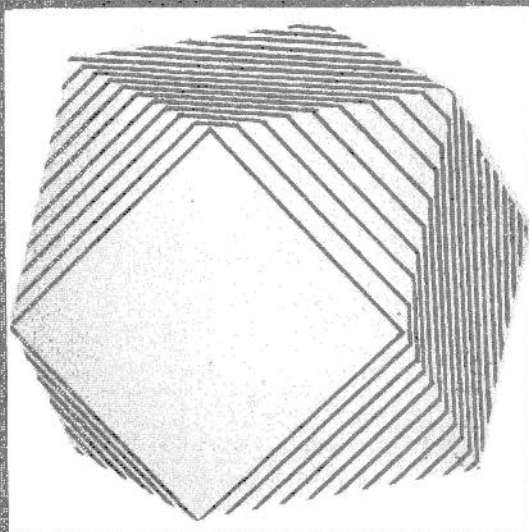


УКРАИНСКИЙ геометрический СБОРНИК

27|84



Украинский геометрический сборник: Респ. междувед. науч. сб. Вып. 27.— Х.: Вища школа. Изд-во при Харьк. ун-те, 1984.—129 с.

Сборник посвящен геометрии в целом. Рассматриваются вопросы внутренней и внешней геометрии кривых на гиперповерхностях, однозначная определенность поверхностей, полные параболические поверхности, гладкие поверхности с вырожденным сферическим изображением, гиперповерхности с симметрией, конформные преобразования метрики Лоренца, области причинности в модели Геделя физического пространства, вопросы теории смешанных объемов, покрытия фигур другими, грассманова отображения поверхностей.

Для научных работников математических специальностей

Редакционная коллегия: А. В. Погорелов (отв. ред.), Я. П. Бланк (зам. отв. ред.), А. С. Лейбин (отв. секр.), Ю. А. Аминов, В. Ф. Игнатенко, Н. И. Кованцов, Е. А. Косачевская, А. Д. Милка, В. И. Михайловский, Н. С. Синюков, М. А. Улановский

Адрес редакционной коллегии: 310077, Харьков-77, пл. Дзержинского, 4, Харьковский университет, механико-математический факультет, тел. 40-14-92

Редакция естественнонаучной литературы

Украинский геометрический сборник: Респ. междувед. науч. сб. Вып. 27.— Х.: Вища школа. Изд-во при Харьк. ун-те, 1984.—129 с.

Сборник посвящен геометрии в целом. Рассматриваются вопросы внутренней и внешней геометрии кривых на гиперповерхностях, однозначная определенность поверхностей, полные параболические поверхности, гладкие поверхности с вырожденным сферическим изображением, гиперповерхности с симметрией, конформные преобразования метрики Лоренца, области причинности в модели Геделя физического пространства, вопросы теории смешанных объемов, покрытия фигур другими, грассманова отображения поверхностей.

Для научных работников математических специальностей

Редакционная коллегия: А. В. Погорелов (отв. ред.), Я. П. Бланк (зам. отв. ред.), А. С. Лейбин (отв. секр.), Ю. А. Аминов, В. Ф. Игнатенко, Н. И. Кованцов, Е. А. Косачевская, А. Д. Милка, В. И. Михайловский, Н. С. Синюков, М. А. Улановский

Адрес редакционной коллегии: 310077, Харьков-77, пл. Дзержинского, 4, Харьковский университет, механико-математический факультет, тел. 40-14-92

Редакция естественнонаучной литературы

Ю. А. Аминов

**СВОЙСТВА ГРАССМАНОВА ОБРАЗА
ЛОКАЛЬНОГО ПОГРУЖЕНИЯ ТРЕХМЕРНОГО
ПРОСТРАНСТВА ЛОБАЧЕВСКОГО В ПЯТИМЕРНОЕ
ЭВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО**

Грассманов образ подмногообразия F^n эвклидова пространства E^{n+k} является аналогом сферического образа поверхности $F^2 \subset E^3$. Он строится следующим способом. Каждой точке $x \in F^n$ поставим в соответствие k -мерное пространство N^k , проходящее через фиксированную точку O и параллельное нормальному пространству N_x^k к подмногообразию F^n в точке x . Это соответствие задает отображение подмногообразия F^n в грассманово многообразие $G_{k, n+k}$. Образ этого отображения будем называть грассмановым образом подмногообразия F^n . Грассманов образ широко используется в топологических исследованиях, но его геометрические свойства изучены недостаточно.

Рассмотрим геометрические свойства грассманова образа регулярного локального погружения трехмерного пространства Лобачевского L^3 в E^5 . В работе [1] установлено, что грассманов образ погруженной области является регулярным трехмерным подмногообразием в грассмановом многообразии $G_{2,5}$. Обозначим его через Γ^3 . Удобно использовать стандартное погружение грассманова многообразия в эвклидово пространство. Каждая двумерная плоскость N^2 в E^5 , проходящая через начало координат, имеет десять плюккеровых координат $p^{12}, \dots, p^{45}$. Если n_1^i и n_2^i — декартовы координаты двух единичных взаимно ортогональных векторов n_1 и n_2 из N^2 , то $p^{ij} = n_1^i n_2^j$. Упорядоченный набор плюккеровых координат задает точку в E^{10} . Радиус-вектор этой точки обозначим через p . При изменении точки x на подмногообразии $L^3 \subset E^5$, радиус-вектор p описывает трехмерное подмногообразие $\Gamma^3 \subset E^{10}$. Согласно условиям, которым удовлетворяют p^{ij} , точка p лежит в единичной сфере S^9 с центром в начале координат. Поэтому Γ^3 можно рассматривать и как подмногообразие в S^9 . Мы установим дифференциальное уравнение третьего порядка для радиус-вектора p грассманова образа локального погружения L^3 в E^5 . В работе [3] нами установлено, что на погруженной области можно ввести локальные координаты u_1, u_2, u_3 , в которых метрика L^3 имеет вид $ds^2 = \sum_{i=1}^3 \sin^2 \sigma_i du_i^2$, причем $\sum_{i=1}^3 \sin^2 \sigma_i = 1$. Метрика Γ^3 в индуцированных координатах имеет вид $dl^2 = \sum_{i=1}^3 \cos^2 \sigma_i du_i^2$, при-

чем $\sum_{i=1}^3 \cos^2 \sigma_i = 2$. В дальнейшем для сокращения записи мы используем обозначения $H_i = \sin \sigma_i$, $h_i = \cos \sigma_i$, $\gamma_{ik} = \left(\frac{\partial H_j}{\partial u_i} \frac{\partial H_k}{\partial u_k} - \frac{\partial H_j}{\partial u_k} \frac{\partial H_k}{\partial u_i} \right) \Big| H_j H_k$. Имеет место

Теорема 1. Радиус-вектор p грассманова образа Γ^3 локального погружения L^3 в E^5 удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^3 p}{\partial u_1 \partial u_2 \partial u_3} = \sum_{\substack{i, j, k \neq \\ < k}} \left[\frac{\partial \ln H_i}{\partial u_i} \frac{\partial^2 p}{\partial u_i \partial u_k} - \gamma_{ik} \frac{\partial p}{\partial u_i} \right]. \quad (1)$$

Так как величины $H_i = \sqrt{1 - h_i^2}$ выражаются через первые производные радиус-вектора p , то правая часть в этом уравнении содержит производные вектора p не выше второго порядка. Если в $G_{2,5}$ задать три поверхности Φ_i , пересекающиеся в одной точке p_0 и пересекающиеся ортогонально между собой попарно по некоторым линиям l_i , то в некоторой окрестности точки $u_i = 0$, $i = 1, 2, 3$ решение уравнения (1) однозначно определяется тем условием, что радиус-вектор $p(0, u_2, u_3)$ описывает поверхность Φ_1 , $p(u_1, 0, u_3)$ описывает Φ_2 и $p(u_1, u_2, 0)$ описывает Φ_3 . Мы установим также необходимое условие на координатные линии u_i на Γ^3 . Обозначим через l_i их длину дуги. Необходимое условие на координатные линии u_i на Γ^3 — образы линий кривизны $L^3 \subset E^5$, следующее: производные $\frac{d^j p}{dt^j l_i}$, $j = 1, 2, 3$ ортогональны к нормальному пространству подмногообразия $G_{2,5} \subset S^9$.

Из теорем единственности для решения линейного дифференциального уравнения вытекает

Теорема 2. Координатный параллелепипед на Γ^3 лежит в E^m тогда и только тогда, когда три его грани, проходящие через одну вершину, лежат в E^m .

Мы покажем, что если $\Gamma^3 \subset E^m$, то $m \geq 8$. Вторым касательным пространством $T_2(\Gamma^3)$ или просто T_2 к подмногообразию $\Gamma^3 \subset E^{10}$ будем называть линейную оболочку первых и вторых производных радиус-вектора p в соответствующей точке Γ^3 , т. е. линейную оболочку векторов p_{u_i} , $p_{u_i u_j}$, $i, j = 1, 2, 3$. Его размерность удовлетворяет неравенствам $7 \leq \dim T_2 \leq 9$. Мы рассмотрим такие погружения L^3 в E^5 , при которых $\dim T_2 \leq 8$. В работе [1] в § 6 были введены и подробно изучены функционально-вырожденные погружения L^3 в E^5 . Эти погружения определяются тем условием, что коэффициенты H_i зависят от одного параметра $t(u_1, u_2, u_3)$, т. е. $H_i = H_i(t)$, $i = 1, 2, 3$. В этом случае $\gamma_{ik} = 0$.

Теорема 3. Если для локального погружения L^3 в E^5 размерность второго касательного пространства грассманова образа $\dim T_2 \leq 8$, то это погружение функционально вырожденное, и наоборот.

В работе [1] в области, погруженной в E^5 , была введена функция V — аналог функции Дарбу в теории триортогональных систем. В заключение статьи, мы покажем, что при $\dim T_2 \leq 8$ функция Дарбу удовлетворяет уравнению $\left(\frac{\partial^3 V}{\partial u_1 \partial u_2 \partial u_3}\right)^2 = 4 \frac{\partial^2 V}{\partial u_1 \partial u^2} \times \times \frac{\partial^2 V}{\partial u_1 \partial u_3} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial u_3 \partial u_1}$ (2), которое встречается в теории триортогональных систем Д. Ф. Егорова.

Докажем теорему 1. Пусть $r(u_1, u_2, u_3)$ — радиус-вектор точки x локального погружения L^3 . Пусть n_1 и n_2 — поля двух единичных нормалей к подмногообразию, ортогональных друг другу и параллельно переносимых в нормальном расслоении. Как известно, такие поля существуют, см. например, [2]. Параллельная переносимость n_i обозначает, что коэффициенты кручения этого базиса нормалей $\mu_{12|i} = 0$. Квадратными скобками $[]$ обозначим бивектор, построенный на векторах из E^5 . Упорядоченный набор его компонент будем рассматривать как вектор в E^{10} . В частности радиус-вектор p точки Γ^3 можно записать в виде $p = [n_1 n_2]$. Найдем касательные векторы к Γ^3 . Для этого используем разложения Вейнгартена для производных n_{ku_i} . Получим

$$p_{u_i} = \frac{\partial}{\partial u_i} [n_1 n_2] = - (L_{ii}^1 [r_{u_i} n_2] + L_{ii}^2 [n_1 r_{u_i}]) / H_i^2,$$

где L_{ii}^α — коэффициенты второй квадратичной формы погружения L^3 по отношению к нормали n_α . Эти коэффициенты имеют следующий вид $L_{ii}^1 = H_i h_i \cos \varphi_i$, $L_{ii}^2 = H_i h_i \sin \varphi_i$, см. [1, § 4]. Пусть τ_i — единичные главные направления, т. е. $\tau_i = r_{u_i} / H_i$. Для каждого $i = 1, 2, 3$ определим две единичные взаимно ортогональные нормали

$$\xi_i = \cos \varphi_i n_1 + \sin \varphi_i n_2; \quad \eta_i = -\sin \varphi_i n_1 + \cos \varphi_i n_2. \quad (3)$$

Базис нормалей ξ_i, η_i выражается через другой базис ξ_i, η_i с помощью соотношений

$$\xi_j = \cos \varphi_{ji} \xi_i + \sin \varphi_{ji} \eta_i; \quad \eta_j = -\sin \varphi_{ji} \xi_i + \cos \varphi_{ji} \eta_i, \quad (4)$$

где $\varphi_{ij} = \varphi_i - \varphi_j$. С помощью введенных обозначений касательные векторы к Γ^3 можно записать так $p_{u_i} = -[\tau_i \eta_i] h_i$ (5). Найдем вторые смешанные производные от p . Разложения Гаусса для вторых производных r при $i \neq j$ дают $\frac{\partial \tau_i}{\partial u_j} = \beta_{ij} \tau_j$ (6). Дифференцируя (3) и используя разложения Вейнгартена, найдем

$$\frac{\partial \eta_i}{\partial u_j} = -\xi_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j} + h_j \sin \varphi_{ij} \tau_j, \quad i \neq j.$$

В этом уравнении заменим $\frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j}$ с помощью формулы (38) из [1]:

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j} = h_j \sin \varphi_{ji} \beta_{ji} / h_i, \quad i \neq j. \quad \text{Тогда можно записать}$$

$$\frac{\partial \eta_i}{\partial u_j} = \sin \varphi_{ij} h_j (\beta_{ji} \xi_i / h_i + \tau_j), \quad i \neq j. \quad (7)$$

Кроме того, из определения коэффициентов Дарбу β_{ij} следует

$$\frac{\partial h_i}{\partial u_j} = -H_i H_j \beta_{ji} / h_i = \cos \varphi_{ij} h_j \beta_{ji}, \quad i \neq j. \quad (8)$$

Обозначим $v_{ij} = [\tau_i \tau_j]$. Используя (5—8) при $i \neq j$ находим

$$\begin{aligned} p_{u_i u_j} = & -\cos \varphi_{ij} h_j \beta_{ji} [\tau_i \eta_i] - \beta_{ij} h_i [\tau_j \eta_i] + \\ & + h_j \sin \varphi_{ji} \beta_{ji} [\tau_i \xi_i] - h_i h_j \sin \varphi_{ij} v_{ij}. \end{aligned}$$

Приведем это выражение к виду, симметричному по индексам i и j . Для этого рассмотрим сумму первого и третьего члена в правой части и воспользуемся формулой (4) для η_j . Кроме того, заменим $\sin \varphi_{ij}$ с помощью формулы (37) [1]. Тогда получим

$$p_{u_i u_j} = \beta_{ji} h_j [\eta_j \tau_i] + \beta_{ij} h_i [\eta_i \tau_j] + H_k v_{ij} e_{ijk}. \quad (9)$$

Индексы i, j и k здесь все различные. Найдем третью смешанную производную от p . Дифференцируя первое слагаемое в правой части (9) по u_k и последовательно используя (8), систему (3) из [1], (7) и (6) получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u_k} (h_j \beta_{ji} [\eta_j \tau_i]) = & (\cos \varphi_{jk} h_k \beta_{ki} \beta_{ji} + h_j^2 \beta_{jk} \beta_{ki}) [\eta_j \tau_i] + \\ & + h_j \beta_{ji} \{ \sin \varphi_{jk} (h_k \beta_{ki} [\xi_j \tau_i] / h_j + h_k v_{ki}) + \beta_{ik} [\eta_j \tau_k] \}. \end{aligned}$$

Объединяя первый и третий член в правой части этого уравнения с помощью формулы (4), в которой надо заменить $i \rightarrow j \rightarrow k \rightarrow i$, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u_k} (h_j \beta_{ji} [\eta_j \tau_i]) = & h_k \beta_{kj} \beta_{ji} [\eta_k \tau_i] + h_j \beta_{jk} \beta_{ki} [\eta_i \tau_i] + \\ & + h_j \beta_{ji} \beta_{ik} [\eta_i \tau_k] - H_i v_{ki} e_{ijk} \beta_{jk}. \end{aligned} \quad (10)$$

Производную по u_k от второго слагаемого в правой части (9) получим, меняя в (10) индексы i и j . Запишем производную от третьего слагаемого без множителя e_{ijk}

$$\frac{\partial}{\partial u_k} (H_k v_{ij}) = \frac{\partial H_k}{\partial u_k} v_{ij} + H_k (\beta_{ik} v_{kj} + \beta_{jk} v_{ik}). \quad (11)$$

Здесь мы воспользовались формулой (6). В выражении производной по u_k от правой части (9) выпишем сумму членов с v_{ki} . Она будет равна

$$-(H_i \beta_{ji} + H_k \beta_{jk}) v_{ki} e_{ijk} = \frac{\partial H_j}{\partial u_j} v_{ki} e_{ijk}. \quad (12)$$

Здесь мы воспользовались системой (3) из [1]. Аналогичное выражение получим для суммы членов с v_{jk} . Используя (10)–(12), получим

$$\frac{\partial^3 p}{\partial u_1 \partial u_2 \partial u_3} = \sum_{\substack{k=1 \\ i < j}}^3 \frac{\partial H_k}{\partial u_k} v_{ij} e_{ijk} + \sum_{\substack{i, j=1 \\ i, j, k \neq}}^3 [\eta_i \tau_i] h_j \beta_{jk} \beta_{ki}. \quad (13)$$

Из уравнения (9) выразим $v_{ij} e_{ijk}$ и подставим в (13). Введем обозначение

$$\sigma_{jki} = \beta_{jk} \beta_{ki} H_k - \beta_{ji} \frac{\partial H_k}{\partial u_k} = \beta_{jk} \beta_{ki} H_k + \beta_{ji} \beta_{kj} H_j + \beta_{ji} \beta_{ki} H_i. \quad (14)$$

Тогда можно записать

$$\frac{\partial^3 p}{\partial u_1 \partial u_2 \partial u_3} = \sum_{\substack{k=1 \\ i < j; i, j, k \neq}}^3 \frac{\partial \ln H_k}{\partial u_k} \frac{\partial^2 p}{\partial u_i \partial u_j} + \sum_{\substack{i, j=1 \\ i, j, k \neq}}^3 \sigma_{jki} \frac{h_j}{H_k} [\eta_i \tau_i].$$

Последнюю сумму в правой части обозначим через A и представим в виде линейной комбинации векторов, касательных к $G_{2,5}$. Для этого с помощью формулы (4) выразим η_i через ξ_i и η_i . Тогда получим

$$A = \sum_{i, j=1}^3 \left(-\sigma_{jki} \frac{h_j}{H_k} \sin \varphi_{ji} [\xi_i \tau_i] + \sigma_{jki} \cos \varphi_{ji} \frac{h_j}{H_k} [\eta_i \tau_i] \right).$$

Покажем, что сумма коэффициентов при $[\xi_i \tau_i]$ равна нулю. Из выражения (14) следует, что $\sigma_{jki} = \sigma_{kji}$. Поэтому суммарный коэффициент при $[\xi_i \tau_i]$ равен

$$\begin{aligned} & -\sigma_{jki} \left(\frac{h_j}{H_k} \sin \varphi_{ji} + \frac{h_k}{H_j} \sin \varphi_{ki} \right) = \\ & = \sigma_{jki} \left(\frac{h_j H_k e_{jik}}{h_i H_k h_j} + \frac{h_k H_j e_{kij}}{h_k H_j h_i} \right) = 0. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались формулой (37) из [1]. Рассмотрим сумму коэффициентов при $[\eta_i \tau_i]$. Она равна

$$\sigma_{jki} \left(\frac{h_j}{H_k} \cos \varphi_{ji} + \frac{h_k}{H_j} \cos \varphi_{ki} \right) = -\sigma_{jki} \frac{H_i h_i}{H_k H_j} = -\gamma_{jk} h_i,$$

т. е. сумма коэффициентов при $[\eta_i \tau_i]$ равна $-\gamma_{jk} h_i$. Учитывая (5) и предыдущий вывод, заключаем, что имеет место уравнение (1).

Уравнение (1) является необходимым, но, вообще говоря, не достаточным условием на грассмансов образ Γ^3 . Найдем также необходимое условие на координатные линии u_i , лежащие на грассмановом образе.

Следующую лемму приведем без доказательства

Лемма 1. Имеет место формула аналитической геометрии $([ab][cd]) = (ac)(bd) - (ad)(bc)$, где в левой части равенства круглые скобки означают скалярное произведение в пространстве бивекторов, а в правой части — в пространстве векторов a, b, c, d .

Лемма 2. Векторы $v_{ij} = [\tau_i \tau_j]$, взятые в точке $p \in \Gamma^3$ образуют базис нормалей к подмногообразию $G_{2,5} \subset S^9$.

Любую точку $p \in G_{2,5}$ можно записать в виде бивектора $p = [n_1 n_2]$, причем так, что, когда $p \in \Gamma^3$, поля n_i совпадают с ранее введенными полями нормалей к $L^3 \subset E^5$. Проверим, что dp в точках Γ^3 ортогонально к v_{ij} . Имеем $(dp v_{ij}) = ([dn_1 n_2] + [n_1 dn_2], v_{ij}) = ([dn_1 n_2][\tau_i \tau_j]) + ([n_1 dn_2][\tau_i \tau_j]) = 0$ в силу формулы леммы 1 и условия $(\tau_\alpha n_\beta) = 0$ в точках Γ^3 . С помощью леммы 1 легко проверить, что векторы v_{ij} между собой ортогональны.

Рассмотрим векторы $\frac{d^2 p}{dl_i^2}$. Используя (5) и следующие формулы $\tau_{iu_i} = -\beta_{ki} \tau_k - \beta_{ji} \tau_j + h_i \xi_i$, $\xi_{iu_i} = \eta_i \Phi_{iu_i} - h_i \tau_i$, находим

$$\frac{d^2 p}{dl_i^2} = \frac{1}{h_i} (\beta_{ki} [\tau_k \eta_i] + \beta_{ji} [\tau_j \eta_i]) - p + [\tau_i \xi_i] \frac{\Phi_{iu_i}}{h_i}. \quad (15)$$

Отсюда видно, что вектор $\frac{d^2 p}{dl_i^2}$ ортогонален к векторам $v_{\alpha\beta}$, т. е. к нормальному пространству подмногообразия $G_{2,5} \subset S^9$. Оказывается этим свойством обладает и третья производная $\frac{d^3 p}{dl_i^3}$. Используя (5) и формулу $\eta_{iu_i} = -\xi_i \Phi_{iu_i}$, заключаем, что производная по l_i выражения в круглых скобках ортогональна к $v_{\alpha\beta}$. Далее, используя выражения производных по u_i от τ_i и ξ_i , заключаем, что производная по u_i от $[\tau_i \xi_i]$ ортогональна к $v_{\alpha\beta}$. Итак, имеет место следующее необходимое условие на образы линий кривизны погружения L^3 в E^5 при грассмановом отображении: производные $\frac{d^j p}{dl_i^j}$, $j = 1, 2, 3$, взятые вдоль них, ортогональны к нормальному пространству подмногообразия $G_{2,5} \subset S^9$.

Доказательство теоремы 2 вытекает из теоремы единственности решения линейного дифференциального уравнения. Пусть три грани Φ_i координатного параллелепипеда лежат в пространстве E^m и a_j — одна из нормалей к E^m . Так как a_j — постоянный вектор, то скалярные произведения $(p a_j)$ удовлетворяют линейному уравнению. Так как $(p a_j) = c$ на трех поверхностях Φ_i , то по теореме единственности решения $(p a_j) \equiv c$ внутри параллелепипеда, т. е. область подмногообразия Γ^3 , заключенная внутри его, лежит в E^m .

Докажем теорему 3. Рассмотрим вторые производные вектор функции p . Три смешанные производные $p_{u_i u_j}$, $i \neq j$ между собой

линейно независимы, так как по формуле (9) вектор $p_{u_i u_j}$ имеет ненулевую проекцию на вектор v_{ij} . Далее, каждый вектор $\frac{d^2 p}{d l_i^2}$ имеет ненулевую проекцию на вектор p , который ортогонален векторам v_{ij} . Поэтому $7 \leq \dim T_2 \leq 9$. Далее установим

Лемма 3. $\dim T_2 \leq 8$ тогда и только тогда, когда для всех наборов различных индексов i, j, k имеет место

$$\frac{\partial}{\partial u_k} \left(\frac{\beta_{ij}}{H_k} \right) = 0. \quad (16)$$

Рассмотрим векторы $\frac{d^2 p}{d l_i^2}$. Введем обозначения $\lambda_i = [\tau_i \xi_i]$ и $a_{ij} = \beta_{ij} \sin \varphi_{ij} / h_j$. С помощью формул (4) и (15) можем записать

$$h_i^2 \frac{d^2 p}{d l_i^2} = \left\{ a_{ki} \lambda_k + a_{ji} \lambda_j + h_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_i} \lambda_i \right\} - h_i^2 p + \dots, \quad (17)$$

где точками заменены векторы, касательные к Γ^3 . Из формулы (39), [1] находим: $h_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_i} = a_{ik} + a_{ij}$. Эти выражения подставим в (17). Шесть векторов $p_{v \Gamma} \frac{d^2 p}{d l_i^2}$ будут линейно зависимы тогда и только тогда, когда ранг матрицы

$$D = \begin{pmatrix} a_{12} + a_{13} & a_{21} & a_{31} & -h_1^2 \\ a_{12} & a_{21} + a_{23} & a_{32} & -h_2^2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{31} + a_{32} & -h_3^2 \end{pmatrix}$$

меньше трех. Приравнявая нулю определитель матрицы первых трех столбцов, после нетрудных вычислений получим

$$(a_{12} a_{23} a_{31} + a_{21} a_{13} a_{32}) = (\beta_{21} \beta_{13} \beta_{32} - \beta_{12} \beta_{23} \beta_{31}) = 0. \quad (18)$$

Далее, взяв, например, определитель первого, второго и четвертого столбца, находим $a_{13} a_{21} H_1^2 + a_{12} a_{23} H_2^2 - a_{13} a_{23} H_3^2 = 0$. Вспомогая обозначение a_{ij} и φ_{ij} , получим отсюда $\beta_{13} \beta_{21} H_1 + \beta_{23} \beta_{12} H_2 + \beta_{13} \beta_{23} H_3 = 0$ (19). Используя уравнения в) и с) системы (3) из [1], это уравнение можно записать так:

$$H_2 \frac{\partial \beta_{13}}{\partial u_2} - \beta_{13} \frac{\partial H_2}{\partial u_2} = 0.$$

Следовательно, $\frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{\beta_{13}}{H_2} \right) = 0$. Из уравнения (19) вытекает также

$\frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{\beta_{23}}{H_1} \right) = 0$. Приравнявая нулю и другие миноры третьего порядка матрицы D мы получим уравнение

$\frac{\partial}{\partial u_k} \left(\frac{\beta_{ij}}{H_k} \right) = 0$ при всех остальных

ных комбинациях индексов. Покажем, что уравнение (18) вытекает из (16) и системы (3), [1]. Из этих уравнений следует, что найдутся такие функции $c_{ij}(u_i, u_j)$, что $\beta_{ij} = H_k c_{ij}$. Следовательно, $\beta_{ij} c_{ji} = \beta_{ji} c_{ij}$. Дифференцируя это равенство по u_k и используя уравнение с) системы (3), [1], получим $\beta_{ik} \beta_{kj} c_{ji} = \beta_{jk} \beta_{ki} c_{ij}$. Умножим левую часть этого уравнения на $\beta_{ji} c_{ij}$, а правую на равное ему число $\beta_{ij} c_{ji}$. После сокращения на $c_{ji} c_{ij}$ находим $\beta_{ik} \beta_{kj} \beta_{ji} = \beta_{jk} \beta_{ki} \beta_{ij}$, т. е. выполнено уравнение (18). Если же, например, число $c_{ij} = 0$, то $\beta_{ij} = 0$. Из уравнения с), (3), [1] получим $\beta_{ik} \beta_{kj} = 0$ и уравнение (18) также выполнено. Итак, лемма 3 доказана.

Лемма 4. Если $\beta_{ij} = H_k c_{ij}$, то имеют место уравнения $c_{ij} c_{jk} + c_{ji} c_{ik} + c_{jk} c_{ik} = 0$ (20), где i, j, k — различные индексы.

Согласно определению коэффициентов β_{ij} и условию леммы, можем записать

$$\frac{\partial H_k}{\partial u_i} = H_i H_j c_{ik}, \quad \frac{\partial H_k}{\partial u_j} = H_i H_j c_{jk}.$$

Условие равенства смешанных производных H_k дает $[\beta_{ji} H_i^2 - (\beta_{ji} H_i + \beta_{jk} H_k) H_j] c_{ik} = [\beta_{ij} H_i^2 - (\beta_{ij} H_i + \beta_{ik} H_k) H_j] c_{jk}$. Заменяя здесь β_{ij} через $H_k c_{ij}$ и сокращая на $H_k (H_i^2 - H_j^2)$, мы придем к уравнению (20), справедливому и при $H_i = H_j$.

Покажем теперь, что погружение L^3 в E^5 , для которого $\dim T_2 \leq 8$, функционально вырождено. Для этого необходимо и достаточно показать, что $\text{grad } H_i$ коллинеарен $\text{grad } H_j$ при $i \neq j$, т. е. равны нулю соответствующие миноры, составленные из компонент этих векторов. Имеем, например,

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial u_1} & \frac{\partial H_3}{\partial u_1} \\ \frac{\partial H_1}{\partial u_2} & \frac{\partial H_3}{\partial u_2} \end{vmatrix} = - (c_{12} c_{23} + c_{21} c_{13} + c_{13} c_{23}) H_1 H_2^2 H_3 = 0$$

в силу (20). Аналогично устанавливается равенство нулю и других миноров. Итак, погружение L^3 в E^5 функционально вырождено. Наоборот, если погружение L^3 в E^5 функционально вырождено, то в работе [1] установлено, что $\beta_{ki} = H_j c_{ki}$, см. (58) в [1]. По лемме 3 это условие достаточно для выполнения условия $\dim T_2 \leq 8$. Теорема 3 доказана.

Покажем, что если $\Gamma^3 \subset E^m$, то $m \geq 8$. Допустим $m = 7$. Тогда $\dim T_2 = 7$. Это возможно лишь при условии, что ранг D равен 1. Покажем, что все $a_{ij} = 0$. Имеем, например, $(a_{12} + a_{13}) h_2^2 - a_{12} h_1^2 = 0$; $a_{12} h_3^2 - a_{13} h_2^2 = 0$. Складывая, получим $a_{12} (h_2^2 + h_3^2 - h_1^2) = 0$, т. е. $a_{12} H_1^2 = 0$. Так как $H_1 \neq 0$, то $a_{12} = 0$. Если все $a_{ij} = 0$, то все $\beta_{ij} = 0$. Но для регулярного погружения L^3 в E^5 это невозможно.

Обратимся теперь к функции V — аналогу функции Дарбу.

Она определяется из системы уравнений $\frac{\partial^2 V}{\partial u_i \partial u_j} = \beta_{ij} \beta_{ji}$, $i \neq j$.
Поэтому

$$\frac{\partial^3 V}{\partial u_1 \partial u_2 \partial u_3} = \beta_{13} \beta_{32} \beta_{21} + \beta_{12} \beta_{23} \beta_{31};$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial u_1 \partial u_2} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial u_2 \partial u_3} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial u_3 \partial u_1} = \beta_{12} \beta_{21} \beta_{23} \beta_{32} \beta_{31} \beta_{13}.$$

Имеет место следующее соотношение:

$$\left(\frac{\partial^3 V}{\partial u_1 \partial u_2 \partial u_3} \right)^2 - 4 \frac{\partial^2 V}{\partial u_1 \partial u_2} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial u_2 \partial u_3} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial u_3 \partial u_1} = (\beta_{13} \beta_{32} \beta_{21} - \beta_{12} \beta_{23} \beta_{31})^2.$$

Поэтому, если $\dim T_2(\Gamma^3) \leq 8$, то функция Дарбу удовлетворяет уравнению (2).

Функция V определяется не однозначно — с точностью до суммы функций, каждая из которых зависит от одного аргумента. В работе [1] доказано: можно найти такую функцию V , что имеет место равенство: $2 \frac{\partial^2 V}{\partial u_i^2} + h_i^2 + \sum_k (\beta_{ik}^2 + \beta_{ki}^2) = 0$. Покажем, что эта

функция Дарбу — выпуклая вверх функция. Запишем выражение второго дифференциала от V в координатах u_i :

$$d^2 V = -\frac{1}{2} \sum_i \left(h_i^2 + \sum_k (\beta_{ik}^2 + \beta_{ki}^2) \right) du_i^2 +$$

$$+ \sum_{i,j} \beta_{ij} \beta_{ji} du_i du_j = -\frac{1}{2} \sum_i h_i^2 du_i^2 -$$

$$-\frac{1}{2} (\beta_{ik} du_i - \beta_{ki} du_k)^2 - \frac{1}{2} (\beta_{ki} du_i - \beta_{ik} du_k)^2 - \dots \leq 0,$$

где точками заменены члены, получаемые при других сочетаниях пар индексов i, k . Отсюда видно, что $d^2 V \leq 0$, причем равенство возможно лишь при нулевом смещении $\{du_i\}$. Поэтому V — выпуклая вверх функция. Приведенное рассуждение справедливо для погружения L^n в E^{2n-1} при любом $n \geq 2$.

Список литературы: 1. Аминов Ю. А. Изометрические погружения областей n -мерного пространства Лобачевского в $(2n-1)$ -мерное евклидово пространство. — Мат. сб., 1980, 111 (153), № 3, с. 402—433. 2. Аминов Ю. А. Преобразование Бианки для области многомерного пространства Лобачевского. — Укр. геометр. сб., 1978, вып. 21, с. 3—5. 3. Аминов Ю. А. Изометрические погружения областей n -мерного пространства Лобачевского в $(2n-1)$ -мерное евклидово пространство. — Докл. АН СССР, 1977, 236, № 3, с. 521—524.

Поступила в редколлегию 01.11.82.

ПОВЕРХНОСТИ С ВЫРОЖДЕННЫМ СФЕРИЧЕСКИМ ИЗОБРАЖЕНИЕМ

Работа посвящена изучению k -мерных гладких поверхностей с вырожденным сферическим изображением в евклидовом и сферическом пространствах.

А. В. Погореловым было доказано, что через каждую точку гладкой поверхности F^2 в E^3 с нулевой внешней кривизной проходит прямолинейная образующая с концами на границе. Касательная плоскость к F^2 вдоль образующей стационарна [1]. Полная гладкая поверхность F^2 нулевой внешней кривизны является цилиндром. Ф. Хартман и Л. Ниренберг [2] доказали, что если гиперповерхность M^n в E^{n+1} полна в римановой метрике и ранг сферического изображения M^n на S^n , где S^n — единичная сфера в E^{n+1} , строго меньше двух, то M^n изометрично E^n и является цилиндром с $(n-1)$ -мерной образующей. Ф. Хартман [3] доказал, что если

1) M^d — d -мерное ($d \geq 2$) полное риманово многообразие класса C^k ($k \geq 2$) с неотрицательными кривизнами в двумерных направлениях изометрически погружено (класса C^k) в евклидово пространство E^{d+l} , $l > 0$;

2) $\nu(p) > 0$ для всех $p \in M^d$, где $\nu(p)$ — максимальная размерность подпространства касательного пространства $T_p M^d$, образованного векторами X такими, что $A(N, p)X = 0$ для всех нормалей N , где $A(N, p)$ — матрица коэффициентов второй квадратичной формы поверхности M^d относительно нормали N в точке p и $m = \min \nu(p)$ по $p \in M^d$, то поверхность M^d — цилиндрическая (класса C^{k-1}) с m -мерными образующими.

Работы Ф. Хартмана и Л. Ниренберга относятся к регулярным поверхностям.

В работах [4, 5] результаты А. В. Погорелова обобщены на случай гладких гиперповерхностей F^{n-1} в E^n .

Гладкой поверхностью F^k в E^n будем называть поверхность, которую локально можно задать в виде $x_{k+1} = x_{k+1}(x_1, \dots, x_k), \dots, x_n = x_n(x_1, \dots, x_k)$, где функции $x_{k+1}, \dots, x_n$ имеют непрерывные частные производные. Так как поверхность F^k гладкая, то в каждой точке $x \in F^k$ существует касательная плоскость $E^k(x)$. Обозначим через $N^{n-k}(x)$ ортогональное дополнение к $E^k(x)$. Пусть S^{n-1} — сфера единичного радиуса в E^n , $S^{n-k-1}(x)$ — сфера единичного радиуса, которая является пересечением сферы S^{n-1} и плоскости $N_o^{n-k}(x)$, параллельной $N^{n-k}(x)$ и проходящей через центр сферы S^{n-1} . Сфера $S^{n-k-1}(x)$ представляет собой сферическое изображение точки x . Объединение сферических изображений всех точек $x \in F^k$ называется сферическим изображением поверхности F^k .

Напомним определение m -мерной хаусдорфовой меры. Пусть Ω — метрическое пространство. Обозначим через $T(E, \delta)$ совокупность всевозможных разбиений множества $E \subset \Omega$ на конечное или счетное число подмножеств E_i , диаметр каждого из которых не превосходит δ . Пусть $P \in T(E, \delta)$ — разбиение множества E на подмножества E_i . Обозначим через $H_m^\delta(E, P)$ сумму $\sum_i d_i^m$, где d_i — диаметр множеств E_i , $H_m^\delta(E) = \inf_{P \in T(E, \delta)} H_m^\delta(E, P)$. Предел, если он существует, $\lim_{\delta \rightarrow 0} H_m^\delta(E) = H_m(E)$ называется m -мерной мерой Хаусдорфа множества E (или, короче, m -мерой Хаусдорфа). Сведения о мерах Хаусдорфа и их геометрических приложениях можно найти в работах [6—8].

Под l -мерной образующей поверхности F^k будем понимать область на l -мерной евклидовой плоскости, принадлежащую поверхности F^k .

В работе доказываются следующие теоремы:

Теорема 1. Если $(n - k + 1)$ -мерная мера Хаусдорфа сферического изображения гладкой поверхности F^k равна нулю, то или точка x поверхности F^k имеет плоскую окрестность, или через точку x проходит единственная $(k-1)$ -мерная образующая $E^{k-1}(x)$. Граничные точки образующей $E^{k-1}(x)$ лежат на границе поверхности, касательная плоскость к поверхности вдоль образующей стационарна.

Теорема 2. Если $(n - k + 1)$ -мерная хаусдорфова мера сферического изображения полной гладкой поверхности F^k в E^n равна нулю, то F^k является цилиндром с $(k-1)$ -мерной образующей.

Теорема, аналогичная теореме 1, справедлива для гладких поверхностей F^k в сферическом пространстве. В этом же пространстве верна

Теорема 3. Если $(n - k + 1)$ -мерная хаусдорфова мера сферического изображения полной гладкой поверхности $F^k \subset S^n$ равна нулю, то F^k будет большой сферой $S^k \subset S^n$.

Для гиперповерхностей этот результат доказан в [5].

Доказательству теорем 1 и 2 предпослём ряд лемм и предварительных замечаний.

Пусть E^m и E^l — евклидовы пространства размерностей m и l соответственно, $E^m \times E^l$ — декартово произведение пространств E^m и E^l . Тогда верна лемма, которая доказана в [6] как следствие более общего результата.

Лемма 1. Если множество $A \subset E^m \times E^l$, тогда

$$\int_{E^m} H^l \{z; (y; z) \in A\} dH^m(y) \leq C(l, m) H^{l+m}(A),$$

где $0 \leq l, m < \infty$, $C(l, m)$ — постоянная, зависящая только от l и m . Интегрирование ведется по мере H^m , $\{y; z\}$ — координаты точки $x \in E^m \times E^l$.

Рассмотрим гладкую поверхность $F^k \subset E^n$. Пусть точка $O \in F^k$, $E^k(O)$ — касательная плоскость к F^k в точке O . Пусть $N^l \in N^{n-k}(O)$ — подпространство в $N^{n-k}(O)$, проходящее через точку O и $N^{\perp}_l$ — ортогональное дополнение к N^l в $N^{n-k}(O)$. Обозначим $E^{n-l}(O) = E^k(O) \times N^{\perp}_l$ и $F^k(O)$ — ортогональную проекцию поверхности F^k на $E^{n-l}(O)$.

Лемма 2. Сферическое изображение поверхности F^k лежит в $E^{n-l} \cap \omega(F^k)$, где E^{n-l} — плоскость, параллельная плоскости $E^{n-l}(O)$, проходящая через центр сферы S^{n-1} , $\omega(F^k)$ — сферическое изображение поверхности F^k .

Доказательство. Заметим, что касательные плоскости к поверхности F^k при проектировании на $E^{n-l}(O)$ перейдут в касательные плоскости к поверхности $\tilde{F}^k(O)$. Рассмотрим, что собой представляет сферическое изображение поверхности $\tilde{F}^k(O)$ в плоскости $E^{n-l}(O)$. При доказательстве леммы будем считать, что все рассматриваемые плоскости проходят через центр сферы S^{n-1} .

Рассмотрим плоскость $E^k(y)$, касательную к F^k в точке $y \in F^k$. Если спроектируем $E^k(y)$ на $E^{n-l}(O)$, то получим касательную плоскость к поверхности $\tilde{F}^k(O)$ в точке $\bar{y}$, соответствующей точке y при проектировании. Обозначим ее $E^k(\bar{y})$. Ортогональное дополнение к $E^k(\bar{y})$ в $E^{n-l}(O)$ обозначим $E^{\perp}(\bar{y})$. При пересечении со сферой $S^{n-1} \cap E^{n-l}(O) = S^{n-l-1}$ плоскость $E^{\perp}(\bar{y})$ дает сферическое изображение точки $\bar{y}$ в пространстве $E^{n-l}(O)$. С другой стороны, $E^{\perp}(\bar{y})$ ортогонально пространству N^l по построению, значит, $E^{\perp}(\bar{y})$ ортогонально плоскости $E^{k+l}(\bar{y}) = N^l \times E^k(\bar{y})$. Но в $E^{k+l}(\bar{y})$ лежит плоскость $E^k(y)$ (это следует из построения плоскости $E^k(\bar{y})$). Значит, $E^{\perp}(\bar{y})$ ортогонально $E^k(y)$, т. е. лежит в ортогональном дополнении к плоскости $E^k(y)$ в пространстве E^n . Отсюда и следует утверждение леммы.

Пусть S^{n-1}_- — открытая полусфера сферы S^{n-1} . Можно установить геодезическое отображение полусферы S^{n-1}_- на евклидово пространство следующим образом. Проведем касательную плоскость E^{n-1} к S^{n-1}_- в полюсе полусферы. Из центра сферы S^{n-1} проведем луч так, чтобы он пересекал S^{n-1}_- и E^{n-1} . Точки пересечения $x \in S^{n-1}_-$ и $y \in E^{n-1}$ будем ставить в соответствие при этом отображении. Это отображение переводит геодезические линии сферы S^{n-1} (большие окружности) в геодезические линии плоскости E^{n-1} (прямые). Большие сферы $S^k \subset S^{n-1}$ перейдут в плоскости $E^k \subset E^{n-1}$.

Лемма 3. Если A — множество, которое лежит вместе со своим замыканием $\bar{A}$ в открытой полусфере сферы S^{n-1}_- , $\varphi(A)$ — образ множества A при геодезическом отображении S^{n-1}_- на E^{n-1} , построенном указанным выше способом, то для m -мерной меры Хаусдорфа множества A выполняются неравенства

$$\left(\frac{2}{\pi}\right)^m H_m(A) \leq H_m(\varphi(A)) \leq \left(\frac{\sqrt{2}}{C^2}\right)^m H_m(A),$$

где C — постоянная.

Если в качестве $N^l \in N^{n-k}(O)$ взять произвольную нормаль N , то для нее $\tilde{F}^k(O)$ обозначим через $\tilde{F}_N^k$, плоскость $E^{n-1}(O)$ — через $E_N^{n-1}(O)$ и т. д.

Лемма 4. Если $(n-k+1)$ -мерная мера Хаусдорфа сферического изображения поверхности F^k равна нулю, то $(n-k)$ -мерная мера Хаусдорфа сферического изображения поверхности $\tilde{F}_N^k$ в пространстве $E_N^{n-1}(O)$ равна нулю почти для всех $N \in N^{n-k}(O)$.

Доказательство. Рассмотрим произвольную двумерную плоскость $E^2 \in N^{n-k}(O)$, пусть $S^1 = E^2 \cap S^{n-1}$. Докажем, что почти для всех нормалей $N \in E^2$ сферическое изображение поверхности $\tilde{F}_N^k$ имеет нулевую $(n-k)$ -мерную меру Хаусдорфа.

Пусть $N \in E^2$, тогда поверхность $\tilde{F}_N^k$ лежит в гиперплоскости $E_N^{n-1}(O)$ и сферическое изображение поверхности $\tilde{F}_N^k$ лежит в большой сфере $S_N^{n-2} \subset S^{n-1}$, пересекающей окружность S^1 в точке x и ортогональной этой окружности. Точке x соответствует единичный вектор N_1 , который ортогонален нормали N и лежит в E^2 . Если единичный вектор N , параллельный нормали N , описывает некоторое множество G на S^1 , то N_1 описывает множество G_1 , конгруэнтное множеству G .

Допустим на S^1 есть множество G ненулевой 1-меры Хаусдорфа такое, что для единичных векторов N с концами в G сферическое изображение поверхности $\tilde{F}_N^k$ имеет ненулевую $(n-k)$ -меру Хаусдорфа. Сферы S_N^{n-2} проходят через точки множества G_1 ортогонально к S^1 . Выберем окрестность на S^1 такую, чтобы пересечение $P = S^1 \cap G_1$ вместе с замыканием лежало в открытой полусфере сферы S^{n-1} и 1-мера Хаусдорфа множества P была отлична от нуля. В точке $A \in P$ проведем касательную гиперплоскость $E^{n-1}(A)$ к сфере S^{n-1} . Установим геодезическое отображение полусферы S_-^{n-1} , в которой содержится P , на $E^{n-1}(A)$. Тогда P перейдет в некоторое множество P' на прямой $E^{1'}$, являющейся образом окружности S^1 . Большие сферы S_N^{n-2} перейдут в параллельные плоскости E_N^{n-2} , ортогональные к $E^{1'}$. Обозначим ω_N — сферическое изображение поверхности $\tilde{F}_N^k$. При геодезическом отображении оно перейдет в некоторое множество $\omega'_N \in E_N^{n-2}$. Объединение сферических изображений ω_N по всем единичным векторам N с концами в P обозначим Ω . По лемме 2 $\Omega \subset \omega(F^k)$. Образ Ω при геодезическом отображении S_-^{n-1} на $E^{n-1}(A)$ обозначим Ω' . По предположению P имеет ненулевую 1-меру Хаусдорфа, а Ω_N — ненулевую $(n-k)$ -меру Хаусдорфа. По лемме 3 тогда и P' , и Ω'_N имеют соответствующие ненулевые меры Хаусдорфа. Множество Ω' принадлежит пространству $E^{1'} \times E_N^{n-2}$, причем $\Omega'_N = \Omega' \cap E_N^{n-2}$. По лемме 1 $(n-k+1)$ -мера Хаусдорфа множества Ω' не равна нулю. По лемме 3 $(n-k+1)$ -мера Хаусдорфа множества $\Omega \subset \omega(F^k)$

не равна нулю, но тогда и $(n - k + 1)$ -мера множества $\omega(F^k)$ не равна нулю, что противоречит условию леммы.

Итак, почти для всех единичных векторов N с концами на S^1 сферическое изображение поверхности $\tilde{F}_N^k$ имеет нулевую $(n - k)$ -меру Хаусдорфа. Но S^1 — произвольная окружность. Значит, утверждение верно для любой большой окружности $S^1 \in S^{n-k-1} = N^{n-k} \cap S^{n-1}$. Обозначим $B \in S^{n-k-1}$ такое множество, что $\tilde{F}_N^k$ имеет ненулевую $(n - k)$ -меру Хаусдорфа сферического изображения, если конец нормали N лежит в B . По доказанному выше пересечение $B \cap S^1$, где S^1 — любая окружность на S^{n-k-1} , имеет нулевую 1-меру Хаусдорфа. Так как 1-мера Хаусдорфа на S^1 и $(n - k - 1)$ -мера Хаусдорфа на S^{n-k-1} совпадают с мерами Лебега на S^1 и S^{n-k-1} соответственно, то отсюда следует, что $(n - k - 1)$ -мера Хаусдорфа множества B равна нулю, что и требовалось доказать.

Пусть теперь N — нормаль, $E_N^{k+1} = F^k(O) \times N$, $F_N^k(O)$ — проекция поверхности F^k на плоскость E_N^{k+1} . Аналогично доказыва-

Лемма 4'. Если $(n - k + 1)$ -мерная мера Хаусдорфа сферического изображения поверхности F^k равна нулю, то двумерная мера Хаусдорфа сферического изображения поверхности $F_N^k(O)$ в пространстве $E_N^{k+1}(O)$ равна нулю почти для всех $N \in N^{n-k}(O)$. Легко доказывается

Лемма 5. Если поверхность F^k лежит в евклидовом пространстве E^n , $E^n \subset E^m$ и $(m - k + 1)$ -мерная хаусдорфова мера сферического изображения поверхности F^k в E^m равна нулю, то и $(n - k + 1)$ -мера Хаусдорфа сферического изображения поверхности F^k в E^n также равна нулю ($l \leq k - 1$).

Доказательство теоремы 1. Сначала теорему докажем для двумерной поверхности F^2 в евклидовом пространстве E^n произвольной размерности $n \geq 3$. Доказательство будем вести методом индукции по коразмерности. Когда коразмерность равна 1, т. е. объемлющее пространство — E^3 , теорема доказана А. В. Погореловым [1]. Пусть теперь теорема верна для случая, когда коразмерность $n - 2 = l - 1$ и докажем теорему, когда $n - 2 = l$.

По лемме 4 почти для всех $N(O)$ сферическое изображение поверхности $\tilde{F}_N^2$ имеет нулевую $(n - 2)$ -меру Хаусдорфа. По предположению индукции или некоторая окрестность точки $O \in \tilde{F}_N^2$ — плоская, или через O проходит единственная образующая с концами на границе окрестности, касательная плоскость вдоль которой стационарна. Из того, что поверхность $\tilde{F}_N^2$ состоит из прямолинейных образующих с концами на границе, касательная плоскость вдоль которых стационарна почти для всех нормалей N , следует, что таким свойством обладает поверхность $\tilde{F}_N^2$ для любой нормали N .

Если некоторая окрестность U точки O на $\tilde{F}_N^2$ — плоская и лежит в двумерной плоскости $E^2(O)$, то соответствующая окрестность $\tilde{U} \in F^2$ лежит в $E^3 = E^2(O) \times N$. По лемме 5 2-мерная мера Хаусдорфа сферического изображения окрестности $\tilde{U} \in F^2$ равна нулю, и по теореме, доказанной А. В. Погореловым, $\tilde{U}$ или является плоской, или через каждую точку окрестности $\tilde{U}$ проходит единственная прямолинейная образующая, касательная плоскость вдоль которой стационарна. В этом случае теорема доказана.

Пусть теперь для всех нормалей N к F^2 в точке O поверхность $\tilde{F}_N^2$ такова, что через каждую точку $x \in \tilde{F}_N^2$ проходит единственная прямолинейная образующая с концами на границе, касательная плоскость вдоль которой стационарна. Касательные плоскости к $\tilde{F}_N^2$ в точке O совпадают с касательной плоскостью $E^2(O)$ к F^2 в той же точке. Так как через точку O на каждой поверхности $\tilde{F}_N^2$ проходит своя единственная прямолинейная образующая E_N^1 , касательная плоскость вдоль которой стационарна, то все образующие E_N^1 лежат в плоскости $E^2(O)$. В каждую из образующих E_N^1 проектируется некоторая кривая $\gamma(N) \in F^2$. Каждая кривая $\gamma(N)$ лежит в двумерной плоскости $E_N^2 = E_N^1 \times N$. Если ортогонально спроектировать поверхность $\tilde{F}_N^2$ на $E^2(O)$, то это равносильно ортогональному проектированию F^2 на $E^2(O)$. Некоторая окрестность точки O проектируется взаимно однозначно на $E^2(O)$. При проектировании $\tilde{F}_N^2$ на $E^2(O)$ образующая E_N^1 остается на месте, а так как это проектирование равносильно проектированию F^2 на $E^2(O)$, то образом кривой $\gamma(N)$ на E_N^1 при этом является образующая E_N^1 . Из взаимно однозначной проектируемости некоторой окрестности $\tilde{U}$ точки $O \in F^2$ на $E^2(O)$ следует, что две различные кривые $\gamma(N_1)$ и $\gamma(N_2)$ не могут проектироваться в одну и ту же образующую E^1 и одна и та же кривая γ не может проектироваться в две различные образующие $E_{N_1}^1$ и $E_{N_2}^1$ при различных направлениях проектирования. Таким образом, при различных нормалях N разные кривые $\gamma(N)$ проектируются в различные образующие E_N^1 .

Выберем в ортогональном дополнении $N^{n-2}(O)$ к $E^2(O)$ произвольную двумерную плоскость E^2 , которая в пересечении со сферой S^{n-1} даст большую окружность S^1 . Если концы единичных нормальных векторов N , параллельных нормали N , опишут S^1 , то образующие E_N^1 будут вращаться вокруг точки O в плоскости $E^2(O)$. Возможны два случая: 1) образующие заполнят плоскость $E^2(O)$ полностью; 2) образующие не заполнят полностью плоскость $E^2(O)$.

Если единичные векторы N непрерывно описывают окружность S^1 то образующие E_N^1 непрерывно вращаются вокруг точки O в плоскости $E^2(O)$. При полном обходе вектора N по окружности

S^1 образующая E_N^1 должна вернуться в исходное положение. Тогда во втором случае получится, что при различных нормалях N_1 и N_2 одна и та же кривая γ переходит в одну и ту же прямолинейную образующую. Этот случай будет рассмотрен ниже. Рассмотрим первый случай.

В силу взаимно однозначной проектируемости некоторой окрестности $\tilde{U}$ точки O на поверхности F^2 на плоскость $F^2(O)$ в рассматриваемом случае получается, что кривые $\gamma(N)$ заполняют окрестность $\tilde{U}$, причем каждая точка $y \in \tilde{U}$ может быть соединена с O кривой $\gamma(N)$, проектирующейся в прямолинейную образующую E_N^1 . Выясним теперь, какое строение будет иметь сферическое изображение поверхности F^2 .

Пусть $y \in F^2$ — какая-либо точка из окрестности $\tilde{U}$ точки O . Соединим O и y кривой $\gamma(N)$, которая проектируется в прямолинейную образующую E_N^1 поверхности $\tilde{F}_N^2$. Все касательные плоскости к поверхности F^2 вдоль $\gamma(N)$ проектируются в касательную плоскость $E^2(O)$. Это следует из стационарности касательной плоскости к поверхности $\tilde{F}_N^2$ вдоль образующей E_N^1 . Но тогда все касательные плоскости к F^2 вдоль $\gamma(N)$ лежат в $E_N^3 = E^2(O) \times N$. Ортогональное дополнение N_N^{n-3} к плоскости E_N^3 будет ортогональным пространством ко всем касательным плоскостям к поверхности F^2 вдоль $\gamma(N)$, т. е. все ортогональные пространства $N^{n-2}(y)$ к F^2 вдоль кривой $\gamma(N)$ будут содержать плоскость N_N^{n-3} . Тогда сферическое изображение поверхности F^2 вдоль кривой $\gamma(N)$ будет представлять собой пучок $S(O; y)$ $(n-3)$ -мерных сфер, проходящих через $(n-4)$ -мерную сферу $S^{n-4}(N) = S^{n-1} \cap E_N^{n-3}$. Разобьем теперь множество точек из окрестности $\tilde{U}$ на два класса. К первому классу отнесем те точки, сферическое изображение которых принадлежит пучку сфер $S(O; y)$, ко второму классу — все остальные точки из $\tilde{U}$. Обозначим $S^{n-3}(O)$ и $S^{n-3}(y)$ — сферические изображения точек O и y соответственно. Так как они пересекаются по $(n-4)$ -мерной сфере, то на них можно натянуть $(n-2)$ -мерную сферу. Обозначим ее $S^{n-2}(O; y)$. Пусть точка $x \in \tilde{U}$ принадлежит второму классу точек. Если в точке x провести все те построения, что и в точке O , то придем к выводу, что точку x можно соединить кривой $\gamma(x; z)$ с любой точкой z окрестности $\tilde{U}$, причем $\gamma(x; z)$ проектируются в прямолинейную образующую поверхности $\tilde{F}_N^2(x)$ при проектировании в направлении некоторой нормали $N(x)$. Но тогда сферические изображения $S^{n-3}(x)$ и $S^{n-3}(z)$ точек x и z соответственно принадлежат одному пучку $S(x; z)$ $(n-3)$ -мерных сфер и пересекаются по $(n-4)$ -мерной сфере. Таким образом, сферическое изображение $S^{n-3}(x)$ точки x , принадлежащей второму классу, имеет $(n-4)$ -мерные пересечения со сферическими изображениями $S^{n-3}(O)$ и $S^{n-3}(y)$ точек

O и y . Но тогда $S^{n-3}(x)$ лежит на сфере $S^{n-2}(O; y)$ (точки O и y можно выбрать так, что $S^{n-3}(O)$ и $S^{n-3}(y)$ — различны).

Пусть теперь точка x_1 принадлежит первому классу. Тогда ее сферическое изображение пересекает, например, $S^{n-3}(O)$ по $(n-4)$ -мерной сфере. С другой стороны, $S^{n-3}(x_1)$ принадлежит некоторому пучку $S(x_1; x)$ сфер, где x — точка из второго класса. Тогда $S^{n-3}(x_1)$ пересекает и $S^{n-3}(x)$ по $(n-4)$ -мерной сфере. Но $S^{n-3}(x) \subset S^{n-2}(O; y)$, значит и $S^{n-3}(x_1) \subset S^{n-2}(O; y)$.

Покажем, что все точки из окрестности $\tilde{U}$ не могут принадлежать первому классу. Допустим противное. Тогда соединим точку O с двумя точками x_1 и x_2 кривыми $\gamma(O; x_1)$ и $\gamma(O; x_2)$, которые проектируются в прямолинейные образующие. Точки x_1 и x_2 можно выбрать так, что кривые, их соединяющие, будут различны. По построению, проведенному выше, «осью» пучка сфер, представляющего собой сферическое изображение точек кривой $\gamma(O; x_1)$ (или кривой $\gamma(O; x_2)$), является плоскость $E_{N_1}^{n-3}$ (или $E_{N_2}^{n-3}$). Оно будет нормальным пространством к поверхности $F_{N_1}^2$ (или $F_{N_2}^2$) вдоль образующей, в которую перейдет $\gamma(O; x_1)$ (или $\gamma(O; x_2)$). Нормали N_1 и N_2 непараллельны, значит, по построению, $E_{N_1}^{n-3} \neq E_{N_2}^{n-3}$. Но тогда $S_{N_1}^{n-4} = E_{N_1}^{n-3} \cap S^{n-1} \neq S_{N_2}^{n-4} = E_{N_2}^{n-3} \cap S^{n-1}$. По предположению сферические образы точек вдоль кривых $\gamma(O; x_1)$ и $\gamma(O; x_2)$ принадлежат одному пучку, значит, эти образы должны содержать как $S_{N_1}^{n-4}$, так и $S_{N_2}^{n-4}$, но тогда все они совпадают, поскольку являются $(n-3)$ -мерными сферами. Точки x_1 и x_2 выбраны произвольно, следовательно, сферические образы всех точек поверхности F^2 в случае, когда все они принадлежат к первому классу, совпадают. А это означает, что поверхность в этом случае есть часть плоскости E^2 . Этот случай был рассмотрен ранее.

Таким образом доказано, что сферические изображения всех точек из $\tilde{U}$ лежат на одной и той же сфере $S^{n-2}(O; y) \subset S^{n-1}$. Сфера $S^{n-2}(O; y)$ является пересечением некоторой гиперплоскости $E^{n-1}(O; y)$ и сферы S^{n-1} . Направление e , ортогональное к $E^{n-1}(O; y)$, будет ортогонально всем нормальным к F^2 пространствам в окрестности $\tilde{U}$. Значит, e параллельно всем касательным плоскостям к F^2 в окрестности $\tilde{U}$. Выберем систему координат следующим образом: точка O — начало координат, касательная плоскость $E^2(O)$ — плоскость переменных x_1 и x_2 . В ортогональном дополнении $E^\perp(O)$ выберем взаимно ортогональные оси $z_3, \dots, z_n$, ось z_2 направим по e , а ось z_1 — ортогонально e в плоскости $F^2(O)$. Тогда уравнение поверхности F^2 в окрестности U точки O (U — проекция $\tilde{U}$ на $E^2(O)$) можно задать в виде: $z_1 = x_1; z_2 = x_2; z_3 = z_3(x_1; x_2); \dots; z_n = z_n(x_1; x_2)$. Касательные векторы к координатным линиям $x_i = \text{const}$ в любой точке $z \in \tilde{U}$ будут параллельны вектору e . Но e имеет координаты $(0, 1, 0, \dots, 0)$, значит,

$\frac{\partial z_3}{\partial x_2} = \dots = \frac{\partial z_n}{\partial x_2} = 0$, т. е. функции $z_3, \dots, z_n$ зависят только от x_1 , а это означает, что поверхность F^2 является цилиндром с образующими, параллельными оси OZ_2 . Но это противоречит предположению, что при различных нормалях N различные кривые $\gamma(N)$ проектируются в различные образующие. Остается случай, когда при различных нормалях N_1 и N_2 одна и та же кривая $\gamma \in F^2$ переходит в одну и ту же прямолинейную образующую E^1 , лежащую на $\tilde{F}_{N_1}^2$ и $\tilde{F}_{N_2}^2$. Тогда γ лежит в двух различных двумерных плоскостях $E^1 \times N_1 = E_{N_1}^2$ и $E_{N_2}^2 = E^1 \times N_2$, т. е. γ является прямолинейной образующей, совпадающей с $E^1 \in F^2$. Касательная плоскость $E^2(O)$ к поверхности F^2 стационарна вдоль E^1 . Действительно, $E^2(O)$ является касательной плоскостью к $F_{N_1}^2$ и стационарна вдоль E^1 . Тогда все касательные плоскости к F^2 вдоль E^1 лежат в $E_{N_1}^3 = N_1 \times E^2(O)$. Аналогично эти же плоскости лежат в $E_{N_2}^3 = N_2 \times E^2(O)$, значит, все касательные плоскости к F^2 вдоль E^1 лежат в пересечении $E_{N_1}^3 \cap E_{N_2}^3$, т. е. совпадают с $E^2(O)$. По предположению окрестность $\tilde{U}$ не является плоской, значит, через каждую точку $y \in \tilde{U}$ проходит единственная прямолинейная образующая с концами на границе окрестности, касательная плоскость вдоль которой стационарна. Таким образом, для двумерной поверхности F^2 в евклидовом пространстве E^n любой размерности n теорема доказана. Дальнейшее доказательство для поверхности F^k произвольной размерности аналогично доказательству для гиперповерхностей [4].

Доказательство теоремы 2. Пусть F^k — полная гладкая поверхность в E^n . Если поверхность F^k имеет плоскую область, то из полноты поверхности следует, что часть F^k будет плоской полосой между двумя $(k-1)$ -мерными плоскостями E_1^{k-1} и E_2^{k-1} , лежащими в плоскости E^k , в которой находится данная плоская область. Покажем это. Пусть точка $p \in F^k$ имеет плоскую окрестность $U(p)$ и точка x_0 лежит на границе этой окрестности, т. е. x_0 уже не имеет плоской окрестности. Рассмотрим образующую $E^{k-1}(x_0)$, проходящую через x_0 . Покажем, что на F^k лежит полная образующая E_1^{k-1} , содержащая $E^{k-1}(x_0)$, и точки, лежащие на E_1^{k-1} , уже не имеют плоских окрестностей. Если такой полной образующей нет, то тогда $E^{k-1}(x_0)$ должна пересекаться с другой образующей $E^{k-1}(x_1)$ в некоторой точке $x_1 \in E^{k-1}(x_0)$. Но тогда x_1 должна иметь плоскую окрестность $U(x_1)$. Пусть x_2 лежит в пересечении образующей $E^{k-1}(x_0)$ и границы окрестности $U(x_1)$. Точка x_2 уже не имеет плоской окрестности, но с другой стороны через нее проходит $E^{k-1}(x_0)$ и образующая границы окрестности $U(x_1)$, т. е. через x_2 проходят две образующие. Это противоречит тому, что через каждую точку, не имеющую плоской окрестности, проходит единственная образующая. Таким образом, если точка x_0 лежит на границе плоской окрестности, то через нее проходит полная

образующая E_1^{k-1} , лежащая на F^k , и точки $x \in E_1^{k-1}$ уже не имеют плоских окрестностей.

Проведем теперь через каждую внутреннюю точку O окрестности $U(p)$ образующую $E^{k-1}(O)$, параллельную E_1^{k-1} . Допустим, что $E^{k-1}(O)$ — неполная. Тогда она должна пересекать в какой-то точке O_1 границу окрестности $U(p)$. Образующая $E^{k-1}(O_1)$, проходящая через O_1 , состоит из точек, не имеющих плоских окрестностей. По доказанному выше $E^{k-1}(O_1)$ — полная. Но раз $E^{k-1}(O_1)$ пересекает $E^{k-1}(O)$, то она пересекает и E_1^{k-1} . А это противоречит тому, что через точки $x \in E_1^{k-1}$ проходит единственная образующая. Таким образом, через внутренние точки O окрестности $U(p)$ проходят полные образующие $E^{k-1}(O)$, параллельные E_1^{k-1} . Если проведем через внутренние точки O окрестности $U(p)$ образующие $E^{k-1}(O)$, то они заполнят или полуплоскость плоскости $E^k \supset U(p)$, или плоскую полосу между параллельными образующими E_1^{k-1} и E_2^{k-1} . Через внутреннюю точку O полосы можно провести полную образующую $E^{k-1}(O)$, параллельную E_1^{k-1} и E_2^{k-1} . Точки $x \in E_1^{k-1}$ и $y \in E_2^{k-1}$ уже не имеют плоских окрестностей.

Рассмотрим теперь точку O , окрестность U которой не является плоской. Тогда через каждую точку x окрестности U проходит единственная образующая $E^{k-1}(x)$. Докажем, что $E^{k-1}(x)$ будет полной. Допустим $E^{k-1}(x)$ не является полной и точки $y \in E^{k-1}(x)$ не имеют плоских окрестностей. Тогда через точку x_1 , лежащую на границе образующей $E^{k-1}(x)$, должна проходить другая образующая. Но тогда x_1 должна иметь плоскую окрестность. А это противоречит тому, что точки на $E^{k-1}(x)$ не имеют плоских окрестностей. Образующие $E^{k-1}(x)$ заполняют некоторую область $G(U)$ на полной поверхности F^k . Таким образом через каждую точку полной поверхности F^k проходит единственная образующая и направление образующих непрерывно зависит от точки.

Пусть теперь $E^k(O)$ — плоскость, касательная к F^k в точке O . В этой плоскости лежит образующая $E^{k-1}(O)$ поверхности F^k . Пусть N — нормаль к F^k в точке O , $E_N^{k+1} = E^k(O) \times N$. Спроектируем F^k на E_N^{k+1} . Если U — достаточно малая окрестность точки O , то $G(U)$ спроектируется в область $G_N(U)$ на гладкой гиперповерхности F_N^k в E_N^{k+1} . Если $G_N(U)$ — часть плоскости, то $G(U)$ лежит в пространстве E^{n-1} . Поэтому можем считать, что $G_N(U)$ не является частью плоскости ни для какой нормали N . Тогда $G_N(U)$ является частью полной гиперповерхности F_N^k , касательные плоскости к которой вдоль образующих стационарны. По теореме для гиперповерхностей, доказанной в [4], гиперповерхность F_N^k — цилиндр, т. е. все образующие параллельны. В частности, параллельны образующие, лежащие в $G_N(U)$. Образующие в $G_N(U)$ являются образами при пресекировании образующих, лежащих в $G(U)$. Пусть O_1 и O_2 — точки в $G(U)$, E_1 и E_2 — обра-

зующие в $G(U)$, проходящие через O_1 и O_2 соответственно. При проектировании на E_N^{k+1} образующие E_1 и E_2 переходят в параллельные образующие E_{1N} и E_{2N} на $G_N(U)$. Тогда E_1 и E_2 лежат в параллельных гиперплоскостях $E_{1N}^{n-1} = E_{1N} \times E_N^{n-k-1}$ и $E_{2N}^{n-1} = E_{2N} \times E_N^{n-k-1}$, где E_N^{n-k-1} — ортогональное дополнение к N в нормальном к F^k пространстве $N^{n-k}(O)$. Пусть теперь $N_1, \dots, N_{n-k}$ — линейно независимые нормали. Тогда E_1 лежит во всех $E_{1N_i}^{n-1}$ ($i = 1, \dots, n-k$). Пересечением всех $E_{1N_i}^{n-1}$ является $(k-1)$ -мерная плоскость, которая и будет образующей E_1 . Аналогично E_2 является пересечением гиперплоскостей $E_{2N_i}^{n-1}$. Но так как гиперплоскости $E_{1N_i}^{n-1}$ и $E_{2N_i}^{n-1}$ попарно параллельны, то E_1 и E_2 параллельны. Таким образом, достаточно близкие образующие E_1 и E_2 на F^k параллельны. Точно так же, как и в работе [4], доказывалось, что тогда любые две образующие параллельны. Теорема доказана.

Список литературы: 1. Погорелов А. В. Внешняя геометрия выпуклых поверхностей. — М.: Наука, 1969. — 760 с. 2. Hartman P., Nirenberg L. On spherical image maps whose jacobian donot change sing — Amer Journ Math, 1959, 81. p. 901—920. 3. Hartman P. On the isometric immersions in Enclidean space of manifolds with nonnegativ sectional curvatures. 2. — Trans. Amer. Math. Soc., 1970, 147, N2, p. 529—540. 4. Борисенко А. А. О строении гиперповерхностей с нулевой мерой Хаусдорфа сферического изображения. — Укр. геометр. сб., 1972, вып. 12, с. 36—45. 5. Борисенко А. А. Строение поверхностей с вырожденным сферическим изображением: Канд. дис. X., 1972. — 122 с. 6. Federer H. Geometric measure theory — Berlin, 1969 — 676 p. 7. Rogers C. Harsdorf measures — Cambr, 1970 — 179 p. 8. Иванов Л. Д. Вариации множеств и функций. — М.: Наука, 1975. — 352 с.

Поступила в редколлегию 25.10.82.

УДК 513

А. М. Гурин

**РЕАЛИЗАЦИЯ СЕТЕЙ ВЫПУКЛЫХ МНОГОГРАННИКОВ
С РАВНОУГОЛЬНЫМИ ВЕРШИНАМИ. 2**

В первой части [1] были рассмотрены замкнутые многогранники с равноугольными вершинами, которые удовлетворяют одному из дополнительных требований: 1) равны двугранные углы; 2) равны ребра; 3) равны плоские углы каждой грани. Здесь будут рассмотрены все выпуклые многогранники с равноугольными вершинами, двойственные выпуклым многогранникам с правильными гранями [2]. Напомним, что среди этих двойственных многогранников имеются многогранники с правильными вершинами, они перечислены в первой части статьи [1].

Теорема. *Существует лишь восемь замкнутых выпуклых многогранников с равноугольными вершинами, двойственных правильным многогранникам, кроме многогранников с правильными вершинами.*

Замечание. Правильные многогранники с номерами [2, табл. 3] 1 и 2 двойственны бесконечным многогранникам с равноугольными вершинами [1] M_2 и M_3 соответственно.

Напомним некоторые символы, введенные [3]: (l, l, n) или (l^n, n) , означает тип грани — треугольная грань с двумя l -гранными и одной n -гранной вершинами. Символ $[k, l]$ означает ребро, соединяющее вершины k и l ; $\{k, l\}$ — двугранный угол при ребре; $v(n)$ — мера плоского угла n -гранной вершины; $\theta[k, l] = v(k) + v(l)$.

Непосредственно вытекают из определения равноугольности вершин свойства $(\alpha, \beta, \dots, \eta)$, приведенные в [3, 4]. Упоминаемые в данной статье правильные многогранники можно найти в [2].

Доказательство. Рассмотрим все сети правильных многогранников, для каждой построим двойственную сеть и проверим возможности ее реализации многогранником с равноугольными вершинами. Правильные многогранники, которым двойственны многогранники с правильными вершинами, перечислены в [1]. Из оставшихся только многогранники с номерами [2, табл. 3] 3, 6, 9, 16, 18, 20, 21, 32, 33, 35, 36, 38, 39—43 дают двойственные сети, реализация которых не очевидна. Покажем, что из них можно реализовать лишь сети, двойственные многогранникам с номерами 3, 9, 16, 18, 20, 35, 38, 39.

Дальше эти двойственные сети будут обозначены номерами соответствующих им по двойственности правильных многогранников.

Сеть № 3 может быть реализована многогранником для различных значений плоских углов. Возможно предельное положение, когда это правильный симплекс с шестью условными ребрами на гранях и условной вершиной в основании симплекса. В других случаях, задавая значения плоских углов шестигранной и трехгранной вершин, можно найти величины остальных плоских и двугранных углов многогранника, удовлетворяющих требованию выпуклости многогранника и равноугольности вершин.

Не существует многогранника M с сетью ребер № 6 (рис. 1). Все 10 треугольников, сходящихся в вершине 10, равны (по общей стороне и прилежащим к ней углам). Поэтому равны все пять четырехугольников $(3, 5, 3', 5)$, равны все вершины $3'$ и все их двугранные углы, сходящиеся в вершине $5'$; значит, вершина $5'$ правильна. Поскольку $v(5) + v(3) < \pi$, то $v(5) + v(3') > \pi$. Следовательно, $v(3') > v(3)$ и двугранный угол $\{3', 5\} > \{3, 5\}$, т. е. вершина 5 — неправильная, и $v(5) < v(5')$. Из соседства граней $(3, 5, 3', 5)$ и $(5, 3', 5', 3')$ получим противоположное неравенство $v(5') < v(5)$. Противоречие доказывает исходное предположение.

Сеть № 9. Трехгранные вершины пятиугольника равны между собой, следовательно, $v(3) = 108^\circ$. Равны и четырехгранные вершины (по двугранным углам), следовательно, $v(4) = 72^\circ$. Значит,

$\nu(5) = 36^\circ$. В лемме 2 [1] доказано, что именно такое значение должен принимать угол $\nu(5)$, если его двугранные углы равны двугранным углам трехгранных вершин с мерой плоского угла 108° . Двугранный угол $\{4, 4\}$ равен $126,9^\circ$ (с точностью до 0,1). Многогранник составлен из двух пятигранных пирамид, одна из которых срезана так, что получается правильный пятиугольник, гомотетичный основанию пирамиды.

Аналогично доказывается реализуемость сети № 16. Многогранник состоит из двух усеченных правильных пятиугольных пирамид.

Сеть № 18 имеет замкнутую цепь четырехугольных граней с неизменным двугранным углом 4,4 (рис. 2). Вершины 4 конгруэнтны между собой, так как их соответствующие двугранные

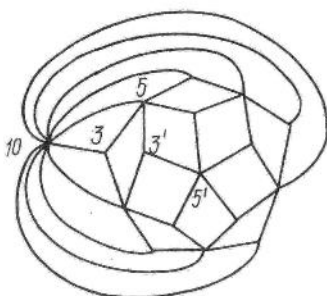


Рис. 1

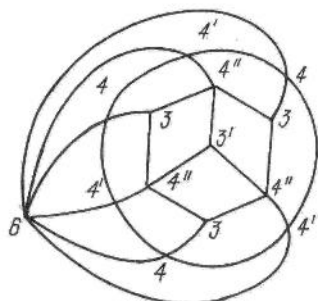


Рис. 2

углы равны. Аналогично конгруэнтны вершины $4'$ и соответственно вершины $4''$. Все трехгранные вершины не могут быть конгруэнтными, иначе $\Theta[3', 4'] = \Theta[4'', 3] = \pi$, но тогда $\Theta[4', 4] = \pi$, что исключено. Если $\nu(3) < \nu(3')$, то $\Theta[4'', 3] < \pi$, следовательно, $\Theta[4, 4'] > \pi$. Снова получим противоречие. Остается единственная возможность $\nu(3) > \nu(3')$. Значит, $\nu(4) > \nu(4')$, а $\nu(6) < \pi/6$, так как $\Theta[4'', 3] < 210^\circ$. Теперь проверяем согласованность плоских и двугранных углов многогранника. Для этого задаем значения $\nu(3')$ и $\nu(3)$, находим $\nu(4'')$ по двугранным углам, $\nu(6) = \nu(4'') + \nu(3') - \pi$, а также проверяем равенство двугранных углов $\{6, 3\}$ и $\{3, 6\}$ и равенство $\Theta(3, 4'', 3', 4'') = 2\pi$. Такие равенства возможны, например, при $\nu(3') = 65,92^\circ$, $\nu(3) = 119,1^\circ$ (с точностью до $0,01^\circ$). Затем находим $\nu(4)$ и $\nu(4')$ по двугранным углам. Многогранник состоит из двух неправильных шестиугольных пирамид, одна из которых усечена так, что получается замкнутая цепь четырехугольников.

Сеть № 20 имеет строение, напоминающее строение сети № 18—это неправильная десятиугольная бипирамида с усеченной вершиной одной пирамиды. Значит, имеем замкнутую цепь четырехугольных граней, и можно показать, что четырехугольные вершины могут быть только трех видов, откуда следует, что пятигранная

вершина — правильная. Проверка плоских и двугранных углов на согласованность выполняется аналогично проверке для сети № 18. Многогранник существует, например, при $v(3) = 119,06^\circ$, $v(5) = 65,93^\circ$ (с точностью до $0,01^\circ$).

В случае сети № 21 применимы рассуждения, аналогичные приведенным для сети № 6. Из них следует, что сеть № 21 нельзя реализовать многогранником M .

Сети № 32 и 33 имеют цепи граней в которые входят четырехугольники $(3, 4, 5, 4)$ и $(3, 5, 3, 5)$ так, что $\Theta[4, 3] = \Theta[3, 5]$. Следовательно, $\Theta(3, 4, 5, 4) < 2\pi$, т. е. многогранники M не существуют с сетями ребер № 32 и 33.

Сеть № 35 реализуется многогранником M аналогично сети № 18. Многогранник состоит из двух усеченных неправильных шестиугольных пирамид.

Сеть № 36 отличается от 35 тем, что пирамиды повернуты друг относительно друга на $\pi/3$. В результате получаются существенные отличия в значениях углов, что не позволяет сеть № 36 реализовать многогранником M . Так, можно убедиться, что все трехгранные вершины многогранника должны быть конгруэнтными, следовательно, грань $(3, 4, 3, 4)$ — параллелограмм и соседняя с ним грань $(3, 4, 4', 4')$ должна иметь $\Theta[4', 4'] = \pi$, что исключено.

Сети № 38 и 39 можно реализовать многогранниками M . При этом вершины граней $(3, 4, 5, 4)$ многогранника, соответствующего сети ребер № 39, могут быть только правильными, поскольку четырехгранные вершины этих граней равны между собой как имеющие равные двугранные углы. Для сети ребер № 38 четырехгранные вершины граней $(3, 4, 5, 4)$ могут не быть правильными. Многогранники составлены из двух усеченных десятиугольных пирамид. В случае правильных вершин граней $(3, 4, 5, 4)$ $v(5) = \arccos\left(\frac{1+2\sqrt{5}}{10+2\sqrt{5}}\right)$, $\cos v(4) = \frac{1}{10+4\sqrt{5}}$ [1].

Нельзя реализовать многогранником M сети ребер № 40 и 41, так как они имеют в цепи граней четырехугольники $(3, 4, 5, 4)$ и $(3, 5, 4, 4)$ такие, что $\Theta[4, 5] = \Theta[4, 4]$. Следовательно, $\Theta(3, 4, 4, 5) < 2\pi$, что исключено.

Если попытаться реализовать сеть № 42 многогранником M , то окажется, что трехгранные вершины замкнутых цепей граней $(3, 4, 4, 5)$ равны между собой. Действительно, сравним два четырехугольника с общим ребром $[5, 4]$. Если трехгранные углы различны, то четырехгранные углы, имеющие с ним общие ребра, также различны. При этом, так как четырехгранные углы имеют общий двугранный угол, возле большего трехгранного угла четырехгранная вершина будет иметь больший плоский угол. Но сумма плоских углов одной пары вершин должна быть равна сумме плоских углов второй пары вершин. Полученное противоречие доказывает равенство трехгранных углов замкнутых цепей граней $(3, 4, 4, 5)$. Следовательно, и соответствующие четырехгранные

углы этих цепей граней равны между собой. В результате нетрудно показать, что пятигранные вершины, принадлежащие лишь граням (5, 3, 5, 3), — правильные. Кроме того, их плоский угол больше плоского угла пятигранной вершины, принадлежащей грани (3, 4, 4, 5). Теперь осталось применить рассуждения относительно величин двугранных углов пятигранных вершин аналогичные рассуждениям, приведенным для сети № 6. Получим противоречие.

Многогранником M нельзя реализовать сеть № 43. Доказательство аналогично, приведенному для сети № 42.

Теорема доказана.

Список литературы: 1. *Гурин А. М.* Реализация сетей выпуклых многогранников с равноугольными вершинами I. — Укр. геометр. сб., 1982, вып. 26, с. 15—23. 2. *Залгаллер В. А.* Выпуклые многогранники с правильными гранями. — Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. мат. ин-та им. Стеклова АН СССР, 1967, 2, с. 220. 3. *Гурин А. М.* О выпуклых многогранниках с равноугольными вершинами. — Укр. геометр. сб., 1980, вып. 23, с. 34—40. 4. *Гурин А. М.* Оценка числа замкнутых выпуклых многогранников с равноугольными вершинами. — Укр. геометр. сб., 1982, вып. 26, с. 22—30.

Поступила в редколлегию 25.10.82.

В. И. Денисов

ОЦЕНКА ОБЛАСТИ ПРИЧИННОСТИ
КОСМОЛОГИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ГЕДЕЛЯ

Космологическая модель Геделя (МГ) — это пространство-время, метрика которого в специальной системе координат имеет вид

$$ds^2 = dx^{02} + 2e^{x^1/b} dx^0 dx^2 + \frac{1}{2} e^{2x^1/b} dx^{22} - dx^{12} - dx^{32}, \quad (1)$$

$$-\infty < x^i < \infty, \quad i = 0, 1, 2, 3, \quad b = \text{const.}$$

Данная метрика является точным решением уравнений общей теории относительности с пылевидной материей постоянной плотности ρ . Постоянная b , входящая в (1), определяется выражением $1/b = \sqrt{8\pi k \rho}$, где k — константа тяготения Ньютона.

Исследованию свойств МГ посвящено много работ. Как правило, в них изучаются локальные свойства. Некоторые свойства «в целом» этой модели указаны в [1, 2]: доказано, что пространство-время гомеоморфно R^4 , геодезически полно. В работах [3, 4] рассмотрен вопрос о единственности геодезической, проходящей через две точки МГ; получена оценка индекса сопряженной точки причинной геодезической.

Одним из свойств «в целом» МГ является наличие замкнутых причинных кривых [1]. Легко видеть, что в достаточно малых областях МГ замкнутых причинных кривых нет — такие области

МГ по своим свойствам «в целом» не отличаются от плоского пространства-времени R^4 , в котором замкнутых причинных кривых нет.

Пример замкнутой причинной кривой в МГ, указанный в [1], относится к случаю неодносвязной космологической модели [2, 5]. Цель данной работы — доказать, что в пространстве-времени (1) как в космологической модели Геделя с евклидовой топологией ($МГ R^4$) есть замкнутые гладкие причинные кривые и получить оценку для области $МГ R^4$, в которой таких кривых нет.

1. Гладкую кривую назовем замкнутой гладкой причинной, если она замкнута и непространственноподобна.

Рассмотрим кривую $x^i(\lambda)$, которая определяется следующими выражениями:

$$\frac{x^0}{b} = -\sqrt{2}\lambda + 2\sqrt{2} \operatorname{arctg} \left(e^{-A} \operatorname{tg} \frac{\lambda}{2} \right) + \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq \lambda \leq \pi, \\ \pi & \text{при } \pi \leq \lambda \leq 2\pi; \end{cases}$$

$$\frac{x^1}{b} = \ln (\operatorname{ch} A + \cos \lambda \operatorname{sh} A); \quad \frac{x^2}{b} = \frac{\sqrt{2} \sin \lambda \operatorname{sh} A}{\operatorname{ch} A + \cos \lambda \operatorname{sh} A}; \quad x^3 = 0, \quad A = \text{const.} \quad (2)$$

При $\lambda > 2\pi$ продолжим эту кривую периодически.

Легко доказать, что данная кривая является гладкой замкнутой кривой. Найдем норму касательного вектора этой кривой в метрике (1): $\left(\frac{dx}{d\lambda} \frac{dx}{d\lambda} \right) = b^2 \{ 2(\operatorname{ch} A - 1)^2 - \operatorname{sh}^2 A \}$. Из последнего следует, что при $\operatorname{ch} A \geq 3$ кривая (2) является гладкой замкнутой причинной кривой в космологической модели Геделя с евклидовой топологией.

Рассмотрим множество гладких замкнутых причинных кривых γ . Основное свойство этого множества состоит в том, что гладкая замкнутая причинная кривая не может быть изолированной. Это вытекает из следующих утверждений.

I. Пусть $\gamma: x^i(\lambda)$ — замкнутая гладкая времениподобная кривая в $МГ R^4$. Тогда кривая $\tilde{\gamma}: l_0 x^i(\lambda), l_1 x^i(\lambda), \dots, l_n x^i(\lambda), l_i = \text{const}$ — замкнутая гладкая времениподобная кривая $МГ R^4$ при $|l_i - 1| < \varepsilon$, где ε — достаточно малое число.

Доказательство этого утверждения следует из непрерывности $ds^2(\tilde{\gamma})$ кривой $\tilde{\gamma}$ как функции l_i .

II. Пусть $\gamma: x^i(\lambda)$ — замкнутая гладкая причинная кривая $МГ R^4$. Тогда кривая $\tilde{\gamma}: l x^0(\lambda), x^1(\lambda), l x^2(\lambda), l x^3(\lambda)$ — замкнутая гладкая причинная кривая при $|l| > 1$.

Доказательство. Замкнутость кривой $\tilde{\gamma}$ следует из того, что γ замкнута. Далее, так как кривая $\tilde{\gamma}$ гладкая, то в метрике (1) $ds^2(\tilde{\gamma}) = l^2 \left(dx^{0^2} + 2e^{\frac{x^1}{b}} dx^0 dx^2 + \frac{1}{2} e^{\frac{2x^1}{b}} dx^{2^2} - dx^{3^2} \right) - dx^{1^2}$. Из последнего следует, что $ds^2(\tilde{\gamma}) \geq l^2 ds^2(\gamma)$ при $|l| > 1$. Так как γ — причинная кривая, $ds^2(\gamma) \geq 0$. Тогда $ds^2(\tilde{\gamma}) > 0$, и поэтому $\tilde{\gamma}$ — причинная кривая. Утверждение доказано.

По существу утверждение II говорит о том, что в окрестности любой замкнутой гладкой причинной кривой $\gamma \subset MGR^4$ есть замкнутые гладкие причинные кривые, отличные от γ . Поэтому замкнутая гладкая причинная кривая MGR^4 не может быть изолированной.

2. Как было отмечено, области MGR^4 , в которых нет замкнутых гладких причинных кривых, имеют ограниченные размеры.

Наша цель состоит в том, чтобы получить оценку размеров области, в которой замкнутых гладких причинных кривых нет. В связи с этим рассмотрим метрику $ds^2 = Kdx^0^2 + 2Bdx^0dx^2 + Cdx^2^2 - dx^1^2 - dx^3^2$, $-\infty < x^i < \infty$ (3), где K, B, C — постоянные. Это — метрика плоского пространства-времени сигнатуры $(+---)$ при условии: $K > 0, B^2 > KC$ (4). Выясним, в какой области MGR^4 метрика (3) мажорирует метрику (1) в следующем смысле:

$$ds^{-2} \geq ds^2 = dx^0^2 + 2e^{x^1/b} dx^0 dx^2 + \frac{1}{2} e^{2x^1/b} dx^2^2 - dx^1^2 - dx^3^2 \quad (5)$$

Такое условие мажорации гарантирует причинность кривой γ в метрике (3), если γ — причинная кривая в MGR^4 . Условие (5) представим в виде

$$(k-1)dx^0^2 + 2(B - e^{\frac{x^1}{b}})dx^0 dx^2 + \left(C - \frac{1}{2} e^{\frac{2x^1}{b}}\right)dx^2^2 \geq 0, \quad (6)$$

при любых dx^0, dx^2 . Из (6) и (4) следует $K > 1, B^2 > KC, (K-1) \times \times \left(C - \frac{1}{2} e^{\frac{2x^1}{b}}\right) \geq (B - e^{x^1/b})^2$ (7). Из последнего, положив $C = (1-t^2)B^2/K$, где $t^2 < 1$, получаем

$$\frac{1+t^2(K-1)}{K} B^2 - 2B e^{\frac{x^1}{b}} + \frac{K+1}{2} e^{\frac{2x^1}{b}} \leq 0. \quad (8)$$

Условие вещественности B , удовлетворяющих неравенству (8), дает $t^2 < 1/(K+1)$. Решая неравенство (8) относительно B , получаем

$$\frac{K-L(K)}{1+t^2(K-1)} e^{x^1/b} \leq B \leq \frac{K+L(K)}{1+t^2(K-1)} e^{x^1/b}, \quad (9)$$

где $L(K) = \sqrt{\frac{K(K-1)}{2} \{1-t^2(K+1)\}}$.

Неравенство (9) определяет постоянную B тогда, когда предел изменения x^1 : $x_0^1 \leq x^1 \leq x_0^1 + \Delta x^1$ удовлетворяет условию $(K+L(K)) > (K-L(K)) e^{\Delta x^1/b}$. Это условие налагает ограничение на t^2 :

$$t^2 < \frac{1}{K+1} - \left(\frac{e^{\Delta x^1/b} - 1}{e^{\Delta x^1/b} + 1} \right)^2 \frac{2K}{K^2 - 1}.$$

Так как $t^2 > 0$, то из последнего следует

$$\frac{e^{\Delta x^1/b} - 1}{e^{\Delta x^1/b} + 1} < \sqrt{\frac{K-1}{2K}}, \text{ или } e^{\frac{\Delta x^1}{b}} < \frac{(V\sqrt{2K} + \sqrt{K-1})^2}{K+1}.$$

Поскольку значение K можно брать произвольно большим, то окончательно получаем $\Delta x^1 < b \ln(3 + 2\sqrt{2})$. Из проведенных рассуждений следует, что в области $G \subset \text{МГ} R^4$, ширина которой по x^1 не превосходит $b \ln(3 + 2\sqrt{2})$, плоская метрика (3) мажорирует в смысле (5) метрику (1) $\text{МГ} R^4$.

Предположим теперь, что в такой области $\text{МГ} R^4$ существует гладкая замкнутая причинная кривая. Тогда эта кривая будет гладкой замкнутой причинной кривой и в мажорирующем плоском пространстве-времени R^4 . С другой стороны, известно, что в плоском пространстве-времени R^4 гладких замкнутых причинных кривых нет. Следовательно, наше предположение о существовании в указанной области $\text{МГ} R^4$ гладкой замкнутой причинной кривой неверно. Поэтому верна

Теорема. В любой области $G \subset \text{МГ} R^4$, ширина которой по x^1 не превосходит $b \ln(3 + 2\sqrt{2})$, замкнутых гладких причинных кривых нет.

В приведенной формулировке теоремы существенно используется специальная система координат, в которой метрика $\text{МГ} R^4$ имеет вид (1). Эту теорему можно сформулировать в инвариантной форме, без использования специальной системы координат, основываясь на следующем.

Так как метрика (1) зависит только от x^1 , то направление по x^1 определяется инвариантным образом как градиент какого-либо скалярного инварианта $\sigma(x)$ метрики $\text{МГ} R^4$, зависящего от точки. Инвариантный смысл Δx^1 — это длина отрезка геодезической, ортогональной гиперповерхности $\sigma = \text{const}$, заключенного между двумя гиперповерхностями уровня инварианта σ ; длину этого отрезка будем считать расстоянием между этими гиперповерхностями. Тогда инвариантная формулировка доказанной теоремы состоит в следующем.

Пусть $\sigma(x)$ — скалярный инвариант $\text{МГ} R^4$, зависящий от точки. В любой области $G \subset \text{МГ} R^4$, заключенной между двумя гиперповерхностями уровня инварианта $\sigma(x)$, расстояние между которыми не превосходит $b \ln(3 + 2\sqrt{2})$, замкнутых гладких причинных кривых нет.

3. В связи с установленными свойствами причинности $\text{МГ} R^4$ заметим следующее.

Космологическая модель $\text{МГ} R^4$ обладает необычными, в определенном смысле, свойствами. Казалось бы, что причинные свойства областей $\text{МГ} R^4$, в которых нет замкнутых гладких причинных кривых, тривиальны, т. е. не отличаются от причинных свойств плоского пространства-времени R^4 .

В действительности это не так. Как отмечено в [3], среди точек $MG R^4$ есть такие пары, через которые проходит любое, наперед заданное число времени подобных геодезических; любое, наперед заданное число пространственно подобных геодезических. Это свойство $MG R^4$ влечет за собой нарушение принципа причинности. Интересным является то, что такие пары точек и соответствующие геодезические лежат в области $MG R^4$, в которой замкнутых гладких причинных кривых нет.

Указанные свойства «в целом» $MG R^4$ позволяют говорить о сингулярности космологической модели Геделя. В отличие от космологической модели Фридмана, где сингулярность является «громкой» (обращение в бесконечность плотности вещества и т. д.), сингулярность $MG R^4$ является «тихой»: она не проявляется ни в плохом поведении метрического тензора, ни в расходимостях плотности материи, инвариантов кривизны. Тихая сингулярность $MG R^4$ проявляется в необычных сравнительно с плоским пространством-временем R^4 свойствах «в целом».

Космологическая модель $MG R^4$ не единственный пример точного решения уравнений общей теории относительности, несущего тихую сингулярность. Можно доказать, что такие же причинные свойства в целом имеют модели «типа Геделя» с евклидовой топологией $MTG R^4$. [6], метрика которых может быть представлена в виде

$$ds^2 = dx^0{}^2 + 2\lambda e^{x^1/b} dx^0 dx^2 + \frac{1}{2} e^{\frac{2x^1}{b}} dx^2{}^2 - dx^1{}^2 - dx^3{}^2,$$

где b — постоянная, определяется свойствами материи; λ — постоянная, такая, что $2/3 < \lambda^2 < 2$. В этих моделях есть замкнутые гладкие причинные кривые. Для $MTG R^4$ верно следующее утверждение.

Пусть $\sigma(x)$ скалярный инвариант $MTG R^4$, зависящий от точки. В любой области $G \in MTG R^4$, заключенной между двумя гиперповерхностями уровня инварианта σ , расстояние между которыми не превосходит $2b \ln(|\lambda| \sqrt{2} + \sqrt{2\lambda^2 - 1})$, замкнутых гладких причинных кривых нет.

В связи с замечанием 1, интересным является следующий вопрос: каковы размеры области $MG R^4$, в которой геодезическая, проходящая через любые две точки этой области, единственна? Ответ на него дал бы оценку области $MG R^4$, причинные свойства которой близки к свойствам плоского пространства-времени.

Список литературы: 1. Gödel K. An example of a new type of cosmological solution of Einstein's field equations of gravitation. — Rev. Mod. Phys., 1949, 21, p. 447 — 452. 2. Хокинг С., Эллис Дж. Крупномасштабная структура пространства-времени. — М.: Мир, 1977. — 431 с. 3. Денисов В. И. Некоторые свойства «в целом» космологической модели Геделя. — Тез. докл. Всесоюз. конф. «Современные теоретические и экспериментальные проблемы теории относительности и гравитации», М., 1981, с. 238. 4. Денисов В. И. О сопряженных точках в космологической модели Геделя. — Укр. геометр. сб., 1982,

вып. 25, с. 30—34. 5. Гуц А. К. Топологическая структура вселенной Геден-
ли. Изв. вузов. Физика, 1980, вып. 6, 109—110. 6. Синг Дж. Общая
теория относительности. — М.: Изд-во иностр. лит., 1963. — 432 с.

Поступила в редколлегию 01.11.82.

В. И. Дискант

КОНТРИМЕР К ОДНОМУ УТВЕРЖДЕНИЮ БОННЕЗЕНА — ФЕНХЕЛЯ

Пусть A и B — выпуклые ограниченные замкнутые собственные тела в n -мерном евклидовом пространстве R^n ($n \geq 3$). Через

$V_m(A, B) = V(\underbrace{A, \dots, A}_n, \underbrace{B, \dots, B}_m)$ обозначают m -й смешанный

объем тел A и B . Если тело $H_t = (1-t)A + tB$, $0 \leq t \leq 1$, то

его объем $V(H_t) = \sum_{m=0}^n C_n^m (1-t)^{n-m} t^m V_m(A, B)$ [1, с. 60]. Бонне-

зону и Фенхелю принадлежит следующее утверждение [2, с. 95]: если проекции тел A и B на некоторую гиперплоскость в R^n имеют равные $(n-1)$ -мерные объемы, то график функции $\varphi(t) = V(H_t)$ является выпуклым вверх при $0 \leq t \leq 1$.

Следствием этого утверждения является неравенство $2V_1(A, B) \geq V_0(A, B) + V_2(A, B)$ (1) [2, с. 94], равносильное неравенству $\varphi''(0) \leq 0$. Из неравенства (1) вытекает неравенство $V_0(A, B) - 2\tau V_1(A, B) + \tau^2 V_2(A, B) \leq 0$ (2) [2, с. 96], в котором $\tau = \sqrt{\sigma_0/\sigma_1}$, где σ_0 и σ_1 — $(n-1)$ -мерные объемы проекций тел A и B на одну и ту же, вообще говоря, произвольную гиперплоскость в R^n .

Ниже будет приведен пример, показывающий, что сформулированное утверждение и вытекающие из него неравенства (1) и (2) не имеют места.

Пусть в R^3 введена прямоугольная декартова система координат $Oxyz$. Рассмотрим на плоскости Oxy выпуклую фигуру Γ , ограниченную окружностью $x^2 + y^2 = 1$ при $-1 \leq x \leq 1/\sqrt{2}$ и прямыми $y = -x + \sqrt{2}$ при $1/\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$ и $y = x - \sqrt{2}$ при $1/\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$.

Обозначим через A выпуклое тело, полученное вращением фигуры Γ вокруг оси Ox в R^3 . Отметим, что площадь фигуры Γ $S(\Gamma) = (3\pi + 4)/4$, $V(A) = (4 + 3\sqrt{2})\pi/6$.

Рассмотрим в R^3 тело $B = rE$, где E — единичный шар в R^3 с центром в начале координат, а r подобрано так, что $V(B) = V(rE) = V(A)$, откуда $r = (1/2)\sqrt[3]{4 + 3\sqrt{2}}$. Так как B — шар радиуса r , то площадь проекции B на произвольную плоскость

в R^3 будет равна πr^2 . При этом $S(A_{yz}) < \pi r^2 < S(A_{xy})$ (3), где A_{yz} , A_{xy} — проекции тела A на координатные плоскости Oyz и Oxy , а $S(A_{yz})$, $S(A_{xy})$ — площади этих проекций. Действительно, $S(A_{yz}) = \pi$, так как A_{yz} — единичный круг, $S(A_{xy}) = S(\Gamma)$, так как $A_{xy} = \Gamma$, и неравенство (3) проверяется непосредственным подсчетом.

Из непрерывности площади проекции выпуклого ограниченного тела как функции от направления проектирования и из неравенства (3) вытекает существование в R^3 такой плоскости, что площади проекций тел A и B на эту плоскость равны. Поэтому для тел A и B выполняется условие сформулированного выше утверждения. Покажем, что вывод утверждения не имеет места.

Найдем выражение $\varphi(t)$ в нашем примере: $\varphi(t) = V(H_t) = \sum_{m=0}^3 C_3^m (1-t)^{3-m} t^m V_m(A, B) = (1-t)^3 V(A) + 3(1-t)^2 t r V_1(A, E) + 3(1-t)(tr)^2 V_2(A, E) + (tr)^3 V(E)$. Так как в примере тело A является шаром E с конической шапкой — «Каррепкӧггег» шара E [2, с. 17], то в квадратичном неравенстве Минковского $V_1^2(A, E) \geq V(A) V_2(A, E)$ [2, с. 92] имеет место равенство. Кроме того, $3V_1(A, E) = S(A)$ [1, с. 62], где $S(A)$ — площадь поверхности тела A . Поэтому $V_1(A, E) = V(A)$ и, следовательно, $V(A) = V_1(A, E) = V_2(A, E)$ (4). Тогда $\varphi(t) = V(A) [(1-t)^3 + 3(1-t)^2 t r + 3(1-t)(tr)^2 + t^3] = V(A) [(1-t+tr)^3 + t^3(1-r^3)]$ (5).

Отметим, что выражение для $\varphi(t)$ можно получить и непосредственным подсчетом, если заметить, что H_t есть результат вращения фигуры $\Gamma_t = (1-t)\Gamma + trE_{xy}$, где E_{xy} — проекция E на Oxy , лежащей в плоскости Oxy , вокруг оси Ox . При этом граница Γ_t является линией, параллельной извне границе фигуры $(1-t)\Gamma$ на расстоянии tr , т. е. является внешней огибающей окружностей радиуса tr с центрами в точках границы фигуры $(1-t)\Gamma$. Тогда равенства (4) являются следствиями выражения (5) для $\varphi(t)$.

Из (5) получаем $\varphi''(t) = V(A) [6(r-1)^2(1-t+tr) + 6t(1-r^3)]$, откуда $\varphi''(0) = 6V(A)(r-1)^2 > 0$ (6). Следовательно, график $\varphi(t)$ не является выпуклым вверх при $t \in [0, 1]$ и сформулированное выше утверждение не имеет места.

Из (4) и (6) получим $\varphi''(0) = 6(r^2 V_2(A, E) - 2r V_1(A, E) + V_0(A, E)) = 6(V_2(A, B) - 2V_1(A, B) + V_0(A, B)) > 0$. Это означает, что в приведенном примере не выполняется неравенство (1) и равносильное ему неравенство (2).

Замечание. Пусть выпуклые тела A и B в R^n имеют равные с точностью до параллельного переноса проекции на некоторую гиперплоскость α . Тогда справедливо неравенство $V(H_t) \geq (1-t)V(A) + tV(B)$ (7). Из (7) в этом случае вытекает, что график $\varphi(t)$ при $0 \leq t \leq 1$ является выпуклым вверх.

Действительно, для любых t_1 и t_2 , таких что $0 \leq t_1 < t_2 \leq 1$, тела H_{t_1} и H_{t_2} также имеют равные с точностью до параллель-

ного переноса проекции на гиперплоскость α . Поэтому, применяя (7) на промежутке $[t_1, t_2]$, получаем

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \varphi(\theta(t_2 - t_1) + t_1) \geq (1 - \theta)V(H_{t_1}) + \theta V(H_{t_2}) = \\ &= \left(1 - \frac{t - t_1}{t_2 - t_1}\right)V(H_{t_1}) + \frac{t - t_1}{t_2 - t_1}V(H_{t_2}).\end{aligned}\quad (8)$$

Из (8) и следует выпуклость вверх графика $\varphi(t)$. Если проекции тел A и B на некоторую гиперплоскость имеют только равные $(n-1)$ -мерные объемы, то неравенство (7), как показано в [2], также имеет место. Однако в этом случае (8), вообще говоря, не следует из (7). Может случиться, что $(n-1)$ -мерные объемы проекций тел H_{t_1} и H_{t_2} , где $0 \leq t_1 < t_2 \leq 1$, на одну и ту же гиперплоскость не равны между собой для каждой гиперплоскости в R^n . Вероятно, именно это обстоятельство и не было замечено авторами [2]. Поэтому мы не можем применить (7) на промежутке $[t_1, t_2]$ для вывода (8). Так, можно показать, что в приведенном выше примере найдется $t_2 > 0$ такое, что площади проекций тел $H_{t_1} = H_0 = A$ и H_{t_2} на одну и ту же плоскость не равны между собой для любой плоскости в R^3 и (8) не имеет места на $[0, t_2]$.

Список литературы: 1. Бузман Г. Выпуклые поверхности. — М.: Наука, 1964. — 238 с. 2. Bonnesen T. und Fenchel W. Theorie der konvexen Körper — Berlin, 1934. — 164 S.

Поступила в редколлегию 30.11.81.

А. И. Егоров

**МАКСИМАЛЬНО ПОДВИЖНЫЕ ОБЩИЕ
ПРОСТРАНСТВА ПУТЕЙ**

Основной проблемой в теории движений является распределение лагун и отрезков возможных порядков полных групп движения. Этой проблеме и посвящена предлагаемая статья. В ней доказывается, что если общее пространство путей $X_{n, \dot{x}}$ допускает группу аффинных движений G_r порядка $r > n^2 - 2n + 5$, то оно — проективно-евклидово пространство путей $D_{n, \dot{x}}$. Устанавливается максимальный порядок $r = n^2 - 2n + 5$ групп аффинных движений в непроективно-евклидовых общих пространствах путей $\bar{D}_{n, \dot{x}}$. Найдены структуры тензоров, характеризующих общее пространство путей $X_{n, \dot{x}}$ в предположении, что порядок группы аффинных движений достаточно высок. Отыскиваются лагуны в распределении порядков полных групп аффинных движений в общих пространствах путей, в частности, найдена первая лагуна длиной $d = 3n - 4$ в непроективно-евклидовых пространствах путей $\bar{D}_{n, \dot{x}}$ с отличным от нуля тензором $\Lambda_{jk \cdot l}^i$. Определен максимальный

порядок $r = n^2 - 2n + 5$ групп аффинных движений в пространствах путей $X_{n, \dot{x}}$ нормальной аффинной связности.

Ряд доказательств дан здесь в краткой форме, поскольку в статье [1] аналогичные доказательства приведены полностью.

§ 1. Исходные факты. Определения. Пространством линейных элементов усеченной аффинной связности $N_{n, \dot{x}}$ называется многообразие $M_{2n-1}(x, \dot{x})$, в котором задано поле фундаментального геометрического объекта с компонентами $\Lambda_{jk}^i(x, \dot{x})$, преобразующимися при переходе от одной системы координат к другой по следующему закону:

$$\Lambda_{jk}^{i'} = \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^{i'} \partial x^{k'}} \cdot \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^\alpha} \Lambda_{\beta\gamma}^\alpha, \\ i, j, k, \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \dots, n,$$

где $\dot{x}^k$ — псевдовектор; Λ_{jk}^i — объект нулевой степени однородности относительно координат $\dot{x}^\alpha$. Пространства $N_{n, \dot{x}}$, у которых объект аффинной связности

$$\Lambda_{\beta\gamma}^\alpha = H_{\beta\gamma}^\alpha \quad (\Lambda_{\beta\gamma}^\alpha = (1/2) H_{\beta\gamma}^\alpha), \text{ где } H_{\beta\gamma}^\alpha = \frac{\partial H_{\beta\gamma}^\alpha}{\partial \dot{x}^\gamma} \left(H_{\beta\gamma}^\alpha = \frac{\partial^2 H^\alpha}{\partial \dot{x}^\beta \partial \dot{x}^\gamma} \right),$$

называются пространствами линейных элементов усеченной аффинной полуинтегрируемой (интегрируемой) связности и обозначаются символами $Y_{n, \dot{x}}(X_{n, x})$.

Здесь составляющие $H_{\beta\gamma}^\alpha$, H^α — однородные функции соответственно первой и второй степени однородности относительно координат $\dot{x}^\alpha$ и при переходе от одной системы координат к другой преобразуются по следующим формулам:

$$H_{ij}^{i'} = - \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^\sigma \partial x^\rho} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^{i'}} \dot{x}^\rho + \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}} \cdot H_j^i, \\ H^{i'} = - \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^\sigma \partial x^\rho} \cdot \dot{x}^\sigma \dot{x}^\rho + \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \cdot H^i.$$

Заметим, что введенные здесь пространства $X_{n, \dot{x}}$ часто называют еще общими пространствами путей [2]. Справедлива

Теорема. Если тензор $S_{jkl}^i = \Lambda_{jk, l}^i - \Lambda_{il, k}^j = 0$ ($\Omega_{jk}^i = (1/2) [\Lambda_{jk}^i - \Lambda_{kj}^i] = 0$), то пространство $N_{n, \dot{x}}(Y_{n, \dot{x}})$ является пространством линейных элементов усеченной аффинной полуинтегрируемой (интегрируемой) связности $Y_{n, \dot{x}}(X_{n, \dot{x}})$.

Таким образом, для того, чтобы пространство $N_{n, \dot{x}}$ было пространством $X_{n, \dot{x}}$, необходимо и достаточно выполнение условий: $S_{jkl}^i = 0$, $\Omega_{jk}^i = 0$.

Аффинными движениями (или просто движениями) в общих пространствах путей $X_{n, \dot{x}}$ называются такие точечные преобразования базисного пространства $X_n(x^1, x^2, \dots, x^n)$, естественные продолжения которых на пространства линейных элементов сохра-

имеют аффинную связность. Для того, чтобы компоненты векторного поля $v^i(x)$ инфинитезимального преобразования $\tilde{x}^i = x^i + v^i(x) \cdot t$ ($i = 1, 2, \dots, n$) определяли аффинное движение в пространствах $X_{n, \dot{x}}$, необходимо и достаточно [3] чтобы, $D\Lambda_{jk}^i = 0$ (1), где D — знак левого дифференцирования вдоль линий тока векторного поля $v^i(x)$, $u_j^i = v_{,j}^i$.

Общее пространство путей $X_{n, \dot{x}}$ называется проективно-евклидовым пространством путей $D_{n, \dot{x}}$, если существует система координат, в которой $\Lambda_{jk}^i = \delta_j^i F_{,k} + \delta_k^i F_{,j} + \dot{x}^i F_{,j,k}$, где F — функция первой степени однородности относительно координат $\dot{x}^\alpha$. Объект проективной связности Π_{jk}^i в рассматриваемых пространствах путей имеет следующий вид [2]:

$$\Pi_{jk}^i = \Lambda_{jk}^i - (1/(n+1)) (\delta_j^i \Lambda_{\sigma k}^\sigma + \delta_k^i \Lambda_{\sigma j}^\sigma + \dot{x}^i \Lambda_{\sigma j,k}^\sigma), \\ \Pi^i = H^i - (1/(n+1)) H_{,\sigma}^\sigma \dot{x}^i, \Pi_{jk}^i = (1/2) \Pi_{,j,k}^i, \Pi_{\sigma k}^\sigma = 0.$$

В пространствах $X_{n, \dot{x}}$ можно ввести в рассмотрение также тензоры аффинной и проективной кривизны, которые обозначаются соответственно символами $K_{\beta\lambda\mu}^\alpha$, W_{jkl}^i :

$$K_{\beta\lambda\mu}^\alpha = \partial_{[\mu} \Lambda_{|\beta|\lambda]}^\alpha + \Lambda_{\alpha[\mu}^\alpha \Lambda_{|\beta|\lambda]}^\alpha - \Lambda_{[\mu|\beta}^\alpha \Lambda_{\lambda]}^\alpha \dot{x}^\sigma,$$

где $\Lambda_{\beta\mu\rho}^\alpha = \Lambda_{\beta\mu,\rho}^\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\rho} \Lambda_{\beta\mu}^\alpha$; $W_{jkl}^i = K_{jkl}^i + \delta_j^i [P_{kl} - P_{lk}] + \delta_k^i P_{jl} - \delta_l^i P_{jk} + \dot{x}^i \cdot (P_{jk,l} - P_{jl,k})$, где $P_{jl} = (1/(n^2 - 1)) (nK_{jl} + K_{lj} + K_{j\sigma,l} \dot{x}^\sigma)$, $K_{jk} = K_{j\sigma,k}^\sigma$. Заметим, что: 1) все исследования в работе ведутся над полем действительных чисел R ; 2) если в точке x_0 базисного многообразия векторное поле инфинитезимального движения такое, что $v^i(x_0) = 0$, $\partial_j v^i(x_0) = 0$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$), то необходимо, чтобы $v^i(x) \equiv 0$ в любой точке x из области, где $v^i(x)$ аналитические; 3) в настоящей работе рассматриваются общие пространства путей $X_{n, \dot{x}}$ с ненулевым тензором $\Lambda_{jk,l}^i$, в противном случае получим точечные пространства аффинной связности, движения в которых изучены в работе [4]; 4) в дальнейших рассуждениях предполагается непрерывность всех тел производных от рассматриваемых функций, которые будут использоваться без специальных оговорок.

§ 2. Структура тензора $\Lambda_{jk,l}^i$, $\Pi_{jk,l}^i$ общего пространства путей с группой движений G_r достаточно высокого порядка. В этом параграфе выясняется специальная алгебраическая структура тензоров $\Lambda_{jk,l}^i \neq 0$, $\Pi_{jk,l}^i$ в предположении, что пространство $X_{n, \dot{x}}$ допускает группу движений G_r , где $r > n^2 - 2n + 5$. Начнем с тензора $\Lambda_{jk,l}^i$ общего пространства путей $X_{n, \dot{x}}$. С этой целью для произвольной точки $(x, \dot{x})$ пространства $X_{n, \dot{x}}$ выберем систему координат, в которой $\dot{x}^i = \delta_{\alpha i}^i$, т. е. в рассматриваемой точке вектор $\dot{x}$ касается координатной линии $x^{\alpha i}$.

Рассмотрим матрицу

$$T_1 = \left\| T_{\beta}^{\alpha} \begin{pmatrix} i \\ jkl \end{pmatrix}, T_{\beta}^{\alpha} \begin{pmatrix} i \\ jkl\delta \end{pmatrix} \right\|, \quad (2)$$

где положено $T_{\beta}^{\alpha} \begin{pmatrix} i \\ jkl \end{pmatrix} = \delta_j^{\alpha} \Lambda_{\beta k \cdot l}^i + \delta_k^{\alpha} \Lambda_{j \beta \cdot l}^i + \delta_l^{\alpha} \Lambda_{j k \cdot \beta}^i - \delta_{\beta}^i \Lambda_{j k \cdot l}^{\alpha} +$
 $+ \delta_{\alpha}^i \Lambda_{j k \cdot l \cdot \beta}^i$, $T_{\beta}^{\alpha} \begin{pmatrix} i \\ jkl\delta \end{pmatrix} = \delta_j^{\alpha} \Lambda_{\beta k \cdot l \cdot \delta}^i + \delta_k^{\alpha} \Lambda_{j \beta \cdot l \cdot \delta}^i + \delta_l^{\alpha} \Lambda_{j k \cdot \beta \cdot \delta}^i + \delta_{\beta}^{\alpha} \Lambda_{j k \cdot l \cdot \beta}^i -$
 $- \delta_{\beta}^i \Lambda_{j k \cdot l \cdot \delta}^{\alpha} + \delta_{\alpha}^i \Lambda_{j k \cdot l \cdot \delta \cdot \beta}^i$. Элементами этой матрицы являются коэффициенты при функциях u_{α}^{β} в уравнениях $DA_{j k \cdot l}^i = 0$, $DA_{j k \cdot l \cdot \delta}^i = 0$, вытекающих из системы (1). При предположении, что составляющие $\Lambda_{j k \cdot l}^i \neq 0$ ($i \neq \alpha_1$; $i \neq j, k, l$), возможны следующие случаи: 1) $\Lambda_{\alpha_3 \alpha_3 \cdot \alpha_3}^{\alpha_2} \neq 0$, 2) $\Lambda_{\alpha_3 \alpha_3 \cdot \alpha_3}^{\alpha_2} \neq 0$, а все составляющие вида $\Lambda_{\alpha_3 \alpha_3 \cdot \alpha_3}^{\alpha_2} = 0$, 3) $\Lambda_{\alpha_3 \alpha_3 \cdot \alpha_3}^{\alpha_2} \neq 0$, а все составляющие вида $\Lambda_{\alpha_3 \alpha_3 \cdot \alpha_3}^{\alpha_2} = 0$ и $\Lambda_{\alpha_3 \alpha_3 \cdot \alpha_4}^{\alpha_2} = 0$. Предполагается, что используемый набор индексов $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ составлен из чисел 1, 2, ..., n, причем $\alpha_i \neq \alpha_j$, если $i \neq j$. Общие пространства путей $X_{n, i}$, для которых выполнены перечисленные выше условия 2) [условия 3)], будем обозначать символами $Z_{n, i} [V_{n, i}]$.

Рассмотрим каждый указанный выше случай. В случае 1 минор порядка $3n - 5$ матрицы T_1 (2), составленный из коэффициентов при функциях $u_{\alpha_2}^{\alpha_i}$, $u_{\alpha_j}^{\alpha_2}$, $u_{\alpha_k}^{\alpha_2}$ в уравнениях

$$\begin{pmatrix} \alpha_i \\ \alpha_3 \alpha_3 \alpha_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3 \alpha_3 \alpha_j \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3 \alpha_3 \alpha_3 \alpha_k \end{pmatrix} \\ (i = 1, 2, \dots, n; k = 3, 4, \dots, n; j = 4, 5, \dots, n),$$

с точностью до постоянного множителя равен степени составляющей $\Lambda_{\alpha_3 \alpha_3 \cdot \alpha_3}^{\alpha_2}$. Во втором случае минор порядка $4n - 8$ матрицы T_1 , составленный из коэффициентов при функциях $u_{\alpha_2}^{\alpha_i}$, $u_{\alpha_2}^{\alpha_j}$, $u_{\alpha_k}^{\alpha_2}$, $u_{\alpha_l}^{\alpha_2}$, $u_{\alpha_{\delta}}^{\alpha_i}$, $u_{\alpha_2}^{\alpha_1}$, $u_{\alpha_3}^{\alpha_4}$, $u_{\alpha_3}^{\alpha_4}$, $u_{\alpha_3}^{\alpha_4}$, $u_{\alpha_2}^{\alpha_3}$, $u_{\alpha_4}^{\alpha_3}$ в уравнениях

$$\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3 \alpha_k \alpha_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_l \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3 \alpha_3 \alpha_{\delta} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_j \\ \alpha_3 \alpha_3 \alpha_4 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_3 \alpha_3 \alpha_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3 \alpha_3 \alpha_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3 \alpha_3 \alpha_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_3 \\ \alpha_3 \alpha_3 \alpha_4 \end{pmatrix},$$

$\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3 \alpha_4 \alpha_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_3 \end{pmatrix}$ ($j, l = 4, 5, \dots, n$; $\delta, k = 5, 6, \dots, n$), с точностью до постоянного множителя равен степени составляющей $\Lambda_{\alpha_3 \alpha_3 \cdot \alpha_4}^{\alpha_2}$. В последнем третьем случае минор порядка $5n - 11$ матрицы (T_1), составленный из коэффициентов при функциях $u_{\alpha_2}^{\alpha_j}$, $u_{\alpha_k}^{\alpha_2}$, $u_{\alpha_l}^{\alpha_1}$, $u_{\alpha_m}^{\alpha_1}$, $u_{\alpha_3}^{\alpha_2}$, $u_{\alpha_2}^{\alpha_4}$, $u_{\alpha_{\delta}}^{\alpha_4}$, $u_{\alpha_3}^{\alpha_5}$, $u_{\alpha_4}^{\alpha_5}$, $u_{\alpha_2}^{\alpha_1}$, $u_{\alpha_3}^{\alpha_2}$, $u_{\alpha_2}^{\alpha_4}$, $u_{\alpha_2}^{\alpha_5}$, $u_{\alpha_2}^{\alpha_4}$, $u_{\alpha_3}^{\alpha_4}$, $u_{\alpha_4}^{\alpha_4}$, $u_{\alpha_5}^{\alpha_4}$, $u_{\alpha_1}^{\alpha_4}$, $u_{\alpha_1}^{\alpha_4}$ ($j, k, l, \delta, m = 6, 7, \dots, n$) уравнениях

$$\begin{pmatrix} \alpha_j \\ \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_k \alpha_4 \alpha_5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5 \alpha_l \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3 \alpha_5 \alpha_5 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3 \alpha_4 \alpha_m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3 \alpha_3 \alpha_5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3 \alpha_4 \alpha_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3 \alpha_4 \alpha_4 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_3 \\ \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_4 \\ \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_5 \\ \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_4 \alpha_4 \alpha_5 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_5 \alpha_4 \alpha_5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5 \alpha_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5 \alpha_5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3 \alpha_4 \alpha_4 \alpha_5 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3 \alpha_5 \alpha_5 \end{pmatrix} \quad (j, k, l, m = 6, 7, \dots, n),$$

точностью до постоянного множителя равен степени составляющей $\Lambda_{jk,l}^i$. Итак, оказывается верна

Лемма 1. Если пространство $X_{n,x}$ допускает группу движений G_r порядка $r > n^2 - 2n + 5$, то $\Lambda_{jk,l}^i = 0$ ($i \neq \alpha$; $i \neq j, k, l$).

Полученные здесь равенства позволяют заключить, что тензор $\Lambda_{jk,l}^i$ в любой координатной системе и в произвольной точке (x, x) пространства $X_{n,x}$ имеет следующий специальный вид

$$\Lambda_{jk,l}^i = \delta_j^i M_{.k.l} + \delta_k^i M_{.j.l} + \delta_l^i M_{.j.k} + \dot{x}^i M_{.j.k.l}, \quad (3)$$

если общее пространство путей $X_{n,x}$ допускает группу движений G_r порядка $r > n^2 - 2n + 5$. В равенстве (3) тензор $M_{.j.k}$ минус первой степени однородности относительно координат $\dot{x}^\alpha$ и выражается через составляющие $\Lambda_{jk,l}^i$ по формулам $M_{.k.l} = (1/m + 1) \Lambda_{kl,\sigma}^\sigma = (1/(2(n+1))) H_{.k.l,\sigma}^\sigma$. Аналогично доказывается, что

$$P_{jk,l}^i = \delta_j^i P_{.k.l} + \delta_k^i P_{.j.l} + \delta_l^i P_{.j.k} + \dot{x}^i P_{.j.k.l}, \quad (4)$$

если пространство $X_{n,x}$ допускает группу движений G_r порядка $r > n^2 - 2n + 5$. В равенстве (4) P — функция первой степени однородности относительно координат $\dot{x}^\alpha$. Из полученной структуры тензора $P_{jk,l}^i$ (4) непосредственно заключаем, что $P_{jk,l}^i = 0$.

Пространства $X_{n,x}$, у которых тензор $\Lambda_{jk,l}^i \neq 0$ имеет структуру, отличную от вида (3), будем обозначать символом $T_{n,x}$. Таким образом, мы убедились в справедливости следующих выводов.

Теорема 1. Если общее пространство путей $X_{n,x}$ допускает группу движений G_r порядка $r > n^2 - 2n + 5$, то необходимо выполняются следующие равенства:

$$\begin{aligned} \Lambda_{jk,l}^i &= \delta_j^i M_{.k.l} + \delta_k^i M_{.j.l} + \delta_l^i M_{.j.k} + \dot{x}^i M_{.j.k.l}; \\ \Lambda_{jk}^i &= \gamma_{jk}^i(x) + \delta_j^i M_{.k} + \delta_k^i M_{.j} + \dot{x}^i M_{.j.k}; \\ H^i &= 2\dot{x}^i M + \gamma_{jk}^i(x) \dot{x}^j \dot{x}^k; \quad \Pi_{jk,l}^i = 0; \\ T_{jk}^i &= \Lambda_{jk}^i - \gamma_{jk}^i(x) = \delta_j^i M_{.k} + \delta_k^i M_{.j} + \dot{x}^i M_{.j.k}, \end{aligned} \quad (5)$$

где M — скаляр первой степени однородности относительно координат $\dot{x}^\alpha$; T_{jk}^i — тензор деформации связности; $\gamma_{jk}^i(x)$ — объект аффинной связности пространства $A_n(x)$.

Теорема 2. Не существует пространств $T_{n,\dot{x}}$, $Z_{n,\dot{x}}$, $V_{n,\dot{x}}$, допускающих группы движений G_r порядка соответственно $r > n^2 - 2n + 5$, $r > n^2 - 3n + 8$, $r > n^2 - 4n + 11$.

Замечание. У общих пространств путей $X_{n,\dot{x}}$ с объектом аффинной связности (5) тензоры K_{jkl}^i , W_{jkl}^i необходимо имеют следующую структуру: $K_{jkl}^i = \gamma_{jkl}^i(x) + \delta_i^j(P_{kl} - P_{lk}) + \delta_k^i P_{jl} - \delta_l^i P_{jk} + + \dot{x}^i(P_{jl,k} - P_{jk,l})$, $W_{jkl,\dot{x}}^i = 0$, $W_{jkl}^i = W_{jkl}^i(x)$, $P_{kl} = M_{\cdot k \cdot l} - M_{\cdot k} \times \times M_{\cdot l} - M \cdot M_{\cdot k \cdot l}$, где $\gamma_{jkl}^i(x)$, $W_{jkl}^i(x)$ — соответственно тензор кривизны и тензор Вейля пространства аффинной связности $A_n(x)$ с объектом связности $\gamma_{jk}^i(x)$.

Обратимся теперь к исследованию свойств тензора проективной кривизны W_{jkl}^i общего пространства путей $X_{n,\dot{x}}$ при условии, что группа движений G_r достаточно высокого порядка. Справедлива

Теорема 3. Если общее пространство путей $X_{n,\dot{x}}$ допускает группу движений G_r , где $r > n^2 - 2n + 5$, то $W_{jkl}^i = 0$, $W_{jkl,\dot{x}}^i = 0$.

Доказательство. Будем рассматривать матрицу

$$T_2 = \left\| T_{\tau}^{\sigma} \left(\begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta \gamma \epsilon \end{smallmatrix} \right) \right\|, \quad (6)$$

где по определению положено $T_{\tau}^{\sigma} \left(\begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta \gamma \epsilon \end{smallmatrix} \right) = \delta_{\beta}^{\sigma} W_{\tau \gamma \epsilon}^{\alpha} + \delta_{\gamma}^{\sigma} W_{\beta \tau \epsilon}^{\alpha} + \delta_{\epsilon}^{\sigma} W_{\beta \gamma \tau}^{\alpha} - - \delta_{\tau}^{\sigma} W_{\beta \gamma \epsilon}^{\alpha}$. Элементами этой матрицы являются коэффициенты при функциях u_{σ}^{τ} в уравнениях $DW_{\beta \gamma \epsilon}^{\alpha} = 0$.

Предполагая, что тензор проективной кривизны $W_{jkl}^i \neq \neq 0$ ($i \neq j, k, l$), приходим к следующим двум возможным случаям: 1) $W_{\alpha_2 \alpha_2 \alpha_2}^{\alpha_1} \neq 0$, 2) $W_{\alpha_2 \alpha_2 \alpha_4}^{\alpha_1} \neq 0$, а все составляющие вида $W_{\alpha_2 \alpha_2 \alpha_3}^{\alpha_1} = 0$. В первом случае минор порядка $3n - 5$ матрицы (6), составленный из коэффициентов при функциях $u_{\alpha_1}^{\alpha_j}$, $u_{\alpha_k}^{\alpha_2}$, $u_{\alpha_l}^{\alpha_2}$ ($j = = 1, 2, \dots, n$; $k = 4, 5, \dots, n$; $l = 3, 4, \dots, n$) в уравнениях

$$\left(\begin{smallmatrix} \alpha_j \\ \alpha_2 \alpha_2 \alpha_2 \end{smallmatrix} \right), \quad \left(\begin{smallmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \alpha_2 \alpha_k \end{smallmatrix} \right), \quad \left(\begin{smallmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \alpha_2 \alpha_l \end{smallmatrix} \right),$$

с точностью до знака равен степени составляющей $W_{\alpha_2 \alpha_2 \alpha_2}^{\alpha_1}$. Аналогично рассматривается и второй случай [3]. Здесь можно выделить минор порядка $3n - 8$ матрицы (6), равный с точностью до постоянного множителя степени составляющей $W_{\alpha_2 \alpha_2 \alpha_2}^{\alpha_1}$. Теорема доказана.

Собирая изложенные выше результаты, убеждаемся, что справедлива

Теорема 4. Если общее пространство путей $X_{n,\dot{x}}$ допускает группу движений G_r порядка $r > n^2 - 2n + 5$, то это проективно-евклидово пространство путей $D_{n,\dot{x}}$.

Следствие. При указанной в теореме 4 подвижности в некоторой системе координат составляющие объекта аффинной связности $\Lambda_{jk}^i(x, \dot{x})$ ($i, j, k = 1, 2, \dots, n$) общего пространства путей $X_n, \dot{x}$ всегда можно привести к виду

$$\Lambda_{jk}^i = \delta_{jk}^i \bar{M}_{..k} + \delta_k^i \bar{M}_{..j} + \dot{x}^t \bar{M}_{..j.k},$$

где $\gamma_{jk}^i = \delta_{jk}^i \varphi_k + \delta_k^i \varphi_j$, $\bar{M} = M + \varphi_\sigma \dot{x}^\sigma$, $\varphi_{j.k} = 0$, $m \leq 3$, m — ранг тензора $M_{j.k}$; γ_{jk}^i определяется формулой (5₂).

Решим теперь вопрос о единственности представления тензора $\Lambda_{jk..l}^i \neq 0$ в виде (3). Имеет место

Теорема 5. Если ненулевой тензор $\Lambda_{jk..l}^i$ имеет структуру (3), то такое его представление через тензоры $M_{j.k}$, $M_{j.k..l}$ единственно.

Доказательство. В самом деле, пусть наряду с разложением тензора $\Lambda_{jk..l}^i$ (3) имеет место также разложение $\Lambda_{jk..l}^i = \delta_{jk}^i N_{..k..l} + \delta_k^i N_{..j..l} + \delta_l^i N_{..j.k} + \dot{x}^t N_{..j.k..l}$, где N — скаляр $(+1)$ -й степени однородности относительно координат $\dot{x}^\alpha$. Сопоставляя это разложение с (3), убеждаемся в справедливости соотношений $M_{..k..l} = N_{..k..l}$. Теорема доказана.

§ 3. Максимально подвижные общие пространства путей. В настоящем параграфе определяются максимальные порядки групп движений G_r в пространствах $\bar{D}_n, \dot{x}$, $T_n, \dot{x}$, $Z_n, \dot{x}$, $V_n, \dot{x}$. В предыдущем параграфе мы доказали, что не существует пространств $T_n, \dot{x}$, $Z_n, \dot{x}$, $V_n, \dot{x}$, порядки групп движений которых удовлетворяют соответственно неравенствам $r > n^2 - 2n + 5$, $r > n^2 - 3n + 8$, $r > n^2 - 4n + 11$. С другой стороны, можно указать пространства $T_n, \dot{x}$, $Z_n, \dot{x}$, $V_n, \dot{x}$, допускающие полные группы движений G_r порядка соответственно $r = n^2 - 2n + 5$, $r = n^2 - 3n + 8$, $r = n^2 - 4n + 11$. В самом деле, пространство $T_n, \dot{x}$ со связностью $\Lambda_{jk}^i = (1/2) H_{j.k}^i$, где $H^2 = (\dot{x}^1 - \dot{x}^3)^3 / \dot{x}^3$, остальные $H^i = 0$, допускает полную группу движений G_r порядка $r = n^2 - 2n + 5$. Операторы этой группы имеют вид p_l , $x^3 p_2$, $x^1 p_2$, $(x^1 - x^3) p_1 + 3x^2 p_2$, $x^1 p_1 + 2x^2 p_2 + x^3 p_3$, $2x^3 p_1 - 3(x^1 - x^3)^2 p_2$, $x^j p_k$, $x^3 p_k$, $x^1 p_j$, $x^j p_2$ ($i = 1, 2, \dots, n$; $j, k = 4, 5, \dots, n$).

Пространство $Z_n, \dot{x}$ со связностью $\Lambda_{jk}^i = (1/2) H_{j.k}^i$, где $H^2 = (\dot{x}^3)^2 (\dot{x}^4 - \dot{x}^1) / \dot{x}^1$, остальные $H^i = 0$, допускает полную группу движений G_r порядка $r = n^2 - 3n + 8$. Операторы этой группы движений суть p_l , $x^1 p_2$, $x^3 p_2$, $x^4 p_2$, $2x^2 p_2 + x^3 p_3$, $(x^3)^2 p_2 - 2x^1 p_4$, $x^1 p_1 + 2x^2 p_2 + x^3 p_3 + x^4 p_4$, $x^3 (\dot{x}^4 - \dot{x}^1) p_2 - x^1 p_3$, $x^1 p_j$, $x^2 p_2 + (x^4 - x^1) p_4$, $x^3 p_j$, $x^4 p_j$, $x^j p_2$, $x^j p_k$ ($l = 1, 2, \dots, n$; $j, k = 5, 6, \dots, n$).

Рассмотрим теперь пространство $V_n, \dot{x}$ со связностью $\Lambda_{jk}^i = (1/2) H_{j.k}^i$, где $H^2 = \dot{x}^3 \dot{x}^4 (\dot{x}^5 - \dot{x}^1) / \dot{x}^1$, остальные $H^i = 0$.

Тензор $P_{jk..l}^i$ у приведенного выше пространства $V_n, \dot{x}$ равен тензору $\Lambda_{jk..l}^i$, т. е. $\Lambda_{jk..l}^i = P_{jk..l}^i$. Пространство $V_n, \dot{x}$ допускает

полную группу движений G_r порядка $r = n^2 - 4n + 11$. Операторы рассматриваемой группы движений G_r суть $p_1, x^1 p_2, x^3 p_2, x^4 p_2, x^5 p_2, x^4(x^5 - x^1)p_2 - 2x^1 p_3, x^k p_2, x^3 x^4 p_2 - 2x^1 p_1, x^3(x^5 - x^1)p_2 - 2x^1 p_4, x^2 p_2 + (x^5 - x^1)p_5, x^1 p_1 + 2x^2 p_2 + x^3 p_3 + x^4 p_4 + x^5 p_5, x^2 p_2 + x^4 p_4, x^2 p_2 + x^3 p_3, x^k p_j, x^1 p_j, x^3 p_j, x^4 p_k, x^5 p_k (j, k = 6, 7, \dots, n; l = 1, 2, \dots, n)$.

Приведенные выше пространства $T_{n, \dot{x}}, Z_{n, \dot{x}}, V_{n, \dot{x}}$ допускают также полные группы проективных движений G_r соответственно порядка $r = n^2 - 2n + 6, r = n^2 - 3n + 9, r = n^2 - 4n + 12$ и являются приводимыми общими пространствами путей. Итак, доказана

Теорема 6. Максимальный порядок групп движений G_r в пространствах $T_{n, \dot{x}}, Z_{n, \dot{x}}, V_{n, \dot{x}}$ равен соответственно $n^2 - 2n + 5, n^2 - 3n + 8, n^2 - 4n + 11$.

Докажем теперь следующее предположение.

Теорема 7. Если общее пространство путей $X_{n, \dot{x}}$ допускает группу движений G_r , где $r > n^2 - n + 2$, то необходимо $M_{j, k} = 0, \Lambda_{j, k, l}^i = 0$.

Доказательство. Матрица, составленная из коэффициентов при функциях u_{α}^{β} в уравнениях $DM_{i, j} = 0, DM_{i, j, k} = 0$, будет вида $T_{\beta} = \|T_{\beta}^{\alpha}(ij), T_{\beta}^{\alpha}(ijk)\|$ (7), где $T_{\beta}^{\alpha}(ij) = \delta_i^{\alpha} M_{i, \beta, j} + \delta_j^{\alpha} M_{i, i, \beta} + \delta_{\alpha, i}^{\alpha} M_{i, i, j, \beta}$, $T_{\beta}^{\alpha}(ijk) = \delta_i^{\alpha} M_{i, \beta, j, k} + \delta_j^{\alpha} M_{i, i, \beta, k} + \delta_k^{\alpha} M_{i, i, j, \beta} + \delta_{\alpha, i}^{\alpha} M_{i, i, j, k, \beta}$. При предположении, что тензор $M_{j, k} = 0$, достаточно рассмотреть следующие два возможных случая: 1) $M_{\alpha_2, \alpha_2} \neq 0$, 2) $M_{\alpha_2, \alpha_3} \neq 0$, а все составляющие вида $M_{\alpha_2, \alpha_2} = 0$. В случае 1 минор порядка $2n - 2$ матрицы (7), составленный из коэффициентов при функциях $u_{\alpha_2}^{\alpha_2}, u_{\alpha_j}^{\alpha_j}$ в уравнениях $(\alpha_2 \alpha_i), (\alpha_2 \alpha_2 \alpha_j)$ ($i, j = 2, 3, \dots, n$), с точностью до постоянного множителя равен степени составляющей M_{α_2, α_2} . Во втором случае минор порядка $3n - 8$ матрицы (7), составленный из коэффициентов при функциях $u_{\alpha_2}^{\alpha_2}, u_{\alpha_j}^{\alpha_3}, u_{\alpha_k}^{\alpha_k}, u_{\alpha_3}^{\alpha_3}$ в уравнениях $(\alpha_i \alpha_3), (\alpha_2 \alpha_j), (\alpha_2 \alpha_3 \alpha_k), (\alpha_2 \alpha_3 \alpha_3)$ ($i, j, k = 4, 5, \dots, n$), с точностью до постоянного множителя равен степени составляющей M_{α_2, α_3} . Теорема доказана.

Собирая полученные выше результаты приходим к следующим выводам.

Теорема 8. Максимальный порядок групп движений G_r в классе непроективно-евклидовых пространств $\bar{D}_{n, \dot{x}}$ с ненулевым тензором $\Lambda_{j, k, l}^i$ равен точно $n^2 - 2n + 5$. Таков же максимальный порядок групп движений G_r в классе пространств $X_{n, \dot{x}}$, у которых тензоры $\Lambda_{j, k} = \Lambda_{j, k, \sigma}^{\sigma} = 0, \Lambda_{j, k, l}^i \neq 0$. Не существует общих пространств путей $X_{n, \dot{x}}$ с тензором $\Lambda_{j, k, l}^i \neq 0$ и допускающих полные группы движений G_r порядка $r > n^2 - n + 2$.

О последнем неравенстве см. [5].

Теорема 9. Наибольший порядок групп движений G_r в классе общих пространств путей, составляющие объекта аффинной связности Λ_{jk}^i которых в некоторой системе координат удовлетворяют условию $\Lambda_{j\sigma}^\sigma \equiv 0$, $\Lambda_{jk,l}^i \neq 0$, равен точно $n^2 - 2n + 5$. Таков же и максимальный порядок групп движений в классе пространств $X_{n,\dot{x}}$ с ненулевым тензором $\Pi_{jk,l}$.

Для пространств аффинной связности $A_n(x)$, определенных объектом $\gamma_{jk}^i(x)$, справедлива

Теорема 10. Стационарная подгруппа H_r группы движений G_r пространства аффинной связности в нормальной системе координат является линейной и однородной относительно переменных $x^1, x^2, \dots, x^n$.

Как показывают исследования, проведенные нами, утверждение этой теоремы вообще говоря не выполняется в общих пространствах путей $X_{n,\dot{x}}$ ни в какой системе координат.

Замечание 1. Нетрудно убедиться, что максимальный порядок групп проективных движений G_r в непроективно-евклидовых пространствах $\bar{D}_{n,\dot{x}}$ с тензором $\Lambda_{jk,l}^i \neq 0$ равен $n^2 - 2n + 6$.

Замечание 2. Общие пространства путей $X_{n,\dot{x}}(\bar{D}_{n,\dot{x}})$ второй лакуарности с ненулевым тензором $\Lambda_{jk,l}^i$ допускают группы движений G_r с отрезком конденсации $n^2 - n - 2 \leq r \leq n^2 - n + 1$ ($n^2 - 2n - 3 \leq r \leq n^2 - 2n + 5$).

Замечание 3. Из теоремы 9 вытекает, что максимальный порядок групп движений G_r в общих пространствах путей $X_{n,\dot{x}}$ нормальной аффинной связности равен точно $n^2 - 2n + 5$.

Ясно, что отрезок конденсации для пространств $X_{n,\dot{x}}$ второй лакуарности состоит из четырех точек. Максимальный порядок групп движений G_r в пространствах $X_{n,\dot{x}}$ с тензором $\Lambda_{jk,l}^i \neq 0$, непосредственно предшествующий максимальному порядку $n^2 - n + 1$, равен точно $r = n^2 - n$. Укажем на существование пространства $X_{n,\dot{x}}$, допускающего полную группу движений G_r , где $r = n^2 - n + 1$.

Пример. Пространство $X_{n,\dot{x}}$ со связностью

$$\Lambda_{jk}^i = \delta_j^i M_{..k} + \delta_k^i M_{..j} + \dot{x}^i M_{..j,k}, \quad (8)$$

где $M = (x^1)^\alpha \cdot (x^2)^{1-\alpha}$, $\alpha \in R$, $\alpha \neq 0, 1$, допускает полную группу движений G_r , где $r = n^2 - n + 1$. Операторы этой группы движений G_r имеют вид $p_i, x^k p_j, (\alpha - 1)x^1 p_1 + \alpha x^2 p_2$, $i, k = 1, 2, \dots, n$; $j = 3, 4, \dots, n$. Проективная группа движений пространства $X_{n,\dot{x}}$ (8) содержит $r = n^2 + 2n$ параметров. Оно является проективно-евклидовым пространством $D_{n,\dot{x}}$.

Список литературы: 1. Егоров А. И. Максимально подвижные пространства линейных элементов аффинной связности. 1—Укр. геометр. сб., 1979, вып. 22, с. 47—59. 2. Егоров А. И. Максимально подвижные пространства линейных элементов аффинной связности. 2.—Укр. геометр. сб. 1980, вып. 23,

с. 41—50. 3. *Липтеев Б. Л.* Производная Ли для объектов, являющихся функциями точки и направления.— Изв. физ.-мат. об-ва, 1938, 10, № 3, с. 3—38. 4. *Егоров И. П.* Пространства линейных элементов аффинной связности, допускающие группы движений максимального порядка.— Исследования по геометрии и алгебре, 1978, № 1, с. 24—42. 5. *Егоров И. П.* Движения в пространствах аффинной связности.— Учен. зап. Казанск. ун-та, 1965, с. 5—179.

Поступила в редколлегию 03.10.82.

Ю. П. Золотухин

ОБ ОДНОЗНАЧНОЙ ОПРЕДЕЛЕННОСТИ ПОВЕРХНОСТЕЙ С РАЗРЕЗАМИ В ПРОСТРАНСТВЕ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ

Известную теорему об однозначной определенности овалондов в евклидовом пространстве E_3 в применении к овалондам с разрезами можно сформулировать следующим образом: овалонд с разрезами однозначно определен, если $\Delta k^+ = \Delta k^-$ и $\Delta \kappa^+ = \Delta \kappa^-$ (1), где $\Delta k^\pm$ и $\Delta \kappa^\pm$ — соответственно приращения кривизны и кручения вдоль берегов $\mathcal{L}^\pm$ разреза $\mathcal{L}$ при изометрическом преобразовании поверхности. В работе [1] установлена однозначная определенность овалондов с разрезами по геодезическим при условиях, частным случаем которых являются условия (1): $\Delta k^+ = \alpha^2 \Delta k^-$, $\Delta \kappa^+ = \beta^2 \Delta \kappa^-$ (2), где α, β — произвольные гладкие функции; $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$. В данной заметке рассматриваются поверхности произвольного рода с разрезами в римановом пространстве постоянной кривизны. Доказывается однозначная определенность таких поверхностей при условиях более слабых, чем условия (2).

Пусть V_3 — трехмерное риманово пространство постоянной кривизны; S_2^ρ — ориентированная двумерная замкнутая поверхность рода ρ положительной внешней кривизной $K \geq \text{const} > 0$ в пространстве V_3 , $S_2^\rho \in C_\alpha^3$ ($0 < \alpha < 1$). Пусть, далее, $\mathcal{L} = \bigcup_{k=0}^m \mathcal{L}_k$ — совокупность $m + 1$ замкнутых или незамкнутых не пересекающихся и не имеющих общих концов кривых Ляпунова. Если кривые $\mathcal{L}_k$ ($k = 0, 1, \dots, m$) замкнуты, будем предполагать, что контур $\mathcal{L}$ ограничивает область S^+ на поверхности S_2^ρ . На контуре $\mathcal{L}$ условимся считать положительным направление обхода, оставляющего область S^+ слева. Если контур $\mathcal{L}$ состоит из незамкнутых кривых $\mathcal{L}_k$ ($k = 0, 1, \dots, m$) с концами α_k и β_k , то за положительное направление обхода примем направление, при котором обход кривых $\mathcal{L}_k$ производится от α_k к β_k . В дальнейшем мы рассматриваем поверхность S_2^ρ , $\rho \geq 0$ с разрезом $\mathcal{L}$ и различаем левый ($\mathcal{L}^+$) и правый ($\mathcal{L}^-$) берега разреза $\mathcal{L}$ (по поводу операции разрезания см., например, [1]). Изометрические преобразования поверхности S_2^ρ с разрезами будем рассматривать в классе $C_\alpha^3((S_2^\rho \setminus \mathcal{L}) \cup (\mathcal{L}^+ \cup \mathcal{L}^-))$.

Пусть τ — касательная плоскость поверхности в точке $s \in S_2^p$ в соприкасающемся евклидовом пространстве, D — индикатриса внешней кривизны поверхности в точке s , расположенная в плоскости τ . Пусть $s^* \in \tilde{S}_2^p$ — точка, соответствующая по изометрии точке $s \in S_2^p$, и D^* — индикатриса кривизны в точке s^* . Обозначим через v^* угол между соответствующими главными направлениями ω и ω^* индикатрис D и D^* , считая что $0 \leq v^* \leq \frac{\pi}{2}$. Главные кривизны изометричных поверхностей в точках s и s^* по направлениям ω и ω^* обозначим соответственно через k_1 и k_1^* . Изгибом поверхности S_2^p в точке s при изометрическом преобразовании называется комплексное число $I(s) = v^* + i(k_1^* - k_1)$. Поверхность в пространстве постоянной кривизны V_3 называется однозначно определенной, если для любого изометрического преобразования этой поверхности $I(s) \equiv 0$ ([2]).

Пусть поверхность S_2^p подчинена внешней связи вдоль берегов разреза, порождающей при изометрическом преобразовании граничные условия:

$$\Delta k_{nR}^+ = a_{11} \Delta k_{nR}^- + a_{12} \Delta \tau_{gR}^-, \quad \Delta \tau_{gR}^+ = a_{21} \Delta k_{nR}^- + a_{22} \Delta \tau_{gR}^-, \quad (*)$$

где $\Delta k_{nR}^{\pm}$, $\Delta \tau_{gR}^{\pm}$ — соответственно приращения нормальной кривизны и геодезического кручения вдоль берегов $\mathcal{L}^{\pm}$ разреза $\mathcal{L}$ в направлении R ; R — заданное вдоль контура $\mathcal{L}$ поле направлений класса $C_1^{\alpha}(\mathcal{L})$, $0 < \alpha < 1$; a_{ij} ($i, j = 1, 2$) — заданные функции класса $C_{\alpha}(\mathcal{L})$. Предположим, что в концах незамкнутых кривых направление поля R совпадает с предельным положением в этих точках поля касательных направлений контура $\mathcal{L}$ и $a_{ij} = \delta_{ij}$ ($\delta_{ij} = 1$ при $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$). Введем функцию $\Delta = \det((a_{ij}))$ ($i, j = 1, 2$) и при $\Delta > 0$ на $\mathcal{L}$ число

$$v = \sum_{k=0}^m \left\{ \frac{1}{2\pi} \arg(a_{11} + a_{22} + i(a_{12} - a_{21})) \right\} \mathcal{L}_k.$$

Приращения аргумента вычисляются при положительном обходе контура $\mathcal{L}$.

Теорема. В пространстве V_3 поверхность S_2^p , $\rho \geq 0$, с разрезом $\mathcal{L}$, подчиненная внешней связи (*), является однозначно определенной, если $\Delta > 0$ всюду на $\mathcal{L}$ и $v < 4 - 4\rho$.

Доказательство. 1. Предположим сначала, что $\rho > 0$ и кривые $\mathcal{L}_k$ ($k = 0, 1, \dots, m$) замкнуты.

Зафиксируем на поверхности S_2^p некоторый атлас, гомеоморфизм каждой локальной карты которого является сопряженно изометрическим. Полученное комплексное аналитическое многообразие обозначим через $\tilde{S}_2^p$. Области $S^+(S^-)$ на поверхности S_2^p соответствует область $\tilde{S}^+(\tilde{S}^-)$ на римановой поверхности $\tilde{S}_2^p$, кон-

туру $\mathcal{Z} \in \tilde{S}_2^0$ соответствует контур $\tilde{\mathcal{Z}} \in \tilde{S}_2^0$. Пусть φ — фиксированная абелева коварианта на $\tilde{S}_2^0$, не имеющая нулей и полюсов на $\tilde{\mathcal{Z}}$. (Существование такой абелевой коварианты доказано в работе [3]). Обозначим через $\varphi^\pm$ мероморфные функции, определенные в некоторых областях на поверхности $\tilde{S}_2^0$, содержащих замкнутые области $\tilde{S}^\pm$, соответственно, дивизоры $(\varphi^\pm)$ которых удовлетворяют условиям $(\varphi^\pm)_{\tilde{S}^\pm} = (\varphi)_{\tilde{S}^\pm}$.

Пусть поверхность S_2^0 изометрически преобразована в поверхность S_2^* с коэффициентами b_{ij} второй формы. Запишем уравнения Гаусса—Петерсона—Кодацци в пространстве V_3 в карте с координатами (u^1, u^2) в виде [4]:

$$\partial_{\bar{z}}\omega(z) - \bar{B}(z)\omega(z) = (-C(z)\Pi(z) + \partial_z\Pi(z))\sqrt{g(z)\overline{V K(z)}}, \quad (3)$$

$$\Pi(z) = -\sqrt{\overline{K(z)}} + \sqrt{K(z) + |\omega(z)|^2 (g(z)\overline{V K(z)})^{-1}}, \quad (4)$$

где $\omega(z) = \frac{1}{2}\sqrt{\overline{K}}(b_{11} - b_{22} - 2ib_{12})$ — искомая комплексная функция изгибаний, $z = u^1 + iu^2$; коэффициенты $B(z)$ и $C(z)$ определяются по формулам $B(z) = \frac{1}{4}\left\{\Gamma_{22}^1 - \Gamma_{11}^1 + 2\Gamma_{12}^2 + i(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{11}^2 - 2\Gamma_{12}^1)\right\}$; $C(z) = \frac{1}{4}\left\{-(\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^1) + i(\Gamma_{11}^2 + \Gamma_{22}^2)\right\}$, здесь $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k(z)$ — символы Кристоффеля поверхности S_2^0 , вычисленные по метрическому тензору $g_{ij} = g_{ij}(z)$, $g(z) = \det((g_{ij}))$ ($i, j = 1, 2$).

Введем конформный инвариант $\tilde{\omega}$ по формуле $\tilde{\omega} = \omega(\varphi^\pm)^2\varphi^{-2}$ в $\tilde{S}^\pm$ (5).

Основные уравнения теории поверхностей (3), (4) индуцируют нелинейные системы дифференциальных уравнений эллиптического типа относительно инварианта $\tilde{\omega}$ в областях $\tilde{S}^+$ и $\tilde{S}^-$ римановой поверхности $\tilde{S}_2^0$

$$\partial\tilde{\omega} - \bar{B}\tilde{\omega} = (-C\tilde{\Pi} + \partial\tilde{\Pi})(\varphi^\pm)^2\varphi^{-2}\sqrt{g\overline{V K}} \quad (6),$$

$$\tilde{\Pi} = -\sqrt{\overline{K}} + \sqrt{K + |\varphi^\pm|^4|\varphi^\pm|^{-4}(g\overline{V K})^{-1}\omega\bar{\omega}^2} \quad (7),$$

где $\tilde{B} = \tilde{B}(\varphi\varphi^\pm)^2(\varphi\varphi^\pm)^{-2}$ в $S^\pm$, B и C — коварианты типа $(0, 1)$ класса $L_p(\tilde{S}^\pm)$, $p > 2$.

2. В пространстве V_3 нормальная кривизна поверхности в данном направлении определяется как нормальная кривизна в соприкасающемся евклидовом пространстве. Аналогичным образом определяется геодезическое кручение поверхности в пространстве V_3 в данном направлении [5, гл. 4, п. 2]. При этом имеют место обычные формулы: $k_{nR} = \Pi/I$, $\tau_{gR} = IV/I$.

Обозначим образ поля направлений R в плоскости параметра $z = u^1 + iu^2$ в окрестности текущей точки s контура $\mathcal{Z}$ через R' . Пусть φ — угол, образованный направлением поля R' (произволь-

по выбранному из двух возможных) с положительным направлением оси Ou^1 . Отсчет угла γ будем производить от направления оси Ou^1 до выбранного направления R' против часовой стрелки. На формул для k_{nR} τ_{gR} несложными преобразованиями выведем:

$$\Delta k_{nR} = -\operatorname{Re} \{\bar{\lambda}_1 w\} + \operatorname{Re} \{\mu_1(w) w\}; \Delta \tau_{gR} = -\operatorname{Re} \{\bar{\lambda}_2 w\} + \operatorname{Re} \{\mu_2(w) w\} \quad (8),$$

$$\text{где } \lambda_1 = -(\sqrt[4]{K} p_1^2) \exp(-2i\gamma);$$

$$\lambda_2 = (\sqrt{gVK}) p_1^2 ((b_0 + ic_0) \exp 2i\gamma + ia_0);$$

$$\mu_1(w) = \frac{1}{\sqrt{gK} p_1^2} \cdot \frac{w}{\sqrt{K} + \sqrt{K + w\bar{w}} (\sqrt{gK})^{-1}}; \quad (9)$$

$$\mu_2(w) = \frac{c_0 \sin 2\gamma - b_0 \cos 2\gamma}{g\sqrt{K} p_1^2} \cdot \frac{w}{\sqrt{K} + \sqrt{K + w\bar{w}} (\sqrt{gK})^{-1}};$$

$$\text{причем } p_1^2 = g_{11} \cos^2 \gamma + g_{12} \sin 2\gamma + g_{22} \sin^2 \gamma, \quad a_0 = \frac{1}{2} (g_{11} + g_{22}),$$

$$b_0 = g_{12}, \quad c_0 = \frac{1}{2} (g_{11} - g_{22}).$$

Величины λ_1 , λ_2 , $\mu_1(w)$, $\mu_2(w)$ являются ковариантами типа $(0, -2)$.

При помощи соотношений (8) граничные условия (*) локально запишем в виде

$$\begin{aligned} \bar{v}_1^+ w^+ + v_1^+ \bar{w}^+ &= a_{11} \bar{v}_1^- w^- + a_{11} v_1^- \bar{w}^- + a_{12} \bar{v}_2^- w^- + a_{12} v_2^- \bar{w}^-; \\ \bar{v}_2^+ w^+ + v_2^+ \bar{w}^+ &= a_{21} \bar{v}_1^- w^- + a_{21} v_1^- \bar{w}^- + a_{22} \bar{v}_2^- w^- + a_{22} v_2^- \bar{w}^-, \end{aligned}$$

где $w^\pm$ — предельные значения функции w на берегах $\mathcal{L}^\pm$ разреза $\mathcal{L}$, $v^\pm = \mu_i(w^\pm) - \lambda_i$ ($i = 1, 2$). Исключая $\bar{w}^+$ получим

$$\begin{aligned} (\bar{v}_1^+ v_2^+ - v_1^+ \bar{v}_2^+) w^+ &= (a_{11} v_1^- \bar{v}^+ - a_{21} v^+ \bar{v}_1^- + a_{12} v^+ \bar{v}_2^- - a_{22} v_1^+ \bar{v}_2^-) w^- + \\ &+ (a_{11} v_1^- v_2^+ - a_{21} v_1^+ v_1^- + a_{12} v_2^+ v_2^- - a_{22} v_1^+ v_2^-) \bar{w}_2^-. \quad (10). \end{aligned}$$

$$\text{Всюду на } \mathcal{L} \text{ имеет место равенство } \bar{v}_1^\pm v_2^\pm - v_1^\pm \bar{v}_2^\pm = i\eta(w^\pm) \quad (11),$$

где $\eta(w^\pm) > 0$ для любых $w^\pm$ класса $C_\alpha^1(\mathcal{L})$.

В самом деле, согласно формулам (9)

$$v_1^\pm = (p_1^2 \sqrt[4]{K})^{-1} (\tilde{u}^\pm + \cos 2\gamma + i(\tilde{v}^\pm - \sin 2\gamma));$$

$$\begin{aligned} v_2^\pm &= (p_1^2 \sqrt{gVK})^{-1} (\tilde{u}^\pm (c_0 \sin 2\gamma - b_0 \cos 2\gamma) - b_0 + a_0 \sin 2\gamma + \\ &+ i(\tilde{v}^\pm (c_0 \sin 2\gamma - b_0 \cos 2\gamma) - (c_0 + a_0 \cos 2\gamma))), \end{aligned}$$

где

$$\tilde{u}^\pm = \operatorname{Re} w^\pm \left(\sqrt{gVK} (\sqrt{K} + \sqrt{K + (\operatorname{Re}^2 w^\pm + \operatorname{Im}^2 w^\pm) (gVK)^{-1}}) \right)^{-1};$$

$$\tilde{v}^\pm = \operatorname{Im} w^\pm \left(\sqrt{gVK} (\sqrt{K} + \sqrt{K + (\operatorname{Re}^2 w^\pm + \operatorname{Im}^2 w^\pm) (gVK)^{-1}}) \right)^{-1}.$$

$$\text{Отсюда } \bar{v}_1^\pm v_2^\pm - v_1^\pm \bar{v}_2^\pm = -2i (p_1^2 \sqrt{gK})^{-1} (\tilde{u}^\pm \cos 2\gamma - \tilde{v}^\pm \sin 2\gamma + 1).$$

Учитывая также, что $|\mu \cos 2\gamma - \tilde{v} \sin 2\gamma| < 1$, получим представление (11).

Из (11) следует, что $\bar{v}_1^+ v_2^+ - v_1^+ \bar{v}_2^+ \neq 0$ на $\mathcal{L}$. Перепишем соотношение (10) в виде $\omega^+ = \bar{G}_1(\omega^+, \omega^-) \omega^- + G_2(\omega^+, \omega^-) \bar{\omega}^-$ (12),

где

$$G_1(\omega^+, \omega^-) = (\bar{v}_1^+ v_2^+ - v_1^+ \bar{v}_2^+)^{-1} (a_{11} \bar{v}_1^- v_2^+ - a_{21} v_1^+ \bar{v}_1^- + a_{12} \bar{v}_2^- v_2^+ - a_{22} v_1^+ v_2^-);$$

$$G_2(\omega^+, \omega^-) = (\bar{v}_1^+ v_2^+ - v_1^+ \bar{v}_2^+)^{-1} (a_{11} v_1^- v_2^+ - a_{21} v_1^+ v_1^- + a_{12} v_2^+ v_2^- - a_{22} v_1^+ v_2^-).$$

Коэффициент $G_1(\omega^+, \omega^-)$ является конформным инвариантом, а коэффициент $G_2(\omega^+, \omega^-)$ — ковариантой типа $(2, -2)$.

Используя локальные соотношения (12) и подстановку (5), получим условия сопряжения для функции $\tilde{\omega}$ вдоль контура $\tilde{\mathcal{L}}$ на римановой поверхности $\tilde{S}_2^*$: $\tilde{\omega}^+ = \tilde{G}_1(\tilde{\omega}^+, \tilde{\omega}^-) \tilde{\omega}^- + \tilde{G}_2(\tilde{\omega}^+, \tilde{\omega}^-) \tilde{\omega}^-$ (13),

$$\text{где } \tilde{G}_1(\tilde{\omega}^+, \tilde{\omega}^-) = (\varphi^+)^2 (\varphi^-)^{-2} G_1(\varphi^2 (\varphi^+)^{-2} \tilde{\omega}^+, \varphi^2 (\varphi^-)^{-2} \tilde{\omega}^-);$$

$$\tilde{G}_2(\tilde{\omega}^+, \tilde{\omega}^-) = (\varphi \varphi^+)^2 (\varphi \varphi^-)^{-2} G_2(\varphi^2 (\varphi^+)^{-2} \tilde{\omega}^+, \varphi^2 (\varphi^-)^{-2} \tilde{\omega}^-). \quad (14)$$

Коэффициенты $\tilde{G}_1$ и $\tilde{G}_2$ являются конформными инвариантами и принадлежат классу $G_\alpha^1(\tilde{\mathcal{L}})$ при любых функциях $\tilde{\omega}^+ \tilde{\omega}^-$ класса $C_\alpha^1(\tilde{\mathcal{L}})$.

3. Перепишем систему (6) в виде $\partial \tilde{\omega} = \tilde{B} \tilde{\omega}$ (15),

где $\tilde{B} = \tilde{B} - \frac{(-C\tilde{\Pi} + \partial\tilde{\Pi})(\varphi^\pm)^2 \sqrt{gV\bar{K}}}{\varphi^2 \tilde{\omega}}$.

Выполним дифференцирование в числителе этого выражения для $\tilde{B}$, подставив вместо величины $\tilde{\Pi}$ ее значение (7)

$$\begin{aligned} \partial\tilde{\Pi} - C\tilde{\Pi} &= -\partial\sqrt{K} - \frac{\partial K + \partial(|\varphi|^4 |\varphi^\pm|^{-4} (g\sqrt{K})^{-1} \tilde{\omega} \tilde{\omega})}{2\sqrt{K + |\varphi|^4 |\varphi^\pm|^{-4} (g\sqrt{K})^{-1} \tilde{\omega} \tilde{\omega}}} - \\ &= -\frac{C|\varphi|^4 |\varphi^\pm|^{-4} (g\sqrt{K})^{-1} \tilde{\omega} \tilde{\omega}}{\sqrt{K + |\varphi|^4 |\varphi^\pm|^{-4} (g\sqrt{K})^{-1} \tilde{\omega} \tilde{\omega}}} = \\ &= -\frac{|\varphi|^4 |\varphi^\pm|^{-4} (g\sqrt{K})^{-1} \partial(\sqrt{K}) \tilde{\omega} \tilde{\omega}}{\sqrt{K + |\varphi|^4 |\varphi^\pm|^{-4} (g\sqrt{K})^{-1} \tilde{\omega} \tilde{\omega}} (\sqrt{K + |\varphi|^4 |\varphi^\pm|^{-4} (g\sqrt{K})^{-1} \tilde{\omega} \tilde{\omega}})} + \\ &+ \frac{\tilde{\omega} \partial(|\varphi|^4 |\varphi^\pm|^{-4} (g\sqrt{K})^{-1} \tilde{\omega}) + |\varphi|^4 |\varphi^\pm|^{-4} (g\sqrt{K})^{-1} \tilde{\omega} \partial \tilde{\omega}}{2\sqrt{K + |\varphi|^4 |\varphi^\pm|^{-4} (g\sqrt{K})^{-1} \tilde{\omega} \tilde{\omega}}} - \\ &= -\frac{C|\varphi|^4 |\varphi^\pm|^{-4} (g\sqrt{K})^{-1} \tilde{\omega} \tilde{\omega}}{\sqrt{K} \sqrt{K + |\varphi|^4 |\varphi^\pm|^{-4} (g\sqrt{K})^{-1} \tilde{\omega} \tilde{\omega}}}. \end{aligned}$$

Учитывая соотношение (15), получим

$$|\tilde{B}| \leq |\tilde{B}| + \frac{|\partial \sqrt{K}|}{4K \sqrt{g} \sqrt{K}} \left| \frac{\Phi}{\Phi^\pm} \right|^2 |\tilde{\omega}| + \frac{\sqrt{g} \sqrt{K}}{2 \sqrt{K}} \left| \frac{\Phi}{\Phi^\pm} \right|^{-2} |\partial (|\Phi|^4 |\Phi^\pm|^{-4}) \times \\ \times (g \sqrt{K})^{-1} \tilde{\omega}| + \left| \frac{\Phi}{\Phi^\pm} \right|^2 \frac{|\partial \tilde{\omega}|}{2 \sqrt{gK} \sqrt{K}} + \left| \frac{\Phi}{\Phi^\pm} \right|^2 \frac{|C| |\tilde{\omega}|}{2 \sqrt{gK} \sqrt{K}}.$$

Следовательно, коварианта $\tilde{B}$ (по $\tilde{z}$) принадлежит классу $L_p(\tilde{S}^\pm)$, $p > 2$, если $\tilde{\omega} \in C_\alpha^1(\tilde{S}^\pm)$.

4. Установим два свойства функций $\tilde{G}_1$ и $\tilde{G}_2$.

а) Если $\Delta > 0$ на $\mathcal{Z}$, то $|\tilde{G}_1(\tilde{\omega}^+, \tilde{\omega}^-)| > |\tilde{G}_2(\tilde{\omega}^+, \tilde{\omega}^-)| \in C_\alpha^1(\mathcal{Z})$ для любых $\tilde{\omega}^+, \tilde{\omega}^-$. Действительно, используя формулы (14), находим

$$|\tilde{G}_1(\tilde{\omega}^+, \tilde{\omega}^-)|^2 - |\tilde{G}_2(\tilde{\omega}^+, \tilde{\omega}^-)|^2 = \\ = -\Delta \left| \frac{\Phi^{+2}}{\Phi^-} \right| \frac{(\tilde{v}_1^+ \tilde{v}_2^+ + \tilde{v}_1^+ \tilde{v}_2^-) (\tilde{v}_1^- \tilde{v}_2^- - \tilde{v}_1^- \tilde{v}_2^+)}{|\tilde{v}_1^+ \tilde{v}_2^+ - \tilde{v}_1^+ \tilde{v}_2^-|^2}.$$

В силу (11), отсюда имеем

$$|\tilde{G}_1(\tilde{\omega}^+, \tilde{\omega}^-)|^2 - |\tilde{G}_2(\tilde{\omega}^+, \tilde{\omega}^-)|^2 = -\Delta \left| \frac{\Phi^{+2}}{\Phi^-} \right| \eta^{-1} \left(\frac{\Phi^2}{\Phi^{+2}} \tilde{\omega}^+ \right) \eta \left(\frac{\Phi^2}{\Phi^{-2}} \tilde{\omega}^- \right) > 0.$$

Следовательно, $|\tilde{G}_1(\tilde{\omega}^+, \tilde{\omega}^-)| - |\tilde{G}_2(\tilde{\omega}^+, \tilde{\omega}^-)| > 0$ для любых функций $\tilde{\omega}^+, \tilde{\omega}^- \in C_\alpha^1(\mathcal{Z})$.

б) Если $\Delta > 0$ на $\mathcal{Z}$, то $\text{ind}_{\mathcal{Z}} \tilde{G}_1(\tilde{\omega}^+, \tilde{\omega}^-) = \nu + 4\rho - 4$ для любых $\tilde{\omega}^\pm \in C_\alpha^1(\mathcal{Z})$.

В самом деле, из свойства а) следует, что $|\tilde{G}_1(\tilde{\omega}^+, \tilde{\omega}^-)| \neq 0$. Поэтому индекс функции $\tilde{G}_1(\tilde{\omega}^+, \tilde{\omega}^-)$ определен для любых $\tilde{\omega}^\pm \in C_\alpha^1(\mathcal{Z})$. С другой стороны, индекс функции $\tilde{G}_1(\tilde{\omega}^+, \tilde{\omega}^-)$ — целое число и не зависит от функций $\tilde{\omega}^\pm$. Следовательно,

$$\text{ind}_{\mathcal{Z}} \tilde{G}_1(\tilde{\omega}^+, \tilde{\omega}^-) = \text{ind}_{\mathcal{Z}} \tilde{G}_1(0, 0) = \text{ind}_{\mathcal{Z}} (\Psi^+/\Psi^-)^2 a_1, \quad (16)$$

где $a_1 = \frac{a_{12}(p+iq) - a_{22}n}{2iq} \left\{ \frac{a_{11}(p+iq) - a_{21}n}{a_{12}(p+iq) - a_{22}n} + \frac{p-iq}{n} \right\}$; $n = \lambda \exp 2i\gamma$; $p = \text{Re} \{ \lambda_2 \exp 2i\gamma \}$; $q = \text{Im} \{ \lambda_2 \exp 2i\gamma \}$.

В силу неравенств $n < 0$, $q > 0$ и $\Delta > 0$, мнимая часть выражения, заключенного в фигурных скобках, положительна. Следовательно,

$$\text{ind}_{\mathcal{Z}} a_1 = \text{ind}_{\mathcal{Z}} \left(a_{12} \frac{p+iq}{q} - a_{22} \frac{n}{q} \right).$$

Тензорную величину $p+iq$ запишем в виде $p+iq = h_1 + ih_2$, где $h_1 = (b_0 + ic_0) \exp 2i\gamma (V g \sqrt{K} p_1^2)^{-1}$, $h_2 = a_0 (V g \sqrt{K} p_1^2)^{-1}$, $|h_1| < h_2$.

Учитывая последнее неравенство, получим $\text{ind } \tilde{\mathcal{Z}} a_1 = \text{ind } \tilde{\mathcal{Z}} \left(a_{12} \frac{n}{q} i - a_{22} \frac{n}{q} \right) = \text{ind } \tilde{\mathcal{Z}} (a_{12} - i a_{22}) = v$. Воспользуемся формулой (16):

$$\text{ind } \tilde{\mathcal{Z}} \tilde{G}_1 (\tilde{w}^+, \tilde{w}^-) = \text{ind } \tilde{\mathcal{Z}} a_1 + 2d [(\varphi^+)_{\tilde{s} \pm} \varphi^-]_{\tilde{s} -} = v + 4\rho - 4.$$

(Через d обозначена степень соответствующего дивизора).

5. Допуская, что нелинейная задача (6), (13) при $v < 4 - 4\rho$ имеет ненулевое решение класса $C_\alpha^1(\tilde{S}^\pm)$, подставляя его в систему (15) и краевое условие (13), получим, что линейная задача (15), (13), где $\tilde{B}$ и $\tilde{G}_1, \tilde{G}_2 (|\tilde{G}_1| > |\tilde{G}_2|)$ — известные функции классов $L_p(\tilde{S}^\pm)$, $p > 2$, и $C_\alpha^1(\tilde{\mathcal{Z}})$, соответственно, имеет ненулевое решение, непрерывное в $\tilde{S}^\pm$ при отрицательном индексе. Последнее невозможно, в силу теоремы 2.4 работы [6]. Следовательно, $\tilde{w} \equiv 0$, и $\tilde{w} \equiv 0$. Это означает, что изгиб $I(s)$ тождественно равен нулю. В самом деле, если $b_{11} \equiv b_{22}$ и $b_{12} \equiv 0$, то, принимая во внимание уравнение Гаусса (и учитывая, что $I \equiv I^*$), получим, что $\Pi \equiv \Pi^*$. Следовательно, $v^* = 0$ и $k_1 = k_1^*$, т. е. $I(s) \equiv 0$.

6. Пусть кривые $\mathcal{L}_k (k = 0, 1, \dots, m)$ незамкнуты. Дополним контур $\mathcal{L}$ такими $m + 1$ кривыми $\mathcal{L}_k^* (k = 0, 1, \dots, m)$ так, чтобы на поверхности S_2^0 образовалась одна замкнутая гомологичная нулю кривая Ляпунова $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \mathcal{L}^*$, ориентация которой согласуется с ориентацией кривых $\mathcal{L}_k$. Потребуем, чтобы вдоль $\mathcal{L}'$ выполнялись соотношения $\Delta k_{nR}^+ = \dot{a}_{11} \Delta k_{nR}^- + \dot{a}_{12} \Delta \tau_{gR}^-$ и $\Delta \tau_{gR}^+ = \dot{a}_{21} \Delta k_{nR}^- + \dot{a}_{22} \Delta \tau_{gR}^-$ (17), где $\dot{a}_{ij} \equiv a_{ij}$ на $\mathcal{L}$, $\dot{a}_{ij} \equiv \delta_{ij}$ на $\mathcal{L}^* (i, j = 1, 2)$; $R' \equiv R$ на $\mathcal{L}$, R' является полем касательных направлений вдоль $\mathcal{L}^*$.

Обозначим $\Delta' = \det((\dot{a}_{ij}))(i, j = 1, 2)$. Так как $\Delta' \equiv \Delta$ на $\mathcal{L}$ и $\Delta' \equiv 1$ на $\mathcal{L}^*$, то $\Delta' > 0$ на $\mathcal{L}'$. Пусть $v' = \text{ind}_{\mathcal{L}'}(\dot{a}_{11} + \dot{a}_{22} + i(\dot{a}_{12} - \dot{a}_{21}))$.

Если $v' < 4 - 4\rho$, то, как доказано выше, поверхность S_2^0 , подчиненная внешней связи (17) вдоль берегов замкнутого разреза $\mathcal{L}'$ является однозначно определенной. Отсюда, учитывая равенство $v' = v$, получаем утверждение теоремы в рассматриваемом случае.

7. Пусть $\rho = 0$. На поверхности S_2^0 введем единую сопряженно-изометрическую параметризацию с полюсом в области S^- . Запишем уравнения Гаусса—Петерсона—Кодацци в виде (3), (4).

Коэффициенты $B(z)$ и $C(z)$ принадлежат классу $L_{p,2}(E)$, $p > 2$, где E — параметрическая плоскость [7, гл. 2, § 6]. Известно [7], что при $z \rightarrow \infty$ $w(z) = O(|z|^{-4})$ (18).

Внешняя связь (*) порождает граничное условие (12) для функции $w(z)$ вдоль контура Γ , где Γ — образ контура $\mathcal{L}$ в плоскости E , причем $G_1, G_2 \in C_\alpha^1, |G_1| > |G_2|$, и $\text{ind}_\Gamma G_1 = v$ для любых $w \in C_\alpha^1(\Gamma)$. Применяя теорему 6.3. гл. 4 монографии [8] (с учетом условия

(11)), получим, что задача (3), (4), (12) не имеет решений, т. е. $\rho = 0$. Случай, когда разрез не замкнут, сводится к рассмотренному так же, как при $\rho > 0$. Теорема доказана.

Список литературы: 1. *Фоменко В. Т.* Об однозначной определенности оваловидов с разрезами. — Докл. АН СССР, 1963, 152, № 6, с. 1320—1323. 2. *Фоменко В. Т.* Исследования по изгибаниям поверхностей положительной внешней кривизны ненулевого рода. — Всесоюз. науч. конф. по неевклидовой геометрии, 150 лет геометрии Лобачевского. М.: ВИНТИ, 1977, с. 78—87. 3. *Климентов С. Б.* Бесконечно малые изгибания поверхностей рода $\rho > 0$ с краевым условием обобщенного скольжения. — Укр. геометр. сб., 1976, вып. 19, с. 67—68. 4. *Фоменко В. Т.* Об однозначной определенности замкнутых поверхностей рода $\rho \geq 1$ в пространстве постоянной кривизны. — Мат. заметки, 1979, 16, № 3, с. 441—445. 5. *Картан Э.* Геометрия римановых пространств. — М.; Л.: ОНТИ, 1936. — 244 с. 6. *Золотухин Ю. П.* Бесконечно малые изгибания поверхностей рода $\rho \geq 0$ с разрезами в римановых пространствах при внешних связях. 1. — Деп. ВИНТИ, № 3946—78, 1978. — 50 с. 7. *Веллер И. Н.* Обобщенные аналитические функции. — М.: Физматгиз, 1959. — 628 с. 8. *Михайлов Л. Г.* Новый класс особых интегральных уравнений и его применения к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами. — Душанбе: Маориф, 1963. — 183 с.

Поступила в редколлегию 22.02.82.

В. Ф. Игнатенко

НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ДИАМЕТРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ E^m

Пусть в вещественном m -мерном евклидовом пространстве E^m $(m-1)$ -мерная алгебраическая поверхность F_n порядка n задана уравнением $\varphi(x) = 0$ (1), где $\varphi(x)$ есть многочлен от прямоугольных координат x_i ($i = \overline{1, m}$) вектора x . В данной заметке рассматриваются некоторые геометрические свойства поверхности F_n , определяемые ее диаметральными поверхностями (с учетом их распада).

1°. В однородных координатах x_j ($j = \overline{1, m+1}$) уравнение

$$\left(\sum_{j=1}^{m+1} u_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right)^{n-k} \varphi(x_j) = 0 \quad (2)$$

дает $(n-k)$ -ю полярную поверхность $P_k(U)$ порядка $1 \leq k \leq n-1$ точки $U(u_1: \dots: u_{m+1})$ относительно F_n ; его можно переписать так:

$$\left(\sum_{j=1}^{m+1} x_j \frac{\partial}{\partial u_j} \right)^k \varphi(u_j) = 0. \quad (3)$$

Если точка $U = U_\infty$ является бесконечно удаленной ($u_{m+1} = 0$), то $P_k(U_\infty)$ называется $(n-k)$ -й диаметральной поверхностью $D_k(u)$,

сопряженной вектору $u = (u_i)$ [1]. Поверхность $P_k(U_\infty)$ содержит бесконечно удаленную плоскость компонентой кратности $0 \leq h \leq k$. Будем считать направление u таким, что $h < k$; тогда порядок поверхности $D_k(u)$ равен $k - h$.

Рассмотрим геометрическую интерпретацию поверхности $D_k(u)$, проективный вариант которой приведен, например, в [2]. Пусть $A(x_i)$ есть произвольная точка поверхности $D_k(u)$, лежащая на прямой $d \parallel u$; $B_s(x_{si}) = d \cap F_n$, $s = \overline{1, r} \geq 2$ (случай $r = 1$ исключаем). Если $u^2 = 1$, то $x_{si} = x_i + \lambda_s u_i$ (4), где параметры λ_s — отклонения точек B_s от A ; они равны длинам AB_s , взятым со знаком плюс или минус соответственно равной или противоположной направленности векторов AB_s и u . По теореме Тейлора [3, с. 134] из (1) и (4) относительно λ получаем уравнение

$$\varphi(x) + \sum_{s=1}^r \frac{\lambda_s}{s!} \left(\sum_{i=1}^m u_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^s \varphi(x) = 0, \quad (5)$$

λ_s — его корни. На основании (2), (5) и формул Виета [4, с. 253] для каждой из диаметральных поверхностей справедливо одно из

$$\text{равенств } \sum_{s=1}^r \lambda_s = 0 \quad (6), \quad \sum_{s_1 < s_2 < \dots < s_t} \lambda_{s_1} \lambda_{s_2} \dots \lambda_{s_t} = 0, \quad 1 < t \leq r-1 \quad (7).$$

Выделим такие случаи:

1. $U_\infty \notin F_n$ ($r = n$). Диаметральные поверхности $D_t(u)$ характеризуются равенствами (7). Подставив значения λ_s из (4) в (6), получим

$$\sum_{s=1}^n (x_{si} - x_i) = 0, \quad i = \overline{1, m}.$$

$$\text{Отсюда } x_i = \frac{1}{n} \sum_{s=1}^n x_{si} \quad (8).$$

Значит, диаметральная плоскость $D_1(u)$ есть геометрическое место центров тяжести (средних расстояний) точек пересечения с F_n прямых направления u . Поскольку справедливо и обратное, указанное свойство $D_1(u)$ полностью ее определяет [1].

2. $U_\infty \in F_n$, $r = n - 1$; U_∞ — простая точка F_n . Равенства (6) и (7) характеризуют в общем диаметральную квадрику $D_2(u)$ и поверхности $D_{t+1}(u)$, $t \leq r - 1$. Так, в E^3 уравнение $x_1 x_2^2 + x_1^2 - x_2 + 1 = 0$ задает кубик F_3 — адиаметральную параболическую гиперболу. Диаметральная коника, сопряженная вектору $u = (1, 0)$, является параболой с уравнением $2x_1 + x_2^2 = 0$ (9).

Каждая прямая $d \parallel u$ пересекает F_3 в двух точках — вещественных или мнимых ($r = 2$); точка параболы (9), лежащая на прямой d , есть центр тяжести точек $B_s = d \cap F_3$.

Асимптота (ось x_2) пересекает F_3 в одной собственной точке, но любая другая прямая, параллельная новому вектору $u = (0, 1)$, — в двух. При этом ось x_2 является асимптотой гиперболы $D_2(u)$ с уравнением $2x_1 x_2 - 1 = 0$.

Из уравнения (3) видно, что плоскость $D_1(u)$ касается поверхности F_n в точке U_∞ ; самосопряженная диаметральной плоскостью — асимптотическая плоскость F_n [5].

3. $U_\infty \in F_n$. $1 < r \leq n-2$; U_∞ — особая точка кратности $n-r$ поверхности F_n . Так как все частные производные порядка $k' < n-r$ функции $\varphi(x_i)$ по x_i в точке U_∞ равны нулю, то на основании (3) поверхности $D_{k'}(u)$ не определены; при этом (6), (7) характеризуют уже поверхности $D_{n-r+1}(u)$, $D_{k'+1}(u)$.

Свойство диаметральной плоскости, определяемое равенством (6), допускает такое обобщение: если диаметральной поверхности $D_k(u)$ сопряжена асимптотическому направлению u кратности $k-1 \geq 0$ для поверхности F_n , то каждая прямая $d \parallel u$, отличная от асимптоты F_n , пересекает поверхность $D_k(u)$ в одной точке, являющейся центром тяжести точек $B_s = d \cap F_n$.

2°. Пусть точка $N(x_i)$, не лежащая, вообще говоря, на $D_k(u)$, принадлежит плоскости π косой (в частности, ортогональной) симметрии поверхности F_n по направлению симметрии u ; $p \geq 0$ — наибольшая кратность π как компоненты F_n . Для N выполняется (5); если $p > 0$, то $\varphi(x) = 0$. Поскольку уравнение (5) имеет p -кратный нулевой корень, в случае $p > 1$ будет

$$\left(\sum_{i=1}^m u_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^s \varphi(x) = 0, \quad s < p. \quad (10)$$

Так как (5) инвариантно относительно замены λ на $-\lambda$, то условия (10) справедливы также при любом нечетном (четном) $s < r$ соответственно четному (нечетному) $p \geq 0$. Следовательно, при указанном s плоскость π является компонентой $D_{n-s}(u)$. Верно и обратное для плоскости, не параллельной u . Здесь требование непараллельности существенно. Зададим, например, кубическую поверхность в E^3 уравнением $(x_1 - x_2)x_3^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$; она имеет двойную изолированную точку в начале координат и одну плоскость π ортогональной симметрии ($x_3 = 0$). Первая диаметральной поверхность (квадрика), сопряженная вектору $u = (0, 0, 1)$, распадается на π и плоскость с уравнением $x_1 - x_2 + 1 = 0$, параллельную u .

Таким образом, в п. 1°, 2° обсуждено доказательство следующего утверждения (см. [6]):

Теорема 1. Для того чтобы плоскость π , являющаяся компонентой кратности $p \geq 0$ поверхности F_n , была плоскостью симметрии F_n по направлению симметрии u , необходимо и достаточно, чтобы плоскость $\pi \nparallel u$ входила при p четном в состав всех нечетных, а при p нечетном — четных диаметральных поверхностей F_n , сопряженных вектору u .

Эту теорему можно доказать в специальной системе координат: ось x_m параллельна u , $x_m = 0$ — уравнение π . Нахождение плоскостей симметрии F_n — одно из ее применений.

3°. Рассмотрим нецилиндрическую поверхность F_n в E^m ($m > 2$) с бесконечным множеством плоскостей косо́й симметрии, причем направления симметрии образуют одну орбиту S . Справедлива

Теорема 2. *Линейную оболочку орбиты S можно представить в виде суммы таких 2-плоскостей, что каждая 2-плоскость, параллельная любой 2-плоскости этой суммы, пересекает поверхность F_n по коникам с общей симметрией.*

Теорема 2 установлена в [7]; приведем здесь схематически модифицированное ее доказательство (при помощи теоремы 1).

Доказательство. Орбита S содержит направления u и v , угол ε между которыми сколь угодно мал. Если 2-плоскость Π^2 , параллельная u и v , не лежит на F_n , то кривая $C_v = \Pi^2 \cap F_n$ имеет порядок $2 \leq v \leq n$ и симметрична относительно прямых a, b по направлениям симметрии u, v соответственно. В случае $a \parallel b$ кривая C_v состоит из парабол с общей симметрией. Поэтому будем считать, что a и b пересекаются в точке O . Зададим в Π^2 прямоугольную систему координат Oy_1y_2 так, что ни одна из прямых a, b не совпадает с осью координат. Тогда кривая C_v определяется

уравнением $\sum_{l=0}^v f_l(y) = 0$ (11), где $f_l(y)$ — формы степени l от

координат вектора $y = (y_1, y_2)$. Убедимся, что $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2)$ — неасимптотические векторы для C_v . В самом деле, пусть u, v задают простые асимптотические направления для C_v (число v — нечетно). Согласно (3) и (11), уравнение диаметральной коники, сопряженной вектору u , имеет вид

$$\frac{\partial^2 f_v(u)}{\partial u_1^2} y_1^2 + \frac{\partial^2 f_v(u)}{\partial u_2^2} y_2^2 + 2 \left[\frac{\partial^2 f_v(u)}{\partial u_1 \partial u_2} y_1 y_2 + \frac{\partial f_{v-1}(u)}{\partial u_1} y_1 + \frac{\partial f_{v-1}(u)}{\partial u_2} y_2 + f_{v-2}(u) \right] = 0. \quad (12)$$

По теореме 1 коника (12) распадается на ось симметрии a и само-сопряженный диаметр кривой C_v (ее асимптоту, п. 1°) с уравнением

$$\frac{\partial f_v(u)}{\partial u_1} y_1 + \frac{\partial f_v(u)}{\partial u_2} y_2 + f_{v-1}(u) = 0. \quad (13)$$

Так как $O \in a$, то число $f_{v-2}(u) = 0$; из (12), (13) находим уравнение a :

$$\left(\frac{\partial^2 f_v(u)}{\partial u_1^2} \middle/ \frac{\partial f_v(u)}{\partial u_1} \right) y_1 + \left(\frac{\partial^2 f_v(u)}{\partial u_2^2} \middle/ \frac{\partial f_v(u)}{\partial u_2} \right) y_2 = 0. \quad (14)$$

Заменяя в (14) u на v , получим уравнение b . Эти уравнения определяют сколь угодно малый острый угол между прямыми a, b (согласно ε). Значит, кривая C_v имеет больше v осей симметрии, что невозможно. Случай кратных асимптотических направлений u, v рассматривается аналогично. Таким образом, оси симметрии a, b являются диаметрами кривой C_v , которая распадается на коники с общей симметрией. Теорема доказана.

литературы: 1. *Castelnuovo G., Enriques F.* Grundeigenschaften der algebraischen Flächen. — *Enz. Mat. Wiss.*, 1915, 4, H. 6, s. 635—673. 2. *Панас Н. Т., Лучинин А. А.* О полярном соответствии относительно алгебраической гиперповерхности и его приложениях. — *Геометр. сб.*, 1968, вып. 7, с. 34—44. 3. *Ходж В., Пидо Д.* Методы алгебраической геометрии. — М.: Мир, 1954. — Т. 1, 461 с. 4. *Кострикин А. И.* Введение в алгебру. — М.: Наука, 1977. — 495 с. 5. *Игнатенко В. Ф., Лейбин А. С.* О диаметральных плоскостях алгебраической поверхности в пространстве E^m . — *Укр. геометр. сб.*, 1975, вып. 15, с. 54—59. 6. *Piazzola-Beloch M.* Proprietà diametrali delle superficie algebriche. — *Atti del quarto congresso dell'Unione Mat. Italia*, 1953, 2, p. 425—430. 7. *Игнатенко В. Ф.* О диаметральных плоскостях и плоскостях косой симметрии алгебраической поверхности пространства E^m . — *Укр. геометр. сб.*, 1977, вып. 20, с. 35—46.

Поступила в редколлегию 20.10.82.

Б. Е. Кантор, Л. А. Эпштейн

**ОГРАНИЧЕННОСТЬ ВАРИАЦИИ ПОВОРОТА КРИВОЙ
НА ПЛОСКОСТИ ПАРАМЕТРОВ ПРИ УСЛОВИИ
ОГРАНИЧЕННОСТИ ЕЕ ВАРИАЦИИ ПОВОРОТА
В МОК С ЧЕБЫШЕВСКИМ ЭЛЕМЕНТОМ**

Введение. Пусть в положительном квадранте Q на плоскости E^2 с декартовыми координатами u, v задана чебышевская метрика ρ обобщенным линейным элементом $ds^2 = du^2 + 2 \cos \tau(u, v) du dv + dv^2$, где $\tau(u, v)$ удовлетворяют условиям $\text{var } \tau(u, v) < \pi/2$; $\tau(0, v) = \tau(u, 0) = \tau(0, 0) = \pi/2$; $0 < a_0 \leq \tau(u, v) \leq b_0 < \pi$ (1).

Известно, что метрика ρ задает на Q многообразие M ограниченной кривизны (МОК) [1, 2].

Пусть $l \subset Q$ — некоторая кривая, заданная уравнениями $u = u(t)$, $v = v(t)$, $t \in [t_0, T]$. В [2] было доказано, что если кривая $l \subset Q$ имеет ограниченную вариацию поворота на евклидовой плоскости E^2 параметров u, v и функция $\Theta_l(t) \equiv \tau(u(t), v(t))$ имеет на отрезке $[t_0, T]$ ограниченную вариацию, то l имеет поворот ограниченной вариации в многообразии M . При том же условии было доказано и обратное утверждение.

Впоследствии харьковскими геометрами Ю. А. Аминовым и А. Д. Милкой было высказано предположение о том, что в этих результатах требование ограниченности вариации функции $\Theta_l(t)$ является лишним. В работе [3] это требование действительно удалось снять в случае прямой теоремы. В настоящей заметке дается доказательство обратного утверждения также без указанного условия.

§ 1. Связь величин угла в многообразии M и на евклидовой плоскости параметров u, v . Пусть M принадлежит, по крайней мере, классу C^2 , т. е. $\tau(u, v) \in C^2(Q)$. Рассмотрим в Q обычную евклидову двузвенную ломаную $L = ABC$ с вершиной B . Пусть k_1 и k_2 — угловые коэффициенты соответственно прямых AB и BC (случай $k_i = \infty$ не исключается). Евклидов поворот ломаной L в

вершине B обозначим через $\bar{\gamma}$, а соответствующий поворот в M через γ . Как будет ясно из дальнейшего, нам достаточно рассматривать лишь острые положительные углы γ и $\bar{\gamma}$. Евклидов угол наклона прямой AB к оси u обозначим через α_1 , а прямой BC — α_2 . Легко видеть, что для чебышевского линейного элемента имеет место формула

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{|du dv - dv du| \sin \tau}{|du \delta u + (du dv + dv du) \cos \tau + dv \delta v|},$$

где d и δ — направления прямых AB и BC , откуда

$$\operatorname{tg} \gamma = \left| \frac{(k_2 - k_1) \sin \tau}{1 + (k_1 + k_2) \cos \tau + k_1 k_2} \right|,$$

или

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} \gamma &= \left| \frac{1 + k_1 k_2}{k_2 - k_1} \cdot \frac{1}{\sin \tau} + \frac{k_1 + k_2}{k_2 - k_1} \operatorname{ctg} \tau \right| = \\ &= \left| \pm \operatorname{ctg} \bar{\gamma} \frac{1}{\sin \tau} + \frac{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}{\sin(\alpha_2 - \alpha_1)} \operatorname{ctg} \tau \right|. \end{aligned}$$

Элементарные соображения показывают, что для всех случаев расположения звеньев ломаной L относительно оси u имеет место равенство $\sin(\alpha_1 + \alpha_2)/\sin(\alpha_2 - \alpha_1) = \sin(\bar{\gamma} \pm 2\alpha_1)/\sin \bar{\gamma}$, откуда получаем, что $\operatorname{ctg} \gamma = |\pm \operatorname{ctg} \bar{\gamma} + \cos \tau (\sin \bar{\gamma} \cos 2\alpha_1 \pm \cos \bar{\gamma} \sin 2\alpha_1)/\sin \bar{\gamma}|/\sin \tau$, причем знаки $\pm$ берутся в любом сочетании. Далее $\operatorname{ctg} \gamma = |(\pm \operatorname{ctg} \bar{\gamma} \pm \operatorname{ctg} \bar{\gamma} \sin 2\alpha_1 \cos \tau) + \cos \tau \cos 2\alpha_1|/\sin \tau \leq (|1 \pm \sin 2\alpha_1 \cos \tau| \operatorname{ctg} \bar{\gamma} + |\cos \tau| |\cos 2\alpha_1|)/\sin \tau \leq (2 \operatorname{ctg} \bar{\gamma} + 1)/\sin a_0$, откуда получаем неравенство $\operatorname{ctg} \bar{\gamma} \geq (\sin a_0 \operatorname{ctg} \gamma - 1)/2$ (2). Углы $\gamma > 0$ будем считать столь малыми, чтобы выполнялось неравенство $\operatorname{ctg} \gamma > 2/\sin a_0$ (3). Тогда из (2) и из очевидного неравенства $1/\bar{\gamma} \geq \operatorname{ctg} \bar{\gamma}$ получаем, что $1/\bar{\gamma} \geq (\sin a_0 \operatorname{ctg} \gamma - 1)/2$, или $\bar{\gamma} \leq 2 \sin \gamma / (\sin a_0 \cos \gamma - \sin \gamma)$ (4). Так как из (3) следует, что $\sin \gamma < (\sin a_0 \cos \gamma)/2$ (5), то из (4) и (5) получаем $\bar{\gamma} \leq 4 \sin \gamma / \sin a_0 \cos \gamma = 4 \operatorname{tg} \gamma / \sin a_0$ (6).

Поскольку для $\gamma \in (0, \pi/4)$, очевидно, $\operatorname{tg} \gamma < 2\gamma$, то для $\gamma \in (0, \min\{\operatorname{arctg}(2/\sin a_0), \pi/4\})$ из (6) окончательно получаем, что $\bar{\gamma} \leq 8\gamma/\sin a_0$ (7).

Таким образом, для достаточно малых углов γ имеет место оценка (7) абсолютной величины поворота ломаной L в вершине в евклидовой метрике через абсолютную величину поворота L в той же вершине в метрике ρ .

§ 2. Оценка вариации поворота аналитической кривой в плоскости E^2 через ее вариацию поворота в аналитическом многообразии M . 1. Пусть $\mathcal{L} = \bar{AB}$ — аналитическая кривая в аналитическом многообразии M , заданном на Q аналитической метрикой ρ (см. Введение), причем $\operatorname{var} \sigma(\mathcal{L}) < +\infty$, где $\sigma(\mathcal{L})$ — поворот кривой $\mathcal{L}$ и M . В силу аналитичности, $\mathcal{L}$ разбивается на конечные

число локально выпуклых в метрике E^2 дуг $\widetilde{AM}_1, \dots, \widetilde{M}_i M_{i+1}, \dots, \widetilde{M}_n B$. Рассмотрим сходящуюся к кривой $\mathcal{L}$ на E^2 последовательность L_m вписанных в $\mathcal{L}$ евклидовых ломаных, таких, что множество вершин каждой L_m содержит точки $M_i (i = 1, \dots, n)$.

Легко видеть, что для каждой из локально выпуклых дуг $\widetilde{AM}_1, \dots, \widetilde{M}_n B$ кривой $\mathcal{L}$ повороты вписанных в них дуг ломаных в метрике ρ сходятся к поворотам в метрике ρ соответствующих дуг кривой $\mathcal{L}$. Действительно, пусть $\mathcal{L}_i = \widetilde{M}_i M_{i+1}$ — одна из указанных дуг, а L_m^i — последовательность дуг ломаных L_m , вписанных в $\mathcal{L}_i$. К области G_m^i , ограниченной дугами $\mathcal{L}_i$ и L_m^i , для каждого m можно применить теорему Гаусса — Бонне, из которой легко следует, что $\sigma(L_m^i) = \sigma(\mathcal{L}_i) + \alpha_m^i + \beta_m^i - \omega_m^i$, где σ — поворот в метрике ρ ; α_m^i, β_m^i — углы в метрике ρ секторов области G_m^i в вершинах M_i, M_{i+1} и, наконец, ω_m^i — кривизна на области G_m^i . В силу гладкости многообразия M при $m \rightarrow \infty$ будет $\alpha_m^i \rightarrow 0, \beta_m^i \rightarrow 0, \omega_m^i \rightarrow 0$ и, следовательно, $\sigma(L_m^i) \rightarrow \sigma(\mathcal{L}_i)$.

Поскольку аналогичные рассуждения можно применить к любой дуге рассматриваемых гладких локально выпуклых дуг (с некоторыми очевидными модификациями в концах дуги, вызванных тем, что концы сходящихся дуг ломаных теперь могут не лежать на $\mathcal{L}$), то имеет место сходимость вариаций поворотов для каждого i : $\text{var } \sigma(L_m^i) \rightarrow \text{var } \sigma(\mathcal{L}_i)$. Но в таком случае существует столь большой номер m_0 , что для всех $m \geq m_0$

$$\sum_{i=1}^m \text{var } \sigma(L_m^i) < \text{var } \sigma(\mathcal{L}) + 1.$$

Кроме того, так как повороты в метрике ρ в точках $M_i (i = 1, \dots, n)$ ломаных L_m , в силу гладкости $\mathcal{L}$, стремятся к нулю, то существует столь большой номер m_1 , что для всех $m \geq m_1$

$$\text{var } \sigma(L_m) \leq \text{var } \sigma(\mathcal{L}) + 1 \quad (8).$$

2. Число m_1 можно считать столь большим, что в силу гладкости $\mathcal{L}$ абсолютные величины γ поворотов ломаных L_m во всех вершинах не превосходят для всех $m \geq m_1$ наименьшего из чисел $\arctg(2/\sin a_0), \pi/4$.

В таком случае для абсолютных величин $\bar{\gamma}$ поворотов ломаных L_m (в метрике E^2) в вершинах имеет место неравенство $\bar{\gamma} \leq 8\gamma/\sin a_0$.

Так как $\text{var } \sigma(L_m) = \sum_i \text{var } \sigma(l_m^i) + \sum_i \gamma_m^i$, где l_m^i — звенья ломаной L_m , а γ_m^i — абсолютные величины поворотов вершин L_m , то $\sum_i \gamma_m^i \leq \text{var } \sigma(L_m)$, а в силу (8) для $m \geq m_1$

$$\sum_i \gamma_m^i \leq \text{var } \sigma(\mathcal{L}) + 1 \quad (9).$$

Обозначим поворот ломаной L_m на плоскости E^2 через $\bar{\sigma}(L_m)$. Тогда $\text{var } \bar{\sigma}(L_m) = \sum_i |\bar{\gamma}_m^i|$. В силу (7) и (9) для всех $m \geq m_1$

$$\text{var } \bar{\sigma}(L_m) \leq (8/\sin a_0) (\text{var } \sigma(\mathcal{L}) + 1). \quad (10)$$

Так как последовательность ломаных L_m сходится на плоскости E^2 к кривой $\mathcal{L}$, то $\text{var } \bar{\sigma}(L_m) \rightarrow \text{var } \bar{\sigma}(\mathcal{L})$, откуда в силу (10)

$$\text{var } \bar{\sigma}(\mathcal{L}) \leq (8/\sin a_0) (\text{var } \sigma(\mathcal{L}) + 1).$$

§ 3. Решение общей задачи. Пусть теперь многообразие M имеет метрику, заданную обобщенным чебышевским линейным элементом, удовлетворяющим условиям, приведенным во введении (там же см. все обозначения). Имеет место

Теорема. Если простая кривая $\mathcal{L} \subset Q$, заданная непрерывными функциями $u = u(t)$, $v = v(t)$, $t \in [t_0, T]$, имеет в метрике ρ многообразия M ограниченную вариацию поворота (по одну какую-либо сторону от $\mathcal{L}$), то ее прообраз на евклидовой плоскости параметров u, v имеет ограниченную вариацию поворота.

Доказательство. Так как $\mathcal{L}$ компактна, то существует замкнутый прямоугольник $\hat{Q} \subset Q$ со сторонами, параллельными осям u и v , содержащий $\mathcal{L}$. Построим в $\hat{Q}$ последовательность аналитических чебышевских метрик ρ_n : $ds_n^2 = du^2 + 2 \cos \tau_n(u, v) \times \times dudv + dv^2$, правильно сходящуюся к метрике ρ , удовлетворяющих для каждого n условию (1). Получим последовательность аналитических многообразий M_n с аналитическими чебышевскими метриками ρ_n . Рассмотрим последовательность аналитических кривых $\mathcal{L}_n \subset M_n$ ($n = 1, 2, \dots$), заданных аналитическими функциями $u = u_n(t)$, $v = v_n(t)$, $t \in [t_0, T]$, таких, что при всех n 1) $\text{var } \sigma_{\rho_n}(\mathcal{L}_n) \leq 3 \text{var } \sigma_{\rho}(\mathcal{L}) + 1$ и 2) функции $u_n(t)$, $v_n(t)$ равномерно сходятся соответственно к $u(t)$, $v(t)$. Существование такой последовательности следует, например, из возможности аппроксимировать $\mathcal{L}$ геодезическими ломаными с равномерно ограниченными вариациями поворотов (с какой-либо стороны) вариацией поворота (с этой стороны) $\mathcal{L}$ [1, гл. IX], регулярно сгладить эти ломаные, рассматривая их в регулярных многообразиях, с сохранением ограниченности вариаций поворотов, и, наконец, из возможности аппроксимации регулярных кривых в регулярных многообразиях аналитическими кривыми в аналитических многообразиях с сохранением необходимых оценок (при этом, разумеется, входящие в эти оценки константы, вообще говоря, увеличиваются). По доказанному в § 2 для каждого n будет $\text{var } \bar{\sigma}(\mathcal{L}_n) \leq (8/\sin a_0)$

$$(\text{var } \sigma_{\rho_n}(\mathcal{L}_n) + 1) \leq (8/\sin a_0) (3 \text{var } \sigma_{\rho}(\mathcal{L}) + 2).$$

Таким образом, существует последовательность аналитических кривых $\mathcal{L}_n$, равномерно сходящаяся на плоскости E^2 к кривой $\mathcal{L}$, у которых вариации поворотов (в метрике E^2) равномерно огра-

интересны. Но это, как известно, равносильно тому, что предельная кривая $\mathcal{L}$ имеет поворот ограниченной вариации (на плоскости E^2). Теорема доказана.

Список литературы. 1. Александров А. Д., Залгаллер В. А. Двумерные многообразия ограниченной кривизны. — Тр. Мат. ин-та АН СССР, 1962, 63, 1963. 2. Бакельман И. Я., Эпштейн Л. А. Кривые ограниченной вариации поворота в многообразиях ограниченной кривизны, заданных обобщенным евклидовским линейным элементом. 1. — Укр. геометр. сб., 1968, вып. 5—6, с. 10—20. 3. Эпштейн Л. А. 24-е Герценовские чтения. Науч. докл. Л., 1973, с. 66—70.

Поступила в редколлегию 10.05.82.

М. Д. Ковалев

О ПОКРЫТИИ ВЫПУКЛЫХ ФИГУР
ИХ ОБРАЗАМИ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ

Докажем предположение, высказанное В. А. Залгаллером в [1]. Под движениями здесь всюду подразумеваются движения без отражений.

§ 1. Основной результат и идея доказательства. 1. Пусть F — произвольная компактная выпуклая фигура на евклидовой плоскости с декартовыми координатами Oxy .

Теорема. Если растянуть фигуру F в направлении оси Oy в $k \geq 1$ раз, то полученная фигура F_k способна при движении покрыть исходную фигуру F .

2. В [1], где эта теорема была высказана как гипотеза, она доказана только для центрально симметричных F и для треугольников. Для неограниченных выпуклых фигур соответствующее утверждение не справедливо. (Достаточно рассмотреть выпуклый клин $y \geq |x|$). В пространстве R^n при $n \geq 3$ аналогичное утверждение перестает быть верным и для компактных выпуклых тел (см. [1]).

3. Теорему достаточно доказать для фигур F с C^2 -гладкой строго выпуклой границей, обладающей непрерывным радиусом кривизны $0 < \rho < \infty$. Для краткости будем далее называть такие фигуры гладкими. Действительно, если теорема верна для F^1 и $F^1 \rightarrow F$ (сходимость в метрике Хаусдорфа), то теорема верна и для F . Но каждая фигура F приближаема гладкими. Достаточно, например, приближать F выпуклыми многоугольниками, заменить их стороны, сохраняя выпуклость, дугами близких окружностей, а затем C^2 -гладко локально сгладить углы.

4. Пусть F такая гладкая фигура. Выберем точку a на границе F и число $\lambda \geq 1$. В точке a проведем опорную к F прямую l_1 ; вторую опорную к F прямую l_2 проведем параллельно l_1 . Прямые l_1 и l_2 имеют с F , ввиду оговоренной гладкости, одноточечные касания в точках a и b (рис. 1). Пусть ab — прямая,

соединяющая эти две точки, а направление вектора $\vec{ab}$ определяется углом φ , отсчитываемым от оси Ox в системе координат Oxy .

Растяжение фигуры F в λ раз от прямой ab в направлении прямых l назовем косым растяжением или иначе (φ, λ) -растяжением. (Если случайно $ab \perp l$, то это — обычное «прямое» растяжение в направлении l). Очевидно, фигура, получаемая из F любым (φ, λ) -растяжением, содержит в себе F .

5. Обозначим через $Q(F)$ класс всех фигур, получающихся из гладкой фигуры F конечной цепочкой последовательных косых растяжений и движений. Очевидно, любая фигура из класса $Q(F)$ способна покрыть F . Докажем, что при $k \geq 1$ все $F_k \in Q(F)$.

6. Утверждаемое легко вытекает из следующей леммы.

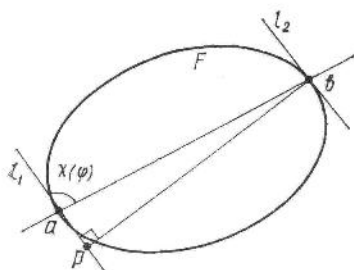


Рис. 1

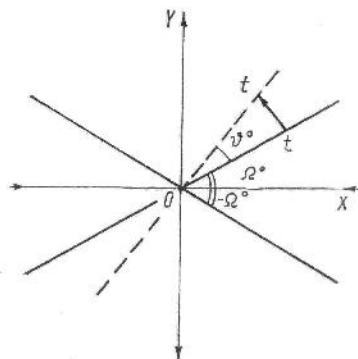


Рис. 2

Основная лемма. Пусть S — отношение наименьшей ширины гладкой фигуры F к ее диаметру. Тогда любая из фигур F_k при $1 \leq k \leq 1 + 0,2S^3$ получается из F не более чем двумя последовательными косыми растяжениями и движением.

В самом деле, рассмотрим совокупность фигур F_k с $1 \leq k \leq K$, где K — любое. Величина S_k , отвечающая фигуре F_k , очевидно, удовлетворяет неравенству $S_k \geq S/k$; поэтому на отрезке $[1, K]$ будет $S_k \geq S/K$. Из возможности покрыть отрезок $[1, K]$ конечным числом отрезков длины $0,2 \cdot (S/K)^3$ вытекает, что $F_k \in Q(F)$ при любом $K \geq 1$, т. е. справедливость теоремы.

Для доказательства основной леммы нам придется детально изучить свойства косых растяжений.

§ 2. Свойства косых растяжений. Всякое косое растяжение как аффинное преобразование сводится к произведению самосопряженного и ортогонального преобразований. Поэтому начнем с доказательства нескольких утверждений о самосопряженных преобразованиях плоскости. Введем на плоскости прямоугольную систему координат OXY . Пусть $\Pi(k_p, k_c)$ — самосопряженное преобразование, заключающееся в прямом растяжении от оси OX с коэффициентом $k_p > 1$ и прямом сжатии к оси OY с коэффициентом

$k_c > 1$ (рис. 2); ось OX назовем осью растяжения, OY — осью сжатия. Если при этом существует прямая, преобразующаяся изометрически, то ее назовем изометрической прямой преобразования.

Утверждение 1. Для каждого из преобразований $\Pi(k_p, k_c)$ при $k_p > 1$, $0 < k_c < 1$ имеется ровно две изометрических прямых, проходящих через начало координат O и симметричных относительно оси OX . Если $k_p > 1$, $k_c = 1$, то они сливаются и совпадают с осью OX . Углы наклона Ω^0 и $-\Omega^0$, $0 < \Omega^0 < \pi/2$, изометрических прямых к оси OX даются выражением $\operatorname{tg}^2 \Omega^0 = (1 - k_c^2)/(k_p^2 - 1)$ (1).

Действительно, достаточно доказать формулу (1). Выведем ее из условия сохранения длины направляющего вектора изометрической прямой $\vec{Ot} = (\cos \Omega^0, \sin \Omega^0)$, исходящего из начала координат O (рис. 2). Преобразование $\Pi(k_p, k_c)$ переводит вектор $\vec{Ot}$ в $\vec{Ot}' = (k_c \cos \Omega^0, k_p \sin \Omega^0)$, поэтому $k_c^2 \cos^2 \Omega^0 + k_p^2 \sin^2 \Omega^0 = 1$. Преобразовав это выражение, получим (1).

Из формулы (1) следует

Утверждение 2. Рассмотрим два преобразования $\Pi(k_p, k_{c1})$ и $\Pi(k_p, k_{c2})$ с одинаковыми коэффициентами k_p и $k_{c1} > k_{c2}$; тогда для углов наклона изометрических прямых первого и второго преобразований справедливо неравенство $\Omega_1^0 < \Omega_2^0$.

Утверждение 3. Пусть прямая P проходит через начало координат O и образует угол Ω с осью OX . Преобразованием $\Pi(k_p, k_c)$ прямая P поворачивается вокруг центра O (и, говоря, растягивается). Поворот происходит в сторону оси сжатия OY (ср. рис. 2) на угол θ такой, что $\operatorname{tg} \theta = A \times \sin(2\Omega)/2(1 + A \sin^2 \Omega)$ (2), где $A = k_p/k_c - 1$.

Действительно, для направления образа прямой P находим $\operatorname{tg}(\Omega + \theta) = (k_p/k_c) \operatorname{tg} \Omega$. Преобразовав это равенство, получим (2).

Перейдем непосредственно к свойствам косых растяжений. Будем считать, что направление φ вектора $\vec{ab}$ изменяется непрерывно от $-\infty$ до $+\infty$, а угол $0 < \chi(\varphi) < \pi$ между прямыми ab и l измеряется от вектора $\vec{ab}$ против часовой стрелки.

Свойство 1. Угол $\varphi + \chi(\varphi)$, характеризующий направление (φ, χ) -растяжения гладкой фигуры F , является строго возрастающей и непрерывной функцией угла φ и принимает любое значение из промежутка $(-\infty, +\infty)$.

Это свойство очевидно.

Одно из прямых растяжений, на которые разлагается косое растяжение при $\chi(\varphi) \neq \pi/2$, на самом деле является сжатием. Это следует из наличия вектора, длина которого сокращается при косом растяжении. Таков, например, вектор, образ которого перпендикулярен направлению косого растяжения.

Свойство 2. Разлагая (φ, χ) -растяжение на самосопряженное растяжение-сжатие $\Pi(k_p, k_c)$ и последующий поворот, будем считать, что 1) точка пересечения O осей самосопряжен-

ного преобразования $\Pi(k_p, k_c)$ лежит на неподвижной прямой ab (φ, λ) -растяжения; 2) последующий поворот происходит вокруг точки O и выбирается кратчайшим. Тогда это разложение единственно с точностью до выбора точки O на прямой ab .

Направление ψ оси OX самосопряженного растяжения (до поворота) можно определить в системе Oxy формулой

$$\psi(\varphi, \lambda) = \varphi + \frac{1}{2} \left[\chi(\varphi) + \operatorname{arctg} \left(\frac{\lambda-1}{\lambda+1} \operatorname{ctg} \chi(\varphi) \right) - \frac{\pi}{2} \right], \quad (3)$$

где arctg — главная ветвь арктангенса.

Доказательство. Фиксируем точку $O \in ab$. Пусть прямая l имеет направление (φ, λ) -растяжения и удалена от O на единичное расстояние: $|Os| = 1$, $Os \perp l$ (рис. 3); p — точка пересечения прямых ab и l . Допустим, что отрезок Od ($d \in l$) преобразуется (φ, λ) -растяжением изометрически в отрезок Of , тогда $\angle sOd = \angle sOf = \vartheta^0$ и можно записать

$$\lambda \cdot |pd| = |pd| + 2 \operatorname{tg} \vartheta^0, \quad |pd| = \operatorname{ctg} \chi(\varphi) - \operatorname{tg} \vartheta^0,$$

что после исключения $|pd|$ дает $\vartheta^0 = \operatorname{arctg} \left(\frac{\lambda-1}{\lambda+1} \operatorname{ctg} \chi(\varphi) \right)$.

Легко понять, что угол $|\vartheta^0|$ равен углу поворота изометрических прямых при самосопряженном растяжении — сжатии $\Pi(k_p, k_c)$ отвечающем (φ, λ) -растяжению. А поворот после самосопряженного преобразования $\Pi(k_p, k_c)$ происходит на гол ϑ^0 против часовой стрелки. Ось растяжения OX при преобразовании $\Pi(k_p, k_c)$ проходит по биссектрисе угла pOd . Ось OX (и прямые ей параллельные) является наиболее сильно сжимающейся прямой (φ, λ) -растяжения, поэтому коэффициент ее сжатия, равный k_c , однозначно определяется (φ, λ) -растяжением. Таким же образом однозначно определяется коэффициент k_p самосопряженного растяжения. Итак, единственность разложения (φ, λ) -растяжения на самосопряженное растяжение — сжатие и последующий поворот при наложенных условиях доказана.

Запишем выражение для направления ψ оси OX , учтя, что φ — есть направление вектора $\vec{ab}$: $\psi = \varphi - \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \chi - \vartheta^0 \right) = \varphi + \frac{1}{2} \times$
 $\times \left[\chi(\varphi) + \operatorname{arctg} \left(\frac{\lambda-1}{\lambda+1} \operatorname{ctg} \chi(\varphi) \right) - \frac{\pi}{2} \right]$. Разумеется, полученное выражение имеет смысл лишь при $\lambda > 1$.

Подчеркнем, что величины ϑ^0 , ψ , k_c , k_p не зависят от выбора точки O .

Свойство 3. Для коэффициентов $k_p(\varphi, \lambda) > 1$ растяжения и $0 < k_c(\varphi, \lambda) \leq 1$ сжатия самосопряженной части (φ, λ) -растяжения справедливо соотношение $k_p(\varphi, \lambda) \cdot k_c(\varphi, \lambda) = \lambda$ (4).

Это свойство вытекает из того, что как при прямом, так и при косом растяжении коэффициент изменения площадей равен коэффициенту растяжения.

$k_c = |Ot'|/|Ot| > (|Ot| - (\lambda - 1) |\operatorname{ctg} \chi|)/|Ot|$, здесь использованы неравенства $|Ot| \geq 1$ и $|\cos \chi| \leq 1$.

Свойство 6. Рассмотрим два косых растяжения одной и той же гладкой фигуры F с параметрами φ_1, λ_1 и φ_2, λ_2 ; и пусть $\lambda_1 > \lambda_2$. Тогда самосопряженные растяжения, отвечающие этим косым растяжениям, не могут одновременно иметь одинаковые коэффициенты ($k_{p1} = k_{p2}$) и параллельные оси.

Доказательство. Разложим первое и второе косые растяжения на самосопряженные преобразования $\Pi(k_{p1}, k_{c1})$ и $\Pi(k_{p2}, k_{c2})$ с одним и тем же центром O — в точке пересечения неподвижных прямых косых растяжений (очевидно, $O \in \operatorname{int} F$). Будем считать, что оси первого и второго самосопряженных растяжений совпадают с осью OX (рис. 4). Заметим, что угол $\angle bOX$ между неподвижной прямой ab (φ, λ)-растяжения и осью OX соответствующего самосопряженного растяжения — сжатия равен углу Ω^0 между осью OX этого растяжения — сжатия и его изометрической прямой. Для этих преобразований $k_{p1} = k_{p2}$, $k_{c1} > k_{c2}$ (вследствие (4)) и из утверждения 2 следует $\Omega_1^0 < \Omega_2^0$.

Заметим далее, что при самосопряженной части косого растяжения неподвижная прямая этого косого растяжения и прямая l , в направлении которой происходит косое растяжение, поворачиваются в одну сторону на один и тот же угол ϑ^0 . Пусть $0 < \angle \Omega^0 + \chi' < \pi/2$ — угол между прямой l (до преобразования) и осью OX самосопряженного растяжения. Докажем, что $\Omega_2^0 + \chi_2' > \Omega_1^0 + \chi_1'$. Из построения (рис. 3) следует, что $0 < \Omega^0 < \Omega^0 + \chi' < \pi/2$ и углы Ω^0 и $\Omega^0 + \chi'$ откладываются в одну и ту же сторону от оси OX (угол $\chi' = \chi$, если $0 < \chi \leq \pi/2$, и $\chi' = \pi - \chi$, если $\pi/2 < \chi < \pi$). В случае, когда углы Ω_1^0 и Ω_2^0 от оси OX по неподвижной прямой соответствующего косого растяжения откладываются в одну и ту же сторону, неравенство вытекает из свойства 1. Случай, когда углы Ω_1^0 и Ω_2^0 откладываются от оси OX в противоположные стороны, как легко видеть на рис. 4, противоречит выпуклости фигуры F (l^1, l^2 — опорные в точках b_1 и b_2 прямые к фигуре F , $O \in \operatorname{int} F$).

Докажем, что полученные неравенства не согласуются с выражением (2) для угла ϑ поворота прямых при самосопряженном растяжении — сжатии. Для этого проанализируем выражение (2).

а) При $A = k_p/k_c - 1 = \operatorname{const}$ функция $\operatorname{tg} \vartheta(A, \Omega)$ имеет на отрезке $[0, \pi/2]$ единственный максимум, достигаемый при $\Omega^{\max} = (1/2) \arccos \left(\frac{A}{2+A} \right)$. Слева от максимума эта функция возрастает, справа убывает. При возрастании A от 0 до $+\infty$, $\Omega^{\max}$ монотонно убывает от $\pi/4$ до 0. Все утверждаемое сразу следует из выражения для производной:

$$\frac{\partial \operatorname{tg} \vartheta}{\partial \Omega} = \frac{A [(1 + A/2) \cos 2\Omega - A/2]}{2(1 + A \sin^2 \Omega)^2}.$$

б) Для самосопряженных частей первого и второго косых растяжений $A_2 > A_1$. Обозначим $\Omega^{\max}(A_1) = \Omega_1^{\max}$, $\Omega^{\max}(A_2) = \Omega_2^{\max}$, тогда можно записать $0 < \Omega_1^0 \leq \Omega_2^0 < \Omega_2^{\max} < \Omega_1^{\max} < \Omega_1^0 + \chi_1' < \Omega_2^0 + \chi_2' < \pi/2$ (7).

в) Мы уже отмечали, что $\vartheta(A, \Omega^0) = \vartheta(A, \Omega^0 + \chi')$, поэтому можно записать $\operatorname{tg} \vartheta(A_1, \Omega_1^0) = \operatorname{tg} \vartheta(A_1, \Omega_1^0 + \chi_1')$, $\operatorname{tg} \vartheta(A_2, \Omega_2^0) = \operatorname{tg} \vartheta(A_2, \Omega_2^0 + \chi_2')$ (8). Покажем, что $\operatorname{tg} \vartheta(A_2, \Omega_1^0) > \operatorname{tg} \vartheta(A_2, \Omega_1^0 + \chi_1')$. Запишем отношение

$$o(\Omega) = \frac{\operatorname{tg} \vartheta(A_2, \Omega)}{\operatorname{tg} \vartheta(A_1, \Omega)} = \frac{A_2(1 + A_1 \sin^2 \Omega)}{A_1(1 + A_2 \sin^2 \Omega)}.$$

Функция $o(\Omega)$ убывает при $0 < \Omega < \pi/2$, $0 < A_1 < A_2$, так как

$$\frac{do}{d\Omega} = \frac{A_2}{A_1} \cdot \frac{(A_1 - A_2) \sin 2\Omega}{(1 + A_2 \sin^2 \Omega)^2} < 0.$$

Поэтому $\frac{\operatorname{tg} \vartheta(A_2, \Omega_1^0)}{\operatorname{tg} \vartheta(A_1, \Omega_1)} > \frac{\operatorname{tg} \vartheta(A_2, \Omega_1^0 + \chi_1')}{\operatorname{tg} \vartheta(A_1, \Omega_1^0 + \chi_1')}$, откуда, учтя равенство знаменателей, получим утверждаемое.

Следующая цепь неравенств противоречит равенству (8): $\operatorname{tg} \vartheta(A_2, \Omega_2^0 + \chi_2') < \operatorname{tg} \vartheta(A_2, \Omega_1^0 + \chi_1') < \operatorname{tg} \vartheta(A_2, \Omega_1^0) < \operatorname{tg} \vartheta(A_2, \Omega_2^0)$. Здесь крайние неравенства следуют из монотонности функции $\operatorname{tg} \vartheta(A_2, \Omega)$ слева и справа от максимума, см. (7), среднее доказано в пункте в). Итак, свойство 6 доказано.

§ 3. Доказательство основной леммы. Лемма состоит в утверждении, что образ F_k , полученный при растяжении гладкой фигуры F в k раз в направлении оси Oy , при $1 \leq k \leq 1 + 0,2S^3$ можно получить двумя последовательными косыми растяжениями и движением. Рассмотрим разложение (φ, λ) -растяжения на самосопряженное растяжение — сжатие и последующий поворот. Обозначим $P(\varphi, k_p)$ и $C(\varphi + \pi/2, k_c)$ — самосопряженные растяжения и, соответственно, сжатие. Здесь φ и $\varphi + \pi/2$ — направления их осей, перпендикулярные направлениям самих преобразований; k_p, k_c — коэффициенты, и пусть ϑ — угол последующего поворота. Сначала установим, что для любого направления φ и коэффициента $1 \leq k_p \leq \lambda(F)$, где $\lambda(F)$ определяется фигурой F , найдется косое растяжение, приводящее к самосопряженному растяжению $P(\varphi, k_p)$. Далее возьмем (φ, λ) -растяжение Λ фигуры F , приводящее к самосопряженному растяжению $P(0, k_p)$ (вдоль оси Oy) и сжатию $C(\pi/2, k_c)$ и последующему повороту на угол ϑ . Пусть $\Lambda: F \rightarrow F'$. Затем возьмем (φ', λ') -растяжение Λ' фигуры F' , приводящее к самосопряженным преобразованиям $P'(\pi/2 + \vartheta, k'_p)$ и $C'(\vartheta, k'_c)$. (Будем отмечать величины, относящиеся к преобразованию Λ' , штрихами). Возьмем для наглядности центры рассматриваемых самосопряженных преобразований и поворотов в одной точке $O \in \operatorname{int} F$ — точке пересечения неподвижных прямых преобразований Λ и Λ' . Тогда второе прямое растяжение $P'(\pi/2 + \vartheta, k'_p)$ происходит от оси предыдущего сжатия $C(\pi/2, k_c)$. Вы-

берем косое растяжение Λ' так, чтобы дополнительно было $k_c \times k_p' = 1$. Тогда произведение $\Lambda' \Lambda$ сводится к прямому растяжению фигуры F вдоль оси ou с коэффициентом $k = k_p k_c'$ и последующему повороту на угол $\vartheta + \vartheta'$. Останется доказать, что k принимает все значения от 1 до $1 + 0,2S^3$.

Перейдем к осуществлению этого плана.

Предложение 1. Для гладкой фигуры F примем $\lambda(F) = (1 + M)/(1 - M)$, где $M = \min_{\varphi} \sin^2 \chi(\varphi)$. Тогда при любом фиксированном $1 \leq \lambda_0 \leq \lambda(F)$ функция $\psi(\varphi, \lambda_0)$ непрерывна и строго возрастает.

Доказательство. Непрерывность функции $\psi(\varphi, \lambda_0)$ следует из непрерывности $\psi(\varphi, \lambda)$. Продифференцируем выражение (3) по φ :

$$\frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = 1 + \frac{1}{2} \frac{d\chi}{d\varphi} \left[1 - \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \frac{1}{\sin^2 \chi + \left(\frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \cos \chi \right)^2} \right],$$

производная $\frac{d\chi}{d\varphi}$ существует, как будет установлено ниже, в замечании. Из свойства 1 следует, что $\frac{d\chi}{d\varphi} > -1$. Поэтому для строгого возрастания функции $\psi(\varphi, \lambda_0)$ достаточно выполнения неравенства $\alpha/(\sin^2 \chi + \alpha^2 \cos^2 \chi) < 1$, где $\alpha = (\lambda_0 - 1)/(\lambda_0 + 1)$. Неравенство выполняется заведомо при $\alpha \leq M$, а значит, $\lambda_0 \leq (1 + M)/(1 - M)$. Для всякой гладкой фигуры $0 < M \leq 1$ и $\lambda(F) > 1$. (При $M = 1$, $\lambda(F) = \infty$ — это случай фигур постоянной ширины, в котором все (φ, λ) -растяжения прямые).

Замечание. Для гладких фигур F функция $\chi(\varphi)$ непрерывно дифференцируема.

Действительно, пусть $\theta = \varphi + \chi(\varphi)$. В силу соотношения

$$\frac{\partial \chi}{\partial \varphi} = \frac{\chi_0'}{\varphi_0'} = \frac{1 - \varphi_0'}{\varphi_0'}$$

для существования и непрерывности производной $\frac{d\chi}{d\varphi}$ достаточно существования непрерывной производной $\varphi_0' \neq 0$. Координаты вектора $\vec{ab} = (\alpha(\theta), \beta(\theta))$ в системе Oxy равны

$$\alpha(\theta) = \int_0^{\theta+\pi} \rho(t) \cos t \, dt, \quad \beta(\theta) = \int_0^{\theta+\pi} \rho(t) \sin t \, dt,$$

где $\rho(t)$ — радиус кривизны границы ∂F в точке касания касательного вектора, имеющего направление t . Направление φ вектора $\vec{ab}$ дается формулой $\varphi(\theta) = \arctg(\beta(\theta)/\alpha(\theta)) + \text{const}$. Вследствие непрерывной дифференцируемости $\alpha(\theta)$ и $\beta(\theta)$ достаточно доказать, что

$$\varphi_0'(\theta_0) = \left(\arctg \frac{\beta}{\alpha} \right)'_{\theta_0} = \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} (\beta_0' \alpha - \alpha_0' \beta) \neq 0,$$

при любом θ_0 . Не теряя общности, можно считать, что в системе Oxy $\beta(\theta_0) = 0$. Тогда $\alpha(\theta_0) \neq 0$ и, поскольку для гладкой F $\mu(\theta) > 0$, то $\beta'_i(\theta_0) = -\rho(\theta_0) - \rho(\theta_0 + \pi) < 0$. Замечание доказано.

Рассмотрим семейство функций $\chi'(\varphi')$, отвечающих семейству образов $F' = F(\varphi, \lambda)$, получаемых (φ, λ) -растяжениями фигуры F . Пусть функция $\chi'(\varphi', \varphi, \lambda)$ задает это двухпараметрическое семейство функций. Очевидно, при любых φ' , φ и $\lambda \geq 1$ функция χ' — непрерывная функция трех переменных, $0 \leq \chi'(\varphi', \varphi, \lambda) < \pi$.

Пусть функция $\psi'(\varphi', \lambda', \varphi, \lambda)$ [задает соответствующее семейство функций $\psi'(\varphi', \lambda')$ на семействе образов $F(\varphi, \lambda)$. Она непрерывна при любых φ' , φ и $\lambda' \geq 1$, $\lambda \geq 1$ вследствие непрерывности $\chi'(\varphi', \varphi, \lambda)$ и выражения (3).

Аналогичные семейства $k'_p(\varphi', \lambda', \varphi, \lambda)$ и $k'_c(\varphi', \lambda', \varphi, \lambda)$ функций $k'_p(\varphi', \lambda')$ и $k'_c(\varphi', \lambda')$ также непрерывны при любых φ' , φ и $\lambda' \geq 1$, $\lambda \geq 1$. Это сразу следует из выражений $k'_p(\varphi', \lambda', \varphi, \lambda) = \sqrt{\lambda' \cdot \Phi(\varphi', \lambda', \varphi, \lambda)}$ и $k'_c(\varphi', \lambda', \varphi, \lambda) = \sqrt{\lambda' \cdot \Phi^{-1}(\varphi', \lambda', \varphi, \lambda)}$, где $\Phi(\varphi', \lambda', \varphi, \lambda) = \text{tg} [(1/2)(\pi/2 - \chi' + v^{0'})] / \text{tg} [(1/2)(\pi/2 - \chi' - v^{0'})]$ при $\chi' \neq \pi/2$ и $\Phi(\varphi', \lambda', \varphi, \lambda) = \lambda'$ при $\chi' = \pi/2$, а $\chi' = \chi'(\varphi', \varphi, \lambda)$, $v^{0'} = \text{arctg} \left(\frac{\lambda^0 - 1}{\lambda^0 + 1} \text{ctg} \chi' \right)$. Эти выражения получены решением системы из равенства $k'_p \times k'_c = \lambda'$ и равенства $\text{tg}(\Omega^{0'} + v^{0'}) = (k'_p/k'_c) \text{tg} \Omega^{0'}$ из утверждения 3 с учетом выражения для $v^{0'}$ и равенства $\Omega^{0'} = (1/2)(\pi/2 - \chi' - v^{0'})$.

Сделаем очевидное обобщение предложения 1 на семейство образов $F(\varphi, \lambda)$.

Предложение 1'. Обозначим $\lambda(F') = \lambda'(F(\varphi, \lambda))$. Тогда при любых фиксированных φ_0 , $\lambda_0 \geq 1$, $1 \leq \lambda'_0 \leq \lambda'(F(\varphi, \lambda))$ функция $\psi(\varphi', \lambda'_0, \varphi_0, \lambda_0)$ непрерывна и строго возрастает.

В дальнейшем ограничим семейство образов $F(\varphi, \lambda)$ условием $1 \leq \lambda \leq W = \min \{2, \lambda(F)\}$. При этом $\lambda'(F(\varphi, \lambda))$ не превосходит некоторого $W' = \min \lambda'(F(\varphi, \lambda))$, как будет доказано, большего 1.

Предложение 2. При любом $\psi_0 = \text{const}$ и $1 \leq \lambda \leq \lambda(F)$ существует непрерывная однозначная функция $\varphi(\lambda, \psi_0)$, являющаяся решением уравнения $\psi(\varphi, \lambda) = \psi_0$ (а).

Действительно, вследствие свойства 4 уравнение (а) при $\lambda = 1$ и любом фиксированном ψ_0 имеет единственное решение. Это решение непрерывно продолжаемо на весь отрезок $1 \leq \lambda \leq \lambda(F)$, поскольку, вследствие свойства 4 и предложения 1, на нем выполнены условия теоремы существования неявной функции $\varphi(\lambda, \psi_0)$ [2]. Полученное решение является единственным решением уравнения (а) при $1 \leq \lambda \leq \lambda(F)$, так как в противном случае уравнение $\psi'(\varphi, 1) = \psi_0$ имело бы более одного решения.

Пользуясь равномерной непрерывностью и строгой монотонностью по φ' функции $\psi'(\varphi', \lambda', \varphi, \lambda)$ при любых φ , $1 \leq \lambda \leq W$ и $1 \leq \lambda' \leq W'$, можно обобщить предложение 2.

Предложение 2'. При любых постоянных φ_0 , ψ'_0 и $1 \leq \lambda_0 \leq$

$\leq W$ существует непрерывная (однозначная) при $1 \leq \lambda' \leq W'$ функция $\varphi'(\lambda', \psi_0, \varphi_0, \lambda_0)$ одного аргумента λ' , являющаяся решением уравнения $\psi'(\varphi', \lambda', \varphi_0, \lambda_0) = \psi_0$. Эта функция непрерывно зависит от параметров, точнее функция четырех переменных $\varphi'(\lambda', \psi', \varphi, \lambda)$ непрерывна при любых $\varphi, \psi', 1 \leq \lambda' \leq W'$ и $1 \leq \lambda \leq W$.

Предложение 3. При любых $\psi_0 = \text{const}$ и $1 \leq \lambda \leq \lambda(F)$ существуют непрерывные (однозначные) функции $k_p(\lambda, \psi_0) = k_p(\varphi(\lambda, \psi_0), \lambda)$ и $k_c(\lambda, \psi_0) = k_c(\varphi(\lambda, \psi_0), \lambda)$.

Действительно, функция $k_p(\lambda, \psi_0)$ непрерывна и однозначна при наложенных условиях как композиция двух непрерывных функций $k_p(\varphi, \lambda)$ и $\varphi(\lambda, \psi_0)$. То же справедливо и для функции $k_c(\lambda, \psi_0)$.

Поясним смысл предложений 2 и 3. Мы выделяем из совокупности (φ, λ) -растяжений фигуры F те, которые разлагаются на самосопряженное растяжение — сжатие от осей фиксированного направления: ось растяжения имеет направление ψ_0 (в системе oxy), ось сжатия $\psi_0 + \pi/2$. Коэффициенты этих самосопряженных растяжения и сжатия однозначно и непрерывно определяются коэффициентом (φ, λ) -растяжения, если только он не превосходит $\lambda(F)$.

Из предложения 2' вытекает следующее обобщение предложения 3.

Предложение 3'. При любых постоянных φ_0, ψ_0 и $1 \leq \lambda'_0 \leq W$ существуют непрерывные (однозначные) при $1 \leq \lambda' \leq W'$ функции одного переменного $k'_p(\lambda', \psi_0, \varphi_0, \lambda_0)$ и $k'_c(\lambda', \psi_0, \varphi_0, \lambda_0)$. При этом функции $k'_p(\lambda', \psi', \varphi, \lambda)$ и $k'_c(\lambda', \psi', \varphi, \lambda)$ непрерывны как функции четырех переменных.

Предложение 4. При любых фиксированных φ_0, ψ_0 и $1 \leq \lambda_0 \leq W$ функция $k'_p(\lambda', \psi_0, \varphi_0, \lambda_0)$ строго возрастает на отрезке $1 \leq \lambda' \leq W'$ от 1 до $k'_p(W', \psi_0, \varphi_0, \lambda_0) \geq W'$.

Действительно, во-первых, $k'_p(\lambda', \psi_0, \varphi_0, \lambda_0)$ строго монотонна на $[1, W']$. В противном случае, при $1 \leq \lambda'_1 < \lambda'_2 \leq W'$ выполнялось бы равенство $k'_p(\lambda'_1, \psi_0, \varphi_0, \lambda_0) = k'_p(\lambda'_2, \psi_0, \varphi_0, \lambda_0)$. Но это противоречит свойству 6. Теперь достаточно заметить, что $k'_p(\lambda', \psi_0, \varphi_0, \lambda_0) \geq 1$ и $k'_p(1, \psi_0, \varphi_0, \lambda_0) = 1$, а потому функция $k'_p(\lambda', \psi_0, \varphi_0, \lambda_0)$ не может быть убывающей. Неравенство $k'_p(W', \psi_0, \varphi_0, \lambda_0) \geq W'$ следует из левого неравенства (6).

Следующее предложение вытекает из предложений 3' и 4.

Предложение 5. При любых постоянных φ_0, ψ_0 и $1 \leq \lambda_0 \leq W$ и при $1 \leq k'_p \leq W'$ существует непрерывная функция $\lambda'(k'_p, \psi_0, \varphi, \lambda)$, обратная функции $k'_p(\lambda', \psi_0, \varphi_0, \lambda_0)$. Причем $\lambda'(k'_p, \psi', \varphi, \lambda)$ непрерывна как функция четырех переменных.

Предложение 6. Пусть d — диаметр, а h — наименьшая ширина гладкой фигуры F , тогда $M = \min \sin^2 \chi(\varphi) > (h/d)^2 = S^2$.

Величина S связана с величиной S^φ , отвечающей образу F' фигуры F при (φ, λ) -растяжении, разлагающемся на самосопряженное растяжение — сжатие с коэффициентами k_p, k_c , соотношением $S' \geq (k_c/k_p) S$.

Действительно, рассмотрим на рис. 1 прямоугольный треугольник bar . При любых углах φ будет $\sin \chi(\varphi) = |bp|/|ab| < h/d$. Второе утверждение следует из справедливости для фигуры F' оценок $h' \geq k_c h$, $d' \leq k_p d$.

Докажем, наконец, основную лемму. Рассмотрим косые растяжения Λ и Λ' из начала § 3. Коэффициент k прямого растяжения фигуры F при условии $k_c k_p = 1$ является функцией одного лишь коэффициента λ первого косого растяжения Λ . В самом деле, $k = k_p k'_c = k_p(\lambda, 0) k'_c(\lambda', \psi', \varphi, \lambda) = k_p(\lambda, 0) k'_c(\lambda'; \psi, \varphi, \lambda)$. $\Lambda k'_c(\lambda', \psi, \varphi, \lambda)$ является функцией одного лишь λ , так как $\varphi = \varphi(\lambda, 0)$; $\psi = \text{arctg} \left(\frac{\lambda-1}{\lambda+1} \text{ctg} \chi(\varphi) \right)$; $\lambda' = \lambda'(k'_p, \psi, \varphi, \lambda)$, где $k'_p = 1/k_c(\lambda, 0)$.

Поскольку $k(1) = 1$ и $k(\lambda) = \lambda \cdot \lambda' \geq \lambda$, то для доказательства того, что $k(\lambda)$ принимает все значения от 1 до $1 + 0,2S^3$, достаточно установить непрерывность $k(\lambda)$ при $1 \leq \lambda \leq 1 + 0,2S^3$.

Функция $k_p(\lambda, 0)$, вследствие предложения 3, непрерывна при $1 \leq \lambda \leq \lambda(F)$, а функция $k'_c(\lambda', \psi, \varphi, \lambda)$ непрерывна как наложение непрерывных функций при выполнении следующих условий: $1 \leq \lambda \leq W = \min \{ \lambda(F), 2 \}$, $\frac{1}{k_c(\lambda, 0)} \leq W' = \min_{F'} \lambda(F')$, где минимум взят по всем F' , полученным из F (φ, λ)-растяжениями в $1 \leq \lambda \leq W$ раз. Перепишем второе условие так: $k_c(\lambda, 0) \geq 1/W'$, вследствие нижней оценки (5) это неравенство заведомо выполняется при $1 - (\lambda - 1)/\sqrt{M} \geq 1/W'$, где $M = M(F)$.

Перепишем это условие в более удобном виде: $\lambda \leq 1 + \sqrt{M} \times (1 - 1/W')$ (9). Величина $1 - 1/W' = \min (2M' / ((1 + M')))$ получается при наименьшем $M' = M(F')$. Оценим M' снизу, пользуясь предложением 6 и (5), (6): $M' > S'^2 \geq S^2 (k_c/k_p)^2 \geq (S/\lambda)^2 [1 - (\lambda - 1)/S]^4$.

Добавим к нашим неравенствам с целью упрощения неравенство $\lambda \leq 1 + 0,3S$. Тогда

$$M' > S^2 \frac{(1 - 0,3)^4}{(1 + 0,3S)^2} \geq S^2 \frac{0,7^4}{1,3^2} > 0,14S^2,$$

и, заменяя в неравенстве (9) $\sqrt{M}$ на меньшую величину S , перепишем все три неравенства:

$$\lambda \leq \min \left\{ 1 + \frac{2M}{1 - M}, 2 \right\}; \quad \lambda \leq 1 + S \frac{2 \cdot 0,14S^2}{1 + 0,14S^2}; \quad \lambda \leq 1 + 0,3S.$$

Легко проверить, что среднее из них — самое сильное, а его можно заменить более простым и сильным $\lambda \leq 1 + 0,2S^3$.

Итак, функция $k(\lambda)$ непрерывна при $1 \leq \lambda \leq 1 + 0,2S^3$. Лемма доказана.

Отметим еще одно следствие основной леммы. Пусть Φ — негладкая выпуклая фигура, граница которой содержит отрезок прямой. Тогда существует бесконечно много косых растяжений фигу-

ры Φ вдоль этого отрезка, различающихся выбором неподвижной прямой. Однако это обстоятельство не мешает путем предельного перехода от гладких фигур F установить, что справедлива

Теорема. *Произвольное прямое растяжение любой компактной выпуклой фигуры эквивалентно конечной цепочке последовательных косых растяжений и движению.*

Список литературы: 1. Залгаллер В. А. О вложении выпуклой фигуры в другую. — Укр. геометр. сб., 1971, вып. 1, с. 19—20. 2. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. — М.: Физматгиз, 1962. — Т. 1, 449 с.

Поступила в редколлегию 21.09.82

ОРТОГОНАЛЬНО СОВМЕСТИМЫЕ БИВЕКТОРЫ

§ 1. Определения. Введем обозначения и напомним определения некоторых понятий. С каждым конечномерным вещественным пространством W связываются двойственные друг другу пространства $\Lambda_p(W)$ и $\Lambda^p(W)$ поливекторов и поликовекторов. Причем $\Lambda_0(W) = \Lambda^0(W) = R$, $\Lambda_1(W) = W$, $\Lambda^1(W) = W^*$, $\Lambda_p(W)^* = \Lambda^p(W)$, $\Lambda^p(W)^* = \Lambda_p(W)$. При $p > \dim W = n$ и $p < 0$ будет $\Lambda_p(W) = \Lambda^p(W) = 0$. Прямые суммы $\Lambda_*(W) = \bigoplus_p \Lambda_p(W)$ и $\Lambda^*(W) = \bigoplus_p \Lambda^p(W)$ образуют контравариантную и ковариантную грассмановы алгебры пространства W с операцией внешнего умножения $\wedge$. Элементы $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p}$, $1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_p \leq n$, где e_{i_q} — базисные векторы пространства $\Lambda_1(W)$, образуют базис в $\Lambda_p(W)$, которому соответствует двойственный базис $e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_p}$ в $\Lambda^p(W)$.

Введение скалярного произведения $(\cdot, \cdot)$ в W превращает W в евклидово пространство R^n и задает изоморфизм g пространства $\Lambda_1(R^n) = \Lambda_1^n$ в пространство $\Lambda^1(R^n) = \Lambda_1^1$ по правилу $g(e) = (e, \cdot)$. Определим скалярное произведение на простых поливекторах, т. е. на p -векторах, представимых в виде $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p}$, $e_i \in \Lambda_1^n$, а потом распространим его на все пространство Λ_p^n по линейности. Именно, пусть $\omega_i = e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p}$, $i = 1, 2$. Положим $(\omega_1, \omega_2) = (g(e_{i_1}) \wedge \dots \wedge g(e_{i_p})) \cdot (e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p})$ (1), где справа стоит свертка поликовектора с поливектором. Все свойства скалярного произведения легко проверяются. Если $\{e_i\}$ — ортонормированный базис пространства R^n и $\omega_i = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \alpha_{i_1 \dots i_p}^{i_1 \dots i_p} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p}$, $i = 1, 2$, то

$$(\omega_1, \omega_2) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \alpha_{i_1 \dots i_p}^{i_1 \dots i_p} \cdot \alpha_{i_1 \dots i_p}^{i_1 \dots i_p}. \quad (2)$$

Известно, что норма простого поливектора $\omega = e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p}$ равна p -мерному объему параллелепипеда, построенного на векторах $\{e_i\}$. Дадим геометрическую интерпретацию угла между про-

этими поливекторами. p -плоскость $\pi(\omega)$, натянутая на $\{e_i\}$, называется пространством простого поливектора ω . p -вектор ω полностью определяется тройкой: $\pi(\omega)$, $|\omega|$, ориентация $\pi(\omega)$. Пусть ω_1, ω_2 — простые p -векторы. Тогда (см. [1, 3. 3.15]) в $\pi(\omega_1)$ и $\pi(\omega_2)$ можно ввести такие положительно ориентированные базисы $\{e_i\}, \{f_i\}$, что $(e_i, e_j) = (f_i, f_j) = (e_i, f_i) = 0$ при $i \neq j$, и $(e_i, e_i) = (f_i, f_i) = 1, (e_i, f_i) = \cos \varphi_i$, где φ_i — так называемые стационарные углы между $\pi(\omega_1)$ и $\pi(\omega_2)$. Будем считать, что при выбранной нумерации $f_1, \dots, f_m \nparallel \pi(\omega_1); f_{m+1}, \dots, f_p \parallel \pi(\omega_1)$, $0 \leq m \leq p$. Пусть $\{\tilde{e}_i\}$ — такой ортонормированный базис ортогонального дополнения $\pi(\omega_1)$ в R^n , что $f_i = \cos \varphi_i e_i + \sin \varphi_i \tilde{e}_i, 1 \leq i \leq m$ и $f_i = \cos \varphi_i e_j, \cos \varphi_j = \pm 1, m < j \leq p$. Тогда $\omega_1 = |\omega_1| e_1 \wedge \dots \wedge e_p, \omega_2 = |\omega_2| f_1 \wedge \dots \wedge f_p$ и $\cos(\omega_1, \omega_2) = \cos \varphi_1 \dots \cos \varphi_p$. (3)

Группа Ли $O(n)$ ортогональных преобразований действует слева на R^n . Определим действие $O(n)$ на Λ_p^n . Пусть $\omega = e_1 \wedge \dots \wedge e_p$ простой p -вектор и $A \in O(n)$; положим $A\omega = A e_1 \wedge \dots \wedge A e_p$, далее распространим A по линейности. Ясно, что $O(n)$ сохраняет скалярное произведение в Λ_p^n . Группа действует не транзитивно, поэтому Λ_p^n распадается на орбиты $\Lambda_p^n/O(n)$. Каждая орбита есть класс ортогонально совместимых p -векторов; этот класс — компакт в Λ_p^n . Множество $\Lambda_p^n/O(n)$ этих классов наделяется структурой метрического пространства в метрике Хаусдорфа, построенной по введенной в Λ_p^n норме.

Мы построим для $p=2$ каноническое отображение $\varphi: \Lambda_2^n \rightarrow R^{[n/2]} \subset R^n$, которое дает критерий ортогональной совместимости бивекторов, а именно, $\omega_1, \omega_2 \in \Lambda_2^n$ ортогонально совместимы тогда и только тогда, когда $\varphi(\omega_1) = \varphi(\omega_2)$. Затем, и этот результат мы считаем основным, устанавливается, что отображение $\psi: \Lambda_2^n/O(n) \rightarrow R^{[n/2]}$, индуцированное отображением φ , есть изометрия на симплициальный многогранный угол в $R^{[n/2]}$ (см. п. 4).

Пусть $O(\omega) = O(n)\omega \in \Lambda_2^n/O(n)$ орбита бивектора ω . Группа $H(\omega) = \{A \in O(n) | A\omega = \omega\}$ изотопий элемента ω является замкнутой подгруппой $O(n)$. Как известно [2], орбита $O(\omega)$ гомеоморфна $O(n)/H(\omega)$ (топология определяется стандартно). Поэтому, чтобы охарактеризовать элементы $\Lambda_2^n/O(n)$ с точностью до гомеоморфизма, достаточно вычислить $H(\omega)$. В п. 5 такое вычисление проведено. Из него следует, что $H(\omega)$, с точностью до изоморфизма, зависит только от $\varphi(\omega)$.

Критерий ортогональной совместимости p -векторов тесно связан с вопросом о таких разложениях p -вектора на простые, которые реализуют так называемую массу p -вектора.

Пусть $\omega \in \Lambda_p^n$, его массой называется скаляр
$$\|\omega\| = \inf \left\{ \sum_{\beta \in B} |\beta| : B \text{ — конечное множество простых } p\text{-векторов и} \right.$$

$$\omega = \sum_{\beta \in B} \beta \}. \quad (4)$$

В работе [3] поставлен вопрос о существовании такого разложения ω , что $\omega = \sum_{i=1}^r \omega_i$, ω_i — простые, $\sum_{i=1}^r |\omega_i| = \|\omega\|$ и об оценке минимального количества $r(\omega)$ слагаемых в таких разложениях. В работе [4, с. 14] доказано существование таких разложений и получена оценка $r(\omega) \leq C_n^p$. Ниже мы для случая $p = 2$ дадим точную оценку: $r(\omega) \leq [n/2]$ при $p = 2$ (5).

§ 2. Бивекторы в R^4 . В § 2 под бивектором будем понимать элемент из Λ_2^4 . Введем оператор $\times: \Lambda_2^4 \rightarrow \Lambda_2^4$ — аналог обычного векторного произведения в R^3 . Фиксируем в R^4 ориентацию. Пусть ω — простой бивектор. Положим $|\times \omega| = |\omega|$, $\pi(\times \omega) = \pi^\perp(\omega)$; ориентация $\pi^\perp(\omega)$ выбирается так, чтобы положительно ориентированные базисы в $\pi(\omega)$, $\pi^\perp(\omega)$ давали положительно ориентированный базис в R^4 . Далее $\times$ распространяется по линейности. Иначе говоря, пусть $\{e_i\}$ — ортонормированный базис в R^4 и $\omega = \alpha^{12} e_1 \wedge e_2 + \alpha^{13} e_1 \wedge e_3 + \alpha^{14} e_1 \wedge e_4 + \alpha^{23} e_2 \wedge e_3 + \alpha^{24} e_2 \wedge e_4 + \alpha^{34} e_3 \wedge e_4$; тогда $\times \omega = \alpha^{34} e_1 \wedge e_2 - \alpha^{24} e_1 \wedge e_3 + \alpha^{23} e_1 \wedge e_4 + \alpha^{14} e_2 \wedge e_3 - \alpha^{13} e_2 \wedge e_4 + \alpha^{12} e_3 \wedge e_4$.

Оператор $\times$ ортогонален, $\times \times = \text{id}$, следовательно, $\times$ самосопряжен и его собственные числа равны ± 1 . Если ω — прост, то $(\times \omega, \omega) = 0$, поэтому $\text{sp } \times = 0$. Таким образом

$$\Lambda_2^4 = \Lambda^+ \oplus \Lambda^-, \quad \omega = \omega^+ + \omega^-, \quad \times \omega^+ = \omega^+, \quad \times \omega^- = -\omega^- \quad (6),$$

Λ^+ , Λ^- — собственные подпространства оператора $\times$ чисел ± 1 .

Предложение. Для простоты бивектора $\omega \in \Lambda_2^4$ необходимо и достаточно, чтобы $(\times \omega, \omega) = 0$ (7).

Доказательство. Необходимость очевидна. Определим конус

$$K = \{\omega \mid (\times \omega, \omega) = 0\}. \quad (8)$$

Пусть $G = \{\omega \mid \omega \text{ — прост}\}$. Факторизация единичной сферы S пространства Λ_2^4 по диаметрально противоположным точкам, суженная на $S \cap G$, дает двулистное накрытие грассманова многообразия G_2^4 . Следовательно, $\dim(S \cap G) = 4$, но $S \cap G < S \cap K$ и $\dim S \cap K = 4$. Поэтому $S \cap K = S \cap G$, и предложение доказано.

Предложение. Для $\omega \in \Lambda_2^4$ справедливо $\|\omega\| = \max \{ \sqrt{2} |\omega^+|, \sqrt{2} |\omega^-| \}$.

Доказательство. Пусть $\omega = \sum \alpha^i \omega_i$, $|\omega_i| = 1$, $\omega_i \in G$, $\|\omega\| = \sum \alpha^i$. Тогда $0 = (\times \omega, \omega) = |\omega^+|^2 - |\omega^-|^2$, значит $|\omega^+| = |\omega^-| = 1/\sqrt{2}$. Но $\omega^+ = \sum \alpha^i \omega_i^+$, $\omega^- = \sum \alpha^i \omega_i^-$, следовательно $\|\omega\| = \sum \alpha^i \geq \max \{ \sqrt{2} |\omega^+|, \sqrt{2} |\omega^-| \}$. Приведем разложение, реализующее этот максимум:

Если $\omega \in \Lambda^+ \cup \Lambda^-$, то

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\omega + \times \omega}{|\omega + \times \omega|} + \frac{\omega - \times \omega}{|\omega - \times \omega|} \right), \quad \omega_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\omega + \times \omega}{|\omega + \times \omega|} - \frac{\omega - \times \omega}{|\omega - \times \omega|} \right),$$

$$\alpha^1 = \frac{|\omega + \times \omega| + |\omega - \times \omega|}{2\sqrt{2}}, \quad \alpha^2 = \pm \frac{|\omega + \times \omega| - |\omega - \times \omega|}{2\sqrt{2}},$$

где „+“ берется, если $|\omega^+| \geq |\omega^-|$, и „-“ в противном случае. Если $\omega \in \Lambda^{+(-)}$, то

$$\omega = \frac{\sqrt{2} |\omega^{+(-)}|}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\omega^{+(-)}}{|\omega^{+(-)}|} + I^{(+)} \right) \right] + \frac{\sqrt{2} |\omega^{+(-)}|}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\omega^{+(-)}}{|\omega^{+(-)}|} - I^{(+)} \right) \right], \quad (9)$$

где $I^{(+)} \in \Lambda^{+(-)}$ — произвольный элемент единичной длины.

Легко проверяется, что $\omega_1, \omega_2 \in K = G$ и $\alpha^1 + \alpha^2 = \max \{ \sqrt{2} |\omega^+|, \sqrt{2} |\omega^-| \}$, что и требуется доказать.

Разложения $\omega = \alpha^1 \omega_1 + \alpha^2 \omega_2$, реализующие массу ω , индуцируют отображение $\omega = \alpha^1 \omega_1 + \alpha^2 \omega_2 \rightarrow (\alpha^1, \alpha^2, \omega_1, \omega_2) \in R^+ \times R^+ \times G \times G$. Ясно, что полный образ таких разложений компактен, и существует разложение, на котором достигается $\min \alpha^1 \alpha^2$.

Предложение. Пусть $\omega \in \Lambda_2^4$ не является простым и на разложении $\omega = \alpha^1 \omega_1 + \alpha^2 \omega_2$ достигается $\min \alpha^1 \alpha^2$ среди всех разложений, реализующих массу ω . Тогда $\omega_1 = \pm \times \omega_2$, а поэтому $\pi(\omega_1) = \pi^\perp(\omega_2)$.

Доказательство. Имеем $(\times \omega, \omega) = 2\alpha^1 \alpha^2 (\omega_1, \times \omega_2)$. Откуда $\alpha^1 \alpha^2 = \frac{1}{2} \left| \frac{(\times \omega, \omega)}{(\omega_1, \times \omega_2)} \right| \geq \frac{1}{2} |(\times \omega, \omega)|$, причем равенство достигается, если $\omega_1 = \pm \times \omega_2$. Но на разложении (9) это выполняется и предложение доказано.

§ 3. Специальные разложения бивекторов на простые. Пусть $\omega \in \Lambda_2^n$. Рассмотрим класс таких разложений ω , что

$$\omega = \sum_{i=1}^r \alpha^i \omega_i, \quad |\omega_i| = 1, \quad \omega_i \in G, \quad \|\omega\| = \sum_{i=1}^r \alpha^i, \quad (10)$$

причем $r = r(\omega)$ — минимальное количество слагаемых, необходимое для сохранения прочих требований.

Предложение. В классе (10) существует такое разложение, что $\pi(\omega_i) \perp \pi(\omega_j)$ при $i \neq j$.

Доказательство. Пусть разложение $\omega = \sum_{i=1}^r \alpha^i \omega_i$ реализует $\min \prod_{i=1}^r \alpha^i$ по классу (10). R_{ii}^4 — пространство, натянутое на $\pi(\omega_i)$, $\pi(\omega_j)$, $i \neq j$. Тогда в силу последнего предложения § 2 $\pi(\omega_i) \perp \pi(\omega_j)$, что и требуется.

Следствие. $r(\omega) \leq [n/2]$.

Мы установили, что для каждого $\omega \in \Lambda_2^n$ существует разложение $\omega = \sum_{i=1}^{[n/2]} \alpha^i \omega_i$ (11), где $\omega_i \in G$, $|\omega_i| = 1$, $\pi(\omega_i) \perp \pi(\omega_j)$ при $i \neq j$, $\alpha^1 \geq \dots \geq \alpha^{[n/2]} \geq 0$.

§ 4. Метрика в пространстве классов ортогонально совместимых бивекторов. Далее будем употреблять правило суммирования по повторяющимся индексам.

Основная лемма. Пусть $\omega, \tau \in \Lambda_2^n$ и $\omega = \alpha^i \omega_i$, $\tau = \beta^i \tau_i$ — разложения типа (11). Тогда

$$(\omega, \tau) \leq \sum_{i=1}^{[n/2]} \alpha^i \beta^i. \quad (12)$$

Доказательство. 1) Положим

$$\Delta_{iq} = \Delta_q^i = \begin{cases} 1, & i \leq q, \\ 0, & i > q, \end{cases} \quad 1 \leq q \leq [n/2].$$

Докажем (12) сначала для $\omega = \Delta_q^i \omega_i$, $\tau = \Delta_p^j \tau_j$. Пусть $\{e_i, \bar{e}_i, \tilde{e}_i\}$, $\{f_j, \bar{f}_j, \tilde{f}_j\}$ — ортонормированные базисы R^n такие, что $\omega_i = e_i \wedge \bar{e}_i$, $\tau_j = f_j \wedge \bar{f}_j$, $1 \leq i \leq q$, $1 \leq j \leq p$. Разложим векторы $f_j, \bar{f}_j$ по перемешанной базису:

$$f_j = u_j^k e_k + \bar{u}_j^k \bar{e}_k + \tilde{u}^\lambda \tilde{e}_\lambda; \quad \Delta_{kq} ((u_j^k)^2 + (\bar{u}_j^k)^2) + \sum_\lambda (\tilde{u}^\lambda)^2 = 1, \\ f_j = v_j^k e_k + \bar{v}_j^k \bar{e}_k + \tilde{v}^\lambda \tilde{e}_\lambda; \quad \Delta_{kq} ((v_j^k)^2 + (\bar{v}_j^k)^2) + \sum_\lambda (\tilde{v}^\lambda)^2 = 1.$$

Отсюда $\tau = \Delta_p^j f_j \wedge \bar{f}_j = \Delta_p^j (u_j^k \bar{v}_j^k - \bar{u}_j^k v_j^k) e_k \wedge \bar{e}_k + \delta$, где $(\omega, \delta) = 0$. Имеем $(\omega, \tau) = (\Delta_q^i e_i \wedge \bar{e}_i, \Delta_p^j (u_j^k \bar{v}_j^k - \bar{u}_j^k v_j^k) e_k \wedge \bar{e}_k) = \delta_{ki} \Delta_q^i \Delta_p^j (u_j^k \bar{v}_j^k - \bar{u}_j^k v_j^k) = \Delta_{kq} \Delta_p^j (u_j^k \bar{v}_j^k - \bar{u}_j^k v_j^k) \leq \Delta_{kq} \Delta_p^j ((u_j^k)^2 + (\bar{u}_j^k)^2)^{\frac{1}{2}} ((v_j^k)^2 + (\bar{v}_j^k)^2)^{\frac{1}{2}} \leq \Delta_p^j [\Delta_{kq} ((u_j^k)^2 + (\bar{u}_j^k)^2)]^{\frac{1}{2}} \cdot [\Delta_{kq} ((v_j^k)^2 + (\bar{v}_j^k)^2)]^{\frac{1}{2}} \leq p$.

Равенство достигается при условии $\bar{v}_j^k = u_j^k$, $v_j^k = -\bar{u}_j^k$, $\tilde{u}^\lambda = \tilde{v}^\lambda = 0$ (13).

Аналогично получаем $(\omega, \tau) \leq q$, откуда $(\omega, \tau) \leq \sum_i \Delta_p^i \Delta_q^i$ (14).

Так как $|\omega| = \sqrt{q}$, $|\tau| = \sqrt{p}$, то при $p=q$ и равенстве в (14) $\omega = \tau$ (15)

2) Положим

$$\bar{\omega}_q = \Delta_q^i \omega_i, \quad 1 \leq q \leq r(\omega), \quad \lambda^q = \begin{cases} \alpha^q - \alpha^{q+1}, & q < r, \\ \alpha^q, & q = r. \end{cases}$$

Тогда $\omega = \lambda^q \bar{\omega}_q$, $\lambda^q \geq 0$. Аналогично $\tau = \mu^p \tau_p$, $\mu^p \geq 0$.

Используя (14), получаем

$$(\omega, \tau) = \lambda^q \mu^p (\bar{\omega}_q, \bar{\tau}_p) \leq \lambda^q \mu^p \sum_i \Delta_q^i \Delta_p^i = \sum_i (\lambda^q \Delta_q^i) (\mu^p \Delta_p^i) = \sum_i \alpha^i \beta^i.$$

Если в (12) достигается равенство и $\lambda^i \mu^i \neq 0$, то из (15) следует $\omega_i = \bar{\tau}_i$ (16). Доказательство леммы закончено.

Следствие. В (11) набор $\{\alpha^i\}$ однозначно определяется бивектором ω . Если ω и τ ортогонально совместимы, то $\alpha^i = \beta^i$.

Действительно, пусть $A \in O(n)$ и $\tau = A \omega = \alpha^i A \omega_i = \beta^i \tau_i$. Тогда $(\tau, \tau) = (\alpha^i A \omega_i, \beta^i \tau_i) \leq \sum \alpha^i \beta^i$. Поэтому $\alpha^i = \beta^i$. Таким образом, возникает каноническое отображение

$$\varphi: \Lambda_2^n \rightarrow Q, \quad \varphi(\omega) = (\alpha^1, \dots, \alpha^{[n/2]}), \quad (17)$$

где $Q = \{(\alpha^i) \in R^{[n/2]} \mid \alpha^1 \geq \dots \geq \alpha^{[n/2]} \geq 0\}$ — выпуклый симплицеальный многогранный угол в $R^{[n/2]}$.

Этот результат позволяет определить отображение $\psi: \Lambda_2^n / O(n) \rightarrow Q$ по правилу $\psi(O(\omega)) = \varphi(\omega)$ (18).

Теорема. ψ есть изометрия по отношению к метрике Хаусдорфа в $\Lambda_2^n / O(n)$ и стандартной метрике в $R^{[n/2]} \subset R^n$.

Доказательство. Пусть $\omega_1, \omega_2 \in \Lambda_2^n$. Достаточно показать, что $\inf_{\tau \in O(\omega_2)} |\omega_1 - \tau| = |\psi(O(\omega_1)) - \psi(O(\omega_2))|$. Пусть $\omega_1 = \alpha^i \omega_i, \omega_2 = \beta^j \tau_j$ — разложения (11), и $\tau \in O(\omega_2)$. Из (12) следует:

$$|\omega_1 - \tau|^2 = |\omega_1|^2 + |\tau|^2 - 2(\omega_1, \tau) \geq \sum (\alpha^i)^2 + \sum (\beta^j)^2 - 2 \sum \alpha^i \beta^i = |\varphi(\omega_1) - \varphi(\tau)|^2 = |\psi(O(\omega_1)) - \psi(O(\omega_2))|^2.$$

Но, если $\tau = \beta^j \omega_j \in O(\omega_2)$, то $|\omega - \tau| = |\varphi(\omega) - \varphi(\tau)| = |\psi(O(\omega_1)) - \psi(O(\omega_2))|$, что и требовалось доказать.

§ 5. Строение пространства классов $\Lambda_2^n / O(n)$ и его элементов. Под $\pi(\omega)$ будем понимать ранговое пространство бивектора ω (см. [5, X, 3, 12]). Это линейная оболочка пространств $\pi(\omega_i)$, где ω_i элементы разложения типа (11), $1 \leq i \leq r(\omega)$. Вводя новую нумерацию в (11), получаем

$$\omega = \alpha^i \tilde{\omega}_i, \quad \tilde{\omega}_i = \sum_{k=1}^{p_i} \omega_i^k, \quad 1 \leq i \leq m, \quad \sum_{i=1}^m p_i = r(\omega), \quad (19)$$

$$\alpha^1 > \dots > \alpha^m > 0, \quad \pi(\tilde{\omega}_i) \perp \pi(\tilde{\omega}_j), \quad i \neq j.$$

m — размерность грани конуса Q , содержащей $\varphi(\omega)$; $\tilde{\omega}_i$ при отображении φ переходят в крайние точки Q , а набор $\{p_1, \dots, p_m\}$ взаимно однозначно соответствует некоторой m -мерной грани многогранного угла Q .

Предложение. Элементы $\tilde{\omega}_i$ разложения (19) однозначно определяются по бивектору ω и, если $A \in H(\omega)$, то $A \tilde{\omega}_i = \tilde{\omega}_i$.

Доказательство. Пусть $\omega = \alpha^i \tilde{\omega}_i = \alpha^i \tilde{\tau}_i$ — разложения типа (19) для бивектора ω . Покажем, что $\tilde{\omega}_i = \tilde{\tau}_i$. Так как $(\omega, \omega) = \sum_i (\alpha^i)^2 p_i$, то это есть случай равенства в (12). Из (16) следует, что $\bar{\omega}_{p_1} = \bar{\tau}_{p_1}$, но $\tilde{\omega}_1 = \bar{\omega}_{p_1}$, $\tilde{\tau}_1 = \bar{\tau}_{p_1}$. Переходя к бивектору $\omega - \alpha^1 \tilde{\omega}_1$, получаем $\tilde{\omega}_2 = \tilde{\tau}_2$ и так далее, что и требуется.

Отсюда непосредственно получается

Следствие. 1) $A \pi(\tilde{\omega}_i) = \pi(\tilde{\omega}_i)$. 2) $H(\omega) = \bigotimes_{i=1}^m H(\tilde{\omega}_i) \otimes O(n - 2 \sum_{i=1}^m p_i)$, где группа $H(\tilde{\omega}_i)$ действует на $\pi(\tilde{\omega}_i)$, а группа $O(n - 2 \sum_{i=1}^m p_i)$ — на ортогональном дополнении к $\bigotimes_{i=1}^m \pi(\tilde{\omega}_i)$ (и на соответствующих пространствах бивекторов над ними).

Предложение. $H(\tilde{\omega}_i) = U(p_i)$ где $U(p_i)$ — группа унитарных преобразований пространства C^{p_i} , а равенство означает изоморфизм.

Доказательство. Пусть $\omega = \Delta_p^i e_i \wedge \bar{e}_i$, $\{e_i, \bar{e}_i\}$ — ортонормированный базис пространства $\pi(\omega)$, A — ортогональное преобразование $\pi(\omega)$, $A \in H(\omega)$. Положим $A e_i = u_i^k \bar{e}_k = \bar{u}_i^k e_k$, $A \bar{e}_k = \bar{v}_i^k e_k + v_i^k \bar{e}_k$. Так как $(\omega, A\omega) = \sum_i \Delta_p^i \Delta_p^i = p$, то имеет место случай равенства в (12), поэтому справедливы соотношения (13): $\bar{v}_i^k = u_i^k$, $v_i^k = -\bar{u}_i^k$. Следовательно, матрицу A преобразования A в базисе $\{e_i, \bar{e}_i\}$ можно представить в виде

$$A = \begin{pmatrix} U & V \\ -V & U \end{pmatrix}, \text{ где } U = \|u_i^k\|, V = \|v_i^k\|. \quad (20)$$

Эта матрица ортогональна. Рассмотрим гомоморфизм $g(A) = U + iV$ матриц вида (20) в группу (по умножению) комплексных матриц порядка p . Так как $g(A') = U' - iV'$ и A ортогональна, то g есть гомоморфизм на группу унитарных матриц. Очевидно, его ядро тривиально, и предложение доказано.

Из утверждений 5 вытекает

Теорема. 1) Орбита $O(\omega)$ бивектора ω , имеющего разложение (19), гомеоморфна многообразию

$$O(n) / \bigotimes_{i=1}^m U(p_i) \otimes O(n - 2 \sum_{i=1}^m p_i) \quad (\text{см. [2, 3.1]}) \quad (21)$$

2) Набор $\{p_1, \dots, p_m\}$ полностью определяется m -мерной гранью Q^m многогранного угла Q . Поэтому отображение $\Phi|_{\varphi^{-1}(Q^m)}: \varphi^{-1}(Q^m) \rightarrow Q^m$ (22) есть расслоение над Q^m со слоем, гомеоморфным многообразию (21).

Отображение π имеет простую геометрическую интерпретацию. Из последней теоремы § 4 следует, что каждый из бивекторов $\alpha^1 \omega_1^k$, $1 \leq k \leq p_1$, в разложении (19) реализует расстояние от бивектора ω до грассманова конуса G простых бивекторов. В связи с этим возникает способ построения разложения (11) и тем самым отображения π : проектируем бивектор ω на конус G , т.е. находим ближайший к ω элемент $\xi_1 \in G$. Полагаем $\alpha^1 = |\xi_1|$. Проектируя бивектор $\omega - \xi_1$ на конус G , получаем ξ_2 , полагаем $\alpha^2 = |\xi_2|$ и т.д.

Теорема. *Описанный процесс дает разложение (11) для бивектора ω , в котором $\alpha^i = |\xi_i|$, $\omega_i = \xi_i / |\xi_i|$.*

Доказательство. Очевидно, достаточно показать, что $\pi(\xi_1) \perp \pi(\omega - \xi_1)$. Пусть $\omega = \alpha^i \omega_i$ — разложение типа (19) для бивектора ω , и $\omega_1^k = e_1^k \wedge \bar{e}_1^k$, $1 \leq k \leq p_1$. Так как бивектор ξ_1 является ближайшим к бивектору ω из конуса G , то $(\omega, \xi_1) = \alpha^1 \cdot \alpha^1$; т.е. имеет место случай равенства в (12). Так же, как и при доказательстве основной леммы, отсюда следует, что

$$\xi_1 = \alpha^1 (u_1^k e_1^k + \bar{u}_1^k \bar{e}_1^k) \wedge (-\bar{u}_1^k e_k + u_1^k \bar{e}_1^k), \sum_{k=1}^{p_1} ((u_1^k)^2 + (\bar{u}_1^k)^2) = 1.$$

Рассмотрим унитарную матрицу $T = U + iV$ порядка p_1 , первая строка которой есть $u_1^k + i\bar{u}_1^k$. Полагая $g^{-1}(T) = A \leftrightarrow A \in H(\omega)$, получаем $\bar{\omega}_1 = A\omega_1^1 + \dots + A\omega_1^{p_1}$ и $A\omega_1^1 = \xi_1$, откуда заключаем, что $\pi(\xi_1) \perp \pi(\omega - \xi_1)$, и теорема доказана.

Список литературы: 1. Розенфельд Б. А. Многомерные пространства. — М.: Наука, 1966. — 647 с. 2. Бишоп Р., Криттенден Р. Геометрия многообразий. — М.: Мир, 1967. — 335 с. 3. Уитни Х. Геометрическая теория интегрирования. — М.: ИЛ, 1960. — 534 с. 4. Федерер Г., Флеминг У. Х. Нормальные и целочисленные потоки. — В кн.: Целочисленные потоки и минимальные поверхности. — М.: Мир, 1973, с. 9—90. 5. Ефимов Н. В., Розендорн Э. Р. Ли-нейная алгебра и многомерная геометрия. — М.: Наука, 1970. — 528 с.

Поступила в редколлегию 30.01.82.

И. Н. Курбатова

НР-ОТОБРАЖЕНИЯ H -ПРОСТРАНСТВ

В работе развивается одно из обобщений теории *НР*-отображений келеровых пространств, а именно — *НР*-отображения *H*-пространств с сохранением почти комплексной структуры. Строится и в некоторой мере исследуется ряд геометрических объектов, сохраняющихся при указанных отображениях. Затем приводятся основные теоремы теории рассматриваемых отображений, а также исследуются *НР*-отображения обобщенно-рекуррентных *H*-пространств, в результате чего получено обобщение известных фактов из теории геодезических отображений римановых пространств [1] и *НР*-отображений келеровых пространств [2].

1. Вещественное риманово пространство V_n четной размерности $n = 2m$ ($m > 1$) с метрическим тензором g_{ij} называется H -пространством H_n , если на нем задано поле структурного аффинора F_i^h , удовлетворяющего условиям

$$\begin{aligned} F_\alpha^h F_i^\alpha &= -\delta_i^h, \quad F_{hi} + F_{ih} = 0, \\ F(h, i, j) &= 0, \quad F_{i,j}^h = -F_{\alpha,3}^\alpha F_i^\alpha F_j^\beta, \\ (h, i, j, \dots &= 1, 2, \dots, n), \end{aligned} \quad (1)$$

где δ_i^h — символы Кронекера; $F_{hi} = g_{h\alpha} F_i^\alpha$, (h, i, j) — циклирование по h, i, j , запятая обозначает ковариантную производную по связности H_n .

H -пространство с интегрируемой структурой келерова [3].

Естественным обобщением понятия геодезических линий для пространств с почти комплексной структурой $F_i^h(x)$ является понятие аналитически планарных кривых Опуки и Тасиро [4, 5]. Они локально задаются уравнениями $x^h = x^h(t)$, $(h = 1, 2, \dots, n)$, где функции $x^h(t)$ удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2 x^h}{dt^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^h(x) \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{dx^\beta}{dt} = a(t) \frac{dx^h}{dt} + b(t) F_\alpha^h(x) \frac{dx^\alpha}{dt}, \quad (2)$$

$a(t)$, $b(t)$ — некоторые функции; $\Gamma_{ij}^h(x)$ — компоненты объекта связности пространства.

По аналогии с этим будем называть кривую, определяемую дифференциальными уравнениями (2), HP -кривой, заменив при этом ковариантное постоянство аффинора требованием $F_{(hi,j)}(x) = 0$.

Рассмотрим H -пространства H_n и $\bar{H}_n$, отнесенные к системам координат $x^1, x^2, \dots, x^n$ и $\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^n$ с метрическими тензорами $g_{ij}(x)$, $\bar{g}_{ij}(\bar{x})$ и структурными аффинорами $F_i^h(x)$, $\bar{F}_i^h(\bar{x})$ соответственно. Назовем HP -отображением H -пространства H_n на H -пространство $\bar{H}_n$ взаимно однозначное соответствие между их точками, при котором каждая HP -кривая пространства H_n переходит в HP -кривую пространства $\bar{H}_n$.

Будем рассматривать HP -отображения, сохраняющие почти комплексную структуру, т. е. предполагать, что в общей по отображению системе координат $x^1, x^2, \dots, x^n$ $F_i^h(x) \equiv \bar{F}_i^h(x)$. (3) Из уравнений (2) в полной аналогии с [5] следует

Теорема 1. Для того, чтобы отображение H_n на $\bar{H}_n$ было HP -отображением, сохраняющим почти комплексную структуру, необходимо и достаточно, чтобы в общей по отображению системе координат между объектами связности этих пространств (в соответствующих точках) имела место зависимость

$$\bar{\Gamma}_{ij}^h(x) = \Gamma_{ij}^h(x) + \psi_{(i}(x) \delta_{j)}^h - \psi_\alpha(x) F_{(i}^\alpha(x) F_{j)}^h(x), \quad (4)$$

где $\Gamma_{ij}^h(x)$, $\bar{\Gamma}_{ij}^h(x)$ — компоненты объектов связности H_n и $\bar{H}_n$; $\Psi_i(x)$ — вектор, по необходимости градиентный; (i, j) — симметрирование по i, j .

Случай $\Psi_i = 0$ будем считать тривиальным и опускать при дальнейшем исследовании.

Учитывая, что $\bar{g}_{ij|k} = 0$, где $|$ — знак ковариантной производной по связности H_n , уравнения (4) могут быть представлены в форме

$$\bar{g}_{ij,k} = 2\psi_k \bar{g}_{ij} + \Psi_i \bar{g}_{j|k} - \Psi_\alpha F_{(i} \bar{g}_{j)\beta} F_k^\beta. \quad (5)$$

Нетрудно видеть, что из (5) на основании (1) и (3) вытекают соотношение (4). Поэтому (4) и (5) — две эквивалентные формы основных уравнений теории HP -отображений H -пространств с сохранением почти комплексной структуры.

2. Для определенных выше отображений оказывается возможным построение инвариантных геометрических объектов.

Из (4) суммированием по h, j с учетом (1) имеем $\Psi_i = \frac{1}{n+2} \times (\bar{\Gamma}_{i\alpha} - \Gamma_{i\alpha}^\alpha)$ (6). Подставляя найденные выражения в (4), сразу получим $T_{ij}^h = \bar{T}_{ij}^h$, $T_{ij}^h = \bar{T}_{ij}^h$ (7), где

$$\begin{aligned} T_{ij}^h &= \Gamma_{ij}^h - \frac{1}{n+2} (\Gamma_{\alpha(i} \delta_{j)}^h - \Gamma_{\alpha\beta}^\alpha F_{(i} F_{j)}^\beta); \\ T_{ij}^h &= \bar{T}_{ij}^h + \bar{T}_{\alpha\beta}^h F_i^\alpha F_j^\beta = \Gamma_{ij}^h + \Gamma_{\alpha\beta}^h F_i^\alpha F_j^\beta. \end{aligned}$$

Подобным образом представляются в $\bar{H}_n$ и компоненты объектов $\bar{T}$ и $\bar{T}$.

Далее, ввиду (4) зависимость между тензорами Римана пространств H_n и $\bar{H}_n$, находящихся в HP -соответствии, оказывается такой: $\bar{R}_{ijk}^h = R_{ijk}^h + \Psi_{i[j} \delta_{k]}^h - (F_i^\alpha \Psi_{\alpha[j} + \Psi_\alpha F_{i[j}^\alpha F_{k]}^\beta) F_{j]}^h + (\Psi_{\alpha[k} F_{i]}^\alpha - \Psi_\alpha \times F_{[k}^\alpha F_{i]}^\beta + \Psi_\alpha F_{i[j}^\alpha F_{k]}^\beta)$; $\Psi_{ij} = \Psi_{i,j} - \Psi_i \Psi_j + \Psi_\alpha F_i^\alpha \Psi_\beta F_j^\beta$, (8) $[j, k]$ — альтернирование по j, k .

Так как тензор Ψ_{ij} симметричен, зависимость между тензорами Риччи H_n и $\bar{H}_n$ согласно (8) принимает вид $\bar{R}_{ij} = R_{ij} + n\Psi_{ij} + 2\Psi_{\alpha\beta} F_i^\alpha F_j^\beta + \Psi_\alpha F_{(\beta, j)}^\alpha F_i^\beta$. Отсюда и из (1) следует $\bar{R}_{ij} + \bar{R}_{\alpha\beta} F_i^\alpha F_j^\beta \times F_i^\beta = R_{ij} + R_{\alpha\beta} F_i^\alpha F_j^\beta + (n+2)(\Psi_{ij} + \Psi_{\alpha\beta} F_i^\alpha F_j^\beta)$. Два последних соотношения позволяют исключить из (8) тензор Ψ_{ij} , а результат с учетом (6) представить в форме $T_{ijk}^h = \bar{T}_{ijk}^h$ (9), где

$$T_{ijk}^h = R_{ijk}^h + \frac{1}{n^2 - 4} \left[\delta_j^h (nR_{ik} - 2R_{\alpha\beta}F_i^\alpha F_k^\beta - \Gamma_{\alpha\beta}^\alpha F_{(k,i)}^\beta F_i^\alpha) - \right. \\
- \delta_k^h (nR_{ij} - 2R_{\alpha\beta}F_i^\alpha F_j^\beta - \Gamma_{\alpha\beta}^\alpha F_{(j,i)}^\beta F_i^\alpha) + F_k^h (nR_{\alpha j}F_i^\alpha + \\
+ 2R_{i\alpha}F_j^\alpha + \Gamma_{\alpha\beta}^\alpha F_{j,i}^\beta + (n-1)\Gamma_{\alpha\beta}^\alpha F_{i,j}^\beta) - F_j^h (nR_{\alpha k}F_i^\alpha + \\
+ 2R_{i\alpha}F_k^\alpha + \Gamma_{\alpha\beta}^\alpha F_{k,i}^\beta + (n-1)\Gamma_{\alpha\beta}^\alpha F_{i,k}^\beta) \left. \right] + \frac{1}{n+2} \times \\
\times [F_i^h (R_{\alpha[i}F_{k]}^\alpha - \Gamma_{\alpha\beta}^\alpha F_{[i,k]}^\beta) + \Gamma_{\alpha\beta}^\alpha F_i^\alpha F_{[k,i]}^\beta + \Gamma_{\alpha\beta}^\alpha F_{i,[i}^\alpha F_{k]}^\beta]. \quad (10)$$

Аналогично выражаются в $\bar{H}_n$ компоненты объекта $\bar{T}^{\frac{3}{2}}$.

$\bar{T}^{\frac{1}{2}}$, $\bar{T}^{\frac{2}{2}}$, $\bar{T}^{\frac{3}{2}}$ — нетензорные геометрические объекты, сохраняющиеся при HP -отображениях H -пространств. Отметим, что $\bar{T}^{\frac{1}{2}}$ и $\bar{T}^{\frac{2}{2}}$ инвариантны при более общих отображениях, поскольку при их получении мы не использовали существенно свойства H -структуры отображаемых пространств.

Из (9) очевидным образом следует $\Pi_{ijk}^h = \bar{\Pi}_{ijk}^h$ (11), где

$$\Pi_{ijk}^h = T_{ijk}^h - T_{\beta jk}^\alpha F_\alpha^h F_i^\beta + T_{i\alpha\beta}^h F_j^\alpha F_k^\beta - T_{\beta\gamma\delta}^\alpha F_\alpha^h F_i^\beta F_j^\gamma F_k^\delta.$$

В силу (10) и (1) Π_{ijk}^h представится в форме $\Pi_{ijk}^h = R_{ijk}^h - R_{\beta jk}^\alpha \times F_\alpha^h F_i^\beta + R_{i\alpha\beta}^h F_j^\alpha F_k^\beta - R_{\beta\gamma\delta}^\alpha F_\alpha^h F_i^\beta F_j^\gamma F_k^\delta + \frac{2}{n+2} [\delta_{[i}^h \tilde{R}_{k]}^\alpha - F_{[i}^h F_{k]}^\alpha \tilde{R}_{\alpha i} + F_i^h F_{[k}^\alpha \tilde{R}_{j]}^\alpha]$, (12) $\tilde{R}_{ki} = R_{ki} + R_{\alpha\beta} F_k^\alpha F_i^\beta$. Компоненты $\bar{\Pi}$ выражаются $\bar{H}_n$ аналогичным образом.

Тензорный объект Π_{ijk}^h , сохраняющийся при HP -отображениях H -пространств и представляющий собой обобщение известного тензора HP -кривизны [6], будем называть тензором обобщенной голоморфной кривизны. Имеет место

Теорема 2. Геометрические объекты H -пространства H_n , определенные формулами (7), (9), (11), инвариантны относительно HP -отображений, сохраняющих почти комплексную структуру.

Назовем H -пространство, в котором объект Π_{ijk}^h тождественно обращается в нуль, обобщенно голоморфно плоским.

Сравнивая результаты свертывания (12) с g^{ij} и суммирования их по h, k при $\Pi_{ijk}^h = 0$, обнаруживаем, что $\tilde{R}_{hk} = \frac{2R}{n} g_{hk}$, где R — скалярная кривизна H_n . В соответствии с этим из (12) следует $R_{ijk}^h - R_{\beta jk}^\alpha F_\alpha^h F_i^\beta + R_{i\alpha\beta}^h F_j^\alpha F_k^\beta - R_{\beta\gamma\delta}^\alpha F_\alpha^h F_i^\beta F_j^\gamma F_k^\delta = \frac{4R}{n(n+2)} (\delta_{[i}^h g_{k]}^\alpha + F_{[i}^h F_{k]}^\alpha + 2F_i^h F_{k]}^\alpha)$. (13)

Очевидно, что для H -пространства тензор Римана которого имеет структуру (13), $\Pi_{ijk}^h \equiv 0$.

Итак, справедлива

Теорема 3. Для того, чтобы H -пространство H_n было обобщенно голоморфным плоским, необходимо и достаточно, чтобы его тензор Римана удовлетворял условиям (13).

Легко видеть, что пространство постоянной HP -кривизны, в котором $R_{ijk}^h = \frac{R}{n(n+2)} (\delta_{ik}^h g_{jl} + F_{[k}^h F_{l]} + 2F_{[k}^h F_{l]}^h)$, будет и обобщенно голоморфно плоским. Обратное, вообще говоря, неверно.

3. Для исследования основных уравнений HP -отображений H -пространств (5) воспользуемся методом, разработанным проф. Н. С. Синюковым в теории геодезических отображений римановых пространств [1].

Введем в H_n неособенный симметричный тензор типа $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$: $a_{ij} = e^{2\psi} g^{\alpha\beta} g_{\alpha i} g_{\beta j}$, где $\psi_i = \frac{\partial \psi}{\partial x^i}$. Ковариантным дифференцированием относительно связности пространства H_n по x^k с учетом (5) находим $a_{ij,k} = \lambda_{(i} g_{j)k} - \lambda_{\alpha} F_{(i}^{\alpha} F_{j)k}$ (14), где $\lambda_i \stackrel{\text{def}}{=} e^{-2\psi} \psi_{\alpha} g^{\alpha\beta} g_{\beta i}$ (15). Нетрудно показать, что вектор λ_i градиентен. Вследствие (1) очевидно также, что $a_{\alpha\beta} F_i^{\alpha} F_j^{\beta} = a_{ij}$ (16). Соотношения (15) говорят о том, что $\lambda_k \neq 0$ при $\psi_i \neq 0$, и наоборот. Имеет место

Теорема 4. Для того, чтобы H -пространство H_n допускало нетривиальное HP -отображение с сохранением почти комплексной структуры, необходимо и достаточно, чтобы в этом пространстве существовал неособенный симметричный тензор типа $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, удовлетворяющий условиям (14), (16) при некотором векторе $\lambda_i \neq 0$.

Доказательство, ввиду полной его аналогии с [1, 2], мы не приводим.

Уравнения (14) представляют собой новую существенно более эффективную форму основных уравнений теории HP -отображений H -пространств с сохранением почти комплексной структуры, к исследованию вопроса о существовании (или несуществовании) которых мы переходим.

Условия интегрируемости системы уравнений (14) на основании (1) имеют вид

$$a_{\alpha(i} R_{j)ke}^{\alpha} = \lambda_{(i} [e g_{k)]j]} + \lambda_{(\alpha} [e g_{k)]\beta]} F_i^{\alpha} F_j^{\beta} + \lambda_{\alpha} F_{(i}^{\alpha} [e F_{k)]j]} - \lambda_{\alpha} F_{ek} (F_j^{\alpha}) \quad (17)$$

Сравнивая результаты свертывания (17) с g^{jk} и F^{ke} , получаем

$$2n(n-2) \lambda_{i,e} = 2(n-2) \nu g_{ie} + a_{\alpha\beta} B_{ie}^{\alpha\beta}; \quad (18)$$

$$B_{ie}^{\alpha\beta} = (2R_{i\gamma}^{\alpha\beta} + \delta_{\gamma}^{\beta} R_i^{\alpha}) ((n-1) \delta_e^{\gamma} - F_i^{\gamma} F_e^{\delta}) + n R_{e\delta}^{\gamma\alpha} F_i^{\delta} F_{\gamma}^{\beta},$$

где $\nu = \lambda_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta}$, $R_{i\cdot e}^{\alpha\beta} = g^{\beta\gamma} R_{i\gamma e}^{\alpha}$, R_e^{α} — смешанные компоненты тензора Риччи.

Ковариантным дифференцированием (18) по x^k , а затем альтернированием по k, e находим:

$$2(n-2)v_{[k}g_{e]k} + \lambda_{\alpha}A_{i[ek]}^{\alpha} + a_{\alpha\beta}B_{i[e,k]}^{\alpha\beta} = 0; \\ A_{ie k}^h = (\delta_{(\alpha}^h g_{\beta)k} - F_{(\alpha}^h F_{\beta)k})B_{ie}^{\alpha\beta} - n(n-2)R_{i e k}^h. \quad (19)$$

Свертывая (19) с g^{ie} и F^{ie} , обнаруживаем, что

$$2n(n-2)v_k = \lambda_{\alpha}C_k^{\alpha} + a_{\alpha\beta}D_k^{\alpha\beta}, \\ C_k^{\alpha} = 2n(n-2)R_k^{\alpha} - n(n-4)R_{\delta}^{\alpha}{}_{\gamma}{}^{\beta}F_{\gamma}^{\beta}F_{\beta}^{\delta} - \\ - 3n^2R_{\delta}^{\alpha}{}_{\gamma}{}^{\beta}F_{\beta}^{\delta}F_{\gamma}^{\beta} + 2n\delta_{\beta}^{\alpha}R_{\beta}{}_{\delta}{}^{\gamma\mu}F_{\mu}^{\beta}F_{\gamma}^{\delta}; \\ D_k^{\alpha\beta} = B_{i[k}^{\alpha\beta}g^{i\gamma]}g^{\gamma\delta} - B_{i[\mu}^{\alpha\beta}g^{\mu\gamma]}F^{\gamma\delta}F_{\delta}^{\alpha\beta}. \quad (20)$$

Соотношения (14), (18), (20) (обозначим их (A)) представляют собой замкнутую систему дифференциальных уравнений первого порядка типа Коши относительно искомых функций a_{ij} , λ_k , v . Итак, доказана

Теорема 5. Для того, чтобы H -пространство H_n ($n > 2$) допускало нетривиальное HP -отображение с сохранением почти комплексной структуры, необходимо и достаточно, чтобы система дифференциальных уравнений (A) имела нетривиальное решение $a_{ij}(x) (= a_{ij}(x), \det ||a_{ij}|| \neq 0)$, $\lambda_i (\neq 0)$, v , удовлетворяющее условиям (16).

Система (A) для начальных значений Коши $a_{ij}(x_0) = a_{ij}$, $\lambda_i(x_0) = \lambda_i$, $v(x_0) = v$ (21) имеет не более одного решения и потому число произвольных постоянных в общем решении уравнений (A) при условии (16) не превышает $N_0 = (m+1)^2$, ($n = 2m$).

Вопрос о существовании нетривиальных решений системы (A) сводится к исследованию ее условий интегрируемости и их дифференциальных продолжений, представляющих собой алгебраическую систему уравнений относительно неизвестных функций с коэффициентами из H_n .

Для первой группы (A) — уравнений (14) — условия интегрируемости получаются из (17) заменой в них производных от вектора λ_i выражениями из (16) в форме $a_{\alpha\beta}T_{ijke}^{\alpha\beta} + \lambda_{\alpha}P_{ijke}^{\alpha} = 0$ (22), где $T_{ijke}^{\alpha\beta} = 2n(n-2)\delta_{(i}^{\alpha}R_{j)ek}^{\beta} - B_{i[k}^{\alpha\beta}g_{e]k}O_{ij)}^{\alpha\beta}$; $P_{ijke}^{\alpha} = 2n(n-2) \times \times (F_{i, [e}^{\alpha}F_{k] | l}) - F_{ek, (l}F_{i)}^{\alpha}$; $O_{ij)}^{\alpha\beta} = \delta_i^{\alpha}\delta_j^{\beta} + F_{ij}^{\alpha\beta}$.

Условия интегрируемости второй группы системы (A) будем иметь после замены в (19) v_k согласно (20):

$$\lambda_{\alpha} \left(A_{i[ek]}^{\alpha} + \frac{1}{n} g_{i[e} C_{k]}^{\alpha} \right) + a_{\alpha\beta} \left(B_{i[e,k]}^{\alpha\beta} + \frac{1}{n} g_{i[e} D_{k]}^{\alpha\beta} \right) = 0. \quad (23)$$

Наконец, условия интегрируемости уравнений (20) таковы:

$$a_{\alpha\beta} (B_{i[e}^{\alpha\beta} C_{k]}^{\alpha\beta} + 2n(n-2) D_{[k,e]}^{\alpha\beta}) + 4n(n^2-4) v F_{[e}^{\alpha} R_{k]\beta}{}^{\delta} F_{\delta}^{\beta} + \\ + 2n(n-2) \lambda_{\alpha} [C_{[k,e]}^{\alpha} + (\delta_{(\alpha}^{\delta} g_{\beta)[e} - F_{(\alpha}^{\delta} F_{\beta)[e}) D_{k]}^{\alpha\beta}]. \quad (24)$$

Таким образом, условия интегрируемости системы (А) найдены нами в виде (22) — (24). Обозначим их через (Б), учитывая, что имеют место (16). Отметим, что (Б) и их дифференциальные продолжения, которые будем обозначать $(Б_1), (Б_2), \dots$, представляют собой систему линейных однородных алгебраических уравнений относительно a_{ij}, λ_j, v с коэффициентами из H_n . Поскольку число неизвестных функций конечно и равно $(m+1)^2$, найдется такое натуральное число s , что $(Б_s)$ и последующие продолжения окажутся следствиями $(Б), (Б_1), (Б_2), \dots, (Б_{s-1})$. Справедлива

Теорема 6. *H -пространство H_n ($n > 2$) допускает нетривиальное HP -отображение с сохранением почти комплексной структуры на H -пространство $\bar{H}_n$ тогда и только тогда, когда система уравнений $(Б), (Б_1), \dots, (Б_{s-1})$ имеет в H_n решение $a_{ij}(x) (= a_{ij}(x)), \lambda_i(x), v(x)$ причем $\det \|a_{ij}\| \neq 0, \lambda_i \neq 0$.*

Нетрудно найти пространства H_n с максимальной степенью подвижности [1, 7] N_0 относительно рассматриваемых отображений. Ответ дает

Теорема 7. *HP -плоские келеровы пространства H_n и только они являются пространствами с максимальной степенью подвижности относительно HP -отображений, сохраняющих почти комплексную структуру.*

Действительно, пусть (А) имеет решение в H_n при любых начальных значениях (21), удовлетворяющих (16). Тогда из (22) следует $P_{ijke}^{\alpha} \equiv 0$. При свертывании с F^{kj} отсюда получим $F_{i,e}^{\alpha} \equiv 0$. Максимально подвижные относительно исследуемых отображений H -пространства необходимо должны быть келеровыми, а значит, HP -плоскими [7]. Наоборот, если H_n — келерово HP -плоское, то непосредственной проверкой убеждаемся, что уравнения (Б) выполняются тождественно.

4. Перейдем к исследованию HP -отображений специальных H -пространств. Если тензор $T_{ijke}^{\alpha\beta}$ в (22) удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} (\bar{T}_{ijke}^{\mu\nu} O_{\mu\nu}^{\alpha\beta})_{,m} &= \bar{T}_{\gamma\delta\epsilon\eta}^{\mu\nu} O_{\mu\nu}^{\alpha\beta} A_{ijkem}^{\gamma\delta\epsilon\eta}; \\ \bar{T}_{ijke}^{\alpha\beta} &= T_{\gamma\delta\epsilon\eta}^{\alpha\beta} O_{ij}^{\gamma\delta} O_{ke}^{\epsilon\eta}, \end{aligned} \quad (25)$$

$A_{ijkem}^{\gamma\delta\epsilon\eta}$ — произвольный тензор типа $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, то из (22) в силу (1) следует $a_{\alpha\beta,m} \bar{T}_{ijke}^{\alpha\beta} + \frac{1}{4} a_{\alpha\beta} (\bar{T}_{ijke}^{\mu\nu} O_{\mu\nu}^{\alpha\beta})_{,m} = 0$, и, значит, $a_{\alpha\beta,m} \bar{T}_{ijke}^{\alpha\beta} = 0$. Дифференцируя ковариантно по x^m в H_n соотношения (22) с учетом (1) и (25), получаем

$$[n(\lambda_{\alpha} Q_{\beta})_{mke} - \lambda_{\gamma} g_{m(\alpha} Q_{\beta)ke}^{\gamma}] + g_{[k(\alpha} A_{\beta)m(e]} O_{i]}^{\alpha\beta} = 0, \quad (26)$$

где $Q_{imke} = R_{\alpha\beta\gamma\delta} O_{im}^{\alpha\beta} O_{ke}^{\gamma\delta}$; $A_{ime} = B_{\alpha m\beta} O_{ie}^{\alpha\beta}$;

$$\begin{aligned} B_{ime} &= -\lambda_{\alpha} Q_{(ie)m}^{\alpha} + g_{im} \lambda_{\alpha} Q_{\beta\cdot e}^{\alpha\beta} + \lambda_i Q_{m\beta\cdot e}^{\beta}; \quad Q_{\beta\cdot e}^{\alpha\beta} = Q_{\delta\beta\gamma\epsilon} g^{\delta\alpha} g^{\gamma\epsilon}, \\ Q_{m\beta\cdot e}^{\beta} &= Q_{m\beta\gamma\epsilon} g^{\beta\gamma}. \end{aligned} \quad (27)$$

Сравнивая результаты свертывания (26) с g^{im} и F^{ek} , находим

$$\begin{aligned} n^2(n^2 - 4)\lambda_{\alpha}Q_{\cdot j k e}^{\alpha} &= L_{[\alpha}g_{\beta]i}O_{ek}^{\alpha\beta} - \\ &- n^2\lambda_{\alpha}F_j^{\alpha}(4Q_{\gamma\beta\cdot e}^{\beta}F_k^{\gamma} + nQ_{\beta\gamma ek}F^{\beta\gamma}); \\ L_e &= n(n^2 - 4)\lambda_{\alpha}Q_{\cdot\beta\cdot e}^{\alpha\beta} + \lambda_e(4Q + n\tilde{Q}); \\ Q &= Q_{\alpha\beta\gamma\delta}g^{\alpha\delta}g^{\beta\gamma}; \quad \tilde{Q} = Q_{\alpha\beta\gamma\delta}F^{\alpha\beta}F^{\gamma\delta}. \end{aligned} \quad (28)$$

После свертывания (26) поочередно с g^{em} и g^{ij} несложные преобразования дают $(Q/n)F_{ij} = Q_{\alpha\beta ij}F^{\alpha\beta}$, $(Q/n)g_{ij} = Q_{i\alpha\cdot j}^{\alpha}$ (29). При циклировании (28) на основании полученных условий выясняется, что $\tilde{Q} = -2Q$ (30). С учетом (28) — (30) равенства (20) переписываются следующим образом

$$\lambda_{(\alpha}\tilde{Q}_{\beta)mek}O_{ij}^{\alpha\beta} = 0 \quad (31), \quad \text{где} \quad \tilde{Q}_{mjek} = n(n^2 - 4)Q_{mjek} + (n - 2) \times \\ \times (g_{j[lk}g_{e]m} + F_{j[lk}F_{e]m} - 2F_{jm}F_{ek}).$$

Очевидно, из (31) вытекает $\tilde{Q}_{mjek} = 0$, что ввиду (31), (27) и (30) представится в форме $R_{mjek} + R_{\alpha\beta ek}F_m^{\alpha}F_j^{\beta} + R_{mj\alpha\beta}F_e^{\alpha}F_k^{\beta} + R_{\alpha\beta\gamma\delta} \times \\ \times F_m^{\alpha}F_j^{\beta}F_e^{\gamma}F_k^{\delta} = \frac{4R}{n(n+2)}(g_{j[lk}g_{e]m} + F_{j[lk}F_{e]m} + 2F_{jm}F_{ek})$. Следовательно, наше H_n — обобщенно голоморфно плоское.

Таким образом, доказана

Теорема 7. *Пространства H_n ($n > 2$), удовлетворяющие условиям (25) и отличные от обобщенно голоморфно плоских, не допускают нетривиальных НР-отображений с сохранением почти комплексной структуры.*

Отметим, что рекуррентные и симметрические пространства H_n удовлетворяют условиям (25) и потому справедливо

Следствие. Рекуррентные и симметрические H -пространства H_n ($n > 2$), отличные от обобщенно голоморфно плоских, не допускают нетривиальных НР-отображений с сохранением почти комплексной структуры.

Список литературы: 1. Синюков Н. С. Геодезические отображения римановых пространств. — М.: Наука, 1979. — 255 с. 2. Домашев В. В., Микеш И. К теории голоморфно проективных отображений келеровых пространств. — Мат. заметки, 1978, 23, № 2, с. 297—304. 3. Беклемишев Д. В. Дифференциальная геометрия пространств с почти комплексной структурой. — Итоги науки. Геометрия, 1965, с. 165—212. 4. Otsuki T., Tashiro Y. On curves in Kählerian space. — Math. Journ. Okayama Univ., 1954, 4, № 1, p. 57—78. 5. Tashiro Y. On holomorphically projective correspondences in an almost complex space. — Math. Journ. Okayama Univ., 1957, 6, № 2, p. 142—152. 6. Ishihara S. Holomorphically projective changes and their groups in an almost complex manifold. — Tohoku Math. Journ., 1957, 9, № 3, p. 273—297. 7. Микеш И. О голоморфно проективных отображениях келеровых пространств. — Укр. геометр. сб., 1980, вып. 23, с. 90—98.

Поступила в редколлегию 15.10.82.

ПРИМЕНЕНИЕ ТОПОЛОГИИ В НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ КОМБИНАТОРНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Эта заметка дополняет работы автора [1—3]. Будем интерпретировать пространство $SO(n)$ сохраняющих ориентацию изометрий пространства R^n как пространство $U_{n-1,n}$ ортонормированных $(n-1)$ -векторников в R^n с центром в точке O . Группа Z_2 действует на $SO(n)$: ее образующая обращает знаки векторов соответствующих $(n-1)$ -векторников; эту инволюцию $SO(n)$ обозначим через T . Группа Z_2 также обычным образом действует на сферах: ее образующая симметрично отражает стандартную сферу относительно $O \in R^n$. В этой заметке будет использовано утверждение, что при $k \leq n-2$ не существует Z_2 -гомоморфизма $SO(n)$ в S^k . При $k = n-1$ обычное расслоение $SO(n) \rightarrow S^{n-1}$ дает пример такого гомоморфизма.

1. Как и в работах [1—3], обозначим через $M(N)$ класс ограниченных центрально симметричных многогранников в R^n , описанных вокруг шара единичного диаметра и имеющих $2N$ граней.

Теорема 1. Если T переводит многогранник $m \in M(2n-1)$ в себя, изменяя порядок в $n-1$ парах противоположащих граней, то m — универсальная покрывка, т. е. способен покрыть любое множество диаметра 1.

Действительно, если m не является универсальной покрывкой, то по теореме 1 [1] возникает Z_2 -гомоморфизм $SO(n)$ в S^{n-2} , чего не может быть.

Следствие 1. При четном n все многогранники $m \in M \times \times (2n-1)$ суть универсальные покрывки.

Действительно, при четном n симметрия относительно $O \in R^n$ сохраняет ориентацию и изменяет порядок во всех парах противоположащих граней m .

Следствие 2. Для любого k -мерного многогранника $m \in M(n+k-1)$, где $k < n$, и любого n -мерного тела единичного диаметра найдется k -мерная плоскость, ортогональная проекция на которую этого тела может быть покрыта m .

Положив $k = 2$, получим

Следствие 3. Пусть в R^2 многоугольник $m \in M(n+1)$. Тогда ортогональная проекция всякого n -мерного тела единичного диаметра на некоторую 2-плоскость может быть покрыта многоугольником m .

Теорема 2. При четном n в классе многогранников $M \times \times \left(\frac{n^2 + 4n}{4} \right)$ есть n -мерная универсальная покрывка. При нечетном n есть универсальная покрывка в $M \left(\frac{n^2 + 4n - 1}{4} \right)$.

Доказательство получается методом математической индукции с применением следствия 3. Искомые покрывающие будут произведениями многоугольников из следствия 3. Этот результат интересно сопоставить с результатами работ [2, 3], согласно которым при $N > n(n+1)/2$ все элементы $M(N)$ — не универсальные покрывающие в R^n и при любом n существует не универсальная покрывающая в $M(3n-2)$. Это показывает, сколь тонким является вопрос о том, какие элементы $M(N)$ являются универсальными покрывающими.

Закончим пункт замечанием о центрально симметричных многогранниках, описанных (касающихся всеми гранями) вокруг произвольного ограниченного тела K в R^n .

Всякому набору осей проведенных через начало $O \in R^n$, из которых первые n штук находятся в общем положении, соответствует ограниченный многогранник, описанный вокруг K . Он ограничен парами опорных гиперплоскостей K , ортогональными прямыми набора. Следующее утверждение аналогично теореме 1.

Теорема 3. Пусть T переводит набор осей $l = l_1, l_2, \dots, l_{2n-1}$ в себя и при этом переводит каждую из осей $l_{n+1}, \dots, l_{2n-1}$ в себя с обращением ориентации. Тогда l можно повернуть так, что соответствующий многогранник будет центрально симметричным.

Следствие. Для всякого набора $l = l_1, \dots, l_{n+k-1}$ проведенных через $O \in R^k$ осей вокруг некоторой k -мерной ортогональной проекции n -мерного тела K можно описать центрально симметричный порожденный l многогранник.

2. Рассмотрим несколько известных задач. Многие авторы (см. [4, с. 35]) изучали свойства центров тяжести гиперплоских сечений выпуклого тела. Известно, что каждая внутренняя точка тела является центром тяжести некоторого такого сечения. Покажем это. Пусть K — ограниченное выпуклое тело в R^n и $x \in \text{Int } K$. Каждому ортонормированному $(n-1)$ -векторнику v с вершиной в x сопоставим проекции на оси v центра тяжести сечения K гиперплоскостью, натянутой на v . Возникает непрерывное отображение $f: SO(n) \rightarrow R^{n-1}$ со свойством $f(Tv) = -f(v)$. Если x не является центром тяжести никакого гиперплоского сечения K , то $f(SO(n))$ не содержит $O \in R^{n-1}$, и отображение $f/\|f\|$ задает Z_2 -гомоморфизм $SO(n)$ в S^{n-2} .

Некоторые авторы изучали множества хорд выпуклого тела K , делящихся пополам данной точкой $x \in \text{Int } K$ (см. [4, с. 34]).

Теорема 4. Всякий набор $n-1$ осей, проходящих через x , можно повернуть так, что отсекаемые на осях границей тела K хорды будут делиться пополам точкой x .

Каждому положению набора осей сопоставим набор разностей длин отрезков хорд, отсекаемых на осях телом K (порядок отрезков хорд нужно установить заранее). Возникает непрерывное отображение $f: SO(n) \rightarrow R^{n-1}$ со свойством $f(Tv) = -f(v)$, т. е. ситуация, рассмотренная выше.

Заметим, что число $n-1$ нельзя заменить на n .

Теорема 5. При четном n (соответственно при нечетном n) такой набор из $n^2/4$ осей ($((n^2-1)/4$ осей), что для любого ограниченного выпуклого тела K и точки $x \in \text{Int } K$ этот набор всегда можно повернуть так, что все высекаемые на осях телом K хорды будут делиться точкой x пополам. Это утверждение заведомо перестает быть верным, если число осей равно $n(n-1)/2$.

Эта теорема аналогична теореме 2. Первая часть теоремы получается методом математической индукции с использованием теоремы 4. Вторая доказывается методом работы [3].

3. Докажем существование у многомерного тела постоянной ширины почти шаровой проекции.

Тело $K \subset R^n$ называется ε -асферическим, если оно содержит некоторый шар и содержится в гомотетичном ему шару с коэффициентом $1+\varepsilon$ и тем же центром.

Во всем дальнейшем будет удобно считать $\varepsilon < 1/3$.

Теорема 6. Если $n \geq k \sin^{1-k} \sqrt{\varepsilon/12}$, то для всякого n -мерного тела постоянной ширины найдется k -мерная плоскость, ортогональная проекция этого тела на которую ε -асферична.

Начнем с простых лемм.

Лемма 1. Если тело постоянной ширины 1 содержится в шаре диаметра $1+\varepsilon$, то оно содержит шар диаметра $1-\varepsilon$ с тем же центром.

Если бы это было не так, то данное тело содержалось бы в исходном шаре диаметра $1+\varepsilon$, от которого отрезана гиперплоскостью шапка высоты больше ε . Но эта покрывка сама имеет ширину меньше единицы в некотором направлении.

Лемма 2. Если тело постоянной ширины 1 содержится в шаре диаметра $1+\varepsilon/3$, то оно ε -асферично.

По лемме 1 данное тело содержит шар диаметра $1-\varepsilon/3$ с тем же центром. Отношение диаметров шаров равно $\frac{1+\varepsilon/3}{1-\varepsilon/3} < 1+\varepsilon$.

Лемма 3. Пусть система A точек на сфере единичного диаметра такова, что шары углового радиуса ε с центрами в этих точках покрывают всю сферу. Тогда ограниченный касательными в точках A гиперплоскостями многогранник содержится в шаре диаметра $1+\varepsilon^2$.

Для всякой исходящей из центра сферы прямой l найдется точка $a \in A$, угловое расстояние от которой до точки пересечения l со сферой не больше ε . Касательная гиперплоскость в точке a высекает на l (считая от центра) отрезок длины не более

$$1/2 \cos \varepsilon = 1/2 \sqrt{1 - \sin^2 \varepsilon} \leq 1/2 \sqrt{1 - \varepsilon^2} \leq (1 + \varepsilon^2)/2.$$

Лемма 4. В действительном проективном пространстве RP^{n-1} можно выбрать такие $N \leq n \sin^{1-n}(\varepsilon/2)$ точек, что шары радиуса ε с центрами в них покрывают все пространство.

Будем выбирать очередную точку (пока это возможно) шаров радиуса ε с центрами в уже выбранных точках. Тогда шары радиуса $\varepsilon/2$ с центрами в выбранных точках попарно не пересекаются, поэтому сумма их объемов не превосходит объем пространства. Объем пространства равен $n\pi^{n/2}/2\Gamma(n/2 + 1)$ ([5, с. 250]). Объем шара радиуса $\varepsilon/2$ не меньше объема его проекции на касательную гиперплоскость в его центре, который равен $\pi^{(n-1)/2} \sin^{n-1} \frac{\varepsilon}{2} / \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)$. Обозначим через N число выбранных

точек. Так как $N\pi^{(n-1)/2} \sin^{n-1} \frac{\varepsilon}{2} / \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \leq n\pi^{n/2}/2\Gamma(n/2 + 1)$

то $N \leq \sqrt{\pi} n \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) / 2\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right) \sin^{n-1} \frac{\varepsilon}{2} \leq n \sin^{1-n} \frac{\varepsilon}{2}$.

Перейдем теперь к доказательству теоремы 6. По лемме 2 достаточно доказать существование k -мерной проекции, содержащейся в шаре диаметра $1 + \varepsilon/3$. Для этого достаточно доказать существование k -мерной проекции, покрываемой многогранником $M(N)$ диаметра $1 + \varepsilon/3$. По лемме 3 и 4 такие многогранники имеются в $M(N)$ при $N \geq k \sin^{1-k} \sqrt{\varepsilon/12}$. С другой стороны, по следствию 2 из теоремы 1 любой k -мерный многогранник $M(n+k-1)$ покрывает некоторую k -мерную проекцию тела. Но по условию $n \geq k \sin^{1-k} \sqrt{\varepsilon/12}$, тем более $n+k-1 \geq k \times \sin^{1-k} \sqrt{\varepsilon/12}$. Теорема 6 доказана.

4. Здесь будет доказано существование широких классов многомерных выпуклых тел, обладающих почти симметричными сечениями и проекциями.

Назовем n -мерное тело K ε -асимметричным, если оно содержит некоторое центрально симметричное выпуклое тело и содержится в гомететичном ему теле с коэффициентом $1 + \varepsilon$ и тем же центром. Как и раньше, считаем в дальнейшем $\varepsilon < 1/3$.

Теорема 7. Пусть n -мерное тело K единичного диаметра содержит шар D радиуса R . Если $n \geq k \sin^{1-k} R^2 \varepsilon + 1$, то через центр D проходит k -мерное ε -асимметричное сечение K .

Лемма 5. Если выпуклое тело $K \subset R^n$ содержит шар D радиуса R , то гомететичное ему тело K' с центром гомететии в центре D и коэффициентом $1 + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) содержит εR -окрестность K .

Пусть прямая l выходит из центра O шара D и пересекает границы тел K и K' соответственно в точках A и A' , а H и H' — основания перпендикуляров, опущенных соответственно из точек O и A' на какую-нибудь опорную гиперплоскость тела K в точке A . Из подобия треугольников $AA'H'$ и AON получаем $A'H' = \varepsilon ON$, а так как $ON \geq R$, то $A'H' \geq \varepsilon R$. Следовательно, все точки границы K' удалены от K не менее, чем на εR .

Во всем дальнейшем множество $A \subset RP^{n-1}$ будем считать указанным в лемме 4. Точки A часто будем интерпретировать как проведенные через $O \in R^n$ прямые.

Лемма 6. Если отсекаемые на прямых из A границей тела K отрезки делятся центром O шара D пополам, то это тело $(\varepsilon/2R^2)$ -асимметрично.

Рассмотрим содержащееся в K симметричное относительно O тело S , натянутое на шар D и отрезки, отсекаемые телом K на прямых из A . Для любой точки N границы K найдется такая прямая $l \in A$, что угол между l и ON не больше ε . Обозначим через M ту точку пересечения l с границей K , для которой $\angle MON \leq \varepsilon$. Возможны два случая: отрезок MN пересекает или не пересекает D .

В первом случае опустим высоту OH на сторону MN в треугольнике OMN . По условию точка H лежит на стороне MN , поэтому $MN = OH (\operatorname{tg} \angle MOH + \operatorname{tg} \angle NOH) \leq R \sin \varepsilon / \cos^2 \varepsilon \leq R\varepsilon / (1 - \varepsilon^2)$.

Во втором случае вычислим двумя способами площадь треугольника MON . С одной стороны она равна $MN \cdot h/2$, где h — высота из вершины O . Из того, что MN не пересекает D , следует, что $h \geq R$, поэтому искомая площадь не меньше $MN \cdot R/2$. С другой стороны, эта площадь равна $(1/2) OM \cdot ON \cdot \sin \angle MON \leq \varepsilon/4$, так как $OM \leq 1/2$. Таким образом, $MN \cdot R/2 \leq \varepsilon/4$, поэтому $MN \leq \varepsilon/2R$.

Следовательно, всегда $MN \leq \varepsilon/2R$, ибо $\varepsilon/2R \geq R\varepsilon / (1 - \varepsilon^2)$, так как $R \leq 1/2$. Мы доказали, что K лежит в $(\varepsilon/2R)$ -окрестности S , тем более по лемме 5 K содержится в гомотетичном S теле с коэффициентом $1 + \varepsilon/2R^2$ и тем же центром.

Теперь докажем теорему 7. В RP^{k-1} выберем $2R^2\varepsilon$ -сеть A из не более чем $k \sin^{1-k} R^2\varepsilon$ точек. Если все отсекаемые на прямых A телом K отрезки делятся центром O шара D пополам, то по лемме 6 теорема доказана. Но по теореме 4 любой $(n-1)$ -векторник можно повернуть так что все соответствующие отрезки будут делиться точкой O пополам, поэтому при $n-1 \geq k \sin^{1-k} R^2\varepsilon$ теорема 7 верна.

Замечание. Все тела постоянной ширины обладают указанным в теореме 7 свойством, так как всякое n -мерное тело постоянной ширины 1 содержит шар радиуса $(\sqrt{2n/(n+1)} - 1)/2$.

Теорема 8. Если n -мерное тело K единичного диаметра имеет во всех направлениях ширину $\geq h$ и $n \geq k \sin^{1-k} (h\varepsilon/5)$, то некоторая ортогональная k -мерная проекция K будет ε -асимметрична.

Под опорной функцией в дальнейшем будет понимать ее сужение на единичную сферу S^{n-1} .

Лемма 7. Опорная функция ограниченного подмножества R^n удовлетворяет условию Липшица причем константа Липшица не превосходит верхней грани расстояний точки O до точек границы множества.

Лемма 8. Пусть функции f и g , удовлетворяющие условию Липшица с константой C на метрическом пространстве (X, ρ) , совпадают на некоторой ε -сети. Тогда $|f(x) - g(x)| \leq 2C\varepsilon$.

Действительно, $|f(x) - g(x)| \leq |f(x) - f(a)| + |g(x) - g(a)| \leq 2C\rho(x, a)$ для любой точки a из указанной в формулировке сети. Остается выбрать a так, что $\rho(x, a) \leq \varepsilon$.

Теперь докажем теорему 8. Опишем по следствию теоремы 3 вокруг некоторой k -мерной проекции K' тела K центрально симметричный многогранник, порожденный множеством $A \subset R^{k+1}$. По лемме 3 диаметр этого многогранника не превосходит $1 + \varepsilon^2 \leq 10/9$. Опорные функции f и g проекции K' и этого многогранника по построению совпадают на A и по лемме 7 удовлетворяют на S^{k-1} условию Липшица с константой $5/9$. Значит, по лемме 8 $|f(x) - g(x)| \leq (10/9)\varepsilon$. По условию теоремы 8 опорная функция многогранника $g(x) \geq h/2$. Получим: $|g(x) - f(x)| \leq (10/9)\varepsilon \leq (10/9)\varepsilon 2g(x)/h \leq 5\varepsilon g(x)/2h$, следовательно, $g(x) - f(x) \leq 5\varepsilon \times g(x)/2h$. Иначе: $f(x) \geq (1 - 5\varepsilon/2h)g(x)$. Поэтому K' содержит гомотетичный вышеуказанному многограннику с коэффициентом $1 - 5\varepsilon/2h$ и тем же центром. Теорема 8 доказана.

Результаты теорем 6—8 по духу близки теореме Дворецкого [6] о существовании почти сферического сечения многомерного центрально симметричного выпуклого тела. Проведя более точные вычисления, можно было бы улучшить оценки в теоремах, однако делать это нецелесообразно: оценки получается степенными, и использованные методы ничего не позволяют сказать об их точности.

Список литературы: 1. *Макеев В. В.* Универсальные покрывающие. 1.—Укр. геометр. сб., 1981, вып. 24, с. 70—79. 2. *Макеев В. В.* Универсальные покрывающие. 2.—Укр. геометр. сб., 1982, вып. 25, с. 82—86. 3. *Макеев В. В.* Размерностные ограничения в задачах комбинаторной геометрии.—Сиб. мат. журн., 1982, № 15, с. 23—40. 4. *Грюнбаум Б.* Этюды по комбинаторной геометрии и теории выпуклых тел.—М.: Наука, 1971.—95 с. 5. *Шилов Г. Е.* Математический анализ функции нескольких вещественных переменных.—М.: Наука, 1972.—620 с. 6. *Dvoretzky A.* Some results on convex bodies and Banach spaces.—Proc. Internat. Sympos. on Linear Spaces, Jerusalem, 1960, p. 123—160.

Поступила в редколлегию 09.04.82.

УДК 513

Л. А. Масальцев

**О ДВУМЕРНЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ С НУЛЕВЫМ
НОРМАЛЬНЫМ КРУЧЕНИЕМ В E^4**

В работах [1, 2] исследовалось множество R двумерных поверхностей четырехмерного евклидова пространства E^4 , нормальное кручение которых в любой точке по любому направлению равно нулю. С. Б. Кадомцев [1] получил условие принадлежности поверхности множества R некоторой гиперплоскости в E^4 . В. Т. Фоменко [2] исследовал поверхности множества R в зависимости от свойств эллипса нормальной кривизны (см. [3, с. 252]). Он доказал ряд теорем, в которых в зависимости от расположения эллип-

на нормальной кривизны из принадлежности поверхности множества R следует, что либо поверхность является гиперплоской, либо гиперсферической с постоянной средней и нулевой внутренней кривизной. На основании этого он сделал предположение, что множество R исчерпывается гиперплоскими и указанными гиперсферическими поверхностями.

В этой заметке мы записываем в специальных координатах уравнения поверхностей множества R в E^4 , полученные В. Т. Фоменко [2], и выводим некоторые следствия из них.

Пусть F двумерная поверхность в E^4 . Введем на F ортогональные координаты u, v так, чтобы конец вектора кривизны в каждой точке для линии u был расположен в одной из вершин эллипса нормальной кривизны. Если обозначить через a и b полуоси, α и β — координаты центра этого эллипса в нормальной плоскости, то вторые квадратичные формы F в E^4 таковы:

$$\begin{aligned} II(n_1) &= (\alpha + a) Edu^2 + (\alpha - a) Gv^2; \\ II(n_2) &= \beta Edu^2 + 2b\sqrt{EG} dudv + \beta Gdv^2, \end{aligned}$$

где E, G — коэффициенты метрики F : $ds^2 = Edu^2 + Gdv^2$. Обозначим через $\mu_1 = (n_1, n_{2u})$, $\mu_2 = (n_1, n_{2v})$ коэффициенты кручения и через K гауссову кривизну F . В этих обозначениях основные уравнения Гаусса — Риччи — Кодацци выглядят следующим образом: $K = \alpha^2 + \beta^2 - a^2 - b^2$; $\mu_{2u} - \mu_{1v} = 2ab\sqrt{EG}$; $aE_v + E(\alpha + a)_v = -\mu_2\beta E + \mu_1 b\sqrt{EG}$; $aG_u - G(\alpha - a)_u = -\mu_2 b\sqrt{EG} + \mu_1\beta G$; $\beta_v = \mu_2(\alpha + a) + (EG)^{-\frac{1}{2}}(Gb)_u$; $\beta_u = \mu_1(\alpha - a) + (EG)^{-\frac{1}{2}}(Eb)_v$. Величина $\kappa = 2ab$ определяет гауссово кручение поверхности [3, с. 254]. Знак гауссова кручения зависит от того, соответствует ли ориентация обхода эллипса нормальной кривизны направлению вращения касательного вектора в точке $x \in F$. Если эллипс описывается в положительном направлении (против часовой стрелки) при соответствующем вращении касательного вектора, то $\kappa > 0$. Если $\kappa < 0$, то одну из величин a или b следует считать отрицательной.

Уравнения поверхностей множества R в E^4 были получены В. Т. Фоменко [2, с. 595]. Они представляют собой систему шести уравнений в частных производных. С сохранением нумерации, принятой в [2], в наших обозначениях они выглядят следующим образом:

$$\beta(\alpha + a)_u - (\alpha + a)\beta_u - Ev\sqrt{EG}(\alpha + a)_v + ((\alpha + a)^2 + \beta^2)\mu_1 = 0; \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & -(\alpha + a)\beta_v + \beta(\alpha + a)_v - 2\sqrt{G/E}((\alpha + a)b_u - b(\alpha + a)_u) - \\ & - 2a\beta \frac{E_v}{E} + \frac{(\alpha + a)bG_u}{\sqrt{EG}} + 4\beta b\sqrt{G/E}\mu_1 + ((\alpha + a)^2 + \beta^2)\mu_2 = 0; \quad (2) \end{aligned}$$

$$\beta\alpha_u - \alpha\beta_u + \sqrt{E/G}(b(\alpha + a)_v - (\alpha + a)b_v) + \beta a \frac{G_u}{G} -$$

$$-\frac{abE_v}{\sqrt{EG}} + \mu_1(\alpha^2 - a^2 + \beta^2 + 2b^2) + \mu_2 2b\beta \sqrt{E/G} = 0; \quad (3)$$

$$\beta(\alpha - a)_v - (\alpha - a)\beta_v - \frac{(\alpha - a)bG_u}{\sqrt{EG}} + \mu_2((\alpha - a)^2 + \beta^2) = 0; \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \beta(\alpha - a)_u - (\alpha - a)\beta_u + 2\sqrt{E/G}(b(\alpha - a)_v - (\alpha - a)\beta_v) + \\ + 2\beta a \frac{G_u}{G} + (\alpha - a)b \frac{E_v}{E} + \mu_1((\alpha - a)^2 + \beta^2 + \\ + 4\beta b \sqrt{E/G}) \mu_2 = 0; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \beta\alpha_v - \alpha\beta_v + \sqrt{G/E}(b(\alpha - a)_u - (\alpha - a)\beta_u) - \beta a \frac{E_v}{E} + \\ + \frac{abG_u}{\sqrt{EG}} + \mu_2(2b^2 + \alpha^2 + \beta^2 - a^2) + \\ + 2\beta b \sqrt{G/E} \mu_1 = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

В дополнение к доказанным в [2] теоремам о поверхностях множества R в зависимости от свойств эллипса нормальной кривизны докажем утверждение.

Теорема. Пусть в каждой точке поверхности F класса C^3 в E^4 полюсы эллипса нормальной кривизны связаны соотношением $a = \sigma b$ ($\sigma = \text{const}$). Тогда, если $F \in R$, то F есть либо гиперплоская поверхность, либо гиперболлическая с постоянной средней и нулевой внутренней кривизной.

Обозначим через R_i левую часть соответствующего уравнения из системы уравнений поверхности множества R . Составим из них два уравнения-следствия:

$$2R_6 - R_4 - R_2 = 0, \quad 2R_3 - R_5 - R_1 = 0.$$

После преобразований они примут вид $ab_u - ba_u = \sqrt{E/G}(a^2 - b^2)\mu_2$, $ba_v - ab_v = \sqrt{G/E}(a^2 - b^2)\mu_1$.

Отсюда следует, что если $a \neq \pm b$, то

$$\mu_1 = -\sqrt{E/G}U_v, \quad \mu_2 = \sqrt{G/E}U_u,$$

где $U = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{a+b}{a-b} \right|$. Случай $\sigma = \pm 1$ был рассмотрен в [2, следствие 3]. Там доказано, что всякая поверхность класса C^3 с круговыми точками, т. е. эллипс нормальной кривизны которой является окружностью, принадлежащая множеству R , лежит в некоторой гиперплоскости. Если $\sigma \neq \pm 1$, то функция U определена и постоянна на F . Следовательно, $\mu_1 = \mu_2 = 0$. Из уравнения Риччи следует тогда, что гауссово кручение $\kappa = 0$. Поэтому на поверхности существует сеть линий кривизны. По теореме 1 работы [2] поверхность F либо гиперплоская, либо гиперболлическая с указанными свойствами.

Следствие 1. Пусть F — компактная поверхность без края класса C^1 в E^4 , каждая точка которой не является круговой. Тогда если $F \in R$, то ее инвариант Уитни равен нулю.

Инвариант Уитни равен сумме индексов особенностей произвольного нормального поля на поверхности F в E^4 . В работе [4] доказана следующая формула

$$2\pi v(F) = - \int_F \kappa dS, \quad (7)$$

где $v(F)$ — инвариант Уитни; κ — кручение Гаусса.

Для доказательства найденные в теореме выражения коэффициентов кручения μ_1, μ_2 подставим в уравнение Риччи. Получим уравнение $\Delta U = 2ab = \kappa$, где Δ — оператор Лапласа метрики поверхности F . Функция $U = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{a+b}{a-b} \right|$ из-за отсутствия круговых точек определена и непрерывна на всей поверхности F . Подставляя полученное выражение для κ в формулу (7) получим нуль.

Следствие 2. Пусть F — компактная поверхность без края класса C^4 в E^4 , каждая точка которой не является круговой. Тогда если $F \in R$ и её гауссово кручение неотрицательно (неположительно), то F есть либо гиперплоская поверхность, либо гиперсферическая с постоянной средней и нулевой внутренней кривизной.

Для доказательства снова используем связь $\Delta U = \kappa$. Поскольку κ неотрицательно (неположительно), по теореме Э. Хопфа [5] заключаем, что $U = \text{const}$, $\kappa = 0$. Для завершения доказательства достаточно сослаться на теорему, установленную выше.

Список литературы: 1. Кадомцев С. Б. Исследование некоторых свойств нормального кручения двумерной поверхности в четырехмерном пространстве. — Пробл. геометрии. Итоги науки и техники, 1975, № 7, с. 267—278. 2. Фоменко В. Т. Некоторые свойства двумерных поверхностей с нулевым нормальным кручением в E^4 . — Мат. сб., 1978, 106, № 4, с. 589—603. 3. Картан Э. Риманова геометрия в ортогональном репере. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1960. — 307 с. 4. Аминов Ю. А. Кручение двумерных поверхностей в евклидовых пространствах. — Укр. геометр. сб., 1975, вып. 17, с. 3—14. 5. Яно К., Бохнер С. Кривизна и числа Бетти. — М.: Изд-во иностр. лит., 1957. — 212 с.

Поступила в редколлегию 26.10.81.

А. Д. Милка

**КРИВЫЕ СО СПРЯМЛЯЕМЫМ СФЕРИЧЕСКИМ
ОБРАЗОМ НА ВЫПУКЛОЙ ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ**

Пусть S — выпуклая гиперповерхность в R^n , X_1 и X_2 — точки на S , r_1 и r_2 — их радиусы-векторы, n_1 и n_2 — внешние, не обязательно единичные, нормали к S , отложенные от этих точек. Тогда из выпуклости гиперповерхности, $n_1(r_1 - r_2) \geq 0$ и $n_2(r_2 - r_1) \geq 0$, и справедливо известное неравенство $(n_1 - n_2)(r_1 - r_2) \geq 0$ (1). Обозначим: Y_1 и Y_2 — свободные концы нормалей n_1 и n_2 , а ρ_1 и ρ_2 — их радиусы-векторы. Точки X_1 и X_2 , бли-

жайшие на гиперповерхности к Y_1 и Y_2 , называют проекциями точек Y_1 и Y_2 на S . Оказывается, длины отрезков $|Y_1 Y_2|$, $|X_1 X_2|$ и отклонение векторов $|n_1 - n_2|$ связаны определенными соотношениями, следующими из выпуклости рассматриваемой гиперповерхности. Выведем эти соотношения.

Добавим к обеим частям неравенства (1) по одинаковому слагаемому $(r_1 - r_2)^2$. Тогда получим $(r_1 + n_1 - r_2 - n_2)(r_1 - r_2) \geq (r_1 - r_2)^2$ или $(\rho_1 - \rho_2)(r_1 - r_2) \geq (r_1 - r_2)^2$. Отсюда находим первое соотношение: $|\rho_1 - \rho_2| \geq |r_1 - r_2|$.

Этим доказано следующее утверждение, известное как лемма Буземана и Феллера: при проектировании на выпуклую гиперповерхность пространственные расстояния между точками не увеличиваются.

Отсюда вытекает

Теорема Буземана и Феллера. При проектировании на выпуклую гиперповерхность спрямляемых кривых длины этих кривых не увеличиваются.

Сформулированные результаты играют большую роль в теории общих выпуклых поверхностей [1—3].

Добавим к обеим частям неравенства (1) по одинаковому слагаемому $(n_1 - n_2)^2$. Тогда получим $(n_1 + r_1 - n_2 - r_2)(n_1 - n_2) \geq (n_1 - n_2)^2$, или $(\rho_1 - \rho_2)(n_1 - n_2) \geq (n_1 - n_2)^2$. Отсюда находим второе, новое соотношение: $|\rho_1 - \rho_2| \geq |n_1 - n_2|$.

Этим доказано следующее утверждение, являющееся аналогом леммы Буземана и Феллера.

Лемма. Отклонение внешних нормалей к выпуклой гиперповерхности, отложенных от любых ее точек, не превосходит пространственного расстояния между свободными концами этих нормалей.

Отсюда вытекает

Теорема. Любые две точки на выпуклой гиперповерхности соединяются спрямляемой кривой, имеющей спрямляемое сферическое изображение.

В этой теореме, если гиперповерхность общая, рассматривается не обязательно полный, а лишь однозначный сферический образ указанной кривой.

Замечание. На выпуклой поверхности геодезическая линия, даже в окрестности каждой внутренней точки, может иметь неспрямляемое сферическое изображение [4].

Для доказательства теоремы достаточно воспользоваться следующим построением. Рассматривается выпуклая гиперповерхность, составленная из точек, находящихся на единичном расстоянии вне S . На этой гиперповерхности берется (с большим произволом) спрямляемая кривая, концы которой имеют проекциями на S две заданные точки. Проекция взятой кривой на S и будет искомой спрямляемой линией со спрямляемым сферическим изображением.

Приведенная теорема может оказаться полезной в решении вопроса о нахождении аналога утверждения об однозначном опреде-

линии регулярной поверхности ее первой и третьей квадратичными формами [1, с. 356]. В этом направлении было бы желательно доказать (или опровергнуть, что маловероятно) следующие утверждения.

На изометричных выпуклых поверхностях любые соответствующие по изометрии пары точек соединяются также соответствующими по изометрии спрямляемыми кривыми, имеющими одновременно спрямляемые сферические изображения.

Пусть S_1 и S_2 — изометричные выпуклые поверхности. Предположим, что на этих поверхностях любые соответствующие по изометрии пары точек соединяются также соответствующими по изометрии спрямляемыми кривыми, имеющими спрямляемые и равной длины сферические изображения. Тогда поверхности S_1 и S_2 конгруэнтны.

Замечание. При изгибании выпуклой поверхности для геодезической линии свойство спрямляемости сферического изображения не обязательно сохраняется [5].

Список литературы: 1. Александров А. Д. Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей. — М.; Л.: Гостехиздат, 1948. — 387 с. 2. Погорелов А. В. Внешняя геометрия выпуклых поверхностей. — М.: Наука, 1969. — 759 с. 3. Бузман Г. Выпуклые поверхности. — М.: Наука, 1969. — 238 с. 4. Милка А. Д. Кратчайшая с неспрямляемым сферическим изображением. 1. — Укр. геометр. сб., 1974, вып. 16, с. 35—52. Ч. 2 — там же, 1975, вып. 18, с. 98—107, 5. Милка А. Д. Неинвариантность особенности у кратчайшей линии при изгибании выпуклой поверхности. — Укр. геометр. сб., 1976, вып. 19, с. 112—124.

Поступила в редколлегию 01.11.82.

В. И. Мягков

КОМПЛЕКСЫ С СИММЕТРИЧНЫМ РАСПОЛОЖЕНИЕМ
ИНФЛЕКЦИОННЫХ ЦЕНТРОВ

Уравнения комплекса прямых, отнесенного к нормальному сопровождающему трехграннику луча [1], имеют вид

$$\begin{aligned}\omega^2 &= k\omega_3^1; \\ \omega_1^2 &= p\omega^1 + \alpha\omega_3^1 + \beta\omega_3^2; \\ dk &= \alpha\omega^1 + q\omega_3^1 + \gamma\omega_3^2; \\ -\omega^3 + k\omega_1^2 &= \beta\omega^1 + \gamma\omega_3^1 + r\omega_3^2.\end{aligned}$$

Вектор e_3 направлен по лучу, а вершина репера — точка A — совпадает с центром луча комплекса. Так как каждый луч комплекса определяется тремя параметрами u, v, θ , то формы ω^i, ω_i являются линейными дифференциальными формами Пфаффа, зависящими от трех переменных u, v, θ и их дифференциалов.

Формы ω_i^j , ω_i^j , определяющие для репера $T = \{A, e_1, e_2, e_3\}$ бесконечно малое смещение $dA = \omega_i^j e_i, de_i = \omega_i^j e_j$, удовлетворяют условиям $\omega_i^j + \omega_j^i = 0$ и уравнениям структуры евклидова пространства [2]:

$$D\omega_i^j = [\omega_i^k \omega_k^j], \quad D\omega_j^i = [\omega_i^k \omega_k^j], \quad i, j, k = 1, 2, 3.$$

В общем случае на каждом луче комплекса (1) существуют четыре замечательные точки — инфлекционные центры луча комплекса. Абсцисса t инфлекционного центра $M = A + te_3$ удовлетворяет уравнению четвертой степени

$$pt^4 - 2\alpha t^3 + (2k\beta + q)t^2 - 2k\gamma t + k^2r = 0. \quad (2)$$

Поскольку при $k = 0$ понятие инфлекционного центра теряет смысл, то в (2) и всюду в дальнейшем предполагаем, что $k \neq 0$. Свойства инфлекционных центров описаны Н. И. Кованцовым в монографии [1].

В предлагаемой заметке ставится задача исследовать классы комплексов, на каждом луче которых четверка инфлекционных центров расположена симметрично относительно центра луча.

Рассмотрим следующие случаи.

1. Каждый луч комплекса имеет один бесконечно удаленный инфлекционный центр. Тогда $p = 0$, $\alpha \neq 0$. Из симметричного расположения оставшихся трех инфлекционных центров вытекает, что один из них обязан совпадать с центром луча, т. е. $t = 0$ должно быть корнем уравнения (2). Следовательно, $r = 0$. А из симметричности оставшихся двух инфлекционных центров относительно центра луча вытекает $2k\beta + q = 0$.

2. Каждый луч комплекса имеет двукратный бесконечно удаленный инфлекционный центр. Тогда $p = \alpha = 0$. Оставшиеся два конечных инфлекционных центра обязаны быть симметричными относительно центра луча, т. е. корни квадратного уравнения $(2k\beta + q)t^2 - 2k\gamma t + k^2r = 0$ должны отличаться знаком. Следовательно, $\gamma = 0$, $2k\beta + q \neq 0$.

3. Каждый луч комплекса имеет трехкратный бесконечно удаленный инфлекционный центр: $p = \alpha = 2k\beta + q = 0$, тогда оставшийся конечный четвертый инфлекционный центр обязан совпасть с центром луча, что дает $r = 0$, $\gamma \neq 0$.

4. Каждый луч комплекса имеет четырехкратный бесконечно удаленный инфлекционный центр. Следовательно, $p = \alpha = 2k\beta + q = \gamma = 0$, $r \neq 0$.

5. Каждый луч комплекса имеет конечные инфлекционные центры. Из условия симметричного расположения этих инфлекционных центров вытекает: $\alpha = \gamma = 0$, $p \neq 0$.

6. Каждый луч комплекса имеет четырехкратный инфлекционный центр, совпадающий с центром луча комплекса. Тогда $r = \gamma = 2k\beta + q = \alpha = 0$, $p \neq 0$.

7. Уравнение для определения инфлекционных центров тождественно исчезает, т. е. каждую точку луча можно считать инфлекционным центром.

§1. Задача 1. Искомый комплекс определяется условиями

$$p = r = 2k\beta + q = 0, \alpha \neq 0, k \neq 0. \quad (1.1)$$

Изучение искомого комплекса сводится к исследованию решения системы дифференциальных уравнений

$$\omega^2 = k\omega_3^1; \omega_1^2 = \alpha\omega_3^1; \beta\omega_3^2 + dk = \alpha\omega^1 - 2k\beta\omega_3^1 + \gamma\omega_3^2; -\omega^3 + k\omega_1^2 = \beta\omega^1 + \gamma\omega_3^1. \quad (1.2)$$

Продифференцируем внешним образом три уравнения (1.2):

$$\begin{aligned} [d\alpha\omega_3^1] + [d\beta\omega_3^2] + (1 + \alpha^2 + \beta^2) [\omega_3^1\omega_3^2] &= 0; \\ [d\alpha\omega^1] - 2k[d\beta\omega_3^1] + [d\gamma\omega_3^2] - 3\alpha\beta [\omega^1\omega_3^1] + (3\beta\gamma - 4k\alpha\beta) [\omega_3^1\omega_3^2] &= 0; \\ [d\beta\omega^1] + [d\gamma\omega_3^1] - (1 + \alpha^2 + \beta^2) [\omega^1\omega_3^1] + 2\alpha\gamma [\omega_3^1\omega_3^2] + \alpha\beta [\omega_3^2\omega^1] &= 0. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Регулярная цепь элементов [3] не строится ни в каком базисе. Рассматривая (1.3) как внешнюю алгебраическую систему, найдем ее максимально общее решение

$$\begin{aligned} d\alpha &= -3\alpha\beta\omega_3^1 + (1 + \alpha^2 + \beta^2 + y)\omega_3^2; \\ d\beta &= y\omega_3^1 - \alpha\beta\omega_3^2; \\ dy &= (1 + \alpha^2 + \beta^2 + y)\omega^1 + 3\beta(2k\alpha - \gamma)\omega_3^1 + 2\alpha\gamma\omega_3^2. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Единственным произвольным коэффициентом является y . Пусть

$$dy = t_1\omega^1 + t_2\omega_3^1 + t_3\omega_3^2. \quad (1.5)$$

Продифференцируем внешним образом систему (1.4). Учитывая (1.2), (1.4) и (1.5), получим

$$\begin{aligned} (4\beta(1 + \alpha^2 + \beta^2 + y) - 12\alpha^2\beta + 2\beta y + t_2) [\omega_3^1\omega_3^2] - t_1 [\omega_3^2\omega^1] &= 0; \\ t_1 [\omega^1\omega_3^1] + (2\alpha\beta^2 - t_3) [\omega_3^1\omega_3^2] &= 0; \\ (6\alpha^2\beta - 2\beta y - t_2 - 4\beta(1 + \alpha^2 + \beta^2 + y) + 6\alpha\beta) [\omega^1\omega_3^1] + 8(3k\alpha^2\beta - k\beta(1 + \alpha^2 + \beta^2 + y) - 2\alpha\beta\gamma) [\omega_3^1\omega_3^2] + (t_3 - 2\alpha\beta^2) [\omega_3^2\omega^1] &= 0. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Поскольку формы $\omega^1, \omega_3^1, \omega_3^2$ являются базисными формами, то коэффициенты при внешних произведениях этих форм должны обратиться в нули. Из (1.6) получим следующую систему пяти независимых уравнений:

$$\begin{aligned} t_1 &= 0; t_3 = 2\alpha\beta^2; \\ t_2 &= -4\beta(1 + \alpha^2 + \beta^2 + y) + 12\alpha^2\beta - 2\beta y; \\ t_2 &= -4\beta(1 + \alpha^2 + \beta^2 + y) + 6\alpha^2\beta - 2\beta y + 6\alpha\beta; \\ \beta(3k\alpha^2 - k(1 + \alpha^2 + \beta^2 + y) - 2\alpha\gamma) &= 0. \end{aligned}$$

Вычитая из третьего уравнения этой системы четвертое, получаем $\alpha(\alpha - 1)\beta = 0$. Рассмотрим случаи обращения в нуль одного из сомножителей.

1. $\alpha = 0$. Это условие невозможно, так как оно противоречит (1.1)

2. $\alpha = 1$. Тогда $d\alpha = 0$, и из первого уравнения (1.4) и независимости форм ω_3^1 и ω_3^2 получаем $\beta = 0$, $1 + \alpha^2 + \beta^2 + y = 0$. Отсюда $y = -2$. Воспользуемся теперь вторым уравнением (1.4). Так как $d\beta = 0$ и $\beta = 0$, то $y = 0$. Полученное противоречие указывает на невозможность условия $\alpha = 1$.

3. $\beta = 0$. Система уравнений искомого комплекса принимает вид (выписываем вместе с продолжением):

$$\begin{aligned} \omega^2 &= k\omega_3^1; & dk &= \alpha\omega^1 + \gamma\omega_3^2; \\ \omega_1^2 &= \alpha\omega_3^1; & -\omega^3 + k\omega_1^2 &= \gamma\omega_3^1; \\ d\alpha &= (1 + \alpha^2)\omega_3^2; & d\gamma &= (1 + \alpha^2)\omega^1 + 2\alpha\gamma\omega_3^2. \end{aligned}$$

Эта система является вполне интегрируемой и ее максимально общее решение существует с произволом в шесть постоянных [2]. Она совпадает с системой, определяющей известный класс комплексов, описанный в работе [4]; там исследованы геометрические свойства таких комплексов и найдено их безинтегральное представление.

§ 2. Задача 6. Система дифференциальных уравнений искомого комплекса имеет вид

$$\begin{aligned} \omega^2 &= k\omega_3^1; & dk &= -2k\beta\omega_3^1, \\ \omega_1^2 &= p\omega^1 + \beta\omega_3^2; & -\omega^3 + k\omega_1^2 &= \beta\omega^1. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Продифференцировав внешним образом [3] только одно третье уравнение системы (2.1), получим $k(-[d\beta\omega_3^1] + p\beta[\omega_3^2\omega^1]) = 0$. Отсюда, учитывая независимость базисных форм ω^1 , ω_3^1 , ω_3^2 и условия $k \neq 0$, $p \neq 0$, находим $\beta = 0$. Тогда система (2.1) принимает вид $\omega^2 = k\omega_3^1$, $\omega_1^2 = p\omega^1$, $dk = 0$, $-\omega^3 + k\omega_1^2 = 0$. Дифференцируя внешним образом ее четвертое уравнение, получим $[\omega^1\omega_3^1] = 0$. Но это — условие линейной зависимости базисных форм ω^1 и ω_3^1 . Полученное противоречие означает, что комплекс, определяемый системой (2.1), не существует, т. е. случай 6 невозможен.

§ 3. Задача 7. Уравнение инфлексционных центров тождественно исчезает при $p = \alpha = 2k\beta + q = \gamma = r = 0$ и искомый комплекс определяется системой уравнений (выписываем вместе с продолжением):

$$\begin{aligned} \omega^2 &= k\omega_3^1; & \omega_1^2 &= \beta\omega_3^2; & dk &= -2k\beta\omega_3^1; \\ -\omega^3 + k\omega_1^2 &= \beta\omega^1; & d\beta &= (-1 - \beta^2)\omega_3^1. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Система (3.1) определяет линейный комплекс. Напомним, что этот линейный комплекс существует с произволом в пять постоянных, его безинтегральное представление получено Н. И. Кованцовым и Т. В. Носаль в [5]. Таким образом, только для линейного комплекса уравнение инфлексционных центров тождественно исчезает.

Список литературы: 1. Кованцов Н. И. Теория комплексов. — К.: Изд-во Томск. ун-та, 1963. — 292 с. 2. Фиников С. П. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. — М.; Л.: Гостехиздат, 1948. — 432 с. 3. Щербakov P. H. Основы метода внешних форм в линейчатой дифференциальной геометрии. — Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1973. — 236 с. 4. Раднаа Ч. Исследование комплекса прямых в нормальные конгруэнции: Дис. ... канд. физ.-мат. наук, К., 1980. — 125 л. 5. Кованцов Н. И., Носаль Т. В. Расщепление комплекса прямых в трехмерном евклидовом пространстве в нормальные конгруэнции. — Укр. геометр. сб., 1973, вып. 14, с. 28 — 44.

Поступила в редколлегию 01.11.82.

Э. Д. Обозная

О ВПОЛНЕ ПОЧТИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЯХ ПРОСТРАНСТВ АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ

Рассмотрим обобщение понятия вполне геодезической гиперповерхности. Именно, оснащенную гиперповерхность пространства аффинной связности будем называть вполне почти геодезической относительно данного оснащения, если каждая геодезическая линия гиперповерхности относительно индуцированной данным оснащением связности является почти геодезической линией объемлющего пространства. Найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы гиперповерхность была вполне почти геодезической и исследован их геометрический смысл. В частности, доказана теорема: для того чтобы гиперповерхность риманова пространства была вполне почти геодезической относительно натурального оснащения, необходимо и достаточно, чтобы она состояла из омбилических точек.

1. Пусть A_{n+1} — пространство аффинной связности без кручения, отнесенное к системе координат $(y^1, y^2, \dots, y^n)$. Зададим в пространстве A_{n+1} гиперповерхность S_n класса C^3 уравнениями $y^\alpha = y^\alpha(x^1, x^2, \dots, x^n) = y^\alpha(x^i)$; $i, j, k, l, \dots = 1, 2, \dots, n$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots = 1, 2, \dots, n+1$. На гиперповерхности S_n будем рассматривать аффинную связность, индуцированную полем оснащающего вектора $\xi^\alpha(x^i)$. Деривационные формулы гиперповерхности S_n имеют вид

$$\begin{aligned} \partial_{ij}^2 y^\alpha + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha y_i^\mu y_j^\nu &= \Gamma_{ij}^k y_k^\alpha + \Omega_{ij} \xi^\alpha; \\ \partial_i \xi^\alpha + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha y_i^\mu \xi^\nu &= \Omega_i^k y_k^\alpha + \Omega_i \xi^\alpha. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $\Gamma_{ij}^k(x^i)$ — объект индуцированной связности гиперповерхности S_n , а Ω_{ij} , Ω_i^k , Ω_i — тензоры.

При изменении оснащения $\tilde{\xi}^\alpha = T^k y_k^\alpha + T \xi^\alpha$ эти объекты при образуются по следующим формулам:

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}_{ij}^k &= \Gamma_{ij}^k - \frac{T^k}{T} \Omega_{ij}; \quad \tilde{\Omega}_{ij} = \frac{1}{T} \Omega_{ij}; \\ \tilde{\Omega}_i &= \frac{1}{T} (T^k \Omega_{ik} + \partial_i T + T \Omega_i); \\ \tilde{\Omega}_i^k &= T_{,i}^k + T \Omega_i^k - \frac{T^k}{T} T_{,i} \Omega_{ei} - T^k \frac{\partial_i T}{T} - T^k \Omega_i.\end{aligned}\quad (2)$$

По аналогии с определением вполне геодезической поверхности в A_{n+1} можно дать

Определение. Оснащенную гиперповерхность S_n пространства аффинной связности A_{n+1} будем называть вполне почти геодезической относительно данного оснащения, если каждая геодезическая линия гиперповерхности S_n относительно индуцированной данным оснащением связности является почти геодезической линией объемлющего пространства.

Здесь почти геодезической линией пространства A_{n+1} называется кривая, вдоль которой существует компланарное распределение E_α , которому принадлежит в каждой точке касательный вектор этой кривой [1, с. 157]. Дифференциальные уравнения почти геодезической линии C : $y^\alpha = y^\alpha(t)$ имеют вид $\lambda_{2i}^\alpha = a \lambda_{1i}^\alpha + b \lambda^\alpha$ (3), где $\lambda^\alpha = \frac{dy^\alpha}{dt}$ — касательный вектор C ; $\lambda_{1i}^\alpha = \lambda_{,\beta}^\alpha \lambda^\beta = \frac{d\lambda^\alpha}{dt} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \lambda^\mu \lambda^\nu$, $\lambda_{2i}^\alpha = \lambda_{1i,\beta}^\alpha \lambda^\beta$.

2. Найдем необходимые и достаточные условия для того, чтобы гиперповерхность являлась почти геодезической. Пусть $x^i = x^i(t)$ — внутренние уравнения некоторой линии C гиперповерхности S_n , а $y^\alpha = y^\alpha(x^i(t)) = y^\alpha(t)$ — ее уравнения в объемлющем пространстве; соответственно, $\lambda^i = \frac{dx^i}{dt}$ и $\lambda^\alpha = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt} = y_i^\alpha \lambda^i$ — касательный вектор этой линии.

Найдем связь между векторами λ_{1i}^i , λ_{2i}^i и λ_{1i}^α , λ_{2i}^α . По определению [1, гл. IV, § 1]

$$\lambda_{1i}^i = \lambda_{,j}^i \lambda^j = \frac{d\lambda^i}{dt} + \Gamma_{jk}^i \lambda^j \lambda^k, \quad (4)$$

$$\lambda_{2i}^i = \lambda_{1i,j}^i \lambda^j = \frac{d\lambda_{1i}^i}{dt} + \Gamma_{jk}^i \lambda_{1i}^j \lambda^k. \quad (5)$$

Аналогично определяются λ_{1i}^α и λ_{2i}^α :

$$\begin{aligned}\lambda_{1i}^\alpha &= \lambda_{,\beta}^\alpha \lambda^\beta = \frac{d\lambda^\alpha}{dt} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \lambda^\beta \lambda^\gamma = \frac{d(y_i^\alpha \lambda^i)}{dt} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha y_i^\beta \lambda^i y_j^\gamma \lambda^j = \\ &= (\partial_{ij}^\alpha y^\alpha + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha y_i^\beta y_j^\gamma) \lambda^i \lambda^j + y_i^\alpha \frac{d\lambda^i}{dt} = (\Gamma_{ij}^k y_k^\alpha + \Omega_{ij}^\alpha) \lambda^i \lambda^j + y_k^\alpha \frac{d\lambda^k}{dt}.\end{aligned}$$

Отсюда получаем, используя (4),

$$\lambda_{1|}^{\alpha} = \Omega_{ij} \lambda^i \lambda^j \xi^{\alpha} + y_k^{\alpha} \lambda_{1|}^k \quad (6)$$

Теперь вычисляем

$$\begin{aligned} \lambda_{2|}^{\alpha} = \lambda_{1|}^{\alpha}{}_{,\beta} \lambda^{\beta} &= \frac{d\lambda_{1|}^{\alpha}}{dt} + \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} \lambda_{1|}^{\beta} \lambda^{\gamma} = \frac{d(\Omega_{ij} \lambda^i \lambda^j \xi^{\alpha} + y_i^{\alpha} \lambda_{1|}^i)}{dt} + \\ &+ \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} (\Omega_{ij} \lambda^i \lambda^j \xi^{\alpha} + y_i^{\beta} \lambda_{1|}^i) \lambda^{\gamma} = \partial_k \Omega_{ij} \lambda^k \lambda^i \lambda^j \xi^{\alpha} + 2\Omega_{ij} \frac{d\lambda^i}{dt} \lambda^j \xi^{\alpha} + \\ &+ \Omega_{ij} \lambda^i \lambda^j \partial_k \xi^{\alpha} \lambda^k + \partial_{ij}^2 y^{\alpha} \lambda^i \lambda_{1|}^j + y_i^{\alpha} \frac{d\lambda_{1|}^i}{dt} + \\ &+ \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} \Omega_{ij} \lambda^i \lambda^j \xi^{\beta} + \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} y_i^{\beta} \lambda_{1|}^i y_k^{\gamma} \lambda^k. \end{aligned}$$

Используем теперь деривационные уравнения (1). Тогда

$$\begin{aligned} \lambda_{2|}^{\alpha} &= \partial_k \Omega_{ij} \lambda^i \lambda^j \lambda^k \xi^{\alpha} + 2\Omega_{ij} \lambda^i \lambda^j \xi^{\alpha} (\lambda_{1|}^i - \Gamma_{ki}^i \lambda^k \lambda^i) + \\ &+ \Omega_{ij} \lambda^i \lambda^j \Omega_k^i y_i^{\alpha} \lambda^k + y_i^{\alpha} \lambda_{2|}^i + \lambda^k \lambda_{1|}^i \Omega_{ik} \xi^{\alpha} + \Omega_{ij} \lambda^i \lambda^j \Omega_k^i \lambda^k \xi^{\alpha} \end{aligned}$$

или равносильно

$$\begin{aligned} \lambda_{2|}^{\alpha} &= [(\Omega_{ij,k} + \Omega_{ij} \Omega_k) \lambda^i \lambda^j \lambda^k + 3\Omega_{ij} \lambda^i \lambda_{1|}^j] \xi^{\alpha} + \\ &+ (\Omega_{ij} \lambda^i \lambda^j \Omega_k^i \lambda^k + \lambda_{2|}^i) y_i^{\alpha}. \end{aligned} \quad (7)$$

3. Обратимся к вполне почти геодезическим гиперповерхностям S_n . Если C — произвольная геодезическая линия гиперповерхности S_n , являющаяся в то же время почти геодезической линией пространства A_{n+1} , то, как это следует из [1; с. 158],

$$\begin{cases} \lambda_{1|}^i = \rho \lambda^i; \\ \lambda_{2|}^{\alpha} = a \lambda_{1|}^{\alpha} + b \lambda^{\alpha}. \end{cases} \quad (8)$$

Подставим в (9) $\lambda_{2|}^{\alpha}$ и $\lambda_{1|}^{\alpha}$ из (6) и (7) и учтем (8): $[(\Omega_{ij,k} + \Omega_{ij} \Omega_k) \lambda^i \lambda^j \lambda^k + 3\Omega_{ij} \lambda^i \lambda^j \rho] \xi^{\alpha} + (\Omega_{ij} \lambda^i \lambda^j \Omega_k^i \lambda^k + \frac{d\rho}{dt} + \rho^2 \lambda^i) y_i^{\alpha} = a \times$
 $\times (\Omega_{ij} \lambda^i \lambda^j \xi^{\alpha} + \rho \lambda^i y_i^{\alpha}) + b \lambda^{\alpha} y_i^{\alpha}$. Приравнивая коэффициенты при линейно независимых векторах y_i^{α} и ξ^{α} , получим

$$\left\{ \begin{aligned} (\Omega_{ij,k} + \Omega_{ij} \Omega_k) \lambda^i \lambda^j \lambda^k &= (a - 3\rho) \Omega_{ij} \lambda^i \lambda^j; \\ \Omega_{ij} \lambda^i \lambda^j \Omega_k^i \lambda^k &= \left(-\frac{d\rho}{dt} - \rho^2 + a\rho + b \right) \lambda^i. \end{aligned} \right. \quad (10)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \Omega_{ij} \lambda^i \lambda^j \Omega_k^i \lambda^k &= \left(-\frac{d\rho}{dt} - \rho^2 + a\rho + b \right) \lambda^i. \end{aligned} \right. \quad (11)$$

Условия (10) и (11) являются необходимыми условиями для вполне почти геодезической гиперповерхности. Исследуем эти условия.

4. Запишем (11) в виде $\Omega_{ij} \lambda^i \lambda^j \Omega_k^i \lambda^k = \phi \lambda^i$ (11)'. Докажем, что из (11) следует $\Omega_k^i = \tau \delta_k^i$. Прежде всего заметим, что левая часть

(11) является кубической формой относительно касательного вектора λ^i , значит кубической формой является и правая часть, т. е.

$$(\Omega_{ij}\lambda^i\lambda^j)\Omega_k^l\lambda^k = \varphi\lambda^l = \varphi_{ij}\lambda^i\lambda^j\lambda^l,$$

откуда следует

$$\Omega_{(ij)\Omega_k^l} = \varphi_{(ij)}\delta_k^l, \quad \varphi_{ij} = \varphi_{ji} \quad (12)$$

Пусть ранг $\|\Omega_{ij}\| = r$, $1 \leq r \leq n$, $a, b, c, d, f = 1, 2, \dots, n$; $p, q, s = r+1, \dots, n$; $i, j, k, l = 1, 2, \dots, n$. Так как $\Omega_{ij} = \Omega_{ji}$ и ранг $\|\Omega_{ij}\| = r$, то можем считать, что $\det\|\Omega_{ab}\| \neq 0$. Тогда существует обратная матрица $\|\Omega^{ab}\|$ такая, что $\Omega_{ab}\Omega^{bd} = \delta_a^d$. Придадим в соотношении (12) индексам i, j, k, l значения a, b, c, d , соответственно:

$$\Omega_{ab}\Omega_c^d + \Omega_{ac}\Omega_b^d + \Omega_{bc}\Omega_a^d = \varphi_{ab}\delta_c^d + \varphi_{ac}\delta_b^d + \varphi_{bc}\delta_a^d \quad (13)$$

Умножим (13) на Ω^{ab} и свернем по индексам a и b :

$$(r+2)\Omega_c^d = \varphi_{ab}\Omega^{ab}\delta_c^d + 2\varphi_{ac}\Omega^{da},$$

откуда

$$\Omega_c^d = \frac{1}{(r+2)} \cdot (\tilde{\varphi}\delta_c^d + 2\varphi_{ac}\Omega^{da}), \quad (14)$$

где $\tilde{\varphi} = \varphi_{ab}\Omega^{ab}$. Суммируя (14) по индексам c и d , находим $\tilde{\varphi} = \Omega_c^c$ (15). Теперь (13) свернем по индексам a и d , подставим в полученное соотношение Ω_c^d и Ω_c^c из (14) и (15), тогда

$$\tilde{\varphi}\Omega_{bc} + 2\varphi_{bc} \cdot \frac{1}{r+2} + \frac{1}{r+2} (\tilde{\varphi}\Omega_{bc} + 2\varphi_{bc}) + \Omega_{bc}\tilde{\varphi} = (r+2)\varphi_{bc},$$

откуда следует $\varphi_{bc} = \frac{\tilde{\varphi}}{r}\Omega_{bc}$ (16). В результате (14) принимает вид $\Omega_c^d = \tilde{\varphi}/r\delta_c^d$ (17). Полагая в (12) $i = a, j = b, k = c, l = p$ и умножая полученное соотношение на Ω^{ab} , найдем, что $\Omega_c^p = 0$ ($p = r+1, \dots, n$) (18). Если придать теперь в (12) следующие значения индексам: $i = a, j = b, l = p, k$ — любое, и использовать (18), то придем к выводу, что $\Omega_k^p = \tilde{\varphi}/r\delta_k^p$ (19). Осталось выяснить, каковы Ω_p^a . Для этого сначала полагаем в (12) $i = a, j = p, k = q, l = s$ и суммируем по индексам q и s . Получим $\Omega_{ap}\frac{\varphi}{r} = \varphi_{ap}$ (20). Наконец, подставим (19) и (20) в (12), записанное при значениях индексов $i = a, j = b, k = p, l = c$. В результате преобразований следует $\Omega_p^c = 0$ (21). Сопоставляя (19), (17), (21), приходим к выводу, что $\Omega_i^j = \tilde{\varphi}/r\delta_i^j$ (22). Таким образом, из (11) следует (22).

Что же касается уравнения (10), то оно равносильно системе $\Omega_{(ij, k)} + \Omega_{(ij)}\Omega_k = \Omega_{(ij)}\varphi_k$, т. е. условиям $\Omega_{(ij, k)} = \Omega_{(ij)}\varphi_k$ (23).

Итак, необходимыми условиями вполне геодезической гиперповерхности являются условия (22) и (23). Проверим, что они являются и достаточными.

Действительно, пусть при некотором оснащении $\xi^\alpha(x^i)$ гиперповерхности S_n выполнены условия (22) и (23) и пусть C — произвольная геодезическая линия S_n относительно индуцированной оснащением $\xi^\alpha(x^i)$ связности. Тогда $\lambda_{1|}^i = \rho \lambda^i$, $\lambda_{2|}^i = \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho^2\right) \lambda^i$.

Подставим эти значения в (7) и учтем (22) и (23): $\lambda_{2|}^\alpha = (\psi_k \lambda^k \Omega_{ij} \times \lambda^i \lambda^j + 3\Omega_{ij} \lambda^i \lambda^j \rho) \xi^\alpha + \left[\Omega_{ij} \lambda^i \lambda^j \tau \lambda^i + \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho^2\right) \lambda^i\right] y^i$. Так как из (6) следует, что $\lambda_{1|}^\alpha = \Omega_{ij} \lambda^i \lambda^j \xi^\alpha + \rho \lambda^\alpha$, то $\lambda_{2|}^\alpha$ можно представить в виде $\lambda_{2|}^\alpha = a \lambda_{1|}^\alpha + b \lambda^\alpha$, а это говорит о том, что линия C является почти геодезической линией A_{n+1} . Таким образом, доказана

Теорема. Для того, чтобы гиперповерхность S_n пространства аффинной связности A_{n+1} была вполне почти геодезической относительно связности, индуцированной оснащением $\xi^\alpha(x^i)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия $\Omega_i^i = \tau \delta_i^i$ (22); $\Omega_{(ij, k)} = \Omega_{(ij} v_k)$ (23).

5. Выясним геометрический смысл этих условий.

а. Соотношение (23) означает, что основной тензор гиперповерхности Ω_{ij} определяет квадратичный комплекс геодезических [2].

Условие (22) в случае, когда A_{n+1} — аффинное пространство, является необходимым и достаточным условием центрального оснащения [3, § 5]. По аналогии с аффинным пространством оснащение, характеризуемое условием (22), можно назвать центральным и тогда, когда A_n — пространство аффинной связности.

б. Если объемлющее пространство риманово, то условие (22) (при обычном метрическом оснащении гиперповерхности) означает, что все точки гиперповерхности омбилические. Действительно, пусть g_{ij} — метрический тензор S_n . Тогда $\Omega_i^k = -\Omega_{ij} g^{jk} = \tau \delta_i^k$, откуда $\Omega_{ij} = -\tau g_{ij}$. Легко заметить, что при этом условие (23) является следствием (22). Наконец, в евклидовом пространстве соотношение (22) определяет только гиперболы. Получены, таким образом, следующие теоремы.

Теорема 1. Для того чтобы гиперповерхность S_n пространства аффинной связности A_{n+1} была вполне почти геодезической, необходимо и достаточно, чтобы оснащение гиперповерхности было центральным, а основной тензор гиперповерхности S_n определял квадратичный комплекс геодезических.

Теорема 2. Для того чтобы гиперповерхность риманова пространства была вполне почти геодезической относительно натурального оснащения, необходимо и достаточно, чтобы она состояла из омбилических точек.

Замечание. Условие (23) инвариантно относительно изменения оснащения, т. е. носит внутренний характер, чего нельзя сказать об условии (22). Действительно, если от оснащения $\xi^\alpha(x^i)$ перейти

к оснащению $\xi^\alpha = T\xi^\alpha + T^k y_k^\alpha$, то в результате использования формул (2) получим

$$\Omega_{ij, k} = T_{,k} \tilde{\Omega}_{ij} + T(\tilde{\Omega}_{ij/k} - T^l \tilde{\Omega}_{il} \tilde{\Omega}_{lk} - T^l \tilde{\Omega}_{li} \Omega_{jk}),$$

где «/» означает ковариантное дифференцирование в связности $\tilde{\Gamma}_{ij}^k(x^i)$. Из предыдущего соотношения следует $\Omega_{(ij, k)} = T \tilde{\Omega}_{(ij/k)} + \theta_{(k} \tilde{\Omega}_{ij)} = \tilde{\nabla}_{(k} \tilde{\Omega}_{ij)}$, откуда $\tilde{\Omega}_{(ij/k)} = \tilde{\Omega}_{(ij} \tilde{\nabla}_{k)}$.

В заключение выражаю большую благодарность своему научному руководителю — профессору Николаю Степановичу Синюкову.

Список литературы: 1. Синюков Н. С. Геодезические отображения римановых пространств. — М.: Наука, 1979. — 255 с. 2. Чернышенко В. М. Пространства аффинной связности с соответствующим комплексом геодезических. — Сб. работ мех.-мат. кафедр Днепропетр. ун-та, 1971, вып. 6, с. 105—118. 3. Атамансян Л. С. Оснащенные многообразия частного вида в многомерном аффинном пространстве. — Тр. семинара по векторному и тензорному анализу, 1952, вып. 9, с. 351—410.

Поступила в редколлегию 25.09.82.

Л. Н. Сергиенко

**К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ
НЕГОЛОНОМНЫХ МНОГООБРАЗИЙ В МНОГОМЕРНОМ
ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ**

Уравнением Монжа по терминологии С. Ли называется уравнение вида $\Phi(x_i; dx_i) = 0$ (1), однородное степени $k > 1$ относительно дифференциалов (здесь и всюду в дальнейшем $i = 1, 2, \dots, n$) [1].

Поделив уравнение (1) на $(dt)^k$, получим другую форму записи, а именно: $\Phi(x_i; x'_i) = 0$ (1'). С каждой точкой пространства $A(x_i)$ уравнение (1') связывает конус Монжа, прямолинейные образующие которого служат касательными к интегральным кривым (1). Уравнение конуса Монжа $\Phi(x_i; X_i - x_i) = 0$ (2). Гиперплоскость, касательную к этому конусу вдоль образующей (x'_i) , можно задать уравнением

$$\sum_{k=1}^n \Phi_{x'_k} (X_k - x_k) = 0. \quad (3)$$

1. Обобщение теоремы Менье. Пусть γ — интегральная кривая уравнения Монжа; $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ — радиус-вектор γ ; k_1 — ее первая кривизна; вектор $\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$; вектор $\mathbf{t}_2$ перпендикулярен вектору $\boldsymbol{\tau}$, имеет единичную длину и лежит в соприкасающейся 2-плоскости к кривой γ (вектор $\mathbf{t}_2$ назовем вектором главной нормали кривой). Для кри-

ной γ справедливо $\frac{d^2 r}{ds^2} = \tau' = k_1 t_2$. Спроектируем вектор $\frac{d^2 r}{ds^2}$ на нормаль в гиперплоскости (3), получим $n \frac{d^2 r}{ds^2} = k_1 n t_2$, отсюда

$$k_1 \cos \varphi = \frac{\sum_{k=1}^n x_k'' \Phi_{x_k'}}{\sqrt{\sum_{k=1}^n \Phi_{x_k'}^2}} = - \frac{\sum_{k=1}^n x_k' \Phi_{x_k}}{\sqrt{\sum_{k=1}^n \Phi_{x_k}^2}}. \quad (4)$$

Правая часть последнего равенства зависит только от направления кривой в фиксированной точке $A(x_i)$. Таким образом, $k_1 \cos \varphi = \text{const} = k_n$ в точке $A(x_i)$ для всех кривых γ , проходящих через эту точку и имеющих в ней одну и ту же касательную $t(x_i')$. Величину k_n назовем нормальной кривизной кривой.

Совокупность интегральных кривых $\{\gamma_0\}$, лежащих в 2-плоскости, определенной векторами n и τ , назовем нормальным сечением уравнения (1), определенным вектором τ . Для кривой γ_0 вектор главной нормали t_2 коллинеарен вектору n и, следовательно, нормальная кривизна с точностью до знака равна первой кривизне интегральной кривой γ_0 .

2. Асимптотические линии. Будем искать интегральные кривые уравнения (1), которые имеют наивысший возможный порядок прикосновения с конусом (2), т. е. для которых соприкасающаяся $(n-1)$ -плоскость совпадает с гиперплоскостью, касательной к конусу $\Phi(x_i; X_i - x_i) = 0$.

Уравнение соприкасающейся гиперплоскости к кривой, радиус-вектор которой $r = r(s)$ запишется так: $\{R - r, r', r'', \dots, r^{(n-1)}\} = 0$ (5), здесь $\{ \}$ — смешанное произведение векторов.

Если гиперплоскость (5) совпадает с гиперплоскостью (3), то

$$\sum_{k=1}^n x_k' \Phi_{x_k'} = 0, \quad \sum_{k=1}^n x_k'' \Phi_{x_k'} = 0, \quad \dots, \quad \sum_{k=1}^n x_k^{(n-1)} \Phi_{x_k'} = 0.$$

Воспользовавшись условием однородности $(\sum_{k=1}^n x_k' \Phi_{x_k'} \equiv k \Phi(x_k; x_k'))$

и тем, что $\sum_{k=1}^n x_k'' \Phi_{x_k'} = - \sum_{k=1}^n x_k' \Phi_{x_k}$, заменим последнюю систему эквивалентной ей системой уравнений

$$\sum_{k=1}^n x_k' \Phi_{x_k} = 0, \quad \sum_{k=1}^n x_k''' \Phi_{x_k'} = 0, \quad \dots, \quad \sum_{k=1}^n x_k^{(n-1)} \Phi_{x_k'} = 0.$$

Присоединив к полученной системе $n-2$ уравнений уравнение Монжа (1) и приняв x_n за независимую переменную, найдем $n-1$ функций $x_1(x_n), x_2(x_n), \dots, x_{n-1}(x_n)$, определяющих интегральные кривые уравнения (1), которые назовем асимптотическими линиями.

Замечание 1. Нормальная кривизна асимптотических линий

равна нулю. Действительно, $k_n = - \frac{\sum_{k=1}^n x'_k \Phi_{x_k}}{\sqrt{\sum_{k=1}^n \Phi_{x'_k}^2}}$, а вдоль асимпто-

тических линий $\sum_{k=1}^n x'_k \Phi_{x_k} \equiv 0$.

Замечание 2. Для гиперкомплекса прямых (имеющего монжево уравнение в виде $\Phi(x_2 dx_1 - x_1 dx_2, \dots, x_n dx_1 - x_1 dx_n, \dots, x_n dx_{n-1} - x_{n-1} dx_n; dx_1, \dots, dx_n) = 0$) все прямолинейные образующие конуса Монжа суть асимптотические линии [2].

Можно искать интегральные кривые уравнения Монжа, которые имеют с касательной гиперплоскостью (3) соприкосновение порядка m , где $2 \leq m \leq n-2$. Система дифференциальных уравнений таких кривых имеет вид

$$\Phi(x_i; x'_i) = 0, \quad \sum_{k=1}^n x'_k \Phi_{x_k} = 0, \quad \sum_{k=1}^n x''_k \Phi_{x'_k} = 0, \quad \dots, \quad \sum_{k=1}^n x^{(m)}_k \Phi_{x'_k} = 0.$$

Таким образом, при $n > 3$ и $2 \leq m \leq n-2$ через точку проходит не конечное число направлений (как было в случае соприкосновения $(n-1)$ -го порядка), а ∞^{n-m-1} направлений, имеющих с касательной гиперплоскостью к конусу Монжа соприкосновение m -го порядка.

3. Задача определения экстремальных радиусов. Можно поставить задачу отыскания наибольших и наименьших радиусов $R = 1/k_n$ в зависимости от изменения направления касательной. По формуле (4)

$$\frac{1}{R} = - \frac{\sum_{k=1}^n \Phi_{x_k} x'_k}{\sqrt{\sum_{k=1}^n \Phi_{x'_k}^2}} = f(x_i; x'_i).$$

Зафиксируем точку $A(x_i)$ и будем искать экстремальные значения функции $k_n = f(x_i; x'_i)$ как функции переменных $x'_1, \dots, x'_n$, которые связаны условиями $\Phi(x_i; x'_i) = 0$ и $\sum_{k=1}^n x'^2_k = 1$. Задача сводится к определению абсолютного экстремума функции

$$F = f(x_i; x'_i) + \lambda_1 \Phi(x_i; x'_i) + \lambda_2 \left(\sum_{k=1}^n x'^2_k - 1 \right),$$

где λ_1, λ_2 — множители Лагранжа.

Приравняв нулю частные производные по всем x'_i от функции F и присоединив к этим уравнениям уравнение Монжа, получим си-

систему $n + 1$ уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}_1' + \lambda_1 \Phi_{x_1'} + 2\lambda_2 x_1' &= 0, \\ \cdot &\cdot \\ \dot{x}_n' + \lambda_1 \Phi_{x_n'} + 2\lambda_2 x_n' &= 0, \\ \Phi(x_i'; x_i') &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

для определения $n + 1$ неизвестных λ_1, λ_2 и $x'_1 : x'_2 : \dots : x'_n$.

4. Понятие о линиях кривизны 1-го рода. Назовем линиями кривизны 1-го рода интегральные кривые уравнения Монжа, которые имеют в каждой точке касательной направления, соответствующие экстремальным радиусам.

Система (6) дает дифференциальные уравнения для определения линий кривизны 1-го рода. Если принять x_n , например, за независимую переменную, то для определения $n+1$ неизвестных $x_1(x_n), \dots, x_{n-1}(x_n), \lambda_1(x_n), \lambda_2(x_n)$ есть $n+1$ уравнений.

Исключим из системы (6) λ_1 и λ_2 . С этой системой связана матрица из трех столбцов и n строк

$$\begin{pmatrix} f_{x'_1} & \Phi_{x'_1} & x'_1 \\ f_{x'_2} & \Phi_{x'_2} & x'_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{x'_n} & \Phi_{x'_n} & x'_n \end{pmatrix}.$$

Ранг этой матрицы равен двум, следовательно, любые три строки являются линейно зависимыми, т. е. определители

$$\begin{vmatrix} \hat{f}_{x'_i} & \Phi_{x'_i} & x'_i \\ \hat{f}_{x'_j} & \Phi_{x'_j} & x'_j \\ \hat{f}_{x'_k} & \Phi_{x'_k} & x'_k \end{vmatrix} = 0,$$

где $i, j, k = 1, \dots, n$; i, j, k попарно не равны между собой.

Из этих $n(n-1)(n-2)/6$ определителей независимых только $n-2$. Можно записать их так:

$$\begin{vmatrix} \hat{f}_{x'_p} & \Phi_{x'_p} & x'_p \\ \hat{f}_{x'_q} & \Phi_{x'_q} & x'_q \\ \hat{f}_{x'_k} & \Phi_{x'_k} & x'_k \end{vmatrix} = 0, \quad (7)$$

здесь p, q — фиксированные числа, $1 \leq p \leq n$ и $1 \leq q \leq n$, $p \neq q$; k принимает все целочисленные значения от 1 до n , кроме p и q .

Система (7) вместе с уравнением Монжа (1') дает $n-1$ дифференциальных уравнений первого порядка для определения линий кривизны 1-го рода. Семейство этих линий зависит, таким образом, от $n-1$ произвольных постоянных.

5. Понятие о линиях кривизны 2-го рода. Можно поставить вопрос — найти те интегральные кривые уравнения (1), вдоль которых

соответствующие нормали к гиперплоскости (3) в двух бесконечно близких точках пересекаются.

Нормаль к гиперплоскости $\sum_{k=1}^n \Phi_{x'_k} (X_k - x_k) = 0$ определяется системой уравнений

$$\frac{X_1 - x_1}{\Phi_{x'_1}} = \frac{X_2 - x_2}{\Phi_{x'_2}} = \dots = \frac{X_n - x_n}{\Phi_{x'_n}},$$

бесконечно близкая к ней —

$$\frac{X_1 - x_1 - dx_1}{\Phi_{x'_1} + d\Phi_{x'_1}} = \frac{X_2 - x_2 - dx_2}{\Phi_{x'_2} + d\Phi_{x'_2}} = \dots = \frac{X_n - x_n - dx_n}{\Phi_{x'_n} + d\Phi_{x'_n}}.$$

Условия пересечения этих нормалей запишутся так:

$$a(s) \Phi_{x'_i} + b(s) (\Phi_{x'_i} + d\Phi_{x'_i}) = dx_i.$$

Исключив из последней системы a и b так, как это было сделано в предыдущем параграфе, получим систему из $n - 2$ уравнений

$$\begin{vmatrix} \Phi_{x'_p} & d\Phi_{x'_p} & dx_p \\ \Phi_{x'_q} & d\Phi_{x'_q} & dx_q \\ \Phi_{x'_k} & d\Phi_{x'_k} & dx_k \end{vmatrix} = 0, \quad (8)$$

где p, q — фиксированные числа от 1 до n , k принимает все целочисленные значения от 1 до n , кроме p и q .

Присоединив к последней системе уравнение Монжа (1), получим $n - 1$ дифференциальных уравнений для определения функций $x_1(x_n), \dots, x_{n-1}(x_n)$; одно из полученных уравнений первого порядка, а $n - 2$ уравнений второго порядка.

Интегральные кривые уравнения Монжа, удовлетворяющие системе (8), назовем линиями кривизны 2-го рода. Множество таких линий является $(2n - 3)$ -параметрическим.

6. Геодезические линии как линии кратчайшие. Выделим те интегральные кривые уравнения Монжа (1'), вдоль которых инте-

грал $\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k'^2} dt$, определяющий длину дуги интегральной кривой,

принимает экстремальное значение. Экстремум этого интеграла ищем при условии, что $x_i = x_i(t)$ удовлетворяют уравнению (1').

Такая задача сводится к определению абсолютного экстремума интеграла

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[\sqrt{\sum_{k=1}^n x_k'^2} + \lambda(t) \Phi(x_i; x'_i) \right] dt = \int_{t_0}^{t_1} G dt.$$

Соответствующая система уравнений Эйлера имеет вид $\frac{\partial G}{\partial x_i} -$

$-\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial G}{\partial x'_i} \right) = 0$. Подробнее

$$\frac{x'_i}{\sqrt{\sum_{k=1}^n x'^2_k}} - \frac{x'_i \sum_{k=1}^n x'_k x''_k}{\left(\sum_{k=1}^n x'^2_k \right)^{3/2}} = -\lambda'(t) \Phi_{x'_i} + \lambda(t) \left(\Phi_{x_i} - \frac{d}{dt} (\Phi_{x'_i}) \right). \quad (9)$$

Если за независимую переменную взять длину дуги s , то $\sum_{k=1}^n x'^2_k = 1$ и последние уравнения запишутся так:

$$x''_i = -\lambda' \Phi_{x'_i} + \lambda \left[\Phi_{x_i} - \frac{d}{ds} (\Phi_{x'_i}) \right], \quad (10)$$

здесь штрих — производная по s .

Между уравнениями последней системы существует линейная зависимость. Если умножить каждое уравнение этой системы на соответствующее x'_i и взять сумму по i от 1 до n , получим тождество. Итак, одно уравнение системы (10) является следствием остальных.

Если за независимую переменную принять x_n , то для определения n функций $x_1(x_n), x_2(x_n), \dots, x_{n-1}(x_n)$, $\lambda(x_n)$ существует $n-1$ дифференциальных уравнений второго порядка (9) и одно дифференциальное уравнение первого порядка (1'). Интегральные кривые, удовлетворяющие системе уравнений (9), назовем геодезическими «кратчайшими» линиями.

Выясним, от скольких параметров зависит совокупность геодезических кратчайших. Из последнего уравнения системы (9) находим λ как функцию независимой переменной x_n , функций $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x'_1, x'_2, \dots, x'_{n-1}, x''_1, x''_2, \dots, x''_{n-1}$ и одной постоянной. Подставляем это значение λ в оставшиеся $n-2$ уравнения системы (9). Получаем для определения $x_1(x_n), x_2(x_n), \dots, x_{n-1}(x_n)$ систему $n-1$ дифференциальных уравнений: $n-2$ уравнения второго порядка и одно уравнение первого порядка (уравнение Монжа). Интегралы этой системы зависят от $2n-2$ произвольных постоянных.

7. Геодезические линии как линии прямейшие. Геодезическими «прямейшими» линиями назовем такие интегральные кривые уравнения Монжа, у которых в каждой точке главная нормаль коллинеарна нормали N гиперплоскости, касательной к конусу Монжа, т. е. $\frac{d^2 r}{ds^2} = \lambda(s) N$ или в координатной форме $\frac{d^2 x_i}{ds^2} = \lambda \Phi_{x'_i}$ (11),

$$\text{здесь } \lambda^2 = \frac{\sum_{k=1}^n x''^2_k}{\sum_{k=1}^n \Phi_{x'_k}^2} = \frac{1}{R^2 \sum_{k=1}^n \Phi_{x'_k}^2},$$

$$\text{откуда } \lambda = \pm \left(\sum_{k=1}^n \dot{x}'_k \Phi_{x_k} \right) / \left(\sum_{k=1}^n \Phi_{x'_k}^2 \right).$$

Если перейти к произвольному параметру t , то уравнения (11) преобразуются так:

$$\frac{\ddot{x}_i}{\sum_{k=1}^n \dot{x}_k^2} - \frac{\dot{x}_i \sum_{k=1}^n \dot{x}_k \ddot{x}_k}{\left(\sum_{k=1}^n \dot{x}_k^2 \right)^2} = \lambda \Phi_{x_i}$$

(точка — производная по t).

Между уравнениями последней системы существует линейная зависимость. Умножим каждое уравнение этой системы на соответствующее $\dot{x}'_i$, возьмем сумму по i от 1 до n и воспользуемся

условием однородности $\sum_{k=1}^n x'_k \Phi_{x'_k} = 0$. Получим тождество. Таким

образом, одно уравнение последней системы является следствием остальных. Исключив из оставшихся $n-1$ уравнений λ , получим $n-2$ уравнения второго порядка и уравнение Монжа первого порядка для определения функций $x_1(x_n)$, $x_2(x_n)$, ..., $x_{n-1}(x_n)$, откуда геодезические прямейшие линии определяются как $(2n-3)$ -параметрическое множество.

8. О совпадении геодезических и характеристических линий. Пусть $r = \{x_i(s)\}$ есть радиус-вектор интегральной кривой уравнения Монжа (1). Введем в рассмотрение векторы $N = \{\Phi_{x'_i}\}$ и $P = \{\Phi_{x_i} - \frac{d}{ds}(\Phi_{x'_i})\}$. Тогда уравнения геодезических кратчайших ли-

ний запишутся так: $\frac{d^2 r}{ds^2} = -\frac{d\lambda}{ds} N + \lambda(s) P$; уравнения геодезических прямейших линий — так: $\frac{d^2 r}{ds^2} = v(s) N$; а вдоль характеристических линий уравнения Монжа $P = \mu(s) N$ [3].

Теорема 1. Если вдоль интегральной кривой уравнения Монжа (1) векторы r'' , N и P взаимно коллинеарны, она является одновременно геодезической кратчайшей, геодезической прямейшей и характеристической линией.

Доказательство. Пусть вдоль интегральной кривой γ векторы r'' , N и P взаимно коллинеарны. а. Так как векторы r'' и N коллинеарны, т. е. $r'' = v(s) N$, кривая γ является геодезической прямейшей линией. б. Так как векторы P и N коллинеарны, т. е. $P = \mu(s) N$, интегральная кривая γ является характеристической линией. в. Запишем уравнение геодезических кратчайших: $r'' + \lambda' N - \lambda P = 0$. Вдоль кривой γ будет $r'' = vN$ и $P = \mu N$, следовательно, вдоль γ будет $r'' + \lambda' N - \lambda P = vN + \lambda' N - \lambda \mu N = (\lambda' - \lambda \mu + v) N$. Определим $\lambda(s)$ из обыкновенного дифференциального уравнения $\lambda' - \lambda \mu + v = 0$, где $\mu(s)$ и $v(s)$ удовлетворяют условиям $r'' = vN$ и $P = \mu N$. При найденном значении множителя

Лагранжа $\lambda(s)$ интегральная кривая γ обращает в тождество дифференциальное уравнение геодезических кратчайших линий, т. е. γ является геодезической кратчайшей.

Следствие. Если интегральная кривая уравнения Монжа (1) обладает двумя из трех свойств: а) быть характеристикой, б) быть геодезической прямой, в) быть геодезической кратчайшей, то она обладает и третьим свойством.

9. Примеры. Рассмотрим уравнение Монжа

$$\Phi(x_i; x'_i) = \sum_{k=1}^n A_k x'^2_k = 0, \quad (12)$$

где A_i — некоторые постоянные, $A_1 \neq A_2 \neq \dots \neq A_n \neq 0$; штрих — производная по s . Для этого уравнения $\Phi_{x_i} = 0$, $\Phi_{x'_i} = 2A_i x'_i$, $(\Phi_{x'_i})' = 2A_i x''_i$. Подставляя эти значения в дифференциальные уравнения (10) геодезических кратчайших, получим $x''_i + 2\lambda' A_i x'_i + 2\lambda A_i x''_i = 0$ (13). Последние уравнения перепишем так: $x''_i + 2A_i(\lambda x'_i)' = 0$. Проинтегрировав уравнения последней системы, найдем $x'_i(1 + 2A_i \lambda) = C_i$ (14), где $C_i = \text{const}$. За параметр интегральной кривой взята длина дуги s , т. е. $\sum_{k=1}^n x'^2_k = 1$. Из (14) нахо-

дим $x_i = \frac{C_i}{1 + 2A_i \lambda}$ и подставляем в последнее равенство. Получим

$$\sum_{i=1}^n \frac{C_i^2}{1 + 2A_i \lambda} = 1. \text{ Из последнего уравнения можно найти множитель}$$

Лагранжа λ как некоторую постоянную, следовательно, $\frac{d\lambda}{ds} = 0$ и уравнения (13) принимают вид $x''_i = 0$, откуда все геодезические кратчайшие суть прямые линии.

Уравнение (12) является монжевым уравнением гиперкомплекса прямых [2]. Среди интегральных кривых уравнения (12) содержится ∞^{2n-3} прямых линий — все прямолинейные образующие конуса Монжа являются интегральными кривыми уравнения Монжа. Если среди интегральных кривых уравнения (1) есть прямая, то, очевидно, она является геодезической прямой. Значит, для уравнения (12) все геодезические прямые линии (их $(2n - 4)$ -параметрическое множество) являются прямыми линиями.

Итак, множества геодезических кратчайших и геодезических прямых совпали. Но по следствию из теоремы 1, если интегральная кривая является геодезической кратчайшей и геодезической прямой, то она является и характеристической линией.

Рассмотрим монжево уравнение $\sum_{k=1}^{n-1} dx_k^2 - dx_n^2 = 0$. Разделив уравнение на ds^2 (за параметр примем длину дуги s интегральной

кривой), получим $\sum_{k=1}^{n-1} x_k'^2 - x_n'^2 = 0$ (15). Кроме того, $\sum_{k=1}^n x_k'^2 = 1$.

Из последних двух уравнений находим, что $\sum_{k=1}^{n-1} x_k'^2 = x_n'^2 = 1/2$ (16).

Для уравнения (15) $\Phi_{x_i} = 0$, $\Phi_{x_k} = 2x_k'$, $(\Phi_{x_k})' = 2x_k''$, $k = 1, \dots, n-1$, $\Phi_{x_n} = -2x_n'$, $(\Phi_{x_n})' = -2x_n''$. Подставляя найденные значения в уравнения геодезических прямейших (11), получим $x_k'' = 2vx_k'$, $x_n'' = -2vx_n'$ (17).

По (16) $x_n' = \pm 1/\sqrt{2}$, откуда $x_n'' = 0$, и из последнего уравнения системы (17) находим $v = 0$. Следовательно, уравнения геодезических прямейших $x_k'' = 0$ и они образуют ∞^{2n-3} прямых линий.

Вдоль характеристических линий уравнения (15) $x_i' = -\mu(s)x_i'$. Так как $x_n'' = 0$, то $\mu = 0$, и уравнения характеристических линий совпали с уравнениями геодезических прямейших, т. е. характеристические линии также образуют $(2n-3)$ -параметрическое множество прямых.

Запишем, наконец, уравнения геодезических кратчайших линий: $x_k'' = -\lambda'2x_k' - \lambda2x_k''$, $x_n'' = \lambda'2x_n' + \lambda2x_n''$ или $x_k''(1+2\lambda) + 2\lambda'x_k' = 0$, $x_n''(1-2\lambda) - 2\lambda'x_n' = 0$ (18). Из последнего уравнения, так как $x_n'' = 0$, находим $\lambda' = 0$; подставляем это значение в уравнения (18) и получаем систему $x_k''(1+2\lambda) = 0$, $k = 1, \dots, n-1$.

Если $\lambda \neq -1/2$, то $x_k'' = 0$. Присоединив к последним уравнениям уравнение $x_n'' = 0$, получим ∞^{2n-3} геодезических кратчайших, совпадающих с множеством характеристических линий и геодезических прямейших.

Рассмотрим случай, когда множитель Лагранжа $\lambda = -1/2$. В этом случае дифференциальные уравнения геодезических кратчайших удовлетворяются любой интегральной кривой уравнения (15). Это объясняется тем, что уравнение (15) можно записать так:

$$\sum_{k=1}^n dx_k^2 = 2dx_n^2 \text{ или } ds^2 = 2dx_n^2. \text{ Отсюда } ds = \pm\sqrt{2}dx_n. \text{ Из послед-$$

него уравнения следует, что длины дуг всех интегральных кривых, заключенных между гиперплоскостями $x_n = A$ и $x_n = B$, равны между собой.

10. Геодезическая кривизна. Геодезической кривизной k_g интегральной кривой уравнения (1') $r = r(s)$ назовем проекцию вектора r'' на касательную гиперплоскость к конусу Монжа (3). Согласно определению $k_g = |r''|/\sqrt{1 - \cos^2 \varphi}$, где

$$\cos \varphi = \frac{(N, r'')}{|N||r''|} = - \frac{\sum_{k=1}^n x_k' \Phi_{x_k}}{\sqrt{(\sum_{k=1}^n \Phi_{x_k}^2)(\sum_{k=1}^n x_k'^2)}}.$$

Окончательно,

$$k_g = \sqrt{\frac{(\sum_{k=1}^n \phi_{x'_k}^2)(\sum_{k=1}^n x_k'^2) - (\sum_{k=1}^n x'_k \phi_{x'_k})^2}{\sum_{k=1}^n \phi_{x'_k}^2}}.$$

Поскольку главная нормаль геодезических прямейших линий коллинеарна нормали к конусу Монжа, то геодезическая кривизна этих линий равна нулю.

Верно и обратное: линия, в каждой точке которой $k_g = 0$, является геодезической прямейшей системы интегральных кривых уравнения Монжа.

Нормальная кривизна k_n интегральной кривой уравнения (1') в данной точке и для данного направления есть первая кривизна геодезической прямейшей линии, проходящей через данную точку и в данном направлении.

11. Параллельный перенос векторов, направленных вдоль образующих конусов Монжа. В работе [4] В. В. Вагнером было введено понятие параллельного переноса вектора в нелинейном неголономном многообразии трехмерного евклидова пространства. Обобщим это понятие на случай многомерного пространства.

Пусть γ — интегральная кривая уравнения Монжа (1'), точка $A(x_i)$ принадлежит γ . В точке A существует конус Монжа $\Phi(x_i; X_i - x_i) = 0$, одна из образующих которого t_1 служит касательной к γ .

Рассмотрим образующую этого конуса t , отличную, вообще говоря, от t_1 . Пусть единичный вектор τ задает направление образующей t , $\tau = \{\dot{x}_i\}$. В точке A' , принадлежащей γ и бесконечно близкой к точке A , рассмотрим образующую конуса Монжа t' , бесконечно близкую к t , $t' = t + dt$. Направление τ' образующей t' будет $\tau' = \tau + d\tau$. Спроектируем образующую t' на касательную гиперплоскость к конусу (2), соответствующую образующей t . Уравнение этой гиперплоскости запишется так:

$$\sum_{k=1}^n \Phi_{x_k} (X_k - x_k) = 0. \quad (19)$$

Единичная нормаль к этой гиперплоскости $n = \{\Phi_{x_i}\} \left| \sqrt{\sum_{k=1}^n \Phi_{x_k}^2} \right.$.

Обозначим вектор проекции через m , $m = \tau + d\tau + \alpha n$, где $\alpha = \alpha(s)$, s — параметр интегральной кривой γ .

Рассмотрим бесконечно малый угол $\delta\alpha$ между τ и m , назовем его абсолютным углом между бесконечно близкими образующими конусов Монжа. Вычислим размер абсолютного угла. В гиперплоскости (19) (обозначим ее через α) лежат векторы τ и m . Проведем через них 2-плоскость α_1 и рассмотрим ортогональную к ней $(n - 3)$ -плоскость α_2 , принадлежащую α . Выберем в $(n - 3)$ -плоскости α_2 вектор ν , ортогональный к τ и m .

— 3)-плоскости ортонормированный базис $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-3}$. Тогда $\delta\sigma = \{\tau, m, n, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-3}\}$.

Если абсолютный угол между двумя бесконечно близкими образующими равен нулю, скажем, что образующие абсолютно параллельны. Так можно ввести понятие параллельного переноса векторов для уравнения Монжа. Если $\delta\sigma = 0$, то $\{\tau, d\tau, n, \tau_1, \dots, \tau_{n-3}\} = 0$. Подробнее

$$\begin{vmatrix} \dot{x}_1 & \dot{x}_2 & \dots & \dot{x}_n \\ (\dot{x}_1)' & (\dot{x}_2)' & \dots & (\dot{x}_n)' \\ \Phi_{x_1} & \Phi_{x_2} & \dots & \Phi_{x_n} \\ t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ t_{n-31} & t_{n-32} & \dots & t_{n-3n} \end{vmatrix} = 0.$$

Если вдоль интегральной кривой переносить касательный к ней вектор, то уравнение параллельного переноса запишется так:

$$\begin{vmatrix} x'_1 & x'_2 & \dots & x'_n \\ x''_1 & x''_2 & \dots & x''_n \\ \Phi_{x'_1} & \Phi_{x'_2} & \dots & \Phi_{x'_n} \\ t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ t_{n-31} & t_{n-32} & \dots & t_{n-3n} \end{vmatrix} = 0. \quad (20)$$

Последнее уравнение является уравнением геодезических прямейших. Действительно, а) уравнение геодезических прямейших, полученное в п. 7, записывается так: $r'' = \lambda N$, т. е. в определителе, стоящем в левой части равенства (20), пропорциональны вторая и третья строки — определитель тождественно равен нулю; б) обратно, если выполняется уравнение (20), значит, строки определителя линейно зависимы, т. е. векторы $r', r'', N, \tau_1, \dots, \tau_{n-3}$ лежат в одной гиперплоскости. Вектор N ортогонален гиперплоскости α , в которой лежат векторы $r', \tau_1, \dots, \tau_{n-3}$. Векторы m и r' ортогональны векторам $\tau_1, \dots, \tau_{n-3}$. Таким образом, $(m, \tau_j) = 0$, $(r', \tau_j) = 0$ и $(n, \tau_j) = 0$ ($j = 1, \dots, n-3$). Но $r'' = m - r' - \alpha n$, следовательно, $(r'', \tau_j) = 0$. Значит, вектор r'' ортогонален векторам τ_j ($j = 1, \dots, n-3$) и, кроме того, r'' ортогонален r' . Отсюда следует, что векторы N и r'' коллинеарны. Доказана

Теорема 2. *Вдоль геодезических прямейших и только вдоль них касательный вектор переносится параллельно.*

Список литературы: 1. Lie S. Geometrie der Berührungstransformationen.— Leipzig, 1896.—696 S. 2. Сергиенко Л. Н. К геометрии монжевых уравнений в четырехмерном евклидовом пространстве.— Укр. геометр. сб., 1981, вып. 26, с. 126—128. 3. Николаенко М. А. Характеристики монжева уравнения в многомерном пространстве.— Укр. геометр. сб., 1966, вып. 3, с. 72—77. 4. Ваг-

пер В. В. Дифференциальная геометрия нелинейных неограниченных многообразий в 3-мерном евклидовом пространстве.— Мат. сб., 1940, № 8(50), с. 3—40.

Поступила в редколлегию 25.10.82.

П. И. Совертков

**ВОССТАНОВЛЕНИЕ ЗАМКНУТОГО ВЫПУКЛОГО
МНОГОГРАННИКА В ПСЕВДОЕВКЛИДОВОМ
ПРОСТРАНСТВЕ ПО ЗАДАНЫМ НОРМАЛЯМ
И ПЛОЩАДЯМ ГРАНЕЙ**

В статье переносится на псевдоевклидово пространство $E_{(2,1)}$ известный результат* о восстановлении замкнутого выпуклого многогранника, для которого заданные векторы и числа являются соответственно внешними нормальными и площадями граней.

В псевдоевклидовом пространстве $E_{(2,1)}$ с метрикой

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 - dz^2$$

площадь области G на поверхности, заданной функцией $z = z(x, y)$, будем определять по формуле

$$\sigma(G) = \iint_D \sqrt{1 - z_x^2 - z_y^2} dx dy,$$

где D — проекция области G на плоскость Oxy .

Площади граней многогранника в $E_{(2,1)}$ могут принимать действительные, мнимые или нулевые значения. Справедлива следующая

Теорема. Пусть заданы система векторов; n_{1k} длины 1 ($k = 1, \dots, \alpha$), n_{2l} длины i ($l = 1, \dots, \beta$), n_{3m} — изотропные ($m = 1, \dots, \gamma$), и система чисел $F_{1k} = i b_{1k}$ ($b_{1k} > 0$), $F_{2l} > 0$, $F_{3m} = 0$. Обозначим через $L(n_{31}, \dots, n_{3\gamma})$ линейную оболочку векторов $n_{31}, \dots, n_{3\gamma}$. Если выполняется условие

$$a = i \sum_{k=1}^{\alpha} n_{1k} F_{1k} + \sum_{l=1}^{\beta} n_{2l} F_{2l} \in L(n_{31}, \dots, n_{3\gamma}), \quad (1)$$

то существует замкнутый выпуклый многогранник, у которого заданные векторы и числа суть нормали и площади его граней, причем векторы n_{1k} и n_{2l} — внешние нормали. При $\gamma = 0$ утверждается существование единственного многогранника.

Замечание 1. Количество указанных в теореме многогранников определяется числом различных способов представления вектора a через изотропные векторы и возможностью параллельного переноса многогранника в пространстве.

Замечание 2. Если все коэффициенты разложения вектора a

* Александров А. Д. Выпуклые многогранники. — М.; Л.: ГИТТЛ, 1950. — 428 с.

по векторам $n_{31}, \dots, n_{37}$ отличны от нуля, то грани с нормальными $n_{31}, \dots, n_{37}$ не вырождаются в точки или отрезки.

Замечание 3. Если $\alpha = \gamma = 0$, то условие (1) принимает вид

$\sum_{l=1}^{\beta} n_{2l} F_{2l} = 0$ и является полностью аналогичным условию задачи Минковского в евклидовом пространстве.

Доказательство. Наряду с псевдоевклидовым пространством $E_{(2,1)}$ рассмотрим наложенное евклидово пространство E^3 и пусть прямоугольные декартовы системы координат в $E_{(2,1)}$ и E^3 совпадают. Уравнение $a_k x + b_k y + c_k z + d_k = 0$ при фиксированном k определяет в $E_{(2,1)}$ и E^3 плоскость π_k , а вектор $n_{E_k} = (a_k^2 + b_k^2 + c_k^2)^{-1/2} \cdot \{a_k, b_k, c_k\}$ является нормалью в E^3 к указанной плоскости.

Если плоскость является евклидовой, изотропной или полуевклидовой, то «единичная» нормаль к плоскости π_k в $E_{(2,1)}$ имеет вид

$$\begin{aligned} n_{1k} &= (a_k^2 + b_k^2 - c_k^2)^{-1/2} \cdot \{-a_k, -b_k, c_k\}; \\ n_{2k} &= (-a_k^2 - b_k^2 + c_k^2)^{-1/2} \cdot \{-a_k, -b_k, c_k\}; \\ n_{3k} &= \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \{-\cos \varphi_k, -\sin \varphi_k, 1\}. \end{aligned} \quad (2)$$

Изотропному вектору n_{3k} в $E_{(2,1)}$ соответствует вектор $n_{E_{3k}} = \pm (1/\sqrt{2}) \{\cos \varphi_k, \sin \varphi_k, 1\}$, нормальный к плоскости π_k в E^3 .

Площади областей на плоскости π_k с проекцией D_k в E^3 и $E_{(2,1)}$ соответственно связаны условиями $F_{Emk} = (c_k^2 + a_k^2 + b_k^2)^{1/2} (c_k^2 - a_k^2 - b_k^2)^{-1/2} F_{mk}$, $m = 1, 2$ (3). Из условия (1) получаем

$$i \sum_{k=1}^{\alpha} n_{1k} F_{1k} + \sum_{l=1}^{\beta} n_{2l} F_{2l} + \sum_{m=1}^{\gamma} x_m n_{3m} = 0. \quad (4)$$

Изотропные векторы n_{3m} , являясь нормальными к полуевклидовым плоскостям, принадлежат этим же плоскостям. Понятие внутренней и внешней нормали к грани замкнутого многогранника в этом случае теряет смысл, что и отражено в условии теоремы. Числа $x_1, \dots, x_\gamma$ в равенстве (4) можно считать не отрицательными. Этого можно достичь, изменяя направления изотропных векторов на противоположные. Полученные векторы будут по-прежнему нормальными к полуевклидовым плоскостям.

Подставим выражения (2) и (3) в равенство (4). Изменяя знаки у первой и второй координат векторного равенства на противоположные, получим следующее соотношение

$$-\sum_{k=1}^{\alpha} n_{E_{1k}} F_{E_{1k}} + \sum_{l=1}^{\beta} n_{E_{2l}} F_{E_{2l}} + \sum_{m=1}^{\gamma} x_m n_{E_{3m}} = 0.$$

Некоторые из чисел $x_1, \dots, x_\gamma$ могут обратиться в нуль. Это соответствует принятой договоренности [1], что во всяком мно-

многограннике можно рассматривать грани, вырождающиеся в точки и отрезки, с нулевой площадью. Поэтому мы можем исключить слагаемые, равные нулю, и считать без ограничения общности $x_m > 0$, $1 \leq m \leq \gamma$. Система векторов $-n_{E11}, \dots, -n_{E1\alpha}, n_{E21}, \dots, n_{E2\beta}, n_{E31}, \dots, n_{E3\gamma}$ (5) не компланарна в силу положительности чисел F_{E1k}, F_{E2l}, x_m .

Таким образом, существуют положительные числа $F_{E11}, \dots, F_{E1\alpha}, F_{E21}, \dots, F_{E2\beta}, x_1, \dots, x_\gamma$ и система некопланарных векторов (5), для которых выполняются условия теоремы Минковского* в евклидовом пространстве. Используя наложенное пространство, получаем существование в $E_{(2,1)}$ искомого многогранника с внешними нормальными n_{1k} и n_{2l} .

Действительно, векторы: $-n_{E1k}$ и n_{1k} , n_{E2l} и n_{2l} направлены соответственно в одно из полупространств, определяемых плоскостью π_k , так как из неравенств $n_{1k}^s > 0$ и $n_{2l}^s < 0$ следуют соответственно неравенства $-n_{E1k} \cdot n_{1k} > 0$, $n_{E2l} \cdot n_{2l} < 0$. Теорема доказана.

В заключение рассмотрим применение теоремы к случаю восстановления многогранника с четырьмя полувеклидовыми гранями, площади которых равны нулю.

Равенство (4) в этом случае примет вид

$$\sum_{m=1}^4 x_m n_{3m} = 0. \quad (6)$$

Из положительности чисел x_1, x_2, x_3, x_4 в равенстве (6) следует, что два вектора находятся на положительной полости $S_0^+ = \{y \in E_{(2,1)} \mid |y| = 0, y_3 > 0\}$ изотропного конуса, а два вектора на отрицательной полости $S_0^- = \{y \in E_{(2,1)} \mid |y| = 0, y_3 < 0\}$ конуса.

Действительно, если бы три вектора n_{31}, n_{32}, n_{33} находились на одной полости, то вектор $c = x_1 n_{31} + x_2 n_{32} + x_3 n_{33}$ принадлежал бы внутренности трехгранного угла, ребра которого направлены по векторам n_{31}, n_{32}, n_{33} . Вектор c в этом случае имел бы минимальную длину и равенство (6) было бы невозможным.

Изменение направлений векторов, при котором имело бы место равенство векторов, аналогичное (6), с положительными коэффициентами и чтобы векторы не были направлены в одно полупространство, возможно лишь у всех векторов сразу. Таким образом, мы получаем два многогранника. Учитывая, что решение системы (6) при заданных векторах является однопараметрическим семейством, зависящим от параметра линейно, получаем, что по заданным четырем изотропным векторам восстанавливаются два однопараметрических семейства гомотетичных многогранников (с точностью до параллельного переноса в пространстве) с данными нормальными к граням и нулевыми площадями граней.

Поступила в редколлегию 10.05.82.

В. А. Терновский

О ДВУХ КЛАССАХ ПЛОСКИХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ
КРИВЫХ С ОСЯМИ СИММЕТРИИ

Пусть a_k ($k = \overline{0, r-1}$, $r = 2s$) есть оси ортогональной симметрии плоскости, проходящие через точку O . Они задают диэдральную группу симметрий $[r]$ порядка $2r$. В прямоугольной координатной системе Oxy уравнения осей a_k запишем так: $\eta_k \equiv x \sin k\alpha - y \cos k\alpha = 0$, $\alpha = \pi/r$. Формы

$$\theta_{2t} = \sum_{k=0}^{r-1} \eta_k^{2t} \quad (1)$$

инвариантны относительно $[r]$. В работе [1] доказано, что $\theta_{2t} = c_t(x^2 + y^2)^t$, $1 \leq t < r$ (2), где c_t — постоянная для каждого t .

Ниже дано новое доказательство тождества (2), из которого следует, что θ_2 и θ_{2r} являются образующими кольца Θ многочленов от форм (1). Другими словами, общее уравнение алгебраической кривой, левая часть которого принадлежит Θ , имеет вид $\Phi(\theta_2, \theta_{2r}) = 0$ (3), где Φ — многочлен. В п. 2 результаты п. 1 переносятся на формы

$$P_{2t} = \sum_{k=0}^{r-1} (z, z_k)^{2t}; \quad (4)$$

векторы z_k симметричны вектору $z = (x, y)$ относительно осей a_k (см. [2]).

1. Обозначим через $\beta_k(z)$, $k = \overline{0, r-1}$, меньший из двух углов, которые образует вектор z с осью симметрии a_k . Если $|\eta_k|$ — расстояние точки (x, y) от оси a_k , то $|\eta_k| = |z| \sin \beta_k(z)$. Поэтому $\theta_{2t} = \rho_t(x^2 + y^2)^t$, где $\rho_t = \sum_{k=0}^{r-1} \sin^{2t} \beta_k(z)$.

Докажем, что при $1 \leq t < r = 2s$ функция $\rho_t = c_t$. Пусть $\beta(z)$ есть наименьший из углов $\beta_k(z)$ для каждого вектора z . Тогда все углы $\beta_k(z)$ разбиваются на два множества, соответственно которым элементы имеют вид $(p-1)\pi/r + \beta(z)$ и $p\pi/r - \beta(z)$, $p = \overline{1, s}$. Значит, можно записать: $\rho_t = \sum_{p=1}^s \{\sin^{2t} [(p-1)\pi/r + \beta(z)] + \sin^{2t} [p\pi/r - \beta(z)]\}$, и с помощью формулы $\sin^{2t} \gamma = 2^{1-2t} \sum_{m=0}^{t-1} (-1)^{t+m} C_{2t}^m \cos 2(t-m)\gamma + 2^{-2t} C_{2t}^t$ [3, с. 74] получим

$$\rho_t = 2^{1-2t} \sum_{m=0}^{t-1} (-1)^{t+m} C_{2t}^m A_{t,m} + r 2^{-2t} C_{2t}^t, \quad (5)$$

где $A_{t,m} = \sum_{p=1}^s \{ \cos [(t-m)(p-1)\pi/s + 2(t-m)\beta(z)] + \cos [(t-m)p\pi/s - 2(t-m)\beta(z)] \}$.

Убедимся, что $A_{t,m} = 0$ при $0 \leq m \leq t-1$, $1 \leq t < 2s$. Действительно, если число $t-m$ четно, то

$$A_{t,m} = 2 \cos 2(t-m)\beta(z) \sum_{p=1}^s \cos ((t-m)p\pi/s). \text{ Поскольку}$$

$$\sum_{q=1}^n \cos q\gamma = \cos ((n+1)\gamma/2) \sin (n\gamma/2) \sin^{-1}(\gamma/2), \text{ то } A_{t,m} = \\ = 2 \cos 2(t-m)\beta(z) \cos ((s+1)(t-m)\pi/2s) \sin ((t-m)\pi/2) \times \\ \times \sin^{-1}((t-m)\pi/2s). \text{ Так как } \sin ((t-m)\pi/2) = 0,$$

а $\sin ((t-m)\pi/2s) \neq 0$ ($1 \leq t < 2s$), то $A_{t,m} = 0$ при этих значениях t . Если же $t=2s$, то справедливы равенства $A_{2s,m} = 0$ ($1 \leq m \leq t-1$), $A_{2s,0} = 2s \cos 4s\beta(z)$.

В случае нечетного $t-m$ функция

$$A_{t,m} = \cos 2(t-m)\beta(z) + \cos [(t-m)\pi - 2(t-m)\beta(z)] + \\ + \sum_{p=1}^{s-1} \{ \cos [(t-m)p\pi/s + 2(t-m)\beta(z)] + \cos [(t-m)p\pi/s - \\ - 2(t-m)\beta(z)] \}.$$

Так как $\cos [(2n+1)\pi - \gamma] = -\cos \gamma$ для любого натурального n , то $A_{t,m} = 2 \cos (t-m)\beta(z) \sum_{p=1}^{s-1} \cos ((t-m)p\pi/s) = 2 \cos 2(t-m)\beta(z) \times \\ \times \cos ((t-m)\pi/2) \sin^{-1}((s-1)(t-m)\pi/2s) \sin^{-1}((t-m)\pi/2s)$. Отсюда следует, что $A_{t,m} = 0$ ($0 \leq m \leq t-1$). Таким образом, на основании (5) $\rho_t = 2^{-2t} r C_{2t}^t$, $1 \leq t < r$. Тождество (2) доказано.

Функция $\rho_r = 2^{1-2r} r \cos 2r\beta(z) + 2^{-2r} r C_{2r}^r$, где $0 \leq \beta(z) \leq \pi/2r$.

Если предположить, что функция ρ_r равна постоянной c , то $\beta(z) = \pm (\arccos c)/2r + n\pi/r$, что противоречит выбору $\beta(z)$. Поскольку каждая из форм θ_{2t} является многочленом от θ_{2l} ($1 \leq l \leq r$), то в силу (2) формы θ_{2l} и θ_{2r} алгебраически независимы и составляют минимальную систему образующих кольца Θ .

2. Так как $(z, z_k) = |z| |z_k| \cos 2\beta_k(z)$, то (4) принимает вид $P_{2t} = \mu_t (x^2 + y^2)^t$, где $\mu_t = \sum_{k=0}^{r-1} \cos^t 2\beta_k(z)$. Убедимся, что при $1 \leq t < 2s$ функция $\mu_t = c_t$ (как и ρ_t). Для этого представим

$$\mu_t = \sum_{p=1}^s \{ \cos^t [(p-1)\pi/s + 2\beta(z)] + \cos^t [p\pi/s - 2\beta(z)] \} = \\ = \sum_{p=1}^s \{ \cos^t [(p-1)\pi/s + 2\beta(z)] + [-\cos [(p-1)\pi/s + 2\beta(z)]]^t \}.$$

Отсюда видно, что $\mu_t = 0$, если t нечетно. Если же t четно, $t = 2l$ ($l \geq 1$), то $\mu_t = 2 \sum_{p=1}^s c x^{2l} [(p-1) \pi/s + 2\beta(z)]$. Поскольку

$$\cos^{2l} \gamma = 2^{1-2l} \sum_{m=0}^{l-1} C_{2l}^m \cos 2(l-m)\gamma + 2^{-l} C_{2l}^l [3, \text{с. 74}], \text{ функция}$$

$$\mu_t = 2^{-2l} \sum_{m=0}^{l-1} C_{2l}^m B_{l,m} + r 2^{-2l} C_{2l}^l, \quad (6)$$

где $B_{l,m} = \sum_{p=1}^s \cos [2(l-m)(p-1) \pi/s + 4(l-m) \beta(z)] =$
 $= \sin [4(l-m) \beta(z) + (s-1)(l-m) \pi/s] \sin 2(l-m) \pi \times$
 $\times \sin^{-1} (2(l-m)/2s)$. Так как $\sin 2(l-m) \pi = 0$, $\sin (2(l-m) \times$
 $\pi/2s) \neq 0$ ($1 \leq l < s$), то $B_{l,m} = 0$ ($0 \leq m \leq l-1$). При этом
 $B_{s,m} = 0$ ($1 \leq m \leq l-1$), $B_{s,0} = s \cos 4s \beta(z)$. Из формулы (6) сле-
 дует, что $\mu_t = r 2^{-l} C_{2l}^l$, $t = 2l$, $1 \leq l < s$.

Функция $\mu_r = s 2^{-r} \cos 2r \beta(z) + r 2^{-r} C_r^s$, где $0 \leq \beta(z) \leq \pi/2r$
 ($\mu_r \neq \text{const}$). Таким образом, доказано тождество, аналогичное
 тождеству (2): $P_{2t} = \mu_t (x^2 + y^2)^t$, $1 \leq t = 2l < r$, $\mu_t = c_t$ (7). По-
 этому P_4 и P_{2r} являются образующими кольца P . Так как $P_4 =$
 $= 2r^{-1} \theta_{2r}^2$, $P_{2r} = 2^{-2} \theta_{2r} + r^{1-r} 2^{-1} (4C_{r/2}^r - C_{2r}^r) \theta_{2r}^r$, то $P \subset \Theta$. Значит,
 кривые, определяемые уравнением $\Phi(P_4, P_{2r}) = 0$, составляют
 подкласс кривых (3).

Список литературы: 1. Игнатенко В. Ф. О плоских алгебраических кривых с осями симметрии.— Укр. геометр. сб., 1978, вып. 21, с. 31—33. 2. Игнатенко В. Ф. К проблеме нахождения полных базисов алгебр многочленов, инвариантных относительно конечных групп симметрии пространства E^n .— Тез. докл. Всесоюз. симпозиума по теории симметрии и ее обобщениям. Кишинев, 1980, с. 50—51. 3. Двайт Г. Б. Таблица интегралов и другие математические формулы.— М.: Наука, 1973.— 228 с.

Поступила в редколлегию 07.07.82.

УДК 513

М. А. Улановский

**О КОНФОРМНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ
МЕТРИКИ ЛОРЕНЦА**

В этой заметке рассматриваются лоренцовы многообразия V_n размерности $n \geq 3$ — дифференцируемые многообразия X_n с фундаментальной (метрической) формой ds^2 класса C^2 и сигнатуры $(+ - \dots -)$. V_n изотропно полно, если на каждой непродолжаемой изотропной геодезической канонический (аффинный) параметр принимает все вещественные значения. В заметке будет доказана

Теорема. Пусть ds^2 — изотропно полная лоренцова метрика на связном многообразии X_n ; $\sigma: X_n \rightarrow R$ — дифференцируемая (класса C^2) функция, $n \geq 3$. Если формы Риччи $R(\tau)$ и $\bar{R}(\tau)$ соответственно метрик ds^2 и $ds^2 = e^{2\sigma} \bar{ds}^2$ для каждого изотропного вектора τ касательного пучка удовлетворяют неравенству $\bar{R}(\tau) \leq R(\tau)$, то $\sigma = \text{const}$ на V_n .

Доказательство основано на соотношении между соответствующими значениями форм Риччи на параллельно переносимом (в метрике ds^2) касательном векторе τ изотропной геодезической $\gamma(t)$.

Соотношение между тензорами Риччи R_{ij} и $\bar{R}_{ij}$ метрик ds^2 и $e^{2\sigma} \bar{ds}^2$ может быть записано в виде

$$\bar{R}_{ij} = R_{ij} - (n-2)(\partial_i \partial_j \sigma - \partial_i \sigma \cdot \partial_j \sigma - \Gamma_{ij}^\alpha \partial_\alpha \sigma) - g_{ij} \dots r(\sigma), \quad (1)$$

где $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$; Γ_{ij}^α — коэффициенты связности Леви—Чивита; g_{ij} — компоненты метрического тензора формы ds^2 ; r — некоторый оператор ($r = \Delta_2 + (n-2)\Delta_1$). Для изотропной геодезической $\gamma: (-\infty, \infty) \rightarrow X_n$ имеем

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} = 0, \quad g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} = 0, \quad (2)$$

где t — канонический параметр геодезической в метрике ds^2 (известно, что $\gamma(t)$ — изотропная геодезическая и в метрике $\bar{ds}^2$, но t , вообще говоря, не является каноническим параметром этой метрики).

Рассмотрим значение формы $\bar{R}(\tau)$ на касательном векторе $\tau =$

$= \left(\frac{dx^i}{dt}\right)$ геодезической $\gamma(t)$, соответствующем параметру t : $\bar{R}(\tau) =$

$= R_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} - (n-2)(\partial_i \partial_j \sigma - \partial_i \sigma \partial_j \sigma - \Gamma_{ij}^\alpha \partial_\alpha \sigma) \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}$. Используя

соотношения (2), легко получим $\bar{R}_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} = R_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} - (n-2) \times$
 $\times \left(\frac{d^2 \sigma}{dt^2} - \left(\frac{d\sigma}{dt} \right)^2 \right)$, или, в бескоординатной форме, $\bar{R}(\tau) = R(\tau) - (n-2)(\sigma_t'' - (\sigma_t')^2)$.

Из этой формулы доказательство теоремы получается очевидным образом: если в каждой точке геодезической $\gamma(t)$ будет $\bar{R}(\tau) \leq R(\tau)$, то $\sigma_t'' - (\sigma_t')^2 \geq 0$. Но легко видеть, что последнее неравенство не имеет нетривиального ($\sigma \neq \text{const}$) решения, определенного на вещественной оси R (предполагая для некоторого t_0 , что $\sigma_0' = \sigma'(t_0) > 0$, получим $\sigma'(t) \geq (1/\sigma_0 + t_0 - t)^{-1}$, $t > t_0$, и т. д.). Поскольку в связном X_n любые две точки могут быть соединены ломаной с изотропными геодезическими звеньями, $\sigma = \text{const}$ на X_n .

Замечание. Как видно из приведенного доказательства, условие изотропной полноты метрики ds^2 может быть несколько ослаблено: достаточно, чтобы любые две точки V_n можно было соединить ломаной, каждое звено которой было бы отрезком «полной» изотропной геодезической. Пример: если из пространства Минков-

ского M_n , $n \geq 3$, удалить цилиндр $\sum_1^{n-1} (x^i)^2 \leq r^2$, $r \geq 0$, то метрика $\bar{ds}^2 = e^{2\sigma} ((dx^n)^2 - \sum_1^{n-1} (dx^i)^2)$ (σ определена в каждой точке $(x^1, \dots, x^n)$, где $\sum_1^{n-1} (x^i)^2 > r^2$) будет иметь форму Риччи, неположительную на каждом изотропном векторе только при $\sigma = \text{const}$.

Поступила в редколлегию 01.11.82.

Н. В. Яблонская

**О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ ПОЧТИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ
ОТОБРАЖЕНИЙ ОБЩИХ ПРОСТРАНСТВ
АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ**

Теория почти геодезических отображений аффинносвязных и римановых пространств как широкое и естественное обобщение теории геодезических отображений была предложена в 1963 г. Н. С. Синюковым. Им было показано существование трех типов этих отображений для пространств аффинной связности без кручения и исследован каждый из них [1—3].

Оказалось, что в общем пространстве аффинной связности (с кручением) также существуют три типа почти геодезических отображений. Нами ранее [4,5] рассматривались почти геодезические отображения пространств аффинной связности с кручением. Подробнее изучались специальные почти геодезические отображения второго типа $P_2^2(e)$, $P_2^3(e)$.

В данной статье продолжают исследования почти геодезических отображений второго типа $P_2^3(\mu, e)$: найдено общее представление объектов связности всех общих пространств, допускающих эти отображения. Изучаются специальные почти геодезические отображения третьего типа пространств аффинной связности с кручением. В частности, находится каноническое представление объекта связности общего пространства, допускающего нетривиальное отображение $\tilde{P}_3$, строятся инвариантные относительно $\tilde{P}_3$ объекты.

§ 1. О некоторых аффинных связностях на структуре третьей степени. Рассмотрим два пространства аффинной связности с кручением A_n и $\bar{A}_n$, между которыми установлено почти геодезическое соответствие P_2 . Отображения P_2 характеризуются следующими основными уравнениями:

$$\bar{\Gamma}_{ij}^h = \Gamma_{ij}^h + \varphi_i \delta_j^h + \varphi_j \delta_i^h + \psi_i \mu_j^h + \psi_j \mu_i^h + K_{ij}^h; \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \mu_{i,j}^h + \mu_{j,i}^h + \psi_i \mu_{\alpha j}^h + \psi_j \mu_{\alpha i}^h + K_{i\alpha}^h \mu_j^{\alpha} + \\ + K_{j\alpha}^h \mu_i^{\alpha} = \sigma_i \delta_j^h + \sigma_j \delta_i^h + \nu_i \mu_j^h + \nu_j \mu_i^h. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь K_{ij}^h — кососимметрическая часть тензора деформации P_{ij}^h объекта связности при отображении $\Pi_2: A_n \rightarrow \bar{A}_n$, μ_i^h — аффинор; $\varphi_i, \psi_i, \sigma_i, \nu_i$ — векторы.

Условия взаимности для почти геодезических отображений второго типа имеют вид

$$\varphi_i \mu_j^{h2} + \psi_j \mu_i^{h2} + K_{i\alpha}^h \mu_j^\alpha + K_{j\alpha}^h \mu_i^\alpha = p_i \delta_j^h + p_j \delta_i^h + q_i \mu_j^h + q_j \mu_i^h, \quad (3)$$

где $\mu_k^{h2} = \mu_{\alpha}^h \mu_k^\alpha$ ($k = i, j$).

Для того чтобы исследовать отображение Π_2 , нужно рассмотреть условия взаимности (3), в которые входят квадраты аффинора μ_i^h . Структурный аффинор удовлетворяет своему минимальному полиному $\tilde{\mu}_i^{h2} = p \mu_i^h + q \delta_i^h$. Поскольку уравнения (1) — (3) здесь определены с точностью до преобразования аффинора $\tilde{\mu}_i^h = a \mu_i^h + b \delta_i^h$ (4), то, очевидно, инварианты p и q можно выбрать так, чтобы $\mu_i^{h2} = \mu_{\alpha}^h \mu_i^\alpha = e \delta_i^h$ ($e = 0, \pm 1$) (5). Почти геодезические отображения Π_2 пространства A_n на $\bar{A}_n$, при которых μ_i^h удовлетворяет уравнениям (5), нами изучены ранее [5].

Многими авторами [6, 7] рассматриваются такие структуры, для которых $\mu_i^{h3} = \pm \mu_i^h$. Пусть теперь $\mu_i^{h3} = q \mu_i^{h2} + p \mu_i^h + r \delta_i^h$. Тогда, вследствие соотношений (4), придем к уравнениям $\mu_i^{h3} = p \mu_i^h + e \delta_i^h$ (6), либо $\mu_i^{h3} = q \mu_i^{h2} + e \delta_i^h$.

Почти геодезические отображения Π_2 пространства A_n на $\bar{A}_n$, при которых μ_i^h удовлетворяет условию (6), в дальнейшем будем обозначать $\Pi_2^3(\mu, e)$.

Нетрудно получить из соотношений (3) и (6) следующую зависимость между векторами: $p_i = \varphi_{\alpha} \mu_i^{\alpha 2} - q_{\alpha} \mu_i^{\alpha}$, $q_i = e p_{\alpha} \mu_i^{\alpha} - p e \varphi_{\alpha} \mu_i^{\alpha 2} + e r q_{\alpha} \mu_i^{\alpha 2} + \varphi_{\alpha} \mu_i^{\alpha}$ (7), $\psi_i = e p_{\alpha} \mu_i^{\alpha} - p e \varphi_{\alpha} \mu_i^{\alpha} + e q_{\alpha} \mu_i^{\alpha 2}$.

Условия же (3) представляют собой систему неоднородных алгебраических относительно K_{ij}^h уравнений. Ее общее решение будет состоять из суммы частного решения K_{ij}^h и общего решения соответствующей системы однородных уравнений K_{ij}^h . Из (3) и (6)

вытекает, что $K_{ij}^h = e (\varphi_{\alpha} \mu_i^{\alpha 2} - q_{\alpha} \mu_i^{\alpha}) \mu_j^{h2} - e (\varphi_{\alpha} \mu_j^{\alpha 2} - q_{\alpha} \mu_j^{\alpha}) \mu_i^{h2} + e (p_{\alpha} \mu_i^{\alpha} + e \psi_i) \mu_j^h - e (p_{\alpha} \mu_j^{\alpha} - e \psi_j) \mu_i^h$. Поскольку в каждой точке в некоторой системе координат матрица μ_i^h может быть приведена к каноническому виду, то нетрудно проверить, что общее решение системы однородных уравнений $K_{i\alpha}^h \mu_j^\alpha + K_{j\alpha}^h \mu_i^\alpha = 0$ будет иметь вид $K_{ij}^h = T_{ij}^h + e T_{\alpha\beta}^h \mu_i^{\alpha 2} \mu_j^\beta - e T_{\alpha\beta}^h \mu_j^{\alpha 2} \mu_i^\beta$. Следовательно, получена

Теорема 1. Почти геодезические отображения $\Pi_2^3(\mu, e)$ характеризуются уравнениями

$$\bar{\Gamma}_{ij}^h = \Gamma_{ij}^h + \varphi_i \delta_j^h + \varphi_j \delta_i^h + \psi_i \mu_j^h + \psi_j \mu_i^h + e (\varphi_{\alpha} \mu_i^{\alpha 2} - q_{\alpha} \mu_i^{\alpha}) \mu_j^{h2} - e (\varphi_{\alpha} \mu_j^{\alpha 2} - q_{\alpha} \mu_j^{\alpha}) \mu_i^{h2} + (e p_{\alpha} \mu_i^{\alpha} + \psi_i) \mu_j^h - (e p_{\alpha} \mu_j^{\alpha} + \psi_j) \mu_i^h + T_{ij}^h +$$

$+ eT_{\alpha\beta}^h \mu_i^{\alpha 2} \mu_j^{\beta} - eT_{\alpha\beta}^h \mu_j^{\alpha 2} \mu_i^{\beta}, \mu_{i,j}^h + \mu_{j,i}^h = r_i \delta_j^h + r_j \delta_i^h + s_i \mu_j^h + s_j \mu_i^h$,
где $\varphi_i, \psi_i, q_i, p_i, r_i, s_i$ — векторы; T_{ij}^h — произвольный кососимметрический тензор.

Описание всех пространств, допускающих отображение $\Pi_2^3(\mu, e)$, дает

Теорема 2. Совокупность объектов связности Γ_{ij}^h всех пространств аффинной связности с кручением A_n , допускающих отображения $\Pi_2^3(\mu, e)$, дает формула

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^h = & \hat{\Gamma}_{ij}^h + \frac{1}{2p^3 - 9} [4p^2 (H_{\alpha j}^h - \mu_{\alpha, j}^h) \mu_i^{\alpha} - 2p^2 e (\mu_{\alpha j}^{\beta} - \\ & - H_{\alpha j}^{\beta}) \mu_i^{\alpha} \mu_j^h + 9e (\mu_{\alpha j}^h - H_{\alpha j}^h) \mu_i^{\alpha 2} + 3p (\mu_{\beta j}^{\alpha} - H_{\beta j}^{\alpha}) \mu_i^{\beta 2} \mu_{\alpha}^h + \\ & + 6p (\mu_{\beta j}^{\alpha} - H_{\beta j}^{\alpha}) \mu_{\alpha}^{h2} \mu_i^{\beta} - 2p^3 e (\mu_{\beta j}^{\alpha} - H_{\beta j}^{\alpha}) \mu_i^{\beta 2} \mu_{\alpha}^h] + \\ & + \Theta_{ij}^h + e \Theta_{\beta j}^{\alpha} \mu_{\alpha}^h \mu_i^{\beta 2} + e \Theta_{\beta j}^{\alpha} \mu_{\alpha}^{h2} \mu_i^{\beta}. \end{aligned}$$

Здесь $\hat{\Gamma}_{ij}^h$ — произвольная связность; знак $\wedge$ над индексом обозначает, что ковариантная производная берется в пространстве $\hat{A}_n$ по связности $\hat{\Gamma}_{ij}^h$; Θ_{ij}^h — произвольный тензор, причем

$$\begin{aligned} H_{ij}^h = & r_i \delta_j^h + s_i \mu_j^h + M_{\alpha j}^h \mu_i^{\alpha} - M_{\alpha i}^h \mu_j^{\alpha} - M_{ij}^h \mu_{\alpha}^h - \\ & - e M_{\beta j}^{\alpha} \mu_i^{\beta} \mu_{\alpha}^{h2} + p e M_{\alpha \beta}^h \mu_i^{\alpha} \mu_j^{\beta}, \end{aligned}$$

где M_{ij}^h — любой кососимметрический тензор.

Аналогично можно получить основные уравнения отображений $\Pi_2^4(\mu, e)$, когда $\mu_i^{h4} = a \mu_i^{h2} + b \mu_i^h + e \delta_i^h$ и более высокого порядка, а также найти общее представление объектов связности пространств, соответственно допускающих эти отображения.

§ 2. Об одном классе почти геодезических отображений Π_3 пространств аффинной связности с кручением. Пусть пространство аффинной связности с кручением A_n допускает нетривиальное почти геодезическое отображение Π_3 на некоторое пространство $\bar{A}_n$. Это отображение характеризуется основными уравнениями

$$\bar{\Gamma}_{ij}^h = \Gamma_{ij}^h + \varphi_i \delta_j^h + \varphi_j \delta_i^h + \psi_{ij} \mu^h + K_{ij}^h; \quad (8)$$

$$\mu_{,i}^h = p_i \mu^h + q \delta_i^h + K_{\alpha i}^h \mu^{\alpha}. \quad (9)$$

Здесь $\bar{\Gamma}_{ij}^h$ и Γ_{ij}^h — объекты связности пространств $\bar{A}_n$ и A_n ; φ_i, μ^h — некоторые векторы; q — инвариант; K_{ij}^h — кососимметрическая составляющая тензора P_{ij}^h деформации объекта связности при отображении $\Pi_3: A_n \rightarrow \bar{A}_n$.

Пусть отображение Π_3 обладает свойством взаимности. Тогда в пространстве $\bar{A}_n$ ковариантная производная вектора μ^h удовлетворяет условиям

$$\mu_{,i}^h = \mu^h \tilde{p}_i + \tilde{q} \delta_i^h - K_{\alpha i}^h \mu^{\alpha},$$

где $\tilde{p}_i$ — некоторый вектор; q — инвариант. Из (8), (9) вследствие этих соотношений, вытекает $K_{\alpha i}^h \mu^\alpha = v_i \mu^h + \tilde{p}_i^h \delta_j^h$ (10). Таким образом, нами получена

Лемма. Условия взаимности для почти геодезических отображений третьего типа $\tilde{P}_3$ пространств аффинной связности с кручением имеют вид (10).

Требование тождественного выполнения соотношений (10) относительно μ^h приводят к специальному классу почти геодезических отображений $\tilde{P}_3$. Для этих отображений основные уравнения таковы: $\tilde{G}_{ij}^h = G_{ij}^h + \varphi_i \delta_j^h + \varphi_j \delta_i^h + \psi_{ij} \mu^h + v_i \delta_j^h - v_j \delta_i^h$ (11); $\mu_i^h = \mu^h v_i + \rho_i^h$ (12).

Отображения $\tilde{P}_3$ характеризуются тем, что каждая геодезическая линия L пространства A_n переходит в почти геодезическую пространства $\tilde{A}_n$, вдоль которой поле компланарных плоскостей E_2 натянуто на касательный вектор λ^h кривой L и не зависящий от него вектор μ^h .

Нетрудно видеть, что каждая φ -кривая пространства A_n (1—3), характеризующаяся уравнениями

$$\lambda_{11}^h = \frac{d\lambda^h}{dt} + \Gamma_{\alpha\beta}^h \lambda^\alpha \lambda^\beta = a\lambda^h + b\mu^h, \quad (13)$$

переходит в кривую, которая вследствие (11), (12) представляет собой φ -кривую пространства $\tilde{A}_n$. Из соотношений (12) вытекает, что $\mu_i^h \lambda^\alpha = \rho_i^h + \mu^h v_\alpha \lambda^\alpha$. В совокупности с (13) это означает, что φ -кривые являются в A_n почти геодезическими с полем $E_2 \{\lambda^h, \mu^h\}$ компланарных вдоль них плоскостей.

Очевидно, в пространстве A_n можно выбрать такую систему координат $x^1, x^2, \dots, x^n$, чтобы компоненты вектора μ^h имели значения $(1, 0, \dots, 0)$, т. е. чтобы $\varphi^h = \delta_1^h$. Из (5) для компонент объекта связности Γ_{ij}^h в этой системе координат возникают условия $\Gamma_{ij}^h = v \delta_j^h + \mu_j \delta_i^h$.

Наоборот, если в пространстве A_n существует такая система координат, относительно которой компоненты Γ_{1i}^h его объекта связности имеют указанные выше значения, то A_n допускает отображение $\tilde{P}_3$.

Относительно отображений $\tilde{P}_3$ существует несколько инвариантных объектов. Таковыми, например, являются

$$\begin{aligned} P_{ijk}^h &= R_{ijk}^h + e \mu^h q_\alpha R_{ijk}^\alpha + (\delta_i^h - e \mu^h q_k) a_{ij} - \\ &- (\delta_j^h - e \mu^h q_i) a_{ik} - (\delta_k^h - e \mu^h q_j) a_{ij}; \\ (n-2) a_{ij} &= -R_{ij} - e q_\alpha \mu^\beta R_{ij\beta}^\alpha + \\ &+ \frac{1}{n} [R_{\alpha j i}^\alpha - e q_\alpha \mu^\beta R_{\beta j i}^\alpha + e q_i \mu^\alpha R_{\alpha i} + \\ &+ e q_i (-\mu^\beta R_{\beta j i}^\alpha + e q_\alpha \mu^\beta \mu^\gamma R_{\beta j i}^\alpha)]. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь q_i — произвольный вектор, удовлетворяющий условию $q_\alpha \mu^\alpha = e$; R_{ij}^τ — тензор Риманова пространства; R_{ij} — тензор Риччи.

Указанные инвариантные объекты не имеют внутреннего характера, поскольку векторы μ^h , q нельзя выразить явно через геометрические объекты пространства A_n . Однако эти геометрические объекты нередко бывают весьма полезными.

Предположим, что пространство $\bar{A}_n$ плоское, тогда из формул вида (14) в $\bar{A}_n$ получим, что $\bar{P}_{ijk}^h \equiv 0$, а в силу инвариантности относительно $\bar{P}_3$ данного тензора придем к заключению, что для A_n тензор $P_{ijk}^h \equiv 0$. Таким образом, для того чтобы A_n было специальным $(n-2)$ -проективным пространством, необходимо, чтобы для него тензор P_{ijk}^h , определенный соотношениями (14), тождественно обращался в нуль.

В заключение автор благодарит Н. С. Синюкова за внимание и помощь в работе.

Список литературы: 1. Синюков Н. С. Почти геодезические отображения аффинносвязных и римановых пространств. — Докл. АН СССР, 1963, 151, № 24, с. 781—782. 2. Синюков Н. С. Геодезические отображения римановых пространств. — М.: Наука, 1979. — 256 с. 3. Синюков Н. С. Почти геодезические отображения аффинносвязных и римановых пространств. — Итоги науки и техники. Пробл. геометрии, 1982, 13, с. 3—26. 4. Яблонская Н. В. Почти геодезические отображения пространств аффинной связности с кручением. Рукопись деп. в ВИНТИ № 2190—79. БУ, № 11, УДК 52. Астрономия, 1979. 5. Яблонская Н. В. Почти геодезические отображения второго типа для пространства аффинной связности на е-структурах. — Тезисы докл. конф. по современ. пробл. геометрии, 1979, с. 234. 6. Sing K. D. On some f-structure manifold with torsion. — Demonstr. math. 1974, № 24, 7, p. 183—196. 7. Tong-van-Duc. Sur les structures definies par une 1-form vectorielle F telle que $F^3 = \pm F$. — Kodai Math. Semin. Repts, 1973, 25, № 3. S. 367—376.

Поступила в редколлегию 08.08.82.

СОДЕРЖАНИЕ

Аминов Ю. А. Свойства грассманаова образа погружения области трех- мерного пространства Лобачевского в пятимерное эвклидово пространство	3
Борисенко А. А., Лисица В. Т. Поверхности с вырожденным сферическим изображением	12
Гурин А. М. Реализация сетей выпуклых многогранников в равно- угольными вершинами. 2	22
Денисов В. И. Оценка области причинности космологической модели Геделя	26
Дискант В. И. Контрпример к одному утверждению Боннезена-Фен- хеля	31
Егоров А. И. Максимально подвижные общие пространства путей	33
Золотухин Ю. П. Об однозначной определенности поверхностей с раз- резами в пространстве постоянной кривизны	42
Игнатенко В. Ф. Некоторые приложения диаметральной теории алге- браической поверхности в пространстве E^m	49
Кантор Б. Е., Эпштейн Л. А. Ограниченность вариации поворота кривой на плоскости параметров при условии ограниченности ее вариации поворота в МОК с чебышевским линейным элементом	53
Ковалев М. Д. О покрытии выпуклых фигур их образами при растя- жении	57
Козлов С. Е. Ортогонально совместимые бивекторы	68
Курбатова И. Н. HP -отображения H -пространств	75
Макеев В. В. Применение топологии в некоторых задачах комбинатор- ной геометрии	83
Масальцев Л. А. О двумерных поверхностях с нулевым нормальным кручением в E^4	88
Милка А. Д. Кривые со спрямляемым сферическим образом на выпук- лой гиперповерхности	91
Мягков В. И. Комплексы с симметричным расположением инфлекцион- ных центров	93
Обозная Э. Д. О вполне почти геодезических гиперповерхностях про- странств аффинной связности	97
Сергиенко Л. Н. К дифференциальной геометрии нелинейных него- лономных многообразий в многомерном евклидовом пространстве	102
Совертков П. И. Восстановление замкнутого выпуклого многогранни- ка в псевдоевклидовом пространстве по данным нормальям и площадям гра- ней	113
Терновский В. А. О двух классах плоских алгебраических кривых с осями симметрии	116
Улановский М. А. О конформных преобразованиях метрики Лоренца	118
Яблонская Н. В. О некоторых классах почти геодезических отобра- жений общих пространств аффинной связности	120

УКРАИНСКИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК

Выпуск 27

Редактор *З. Н. Щегельская*, художественный редактор *Т. П. Воробиевко*,
технический редактор *Г. П. Александрова*, корректор *Л. М. Забродина*

Информ. бланк № 8344

Сдано в набор 04.08.83. Подп. в печать 17.01.84. БЦ 09017. Формат 60×90/16. Бумага
ки-журн. Лит. гарн. Выс. печать. 8 печ. л. 8,25 кр.-отт. 9,3 уч.-изд.л. Тираж
8.0 экз. Изд. № 1143. Зак. 3-308. Цена 1 р. 30 к.

Издательство при Харьковском государственном университете издательского объеди-
нения «Вища школа», 310003, Харьков-3, ул. Университетская, 16

Отпечатано с матриц книжной фабрики им. М. В. Фрунзе в Харьковской городской
типографии № 16, 310003, Харьков-3, ул. Университетская, 16. Зак. 459.

РЕФЕРАТЫ

УДК 513

Свойства грассманова образа локального погружения трехмерного пространства Лобачевского в пятимерное евклидово пространство. Аминов Ю. А. — Укр. геометр. сб., 1984, вып. 27, с. 3—11.

Продолжаются предыдущие исследования автора. Грассманов образ G^3 погружения пространства Лобачевского рассматривается как многообразие в 10-мерном евклидовом пространстве E^{10} и для его радиус-вектора устанавливается дифференциальное уравнение третьего порядка. С помощью этого уравнения доказывается, что координатный параллелепипед на G^3 лежит в E^m тогда и только тогда, когда три его грани, проходящие через одну вершину, лежат в E^m . Доказывается, что если $G^3 \subset E^m$, то $m \geq 8$. Установлено, что локальное погружение L^3 в E^3 , у которого размерность второго касательного пространства грассманова образа ≤ 8 функционально-вырожденное, и наоборот. Функционально-вырожденные погружения рассматривались ранее автором в другой работе. Библиогр.: 3 назв.

УДК 513

Поверхности с вырожденным сферическим изображением. Борисенко А. А. Лисица В. Т. — Укр. геометр. сб., 1984, вып. 27, с. 12—22.

Рассматриваются k -мерные гладкие поверхности F^k в n -мерном евклидовом пространстве E^n . Если сферическое изображение гладкой поверхности F^k имеет нулевую $(n - k + 1)$ -мерную хаусдорфову меру, то или произвольная точка $x \in F^k$ имеет плоскую окрестность, или через x проходит единственная $(k - 1)$ -мерная образующая, граница которой лежит на границе поверхности. Касательная плоскость к F^k вдоль образующей стационарна. Аналогичное утверждение верно и для гладких поверхностей F^k в сферическом пространстве S^n .

Если гладкая поверхность F^k с нулевой $(n - k + 1)$ -мерной мерой Хаусдорфа сферического изображения полная, то она является цилиндром с $(k - 1)$ -мерной образующей. Полная гладкая поверхность F^k с нулевой $(n - k + 1)$ -мерной мерой Хаусдорфа сферического изображения в сферическом пространстве S^n является большой k -мерной сферой $S^k \subset S^n$. Библиогр.: 8 назв.

УДК 513

Реализация сетей выпуклых многогранников с равноугольными вершинами.

2. Гурин А. М. — Укр. геометр. сб., 1984, вып. 27, с. 22—26.

В части 1-й статьи (Укр. геометр. сб., вып. 26) среди исследованных там сетей встречались сети многогранников, двойственных выпуклым многогранникам с правильными гранями. Во 2-й части исследованы все оставшиеся такие сети; из них реализуемых в виде многогранников оказалось восемь, все они здесь описаны. Библиогр.: 4 назв. Ил. 2.

УДК 530.12

Оценка области причинности космологической модели Геделя. Денисов В. И. — Укр. геометр. сб., 1984, вып. 27, с. 26—31.

Изучаются свойства причинности космологической модели Геделя с евклидовой топологией, $MG R^4$. Доказано, что в $MG R^4$ есть замкнутые гладкие причинные кривые. Получена оценка области $MG R^4$, в которой замкнутые гладких причинных кривых нет. Библиогр.: 6 назв.

УДК 513.82

Контрпример к одному утверждению Боннезена—Фенхеля. Дискант В. И. — Укр. геометр. сб., 1984, вып. 27, с. 31—33.

Пусть A и B — выпуклые собственные компакты в n -мерном евклидовом пространстве R^n . Обозначим через $V(H_t)$ объем тела $H_t = (1 - t)A + tB$, $0 \leq t \leq 1$. Боннезену и Фенхелю принадлежит утверждение: если проекции тел A и B на некоторую гиперплоскость в R^n имеют равные $(n - 1)$ -мерные объемы, то график функции $\varphi(t) = V(H_t)$ является выпуклым вверх при $0 \leq t \leq 1$. Библиогр.: 2 назв.

Приведен пример, показывающий, что это утверждение и некоторые вытекающие из него неравенства не имеют места.

УДК 513

Максимально подвижные общие пространства путей. Егоров А. И. — Укр. геометр. сб., 1984, вып. 27, с. 33—42.

Доказывается, что общее пространство путей $X_{n,x}$, допускающее группу аффинных движений G_r порядка $r > n^2 - 2n + 5$, является проективно-евклидовым; число $n^2 - 2n + 5$ есть максимальный порядок группы G_r в непроективно-евклидовых общих пространствах путей, а также в пространствах путей нормальной аффинной связности. Найдена структура тензоров, характеризующих $X_{n,x}$ в предложении, что порядок r группы G_r достаточно высок. Отмечаются лакуны в распределении порядков полных групп аффинных движений в $X_{n,x}$; в частности, найдена первая лакуна длиной $d = 3n - 4$ для пространства непроективно-евклидова с ненулевым тензором. Библиогр.: 5 назв.

УДК 513

Об однозначной определенности поверхностей с разрезами в пространстве постоянной кривизны. Золотухин Ю. П. — Укр. геометр. сб., 1984, вып. 27, с. 42—49.

В пространстве постоянной кривизны поверхность рода ρ положительной внешней кривизны с разрезом L является однозначно определенной, если вдоль берегов разреза выполняются условия: $\Delta k_{nR}^+ = a_{11}\Delta k_{nR}^- + a_{21}\Delta \tau_{gR}^-$, $\Delta \tau_{gR}^+ = a_{21}\Delta k_{nR}^- + a_{22}\Delta \tau_{gR}^-$, где поле направлений R и функции (a_{ij}) ($i, j = 1, 2$) заданы, причем $\det((a_{ij})) > 0$ и $\text{ind}_L(a_{11} + a_{22} + i(a_{12} - a_{21})) < 4 - 4\rho$.

Библиогр.: 8 назв.

128

УДК 513

Некоторые приложения диаметральной теории алгебраической поверхности в пространстве E^m . Игнатенко В. Ф. — Укр. геометр. сб., 1984, вып. 27, с. 49—53.

С помощью диаметральной теории получен признак, необходимый и достаточный для того, чтобы плоскость, входящая в состав поверхности F_n , была и ее плоскостью симметрии в заданном направлении. Попутно свойство диаметральной плоскости поверхности F_n , сопряженной направлению u , быть местом центров тяжести точек пересечения с F_n прямых, параллельных u , автор обобщает на диаметральные поверхности разных порядков, сопряженные направлению u . Полученный признак (теорему 1) автор применяет к исследованию поверхностей, имеющих бесконечное множество плоскостей симметрии. Библиогр.: 7 назв.

УДК 513

Ограниченность вариации поворота кривой на плоскости параметров при условии ограниченности ее вариации поворота в МОК с чебышевским линейным элементом. Кантор Б. Е., Эпштейн Л. А. — Укр. геометр. сб., 1984, вып. 27, с. 53—57.

Доказано следующее утверждение: если простая кривая, заданная непрерывными функциями $u = u(t)$, $v = v(t)$, $t \in [a, b]$, имеет в многообразии ограниченной кривизны, заданном обобщенным чебышевским линейным элементом, ограниченную вариацию поворота, то ее прообраз на плоскости параметров u, v имеет ограниченную вариацию поворота. Библиогр.: 3 назв.

УДК 513

О покрытии выпуклых фигур их образами при растяжении. Ковалев М. Д. — Укр. геометр. сб., 1984, вып. 27, с. 57—68.

Пусть F -компактная выпуклая фигура на евклидовой плоскости. Доказывается следующее предположение В. А. Залгаллера: если растянуть фигуру F в произвольном направлении в $k \geq 1$ раз, то полученный образ способен при движении (без отражений) покрыть исходную фигуру F .

Ил. 4 Библиогр.: 2 назв.

УДК 513

Ортогонально совместимые бивекторы. Козлов С. Е. Укр. геометр. сб., 1984, вып. 27, с. 68—75.

Изучаются бивекторы в R^n . Эти бивекторы делятся на классы ортогонально совместимых бивекторов и на множестве этих классов вводится метрика. Для бивекторов и на множестве этих классов вводится метрика. Для бивекторов строится каноническое отображение $\varphi: \lambda_2^n \rightarrow R^{[n/2]}$ (где λ_2^n — пространство бивекторов), которое дает критерий ортогональной совместимости бивекторов, а именно, бивекторы $\omega_1, \omega_2 \in \lambda_2^n$ ортогонально совместимы тогда и только тогда, когда $\varphi(\omega_1) = \varphi(\omega_2)$. Устанавливается отображение классов ортогонально совместимых бивекторов на симплицийный многогранный угол, которое является изометрией. Библиогр.: 5 назв.

УДК 513

НР-отображения Н-пространств. Курбатова И. Н. Укр. геометр. сб. 1984, вып. 27, с. 75—83.

Исследуются НР-отображения Н-пространств, представляющие интерес как с точки зрения обобщения теории геодезических отображений римановых пространств и НР-отображений келеровых пространств, так и с прикладной точки зрения, Библиогр.: 7 назв.

УДК 513

Применение топологии в некоторых задачах комбинаторной геометрии. Макеев В. В. — Укр. геометр. сб., 1984, вып. 27, с. 83—88.

Данная заметка продолжает предшествующие работы автора. Ищутся универсальные покрывающие в классе $M(N)$ центрального из симметричных ограниченных многогранников, описанных вокруг сферы единичного диаметра и имеющих $2N$ граней. Доказывается, что при четном n все элементы $M(2n-1)$ суть n -мерные универсальные покрывающие и указывается широкий класс покрывающих в $M(2n-1)$ при нечетном n . Если n четно (нечетно), то найдется универсальная покрывающая в $M\left(\frac{n^2+4n}{4}\right) \left(\text{в } M\left(\frac{n^2+4n-1}{4}\right) \right)$.

Доказано существование почти центрально симметричных сечений и проекций широких классов выпуклых многомерных тел, и получены соответствующие оценки для размерностей.

УДК 513

О двумерных поверхностях с нулевым нормальным кручением в E^4 .

Масальцев Л. А. — Укр. геометр. сб., 1984, вып. 27, с. 88—91.

В. Т. Фоменко предположил (РЖМат, 1979, 2А519), что всякая 2-поверхность с нулевым нормальным кручением в E^4 либо гиперплоская, либо гиперсферическая с постоянной средней и нулевой внутренней кривизнами. Доказывается, что это предположение верно в случае, когда отношение полуосей эллипса нормальной кривизны постоянно. Получены следствия. Библиогр.: 5 назв.

УДК 513

Кривые со спрямляемым сферическим образом на выпуклой гиперповерхности. Милка А. Д. — Укр. геометр. сб., 1984, вып. 27, с. 91—93.

Устанавливается следующая теорема: на выпуклой гиперповерхности в R^n любые две точки соединяются спрямляемой кривой, имеющей спрямляемое сферическое изображение. Доказательство основывается на одной новой лемме, характеризующей отклонение внешних нормалей к выпуклой гиперповерхности, аналогичной лемме Буземана и Феллера. Библиогр.: 5 назв.

УДК 513

Комплексы с симметричным расположением инфлекционных центров.

Мягков В. И. — Укр. геометр. сб., 1983, вып. 27, с. 93—97.

Полностью исследован случай тождественного исчезновения уравнения инфлекционных центров. Доказана теорема о том, что только для комплексов двух классов Σ_1 и Σ_2 уравнение инфлекционных центров тождественно исчезает. Σ_1 оказался линейным комплексом, а Σ_2 новым комплексом, исследование его геометрических свойств завершается его безынтеграционным представлением. Библиогр.: 5 назв.

УДК 513

О вполне почти геодезических гиперповерхностях пространств аффинной связности. Обозная Э. Д. — Укр. геометр. сб. 1984, вып. 27, с. 97—102.

Для того чтобы гиперповерхность была вполне почти геодезической, найдены необходимые и достаточные условия и выяснен их геометрический смысл. Доказано, что гиперповерхность риманова пространства будет вполне почти геодезической относительно натурального оснащения тогда и только тогда, когда все ее точки будут омбилическими. Библиогр.: 3 назв.

УДК 513

К дифференциальной геометрии нелинейных неголономных многообразий в многомерном евклидовом пространстве. Сергиенко Л. Н. — Укр. геометр. сб., 1984, вып. 27, с. 102—113.

Рассматриваются вопросы дифференциальной геометрии монжева многообразия n -мерного евклидова пространства: обобщается аналог теоремы Менье, понятие липий кривизны 1-го и 2-го рода, связь геодезических линий с характеристическими, параллельный перенос вектора и некоторые другие вопросы. Библиогр.: 4 назв.

УДК 513

Восстановление замкнутого выпуклого многогранника в псевдоевклидовом пространстве по заданным нормальям и площадям граней. Совертков П. И. — Укр. геометр. сб., 1984, вып. 27, с. 113—115.

Доказывается теорема о восстановлении в псевдоевклидовом пространстве $E_{2,1}$ замкнутого выпуклого многогранника, для которого заданные векторы и числа являются соответственно внешними нормальями и площадями граней.

При отсутствии изотропных векторов и выполнении условия $i(n_{11}F_{11} + \dots + \bar{n}_{1\alpha}F_{1\alpha}) + \bar{n}_{21}F_{21} + \dots + \bar{n}_{2\beta}F_{2\beta} = 0$, где $\bar{n}_{1k}$ — векторы действительной длины; $\bar{n}_{2k}$ — векторы мнимой длины; F_{1k} — мнимые числа; F_{2k} — положительные числа, утверждается существование единственного многогранника.

УДК 513

О двух классах плоских алгебраических кривых с осями симметрии. Терновский В. А. — Укр. геометр. сб., 1984, вып. 27, с. 116—118.

Рассматриваются некоторые свойства плоских алгебраических кривых с осями ортогональной симметрии. Библиогр.: 3 назв.

УДК 513

О конформных преобразованиях метрики Лоренца. Улановский М. А. — Укр. геометр. сб., 1984, вып. 27, с. 118—120.

Доказано утверждение: конформное преобразование метрики изотропно полного лоренцова U_n ($n \geq 3$), не увеличивающее значения формы Риччи на каждом изотропном векторе, есть гомотетия.

УДК 513

О некоторых классах почти геодезических отображений общих пространств аффинной связности. Яблонская Н. В. — Укр. геометр. сб., 1984, вып. 27, с. 120—124.

Изучаются специальные почти геодезические отображения второго и третьего типов, $P_2^3(\mu, e)$ и $\tilde{P}_3$, общих пространств аффинной связности с кручением. Найдено общее представление объектов связности всех общих пространств, допускающих отображение $P_2^3(\mu, e)$, а также каноническое представление объекта связности общего пространства, допускающего отображение $\tilde{P}_3$, строятся инвариантные относительно $\tilde{P}_3$ объекты. Библиогр.: 7 назв.