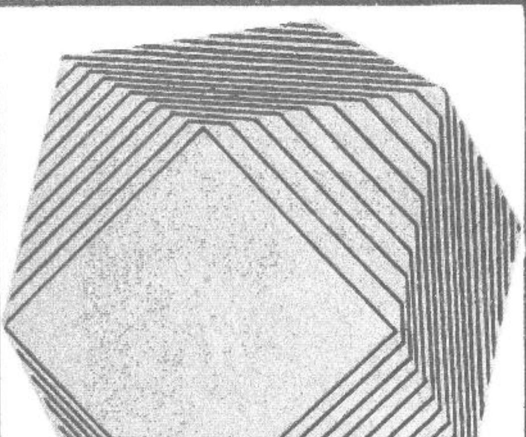
ISSN 0135-6992

УКРАИНСКИЙ геометрический СБОРНИК

29 86



«ВИЩА ШКОЛА»

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ УССР

ХАРЬКОВСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
И ОРДЕНА ДРУЖБЫ НАРОДОВ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени А. М. ГОРЬКОГО

УКРАИНСКИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК

Республиканский
междуведомственный
научный сборник

Основан в 1965 г.

ВЫПУСК 29

Харьков
Издательство при Харьковском
государственном университете
издательского объединения
«Вища школа»
1986

УДК 513

Украинский геометрический сборник: Респ. междувед. науч. сб. — Х.: Вища шк. Изд-во при Харьк. ун-те, 1986. — Вып. 29. 136 с.

В сборнике помещены статьи, почти все относящиеся к геометрии в целом. Изучаются поверхности: Петерсона постоянной кривизны, многомерные выпуклые и седловые, с заданными свойствами асимптотических линий, выпуклые с заданными условиями на главные радиусы кривизны, алгебраические с заданной симметрией, выпуклые в псевдоримановом сферическом пространстве, многогранники с равноугольными вершинами, изучаются вопросы изгибания выпуклых поверхностей (краевые задачи, изгибание бипирамид), свойства метрики в касательном расслоении поверхностей, максимально подвижные метрические пространства Дейвиса, комплексы прямых с заданным расположением инфлекционных центров, переносится теорема Гаусса — Бонне в пространство гиперболической связности без кручения.

Для научных работников математических специальностей.

Адрес редакционной коллегии: 310077, Харьков-77, пл. Дзержинского, 4, Харьковский университет, механико-математический факультет, кафедра геометрии, тел. 45-74-92

Редакция естественнонаучной литературы

У $\frac{1702040000-003}{М226(04)-86}$ 475-86

УДК 513

Я. П. БЛАНК, Н. М. ГОРМАШОВА

О ПОВЕРХНОСТЯХ ПЕТЕРСОНА ПОСТОЯННОЙ ГАУССОВОЙ КРИВИЗНЫ

Поверхностью Петерсона называется поверхность, несущая сопряженную коническую сеть, т. е. сопряженную сеть, состоящую из двух семейств линий касания, описанных около поверхности конусов, вершины которых лежат на некоторых линиях Γ_1 и Γ_2 соответственно. Если эта сеть принята за координатную, поверхность определяется уравнением

$$\rho x_i = a_i(u) + b_i(v), \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

а линии Γ_1, Γ_2 — уравнениями

$$\lambda x_i = \frac{da_i(u)}{du}, \quad \mu x_i = \frac{db_i(v)}{dv}$$

соответственно.

Могут представиться следующие три случая:

1°. Обе линии Γ_i — несобственные.

2°. Одна из линий Γ_i — несобственная, вторая — собственная.

3°. Обе линии Γ_i — собственные.

Задача состоит в отыскании всех таких поверхностей.

В случае 1° координатная сеть — цилиндрическая, а поверхность является поверхностью переноса. Этот случай рассмотрен в статье*, где доказано, что если у поверхности переноса гауссова кривизна K постоянна, то $K = 0$ и поверхность представляет собой цилиндр.

В случае 2° координатная сеть — цилиндроконическая. Такую сеть образуют меридианы и параллели поверхности вращения. Таким образом, найденные Миндингом поверхности вращения постоянной гауссовой кривизны представляют собой нетривиальный пример искомых поверхностей.

В случае 2° поверхности (1) допускают параметризацию

$$r = \frac{U(u) - V(v)}{u};$$

при этом гауссова кривизна K определяется уравнением

$$\psi(u, v) = K(\boldsymbol{A}^2)^2 + u^4(\boldsymbol{A}U'')(\boldsymbol{A}V'') = 0, \tag{1}$$

где

$$\boldsymbol{A} = [uU' - U + V, \; V'].$$

* *Бланк Я. П.* О поверхностях переноса постоянной кривизны. — ДАН СССР, 1961, **139**, № 5, с. 1037—1039.

Чтобы выяснить, исчерпываются ли искомые поверхности в случае 2° поверхностями вращения постоянной гауссовой кривизны, надо решить функциональное уравнение (1) при $K = \mathrm{const}$.

В настоящей статье дается полное решение задачи в случае 3°. В данном случае поверхность Петерсона допускает параметризацию:

$$\boldsymbol{r} = \frac{U - V}{u - v}; \tag{2}$$

ее гауссова кривизна K определяется уравнением

$$\Phi(u,\ v) = K(\boldsymbol{C}^2)^2 + (\boldsymbol{C}U'')(\boldsymbol{C}V'')(u-v)^4 = 0, \tag{3}$$

где $\boldsymbol{C} = (u-v)[\boldsymbol{U}' - \boldsymbol{V}'] + [\boldsymbol{U} - \boldsymbol{V},\ \boldsymbol{U}' - \boldsymbol{V}']$. Таким образом, надлежит решить функциональное уравнение (3) при $K = \mathrm{const}$.

Положим в уравнении (3) $v = u$, $K \neq 0$. Получаем $\boldsymbol{C}|_{v=u} = 0$. Следовательно, $[\boldsymbol{U} - \boldsymbol{V},\ \boldsymbol{U}' - \boldsymbol{V}'] = 0$. Полагая в уравнении $\frac{\partial^4 \Phi}{\partial u^4} = 0$, $v = u$, находим

$$[\boldsymbol{U} - \boldsymbol{V},\ \boldsymbol{U}'']|_{v=u} = 0,\ [\boldsymbol{U} - \boldsymbol{V},\ \boldsymbol{V}'']|_{v=u} = 0.$$

Пусть $(\boldsymbol{U} - \boldsymbol{V})|_{v=u} \neq 0$. Тогда $\boldsymbol{U}' - \boldsymbol{V}' = \lambda_1(\boldsymbol{U} - \boldsymbol{V})|_{v=u}$, $\boldsymbol{U}'' = \lambda_2(\boldsymbol{U} - \boldsymbol{V})|_{v=u}$, $\boldsymbol{V}'' = \lambda_3(\boldsymbol{U} - \boldsymbol{V})|_{v=u}$. Отсюда следует $\boldsymbol{U} = \lambda(u)\boldsymbol{a}_0 + u\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{V} = \mu(v)\boldsymbol{a}_0 + v\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2$, где $\boldsymbol{a}_0$, $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ — постоянные векторы. Подставив эти значения $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{V}$ в формулу (2), находим, что вектор $\boldsymbol{r}$ описывает прямую.

Остается рассмотреть случай $(\boldsymbol{U} - \boldsymbol{V})|_{v=u} = 0$. Тогда Γ_1, Γ_2 совпадают. Все последовательные производные $\frac{\partial^k \Phi}{\partial u^k}$ до 15-й включительно при $v = u$ тождественно равны нулю и только из уравнения $\left.\frac{\partial^{16}\Phi}{\partial u^{16}}\right|_{v=u} = 0$ следует условие

$$K = -\left(\frac{(U''U'''U^{\mathrm{IV}})}{[U''U''']^2}\right)^2 = -\varkappa^2,$$

где $\varkappa$ — кручение кривых Γ_1, Γ_2.

Приняв за параметр u длину дуги кривой Γ_1, из уравнения $\left.\frac{\partial^{18}\Phi}{\partial u^{18}}\right|_{v=u} = 0$ получаем $15k''k + 25k^4 - 21k'^2 = 0$, где k — кривизна кривой Γ_1. Интегрируя это уравнение, находим $k'^2 = ck^{14/5} - \frac{25}{9}k^4$, где c — постоянная.

Наконец, из уравнения $\left.\frac{\partial^{20}\Phi}{\partial u^{20}}\right|_{v=u} = 0$ следует $k^2 = \frac{17}{8}\varkappa^2 = \mathrm{const}$. Таким образом, у Γ_1 кривизна и кручение постоянны, т. е. это — винтовая линия.

Пусть

$$U_1' = a\cos u,\ U_2' = a\sin u,\ U_3' = 2bu,$$
$$V_1' = a\cos v,\ V_2' = a\sin v,\ V_3' = 2bv.$$

В силу (2) находим

$$x = \frac{a(\sin u - \sin v)}{u - v}, \; y = \frac{-a(\cos u - \cos v)}{u - v}, \; z = b(u + v),$$

откуда $z = 2b \operatorname{arctg} y/x$, т. е. найденная поверхность — геликоид и не является поверхностью постоянной гауссовой кривизны.

Здесь решено функциональное уравнение (3) в предположении, что $K = \mathrm{const} \neq 0$, и получено противоречие. Поэтому в случае 3° поверхность Петерсона может быть поверхностью постоянной гауссовой кривизны только при $K = 0$, но тогда она представляет собой конус.

Поступила в редколлегию 09.10.84.

УДК 513

А. А. БОРИСЕНКО, А. Л. ЯМПОЛЬСКИЙ

О ЦИЛИНДРИЧНОСТИ КАСАТЕЛЬНЫХ РАССЛОЕНИЙ СИЛЬНО ПАРАБОЛИЧЕСКИХ МЕТРИК И СИЛЬНО ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

1. Пусть M^n — n-мерное риманово многообразие с метрикой σ. Множество всех касательных к M^n векторов образует касательное расслоение TM^n с проекцией π: $TM^n \to M^n$, отображающей каждое касательное пространство E^n в точку касания.

С. Сасаки [1] определил на TM^n естественную риманову метрику $T\sigma$. А именно, пусть y^a $(a = 1, \ldots, n)$ — некоторая локальная система координат в окрестности $U \subset M^n$. Обозначим через w^a координаты касательного к M^n вектора в естественном базисе $\partial/\partial y^a$. Тогда (y^a, w^a) образуют локальную систему координат в окрестности $U \times E^n \subset TM^n$. Пусть (y^a, w^a) и $(y^a + dy^a, w^a + dw^a)$ — две близкие точки TM^n. Перенесем вектор $(w^a + dw^a)$ из точки $(y^a + dy^a)$ в точку (y^a) параллельно в смысле Леви — Чивита вдоль единственной геодезической, соединяющей эти две точки

Если обозначить угол между полученным вектором и вектором (w^a) через $d\theta$, длину вектора (w^a) — через w, а через $d\sigma$ и $dT\sigma$ — дифференциалы дуг в M^n и TM^n соответственно, то по определению

$$d(T\sigma)^2 = d\sigma^2 + w^2\, d\theta^2.$$

В локальных координатах (y^a, w^a) в окрестности $\pi^{-1}(U) \subset TM^n$ метрика Сасаки задается квадратичной формой:

$$d(T\sigma)^2 = \sigma_{ab}\, dy^a\, dy^b + \sigma_{ab} Dw^a Dw^b, \tag{1.1}$$

где $Dw^a = dw^a + \Gamma^a_{bc} w^b\, dy^c$ — ковариантные дифференциалы координат касательного вектора; Γ^a_{bc} — символы Кристоффеля римановой связности M^n; $a, b, c = 1, \ldots, n$.

Из (1.1) легко получить выражение для компонент метрики $T\sigma$:

$$\left\{ \begin{array}{l} T\sigma_{ab} = \sigma_{ab} + \Gamma^h_{ac} \Gamma_{bd,\, h} w^c w^d; \\ T\sigma_{an+b} = \Gamma_{ac,\, b} w^c; \\ T\sigma_{n+an+b} = \sigma_{ab}. \end{array} \right. \tag{1.2}$$

Известно, что в каждой точке $\tilde{Q} = (Q, w) \in TM^n$ касательное к TM^n пространство $T_{\tilde{Q}}TM^n$ разлагается в прямую сумму двух n-мерных подпространств — «горизонтального» и «вертикального»:

$$T_{\tilde{Q}}TM^n = H_{\tilde{Q}}TM^n \oplus V_{\tilde{Q}}TM^n,$$

которые в метрике Сасаки взаимно перпендикулярны. Так как естественный базис в $T_{\tilde{Q}}TM$ составляют векторы $(\partial/\partial y^a, \partial/\partial w^a)$, то любой вектор $\tilde{Y} \in T_{\tilde{Q}}TM^n$ представляется в виде

$$\tilde{Y} = Y^a \partial/\partial y^a + Y^{n+a} \partial/\partial w^a.$$

Из TTM^n в TM^n определены два отображения [2]: π_* и K, имеющие следующие локальные выражения:

$$\pi_* \tilde{Y} = Y^a \frac{\partial}{\partial y^a} = Y_H; \tag{1.3}$$

$$K\tilde{Y} = (Y^{n+a} + \Gamma^a_{bc} Y^b w^c) \frac{\partial}{\partial y^a} = Y_V, \tag{1.4}$$

$Y_H, Y_V \in T_Q M^n$; π_* — дифференциал проекции π: $TM^n \to M^n$, K — отображение связности. По определению

$$H_{\tilde{Q}}TM^n = \operatorname{Ker}(K \mid T_{\tilde{Q}}TM^n);$$

$$V_{\tilde{Q}}TM^n = \operatorname{Ker}(\pi_* \mid T_{\tilde{Q}}TM^n).$$

Если Y — векторное поле на M^n, то существуют единственные векторные поля Y^H и Y^V на TM^n, такие что

$$\pi_* Y^H = Y, \quad KY^H = 0,$$
$$\pi_* Y^V = 0, \quad KY^V = Y,$$

Y^H и Y^V называются соответственно горизонтальным и вертикальным лифтами векторного поля Y в TM^n. В локальных координатах

$$Y^H = Y^a \frac{\partial}{\partial y^a} - \Gamma^a_{bc} Y^b w^c \frac{\partial}{\partial w^a};$$

$$Y^V = Y^a \frac{\partial}{\partial w^a}.$$

Тогда

$$(Y_H)^H = Y^a \frac{\partial}{\partial y^a} - \Gamma^a_{bc} Y^b w^c \frac{\partial}{\partial w^a};$$

$$(Y_V)^V = (Y^{n+a} + \Gamma^a_{bc} Y^b w^c) \frac{\partial}{\partial w^a}.$$

Отсюда следует, что

$$\tilde{Y} = (Y_H)^H + (Y_V)^V, \tag{1.5}$$

т. е. любой вектор $\tilde{Y} \in T_{\tilde{Q}} TM^n$ разлагается в сумму горизонтального и вертикального лифтов двух в общем случае различных векторов из $T_Q M^n$.

Пусть $\tilde{L}^k \subset T_{\tilde{Q}} TM^n$ есть k-мерное линейное подпространство. Тогда $L_H = \pi_* \tilde{L}$ и $L_V = K\tilde{L}$ есть p- и q-мерные линейные подпространства в $T_Q M^n$. Очевидно, что $p \leqslant k$, $q \leqslant k$.

С другой стороны, так как размерность L_H равна p, то $\tilde{L}$ содержит не менее чем $k-p$ базисных векторов, которые π_* отображает в нуль. Следовательно, не менее чем $k-p$ базисных векторов K отображает в $T_Q M^n$. Значит, $q \geqslant k-p$.

Таким образом,

$$k \leqslant p + q \leqslant 2k. \tag{1.6}$$

В дальнейшем будем полагать, что индексы

$$a, b, c, d, f, h = 1, \ldots, n; \; i, j, k, m = 1, \ldots, l;$$
$$A, B, C, D, F = 1, \ldots, 2n; \; I, J, M = 1, \ldots, 2l;$$
$$\alpha, \beta, \gamma = 1, \ldots, n-l.$$

2. Формулировка теорем. Внутренним нуль-индексом $\nu(Q)$ точки Q риманова многообразия M^n называется размерность максимального линейного подпространства $L(Q) \subset T_Q M^n$ такого, что для $Y \in L(Q)$ и любых $X, Z \in T_Q M^n$ выполнено $R(X, Y)Z = 0$, где $R(X, Y)$ — оператор кривизны M^n.

Если $\nu(Q)$ постоянно, то распределение $L(Q)$ голономно [3] и интегральные подмногообразия являются вполне геодезическими в M^n, локально-изометричными евклидовому пространству E^ν [4].

Если $\nu(Q) \geqslant k$ для всех $Q \in M^n$, то метрика σ называется сильно k-параболической [5].

Теорема 1. *Если внутренний нуль-индекс $\tilde{\nu}$ касательного расслоения TM^n с метрикой Сасаки равен k, то k четно и M^n*

есть метрическое произведение риманова многообразия $M^{n-k/2}$ на евклидово пространство $E^{k/2}$, а TM^n есть метрическое произведение $TM^{n-k/2}$ на E^k.

Пусть F^l есть l-мерная поверхность в евклидовом пространстве E^n.

Внешним нуль-индексом $\mu(Q)$ точки $Q \in F^l$ называется размерность максимального линейного подпространства $L(Q) \subset T_Q F^l$ такого, что для любого $Y \in L(Q)$ выполнено $A(Q, n) Y = 0$, где $A(Q, n)$ — матрица коэффициентов второй квадратичной формы поверхности F^l относительно произвольной нормали n в точке Q.

Если $\mu(Q) \geqslant k$ для всех $Q \in F^l$, то через каждую точку $Q \in F^l$ проходит плоская образующая $E^k(Q)$, вдоль которой касательное пространство стационарно. Такие поверхности называются сильно k-параболическими [5].

Если $\mu(Q)$ постоянно на F^l, то распределение L голономно и интегральные подмногообразия являются μ-мерными плоскостями в евклидовом пространстве [6].

Будем рассматривать TF^l как поверхность в $TE^n = E^{2n}$ с индуцированной из E^{2n} метрикой.

Теорема 2. *Если внешний нуль-индекс $\tilde{\mu}$ поверхности TF^l равен k, то внешний нуль-индекс μ поверхности F^l удовлетворяет неравенству $\mu \geqslant k/2$. При этом*

а) если $\mu = k/2$, то F^l есть цилинд с $k/2$-мерной образующей, а TF^l — цилиндр с k-мерной образующей;

б) если $\mu = s < k$, то F^l есть цилиндр с $(k-s)$-мерной образующей, а TF^l — цилиндр с $2(k-s)$-мерной образующей.

Имеет место обратная

Теорема 3. *Если внешний нуль-индекс μ поверхности $F^l \subset E^n$ равен $k/2$, то внешний нуль-индекс $\tilde{\mu}$ поверхности TF^l удовлетворяет неравенству $k \geqslant \tilde{\mu} \geqslant k/2$.*

Замечание. Простой пример показывает, что индуцированная метрикой Сасаки TM^n метрика на TF^l не совпадает с метрикой Сасаки TF^l, что опровергает соответствующее утверждение в [7]. На самом деле метрика Сасаки TM^n индуцирует метрику Сасаки на TF^l тогда и только тогда, когда F^l вполне геодезично в M^n.

Известно, что слои касательного расслоения TM^n вполне геодезические подмногообразия [1]. База M^n, вложенная в TM^n нулевым сечением, также вполне геодезична [8]. Если на M^n существует параллельное векторное поле Y, то его образ $N = Y(M)$ в касательном расслоении является вполне геодезическим подмногообразием [9]. Заметим, что условие последнего утверждения эквивалентно требованию на M^n быть метрическим произведением риманова многообразия M^{n-1} на евклидову прямую [10]. Справедлива

Теорема 4. *Пусть F^l — подмногообразие M^n. TF^l вполне геодезично в TM^n тогда и только тогда, когда F^l вполне геодезично в M^n.*

В доказательствах используются

Лемма 1 [11]. *Пусть* (M^n, σ) — *риманово многообразие и* $\tilde{\nabla}$ *означает индуцированную связность Леви—Чивита в* $(TM^n, T\sigma)$. *Тензор кривизны* $\tilde{R}$ *связности* $\tilde{\nabla}$ *определяется следующими формулами:*

$$\tilde{R}(X^V, Y^V)Z^V = 0;$$

$$\tilde{R}(X^V, Y^V)Z^H = \Big[R(X, Y)Z + \frac{1}{4}R(w, X)R(w, Y)Z - -\frac{1}{4}R(w, Y)R(w, X)Z\Big]^H;$$

$$\tilde{R}(X^H, Y^V)Z^V = -\Big[\frac{1}{2}R(Y, Z)X + \frac{1}{4}R(w, Y)R(w, Z)X\Big]^H;$$

$$\tilde{R}(X^H, Y^V)Z^H = \Big[\frac{1}{4}R(R(w, Y)Z, X)w + \frac{1}{2}R(X, Z)Y\Big]^V + +\Big[\frac{1}{2}(\nabla_X R)(w, Y)Z\Big]^H;$$

$$\tilde{R}(X^H, Y^H)Z^V = \Big[R(X, Y)Z + \frac{1}{4}R(R(w, Z)Y, X)w - -\frac{1}{4}R(R(w, Z)X, Y)w\Big]^V + \frac{1}{2}\Big[(\nabla_X R)(w, Z)Y - (\nabla_Y R)(w, Z)X\Big]^H;$$

$$\tilde{R}(X^H, Y^H)Z^H = \Big[\frac{1}{2}(\nabla_Z R)(X, Y)w\Big]^V + \Big[R(X, Y)Z + +\frac{1}{4}R(w, R(Z, Y)w)X + \frac{1}{4}R(w, R(X, Z)w)Y + +\frac{1}{2}R(w, R(X, Y)w)Z\Big]^H,$$

где $R(X, Y)Z = [R^a_{bcd}Z^bX^cY^d]\frac{\partial}{\partial y^a}$ — *тензор кривизны базы* X, Y, Z, $w \in T_QM^n$:

$$(\nabla_X R)(w, Y)Z = [X^f\nabla_f R^a_{bcd}Z^bw^cY^d]\frac{\partial}{\partial y^a}$$

и все лифты осуществляются в точку $(Q, w) \in TM^n$.

Обозначим: ∇ — риманова связность M^n, $\bar{\nabla}$ — индуцированная связность поверхности $F^l \subset M^n$.

Лемма 2. а) *Если* n — *нормаль к* $F^l \subset M^n$ *в точке* $Q \in F^l$, *то векторы* $N_1 = n^H$ *и* $N_2 = n^V + (\nabla_v n)^H$ *являются нормалями к* $TF^l \subset TM^n$ *в точке* $(Q, v) \in TF^l$.

б) *Если* $\{n_{\beta|}\}$ — *базис нормального пространства поверхности* $F^l \subset M^n$ *в точке* Q, *то* $\{N_{\beta|} = n^H_{\beta|}, N_{l+\beta|} = n^V_{\beta|} + (\nabla_v n_{\beta|})^H\}$ *образуют базис нормального пространства поверхности* $TF^l \subset TM^n$ *в точке* $(Q, v) \in TF^l$.

Лемма 3. а) *Пусть* A^β_{ij} — *компоненты вторых квадратичных форм* $F^l \subset M^n$ *относительно базиса нормалей* $\{n_{\beta|}\}$, R^a_{bcd} — *тен-*

вор кривизны M^n. Тогда матрицы $\tilde{A}^\beta$ и $\tilde{A}^{l+\beta}$ вторых квадратичных форм поверхности $TF^l \subset TM^n$ относительно базиса нормалей $\{N_{\beta|} = n^H_{\beta|},\ N_{l+\beta|} = n^V_{\beta|} + (\nabla_v n^H_{\beta|})\}$ имеют вид

$$\tilde{A}^\beta = \left[\begin{array}{c|c} A^\beta_{ij} - \frac{1}{2}\left(R^{l+\beta}_{i\ l+\alpha\ s}A^\alpha_{jt} + R^{l+\beta}_{j\ l+\alpha\ s}A^\alpha_{it}\right)v^t v^s & -\frac{1}{2}R^{l+\beta}_{ijt}v^t \\ \hline -\frac{1}{2}R^{l+\beta}_{ijt}v_t & 0 \end{array}\right],$$

$$\tilde{A}^{l+\beta} = \Lambda^\beta_\alpha \left|\begin{array}{c|c} \begin{array}{c}\bar{\nabla}_v A^\alpha_{ij} + \frac{1}{2}\left[R^{l+\alpha}_{ijm} + R^{l+\alpha}_{jim} + \left(R^k_{i\ l+\gamma\ s}A^\gamma_{mj} +\right.\right. \\ \left.\left. + R^k_{j\ l+\gamma\ s}A^\gamma_{mi}\right)A^\alpha_{kt}v^t v^s\right]v^m\end{array} & \begin{array}{c}A^\alpha_{ij} + \\ + \frac{1}{2}R^k_{ijs}A^\alpha_{kt}v^t v^s\end{array} \\ \hline A^\alpha_{ij} + \frac{1}{2}R^k_{ijs}A^\alpha_{kt}v^t v^s & 0 \end{array}\right|,$$

где $\Lambda = [\ll N_{l+\alpha|},\ N_{l+\beta|} \gg]$ — матрица Грама подсистемы нормалей $\{N_{l+\beta|}\}$.

б) *Если M^n — евклидово пространство, то*

$$\tilde{A}^\beta = \left[\begin{array}{c|c} A^\beta_{ij} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right], \quad \tilde{A}^{l+\beta} = \Lambda^\beta_\alpha \left[\begin{array}{c|c} \bar{\nabla}_v A^\alpha_{ij} & A^\alpha_{ij} \\ \hline A^\alpha_{ij} & 0 \end{array}\right].$$

Лемма 4. *Если многообразие M^n есть метрическое произведение риманова многообразия M^{n-k} на евклидово пространство E^k, то TM^n с метрикой Сасаки есть метрическое произведение TM^{n-k} на евклидово пространство $E^{2k} = TE^k$.*

Лемма 5. *Если поверхность $F^l \subset E^n$ есть цилиндр с k-мерной образующей, то $TF^l \subset TE^n$ есть цилиндр с $2k$-мерной образующей.*

Лемма 6 [6]. *Пусть F^l — поверхность в E^n, G — открытая область, на которой внешний нуль-индекс постоянен: $\mu(Q) = k$. Тогда распределение $L(Q)$ интегрируемо, слои являются k-мерными образующими $E^k(Q)$, вдоль которых касательные пространства стационарны.*

3. **Доказательства теорем.** Доказательство теоремы 1. Пусть $\tilde{L}$ будет k-мерное линейное подпространство в $T_{\tilde{Q}}TM^n$ такое, что для $\tilde{Y} \in \tilde{L}$ и любых $\tilde{X},\ \tilde{Z} \in T_Q TM^n$ выполнено

$$\tilde{R}(\tilde{X}, \tilde{Y})\tilde{Z} = 0. \qquad (3.1)$$

Согласно (1.5) представим $\tilde{X},\ \tilde{Y},\ \tilde{Z}$ в виде

$$\tilde{X} = (X_H)^H + (X_V)^V,\ \tilde{Y} = (Y_H)^H + (Y_V)^V,\ \tilde{Z} = (Z_H)^H + (Z_V)^V.$$

Тогда (3.1) примет вид

$$\begin{aligned}\tilde{R}(\tilde{X},\tilde{Y})\tilde{Z} &= \tilde{R}((X_H)^H+(X_V)^V,\ (Y_H)^H+(Y_V)^V)((Z_H)^H+(Z_V)^V)=\\ &= \tilde{R}((X_H)^H,\ (Y_H)^H)(Z_H)^H+\tilde{R}((X_H)^H,\ (Y_H)^H)(Z_V)^V+\\ &+\tilde{R}((X_H)^H,\ (Y_V)^V)(Z_H)^H+\tilde{R}((X_H)^H,\ (Y_V)^V)(Z_V)^V+\\ &+\tilde{R}((X_V)^V,\ (Y_H)^H)(Z_H)^H+\tilde{R}((X_V)^V,\ (Y_H)^H)(Z_V)^V+\\ &+\tilde{R}((X_V)^V,\ (Y_V)^V)(Z_H)^H+\tilde{R}((X_V)^V,\ (Y_V)^V)(Z_V)^V=0.\end{aligned}$$

Используя лемму 1, получим

$$\begin{aligned}\tilde{R}(\tilde{X},\tilde{Y})\tilde{Z} = \Big[&R(X_H,Y_H)Z_H+\frac{1}{4}R(w,\ R(Z_H,\ Y_H)w)X_H+\\ &+\frac{1}{4}R(w,\ R(X_H,\ Z_H)w)Y_H+\frac{1}{2}R(w,\ R(X_H,\ Y_H)w)Z_H+\\ &+\frac{1}{2}(\nabla_{X_H}R(w,\ Z_V)Y_H-\frac{1}{2}(\nabla_{Y_H}R)(w,\ Z_V)X_H+\\ &+\frac{1}{2}(\nabla_{X_H}R)(w,\ Y_V)Z_H-\frac{1}{2}R(Y_V,\ Z_V)X_H-\\ &-\frac{1}{4}R(w,\ Y_V)R(w,\ Z_V)X_H-\frac{1}{2}(\nabla_{Y_H}R)(w,\ X_V)Z_H+\\ &+\frac{1}{2}R(X_V,\ Z_V)Y_H+\frac{1}{4}R(w,\ X_V)R(w,\ Z_V)Y_H+R(X_V,\ Y_V)Z_H+\\ &+\frac{1}{4}R(w,\ X_V)R(w,\ Y_V)Z_H-\frac{1}{4}R(w,\ Y_V)R(w,\ X_V)Z_H\Big]^H+\\ &+\Big[\frac{1}{2}(\nabla_{Z_H}R)(X_H,\ Y_H)w+R(X_H,\ Y_H)Z_V+\\ &+\frac{1}{4}R(R(w,\ Z_V)Y_H,\ X_H)w-\frac{1}{4}R(R(w,\ Z_V)X_H,\ Y_H)w+\\ &+\frac{1}{4}R(R(w,\ Y_V)Z_H,\ X_H)w+\frac{1}{2}R(X_H,\ Z_H)Y_V-\\ &-\frac{1}{4}R(R(w,\ X_V)Z_H,\ Y_H)w-\frac{1}{2}R(Y_H,\ Z_H)X_V\Big]^V. \qquad (3.2)\end{aligned}$$

Так как равенство (3.1) должно иметь место в любой точке $\tilde{Q}=(Q,\ w)$, то, полагая $w=0$ из (3.2), получим условия

$$\begin{cases} R(X_H,\ Y_H)Z_H+R(X_V,\ Y_V)Z_V-\frac{1}{2}R(Y_V,\ Z_V)X_H+\\ +\frac{1}{2}R(X_V,\ Z_H)Y_H=0;\\ R(X_H,\ Y_H)Z_V+\frac{1}{2}R(X_H,\ Z_H)Y_V-\frac{1}{2}R(Y_H,\ Z_H)X_V=0,\end{cases}$$

которые должны выполняться при любых $X_H,\ X_V,\ Z_H,\ Z_V\in T_QM^n$ и $Y_H\in L_H,\ Y_V\in L_V$. Полагая $X_V=Z_H=0$ при любых X_H и Z_V, получим

$$\begin{cases}-\frac{1}{2}R(Y_V,\ Z_V)X_H=0;\\ R(X_H,\ Y_H)Z_V=0.\end{cases}$$

Отсюда следует, что для любого вектора Y, принадлежащего сумме подпространств L_H и L_V размерности p и q соответственно, и при любых X, $Z \in T_Q M^n$ выполнено равенство

$$R(X, Y)Z = 0. \tag{3.3}$$

Значит, внутренний нуль-индекс M^n не меньше размерности этой суммы. Пусть $L = L_H + L_V$, $L_0 = L_H \cap L_V$. Тогда $\nu \geqslant \dim L = p + q - \dim L_0$. Так как $\dim L_0 \leqslant \min(p, q)$, то $\dim L \geqslant \max(p, q)$. Из неравенства $p + q \geqslant k$ следует, что $\max(p, q) \geqslant k/2$. Поэтому

$$\nu \geqslant \dim L \geqslant k/2. \tag{3.4}$$

Подставляя далее (3.3) в (3.2), получим равенства

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(\nabla_{X_H} R)(w, Z_V) Y_H - \frac{1}{2}(\nabla_{Y_H} R)(w, Z_V) X_H + & (3.5) \\ + \frac{1}{2}(\nabla_{X_H} R)(w, Y_V) Z_H - \frac{1}{2}(\nabla_{Y_H} R)(w, X_V) Z_H = 0; & \\ \frac{1}{2}(\nabla_{Z_H} R)(X_H, Y_H) w = 0, & (3.6) \end{cases}$$

которые должны выполняться при любых X_H, X_V, Z_H, $Z_V \in T_Q M^n$ и $Y_H \in L_H$, $Y_V \in L_V$.

Равенство (3.6) означает, что если $Y \in L_H$, то

$$(\nabla_Z R)(X, Y) w = 0 \tag{3.7}$$

при любых Z, X, $w \in T_Q M^n$. Из второго тождества Бьянки следует, что

$$(\nabla_Y R)(X, Z) w = 0. \tag{3.8}$$

Первое тождество Бьянки $R(w, Z) Y + R(Z, Y) w + R(Y, w) Z = 0$ продифференцируем ковариантно по X. Получим

$$\begin{aligned} (\nabla_X R)(w, Z) Y + R(\nabla_X w, Z) Y + R(w, \nabla_X Z) Y + R(w, Z)\nabla_X Y + \\ + (\nabla_X R)(Z, Y) w + R(\nabla_X Z, Y) w + R(Z, \nabla_X Y) w + \\ + R(Z, Y)\nabla_X w + (\nabla_X R)(Y, w) Z + R(\nabla_X Y, w) Z + \\ + R(Y, \nabla_X w) Z + R(Y, w)\nabla_X Z = (\nabla_X R)(w, Z) Y + \\ + (\nabla_X R)(Z, Y) w + (\nabla_X R)(Y, w) Z + R(\nabla_X w, Z) Y + \\ + R(Z, Y)\nabla_X w + R(Y, \nabla_X w) Z + R(w, \nabla_X Z) Y + R(\nabla_X Z, Y) w + \\ + R(Y, w)\nabla_X Z + R(w, Z)\nabla_X Y + R(Z, \nabla_X Y) w + R(\nabla_X Y, w) Z = \\ = (\nabla_X R)(w, Z) Y + (\nabla_X R)(Z, Y) w + (\nabla_X R)(Y, w) Z = 0. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Таким образом, если $Y \in L_H$, то из (3.7) и (3.9) следует, что

$$(\nabla_X R)(w, Z) Y = 0 \tag{3.10}$$

при любых X, w, $Z \in T_Q M^n$.

Подставляя (3.8) и (3.10) в (3.5), получим требование

$$(\nabla_X R)(w, Y_V) Z_H = 0 \tag{3.11}$$

при любых X_H, w, $Z_H \in T^Q M^n$.

Объединяя (3.3), (3.7) и (3.11), находим, что для любых X, Z, $w \in T_Q M^n$ и любого $Y \in L = L_H + L_V$ выполняются равенства

$$\begin{cases} R(X, Y) Z = 0; \\ (\nabla_w R)(X, Y) Z = 0. \end{cases} \tag{3.12}$$

Пусть L' — распределение линейных подпространств в TM^n, обладающих свойством (3.12). Тогда $L' \supset L$. Пусть Q_0 — точка на M^n, в которой $\dim L' = k_0$ минимальна. Тогда $\dim L'$ минимальна и в некоторой окрестности Q_0. Действительно, в противном случае существовала бы последовательность точек $\{Q_i\} \in M^n$, сходящаяся к Q_0 таких, что $L'(Q_i)$ обладает свойством (3.12) и $\dim L'(Q_i) > k_0$. Пусть $L''(Q_0) = \lim\limits_{i \to \infty} L'(Q_i)$. Тогда $L''(Q_0)$ обладает свойством (3.12) и $\dim L''(Q_0) > k$, что противоречит условию минимальности. Таким образом, $\dim L' = k_0$ в некоторой окрестности Q_0 и поэтому L' в этой окрестности регулярно. В сочетании с (3.12) это означает, что в данной окрестности Q_0 на M^n существует k_0 линейно независимых параллельных векторных полей. Согласно [10] в этом случае M^n есть метрическое произведение $M^{n-k_0} \times E^{k_0}$. По лемме 4 и TM^n есть метрическое произведение $TM^{n-k_0} \times E^{2k_0}$. Но так как $\tilde{\nu} = k$, то $2k_0 \leqslant k$.

С другой стороны, так как $L'(Q_0) \supset L(Q_0)$, то с помощью неравенства (3.4) получим $k_0 = \dim L'(Q_0) \geqslant \dim L(Q_0) \geqslant k/2$. Отсюда следует, что $k = 2k_0$ и $L' = L$ в силу равенства размерностей.

Доказательство теоремы 2. Пусть $\tilde{L}$ есть k-мерное линейное подпространство в $T_{\tilde{Q}} TF^l$ такое, что для любого $\tilde{Y} \in \tilde{L}$ будет

$$\tilde{A}(\tilde{Q}, N) \tilde{Y} = 0 \tag{3.13}$$

в любой точке $\tilde{Q} \in TF^l$ и для любой нормали N.

Обозначим через $\bar{\pi}_*$ и $\bar{K}$ дифференциал проекции расслоения $\bar{\pi}: TF^l \to F^l$ и отображение индуцированной связности F^l соответственно. Тогда относительно $\bar{\pi}_*$ и $\bar{K}$ получим разложение $T_Q TF^l = H_{\tilde{Q}} TF^l \oplus V_{\tilde{Q}} TF^l$, где $H_{\tilde{Q}} TF^l = \operatorname{Ker}(\bar{K} | T_{\tilde{Q}} TF^l)$ и $V_{\tilde{Q}} TF^l = \operatorname{Ker}(\bar{\pi}_* | T_{\tilde{Q}} TF^l)$.

Обозначим:

$$L_H = \bar{\pi}_* \tilde{L}, \; L_V = \bar{K} \tilde{L}. \tag{3.14}$$

Если $p = \dim L_H$, $q = \dim L_V$, то аналогично (1.6)

$$k \leqslant p + q \leqslant 2k. \tag{3.15}$$

Кроме естественного, в $T_{\tilde{Q}} TF^l$ существует адаптированный базис [12], имеющий относительно естественного следующее локальное выражение: $E_i = (\partial/\partial x^i) - \Gamma_{ij}^k v^j (\partial/\partial v^k)$; $E_{l+i} = (\partial/\partial v^i)$.

Любой вектор $\tilde{X} \in T_Q TF^l$ представляется в виде $\tilde{X} = X^i E_i + X^{l+i} E_{l+i}$. Возвращаясь к естественному базису, получим

$$\tilde{X} = X^i \left[\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) - \Gamma^k_{ij} v^j \left(\frac{\partial}{\partial v^k}\right)\right] + X^{l+i} \frac{\partial}{\partial v^i} = X^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) + \\ + (X^{l+i} - \Gamma^i_{jk} v^j X^k) \left(\frac{\partial}{\partial v^i}\right).$$

Отсюда и из (1.3) и (1.4) следует, что если (Y^i, Y^{l+i}) — координаты вектора $\tilde{Y}$ в естественном базисе, то

$$\bar{\pi}_* \tilde{Y} = Y^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = Y_H;$$

$$\bar{K}\tilde{Y} = \tilde{Y}^{l+i} \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = Y_V.$$

Пусть вектор $\tilde{Y}$ задан в адаптированном базисе и удовлетворяет условию (3.13). Используя лемму 3, получаем уравнения

$$\tilde{A}^\beta \tilde{Y} = \left[\begin{array}{c|c} A^\beta_{ij} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} Y^i \\ \hline Y^{l+i} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} A^\beta_{ij} Y^i \\ \hline 0 \end{array}\right] = 0;$$

$$\tilde{A}^{l+\beta} \tilde{Y} = \Lambda^\beta_\alpha \left[\begin{array}{c|c} \bar{\nabla}_v A^\alpha_{ij} & A^\alpha_{ij} \\ \hline A^\alpha_{ij} & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} Y^i \\ \hline Y^{l+i} \end{array}\right] = \Lambda^\beta_\alpha \left[\begin{array}{c} \bar{\nabla}_v A^\alpha_{ij} Y^i + A^\alpha_{ij} Y^{l+i} \\ \hline A^\alpha_{ij} Y^i \end{array}\right] = 0.$$

Так как Λ^β_α — матрица невырожденного линейного преобразования, то отсюда следуют равенства

$$\begin{cases} A^\beta_{ij} Y^i = 0; \\ \bar{\nabla}_v A^\beta_{ij} Y^i + A^\beta_{ij} Y^{l+i} = 0 \end{cases}$$

или в векторной форме:

$$\begin{cases} A(Q, n) Y_H = 0; \\ \bar{\nabla}_v A(Q, n) Y_H + A(Q, n) Y_V = 0, \end{cases} \tag{3.16}$$

которые должны выполняться в любой точке $\tilde{Q} = (Q, v)$. Полагая $v = 0$, видим, что для любого Y, принадлежащего сумме подпространств L_H и L_V, выполнено

$$A(Q, n) Y = 0 \tag{3.17}$$

при любых Q и n. Следовательно, внешний нуль-индекс μ поверхности F^l не меньше размерности линейного подпространства $L = L_H + L_V$. Но в силу (3.15)

$$\dim L \geqslant \max(p, q) \geqslant k/2. \tag{3.18}$$

Таким образом, $\mu \geqslant k/2$.

Заметим, что при прочих v из (3.16) следует, что

$$\bar{\nabla}_v A(Q, n) Y_H = 0. \tag{3.19}$$

Поэтому для любого $Y \in L_H$ выполняются равенства

$$\begin{cases} A(Q, n) Y = 0; \\ \overline{\nabla}_v A(Q, n) Y = 0. \end{cases} \tag{3.20}$$

а) Пусть $\mu = k/2$. Это значит, что $\dim L$ минимальна и равна $k/2$. Из (3.18) следует, что в этом случае $p = q = k/2$, $L = L_H = L_V$. Таким образом, для любого $Y \in L$ выполняются равенства (3.20). По формулам Гаусса найдем, что тензор кривизны F^l удовлетворяет условиям

$$\begin{cases} R(X, Y) Z = 0; \\ \overline{\nabla}_v R(X, Y) Z = 0, \end{cases} \tag{3.21}$$

как только $Y \in L$, а $X, Z, v \in T_Q F^l$.

Так как по условию $\widetilde{L}$ регулярно, то регулярно и L, причем размерность L, по предположению, постоянна. В сочетании с (3.21) это значит, что на F^l существует $k/2$ линейно независимых параллельных векторных полей, а следовательно, F^l есть метрическое произведение $F^{l-k/2}$ на евклидово пространство $E^{k/2}$. Поэтому можно выбрать такую локальную систему координат, что метрический тензор g поверхности F^l примет вид

$$g = \left[\begin{array}{c|c} \overline{g}_{rs} & 0 \\ \hline 0 & \delta_{\tau\rho} \end{array} \right] \begin{array}{l} r, s = 1, \ldots, l - k/2, \\ \tau, \rho = l - k/2 + 1, \ldots, l. \end{array} \tag{3.22}$$

С другой стороны, по лемме 6 радиус-вектор R поверхности F^l представляется в виде

$$R = R(x^1, \ldots, x^{l-k/2}) + \sum_{\tau = l-k/2+1}^{l} x^\tau E_\tau (x^1, \ldots, x^{l-k/2}), \tag{3.23}$$

где R — радиус-вектор поверхности $F^{l-k/2}$ и E_τ — ортонормальные параллельные векторные поля на F^l.

Если обозначить через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ скалярное произведение в метрике g, то согласно (3.22) и (3.23) во всех точках F^l будет

$$0 = \left\langle \frac{\partial R}{\partial x^s}, \frac{\partial R}{\partial x^\rho} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial R}{\partial x^s} + \sum_{\tau = l-k/2+1} \frac{\partial E}{\partial x^s} x^\tau, E_\rho \right\rangle = \\ = \left\langle \frac{\partial R}{\partial x^s}, E_\rho \right\rangle + \sum_{\tau = l-k/2+1} \left\langle \frac{\partial E_\tau}{\partial x^s}, E_\rho \right\rangle x^\tau.$$

В силу выбора системы координат

$$\left\langle \frac{\partial R}{\partial x^s}, E_\rho \right\rangle = 0. \tag{3.24}$$

Полагая $x^\tau = (\delta_i^\tau)$, получим

$$\left\langle \frac{\partial E_\tau}{\partial x^s}, E_\rho \right\rangle = 0 \tag{3.25}$$

при любых ρ, τ, s.

С другой стороны,

$$\frac{\partial E_\tau}{\partial x^s} = \Gamma_{s\tau}^r \frac{\partial R}{\partial x^r} + \Gamma_{s\tau}^\rho E_\rho + A_{s\tau}^\beta n_{\beta|}, \tag{3.26}$$

где n_β — нормали к F^l. Но $A^\beta_{s\tau}=0$ в силу (3.17), $\Gamma^\rho_{s\tau}=0$ в силу (3.24) и (3.25). Кроме того, так как E_ρ переносятся параллельно вдоль $F^{l-k/2}$, то ковариантная производная

$$\nabla_s E^r_\tau = \frac{\partial E^r_\tau}{\partial x^s} + \Gamma^r_{sm} E^m_\tau = 0.$$

Но $E^t_\tau = \delta^t_\tau$, так как E_τ ортогонален $F^{l-k/2}$. Отсюда следует, что $\Gamma^t_{s\tau}=0$. Подставляя в (3.26), получим $\frac{\partial E_\tau}{\partial x^s}=0$. Следовательно, $E_\tau = \mathrm{const}$ и F^l есть цилиндр с $k/2$-мерной образующей.

Заметим, что при помощи аналогичных рассуждений можно доказать, что если $\dim L_H = p \neq 0$, то F^l есть цилиндр с p-мерной образующей.

б) Пусть $\mu = s < k$. Тогда в каждом $T_Q F^l$ найдется линейное подпространство $\bar{L}$ размерности s, обладающее свойством $A(Q, n)Y = 0$ для $Y \in \bar{L}$ и любых Q и n.

Пусть $Y \in \bar{L}$. Тогда Y^V удовлетворяет (3.13). Действительно, в адаптированном базисе $Y^V = (0, Y)$ будет

$$\tilde{A}^\beta Y^V = \left[\begin{array}{c|c} A^\beta_{ij} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} 0 \\ \hline Y^i \end{array}\right] = 0,$$

$$\tilde{A}^{l+\beta} Y^V = \Lambda^\beta_\alpha \left[\begin{array}{c|c} \bar{\nabla}_v A^\alpha_{ij} & A^\alpha_{ij} \\ \hline A^\alpha_{ij} & 0 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} 0 \\ \hline Y^i \end{array}\right] = \Lambda^\beta_\alpha \left[\begin{array}{c} A^\alpha_{ij} Y^i \\ \hline 0 \end{array}\right] = 0.$$

Следовательно, $(\bar{L})^V \subset \tilde{L}$, причем $\dim(\bar{L})^V = s$. Поэтому $\dim L_V \geqslant s$. Но так как $L_V \subset \bar{L}$, то $\dim L_V = s$. Значит, $L_V = \bar{L}$.

С другой стороны, L_H есть ядро линейного отображения связности K при отображении $\tilde{L}$ на L_V. Поэтому $\dim L_H = \dim \tilde{L} - \dim L_V = k - s$. Тогда из замечания в п. а) следует, что F^l есть цилиндр с $(k-s)$-мерной образующей.

Доказательство теоремы 3. Пусть $\mu = k/2$. Тогда в каждой точке $Q \in F^l$ найдется линейное подпространство L размерности $k/2$, удовлетворяющее условию $A(Q, n)Y = 0$, $Y \in L$.

Из доказательства теоремы 2, п. б) следует, что $L^V \subset \tilde{L}$, и это значит, что $\tilde{\mu} \geqslant \mu = k/2$.

С другой стороны, если $\tilde{\mu} = s > k$, то по теореме 2 получим неравенство $\mu \geqslant s/2 > k/2$, что противоречит условию. Таким образом, $k \geqslant \tilde{\mu} \geqslant k/2$.

Доказательство теоремы 4. Пусть F^l вполне геодезична в M^n. Тогда $A^\beta_{ij} \equiv 0$ и $\bar{\nabla}_v A^\beta \equiv 0$ при любом $v \in TF^l$. Из уравнений Кодацци следует, что $R^{l+\beta}_{i\,j\,t} = 0$ при любых β, i, j, t. Подставляя эти значения в выражения для $\tilde{A}^\beta$ и $\tilde{A}^{l+\beta}$ в лемме 3, получим, что $\tilde{A}^\beta \equiv 0$, $\tilde{A}^{l+\beta} \equiv 0$.

Обратно, пусть $\tilde{A}^{\beta} \equiv 0$, $\tilde{A}^{l+\beta} \equiv 0$. Тогда в любой точке $\tilde{Q} = (Q, v) \in TF^l$ справедливо равенство

$$\tilde{A}^{\beta}_{ij} = A^{\beta}_{ij} - \frac{1}{2} (R_{i\ l+\alpha s}^{l+\beta} A^{\alpha}_{jt} + R_{j\ l+\alpha s}^{l+\beta} A^{\alpha}_{it}) v^t v^s \equiv 0.$$

Заменяя v на λv ($\lambda \in \boldsymbol{R}$), получим

$$A^{\beta}_{ij} - \left[\frac{1}{2} (R_{i\ l+\alpha s}^{l+\beta} A^{\alpha}_{jt} + R_{j\ l+\alpha s}^{l+\beta} A^{\alpha}_{it}) v^t v^s\right] \lambda^2 \equiv 0. \tag{3.27}$$

Рассматривая (3.27) как многочлен относительно λ, немедленно получаем, что $A^{\beta}_{ij} \equiv 0$.

4. Доказательства лемм. Доказательство леммы 2. а) Пусть σ — метрика M^n, $T\sigma$ — метрика Сасаки TM^n, g — индуцированная метрика на $F^l \subset M^n$. Обозначим через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ скалярное произведение, определяемое метрикой σ, а через $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ — скалярное произведение, определяемое метрикой $T\sigma$.

Если $\tilde{X}$, $\tilde{Y} \in T_{\tilde{Q}} TM^n$, то согласно [2] будет

$$\langle\langle \tilde{X}, \tilde{Y} \rangle\rangle = \langle \pi_* \tilde{X}, \pi_* \tilde{Y} \rangle + \langle K\tilde{X}, K\tilde{Y} \rangle. \tag{4.1}$$

Пусть вложение $F^l \subset M^n$ задано уравнениями

$$y^a = y^a (x^1, \ldots, x^l), \tag{4.2}$$

где (y^a), (x^i) — локальные координаты M^n и F^l соответственно. Для сокращения записи уравнения (4.2) перепишем в векторной форме, как $y = y(x)$. В этих обозначениях метрика поверхности F^l определяется равенством $g_{ij} = \left\langle \frac{\partial y}{\partial x^i}, \frac{\partial y}{\partial x^j} \right\rangle$.

Если n — нормаль к F^l, то при любом $i = 1, \ldots, l$ будет

$$\left\langle \frac{\partial y}{\partial x^i}, n \right\rangle = 0. \tag{4.3}$$

Пусть (y^a, w^a) и (x^i, v^i) — индуцированные локальные координаты TM^n и TF^l соответственно. Тогда естественное вложение $TF^l \subset TM^n$ имеет вид

$$\begin{cases} y^a = y^a (x^1, \ldots, x^l); \\ w^a = \dfrac{\partial y^a}{\partial x^i} v^i. \end{cases} \tag{4.4}$$

Положим $Y^a = y^a$, $Y^{n+a} = w^a$, $X^i = x^i$, $X^{l+i} = v^i$. Тогда уравнения (4.4) можно записать векторно, как $Y = Y(X)$.

Если N — нормаль к TF^l, то при любом $I = 1, \ldots, 2l$ будет $\left\langle\!\left\langle \frac{\partial Y}{\partial X^I}, N \right\rangle\!\right\rangle = 0$. Согласно (4.1) это значит, что

$$\left\langle \pi_* \frac{\partial Y}{\partial X^I}, \pi_* N \right\rangle + \left\langle K \frac{\partial Y}{\partial X^I}, KN \right\rangle = 0. \tag{4.5}$$

Пусть Γ^a_{bc} и $\bar{\Gamma}^i_{jk}$ — символы Кристоффеля метрик σ и g соответственно. По формулам (1.3) и (1.4) найдем, что

$$\pi_* \frac{\partial Y}{\partial X^I} = \frac{\partial Y^a}{\partial X^I}\frac{\partial}{\partial y^a}, \quad K\frac{\partial Y}{\partial X^I} = \left[\left(\frac{\partial Y}{\partial X^I}\right)^{n+a} + \Gamma^a_{bc}\left(\frac{\partial Y}{\partial X^I}\right)^b w^c\right]\frac{\partial}{\partial y^a}.$$

Из (4.4) получим

$$\left[\frac{\partial Y}{\partial X}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \dfrac{\partial y^a}{\partial x^i} & \dfrac{\partial^2 y^a}{\partial x^i\, \partial x^j} v^j \\ \hline 0 & \dfrac{\partial y^a}{\partial x^i} \end{array}\right]. \tag{4.6}$$

Отсюда

$$\left.\begin{aligned} &\pi_* \frac{\partial Y}{\partial X^i} = \frac{\partial y^a}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^a}, \quad \pi_* \frac{\partial Y}{\partial X^{l+i}} = \frac{\partial y^a}{\partial v^i}\frac{\partial}{\partial y^a} = 0, \\ &K\frac{\partial Y}{\partial X^i} = \left[\left(\frac{\partial Y}{\partial X^i}\right)^{n+a} + \Gamma^a_{bc}\left(\frac{\partial Y}{\partial X^i}\right)^b \frac{\partial y^c}{\partial x^j} v^j\right]\frac{\partial}{\partial y^a} = \\ &= \left[\frac{\partial^2 y^a}{\partial x^i\, \partial x^j} + \Gamma^a_{bc}\frac{\partial y^b}{\partial x^i}\frac{\partial y^c}{\partial x^j}\right] v^j \frac{\partial}{\partial y^a}, \\ &K\frac{\partial Y}{\partial X^{l+i}} = \left[\left(\frac{\partial Y}{\partial X^{l+i}}\right)^{n+a} + \Gamma^a_{bc}\left(\frac{\partial Y}{\partial X^{l+i}}\right)^b w^c\right]\frac{\partial}{\partial y^a} = \frac{\partial y^a}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^a}. \end{aligned}\right\} \tag{4.7}$$

Рассмотрим $N_1 = n^H$, $N_2 = n^V + (\nabla_v n)^H$. Для них

$$\pi_* N_1 = n, \ KN_1 = 0, \ \pi_* N_2 = \nabla_v n, \ KN_2 = n. \tag{4.8}$$

Пусть $n_{\alpha|}$ — некоторый базис нормалей к $F^l \subset M^n$. Тогда

$$n = \sum_\alpha \lambda_\alpha n_{\alpha|}, \ \nabla_v n = (\nabla_v n^a)\frac{\partial}{\partial y^a} = \sum_\alpha \lambda_\alpha (\nabla_v n^a_{\alpha|})\frac{\partial}{\partial y^a} =$$

$$= \lambda_\alpha \left(-g^{ik} A^\alpha_{jk}\frac{\partial y^a}{\partial x^i} + \mu_{\tau\alpha|j} n^a_{\tau|}\right) v^j \frac{\partial}{\partial y^a}. \tag{4.9}$$

По формулам Гаусса $\dfrac{\partial^2 y^a}{\partial x^i\, \partial x^j} + \Gamma^a_{bc}\dfrac{\partial y^a}{\partial x^i}\dfrac{\partial y^b}{\partial x^j} = \bar{\Gamma}^k_{ij}\dfrac{\partial y^a}{\partial x^k} + A^\alpha_{ij} n^a_{\alpha|}$. Поэтому в (4.7) получим

$$K\left(\frac{\partial Y}{\partial X^i}\right) = \left[\bar{\Gamma}^k_{ij}\frac{\partial y^a}{\partial x^k} + A^\alpha_{ij} n^a_{\alpha|}\right] v^j \frac{\partial}{\partial y^a} = \left[\bar{\Gamma}^k_{ij}\frac{\partial y}{\partial x^k} + A^\alpha_{ij} n_{\alpha|}\right] v^j. \tag{4.10}$$

Из (4.5) — (4.10) получим

$$\left\langle\!\!\left\langle \frac{\partial Y}{\partial X^i}, N_1 \right\rangle\!\!\right\rangle = \left\langle \frac{\partial y}{\partial x^i}, n \right\rangle = 0;$$

$$\left\langle\!\!\left\langle \frac{\partial Y}{\partial X^i}, N_2 \right\rangle\!\!\right\rangle = \left\langle \frac{\partial y}{\partial x^i}, \nabla_v n \right\rangle + \left\langle \left(\bar{\Gamma}^k_{ij}\frac{\partial y}{\partial x^k} + A^\alpha_{ij} n_{\alpha|}\right) v^j, n \right\rangle =$$

$$=\left\langle\frac{\partial y}{\partial x^{l}},\ \lambda_\alpha\left(-g^{tk}A^\alpha_{jk}\frac{\partial y}{\partial x^{t}}+\mu_{\tau\alpha|j}n_{\tau|}\right)v^{j}\right\rangle+\lambda_\beta A^\alpha_{ij}\langle n_{\alpha|},\ n_{\alpha|}\rangle=$$

$$=-\lambda_\alpha A^\alpha_{jk}\left\langle\frac{\partial y}{\partial x^{i}},\ \frac{\partial y}{\partial x^{t}}\right\rangle g^{tk}+\lambda_\beta A^\alpha_{ij}\delta_{\alpha\beta}=-\lambda_\alpha A^\alpha_{ji}+\lambda_\alpha A^\alpha_{ij}=0;$$

$$\left\langle\!\left\langle\frac{\partial Y}{\partial X^{l+i}},\ N_1\right\rangle\!\right\rangle=0;$$

$$\left\langle\!\left\langle\frac{\partial Y}{\partial X^{l+i}},\ N_2\right\rangle\!\right\rangle=\left\langle\frac{\partial y}{\partial x^{i}},\ n\right\rangle=0.$$

б) Пусть $\{n_{\alpha|}\}$ — базис нормалей к $F^l\subset M^n$. Покажем, что нормали $\{N_{\alpha|}=\overset{H}{n}_{\alpha|},\ N_{l+\alpha|}=\overset{V}{n}_{\alpha|}+(\nabla_v n_{\alpha|})^H\}$ линейно независимы. Действительно, пусть это не так. Тогда найдутся такие вещественные $\lambda_\alpha,\ \mu_\alpha\in\boldsymbol{R}$, что $\lambda_\alpha,\ \mu_\alpha$ не все равны 0, но

$$\sum_\alpha(\lambda_\alpha N_{\alpha|}+\mu_\alpha N_{l+\alpha|})=0.$$

Это значит, что

$$\sum_\alpha\lambda_\alpha\overset{H}{n}_{\alpha|}+\sum_\alpha\mu_\alpha\overset{V}{n}_{\alpha|}+\sum_\alpha\mu_\alpha(\nabla_v n_\alpha)^H=\sum_\alpha[\lambda_\alpha n_{\alpha|}+$$
$$+\mu_\alpha(\nabla_v n_{\alpha|})]^H+\sum_\alpha\mu_\alpha\overset{V}{n}_{\alpha|}=0.$$

А так как подпространства V и H в метрике Сасаки взаимно ортогональны, то отсюда следует, что

$$\sum_\alpha[\lambda_\alpha n_{\alpha|}+\mu_\alpha(\nabla_v n_{\alpha|})]=0,\quad \sum_\alpha\mu_\alpha n_{\alpha|}=0,$$

что противоречит линейной независимости базиса нормалей $\{n_{\alpha|}\}$.

Доказательство леммы 3. Пусть $Q\in F^l$ и U_Q — окрестность точки Q в M^n. В U_Q можно выбрать такую локальную систему координат $y^1,\ \ldots,\ y^n$, что репер $(\partial/\partial y^i)$ составит базис касательного пространства к F^l в точке Q, а репер $(\partial/\partial y^{l+\alpha})$ — базис нормалей к F^l в M^n. В этих координатах вложение $F^l\subset M^n$ имеет вид

$$\begin{cases}y^l=x^l;\\ y^{l+\alpha}=y^{l+\alpha}(x^1,\ \ldots,\ x^l),\end{cases}\qquad(4.11)$$

причем в точке Q ([13])

$$\frac{\partial^2 y^j}{\partial x^i\,\partial x^k}=0,\quad \frac{\partial y^{l+\alpha}}{\partial x^i}=0,\quad \frac{\partial^2 y^{l+\alpha}}{\partial x^i\,\partial x^j}=A^\alpha_{ij},\qquad(4.12)$$

где A^α_{ij} — компоненты вторых квадратичных форм $F^l\subset M^n$.

Обозначим через Γ^a_{bc} и $\bar\Gamma^i_{jk}$ символы Кристоффеля M^n и F^l соответственно. Тогда в точке Q

$$\bar\Gamma^i_{jk}=0,\quad \Gamma^a_{bc}=0.\qquad(4.13)$$

Наконец, сами метрики σ и g многообразий M^n и F^l в точке Q диагональны:

$$\sigma_{ab} = \delta_{ab}, \; g_{ij} = \delta_{ij}. \tag{4.14}$$

Легко проверить, что выбранные локальные координаты M^n индуцируют такие локальные координаты TM^n, что

а) вложение $TF^l \subset TM^n$ имеет вид

$$\begin{aligned} &y^i = x^i, && w^i = v^i, \\ &y^{l+\alpha} = y^{l+\alpha}(x^1, \ldots, x^l), && w^{l+\alpha} = \frac{\partial y^{l+\alpha}}{\partial x^i} v^i; \end{aligned} \tag{4.15}$$

б) $T\sigma_{AB} = \delta_{AB}$ в точках $\tilde{Q} = (Q, w)$ при любом w;

в) нормали $TF^l \subset TM^n$ имеют координаты $N_\beta = (\delta^b_{l+\beta}; 0)$, $N_{l+\beta} = (-A^b_{ij}v^j, 0 \ldots 0; \; \delta^b_{l+\beta})$.

Запишем систему уравнений для определения вторых квадратичных форм вложения (4.15) ([10] с. 194):

$$\frac{\partial^2 Y^A}{\partial X^I \partial X^J} + \tilde{\Gamma}^A_{BC} \frac{\partial Y^B}{\partial X^I} \frac{\partial Y^C}{\partial X^J} = \overset{*}{\Gamma}{}^M_{IJ} \frac{\partial Y^A}{\partial X^M} + A^\alpha_{IJ} N^A_{\alpha|} + \tilde{A}^{l+\alpha}_{IJ} N^A_{l+\alpha|}, \tag{4.16}$$

где $Y = (y, w)$; $X = (x, v)$; $\tilde{\Gamma}^A_{BC}$ — символы Кристоффеля метрики Сасаки TM^n; $\overset{*}{\Gamma}{}^M_{IJ}$ — символы Кристоффеля связности TF^l, индуцированной метрикой Сасаки TM^n. $\tilde{\Gamma}^A_{BC}$ вычислены в [1] и равны

$$\tilde{\Gamma}^A_{n+b\,n+c} = 0, \; \tilde{\Gamma}^a_{n+b\;c} = -\frac{1}{2} R^a_{cbd} w^d, \quad \tilde{\Gamma}^{n+a}_{n+b\;c} = \Gamma^a_{bc} + \frac{1}{2} \Gamma^a_{fh} R^h_{cbd} w^d w^f,$$

$$\tilde{\Gamma}^a_{bc} = \Gamma^a_{bc} - \frac{1}{2}(R^a_{bhd}\Gamma^h_{fc} + R^a_{chd}\Gamma^h_{fb}) w^b w^f, \; \tilde{\Gamma}^{n+a}_{bc} = \frac{1}{2} \times$$

$$\times \left(R^a_{bcd} + R^a_{cbd} + 2\frac{\partial \Gamma^a_{bc}}{\partial y^d}\right) w^d + \frac{1}{2} \Gamma^a_{dh} (R^h_{bpf}\Gamma^p_{qc} + R^h_{cpf}\Gamma^p_{qb}) w^d w^f w^q.$$

В выбранной системе координат в точке $\tilde{Q}$ отличны от нуля только

$$\tilde{\Gamma}^a_{n+b\;c} = -\frac{1}{2} R^a_{cbd} w^d, \; \tilde{\Gamma}^{n+a}_{bc} = \frac{1}{2}\left(R^a_{bcd} + R^a_{cbd} + 2\frac{\partial \Gamma^a_{bc}}{\partial y^d}\right) w^d$$

и имеют место равенства

$$\ll N_{\alpha|}, N_{\beta|} \gg = \delta_{\alpha\beta}, \; \ll N_{\alpha|}, N_{l+\beta} \gg = 0. \tag{4.17}$$

С учетом (4.14) и (4.17) скалярное умножение (4.16) на N_β дает

$$\tilde{A}^\beta_{IJ} = \sum_{a=1}^{n} \left[\frac{\partial^2 Y^a}{\partial X^I \partial X^J} + \tilde{\Gamma}^a_{bc} \frac{\partial Y^B}{\partial X^I} \frac{\partial Y^C}{\partial X^J}\right] N^a_{\beta|} =$$

$$= \frac{\partial^2 Y^{l+\beta}}{\partial X^I \partial X^J} + \tilde{\Gamma}^{l+\beta}_{BC} \frac{\partial Y^B}{\partial X^I} \frac{\partial Y^C}{\partial X^J}.$$

Отсюда

$$\widetilde{A}^{\beta}_{ij}=\frac{\partial^2 y^{l+\beta}}{\partial x^i\partial x^j}+\widetilde{\Gamma}^{l+\beta}_{n+bc}\frac{\partial w^b}{\partial x^i}\frac{\partial y^c}{\partial x^j}+\widetilde{\Gamma}^{l+\beta}_{bn+c}\frac{\partial y^b}{\partial x^i}\frac{\partial w^c}{\partial x^j}=$$

$$=A^{\beta}_{ij}-\frac{1}{2}\left[R^{l+\beta}_{il+\alpha s}A^{\alpha}_{jt}+R^{l+\beta}_{jl+\alpha s}A^{\alpha}_{it}\right]v^t v^s,$$

$$\widetilde{A}^{\beta}_{il+j}=\widetilde{\Gamma}^{l+\beta}_{in+j}=-\frac{1}{2}R^{l+\beta}_{ijt}v^t,$$

$$\widetilde{A}^{\beta}_{l+i\;l+j}=0.$$

Умножая (4.16) на $N_{l+\beta|}$, получим

$$\widetilde{A}^{l+\alpha}_{IJ}\ll N_{l+\alpha|},\,N_{l+\beta|}\gg=\sum_{A=1}^{2n}\left(\frac{\partial^2 Y^A}{\partial X^I\partial X^J}+\widetilde{\Gamma}^A_{BC}\frac{\partial Y^B}{\partial X^I}\frac{\partial Y^C}{\partial X^J}\right)N^A_{l+\beta|}. \tag{4.18}$$

Обозначим правую часть (4.18) через $\widetilde{\Phi}^{l+\beta}_{IJ}$. Так как $\{N_{l+\alpha|}\}$ линейно независимы, то их определитель Грама невырожден. Поэтому система уравнений (4.18) имеет единственное решение, а именно $\widetilde{A}^{l+\beta}_{IJ}$ выражаются линейной комбинацией элементов $\widetilde{\Phi}^{l+\beta}_{IJ}$. Найдем их

$$\widetilde{\Phi}^{l+\beta}_{ij}=\left[\frac{\partial^2 w^{l+\beta}}{\partial x^i\partial x^j}+\widetilde{\Gamma}^{n+l+\beta}_{BC}\frac{\partial Y^B}{\partial x^i}\frac{\partial Y^C}{\partial x^j}+\widetilde{\Gamma}^k_{BC}\frac{\partial Y^B}{\partial x^i}\frac{\partial Y^C}{\partial x^j}\left(-A^{\beta}_{kt}v^t\right)\right]=$$

$$=\frac{\partial^3 y^{l+\beta}}{\partial x^i\partial x^j\partial x^s}v^s+\frac{1}{2}\left(R^{l+\beta}_{ijs}+R^{l+\beta}_{jis}+2\frac{\partial\Gamma^{l+\beta}_{ij}}{\partial x^s}\right)v^s-$$

$$-\sum_{k=1}^{l}\left(\widetilde{\Gamma}^k_{in+l+\alpha}A^{\alpha}_{sj}v^s+\widetilde{\Gamma}^k_{n+l+\alpha j}A^{\alpha}_{si}v^s\right)A^{\beta}_{kt}v^t=\frac{\partial^3 y^{l+\beta}}{\partial x^i\partial x^j\partial x^s}v^s+$$

$$+\frac{\partial\Gamma^{l+\beta}_{ij}}{\partial x^s}v^s+\frac{1}{2}\left[R^{l+\beta}_{ijm}+R^{l+\beta}_{jim}+\left(R^k_{il+\alpha\,s}A^{\alpha}_{mj}+R^k_{jl+\alpha s}A^{\alpha}_{mi}\right)\times\right.$$

$$\left.\times A^{\beta}_{kt}v^t v^s\right]v^m.$$

Остается заметить, что в выбранных координатах

$$\left[\frac{\partial^3 y^{l+\beta}}{\partial x^i\partial x^j\partial x^s}+\frac{\partial\Gamma^{l+\beta}_{ij}}{\partial x^s}\right]v^s=\overline{\nabla}_v A^{\beta}_{ij},$$

$$\widetilde{\Phi}^{l+\beta}_{il+j}=\frac{\partial^2 y^{l+\beta}}{\partial x^i\partial x^j}+\widetilde{\Gamma}^k_{BC}\frac{\partial Y^B}{\partial x^i}\frac{\partial Y^C}{\partial x^j}\left(-A^{\beta}_{kt}v^t\right)=$$

$$=A^{\beta}_{ij}+\frac{1}{2}R^k_{ijs}A^{\beta}_{kt}v^t v^s,\quad \widetilde{\Phi}^{l+\beta}_{l+i\;l+j}=0.$$

Доказательство леммы 4. По условию, M^n есть метрическое произведение риманова многообразия M^{n-k} на евклидово пространство E^k. Пусть σ — метрика M^n, а g — метрика M^{n-k}. Локальные координаты M^n можно выбрать так, что элемент длины $d\sigma$ будут $d\sigma^2=\sigma_{ab}\,dy^a\,dy^b=\sigma_{ij}\,dy^i\,dy^j+\sum_{\alpha}(dy^{\alpha})^2$, где $i,\ j=1,\ \ldots,\ n-k$; $\alpha=n-k+1,\ \ldots,\ n$; $a,\ b=1,\ \ldots,\ n$.

Вложение M^{n-k} в M^n задается локально так: $y^i = x^i$; $y^\alpha \equiv 0$. Тогда вложение $TM^{n-k} \subset TM^n$ имеет вид $y^i = x^i$, $y^\alpha \equiv 0$, $w^i = v^i$, $w^\alpha \equiv 0$.

Пусть Γ^a_{bc} и Γ^i_{jk} — символы Кристоффеля метрик σ и g соответственно. Тогда $\Gamma_{ij,k} = \Gamma_{ij,k}$, $\Gamma_{ij,\alpha} = \Gamma_{i\alpha,k} = \Gamma_{i\alpha,\beta} = \Gamma_{\gamma\alpha,\beta} = 0$.

Так как в выбранных координатах $\sigma_{ij} = g_{ij}$, то, пользуясь локальным выражением метрики Сасаки (1.2), найдем

$$T\sigma_{ij} = \sigma_{ij} + \Gamma^h_{ic}\Gamma_{id,h}w^c w^d = g_{ij} + \overline{\Gamma}^m_{is}\Gamma_{jt,m}v^t v^s = Tg_{ij};$$

$$T\sigma_{i\alpha} = \sigma_{i\alpha} + \Gamma^h_{ic}\Gamma_{\alpha d,h}w^c w^d = 0,$$

$$T\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta} + \Gamma^h_{\alpha c}\Gamma_{\beta d,h}w^c w^d = \delta_{\alpha\beta},$$

$$T\sigma_{in+j} = \Gamma_{ia,j}w^a = \overline{\Gamma}_{im,j}v^m = Tg_{in-k+j},$$

$$T\sigma_{\alpha n+j} = T\sigma_{in+\beta} = T\sigma_{\alpha n+\beta} \equiv 0,$$

$$T\sigma_{n+i\,n+j} = \sigma_{ij} = g_{ij} = Tg_{n-k+i,\,n-k+j},$$

$$T\sigma_{n+\alpha\,n+j} = 0,\ T\sigma_{n+\alpha\,n+\beta} = \delta_{\alpha\beta}.$$

Поэтому элемент длины метрики $T\sigma$ имеет вид

$$\begin{aligned} d(T\sigma)^2 &= T\sigma_{ab}\,dy^a\,dy^b + 2T\sigma_{an+b}\,dy^a\,dw^b + T\sigma_{n+a\,n+b}\,dw^a\,dw^b = \\ &= Tg_{ij}\,dx^i\,dx^j + \sum_\alpha (dx^\alpha)^2 + 2Tg_{n-k+ji}\,dv^j\,dx^i + \\ &+ Tg_{n-k+i\,n-k+j}\,dv^i\,dv^j + \sum_\alpha (dv^\alpha)^2 = \\ &= d(Tg)^2 + \sum_\alpha ((dx^\alpha)^2 + (dv^\alpha)^2). \end{aligned}$$

Доказательство леммы 5. По условию, F^l есть цилиндр в E^n. Это значит, что радиус-вектор поверхности F^l имеет вид

$$r = \rho(x^1, \ldots, x^{l-k}) + \sum_\alpha x^\alpha E_\alpha,$$

где $\rho(x^1, \ldots, x^{l-k})$ — радиус-вектор поверхности F^{l-k}; E_α — постоянные векторы; $\alpha = l-k+1, \ldots, l$.

Пусть R — радиус-вектор поверхности TF^l. Тогда

$$\begin{aligned} R &= r + \frac{\partial r}{\partial x^i}v^i = \rho + \sum_\alpha x^\alpha E_\alpha + \frac{\partial\rho}{\partial x^\mu}v^\mu + \sum_\alpha v^\alpha E_{l+\alpha} = \\ &= \left(\rho + \frac{\partial\rho}{\partial x^\mu}v^\mu\right) + \sum_\alpha (x^\alpha E_\alpha + v^\alpha E_{l+\alpha}), \end{aligned}$$

где $\mu = 1, \ldots, l-k$.

Но $\rho + \frac{\partial\rho}{\partial x^\mu}v^\mu$ есть радиус-вектор поверхности TF^{l-k}. Отсюда следует утверждение леммы.

5. **Индуцированная метрика.** В этом разделе мы докажем замечание к теореме 3 из п. 1. Рассмотрим цилиндр $F^2 \subset E^3$: $y^1 = x^1,\ y^2 = x^2,\ y^3 = \frac{1}{2}(x^1)^2$.

Цилиндр F^2 с индуцированной из E^3 метрикой g изометричен плоскости E^2. Как доказано в [11], метрика Сасаки Tg также плоская, т. е. TF^2 изометрично E^4.

Рассмотрим TF^2 как поверхность в TE^3. Так как метрика Сасаки TE^3 евклидова, то TF^2 можно рассматривать как поверхность в E^6, которая задается так: $r = \left(x^1,\ x^2,\ \frac{1}{2}(x^1)^2;\ \ v^1,\ \ v^2,\ x^1v^1\right)$, индуцированная из E^6 метрика G имеет вид

$$G = \left[\begin{array}{cc|cc} 1+(x^1)^2+(v^1)^2 & 0 & x^1v^1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline x^1v^1 & 0 & 1+(x^1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Поверхность TF^2 имеет в E^6 следующие нормали:

$$\eta_1 = (-x^1,\ 0,\ 1;\ 0,\ 0,\ 0),\quad \eta_2 = (-v^1,\ 0,\ 0;\ -x^1,\ 0,\ 1).$$

Дальнейшие вычисления будем производить в точке $\tilde{Q} = (0, 0;\ v^1,\ v^2) \in TF^2$.

Так как в E^6 компоненты вторых квадратичных форм $\tilde{A}^\alpha_{IJ} = \left\langle \frac{\partial^2 r}{\partial X^I \partial X^J},\ n_{\alpha|}\right\rangle$, где $n_{\alpha|}$ — единичные нормали к TF^l, то в точке $\tilde{Q}$ будет

$$\tilde{A}^1 = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],\quad \tilde{A}^2 = \frac{1}{\sqrt{1+(v^1)^2}}\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Из уравнений Гаусса получим

$$\tilde{R}_{1313} = \sum_{\alpha=1}^{2} (A^\alpha_{11}A^\alpha_{33} - (A^\alpha_{13})^2) = -(\tilde{A}^2_{13})^2 = -\frac{1}{\sqrt{1+(v^1)^2}}.$$

Следовательно, G и Tg не изометричны.

Второе утверждение замечания выделим отдельно.

Лемма 6. *Пусть g — метрика, индуцированная на подмногообразии $F^l \subset M^n$ метрикой σ многообразия M^n. Пусть G — метрика, индуцированная на TF^l метрикой Сасаки $T\sigma$, а Tg — метрика Сасаки TF^l. Метрики G и Tg совпадают тогда и только тогда, когда F^l вполне геодезично в M^n.*

Доказательство. Через Γ^a_{bc}, $\bar{\Gamma}^A_{BC}$ и $\bar{\Gamma}^i_{jk}$ будем обозначать символы Кристоффеля метрик σ, $T\sigma$ и g соответственно. Тогда

$$T\sigma = \left[\begin{array}{c|c} \sigma_{ab} + \sigma_{cd}\Gamma^c_{ah}\Gamma^d_{bf}w^h w^f & \sigma_{ac}\Gamma^c_{bd}w^d \\ \hline \sigma_{ac}\Gamma^c_{bd}w^d & \sigma_{ab} \end{array}\right],$$

$$Tg = \left[\begin{array}{c|c} g_{ij} + g_{km}\bar{\Gamma}^k_{it}\bar{\Gamma}^m_{js}v^t v^s & g_{jm}\bar{\Gamma}^m_{it}v^t \\ \hline g_{jm}\bar{\Gamma}^m_{it}v^t & g_{ij} \end{array}\right]. \tag{5.1}$$

Индуцированная на TF^l метрика имеет компоненты

$$G_{IJ} = T\sigma_{AB}\frac{\partial Y^A}{\partial X^I}\frac{\partial Y^B}{\partial X^J}, \tag{5.2}$$

где, как и ранее, $Y = (y,\ w)$, $X = (x,\ v)$. Используя (5.1) и (5.2) получим

$$G_{ij} = T\sigma_{ab}\frac{\partial Y^a}{\partial X^i}\frac{\partial Y^b}{\partial X^j} + T\sigma_{a\ n+b}\frac{\partial Y^a}{\partial X^i}\frac{\partial Y^{n+b}}{\partial X^j} + T\sigma_{n+a\ b}\frac{\partial Y^{n+a}}{\partial X^i}\frac{\partial Y^b}{\partial X^j} +$$
$$+ T\sigma_{n+a\ n+b}\frac{\partial Y^{n+a}}{\partial X^i}\frac{\partial Y^{n+b}}{\partial X^j} = g_{ij} + \sigma_{cd}\left(\frac{\partial^2 y^c}{dx^i dx^t} + \Gamma^c_{ah}\frac{\partial y^a}{\partial x^i}\frac{dy^h}{\partial x^t}\right)\times$$
$$\times\left(\frac{\partial^2 y^d}{\partial x^j dx^s} + \Gamma^d_{bf}\frac{\partial y^b}{\partial x^j}\frac{\partial y^f}{\partial x^s}\right)v^t v^s = g_{ij} + \sigma_{cd}\left(A^\alpha_{it}n^c_\alpha + \Gamma^k_{ti}\frac{\partial y^c}{\partial x^k}\right)\times$$
$$\times\left(A^\beta_{js}n^d + \Gamma^m_{sj}\frac{\partial y^d}{\partial x^m}\right)v^t v^s = g_{ij} + g_{km}\bar{\Gamma}^k_{ti}\Gamma^m_{sj}v^t v^s +$$
$$+ A^\alpha_{it}A^\beta_{js}v^t v^s\sigma_{cd}n^c_{\alpha|}n^d_{\beta|} = Tg_{ij} + \sum_{\alpha=1}^{n-l}A^\alpha_{it}A^\alpha_{js}v^t v^s;$$

$$G_{i\ l+j} = T\sigma_{AB}\frac{\partial Y^A}{\partial X^i}\frac{\partial Y^B}{\partial X^{l+j}} = T\sigma_{a\ n+b}\frac{\partial Y^a}{\partial X^i}\frac{\partial w^b}{\partial v^j} + T\sigma_{n+a\ n+b}\frac{\partial w^a}{\partial x^i}\frac{\partial w^b}{\partial x^j} =$$
$$= \sigma_{ab}\frac{\partial y^b}{\partial x^j}\left(\frac{\partial^2 y^a}{\partial x^i\partial x^t} + \Gamma^a_{cd}\frac{\partial y^c}{\partial x^t}\frac{\partial y^d}{dx^i}\right)v^t =$$
$$= \sigma_{ab}\frac{\partial y^b}{\partial x^j}\left(A^\alpha_{it}n^a_{\alpha|} + \bar{\Gamma}^k_{ti}\frac{\partial y^a}{\partial x^k}\right) = g_{jk}\bar{\Gamma}^k_{ti}v^t = Tg_{i\ l+j};$$

$$G_{l+i\ l+j} = T\sigma_{AB}\frac{\partial Y^A}{\partial X^{l+i}}\frac{\partial Y^B}{\partial X^{l+j}} = T\sigma_{n+a\ n+b}\frac{\partial w^a}{\partial v^i}\frac{\partial w^b}{\partial v^j} = g_{ij} = Tg_{l+i\ l+i}.$$

Итак, доказано, что если $\{n_{\alpha|}\}$ — ортонормированный базис нормалей к $F^l \subset M^n$, то

$$G_{ij} = Tg_{ij} + \sum_{\alpha=1}^{n-l}A^\alpha_{ti}A^\alpha_{sj}v^t v^s,\ G_{i\ l+j} = Tg_{i\ l+j},\ G_{l+i\ l+j} = Tg_{l+i\ l+j}.$$

Если F^l вполне геодезично, то очевидно, что G и Tg совпадают. Обратно, пусть G и Tg совпадают. Это значит, что $\sum\limits_{\alpha=1}^{n-l}A^\alpha_{it}\times$ $\times A^\alpha_{is}v^t v^s = 0$ в любой точке $(x,\ v) \in TF^l$. В частности, если $v =$

$= 0,\ 0 \ldots 0,\ \lambda\delta_s^t,\ 0 \ldots 0)$, то $\sum_\alpha [A_{it}^\alpha]^2 \lambda^2 = 0$ при любом λ. Следовательно, в любой точке $x \in F^l$ будет $A_{it}^\alpha \equiv 0$ при всех α, i, t. Таким образом, F^l вполне геодезична в M^n.

Список литературы: 1. *Sasaki S.* On the differential geometry of tangent bundle Riemannian manifold.—Tohoku Math. Jorn., 1958, **10**, N 3, p. 338—354. 2. *Dombrowski P.* On the geometry of tangent bundle.—Jorn. reine und angew. Math., 1962, **210**, N 1—2, p. 73—88. 3. *Chern S., Kuiper N.* Some theorems on the isometric imbeddings of compact Riemannian manifolds in Eucliadian space.—Ann of Math., 1952, **53**, N 3, p. 422—430. 4. *Maltz P.* The nullity spaces of curvature-like tensors.—Jorn. diff. geom., 1972, v 1, N 3—4, p. 519—529. 5. *Борисенко А. А.* О параболических поверхностях в евклидовом пространстве.— Укр. геометр. сб., 1982, вып. 25, с. 3—5. 6. *Hartman P.* On isometric immersions in Eucliadian space of manifolds with non-negative sectional curvatures.— Trans. Amer. Math. Soc., 1970, **147**, p. 529—540. 7. *Ianus S.* Some submanifolds in the tangent bundles.— Proc. Math. Semin. on Finsler Spaces.— Brasov, 1980, p. 69—75. 8. *Liu M.-S.* Affine maps of tangent bundles with Sasaki metrics.— Tensor., NS, 1974, **28**, p. 34—72. 9. *Walczak P.* On totally geodesic submanifolds of tangent bundles with Sasaki metrics.— Bull. Acad. Polon. Sci; Ser Sci math., 1980, XXVIII, N 3—4, p. 161—165. 10. *Эйзенхарт Л.* Риманова геометрия.—М.: Наука, 1948.— 316 с. 11. *Kowalski O.* On the curvature of indused Riemannian metric on the tangent bundle of Riemannian manifold.— Jorn. reine und angew. Math., 1971, **250**, p. 124—129. 12. *Yano K., Ishihara T.* Tangent and cotangent bundles. Differential geometry.— M. Dekker, 1973.— 425 с. 13. *Кобаяси К., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии, т. 2.— М.: Мир, 1980.— 470 с.

Поступила в редколлегию 10.09.84

УДК 513

А. А. БОРИСЕНКО

О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ МНОГОМЕРНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Поверхность $F^l \subset E^n$ называется а) k-седловой, б) k-выпуклой, если вторая квадратичная форма поверхности относительно каждой нормали после приведения к диагональному виду имеет а) не более k коэффициентов одного знака, б) не менее k коэффициентов одного знака, включая нулевые.

Если вторая квадратичная форма поверхности положительно определена относительно одной из нормалей, то поверхность называется строго выпуклой.

Если ранг второй квадратичной формы поверхности F^l относительно одной из нормалей равен l, то поверхность называется невырожденной.

Определение k-седловой поверхности дано С. З. Шефелем. Ранее им дано другое определение k-выпуклой поверхности.

Теорема 1. *а) Пусть F^l есть строго k-выпуклая поверхность в евклидовом пространстве E^n. Если $k > 2l/3$, то в каждой точке найдется гиперплоскость нормалей такая, что подпространство вторых квадратичных форм относительно нормалей, лежащих в гиперплоскости, является $(l-k)$*-седловым;

б) если F^l есть невырожденная k-выпуклая поверхность, то аналогичное утверждение справедливо при $k > 3l/4$.

В каждой точке Q строго k-выпуклой $(k > 2l/3)$ поверхности F^l найдется плоскость $E^{2k-l} \subset T_Q F^l$ такая, что ограничение вторых квадратичных форм поверхности на эту плоскость совпадает со второй квадратичной формой выпуклой $(2k-l)$-мерной поверхности положительной секционной кривизны $F^{2k-l} \subset E^{2k-l+1}$ в евклидовом пространстве E^n.

Пусть n_0 — единичная нормаль, относительно которой вторая квадратичная форма поверхности положительно определена, n — произвольная нормаль, перпендикулярная n_0.

Лемма 1. *Пусть A есть l-мерная квадратичная форма. Если ограничение формы A на плоскость $E^k \subset E^l$ положительно определено, то форма имеет не менее k положительных собственных значений.*

Доказательство непосредственно следует из вариационного принципа для собственных значений.

Лемма 2. *Пусть F^l — строго k-выпуклая поверхность в E^n. Тогда в плоскости нормалей $\lambda n_0 + \mu n$ найдется нормаль ν такая, что вторая квадратичная форма относительно этой нормали имеет не более $l - k$ собственных значений одного знака. Если $k > 2l/3$, то нормаль ν — единственная.*

Доказательство. При $\mu = 0$, $\lambda = 1$ все собственные значения положительны; при $\mu = 0$, $\lambda = -1$ все собственные значения отрицательны. Так как для каждой нормали число собственных значений одного знака $\geqslant k$, то найдется нормаль $\nu = \lambda n_0 + \mu n$, относительно которой $m_0 + m_+ \geqslant k$, $m_0 + m_- \geqslant k$, $m_0 + m_+ + m_- = l$, где m_0, m_+, m_- — соответственно число нулевых, положительных, отрицательных собственных значений. Отсюда получаем

$$m_+ \leqslant l - k, \ m_- \leqslant l - k, \ m_0 \geqslant 2k - l. \tag{1}$$

Плоскость $E^s \subset T_pF^l$ называется асимптотической относительно нормали N, если ограничение второй квадратичной формы $A(N)$ на плоскость E^s есть нулевая форма.

Пусть $E^s \subset TF^l$ — асимптотическая плоскость второй квадратичной формы $A(\nu)$ поверхности относительно нормали ν. Из леммы 1 следует, что $s \geqslant k$. Из положительной определенности квадратичной формы $A(n_0)$ следует, что $A(\lambda n_0 + \mu n)|_{E^s}$, где $\lambda n_0 + \mu n \neq \pm\nu$, есть знакоопределенная форма. Из леммы 1 следует, что для форм $A(\lambda n_0 + \mu n)$ либо $m_+ > 2l/3$, либо $m_- > 2l/3$, что противоречит неравенству (1). Отсюда следует единственность нормали ν.

Лемма 3 [1]. *Пусть A — подпространство симметрических матриц, максимальный ранг которых $r < l$. Тогда найдется ортогональный базис, в котором матрицы из подпространства имеют следующий вид:*

$$\left(\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline A_2 & 0 \end{array}\right),$$

где нулевая матрица является квадратной порядка $(l - r) \times \times (l - r)$.

Доказательство теоремы 1. а) Пусть $S(\nu)$ — множество единичных нормалей в фиксированной точке P, удовлетворяющих условию леммы 2. Пусть ν_1, $\nu_2 \in S(\nu)$; E^2 — плоскость, натянутая на эти нормали; $E_1^{s_1}$, $E_2^{s_2}$ — асимптотические плоскости относительно нормалей ν_1, ν_2. Из леммы 2 следует, что $s_1 \geqslant k$, $s_2 \geqslant k$.

Поэтому размерность асимптотической плоскости относительно нормалей $N = \lambda_1 \nu_1 + \lambda_2 \nu_2$ не меньше

$$\dim E_1^{s_1} \cap E_2^{s_2} \geqslant 2k - l > l/3 \qquad (2)$$

при $k > 2l/3$. С другой стороны, $N = \lambda n_0 + \mu n$, где $(n, n_0) = 0$. Если $N \neq \nu \in S(\nu)$, то для нее либо m_+, либо m_- больше $2l/3$. Но в этом случае размерность асимптотической плоскости $< l/3$ [1], что противоречит (2). Поэтому $N \in S(\nu)$ и множество $S(\nu)$ является большой гиперсферой в сфере единичных нормалей к поверхности в точке P.

Так как по лемме 2 ранг подпространства квадратичных форм $A(\nu)$ не больше $2(l-k)$, то по лемме 3 найдется плоскость E^{2k-l}, асимптотическая для всех квадратичных форм $A(\nu)$ одновременно. Ограничение второй квадратичной формы поверхности на эту плоскость — вторая квадратичная форма выпуклой гиперповерхности.

Требование $k > 2l/3$ существенно. Поверхность $F^6 \subset E^{10}$, заданная уравнениями

$$z_1 = \sum_{i=1}^{6} x_i^2, \; z_2 = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2, \; z_3 = x_3^2 + x_4^2 - x_5^2 - x_6^2,$$
$$z_4 = -x_1^2 - x_2^2 + x_5^2 + x_6^2,$$

является 4-выпуклой, но не является 2-седловой на трехмерной плоскости нормалей.

В работе [2] было показано, что k-седловая поверхность в сферическом пространстве $S^n \subset E^{n+1}$ — строго $(l-k)$-выпуклая в E^{n+1}. В теореме 1, пункт а), доказано обратное утверждение, т. е. пространство вторых квадратичных форм в точке строго k-выпуклой поверхности $(k > 2l/3)$ в евклидовом пространстве с точностью до аффинного преобразования совпадает с пространством квадратичных форм $(l-k)$-седловой поверхности в сферическом пространстве, если ее рассматривать как поверхность в евклидовом пространстве.

б) Пусть n_0 — нормаль, для которой вторая квадратичная форма невырождена и $k > 3l/4$. В плоскости нормалей $\lambda n_0 + \mu n$, $(n, n_0) = 0$, найдется нормаль ν, для которой m_+, m_-, m_0 удовлетворяют неравенству (1). Поэтому размерность асимптотической плоскости относительно нормали ν не меньше $3l/4$. Отсюда следует, что для нормалей $\lambda n_0 + \mu n \neq \nu$ размерность асимптотической плоскости меньше $l/2$ и нормаль ν единственна.

Пусть $S(\nu)$ — множество единичных нормалей, удовлетворяющих неравенству (1). Пусть $\nu_1, \nu_2 \in S(\nu)$, E^2 — плоскость, натянутая на эти нормали; $E_1^{s_1}$, $E_2^{s_2}$ — асимптотические плоскости относительно нормалей ν_1, ν_2; $s_1 \geqslant 3l/4$, $s_2 \geqslant 3l/4$. Отсюда следует, что размерность асимптотической плоскости относительно нормалей

$N = \lambda_1 n_1 + \lambda_2 n_2$ не меньше $l/2$. Поэтому $N \in S(\nu)$ и множество $S(\nu)$ является большой гиперсферой в сфере единичных нормалей.

Поверхность $F^l \subset E^n$ называется сильно k-выпуклой, если выполняются следующие условия:

1) в каждой точке существуют плоскость $E^k(Q) \subset T_Q F^l$ и нормаль N такие, что для любого вектора $x \in E^k(Q)$ и любой нормали n, перпендикулярной N, справедливо $A(n, Q)x = 0$, $A(N, Q)x \subset \subset E^k(Q)$, где $A(n, Q)$ — матрица второй квадратичной формы относительно нормали n в точке Q;

2) ограничение второй квадратичной формы поверхности относительно нормали N на плоскость $E^k(Q)$ — знакоопределенная форма;

3) плоскость, удовлетворяющая условию $A(n, Q)x = 0$, совпадает с плоскостью $E^k(Q)$.

Относительно плоскости $E^k(Q)$ существует единичная нормаль, удовлетворяющая определению. Если распределение $E^k(Q)$ регулярно, то поле нормалей $N(Q)$ регулярно.

Теорема 2. *Пусть F^l — сильно k-выпуклая поверхность в евклидовом пространстве с регулярным распределением $E^k(Q) \subset T_Q F^l$. Если поле нормалей $N(Q)$ параллельно в нормальном расслоении, то распределение $E^k(Q)$ голономно. Интегральные подмногообразия суть вполне геодезические подмногообразия, изометричные между собой. С точки зрения внешней геометрии они являются выпуклыми конгруэнтными гиперповерхностями в евклидовом пространстве E^{k+1}.*

Доказательство. На поверхности F^l в окрестности точки Q выберем регулярные поля единичных нормалей n_1, n_α ($\alpha = = 2, \ldots, p$) так, чтобы $n_1 = N$, $(n_1, n_\alpha) = 0$, $(n_\alpha, n_\beta) = \delta_{\alpha\beta}$. Если регулярные векторные поля $X(Q)$, $Y(Q) \in E^k(Q)$, то

$$A^\alpha_{ij} x^j = 0, \; A^\alpha_{ij} y^j = 0, \tag{3}$$

где A^α_{ij} — вторые квадратичные формы, отвечающие нормалям n_α. Тогда

$$\frac{\partial A^\alpha_{ij}}{\partial u^s} x^j + A^\alpha_{ij} \frac{\partial x^j}{\partial u^s} = 0; \; \frac{\partial A^\alpha_{ij}}{\partial u^s} y^j + A^\alpha_{ij} \frac{\partial y^j}{\partial u^s} = 0. \tag{4}$$

В точке Q выберем координаты так, чтобы

$$x^j = \delta^j_\sigma; \; y^j = \delta^j_\gamma; \; \gamma \neq \delta; \; \gamma, \; \sigma = l - k + 1, \; \ldots, \; l. \tag{5}$$

Тогда

$$A^\alpha_{i\sigma} = A^\alpha_{i\gamma} = 0, \; i = 1, \; \ldots, \; l. \tag{6}$$

Подставив (5), (6) в (4), получим

$$\frac{\partial A^\alpha_{i\sigma}}{\partial u^s} x^j + A^\alpha_{ij} \frac{\partial x^j}{\partial u^s} = 0. \tag{7}$$

Из формул Колацци

$$\frac{\partial A^{\alpha}_{i\sigma}}{\partial u^{\gamma}} - \Gamma^{s}_{i\gamma}A^{\alpha}_{\sigma s} - \frac{\partial A^{\alpha}_{i\gamma}}{\partial u^{\sigma}} + \Gamma^{s}_{i\sigma}A^{\alpha}_{\gamma s} =$$

$$= \sum_{\beta=2}^{p} (\nu_{\beta\alpha|\gamma}A^{\beta}_{i\sigma} - \nu_{\beta\alpha|\sigma}A^{\beta}_{i\gamma}). \qquad (8)$$

Суммирование по β начинается с 2, так как поле n_1 параллельно в нормальном расслоении и коэффициенты кручения $\nu_{1\alpha|i} = 0$. Из (6) следует, что правая часть (8) равна нулю. Отсюда

$$\frac{\partial A^{\alpha}_{i\sigma}}{\partial u^{\gamma}} = \frac{\partial A^{\alpha}_{i\gamma}}{\partial u^{\sigma}}. \qquad (9)$$

Из уравнений (7) и (9) следует

$$A^{\alpha}_{ij}\left(\frac{\partial x^{j}}{\partial u^{\gamma}} - \frac{\partial y^{j}}{\partial u^{\sigma}}\right) = 0. \qquad (10)$$

Скобка Ли векторных полей в фиксированной точке Q имеет вид

$$[X,\ Y]^{j} = \frac{\partial x^{j}}{\partial u^{s}}y^{s} - \frac{\partial y^{j}}{\partial u^{s}}x^{s} = \frac{\partial x^{j}}{\partial u^{\gamma}} - \frac{\partial y^{j}}{\partial u^{\sigma}}. \qquad (11)$$

Из (10) и (11) следует, что $[X,\ Y] \subset E(Q)$, т. е. распределение $E^{k}(Q)$ голономно.

Умножим (7) на y^{s} и просуммируем по s:

$$\frac{\partial A^{\alpha}_{i\sigma}}{\partial u^{s}}x^{j}y^{s} + A^{\alpha}_{ij}\frac{\partial x^{j}}{\partial u^{s}}y^{s} = 0. \qquad (12)$$

Из уравнений (3), (4), (9) и (12) следует, что

$$A^{\alpha}_{ij}\frac{\partial x^{j}}{\partial u^{s}}y^{s} = A^{\alpha}_{is}y^{s}\frac{\partial x^{j}}{\partial u^{i}} = 0.$$

Отсюда получим, что $\nabla_{Y}X \subset E^{k}(Q)$, т. е. слои $E^{k}(Q)$ вполне геодезичны.

Так как вторые квадратичные формы слоя как поверхности в пространстве знакоопределены, то слой F^{k} — выпуклая гиперповерхность в некоторой гиперплоскости E^{k+1} [3].

Пусть индексы $i,\ j,\ s = 1,\ \ldots,\ l-k$; $\gamma,\ \delta,\ \sigma = l-k+1,\ \ldots,\ l$; $B,\ C = 1,\ \ldots,\ l$. Выберем вдоль слоя F^{k} координаты v_{γ} так, чтобы при $v_{\gamma} = 0$ было

$$\Gamma^{\sigma}_{\gamma\delta} = 0,\ \ \Gamma^{i}_{\gamma\delta} = 0$$

вследствие вполне геодезичности слоя. Вдоль фиксированного слоя $g_{\gamma i} = 0$, поэтому

$$\Gamma^{i}_{\gamma\delta} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\gamma\delta}}{\partial u_{i}} = 0. \qquad (13)$$

Из параллельности в нормальном расслоении поля $N = n_1$ и из уравнений Кодацци следует

$$\frac{\partial A^1_{\gamma\delta}}{\partial u_i} - \Gamma^B_{\gamma i} A^1_{\delta B} = \frac{\partial A^1_{\gamma i}}{\partial v_\delta} - \Gamma^B_{\gamma\delta} A_{iB}.$$

Так как вдоль слоя $A^1_{\gamma i} = 0$, $\Gamma^A_{\gamma\delta} = 0$ и $\Gamma^\delta_{\gamma i} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\gamma\delta}}{\partial u_i} = 0$, то

$$\frac{\partial A^1_{\gamma\delta}}{\partial u_i} = 0. \tag{14}$$

Так как нормаль к F^l вдоль слоя F^k — нормаль к гиперповерхности $F^k \subset E^{k+1}$ и форма $A^1_{\gamma\delta}$ — вторая квадратичная форма гиперповерхности F^k, то из (13) и (14) следует, что слои конгруэнтны.

Поверхность $F^l \subset E^n$ называется k-асимптотической, если для каждой нормали ν найдется плоскость $E^k \subset T_Q F^l$ такая, что ограничение второй квадратичной формы $A(\nu)$ на плоскость E^k есть нулевая форма.

С. З. Шефель ввел определение k-седловых поверхностей. Оказывается, что k-седловая поверхность является $(l-k)$-асимптотической и k-асимптотическая поверхность — $(l-k)$-седловой, т. е. эти два класса поверхностей совпадают. Порядок асимптотичности $k = l - (r - j)$, а порядок седлообразности равен $r - j$, где r — ранг точки поверхности, j — тип [1].

Асимптотичность поверхности существенна при непрерывных и бесконечно малых изгибаниях многомерных поверхностей коразмерности $p = l(l+1)/2$, где l — размерность поверхности. Это следует из работ Джакобовича [4] и К. Тененблат [5].

Поверхность $F^l \subset E^n$ называется сильно k-асимптотической, если найдется плоскость $E^k \subset T_Q F^l$ такая, что ограничение второй квадратичной формы относительно каждой нормали на эту плоскость есть нулевая форма.

Из [1] следует, что k-асимптотическая поверхность является сильно $(2k-l)$-асимптотической.

Пусть семейство плоскостей $E^k(Q) \subset T_Q F^l$ образует регулярное распределение. Выясним достаточные условия голономности сильно асимптотического распределения.

Теорема 3. *Пусть $E^k(Q)$ — сильно асимптотическое дифференцируемое распределение на поверхности F^l. Если размерность пространства вторых квадратичных форм максимальна и равна в каждой точке $l(l+1)/2 - k(k+1)/2$, то распределение $E^k(Q)$ голономно.*

Доказательство. Из условия теоремы следует, что можно выбрать нормальные векторные поля $n_{\alpha\beta}$, $\alpha = 1, \ldots, l-k$; $\beta = 1, \ldots, l$, так, чтобы в каждой точке они составляли базис нормального пространства и вторые квадратичные формы имели вид

$$A^{\alpha\beta}_{ij} = \delta_{i\alpha}\delta_{j\beta}c_{\alpha\beta}, \tag{15}$$

где $\delta_{i\alpha}$ — символ Кронекера, $i, j=1, \ldots, l$, $c_{\alpha\beta}\neq 0$ — функции точки. Если ортогональный базис в фиксированной точке Q_0 выбрать так, чтобы оси $x_{l-k+1}, \ldots, x_l$ лежали в асимптотической плоскости $E(Q_0)$, то матрицы вторых квадратичных форм в этой точке будут такими:

$$A^{\alpha\beta}_{\delta\gamma}=0, \quad \delta,\gamma=l-k+1, \ldots, l. \tag{16}$$

Векторные поля Y_γ, составляющие в каждой точке базис плоскости $E(Q)$, выберем так, чтобы в точке Q_0 они совпадали с единичными координатными векторами вдоль осей $x_\gamma(\gamma=l-k+1, \ldots, l)$, т. е. в точке Q_0 координаты векторного поля

$$y^i_\gamma=\delta^i_\gamma. \tag{17}$$

По условию асимптотичности

$$A^{\alpha\beta}_{ij}y^i_\gamma y^j_\delta=0. \tag{18}$$

Продифференцируем уравнение (18) по u_s, $s=1, \ldots, l$, где u_s — параметризация поверхности,

$$\frac{\partial A^{\alpha\beta}_{ij}}{\partial u_s}y^i_\gamma y^j_\delta+A^{\alpha\beta}_{ij}\frac{\partial y^i_\gamma}{\partial u_s}y^j_\delta+A^{\alpha\beta}_{ij}y^i_\gamma\frac{\partial y^j_\delta}{\partial u_s}=0. \tag{19}$$

Из равенств (15), (16), (17), (19) следует, что в точке Q_0

$$\frac{\partial A^{\alpha\beta}_{\gamma\delta}}{\partial u_s}+A^{\alpha\beta}_{i\delta}\frac{\partial y^i_\gamma}{\partial u_s}+A^{\alpha\beta}_{j\gamma}\frac{\partial y^j_\delta}{\partial u_s}=0.$$

Если $\gamma=\beta$, $\delta\neq\beta$, то

$$\frac{\partial A^{\alpha\beta}_{\delta\beta}}{\partial u_s}+A^{\alpha\beta}_{\alpha\beta}\frac{\partial y^\alpha_\delta}{\partial u_s}=0. \tag{20}$$

Осуществим невырожденное аффинное преобразование евклидова пространства так, чтобы нормали $n_{\alpha\beta}$ в точке Q_0 стали ортогональными и относительно них вторые квадратичные формы удовлетворяли условию (15). При этом свойство голономности (неголономности) распределения $E^k(Q)$ сохраняется.

При $i=\beta$, $j=\sigma$, $s=\delta(\sigma, \delta, \beta>l-k)$ в точке Q_0 с учетом выбора на поверхности такой системы координат, чтобы $\Gamma^m_{is}(Q_0)=0$, уравнения Кодацци запишутся следующим образом:

$$\frac{\partial A^{\alpha\beta}_{\beta\delta}}{\partial u_\sigma}-\frac{\partial A^{\alpha\beta}_{\alpha\sigma}}{\partial u_\delta}=\mu_{\alpha\beta|\beta\sigma}A^{\beta\sigma}_{\beta\sigma}-\mu_{\alpha\beta|\beta\delta|\sigma}A^{\beta\delta}_{\beta\delta}.$$

Так как $A^{\beta\sigma}_{\beta\sigma}=A^{\beta\delta}_{\beta\delta}=0$ при $\sigma, \delta, \beta>l-k$, то

$$\frac{\partial A^{\alpha\beta}_{\beta\delta}}{\partial u_\sigma}-\frac{\partial A^{\alpha\beta}_{\beta\sigma}}{\partial u_\delta}=0. \tag{21}$$

Из равенств (20), (21) следует, что

$$A_{\alpha\beta}^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial y_{\delta}^{\alpha}}{\partial u_{\sigma}}-\frac{\partial y_{\sigma}^{\alpha}}{\partial u_{\beta}}\right)=0.$$

Поэтому при $\alpha<l-k$, $\delta,\sigma>l-k$ будет

$$\frac{\partial y_{\delta}^{\alpha}}{\partial u_{\sigma}}-\frac{\partial y_{\sigma}^{\alpha}}{\partial u_{\beta}}=0. \tag{22}$$

Скобка Ли векторных полей Y_δ, Y_σ в точке Q_0 равна

$$[Y_\delta,\ Y_\sigma]^i=\left[\frac{\partial y_{\delta}^{i}}{\partial u_s}\overset{s}{y_\sigma}-\frac{\partial y_{\sigma}^{i}}{\partial u_s}\overset{s}{y_\delta}\right]=\frac{\partial y_{\delta}^{i}}{\partial u_{\sigma}}-\frac{\partial y_{\sigma}^{i}}{\partial u_{\delta}}.$$

Из (22) следует, что $[Y_\delta, Y_\sigma]\subset E^k(Q)$. Из произвольности выбора фиксированной точки Q_0 следует голономность распределения.

Список литературы: 1. *Борисенко А. А.* О строении l-мерных поверхностей с вырожденной второй квадратичной формой. — Укр. геометр. сб., 1972, вып. 13, с. 18—27. 2. *Борисенко А. А.* О внешне геометрических свойствах параболических поверхностей и топологических свойствах седловых поверхностей в симметрических пространствах ранга один. — Мат. сб., 1981, 116, (158), № 3 (11), с. 440—457. 3. *Шефель С. З.* О двух классах k-мерных поверхностей в n-мерном евклидовом пространстве. — Сиб. мат. журн., 1969, **X**, № 2, с. 459—467. 4. *Jacobowitz.* Local isometric embeddings. — Ann. Math. Stud., 1982, N 102, p. 381—393. 5. *Tenenblat K.* On infinitesimal isometric deformations. — Proc. Amer. Math. Soc., 75, 1979, p. 269—275.

Поступила в редколлегию 14.09.84.

УДК 513

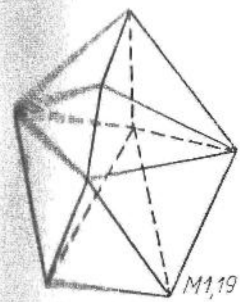
А. М. ГУРИН

РЕАЛИЗАЦИЯ СЕТЕЙ ВЫПУКЛЫХ МНОГОГРАННИКОВ С РАВНОУГОЛЬНЫМИ ВЕРШИНАМИ. 4

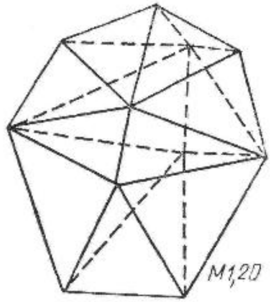
Теорема. *В трехмерном евклидовом пространстве все мно жество комбинаторно различных замкнутых выпуклых много гранников с равноугольными вершинами состоит из 104 много гранников и двух бесконечных серий —многогранников, двойственны призмам и антипризмам.*

Вспомогательные леммы, существенно используемые при дока зательстве этой теоремы, а также частные случаи утверждени теоремы рассмотрены в статьях [1,2]. Собственно доказательств предлагаемой теоремы начато в ч. 1 — ч. 3 статьи [3—5] и буде завершено в ч. 5. Здесь, в ч. 4, найдены многогранники с равно угольными вершинами, содержащие грани типа (4, 4, n) и (4, 5 n), — всего 44 многогранника и одна бесконечная серия — много гранников, двойственных призмам.

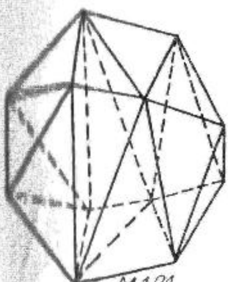
Напомним, как ведется доказательство. Грань каждого тип по очереди берется за исходную (очередность соответствует мест



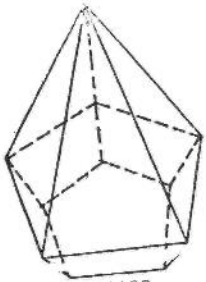
M1,19



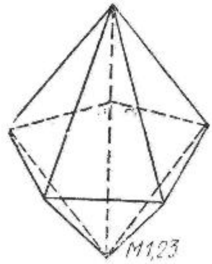
M1,20



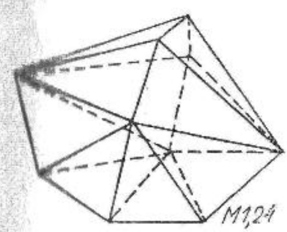
M1,21



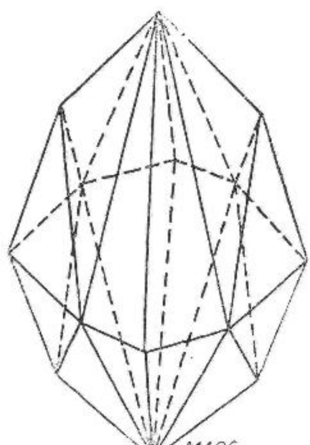
M1,22



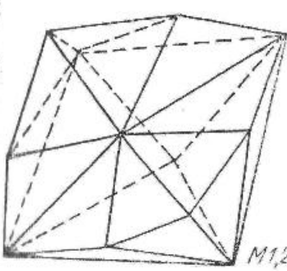
M1,23



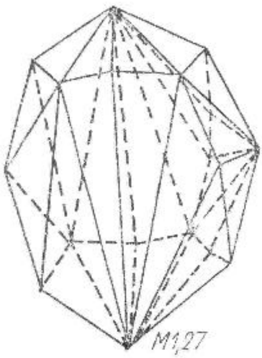
M1,24



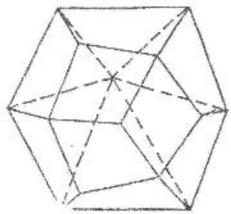
M1,26



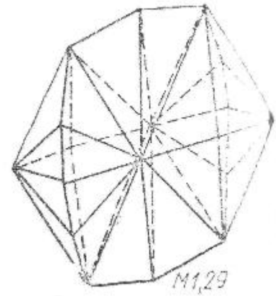
M1,25



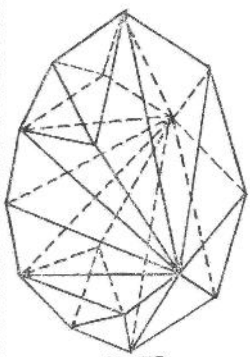
M1,27



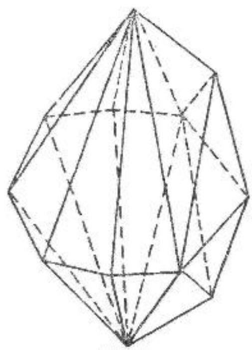
M1,28



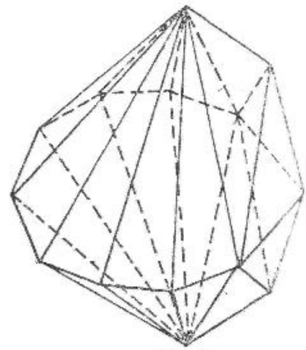
M1,29



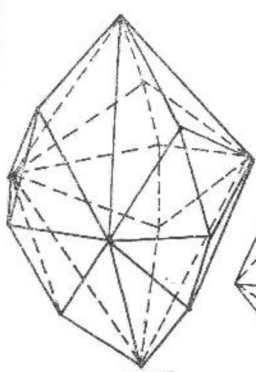
M1,30



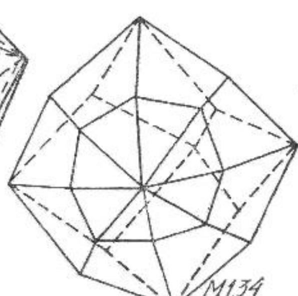
M1,31



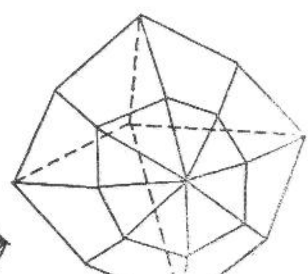
M1,32



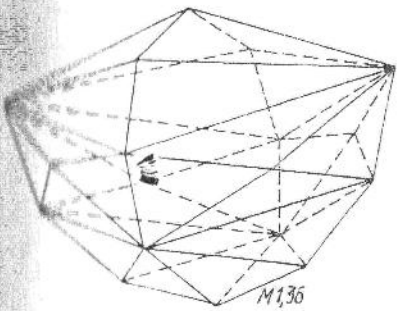
M1,33



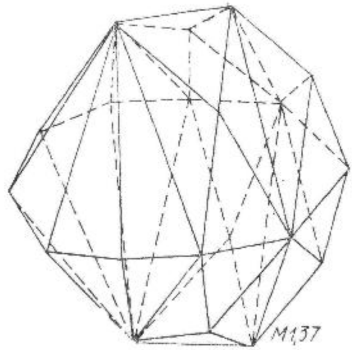
M1,34



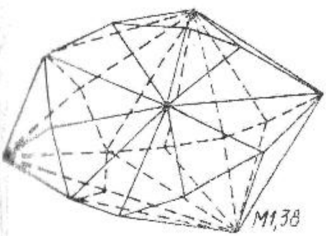
M1,35



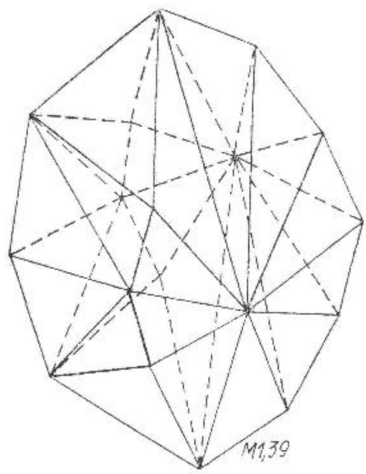
M1,36



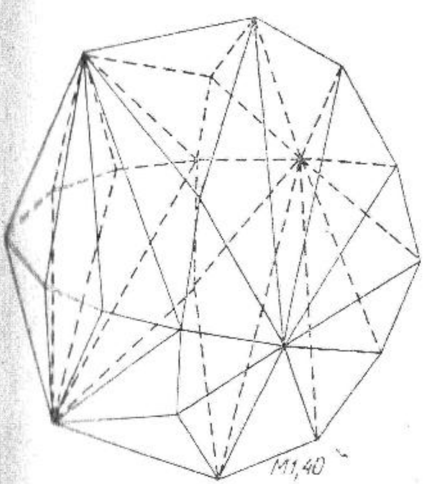
M1,37



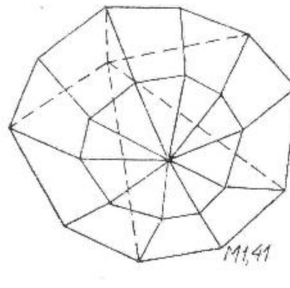
M1,38



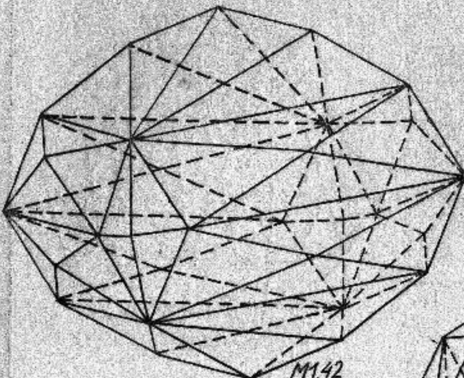
M1,39



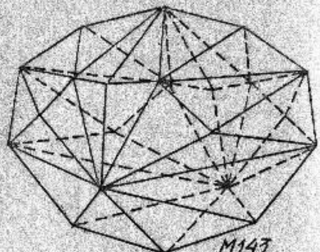
M1,40



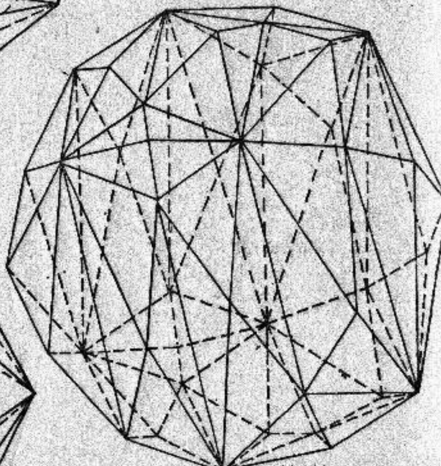
M1,41



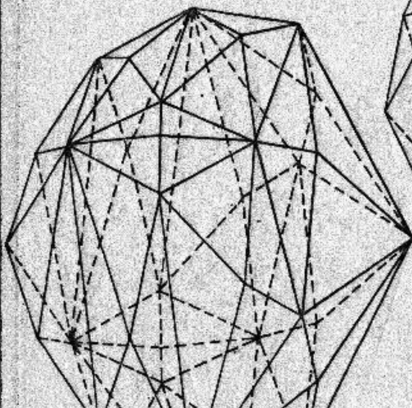
M1,42



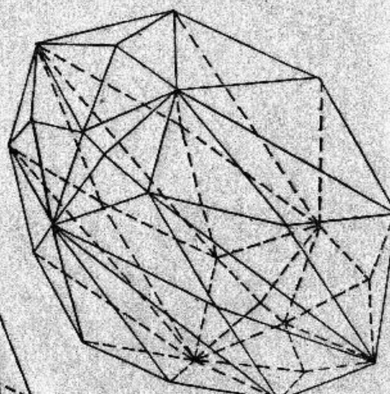
M1,43



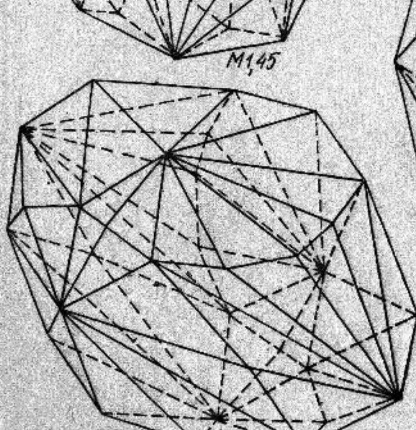
M1,44



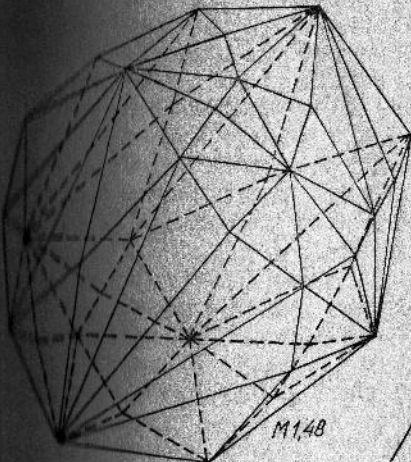
M1,45



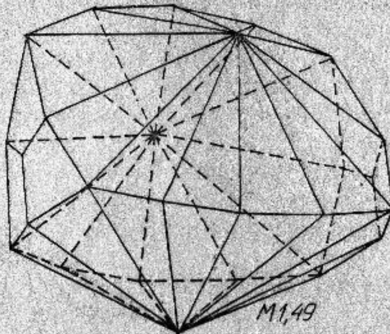
M1,46



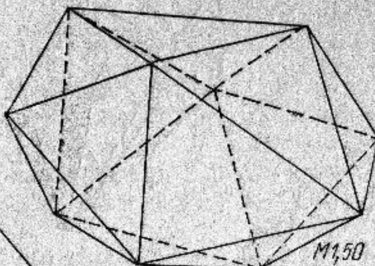
M1,47



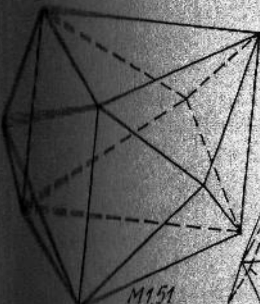
M1,48



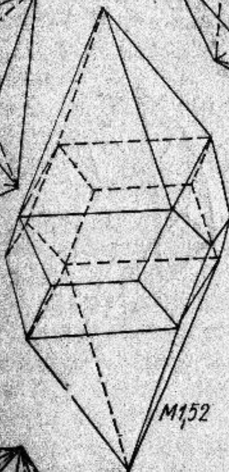
M1,49



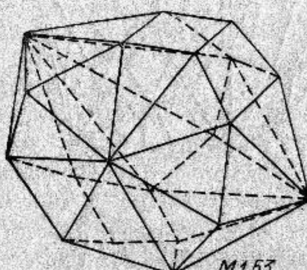
M1,50



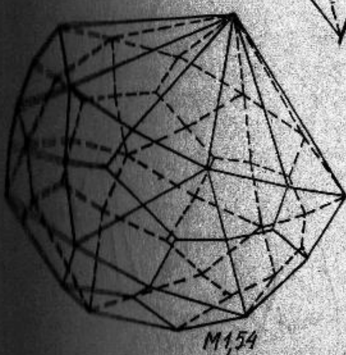
M1,51



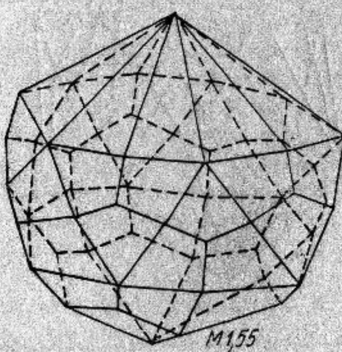
M1,52



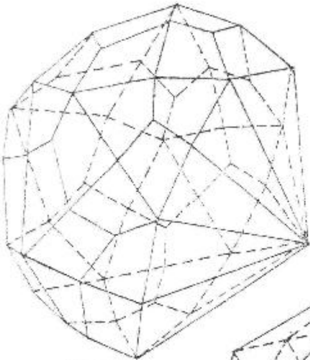
M1,53



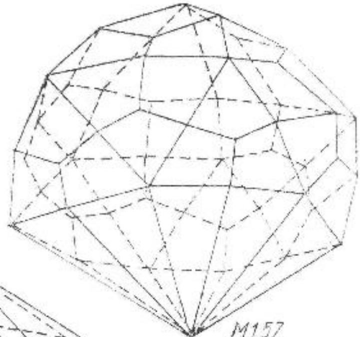
M1,54



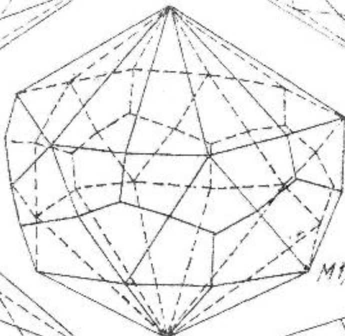
M1,55



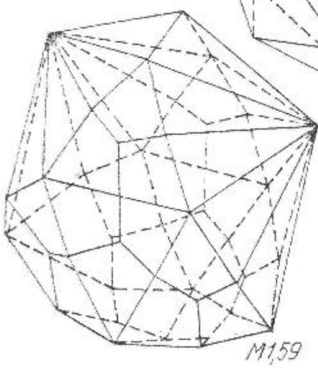
M1,56



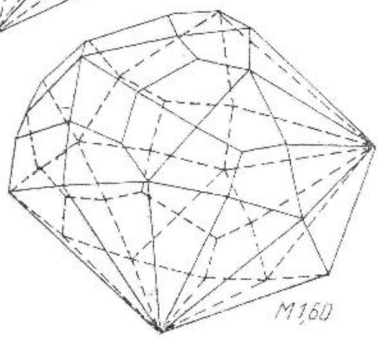
M1,57



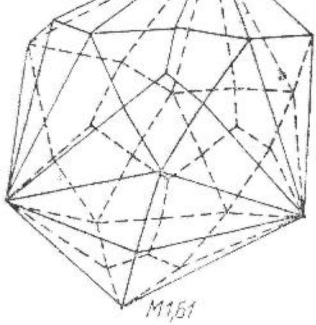
M1,58



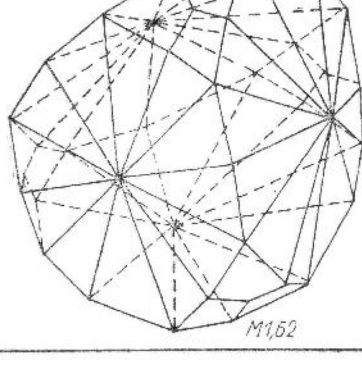
M1,59



M1,60



M1,61



M1,62

грани в таблице типов граней [1]) и рассматриваются все возможные ее продолжения до замкнутого многогранника с равноугольными вершинами. Рассмотренный тип грани уже не участвует в построениях с исходной гранью следующих типов.

Приведем наиболее часто употребляемые обозначения: $M_{1,i}$ — замкнутый многогранник с равноугольными вершинами (схемы многогранников приведены в таблице). (l, l, n) или (l^2, n) означает тип грани — треугольная грань с двумя l-гранными и одной n-гранной вершинами. Символ $[k, l]$ означает ребро, соединяющее вершины k и l; $\{k, l\}$ — двугранный угол при этом ребре; $v(n)$ — мера плоского угла n-гранной вершины.

При доказательстве теоремы используются многие свойства многогранников M, рассмотренные в статьях [1—5].

1. Грани (4, 4, *n*). Грани $(4, 4, n)$ образуют бесконечную серию бипирамид. Первый представитель этой серии $(n = 3)$ указан в [5]. Второй представитель — октаэдр — находится при продолжениях грани типа (4, 4, 4) (лемма 1). В дальнейшем в формулировках лемм, как правило, не оговаривается, что грань $(4, 4, n)$ принадлежит бипирамиде.

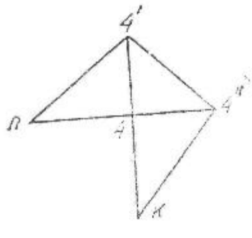


Рис. 1

Лемма 1. *Грань* $(4, 4', 4'')$ *принадлежит лишь октаэдру.*

Доказательство. По свободному ребру $[4, 4']$ можно подклеить грани $(4, 4', n)$ или $(4, 4', k, 3)$, $k = 3, 4, 5$. Поскольку и по свободному ребру $[4, 4'']$ можно подклеить те же грани, то рассмотрим их возможные взаимные положения.

1. Два треугольника (рис. 1). По свободному углу $[k, 4, n]$ нельзя подклеить четырехугольник, так как в противном случае $\theta(4, 4', 4'') < \pi$. Подклеим треугольник. По свободному ребру $[4', 4'']$ можно подклеить треугольник или четырехугольник.

1.1. Подклеим $(4', 4'', t)$. Затем нужно подклеить $(n, 4', t)$ и $(k, 4'', t)$. Если из вершин t, n, k — одна четырехгранная, то и остальные вершины — четырехгранные. Подклеив треугольник (k, t, n), получим сеть октаэдра. Если все вершины t, n и k — пятигранные, то продолжать построение можно только треугольниками, так как четырехугольник немедленно дает противоречие. Но и треугольники не дадут новой сети. Если одна вершина шестигранная, а остальные пятигранные, то получим двуугольник в сети. Если две вершины шестигранные, то продолжения сети можно выполнить только треугольниками, что приведет к образованию трехгранной вершины, принадлежащей треугольнику (это уже рассмотрено в [5]). Если t, n и $k \geqslant 6$, то $\theta(4, 4', 4'') < \pi$.

1.2. Подклеим $(4', 4'', t, 3)$. Если $t = 3$, то $\theta[4', 3] = \theta[t, 4''] = \pi$, и нужно подклеить еще два четырехугольника $(3, 4', n, 3)$ и $(t, 4'', k, 3)$, что дает свободную ломаную $[3, 3, t, 3]$; n и k будут четырехгранными, а значит, нужно подклеить еще два четырехугольника $(3, n, k, 3)$ и $(3, 3, t, 3)$. Получаем противоречие: $v(3) = v(4')$.

Пусть $t = 4$. Тогда $v(4) < 30°$. Из равенства двугранных углов следует $v(4) = v(t)$ и, значит, $\theta(4', 4'', t, 3) < 2\pi$.

Пусть $t = 5$. Тогда $n = k = 4$. Дальнейшее построение можно выполнять только четырехугольниками. Получим два свободных угла $[t, 3, t_1]$, что исключает продолжение сети.

2. Подклеим треугольник и четырехугольник (рис. 2, $b = 4''$, $t = 3$). Если по $[4', 4'']$ подклеим треугольник, то получим блок, изображенный на рис. 1. Подклеим $(4', 4'', \varkappa, 3')$. Отметим, что k и $\varkappa$ могут быть лишь трехгранными (иначе сумма углов второго четырехугольника меньше 2π). Если вершины трехгранные, то $v(4) = v(4'') < 60°$ и $\theta(4, 4', 4'') < \pi$.

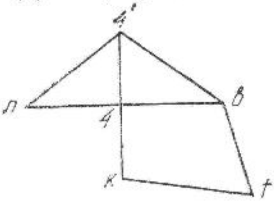


Рис. 2

3. Подклеив два четырехугольника, немедленно придем к противоречию. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Грань* $(4, 4', 5)$ *принадлежит лишь многогранникам* $M_{1.19}$—$M_{1.23}$ ($M_{1.23}$ — бипирамида $2M_3$ [6]).

Доказательство. По свободному ребру $[4, 4']$ можно подклеить грани $(4, 4', n)$ или $(4, 4', t, 3)$, $t = 3, 4, 5$.

1. Подклеим $(4, 4', n)$. По свободному ребру $[4, 5]$ можно подклеить $(4, 5, k)$, $(4, 5, t, 3)$ или $(4, 5, 3, t)$, $t = 3$ или 4.

1.1. Подклеим $(4, 5, k)$. Затем следует подклеить $(n, 4, k)$. По $[4', 5]$ можно подклеить четырехугольник или треугольник. Убедимся, что четырехугольник, подклеенный по $[4', 5]$, дает противоречие.

1.1.1. Подклеим четырехугольник по $[4', 5]$. Он может быть трех типов: $(4', 5, 3^2)$, $(4', 5, 3, 4'')$ или $(4', 5, 4'', 3)$.

1.1.1.1. Подклеим $(4', 5, 3^2)$. Затем нужно подклеить $(3, 4', n, 3)$. По образовавшемуся свободному углу $[3, 3, 3]$ можно подклеить четырехугольник или пятиугольник. Продолжение сети четырехугольником $(3^3, \beta)$ дает свободный угол $[\beta, 3, 5]$. И поскольку $v(\beta) < 63°$, то подклеим $(5, 3, \beta, 3')$. Если затем подклеим $(3', 5, k, 3')$, то $v(3') = v(3)$. Сравнивая углы граней $(3^3, \beta)$ и $(\beta, 3, 5, 3')$, получим противоречие, так как будет $v(5) = v(3)$.

Если подклеим $(k, 5, 3', 4'')$, то k — четырехгранная. Из этого получим $\{5, 3\} = \{5, 3'\}$, т. е. $v(3) = v(3')$, а значит, $v(3) = v(4'')$. И снова противоречие: $\theta(3, 3, 4', 5) < 2\pi$.

Подклеим пятиугольник по $[3, 3, 3]$. Пусть все его вершины трехгранные. Тогда по $[3, 3, 5]$ и $[3, 3, n]$ нужно подклеить соответственно $(3^2, 5, k_1)$ и $(3^2, n, k_2)$. Получили свободную ломаную $[k_2, 3, 3, k_1]$. Подклеив к ней единственно возможное — четырехугольник, получим $v(n) = v(k)$. Отсюда следует противоречие. Действительно, $\{5, 4\} = \{4', 4\} + \alpha$, где α — двугранный угол трехгранного угла, плоский угол которого равен $v(4')$. Поскольку $v(4') > 60°$, то $\{5, 4\} > \pi$.

Пусть пятиугольник имеет четырехгранную вершину (обозначим ее через x). Пятиугольник можно подклеить двумя способами. Рассмотрим один из них (второй рассматривается аналогично), при котором получим свободный угол $[x, 3, 5]$. Продолжение сетк можно осуществлять лишь гранями $(n, 3^2, k_1)$, $(k_1, 3, x, l)$, после чего получим противоречие. Действительно, пусть $x = 4$. Если $l = 3$, то $80° < v(x) = v(n) < 72°$. Если $l = 4$, то $\theta[l, x] < \pi$ и по $[x, 3, 5]$ можно подклеить только $(x, 3, 5, 3)$. Значит, $v(x) = v(4')$, $k_1 = 4$, вершины k_1 и l — правильные, а $\theta(k_1, 3, x, l) < 2\pi$. Последнее неравенство следует из $v(x) = v(k_1) = v(l) = 80{,}8°$ и $v(3) = 114{,}8°$ — значения углов грани $(3^4, 4)$. Если $l = 5$, то неравенство, указанное в случае $l = 4$, усиливается.

Пусть $x = 5$. По $[x, 3, 5]$ можно подклеить лишь $(x, 3, 5, 3')$; $l \neq 3$, так как тогда $v(k_1) = v(5)$, $\theta[3, k_1] = \theta[3, n] = \pi$ и аналогично случаю $x = 3$ $\{5, 4\} > \pi$. Если l — четырехгранная вершина, то из $\theta[l, x] = \theta[3, 5] < 162°$ и $\theta[3', x] < 192°$ следует $\theta(x, 3, 5, 3') < 2\pi$.

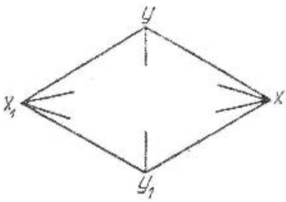


Рис. 3

1.1.1.2. Подклеим $(4', 5, 3, 4'')$. Тогда $v(4) < 30°$ и $k = 4$. По свободному ребру $[k, 5]$ можно подклеить $(k, 5, t)$, $(k, 5, 3, 4_1)$ или $(k, 5, 4'', 3')$. Если подклеим четырехугольник $(k, 5, 3^2)$, то получим блок, рассмотренный в п. 1.1.1.1. Заметим, что треугольник $(k, 5, t)$ дает свободный угол $[t, 5, 3]$, где $v(t) = v(4) < 30°$, что исключает дальнейшее построение.

1.1.1.2.1. Подклеим $(k, 5, 3, 4_1'')$. По $[3, 5, 3]$ пятиугольник нельзя подклеить, так как потом нужно подклеить $(4'', 3^2, \alpha)$ и $(4_1'', 3^2, \alpha_1)$, что дает свободный угол $[\alpha, 3^2, \alpha_1]$, где $v(\alpha) < 45°$. Подклеим $(3, 5, 3, x)$. Поскольку $k = 4'$, то дальнейшее построение выполняется четырехугольниками до получения блока, свободные ребра которого изображены на рис. 3. Если вершины y и y_1 совместить так, чтобы новая вершина была четырехгранной, то получим замкнутую сеть, где $x = x_1 = 3$. Она не может быть реализована многогранником M ввиду $\theta[x, 3] = \theta[4'', k] < \pi$, $v(x) = v(3)$ и $\theta(3, 5, 3, x) < 2\pi$.

Рассмотрим случай, когда вершины y и y_1 не совмещены. Пусть $x = 4$. При $y = 3$ получим свободную ломаную $[y_1, x, y, x_1]$, где $\theta[x, y] = \theta[x_1, y_1] = \theta[4', 5] < \pi$, т. е. к ней ничего нельзя подклеить. При $y \geqslant 4$ будет $\theta(y, 4'', 3, x) < 2\pi$, так как $\theta[3, x] = \theta[k, 4''] < \pi$.

Пусть $x \geqslant 5$. Поскольку y и y_1 могут быть лишь трехгранными, то по $[x, y, x_1]$ и $[x, y_1, x_1]$ можно подклеить только четырехугольники. Поэтому $x = x_1 = 5$ и построение немедленно дает противоречие.

1.1.1.2.2. Подклеим $(k, 5, 4''', 3')$. Поскольку вершина k может быть только четырехгранной, то $\{4', 5\} = \{k, 5\}$. Отсюда $\{5, 3\} = \{5, 4'''\}$. Вследствие равенства двугранных углов $v(4''') = v(4'')$. В итоге $v(3) = v(3')$, а $4''$ и $4'''$ — правильные вершины. По $[3, 5, 4''']$ можно подклеить лишь четырехугольник $(3, 5, 4''', l)$, где $l = 3$ или 4. Если $l = 3$, то $v(3) = v(l)$. А из $\theta[4''', l] = \theta[4', 4'']$ получим $v(l) = v(4') < 90°$, что дает противоречие: $\theta(3, l, 4''', 5) < 2\pi$.

Пусть l — четырехгранная вершина. Тогда она — правильная и правильная вершина $4'$. В свою очередь, вершина 5 стала правильной, что дает противоречие: $v(4') = v(4) < 30°$.

1.1.1.3. Подклеим $(4', 5, 4'', 3)$. По свободному ребру $[k, 5]$ можно подклеить четырехугольник или треугольник.

1.1.1.3.1. Подклеим четырехугольник. Поскольку $v(4) < 30°$, то k — четырехгранная вершина и ввиду симметрии исходного блока подклеенный четырехугольник может быть только таким: $(k, 5, 4_1'', 3)$. По $[4'', 5, 4_1'']$ можно подклеить лишь $(4'', 5, 4_1'', 3)$, откуда $v(4') = v(4'')$, а значит, вершина 5 правильная и дает противоречие $v(4') = v(4) < 30°$.

1.1.1.3.2. Подклеим $(k, 5, t)$. Равенство $v(t) = v(4)$ позволяет подклеить исключительно $(t, 5, 4'')$. Получили $v(4'') = v(4')$, и, так как k — четырехгранная, то вершина 5 — правильная, что дает противоречие: $\theta(3, 4', 5, 4'') < 2\pi$.

1.1.2. Подклеим $(4', 5, t)$. Затем однозначно: $(t, 4', n)$. По свободному ребру $[t, 5]$ можно подклеить треугольник или четырехугольник.

1.1.2.1. Подклеим четырехугольник. Если он имеет тип, отличный от $(t, 5, 3^2)$, то $v(4') < 30°$ и $\theta[k, 5] < 102°$, что исключает дальнейшее построение.

Подклеим $(t, 5, 3^2)$. Тогда $v(4') = v(k) < 60°$, а по $[3, 5, k]$ можно подклеить лишь $(3, 5, k, 3)$. Теперь $v(k) = v(t)$, $v(3) > 114°$ и любое продолжение сети по $[3, 3, 3]$ даст противоречие аналогично п. 1.1.1.1.

1.1.2.2. Подклеим $(t, 5, k_1)$. Затем однозначно: $(k_1, 5, k)$. Теперь $v(k) = v(t)$.

Пусть $t = 4$. Подклеим (k_1, t, n) — другие варианты дают противоречия. Если $n = 5$, то получим сеть бипирамиды. Если $n \geqslant 6$, то $k_1 = k = 5$. Поскольку по свободным ребрам можно подклеить исключительно треугольники, то, подклеив (n, k_1, t_1) и (t_1, k_1, k_2), получим $v(t) = v(n)$, что вместе с $v(k) = v(t)$ и $n \geqslant 6$ дает противоречие: $\theta(t, k_1, 5) < \pi$.

Пусть $t = 5$. Ввиду равноправия вершин t и k в продолжении сети будет $k = 5$, ... По $[t, n]$ можно подклеить лишь (t, n, k_2). Затем подклеим (k_2, t, k_1) и (так как теперь все плоские углы равны 60°) (k_2, n, k), (k_2, k_1, k). Получим сеть многогранника $M_{1.19}$ — многогранника с правильными гранями [6, M_{25}].

Пусть $t = 6$. Тогда $k = 6$, $n = 5$. Исходный блок изображен на рис. 4. Затем нужно подклеить (k_2, t, n_1) и (n_1, t, k_1). Если

$k_1 = 4$, то, подклеив (n_1, k_1, k) и (k, k_2, n_1), получим замкнутую сеть. Ее нельзя реализовать многогранником M, что проверяется при помощи решения соответствующей системы уравнений, связывающей плоские и двугранные углы предполагаемого многогранника*.

Пусть $k_1 = 5$. Тогда вокруг вершины k_1 можно подклеить треугольники. В результате $v(n) = v(t) < 60^\circ$, что вместе с $v(t) = v(k)$ дает противоречие: $\theta(n_1, t, k_1) < \pi$.

Пусть $k_1 = 6$. Ввиду симметрии исходного блока — и $k_2 = 6$. Тогда к вершине k можно подклеить треугольники (k, k_1, n_2) и (n_1, k, k_2), а к вершине k_1 — (n_2, k_1, k_3) и (k_3, k_1, n_1). При $n_1 = 4$ получим сеть многогранника $M_{1.20}$, подклеив (k_3, n_1, k_2) и (k_3, k_2, n_2). Его реализуемость проверяется с помощью решения системы уравнений. При $n_1 = 5$ ввиду симметрии исходного блока — и $n_2 = 5$. Тогда к вершине k_2 можно подклеить (n_1, k_2, k_4) и (k_4, k_2, n_2), а затем построение сети заканчивается гранями (k_4, n_1, k_3) и (k_3, n_2, k_4). При $k_3 = k_4 = 4$ получим замкнутую сеть; с помощью систем уравнений можно убедиться в ее реализуемости — она дает многогранник $M_{1.21}$.

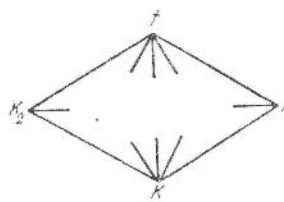


Рис. 4

Поскольку k_1 и t не могут принимать других значений, то п. 1.1.2.2, а следовательно, и п. 1.1.2 рассмотрены полностью.

1.2. Подклеим $(4, 5, t, 3)$, $t = 3$ или 4 (рис. 2, $b = 5$, $k = 3$). По свободному ребру $[4', 5]$ нужно подклеить четырехугольник, поскольку треугольник даст блок, рассмотренный в п. 1.1.1.

Пусть $t = 3$. Тогда $v(4') < 60^\circ$. Подклеим $(4', 5, 3', 3')$. Поскольку $\{3\ 4\} = \{4', 3'\}$, то $v(3) = v(3')$, а значит, $v(4) = v(4')$. Остается подклеить $(3, 4, n, 3)$, что дает свободный угол $[3, 3, 3]$, все продолжения которого аналогично п. 1.1.1.1 дают противоречия.

Пусть $t = 4$. Тогда $v(4') < 30^\circ$ и сумма углов четырехугольника, подклеенного по $[4', 5]$, будет меньше 2π.

1.3. Подклеим $(4, 5, 3, k)$ (рис. 2, $t = 3$, $b = 5$). Дальнейшие построения сети приводят к противоречиям аналогично п. 1.2.

2. Подклеим $(4, 4', t, 3)$, $t = 3, 4, 5$. Пусть $t = 3$. Тогда $\theta[3, 4] = \theta[t, 4'] = \pi$ и $v(5) < 60^\circ$. Значит, по $[4, 5]$ и $[4', 5]$ можно подклеить исключительно треугольники $(4', 5, k)$ и $(4, 5, k_1)$. Затем можно подклеить лишь $(t, 4', k, 3)$ и $(3, 4, k_1, 3)$. Получим свободную ломаную $[3, 3, t, 3]$, а значит, следует подклеить пятиугольник $(3, 3, t, 3, 3)$. Прежде чем его подклеим, достроим сеть вокруг вершины 5, подклеив $(k, 5, k_2)$ и $(k_2, 5, k_1)$. Отметим, что вершины k и k_1 могут быть лишь четырех-

* Детальнее упоминаемые и дальше системы уравнений описаны в [3], там же приведены примеры решения таких систем.

гранными. Это следует из условий: 1) $v(4) = v(4') = v(k) = v(k_1) > 60°$ (теперь k и k_1 равны 4 или 5); 2) $\{4', k\}$ — общий двугранный угол вершин $4'$ и k, $\{3, k\} = \{t, 4'\}$ (теперь $k \neq 5$, иначе $\{k, 5\} > \pi$, аналогично $k_1 \neq 5$). А подклеив единственно возможное — $(3, k, k_2, 3)$, убеждаемся, что и k_2 — четырехгранная. Осталось подклеить $(3, k_2, k_1, 3)$ и (3^5) — получим сеть многогранника $M_{1.22}$. Его существование можно доказать, воспользовавшись результатами [3].

Пусть $t = 4''$. Тогда $v(5) < 30°$, а по свободным ребрам $[4, 5]$ и $[4', 5]$ можно подклеить только треугольники $(4, 5, k)$ и $(4', 5, n)$. Поскольку $v(n)$ и $v(k)$ меньше $\pi/2$, а $v(5) < 30°$, то можно

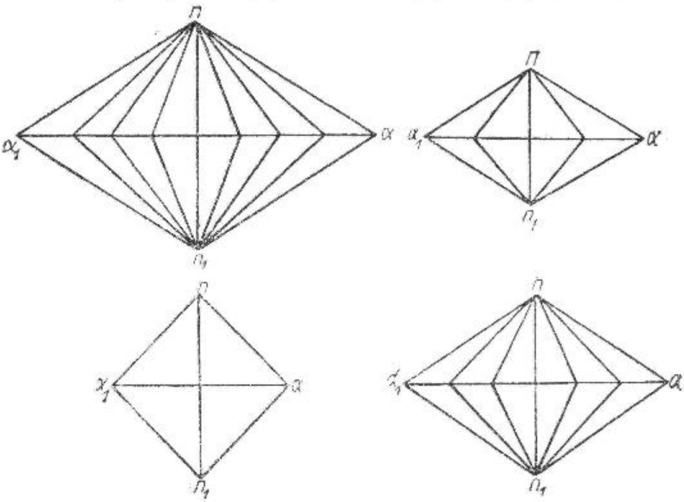


Рис. 5

подклеить еще два треугольника вокруг вершины 5: $(n, 5, k_1)$ и $(k_1, 5, k)$. Теперь $v(n) = v(k)$, а вершины n, k и k_1 — четырехгранные. Поэтому можно подклеить грани $(t, 4', n, 3)$, $(3, n, k_1, t_1)$, $(t_1, k_1, k, 3)$ — получили свободную ломаную $[3, 4, k, 3]$. Это означает, что дальнейшее построение невозможно. Действительно, подклеив $(3, 4, k, 3)$, получим $v(3) = v(t)$, а значит, $\theta(3, 4, k, 3) < 2\pi$.

Случай $t = 5$ рассматривается аналогично случаю $t = 4$. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Грани $(4, 4', n)$ при $n \geqslant 6$ принадлежат лишь многогранникам $M_{1.24}$—$M_{1.49}$.*

Доказательство. По свободному ребру $[4, 4']$ можно подклеить грани $(4, 4', n_1)$ или $(4, 4', t, 3)$, $t = 3, 4, 5$.

1. Подклеим $(4, 4', n_1)$. Аналогично лемме 2 п. 1 можно показать, что в продолжениях сетей ребер не участвует четырехугольник с двумя соседними трехгранными вершинами. Исключение составляет случай $n = 6$, α, $\alpha_1 = 7$ — второй блок рис. 5.

а при $n > 6$ в построениях сетей ребер многогранников могут участвовать лишь блоки, изображенные на рис. 5 и 6, где α, $\alpha_1 = 4$, 6 или составленные из них (если $n = 6$, то α, $\alpha_1 = 4$, 6, 8, 10). Различные прилегания этих блоков дают все сети искомых многогранников. Из них только сети многогранников $M_{1.24}$ — $M_{1.27}$, $M_{1.29}$ — $M_{1.33}$, $M_{1.36}$—$M_{1.40}$, $M_{1.42}$—$M_{1.49}$ можно реализовать многогранниками с равноугольными вершинами.

2. Подклеим $(4, 4', t, 3)$, $t = 3, 4, 5$. В построениях сетей ребер искомых многогранников участвуют блоки, изображенные на рис. 7. Для четных значений n грани $(4, 4', n)$ будем полу-

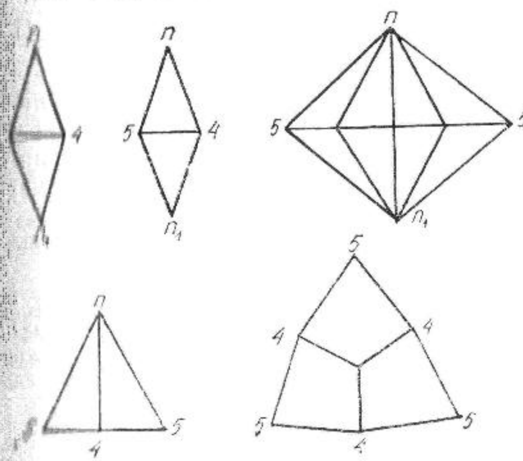


Рис. 6

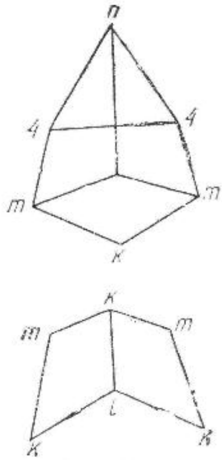


Рис. 7

чать замкнутые сети, из которых можно реализовать лишь сети многогранников $M_{1.28}$, $M_{1.34}$, $M_{1.35}$, $M_{1.41}$. Перебор вариантов осуществляется аналогично п. 2 леммы 2. Лемма 3 доказана.

2. Грани (4, 5, n). Лемма 4. *Грань* $(4, 5, 5')$ *принадлежит лишь многогранникам* $M_{1.50}$ — $M_{1.52}$.

Доказательство. По свободному ребру $[4, 5]$ можно подклеить $(4, 5, n)$ или $(4, 5, t, \gamma)$; $t, \gamma = 3$ или 4.

1. Подклеим $(4, 5, n)$. По свободному ребру $[4, 5']$ можно подклеить $(4, 5', \alpha)$ или $(4, 5', \varkappa, \lambda)$; $\varkappa, \lambda = 3$ или 4.

1.1. Подклеим $(4, 5', \alpha)$. По свободному ребру $[5, 5']$ можно подклеить $(5, 5', k)$ или $(5, 5', 3, 3)$.

1.1.1. Подклеим $(5, 5', k)$. По свободному ребру $[5, k]$ нельзя подклеить четырехугольник, так как дальнейшие построения дадут свободный угол $[3, 3, 3]$ и условия п. 1.1.1.1 леммы 2. Подклеим треугольник $(5, k, 4_1)$. Затем однозначно: $(4_1, 5, n)$ и $(n, 4, \alpha)$. Поскольку число ребер, сходящихся в вершине 5, нечетно, то $v(n) = v(4)$. А подклеив два треугольника $(\alpha, 5', 4_2)$ и $(4_2, 5', k)$ — вокруг вершины $5'$ (другого ничего нельзя подклеить), получим равенство $v(4) = v(5)$. Теперь все плоские углы граней равны 60°, т. е. все грани правильные. Продолжать построение сети можно исключительно треугольниками, в результате получим многогранники $M_{1.50}$ и $M_{1.51}$ [6, A_4+2M_2, $П_3+3M_2$].

1.1.2. Подклеим (5, 5′, 3, 3). Теперь $v(4)<60°$, а по [n, 1, α] можно подклеить лишь треугольник. Поскольку n и α могут быть только пятигранными и по свободным ребрам [n, 5], [5′, α] и [α, n] можно подклеить только четырехугольники, то $v(n) = v(5)$ и дальнейшее построение будет таким: (n, 5, 3^2), (n, α, 3^2), (α, 5′, 3, 3), (3, 5, 3, n_1), (3, n, 3, n_2), (3, α, 3, n_3), (3, 5′, 3, n_4), (n_3, 3^2, n_4), (n_1, 3^2, n_2), (n_2, 3^2, n_3) и (n_1, 3, 3, n_4). Вершины n_i пятигранные. Значит, если по одному из новых свободных ребер подклеим четырехугольник, то пятигранная вершина станет правильной, а $v(4)$ станет больше $v(5)$, что исключено ввиду $v(4)<60°$. Подклеив единственно возможное — четыре треугольника, получим сеть многогранника $M_{1.52}$. Он имеет восемь условных ребер и реализуется в виде правильной бипирамиды с отсеченными вершинами основания плоскостями попарно параллельными между собой и параллельными плоскостям симметрии бипирамиды. Его условные ребра параллельны ребрам основания и соединяют новые вершины, полученные после отсечения.

1.2. Подклеим (4, 5′, ϰ, λ). Пусть ϰ, $\lambda=3$. Тогда $v(5)<60°$, а по [3, 4, n] можно подклеить (3, 4, n, 3). Получили свободный угол [3, 3, 3]. Аналогично лемме 2, п. 1.1.1.1, все продолжения сети по нем дают противоречия.

Пусть ϰ или λ — четырехгранная вершина. Тогда $v(5)<30°$ и вокруг вершины 5 можно подклеить лишь треугольники. Получили: $v(4)=v(5')$, откуда $\theta(4, 5', \varkappa, \lambda)<2\pi$.

2. Подклеим (4, 5, t, γ). Поскольку вершины 5 и 5′ исходной грани равноправны в построениях сетей ребер и вариант подклейки треугольника по [4, 5] рассмотрен, то по [4, 5′] нужно подклеить четырехугольник (4, 5′, 3^2). Оба четырехугольника имеют по две трехгранные вершины. По [5, 5′] можно подклеить треугольник (5, 5′, k), а по [5, k] — четырехугольник (5, k, 3′, 3′), где $v(3')=v(t)=v(\gamma)$. Затем однозначно: (3′, 5, t, 4_1), (4_1, t, γ, 5_1) и (5_1, γ, 4, 3). Получим: $v(3)=v(\gamma)$, а вершина 4 — правильная. Отсюда следует равенство $v(5)=v(5')$ и правильность вершин 5 и 5′. Но грани (3^2, 4, 5) и (4, 5^2) не могут принадлежать одному многограннику с правильными вершинами. Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Грани* (4, 5, n) *при* $n\geqslant 6$ *принадлежат лишь многогранникам* $M_{1.53}-M_{1.62}$.

Доказательство. Из доказательства леммы 4 и условия $n\geqslant 6$ следует, что достаточно рассмотреть случаи п. 1.1.1 и п. 2 (нумерация леммы 4).

Вариант п. 1.1.1 при $n>6$ немедленно дает противоречие, так как треугольники образуют многогранные углы из четырех и пяти граней — плоские углы вершин края таких блоков равны между собой, а значит, ни одна вершина края блока не может иметь семь и более ребер. Если $n=6$, то четырех- и пятигранные блоки в различных прилеганиях образуют замкнутые сети (вершины края таких блоков могут быть четырех- или шестигранными — для пятигранных блоков и только шестигранными — для четырехгранных блоков), но ни одна сеть не реализуется многогранником M.

Вариант п. 2. Если подклеим четырехугольник с двумя трехгранными вершинами, то, выполняя построения п. 2 леммы 4, придем к противоречию. Замкнутые сети будем получать, лишь перебирая способы подклейки друг к другу блоков, изображенных на рис. 6, и блоков, составленных из них. После исключения нереализуемых сетей останутся сети многогранников $M_{1.53} - M_{1.62}$. Лемма 5 доказана.

При проверке на реализуемость той или иной сети многогранником с равноугольными вершинами применялись численные методы решения систем уравнений, связывающих плоские и двугранные углы искомых многогранников. Расчеты проведены на ЭВМ ВЦ ФТИНТ АН УССР.

Список литературы: 1. *Гурин А. М.* О выпуклых многогранниках с равноугольными вершинами.— Укр. геометр. сб., 1980, вып. 23, с. 34—41. 2. *Гурин А. М.* Оценка числа замкнутых выпуклых многогранников с равноугольными вершинами.— Укр. геометр. сб., 1982, вып. 25, с. 22—30. 3. *Гурин А. М.* Реализация сетей выпуклых многогранников с равноугольными вершинами. 1.— Укр. геометр. сб., 1983, вып. 26, с. 41—48. 4. *Гурин А. М.* Реализация сетей выпуклых многогранников с равноугольными вершинами. 2.— Укр. геометр. сб., 1984, вып. 27, с. 22—26. 5. *Гурин А. М.* Реализация сетей выпуклых многогранников с равноугольными вершинами. 3.— Укр. геометр. сб., 1985, вып. 28, с. 12—25. 6. *Залгаллер В. А.* Выпуклые многогранники с правильными гранями.— Зап. науч. семинаров ЛОМИ, 2, 1967.—220 с.

Поступила в редколлегию 05.11.84.

УДК 513

А. И. ЕГОРОВ

МАКСИМАЛЬНО ПОДВИЖНЫЕ МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА ДЕЙВИСА

Пусть X_n — дифференцируемое многообразие класса C^p. (U, φ) — локальная система координат $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ с областью определения $U \subset X_n$ и координатным диффеоморфизмом φ.

С каждой точкой этого базисного многообразия будем связывать (или ассоциировать) пространство значений контравариантной векторной плотности $\dot{u}(u^1, u^2, \ldots, u^n)$ веса m. Полученное таким образом многообразие $\overset{m}{T}(X_n)$ называется пространством контравариантных векторных плотностей. Условимся для краткости вместо «контравариантная векторная плотность» писать просто «векторная плотность». Аналогично определяются пространства ковекторных плотностей $\overset{m}{T}{}^*(X_n)$. Пространством Дейвиса $D_{n, \dot{u}}$ называется многообразие векторных плотностей, в котором метрика задается ска-лярной функцией [1] $F(x, \dot{u})$, $x(x^i) \in X_n$, $\dot{u}(u^i) \in \overset{m}{T}_x(X_n)$, где $|F_{\bullet i \cdot j}| \neq 0$, $F_{\bullet i \cdot j} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial u^i \partial u^j}$, $F(x, \lambda\dot{u}) = \lambda^2 F(x, \dot{u})$.

Аналогично определяются пространства Дейвиса $D_{n, u}$, где

$$\underset{\cdot}{u}(u_1, u_2, \ldots, u_n) \in \overset{m}{T}{}^*_x(X_n).$$

В дальнейших рассуждениях понадобится скалярное поле $L(x, \dot{u})$, связанное с метрической функцией $F(x, \dot{u})$ соотношением $F = \frac{1}{2} L^2$, где $L(x, \lambda\dot{u}) = \lambda L(x, \dot{u})$.

Пространство Дейвиса $D_{n, u}$ называется пространством первого (второго) рода, если оно не допускает (допускает) независимые с постоянными коэффициентами операторы группы движений с общими траекториями. Пространства $D_{n, \dot{u}}$ второго рода могут в свою очередь допускать одну или несколько систем конгруэнций, являющихся общими траекториями операторов группы G_r движений. Эти общие траектории называются особыми траекториями соответствующих операторов групп движений, а сами операторы — особыми операторами группы G_r. Если пространство Дейвиса второго рода допускает k наборов конгруэнций, которые являются общими траекториями группы движений, то такое пространство $D_{n, \dot{u}}$ называется пространством Дейвиса сигнатуры k и обозначается через $D^k_{n, \dot{u}}$. Пространства $D_{n, \dot{u}}$ первого рода условимся называть пространствами $D^0_{n, \dot{u}}$ нулевой сигнатуры. Движениями в пространствах Дейвиса $D_{n, \dot{u}}$ называются такие точечные преобразования базисного пространства $X_n(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, естественные продолжения которых на пространства векторных плотностей $\overset{m}{T}(X_n)$ сохраняют метрическую функцию $F(x, \dot{u})$. Для того чтобы компоненты векторного поля $v^i(x)$ инфинитезимального преобразования $\tilde{x}^i = x^i + v^i(x) \cdot t$, $i = 1, 2, \ldots, n$ определяли движение в пространствах Дейвиса $D_{n, \dot{u}}$, необходимо и достаточно, чтобы $DF(x, \dot{u}) = 0$, где D — знак лиева дифференцирования вдоль линий тока векторного поля $v^i(x)$. Аналогично определяются движения в пространствах Дейвиса $D_{n, u}$.

1. О группах движений в метрических пространствах Дейвиса $D_{n, \dot{u}}$ первого рода. Будем рассматривать пространства Дейвиса $D_{n, u}$ с тензором $F_{\cdot i \cdot j \cdot k} \neq 0$, не оговаривая этого специально каждый раз. Условие $F_{\cdot i \cdot j \cdot k} \neq 0$ означает, что тензор $F_{\cdot i \cdot j}$ существенно зависит от координат опорного объекта $\dot{u}(u^1, u^2, \ldots, u^n)$. С целью изучения максимальной подвижности пространств Дейвиса $D_{n, \dot{u}}$

для произвольной точки $(x, \dot{u})$ выберем систему координат таким образом, чтобы в ней выполнялись равенства

$$u^i = \delta^i_{\alpha_1}, \ i = \alpha_1, \ \alpha_2, \ \ldots, \ \alpha_n. \tag{1}$$

Из того, что $F = L^2/2$, находим $F_{\cdot i \cdot j} = LL_{\cdot i \cdot j} + L_{\cdot i}L_{\cdot j}$. Отсюда следует, что ранг тензора $L_{\cdot i \cdot j}$ равен точно $n - 1$.

Используя допустимые преобразования системы координат (1), приведем матрицу $L_{\cdot i \cdot j}$, $i, \ j = \alpha_2, \ \alpha_3, \ \ldots, \ \alpha_n$ к диагональному виду. Тогда из уравнений $DL_{\cdot i \cdot j} = 0$ получим

$$e_\alpha u^\alpha_\beta + e_\beta u^\beta_\alpha - k e_\alpha \delta_{\alpha\beta} = 0, \ \mathrm{mod}\,(v^i, \ u^w_{\alpha_1}), \tag{2}$$

где $k = (m + 1)\, u^{\alpha_1}_{\alpha_1} + m u^\sigma_\sigma$, $\alpha, \ \beta, \ w, \ \sigma = \alpha_2, \ \ldots, \ \alpha_n$,

$$e_\alpha = \pm 1, \ u^\alpha_\beta = v^\alpha{}_{,\beta},$$

причем по индексам α и β нет суммирования; $\delta_{\alpha\beta}$ — символ Кронекера. Так как $F_{\cdot\alpha_1\cdot\alpha_1} \neq 0$, то из $DF_{\cdot\alpha_1\cdot\alpha_1} = 0$ следует, что

$$m u^s_s - u^{\alpha_1}_{\alpha_1} = 0, \ \mathrm{mod}\,(v^i, \ u^w_{\alpha_1}); \ s, \ i = \alpha_1, \ \alpha_2, \ \ldots, \ \alpha_n. \tag{3}$$

Таким образом, уравнения (2) и (3) можно записать при $m \neq 1$ в следующем виде:

$$\left.\begin{cases} e_\alpha u^\alpha_\beta + e_\beta u^\beta_\alpha + \theta u^\gamma_\gamma e_\alpha \delta_{\alpha\beta} = 0, \\ u^{\alpha_1}_{\alpha_1} = (m/(1 - m))\, u^w_v \end{cases}\right] \mathrm{mod}\,(v^i, \ u^w_{\alpha_1}), \tag{4}$$

где $\theta = (1 + m)/(1 - m)$.

Полученные уравнения (4) содержат $n(n - 1)/2 + 1$ независимых связей. В дальнейшем будем изучать матрицу

$$(T) = \| T^\mu_{\alpha,}{}_{(ijkl)}, \ T^\sigma_\tau{}_{(ijk)} \|.$$

Элементами матрицы (T) являются коэффициенты при функциях u^μ_α, u^τ_σ в уравнениях $DF_{\cdot i \cdot j \cdot k \cdot l} = 0$, $DF_{\cdot i \cdot j \cdot k} = 0$. Ранее эти уравнения (4) рассматривались в статье [1] при $m = 0$.

Отметим, что уравнения (4) встречались также в работе [2].

Так как тензор $F_{\cdot i \cdot j \cdot k} \neq 0$, то возникают следующие случаи:

1) $F_{\cdot\alpha_2\cdot\alpha_2\cdot\alpha_3} \neq 0$,

2) $F_{\cdot\alpha_2\cdot\alpha_3\cdot\alpha_4} \neq 0$, а все составляющие вида $F_{\cdot\alpha_2\cdot\alpha_2\cdot\alpha_3} = 0$,

3) $F_{\cdot\alpha_2\cdot\alpha_2\cdot\alpha_2} \neq 0$, а все составляющие вида $F_{\cdot\alpha_2\cdot\alpha_2\cdot\alpha_3} = 0$, $F_{\cdot\alpha_2\cdot\alpha_3\cdot\alpha_4} = 0$. Рассмотрим эти случаи.

Первый случай в свою очередь распадается на два подслучая:

а) $F_{\cdot\alpha_2\cdot\alpha_2\cdot\alpha_3} \neq 0$, а все составляющие вида $F_{\cdot\alpha_2\cdot\alpha_2\cdot\alpha_2} = 0$,

б) $F_{\cdot\alpha_2\cdot\alpha_2\cdot\alpha_3} \neq 0$, $F_{\cdot\alpha_2\cdot\alpha_2\cdot\alpha_2} \neq 0$.

В подслучае а) минор порядка $2n - 3$ матрицы (T), составленный [1] из коэффициентов при функциях $u^{\alpha_1}_{\alpha_i}$, $u^{\alpha_2}_{\alpha_3}$, $u^{\alpha_3}_{\alpha_k}$ $(i = 2, 3, \ldots, n; \ k = 4, 5, \ldots, n)$ в уравнениях $(\alpha_2\alpha_2\alpha_3\alpha_i)$, $(\alpha_2\alpha_2\alpha_2)$, $(\alpha_2\alpha_3\alpha_k)$ с точностью до постоянного множителя равен степени составляющей $F_{\cdot\alpha_2\cdot\alpha_2\cdot\alpha_3}$. В подслучае б) также минор поря... $2n-3$ матрицы (T), составленный из коэффициентов при функ... циях $u^{\alpha_1}_{\alpha_i}$, $u^{\alpha_2}_{\alpha_2}$, $u^{\alpha_3}_{\alpha_k}$, $u^{\alpha_1}_{\alpha_2}$ в уравнениях $(\alpha_2\alpha_2\alpha_2\alpha_2)$, $(\alpha_2\alpha_2 ...)$ $(\alpha_2\alpha_2\alpha_2)$ $(\alpha_2\alpha_2\alpha_k)$ $(i=3, 4, \ldots, n; k=4, 5, \ldots, n)$, с точностью до постоянного множителя равен произведению составляющ... $F_{\cdot\alpha_2\cdot\alpha_2\cdot\alpha_2}$ на степень составляющей $F_{\cdot\alpha_2\cdot\alpha_2\cdot\alpha_3}$.

Во втором случае минор порядка $2n-3$ матрицы (T), составленны... из коэффициентов при функциях $u^{\alpha_1}_{\alpha_i}$, $u^{\alpha_2}_{\alpha_j}$ $(i=1, 2, \ldots, n; j=3, 4, \ldots, n)$ в уравнениях $(\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_i)$, $(\alpha_j\alpha_3\alpha_4)$, с точностью до постоянного множителя равен степени составляющей $F_{\cdot\alpha_2\cdot\alpha_\cdot ...}$ В случае 3 минор порядка $2n-3$ матрицы (T), составленны... из коэффициентов при функциях $u^{\alpha_1}_{\alpha_i}$, $u^{\alpha_2}_{\alpha_j}$ $(i=2, 3, \ldots, n; j=3, 4, \ldots, n)$ в уравнениях $(\alpha_2\alpha_2\alpha_2\alpha_i)$, $(\alpha_2\alpha_2\alpha_j)$, с точностью до постоянного множителя равен степени составляющей $F_{\cdot\alpha_2\cdot\alpha_\cdot ...}$

Из приведенных рассуждений следует, что не существу... пространств Дейвиса $D_{n, \dot{u}}$ векторных плотностей, допускающи... группу движений G_r порядка $r > n(n-1)/2+2$. В случае ве... $m=1$ нетрудно также доказать, что не существует пространс... Дейвиса $D_{n, \dot{u}}$, допускающих полные группы движений G_r поряд... $r > n(n-1)/2+2$. В этом случае элементы матрицы (T) имею... такой же вид, как и в работе [1]. С другой стороны, существую... пространства Дейвиса $D_{n, \dot{u}}$, допускающие полные группы движе... ний G_r порядка $r=n(n-1)/2+2$. В самом деле, пространств... $D_{n, u}$ с метрикой

$$ds^2 = (u^1)^{2\alpha}\cdot(e_2(u^2)^2 + e_3(u^3)^2 + \cdots + e_n(u^n)^2)^{\beta}\cdot dt^2,$$

где $\alpha+\beta=1$, $\alpha\neq m$, $e_i=\pm1$, допускает полную группу дви... жений G_r порядка $r=n(n-1)/2+2$ [1]. Таким образом, прихо... дим к следующему выводу [2]:

Теорема 1. *Максимальный порядок групп движений G_r в про... странствах Дейвиса $D_{n, \dot{u}}$ первого рода равен точно $n(n-1)/2+2$ и поэтому в порядках распределения полных групп движени... G_r в пространствах Дейвиса $D_{n, \dot{u}}$ первого рода с тензором $F_{\cdot i\cdot j\cdot k}\neq 0$ имеет место лакуна $n(n-1)/2+2 < r \leqslant n(n+1)/2$.*

Замечание. Пространства Дейвиса $D_{n, u}$ первого рода второ... лакунарности с ненулевым тензором $F_{\cdot i\cdot j\cdot k}$ допускают групп... движений G_r с отрезком конденсации $n(n-1)/2 \leqslant r \leqslant n(n-1)/2+2$.

2. Группы движений G_r в пространствах Дейвиса $D_{n, u}$ второ... рода. Предположим теперь, что пространство $D_{n, \dot{u}}$ является про... странством Дейвиса второго рода. В этом случае $D_{n, \dot{u}}$ по опре... делению допускает особую группу движений — группу, порожден... ную особыми операторами. Особые операторы действуют на общи... траекториях. Отметим, что изучению свойств особых операторо... посвящена работа [3]; в ней доказывается, что совокупность L...

...ный операторов порождает подалгебру в алгебре L_r группы движений G_r; более того, подалгебра L^0 является идеалом в L_r. Если за счет преобразования переменных $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ привести один из операторов, например $X_1 \in L^0$, к виду $X_1 = P_1$, $\left(P_1 = \frac{\partial}{\partial x^1}\right)$, то любой другой особый оператор $X \in L^0$ будет вида

$$X = \varphi(x^1, x^2, \ldots, x^n) \cdot P_1, \tag{5}$$

где $\varphi(x^1, \ldots, x^n)$ — некоторая функция, отличная от постоянной.

В работе [4] доказывается, что эта функция $\varphi(x^1, \ldots, x^n)$ — аналитическая функция лишь одной переменной x^1, и обратно — всякий оператор $X = \varphi(x^1) \cdot P_1$, где $\varphi(x^1)$ — любая аналитическая функция указанного аргумента, будет особым оператором.

Таким образом, алгебра Ли особых полей движений пространства Дейвиса векторных плотностей является бесконечномерной алгеброй:

$$L_\infty = \{\varphi(x^1) P_1 \mid \varphi(x^1) \in C^\omega\}. \tag{6}$$

Следовательно, всякое пространство Дейвиса $D_{n, \dot{u}}$ второго рода допускает бесконечномерную группу Ли движений, порождаемую алгеброй L_∞. В (6) содержатся, в частности, операторы

$$X_1 = P_1, \ X_2 = x^1 P_1. \tag{7}$$

Интегрируя уравнение $DF = v^\sigma \partial_0 F + u^\sigma \partial_\sigma v^\tau F_{.\tau} - 2mF\partial_\sigma v^\sigma = 0$, для операторов (7) получим

$$F = (u^1)^{2\alpha} \cdot \varphi(x^2, \ldots, x^n; u^2, \ldots, u^n), \tag{8}$$

где $\alpha = m$; $\varphi(x^2, \ldots, x^n; u^2, \ldots, u^n)$ — дифференцируемая функция, однородная степени $2 - 2\alpha$ относительно координат v^i. Пространство Дейвиса $D_{n, u}$ называется мультипликативно приводимым, если его метрическая функция $F(x, \dot{u})$ в некоторой системе координат представляется в виде $F(x, u) = F_1^A(x^a, u^b) \cdot F_2^B(x^\lambda, u^\delta)$, $A + B = 1$, где $F_1(x^a, u^b)$, $F_2(x^\lambda, u^\delta)$ — самостоятельные метрики в пространствах $D_{n_1, \dot{u}}$, $D_{n_2, \dot{u}}$ векторной плотности соответственно n_1 и n_2 измерений $(n_1 + n_2 = n)$. Заметим, что впервые мультипликативно приводимые пространства были введены автором в работе [1]. Формула (8) показывает, что метрика $F(x, \dot{u})$ пространства Дейвиса $D_{n, \dot{u}}$ — мультипликативно приводимая. В рассматриваемом случае $n_1 = 1$, $n_2 = n - 1$. Так как алгебра L_∞ особых движений является идеалом в алгебре L всех движений, то в каждом операторе движений $X = v^\sigma(x) p_\sigma$ $(\nu = 2, 3, \ldots, n;\ \sigma = 1, 2, \ldots, n)$ будет $v^1 = v^1(x^1)$, $\partial_1 v^\nu(x) = 0$. Вся алгебра L группы движений пространства $D_{n, \dot{u}}$ представляется в виде прямой суммы L_∞ и алгебры Ли, определенной полями движений в пространстве $D_{n_2, \dot{u}}$ мультипликативного разложения (8). Группа движений пространства $D_{n, u}$ является, следовательно,

прямым произведением полных групп движений G_∞ и G_{r_2}, доп-
скаемых соответственно пространствами $D_{n_1,\dot u}$, $D_{n_2,\dot u}$ мультипли-
кативного разложения (8). Если второй множитель $D_{n_2,\dot u}$ бу-
пространством Дейвиса первого рода, т. е. пространством D
нулевой сигнатуры, и, следовательно, данное $D_{n,\dot u}$ — простран-
$D^1_{n,\dot u}$ второго рода и первой сигнатуры, тогда полная группа дв-
жений G пространства $D_{n,\dot u}$ определяется следующим обра-
$G = G_\infty + G_{r_2}$, где G_∞ — полная группа движений метрики D
G_{r_2} — полная группа движений метрики $D_{n_2,\dot u}$.

Предположим, что пространство $D_{n,\dot u}$ второго рода и име-
сигнатуру k. Тогда метрическая функция пространства опре-
ляется формулой

$$F(x, \dot u) = (u^1)^{2m} \ldots (u^k)^{2m} \cdot \varphi(x^{k+1}, \ldots, x^n; u^{k+1}, \ldots, u^n), \quad (\ldots$$

где $\varphi(x^{k+1}, \ldots, x^n; u^{k+1}, \ldots, u^n)$ — аналитическая функция
указанных переменных u^i степени $2 - 2km$. Пространство Дейви-
$D^k_{n,\dot u}$, как следует из (9), является мультипликативно приводим-
и разлагается в прямое произведение $k+1$ пространств $D^1_{n_1,\dot u}$,
$D^1_{n_2,\dot u}, \ldots, D^1_{n_k,\dot u}, D^0_{n_{k+1},\dot u}$, из которых первые k простран-
одномерны, а последний множитель — $(n-k)$-мерный.

В рассматриваемом случае алгебра Ли движений разлагает-
в прямую сумму алгебр Ли полных групп движений, действу-
щих в пространствах-сомножителях мультипликативного разло-
жения (9). В случае $k = n$ будет $D^n_{n,\dot u} = D^1_{1,\dot u} \times D^1_{1,\dot u} \times \ldots \times D^1_{1}$
(n сомножителей). Метрическая функция пространств Дейви-
$D^n_{n,\dot u}$ будет $F = F_1^{A_1} \cdot F_2^{A_2} \ldots F_n^{A_n}$, где $A_1 = \cdots = A_n = m$, F_i —
метрики одномерных пространств сомножителей мультипликати-
ного разложения, причем $F_{\cdot i} = (u^i)^2$, $m \cdot n = 1$ $(i = 1, 2, \ldots,$
$F = a(u^1)^{2m} \cdot (u^2)^{2m} \ldots (u^n)^{2m}$, $a \in R$, $a \neq 0$; G — группа движе-
пространства $F_{n,\dot u}$ с метрической функцией F, $G = G_\infty \times \ldots \times G$
(n раз).

3. **Движения в пространствах ковекторных плотностей D_n
первого и второго рода.** В теории пространств $D_{n,u}$ вводится, к
и в $D_{n,\dot u}$, понятие пространства Дейвиса $D_{n,u}$ первого и второ-
рода. Последние, в свою очередь, допускают одну или несколь-
систем особых траекторий (общих траекторий операторов груп-
движений G_r). Пространства $D_{n,u}$ второго рода, допускающие
наборов особых траекторий, называются пространствами k-ой си-
натуры. Эти пространства будем обозначать символом $D^k_{n,u}$. Пр-
странства первого рода условимся в дальнейшем называть пр-
странствами Дейвиса $D^0_{n,u}$ нулевой сигнатуры. Сюда переносит-
и понятие мультипликативной приводимости.

Пространство Дейвиса $D_{n,u}$ называется мультипликативно приводимым, если его метрическая функция $F(x, u)$ в некоторой системе координат приводится к виду $F(x, u) = F_1^A(x^a, u_b) \cdot F_2^B(x^\lambda, u_\delta)$ $(A + B = 1)$, где $F_1(x^a, u_b)$, $F_2(x^\lambda, u_\delta)$ — самостоятельные метрики ковекторной плотности пространств $D_{n_1,u}$ и $D_{n_2,u}$ соответственно от переменных (x^a, u_b), (x^λ, u_δ), причем $n_1 + n_2 = n$.

Прежде всего, как и в п. 1, для произвольной точки (x^i, u_j) пространства Дейвиса $D_{n,u}$ выберем систему координат, в которой $u_i = \delta_i^{\alpha_1}$, $i = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Тогда из уравнений $DL^{\cdot i \cdot j} = 0$, $DF^{\cdot i \cdot j} = 0$ следует, что

$$\left.\begin{matrix} e_\alpha u_\alpha^\beta + e_\beta u_\beta^\alpha = 0, \\ u_{\alpha_1}^{\alpha_1} = 0, \ e_\alpha = \pm 1 \end{matrix}\right] \mathrm{mod}\,(v^i, u_\delta^{\alpha_1}) \ (\alpha, \beta, \sigma = 2, 3, \ldots n).$$

Рассматривая условия инвариантности тензоров $F^{\cdot i \cdot j \cdot k}$, $F^{\cdot i \cdot j \cdot k \cdot l}$ аналогично тому, как это сделано в п. 1, получим

1. Максимальный порядок r групп движений G_r метрических пространств ковекторной плотности $D_{n,u}^0$ нулевой сигнатуры равен [2] точно $n(n-1)/2 + 2$. Пространства $D_{n,u}^0$ указанной максимальной подвижности определяются [1] метрическими функциями: $F(x, u) = (u_1)^{2\alpha} \cdot (e_2 u_2^2 + \cdots + e_n u_n^2)^\beta$ $(\alpha + \beta = 1, \ e_i = \pm 1, \ \alpha \neq m)$.

2. Полная группа движений G пространства $D_{n,u}^k$ ковекторной плотности k-ой сигнатуры есть прямое произведение $G = (G_\infty)^k \times G_{r_{k+1}})$, k сомножителей групп G_∞, порожденных идеалами $L_\infty = \{f(x^1) p_1 \mid f(x^1) \in C^\omega\}$ и группы $G_{r_{k+1}}$, реализующей максимальную подвижность в пространствах $D_{n-k,u}^0$ от $n-k$ переменных нулевой сигнатуры. Метрическая функция пространства $D_{n,u}^k$ задается следующей формулой:

$$F(x, u) = F_1^{A_1}(x, u) \cdot F_2^{A_2}(x, u) \ \ldots \ F_k^{A_k}(x, u) \cdot F_{k+1}^{A_{k+1}}(x, u),$$

где $A_1 = \cdots = A_k = m$, $A_{k+1} = 1 - mk$, F_1, F_2, $\ldots$, F_{k+1} — метрики пространств-сомножителей мультипликативного разложения: $F_i = (u_i)^{2m}$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$, $F_{k+1} = F_{k+1}(x^{k+1}, \ldots, x^n; u_{k+1}, \ldots, u_n)$, причем F_{k+1} — дифференцируемая функция класса C^ω от указанных переменных пространства $D_{n-k,u}^0$.

При $k = n$ получаем, что $D_{n,u} = D_{1,u}^1 \times D_{1,u}^1 \times \cdots \times D_{1,u}^1$ (n сомножителей) и метрическая функция $F(x, u) = a u_1^{2m} \cdot u_2^{2m} \ldots u_n^{2m}$ $(n \cdot m = 1, \ a \in R)$; группа движений в этом случае есть $G = G_\infty \times \cdots \times G_\infty$ (n сомножителей).

Полученные результаты уточняют исследования в работе [5] и полностью решают вопрос о лакунах и классах максимально подвижных пространств $D_{n, u}^{-}$, $D_{n, u}$, допускающих группы [illegible]ний и гомотетий при условии, что $r \geqslant n(n-1)/2+1$.

В заключении заметим, что пространства Дейвиса $D_{n, u}^{k}$, $D_{n, u}^{k}$ ненулевой сигнатуры $k \neq 0$ векторных и ковекторных плотностей не допускают построения инвариантной аффинной связности.

Список литературы: 1. *Егоров А. И.* Максимально подвижные финслеровы пространства.— Уч. зап. Пенз. пед. ин-та, Рязань, 1974, с. 17—21. 2. *Габбов Г. А.* Гомотетии и движения в метрических пространствах опорных векторных плотностей.: Дис. ... канд. физ.-мат. наук.— Казань, 1979. 3. *Егорова Л. И.* Автоморфизмы и гомотетии в пространствах Дейвиса.— В кн.: VII Всесоюз. конф. по совр. проблемам геом.: Тез. докл., Минск, 1979, с. 4. *Егоров И. П., Егорова Л. И.* Автоморфизмы и гомотетические преобразования в C_n-пространствах.— В кн.: 150 лет геом. Лобачевского. Всесоюз. науч. конф.: Тез. докл., Казань, 1976, с. 74. 5. *Егоров И. П., Егорова Л. И.* Об автоморфизмах в пространствах векторной и ковекторной плотности.— В кн.: VII Всесоюз. геом. конф. (тез. докл.), Минск, 1979, с. 64.

Поступила в редколлегию 15.02.

УДК 514

В. Ф. ИГНАТЕНКО

ОБ ОДНОЙ СИСТЕМЕ БАЗИСНЫХ ИНВАРИАНТОВ ГРУППЫ B_n

Зададим в вещественном n-мерном евклидовом пространств[illegible] прямоугольную систему координат Ox_i $(i = \overline{1, n} \geqslant 2)$. Пусть п[illegible] вильный многогранник с неприводимой группой симметрий G им[illegible] вершины V_r $(r = \overline{1, p})$ и центр тяжести O. Обозначим чере[illegible] характеристические степени алгебры I^G всех многочленов, инва[illegible] антных относительно G. Формы

$$V^G_{m_i} = \sum_r (\overrightarrow{OV}_r, \ \boldsymbol{x})^{m_i},$$

где вектор $\boldsymbol{x} = (x_i)$, принадлежат I^G. При изучении некотор[illegible] систем дифференциальных уравнений возникла следующая пробле[illegible] Волша [1]: установить, порождают ли $V^G_{m_i}$ алгебру I^G. Флатто [2, [illegible] решил ее положительно для всех групп G, отличных от груп[illegible] симметрий B_n $(n > 7)$ n-куба, и высказал такое предположение [3[illegible] *инварианты* $V^{B_n}_{m_i}$ $(n > 7)$ *алгебраически независимы*. Его по[illegible] дил Хейслейн [4]. В настоящей заметке приводится другое док[illegible] тельство [5] этого результата.

Пусть n-куб определяется вершинами $(\pm 1, \ \pm 1, \ \ldots,$ [illegible] $p = 2^n$. Тогда формы (1) принимают вид

$$V^{B_n}_{2s} \equiv P_{n, 2s} = \sum\nolimits_{\pm} (\pm x_1 \pm x_2 \pm \ldots \pm x_n)^{2s}, \quad s = \overline{1, n}.$$

В случае $n = 2$ инварианты (2) независимы, так как $P_{2,4} \neq c\,(x_1^2 + x_2^2)^2$. Предположим, что (2) независимы и в пространстве E^{n-1}

Если они зависимы в E^n, то для некоторого многочлена f выполняется соотношение

$$f(P_{n,2s}) = 0, \quad s = \overline{1, n}. \tag{3}$$

Возьмем форму

$$(\zeta + x_n)^{2s} + (\zeta - x_n)^{2s} = 2 \sum_{t=0}^{s} \zeta^{2(s-t)} x_n^{2t}, \tag{4}$$

где линейная функция

$$\zeta = \sum_{k=1}^{n-1} a_k x_k, \quad a_k \in \{-1, 1\}. \tag{5}$$

Просуммировав (4) по всем наборам коэффициентов a_k (их 2^{n-1}), получим $P_{n,2s}$, т. е.

$$P_{n,2s} = 2 \sum\nolimits_{\pm} \sum_{t=0}^{s} \zeta^{2(s-t)} x_n^{2t}. \tag{6}$$

На основании (5)

$$P_{n-1,\, 2(s-t)} = \sum\nolimits_{\pm} \zeta^{2(s-t)}, \quad t < s. \tag{7}$$

Из (6) и (7) следует рекуррентная формула:

$$P_{n,2s} = 2 \sum_{t=0}^{s} P_{n-1,\, 2(s-t)} x_n^{2t}, \quad P_{n-1,\,0} = 1. \tag{8}$$

Так как $P_{n-1,\,2n}$ является многочленом от $P_{n-1,\,2s}$ $(s < n)$, то, положив в (3) $x_n = c$, получим, согласно (8), алгебраическую зависимость между $P_{n-1,\,2s}$ $(s = \overline{1, n-1})$, что невозможно. Следовательно, инварианты (2) составляют базис алгебры I^{B_n}. При этом s_i есть различные натуральные четные числа, сумма которых равна $n(n+1)$.

Заметим, что доказанное утверждение можно сформулировать так: если уравнения $(n-1)$-граней правильного 2^n-гранника записаны в виде $(b_r, x) = c_r$, $r = \overline{1, 2^n}$, где все нормальные векторы b_r $(n-1)$-граней имеют одну и ту же длину, то формы $\sum_r (b_r, x)^{2s}$, $s = \overline{1, n}$, порождают алгебру I^{B_n}.

Список литературы: 1. *Flatto L.* Regular polytopes and harmonic polynomials. — Canad. J. Math., 1970, 22, p. 7—21. 2. *Flatto L.* Functions with a mean value property. II. — Amer. J. Math., 1963, 85, № 2, p. 248—270. 3. *Flatto L.* Basis sets of invariants for finite reflection groups. — Bull. Amer. Math. Soc., 1968, 74, № 4, p. 730—734. 4. *Haeuslein G. K.* On the algebraic independence symmetric functions. — Proc. Amer. Math. Soc., 1970, 25, № 1, p. 179—182. 5. *Игнатенко В. Ф.* К проблеме нахождения полных базисов алгебр многочленов, инвариантных относительно конечных групп симметрий пространства E^n. — В кн.: Тез. докл. Всесоюз. симпозиума по теории симметрии и ее обобщениям, Кишинев, 1980, с. 50—51.

Поступила в редколлегию 27.04.84.

УДК 517. 544. 513. 81

С. Б. КЛИМЕНТОВ

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ПОСТРОЕНИЯ РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ИЗГИБАНИЙ ПОВЕРХНОСТЕЙ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ

1. Предлагаемая статья посвящена построению решений эллиптических систем первого порядка в плоской односвязной ограниченной области. Ниже эта область без ограничения общности считается единичным кругом. Рассматриваются линейные и квазилинейные неканонические эллиптические системы в комплексной записи вида

$$\partial_{\bar z}w + q_1(z)\,\partial_z w + q_2(z)\,\partial_{\bar z}\bar w + A(z)\,w + B(z)\bar w = F(z); \quad (1.1)$$

$$\partial_{\bar z}w + q_1(z,w)\,\partial_z w + q_2(z,w)\,\partial_{\bar z}\bar w + A(z,w)\,w + B(z,w)\,w = F(z,w) \quad (1.2)$$

где $w = w(z)$ — искомая комплексная функция, определенная в замкнутом единичном круге $\bar D = D \cup \Gamma = \{z: |z| \leqslant 1\}$, $\Gamma = \partial D$ комплексной z-плоскости, $z = u + iv$, $i^2 = -1$, $\bar z = u - iv$; $\partial_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u} - i\,\frac{\partial}{\partial v}\right)$, $\partial_{\bar z} = (\overline{\partial_z})$ — в общем случае обобщенные производные в смысле С. Л. Соболева;

$$|q_1| + |q_2| \leqslant q_0 = \text{const} < 1, \quad \forall z \in \bar D, \quad (1.3)$$

q_1, q_2, A, B, F — заданные функции, которые будем называть коэффициентами уравнений (1.1) и (1.2). В квазилинейном случае если число q_0 в (1.3) не зависит от функции $w(z)$, то система (1.2) называется равномерно эллиптической, если $q_0 = q_0(w)$, $\sup\limits_w q_0(w) = 1$, то — неравномерно эллиптической.

Затрагиваемые в данной статье вопросы возникают при исследовании изометрических преобразований поверхности, а именно если S — параметризованная в единичном круге $\bar D$ регулярная поверхность положительной внешней кривизны $K \geqslant \text{const} > 0$, расположенная в трехмерном полном односвязном пространстве постоянной кривизны, то уравнения Гаусса — Петерсона — Кодацци, записанные для поверхности S^*, изометричной поверхности S, приводятся к виду (1.2) (при $F \equiv 0$), где $w(z) = (b_{22} - b_{11} + 2ib_{12})\,g^{-1/2}$ — комплексная функция изгибаний; b_{ij} — второй основной тензор поверхности S^*; q_1, q_2, A, B вещественно-аналитически зависят от w, $\bar w$ [1]; решению $w(z) \not\equiv 0$ соответствует нетривиальное изометрическое преобразование поверхности S, решению $w(z) \equiv 0$— тривиальное изометрическое преобразование (движение).

Рассматривается вопрос о построении всех решений систем (1.1), (1.2) из заданного класса регулярности, а также решений, удо удовлетворяющих на $\partial D = \Gamma$ краевому условию Римана — Гильберта:

$$\operatorname{Re}\{\lambda(t)\overline{w(t)}\} = \gamma(t), \quad t \in \Gamma, \tag{1.4}$$

где λ, γ — заданные на Γ непрерывные функции, удовлетворяющие некоторым условиям регулярности.

В случае квазилинейного уравнения рассматривается также нелинейное краевое условие вида

$$\operatorname{Re}\{\lambda(t)w(t)\} + \mu(t, w(t)) = \gamma(t), \quad t \in \Gamma, \tag{1.5}$$

где μ — вещественная регулярная функция, представимая в виде $\mu(t, w) = \operatorname{Re}\{\sigma(t, w)w\}$, причем $\sigma(t, w)$ (а следовательно, и $\mu(t, w)$) дифференцируема по w и $\bar{w}$,

$$|\sigma| < |\lambda|, \quad |2\mu_w| < |\lambda|. \tag{1.6}$$

К краевой задаче (1.2), (1.5) приводится задача об изометрических преобразованиях поверхности S при краевом условии на ∂S:

$$\theta_1(s)\,\Delta k_{nR}(s) + \theta_2(s)\,\Delta\tau_{gR}(s) = \theta_3(s), \tag{1.7}$$

где $\theta_i(s)$, $i = 1, 2, 3$, — заданные на ∂S непрерывные функции; R — непрерывное поле направлений на S, заданное в точках границы ∂S; Δk_{nR}, $\Delta\tau_{gR}$ — изменения нормальной кривизны k_n и геодезического кручения τ_g поверхности S в направлении R при изометрическом преобразовании [1]. При этом функция $\sigma(t, w)$ в (1.5) будет аналитична по w, $\bar{w}$ и будут выполнены условия (1.6).

В работе используются следующие функциональные пространства:

1) пространства суммируемых в $\bar{D}$ с показателем p функций $L_p(\bar{D})$;

2) пространства С. Л. Соболева $W_p^k(\bar{D})$, $k \geqslant 0$, $p > 2$, $W_p^0 \equiv L_p$;

3) пространства $C_\alpha^k(\bar{D})$, $C_\alpha^k(\Gamma)$, $k \geqslant 0$, $0 < \alpha < 1$, функций, k раз непрерывно дифференцируемых, k-е частные производные которых удовлетворяют условию Гельдера с показателем α.

В перечисленных пространствах считаются заданными стандартные нормы, определения которых можно найти в работах [2—4].

Ниже все функции из классов Соболева $W_p^k(\bar{D})$, $k \geqslant 1$, $p > 2$, считаются непрерывными [2, с. 57].

В работе также используются банаховы пространства $W_p^{k-1/p}(\Gamma)$, $k \geqslant 1$, $p > 2$, граничных значений на Γ непрерывных функций класса $W_p^k(\bar{D})$. Норму функции $f(t) \in W_p^{k-1/p}(\Gamma)$ определим как норму в $W_p^k(\bar{D})$ гармонической в D функции с граничными значениями $f(t)$. Интеграл типа Коши непрерывно отображает пространство $W_p^{k-1/p}(\Gamma)$, $k \geqslant 1$, $p > 2$, в себя [3, с. 46; 4, гл. 6, § 1].

Приведем краткий обзор работ по затрагиваемой в настоящей статье тематике.

Б. В. Боярским в работе [5] указан способ построения реш
уравнений (1.1), (1.2) исходя из заданной аналитической в D фу
ции $\Phi(z)$ при помощи сведения комплексного дифференциальн
уравнения к двумерному сингулярному интегральному уравнени
Полученное решение выражается через функцию Φ, ее прои
ную Φ' и принадлежит, вообще говоря, классу $W_p^1(\bar{D})$, p
где p достаточно близко к двум.

Если функция Φ достаточно регулярна в D и коэффицие
уравнения также регулярны, то при этом решение все равно по
чается, вообще говоря, обобщенное в $\bar{D}$.

Также с использованием сингулярных интегральных уравне
В. С. Виноградовым [6, 7] изучен вопрос разрешимости крае
задач (1.1), (1.4) и (1.2), (1.4). При условии регулярности ис
ных данных полученное в [6, 7] решение краевой задачи так
вообще говоря, класса $W_p^1(\bar{D})$, где $p>2$ достаточно близко к дву
Впоследствии В. С. Виноградовым получены результаты по д
мерным сингулярным интегральным уравнениям, позволяющие ст
ить решения уравнения (1.1) и краевой задачи (1.1), (1.4) клас
$W_p^1(D)$ при $\forall p>2$; при этом предполагается непрерывность ко
фициентов q_1, q_2 [8].

Обобщенные решения задачи (1.2), (1.4) с разрывными ко
фициентами краевого условия рассматривались в [4], а задачи (1
(1.5) при условии «малости» нелинейной части и свободного чл
краевого условия — в [9]. Если схему, используемую в [4] и [
употребить для непрерывных коэффициентов краевого условия,
полученные решения вообще также будут класса $W_p^1(\bar{D})$, где p
достаточно близко к двум.

В работе [1] исследуется разрешимость краевой задачи (1
(1.5) «в окрестности нуля» для уравнений Гаусса — Петерсона
Кодацци. С использованием специальной структуры возникающ
при этом уравнения типа (1.2) краевая задача сводится к син
лярному интегральному уравнению. Решения этого уравнения ст
ятся в классе $C_\alpha(\bar{D})$, в связи с чем их в общем случае нел
трактовать как решения исходных дифференциальных уравнен
(даже в смысле С. Л. Соболева). Таким образом, в работе
доказаны лишь утверждения, касающиеся отсутствия решений р
сматриваемой краевой задачи, утверждения же о наличии реш
ний — нет.

В работах [1, 5—7] при рассмотрении квазилинейного урав
ния предполагается лишь, что коэффициенты удовлетворяют ус
виям Липшица по переменным w и $\bar{w}$, что исключает применен
дифференциального исчисления для нелинейных операторов. Вмес
с тем коэффициенты уравнений Гаусса — Петерсона — Кодац
дифференцируемы (даже аналитичны) по w, $\bar{w}$. Это позвол
использовать теорему о неявной функции и при наличии подхо
щих свойств соответствующих линейных операторов и априорн

жной проанализировать структуру множества всех решений. Для частного случая уравнения (1.2) (уравнений Гаусса — Петерсона — Кодацци) это проделано в [10] (без привлечения краевых условий). Необходимые свойства линейных операторов при этом устанавливает теорема 1 настоящей статьи, частный случай которой в [10] приведен без доказательства. В настоящей работе доказываются свойства необходимых линейных операторов, предлагается новый метод построения решений краевых задач для уравнений (1.1), (1.2). При этом уравнение (1.2) берется в общем виде, без использования его специфики в случае системы Гаусса — Петерсона — Кодацци.

В качестве основного средства используется не сингулярное интегральное уравнение, а интегродифференциальное уравнение

$$\Omega(w) \equiv w(z) + P_n\left(q_1(z)\,\partial_z w + q_2(z)\,\partial_{\bar z} w + A(z)\,w + B(z)\,\bar w\right) = \\ = \Phi(z) + P_n F(z), \qquad (1.8)$$

где

$$P_n f(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_D \left[\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} + \frac{z^{2n+1}\overline{f(\ )}}{1 - \bar\zeta z}\right] d\xi d\eta - \qquad Q - \bar\zeta z$$

$$-\frac{1}{\pi}\iint_D \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(1 - z\bar z_1)\ldots(1 - z\bar z_{k-1})(1 - z\bar z_{k+1})\ldots(1 - z\bar z_{2n+1})}{(\bar z_k - \bar z_1)\ldots(\bar z_k - \bar z_{k-1})(\bar z_k - \bar z_{k+1})\ldots(\bar z_k - \bar z_{2n+1})}\cdot \\ \cdot \frac{\overline{f(s)}}{\bar\zeta - \bar z_k}\, d\xi d\eta +$$

$$+\frac{1}{\pi}\iint_D \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(z - z_1)\ldots(z - z_{k-1})(z - z_{k+1})\ldots(z - z_{2n+1})}{(z_k - z_1)\ldots(z_k - z_{k-1})(z_k - z_{k+1})\ldots(z_k - z_{2n+1})}\cdot \\ \cdot \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_k}\, d\xi d\eta, \quad \zeta = \xi + i\eta; \qquad (1.9)$$

z_k, $k = 1, 2, \ldots, 2n+1$, — произвольные различные фиксированные точки контура Γ; $\Phi(z)$ — аналитическая в D функция; $n \geqslant 0$ — целое число.

Для $f(z) \in L_p(\bar D)$, $p > 2$, легко проверяются следующие свойства функции $P_n f(z)$ [2, с. 50, 223, 293—294]:

$$P_n f(z_k) = 0,\ k = 1, \ldots, 2n+1; \quad \operatorname{Re}\{z^{-n} P_n f(z)\} = 0,\ z \in \Gamma; \qquad (1.10)$$

$$\partial_{\bar z} P_n f(z) = f(z). \qquad (1.11)$$

Вместе с оператором (1.8) используются и сингулярные интегральные уравнения. Привлекаются также оператор Ω^*, определяемый аналогично Ω, но с участием интеграла

$$P_n^* f(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_D \left[\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} + \frac{\zeta^{-2n-1}\overline{f(\zeta)}}{1 - z\bar\zeta}\right] d\xi d\eta, \qquad (1.12)$$

где $n<0$ — целое число, и соответствующие уравнению (1 нелинейные версии операторов Ω, Ω^*.

Такой подход дает следующие преимущества: а) более удобную зависимость решения от аналитической функции $\Phi(z)$; выполнение полезное при решении краевой задачи (1.4) равенство $\mathrm{Re}\{\ldots \times w(z)\} = \mathrm{Re}\{z^{-n}\Phi(z)\}$, $z\in\Gamma$; б) в случае регулярности коэффициентов и функции Φ получаются регулярные в D решения; в) в квазилинейном случае позволяет проанализировать глобальную структуру множества всех решений уравнения (1.2) и множества решений соответствующей краевой задачи (при дифференцируемости коэффициентов по w и $\bar{w}$).

Чтобы не загромождать обозначений, там, где это не может вызвать недоразумений, различные функции иногда обозначаются одинаковыми буквами.

Автор выражает глубокую признательность В. С. Виноградову за полезные советы при обсуждении работы.

2. **Формулировка результатов.** В работе фигурируют следующие варианты требований на регулярность.

Линейный случай.

I. Функции $q_i(z)$, $i=1, 2$ непрерывны почти всюду в D;

$$A,\ B,\ F(z)\in L_p(\bar{D}),\ p>2;\ \lambda(t),\ \gamma(t)\in W_p^{1-1/p}(\Gamma).$$

II. q_i, $i=1, 2$, A, B, $F(z)\in W_p^k(\bar{D})$, $k\geqslant 1$, $p>2$; $\lambda, \gamma \in W_p^{k+1-1/p}(\Gamma)$.

III. q_i, $i=1, 2$, A, B, $F(z)\in C_\alpha^k(D)$, $k\geqslant 0$, $0<\alpha<1$; $\lambda, \gamma \in C_\alpha^{k+1}(\Gamma)$.

Квазилинейный случай.

IV. Для $\forall w(z)\in C(\bar{D})$ функции $q_i(z, w(z))$, $i=1, 2$, как функции от z непрерывны почти всюду в D, функции A, B, $F(z, w(z))\in L_p(D)$, $p>2$; для $\forall w(z)\in W_p^1(\bar{D})$ функция $\sigma(z, w(z))\in W_p^{1-1/p}(\Gamma)$.

Отображения $W_p^1(\bar{D})\to L_\infty(D)$ по формулам $w(z)\to q_i(z, w(z))$, $i=1, 2$, **(2.1)** и отображения $W_p^1(D)\to L_p(D)\,[w_p^{1-1/p}(\Gamma)]$ по формулам

$$w(z)\to A,\ B,\ F(z, w(z)), \tag{2.2}$$

$$w(z)\to \sigma(z, w(z)) \tag{2.3}$$

— класса C^m по Фреше, $m=1, 2, \ldots, \infty, \omega$ (отображения класса C^ω — аналитические).*)

---

*) Очевидно, можно привести различные достаточные условия на коэффициенты уравнения (1.2) и краевого условия (1.5) как на функции двух переменных, влекущие за собой принадлежность отображений (2.1) — (2.3) классу C^m. Не будем углубляться в этот вопрос, отметим только, что для уравнений Гаусса — Петерсона — Кодацци условия регулярности выполнены (см. [10]).

функции $\lambda, \gamma \in W_p^{1-1/p}(\Gamma)$.

V. Для $\forall w(z) \in W_p^l(\bar{D})$, $1 \leqslant l \leqslant k$ (k фиксировано), $p > 2$, функции $q_i(z, w(z))$, $i = 1, 2$, A, B, $F(z, w(z))$ — класса $W_p^l(\bar{D})$; для $w(z) \in W_p^{k+1}(\bar{D})$ функция $\sigma(z, w(z)) \in W_p^{k+1-1/p}(\Gamma)$.

Отображения $W_p^{k+1}(D) \to W_p^k(\bar{D})$ по формулам (2.1), (2.2) и отображение $W_p^{k+1}(\bar{D}) \to W_p^{k+1-1/p}(\Gamma)$ по формуле (2.3) — класса C^m по Фреше, $m = 1, 2, \ldots, \infty, \omega$.

Функции $\lambda, \gamma \in W_p^{k+1-1/p}(\Gamma)$.

VI. Для $\forall w(z) \in C_\alpha^l(D)$, $0 \leqslant l \leqslant k$ (k фиксировано), $0 < \alpha < 1$, функции $q_i(z, w(z))$, $i = 1, 2$, A, B, $F(z, w(z))$ — класса $C_\alpha^l(\bar{D})$; для $w(z) \in C_\alpha^{k+1}(\bar{D})$ функция $\sigma(z, w(z)) \in C_\alpha^{k+1}(\Gamma)$.

Отображения $C_\alpha^{k+1}(\bar{D}) \to C_\alpha^k(D)$ по формулам (2.1), (2.2) и отображение $C_\alpha^{k+1}(\bar{D}) \to C_\alpha^{k+1}(\Gamma)$ по формуле (2.3) — класса C^m по Фреше, $m = 1, 2, \ldots, \infty, \omega$.

Функции $\lambda, \gamma \in C_\alpha^{k+1}(\Gamma)$.

Отметим, что в силу требований на отображения (2.1)—(2.3) коэффициенты уравнения (1.2) для каждого фиксированного $z \in \bar{D}$ (в случае IV для почти каждого $z \in D$) как функции переменной w — класса C^m (аналогично для $\sigma(z, w)$).

При всех предположениях считаем выполненными следующие требования: функции A, B, $F(z, w)$ и их первые производные по w, $\bar{w}$ равномерно по $w(z) \in C(\bar{D})$ ограничены в $L_p(\bar{D})$ (в случае VI $p > 2$ — любое сколь угодно большое число); первые производные функций $q_i(z, w)$, $i = 1, 2$, по w, $\bar{w}$ равномерно по $w(z) \in C(\bar{D})$ ограничены в $L_\infty(\bar{D})$.

Заметим, что из последних требований и теоремы о среднем вытекает непрерывность отображений $C(\bar{D}) \to L_\infty(\bar{D})$ по формулам (2.1) и $C(\bar{D}) \to L_p(D)$ по формулам (2.2).

Замечание. В тех формулировках, где участвуют не все функции, перечисленные в условиях регулярности, условия налагаются только на привлекаемые функции.

При налагаемых требованиях на коэффициенты без ограничения общности краевые условия (1.4), (1.5) можно считать приведенными к каноническому виду, т. е. $\lambda(z) \equiv z^n$, где $n = \frac{1}{2\pi} \Delta_\Gamma \arg \lambda(t)$, $\Delta_\Gamma f(t)$ — приращение функции $f(t)$ при обходе контура Γ против часовой стрелки [2, с. 351, 245, 312]. При предположениях регулярности I, IV все рассуждения из [2] остаются в силе с учетом ограниченности интеграла типа Коши в $W_p^{1-1/p}(\Gamma)$, $p > 2$.

В связи с этим и в силу формул (1.10), (1.11) важное место в настоящей статье занимают утверждения о свойствах оператора Q, определенного по формуле (1.8).

Теорема 1. *Если коэффициенты оператора Ω удовлетвор… условиям регулярности* I (*соответственно* II *или* III), *то* Ω … *изоморфизм банахова пространства* $W_p^1(\bar{D})$, $p>2$ (*соот… ственно* $W_p^{k+1}(\bar{D})$, $k \geqslant 1$, $p>2$, *или* $C_\alpha^{k+1}(\bar{D})$, $k \geqslant 0$, $0<\alpha$ …

Замечания. 1) Если в теореме 1 при предположениях II и … потребовать, чтобы коэффициенты q_1, q_2 были регулярности … единицу выше, чем A, B, $F(z)$, то теорема легко следует … результатов И. Н. Векуа (см. лемму I и следствие леммы … Однако при изучении множества решений квазилинейного ур… нения (1.2) существенно опираться на свойства оператора Ω п… требованиях теоремы 1.

2) С помощью теоремы 1 можно доказать теорему об обра… мости линейного сингулярного интегрального оператора, аналог… ного изученному в [8]. При этом получается обратимость в пр… странствах $W_p^k(\bar{D})$, $k \geqslant 0$, $p>2$; $C_\alpha^k(\bar{D})$, $k \geqslant 0$, $0<\alpha<1$, а коэф… фициентами сингулярного оператора служат q_1, q_2, A, B, удовл… творяющие одному из условий регулярности I, II, III (в [8] ра… смотрена обратимость в $L_p(\bar{D})$ при условиях $q_1, q_2 \in C(\bar{D})$, A, B … $\in L_p(\bar{D})$, $p>2$).

3) Утверждение, аналогичное теореме 1, справедливо д… оператора Ω^*.

4) Теорема 1 по существу эквивалентна априорной оцен… нормы решения $w(z)$ краевой задачи (1.1), (1,4) через нормы фун… ций λ, γ, F и нормы коэффициентов уравнения (1.1), а так… через значения решения $w(z_k)$, $k=1, 2, \ldots, 2n+1$ в зафикси… ванных в (1.9) точках $z_k \in \Gamma$.

Задача получения таких оценок выдвигалась в [3, с. 12] д… оператора Коши — Римана $\partial_{\bar{z}}w=0$ и краевого условия $\operatorname{Re} w(z)$ … $=0$, $z \in \Gamma$ как задача, не охватываемая развиваемой в [3] теори… Примечательно, что к задаче такого же сорта приводит изуче… геометрических проблем.

Для функции $w(z) \in W_p^1(\bar{D})$, $p>2$, справедливо равенство

$$w(z) - P_n(\partial_{\bar{z}}w) = \Phi(z), \qquad (2…$$

где $\Phi(z)$ — (комплексно) аналитическая в D функция класса $W_p^1(\bar{D})$ … Вывод этого соотношения аналогичен рассуждениям, привед… ным в [2] на с. 41. Из (1.10) вытекают следующие свойства фун… ции $\Phi(z)$ в (2.4):

$$\operatorname{Re}\{z^{-n}w(z)\} = \operatorname{Re}\{z^{-n}\Phi(z)\},\ z \in \Gamma;\ \ w(z_k) = \Phi(z_k), \qquad (2…$$
$$k = 1, 2, \ldots, 2n+1.$$

В действительных банаховых пространствах $C_\alpha^k(\bar{D})$ и $W_p^k(\bar{D})$ … аналитические функции образуют замкнутые подпространства. Обо… значим эти подпространства (с индуцированной нормой) соотве… твенно $A_\alpha^k(\bar{D})$ и $A_p^k(\bar{D})$.

В силу (2.4) дифференциальное уравнение (1.1) эквивалентно интегродифференциальному уравнению:

$$\Omega(w) = \Phi + P_n F \tag{2.6}$$

в следующем смысле: всякое решение уравнения (1.1) есть решение уравнения (2.6), где Φ — некоторая аналитическая в D функция и наоборот.

Следствие теоремы 1. *Оператор Ω по формуле (2.6) осуществляет изоморфизм множества решений M уравнения* (1.1) *класса* $W_p^1(\bar{D})$ $(W_p^{k+1}(\bar{D}),\ C_\alpha^{k+1}(\bar{D}))$ *и банахова пространства* $A_p^1(\bar{D})$ *соответственно* $A_p^{k+1}(\bar{D}),\ A_\alpha^{k+1}(\bar{D})$).

Из (2.4) и (2.5) получаем, что при $n \geqslant 0$ краевая задача (1.1), (1.4) эквивалентна интегродифференциальному уравнению (2.6), где Φ есть аналитическая в D функция, удовлетворяющая на Γ краевому условию:

$$\operatorname{Re}\{z^{-n}\Phi(z)\} = \gamma(z), \quad z \in \Gamma;$$

$$w(z_k) = \Phi(z_k), \quad k = 1, 2, \ldots, 2n+1. \tag{2.7}$$

Известно, что решения задачи (2.7) при $\lambda,\ \gamma \in C_\alpha^{k+1}(\Gamma)$, $k \geqslant 0$, $0 < \alpha < 1$, есть $(2n+1)$-мерная плоскость A_n пространства $A_\alpha^{k+1}(\bar{D})$ [2, с. 312]; справедливо аналогичное утверждение относительно решений класса $A_p^{k+1}(\bar{D})$, $k \geqslant 0$, $p > 2$, при $\lambda, \gamma \in W_p^{k+1-1/p}(\Gamma)$; при его доказательстве рассуждения из [2] дословно повторяются с использованием ограниченности интеграла типа Коши в пространстве $W_p^{k+1-1/p}(\Gamma)$. Отсюда, из (2.6), (2.7) и следствия теоремы 1 вытекает

Теорема 2. *Пусть $n \geqslant 0$, функции q_i $(i = 1, 2)$, A, B, F, λ, γ удовлетворяют условиям регулярности* I (*соответственно* II, III). *Тогда задача* (1.1), (1.4) *разрешима и множество ее решений M_n представляет собой $(2n+1)$-мерную плоскость пространства* $W_p^1(\bar{D})$ $(W_p^{k+1}(\bar{D}),\ C_\alpha^{k+1}(\bar{D}))$. *Формула* (2.6) *устанавливает изоморфизм плоскостей A_n и M_n.*

При $n < 0$ однородная задача (1.1), (1.4) не имеет нетривиального решения, а неоднородная — не более одного решения [6] [2, с. 356—357]. При наличии решения $w(z)$ неоднородной задачи оно удовлетворяет уравнению $\Omega^*(w) = P_n{}^*F + \Phi^*$, аналогичному (2.6) (см. там же), где $\Phi^* \in A_p^{k+1}(\bar{D})$ либо $A_\alpha^{k+1}(\bar{D})$. В силу свойств оператора Ω^* для $w(z)$ имеют место те же свойства регулярности, что высказаны в теореме 2 для $n \geqslant 0$.

Регулярность гомеоморфных решений уравнения (1.1) при $A = B = F \equiv 0$ исследовалась в [4, гл. 5, § 4].

Для квазилинейного уравнения (1.2) и линейного краевого условия (1.4) результаты аналогичны теоремам 1—2, только множество решений в этом случае «криволинейное».

Теорема 3. *Пусть коэффициенты оператора*

$$\Psi(w) \equiv w + P_n(q_1(z, w)\,\partial_z w + q_2(z, w)\,\partial_{\bar z}\overline{w}) +$$
$$+ P_n(A(z, w)\,w + B(z, w)\,\overline{w} - F(z, w)) \qquad (2.8)$$

удовлетворяют условиям регулярности IV (соответственно V, IV), а q_1 и q_2 — также условию равномерной эллиптичности. Тогда 1) оператор Ψ есть C^m-диффеоморфизм банахова пространства $W_p^1(\bar D)$ (соответственно $W_p^{k+1}(\bar D)$, $C_\alpha^{k+1}(\bar D)$); 2) множество решений R уравнения (1.2) класса $W_p^1(\bar D)$ ($W_p^{k+1}(\bar D)$, $C_\alpha^{k+1}(\bar D)$) есть вложенное C^m-подмногообразие банахова пространства $W_p^1(\bar D)$ ($W_p^{k+1}(\bar D)$, $C_\alpha^{k+1}(\bar D)$), моделируемое в банаховом пространстве $A_p^1(\bar D)$ ($A_p^{k+1}(\bar D)$, $A_\alpha^{k+1}(\bar D)$) и C^m-диффеоморфное этому пространству; диффеоморфизм осуществляется отображением

$$\Psi(w) = \Phi, \qquad (2.9)$$

где Φ — аналитическая функция из соответствующего пространства. *

Теорема 4. *Пусть $n \geqslant 0$, функции q_1, q_2, A, B, F, λ, γ удовлетворяют условиям регулярности IV (V, VI), а q_1 и $q_2(z, w)$ — также условию равномерной эллиптичности. Тогда краевая задача (1.2), (1.4) разрешима и множество ее решений R_n есть $(2n+1)$-мерное вложенное C^m-подмногообразие банахова пространства $W_p^1(\bar D)$ ($W_p^{k+1}(\bar D)$, $C_\alpha^{k+1}(\bar D)$), C^m-диффеоморфное плоскости A_n решений задачи (2.7) в соответствующем банаховом пространстве аналитических функций. Диффеоморфизм осуществляется формулой (2.9).*

При $n < 0$ решение, если существует, единственно и принадлежит классу $W_p^1(\bar D)$ ($W_p^{k+1}(\bar D)$, $C_\alpha^{k+1}(\bar D)$).

В качестве приложения теоремы 2 получаются некоторые результаты относительно краевой задачи (1.2), (1.5), однако не столь законченные, как для линейного краевого условия.

Теорема 5. *Пусть $n \geqslant 0$, функции q_1, q_2, A, B, F, λ, γ, удовлетворяют условиям регулярности IV (V, VI), причем $F(z, 0) \equiv 0$ (равномерная эллиптичность не требуется). Если функция γ принадлежит некоторой окрестности нуля в соответствующем пространстве, определяемой коэффициентами задачи (1.2), (1.5), то задача (1.2), (1.5) разрешима. Множество ее решений класса $W_p^1(\bar D)$ ($W_p^{k+1}(\bar D)$, $C_\alpha^{k+1}(\bar D)$) есть вложенное $(2n+1)$-мерное C^m-подмногообразие банахова пространства $W_p^1(\bar D)$ (соответственно $W_p^{k+1}(\bar D)$, $C_\alpha^{k+1}(\bar D)$).*

При $n < 0$ решение, если существует, единственно.

---

* О бесконечномерных многообразиях см. [11].

Замечание. Автору неизвестно, справедливы ли теоремы 3—4 в неравномерно эллиптическом случае. Они справедливы при наличии априорных оценок, установленных ниже в теореме 7 для равномерно эллиптического случая. В частном случае неравномерно эллиптического уравнения (1.2) — для уравнений Гаусса—Петерсона—Кодацци — удается использовать оценки А. В. Погорелова для нормальных кривизн и по несколько иной, чем в данной работе, схеме получить теорему, аналогичную теореме 3 [10]. Также неизвестно, связно ли множество решений краевой задачи (1.2), (1.5) и будет ли задача разрешима при $\forall\gamma$, $n \geqslant 0$, если $n \neq 0$ (независимо от наличия или отсутствия равномерной эллиптичности).

Непосредственным следствием теоремы 5 является следующее утверждение об изометрических преобразованиях упомянутой выше (п. 1) поверхности S [1].

Теорема 6. *Пусть $j_R(S)$ — индекс поверхности S относительно поля направлений R, $\varkappa = \frac{1}{2\pi}\Delta_\Gamma \arg(\theta_2 + i\theta_1)$. Пусть также $S \in C_\alpha^{k+2}(\bar{D})$, $k \geqslant 1$, $0 < \alpha < 1$, в краевом условии* (1.7) θ_i $(i = 1, 2, 3)$, $R \in C_\alpha^k(\partial S)$.

Если $\varkappa \geqslant j_R(S)$ и $\|\theta_3\|_{C_\alpha^k(\Gamma)} < \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — число, определяемое метрикой поверхности S и коэффициентами краевого условия (1.7), *то существует $(2\varkappa - 2j_R(S) + 1)$-мерное аналитическое многообразие поверхностей класса $C_\alpha^{k+2}(\bar{D})$, нетривиально изометричных S и удовлетворяющих условию* (1.7). *Если $\theta_3 \equiv 0$, то поверхность S принадлежит замыканию этого многообразия, в противном случае не принадлежит.*

В теореме 6 классы регулярности $C_\alpha^m(\bar{D})$, $C_\alpha^m(\Gamma)$ можно заменить на $W_p^m(\bar{D})$, $W_p^{m-1/p}(\Gamma)$, $p > 2$.

При доказательстве теоремы 3 используется следующее утверждение типа априорной оценки:

Теорема 7. *Пусть $\{w_m(z)\}_{m=1}^\infty$ — последовательность решений класса $W_p^1(\bar{D})$, $p > 2$, уравнений $\partial_{\bar{z}} w_m + q_{1m}(z)\,\partial_z w_m + q_{2m}(z) \times \partial_{\bar{z}} \bar{w}_m + A_m(z)\, w_m + B_m(z)\, \bar{w}_m = F_m(z)$, коэффициенты и свободные члены которых удовлетворяют условиям регулярности* I; *в неравенстве $|q_{1m}| + |q_{2m}| \leqslant q_0 = \text{const} < 1$, константа q_0 от m не зависит; нормы $\|A_m\|_{L_p(\bar{D})}$, $\|B_m\|_{L_p(\bar{D})}$, $\|F_m\|_{L_p(\bar{D})}$ равномерно по m ограничены. Пусть z_k, $k = 1, 2, \ldots, 2n+1$ — различные точки контура Γ, где $n \geqslant 0$ — целое число.*

Если последовательности $\{w_m(z_k)\}_{m=1}^\infty$, $k = 1, 2, \ldots, 2n+1$, $\{\|\mathrm{Re}\,(z^{-n} w_m(z))\|_{W_p^{1-1/p}(\Gamma)}\}_{m=1}^\infty$ ограничены, то ограничена последовательность норм $\{\|w_m\|_{C_\beta(\bar{D})}\}_{m=1}^\infty$, где $0 < \beta = \beta(p, q_0) < 1$.

Доказательство теоремы 7 представляет собой адаптацию для случая непрерывных коэффициентов краевого условия рассуждений из [4, с. 277—278].

3. Доказательство теоремы 1. Доказательство проводится в предположениях регулярности III. Для предположений I и II рассуждения почти дословно повторяются. Отличия этих случаев отмечены в конце параграфа. Если какое-либо рассуждение использует требования на регулярность, отличные от III, это отдельно оговаривается. Те функции, для которых нет подобной оговорки, считаются удовлетворяющими условиям III.

Доказательство представляет собой «локальную регуляризацию» уравнения (1.8) и имеет следующую структуру. Доказывается обратимость оператора Ω в случае, когда регулярность коэффициентов q_1, q_2 на единицу выше регулярности коэффициентов A и B, а также в классе $W_s^1(\bar{D})$, где $s>2$ достаточно близко к двум. Далее, в малой подобласти области D оператор P_n представляется в виде суммы двух операторов: $P_n=\Lambda_1+\Lambda_2$, где Λ_i, $i=1, 2$, по структуре аналогичны P_n, но Λ_1 имеет постоянные коэффициенты q_1, q_2, а Λ_2 — малую норму (за счет малости подобласти), после чего оператор $I+\Lambda_1$ обращается и оператор $(I+\Lambda_1)^{-1}\circ\Lambda_2$ имеет норму меньше единицы. В итоге к оператору $I+(I+\Lambda_1)^{-1}\circ\Lambda_2$ применим принцип сжатых отображений, с помощью которого устанавливается регулярность решения, полученного обращением оператора Ω в классе $W_s^l(\bar{D})$.

Лемма 1. *Пусть $w(z)$ — непрерывное в $\bar{D}$ обобщенное решение уравнения* (1.1), *удовлетворяющее на Γ граничному условию* (1.4), *причем* q_1, $q_2\in C_\alpha^{k+1}(\bar{D})$. *Тогда* $w\in C_\alpha^{k+1}(\bar{D})$.

Доказательство. Приведем уравнение (1.1) к каноническому виду:

$$\partial_{\bar{\zeta}}\omega+\theta_1(\zeta)\,\omega+\theta_2(\zeta)\,\bar{\omega}=f(\zeta), \tag{3.1}$$

где $\zeta=\zeta(z)$ — диффеоморфизм $\bar{D}$ на себя класса $C_\alpha^{k+2}(\bar{D})$; функции θ_1, θ_2, $f\in C_\alpha^k(\bar{D})$ и выражаются через коэффициенты и свободный член уравнения (1.1); $w(z(\zeta))=\omega(\zeta)+q(\zeta)\overline{\omega(\zeta)}$, где $|q(\zeta)|\leqslant$ $\leqslant\text{const}<1$, $q(\zeta)\in C_\alpha^{k+1}(\bar{D})$ и выражается через q_1 и q_2 [2, с. 136—140; 4, с. 222—223]. Краевое условие (1.4) перейдет в условие

$$\operatorname{Re}\{\tilde{\lambda}(\zeta)\,\omega(\zeta)\}=\gamma(z(\zeta)),\ \ \zeta\in\Gamma, \tag{3.2}$$

где $\tilde{\lambda}\in C_\alpha^{k+1}(\Gamma)$ и выражается через q и λ. Из (3.1) и (3.2) по известной теореме И. Н. Векуа [2, с. 312] $\omega(\zeta)\in C_\alpha^{k+1}(\bar{D})$, откуда $w(z)\in C_\alpha^{k+1}(\bar{D})$. Лемма 1 доказана.

Рассмотрим уравнение

$$\begin{aligned}\Omega(w)&\equiv w+P_n(q_1\partial_z w+q_2\partial_{\bar{z}}\bar{w})+P_n(Aw+B\bar{w})\equiv\\&\equiv w+Q_1w+Q_2w=F.\end{aligned}\tag{3.3}$$

Лемма 2. *Если в уравнении* (3.3) q_1 и q_2 — *ограниченные измеримые функции, удовлетворяющие неравенству* (1.3), $A, B \in L_p(D)$, $p > 2$, *то однородное уравнение* (3.3) *в классе* $W_p^1(\bar{D})$ *имеет только нулевое решение.*

Доказательство. Пусть $w(z) \in W_p^1(\bar{D})$ — решение однородного уравнения (3.3). Тогда $w(z)$ — решение однородной краевой задачи (1.1), (1.4) при $\lambda(z) = z^n$, $n \geqslant 0$, имеющее $(2n+1)$ нулей на Γ (см. (1.10), (1.11)). Отсюда следует $w(z) \equiv 0$ [2, с. 355; 6]. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Сингулярный интегральный оператор* $\Pi f(z) = \partial_z P_n f(z)$, *где* P_n *определен формулой* (1.9), *непрерывно отображает* $L_p(\bar{D})$ *в себя,* $p > 1$. *Для любого числа* q_0: $0 < q_0 < 1$ *существует* $s > 2$: $q_0 \cdot \|\Pi\|_{L_s(\bar{D})} < 1$, *причем* $\|\Pi\|_{L_2(\bar{D})} = 1$.

Доказательство этого утверждения дословно повторяет рассуждения из [5] относительно оператора

$$-\frac{1}{\pi}\iint\limits_D \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\xi\, d\eta, \quad \zeta = \xi + i\eta.$$

Лемма 4. *Уравнение* (3.3) *при предположениях леммы* 2 *и* $f \in W_p^1(\bar{D})$ *имеет единственное решение* $w(z) \in W_s^1(\bar{D})$, *где* $2 < s = s(q_0) \leqslant p$.

Доказательство. Единственность следует из леммы 2. Покажем, что оператор $(I + Q_1)$: $W_s^1(\bar{D}) \to W_s^1(\bar{D})$ имеет ограниченный обратный, если $s > 2$ достаточно близко к двум.

Рассмотрим уравнения

$$w + Q_1 w = \omega \in W_s^1(\bar{D}), \tag{3.4}$$

$$\lambda + \Pi(q_1\lambda + q_2\bar{\lambda}) \equiv \lambda + \Theta\lambda = \partial_z \omega. \tag{3.5}$$

(Уравнение (3.5) получено дифференцированием (3.4) по z и заменой $\partial_z w$ на λ). По лемме 3 существует s: $2 < s = s(q_0) \leqslant p$ такое, что $q_0 \cdot \|\Pi\|_{L_s(\bar{D})} < 1$, поэтому по принципу сжатых отображений уравнение (3.5) однозначно разрешимо в классе $L_s(\bar{D})$:

$$\lambda(z) = (I + \Theta)^{-1}\, \partial_z w(z), \tag{3.6}$$

и норма линейного оператора $(I + \Theta)^{-1}: L_s(\bar{D}) \to L_s(\bar{D})$ ограничена константой, зависящей только от q_0.

Будем искать решение уравнения (3.4) в виде

$$w(z) = \overline{P_n \bar{\lambda}} + \Psi(\bar{z}), \tag{3.7}$$

где $\lambda(z)$ определяется формулой (3.6), а $\Psi(z) \in A_s^1(\bar{D})^*$ — искомая функция. Подставив (3.7) в (3.4), получим

$$\Psi(\bar{z}) = w(z) - \overline{P_n \bar{\lambda}} - P_n(q_1\lambda + q_2\bar{\lambda}). \tag{3.8}$$

В силу (3.5) $\partial_z \Psi(\bar{z}) = 0$, т. е. функция $\Psi(z)$, определяемая формулой (3.8), класса $A_s^1(\bar{D})$.

Таким образом, формулой

$$w(z)=\omega(z)-P_n\{q_1(I+\Theta)^{-1}\partial_z\omega+q_2\overline{(I+\Theta)^{-1}\partial_z\omega}\} \quad (3.9)$$

определяется решение уравнения (3.4) и оператор $(I+Q_1)^{-1}$. По свойствам оператора P_n будет $w(z)\in W_s^1(\bar D)$ [2, с. 294].

Замечание. Из формулы (3.9) и свойств оператора P_n следует, что норма линейного оператора $(I+Q_1)^{-1}: W_s^1(\bar D)\to W_s^1(\bar D)$ ограничена числом, зависящим только от q_0.

Перепишем уравнение (3.3) в виде

$$w+(I+Q_1)^{-1}\circ Q_2 w=(I+Q_1)^{-1}F. \quad (3.10)$$

Так как оператор Q_2 вполне непрерывен в $C(\bar D)$ и отображает $C(\bar D)$ в $W_p^1(\bar D)$ [2, с. 294], то оператор $(I+Q_1)^{-1}\circ Q_2$ вполне непрерывен как оператор из $C(\bar D)$ в $C(\bar D)$ и отображает $C(\bar D)$ в $W_s^1(\bar D)$.

В силу отмеченных свойств участвующих в (3.10) операторов непрерывное в $\bar D$ решение однородного уравнения (3.10) принадлежит классу $W_s^1(\bar D)$ и по лемме 2 равно нулю. Таким образом, по теореме Фредгольма уравнение (3.10) однозначно разрешимо в классе $C(\bar D)$ и по свойствам операторов в (3.10) его решение $w(z)\in W_s^1(\bar D)$. Лемма 4 доказана.

Следствие леммы 4. *Если в уравнении* (3.3) $F, q_1, q_2\in C_\alpha^{k+1}(\bar D)$, $A, B\in C_\alpha^k(\bar D)$, $k\geqslant 0$, $0<\alpha<1$, *то* $w\in C_\alpha^{k+1}(\bar D)$ *и оператор* Ω *есть изоморфизм банахова пространства* $C_\alpha^{k+1}(\bar D)$.

Действительно, поскольку

$$\operatorname{Re}\{z^{-n}w(z)\}=\operatorname{Re}\{z^{-n}F(z)\}|_{z\in\Gamma}\in C_\alpha^{k+1}(\Gamma),$$

решение уравнения (3.3), существующее и непрерывное по лемме 4, в силу леммы 1 будет класса $C_\alpha^{k+1}(\bar D)$. Так как оператор P_n непрерывно отображает $C_\alpha^{k+1}(\bar D)$ в себя [2, с. 78, 294], то из однозначной разрешимости уравнения (3.3) в классе $C_\alpha^{k+1}(D)$ по теореме Банаха [12, гл. 12, § 1] следует непрерывность оператора Ω^{-1}, т. е. Ω — изоморфизм пространства $C_\alpha^{k+1}(\bar D)$. Следствие доказано.

Лемма 5. *Пусть* $f(x)$ — *четная монотонно возрастающая при* $x>0$ *вещественная функция вещественного аргумента,* $f(x)\in C_\alpha^1[-\varepsilon,\varepsilon]$, $\varepsilon>0$, и $\|f\|_{C_\alpha^1[-\varepsilon,\varepsilon]}\to 0$ *при* $\varepsilon\to 0$. *Для данной константы* $\delta>0$ *существует* $\varepsilon>0$ *такое, что* $f(x)$ *продолжаема на* $[-1, 1]$ *с сохранением четности, монотонности при* $x>0$ *и класса* C_α^1; $f(x)\equiv\text{const}>0$ *вблизи точек* $x=\pm 1$ *и* $\|f^*\|_{C_\alpha^1[-1,1]}<$

$\equiv 0$, *где* f^* — *продолжение* f *на* $[-1, 1]$. *При этом также будет выполнено условие* $\left\| \dfrac{df^*}{dx} \right\|_{C[\varepsilon, 1]} \leqslant \dfrac{df^*}{dx}\Big|_{x=\varepsilon}$.

Доказательство. Непрерывно продолжим на $[0, 1]$ производную $f'(x)$ дифференцируемым вне $[0, \varepsilon]$ образом так, чтобы продолжение f'^* было положительно, мало по модулю вместе со своей производной при $x \in [\varepsilon, 1]$, $\equiv 0$ вблизи 1 и $f'^*(x) \leqslant f'(\varepsilon)$, $x \in [\varepsilon, 1]$ (очевидно, это осуществимо, если $\varepsilon > 0$ достаточно мало). Поскольку кусочно-гельдерова непрерывная функция гельдерова и константа Гельдера на $[0, 1]$ оценивается через константы Гельдера на $[0, \varepsilon]$ и $[\varepsilon, 1]$ [4, с. 6—7], то f'^* будет мала в норме $C_\alpha[0, 1]$.

Функцию f^* на $[0, 1]$ определим так: $f^*(x) = \int\limits_0^x f'^*(t)\,dt$. Ясно, что $f^*(x)$ мала в норме $C^1_\alpha[0, 1]$, если мало ε, монотонно возрастает и $\equiv \mathrm{const}$ вблизи 1. На $[-1, 0]$ функцию f^* распространим по симметрии. Лемма 5 доказана.

Лемма 6. *Пусть* $w(z)$ — *непрерывное в* $\bar{D}$ *обобщенное решение уравнения* (1.1) *при* $A = B \equiv 0$. *Если* $\mathrm{Re}\{z^{-n} w(z)\}|_{z\in\Gamma} \in C^{k+1}_\alpha(\Gamma)$, *то* $w(z) \in C^{k+1}_\alpha(\bar{D})$.

Доказательство. Рассмотрим $w(z)$ вблизи Γ. Не ограничивая общности, можно считать $q_1(z) \equiv 0$ [4, гл. 5, § 4] (это предположение принимается для упрощения записей; без него существо рассуждений не меняется).

Пусть G — единичный круг $|\zeta| < 1$ в комплексной ζ-плоскости. Построим в этой плоскости специальную область G^* с границей L, задаваемой уравнением $\zeta(\theta) = \rho(\theta)\,e^{i\theta}$, $-\infty < \theta < +\infty$, где $\rho(\theta) \in C^1_\alpha(-\infty, +\infty)$ есть 2π-периодическая функция. Функцию $\rho(\theta)$ определим так, чтобы $\rho(0) = 1$, $\rho(\theta) \geqslant 1$, $\zeta(\theta)$ задавала для $\theta \in [-\varepsilon, \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$, окружность радиуса $r \geqslant 1$,

$$|\rho'(\varepsilon)| \geqslant |\rho'(0)|, \ \theta \in [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]; \ \|\rho(\theta) - 1\|_{C^1_\alpha[0, 2\pi]} < \delta, \quad (3.11)$$

где $\delta > 0$ — заданная константа, значение которой уточним ниже. По лемме 5 такая функция $\rho(\theta)$ существует. Переменную точку области G^* обозначим через t и положим $\bar{G}^* = G^* \cup L$. Справедливо следующее утверждение [13]:

Лемма 7. *Пусть* $f(t) = \zeta$ — *конформное отображение области* G^* *на круг* G, $f(0) = 0$, $f'(0) > 0$. *Тогда существует такое (достаточно малое) число* $\delta > 0$, *что если выполнено второе неравенство* (3.11), *то* $f \in C^1_\alpha(\bar{G}^*)$ *и*

$$\|f(t) - t\|_{C^1_\alpha(\bar{G}^*)} \leqslant M \cdot \delta, \quad (3.12)$$

где константа M *зависит только от* α.

В дальнейшем в (3.11) число δ будем считать подходящим для применения леммы 7 и меньшим $1/2M$. Эти предположения с помощью (3.12) позволяют провести следующую оценку:

$$1-|f'(t)|\leqslant\|f'(t)-1\|_{C(\overline{G}^*)}\leqslant\|f(t)-1\|_{C^1_\alpha(\overline{G}^*)}\leqslant\frac{1}{2},$$

откуда

$$|f'(t)|\geqslant\frac{1}{2}\quad\forall t\in\overline{G}^*. \tag{3.13}$$

Пусть $z_0\in\Gamma=\partial D$. Подвергнем $\overline{G}^*$ преобразованию подобия

$$z=\frac{1}{r}t \tag{3.14}$$

и движением расположим образ области $\overline{G}^*$ так, чтобы образ точки $t=1$ совместился с z_0, а соответствующая часть границы образа $\overline{G}^*$ наложилась на Γ. В силу первого неравенства (3.11) образ G^* перейдет в подобласть класса C^1_α круга D, которую обозначим через D_r. Описанное отображение $G^*\to D_r$ обозначим через $z=g(t)$. Конформное отображение $\varphi=g\circ f^{-1}:G\to G^*\to D_r$, $z=\varphi(\zeta)$, по лемме 7 будет класса $C^1_\alpha(\overline{G})$ и в силу (3.13), (3.14)

$$\max_{\zeta\in G}|\varphi'(\zeta)|\leqslant\frac{2}{r}\to 0,\ r\to+\infty. \tag{3.15}$$

(При $r\to+\infty$, вообще говоря, $\varepsilon\to 0$).

Обозначим $z^*=\varphi(0)$ и рассмотрим в D_r функцию $q(z)=q_2(z)-q_2(z^*)$. Так как $q(z^*)=0$, $q(z)\in C_\alpha(\overline{D})$, то существует константа M_1 такая, что

$$|q(z_1)-q(z_2)|\leqslant M_1|z_1-z_2|^\alpha,$$
$$|q(z)|\leqslant M_1|z-z^*|^\alpha,\quad\forall z,z_1,z_2\in\overline{D}_r, \tag{3.16}$$

причем константа M_1 от r не зависит.

Рассмотрим в D_r уравнение (1.1) (при $A=B=q_1\equiv 0$): $\partial_{\bar z}\mu+q_2(z)\partial_{\bar z}\bar\mu=F(z)$, пока что никак не увязывая решения этого уравнения $\mu=\mu(z)$ с решением $w=w(z)$, фигурирующим в формулировке леммы. Перейдем в последнем уравнении к аргументу $\zeta\in G$:

$$\partial_{\bar\zeta}\mu+q_2(z(\zeta))\,\partial_{\bar\zeta}\bar\mu=F_1(\zeta),$$
$$F_1(\zeta)=F(z(\zeta))\cdot\overline{\varphi'(\zeta)}\in C_\alpha(\overline{G}).$$

Это уравнение перепишем в виде

$$\partial_{\bar\zeta}\mu+q^*\partial_{\bar\zeta}\mu+q(\zeta)\,\partial_{\bar\zeta}\bar\mu=F_1(\zeta), \tag{3.17}$$

где $q^*=q_2(z^*)$. Из (3.15), (3.16) с учетом теоремы о среднем найдем, что

$$\|q(\zeta)\|_{C_\alpha(\overline{G})}\to 0,\ r\to+\infty. \tag{3.18}$$

Уравнение (3.17) эквивалентно следующему:

$$\mu + P_n(q^*\partial_{\bar\zeta}\bar\mu) + P_n(q(\zeta)\,\partial_{\bar\zeta}\bar\mu) = \Phi(\zeta) + P_nF_1(\zeta),$$

или

$$\mu + \Lambda_1\mu + \Lambda_2\mu = \Phi + P_nF_1, \tag{3.19}$$

где при рассмотрении решений класса $C^1_\alpha(\bar G)$ будет $\Phi(\zeta)\in A^1_\alpha(\bar G)$.

Отметим свойства оператора $(I+\Lambda_1)(q^*)$. По следствию из леммы 4 существует ограниченный оператор $(I+\Lambda_1)^{-1}\colon C^1_\alpha(\bar G)\to \to C^1_\alpha(\bar G)$. Так как $(I+\Lambda_1)$ непрерывно зависит от комплексного числа q^*, а переход к обратному оператору есть операция непрерывная [14, гл. 2, § 9], то и $(I+\Lambda_1)^{-1}$ непрерывно зависит от q^*. В силу (1.3) $(I+\Lambda_1)^{-1}$ — операторно-значная функция, непрерывная на компакте, в связи с чем оператор $(I+\Lambda_1)^{-1}$ ограничен равномерно по q^*; норма этого оператора при $r\to+\infty$ ограничена, поскольку при изменении r изменяется разве что q^*.

Перепишем (3.19) в виде

$$\mu + (I+\Lambda_1)^{-1}\circ\Lambda_2\mu = (I+\Lambda_1)^{-1}[\Phi + P_nF_1]. \tag{3.20}$$

Для оператора Λ_2 выполняется неравенство [2, с. 78]:

$$\|\Lambda_2\mu\|_{C^1_\alpha(\bar G)} \leqslant M_2\cdot\|q(\zeta)\|_{C_\alpha(\bar G)}\cdot\|\mu\|_{C^1_\alpha(\bar G)}, \tag{3.21}$$

где константа M_2 от r не зависит. В силу (3.18) и (3.21) при r достаточно большом норма линейного оператора $(I+\Lambda_1)^{-1}\circ \circ\Lambda_2\colon C^1_\alpha(\bar G)\to C^1_\alpha(\bar G)$ меньше единицы. Фиксируя подходящее большое r, по принципу сжатых отображений получим единственное решение уравнения (3.20) класса $C^1_\alpha(\bar G)$.

Таким образом, оператор $I+\Lambda_1+\Lambda_2$ в (3.19) однозначно обратим в классе $C^1_\alpha(\bar G)$ при достаточно большом r (а следовательно, и в $C^1_\beta(\bar G)$ при $\forall\beta: 0<\beta\leqslant\alpha$).

В окрестности внутренней точки области D можно провести аналогичное рассуждение с тем упрощением, что D_r будет круговой окрестностью радиуса $1/r$ рассматриваемой внутренней точки, а отображение φ — преобразованием подобия. Надобность в лемме 7 при этом отпадает.

Рассмотрим теперь в $\bar D_r$ решение $w=w(z)$, фигурирующее в формулировке леммы.

Обозначим через $\varkappa(z)$ вещественнозначную функцию, определенную в $\bar D_r$ и удовлетворяющую следующим условиям: 1) $\varkappa(z)\geqslant 0$ и $\varkappa\in C^\infty(\bar D_r)$; 2) если ∂D_r содержит точки контура Γ, то $\varkappa(z)\equiv 1$ на некоторой компактной дуге Γ_1, содержащей $z_0\in\Gamma$ и целиком лежащей на Γ, а также $\varkappa(z)\equiv 1$ в некоторой подобласти $D_1\subset D_r$, прилежащей к Γ_1, и класса C^1_α; 3) $\varkappa(z)\equiv 0$ в тех точках границы D_r, которые не лежат на Γ (если D_r — окрестность внутренней точки круга D, то $\varkappa\equiv 0$ на ∂D_r). Очевидно, такая функция существует.

Положим $w_1(z) = \varkappa(z)\, w(z)$. Функция $w_1(z)$ удовлетворяет в D_r уравнению $\partial_{\bar z} w_1 + q_2(z)\,\partial_{\bar z}\bar w_1 + A_1(z)\, w + B_1(z)\,\bar w = F_1(z)$, где $A_1(z) = -\partial_{\bar z}\varkappa \in C^\infty(\bar D_r)$, $B_1(z) = -q_2(z)\cdot\partial_{\bar z}\varkappa \in C^k_\alpha(\bar D_r)$, $F_1(z) = F(z) \times \varkappa(z) \in C^k_\alpha(\bar D_r)$, причем

$$w_1(z) \equiv w(z),\ z \in \bar D_1. \tag{3.22}$$

Перейдем в этом уравнении к переменной $\zeta \in G$:

$$\partial_{\bar\zeta} w_1 + q_2(z(\zeta))\,\partial_{\bar\zeta}\bar w_1 + A_2(\zeta)\, w + B_2(\zeta)\,\bar w = F_2(\zeta), \tag{3.23}$$

где

$$A_2(\zeta) = A_1(z(\zeta))\cdot\overline{\varphi'(\zeta)};\ \ B_2(\zeta) = B_1(z(\zeta))\cdot\overline{\varphi'(\zeta)};$$
$$F_2(\zeta) = F_1(z(\zeta))\cdot\overline{\varphi'(\zeta)};\ \ A_2,\ B_2,\ F_2 \in C_\alpha(\bar G).$$

В силу свойств функции $\varkappa(z)$ и из условия $\mathrm{Re}\{z^{-n} w(z)\}|_{|z|=1} \in C^{k+1}_\alpha(\Gamma)$ находим

$$\mathrm{Re}\{[\varphi(\zeta)]^{-n}\, w_1(\zeta)\} = \gamma_1(\zeta) \in C^1_\alpha(\partial G). \tag{3.24}$$

Как и выше, не нарушая общности, можно считать краевое условие (3.24) приведенным к каноническому виду:

$$\mathrm{Re}\{\zeta^{-n} w_2(\zeta)\} = \gamma_2(\zeta) \in C^1_\alpha(\partial G),$$

где $w_2(\zeta) = w_1(\zeta)\, e^{\chi(\zeta)}$, $\chi(\zeta)$ — голоморфная в G функция класса $C^1_\alpha(\bar G)$ [2, с. 352]. Функция $w_2(\zeta)$ при этом удовлетворяет уравнению

$$\partial_{\bar\zeta} w_2 + q_3(\zeta)\,\partial_{\bar\zeta}\bar w_2 + A_4(\zeta)\,\bar w_2 + A_3(\zeta)\, w + B_3(\zeta)\,\bar w = F_3(\zeta),$$
$$q_3,\ A_4,\ A_3,\ B_3,\ F_3 \in C_\alpha(\bar G). \tag{3.25}$$

Уравнение (3.25) эквивалентно следующему интегродифференциальному уравнению:

$$w_2 + \Lambda_1 w_2 + \Lambda_2 w_2 + \Lambda_3 w = P_n F_3 + \tilde\Phi, \tag{3.26}$$

где $I + \Lambda_1 + \Lambda_2$ — оператор из (3.19); $\Lambda_3 w \equiv P_n(A_4\bar w_2 + A_3 w + B_3\bar w)$; $\tilde\Phi(\zeta) \in A^1_\alpha(\bar G)$ — голоморфная в G функция;

$$\mathrm{Re}\{\zeta^{-n}\tilde\Phi(\zeta)\} = \gamma_2(\zeta),\ \zeta \in \partial G. \tag{3.27}$$

Краевым условием (3.27) и точечными условиями типа (2.3) функция $\tilde\Phi$ определяется однозначно [2, с. 231].

Функция $w = w(z)$ как функция, определенная в $\bar D$, удовлетворяет уравнению (1.8), правая часть которого принадлежит классу $C^{k+1}_\alpha(\bar D)$, откуда по лемме 4 следует, что $w(z) \in W^1_s(\bar D)$, $2 < s = s(q_0)$. Поскольку $W^1_s(\bar D) \subset C_\beta(\bar D)$, $\beta = \frac{s-2}{s}$ и, вообще говоря, $0 < \beta \leqslant \alpha$ [2, с. 48], то

$$w(z) \in C_\beta(\bar D). \tag{3.28}$$

Из (3.28) следует: $w(\zeta) \in C_\beta(\overline{G})$ и $w_2(\zeta) \in C_\beta(\overline{G})$. Так как функция $P_n f(\zeta)$ имеет гладкость на единицу выше, чем $f(\zeta)$ [2, с. 78, 313], то с учетом (3.25) найдем, что

$$\Delta_3 w(\zeta) \in C^1_\beta(\overline{G}). \tag{3.29}$$

Как показано выше, если r достаточно велико, то оператор $I + \Delta_1 + \Delta_2$ однозначно обратим в $C^1_\beta(\overline{G})$, $0 < \beta \leqslant \alpha$. Применим к обеим частям (3.26) оператор $(I + \Lambda_1 + \Lambda_2)^{-1}$:

$$w_2 + (I + \Lambda_1 + \Lambda_2)^{-1} \circ \Lambda_3 w = (I + \Lambda_1 + \Lambda_2)^{-1} (P_n F_3 + \tilde{\Phi}).$$

В последнем соотношении в силу изложенного выше и (3.29) второе слагаемое левой части и правая часть принадлежат классу $C^1_\beta(\overline{G})$, поэтому $w_2(\zeta) \in C^1_\beta(\overline{G}) \subset C_\alpha(\overline{G})$. Отсюда получаем: $w_1(\zeta) \in C_\alpha(\overline{D}_r)$ и в силу (3.22) $w(z) \in C_\alpha(\overline{D}_1)$. Поскольку круг $\overline{D}$ покрывается конечным числом замкнутых областей типа $\overline{D}_1$, то, повторив конечное число раз проведенные рассуждения, получим

$$w(z) \in C_\alpha(\overline{D}). \tag{3.30}$$

Если теперь в рассуждениях, приведенных после формулы (3.28), исходить не из (3.28), а из (3.30), то будет $w(z) \in C^1_\alpha(\overline{D})$.

Если $k = 0$, доказательство леммы 6 окончено. Если $k > 0$, рассмотрим в $\overline{D}$ уравнение

$$\partial_{\bar z} h + q_2(z)\, \partial_{\bar z} \bar h = F_4(z), \tag{3.31}$$

где $F_4(z) = -\partial_{\bar z} \bar w \cdot \frac{\partial}{\partial z}[q_2(z)] + \partial_z F \in C_\alpha(\overline{D})$, $h = \partial_z w$.

К уравнению (3.31) применим изложенную выше схему. Получим $\partial_z w \in C^1_\alpha(\overline{D})$ и аналогично $\partial_{\bar z} w \in C^1_\alpha(\overline{D})$, откуда следует, что $w \in C^2_\alpha(\overline{D})$ и т. д. Лемма 6 доказана.

Следствие леммы 6. *При $q_1, q_2 \in C^k_\alpha(\overline{D})$, $k \geqslant 0$, $0 < \alpha < 1$, оператор $(I + Q_1)$ из (3.3) есть изоморфизм банахова пространства $C^{k+1}_\alpha(\overline{D})$.*

Доказательство. Уравнение

$$w + Q_1 w = F \in C^{k+1}_\alpha(\overline{D}) \tag{3.32}$$

по лемме 4 разрешимо в классе $W^1_s(\overline{D})$, $s > 2$. Его решение $w(z)$ непрерывно в $\overline{D}$ и на Γ удовлетворяет условию

$$\operatorname{Re}\{z^{-n} w(z)\} = \operatorname{Re}\{z^{-n} F(z)\}|_{z \in \Gamma} \in C^{k+1}_\alpha(\Gamma). \tag{3.33}$$

Вместе с тем $w(z)$ есть решение дифференциального уравнения $\partial_{\bar z} w + q_1(z)\, \partial_z w + q_2(z)\, \partial_{\bar z} \bar w = \partial_{\bar z} F(z)$. В силу (3.33) по лемме 6 $w(z) \in C^{k+1}_\alpha(\overline{D})$, т. е. уравнение (3.32) однозначно разрешимо в классе $C^{k+1}_\alpha(\overline{D})$. Завершается доказательство аналогично окончанию доказательства следствия леммы 4.

Лемма 8. *При* $F \in C_\alpha^{k+1}(\bar{D})$ *уравнение* (3.3) *однозначно ра-решимо в классе* $C_\alpha^{k+1}(\bar{D})$.

Доказательство. Единственность следует из леммы 9. По следствию леммы 6 существует ограниченный оператор $(I + Q_1)^{-1}: C_\alpha^{k+1}(\bar{D}) \to C_\alpha^{k+1}(\bar{D})$. Перепишем уравнение (3.3) в ви-

$$w + (I + Q_1)^{-1} \circ Q_2 w = (I + Q_1)^{-1} F. \qquad (3.34)$$

Оператор Q_2 непрерывно отображает $C_\alpha^k(\bar{D})$ в $C_\alpha^{k+1}(\bar{D})$ [2, с. 7 следовательно, $(I + Q_1)^{-1} \circ Q_2$ непрерывно действует в тех же пространствах. Так как вложение $C_\alpha^{k+1}(\bar{D}) \subset C_\alpha^k(\bar{D})$ компактно, оператор $(I + Q_1)^{-1} \circ Q_2$ вполне непрерывно отображает $C_\alpha^k(\bar{D})$ в $C_\alpha^k(\bar{D})$. Однородное уравнение (3.34) по лемме 2 имеет только нулевое решение. По теореме Фредгольма уравнение (3.34) имеет единственное решение $w \in C_\alpha^k(\bar{D})$, которое в силу свойств операторов, участвующих в (3.34), будет класса $C_\alpha^{k+1}(\bar{D})$. Лемма 8 доказана.

Теорема 1 получается из леммы 8 применением теоремы Бана (см. доказательство следствия леммы 4).

Отметим изменения в приведенных рассуждениях, необходимые при доказательстве теоремы 1 в предположениях регулярности I и II.

При предположениях I «замораживание» коэффициентов q_1 и q_2 после формулы (3.15) осуществляется в точках, в которых q_1 и q_2 непрерывны. В этом случае приходится обходиться без предположения $q_1 \equiv 0$, так как это допущение было введено на основании результатов из [4, гл. 5, § 4], которые предположения регулярности I не охватывают. В соотношении, аналогичном (3.18), норма в $C_\alpha(\bar{D})$ замениться на $\sup\limits_{\zeta \in \bar{G}}$. Вместо неравенства (3.21) будет неравенство $\|\Delta_z w\|_{W^1_p(\bar{G})} \leqslant M_3 \sup\limits_{\zeta \in \bar{G}} Q(\zeta) \cdot \|w\|_{W^1_p(\bar{G})}$, где $Q(\zeta) = |q_1(z(\zeta)) - q_1(z^*)| + |q_2(z(\zeta)) - q_2(z^*)|$ и $\sup Q(\zeta) \to 0$, $r \to +0$.

При предположениях II, выписывая уравнение (3.31), нужно учесть, что по теореме вложения Соболева—Кондрашева $q_3(z) \in C_\beta(\bar{D})$, $\beta = \frac{p-2}{p}$; $\operatorname{Re}\{z^{-n} w(z)\}|_{z \in \Gamma} \in C_\beta(\Gamma)$, откуда с учетом рассуждений в предположениях регулярности III следует, что $w \in C_\beta^1(\bar{D})$, $\partial_z w \in C_\beta(\bar{D})$, и поэтому $F_2(z) \in L_p(\bar{D})$. Вопрос о регулярности решения краевой задачи (3.1), (3.2) в предположениях II рассмотрен в [4, гл. 6, § 1]; соответственно заменяется ссылка в доказательстве леммы 1 и последующие аналогичные ссылки.

Доказательство соответствующих свойств для оператора Ω^*, определяемого с помощью (1.12), аналогично приведенным рассуждениям. Измененное доказательство леммы 2 совпадает с рассуждениями из [2, с. 300].

4. Доказательство теоремы 3. Приведем одно необходимое для дальнейшего понятие. Пусть $\mathcal{F}$ — некоторое банахово пространство. Если $\mathcal{F}_1$ — замкнутое подпространство в $\mathcal{F}$, для которого существует замкнутое дополнение $\mathcal{F}_2$ такое, что $\mathcal{F}$ линейно изоморфно произведению $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ при отображении $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2 \to \mathcal{F}$, определяемом сложением, то, следуя [11], будем говорить, что $\mathcal{F}_1$ разлагает $\mathcal{F}$.

Лемма 9 [10]. *Пространства* $A_\alpha^k(\bar{D})$ и $A_p^k(\bar{D})$, $k \geqslant 1$, $0 < \alpha < 1$, $p > 2$, *разлагают пространства* $C_\alpha^k(\bar{D})$ *и соответственно* $W_p^k(D)$.

Доказательства требует только первое утверждение теоремы. Второе утверждение есть следствие первого и леммы 9 [11, гл. 2, § 2].

Доказательство проведем в предположениях регулярности VI. Для предположений IV и V оно дословно повторяется.

Обозначим через $J = \Psi(C_\alpha^{k+1}(\bar{D}))$ образ оператора Ψ. Ясно, что $J \subset C_\alpha^{k+1}(\bar{D})$ и $J \neq \varnothing$.

В силу условий на коэффициенты $\Psi \in C^m$. Дифференциал Фреше оператора Ψ имеет вид

$$\Psi'(w)\, h = h + P_n(q_1(z,\ w)\, \partial_z h + q_2(z,\ w)\, \partial_{\bar z} \bar{h}) + \\ + P_n(\tilde{A}(z,\ w)\, h + \tilde{B}(z,\ w)\, \bar{h}),$$

где $h \in C_\alpha^{k+1}(\bar{D})$; $\quad \tilde{A}(z,\ w) = \left[\frac{\partial}{\partial w} q_1(z,\ w)\right] \partial_z w \left[\frac{\partial}{\partial w} q_2(z, w)\right] \partial_{\bar z} \bar{w} +$

$$+ A(z,\ w) + \left[\frac{\partial}{\partial w} A(z,\ w)\right] w + \left[\frac{\partial}{\partial w} B(z,\ w)\right] \bar{w} - \frac{\partial}{\partial w} F(z,\ w);$$

$$\tilde{B}(z, w) = \left[\frac{\partial}{\partial \bar{w}} q_1(z, w)\right] \partial_z w + \left[\frac{\partial}{\partial \bar{w}} q_2(z,\ w)\right] \partial_{\bar z} \bar{w} + B(z, w) + \\ + \left[\frac{\partial}{\partial \bar{w}} A(z, w)\right] w + \left[\frac{\partial}{\partial \bar{w}} B(z,\ w)\right] \bar{w} - \frac{\partial}{\partial \bar{w}} F(z,\ w).$$

Отсюда видно, что при $w \in C_\alpha^{k+1}(\bar{D})$ функции $\tilde{A}$, $\tilde{B} \in C_\alpha^k(\bar{D})$. По теореме 1 $\Psi'(w)$ — изоморфизм банахова пространства $C_\alpha^{k+1}(\bar{D})$, откуда по теореме о неявной функции [15, гл. 2, § 7] получаем, что Ψ есть локальный C^m-диффеоморфизм и множество J открыто в $C_\alpha^{k+1}(\bar{D})$.

Для завершения доказательства достаточно показать, что оператор Ψ инъективен и его образ J замкнут в $C_\alpha^{k+1}(\bar{D})$.

Предположим, что $\Psi(w_1) = U$, $\Psi(w_2) = U$, $w_1(z) \neq w_2(z)$. Вычитая эти равенства, получим

$$w_1 - w_2 + P_n(q_1(z,\ w)\ \partial_z(w_1 - w_2) + q_2(z,\ w)\, \partial_{\bar z}(\bar{w}_1 - \bar{w}_2)) + \\ + P_n(A^*(z,\ w_1,\ w_2)(w_1 - w_2) + B(z,\ w_1)(\bar{w}_1 - \bar{w}_2)) = 0; \quad (4.1)$$

$$A^* = \Delta q_1 \cdot \partial_z w_2 + \Delta q_2 \cdot \partial_{\bar z} \bar w_2 + A(z, w_1) + \Delta A \cdot w_2 + \Delta B \cdot w_2 - \Delta f;$$

$$\Delta f(z, w_1, w_2) = \begin{cases} \dfrac{f(z, w_1) - f(z, w_2)}{w_1 - w_2}, & w_1(z) \neq w_2(z), \\ 0, & w_1(z) = w_2(z). \end{cases} \qquad (4.2)$$

Из (4.2), в силу дифференцируемости по w, $\bar w$ коэффициентов оператора Ψ, $A^*(z) \in L_p(\bar D)$, $p > 2$. С учетом этого из (4.1) по теореме 1 получим $w_1(z) \equiv w_2(z)$.

Докажем теперь замкнутость множества J. Пусть $\{U_l\}_{l=1}^{\infty}$ — последовательность функций из J, сходящаяся в норме $C_\alpha^{k+1}(D)$ к функции U. Необходимо показать, что $U \in J$.

Рассмотрим уравнения

$$\Psi(w_l) = U_l, \ l = 1, 2, \ldots, \qquad (4.3)$$

как линейные с коэффициентами, зависящими от l. Из сходимости $\{U_l\}$ и из (1.10), (1.11) получаем, что последовательность решений этих уравнений $\{w_l\}_{l=1}^{\infty}$ удовлетворяет условиям теоремы 7, откуда следует равномерная по l оценка

$$\| w_l \|_{C_\beta(\bar D)} \leqslant \text{const}, \ \beta > 0. \qquad (4.4)$$

Поскольку пространство $C_\beta(\bar D)$ компактно вложено в $C(\bar D)$, последовательность $\{w_l\}$ компактна в $C(\bar D)$. Далее считаем, что совершен переход к подпоследовательности и $\{w_l\} \to w \in C(\bar D)$.

Перепишем уравнение (4.3) так:

$$w_l + P_n(q_1(z, w_l)\, \partial_z w_l + q_2(z, w_l)\, \partial_{\bar z} \bar w_l) = P_n(F(z, w_l) - \\ - A(z, w_l)\, w_l - B(z, w_l)\, \bar w_l) + U_l. \qquad (4.5)$$

В силу (4.4) и свойств оператора P_n [2, с. 87, 89, 294] правая часть (4.5) ограничена в $W_p^1(\bar D)$, $\forall r > 2$, равномерно относительно l. Если оператор в левой части (4.5) считать линейным с коэффициентами, зависящими от l, то в силу предположения равномерной эллиптичности он обратим в $W_s^1(\bar D)$, $2 < s = s(q_0) < p$, причем обратный оператор ограничен равномерно по l (см. замечание в доказательстве леммы 4). Таким образом, из (4.5) получаем равномерную по l оценку:

$$\| w_l \|_{W_s^1(\bar D)} \leqslant \text{const}. \qquad (4.6)$$

Вычитая два уравнения из набора (4.3), получим

$$w_l - w_r + P_n(q_1(z, w_l)\, \partial_z(w_l - w_r) + q_2(z, w_l)\, \partial_{\bar z}(\bar w_l - \bar w_r)) = \\ = -P_n(A^*(zw_l, w_r)(w_l - w_r) + B(z, w_l)(\bar w_l - \bar w_r)) + U_l - U_r, \quad (4.7)$$

где A^* определяется формулой (4.2) с заменой w_1 и w_2 на w_l, w_r. Так как производные по w и $\bar w$ коэффициентов оператора Ψ равмерно по $w \in C(\bar{D})$ ограничены (в соответствующих нормах), из (4.6) следует равномерная по l, r оценка $\| A^* \|_{L_s(\bar{D})} \leqslant \mathrm{const}$.

Рассуждениями, аналогичными примененным к (4.5), из (4.7) получим: $\| w_l - w_r \|_{W^1_s(\bar{D})} \leqslant \mathrm{const}\, \{ \| P_n [A^*(z, \ w_l, \ w_r)(w_l - w_r) + B(z, w_l)(\bar{w}_l - \bar{w}_r)] \|_{W^1_s(\bar{D})} + \| U_l - U_r \|_{W^1_s(\bar{D})} \}$, где константа от l и r не зависит, откуда и из свойств оператора P_n [2, с. 87, 294] вытекает неравенство

$$\| w_l - w_r \|_{W^1_s(\bar{D})} \leqslant \mathrm{const}\, \{ \| w_l - w_r \|_{C(\bar{D})} + \| U_l - U_r \|_{W^1_s(\bar{D})} \},$$

где константа от l и r не зависит. Из него и из сходимости $\{w_l\}$ в $C(\bar{D})$ получаем сходимость $\{w_l\}$ в $W^1_s(\bar{D})$, и $w(z) \in W^1_s(\bar{D})$.

Используя непрерывность коэффициентов оператора Ψ по $w(z) \in C(\bar{D})$ (см. замечание после условий регулярности), перейдем к пределу в (4.3) при $l \to \infty$. В пределе получим $\Psi(w) = U$. Поскольку $w(z) \in C_\beta(\bar{D})$, $\beta = (s-2)/s$, коэффициенты оператора Ψ при подстановке в них $w(z)$ будут удовлетворять условиям регулярности I, в которых $p = 2/(1-\alpha)$, и по теореме 1 будет, $w(z) \in W^1_p(\bar{D}) \subset C_\alpha(\bar{D})$. Повторяя это рассуждение с привлечением условий регулярности III, найдем, что $w \in C^1_\alpha(\bar{D})$, $\ldots$, $w \in C^{k+1}_\alpha(\bar{D})$, откуда $U \in J$.

Теорема 3 доказана.

Замечание о доказательстве теоремы 4. В случае $n \geqslant 0$ теорема 4 есть непосредственное следствие теоремы 3. Докажем единственность решения при $n < 0$. Если существуют два решения w_1, w_2, то они удовлетворяют уравнениям

$$\Psi^*(w_1) = \Phi^*, \ \Psi^*(w_2) = \Phi^*,$$

где в обоих уравнениях Φ^* — одна и та же аналитическая функция, а оператор Ψ^* определяется аналогично Ψ, но с использованием P^*_n (см. (1.12)) вместо P_n [2, с. 299]. Вычитая эти уравнения и рассуждая так же, как при доказательстве инъективности Ψ, получим $w_1(z) \equiv w_2(z)$. В случае существования решения $w(z)$ регулярность его доказывается аналогично заключительным рассуждениям доказательства теоремы 3.

5. Доказательство теоремы 5. Доказательство проводится в предположениях регулярности VI; в предположениях IV, V оно дословно повторяется.

Рассуждениями, аналогичными приведенным в [2, с. 293—295], устанавливается, что при $n \geqslant 0$ краевая задача (1.2), (1.5) эквивалентна интегродифференциальному уравнению:

$$K(w) \equiv \Psi_0(w) - S(w) = \Phi, \tag{5.1}$$

где
$$S(w)=\frac{z^n}{2\pi i}\int_\Gamma \mu(t,\ w(t))\frac{t+z}{t-z}\frac{dt}{t},$$
$$\operatorname{Re}\{z^{-n}Sw(z)\}|_{z\in\Gamma}=\mu(z,\ w(z));$$

оператор Ψ_0 определяется формулой (2.8), но с участием интеграла
$$P_nf(z)=-\frac{1}{\pi}\iint_D\left[\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}+\frac{z^{2n+1}\overline{f(\zeta)}}{1+\bar{\zeta}z}\right]d\xi\,d\eta,\ \zeta=\xi+i\eta,$$

вместо P_n; для $f\in L_p(\bar{D})$, $p>2$, легко проверяются [2, с. 293—294] свойства: $\partial_{\bar{z}}\tilde{P}_nf(z)=f(z)$, $\operatorname{Re}\{z^{-n}\tilde{P}_nf(z)\}|_{z\in\Gamma}=0$.

Интеграл в $S(w)$ понимается в смысле главного значения; $\Phi(z)\in A_\alpha^{k+1}(\bar{D})$, $\operatorname{Re}\{z^{-n}\Phi(z)\}|_{z\in\Gamma}=\gamma(z)$, т. е. $\Phi(z)$ принадлежит $(2n+1)$-мерной плоскости A_n пространства $A_\alpha^{k+1}(\bar{D})$.

По свойствам интеграла типа Коши [2, с. 38—39] и в силу условий регулярности оператор К есть отображение класса C^0 пространства $C_\alpha^{k+1}(\bar{D})$ в себя.

Рассмотрим линейный оператор
$$\tilde{К}w\equiv\tilde{\Omega}(w)-\tilde{S}(w),\tag{5.2}$$
где $\tilde{S}(w)=\frac{z^n}{2\pi i}\int_\Gamma\operatorname{Re}[\sigma(t)w(t)]\frac{t+z}{t-z}\frac{dt}{t}$, $|\sigma|<1$, а линейный оператор $\tilde{\Omega}$ определен формулой (1.8), но с участием $\tilde{P}_n$ вместо P_n.

Лемма 10. *При условиях регулярности* III (I, II) *и* $\sigma\in C_\alpha^{k+1}(\Gamma)$ $[W_p^{k+1-1/p}(\Gamma)]$, $k\geqslant 0$, $0<\alpha<1$ $(p>2)$ *линейный оператор* $\tilde{К}$ *есть изоморфизм банахова пространства* $C_\alpha^{k+1}(D)$ *(соответственно* $W_p^{k+1}(\bar{D})$*).*

Доказательство. Покажем, что уравнение
$$\tilde{К}w=0\tag{5.3}$$
имеет только нулевое решение (это рассуждение проводится по несколько модифицированной схеме из [2, с. 296, 355; 6]).

Решение $w=w(z)$ уравнения (5.3) является решением однородной краевой задачи:
$$\operatorname{Re}\{[z^{-n}-\sigma(z)]\,w(z)\}=0,\ z\in\Gamma\tag{5.4}$$
для однородного уравнения (1.1) (далее при упоминании уравнения (1.1) считаем его однородным).

Умножим равенство (5.3) на $[2\pi i(z-t)]^{-1}dz$, $z=x+iy$, и проинтегрируем по Г. Получим
$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{w(z)\,dz}{z-t}=\frac{t^{2n+1}}{\pi}\iint_D\frac{q_1\partial_zw+q_2\partial_{\bar{z}}\bar{w}+Aw+B\bar{w}}{1-t\bar{z}}dx\,dy+Sw(t).$$

Разлагая в ряд левую и правую части по степеням t, $|t|<1$, с учетом (5.4), получим

$$\int_0^{2\pi} w(z)\, e^{-ik\theta}\, d\theta = 0,\ k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1; \tag{5.5}$$

$$\operatorname{Im}\int_0^{2\pi} w(z)\, e^{-in\theta}\, d\theta = 0,\ z=e^{i\theta}.$$

В краевой задаче (1.1), (5.4) перейдем к новой искомой функции $w_1(z) = w(z)\, e^{\chi(z)}$, где $\chi(z) = \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma [\arg(t^{-n} - \sigma(t)) + n\arg t] \times \frac{t+z}{t-z}\frac{dt}{t}$. При этом уравнение (1.1) перейдет в уравнение той же структуры с коэффициентами той же регулярности (для краткости по-прежнему будем считать, что это уравнение (1.1)), а краевое условие (5.4) примет вид [2, с. 245, 312, 351]

$$\operatorname{Re}\{z^{-n} w_1(z)\} = 0,\ z\in\Gamma. \tag{5.6}$$

Отметим, что $\operatorname{Im}\chi(z)$ есть гармоническая в D функция с граничными значениями $[\arg(t^{-n}-\sigma(t)) + n\arg t]$. Поскольку $|\sigma|<1$, для $\forall t\in\Gamma$ это выражение по модулю меньше $\pi/2$, в связи с чем по теореме о среднем значении для гармонических функций $|\operatorname{Im}\chi(0)|<\pi/2$ и

$$\operatorname{Re} e^{\chi(0)} \neq 0. \tag{5.7}$$

Условия (5.5) перейдут в условия

$$\int_0^{2\pi} w_1(z)\, e^{-ik\theta-\chi(z)}\, d\theta = 0,\ k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1, \tag{5.8}$$

$$\operatorname{Im}\int_0^{2\pi} w_1(z)\, e^{-in\theta-\chi(z)}\, d\theta = 0,\ z=e^{i\theta}.$$

В силу (5.6) $z^{-n}w_1(z)$ принимает на Γ чисто мнимые значения. Пусть $u_0(x,\ y)$ — действительная гармоническая функция в D, такая, что

$$u_0(x,\ y) = iz^{-n} w_1(z),\ z\in\Gamma. \tag{5.9}$$

В силу (5.8) функция $u_0(x,\ y)$ будет удовлетворять равенствам

$$\int_0^{2\pi} u_0(\theta)\, e^{ik\theta-\chi(z)}\, d\theta = 0,\ k=1,\ \ldots,\ n, \tag{5.10}$$

$$\operatorname{Re}\int_0^{2\pi} u_0(\theta)\, e^{-\chi(z)}\, d\theta = 0,\ z=e^{i\theta}. \tag{5.11}$$

Пусть граничные значения функции u_0 на Γ разложены в ряд Фурье (что, очевидно, возможно):

$$u_0(\theta) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k e^{ik\theta} + \bar{a}_k e^{-ik\theta}],$$

где c_0 — вещественное число. Из (5.7), (5.11) будем иметь $c_0 = 0$, а из (5.10) $a_k = 0$, $k = 1, \ldots, n$.

Таким образом, в силу теоремы о среднем значении для гармонических функций $u_0(x, y) = \operatorname{Re}\{z^{n+1}\Phi_0(z)\}$, где $\Phi_0(z)$ — аналитическая в D функция.

Отсюда вытекает, что через начало координат проходит не менее $(n+1)$ линий уровня $u_0 = 0$. Если $u_0 \not\equiv 0$, то эти линии пересекают Γ не менее чем в $(2n+2)$ точках, откуда в силу (5.9) следует, что $w_1(z)$ имеет не менее $(2n+2)$ нулей на Γ. Однако если $w_1(z) \not\equiv 0$, то в $\bar{D}$ она имеет не более $2n$ нулей [2, с. 354—355], поэтому $w_1(z) = w(z) \equiv 0$, т. е. уравнение (5.3) имеет только нулевое решение.

Покажем, что уравнение

$$\tilde{K}w = F \tag{5.12}$$

разрешимо в $C_\alpha^{k+1}(\bar{D})$ для $\forall F \in C_\alpha^{k+1}(\bar{D})$.

Функция $F(z)$ представима (см. (2.4)) в виде

$$F(z) = P_n(\partial_{\bar{z}}F) + \Phi(z),$$

где аналитическая функция $\Phi(z)$ однозначно определяется условиями

$$\operatorname{Re}\{z^{-n}\Phi(z)\} = \operatorname{Re}\{z^{-n}F(z)\}, \ z \in \Gamma; \tag{5.13}$$
$$\Phi(z_k) = F(z_k), \ k = 1, 2, \ldots, 2n+1$$

(см. (1.10)). Таким образом, уравнение (5.12) можно переписать в виде

$$K^*w \equiv \tilde{K}w - P_n(\partial_{\bar{z}}F) = \Phi, \tag{5.14}$$

где $\Phi \in A_\alpha^{k+1}(\bar{D})$.

С другой стороны, решение уравнения (5.14) является решением краевой задачи:

$$\partial_{\bar{z}}w + q_1\partial_z w + q_2\partial_{\bar{z}}\bar{w} + Aw + B\bar{w} = \partial_{\bar{z}}F,$$
$$\operatorname{Re}\{z^{-n}w(z)\} = \operatorname{Re}\{z^{-n}F(z)\} \in C_\alpha^{k+1}(\Gamma), \ z \in \Gamma. \tag{5.15}$$

По теореме 2 множество решений M_n задачи (5.15) есть $(2n+1)$-мерная плоскость в пространстве $C_\alpha^{k+1}(\bar{D})$. Так как оператор $\tilde{K}$ имеет нулевое ядро, отображением K^* плоскость M_n изоморфно отображается на $(2n+1)$-мерную плоскость $A_n \subset A_\alpha^{k+1}(D)$

решений краевой задачи (5.13), откуда вытекает однозначная разрешимость в $C_\alpha^{k+1}(\bar{D})$ уравнения (5.14) при $\forall \Phi \in A_n$, а следовательно и (5.12) при $\forall F \in C_\alpha^{k+1}(\bar{D})$.

Применяя теорему Банаха, получаем изоморфность оператора $\tilde{K}$.

Лемма 10 доказана.

Производная Фреше оператора K есть линейный оператор типа $\tilde{K}$ (с учетом неравенств (1.6)). В связи с этим в случае $n > 0$ доказательство теоремы 5 проводится с использованием теоремы о неявной функции и леммы 10 и полностью аналогично части доказательства теоремы 3, касающейся локальной диффеоморфности и инъективности оператора Ψ.

Замечание. Следует, однако, отметить, что, доказывая инъективность K, для функции $\mu(t, w(t))$ нельзя пользоваться выражением типа (4.2), так как тогда в коэффициенте краевого условия, вообще говоря, возникает разрыв. Вместо (4.2) при выписывании уравнения для разности $w_1 - w_2$, аналогичного (4.1), следует воспользоваться формулой Тейлора с остаточным членом в интегральной форме:

$$\mu(t, w_1(t)) - \mu(t, w_2(t)) = 2\,\mathrm{Re}\left\{\int_0^1 \mu_w(t, \tau w_2(t) + \right.$$
$$\left. + (1-\tau)\, w_1(t))\, d\tau\, (w_2(t) - w_1(t))\right\}. \qquad (5.16)$$

Вопрос о замкнутости образа оператора K и глобальной разрешимости задачи (1.2), (1.5) остается открытым в связи с отсутствием для решений уравнения (5.1) подходящих априорных оценок. Так как равномерная эллиптичность уравнения (1.2) в теореме 3 использовалась лишь при доказательстве замкнутости образа оператора Ψ, здесь требование равномерной эллиптичности не налагается.

Условие $F(z, 0) \equiv 0$ налагается для того, чтобы нуль был неподвижной точкой оператора K, и не является существенным.

При $n < 0$ если предположить наличие двух различных решений w_1, w_2, то их разность $w = w_1 - w_2$ в силу дифференцируемости коэффициентов задачи по w, $\bar{w}$ можно считать решением однородной линейной краевой задачи с индексом $n < 0$ и коэффициентами соответствующей регулярности, откуда по теореме 2 получаем $w(z) = w_1(z) - w_2(z) \equiv 0$ (см. (5.16)).

Теорема 5 доказана.

Список литературы: 1. *Фоменко В. Т.* Об изгибании и однозначной определенности поверхностей положительной кривизны с краем.— Мат. сб., 1964, 63 (105), № 3, с. 409—425. 2. *Векуа И. Н* Обобщенные аналитические функции.— М.: Физматгиз, 1959.—628 с. 3. *Агмон С., Дуглис А,. Ниренберг Л.* Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы.— М.: ИЛ, 1962.—

205 с. 4. *Монахов В. Н.* Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений.— Новосибирск: Наука, 1977.— 424 с. 5. *Боярский Б. В.* Обобщенные решения системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа с разрывными коэффициентами.— Мат. сб., 1957, 43 (85), № 4, с. 451—503. 6. *Виноградов В. С.* Об одной краевой задаче для линейных эллиптических систем дифференциальных уравнений первого порядка на плоскости.— Докл. АН СССР, 1958, **118**, № 6, с. 1059—1062. 7. *Виноградов В. С.* Об одной задаче для квазилинейных систем уравнений на плоскости.— Докл. АН СССР, 1958. **121**, № 4, с. 579—582. 8. *Виноградов В. С.* О разрешимости одного сингулярного интегрального уравнения.— Докл. АН СССР, 1978. **241**, № 2, с 272—274. 9. *Тюриков Е. В.* Нелинейная краевая задача Римана—Гильберта для квазилинейных эллиптических систем.— Докл. АН СССР, 1979. **247**, № 5 с. 1068—1072. 10. *Климентов С. Б.* О строении множества решений основных уравнений теории поверхностей.— Укр. геометр. сб., 1982. вып. 25, с. 69—82. 11. *Ленг В.* Введение в теорию дифференцируемых многообразий.— М.: Мир, 1967.— 203 с. 12. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ.— М.: Наука, 1977.— 742 с. 13. *Данилов В. А.* Оценки искажения квазиконформного отображения в пространстве типа C^m_α.— Сиб. мат. журн., 1973, **14**, № 3, с. 525—535. 14. *Наймарк М. А.* Нормированные кольца.—М.: ГИТТЛ, 1956.—487 с. 15. *Ниренберг Л.* Лекции по нелинейному функциональному анализу.— М.: Мир, 1977.— 232 с.

Поступила в редколлегию 09.04.84

УДК 513

В. Н. КОКАРЕВ

ОЦЕНКА ГЛАВНЫХ РАДИУСОВ КРИВИЗНЫ ЗАМКНУТОЙ ВЫПУКЛОЙ ПОВЕРХНОСТИ С ЗАДАННОЙ ФУНКЦИЕЙ УСЛОВНЫХ РАДИУСОВ КРИВИЗНЫ

А. В. Погореловым в работе [1] получена априорная оценка для радиусов нормальной кривизны замкнутой выпуклой гиперповерхности с данной функцией главных радиусов кривизны.

Пусть S и E — регулярные замкнутые выпуклые поверхности в E^3 со строго положительной гауссовой кривизной. Поверхность E будет играть роль условной сферы, главные условные радиусы кривизны поверхности S относительно E в точке с единичной внешней нормалью n обозначим: $R_1(n)$, $R_2(n)$ $(R_1 \geqslant R_2)$. Определения используемых здесь понятий см. в работе [2]. Пусть $f(R_1, R_2)$ — регулярная симметрическая неотрицательная вогнутая функция переменных R_1, R_2, определенная в области $R_1 > 0$, $R_2 > 0$. Пусть $\lim\limits_{R \to \infty} \dfrac{f(R, R)}{R} = \alpha > 0$.

Поверхность S и функция f определяют на единичной сфере функцию $\varphi(n) = f(R_1(n), R_2(n))$. Здесь будет доказано существование зависящей от f, φ и параметров E оценки сверху максимального радиуса нормальной кривизны поверхности S.

Пусть H и H^0 — опорные функции поверхности S и E соответственно, $h(v_1, v_2)$ и $h^0(v_1, v_2)$ — те же функции на плоскости

$i_2 = 0$. Тогда условные радиусы кривизны в окрестности точки $v_1 = 0$, $v_2 = 0$ находятся [3] из уравнения

$$\mathrm{Det}\, | h_{ij} - h_{ij}^0 R | = 0; \ i, \ j = 1, \ 2;$$

индексом i внизу будем обозначать дифференцирование по v_i.

Так как $\mathrm{Det}\ |h_{ij}^0| = \frac{1}{\lambda^4 K_E}$, где $\lambda = (1 + v_1^2 + v_2^2)^{1/2}$, K_E — гауссова кривизна E, то для элементарных симметрических функций $\sigma_1 = R_1 + R_2$ и $\sigma_2 = R_1 R_2$ получаем выражения

$$\sigma_1 = \lambda^4 K_E (h_{11} h_{22}^0 + h_{22} h_{11}^0 - 2 h_{12} h_{12}^0), \tag{1}$$

$$\sigma_2 = \lambda^4 K_E (h_{11} h_{22} - h_{12}^2). \tag{2}$$

Пусть радиус нормальной кривизны поверхности S достигает максимума в точке X. Предположим, что в этой точке $R_1 > R_2$. Направим i-ю ось декартовой системы координат параллельно i-у главному направлению S в точке X ($i = 1, 2$). Направление оси x_3 возьмем совпадающим с направлением внешней нормали поверхности S в точке X. Тогда функция $w = h_{11}(v_1, v_2)(1 + v_1^2 + v_2^2)^{3/2}(1 + v_2^2)^{-1}$ будет в точке $v_1 = 0$, $v_2 = 0$ достигать абсолютного максимума $h_{11}(0, 0)$, равного наибольшему радиусу нормальной кривизны поверхности S [1]. Таким образом, первый и второй радиусы нормальной кривизны S в точке X будут равны $h_{11}(0, 0)$ и $h_{22}(0, 0)$; кроме того, $h_{12}(0, 0) = 0$. Оценим сверху $h_{11}(0, 0)$. В дальнейшем все величины, вычисленные в точке $(0, 0)$, будем записывать без указания точки.

Так как w достигает в точке $(0, 0)$ максимума, то в этой точке $dw = 0$, $d^2 w \leqslant 0$. Вычислив в этой точке w_i и w_{ij}, получим

$$h_{11i} = 0; \ w_{11} = h_{1111} + 3h_{11}, \ w_{22} = h_{1122} + h_{11}, \ w_{12} = h_{1112}. \tag{3}$$

Так как R_1 и R_2 являются корнями уравнения $R^2 - \sigma_1 R + \sigma_2 = 0$, то можно считать, что f зависит от R_1, R_2 через элементарные симметрические функции σ_1, σ_2, а так как $R_1 \neq R_2$, то f регулярна по σ_1, σ_2. Для второй производной φ по v_1 получаем выражение

$$\varphi'' = \frac{\partial f}{\partial \sigma_1} \sigma_1'' + \frac{\partial f}{\partial \sigma_2} \sigma_2'' + \frac{\partial^2 f}{\partial \sigma_1^2} \sigma_1'^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial \sigma_1 \partial \sigma_2} \sigma_1' \sigma_2' + \frac{\partial^2 f}{\partial \sigma_2^2} \sigma_2'^2;$$

штрих означает дифференцирование по v_1. Вычислив σ_1', σ_1'', σ_2' и σ_2'' в точке $(0, 0)$, получим

$$\sigma_1' = K_E' \frac{\sigma_1}{K_E} + K_E (h_{221} h_{11}^0 + h_{11} h_{22}^{0\prime} + h_{22} h_{11}^{0\prime}),$$

$$\sigma_2' = K_E' \frac{\sigma_2}{K_E} + K_E h_{11} h_{221},$$

$$\sigma_1'' = 4\sigma_1 + K_E'' \frac{\sigma_1}{K_E} + 2K_E' (h_{221} h_{11}^0 + h_{11} h_{22}^0 + h_{22} h_{11}^{0\prime}) +$$

$$+ K_E (h_{1111}h^0_{22} + h_{1122}h^0_{11} - 2h_{1112}h^0_{12} + h_{11}h^{0''}_{22} + h_{22}h^{0''}_{11} + 2h_{221}h^{0'}_{11}),$$

$$\sigma''_2 = 4\sigma_2 + K''_E \frac{\sigma_2}{K_E} + K_E (h_{1111}h_{22} + h_{1122}h_{11}) + 2K'_E h_{11}h_{221}.$$

Подставив полученные значения σ'_1, σ''_1, σ'_2, σ''_2 в выражение для φ'', а также вводя из формул (3) w_{ij}, получим

$$\varphi'' = \frac{\partial f}{\partial \sigma_1}\Big(4\sigma_1 + \frac{K''_E\sigma_1}{K_E} + 2K'_E (h_{221}h^0_{11} + h_{11}h^{0'}_{22} + h_{22}h^{0'}_{11}) +$$

$$+ K_E (h_{11}h^{0''}_{22} + h_{22}h^{0''}_{11}) + 2K_E h_{221}h^{0'}_{11} + K_E (h^0_{22}w_{11} + h^0_{11}w_{22} -$$

$$- 2h^0_{12}w_{12}) - K_E (3h^0_{22} + h^0_{11})\, h_{11}\Big) + \frac{\partial f}{\partial \sigma_2}\Big(4\sigma_2 + \frac{K''_E\sigma_2}{K_E} + 2K'_E h_{221}h_{11} +$$

$$+ K_E (h_{11}w_{22} + h_{22}w_{11}) - K_E (3h_{11}h_{22} + h^2_{11})\Big) +$$

$$+ \frac{\partial^2 f}{\partial \sigma_1^2}\Big(\frac{K'_E\sigma_1}{K_E} + K_E h_{221}h^0_{11} + K_E (h_{11}h^{0'}_{22} + h_{22}h^{0'}_{11})\Big)^2 +$$

$$+ 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial \sigma_1 \partial \sigma_2}\Big(\frac{K'_E\sigma_1}{K_E} + K_E h_{221}h^0_{11} + K_E (h_{11}h^{0'}_{22} + h_{22}h^{0'}_{11})\Big)\Big(\frac{K'_E\sigma_2}{K_E} +$$

$$+ K_E h_{221}h_{11}\Big) + \frac{\partial^2 f}{\partial \sigma_2^2}\Big(\frac{K'_E\sigma_2}{K_E} + K_E h_{221}h_{11}\Big)^2. \qquad (4)$$

Так как функция f вогнута по R_i, то $\frac{\partial f}{\partial R_i} > 0$. Тогда форма $\sum\limits_{i,j}\frac{\partial f}{\partial h_{ij}}\xi^i\xi^j > 0$, а так как $\sum\limits_{i,j} w_{ij}\xi^i\xi^j \leqslant 0$, то $\sum\limits_{i,j}\frac{\partial f}{\partial h_{ij}} w_{ij} \leqslant 0$. Но

$$\sum_{i,j}\frac{\partial f}{\partial h_{ij}} w_{ij} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_1}(h^0_{22}w_{11} + h^0_{11}w_{22} - 2h^0_{12}w_{12})\, K_E +$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial \sigma_2}(h_{11}w_{22} + h_{22}w_{11})K_E \leqslant 0. \qquad (5)$$

Для производных функции f по σ_1 и σ_2 получаются следующие выражения:

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_1} = \frac{\frac{\partial f}{\partial R_1}R_1 - \frac{\partial f}{\partial R_2}R_2}{R_1 - R_2}, \quad \frac{\partial f}{\partial \sigma_2} = \frac{\frac{\partial f}{\partial R_2} - \frac{\partial f}{\partial R_1}}{R_1 - R_2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \sigma_1^2} = \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial R_1^2}R_1^2 - 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial R_1 \partial R_2}R_1R_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial R_2^2}R_2^2 + 2\,\frac{\partial f}{\partial \sigma_2}R_1R_2}{(R_1 - R_2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \sigma_2^2} = \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial R_1^2} - 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial R_1 \partial R_2} + \frac{\partial^2 f}{\partial R_2^2} + 2\,\frac{\partial f}{\partial \sigma_2}}{(R_1 - R_2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \sigma_1 \partial \sigma_2} = \frac{-\frac{\partial^2 f}{\partial R_2^2}R_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial R_1 \partial R_2}(R_1 + R_2) - \frac{\partial^2 f}{\partial R_2^2}R_2^2 - \frac{\partial f}{\partial \sigma_2}(R_1 + R_2)}{(R_1 - R_2)^2}.$$

Пусть $h_{11}^{0''} = -3h_{11}^0 + \varkappa_1$, $h_{22}^{0''} = -h_{22}^0 + \varkappa_2$. (В случае, когда F — сфера, будет $\varkappa_1 = \varkappa_2 = 0$). Тогда с учетом (1) и (2) в точке $v_1 = 0$, $v_2 = 0$ получим

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_1}(4\sigma_1 - K_E(3h_{22}^0 + h_{11}^0)h_{11} + K_E(h_{11}h_{22}^{0''} + h_{22}h_{11}^{0''})) +$$
$$+ \frac{\partial f}{\partial \sigma_2}(4\sigma_2 - K_E(3h_{11}h_{22} + h_{11}^2)) = \frac{K_E h_{11}^0 (h_{11} - h_{22})}{R_1 - R_2}\left(\frac{\partial f}{\partial R_1}\left(\frac{h_{11}}{h_{11}^0} - R_1\right) +\right.$$
$$\left. + \frac{\partial f}{\partial R_2}\left(R_2 - \frac{h_{11}}{h_{11}^0}\right)\right) + \frac{K_E}{R_1 - R_2}\left(\frac{\partial f}{\partial R_1}R_1 - \frac{\partial f}{\partial R_2}R_2\right)(h_{11}\varkappa_2 + h_{22}\varkappa_1).$$

Так как f неотрицательна и вогнута, то $0 \leqslant \frac{\partial f}{\partial R_1}R_1 \leqslant f$, $0 \leqslant \frac{\partial f}{\partial R_2}R_2 \leqslant f$. Следовательно, $\left|\frac{\partial f}{\partial R_1}R_1 - \frac{\partial f}{\partial R_2}R_2\right| \leqslant f$.

Пусть $R_E(\boldsymbol{n})$, $r_E(\boldsymbol{n})$ — максимальный и соответственно минимальный радиусы нормальной кривизны E в точке с нормалью $\boldsymbol{n}$. Пусть всюду на E отношение $\frac{r_E(\boldsymbol{n})}{R_E(\boldsymbol{n})} \geqslant \delta$. Тогда $R_1 \leqslant \frac{h_{11}}{r_E} \leqslant \frac{h_{11}R_E}{h_{11}^0 r_E}$, т. е.

$$\frac{h_{11}}{h_{11}^0} \geqslant \delta R_1. \qquad (6)$$

Так как $\frac{\partial f}{\partial R_1} \leqslant \frac{\partial f}{\partial R_2}$, то функция $\frac{\partial f}{\partial R_1}\left(\frac{h_{11}}{h_{11}^0} - R_1\right) + \frac{\partial f}{\partial R_2}\left(R_2 - \frac{h_{11}}{h_{11}^0}\right)$ не возрастает по $\frac{h_{11}}{h_{11}^0}$, а так как ее значение в нуле равно $\frac{\partial f}{\partial R_2}R_2 - \frac{\partial f}{\partial R_1}R_1 \leqslant f$, то в силу (6) получим

$$\frac{\partial f}{\partial R_1}\left(\frac{h_{11}}{h_{11}^0} - R_1\right) + \frac{\partial f}{\partial R_2}\left(R_2 - \frac{h_{11}}{h_{11}^0}\right) \leqslant \frac{\partial f}{\partial R_2}(R_2 - R_1)\delta + (1 - \delta) f.$$

Учтя, что $h_{ij} \leqslant R_1 h_{11}^0$, и обозначив $\varkappa = \max|\varkappa_i|$, получим

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_1}(4\sigma_1 - K_E(3h_{22}^0 + h_{11}^0)h_{11} + K_E(h_{11}h_{22}^{0''} + h_{22}h_{11}^{0''})) +$$
$$+ \frac{\partial f}{\partial \sigma_2}(4\sigma_2 - K_E(3h_{11}h_{22} + h_{11})) \leqslant \delta K_E h_{11}^0(h_{22} - h_{11})\frac{\partial f}{\partial R_2} +$$
$$+ \frac{(1-\delta)K_E(h_{11}^0)^2 R_1 f}{R_1 - R_2} + \frac{2K_E \varkappa h_{11}^0 R_1 f}{R_1 - R_2}. \qquad (7)$$

Оценим выражение

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_1}\left(\frac{K_E''\sigma_1}{K_E} + 2K_E'(h_{11}h_{22}^{0'} + h_{22}h_{11}^{0'})\right) + \frac{\partial f}{\partial \sigma_2}\frac{K_E''\sigma_2}{K_E} +$$
$$+ \frac{\partial^2 f}{\partial \sigma_1^2}\left(\frac{K_E'\sigma_1}{K_E} + K_E(h_{11}h_{22}^{0'} + h_{22}h_{11}^{0'})\right)^2 +$$

$$+2\frac{\partial^2 f}{\partial\sigma_1\partial\sigma_2}\left(\frac{K'_E\sigma_1}{K_E}+K_E\left(h_{11}h_{22}^{0'}+h_{22}h_{11}^{0'}\right)\right)\frac{K'_E\sigma_2}{K_E}+$$

$$+\frac{\partial^2 f}{\partial\sigma_2^2}\left(\frac{K'_E\sigma_2}{K_E}\right)^2=\frac{K''_E}{K_E(R_1-R_2)}\left(\frac{\partial f}{\partial R_1}R_1^2-\frac{\partial f}{\partial R_2}R_2^2\right)+$$

$$+2K'_E\left(h_{11}h_{22}^{0'}+h_{22}h_{11}^{0'}\right)\frac{\partial f}{\partial\sigma_1}+\frac{1}{(R_1-R_2)^2}\left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial R_1^2}R_1^2-2\frac{\partial^2 f}{\partial R_1\partial R_2}R_1R_2+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^2 f}{\partial R_2^2}R_2^2+2R_1R_2\frac{\partial f}{\partial\sigma_2}\right)\left(\frac{K'_E\sigma_1}{K_E}+K_E\left(h_{11}h_{22}^{0'}+h_{22}h_{11}^{0'}\right)\right)^2+$$

$$+2\left(-\frac{\partial^2 f}{\partial R_1^2}R_1-\frac{\partial^2 f}{\partial R_2^2}+(R_1+R_2)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial R_1\partial R_2}-\frac{\partial f}{\partial\sigma_2}\right)\right)\times$$

$$\times\left(\frac{K'_E\sigma_1}{K_E}+K_E\left(h_{11}h_{22}^{0'}+h_{22}h_{11}^{0'}\right)\right)\frac{K'_E\sigma_2}{K_E}+$$

$$\left.+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial R_1^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial R_2^2}-2\frac{\partial^2 f}{\partial R_1\partial R_2}+2\frac{\partial f}{\partial\sigma_2}\right)\left(\frac{K'_E\sigma_2}{K_E}\right)^2\right].$$

Так как квадратичная форма с матрицей

$$a_{11}=\frac{\partial^2 f}{\partial R_1^2}R_1^2-2\frac{\partial^2 f}{\partial R_1\partial R_2}R_1R_2+\frac{\partial^2 f}{\partial R_2^2}R_2^2,$$

$$a_{12}=-\frac{\partial^2 f}{\partial R_1^2}R_1+(R_1+R_2)\frac{\partial^2 f}{\partial R_1\partial R_2}-\frac{\partial^2 f}{\partial R_2^2}R_2,$$

$$a_{22}=\frac{\partial^2 f}{\partial R_1^2}-2\frac{\partial^2 f}{\partial R_1\partial R_2}+\frac{\partial^2 f}{\partial R_2^2}$$

неположительна, то оцениваемое выражение не превосходит

$$\frac{|K''_E|}{K_E(R_1-R_2)}\left|\frac{\partial f}{\partial R_1}R_1^2-\frac{\partial f}{\partial R_2}R_2^2\right|+2\left|K'_E\left(h_{11}h_{22}^{0'}+h_{22}h_{11}^{0'}\right)\frac{\partial f}{\partial\sigma_1}\right|+$$

$$+\frac{2}{(R_1-R_2)^2}\frac{\partial f}{\partial\sigma_2}\left[\sigma_2\left(\frac{K'_E\sigma_1}{K_E}+K_E\left(h_{11}h_{22}^{0'}+h_{22}h_{11}^{0'}\right)\right)^2-\right.$$

$$\left.-\sigma_1\left(\frac{K'_E\sigma_1}{K_E}+K_E\left(h_{11}h_{22}^{0'}+h_{22}h_{11}^{0'}\right)\right)\frac{K'_E\sigma_2}{K_E}+\left(\frac{K'_E\sigma_2}{K_E}\right)^2\right].$$

Обозначим $\max\limits_{Y,\,\eta}\left|\frac{dK_n}{ds}(Y)\,K_n(Y)\right|=\theta$, где $\frac{dK_n}{ds}(Y)$ — производная нормальной кривизны геодезической на E, проходящей через точку Y в направлении η, по длине ее дуги. Максимум берется по всем точкам Y на E и всем направлениям η в этих точках. Тогда $\frac{|h_{ii}^{0'}|}{h_{ii}^{0}}\leqslant\theta$ (см. [4]) и

$$\left|h_{11}h_{22}^{0'}+h_{22}h_{11}^{0'}\right|\leqslant\frac{2R_1\theta}{K_E}. \tag{8}$$

Из неотрицательности и вогнутости функции f следует

$$\left|\frac{\partial f}{\partial R_1} R_1^2 - \frac{\partial f}{\partial R_2} R_2^2\right| \leqslant f R_1, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial \sigma_1}\right| \leqslant \frac{f}{R_1 - R_2}, \quad \frac{\partial f}{\partial \sigma_2} \leqslant \frac{f}{R_1 R_2}$$

и получается оценка:

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_1}\left(\frac{K_E''\sigma_1}{K_E} + 2K_E'(h_{11}h_{22}^{0'} + h_{22}h_{11}^{0'})\right) + \frac{\partial f}{\partial \sigma_2}\frac{K_E''\sigma_2}{K_E} +$$

$$+ \frac{\partial^2 f}{\partial \sigma_1^2}\left(\frac{K_E'\sigma_1}{K_E} + K_E(h_{11}h_{22}^{0'} + h_{22}h_{11}^{0'})\right)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial \sigma_1 \partial \sigma_2}\left(\frac{K_E'\sigma_1}{K_E} +\right.$$

$$\left. + K_E(h_{11}h_{22}^{0'} + h_{22}h_{11}^{0'})\right)\frac{K_E'\sigma_2}{K_E} + \frac{\partial^2 f}{\partial \sigma_2^2}\left(\frac{K_E'\sigma_2}{K_E}\right)^2 \leqslant \frac{fR_1(|K_E'| + 4|K_E'|\theta)}{K_E(R_1 - R_2)} +$$

$$+ \frac{2fR_1^2}{(R_1 - R_2)^2}\left(3\frac{|K_E'|}{K_E} + 2\theta\right)^2. \tag{9}$$

Теперь оценим слагаемые в правой части (4), содержащие h_{221}. Квадратичные по h_{221} слагаемые:

$$h_{221}^2\left[\frac{\partial^2 f}{\partial \sigma_1^2}K_E^2(h_{11}^0)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial \sigma_1 \partial \sigma_2}K_E^2 h_{11}h_{11}^0 + \frac{\partial^2 f}{\partial \sigma_2^2}K_E^2 h_{11}^2\right] =$$

$$= \frac{h_{221}^2 K_E^2 (h_{11}^0)^2}{(R_1 - R^2)^2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial R_1^2}\left(R_1 - \frac{h_{11}}{h_{11}^0}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 f}{\partial R_1 \partial R_2}\left(R_1 - \frac{h_{11}}{h_{11}^0}\right)\left(R_2 - \frac{h_{11}}{h_{11}^0}\right) +\right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 f}{\partial R_2^2}\left(R_2 - \frac{h_{11}}{h_{11}^0}\right)^2 + 2\frac{\partial f}{\partial \sigma_2}\left(R_1 - \frac{h_{11}}{h_{11}^0}\right)\left(R_2 - \frac{h_{11}}{h_{11}^0}\right)\right].$$

Найдем условия, когда коэффициент при h_{221}^2 отрицателен.

Пусть для функции f в области, определяемой неравенствами $\min\varphi \leqslant f \leqslant \max\varphi$, выполняются условия

$$\beta_0 \frac{f}{R_i^2} \leqslant \frac{\partial^2 f}{\partial R_i^2} \leqslant \alpha_0 \frac{f}{R_i^2} < 0.$$

Тогда

$$\left|\frac{\partial^2 f}{\partial R_1 \partial R_2}\right| \leqslant -\frac{\beta_0 f}{R_1 R_2}.$$

Выражение

$$\frac{\partial^2 f}{\partial R_1^2}\left(R_1 - \frac{h_{11}}{h_{11}^0}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 f}{\partial R_1 \partial R_2}\left(R_1 - \frac{h_{11}}{h_{11}^0}\right)\left(R_2 - \frac{h_{11}}{h_{11}^0}\right) +$$

$$+ \frac{\partial^2 f}{\partial R_2^2}\left(R_2 - \frac{h_{11}}{h_{11}^0}\right)^2 + 2\frac{\partial f}{\partial \sigma_2}\left(R_1 - \frac{h_{11}}{h_{11}^0}\right)\left(R_2 - \frac{h_{11}}{h_{11}^0}\right) = F$$

будем рассматривать как функцию от $\frac{h_{11}}{h_{11}^0}$; F — квадратный трехчлен от $\frac{h_{11}}{h_{11}^0}$, принимающий в точках R_1, R_2 отрицательные значения. Могут представиться два случая:

1) коэффициент при $\left(\frac{h_{11}}{h_{11}^0}\right)^2$ будет

$$\frac{\partial^2 f}{\partial R_1^2} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial R_1 \partial R_2} + \frac{\partial^2 f}{\partial R_2^2} + 2\frac{\partial f}{\partial \sigma_2} \geqslant 0.$$

Тогда, учитывая, что $R_2 \leqslant \frac{h_{11}}{h_{11}^0} \leqslant R_1$, получим

$$F \leqslant \frac{\alpha_0 f}{R_1^2}(R_1 - R_2)^2;$$

$$2)\ \frac{\partial^2 f}{\partial R_1^2} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial R_1 d R_2} + \frac{\partial^2 f}{\partial R_2^2} + 2\frac{\partial f}{\partial \sigma_2} < 0.$$

Здесь тоже рассмотрим два случая:

а) F монотонна в промежутке $[R_2, R_1]$.

В этом случае тоже получаем оценку

$$F \leqslant \frac{\alpha_0 f}{R_1^2}(R_1 - R_2)^2;$$

б) F возрастает на $[R_2, R']$ и убывает на $[R', R_1]$, $R_2 < R' < R_1$. Это означает, что $F'(R_2) > 0$, $F'(R_1) < 0$ или

$$-\frac{\partial^2 f}{\partial R_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial R_1 \partial R_2} - \frac{\partial f}{\partial \sigma_2} > 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial R_2^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial R_1 \partial R_2} + \frac{\partial f}{\partial \sigma_2} < 0.$$

В силу (6) $\frac{h_{11}}{h_{11}^0} \geqslant \delta R_1$. При $\frac{h_{11}}{h_{11}^0} = R_1$ будет $F(R_1) = \frac{\partial^2 f}{\partial R_2^2}(R_1 - R_2)^2 \leqslant \frac{\alpha_0 f}{R_2^2}(R_1 - R_2)^2 < 0$. Тогда существует такая левая полуокрестность R_1, где F — отрицательна и оценивается сверху величиной порядка $-\frac{f}{R_2^2}(R_1 - R_2)^2$. Пусть δ таково, что для всех $x \in [\delta R_1, R_1]$ выполняется неравенство $F(x) \leqslant \frac{\alpha_1 f}{R_2^2}(R_1 - R_2)^2$ при всех R_1, R_2, определяемых условиями $\min \varphi \leqslant f \leqslant \max \varphi$, $R_1 > R_2$, где α_1 — некоторое строго отрицательное число.

Линейные по h_{221} слагаемые после преобразований принимают вид

$$2h_{221}\left[h_{11}^0 K_E' \frac{\partial f}{\partial R_1} + \frac{\partial f}{\partial \sigma_1} K_E h_{11}^{0\prime} + \frac{\partial f}{\partial \sigma_2}\left(\frac{h_{11}}{h_{11}^0} - R_2\right) h_{11}^0 K_E'\right] +$$

$$+ 2\frac{h_{221} K_E h_{11}^0}{(R_1 - R_2)^2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial R_1^2} R_1^2\left(R_1 - \frac{h_{11}}{h_{11}^0}\right) + \frac{\partial^2 f}{\partial R_1 \partial R_2}\left(R_1^2\left(\frac{h_{11}}{h_{11}^0} - R_2\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + R_2^2\left(\frac{h_{11}}{h_{11}^0} - R_1\right)\right) + \frac{\partial^2 f}{\partial R_2^2} R_2^2\left(R_2 - \frac{h_{11}}{h_{11}^0}\right) + \frac{\partial f}{\partial \sigma_2}\left(R_1^2\left(R_2 - \frac{h_{11}}{h_{11}^0}\right) + \right.\right.$$

$$+R_2^2\left(R_1-\frac{h_{11}}{h_{11}^0}\right)\Bigg)\Bigg]+2\,\frac{h_{221}K_E^2\,(h_{11}h_{22}^{0\prime}+h_{22}h_{11}^{0\prime})\,h_{11}^0}{(R_1-R_2)^2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial R_1^2}R_1\left(R_1-\frac{h_{11}}{h_{11}^0}\right)+\right.$$

$$+\frac{\partial^2 f}{\partial R_1\partial R_2}\left(R_1\left(\frac{h_{11}}{h_{11}^0}-R_2\right)+R_2\left(\frac{h_{11}}{h_{11}^0}-R_1\right)\right)+\frac{\partial^2 f}{\partial R_2^2}R_2\left(R_2-\frac{h_{11}}{h_{11}^0}\right)+$$

$$\left.+\frac{\partial f}{\partial\sigma_2}\left(R_1\left(R_2-\frac{h_{11}}{h_{11}^0}\right)+R_2\left(R_1-\frac{h_{11}}{h_{11}^0}\right)\right)\right].$$

Обозначим выражение, стоящее во вторых квадратных скобках, через G, а выражение в третьих квадратных скобках — через L.

Сначала рассмотрим случаи 1 и 2а. Так как в этих случаях при $R_2\leqslant\frac{h_{11}}{h_{11}^0}\leqslant R_1$ коэффициент F отрицателен, то получаем оценки

$$\frac{h_{221}^2K_E^2(h_{11}^0)^2F}{4\,(R_1-R_2)^2}+\frac{2h_{221}K_E'h_{11}^0G}{(R_1-R_2)^2}\leqslant-\frac{4K_E'^2G^2}{K_E^2\,(R_1-R_2)^2\,F},$$

и, учитывая (8), получаем

$$\frac{h_{221}^2K_E^2(h_{11}^0)^2F}{4\,(R_1-R_2)^2}+\frac{2h_{221}K_E^2\,(h_{11}h_{22}^{0\prime}+h_{22}h_{11}^{0\prime})\,h_{11}^0L}{(R_1-R_2)^2}\leqslant-\frac{16R_1^2\theta^2L^2}{(R_1-R_2)^2\,F}.$$

Далее,

$$\frac{h_{221}^2K_E^2h_{11}^{02}F}{4\,(R_1-R_2)^2}+2h_{221}\frac{\partial f}{\partial\sigma_2}\left(\frac{h_{11}}{h_{11}^0}-R_2\right)h_{11}^0K_E'\leqslant$$

$$\leqslant-\frac{4\left[\frac{\partial f}{\partial\sigma_2}\left(\frac{h_{11}}{h_{11}^0}-R_2\right)K_F'\right]^2(R_1-R_2)^2}{K_E^2F}.$$

И так как $\frac{\partial f}{\partial R_1}R_1\leqslant f$, то

$$\frac{h_{221}^2K_E^2(h_{11}^0)^2F}{4\,(R_1-R_2)^2}+2h_{221}\left(h_{11}^0K_E'\frac{\partial f}{\partial R_1}+\frac{\partial f}{\partial\sigma_1}K_Eh_{11}^{01}\right)\leqslant$$

$$\leqslant-\frac{8}{F}\left(\frac{K_E'}{K_E}\,\frac{\partial f}{\partial R_1}\right)^2(R_1-R_2)^2-\frac{8\,(f\theta)^2}{F}\leqslant-\frac{8f}{\alpha_0}\left(\frac{K_E'}{K_E}\right)^2-\frac{8\theta^2fR_1^2}{\alpha_0\,(R_1-R_2)^2}.$$

Величины $\frac{G^2}{F}$, $\frac{L^2}{F}$ рассматриваем как функции от $\frac{h_{11}}{h_{11}^0}$ на отрезке $[R_2,\ R_1]$. Оказывается, значения экстремумов этих величин внутри отрезка $[R_2,\ R_1]$, если они существуют, равны нулю. Величина $\left(\frac{h_{11}}{h_{11}^0}-R_2\right)^2\Big/F$, возможно, достигает экстремумов на концах отрезка $[R_2,\ R_1]$, а значения экстремумов внутри отрезка $[R_2,\ R_1]$, если они существуют, равны либо нулю, либо не превосходят $-\frac{\partial^2 f}{\partial R_1^2}\Big/\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_2}\right)^2$. Так как

$$\frac{\left(\frac{h_{11}}{h_{11}^0}-R_2\right)^2}{F}\Bigg|_{\frac{h_{11}}{h_{11}^0}=R_2}=0,\quad \frac{\left(\frac{h_{11}}{h_{11}^0}-R_2\right)^2}{F}\Bigg|_{\frac{h_{11}}{h_{11}^0}=R_1}=-\frac{1}{\frac{\partial^2 f}{\partial R_2^2}}\leqslant-\frac{R_2^2}{\alpha_0 f},$$

то, обозначив $\max\left\{-\frac{1}{\alpha_0},\ -\beta_0\right\}=\gamma$, получим

$$\frac{h_{221}^2K_E^2(h_{11}^0)^2F}{4(R_1-R_2)^2}+2h_{221}\frac{\partial f}{\partial \sigma_2}\left(\frac{h_{11}}{h_{11}^0}-R_2\right)h_{11}^0K_E'\leqslant 4\left(\frac{K_E'}{K_E}\right)^2 f\gamma.$$

Таким образом, в случаях 1 и 2а слагаемые, содержащие h_{221}, оцениваются сверху величиной

$$-\frac{4fR_1^2}{\alpha_0(R_1-R_2)^2}\left(\frac{K_E^2\,(1-2\beta_0)^2}{K_E^2}+4\theta^2(1-2\beta_0)^2+2\theta^2\right)+4\left(\frac{K_E'}{K_E}\right)^2\left(\gamma-\frac{2}{\alpha_0}\right)f\leqslant$$
$$\leqslant\frac{4fR_1^2}{(R_1-R_2)^2}\left\{\left(\frac{K_E'}{K_E}\right)^2((1-2\beta_0)^2+3)\gamma+2\theta^2(1+2(1-2\beta_0)^2)\right\}.$$

Теперь рассмотрим случай 2б. Так как в этом случае $F\leqslant\frac{\alpha_1 f}{R_2^2}(R_1-R_2)^2$, то слагаемые, содержащие h_{221}^2, не превосходят $\frac{1}{R_2^2}\alpha_1 fK_E^2(h_{11}^0)^2h_{221}^2$. Сумма слагаемых, содержащих h_{221} в первой степени, не превосходит

$$\frac{2h_{221}fh_{11}}{R_1-R_2}\Bigg|K_E\theta+\frac{(R_1-R_2)\,|K_E'|}{R_2}+$$
$$+|K_E'|\left(-\beta_0-\beta_0\frac{R_1}{R_2}+\frac{R_1}{R_2}\right)+\frac{2K_ER_1\theta}{R_2}(1-2\beta_0)\Bigg|.$$

Поэтому сумма слагаемых, содержащих h_{221}^2 и h_{221}, оценивается сверху величиной

$$-\frac{fR_1^2}{\alpha_1(R_1-R_2)^2}\left\{\theta+\frac{2\,|K_E'|(1-\beta_0)}{K_E}+2\theta(1-2\beta_0)\right\}^2.$$

Если обозначим максимум из

$$-\frac{1}{\alpha_1}\left\{\theta+\frac{2\,|K_E'|(1-\beta_0)}{K_E}+2\theta(1-2\beta_0)\right\}^2\quad\text{и}$$
$$4\left\{\left(\frac{K_E'}{K_E}\right)^2((1-2\beta_0)^2+3)\gamma+2\theta^2((1-2\beta_0)^2+1)\right\}$$

через Q, то из (4) с учетом (5), (7) и (9) получим

$$\varphi'' \leqslant \delta K_E h_{11}^0 (h_{22} - h_{11}) \frac{\partial f}{\partial R_2} + \frac{(1-\delta) K_E (h_{11}^0)^2 R_1 f}{R_1 - R_2} + \frac{2K_E \varkappa h_{11}^0 R_1 f}{R_1 - R_2} +$$
$$+ \frac{(|K_E''| + 4|K_E'|\theta) R_1 f}{K_E (R_1 - R_2)} + \frac{2R_1^2 f}{(R_1 - R_2)^2} \left(3 \frac{|K_E'|}{K_E} + 2\theta\right)^2 + \frac{R_1^2 f Q}{(R_1 - R_2)^2}.$$

Пусть R_E — максимальный, r_E — минимальный радиусы нормальной кривизны поверхности E. Учитывая, что

$$r_E \leqslant h_{11}^0 \leqslant R_E, \; h_{22} \leqslant R_2 R_E, \; h_{11} \geqslant \delta R_E R_1, \; \frac{\partial f}{\partial R_2} \geqslant \frac{\alpha}{2},$$
$$\delta K_E h_{11}^0 h_{22} \frac{\partial f}{\partial R_2} \leqslant K_E h_{11}^0 \delta R_E R_2 \frac{\partial f}{\partial R_2} \leqslant K_E R_E r_E f \leqslant K_E^2 f,$$

получим

$$\frac{1}{2} \alpha \delta^2 K_E R_1 (R_1 - R_2)^2 \leqslant (K_E^2 f + |\varphi''| + (1-\delta) K_E R_E^2 f +$$
$$+ 2K_E \varkappa R_E f + \frac{(|K_E''| + 4|K_E'|\theta) f}{K_E} + 2\left(3 \frac{|K_E'|}{K_E} + 2\theta\right)^2 f + fQ\Big) R_1^2.$$

Так как

$$R_2 \leqslant \frac{2f}{\alpha}, \tag{10}$$

то отсюда следует оценка для R_1, а значит, и для h_{11}.

Итак, доказано существование оценки радиусов кривизны поверхности S при условии $R_1 > R_2$. При $R_1 = R_2$ оценка следует из (10). Таким образом, доказана

Теорема. *Пусть $f(R_1, R_2)$ — регулярная симметрическая неотрицательная вогнутая функция, определенная в области $R_1 > 0$, $R_2 > 0$, удовлетворяющая условиям*

$$\beta_0 \frac{f}{R_i^2} \leqslant \frac{\partial^2 f}{\partial R_i^2} \leqslant \alpha_0 \frac{f}{R_i^2} < 0,$$
$$\lim_{R \to \infty} \frac{1}{R} f(R, R) = \alpha > 0.$$

Пусть U — множество на плоскости переменных R_1, R_2, где

$$-\frac{\partial^2 f}{\partial R_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial R_1 \partial R_2} - \frac{\frac{\partial f}{\partial R_2} - \frac{\partial f}{\partial R_1}}{R_1 - R_2} > 0,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial R_2^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial R_1 \partial R_2} + \frac{\frac{\partial f}{\partial R_2} - \frac{\partial f}{\partial R_1}}{R_1 - R_2} < 0, \; R_1 > R_2 > 0$$

и $\delta > 0$ таково, что для всех x на отрезке $[\delta R_1, R_1]$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial R_1^2} (R_1 - x)^2 - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial R_1 \partial R_2} (R_1 - x)(R_2 - x) + \frac{\partial^2 f}{\partial R_2^2} (R_2 - x)^2 +$$
$$+ 2\left(\frac{\partial f}{\partial R_2} - \frac{\partial f}{\partial R_1}\right)(R_1 - R_2)^{-1}(R_1 - x)(R_2 - x) \leqslant \alpha_1 \frac{f}{R_2^2} (R_1 - R_2)^2$$

с некоторым $\alpha_1 < 0$ для всех точек $(R_1, R_2) \in U$. Тогда, если максимальный R_E и минимальный r_E — радиусы нормальной кривизны E удовлетворяют условию $r_E/R_E \geq \delta$, то существует априорная оценка сверху для радиусов нормальной кривизны поверхности S. Если множество U пусто, то оценка существует без ограничений на R_E и r_E.

Список литературы: 1. *Погорелов А. В.* Многомерная проблема Минковского.— М.: Наука, 1975.— 95 с. 2. *Бляшке В.* Дифференциальная геометрия.— М.: ОНТИ, 1935.— 160 с. 3. *Кокарев В. Н.* Оценка главных радиусов кривизны замкнутой выпуклой гиперповерхности в E^{n+1} по второй элементарной симметрической функции ее условных радиусов кривизны.— Укр. геометр. сб., 1980, вып. 23, с. 65 — 74. 4. *Кокарев В. Н.* Оценка радиуса кривизны замкнутой выпуклой гиперповерхности в E^4 по второй элементарной симметрической функции ее условных радиусов кривизны.— Геометрия ЛГПИ, 1975, вып. 3, с. 73 — 84.

Поступила в редколлегию 27.01.81

УДК 513

А. И. КРИВОРУЧКО

О ФИГУРАХ, ИНВАРИАНТНЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО НЕКОТОРЫХ БЕСКОНЕЧНЫХ ГРУПП ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Фигурами будем называть замкнутые множества точек вещественного n-мерного евклидова пространства E^n.

Пусть G_o (соответственно G_s) — некоторая бесконечная группа, порожденная ортогональными (косыми) отражениями относительно гиперплоскостей пространства E^n. Предположим, что найдется компактная (компактная n-мерная) фигура, инвариантная относительно $G_o\,(G_s)$. Имеет место

Теорема 1. *Всякая фигура, инвариантная относительно группы G_0, имеет $(n-2)$-ось вращения и в случае неприводимости этой группы является объединением семейства концентрических сфер.*

Эта теорема доказана в статье [1]: первое ее утверждение совпадает с теоремой 11, а второе следует из теоремы 4.

В настоящей заметке доказывается

Теорема 2. *Всякая фигура, инвариантная относительно группы G_s, имеет $(n-2)$-ось эллиптического вращения и в случае неприводимости этой группы является объединением семейства подобных концентрических эллипсоидов.*

1. Пусть M — некоторое бесконечное семейство проходящих через общую точку прямых, лежащих в E^n. Обозначим через G_M группу, порожденную всеми ортогональными отражениями относительно прямых этого семейства. В основу доказательства сформулированных выше теорем может быть положена

Лемма. *Фигура F, являющаяся объединением всех прямых семейства M и инвариантная относительно G_M, содержит* *плоскость. В случае неприводимости группы G_M фигура F совпадает с E^n.*

Доказательство. Пусть S — гиперсфера с центром в общей точке прямых семейства M, $C = S \cap F$. Выберем в C неизолированную точку a. Пусть B — пересечение S и достаточно малой шаровой окрестности V точки a. В $C \cap V$ найдется сходящаяся к a последовательность отличных от a точек a_m, проекции которых на B образуют последовательность, сходящуюся к некоторой точке b. При этом под проекцией точки a_m на B понимается точка из B, ближайшая к a_m; так как $a_m \neq a$, эта проекция однозначно определена и лежит на пересечении B и большой окружности, проходящей через a и a_m. Для любого натурального m положим $a(m, 0) = a$, $a(m, 1) = a_m$. Допустим, что для некоторого натурального k, всех натуральных $i \leqslant k$ и всех натуральных m уже определены точки $a(m, i)$. Тогда пусть $a(m, k+1)$ — точка, симметричная точке $a(m, k-1)$ относительно прямой семейства M, проходящей через $a(m, k)$. Множество A всех получаемых при этом по индукции точек содержится в C. Поскольку каждая точка лежащей в S большой окружности, проходящей через a и b, есть точка прикосновения множества A, первое утверждение леммы доказано.

Предположим теперь, что $F \neq E^n$. Покажем, что тогда группа G_M приводима, т. е. приводимо естественное линейное представление группы, сопоставляющее аффинному преобразованию индуцированный этим преобразованием линейный оператор на многообразии всех векторов пространства E^n. Воспользуемся тем, что приводимость группы G_M эквивалентна следующему: в E^n найдется k-плоскость $(1 \leqslant k < n)$, которой всякая прямая семейства M либо параллельна, либо перпендикулярна.

Пусть $n \geqslant 3$, H — большая m-сфера максимальной размерности, лежащая в C. Тогда $1 \leqslant m < n-1$. Зафиксируем точку $d \in C/H$. Пусть точка $x \in S$. Обозначим через $\rho(d, x)$ величину угла между лучами, выходящими из центра сферы S и содержащими соответственно d и x. Проверим, что эта величина равна $\pi/2$ для любой точки $x \in H$. Допустим, что это не так. Пусть точка $c \in H$. В $(m+2)$-плоскости, натянутой на $H \cup \{d\}$, введем прямоугольную систему координат, начало которой находится в центре сферы S, а последний базисный вектор перпендикулярен $(m+1)$-плоскости, натянутой на H и относительно которой d имеет координаты $(p, 0, \ldots, 0, q)$, где $p \neq 0$, а все координаты точки c, начиная с третьей, равны нулю. Определим функцию t для любого вещественного φ, полагая $t(\varphi) = \rho(d, s(\varphi))$, где $s(\varphi)$ — точка сферы H, имеющая координаты $(\cos\varphi, \sin\varphi, 0, \ldots, 0)$. Тогда $\cos t(\varphi) = p\cos\varphi$ и, вычисляя производную функции t, получаем, что эта функция строго монотонна в некоторой окрестности каждого значения φ, для которого $\sin\varphi \neq 0$. Но t принимает все промежуточные значения. Поэтому множество тех φ, для которых $t(\varphi)$ несоизмеримо с π, всюду плотно на числовой прямой. Следовательно, в любой окрестности точки c найдется $x \in H$, для которой $\rho(d, x)$ несоизмеримо с π. Но для такой точки x большая окружность, проходящая через d и x, пересекает C по бесконечному множеству и, следовательно, содержится в C.

Таким образом, для каждой точки x из некоторого всюду плотного подмножества m-сферы H большая окружность, проходящая через d и x, содержится в C. Используя стереографическую проекцию из точки d большой $(m+1)$-сферы K, натянутой на $H \cup \{d\}$, получаем, что объединение всех таких окружностей всюду плотно в K. Следовательно, $K \subseteq C$, что противоречит максимальности размерности сферы H.

Отметим, что предложенное доказательство леммы является модификацией доказательства теоремы 11 статьи [1].

Доказательство теоремы 1 теперь следует из того, что фигура F, являющаяся объединением семейства M прямых, проходящих через стационарную точку группы G_0, перпендикулярных гиперплоскостям, отражения относительно которых порождают G_0, удовлетворяет условиям леммы. При этом G_0 приводима тогда и только тогда, когда приводима G_M.

Из доказательства теоремы 1 видно, что она остается справедливой, если группу G_0 заменить на бесконечную группу, порожденную ортогональными отражениями относительно прямых.

Из теоремы 1 вытекает

Следствие. Пусть фигура F в пространстве E^3 инвариантна относительно бесконечной группы G движений. Если G-орбита хотя бы одной точки этого пространства ограничена, то F имеет ось вращения. При этом либо существует прямая, инвариантная относительно G, либо F является объединением семейства концентрических сфер.

Приведем доказательство этого утверждения, не опирающееся на теорему 1.

Прежде всего отметим, что, используя рассуждения, применяемые при доказательстве первого утверждения леммы, можно показать следующее: *если фигура C в E^n имеет неизолированную точку a и отображается в себя всякой гомотетией с целочисленным коэффициентом и центром a, то C содержит некоторый луч с началом в точке a.*

Пусть d — стационарная точка группы G (такой точкой будет, например, центр минимального по объему шара, содержащего некоторую ограниченную G-орбиту). Можно считать, что G замкнута в группе всех вращений вокруг точки d. Зададим ориентацию в E^3. Каждой точке $x \neq d$ сопоставим вращение вокруг оси, содержащей точки d и x, в положительном направлении (определяемом ориентацией пространства и лучом, имеющим начало d и проходящим через точку x) на угол, равный расстоянию от d до x. Точке d сопоставимо единичное преобразование. Пусть N — множество всех тех точек, которым в результате сопоставляются преобразования группы G. Тогда N — фигура, центрально-симмет

...чная относительно ее неизолированной точки d и отображаю...щаяся в себя всякой гомотетией с целочисленным коэффициентом ...центром d. Следовательно, N содержит прямую L, проходящую через d. Сопоставленные каждой точке этой прямой вращения принадлежат G. Поэтому L — ось вращения фигуры F. Если $h(L) \neq L$ для некоторого $h \in G$, то F имеет две различные оси вращения, проходящие через d. Но тогда F — объединение концентрических сфер.

При $n \geqslant 4$ компактная фигура в E^n, инвариантная относительно бесконечной группы движений, не обязана иметь $(n-2)$-ось вращения. В самом деле, зафиксируем в E^4 прямоугольную систему координат. Для каждого вещественного φ рассмотрим вращение вокруг начала координат, определяемое матрицей

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos 2\varphi & -\sin 2\varphi \\ 0 & 0 & \sin 2\varphi & \cos 2\varphi \end{bmatrix}$$

Все такие вращения образуют группу, относительно которой орбита точки, имеющей, например координаты $(1, 0, 1, 0)$, гомеоморфна окружности и не лежит ни в какой 2-плоскости. Отсюда следует, что эта орбита не имеет 2-оси вращения.

2. Покажем, что доказательство теоремы 2 может быть получено с помощью теоремы 1. Действительно, пусть n-мерная компактная фигура F инвариантна относительно G_s. Тогда описанный вокруг F эллипсоид Левнера (см., например, [2], с. 19) также инвариантен относительно G_s. Так как эллипсоид аффинноэквивалентен сфере, получаем, что G_s аффинноэквивалентна группе G_o.

Другой способ доказательства теоремы 2 анонсирован в [3] (см. также [4]). Для ее доказательства можно воспользоваться тем, что всякое линейное представление компактной группы эквивалентно ее ортогональному представлению.

Гиперплоскость P и не параллельная ей прямая L в E^n определяют не только косое отражение относительно P в направлении L, но и косое отражение относительно прямой L в направлениях, параллельных гиперплоскости P. Теорема 2, как видно из ее доказательства, остается справедливой, если G_s заменить на бесконечную группу, порожденную косыми отражениями относительно прямых.

Из доказательства теоремы 2 видно также, что если группа аффинных преобразований имеет хотя бы одну ограниченную орбиту, то в выпуклой оболочке такой орбиты содержится стационарная точка этой группы.

Отметим следствия из теоремы 2.

Следствие 1. *Пусть трехмерная фигура F, лежащая в E^3, компактна и инвариантна относительно бесконечной группы G аффинных преобразований. Тогда F имеет ось эллип-*

тического вращения. При этом либо существует прямая, инвариантная относительно G, либо F является объединением семейства концентрических эллипсоидов.

Следствие 2. *Гомеоморфная окружности и лежащая в ... фигура, инвариантная относительно бесконечной группы аффинных преобразований, является эллипсом.*

Отсюда получаем характеристический признак эллипса, доказанный в работе [5].

Список литературы: 1. *Игнатенко В. Ф., Лейбин А. С.* К теории плоскостей ортогональной симметрии поверхностей в E^m. — Укр. геометр. сб., 1970, вып. 7, с. 37 — 54. 2. *Грюнбаум Б.* Этюды по комбинаторной геометрии и теории выпуклых тел. — М.: Наука, 1971. — 96 с. 3. *Игнатенко В. Ф.* Поверхности с бесконечным множеством плоскостей косой симметрии. — В кн.: VI Прибалтийская геометр. конф.: Тез. докл., Таллин, 1984, с. 49. 4. *Игнатенко В. Ф.* Некоторые вопросы геометрической теории инвариантов групп, порожденных ортогональными и косыми отражениями. — Пробл. геометрии, 1984, вып. 16, с. 195 — 229. 5. *Криворучко А. И.* Строение компактных подмножеств аффинной плоскости, имеющих бесконечные семейства осей косой симметрии. Рукопись деп. в УкрНИИНТИ 21.09.83, № 714 — 83 Деп. — 15 с.

Поступила в редколлегию 27.04.84

УДК 513

Т. В. ЛУБЕНСКАЯ

ТЕОРЕМА ГАУССА—БОННЕ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВА ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СВЯЗНОСТИ БЕЗ КРУЧЕНИЯ $\mathscr{T}_3^0$

Цель настоящей статьи — доказать указанную в заголовке теорему. При этом вместо параллелизма Леви — Чивита в римановом пространстве будет использован параллелизм Лобачевского [1].

1. Общие сведения. Трехмерное многообразие $\mathfrak{M}_3$ с внутренними координатами u^1, u^2, u^3, на котором заданы формы Пфаффа $\omega^i = \lambda_j^i (u^1;\ u^2;\ u^3)\, du^j$, $\omega_j^i = \lambda_{jk}^i (u^1;\ u^2;\ u^3)\, du^k$, $i,\ j,\ k = 1,\ 2,\ 3$, удовлетворяющие условиям $\det(\lambda_j^i) \neq 0$, $\omega_j^i + \omega_i^j = 0$, и к каждой точке M которого присоединено касательное гиперболическое пространство Γ_3 с радиусом кривизны R, называется пространством гиперболической связности и обозначается через $\mathscr{T}_3$. Уравнения Френе — Картана пространства $\mathscr{T}_3$ относительно автополярного репера (AA_i) пространства Γ_3 в точке $M(A)$ имеют вид [1]:

$$dA = \omega^i A_i, \quad dA_i = \frac{1}{R^2}\, \omega^i A + \omega_i^j A_j,$$

а структурные уравнения:

$$D\omega^i = [\omega^k \omega_k^i] + \tilde{\tilde{\Omega}}{}^i, \quad D\omega_i^j = \frac{[\omega^i \omega^j]}{R^2} + [\omega_i^k \omega_k^j] + \tilde{\tilde{\Omega}}{}_i^j.$$ Формы $\tilde{\Omega}^i$ —

$= \tilde{R}^i_{kl}[\omega^k\omega^l]$, $\tilde{\tilde{\Omega}}^i_j = \tilde{\tilde{R}}^i_{j,kl}[\omega^k\omega^l]$ называются формами кручения и кривизны этого пространства. В дальнейшем будем рассматривать пространство без кручения $\mathcal{T}^0_3$ ($\tilde{\tilde{\Omega}}^i = 0$). Переходу на многообразии $\mathcal{T}_3$ от репера в точке $M(u^i)$ к реперу в точке $M'(u^i + du^i)$ соответствует в гиперболическом пространстве Γ_3 бесконечно малое гиперболическое преобразование, определяемое формами ω^i, ω^i_j.

Параллелизм Лобачевского есть такое инфинитезимальное смещение отрезка в касательном пространстве, при котором он переходит в равный ему и параллельный по Лобачевскому отрезок. Параллелизм Лобачевского в касательном гиперболическом пространстве порождает параллелизм в пространстве $\mathcal{T}^0_3$. Следующие формулы [1] дают дифференциалы неоднородных координат в репере (AA_i) конца B параллельно (в направлении AB) переносимого отрезка AB:

$$d\xi^i = -\omega^i_j\xi^j - \frac{c}{R}\,\omega^i + \frac{\xi^i}{cR}\sum_{k=1}^{3}\xi^k\omega^k,\ \ c^2 = \sum_{i=1}^{3}(\xi^i)^2 = \text{const}. \qquad (1.1)$$

Пусть точка $M = M(u^1;\ u^2)$ описывает поверхность в $\mathcal{T}^0_3$. Ее уравнение $u^3 = u^3(u^1;\ u^2)$. Внесем функцию $u^3(u^1;\ u^2)$ в формы ω^i, ω^i_j. Расположим автополярный репер (AA_i) в точке $M(A)$ так, чтобы $\omega^3 = 0$. Тогда точки A_1, A_2 будут принадлежать касательной плоскости к поверхности в точке $M(A)$. Точка A_3 полярно сопряжена с точками A_1, A_2, A; следовательно, она является полюсом касательной плоскости AA_1A_2. Назовем прямую AA_3 нормалью к поверхности в точке $M(A)$.

2. Геодезическая кривизна кривой пространства $\mathcal{T}^0_3$. На поверхности $\omega^3 = 0$ зададим кривую $l: u^1 = u^1(s)$, $u^2 = u^2(s)$. Пусть t — отрезок касательной к кривой l в точке A. Перенесем этот отрезок параллельно по Лобачевскому по поверхности $\omega^3 = 0$ вдоль кривой l в бесконечно близкую к A точку A'. Получим отрезок t', который не совпадает с отрезком касательной к кривой l в точке A'. Угол между этими отрезками примем за приращение угла, которое получает касательная к кривой при параллельном перенесении Лобачевского по поверхности (начальная величина угла в точке A считается равной нулю).

Определение. *Геодезической кривизной кривой l поверхности σ в точке $M(A)$ назовем предел отношения приращения угла, которое получает касательная к кривой при параллельном перенесении Лобачевского по поверхности в бесконечно близкую к M точку M', к приращению длины дуги кривой, когда $M \to M'$, т. е.*

$$k_g = \frac{d\varphi}{ds}.$$

Теорема. *Геодезическая кривизна кривой l находится по формуле*

$$k_g = \frac{\omega^1}{ds}\left[\frac{d}{ds}\left(\frac{\omega^2}{ds}\right) + \frac{\omega_j^2}{ds}\frac{\omega^j}{ds}\right] - \frac{\omega^2}{ds}\left[\frac{d}{ds}\left(\frac{\omega^1}{ds}\right) + \frac{\omega_j^1}{ds}\frac{\omega^j}{ds}\right]. \qquad (2.1)$$

Доказательство. Отрезком касательной к кривой l является отрезок AT, где $T = A + \frac{dA}{ds} = A + \frac{\omega^1}{ds}A_1 + \frac{\omega^2}{ds}A_2$. Возьмем еще отрезок AB, принадлежащий касательной плоскости к поверхности в точке $M(A)$. Конец этого отрезка в репере (AA_i) имеет следующее разложение: $B = A + \xi^1 A_1 + \xi^2 A_2$. Найдем угол между отрезками AT и AB. В плоскости AA_1A_2 $(x^3 = 0)$ произвольная прямая имеет уравнение $a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 = 0$. Если она проходит через точки $A(1;\ 0;\ 0)$ и $B(1;\ \xi^1;\ \xi^2)$, то $a_0 = 0$, $\xi^1 a_1 + \xi^2 a_2 = 0$. Следовательно, уравнение прямой AB в плоскости $x^3 = 0$ имеет вид $\xi^2 x^1 - \xi^1 x^2 = 0$.

Выпишем тангенциальные координаты прямой $AB: (0;\ \xi^2;\ -\xi^1)$. Обозначим прямую AB буквой m. Прямая m', проходящая через точки $A(1;\ 0;\ 0)$ и $T\left(1;\ \frac{\omega^1}{ds};\ \frac{\omega^2}{ds}\right)$, в плоскости $x^3 = 0$ имеет уравнение $\frac{\omega^2}{ds}x^1 - \frac{\omega^1}{ds}x^2 = 0$. Ее тангенциальные координаты $\left(0;\ \frac{\omega^2}{ds};\ -\frac{\omega^1}{ds}\right)$. Угол между прямыми m и m' находится [2] по формуле

$$\varphi = i\,\mathrm{arth}\frac{\sqrt{(f^2_{mm'})^2 - f^2_m f^2_{m'}}}{f^2_{mm'}},\ \text{где}\ f^2_{mm'} = -\frac{1}{R^2}m_0m'_0 + \sum_{i=1}^{2} m_i m'_i,$$

$$f^2_m = -\frac{m_0^2}{R^2} + \sum_{i=1}^{2} m_i^2,\ f^2_{m'} = -\frac{(m'_0)^2}{R^2} + \sum_{i=1}^{2}(m'_i)^2;\ m_\alpha,\ m'_\alpha\ (\alpha = 0,\ 1,\ 2)$$

— тангенциальные координаты прямых m и m' соответственно. Зная тангенциальные координаты прямых m и m', находим

$$f^2_{mm'} = \xi^2\frac{\omega^2}{ds} + \xi^1\frac{\omega^1}{ds},\ f^2_{m'} = \left(\frac{\omega^2}{ds}\right)^2 + \left(\frac{\omega^1}{ds}\right)^2,$$

$$f^2_m = (\xi^1)^2 + (\xi^2)^2,\ \sqrt{(f^2_{mm'})^2 - f^2_m f^2_{m'}} = i\left(\xi^1\frac{\omega^2}{ds} - \xi^2\frac{\omega^1}{ds}\right).$$

Учитывая найденные выражения, получаем

$$\varphi = \mathrm{arctg}\frac{\xi^1\frac{\omega^2}{ds} - \xi^2\frac{\omega^1}{ds}}{\xi^1\frac{\omega^1}{ds} + \xi^2\frac{\omega^2}{ds}}. \qquad (2.2)$$

Найдем предел отношения приращения угла φ к приращению длины дуги кривой, когда последнее стремится к нулю и отрезок переносится по поверхности параллельно по Лобачевскому вдоль кривой. Для этого продифференцируем (2.2) и заменим $d\xi^i$ по формулам (1.1):

$$\frac{d\varphi}{ds}=\frac{\xi^2\frac{d\xi^1}{ds}-\xi^1\frac{d\xi^2}{ds}+\frac{d}{ds}\left(\frac{\omega^2}{ds}\right)\frac{\omega^1}{ds}c^2-\frac{d}{ds}\left(\frac{\omega^1}{ds}\right)\frac{\omega^2}{ds}c^2}{\left(\xi^2\frac{\omega^2}{ds}\right)^2+\left(\xi^1\frac{\omega^1}{ds}\right)^2+\left(\xi^1\frac{\omega^2}{ds}\right)^2+\left(\xi^2\frac{\omega^1}{ds}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{c^2}\left[\xi^2\left(-\frac{\omega^1_j}{ds}\xi^j-\frac{c}{R}\frac{\omega^1}{ds}+\frac{\xi^1}{cR}\sum_{i=1}^{2}\xi^i\frac{\omega^i}{ds}\right)-\right.$$

$$\left.-\xi^1\left(-\frac{\omega^2_j}{ds}\xi^j-\frac{c}{R}\frac{\omega^2}{ds}+\frac{\xi^2}{cR}\sum_{i=1}^{2}\xi^i\frac{\omega^i}{ds}\right)\right]+$$

$$+\left[\frac{\omega^1}{ds}\frac{d}{ds}\left(\frac{\omega^2}{ds}\right)-\frac{\omega^2}{ds}\frac{d}{ds}\left(\frac{\omega^1}{ds}\right)\right].$$

Так изменяется угол между прямыми m и m' при указанном перемещении от точки A к соседней с ней точке на кривой l. Положим в последней формуле $\xi^1=\frac{\omega^1}{ds}$, $\xi^2=\frac{\omega^2}{ds}$. Тем самым найдем предел отношения приращения угла, которое получает касательная к кривой при параллельном перенесении Лобачевского к приращению длины дуги кривой, когда последнее стремится к нулю. Тогда

$$k_g=\frac{d\varphi}{ds}=-\frac{1}{R}\frac{\omega^1}{ds}\frac{\omega^2}{ds}+\frac{1}{R}\frac{\omega^1}{ds}\frac{\omega^2}{ds}-\frac{\omega^1_j}{ds}\frac{\omega^j}{ds}\frac{\omega^2}{ds}+$$

$$+\frac{\omega^2_j}{ds}\frac{\omega^j}{ds}\frac{\omega^1}{ds}+\frac{\omega^1}{ds}\frac{d}{ds}\left(\frac{\omega^2}{ds}\right)-\frac{\omega^2}{ds}\frac{d}{ds}\left(\frac{\omega^1}{ds}\right)=$$

$$=\frac{\omega^1}{ds}\left[\frac{d}{ds}\left(\frac{\omega^2}{ds}\right)+\frac{\omega^2_j}{ds}\frac{\omega^j}{ds}\right]-\frac{\omega^2}{ds}\left[\frac{d}{ds}\left(\frac{\omega^1}{ds}\right)+\frac{\omega^1_j}{ds}\frac{\omega^j}{ds}\right].$$

Теорема доказана.

3. Теорема Гаусса — Бонне для пространства $\mathcal{T}^0_3$. *Если на гладкой поверхности в пространстве $\mathcal{T}^0_3$ односвязная область D ограничена гладким бесконечно малым замкнутым контуром γ, причем область D стягивается в точку области вместе с контуром γ, то сумма интегральной кривизны области D и интеграла от геодезической кривизны вдоль контура γ равна 2π:*

$$\iint\limits_D K_i d\sigma+\oint\limits_\gamma k_g ds=2\pi. \tag{3.1}$$

Доказательство. Рассмотрим в касательной плоскости к поверхности σ в точке A пару отрезков: любой отрезок касательной плоскости и отрезок касательной к контуру γ. Пусть Θ —

угол между этими отрезками. Будем переносить параллельно по Лобачевскому эту пару отрезков по поверхности вдоль контура γ. В отличие от риманова пространства угол между отрезками этой пары при параллельном перенесении по Лобачевскому в бесконечно близкую точку контура изменяется [3]. Но если пару отрезков переносить параллельно по Лобачевскому вдоль бесконечно малого контура, то после возвращения в исходную точку углы между исходными и полученными отрезками будут равны с точностью до бесконечно малых второго порядка [3].

При параллельном перенесении по Лобачевскому пары отрезков в бесконечно близкую точку контура угол между отрезками изменяется на величину $d\varphi + d\psi$, где $d\varphi = k_g ds$, а $d\psi$ — приращение угла, которое получает произвольный отрезок касательной плоскости при параллельном перенесении по Лобачевскому [4]. После возвращения в исходную точку контура угол между переносимыми отрезками становится равным $\Theta + 2\pi$ [5]. Обойдя контур, получим соотношение $\Theta + 2\pi = \Theta + \oint\limits_{\gamma} d\varphi + \oint\limits_{\gamma} d\psi$ или $2\pi = \oint\limits_{\gamma} d\varphi + \oint\limits_{\gamma} d\psi$. Из [4] следует, что $\oint\limits_{\gamma} d\psi = \iint\limits_{D} K_i [\omega^1\omega^2]$, где K_i — внутренняя кривизна поверхности σ, символом $[\omega^1\omega^2]$ обозначено численное значение внешней формы. Это значение — элемент площади поверхности σ. Таким образом,

$$2\pi = \oint\limits_{\gamma} k_g ds + \iint\limits_{D} K_i d\sigma.$$

Теорема доказана.

При доказательстве этой теоремы существенно использовалось допущение, что контур γ бесконечно мал.

В [3, 6] для бесконечно малого замкнутого контура были доказаны следующие утверждения:

а) главная часть приращений $\Delta\xi^i$, которые получают компоненты тензора ξ^i, заданного в точке $M(A)$, после параллельного обнесения по Лобачевскому вдоль бесконечно малого замкнутого контура γ, который находится на поверхности и проходит через эту точку, имеет вид

$$\Delta_\gamma \xi^i = -\sum_{(jl)} \overset{\approx}{R}{}^i_{jl,\,k}\, \xi^k p^{jl} \Delta_\gamma \sigma, \tag{3.2}$$

где p^{jl} — бивектор, характеризующий касательное двумерное направление к поверхности в точке $M(A)$, а $\Delta_\gamma\sigma$ — площадь области, ограниченной контуром γ;

б) если в пространстве $\mathcal{T}^0_3$ переносить параллельно по Лобачевскому вдоль бесконечно малого замкнутого контура γ пару отрезков, то после возвращения в исходную точку угол между ними не изменится (вычисления производились с точностью до бесконечно малых второго порядка).

Докажем утверждение а) для конечного контура γ. В этом случае контур γ охватывает конечную область D. Разобьем эту область на n частей диаметра не более δ_n. Пусть $\sigma_n \to 0$ при $n \to \infty$. Можно доказать [7], что сумма главных частей приращений $\Delta_{\gamma_s}\xi^i$ компонент тензора ξ^i при параллельном обносе по Лобачевскому по одинаково ориентированным контурам γ_s всех частей области D равна (с точностью до бесконечно малых высшего порядка) приращению $\Delta_\gamma\xi^i$ компонент тензора ξ^i по контуру γ, ограничивающему область D; поэтому

$$\Delta_\gamma\xi^i = \lim_{n\to\infty}\sum_{s=1}^{n}\Delta_{\gamma_s}\xi^i = -\lim_{n\to\infty}\sum_{s=1}^{n}\sum_{(jl)}\overset{\approx}{R}{}^i_{jl,k}\,\xi^k p^{jl}\Delta_{\gamma_s}\sigma =$$

$$= -\sum_{(jl)}\overset{\approx}{R}{}^i_{jl,k}\,\xi^k p^{jl}\lim_{n\to\infty}\sum_{s=1}^{n}\Delta_{\gamma_s}\sigma = -\sum_{(jl)}\overset{\approx}{R}{}^i_{jl,k}\,\xi^k p^{jl}\Delta_\gamma\sigma.$$

Теперь рассмотрим утверждение б) для конечного контура. Для этого сравним углы между первоначальной парой отрезков и параллельно перенесенной. Будем считать, что контур γ лежит на поверхности. Рассмотрим пару отрезков AB и AC, принадлежащих касательной плоскости к поверхности в точке $M(A)$. Концы этих отрезков в репере (AA_i) имеют неоднородные координаты ξ^i, η^i $(i = 1,\ 2)$ соответственно. Выполняя те же операции, что и в пункте 2, можем найти $\operatorname{tg} BAC = (\xi^1\eta^2 - \xi^2\eta^1)/(\xi^1\eta^1 + \xi^2\eta^2)$. Если же эту пару отрезков переносить параллельно по Лобачевскому по поверхности вдоль конура γ и возвращаться в исходную точку, то получим отрезки AB' и AC', неоднородные координаты концов которых $\xi^i + \Delta\xi^i$ и $\eta^i + \Delta\eta^i\ (i = 1,\ 2)$ соответственно; $\Delta\xi^i$ и $\Delta\eta^i$ найдем по формулам (3.2), опустив индекс γ. Тогда

$$\operatorname{tg} B'AC' = \frac{(\xi^1+\Delta\xi^1)(\eta^2+\Delta\eta^2) - (\xi^2+\Delta\xi^2)(\eta^1+\Delta\eta^1)}{(\xi^1+\Delta\xi^1)(\eta^1+\Delta\eta^1) + (\xi^2+\Delta\xi^2)(\eta^2+\Delta\eta^2)}$$

или

$$\operatorname{tg} B'AC' = \frac{\xi^1\eta^2 - \xi^2\eta^1 + a}{\xi^1\eta^1 + \xi^2\eta^2 + b},$$

где $$a = \xi^1\Delta\eta^2 + \eta^2\Delta\xi^1 + \Delta\xi^1\Delta\eta^2 - \Delta\xi^2\Delta\eta^1 - \xi^2\Delta\eta^1 - \eta^1\Delta\xi^2,$$

$$b = \xi^1\Delta\eta^1 + \eta^1\Delta\xi^1 + \Delta\xi^1\Delta\eta^1 + \xi^2\Delta\eta^2 + \eta^2\Delta\xi^2 + \Delta\xi^2\Delta\eta^2.$$

Заменив в выражениях a и b $\Delta\xi^i$ и $\Delta\eta^i$ по формулам (3.2), получим

$$a = -\xi^1\sum_{(jl)}\overset{\approx}{R}{}^2_{jl,k}\,\eta^k p^{jl}\Delta\sigma - \eta^2\sum_{(jl)}\overset{\approx}{R}{}^1_{jl,k}\,\xi^k p^{jl}\Delta\sigma +$$

$$+ \sum_{(jl)}\overset{\approx}{R}{}^1_{jl,k}\,\xi^k p^{jl}\Delta\sigma\sum_{(jl)}\overset{\approx}{R}{}^2_{jl,k}\,\eta^k p^{jl}\Delta\sigma + \xi^2\sum_{(jl)}\overset{\approx}{R}{}^1_{jl,k}\,\eta^k p^{jl}\Delta\sigma +$$

$$+ \eta^1\sum_{(jl)}\overset{\approx}{R}{}^2_{jl,k}\,\xi^k p^{jl}\Delta\sigma - \sum_{(jl)}\overset{\approx}{R}{}^2_{jl,k}\,\xi^k p^{jl}\Delta\sigma\sum_{(jl)}\overset{\approx}{R}{}^1_{jl,k}\,\eta^k p^{jl}\Delta\sigma =$$

$$= \overset{\approx}{R}{}^1_{12,2}\,p^{12}(\xi^1\eta^2 - \eta^1\xi^2)\,\Delta\sigma$$

и аналогично

$$b = \overset{\approx}{R}{}^{1}_{12,2}\, p^{12} (\xi^1\eta^1 + \xi^2\eta^2)\, \Delta\sigma.$$

Тогда

$$\operatorname{tg} B'AC' = \frac{\xi^1\eta^2 - \xi^2\eta^1 + \overset{\approx}{R}{}^{1}_{12,2} (\xi^1\eta^2 - \xi^2\eta^1)\, p^{12}\Delta\sigma}{\xi^1\gamma^1 + \xi^2\eta^2 + \overset{\approx}{R}{}^{1}_{12,2} (\xi^1\eta^1 + \xi^2\eta^2)\, p^{12}\Delta\sigma} =$$

$$= \frac{(\xi^1\eta^2 - \xi^2\eta^1)(1 + \overset{\approx}{R}{}^{1}_{12,2}\, p^{12}\Delta\sigma)}{(\xi^1\eta^1 + \xi^2\eta^2)(1 + \overset{\approx}{R}{}^{1}_{12,2}\, p^{12}\Delta\sigma)} = \frac{\xi^1\eta^2 - \xi^2\eta^1}{\xi^1\eta^1 + \xi^2\eta^2}.$$

Таким образом, $B\hat{A}C = B'\hat{A}C'$. Значит, утверждение б) справедливо для конечного контура.

При доказательстве теоремы этого пункта было учтено, что контур γ бесконечно мал только в том месте, где использовалось утверждение б). Но теперь утверждение б) доказано для конечного контура. Значит, в пространстве $\mathscr{T}_3^0$ справедлива теорема Гаусса — Бонне.

Замечание. Если контур γ имеет k угловых точек, то следует учитывать скачок касательной при переходе через эти точки в выражении для $d\varphi$. Получим

$$\oint_\gamma d\varphi = \oint_\gamma k_g ds + (\alpha_1 + \ldots + \alpha_k).$$

Тогда формула Гаусса — Бонне примет вид

$$\oint_\gamma k_g ds + \iint K_i d\sigma + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 2\pi.$$

Список литературы: 1. *Кованцов Н. І., Лубенська Т. В.* Аналог паралельного перенесення у просторі гіперболічної зв'язності. — Вісн. Київ. ун-ту, Сер. Математика та механіка, 1975, № 17. с. 56 — 63. 2. *Клейн Ф.* Неевклидова геометрия. — М.; Л.: ОНТИ, 1936. — 356 с. 3. *Лубенська Т. В.* Паралельне перенесення по Лобачевському двох тензорів у просторі гіперболічної зв'язності без скруту $\mathscr{T}_3^0$. — Вісн. Київ. ун-ту, Сер. Математика та механіка, 1977, № 19. с. 37 — 40. 4. *Лубенська Т. В.* Паралельне перенесення тензора по поверхні в просторі гіперболічної зв'язності без скруту $\mathscr{T}_3^0$. — Вісн. Київ. ун-ту, Сер. Математика та механіка, 1976, № 18, с. 44 — 49. 5. *Рашевский П. К.* Курс дифференциальной геометрии. — М.: ГИТТЛ. 1956. —420 с. 6. *Лубенська Т. В.* Кривина простору гіперболічної зв'язності без скруту по двовимірному напряму. — Вісн. Київ. ун-ту, Сер. Математика та механіка, 1975, № 17. с. 63 — 69. 7. *Рашевский П. К.* Риманова геометрия и тензорный анализ. — М.: Наука, 1967. — 635 с.

Поступила в редколлегию 27.04.84.

УДК 513.013

А. И. МЕДЯНИК

О СВОДИМОСТИ ОБЩЕЙ ЗАДАЧИ СУЩЕСТВОВАНИЯ ДЛЯ ЗАМКНУТЫХ ВЫПУКЛЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ К УРАВНЕНИЮ К. МИРАНДЫ

А. Д. Александров доказал ряд общих теорем единственности для замкнутых выпуклых поверхностей, поставленных в точечное соответствие по параллельности внешних нормалей, в соответствующих точках которых функция $f(R_1, R_2, \boldsymbol{n})$ главных радиусов кривизны $R_1, R_2\,(R_1 \geqslant R_2 > 0)$ и единичной нормали $\boldsymbol{n}$, строго возрастающая по переменным R_1 и R_2, принимает равные значения [1]. В связи с этим естественно возникает вопрос о существовании замкнутой выпуклой поверхности, главные радиусы кривизны которой в точке с единичной нормалью $\boldsymbol{n}$ удовлетворяют уравнению

$$f(R_1, R_2, \boldsymbol{n}) = \varphi(\boldsymbol{n}) \tag{1}$$

при условии, что

$$\partial f/\partial R_1 > 0, \ \partial f/\partial R_2 > 0. \tag{2}$$

Для случая, когда $\varphi(\boldsymbol{n})$ является четной функцией $\boldsymbol{n}$, соответствующая теорема существования доказана А. В. Погореловым [2]. В общем случае исследование данного вопроса представляет известные трудности, поскольку функция $\varphi(\boldsymbol{n})$ не может быть произвольной. В частности, если $f = R_1R_2$ (проблема Минковского) или $f = R_1 + R_2$ (проблема Христоффеля), необходимым условием существования решения является, как известно, условие замкнутости

$$\int\limits_{\Omega} \boldsymbol{n}\varphi(\boldsymbol{n})\, d\omega = 0, \tag{3}$$

где Ω — единичная сфера; $d\omega$ — элемент ее площади. Кстати, в случае, рассмотренном А. В. Погореловым, это условие также выполняется.

К. Миранда, чтобы обойти трудности поиска необходимого условия в общем случае, рассмотрел проблему существования замкнутой выпуклой поверхности для видоизмененного уравнения

$$R_1R_2 + \Phi(R_1R_2, R_1 + R_2, \boldsymbol{n}) + \boldsymbol{c}\boldsymbol{n} = \varphi(\boldsymbol{n}), \tag{4}$$

где $\boldsymbol{c}$ — постоянный вектор, который зависит от искомой поверхности и тоже является искомым [3]. Следует отметить, что в теоремах К. Миранды функция Φ, кроме условий монотонности по двум первым переменным, удовлетворяет соотношению вида

$$\left| \frac{\Phi}{(R_1R_2)^{\mu}} \right| \leqslant C = \text{const}, \tag{5}$$

где $0 < \mu \leqslant 1$. При такой постановке вопроса условие (3), как показано в [3], можно считать выполненным.

Заметим еще, что уравнение (4) при $\Phi \equiv 0$ и $c = 0$ совпадает с уравнением, которое рассматривал Г. Минковский, и при $c = 0$ ($\Phi \neq 0$) только записью отличается от уравнения (1). Оказывается, что связь между этими уравнениями является более глубокой. А именно, существует вполне определенная связь между их решениями, установлению которой и посвящена настоящая статья.

1. Вспомогательные результаты. Докажем сначала одно тождество.

Лемма 1. *Для всякой функции* $\varphi(\boldsymbol{n})$, *удовлетворяющей условию* (3), *справедливо тождество*

$$\varphi(\boldsymbol{n}) = \int\limits_{\Omega} D\varphi(\boldsymbol{x}) K(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{n}) \, d\omega, \tag{6}$$

где оператор $D = \tilde{\Delta} + 2$; $\tilde{\Delta}$ — *оператор Лапласа — Бельтрами на сфере, а*

$$K(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{n}) = \frac{1}{4\pi}(1 + \boldsymbol{xn} \ln(1 - \boldsymbol{xn})). \tag{7}$$

Доказательство. Выберем точку $\boldsymbol{n} \in \Omega$ за полюс сферы и введем сферические координаты u, v (v — широта). Тогда $\boldsymbol{xn} = \cos v$, $d\omega = \sin v \, du \, dv$, а оператор $\tilde{\Delta}$ имеет следующий вид:

$$\tilde{\Delta}\varphi = \frac{1}{\sin v} \frac{\partial}{\partial v}\left(\sin v \frac{\partial \varphi}{\partial v}\right) + \frac{1}{\sin^2 v} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}.$$

Обозначив правую часть (6) через J, имеем

$$J = \frac{1}{4\pi} \int\limits_0^{\pi} \int\limits_0^{2\pi} D\varphi (1 + \cos v \ln(1 - \cos v)) \sin v \, du \, dv =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int\limits_0^{\pi} (1 + \cos v \ln(1 - \cos v)) \left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\sin v \frac{\partial}{\partial v} \int\limits_0^{2\pi} \varphi \, du\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\sin v} \int\limits_0^{2\pi} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} du + 2 \sin v \int\limits_0^{2\pi} \varphi \, du \right] dv.$$

Средний интеграл в квадратных скобках равен, очевидно, нулю. Интегрируя дважды по частям, получаем

$$J = \frac{1}{4\pi}(1 + \cos v \ln(1 - \cos v)) \sin v \frac{\partial}{\partial v} \int\limits_0^{2\pi} \varphi \, du \Bigg|_0^{\pi} +$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \int\limits_0^{\pi} \left[\left(\ln(1 - \cos v) - \frac{\cos v}{1 - \cos v}\right) \sin^2 v \left(\frac{\partial}{\partial v} \int\limits_0^{2\pi} \varphi \, du\right) + \right.$$

$$+2\sin v\,(1+\cos v\ln(1-\cos v))\int_0^{2\pi}\varphi\,du\Big]\,dv=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\sin^2 v\left(\ln(1-\cos v)-\frac{\cos v}{1-\cos v}\right)\int_0^{2\pi}\varphi\,du\Big|_0^{\pi}-$$

$$-\frac{3}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi\cos v\sin v\,du\,dv.$$

Так как

$$\lim_{v\to 0}\sin^2 v\left(\ln(1-\cos v)-\frac{\cos v}{1-\cos v}\right)=-2,$$

то

$$J=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi\,du\Big|_{v=0}-\frac{3}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi\cos v\sin v\,du\,dv.$$

В силу (3) двойной интеграл, очевидно, равен нулю, а $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi\times$ $\times\,du\,|_{v=0}=\varphi\,|_{v=0}$. Отсюда и следует утверждение леммы.

Заметим, что при фиксированном $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{n}\neq\boldsymbol{x}$ функция $K(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{n})$, определяемая равенством (7), удовлетворяет, как легко проверить, уравнению $DK(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{n})=-\frac{3}{4\pi}\boldsymbol{xn}$. Вектор $\boldsymbol{n}$ — собственный вектор оператора $\tilde{\Delta}:\tilde{\Delta}\boldsymbol{n}=-2\boldsymbol{n}$ (см., например, [3], формула 1.23). Так что $K(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{n})$ является обобщенной функцией Грина для оператора $D=\tilde{\Delta}+2$ [4, лекция XX].

Подставляя теперь в (6) вместо $\varphi(\boldsymbol{x})$ левую часть уравнения (1) и учитывая, что $D\boldsymbol{n}=D\boldsymbol{x}=0$, получаем следующее представление для функции

$$\varphi(\boldsymbol{n})=\int_{\Omega}D\,(R_1R_2+\Phi\,(R_1R_2,\ R_1+R_2,\ \boldsymbol{x})\,K(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{n})\,d\omega. \qquad (8)$$

Таким образом, функция $\varphi(\boldsymbol{n})$, находящаяся в правой части уравнения К. Миранды, выражается только через главные радиусы кривизны искомой поверхности и вектор единичной нормали к ней. При этом в (8) вместо R_1R_2 и R_1+R_2 надо подставить их выражения через опорную функцию $H(\boldsymbol{n})=H(x_1,\ x_2,\ x_3)$ искомой поверхности

$$R_1R_2=\sum_{\substack{i,\ j=1\\(i<j)}}^{3}(H_{ii}H_{jj}-H_{ij}^2),\ \ R_1+R_2=\sum_{i=1}^{3}H_{ii}.$$

Поскольку опорная функция поверхности является положительно однородной функцией степени 1, то из выражений для R_1R_2 и R_1+R_2 следует, что они как функции $\boldsymbol{n}$ — положительно однородные функции координат вектора $\boldsymbol{n}$ степеней -2 и ... соответственно. Пользуясь этим обстоятельством, получим важное для дальнейшего представление для $D\Phi$.

Лемма 2. *Если $\Phi(R_1R_2,\ R_1+R_2,\ \boldsymbol{n})$ является положительной однородной функцией степени m относительно компонент x, y, z вектора $\boldsymbol{n}$, то $D\Phi = \Delta\Phi - f$, где $\Delta\Phi = \frac{d^2\Phi}{dx^2} + \frac{d^2\Phi}{dy^2} + \frac{d^2\Phi}{dz^2}$, и*

$$f = 4(R_1R_2)^2\Phi_{11} + 4R_1R_2(R_1+R_2)\Phi_{12} + (R_1+R_2)^2\Phi_{22} - (4m-2)R_1R_2\Phi_1 - 2m(R_1+R_2)\Phi_2 + [m(m+1)-2]\Phi, \quad (9)$$

причем индексами 1 и 2 здесь обозначены производные функции Φ по ее первому и второму аргументу соответственно.

Доказательство. В изотермических координатах u, v оператор $\tilde{\Delta}$ имеет, как известно, следующий вид:

$$\tilde{\Delta} = \frac{(1+u^2+v^2)^2}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}\right).$$

Причем переход к этим координатам осуществляется путем проектирования сферы на ее экваториальную плоскость одного из полюсов так, что

$$x = \frac{2u}{1+u^2+v^2},\quad y = \frac{2v}{1+u^2+v^2},\quad z = \frac{1-u^2-v^2}{1+u^2+v^2}.$$

Отсюда находим $x_u^2 + x_v^2 = (1-x^2)(1+z)^2$, $x_{uu} + x_{vv} = -2x(1+z)^2$ и аналогичные соотношения с заменой x на y и z; $x_uy_u + x_vy_v = -xy(1+z)^2$ и аналогичные соотношения с заменой x или y на z. Кроме того, $(1+z)^2 = 4(1+u^2+v^2)^{-2}$.

Положим $R_1R_2 = a$, $R_1+R_2 = b$. Тогда, используя установленные соотношения, получаем

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta}\Phi = (1+z)^{-2}\,&[(a_u^2+a_v^2)\Phi_{11} + 2(a_ub_u + a_vb_v)\Phi_{12} + \\ &+ (b_u^2+b_v^2)\Phi_{22} + 2(a_ux_u + a_vx_v)\Phi_{1x} + 2(a_uy_u + a_vy_v)\Phi_{1y} + \\ &+ 2(a_uz_u + a_vz_v)\Phi_{1z} + 2(b_ux_u + b_vx_v)\Phi_{2x} + 2(b_uy_u + \\ &+ b_vy_v)\Phi_{2y} + 2(b_uz_u + b_vz_v)\Phi_{2z} + (a_{uu} + a_{vv})\Phi_1 + \\ &+ (b_{uu} + b_{vv})\Phi_2] - 2(x\Phi_x + y\Phi_y + z\Phi_z) + (1-x^2)\Phi_{xx} + \\ &+ (1-y^2)\Phi_{yy} + (1-z^2)\Phi_{zz} - 2(xy\Phi_{xy} + xz\Phi_{xz} + yz\Phi_{yz}).\end{aligned}$$

Коэффициенты этого равенства с помощью тех же соотношений и с учетом однородности R_1R_2 и R_1+R_2 можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned}a_u^2 + a_v^2 &= (a_xx_u + a_yy_u + a_zz_u)^2 + (a_xx_v + a_yy_v + a_zz_v)^2 = \\ &= (1+z)^2[a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 - (xa_x + ya_y + za_z)^2] = \\ &= (1+z)^2(a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 - 4a^2);\\ a_ub_u + a_vb_v &= (1+z)^2[a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z -\end{aligned}$$

$$- (xa_x + ya_y + za_z)(xb_x + yb_y + zb_z)] =$$
$$= (1 + z)^2 (a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z - 4ab),$$
$$b_u^2 + b_v^2 = (1 + z)^2 [b_x^2 + b_y^2 + b_z^2 - (xb_x + yb_y + zb_z)^2] =$$
$$= (1 + z)^2 (b_x^2 + b_y^2 + b_z^2 - b^2);$$
$$a_u x_u + a_v x_v = (1 + z)^2 [a_x - x(xa_x + ya_y + za_z)] = (1 + z)^2 (a_x + 2ax)$$

и аналогичные соотношения с заменой x на y и z; $b_u x_u + b_v x_v = (1 + z)^2 [b_x - x(xb_x + yb_y + zb_z)] = (1 + z)^2 (b_x + bx)$ и аналогичные соотношения с заменой x на y и z;

$$a_{uu} + a_{vv} = (1 + z)^2 [a_{xx} + a_{yy} + a_{zz} - (x^2 a_{xx} + y^2 a_{yy} + z^2 a_{zz} + 2xya_{xy} + 2xza_{xz} + 2yza_{yz}) - 2(xa_x + ya_y + za_z)] = (1 + z)^2 (a_{xx} + a_{yy} + a_{zz} - 2a),$$
$$b_{uu} + b_{vv} = (1 + z)^2 [b_{xx} + b_{yy} + b_{zz} - (x^2 b_{xx} + y^2 b_{yy} + z^2 b_{zz} + 2xyb_{xy} + 2xzb_{xz} + 2yzb_{yz}) - 2(xb_x + yb_y + zb_z)] = (1 + z)^2 (b_{xx} + b_{yy} + b_{zz}).$$

Подставляя значения коэффициентов в выражение для $\tilde{\Delta}\Phi$, находим

$$\tilde{\Delta}\Phi = \Delta\Phi - [4a^2\Phi_{11} + 4ab\Phi_{12} + b^2\Phi_{22} + 2a\Phi_1 - 4a(x\Phi_{1x} + y \times \Phi_{1y} + z\Phi_{1z}) - 2b(x\Phi_{2x} + y\Phi_{2y} + z\Phi_{2z}) + 2(x\Phi_x + y\Phi_y + z\Phi_z) + (x^2\Phi_{xx} + y^2\Phi_{yy} + z^2\Phi_{zz} + 2xy\Phi_{xy} + 2xz\Phi_{xz} + 2yz\Phi_{yz})].$$

Учитывая, что функция Φ является положительно однородной степени m относительно переменных x, y и z, для выражений в круглых скобках получаем соответственно $m\Phi_1$, $m\Phi_2$, $m\Phi$ и $m(m-1)\Phi$. Отсюда и следует утверждение леммы.

Из леммы 2 следует, что если $\Phi = R_1 R_2$ и, значит, $m = 0$, то

$$DR_1R_2 = \Delta R_1 R_2, \tag{10}$$

а если Φ зависит только от x, y и z, будучи относительно них однородной функцией степени m, то

$$D\Phi(x, y, z) = \Delta\Phi - [m(m+1) - 2]\Phi. \tag{11}$$

Заметим также, что уравнению (11) при $\Delta\Phi = 0$ удовлетворяют сферические гармоники.

2. Связь между решениями двух уравнений. Наряду с уравнением (4) рассмотрим уравнение вида

$$f(R_1R_2, R_1 + R_2, \boldsymbol{n}) = \varphi(\boldsymbol{n}) \tag{12}$$

с функцией f, определяемой соотношением (9). Наша задача заключается в том, чтобы указать способ сведения решения уравнения (12) к решению уравнения (4). Поэтому, считая функцию f заданной, выразим через нее функцию Φ, решив дифференциальное уравнение (9). Это уравнение с помощью замены $u = \sqrt{R_1R_2}/$

$/(R_1+R_2)$, $v=R_1+R_2$ сводится к следующему уравнению Эйлера:

$$v^2\Phi_{vv}-2mv\Phi_v+\lambda\Phi=f(u^2v^2,\ v,\ \boldsymbol{n}), \tag{9}$$

где $\lambda=m(m-1)-2$. Общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид $C_1v^{\alpha_1}+C_2v^{\alpha_2}$, где α_1 и α_2 — корни квадратного уравнения $\alpha^2-(2m+1)\alpha+\lambda=0$, а C_1 и C_2 — постоянные интегрирования, зависящие от параметров u и $\boldsymbol{n}$. Обозначим через $F(v,\ t)$ такое решение однородного уравнения, которое удовлетворяет условиям $F(t,\ t)=0$, $F'_v(t,\ t)=1$. Тогда находим

$$F(v,\ t)=\frac{t}{\alpha_1-\alpha_2}\left(\frac{v^{\alpha_1}}{t^{\alpha_1}}-\frac{v^{\alpha_2}}{t^{\alpha_2}}\right). \tag{10}$$

Согласно [5] частное решение неоднородного уравнения Эйлера, обращающееся в нуль (вместе со своей первой производной) при $v=0$, есть

$$\Phi(u^2v^2,\ v,\ \boldsymbol{n})=\int\limits_0^v\frac{f(u^2t^2,\ t,\ \boldsymbol{n})}{(\alpha_1-\alpha_2)\,t}\left(\frac{v^{\alpha_1}}{t^{\alpha_1}}-\frac{v^{\alpha_2}}{t^{\alpha_2}}\right)dt. \tag{11}$$

Если функция f зависит от $\boldsymbol{n}$ явно, то будем предполагать ее однородной степени m относительно компонент вектора $\boldsymbol{n}$. Не ограничивая общности, можно считать, что $m=1$. В этом случае $\alpha_1=3$, $\alpha_2=0$ и поэтому функция Φ является однородной первой степени и представляется в виде

$$\Phi(u^2v^2,\ v,\ \boldsymbol{n})=\int\limits_0^v\frac{f(u^2t^2,\ t,\ \boldsymbol{n})}{3t}\left(\frac{v^3}{t^3}-1\right)dt$$

или (15)

$$\Phi(R_1R_2,\ R_1+R_2,\ \boldsymbol{n})=\int\limits_0^{R_1+R_2}\frac{f\left(\frac{R_1R_2t^2}{(R_1+R_2)^2},\ t,\ \boldsymbol{n}\right)}{3t}\left(\frac{(R_1+R_2)^3}{t^3}-1\right)dt.$$

Если функция f не зависит от $\boldsymbol{n}$, то $m=0$, $\alpha_1=2$, $\alpha_2=-1$, и поэтому функция Φ имеет вид

$$\Phi(u^2v^2,\ v)=\int\limits_0^v\frac{f(u^2t^2,\ t)}{3t}\left(\frac{v^2}{t^2}-\frac{t}{v}\right)dt \tag{16}$$

или

$$\Phi(R_1R_2,\ R_1+R_2)=\int\limits_0^{R_1+R_2}\frac{f\left(\frac{R_1R_2t^2}{(R_1+R_2)^2},\ t\right)}{3t}\left(\frac{(R_1+R_2)^2}{t^2}-\frac{t}{R_1+R_2}\right)dt.$$

При этом несобственные интегралы в (14) — (16) должны, конечно, сходиться, для чего необходимо, чтобы при $v \to 0$ функция f достаточно быстро стремилась к нулю. Можно, например, в (16) положить

$$f = u^{\beta} v^{\beta} [v^2 E'' + 2\beta v E' - (1+\beta)(2-\beta) E], \tag{17}$$

где $E = \exp\left(-\frac{1}{v}\right)$. Тогда, интегрируя (16), находим

$$\Phi = \frac{u^{\beta} v^2}{3} \int_0^v [t^{\beta-1} E'' + 2\beta t^{\beta-2} E' - (1+\beta)(2-\beta) t^{\beta-3} E]\, dt -$$

$$- \frac{u^{\beta}}{3v} \int_0^v [t^{\beta+2} E'' + 2\beta t^{\beta+1} E' - (1+\beta)(2-\beta) t^{\beta} E]\, dt =$$

$$= \frac{u^{\beta} v^2}{3} (t^{\beta-1} E' + (1+\beta) E) \Big|_0^v - \frac{u^{\beta}}{3v} (t^{\beta+2} E' - (2-\beta) t^{\beta+1} E) \Big|_0^v =$$

$$= u^{\beta} v^{\beta} E = (R_1 R_2)^{\beta/2} e^{-\frac{1}{R_1 + R_2}}.$$

Нетрудно доказать, что любая функция f из (16), для которой $\Phi = u^{\beta} v^{\beta} E(v)$ $(E(0) = 0,\ \lim\limits_{v \to 0} v^{\beta-1} E' = 0)$, имеет вид (17). Аналогичную функцию можно построить и в общем случае, когда Φ задается формулой (14). Для этого в (17) коэффициент 2β надо заменить на $2\beta + 1 - \alpha_1 - \alpha_2$, а $(\beta+1)(\beta-2)$ — на $(\alpha_1 - \beta)(\alpha_2 - \beta)$ и соответствующим образом изменить начальные условия.

Следует подчеркнуть, что функции вида (17), для которых $0 < \beta \leqslant 2$, $|E(v)| \leqslant C = \text{const}$, представляют для рассматриваемой задачи особый интерес потому, что функция Φ в уравнении К. Миранды должна удовлетворять условию (5). Однако при указанных ограничениях функция f, как выясняется, не может быть всюду положительной. В частности, функция

$$f = u^{\beta} v^{\beta} \left[\frac{1}{v^2} + \frac{2(\beta-1)}{v} - (1+\beta)(2-\beta)\right] e^{-\frac{1}{v}},$$

которая получается из (17) при $E = \exp\left(-\frac{1}{v}\right)$, положительна при малых значениях v и отрицательна — при больших, причем $\left|\frac{f}{u^{\beta} v^{\beta}}\right|$ больше некоторого положительного числа. Для (17) как дифференциального уравнения относительно функции $E(v)$ справедлива

Теорема 1. *Если функция $f(u^2 v^2, v)$ неотрицательна, $\lim\limits_{v \to 0} \frac{f}{v^2} = 0$ и при $0 < \beta \leqslant 2$ и достаточно больших v $\frac{f}{(uv)^{\beta}} \geqslant N > 0$, то решение уравнения (17), удовлетворяющее начальным условиям: $E(0) = 0$, $\lim\limits_{v \to 0} v^{\beta-1} E'(v) = 0$, является неограниченным при неограниченном возрастании v.*

Доказательство. Общее решение однородного уравнения, соответствующего уравнению (17), есть $C_1 v^{\alpha_1} + C_2 v^{\alpha_2}$, где $\alpha_1 = 2 - \beta$, $\alpha_2 = -1 - \beta$. Тогда в соответствии с (13), (14) частное решение неоднородного уравнения с данными начальными условиями можно записать в виде

$$E = \frac{1}{(uv)^{\beta}} \int\limits_0^v \frac{f(u^2 t^2, t)}{3t} \left(\frac{v^2}{t^2} - \frac{t}{v}\right) dt.$$

Сравнивая с (16), находим, что $(uv)^{\beta} E = \Phi$. Докажем сначала неограниченность функции Φ.

Производные этой функции по v равны:

$$\Phi_v = \int\limits_0^v \frac{f(u^2 t^2, t)}{3t} \left(\frac{2v}{t^2} + \frac{t}{v^2}\right) dt,$$

$$\Phi_{vv} = \frac{f(u^2 v^2, v)}{v^2} + \int\limits_0^v \frac{f(u^2 t^2, t)}{3t} \left(\frac{2}{t^2} - \frac{2t}{v^3}\right) dt.$$

Так как f неотрицательна и $0 \leqslant t \leqslant v$, то отсюда следует, что функция Φ и обе ее частные производные по v также неотрицательны, причем при $v = 0$ они обращаются в нуль. Значит, при неограниченном возрастании v функция Φ также неограниченно возрастает.

Далее, по доказанному

$$\lim_{v \to \infty} E = \lim_{v \to \infty} \frac{\Phi}{(uv)^{\beta}} = \lim_{v \to \infty} \frac{\Phi_v}{\beta u^{\beta} v^{\beta - 1}}.$$

Однако $u = \frac{\sqrt{R_1 R_2}}{R_1 + R_2} \leqslant \frac{1}{2}$, а $\Phi_v \geqslant 2v \int\limits_0^v \frac{f(u^2 t^2, t)}{3t^3} dt$. Поэтому при $0 < \beta < 2$ будет $\lim\limits_{v \to \infty} E = \infty$. Если же $\beta = 2$, то утверждение теоремы следует из того, что несобственный интеграл $\int\limits_0^{\infty} \frac{f\,dt}{t^3}$ расходится, так как в этом случае при достаточно больших значениях v по условию теоремы $\frac{f}{(uv)^2} \geqslant N > 0$. Теорема доказана.

Установленные выше соотношения позволяют сформулировать и доказать основной результат данной работы.

Пусть F — регулярная замкнутая выпуклая поверхность с положительной гауссовой кривизной и $f(R_1 R_2,\ R_1 + R_2,\ \boldsymbol{n})$ — некоторая регулярная функция, определенная в области $(R_1 + R_2)^2 \geqslant 4R_1 R_2 > 0$ и однородная степени m относительно компонент вектора $\boldsymbol{n}$. Пусть $R_1(\boldsymbol{n})$ и $R_2(\boldsymbol{n})$ $(R_1 \geqslant R_2)$ — главные радиусы кривизны поверхности F в точке с внешней нормалью $\boldsymbol{n}$. Поверхность F и функция f определяют некоторую функцию $\psi(\boldsymbol{n}) = f(R_1(\boldsymbol{n}) R_2(\boldsymbol{n}),\ R_1(\boldsymbol{n}) + R_2(\boldsymbol{n}),\ \boldsymbol{n})$. Когда же поверхность F не задана, то общая задача существования состоит в том, чтобы выяснить, при каких условиях на функции f и ψ существует замкнутая выпуклая поверхность, удовлетворяющая уравнению $f(R_1R_2,\ R_1 + R_2,\ \boldsymbol{n}) = \psi(\boldsymbol{n})$, т. е. уравнению (12). Поскольку необходимые условия разрешимости этой задачи неизвестны, сведем ее к уравнению К. Миранды (4).

Определим по функции f с помощью формулы (14) функцию Φ и построим функцию $R_1R_2 + \Phi + \boldsymbol{cn}$ такую, чтобы она при подстановке в нее главных радиусов кривизны поверхности F, являющейся решением уравнения (12), удовлетворяла условию (3), для чего достаточно подобрать соответствующим образом вектор $\boldsymbol{c}$. Тогда по лемме 1 по аналогии с (8) имеем

$$R_1R_2 + \Phi + \boldsymbol{cn} = \int_{\Omega} D(R_1R_2 + \Phi)_x K(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{n})\, d\omega_x,$$

где индексом $\boldsymbol{x}$ отмечен аргумент подынтегральной функции. Последнюю с помощью леммы 2 можно привести к виду $D(R_1R_2 + \Phi) = \Delta(R_1R_2 + \Phi) - f$, где f — заданная функция. А так как на поверхности F, являющейся решением уравнения (12), будет $f = \psi(\boldsymbol{n})$, то получаем следующее соотношение:

$$R_1R_2 + \Phi + \boldsymbol{cn} = \int_{\Omega} [\Delta(R_1R_2 + \Phi)_x - \psi(\boldsymbol{x})]\, K(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{n})\, d\omega_x. \qquad (18)$$

Его можно рассматривать как уравнение К. Миранды, правая часть которого зависит от искомой поверхности. Тем самым доказана

Теорема 2. *Любая замкнутая выпуклая поверхность F, являющаяся решением уравнения (12), является также и решением уравнения (18).*

Следует подчеркнуть, что из самого способа построения уравнения (18) можно заключить, что его правая часть $\varphi(\boldsymbol{n})$ удовлетворяет условию (3). Поэтому верна и обратная

Теорема 3. *Если правая часть $\varphi(\boldsymbol{n})$ уравнения (18) удовлетворяет условию (3), то любое его решение является также решением уравнения (12) с функцией f, определяемой формулой (9).*

Доказательство. Запишем условие (3) для правой части уравнения (18):

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{n} \left\{ \int_{\Omega} [\Delta(R_1R_2 + \Phi)_x - \psi(\boldsymbol{x})]\, K(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{n})\, d\omega_x \right\} d\omega_n = 0. \qquad (19)$$

Заменяя выражение в квадратных скобках по лемме 2 на $D(R_1R_2 + \Phi)_x + f - \psi(\boldsymbol{x})$, после изменения порядка интегрирования получим

$$\int_{\Omega} [D(R_1R_2 + \Phi)_x + f - \psi(\boldsymbol{x})] \left(\int_{\Omega} \boldsymbol{n} K(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{n})\, d\omega_n \right) d\omega_x.$$

Непосредственные вычисления после подстановки $K(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{n})$ из (7) дают $\int\limits_{\Omega} \boldsymbol{n}K(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{n})\, d\omega_n = \frac{1}{3}\left(\ln 2 - \frac{4}{3}\right)\boldsymbol{x}$. А так как оператор $D = \tilde{\Delta} + 2$ самосопряженный, то $\int\limits_{\Omega} \boldsymbol{x} D(R_1R_2 + \Phi)_x d\omega_x = \int\limits_{\Omega} (R_1R_2 + \Phi) D\boldsymbol{x} d\omega = 0$. Поэтому для функций f и ψ справедливо соотношение

$$\int\limits_{\Omega} \boldsymbol{x}\,(f - \psi(\boldsymbol{x}))\, d\omega_x = 0. \tag{20}$$

Применяя теперь оператор D к обеим частям (18), на основании леммы 2 получаем

$$\Delta(R_1R_2 + \Phi)_n - f = \int\limits_{\Omega} [\Delta(R_1R_2 + \Phi)_x - \psi(\boldsymbol{x})]\, D_n K(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{n})\, d\omega_x.$$

Преобразуем выражение в квадратных скобках, как и выше. Тогда, учитывая, что $K(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{n})$ — обобщенная функция Грина оператора D (см. замечание к лемме 1), после упрощений имеем

$$\psi(\boldsymbol{n}) - f = -\frac{3}{4\pi}\boldsymbol{n}\int\limits_{\Omega} \boldsymbol{x}\,(f - \psi(\boldsymbol{x}))\, d\omega_x.$$

Отсюда и из равенства (20) следует, что $f(R_1R_2, R_1 + R_2, \boldsymbol{n}) = \psi(\boldsymbol{n})$. Теорема доказана.

Из доказательства теоремы 2 следует, что условие (19), играющее роль условия замкнутости для искомой поверхности, допускает более простую запись:

$$\int\limits_{\Omega} \boldsymbol{n}\,[\Delta(R_1R_2 + \Phi)_n - \psi(\boldsymbol{n})]\, d\omega = 0. \tag{21}$$

Итак, для решения общей задачи существования, сводящейся к уравнению (12), достаточно решить с помощью метода последовательных приближений уравнение (18) с соблюдением условия (21). Но и здесь, как показывает теорема 1, имеются свои сложности.

Список литературы: 1. *Александров А. Д.* Теоремы единственности для поверхностей «в целом». 1. — Вестн. ЛГУ, 1956. № 19, с. 5—17. 2. *Погорелов А. В.* Внешняя геометрия выпуклых поверхностей. — М.: Наука, 1969. 760 с. 3. *Miranda C.* Su un problema di geometria differentiale in grande per gli ovaloidi. — Ann. Mat. Pura ed Appl., 1970, v 87, p. 237—269. 4. *Соболев С. Л.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1966. — 443 с. 5. *Курант Р.* Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. II. — М.: Наука, 1970, с. 8—15.

Поступила в редколлегию 03.10.83.

УДК 513

А. Д. МИЛКА

ОБ ОДНОЗНАЧНОЙ ОПРЕДЕЛЕННОСТИ ВЫПУКЛЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ В ПСЕВДОРИМАНОВОМ СФЕРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ. I

Пусть E — четырехмерное векторное вещественное пространство со скалярным произведением, определяемым в ортонормированном базисе (e_0, e_1, e_2, e_3) квадратичной формой $z^2 = \varepsilon z_0^2 + z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$, где $|\varepsilon| = 1$, $z = z_0e_0 + z_1e_1 + z_2e_2 + z_3e_3$ — вектор в E. Для произведений векторов в E будем применять обозначения: скалярное pq, векторное pqr и смешанное $pqrs$ — соответственно $\varepsilon p_0q_0 + p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3$,

$$\det\begin{pmatrix} \varepsilon e_0 & e_1 & e_2 & e_3 \\ p_0 & p_1 & p_2 & p_3 \\ q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \\ r_0 & r_1 & r_2 & r_3 \end{pmatrix} \text{ и } \det\begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & p_3 \\ q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \\ r_0 & r_1 & r_2 & r_3 \\ s_0 & s_1 & s_2 & s_3 \end{pmatrix}.$$

Свойства этих произведений считаются известными, например: $p(qrs) = pqrs$; $(abc)(pqr) = \varepsilon\Gamma(a, b, c; p, q, r)$, Γ — определитель Грама.

Будем интерпретировать в пространстве E сферическое $(\varepsilon = 1)$ и псевдориманово сферическое $(\varepsilon = -1)$ трехмерные пространства кривизны 1 как сферу $R(z \mid z^2 = +1)$, трехмерное гиперболическое $(\varepsilon = -1)$ кривизны -1 — как полусферу $R(z_0 > 0 \mid z^2 = -1)$, трехмерное евклидово пространство — как плоскость $E_0(z \mid z_0 = 0)$. Выпуклая поверхность в R — это пересечение с R невырожденного выпуклого конуса в пространстве E с вершиной в центре R, начале координат E; в псевдоримановом сферическом пространстве рассматриваются только выпуклые поверхности с дефинитной метрикой, т. е. такие выпуклые поверхности, все опорные плоскости которых пространственноподобны. Общие внутренние и внешние метрические свойства выпуклых поверхностей в пространстве R предполагаются известными ([1, 2], для псевдоевклидова и сферического псевдориманова пространств см. [3]).

Основной целью данной статьи является получение следующего результата об однозначной определенности внутренней метрикой выпуклых поверхностей.

Теорема 1. *Пусть F', F'' — изометричные общие выпуклые замкнутые поверхности в псевдоримановом сферическом пространстве. Пусть эти поверхности не слишком отклоняются от некоторой пространственноподобной плоскости — расстояния z от точек поверхности до точек плоскости вдоль соответствующих времениподобных геодезических пространства, ортогональных этой плоскости, подчинены неравенству $\operatorname{sh} z < 1$. Тогда поверхности F', F'' конгруэнтны.*

В сферическом и гиперболическом пространствах соответствующие теоремы в общем случае без дополнительного ограничения на размеры поверхностей устанавливались А. В. Погореловым [2] и автором [4]. Дополнительное ограничение в теореме 1 связано с методом доказательства — применением преобразования пары изометричных выпуклых поверхностей в пространстве R в пару изометричных выпуклых поверхностей в пространстве E_0. Изложим необходимые сведения об этом преобразовании.

А. В. Погореловым найдено отображение, сопоставляющее парам точек (x', x'') пространства R пары точек (y', y'') пространства E_0 [2]:

$$y' = (x' - \varepsilon e_0 (e_0 x'))/\lambda, \; y'' = (x'' - \varepsilon e_0 (e_0 x''))/\lambda,$$

$$\lambda = \varepsilon e_0 (x' + x''). \qquad (y)$$

Отображение (y) сохраняет соотношения равенства для квадратов расстояний между точками: пусть x_1', x_2' и x_1'', x_2'' — соответствующие точки, а y_1', y_2' и y_1'', y_2'' — их соответствующие образы, тогда $(y_1' - y_2')^2 - (y_1'' - y_2'')^2 = ((x_1' - x_2')^2 - (x_1'' - x_2'')^2)/\lambda_1 \lambda_2$, $\lambda_i = \varepsilon e_0 (x_i' + x_i'')$. Если точки x' и x'' описывают в R замкнутые выпуклые изометричные поверхности F' и F'', то в общем случае точки y' и y'' описывают замкнутые изометричные поверхности Φ' и Φ'' в E_0. Если при этом поверхности Φ' и Φ'' оказываются выпуклыми, то по теореме А. В. Погорелова об однозначной определенности для евклидова пространства [2] эти поверхности конгруэнтны. Тогда, очевидно, будут конгруэнтными и поверхности F', F''.

Для доказательства теоремы 1, как и в случае гиперболического пространства [4], рассматриваются лишь регулярные поверхности. Переход к общим поверхностям для сферического пространства изложен в [2]; соответствующие рассуждения полностью переносятся и на сферическое псевдориманово пространство. Для удобства сравнений некоторые важные выкладки проводятся параллельно для всех названных пространств — сферического, гиперболического, псевдориманова сферического, — которые обозначены с учетом данной их интерпретации одним символом R. Речь идет об отыскании условий сохранения локальной выпуклости поверхностей при отображении (y). Небезынтересно, что эти условия получаются до конца общим методом, разработанным в [2]; здесь результат является новым и для гиперболического пространства. Далее предполагается, что рассматриваемые в R изометричные выпуклые поверхности находятся в открытом полупространстве $z_0 > 0$. В случае псевдориманова сферического пространства считается, что плоскость $z_0 = 0$ и есть аппроксимирующая эти поверхности пространственноподобная плоскость, о которой говорится в теореме 1. Это не нарушает общности выводов.

Доказательство теоремы 1. Итак, пусть F', F'' — изометричные регулярные, не обязательно замкнутые, локально строго вы пуклые поверхности, а Φ', Φ'' — их соответствующие (y)-образы. Найдем, например, условия для локальной выпуклости поверхности Φ'.

Обозначим $a_0 \in F'$, $b_0 \in F''$ и a_3, b_3 — соответствующие по изометрии точки и внутренние, т. е. направленные в сторону вогнутости, единичные нормали к поверхностям, c_3 — некоторый нормальный вектор в точке $c_0 \in \Phi'$, (y)-образе a_0. Считаем, что поверхности F' и F'' «однозначно проектируются» в направлении вектора e_0; этому эквивалентны условия $e_0a_3 \neq 0$ и $e_0b_3 \neq 0$. Пусть α' и α'' — произвольные соответствующие по изометрии направления на F' и F'' в a_0 и b_0, $k' > 0$ и $k'' > 0$ — нормальные кривизны поверхностей, отвечающие этим направлениям. Знак нормального приращения $c_3\Delta y'$ радиус-вектора y' поверхности Φ' в точке c_0 при смещении, соответствующем направлениям α, совпадает со знаком выражения

$$k'\left(a_3 - \varepsilon c_0 (e_0a_3)\right) c_3 + k''\left(-\varepsilon (c_0c_3)(e_0b_3)\right) = k'A + k''B.$$

Выберем в точке a_0 независимые ортонормированные векторы a и a_2, касательные к F', такие, что $a_3 = (a_0a_1a_2)$. Пусть b_1 и b_2 — касательные к F'' векторы в b_0, соответствующие по изометрии a_1 и a_2, c_1 и c_2 — касательные к Φ' векторы, (y)-образы a_1 и a_2, $c_3 = (e_0c_1c_2)$.

Имеем соотношения

$$c_0 = a_0/\lambda + e_0 (\divideontimes),\ c_i = (a_i\lambda_0 - a_0\lambda_i)/\lambda_0^2 + e_0 (\divideontimes),$$
$$\lambda_j = \varepsilon e_0 (a_j + b_j),$$

где $\lambda_0 > 0$; $i = 1, 2$, а $j = 1, 2, 3$; $(\divideontimes)$ — скалярные величины. Отсюда следует, что $c_3 = (e_0,\ a_1\lambda_0 - a_0\lambda_1,\ a_2\lambda_0 - a_0\lambda_2)$, $c_0c_3 = -(e_0a_3)/\lambda_0^3$,

$$a_3c_3 = \begin{vmatrix} a_0e_0 & a_0(a_1\lambda_0 - a_0\lambda_1) & a_0(a_2\lambda_0 - a_0\lambda_2) \\ a_1e_0 & a_1(a_1\lambda_0 - a_0\lambda_1) & a_1(a_2\lambda_0 - a_0\lambda_2) \\ a_2e_0 & a_2(a_1\lambda_0 - a_0\lambda_1) & a_2(a_2\lambda_0 - a_0\lambda_2) \end{vmatrix},$$
$$B = \varepsilon (e_0a_3)(e_0b_3).$$

Пусть R — сферическое или гиперболическое пространство. Тогда $a_0^2 = \varepsilon$ и $A = \varepsilon[\varepsilon (a_0e_0)^2 + (a_1e_0)^2 + (a_2e_0)^2 + (a_3e_0)^2 + \varepsilon (a_0e_0) \times (b_0e_0) + (a_1e_0)(b_1e_0) + (a_2e_0)(b_2e_0)]/\lambda_0^3$. Так как $(e_0a_3)(e_0b_3) \neq 0$, то для некоторого вектора $\tilde{b}_3 = \pm b_3$ будет $\varepsilon (e_0a_3)(e_0\tilde{b}_3) < 0$. Введем векторы

$$\alpha = (\varepsilon e_0a_0,\ e_0a_1,\ e_0a_2,\ e_0a_3) \text{ и } \beta = (\varepsilon e_0b_0,\ e_0b_1,\ e_0b_2,\ e_0\tilde{b}_3).$$

Ясно, что $\alpha^2 = \beta^2 = \varepsilon$, $\alpha_0 > 0$, $\beta_0 > 0$, $\varepsilon (\alpha + \beta)^2 > 0$, $\varepsilon\alpha\beta > 0$.

Отсюда следует, что $A > \varepsilon (\alpha + \beta)^2/2\lambda_0^3 > 0$, и для локальной выпуклости поверхности Φ' в общем случае необходимо и достаточно выполнение неравенства $B = \varepsilon (e_0a_3)(e_0b_3)/\lambda_0^3 > 0$. Это значит, что в случае сферического пространства $(\varepsilon = 1)$ обе поверхности F' и F'' должны быть видны в R из точки e_0 одинаковыми сторонами — со стороны вогнутости или со стороны выпуклости. В случае гиперболического пространства ($\varepsilon = -1$) поверхности F' и F'' должны быть видны в R из точки e_0 разными сторонами. Отметим, что для величины A справедлива оценка $A > \varepsilon(\alpha^2 + \beta^2)/2\lambda_0^3 = 1/\lambda_0^3$, сходная с полученной в [2] для сферического пространства.

Пусть теперь R — псевдориманово сферическое пространство, завершим доказательство теоремы 1.

Здесь $a_0^2 = 1$, $a_3^2 = b_3^2 = \varepsilon$ (как нормали к поверхностям),

$$A = [(a_0e_0)^2 + (a_1e_0)^2 + (a_2e_0)^2 + (a_3e_0)^2\varepsilon + (a_0e_0)(b_0e_0) + \\ + (a_1e_0)(b_1e_0) + (a_2e_0)(b_2e_0)]/\lambda_0^3.$$

Тогда

$$(a_0e_0)(b_0e_0) + (a_1e_0)(b_1e_0) + (a_2e_0)(b_2e_0) = \\ = (a_3 - \varepsilon(e_0a_3))(b_3 - \varepsilon(e_0b_3)) < 1,$$

что вытекает из ограничений теоремы на размеры поверхностей. Значит,

$$A = [-1 + (a_0e_0)(b_0e_0) + \ldots]/\lambda_0^3 < 0, \;\; B = -(e_0a_3)(e_0b_3)/\lambda_0^3 < 0$$

и поверхность Φ' — локально-выпуклая. По тем же соображениям локально выпуклой является и поверхность Φ''. Таким образом, в условиях теоремы 1 [2] поверхности Φ' и Φ'' — замкнутые выпуклые изометричные; по теореме об однозначной определенности для евклидова пространства эти поверхности конгруэнтны. Значит, также конгруэнтны и поверхности F', F''. Теорема 1 доказана.

Отметим в связи с изложенным, что отображение (y) обладает еще некоторыми полезными свойствами, установленными для сферического пространства в [2].

Пусть преобразование $x' \to x''$ является движением. Тогда отображения $x' \to y'$, $x'' \to y''$ — невырожденные, следовательно, невырожденным будет и преобразование $y' \to y''$. Для отображения $x' \to y'$ это, например, вытекает из следующего заключения.

Обозначим $a_0 \in R$ и $b_0 \in R$ — соответствующие точки, (a_1, a_2, a_3) и (b_1, b_2, b_3) — соответствующие в них по изометрии ортонормированные касательные векторы к R, $(c_1, c_2, \tilde{c}_3)$ — образы указанных направлений при отображении (y) в точке $c_0 \in E_0$ — (y)-образе a_0, $a_3 = (a_0a_1a_2)$, $c_3 = (c_0c_1c_2)$; тогда якобиан $\Delta = (e_0c_1c_2\tilde{c}_3)$ отображения $x' \to y'$ равен (учитываем ранее введенные обозначения) $\Delta = (A + B)/\lambda_0$. Для сферического и гиперболического пространств $\Delta = \varepsilon(\alpha + \beta)^2/\lambda_0^4 > 1/\lambda_0^4 > 0$; для псевдориманова сферического пространства $\Delta = (\alpha + \beta)^2/\lambda_0^4 < 1/\lambda_0^4 < 0$. Здесь в первом случае $\alpha = (\varepsilon e_0a_0,\; e_0a_1,\; e_0a_2,\; e_0a_3)$, $\beta = (\varepsilon e_0b_0,\; e_0b_1,\; e_0b_2,\; e_0b_3)$, а во втором — $\alpha = (\varepsilon e_0a_3,\; e_0a_0,\; e_0a_1,\; e_0a_2)$, $\beta = (\varepsilon e_3b_3,\; e_0b_0,\; e_0b_1,\; e_0b_2)$.

Из невырожденности преобразования $y' \to y''$ и свойства (y)-отображения для квадратов расстояний между точками вытекает, что преобразование $y' \to y''$ есть движение. Нетрудно доказывается, что отображения $x' \to y'$ и $x'' \to y''$ — геодезические. Отображение (y) переводит выпуклые конгруэнтные поверхности в конгруэнтные выпуклые (так как $A+B$ — определенного знака) поверхности.

Приведем одно применение теоремы 1. Следующий результат сформулирован автору А. В. Погореловым.

Теорема 2. *В пространствах с постоянной кривизной — сферическом, гиперболическом, псевдоримановом сферическом — замкнутая регулярная строго выпуклая поверхность однозначно определяется третьей квадратичной формой.*

Это утверждение справедливо в трехмерных сферическом и псевдоримановом сферическом пространствах. Для его доказательства достаточно рассмотреть две поверхности с общей параметризацией, удовлетворяющие теореме 2 — их третьи квадратичные формы в соответствующих точках одинаковы, — и перейти от этих поверхностей в интерпретации в пространстве E к полярным образам. Полярными образами будут изометричные замкнутые выпуклые поверхности соответственно в сферическом или гиперболическом пространствах, т. е. по теореме об однозначной определенности — конгруэнтные поверхности. Значит, и исходные поверхности конгруэнтны. Для гиперболического пространства, если иметь в виду тот же способ доказательства, т. е. переход к полярным поверхностям, теорема 2 устанавливается здесь при дополнительном ограничении. Именно, из теоремы 1 следует

Теорема 3. *Пусть F', F'' — замкнутые регулярные строго выпуклые поверхности с общей параметризацией в гиперболическом трехмерном пространстве, имеющие в соответствующих точках равные третьи квадратичные формы. Допустим, что каждая из поверхностей помещается внутри шара, радиус z которого удовлетворяет неравенству $\operatorname{sh} z < 1$. Тогда поверхности F' и F'' конгруэнтны.*

Условие на размеры поверхностей, содержащееся в теореме 3, легко переформулируется (с помощью аналога теоремы Юнга) как ограничение на их диаметры. Более интересно, что это условие выполняется с помощью внутренне геометрического требования — соответствующего ограничения снизу гауссовой кривизны поверхностей.

В заключение сделаем некоторые замечания.

Теорема 1 для регулярных поверхностей справедлива и без ограничений. На сферическое псевдориманово пространство полностью с незначительными изменениями переносятся соответствующие доказательства С. Ф. Кон-Фоссена [5] и Герглотца [6] теоремы об однозначной определенности замкнутых выпуклых трижды непрерывно дифференцируемых поверхностей в евклидовом пространстве. Таким образом, справедлива также и теорема 2: эта теорема, между прочим, есть обобщение одного установленного в [7] утверждения о единственности выпуклых многогранников в пространстве Лобачевского. Вопрос о доказательстве теоремы 1 для произвольных выпуклых поверхностей пока открыт. Его решение, видимо, существенно связано с индефинитностью метрики рассматриваемого пространства и с новыми, специфичными, внешне геометрическими теоремами о выпуклых поверхностях.

Список литературы: 1. *Александров А. Д.* Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей.— М.; Л.: Гостехиздат, 1948.— 386 с. 2. *Погорелов А. В.* Внешняя геометрия выпуклых поверхностей. — М.: Наука, 1969. — 759 с. 3. *Милка А. Д.* Общие выпуклые гиперповерхности в псевдоевклидовом пространстве. — Докл. АН СССР, 1980. 4. *Милка А. Д.* Однозначная определенность общих замкнутых выпуклых поверхностей в пространстве Лобачевского. — Укр. геометр. сб., 1980, вып. 23, с. 99—107. 5. *Кон-Фоссен С. Ф.* Изгибаемость поверхностей в целом. — В кн.: Некоторые вопросы дифференциальной геометрии в целом, М., 1959, с. 19—86. 6. *Ефимов Н. В.* Качественные вопросы теории деформаций поверхностей. — Успехи мат. наук, 1948, 248, с. 46—58. 7. *Погорелов А. В.* О правильном разбиении пространства Лобачевского. — Мат. заметки, 1967, 1 : 1, с. 3—8.

Поступила в редколлегию 19.11.81.

УДК 513

В. В. МОЖАРСКИЙ

СУЩЕСТВОВАНИЕ ПОВЕРХНОСТИ НЕПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ С ЗАДАННОЙ ОГИБАЮЩЕЙ СЕМЕЙСТВА ЕЕ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ПРИ УСЛОВИИ ОБРАЩЕНИЯ В НУЛЬ КРИВИЗНЫ ВДОЛЬ ОДНОЙ ИЗ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ЭТОГО СЕМЕЙСТВА

В настоящей работе будет рассмотрен вопрос о существовании поверхности σ (в R^3) заданной неположительной гауссовой кривизны, для которой заданная пространственная кривая γ служила бы огибающей не менее, чем одного семейства асимптотических. Эта задача уже изучалась в [1—3], однако там ряд случаев был исключен из рассмотрения. В частности, не выяснено, существует ли искомая поверхность при условии обращения в нуль гауссовой кривизны на заданной кривой. Здесь исследование будет проведено в предположении, что гауссова кривизна обращается в нуль в одной точке огибающей, а также вдоль всей асимптотической, касающейся заданной кривой в указанной точке.

Следуя [1], будем искать поверхность σ в виде

$$r(s,\ v) = \rho(s) + v\tau(s) + f(s,\ v)\,\nu(s) + \varphi(s,\ v)\,\beta(s), \qquad (1)$$

где $\rho(s)$ — радиус-вектор заданной кривой γ, отнесенной к длине дуги s; координатные линии v являются асимптотическими того семейства, которое огибается γ, причем $v = 0$ на γ. Далее, τ, ν, β — соответственно орты касательной, главной нормали и бинормали кривой γ, а функции f и φ неизвестны. Как было показано в [1], функции f и φ должны удовлетворять системе дифференциальных уравнений:

$$(1-kf)(\varphi_{vv}f_v-f_{vv}\varphi_v)-(vk+f_s-\varkappa\varphi)\varphi_{vv}+(\varkappa f+\varphi_s)f_{vv}=0,$$
$$\varphi_{vvv}f_{vv}-f_{vvv}\varphi_{vv}=\lambda\left[(\varphi_{vv}f_v-f_{vv}\varphi_v)^2+\varphi_{vv}^2+f_{vv}^2\right], \quad (2)$$

где k и $\varkappa$ — соответственно кривизна и кручение кривой γ, а $\lambda(s, v)$ — заданная функция, причем гауссова кривизна K поверхности σ определяется как $K=-\lambda^2$. Кроме того, f и φ удовлетворяют начальным условиям:

$$f(s, 0)=\varphi(s, 0)=f_v(s, 0)=\varphi_v(s, 0)=0. \quad (3)$$

В данной работе доказывается следующая

Теорема. *Пусть $\lambda(s, v)$ — заданная аналитическая функция определенная при значениях $-s_0 \leqslant s \leqslant s_0$, $-v_0 \leqslant v \leqslant v_0$ $(s_0, v_0 > 0)$ вида $\lambda(s, v)=s\mu(s, v)$, где $\mu(s, v)$ — некоторая аналитическая функция, причем $\mu(s, 0)\neq 0$. Пусть, далее, γ — заданная кривая с аналитическим радиус-вектором $\rho(s)$, не имеющая особых точек, а также точек распрямления и уплощения. Тогда существует единственная поверхность вида (1), имеющая кривизну $K=-\lambda^2$, для которой γ служит огибающей не менее, чем одного семейства асимптотических линий.*

Доказательство. Поскольку γ предполагается линией без точек распрямления и уплощения, то $k(s)$ и $\varkappa(s)$ являются аналитическими функциями, причем $k(s)\neq 0$, $\varkappa(s)\neq 0$ **(4)**. В процессе доказательства потребуется

Лемма. *Пусть функция $\lambda(s, v)$ имеет вид $\lambda(s, v)=s\mu(s, v)$* **(5)**, *причем $\mu(s, 0)\neq 0$* **(6)**. *Тогда, если существует решение f, φ системы (2), удовлетворяющее начальным условиям (3), то*

$$f(s, v)=sv^2F(s, v), \quad \varphi(s, v)=sv^3\Phi(s, v), \quad (7)$$

где F и Φ — аналитические функции.

Чтобы доказать лемму, разложим функции f и φ в ряд:

$$f(s, v)=\sum_{i, j=0}^{\infty} f_{ij}s^iv^j, \quad \varphi(s, v)=\sum_{i, j=0}^{\infty} \varphi_{ij}s^iv^j. \quad (8)$$

Поскольку эти функции подчинены условиям (3), то

$$f_{i0}=f_{i1}=\varphi_{i0}=\varphi_{i1}=0, \ \forall i \geqslant 0. \quad (9)$$

Известные функции λ, k, $\varkappa$ также представим рядами:

$$\lambda(s, v)=\sum_{i, j=0}^{\infty} \lambda_{ij}s^iv^j, \quad (10)$$

$$k(s)=\sum_{i=0}^{\infty} k_is^i, \quad \varkappa(s)=\sum_{i=0}^{\infty} \varkappa_is^i. \quad (11)$$

В силу (5), (6) и (4) справедливы соотношения $\lambda_{0j}=0$, $\forall j \geqslant 0$ **(12)**, $\lambda_{10}\neq 0$, $k_0\neq 0$, $\varkappa_0\neq 0$ **(13)**.

Введем следующие обозначения:

$$Z = (1 - kf)(\varphi_{vv}f_v - f_{vv}\varphi_v) - (vk + f_s - \varkappa\varphi)\varphi_{vv} + (\varkappa f + \varphi_s) f_{vv};$$

$$W = \varphi_{vvv}f_{vv} - f_{vvv}\varphi_{vv};$$

$$U = \lambda\,[(\varphi_{vv}f_v - f_{vv}\varphi_v)^2 + \varphi_{vv}^2 + f_{vv}^2].$$

Очевидно, функции W, U, Z являются аналитическими и их можно представить так:

$$W = \sum_{i,\,j=0}^{\infty} w_{ij}s^i v^j, \quad U = \sum_{i,\,j=0}^{\infty} u_{ij}s^i v^j, \quad Z = \sum_{i,\,j=0}^{\infty} z_{ij}s^i v^j.$$

Тогда из системы (2) следует, что

$$z_{ij} = 0, \quad w_{ij} - u_{ij} = 0, \quad i,\ j = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{14}$$

Для определения коэффициентов w_{ij}, u_{ij}, z_{ij} достаточно продифференцировать уравнение (8) по s и v, а затем результаты дифференцирования подставить вместе с (8), (10), (11) в выражения для W, U, Z, приняв во внимание (9), (12). В итоге находим

$$w_{i,\,0} = 12\sum_{p=0}^{i} (\varphi_{p,\,3}f_{i-p,\,2} - \varphi_{p,\,2}f_{i-p,\,3}), \quad i \geqslant 0;$$

$$w_{ij} = \sum_{p=0}^{i} \{2(j+1)(j+2)(j+3)(\varphi_{p,\,j+3}f_{i-p,\,2} - \varphi_{p,\,2}f_{i-p,\,j+3}) + \sum_{r=0}^{j-1}(r+2)(r+3)(j-r+1)(j-r+2)(2r - j + 1)\varphi_{p,\,r+3}f_{i-p,\,j-r+2}\}, \quad i \geqslant 0, \quad j \geqslant 1; \quad u_{0j} = 0, \quad j \geqslant 0;$$

$$u_{ij} = \sum_{p_1+p_2+p_3=i}\ \sum_{r_1+r_2+r_3=j} \lambda_{p_1r_1}a_{p_2r_2}a_{p_3r_3} + \sum_{p=0}^{i}\sum_{r=0}^{j} \lambda_{i-p,\,j-r}b_{pr}, \quad i \geqslant 1, \quad j \geqslant 0;$$

$$a_{i0} = a_{i1} = 0, \quad i \geqslant 0;$$

$$a_{ij} = \sum_{p=0}^{i}\sum_{r=0}^{j-1}(r+2)(j-r+1)(j-2r-1)f_{p,\,r+2}\varphi_{i-p,\,j-r+1},$$

$$i \geqslant 0, \quad j \geqslant 2;$$

$$b_{ij} = \sum_{p=0}^{i}\sum_{r=0}^{j}(r+1)(r+2)(j-r+1)(j-r+2) \times (\varphi_{p,\,r+2}\varphi_{i-p,\,j-r+2} + f_{p,\,r+2}f_{i-p,\,j-r+2});$$

$$z_{i0} = 0, \quad i \geqslant 0;$$

$$z_{i1} = -2\sum_{p=0}^{i} k_{i-p}\varphi_{p,\,2}, \quad i \geqslant 0;$$

$$z_{i2} = a_{i2} + \sum_{p=0}^{i}(2y_{i-p,\,2}f_{p,\,2} - 2x_{i-p,\,2}\varphi_{p,\,2} - 6k_{i-p}\varphi_{p,\,3}), \quad i \geqslant 0; \tag{15}$$

$$z_{ij} = a_{ij} - \sum_{p_1+p_2+p_3=i} \sum_{r=0}^{j} k_{p_1} f_{p_2 r} a_{p_3,\, j-r} + \sum_{p=0}^{i} \sum_{r=0}^{j} (r+1) \times$$
$$\times (r+2)(y_{i-p,\, j-r} f_{p,\, r+2} - x_{i-p,\, j-r} \varphi_{p,\, r+2}),\ i \geqslant 0,\ j \geqslant 3;$$
$$x_{i,0} = 0, \quad x_{i1} = k_i, \quad i \geqslant 0;$$
$$x_{ij} = (i+1) f_{i+1,\, j} - \sum_{p=0}^{i} \varkappa_p \varphi_{i-p,\, j},\ i \geqslant 0,\ j \geqslant 2;$$
$$y_{i,0} = y_{i,1} = 0,\ i \geqslant 0;$$
$$y_{ij} = (i+1) \varphi_{i+1,\, j} + \sum_{p=0}^{i} \varkappa_p f_{i-p,\, j},\ i \geqslant 0,\ j \geqslant 2.$$

Действительно,

$$\varphi_{vvv} f_{vv} = \sum_{i,\, j=0}^{\infty} \Big(\sum_{p=0}^{i} \sum_{r=0}^{j} (r+1)(r+2)(r+3)(j-r+1) \times$$
$$\times (j-r+2)\, \varphi_{p,\, r+3} f_{i-p,\, j-r+2}\Big) s^i v^j =$$
$$= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{i} 12 \varphi_{p,\, 3} f_{i-p,\, 2}) s^i + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \Big\{\sum_{p=0}^{i} [2(j+1)(j+2) \times$$
$$\times (j+3)\, \varphi_{p,\, j+3} f_{i-p,\, 2} + \sum_{r=0}^{j-1} (r+1)(r+2)(r+3)(j-r+1) \times$$
$$\times (j-r+2)\, \varphi_{p,\, r+3} f_{i-p,\, j-r+2}]\, s^i v^j\Big\};$$
$$f_{vvv} \varphi_{vv} = \sum_{i=0}^{\infty} \Big(\sum_{p=0}^{i} 12 \varphi_{p,\, 2} f_{i-p,\, 3}\Big) s^i + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \Big\{\sum_{p=0}^{i} [2(j+1) \times$$
$$\times (j+2)(j+3)\, \varphi_{p,\, 2} f_{i-p,\, j+3} + \sum_{r=1}^{j} (r+1)(r+2) \times$$
$$\times (j-r+1)(j-r+2)(j-r+3)\, \varphi_{p,\, r+2} f_{i-p,\, j-r+3}]\Big\} s^i v^j =$$
$$= \sum_{i=0}^{\infty} \Big(\sum_{p=0}^{i} 12 \varphi_{p,\, 2} f_{i-p,\, 3}\Big) s^i + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \Big\{\sum_{p=0}^{i} [2(j+1)(j+2) \times$$
$$(j+3)\, \varphi_{p,\, 2} f_{i-p,\, j+3} + \sum_{r=0}^{j} (r+2)(r+3)(j-r) \times$$
$$\times (j-r+1)(j-r+2)\, \varphi_{p,\, r+3} f_{i-p,\, j-r+2}]\Big\} s^i v^j.$$

Следовательно,

$$W = \sum_{i=0}^{\infty} 12 \Big(\sum_{p=0}^{i} \varphi_{p,\, 3} f_{i-p,\, 2} - \varphi_{p,\, 2} f_{i-p,\, 3}\Big) s^i +$$
$$+ \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \Big\{\sum_{p=0}^{i} [2(j+1)(j+2)(j+3)(\varphi_{p,\, j+3} f_{i-p,\, 2} - \varphi_{p,\, 2} f_{i-p,\, j+3}) +$$
$$+ \sum_{r=0}^{j-1} (r+2)(r+3)(j-r+1)(j-r+2)(2r-j+1) \times$$
$$\times \varphi_{p,\, r+3} f_{i-p,\, j-r+2}]\Big\} s^i v^j,$$

откуда и получаем формулы (15) для w_{ij}. Аналогично выводятся и остальные соотношения (15).

Из соотношений (14) следует $z_{i1}=0$, $\forall i\geqslant 0$, откуда, принимая во внимание вид выражения z_{i1}, заключаем, что $\varphi_{i2}=0$ $\forall i\geqslant 0$ **(16)**. Действительно, $z_{01}=-2k_0\varphi_{02}$, и из $z_{01}=0$, а также уравнения (1) заключаем, что $\varphi_{02}=0$. Пусть теперь $\varphi_{i2}=0$ при $0\leqslant i\leqslant \beta-1$. Тогда

$$z_{\beta,1}=-2k_0\varphi_{\beta,2}-\sum_{p=0}^{\beta-1}2k_{i-p}\varphi_{p,2}.$$

Поскольку сумма, стоящая в правой части полученного равенства, в силу сделанного предположения обращается в нуль, то из $z_{\beta,1}=0$ следует $\varphi_{\beta,2}=0$. Но это в силу принципа математической индукции означает, что имеют место равенства (16). Учитывая (16), находим из (15)

$$z_{02}=6f_{02}\varphi_{03}+2\varkappa_0 f_{02}^2-6k_0\varphi_{03},$$
$$w_{00}=12\varphi_{03}f_{02},\quad u_{00}=0,$$

то тогда из (14) и (13) следует $f_{02}=\varphi_{03}=0$ **(17)**. Предположим, что существует такое натуральное число α, что $|f_{0,\alpha}|+|\varphi_{0,\alpha}|\neq 0$; $f_{0,j}=\varphi_{0,j}=0$, $0\leqslant j\leqslant\alpha-1$ **(18)**. Из (16), (17) находим $\alpha\geqslant 3$ **(19)**. Подстановка (18), (16) в (15) дает $z_{0j}=0$, $0\leqslant j\leqslant\alpha-2$; $z_{0,\alpha-1}=-\alpha(\alpha-1)k_0\varphi_{0,\alpha}$, и из (14), (13), (19) заключаем, что $\varphi_{0,\alpha}=0$ **(20)**. Тогда в силу (18) $f_{0,\alpha}\neq 0$ **(21)**.

Далее, поскольку $u_{0j}=0$, то из (14) следует $w_{0j}=0$. Но подстановка (16), (18), (20) в выражение для w_{0j} дает $w_{0j}=0$, $0\leqslant j\leqslant 2\alpha-5$; $w_{0,2\alpha-4}=\alpha^2(\alpha^2-1)f_{0,\alpha}\varphi_{0,\alpha+1}$; $w_{0j}=\alpha(\alpha-1)\times(j-\alpha+4)(j-\alpha+5)(j-2\alpha+5)\varphi_{0,j-\alpha+5}f_{0,\alpha}+\sum\limits_{r=\alpha-2}^{j-\alpha+1}(r+2)\times(r+3)(j-r+1)(j-r+2)(2r-j+1)\varphi_{0,r+3}f_{0,j-r+2}$, откуда в силу (21) и того, что $w_{0j}=0$, следует $\varphi_{0j}=0$ $\forall j\geqslant 0$ (22). Доказательство этого факта аналогично доказательству равенств (16). Подстановкой (22) в (15) получим $y_{00}=y_{01}=y_{02}=0$; $y_{0j}=\varphi_{1j}$, $3\leqslant j\leqslant\alpha-1$ **(23)**; $y_{0\alpha}=\varphi_{1\alpha}+\varkappa_0 f_{0\alpha}$; $z_{0j}=0$, $0\leqslant j\leqslant\alpha$,

$z_{0j}=\alpha(\alpha-1)y_{0,j-\alpha+2}f_{0,\alpha}+\sum\limits_{r=\alpha-1}^{j-3}(r+1)(r+2)y_{0,j-r}f_{0,r+2}$, $\alpha+1\leqslant j$ **(24)**; $z_{12}=-6k_0\varphi_{13}$; $z_{1j}=-k_0\varphi_{1,j+1}-f_{12}\varphi_{1j}+\sum\limits_{r=0}^{j-3}(r+1)(r+2)(\varphi_{1,j-r}f_{1,r+2}-f_{1,j-r}\varphi_{1,r+2})$, $3\leqslant j\leqslant\alpha-1$ (25). Из (25), (14) заключаем, что $\varphi_{1j}=0$, $0\leqslant j\leqslant\alpha$, но тогда из (23) $y_{0j}=0$, $0\leqslant j\leqslant\alpha-1$; $y_{0\alpha}=\varkappa_0 f_{0\alpha}$, а из (24) находим $z_{0j}=0$, $0\leqslant j\leqslant 2\alpha-3$; $z_{0,2\alpha-2}=\alpha(\alpha-1)\varkappa_0 f_{0\alpha}^2$. Следовательно, в силу (14), (13) $f_{0\alpha}=0$. Полученное противоречие доказывает, что вместе с (22) справедливы равенства $f_{0j}=0$ $\forall j\geqslant 0$; отсюда и из (9), (13), (22) следует, что функции f и φ имеют вид (7). Тем самым лемма доказана.

Приступим к доказательству теоремы. Обозначим $f_v = c$, $\varphi_v = a$ (26), а для вторых производных f_{vv} и φ_{vv} введем обозначения $c_v = f_{vv} = \lambda p$, $a_v = \varphi_{vv} = \lambda hp$ (27). В силу леммы функции p и h являются аналитическими, если таковыми будут f и φ и если справедливо неравенство $p(s, v) \neq 0$ (28). Последнее будем предполагать выполненным в некоторой окрестности точки $s = 0$, $v = 0$. Подстановка (26), (27) в систему (2) дает $\lambda p(\varphi_s - F_1(v, \varphi, f, a, c, h, f_s)) = 0$, $\lambda^2 p^2 (h_v - \lambda F_2(a, c, h)) = 0$, где $F_1 = (vk - \varkappa\varphi + f_s) h - \varkappa f + (1 - kf)(a - hc)$, $F_2 = 1 + h^2 + (a - hc)^2$ (29).

Так как выполнены неравенства (28), (6), то при $s \neq 0$ отсюда находим

$$\varphi_s = F_1(v, \varphi, f, a, c, h, f_s), \quad h_v = \lambda F_2(a, c, h). \tag{30}$$

Поскольку F_1, F_2, λ — аналитические функции, а решение также ищется в классе аналитических функций, то равенства (30) в силу непрерывности справедливы и при $s = 0$.

Запишем условие полной интегрируемости $\varphi_{vs} = \varphi_{sv}$, приняв во внимание равенство $f_{sv} = f_{vs} = c_s$ и заменив производные φ_v, f_v, a_v, c_v, h_v их выражениями (26), (27), (30):

$$\begin{gathered} a_s = F_3(v, \varphi, f, a, c, h, f_s, c_s), \\ F_3 = \lambda F_2(vk - c(1 - kf) - \varkappa\varphi + f_s) + h(k - \varkappa a + c_s) - \\ - \varkappa c - kc(a - hc). \end{gathered} \tag{31}$$

Условие полной интегрируемости $a_{vs} = a_{sv}$ дает

$$\begin{gathered} \lambda p h_s - 2\lambda^2 F_2 (h - ac + hc^2)(vk - c(1 - kf) - \varkappa\varphi + f_s) - \\ - 2\lambda F_2 (k + c_s - \varkappa a + kc^2) + \lambda^2 F_2 p (1 - kf) + \lambda\varkappa h^3 p + \\ + \lambda\varkappa p + \lambda k p (a - hc) - \lambda_v F_2 (vk - c(1 - kf) - \varkappa\varphi + f_s) = 0. \end{gathered}$$

В силу (5), (6), (28) функции $\frac{\lambda_v}{\lambda}$ и $\frac{F_2}{p}$ являются аналитическими, поэтому

$$\begin{gathered} h_s = F_4(v, \varphi, f, a, c, h, p, f_s, c_s), \\ F_4 = 2\lambda \frac{F_2}{p}(h - ac + hc^2)(vk - c(1 - kf) - \varkappa\varphi + f_s) + \\ + 2\frac{F_2}{p}(k + c_s - \varkappa a + kc^2) - \lambda F_2 (1 - kf) - \varkappa h^2 - \varkappa - \\ - k(a - hc) + \frac{\lambda_v}{\lambda} \cdot \frac{F_2}{p}(vk - c(1 - kf) - \varkappa\varphi + f_s). \end{gathered} \tag{32}$$

Наконец, из условия полной интегрируемости $h_{vs} = h_{sv}$ получаем $p_v = F_5(v, \varphi, f, a, c, h, f_s, c_s, p_s)$, где

$$F_5 = p\frac{A}{B}; \quad A\Big[2\lambda^2 F_2 (1 + c^2) - 4\lambda^2 p (a - hc) + \frac{\lambda_{vv}}{\lambda} + 2\lambda_v (h +$$

$$+ hc^2 - ac) - \frac{\lambda_v^2}{\lambda^2}\Big](vk - c(1 - kf) - \varkappa\varphi + f_s) + [2\lambda(h - ac + hc^2) +$$

$$+\frac{\lambda_v}{\lambda}\Big](k-\varkappa a+c_s+kc^2)+\lambda_s p+2\lambda p_s-2\varkappa\lambda hp+$$
$$+6k\lambda cp-2\lambda_v p(1-kf)-2\lambda^2 p(h+hc^2-ac)(1-kf);$$
$$B=\left[2\lambda(h-ac+hc^2)-\frac{\lambda_v}{\lambda}\right](vk-c(1-kf)-\varkappa\varphi+f_s)+$$
$$+2(k+c_s-\varkappa a+kc^2).$$

Из соотношения (5) следует, что $\frac{\lambda_{vv}}{\lambda}$ является аналитической функцией и F_5 будет, таким образом, аналитической при условии $B\neq 0$ (33).

Следовательно, исходная система (2) сводится к системе дифференциальных уравнений первого порядка:

$$f_v=c,\ \varphi_v=a,\ c_v=\lambda p,\ a_v=\lambda hp,\ h_v=\lambda F_2,\ p_v=F_5,$$
$$\varphi_s=F_1,\ a_s=F_3,\ h_s=F_4, \tag{34}$$

где в правых частях уравнений стоят (естественно, при соблюдении условий (28) и (33)) аналитические функции аргументов s, v, f, φ, c, a, h, p, f_s, c_s, p_s.

Найдем теперь систему функций

$$f_0=f(s,0),\ \varphi_0=\varphi(s,0),\ c_0=c(s,0),\ a_0=a(s,0),$$
$$h_0=h(s,0),\ p_0=p(s,0), \tag{35}$$

удовлетворяющую начальным условиям (3) и уравнениям второй строки (34) при условии, что в последних положено $v=0$. Из (3), (26) получаем

$$f_0=\varphi_0=c_0=a_0=0. \tag{36}$$

Вторая строка системы (34) в силу этих равенств и (29)—(32) при $v=0$ имеет вид

$$(\varphi_0)_s=h(f_0)_s,\quad (a_0)_s=\lambda_0(1+h_0^2)(f_0)_s+kh_0+h_0(c_0)_s-\varkappa(c_0)_s,$$
$$(h_0)_s=2\lambda_0\frac{1+h_0^2}{p_0}h_0(f_0)_s+2\frac{1+h_0^2}{p_0}(k+(c_0)_s)-$$
$$-\lambda_0(1+h_0^2)-\varkappa h_0^2-\varkappa+\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\frac{1+h_0^2}{p_0}(f_0)_s,$$

т. е. является системой обыкновенных дифференциальных уравнений (при этом $\lambda_0=\lambda(s,0)$, $\lambda_1=\lambda_v(s,0)$). Поскольку из (36) следует $(\varphi_0)_s=(f_0)_s=(c_0)_s=(a_0)_s=0$, то первое из этих уравнений удовлетворяется тождественно, из второго в силу (4) следует $h_0=0$ (37), а третье принимает с учетом последнего равенства и его следствия $(h_0)_s=0$ вид

$$\frac{2k}{p_0}-\lambda_0-\varkappa=0,$$

откуда находим

$$p_0=\frac{2k}{\lambda_0+\varkappa}. \tag{38}$$

Так как справедливо (4) и $\lambda_0(0) = 0$, то $\lambda_0(0) + \varkappa(0) \neq 0$ и p_0 является аналитической в некоторой окрестности точки $s = 0$.

Далее, из (4) следует $p_0 \neq 0$, что обеспечивает выполнение (28) в некоторой окрестности точки $s = 0$, $v = 0$. Наконец, при значениях (36)—(38) функция B имеет вид $B(s, 0) = 2k \neq 0$, тем самым гарантируя выполнение условия (33).

Поскольку все функции, стоящие в правых частях уравнений (34) аналитические, то в соответствии с теоремой Коши — Ковалевской существует единственное аналитическое решение f, φ, c, a, h, p, удовлетворяющее условиям (35). В силу выбора функций f_0, φ_0, c_0, a_0, h_0, p_0 и выполнения условий совместности это решение удовлетворяет и уравнениям второй строки (34), а также начальным условиям (3). Это и доказывает теорему.

Список литературы: 1. *Кованцов Н. И.* Ребро возврата поверхности неположительной кривизны.— Укр. геометр. сб., 1979, вып. 22, с. 81—92. 2. *Кованцов Н. И.* Поверхности отрицательной кривизны с прямолинейным ребром возврата.— Укр. геометр. сб., 1981, вып. 24, с. 57—70. 3. *Можарський В. В.* Якісне дослідження системи диференціальних рівнянь, що визначає поверхні від'ємної гаусової кривини.— Вісн. Київського ун-ту. Сер. Математика, механіка, 1981, вип. 23, с. 93—100.

Поступила в редколлегию 03.10.82.

УДК 513

В. И. МЯГКОВ

БЕЗЫНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ КОМПЛЕКСА ПРЯМЫХ С СИММЕТРИЧНЫМ РАСПОЛОЖЕНИЕМ ИНФЛЕКЦИОННЫХ ЦЕНТРОВ

Данная заметка является продолжением статьи [1] и посвящена исследованию двух случаев симметричного расположения четверки инфлекционных центров, из которых соответственно два или три бесконечно удалены на каждом луче комплекса.

Каждый луч комплекса можно определить тремя параметрами: $u, v, \theta : l = l(u, v, \theta)$. На каждом луче комплекса выделяется центр A луча и к этой точке специальным образом присоединяется ортонормированная тройка векторов $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$, образующая нормальный сопровождающий трехгранник $T = \{A, \boldsymbol{e}_i\}$ комплекса ($\boldsymbol{e}_3$ лежит на луче).

Компоненты смещения репера T при переходе от $l(u, v, \theta)$ к соседнему лучу $l(u+du, v+dv, \theta+d\theta)$ имеют вид

$$dA = \omega^i \boldsymbol{e}_i, \ d\boldsymbol{e}_i = \omega_i^j \boldsymbol{e}_j, \ i, j, k = 1, 2, 3, \tag{0.1}$$

ω^i, ω_i^j — линейные дифференциальные формы Пфаффа. Они зависят от трех параметров u, v, θ и их дифференциалов. Сами формы удовлетворяют условию

$$\omega_i^j + \omega_j^i = 0 \tag{0.2}$$

и уравнениям структуры евклидова пространства:

$$D\omega^i = [\omega^k, \omega_k^i], \ D\omega_i^j = [\omega_i^k, \omega_k^j]. \qquad (0.3)$$

Уравнения комплекса прямых, отнесенного к нормальному сопровождающему трехграннику, имеют вид

$$\omega^2 = k\omega_3^1, \ \omega_1^2 = p\omega^1 + \alpha\omega_3^1 + \beta\omega_3^2, \ dk = \alpha\omega^1 + q\omega_3^1 + \gamma\omega_3^2,$$
$$-\omega^3 + k\omega_1^2 = \beta\omega^1 + \gamma\omega_3^1 + r\omega_3^2. \qquad (0.4)$$

Здесь семь коэффициентов $k, p, \alpha, \ldots, r$ являются функциями трех аргументов: u, v, θ.

Зафиксируем луч l комплекса и возьмем на нем точку $M = A + te_3$. Те лучи комплекса, которые проходят через эту точку, образуют конус. Если этот конус имеет перегиб вдоль луча l, то точка M называется инфлекционным центром этого луча. Абсцисса t инфлекционного центра — корень уравнения четвертой степени

$$pt^4 - 2\alpha t^3 + (2k\beta + q)\,t^2 - 2k\gamma t + k^2 r = 0. \qquad (0.5)$$

Само уравнение (0.5) называется уравнением инфлекционных центров.

Свойства инфлекционных центров луча и вывод формул (0.4), (0.5) содержатся в монографии Н. И. Кованцова [2]. Формулы (0.1) — (0.3) взяты из монографии С. П. Финикова [3].

1. Случай, когда два инфлекционных центра каждого луча бесконечно удалены. В статье [1] выяснено, что комплекс с симметричной четверкой инфлекционных центров, из которых два бесконечно удалены, определяется условиями

$$p = \alpha = \gamma = 0, \ 2k\beta + q \neq 0, \ k \neq 0.$$

Дифференциальные уравнения искомого комплекса примут вид

$$\omega^2 = k\omega_3^1, \ \omega_1^2 = \beta\omega_3^2, \ dk = q\omega_3^1, \ -\omega^3 + k\omega_1^2 = \beta\omega^1 + r\omega_3^2. \qquad (1.1)$$

Для определения произвола существования комплекса (1.1) и самое главное — для отыскания базиса, в котором можно построить регулярную цепь интегральных элементов, продифференцируем внешним образом [4] три последних уравнения системы (1.1). Получим

$$[d\beta, \omega_3^2] + (1 + \beta^2)[\omega_3^1, \omega_3^2] = 0, \ [dq, \omega_3^1] = 0,$$
$$[d\beta, \omega^1] + [dr, \omega_3^2] - (1 + \beta^2)[\omega^1, \omega_3^1] +$$
$$+ (-2k\beta^2 + 2\beta r - \beta q)[\omega_3^1, \omega_3^2] = 0. \qquad (1.2)$$

По базисным формам $\omega^1, \omega_3^1, \omega_3^2$, взятым в любой последовательности, регулярная цепь интегральных элементов не строится. Критерий Кэлера не выполняется [3]. Необходимо перейти к общему базису, образованному линейной комбинацией дифференциальных форм ω^1, ω_3^1, ω_3^2. Одним из простейших (но не единственным) является базис, образованный формами Ψ_i, где

$$\Psi_1 = \omega^1 - \omega_3^2,\ \Psi_2 = \omega_3^1 - \omega_3^2,\ \Psi_3 = \omega_3^2. \tag{1.3}$$

Максимально общее решение системы (1.2) согласно [3] имеет вид

$$\begin{gathered} d\beta = (-1 - \beta^2)\,\Psi_2 + \mu_1\Psi_3,\ dq = \mu_2\Psi_2 + \mu_2\Psi_3, \\ dr = (1 + \beta^2 + \mu_1)\,\Psi_1 + (2k\beta^2 - 2\beta r + \beta q)\,\Psi_2 + \mu_3\Psi_3; \end{gathered} \tag{1.4}$$

μ_1, μ_2, μ_3 — произвольные коэффициенты. Критерий Кэлера выполнен, поэтому система (1.1) является системой в инволюции и ее максимально общее решение существует с произволом в три функции одного аргумента. Регулярная цепь интегральных элементов [4] строится в базисе Ψ_3, Ψ_2, Ψ_1. Таким образом, произвол существования комплекса (1.1) — три функции одного аргумента.

Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что

$$D\omega_3^1 \equiv 0,\ D\left(\sqrt{1 + \beta^2}\,\omega_3^2\right) \equiv 0.$$

А это означает [3], что сами дифференциальные формы ω_3^1 и $\sqrt{1 + \beta^2}\,\omega_3^2$ — полные дифференциалы. Обозначим их так:

$$du = \omega_3^1,\ dv = \sqrt{1 + \beta^2}\,\omega_3^2. \tag{1.5}$$

Заметим, что выделение третьего полного дифференциала $d\theta$ значительно облегчило бы исследование свойств рассматриваемого комплекса. Однако выделить его исходя только из систем (1.1), (1,3), (1.4) оказывается практически невозможным. Ниже будет дан геометрический способ построения изучаемого комплекса, т. е. будет найдено его безынтегральное представление, отправляясь от которого можно (аналогично [5]) записать в явном виде решение соответствующей системы дифференциальных уравнений (1.1).

Учитывая (1.3) и (1.5), запишем систему (1.4) в виде

$$\begin{gathered} d\beta = (-1 - \beta^2)\,du + (1 + \beta^2 + \mu_1)\frac{dv}{\sqrt{1 + \beta^2}},\ dq = \mu_2 du, \\ dr = (1 + \beta^2 + \mu_1)\,\omega^1 + (2k\beta^2 - 2\beta r + \beta q)\,du + \\ + (-2k\beta^2 + 2\beta r - \beta q + \mu_3 - \mu_1 - 1 - \beta^2)\frac{dv}{\sqrt{1 + \beta^2}}. \end{gathered} \tag{1.6}$$

Поскольку каждая из функций μ_i при построении регулярной цепи интегральных элементов [3] определялась с произволом в одну функцию одного аргумента, то из (1.6) получаем

$$\begin{gathered} \beta = \operatorname{tg}(f_1(v) - u),\ q = f_2'(u), \\ \mu_1 = \cos^{-3}(f_1(v) - u)\,(f_1(v) - \cos(f(v) - u)), \\ \mu_2 = f_2''(u). \end{gathered} \tag{1.7}$$

Здесь $f_1(v)$ и $f_2(u)$ — две произвольные функции одного аргумента. Из третьего уравнения (1.1) для кривизны k комплекса получим

$$k(u) = f_2(u). \tag{1.8}$$

Учитывая (1.1), (1.5) и вид (1.7) функции β, можно записать уравнения $de_i = \omega_i^j e_j$ инфинитезимального смещения репера T так

$$\begin{gathered} de_1 = e_2 \sin(f_1(v) - u)\,dv - e_3 du, \\ de_2 = -e_1 \sin(f_1(v) - u)\,dv - e_3 \cos(f_1(v) - u)\,dv, \\ de_3 = e_1 du + e_2 \cos(f_1(v) - u)\,dv. \end{gathered} \tag{1.9}$$

Введем новый ортонормированный репер T^*, полагая

$$e_1^* = e_1 \cos u + e_3 \sin u,\ \ e_2^* = e_2,\ \ e_3^* = -e_1 \sin u + e_3 \cos u.$$

Решим эту систему относительно e_i:

$$e_1 = e_1^* \cos u - e_3^* \sin u,\ \ e_2 = e_2^*,\ \ e_3 = e_1^* \sin u + e_3^* \cos u. \tag{1.10}$$

Отсюда и из (1.9) найдем

$$\begin{gathered} de_1^* = e_2^* \sin f_1(v)\,dv,\ \ de_2^* = -e_1^* \sin f_1(v)\,dv - e_3^* \cos f_1(v)\,dv, \\ de_3^* = e_2^* \cos f_1(v)\,dv. \end{gathered} \tag{1.11}$$

При $dv = 0$ векторы e_i^* постоянны.

С помощью (1.1), (1.5), (1.7) и (1.10) представим общее смещение $dA = \omega^i e_i^*$ центра A луча комплекса в виде

$$\begin{gathered} dA = e_1^* \left(\frac{\cos f_1(v)}{\cos(f_1(v) - u)}\,\omega^1 + (k\beta - r) \cos(f_1(v) - u) \sin u\,dv \right) + \\ + e_2^* k(u)\,du + \\ + e_3^* \left(\frac{-\sin f_1(v)}{\cos(f_1(v) - u)}\,\omega^1 + (k\beta - r) \cos(f_1(v) - u) \cos u\,dv \right). \end{gathered} \tag{1.12}$$

При ограничениях $\omega^1 = 0$, $u = 0$ **(1.13)** точка A описывает кривые

$$dA\Big|_{\substack{\omega^1=0 \\ u=0}} = e_3^*(v)(k\beta - r) \cos f_1(v)\,dv. \tag{1.14}$$

Рассмотрим одну из них, обозначим ее через L_0. При условиях (1.13) все функции, входящие в (1.14), будут зависеть только от одного аргумента v. Далее, поскольку при построении регулярной цепи интегральных элементов в базисе (1.3) на первом шаге было $\psi_1 = \psi_2 = 0$, $\psi_3 \neq 0$, т. е. $dv \neq 0$, то функция r (см. (1.4)) определяется с произволом в одну функцию одного аргумента (μ_3 — произвольный коэффициент первого шага). А это позволяет в (1.14) считать $k\beta - r$ произвольной функцией одного аргумента v, и (1.14) принимает вид

$$dM(v) = e_3^*(v) f_3(v)\,dv. \tag{1.15}$$

Здесь $M(v)$ — текущая точка кривой L_0, $f_3(v)$ — произвольная функция.

Положив
$$f_3(v)\,dv = ds, \tag{1.16}$$
перейдем от v к новому параметру s. Ниже будет показано, что s — длина дуги кривой L_0.

Пусть
$$v = v(s) \tag{1.17}$$
—какое-либо решение уравнения (1.16). Введем обозначения
$$k^*(s) = \frac{\cos f_1(v)}{f_3(v)}, \quad \varkappa^*(s) = \frac{\sin f_1(v)}{f_3(v)}. \tag{1.18}$$
Поскольку $f_1(v)$ и $f_3(v)$ были произвольными функциями одного аргумента v, то после замены (1.17) функции $k^*(s)$ и $\varkappa^*(s)$ необходимо считать произвольными функциями аргумента s. Аналогично функцию $\varphi_1(s) = f_1(v(s))$ необходимо считать произвольной функцией аргумента s.

Учитывая (1.16) и (1.18), запишем систему (1.15), (1.11) в следующем виде:
$$\begin{gathered} d\boldsymbol{M}(s) = \boldsymbol{e}_3^*(s)\,ds, \ d\boldsymbol{e}_3^*(s) = \boldsymbol{e}_2^*(s)\,k^*(s)\,ds, \\ d\boldsymbol{e}_2^*(s) = -\boldsymbol{e}_3^*(s)\,k^*(s)\,ds + (-\boldsymbol{e}_1^*(s))\,\varkappa^*(s)\,ds, \\ d(-\boldsymbol{e}_1^*(s)) = -\boldsymbol{e}_2^*(s)\,\varkappa^*(s)\,ds. \end{gathered} \tag{1.19}$$
Из (1.19) вытекает, что векторы $-\boldsymbol{e}_1^*$, $\boldsymbol{e}_2^*$, $\boldsymbol{e}_3^*$ образуют нормальный сопровождающий трехгранник Френе кривой L_0, описываемой точкой $\boldsymbol{M}$. Поскольку $k^*(s)$ и $\varkappa^*(s)$ — произвольные функции, то L_0 — произвольная пространственная кривая, s — ее натуральный параметр.

Рассмотрим конгруэнцию лучей изучаемого комплекса, определяемую условием $s = \text{const}$. Обозначим ее через S. Внося в (1.12) $ds = 0$ и учитывая замену (1.17), получим
$$d\boldsymbol{A}\,|_{s=s_0} = \frac{\boldsymbol{e}_1^*(s_0)\cos\varphi_1(s_0) - \boldsymbol{e}_3^*(s_0)\sin\varphi_1(s_0)}{\cos(\varphi_1(s_0) - u)}\,\omega^1 + \boldsymbol{e}_2^*(s_0)\,k(u)\,du. \tag{1.20}$$
Но так как векторы $\boldsymbol{e}_i^*$ для всех лучей конгруэнции S постоянны, то (1.20) означает, что центры лучей каждой конгруэнции S описывают плоскость; обозначим ее через $\Pi(s)$. Плоскость $\Pi(s)$ проходит через точку $M(s) \in L_0$.

Рассмотрим центры лучей конгруэнции S, определяемые условием $u = \text{const}$. Внося $du = 0$ в (1.20), получим
$$d\boldsymbol{A}\,\Big|_{\substack{s=s_0\\u=u_0}} = \frac{\boldsymbol{e}_1^*(s_0)\cos\varphi_1(s_0) - \boldsymbol{e}_3^*(s_0)\sin\varphi_1(s_0)}{\cos(\varphi_1(s_0) - u_0)}\,\omega^1,$$
откуда следует, что точка A при $s = s_0$, $u = u_0$ описывает прямую. Обозначим ее через $L(u, s)$. Каждая такая прямая $L(u, s)$ лежит в плоскости $\Pi(s)$ и параллельна вектору
$$\boldsymbol{q}(s) = \boldsymbol{e}_1^*(s)\cos\varphi_1(s) - \boldsymbol{e}_3^*(s)\sin\varphi_1(s).$$

Таким образом, прямые $L(u, s)$ в плоскости $\Pi(s)$ образуют пучок параллельных прямых, который будем обозначать через $\Pi'(s)$.

Положение прямой $L(0, s)$ пучка $\Pi'(s)$ параллельных прямых уже известно. Она пересекает кривую L_0 в точке $\boldsymbol{M}(s)$. Примем ее за начальную прямую плоского пучка $\Pi'(s)$ и определим расстояние h между параллельными прямыми $L(0, s)$ и $L(u, s)$ этого пучка $\Pi'(s)$. Для этого сначала между соседними параллельными прямыми $L(u, s)$ и $L(u+du, s)$ вычислим расстояние

$$dh = (dA|_{s=s_0},\ \boldsymbol{e}_2^*) = k(u)\,du.$$

Отсюда $h = \int\limits_0^u k(u)\,du$. Поскольку $k(u)$ — произвольная функция (см. (1.8)), то $h(u)$ — также произвольная функция аргумента u.

Теперь нам известно взаимное положение всех прямых $L(u, s)$ пучка $\Pi'(s)$. Каждая прямая $L(u, s)$ есть результат параллельного переноса $L(0, s)$ на $h(u)$ в направлении вектора $\boldsymbol{e}_2^*(s)$.

Положение центра $\boldsymbol{A}$ луча комплекса (1.1) можно определить тремя параметрами: u, s и θ:

$$A(u,\ s,\ \theta) = \boldsymbol{M}(s) + h(u)\,\boldsymbol{e}_2^*(s) + \theta\,(\boldsymbol{e}_1^*\cos\varphi_1(s) - \boldsymbol{e}_3^*\sin\varphi_1(s)).$$

Параметры u и s определяют прямую $L(u, s)$, на которой лежит точка $\boldsymbol{A}$, величина θ есть абсцисса точки $\boldsymbol{A}$ на этой прямой.

Через каждую точку $\boldsymbol{A}(u, s, \theta)$ в направлении вектора $\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_1^*(s)\sin u + \boldsymbol{e}_3^*(s)\cos u$ проходит луч комплекса, и все лучи комплекса, центры которых заполняют $L(u, s)$, образуют пучок параллельных прямых — обозначим его через $\sigma'(u, s)$.

Теперь можно дать безынтегральное представление комплекса с симметричным расположением четверки инфлекционных центров, из которых два бесконечно удалены на каждом луче.

1. Возьмем произвольную пространственную кривую L_0. Пусть $k^* = k^*(s)$ и $\varkappa^* = \varkappa^*(s)$ — ее натуральные уравнения, а векторы $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\beta}$ образуют сопровождающий трехгранник Френе.

2. Зададим произвольно функцию $h(u)$ и от точки $\boldsymbol{M}(s)$ кривой L_0 в направлении вектора $\boldsymbol{\nu}(s)$ отложим отрезок величины $h(u)$. Через конец этого отрезка ортогонально к нему проведем плоскость $\sigma(u, s)$. В этой плоскости в направлении вектора $\boldsymbol{\tau}\cos u - \boldsymbol{\beta}\sin u$ проведем пучок параллельных прямых $\sigma'(u, s)$. Двупараметрическая совокупность таких плоских пучков $\sigma'(u, s)$ и образует искомый комплекс. Тремя произвольными функциями, определяющими произвол существования такого комплекса, можно считать $k^*(s)$, $\varkappa^*(s)$, $h(u)$.

Замечание. Плоский пучок $\sigma'(u, s)$ не совпадает с $\Pi'(s)$. $\sigma'(u, s)$ — это пучок лучей комплекса. А центры этих лучей лежат в плоскости $\Pi(s)$, образуя в ней прямую $L(u, s)$.

В полученном безынтегральном представлении комплекса (1.1) не использованы прямые $L(u, s)$ и плоские пучки $\Pi'(s)$. Это объясняется тем, что $L(u, s)$ определяют положение центров лучей нашего комплекса. А в безынтегральном представлении описан только геометрический способ построения трехпараметрической совокупности лучей $l(u, s, \theta)$, образующих комплекс (1.1). Найденное безынтегральное представление не указывает, где находится центр каждого луча.

Можно дать другое безынтегральное представление нашего комплекса: указать, где находится центр каждого луча и дать геометрический способ построения всех лучей комплекса. При этом вместо σ' придется использовать $\Pi'(s)$ и $L(u, s)$.

Комплекс, геометрический способ построения которого только что описан, обозначим через $\sum_2$.

2. Проверка правильности найденного безынтегрального представления. Итак, пусть, отправляясь от произвольной пространственной $L_0 : \boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}(s)$, построен комплекс $\sum_2$.

На каждой прямой плоского пучка $\sigma'(u, s)$ возьмем точку

$$\boldsymbol{A}(u, s, \theta) = \boldsymbol{M}(s) + h(u)\,\mathbf{v}(s) - \theta \frac{k^*\boldsymbol{\beta}(s) + \varkappa^*\boldsymbol{\tau}(s)}{\sqrt{k^{*2} + \varkappa^{*2}}}. \qquad (2.1)$$

Здесь s — длина дуги кривой L_0; $k^*(s)$, $\varkappa^*(s)$ — ее кривизна и кручение, $\boldsymbol{M}(s)$ — текущая точка кривой L_0; $\boldsymbol{\tau}$, $\mathbf{v}$, $\boldsymbol{\beta}$ — векторы сопровождающего трехгранника Френе. Такой специальный выбор точки $\boldsymbol{A}$ будет понятен из дальнейшего.

К точке $\boldsymbol{A}$ присоединим ортонормированную тройку векторов:

$$\boldsymbol{e}_1 = -\boldsymbol{\beta}\cos u - \boldsymbol{\tau}\sin u, \quad \boldsymbol{e}_2 = \mathbf{v}, \quad \boldsymbol{e}_3 = -\boldsymbol{\beta}\sin u + \boldsymbol{\tau}\cos u. \qquad (2.2)$$

Из геометрического способа построения комплекса $\sum_2$ (см. § 1) и (2.2) вытекает, что $\boldsymbol{e}_3$ лежит на луче комплекса $\sum_2$.

Используя формулы

$$d\boldsymbol{M} = \boldsymbol{\tau}\,ds, \quad d\boldsymbol{\tau} = k^*(s)\,\mathbf{v}\,ds, \quad d\mathbf{v} = -k^*(s)\,\boldsymbol{\tau}\,ds + \varkappa^*(s)\,\boldsymbol{\beta}\,ds,$$
$$d\boldsymbol{\beta} = -\varkappa^*(s)\,\mathbf{v}\,ds,$$

(2.1) и (2.2), вычислим дифференциальные формы Ω^i, Ω_i^j в разложении $d\boldsymbol{A} = \Omega^i \boldsymbol{e}_i$, $d\boldsymbol{e}_i = \Omega_i^j \boldsymbol{e}_j$. Получим:

$$\Omega^1 = -y_1\sin u - y_2\cos u, \quad \Omega^2 = h'\,du, \quad \Omega^3 = y_1\cos u - y_2\sin u,$$
$$\Omega_3^1 = du, \quad \Omega_3^2 = (\varkappa^*\sin u + k^*\cos u)\,ds,$$
$$\Omega_1^2 = (\varkappa^*\cos u - k^*\sin u)\,ds. \qquad (2.3)$$

Здесь приняты обозначения

$$y_1 = \frac{-\varkappa^*}{\sqrt{k^{*2} + \varkappa^{*2}}}\,d\theta + \left(1 - hk^* - \theta\frac{k^*(k^*\varkappa^{*\prime} - \varkappa^* k^{*\prime})}{(k^{*2} + \varkappa^{*2})^{3/2}}\right)ds,$$
$$y_2 = \frac{-k^*}{\sqrt{k^{*2} + \varkappa^{*2}}}\,d\theta + \left(h\varkappa^* - \theta\frac{\varkappa^*(\varkappa^* k^{*\prime} - k^*\varkappa^{*\prime})}{(k^{*2} + \varkappa^{*2})^{3/2}}\right)ds. \qquad (2.4)$$

Оставшиеся шесть форм Ω_i^j удовлетворяют тождествам $\Omega_i^j + \Omega_j^i = 0$.

Из пропорциональности форм Ω^2 и Ω_3^1 вытекает $\Omega^2 = K\Omega_3^1$ (2.5).

А это означает [2], что выбранная нами специальным образом точка A (см. (2.1)) совпадает с центром луча комплекса.

Принимая формы Ω^1, Ω_3^1, Ω_3^2 за базисные, из системы (2.3) найдем

$$\Omega_1^2 = B\Omega_3^2, \; dK = Q\Omega_3^1, \; -\Omega^3 + K\Omega_1^2 = B\Omega^1 + R\Omega_3^2. \qquad (2.6)$$

Система (2.5), (2.6) является системой дифференциальных уравнений построенного комплекса $\sum_2$. Но она с точностью до обозначений совпадает с исходной системой (1.1). Правильность безынтегрального представления доказана.

Найденное безынтегральное представление позволяет (аналогично [5]) представить решение системы (1.1) в параметрическом виде, выразив все переменные через три параметра: u, s, θ. Ограничимся только функциями k, β, q, r, входящими в (1.1). Они имеют вид

$$k = h', \; q = h'', \; \beta = \frac{\varkappa^* \cos u - k^* \sin u}{\varkappa^* \sin u + k^* \cos u},$$

$$r = \frac{1}{(\varkappa^* \sin u + k^* \cos u)^2} \left[h(\varkappa^{*2} + k^{*2}) - k^* + \theta \frac{k^*\varkappa'^* - \varkappa^* k^{*\prime}}{\sqrt{k^{*2} + \varkappa^{*2}}} + \right.$$
$$\left. + h'(k^*\varkappa^* \cos 2u + (\varkappa^{*2} - k^{*2}) \sin u \cos u) \right].$$

3. Случай, когда три инфлекционных центра на каждом луче бесконечно удалены. В статье [1] были получены условия

$$p = \alpha = 2k\beta + q = 0, \; \gamma \neq 0, \; k \neq 0, \qquad (3.1)$$

$$r = 0, \qquad (3.2)$$

характеризующие искомый комплекс $\sum_3$ с симметричным расположением четверки инфлекционных центров, из которых три бесконечно удалены. Уравнение (3.1) означает, что каждый луч имеет трехкратный бесконечно удаленный инфлекционный центр, а равенство (3.2) означает, что конечный инфлекционный центр совпадает с центром луча.

Класс комплексов (3.1), (3.2) тождественно совпадает с известным классом, рассмотренным в статье [6]; там же были найдены геометрические свойства и безынтегральное представление такого комплекса.

Список литературы: 1. *Мягков В. И.* Комплексы с симметричным расположением инфлекционных центров. — Укр. геометр. сб., 1984, вып. 27, с 93 — 97. 2. *Кованцов Н. И.* Теория комплексов. — Киев: Изд-во Киевского ун-та, 1963. — 292 с. 3. *Фиников С. П.* Метод внешних форм в дифференциальной геометрии. — М.; Л.: Гостехиздат, 1948. — 432 с. 4. *Щербаков Р. Н.* Основы метода внешних форм и линейчатой дифференциальной геометрии. — Томск: Изд-во Томского ун-та, 1973. — 236 с. 5. *Мягков В. И.* Второе безынтегральное представление комплекса, допускающего H/K-расслоение. — Укр. геометр. сб., 1981, вып. 24, с. 85 — 90. 6. *Кованцов Н. И.*, Мягков В. И. О K-расслоении комплекса прямых. — Укр. геометр. сб., 1975, вып. 18, с. 74 — 84.

Поступила в редколлегию 15.01.83

СОДЕРЖАНИЕ

УКРАИНСКИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК

Выпуск 29

Редактор *Н. С. Калинина*
Художественный редактор *Т. П. Короленко*
Технический редактор *Г. П. Александрова*
Корректоры *В. Л. Светличная, Е. В. Сергина*

Информ. бланк № 10333

Сдано в набор 06.08.85. Подп. в печать 04.11.85. БЦ 09410. Формат 60×90/16. Бумага типогр. № 3. Лит. гарн. Выс. печать. 8,5 печ. л. 8,75 кр.-отт. 10 уч-изд. л. Тираж 700 экз. Изд. № 1357. Зак. 5-1339. Цена 1 р. 40 к.

Издательство при Харьковском государственном университете издательского объединения «Вища школа», 310003, Харьков-3, ул. Университетская, 16

Отпечатано с матриц книжной фабрики им. М. В. Фрунзе в Харьковской городской типографии № 16, 310003, Харьков-3, ул. Университетская, 16
Зак. 2047.

РЕФЕРАТЫ

УДК 513

О поверхностях Петерсона постоянной гауссовой кривизны. Бланк Я. П. Гормашова Н. М. — Укр. геометр. сб., 1986, вып. 29, с. 3—5.

В статье найдены поверхности постоянной гауссовой кривизны, несущие сопряженные сети конических линий.

Библиогр. ссылка в подстроч. примеч. — 1.

УДК 513

О некоторых классах многомерных поверхностей. Борисенко А. А. — Укр. геометр. сб., 1986, вып. 29, с. 5—12.

Изучается строение k-выпуклых многомерных поверхностей в евклидовом пространстве. Вводятся классы k-асимптотических поверхностей. Найдено достаточное условие голономности асимптотического распределения на многомерной поверхности.

Библиогр.: 5 назв.

УДК 513

О цилиндричности касательных расслоений сильно параболических метрик и сильно параболических поверхностей. Борисенко А. А., Ямпольский А. Л. — Укр. геометр. сб., 1986, вып. 29, с. 12—32.

Доказано, что если внутренний нуль — индекс метрики Сасаки касательного расслоения TM^n равен k, то k — четно, и M^n есть метрическое произведение риманова многообразия $M^{n-k/2}$ на евклидово пространство $E^{k/2}$, а TM^n есть метрическое произведение $TM^{n-k/2}$ на E^k. Получено выражение вторых квадратичных форм вложения $TF^l \subset TM^n$ через вторые квадратичные формы вложения $F^l \subset M^n$ и тензор кривизны M^n. Доказано, что TF^l вполне геодезична в TM^n тогда и только тогда, когда F^l вполне геодезична в M^n.

Библиогр.: 13 назв.

УДК 513

Реализация сетей выпуклых многогранников с равноугольными вершинами. 4. Гурин А. М. — Укр. геометр. сб., 1986, вып. 29, с. 32—47.

Приведена основная теорема о замкнутых многогранниках с равноугольными вершинами. Доказательство предлагаемой теоремы начато в ч. I—3 этой статьи. Здесь, в ч. 4, найдены многогранники, содержащие грани типа (4, 4, n) и (4, 5, n) — всего 44 многогранника и одна бесконечная серия многогранников, двойственных призмам.

Табл. 1. Ил. 7. Библиогр.: 6 назв.

УДК 513

Максимально подвижные метрические пространства Дейвиса. Егоров А. И. — Укр. геометр. сб., 1986, вып. 29, с. 47—54.

Рассматриваются пространства, линейный элемент которых задается однородной функцией второй степени относительно аргументов направлений. Определяется максимальный порядок групп движений G_r ($r = n(n-1)/2 + 2$) в пространствах Дейвиса. Дается тензорная характеристика максимально подвижным пространствам.

Библиогр.: 5 назв.

УДК 514

Об одной системе базисных инвариантов группы B_n. Игнатенко В. Ф. — Укр. геометр. сб., вып. 29, 1986, с. 54—55.

В 1968 г. Флатто (РЖМат, 1970, 8А328) высказал предположение об алгебраической независимости многочленов $\sum_{\pm} (\pm x_1 \pm x_2 \pm \cdots \pm x_n)^{2s}$, $s = \overline{1, n}$. Его подтвердил Хейслейн (РЖМат, 1971, 10А156). Приводится новое доказательство этого результата.

Библиогр.: 5 назв.

УДК 517.544.513.81

Об одном способе построения решений краевых задач теории изгибаний поверхностей положительной кривизны. Климентов С. Б. — Укр. геометр. сб., 1986, вып. 29, с. 56—82.

Предлагается новый способ построения решений краевых задач типа Римана-Гильберта для неканонических линейных и квазилинейных эллиптических систем первого порядка в односвязной ограниченной области плоскости. Для линейного краевого условия получены законченные результаты; для нелинейного краевого условия исследована разрешимость «в окрестности нуля». Приведены приложения к задаче об изометрических преобразованиях диффеоморфной кругу поверхности положительной вплоть до края кривизны при заданных краевых условиях.

Библиогр.: 15 назв.

УДК 513

Оценка главных радиусов кривизны замкнутой выпуклой поверхности с заданной функцией условных радиусов кривизны. Кокарев В. Н. — Укр. геометр. сб., 1986, вып. 29, с. 82—92.

Доказано существование оценки сверху для радиусов нормальной кривизны замкнутой выпуклой поверхности в трехмерном евклидовом пространстве с заданной функцией условных радиусов кривизны.

Библиогр.: 4 назв.

УДК 513

О фигурах, инвариантных относительно некоторых бесконечных групп преобразований. Криворучко А. И. — Укр. геометр. сб., 1986, вып. 29, с. 92—96.

В евклидовом пространстве изучается строение фигур, инвариантных относительно некоторых бесконечных групп, порожденных косыми отражениями.

Библиогр.: 5 назв.

УДК 513

Теорема Гаусса- онне для пространства гиперболической связности без кручения $\mathscr{T}^0_3$. Лубенская Т. В. — Укр. геометр. сб., 1986, вып. 29, с. 96—102.

Рассматривается пространство гиперболической связности без кручения $\mathscr{T}^0_3$. В этом пространстве вводится понятие параллелизма Лобачевского. С помощью параллелизма Лобачевского определяется геодезическая кривизна кривой, находится формула для ее вычисления и доказывается теорема Гаусса-Бонне для рассматриваемого пространства.

Библиогр.: 7 назв.

УДК 513.013

О сводимости общей задачи существования для замкнутых выпуклых поверхностей к уравнению К. Миранды. Медяник А. И. — Укр. геометр. сб., 1986, вып. 29, с. 103—112.

Доказывается, что решение общей задачи существования для замкнутых выпуклых поверхностей с заданными локальными свойствами: $f(R_1R_2, R_1 + R_2, n) = \varphi(n)$ — может быть получено как решение уравнения К. Миранды $R_1R_2 + \Phi(f) + cn = \psi(\Phi(n), \varphi(n))$ (ср. РЖ Мат, 1972, 1А 1121, 2А 917) с правой частью, зависящей от искомой поверхности, при условии, что последняя удовлетворяет «условию замкнутости» $\int\limits_{\Omega} n\psi(n)\, d\omega = 0$, где Ω — единичная сфера, а $d\omega$ — элемент ее площади.

Библиогр.: 5 назв.

УДК 513

Об однозначной определенности выпуклых поверхностей в псевдоримановом сферическом пространстве. I. Милка А. Д. — Укр. геометр. сб., 1986, вып. 29, с. 113—118.

Устанавливается теорема об однозначной определенности метрикой общих замкнутых выпуклых поверхностей, не слишком сильно отклоняющихся от плоскости, в сферическом псевдоримановом пространстве.

Библиогр.: 7 назв.

УДК 513

Существование поверхностей неположительной кривизны с заданной огибающей семейства ее асимптотических при условии обращения в нуль кривизны вдоль одной из асимптотических этого семейства. Можарский В. В. — Укр. геометр. сб., 1986, вып. 29, с. 118—125.

Рассмотрен вопрос о существовании поверхности $\sigma \in R^3$, заданной неположительной гауссовой кривизны, для которой пространственная кривая γ является огибающей хотя бы одного семейства асимптотических, при условии, что гауссова кривизна обращается в нуль в одной точке огибающей, а также на всей асимптотической, касающейся кривой γ в этой точке. Доказано, что такая поверхность существует в классе аналитических поверхностей специального вида.

Библиогр.: 3 назв.

УДК 513

Безынтегральное представление комплекса прямых с симметричным расположением инфлекционных центров. Мягков В. И. — Укр. геометр. сб., 1986, вып. 29, с. 125—132.

В статье исследованы комплексы $\sum_2$ и $\sum_3$ с симметричным расположением четверки инфлекционных центров, из которых соответственно два или три бесконечно удалены на каждом луче. Класс комплексов $\sum_3$ оказался известным. Комплекс $\sum_2$ является новым, существует он с произволом в три функции одного аргумента. Исследование геометрических свойств комплекса $\sum_2$ завершается его безынтегральным представлением, позволяющим в явном виде выписать решение исходной системы дифференциальных уравнений этого комплекса.

Библиогр.: 6 назв.