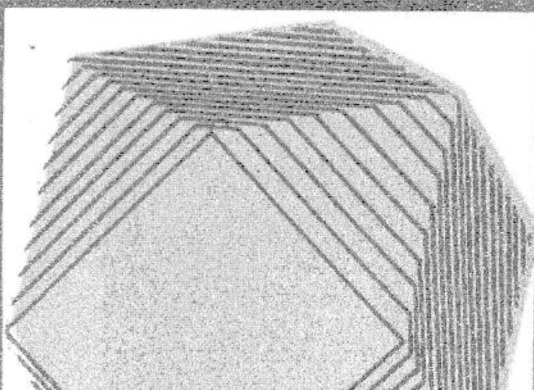
ISSN 0135-6992

УКРАИНСКИЙ геометрический СБОРНИК

28|85



«ВИЩА ШКОЛА»

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ УССР

ХАРЬКОВСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО
КРАСНОГО ЗНАМЕНИ И ОРДЕНА ДРУЖБЫ
НАРОДОВ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени А. М. ГОРЬКОГО

УКРАИНСКИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК

Республиканский
междуведомственный
научный сборник

Основан в 1965 г.

ВЫПУСК 28

ХАРЬКОВ
ИЗДАТЕЛЬСТВО ПРИ ХАРЬКОВСКОМ
ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ
ИЗДАТЕЛЬСКОГО ОБЪЕДИНЕНИЯ „ВИЩА ШКОЛА"
1985

УДК 513

Украинский геометрический сборник: Респ. междувед. науч. сб. — Х.: Вища шк. Изд-во при Харьк. ун-те, 1985.—Вып. 28. 152 с.

Сборник посвящен в основном геометрии в целом: исследованы погружение пространства Лобачевского L^n в евклидово E^{2n}, полные параболические поверхности, вполне геодезические подмногообразия сферического и комплексного проективного пространств, задание выпуклой поверхности ее функциями кривизны, оценки асферичности сечений выпуклых тел, алгебраические поверхности с заданной симметрией, проблема видимости для двумерного многообразия Адамара и др. Рассматриваются конформные отображения пространства-времени с сохранением времениподобных геодезических, свойства пространств Дейвиса, геодезическая кривизна интегральной кривой пфаффова многообразия, задача Коши для уравнения в частных производных первого порядка, секционные кривизны метрики сферических касательных расслоений пространств постоянной кривизны и другие вопросы.

Для научных работников математических специальностей.

Адрес редакционной коллегии: 310077, Харьков-77, пл. Дзержинского, 4, Харьковский университет, механико-математический факультет, тел. 40-14-92

Редакция естественнонаучной литературы

$У \frac{1702040000-006}{М226(04)-85}$ 504-85

УДК 513

Ю. А. Аминов

О ПОГРУЖЕНИЯХ n-МЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА ЛОБАЧЕВСКОГО В $2n$-МЕРНОЕ ЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО С n ПОЛЯМИ ГЛАВНЫХ НАПРАВЛЕНИЙ

Ранее [1—4] рассматривались локальные изометрические погружения n-мерного пространства Лобачевского L^n в $(2n-1)$-мерное евклидово пространство E^{2n-1}. В этой работе, используя метод, развитый в [1—2], устанавливается основная система уравнений погружения L^n в $2n$-мерное евклидово пространство E^{2n} с n полями главных направлений (т. е. с плоской нормальной связностью) и указывается произвол в задании аналитических решений этой системы. Имеет место [см. 1, 2].

Лемма. *Если риманово пространство R^m отрицательной кривизны изометрически погружено в E^N с m полями главных направлений, то они голономны.*

Поэтому, если область $D \subset L^n$ погружена в E^{2n} с n полями главных направлений, то в области D можно ввести локальные ортогональные координаты $u_1, \ldots, u_n$ такие, что координатные линии u_i касаются главных направлений. Такие координаты будем называть координатами кривизны. В работе доказывается

Теорема. *Если область D пространства L^n погружена в E^{2n} с n полями главных направлений, то линейный элемент L^n в координатах кривизны может быть записан в виде* $ds^2 = \cos^2\theta \times \times (\sum_{i=1}^{n} \sin^2\gamma_i du_i^2)$, *причем функции* $H_i = \cos\theta \sin\gamma_i$, $i = 1, \ldots, n$; $H_{n+1} = \sin\theta$ и $\beta_{ij} = \frac{\partial H_j}{\partial u_i} \Big/ H_i$ *удовлетворяют системе уравнений:*

$$a)\ \frac{\partial H_i}{\partial u_k} = \beta_{ki} H_k, \quad b)\ \frac{\partial H_k}{\partial u_k} = -\sum_{q=1}^{n+1} \beta_{kq} H_q,$$

$$c)\ \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_j} = \beta_{ij}\beta_{jk}, \quad d)\ \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_k} + \frac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_i} + \sum_{j=1}^{n+1} \beta_{ij}\beta_{kj} = 0 \tag{1}$$

$$e)\ \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_i} + \frac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_k} + \sum_{j=1}^{n} \beta_{jk}\beta_{ji} = H_i H_k$$

$$i \neq j \neq k \neq i; \ i = 1, \ldots, n; \ j = 1, \ldots, n+1$$

Наоборот, если в области D можно ввести координаты $u_1, \ldots, u_n$ и можно найти функции H_i, β_{ij}, удовлетворяющие этой системе уравнений, причем такие что $H_i > 0$ при $1 \leqslant i \leqslant n$, то область D погружается в E^{2n} с n главными направлениями, касающимися координатных линий u_i.

Систему (1) будем называть основной системой уравнений погружения L^n в E^{2n}.

Докажем сначала необходимое условие, т. е. выполнение системы (1), если область D погружена в E^{2n}. Пусть g_{ii} — коэффициенты первой квадратичной формы в координатах кривизны и L^p_{ii}, $p = 1, \ldots, n$, — коэффициенты второй квадратичной формы по отношению к нормали n_p. Положим

$$\operatorname{ctg} \sigma_i = [\sum_{p=1}^{n} (L^p_{ii})^2]/g^2_{ii}.$$

С помощью уравнений Кодацци, точно так же как в [1], получим $g_{ii} = \sin^2 \sigma_i$. Следовательно,

$$\sum_{p=1}^{n} (L^p_{ii})^2 = \cos^2 \sigma_i \sin^2 \sigma_i.$$

При каждом фиксированном индексе i вектор из нормального пространства $\sum_{p=1}^{n} L^p_{ii} n_p$ имеет длину $\cos \sigma_i \sin \sigma_i$. Его проекции на координатные оси можно записать так:

$$L^p_{ii} = \cos \sigma_i \sin \sigma_i \cos \varphi_{ip}, \quad i, \ p = 1, \ldots, n.$$

Углы φ_{ip} при каждом i удовлетворяют соотношению $\sum_{p=1}^{n} \cos^2 \varphi_{ip} = 1$. Уравнения Гаусса дают

$$\sum_{p=1}^{n} L^p_{ii} L^p_{jj} = -g_{ii} g_{jj} = -\sin^2 \sigma_i \sin^2 \sigma_j.$$

Подставив в это уравнение выражения L^p_{ii}, получим

$$\sum_{p=1}^{n} \cos \varphi_{ip} \cos \varphi_{jp} = -\operatorname{tg} \sigma_i \operatorname{tg} \sigma_j.$$

Обозначим: $\Phi_{ij} = \cos \sigma_i \cos \varphi_{ij}$. Рассмотрим следующую $n \times (n + 1)$ матрицу $\bar{A}$, столбцами которой являются единичные векторы в $(n + 1)$-мерном евклидовом пространстве, ортогональные друг другу:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} \sin \sigma_1, & \ldots, & \sin \sigma_n \\ \Phi_{11}, & \ldots, & \Phi_{n_1} \\ \cdot & \cdot \ \cdot & \cdot \\ \Phi_{1n}, & \ldots, & \Phi_{nn} \end{pmatrix}.$$

Через A обозначим матрицу, полученную дополнением матрицы $\overline{A}$ до квадратной ортогональной матрицы порядка $n+1$

$$A = \begin{pmatrix} \sin\sigma_1, & \ldots, & \sin\sigma_n, & \sin\theta \\ \Phi_{11}, & \ldots, & \Phi_{n1}, & \sin\theta_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Phi_{1n}, & \ldots, & \Phi_{nn}, & \sin\theta_n \end{pmatrix}.$$

Положим $\sin\theta_p = \Phi_{n+1p}$, $p = 1, \ldots, n$; $\sin\theta = H_{n+1}$, $\sin\sigma_i = H_i$. Определим символы Дарбу: $\beta_{ki} = \frac{\partial H_i}{\partial u_k} \Big/ H_k$, $i = 1, \ldots, n+1$; $k = 1, \ldots, n$. Так как на погруженной области L^n по условию существует n полей главных направлений, то в нормальном пространстве существует n полей нормалей, для которых коэффициенты кручения $\mu_{\alpha\beta|i} \equiv 0$. Будем считать, что n_p — единичные нормали, обладающие этим свойством. Уравнения Кодацци можно записать в виде

$$\underset{k \neq j}{\frac{\partial \Phi_{jp}}{\partial u_k}} = \Phi_{kp}\beta_{kj}, \quad \begin{matrix} j = 1, \ldots, n, \\ k = 1, \ldots, n. \end{matrix} \tag{2}$$

Покажем, что Φ_{n+1p} тоже удовлетворяет этому уравнению, т. е.

$$\frac{\partial \Phi_{n+1p}}{\partial u_k} = \Phi_{kp}\beta_{kn+1}. \tag{3}$$

Столбец матрицы A, стоящий на i-м месте, обозначим через a_i. Уравнения (2) можно записать в векторном виде

$$\frac{\partial a_i}{\partial u_k} = a_k\beta_{ki}, \ i = 1, \ldots, n.$$

Дифференцируя равенство $(a_i a_{n+1}) = 0$ по u_k, $k \neq i$, получим

$$\beta_{ki}(a_k a_{n+1}) + \left(a_i \frac{\partial a_{n+1}}{\partial u_k}\right) = 0.$$

Но $(a_k a_{n+1}) = 0$ по построению столбца a_{n+1}. Поэтому для всех $i \neq k$ имеет место $\left(a_i \frac{\partial a_{n+1}}{\partial u_k}\right) = 0$. Следовательно,

$$\frac{\partial a_{n+1}}{\partial u_k} = \lambda_k a_k. \tag{4}$$

Запишем первую компоненту этого векторного соотношения

$$\frac{\partial H_{n+1}}{\partial u_k} = \beta_{kn+1}H_k = \lambda_k H_k,$$

т. е. $\lambda_k = \beta_{k\,n+1}$. Поэтому уравнение (4) есть векторная запись системы (3). Итак, систему уравнений (2)—(3) можно записать в общем виде

$$\frac{\partial a_i}{\partial u_k} = a_k\beta_{ki}, \ k \neq i \quad i = 1, \ldots, n+1; \ k = 1, \ldots, n. \tag{5}$$

Используя уравнение $H_1^2+\cdots+H_{n+1}^2=1$. Дифференцируя его по u_k, $k\leqslant n$, получим

$$\frac{\partial H_k}{\partial u_k}=-\sum_{j=1}^{n+1}\beta_{kj}H_j,\ \frac{\partial H_k}{\partial u_i}=\beta_{ik}H_i,\ i\neq k.$$

Условие совместности этой системы имеет вид

$$\frac{\partial\beta_{ik}}{\partial u_k}+\frac{\partial\beta_{ki}}{\partial u_i}+\sum_{j=1}^{n+1}\beta_{kj}\beta_{ij}=0. \tag{6}$$

Пусть индексы i, j, k между собой различны. Запишем два уравнения из системы (5):

$$\frac{\partial a_i}{\partial u_k}=a_k\beta_{ki},\ \frac{\partial a_i}{\partial u_j}=a_j\beta_{ji},\ 1\leqslant k,\ j\leqslant n.$$

Условие равенства смешанных производных от a_i дает

$$a_k\left(\frac{\partial\beta_{ki}}{\partial u_j}-\beta_{kj}\beta_{ji}\right)+a_j\left(\beta_{jk}\beta_{ki}-\frac{\partial\beta_{ji}}{\partial u_k}\right)=0.$$

Так как столбцы a_k и a_j матрицы A линейно независимы, то следовательно, выполняются уравнения

$$\frac{\partial\beta_{ki}}{\partial u_j}=\beta_{kj}\beta_{ji},\quad \begin{array}{l} k,\ j\leqslant n \\ i=1,\ \ldots,\ n+1 \\ i\neq j\neq k\neq i \end{array} \tag{7}$$

Если i, j и $k\leqslant n$, то эти уравнения выражают условие обращения в ноль следующих компонент тензора Римана $R_{jiik}=0$, $i\neq\neq j\neq k\neq i$ метрики L^n. Воспользовавшись формулой для тензора Римана в ортогональных координатах [5, стр. 148], получим

$$\frac{\partial\beta_{ik}}{\partial u_i}+\frac{\partial\beta_{ki}}{\partial u_k}+\sum_{j=1}^{n}\beta_{jk}\beta_{ji}=H_iH_k\quad i\neq k$$

Итак, система уравнений (1) установлена. Заметим, что эта система отличается от основной системы уравнений погружения L^n в E^{2n-1}, найденной в [I] тем, что в нее входят добавочные неизвестные функции H_{n+1} и β_{in+1}, которые подчинены добавочным уравнениям из групп a), b) и c).

Покажем теперь, что если эти уравнения выполняются для некоторых функций H_i и β_{ij}, то существует погружение области L^n в E^{2n} с n главными направлениями, касающимися координатных линий u_i. Дифференцируя равенство $\sum\limits_{j=1}^{n+1}\Phi_{jp}^2\equiv 1$ по u_i, получим

$$\Phi_{ip}\frac{\partial\Phi_{ip}}{\partial u_i}=-\sum_{j=1}^{n+1}\Phi_{jp}\Phi_{ip}\beta_{ij}.$$

Предполагая, что $\Phi_{ip}\neq 0$, находим уравнение

$$\frac{\partial\Phi_{ip}}{\partial u_i}=-\sum_{j=1}^{n+1}\beta_{ij}\Phi_{jp},\ i\leqslant n \tag{8}$$

К этому уравнению присоединим уравнения

$$\frac{\partial\Phi_{ip}}{\partial u_k}=\beta_{ki}\Phi_{kp},\ \frac{\partial\Phi_{n+1p}}{\partial u_k}=\beta_{kn+1}\Phi_{kp},\ 1\leqslant i,\ k\leqslant n,\ i\neq k. \tag{9}$$

Условие совместности систем (8)—(9) выполнено в силу уравнений (6) и (7). Интегрируя систему (8), (9) находим Φ_{jp}. Значения Φ_{jp} в начальной точке P зададим так, чтобы в ней матрица A была ортогональной. Тогда в силу системы (8) и (9) A будет ортогональной матрицей и в любой другой точке. Вторые квадратичные формы $L^p_{ii}du_i^2$ подмногообразия зададим в виде $L^p_{ii}=H_i\Phi_{ip}$, $L^p_{ij}=0$, $i\neq j$. Положим, что коэффициенты кручения $\mu_{\alpha\beta i}=0$. Тогда система уравнений Гаусса—Кодацци—Риччи выполнена и, следовательно, некоторая окрестность точки P погружается в E^{2n} с n полями главных направлений, касающимися координатных линий u_i.

Система уравнений (1) специального вида — типа Бурлета, см. [6]. В некоторой окрестности точки P существует и при этом только одно аналитическое решение, имеющее для H_i заданные начальные значения $H_i^0(P)$ в точке P и для β_{ij} заданные значения на координатных кривых — аналитические функции одного аргумента: $\beta^0_{ik}(u_k)$ при $i<k\leqslant n$, $\beta^0_{ik}(u_i)$ при $n\geqslant i>k$ и $\beta^0_{in+1}(u_i)$ при $i\leqslant n$, когда остальные аргументы u_j фиксированы. Таким образом, для однозначной разрешимости основной системы уравнений погружения L^n в E^{2n} с n полями главных направлений необходимо и достаточно задать n^2 аналитических функций одного аргумента.

В случае $n=2$, т. е. в случае погружений плоскости Лобачевского L^2 в E^4 с нулевым гауссовым кручением линейный элемент L^2 в координатах кривизны записывается в виде $ds^2=\cos^2\theta(\sin^2\gamma du_1^2+\cos^2\gamma du_2^2)$. Систему уравнений (1), состоящую из 10 уравнений первого порядка, можно преобразовать к системе уравнений второго порядка для двух функций γ и θ

$$\gamma_{u_2u_2}-\gamma_{u_1u_1}-(\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\theta\theta_{u_2})_{u_2}-(\operatorname{ctg}\gamma\operatorname{tg}\theta\theta_{u_1})_{u_1}=\cos\gamma\sin\gamma\cos^2\theta,$$

$$\left(\frac{\theta_{u_1}\operatorname{ctg}\gamma}{\cos\theta}\right)_{u_2}+\left(\frac{\theta_{u_2}\operatorname{tg}\gamma}{\cos\theta}\right)_{u_1}=0.$$

В качестве простого частного решения можем положить $\cos\theta = 1/u_2$, $\gamma = \frac{\pi}{4}$. Другие решения этой системы мы приведем в следующей работе.

Список литературы: **1.** *Аминов Ю. А.* О погружении областей n-мерного пространства Лобачевского в $(2n-1)$-мерное евклидово пространство.— Докл. АН СССР, 1977, **236**, № 3, с. 521—524. **2.** *Аминов Ю. А.* Изометрические погружения областей n-мерного пространства Лобачевского в $(2n-1)$-мерное евклидово пространство.— Мат. сб., **111**, № 3, с. 402—433. **3.** *Аминов Ю. А.* Многомерное обобщение уравнения «синус Гордона» и движение твердого тела.— Докл. АН СССР, 1982, **264**, № 5, с. 1113—1116. **4.** *Аминов Ю. А.* Изометрические погружения областей трехмерного пространства Лобачевского в пятимерное евклидово пространство и движение твердого тела.— Мат. сб., 1983, **122**, № 1, с. 12—30. **5.** *Эйзенхарт Л. П.* Риманова геометрия.— М., Изд-во иностр. лит., 1948.—316 с. **6.** *Bianchi L.* Lezioni di geometria differenziale, 2, part 2, Bologna, 1924.

Поступила в редколлегию 03.10.83.

УДК 513

А. А. Борисенко

О ПОЛНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЯХ

Поверхность F^l в римановом пространстве R^n называется k-параболической, если вторая квадратичная форма поверхности относительно каждой нормали в произвольной точке Q после приведения к диагональному виду имеет не менее k нулевых коэффициентов.

Черн и Кейпер ввели нуль-индекс $\mu(Q)$ точки поверхности F^l в римановом пространстве R^n [1]. Он равен максимальной размерности подпространства $L(Q)$ в касательном пространстве T_QF^l такого, что для $y \in L(Q)$ будет $A(Q, \nu)\,y = 0$, где $A(Q, \nu)$ — матрица коэффициентов второй квадратичной формы относительно произвольной нормали ν в точке Q. Поверхность называется сильно k-параболической, если $\mu(Q) \geqslant k$ для $Q \in F^l$.

Сильно k-параболические поверхности являются k-параболическими поверхностями. Обратное неверно.

Теорема 1. *Полная k-параболическая l-мерная поверхность неотрицательной кривизны Риччи в евклидовом пространстве является цилиндром с k-мерными образующими.*

Для сильно k-параболических поверхностей неотрицательной секционной кривизны аналогичная теорема доказана Ф. Хартманом [2].

Лемма 1 [3]. *Пусть поверхность F^l класса C^0 в E^n является метрическим произведением $F^{l-k} \times R^k$, где F^{l-k} — многообразие с внутренней метрикой, R^k — евклидово пространство. Если на поверхности F^l образ одной из образующих $R^k(Q)$, $Q \in F^{l-k}$, есть плоскость $E^k \subset E^n$, то поверхность F^l есть цилиндр с k-мерной образующей.*

Лемма 2 [4]. *Через каждую точку полной k-параболической поверхности в евклидовом пространстве проходит k-мерная плоскость, которая принадлежит поверхности.*

Доказательство теоремы 1. По лемме 2 на поверхности лежит плоскость E^k. По теореме, доказанной Чигером и Громоллом, поверхность является метрическим произведением $F^{l-k} \times R^k$, где F^{l-k} — риманово многообразие, R^k — евклидово пространство [5]. Применяя лемму 1 получим нужное утверждение.

Аналогом теоремы 1 для сферического пространства является

Теорема 2. *Пусть F^l — компактная k-параболическая поверхность в сферическом пространстве S^n, кривизна Риччи которой не меньше $l-1$. Если $k>0$, то $k=l$ и поверхность F^l является вполне геодезической большой сферой S^l.*

Лемма 3 [6]. *Пусть R^n — полное риманово пространство, кривизна Риччи которого не меньше $n-1$. Если в R^n есть замкнутая геодезическая длины 2π, то R^n изометрично единичной сфере S^n.*

Лемма 4 [7]. *Пусть F^l — компактная гладкая поверхность в S^{l+p}, изометричная единичной сфере S^l. Если на F^l лежит большая окружность, то F^l есть большая сфера.*

Доказательство теоремы 2. Так как для сферического пространства справедлив аналог леммы 2, то на F^l лежит большая окружность длины 2π. По лемме 3 F^l изометрична единичной сфере S^l. По лемме 4 F^l есть большая сфера $S^l \subset S^n$.

Для сильно k-параболических поверхностей аналогичная теорема доказывалась в [8].

В общем римановом пространстве теоремы, аналогичные теоремам 1, 2, не имеют места. Пусть F^l — поверхность в римановом пространстве R^{l+p}. Поверхность инвариантна относительно оператора кривизны, если в каждой точке $Q \in F^l$ справедливо $\langle R(X, Y)Z, \nu\rangle = 0$, где $X, Y, Z \in T_Q F^l$; ν — произвольный вектор нормали в точке Q; R — тензор кривизны объемлющего пространства. Если в R^{l+p} взять систему координат так, чтобы F^l была координатной поверхностью переменных $x_1, \dots, x_l$ и координатные поверхности переменных $x_{l+1}, \dots, x_{l+p}$ были ортогональны поверхности F^l, то условие инвариантности сводится к условию $R_{ijk\alpha} = 0$ ($i, j, k = 1, \dots, l$; $\alpha = l+1, \dots, p$) вдоль поверхности F^l.

Теорема 3. *Пусть F^l — компактная k-параболическая инвариантная относительно оператора кривизны поверхность в римановом пространстве R^{l+p}, секционная двумерная кривизна которой положительна. Если $k \geqslant lp/(p+1)$, то F^l — вполне геодезическое подмногообразие в R^{l+p}.*

При доказательстве используются

Лемма 5 [9]. *Пусть F^l — инвариантная относительно оператора кривизны поверхность в римановом пространстве R^{l+p}, для которой $\mu_0 = \min \mu(Q) > 0$. Тогда через точку Q, для которой $\mu(Q) = \mu_0$, на F^l проходит вполне геодезическая μ_0-мерная поверхность объемлющего пространства.*

Лемма 6 [10]. *Пусть F_1^l, F_2^l — компактные вполне геодезические поверхности в римановом пространстве положительной секционной кривизны. Если $p \leqslant l$, то поверхности пересекаются.*

Доказательство теоремы 3. Пусть Q_0 — точка на поверхности F^l, для которой $\mu(Q_0) = \min \mu(Q) = \mu_0$. В точках $Q \in F^l$, достаточно близких к Q_0, $\mu(Q) = \mu_0$. В силу неравенства $\mu > l - (l-k)(p+1)/2$ и требования на порядок параболичности поверхности $\mu_0 \geqslant l/2$. По лемме 5 через точку Q_0 проходит компактная вполне геодезическая поверхность $F^{\mu_0}(Q_0) \subset F^l$. Пусть $Q \in F^l$ — точка, близкая к Q_0, для которой $\mu(Q) = \mu_0$ и которая не лежит на $F^{\mu_0}(Q_0)$. Через эту точку также проходит компактная вполне геодезическая поверхность $F^{\mu_0}(Q)$, которая не должна пересекаться с $F^{\mu_0}(Q_0)$. Но, с другой стороны, по лемме 6 они пересекаются. Поэтому $\mu_0 = l$ и поверхность F^l есть вполне геодезическое подмногообразие в римановом пространстве R^{l+p}.

Пусть F^l — полная регулярная поверхность в E^n, для всех точек которой $\mu = k = \mathrm{const}$. Тогда через каждую точку поверхности проходит единственная плоскость $E^k(Q)$, вдоль которой касательное пространство стационарно. Через точку $Q_0 \in F^l$ проведем плоскость E^{n-k}, перпендикулярную $E^k(Q_0)$. В окрестности точки Q_0 поверхность $F^{l-k} = F^l \cap E^{n-k}$ будет регулярной с радиусом-вектором $\rho(u_1, \ldots, u_{l-k})$. Пусть $e_{l-k+1}, \ldots, e_l$ — ортонормированный базис $E_k(Q_0)$, $S_q(Q)$ $(q = l-k+1, \ldots, l)$ — векторы плоскости $E^k(Q)$ такие, что их ортогональная проекция на плоскость $E^k(Q_0)$ совпадает с e_q; $v^{l-k+1}, \ldots, v^l$ — декартовы координаты в плоскости $E^k(Q)$ относительно базиса $S_q(Q)$. Тогда радиус-вектор поверхности F^l в бесконечной полосе, содержащей образующую $E^k(Q_0)$, имеет вид

$$r = \rho(u) + \sum_{q=l-k+1}^{l} S_q(u)\, v^q; \tag{1}$$

$\rho_i = \dfrac{\partial \rho}{\partial u_i}$ $(i = 1, \ldots, l-k)$; N_α $(\alpha = 1, \ldots, n-l=p)$ — ортогональный базис нормалей к поверхности $F^{l-k} \subset E^{n-k}$. Так как векторы e_q, ρ_i, N_α в точках $Q \in F^{l-k}$, близких к Q_0, составляют базис в E^n, то

$$S_q = e_q + \sum c_q^i \rho_i + \sum \mu_q^\alpha N_\alpha. \tag{2}$$

Так как $\dfrac{\partial r}{\partial v^q} = S_q$, то по формулам Вейнгартена

$$\frac{\partial S_q}{\partial u_i} = \sum_{s=1}^{l-k} \Gamma_{iq}^s r_s + \sum_{t=l-k+1}^{l} \Gamma_{iq}^t S_t + \sum_{\alpha=1}^{p} A_{iq}^\alpha \nu_\alpha, \tag{3}$$

где ν_α — нормали к поверхности F^l; Γ_{iq}^s, Γ_{iq}^t — коэффициенты Кристоффеля поверхности F^l. Из определения нуль-индекса μ и выбора системы координат следует, что $A_{iq}^\alpha = 0$.

С другой стороны, из (2) получаем, что

$$\frac{\partial S_q}{\partial u_i}=\frac{\partial c_q^s}{\partial u_i}\rho_s+\frac{\partial \mu_q^\alpha}{\partial u_i}N_\alpha+c_q^s\frac{\partial \rho_s}{\partial u_i}+\mu_q^\alpha\frac{\partial N_\alpha}{\partial u_i}. \quad (4)$$

По формулам Вейнгартена для поверхности $F^{l-k}\subset E^{n-k}$

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial u_i}=\tilde{\Gamma}_{si}^j\rho_j+\Omega_{si}^\alpha N_\alpha;$$

$$\frac{\partial N_\alpha}{\partial u_i}=-\Omega_{li}^\alpha\tilde{g}^{lm}\rho_m+\nu_{i|\alpha\beta}N_\beta, \quad (5)$$

где $\tilde{g}_{ij}$, $\tilde{g}^{ij}$, $\tilde{\Gamma}_{si}^j$, Ω_{li}^α, $\nu_{i|\alpha\beta}$ — ковариантные и контравариантные компоненты метрического тензора поверхности F^{l-k}, символы Кристоффеля этой метрики, коэффициенты второй квадратичной формы поверхности F^{l-k} в E^{n-k}. Подставив (5) в (4), получим

$$\frac{\partial S_q}{\partial u_i}=\rho_s\left(\frac{\partial c_q^s}{\partial u_i}+\sum_{j=1}^{l-k}c_q^j\tilde{\Gamma}_{ij}^s-\sum_{l=1}^{l-k}\sum_{\alpha}\mu_q^\alpha\Omega_{li}^\alpha\tilde{g}^{ls}\right)+$$

$$+N_\alpha\left(\frac{\partial \mu_q^\alpha}{\partial u_i}+\sum_{s=1}^{l-k}c_q^s\Omega_{is}^\alpha+\mu_q^\beta\nu_{i|\beta\alpha}\right). \quad (6)$$

Так как в каждой точке поверхности F^l базисом T_QF^l являются как векторы (r_s, S_q), так и (ρ_s, S_q), то (3) переписывается следующим образом:

$$\frac{\partial S_q}{\partial u_i}=\sum_{s=1}^{l-k}B_{iq}^s\rho_s+\sum_{t=l-k+1}^{l}B_{iq}^tS_t. \quad (7)$$

Сравнивая разложения (6) и (7), получаем $B_{iq}^t=0$. Поэтому $\frac{\partial S_q}{\partial u_i}=B_{iq}^s\rho_s$ **(8)**. Так как $r_s=\rho_s+\frac{\partial S_q}{\partial u^s}v^q=\rho_s+B_{qs}^i\rho_iv^q$, $\frac{\partial r}{\partial v^q}=S_q$ — базис касательного пространства при всех значениях v^q, то матрица перехода от базиса касательного пространства ρ_s, S_q к базису r_s, S_q невырождена, т. е. $\det(\delta_{is}+B_{qs}^iv^q)\neq 0$ **(9)** при любых значениях v^q.

Условия интегрируемости системы (8) с учетом (5) имеют следующий вид:

$$B_{iq,\,j}^s=B_{jq,\,i}^s,\ B_{iq}^s\Omega_{sj}^\alpha=B_{jq}^s\Omega_{si}^\alpha, \quad (10)$$

где j — ковариантная производная по метрике поверхности F^{l-k}.

Первое условие означает, что $B_{iq}^s=\frac{\partial g_q^s}{\partial u_i}$. Второе — что матрица $B_q\Omega^\alpha$ симметрична, здесь $B_q=(B_{iq}^s)$, $\Omega^\alpha=(\Omega_{si}^\alpha)$. На языке внешних форм аналогичное условие встречалось в статье М. А. Акивиса и В. В. Рыжкова [11].

Рассмотрим линейное подпространство $L(Q)$ в пространстве всех квадратных матриц порядка $m = l - k$, натянутое на матрицы B_q. Число $\mu(Q) = \dim L(Q)$ назовем сильным нуль-индексом точки. Пусть матрица второй квадратичной формы $A(Q, \nu)$ после приведения к диагональному виду имеет n положительных и m отрицательных диагональных членов, $j(Q, \nu) = \min(n, m)$. Типом точки Q называется число $j(Q) = \min j(Q, \nu)$, где минимум берется по всем нормалям в точке Q, для которых ранг второй квадратичной формы максимален. Для гиперповерхностей справедлива

Лемма 7. $\dim L \leqslant j(r-j)$.

Доказательство. Не ограничивая общности, считаем, что в фиксированной точке $Q \in F^{l-k}$ матрица Ω после диагонализации имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} E_j & 0 \\ 0 & -E_{r-j} \end{pmatrix},$$

где E_i — единичная матрица порядка i (достаточно совершить невырожденное аффинное преобразование E^n). Так как $\det(E + B_q v^q) \neq 0$ при всех значениях v^q и $\det \Omega \neq 0$, то $\det(\Omega + B_q \Omega v^q) \neq 0$ **(11)**. Из (10) следует, что $B_q\Omega$ — симметричные матрицы. Пусть L_1 — плоскость, натянутая на матрицы $B_q\Omega$, $\dim L = \dim L_1$. Рассмотрим в пространстве симметричных матриц плоскость L_2, состоящую из матриц вида

$$\begin{pmatrix} B_j & 0 \\ 0 & B_{r-j} \end{pmatrix}, \tag{12}$$

где B_i — произвольная симметричная матрица порядка i. Размерность этой плоскости $(j(j+1) + (r-j)(r-j+1))/2$. Допустим $\dim L_1 > j(r-j)$. Так как симметричные матрицы порядка r имеют размерность $r(r+1)/2$, а $\dim L_1 + \dim L_2 > r(r+1)/2$, то эти плоскости пересекаются по ненулевой матрице, т. е. в плоскости L_1 найдется матрица вида (12). Пусть это будет матрица $B_1\Omega$. Из (11) следует, что

$$\det\left(\begin{pmatrix} E_j & 0 \\ 0 & -E_{r-j} \end{pmatrix} + v^1 \begin{pmatrix} B_j & 0 \\ 0 & B_{r-j} \end{pmatrix}\right) = \\ = \det(E_j + v^1 B_j) \cdot \det(-E_{r-j} + v^1 B_{r-j}) \neq 0$$

при любых значениях v^1. Но одна из матриц B_j, B_{r-j} отлична от нулевой, она имеет ненулевые собственные действительные значения, поэтому по крайней мере один из сомножителей равен нулю, что противоречит неравенству (11).

Лемма 8. *Пусть F^l — поверхность в E^{l+p}, для которой $\mu = k = \mathrm{const}$. Тогда* $\dim L \leqslant j(r-j) + m(m-r)$ **(13)**, *где* $m = l - \mu$.

Замечание. Если $j = 0$, то из (1) следует, что $r = l - \mu$ и неравенство (13) переходит в равенство $\dim L = 0$.

Доказательство. Пусть N_1 — нормаль к F^{l-k} в точке Q, $r(Q, N_1) = r(Q)$, $j(Q, N_1) = j(Q)$, Выберем базис в $T_Q F^{l-k}$ так, чтобы

$$\Omega^1 = \begin{pmatrix} \Omega_r^1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_q = \begin{pmatrix} B_{q,\,r} & C_q \\ D_q & B^{q,\,m-r} \end{pmatrix}.$$

Аналогично лемме 7 размерность плоскости, натянутой на матрицы $B_{q,\,r}$, будет не больше $j(r-j)$. Из условия (10) следует, что $D_q\Omega_r^1 = 0$, отсюда матрицы $D_q = 0$. Размерность плоскости, натянутой на матрицы C_q, $B_{q,\,m-r}$, равна $m(m-r)$. Лемма доказана.

Так как $m - r \leqslant j(p-1)$, где p — коразмерность вложения, то из (13) следует, что $\dim L \leqslant j[\tau - j + m(p-1)]$ **(14).**

Пусть размерность плоскости L постоянна: $\dim L = l_0$. Выберем векторы e_γ $(\gamma = l - l_0, \ldots, l)$, так, чтобы матрицы B_γ составляли базис плоскости L в точке Q_0; они составляют базис плоскости L и в точках, близких к Q_0; матрицы B_δ $(\delta = l - k + 1, \ldots, l - l_0)$ в точке Q_0 нулевые. Тогда $B_\delta = b_\delta^\gamma\, B_\gamma, B_\delta(Q_0) = 0$ **(15).** Из (10) следует, что $B_{i\delta}^s = \dfrac{\partial f_\delta^s}{\partial u_i}$, $B_{i\gamma}^s = \dfrac{\partial g_\gamma^s}{\partial u_i}$. Теперь перепишем (15) так:

$$\frac{\partial f_\delta^s}{\partial u_i} = b_\delta^\gamma \frac{\partial g_\gamma^s}{\partial u_i}\,. \tag{16}$$

Из условия интегрируемости этой системы получаем, что

$$\frac{\partial b_\delta^\gamma}{\partial u_j}\frac{\partial g_\gamma^s}{\partial u_i} - \frac{\partial b_\delta^\gamma}{\partial u_i}\frac{\partial g_\gamma^s}{\partial u_j} = 0, \ i,\ j,\ s = 1, \ldots, k. \tag{17}$$

Пусть $A(x, y)$ — билинейная векторная форма, соответствующая векторной второй квадратичной форме поверхности. Она задает отображение $A: T_Q F^l \times T_Q F^l \to N_Q F^l$. Без ограничения на кривизну поверхности справедлива

Теорема 4. *Если в каждой точке полной сильно k-параболической l-мерной поверхности в евклидовом пространстве ранг отображения A равен $2(l-k)-1$ на векторах, которые не принадлежат диагонали $T_Q F^l \times T_Q F^l$, то поверхность является цилиндром с k-мерной образующей.*

Доказательство. Рассмотрим второе равенство (10) как систему однородных уравнений относительно B_{iq}^s, B_{jq}^s $(s \neq i,\ j)$. $B_{iq}^i - B_{jq}^j$ при фиксированных $i \neq j$, q. По условию теоремы ранг матрицы этой системы равен $2(l-k)-1$, поэтому система имеет только нулевые решения и матрица $B_q = b_q E$. Но при $b_q \neq 0$ найдется действительное значение v^q, при котором детерминант (9) обратится в нуль. Это противоречит регулярности поверхности. Поэтому все $b_q = 0$ и поверхность F^l является цилиндром с k-мерной образующей.

Направление $x \in T_Q F^l$ называется асимптотическим, если для всех нормалей $\langle A(Q, \nu)x, x\rangle = 0$. Плоскость максимальной размерности $K \subset T_Q F^l$, каждое направление которой асимптотическое, называется асимптотической. Размерность этой плоскости назовем порядком уплощения точки поверхности.

Лемма 9. *Если порядок уплощения точки k-параболической поверхности, для которой $j(Q) \leqslant 1$, равен k, то нуль-индекс $\mu(Q) = k$.*

Доказательство. Выберем так базис нормалей ν_1, ν_p в точке Q, чтобы матрица второй квадратичной формы

$$A(Q, \nu_1) = \begin{pmatrix} C^1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Асимптотический конус V_1 поверхности относительно нормали ν_1 есть прямое произведение $E^k(\nu_1) \times K_1$, где K_1 — конус второго порядка, который задается уравнением $c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 + \dots + c_{l-k-1} x_{l-k-1}^2 = c_{l-k} x_{l-k}^2 \; (c_i > 0)$. Относительно близких нормалей он имеет аналогичный вид. Евклидова плоскость $E^k(\nu_i)$ должна лежать на $E^k(\nu_1) \times K_1$. С другой стороны, конусы V_1, V_2, V_3 имеют друг с другом или общие асимптотические плоскости E_{ij}^{k+1}, или общую плоскость $E^k(\nu_1)$. Плоскости $E_{12}^{k+1}, E_{13}^{k+1}$ пересекаются по $E^k(\nu_1)$; $E^k(\nu_2)$, $E^k(\nu_3)$, с одной стороны, лежат в плоскостях $E_{12}^{k+1}, E_{13}^{k+1}$, с другой — в общей для них плоскости E_{23}^{k+1}, где они пересекаются по E_{23}^{k-1}. Но это пересечение может лежать только в $E^k(\nu_1)$. Поэтому $\bigcap\limits_i E^k(\nu_i) = E^{k-1}$. Отсюда следует, что для нормалей ν_α $(\alpha \neq 1)$ будет

$$A(Q, \nu_\alpha) = \left(\begin{array}{c|c} C^\alpha & 0 \\ \hline b^{\alpha_1} & \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right),$$

где b^α — k-мерные векторы. Так как $j \leqslant 1$ и

$$\det \begin{pmatrix} C^1 & \lambda b^\alpha + \mu b^\beta \\ \lambda b^\alpha + \mu b^\beta & 0 \end{pmatrix} = 0$$

при любых λ, μ, то векторы $b^\alpha = \lambda^\alpha b$.

Повернем нормали так, чтобы лишь в одной матрице $A(Q, \nu_p)$ вектор $b^\alpha \neq 0$. Если вектор b отличен от нуля, то конусы имеют общую плоскость E^{k+1}. Это противоречит условию леммы. Поэтому $b = 0$ и в точке Q нуль-индекс $\mu(Q) = k$.

Лемма 10. *Если сильный нуль-индекс сильно* 1) $(l-2)$, 2) $(l-3)$*-параболической поверхности постоянный и порядок уплощения точек поверхности соответственно равен* 1) $l-2$, 2) $l-3$, *то поверхность является цилиндром с* 1) $(l-3)$, 2) $(l-4)$*-мерной образующей.*

Доказательство. 1) Пусть $\mu(Q)=l-2$. Перейдем к заданию поверхности в окрестности $Q_0 \in F^l$ в виде (1). Из условия теоремы следует, что на $F^{l-k}=F^2$ нет асимптотических направлений. Если коразмерность поверхности F^2 в точке Q_0 равна 3, то $j(Q_0)=0$ и по лемме 8 $\dim L=0$. Если $\dim L=1$, то (17) принимает вид

$$\frac{\partial b}{\partial u_i}\frac{\partial g^s}{\partial u_j}-\frac{\partial b}{\partial u_j}\frac{\partial g^s}{\partial u_i}=0. \tag{18}$$

Допустим система имеет нетривиальное решение в точке Q_0. Выберем систему координат так, чтобы ось u_1 имела направление $\operatorname{grad} b$, ось u_2 была перпендикулярна u_1. Тогда $\frac{\partial b}{\partial u_1}\neq 0$, $\frac{\partial b}{\partial u_2}=0$ **(19)**. Из (18), (19) следует, что $\frac{\partial g^s}{\partial u_2}=0$ **(20)**. Из симметричности матрицы $B\Omega$, где $B=\left(\frac{\partial g^s}{\partial u_j}\right)$, и из (20) следует, что $\Omega^\alpha_{s2}\frac{\partial g^s}{\partial u_1}=0$ и матрица

$$B\Omega^\alpha=\begin{pmatrix} c & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\ \text{где}\ c=\Omega^\alpha_{s1}\frac{\partial g^s}{\partial u_1}.$$

Выберем нормаль N_α так, чтобы $\det\Omega^\alpha\neq 0$. Тогда из (10) следует, что

$$\det(\Omega^\alpha+B\Omega^\alpha)=(\Omega^\alpha_{11}+cv)\,\Omega^\alpha_{22}-(\Omega^\alpha_{12})^2\neq 0 \tag{21}$$

при любых v. Это будет лишь тогда, когда либо $\Omega^\alpha_{s1}\frac{\partial g^s}{\partial u_1}=0$, либо $\Omega^\alpha_{22}=0$, т. е. либо вектор $g=\left(\frac{\partial g^s}{\partial u_1}\right)$, либо вектор $(0,1)$ является асимптотическим направлением поверхности $F^{l-k}=F^2$ и поверхности F^l. Это противоречит предположению, что размерность асимптотической плоскости равна $l-2$. Поэтому предположение, что система (8) имеет нетривиальное решение, неверно. Так как $\frac{\partial b_\delta}{\partial u_i}=0$ и $b_\delta(Q_0)=0$, то $b_\delta=0$. Из (16) следует, что $B_\delta=0\,(\delta=l-k+1,\ \ldots,\ l-1)$. Из (8) получаем, что $\frac{\partial S_\delta}{\partial u_i}=0$ $(i=1,\ldots,l-k)$. Отсюда $S_\delta=e_\delta$ и в окрестности Q_0 поверхность F есть цилиндр с $(l-3)$-мерной образующей. Из связности поверхности и постоянства сильного нуль-индекса следует, что поверхность является цилиндром с $(l-3)$-мерной образующей.

2) Пусть $\mu(Q)=l-3$. Если $j(Q)=0$, то $\dim L=0$ и поверхность есть цилиндр с $(l-3)$-мерной образующей. При $j(Q)=1$ по лемме 8 $\dim L\leqslant 2$. Если $\dim L\neq 0$, то $\det\sum\limits_\alpha \lambda_\alpha B_q\Omega^\alpha=0$ при всех λ_α, иначе неравенство (9) будет третьей степени относительно v, и при

некотором действительном значении v не выполняется Поэтому формы $B_q\Omega$ можно привести одновременно к виду

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & \begin{matrix} c_1 \\ c_2 \end{matrix} \\ \hline c_1\, c_2 & 0 \end{array}\right), \ \textbf{(21)} \text{ или } \left(\begin{array}{c|c} * & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \hline 0\ 0 & 0 \end{array}\right). \tag{22}$$

а) Если формы $B_q\Omega$ приводятся к виду (22), то формы B_q в последней строке имеют только нули, т. е. $\frac{\partial g_\gamma^k}{\partial u_3} = 0$.

Если точечная коразмерность поверхности, т. е. размерность пространства вторых квадратичных форм, меньше 3, то либо $j = 0$, либо порядок уплощения больше $l - 3$, так как справедлива.

Лемма 11 (Калаби). *Пусть $A_1(x, x)$ и $A_2(x, x)$ — две квадратичные формы в E^m $(m > 2)$. Если $A_1^2 + A_2^2 > 0$ для любого $x \in E^m \setminus 0$, то существует такая линейная комбинация $A_1(x, x)$ и $A_2(x, x)$ с действительными коэффициентами, которая положительно определена.*

Поэтому для определенности считаем, что точная коразмерность равна 3. Так как матрицы $B_\gamma\Omega$ симметричны, то для любой второй квадратичной формы (Ω_{ij}^α) выполняются равенства:

$$\begin{gathered} \frac{\partial g_\gamma^1}{\partial u_1}\Omega_{31}^\alpha + \frac{\partial g_\gamma^2}{\partial u_1}\Omega_{32}^\alpha + \frac{\partial g_\gamma^3}{\partial u_1}\Omega_{33}^\alpha = 0; \\ \frac{\partial g_\gamma^1}{\partial u_2}\Omega_{31}^\alpha + \frac{\partial g_\gamma^2}{\partial u_2}\Omega_{32}^\alpha + \frac{\partial g_\gamma^3}{\partial u_2}\Omega_{33}^\alpha = 0. \end{gathered} \tag{23}$$

Для векторов $\Omega_3^\alpha(\Omega_{13}^\alpha, \Omega_{23}^\alpha, \Omega_{33}^\alpha)$ $(\alpha = 1, 2, 3)$ справедливо одно из следующих условий:

1) Три вектора Ω_3^α линейно независимы. Тогда $\dim L = 0$;
2) Два вектора линейно независимы. Тогда

$$B_1 = \begin{pmatrix} \frac{\partial g^1}{\partial u_1} & \frac{\partial g^2}{\partial u_1} & \frac{\partial g^3}{\partial u_1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ c\frac{\partial g^1}{\partial u_1} & c\frac{\partial g^2}{\partial u_1} & c\frac{\partial g^3}{\partial u_1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{24}$$

Подставив значения B_γ в (9), получим

$$\det\begin{pmatrix} 1 + \rho\lambda\frac{\partial g^1}{\partial u_1} & \rho\lambda\frac{\partial g^2}{\partial u_1} & \rho\lambda\frac{\partial g^3}{\partial u_1} \\ \rho\mu\frac{\partial g^1}{\partial u_1} & 1 + \rho\mu\frac{\partial g^2}{\partial u_1} & \rho\mu\frac{\partial g^3}{\partial u_1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \rho\left(\mu\frac{\partial g^2}{\partial u_1} + \lambda\frac{\partial g^1}{\partial u_1}\right) + 1 \neq 0.$$

Он не равен 0 лишь при $\frac{\partial g^2}{\partial u_1}=\frac{\partial g^1}{\partial u_1}=0$ **(25).** Из симметричности матриц $B_\gamma\Omega^\alpha$ и (25) следует, что $\frac{\partial g^3}{\partial u_1}\Omega^\alpha_{33}=0$. Тогда либо $\frac{\partial g^3}{\partial u_1}=0$ и $\dim L=0$, либо $\Omega^\alpha_{33}=0$ и тогда порядок уплощения равен $l-2$, что противоречит предположению.

3) Один вектор $\Omega^3_3\neq 0$. Тогда

$$\Omega^1=\left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{*} & 0\\ & & 0\\ \hline 0 & 0 & 0\end{array}\right),\quad \Omega^2=\left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{*} & 0\\ & & 0\\ \hline 0 & 0 & 0\end{array}\right),\quad \Omega^3=\left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{0} & \Omega^3_{13}\\ & & \Omega^3_{23}\\ \hline \Omega^3_{13} & \Omega^3_{23} & \Omega^3_{33}\end{array}\right).$$

Из симметричности матриц $B_\gamma\Omega^\alpha$ следует, что

$$\begin{gathered}\left(\frac{\partial g^1_\gamma}{\partial u_1}-\frac{\partial g^2_\gamma}{\partial u_2}\right)\Omega^1_{12}+\frac{\partial g^2_\gamma}{\partial u_1}\Omega^1_{22}-\frac{\partial g^1}{\partial u_2}\Omega^1_{11}=0;\\ \left(\frac{\partial g^1_\gamma}{\partial u_1}-\frac{\partial g^2_\gamma}{\partial u_2}\right)\Omega^2_{12}+\frac{\partial g^2_\gamma}{\partial u_1}\Omega^2_{22}-\frac{\partial g^1}{\partial u_2}\Omega^2_{11}=0;\end{gathered}\tag{26}$$

$$\frac{\partial g^3_\gamma}{\partial u_1}\Omega^3_{23}=\frac{\partial g^3_\gamma}{\partial u_2}\Omega^3_{13};\tag{27}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial g^1_\gamma}{\partial u_1}\Omega^3_{13}+\frac{\partial g^2_\gamma}{\partial u_1}\Omega^3_{23}+\frac{\partial g^3_\gamma}{\partial u_1}\Omega^3_{33}=0;\\ \frac{\partial g^1_\gamma}{\partial u_2}\Omega^3_{13}+\frac{\partial g^2_\gamma}{\partial u_2}\Omega^3_{23}+\frac{\partial g^3_\gamma}{\partial u_2}\Omega^3_{33}=0.\end{gathered}\tag{28}$$

Подставляя (27) в (28) и вычитая одно уравнение из другого, получим

$$\left(\frac{\partial g^1_\gamma}{\partial u_1}-\frac{\partial g^2_\gamma}{\partial u_2}\right)\Omega^3_{13}\Omega^3_{23}+\frac{\partial g^2_\gamma}{\partial u_1}(\Omega^3_{23})^2-\frac{\partial g^2_\gamma}{\partial u_2}(\Omega^2_{13})^2=0.\tag{29}$$

Рассмотрим систему трех уравнений (26), (29) относительно неизвестных $\frac{\partial g^1_\gamma}{\partial u_1}-\frac{\partial g^2_\gamma}{\partial u_2}$, $\frac{\partial g^2_\gamma}{\partial u_1}$, $\frac{\partial g^2_\gamma}{\partial u_2}$. Либо система имеет тривиальное решение и с учетом неравенства (9) $\frac{\partial g^1_\gamma}{\partial u_1}=\frac{\partial g^2_\gamma}{\partial u_1}=0$, либо найдется нормаль, относительно которой матрица $\begin{pmatrix}\Omega_{11} & \Omega_{12}\\ \Omega_{12} & \Omega_{22}\end{pmatrix}$ положительно определена. В первом случае из (28) следует, что $\frac{\partial g^3_\gamma}{\partial u_1}\Omega^3_{33}=\frac{\partial g^3_\gamma}{\partial u_2}\Omega^3_{33}=0$. Это возможно при $\dim L=0$, или $\Omega^3_{33}=0$, что противоречит предполагаемому порядку уплощения. Во втором случае неравенство (9) не выполняется.

б) Пусть формы $B_q\Omega$ ($\det\Omega \neq 0$) одновременно приводятся к виду (21). По лемме 8 $\dim L \leqslant 2$. Предположим, что $\dim L = 2$. Тогда

$$B_1\Omega = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \begin{matrix} c_1 \\ 0 \end{matrix} \\ \hline c_1 0 & 0 \end{array}\right),\quad B_2\Omega = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \begin{matrix} 0 \\ c_2 \end{matrix} \\ \hline 0 c_2 & 0 \end{array}\right),\quad \Omega^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix},$$

где a_i — векторы строк. Тогда

$$B_1 = \begin{pmatrix} c_1 a_3 \\ 0 \\ c_1 a_1 \end{pmatrix},\quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ c_2 a_3 \\ c_2 a_2 \end{pmatrix}.$$

Пусть $\Omega^\alpha = (\Omega_1^\alpha, \Omega_2^\alpha, \Omega_3^\alpha)$, где Ω_i^α — векторы столбцов. Из симметричности $B_\gamma\Omega^\alpha$ следует

$$\begin{gathered} c_1 a_3 \Omega_2^\alpha = 0,\quad c_1 a_1 \Omega_2^\alpha = 0,\quad c_1 a_3 \Omega_3^\alpha = c_1 a_1 \Omega_1^\alpha, \\ c_2 a_3 \Omega_1^\alpha = 0,\quad c_2 a_2 \Omega_1^\alpha = 0,\quad c_2 a_3 \Omega_3^\alpha = c_2 a_2 \Omega_2^\alpha. \end{gathered} \tag{30}$$

1) Пусть среди векторов Ω_1^α ($\alpha = 1, 2, 3$) есть по крайней мере два линейно независимых вектора. Тогда $c_2 = 0$ и $\dim L = 1$. Из равенства $\frac{\partial b_\delta}{\partial u_i}\frac{\partial g^k}{\partial u_2} = \frac{\partial b_\delta}{\partial u_2}\frac{\partial g^k}{\partial u_i}$ ($i \neq 2$) следует, что $\frac{\partial b_\delta}{\partial u_2} = 0$. Из равенства $\frac{\partial b_\delta}{\partial u_3}\frac{\partial g^k}{\partial u_1} = \frac{\partial b_\delta}{\partial u_1}\frac{\partial g^k}{\partial u_3}$ следует, что $c_1 = 0$ и $\dim L = 0$, или $\frac{\partial b_\delta}{\partial u_1} = \frac{\partial b_\delta}{\partial u_3} = 0$.

2) Пусть векторы $\Omega_1^\alpha = \lambda_\alpha \Omega_1$, $\Omega_2^\alpha = \mu_\alpha \Omega_2$. Тогда можно так выбрать базис нормалей, что

$$\Omega^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Omega_{33}^1 \end{pmatrix},\quad \Omega^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Omega_{22}^2 & \Omega_{23}^2 \\ 0 & \Omega_{32}^2 & 0 \end{pmatrix},\quad \Omega^3 = \begin{pmatrix} \Omega_{11}^3 & 0 & \Omega_{13}^3 \\ 0 & 0 & 0 \\ \Omega_{31}^3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Из (30) следует, что $c_1 a_3 \Omega_2^2 = c_2 a_3 \Omega_1^3 = c_1 a_3 \Omega_3^3 = c_2 a_3 \Omega_3^3 = 0$. Векторы Ω_2^2, Ω_1^3, Ω_3^3 линейно независимы, если $\Omega_{22}^2 \Omega_{11}^3 \neq 0$. Но в случае равенства нулю размерность асимптотической плоскости равна $l-2$, что противоречит предположению. Поэтому $c_1 c_2 = 0$ и $\dim L = 1$. Дальнейшее доказательство совпадает со случаем 1).

Теорема 5. *Если порядок уплощения полной* 1) $(l-2)$, 2) $(l-3)$-*параболической поверхности в каждой точке равен* 1) $l-2$, 2) $l-3$ *и сильный нуль-индекс постоянный, то поверхность является цилиндром с* 1) $(l-3)$, 2) $(l-4)$-*мерной образующей.*

Доказательство непосредственно следует из лемм 9, 10.

Без дополнительного требования на порядок уплощения теорема неверна, имеется соответствующий пример.

Аналог этих теорем имеет место для симметрических пространств ранга один.

Список литературы: 1. *Chern S. S., Kuiper N. H.* Some theorems on the isometric imbedding of compact Riemann manifolds in Euclidean Space.— Ann. Math., 1952, **56**, p. 422—430. 2. *Hartman P.* On isometrie immersions in Euclidean space of manifolds with non negative sectional curvatures.— Trans. Amer. Math. Soc., 1970, **147**, p. 529—540. 3. *Борисенко А. А.* О строении непрерывной поверхности, содержащей прямую.— Укр. геометр. сб., 1973, вып. 13, с. 21—24. 4. *Борисенко А. А.* О внешние геометрических свойствах параболических поверхностей и топологических свойствах седловых поверхностей в симметрических пространствах ранга один.— Мат. сб., 1981, **116 (158)**, № 3 (11), с 440—457. 5. *Cheeger J., Gromoll D.* The splitting theorem for manifolds of non negative Ricci curvature.— J. Dif. geom., 1971, № 1, p. 119—129. 6. *Cheng S. J.* Eigenvalue comparison theorems and its geometric Applications.— Math. Z., 1975, **143**, p. 285—297. 7. *Борисенко А. А.* О полных поверхностях в пространствах постоянной кривизны.— Укр. геометр. сб., 1974, вып. 15, с. 8—15. 8. *Abe K.* A characterization of totally geodesic hypersurfaces of S^{n+1} and CP^{n+1} — Proc. Amer. Math. Soc., 1981, **81**, № 4, p. 603—606. 9. *Maltz R.* The nullity spaces of curvature like tensors.— J. Dif. geom., 1972, **6**, № 3—4, p. 519—529. 10. *Franke F.* Manifolds with positive curvature.— Pasif. J. Math., 1961, **11**, p. 165—174. 11. *Акивис М. А., Рыжков В. В.* Многомерные поверхности специальных проективных типов.— Тр. 4-й Всесоюз. мат. съезда, Л., 1963, 2, 350 с.

Поступила в редколлегию 01.11.82.

УДК 513

А. Б. Брысьев

ОЦЕНКА ОБЛАСТИ РЕГУЛЯРНОСТИ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ

В геометрии известен следующий результат Н. В. Ефимова: если над квадратом $|x| \leqslant a$, $|y| \leqslant a$ задана поверхность вида $z = f(x, y)$ отрицательной гауссовой кривизны $K \leqslant -\alpha^2 < 0$, ($\alpha = \text{const}$, $f \in C^2$), то сторона квадрата $2a$ оценивается сверху в зависимости от α; при $\alpha = 1$ теорема Н. В. Ефимова [1] дает: $2a \leqslant 19$. Исследования Н. В. Ефимова были продолжены Е. Хайнцем [2], получившим в зависимости от α оценку радиуса круга $x^2 + y^2 \leqslant R^2$, над которым может быть задана поверхность вида $z = f(x, y)$ с кривизной $K \leqslant -\alpha^2 < 0$. Результаты Н. В. Ефимова и Е. Хайнца [1, 2] допускают физическую интерпретацию [3].

В настоящей заметке доказано утверждение, обобщающее теорему Хайнца [2].

Теорема. *Пусть функция* $z = z(x, y) \in C^2$ *удовлетворяет неравенству*

$$z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 \leqslant -\alpha(1 + z_x^2 + z_y^2)^k \tag{1}$$

($\alpha > 0$, $k > 1$) *в круге* $x^2 + y^2 \leqslant R^2$. *Тогда*

$$R \leqslant \begin{cases} \left(\dfrac{k+1}{\alpha}\right)^{1/2} (k-1)^{1/(k-2)}, & \text{если } k \neq 2, \\ e\sqrt{\dfrac{3}{\alpha}}, & \text{если } k = 2. \end{cases} \tag{2}$$

Эта теорема позволяет, в частности, оценивать размеры областей регулярности решений некоторых дифференциальных уравнений Монжа—Ампера гиперболического типа и нелинейных дифференциальных неравенств.

Доказательство разобьем на несколько этапов.

1. При $k=2$ оценка (2) получена в работе [2].

2. По условию $z=z(x, y)\in C^2$ в круге $x^2+y^2\leqslant R^2$. Положим $\tilde{z}(\rho, \psi)=z(\rho\cos\psi, \rho\sin\psi)$. Тогда для любого r, $0<r<R$, справедливо тождество

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial\tilde{z}}{\partial\psi}\right)^2 d\psi\right)=\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial\tilde{z}}{\partial\rho}\right)^2_{\rho=r} d\psi+2\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant r^2}(z_{xy}^2-z_{xx}z_{yy})\,dx\,dy. \quad (3)$$

В самом деле,

$$\oint\limits_{x^2+y^2=r^2} z_x\,dz_y-z_y\,dz_x=2\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant r^2}(z_{xx}z_{yy}-z_{xy}^2)\,dx\,dy;$$

$$\oint\limits_{x^2+y^2=r^2} z_x\,dz_y-z_y\,dz_x=\int_0^{2\pi}\left(\frac{\tilde{z}_\psi^2}{\rho^2}+\tilde{z}_\rho^2+\frac{\tilde{z}_\rho\tilde{z}_{\psi\psi}}{\rho}-\frac{\tilde{z}_{\rho\psi}\tilde{z}_\psi}{\rho}\right)_{\rho=r}d\psi;$$

сопоставляя эти два равенства, получим соотношение (3).

3. Введем функцию $f(r)=\int_0^r\rho\,d\rho\int_0^{2\pi}\left(1+\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial\tilde{z}}{\partial\psi}\right)^2\right)d\psi$. Она принадлежит классу C^2 и $f(r)\geqslant\pi r^2$ (4) при $0<r<R$. Использовав неравенство Гельдера, получим для $f(r)$ оценку сверху

$$f(r)\leqslant\left(\int_0^{2\pi}d\psi\int_0^r\rho\,d\rho\right)^{1-1/k}\left(\int_0^{2\pi}d\psi\int_0^r\left(1+\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial\tilde{z}}{\partial\psi}\right)^2\right)^k\rho\,d\rho\right)^{\frac{1}{k}}.$$

Отсюда, поскольку $\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial\tilde{z}}{\partial\psi}\right)^2\leqslant z_x^2+z_y^2$, следует

$$f(r)\leqslant(\pi r^2)^{1-1/k}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant r^2}(1+z_x^2+z_y^2)^k\,dx\,dy)^{1/k}.$$

Из этого неравенства, используя (1) и (3), получим неравенство

$$f''(r)\geqslant\frac{2\alpha f^k(r)}{(\pi\tilde{r}^2)^{k-1}}.$$

Для всех $0<\rho<r$ интегрированием его получим

$$f'(\rho)/f^{\frac{k+1}{2}}(\rho)\geqslant 2\sqrt{\frac{\alpha}{k+1}}\Big/(\pi r^2)^{\frac{k-1}{2}}.$$

Переходя к пределу при $\rho \to r$ и интегрируя по r от R_1 до R_2 $(0 < R_1 < R_2 < R)$ при $k \neq 2$, получаем

$$\frac{1}{k-1}\left(f^{\frac{1-k}{2}}(R_1) - f^{\frac{1-k}{2}}(R_2)\right) \geqslant \frac{1}{2-k}\sqrt{\frac{\alpha}{k+1}}\frac{1}{\pi^{\frac{k-1}{2}}}(R_2^{2-k} - R_1^{2-k}).$$

Учитывая (4), преобразуем это неравенство к виду

$$\frac{1}{k-1}R_1^{1-k} \geqslant \frac{1}{2-k}\sqrt{\frac{\alpha}{k+1}}(R_2^{2-k} - R_1^{2-k}).$$

4. Пусть $1 < k < 2$. Устремив в последнем неравенстве R_2 к R, получим

$$R^{2-k} \leqslant \frac{2-k}{k-1}\sqrt{\frac{k+1}{\alpha}}R_1^{1-k} + R_1^{2-k}. \tag{5}$$

Минимум правой части неравенства (5) достигается при $R_1 = \sqrt{\frac{k+1}{\alpha}}$ и равен $\frac{1}{k-1}\left(\frac{k+1}{\alpha}\right)^{\frac{2-k}{2}}$; значит,

$$R^{2-k} \leqslant \frac{1}{k-1}\left(\frac{k+1}{\alpha}\right)^{\frac{2-k}{2}},$$

откуда и следует искомая оценка.

5. Пусть $k > 2$. В этом случае совершенно аналогично получается неравенство с теми же правой и левой частями, что и в (5), только с противоположным знаком. Все дальнейшие рассуждения повторяются с этим знаком дословно и приводят к требуемой оценке (2). Теорема доказана.

Отметим, что оценка Е. Хайнца [2] является предельным случаем первого из неравенств (2) при $k = 2$.

Настоящая работа выполнена под руководством чл.-кор. АН СССР Н. В. Ефимова.

Список литературы: 1. *Ефимов Н. В.* Исследование однозначной проекции поверхности отрицательной кривизны.— Докл. АН СССР, 1953, 93, № 4. 2. *Heinz E.* Über Flächen mit eineindeutiger Projektion auf eine Ebene, deren Krümungen durch Ungleichungen eingeschränkt sind.— Math. Ann., 1955, **129**, № 5, p. 451—454. 3. *Розендорн Э. Р.* Редукция одной задачи метеорологии к геометрической задаче.— Усп. мат. наук, 1980, **75**, № 6, с. 167—168.

Поступила в редколлегию 13.07.83.

УДК 513

Н. И. Глова

О ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ КРИВИЗНЕ ИНТЕГРАЛЬНОЙ КРИВОЙ ДВУМЕРНОГО ПФАФФОВА МНОГООБРАЗИЯ в E_4

1. Основные сведения и определения. В четырехмерном евклидовом пространстве с криволинейной системой координат x^1, x^2, x^3, x^4 рассмотрим подвижный репер $R(A\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_4)$. Бесконечно малое перемещение этого репера в пространстве E_4

$$dA = \omega^i \boldsymbol{e}_i, \quad d\boldsymbol{e}_i = \omega_i^k \boldsymbol{e}_k \tag{1.1}$$

определяется линейными дифференциальными формами Пфаффа ω^i, ω_i^k, которые удовлетворяют уравнениям структуры евклидова пространства E_4:

$$D\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i, \quad D\omega_i^k = \omega_i^j \wedge \omega_j^k. \tag{1.2}$$

В настоящей работе индексы принимают следующие значения: $i, j, k, \ldots = 1, 2, 3, 4$; $a, b, c, \ldots = 1, 2$; $\alpha, \beta, \gamma, \ldots = 3, 4$. По одинаковым индексам разных уровней проводится суммирование в соответствующих пределах.

В каждой точке A пространства E_4 зададим проходящую через нее 2-плоскость $T(A)$ — будем называть ее касательной 2-плоскостью. Векторы $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ репера R расположим в указанной 2-плоскости; векторы $\boldsymbol{e}_3$ и $\boldsymbol{e}_4$ — в ортогональной ей в точке A 2-плоскости $N(A)$-нормальной 2-плоскости. Этим задается двумерное распределение Δ в пространстве E_4. Интегральные кривые этого распределения образуют в каждой точке пространства пфаффово (или неголономное) многообразие.

В силу ортонормированности векторов $\{\boldsymbol{e}_i\}$ репера R имеют место соотношения: $\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j = \delta_{ij}$, где δ_{ij} — символы Кронекера. Продифференцировав эти равенства и воспользовавшись формулами (1.1), получим $\omega_i^k = -\omega_k^i$ **(1.3)**.

Выберем дифференциальные формы ω^i в качестве базисных; при этом формы ω_i^k можно представить как линейные комбинации дифференциальных форм ω^i: $\omega_i^k = \Gamma_{ij}^k \omega^j$ **(1.4)**.

Для смещения точки A в касательной 2-плоскости $(A\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2)$ выполняются условия $\omega^\alpha = 0$ **(1.5)**. Система дифференциальных уравнений (1.5) определяет пфаффово многообразие. Для полной интегрируемости этой системы дифференциальных уравнений необходимо и достаточно выполнения условий интегрируемости: $D\omega^\alpha \wedge \wedge \omega^3 \wedge \omega^4 = 0$. Используя уравнения (1.2), (1.4), (1.5), условия интегрируемости получим в виде $\Gamma_{12}^\alpha = \Gamma_{21}^\alpha = 0$ **(1.6)**. Когда условия (1.6) выполнены в некоторой окрестности точки A, интегральным многообразием системы дифференциальных уравнений (1.5) является двумерная поверхность в E_4, касающаяся плоскости $T(A)$. В противном случае интегральное многообразие этой системы уравнений суть кривые, которые в этой точке A касаются 2-плоскости $T(A)$.

2. Обобщенная геодезическая кривизна. Индикатриса обобщенной геодезической кривизны. Рассмотрим интегральную кривую C распределения Δ с касательным вектором $\boldsymbol{\tau} = \frac{d\boldsymbol{A}}{ds} = \frac{\omega^a}{ds}\boldsymbol{e}_a = v^a\boldsymbol{e}_a$, где s — натуральный параметр кривой C. Проекция вектора $\frac{d^2\boldsymbol{A}}{ds^2}$ на касательную 2-плоскость $T(A)$ этого распределения в работе [1] названа вектором геодезической кривизны $\boldsymbol{k}_g$ выбранной интегральной кривой в точке A.

Продифференцируем первое равенство системы деривационных формул (1.1) и воспользовавшись (1.1), получим $d^2\boldsymbol{A} = d\omega^i\boldsymbol{e}_i + \omega^i\omega_i^k\boldsymbol{e}_k$. Проектируя векторы последнего равенства на касательную 2-плоскость $T(A)$, получим $\boldsymbol{k}_g = \left(\frac{d^2\omega^a}{ds^2} + \frac{\omega^b}{ds}\frac{\omega_b^a}{ds}\right)\boldsymbol{e}_a$ или, используя (1.4), $\boldsymbol{k}_g = \left(\frac{dv^a}{ds} + \Gamma_{bc}^a v^b v^c\right)\boldsymbol{e}_a$.

Полусумма векторов геодезических кривизн интегральных кривых, определенных векторами с противоположными направлениями $1/2(\boldsymbol{k}_{g_1} + \boldsymbol{k}_{g_2})$, образует вектор $\boldsymbol{k}_G$ касательной 2-плоскости распределения Δ, не зависящий от выбранных интегральных кривых, а определенный только направлением исходной интегральной кривой

$$\boldsymbol{k}_G = \frac{1}{2}(\boldsymbol{k}_{g1} + \boldsymbol{k}_{g2}) = \Gamma_{bc}^a v^b v^c \boldsymbol{e}_a. \qquad (2.1)$$

Этот вектор назовем вектором обобщенной геодезической кривизны исходной интегральной кривой. Все интегральные кривые распределения Δ, имеющие в точке A общую касательную, имеют в этой точке одну и ту же обобщенную геодезическую кривизну.

При изменении направления вектора $\boldsymbol{\tau}$ в касательной 2-плоскости $T(A)$ конец вектора $\boldsymbol{k}_G$ опишет в ней кривую, которую, по аналогии с индикатрисой нормальной кривизны, назовем индикатрисой обобщенной геодезической кривизны.

В силу единичности вектора $\boldsymbol{\tau}$, имеем

$$(v^1)^2 + (v^2)^2 = 1. \qquad (2.2)$$

Обозначим через x^1, x^2 координаты вектора $\boldsymbol{k}_G$ в касательной 2-плоскости $(A\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2)$ распределения Δ. Из выражений (2.1) и (2.2) можно записать $x^a((v^1)^2 + (v^2)^2) = \Gamma_{bc}^a v^b v^c$. Разделив обе части этих равенств на $(v^2)^2$ и обозначив $v^1/v^2 = t$, получим $(x^a - \Gamma_{11}^a)t^2 -$

$-(\Gamma^a_{12}+\Gamma^a_{21})\,t+(x^a-\Gamma^a_{22})=0$, $a=1,\ 2$. Исключая из этой системы уравнений параметр t, приходим к уравнению

$$\begin{vmatrix} x^1-\Gamma^1_{11} & \Gamma^1_{12}+\Gamma^1_{21} \\ x^2-\Gamma^2_{11} & \Gamma^2_{12}+\Gamma^2_{21} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \Gamma^1_{12}+\Gamma^1_{21} & x^1-\Gamma^1_{22} \\ \Gamma^2_{12}+\Gamma^2_{21} & x^2-\Gamma^2_{22} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x^1-\Gamma^1_{11} & x^1-\Gamma^1_{22} \\ x^2-\Gamma^2_{11} & x^2-\Gamma^2_{22} \end{vmatrix}^2 = 0, \tag{2.3}$$

которое определяет индикатрису обобщенной геодезической кривизны. Это кривая второго порядка. Ее основные инварианты

$$\delta = 2^4 \begin{vmatrix} \Gamma^1_{12}+\Gamma^1_{21} & \Gamma^1_{11}-\Gamma^1_{22} \\ \Gamma^2_{12}+\Gamma^2_{21} & \Gamma^2_{11}-\Gamma^2_{22} \end{vmatrix}^2; \quad \Delta = -2^4 \begin{vmatrix} \Gamma^1_{12}+\Gamma^1_{21} & \Gamma^1_{11}-\Gamma^1_{22} \\ \Gamma^2_{12}+\Gamma^2_{21} & \Gamma^2_{11}-\Gamma^2_{22} \end{vmatrix}^4.$$

Ясно, что индикатриса обобщенной геодезической кривизны распределения Δ в точке A является либо эллипсом, либо вырождается в отрезок.

Если она не вырождается, ее центром служит точка касательной 2-плоскости $T(A)$ с координатами $x^a_0=(\Gamma^a_{11}+\Gamma^a_{22})/2$.

3. Средняя геодезическая кривизна распределения Δ. В работе [1] вектором средней кривизны распределения Δ в точке A назван вектор нормальной 2-плоскости $N(A)$, совпадающий с полусуммой векторов нормальных кривизн произвольной ортогональной пары интегральных кривых распределения Δ. Проведем аналогичные построения для векторов обобщенных геодезических кривизн.

Выберем в касательной 2-плоскости $T(A)$ ортонормированную пару направлений $v^a\boldsymbol{e}_a$ и $w^a\boldsymbol{e}_a$. Для них имеют место равенства

$$\begin{gathered}(v^1)^2+(v^2)^2=1;\quad (w^1)^2+(w^2)^2=1;\quad (w_1)^2=(v^2)^2;\\ (w^2)^2=(v^1)^2;\quad v^1w^1+v^2w^2=0;\quad v^1w^2-v^2w^1=1.\end{gathered} \tag{3.1}$$

Для произвольно выбранной пары интегральных кривых распределения Δ, касающихся выбранных направлений, рассмотрим полусумму векторов обобщенных геодезических кривизн. Учитывая представление вектора $\boldsymbol{k}_G$ (2.1) и равенства (3.1), получим инвариантный вектор касательной 2-плоскости $T(A)$

$$\boldsymbol{H}_G = 1/2\,(\boldsymbol{k}_{G1}+\boldsymbol{k}_{G2}) = \frac{1}{2}\,(\Gamma^a_{11}+\Gamma^a_{22})\,\boldsymbol{e}_a, \tag{3.2}$$

который назовем вектором средней геодезической кривизны распределения Δ в рассматриваемой точке.

Возвращаясь к уравнению (2.3) индикатрисы обобщенной геодезической кривизны, можно заметить, что, если эта кривая не вырождается, центр ее лежит в точке, определенной вектором (3.2), т. е. вектор, соединяющий точку A с центром индикатрисы обобщенной геодезической кривизны распределения Δ в точке A, совпадает с вектором средней геодезической кривизны распределения в этой точке.

4. **Четвертая квадратичная форма интегральной кривой распределения Δ.** Четвертой квадратичной формой интегральной кривой распределения Δ будем называть выражение

$$\mathrm{IV} = \frac{1}{2}((\omega_1^1)^2 + (\omega_1^2)^2 + (\omega_2^1)^2 + (\omega_2^2)^2).$$

Покажем, что отношение четвертой квадратичной формы к первой (см. [2]*) является скалярным инвариантом произвольной интегральной кривой.

Действительно, учитывая вытекающие из условий (1.3) соотношения $\Gamma^a_{ab} = 0$ и представление вектора обобщенной геодезической кривизны $\boldsymbol{k}_G$ (2.1), можно получить

$$\frac{IV}{I} = \frac{1}{2}\frac{(\omega_1^1)^2 + (\omega_1^2)^2 + (\omega_2^1)^2 + (\omega_2^2)^2}{(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2} = \boldsymbol{k}_G^2. \tag{4.1}$$

Выражение (4.1) сопоставляет каждой интегральной кривой распределения Δ определенный скалярный инвариант — квадрат модуля вектора обобщенной геодезической кривизны. Из (4.1) следует, что этот инвариант зависит лишь от величин Γ^a_{bc} и отношения $\omega^1 : \omega^2$, определяющего направление, касательное к интегральной кривой. Следовательно, этот инвариант имеет одно и то же значение для касающихся интегральных линий распределения Δ. Это дает аналог теоремы Менье.

В выбранном репере координатными линиями могут быть две интегральные кривые распределения Δ со взаимно ортогональными касательными векторами.

Координатная линия $\omega^2 = 0$ имеет вектор обобщенной геодезической кривизны $\boldsymbol{k}_{G1} = \Gamma^a_{11}\boldsymbol{e}_a$, такой же вектор для координатной линии $\omega^1 = 0$ имеет представление $\boldsymbol{k}_{G2} = \Gamma^a_{22}\boldsymbol{e}_a$.

С учетом этих представлений выражение (4.1) может быть записано

$$\frac{IV}{I} = \frac{\boldsymbol{k}^2_{Ga}(\omega^a)^2 - 2\boldsymbol{k}_{G1}\boldsymbol{k}_{G2}\omega^1\omega^2}{(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2} = \frac{(\boldsymbol{k}_{G1}\omega^1 - \boldsymbol{k}_{G2}\omega^2)^2}{(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2}. \tag{4.2}$$

Пусть касательная к произвольно выбранной интегральной кривой образует угол φ с вектором $\boldsymbol{e}_1$ репера R, тогда $\omega^1 : \omega^2 =$

---

* В работе [2, п. 2] в определении вектора среднего геодезического кручения допущена ошибка: вектором среднего геодезического кручения распределения Δ в точке A следует называть полусумму (а не полуразность) векторов геодезического кручения любой ортогональной пары интегральных линий этого распределения. При этом представление этого вектора (2.4) в указанной статье остается верным. Этот вектор является радиусом-вектором центра индикатрисы геодезического кручения, т. е. кривой нормальной 2-плоскости, которую описывает конец вектора геодезического кручения при непрерывном изменении направления. Индикатриса геодезического кручения представляет собой эллипс или вырождается. Условия вырождения этой коники совпадают с условиями вырождения эллипса нормальной кривизны распределения Δ (см. [1]).

$= \cos\varphi : \sin\varphi$. Подставляя это отношение в равенство (4.2) с учетом (4.1), получим

$$\boldsymbol{k}_G^2 = (\boldsymbol{k}_{G1}\cos\varphi - \boldsymbol{k}_{G2}\sin\varphi)^2. \tag{4.3}$$

Это равенство является аналогом теоремы Эйлера. Из него следует, что для любой ортогональной пары интегральных линий распределения Δ сумма квадратов модулей векторов обобщенных геодезических кривизн постоянна.

Теорема. *Для любой ортогональной пары интегральных линий распределения Δ сумма квадратов модулей векторов обобщенных геодезических кривизн постоянна.*

Список литературы: 1. *Глова Н. И.* К теории кривизны системы интегральных кривых двух уравнений Пфаффа в E_4.— Укр. геометр. сб., 1975, вып. 18, с. 37—48. 2. *Глова Н. И.* К теории кривизны двумерного распределения четырехмерного евклидова пространства.— Укр. геометр. сб., 1983, вып. 26, с. 30—40.

Поступила в редколлегию 29.08.83

УДК 513

А. М. Гурин

РЕАЛИЗАЦИЯ СЕТЕЙ ВЫПУКЛЫХ МНОГОГРАННИКОВ С РАВНОУГОЛЬНЫМИ ВЕРШИНАМИ. 3

В статье [1] была доказана теорема: в трехмерном евклидовом пространстве существует с точностью до изоморфизма не более двухсот сорока трех замкнутых выпуклых многогранников с равноугольными вершинами, не являющихся правильными, двойственными полуправильным, бипирамидами или двойственными антипризмам.

Доказательство теоремы состоит в построении всех возможных сетей ребер рассматриваемых многогранников (обозначение $M_{1.i}$ или кратко M) путем подклеивания к исходной грани других граней с соблюдением необходимых ограничений. Эти построения проведены по такому плану: 1) все возможные типы граней упорядочены [2, лемма 1]; 2) грань каждого типа по очереди берется за исходную и строятся все возможные ее продолжения до сети многогранника M или обнаруживается невозможность такого продолжения, и этот тип грани уже не участвует в построениях с исходной гранью следующих типов; 3) полученные сети проверяются на реализуемость в виде многогранника M. Сети, уже оказавшиеся нереализуемыми, не вошли в указанное в теореме число 243.

Объем статьи [1] не позволил привести все доказательство теоремы полностью. Здесь будет дано полное доказательство приведенной теоремы при продолжениях граней типа $(3, k, n)$ до многогранника M и рассмотрен вопрос реализации полученных сетей. Эти сети приведены в таблице или подробно описаны в тексте.

Теорема. *Грани типа $(3, k, n)$ принадлежат лишь многогранникам $M_{1,1} - M_{1,18}$, правильному тетраэдру и треугольной бипирамиде.*

Напомним некоторые символы, введенные в [2]: (l, l, n) или (l^2, n) означает тип грани — треугольная грань с двумя l-гранными и одной n-гранной вершинами. Символ $[k, l]$ означает ребро, соединяющее вершины k и l; $[l, m, n]$ — угол, образованный ребрами $[l, m]$ и $[m, n]$; $\{k, l\}$ — двугранный угол при ребре $[k, l]$; $v(l)$ — мера плоского угла l-гранной вершины; $\theta[k, l] = v(k) + v(l)$. При доказательстве будут использованы многие свойства многогранников M, рассмотренные в статьях [1,2]; ссылки на них не приводятся.

1. Грани $(3, 4, n)$. В работе [2] доказано, что грань $(3^2, n)$ может принадлежать многограннику M только при $n = 3$ и только правильному тетраэдру. В работе [1] доказано, что грань $(3, 4, 4)$ может принадлежать только бипирамиде.

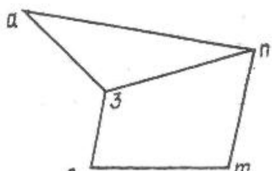


Рис. 1

Лемма 1. *Грань типа $(3, 4, 5)$ не принадлежит многограннику M.*

Доказательство. Поскольку $\theta[3, 5] < \pi$, то по ребру $[3,5]$ можно подклеить лишь грани: $(3, 5, m)$, $m = 4, \ldots, 14$, $(3, 5, 3', m)$ и $(3^2, 5, m)$, $m = 3, 4, 5$.

1. Подклеим $(3^2, 5, m)$, рис. 1, $a = 4$, $n = 5$, $p = 3$. По свободному углу $[3^2, 4]$ можно подклеить только четырехугольник $(3^2, 4, k)$, $k = 3, \ldots, 11$.

1.1 Пусть $m = 3$. Тогда $k \neq 3$, иначе $v(4) = v(5)$ и вершины 4 и 5 правильные, что невозможно. При $k \geqslant 4$ будет $v(5) < 30°$, $v(4) < 60°$, следовательно, по свободному ребру $[4, 5]$ можно подклеить лишь треугольник $(4, 5, 3)$. Теперь вершина 5 — правильная, следовательно, и вершина 4 правильная. Но грани $(3, 4, 5)$ и $(3^3, 5)$ не могут принадлежать одному многограннику с правильными вершинами.

1.2 Пусть $m = 4'$. $v(4) < 30°$. $k \neq 3$, так как вершина 4 была бы правильной и мера ее плоского угла больше $30°$. При $k = 4''$ (другие значения k не может принимать) $\theta[3, 4] = \theta[3, k] = \pi$, что невозможно, т. е. $m \neq 4'$.

1.3. В случае $m = 5$ применимы рассуждения пункта 1.2.

2. Подклеим $(3, 5, 3', m)$. При $m = 3$ получим условие пункта 1.1.

2.1. Пусть $m = 4'$; тогда $v(4) < 30°$, $\theta(4, 3, m] < 240°$ и, значит, по $[4, 3, m]$ ничего нельзя подклеить.

2.2. Пусть $m = 5$. $v(4) < 12°$. По $[4, 3, m]$ можно подклеить лишь треугольник $(4, 3, m)$. Затем можно подклеить лишь грани: $(4, 5, 3)$, $(3, 4, m)$, $(5, 3, m, 3')$. Получим свободный угол $[3', 5, 3']$, где $\theta[3', 5] > \pi$ и, следовательно, любое продолжение построения ведет к противоречию.

3. Подклеим треугольник $(3, 5, m)$ (рис. 2, $a = 4$, $n = 5$). По

свободному углу $[4, 3, m]$ можно подклеить либо треугольник, либо четырехугольник.

3.1. Подклеим треугольник. Тогда $v(4) = v(5) = v(m)$ и основание полученного блока — правильный треугольник. По ребру $[4, 5]$ можно подклеить лишь треугольник $(4, 5, \varphi)$, так как четырехугольник будет иметь трехгранные углы, равные исходному трехгранному углу, но плоский угол исходного трехгранного угла меньше 60° (из-за подклеенного четырехугольника). По свободному ребру $[m, 5]$ нельзя подклеить четырехугольник, так как любое продолжение построения по свободному углу $[\varphi, 5, 3']$ ведет к противоречию. Подклеим $(m, 5, \varphi_1)$. $\varphi \neq 3$, так как в противном случае вершина φ_1 станет двугранной. Пусть $\varphi = 4$. Подклеив $(\varphi_1, 5, \varphi)$, получим: $v(3) = v(4) = v(5) = 60^\circ$. Значит, $m = 5$. Подклеив последнюю грань — (φ, m, φ_1), получим многогранник $3M_1$ [3], т. е. $\theta[m, 5] > 210^\circ$. Если $\varphi = 5$, то продолжать построение сети можно лишь треугольниками, но и такое продолжение ведет к противоречию; $\varphi \neq 6, \ldots$, так как $v(\varphi) = 60^\circ$.

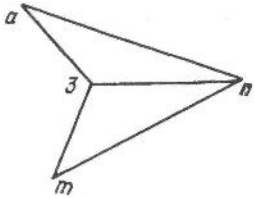


Рис. 2

3.2. Подклеим четырехугольник $(4, 3, m, \lambda)$. Так как $\theta[\lambda, m] > \pi$, то $\lambda = 3'$. По свободному ребру $[4,5]$ можно подклеить лишь треугольник $(4, 5, \varphi)$. Затем нужно подклеить $(m, 5, \varphi_1)$ и $(\varphi, 5, \varphi_1)$. Следовательно, $v(3) = v(4)$, $\varphi \neq 5, \ldots$ и φ, φ_1 одновременно не трехгранные. Поскольку вершины m и φ могут быть лишь трехгранными или четырехгранными, то вершина 5 — правильная и, следовательно, вершина 4 — правильная. Но тогда $v(4) < v(3)$, что противоречит полученному ранее равенству. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Грань типа* $(3, 4, 6)$ *принадлежит лишь многограннику* $M_{1.1}$ (см. таблицу).

Доказательство. По ребру $[3, 6]$ можно подклеить грань $(3, 6, m)$, $m = 4, \ldots, 15$, $(3, 6, m, 3)$ или $(3, 6, 3', m)$, $m = 3, 4, 5$.

1. Подклеим $(3, 6, m)$. По свободному углу $[4, 3, m]$ можно подклеить либо треугольник, либо четырехугольник.

1.1. Подклеим $(4, 3, m, \lambda)$, $\lambda = 3'$, затем однозначно: $(4, 6, \varphi)$, $(6, m, \varphi_1)$, причем φ, $\varphi_1 = 3, 4', 5$, и $(\lambda, 4, \varphi, m_1)$.

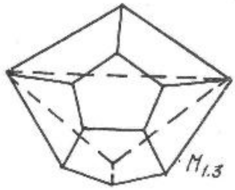
1.1.1. $m = 4$. Подклеим $(m_1, \lambda, m, \varphi)$ (рис. 3). $\varphi = 3$. Тогда $m_1 \neq 3$, иначе $v\lambda = v(m)$ и $\theta(\lambda, 4, 3, m) < 2\pi$. Пусть $m_1 = 4$. Подклеив $(6, \varphi, m_1)$ и $(6, m_1, \varphi_1)$, получим замкнутую сеть. Она двойственна сети многогранника № 3 [3, табл. 3] и может быть реализована многогранником $M_{1.1}$. Одна из реализаций этой сети — правильный тетраэдр с шестью условными ребрами.

Если $m_1 \geqslant 5$, то, выполняя дальнейшие построения, будем приходить к противоречию.

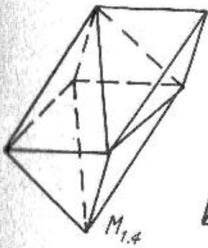
$\varphi = 4'$. По симметрии блока (рис. 3) относительно плоскости $6, 3, \lambda, m_1$ должно быть $\varphi_1 \neq 3$. Вершина m_1 может быть лишь четырехгранной, а к вершине 6 можно подклеить лишь треугольники.

$M_{1.1}$

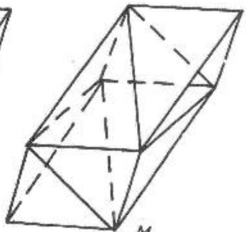
$M_{1.2}$



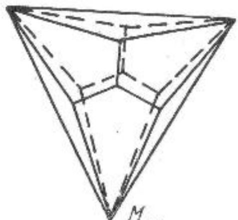
$M_{1.3}$



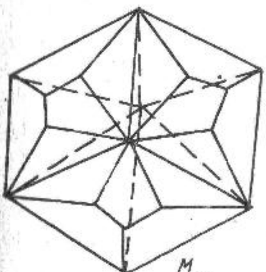
$M_{1.4}$



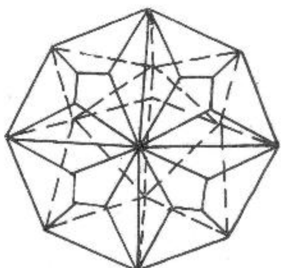
$M_{1.5}$



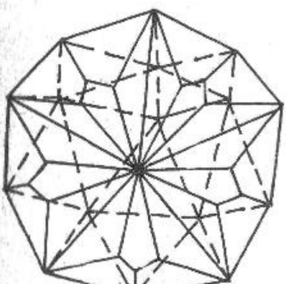
$M_{1.6}$



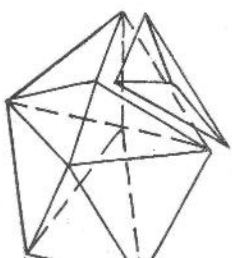
$M_{1.7}$



$M_{1.8}$



$M_{1.9}$



$M_{1.15}$

Заметим, что новая вершина m_2 подклеенного треугольника может быть тоже лишь четырехгранной, а в дальнейшем построении участвуют только треугольники. В результате получим одну замкнутую сеть, содержащую треугольник (φ, m_1, m_2); но ее нельзя реализовать многогранником M, так как из прилегания граней следует $\theta(\varphi, m_1 m_2) < \pi$.

$\varphi = 5$. По симметрии исходного блока $\varphi_1 = 5$. $m_1 = 4$, так как другие значения сразу дадут противоречия. Вокруг вершины 6 подклеиваем треугольники $(\varphi, 6, m_2)$ и $(m_2, 6, \varphi_1)$. По ребру $[\varphi, m_1]$ нельзя подклеить треугольник (иначе $v(m) < 30°$). Подклеим четырехугольники $(\varphi, m_1, \lambda_1, m_3)$, $(\lambda_1, m_1, \varphi_1, m_4)$ и $(m_3, \lambda_1, m_4, \varphi_2)$. Поскольку вершины m_i могут быть лишь четырехгранными, а $\lambda_i = 3$, то подклеив единственно возможное: $(m_3, \varphi, m_2, \lambda_2)$, $(m_4, \varphi_1, m_2, \lambda_2)$ и $(\lambda_2, m_3, \varphi_2, m_4)$, придем к противоречию: вершина φ_2 — двугранная.

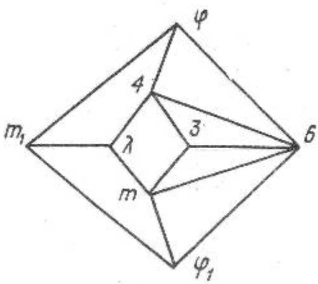


Рис. 3

Если же подклеим четырехугольник $(\varphi, m_1, k, 3')$, то затем должны подклеить $(k, m_1, \varphi_1, 3')$, $(3', \varphi, m_2, k_1)$ и $(k_1, m_2, \varphi_1, 3')$. Любое дальнейшее построение дает противоречие.

1.1.2. $m = 5$. Исходный блок отличается от изображенного на рис. 3 отсутствием грани $(m, \lambda, m_1, \varphi_1)$, $m_1 \neq 3$. Вершины φ и φ_1 могут быть лишь трехгранными. Это упрощает перебор вариантов продолжения исходного блока до замкнутой сети. Подклеим $(m_1, \lambda, m, \varphi_2)$, $(m_1, \varphi, 6)$, $(m_1, 6, \varphi_1)$, $m_1 \neq 4$ и $(\varphi_1, m, \varphi_2, m_1)$. Значит, $\theta[m, \varphi_1] = \pi$, что невозможно.

1.1.3. $m \geqslant 6$. В этом случае $\theta(\lambda, 4, 3, m) < 2\pi$.

1.2. Подклеим $(4, 3, m)$, $m = 6, \ldots$; $v(4) = v(6) = v(m)$, т. е. основание блока — правильный треугольник. Подклеим $(4, 6, \varphi)$, $(\varphi, 4, m)$ и $(6, m, \varphi_1)$ (рис. 4); $\varphi \neq 3$, поскольку в противном случае $\varphi_1 = 2$.

Пусть $\varphi = 4'$. По свободному ребру $[\varphi, 6]$ можно подклеить треугольник или четырехугольник. Подклеим $(\varphi, 6, 3', 3')$ — четырехугольник должен иметь две трехгранные вершины. Отметим, что $v(3') = v(3)$. Отсюда следует противоречие: $\theta(\varphi, 6, 3', 3') < 2\pi$.

Подклеим $(\varphi, 6, m_1)$. Затем нужно подклеить (m_1, φ, m) и $(m_1, 6, \varphi_1)$. При $m = 6$ получим замкнутую сеть, подклеив (m_1, m, φ_1). Она не реализуема многогранником M, так как это две бипирамиды, склеенные по грани, и можно доказать, что один из двугранных углов будет $> \pi$. При $m = 7$ вокруг вершины m нужно подклеить еще две грани, т. е. $v(m) = v(\varphi)$, что дает $\theta(3, m, 6) < \pi$.

При $\varphi = 5$ будет $\{\varphi, 6\} > \pi$ для любых продолжений исходного блока (рис. 4), что следует из условий $v(3) = v(\varphi) > 60°$ и $\{3, 4\} = \{4, \varphi\}$.

2. Подклеим $(3, 6, 3', p)$, $p = 3, 4, 5$ (рис. 1, $a = 4$, $n = 6$, $m = 3'$). Следовательно, по $[p, 3, 4]$ можно подклеить лишь $(p, 3, 4, \lambda)$, $\lambda = 3, 4, 5$.

2.1. $p = 3$. Тогда $v(3') = v(3)$ и $v(4) < 60°$. Если $\lambda = 3$, то вершина 4 — правильная, что вместе с $v(4) = v(6)$ дает противоречие. При $\lambda = 4'$ из $\theta(\lambda, p, 3, 4)$ получим $\theta[\lambda, p] = \theta[4, 3] = \pi$, а из $(3, 4, 6)$ получим $\theta[3, 4] < \pi$. Итак, остается рассмотреть случай $\lambda = 5$.

По свободному углу $[\lambda, p, 3']$ нельзя подклеить пятиугольник, так как из дальнейшего построения: $(4, 6, 3)$, $(3, 4, \lambda, 3)$ следует, что вершины λ и 4 — правильные. Отсюда немедленно получим $v(\lambda) < v(4)$ и $\theta(\lambda, 4, 3, p) < 2\pi$.

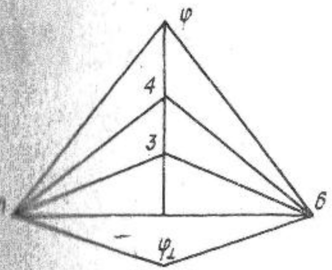


Рис. 4

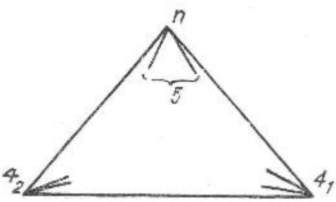


Рис 5.

Так как и треугольник нельзя подклеить по $[\lambda, p, 3']$, то остается подклеить четырехугольник $(\lambda, p, 3', 4_1)$. Дальнейшее построение такое: $(4_1, 3', 6)$, $(4, 6, 3)$, $(4_1, 6, 3)$, $(3, 6, 3, 3)$, $(3, 3, 4, \lambda)$, и получаем свободную ломаную $[\lambda, 3, 3, 4_1]$. Единственно возможное продолжение — четырехугольник — оставляет только два свободных ребра $[\lambda, 4_1]$.

2.2. $p \geqslant 4'$. В этом случае $v(4) < 30°$, а значит, по $[4, 3, p]$ нельзя ничего подклеить.

3. Подклеим $(3, 6, m, 3)$, $m = 3, 4, 5$ (рис. 1, $a = 4$, $n = 6$, $p = 3$). При $m = 3$ получим блок, рассмотренный в п. 2. Для $m = 4, 5$ будет $v(4) < 30°$. Следовательно, по $[3^2, 4]$ можно подклеить лишь $(3^3, 4)$. Но тогда вершина 4 — правильная, и поэтому $v(4) = 54°$, т. е. указанный блок в многограннике M не существует. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Грань типа* $(3, 4, 7)$ *не принадлежит многограннику* M.

Доказательство. По ребру $[3, 7]$ можно подклеить $(3, 7, m)$, $m = 4, \ldots, (3, 7, 3', m)$ или $(3, 7, m, 3)$, $m = 3, 4, 5$. Заметим, что подклеенный четырехугольник при $m = 4, 5$ исключает дальнейшее построение.

1. Подклеим $(3^3, 7)$. По $[3^2, 4]$ можно подклеить лишь $(3^2, 4, \lambda)$, $\lambda = 5$ ($\lambda = 3, 4$ немедленно дают противоречия — лемма 2, пункт 2). Если $\lambda = 5$, то по $[\lambda, 3, 3]$ можно подклеить лишь четырехугольник $[\lambda, 3^2, 4_1]$ (лемма 2, п. 2). Полученный блок одно-

значно продолжается гранями: $(4, 7, 3)$, $(3, 4, \lambda, 3)$, $(3^3, 7)$, $(3^2, \lambda, 4_2)$, $(4_2, \lambda, 4_1)$, $(4_1, 3, 7)$, $(4_2, 3, 7)$. И так как вершины 4_1 и 4_2 не трехгранные, то получим замкнутую сеть, подклеив $(7, 4_1, 4_2)$. Эту сеть нельзя реализовать многогранником M, так как $v(\lambda) = v(7) < 12°$.

2. Подклеим $(3, 7, m)$. По свободному углу $[4, 3, m]$ можно подклеить либо четырехугольник, либо треугольник.

2.1. Подклеим $(\lambda, 4, 3, m)$ и еще 5 треугольников $(3_i, 4_j, 7)$; тогда $v(3) = v(m)$ и $m = 4$. Дальнейшее построение сразу дает противоречие.

2.2. Подклеим $(4, 3, m)$, $m = 7, \ldots$. Основание полученного блока — правильный треугольник. Вокруг вершины 4 можно подклеить лишь треугольники, причем новая вершина φ — четырехгранная. Действительно, при $\varphi = 3$ получим двуугольник сети, а при $\varphi \geqslant 5$ будет $\theta(3, 4, 7) < \pi$. Пусть $\varphi = 4$, тогда по $[\varphi, 7]$ нельзя подклеить четырехугольник (лемма 2, п. 1.2). Остается подклеить треугольники вокруг вершины 7. В этом случае $v(3) = v(m)$ и $\theta(3, 4, 7) < \pi$. Лемма 3 доказана.

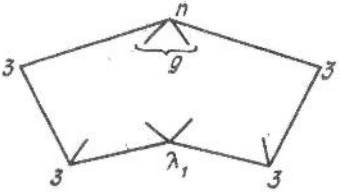


Рис. 6

Лемма 4. *Грань типа* $(3, 4, n)$, $n = 9, 11, \ldots$ *(нечетное) не принадлежит многограннику* M.

Доказательство. Воспользуемся результатами леммы 3 и проследим особенности, возникающие с ростом n.

1. Подклеим $(3^3, n)$. Выполнив построения пункта 1 леммы 3, получим блок, изображенный на рис. 5. Вершины 4_1 и 4_2 не могут быть четырехгранными, так как тогда $n = 7$. Пусть 4_1 и $4_2 \geqslant 5$. По свободному ребру $[4_2, 4_1]$ можно подклеить лишь $(4_2, 4_1, \lambda_1)$. Теперь 4_1 и $4_2 \neq 5$, иначе $v(\lambda_1) = v(3)$. Подклеим $(4_1 n, 3)$ и $(4_2, n, 3)$. Вершины 4_1 и 4_2 могут быть лишь шестигранными.

1.1. $n = 9$. Можно подклеить лишь $(3^3, n)$, $(3^2, 4_1, \lambda_1)$ и $(3^2, 4_2, \lambda_1)$. Следовательно, вершина λ_1 — трехгранная, что ведет к противоречию.

1.2. $n = 11$. Подклеим $(\lambda_1, 4_1, 3^2)$ и $(\lambda_1, 4_2, 3^2)$. Затем — три $(3^3, n)$. Получим свободную ломаную $[3^3, \lambda_1]$, и дальнейшее построение немедленно дает противоречие.

1.3 $n \geqslant 13$. Исходный блок изображен на рис. 6. Вершина λ_1 может быть лишь пятигранной. Возможно только такое продолжение: $(3^2, \lambda_1, 4_3)$ — две, $(4_3, 3, n)$ — две. Полученный блок имеет только два свободных ребра $[4_3, n]$ $(4_3 = 5)$, что исключает дальнейшее построение.

2. Подклеим $[3, n, m]$. Если подклеим треугольник по $[4, 3, m]$, то, воспользовавшись доказательством леммы 3, пункт 2.2, отметим, что φ может быть только трехгранной, что сразу дает противоречие. Если подклеим четырехугольник, то аналогично пункту 2.1 леммы 3 получим противоречие. Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Грань типа* $(3, 4, n)$, $n = 8, 10, \ldots$ *(четно-) не принадлежит многограннику* M.

Доказательство. Воспользуемся результатами лемм 3 и 4 и проведем построения для $n = 8, 10, \ldots$

1. Подклеим $(3^3, n)$ и продолжим построение лемм 3 и 4 до блока, изображенного на рис. 5. Поскольку 4_1 и $4_2 \neq 4$, то подклеим $(4_2, n, 3)$. Затем при $n = 8$ следует подклеить $(3, n, 4_1)$ и $(3, 4_1, 4_2)$ — получим замкнутую сеть. Но ее нельзя реализовать многогранником M, так как $v(\lambda) = v(3)$.

При $n = 10$ блок, изображенный на рис. 5, продолжается так же, как и в пункте 1.1 леммы 4 (4_1 и $4_2 = 6$). В результате очевидного построения получим свободную ломаную $[\lambda_1, 3, 3, 3, \lambda]$, что исключает дальнейшее построение.

При $n = 12$ исходным является блок, изображенный на рис. 6. Подклеив грани $(3^2, \lambda_1, 4_3)$ — две и $(4_3, 3, n)$ — две, получим замкнутую сеть. Ее нельзя реализовать многогранником M, так как с одной стороны $\{n, 4_1\} = \{n, 4_3\}$, а с другой — $\{4_1, n\} > \{4_3, n\}$.

2. Подклеим $(3, n, m)$. По свободному углу $[4, 3, m]$ можно подклеить лишь четырехугольник $(4, 3, m, \lambda)$ (треугольник сразу дает противоречие). Полученный блок допускает продолжение равными треугольниками вокруг вершины n: $(m, n, \varphi_1), (4, n, \varphi)$, (φ, n, m_1) и т. д.

2.1. $m = 4$. Если вершина φ трехгранная, то необходимо подклеить $(\lambda, 4, \varphi, m_1)$, и образовавшаяся свободная ломаная $[m_1, \lambda, m, \varphi_1]$ требует, чтобы $m_1 = 5$, $\varphi_1 = 4$, что дает противоречие: $\theta(\lambda, 4, 3, m) < 2\pi$.

Если вершина φ четырехгранная, то необходимо подклеить $(\lambda, 4, \varphi, m_3)$ и $(m_3, \lambda, m, \varphi_1)$. Так как вершина m_3 — четырехгранная, то вершина φ правильная с двугранным углом $\{m_3, \varphi\} = \{4, \varphi\}$. С другой стороны, в силу равенств $v(3) = v(\varphi)$ и $\{3, 4\} = \{4, \varphi\}$ имеем $\{\varphi, m_3\} = 2\{\varphi, 4\}$ — получили противоречие.

Если же $\varphi = 5$, то $\{\varphi, m_3\} > \pi$, что следует из условий $v \times (\varphi) = v(3) > 60^\circ$ и $\{3, 4\} = \{4, \varphi\}$.

2.2. $m = 5$. Вершины φ_i могут быть лишь трехгранными, поэтому нужно подклеить грани $(\lambda, 4, \varphi, m_1)$ и $(m, \varphi_1, m_2, \lambda_1)$. Но тогда получим свободную ломаную $[\lambda_1, m, \lambda, m_1]$, и дальнейшее построение невозможно. Лемма 5 доказана.

2. Грани $(3, 5, n)$ Лемма 6. *Блоки, изображенные на рис.* 1 при $a = 5$, $p = 3$ *и* $m = 4, 5$, *а также при* $a = 5$, $m = 3'$ и $p = 4, 5$, *если* $n \geqslant 5$, *не принадлежат многограннику* M.

Доказательство. Рассмотрим блок рисунка 1 при $a = 5$, $p = 3$. Пусть $m = 4$. Тогда $v(5) < 30^\circ$, и по свободному углу $[3^3, 5]$ можно подклеить только $(3^3, 5)$, а по $[5, n]$ — только $(5, n, 3)$. Вершина 5 стала правильной, а $v(5) = 36^\circ$. Получили противоречие. Для $m = 5$ получим аналогичное противоречие.

Рассмотрим блок рис. 1; $a = 5$, $m = 3'$. Пусть $p = 4$. Тогда $v(5) < 30^\circ$, и по $[p, 3, 5]$ ничего нельзя подклеить. Пусть $p = 5$.

Поскольку $v(5) < 12°$, то по $[p, 3, 5]$ можно подклеить лишь тр угольник, затем — $(5, n, 3)$, $(p, 5, 3)$ и $(5, 3^3)$. Вершина 5 ста правильной, и должно быть $v(5) = 36°$. Снова получили против речие. Лемма 6 доказана.

Лемма 7. *Грань типа* $(3, 5, 5')$ *принадлежит лишь многогра никам* $M_{1.2}$ — $M_{1.5}$ *(таблица).*

Доказательство. По свободному ребру $[3, 5]$ можно по клеить треугольник или четырехугольник.

1. Подклеим четырехугольник — согласно лемме 6 это $(3^3, 5)$ Поскольку $v(5') < 60°$, то по $[3, 3, 5']$ можно подклеить лиш четырехугольник $(3^2, 5', \varphi)$. Следовательно, $v(5) < 60°$, и по $[5', 5]$ можно подклеить лишь $(5', 5, 3)$. Вершина 5 — правильная значит, и вершина 5′ — правильная, $v(5) = v(5')$, $\varphi = 3$. Известн [4, лемма 2], что грани $(3, 5^2)$ и $(3^3, 5)$ могут принадлежать од ному многограннику с правильными вершинами. Продолжи построение. По свободному углу $[3, 3, 3]$ можно подклеить либ $(3^3, 5)$, либо (3^5) (согласно лемме 2 [4] пятиугольник може участвовать в дальнейших построениях).

1.1. Подклеим четырехугольник. Дальнейшее построение мо жет быть только таким: $(3, 5, 5)$ — две и $(3, 5', 5)$ — две. Полу чим многогранник $M_{1.2}$.

1.2. Подклеим пятиугольник, затем $(5, 3^3)$ — две, $(5', 3^3)$ — две и (3^5). Получим $M_{1.3}$.

2. Подклеим $(3, 5, k)$, $k = 5, \ldots$. По свободному углу $[5', 3, k]$ можно подклеить только треугольник или четырехуголь ник. Если подклеим четырехугольник $(5', 3, k, 3')$ то будет $v \times (5) < 12°$. Затем нужно подклеить $(5', 5, 3)$ и $(5, k, 3)$. Верши на 5 стала правильной. Значит, и вершина 5′ — правильная, $v \times (5') = v(5)$ и $\theta(5', 3, k, 3') < 2\pi$. Получили противоречие. Под клеив треугольник, получим блок с правильным треугольником в основании. По свободному ребру $[5, 5']$ можно подклеить тре угольник или четырехугольник.

2.1. Подклеим $(5, 5', \varphi)$. Если теперь по $[k, 5]$ подклеить че тырехугольник $(5, k, 3', 3')$, то получим свободный угол $[3', 5, \varphi]$, и дальнейшее построение невозможно, так как $\theta[3', 5] = \pi$, а $v(\varphi) = v(3) < 60°$ и $\theta[\varphi, 5, 3'] < 240°$. Подклеим $(5, k, \varphi_1)$. По свободному углу $[\varphi_1, 5, \varphi]$ можно подклеить лишь треугольник, и тогда будет $v(\varphi) = v(k) = 60°$. Значит, $k = 5$.

2.1.1. $\varphi = 3$. Тогда $\varphi_1 \neq 3$. Подклеим $(5', \varphi, \varphi_1)$. А подклеив треугольник по свободному углу $[k, 5', \varphi_1]$, получим блок с дву мя свободными ребрами, что исключено.

2.1.2. $\varphi = 4$. Ввиду симметрии исходного блока $\varphi_1 \neq 3$. Под клеим грани: $(5', \varphi, \varphi_2)$, $(\varphi_2, 5', k)$. $\varphi_2 = 3$ влечет за собой проти воречие. Для $\varphi_2 = 4$, подклеив $(\varphi_2, \varphi, \varphi_1)$ и $(\varphi_2, k, \varphi_1)$, получим замкнутую сеть — это многогранник $M_{1.4}$ ($2M_2 + M_1$ [3], три его ребра условные). $\varphi_2 \neq 5$, так как в противном случае получим двуугольник (φ_2, φ_1).

2.1.3. $\varphi = 5$. С учетом симметрии исходного блока — $\varphi_1 = 5$.

Продолжение блока можно осуществлять лишь треугольниками. В результате получим только одну замкнутую сеть, которая реализуется многогранником $M_{1.5}$ (согласно [3] это $2M_2+2M_1$; шесть его ребер будут условными).

2.2. Подклеим четырехугольник $(5, 5', 3', 3')$. Согласно п. 2.1. и по остальным свободным ребрам исходного трехгранного блока можно подклеить лишь четырехугольники. Следовательно, $\theta(3) < 60°$, $k=5$, $\theta[3', 5] = \pi$. Дальнейшее построение дает одну замкнутую сеть, которая не реализуется многогранником M ввиду $\{5', 5\} > \pi$. Лемма 7 доказана.

Лемма 8. *Блок, изображенный на рис.* 1, $a=5$, $p=3$, $m=3$, *не принадлежит многограннику* M *при* $n \geqslant 6$.

Доказательство. Так как $\theta[3, n] < \pi$, то по свободному углу $[3, 3, 5]$ можно подклеить лишь четырехугольник $(3^2, 5, \lambda)$, $\lambda = 3, 4, 5$, а по $[5, n]$ — $(5, n, 3)$.

Так как $\theta[\lambda, 5] = \theta[3, n] < \pi$, то по свободному ребру $[\lambda, 5]$ можно подклеить треугольник или четырехугольник.

1. $n=6$. Вершина λ не может быть трехгранной, так как тогда вершины 5 и n будут правильными с одним и тем же двугранным углом, а значит, $v(5) > v(n)$. С другой стороны есть $v(5) = v(n)$.

1.1. При $\lambda = 4$ будет $v(n) < 30°$. Если подклеим $(\lambda, 5, k)$, то $v(k) = v(5)$. И так как по свободному углу $[k, 5, 3]$ можно подклеить лишь треугольник, то $\theta(k, 5, 3) < \pi$ (поскольку $v(n) = v(k)$). Подклеим четырехугольник $(\lambda, 5, 3', k)$. При $k=3$ вершины 5 и λ правильные. Найдя плоские углы грани $(\lambda, 5, 3', k)$ и применив их при вычислении углов граней $(3, 5, n)$ и $(3^3, n)$, придем к противоречию. Если $k \geqslant 4$, то $\theta(3', k, \lambda, 5) < 2\pi$.

1.2. $\lambda = 5$. Аналогично 1.1 по $[\lambda, 5]$ нельзя подклеить треугольник. Подклеим четырехугольник. Это $(3^2, \lambda, 5)$. Вершина 5 стала правильной, следовательно, и вершина λ — правильная. Значит, $\theta[\lambda, 3] = \theta[5, 3] = \pi$, что противоречит $\theta[5, 3] < \pi$, найденному из $(3, 5, n)$.

2. $n \geqslant 7$. Только в случае $\lambda = 3$ мы использовали значение $n=6$. Рассмотрим случай $\lambda = 3$ при $n \geqslant 7$. Так как $v(5) = v \times (n) = 36°$, то $n = 7, 8, 9$, а по свободному углу $[3, 3, 3]$ можно подклеить либо (3^5), либо $(3^3, 5_1)$.

2.1. Подклеим пятиугольник. В итоге получим противоречие — вершина n должна быть пятиугольной (построение выполняется гранями $(3^3, 5)$ и (3^5)).

2.2. Подклеим четырехугольник. В этом случае построение может быть проведено лишь треугольниками $(5_1, 3, 5)$ и $(5_1, 3, n)$. И здесь убеждаемся, что замкнутая сеть получается лишь при $n=5$. Лемма 8 доказана.

Лемма 9. *Блок, изображенный на рис. 2,* $a=5$, *не принадлежит многограннику* M *при* $n \geqslant 6$.

Доказательство. По свободному углу $[5, 3, m]$ можно подклеить четырехугольник или треугольник.

1. Если подклеим четырехугольник $(m, 3, 5, 3')$, то $m=5$, и по свободному ребру $[5, n]$ можно подклеить лишь треугольник $(5, n, 3)$. В свою очередь, по $[3, n]$ можно подклеить лишь треугольник $(3, n, m_1)$ (в случае четырехугольника $v(5) < 60°$). Таким образом, вокруг вершины n должны подклеить треугольники $(n, m_1, 3)$, $(n, 3, m_2)$ и т. д. При n нечетном $v(3) = v(5)$ и $\theta(m, 3, 5, 3') < 2\pi$.

Итак, $n=6, 8, \ldots$ (четное). По свободному углу $[5, 3, m_1]$ должны подклеить $(5, 3, m_1, 3')$. Получим блок, симметричный относительно ребра $[5, n]$. Его можно продолжить, подклеив пятиугольник или четырехугольник по свободному углу $[3', 5, 3']$.

1. 1. Подклеим пятиугольник. Тогда дальнейшее построение выполняется четырехугольниками $(m_i, 3, m_j, 3')$ и пятиугольниками $(3', 3', 3', 3', m)$. При $n = 6$ получим замкнутую сеть, подклеив $(3', 3', 3')$, что исключено. При $n = 8$ необходимо подклеить $(3', 3', 3', 3',)$, что исключено ввиду $v(3') > 90°$. При $n = 10$ необходимо подклеить $(3', 3', 3', 3', 3',)$, что исключено ввиду $v(3') > 108°$. При $n \geqslant 12$ получим свободную ломаную с более чем пятью ребрами.

1. 2. Подклеим четырехугольник $(3', 5, 3', x)$. Дальнейшее построение выполняется четырехугольниками $(m_i, 3, m_j, 3)$ и четырехугольниками $(3', m, 3', x)$. При $n = 6$, $x = 3'$, что дает противоречие: $\pi < \theta[x, 3] = \theta[3, m] < \pi$. При $n = 8, 10$ вершина x будет соответственно четырех- и пятигранной. Заметим, что $v(x) < v(5)$, поскольку $\theta[x, 3] < \theta[5, 3']$. С другой стороны, $v(x) > v(5)$, так как вершина x правильная, $\{3', x\} = \{3', 5\}$, а $\{3, 5\} < \{3', 5\}$. Следовательно, сеть нереализуема для $n = 8, 10$. Если $n \geqslant 12$, то $x = 6, \ldots$ и, составив систему уравнений для нахождения плоских и двугранных углов предполагаемого многогранника, убедимся, что она не имеет решения.

2. Подклеим треугольник $(5, 3, m)$. Поскольку $n \geqslant 6$, то по свободным ребрам трехгранного блока можно подклеить лишь треугольники $(5, n, \varphi)$ и $(5, n_1, \varphi_1)$. Если одна из новых вершин φ — трехгранная, то по свободному углу $[\varphi_1, 5, \varphi]$ можно подклеить лишь четырехугольник, а значит, получим блок, рассмотренный в лемме 8. Если вершины φ не трехгранные, то подклеенный треугольник по $[\varphi_1, 5, \varphi]$ дает равенство $v(3) = v(n) < 60°$ и $\theta(3, 5, n) < \pi$, а четырехугольник — $v(n) < 30°$ и снова $\theta(3, 5, n) < \pi$. Лемма 9 доказана.

Лемма 10. *Грань* $(3, 5, n)$, $n \geqslant 6$, *не принадлежит многограннику* M. Справедливость леммы 10 следует из результатов лемм 6, 8 и 9.

3. Грань $(3, 6, n)$. **Лемма 11.** *Блок, изображенный на рис.* 1, $a = 6$, $p = 3$, $m \geqslant 4$, при $n \geqslant 6$ *не принадлежит многограннику* M.

Доказательство: По свободному углу $[3, 3, 6]$ можно подклеить лишь $(3^3, 6)$, а по свободному углу $[3, 3, m]$ — пятиугольник или четырехугольник.

1. Подклеив пятиугольник $(3^4, m)$, получим свободный угол $[3, 3, 6]$. В него подклеим $(3^3, 6)$. Затем по свободному углу $[3,

3, 3] подклеим пятиугольник $(3^4, m_1)$ (четырехугольник $(3^3, 6_1)$ даст свободный угол $[6_1, 3, 6]$ и дальнейшее построение невозможно ввиду $v(6) = v(6_1) < 30°$). Его нужно подклеить так, чтобы не получить свободного угла $[m_1, 3, 6]$. Но тогда получим свободный угол $[3, 3, 6]$ и, подклеив $(3^3, 6)$, убеждаемся, что вершина 6 — правильная. Следовательно, $v(6) = 25{,}5°$, откуда $v(m) = 84°$, что не согласуется с углами пятиугольника: если $m = 4$, то $v(m) = 80{,}6°$, если $m = 5$, то $v(m) < 72°$.

2. Подклеим четырехугольник $(3^2, m, n_1)$. Дальнейшие построения дадут блок, свободные ребра которого изображены на рис. 7. По свободному ребру $[n, m]$ можно подклеить четырехугольник или треугольник.

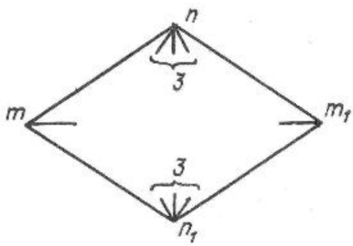


Рис. 7

2. 1 $m = 4$.

2. 1. 1. Подклеим четырехугольник $(n, m, 3^2)$. Подклеив четырехугольник и по $[m, n_1]$, получим свободный угол $[3, 3, 3]$. Продолжение построения сети пятиугольником дает противоречие. Действительно, пятая вершина x не может быть трехгранной из-за $\theta(3^3, 6) < 2\pi$, а по свободному углу $[n_i, 3, x]$ ($n_i = n$ или n_1) можно подклеить лишь четырехугольник $(n_i, 3, x, 3')$ (так как $\theta[3, x] > \pi$). С другой стороны пятиугольника должны подклеить $(3^2, n_i, m_2)$. Поскольку $n_i > 7$, то $x \neq 5$ и $x = 4$ — правильная вершина. Следовательно, любое продолжение построения по углу $[x, 3, m_2]$ немедленно дает противоречие, а именно: подклеим $(x, 3, m_2, l)$. При $l = 3$ $\theta[3, x] = \pi$, что исключено. При $l = 4{,}5$ будет $\theta(x, 3, m_2, l) < 2\pi$.

Подклеим $(3^3, 6_1)$. Дальнейшее построение показывает, что $n \neq 6, 7$, а значит, $m_1 = 4$ и по свободному ребру $[n, m_1]$ можно подклеить треугольник или четырехугольник. Если подклеим треугольник (n, m_1, φ), то $v(\varphi) = v = (n)$, $n > 9$ и любой обход гранями вокруг вершины n дает противоречие. Если подклеим четырехугольник, то выполнив оговоренные в п. 2. 1. 1. построения и проследив, чтобы вершины 6_1 и 6_2 не оказались четырех- или пятигранными, получим блок, свободные ребра которого изображены на рис. 8.

При $n = 10$ получим свободный угол $[6_1, 3, 6_2]$, что исключает дальнейшее построение. А при $n = 11$ получим свободный угол $[6_1, 3, m_2]$, что также исключает дальнейшее построение. Поскольку n не может быть больше 11, то все варианты п.2. 1. 1. рассмотрены.

2. 1. 2. По ребру $[n, m]$ подклеим треугольник (n, m, φ). Ввиду равенства $v(\varphi) = v(n)$, $n \neq 8, \ldots$. При $n = 7$ получим свободный угол $[\varphi, n, \varphi_1]$, что исключает дальнейшее построение. При $n = 6$ получим замкнутую сеть, но ее нельзя реализовать многогранником M, что проверяется посредством решения уравнений, связывающих плоские и двугранные углы предполагаемого многогранника.

2. 2. $m = 5$. Исходный блок изображен на рис. 1, $a = 6$, $p = 3$. В п. 1 отмечено, что по $[3, 3, m]$ нельзя подклеить пятиугольник при любых m. Подклеим четырехугольник и, выполнив дальнейшие построения, получим блок, изображенный на рис. 7.

2. 2. 1. Подклеим $(n, m, 3^2)$ и $(n, m_1, 3^2)$. Дальнейшие построения проводятся аналогично п. 2. 1. 1 и ни один из вариантов продолжения сети не дает замкнутой сети.

Если вместо $[n, m_1, 3^2)$ подклеить (n, m_1, φ), то $\theta[n, m_1,] = \theta[3, 6]$, $v(\varphi) = v(n)$ и по углу $[\varphi, n, 3]$ ничего нельзя подклеить.

2. 2. 2. Подклеим (n, m, φ), (исходный блок изображен на рис. 7). $n \neq 7$, так как подклеив единственно возможное: (n, m_1, φ_1) и (φ, n, φ_1), получим противоречие — $\theta(\varphi, n, \varphi_1) < \pi$. Пусть $n = 6$. Тогда и $n_1 = 6$, а по свободным ребрам $[n_i, m_j]$ можно подклеить лишь треугольники. В результате получим одну замкнутую сеть, но ее нельзя реализовать многогранником M, что проверяется аналогично 2. 1. 2. Лемма 11 доказана.

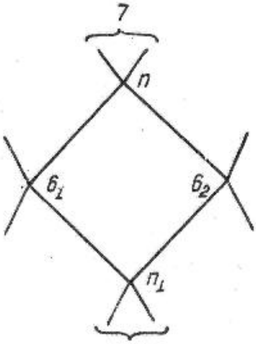


Рис. 8

Лемма 12. *Блок, изображенный на рис.* 1, $a = 6$, $p \geqslant 4$, $m = 3'$, *при* $n \geqslant 6$ *не принадлежит многограннику* M.

Доказательство. Поскольку $v(6) < 30°$, то $\theta[6, 3, p] < 240°$, т. е. по $[6, 3, p]$ можно подклеить лишь треугольник, где $p \geqslant 6$. Тогда $\theta(3, n, 3', p) < 2\pi$. Лемма 12 доказана.

Лемма 13. *Блок, изображенный на рис. 1,* $a = 6$, $m = p = 3$, *при* $n \geqslant 6$ *принадлежит лишь многогранникам* $M_{1.6} - M_{1.9}$ *(таблица).*

Доказательство. По свободному углу $[3^2, 6]$ можно подклеить лишь четырехугольник $(3^2, 6, \varphi)$, $\varphi = 3, 4, 5$, а по $[6, n]$ — треугольник $(6, n, 3)$.

1. $\varphi = 3$. Если подклеим пятиугольник по $[\varphi, 3^2]$, то аналогично п. 2. 1. 1 леммы 11 получим противоречие. Подклеим $(3^2, \varphi, 6_1)$. Затем однозначно: $(6_1, \varphi, 6)$, $(6, 6_1, 3)$, $(3, 6, 3^2)$, $(6_1, 3, n)$ — две грани.

1. 1. $n = 6$. Подклеив $(3^3, n,)$, $(3^3, 6_1)$ и $(3, n, 6_1)$, получим замкнутую сеть. Она реализуется многогранником $M_{1.6}$. Доказательство опирается на результат леммы 2 статьи [4].

1. 2. $n \geqslant 7$. Никакое продолжение не дает замкнутой сети, что в каждом отдельном случае легко проверяется.

2. $\varphi = 4$. $v(n) < 30°$. По $[\varphi, 3^2]$ подклеим четырехугольник $(\varphi, 3^3, 6_1)$, так как продолжение сети пятиугольником немедленно дает противоречие. Отметим, что по свободному ребру $[3, 6]$ можно подклеить лишь четырехугольник, но четырехугольник, подклеенный по $[\varphi, 6]$ приведет к противоречию. Подклеим треугольник $(\varphi, 6, \varkappa)$.

2. 1. $n = 6$. Подклеив $(6_1, 3, n)$, $(6_1, n, 3)$, $(6_1, 3^2, l)$, $(\varkappa, \varphi, 6_1)$ и $(\varkappa, 6_1, l)$, получим замкнутую сеть для $l = 4$. Это в точности сеть

п. 2. 1. 2 леммы 11. Если $l = 5$ ($l \neq 6, \ldots$), то дальнейшее построение даст противоречие.

2. 2. $n = 7$. Исходный блок, изображенный на рис. 9. Подклеив единственно возможное: $(6_1, 3, n)$, $(6_1, n, 3)$ и $(3, n, 3^2)$, можно продолжить построение сети только пятиугольником $(3^4, l)$, что дает свободную ломаную $[3^3, 6_1]$. И если подклеим $(3^3, 6_1)$, то $v(6_1) = v(n) < 30°$ и $\theta(3^2, \varphi, 6_1) < 2\pi$.

2. 3. $n = 8$. И здесь приходим к равенству $v(6_1) = v(n)$, что дает $\theta(3^2, \varphi, 6_1) < 2\pi$.

2. 4. $n = 9$. Продолжение блока (рис. 9) однозначно ведет к сети многогранника $M_{1,7}$. Его существование проверяется при помощи решения соответствующей системы уравнений, аналогично 2. 1. 2 леммы 11.

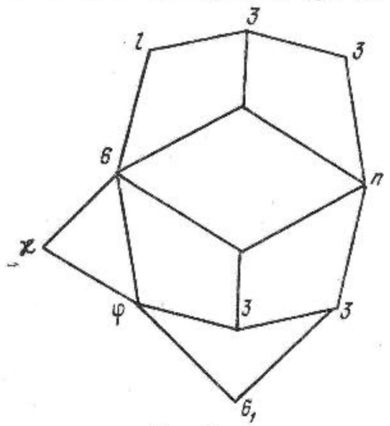


Рис. 9

2. 5. $n \geqslant 10$. Аналогично 2. 4 будем получать замкнутые сети для $n = 12, 15, \ldots$. Эти сети имеют $\varphi_i = 4, 6_i = 6$, и другими быть не могут ввиду равенства всех $\{n, 6\}$. Но и они не могут быть реализованы многогранниками M в силу равенства $v(\varkappa) = v(6)$, которое для $n \geqslant 12$ дает противоречие: $\theta(\varkappa, 6, \varphi) < \pi$.

3. $\varphi = 5$. $v(n) < 12°$. Построения аналогичны случаю $\varphi = 4$ с тем отличием, что все вершины φ_i пятигранные. Следствием этого является иное окончание сетей. Замкнутые сети получим лишь при $n = 9, 12, \ldots$, но только при $n = 12$ и 15 они реализуемы многогранниками M. Это $M_{1,8}$ и $M_{1,9}$. Доказательство реализуемости для $n \leqslant 15$ проводится аналогично п. 2. 1. 2 леммы 11, а для $n > 15$ сеть имеет треугольник с суммой плоских углов меньше π. Лемма 13 доказана.

Лемма 14. *Блок, изображенный на рис. 2 ($a = 6$) при $n \geqslant 6$ принадлежит только многогранникам $M_{1,10} - M_{1,12}$.*

Доказательство. По свободному углу $[6, 3, m]$ можно подклеить лишь треугольник. Значит, $v(6) = v(n) = v(m)$ и $n, m < 12$. По каждому свободному ребру можно подклеить лишь треугольник.

1. Докажем, что и дальнейшее продолжение исходного блока можно осуществлять лишь треугольниками. Действительно, если подклеить (m, n, φ), то подклеенный к нему четырехугольник должен будет иметь две трехгранные вершины.

1. 1. $\varphi = 3$. В силу леммы 13, n и $m \neq 6$, а так как подклеенные грани $(m, \varphi, 3^2)$ и $(n, \varphi, 3^2)$ дают условие $v(n) = v(m) = 36°$, то $n \neq 10, 11$. По свободному углу $[3, 3, 3]$ можно подклеить пятиугольник или четырехугольник. Они являются начальными гранями

двух и только двух различных продолжений. При этом для любых n получим противоречие $\{n, m\} > \pi$.

1.2. $\varphi = 4$. $n = 6$ или 7 (для остальных n будет $\theta(m, n, \varphi) < \pi$. Если $n = 6$, то подклеив $(6, n, \varphi_1)$ и два четырехугольника $(\varphi, n, 3^2)$ и $(\varphi_1, n, 3^2)$, получим свободный угол $[3, 3, 3]$. Продолжение построения четырехугольником $(3^3, l)$ ведет к противоречию, так как получим грань $(3, \varphi\, 3, l)$, а значит, $\theta(3^3, l) < 2\pi$.

Продолжение пятиугольником $(3^4, \varkappa)$ дает свободный угол $[\varphi, 3, 3]$ (или $[3, 3, \varphi_1]$). Рассмотрим случай $[\varphi, 3, 3]$. Дальнейшее построение может быть только таким: $(3^2, \varphi, n_1)$ $(x \neq 3$, иначе получим $[n_1, 3, 3, n_2])$, $(\varphi_1, 3, x, l)$, $(x, 3, n_1, 3')$. Пусть $x = 4$. Тогда x — правильная, $v(3) = v(3')$ и $v(x) = v(\varphi)$, а значит, для любого l $\theta(\varphi_1, 3, x, l) < 2\pi$. Пусть $x = 5$. Тогда $l \neq 3$, (иначе $v(l) = v(3^1)$ и $v(\varphi_1) = v(n_1)$) и $l \neq 5, \ldots$. (иначе $\theta(x, 3, \varphi_1, l) < 2\pi$). Остается рассмотреть случай $l = 4$. φ_1 может быть лишь четырехгранной. Подклеив $(l, \varphi_1, 6)$, получим $v(l) = v(n)$ и $\theta(\varphi_1, 3, x, l) < 2\pi$.

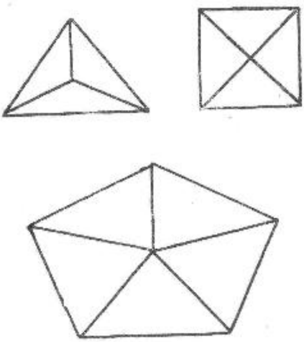


Рис. 10

Аналогично проверяется невозможность продолжения построения по свободному углу $[3, 3, \varphi_1]$.

Если $n = 7$, то перенесем построения в окрестность вершины 6 и применим рассуждения настоящего пункта.

1.3. $\varphi = 5$. m и $n = 6$. Выполним построения пункта 1.2 до получения свободного угла $[3, 3, 3]$. По свободному углу $[3, 3, 3]$ нельзя подклеить пятиугольник, что проверяется аналогично п. 1.2. Если же подклеим $(3^3, l)$, то необходимо подклеить $(l, 3, \varphi, 3')$. Из $(\varphi, n, 3^2)$ и $(3^3, l)$ найдем оценку: $v(l) < 18°$. Это означает, что $\theta(l, 3, \varphi, 3') < 2\pi$.

2. Рассмотрим сети, полученные в результате продолжения исходного блока (рис. 2, $a = 6$) треугольниками. Заметим, что треугольники группируются в блоки трех видов (рис. 10), что соответствует значениям $\varphi = 3, 4, 5$. Если все блоки трехгранные, то $n = 6, 8, 10$; если же многогранник имеет четырех- или пятигранные блоки, то $n = 6$.

2.1. Будем строить многогранник M только из трехгранных блоков. Поскольку у такого блока в основании лежит правильный треугольник, то можно опереться на результаты работы [3]. Именно, выберем в [3] многогранник — назовем его опорным, — имеющий только треугольные грани (в [3] эти треугольники всегда правильные) и склеим трехгранные блоки друг с другом так, как склеены грани опорного многогранника, или, иначе говоря, заменим каждую грань опорного многогранника трехгранным блоком. При этом нужно следить за тем, чтобы при ребрах, по которым склеиваются блоки друг с другом (при ребрах опорного многогранника) не образовались двугранные углы, большие π. В ряде случаев этого можно достичь, подбирая высоту блоков (расстояние от плоскости основания до его центральной вершины).

Оказывается, чтобы получить такой многогранник M с гранью $(3, 6, n)$, можно в качестве опорных взять только два многогранника: правильный тетраэдр (M_1, в [3]) и правильную треугольную бипирамиду ($2M_1$ — сумма двух правильных тетраэдров, склеенных по грани). Получаются многогранники $M_{1.10}$ и $M_{1.11}$.

2.2. Если блоки, составленные из треугольников, брать не только трехгранные, но и четырех- и пятигранные, то нужно учесть, что их основания — четырехугольник и пятиугольник — могут быть пространственными. С учетом этого были найдены все комбинаторные типы сетей, содержащих хотя бы одну треугольную грань, остальные грани которых треугольные, четырех- и пятиугольные.

Существует 15 различных комбинаторных типов таких сетей; из них лишь одна оказалась реализуемой. (Доказательство этого проводилось при помощи решения систем уравнений, связывающих плоские и двугранные углы предполагаемых многогранников). Для нее может быть взята в качестве опорного многогранника правильная треугольная призма. При замене всех ее граней соответственно трехгранными и четырехгранными блоками получается многогранник $M_{1.12}$. Лемма 14 доказана.

4. Грани $(3, 7, n)$ — $(3, 11, n)$. Лемма 15. *Грань типа* $(3, 7, n)$ *не принадлежит многограннику* M.

Доказательство. По свободному ребру $[3, n]$ можно подклеить треугольник или четырехугольник.

1. Если подклеим четырехугольник $(3, n, 3', m)$, $m \geqslant 4$, то немедленно придем к противоречию (см. лемму 6).

2. Если подклеим $(3^2, n, m)$, $m \geqslant 4$, то затем нужно подклеить $(3^3, 7)$, а по свободному углу $[3, 3, m]$ — лишь четырехугольник $(3^2, m, n_1)$. Действительно, подклеив пятиугольник $(3^4, m)$, получим свободный угол $[3, 3, 7]$ и по нему можно подклеить лишь $(3^3, 7)$. Снова получили свободный угол $[3, 3, 3]$. Но теперь можно подклеить лишь пятиугольник, так как четырехугольник $(3^3, 7_1)$ даст свободный угол $[7, 3, 7_1]$, что исключает дальнейшее построение ввиду неравенства $v(7) < 30°$. Пятиугольник $(3^4, m_1)$ можно подклеить двумя способами. Но в одном случае получим свободный угол $[m, 3, m_1]$, а в другом — $[m_1, 3, 7]$, и в обоих случаях дальнейшее построение даст противоречие.

Итак, подклеим $(3^2, m, n_1)$. Дальнейшее построение будет только таким: $(n_1, 3, 7)$ — две грани, $(3^3, 7)$ — две грани, $(n, 3^2, m_1)$, $(m_1, 3^4)$ и $(3^3, n_1)$. Получаем противоречие: $v(n_1) = v(7)$.

3. По свободному ребру $[3, n]$ исходной грани $(3, 7, n)$ подклеим $(3^3, n)$. По $[3, 3, 7]$ можно подклеить лишь $(3^2, 7, \varphi)$, $\varphi = 3, 4, 5$.

3.1. $\varphi = 3$. $v(7) = v(n)$. По $[\varphi, 3, 3]$ нельзя подклеить пятиугольник, так как это будет (3^5), а дальнейшее однозначное построение даст двугранную вершину. Если подклеим четырехугольник $(\varphi, 3^2, n_1)$, то, выполнив построения вокруг вершины 7 аналогично тому, как в п. 2, получим свободную ломаную $[n_1, 3^2, n]$, и дальнейшее построение сети невозможно.

3.2. $\varphi = 4$. $v(n) < 30°$. По $[\varphi, 3, 3]$ нельзя подклеить пятиугольник (как и в п. 2). Подклеим $(3^2, \varphi, 7_1)$ и $(3, 7, n)$. По $[3, 7]$ можно подклеить либо $(3, 7, l, 3)$, либо $(3, 7, 3', l)$. Но второй четырехугольник даст блок п. 1, а для первого четырехугольника $v(l) = v(\varphi)$. Теперь рассмотрим варианты обхода вокруг вершины 7. По свободному ребру $[\varphi, 7]$ можно подклеить четырехугольник или треугольник.

3.2.1. Подклеим $(\varphi, 7, 3^2)$. По $[3, \varphi, 7_1]$ можно подклеить лишь $(3, \varphi, 7_1, 3)$. Получили свободный угол $[3, 3, 3]$. Если подклеим $(3^3, n_1)$, то потом нужно подклеить $(n_1, 3, 7)$. Получили свободный угол $[n_1, 7, l]$ и дальнейшее построение исключено ввиду неравенства $\theta[n_1, 7, l] < \pi$. Но и пятиугольник, подклеенный по $[3, 3, 3]$, не дает замкнутой сети.

3.2.2. Подклеим $(\varphi, 7, \varkappa)$. По $[\varkappa, 7]$ можно подклеить лишь треугольник $(\varkappa, 7, \varphi_1)$, так как $\theta[\varkappa, 7] < 60° + 51°$. И по $[\varphi_1, 7, l]$ — лишь треугольник. В результате получим равенство $v(\varkappa) = v(\varphi)$. Но $v(\varkappa) < 60°$, значит, $\theta(3^2, \varphi, 7) < 2\pi$.

3.3. $\varphi = 5$. Этот случай фактически рассмотрен в п. 2, так как вершина n может быть лишь семигранной.

4. По свободному ребру $[3, n]$ грани $(3, 7, n)$ подклеим $(3, k, n)$. По $[k, 3, 7]$ можно подклеить лишь треугольник и по $[n, k]$ — лишь треугольник. Это (n, k, φ), где $\varphi = 3, 4$. Дальнейшее построение проводится по схеме, изложенной в доказательстве леммы 14. Замкнутых сетей не получаем. Лемма 15 доказана.

Лемма 16. *Грань типа* $(3, 8, n)$ *принадлежит лишь многогранникам* $M_{1.13}$ — $M_{1.17}$.

Доказательство. Четырехугольник, подклеенный по свободному ребру $[3, n]$, не позволяет получить замкнутую сеть. Действительно, подклеив $(3, n, 3', m)$, получим $[8, 3, m]$, где $\theta[8, 3, m] < 210°$, что исключает дальнейшее построение, а подклеив $(3^2, n, m)$, где $m = 3, 4$, для $m = 4$ получим неравенство $v(n) + v(m) < 135°$, откуда следует: $v(3) > 112{,}5°$ и $v(8) < 22{,}5°$, т. е. $v(n) > 45°$, что исключено ввиду $n \geqslant 8$. Если же $m = 3$, то обход вокруг вершины 8 можно осуществить лишь гранями $(3^3, 8)$ и $(8, 3, n_i)$. И так как $v(8) = v(n) = 36°$, а $v(3) = 108°$, то величина двугранного угла $\{8, n\}$ больше π.

Подклеим треугольник $(3, n, k)$ по свободному ребру $[3, n]$ исходной грани. Легко убедиться (воспользовавшись доказательством леммы 14), что в дальнейших построениях можно использовать лишь треугольники; они группируются в блоки из трех граней с правильными треугольниками в основании, и снова можно воспользоваться перечнем правильногранных многогранников [3], выбирая в качестве опорных (как в доказательстве леммы 14) те из них, у которых грани треугольные, и заменяя все их грани на трехгранные блоки. Проверка реализуемости заключается, как и в доказательстве леммы 14, в контроле за величинами двугранных углов при ребрах, по которым склеиваются блоки друг с другом (т. е. при ребрах опорных многогранников).

В качестве опорных оказываются пригодными только такие многогранники с правильными треугольными гранями: правильный октаэдр — дает многогранник $M_{1.13}$; правильная пятиугольная бипирамида — дает $M_{1.14}$; многогранник, изображенный последним в таблице и порождающий $M_{1.15}$ (там показана замена одной грани опорного многогранника блоком). Если теперь у правильной треугольной призмы все боковые грани (квадраты) заменить четырехгранными блоками, составленными из правильных треугольников, равных основаниям призмы, то такой многогранник можно взять за опорный — он порождает многогранник $M_{1.16}$. Наконец, у правильной четырехугольной антипризмы квадратные грани заменим четырехгранными блоками из правильных треугольников (равных боковым граням) — такой правильногранный многогранник служит опорным для $M_{1.17}$. Лемма 16 доказана.

Лемма 17. *Грани типа* $(3, k, n)$ *при* n *и* $k \geqslant 9$ *принадлежат лишь многограннику* $M_{1.18}$.

Доказательство. Подклеив к ребру $[3, n]$ исходной грани $(3, k, n)$ четырехугольник, придем к противоречию аналогично тому, как в лемме 16. Если исходную грань будем продолжать треугольниками, то лишь в одном случае ($n = k = 10$) получим замкнутую сеть многогранника $M_{1.18}$. Этот многогранник проще всего получить, как и предыдущие, заменяя в опорном многограннике — правильном икосаэдре — все его грани трехгранными блоками. Лемма 17 доказана.

Доказательство теоремы слагается из результатов лемм 1 — 17 и замечания, сделанного в начале п. 1.

Список литературы: **1.** *Гурин А. М.* Оценка числа замкнутых выпуклых многогранников с равноугольными вершинами. — Укр. геометр. сб., 1982, вып. 25, с. 22—30. **2.** *Гурин А. М.* О выпуклых многогранниках с равноугольными вершинами. — Укр. геометр. сб., 1980, вып. 23, с. 34—40. **3.** *Залгаллер В. А.* Выпуклые многогранники с правильными гранями. — Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. мат. ин-та им. Стеклова АН СССР, 1967, 2, с. 220. **4.** *Гурин А. М.* Реализация сетей выпуклых многогранников с равноугольными вершинами. 1.—Укр. геометр. сб., 1983, вып. 26, с. 41—48.

Поступила в редколлегию 19. 11. 83.

УДК 513,531

В. И. Денисов

СПЕЦИАЛЬНЫЕ КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Специальным конформным отображением пространства-времени V на пространство-время $\bar{V}$ будем называть такое конформное отображение $V \to \bar{V}$, при котором конгруэнция времениподобных геодезических в V, определяемая векторным полем $u^i(x)$, отобра-жается в конгруэнцию геодезических $\overline{V}$.

Известны [1, 2] условия, которым должны удовлетворять век-торное поле $u^i(x)$ и отображающая функция $\sigma(x)$ специального конформного соответствия. Именно, если V и $\overline{V}$ находятся в спе-циальном конформном соответствии, установленном по общност координат, то отображающая функция $\sigma(x)$, определяющая связь метрик V и $\overline{V}$:

$$\overline{g}_{ij} = e^{2\sigma(x)} g_{ij}, \tag{0.1}$$

и векторное поле $u^i(x)$ должны удовлетворять условиям:

$$u_i(x)\,\sigma(x)_{,j} = u_j(x)\,\sigma(x)_{,i}. \tag{0.2}$$

Эти условия являются необходимыми и достаточными для того, чтобы отображение (0.1) $V \to \overline{V}$ было специальным конформным

Цель предлагаемой работы — определить произвол, с которым можно задать нетривиальное ($\sigma_{,j} \neq 0$) специальное конформно отображение и найти условия, при которых пространство-врем V допускает это отображение на пространство-время $\overline{V}$, причем метрический тензор как V, так и $\overline{V}$, должен удовлетворять урав-нениям Эйнштейна с тензором энергии-импульса идеальной жид-кости, имеющей геодезическое поле скоростей.

По существу, решение этой задачи определяет те классы реля-тивистских пространств с идеальной жидкостью, в которых уравне-ния движения и траектории движения жидкости одинаковы. В этом смысле такие релятивистские пространства моделируют друг друга.

1. Предположим, что в римановом пространстве-времени V с мет-рическим тензором $g_{ik}(x)$ задана времениподобная конгруэнция геодезических. Пусть поле $u^i(x)$ — поле касательных векторов этой конгруэнции.

Необходимые и достаточные условия, при которых конформное отображение (0.1) $V \to \overline{V}$ является специальным, имеют вид (0.2). Из последних следует, что векторное поле $u^i(x)$ является нор-мальным векторным полем, т. е. в V существует семейство ги-перповерхностей $\varphi(x) = \mathrm{const}$, к которым геодезические конгру-энции $u^i(x)$ ортогональны.

Тогда пространство-время $\overline{V}$ с метрическим тензором (0.1) при $\sigma(x) = \sigma(\varphi(x))$ и V находятся в специальном конформном соот-ветствии.

Произвол в определении $\overline{V}$ при заданном V довольно широк. Достаточно задать в V времениподобную гиперповерхность $\varphi(x) = 0$ и провести геодезические, нормальные к этой гиперповерх-ности. Пусть $u^i(x)$ — поле касательных векторов таких геодези-ческих. Возьмем семейство гиперповерхностей, геодезически па-раллельных гиперповерхности $\varphi(x) = 0$.

Так как поле $u^i(x)$ ортогонально по построению семейству гиперповерхностей $\varphi(x) = \text{const}$, то условие (0.2) выполняется для любой отображающей функции вида $\sigma = \sigma(\varphi)$.

Найдем канонический вид метрик V и $\overline{V}$, находящихся в специальном конформном соответствии.

В полугеодезической системе координат, построенной на базе гиперповерхности $\varphi(x) = 0$, метрика V определяется равенством:

$$ds^2 = d\tau^2 + g_{\alpha\beta}(\tau, x^\nu)\, dx^\alpha dx^\beta, \ \alpha, \beta, \nu = 1, 2, 3; \ \tau = x^0. \quad (1.1)$$

В этой системе координат геодезическая конгруэнция, нормальная к гиперповерхностям $\tau = \text{const}$, определяется векторным полем $u^i: u^0 = 1, \ u^\alpha = 0$. Тогда пространство-время $\overline{V}$ с метрикой

$$d\bar{s}^2 = e^{2\sigma(\tau)}\left(d\tau^2 + g_{\alpha\beta}(\tau, x^\nu)\, dx^\alpha dx^\beta\right) \quad (1.2)$$

и пространство-время V с метрикой (1.1) находятся в специальном конформном соответствии, при котором конгруэнция геодезических u^i: $u^0 = 1, \ u^\alpha = 0 \in V$ переходит в конгруэнцию геодезических в $\overline{V}$ с касательным векторным полем $\overline{u}^i = e^{-\sigma(\tau)} u^i$.

Рассмотрим более подробно случай плоского пространства-времени V_0. В псевдодекартовой системе координат метрика V_0 будет:

$$ds^2 = \eta_{ij} dx^i dx^j = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2. \quad (1.3)$$

Пусть φ: $x^i = x^i(v^1, v^2, v^3)$ — времениподобная гиперповерхность в V_0. Тогда семейство времениподобных геодезических, ортогональных гиперповерхности φ, можно задать следующим образом:

$$X^i(\tau, v^1, v^2, v^3) = x^i(v^1, v, v^3) + \tau n^i(v^1, v^2, v^3), \quad (1.4)$$

где τ — канонический параметр на геодезической; n^i — единичное времениподобное векторное поле, ортогональное гиперповерхности φ. Тогда в полугеодезической системе координат (1.4), построенной на базе гиперповерхности φ, метрика плоского пространства-времени V_0 принимает вид:

$$ds^2 = (d\tau)^2 + (I_\varphi - 2\tau II_\varphi + \tau^2 III_\varphi), \quad (1.5)$$

где I_φ, II_φ, III_φ — первая, вторая и третья, соответственно, квадратичные формы гиперповерхности φ:

$$I_\varphi = \eta_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial v^\alpha} \frac{\partial x^j}{\partial v^\beta} dv^\alpha dv^\beta,$$

$$II_\varphi = -\eta_{ij} \frac{\partial x^i}{dv^\alpha} \frac{\partial n^j}{\partial v^\beta} dv^\alpha dv^\beta,$$

$$III_\varphi = \eta_{ij} \frac{\partial n^i}{\partial v^\alpha} \frac{\partial n^j}{\partial v^\beta} dv^\alpha dv^\beta,$$

$$\alpha, \beta = 1, 2, 3; \ ,i \ j = 0, 1, 2, 3.$$

В системе координат (1.4) поле касательных векторов конгруэнции геодезических будет: $u^0 = 1$, $u^\alpha = 0$, а семейство гиперповерхностей $\varphi = \text{const}$ определяется равенством $\tau = \text{const}$, что обеспечивает выполнение условий (0.2). Поэтому общий вид метрики пространства-времени $\overline{V}$, находящегося в специальном конформном соответствии с плоским пространством-временем (1.5), определяется выражением:

$$ds^2 = e^{2\sigma(\tau)} (d\tau^2 + I_\varphi - 2\tau II_\varphi + \tau^2 III_\varphi). \tag{1.6}$$

В частном случае, когда гиперповерхность $\varphi = 0$ является времениподобной плоскостью $\varphi = c_i x^i + b$, где c_i, b — постоянные, из (1.5) и (1.6) следует известный [2] результат, согласно которому отображающая функция $\sigma(x)$ в этом случае имеет вид $\sigma(x) = \sigma(c_i x^i + b)$.

2. Предположим, что метрический тензор $g_{ij}(x)$ пространства-времени V является решением уравнений Эйнштейна с тензором энергии-импульса идеальной жидкости, поле скоростей которой является геодезическим векторным полем, т. е.

$$G_{ij} - \lambda g_{ij} = -(\rho + p) u_i u_j + p g_{ij}, \tag{2.1}$$

$$u^i_{,j} u^j = 0. \tag{2.2}$$

Здесь $G_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R$ — тензор Эйнштейна; λ — космологическая постоянная; ρ, p — плотность и давление идеальной жидкости; u^i — поле скоростей жидкости.

Предположим далее, что пространство-время V находится в специальном конформном соответствии с $\overline{V}$, при котором геодезическая конгруэнция $u^i(x) \in V$ отображается в геодезическую конгруэнцию $\overline{u}^i(x) = e^{-\sigma(x)} u^i(x) \in \overline{V}$. Тогда поле $u^i(x)$ является нормальным векторным полем, так как $u_i \sigma_{,j} = u_j \sigma_{,i}$, а метрика $\overline{V}$ определяется равенством

$$\overline{g}_{ij} = e^{2\sigma(x)} g_{ij}. \tag{2.3}$$

Условия, при которых метрический тензор (2.3) пространства-времени $\overline{V}$ также является решением уравнений Эйнштейна с тензором энергии-импульса идеальной жидкости и полем скоростей $\overline{u}^i(x) = e^{-\sigma(x)} u^i(x)$, определяет

Теорема А. *Пространство-время V с метрикой (2.3) является решением уравнений Эйнштейна с тензором энергии-импульса идеальной жидкости, поле скоростей которой $\overline{u}^i(x) = e^{-\sigma(x)} u^i(x)$, тогда и только тогда, когда гиперповерхность $\sigma(x) = \text{const}$ является омбилической.*

Доказательство. Введем в V полугеодезическую систему координат, построенную на базе гиперповерхности σ. В такой системе координат метрика V определяется выражением:

$$ds^2 = d\tau^2 + g_{\alpha\beta}(\tau, x^\nu)\, dx^\alpha dx^\beta, \quad \alpha, \beta, \nu = 1, 2, 3, \tag{2.4}$$

и векторное поле u^i и гиперповерхность σ определяются равенствами: $u^0 = 1$, $u^\alpha = 0$, $\sigma = \sigma(\tau) = \text{const}$. Далее, так как $\bar{V}$ конформно V, то тензор кривизны и скалярная кривизна V определяются выражениями [3]:

$$\bar{R}_{ij} = R_{ij} + 2\sigma_{ij} + (\Delta^2\sigma + 2\Delta_1\sigma)\, g_{ij}, \qquad \bar{R} = e^{-2\sigma}R + e^{-2\sigma}(6\Delta^2\sigma + 6\Delta_1\sigma), \tag{2.5}$$

где R_{ij}, R — тензор кривизны Риччи и скалярная кривизна пространства-времени V; $\sigma_{ij} = \sigma_{,i;\,j} - \sigma_{,i}\sigma_{,j}$; $\Delta_1\sigma = g^{ij}\sigma_{,i}\sigma_{,j}$; $\Delta_2\sigma = g^{ij}\sigma_{,i;\,j}$; здесь ковариантные производные берутся в метрике V.

В метрике (2.4) для функции $\sigma(\tau)$ находим:

$$\sigma_{,i} = \sigma'\delta_i^0;\ \ \Delta_1\sigma = (\sigma')^2; \qquad \sigma_{,i;\,j} = (\sigma'' - \sigma'^2)\,\delta_i^0\delta_j^0 + \frac{1}{2}\sigma'\frac{\partial g_{ij}}{\partial\tau}; \qquad \Delta_2\sigma = \sigma'' + \frac{1}{2}\sigma' g^{ij}\frac{\partial g_{ij}}{\partial\tau}, \tag{2.6}$$

где $\sigma' = \dfrac{d\sigma}{d\tau}$, $x^0 = \tau$.

Докажем необходимость условий теоремы. Пусть V — решение уравнений Эйнштейна с тензором энергии-импульса идеальной жидкости. Тогда имеют место равенства

$$\bar{R}_{ij} - 1/2\bar{g}_{ij}\bar{R} + \lambda\bar{g}_{ij} = -(\bar{\rho} + \bar{p})\,\bar{u}_i\bar{u}_j + \bar{p}\bar{g}_{ij}. \tag{2.7}$$

Принимая во внимание (2.1), (2.5) и (2.6), получаем из (2.7) после простых преобразований

$$2(\sigma'' - \sigma'^2)\,\delta_i^0\delta_j^0 + \sigma'\frac{\partial g_{ij}}{\partial\tau} - (\Delta_1\sigma + 2\Delta_2\sigma)\,g_{ij} - \lambda g_{ij} - (\rho + p)\,u_iu_j + pg_{ij} = -\lambda e^{2\sigma}g_{ij} - (\bar{\rho} + \bar{p})\,e^{2\sigma}u_iu_j + pe^{2\sigma}g_{ij}, \tag{2.8}$$

где $\bar{\rho}$ и $\bar{p}$ — плотность и давление идеальной жидкости в $\bar{V}$. Из (2.8), положив $i = j = 0$, получаем:

$$(\bar{\rho} + \lambda)\,e^{2\sigma} = (\rho + \lambda) + 3\sigma'^2 + \sigma' g^{ij}\frac{\partial g_{ij}}{\partial\tau}. \tag{2.9}$$

При $i = \alpha$, $j = \beta$ (2.8) дают:

$$(\bar{p} - \lambda)\,e^{2\sigma}g_{\alpha\beta} = (p - \lambda)\,g_{\alpha\beta} - (\Delta_1\sigma + 2\Delta_2\sigma)g_{\alpha\beta} + \sigma'\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial\tau}, \tag{2.10}$$

откуда следует, что

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial\tau} = \Phi(\tau, x^\nu)g_{\alpha\beta}. \tag{2.11}$$

Найдем теперь вторую квадратичную форму гиперповерхности $\sigma(\tau) = \text{const}$. Нормаль n^i к этой гиперповерхности есть $n^0 = 1$, $n^\alpha = 0$. Тогда вторая квадратичная форма гиперповерхности σ будет:

$$II_\sigma = n_{\alpha;\,\beta}dx^\alpha dx^\beta = -\Gamma^0_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial\tau}dx^\alpha dx^\beta.$$

Из последнего и (2.11) следует, что вторая квадратичная форма гиперповерхности пропорциональна ее первой квадратичной форме. Поэтому линии кривизны гиперповерхности σ неопределенны, т. е. σ — омбилическая гиперповерхность [3]. Необходимость доказана.

Заметим, что выражения (2.9) и (2.10) определяют плотность и давление идеальной жидкости в $\overline{V}$:

$$\begin{aligned}(\overline{\rho}+\lambda)\,e^{2\sigma}&=(\rho+\lambda)+3(\sigma'^2+\sigma'\Phi),\\ (p+\lambda)\,e^{2\sigma}&=(p-\lambda)-(2\sigma''+2\sigma'^2+2\sigma'\Phi).\end{aligned}\tag{2.12}$$

Докажем достаточность условий теоремы. Предположим, что гиперповерхность σ является омбилической. Тогда [4] ее вторая квадратичная форма пропорциональна первой, т. е. $II_\sigma=\overset{*}{\Phi} I_\sigma$. Так как $I_\sigma=g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$, а $II_\sigma=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial\tau}dx^\alpha dx^\beta$, то условие омбиличности дает: $\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial\tau}=2\overset{*}{\Phi} g_{\alpha\beta}$, что обеспечивает принадлежность метрики $\overline{V}$ к решениям уравнений Эйнштейна с идеальной жидкостью. Теорема А доказана.

Из теоремы А можно получить следствие, которое по существу определяет внутреннюю геометрию гиперповерхности σ.

С л е д с т в и е   т е о р е м ы   А. *Если пространство-время V удовлетворяет условиям теоремы А, то метрика омбилической гиперповерхности σ является метрикой постоянной кривизны.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Найдем компоненты $R_{0\mu}$ тензора кривизны Риччи метрики (2.4) при условии (2.11).

Так как вектор нормали n^i гиперповерхности σ определяется равенствами $n^0=1$, $n^\alpha=0$, то ковариантная производная $n^i_{;\mu}$ в метрике (2.4) при условии (2.11) равна (1/2) $\delta^i_\mu\Phi$. Вычислив вторые ковариантные производные вектора n^i, находим компоненты $R^i_{0\mu\nu}$ тензора кривизны метрики (2.4):

$$R^i_{0\mu\nu}=n^i_{;\mu;\,\nu}-n^i_{;\nu;\,\mu}=\frac{1}{2}\,\delta^i_\mu\Phi_{,\nu}-\frac{1}{2}\,\delta^i_\nu\Phi_{,\mu}.\tag{2.13}$$

Поскольку в метрике (2.4) $g^{00}=1$, $g^{0\alpha}=0$, то, свертывая (2.13) по i и μ, получаем $R_{0\nu}=\Phi_{,\nu}$. Далее, так как метрический тензор V удовлетворяет уравнениям Эйнштейна с тензором энергии-импульса идеальной жидкости, из (2.1) следует, что $R_{0\nu}=0$. Поэтому функция Φ в (2.11) зависит только от τ, и метрика V определяется выражением

$$ds^2=d\tau^2+\exp\left(\int\limits_{\tau_0}^{\tau}\Phi(\xi)\,d\xi\right)g_{\alpha\beta}(x^\nu)\,dx^\alpha dx^\beta,\tag{2.14}$$

откуда следует, что пространство-время V находится в специальном конформном соответствии с пространством-временем W, метрика которого статична (не зависит от временной координаты) и имеет вид

$$ds^2 = \tilde{g}_{ij} d\tilde{x}^i d\tilde{x}^j = d\tilde{\tau}^2 + g_{\alpha\beta}(x^\nu)\, dx^\alpha dx^\beta. \tag{2.15}$$

В силу теоремы A, W — решение уравнений Эйнштейна с тензором энергии-импульса идеальной жидкости. Поэтому тензор Эйнштейна $\tilde{G}_{ij}$ пространства-времени W удовлетворяет уравнениям:

$$\tilde{G}_{ij} - \lambda \tilde{g}_{ij} = -(\tilde{\rho} + \tilde{p})\, \tilde{u}_i \tilde{u}_j + \tilde{p}\tilde{g}_{ij}, \ \tilde{u}_i = \delta_i^0. \tag{2.16}$$

Так как для статической метрики (2.15) имеют место равенства [4]:

$$\tilde{G}_{00} = -\overset{\sigma}{R}/2, \ \tilde{G}_{0\mu} = 0, \ \tilde{G}_{\mu\nu} = \overset{\sigma}{G}_{\mu\nu}, \tag{2.17}$$

где $\overset{\sigma}{R}$, $\overset{\sigma}{G}_{\mu\nu}$ — скалярная кривизна и тензор Эйнштейна метрики гиперповерхности $\tilde{\tau} = \text{const}$, то из (2.16) и (2.17) следует, что трехмерное подпространство $\tilde{\tau} = \text{const}$ пространства-времени W является трехмерным пространством Эйнштейна.

Как известно [3], такое трехмерное пространство необходимо является пространством постоянной кривизны.

Поскольку метрика гиперповерхности $\tilde{\tau} = \text{const}$ в W отличается от метрики гиперповерхности $\tilde{\tau} = \text{const}$ в V постоянным множителем, то доказанное утверждение верно и для гиперповерхности $\tau = \text{const}$.

3. Из приведенных доказательств следует, что общий вид метрики пространства-времени V, удовлетворяющего условиям теоремы A, имеет вид

$$ds^2 = e^{2\sigma(\tau)} (d\tau^2 + dl_k^2), \tag{3.1}$$

где dl_k^2 — отрицательно определенная метрика трехмерного пространства постоянной кривизны. Метрики вида (3.1) являются метриками эталонных космологических моделей [5, 6]. Некоторые из этих моделей — модель Эйнштейна и де-Ситтера, плоская и открытая космологические модели Фридмана — могут быть получены специальным конформным отображением плоского пространства-времени. Такие отображения определяются выбором базовых гиперповерхностей $\varphi(x) = 0$ в плоском пространстве-времени.

Например, плоские модели Фридмана получаются при специальном конформном отображении плоского пространства-времени V_0, если в качестве базовой гиперповерхности взять времениподобную плоскость [2].

Список литературы: 1. *Пугачев Я. И.* Критерий конформной инвариантности изотропных геодезических.— Изв. вузов. Физика, 1962, № 1, с. 45—47. 2. *Обозов В. И.* О проективности конформно-плоских пространств, созданных гидродинамическим тензором энергии-импульса.— Изв. вузов. Физика, 1972, № 10, с. 16—20. 3. *Эйзенхарт Л. П.* Риманова геометрия.— М.: Изд-во иностр. лит., 1948. — 316 с. 4. *Синг Дж.* Общая теория относительности.— М.: Изд-во иностр. лит., 1963. —432 с. 5. *Вейнберг С.* Гравитация и космология.— М.: Мир, 1975. —696 с. 6. *Толмен Р.* Относительность, термодинамика и космология.— М.: Наука, 1974. —520 с.

Поступила в редколлегию 21.11.83.

УДК 513.82

В. И. Дискант

УСТОЙЧИВОСТЬ В ПРОБЛЕМЕ АЛЕКСАНДРОВА ДЛЯ ВЫПУКЛОГО ТЕЛА, ОДНА ИЗ ПРОЕКЦИЙ КОТОРОГО — ШАР

Пусть A и B — ограниченные замкнутые выпуклые тела в n-мерном евклидовом пространстве $R^n (n \geqslant 3)$. Предположим, что опорная функция тела A дважды непрерывно дифференцируема и тело A регулярно, т. е. имеет в каждой точке своей границы не равные нулю главные радиусы кривизны $R_1, \ldots, R_{n-1}$, которые являются непрерывными функциями единичной нормали u. Элементарно — симметрическая функция степени $k (k = 1, 2, \ldots, n-1)$ от главных радиусов кривизны называется k-й функцией кривизны тела А. Обозначим ее через $D_k(A, u)$. Аналогично для тела B при тех же условиях определяется k-я функция кривизны $D_k(B, u)$.

А. Д. Александров [1, с. 240] доказал теорему об однозначной определенности выпуклого тела с заданной k-й функцией кривизны. Если два выпуклых регулярных тела с дважды непрерывно дифференцируемыми опорными функциями имеют одинаковые функции кривизны данного порядка, то эти тела равны и параллельно расположены.

До настоящего времени теоремы устойчивости, соответствующие этой теореме однозначной определенности, были доказаны для случаев $k = 1$ [2], $k = n-1$ [3, 4, 5], $k = n-2$ [6].

В настоящей работе доказывается следующая теорема: Если для любого $\boldsymbol{u} \in \Omega$ в R^n $(n \geqslant 5)$ и фиксированного k $(k \geqslant 3)$ выполняется неравенство $|D_k(A, \boldsymbol{u}) - D_k(B, \boldsymbol{u})| < \varepsilon$, $0 \leqslant \varepsilon < \varepsilon_0$, и в R^n существует гиперплоскость, проекция тела A на которую — шар, то $\delta(A, B) < C\varepsilon^q$, где $q = \frac{k!\,(k+1)!}{2^n k^{n-k}\,(n!)^3}$.

В формулировке теоремы Ω — единичная сфера в R^n — граница единичного шара E с центром в начале координат, $\delta(A, B)$ — отклонение тел A и B, величины C, ε_0 зависят от n, r_A, R_A, где r_A — радиус наибольшего вписанного в A шара, R_A — радиус наименьшего описанного около A шара. Ограничение по размерности $n \geqslant 5$ не является существенным, так как из результатов работ [2—6] вытекает, что теорема устойчивости в случае $n < 5$ имеет место при любом k.

Отметим, что из сформулированной теоремы вытекает теорема устойчивости для случая, когда тело A является телом вращения.

Введем следующие обозначения. Через R^m $(m = 1, 2, \ldots, n)$ обозначим m-мерную плоскость пространства R^n, проходящую через начало координат; через $A(R^m)$ — проекцию тела A на плоскость R^m (в частности $A(R^n) = A$); через $V_{ij}(A(R^m), B(R^m))$—смешанный объем тел $A(R^m)$ и $B(R^m)$ в плоскости R^m, т. е. величину $V(\underbrace{\overbrace{A(R^m), \ldots, A(R^m)}^{i}, \overbrace{B(R^m), \ldots, B(R_m)}^{j}, E(R^m, \ldots, E(R^m)}_{m});$ через $V_i(A(R^m))$ — величину $V_{i0}(A(R^m), B(R^m))$; через $V(A(R^m)$— величину $V_m(A(R^m))$ — объем тела $A(R^m)$ в R^m (в частности $V_{ij}(A(R^n)), B(R^n)) = V_{ij}(A, B)$, $V_i(A(R^n)) = V_i(A)$, $V(A(R^n)) = V(A)$); через $C_1, \ldots, C_{58}$, $\overline{C}_i$, $\overline{C}_i'$ $(i = 2, \ldots, n-k)$, $\tilde{C}_i$, $\tilde{C}_i'$, $\tilde{C}_i''$, $\tilde{C}_i'''$ $(i = 1, \ldots, n-k)$, $\hat{C}_i$ $(i = 0, 1, \ldots, n-k)$ — положительные величины, зависящие только от n, r_A, R_A; через $F_i(A, \omega)$, где ω — множество Ω, — i-ю обобщенную функцию кривизны тела A; через $h_A(\boldsymbol{u})$ — опорную функцию тела A; через $H_t = (1-t)A + tB$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ — смешение тел A и B. Будем считать, что для каждого тела, рассматриваемого в работе, его опорная функция неотрицательна.

Предварительно докажем 13 лемм. Леммы 3—5 аналогичны леммам 1—3 работы [6], а леммы 7—13 — леммам 1—7 работы [7]. В некоторых случаях прямая ссылка на доказательство аналогичных лемм затруднительна. Поэтому большая часть лемм здесь доказана полностью.

Лемма 1. *Величины $V_{k+1}(A)$, $V_{k+1}(B)$, $V_{k1}(A, B)$, $V_{k1}(B, A)$ допускают оценки снизу и сверху величинами, зависящими от r_A, R_A, k, n. При этом оценки снизу — положительные величины.*

Доказательство. Так как $r_A E_1 \subset A \subset R_A E_2$, где E_1, E_2— единичные шары, центры которых совпадают с центрами соответственно вписанного в А и описанного около A шаров, то по свойству монотонности смешанных объемов [8, с. 60] имеем

$$C_1 = r_A^{k+1} V(E) \leqslant V_{k+1}(A) \leqslant R_A^{k+1} V(E) = C_2. \tag{1}$$

Известно [9, с. 965], что

$$V_{k1}(B, A) = \frac{1}{n}\int\limits_{\Omega} h_A(\boldsymbol{u})\, F_k(B, d\omega),$$

$$V_{k+1}(A) = \frac{1}{n}\int\limits_{\Omega} h_A(\boldsymbol{u})\, F_k(A, d\omega), \tag{2}$$

$$F_k(A, \omega) = \frac{1}{C_{n-1}^k}\int\limits_{\omega} D_k(A, \boldsymbol{u})\, d\omega,$$

Поэтому $|V_{k1}(B, A) - V_{k+1}(A)| = \frac{1}{n}\left|\int\limits_{\Omega} h_A(\boldsymbol{u})(F_k(B, d\omega) -\right.$

$$\left.- F_k(A, d\omega))\right| \leqslant \frac{1}{nC_{n-1}^k}\int\limits_{\Omega} h_A(\boldsymbol{u})\,\varepsilon d\omega \leqslant \frac{2R_A}{nC_{n-1}^k}\,\varepsilon F(\Omega) \leqslant C_3\varepsilon, \quad (3)$$

где $F(\Omega)$ — площадь сферы Ω.

Из неравенств (1) и (3) вытекает, что при надлежащем выборе значения ε_0 величина $V_{k1}(B, A)$ удовлетворяет оценкам $C_4 \leqslant V_{k1}(B, A) \leqslant C_5$.

Меняя местами тела A и B в неравенстве (3), получим

$$|V_{k1}(A, B) - V_{k+1}(B)| < \frac{\varepsilon}{nC_{n-1}^k}\int\limits_{\Omega} h_B(\boldsymbol{u})\,d\omega = \frac{\varepsilon}{nC_{n-1}^k}\,h(B), \quad (4)$$

где $h(B) = \int\limits_{\Omega} h_B(\boldsymbol{u})\,d\omega$.

Из неравенств

$$\frac{1}{n}\,r_A^k h(B) \leqslant V_{k1}(A, B) \leqslant \frac{1}{n}\,R_A^k h(B), \quad (5)$$

которые выводятся так же как и (1), и неравенства (4) находим

$$\frac{1}{n}\,(r_A^k - \varepsilon)\,h(B) \leqslant V_{k+1}(B) \leqslant \frac{1}{n}\,(R_A^k + \varepsilon)\,h(B),$$

откуда при $\varepsilon_0 < \frac{1}{2}\,r_A^k$ получаем

$$\frac{1}{2n}\,r_A^k h(B) < V_{k+1}(B) < \frac{1}{n}\left(R_A^k + \frac{1}{2}\,r_A^k\right)h(B). \quad (6)$$

Из обобщенного неравенства Брунна — Минковского [8, с. 67] следует:

$$V_{k1}^k(B, A) \geqslant V_{k+1}^{k-1}(B)\,V_{k1}(A, B). \quad (7)$$

Подставив в (7) оценки $V_{k1}(B, A) \leqslant C_5$, $V_{k1}(A, B) \geqslant \frac{1}{n}\,r_A^k h(B)$, $V_{k+1}(B) \geqslant \frac{1}{2n}\,r_A^k h(B)$, найдем для $h(B)$ оценку сверху $h(B) \leqslant C_6$. Тогда из нее и неравенств (5) и (6) получаем для $V_{k1}(A, B)$ и $V_{k+1}(B)$ оценки сверху: $V_{k1}(A, B) \leqslant C_7$, $V_{k+1}(B) \leqslant C_8$.

Поменяв местами A и B в неравенстве (7), получим

$$V_{k1}^k(A, B) \geqslant V_{k+1}^{k-1}(A)\,V_{k1}(B, A). \quad (8)$$

Так как $V_{k1}(A, B) \leqslant \frac{1}{n}\,R_A^k\,h(B)$, $V_{k+1}(A) \geqslant C_1$, $V_{k1}(B, A) \geqslant C_4$, то из (8) получаем для $h(B)$ оценку снизу $h(B) \geqslant C_9$. Тогда из (5) и (6) можно найти для величин $V_{k1}(A, B)$ и $V_{k+1}(B)$ оценки снизу $V_{k1}(A, B) \geqslant C_{10}$, $V_{k+1}(B) \geqslant C_{11}$. □

Лемма 2. *Величина r_{H_t} допускает оценку снизу, а R_{H_t} — оценку* сверху при $t\in\left[0,\ \frac{1}{2}\right]$ *величинами, зависящими от* r_A, R_A, k, n.

Доказательство. Из определения смешения выпуклых тел [10, с. 29] следует, что в тело $H_t=(1-t)A+tB$ можно вписать шар радиуса $(1-t)r_A+tr_B$. Поэтому $r_{H_t}\geqslant\frac{1}{2}r_A$ при $0\leqslant t\leqslant\frac{1}{2}$. В лемме 1 было показано, что $h(B)$ и $h(A)$ допускают оценку сверху. Так как $h(H_t)$ изменяется линейно при изменении t, то и $h(H_t)$ допускает оценку сверху. Отсюда вытекает существование оценки сверху и для диаметра D_{H_t} тела H_t. Действительно, если l_{H_t} — отрезок, соединяющий точки тела H_t, расстояние между которыми равно D_{H_t}, то $h(l_{H_t})=D_{H_t}V(E(R^{n-1}))\leqslant h(H_t)$, откуда и следует ограниченность сверху D_{H_t}. Из неравенства [10, с. 78] для радиуса описанного шара R и диаметра D выпуклого тела в R^n, которое имеет вид $R\leqslant D\sqrt{n/(2n+2)}$, выводим, что и R_{H_t} допускает оценку сверху при $t\in[0,\ 1]$. □

Лемма 3. *Если для любого множества* $\omega\in\Omega$ *выполняется неравенство* $|F_k(A,\omega)-F_k(B,\omega)|<\varepsilon F(\omega)$, то $|V_{k1}(A,\ B)-V_{k+1}(B)|<C_{12}\varepsilon$, $|V_{k1}(B,\ A)-V_{k+1}(A)|<C_3\varepsilon$, $|V_{k+1}(A)-V_{k+1}(B)|<C_{13}\varepsilon$, $|V_{k+1}(H_t)-V_{k+1}(A)|<C_{14}\varepsilon$ *при* $t\in[0,\ 1]$.

Доказательство. Из неравенства (4), используя оценку $h(B)\leqslant C_6$, выводим $|V_{k1}(A,\ B)-V_{k+1}(B)|<C_{12}\varepsilon$ **(9)**. Неравенство (3) дает необходимую оценку для $|V_{k1}(B,\ A)-V_{k+1}(A)|$.

Из обобщенного неравенства Брунна — Минковского [8, с. 67] следует, что $V_{k1}^{k+1}(A,\ B)\geqslant V_{k+1}^{k}(A)V_{k+1}(B)$.

Подставляя в последнее неравенство оценку сверху для $V_{k1}(A,B)$ из (9), получим

$$(V_{k+1}(B)+C_{12}\varepsilon)^{k+1}\geqslant V_{k+1}^{k}(A)\,V_{k+1}(B).$$

Отсюда, учитывая оценки $V_{k+1}(B)\leqslant C_8$, $V_{k+1}(A)\leqslant C_2$, находим $V_{k+1}(B)\geqslant V_{k+1}(A)-C_{15}\varepsilon$. Меняя местами в предыдущих рассуждениях тела A и B и используя при этом вместо неравенства (9) неравенство (3), придем к неравенству $V_{k+1}(A)\geqslant V_{k+1}(B)-C_{16}\varepsilon$. Тем самым доказано неравенство $|V_{k+1}(A)-V_{k+1}(B)|<C_{13}\varepsilon$ **(10)**. Для доказательства последнего неравенства леммы рассмотрим функцию

$$f(t)=V_{k+1}^{1/(k+1)}(H_t)-(1-t)\,V_{k+1}^{1/(k+1)}(A)-tV_{k+1}^{1/(k+1)}(B).$$

Из общей теоремы Брунна — Минковского [8, с. 67] следует, что $f(t)$ выпукла вверх при $0\leqslant t\leqslant 1$. Поэтому при $0\leqslant t\leqslant 1$ для $f(t)$ справедливы неравенства $0\leqslant f(t)\leqslant f'(0)$. Так как

$$f'(0)=V_{k1}(A,\ B)/V_{k+1}^{k/(k+1)}(A)-V_{k+1}^{1/(k+1)}(B),$$

то из (9), (10) и оценок леммы 1 найдем $f'(0) < C_{17}\varepsilon$. Следовательно,

$$0 \leqslant V_{k+1}^{\frac{1}{k+1}}(H_t) - (1-t)V_{k+1}^{\frac{1}{k+1}}(A) - tV_{k+1}^{\frac{1}{k+1}}(B) < C_{17}\varepsilon.$$

Из этих неравенств и неравенства (10) вытекает последнее неравенство леммы. □

Лемма 4. $|V_k(H_t) - V_k(A)| < C_{18}\varepsilon$ *при* $t \in [0, 1/2]$.

Доказательство. Известно [11, с.1223], что

$$V_k(H_t) = \frac{1}{n}F_k(H_t, \Omega) = \frac{1}{nC_{n-1}^k}\int_\Omega D_k(H_t, \boldsymbol{u})\,d\omega.$$

Как показал А. Д. Александров [1, с. 236],

$$\sqrt[k]{D_k(H_t, \boldsymbol{u})} \geqslant (1-t)\sqrt[k]{D_k(A, \boldsymbol{u})} + t\sqrt[k]{D_k(B, \boldsymbol{u})}.$$

Из этого неравенства и условия теоремы следует неравенство $D_k(H_t, \boldsymbol{u}) \geqslant D_k(A, \boldsymbol{u}) - \varepsilon$ **(11)**. Отсюда, в частности, вытекает, что $V_k(H_t) - V_k(A) > -C_{19}\varepsilon$ **(12)**.

Из определения смешения выпуклых тел [10, с. 29) следует, что $h_{H_t}(\boldsymbol{u}) = (1-t)h_A(\boldsymbol{u}) + th_B(\boldsymbol{u})$. Рассмотрим интеграл $I = \frac{1}{nC_{n-1}^k}\int_\Omega h_{H_t}(\boldsymbol{u})(D_k(H_t, \boldsymbol{u}) - D_k(A, \boldsymbol{u}) + \varepsilon)\,d\omega$. С одной стороны, применяя оценки лемм 1—3, получаем

$$I = V_{k+1}(H_t) - \frac{1}{nC_{n-1}^k}\int_\Omega [(1-t)h_A(\boldsymbol{u}) + th_B(\boldsymbol{u})]\,D_k(A, u)\,d\omega + C_{20}\varepsilon =$$

$$= V_{k+1}(H_t) - V_{k+1}(A) + tV_{k+1}(A) - tV_{k1}(A, B) + C_{20}\varepsilon < C_{21}\varepsilon.$$

Если начало координат находится в центре шара, вписанного в H_t, то при $t \in [0, 1/2]$ будет $h_{H_t}(\boldsymbol{u}) > r_A/2$. Тогда, с другой стороны, применяя к интегралу I теорему о среднем — это можно сделать благодаря (11) — при $t \in [0, 1/2]$, получаем:

$$I \geqslant \frac{r_A}{2nC_{n-1}^k}\int_\Omega (D_k(H_t, \boldsymbol{u}) - D_k(A, \boldsymbol{u}) + \varepsilon)\,d\omega =$$

$$= \frac{r_A}{2nC_{n-1}^k}(V_k(H_t) - V_k(A)) + C_{22}\varepsilon.$$

Утверждение леммы является следствием оценок для I и неравенства (12). □

Лемма 5. $|V_k(H_t(R^{n-1})) - V_k(A(R^{n-1}))| < C_{23}\varepsilon$, *для любой гиперплоскости* R^{n-1} *при каждом* $t \in [0, 1/2]$.

Доказательство. Известно [11, с. 1223], что

$$V_k(A(R^{n-1})) = \frac{1}{2C_{n-1}^k}\int\limits_\Omega |\boldsymbol{nu}|\, D_k(A,\ \boldsymbol{u})\, d\omega,$$

где $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{n} \in \Omega$, причем $\boldsymbol{n}$ — вектор, ортогональный к R^{n-1}.

Рассмотрим интеграл

$$I_1 = \frac{1}{2C_{n-1}^k}\int\limits_\Omega |\boldsymbol{nu}|\,(D_k(H_t,\ \boldsymbol{u}) - D_k(A,\ \boldsymbol{u}) + \varepsilon)\, d\omega =$$

$$= V_k(H_t(R^{n-1})) - V_k(A(R^{n-1})) + C_{24}\varepsilon.$$

Из (11) вытекает, что $I_1 \geqslant 0$. С другой стороны, из (11), леммы 4 и неравенства $|\boldsymbol{nu}| \leqslant 1$ при $t \in [0,\ 1/2]$ получаем

$$I_1 \leqslant \frac{1}{2C_{n-1}^k}\int\limits_\Omega (D_k(H_t,\ \boldsymbol{u}) - D_k(A,\ \boldsymbol{u}) + \varepsilon)\, d\omega =$$

$$= \frac{n}{2}(V_k(H_t) - V_k(A)) + C_{25}\varepsilon < C_{26}\varepsilon.$$

Из этих неравенств для I_1 выводим утверждение леммы. □

Замечание. При доказательстве последующих утверждений работы будут использованы только утверждения лемм 1—5 для семейства H_t, при $t \in [0,\ 1]$ и тот факт, что проекция тела A на некоторую гиперплоскость R^{n-1} является шаром. Но леммы 2, 4, 5 доказаны для тел H_t при $t \in [0,\ 1/2]$. Это ограничение на изменение t может быть снято следующим образом.

Рассмотрим семейство тел $G_\theta = (1-\theta)A + \theta H_{1/2}$. Покажем, что из лемм 1—5 следует справедливость утверждений этих лемм для семейства G_θ при $\theta \in [0,\ 1]$ и при замене тела B на тело $H_{1/2}$. Это очевидно для утверждений лемм 2, 4, 5, третьего и четвертого неравенств утверждения леммы 3. Утверждение леммы 1, в котором B заменено на $H_{1/2}$, следует из леммы [illegible]. Первое неравенство в утверждении леммы 3 можно получить так. Рассмотрим функцию $g(\theta) = V_{k+1}^{1/(k+1)}(G_\theta) - (1-\theta)V_{k+1}^{1/(k+1)}(A) - \theta V_{k+1}^{1/(k+1)}(H_{1/2})$. Тогда $g'(0) = V_{k1}(A,\ H_{1/2})/V_{k+1}^{k/(k+1)}(A) - V_{k+1}^{1/(k+1)}(H_{1/2}) < f'(0) < C_{17}\varepsilon$, откуда и следует первое неравенство утверждения леммы 3. Второе неравенство утверждения леммы 3 можно получить, воспользовавшись леммой 2 работы [12].

Так как $\delta(A,\ B) \leqslant 2\delta(A,\ H_{1/2})$ [12, с. 673], то теорему достаточно доказать для семейства тел G_θ. Чтобы не усложнять обозначений, будем считать в дальнейшем, что утверждения лемм 2, 4, 5 справедливы для семейства тел H_t при $t \in [0,\ 1]$. □

Лемма 6. *Пусть Q^{n-1} — гиперплоскость в R^n такая, что $A(Q^{n-1})$ — шар. Тогда $\delta(A(Q^{n-1}),\ B(Q^{n-1})) < C_{27}\varepsilon^a$, где $a = (2^{n-2}n!)^{-1}$.*

Доказательство. Так как для радиуса r шара $A(Q^{n-1})$ справедливы оценки $r_A \leqslant r \leqslant R_A$, то, не умаляя общности, можем считать, что $r = 1$. Из леммы 4 заключаем, что выражение

$$\Phi_k(B(Q^{n-1}),\ t) = \sqrt[k]{V_k(H_t(Q^{n-1}))} - (1-t)\sqrt[k]{V_k(A(Q^{n-1}))} - \\ - t\sqrt[k]{V_k(B(Q^{n-1}))}$$

допускает оценку $\Phi_k(B(Q^{n-1}),\ t) < C_{28}\varepsilon$. Тогда для семейства тел $H_t(Q^{n-1})$ выполняются условия теоремы 2 работы [13]. Согласно этой теореме $\delta(A(Q^{n-1}),\ B(Q^{n-1})) < C_{27}\varepsilon^a$. □

Запишем для тел $A(R^{k+1})$ и $B(R^{k+1})$ неравенство Боннезена [10, с. 96]:

$$\varphi(\tau,\ R^{k+1}) = kV(A(R^{k+1})) - (k+1)\tau V_{k1}(A(R^{k+1}),\ B(R^{k+1})) + \\ + \tau^{k+1}V(B(R^{k+1})) \leqslant 0.$$

Этому неравенству удовлетворяют значения τ, для которых τ^k является отношением объемов проекций тел $A(R^{k+1})$ и $B(R^{k+1})$ на одну и ту же произвольную k-мерную плоскость $R^k \subset R^{k+1}$.

Введем обозначение $\tau_0 = \sqrt[k]{V(A(R^k))/V(B(R^k))}$. Из леммы 5 следует, что все смешанные объемы тел H_t при $t \in [0,\ 1]$ и их проекций на плоскости в R^n допускают оценки снизу величинами, отличными от нуля и зависящими от n, r_A и оценки сверху — величинами, зависящими от n, r_A, R_A; в частности, $C_{29} < \tau_0 < C_{30}$.

Лемма 7. *В каждой плоскости R^{k+1} найдется такая плоскость R^k, что для величины τ_0 справедлива оценка $|\tau_0 - 1| < C_{31}\varepsilon^a$.*

Доказательство. Пусть $R^k \subset R^{k+1} \cap Q^{n-1}$, где Q^{n-1} — гиперплоскость из условия леммы 6. Такая плоскость R^k существует, так как $R^{k+1} \cap Q^{n-1}$ имеет по крайней мере размерность k. Так как $A(R^k)$, $B(R^k)$ являются проекциями тел $A(Q^{n-1})$, $B(Q^{n-1})$ на плоскость R^k, то по лемме 6 имеем $\delta(A(R^k),\ B(R^k)) < C_{27}\varepsilon^a$. Тогда и $|V(A(R^k))/V(B(R^k)) - 1| < C_{32}\varepsilon^a$, откуда следует утверждение леммы.

Замечание. Величина τ_0 зависит от R^{k+1}, оценка же $|\tau_0 - 1| < C_{31}\varepsilon^a$ от R^{k+1} не зависит.

Лемма 8. *Для любой плоскости R^{k+1} имеют место оценки $|\varphi(1,\ R^{k+1})| < C_{33}\varepsilon^b$, $|\varphi(\tau_0,\ R^{k+1})| < C_{34}\varepsilon^b$, где $b = (k+1)!a/n!$.*

Доказательство. Так как $\varphi(\tau_0,\ R^{k+1}) \leqslant 0$ и $|\tau_0 - 1| < C_{31}\varepsilon^a$, то

$$\varphi(1,\ R^{k+1}) = kV(A(R^{k+1})) - (k+1)V_{k1}(A(R^{k+1}),\ B(R^{k+1})) + \\ + V(B(R^{k+1})) \leqslant C_{35}\varepsilon^a. \tag{13}$$

Пусть теперь Ω_{k+2} — единичная сфера в R^{k+2} с центром в начале координат, $\boldsymbol{u} \in \Omega_{k+2}$, $R_{\boldsymbol{u}}^{k+1}$ — гиперплоскость в R^{k+2}, перпендикулярная $\boldsymbol{u}$. Положим $\varphi(1,\ R^{k+2}) = \int\limits_{\Omega_{k+2}} \varphi(1,\ R_{\boldsymbol{u}}^{k+1})\, d\omega_{k+2}$, где

$d\omega_{k+2}$ — элемент площади сферы Ω_{k+2}. Аналогично определим $\varphi(1, R^{k+i})$ при $i=2, 3, \ldots, n-k$ по формуле $\varphi(1, R^{k+i})=$ $=\int\limits_{\Omega_{k+1}}\varphi(1, R_u^{k+i-1})\,d\omega_{k+1}$, где Ω_{k+1} — единичная сфера в R^{k+i} с центром в начале координат; $\boldsymbol{u}\in\Omega_{k+1}$; R_u^{k+i-1} — гиперплоскость в R^{k+i}, перпендикулярная к $\boldsymbol{u}$; $d\omega_{k+i}$ — элемент площади Ω_{k+i}. Тогда $\varphi(1, R^{k+i})=[kV_{k+1}(A(R^{k+i}))-(k+1)V_{k1}(A(R^{k+i}), B(R^{k+i}))+V_{k+1}(B(R^{k+i}))](k+2)\;\ldots\;(k+i)V(E(R^{k+1}))\;\ldots$ $\ldots V(E(R^{k+i-1}))$. Из (13) следует $\varphi(1, R^{k+i})\leqslant\bar{C}_i\varepsilon^a$ при $i=2,\ldots$ $\ldots, n-k$ **(14)**.

Так как $\varphi(1, R^n)=[kV_{k+1}(A)-(k+1)V_{k1}(A, B)+V_{k+1}(B)]C_{36}$, то из неравенств леммы 3 получаем $\varphi(1, R^n)\geqslant-C_{37}\varepsilon$. С другой стороны из (14) для каждой гиперплоскости R^{n-1} будет $\varphi(1, R^{n-1})<\bar{C}_{n-k-1}\varepsilon^a$. Тогда, пользуясь леммой 4 работы [6], выводим $\varphi(1, R^{n-1})\geqslant-C_{38}\varepsilon^{a/n}$. Последнее неравенство вместе с неравенством $\varphi(1, R^{n-2})\leqslant\bar{C}_{n-k-2}\varepsilon^a$ дает возможность утверждать, что $\varphi(1, R^{n-2})\geqslant-C_{39}\varepsilon^{\frac{a}{n(n-1)}}$.

Рассуждая аналогично, придем к неравенству $\varphi(1, R^{k+1})\geqslant$ $\geqslant-C_{40}\varepsilon^b$. Из оценок $|\varphi(1, R^{k+1})|<C_{33}\varepsilon^b$ и $|\tau_0-1|<C_{31}\varepsilon^a$ получаем вторую оценку леммы — для $|\varphi(\tau_0, R^{k+1})|$. □

Лемма 9. *Если* $\varphi(1, R^{k+1})\geqslant-C_{41}\gamma$ *и* $\tau>1$ *такое, что* $\varphi(\tau, R^{k+1})\leqslant 0$, *то* $\tau V(B(R^{k+1}))\leqslant V(A(R^{k+1}))+C_{41}\gamma\tau/k(\tau-1)$.

Доказательство леммы аналогично доказательству леммы 3 работы [7]. □

Лемма 10. *Для любой плоскости* R^{k+1} *справедливо неравенство* $|V(H_t(R^{k+1}))-(1-t)V(A(R^{k+1}))-tV(B(R^{k+1}))|<C_{42}\varepsilon^b$.

Доказательство. Известно неравенство $\psi(\tau, R^{k+1}, t)=$ $=V(H_t(R^{k+1}))-[(1-t)\tau^{-k}V(A(R^{k+1}))+tV(B(R^{k+1}))]\cdot[(1-t)\tau+$ $+t]^k\geqslant 0$ [10, с. 96]. Этому неравенству удовлетворяют значения τ, для которых τ^k является отношением объемов проекций тел $A(R^{k+1})$, $B(R^{k+1})$ на одну и ту же произвольную k-мерную плоскость R^k в R^{k+1}. В частности при $\tau=\tau_0$ имеем $\psi(\tau_0, R^{k+1}, t)\geqslant$ $\geqslant 0$, откуда, пользуясь оценками леммы 7 для τ_0 и неравенствами леммы 3, получаем

$$\psi(1, R^{k+1}, t)=V(H_t(R^{k+1}))-$$
$$-[(1-t)V(A(R^{k+1}))+tV(B(R^{k+1}))]\geqslant-C_{43}\varepsilon^a. \qquad (15)$$

Для произвольной плоскости R^{k+i} $(i=2,\ldots,n-k)$ положим $\psi(1, R^{k+i}, t)=\int\limits_{\Omega_{k+i}}\psi(1, R_u^{k+i-1}, t)\,d\omega_{k+1}$. Тогда $\psi(1, R^{k+i}, t)=$

$= [V_{k+1}(H_t(R^{k+i})) - (1-t)V_{k+1}(A(R^{k+i})) - tV_{k+1}(B(R^{k+i}))] \times (k+2) \ldots (k+i)V(E(R^{k+1})) \ldots V(E(R^{k+i-1}))$. Из (15) име[...] $\psi(1, R^{k+i}, t) \geqslant -\bar{C}'_i\varepsilon^a$ при $i = 2, \ldots, n-k$. В частност[...] $\psi(1, R^{n-1}, t) \geqslant -\bar{C}'_{n-k-1}\varepsilon^a$ **(16).** Но при $i = n-k$ для величи[...] $\psi(1, R^n, t) = (V_{k+1}(H_t) - (1-t)V_{k+1}(A) - tV_{k+1}(B))C_{44}$ из [...] равенств леммы 3 найдем, что $\psi(1, R^n, t) < C_{45}\varepsilon$. Из последне[...] неравенства и неравенства (16) по лемме 4 работы [6] получа[...] $\psi(1, R^{n-1}, t) < C_{46}\varepsilon^{a/n}$.

Рассуждая аналогично, придем к неравенству $\psi(1, R^{k+1}, t)$ [...] $< C_{47}\varepsilon^b$, которое вместе с неравенством (15) дает утвержден[...] леммы. □

Следствие. $\left|\dfrac{2V(H_{1/2}(R^{k+1}))}{V(A(R^{k+1})) + V(B(R^{k+1}))} - 1\right| < C_{48}\varepsilon^b.$

Доказательство аналогично доказательству следствия леммы [...] работы [7]. □

Лемма 11. *Если* $V(A(R^k)) \leqslant V(B(R^k))$ *и* $\sqrt[k]{V(H_{1/2}(R^k))/V(B(R^k))}$ [...] $= q_0 > 1$, *то справедливо неравенство*

$$q_0 \leqslant \frac{2V(H_{1/2}(R^{k+1}))}{V(A(R^{k+1})) + V(B(R^{k+1}))} + \frac{1}{V(A(R^{k+1})) + V(B(R^{k+1}))} \times$$
$$\times \left(C_{49}\varepsilon^b + \frac{C_{49}\varepsilon^b}{q_0 - 1}\right),$$

где $R^k \subset R^{k+1}$.

Доказательство. Рассмотрим семейство тел $D_\theta = (1 - \theta)H_{1/2} + \theta A$, $0 \leqslant \theta \leqslant 1$ и функцию $\tilde{\varphi}(\tau, R^{k+1}) = kV(H_{1/2} \times (R^{k+1})) - (k+1)\tau V_{k1}(H_{1/2}(R^{k+1}), \quad A(R^{k+1}) + \tau^{k+1}V(A(R^{k+1}))$ [...] Для семейства тел D_θ справедливы утверждения лемм 1—7[...] Поэтому для функции $\tilde{\varphi}(\tau, R^{k+1})$ справедливо неравенств[...] $\tilde{\varphi}(1, R^{k+1}) \geqslant -C_{49}\varepsilon^b$, доказанное в лемме 8 для функции $\varphi(\tau$[...] $R^{k+1})$. Дальнейшая часть доказательства аналогична соответству[...] ющей части доказательства леммы 5 работы [7]. □

Следствие. Величина q_0 из условия леммы удовлетворяе[...] неравенству $q_0 < 1 + C_{50}\varepsilon^{b/2}$.

Доказательство аналогично доказательству следствия леммы [...] работы [7]. □

Лемма 12. *Если* $\left|\sqrt[k]{\dfrac{V(A(R^k))}{V(B(R^k))}} - 1\right| < \varepsilon^m$, *то* $\delta(A(R^k)$[...] $B(R^k)) < C_{51}\,\varepsilon^{d/k}$, *где* $m > 0$, $d = \min(m, b/2)$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 6 рабо[...] ты [7]. □

Лемма 13. *График функции* $y = \varphi(\tau, R^{k+1})$ *при фиксирован*[...] *ной* R^{k+1} *пересекает ось* τ *по крайней мере в одной из точе*[...] *интервала* $(1 - C_{52}\varepsilon^{b/4}, 1 + C_{52}\varepsilon^{b/4})$.

Доказательство леммы аналогично доказательству леммы 7 работы [7]. □

Доказательство теоремы. Обозначим через τ_1, τ_2 ($\tau_1 \leqslant \tau_2$) точки пересечения графика функции $\varphi(\tau, R^{k+1})$ с осью τ для фиксированной R^{k+1}. Из выпуклости вниз графика функции $\varphi(\tau, R^{k+1})$ следует, что величина $\tau(R^k) = \sqrt[k]{\dfrac{V(A(R^k))}{V(B(R^k))}}$ при $R^k \subset R^{k+1}$ удовлетворяет неравенствам $\tau_1 \leqslant \tau(R^k) \leqslant \tau_2$. По лемме 13 для фиксированной плоскости R^{k+1} будет либо $\tau_1 > 1 - C_{52}\varepsilon^{b/4}$, либо $\tau_2 < 1 + C_{52}\varepsilon^{b/4}$. Таким образом, для фиксированной R^{k+1} все величины $\tau(R^k)$, где R^k — произвольная плоскость в R^{k+1}, удовлетворяют одному из неравенств $\tau(R^k) > 1 - C_{52}\varepsilon^{b/4}$ или $\tau(R^k) < 1 + C_{52}\varepsilon^{b/4}$. Это дает возможность провести классификацию $(k+1)$-мерных плоскостей в R^n.

Плоскость R^{k+1} назовем плоскостью первого (второго) типа, если для любой $R^k \subset R^{k+1}$ величина $\tau(R^k) > 1 - C_{52}\varepsilon^{b/4}$ ($\tau(R^k) < 1 + C_{52}\varepsilon^{b/4}$). Из сказанного выше вытекает, что каждая плоскость R^{k+1} является плоскостью или первого, или второго типа. Отметим, что R^{k+1} может быть одновременно как плоскостью первого, так и плоскостью второго типа.

Пусть теперь R^{k+i} ($i = 1, 2, \ldots, n-k$) — фиксированная плоскость в R^n. Докажем утверждение: все величины $\tau(R^k)$, где R^k — произвольная плоскость R^{k+i}, удовлетворяют одному из неравенств

$$\tau(R^k) > 1 - \tilde{C}_i\varepsilon^{b/4k^{i-1}} \text{ или } \tau(R^k) < 1 + \tilde{C}_i\varepsilon^{b/4k^{i-1}}, \qquad (17)$$

где $\tilde{C}_1 = C_{52}$.

Доказательство утверждения проведем методом математической индукции. Справедливость утверждения при $i = 1$ была показана выше. Предположим, что утверждение справедливо при $i = r$ ($r = 1, \ldots, n-k-1$). Покажем его справедливость при $i = r+1$.

Из справедливости утверждения при $i = r$ вытекает, что для каждой фиксированной плоскости R^{k+r} все величины $\tau(R^k)$ при $R^k \subset R^{k+r}$ удовлетворяют одному из неравенств $\tau(R^k) > 1 - \tilde{C}_r\varepsilon^{b/4k^{r-1}}$ или $\tau(R^k) < 1 + \tilde{C}_r\varepsilon^{b/4k^{r-1}}$; соответственно назовем плоскость R^{k+r} плоскостью первого или второго типа.

Пусть теперь R^{k+r+1} — фиксированная плоскость в R^n. Рассмотрим следующие три случая.

Первый случай. В R^{k+r+1} любая $(k+r)$-мерная плоскость — плоскость первого типа. В этом случае можем считать, что произвольная плоскость $R^k \subset R^{k+r+1}$ содержится в некоторой $R^{k+r} \subset R^{k+r+1}$, причем R^{k+r} — плоскость первого типа. Поэтому для произвольной R^k в R^{k+r+1} будет $\tau(R^k) > 1 - \tilde{C}_r \varepsilon^{b/4k^{r-1}}$, и утверждение в этом случае доказано. Заметим, что случай, когда в R^{k+r+1} все $(k+r)$-мерные плоскости — плоскости второго типа рассматривается аналогично и приводит для всех $\tau(R^k)$ к неравенству $\tau(R^k) < 1 + \tilde{C}_r \varepsilon^{b/4k^{r-1}}$.

Второй случай. В R^{k+r+1} есть $(k+r)$-мерные плоскости обоих типов и, кроме того, в R^{k+r+1} есть такая двумерная плоскость R^2, для которой любая содержащая ее плоскость R^{k+r} ($R^{k+r} \subset R^{k+r+1}$) является плоскостью первого типа.

Возьмем в R^{k+r+1} произвольную $(k+r)$-мерную плоскость P^{k+r} второго типа и в ней — произвольную двумерную плоскость P^2. Пусть $R^{k+r} \subset R^{k+r+1}$ такая, что $R^2 \subset R^{k+r}$ и $P^2 \subset R^{k+r}$. Такая плоскость R^{k+r} существует, так как по условию теоремы $k \geqslant 3$, $n \geqslant 5$.

Пересечение $R^{k+r} \cap P^{k+r}$ является плоскостью в R^{k+r+1}, размерность которой не меньше $k+r-1$ и потому не меньше k. Кроме того $P^2 \subset R^{k+r} \cap P^{k+r}$. Поэтому найдется такая k-мерная плоскость P^k, что $P^2 \subset P^k \subset R^{k+r} \cap P^{k+r}$. Так как $P^k \subset R^{k+r}$ и R^{k+r} — плоскость первого типа, то $\tau(P^k) > 1 - \tilde{C}_r \varepsilon^{b/4k^{r-1}}$. Поскольку $P^k \subset P^{k+r}$ и P^{k+r} — плоскость второго типа, то $\tau(P^k) < 1 + \tilde{C}_r \varepsilon^{b/4k^{r-1}}$. Следовательно, $|\tau(P^k) - 1| < \tilde{C}_r \varepsilon^{b/4k^{r-1}}$, откуда по лемме 12 следует, что $\delta(A(P^k), B(P^k)) < \tilde{C}'_r \varepsilon^{b/4k^r}$. Тогда и $\delta(A(P^2), B(P^2)) < \tilde{C}'_r \varepsilon^{b/4k^r}$, так как $P^2 \subset P^k$. Но P^2 — произвольная двумерная плоскость в P^{k+r}. Поэтому, если R^k — произвольная плоскость в P^{k+r}, то по лемме 6 работы [6] имеем $\delta(A(R^k), B(R^k)) < \tilde{C}''_r \varepsilon^{b/4k^r}$. Отсюда вытекает, что $|\tau(R^k) - 1| < \tilde{C}'''_r \varepsilon^{b/4k^r}$.

Пусть теперь R^k — произвольная плоскость в R^{k+r+1}. Тогда найдется такая плоскость R^{k+r}, что $R^k \subset R^{k+r} \subset R^{k+r+1}$. Если при этом R^{k+r} — плоскость первого типа, то $\tau(R^k) > 1 - \tilde{C}_r \varepsilon^{b/4k^{r-1}}$. Если же R^{k+r} — плоскость второго типа, то, как было показано выше, $\tau(R^k) > 1 - \tilde{C}'''_r \varepsilon^{b/4k^r}$. Т ким образом, в рассматриваемом случае для произвольной $R^k \subset R^{k+r+1}$ справедливо неравенство $\tau(R^k) > 1 - \tilde{C}_{r+1} \varepsilon^{b/4k^r}$.

Отметим, что случай, когда в R^{k+r+1} имеются $(k+r)$-мерные плоскости обоих типов и через некоторую двумерную плоскость $R^2 \subset R^{k+r+1}$ проходят только $(k+r)$-мерные плоскости второго типа, рассм тривается аналогично и приводит к неравенству $\tau(R^k) < 1 + \tilde{C}_{r+1} \varepsilon^{b/4k^r}$ для любой $R^k \subset R^{k+r+1}$.

Третий случай. В R^{k+r+1} имеются $(k+r)$-мерные плоскости обоих типов, но не выполняется второй случай. Поэтому для произвольной $R^2 \subset R^{k+r+1}$ найдутся такие R_1^{k+r}, R_2^{k+r}, что $R_1^{k+r} \subset R^{k+r+1}$ — плоскость первого типа, $R_2^{k+r} \subset R^{k+r+1}$ — плоскость второго типа и $R^2 \subset R_1^{k+r} \cap R_2^{k+r}$. Тогда, как это было показано во втором случае для P^2, для R^2 будет $\delta(A(R^2), B(R^2)) <$

$\leqslant C_r' \varepsilon^{b/4k^r}$. Но R^2 произвольна в R^{k+r+1}. Следов тельно, для произвольной $R^k \subset R^{k+r+1}$ в силу леммы 6 работы [6] будет $\delta(A(R^k),\ B(R^k)) < \tilde{C}_r'' \varepsilon^{b/4k^r}$. Откуда $|\tau(R^k) - 1| < \tilde{C}_r''' \varepsilon^{b/4k^r}$. В третьем случае все величины $\tau(R^k)$ удовлетворяют одновременно обоим неравенствам (17) при $i = r+1$. Утверждение полностью доказано.

Применив доказанное утверждение при $i = n - k$, получим, что все величины $\tau(R^k)$, где R^k — произвольная плоскость в R^n, удовлетворяют одному из неравенств: $\tau(R^k) > 1 - \tilde{C}_{n-k}\varepsilon^{b/4k^{n-k-1}}$ или $\tau(R^k) < 1 + \tilde{C}_{n+k}\varepsilon^{b/4k^{n-k-1}}$ **(18).**

Предположим, что все $\tau(R^k)$ удовлетворяют первому из неравенств (18). Так как $\tau(R^k) = \sqrt[k]{V(A(R^k))/V(B(R^k))}$, то из этого неравенства вытекает, что величина

$$\eta(R^k) = V(A(R^k)) - V(B(R^k)) > -\hat{C}_0\varepsilon^{b/4k^{n-k-1}}. \qquad (19)$$

Последовательно интегрируя это неравенство по единичным сферам пространств $R^{k+1}, R^{k+2}, \ldots, R^n$, аналогично тому, как это делается при доказательстве леммы 8, получим неравенства

$$\eta(R^{k+i}) = V_k(A(R^{k+i})) - V_k(B(R^{k+i})) > -\hat{C}_i\varepsilon^{b/4k^{n-k-1}}, \qquad (20)$$

где R^{k+i} $(i = 1, \ldots, n-k)$ — произвольная $(k+i)$-мерная плоскость в R^n.

Из леммы 4 следует $\eta(R^n) = V_k(A) - V_k(B) < C_{18}\varepsilon$. С другой стороны, из (20) для каждой $R^{n-1} \subset R^n$ имеем $\eta(R^{n-1}) > -\hat{C}_{n-k-1}\varepsilon^{b/4k^{n-k-1}}$. Тогда по лемме (4) работы [6] получаем $\eta(R^{n-1}) < C_{53}\varepsilon^{b/4nk^{n-k-1}}$. Из последнего неравенства и неравенства $\eta(R^{n-2}) > -\hat{C}_{n-k-2}\varepsilon^{b/4k^{n-k-1}}$ по той же лемме получаем $\eta(R^{n-2}) < C_{54}\varepsilon^{b/4n(n-1)k^{n-k-1}}$.

Рассуждая аналогично, придем к неравенству $\eta(R^k) < C_{55} \times \varepsilon^{bk!/4n!k^{n-k-1}}$, которое вместе с неравенством (19) дает возможность сделать оценку $|V(A(R^k) - V(B(R^k))| < C_{56}\varepsilon^{bk!/4n!k^{n-k-1}}$. Откуда $|\tau(R^k) - 1| < C_{57}\bar{\varepsilon}^{bk!/4n!k^{n-k-1}}$. Применяя лемму 12, получаем $\delta(A(R^k),\ B(R^k)) < C_{58}\varepsilon^{bk!/4n!k^{n-k}}$. Так как R^k — произвольная k-мерная плоскость в R^n, то из последнего неравенства на основании леммы 6 работы [6] следует оценка $\delta(A, B) < C\varepsilon^q$. Случай, когда все $\tau(R^k)$ удовлетворяют второму из неравенств (18), рассматривается аналогично. Теорема доказана.

Список литературы: 1. *Александров А. Д.* К теории смешанных объемов выпуклых тел.— Мат. сб., 1938, 3 (45), № 2, с. 227—249. **2.** *Погорелов А. В.* Внешняя геометрия выпуклых поверхностей.— М.: Наука, 1969.— 759 с. **3.** *Волков Ю. А.* Устойчивость решения проблемы Минковского.— Вестник ЛГУ, Ленинград, 1963, № 1, с. 33—43. **4.** *Дискант В. И.* Оценки отклонения выпуклых тел через изопериметрическую разность.— Сиб. мат. журн., 1972, XIII, № 4, с. 767—772. **5.** *Дискант В. И.* К вопросу о порядке функции устойчивости в проблеме Минковского.— Укр. геометр. сб., 1979, вып. 22, с. 45—47. **6.** *Дискант В. И.* Устойчивость выпуклого тела при изменении (*n*—2)-й функции кривизны.— Укр. геометр. сб., 1976, вып. 19, с. 22—33. **7.** *Дискант В. И.* Устойчивость решения уравнения Минковского для площади поверхности выпуклых тел.— Укр. геометр. сб., 1982, вып. 25, с. 43—51. **8.** *Буземан Г.* Выпуклые поверхности.—М.: Наука, 1964.— 238 с. **9.** *Александров А. Д.* К теории смешанных объемов выпуклых тел.— Мат. сб., 1937, 2 (44), № 5, с. 947—970. **10.** *Bonnesen T. und Fenchel W.* Theorie der konvexen Körper.— Berlin, 1934.—164 S. **11.** *Александров А. Д.* К теории смешанных объемов выпуклых тел.— Мат. сб., 1937, 2 (44), № 6, с. 1205—1235. **12.** *Дискант В. И.* Устойчивость решения уравнения Минковского.— Сиб. мат. журн., 1973, XIV, № 3, с. 669—673. **13.** *Дискант В. И.* Устойчивость решений обобщенных уравнений Минковского для шара.— Укр. геометр. сб., 1975, вып. 18, с. 53—59.

Поступила в редколлегию 03.03.83

УДК 513

А. И. Егоров, Л. И. Егорова

ОБЩИЕ МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ПЕРВОЙ ЛАКУНАРНОСТИ

1. Б. Риман в своей работе «О гипотезах, лежащих в основании геометрии» (1868 г.) указал на возможность введения метрики заданием ds как произвольной однородной функции первого измерения относительно дифференциалов dx^i: $ds = L(x^i, dx^j)$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Однако этот подход полностью удалось осуществить значительно позднее. Первой такой работой явилась диссертация П. Финслера (1918 г.). В ней он дает систематическое рассмотрение основных понятий метрического пространства линейных элементов и ряд вопросов теории кривых и теории поверхностей в нем. В это же время усиленно развивается теория движений в римановых пространствах.

Начало теории движений положили Б. Риман и С. Ли. В конце XIX и начале XX веков появляются работы В. Киллинга, Г. Фубини, Л. Бианки и других авторов по группам движений в римановых пространствах. Э. Картаном, И. А. Схоутеном, Г. Вейлем выдвинута идея пространств с линейной связностью. Л. П. Эйзенхарт и М. С. Кнебельман изучили аффинные и проективные движения в этих пространствах.

Изучение движений ведется в основном по двум направлениям. Первое характеризуется изучением движений в заданных римановых пространствах и их обобщениях, а второе — построение по группе Ли дифференциально-геометрического пространства с инвариантной метрикой или связностью. Основная проблема в теории движений — распределение лакун и отрезков возможных порядков полных групп движений, определение для последних самих групп и соответствующих им лакунарных пространств. Пространство называется k-й лакунарности, если порядок его полной группы движений принадлежит отрезку конденсации, имеющему номер k. Счет ведется с отрезка конденсации, содержащего максимальное число параметров. Легко видеть, что основная проблема является частью общей проблемы классификации дифференциально-геометрических пространств по допускаемым ими группам движений.

К основной проблеме можно подойти следующим образом. В теории движений известна теорема Фубини о несуществовании римановых пространств непостоянной кривизны с полной группой движений порядка $r = n(n+1)/2 - 1$. Возникает вопрос: имеет ли место предложение Фубини в теории пространств аффинной связности? Этот вопрос впервые в теории движений был поставлен и полностью решен в 1945 г. И. П. Егоровым в работе [1]. В этой работе было доказано, что максимальный порядок групп движений G_r в неплоских пространствах аффинной связности равен точно n^2. Наличие такой лакуны в порядках групп движений позволило в дальнейшем поставить вопрос об отыскании других лакун. Так возникла сначала в афинно-связных, а потом в римановых и других обобщенных пространствах проблема распределения возможных порядков полных групп движений и изучения соответствующих им пространств. О лакунах и лакунарных пространствах появилось и появляется в настоящее время большое количество работ советских и зарубежных математиков.

В 1928 г. И. Дуглас вводит понятие общих пространств путей и в 1931 г. обобщает их, построив теорию пространств k-мерных плоскостных элементов.

В 1946 г. Б. Л. Лаптев ввел понятие пространств опорных элементов [2], частными случаями которых являются пространство Финслера, пространство путей и пространство k-мерных плоскостных элементов. Если в пространстве опорных элементов опорным объектом будет служить тензор или псевдотензор, то получим пространство тензорных опорных элементов. Частными случаями пространств тензорных опорных элементов будут пространства линейных контравариантных гиперплоскостных (ковариантных) элементов [3].

Пространства опорных элементов Б. Л. Лаптева вызвали большое число исследований по движениям в этих пространствах.

Б. Л. Лаптев получил в [4] условия интегрируемости уравнений движений пространств тензорных опорных элементов в случае так называемой усеченной и симметрической связности.

2. Приведем некоторые понятия и определения, необходимые в дальнейшем изложении работы.

Пусть дано многообразие $X_n(x^1, x^2, \ldots x^n)$. Это многообразие будем в дальнейшем называть базисным. С каждой точкой базисного многообразия $X_n(x)$ будем связывать (или ассоциировать) $(n-1)$-мерное пространство значений псевдовектора y^i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Псевдовектор y^i по терминологии Лаптева Б. Л. [2] будем называть опорным объектом. Совокупность точки (x^i)

базисного многообразия $X_n(x)$ и опорного объекта (y^j) называется линейным элементом (x^i, y^j), а полученное таким образом многообразие — пространством линейных элементов.

Все исследования здесь проводятся в локальном аспекте; поэтому рассматриваемые пространства линейных элементов представляют собой просто топологическое произведение базисного многообразия X_n и $(n-1)$-мерного пространства значений псевдовектора. Пространство значений псевдовектора часто еще называется слоем. Таким образом, пространство линейных элементов есть пространство пар (x, y). Здесь y — сокращенное обозначение псевдовектора с координатами y^j, $j = 1, 2, \ldots, n$. Пространства линейных элементов в дальнейшем будем обозначать символом $X_{2n-1}(x, y)$.

Пространство $X_{2n-1}(x, y)$, в котором задано фундаментальное тензорное поле $g_{\alpha\beta}(x, y)$, $\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n$, где $\det \| g_{\alpha\beta} \| \neq 0$, $g_{\alpha\beta}(x, \lambda y) = g_{\alpha\beta}(x, y)$, называется общим метрическим пространством линейных элементов $g_{n, y}$. Будем всегда в дальнейшем изложении предполагать, что тензор $g_{ij \cdot k} \neq 0$ $\left(g_{ij \cdot k} = \dfrac{\partial g_{ij}}{\partial y^k}\right)$, $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$.

В таком случае компоненты метрического тензора $g_{ij}(x, y)$ будут существенно уже зависеть от координат направления y^j. Заметим, что в пространствах $g_{n, y}$ тензор $\Omega_{jk} = (g_{ik} - g_{kj})/2$ $(j, k = 1, 2, \ldots, n)$ в общем случае отличен от нуля.

Нетрудно видеть, что если тензоры $g_{\alpha\beta \cdot \gamma} = 0$, $\Omega_{jk} = 0$, $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \ldots, n$; $j, k = 1, 2, \ldots, n$, то общие метрические пространства линейных элементов $g_{n, y}$ будут сводиться к обычным римановым пространствам $V_n(x)$.

Пусть G_r — r-параметрическая группа Ли преобразований, действующая на базисном многообразии $X_n(x)$. Обозначим конечные уравнения группы G_r через $\tilde{x}^i = f^i(x^1, x^2, \ldots, x^n; a^1, a^2, \ldots, a^r)$. Тогда естественное продолжение группы G_r на пространство линейных элементов $X_{2n-1}(x, y)$ запишется следующим образом:

$$\tilde{x}^i = f^i(x, a), \quad \tilde{y}^j = \frac{\partial f^j(x, a)}{\partial x^\sigma} y^\sigma; \quad i, j, \sigma = 1, 2, \ldots, n.$$

Движениями (изометриями) в общих метрических пространствах линейных элементов $g_{n, y}$ называются такие точечные преобразования базисного многообразия $X_n(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, естественные продолжения которых на пространства линейных элементов $X_{2n-1}(x, y)$ сохраняют метрический тензор $g_{ij}(x, y)$. Для того чтобы компоненты векторного поля $v^i(x)$ инфинитезимального преобразования $\tilde{x}^i = x^i + v^i(x)t$ определяли движение в пространствах $g_{n, y}$, необходимо и достаточно, чтобы $Dg_{ij} = 0$, где

$\overset{*}{D}$ — знак лиева дифференцирования вдоль линий тока векторного поля $v^i(x)$.

В настоящей работе исследуются общие метрические пространства $g_{n,\,y}$ линейных элементов с точки зрения допускаемых ими групп движений.

Мы будем изучать только регулярные общие метрические пространства линейных элементов $g_{n,\,y}$, т. е. пространства, допускающие инвариантную единственную линейную связность без кручения [5]. В этой связности нами определяются все максимально подвижные общие метрические пространства $g_{n,\,y}$. Это будут пространства $g_{n,\,y}$, допускающие полные группы движений G_r порядка $n(n+1)/2$.

3. К любому общему метрическому пространству линейных элементов $g_{n,\,y}$ можно однозначно присоединить финслерово пространство $F_{n,\,y}$ с метрической функцией $F(x,\ y) = g_{ij}(x,\ y)\ y^i y^j$ **(1)**.

В этом пункте работы всегда предполагается, что $\det \| F_{\cdot j \cdot k} \| \neq 0$ $(j,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$. Любое движение общего метрического пространства линейных элементов $g_{n,\,y}$ является в то же время движением ассоциированного финслерова пространства $F_{n,\,y}$. Отсюда следует, что группа движений G_r общего метрического пространства $g_{n,\,y}$ является подгруппой группы движений присоединенного финслерова пространства $F_{n,\,y}$. Далее, автором в работе [5] доказано, что если финслерово пространство $F_{n,\,y}$ определенной или неопределенной метрики допускает группу движений G_r порядка $r > n(n-1)/2 + 2$, то оно есть риманово или псевдориманово пространство $V_n(x)$ постоянной кривизны и, следовательно, максимальный порядок групп движений G_r в финслеровых пространствах равен точно $n(n+1)/2$, причем пространства $F_{n,\,y}$ с такой группой движений G_r есть необходимо римановы пространства $V_n(x)$ постоянной кривизны.

Таким образом, можно заключить, что возможный порядок r групп движений G_r в общих метрических пространствах $g_{n,\,y}$ удовлетворяет следующему неравенству: $r \leqslant n(n+1)/2$.

Точность указанной здесь границы вытекает из того, что существуют общие метрические пространства линейных элементов $g_{n,\,y}$ с группой движений G_r порядка $r = n(n+1)/2$. В самом деле, общее метрическое пространство линейных элементов $g_{n,\,y}$, определяемое метрическим тензором

$$g_{ij} = 2A\left[ae_i\delta_{ij} + \frac{2be_ie_jy^iy^j}{e_1{y^1}^2 + e_2{y^2}^2 + \cdots + e_n{y^n}^2}\right],$$

где $A = [1 + (k/4)(e_1{x^1}^2 + e_2{x^2}^2 + \cdots + e_n{x^n}^2]^{-2}$; $e_i = \pm 1$; $k \in R$; $a,\ b \in R$; $a \neq 0$, $a + 2b \neq 0$; $i, j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$, допускает полную группу движений G_r порядка $r = n(n+1)/2$. Итак, мы приходим к следующему предложению.

Теорема 1. *Максимальный порядок групп движений G_r в общих метрических пространствах линейных элементов $g_{n,y}$ равен точно $n(n+1)/2$.*

Так как мы разыскиваем общие метрические пространства линейных элементов $g_{n,y}$ с группой движений максимального порядка $(r = n(n+1)/2)$ и она является подгруппой группы движений присоединенного финслерова пространства, то их локальные группы движений G_r просто совпадают. Метрическая функция $F(x, y)$ присоединенного финслерова пространства [1] в нашем случае может быть приведена к следующему риманову или псевдориманову виду

$$F(x, y) = A(e_1 y^{1^2} + e_2 y^{2^2} + \cdots + e_n y^{n^2}),$$

где A и e_i имеют те же значения, что и выше.

Следовательно, инфинитезимальные движения всех возможных максимально подвижных $(r = n(n+1)/2)$ общих метрических пространств линейных элементов $g_{n,y}$ порождаются только следующими операторами: $X_l = p_l - (k/4)Ep_l + (k/2)e_l x^l U$ $(l = 1, \ldots, n$; по l не суммируется), $X_j^i = e_j x^i p_j - e_i x^j p_i$ (2), где $p_l = \dfrac{\partial}{\partial x^l}$, $i < j$, $e_j = \pm 1$; $U = x^1 p_1 + x^2 p_2 + \cdots + x^n p_n$, $E = e_1 x^{1^2} + e_2 x^{2^2} + \cdots + e_n x^{n^2}$.

Целью дальнейших рассуждений является отыскание всех метрических тензоров $g_{ij}(x, y)$ пространств $g_{n,y}$, инвариантных относительно группы, определяемой операторами (2).

Прежде всего заметим, что инвариантами группы преобразований, порожденной операторами (2), могут быть тензоры $\sigma_1(F)$, $\sigma_2(F)F_{.i}$, $\sigma_3(F)F_{.j.k}$, ..., где $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$; $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ — произвольные скаляры от указанного аргумента. В связи с этим общий вид метрических тензоров $g_{ij}(x, y)$ пространств линейных элементов $g_{n,y}$ с группой движений максимального порядка $(r = n(n+1)/2)$ следующий: $g_{ij}(x, y) = aF_{.i.j} + bF^{-1}F_{.i}F_{.j}$, где F, a и b — те же, что и выше. Таким образом, мы убедились, что справедлива

Теорема 2. *Чтобы общее метрическое пространство линейных элементов $g_{n,y}$ допускало группу движений G_r максимального порядка $(r = n(n+1)/2)$, необходимо и достаточно, чтобы компоненты метрического тензора $g_{ij}(x, y)$ были заданы формулой $g_{ij}(x, y) = aF_{.i.j} + bF^{-1}F_{.i}F_{.j}$, где $a + 2b \neq 0$, $a \neq 0$, a, $b \in R$, $F(x, y)$ — метрическая функция риманова или псевдориманова пространства $V_n(x)$ постоянной кривизны.*

Таким образом, приведенной в теореме 2 формулой описывается весь класс максимально подвижных общих метрических пространств линейных элементов $g_{n,\,y}$. Если постоянная $b \neq 0$, то у общих максимально подвижных метрических пространств $g_{n,\,y}$ всегда тензоры $g_{ij\cdot k} \neq 0$, $S_{ijk} = g_{ij\cdot k} - g_{ik\cdot j} \neq 0$, и, следовательно, в этом случае они не сводятся к римановым пространствам $V_n(x)$ постоянной кривизны.

Из приведенных выше рассуждений также следует, что если общее метрическое пространство $g_{n,\,y}$ допускает группу движений G_r максимального порядка $(r = n(n+1)/2)$, то имеют место следующие равенства:

$$g_{ij\cdot k} = b\,[F^{-1}(F_{.i\cdot k}F_{.j} + F_{.j\cdot k}F_{.i}) - F^{-2}F_{.i}F_{.j}F_{.k}],$$
$$S_{ijk} = bF^{-1}[F_{.i\cdot k}F_{.j} - F_{.i\cdot j}F_{.k}], \quad \Omega_{jk} = 0.$$

Замечание 1. Не существует общих метрических пространств линейных элементов $g_{n,\,y}$, допускающих группы движений G_r порядка $r = n(n+1)/2$ с тензором $\Omega_{jk}(x,\,y)$, отличным от нуля.

Замечание 2. Пусть дано риманово пространство $V_n(x)$ с полной группой движений G_r. Предположим далее, что метрика риманова пространства $V_n(x)$ в некоторой системе координат имеет вид $ds^2 = \Phi(x,\,y)\,dt^2$, где $\Phi(x,\,y) = b_{ij}(x)\,y^iy^j$, $b_{ij}(x) = b_{ji}(x)$, $\det\|b_{ij}\| \neq 0$ $(i,\,j = 1,\,2,\,\ldots,\,n)$.

Тогда этому риманову пространству $V_n(x)$ можно всегда поставить в соответствие общее метрическое пространство линейных элементов $g_{n,\,y}$ с метрическим тензором

$$g_{ij}(x,\,y) = a\Phi_{.i.j} + b\Phi^{-1}\Phi_{.i}\Phi_{.j}, \tag{3}$$

допускающее ту же группу движений G_r, что и пространство $V_n(x)$.

Если в формуле (3) положить

$$\Phi = y^{1^2} + y^{2^2} - y^{3^2} - y^{4^2} + \Big[\sum_{i,\,j=12,\,13,\,24,\,34} (x^iy^j - x^jy^i)\Big]^2 +$$
$$+ e_5y^{5^2} + e_6y^{6^2} + \cdots + e_ny^{n^2}, \quad e_a = \pm 1, \quad a = 5,\,6,\,\ldots,\,n,$$

то полученное таким образом общее метрическое пространство $g_{n,\,y}$ допускает группу движений G_r порядка $r = (n-1)\times\times(n-2)/2 + 5$ с тензором $g_{ij\cdot k}$, отличным от нуля.

Замечание 3. Базисное многообразие $X_n(x)$ для всех максимально подвижных $(r = n(n+1)/2)$ общих метрических пространств линейных элементов $g_{n,\,y}$ является всегда римановым пространством $V_n(x)$ постоянной кривизны.

Замечание 4. Максимальный порядок групп движений G_r в пространствах $g_{n,y}$, у которых тензор $\Omega_{jk} \neq 0$ и ассоциированное финслерово пространство $F_{n,y}$ — определенной метрики, равен точно $n(n-1)/2 + 1$. Точность этой границы вытекает из того, что существуют пространства $g_{n,y}$ с полной группой движений G_r порядка $n(n-1)/2 + 1$.

Действительно, пространство $g_{n,y}$ с метрическим тензором $g_{ij} = \varphi_1(C) A_{.i.j} + \varphi_2(C) B_{.i.j} + \varphi_3(C) B^{-1} B_{.i} B_{.j} + \varphi_4(C) B^{-1} A_{.i} B_{.j} + \varphi_5(C) B^{-1} A_{.j} B_{.i}$, $(C = A/B)$, где все φ_k — дифференцируемые функции от указанного аргумента такие, что $\det\|g_{ij}\| \neq 0$, $\Omega_{jl} \neq 0$: $l,\ i,\ j = 1, 2, \dots, n$, причем $A \overset{*}{=} y^{1^2}$,

$$B \overset{*}{=} \frac{y^{2^2} + y^{3^2} + \dots + y^{n^2}}{[1 + (k/4)(x^{2^2} + x^{3^2} + \dots + x^{n^2})]^2},$$

допускает полную группудвижений G_r порядка $r = n(n-1)/2 + 1$. (Предполагается, что стационарная подгруппа $Hr_0(x)$, $x \in X_n$ изоморфна группе изотропии этой точки).

4. Обобщенное метрическое пространство линейных элементов $\overset{H}{g}_{n,y}$ определяется заданием метрического тензора $\overset{H}{g}_{ij}(x, y)$, удовлетворяющего лишь следующим условиям: $\det\|\overset{H}{g}_{ij}(x, y)\| \neq 0$, $\overset{H}{g}_{ij} = \overset{H}{g}_{ji}$; $i, j = 1, 2, \dots, n$.

В пространствах $\overset{H}{g}_{n,y}$ метрический тензор $\overset{H}{g}_{ij}(x, y)$ в общем случае не является однородным нулевой степени однородности относительно координат опорного объекта y^j. Целью дальнейших рассуждений является определение максимального порядка групп движений G_r в обобщенных регулярных метрических пространствах $\overset{H}{g}_{n,y}$. Для произвольной точки (x, y) пространства $\overset{H}{g}_{n,y}$ выберем систему координат, в которой $y^j = \delta^j_1$, $j = 1, 2, \dots, n$. Используя допустимые преобразования этой специальной системы координат, приведем матрицу $\|\overset{H}{g}_{ij}\|$ $(i, j = 1, 2, \dots, n)$ к следующему диагональному виду:

$$\|\overset{H}{g}_{ij}\| = \begin{Vmatrix} \overset{H}{g}_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & e_3 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e_n \end{Vmatrix}, \tag{4}$$

где $\overset{H}{g}_{11} \neq 0$, $e_j = \pm 1$. Тогда из уравнений $D\overset{H}{g}_{ij} = 0$, $\mod(v^k, u^l_1)$ получим, что

$$\left.\begin{aligned} e_\alpha u^\alpha_\beta + e_\beta u^\beta_\alpha = 0, \\ u^1_\gamma = 0, \end{aligned}\right] \mod(v^k, u^l_1), \tag{5}$$

$(\alpha, \beta, \gamma = 2, 3, \dots, n;\ i, j, k, l = 1, 2, \dots, n)$.

Уравнения (5) содержат $\rho = n(n+1)/2 - 1$ независимых отношений над неизвестными функциями $u^i_j = v^i_{,j}$.

Таким образом, из приведенных выше рассуждений следует, что не существует пространств $\overset{H}{g}_{n,y}$, допускающих группы движений G_r порядка $r > n(n+1)/2 + 1$. С другой стороны, можно указать метрические пространства $\overset{H}{g}_{n,y}$ с полной группой движений G_r порядка $r = n(n+1)/2+1$. В самом деле, пространство $\overset{H}{g}_{n,y}$ с метрическим тензором

$$\overset{H}{g}_{ij}(x, y) = aF^{-1}F_{.i.j} + bF^{-2}F_{.i}F_{.j}, \tag{6}$$

где $F = e_1 y^{1^2} + e_2 y^{2^2} + \cdots + e_n y^{n^2}$, $e_i = \pm 1$, $a, b \in R$, $a \neq 0$, $a + 2b \neq 0$ допускает полную группу движений G_r порядка $r = n(n+1)/2+1$.

Следовательно, верна

Теорема 3. *Максимальный порядок групп движений G_r в обобщенных метрических пространствах линейных элементов $\overset{H}{g}_{n,y}$ равен точно $n(n+1)/2+1$.*

Если скаляр $\overset{H}{g}_{ij\cdot k}y^i y^j y^k + 2\overset{H}{g}_{ij}y^i y^j \neq 0$, то уравнения $D\overset{H}{g}_{ij} = 0$ содержат всегда точно $\rho = n(n+1)/2$ независимых связей над неизвестными функциями $u^i_j = v^i_{.j}$.

Нетрудно видеть, что если пространство $\overset{H}{g}_{n,y}$ максимально подвижно ($r = n(n+1)/2+1$), то необходимо имеют место следующие равенства: $(\overset{H}{g}_{ij}y^i y^j)_{.k}y^k = 0$; $\overset{H}{g}_{ij}(x, \lambda y) = \lambda^{-2}\overset{H}{g}_{ij}(x, y)$; $\det\|\overset{H}{F}_{.j.k}\| = 0$; $2\overset{H}{g}_{ij}y^i y^j + \overset{H}{g}_{ij\cdot k}y^i y^j y^k = 0$, $(i, j, k = 1, 2, \ldots, n)$, где $\overset{H}{F} = \overset{H}{g}_{jk}y^j y^k$.

Теорема 4. *Если $\overset{H}{g}_{ij\cdot k}y^k + 2\overset{H}{g}_{ij} \neq 0$, то пространство $\overset{H}{g}_{n,y}$ допускает группу движений G_r порядка $r \leqslant n(n+1)/2$.*

Доказательство. Приведем метрический тензор $\overset{H}{g}_{ij}$ к диагональному виду (4). Из уравнений $D\overset{H}{g}_{ij} = 0$, $\mathrm{mod}(v^k, u^\delta_1)$, получим, что

$$\left.\begin{aligned} &e_\alpha u^\alpha_\beta + e_\beta u^\beta_\alpha = 0, \\ &u^1_1 = 0,\ u^1_\gamma = 0, \end{aligned}\right] \mathrm{mod}(v^k,\ u^\delta_1),$$

где $k = 1, 2, \ldots, n$; $\alpha, \beta, \gamma, \delta = 2, 3, \ldots, n$. Теорема доказана.

Замечание 5. Если в равенстве (6) положить [6] $F = e_1(y^1)^a \times (e_2 y^{2^2} + e_3 y^{3^2} + \cdots + e_n y^{n^2})^{1-a/2}$, $a \in R$, $a \neq 0$, $\neq 2$; $e_i = \pm 1$, то полученное таким образом пространство $\overset{H}{g}_{n,y}$ допускает полную группу движений G_r порядка $r = n(n-1)/2+3$. Не существует пространств $\overset{H}{g}_{n,y}$, допускающих полные группы движений G_r порядка $n(n-1)/2+3 < r < n(n+1)/2$ (первая лакуна).

Замечание 6. Максимальный порядок групп движений G_r в пространствах $\overset{H}{g}_{n,y}$, у которых скаляр $\varphi(x, y) = \overset{H}{F}_{.p}y^p \neq 0$, равен точно $n(n+1)/2$.

Суммирование проводится по всем целым четным неотрицательным числам r_i и r_i' таким, что $\sum_i r_i = m_j$ при $r_i > 0$ хотя бы для трех значений i, $\sum_i r_i' = p_j = m_j - 8$. Многочлены Φ_{m_j} и Ψ_{p_j}, если $p_j > 0$, инвариантны относительно группы симметрий B_8 8-куба. В работе [6] найдено представление через степенные суммы $s_t = \sum_i x_i^t$, $1 \leqslant t \leqslant q$, симметрической формы степени q от переменных $x_i (i = \overline{1, m})$, каждый одночлен которой содержит $h > 1$ переменных; коэффициент при s_q равен

$$(-1)^{h-1}(h-1)! \Big/ \prod_{\alpha=1}^{v} l_\alpha!, \tag{6}$$

где $l_\alpha \geqslant 1$ — числа повторений $v (1 \leqslant v \leqslant h)$ различных показателей степеней переменных в любом одночлене симметрической формы (l_α от выбора одночлена не зависят). Если $q > m$, то симметрическая форма представима через степенные суммы $s_i (i = \overline{1, m})$; для нахождения такого представления можно дополнительно использовать формулу Ньютона [7, с. 264]. Обозначим через $\rho(p_j)$ коэффициент (6) при старшей степенной сумме в представлении формы $(m_j!)^{-1}\Psi_{p_j}$ через s_{2t}, $t = \overline{1, p_j/2}$. Из выражения для I_m прямо следует, что I_8 — образующая 8-й степени. Поэтому рассмотрим случаи $m_j > 8$.

1. $m_3 = 12 (p_3 = 4)$. Так как $\rho(4) = -1/180 < 0$ и s_2, s_4 независимы, то равенство $I_{12} = a_1 s_2^6 + a_2 s_2 I_8$ невозможно ни при каких числовых коэффициентах a_1, a_2. Значит, I_{12} — образующая 12-й степени.

2. $m_4 = 14 (p_4 = 6)$. Пусть $I_{14} = a_1 s_2^7 + a_2 s_2^3 I_8 + a_3 s_2 I_{12}$. Тогда в I_{14} отсутствует член σs_6, $\rho(6) = 0$. Однако согласно (5) и (6) число $\rho(6) = 1/2835$. Следовательно, указанное для I_{14} соотношение не выполняется; I_{14} — образующая 14-й степени.

3. $m_5 = 18 (p_5 = 10)$. Если форма I_{18} зависит от образующих степеней < 18, то, как и в предыдущих случаях, она имеет множитель $s_2 : I_{18} = s_2\zeta$, $\zeta \in I$. Правая часть равенства (значит, и форма I_{18}) не содержит σs_{10}, $\rho(10) = 0$. Но (5) и (6) снова дают число $\rho(10) = 1/467775 > 0$. Поэтому независимая форма I_{18} — образующая 18-й степени.

4. $m_6 = 20 (p_6 = 12)$. В случае зависимости I_{20} от образующих степеней < 20 справедливо равенство

$$I_{20} = aI_8 I_{12} + s_2 \varkappa; \tag{7}$$

член σs_{12} в форму $\varkappa \in I$ не входит. Из (4), (6) находим коэффициент $-483\,840 = -8!\,12$ при степенной сумме s_{12} в Φ_{12}. Его модуль равен произведению степени s_{12} на коэффициент при σ в I_8. Так как $20!\,\rho(12) = -2^{17} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 691$, то на основа-

...ии (7) число $a = 22\frac{9796}{19845}$. При этом равенство (7) не дает тож...ества, если вместо x_i подставить координаты вектора (1, 1, −1, 0, 0, 0, 0, 0, 0). Следовательно, зависимость (7) невозможна; I_{20} — образующая 20-й степени.

5. $m_7 = 24\,(p_7 = 16)$. Пусть форма I_{24} зависима:

$$I_{24} = a_1 I_8^3 + a_2 I_{12}^2 + a_3 s_2^{12} + a_4 s_2^8 I_8 + a_5 s_2^6 I_{12} + a_6 s_2^5 I_{14} + \\ + a_7 s_2^4 I_8^2 + a_8 s_2^3 I_{18} + a_9 s_2^2 I_{20} + a_{10} s_2^2 I_8 I_{12} + a_{11} s_2 I_8 I_{14}. \tag{8}$$

Выражение правой части (8) через σ, $s_{2t}\,(t \leqslant 8)$ содержит член ...σs_{16} за счет $\sigma^3 = (-1/8)\,s_{16} + \ldots)\sigma$ в I_8^3. Так как $24!\,\rho(16) = -2^{18}\cdot 3^3\cdot 7\cdot 11\cdot 19\cdot 23\cdot 3617$, то, приравняв в (8) соответствующие коэффициенты при σs_{16}, получим $a_1 = 105\frac{22544}{165375}$, что противоречит значению a_1, найденному в [3] в случае предположения (8). Из этого следует невозможность (8); I_{24} — образующая 24-й степени.

В работе [4] для доказательства независимости I_{24} использованы значения всех $a_\nu\,(\nu = \overline{1, 11})$; их можно также применить для расширения предложения $6_в$ [4].

Любопытно отметить, что в несократимой записи $\frac{P_n}{Q_n}$ чисел Бернулли [8, с. 127] $P_{12} = -691$ и $P_{16} = -3617$ совпадают с числителями $\rho(12)$ и $\rho(16)$ соответственно.

6. $m_8 = 30\,(p_8 = 22)$. Формы Φ_{30}, Ψ_{22} (инварианты группы B_8) однозначно выражаются через $s_{2t}\,(t \leqslant 8)$. Найдем коэффициент ω при $\sigma s_6 s_{16}$ в выражении I_{30} через σ, $s_{2t}\,(t \leqslant 8)$, содержащем σ только в первой степени. Форма Ψ_{22} имеет член $\omega s_6 s_{16}$, причем $\omega = \omega_1 + 30!\,\rho(22)\,\omega_2$, где ω_1 — коэффициент, с которым входит $s_6 s_{16}$ в представление Ψ_{22} через $s_{2t}\,(t \leqslant 11)$ согласно [6], а ω_2 — коэффициент при $s_6 s_{16}$ уже в представлении s_{22} через $s_{2t}\,(t \leqslant 8)$. Число $(30!)^{-1}\omega_1 = 5542\,\infty\,11\,951/2^{14}\cdot 3^{12}\cdot 5^5\cdot 7^3\cdot 11\cdot 13\cdot 17$. На основании (5) и (6) $\rho(2^2) = -484458334271/2^{11}\cdot 3^{11}\cdot 5^4\cdot 7^3\cdot 11^2\cdot 13\cdot 17\times \times 19\cdot 23$. По формуле Ньютона $s_{22} = \sum\limits_{t=1}^{8}(-1)^{t-1}s_{22-2t}\sigma_{2t}$; σ_{2t} — элементарные симметрические многочлены степени t от переменных x_i^2. Так как $\sigma_6 = \frac{1}{6}s_2^3 - \frac{1}{2}s_2 s_4 + \frac{1}{3}s_6$, $\sigma_{16} = \sigma^2$ (см. $p_7 = 16$), то $\omega_2 = 11/24$. Следовательно, $\omega = -2^{22}\cdot 3^3\cdot 5^2\cdot 7\cdot 11\times \times 13\cdot 29\cdot 25969$. Предположим теперь, что

$$I_{30} = a_1 I_8^2 I_{14} + a_2 I_{12} I_{18} + s_2\xi, \tag{9}$$

где ξ — многочлен от образующих алгебры I степеней <30. Если правую часть (9) выразить через σ, $s_{2t}\,(t \leqslant 8)$, то $I_8^2 I_{14}$ даст член $\sigma s_6 s_{16}$. При этом получаем другое значение $\omega = -2^{-3}(8!)^2\times$

$$\times (14!)\,\rho(6)\,a_1 = -2^{22}\cdot 3\cdot 5^3\cdot 7^4\cdot 11\cdot 13^2\cdot 311\ \left(a_1 = 349\frac{32}{81}\,[4]\right).$$

Значит, равенство (9) исключается; I_{30} — образующая 30-й степени. Теорема доказана.

Заметим, что представления инвариантов I_{m_j} через σ, s_{2i} можно использовать для нахождения плоской системы образующих алгебры I [9]; при доказательстве теоремы они использованы частично.

Список литературы: 1. *Gosset T.* On the regular and semiregular figures in space of n-dimensions.— Messenger Math., 1900, **24**, p. 43—48. 2. *Coxeter H. S. M.* The product of the generators of a finite group generated by reflections.— Duke Math.— J., 1951, **18**, p. 765—782. 3. *Игнатенко В. Ф.* Об алгебраических поверхностях с группой симметрий многогранника 4_{21}.— Укр. геометр. сб., 1983, вып. 26, с. 48—55. 4. *Игнатенко В. Ф.* Об инвариантах конечных групп, порожденных отражениями.— Мат. сб., 1983, 120, № 4, с. 556—568. 5. *Игнатенко В. Ф.* Об одном методе нахождения базисных инвариантов конечных групп, порожденных отражениями.— Тез. докл. Всесоюз. школы по теории функций, посвященной 100-летию со дня рождения акад. Н. Н. Лузина, Кемерово, 1983, с. 50. 6. *Ostrowski A.* Über die Darstellung von symmetrischen Funktionen durch Potenzsummen.— Math. Ann., 1956, **132**, N 4, S. 362—372. 7. *Кострикин А. И.* Введение в алгебру.— М.: Наука, 1977.— 495 с. 8. *Постников М. М.* Теорема Ферма.— М.: Наука, 1978.— 128 с. 9. *Saito K., Yano T., Sekiguchi J.* On a certain generator system of the ring of invariants of a finite reflection group.— Commun. Algebra, 1980, **8**, N 4, p. 373—408.

Поступила в редколлегию 21.11.83.

УДК 513

В. Р. Ковалюх

СЕМЕЙСТВА РАВНОУДАЛЕННЫХ ЛИНИЙ НА ПОВЕРХНОСТЯХ ВРАЩЕНИЯ

1. Пусть гладкая поверхность вращения с осью z задана уравнениями

$$x = \varphi(u)\cos v,\ y = \varphi(u)\sin v,\ z = \psi(u), \tag{1}$$

где $u_1 \leqslant u \leqslant u_2$, а функции $\varphi(u)$ и $\psi(u)$ монотонны. Требуется на поверхности (1) найти кривую $v = v(u)$, которая вместе с кривыми $v = v(u) + C$, полученными из нее вращением вокруг оси z, образует на поверхности (1) семейство эквидистантных линий, отличное от семейства параллелей. Задача связана с проблемой нарезания эквидистантных зубьев на различных поверхностях вращения.

2. Обозначим: $\beta = \beta(u)$ — угол искомой кривой с меридианом в точке $(u, v(u))$ и $\beta_1 = \beta(u_1)$. Тогда, как ясно из рассмотрения соответствующих треугольников $\triangle ABC$ и $\triangle abc$ на рис. 1, требуемая эквидистантность при бесконечно малом повороте кривой на угол $\triangle v$ сводится к соотношению $\triangle v\varphi(u)\cos\beta = \triangle v\varphi(u_1) \times$

$\times \cos\beta_1$, т. е. требование эквидистантности выражается равенством

$$\cos\beta = \frac{\varphi(u_1)}{\varphi(u)} \cos\beta_1. \qquad (2)$$

Соотношение (2) можно получить непосредственно из теоремы Клеро.

Из $\triangle DBC$ для кривой $v = v(u)$ находим

$$\frac{dv}{du} = \frac{\sqrt{(\varphi'(u_1))^2 + (\psi'(u))^2}}{\varphi(u)} \operatorname{tg}\beta,$$

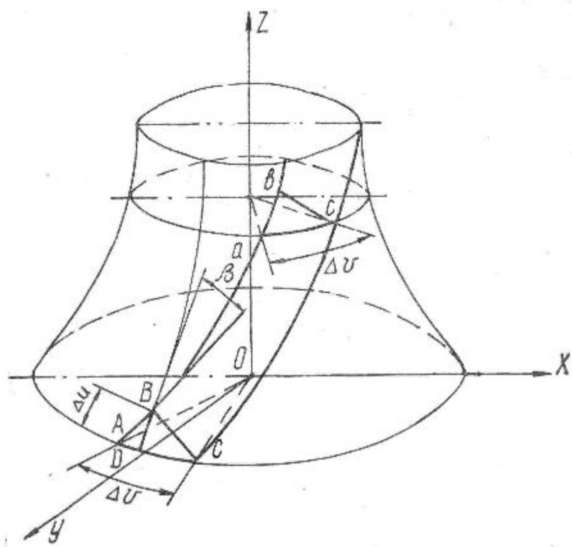


Рис. 1

что с учетом (2) дает дифференциальное уравнение искомой кривой

$$\frac{dv}{du} = \sqrt{((\varphi'(u))^2 + (\psi'(u))^2)\left(\frac{1}{\varphi^2(u_1)\cos^2\beta_1} - \frac{1}{\varphi^2(u)}\right)}. \qquad (3)$$

3. Пример 1. При нарезке зубьев на конической поверхности $x = u\sin\delta\cos v$, $y = u\sin\delta\sin v$, $z = u\cos\delta$, где δ — угол наклона образующих к оси, решение уравнения (3) дает для продольного хода n-го зуба при угловом шаге $\triangle v$ линию

$$v - n\triangle v = \frac{1}{\sin\delta}\left[\sqrt{\frac{u^2}{u_1^2} - 1} - \arccos\frac{u_1}{u}\right]. \qquad (4)$$

При $\delta = \pi/2$ конус переходит в плоскость, а уравнение (4) задает семейство эвольвент окружности радиуса u_1.

Пример 2. Для полусферы $x = R\cos u \cos v$, $y = R\cos u \sin v$, $z = R\sin u$ решение (3) дает для продольных линий зуба уравнение

$$v - n\,\triangle v = \frac{1}{\cos\beta_1}\arcsin\frac{\sin u}{\sin\beta_1} - \operatorname{arctg}\frac{\cos\beta_1\sin u}{\sqrt{\cos^2 u - \cos^2\beta_1}}. \qquad (5)$$

Можно показать, что (5) есть так называемые линии откоса* на сфере. Свойство равноудаленности семейства линий откоса на сфере отмечено здесь, по-видимому, впервые.

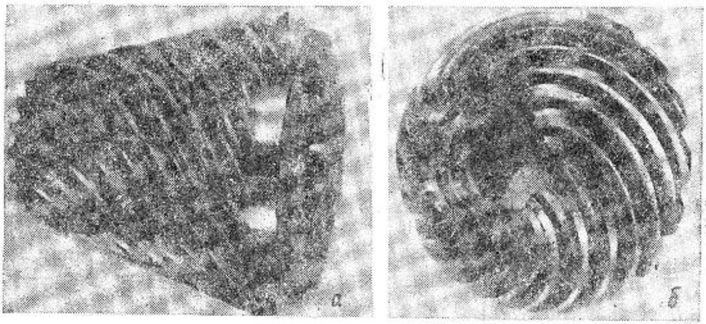


Рис. 2

На рис. 2 представлены рассчитанные с использованием (4) и (5) коническая и сферическая шестерни; продольный профиль зубьев которых показывает характер расположения эквидистантных линий на соответствующих поверхностях.

Поступила в редколлегию 25.04.83.

УДК 513

В. В. Макеев

ОЦЕНКИ АСФЕРИЧНОСТИ СЕЧЕНИЙ ВЫПУКЛЫХ ТЕЛ

1. Тело $K \subset R^k$ называется ε-асферическим, если оно содержит некоторый k-мерный шар и содержится в гомотетичном ему шаре с коэффициентом $1+\varepsilon$ и тем же центром. Дворецкий [1] доказал существование такого числа $N(k, \varepsilon) \leqslant \exp(2^{15}\varepsilon^{-2}k^2 \log k)$, что при $n \geqslant N(k, \varepsilon)$ всякое ограниченное центрально-симметричное выпуклое тело в R^n обладает проходящим через центр ε-асферическим k-мерным сечением. В некоторых последующих работах (например, [2]) оценка $N(k, \varepsilon)$ была улучшена. Точно вычислить минимальное $N(k, \varepsilon)$, по-видимому, очень трудно. Еще больше информации заключает в себе величина $\varepsilon(n, k) = \inf\{\varepsilon \mid$ любое ог-

* Бляшке В. Введение в дифференциальную геометрию.— М.: Гос. тех.-теорет. издат., 1957.— 340 с.

раниченное центрально симметричное выпуклое тело в R^n обладает ε-асферическим k-мерным центральным сечением}. Очевидно, функция ε не убывает по первому и не возрастает по второму аргументу. Ниже определены несколько родственных ε функций и приведены оценки их значений на парах $(n, n-1)$.

2. Теорема 1. $\varepsilon(3, 2) = \sqrt{2} - 1$; $\varepsilon(n, n-1) \geqslant \sqrt{n-1} - 1$ $(n \geqslant 3)$.

Докажем, что $\varepsilon(3, 2) \leqslant \sqrt{2} - 1$. Известно [3, с. 20], что для всякого выпуклого тела K в R^k существует единственный и поэтому непрерывно зависящий от K эллипсоид $L(K)$ максимального объема, содержащийся в K. Известно, что гомотетичный $L(K)$ эллипсоид с тем же центром и коэффициентом гомотетии k, а в случае центрально симметричного тела — с коэффициентом $\sqrt{k}$, содержит K. Достаточно доказать, что всякое центрально симметричное выпуклое тело в R^3 обладает плоским центральным сечением K, эллипс $L(K)$ которого есть круг. Если бы для некоторого тела это было не так, то, сопоставив каждому исходящему из центра тела лучу большую полуось эллипса $L(K)$ сечения K тела ортогональной этому лучу плоскостью, мы получили бы непрерывное поле касательных прямых на двумерной сфере, что невозможно.

Докажем неравенство $\varepsilon(n, n-1) \geqslant \sqrt{n-1} - 1$ при $n \geqslant 2$. Рассмотрим прямоугольный n-мерный параллелепипед размера $1 \times 1 \times \times \ldots \times 1 \times n$. Если сечение пересекает грань Γ размера $1 \times 1 \times \times \ldots \times 1$, то его диаметр $\geqslant n$, а ширина в любом параллельном Γ направлении $\leqslant \sqrt{n-1}$, поэтому отношение размеров его описанного и вписанного концентрических шаров $\geqslant \sqrt{n}$. Остальные сечения ограничены $n-1$ парами параллельных опорных гиперплоскостей. То, что они не менее чем $(\sqrt{n-1} - 1)$-асферические, вытекает из следующего предложения: ограниченный n парами параллельных гиперплоскостей в R^n и содержащий шар единичного диаметра многогранник имеет диаметр $\geqslant \sqrt{n}$. Действительно, докажем по индукции, что для любого k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ у многогранника есть $(n-k)$-грань, расстояние $(n-k)$-плоскости которой от центра многогранника не меньше $\sqrt{k/4}$. Случай $k = 1$ очевиден. Осуществим переход от k к $k+1$. Рассмотрим найденную $(n-k)$-плоскость и ее пересечения E_1 и E_2 с какой-нибудь оставшейся парой параллельных гиперплоскостей. Так как расстояние между гиперплоскостями $\geqslant 1$, то расстояние от центра многогранника до E_1 или E_2 не меньше $\sqrt{(k+1)/4}$.

3. Рассмотрим несколько родственных ε функций. Положим $\varepsilon_1(n, k) = \inf\{\varepsilon \mid$ через любую внутреннюю точку любого выпуклого n-мерного тела проходит ε-асферическое k-мерное сечение$\}$; $\varepsilon_2(n, k) = \inf\{\varepsilon \mid$ через любую внутреннюю точку 0 любого выпуклого тела в R^n проходит k-мерное сечение, содержащее некоторый k-мерный шар с центром в 0 и содержащееся в гомотетичном ему

шаре с тем же центром и коэффициентом $1+\varepsilon\}$. Функции ε', ε_1', ε_2 получаем, заменив в определении асферичности слово шар словом эллипсоид. Очевидно: $\varepsilon(n, k) \leqslant \varepsilon_1(n, k) \leqslant \varepsilon_2(n, k)$, $\varepsilon'(n, k) \leqslant \varepsilon_1'(n, k) \leqslant \varepsilon_2'(n, k)$, $\varepsilon(n, k) \leqslant \varepsilon'(n, k)$, $\varepsilon_i(n, k) \geqslant \varepsilon_i'(n, k)$ $(i = 1,2)$. Все определенные функции не убывают по первому и не возрастают по второму аргументу.

4. **Теорема** 2. $\varepsilon_1(3,2) = 1$; $\varepsilon_2(n, n-1) = +\infty$; $\varepsilon_1(n, n-1) \geqslant n-2$; $\varepsilon_2'(n, n-1) = n-2$ $(n \geqslant 3)$.

Доказательство неравенства $\varepsilon_1(3,2) \leqslant 1$ совершенно аналогично доказательству неравенства $\varepsilon(3, 2) \leqslant \sqrt{2}-1$ с учетом сформулированного в п. 2 свойства вписанного эллипсоида максимального объема.

Для доказательства равенства $\varepsilon_2(n, n-1) = +\infty$ достаточно рассмотреть последовательность прямых круговых цилиндров с единичным радиусом основания, у которых высоты $h_i \to \infty$, а точки O_i выбрать на равных расстояниях от оснований и приближать к боковой границе.

Неравенство $\varepsilon_2'(n, n-1) \leqslant n-2$ следует из того, что через любую внутреннюю точку O выпуклого тела в R^n проходит гиперплоское сечение, центр вписанного эллипсоида максимального объема которого совпадает с O [3, с. 35].

Чтобы доказать неравенство $\varepsilon_2'(n, n-1) \geqslant n-2$, возьмем такой симплекс в R^n с внутренней точкой O, что все проходящие через O и пересекающие некоторую грань Γ симплекса хорды делятся в отношении $\geqslant n-1$. По построению менее чем $(n-2)$-асферические сечения не могут пересекать Γ. Если же гиперплоское сечение общего положения не пересекает Γ, то в сечении получается $(n-1)$-симплекс, отношение объемов описанного и вписанного эллипсоидов которого, как хорошо известно, не менее $(n-1)^{n-1}$.

Аналогично доказывается неравенство $\varepsilon_1(n, n-1) \geqslant n-2$. Достаточно рассмотреть такой симплекс с внутренней точкой O, что расстояние от O до некоторой грани Γ в $n-1$ раз больше ширины симплекса в параллельных Γ направлениях. Если проходящее через O сечение симплекса пересекает Γ, то отношение ширины сечения в пересекающем Γ и параллельном Γ направлениях не меньше $n-1$. Если же сечение не пересекает одну из граней симплекса, то в сечении получается $(n-1)$-симплекс, который не менее чем $(n-2)$-асферический.

Замечания. 1. Доказанное здесь лишь при $n=3$ предположение (п.2), что через любую внутреннюю точку выпуклого тела в R^n проходит гиперплоское сечение, вписанный эллипсоид максимального объема которого есть шар, оказалось неверным при $n > 3$.

2. Рассмотрение параллелепипеда в R^3 показывает, что $\varepsilon'(3,2) \geqslant (2/\sqrt{3})-1$. Кажется правдоподобной гипотеза, что $\varepsilon'(3,2) = (2/\sqrt{3})-1$.

Список литературы: 1. *Dvoretzky A.* Some results on convex bodies and Banach spaces. — Proc. Internat. — Sympos. on Linear Spaces, Ierusalem, 1960, p. 123 — — 160. 2. *Мильман В. Д.* Новое доказательство теоремы А. Дворецкого о сечениях выпуклых тел. — Функц. анализ и его приложения, 1971, 5, вып. 4, с. 28 — 37. 3. *Грюнбаум Б.* Этюды по комбинаторной геометрии и теории выпуклых тел. — М.: Наука, 1971. — 95 с.

Поступила в редколлегию 14.10.83.

УДК 513

А. И. Медяник

ДОПОЛНЕНИЕ К СТАТЬЕ „ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ К. МИРАНДЫ"

В статье [1] рассматривался вопрос о существовании замкнутой выпуклой поверхности S, главные радиусы кривизны которой R_1 и R_2 $(R_1 \geqslant R_2 > 0)$ как функции единичного вектора нормали $\boldsymbol{n}$ удовлетворяют уравнению

$$R_1R_2 + \Phi(R_1 + R_2,\ R_1R_2,\ \boldsymbol{n}) + \boldsymbol{cn} = \varphi(\boldsymbol{n}), \tag{1}$$

где $\boldsymbol{c}$ — неизвестный постоянный вектор. Это уравнение при $\Phi \equiv 0$, $\boldsymbol{c} = 0$ совпадает с уравнением проблемы Минковского, необходимым условием разрешимости которой является, как известно, условие замкнутости $\int\limits_{\Omega} \boldsymbol{n}\varphi(\boldsymbol{n})\, d\omega = 0$ **(2)**, где Ω — единичная сфера, а $d\omega$ — элемент ее площади. Естественно поэтому, что и в общем случае (при $\boldsymbol{c} = 0$) функция φ также должна удовлетворять некоторому условию, найти которое не представляется возможным. В связи с этим К. Миранда и ввел в уравнение (1) постоянный вектор $\boldsymbol{c}$, зависящий от искомой поверхности, а значит, также являющийся искомым [2]. При такой постановке вопроса условие (2) можно считать выполненным.

Следуя К. Миранде, введем такие обозначения: $\Sigma_{n\lambda}$ — пространство всех овалоидов класса $\boldsymbol{C}^{n,\lambda}$, проходящих через начало координат в R^3, имеющих ось z своей внутренней нормалью; $\Sigma'_{n,\lambda} = \Sigma_{n,\lambda} \times R^3$; $\Omega^{n,\lambda}$ — пространство функций класса $C^{n,\lambda}$, заданных на единичной сфере Ω; $\Phi(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5)$ — функция, определенная в области $D = \{\eta_i : 0 < 4\eta_2 < \eta_1^2\}$ в R^5; $\Phi_i = \partial\Phi/\partial\eta_i$, $\Phi_{ik} = \partial^2\Phi/\partial\eta_i\partial\eta_k$.

В работах [2, 3] К. Миранда доказал, в частности, следующие теоремы существования.

Теорема 1. *Пусть* $\Phi \in C^{m+1,\lambda}$ *с* $m \geqslant 2$ — *функция, положительно однородная первой степени по переменным* η_3, η_4, η_5, *и пусть*

$$\Phi_1 \geqslant 0,\ \ \Phi_2 \geqslant a - 1 \quad (a = \text{const} > 0), \tag{3}$$

$$\sum_{i,k=2}^{5} \Phi_{ik}\lambda_i\lambda_k \leqslant 0, \tag{4}$$

$$A_0\eta_2^{\mu} \leqslant \Phi \leqslant A_1\eta_2^{\mu}, \tag{5}$$

где A_0, A_1 $(A_1 \geqslant A_0)$, μ — *постоянные, причем* $0 \leqslant \mu < 1$.

Тогда уравнение (1) *допускает одно и только одно решение* $(S, c) \in \Sigma'_{m+2, \lambda}$ *для любой функции* $\varphi \in \Omega^{m, \lambda}$ *с* $m \geqslant 2$, *удовлетворяющей условию* (2) *и неравенству*

$$\inf \varphi > B_1 \max \left[\left(\frac{\sup \varphi}{q} \right)^{\mu}, \ \left(\frac{B_0}{1-q} \right)^{\frac{\mu}{1-\mu}} \right], \tag{6}$$

где $B_0 = 1/4 \max [3A_1 - 7A_0, -7A_0, 3A_1]$; $B_1 = 3/4 \max [A_1 - A_0, -A_0, A_1]$ *и* $0 < q < 1$.

Результат остается в силе и при $\mu = 1$, *если*

$$B_0 < 1, \ \frac{B_1 (1 + A_1 + B_1')}{1 - B_0} < 1 + A_0 - B_1', \tag{7}$$

где $B_1' = 3/4 (A_1 - A_0)$ *и вместо (6) выполняется условие*

$$\inf \varphi > \frac{B_1}{1 - B_0} \sup \varphi. \tag{8}$$

Теорема 2. *Теорема 1 остается в силе, если условие положительной однородности первой степени функции* Φ *относительно компонент вектора* $\boldsymbol{n}$ *и условие* (4) *заменить следующими:* $\Phi_{22} < 0$, $\Delta_n \Phi + 2\Phi - \Phi_{22}^{-1} \nabla_n \Phi_2 \leqslant x_0 (\eta_2) + x_1 (\eta_2) \eta_1^{2-\nu}$, *где* ∇_n, Δ_n — *первый и второй дифференциальные параметры Бельтрами, которые надо вычислять, представляя* Φ_2 *и* Φ *как функции одного* $\boldsymbol{n}$, *а* $\chi_0 (\eta_2)$ *и* $\chi_1 (\eta_2)$ — *непрерывные функции при* $\eta_2 > 0$ *и* $0 < \nu \leqslant 2$ (*или* $\nu = 0$, *если* $\sup \chi_1 < a$).

В статье [1] условия (6—8) на функцию φ были преобразованы к более компактному виду, в результате чего была установлена

Теорема 3. *Если функция* φ *удовлетворяет условию*

$$\inf \varphi > \frac{B_1}{B_0} \left(\frac{1}{\bar{q}} - 1 \right) \sup \varphi, \tag{9}$$

где $\bar{q}$ — *решение уравнения*

$$\frac{B_0}{1 - q} = \left(\frac{\sup \varphi}{\bar{q}} \right)^{1-\mu}, \tag{10}$$

то для нее выполняются: при $0 \leqslant \mu < 1$ *условие (6) с* $q = \bar{q}$, *а, при* $\mu = 1$ *условие (8). Условие (7) выполняется, если*

$$1 \leqslant \frac{1 + A_1}{1 + A_0} < \frac{1}{6} (\sqrt{9 + 120t} - 3), \tag{11}$$

где $t = \min [1, 1 + A_1, (1 + A_0)^{-1}]$.

Получим теперь с помощью теоремы 3 несколько следствий из теорем существования К. Миранды в зависимости от знаков постоянных A_0 и A_1 в условии (5). Положим для краткости $\inf \varphi = m$, $\sup \varphi = \mu$ и рассмотрим сначала случай $\mu < 1$.

Теорема 4. *Теоремы существования 1 и 2 имеют место при* $\mu < 1$, *если условие (6) заменить одним из следующих:*

$$A_1 < \frac{4m}{3(M+m)^\mu} \quad при \quad A_0 \geqslant 0; \tag{12}$$

$$-A_0 < \frac{4m}{3\left(M+\frac{7}{3}m\right)^\mu} \quad при \quad A_1 \leqslant 0; \tag{13}$$

$$A_1 < \frac{2m}{3\left(M+\frac{5}{3}m\right)^\mu} \quad при \quad A_0 + A_1 = 0. \tag{14}$$

Доказательство. Если $A_0 \geqslant 0$, то $B_0 = B_1 = 3/4 A_1$. Поэтому в силу (12) и (10)

$$\left(1-\frac{M}{M+m}\right)\left(\frac{M}{M/(M+m)}\right)^{1-\mu} = \frac{m}{(M+m)^\mu} > B_0 = (1-\bar{q})\left(\frac{M}{\bar{q}}\right)^{1-\mu}.$$

Отсюда следует, что $\bar{q} > \frac{M}{M+m}$, и тогда

$$\frac{B_1}{B_0}\left(\frac{1}{\bar{q}}-1\right)M < \left(\frac{1}{M/(M+m)}-1\right)M = m,$$

т. е. выполняется условие (9) теоремы 3, а значит, выполняется и условие (6). Первое утверждение доказано.

Два других утверждения доказываются аналогично. Для этого достаточно установить, что при условии (13) $B_0 = -7A_0/4$, $B_1 = -3A_0/4$ и $\bar{q} > \frac{M}{M+\frac{7}{3}m}$, а при условии (14) $B_0 = \frac{5}{2}A_1$, $B_1 = \frac{3}{2}A_1$ и $\bar{q} > \frac{M}{M+\frac{5}{3}m}$.

Следует добавить, что условие (6) в теоремах К. Миранды обеспечивает существование априорной оценки для гауссовой кривизны искомой поверхности (сверху). Поэтому явные ограничения на постоянные A_0 и A_1, указанные в теореме 4, также гарантируют получение этой оценки. В частности, они позволяют утверждать разрешимость проблемы существования для уравнения (1) вида $R_1R_2 + A(R_1R_2)^\mu + \boldsymbol{cn} = \varphi(\boldsymbol{n})$ или

$$R_1R_2 + A(R_1R_2)^\mu e^{\frac{-1}{1+R_1+R_2}} + \boldsymbol{cn} = \varphi(\boldsymbol{n}),$$

где $0 < A < \frac{4m}{3(M+m)^\mu}$ при выполнении для φ условия (2).

Теорема 5. *Теоремы существования 1 и 2 справедливы при* $\mu = 1$, *если условия* (7)(—8) *заменить одним из следующих:*

$$A_1 < \min\left[\frac{4m}{3(M+m)}, \frac{\sqrt{129}-9}{6}\right] \quad \text{при } A_0 = 0;$$

$$-A_0 < \min\left[\frac{4m}{3M+7m}, \frac{17-\sqrt{129}}{20}\right] \quad \text{при } A_1 = 0;$$

$$A_1 < \min\left[\frac{2m}{3M+5m}, \frac{13-\sqrt{129}}{10}\right] \quad \text{при } A_0 + A_1 = 0.$$

Доказательство. Поскольку по теореме 3 случай $\mu = 1$ можно рассматривать как предельный при $\mu \to 1$, то для выполнения условия (8) достаточно, чтобы выполнялось одно из условий (12) — (14) при $\mu = 1$. При этом, очевидно, в двойном неравенстве (11) во всех трех случаях необходимо положить $t = 1$. После этого легко установить, что для того, чтобы при $A_0 = 0$ выполнялось условие (7), постоянная A_1 должна удовлетворять неравенству $A_1 < \frac{\sqrt{129}-9}{6}$. Если $A_1 = 0$, то условие (7) выполняется при $-A_0 < \frac{17-\sqrt{129}}{20}$. А если $A_0 + A_1 = 0$, то оно выполняется при $A_1 < \frac{13-\sqrt{129}}{10}$. Отсюда и вытекает утверждение теоремы 5.

Список литературы: 1. *Медяник А. И.* Об одной теореме К. Миранды. — Укр. геометр. сб., 1978, вып. 21, с. 81—85. 2. *Miranda C.* Su un problema di geometria differentiale in grande per gli ovaloidi. — Ann. Mat. Pura ed Appl., 1970, 87, p. 237—269. 3. *Miranda C.* Aggiunde ed errata corrige alla memoria «Su un problema di geometria differentiale in grande per gli ovaloidi». — Ann. Mat. Pura ed Appl., 1971, 88, p. 349—355.

Поступила в редколлегию 17. 10. 83.

УДК 513

В. И. Михайловский

О ЖЕСТКОСТИ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ НЕИЗГИБАЕМОСТИ ПОВЕРХНОСТЕЙ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ГАУССОВОЙ КРИВИЗНЫ ПРИ ЗАДАННОМ НАПРАВЛЕНИИ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ТОЧЕК КРАЯ

В предлагаемой работе исследованы бесконечно малые изгибания первого и второго порядков односвязных регулярных (класса C^2) поверхностей отрицательной гауссовой кривизны, на которые наложены связи, допускающие перемещения точек части края в произвольно заданном постоянном направлении.

Теорема 1. *Пусть Φ — регулярная (класса C^2) односвязная поверхность отрицательной гауссовой кривизны, ограниченная четырьмя асимптотическими линиями g_1, g_2, g_1', g_2', среди которых g_1 и g_1' — асимптотические линии одного семейства, а g_2*

и g_2' — асимптотические линии второго семейства. Если на такую поверхность наложить связи, которые допускают перемещения точек линий g_1 и g_2 только лишь в одном постоянном направлении $\boldsymbol{c}$, то поверхность Φ в таком классе деформаций будет обладать жесткостью не выше второго порядка, а следовательно, станет аналитически неизгибаемой.

Доказательство. Примем за координатные линии на поверхности Φ ее асимптотические линии. Пусть $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(u, v)$, где $(u, v) \in D$, — уравнение поверхности Φ; $u = u_0$ и $u = u_0'$ — уравнения асимптотических линий g_1 и g_1', а $v = v_0$ и $v = v_0'$ — уравнения линий g_2 и g_2' соответственно. Выберем в плоскости переменных u и v прямоугольную декартовую систему координат Ouv. Тогда область D будет представлять собой прямоугольник $u_0 \leqslant u \leqslant u_0'$, $v_0 \leqslant v \leqslant v_0'$. Деформация второго порядка

$$\boldsymbol{x}^*(u, v, \varepsilon) = \boldsymbol{x}(u, v) + 2\varepsilon \overset{1}{\boldsymbol{z}}(u, v) + 2\varepsilon^2 \overset{2}{\boldsymbol{z}}(u, v), \ (u, v) \in D, \quad (1)$$

будет бесконечно малым изгибанием второго порядка поверхности Φ, на которую наложены указанные в условии теоремы связи, если вектор-функции $\overset{1}{\boldsymbol{z}}(u, v)$ и $\overset{2}{\boldsymbol{z}}(u, v)$ являются решениями в области D системы дифференциальных уравнений в полных дифференциалах

$$(d\boldsymbol{x}, d\overset{1}{\boldsymbol{z}}) = 0 \quad (2), \ (d\boldsymbol{x}, d\overset{2}{\boldsymbol{z}}) + d\overset{1}{\boldsymbol{z}}{}^2 = 0 \quad (3)$$

или равносильной ей системы дифференциальных уравнений с частными производными:

$$(\boldsymbol{x}_u, \overset{1}{\boldsymbol{z}}_u) = 0 \quad (4), \ (\boldsymbol{x}_u, \overset{1}{\boldsymbol{z}}_v) + (\boldsymbol{x}_v, \overset{1}{\boldsymbol{z}}_u) = 0 \quad (5),$$

$$(\boldsymbol{x}_v, \overset{1}{\boldsymbol{z}}_v) = 0 \quad (6), \ (\boldsymbol{x}_u, \overset{2}{\boldsymbol{z}}_u) + \overset{1}{\boldsymbol{z}}{}_u^2 = 0 \quad (7),$$

$$(\boldsymbol{x}_u, \overset{2}{\boldsymbol{z}}_v) + (\boldsymbol{x}_v, \overset{2}{\boldsymbol{z}}_u) + 2(\overset{1}{\boldsymbol{z}}_u, \overset{1}{\boldsymbol{z}}_v) = 0 \quad (8),$$

$$(\boldsymbol{x}_v, \overset{2}{\boldsymbol{z}}_v) + \overset{1}{\boldsymbol{z}}{}_v^2 = 0 \quad (9)$$

и на двух смежных сторонах $u = u_0$ и $v = v_0$ прямоугольника D удовлетворяют таким условиям:

$$\overset{1}{\boldsymbol{z}}(u_0, v) = \lambda_1(u_0, v)\boldsymbol{c}, \ v_0 \leqslant v \leqslant v_0', \quad (10)$$

$$\overset{1}{\boldsymbol{z}}(u, v_0) = \lambda_1(u, v_0)\boldsymbol{c}, \ u_0 \leqslant u \leqslant u_0', \quad (11)$$

$$\overset{2}{\boldsymbol{z}}(u_0, v) = \lambda_2(u_0, v)\boldsymbol{c}, \ v_0 \leqslant v \leqslant v_0', \quad (12)$$

$$\overset{2}{\boldsymbol{z}}(u, v_0) = \lambda_2(u, v_0)\boldsymbol{c}, \ u_0 \leqslant u \leqslant u_0', \quad (13)$$

где $\lambda_1(u, v)$ и $\lambda_2(u, v)$ — дифференцируемые функции, которые характеризуют величину смещения точек линий g_1 и g_2 в процессе деформации поверхности Φ. Продифференцировав равенство (10) вдоль линии g_1, а равенство (11) — вдоль линии g_2, получим

$$\overset{1}{z}_v(u_0, v) = \lambda_{1v}(u_0, v)\, c, \ v_0 \leqslant v \leqslant v_0'; \tag{14}$$

$$\overset{1}{z}_u(u, v_0) = \lambda_{1u}(u, v_0)\, c, \ u_0 \leqslant u \leqslant u_0'. \tag{15}$$

Отсюда, учитывая равенства (4) и (6), находим

$$\lambda_{1v}(u_0, v)(x_v(u_0, v), c) = 0, \ v_0 \leqslant v \leqslant v_0'; \tag{16}$$

$$\lambda_{1u}(u, v_0)(x_u(u, v_0), c) = 0, \ u_0 \leqslant u \leqslant u_0'. \tag{17}$$

В зависимости от формы кривых g_1, g_2 рассмотрим четыре возможных случая:

1) g_1 и g_2 не содержат в себе плоских отрезков, лежащих в плоскостях, перпендикулярных к вектору c;

2) g_1 и g_2 — плоские кривые, лежащие в плоскости, перпендикулярной к вектору c;

3) одна из кривых g_1 или g_2 лежит в плоскости, перпендикулярной к вектору c, а другая — не содержит в себе плоских отрезков, лежащих в плоскостях перпендикулярных к вектору c;

4) хотя бы одна из кривых g_1 или g_2 содержит в себе плоские отрезки, лежащие в плоскостях, перпендикулярных к вектору c.

п. 1. При исследовании первого случая из уравнений (16), (17), (10), (11) находим

$$\overset{1}{z}(u, v)\Big|_{g_i} = \lambda_0 c, \quad i = 1{,}2, \tag{18}$$

где $\lambda_0 = \mathrm{const}$.

Введем в рассмотрение вектор-функцию $\overset{1}{\tilde{z}}(u, v) = \overset{1}{z}(u,v) - \lambda_0 c$ **(19)**. Очевидно, $\overset{1}{\tilde{z}}(u, v)$ является изгибающим полем поверхности, причем $\overset{1}{\tilde{z}}(u, v)\Big|_{g_i} = \mathbf{0}, \quad i = 1{,}2$ **(20)**.

Обозначим через $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$, $\chi(u, v)$ ковариантные координаты вектора $\overset{1}{\tilde{z}}(u, v)$ в базисе x_u, x_v, m, где m — единичный вектор нормали к поверхности Φ. Тогда

$$\varphi = (\overset{1}{\tilde{z}}, x_u), \ \psi = (\overset{1}{\tilde{z}}, x_v), \ \chi = (\overset{1}{\tilde{z}}, m). \tag{21}$$

Поскольку поверхность Φ отнесена к асимптотическим линиям, то для определения функций $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$, $\chi(u, v)$ с учетом равенств (4) — (6) получаем такую систему дифференциальных уравнений [3]:

$$\begin{gathered} \frac{\partial \varphi}{\partial u} = \Gamma^1_{11}\varphi + \Gamma^2_{11}\psi, \ \frac{\partial \psi}{\partial v} = \Gamma^1_{22}\varphi + \Gamma^2_{22}\psi, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial \psi}{\partial u} = 2(\Gamma^1_{12}\varphi + \Gamma^2_{12}\psi + M\chi), \end{gathered} \tag{22}$$

где Γ_{ij}^k — символы Кристофеля второго рода, а M — коэффициент второй квадратичной формы поверхности Φ.

Краевые условия (20) для функций (21) запишутся так:

$$\varphi(u, v)|_{g_i} = \psi(u, v)|_{g_i} = \chi(u, v)|_{g_i} = 0, \quad i = 1,2. \tag{23}$$

Таким образом, вопрос о жесткости поверхности Φ в рассматриваемом классе деформаций свелся к исследованию решений системы дифференциальных уравнений (22) в прямоугольнике D, которые на границе $u = u_0$ и $v = v_0$ удовлетворяют условиям (23).

Так как поверхность Φ принадлежит классу C^2, то символы Кристофеля $\Gamma_{ij}^k(u, v)$, а следовательно, и $|\Gamma_{ij}^k(u, v)|$ будут непрерывными функциями в замкнутом прямоугольнике D и согласно теореме Вейерштрасса будут принимать в D свои наибольшие и наименьшие значения. Пусть

$$\Gamma^* = \max_D \{|\Gamma_{ij}^k(u, v)|\}, \ i, j, k = 1,2. \tag{24}$$

Разобьем прямоугольник D, отнесенный к прямоугольной декартовой системе координат Ouv, отрезками, параллельными координатным осям, на более мелкие прямоугольники так, чтобы длины их сторон не превышали δ: $0 < \delta < 1/4\Gamma^*$ **(25)**.

Пусть D_{11} — прямоугольник разбиения, который находится в нижнем левом углу области D, т. е. который примыкает к сторонам $u = u_0$ и $v = v_0$.

Обозначим

$$\varphi^* = \max_{D_{11}} |\varphi(u, v)|, \ \psi^* = \max_{D_{11}} |\psi(u, v)|. \tag{26}$$

Предположим, что наибольшие значения $|\varphi(u, v)|$ и $|\psi(u, v)|$ в области D достигаются в точках $P_1(u', v')$ и $P_2(u'', v'')$ соответственно, т. е.

$$\varphi^* = |\varphi(u', v')|, \ \psi^* = |\psi(u'', v'')|. \tag{27}$$

Опустим из точки P_1 перпендикуляр P_1P_1' на сторону $u = u_0$ прямоугольника D, а из точки P_2 — перпендикуляр P_2P_2' на сторону $v = v_0$. Тогда координаты точек P_1' и P_2' будут (u_0, v') и (u'', v_0) соответственно.

Принимая во внимание соотношения (27), (23), (22.1), (26), (24), (25), находим

$$\varphi^* = |\varphi(u', v')| = \left|\int_{u_0}^{u'} \frac{\partial\varphi(u, v')}{\partial u} du\right| \leqslant \int_{u_0}^{u'} |\Gamma_{11}^1\varphi + \Gamma_{11}^2\psi| \, du \leqslant$$

$$\leqslant \Gamma^*\varphi^* + \psi^*)(u' - u_0) \leqslant \frac{1}{4}(\varphi^* + \psi^*); \tag{28}$$

$$\psi^* = |\psi(u'', v'')| = \left|\int\limits_{v_0}^{v''} \frac{\partial\psi(u'', v)}{\partial v}\,dv\right| \leqslant \int\limits_{v_0}^{v''} |(\Gamma^1_{22}\varphi + \Gamma^2_{22}\psi)\,dv| \leqslant$$
$$\leqslant \Gamma^*(\varphi^* + \psi^*)(v'' - v_0) \leqslant \frac{1}{4}(\varphi^* + \psi^*). \qquad (29)$$

Сложив неравенства (28) и (29), получим $\varphi^* + \psi^* \leqslant \frac{1}{2}(\varphi^* + \psi^*)$, т. е. $\varphi^* + \psi^* \leqslant 0$. Отсюда, учитывая равенства (26), заключаем, что $\varphi(u, v) = \psi(u, v) = 0$ для всех точек прямоугольника D. Воспользовавшись этим фактом, теперь нетрудно доказать, что $\varphi(u, v) = \psi(u, v) = 0$ во всех точках прямоугольника D. Затем из третьего уравнения системы (22) находим, что и $\chi(u, v) = 0$ в D. Тогда из равенств (21), (19) следует, что для всех $(u, v) \in D$ $\overset{1}{\boldsymbol{z}}(u, v) = \lambda_0\boldsymbol{c}$. Это означает, что в рассматриваемом случае поверхность Φ обладает жесткостью первого порядка, а следовательно, аналитически неизгибаема [2]. При этом тривиальные изгибания сводятся к поступательному перемещению поверхности Φ в направлении вектора $\boldsymbol{c}$.

п. 2. Докажем, что во втором случае поверхность Φ в рассматриваемом классе деформаций обладает жесткостью второго порядка. Действительно, поскольку в этом случае $(\boldsymbol{x}_v, \boldsymbol{c})/_{g_1} = 0$, $(\boldsymbol{x}_u, \boldsymbol{c})|_{g_2} = 0$, то из краевых условий (12) и (13) соответственно находим

$$(\overset{2}{\boldsymbol{z}}_v, \boldsymbol{x}_v)|_{g_1} = 0, \quad (\overset{2}{\boldsymbol{z}}_u, \boldsymbol{x}_u)|_{g_2} = 0. \qquad (30)$$

Тогда из уравнений (9), (7) получим

$$\overset{1}{\boldsymbol{z}}_v|_{g_1} = 0, \text{ т. е. } \overset{1}{\boldsymbol{z}}|_{g_1} = \boldsymbol{c}_1 = \text{const},$$
$$\overset{1}{\boldsymbol{z}}_u|_{g_2} = 0, \text{ т. е. } \overset{1}{\boldsymbol{z}}|_{g_2} = \boldsymbol{c}_2 = \text{const},$$

Отсюда, учитывая краевые условия (10) и (11), приходим к заключению, что $\overset{1}{\boldsymbol{z}}|_{g_i} = \lambda_0\boldsymbol{c} = \text{const}$. Теперь, повторив рассуждения п. 1, приходим к заключению, что $\overset{1}{\boldsymbol{z}}(u, v) = \lambda_0\boldsymbol{c}$ на всей поверхности. Таким образом, в случае 2) из системы уравнений (2), (3) следует, что поле $\overset{1}{\boldsymbol{z}}(u, v)$ тривиально. Это означает, что поверхность Φ в рассматриваемом случае обладает жесткостью второго порядка. Воспользовавшись рассуждениями пп. 1, 2, нетрудно убедиться, что в случаях 3), 4) поверхность Φ также обладает жесткостью второго порядка, а следовательно, аналитически неизгибаема [1, 2].

Теорема 2. *Пусть Φ регулярная (класса C^2) поверхность отрицательной гауссовой кривизны, ограниченная двумя асимптотическими линиями g_1, g_2, исходящими из одной точки, и кривой g, которую каждая из асимптотических линий поверхности Φ пере-*

[сек]ает лишь один раз. Если на такую поверхность наложить [св]язи, допускающие перемещения точек линии g лишь в одном [по]стоянном направлении $\boldsymbol{c}$, то поверхность Φ в таком классе [де]формаций будет обладать жесткостью не выше второго порядка, [и] следовательно, станет аналитически неизгибаемой.

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(u, v)$, $(u, v) \in D$, — регу[ля]рная параметризация поверхности Φ, отнесенная к ее асимпто[т]ическим линиям. Пусть $u = u_0$ и $v = v_0$ — уравнения линий g_1 [и] g_2 на поверхности Φ. Если в плоскости переменных u, v выбрать [п]рямоугольную декартовую систему координат Ouv, то область D [б]удет представлять собой криволинейный прямоугольный тре[у]гольник, ограниченный отрезками прямых $u = u_0$, $v = v_0$ и выпук[л]ой (или вогнутой) дугой $\tilde{g}$, которая является прообразом линии g.

Таким образом, вопрос о жесткости поверхности Φ в рассмат[р]иваемом классе деформаций сводится к исследованию в треуголь[н]ой области D решений системы дифференциальных уравнений (2), (3), которые вдоль контура $\tilde{g}$ удовлетворяют краевым усло[ви]ям:

$$\overset{1}{\boldsymbol{z}}(u, v)|_{\tilde{g}} = \lambda_1(u, v)|_{\tilde{g}}\boldsymbol{c} \ (31), \quad \overset{2}{\boldsymbol{z}}(u, v)|_{\tilde{g}} = \lambda_2(u, v)|_{\tilde{g}}\boldsymbol{c} \ (32).$$

[П]родифференцировав равенство (31) вдоль линии g, получим $d\overset{1}{\boldsymbol{z}}|_{\tilde{g}} = d\lambda_1|_{\tilde{g}}\boldsymbol{c}$ (33). Отсюда, учитывая уравнение (2), находим $d\lambda_1|_{\tilde{g}}(d\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c})|_{\tilde{g}} = 0$ (34).

В зависимости от формы кривой g рассмотрим три возможных [с]лучая:

1) линия g не содержит в себе отрезков, которые лежат [в] плоскостях, перпендикулярных к вектору $\boldsymbol{c}$;

2) линия g является плоской линией, плоскость которой пер[пе]ндикулярна к вектору $\boldsymbol{c}$;

3) линия g содержит в себе участки, лежащие в плоскостях, [п]ерпендикулярных к вектору $\boldsymbol{c}$.

п. 1. В первом случае из уравнения (34) следует, что $d\lambda_1|_g = 0$, т. е. $\lambda_1(u, v)|_g = \lambda_0 = \text{const}$. Тогда из равенства (31) полу[ч]ием $\overset{1}{\boldsymbol{z}}(u, v)|_g = \lambda_0\boldsymbol{c}$. Введем в рассмотрение вектор-функцию $\overset{1}{\tilde{\boldsymbol{z}}}(u, v) = \overset{1}{\boldsymbol{z}}(u, v) - \lambda_0\boldsymbol{c}$ (35). Очевидно, $\overset{1}{\tilde{\boldsymbol{z}}}(u, v)$ является изги[б]ающим полем поверхности Φ, которое вдоль линии g удовлетво[р]яет краевому условию $\overset{1}{\tilde{\boldsymbol{z}}}(u, v)|_g = \boldsymbol{0}$ (36). Ковариантные коорди[н]аты (21) вектора $\overset{1}{\tilde{\boldsymbol{z}}}(u, v)$ удовлетворяют системе дифференциаль[н]ых уравнений (22), причем вдоль дуги $\tilde{g}$ контура области D они [д]олжны удовлетворять таким краевым условиям:

$$\varphi(u, v)|_{\tilde{g}} = \psi(u, v)|_{\tilde{g}} = \chi(u, v)|_{\tilde{g}} = 0. \tag{37}$$

Разобьем дугу $\tilde{g}$ на части так, чтобы их длины не превышали δ:

$$\delta < 1/4\Gamma^*, \text{ где } \Gamma^* = \max_D |\Gamma_{ij}^k(u, v)|. \tag{38}$$

Через точки деления проведем прямые, параллельные осям Ou и Ov. В результате такого построения область D разобьется на прямоугольники и прямоугольные криволинейные треугольники, примыкающие к дуге $\tilde{g}$, при этом длины сторон полученных прямоугольников и треугольников не превышают δ. Пусть D_1 — один из треугольников, примыкающий к $\tilde{g}$. Обозначим:

$$\varphi^* = \max_{D_1} |\varphi(u, v)|, \quad \psi^* = \max_{D_1} |\psi(u, v)|. \tag{39}$$

Предположим, что свои наибольшие значения функции $|\varphi(u, v)|$ и $|\psi(u, v)|$ в области D_1 принимают соответственно в точках $P_1(u', v'')$ и $P_2(u'', v'')$, т. е.

$$\varphi^* = |\varphi(u', v')|, \quad \psi^* = |\psi(u'', v'')|. \tag{40}$$

Проведем из точки P_1 отрезки параллельно Ou до пересечения с кривой $\tilde{g}$ в точке $P_1'(u, v')$, а из точки P_2 — отрезок параллельно Ov до пересечения с $\tilde{g}$ в точке $P_2'(u'', \tilde{v})$. В точках P_1' и P_2' имеем $\varphi(\tilde{u}, v') = 0$, $\psi(u'', \tilde{v}) = 0$ (41). Тогда, принимая во внимание соотношения (40), (41), (22), (39), (38), находим $\varphi^* =$

$$= |\varphi(u', v')| = \left| \int_{u'}^{\tilde{u}} \frac{\partial \varphi(u, v')}{\partial u} du \right| \leqslant \int_{u'}^{\tilde{u}} |\Gamma_{11}^1 \varphi + \Gamma_{11}^2 \psi| \, du \leqslant \Gamma^* (\varphi^* +$$

$$+ \psi^*)(\tilde{u} - u') \leqslant \frac{1}{4}(\varphi^* + \psi^*); \quad \psi^* = |\psi(u'', v'')| = \left| \int_{v''}^{v} \frac{\partial \psi(u'', v)}{\partial v} dv \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{v''}^{\tilde{v}} |\Gamma_{22}^1 \varphi + \Gamma_{22}^2 \psi| \, dv \leqslant \Gamma^* (\varphi^* + \psi^*)(\tilde{v} - v'') \leqslant \frac{1}{4}(\varphi^* + \psi^*).$$

Складывая эти неравенства, получаем $\varphi^* + \psi^* \leqslant \frac{1}{2}(\varphi^* + \psi^*)$, т. е. $\varphi^* + \psi^* \leqslant 0$. Отсюда, учитывая (39), (22), заключаем, что для всех точек области D_1 будет $\varphi(u, v) = \psi(u, v) = \chi(u, v) = 0$. Поскольку D_1 — произвольно взятый треугольник, примыкающий к $\tilde{g}$, то $\varphi(u, v) = \psi(u, v) = \chi(u, v) = 0$ во всех треугольниках, примыкающих к $\tilde{g}$. Теперь, воспользовавшись рассуждениями п. 1 доказательства теоремы 1, приходим к заключению, что $\tilde{\overset{1}{\boldsymbol{z}}}(u, v) = 0$ для всех $(u, v) \in D$, т. е. $\overset{1}{\boldsymbol{z}}(u, v) = \lambda_0 \boldsymbol{c}$.

Таким образом, в рассматриваемом случае из (2) и (31) следует, что $\overset{1}{\boldsymbol{z}}(u, v) = \lambda_0 \boldsymbol{c} = \text{const}$, а это означает, что поверхность Φ обладает жесткостью первого порядка, а следовательно, аналитически неизгибаема.

п. 2. Докажем, что в случае 2) поверхность Φ в рассматриваемом классе деформаций обладает жесткостью второго порядка. Так как линия g лежит в плоскости, которая перпендикулярна к вектору $\boldsymbol{c}$, то $(d\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c})|_{\tilde{g}} = 0$. Тогда из равенства (32) находим, что $(d\boldsymbol{x}, d\overset{2}{\boldsymbol{z}})|_{\tilde{g}} = 0$, а затем из уравнения (3) получаем $d\overset{1}{\boldsymbol{z}}|_{\tilde{g}} = 0$, т. е. $\overset{1}{\boldsymbol{z}}(u, v)|_{\tilde{g}} = \mathrm{const}$. Отсюда, учитывая равенство (31), имеем $\overset{1}{\boldsymbol{z}}(u, v)|_{g} = \lambda_0 \boldsymbol{c} = \mathrm{const}$. Повторив теперь рассуждения п. 1, приходим к выводу, что для всех $(u, v) \in D$ будет $\overset{1}{\boldsymbol{z}}(u, v) = \lambda_0 \boldsymbol{c}$.

Итак, в рассматриваемом случае тривиальность поля $\overset{1}{\boldsymbol{z}}(u, v)$ мы получили из системы уравнений (2), (3). Это означает, что поверхность Φ обладает жесткостью второго порядка, а следовательно, аналитически неизгибаема.

Воспользовавшись рассуждениями п. п. 1, 2, нетрудно убедиться, что в случае 3) поверхность Φ в рассматриваемом классе деформаций также обладает жесткостью второго порядка. Теорема доказана.

Теоремы 1, 2 можно обобщить на поверхности отрицательной кривизны, которые ограничены более сложными контурами.

Список литературы: 1. *Ефимов Н. В.* Качественные вопросы теории деформации поверхностей.— Усп. мат. наук, 1948, 3, вып. 2 (24), с. 47—158. 2. *Ефимов Н. В.* Некоторые предложения о жесткости и неизгибаемости.— Усп. мат. наук, 1952, 7, вып. 5 (51), с. 215—224. 3. *Minagawa T. and Rado T.* On the infinitesimal rigidity of surfaces.— Osaka math. J., 1952, 4, No 2, p. 241—285.

Поступила в редколлегию 21.11.83.

УДК 513

В. В. Можарский

ДОСТАТОЧНЫЙ ПРИЗНАК ТОЧКИ ТИПА ЛАСТОЧКИНА ХВОСТА НА ОГИБАЮЩЕЙ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКОГО СЕМЕЙСТВА ПОВЕРХНОСТЕЙ

Рассмотрим семейство локально простых поверхностей в пространстве R^3, зависящее от параметра φ:

$$\boldsymbol{r}(u, v, \varphi) \in C^4, \ (u, v) \in G, \ a < \varphi < b, \tag{1}$$

где G — некоторая область на плоскости параметров (u, v). В работе* были приведены необходимые и, отдельно, достаточные условия существования огибающей семейства (1), а также наличия на огибающей особой линии (ребра возврата). В этой же

* Залгаллер В. А. Теория огибающих.— М.: Наука, 1975.— 104 с.

работе выделен интересный вид особенности огибающей — так называемая точка типа ласточкина хвоста, для которого в [1] даны лишь необходимые условия. Настоящую заметку посвятим нахождению достаточных условий наличия точки типа ласточкина хвоста на огибающей семейства (1). Задача была предложена автору В. А. Залгаллером.

Будем говорить, что регулярная кривая L служит ребром возврата поверхности σ, если в точках, не лежащих на L, но достаточно близких к L, поверхность σ регулярна, а в точках кривой L поверхность σ имеет контингенцию в виде полуплоскости, непрерывно изменяющейся вдоль L. Точку M назовем точкой типа ласточкина хвоста поверхности σ, если M является точкой возврата кривой L поверхности σ, причем вне M линия L служит ребром возврата σ, а в точке M поверхность σ имеет контингенцию в виде плоскости.

Пусть огибающая семейства (1) состоит из двух участков, распространяющихся вплоть до одной и той же кривой L, и L служит ребром возврата поверхности σ, образованной объединением этих двух участков и кривой L. Будем включать кривую L в состав огибающей, если каждой точке M кривой L соответствует в силу закона прикрепления единственное значение параметра φ, а касательная плоскость поверхности семейства (1), соответствующая этому значению параметра φ, содержит контингенцию поверхности σ в точке M. Аналогично точку M типа ласточкина хвоста включаем в состав огибающей, если в силу закона прикрепления этой точке отвечает единственное значение параметра φ и касательная плоскость соответствующей поверхности семейства (1) совпадает с контингенцией поверхности σ в M.

Введем следующие обозначения: $f = (\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v \boldsymbol{r}_\varphi)$,

$$g = \begin{vmatrix} f_u & f_v & f_\varphi \\ \boldsymbol{r}_u^2 & \boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v & \boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_\varphi \\ \boldsymbol{r}_v\boldsymbol{r}_u & \boldsymbol{r}_v^2 & \boldsymbol{r}_v\boldsymbol{r}_\varphi \end{vmatrix}, \quad h = \begin{vmatrix} g_u & g_v & g_\varphi \\ \boldsymbol{r}_u^2 & \boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v & \boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_\varphi \\ \boldsymbol{r}_v\boldsymbol{r}_u & \boldsymbol{r}_v^2 & \boldsymbol{r}_v\boldsymbol{r}_\varphi \end{vmatrix},$$

$$p = \begin{vmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{vmatrix} = \frac{D(f, g)}{D(u, v)},$$

$$g = \begin{vmatrix} h_u & h_v & h_\varphi \\ f_u & f_v & f_\varphi \\ g_u & g_v & g_\varphi \end{vmatrix} = \frac{D(h, f, g)}{D(u, v, \varphi)},$$

$$W = \begin{vmatrix} \boldsymbol{r}_u^2 & \boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v \\ \boldsymbol{r}_v\boldsymbol{r}_u & \boldsymbol{r}_v^2 \end{vmatrix} = (\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v)^2,$$

$$\alpha = \frac{1}{W}\begin{vmatrix} \boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_\varphi & \boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v \\ \boldsymbol{r}_v\boldsymbol{r}_\varphi & \boldsymbol{r}_v^2 \end{vmatrix}, \quad \beta = \frac{1}{W}\begin{vmatrix} \boldsymbol{r}_u^2 & \boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_\varphi \\ \boldsymbol{r}_v\boldsymbol{r}_u & \boldsymbol{r}_v\boldsymbol{r}_\varphi \end{vmatrix}.$$

Непосредственным вычислением легко убедиться в справедливости соотношений

$$f_\varphi - \alpha f_u - \beta f_v = gW^{-1}, \tag{2}$$

$$g_\varphi - \alpha g_u - \beta g_v = hW^{-1}. \tag{3}$$

Продифференцировав (2) по φ, u, v и составив выражение $g_\varphi - \alpha g_u - \beta g_v$, находим

$$f_{\varphi\varphi} - 2\alpha f_{u\varphi} - 2\beta f_{v\varphi} + \alpha^2 f_{uu} + 2\alpha\beta f_{uv} + \beta^2 f_{vv} = hW^{-2} - \\ - gW^{-2}(W_\varphi - \alpha W_u - \beta W_v) + f_u(\alpha_\varphi - \alpha\alpha_u - \beta\alpha_v) + \\ + f_v(\beta_\varphi - \alpha\beta_u - \beta\beta_v). \tag{4}$$

Теорема 1. *Пусть для семейства поверхностей* (1) *в точке* $M(u_0, v_0, \varphi_0)$ $((u_0, v_0) \in G, a < \varphi_0 < b)$ *выполнены условия:* $f = 0$, $g = 0$, $h = 0$, *а также* $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v \neq 0$, $p \neq 0$, $q \neq 0$ (5). *Тогда при ограничении в семействе* (1) *области изменения параметров некоторой окрестностью* $(u, v) \in G_0$, $a_0 < \varphi < b_0$, *точки* M, *семейство* (1) *имеет огибающую, для которой* M *является точкой типа ласточкина хвоста.*

Доказательство. Из условия (5_2) следует $|f_u| + |f_v| \neq 0$. Пусть для определенности $f_v \neq 0$ (6) в точке M. Тогда по непрерывности это равенство справедливо и в некоторой окрестности точки M. Следовательно, уравнение $f(u, v, \varphi) = 0$ однозначно разрешимо вблизи M относительно v в виде функции класса $C^3: v = v(u, \varphi) \in C^3$, причем $v_u = -f_u f_v^{-1}$, $v_\varphi = -f_\varphi f_v^{-1}$ (7). Поскольку $p \neq 0$, система $f(u, v, \varphi) = 0$, $g(u, v, \varphi) = 0$ вблизи точки M допускает решение относительно u и $v: u = U(\varphi)$, $v = V(\varphi)$, $(\in C^3)$ (8), причем

$$U_\varphi = p^{-1}\frac{D(f, g)}{D(v, \varphi)}, \quad V_\varphi = p^{-1}\frac{D(f, g)}{D(\varphi, u)}. \tag{9}$$

Таким образом, множество точек окрестности M, в которых одновременно выполнены равенства $f = g = 0$, представляет собой некоторую линию (8). Следовательно, найдутся точки $M_1(u_1, v_1, \varphi_1)$ в рассматриваемой окрестности, в которых $f = 0$ и $g \neq 0$ (множество этих точек, очевидно, зависит от двух параметров). Но это означает, что в таких точках M_1 справедливы все условия теоремы 6.11 из книги [1], и поверхность $\boldsymbol{r}^*(u, \varphi) = \boldsymbol{r}(u, v(u, \varphi), \varphi)$ представляет собой огибающую семейства (1), причем $\boldsymbol{r}_u^* \times \boldsymbol{r}_\varphi^* \neq 0$ в M_1, а закон прикрепления имеет вид $u, v(u, \varphi), \varphi (\in C^3)$ (10). Из равенства $f = 0$ следует, что векторы $\boldsymbol{r}_u$, $\boldsymbol{r}_v$, $\boldsymbol{r}_\varphi$ компланарны на огибающей поверхности и, поскольку выполнено (5_1), $\boldsymbol{r}_\varphi = a_1\boldsymbol{r}_u + a_2\boldsymbol{r}_v$. Подставив это равенство в выражения для α и β, убеждаемся, что $a_1 = \alpha$, $a_2 = \beta$ и $\boldsymbol{r}_\varphi = \alpha\boldsymbol{r}_u + \beta\boldsymbol{r}_v$ (11). Рассмотрим теперь линию (8), на которой $f = g = 0$ (эту линию обозначим через L). Из (2) и (5_1) следует, что на ней $f_\varphi = \alpha f_u + \beta f_v$ (12), откуда находим, что $\boldsymbol{r}_u^* \times \boldsymbol{r}_v^* = 0$ на L. Покажем, что L является ребром возврата огибающей, а точка M представляет собой точку типа ласточкина хвоста.

Подставим в (9) вместо f_φ и g_φ их выражения (12) и (3): $U_\varphi = -\alpha + f_v h (pW)^{-1}$, $V_\varphi = -\beta - f_u h (pW)^{-1}$ **(13)**. Радиус-вектор кривой L имеет вид $\boldsymbol{R}(\varphi) = \boldsymbol{r}(U(\varphi), V(\varphi), \varphi)$. Дифференцируя это выражение по φ и принимая во внимание (11) и (13), получаем $\boldsymbol{R}_\varphi = \boldsymbol{r}_u U_\varphi + \boldsymbol{r}_v V_\varphi + \boldsymbol{r}_\varphi = h(pW)^{-1}\boldsymbol{T}$ **(14)**, где $\boldsymbol{T} = f_v \boldsymbol{r}_u - f_u \boldsymbol{r}_v$. В силу (5_1) и (7) $\boldsymbol{T} \neq 0$, следовательно, $\boldsymbol{R}_\varphi = 0$ тогда и только тогда, когда $h = 0$. Однако в окрестности точки M в силу (5_3) h обращается в нуль лишь в самой точке M. Поэтому вне M кривая L является регулярной.

Продифференцируем (14) по φ: $\boldsymbol{R}_{\varphi\varphi} = (h_u U_\varphi + h_v V_\varphi + h_\varphi) \times (pW)^{-1}\boldsymbol{T} + h d/d\varphi\, [(pW)^{-1}\boldsymbol{T}]$. Приняв во внимание (13) и условие $h = 0$, находим, что в точке M будет $\boldsymbol{R}_{\varphi\varphi} = (h_\varphi - \alpha h_u - \beta h_v)(pW)^{-1}\boldsymbol{T}$. Но из определения величины q имеем

$$q = h_\varphi p + h_u \frac{D(f, g)}{D(v, \varphi)} + h_v \frac{D(f, g)}{D(\varphi, u)},$$

а подстановка в последнее равенство соотношений (12) и вытекающего из (3) и $h = 0$ равенства $g_\varphi = \alpha g_u + \beta g_v$ дает $h_\varphi - \alpha h_u - \beta h_v = qp^{-1}$. Следовательно, $\boldsymbol{R}_{\varphi\varphi} = qp^{-2}W^{-1}\boldsymbol{T}$, и $\boldsymbol{R}_{\varphi\varphi} \neq 0$ в точке M вследствие неравенств (5_3) и $\boldsymbol{T} \neq 0$. Таким образом, функция $\boldsymbol{R}_\varphi$ вблизи M допускает представление $\boldsymbol{R}(\varphi) = \boldsymbol{R}(\varphi_0) + 1/2\boldsymbol{R}_{\varphi\varphi}(\varphi_0)\varphi^2 + o(\varphi^2)$, означающее, что M является точкой возврата кривой L.

Найдем контингенцию огибающей поверхности в точках кривой L. Для этого рассмотрим произвольную кривую γ огибающей поверхности, проходящую через точку кривой L и принадлежащую классу C^3. Пусть γ задается во внутренних координатах уравнением $u = u(\varphi)$. Поскольку $\gamma \in C^3$, то $u(\varphi)$ представима в виде

$$u(\varphi) = \tilde{u} + C_1(\varphi - \tilde{\varphi}) + C_2(\varphi - \tilde{\varphi})^2/2 + C_3(\varphi - \tilde{\varphi})^3/6 + o((\varphi - \tilde{\varphi})^3), \tag{15}$$

где точка $(\tilde{u} = u(\tilde{\varphi}), \tilde{v} = v(\tilde{u}, \tilde{\varphi}), \tilde{\varphi}) \in L$. Так как $\boldsymbol{r}^*(u, \varphi) \in C^3$, то и радиус-вектор $\vec{\rho}(\varphi) = \boldsymbol{r}(u(\varphi), v(u(\varphi), \varphi, \varphi)$ **(16)** кривой γ является функцией класса C^3 и допускает представление $\vec{\rho}(\varphi) = \vec{\rho}_0 + \vec{\rho}_1\varphi + \vec{\rho}_2\varphi^2/2 + \vec{\rho}_3\varphi^3 + o(\varphi^3)/6$, где $\vec{\rho}_0 = \vec{\rho}(\tilde{\varphi})$, $\vec{\rho}_i = \vec{\rho}^{(i)}(\tilde{\varphi})$, $i = 1, 2, 3$.

Продифференцируем (16) по φ: $\vec{\rho}_\varphi = \boldsymbol{r}_u u_\varphi + \boldsymbol{r}_v(v_u u_\varphi + v_\varphi) + \boldsymbol{r}_\varphi$ **(17)**. Приняв во внимание (7), (11), (12) и равенство $u_\varphi(\tilde{\varphi}) = C_1$, вытекающее из (16), найдем $\vec{\rho}_1 = \vec{\rho}_\varphi(\tilde{\varphi}) = (\alpha + C_1)\boldsymbol{T}$. Таким образом, всякая кривая γ, для которой $C_1 \neq -\alpha$, касается линии L (для точки M это означает, что касательная γ содержит в себе контингенцию L).

Рассмотрим теперь такие линии γ, для которых $C_1 = -\alpha$, т. е. $\varphi_1(\tilde{\varphi}) = -\alpha$ (18). Дифференцируя (17) по φ, получаем

$$\vec{\rho}_{\varphi\varphi} = \boldsymbol{r}_{uu}u_\varphi^2 + 2\boldsymbol{r}_{uv}u_\varphi(v_u u_\varphi + v_\varphi) + 2\boldsymbol{r}_{u\varphi}u_\varphi + \boldsymbol{r}_{vv}(v_u u_\varphi + v_\varphi)^2 + \\ + 2\boldsymbol{r}_{v\varphi}(v_u u_\varphi + v_\varphi) + \boldsymbol{r}_{\varphi\varphi} + \boldsymbol{r}_u u_{\varphi\varphi} + \boldsymbol{r}_v(v_{uu}u_\varphi^2 + \\ + 2v_{u\varphi}u_\varphi + v_{\varphi\varphi} + v_u u_{\varphi\varphi}). \quad (19)$$

Из (7) находим

$$v_{uu} = -f_v^{-1}f_{uu} + 2f_v^{-2}f_u f_{uv} - f_v^{-3}f_u^2 f_{vv},$$
$$v_{u\varphi} = -f_v^{-1}f_{u\varphi} + f_v^{-2}f_\varphi f_{uv} + f_v^{-2}f_u f_{v\varphi} - f_v^{-3}f_u f_\varphi f_{vv},$$
$$v_{\varphi\varphi} = -f_v^{-1}f_{\varphi\varphi} + 2f_v^{-2}f_\varphi f_{v\varphi} - f_v^{-3}f_\varphi^2 f_{vv},$$

откуда получаем, что на особой линии $\alpha^2 v_{uu} - 2\alpha v_{u\varphi} + v_{\varphi\varphi} = -f_v^{-1}(f_{\varphi\varphi} - 2\alpha f_{u\varphi} - 2\beta f_{v\varphi} + \alpha^2 f_{uu} + 2\alpha\beta f_{uv} + \beta^2 f_{vv})$; учтя соотношение (4) и условие $g = 0$, найдем

$$\alpha^2 v_{uu} - 2\alpha v_{u\varphi} + v_{\varphi\varphi} = h(f_v W)^{-1} + f_v^{-1}f_u(\alpha_\varphi - \\ - \alpha\alpha_u - \beta\alpha_v) + (\beta_\varphi - \alpha\beta_u - \beta\beta_v). \quad (20)$$

Продифференцируем (11) по u и примем во внимание, что $v = v(u, \varphi)$, а также формулы (7):

$$f_v(\boldsymbol{r}_{u\varphi} - \alpha\boldsymbol{r}_{uu} - \beta\boldsymbol{r}_{uv}) - f_u(\boldsymbol{r}_{v\varphi} - \alpha\boldsymbol{r}_{uv} - \beta\boldsymbol{r}_{vv}) + \\ + \boldsymbol{r}_u(f_u\alpha_v - f_v\alpha_u) + \boldsymbol{r}_v(f_u\beta_v - f_v\beta_u) = 0.$$

Тогда, дифференцируя (11) вдоль L и учитывая только что полученное равенство, получаем следующее соотношение на L:

$$\boldsymbol{r}_{\varphi\varphi} - 2\alpha\boldsymbol{r}_{u\varphi} - 2\beta\boldsymbol{r}_{v\varphi} + \alpha^2\boldsymbol{r}_{uu} + 2\alpha\beta\boldsymbol{r}_{uv} + \beta^2\boldsymbol{r}_{vv} = \\ = (\alpha_\varphi - \alpha\alpha_u - \beta\alpha_v)\boldsymbol{r}_u + (\beta_\varphi - \alpha\beta_u - \beta\beta_v)\boldsymbol{r}_v. \quad (21)$$

Подставив (7), (18), (20), (21), а также вытекающее из (15) равенство $u_{\varphi\varphi}(\tilde{\varphi}) = C_2$ в (19), найдем $\vec{\rho}_2 = \vec{\rho}_{\varphi\varphi}(\tilde{\varphi}) = (C_2 + \alpha_\varphi - \alpha\alpha_u - \beta\alpha_v)f_v^{-1}\boldsymbol{T} - hf_v^{-1}W^{-2}\boldsymbol{r}_v$.

Рассмотрим произвольную точку кривой L, отличную от M. В этой точке $h \neq 0$ и $\vec{\rho}_2 \neq 0$, поскольку в силу (5_1) и (6) $\boldsymbol{r}_v \times \boldsymbol{T} \neq 0$, т. е. радиус-вектор кривой γ допускает вблизи рассматриваемой точки L разложение вида $\vec{\rho}(\varphi) = \vec{\rho}_0 + \frac{1}{2}\vec{\rho}_2\varphi^2 + o(\varphi^2)$. Контингенция этой кривой в точке $\varphi = \tilde{\varphi}$ представляет собой луч, идущий в направлении вектора $\vec{\rho}_2$. Если изменять рассматриваемые кривые γ таким образом, чтобы C_2 изменялось от $-\infty$ до $+\infty$, то совокупность контингенций этих кривых будет представлять собой контингенцию огибающей поверхности в рассматриваемой точке кривой L. Из формулы для $\vec{\rho}_2$ следует, что эта контингенция представляет собой полуплоскость плоскости векторов $\boldsymbol{T}$ и $\boldsymbol{r}_v$ (или, что то же самое в силу (5_1), векторов $\boldsymbol{r}_u$,

$\boldsymbol{r}_v$), ограниченную прямой, которая проходит через вектор $\boldsymbol{T}$, и содержащую вектор $\boldsymbol{r}_v$.

Поскольку закон прикрепления (10) описывается непрерывными функциями, то произвольной точке кривой L соответствует единственная поверхность семейства (1), отвечающая некоторому значению $\tilde{\varphi}$ параметра φ. Касательная плоскость этой поверхности содержит как полуплоскость контингенцию огибающей.

В точке M будет $h=0$ и $\vec{\rho}_2=(C_2+\alpha_\varphi-\alpha\alpha_u-\beta\alpha_v)f_v^{-1}\boldsymbol{T}$. Следовательно, всякая кривая γ, для которой $C_2\neq\alpha\alpha_u+\beta\alpha_v-\alpha_\varphi$, касается кривой L в точке M (в обобщенном смысле). Рассмотрим произвольную кривую, которая проходит через точку M (тогда $\tilde{u}=u_0$, $\tilde{v}=v_0$, $\tilde{\varphi}=\varphi_0$) и обладает тем свойством, что $u_\varphi(\varphi_0)=-\alpha$, $u_{\varphi\varphi}(\varphi_0)=\alpha\alpha_u+\beta\alpha_v-\alpha_\varphi$. Аналогично тому, как это было сделано выше, убеждаемся, что радиус-вектор этой кривой можно представить вблизи M в виде $\vec{\rho}(\varphi)=\vec{\rho}_0+\vec{\rho}_3\varphi^3/6+o(\varphi^3)$, где $\vec{\rho}_3=f_v^{-1}(C_3+A)\boldsymbol{T}-q(pf_v)^{-1}W^{-2}\boldsymbol{r}_v$, $A=\alpha_{\varphi\varphi}-2\alpha\alpha_{u\varphi}-2\beta\alpha_{v\varphi}+\alpha^2\alpha_{uu}+2\alpha\beta\alpha_{uv}+\beta^2\alpha_{vv}-\alpha_u\alpha_\varphi+\alpha\alpha_u^2+\alpha\beta\alpha_u\alpha_v-\beta_\varphi\alpha_v+\alpha\alpha_v\beta_u+\beta\alpha_v\beta_v$.

Таким образом, контингенция рассматриваемой кривой γ представляет собой прямую, определяемую вектором $\vec{\rho}_3$. Контингенция огибающей поверхности представляет собой совокупность контингенций всех рассматриваемых кривых γ, т. е. плоскость, определяемую векторами $\boldsymbol{T}$ и $\boldsymbol{r}_v$, или векторами $\boldsymbol{r}_u$ и $\boldsymbol{r}_v$. Последнее означает, что касательная плоскость поверхности семейства (1), соответствующей параметру φ_0, совпадает с контингенцией огибающей поверхности в точке M. Следовательно, кривая L является ребром возврата огибающей, а M — точкой типа ласточкина хвоста. Теорема 1 полностью доказана.

В заключение сформулируем достаточное условие точки типа ласточкина хвоста для семейства неявно заданных поверхностей.

Теорема 2. *Пусть для семейства поверхностей*

$$F(x,y,z,\varphi)=0,\quad (x,y,z)\in G\subset R^3,\quad a<\varphi<b,\quad F\in C^4 \tag{23}$$

в точке $M(x_0,y_0,z_0,\varphi_0)$ выполнены условия

$$F=0,\quad F_\varphi=0,\quad F_{\varphi\varphi}=0,\quad F_{\varphi\varphi\varphi}=0, \tag{24}$$

$$D=\frac{D(F,F_\varphi,F_{\varphi\varphi})}{D(x,y,z)}\neq0,\quad F_{\varphi\varphi\varphi\varphi}\neq0. \tag{25}$$

Тогда при ограничении в семействе (23) *области задания некоторой окрестностью $(x,y,z)\in G_0$, $a_0<\varphi<b_0$, точки M это семейство имеет огибающую, для которой M является точкой типа ласточкина хвоста.*

Доказательство. Из (25_1) следует, что $|F_x|+|F_y|+|F_z|\neq0$ в точке M. Не ограничивая общности, предположим, что именно $F_z\neq0$. Тогда уравнение $F=0$ можно решить относительно z и прийти к параметризованному семейству $\boldsymbol{r}(x, y, \varphi) = \{x, y, z(x, y, \varphi)\} \in C^4$. При этом $z_x = -F_x F_z^{-1}$, $z_y = -F_y F_z^{-1}$, $z_\varphi = -F_\varphi F_z^{-1}$. Непосредственным вычислением убеждаемся в справедливости равенств (здесь используются принятые выше обозначения): $f = -F_\varphi F_z^{-1}$, $\alpha = F_x F_\varphi F_z^{-2} W^{-1}$, $\beta = F_y F_\varphi F_z^{-2} W^{-1}$, $W = (F_z^4 + F_z^2 F_x^2 + F_z^2 F_y^2 + F_x^2 F_y^2) F_z^{-4}$, и из условий (24) следует, что в M $f = f_\varphi = f_{\varphi\varphi} = 0$ (26); $\alpha = \alpha_\varphi = \alpha_{\varphi\varphi} = \beta = \beta_\varphi = \beta_{\varphi\varphi} = 0$; $W \neq 0$ (27). Далее, из соотношений (2), (3), (26), (27) находим, что в точке M будет $g = h = 0$, а также $g_\varphi = 0$, $h_\varphi = -F_{\varphi\varphi\varphi\varphi} \times W^{-2} F_z^{-1} \neq 0$ (28). Из неравенства (27) следует, что $\boldsymbol{r}_x \times \boldsymbol{r}_y \neq 0$ в точке M. Учитывая (24), (25_1) и неравенство $F_z \neq 0$, в точке M получаем $\rho = (F_x^2 + F_y^2 + F_z^2) F_z^{-5} D \neq 0$. Наконец, ввиду (26) и (28), $q = p h_\varphi \neq 0$. Таким образом, в рассматриваемом случае выполнены все условия теоремы 1 и M является точкой типа ласточкина хвоста огибающей семейства (23).

Поступила в редколлегию 21.11.83.

УДК 513

Э. Д. Обозная

О ПОЛУСИММЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ 1-ГО АФФИННОГО КЛАССА

В предлагаемой работе исследуются свойства Π-оснащения гиперповерхности S_n аффинного пространства A_{n+1}, т. е. такого оснащения, при котором гиперповерхность относительно индуцированной им связности является полусимметрическим пространством. Показано, что условия $\Omega_{ik}\Omega^k_j = \mu\Omega_{ij}$, $\Omega^k_i\Omega^l_k = \mu\Omega^l_i$ в случае, когда ранг $\|\Omega_{ij}\| > 2$, необходимы и достаточны для того, чтобы данное оснащение было Π-оснащением. Из этого утверждения, в частности, следует:

1) Π-оснащение есть оснащение релятивными нормалями;

2) Π-оснащение неразвертывающейся гиперповерхности S_n ($n > 2$) аффинного пространства является центральным или тривиальным;

3) в евклидовом пространстве любая неразвертывающаяся гиперповерхность S_n ($n > 2$), представляющая собой полусимметрическое пространство относительно индуцированной обычным метрическим оснащением связности, есть гиперсфера.

При $n = 2$ для Π-оснащения необходимо и достаточно его релятивности.

Получен следующий признак полусимметрического пространства 1-го аффинного класса: для того чтобы данное полусимметрическое пространство аффинной связности A_n ($n > 2$) с невырожденным тензором Риччи было пространством 1-го аффинного класса, необходимо и достаточно, чтобы оно было эквипроективным (проективно-плоским и эквиаффинным).

1. Гиперповерхность S_n аффинного пространства зададим уравнением $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ **(1)**, где $\boldsymbol{r}(x^i) \in C^5$. Пусть $\boldsymbol{n}(x^i)$ — поле оснащающего вектора этой гиперповерхности. Тогда основные уравнения гиперповерхности S_n имеют вид [1, гл. III, § 18]:

$$\begin{gathered} \partial_i \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_i, \quad (i, j, k, l, m = 1, 2, \ldots, n), \\ \boldsymbol{r}_{ij} = \Gamma^k_{ij}\boldsymbol{r}_k + \Omega_{ij}\boldsymbol{n}, \\ \boldsymbol{n}_i = \Omega^k_i \boldsymbol{r}_k + \Omega_i \boldsymbol{n}, \end{gathered} \tag{2}$$

где $\Gamma^k_{ij}(x^l)$ — объект индуцированной связности, Ω_{ij}, Ω^k_i, Ω_i — тензоры. Условия интегрируемости уравнений (2) таковы:

$$R^l_{ijk} = \Omega_{ij}\Omega^l_k - \Omega_{ik}\Omega^l_j, \tag{3}$$

$$\Omega_{ij,\,k} - \Omega_{ik,\,j} + \Omega_{ij}\Omega_k - \Omega_{ik}\Omega_j = 0, \tag{4}$$

$$\Omega^k_{i,\,j} - \Omega^k_{j,\,i} + \Omega_i\Omega^k_j - \Omega_j\Omega^k_i = 0, \tag{5}$$

$$\Omega_{i,\,j} - \Omega_{j,\,i} + \Omega^k_i\Omega_{kj} - \Omega^k_j\Omega_{ki} = 0. \tag{6}$$

Здесь тензор Римана определяется формулой $R^l_{ijk} = \partial_j\Gamma^l_{ik} - \partial_k\Gamma^l_{ij} + \Gamma^m_{ik}\Gamma^l_{mj} - \Gamma^m_{ij}\Gamma^l_{mk}$, а символ «,» обозначает ковариантное дифференцирование в связности Γ^k_{ij}.

Пусть данная гиперповерхность S_n является полусимметрическим пространством относительно индуцированной связности Γ^k_{ij}, т. е. тензор Римана R^l_{ijk} удовлетворяет условиям [2, гл. II, § 3]:

$$R^h_{ijk,\,lm} - R^h_{ijk,\,ml} = 0. \tag{7}$$

Если использовать тождество Риччи и условия интегрируемости (3), то (7) преобразуется к виду

$$\begin{gathered} (\Omega_{im}\Omega^f_l\Omega_{fj} - \Omega_{il}\Omega^f_m\Omega_{fj} + \Omega_{jm}\Omega^f_l\Omega_{fi} - \Omega_{jl}\Omega^f_m\Omega_{fi})\,\Omega^h_k + \\ + \Omega_{ij}(-\Omega_{mf}\Omega^f_k\Omega^h_l + \Omega_{lf}\Omega^f_k\Omega^h_m + \Omega_{km}\Omega^f_l\Omega^h_f - \Omega_{kl}\Omega^f_m\Omega^h_f) - \\ - (\Omega_{im}\Omega^f_l\Omega_{fk} - \Omega_{il}\Omega^f_m\Omega_{fk} + \Omega_{km}\Omega^f_l\Omega_{fi} - \Omega_{kl}\Omega^f_m\Omega_{fi})\,\Omega^h_j - \\ - \Omega_{ik}(-\Omega_{mf}\Omega^f_j\Omega^h_l + \Omega_{lf}\Omega^f_j\Omega^h_m) + (\Omega_{jm}\Omega^f_l\Omega^h_f - \Omega_{jl}\Omega^f_m\Omega^h_f)\,\Omega_{ik} = 0. \end{gathered} \tag{8}$$

Здесь и дальше $f, h, i, j, k, l, m = 1, 2, \ldots, n$. Теперь предположим, что ранг $\|\Omega_{ij}\| = r > 2$ и преобразованием координат перейдем к такой параметризации на гиперповерхности, при которой $\det\|\Omega_{\alpha\beta}\| \neq 0$, $\Omega_{ip} = 0$, где $\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, r$; $p = r + 1, \ldots, n$.

Обозначим через $\Omega^{\gamma\delta}$ элементы матрицы, обратной матрице $\|\Omega_{\alpha\beta}\|$, т. е. $\Omega_{\alpha\beta}\Omega^{\beta\gamma} = \delta^\gamma_\alpha$. Будем считать, что $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \rho, \sigma, \tau =$

$= 1, 2, \ldots, r$; $p, q, s = r+1, \ldots, n$. Запишем (8) при значениях индексов $1, 2, \ldots, r$:

$$
\begin{aligned}
&(\Omega_{\alpha\delta}\Omega^{\sigma}_{\rho}\Omega_{\sigma\beta} - \Omega_{\alpha\rho}\Omega^{\sigma}_{\delta}\Omega_{\sigma\beta} + \Omega_{\beta\delta}\Omega^{\sigma}_{\rho}\Omega_{\sigma\alpha} - \Omega_{\beta\rho}\Omega^{\sigma}_{\delta}\Omega_{\sigma\alpha})\,\Omega^{\tau}_{\gamma} + \\
&+ \Omega_{\alpha\beta}\,(-\Omega_{\delta\sigma}\Omega^{\sigma}_{\gamma}\Omega^{\tau}_{\rho} + \Omega_{\rho}\,\Omega^{\sigma}_{\gamma}\Omega^{\tau}_{\delta} + \Omega_{\gamma\delta}\Omega^{i}_{\rho}\Omega^{\tau}_{i} - \Omega_{\gamma\rho}\Omega^{i}_{\delta}\Omega^{\tau}_{i}) - \\
&- (\Omega_{\alpha\delta}\Omega^{\sigma}_{\rho}\Omega_{\sigma\gamma} - \Omega_{\alpha\rho}\Omega^{\sigma}_{\delta}\Omega_{\sigma\gamma} + \Omega_{\gamma\delta}\Omega^{\sigma}_{\rho}\Omega_{\sigma\alpha} - \Omega_{\gamma\rho}\Omega^{\sigma}_{\delta}\Omega_{\sigma\alpha})\,\Omega^{\tau}_{\beta} - \\
&- \Omega_{\alpha\gamma}\,(-\Omega_{\delta\sigma}\Omega^{\sigma}_{\beta}\Omega^{\tau}_{\rho} + \Omega_{\rho\sigma}\Omega^{\sigma}_{\beta}\Omega^{\tau}_{\delta} + \Omega_{\beta\delta}\Omega^{i}_{\rho}\Omega^{\tau}_{i} - \Omega_{\beta\rho}\Omega^{i}_{\delta}\Omega^{\tau}_{i}) = 0. \qquad (9)
\end{aligned}
$$

Умножим (9) на $\Omega^{\alpha\rho}\Omega^{\delta\gamma}$ и просуммируем по $\alpha, \rho, \delta, \gamma$. Получим

$$\Omega_{\beta\sigma}\Omega^{\sigma}_{\delta}\Omega^{\delta\gamma}\Omega^{\tau}_{\gamma} = \Omega^{i}_{\beta}\Omega^{\tau}_{i}. \qquad (10)$$

Теперь (9) свернем с $\Omega^{\beta\delta}$:

$$
\begin{aligned}
&-\Omega_{\alpha\rho}\Omega^{\sigma}_{\sigma}\Omega^{\tau}_{\gamma} + (r-1)\,\Omega_{\alpha\sigma}\Omega^{\sigma}_{\rho}\Omega^{\tau}_{\gamma} - \Omega_{\alpha\sigma}\Omega^{\sigma}_{\gamma}\Omega^{\tau}_{\rho} + \\
&+ (\Omega_{\rho\sigma}\Omega^{\sigma}_{\gamma} - \Omega_{\gamma\sigma}\Omega^{\sigma}_{\rho})\,\Omega^{\tau}_{\alpha} + (1-r)\,\Omega_{\alpha\gamma}\Omega^{i}_{\rho}\Omega^{\tau}_{i} + \\
&+ \Omega_{\alpha\rho}\Omega^{i}_{\gamma}\Omega^{\tau}_{i} + \Omega_{\alpha\gamma}\Omega^{\sigma}_{\sigma}\Omega^{\tau}_{\rho} = 0. \qquad (11)
\end{aligned}
$$

Умножая (11) на $\Omega^{\alpha\gamma}$, суммируя по α, γ и учитывая (10), при $r \neq 2$ получаем

$$\Omega^{\sigma}_{\sigma}\Omega^{\tau}_{\rho} + \Omega^{\sigma}_{\rho}\Omega^{\tau}_{\sigma} - (r+1)\,\Omega^{i}_{\rho}\Omega^{\tau}_{i} = 0. \qquad (12)$$

Если из (12) выразить $\Omega^{i}_{\rho}\Omega^{\tau}_{i}$ и подставить в (11), то (11) преобразуется к виду

$$
\begin{aligned}
&-r\Omega_{\alpha\rho}\Omega^{\sigma}_{\sigma}\Omega^{\tau}_{\gamma} + (r^2-1)\,\Omega_{\alpha\sigma}\Omega^{\sigma}_{\rho}\Omega^{\tau}_{\gamma} - (r+1)\,\Omega_{\alpha\sigma}\Omega^{\sigma}_{\gamma}\Omega^{\tau}_{\rho} + \\
&+ (r+1)\,(\Omega_{\rho\sigma}\Omega^{\sigma}_{\gamma} - \Omega_{\gamma\sigma}\Omega^{\sigma}_{\rho})\,\Omega^{\tau}_{\alpha} + 2\Omega_{\alpha\gamma}\Omega^{\sigma}_{\sigma}\Omega^{\tau}_{\rho} + \\
&+ (1-r)\,(\Omega_{\alpha\gamma}\Omega^{\sigma}_{\rho}\Omega^{\tau}_{\sigma} + \Omega_{\alpha\rho}\Omega^{\sigma}_{\gamma}\Omega^{\tau}_{\sigma} = 0. \qquad (13)
\end{aligned}
$$

Меняя местами индексы γ и ρ в (13), складывая полученное соотношение с (13) и учитывая, что $r \neq 2$, получим

$$
\begin{aligned}
&\Omega_{\alpha\rho}\Omega^{\sigma}_{\sigma}\Omega^{\tau}_{\gamma} + \Omega_{\alpha\gamma}\Omega^{\sigma}_{\sigma}\Omega^{\tau}_{\rho} - (r+1)\,\Omega_{\alpha\sigma}\Omega^{\sigma}_{\rho}\Omega^{\tau}_{\gamma} - \\
&- (r+1)\,\Omega_{\alpha\sigma}\Omega^{\sigma}_{\gamma}\Omega^{\tau}_{\rho} + \Omega_{\alpha\gamma}\Omega^{\sigma}_{\rho}\Omega^{\tau}_{\sigma} + \Omega_{\alpha\rho}\Omega^{\sigma}_{\gamma}\Omega^{\tau}_{\sigma} = 0. \qquad (14)
\end{aligned}
$$

В результате умножения (14) на $\Omega^{\alpha\beta}$ и суммирования по α следует

$$
\begin{aligned}
&\delta^{\beta}_{\rho}\,(\Omega^{\sigma}_{\sigma}\Omega^{\tau}_{\gamma} + \Omega^{\sigma}_{\gamma}\Omega^{\tau}_{\sigma}) + \delta^{\beta}_{\gamma}\,(\Omega^{\sigma}_{\sigma}\Omega^{\tau}_{\rho} + \Omega^{\sigma}_{\rho}\Omega^{\tau}_{\sigma}) - \\
&- (r+1)\,(\Omega^{\beta}_{\rho}\Omega^{\tau}_{\gamma} + \Omega^{\beta}_{\gamma}\Omega^{\tau}_{\rho}) = 0. \qquad (15)
\end{aligned}
$$

Если теперь свернуть (15) по индексам γ и τ, то найдем, что

$$\Omega^{\beta}_{\rho}\Omega^{\sigma}_{\sigma} + \Omega^{\beta}_{\sigma}\Omega^{\sigma}_{\rho} = \frac{1}{r}\,\delta^{\beta}_{\rho}\,[(\Omega^{\sigma}_{\sigma})^2 + \Omega^{\sigma}_{\gamma}\Omega^{\gamma}_{\sigma}]. \qquad (16)$$

Наконец, подставляя последнее соотношение (16) в (15), получим

$$\frac{1}{r}\,(\delta^{\beta}_{\rho}\delta^{\tau}_{\gamma} + \delta^{\beta}_{\gamma}\delta^{\tau}_{\rho})\cdot[(\Omega^{\sigma}_{\sigma})^2 + \Omega^{\sigma}_{\gamma}\Omega^{\gamma}_{\sigma}] - (r+1)\,(\Omega^{\beta}_{\rho}\Omega^{\tau}_{\gamma} + \Omega^{\beta}_{\gamma}\Omega^{\tau}_{\rho}) = 0. \qquad (17)$$

Так как (17) имеет место при любых ρ, β, γ, τ, то приравнивая $\beta=\tau$ и $\rho=\gamma$, находим

$$\frac{1}{r}(\delta_\rho^\beta)^2[(\Omega_\sigma^\sigma)^2+\Omega_\sigma^\gamma\Omega_\gamma^\sigma]-(r+1)(\Omega_\rho^\beta)^2=0, \tag{18}$$

откуда следует, что $\Omega_\rho^\beta=0$, если $\rho\neq\beta$, и $(\Omega_1^1)^2=(\Omega_2^2)^2=\cdots=(\Omega_r^r)^2$, т. е. $\Omega_\rho^\beta=\pm\mu\delta_\rho^\beta$ **(19)**. Однако, если (19) подставить в (16) и взять индексы $\rho=\beta=1, 2, \ldots, r$, то в случае $\Omega_\sigma^\sigma\neq0$ придем к выводу, что $\Omega_1^1=\Omega_2^2=\cdots=\Omega_r^r$. Если же $\Omega_\sigma^\sigma=0$, то из (18) при $\rho=\beta=1, 2, \ldots, r$ следует, что $\Omega_1^1=\Omega_2^2=\cdots=\Omega_r^r=0$.

Итак, исходя из (9), необходимо получаем соотношение $\Omega_\alpha^\beta=\mu\delta_\alpha^\beta$ **(20)**, причем μ может быть равным и нулю. Кроме того, из (10) находим, что $\Omega_\alpha^i\Omega_i^\beta=\mu^2\delta_\alpha^\beta$ **(21)**, поэтому, учитывая (20), получаем $\Omega_\alpha^p\Omega_p^\beta=0$ **(22)**.

Непосредственной подстановкой нетрудно убедиться, что (20) и (22) являются не только необходимыми, но и достаточными условиями для выполнения (9).

Теперь рассмотрим основную систему уравнений (8) при других возможных наборах индексов. Например, пусть $j=q$, $l=s$, h — любое, остальные индексы принимают значения от 1 до r. Тогда (8) принимает вид

$$-(\Omega_{\alpha\beta}\Omega_s^\sigma\Omega_{\sigma\tau}+\Omega_{\gamma\beta}\Omega_s^\sigma\Omega_{\sigma\alpha})\,\Omega_q^h+\Omega_{\alpha\gamma}\Omega_{\beta\sigma}\Omega_q^\sigma\Omega_s^h=0. \tag{23}$$

Умножая (23) на $\Omega^{\alpha\gamma}\Omega^{\beta\delta}$ и суммируя по α, λ, β, находим: $-2\Omega_s^\delta\Omega_q^h+r\Omega_q^\delta\Omega_s^h=0$, откуда получаем, если положить $s=q$, $h=\delta$, что $\Omega_p^\alpha=0$ $\quad(\alpha=1, 2, \ldots, r;\ p=r+1, \ldots, n)$ **(24)**.

Пусть теперь $l=s$, $h=q$, остальные индексы принимают значения $1, 2, \ldots, r$. Соотношение (8) при этом имеет вид $(\Omega_{\alpha\beta}\Omega_{\gamma\delta}-\Omega_{\alpha\gamma}\Omega_{\delta\beta})\cdot(\Omega_s^p\Omega_p^q-\mu\Omega_s^q)=0$, значит

$$\Omega_s^p\Omega_p^q=\mu\Omega_s^q. \tag{25}$$

Наконец, рассмотрим соотношение (8) ещё при $h=s$ и остальных индексах, принимающих значения от 1 до r. Получим

$$\Omega_{\alpha\beta}(-\mu\Omega_{\delta\gamma}\Omega_\rho^s+\mu\Omega_{\rho\gamma}\Omega_\delta^s+\Omega_{\gamma\delta}\Omega_\rho^l\Omega_l^s-\Omega_{\gamma\rho}\Omega_\delta^l\Omega_l^s)-\Omega_{\alpha\gamma}(-\mu\Omega_{\delta\beta}\Omega_\rho^s+$$
$$+\mu\Omega_{\rho\beta}\Omega_\delta^s+\Omega_{\beta\delta}\Omega_\rho^l\Omega_l^s-\Omega_{\beta\rho}\Omega_\delta^l\Omega_l^s)=0,$$

откуда в результате свертывания с $\Omega^{\alpha\beta}\Omega^{\gamma\delta}$ следует $\Omega_\rho^l\Omega_l^s=\mu\Omega_\rho^s$. Из (20), учитывая последнее соотношение, находим $\Omega_\alpha^p\Omega_p^s=0$ **(26)**.

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться в том, что соотношения (20), (24), (25), (26) являются не только необходимыми, но и достаточными для выполнения (8). Тем самым доказана

Лемма. *Для того чтобы гиперповерхность S_n аффинного пространства была полусимметрическим пространством относитель-*

но индуцированной данным оснащением связности, необходимо и достаточно, чтобы в той системе координат, в которой $\det\|\Omega_{\alpha\beta}\| \neq 0$, $\Omega_{ip} = 0$ ($\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, r$; $p, q, s = r+1, \ldots, n$; $i = 1, 2, \ldots, n$, *причем* $r > 2$), *выполнялись соотношения:* $\Omega_\alpha^\beta = \mu\delta_\alpha^\beta$, $\Omega_p^\alpha = 0$, $\Omega_s^p\Omega_p^q = \mu\Omega_s^q$, $\Omega_\alpha^p\Omega_p^q = 0$.

2. Теперь получим необходимые и достаточные условия *П*-оснащения в тензорном виде.

Из соотношений (20), (24), (25), (26) легко следует, что $\Omega_i^j\Omega_j^k = \mu\Omega_i^k$ **(27)** для любых значений индексов от 1 до n. Далее, в указанной ранее специальной системе координат выполнено, как это следует из (20) и (24), условие

$$\Omega_{ij}\Omega_k^j = \mu\Omega_{ik}. \tag{28}$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что соотношения (27) и (28) являются не только необходимыми, но и достаточными условиями для выполнения (8), причем они имеют тензорный вид. Таким образом, доказана

Теорема 1. *Для того чтобы гиперповерхность* S_n *(ранг* $\|\Omega_{ij}\| > 2$*) аффинного пространства являлась полусимметрическим пространством относительно связности, индуцированной некоторым оснащением, необходимо и достаточно, чтобы тензоры* Ω_{ij} *и* Ω_i^k, *определяемые этим оснащением, удовлетворяли соотношениям* $\Omega_i^j\Omega_j^k = \mu\Omega_i^k$; $\Omega_{ij}\Omega_k^j = \mu\Omega_{ik}$, *где* μ *— некоторый инвариант (быть может, равный нулю).*

С л е д с т в и е. *П-оснащение есть оснащение релятивными нормалями, а это эквивалентно тому, что индуцированная П-оснащением связность эквиаффинна* [1, гл. III, § 18].

Напомним, что оснащение называется релятивным, если можно вектор нормали перенормировать так, что производные от нового оснащающего вектора будут параллельны касательной плоскости в соответствующей точке.

3. Выясним, чему равен инвариант μ.

Из (27) и (28) следует, что матрицы $A = \|\Omega_i^j\|$ и $B = \|\Omega_{ij}\|$ должны удовлетворять уравнениям $A^2 = \mu A$ **(27′)**, $AB = \mu B$ **(28′)**. Рассмотрим два случая: $\mu \neq 0$ и $\mu = 0$.

а) Пусть $\mu \neq 0$ и λ — корень характеристического уравнения матрицы A. Тогда λ^2 — корень характеристического уравнения матрицы A^2, а так как имеет место (27′), то $\lambda^2 = \mu\lambda$. Отсюда следует, что каждый ненулевой корень характеристического уравнения матрицы A равен μ, а сумма всех корней Ω_l^l равна $k \cdot \mu$, где k — количество ненулевых корней характеристического уравнения матрицы A. Так как в указанной специальной системе координат матрица A имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} \mu\delta_\alpha^\beta & \Omega_\alpha^p \\ 0 & \Omega_s^p \end{pmatrix}$$

где $\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, r$, а $r > 2$, то $k \geqslant r > 2$. Таким образом, $\Omega_l^l = k \cdot \mu \neq 0$, откуда $\mu = \Omega_l^l / k$.

б) Пусть теперь $\mu = 0$. Тогда из $\lambda^2 = \mu\lambda$ следует, что все корни характеристического уравнения матрицы A равны нулю, а значит и $\Omega_l^l = 0$.

Из приведенных рассуждений получаем вывод: инвариант μ, входящий в соотношения (27) и (28), равен Ω_l^l/k, где k — количество ненулевых корней характеристического уравнения матрицы A, когда $\Omega_l^l \neq 0$; если же $\Omega_l^l = 0$, то $\mu = 0$. При этом $k \geqslant r > 2$, где $r = \text{ранг} \|\Omega_{ij}\|$.

4. Рассмотрим некоторые частные случаи.

1) Пусть ранг $\|\Omega_{ij}\| = n > 2$. Тогда из (28) следует $\Omega_i^j = \mu\delta_i^j$ **(29)**, а это есть необходимое и достаточное условие того, что оснащение гиперповерхности S_n — центральное (при $\mu \neq 0$), т. е. все оснащающие прямые проходят через одну и ту же точку, или тривиальное (при $\mu = 0$), т. е. все оснащающие прямые параллельны [3]. Так как вследствие (29) условия (27) выполняются тождественно, то имеет место

Теорема 2. *Для того чтобы оснащение неразвертывающейся гиперповерхности S_n ($n > 2$) аффинного пространства было П-оснащением, необходимо и достаточно, чтобы оно было центральным или тривиальным.*

Следствие. *Для того чтобы неразвертывающаяся гиперповерхность S_n евклидова пространства E_{n+1} ($n > 2$) была полусимметрическим пространством относительно метрического оснащения, необходимо и достаточно, чтобы она была гиперсферой.*

Действительно, во-первых, условия (27) и (28) здесь эквивалентны. Во-вторых, если g_{ij}, b_{ij} — коэффициенты первой и второй квадратичных форм неразвертывающейся гиперповерхности соответственно, то из (29) получаем $b_i^k = b_{ij}g^{jk} = -\Omega_i^k = -\mu\delta_i^k$, причем $\mu \neq 0$, так как ранг $\|b_{ij}\| = \text{ранг} \|b_i^k\| = n$. Поэтому $b_{ij} = -\mu g_{ij}$, т. е. гиперповерхность является гиперсферой.

2) Пусть ранг $\|\Omega_{ij}\| = r$, где $2 < r < n$, а ранг $\|\Omega_i^j\| = n$. Тогда из (27) следует $\Omega_i^j = \mu\delta_i^j$, а условие (28) при этом выполняется тождественно. Снова приходим к центральному оснащению. Интересно отметить, что такой случай невозможен для гиперповерхностей в евклидовом пространстве, оснащенных метрическими нормалями, так как там ранг $\|b_{ij}\| = \text{ранг} \|b_i^k\|$.

5. Обратимся к случаю гиперповерхности в 3-мерном аффинном пространстве. Нетрудно убедиться в том, что соотношения $R_{ijj,12}^l - R_{ijj,21}^l = 0$ ($i, j, k, l = 1, 2$) выполняются тождественно, а соотношения $R_{i12,12}^l - R_{i12,21}^l = 0$ принимают вид

$$(\Omega_{1k}\Omega_2^k - \Omega_{2k}\Omega_1^k) \cdot (\Omega_{1i}\Omega_2^l - \Omega_{2i}\Omega_1^l) = 0,$$

откуда следует, что для Π-оснащения необходимо и достаточно выполнения условия $\Omega_{1k}\Omega_2^k - \Omega_{2k}\Omega_1^k = 0$. С геометрической точки зрения оно характеризует релятивное оснащение [1, гл. III, § 18]:

Теорема. *Для того чтобы оснащение гиперповерхности в 3-мерном аффинном пространстве было Π-оснащением, необходимо и достаточно, чтобы оно было релятивным.*

6. Рассмотрим вопрос о погружении полусимметрического пространства аффинной связности A_n $(n > 2)$ без кручения с невырожденным тензором Риччи в аффинное пространство A_{n+1}. Имеет место

Теорема 3. *Для того чтобы полусимметрическое пространство A_n $(n > 2)$ без кручения с невырожденным тензором Риччи было пространством 1-го аффинного класса, необходимо и достаточно, чтобы оно было эквипроективным (проективно-плоским и эквиаффинным).*

Необходимость. Если данное в условии теоремы полусимметрическое пространство A_n является пространством 1-го класса, т. е. может быть реализовано на оснащенной гиперповерхности S_n аффинного пространства A_{n+1} [4, § 1], то тензор Римана пространства A_n выражается через тензоры Ω_{ij} и Ω_i^k гиперповерхности S_n по формуле (3): $R^l_{ijk} = \Omega_{ij}\Omega^l_k - \Omega_{ik}\Omega^l_j$. Отсюда следует, что

$$R_{ij} = R^l_{ijl} = \Omega_{ji}\Omega^l_l - \Omega_{il}\Omega^l_j = \Omega_{im}(\delta^m_j\Omega^l_l - \Omega^m_j). \qquad (30)$$

Так как по предположению теоремы тензор Риччи невырожден, то и ранг $\|\Omega_{ij}\| = n$, т. е. реализующая гиперповерхность S_n неразвертывающаяся. Но тогда по теореме 2 $\Omega^j_i = \mu\delta^j_i$. Подставляя это соотношение в (30), получим $R_{ij} = (n-1)\mu\Omega_{ij}$, откуда следует, что $\mu \neq 0$ и что

$$R^l_{ijk} = \frac{R_{ij}}{n-1}\delta^l_k - \frac{R_{ik}}{n-1}\delta^l_j, \quad R_{ij} = R_{ji},$$

а это говорит о том, что данное пространство A_n является эквипроективным [2, гл. II, § 2].

Достаточность. Пусть данное полусимметрическое пространство A_n $(n > 2)$ с объектом связности Γ^k_{ij} является эквипроективным. Тогда на основании [2, гл. II, § 2] его тензор Римана имеет вид

$$R^l_{ijk} = \frac{1}{n-1}(R_{ij}\delta^l_k - R_{ik}\delta^l_j), \; R_{ij} = R_{ji}. \qquad (31)$$

Из (31), учитывая $n > 2$, следует $R_{ij,k} - R_{ik,j} = 0$ **(32).**

Теперь рассмотрим систему уравнений

$$\partial_i \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_i, \quad \boldsymbol{r}_{ij} = \Gamma^k_{ij}\boldsymbol{r}_k + \frac{R_{ij}}{\varphi(n-1)}\boldsymbol{n}, \quad \boldsymbol{n}_i = \varphi\boldsymbol{r}_i + \frac{\varphi_{,i}}{\varphi}\boldsymbol{n},$$

где $\varphi \neq 0$ — произвольный инвариант. Соотношения (31) и (32) как раз являются условиями интегрируемости этой системы. Следовательно, существует (локально) оснащенная гиперповерхность в аффинном пространстве, реализующая связность Γ_{ij}^{k}, что и требовалось доказать.

Список литературы: **1.** *Широков П. А., Широков А. П.* Аффинная дифференциальная геометрия.— М. 1959.— 320 с. **2.** *Синюков Н. С.* Геодезическое отображение римановых пространств.— М.: Наука, 1979.— 256 с. **3.** *Атанасян Л. С.* Оснащение многообразия частного вида в многомерном аффинном пространстве.— Тр. семинара по вект. и тенз. анализу, 1952, вып. 9, с. 351—410. **4.** *Рыбников Л. С.* О пространствах аффинной связности без кручения 1-го класса.— Мат. сб., 1962, 58 (100), № 4.

Поступила в редколлегию 18.04.83.

УДК 513

А. Г. Резников

ОБ ОБЪЕМЕ НЕКОТОРЫХ МНОГООБРАЗИЙ С ЗАМКНУТЫМИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИМИ

Пусть M^m — риманово многообразие с метрикой g, такое, что все его геодезические замкнуты и имеют длину 2π ($C_{2\pi}$-многообразие в терминологии [1]). Тогда по теореме Вейнстейна [2], отношение объема $\mathrm{Vol}(M, g)$ к объему сферы $\mathrm{Vol}(S^m)$ в ее стандартной метрике есть целое число $i(M)$. В некоторых случаях число $i(M)$ вычислено. А именно, по теореме Ботта-Самельсона (см. [1]) $C_{2\pi}$-многообразие M имеет то же кольцо целочисленных когомологий, которое имеет одно из модельных симметрических пространств: S^n, RP^n, CP^n, HP^n, $n \geqslant 2$, или проективная плоскость Кэли CaP^2. В первых двух случаях установлено (Вейнстейн [2] и Янг [3]), что $i(M)$ принимает то же значение, что и $i(S^n)$ и $i(RP^n)$ соответственно, где симметрические пространства рассматриваются в их стандартной метрике. Бессе [1] поднял вопрос о вычислении $i(M)$ в остальных случаях. В предлагаемой статье будут доказаны две теоремы:

Теорема 1. *Если M имеет когомологический тип CP^2, то $i(M) = 3$.*

Теорема 2. *Если M имеет когомологический тип CP^3, то $i(M) \in \{1, 2, 3, 6, 10, 31, 33\}$.*

Прежде чем приступать к доказательству, переформулируем задачу. Пусть U — расслоение единичных касательных векторов многообразия M. Для каждой нормальной геодезической $\gamma(t)$ на M кривая скоростей $\gamma(t)$, $\dot{\gamma}(t)$, лежащая в U, является интегральной кривой векторного поля, задающего геодезический поток, которое обозначим через X. Будем предполагать, что все интегральные кривые X периодичны с периодом 2π. Поэтому возникает гладкое расслоение многообразия U на окружности, базой которого служит многообразие CM всех геодезических M. Вейнстейн связал инвариант метрики $i(M)$ с топологическими характеристиками этого расслоения. А именно, пусть e — его эйлеров класс, $e \in H^2(CM, Z)$. С помощью частичного интегрирования удается показать [2], что $2i(M)$ равно значению $e^{m-1} \in H^{2m-2}(CM, Z)$ на фундаментальном цикле. Докажем наши утверждения, тщательно изучив структуру всего кольца когомологий $H^*(CM, Z)$. Геометрической основой рассуждений будет такая конструкция 2-коцикла (или 2-дифференциальной формы) на CM: надо взять фундаментальную 2-форму на M, существующую в силу того, что $H^*(M, Z) = H^*(CP^n, Z)$, поднять ее на U и усреднить под действием потока, порожденного X. Полученный коцикл вместе с e порождает кольцо $H^*(CM, Z)$. Перейдем к точным формулировкам. Пусть M имеет когомологический тип CP^n.

Лемма 1. *Пусть ω — образующая группы $H^2(M, Z)$, $\bar{\omega} \in H^2(UZ)$ — ее поднятие. Тогда при $k \leqslant n-1$ группа $H^{2k}(U)$ — свободная циклическая с образующей $\bar{\omega}^k$; группа $H^{2n}(U)$ порождена $\bar{\omega}^n$ и изоморфна Z_{n+1}. При нечетных $m < 2n$ группа $H^m(U) = 0$.*

Доказательство. Рассмотрим точную последовательность Гизина расслоения $U \to M$ [4]:

$$\ldots H^s(M) \to H^{s+2n}(M) \to H^{s+2n}(U) \to H^{s+1}(M) \to \ldots$$

Стрелка из $H^s(M)$ в $H^{s+2n}(M)$ — умножение на эйлеров класс этого расслоения, т. е. на $(n+1)\mu$, где μ — образующая группы $H^{2n}(M, Z) = Z$ (вспомним, что эйлерова характеристика $\chi(CP^n) = n+1$. Следующая выписанная стрелка индуцирована проекцией $U \to M$. При $s \leqslant -2$ сразу получаем, что эта стрелка осуществляет изоморфизм, что доказывает первое и третье утверждения леммы. Далее, рассмотрим отрезок последовательности:

$$\begin{array}{ccccccc} H^0(M) & \to & H^{2n}(M) & \to & H^{2n}(U) & \to & H^1(M). \\ \| & & \| & & & & \| \\ Z & & Z & & & & 0 \end{array}$$

Так как образ $H^0(M)$ в $H^{2n}(M)$ порожден $(n+1)\mu$, получаем $H^{2n}(U) = Z_{n+1}$.

Теперь рассмотрим расслоение $U \to CM$ со слоем S^1. Напомним, что e — его эйлеров класс. Рассмотрим соответствующую последовательность Гизина:

$$\begin{array}{l} 0 \to H^1(CM) \to H^1(U) \to H^0(CM) \to H^2(CM) \to H^2(U) \to H^1(CM) \to \ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \| \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0 \end{array}$$

Сразу видно, что $H^1(CM) = 0$. Поэтому конец выписанного отрезка запишется так: $0 \to H^0(CM) \to H^2(CM) \to H^2(U) \to 0$. Стрелкой из $H^0(CM)$ в $H^2(CM)$ служит умножение на e. Выберем $y \in H^2(CM)$ так, чтобы образ y в $H^2(U)$ был равен $\bar{\omega}$; y

определен с точностью до целого кратного e. Тогда, очевидно, $H^2(CM) = Ze \oplus Zy$. Выпишем следующий отрезок:

$$0 \to H^3(CM) \to H^3(U) \to H^2(CM) \to H^4(CM) \to H^4(U) \to \\ \to H^3(CM) \to \dots$$

Снова получаем $H^3(CM) = 0$ и короткую последовательность $0 \to H^2(CM) \to H^4(CM) \to H^4(U) \to 0$. Заметим, что образ $y^2 \in H^4(CM)$ в $H^4(U)$ равен $\overline{\omega}^2$. Поэтому лемма 1 сразу дает разложение $H^4(CM) = Ze^2 \oplus Zey \oplus Zy^2$.

Продолжая рассуждения, получаем:

Лемма 2. *При $k \leqslant n-1$ группа $H^{2k}(CM, Z)$ свободно порождена элементами e^k, $e^{k-1}y$, $\dots$, y^k. Если m нечетно и $m \leqslant 2n-1$, то $H^m(CM) = 0$.*

Из двойственности Пуанкаре сразу следует, что, во-первых, $H^m(CM) = 0$ при нечетных $m > 2n-1$, и, во-вторых, при $k > n$ гомоморфизм $f \to fe$: $H^{2x} \to H^{2k+2}$ эпиморфен.

Изучим группу $H^{2n}(CM)$, выписав соответствующий отрезок последовательности Гизина:

$$\begin{array}{ccccccccc} H^{2n-1}(U) & \to & H^{2n-2}(CM) & \to & H^{2n}(CM) & \to & H^{2n}(U) & \to & H^{2n-1}(CM). \\ \| & & & & & & \| & & \| \\ 0 & & & & & & Z_{n+1} & & 0 \end{array}$$

Сразу получаем, что справедлива

Лемма 3. *Группа $H^{2n}(CM, Z)$ содержит свободную группу $F = Ze^n \oplus Ze^{n-1}y \oplus \dots \oplus Zey^{n-1}$, которая вместе с y^n порождает $H^{2n}(CM, Z)$, причем выполнено соотношение $(n+1)y^n = a_0e^n + \dots + a_{n-1}ey^{n-1} \in F$, $a_i \in Z$. Если $S < n+1$, то $Sy^n \notin Z$.*

Теперь введем одно замечательное отображение. Заметим сначала, что если τ: $U \to U$ переводит вектор (x, v) в $(x, -v)$, где $x \to M$, $v \in T_xM$, то для индуцированного гомоморфизма в когомологиях $\tau^*\overline{\omega} = \overline{\omega}$. Рассмотрим отображение $\tilde{\tau}$: $CM \to CM$, которое переводит ориентированную геодезическую в другую, совпадающую с первой как множество, но ориентированную противоположно. Очевидно, пара $(\tilde{\tau}, \tau)$ определяет автоморфизм расслоения $U^\varepsilon \to CM$, обращающий ориентацию слоев, откуда следует по определению e, что $\tilde{\tau}^*e = -e$. Автоморфизм $\tilde{\tau}^*$ кольца $H^*(CM, Z)$ будем обозначать через ψ. Так как $\varepsilon^*\, y = \overline{\omega}$ и $\tau^*\overline{\omega} = \overline{\omega}$, получаем $\varepsilon^*(y - \tilde{\tau}^*y) = \overline{\omega} - \varepsilon^*\tilde{\tau}^*y = \overline{\omega} - \tau^*\varepsilon^*y = \overline{\omega} - \tau^*\overline{\omega} = 0$. Поэтому $y - \psi y = de$, $d \in Z$ (ядро ε^*: $H^2(CM) \to H^2(U)$ есть Ze). В зависимости от четности d можно выбрать y так, чтобы d стало равно 0 или 1. В случае $n < 3$, которым мы сейчас ограничимся, оказывается, что достаточно рассмотреть только второй случай (см. замечание в конце статьи). Итак, считаем, $\psi y = ye$.

Доказательство теоремы 1. В силу леммы 3 будет $3y^2 = a_0e^2 + a_1ey$. Применяя ψ, получаем $3(y-e)^2 = a_0e^2 - a_1e(y-e)$. Раскрыв скобки и сравнив эти два уравнения, беждаемся, что $a_1 = 3$ (ey и e^2 независимы по лемме 2). Итак, $y^2 = a_0e^2 + 3ey$. Далее, так как по теореме Вейнстейна $e^3 \neq 0$, $H^6(CM, Z) = Z$, ψ действует на H^6 умножением на (-1). В частности, $\psi(e^2y) = e^2(y-e) = -e^2y$, откуда $e^3 = 2e^2y$. Поэтому $ey^2 = (1/3)(2a_0e^2y + 3e^2y) = (1/3)(2a_0 + 3)e^2y$. В силу замечания после леммы 2 элементы e^3, e^2y, ey^2 порождают $H^6(CM, Z)$. Будем отождествлять элементы старшей группы когомологий с их значениями на фундаментальном цикле. Тогда ясно, что либо $e^2y = \pm 1$, либо $e^2y = \pm 3$, иначе все числа e^3, e^2y, ey^2 делились бы на некоторое простое число. Но если бы было $e^2y = \pm 1$, то a_0 делилось бы на 3, и мы получили бы $y^2 \in Ze^2 \oplus \oplus Zey$, что противоречит лемме 3. Итак, $e^3 = 2e^2y = \pm 6$. Остается, если нужно, поменять знак фундаментального цикла.

Теперь займемся случаем $n = 3$. Введем новое кольцо коэффициентов $Z[1/2] \subset Q$. Пусть $z = y - e/2$, тогда $\psi z = z$. Ясно, что лемма 2 остается в силе с заменой $H^*(CM, Z)$ на $H^*(CM, Z[1/2])$ и y на z, а лемма 3 модифицируется следующим образом: $H^6(CM, Z[1/2])$ свободно порождена элементами e^3, e^2z, ez^2.

Доказательство теоремы 2. Группы $H^4(CM, Z)$ и $H^6(CM, Z)$ находятся в двойственности Пуанкаре относительно спаривания $(f, g) = fg$, где мы по-прежнему отождествляем элементы $H^{10}(CM, Z)$ с их значениями на фундаментальном цикле. Это спаривание продолжается до спаривания групп когомологий с коэффициентами $Z[1/2]$. Если f_i и g_j, $1 \leqslant i, j \leqslant 3$,— базисы в $H^4(CM, Z)$ и $H^6(CM, Z)$, то определитель Грамма $\det(f_i, g_j) = \pm 1$. Возьмем в качестве элементов f_i элементы e^2, ey, y^2. В качестве g_j возьмем e^3, e^2y, ey^2. Они не образуют базиса, но, как показывает лемма 3, они выражаются через базис с помощью матрицы перехода с определителем ± 4. Поэтому определитель Грамма $\det(f_i, g_j)$ также будет равен ± 4. Далее, матрицы перехода от e^2, ey, y^2 к e^2, ez, z^2 и от e^3, e^2y, ey^2 к e^3, e^2z, ez^2 имеют над $Z[1/2]$ определитель 1, поэтому определитель матрицы Грамма

$$\det\begin{pmatrix} e^5 & e^4z & e^3z^2 \\ e^4z & e^3z^2 & e^2z^3 \\ e^3z^2 & e^2z^3 & ez^4 \end{pmatrix} = \pm 4.$$

Теперь заметим, что $e^2z^3 = e^4z = 0$, так как группа $H^{10}(CM, Z[1/2])$ имеет ранг 1 и поэтому ψ действует на нее умножением на -1; в силу $e^5 \neq 0$, $\psi(e^5) = -e^5$. Итак,

$$e^3z^2(e^5(ez^4) - (e^3z^2)^2) = \pm 4. \tag{1}$$

Далее, по лемме 3 будет $z^3 = b_0e^3 + b_1e^2z + b_2ez^2$, $b_i \in Z[1/2]$. Применяя ψ к обеим частям, видим, что $b_0 = b_2 = 0$, т. е. $z^3 = b_1e^2z$; легко видеть, что $4b_1 \in Z$. Подставив в (1), получим: $(e^3z^2)^2(b_1e^5 - e^3z^2) = \pm 4$ или $(e^3z^2)^2(4b_1e^5 - 4e^3z^2) = \pm 16$ **(2)**. Отсюда видно, что e^3z^2 обратим в $Z[1/2]$, т. е. $e^3z^2 = \pm 2^p$, $p \in Z$, а e^5 является делителем целого числа $4e^3z^2 + 16/(e^3z^2)^2$. Теорема 2 получается теперь прямым перебором вариантов.

Замечание. Если бы было $\psi y = y$, то все построения при доказательстве теоремы 2 проходят с заменой z на y, в частности, выполняется уравнение (2), и список возможных e^6 тот же. В случае $n = 2$ равенство $\psi y = y$ влекло бы $3y^2 = a_0e^2$ и $e^2y = 0$, поэтому $H^6(CM, Z)$ порождалось бы e^3 и $ey = (a_0/3)e^3$, и в результате было бы $e^3 = \pm 1$ или $e^3 = \pm 3$, что невозможно, ибо e^3 четно [1].

В случае, если M — многообразие Бляшке (см. [1], определение) когомологического типа CP^2, равенство $i(H) = 3$ доказано Янгом [5]. Метод Янга использует существование некоторых двумерных циклов на многообразиях Бляшке, отсутствующих в случае общих $C_{2\pi}$ многообразий.

Список литературы: 1. *Бессе А.* Многообразия с замкнитыми геодезическими.— М. Мир, 1981.— 325 с. 2. *Weinstein A.*— J. Diff. Geom., 1974, 9, p. 513—517. 3. *Yang C. T.*— J. Diff. Geom., 1980, 15, p. 91—96. 4. *Милнор Дж., Сташеф Дж.* Характеристические классы.— М.: Мир, 1979.— 371 с. 5. *Yang C. T.* Ann. Math. Stud., 1982, 102, № 9, p. 159—171.

Поступила в редколлегию 31.10.83.

УДК 513.7

В. Ю. Ровенский

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ВПОЛНЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ПОДМНОГООБРАЗИЙ S^m и CP^m

Характеризация вполне геодезических подмногообразий римановых пространств является важной задачей дифференциальной геометрии. Это объясняется тем, что вполне геодезические подмногообразия можно считать наиболее простыми. Однако, риманово пространство общего вида не имеет вполне геодезических подмногообразий размерности больше 1. Поэтому сформулированный вопрос следует решать в римановых пространствах специального типа, допускающих достаточно много простейших подмногообразий, например, в пространствах постоянной кривизны. С другой стороны, вещественные и невещественные пространственные формы содержат наибольшее количество вполне геодезических подмногообразий всех размерностей и являются модельными во многих исследованиях.

Статья посвящена характеризации полных вполне геодезических подмногообразий сферы S^m и комплексного проективного пространства с метрикой Фубини CP^m по степени вырождения второй основной формы.

У гладкой поверхности $M^l \subset M^{l+p}$ в каждой точке a имеется p-мерное векторное пространство $T_aM^\perp$ нормалей $\xi \in T_aM^\perp$, которым отвечают самосопряженные операторы A_ξ вторых квадратичных форм. Одновременное обращение в нуль всех таких операторов на M можно принять за определение вполне геодезических подмногообразий. В 1970 г. Эйб [1] и Ферус [2] установили

Критерий. *Пусть M^l — полная поверхность а) в S^m, б) келерова в CP^m, и в каждой точке $a \in M$ операторы $\{A_\xi\}$ обращаются в нуль на подпространстве $T_0(a) \subset T_aM$ размерности не меньше $l/2$. Тогда M^l является вполне геодезической а) $S^l \subset S^m$, б) $CP^{l/2} \subset \subset CP^m$.*

Этот признак можно объяснить двумя следующими результатами: 1) открытые поверхности указанного вида имеют «линейчатое строение», то есть через каждую точку некоторой области $G \subset M^l$ проходит единственная образующая размерности не меньше $\dim T_0$, 2) в пространстве положительной (би) секционной кривизны два компактных вполне геодезических подмногообразия пересекаются, если сумма их размерностей не меньше резмерности пространства,

В дальнейшем изучение вполне геодезических слоений, возникающих на тангенциально вырожденных поверхностях в S^m и CP^m, позволило Ферусу [3] и Эйбу [4] получить более сильный

Критерий 1. *Пусть M^l — полная поверхность а) в S^m, б) келерова в CP^m, и в каждой точке $a \in M$ операторы $\{A_\xi\}$ обращаются в нуль на подпространстве $T_0(a) \subset T_aM$ размерности а) больше $\nu(l)$, б) больше нуля. Тогда M^l является вполне геодезической а) $S^l \subset S^m$, б) $CP^{l/2} \subset CP^m$.*

Последовательность $\nu(l)$ определена правилом (см. [3]) $\nu(l) = \max\{t \mid t < \rho(l-t)\}$, где $\rho(n) - 1$ — максимальное число непрерывных поточечно линейно независимых векторных полей на сфере S^{n-1}. Справедливы такие соотношения (см. [3], [5]) $\nu(l) < < 2\log_2(l) + 1$; $\nu(2^b) = 0$ $(b = 0, 1, 2, \ldots)$

Борисенко [6] рассматривал в качестве параметра наименьшее количество нулевых собственных чисел у всех операторов $\{A_\xi\}$ поверхности M^l и доказал существование семейств образующих у поверхности неполного ранга. Им также установлен

Критерий 2 [7]. *Пусть M^l полная поверхность а) в S^m б) келерова в CP^m — с положительной (би) секционной кривизной и в каждой точке a операторы $\{A_\xi\}$ имеют ранг не меньше чем $l/2$. Тогда M^l являются вполне геодезической а) $S^l \subset S^m$, б) $CP^{l/2} \subset \subset CP^m$.*

Для рассматриваемых поверхностей предложены названия:
k-сильно параболические, если индекс относительной дефектности не меньше чем k;

k — параболические, если ранг вторых квадратичных форм меньше чем $l-k$.

Таким образом, приведенные критерии связаны с оценками индекса относительной дефектности или ранга вторых квадратичных форм параболической поверхности.

В предлагаемой статье получен следующий результат, который усиливает критерий 1 и обобщает критерий 2:

Критерий 3. *Пусть M^l — полная поверхность положительной (би) секционной кривизны а) в S^m, б) келерова в CP^m и ранг второй квадратичных форм r*

а) меньше чем $l-\nu(l)$, б) меньше чем l. Тогда M^l является вполне геодезической а) $S^l \subset S^m$, б) $CP^{l/2} \subset CP^m$.

Доказательство 3 опирается на следующие результаты 1) Если $M^{n+\nu}$ — линейчатая поверхность положительной кривизны в пространстве специального типа, то размерность ее образующих ν не превосходит числа $\rho(n)-1$. В комплексном случае соответствующая оценка будет $\nu \leqslant 2$. Это утверждение обобщает теорему Феруса о размерности листа вполне геодезического слоения. 2) На k-параболической поверхности в сфере или в комплексном проективном пространстве положительной (би) секционной кривизны найдется область со строением линейчатой поверхности с k-мерной образующей.

1. Линейчатые поверхности с положительной кривизной. В этом параграфе изучаются вещественные и комплексные регулярные линейчатые поверхности.

Определение. Открытое C^2-гладкое подмногообразие $M^{n+\nu}$ $(n>0)$ риманова пространства $\overline{M}^m$ вместе с C^1-слоением $\{L\}$ на ν-мерные вполне геодезические в $\overline{M}^m$ листы назовем линейчатой поверхностью.

Теорема 1. *а) Пусть $M^{n+\nu} \subset \overline{M}^m$ — линейчатая поверхность и вдоль полной образующей $L_0 \in \{L\}$ кривизна*

$$\overline{R}(x, y)x = -ky, \qquad (k = \mathrm{const} > 0,\ x \in TL_0,\ y \in TL_0^{\perp},\ x^2 = 1) \qquad (1)$$

$$K(x, y) > 0. \qquad (2)$$

Тогда размерность образующих $\nu < \rho(n)$.

б) Пусть в условиях пункта а) в окрестности некоторой точки $a \in M$ имеется почти комплексная структура $J\colon TM \to TM$ со свойством $J(TL) = TL$, $\nabla J = 0$ (3). Тогда вещественная размерность образующих $\nu \leqslant 2$; если $\nu = 2$, *то $n = 4b$, где $b = 1, 2, 3, \ldots$.*

Следствие 1. *Пусть $M^{n+\nu}$ — линейчатая поверхность а) в S^m, б) келерова с комплексной образующей в CP^m, и вдоль полной образующей $L_0 \in \{L\}$ секционная кривизна $K(x, y) > 0$ $(x \in TL_0, y \in TL_0^{\perp})$. Тогда размерность образующих а) $\nu < \rho(n)$, б) $\nu \leqslant 2$.*

Следствие 2. *Область комплексного проективного пространства невозможно расслоить на комплексные подпространства $\{CP^\nu\}$, $\nu > 1$. Область кватернионного проективного пространства невозможно расслоить на кватернионные подпространства. Например, не существует субмерсий с вполне геодезическими слоями*

$$CP^3 \subset CP^7 \xrightarrow{\pi} S^8;\quad HP^1 \subset HP^3 \xrightarrow{\pi} S^8. \qquad (4)$$

Замечание. Если в условиях теоремы 1а поверхность $M^{n+\nu}$ — вполне геодезическая, то секционная кривизна $K(x, y) \equiv k > 0$

$(x \in TL_0,\ y \in TL_0^{\perp})$. Этот случай эквивалентен теореме о вполне геодезических слоениях доказанной Ферусом [3]. Точность оценки в теореме 1, *а* доказана в работе [8]. Точность оценки в теореме 1, *б* следует из существования римановой субмерсии с вполне геодезическими слоями (см. [9]) $CP^1 \subset CP^{2m+1} \xrightarrow{\pi} HP^m \quad (m > 0)$.

Следствие 2 усиливает результат Эскобалеса [9] и дает отрицательный ответ на его гипотезу о существовании субмерсий (4). Явная формула для чисел $\rho(n)$ установлена Адамсом (см. [3]) $\rho((2a+1)2^{4b+c}) = 8b + 2^c$, $(a,\ b = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots;\ 0 \leqslant c \leqslant 3)$.

Перед доказательством теоремы 1 приведем некоторые факты из вариационной теории геодезических [5].

Пусть $\gamma : I \to M$ естественно параметризованная геодезическая в римановом многообразии. Векторное поле $y(t)$ на M вдоль γ называется якобиевым, если оно удовлетворяет системе уравнений $\nabla_{\dot\gamma}\nabla_{\dot\gamma}\, y(t) + R(y(t),\ \dot\gamma)\dot\gamma = 0$ $(t \in I)$. Непрерывное отображение V $(-\varepsilon,\ \varepsilon) \times I \to M$ называется геодезической вариацией, если для любого числа $|s| < \varepsilon$ кривая $V_s(t) = V(s,\ t)$ является геодезической.

Пусть $y,\ w \in T_{\gamma(0)}M$ произвольные вектора; c: $(-\varepsilon,\ \varepsilon) \to M$ гладкая кривая с условием $\dot c(0) = y$; $z(s)$ — гладкое векторное поле в M вдоль $c(s)$ с условием $z(0) = \dot\gamma(0)$, $\dot z(0),= w$. Тогда отображение $V : (s,\ t) \to \exp_{c(s)}(tz(s))$, которое можно считать заданным на области $(-\varepsilon,\ \varepsilon) \times I \subset R^2$, является геодезической вариацией. Обозначим $e_1,\ e_2$ канонические векторные поля на R^2.

Лемма 1 [5, с. 159]. *Векторное поле вдоль* γ $y(t) = dV(e_2)|_{(0,\ t)}$ $(t \in I)$ *есть единственное поле Якоби с начальными условиями* $y(0) = y$, $\nabla_{\dot\gamma} y|_{t=0} = w$. *При этом выполнено равенство* $\nabla_{\dot\gamma} y(t) = \nabla_{e_2}(dV(e_1))|_{(0,\ t)}$, $(t \in I)$.

Образующие $\{L\}$ линейчатой поверхности $M^{n+\nu} \subset \overline{M}^m$ составляют вполне геодезическое слоение самой M. В этой ситуации, следуя работам [3], [5] можно определить билинейный оператор $B : TL_0 \oplus TL_0^{\perp} \to TL_0^{\perp}$ по формуле

$$B(x,\ y) = P(\nabla_y \bar{x}),\ (x \in TL_0,\ y \in TL_0^{\perp}), \tag{5}$$

где $P : TM|_{L_0} \to TL_0^{\perp}$ — ортогональное проектирование, $\bar{x} \subset TL$ — гладкое локально заданное поле векторов, содержащее x.

Векторные поля вдоль геодезической $\gamma \subset L_0$, индуцированные $\{L\}$ $\nabla_{\dot\gamma}\nabla_{\dot\gamma} y(t) + R(y(t),\ \dot\gamma)\dot\gamma = 0$, $y(0) = y \in TL_0^{\perp}$, $\nabla_{\dot\gamma} y|_{t=0} = B(\dot\gamma(0),\ y)$ называются L-параллельными полями Якоби [5]. Такие поля, ввиду леммы 1, характеризуются уравнением первого порядка

$$\nabla_{\dot\gamma} y(t) = B(\dot\gamma,\ y(t)). \tag{6}$$

Из теории подмногообразий напомним следующие формулы. Если риманово многообразие M изометрично погружено в риманово пространство $\overline{M}$, то

$$\bar{\nabla}_x y = \nabla_x y + h(x, y), \tag{7}$$

$$\bar{\nabla}_x \xi = -A_\xi(x) + \nabla_x^\perp \xi, \tag{8}$$

где x, y — векторные поля касательные к M, вектор ξ — нормаль к M, $h: TM \oplus TM \to TM^\perp$ — вторая основная форма погружения, $\nabla^\perp$ — нормальная связность в расслоении $TM^\perp$, A_ξ — оператор второй квадратичной формы нормали ξ.

Из (7) и (8) вытекает соотношение

$$\langle A_\xi(x), y\rangle = \langle h(x, y), \xi\rangle. \tag{9}$$

Вполне геодезические подмногообразия характеризуются условием $h = 0$.

Следующее вспомогательное утверждение обобщает лемму Феруса [3]:

Лемма 2. *Пусть линейчатая поверхность* $M^{n+\nu} \subset \overline{M}^m$ *удовлетворяет условиям теоремы 1а. Тогда линейные операторы* $B(x, \cdot)$ $(x \neq 0)$, *заданные правилом (5), не имеют вещественных собственных векторов.*

Доказательство леммы 2. Предположим противное, т. е., что для некоторой точки $a \in L_0$ найдутся единичные векторы $x \in T_a L_0$, $y \in T_a L_0^\perp$ и число $\lambda \leqslant 0$ с условием $B(x, y) = \lambda y$ **(10)** (если $\lambda > 0$, то заменим x вектором $-x$ и получим $\lambda < 0$). Пусть $\gamma: R \to L_0(0)\, \gamma(0) = a$, $\dot\gamma(0) = x$) — естественно параметризованная геодезическая и $y(t)$ $(y(0) = y)$ — L-параллельное поле Якоби вдоль γ. С учетом (6), (7) найдем производную в $\overline{M}^m$ $\bar{\nabla}_{\dot\gamma} y\,|_{t=0} = \lambda y + v$ $(v \in T_a M^\perp)$. Так как $y(t)$ есть также поле Якоби в $\overline{M}^m$ вдоль γ, то ввиду условия (1) оно удовлетворяет уравнению $\bar{\nabla}_{\dot\gamma}\bar{\nabla}_{\dot\gamma} y(t) + k y(t) = 0$. Поэтому $y(t) = \cos(\sqrt{k}t)\,\bar{y} + \sin(\sqrt{k}t)\,(\lambda\bar{y} + \bar{v})$, где $\bar{y}$, $\bar{v}$ получены из векторов y, v путем параллельного переноса в $\overline{M}^m$ вдоль γ. При некотором $0 < t_0 \leqslant \dfrac{\pi}{2\sqrt{k}}$ будет $\cos(\sqrt{k}t_0) + \lambda \sin(\sqrt{k}t_0) = 0$ и, следовательно, ненулевой вектор $y(t_0)$, лежащий в $T_{\gamma(t_0)} L_0^\perp \subset T_{\gamma(t_0)} M$, совпадает с $\sin(\sqrt{k}t_0)\,\bar{v}$. Иными словами, единичный вектор $v \in T_a M^\perp$ при $\bar{\nabla}$-параллельном переносе вдоль γ в момент t_0 коснется поверхности M, то есть $\bar{v} \in T_{\gamma(t_0)} L_0^\perp$.

Пусть $v(t) \in T_{\gamma(t)} M^\perp$ — $\nabla^\perp$-параллельное поле вдоль γ, содержащее вектор v. Отождествим евклидовы пространства $\overline{T_{\gamma(t)} L_0^\perp}$ (все нормали к L_0 в $\overline{M}^m$) с $R^{m-\nu}$ на основании $\bar{\nabla}$-параллельного переноса вдоль γ. Тогда полю $v(t)$ соответствует гладкая кривая на единичной сфере $S^{m-\nu-1} \subset R^{m-\nu}$, и расстояние между точками

$v(0)$ и $v(t_0)$ на сфере равно $\frac{\pi}{2}$, поскольку векторы $v(0)$, $v(t_0)$ ортогональны. В частности, длина кривой

$$l = \int_0^{t_0} \| \bar{\nabla}_{\dot{\gamma}} v(t) \| dt \geqslant \frac{\pi}{2}. \tag{11}$$

Из определения поля $v(t)$ с учетом (8) следует

$$\bar{\nabla}_{\dot{\gamma}} v(t) = -A_{v(t)}(\dot{\gamma}) \quad (t \in R). \tag{12}$$

Из условия (1—2) с помощью формул Гаусса получаем

$$h^2(x, y) = k - K(x, y) \leqslant k \; (x \in TL_0, \; y \in TL_0^{\perp}, \; x^2 = y^2 = 1). \tag{13}$$

Из (12), (13) с учетом формулы (9) следует $\| \bar{\nabla}_{\dot{\gamma}} v(t) \| < \sqrt{k}$. Но тогда возникает противоречие с оценкой (11)

$$l \leqslant \int_0^{\pi/2\sqrt{k}} \| \bar{\nabla}_{\dot{\gamma}} v(t) \| dt < \frac{\pi}{2\sqrt{k}} \cdot \sqrt{k} = \frac{\pi}{2},$$

что доказывает лемму 2.

Доказательство пункта а) теоремы 1. Пусть $a \in L_0$ — произвольная точка, $S^{n-1} \subset T_a L_0^{\perp}$ единичная сфера и $\{e_1, \ldots, e_\nu\}$ — базис в $T_a L_0$. Так как оператор (5) по лемме 2 не имеет вещественных собственных векторов, то следуя Ферусу [3], построим ν линейно независимых векторных полей $\{w_i\}$ касающихся S^{n-1} $w_i(y) = B(e_i, y) - \langle B(e_i, y), y\rangle y$, $(y \in S^{n-1}, 1 \leqslant i \leqslant \nu)$. Действительно, в случае линейной зависимости в некоторой $y \in S^{n-1}$ $\sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i w_i(y) = 0$ вектор y будет собственным для оператора (5) при $x = \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i e_i$, $\lambda = \langle B(x, y), y\rangle$. Значит, $\nu < \rho(n)$, что доказывает п. а) теоремы 1.

Доказательство пункта б) теоремы 1 опирается на лемму 2 и следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 3. *Пусть J — комплексная структура на евклидовых пространствах $R^{2\nu}$, R^{2n} $(n > 0)$ и $D: R^{2\nu} \times R^{2n} \to R^{2n}$ — билинейный оператор со свойством*

$$D(Jx, \cdot) = JD(x, \cdot), \quad (x \in R^{2\nu}). \tag{14}$$

Тогда, если линейные операторы $D(x, \cdot)$ $(x \neq 0)$ не имеют вещественных собственных векторов, то $\nu = 0$ либо $\nu = 1$ и $n = 2b$ $(b \in N)$.

Замечание. Лемма 3 обобщает аналогичное утверждение Эйба [4] с более жестким условием $D(Jx, y) = D(x, Jy) = JD(x, y)$, $(x \in R^{2\nu}, y \in R^{2n})$.

Перед доказательством леммы 3 приведем по-видимому известное

Предложение 1. Пусть $CP^\nu \subset CP^m$ комплексное проективное подпространство. Тогда при $1 < \nu < m$ нормальное векторное расслоение $T(CP^\nu)^\perp$ не тривиальное.

Доказательство. Достаточно показать, что векторное расслоение $T(CP^\nu)^\perp$ имеет ненулевой характеристический класс Понтрягина (У тривиального векторного расслоения любой характеристический класс положительной размерности тривиален).

Напомним, что алгебра когомологий $H^*(CP^m, Z)$ есть срезанная алгебра полиномов над кольцом целых чисел Z, порожденная элементом a размерности 2 с условием $a^{m+1} = 0$. Вложение подпространства $CP^\nu \subset CP^m$ индуцирует гомоморфизм когомологий $H^*(CP^m; Z) \to H^*(CP^\nu; Z)$, отождествляющий образующие. Полный класс Понтрягина вещественного векторного расслоения ξ является полиномом [10]: $p(\xi) = \sum\limits_i p_i(\xi)$, $p_i(\xi) \in H^{4i}(B(\xi); Z)$ и в случае касательного расслоения $T(CP^m)$ имеет вид

$$p(CP^m) = 1 + (m+1)a^2 + \cdots + C^i_{m+}a^{2i} + \cdots \tag{15}$$

В силу сказанного получаем

$$p(T(CP^m)|_{CP^\nu}) = 1 + (m+1)a^2 + \cdots \tag{16}$$

Предположим противное, то есть что $T(CP^\nu)^\perp$ тривиально. Тогда должно быть

$$p(CP^\nu) = p(T(CP^\nu) \oplus T(CP^\nu)^\perp) = p(T(CP^m)|_{CP^\nu}). \tag{17}$$

При $1 < \nu < m$ из (15) — (17) вытекает равенство полиномов $1 + (m+1)a^2 + \cdots = 1 + (\nu+1)a^2 + \cdots$, что является противоречием, доказывающим предложение 1.

Доказательство леммы 3. Предположим противное, т. е. $\nu > 1$ (в случае $\nu = 1$, $n = 2b + 1$ всегда есть вещественный собственный вектор [3]). В пространстве $CP^{n+\nu}$ (4) зафиксируем подпространство $CP^\nu_0 = L_0$ и точку $a \in L_0$ и отождествим $R^{2\nu} = T_aL_0$, $R^{2n} = T_aL_0^\perp$. Ортонормированный базис $\{e_i, Je_i\}$ $1 \leqslant i \leqslant \nu$ пространства $R^{2\nu}$ продолжим локально до гладких полей $\{\bar{e}_i, J\bar{e}\}_{i \leqslant \nu}$ на многообразии $U = \exp_a(R^{2n})$ так, чтобы выполнялись равенства

$$\nabla_y(\bar{e}_i) = D(e_i, y), \ (y \in R^{2n}, \ 1 \leqslant i \leqslant \nu), \tag{18}$$

где D оператор из условия. Учитывая келеровость $CP^{n+\nu}$ (4) ($\nabla J = 0$) и свойство (14), из (18) получим

$$\nabla_y(J\bar{e}_i) = D(Je_i, y), \ (y \in R^{2n}, \ 1 \leqslant i \leqslant \nu). \tag{19}$$

В силу линейности ковариантного дифференцирования ∇ и оператора D, из (18), (19) вытекает $\nabla_y(\bar{x}) = D(x, y)$, $(x \in R^{2\nu}, y \in R^{2n})$. Рассмотрим $2n$-параметрическое семейство комплексных подпространств $\{L = CP^\nu\}$ касающихся над U J-инвариантного поля aff$\{\bar{e}_i, J\bar{e}_i\}$. Этим семейством вполне геодезических подмногообразий индуцируются сечения $\{Y\}$ нормального векторного расслоения $TL_0^\perp$, которые вдоль геодезических $\gamma \subset L_0$ являются полями Якоби в $CP^{n+\nu}$ (4). В силу предложения 1 семейство $\{L\}$ не может образовывать регулярного расслоения окрестности L_0 в $CP^{n+\nu}$ (4). Поэтому найдется сечение $Y_1 \in \{Y\}$ с нулем в некоторой точке $b \in L_0$. Ограничение $y(t)$ этого сечения на геодезическую $\dot{\gamma} \subset \subset L_0 (\gamma(0) = a)$, проходящую через точку b, тоже имеет нуль и удовлетворяет уравнению $\nabla_{\dot{\gamma}} \nabla_{\dot{\gamma}} y(t) + y(t) = 0$ $(y(0) = y \in R^{2n}$, $y^2 = 1)$. Следовательно $y(t) = (\cos t)\, \bar{y} + (\lambda \sin t)\, \bar{y}$, $(\bar{y}(0) = y$, $\nabla_{\dot{\gamma}} \bar{y} = 0)$. В силу леммы 1 и свойства (6) получаем собственный вектор $D(\dot{\gamma}(0), y) = \lambda y$, что противоречит условию. Лемма 3 доказана.

Доказательство теоремы 1, б. Линейные операторы $B(x, \cdot)$ $(x \neq 0)$, заданные в точке a формулой (5), по лемме 2 не имеют вещественных собственных векторов. Из (3) вытекает свойство (14) $B(Jx, y) = P(\nabla_y (J\bar{x})) = P((\nabla_y J)\, x) + JP(\nabla_y \bar{x}) = JB(x, y)$. Поэтому, в силу леммы 3, $\nu = 0$ либо $\nu = 2$ и $n = 4b$ $(b \in N)$.

Доказательство следствий 1, 2. Для линейчатой поверхности в S^m или келеровой в CP^m вдоль образующих выполнено (1), где а) k — секционная кривизна S^m, б) $4k$ — голоморфная кривизна CP^m. Поэтому, следствие 1 вытекает из теоремы 1. Случай SP^m в следствии 2 вытекает уже из предложения 1. В случае HP^m заметим, что параллельный перенос сохраняет кватернионные плоскости, и поэтому оператор (5) обладает свойством (14) с любой из локальных структур $\{I, J, K\}$. По лемме 3 тогда $\nu = 0$.

2. Параболические поверхности в S^m и CP^m. Выясним связь параболических и линейчатых поверхностей в модельных пространствах S^m, CP^m.

Лемма 4 [6], [7], [11]. *Пусть M^l — полная поверхность а) в S^m, б) келерова в CP^m и для точки $a \in M$ и нормали $\xi_0 \in T_a M^\perp$ ранг оператора A_{ξ_0} максимален $0 < r(\xi_0) = r < l$. Тогда через точку a проходит единственная образующая $L_0 \subset M^l$ $(T_a L_0 = \ker A_{\xi_0})$, являющаяся а) большой сферой $S^{l-r} \subset S^m$, б) подпространством $CP^{(l-r)/2} \subset CP^m$, вдоль которых нормаль ξ_0 стационарна и имеет постоянный ранг r.*

Если M однозначно проектируема, то некоторая область $G \subset M$ имеет строение линейчатой поверхности с образующей указанного вида.

Теорема 2. *Пусть M^l — полная поверхность положительной секционной кривизны а) в S^m, б) келерова в CP^m, у которой ранг вторых квадратичных форм $0 < r < l$. Тогда некоторая область $G \subset M$ имеет строение линейчатой поверхности с $(l-r)$-мерной образующей, указанной в лемме 4.*

Доказательство. Рассмотрим случай $M^l \subset S^m$. Пусть $\xi_0 \in T_a M^\perp$ — единичная нормаль ранга r, $L_0 \subset M$ — образующая для ξ_0 из леммы 4. Покажем, что окрестность $G \subset M$ образующей L_0 однозначно проектируется на большую сферу $S^{l+1} \subset S^m$, которая содержит L_0 и касается ξ_0.

Действительно, направления проектирования над L_0 получаются при параллельном разнесении в S^m векторов из $T_a M^\perp$ вдоль геодезических $\gamma \subset L_0$. Как показано в доказательстве леммы 2, такие единичные векторы не касаются M на L_0. Поэтому некоторая окрестность L_0 в M однозначно проектируется на сферу S^{l+1}.

В силу леммы 4 область G имеет линейчатое строение с образующими $\{L\} \ni L_0$, что и требовалось показать.

Случай келеровой M^l в CP^m рассматривается аналогично, причем можно ослабить условие, потребовав положительность бисекционной кривизны.

Теорема 3 (критерий 3). *Пусть M^l — полная поверхность положительной (би) секционной кривизны а) в S^m, б) келерова в CP^m, у которой ранг вторых квадратичных форм а) $r < l - \nu(l)$, б) $r < l$. Тогда M^l есть вполне геодезическая а) $S^l \subset S^m$, б) $CP^{l/2} \subset CP^m$.*

Доказательство. а) Если $S^l \subset S^m$, то в силу теоремы 2, на области $G \subset M$ моделируется линейчатая поверхность, удовлетворяющая условиям следствия 1, *а*. Поэтому $l - r \leqslant \rho(r)$ и, тем более, $r \geqslant l - \nu(l)$, что и требовалось.

б) Предположим противное, т. е. $0 < r < l$. Тогда по лемме 4 на M^l лежит полная образующая L_0 вида $CP^{(l-r)/2}$.

Из доказательства теоремы 2 следует, что окрестность $G \subset M$ образующей L_0 однозначно проектируется на подпространство $CP^{l/2+1} \subset CP^m$. Проекция $\overline{G}$ области G является келеровой сильно параболической гиперповерхностью [6] и содержит образующую L_0. В этом случае $\overline{G}$ — вполне геодезическая [4]. Но тогда и область G — вполне геодезическая в CP^m, что противоречит предположению. Теорема 3 доказана.

Борисенко [6] определил q-мерную внешнюю кривизну $\overline{\gamma}_q$ поверхности M^l в римановом пространстве $\overline{M}^{l+p}$ и показал, что при малой коразмерности p из условия $\overline{\gamma}_q \leqslant 0$ следует параболичность а) $r \leqslant 2p(q-1)$, б) $r \leqslant 2(p-1)(q-1)$ для келеровой M.

Из теоремы 3, следуя Борисенко [6], получаем

Следствие 3 (критерий 4). *Пусть M^l — полная поверхность а) в S^{l+p}, б) келерова в $CP^{\frac{l+p}{2}}$, у которой (би) секционная кривизна положительна, внешняя q-мерная кривизна $\overline{\gamma}_q \leqslant 0$ и коразмерность*

$$a)\ p < \frac{l - \nu(l)}{2(q-1)}, \quad б)\ p < \frac{l}{2(q-1)} + 1. \tag{20}$$

Тогда M^l есть вполне геодезическая а) $S^l \subset S^{l+p}$, б) $CP^{l/2} \subset CP^m$.

Утверждение следствия 3 в предположении вместо (20) неравенства

$$\text{а) } p \leqslant \frac{l}{4(q-1)}, \quad \text{б) } p \leqslant \frac{l}{4(q-1)} + 1$$

было доказано Борисенко [7, теорема 5].

3. Геодезические формы на поверхностях в S^m и CP^m. Вполне геодезические слоения римановых многообразий часто возникают при интегрировании нулевых пространств специальных тензорных полей или дифференциальных форм. Домбровский [5] исследовал эту ситуацию с помощью введенных им геодезических дифференциальных форм. Заметим, что структура регулярной линейчатой поверхности на подмногообразии $M^l \subset \overline{M}^m$ тоже может быть задана на основе геодезической формы.

Пусть M^l риманово многообразие, $\xi \to M$ векторное расслоение со связностью $\bar{\nabla}$, $\Omega \in A^r(M;\ \mathrm{Hom}(TM,\ \xi))$ дифференциальная форма на M степени $0 \leqslant r \leqslant l$ с коэффициентами в векторном расслоении $\mathrm{Hom}(TM,\ \xi)$. Тогда определены дифференциальные формы $d\Omega \in A^{r+1}(M;\ \mathrm{Hom}(TM,\ \xi))$ — внешняя производная, $i_Y\Omega \in A^{r+1}(M;\ \mathrm{Hom}(TM,\ \xi))$ — внутреннее произведение, а также «ядро Ω»

$$\ker \Omega_a = \{x \in T_aM / \Omega(y_1,\ \ldots,\ y_r)\, x = 0,\ \ \forall y_i \in T_aM\},\ \ a \in M.$$

Форма Ω называется ξ-значной геодезической дифференциальной r-формой на M, если существует дифференциальная форма $\theta \in A^1(M;\ \mathrm{Hom}(\xi,\ \xi))$ с таким свойством:

$$\forall a \in M,\ \ \forall x \in \ker \Omega_a : \begin{cases} i_x\Omega_a = 0, \\ i_x(d\Omega)_a = \theta(x) \cdot \Omega_a. \end{cases}$$

Лемма 5 [5]. *Пусть на полном римановом многообразии M^l задана геодезическая форма $\Omega \in A^r(M;\ \mathrm{Hom}(TM,\ \xi))$ положительного индекса $\nu_\Omega = \min\limits_{a \in M}(\dim \ker \Omega_a)$. Тогда на области регулярности $G_\Omega = \{a \in M \mid \dim \ker \Omega_a = \nu_\Omega\}$ распределение $\ker \Omega$ является автопараллельным и определяет ν_Ω-мерное вполне геодезическое слоение $\{L\}$ с полными листами. Например, если M^l имеет постоянную положительную кривизну и $\Omega \not\equiv 0$, то индекс $\nu_\Omega < \nu(l)$.*

Определение. Геодезическую форму $\Omega \in A^r(M;\ \mathrm{Hom}(TM,\ \xi))$ назовем комплексной, если многообразие M комплексное, а $\ker \Omega$ инвариантно относительно комплексной структуры.

Из теоремы 1 и леммы 5 вытекает

Следствие 4 (критерий 5). *Пусть M^l — полная поверхность положительной (би) секционной кривизны а) в S^m, б) келерова в CP^m, и $\Omega \in A^r(M;\ \mathrm{Hom}(TM,\ \xi))$ а) вещественная б) комплексная геодезическая форма с асимптотическим ядром $h(x,\ x) = 0$, $(x \in \ker \Omega)$ и индексом а) $\nu_\Omega > \nu(l)$, б) $\nu_\Omega > 0$ при четном $\frac{l}{2}$,*

$\nu_\Omega > 2$ *при нечетном* $\frac{l}{2}$. *Тогда* $\Omega \equiv 0$ и M^l *есть вполне геодезическая а)* $S^l \subset S^m$, *б)* $CP^{l/2} \subset CP^m$.

Геодезические 0-формы являются компактными по записи условиями, при которых распределение из асимптотических векторов задает линейчатую структуру на поверхности $M^l \subset \overline{M}^m$.

Следствие 5 (критерий 5′). *Пусть* M^l *полная поверхность положительной (би)секционной кривизны а) в* S^m, *б) келеровой в* CP^m, *и* $\eta \subset TM$ *гладкое (в случае б) J-инвариантное) распределение из асимптотических векторов, размерности а)* $\dim \eta > \nu(l)$, *б)* $\dim \eta > 0$ *при черном* $\frac{l}{2}$ и $\dim \eta > 2$ *при нечетном* $\frac{l}{2}$, *а для ортопроектора* $Q: TM \to \eta^\perp$ *существует форма* $\theta \in A^1(M, \mathrm{Hom}(\eta^\perp, \eta^\perp))$ *со свойством* $i_x(dQ)_a = \theta(x) \circ Q_a$ $(a \in M, \ x \in \eta_a)$. *Тогда* $\eta = TM$ и M^l *есть вполне геодезическая а)* $S^l \subset S^m$, *б)* $CP^{l/2} \subset CP^m$.

Автор благодарит В. А. Топоногова за постановку задачи, внимание к работе и А. А. Борисенко за высказанные замечания.

Список литературы: 1. *Abe K.* Characterization of totally geodesic submanifolds in S^N and CP^N by an inequality.— Tohoku Math. J., 1971, **23**, p. 219—244. 2. *Ferus D.* On the type number of hypersurfaces in spaces of constant curvature.— Math. Ann., 1970, **187**, p. 310—316. 3. *Ferus D.* Totally geodesic foliations.— Math. Ann. 1970, **188**, p. 313—316. 4. *Abe K.* Applications of a Riccati type differential equation to riemannian manifolds with totally geodesic distributions.— Tohoku Math. J., 1973, **25**, p. 425—444. 5. *Борисенко А. А.* О строении *l*-мерных поверхностей с вырожденной квадратичной формой.— Укр. геометр. сб., 1972, вып. 13, с. 18—27. 6. *Борисенко А. А.* О внешне геометрических свойствах параболических поверхностей и топологических свойствах седловых поверхностей в симметрических пространствах ранга один.— Мат. сб., 1981, **116**, № 3, с. 440—457. 7. *Ровенский В. Ю.* Вполне геодезические слоения.— Сиб. мат. журн., 1982, **23**, № 3, с. 217—219. 8. *Dombrowski P.* Jacobi fields, totally geodesic foliations and geodesic differential forms.— Resultate der Math., 1979, 1, p. 156—194. 9. *Escobales R. H.* Riemannian submersions from complex projective space.— J. Diff. Geom., 1978, **13**, № 1, p. 93—107. 10. *Милнор Дж.* Характеристические классы.— М.: Мир, 1979.— 270 с. 11. *Борисенко А. А.* О поверхностях неположительной внешней кривизны в пространствах постоянной кривизны.— Мат. сб., 1981, **114**, № 3, с. 339—354.

Поступила в редколлегию 24.06.83.

УДК 513

О. И. Рудницкий

БАЗИСНЫЕ ИНВАРИАНТЫ КОНЕЧНЫХ ПРИМИТИВНЫХ ГРУПП, ПОРОЖДЕННЫХ ОТРАЖЕНИЯМИ, В ЧЕТЫРЕХМЕРНОМ УНИТАРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Пусть в n-мерном унитарном пространстве U^n задана координатная система началом O и ортонормированным базисом e_i ($i = \overline{1, n}$); G — конечная невещественная и неприводимая группа, порожденная отражениями относительно гиперплоскостей с общей точкой O. Множество всех многочленов, инвариантных относительно G, образует алгебру $I(G)$; m_i — степени образующих алгебры $I(G)$ (показатели G). В 1979 г. В. Ф. Игнатенко поставил задачу нахождения всех образующих алгебры $I(G)$ вида

$$J_{2r}(G) = \sum_{\sigma \in G} (\boldsymbol{x}, \sigma \boldsymbol{s})^{2r}, \qquad (1)$$

где σ — отражения относительно гиперплоскостей; $\boldsymbol{s}$ — единичный вектор нормали (с началом O) одной из них; r — натуральное число, вектор $\boldsymbol{x} = (x_i)$ (коллинеарные векторы не различаются).

В настоящей статье указанная задача решена для примитивных групп G пространства U^4. Имеет место

Теорема. *Для каждой примитивной группы G пространства U^4 базисные многочлены алгебры $I(G)$ могут быть построены по формуле (1).*

При доказательстве теоремы найдены в явном виде соответствующие базисные инварианты.

Доказательство. В пространстве U^4 существуют только такие примитивные группы G: $W(N_4)$, $EW(N_4)$, $W(L_4)$ [1].

1. Группа $W(N_4)$ порядка 7680 порождена отражениями второго порядка относительно гиперплоскостей с уравнениями $x_1 = 0$, $x_2 + x_4 = 0$, $x_2 - x_3 = 0$, $x_1 + \varepsilon x_2 + x_3 + \varepsilon x_4 = 0$, где $\varepsilon = \sqrt{-1}$ [1]. Все 40 гиперплоскостей отражения определяются уравнениями $x_i = 0$, $x_i \pm x_j = 0$ $(i < j)$, $x_1 \pm x_k \pm \varepsilon x_l \pm \varepsilon x_m = 0$ ($k, l, m = 2, 3, 4$ меняются циклически). Множество их нормальных векторов $\sigma \boldsymbol{s}$ состоит из 160 векторов $\varepsilon^p \boldsymbol{e}_i$, $\frac{\varepsilon^p}{2}(1+\varepsilon)(\boldsymbol{e}_i \pm \boldsymbol{e}_j)$ $(i < j)$, $\frac{\varepsilon^p}{2}(\boldsymbol{e}_1 \pm \boldsymbol{e}_k \pm \varepsilon \boldsymbol{e}_l \pm \varepsilon \boldsymbol{e}_m)$, $p = \overline{1, 4}$ относительно $W(N_4)$ оно инвариантно. Числа $m_i = 4, 8, 12, 20$ [1]. Формы (1) при $r = 2, 4, 6$ имеют вид:

$$J_4 = \sum x_i^4 - 6 \sum_{i<j} x_i^2 x_j^2; \quad J_8 = 47 \sum x_i^8 + 84 \sum x_i^6 x_j^2 +$$
$$+ 490 \sum_{i<j} x_i^4 x_j^4 - 420 \sum_{j<k} x_i^4 x_j^2 x_k^2 + 7560 x_1^2 x_2^2 x_3^2 x_4^2;$$
$$J_{12} = 467 \sum x_i^{12} - 1122 \sum x_i^{10} x_j^2 - 6435 \sum x_i^8 x_j^4 - 15708 \sum_{i<j} x_i^6 x_j^6 -$$
$$- 2970 \sum_{j<k} x_i^8 x_j^2 x_k^2 - 13860 \sum x_i^6 x_j^4 x_k^2 + 103950 \sum_{i<j<k} x_i^4 x_j^4 x_k^4 +$$
$$+ 249480 \sum_{j<k<l} x_i^6 x_j^2 x_k^2 x_l^2 - 207900 \sum_{\substack{i<j\\k<l}} x_i^4 x_j^4 x_k^2 x_l^2.$$

Здесь и далее инварианты задаются с точностью до постоянного множителя; индексы $i, j, k, l = \overline{1, 4}$ и различны.

Так как $J_8 \neq c J_4^2$, то J_8 — базисный инвариант. Пусть

$$J_{12} = a_1 J_4^3 + a_2 J_4 J_8. \qquad (2)$$

Приравняв соответствующие коэффициенты при x_1^{12}, $x_1^{10}x_2^2$, $x_1^8x_2^2x_3^2$, получим несовместную систему трех линейных уравнений относительно переменных a_1 и a_2: $a_1 + 47a_2 = 467$, $3a_1 + 33a_2 = 187$, $11a_1 - 95a_2 = -165$. Это значит, чтс равенство (2) невозможно; J_{12} — базисный инвариант. Форма J_{20} имеет следующий развернутый вид:

$$
\begin{aligned}
J_{20} = {} & 130307 \sum x_i^{20} - 48830 \sum x_i^{18}x_j^2 - 1225785 \sum x_i^{16}x_j^4 - \\
& - 9961320 \sum x_i^{14}x_j^6 - 31870410 \sum x_i^{12}x_j^8 - 47482292 \sum_{i<j} x_i^{10}x_j^{10} - \\
& - 29070 \sum_{j<k} x_i^{16}x_j^2x_k^2 - 581400 \sum x_i^{14}x_j^4x_k^2 - 3527160 \sum x_i^{12}x_j^6x_k^2 - \\
& - 8314020 \sum x_i^{10}x_j^8x_k^2 + 26453700 \sum_{j<k} x_i^{12}x_j^4x_k^4 - 38798760 \sum x_i^{10}x_j^6x_k^4 + \\
& + 187065450 \sum_{i<j} x_i^8x_j^8x_k^4 - 116396280 \sum_{j<k} x_i^8x_j^6x_k^6 + \\
& + 10465200 \sum_{j<k<l} x_i^{14}x_j^2x_k^2x_l^2 - 52907400 \sum_{k<l} x_i^{12}x_j^4x_k^2x_l^2 + \\
& + 698377680 \sum_{k<l} x_i^{10}x_j^6x_k^2x_l^2 - 374130900 \sum_{\substack{i<j \\ k<l}} x_i^8x_j^8x_k^2x_l^2 - \\
& - 581981400 \sum_{j<k} x_i^{10}x_j^4x_k^4x_l^2 - 1745\,44200 \sum x_i^8x_j^6x_k^4x_l^2 + \\
& + 9777287520 \sum_{i<j<k} x_i^6x_j^6x_k^6x_l^2 + 13094581500 \sum_{j<k<l} x_i^8x_j^4x_k^4x_l^4 - \\
& - 8147739600 \sum_{\substack{i<j \\ k<l}} x_i^6x_j^6x_k^4x_l^4.
\end{aligned}
$$

Если $J_{20} = a_1J_4^5 + a_2J_4^3J_8 + a_3J_4^2J_{12} + a_4J_4J_8^2 + a_5J_8J_{12}$, **(3)** то, приравняв соответствующие коэффициенты при x_1^{20}, $x_1^{18}x_2^2$, $x_1^{16}x_2^4$, $x_1^{14}x_2^6$, $x_1^{16}x_2^2x_3^2$, $x_1^{12}x_2^8$, получим следующую систему линейных уравнений: $a_1 + 47a_2 + 467a_3 + 2209a_4 + 21949a_5 = 130307$, $30a_1 + 1465a_2 + 6726a_3 + 5358a_4 + 13506a_5 = 48830$, $365a_1 + 4195a_2 + 24775a_3 + 7949a_4 - 167863a_5 = -1225785$, $190a_1 + 938a_2 - 1106a_3 + 18382a_4 + 149114a_5 = 830110$, $115a_1 + 1118a_2 + 8663a_3 - 22229a_4 - 87371a_5 = -4845$, $3785a_1 + 17658a_2 - 24269a_3 - 114775a_4 - 2423683a_5 = -15935205$. Она несовместна, и равенство (3) также невозможно; J_{20} — базисный инвариант. Возьмем, например, форму

$$
\begin{aligned}
J_{16} = {} & 8387 \sum x_i^{16} + 7560 \sum x_i^{14}x_j^2 + 121940 \sum x_i^{12}x_j^4 + \\
& + 504504 \sum x_i^{10}x_j^6 + 862290 \sum_{i<j} x_i^8x_j^8 - 10920 \sum_{j<k} x_i^{12}x_j^2x_k^2 - \\
& - 120120 \sum x_i^{10}x_j^4x_k^2 - 360360 \sum x_i^8x_j^6x_k^2 + 2702700 \sum_{j<k} x_i^8x_j^4x_k^4 - \\
& - 1681680 \sum_{i<j} x_i^6x_j^6x_k^4 + 2162160 \sum_{j<k<l} x_i^{10}x_j^2x_k^2x_l^2 -
\end{aligned}
$$

$$-5405400\sum_{k<l} x_i^8x_j^4x_k^2x_l^2+30270240\sum_{\substack{i<j\\k<l}} x_i^6x_j^6x_k^2x_l^2-$$

$$-25225200\sum_{j<k} x_i^6x_j^4x_k^4x_l^2+189189000\prod x_i^4.$$

Справедлива такая зависимость: $1724814J_{16}=61818449J_4^4-59593226J_4^2J_8+13512744J_4J_{12}+4931927J_8^2$.

2. Группа $EW(N_4)$ порядка 64.6! порождена отражениями второго порядка относительно 60 гиперплоскостей: $x_i=0$, $x_1\pm x_k\pm\varepsilon^q x_l\pm\varepsilon^q x_m=0$ ($i=\overline{1,4}$; $q=1,2$; $k,l,m=2,3,4$ меняются циклически) и

$$x_i+\varepsilon^p x_j=0\quad (i,j,p=\overline{1,4};\ i<j). \tag{4}$$

Степени $m_i=8, 12, 20, 24$ [1]. Множество σS имеет вид: $\varepsilon^h e_i$, $\frac{\varepsilon^h}{2}(e_1\pm e_k\pm\varepsilon^q e_l\pm\varepsilon^q e_m)$, $\frac{\varepsilon^h}{2}(1-\varepsilon)(e_i+\varepsilon^p e_j)$, $h=\overline{1,4}$. При этом

$$J_8=\sum x_i^8+14\sum_{i<j} x_i^4x_j^4+168\prod x_i^2;\quad J_{12}=\sum x_i^{12}-33\sum x_i^8x_j^4+$$
$$+330\sum_{i<j<k} x_i^4x_j^4x_k^4+792\sum_{j<k<l} x_i^6x_j^2x_k^2x_l^2;\quad J_{20}=127\sum x_i^{20}-$$
$$-2413\sum x_i^{16}x_j^4-62738\sum x_i^{12}x_j^8+34580\sum_{j<k} x_i^{12}x_j^4x_k^4+$$
$$+244530\sum_{i<j} x_i^8x_j^8x_k^4+13680\sum_{j<k<l} x_i^{14}x_j^2x_k^2x_l^2+12780768\sum_{i<j<k} x_i^6x_j^6x_k^6x_l^2+$$
$$+912912\sum_{k<l} x_i^{10}x_j^6x_k^2x_l^2+17117100\sum_{j<k<l} x_i^8x_j^4x_k^4x_l^4;$$

Формы J_8, J_{12}, J_{20} — базисные инварианты, поскольку $J_{20}\neq cJ_8J_{12}$. Форма

$$J_{24}=3075\sum x_i^{24}+31878\sum x_i^{20}x_j^4+2206413\sum x_i^{16}x_j^8+$$
$$+8112468\sum_{i<j} x_i^{12}x_j^{12}+301070\sum_{j<k} x_i^{16}x_j^4x_k^4+7827820\sum x_i^{12}x_j^8x_k^4+$$
$$+55353870\sum_{i<j<k} x_i^8x_j^8x_k^8+70840\sum_{j<k<l} x_i^{18}x_j^2x_k^2x_l^2+$$
$$+14451360\sum_{k<l} x_i^{14}x_j^6x_k^2x_l^2+68884816\sum_{\substack{i<j\\k<l}} x_i^{10}x_j^{10}x_k^2x_l^2+$$
$$+547947400\sum_{j<k<l} x_i^{12}x_j^4x_k^4x_l^4+38\ 4770900\sum_{\substack{i<j\\k<l}} x_i^8x_j^8x_k^4x_l^4+$$
$$+30137107\sum_{j<k} x_i^{10}x_j^6x_k^6x_l^2+13501423936\prod x_i^6.$$

Пусть

$$J_{24}=a_1J_8^3+a_2J_{12}^2. \tag{5}$$

Приравняв соответствующие коэффициенты при x_1^{24}, $x_1^{20}x_2^4$, x_1^{16} получим несовместную систему линейных уравнений $a_1 + a_2 = 3075$, $7a_1 - 11a_2 = 5313$, $197a_1 + 363a_2 = 735471$. Следовательно, равенство (5) не выполняется, J_{24} — базисный инвариант (см. [2]). Возьмем, например, инвариант

$$\begin{aligned} J_{32} = {} & 308603 \sum x_i^{32} + 677288 \sum x_i^{28}x_j^4 + 198106740 \sum x_i^{24}x_j^8 + \\ & + 4252691352 \sum x_i^{20}x_j^{12} + 11321038242 \sum_{i<j} x_i^{16}x_j^{16} + \\ & + 1692600 \sum_{j<k} x_i^{24}x_j^4x_k^4 + 256936680 \sum x_i^{20}x_j^8x_k^4 + \\ & + 2514865080 \sum x_i^{16}x_j^{12}x_k^4 + 17783688780 \sum_{j<k} x_i^{16}x_j^8x_k^8 + \\ & + 65386492080 \sum_{i<j} x_i^{12}x_j^{12}x_k^8 + 187488 \sum_{j<k<l} x_i^{26}x_j^2x_k^2x_l^2 + \\ & + 186863040 \sum_{k<l} x_i^{22}x_j^6x_k^2x_l^2 + 6509062560 \sum_{k<l} x_i^{18}x_j^{10}x_k^2x_l^2 + \\ & + 19897833600 \sum_{\substack{i<j \\ k<l}} x_i^{14}x_j^{14}x_k^2x_l^2 + 91126875840 \sum_{j<k} x_i^{18}x_j^6x_k^6x_l^2 + \\ & + 1327848762240 \sum x_i^{14}x_j^{10}x_k^6x_l^2 + 6329412433344 \sum_{i<j<k} x_i^{10}x_j^{10}x_k^{10}x_l^2 + \\ & + 17985567600 \sum_{j<k<l} x_i^{20}x_j^4x_k^4x_l^4 + 1244858214600 \sum_{k<l} x_i^{16}x_j^8x_k^4x_l^4 + \\ & + 4577054445600 \sum_{\substack{i<j \\ k<l}} x_i^{12}x_j^{12}x_k^4x_l^4 + 32366313579600 \sum_{j<k} x_i^{12}x_j^8x_k^8x_l^4 + \\ & + 18589882671360 \sum_{j<k<l} x_i^{14}x_j^6x_k^6x_l^6 + 88611774066816 \sum_{\substack{i<j \\ k<l}} x_i^{10}x_j^{10}x_k^6x_l^6 + \\ & + 228876074598600 \prod x_i^8. \end{aligned}$$

Его можно записать так:

$$\begin{aligned} 84812805 J_{32} = {} & -9401583207049 J_8^4 + 57699419568 J_{12} J_{20} + \\ & + 10364330304 J_8 J_{24} - 3623072701472 J_{12}^2 J_8. \end{aligned}$$

Отметим, что $EW(N_4)$ содержит импримитивную подгруппу $G(4, 4, 4)$, порожденную отражениями второго порядка относительно гиперплоскостей с уравнениями (4). Формы $\sum x_i^4$, $\sum\limits_{i<j} x_i^4 x_j^4$, $\sum\limits_{i<j<k} x_i^4 x_j^4 x_k^4$ и $x_1x_2x_3x_4$ образуют базис алгебры $I(G(4, 4, 4))$, которая содержит все инварианты группы $EW(N_4)$ [3]. Этим объясняется отсутствие в развернутом виде форм (1), если $G = EW(N_4)$, одночленов вида $x_i^{m_l-p-q}x_j^p x_k^q$, $x_i^{m_l-p}x_j^p$, где p, q делятся на 2, но не делятся на 4 ($l = \overline{1, 4}$); например, $x_1^6 x_2^2$ в форме $J_8(EW(N_4))$.

3. Группа симметрий $W(L_4)$ правильного комплексного многогранника $3(24)3(24)3(24)3$ имеет порядок $216.6!$ [3]. Она порож-

…на отражениями третьего порядка относительно 40 его гиперплоскостей симметрии с уравнениями $x_i = 0$, $x_1 + \omega^p x_2 + \omega^q x_3 = 0$, $x_1 - \omega^p x_2 - \omega^q x_4 = 0$, $x_1 - \omega^p x_3 + \omega^q x_4 = 0$, $x_2 - \omega^p x_3 - \omega^q x_4 = 0$ ($i = \overline{1, 4}$; $p, q = \overline{1, 3}$; ω — первообразный корень третьей степени из единицы). Множество σS состоит из векторов $\omega^h \varepsilon e_i$, $\frac{\omega^h}{\sqrt{3}}(e_1 + \omega^p e_2 + \omega^q e_3)$, $\frac{\omega^h}{\sqrt{3}}(e_1 - \omega^p e_2 - \omega^q e_4)$, $\frac{\omega^h}{\sqrt{3}}(e_1 - \omega^p e_3 + \omega^q e_4)$, $\frac{\omega^h}{\sqrt{3}}(e_2 - \omega^p e_3 - \omega^q e_4)$ $(h = \overline{1, 3})$.

Так как $m_i = 12, 18, 24, 30$ [1], то рассмотрим формы (1) при $r = 6, 9, 12, 15$. Имеем:

$$J_{12} = \sum x_i^{12} + 22 \sum_{i<j} x_i^6 x_j^6 + 220 \sum_{i<k} (-1)^\rho x_i^3 x_j^6 x_k^3; \quad J_{18} = \sum x_i^{18} -$$
$$- 17 \sum x_i^{12} x_j^6 - 170 \sum_{i<k} (-1)^\rho x_i^3 x_j^{12} x_k^3 - 1870 \sum (-1)^\rho x_i^9 x_j^6 x_k^3 -$$
$$- 7854 \sum_{i<j<k} x_i^6 x_j^6 x_k^6; \quad J_{24} = 111 \sum x_i^{24} + 506 \sum x_i^{18} x_j^6 +$$
$$+ 10166 \sum_{i<j} x_i^{12} x_j^{12} + 5060 \sum_{i<k} (-1)^\rho x_i^3 x_j^{18} x_k^3 + 206448 \sum (-1)^\rho x_i^{15} x_j^6 x_k^3 +$$
$$+ 1118260 \sum (-1)^\rho x_i^9 x_j^{12} x_k^3 + 4696692 \sum_{j<k} x_i^{12} x_j^6 x_k^6 +$$
$$+ 12300860 \sum_{i<k} (-1)^\rho x_i^9 x_j^6 x_k^9; \quad J_{30} = 584 \sum x_i^{30} - 435 \sum x_i^{24} x_j^6 -$$
$$- 63365 \sum x_i^{18} x_j^{12} - 4350 \sum_{i<k} (-1)^\rho x_i^3 x_j^{24} x_k^3 - 440220 \sum (-1)^\rho x_i^{21} x_j^6 x_k^3 -$$
$$- 6970150 \sum (-1)^\rho x_i^9 x_j^{18} x_k^3 - 25852920 \sum (-1)^\rho x_i^{15} x_j^{12} x_k^3 -$$
$$- 29274630 \sum_{j<k} x_i^{18} x_j^6 x_k^6 - 284382120 \sum (-1)^\rho x_i^{15} x_j^6 x_k^9 -$$
$$- 588153930 \sum_{i<j} x_i^{12} x_j^{12} x_k^6 - 1540403150 \sum_{i<k} (-1)^\rho x_i^9 x_j^{12} x_k^9.$$

Здесь $i, j, k = \overline{1, 4}$; при этом $\rho = 2$, если i, j, k принимают соответствующие значения троек чисел (2, 1, 4), (4, 1, 2), (1, 3, 4), (4, 3, 1), (3, 2, 4), (4, 2, 3) или значения любой перестановки чисел 1, 2, 3; $\rho = 1$, если i, j, k принимают значения оставшихся перестановок троек чисел (1, 2, 4), (1, 4, 3), (2, 3, 4). Как и в случае 2, убеждаемся, что формы J_{2r} $(r = 6, 9, 12, 15)$ образуют базис алгебры $I(W(L_4))$. Возьмем, например, инвариант

$$J_{42} = 4542 \sum x_i^{42} - 41 \sum x_i^{36} x_j^6 - 86428 \sum x_i^{30} x_j^{12} - 2764425 \sum x_i^{24} x_j^{18} -$$
$$- 410 \sum_{i<k} (-1)^\rho x_i^3 x_j^{36} x_k^3 - 146370 \sum (-1)^\rho x_i^{33} x_j^6 x_k^3 -$$
$$- 9507080 \sum (-1)^\rho x_i^9 x_j^{30} x_k^3 - 175448840 \sum (-1)^\rho x_i^{27} x_j^{12} x_k^3 -$$
$$- 1127885400 \sum (-1)^\rho x_i^{15} x_j^{24} x_k^3 - 2797598100 \sum (-1)^\rho x_i^{21} x_j^{18} x_k^3 -$$
$$- 39929736 \sum_{j<k} x_i^{30} x_j^6 x_k^6 - 25659392850 \sum x_i^{24} x_j^{12} x_k^6 -$$

$$- 192993724 \sum (-1)^{\rho} x_i^{27} x_j^6 x_k^9 - 114142002480 \sum (-1)^{\rho} x_i^{21} x_j^6 x_k^{15} -$$
$$- 186040273650 \sum_{i<j} x_i^{18} x_j^{18} x_k^6 - 67203171750 \sum_{i<k} (-1)^{\rho} x_i^9 x_j^{24} x_k^9 -$$
$$- 618269180100 \sum (-1)^{\rho} x_i^{21} x_j^{12} x_k^9 - 1807248372600 \sum (-1)^{\rho} x_i^{15} x_j^{18} x_k^9 -$$
$$- 3737718225150 \sum_{j<k} x_i^{18} x_j^{12} x_k^{12} - 6703248509280 \sum_{i<k} (-1)^{\rho} x_i^{15} x_j^{12} x_k^{15}.$$

Он имеет вид: $5341160 J_{42} = 25636374 J_{12} J_{30} + 130017535 J_{18} J_{24} - 5144040081 J_{12}^2 J_{18}$.

Теорема доказана.

Примечание. Другой способ нахождения базисных инвариантов F_{m_i} группы $W(L_4)$ рассмотрен в статье [4] (см. [5, с. 155]). С точностью до постоянного множителя

$$F_{12} = J_{12}, \quad F_{18} = J_{18}, \quad F_{24} = \sum x_i^{18} x_j^6 + 10 \sum_{i<j} x_i^{12} x_j^{12} +$$
$$+ 10 \sum_{i<k} (-1)^{\rho} x_i^3 x_j^{18} x_k^3 - 36 \sum (-1)^{\rho} x_i^{15} x_j^6 x_k^3 - 10 \sum (-1)^{\rho} x_i^9 x_j^{12} x_k^3 +$$
$$+ 180 \sum_{j<k} x_i^{12} x_j^6 x_k^6 - 110 \sum_{i<k} (-1)^{\rho} x_i^9 x_j^6 x_k^9 + 2220 x_1^3 x_2^3 x_3^3 x_4^3 \sum (-1)^{\delta} x_i^9 x_j^3 -$$
$$- 14652 x_1^6 x_2^6 x_3^6 x_4^6, \quad F_{30} = -\sum x_i^{24} x_j^6 + 49 \sum x_i^{18} x_j^{12} -$$
$$- 10 \sum_{i<k} (-1)^{\rho} x_i^3 x_j^{24} x_k^3 + 156 \sum (-1)^{\rho} x_i^{21} x_j^6 x_k^3 - 450 \sum (-1)^{\rho} x_i^9 x_j^{18} x_k^3 -$$
$$- 722 \sum_{j<k} x_i^{18} x_j^6 x_k^6 + 136 \sum (-1)^{\rho} x_i^{15} x_j^{12} x_k^3 + 1496 \sum (-1)^{\rho} x_i^{15} x_j^6 x_k^9 -$$
$$- 1870 \sum_{i<j} x_i^{12} x_j^{12} x_k^6 - 170 \sum_{i<k} (-1)^{\rho} x_i^9 x_j^{12} x_k^9 + 5840 x_1^3 x_2^3 x_3^3 x_4^3 \times$$
$$\times (2 \sum (-1)^{\delta} x_i^{15} x_j^3 + 17 \sum (-1)^{\rho} x_i^9 x_j^6 x_k^3) - 357408 x_1^6 x_2^6 x_3^6 x_4^6 \sum x_i^6;$$

i, j, k, ρ принимают те же значения, что и в $J_{m_i}(W(L_4))$; $\delta = 2$ при $(i, j) = (1, 2), (2, 3), (3, 1), (4, 1), (4, 3), (4, 2)$ и $\delta = 1$ в остальных случаях. При этом имеют место такие соотношения: $4378 F_{24} = -J_{24} + 111 J_{12}^2$, $3355 F_{30} = J_{30} - 584 J_{12} J_{18}$.

Инварианты вида (1) вещественных примитивных групп F_4, H_4 изучались в [6, 7].

Список литературы: 1. *Cohen A. M.* Finite complex reflection groups. — Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 1976, 4, p. 379—436. 2. *Рудницкий О. И.* Базисные инварианты унитарной группы $EW(N_4)$. — Тез. докл. Всесоюз. школы по теории функций, посвященной 100-летию со дня рождения акад. Н. Н. Лузина. Кемерово, 1983, с. 94. 3. *Shephard G. C. and Todd J. A.* Finite unitary reflection groups. — Canad. J. Math., 1954, **6**, № 2, p. 274—304. **4.** *Maschke H.* Aufstellung des vollen Formensystems einer quaternaren Gruppe von 51840 linearen Substitution. — Mathematische Annalen, 1889, 33, s. 317—344. 5. *Coxeter H. S. M.* Regular complex polytopes. London Cambridge Univ. Press., 1974.—185 p. **6.** *Игнатенко В. Ф., Лейбин А. С.* Об алгебраических поверхностях в E^4 с симметрией правильных четырехмерных симплекса и 600-гранника. — Укр. геометр. сб., 1971, вып. 11, с. 26.—31. **7.** *Игнатенко В. Ф.* Геометрия алгебраических поверхностей с симметриями. — Проблемы геометрии (Итоги науки и техн., ВИНИТИ АН СССР), 1980, вып. 11, с. 203—240.

Поступила в редколлегию 05. 10. 83.

УДК 513

Л. Н. Сергиенко

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ О ПОСТРОЕНИИ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

1. По терминологии С. Ли уравнением Монжа называется уравнение вида

$$\Phi(x_i;\ dx_i) = 0, \tag{1}$$

однородное степени $k > 1$ относительно дифференциалов [1]. Здесь и всюду в дальнейшем $i = 1,\ 2, \ldots,\ n$; функция Φ является дважды непрерывно дифференцируемой.

Геометрически монжево уравнение подчиняет каждой точке пространства $A(x_i)$ гиперконус Монжа, прямолинейные образующие которого служат касательными к интегральным кривым монжева уравнения, проходящим через вершину A гиперконуса Монжа. Уравнение этого гиперконуса

$$\Phi(x_i; X_i - x_i) = 0. \tag{2}$$

Гиперплоскость, касательная к гиперконусу Монжа вдоль образующей (x_i'), по (2) определяется уравнением

$$\sum_{k=1}^{n} \Phi_{x_k'}(X_k - x_k) = 0. \tag{3}$$

С. Ли указывал, что каждому уравнению $\Phi(x, y, z; dx, dy, dz) = 0$ в трехмерном евклидовом пространстве соответствует нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка $F(x, y, z; p, q) = 0$ и обратно [1]. М. А. Николаенко показала, как осуществить переход от монжева уравнения (1) к уравнению

$$F(x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n;\ \ p_1,\ p_2, \ldots,\ p_{n-1}) = 0, \tag{4}$$

где $p_j = \frac{\partial x_n}{\partial x_j}$, $j = 1,\ 2, \ldots,\ n-1$, и обратно [2]. В работе [2], используя то, что характеристические линии уравнения (4) являются интегральными кривыми уравнения (1), получены также дифференциальные уравнения характеристических линий непосредственно по уравнению Монжа. А именно, доказана

Теорема. *Характеристики монжева уравнения в n переменных определяются самим уравнением* (1) *и системой из $n-2$ независимых обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка*

$$\begin{vmatrix} \Phi_{x_a} & \Phi_{x_a'} & (\Phi_{x_a'})' \\ \Phi_{x_b} & \Phi_{x_b'} & (\Phi_{x_b'})' \\ \Phi_{x_k} & \Phi_{x_k'} & (\Phi_{x_k'})' \end{vmatrix} = 0, \tag{5}$$

где a, $в$ — фиксированные числа от 1 до n, $a \neq в$; $к$ принимает все целочисленные значения от 1 до n, кроме значений a и $в$. Число произвольных постоянных интегрирования — $2n-3$.

2. Используем систему дифференциальных уравнений (5) для решения задачи Коши о построении интегральной гиперповерхности дифференциального уравнения в частных производных первого порядка. Задачу Коши поставим следующим образом. В n-мерном евклидовом пространстве дана $(n-2)$-мерная поверхность Ω системой уравнений:

$$\begin{aligned} x_1 &= \omega_1(u_1, \ldots, u_{n-2}); \\ x_2 &= \omega_2(u_1, \ldots, u_{n-2}); \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= \omega_n(u_1, \ldots, u_{n-2}). \end{aligned}$$

Найти решение дифференциального уравнения в частных производных первого порядка (4), содержащее эту $(n-2)$-поверхность [3].

Воспользовавшись формулами перехода от нелинейного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка к уравнению Монжа

$$\frac{F_{p_1}}{x_1'} = \frac{F_{p_2}}{x_2'} = \cdots = \frac{F_{p_{n-1}}}{x_{n-1}'}, \sum_{k=1}^{n-1} p_k x_k' - x_n' = 0,$$

полученными в работе [2], преобразуем уравнение (4) в соответствующее ему уравнение Монжа (1).

Каждая точка Q $(n-2)$-мерной поверхности Ω служит вершиной гиперконуса Монжа (2), соответствующего полученному монжеву уравнению. Эти гиперконусы вдоль $(n-2)$-поверхности Ω образуют $(n-2)$-параметрическое множество.

Пусть ω — касательная $(n-2)$-мерная плоскость поверхности Ω в некоторой точке Q; V — гиперконус Монжа с вершиной в точке Q. Через касательную плоскость ω к поверхности Ω проведем гиперплоскость α, касательную к гиперконусу V. При этом, если класс гиперконуса Монжа равен r, то через каждую касательную $(n-2)$-плоскость ω проходит r гиперплоскостей, касательных к соответствующему гиперконусу Монжа вдоль r его образующих.

Каждая из этих образующих определяет одну характеристическую линию. Полученные таким образом характеристические линии образуют r интегральных гиперповерхностей (r — порядок гиперконуса Монжа) нелинейного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка (4), проходящих через $(n-2)$-поверхность Ω.

Итак, пусть

$$\begin{aligned} x_1 &= \psi_1(x_n, C_1, \ldots, C_{2n-3}); \\ x_2 &= \psi_2(x_n, C_1, \ldots, C_{2n-3}); \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n-1} &= \psi_{n-1}(x_n, C_1, \ldots, C_{2n-3}) \end{aligned} \tag{6}$$

— уравнения характеристических линий, полученные в результате интегрирования системы уравнений (1), (5).

Касательная к поверхности Ω плоскость ω лежит в гиперплоскости α, касательной к гиперконусу Монжа. Поэтому любой вектор, принадлежащий плоскости ω, ортогонален нормали к гиперплоскости α. Следовательно,

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n} \omega_{ku_1} \Phi_{x'_k} = 0; \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ &\sum_{k=1}^{n} \omega_{ku_{n-2}} \Phi_{x'_k} = 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Исключив $3n-5$ величин $u_1, u_2, \ldots, u_{n-2}, C_1, C_2, \ldots, C_{2n-3}$ из $3n-4$ уравнений (6), (7) и

$$\begin{aligned} \omega_1(u_1, \ldots, u_{n-2}) &= \psi_1(\omega_n(u_1, \ldots, u_{n-2}), C_1, \ldots, C_{2n-3}); \\ \omega_2(u_1, \ldots, u_{n-2}) &= \psi_2(\omega_n(u_1, \ldots, u_{n-2}), C_1, \ldots, C_{2n-3}); \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \omega_{n-1}(u_1, \ldots, u_{n-2}) &= \psi_{n-1}(\omega_n(u_1, \ldots, u_{n-2}), C_1, \ldots, C_{2n-3}), \end{aligned} \tag{8}$$

получим искомые интегральные поверхности нелинейного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка.

3. Пример. Рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка в четырехмерном евклидовом пространстве. Пусть

$$F(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,;\ p_1,\ p_2,\ p_3) = x_4^2\,(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) - 1, \tag{9}$$

здесь $p_1 = \partial x_4/\partial x_1,\ p_2 = \partial x_4,/\partial x_2,\ p_3 = \partial x_4/\partial x_3$.

Найдем интегральные гиперповерхности этого дифференциального уравнения, проходящие через двумерную поверхность Ω, которая задана системой уравнений

$$x_1 = u;\ x_2 = v;\ x_3 = u + v;\ x_4 = 0. \tag{10}$$

Уравнению (9) соответствует уравнение Монжа

$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 - x_4^2\ x_4'^2 = 0. \tag{11}$$

Найдем характеристические линии уравнения (11). Дифференциальные уравнения характеристических линий (5), если a и b дать значения, соответственно, 4 и 1, примут вид

$$\begin{vmatrix} x_4\, x_4'^2 & x_4^2\, x_4' & 2\, x_4\, x_4'^2 + x_4^2\, x_4'' \\ 0 & x_1' & x_1'' \\ 0 & x_2' & x_2'' \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} x_4\, x_4'^2 & x_4^2\, x_4' & 2x_4\, x_4'^2 + x_4^2\, x_4'' \\ 0 & x_1' & x_1'' \\ 0 & x_3' & x_3'' \end{vmatrix} = 0.$$

Примем за независимую переменную x_1, проинтегрируем полученные дифференциальные уравнения и найдем $x_2 = C_1 x_1 + C_2$, $x_3 = C_3 x_1 + C_4$, где C_1, C_2, C_3, C_4 — некоторые постоянные.

Подставив найденные значения x_2 и x_3 в уравнение Монжа (11), получим $1 + C_1^2 + C_3^2 - x_4^2 x_4'^2 = 0$. Решив последнее дифференциальное уравнение, найдем характеристические линии уравнения Монжа (11) в явном виде:

$$x_2 = C_1 x_1 + C_2;\ x_3 = C_3 x_1 + C_4;\ x_4^2 = 2\sqrt{1 + C_1^2 + C_3^2}\, x_1 + C_5, \tag{12}$$

C_5 — некоторая постоянная.

Система уравнений (7) для этого примера запишется следующим образом:

$$1 + C_3 = 0,\ C_1 + C_3 = 0. \tag{13}$$

И, наконец, система уравнений (8) примет вид

$$\begin{gathered} v = C_1 u + C_2;\ u + v = C_3 u + C_4; \\ 0 = 2\sqrt{1 + C_1^2 + C_3^2}\, u + C_5. \end{gathered} \tag{14}$$

Из системы восьми уравнений (12) — (14) исключим семь величин u, v, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5. Получим две интегральные гиперповерхности нелинейного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка (9), проходящие через двумерную плоскость (10):

$$x_4 = \mu\sqrt{x_1 + x_2 - x_3},\ x_4 = -\mu\sqrt{x_1 + x_2 - x_3}, \text{ где } \mu = \sqrt{2/\sqrt{3}}.$$

Список литературы: 1. *Lie S.* Geometrie der Berührungstransformationen. B. I — Leipzig, 1896. — 696 S. 2. *Николаенко М. А.* Характеристики монжева уравнения в многомерном пространстве. — Укр. геометр. сб. 1966, вып. 3, с. 72 — 77. 3. *Гюнтер Н. М.* Интегрирование уравнений первого порядка в частных производных. — М.: ГОНТИ, 1934. — 360 с.

Поступила в редколлегию 08.06.83.

УДК 513.813

С. А. Щербаков

ОБ АКСИОМЕ ВИДИМОСТИ ДЛЯ ДВУМЕРНОГО МНОГООБРАЗИЯ АДАМАРА

В работе [1] для многообразия Адамара (т. е. для полного односвязного гладкого риманова многообразия размерности $n \geqslant 2$ с неположительными секционными кривизнами) сформулирована аксиома видимости. С помощью ограничений на секционные кривизны (см. [2, лемма 9.10] и [1, предложение 5.9]) получены достаточные условия, при которых многообразие Адамара удовлетворяет аксиоме видимости.

Цель работы — показать, что для размерности $n = 2$ справедливость этой аксиомы обеспечивается поведением геодезических в окрестности бесконечно удаленных точек многообразия Адамара.

1. Основные понятия и формулировка теоремы 1.1. Пусть M — двумерное многообразие Адамара, т. е. полное, односвязное гладкое риманово многообразие размерности $n = 2$, гауссова кривизна которого $K \leqslant 0$. Обозначим через $M(\infty)$ множество бесконечно удаленных точек многообразия M, т. е. множество классов асимптотических геодезических лучей на M.

Напомним, что геодезические $\alpha, \beta: [0, \infty) \to M$ называются асимптотическими, если существует постоянная $c > 0$ такая, что $\rho(t) = d(\alpha(t), \beta(t)) \leqslant c$ для всех $t \geqslant 0$, где параметр t — длина дуги на геодезических α и β, отсчитываемая от точек $\alpha(0)$ и $\beta(0)$ в направлении касательных векторов $\alpha'(0)$ и $\beta'(0)$ соответственно; d — риманова метрика M.

Известно (см., например, [2]), что для асимптотических α и β функция ρ монотонно убывает с ростом t. Более того, функции $\rho_\alpha(t) = d(\alpha, \beta(t))$, $\rho_\beta(t) = d(\alpha(t), \beta)$ являются непрерывными выпуклыми функциями и существует предел

$$\lim_{t\to\infty} \rho_\alpha(t) = \lim_{t\to\infty} \rho_\beta(t) = \inf_{s\in R^+,\, t\in R^+} \{d(\alpha(s), \beta(t))\} = d(\alpha, \beta), \quad (1.1)$$

который называется расстоянием между асимптотическими α и β.

Определение 1. *Точка $z \in M(\infty)$ называется нулевой бесконечно удаленной точкой многообразия M, если $d(\alpha, \beta) = 0$ для любых двух геодезических α, β из класса z.*

1.2. Для $p \in M$ и $z \in M(\infty)$ через $\gamma_{pz}: [0, \infty) \to M$ обозначим единственный геодезический луч такой, что $\gamma_{pz}(0) = p$, $\gamma_{pz}(\infty) = z$. Запись $\gamma(\infty) = z$ используется вместо $\gamma \in z$. Пусть t — длина дуги на γ_{pz}, отсчитываемая от p в направлении z. Хорошо известно (см., например, [3]), что геодезические окружности с центром в точках $\gamma_{pz}(t)$, проходящие через p, сходятся при $t \to \infty$ к орициклу $\Omega(p, z)$ с центром в z, проходящему через p.

1.3. Пусть $z \in M(\infty)$ и Ω — некоторый орицикл с центром в z. Под орициклической областью $G(z, \Omega)$ с центром в z и с границей Ω будем понимать множество точек геодезических лучей γ_{qz} с началом в точках $q \in \Omega$.

1.4. Пусть TM_p — касательное пространство к M в точке $p \in M$. Для $p \neq q$ из M через $\gamma_{pq}: [0, d(p, q)] \to M$ обозначим единственную геодезическую такую, что $\gamma_{pq}(0) = p$ и $\gamma_{pq}(d(p, q)) = q$. Пусть $\gamma'_{pq}(0)$ — касательный вектор к γ_{pq} в точке p. Положим $\overline{M} = M \cup M(\infty)$. Для $p \in M$ и $x, y \in \overline{M}$ через $\measuredangle_p(x, y)$ обозначим $\measuredangle(\gamma'_{px}(0), \gamma'_{py}(0))$, где $\measuredangle(v, w)$ — угол между векторами $v, w \in TM_p$.

1.5. Пусть $p \in M$ и $S(p)$ — единичная окружность в TM_p с центром в p. Для $v \in S(p)$ через γ_v обозначим геодезическую с начальными условиями $\gamma_v(0) = p$ и $\gamma'_v(0) = v$, а через $K_v(t)$ — значение гауссовой кривизны M в точке $\gamma_v(t)$. Здесь t — длина дуги на γ_v, отсчитываемая от точки p в направлении вектора v.

1.6. Определение 2. *Многообразие M удовлетворяет аксиоме видимости, если для любого $\varepsilon > 0$ и каждой точки $p \in M$ существует число $r = r(p, \varepsilon)$ такое, что $\measuredangle_p(\sigma(a), \sigma(b)) \leqslant \varepsilon$ для любой геодезической $\sigma: [a, b] \to M$, удаленной от p на расстояние $d(p, \sigma) \geqslant r$.*

Замечание 1. Случай $a = -\infty$ и $b = +\infty$ не исключается.

1.7. **Теорема.** *Пусть M — многообразие Адамара размерности 2. Если для любых асимптотических геодезических α и β имеет место равенство $d(\alpha, \beta) = 0$, то многообразие M удовлетворяет аксиоме видимости.*

2. Вспомогательные соотношения. Доказательство теоремы приводится в п. 3 и опирается на ряд утверждений, обсуждаемых в настоящем параграфе. Они сформулированы в виде лемм 1, 2, 3.

2.1. Повторяя приведенные в работе [4] построения, нетрудно показать, что в орициклической области $G(z, \Omega)$ с центром в $z \in M(\infty)$ и с границей Ω можно ввести орициклическую систему координат — полугеодезическую, геодезическими которой являются асимптотические из класса z, а ортогональными к ним кривыми — орициклы с центром в z. Здесь Ω — некоторый орицикл с центром в z. Пусть $p \in \Omega$ и $v \in TM_p$ такой, что $v \perp \gamma'_{pz}(0)$. Через u обозначим длину дуги на Ω, отсчитываемую от p в направлении v. Тогда линейный элемент метрики d в орициклических координатах (t, u) имеет вид

$$ds^2 = dt^2 + B^2(t, u)\, du^2, \tag{2.1}$$

причем

$$B(0, u) = 1; \quad \frac{\partial B(t, u)}{\partial t} \leqslant 0; \quad \frac{\partial^2 B(t, u)}{\partial t^2} \geqslant 0 \tag{2.2}$$

и при всех $u \in R^1$ существуют пределы $\lim\limits_{t \to \infty} B(t, u) < 1$ и $\lim\limits_{t \to \infty} \frac{\partial B(t, u)}{\partial t} = 0$.

Отметим, что орицикл Ω задается в орициклических координатах (t, u) уравнением $t = 0$. Поэтому любая точка $q \in \Omega$ имеет координаты $(0, u)$. Обозначим геодезический луч γ_{qz} через γ_u.

2.2. Положим

$$h_a(t) = \int\limits_0^a B(t, u)\, du \tag{2.3}$$

для каждого $a \in R^1$.

Лемма 1. *Предположим, что $z \in M(\infty)$ — нулевая бесконечно удаленная точка M. Тогда $\lim\limits_{t \to \infty} h_a(t) = 0$ для всех $a \in R^1$.*

Доказательство. Возьмем произвольное $a \in R^+$. По условию леммы,

$$d(\gamma_0, \gamma_a) = 0. \tag{2.4}$$

Пусть $t_1 > 0$. Выберем $t_2 > t_1$ таким, что

$$\rho r_a(t_2) = d(\gamma_a, \gamma_0(t_1)) = d(\gamma_0(t_1), \gamma_a(t_2)). \tag{2.5}$$

Положим $p_1 = \gamma_0(t_1)$, $p_2 = \gamma_0(t_2)$, $q_1 = \gamma_a(t_1)$ и $q_2 = \gamma_a(t_2)$. Обозначим геодезическую $\gamma_{p_1 q_2}$ через σ_1. В силу (2.5) длина σ_1 равна $\rho r_a(t_1)$ и поэтому $\alpha_2 = \measuredangle_{q_2}(p_1, q_1) = \pi/2$. Ясно, что $\beta_0 = \measuredangle_{p_1}(p_2, q_2) < \pi/2$. Пусть параметр s — длина дуги на σ_1, отсчитываемая от точки p_1 в направлении точки q_2; $t = t(s)$, $u = u(s)$ — параметрическое уравнение геодезической σ_1 в орициклических координатах (t, u). Пусть $\beta(s)$ — угол, который геодезическая σ_1 образует с геодезическими лучами γ_u. Известно (см., например, [5]), что

$$\frac{dt}{ds} = \cos\beta(s); \quad \frac{du}{ds} = \frac{\sin\beta(s)}{B(t(s), u(s))}. \tag{2.6}$$

Пусть $s_1, s_2 \in [0, d(p_1, q_2)]$, $s_2 > s_1$. Так как (см., например, [1, с. 52])

$$\measuredangle_{\sigma_1(s_1)}(z, \sigma_1(s_2)) + \measuredangle_{\sigma_1(s_2)}(\sigma_1(s_1), z) \leqslant \pi$$

и

$$\measuredangle_{\sigma_1(s_2)}(\sigma_1(s_1), z) = \pi - \beta(s_2),$$

а

$$\measuredangle_{\sigma_1(s_1)}(z, \sigma_1(s_2)) = \beta(s_1),$$

то $\beta(s_2) \geqslant \beta(s_1)$. Отсюда, учитывая равенство $\beta(d(p_1, q_2)) = \pi/2$, получаем $\sin^{-1}\beta(s) \geqslant 1$ для всех $s \in [0, d(p_1, q_2)]$. Из этого неравенства, используя (2.6), находим

$$\rho r_a(t_1) = \int_0^{\rho r_a(t_1)} ds = \int_0^a \frac{B(\tilde{t}(u), u)}{\sin\tilde{\beta}(u)} du \geqslant \int_0^a B(\tilde{t}(u), u)\, du, \tag{2.7}$$

где $t = \tilde{t}(u)$ — уравнение геодезической σ_1, а $\tilde{\beta}(u) = \beta(s(u))$. В силу (2.2) для каждого $u \in [0, a]$ справедливо неравенство $B(\tilde{t}(u), u) \geqslant B(t_2, u)$, откуда с помощью выражений (2.3), (2.7) получаем

$$\rho r_a(t_1) \geqslant \int_0^a B(t_2, u)\, du = h_a(t_2).$$

Пусть $t_n > t_{n-1}$. Повторяя приведенные рассуждения, приходим к неравенству $\rho r_a(t_{n-1}) \geqslant h_a(t_n)$. Таким образом, можно построить последовательность $t_m \to \infty$ в R^1 при $m \to \infty$ такую, что $\rho r_a(t_m) \geqslant$ $\geqslant h_a(t_{m+1})$.

Принимая во внимание уравнения (1.1) и (2.4), получаем

$$\lim_{t\to\infty} h_a(t) = 0.$$

Для $a \in R^-$ рассуждение проводится аналогично. Тем самым доказательство леммы 1 завершено.

2.3. Пусть в орициклической области $G(z, \Omega)$ введены орициклические координаты (t, u) и линейный элемент метрики d имеет вид уравнения (2.1).

Лемма 2. *Предположим, что* $\lim_{t\to\infty} B(t, u) = 0$ *для некоторого* $u \in R^1$. *Тогда*

$$\int_0^\infty t\,|K(t, u)|\,dt = \infty,$$

где $K(t, u)$ — *значение гауссовой кривизны многообразия* M *в точке с координатами* (t, u).

Доказательство. В орициклических координатах (t, u) уравнение Гаусса (см., например, [4]) имеет вид

$$\frac{\partial^2 B(t, u)}{\partial t^2} + B(t, u)\,K(t, u) = 0,$$

следовательно,

$$\int_0^\infty - tK(t, u)\,dt = \int_0^\infty t\,\frac{\partial^2 B(t, u)}{\partial t^2}\,\frac{dt}{B(t, u)}. \tag{2.8}$$

Возьмем $t_0 > 0$. Согласно выражениям (2.2)

$$\frac{1}{B(t, u)} \geqslant \frac{1}{B(t_0, u)} \tag{2.9}$$

для всех $t \geqslant t_0$. Учитывая (2.8), (2.9), находим

$$\int_{t_0}^\infty - tK(t, u)\,dt \geqslant \frac{1}{B(t_0, u)} \int_{t_0}^\infty t\,\frac{\partial^2 B(t, u)}{\partial t^2}\,dt. \tag{2.10}$$

Оценим снизу интеграл, стоящий в правой части неравенства (2.10), интегрируя его по частям:

$$\int_{t_0}^\infty t\,\frac{\partial^2 B(t, u)}{\partial t^2}\,dt = \frac{\partial B(t, u)}{\partial t}\,t\,\Bigg|_{t_0}^{\infty} - \int_{t_0}^\infty \frac{\partial B(t, u)}{\partial t}\,dt. \tag{2.11}$$

Заметим, что

$$\lim_{t\to\infty} \frac{B(t, u)}{\ln t} = 0, \text{ причем } \lim_{t\to\infty} B(t, u) = 0; \ \lim_{t\to\infty} \ln t = \infty,$$

Следовательно, по правилу Лопиталя,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\partial B(t, u)}{\partial t}\,t = 0.$$

Отсюда, принимая во внимание (2.9) — (2.11), окончательно получаем

$$\int_{t_0}^{\infty} -tK(t,\ u)\,dt \geqslant 1 - \frac{\partial B(t_0,\ u)}{\partial t} \cdot \frac{t_0}{B(t_0,\ u)}.$$

Таким образом,

$$\int_{t_0}^{\infty} -tK(t,\ u)\,dt \geqslant 1.$$

Поэтому

$$\int_{0}^{\infty} t\,|K(t,\ u)|\,dt = \infty,$$

что и завершает доказательство леммы 2.

Замечание 2. Утверждение, аналогичное лемме 2, доказано в [6, с. 23] для гиперболического рога, принадлежащего классу C^2. В приведенном выше доказательстве уточнены многие детали.

2.4. Пусть для $p \in M$ и $v \in S(p)$ геодезическая γ_v и $K_v(t)$ такие, как в п. 1.5.

Лемма 3. *Предположим, что*

$$\int_{0}^{\infty} |K_v(t)|\,t\,dt = \infty$$

для некоторой точки $p \in M$ и всех $v \in S(p)$. Тогда многообразие удовлетворяет аксиоме видимости.

Сформулированная лемма является частным случаем (для размерности 2) предложения 5.9 из работы [1].

Замечание 3. Доказательство предложения 5.9 [1] для размерности 2 существенно упрощается. Похожее сделано в работе [7, теорема 1].

3. Доказательство теоремы 3.1. Рассмотрим точку $p \in M$ и вектор $v \in S(p)$. Пусть $z = \gamma_v(\infty)$ и Ω — орицикл с центром в z, проходящий через p. Введем в орициклической области $G(z,\ \Omega)$ орициклическую систему координат $(t,\ u)$ такую, как в п. 2.1. Так как точка z — нулевая бесконечно удаленная точка M, то применима лемма 1 и, следовательно,

$$\lim_{t \to \infty} \int_{0}^{a} B(t,\ u)\,du = 0$$

для всех $a \in R^1$. Отсюда нетрудно получить соотношение

$$\lim_{t \to \infty} B(t,\ u) = 0$$

справедливое для всех $u \in R^1$. Используя лемму 2, находим

$$\int_0^\infty |K_\gamma(t)|\, t dt = \infty.$$

3.2. Рассуждение п. 3.1 верно для всех $v \in S(p)$. Следовательно, для многообразия M в точке p выполнены все условия леммы 3. Теперь доказываемая теорема непосредственно следует из леммы 3.

Список литературы: 1. *Eberlein P., O'Neill B.* Visibility manifolds.— Pacific J. Math., 1973, **46**, № 1, p. 45—109. **2.** *Bishop R., O'Neill B.* Manifolds of negative curvature.— Trans. Amer. Math. Soc., 1965, **145**, p. 1—49. **3.** *Буземан Г.* Геометрия геодезических.— М.: Физматгиз, 1962. **4.** *Вернер А. Л.* Полугеодезическая координатная сеть на трубках неположительной кривизны.— Тр. матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 1965, **76**, с. 130—140. **5.** *Розендорн Э. Р.* Исследование основных уравнений теории поверхностей в асимптотических координатах.— Матем. сб., 1966, **70**, № 4, с. 490—507. **6.** *Wojtkowsky M.* Geodesics on open surfaces containing horns.— W.: Warszawski Universytet, 1979. **7.** *Щербаков С. А.* Острые орициклические области и невозвращающиеся геодезические.— В кн.: Вопросы глобальной и римановой геометрии. Л.: ЛГПИ им. А. И. Герцена, 1983.

Поступила в редколлегию 08.06.83.

УДК 513

А. Л. Ямпольский

КРИВИЗНА МЕТРИКИ САСАКИ СФЕРИЧЕСКИХ КАСАТЕЛЬНЫХ РАССЛОЕНИЙ

Пусть M^n — n-мерное риманово многообразие. Множество всех касательных к M^n векторов образует с естественной топологией касательное расслоение TM^n с базой M^n, слоем E^n, проекцией π и структурной группой $GL(n)$.

Если рассматривать касательные векторы только единичной длины (или длины $\lambda > 0$), то получим подрасслоение $T_1M^n(T_\lambda M^n)$ касательного расслоения $T M^n$ с базой M^n, слоем S^{n-1} (S_λ^{n-1}), проекцией π_1 и структурной группой $SO(n)$, которое называется сферическим касательным расслоением над M^n. Слой над $x \in M^n$ обозначается M_x^n.

В 1958 г. С. Сасаки [1] построил естественную риманову метрику на TM^n и T_1M^n, положив тем самым начало метрическому изучению сферических касательных расслоений римановых многообразий как самостоятельных объектов. А именно, если (x^i) — локальные координаты в окрестности $U \subset M^n$, то элемент длины TM^n определяется равенством

$$d\sigma^2 = g_{ij}dx^idx^j + g_{ij}Dv^iDv^j; \; i, \; j = 1, \; \ldots, \; n, \tag{1}$$

где g_{ij} — компоненты метрического тензора M^n, $Dv^i = dv^i + \Gamma^i_{jk}v^jdx^k$ — ковариантные диференциалы координат касательного вектора в естественном базисе $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)$.

Координаты (x^i, v^i) есть локальные координаты в TM^n. Как показал П. Домбровский [2], в каждой точке $Z \in TM^n$ имеет место разложение в прямую сумму $TM^n_Z = HTM^n_Z \oplus VTM^n_Z$, где HTM^n_Z, VTM^n_Z — взаимно ортогональные подпространства размерности n, называемые горизонтальным и вертикальным соответственно. Вертикальное подпространство касательно слою.

Каждому векторному полю X на M^n однозначно соответствуют два векторных поля X^h и X^v на TM^n, одно из которых горизонтально, а другое — вертикально [2]. Они называются горизонтальным и вертикальным лифтами соответственно.

Над T_1M^n существует расслоение адаптированных реперов, состоящее из реперов $\{e_1, \dots, e_{n-1}; e_n; f_1, \dots, f_{n-1}\}$ таких, что $e_1, \dots, e_n$ горизонтальны, $f_1, \dots f_{n-1}$ вертикальны, причем e_n — горизонтальный лифт данного (единичного) вектора $Z \in M^n_x$ $x = \pi_1(Z)$ и $d\pi_1 e_i = Kf_i$ $(i = 1, \dots, n-1)$, где K — отображение связности [3,4]. В данной точке $Z \in T_1M^n$ имеет место разложение $T_1M^n_Z = \tilde{H}T_1M^n_Z \oplus L_Z \oplus VT_1M^n_Z$, где $\tilde{H}T_1M^n_Z$ — горизонтальное $(n-1)$-подпространство с базисом $\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$; L_Z — одномерное горизонтальное подпространство $\{e_n\}$; VTM^n_Z—вертикальное $(n-1)$-подпространство $\{f_1, \dots, f_{n-1}\}$.

Если положить $X^i = x^i$, $X^{n+i} = v^i$, то метрику (1) можно представить в виде [1]: $d\sigma^2 = \bar{G}_{IJ} dX^I dX^J$ $I, J = 1, \dots, 2n$, где

$$\begin{gathered} \bar{G}_{ij} = g_{ij} + g_{kl}\Gamma^k_{is}\Gamma^l_{jt}v^s v^t, \\ \bar{G}_{i\,n+j} = \Gamma_{is,\,j}v^s, \ \bar{G}_{n+i\,n+j} = g_{ij}, \ i, j = 1, \dots, n; \end{gathered} \tag{2}$$

T_1M^n задается как подрасслоение TM^n условием единичности касательного вектора: $g_{ij}v^iv^j = 1$ (3). Метрика, индуцированная метрикой (2) и вложением (3), называется метрикой Сасаки T_1M^n.

Сферическое касательное расслоение над многообразием M^n постоянной кривизны K обозначим $T_1(M^n, K)$. Целью данной работы является получение границ изменения секционной кривизны метрики Сасаки $T_1(M^n, K)$. Доказаны

Теорема 1. *Секционная кривизна $\tilde{K}$ метрики Сасаки многообразия $T_1(M^n, K)$ неотрицательна тогда и только тогда, когда* $0 < K \leqslant 4/3$.

Теорема 2. *Секционная кривизна K метрики Сасаки T_1S^n лежит в пределах $0 < \tilde{K} \leqslant 5/4$.*

Теорема 3. *а) Кривизна Риччи $\widetilde{Ric}$ метрики Сасаки многообразия $T_1(M^n, K)$ лежит в пределах*

$$(i)\ n = 2:\ K^2/2 \leqslant \widetilde{Ric} \leqslant K(2-K)/2 \ \text{при}\ 0 < K \leqslant 1;$$

$$K(2-K) \leqslant \widetilde{Ric} \leqslant K^2/2 \ \text{при}\ K \leqslant 0,\ K > 1;$$

(ii) $n \geqslant 3$:

$K(2-K)(n-1)/2 \leqslant \widetilde{Ric} \leqslant K(2(n-1)-K)/2$ при $1 < K \leqslant n-2$;

$K(2-K)(n-1)/2 \leqslant \widetilde{Ric} \leqslant (K^2+2(n-2))/2$ при $K \leqslant 1$, $K > n-2$.

б) Скалярная кривизна $\tilde{R}$ метрики Сасаки многообразия $T_1(M^n, K)$ удовлетворяет неравенству $\tilde{R} \leqslant (n-1)(n^2+2n-4)/2$. Равенство достигается при $K = n$.

В дополнении даны оценки снизу длин замкнутых геодезических метрики Сасаки T_1S^n.

1. Метрика Сасаки $T_1(M^n, K)$ и ее тензор кривизны. Не нарушая общности, можно считать, что $g_{nn} \neq 0$. Тогда (3) определяет дифференцируемое вложение $T_1M^n \to TM^n$ локально задаваемое функцией $v^n = v^n(x^1, \ldots, x^n, v^1, \ldots, v^{n-1})$ **(4)** и $(x^1, \ldots, x^n, v^1, \ldots, v^{n-1})$ представляют собой локальные координаты на T_1M^n, которые будем называть естественными.

Лемма 1. *В естественных координатах метрический тензор T_1M^n имеет вид:*

$$\begin{gathered} G_{ik} = g_{ik} + g_{je}\Gamma^j_{is}\Gamma^l_{kt}v^tv^s + \Gamma_{ti,\,n}v^tA_k + \Gamma_{tk,\,n}v^tA_i + g_{nn}A_iA_k, \\ G_{in+p} = \Gamma_{ti,\,p}v^t + \Gamma_{ti,\,n}v^tB_p + g_{np}A_i + g_{nn}A_iB_p, \\ G_{n+q\ n+p} = g_{qp} + g_{np}B_q + g_{nq}B_p + g_{nn}B_pB_q, \end{gathered} \tag{5}$$

где $B_p = -g_{ip}v^i/g_{in}v^n$,

$A_k = -\dfrac{1}{2g_{in}v^i}\dfrac{\partial g_{st}}{\partial x^k}v^tv^s$ $(i, k, l, s, t = 1, \ldots, n;\ p, q = 1, \ldots, n-1)$.

Доказательство. Дифференцируя (3), получим $d(g_{ij}v^iv^j)=0$, т. е.

$$\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}v^iv^j + 2g_{in}v^i\frac{\partial v^n}{\partial x^k}\right)dx^k + 2\left(g_{ip}v^i + g_{in}v^i\frac{\partial v^n}{\partial v^p}\right)dv^p = 0.$$

Положим

$$A_k = \frac{\partial v^n}{\partial x^k} = -\frac{1}{2g_{in}v^i}\frac{\partial g_{st}}{\partial x^k}v^sv^t, \tag{6}$$

$$B_p = \frac{\partial v^n}{\partial v^p} = -\frac{g_{ip}v^i}{g_{in}v^i}. \tag{7}$$

Метрика T_1M^n по определению индуцирована метрикой (3). Имея в виду (4), (6), (7), легко проверить, что

$$\begin{gathered} G_{ik} = \bar{G}_{ik} + \bar{G}_{2nk}A_i + \bar{G}_{i2n}A_k + \bar{G}_{2n2n}A_iA_k, \\ G_{in+p} = \bar{G}_{in+p} + \bar{G}_{i2n}B_p + \bar{G}_{2nn+p}A_i + \bar{G}_{2n2n}A_iB_p, \\ G_{n+qn+p} = \bar{G}_{n+qn+p} + \bar{G}_{2nn+p}B_q + \bar{G}_{n+q2n}B_p + \bar{G}_{2n2n}B_pB_q. \end{gathered}$$

Подставляя сюда (2), получим (5).

Тензор кривизны метрики (2) был вычислен в [5]. Вычислим тензор кривизны метрики (5). Условимся, что $i, j, k, l, \alpha = 1, \ldots, n$; $p, q, r, t = 1, \ldots, n-1$. В силу симметричности слоя значение тензора кривизны T_1M^n не будет зависеть от «слоевых» координат точки. Поэтому, не нарушая общности, будем вычислять тензора кривизны в точке $(x, 0) \in T_1M^n$. Локальными координатами базы выберем координаты Ферми вдоль геодезической x^n. Тогда в точке $x \in x^n$ будет

$$g_{ij} = \delta_{ij},\ \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = 0,\ -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{nn}}{\partial x^i \partial x^k} = R_{nink},$$
$$\Gamma^i_{jk} = \Gamma_{jk,\,i} = 0,\ \frac{\partial \Gamma_{ni,\,n}}{\partial x^k} = -R_{nink}, \tag{8}$$

где R — тензор кривизны M^n в точке x; δ_{ij} — символ Кронекера. Из условия (8) и равенства (3) следует, что $v^n = 1$ **(9)** в точке $(x, 0)$. С учетом (8) из (6) и (7) легко получить в точке $(x, 0)$:

$$A_k = 0,\ B_p = 0,$$
$$\frac{\partial A_k}{\partial x^j} = R_{nknj},\ \frac{\partial B_p}{\partial x^j} = 0, \tag{10}$$
$$\frac{\partial A_k}{\partial v^q} = 0,\ \frac{\partial B_p}{\partial v^q} = -\delta_{pq}.$$

Наконец, подставляя (8) в (5), получаем

$$G_{ij} = \delta_{ij},\ G_{in+p} = 0,\ \ G_{n+qn+p} = \delta_{pq}. \tag{11}$$

В дальнейшем нам понадобятся первые и вторые частные производные метрики (5) в точке $(x, 0)$. Учитывая (8)—(10), легко убедиться, что

$$\frac{\partial G_{ik}}{\partial x^j} = 0,\ \ \frac{\partial G_{ik}}{\partial v^p} = 0,$$
$$\frac{\partial G_{in+p}}{\partial x^j} = \frac{\partial \Gamma_{ni,\,p}}{\partial x^j},\ \frac{\partial G_{in+p}}{\partial v^q} = 0, \tag{12}$$
$$\frac{\partial G_{n+qn+p}}{\partial x^j} = 0,\ \ \frac{\partial G_{n+rn+p}}{\partial v^q} = 0.$$

$$\frac{\partial^2 G_{ik}}{\partial x^j \partial x^l} = \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^j \partial x^l} + \frac{\partial \Gamma^\alpha_{ni}}{\partial x^j}\frac{\partial \Gamma_{nk,\alpha}}{\partial x^l} + \frac{\partial \Gamma^\alpha_{ni}}{\partial x^l}\frac{\partial \Gamma_{nk,\,\alpha}}{\partial x^j},$$
$$\frac{\partial^2 G_{ik}}{\partial x^j \partial v^p} = 0,\ \frac{\partial^2 G_{ik}}{\partial v^q \partial v^p} = 0,\ \frac{\partial^2 G_{in+p}}{\partial x^j \partial x^l} = \frac{\partial^2 \Gamma_{ni,\,p}}{\partial x^j \partial x^l},$$
$$\frac{\partial^2 G_{in+p}}{\partial x^j \partial v^q} = \frac{\partial \Gamma_{qi,\,p}}{\partial x^j},\ \ \frac{\partial^2 G_{in+p}}{\partial v^r \partial v^q} = 0, \tag{13}$$
$$\frac{\partial^2 G_{n+qn+p}}{\partial x^j \partial x^l} = 0,\ \frac{\partial^2 G_{n+qn+p}}{\partial x^j \partial v^r} = 0,$$
$$\frac{\partial^2 G_{n+qn+p}}{\partial v^t \partial v^r} = \delta_{pr}\delta_{qt} + \delta_{pt}\delta_{qr}.$$

Из (12) для символов Кристоффеля $\tilde{\Gamma}$ многообразия T_1M^n в точке $(x, 0)$ найдем

$$\tilde{\Gamma}_{ij,\,k} = 0,\quad \tilde{\Gamma}_{ij,\,n+p} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Gamma_{ni,\,p}}{\partial x^j} + \frac{\partial \Gamma_{nj,\,p}}{\partial x^i}\right),$$
$$\tilde{\Gamma}_{in+p,\,k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Gamma_{nk,\,p}}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma_{ni,\,p}}{\partial x^k}\right), \tag{14}$$
$$\tilde{\Gamma}_{n+qn+p,\,k} = \tilde{\Gamma}_{in+p,\,n+q} = \tilde{\Gamma}_{n+rn+p,\,n+q} = 0,$$

где Γ — символы Кристоффеля M^n в точке x. Из (11), (13), (14) прямым вычислением получаются следующие компоненты тензора кривизны $\tilde{R}$ многообразия T_1M^n:

$$\tilde{R}_{ijkl} = R_{ijkl} + (1/4)\,(R_{ilna}R^{\alpha}_{nkj} + R_{ikn\alpha}R^{\alpha}_{njl}) + {}$$
$$+ (1/2)\,R_{ijn\alpha}R^{\alpha}_{nkl},$$
$$\tilde{R}_{ijkn+q} = (1/2)\,\nabla_k R_{ijnq},$$
$$\tilde{R}_{ijn+pn+q} = R_{ijpq} + (1/4)\,R_{i\alpha np}R^{\alpha}_{jnq} - (1/4)\,R_{i\alpha nq}R^{\alpha}_{jnp}, \tag{15}$$
$$\tilde{R}_{in+pkn+q} = (1/2)\,R_{ikpq} - (1/4)\,R_{i\alpha nq}R^{\alpha}_{knp},$$
$$\tilde{R}_{in+pn+rn+q} = 0,\quad \tilde{R}_{n+tn+pn+rn+q} = \delta_{tr}\delta_{pq} - \delta_{pr}\delta_{tq}.$$

Отсюда находим для $T_1(M^n, K)$ ненулевые компоненты тензора кривизны:

$$\tilde{R}_{pqpq} = K,\ \tilde{R}_{nqnq} = K(1 - 3K/4),\ \tilde{R}_{pqn+pn+q} =$$
$$= K(1 - K/4),\ \tilde{R}_{pn+pqn+q} = K/2,\ \tilde{R}_{pn+ppn+p} = \tag{16}$$
$$= K^2/_4,\ \tilde{R}_{nn+pnn+p} = K^2/_4,\ \tilde{R}_{qn+pn+qp} =$$
$$= K(1 - K/2)/2,\ \tilde{R}_{n+qn+pn+qn+p} = 1.$$

Действительно, с учетом (8) в этом случае

$$R^i_{jkl} = R_{ijkl} = K\,(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}) = K\,(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}).$$

Подставим это значение в $(15)_1$:

$$\tilde{R}_{ijkl} = K\,(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{ij}\delta_{jk}) + (K^2/4)\sum_{\alpha=1}^{n}\,[(\delta_{in}\delta_{l\alpha} -$$
$$- \delta_{i\alpha}\delta_{ln})\,(\delta_{\alpha k}\delta_{nj} - \delta_{\alpha j}\delta_{nk}) + (\delta_{in}\delta_{k\alpha} - \delta_{i\alpha}\delta_{kn}) \times$$
$$\times (\delta_{\alpha j}\delta_{nl} - \delta_{\alpha l}\delta_{nj}) + 2\,(\delta_{in}\delta_{j\alpha} - \delta_{i\alpha}\delta_{jn})\,(\delta_{\alpha k}\delta_{nl} -$$
$$- \delta_{\alpha l}\delta_{nk})] = K\,(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}) - (3K^2/4)\,(\delta_{ik}\delta_{ln}\delta_{jn} +$$
$$+ \delta_{jl}\delta_{in}\delta_{kn} - \delta_{il}\delta_{jn}\delta_{kn} - \delta_{jk}\delta_{in}\delta_{ln}).$$

Отсюда получим $\tilde{R}_{pqpq} = K$, $\tilde{R}_{nqnq} = K(1 - 3K/4)$. Другие комбинации индексов дают 0. Аналогично получаются и остальные формулы.

2. Секционная кривизна $T_1(M^n, K)$. Пусть X и Y — единичные ортогональные векторы, касательные к $T_1(M^n, K)$ в точке

$(x, 0)$. Секционная кривизна многообразия $T_1(M^n, K)$ в этой точке $\tilde{K} = \tilde{R}_{IJKL} X^I Y^J X^K Y^L$, где $I, J, K, L = 1, \ldots, 2n-1$. С учетом симметрий тензора кривизны получим $\tilde{K} = \tilde{R}_{IJKL}(X^I Y^J - X^J Y^I) \times (X^K Y^L - X^L Y^K)$. Введем в рассмотрение бивектор $S^{IJ} = X^I Y^J - X^J Y^I$. Тогда $\tilde{K} = \tilde{R}_{IJKL} S^{IJ} S^{KL} = \tilde{R}_{AB} S^A S^B$, где $A = (I, J)$, $B = (K, L)$ — собирательные индексы, причем $\sum\limits_A (S^A)^2 = 1$ (17).

Итак, используя (16), находим

$$\tilde{K} = \sum_A \tilde{R}_{AA}(S^A)^2 + 2\sum_{A \neq B} \tilde{R}_{AB} S^A S^B =$$

$$= \sum_{p=1}^{n-2} \sum_{q=p+1}^{n-1} [K(S^{pq})^2 + (S^{n+pn+q})^2 + 2K(1 - K/4) S^{pq} \times \tag{18}$$

$$\times S^{n+pn+q} + K S^{pn+p} S^{qn+q} - K(1 - K/2) S^{pn+q} S^{qn+p}] +$$

$$+ \sum_{p=1}^{n-1} [(K^2/2)(S^{nn+p})^2 + (K^2/2)(S^{pn+p})^2 + K(1 - 3K/4)(S^{pn})^2].$$

Если воспользоваться одним из условий простоты бивектора:

$$S^{pq} S^{n+pn+q} - S^{pn+p} S^{qn+q} + S^{pn+q} S^{qn+p} = 0, \tag{18'}$$

можно убедиться, что справедлива

Лемма 2. *Секционная кривизна метрики Сасаки многообразия $T_1(M^n, K)$ вычисляется по формуле:*

$$\tilde{K} = \sum_{p=1}^{n-2} \sum_{q=p+1}^{n-1} [K(S^{pq})^2 + K(3 - K) S^{pq} S^{n+pn+q} + (S^{n+pn+q})^2] +$$

$$+ (K^2/4)\Big(\sum_{p=1}^{n-1} S^{pn+p}\Big)^2 + \sum_{p=1}^{n-1} [K(1 - 3K/4)(S^{pn})^2 + \tag{19}$$

$$+ (K^2/4)(S^{nn+p})^2],$$

где $S^{IJ} = X^I Y^J - X^J Y^I$ — компоненты простого бивектора, отвечающего двумерной площадке ортонормальных векторов X, Y.

Из леммы 2 легко следует теорема 1. Действительно, пусть $0 \leqslant K \leqslant 4/3$. Тогда $K^2(3 - K)^2 < 4K$ и, следовательно, каждая группа слагаемых (19) неотрицательна. Обратно, если $K < 0$ или $K > 4/3$, то $\tilde{K} < 0$ на таких площадках, у которых $S^{pn} = 1$. Например: $X = (0, \ldots, 0; 1; 0, \ldots, 0)$, $Y = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots 0; 0; 0, \ldots 0)$.

Замечание. Для $n = 2$ результат получен в работе [6].

Рассмотрим (19) как квадратичную форму на единичной сфере (17). Тогда экстремумы $\tilde{K}$ совпадут с наибольшим и наименьшим собственными значениями матрицы коэффициентов (19). В результате можно получить следующие оценки.

Секционная кривизна $\tilde{K}$ метрики Сасаки многообразия $T_1(M^n, K)$ при $n \geqslant 3$ удовлетворяет неравенствам:

$\tilde{K} < (K+1+\sqrt{(K-1)^2+K^2(3-K)^2})/2$ при $-\infty < K < (11+\sqrt{57})/2$; $\tilde{K} < K^2/2$ при $(11+\sqrt{57})/2 \leqslant K < +\infty$; $\tilde{K} \geqslant K(1-3K/4)$ при $-\infty < K < -2(3+\sqrt{39})/5$ и $4/3 \leqslant K < +\infty$; $\tilde{K} \geqslant 0$ при $0 \leqslant K < 4/3$; $\tilde{K} > (K+1-\sqrt{(K-1)^2+K^2(3-K)^2})/2$ при $-2(3+\sqrt{39})/5 \leqslant K < 0$. При $n=2$ имеются точные оценки, а именно: секционная кривизна $\tilde{K}$ метрики Сасаки многообразия $T_1(M^2, K)$ заключена в пределах: $K(1-3K/4) \leqslant \tilde{K} \leqslant K^2/4$ при $K \leqslant 0$, $K \geqslant 1$; $K^2/4 \leqslant \tilde{K} \leqslant K(1-3K/4)$ при $0 \leqslant K \leqslant 1$.

Действительно, при $n=2$ (19) и (17) имеют вид: $\tilde{K} = (K^2/4) \times (S^{23})^2 + (K^2/4)(S^{13})^2 + K(1-3K/4)$ $(S^{12})^2 + (S^{13})^2 + (S^{23})^2 = 1$, так что $\tilde{K} = K^2/4 + K(1-K)(S^{12})^2$, откуда непосредственно получаем требуемое.

Замечание. $T_1(M^2, K)$ есть многообразие постоянной кривизны только для $K=0, 1$. При этом $\tilde{K} = 0, 1/4$ соответственно. Для $K=1$ результат был получен в [7].

Аналогичные результаты имеют место и для $T_\lambda(M^n, K)$. Отметим только:

Лемма 2′. *Секционная кривизна $\tilde{K}$ метрики Сасаки многообразия $T_\lambda(M^n, K)$ вычисляется по формуле*

$$\tilde{K} = \sum_{p=1}^{n-2}\sum_{q=p+1}^{n-1}[K(S^{pq})^2 + K(3-\lambda^2 K)S^{pq}S^{n+pn+q} + (1/\lambda^2)(S^{n+pn+q})^2] + (\lambda^2K^2/4)\Big(\sum_{p=1}^{n-1}S^{pn+p}\Big)^2 + \sum_{p=1}^{n-1}[K(1-3\lambda^2K/4)(S^{pn})^2 + (\lambda^2K^2/4)(S^{nn+p})^2].$$

Теорема 1′. *Секционная кривизна $\tilde{K}$ метрики Сасаки многообразия $T_\lambda(M^n, K)$ неотрицательна тогда и только тогда, когда* $0 \leqslant \lambda^2 K \leqslant 4/3$.

Доказательства такие же, как в случае $\lambda = 1$. При $n=2$ результат был получен в [6]. Легко так же видеть, что если $n=2$ и $\lambda^2 K = 1$, то $\tilde{K} = K/4$, что было ранее получено в [8].

Рассмотрим подробнее случай $K=1$, т. е. когда M^n есть единичная n-сфера. Тогда справедлива

Лемма 2″. *Секционная кривизна $\tilde{K}$ метрики Сасаки T_1S^n равна*

$$\tilde{K} = \sum_{p=1}^{n-2}\sum_{q=p+1}^{n-1}[S^{pq}+S^{n+pn+q}]^2 + (1/4)\Big[\Big(\sum_{p=1}^{n-1}S^{pn+p}\Big)^2 + \sum_{p=1}^{n-1}(S^{pn})^2 + \sum_{p=1}^{n-1}(S^{nn+p})^2\Big]. \tag{20}$$

Доказательство теоремы 2. Пусть X, Y — два ортонормальных вектора, составляющих элементарную касательную к

T_1S^n площадку. Как было показано в п. 1, систему координат T_1S^n можно выбрать так, чтобы в данной точке она была ортогональной. Кроме того, систему координат можно следующим образом адаптировать к данной элементарной площадке.

Пусть $\{e_1, \ldots, e_{n-1}; e_n; f_1, \ldots, f_{n-1}\}$ — адаптированный базис слоя TT_1S^n в точке $(x, 0) \in T_1S^n$. Тогда $(X = \sum\limits_{p=1}^{n-1} x^p e_p + x^n e_n + \sum\limits_{p=1}^{n-1} V^p f_p = \tilde{X} + x^n e_n + V$. В общем случае $\tilde{X} \neq 0$ и $V \neq 0$, так что можно положить $e_1' = \tilde{X}/\|\tilde{X}\|$, $e_1' \in \tilde{H}T_1S^n$, $f_1' = (d\pi_1 \cdot e_1')^v$ $f_1' \in VT_1S^n$. В плоскости векторов f_1' и $V = \sum\limits_{p=1}^{n-1} v^p f_p$ выберем единичный вектор f_2', ортогональный f_1'. Положим $e_2' = (Kf_2')^h$. Тогда $e_2' \in \tilde{H}T_1S^n$. В подпространстве $\tilde{H}T_1S^n$ выберем единичный вектор e_3', ортогональный e_2 и e_1'. Положим $f_3' = (d\pi_1 e_3')$. Продолжая этот процесс, получим базис TT_1S^n, который назовем адаптированным к данной элементарной площадке. В этом базисе

$$\begin{gathered} X = (x^1, 0, \ldots, 0; x^n; v^1, v^2, 0, \ldots, 0), \\ Y = (y^1, y^2, \ldots, y^{n-1}; y^n; w^1, w^2, \ldots, w^{n-1}). \end{gathered} \tag{21}$$

Покажем, что $\tilde{K} \leqslant 5/4$. Из условия (17) находим:

$$1 = \sum_A (S^A)^2 = \sum_{p=1}^{n-2} \sum_{q=p+1}^{n-1} [(S^{pq})^2 + (S^{n+pn+q})^2 + (S^{pn+q})^2 + (S^{qn+p})^2] + \sum_{p=1}^{n-1} [(S^{pn+p})^2 + (S^{pn})^2 + (S^{nn+p})^2].$$

Таким образом,

$$\begin{gathered} 5/4 - \tilde{K} = (5/4) \Big\{ \sum_{p=1}^{n-2} \sum_{q=p+1}^{n-1} [(S^{pq})^2 + (S^{n+pn+q})^2 + (S^{pn+g})^2 + \\ + (S^{qn+p})^2] + \sum_{p=1}^{n-1} [(S^{pn+p})^2 + (S^{pn})^2 + (S^{nn+p})^2] \Big\} - \\ - \sum_{p=1}^{n-2} \sum_{q=p+1}^{n-1} (S^{pq} + S^{n+pn+q})^2 - (1/4) \Big[\Big(\sum_{p=1}^{n-1} S^{pn+p} \Big)^2 + \sum_{p=1}^{n-1} (S^{pn})^2 + \\ + \sum_{p=1}^{n-1} (S^{nn+p})^2 \Big] = \sum_{p=1}^{n-2} \sum_{q=p+1}^{n-1} [(1/4)(S^{pq})^2 + (1/4)(S^{n+pn+q})^2 - \\ - 2S^{pq}S^{n+pn+q} + (5/4)(S^{pn+q})^2 + (5/4)(S^{qn+p})^2 - (1/2) S^{pn+p}S^{qn+q}] + \\ + \sum_{p=1}^{n-1} [(S^{pn+p})^2 + (S^{pn})^2 + (S^{nn+p})^2]. \end{gathered}$$

Пользуясь тождеством (18′), получаем

$$5/4-\tilde K=\sum_{p=1}^{n-2}\sum_{q=p+1}^{n-1}[(S^{pq}-S^{n+pn+q})^2+(5/4)(S^{pn+q})^2+(5/4)(S^{qn+p})^2+$$
$$+(3/2)S^{pn+q}S^{qn+p}]+\sum_{p=1}^{n-1}(S^{pn+p})^2-2\sum_{p=1}^{n-2}\sum_{q=p+1}^{n-1}S^{pn+p}S^{qn+q}$$

Но из (21) следует $S^{pn+p}=0$, $p=3, \ldots, n-1$, откуда $\sum_{p=1}^{n-1}(S^{pn+p})^2-$ $-2\sum_{p=1}^{n-2}\sum_{q=p+1}^{n-1}S^{pn+p}S^{qn+q}=(S^{1n+1})^2+(S^{2n+2})^2-2S^{1n+1}S^{2n+2}=(S^{1n+1}-$ $-S^{2n+2})^2$.

Теперь очевидно, что $5/4-\tilde K\geqslant 0$. Заметим, что $\tilde K=5/4$ при условиях:

$$S^{pq}-S^{n+p\,p+q}=0,\ S^{pn+q}=S^{qn+p}=0,\ S^{1n+1}-$$
$$-S^{2n+2}=0,\ S^{pn}=S^{nn+p}=0, \qquad (22)$$

которые выполняются, например, для векторов

$$X=(1/\sqrt{2},\ 0,\ \ldots,\ 0;\ 0;\ 0,\ 1/\sqrt{2},\ 0,\ \ldots,\ 0),$$
$$Y=(0,\ 1/\sqrt{2},\ 0,\ \ldots,\ 0;\ 0;\ -1/\sqrt{2},\ 0,\ \ldots,\ 0).$$

Неравенство $\tilde K\geqslant 0$ очевидно. Отметим лишь, что равенство достигается при условиях:

$$S^{pq}+S^{n+pn+q}=0,\ S^{1n+1}+S^{2n+2}=0,\ S^{pn}=S^{nn+p}=0, \qquad (23)$$

которые выполняются, например, для векторов

$$X=(1/\sqrt{2},\ 0,\ \ldots,\ 0;\ 0;\ 0,\ 1/\sqrt{2},\ 0,\ \ldots,\ 0),$$
$$Y=(0,\ 1/\sqrt{2},\ 0,\ \ldots,\ 0;\ 0;\ 1/\sqrt{2},\ 0,\ \ldots,\ 0).$$

Покажем, что выбор векторов, указанных в примерах, не случаен. Можно показать, опираясь на [9], что T_1S^3 — вполне геодезическое подмногообразие T_1S^n. Поэтому распределение секционной кривизны T_1S^n совпадает с распределением секционной кривизны на T_1S^3. Оказывается, что в каждой точке T_1S^3 существует 4-орторепер X_1, X_2, X_3, X_4 такой, что $\tilde K(X_1, X_2)=$ $=\tilde K(X_3, X_4)=5/4$, $\tilde K(X_1, X_3)=\tilde K(X_1, X_4)=\tilde K(X_2, X_3)=\tilde K(X_2, X_4)=$ $=0$, где $\tilde K(X_i, X_j)$ $i, j=1, \ldots 4$ — секционная кривизна T_1S^3 в направлении элементарной площадки векторов X_i, X_j.

Действительно, для T_1S^3 (20) имеет вид

$$\tilde K=(S^{12}+S^{45})^2+(1/4)[(S^{14}+S^{25})^2+(S^{13})^2+(S^{23})^2+(S^{34})^2+(S^{35})^2].$$

Согласно (22), $\tilde K=5/4$, если

$$S^{12}-S^{45}=0,\ S^{14}-S^{25}=0,\ S^{15}=S^{24}=0$$
$$S^{13}=S^{23}=S^{34}=S^{35}=0. \qquad (24)$$

Пусть $X = (x^1, x^2, x^3, v^1, v^2)$, $Y = (y^1, y^2, y^3, w^1, w^2)$ — векторы, определяющие элементарную площадку, т. е.

$$\begin{gathered}(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (v^1)^2 + (v^2)^2 = 1,\\ (y^1)^2 + (y^2)^2 + (y^3)^2 + (w^1)^2 + (w^2)^2 = 1,\\ x^1y^1 + x^2y^2 + x^3y^3 + v^1w^1 + v^2w^2 = 0.\end{gathered} \tag{25}$$

Тогда из системы равенств $(24)_4$ легко получить $x^3 = y^3 = 0$. Переходя к базису, адаптированному к данной элементарной площадке ($x^2 = 0$), получим систему уравнений, составленную из равенств $(24)_{1,2,3}$ и $(25)_3$:

$$\begin{gathered}x^1y^2 - v^1w^2 + v^2w^1 = 0,\\ x^1w^1 - y^1v^1 + y^2v^2 = 0,\\ x^1y^1 + v^1w^1 + v^2w^2 = 0,\\ x^1w^2 - y^1v^2 = 0,\\ -y^2v^1 = 0.\end{gathered} \tag{26}$$

Из $(26)_5$ получим

а) $y^2 = 0$; отсюда $S^{12} = 0$, $S^{25} = 0$. Условия $(23)_{1,2}$ дают $S^{45} = S^{14} = 0$, и поэтому S^{IJ} нулевой бивектор. Это — вырожденный случай.

б) $v^1 = 0$. Рассмотрим $(26)_{1-4}$ как однородную систему уравнений относительно y^1, y^2, w^1, w^2. Для нетривиальности решения необходимо и достаточно равенства нулю ее определителя Δ. Легко проверить, что $\Delta = (v^2)^4 - (x^1)^4$. Из $\Delta = 0$ следует $(x^1)^2 - (v^2)^2 = 0$.

1) $x^1 = v^2$ ($\neq 0$, ибо тогда $X = 0$). Из $(26)_{2,3}$ получим $y^1 = w^2 = 0$. Из $(26)_1$ находим $w^1 = -y^2$. Наконец, из $(25)_{1,2}$ $x^1 = v^2 = 1/\sqrt{2}$, $-y^2 = w^1 = 1/\sqrt{2}$. Таким образом,

$$\begin{gathered}X_1 = \left(1/\sqrt{2},\ 0;\ 0;\ 0,\ 1/\sqrt{2}\right),\\ X_2 = \left(0,\ -1/\sqrt{2};\ 0;\ 1/\sqrt{2},\ 0\right).\end{gathered}$$

2) $x^1 = -v^2$. Действуя аналогично тому, как в случае 1), получим еще два вектора $X_3 = \left(1/\sqrt{2}, 0; 0; 0, -1/\sqrt{2}\right)$, $X_4 = \left(0, 1/\sqrt{2}; 0; 1/\sqrt{2}, 0\right)$. Нетрудно убедиться, что пары $(X_1 X_3)$, (X_1, X_4), (X_2, X_3), $(X_2 X_4)$ удовлетворяют и условиям (23) и, следовательно $\tilde{K}(X_1, X_2) = \tilde{K}(X_3, X_4) = 5/4$; $\tilde{K}(X_1, X_3) = \tilde{K}(X_1, X_4) = \tilde{K}(X_2, X_3) = \tilde{K}(X_2, X_4) = 0$. Заметим, наконец, что векторы X_1, X_2, X_3, X_4 составляют в данной точке ортонормальный репер.

3. Кривизна Риччи и скалярная кривизна $T_1(M^n, K)$. Используя (15), получим следующие компоненты тензора Риччи $\tilde{R}$ многообразия T_1M^n:

$$\tilde{R}_{ik} = R_{ik} + (3/4)\sum_{l=1}^{n} R_{iln\alpha}R^{\alpha}_{nkl} - (1/4)\sum_{t=1}^{n-1} R_{i\alpha nt}R^{\alpha}_{knt},$$

$$\tilde{R}_{in+q} = -(1/2)\sum_{l=1}^{n} \nabla_l R_{llnq},$$

$$\tilde{R}_{n+pn+q} = (n-2)\,\delta_{pq} - (1/4)\sum_{l=1}^{n} R_{l\alpha nq}R^{\alpha}_{lnp}.$$

Отсюда для $T_1(M^n, K)$ получаем:

$$\tilde{R}_{pp} = [2(n-1) - K]\,K/2, \quad R_{nn} = (2-K)(n-1)\,K/2, \quad \tilde{R}_{n+p\,n+p} = \\ = [K^2 + 2(n-2)]/2. \tag{27}$$

Доказательство теоремы 3. а) В естественных координатах имеем (11), так что для единичного вектора $X = (x^1, \ldots, x^{n-1}; x^n; v^1, \ldots v^{n-1})$ будет

$$\widetilde{Ric} = \sum_{p=1}^{n-1} \tilde{R}_{pp}(x^p)^2 + \tilde{R}_{nn}(x^n)^2 + \sum_{p=1}^{n-1} \tilde{R}_{n+p\,n+p}(v^p)^2.$$

Это выражение есть квадратичная форма на единичной сфере. Ее экстремумы — наибольшее и наименьшее значения ее коэффициентов. Легко проверить, что

$$\tilde{R}_{pp} - \tilde{R}_{nn} = K^2(n-2)/2, \; \tilde{R}_{pp} - \tilde{R}_{n+pn+p} = -(K-1)[K-(n-2)$$
$$\tilde{R}_{nn} - \tilde{R}_{n+pn+p} = -(1/2)[nK^2 - 2(n-1)K + 2(n-2)].$$

Отсюда следуют неравенства:

$$\tilde{R}_{pp} \geqslant \tilde{R}_{nn} \text{ при } n \geqslant 2;$$
$$\tilde{R}_{pp} \geqslant \tilde{R}_{n+pn+p} \text{ при } 0 \leqslant K \leqslant 1,\ n = 2 \text{ и } 1 \leqslant K \leqslant n-2,\ n \geqslant 3;$$
$$\tilde{R}_{nn} \geqslant \tilde{R}_{n+pn+p} \text{ при } 0 \leqslant K \leqslant 1,\ n = 2;$$
$$\tilde{R}_{pp} < \tilde{R}_{n+pn+p} \text{ при } K > 1,\ K < 0,\ n = 2,\ K < 1,\ K > n-2,\ n \geqslant 3$$
$$\tilde{R}_{nn} < \tilde{R}_{n+pn+p} \text{ при } n \geqslant 3.$$

Отсюда непосредственно следует утверждение а).

б) С помощью (27) легко видеть, что $\tilde{R} = -(1/2)(n-1)[K^2 + 2Kn - 2(n-2)]$. Отсюда $\tilde{R}_{max} = (1/2)(n-1)(n^2 + 2n - 4)$ при $K = n$.

Дополнение. Оценка длин замкнутых геодезических T_1S^n. Кривая Γ в T_1M^n называется горизонтальной (вертикальной), если ее касательный вектор в каждой точке горизонтален (вертикален).

Как показано в [9] геодезические T_1S^n подразделяются на геодезические горизонтального, вертикального и омбилического типа, которые при определенных условиях могут быть замкнутыми. Геодезические омбилического типа делятся на 3 класса следующим образом.

Пусть Γ — геодезическая T_1S^n, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ — кривизна и кручение кривой $\gamma = \pi_1\Gamma$; Γ — геодезическая класса:

$$(i), \text{ если } \varkappa_k = 0, \ k = 1, \ldots, n;$$
$$(ii), \text{ если } \varkappa_1 > 0, \ \varkappa_k = 0, \ k = 2, \ldots, n;$$
$$(iii), \text{ если } \varkappa_1 > 0, \ \varkappa_2 \neq 0, \ \varkappa_k = 0, \ k = 3, \ldots, n.$$

Пусть ξ_1 — единичный касательный к γ вектор; y — единичное векторное поле вдоль γ, определяющее кривую $\Gamma = (\gamma, y)$ в T_1S^n; y' — производная y по параметру «длина дуги» Γ. Обозначим: $\cos\varphi = \langle \xi_1, y\rangle$; $\cos\psi = (1/c)\langle \xi_1, y'\rangle$, где $c^2 = \langle y', y'\rangle$.

Пусть (x^1, x^2, x^3, x^4) — декартовы координаты в E^4. Тор Клиффорда по определению есть поверхность $T^2(\alpha)$, удовлетворяющая условиям: $(x^1)^2 + (x^2)^2 = \cos^2(\alpha/2)$, $(x^3)^2 + (x^4)^2 = \sin^2(\alpha/2)$, где $0 < \alpha < \pi/2$. Если положить $\lambda = \cos(\alpha/2)$, $\mu = \sin(\alpha/2)$ $(\lambda^2 + \mu^2 = 1)$, то $T^2(\alpha)$ выражается параметрически: $x^1 = \lambda\cos\theta$, $x^2 = \lambda\sin\theta$, $x^3 = \mu\cos\varphi$, $x^4 = \mu\sin\varphi$. Линейный элемент $T^2(\alpha)$ есть $ds^2 = \lambda^2 d\theta^2 + \mu^2 d\varphi^2$. Кривая $C(\alpha, m)$ на $T^2(\alpha)$, заданная уравнениями

$$x^1 = \lambda\cos t, \ x^2 = \lambda\sin t,$$
$$x^3 = \mu\cos(mt), \ x^4 = \mu\sin(mt),$$

называется простым геликсом в S^3. Простым геликсом в S^n называется простой геликс в $S^3 \subset S^n$.

Кривизна и кручение простого геликса есть

$$\varkappa_1^2 = \lambda^2\mu^2(1 - m^2)^2/(\lambda^2 + m^2\mu^2)^2,$$
$$\varkappa_2^2 = m^2/(\lambda^2 + m^2\mu^2)^2. \tag{28}$$

Условие замкнутости простого геликса состоит в том, что $m = p/q$ — рациональное число. При этом длина его составит $2\pi\sqrt{\lambda^2p^2 + \mu^2q^2}$.

Теорема 4. *Пусть Γ — замкнутая геодезическая T_1S^n, $l(\Gamma)$ — ее длина. Тогда $l(\Gamma) = 2\pi$, если Γ — горизонтального, вертикального или омбилического типа класса (ii); $l(\Gamma) = 2\pi(p/q)\sqrt{p^2+q^2} > 2\pi p$, если Γ — омбилического типа класса (i); $l(\Gamma) = 2\pi \times \sqrt{p^2\lambda^2 + q^2\mu^2}\sqrt{1 + \varkappa_1^2(\cos\varphi + (\varkappa_2/\varkappa_1)^2)^2 + (1 + (\varkappa_2/\varkappa_1)^2)^2\cos^2\psi} > 2\pi\min(p, q)$, где p, q — натуральные числа, определяющие (замкнутую) кривую $\gamma = \pi_1\Gamma$; λ, μ — параметры тора Клиффорда; $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ — кривизна и кручение простого геликса $\gamma = \pi_1\Gamma$.*

Доказательство. Пусть σ — параметр «длина дуги» кривой $\Gamma \subset T_1S^n$ и s — параметр «длина дуги» кривой $\gamma = \pi_1\Gamma$ $\gamma \subset S^n$. Если $\gamma = x(s)$, то $\Gamma = (x(s), y(s))$, где $y(s)$ — единичное векторное поле вдоль $x(s)$. Геометрический смысл метрики Сасаки T_1S^n состоит в том [10], что $d\sigma^2 = ds^2 + d\theta^2$, где θ — элементарный угол поворота единичного векторного поля $y(s)$ вдоль кривой $x(s)$.

Геодезическая Γ горизонтального типа порождается параллельным векторным полем вдоль геодезической S^n. Тогда $d\theta = 0$, $d\sigma^2 = ds^2$. Отсюда $l(\Gamma) = 2\pi$.

Геодезическая Γ вертикального типа есть большая окружность слоя. Следовательно, $l(\Gamma) = 2\pi$. Геодезическая Γ омбилического типа класса (i) порождается векторным полем [9] $y' = \cos(c\sigma) l_2 + \sin(c\sigma) l_3$ вдоль геодезической $\gamma \subset S^n$, где l_2 и l_3 — ортонормальные параллельные векторные поля вдоль γ, касательные к S^n и ортогональные γ; $c = \text{const}$, $0 < c < 1$.

Для замкнутости векторного поля $y(\sigma)$ необходимо $c\sigma = 2\pi p$, $p = 1, 2, \ldots$ При этом большая окружность S^n обойдется, возможно, q раз: $s = 2\pi q$, $q = 1, 2, \ldots$. Но, согласно [9], $\frac{ds}{d\sigma} = \sqrt{1-c^2}$. Таким образом, Γ замкнется тогда и только тогда, когда $c/\sqrt{1-c^2} = p/q$. Отсюда $c = q/\sqrt{p^2+q^2}$, $\sigma = 2\pi(p/q)\sqrt{p^2+q^2}$. Таким образом, $l(\Gamma) = 2\pi(p/q)\sqrt{p^2+q^2}$, где p и q — взаимно простые натуральные числа, определяющие замкнутую геодезическую омбилического типа класса (i). Очевидно, $l(\Gamma) > 2\pi p > 2\pi$.

Векторное поле

$$y(s) = \cos\varphi\,\xi_1 - (c\cos\psi/\sqrt{1-c^2}\,\varkappa_1)\,\xi_2 - (\varkappa_2/\varkappa_1)\,\xi_3, \tag{29}$$

где (ξ_1, ξ_2 ξ_3) — репер Френе простого геликса, определяет геодезическую T_1S^n омбилического типа класса (iii). При этом $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, c, $\cos\varphi$, $\cos\psi$ суть константы, связанные соотношениями:

$$\varkappa_1^2 + \varkappa_2^2 = c^2/(1-c^2),$$
$$\cos^2\varphi + \cos^2\psi = (1-c^2)\,\varkappa_1^2/c^2. \tag{30}$$

Из (29) следует, что геодезическая замкнута, если замкнут ее простой геликс. Устроим в S^n координаты Ферми вдоль γ. Тогда вдоль γ будет $g_{ij} = \delta_{ij}$. Следовательно, вдоль γ и метрика Сасаки будет диагональна, так что $l(\Gamma) = \int\limits_0^a \sqrt{1+\dot{y}^2}\,ds$, $a = l(\gamma)$, где $\dot{y}^2 = \varkappa_1^2(\cos\varphi + (\varkappa_2/\varkappa_1)^2)^2 + c^2\cos^2\psi/(1-c^2) + c^2\cos^2\psi\,(\varkappa_2/\varkappa_1)^2/(1-c^2)$, учтя (27), получим $\dot{y}^2 = \varkappa_1^2[(\cos\varphi + (\varkappa_2/\varkappa_1)^2)^2 + (1 + (\varkappa^2/\varkappa_1)^2)^2\cos^2\psi]$. Учитывая, что $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\cos\varphi$, $\cos\psi$ — постоянные, найдем

$$l(\Gamma) = 2\pi\sqrt{p^2\lambda^2 + q^2\mu^2}\,\times$$
$$\times\sqrt{1 + \varkappa_1^2[(\cos\varphi + (\varkappa_2/\varkappa_1)^2)^2 + (1+(\varkappa_2/\varkappa_1)^2)^2\cos^2\psi]}. \tag{31}$$

Очевидно, что

$$l(\Gamma) > 2\pi\sqrt{p^2\lambda^2 + q^2\mu^2} \geqslant 2\pi\min(p, q).$$

Если в (31) положить $\varkappa_2 = 0$, то получим выражение для длины замкнутой геодезической омбилического типа класса (ii) [9]. При этом из (28) следует, что $m = p/q = 0$ и $\varkappa_1 = \lambda/\mu$. Отсюда $p = 0$, и первое замыкание геодезической класса (ii) наступит для $q = 1$. Поэтому $l(\Gamma) = 2\pi\mu\sqrt{1+\varkappa_1^2} = 2\pi\sqrt{\lambda^2+\mu^2} = 2\pi$.

Список литературы: *Sasaki S.* On the differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifolds I. Tohoku Math. Journ., 1958, **10**, p. 338—354. 2. *Dombrowski P.* On the geometry of tangent bundle.— Journ. reine und angew. Math., 1962, **210**, p. 73—88. **3.** *Nagy P.* Geodesics on the tangent sphere bundle of a Riemannian manifold.— Geometrial Dedicata, 1978, **7**, p. 233—243. **4.** *Громол. Д., Клингенберг В., Мейер В.* Риманова геометрия в целом.— М.: Мир, 1971. —191 с. **5.** *Kowalski O.* Curvature of the induced Riemannian metric on the tangent bundle of a Riemannian manifold.— Journ. reine und angew. Math., 1971, **250**, p. 124—129. **6.** *Ямпольский А. Л.* К геометрии сферического касательного расслоения двумерного риманова многообразия.—Укр. геометр. сб., 1981, вып. 24, с. 129—132. **7.** *Sasaki S., Klingenberg W.* Tandent sphere bundle of a 2-sphere.—Tohoku Math. Journ. 27 (1975), p. 45—57. **8.** *Nagy P.* On the tangent sphere bundle of a Riemannian 2-manifold.— Tohoku Math. Journ. 1977, **29**, p. 203—208. **9.** *Sasaki S.* Geodesics on the tandent sphere bundles over space forms.— Journ. reine und andew. Math., 1976, **288**, p. 106—120. **10.** *Sasaki S.* On the differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifolds II.—. Tohoku Math. Journ. 1962, **14**, p. 146—155.

Поступила в редколлегию 16.10.83.

СОДЕРЖАНИЕ

УКРАИНСКИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК

Выпуск 28

Редактор *Л. Ф. Кизилова*
Художественный редактор *Т. П. Воробиенко*
Технический редактор *Л Т. Ена*
Корректоры *И. В. Балакирева, Л. А. Марченко*

ИБ № 9501

Сдано в набор 02. 07. 84. Подп. в печать 05.10.84. БЦ 09289. Формат 60×90/16. Бумага типогр. №3 Лит. гарн. Выс. печать 9,5 печ. л. 9,75 кр.-отт. 10 уч.-изд. л. Тираж 1000 экз. Изд. № 1257. Зак. 4-770. Цена 1 р. 40 к.

Издательство при Харьковском государственном университете издательского объединения „Вища школа". 310003, Харьков-3, ул. Университетская, 16

Отпечатано с матриц книжной фабрики им. М. В. Фрунзе в Харьковской городской типографии № 16. 310003, Харьков-3, ул. Университетская, 16 Зак. 27.

РЕФЕРАТЫ

УДК 513

О погружениях n-мерного пространства Лобачевского в $2n$-мерное евклидово пространство с n полями главных направлений. Аминов Ю. А.— Укр. геометр. сб., 1985, вып. 28, с. 3—8

Доказывается, что главные голономы и с их помощью на погруженной области вводятся криволинейные координаты, в которых линейный элемент пространства Лобачевского записывается в виде: $ds^2 = \cos^2\Theta \sum_{i=1}^{n} \sin^2 \gamma_i du_i^2$ причем $\sum_{i=1}^{n} \sin^2 \gamma_i = 1$. Установлена основная система уравнений погружения n-мерного пространства Лобачевского в $2n$-мерное евклидово пространство с n полями главных направлений для функции γ_i и θ и указан способ построения произвольного локального аналитического погружения. Библиогр.: 3 назв.

УДК 513

О полных параболических поверхностях. Борисенко А. А. — Укр. геометр. сб., 1985, вып. 28, с. 8—19

Находя ся достаточные условия цилиндричности полных параболических поверхностей в евклидовом пространстве. Полная 1) $(l-2)$, 2) $(l-3)$ — раболитическая поверхность является цилиндром с 1) $(l-3)$, 2) $(l-4)$-мерным образующими, если порядок уплощения поверхности равен 1) $l-2$,2) $l-3$ и сильный нуль-индекс постоянный. Библиогр.: 11 назв.

УДК 513

Оценка области регулярности решений некоторых нелинейных дифференциальных неравенств. Брысьев А. Б. Укр. геометр. сб., 1985, вып. 28, с. 19—21

В круге $x^2 + y^2 \leqslant R^2$ плоскости x, y рассматривается дифференциальное неравенство $z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 \leqslant -\alpha (1 + z_x^2 + z_y^2)^k$, где постоянные $\alpha > 0$ и $k > 1$. В случае $\alpha = 1$ и $k = 2$, это неравенство означает, что поверхность $z(x,y)$ имеет гауссову кривизну $K \leqslant -1$. Н. В. Ефимов доказал, что в этом случае радиус круга ограничен сверху. В этой работе устанавливается аналогичная оценка сверху на радиус круга R, в котором для функции $z(x,y)$ удовлетворяется указанное выше дифференциальное неравенство. Библиогр.: 3 назв.

УДК 513

О геодезической кривизне интегральной кривой двумерного пфаффова многообразия в E_4. Глова Н. И. — Укр. геометр. сб., 1985, вып. 28, с. 22—26

Вводится понятие обобщенной геодезической кривизны и инвариантного вектора средней геодезической кривизны для двумерного пфаффова многообразия в E_4 и строится индикатриса обобщенных геодезических кривизн интегральных кривых этого многообразия.

Доказывается, что отношение четвертой квадратичной формы многообразия к его первой квадратичной форме равен квадрату модуля вектора обобщенной геодезической кривизны, и выводится аналог теоремы Эйлера. Библиогр.: 2 назв.

УДК 513

Специальные конформные отображения в общей теории относительности. Денисов В. И. — Укр. геометр. сб., 1985, вып. 28, с. 43—50

Рассмотрены специальные конформные отображения релятивистских пространств. Определен произвол, с которым можно задать нетривиальное специальное конформное отображение. Найдены необходимые и достаточные условия, при которых пространство-время U допускает специальное конформное отображение на пространство-время U, причем метрический тензор как U, так и U, должен удовлетворять уравнениям Эйнштейна с тензором энергии-импульса идеальной жидкости, имеющей геодезическое поле скоростей.

Доказано, что такими пространствами являются пространства эталонных космологических моделей. Библиогр.: 6 назв.

УДК 513.82

Устойчивость в проблеме Александрова для выпуклого тела, одна из проекций которого—шар. Дискант В. И.— Укр. геометр. сб., 1985, вып. 28, с.50—62.

Доказана теорема устойчивости, соответствующая этой теореме единственности, при $n \geqslant 5$, $k \geqslant 3$ и условии, что одна из проекций выпуклого тела на гиперплоскости R^n — шар. В частности теорема устойчивости имеет место в случае, когда тело является телом вращения. Библиогр.: 13 назв.

УДК 513

Общие метрические пространства линейных элементов первой лакунарности. Егоров А. И., Егорова Л. И. — Укр. геометр. сб., 1985, вып. 28, с. 62—70.

Указывается порядок групп движений максимально подвижных пространств линейных элементов. Находятся все пространства линейных элементов, допускающих группу движений максимального порядка и отличных от римановых. Указывается максимальный порядок групп движений в обобщенных пространствах линейных элементов. Библиогр.: 6 назв.

УДК 513

К общему уравнению алгебраической поверхности с группой симметрий многогранника 4_{21}. Игнатенко В. Ф.— Укр. геометр. сб., 1985, вып. 28, с. 70—74.

Пусть $\eta_k = 0$ $(k = \overline{1,120})$ есть нормированные уравнения гиперплоскостей симметрии многогранника $4_{21} \in E^8$ (в прямоугольных координатах). Ранее (Мат. сб., 1983, 120, № 4) автор установил, что многочлены $\sum_k \eta_k^r$ при $r = 2$, 8, 12, 14, 18, 20, 24, 30 являются базисными инвариантами группы симметрий 4_{21}. Здесь дается новое доказательство этого результата. Библиогр.: 9 назв.

УДК 513

Семейства равноудаленных линий на поверхностях вращения. Ковалюх В. Р. — Укр. геометр. сб., 1985, вып. 28, с. 74—76.

Получено дифференциальное уравнение семейства равноудаленных линий на любой поверхности вращения.
Ил. 2.

УДК 513

Оценки асферичности сечений выпуклых тел. Макеев В. В. — Укр. геометр. сб., 1985, вып. 28, с. 76—79.

Определяется функция $\varepsilon(n,k) = \inf\{\varepsilon|$ любое ограниченное центрально-симметричное выпуклое тело в R^n обладает ε-асферическим k-мерным центральным сечением$\}$. Доказывается, что $\varepsilon(3,2) = \sqrt{2} - 1$ и $\varepsilon(n, n-1) \geqslant \sqrt{n-1} - 1$. Определяется несколько родственных функций и оцениваются их значения на парах $(n, n-1)$. Библиогр.: 3 назв.

УДК 513

Дополнение к статье „Об одной теореме К. Миранды“. Медяник А. И.— Укр. геометр. сб., 1985, вып. 28, с. 79—82.

Доказываются теоремы существования для замкнутых выпуклых поверхностей, главные радиусы кривизны которых как функции единичного вектора нормали n удовлетворяют уравнению
$R_1R_2 + \Phi(R_1 + R_2, R_1R_2, n) + c \cdot n = \varphi(n)$,
где $\bar{C}$—неизвестный постоянный вектор, который ищется вместе с поверхностью. Это уравнение ранее изучал К. Миранда, доказавший для него ряд теорем существования и единственности решений. Полученные результаты приводят к некоторому упрощению условий в этих теоремах, налагаемых на функции Φ φ. Библиогр.: 3 назв.

УДК 513

О жесткости и аналитической неизгибаемости поверхностей отрицательной Гауссовой кривизны при заданном направлении перемещения точек края. Михайловский В. И. — Укр. геометр. сб., 1985, вып. 28, с. 82—89.

Исследованы бесконечно малые изгибания первого и второго порядков регуляторных (класс C) поверхностей отрицательной Гауссовой кривизны, которые ограничены а) либо четырьмя асимптотическими линиями g_1, g_2, g_1^1, g_2^1; б) либо двумя асимптотическими линиями g_1 и g_2 и линией g, нигде не имеющей асимптотических направлений, при условии, что на поверхность наложены связи, допускающие перемещения точек линий g_1 и g_2 (в первом случае) и линии g (во втором) в одном и том же постоянном направлении. Библиогр.: 3 назв.

УДК 513

Достаточный признак точки типа ласточкина хвоста на огибающей однопараметрического семейства поверхностей. Можарский В. В.— Укр. геометр. сб., 1985, вып. 28, с. 89—95.

Доказан названный в заголовке достаточный признак. Он дополняет соответствующий необходимый признак, который был получен В. А. Залгаллером (Реф. журн. Математика, 1975, 9А551К).

УДК 513

О полусимметрических пространствах 1-го аффинного класса. Обозная Э. Д.— Укр. геометр. сб., 1985, вып. 28, с. 95— 102.

Исследуются свойства Π-оснащения гиперповерхности аффинного пространства, т. е. такого оснащения, при котором относительно индуцированной им связности гиперповерхность является полусимметрическим пространством. В том случае, когда ранг асимптотического тензора гиперповерхности более двух, найдены необходимые и достаточные условия Π-оснащения. Библиогр.: 4 назв.

УДК 513

Об объеме некоторых многообразий с замкнутыми геодезическими. Резников А. Г. — Укр. геометр. сб., 1985, вып. 28, с. 102—106.

Доказывается, что отношение объема риманова многообразия когомологического типа CP^2, CP^3, у которого все геодезические замкнуты и имеют длину 2π, к объему стандартной сферы принимает фиксированное значение. Библиогр.: 4 назв.

УДК 513

Характеризация вполне геодезических подмногообразий S^m и CP^m. Ровенский В. Ю. — Укр. геометр. сб., 1985, вып. 28, с. 106—116.

Доказана теорема о линейчатых поверхностях, обобщающая теорему Феруса о вполне геодезических слоениях. На ее основе получены критерии вполне геодезических подмногообразий S^m и CP^m, обобщающие и дополняющие некоторые результаты Борисенко, Феруса и Эйба. Дано приложение к геодезическим дифференциальным формам, определенных Домбровски, в случае подмногообразий S^m и CP^m. Библиогр.: 11 назв.

УДК 513

Базисные инварианты конечных примитивных групп, порожденных отражениями, в четырехмерном унитарном пространстве. Рудницкий О. И. — Укр. геометр. сб., 1985, вып. 28, с. 116—122.

Находятся в явном виде все базисные инварианты невещественных конечных примитивных групп, порожденных отражениями, в четырехмерном унитарном пространстве. Библиогр.: 7 назв.

УДК 513

Решение задачи Коши о построении интегральной гиперповерхности дифференциального уравнения в частных производных первого порядка. Сергиенко Л. Н.— Укр. геометр. сб., 1985, вып. 28, с. 123—126.

Найдена геометрическая интерпретация решения задачи Коши нелинейного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка, основанная на связи между уравнениями Монжа и нелинейными уравнениями в частных производных. Библиогр.: 3 назв.

УДК 513. 813

Об аксиоме видимости для двумерного многообразия Адамаря Щербаков С. А.— Укр. геометр. сб., 1985, вып. 28, с. 126—132.

Рассматривается двумерное многообразие Адамара M (т. е. полное, односвязное гладкое риманово многообразие неположительной гауссовой кривизны). Доказано, что M удовлетворяет аксиоме видимости (для любого $\varepsilon > 0$ и каждой точки $p \in M$ существует число $r = r(p, \varepsilon)$ такое, что любая геодезическая, удаленная от p на расстояние больше, или равное V, видна из точки p под углом меньше, или равным ε), если для любых асимптотических геодезических α и β имеет место равенство $\inf \{d(\alpha(t), \beta(s))\} = 0$, где d — риманова метрика M. Библиогр.: 7 назв.

УДК 513

Кривизна метрики Сасаки сферических касательных расслоений. Ямпольский А. Л. — Укр. геометр. сб., 1985, вып. 28, с. 132—145.

Изучаются секционные кривизны K метрики Сасаки сферических касательных расслоений над пространствами постоянной кривизны K $(T_1(M^n, K))$. Указаны точные границы изменения кривизны Риччи и равномерная по K, оценка скалярной кривизны $T_1(M^n, K)$. В Дополнении вычислены и оценены снизу длины замкнутых геодезических $T_1 S^n$. Библиогр.: 10 назв.