1)^j \int_{\alpha^{j-1}}^{\alpha^j} \rho^j(\alpha) d\alpha = 0, \quad (5)$$

$$\sum_{j=1}^{k'} (-1)^j \int_{\alpha^{j-1}}^{\alpha^j} \rho^j(\alpha) \cos \alpha d\alpha = 0, \quad (6)$$

$$\sum_{j=1}^{k'} (-1)^j \int_{\alpha^{j-1}}^{\alpha^j} \rho^j(\alpha) \sin \alpha d\alpha = 0. \quad (7)$$

Каждому делению отрезка $[0, 2\pi]$ на k' частей и каждой совокупности функций $\rho^j(\alpha)$, которые удовлетворяют условиям (1)–(7), соответствует единственное определенное неотрицательное значение

$$2z = \sum_{j=1}^{k'} \int_{\alpha^{j-1}}^{\alpha^j} \rho^j(\alpha) d\alpha. \quad (8)$$

Задача заключается в следующем.

1. Нужно найти такое деление отрезка $[0, 2\pi]$ на k' частей и такую совокупность k' функций $\rho^j(\alpha)$, которые удовлетворяют условиям (1)–(7), чтобы значение $2z$ было наибольшим.

Также нужно найти условия, при которых $2z$ действительно достигает, если это возможно, своего наибольшего значения.

Одно из очевидных решений заключается в том, что $k = 2m$ частей деления отрезка $[0, 2\pi]$ должны быть равны между собой и равны $\frac{2\pi}{k}$, а все $k = 2m$ соответствующих им функций должны быть постоянными и

$$\rho^j(\alpha) = \rho_M^j = \frac{s}{k}. \quad (9)$$

Длины остальных $k' - k$ отрезков должны быть равны нулю и соответствующие им функции $\rho^j(\alpha) \equiv 0$. Чтобы удовлетворить условиям (5)–(7), эти пустые отрезки нужно разместить или все на концах отрезка $[0, 2\pi]$ или часть из них — на концах любых непустых отрезков, гнездами, с четным числом в каждом.

Наконец, искомое наибольшее значение величины 2σ , определенной формулой (8), будет

$$2\bar{\sigma} = \frac{\pi}{k} 2s. \quad (10)$$

Очевидно также, что указанное формулой (10) значение 2σ невозможно увеличить. Это непосредственно вытекает из условий (2), (3), (4) и формулы (8).

Однако же задача данной работы заключается преимущественно в том, чтобы найти все случаи, когда 2σ достигает указанного наибольшего значения. Дальше будем искать необходимые для этого условия.

Назовем совокупность пустых отрезков $[\alpha^{j-1}, \alpha^j]$ деления $[0, 2\pi]$ и нулевых значений функций $\rho^j(\alpha)$ на них тривиальной частью решения. Легко убедиться, что каким бы ни было решение поставленной задачи, такую тривиальную часть можно произвольно или присоединить к решению, или отбросить, но при упомянутом уже условии: число пустых отрезков, расположенных на общей границе двух непустых, должно быть четным и число всех таких пустых отрезков, размещенных на обоих концах отрезка $[0, 2\pi]$, тоже должно быть четным*. Так как тривиальная часть не существенна для решения задачи, в дальнейшем мы, вообще говоря, на ней останавливаться не будем.

Обозначим через T_4 множество значений α^j и функций $\rho^j(\alpha)$, которые удовлетворяют только первым четырем, (1)–(4), условиям нашей задачи, а через T_7 — множество значений тех же величин, которые удовлетворяют условиям (1)–(7).

Очевидно, что множество T_7 составляет часть — правильную или нет — множества T_4 .

Мы решим нашу задачу сначала на множестве T_4 , а потом на множестве T_7 .

§ 2. НАИБОЛЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЕ 2σ на T_4

Найдем сначала те условия, при которых 2σ достигает своего наибольшего значения на множестве T_4 .

Прежде всего покажем, что те функции $\rho^j(\alpha)$, при которых 2σ достигает наибольшего значения на T_4 , должны сохранять постоянное значение, равное $\frac{s}{k}$, а сумма длин отрезков $[\alpha^{j-1}, \alpha^j]$, на которых $\rho_M^j \neq 0$, должна быть равна 2π .

* Последнее, очевидно, эквивалентно условию: считать концы 0 и 2π данного отрезка конгруэнтными, а весь отрезок $[0, 2\pi]$ — замкнутым. Далее мы так и будем делать.

Действительно, будем рассматривать совокупность функций $\rho^j(\alpha)$, $j = 1, 2, \dots, k'$, как значения одной функции $f(\alpha)$ на различных частях отрезка $[0, 2\pi]$. Из условия (4) и формулы (3) непосредственно вытекает, что наибольшее значение $f(\alpha)$ на отрезке $[0, 2\pi]$

$$\bar{f}(\alpha) = \frac{s}{k}. \quad (11)$$

Отсюда, воспользовавшись формулой (8), получим

$$2\sigma = \sum_{j=1}^{k'} \int_{\alpha_j-1}^{\alpha_j} \rho^j(\alpha) d\alpha = \int_0^{2\pi} f(\alpha) d\alpha \leq \frac{s}{k} 2\pi. \quad (12)$$

Положим

$$\alpha^j - \alpha^{j-1} = \omega^j, \quad j = 1, 2, \dots, k', \quad (13)$$

$$\omega^j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, k'. \quad (14)$$

Знак неравенства в формуле (12) достигается, если осуществить произвольное деление отрезка $[0, 2\pi]$ точно на k частичных отрезков таких, что $\sum_j \omega^j = 2\pi$ (знак суммы распространяется только на те отрезки, для которых $\rho_M^j \neq 0$, и если все k констант ρ_M^j на них равны между собой и, значит, каждая $\rho_M^j = \frac{s}{k}$).

Значит, наибольшее значение величины 2σ

$$2\bar{\sigma} = \frac{s}{k} 2\pi. \quad (15)$$

Сформулируем полученные результаты.

Теорема А. Наибольшее значение $2\bar{\sigma}$ величины

$$2\sigma = \sum_{j=1}^{k'} \int_{\alpha_j-1}^{\alpha_j} \rho^j(\alpha) d\alpha$$

на множестве T_4 определяется формулой $2\bar{\sigma} = \frac{\pi}{k} 2s$. Величина $2\bar{\sigma}$ достигает этого своего значения на указанном множестве тогда и только тогда, когда все k' функций $\rho^j(\alpha)$ постоянны, причем точно k функций из общего числа k' имеют одинаковые постоянные значения $\rho^j(\alpha) = \rho_M^j = \frac{s}{k}$, а длины ω^j соответствующих k отрезков деления $[0, 2\pi]$ имеют произвольные неотрицательные значения с единственным ограничением, что сумма их равна 2π . Остальные $k' - k$ отрезков и значения соответствующих функций $\rho^j(\alpha)$ на них равны нулю, т. е., в частности, они могут составлять тривиальную часть решения.

§ 3. НАИБОЛЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЕ 2σ НА T_7

Рассмотрим теперь решение нашей задачи на множестве T_7 , т. е. при условии (1)–(7).

Мы убедились, что на множестве T_4 величина 2σ ограничена. Но $T_7 \subseteq T_4$.

Поэтому 2σ и подавно ограничена на T_7 . Следовательно, существует верхняя грань числа 2σ на множестве T_7 , $2\bar{\sigma}(T_7)$.

На основании соотношения (10) заключаем, что

$$2\bar{\sigma}(T_7) \leq 2\bar{\sigma}(T_4). \quad (16)$$

А поэтому, если на множестве T_7 можно осуществить равенство

$$2\sigma(T_7) = 2\bar{\sigma}(T_4), \quad (17)$$

то данное значение 2σ и будет искомым наибольшим значением величины 2σ на T_7 .

Покажем, что это действительно возможно. Для осуществления равенства (17) на T_7 необходимо и достаточно, чтобы отрезки ω^j и константы $\rho_M^j = \frac{s}{k}$, определенные теоремой А, удовлетворяли условиям (5), (6) и (7).

Соответственно результатам теоремы А условия (5), (6) и (7) запишутся

$$\sum_{j=1}^{k'} (-1)^j \omega^j = 0, \quad (18)$$

$$\sum_{j=1}^{k'} (-1)^j \cos \sum_{t=1}^j \omega^t = 0, \quad (19)$$

$$\sum_{j=1}^{k'} (-1)^j \sin \sum_{t=1}^j \omega^t = 0. \quad (20)$$

Напоминаем также, что

$$\sum_{j=1}^{k'} \omega^j = 2\pi. \quad (*)$$

Детальный анализ этих условий на основании их геометрической интерпретации будет проделан в следующем параграфе. А сейчас только укажем, что

а) система уравнений (18)–(20) допускает решения только тогда, когда k' и k — четные числа;

б) эта система имеет множество решений при $k > 4$ и единственное — при $k = 4$, а именно:

$$\omega^1 = \omega^2 = \omega^3 = \omega^4 = \frac{\pi}{2}, \quad \rho_M^1 = \rho_M^2 = \rho_M^3 = \rho_M^4 = \frac{s}{4} \quad (21)$$

и соответствующее значение

$$2\bar{\sigma} = \frac{\pi}{4} 2s; \quad (22)$$

в) $k' - k$ пустых отрезков ω^j и нулевых значений констант ρ_M^j на них должны составлять тривиальную часть решения. В правильности этих утверждений легко убедиться на основании простого анализа системы.

Замечание. Следует заметить, что отбрасывая условие (4), мы бы получили на T_4 , не считая тривиальной части, очевидно, единственное решение, а именно $2\bar{\sigma}(T_4) = 2\pi s$. На множестве T_7 мы также получили бы единственное решение, указанное формулами (21) и (22).

§ 4. ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ СОДЕРЖАНИЕ УСЛОВИЙ (18)–(20)

Многоугольники II

Условия (18), (19) и (20) вместе с (*) связывают только длины отрезков ω^j , на которые нужно делить отрезок $[0, 2\pi]$, чтобы 2σ достигала своего наибольшего значения.

$$2\bar{\sigma} = \frac{\pi}{k} 2s.$$

Все эти условия, как легко убедиться, можно выразить так. Отрезок $[0, 2\pi]$ нужно разбить произвольным способом на такие отрезки ω^j , $j = 1, \dots, k'$, чтобы равносторонний многоугольник, внутренние углы которого последовательно равны в радианной мере ω^j ,

а) огибался локально-опорной направленной прямой один раз при монотонном ее повороте на угол, равный 2π (условие (*);

б) был замкнутым (19), (20);

в) имел знакопеременную сумму внутренних углов ω^j , равную нулю (18).

Равносторонние многоугольники со свойствами (а), (б), (в) дальше будем называть звездчатыми многоугольниками II, или просто многоугольниками II.

Заметим, прежде всего, что всем этим условиям можно удовлетворить только тогда, когда число непустых отрезков ω^j ($\omega^j \neq 0$) будет четным, $k = 2m$, причем $k \geq 4$.

Действительно, зададим направление обхода контура многоугольника II. Если направленная локально-опорная прямая l , монотонно поворачиваясь в одну сторону на углы ω^1, ω^2 , будет огибать многоугольник II, то направление этой прямой последовательно будет то одинаковым, то противоположным с направлением тех последовательных сторон многоугольника II, с которыми прямая l последовательно сливается. Поскольку данный многоугольник замкнутый, прямая l после полного его огибания вернется в свое первоначальное положение, причем, в силу условия (а), с тем же самым направлением. А это возможно только тогда, когда число перемен направления сторон многоугольника II относительно направления прямой l , будет числом четным. Следовательно, число сторон многоугольника II, значит, и углов, а тогда и отрезков ω^j , должно быть четным. Эти рассуждения одинаково относятся как к тем сторонам, соответствующие углы при которых отличны от нуля, так и к сторонам, углы при которых равны нулю.

Следовательно, во всех случаях многоугольник II должен состоять из четного числа сторон и поэтому $k = 2m$, где m — целое положительное число.

Простой подсчет показывает, что $m \geq 2$, а, следовательно, $k \geq 4$. Действительно, если $m = 1$, $k = 2$, то при условии (18) и (*)

$$\omega' = \omega^2 = \pi,$$

а это не удовлетворяет условиям (19), (20).

Следовательно, углы всякого звездчатого многоугольника II с числом сторон k , не меньшим четырех, дают то деление отрезка $[0, 2\pi]$, при котором 2σ достигает своего наибольшего значения на T_7 . При этом должно быть для всех j

$$\rho^j(a) = \rho_M^j = \frac{s}{k}, \quad j = 1, 2, \dots, k'.$$

Первое возможное решение начинается с $k = 4$.

Соответствующий четырехугольник Π будет квадратом, что непосредственно вытекает из равенства сторон и условия (в).

Среди многоугольников Π особенно характерны два типа:

- 1) правильные звездчатые многоугольники и
- 2) произвольные замкнутые равносторонние многоугольники с нечетным числом $(2p + 1)$ вершин, которые считаются дважды, если полная абсолютная кривизна такого многоугольника равна Π .

Первые, очевидно, удовлетворяют всем условиям, поставленным для многоугольников Π ; вторые также всегда многоугольники типа Π , если их контур обходить дважды, считая, что каждые две вершины t и $t + 2p + 1$ совпадают.

Решением поставленной задачи будет также деление отрезка $[0, 2\pi]$ на четыре равные части и равенство всех $\rho_M^j = \frac{s}{k}$, $j = 1, 2, \dots, k'$. Все остальные $k - 4$ отрезка ω^j нулевой длины нужно вставить между этими четырьмя — везде в четном числе, считая концы 0 и 2Π совпадшими. Остальные $k' - k$ отрезков и констант нужно присоединить к предыдущему как тривиальную часть решения.

Соответствующим многоугольником будет квадрат с присоединенными в его вершинах двойными лучами, направленными внутрь квадрата.

Примечание 1. Если k не фиксировано, то условие (4) становится тривиальным и решением задачи будет то, для которого $k = 4$.

Примечание 2. Все предыдущие рассуждения и конечный результат не зависят от того, будем ли мы считать те интегралы, которые входят в условие задачи римановыми, или интегралами общего вида, лишь бы только для них сохранялось то ограниченное количество свойств, которыми мы пользовались.

II

§ 5. ЭКСТРЕМАЛЬНАЯ ЗАДАЧА, СВЯЗАННАЯ С ЗАМКНУТОЙ ЭВОЛЬВЕНТОЙ ПЛОСКОЙ КРИВОЙ

Рассмотрим замкнутую плоскую кривую E^0 (см. рисунок), полная абсолютная кривизна которой 2π и которая составлена из конечного числа R' выпуклых дуг, соединенных последовательно в k' вершинах A^j вогнутых углов, в частности в точках возврата первого рода. Пусть направленная локально-опорная прямая l катится без скольжения по этой кривой. Благодаря указанным свойствам кривой E^0 прямая l , огибая E^0 , будет поворачиваться монотонно и при этом обогнет ее один раз при повороте на угол, равный 2π .

Каждая фиксированная точка Q^x локально-опорной прямой l опишет при этом кривую E_1 (эвольвенту кривой E^0 , соответствующую точке Q^x), замкнутую в том и только в том случае, когда алгебраическая длина $2s_a$ кривой E^0 равна нулю, т. е.

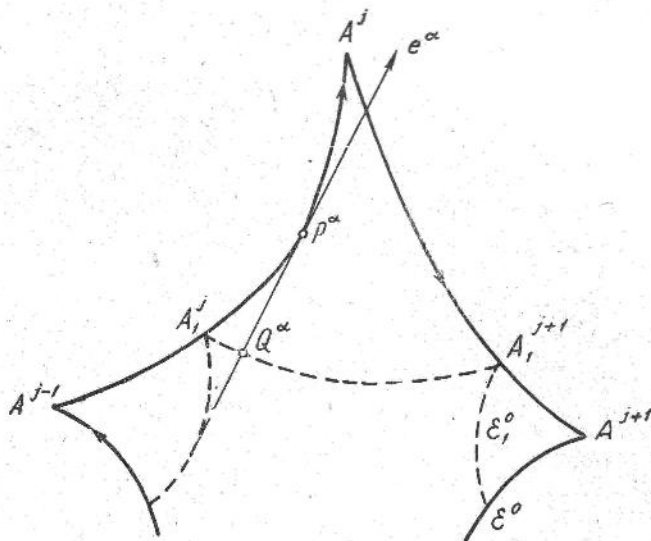
$$2s_a = \sum_{j=1}^{k'} (-1)^j s^j = 0, \quad (23)$$

где s^j — абсолютная длина дуг, из которых составляется кривая E_0 . Мы считаем, что E^0 — кривая именно такой структуры.

Среди множества замкнутых эвольвент кривой E^0 , как известно, существует единственная, алгебраическая длина которой равна нулю. Назовем эту эвольвенту E_1^0 . Она, как и кривая E^0 , составляется из выпуклых дуг, соединенных последовательно в вершинах A_1^j вогнутых углов,

в частности в точках возврата первого рода. На каждой дуге s^j кривой E^0 находится не больше одной из вершин A_1^j , и поэтому число их не превосходит k' .

Вычислим теперь абсолютную 2σ и алгебраическую $2\sigma_a$ длину замкнутой кривой E_1^0 , помня, что знак ее дуги меняется при переходе через каждую вершину A_1^j кривой E_1^0 . Обозначив абсолютную величину радиуса кривизны кривой E^0 в точке Q^α через $\rho^j(\alpha)$, а через α^j — значение



угла α , соответствующее Q^α , когда эта точка находится в вершине A_1^j кривой E^0 . Через $\sigma^j, j = 1, 2, \dots, k'$, обозначим абсолютную длину этой кривой между вершинами A_1^{j-1} и A_1^j . Очевидно, получим

$$\sigma^j = |\sigma^j| = \int_{\alpha^{j-1}}^{\alpha^j} \rho^j(\alpha) d\alpha, \quad (24)$$

допуская, что $\alpha^{j-1} \leq \alpha^j$.

Следовательно, абсолютная длина $2\sigma_a$ кривой E_1^0 определяется так:

$$2\sigma = \sum_{j=1}^{k'} \int_{\alpha^{j-1}}^{\alpha^j} \rho^j(\alpha) d\alpha. \quad (25)$$

Ее алгебраическая длина $2\sigma_a$ по условию равна нулю. Поэтому

$$2\sigma_a = \sum_{j=1}^{k'} (-1)^j \sigma^j = \sum_{j=1}^{k'} (-1)^j \int_{\alpha^{j-1}}^{\alpha^j} \rho^j(\alpha) d\alpha = 0. \quad (26)$$

Замкнутость кривой E^0 определяется равенствами

$$\sum_{j=1}^{k'} (-1)^j \int_{\alpha^{j-1}}^{\alpha^j} \rho^j(\alpha) \cos \alpha d\alpha = 0, \quad (27)$$

$$\sum_{j=1}^{k'} (-1)^j \int_{\alpha^{j-1}}^{\alpha^j} \rho^j(\alpha) \sin \alpha d\alpha = 0. \quad (28)$$

Дальше, поскольку полная абсолютная кривизна E_1^0 равна 2π , а полная кривизна ее дуги σ^j равна $\omega^j = \alpha^j - \alpha^{j-1} \geq 0$, то

$$\sum_{j=1}^{k'} \omega^j = 2\pi. \quad (29^*)$$

Наконец, абсолютная длина $2s$ кривой E^0 определяется формулой

$$2s = 2 \sum_{j=1}^{k'} \rho_M^j \quad (30)$$

где ρ_M^j — наибольшее значение абсолютной величины радиуса кривизны на дуге σ^j , равное, очевидно, и дуге $A_1^{j-1}A^j$, и дуге $A_1^jA_1^j$. Также можно сказать, что ρ_M^j — наибольшее значение функций $\rho^j(\alpha)$ при изменении α на отрезке $[\alpha^{j-1}, \alpha^j]$.

Прибавим также, что функция $\rho^j(\alpha)$ — однозначная и неотрицательная для всех α , $\alpha^0 = 0$, $\alpha^{k'} = 2\pi$. Равенство числа k' сторон E^0 и E_1^0 не существенно.

Теперь сформулируем такую задачу относительно кривых E^0 и E_1^0 .

Рассмотрим все кривые E^0 , каждая из которых обладает свойствами:

- 1) длина кривой равна $2s$;
- 2) кривая имеет k сторон, из которых не менее, чем k' равны наибольшей из них;
- 3) первая эвольвента кривой имеет экстремальную длину нуль.

Найти те кривые E^0 , первая эвольвента которых имеет наибольшую абсолютную длину $2s$.

Аналитически: нужно найти наибольшее значение величины, определенной формулой (25), при условии (26), (27), (28), (30) и условии, что $k \leq k'$ сторон E^0 равны наибольшей из k' сторон.

Но поскольку эти условия тождественны условиям (1)–(7), то мы пришли к решенной уже задаче. Поэтому, используя результаты предыдущих параграфов, получаем такое решение последней нашей задачи (II).

Задача (II) имеет решение только тогда, когда данные числа k' и k — четные, причем $k \geq 4$.

Для кривых E^0 данной абсолютной длины $2s$ и данного числа k' сторон, среди которых не меньше, чем k , равны наибольшей из них, наибольшая абсолютная длина $2s$ их эвольвент E_1^0 нулевой алгебраической длины может быть равна $\frac{\pi}{k} 2s$. Эвольвента E_1^0 имеет такую абсолютную длину тогда и только тогда, когда кривая E^0 является многоугольником II, т. е. равносторонним звездчатым многоугольником, знакопеременная сумма углов ω^j которого равна нулю, т. е.

$$\sum_j (-1)^j \omega^j = 0.$$

Число сторон такого многоугольника должно быть равным $k = 2m$, причем не меньше, чем четыре угла ω^j должны быть отличны от нуля.

а точно k сторон должны быть равными величине $\frac{s}{k}$. Остальные $k' - k$

углов ω' и $k' - k$ соответствующих сторон должны быть равными нулю, причем такие стороны могут только в четном числе располагаться между соседними нулевыми сторонами многоугольников.

При $k > 4$ существует множество многоугольников П.

При $k = 4$ решением задачи является квадрат.

Заметим, что если число k не фиксировано, то единственным решением задачи, не считая тривиальной части, будет квадрат.

Отсюда следует, что для абсолютной длины $2s$ замкнутой эвольвенты, полная абсолютная кривизна которой равна 2π , а алгебраическая длина равна нулю, всегда справедливо неравенство

$$2s \leq \frac{\pi}{4} 2s, \quad (31)$$

где $2s$ — абсолютная длина кривой.

При этом знак равенства имеет место только тогда, когда кривая является квадратом.

Примечание. Формулы $2s \leq \frac{\pi}{k} 2s$ и $2s \leq \frac{\pi}{4} 2s$ и соответствующие теоремы, очевидно, определяют также соотношение и соответствующие условия, при которых абсолютная длина $2s$ эволюты E^0 замкнутой кривой E_1^0 данной абсолютной длины $2s$, полной абсолютной кривизны 2π и алгебраической длины нуль, достигает своего наименьшего значения

$$2s = \frac{k}{\pi} 2s, \quad 2s = \frac{4}{\pi} 2s.$$

Можно также сказать, что формула (31) определяет неравенство, которое всегда существует между абсолютной длиной $2s$ эволюты овала и абсолютной длиной $2s$ кривой, параллельной овалу, алгебраическая длина которой равна нулю.

§ 6. ОДИН ВЫВОД ИЗ ПРЕДЫДУЩЕЙ ТЕОРЕМЫ

Рассмотрим бесконечное множество замкнутых последовательных эвольвент $E_1^0, E_2^0, E_3^0 \dots$ кривой E^0 , алгебраическая длина которых равна нулю. К каждой паре таких кривых можно применить формулу (31).

Обозначив абсолютную длину кривой E_i^0 через $2s_i$, получим

$$2s_{i+1} \leq \frac{\pi}{4} 2s_i.$$

Отсюда, так как $\frac{\pi}{4} < 1$, заключаем, что последовательность

$$2s_1, 2s_2, 2s_3$$

является сходящейся и

$$\lim_{i \rightarrow \infty} 2s_i = 0.$$

Следовательно, кривая E_i^0 стягивается к точке, когда $i \rightarrow \infty$.

Таким образом, бесконечное множество последовательных замкнутых эвольвент E_i^0 кривой E^0 стягивается к определенной граничной точке.

В работе [1] показано, что этой граничной точкой является центр тяжести кривизны кривой E , который будет также центром тяжести кривизны любой ее эвольвенты E_i^0 для любого номера i .

ЛИТЕРАТУРА

1. П. А. Соловьев. Про центр ваги кривизни. Геометричний збірник. т. II. Харків, 1940, 115—133.

Поступила в редколлегию 30 мая 1966 г.

О КОЛИЧЕСТВЕ ОДНОРОДНЫХ МНОГОГРАННИКОВ С НЕОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ЭЙЛЕРОВОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ

С. П. Сопов (Харьков)

Многогранник с правильными гранями и конгруэнтными звездами вершин* называется однородным, если при совмещении звезд любых двух его вершин он совмещается сам с собой.

Пусть P — однородный многогранник с эйлеровой характеристикой χ . Используя известные соотношения между элементами многогранника P , можно написать уравнение

$$\sum \frac{S_i}{n_i} = \frac{S-2}{2} + \frac{\chi}{B}, \quad (1)$$

где B — количество вершин, S — количество граней, инцидентных каждой вершине, среди которых S_i правильных n_i -угольников.

Результаты решения этого уравнения в целых числах для $\chi = 2$ приводятся в работе В. Г. Ашкинуге [1]. Там же дается таблица выпуклых однородных многогранников.

В настоящей работе найдены все однородные многогранники с положительной эйлеровой характеристикой. Их описание приводится в табл. 1. Каждая строка этой таблицы определяет развертку соответствующего однородного многогранника. Через P , G и G_i обозначается количество ребер, граней и n_i -угольных граней многогранника. Символ $\left\{ \frac{n}{d} \right\}$ обозначает правильный звездчатый n -угольник, центр которого имеет плотность d . Под плотностью мы понимаем количество пересечений сторон многоугольника с лучом, исходящим из его центра в любом направлении. Римскими цифрами обозначены номера решений уравнения (1) для $\chi = 2$. В таблице не учтены те решения, которые определяют развертки, заведомо не реализующиеся в виде однородного многогранника [1].

Пусть A — вершина однородного многогранника, E — соответствующая ей звезда вершины. Все вершины E , инцидентные ребрам, исходящим из A , лежат в одной плоскости. Сечение предельного угла звезды вершины E этой плоскостью образует многоугольник, который называется вершинной фигурой однородного многогранника. Для каждого приведенного в табл. 1 решения мы будем рассматривать все возможные вершинные фигуры, которые можно вписать в окружность [2]. Вырожденные вершинные фигуры в таблице не учитываются.

Остается двадцать решений уравнения (1) для $\chi = 2$. Рассмотрим каждый случай в отдельности.

* Мы будем называть фигуры конгруэнтными, если они могут быть совмещены движением или движением с отражением.

I. Вершинная фигура может быть только правильным треугольником со стороной 1*. Имеем правильный выпуклый однородный многогранник — тетраэдр (табл. 1, № 1).

II. Вершинной фигурой может быть только правильный треугольник со стороной $\sqrt{2}$. Имеем правильный выпуклый однородный многогранник — куб (гексаэдр) (табл. 1, № 2).

III. Вершинной фигурой может быть:

1) правильный треугольник со стороной $2 \cos \frac{\pi}{5}$;

2) правильный треугольник со стороной $2 \sin \frac{\pi}{10}$.

В первом случае имеем правильный выпуклый однородный многогранник — додекаэдр (табл. 1, № 3). Во втором случае — правильный однородный многогранник — большой звездчатый додекаэдр (табл. 1, № 4). Из простых геометрических рассуждений видно, что замена при каждой вершине одного или двух выпуклых пятиугольников правильными пятиугольными звездами не приводит к однородному многограннику.

IV. Вершинной фигурой может быть:

1) равнобедренный треугольник со сторонами $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, $2 \cos \frac{\pi}{n}$;

2) равнобедренный треугольник со сторонами $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, $2 \sin \frac{\pi k}{n}$, где третья сторона является диагональю правильного n -угольника, стягивающей k его сторон.

В первом случае имеем бесконечную серию выпуклых призм (табл. 1, № 5). При $n = 4$ имеем куб. Во втором случае имеем бесконечную серию звездчатых призм. Как хорошо известно, существует $\frac{\varphi(n)-2}{2}$ правильных звездчатых n -угольников, где $\varphi(n)$ — функция Эйлера. Следовательно, во втором случае для каждого n мы имеем $\frac{\varphi(n)-2}{2}$ звездчатых призм. В табл. 1 (№ 6, № 7) приведены характеристики двух таких призм для $n = 7$, $k = 1$ и $n = 7$, $k = 3$.

V. Вершинной фигурой может быть только равнобедренный треугольник со сторонами 1, $\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$. Ей соответствует выпуклый однородный многогранник — усеченный тетраэдр (табл. 1, № 8).

VI. Вершинная фигура может быть только равнобедренным треугольником со сторонами $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$. Ей соответствует выпуклый однородный многогранник — усеченный октаэдр (табл. 1, № 9).

VII. Вершинной фигурой может быть:

1) равнобедренный треугольник со сторонами $2 \cos \frac{\pi}{5}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$;

2) равнобедренный треугольник со сторонами $2 \sin \frac{\pi}{10}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$.

В первом случае имеем выпуклый однородный многогранник — усеченный икосаэдр (табл. 1, № 10). Во втором случае имеем однородный многогранник — усеченный большой икосаэдр (табл. 1, № 11).

VIII. Вершинной фигурой может быть:

1) равнобедренный треугольник со сторонами 1, $2 \cos \frac{\pi}{8}$, $2 \cos \frac{\pi}{8}$;

2) равнобедренный треугольник со сторонами 1, $2 \sin \frac{\pi}{8}$, $2 \sin \frac{\pi}{8}$;

3) треугольник со сторонами 1, $2 \cos \frac{\pi}{8}$, $2 \sin \frac{\pi}{8}$.

* Будем и впредь предполагать для простоты, что длина ребра однородного многогранника равна 1.

В первом случае имеем выпуклый однородный многогранник — усеченный куб, (табл. 1, № 12). Во втором случае имеем однородный многогранник — звездчатый усеченный куб (табл. 1, № 13). В третьем случае однородный многогранник не существует, так как каждой треугольной грани должны быть инцидентны восьмиугольники и восьмиугольные звезды, что невозможно.

IX. Вершинной фигурой может быть:

- 1) равнобедренный треугольник со сторонами $1, 2 \cos \frac{\pi}{10}, 2 \cos \frac{\pi}{10}$;
- 2) равнобедренный треугольник со сторонами $1, 2 \sin \frac{\pi}{5}, 2 \sin \frac{\pi}{5}$;
- 3) треугольник со сторонами $1, 2 \cos \frac{\pi}{10}, 2 \sin \frac{\pi}{5}$.

В первом случае имеем выпуклый однородный многогранник — усеченный додекаэдр (табл. 1, № 14). Во втором случае имеем однородный многогранник — усеченный большой звездчатый додекаэдр (табл. 1, № 15). Третий случай аналогичен третьему случаю из VIII.

X. Вершинной фигурой может быть:

- 1) треугольник со сторонами $\sqrt{2}, \sqrt{3}, 2 \cos \frac{\pi}{8}$;
- 2) треугольник со сторонами $\sqrt{2}, \sqrt{3}, 2 \sin \frac{\pi}{8}$.

В первом случае имеем выпуклый однородный многогранник — усеченный кубооктаэдр (табл. 1, № 16). Во втором случае имеем однородный многогранник — звездчатый усеченный кубооктаэдр (табл. 1, № 17).

XI. Вершинной фигурой может быть:

- 1) треугольник со сторонами $\sqrt{2}, \sqrt{3}, 2 \cos \frac{\pi}{10}$;
- 2) треугольник со сторонами $\sqrt{2}, \sqrt{3}, 2 \sin \frac{\pi}{5}$.

В первом случае имеем выпуклый однородный многогранник — усеченный икосододекаэдр (табл. 1, № 18). Во втором случае имеем однородный многогранник — усеченный додекаэдр-икосаэдр (табл. 1, № 19).

XII. Вершинной фигурой может быть только квадрат со стороной, равной 1. Ей соответствует правильный выпуклый однородный многогранник — октаэдр (табл. 1, № 20).

XIII. Вершинной фигурой может быть:

- 1) трапеция со сторонами $1, 1, 1, 2 \cos \frac{\pi}{n}$;
- 2) трапеция со сторонами $1, 1, 1, 2 \sin \frac{k\pi}{2n}$;
- 3) пересеченная трапеция со сторонами $1, 1, 1, 2 \sin \frac{k\pi}{2n}$.

В первом случае имеем бесконечную серию антипризм (табл. 1, № 21). Во втором случае имеем $\frac{\varphi(n)-2}{2}$ звездчатых антипризм для каждого $n > 3$. При $n = 3$ имеем тетраэдр. В табл. 1 приведены две антипризмы для $n = 7$, $k = 1$ и $n = 7$, $k = 3$ (табл. 1, № 22, № 23). В третьем случае имеем еще одну бесконечную серию звездчатых антипризм (табл. 1, № 24). В этом случае угол $\frac{k\pi}{2n}$ должен быть меньше $\frac{\pi}{3}$.

XIV. Вершинной фигурой может быть:

- 1) трапеция со сторонами $1, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}$;
- 2) пересеченная трапеция со сторонами $1, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}$.

В первом случае имеем выпуклый однородный многогранник — ромбокубооктаэдр (табл. 1, № 25) и неоднородный многогранник, отличающийся от ромбокубооктаэдра тем, что одна из его частей, состоящая из пяти квадратов и четырех треугольников, повернута как целое на угол $\frac{\pi}{4}$ (табл. 1, № 26); назовем его квазиоднородным. Во втором случае имеем однородный многогранник — квазиромбокубооктаэдр (табл. 1, № 27).

XV. Вершинной фигурой может быть:

- 1) прямоугольник со сторонами $1, \sqrt{2}, 1, \sqrt{2}$;
- 2) пересеченный прямоугольник со сторонами $1, \sqrt{2}, 1, \sqrt{2}$;
- 3) выпуклый четырехугольник со сторонами $1, 1, \sqrt{2}, \sqrt{2}$;
- 4) невыпуклый четырехугольник со сторонами $1, \sqrt{2}, 1, \sqrt{2}$, у которого стороны, равные 1, служат боковыми ребрами равнобедренной трапеции, а стороны, равные $\sqrt{2}$, служат диагоналями этой трапеции.

В первом случае имеем выпуклый однородный многогранник — кубооктаэдр (табл. 1, № 28). Во втором случае имеем двусвязный многогранник, который распадается на два однородных многогранника — гептаэдр (табл. 1, № 29). Односторонний гептаэдр имеет 6 вершин, 12 ребер, 4 треугольных и 3 четырехугольных грани. Его эйлерова характеристика равна 1. В третьем случае имеем выпуклый неоднородный многогранник, все звезды вершин которого состоят из одних и тех же граней, расположенных в двух различных порядках. Этот многогранник легко получается из кубооктаэдра поворотом на угол $\frac{\pi}{3}$ одной его части, состоящей из четырех треугольников и трех квадратов. Такие многогранники, у которых звезды вершин состоят из одних и тех же многоугольников, расположенных в различном порядке, называются алломорфными.

Предположим, что многогранник с вершинной фигурой, определенной в четвертом случае, существует. Тогда квадраты, инцидентные треугольнику, должны образовывать с ним при каждой вершине два различных двугранных угла. Это невозможно. Следовательно, в четвертом случае однородный многогранник не существует.

XVI. Вершинной фигурой может быть:

- 1) прямоугольник со сторонами $1, 2 \cos \frac{\pi}{5}, 1, 2 \cos \frac{\pi}{5}$;
- 2) пересеченный прямоугольник со сторонами $1, 2 \cos \frac{\pi}{5}, 1, 2 \cos \frac{\pi}{5}$;
- 3) прямоугольник со сторонами $1, 2 \sin \frac{\pi}{10}, 1, 2 \sin \frac{\pi}{10}$;
- 4) пересеченный прямоугольник со сторонами $1, 2 \sin \frac{\pi}{10}, 1, 2 \sin \frac{\pi}{10}$;
- 5) выпуклый четырехугольник со сторонами $1, 1, 2 \cos \frac{\pi}{5}, 2 \cos \frac{\pi}{5}$;
- 6) выпуклый четырехугольник со сторонами $1, 1, 2 \sin \frac{\pi}{10}, 2 \sin \frac{\pi}{10}$;
- 7) пересеченная трапеция со сторонами $1, 2 \cos \frac{\pi}{5}, 1, 2 \cos \frac{\pi}{5}$;
- 8) пересеченная трапеция со сторонами $1, 2 \sin \frac{\pi}{10}, 1, 2 \sin \frac{\pi}{10}$;
- 9) выпуклый четырехугольник со сторонами $1, 1, 2 \cos \frac{\pi}{5}, 2 \sin \frac{\pi}{10}$;

10) выпуклый четырехугольник со сторонами $1, 2 \cos \frac{\pi}{5}, 1, 2 \sin \frac{\pi}{10}$;

11) пересеченная трапеция со сторонами $1, 2 \cos \frac{\pi}{5}, 1, 2 \sin \frac{\pi}{10}$.

В первом случае имеем выпуклый однородный многогранник — икосододекаэдр (табл. 1, № 30).

Во втором случае однородный многогранник не существует. Действительно, плоскости треугольников должны быть расположены поочередно по одну и другую сторону от плоскости пятиугольника, что в силу нечетности количества сторон пятиугольника невозможно.

В третьем случае имеем однородный многогранник — додекаэдрикосаэдр (табл. 1, № 31).

В четвертом случае однородный многогранник не существует. Доказательство аналогично второму случаю.

В пятом случае имеем алломорфный многогранник, который легко получить из икосододекаэдра поворотом половины его на угол $\frac{\pi}{5}$.

В шестом случае нарушается конгруэнтность звезд вершин и, следовательно, однородный многогранник не существует.

В седьмом и восьмом случаях однородных многогранников не существует. Доказательство аналогично четвертому случаю решения XV.

В случаях 9—11 однородных многогранников не существует, так как нарушается конгруэнтность звезд вершин. Это проверяется весьма просто. XVII. Вершинной фигурой может быть:

1) трапеция со сторонами $1, \sqrt{2}, 2 \cos \frac{\pi}{5}, \sqrt{2}$;

2) выпуклый четырехугольник со сторонами $1, \sqrt{2}, \sqrt{2}, 2 \cos \frac{\pi}{5}$;

3) трапеция со сторонами $1, \sqrt{2}, 2 \sin \frac{\pi}{10}, \sqrt{2}$;

4) выпуклый четырехугольник со сторонами $1, \sqrt{2}, \sqrt{2}, 2 \sin \frac{\pi}{10}$;

5) пересеченная трапеция со сторонами $1, \sqrt{2}, 2 \cos \frac{\pi}{5}, \sqrt{2}$;

6) пересеченная трапеция со сторонами $1, \sqrt{2}, 2 \sin \frac{\pi}{10}, \sqrt{2}$;

7) невыпуклый четырехугольник со сторонами $1, \sqrt{2}, \sqrt{2}, 2 \cos \frac{\pi}{5}$;

8) невыпуклый четырехугольник со сторонами $1, \sqrt{2}, \sqrt{2}, 2 \sin \frac{\pi}{10}$.

В первом случае имеем выпуклый однородный многогранник — ромбоикосододекаэдр (табл. 1, № 32).

Во втором случае имеем четыре алломорфных многогранника. Первый из них получается из ромбоикосододекаэдра поворотом его части, состоящей из пятиугольника, пяти квадратов и пяти треугольников, на угол $\frac{\pi}{5}$. Второй получается из ромбоикосододекаэдра поворотом двух диаметрально противоположных таких его частей. Третий получаем при помощи поворота двух таких частей, прилегающих к одному квадрату. Четвертый получаем поворотом трех таких частей.

В третьем случае получаем однородный многогранник (табл. 1, № 33), по внешнему виду напоминающий звездчатый дитреугольный икосододекаэдр, в который вписано пять кубов ([2], табл. 6, ср. рис. 39). Вершины этого многогранника разбиваются на тройки, причем те из них, которые входят в одну тройку, совпадают как точки пространства. Аналогично

все ребра многогранника разбиваются на пары совпадающих в пространстве отрезков.

В четвертом случае нарушается конгруэнтность звезд вершин. Однородный многогранник не существует.

В пятом случае имеем однородный многогранник (табл. 1, № 34), вершины которого разбиваются на тройки, а ребра — на пары, точно как в третьем случае. Этот многогранник можно по внешнему виду рассматривать как дитреугольный икосододекаэдр, в который вписано пять кубов ([2], табл. 6, см. рис. 61). Он изометричен выпуклому ромбоикосододекаэдру, из которого получается нетривиальным изгибанием.

В шестом случае имеем однородный многогранник — звездчатый ромбоикосододекаэдр (табл. 1, № 35).

В седьмом и восьмом случаях нарушается конгруэнтность звезд вершин.

XVIII. Вершинной фигурой может быть:

- 1) правильный выпуклый пятиугольник со стороной 1;
- 2) правильная пятиугольная звезда со стороной 1.

В первом случае имеем правильный выпуклый однородный многогранник — икосаэдр (табл. 1, № 36). Во втором случае имеем правильный однородный многогранник — большой икосаэдр (табл. 1, № 37).

XIX. Вершинной фигурой может быть только выпуклый пятиугольник со сторонами 1, 1, 1, 1, $\sqrt{2}$. Ей соответствует выпуклый однородный многогранник — плосконосый куб (табл. 1, № 38).

XX. Вершинной фигурой может быть:

- 1) выпуклый пятиугольник со сторонами 1, 1, 1, 1, $2 \cos \frac{\pi}{5}$;
- 2) выпуклый пятиугольник со сторонами 1, 1, 1, 1, $2 \sin \frac{\pi}{10}$;
- 3) невыпуклый пятиугольник со сторонами 1, 1, 1, 1, $2 \sin \frac{\pi}{10}$;
- 4) пятиугольная звезда со сторонами 1, 1, 1, 1, $2 \sin \frac{\pi}{10}$.

В первом случае имеем выпуклый однородный многогранник — плосконосый додекаэдр (табл. 1, № 39). Во втором случае имеем однородный многогранник — звездчатый плосконосый додекаэдр (табл. 1, № 40). В третьем случае имеем звездчатый однородный многогранник (табл. 1, № 41). В четвертом случае также существует звездчатый однородный многогранник (табл. 1, № 42).

Итак, мы получили 31 однородный многогранник, пять бесконечных серий призм и антипризм, один квазиоднородный шесть алломорфных многогранников и два многогранника, которые можно рассматривать как сумму однородных многогранников. Они все имеют эйлерову характеристику $\chi = 2$, ориентируемы и, следовательно, топологически эквивалентны сфере.

Нами был получен и однородный многогранник с $\chi = 1$ — односторонний гептаэдр. Он топологически эквивалентен сфере с одной дыркой, заклеенной листом Мебиуса. Легко проверить, что больше однородных многогранников с $\chi = 1$ нет. Решение уравнения (1) в целых числах при $\chi = 1$ не дает других характеристик для многогранников, кроме перечисленных в табл. 1. При этом количество вершин, граней и ребер в два раза меньше, чем у многогранников с $\chi = 2$. Если мы попытаемся построить такие многогранники, то получим куски многогранников, перечисленных в табл. 1.

Используя полученные в данной работе и в работе [3] результаты, мы можем утверждать следующее:

Существует только 35 однородных многогранников и 5 бесконечных серий призм и антипризм с неотрицательной эйлеровой характеристикой.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Г. Ашкинзуе. Многоугольники и многогранники. ЭМ, IV. Физматгиз, М., 1963.
2. H. S. M. Coxeter, M. S. Longuet — Higgins, J. C. P. Miller. Uniform polyhedra, Philos. trans. roy. soc., London, 246, № 916, ser. A, 401—450, 1954.
3. С. П. Сопов. Одна теорема об однородных многогранниках. Укр. геометр. сб., вып. II, Изд-во ХГУ, Харьков, 1966.

Поступила в редколлегию 23 мая 1966 г.

О ТЕНЗОРАХ КРИВИЗНЫ И КРУЧЕНИЯ ПРОСТРАНСТВА АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ

М. А. Улановский (Харьков)

Пусть на дифференцируемом многообразии X_n заданы поля тензоров R_{jk}^i и $R_{j,kl}^i$ ($R_{jk}^i = -R_{kj}^i$, $R_{j,kl}^i = -R_{j,lk}^i$). Представляется естественным рассмотреть следующие вопросы.

1. Сколько может существовать аффинных связностей, заданных на X_n , для которых эти поля служат полями тензоров кручения и кривизны (вопрос о единственности искомой связности).

2. Какие условия должны быть наложены на эти поля для того, чтобы существовала хотя бы одна такая связность (условия существования искомой связности).

В современной литературе по геометрии пространств аффинной связности можно найти полное решение первого вопроса [1, 2]. Так, в [1] содержится следующее утверждение под названием «основная теорема»: «Знание тензоров кривизны и кручения в каждой точке многообразия линейной аффинной связности достаточно для определения этой связности». И далее: «Если между двумя многообразиями V^n и V^{1n} с линейной аффинной связностью можно установить такое точечное соответствие, что тензоры кривизны и кручения будут равны в соответствующих точках, то связности... будут эквивалентными».

К сожалению, такое решение вопроса о единственности неверно. Цель настоящей заметки — показать, что заданным полям $R_{j,k}^i$, $R_{j,kl}^i$ может соответствовать ∞ классов аффинных связностей, причем представители различных классов заведомо неэквивалентны. Правда, можно показать, что при $n \geq 4$ заданным полям R_{jk}^i , $R_{j,kl}^i$ «почти всегда» (в некотором смысле) соответствует не более одной аффинной связности. Эту теорему, тесно связанную со вторым вопросом (условиями существования), мы здесь рассматривать не будем.

Все индексы (если не оговорено противное) ниже принимают значения от 1 до n ; касательное пространство в точке $x \in X_n$ обозначается через E_x . Во всех случаях для отображения касательного пространства, порожденного данным точечным отображением X_n , мы сохраняем такое же обозначение, какое принято для этого точечного отображения.

Чтобы сформулировать вопрос о единственности более определенно, заметим, что две аффинные связности, заданные на X_n , мы будем считать одинаковыми тогда и только тогда, когда для любых точек x_1 и x_2 из X_n , любой дуги γ , их соединяющей, и любых $\xi_1 \in E_{x_1}$, $\xi_2 \in E_{x_2}$ справедливо утверждение: если ξ_2 есть результат параллельного переноса ξ_1 вдоль γ в одной связности, то это же имеет место и в другой связности.

Легко видеть, что, если обе связности заданы (в некоторых локальных координатах) символами Γ_{jk}^i и Γ'_{jk}^i , то они одинаковы тогда и только тогда, когда $\Gamma_{jk}^i = \Gamma'_{jk}^i$.

Будем говорить, что для данных полей R_{jk}^i , $R_{j,kl}^i$ имеет место единственность в сильном смысле, если на X_n не существует двух различных (соответственно принятому определению) аффинных связностей, соответствующих этим полям.

Но различные связности Γ_{jk}^i и Γ'_{jk}^i могут оказаться локально эквивалентными: может случиться, что для любого $x \in X_n$ существует окрестность Ω и отображение φ :

$$\varphi(\Omega) = \Omega' \subset X_n,$$

устанавливающее наложение связностей Γ_{jk}^i и Γ'_{jk}^i (если ξ_1 и ξ_2 параллельны вдоль γ согласно связности Γ_{jk}^i , то $\varphi(\xi_1)$ и $\varphi(\xi_2)$ параллельны вдоль $\varphi(\gamma)$ соответственно Γ'_{jk}^i).

Будем говорить, что для заданных полей R_{jk}^i , $R_{j,kl}^i$ имеет место единственность в слабом смысле, если все связности, им соответствующие, локально эквивалентны. Очевидный пример: если $R_{jk}^i = 0$, $R_{j,kl}^i = 0$, то единственность в слабом смысле есть, но нет единственности в сильном смысле. Мы увидим, что в общем случае не имеет места даже единственность в слабом смысле.

* * *

Выкладки, приведенные ниже, близки к тем, которые использованы в цитированных источниках для доказательства единственности искомой связности. Мы, однако, разберем несколько подробнее предпосылки этих выкладок и получим другие выводы.

Чтобы избежать возможных неточностей, напомним некоторые хорошо известные определения. Касательный контравариантный вектор первого порядка в точке $x \in X_n$ — линейный функционал на множестве дифференцируемых функций от точки (определенных в окрестностях x), представимый в виде линейной комбинации производных по допустимым локальным координатам в точке x . Тензор заданного типа в точке $x \in X_n$ — функционал от нескольких ко- и конвариантных векторов, линейный по каждому аргументу. Мы хотели бы подчеркнуть, что поле тензоров может быть задано *до выбора* той или иной системы координат. Пусть, в частности, заданы поля тензоров R_{jk}^i и $R_{j,kl}^i$.

В цитированных выше источниках абсолютно корректно доказано следующее утверждение: если заданы поля R_{jk}^i и $R_{j,kl}^i$ и дополнительно указаны: 1) система локальных координат $x^1, \dots, x^n$, служащих нормальными геодезическими координатами для искомой аффинной связности;

2) базисы в касательных E_x , полученные из естественного базиса $(e_i = \frac{\partial}{\partial x^i})$ в точке $O(0, \dots, 0)$ параллельным переносом (согласно искомой связности) вдоль геодезических, исходящих из O (в дальнейшем будем называть такие базисы нормальными), то искомая связность определяется однозначно. Но зная поля R_{jk}^i и $R_{j,kl}^i$ (ради краткости будем в дальнейшем называть их «полями R »), мы не имеем никакой информации ни о том, какие системы координат можно считать нормальными геодезическими,

ни о том, какое поле базисов касательных E_x соответствует этим координатам в качестве нормальных базисов. Докажем, что информации об одной из систем нормальных геодезических координат (при заданных полях R) достаточно для определения искомой связности.

Итак, пусть $x^1, \dots, x^n$ — локальные координаты в X_n , область определения которых содержит точку $O(0, \dots, 0)$. Считая эти координаты нормальными геодезическими для искомой связности, предположим, что нормальным базисам касательных E_x соответствуют линейные формы $\omega^i = \varphi_j^i dx^j$ (матрица φ_j^i определяет переход от естественного базиса $\frac{\partial}{\partial x^i}$ к нормальному). Пусть искомая связность определена (в нормальных базисах) формами $\omega_j^i = \Gamma_{jk}^i dx^k$. Легко видеть, что в силу определения нормального базиса имеют место соотношения

$$\begin{aligned}\varphi_j^i x^j &= x^i, \\ \Gamma_{jk}^i x^k &= 0.\end{aligned}\quad (1)$$

Далее, если $\bar{R}_{jk}^i, \bar{R}_{j,kl}^i$ — компоненты тензоров кручения и кривизны в нормальных базисах, то

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi_j^i}{\partial x^k} - \frac{\partial \varphi_k^i}{\partial x^j} - \Gamma_{aj}^i \varphi_k^a + \Gamma_{ak}^i \varphi_j^a &= \bar{R}_{a\beta}^i \varphi_j^a \varphi_k^\beta, \\ \frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma_{jl}^i}{\partial x^k} + \Gamma_{al}^i \Gamma_{jk}^a - \Gamma_{ak}^i \Gamma_{jl}^a &= \bar{R}_{j, a\beta}^i \varphi_k^a \varphi_l^\beta.\end{aligned}$$

Свернем каждое из последних равенств с $x^k (x^l)$. Принимая во внимание (1), получим

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi_j^i}{\partial x^k} x^k + \varphi_j^i - \delta_j^i &= \Gamma_{aj}^i x^a + \bar{R}_{a\beta}^i \varphi_j^a x^\beta, \\ \frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial x^l} x^l + \Gamma_{jk}^i &= \bar{R}_{j, a\beta}^i \varphi_k^a \varphi_l^\beta.\end{aligned}\quad (2)$$

Положив $x^i = a^i t$, перепишем (2) в виде:

$$\begin{aligned}t \frac{d\varphi_j^i}{dt} + \varphi_j^i - \delta_j^i &= t (\Gamma_{aj}^i a^a + \bar{R}_{a\beta}^i \varphi_j^a a^\beta), \\ t \frac{d\Gamma_{jk}^i}{dt} + \Gamma_{jk}^i &= t \bar{R}_{j, a\beta}^i \varphi_k^a a^\beta.\end{aligned}\quad (2')$$

Напомним теперь, что компоненты $\bar{R}_{jk}^i$ и $\bar{R}_{j,kl}^i$ заданных полей R в нормальных базисах нам не заданы, поскольку не заданы нормальные базисы; выразим их через известные компоненты $R_{jk}^i, R_{j,kl}^i$, соответствующие естественным базисам $e_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$:

$$\begin{aligned}\bar{R}_{a\beta}^i \varphi_j^a &= \varphi_\lambda^i \varphi_\beta^\mu R_{j\mu}^\lambda, \\ \bar{R}_{j, a\beta}^i \varphi_k^a &= \varphi_\lambda^i \varphi_\beta^\mu \varphi_k^\tau R_{\mu, k\tau}^\lambda, \\ (\varphi_\alpha^i \varphi_j^\alpha &= \delta_j^i).\end{aligned}$$

Учитывая, что в силу (1) $\psi_{\beta}^{\alpha} a^{\beta} = a^{\alpha}$, получим из (2')

$$\begin{aligned} t \frac{d\varphi_j^i}{dt} + \varphi_j^i - \delta_j^i &= t (\Gamma_{\alpha j}^i a^{\alpha} + \varphi_{\alpha}^i R_{j\alpha}^{\alpha} a^{\alpha}), \\ t \frac{d\Gamma_{jk}^i}{dt} + \Gamma_{jk}^i &= t \varphi_{\lambda}^i \psi_j^{\lambda} R_{\mu, k}^{\lambda} a^{\mu}. \end{aligned} \quad (3)$$

Очевидно, эта система (из нее мы должны определить искомую связность) сингулярна: особенность при $t = 0$. Однако можно показать, что она имеет единственное решение, удовлетворяющее начальным условиям:

$$\varphi_j^i|_{t=0} = \delta_j^i, \quad \Gamma_{jk}^i|_{t=0} = 0.$$

(Доказательство этого утверждения вынесено в приложение, помещенное в конце статьи).

Свернем уравнения (3) с a^j и a^k ; учитывая, что $R_{j\mu}^{\lambda} a^j a^{\mu} = R_{\mu, k}^{\lambda} a^{\mu} a^k = 0$, получим

$$\begin{aligned} \frac{d(\varphi_j^i a^j t)}{dt} &= a^i + (\Gamma_{\alpha j}^i a^j t) a^{\alpha}, \\ \frac{d(\Gamma_{jk}^i a^k t)}{dt} &= 0, \end{aligned}$$

откуда видно, что искомое решение (если оно существует) удовлетворяет соотношениям $\varphi_j^i a^j = a^i$, $\Gamma_{jk}^i a^k = 0$, эквивалентным (1). Из (3) легко видеть, что искомое решение (если оно существует и единственно) должно иметь вид

$$\begin{aligned} \varphi_j^i(a, t) &= \varphi_j^i(a^1 t, \dots, a^n t), \\ \Gamma_{jk}^i(a, t) &= \Gamma_{jk}^i(a^1 t, \dots, a^n t). \end{aligned}$$

Наконец, (3), очевидно, эквивалентны (2). Но условия (1) означают, что координаты $x^1, \dots, x^n$ для найденной нами связности (определенной величинами $\varphi_j^i(x) = \varphi_j^i(a, t)$ и $\Gamma_{jk}^i(x) = \Gamma_{jk}^i(a, t)$) служат нормальными геодезическими координатами. Уравнения же (2) можно истолковать следующим образом. Тензор R_{jk}^i задает линейную форму $\xi^i = R_{jk}^i \tau^{jk}$, определенную в пространстве T_x кососимметричных тензоров $\tau^{jk} = -\tau^{kj}$ со значениями в E_x . Точно так же $R_{j, k}^i$ определяет форму ${}^*A_j^i = R_{j, k}^i \tau^{kj}$ со значениями в пространстве аффиноров A_j^i . Свернув выражение $\bar{R}_{\alpha\beta} \varphi_j^{\alpha} x^{\beta}$ с произвольным вектором ξ^i и положив $\psi_{\alpha}^{\alpha} \xi^{\alpha} = \tau^{\alpha}$, получим значение $\frac{1}{2} \bar{R}_{jk}^i (\tau^j x^k - \tau^k x^j)$ указанной формы на линейном подпространстве T_x — множестве бивекторов вида $\tau^{ij} = \tau^j x^i - \tau^i x^j$ (x^i фиксированы). Это множество бивекторов соответствует пучку двумерных площадок в E_x с осью $x^1, \dots, x^n$, касательной к геодезической $x^1 = a^1 t$ ($a^i = \text{const}$). Теперь уравнения (2) можно прочесть следующим образом: найденная нами связность имеет формы кривизны и кручения, совпадающие (в каждой точке x) с заданными формами на пучке бивекторов с осью, касательной к $x^i = a^i t$.

Итак, имеет место.

Теорема 1. Если на X_n заданы поля R и некоторая система локальных координат $x^1, \dots, x^n$, область определения которых содержит точку $O(0, \dots, 0)$, то существует одна и только одна аффинная связность, для которой заданные координаты служат нормальными геоде-

зическими координатами и формы кривизны и кручения которой совпадают с заданными формами на пучках двумерных плоскостей, касательных к геодезическим $x^i = a^i t$ ($a^i = \text{const}$).

Мы увидим (см. приложение), что функции $\varphi_j^i, \Gamma_{jk}^i$, найденные из системы (3), принадлежат по крайней мере классу гладкости C^p , если компоненты полей R , как функции от $x^1, \dots, x^n$, принадлежат C^p . Далее, из теоремы 1 следует, что поля R вместе с системой нормальных геодезических координат однозначно определяют связность; однако формы кривизны и кручения этой связности, вообще говоря, не будут совпадать с заданными формами на всем T_x .

* * *

Рассмотрим подробнее случай $n = 2$. Он примечателен тем, что упомянутый в теореме 1 пучок бивекторов исчерпывает одномерное пространство T_x всех тензоров $\tau^{ij} = -\tau^{ji}$, $i, j = 1, 2$. Таким образом, имеет место

Теорема 2. В случае $n = 2$ существует одна и только одна связность, для которой заданная система координат x^1, x^2 служит системой нормальных геодезических координат и для которой заданные поля R служат полями тензоров кручения и кривизны.

Пусть нам заданы поля R на X_2 . Выберем две системы координат x^1, x^2 и x'^1, x'^2 так, чтобы переход от одной системы к другой был нелинейным и при $x^1 = x^2 = 0$, $x'^1 = x'^2 = 0$. Считая каждую из этих систем нормальной геодезической для искомой связности, мы получим две заведомо различные связности; таким образом, в случае $n = 2$ единственность в сильном смысле никогда не имеет места. Покажем, что единственность в слабом смысле для $n = 2$ имеет место только тогда, когда $R = 0$ (т. е. $R_{jk}^i = 0$, $R_{kl}^i = 0$, $i, j, k, l = 1, 2$).

Рассмотрим (при произвольном n) всевозможные взаимно-однозначные отображения φ :

$$\varphi(\Omega) = \Omega', \quad \Omega \subset X_n, \quad \Omega' \subset X_n,$$

относительно которых заданные поля R инвариантны:

$$\varphi(R(x)) = R(\varphi(x)), \quad x \in \Omega, \quad \varphi(x) \in \Omega'.$$

Совокупность $\Phi(R)$ таких отображений составляет псевдогруппу. Обозначим также через $\varphi(\Gamma)$ аффинную связность, полученную из связности Γ следующим образом: векторы ξ_1 и ξ_2 параллельны в связности $\varphi(\Gamma)$ вдоль некоторой дуги γ , если векторы $\varphi^{-1}(\xi_1)$ и $\varphi^{-1}(\xi_2)$ параллельны вдоль $\varphi^{-1}(\gamma)$ в связности Γ . Имеет место

Теорема 3. Если Γ — одна из связностей, поля тензоров кручения и кривизны которой совпадают с R и $\varphi \in \Phi(R)$, то поля тензоров кручения и кривизны $\varphi(\Gamma)$ также совпадают с R . И наоборот, если Γ_1 и Γ_2 — локально эквивалентные связности с общими полями R , то $\Gamma_2 = \varphi(\Gamma_1)$, где $\varphi \in \Phi(R)$.

Первая часть теоремы очевидна, так как поля тензоров кривизны и кручения связности $\varphi(\Gamma)$ определяются через соответствующие поля связности Γ следующим образом:

$$R_{\varphi(\Gamma)}(x) = \varphi(R_{\Gamma}(\varphi^{-1}x))$$

$(R_\Gamma(x)$ и $R_{\varphi(\Gamma)}x$ — тензоры кривизны и кручения связностей Γ и $\varphi(\Gamma)$ в точке $x \in X_n$). Но

$$\varphi(R_\Gamma(\varphi^{-1}x)) = R_\Gamma(\varphi\varphi^{-1}x) = R_\Gamma(x),$$

поскольку $\varphi \in \Phi(R)$, и $R_{\varphi(\Gamma)}(x) = R_\Gamma(x) = R(x)$. Далее, если Γ_1 и Γ_2 эквивалентны и известно, что $R_{\Gamma_2} = R_{\Gamma_1} = R$, то, с одной стороны, $\Gamma_2 = \varphi(\Gamma_1)$, где φ — некоторое точечное отображение;

$$R(x) = R_{\Gamma_2}(x) = R_{\varphi(\Gamma_1)}(x) = \varphi R_{\Gamma_1}(\varphi^{-1}x) = \varphi R(\varphi^{-1}x),$$

откуда $\varphi \in \Phi(R)$.

Уже эта теорема в общих чертах поясняет, почему при $n = 2$ не имеет места единственность в слабом смысле: выбор искомой связности от двух произвольных функций двух аргументов (выбор нормальных геодезических координат x^1, x^2 ; условия нелинейности перехода от (x^1, x^2) к (x'^1, x'^2) и $x'^1(0, 0) = x'^2(0, 0) = 0$, грубо говоря, не уменьшает количества информации, содержимого в указании этих функций). Если бы любые две искоемых связности были эквивалентны, то и псевдогруппа $\Phi(R)$ содержала бы такой же произвол в выборе элемента, что возможно лишь тогда, когда $R = 0$. Легко также указать поля R , для которых $\Phi(R)$ тривиальна (например, $R_{jk}^i = 0$, $i, j, k = 1, 2$, $R_{1,12}^1 = 1 + x^2$, $R_{2,12}^2 = 1 + y^2$, $R_{2,12}^1 = R_{1,12}^2 = 0$). Очевидно, в этом случае все различные связности, полученные указанным выше способом, попарно неэквивалентны. Соответственно целям этой заметки последним примером можно было бы ограничиться; разберем, однако, случаи $n = 2$ подробнее.

Хорошо известно, что с точечным преобразованием φ :

$$\Omega \rightarrow \Omega', \quad \Omega \subset X_n, \quad \Omega' \subset X_n$$

можно сопоставить преобразование координат (которое можно представить как преобразование в множестве всевозможных локальных координат): если в некоторой выбранной системе координат точка $x \in X_n$ имела координаты $x^1, \dots, x^n$, то в новой системе те же координаты $x^1, \dots, x^n$ будет иметь точка $\varphi(x)$. Если поля R инвариантны относительно точечного преобразования φ (т. е. $\varphi \in \Phi(R)$), то те же поля инвариантны относительно соответствующего преобразования координат в том смысле, что их компоненты представлены одинаковыми функциями как заданных, так и полученных из них указанным преобразованием координат.

Пусть Γ — одна из связностей на X_2 , соответствующих заданным полям R . Множество нормальных геодезических координат связности Γ можно рассматривать как конечномерное (точнее, шестимерное) многообразие в множестве всех допустимых систем координат: нормальные координаты определяются выбором точки $O(0, 0)$ и базиса в E_0 . Формально компоненты полей R можно рассматривать как определенные функции от произвольных нормальных геодезических координат, зависящие от шести параметров. Легко видеть, что в X_2 можно так выбрать систему координат, что компоненты R будут представлены функциями, не совпадающими с указанными выше ни при каком значении параметров. Связность Γ' , для которой указанные координаты x'^1, x'^2 служат нормальными геодезическими координатами, не эквивалентна заданной связности Γ . Действительно, если $\Gamma' = \varphi(\Gamma)$, то $\varphi \in \Phi(R)$; если перейти от координат x'^1, x'^2 , нормальных геодезических для Γ' , к новым координатам x^1, x^2 с помощью точечного преобразования φ^{-1} , то легко видеть, что x^1, x^2 суть нормальные геодезические координаты для Γ ; поэтому компоненты R

в координатах x'^1, x'^2 должны были бы совпадать с компонентами R как функциями от нормальных геодезических координат связности Γ .

Итак, справедлива

Теорема 4. В случае $n = 2$ единственность в слабом смысле имеет место тогда и только тогда, когда $R = 0$.

Напомним также, что в случае (в известном смысле, наиболее общем), когда $\Phi(R)$ тривиальна, любые различные связности на X_2 , соответствующие заданным полям R , не эквивалентны.

Теперь нетрудно показать, как при произвольной размерности n построить пример полей R , для которых единственность в слабом смысле не имеет места. Для этого, например, достаточно рассмотреть прямое произведение связностей: $\Gamma = \Gamma_1 \times \Gamma_2$, где Γ_1 определена на X_{n-2} , Γ_2 — на X_2 и Γ — на $X_n = X_{n-2} \times X_2$ (связность Γ можно определить следующим образом: вектор ξ переносится параллельно вдоль дуги $\gamma \subset X_n$ тогда и только тогда, когда обе его естественные проекции на касательные пространства многообразий X_{n-2} и X_2 переносятся параллельно вдоль соответствующих проекций дуги γ). Легко видеть, что связности Γ_1 и Γ_2 можно выбрать так, что Γ не будет допускать никакого разложения в произведение, кроме заданного $\Gamma = \Gamma_1 \times \Gamma_2$. Но тогда поля R связности Γ будут совпадать с полями R связности $\Gamma' = \Gamma_1 \times \Gamma'_2$, где Γ'_2 — связность, не эквивалентная Γ_2 и имеющая с ней общие поля R . Между тем, связности Γ и Γ' , очевидно, не эквивалентны.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Легко видеть, что система (3) может быть приведена к системе уравнений вида:

$$\frac{d(x^i t)}{dt} = t f^i(t; x^1, \dots, x^n, a^1, \dots, a^n) \quad (i = 1, \dots, n), \quad (4)$$

решение которой $x^i(t; a^1, \dots, a^n)$ должно удовлетворять условиям: $x^i(0; a^1, \dots, a^n) = 0$; функции f^i принадлежат классу C^p , $p \geq 1$ в некоторой окрестности Ω точки $t = x^1 = \dots = x^n = 0$ при любых значениях $a^1, \dots, a^n$ некоторой компактной области (заметим, что согласно выводу уравнений (3), $a^1, \dots, a^n$ можно считать нормированными, например, условием $\sum a^{i*} = 1$; класс C^p есть, очевидно, класс полей R).

Очевидно, (4) можно заменить уравнениями:

$$x^i = \frac{1}{t} \int_0^t t f^i dt \quad (4')$$

или, в символической записи, $x = A(x)$, где $x = \{x^1, \dots, x^n\}$, $A(x) = \left\{ \frac{1}{t} \int_0^t t f^i dt \right\}$. Легко видеть, что (при достаточно малом t_1) можно указать «конус» K с вершиной в точке $t = x^1 = \dots = x^n = 0$ так, что A не выводит любую кривую $x(t) \in K$ ($0 \leq t \leq t_1$, $x(0) = 0$) из конуса K . Далее, оператор A действует (при достаточно малом t_1) на множестве $x(t) \in K$,

$x(0) = 0$, как сжимающий оператор. Так, последнее утверждение немедленно следует из простой оценки:

$$|A(x_2^i) - A(x_1^i)| \leq \frac{1}{t} \int_0^t |f^i(t, x_2) - f^i(t, x_1)| dt \leq \frac{N}{t} \int_0^t \sum_i |x_2^i - x_1^i| dt$$

(очевидно, f^i удовлетворяют условиям Лившица);

$$|A(x_2^i) - A(x_1^i)| \leq \frac{Nt}{2} \sup_i |x_2^i - x_1^i|$$

и т. д. Дальнейшее доказательство существования и единственности искомого решения, а также его непрерывности и дифференцируемости по параметрам $a^1, \dots, a^n$ дословно повторило бы известное доказательство классической теоремы [3].

Заметим, наконец, что, продифференцировав формально (3) по параметрам, мы получим «систему в вариациях» относительно $\frac{\partial \varphi_j^i}{\partial a^k}, \frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial a^l}$, также приводимую к виду (4). Продолжая этот процесс, легко заключить, что искомые решения непрерывно дифференцируемы по $a^1, \dots, a^n$ (а значит, и по $x^1, \dots, x^n$), по крайней мере, столько же раз, сколько $R_{jk}^i, R_{j,kl}^i$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ж. Фавар. Курс локальной дифференциальной геометрии. Изд-во иностр. лит., М. 1966.
2. С. Хелгасон. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства, Изд-во «Мир», М., 1964.
3. И. Г. Петровский. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. ОГИЗ, М.—Л., 1947.

Поступила в редколлегию 30 мая 1966 г.

О ДЕФОРМАЦИЯХ ТРИВИАЛЬНОГО ПОДКЛЕИВАНИЯ

Л. А. Шор (Харьков)

В монографии А. Д. Александрова [1] для гомеоморфных кругу выпуклых многогранников вводится понятие тривиального подклеивания и его деформации и устанавливается, что такой многогранник изгибаем тогда и только тогда, когда существует деформация его тривиального подклеивания. Значение этой теоремы состоит в том, что она сводит исследование изгибаемости таких многогранников к определенной планиметрической задаче. В настоящей заметке дано доказательство аналогичной теоремы для гомеоморфных кругу выпуклых поверхностей с краем ограниченной вариации поворота. В статье автора [2] она была сообщена без доказательства.

Как известно, выпуклая поверхность F называется изгибаемой в классе всех выпуклых поверхностей (в дальнейшем — просто изгибаемой), если выполнены следующие условия:

1) Каждому значению параметра $t \in [0, 1]$ может быть сопоставлена выпуклая поверхность F_t и изометрическое отображение f_t поверхности F на F_t , причем $F_0 \equiv F$ и f_0 есть тождественное отображение F самой на себя, а f_t при $t \neq 0$ не сводится к движению.

2) При каждом $t_0 \in [0, 1]$ и $t \rightarrow t_0$ поверхности F_t сходятся к поверхности F_{t_0} так, что какова бы ни была точка $X \in F$ будет $\lim_{t \rightarrow t_0} f_t(X) = f_{t_0}(X)$.

Если выполнено только условие 1), то говорят, что поверхность F допускает нетривиальное изометрическое отображение.

Пусть F — гомеоморфная открытому кругу выпуклая поверхность, краем которой является простая замкнутая кривая Γ ограниченной вариации поворота. Пусть Q — гомеоморфная замкнутому кругу, вообще говоря, многолистная область на плоскости, ограниченная простой замкнутой кривой L ограниченной вариации поворота. Пусть кривая L допускает отображение Ψ на кривую Γ , удовлетворяющее условиям теоремы о склеивании [3, гл. IX, §3]. Многообразие $F + Q$, склеенное из поверхности F и области Q , реализуется некоторой замкнутой выпуклой поверхностью $\tilde{F}$. Построение поверхности $\tilde{F}$ по поверхности F , области Q и заданному отображению Ψ границы Q на границу F называется подклеиванием Q к F . Подклеивание называется тривиальным, если полученная выпуклая поверхность $\tilde{F}$ совпадает с границей $\bar{F}$ выпуклой оболочки поверхности F . Очевидно, тривиальное подклеивание допускает каждая гомеоморфная кругу выпуклая поверхность.

Два подклеивания (Q, Ψ) и (Q', Ψ') областей Q и Q' с отображениями Ψ и Ψ' их границ на границу F считаются одинаковыми тогда и только тогда, когда многообразия $F + Q$ и $F + Q'$ изометричны и притом так,

что изометрическое отображение f многообразия $F + Q$ на многообразие $F + Q'$ переводит F в себя, а Q в Q' .

Теорема 1. *Для того, чтобы гомеоморфная открытому кругу выпуклая поверхность F допускала нетривиальное изометрическое отображение, необходимо и достаточно, чтобы она допускала нетривиальное подклеивание.*

Доказательство этой теоремы основано на теореме А. В. Погорелова об однозначной определенности общей замкнутой выпуклой поверхности [4] и проводится точно так же, как доказательство аналогичной теоремы для многогранников [1, гл. V, § 2, теорема 1].

Говорят, что имеет место деформация тривиального подклеивания, если каждому значению параметра $t \in [0, 1]$ сопоставлено подклеивание (Q_t, Ψ_t) гомеоморфной замкнутому кругу области Q_t к поверхности F , заданное отображением Ψ_t кривой L_t на кривую Γ , причем выполнены следующие условия:

1) При каждом $t_0 \in [0, 1]$ и $t \rightarrow t_0$ замкнутые области Q_t сходятся к замкнутой области Q_{t_0} так, что для всякой точки $X \in \Gamma$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \Psi_t^{-1}(X) = \Psi_{t_0}^{-1}(X).$$

2) Не все подклеивания (Q_t, Ψ_t) тождественны.

3) Подклеивание (Q_0, Ψ_0) тривиально.

Теорема 2 *Для того, чтобы гомеоморфная кругу выпуклая поверхность F была изгибаема, необходимо и достаточно, чтобы существовала деформация соответствующего ей тривиального подклеивания.*

Доказательство достаточности теоремы 2 основано на однозначной определенности общих замкнутых выпуклых поверхностей. В нем используется также то обстоятельство, что при деформации тривиального подклеивания внутренние метрики многообразий $F + Q$ образуют непрерывное семейство. Этот факт для многогранников является совершенно очевидным. В случае общих выпуклых поверхностей доказательство его оказывается технически весьма сложным. Это связано с тем, что кратчайшие на поверхности $\bar{F}_t$ могут бесконечное число раз переходить с поверхности F на Q_t и обратно.

Непрерывность семейства внутренних метрик многообразий $F + Q_t$ устанавливается в следующих двух леммах.

Лемма 1. *При деформации тривиального подклеивания внутренние метрики $\rho_{Q_t}(X_t, Y_t)$ областей Q_t изменяются непрерывно, т. е. при каждом фиксированном $t_0 \in [0, 1]$ для любых точек $X_{t_0}, Y_{t_0} \in Q_{t_0}$ и $X_t, Y_t \in Q_t$ из условия*

$$\lim_{t \rightarrow t_0} X_t = X_{t_0} \text{ и } \lim_{t \rightarrow t_0} Y_t = Y_{t_0} \text{ следует, что}$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \rho_{Q_t}(X_t, Y_t) = \rho_{Q_{t_0}}(X_{t_0}, Y_{t_0}). \quad (1)$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что из сходимости областей Q_t к области Q_{t_0} следует, что существует, вообще говоря, многолистная локально изометричная плоскости область G , содержащая вместе с областью Q_{t_0} все области Q_t при t достаточно близком к t_0 . Сходимость при $t \rightarrow t_0$ точек $X_t \in Q_t$ к точке $X_{t_0} \in Q_{t_0}$ следует понимать как сходимость в области G .

Докажем сначала неравенство

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \rho_{Q_t}(X_t, Y_t) \geq \rho_{Q_{t_0}}(X_{t_0}, Y_{t_0}). \quad (2)$$

Пусть $X_t Y_t$ — кратчайшая в области Q_t между точками X_t и Y_t ($t \in [0, 1]$). Так как $S(X_t Y_t) < S(L)$ (здесь и в дальнейшем через $S(X_t Y_t)$, $S(L)$ и т. д. обозначаются соответственно длины кривых $X_t Y_t$, L и т. д.) и при всех t достаточно близких к t_0 все кривые $X_t Y_t$ лежат в компактной части области G , то ([3], гл. II, § 1, теор. 4) из них можно выбрать последовательность, сходящуюся при $t \rightarrow t_0$ к некоторой кривой l . Очевидно, кривая $l \subset Q_{t_0}$ и соединяет точки X_{t_0} и Y_{t_0} . Длина ее, как известно ([3], гл. II, § 1, теорема 5), удовлетворяет неравенству

$$S(l) \leq \lim_{t \rightarrow t_0} S(X_t, Y_t). \quad (3)$$

В силу соотношений $\rho_{Q_{t_0}}(X_{t_0}, Y_{t_0}) \leq S(l)$ и $\rho_{Q_t}(X_t, Y_t) = S(X_t Y_t)$ из неравенства (3) следует неравенство (2).

Докажем теперь обратное неравенство

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow t_0} \rho_{Q_t}(X_t, Y_t) \leq \rho_{Q_{t_0}}(X_{t_0}, Y_{t_0}). \quad (4)$$

Для этого рассмотрим последовательно три случая:

- 1) Все точки кратчайшей $X_{t_0} Y_{t_0}$ — внутренние точки области Q_{t_0} .
- 2) Все точки кратчайшей $X_{t_0} Y_{t_0}$, кроме ее концов, одного или обоих, являются внутренними точками области Q_{t_0} .
- 3) На границе L_{t_0} области Q_{t_0} расположено произвольное конечное или бесконечное множество точек кратчайшей $X_{t_0} Y_{t_0}$.

В первом случае утверждение леммы очевидно.

Рассмотрим второй случай. Пусть сначала все точки кратчайшей $X_{t_0} Y_{t_0}$, кроме точки X_{t_0} , лежат строго внутри Q_{t_0} . В силу спрямляемости кривой L_{t_0} и гомеоморфности области Q_{t_0} кругу, для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что какова бы ни была точка $M \in L_{t_0}$, лежащая в δ -окрестности точки X_{t_0} в области G , пара точек X_{t_0} и M разбивает кривую L на две дуги, из которых одна имеет длину $< \varepsilon$. Очевидно, $\delta < \varepsilon$.

Возьмем на кратчайшей $X_{t_0} Y_{t_0}$ такую точку C , чтобы $\rho_G(X_{t_0}, C) = \frac{\delta}{4}$. Обозначим через δ_1 расстояние в метрике G между кратчайшими CY_{t_0} и кривой L_{t_0} . По предположению, $\delta_1 > 0$ и, конечно, $\delta_1 \leq \frac{\delta}{4}$. Выберем $\tau > 0$ такое, чтобы при $|t - t_0| < \tau$ было

$$\rho_G(X_{t_0}, X_t) < \delta_1, \quad \rho_G(Y_{t_0}, Y_t) < \delta_1, \quad \rho_G(\Psi_t^{-1}(\Psi_{t_0}(N)), N) < \delta_1,$$

где N — произвольная точка кривой L_{t_0} .

Пусть CX_t ($|t - t_0| < \tau$) — кратчайшая в области G между точками C и X_t . Длина её меньше $\frac{1}{2}\delta$ и она лежит целиком в $\frac{1}{2}\delta$ — окрестности точки X_{t_0} в области G . Пусть Z'_t и Z''_t соответственно первая и последняя, считая вдоль CX_t от точки C , точки пересечения кривых CX_t и L_t . В силу выбора τ , точки $\Psi_{t_0}^{-1}\Psi_t(Z'_t)$ и $\Psi_{t_0}^{-1}\Psi_t(Z''_t)$ кривой L_{t_0} принадлежат δ -окрестности точки X_{t_0} в области G . Следовательно, длина меньшей из дуг, на которые разбивают кривую L_t точки Z'_t и Z''_t , меньше 2ε . Обозначим эту дугу через $\widehat{Z'_t Z''_t}$. Кривая l_t , составленная из участков $X_t Z'_t$ и $Z'_t C$ кратчайшей CX_t , дуги $\widehat{Z'_t Z''_t}$ кривой L_t и кратчайших CY_{t_0} и $Y_{t_0} Y_t$, соединяет точки X_t и Y_t и, в силу выбора τ , при $|t - t_0| < \tau$ лежит целиком внутри или на границе области Q_t . Длина ее удовлетворяет неравенству

$$S(l_t) < \rho_{Q_{t_0}}(X_{t_0}, Y_{t_0}) + 3\varepsilon. \quad (5)$$

Так как $\rho_{Q_t}(X_t, Y_t) \leq S(l_t)$, то из оценки (5), в силу произвольности ε , следует неравенство (4). Из неравенств (2) и (4) следует утверждение леммы для рассматриваемого случая.

Случай, когда все точки кратчайшей $X_{t_0}Y_{t_0}$, кроме обоих концов X_{t_0} и Y_{t_0} , лежат строго внутри Q_{t_0} , очевидно, сводится к предыдущему.

Рассмотрим теперь третий случай. Впишем в кривую L_{t_0} ломаную Λ такую, чтобы она лежала в области G и чтобы разность длин кривой L_{t_0} и ломаной Λ была меньше заданного $\varepsilon > 0$. Последовательные участки кривой L_{t_0} , стягиваемые сторонами ломаной Λ , обозначим через $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$.

Пусть первая, считая от X_{t_0} вдоль кратчайшей $X_{t_0}Y_{t_0}$, общая точка кратчайшей $X_{t_0}Y_{t_0}$ и кривой L_{t_0} принадлежит участку λ_{i_1} . Обозначим ее через X'_{i_1} , последнюю общую точку кратчайшей $X_{t_0}Y_{t_0}$ и участка λ_{i_1} обозначим X''_{i_1} (не исключено, конечно, что $X'_{i_1} \equiv X''_{i_1}$). Допустим сначала, что точка X'_{i_1} является внутренней точкой участка λ_{i_1} . Тогда либо $X'_{i_1}Y_{t_0} \cap L_{t_0} = X'_{i_1}$, либо существует первая отличная от X'_{i_1} общая точка участка $X'_{i_1}Y_{t_0}$ кратчайшей $X_{t_0}Y_{t_0}$ и кривой L_{t_0} . Пусть эта точка принадлежит участку λ_{i_2} . Обозначим ее через X'_{i_2} , последнюю общую точку участка $X_{t_0}Y_{t_0}$ и участка λ_{i_2} обозначим X''_{i_2} . Если же точка X'_{i_1} является концом участка λ_{i_1} , то она принадлежит также смежному участку λ_{i_2} , являясь первой общей точкой участков λ_{i_1} и $X'_{i_1}Y_{t_0}$. Обозначим эту точку, рассматриваемую как точку участка λ_{i_2} , через X'_{i_2} , последнюю общую точку участков λ_{i_2} и $X_{t_0}Y_{t_0}$ обозначим, как и выше, X''_{i_2} . Продолжая этот процесс, выделим на кратчайшей $X_{t_0}Y_{t_0}$ конечное число участков $X'_{i_k}X''_{i_k}$ ($k = 1, 2, \dots, p$), не имеющих попарно общих точек, кроме, быть может, концов. Участки $X'_{i_k}X''_{i_k}$ кривой L_{t_0} также не имеют попарно общих точек, кроме, быть может, концов. Заменим каждый участок $X'_{i_k}X''_{i_k}$ кратчайшей $X_{t_0}Y_{t_0}$ участком $\widehat{X'_{i_k}X''_{i_k}}$. Кратчайшая $X_{t_0}Y_{t_0}$ перейдет при этом в некоторую кривую l . Так как разность длин участков $\widehat{X'_{i_k}X''_{i_k}}$ и $X'_{i_k}X''_{i_k}$ ($k = 1, 2, \dots, p$) неотрицательна и не превосходит разности длин участка λ_{i_k} кривой L_{t_0} и стягивающей его стороны ломаной Λ , то длина кривой l удовлетворяет неравенству

$$|S(l) - \rho_{Q_{t_0}}(X_{t_0}, Y_{t_0})| < \varepsilon. \quad (6)$$

Кривая l соединяет точки X_{t_0} и Y_{t_0} и состоит из конечного числа участков $\widehat{X'_{i_k}X''_{i_k}}$ кривой L_{t_0} и участков

$$X_{t_0}X_{i_1} = l_1, \quad X'_{i_1}X'_{i_2} = l_2, \quad \dots, \quad X_{i_p}Y_{t_0} = l_{p+1}$$

кратчайшей $X_{t_0}Y_{t_0}$. Построим в каждой области Q_t ($t \in [0, 1]$) кривую l_t , соединяющую точки X_t и Y_t и состоящую из участков $\widehat{X'_{i_k}X''_{i_k}}$ кривой L_t , соответствующих по отображению $\Psi_t^{-1}\Psi_{t_0}$ участкам $\widehat{X'_{i_k}X''_{i_k}}$ кривой L_{t_0} , и кратчайших $X_tX'_{i_1, t} = l_{1, t}$, $X'_{i_1, t}X'_{i_2, t} = l_{2, t}$, $\dots$, $X'_{i_p, t}Y_t = l_{p+1, t}$ в области Q_t .

Так как у каждого из участков $l_1, l_2, \dots, l_{p+1}$ все точки, кроме, быть может, концов, являются внутренними точками Q_{t_0} , то как было

показано выше, существует такое $\tau > 0$, что при $|t - t_0| < \tau$ выполнены неравенства

$$|S(l_j) - S(l_{j,t})| < \frac{\varepsilon}{p+1} \quad j = 1, 2, \dots, p+1,$$

где $S(l_j)$ и $S(l_{j,t})$ означают длины участков l_j и $l_{j,t}$. Отсюда и из изометричности отображения $\Psi_t^{-1}\Psi_{t_0}$ следует, что при $|t - t_0| < \tau$

$$|S(l_t) - S(l)| < \varepsilon. \quad (7)$$

Так как $\rho_{Q_t}(X_t, Y_t) \leq S(l_t)$, то из оценок (6) и (7) получим, что

$$\rho_{Q_t}(X_t, Y_t) < \rho_{Q_{t_0}}(X_{t_0}, Y_{t_0}) + 2\varepsilon.$$

Отсюда, в силу произвольности ε , следует неравенство (4), которое в соединении с неравенством (2) доказывает лемму.

Лемма 2. При деформации тривиального подклеивания (Q_t, Ψ_t) внутренние метрики $\rho_{\bar{F}_t}$ замкнутых выпуклых поверхностей $\bar{F}_t$ ($\bar{F}_0 \equiv \bar{F}$), реализующих многообразия $F + Q_t$, образуют непрерывное семейство.

Более подробно: пусть f_t есть отображение поверхности $\bar{F}$ на поверхность $\bar{F}_t$, отображающее F на F_t и притом изометрически, и отображающее Q на Q_t так, что для каждой пары точек $M', M'' \in Q$ и каждого $t_0 \in [0, 1]$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \rho_{Q_t}(f_t(M'), f_t(M'')) = \rho_{Q_{t_0}}(f_{t_0}(M'), f_{t_0}(M'')),$$

и на границе Q пусть $f_t \equiv \Psi_t^{-1}$. Тогда для каждой пары точек $X, Y \in \bar{F}$ и каждого $t_0 \in [0, 1]$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \rho_{\bar{F}_t}(f_t(X), f_t(Y)) = \rho_{\bar{F}_{t_0}}(f_{t_0}(X), f_{t_0}(Y)). \quad (8)$$

Доказательство. 1. Основная трудность в доказательстве леммы связана с тем, что кратчайшая на поверхности $\bar{F}_t$ между двумя ее точками может бесконечное число раз переходить с F_t на Q_t и обратно. Чтобы устранить эту трудность, докажем, что каковы бы ни были точки $X, Y \in \bar{F}$ и каково бы ни было $\varepsilon > 0$ при каждом $t \in [0, 1]$ точки $f_t(X)$ и $f_t(Y)$ можно соединить на поверхности F_t кривой l_t , удовлетворяющей условиям:

1) Выполнено неравенство $S(l_t) - \rho_{\bar{F}_t}(f_t(X), f_t(Y)) < \varepsilon$.

2) Каждый участок кривой l_t , лежащий внутри Q_t , является кратчайшей на $\bar{F}_t$. Число участков кривой l_t , лежащих внутри Q_t и имеющих концы на кривой Γ_t общей границе F_t и Q_t , меньше некоторого $N_1 = N_1(\varepsilon)$, не зависящего от t .

2. Кратчайшие на поверхности $\bar{F}_t$ между двумя точками кривой Γ_t , проходящие строго внутри Q_t , назовем k -отрезками. Пусть q_t кратчайшая на поверхности $\bar{F}_t$ между точками $f_t(X)$ и $f_t(Y)$. Пусть $\delta > 0$ любое число. Пусть $n(X, Y, \delta, t)$ число таких k -отрезков, входящих в состав кратчайшей q_t , что стягиваемые каждым из них участки кривой Γ_t имеют длину $\geq \delta$. Так как длины кратчайших на поверхностях $\bar{F}_t$ ($t \in [0, 1]$) равномерно ограничены и области Q_t при всех t гомеоморфны кругу, то существует такое $N_2 = N_2(\delta)$, не зависящее ни от t ни от X и Y , что $n(X, Y, \delta, t) < N_2$.

3. Вариации поворота кривых Γ_t ($t \in [0, 1]$) со стороны Q_t ограничены в совокупности. Поэтому для каждого заданного $\varepsilon_1 > 0$ найдется такое $N_3 = N_3(\varepsilon_1)$, что при любом $t \in [0, 1]$ число участков кривой Γ_t , вариации поворота¹ которых $\geq \varepsilon_1$ и которые не имеют попарно общих точек, кроме, быть может, концов, меньше N_3 .

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Разобьем кривую Γ_t ($t \in [0, 1]$ произвольное, но фиксированное) на участки $\gamma_{1,t}, \gamma_{2,t}, \dots, \gamma_{m,t}$ так, чтобы были выполнены следующие условия:

1) Каждая кривая Γ_t принадлежит хотя бы одному из участков $\gamma_{1,t}, \gamma_{2,t}, \dots, \gamma_{m,t}$.

2) Два участка $\gamma_{i,t}$ и $\gamma_{j,t}$ ($i \neq j$) не имеют общих точек, кроме, быть может, концов.

3) Длины участков $\gamma_{i,t}$ удовлетворяют неравенствам

$$\frac{\varepsilon}{2N_3} < S(\gamma_{i,t}) < \frac{\varepsilon}{N_3}; \quad N_3 = N_3\left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{S(\Gamma)}}\right).$$

Те из участков $\gamma_{i,t}$, вариация поворота которых со стороны Q_t не меньше $\sqrt{\frac{\varepsilon}{S(\Gamma)}}$, обозначим через $\gamma_{k,t}$ ($k = 1, 2, \dots, r; r < N_3\left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{S(\Gamma)}}\right)$).

4. Предположим для определенности, что кратчайшая q_t между точками $f_t(X)$ и $f_t(Y)$ поверхности F_t бесконечное число раз переходит из области Q_t на F_t и обратно. Пусть первая из общих точек кратчайшей q_t и системы участков $\gamma_{1,t}, \gamma_{2,t}, \dots, \gamma_{r,t}$, считая вдоль q_t от точки $f_t(X)$, принадлежит участку $\gamma_{i,t}$.

Обозначим ее через $X'_{1,t}$, последнюю из общих точек q_t и $\gamma_{i,t}$ обозначим через $X''_{1,t}$. Пусть первая общая точка участка $X'_{1,t}$ и $f_t(Y) \subset q_t$ и системы участков $\gamma_{i,t}, \dots, \gamma_{r,t}$ принадлежит участку $\gamma_{i,t}$. Обозначим ее через $X'_{2,t}$ (не исключено, что $X'_{2,t} \equiv X'_{1,t}$). Последнюю общую точку участков $X'_{1,t}$ и $f_t(Y) \subset q_t$ и $\gamma_{i,t}$ обозначим через $X''_{2,t}$. Продолжая этот процесс, выделим на кратчайшей q_t конечное число участков $X'_{k,t}, X''_{k,t}$, не имеющих попарно общих точек, кроме, быть может, концов. Участки $X'_{k,t}, X''_{k,t} \subset \gamma_{i,t}$ также не имеют общих точек, кроме, быть может, концов.

Заменим каждый участок $X'_{k,t}, X''_{k,t}$ кратчайшей q_t участком $X'_{k,t}, X''_{k,t}$ кривой Γ_t . При этом кратчайшая q_t преобразуется в кривую l'_t . Кривая l'_t соединяет точки $f_t(X)$ и $f_t(Y)$ и длина ее, в силу п. 3, удовлетворяет неравенству

$$|S(l'_t) - \rho_{F_t}(f_t(X), f_t(Y))| < \varepsilon. \quad (9)$$

Участки кривой l'_t , концы которых принадлежат Γ_t , а все внутренние точки лежат строго внутри Q_t , являются k -отрезками кратчайшей q_t . Заменим все k -отрезки кривой l'_t , стягивающие те участки кривой Γ_t , вариация поворота которых $< 2\sqrt{\frac{\varepsilon}{S(\Gamma)}}$, этими участками. При этом кривая l'_t перейдет в кривую l_t , также соединяющую точки $f_t(X)$ и $f_t(Y)$. В силу условия, наложенного на повороты участков кривой Γ_t , заменивших k -отрезки кривой l'_t , длина кривой l_t удовлетворяет неравенству:

$$|S(l_t) - S(l'_t)| < 2\varepsilon$$

¹ Здесь и в дальнейшем вариация поворота берется для участка с присоединенными к нему концами.

или, принимая во внимание неравенство (9),

$$|S(l_t) - \rho_{\bar{F}_t}(f_t(X), f_t(Y))| < 3\varepsilon. \quad (10)$$

Участки кривой l_t , концы которых принадлежат Γ_t , а внутренние точки лежат внутри Q_t , являются k -отрезками, удовлетворяющими по крайней мере одному из условий:

1) хотя бы один из концов k -отрезка принадлежит участкам $\gamma_{i, k, t}$,

2) концы k -отрезка разбивают кривую Γ_t на два участка, каждый из которых имеет длину $\geq \frac{\varepsilon}{2N_3}$.

Число k -отрезков, удовлетворяющих условию 1), не превосходит $2r < 2N_3 \left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{S(\Gamma)}} \right)$. Число k -отрезков, удовлетворяющих условию 2), в силу п. 2, меньше $N_2(\varepsilon)$. Отсюда и из оценки (10) следует, что кривая l_t удовлетворяет условиям 1) и 2) п. 1.

5. Докажем теперь равенство (8). Чтобы не усложнять обозначений, примем $t_0 = 0$, т. е. будем доказывать равенство

$$\lim_{t \rightarrow 0} \rho_{\bar{F}_t}(f_t(X), f_t(Y)) = \rho_{\bar{F}}(X, Y). \quad (8-a)$$

Для простоты предположим также, что точки X и Y принадлежат $\bar{F}$. Докажем сначала неравенство

$$\lim_{t \rightarrow 0} \rho_{\bar{F}_t}(f_t(X), f_t(Y)) \leq \rho_{\bar{F}}(X, Y) \quad (11)$$

Возьмем некоторое $\varepsilon > 0$ и соединим точки X и Y кривой l , удовлетворяющей для этого ε условиям 1) и 2) п. 1. Обозначим через B'_i и B''_i ($i = 1, 2, \dots, p$) концы k -отрезков, входящих в состав кривой l . При отображении f_t поверхности $\bar{F}$ на поверхность $\bar{F}_t$ ($t \in [0, 1]$) кривая l перейдет в некоторую кривую $f_t(l)$, а точки B'_i и B''_i перейдут в точки $f_t(B'_i)$ и $f_t(B''_i)$. Внутри области Q_t поверхности $\bar{F}_t$ лежат те и только те участки кривой $f_t(l)$, которые являются образами k -отрезков кривой l , т. е. ее участки между точками $f_t(B'_i)$ и $f_t(B''_i)$. Заменим каждый из этих участков кратчайшей в Q_t между его концами. При этом кривая $f_t(l)$ перейдет в кривую l'_t . По условию леммы существует такое $\tau > 0$, что при $t < \tau$ выполнены неравенства

$$|\rho_{Q_t}(B'_i, B''_i) - \rho_{Q_t}(f_t(B'_i), f_t(B''_i))| < \frac{\varepsilon}{p}; \quad i = 1, 2, \dots, p. \quad (12)$$

Так как внутри и на границе поверхности F отображение f_t является изометрическим, то из оценок (12) следует, что при $t < \tau$ длины кривых l'_t удовлетворяют неравенствам

$$|S(l) - S(l'_t)| < \varepsilon.$$

Так как, кроме того,

$$S(l) < \rho_{\bar{F}}(X, Y) + \varepsilon \quad \text{и} \quad \rho_{\bar{F}_t}(f_t(X), f_t(Y)) < S(l'_t),$$

то при $t < \tau$

$$\rho_{\bar{F}_t}(f_t(X), f_t(Y)) < \rho_{\bar{F}}(X, Y) + 2\varepsilon.$$

Из полученной оценки, в силу произвольности ε , следует неравенство (11).

Докажем теперь обратное неравенство

$$\lim_{t \rightarrow 0} \rho_{\bar{F}_t}(f_t(X), f_t(Y)) \geq \rho_{\bar{F}}(X, Y). \quad (13)$$

Соединим при каждом $t \in [0, 1]$ точки $f_t(X)$ и $f_t(Y)$ поверхности $\bar{F}_t$ некоторой кривой l_t , удовлетворяющей при заданном $\varepsilon > 0$ условиям 1) и 2) п. 1. Последовательные концы k -отрезков, входящих в состав кривой l_t , обозначим через $C'_{i,t}$ и $C''_{i,t}$ ($i = 1, 2, \dots, p(t)$), при всех t имеем $p(t) < N_1(\varepsilon)$. При каждом фиксированном t отображение f_t^{-1} ставит в соответствие кривой $l_t \subset \bar{F}_t$ кривую $f_t^{-1}(l_t) \subset \bar{F}$. Внутри области Q поверхности $\bar{F}$ проходят те и только те участки этой кривой, которые являются образами k -отрезков кривой l_t при отображении f_t^{-1} . Заменим на каждой из кривых $f_t^{-1}(l_t)$ все такие участки кратчайшими между их концами в области Q . Кривые $f_t^{-1}(l_t)$ перейдут при этом в кривые l_t^* , соединяющие на поверхности $\bar{F}$ точки X и Y . По условию леммы существует такое $\tau > 0$, что при $t < \tau$ выполнены неравенства:

$$|\rho_{Q_t}(C'_{i,t}, C''_{i,t}) - \rho_Q(f_t^{-1}(C'_{i,t}), f_t^{-1}(C''_{i,t}))| < \frac{\varepsilon}{N_1}; i = 1, 2, \dots, p(t).$$

Отсюда и из изометричности отображения f_t^{-1} внутри и на границе поверхности F_t следует, что при $t < \tau$

$$|S(l_t^*) - S(l_t)| < \varepsilon.$$

Из этого неравенства в силу соотношений

$$S(l_t) < \rho_{\bar{F}_t}(f_t(X), f_t(Y)) + \varepsilon \text{ и } \rho_{\bar{F}}(X, Y) \leq S(l_t^*)$$

следует, что

$$\rho_{\bar{F}}(X, Y) < \rho_{\bar{F}_t}(f_t(X), f_t(Y)) + 2\varepsilon,$$

откуда, в виду произвольности ε , получим неравенство (13). Из неравенств (11) и (13) следует равенство (8-а) и лемма доказана.

Перейдем к доказательству теоремы 2. В силу теоремы 1 для доказательства теоремы 2 остается установить только, что непрерывному семейству изометричных выпуклых поверхностей F_t соответствует непрерывное семейство их тривиальных подклеиваний (Q_t, Ψ_t) и наоборот.

Докажем сначала, что при непрерывном изгибании поверхности получается непрерывное семейство тривиальных подклеиваний.

Прежде всего исключим движения и отражения развернутых на плоскость областей Q_t . С этой целью возьмем на плоскости декартову прямоугольную систему координат ξ, η . Выберем на границе L области Q некоторую точку B и расположим все области Q_t ($t \in [0, 1]$) на плоскости $\xi\eta$ таким образом, чтобы их точки $B_t = \Psi_t^{-1}\Psi_0(B)$, соответствующие по подклеиванию точке B , попали в начало координат, а правые¹ полукасательные в этих точках — на положительную полуось ξ .

Пусть $X_t(S) = \Psi_t^{-1}\Psi_0(X(S))$ текущая точка кривой L_t , соответствующая дуге S , отсчитываемой от точки B к точке $X(S)$ кривой L в направлении положительного обхода области Q . Пусть $\xi_t(S)$ и $\eta_t(S)$ координаты точки $X_t(S)$ и $\varphi_t(S)$ — поворот открытого участка $B_tX_t(S)$ кривой L_t , тогда:

$$\xi_t(S) = \int_0^S \cos \varphi_t(S) dS, \eta_t(S) = \int_0^S \sin \varphi_t(S) dS. \quad (14)$$

¹ Под правой полукасательной понимается полукасательная, направление движения по которой совпадает с положительным направлением обхода области Q_t .

Так как множество конических точек поверхности $\bar{F}_t$ при каждом $t \in [0, 1]$ не более чем счетно, то почти при всех S и при каждом $t_0 \in [0, 1]$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \varphi_t(S) = \varphi_{t_0}(S)^1.$$

Поэтому, переходя в равенствах (14) к пределу, получим:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \xi_t(S) = \xi_{t_0}(S), \quad \lim_{t \rightarrow t_0} \eta_t(S) = \eta_{t_0}(S)$$

и, следовательно,

$$\lim_{t \rightarrow t_0} X_t(S) = X_{t_0}(S).$$

Непрерывность семейства тривиальных подклеиваний при изгибании поверхности доказана.

Докажем теперь, что непрерывной деформации тривиального подклеивания соответствует непрерывное изгибание поверхности. Прежде всего, аналогично тому, как это сделано у А. Д. Александрова ([1], гл. V, § 2, теорема 2), исключим движения и отражения поверхностей F_t .

Допустим, вопреки доказываемому существует такое $t_0 \in [0, 1]$ и такая последовательность $t_i \rightarrow t_0$, что поверхности F_{t_i} не сходятся к поверхности F_{t_0} . В силу непрерывности семейства подклеиваний и леммы 2, последовательность метрик замкнутых выпуклых поверхностей $\bar{F}_{t_i} = F_{t_i} + Q_{t_i}$ сходится при $t_i \rightarrow t_0$ к метрике замкнутой выпуклой поверхности $\bar{F}_{t_0} = F_{t_0} + Q_{t_0}$. Отсюда, как известно ([3], гл. VII, § 7, теорема п. 2, особо примечание на стр. 247), следует, что из последовательности поверхностей $\bar{F}_{t_i}$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторой замкнутой выпуклой поверхности $\bar{F}$. Метрика поверхности $\bar{F}$ является пределом метрик поверхностей $\bar{F}_{t_i}$, и потому $\bar{F}$ изометрична поверхности $\bar{F}_{t_0}$. Так как движения и отражения поверхностей исключены, то в силу однозначной определенности замкнутых выпуклых поверхностей их метрикой [4], поверхности $\bar{F}$ и $\bar{F}_{t_0}$ равны.

Итак, замкнутые выпуклые поверхности $\bar{F}_{t_i}$ сходятся при $t \rightarrow t_0$ к поверхности $\bar{F}_{t_0}$. При этом поверхности F_{t_i} должны сходиться к поверхности F_{t_0} и при том так, что, если X некоторая точка поверхности F , а f_t — изометрическое отображение F на F_t , то точки $f_t(X)$ сходятся при $t = t_0$ к точке $f_{t_0}(X)$. Доказательство этого совершенно аналогично доказательству соответствующего утверждения для многогранников ([1], гл. V, § 2, теорема 2).

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Д. Александров. Выпуклые многогранники. Гостехиздат, М.—Л., 1950.
2. Л. А. Шор. Об однозначной определенности и об изгибаемости некоторых выпуклых поверхностей с краем. ДАН СССР, 134, № 1, 1960, 55—58.
3. А. Д. Александров. Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей. Гостехиздат, М.—Л., 1948.
4. А. В. Погорелов. Однозначная определенность общих выпуклых поверхностей. Киев, 1952.
5. Л. А. Шор. Об изгибаемости выпуклых многогранников с границей. Матем. сб., 45 (87), № 4, 1958, 471—488.

Поступила в редколлегию 15 ноября 1965 г.

¹ Доказательство этого аналогично доказательству соответствующего утверждения для многогранников (см. [5], леммы 2 и 3, стр. 475—476).

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

В Украинском геометрическом сборнике публикуются работы, содержащие новые законченные результаты научных исследований по геометрии. Согласно Положению о тематических сборниках, утвержденному Советом Министров СССР 7 января 1964 г., статьи по объему не должны превышать 0,5 печатного листа (12 страниц машинописи); в отдельных случаях редколлегия дает право помещать статьи объемом до 1 листа. Согласно упомянутому Положению, авторы не получают гонорара за статьи, а также бесплатных экземпляров сборника и оттисков статей.

К каждой статье необходимо прилагать краткое изложение результатов объемом не более полутора страниц машинописи через два интервала. Редколлегия оставляет за собой право с согласия автора помещать в сборнике краткое изложение вместо статьи с развернутым изложением результатов. К статьям аспирантов и соискателей ученых степеней желательно прилагать указание срока предполагаемой защиты диссертации, к которой относится статья.

Рукопись должна быть напечатана на машинке в двух экземплярах на одной стороне листа через два интервала (т. е. с расстоянием между строками не менее 9 мм). Формулы, буквенные обозначения и символы должны быть вписаны только во второй экземпляр. Вписывать нужно от руки чернилами четко, без помарок, с ясным различием в написании прописных (больших) и строчных (малых) букв и букв разных алфавитов: вписываемые строчные буквы должны быть по размеру в полтора раза больше строчных букв машинописи. Вписываемые от руки знаки нужно размещать реже, чем в обычном письме, чтобы можно было сделать их разметку для набора; поэтому для вписываемых знаков необходимо предусмотреть достаточно места.

Сходные по написанию строчные и прописные буквы (*c, k, p, s, u, w, x, y, z, φ, θ*) подчеркиваются простым карандашом двумя черточками: прописные снизу, строчные сверху. Греческие буквы обводятся красным карандашом, готические — синим, векторы подчеркиваются снизу (не сверху!) одной черточкой жирно простым карандашом. Текст, выделяемый курсивом, подчеркивается волнистой линией простым карандашом. Иностранные слова вписываются на машинке с иностранным шрифтом или четко от руки чернилами и тщательно сверяются с оригиналом.

Чертежи прилагаются только в случае необходимости, хорошего качества, выполненные тушью на кальке или на плотной чертежной бумаге. На обороте каждого чертежа указывается фамилия автора, название статьи и номер чертежа. В тексте должна быть ссылка на рисунок и указано его место пометкой на поле карандашом, обведенной рамкой.

Список литературы помещается в конце статьи в порядке ссылок в тексте. Библиографические данные приводятся в следующем порядке: для книг — инициалы и фамилия автора, полное название книги, номер тома, издательство, место и год издания;

для журнальных статей — инициалы и фамилия автора, полное название статьи, название журнала, № или название серии, № тома, № выпуска, год издания, страницы начала и конца статьи.

Не допускаются ссылки в заголовке статьи и ссылки на неопубликованные работы.

СОДЕРЖАНИЕ

В. П. Белоусова, И. Г. Ильин. Еще раз о бесконечно малых изгибаниях цилиндрических поверхностей с параллельными краями	3
Я. П. Бланк, Л. Т. Моторный. Поверхности переноса эллиптического пространства и кинематика на сфере	21
В. И. Денисов. Законы сохранения в общей теории относительности	25
В. И. Денисов. Условия соединения на гиперповерхности разрыва первых производных метрического тензора пространства-времени	33
А. Зайц. Некоторые канонические координаты точек относительно однопараметрических линейных однородных преобразований пространства	43
Н. И. Кованцов. Квазитетраэдральные комплексы. II	48
Н. П. Макуха. Одно изопериметрическое свойство поверхностей вращения	55
А. И. Медяник. Теоремы единственности для бесконечных выпуклых поверхностей со сферическим изображением, меньшим полусферы	57
А. Д. Милка. О кривых с ограниченной вариацией поворота на выпуклых гиперповерхностях	61
М. А. Николаенко. Характеристики монжева уравнения в многомерном пространстве	72
Э. Г. Позняк. О регулярной реализации в целом двумерных метрик отрицательной кривизны	78
Е. П. Сенькин. Об устойчивости ширины общей замкнутой выпуклой поверхности в зависимости от изменения интегральной средней кривизны. II	93
Е. П. Сенькин. Об одном свойстве изометрических преобразований выпуклой поверхности в пространство высшего числа измерений	95
Ю. С. Слободян. О трехмерных римановых пространствах, допускающих однопараметрические семейства вполне геодезических поверхностей	96
П. А. Соловьев. Наибольшая длина замкнутой эвольвенты одного класса кривых	112
С. П. Сопов. О количестве однородных многогранников с неотрицательной эйлеровой характеристикой	123
М. А. Улановский. О тензорах кривизны и кручения пространства аффинной связности	130
Л. А. Шор. О деформациях тривиального подклеивания	138

Редактор А. Г. Песчанская
Техредактор Г. П. Александрова
Корректор З. Г. Пугач

Сдано в набор 23/VIII 1966 г. Подписано к печати 30/XII 1966. БЦ 35102. Формат 70 × 108^{1/16}. Объем 9,25 физ. печ. л., 13 усл. печ. л., 10,9 уч.-изд. л. Зак. 6-380. Тираж 700. Цена 73 коп. Св. т. п. издательств КГУ, ЛГУ, ХГУ 1967 года, поз. 154.

Отпечатано с матриц Книжной ф-ки им. Фрунзе в типографии № 16 Областного управления по печати. Харьков-3, Университетская ул., 16. Зак 707.