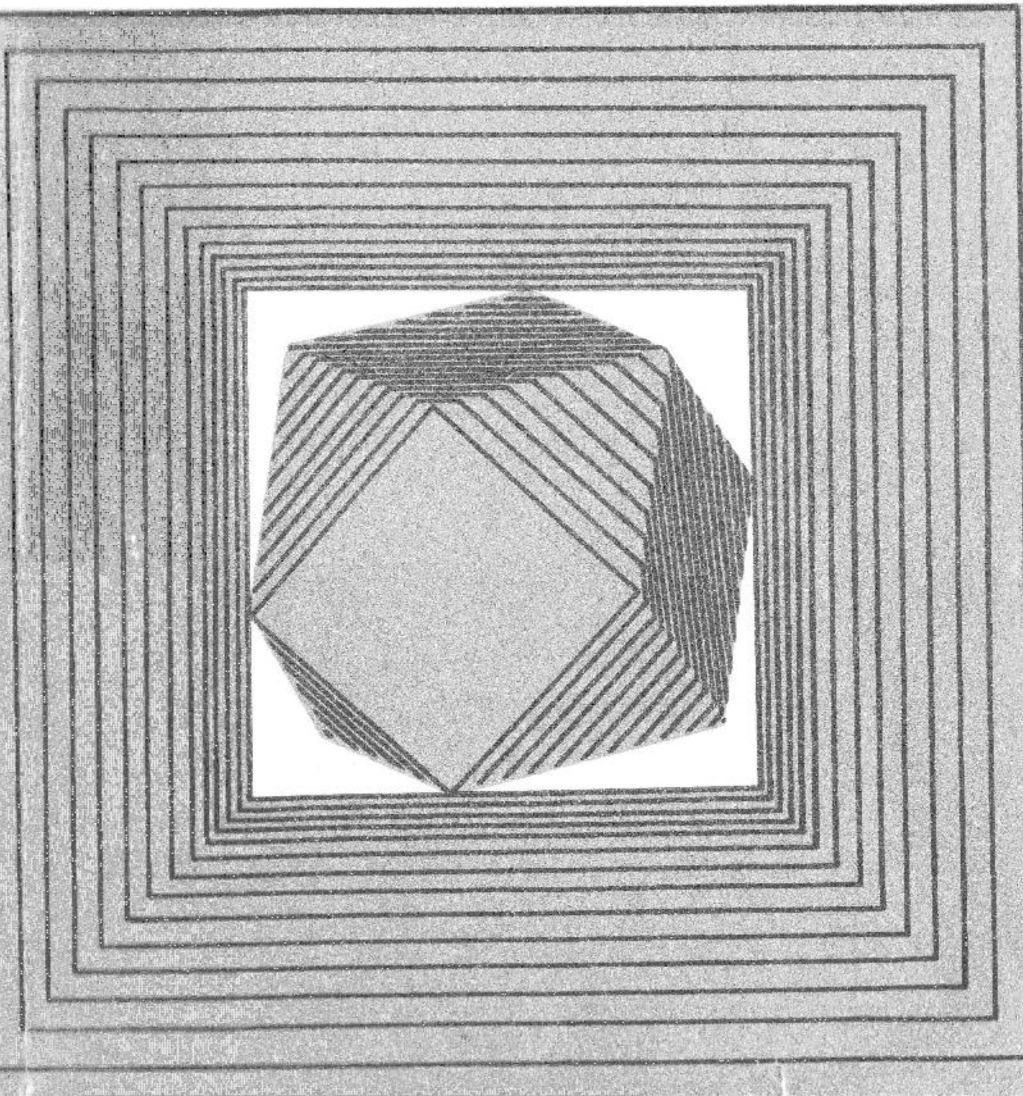
ISSN 0135-6992

УКРАИНСКИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК

ВЫПУСК 26

1983



МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ УССР

ХАРЬКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени А. М. ГОРЬКОГО

УКРАИНСКИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК

ВЫПУСК 26

Республиканский
междуведомственный
научный сборник

Основан в 1965 г.

ХАРЬКОВ
ИЗДАТЕЛЬСТВО ПРИ ХАРЬКОВСКОМ
ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ
ИЗДАТЕЛЬСКОГО ОБЪЕДИНЕНИЯ „ВИЩА ШКОЛА"
1983

УДК 513

Украинский геометрический сборник: Респ. междувед. науч. сб. Вып. 26.—Х.: Вища школа. Изд-во при Харьк. ун-те, 1983.— 145 с.

Большая часть статей посвящена геометрии в целом. Рассматриваются жесткость и изгибания поверхностей, погружение метрик положительной кривизны, строение некомпактных многообразий неотрицательной кривизны, поверхности с заданным грассмановым образом, свойства сферического изображения кривых на выпуклой гиперповерхности, выпуклые многогранники с равноугольными вершинами, геодезические и кратчайшие линии на выпуклых гиперповерхностях. В остальных статьях изучаются вопросы неголономной геометрии, свойства обобщенных пространств и другие вопросы геометрии.

Для научных работников математических специальностей.

Адрес редакционной коллегии: 310077, Харьков-77, пл. Дзержинского, 4, Харьковский университет, механико-математический факультет, тел. 40-14-92

Редакция естественнонаучной литературы

УКРАИНСКИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК

Выпуск 26

Редактор *Н. И. Верховская*
Обложка художника *А. И. Удовенко*
Художественный редактор *Т. П. Воробиенко*
Технический редактор *Л. Т. Момот*
Корректор *Л. П. Пипенко*

Информ. бланк № 7616

Сдано в набор 21.05.82. Подп. в печать 25.02.83. БЦ 09068. Формат 60×90/16. Бумага типогр. № 3. Лит. гарн. Выс. печать. 9 печ. л. 9,25 кр.-отт. 10 уч.-изд. л. Тираж 500 экз. Изд. № 1053. Зак. 2-149. Цена 1 р. 40 к.

Издательство при Харьковском государственном университете издательского объединения „Вища школа", 310003, Харьков-3, ул. Университетская, 16

Харьковская книжная фабрика „Коммунист", 310012, Харьков-12, ул. Энгельса, 11

У $\frac{1702040000-033}{М226(04)-83}$ 457—83

УДК 513

В. Г. Алябьева

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ПРОСТЫХ КОНЕЧНЫХ ГРУПП И ИХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ПОДГРУПП

Как известно, простые группы Ли бесконечных серий [1, с. 499] допускают геометрическую интерпретацию в виде фундаментальных групп проективных, неевклидовых и симплектических пространств. Компактные группы классов A_n, B_n, C_n, D_n интерпретируются в виде групп движений соответственно комплексного эрмитова эллиптического пространства $\overline{S}_n(i)$, вещественного эллиптического пространства S_{2n}, кватернионного эрмитова эллиптического пространства $\overline{S}_{n-1}(i, j)$ и вещественного эллиптического пространства S_{2n-1} [2, с. 152, 622]. Некомпактные группы тех же серий интерпретируются в виде групп движений гиперболических пространств ${}^l\overline{S}_n(i)$, ${}^lS_{2n}$, ${}^l\overline{S}_{n-1}(i, j)$ и ${}^lS_{(2n-1)}$, а также в случае A_n — в виде групп коллинеаций вещественного и кватернионного проективных пространств P_n и $P_{\frac{n-1}{2}}(i, j)$ [2, с. 270, 578]; в случаях C_n и D_n — в виде групп симплектических преобразований вещественного и кватернионного симплектических пространств Sp_{2n-1} и $Sp_{n-1}(i, j)$ [2, с. 352, 353].

Группы коллинеаций пространств P_n и $P_n(i, j)$ представляются группами унимодулярных вещественных и кватернионных $(n+1)$-матриц, группы движений пространств S_n, $\overline{S}_n(i)$ и $\overline{S}_n(i, j)$ — группами вещественных ортогональных, комплексных и кватернионных унимодулярных унитарных $(n+1)$-матриц, группы движений пространств ${}^lS_n$, ${}^l\overline{S}_n(i)$ и ${}^l\overline{S}_n(i, j)$ — группами вещественных псевдоортогональных, комплексных и кватернионных унимодулярных псевдоунитарных $(n+1)$-матриц, группы симплектических преобразований пространств Sp_n и $\overline{S}p_n(i, j)$ — группами вещественных и кватернионных симплектических $(n+1)$-матриц.

Аналогичную интерпретацию допускают и простые конечные группы бесконечных серий. Как известно [3], этими группами, помимо знакопеременной группы U_n, являются факторгруппы над полем Галуа $GF(q)$ по подгруппе скалярных унимодулярных матриц следующих групп:

1) $A_n(q)$ унимодулярных $(n+1)$-матриц;

2) ${}^2A_n(q)$ $(q = s^2)$ унимодулярных псевдоунитарных $(n+1)$-матриц;

3) $B_n(q)$ псевдоортогональных $(2n+1)$-матриц;

4) $C_n(q)$ симплектических $2n$-матриц;

5, 6) $D_n(q)$ и ${}^2D_n(q)$ псевдоортогональных $2n$-матриц.

При этом имеют место изоморфизмы:

$$A_1(q) = B_1(q) = C_1(q); \ D_2(q) = A_1(q) \times A_1(q);$$
$$B_2(q) = C_2(q); \ A_3(q) = D_3(q),$$

и группа $D_1(q)$ изоморфна циклической группе Z_{q-1}.

Порядки групп 1—6 соответственно равны:

$$1) \ \frac{q^{n(n+1)/2}}{(n+1, q-1)} \prod_{i=1}^{n} (q^{i+1}-1); \quad 2) \ \frac{q^{n(n+1)/2}}{(n+1, q+1)} \prod_{i=1}^{n} (q^{i+1}-(-1)^{i+1});$$

$$3, \ 4) \ \frac{q^{n^2}}{(2, q-1)} \prod_{i=1}^{n} (q^{2i}-1);$$

$$5) \ \frac{q^{n(n-1)}}{(4, q^n-1)} (q^n-1) \prod_{i=1}^{n-1} (q^{2i}-1);$$

$$6) \ \frac{q^{n(n-1)}}{(4, q^n+1)} (q^n+1) \prod_{i=1}^{n-1} (q^{2i}-1),$$

где (a, b) — наибольший общий делитель чисел a и b.

При сравнении этих групп с группами Ли бесконечных серий следует иметь в виду, что группа всех коллинеаций проективного пространства $P_n(q)$ непроста, так как имеет нормальные делители, размерность которых меньше, чем размерность самой группы, именно большую и малую проективные группы. Малая проективная группа пространства $P_n(q)$, порожденная центральными коллинеациями с инцидентными центром и осью (элациями), является простой [4] и представляется унимодулярными матрицами над полем $GF(q)$.

Конечные простые группы допускают геометрические интерпретации в виде:

1 — малой проективной группы проективного пространства $P_n(q)$ над полем Галуа $GF(q)$;

2 — группы движений эрмитова гиперболического пространства ${}^{[n+1/2]}S_n(s^2)$, т. е. пространства $P_n(s^2)$, в котором рассматриваются коллинеации проективной группы, переводящие в себя эрмитову квадрику

$$\sum_{i=0}^{(n-1)/2} x^i (x^{(n+1)/2+i})^s + \sum_{i=0}^{(n-1)/2} x^{(n+1)/2+i} (x^i)^s = 0; \qquad (1)$$

$$\sum_{i=0}^{n/2-1} x^i (x^{n/2+1+i})^s + \sum_{i=0}^{n/2-1} x^{n/2+1+i} (x^i)^s + x^{n/2} (x^{n/2})^s = 0; \qquad (2)$$

3 — группы движений гиперболического пространства ${}^nS_{2n}(q)$, т. е. пространства $P_{2n}(q)$, в котором рассматриваются коллинеации проективной группы, переводящие в себя квадрику

$$2 \sum_{i=0}^{(n-1)} x^i x^{n+1+i} (x^n)^2 = 0; \qquad (3)$$

4 — симплектической группы симплектического пространства $Sp_{2n-1}(q)$, т. е. пространства $P_{2n-1}(q)$, в котором рассматриваются коллинеации проективной группы, перестановочные с нуль-системой

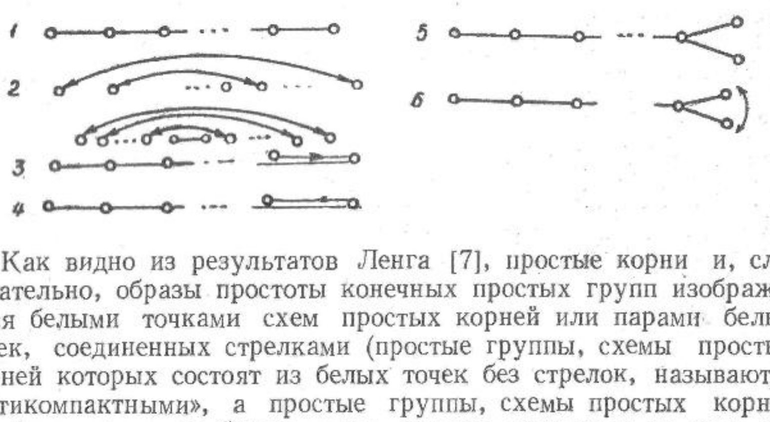
$$u_i = x^{n+i};\ u_{n+i} = -x^i; \tag{4}$$

5, 6 — групп движений гиперболического пространства ${}^nS_{2n-1}(q)$ и ${}^{n-1}S_{2n-1}(q)$, т. е. пространства $P_{2n-1}(q)$, в котором рассматриваются коллинеации проективной группы, переводящие в себя квадрику

$$\sum_{i=0}^{n-1} x^i x^{n+i} = 0 \tag{5}$$

$$\text{и}\quad 2\sum_{i=0}^{n-2} x^i x^{n+i+1} + (x^{n-1})^2 + (x^n)^2 = 0. \tag{6}$$

Параболические подгруппы простых конечных групп [3] определяют образы простоты [5] рассмотренных пространств, соответствующие простым корням этих групп и поэтому изображаемые точками схем простых корней [6] следующего вида:



Как видно из результатов Ленга [7], простые корни и, следовательно, образы простоты конечных простых групп изображаются белыми точками схем простых корней или парами белых точек, соединенных стрелками (простые группы, схемы простых корней которых состоят из белых точек без стрелок, называются «антикомпактными», а простые группы, схемы простых корней которых состоят из белых точек, причем некоторые из них соединены стрелками, называются «почти антикомпактными»; схем простых корней с черными точками, соответствующих, например, вещественным компактным или некомпактным группам, не являющимся антикомпактными или почти антикомпактными, в случае конечных простых групп нет).

Как и в случае пространства P_n, можно показать, что образами простоты пространства $P_n(q)$ являются m-плоскости пространства $(m = 0, 1, \ldots, n-1)$, которые изображаются $(m+1)$-й точкой 1-й схемы.

Как и в случае пространств ${}^l\overline{S}_n(i)$, можно показать, что образы простоты пространства ${}^{[(n+1)/2]}S_n(q)$ служат m-плоские образующие квадрик (1), (2): эти образующие (как и ниже, при $m=0$ — точки, при $m=1$ — прямые) изображаются $(m+1)$-й парой точек 2-й схемы, равноотстоящих от ее концов и соединенных стрелками.

Так же показывается, как и в случае пространств ${}^lS_{2n}$, что образами простоты пространства ${}^nS_{2n}(q)$ являются m-плоские образующие квадрик (3) (при $m=0$ — точки, при $m=1$ — прямые) и изображаются $(m+1)$-й точкой 3-й схемы.

Образами простоты пространства $Sp_{2n-1}(q)$ являются точки этого пространства и нулевые m-плоскости (при $m=0$ — точки, при $m=1$ — нулевые прямые), которые изображаются $(m+1)$-й точкой 4-й схемы.

Можно, как в случае пространств ${}^lS_{2n-1}$, показать, что образами простоты в ${}^nS_{2n-1}(q)$ и ${}^{n-1}S_{2n-1}(q)$ служат точки квадрик (5), (6), прямолинейные и m-плоские образующие этих квадрик; в первом случае при $m=2, 3, \ldots, n-2, n-1$, во втором случае при $m=2, 3, \ldots, n-3, n-2$, причем m-плоские образующие для $m \leqslant n-3$ изображаются $(m+1)$-й точкой 5-й и 6-й схем; $(n-1)$-плоские образующие квадрики (5), составляющие 2 семейства, представлены двумя последними точками 5-й схемы, а $(n-2)$-плоские образующие квадрики (6) представлены двумя последними точками 6-й схемы, соединенными стрелкой.

Список литературы: 1. *Понтрягин Л. С.* Непрерывные группы.— М.: Наука, 1973.— 520 с. 2. *Розенфельд Б. А.* Неевклидовы геометрии.— М.: ГИТТЛ, 1955.— 744 с. 3. *Tits J.* Groupes simples et géometries associées.— Proceedings of the International Congress of mathematicians, August 1962. Stockholm, 1963, p. 15—22. 4. *Dembowski P.* Finite geometries, 1968, Berlin — N. Y. 5. *Розенфельд Б. А.* Образы простоты и полупростоты.— Тр. семинара по векторному и тензорному анализу, 1963, вып. 12, с. 269—286. 6. *Араки Ш.* Корневые системы и локальная классификация неприводимых симметрических пространств.— Математика (сб. переводов). — М.: Наука, 1966, 10:1, с. 90—126. 7. *Lang S.* Algebraic groups over finite field.— Amer. Journal of Malh., 78, 1956, p. 555—567.

Поступила в редколлегию 23.06.77.

УДК 513

Ю. А. Аминов, Т. С. Тарасова

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ В E^4 ПО ВЫРОЖДЕННОМУ ГРАССМАНОВУ ОБРАЗУ

Пусть F^2 — двумерная регулярная поверхность в четырехмерном евклидовом пространстве E^4. Нормальное пространство к поверхности F^2 в точке x обозначим через N_x. Каждой точке $x \in F^2$ поставим в соответствие двумерную плоскость, проходящую через фиксированную точку 0 и параллельную N_x. Этим устанавливается грассманово отображение ψ поверхности F^2 в грассманово многообразие $G_{2,4}$. Образ отображения ψ обозначим через Γ. В общем случае Γ является двумерной поверхностью в $G_{2,4}$, но для некоторых поверхностей F^2 грассманов образ вырождается в линию или в точку.

В работах [1, 2] была поставлена и изучена в некоторых случаях задача нахождения подмногообразия с заданным невырожденным грассмановым образом. В этой статье мы рассмотрим задачу нахождения поверхности в E^4, имеющей вырожденный грассманов образ — заданную линию в $G_{2,4}$. Используем стандартное вложение $G_{2,4}$ в E^6, строящееся с помощью плюккеровых координат плоскости, при котором $G_{2,4}$ лежит в единичной сфере S^5. Доказывается следующая

Теорема. *Для того чтобы кривая $\Gamma \subset G_{2,4}$ была вырожденным грассмановым образом некоторой поверхности $F^2 \subset E^4$*, необходимо и достаточно, чтобы кривая Γ была асимптотической линией гиперповерхности $G_{2,4}$ в единичной сфере S^5.

Поверхность F^2 линией Γ определяется не однозначно. Для доказательства теоремы устанавливаются две леммы.

Лемма 1. *Если грассманов образ поверхности $F^2 \subset E^4$* вырожден в линию, то ее гауссова кривизна $K=0$ и эллипс нормальной кривизны в каждой точке x является отрезком прямой, проходящей через точку x.

Лемма 2. *Если поверхность $F^2 \subset E^4$ имеет гауссову кривизну $K=0$ и эллипс нормальной кривизны ее в каждой точке x является отрезком прямой, проходящей через точку x, то поверхность или образована касательными прямыми к некоторой кривой $\gamma \in E^4$, или коническая, или цилиндрическая.*

Докажем лемму 1. Пусть $d\bar{S}$ — элемент площади грассманова образа, а dS — элемент площади поверхности F^2. В работе [1] для отношения этих элементов площадей установлена формула

$$d\bar{S}/dS = (K^2 + 4(\alpha^2 b^2 + \beta^2 a^2))^{1/2},$$

где K — гауссова кривизна F^2, a и b — полуоси эллипса нормальной кривизны, α и β — координаты его центра относительно системы координат в N_x, оси которой параллельны осям эллипса нормальной кривизны и начало расположено в точке x. Так как грассманов образ вырожден в линию, то $d\bar{S}=0$ и, следовательно, $K=0$, $\alpha b=0$ и $\beta a=0$. По формуле Э. Картана [3, с. 254] гауссова кривизна $K=\alpha^2+\beta^2-a^2-b^2$. Рассмотрим возможные случаи: 1) $\alpha=\beta=0$, тогда из выражения для K следует $a=b=0$, т. е. эллипс нормальной кривизны вырождается в точку x. Вторые квадратичные формы F^2 тождественно равны нулю, и поэтому поверхность F^2 является плоскостью; 2) $\alpha=a=0$ или $\beta=b=0$ — эллипс нормальной кривизны вырождается в отрезок, и он лежит на прямой, проходящей через точку. Лемма 1 доказана.

Перейдем к доказательству леммы 2. Введем две единичные и взаимно ортогональные нормали к F^2 так, чтобы нормаль n_1 была параллельна отрезку — вырожденному эллипсу нормальной кривизны, а нормаль n_2 направим ортогонально к n_1. Тогда $\beta = b = 0$. Так как гауссова кривизна $K = \alpha^2 - a^2 = 0$, то $\alpha = \pm a$. Пусть, например, $\alpha = a$. Введем на F^2 ортогональные координаты так, чтобы конец вектора нормальной кривизны, отложенного от точки x в направлении линии u_1, совпал с концом отрезка нормальной кривизны. Координатные линии u_2 ортогональны к координатным линиям u_1, поэтому линейный элемент поверхности имеет вид $ds^2 = Edu_1^2 + Gdu_2^2$. Пусть II^i — вторая квадратичная форма, соответствующая нормали n_i, и L^i_{jk} — ее коэффициенты. Для рассматриваемой поверхности $L^1_{12} = L^1_{22} = 0$; $L^2_{jk} = 0$. Запишем уравнение Кодацци

$$L^{\sigma}_{ij,\,k} - L^{\sigma}_{ik,\,j} = \sum_{\tau=1}^{2} \left(\mu_{\tau\sigma|k} L^{\tau}_{ij} - \mu_{\tau\sigma|j} L^{\sigma}_{ik}\right),$$

где $\mu_{\tau\sigma|k} = \left(\frac{\partial n_\tau}{\partial u_k} n_\sigma\right)$ — коэффициенты кручения базиса нормалей n_1, n_2. Возьмем комбинацию индексов $i = j = 2$; $k = \sigma = 1$. Тогда получим $L^1_{22,1} - L^1_{21,2} = 0$. Из этого уравнения следует, что $\Gamma^1_{22} L^1_{11} = 0$. Для поверхности, отличной от плоскости, две вторые квадратичные формы не равны одновременно тождественно нулю, поэтому $L^1_{11} \neq 0$. Следовательно, $\Gamma^1_{22} = 0$, откуда следует, что $G_{u_1} = 0$. Линии u_2 являются геодезическими. Из уравнения Кодацци

$$L^2_{11,2} - L^2_{12,1} = \mu_{21|2} L^1_{11} - \mu_{21/1} L^1_{12},$$

левая часть которого равна нулю в силу $L^2_{jk} = 0$, находим, что $\mu_{21/2} = 0$. Покажем, что вдоль линии u_2 нормальная плоскость постоянна. Запишем разложение Вейнгартена:

$$n_{k,\,u_2} = -L^k_{2i} g^{il} r_l + \mu_{kj|2} n_j,$$

где r_l — производная радиус-вектора r поверхности F^2 по координате u_l. В силу $\mu_{21/2} = 0$ и условий на коэффициенты вторых квадратичных форм $L^k_{21} = L^k_{22} = 0$ имеем $n_{k,\,u_2} = 0$. Это означает, что нормальная плоскость вдоль линий u_2 постоянна. Покажем, что линии u_2 являются прямыми в E^4. Пусть k — вектор кривизны этой линии, $k_н$ — ее вектор нормальной кривизны и k_g — вектор геодезической кривизны. В силу их определения $k = k_н + k_g$. Так как линии u_2 геодезические на F^2, то $k_g = 0$. Так как коэффициенты $L^i_{22} = 0$; $i = 1, 2$, то вектор нормальной кривизны для этих линий тоже равен нулю. В силу указанного соотношения $k = 0$. Это означает, что поверхность F^2 образована однопараметрическим семейством прямых линий. Поверхность F^2 изометрична плоскости. Отобразим F^2 изометрически на плоскость. Семейство прямых линий на плоскости, за исключением семейства параллельных прямых и семейства прямых, проходящих через фиксированную точку, имеет огибающую γ'. На поверхности F^2 этой линии соответствует огибающая γ семейства прямых. Таким образом, F^2 образована касательными прямыми некоторой кривой γ в E^4. Нетрудно проверить, что справедливо и обратное утверждение: поверхность, образованная касательными к кривой, имеет нулевую гауссову кривизну, и ее эллипс нормальной кривизны в каждой точке x вырождается в отрезок, лежащий на прямой, проходящей через точку x. Лемма 2 доказана.

Пусть ξ_i, $i=1, \ldots, 4$ — натуральный репер вдоль кривой $\gamma \in E^4$ и T_x — касательная плоскость к F^2 в точке x. Пусть $\rho = \rho(s)$ — радиус-вектор кривой γ, где s — длина ее дуги. По лемме 2 радиус-вектор F^2 можно записать в виде

$$r(s, v) = \rho(s) + v\rho'(s).$$

Касательные векторы к F^2 имеют вид

$$r_s = \rho' + v\rho''; \quad r_v = \rho'.$$

Используем формулы Френе для кривой $\gamma \subset E^4$

$$\frac{d\xi_1}{ds} = k_1\xi_2; \quad \frac{d\xi_2}{ds} = -k_1\xi_1 + k_2\xi_3;$$

$$\frac{d\xi_3}{ds} = -k_2\xi_2 + k_3\xi_4; \quad \frac{d\xi_4}{ds} = -k_3\xi_3, \tag{1}$$

где k_i — кривизны линии γ. Из этих формул следует, что касательная плоскость к F^2 в случае $k_1 \neq 0$ (будем рассматривать кривые именно с этим условием) является линейной комбинацией векторов ξ_1 и ξ_2. Следовательно, ξ_3 и ξ_4 определяют нормальную плоскость. Пусть ξ_j^i — декартовы координаты в E^4 этих векторов. Тогда плюккеровы координаты грассманова образа поверхности имеют вид $p^{ij} = \xi_3^i\xi_4^j - \xi_3^j\xi_4^i$. Набор этих координат $p = (p^{12}, p^{13}, p^{14}, p^{23}, p^{24}, p^{34})$ образует некоторый вектор p в E^6. Координаты точки грассманова многообразия $G_{2,4}$, вложенного в E^6, удовлетворяют двум соотношениям

$$\sum_{i<j} (p^{ij})^2 = 1; \quad p^{1[2}p^{34]} = 0. \tag{2}$$

Из первого уравнения следует, что $G_{2,4} \subset S^5$. Так как $\dim G_{2,4} = 4$, то $G_{2,4}$ является гиперповерхностью в S^5. Пусть q — дополнительный к p бивектор, построенный на векторах ξ_1 и ξ_2. Его компоненты определяются из соотношения $q^{ij} = \varepsilon^{ijkl}p^{kl}$, где ε^{ijkl} — четная перестановка индексов $1, \ldots, 4$, или более подробно

$$q^{12} = p^{34}; \ q^{13} = p^{42}; \ q^{23} = p^{14}; \ q^{24} = p^{31}; \ q^{14} = p^{23}; \ q^{34} = p^{12}. \tag{3}$$

С помощью этих соотношений второе уравнение системы (2) можно записать в виде скалярного произведения $(pq) = 0$. Дифференцируя это соотношение, можно получить $(dpq) = 0$. Это означает, что вектор q является нормалью к гиперповерхности $G_{2,4} \subset S^5$. Поэтому вторая квадратичная форма этой гиперповерхности имеет вид $\mathrm{II} = (d^2pq) = -(dpdq)$.

Пусть $F^2 \subset E^4$ — поверхность с вырожденным в линию Γ грассмановым образом. Координатные орты e_i неподвижной системы координат в E^4 выберем так, чтобы в фиксированной точке x кривой $\xi_i = e_i$. Используя формулы Френе (1), получим выражения для дифференциалов плюккеровых координат

$$dp^{ij} = -k_2 \begin{vmatrix} \xi_2^i \xi_2^j \\ \xi_4^i \xi_4^j \end{vmatrix} ds.$$

В точке x все $dp^{ij} = 0$, за исключением dp^{24}. С другой стороны

$$dq^{ij} = k_2 \begin{vmatrix} \xi_1^i \xi_1^j \\ \xi_3^i \xi_3^j \end{vmatrix} ds.$$

В точке x все $dq^{ij} = 0$, за исключением dq^{13}. Поэтому вдоль Γ $(dpdq) = 0$, т. е. Γ является асимптотической линией гиперповерхности $G_{2,4} \subset S^5$.

Рассмотрим грассманов образ конической и цилиндрической поверхностей. Предполагая, что вершина конической поверхности расположена в начале координат, запишем ее радиус-вектор $r(s, v) = \rho(s) v$, где $\rho = \rho(s)$ — кривая γ, лежащая в единичной сфере с центром в начале координат. Пусть ξ_1 — единичный касательный к ней вектор. Бивектор плоскости, касательной к поверхности, имеет вид $q = [\rho \xi_1]$, а его производная $dq = [\rho d\xi_1]$. Компоненты бивектора p определяются через компоненты q по формулам (3). Получим

$$(dpdq) = 2 [\rho d\xi_1]^{1[2} [\rho d\xi_1]^{34]} = 0$$

в силу свойств компонент простого бивектора. Для цилиндрической поверхности запишем $r(s, v) = \rho(s) + v e_4$, где $\rho(s)$ — кривая, лежащая в пространстве E^3, ортогональном орту e_4. Касательная плоскость проходит через векторы ξ_1 и e_4, поэтому $q = [\xi_1 e_4]$. Снова находим

$$(dpdq) = 2 [d\xi_1 e_4]^{1[2} [d\xi_1 e_4]^{34]} = 0.$$

Итак, грассманов образ конической и цилиндрической поверхностей также является асимптотической линией на $G_{2,4} \subset S^5$.

Покажем, что условие асимптотичности кривой Γ является и достаточным для определения поверхности F^2. По кривой Γ мы найдем кривизны кривой $\gamma \in E^4$, семейство касательных прямых которой образует F^2. Хорошо известно разложение многообразия $G_{2,4}$ в виде произведения двух единичных сфер $G_{2,4} = S_1^2 \times S_2^2$. Точки S_i^2 задаются концами двух векторов μ и ν соответственно

$$\mu = (p^{12} + q^{12},\ p^{13} + q^{13},\ p^{14} + q^{14});$$
$$\nu = (p^{12} - q^{12},\ p^{13} - q^{13},\ p^{14} - q^{14}).$$

Квадратными скобками [ ] будем обозначать бивектор, построенный на векторах из E^4. Набор его компонент, упорядоченный, так же как у p, составит вектор в E^6. Рассмотрим вектор

$[\xi_1\xi_2] + [\xi_3\xi_4]$. Три его первые компоненты образуют вектор μ, а три последующие после соответствующих перестановок и изменений знака совпадают с первыми. Обозначим

$$\{\mu, \bar{\mu}\} = [\xi_1\xi_2] + [\xi_3\xi_4]; \quad \{\nu, \tilde{\nu}\} = [\xi_3\xi_4] - [\xi_1\xi_2],$$

где $\bar{\mu}$ и $\tilde{\nu}$ — векторы, полученные из μ и ν перестановками и изменениями знаков компонент. Когда точка p описывает кривую Γ на $G_{2,4}$, то векторы μ и ν описывают кривые Γ_1 и Γ_2 на сферах S_1^2 и S_2^2 соответственно. Пусть кривая Γ отнесена к длине дуги σ, а кривые Γ_i имеют длину дуги σ_i. Дифференцируя вектор $\{\mu, \bar{\mu}\}$ по σ_1, получим в силу формул Френе (1)

$$\frac{d}{d\sigma_1}\{\mu, \bar{\mu}\} = k_2([\xi_1\xi_3] - [\xi_2\xi_4])\frac{ds}{d\sigma_1}.$$

Используя ортогональность в E^6 векторов $[\xi_1\xi_3]$ и $[\xi_2\xi_4]$, отсюда находим $k_2^2\left(\frac{ds}{d\sigma_1}\right)^2 = 1$. Аналогичное соотношение, но с заменой $d\sigma_1$ на $d\sigma_2$ получим, дифференцируя вектор $\{\nu, \tilde{\nu}\}$. Следовательно, длины дуг кривых γ, Γ_1 и Γ_2 связаны следующими равенствами:

$$\frac{d\sigma_1}{ds} = \frac{d\sigma_2}{ds} = |k_2|. \tag{4}$$

Поэтому кривая $\Gamma \subset G_{2,4}$, являющаяся грассмановым образом, задается соответствием точек из Γ_1 и Γ_2 по равенству длин дуг. Это условие эквивалентно условию асимптотичности линии Γ. Действительно, вектор $\{\mu, \bar{\mu}\}$ можно, очевидно, записать как сумму $p + q$. Следовательно,

$$2d\sigma_1^2 = (dp + dq)^2 = dp^2 + 2(dpdq) + dq^2.$$

Аналогично получим

$$2d\sigma_2^2 = (dp - dq)^2 = dp^2 - 2(dpdq) + dq^2.$$

Так как $d\sigma_1 = d\sigma_2$, то $(dpdq) = 0$, т. е. Γ — асимптотическая линия. Наборы компонент вектора p и вектора q совпадают, поэтому $dp^2 = dq^2$. Следовательно, совпадают и длины дуг Γ и Γ_i: $d\sigma = d\sigma_i$. С помощью (4) находим для длин дуг кривых $\gamma \in E^4$ и $\Gamma \subset G_{2,4}$ связь: $s = \int_\Gamma \frac{d\sigma}{|k_2(\sigma)|}$.

Далее, предполагая для определенности, что $k_2 > 0$, запишем

$$\frac{d}{d\sigma_1}\{\mu, \bar{\mu}\} = [\xi_1\xi_3] - [\xi_2\xi_4].$$

Найдем выражение геодезической кривизны $\varkappa_1$ кривой Γ_1 через кривизны кривой γ. Имеем

$$\frac{d^2}{d\sigma_1^2}\{\mu, \bar{\mu}\} = ([\xi_1\xi_4] + [\xi_2\xi_3])(k_1 + k_3)\frac{ds}{d\sigma_1} - k_2([\xi_1\xi_2] +$$

$$+ [\xi_3\xi_4]) \frac{ds}{d\sigma_1} = (k_1 + k_3)\lambda \frac{ds}{d\sigma_1} - \{\mu, \bar{\mu}\},$$

где вектор $\lambda = [\xi_1\xi_4] + [\xi_2\xi_3]$. Три первые компоненты вектора λ образуют вектор касательный к S_1^2 и ортогональный к линии Γ_1. Отсюда находим выражение для геодезической кривизны $\varkappa_1$ кривой Γ_1 $\varkappa_1 = (k_1 + k_3)/k_2$.

Аналогично находится геодезическая кривизна кривой Γ_2 $\varkappa_2 = (k_3 - k_1)/k_2$. Так как нам задана кривая Г, а кривая γ неизвестна, то мы запишем выражение ее кривизн k_1 и k_3 через известные величины $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ и кривизну k_2.

$$k_1 = \frac{k_2}{2}(\varkappa_1 - \varkappa_2), \quad k_3 = \frac{k_2}{2}(\varkappa_1 + \varkappa_2). \tag{5}$$

Если $\varkappa_1 \neq \varkappa_2$, то зададим функцию $k_2(\sigma)$ произвольно, но отличной от нуля. По формулам (4, 5) находим длину дуги s, кривизны $k_1 \neq 0$, $k_2 \neq 0$ и k_3 как функции длины дуги σ кривой Г. Тем самым определяются кривизны k_i как функции от s. По заданным функциям $k_i = k_i(s)$ кривая γ определяется однозначно, с точностью до движения в E^4. Выберем на кривой Γ точку P_0. Покажем, что выбором натурального репера $\xi_1, \ldots, \xi_4$ в начальной точке $x_0 \in \gamma$ можно добиться совпадения грассманова образа поверхности F^2 с Γ, причем так, чтобы $\psi(x_0) = P_0$. Пусть N — плоскость векторов ξ_3, ξ_4, взятая так, что она является выбранной точкой $P_0 \in G_{2,4}$ и T-плоскость, ортогональная к N. Покажем, что вращением ξ_1 и ξ_2 в T и ξ_3, ξ_4 в N можно добиться, чтобы касательные векторы μ_{σ_1} и ν_{σ_2} в соответствующих точках на S_i^2 касались заданных кривых Γ_1 и Γ_2. Пусть e_1, e_2 — выбранный базис в T и e_3, e_4 — базис N. Запишем

$$\xi_1 = \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2; \quad \xi_2 = -\sin\theta e_1 + \cos\theta e_2;$$

$$\xi_3 = \cos\varphi e_3 + \sin\varphi e_4; \quad \xi_4 = -\sin\varphi e_3 + \cos\varphi e_4.$$

Обозначим $\theta + \varphi_1 = \theta_1$; $\varphi - \theta = \theta_2$; $e_{ij} = [e_ie_j]$. Можно найти

$$\frac{d}{d\sigma_1}\{\mu, \bar{\mu}\} = \cos\theta_1 (e_{13} - e_{24}) + \sin\theta_1 (e_{14} + e_{23});$$

$$\frac{d}{d\sigma_2}\{\nu, \tilde{\nu}\} = \cos\theta_2 (e_{13} + e_{24}) + \sin\theta_2 (e_{14} - e_{23}).$$

Рассмотрим, например, вектор μ_{σ_1}. При любом θ_1 он является линейной комбинацией векторов, которые лежат в касательной плоскости к S_i^2 в соответствующей точке. Поэтому изменением угла θ_1 можно добиться касания кривой Γ_1 вектором μ_{σ_1}. Аналогично, изменением угла θ_2 можно добиться касания кривой Γ^2 вектором ν_{σ_2}. Кривая Γ_i определяется точкой, касательным направлением и геодезической кривизной $\varkappa_i$ (взятой со знаком) однозначно. Поэтому при указанном выборе векторов ξ_i в точке x_0 и значений кривизн k_i кривой γ грассманов образ F^2 будет совпадать с заданной линией Γ.

Если $\varkappa_1 = \varkappa_2$, то по формуле (5) кривизна $k_1 = 0$. Этот случай надо рассмотреть отдельно. Решением задачи является цилиндрическая поверхность: $r(s, v) = \rho(s) + ve_4$, где $\rho(s)$ — кривая в E^3, ортогональном орту e_4. Действительно, для этой поверхности $p = [\xi_2\xi_3]$, $q = [\xi_1 e_4]$. Пусть k_1 и k_2 — кривизны кривой $\rho(s)$. Имеем

$$\frac{d}{ds}(p \pm q) = -k_1([\xi_1\xi_3] \mp [\xi_2 e_4]);$$

$$\frac{d^2}{d\sigma_1^2}(p \pm q) = -(k_1(p \pm q) - k_2([\xi_1\xi_2] \pm [\xi_3 e_4]))\frac{1}{k_1}.$$

Отсюда следует, что $\frac{d\sigma_i}{ds} = k_1$, и геодезические кривизны $\varkappa_i$ кривых Γ_i равны между собой: $\varkappa_i = k_2/k_1$. Задав k_1 произвольно и положив $k_2 = k_1\varkappa_i$, найдем направляющую кривую $\rho(s)$ поверхности F^2.

Если $\varkappa_1 = -\varkappa_2$, то кривая γ и поверхность F^2 лежат в некотором трехмерном пространстве E^3.

Замечание. Можно рассмотреть также вопрос о восстановлении поверхности в E^n по вырожденному грассманову образу. Но в этом случае удается установить лишь некоторые необходимые условия на Γ. Имеет место теорема, доказательство которой проводится аналогично вышеприведенному.

Теорема 2. *Для того чтобы кривая $\Gamma \subset G_{3,5}$ была вырожденным грассмановым образом поверхности $F^2 \subset E^5$, необходимо, чтобы три первых производных радиус-вектора этой кривой $\frac{d^i p}{d\sigma^i}$,* $i = 1, 2, 3$, были *ортогональны к нормальному пространству подмногообразия $G_{3,5} \subset S^9$.*

Указанное условие на $\frac{d^2 p}{d\sigma^2}$ означает асимптотичность Γ на подмногообразии $G_{3,5} \subset S^9$.

Список литературы: 1. *Аминов Ю. А.* О грассмановом образе двумерной поверхности в четырехмерном евклидовом пространстве.— Укр. геометр. сб., вып. 23, 1980, с. 3—6. 2. *Аминов Ю. А.* Определение поверхности в E^4 по заданному грассманову образу. Мат. сб. 1982, 117, № 2, с. 147—160. 3. *Картан Э.* Риманова геометрия в ортогональном репере.—М.: Изд-во при Моск. ун-те, 1960.—307 с.

Поступила в редколлегию 19.10.81.

УДК 513

Е. Р. Андрейчин, И. Х. Сабитов

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ РЕМБСА НА ОБЩИЕ ВЫПУКЛЫЕ ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ

1. В работе [1] Рембс рассмотрел бесконечно малые (б. м.) изгибания скольжения регулярных (дважды непрерывно дифференцируемых) выпуклых поверхностей вращения строго положительной кривизны. Одновременно с этим он получил оценки

поведения решений уравнений б. м. изгибаний в зависимости от номера гармоники.

А. Д. Милка в работе [2] обобщил теорему Рембса о б. м. изгибаниях скольжения. Он изучил б. м. изгибания скольжения выпуклой поверхности вращения относительно любой данной плоскости.

В настоящей статье распространим на общие выпуклые поверхности вращения результаты Рембса, касающиеся не только параллелей с б. м. изгибанием скольжения, но и оценок сравнительного поведения б. м. изгибаний в зависимости от номера гармоники. При этом частично повторим результаты А. Д. Милки о параллелях скольжения, сформулированные им без подробного доказательства в работе [2] для общих выпуклых поверхностей вращения, но применяемый метод будет другой.

2. Б. м. изгибание поверхности S с краем L называется изгибанием скольжения относительно плоскости P, если край поверхности при ее б. м. изгибании стационарен относительно P. Пусть $\boldsymbol{z}(u, v)$ — поле б. м. изгибания S, τ — направляющая нормаль плоскости P. Изгибание скольжения означает, что на крае L выполняется условие $(\boldsymbol{z}\tau)=0$ **(1)**.

Введем сначала необходимые обозначения, согласно работе [3]. Пусть $r=r(u)\,(0\leqslant u\leqslant a,\ r(0)=r(a)=0;\ r(u)>0,\ 0<u<a)$ — выпуклая кривая, расположенная в плоскости (u, r). Замкнутую поверхность вращения, полученную вращением $r(u)$ вокруг оси Ou, обозначим через S; сегмент поверхности S, соответствующий значениям $u\in[0, c]$, $c<a$, обозначим через S_c.

Пусть единичный вектор $\boldsymbol{a}(v)$ описывает круговую дугу длиной v и с центром на оси вращения. Уравнение радиуса-вектора S имеет вид $\boldsymbol{r}(u, v)=u\boldsymbol{e}+r(u)\,\boldsymbol{a}(v)$, где $\boldsymbol{e}$ — единичный вектор оси вращения.

Пусть $\boldsymbol{z}(u, v)=\xi(u, v)\,\boldsymbol{e}+\eta(u, v)\,\boldsymbol{a}(v)+\zeta(u, v)\,\boldsymbol{a}'(v)$ — поле б. м. изгибания S. Разложив по v функции $\xi(u, v)$, $\eta(u, v)$ и $\zeta(u, v)$ в ряды Фурье

$$\xi=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\varphi_n(u)\,e^{inv};\quad \eta=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\psi_n(u)\,e^{inv};\quad \zeta=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\chi_n(u)\,e^{inv},\qquad (2)$$

для определения функций $\varphi_n(u)$, $\psi_n(u)$, $\chi_n(u)$ получим уравнения

$$\varphi_n'(u)+r'(u)\,\psi_n'(u)=0;\quad in\chi_n(u)+\psi_n(u)=0;$$

$$in\varphi_n(u)+r'(u)\,[in\psi_n(u)-\chi_n(u)]+r(u)\,\chi_n'(u)=0.$$

Функции $\varphi_n(u)$, $\psi_n(u)$, $\chi_n(u)$, вообще говоря, комплекснозначны, причем $\varphi_n=\bar{\varphi}_{-n}$, $\psi_n=\bar{\psi}_{-n}$, $\chi_n=\bar{\chi}_{-n}$; из условия непрерывности изгибания следует, что в полюсе при $u=0$ все они обращаются в нуль. Пусть $\varphi_n=\varphi_{n1}+i\varphi_{n2}$; $\chi_n=\chi_{n1}+i\chi_{n2}$. Тогда для φ_{n1}, φ_{n2}, χ_{n1}, χ_{n2} получим уравнения:

$$\varphi_{n1}'(u)=-nr'(u)\,\chi_{n2}(u),\quad \varphi_{n2}'(u)=nr'(u)\,\chi_{n1}'(u);$$

$$n\varphi_{n1}(u) = -[(n^2-1)\,r'(u)\,\chi_{n2}(u) + r(u)\,\chi'_{n2}(u)];$$
$$n\varphi_{n2}(u) = (n^2-1)\,r'(u)\,\chi_{n1}(u) + r(u)\,\chi'_{n1}(u).$$

Очевидно, достаточно решить следующих два уравнения:

$$\varphi'_n(u) = nr'(u)\,\chi'_n(u); \tag{3}$$
$$n\varphi_n(u) = (n^2-1)\,r'(u)\,\chi_n(u) + r(u)\,\chi'_n(u),\ n \geqslant 2. \tag{4}$$

В работе [4] доказано, что общая выпуклая незамкнутая поверхность вращения допускает б. м. изгибания, если ее интегральная кривизна меньше 4π. Кроме того, там же показано, что функции $\varphi_n(u)$, $\psi_n(u)$, $\chi_n(u)$, входящие в (2), почти всюду имеют производные и во всех точках существуют односторонние производные этих функций, удовлетворяющие уравнениям (3) и (4), если в них под $r'(u)$ также понимать соответствующую одностороннюю производную.

Докажем следующие теоремы:

Теорема 1. *Для любой параллели $u = c$ $(0 < c < a)$ общей выпуклой поверхности вращения S_b $(c \leqslant b < a)$ при $k > n \geqslant 2$ справедливы неравенства:*

$$\frac{\chi'_n(c \pm 0)}{\chi_n(c)} \leqslant \frac{\chi'_k(c \pm 0)}{\chi_k(c)},\quad \frac{1}{n^2-1}\frac{\chi'_n(c \pm 0)}{\chi_n(c)} \geqslant \frac{1}{k^2-1}\frac{\chi'_k(c \pm 0)}{\chi_k(c)}. \tag{5}$$

Теорема 2. *На общей выпуклой замкнутой поверхности вращения S существует лишь счетное множество параллелей $L_2 : u = u_2$, $L_3 : u = u_3 < u_2, \ldots, L_m : u = u_m < u_{m-1} < \ldots$, таких, что сегменты S_{u_m} поверхности S, ограниченные соответственно параллелями L_m и содержащие наибольшую параллель $L_0 : u = \overset{*}{u_0}$, допускают б. м. изгибания скольжения относительно плоскости параллели L_m, содержащие только m-ю гармонику **. При $m \to \infty$ параллели L_m сходятся к L_0.*

Для теоремы 2 дадим два доказательства, первое — отличается в идейном плане от доказательства аналогичной теоремы в [1]; второе — идейно близко к доказательству Рембса, но технически отличается от его метода, поскольку рассуждения Рембса подходят только для C^2-гладких поверхностей строго положительной кривизны.

---

* Если наибольшая высота $r(u)$ достигается на некотором отрезке, то за u_0 принимается правый конец этого отрезка.

** Отметим, что в [1] существование поверхностей вида S_{u_m} с б. м. изгибанием скольжения доказано лишь при достаточно больших m, а вопрос о существовании таких поверхностей для всех m, начиная с $m = 2$, не рассматривается. Точно такой же результат, только для больших m, получается и у нас, когда мы доказываем теорему 2 методом Рембса с использованием теоремы 3.

Теорема 3. *Для параллели $u = c$ поверхности S_b, $u_0 < c \leqslant \leqslant b < a$, справедливо соотношение*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\chi_n'(c-0)}{(n^2-1)\chi_n(c)} = 0. \tag{6}$$

Поскольку мы используем теорему 3 для одного из доказательств теоремы 2, то для теоремы 3 тоже дадим два доказательства, первое опирается на теорему 2, второе доказательство использует только теорему 1.

Замечание 1. Как видно из вышесказанного, существует метод получения теорем Рембса в обобщенном случае, независимо от примененной Рембсом идеи. Рембс сначала доказывает теорему вида нашей теоремы 3, а затем использует ее для доказательства теоремы 2. Наши первые варианты доказательств теорем 2 и 3 показывают, что можно идти в обратном порядке — сначала доказать теорему 2, а затем уже, опираясь на нее, получить теорему 3.

Другие замечания об оценках (5), (6) будут даны в основном тексте и в ходе доказательства.

3. Доказательство теоремы 1. Для произвольной функции $f(u)$ положим $\Delta f(u) = f(u + \Delta u) - f(u)$. Тогда, следуя [4], из (3) и (4) получим для $\chi_n'(u \pm 0)$ разностное уравнение

$$r(u + \Delta u)\,\Delta\chi_n'(u \pm 0) + (n^2 - 1)\,\Delta r'(u \pm 0)\,\chi_n(u + \Delta u) = \varepsilon_n \Delta u, \tag{7}$$

где $\varepsilon_n \to 0$ при $\Delta u \to 0$.

Напишем аналогичное (7) уравнение для $\chi_k(u)$, умножим его на $\chi_n(u + \Delta u)$ и вычтем из (7), умноженного на $\chi_k(u + \Delta u)$. Получим

$$\chi_k(u + \Delta u)\,\Delta\chi_n'(u \pm 0) - \chi_n(u + \Delta u)\,\Delta\chi_k'(u \pm 0) +$$
$$+ (n^2 - k^2)\,\frac{\Delta r'(u \pm 0)}{r(u + \Delta u)}\,\chi_n(u + \Delta u)\,\chi_k(u + \Delta u) =$$
$$= [\varepsilon_n \chi_k(u + \Delta u) - \varepsilon_k \chi_n(u + \Delta u)]\,\frac{\Delta u}{r(u + \Delta u)}. \tag{8}$$

Разобьем отрезок $[0, c]$ на равные части, полагая $u_1 = \Delta u$; $u_2 = = 2\Delta u$; $\ldots$; $c = u_{N+1} = (N + 1)\,\Delta u$. Просуммируем теперь (8) по точкам u_j, $j = 1, \ldots, N$. Используя известное преобразование Абеля, найдем

$$\chi_k(u_{N+1})\,\chi_n'(u_{N+1} \pm 0) - \chi_k(u_2)\,\chi_n'(u_1 \pm 0) -$$
$$- \chi_n(u_{N+1})\,\chi_k'(u_{N+1} \pm 0) + \chi_n(u_2)\,\chi_k'(u_1 \pm 0) -$$
$$- \sum_{i=1}^{N-1} [\chi_k(u_{i+2}) - \chi_k(u_{i+1})]\,\chi_n'(u_{i+1} \pm 0) +$$
$$+ \sum_{i=1}^{N-1} [\chi_n(u_{i+2}) - \chi_n(u_{i+1})]\,\chi_k'(u_{i+1} \pm 0) =$$

$$= (k^2 - n^2) \sum_{i=1}^{N} \frac{\Delta r'(u_i \pm 0)}{r(u_{i+1})} \chi_n(u_{i+1}) \chi_k(u_{i+1}) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} [\varepsilon_n(u_i) \chi_k(u_{i+1}) - \varepsilon_k(u_i) \chi_n(u_{i+1})] \frac{\Delta u}{r(u_{i+1})}. \tag{9}$$

Из условия непрерывности б. м. изгибания в полюсе поверхности следует: $\varphi_n(0) = \chi_n(0) = 0$. Далее, в [4] доказано, что $\chi_n(u)$ — монотонная функция. Поэтому, умножая в случае необходимости на -1, можем считать, что $\chi_n(u) > 0$ при всех $u > 0$. Отсюда, учитывая это и ограниченность $\chi_n'(u)$ и $\chi_k'(u)$, получаем, что

$$\chi_n(u_{i+2}) - \chi_n(u_{i+1}) = (\chi_n'(u_{i+1} \pm 0) + \delta_n) \Delta u$$

и точно такое же соотношение для χ_k; здесь δ_n, $\delta_k \to 0$ при $\Delta u \to \pm 0$. Так как для выпуклой кривой $\Delta r'(u_i \pm 0) \leqslant 0$, то из (9), устремляя Δu к нулю, получаем

$$\chi_n'(c \pm 0) \chi_k(c) - \chi_k'(c \pm 0) \chi_n(c) \leqslant 0, \quad k > n.$$

Отсюда следует первое неравенство (5).

Докажем теперь вторую часть теоремы. Умножим (7) на $(k^2 - 1) \chi_k(u + \Delta u)$, а уравнение для $\chi_k(u)$ — на $(n^2 - 1) \chi_n(u + \Delta u)$, и вычтем одно из другого. Получим

$$(k^2 - 1) \chi_k(u + \Delta u) \Delta \chi_n'(u \pm 0) -$$
$$- (n^2 - 1) \chi_n(u + \Delta u) \Delta \chi_k'(u \pm 0) = \varepsilon_{n,k} \Delta u. \tag{10}$$

Просуммируем (10) по точкам u_i, $i = 1, \ldots, N$, и аналогично (9) получим

$$(k^2 - 1) \chi_k(u_{N+1}) \chi_n'(u_{N+1} \pm 0) -$$
$$- (n^2 - 1) \chi_n(u_{N+1}) \chi_k'(u_{N+1} \pm 0) = (k^2 - n^2) \times$$
$$\times \sum_{i=1}^{N-1} \chi_k'(u_{i+1} \pm 0) \chi_n'(u_{i+1} \pm 0) \Delta u + (k^2 - 1) \chi_n(u_2) \times$$
$$\times \chi_n'(u_1 \pm 0) - (n^2 - 1) \chi_k(u_2) \chi_k'(u_1 \pm 0) + A_1 \Delta u,$$

где A_1 — некоторая ограниченная величина. Так как сумма в правой части строго больше нуля, то отсюда при $\Delta u \to 0$ получим второе неравенство (5).

Теорема 1 доказана.

Замечание 2. Так как $\chi_n'(u)$ — возрастающая функция [4], то $\chi_n'(c - 0) \leqslant \chi_n'(c + 0)$, и тогда следует, что вместе с (5) выполняются и неравенства

$$\frac{\chi_n'(c - 0)}{\chi_n(c)} \leqslant \frac{\chi_k'(c + 0)}{\chi_k(c)}, \quad \frac{1}{k^2 - 1} \frac{\chi_k'(c - 0)}{\chi_k(c)} < \frac{1}{n^2 - 1} \frac{\chi_n'(c + 0)}{\chi_n(c)}, \quad n < k.$$

Но неравенства

$$\frac{\chi_n'(c+0)}{\chi_n(c)} \leqslant \frac{\chi_k'(c-0)}{\chi_k(c)}, \quad \frac{1}{k^2-1}\frac{\chi_k'(c+0)}{\chi_k(c)} < \frac{1}{n^2-1}\frac{\chi_n'(c-0)}{\chi_n(c)}, \ n<k,$$

в общем случае неверны, что показывает пример в замечании 3.

4. Доказательства теоремы 2.

Первое доказательство. Из уравнения (3) следует, что $\varphi_n'(u)<0$ для $u_0<u<a$, т. е. $\varphi_n(u)$ — монотонно убывающая функция, и, следовательно, существует $\lim\limits_{u\to a-}\varphi_n(u)$. Докажем, что $\lim\limits_{u\to a-}\varphi_n(u)<0$ для каждого $n\geqslant 2$. Допустим, что наоборот,

$$\lim_{u\to a-}\varphi_n(u)\geqslant 0. \tag{11}$$

Пусть $\delta>0$ такое, что $u_0<u_0+\delta<a$. Тогда $r'(u_0+\delta\pm 0)<0$. Из (3) получаем

$$\varphi_n(u)=n\int_{u_0+\delta}^{u} r'(t)\,\chi_n'(t)\,dt+n\varphi_n(u_0+\delta).$$

Из уравнения (4), учитывая предположение (11), получаем

$$\chi_n'(t)=\frac{n\varphi_n(t)}{r(t)}-\frac{(n^2-1)\,r'(t)}{r(t)}\chi_n(t)>-(n^2-1)\frac{r'(t)}{r(t)}\chi_n(u_0+\delta).$$

Тогда

$$\left|n\int_{u_0+\delta}^{u} r'(t)\,\chi_n'(t)\,dt\right|>n\chi_n(u_0+\delta)\int_{u_0+\delta}^{u}(n^2-1)\frac{r'^2(t)}{r(t)}\,dt=$$

$$=n(n^2-1)\,\chi_n(u_0+\delta)\int_{u_0+\delta}^{u}\frac{(-r'(t))(-r'(t))}{r(t)}\,dt>n(n^2-1)\,\chi_n(u_0+\delta)\times$$

$$\times\int_{u_0+\delta}^{u}\frac{-r'(t)}{r(t)}(-r'(u_0+\delta))\,dt=C\ln\frac{r(u_0+\delta)}{r(u)}.$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{u\to a-}\int_{u_0+\delta}^{u} nr'(t)\,\chi_n'(t)\,dt=-\infty,$$

и поскольку $\varphi_n(u_0+\delta)$ — некоторое фиксированное число, то $\lim\limits_{u\to a-}\varphi_n(u)=-\infty$, что противоречит (11). Следовательно,

$$\lim_{u\to a-}\varphi_n(u)<0$$

при каждом $n\geqslant 2$.

Но с другой стороны, поскольку $\chi_n(u)>0$ при $u>0$, то в правой окрестности точки $u=0$ функция $\varphi_n(u)>0$, как это видно из уравнения (3) или (4). Функция $\varphi_n(u)$ возрастает при $u\leqslant u_0$.

Это означает, что для каждой функции $\varphi_n(u)$, $n \geqslant 2$, есть соответствующая параллель $u = u_n > u_0$, где $\varphi_n(u_n) = 0$, т. е. на этой параллели для n-й гармоники поля z выполнено условие (1).

Докажем, что u_n монотонно убывает при возрастании n. Пусть $\varphi_n(u_n) = 0$, т. е. согласно уравнению (4)

$$\frac{r'(u_n - 0)}{r(u_n)} + \frac{1}{n^2 - 1}\frac{\chi_n'(u_n - 0)}{\chi_n(u_n)} = 0. \tag{12}$$

При $m > n$ тоже из (4) найдем

$$m\varphi_m(u_n) = (m^2 - 1)\, r(u_n)\,\chi_m(u_n)\left[\frac{r'(u_n - 0)}{r(u_n)} + \frac{1}{m^2 - 1}\frac{\chi_m'(u_n - 0)}{\chi_m(u_n)}\right]. \tag{13}$$

Учитывая (12) и второе из неравенств (5), мы из (13) получаем, что $\varphi_m(u_n) < 0$. Следовательно, точка $u = u_m$, где $\varphi_m(u_m) = 0$, лежит левее точки u_n, т. е. последовательность $\{u_n\}$ монотонна.

Теперь докажем, что $u_n \to u_0$ при $n \to \infty$. Допустим обратное: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \tilde{u} > u_0$. Тогда $\varphi_n(\tilde{u}) \geqslant 0$. Пусть $\delta > 0$ такое, что $u_0 <$

$< u_0 + \delta < \tilde{u}$. Умножив на постоянную, можем считать, что $\varphi_n(u_0 + \delta) = 1$. Из (4) получаем

$$\chi_n'(u_0 + \delta) = \frac{n}{r(u_0 + \delta)} - (n^2 - 1)\frac{r'(u_0 + \delta)}{r(u_0 + \delta)}\chi_n(u_0 + \delta),$$

и так как

$$r'(u_0 + \delta) < 0, \quad \chi_n'(u_0) > 0,$$

то

$$\chi_n'(u_0 + \delta) > n/r(u_0 + \delta).$$

Тогда

$$\left| n\int_{u_0+\delta}^{\tilde{u}} r'(t)\,\chi_n'(t)\,dt \right| > n^2 \int_{u_0+\delta}^{\tilde{u}} (-r'(t))\frac{dt}{r(u_0 + \delta)} = \frac{n^2}{r(u_0 + \delta)}\,|\Delta r|.$$

Отсюда для достаточно больших n следует, что

$$\left| n\int_{u_0+\delta}^{\tilde{u}} r'(t)\,\chi_n'(t)\,dt \right| > 1,$$

и поскольку подынтегральная величина отрицательна, то

$$n\int_{u_0+\delta}^{\tilde{u}} r'(t)\,\chi_n'(t)\,dt < -1.$$

Но тогда будет

$$\varphi_n(\tilde{u}) = n\int_{u_0+\delta}^{\tilde{u}} r'(t)\,\chi_n'(t)\,dt + 1 < 0,$$

что противоречит неравенству $\varphi_n(\bar{u}) \geqslant 0$. Следовательно $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u_0$, что и требовалось доказать.

Второе доказательство теоремы 2. Так как $u > u_0$, то $r'(u) < 0$. Но тогда из (4) и соотношения (6) теоремы 3 следует, что $\varphi_n(u) < 0$ при достаточно больших n. Так как $\varphi_n(u) > 0$ в окрестности нуля и $\varphi_n(u)$ возрастает при $u \leqslant u_0$, каждой функции $\varphi_n(u)$, начиная с некоторого номера n_0, соответствует параллель $u = u_n > u_0$, причем $\varphi_n(u_n) = 0$. Монотонность $\{u_n\}$, $n \geqslant n_0$ устанавливается так же, как и в первом варианте доказательства. Далее перепишем (4) в виде

$$n\varphi_n(u) = (n^2-1)\,r(u)\,\chi_n(u)\left[\frac{r'(u-0)}{r(u)} + \frac{1}{n^2-1}\,\frac{\chi_n'(u-0)}{\chi_n(u)}\right]. \qquad (14)$$

Из (14) и теоремы 3 видно, что если $u > u_0$, т. е. $r'(u-0) < 0$, то $\varphi_n(u) < 0$ для достаточно больших n. Следовательно, в любой правой окрестности точки $u = u_0$ имеются значения $u = u_n$, где $\varphi_n(u_n) = 0$. Значит, параллели L_n сходятся к L_0 при $n \to \infty$.

Пример. Рассмотрим поверхность S, полученную вращением вокруг оси Ou ломаной:

$$r(u) = \begin{cases} pu, \ p > 0; \ 0 \leqslant u \leqslant u_0, \\ qu + (p-q)\,u_0, \ q < 0; \ u_0 \leqslant u \leqslant a = \dfrac{q-p}{q}\,u_0, \end{cases}$$

т. е. S получается склеиванием двух соосных конусов по их общему основанию. Из (3) и (4) получаем, что для S функции $\varphi_n(u)$ и $\chi_n(u)$ имеют вид

$$\varphi_n(u) = \begin{cases} Cu, \ C = \mathrm{const} > 0; \quad 0 \leqslant u \leqslant u_0, \\ C[(n^2p - (n^2-1)\,q)/p^2]\,[qu + (p-q)\,u_0] + \\ \qquad + (n^2-1)\,\dfrac{q-p}{p}\,Cu_0; \ u_0 \leqslant u \leqslant a; \end{cases}$$

$$\chi_n(u) = \begin{cases} Cu/np; \ 0 \leqslant u \leqslant u_0, \\ C\,[n/pq - (n^2-1)/np^2]\,[qu + (p-q)\,u_0] + \\ \qquad + n\,(1/p - 1/q)\,Cu_0; \ u_0 \leqslant u \leqslant a. \end{cases}$$

Тогда непосредственно находим

$$u_n = \frac{q-p}{q}\,u_0 - \frac{(n^2-1)\,p\,(q-p)}{[pn - q\,(n^2-1)]\,q}\,u_0;$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{p\,(q-p)\,[4nq - (2n-1)\,p]\,u_0}{[pn^2 + (1-n^2)\,q]\,[p\,(n+1)^2 - (n^2+2n)\,q]\,q} < 0;$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{q-p}{q}\,u_0 - \frac{p\,(q-p)}{(p-q)\,q}\,u_0 = u_0.$$

Как уточнение к доказываемой далее теореме 3 отметим, что в этом примере в точке наибольшей параллели при $n \to \infty$ будет

$$\frac{\chi_n'(u_0-0)}{(n^2-1)\chi_n(u_0)} = \frac{1}{(n^2-1)u_0} \to 0;$$

$$\frac{\chi_n^*(u_0+0)}{(n^2-1)\chi_n(u_0)} = \frac{n^2(p-q)+q}{(n^2-1)pu_0} \to \frac{p-q}{pu_0} > 0. \qquad (15)$$

5. Доказательства теоремы 3.

Первое доказательство. При достаточно больших n, согласно теореме 2, в отрезке $[d, c]$ функции $\varphi_n(u)$ отрицательны, если весь отрезок $[d, c]$ расположен правее точки $u = u_0$. (Здесь нужно учесть, что правее точки $u = u_0$ будет $\varphi_n'(u) < 0$, и поэтому $\varphi_n(u)$ монотонно убывает). Тогда из (4) следует, что

$$r(u)\chi_n'^2(u-0) + r'(u-0)(n^2-1)\chi_n(u)\chi_n'(u-0) < 0 \qquad (16)$$

в отрезке $[d, c]$. Но в [4] доказано, что $\Delta\chi_n'(u) \geqslant 0$, следовательно, $\chi_n'(n)$ — монотонно возрастающая функция, и, применяя теорему о среднем, после интегрирования (16) от d до c получим

$$r(\xi_n)\chi_n'^2(d-0)(c-d) \leqslant \frac{\mu_n}{2}(n^2-1)\left(\chi_n^2(c)-\chi_n^2(d)\right) \leqslant$$

$$\leqslant \mu_n(n^2-1)\chi_n^2(c).$$

Здесь ξ_n — некоторая средняя точка между d и c, μ_n — некоторое число, $|r'(d-0)| \leqslant \mu_n \leqslant |r'(c-0)|$. Отсюда видно, что

$$\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}\frac{\chi_n'(d-0)}{\chi_n(c)} \leqslant \frac{M}{\sqrt{c-d}}, \qquad (17)$$

где M — некоторая постоянная. Теперь оценим отношение

$$\chi_n'(c-0)/\chi_n(c).$$

С учетом (7) получим

$$\frac{1}{n^2-1}\frac{\chi_n'(c-0)}{\chi_n(c)} = \frac{1}{n^2-1}\frac{\chi_n'(c-0)-\chi_n'(d-0)}{\chi_n(c)} +$$

$$+\frac{1}{n^2-1}\frac{\chi_n'(d-0)}{\chi_n(c)} = \frac{1}{n^2-1}\frac{\Delta\chi_n'(d-0)+\chi_n'(d-0)}{\chi_n(c)} =$$

$$= -\frac{\Delta r'(d-0)}{r(c)} + \frac{(c-d)\,\varepsilon_n}{(n^2-1)r(c)\chi_n(c)} + \frac{\chi_n'(d-0)}{(n^2-1)\chi_n(c)}. \qquad (18)$$

Из (4) и уравнения (4) в точке $u+\Delta u$ будет

$$n\varphi_n(u+\Delta u) = r'(u+\Delta u)(n^2-1)\chi_n(u+\Delta u) +$$

$$+ r(u+\Delta u)\chi_n'(u+\Delta u);$$

получаем

$$n\Delta\varphi_n(u) = (n^2-1)\,\Delta r'(u)\,\chi_n(u+\Delta u) + (n^2-1)\,r'(u)\,\Delta\chi_n(u) + $$
$$+ r(u+\Delta u)\,\Delta\chi_n'(u) + \Delta r(u)\,\chi_n'(u).$$

Но, согласно (7),

$$\varepsilon_n \Delta u = r(u+\Delta u)\,\Delta\chi_n'(u) + (n^2-1)\,\Delta r'(u)\,\chi_n(u+\Delta u) =$$
$$= n\Delta\varphi_n(u) - (n^2-1)\,r'(u)\,\Delta\chi_n(u) - \Delta r(u)\,\chi_n'(u) =$$
$$= n\int\limits_u^{u+\Delta u} \varphi_n'(t)\,dt - (n^2-1)\int\limits_u^{u+\Delta u} r'(u)\,\chi_n'(t)\,dt - \int\limits_u^{u+\Delta u} r'(t)\,\chi_n'(t)\,dt =$$
$$= (n^2-1)\int\limits_u^{u+\Delta u} \delta r'(t)\,\chi_n'(t)\,dt + \int\limits_u^{u+\Delta u} r'(t)\,\delta\chi_n'(t)\,dt;$$
$$\delta r'(t) = r'(t) - r'(u);\ \delta\chi_n'(t) = \chi_n'(t) - \chi_n'(u),\ \ t \geqslant u.$$

Поскольку

$$\delta r'(t) \leqslant 0,\ \ \chi_n'(t) > 0,\ \ \delta\chi_n'(t) \geqslant 0,\ \ r'(t) < 0$$

в $(u,\ u+\Delta u)$, $\Delta u > 0$, получаем, что $\varepsilon_n < 0$, и тогда, согласно (18),

$$\frac{1}{n^2-1}\,\frac{\chi_n'(c-0)}{\chi_n(c)} < -\frac{\Delta r'(d-0)}{r(c)} + \frac{1}{n^2-1}\,\frac{\chi_n'(d-0)}{\chi_n(c)}. \tag{19}$$

Выберем теперь последовательность точек $d_1,\ d_2,\ \ldots$ из условия $c - d_n = 1/n$. Для этих точек из (17) при больших n находим

$$\frac{1}{\sqrt{n(n^2-1)}}\,\frac{\chi_n'(d_n-0)}{\chi_n(c)} \leqslant M,$$

и следовательно,

$$\frac{1}{n^2-1}\,\frac{\chi_n'(d_n-0)}{\chi_n(c)} \to 0,\ \ n\to\infty. \tag{20}$$

Ввиду непрерывности слева функции $r'(u-0)$ из (19), полагая $d = d_n$, при $n\to\infty$ получим требуемое равенство (6). Теорема доказана.

Второе доказательство. Поскольку мы использовали теорему 2 только для доказательства (17) и вытекающего из него соотношения (20), то достаточно доказать (20), не опираясь на теорему 2.

Из уравнения (4) находим

$$n\varphi_n(u)\,\chi_n'(u-0) = r(u)\,\chi_n'^2(u-0) +$$
$$+ (n^2-1)\,r'(u-0)\,\chi_n(u)\,\chi_n'(u-0).$$

Интегрируя опять от d до c и используя теорему о среднем и монотонное возрастание функции $\chi_n'(u)$, получаем:

$$0 = \int\limits_d^c r(u)\,\chi_n'^2(u-0)\,du + (n^2-1)\int\limits_d^c \chi_n(u)\,\chi_n'(u-0)\,r'(u-0)\,du -$$

$$-n\int_d^c \varphi_n(u)\chi_n'(u-0)\,du \geqslant r(\xi_n)\chi_n'^2(d-0)(c-d)-$$

$$-n\varphi_n(c)\chi_n(c)+(n^2-1)\int_d^c \chi_n(u)\chi_n'(u-0)r'(u-0)\,du+$$

$$+n\varphi_n(d)\chi_n(d)+n\int_d^c \varphi_n'(u-0)\chi_n(u)\,du.$$

С помощью уравнений (3) и (4) и теоремы о среднем найдем

$$r(\xi_n)\chi_n'^2(d-0)(c-d)+(2n^2-1)\frac{\mu_n}{2}\left(\chi_n^2(c)-\chi_n^2(d)\right)+$$
$$+(n^2-1)\left[r'(d-0)\chi_n^2(d)-r'(c-0)\chi_n^2(c)\right]+$$
$$+r(d)\chi_n(d)\chi_n'(d-0)-r(c)\chi_n(c)\chi_n'(c-0)<0, \qquad (21)$$

где $|r'(d-0)|\leqslant-\mu_n\leqslant|r'(c-0)|$.

Из $\Delta r'\leqslant 0$ и возрастания функции $\chi_n(u)$ получаем, что

$$r'(d-0)\chi_n^2(d)-r'(c-0)\chi_n^2(c)>0.$$

С другой стороны

$$-(2n^2-1)\frac{\mu_n}{2}\chi_n^2(d)>0, \quad r(d)\chi_n(d)\chi_n'(d-0)>0.$$

Тогда из (21) следует

$$r(\xi_n)\chi_n'^2(d-0)(c-d)+(2n^2-1)\frac{\mu_n}{2}\chi_n^2(c)-$$

$$-r(c)\chi_n(c)\chi_n'(c-0)<0,$$

и поэтому

$$\frac{\chi_n'^2(d-0)}{\chi_n^2(c)}<\frac{2n^2-1}{c-d}\,\frac{-\mu_n}{2r(\xi_n)}+\frac{r(c)}{r(\xi_n)(c-d)}\,\frac{\chi_n'(c-0)}{\chi_n(c)}. \qquad (22)$$

Но из (5) следует, что

$$\frac{1}{n^2-1}\,\frac{\chi_n'(c-0)}{\chi_n(c)}<\frac{\chi_2'(c-0)}{3\chi_2(c)}, \quad n>2.$$

Тогда из (22) получаем

$$\frac{\chi_n'^2(d-0)}{\chi_n^2(c)}<\frac{2n^2-1}{c-d}M+\frac{n^2-1}{c-d}M_1,$$

где M и M_1 — некоторые постоянные. Тогда для точек d_n из $c-d_n=1/n$ при больших n имеем

$$\frac{1}{\sqrt{n(n^2-1)}}\,\frac{\chi_n'(d_n-0)}{\chi_n(c)}<\sqrt{\frac{2n^2-1}{n^2-1}M+M_1},$$

и, следовательно, выполняется (20). Из (19) опять следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2-1} \frac{\chi_n'(c-0)}{\chi_n(c)} = 0.$$

Замечание 3. Заметим, что оценка (6) верна только для левых производных. Что она неверна в точках разрыва в общем случае для правых производных, показывает

Пример. Пусть S — поверхность, полученная вращением ломаной

$$r(u) = \begin{cases} u, & 0 \leqslant u \leqslant 2, \\ -u+4, & 2 \leqslant u \leqslant 3, \\ -2u+7, & 3 \leqslant u \leqslant 7/2. \end{cases}$$

В этом случае

$$\chi_n(u) = \begin{cases} Cu/n, \ 0 \leqslant u \leqslant 2, \\ -\frac{C}{n}(2n^2-1)(4-u) + 4nC, \ 2 \leqslant u \leqslant 3, \\ -\frac{C}{2n}(2n^4+n^2-2)(-2u+7) + \frac{Cn}{2} \times \\ \quad \times (2n^2+5), \ 3 \leqslant u \leqslant \frac{7}{2}, \end{cases}$$

и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\chi_n'(3+0)}{(n^2-1)\chi_n(3)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^4+n^2-2}{(n^2-1)(2n^2+1)} = 1 \neq 0$$

(см. также (15)). Кроме того, для каждого k и n выполнены неравенства

$$\frac{\chi_n'(3-0)}{\chi_n(3)} < \frac{\chi_k'(3+0)}{\chi_k(3)}, \ \frac{1}{k^2-1} \frac{\chi_k'(3-0)}{\chi_k(3)} < \frac{1}{n^2-1} \frac{\chi_n'(3+0)}{\chi_n(3)}, \ n > k,$$

что доказывает утверждение замечания 2.

Теорема 2 полностью описывает множество сегментов общей выпуклой поверхности, допускающих изгибание скольжения относительно плоскости края, т е. относительно плоскости граничной параллели сегмента поверхности.

Список литературы: 1. *Rembs E.* Über Gleitverbiegungen.— Math. Ann., 1935, Bd. 111, S. 587—595. 2. *Милка А. Д.* О точках относительной нежесткости выпуклой поверхности вращения.— Укр. геометр. сб., 1965, вып. 1, с. 65—74. 3. *Кон-Фоссен С. Э.* Некоторые вопросы дифференциальной геометрии в целом.— М.: Физматгиз, 1959.— 303 с. 4. *Александров А. Д.* О бесконечно малых изгибаниях нерегулярных поверхностей.— Мат. сб., 1936, 1 (43), № 3, с. 303—322.

Поступила в редколлегию 23. 4.81.

УДК 513

Р. Ф. Галеева, Д. Д. Соколов

О РЕАЛИЗАЦИИ МЕТРИК ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ В ПСЕВДОЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В статье изложены результаты изучения поверхности положительной кривизны в псевдоевклидовом пространстве $E^3_{(2;1)}$, линейный элемент которого имеет вид $ds^2 = dx^2 + dy^2 - dz^2$. Все такие поверхности являются седловыми, однако их свойства существенно зависят от того, является метрика положительно определенной или индефинитной.

Свойства седловых поверхностей с дефинитной метрикой сходны со свойствами седловых поверхностей в евклидовом пространстве. В частности, для внутренне полных седловых поверхностей класса C^1 с положительно определенной метрикой выполняется условие $\inf K = 0$, где K — кривизна поверхности [1]. Это условие аналогично условию Н. В. Ефимова $\sup K = 0$, которому удовлетворяют полные седловые поверхности класса C^2 в евклидовом пространстве [2]. Из равенства $\inf K = 0$ следует невозможность гладкого погружения в целом в $E^3_{(2;1)}$ полной дефинитной метрик положительной кривизны $K \geqslant a^2$. Напротив, седловые поверхности с индефинитной метрикой, по-видимому, образуют естественный класс, в котором положительно решаются основные задачи теории поверхностей, сходный с естественным классом выпуклых поверхностей в евклидовом пространстве.

Одной из центральных задач теории поверхностей является реализация метрик. В ряде случаев эта задача может быть исследована с помощью системы уравнений погружения в римановых инвариантах [3] методами, разработанными Э. Г. Позняком и Е. В. Шикиным [4, 5].

1. Поверхности вращения с положительно определенной метрикой. Поскольку полная поверхность с дефинитной метрикой положительной кривизны $K \geqslant a^2$ не может быть реализована в целом в $E^3_{(2;1)}$, то, естественно возникает вопрос о том, какие части таких метрик могут быть реализованы в $E^3_{(2;1)}$.

Рассмотрим сначала простой пример метрик вращения

$$ds^2 = d\rho^2 + B^2(\rho)\, d\varphi^2. \tag{1}$$

Мы рассматриваем полные метрики положительной кривизны, отделенной от нуля. Многообразия с такими метриками топологически эквивалентны сфере, и для них можно показать, что ρ изменяется в промежутке $0 \leqslant \rho \leqslant R$, причем $B(0) = B(R) = 0$. Существует единственная точка R_1, где $B'(R_1) = 0$.

Естественно искать реализацию таких метрик в виде поверхностей вращения вокруг оси z:

$$x = \varepsilon B(\rho) \sin \varphi/\varepsilon,\ \ y = \varepsilon B(\rho) \cos \varphi/\varepsilon,\ \ z = z(\rho).$$

Легко видеть, что функция $z(\rho)$ находится из соотношения $z'^2 = \varepsilon^2 B'^2 - 1$; из него видно, что если выбрать ε достаточно большим, то можно реализовать в виде поверхности вращения произвольное геодезическое кольцо с радиусами ρ_1, ρ_2; $\rho_1 > R_1$; $\rho_2 < R$.

Любопытно отметить то, чтобы реализовать бо́льшее геодезическое кольцо, нужно не уменьшать ε (скручивать), а наоборот, увеличивать.

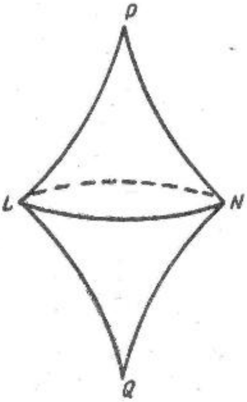


Рис. 1

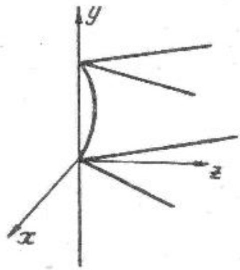


Рис. 2

Ясно, что части метрик (1), содержащие R_1, не могут быть реализованы в виде подобных поверхностей вращения. При продолжении рассматриваемых поверхностей возникают особенности, показанные на рис. 1. Здесь P и Q — конические точки, соответствующие $\rho = 0$ и $\rho = R$; ребро LN соответствует $\rho = R_1$; $B'(R_1) = 0$.

В качестве реализации универсальной накрывающей геодезического кольца с радиусами ρ_1 и ρ_2, $0 < \rho_1 < \rho_2 < R$ можно взять поверхность гиперболического вращения вокруг оси y:

$$x = B(\rho)\operatorname{sh}\varphi;\ y = y(\rho);\ z = B(\rho)\operatorname{ch}\varphi,$$

где функция $y(\rho)$ находится из уравнения $y'^2(\rho) = B'^2(\rho) + 1$. При продолжении такой поверхности также возникают особенности: сечения плоскостью $y = \text{const}$ — ветви гиперболы, вырождающиеся при $\rho \to 0$ и $\rho \to R$ в прямые $x = \pm z$, причем $\varphi \sim \ln\rho$ при $\rho \to 0$ и $\varphi \sim \ln(R - \rho)$ при $\rho \to R$. Лучи $x = \pm z$, $z \geqslant 0$ служат краем для одной части поверхности (рис. 2). Соседние части ее, лежащие выше и ниже нее, имеют краями лучи $x = \pm z$, $z \leqslant 0$.

2. Реализация дефинитных метрик положительной кривизны. Рассмотрим регулярное риманово двумерное многообразие M положительной кривизны $K \in C^2$. Это многообразие топологически эквивалентно сфере. Пусть P — произвольная точка M. В окрестности P можно ввести геодезические полярные координаты, в которых метрика имеет вид $ds^2 = d\rho^2 + B^2(\rho, \varphi)\, d\varphi^2$, $0 < \rho < R$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, где R — радиус инъективности экспоненциального отображения в P.

Пусть $M(\rho_1, \rho_2)$ $(0 < \rho_1 < \rho_2 < R)$ — произвольное геодезическое кольцо, образованнсе геодезическими кругами с радиусами ρ_1, ρ_2 с центром в точке P.

Теорема. *Универсальная накрывающая $\Gamma M(\rho_1, \rho_2)$ геодезического кольца $M(\rho_1, \rho_2)$ имеет регулярную реализацию в целом в $E^3_{(2;1)}$ в виде поверхностей класса C^3.*

Доказательство. Метрика многообразия $\Gamma M(\rho_1, \rho_2)$ имеет вид $ds^2 = d\rho^2 + B^2(\rho, \varphi)\, d\varphi^2$; $\Pi_\rho = \{\rho_1 \leqslant \rho \leqslant \rho_2, \ -\infty < \varphi < +\infty\}$. Задача о погружении метрики сводится к нахождению коэффициентов L, M, N второй квадратичной формы из системы уравнений Гауса — Петерсона — Кодацци

$$M_\rho - L_\varphi = -\frac{B_\rho}{B} M; \quad N_\rho - M_\varphi = (N + B^2 L)\frac{B_\rho}{B} - M\frac{B_\varphi}{B};$$
$$LN - M^2 = -k^2 B^2.$$

Эта система с помощью замены $r = B\dfrac{-M - kB}{N}$; $s = B\dfrac{-M + kB}{N}$; $k = \sqrt{K}$ приводится к системе уравнений в римановых инвариантах:

$$r_\rho + \frac{s}{B} r_\varphi = -s(1 + r^2)\frac{B_\rho}{B} + \frac{r - s}{2}\left(\frac{k_\rho}{k} + \frac{r}{B}\frac{k_\varphi}{k}\right);$$
$$s_\rho + \frac{r}{B} s_\varphi = -r(1 + s^2)\frac{B_\rho}{B} + \frac{s - r}{2}\left(\frac{k_\rho}{k} + \frac{s}{B}\frac{k_\varphi}{k}\right). \qquad (2)$$

Доказательство существования поверхности, несущей заданную метрику в Π_ρ, сводится к отысканию регулярных решений системы (2), удовлетворяющих условию $r \neq s$ в полосе Π_ρ.

Система (2) совпадает с системой, рассмотренной Е. В. Шикиным в [5]. В этой работе была доказана теорема существования решений в полосе Π_ρ при выполнении, кроме условия $r \neq s$, следующих условий: $B(\rho, \varphi)$ — функция, равномерно ограниченная вместе с производными до четвертого порядка, $B \geqslant \lambda > 0$, $K \geqslant a^2 > 0$. Очевидно, что в силу компактности многообразия M и выбора кольца $M(\rho_1, \rho_2)$ эти условия выполнены. Теорема 1 доказана.

3. **Реализация индефинитных метрик положительной кривизны.** Методы, развитые Э. Г. Позняком и Е. В. Шикиным, позволяют также доказать утверждения о реализации частей индефинитных метрик положительной кривизны.

Теорема 2. *Пусть в полосе $\Pi_a = \{0 \leqslant x \leqslant \alpha \ -\infty < y < +\infty\}$ задана индефинитная метрика $ds^2 = -dx^2 + B^2(x, y)\, dy^2$ и выполнены условия: $B(x, y)$ — функция, равномерно ограниченная вместе с производными до четвертого порядка, $B \geqslant \lambda > 0$, $K \geqslant a^2 > 0$. Тогда эта метрика может быть реализована в целом в псевдоевклидовом пространстве $E^3_{(2;1)}$ в виде поверхности класса C^3.*

Доказательство. Соответствующая система уравнений Гаусса — Петерсона — Кодацци имеет вид

$$M_x - L_y = -\frac{B_x}{B} M; N_x - M_y = (N - B^2L)\frac{B_x}{B} - M\frac{B_y}{B};$$
$$LN - M^2 = -KB^2.$$

Эта система с помощью замены $r = B\frac{-M-kB}{N}$; $s = B\frac{-M+kB}{N}$; $k = \sqrt{K}$ приводится к виду

$$r_x + \frac{s}{B} r_y = -s(1-r^2)\frac{B_x}{B} + \frac{r-s}{2}\left(\frac{k_x}{k} + \frac{r}{B}\frac{k_y}{k}\right);$$

$$s_x + \frac{r}{B} s_y = -r(1-s^2)\frac{B_x}{B} + \frac{s-r}{2}\left(\frac{k_x}{k} + \frac{s}{B}\frac{k_y}{k}\right). \qquad (3)$$

Система (3) отличается от системы, рассмотренной Е. В. Шикиным, знаком перед r^2s в первом уравнении и знаком перед s^2r — во втором. Метод, развитый Э. Г. Позняком и Е. В. Шикиным, дает малые решения системы (2), для которой кубический член играет несущественную роль. Заметим, что метод доказательства существования решения системы (2), предложенный Е. В. Шикиным [5], применим и к системе (3), поскольку оценки, фигурирующие в указанном доказательстве, модульные (и, следовательно, не зависят от знаков при r^2s и s^2r. Теорема доказана.

Замечание. Доказанная теорема означает, что на двумерном многообразии с индефинитной метрикой с положительной кривизной можно погружать области, аналогичные областям между прямой и эквидистантой в двумерной дефинитной метрике отрицательной кривизны.

У системы (3) при выполнении следующих условий:

$$K(x, y),\ B(x, y) \in C^3,\ k_1 \leqslant k(x, y) \leqslant k_2,\ k = \sqrt{K};$$

$$\frac{1}{c}\exp(-k_2x) \leqslant B(x, y) \leqslant c\exp(-k_1x),\ k_1 \leqslant \left|\frac{B_x}{B}\right| \leqslant k_2;$$

$$|B_y|,\ |B_{xy}|,\ |B_{yy}|,\ |B_{xyy}|,\ |B_{yyy}| \leqslant cB^{1+\delta};$$

$$|k_x| \leqslant c;\ |k_y|,\ |k_{xy}| \leqslant cB;$$

$$|k_{yy}|,\ |k_{xyy}|,\ |k_{yyy}| \leqslant cB^{1+\delta};\ 0 < \delta \leqslant 1 \leqslant c,\ \frac{1}{c} \leqslant k_1 < k_2 \leqslant c$$

можно доказать теорему существования решения в полуплоскости. Это доказательство вполне аналогично доказательству теоремы существования, доказанной Е. В. Шикиным [6]. Так же, как и в теореме 2, смена знака перед кубическим членом оказывается несущественной при отыскании малых решений. Эта аналитическая теорема означает, что на двумерном многообразии с индефинитной метрикой положительной кривизны (отделенной от нуля!) можно погружать области, аналогичные орициклическим областям в двумерной дефинитной метрике отрицательной кривизны.

4. Седловые поверхности вращения с индефинитной метрикой. Для индефинитных метрик положительной кривизны можно получить не только теорему реализации частей полных метрик, но и теорему реализации в целом.

Рассмотрим для примера вопрос о реализации индефинитных метрик вращения с положительной кривизной $ds^2 = -d\rho^2 + B^2(\rho)\,d\varphi^2$. Без труда подбирается реализация этой метрики в виде поверхности вращения:

$$x = \varepsilon B(\rho)\cos\varphi/\varepsilon;\;\; y = \varepsilon B(\rho)\sin\varphi/\varepsilon;\; z = \int\sqrt{\varepsilon^2 B'^2 + 1}\,d\rho.$$

В частности, для метрики постоянной кривизны $K = a^2$ возможны две реализации в виде поверхности вращения:

$$x = \operatorname{ch} a\rho\cos\varphi; \qquad x = e^{-a\rho}\cos\varphi;$$
$$y = \operatorname{ch} a\rho\sin\varphi; \qquad y = e^{-a\rho}\sin\varphi;$$
$$z = \int\sqrt{a^2\operatorname{sh}^2 a\rho + 1}\,d\rho; \qquad z = \int\sqrt{a^2 e^{-2a\rho} + 1}\,d\rho.$$

Первая из этих поверхностей представляет компоненту сферы радиуса a с индефинитной метрикой в псевдоевклидовом пространстве. Предельный конус этой поверхности совпадает с изотропным. Вторая поверхность имеет предельный конус, состоящий из одной компоненты изотропного конуса и луча.

Важно подчеркнуть, что указанные поверхности (4) имеют немалые римановы инварианты при отделенной от нуля кривизне при любых значениях ε. Можно, разумеется, найти инварианты непосредственно по формулам (4), однако их полезнее найти как решения соответствующей системы уравнений погружения. Для метрик вращения $r = kB/\sqrt{B_\rho^2 + c}$, $s = -kB/\sqrt{B_\rho^2 + c}$ эти решения регулярны на всей плоскости. Если кривизна метрики ограничена, $k_1 \leqslant k \leqslant k_2$, а функция $B(x, y)$ возрастает при $x \to \pm\infty$, то римановы инварианты удовлетворяют неравенствам $|r|$, $|s| \geqslant k_1/\sqrt{k_2^2 + c}$.

Реализации метрик вращения можно искать и в дефинитном случае. Соответствующие решения имеют вид $r = \kappa B/\sqrt{-B_\rho^2 + c}$, $s = -kB/\sqrt{-B_\rho^2 + c}$. Они имеют особенности.

Список литературы: 1. *Соколов Д. Д.* О выпуклых поверхностях с индефинитной метрикой.— Усп. мат. наук, 1978, **33**, № 4, с. 227—228. 2. *Ефимов Н. В.* Невозможность изометрического погружения в трехмерное евклидово пространство некоторых многообразий с отрицательной гауссовой кривизной.— ДАН СССР, 1962, **146**, № 6, с. 1283—1286. 3. *Рождественский Б. Л.* Система квазилинейных уравнений теории поверхностей.— ДАН СССР, 1962, **143**, № 1, с. 50—52. 4. *Позняк Э. Г.* Изометрические погружения двумерных римановых метрик в евклидовы пространства.— Усп. мат. наук, 1972, **43**, № 4, с. 47—76. 5. *Шикин Е. В.* О регулярном погружении в целом в E^3 метрик класса C^4 отрицательной кривизны.— Мат. заметки, 1973, **14**, № 2, с. 261—266. 6. *Шикин Е. В.* О существовании решений системы уравнений Петерсона — Кодацци и Гаусса.— Мат. заметки, 1975, **17**, 5, с. 765—782.

Поступила в редколлегию 14.02.81.

УДК 513

Н. И. Глова

К ТЕОРИИ КРИВИЗНЫ ДВУМЕРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЧЕТЫРЕХМЕРНОГО ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

1. Основные сведения. Рассмотрим в четырехмерном евклидовом пространстве с криволинейной системой координат x^1, x^2, x^3, x^4 подвижный репер $R(A\, e_1\, e_2\, e_3\, e_4)$. Деривационные формулы этого репера имеют вид

$$dA = \omega^i e_i;\ de_i = \omega_i^k e_k, \tag{1.1}$$

где линейные дифференциальные формы Пфаффа ω^i, ω_i^k удовлетворяют уравнениям структуры евклидова пространства E_4:

$$D\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i;\ D\omega_i^k = \omega_i^j \wedge \omega_j^k.$$

Здесь и в дальнейшем индексы принимают следующие значения: $i, j, k = 1, 2, 3, 4$; $a, b, c = 1, 2$; $\alpha, \beta, \gamma = 3, 4$. По одинаковым индексам разных уровней проводится суммирование в соответствующих пределах.

В каждой точке A пространства E_4 зададим 2-плоскость $T(A)$, проходящую через взятую точку. Будем считать, что векторы e_1 и e_2 репера R расположены в указанной 2-плоскости: векторы e_3 и e_4 — в ортогональной к ней 2-плоскости $N(A)$. Тем самым в окрестности точки A задается некоторое двумерное распределение Δ. Кривые линии, которые в каждой своей точке касаются 2-плоскости, образующей с этой точкой элемент распределения Δ, называются интегральными кривыми и образуют пфаффово или неголономное многообразие распределения.

Очевидно, когда линейные дифференциальные формы Пфаффа ω^i, ω_a^α деривационных формул (1.1) репера R обращаются в нуль, элемент распределения остается неподвижным. Следовательно, эти формы зависят от дифференциалов только главных параметров.

Выбирая формы ω^i в качестве базисных, формы ω_a^α можно представить как линейные комбинации форм $\omega_a^\alpha = \Gamma_{ai}^\alpha \omega^i$ **(1.2)**.

Для смещения точки A в 2-плоскости $(A\, e_1, e_2)$, которую будем называть касательной 2-плоскостью распределения Δ в точке A, выполняются условия $\omega^\alpha = 0$ **(1.3)**.

Система дифференциальных уравнений (1.3) называется ассоциированной с распределением Δ и определяет совокупность всех интегральных кривых распределения, т. е. определяет пфаффово многообразие.

Для того чтобы система дифференциальных уравнений (1.3) была вполне интегрируема, необходимо и достаточно выполнение условий $D\omega^\alpha = \omega^i \wedge \omega_i^\alpha = 0$, откуда, используя уравнения структуры евклидова пространства и равенства (1.2) и (1.3), получим

$$\Gamma_{12}^\alpha = \Gamma_{21}^\alpha. \tag{1.4}$$

Когда эти условия выполнены, множество интегральных кривых распределения Δ, соответствующих выбранной точке A пространства E_4, расположено на двумерной поверхности этого пространства. Евклидово пространство E_4 расслаивается на двупараметрическое семейство двумерных поверхностей так, что в каждой точке пространства 2-плоскость, составляющая с этой точкой элемент распределения Δ, касается в этой точке соответствующей двумерной поверхности. Такое распределение называется голономным.

2. Геометрический смысл величин Γ_{ab}^α. В работе [1] рассматривался вектор нормальной кривизны интегральной кривой распределения Δ. Во введенных обозначениях для интегральной кривой C с касательным вектором $\frac{\omega^a}{ds} e_a = v^a e_a$, где s — натуральный параметр кривой C, вектор нормальной кривизны

$$k_n = \left(\frac{d\omega^\alpha}{ds^2} + \frac{\omega^i}{ds} \frac{\omega_i^\alpha}{ds}\right) e_\alpha.$$

Согласно формулам (1.2), (1.3), получим

$$k_n = \Gamma_{ab}^\alpha v^a v^b e_\alpha. \tag{2.1}$$

Так как выражение вектора нормальной кривизны содержит лишь первые дифференциалы переменных x^1, x^2, x^3, x^4, то все интегральные кривые, имеющие в точке A общий касательный вектор, имеют в этой точке одинаковую нормальную кривизну.

Для определения геодезического кручения интегральной кривой C с касательным вектором $\frac{dA}{ds} = v^a e_a$ рассмотрим ее в паре с ортогональной к ней кривой C', касающейся вектора $\frac{\delta A}{\delta s} = w^a e_a$. Продифференцируем вектор $\frac{dA}{ds}$ в направлении δ:

$$\frac{\delta}{\delta s} \frac{dA}{ds} = \left(\frac{\delta}{\delta s} \frac{\omega^j}{ds} - \frac{\omega^i}{ds} \frac{\tilde{\omega}_i^j}{\delta s}\right) e_j,$$

где δ означает дифференцирование вдоль кривой C'. Проекцию этого вектора на нормальную 2-плоскость распределения $N(A)$ назовем вектором геодезического кручения $\varkappa_g$ интегральной кривой C в точке A.

Проектируя векторы последнего равенства на 2-плоскость (Ae_3e_4), получаем

$$\varkappa_g = \left(\frac{\omega^1}{d} \frac{\tilde{\omega}_2^\alpha}{\delta s} + \frac{\omega^2}{ds} \frac{\omega_2^\alpha}{\delta s}\right) e_\alpha.$$

Воспользовавшись формулами (1.2) и (1.3) запишем

$$\varkappa_g = \Gamma^{\alpha}_{ab} w^a v^b e_\alpha. \tag{2.2}$$

Так как направления $v^a e_a$ и $w^a e_a$ ортонормированы, то имеют место равенства

$$\begin{gathered}(v^1)^2 + (v^2)^2 = 1;\ (w^1)^2 = (v^2)^2;\\ (w^1)^2 + (w^2)^2 = 1;\ (w^2)^2 = (v^1)^2;\\ v^1 w^1 + v^2 w^2 = 0;\ v^1 w^2 - v^2 w^1 = 1.\end{gathered} \tag{2.3}$$

Ясно, что интегральные кривые распределения Δ с общим касательным вектором в точке A имеют в этой точке и общий вектор геодезического кручения.

Рассмотрим разность векторов геодезического кручения пары ортогональных интегральных линий распределения Δ, т. е. интегральных линий, касающихся взаимно ортогональных направлений. Из формул (2.2), (2.3) легко получить, что

$$\varkappa_{g1} - \varkappa_{g2} = \left(\Gamma^{\alpha}_{21} - \Gamma^{\alpha}_{12}\right) e_\alpha,$$

т. е. разность геодезических кручений для любой ортогональной пары интегральных кривых постоянна. Назовем вектор среднего геодезического кручения $\varkappa_{go}$ распределения Δ в точке A инвариантный вектор нормальной 2-плоскости $N(A)$

$$\varkappa_{go} = \frac{1}{2}\left(\varkappa_{g1} - \varkappa_{g2}\right) = \frac{1}{2}\left(\Gamma^{\alpha}_{21} - \Gamma^{\alpha}_{12}\right) e_\alpha. \tag{2.4}$$

Обращаясь к условиям интегрируемости (1.4), видим, что верна

Теорема 2.I. *Вектор среднего геодезического кручения характеризуют голономность распределения Δ: распределение Δ голономно тогда и только тогда, когда $\varkappa_{go} = 0$.*

В выбранном репере координатными линиями могут быть две интегральные кривые распределения Δ со взаимно ортогональными касательными векторами. Такие две линии в дальнейшем будем называть ортогональной парой.

Координатная линия $\omega^2 = 0$ имеет вектор нормальной кривизны и вектор геодезического кручения соответственно

$$\boldsymbol{k}_{n1} = \Gamma^{\alpha}_{11} e_\alpha; \quad \varkappa_{g1} = \Gamma^{\alpha}_{21} e_\alpha. \tag{2.5}$$

Те же векторы для координатной кривой $\omega^1 = 0$ имеют вид

$$\boldsymbol{k}_{n2} = \Gamma^{\alpha}_{22} e_\alpha; \quad \varkappa_{g2} = \Gamma^{\alpha}_{12} e_\alpha. \tag{2.6}$$

Сравнивая векторы геодезического кручения (2.5) и (2.6), можно заметить, что при выполнении условий интегрируемости (1.4) они совпадают, т. е. имеет место

Теорема 2.II. *Любая ортогональная пара линий на двумерной поверхности пространства E^4 имеет общий вектор геодезического кручения.*

3. Средняя кривизна распределения Δ. В работе [1] вектором средней кривизны распределения Δ был назван инвариантный вектор нормальной 2-плоскости $N(A)$, совпадающий полусуммой векторов нормальных кривизн произвольной ортогональной пары интегральных кривых распределения. В принятых обозначениях вектор средней кривизны $\boldsymbol{H}$ имеет вид

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{2}\left(\Gamma^{\alpha}_{11} + \Gamma^{\alpha}_{22}\right)\boldsymbol{e}_{\alpha}. \tag{3.1}$$

Покажем, что введенный вектор $\boldsymbol{H}$ обобщает понятие вектора средней кривизны для поверхности трехмерного евклидова пространства.

В касательной 2-плоскости $T(A)$ рассмотрим произвольный вектор $dr = \omega^a \boldsymbol{e}_a$. Первой квадратичной формой интегральной кривой распределения Δ, касающейся в точке A выбранного направления, будем называть квадратичную дифференциальную форму $ds^2 = (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2$. В каждой точке A она сопоставляет вектору $d\boldsymbol{A}$, касательному к распределению Δ в точке A, квадрат его длины. Обозначив через E, F и G коэффициенты этой квадратичной формы при $(\omega^1)^2$, $\frac{1}{2}\omega^1\omega^2$, $(\omega^2)^2$, получим

$$ds^2 = E(\omega^1)^2 + 2F\omega^1\omega^2 + G(\omega^2)^2.$$

В данном случае $E = G = 1$, $F = 0$.

Каждую точку исходной интегральной кривой распределения Δ сместим по некоторому вектору $\lambda^{\alpha}\boldsymbol{e}_{\alpha}$ 2-плоскости $N(A)$ и получим $\boldsymbol{R} = r + \lambda^{\alpha}\boldsymbol{e}_{\alpha}$, где r — радиус-вектор точки исходной кривой, R — радиус-вектор полученной кривой, λ^{α} ($\alpha = 3{,}4$) — скалярные величины. Найдем первую квадратичную форму полученной интегральной кривой. Обозначая ее через $\widetilde{ds}$, можно записать

$$\widetilde{ds}^2 = (dr + d\lambda^{\alpha}\boldsymbol{e}_{\alpha} + \lambda^{\alpha}d\boldsymbol{e}_{\alpha})^2.$$

Положим $\lambda^{\alpha} = \varepsilon\mu_{\alpha}$, где ε — бесконечно малая величина. Так как векторы $\boldsymbol{dr}$, $\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{e}_4$ попарно ортогональны, получим

$$\widetilde{ds}^2 = ds^2 + 2\varepsilon\sum_{\alpha=3}^{4}\mu_{\alpha}(d\boldsymbol{r}\boldsymbol{e}_{\alpha}) + [\varepsilon^2];$$

Через $[\varepsilon^2]$ обозначены члены второго порядка малости относительно ε.

Используя равенства (1.1) и (1.2), можно получить

$$(d\boldsymbol{r}d\boldsymbol{e}_{\alpha}) = -\Gamma^{\alpha}_{ab}\omega^a\omega^b.$$

Обозначив через $\widetilde{E}$, $\widetilde{F}$ и $\widetilde{G}$ величины для $\widetilde{ds}^2$, аналогичные величинам E, F и G для ds, и отбросив бесконечно малые члены второго порядка, получим равенства

$$\widetilde{E} = E - 2\varepsilon\mu_{\alpha}\Gamma^{\alpha}_{11};\quad \widetilde{F} = F - \varepsilon\mu_{\alpha}\left(\Gamma^{\alpha}_{12} + \Gamma^{\alpha}_{21}\right);\ \widetilde{G} = G - 2\varepsilon\mu_{\alpha}\Gamma^{\alpha}_{22}.$$

Если в качестве рассматриваемой интегральной кривой распределения Δ выбрать геодезическую «прямейшую» линию (см. [2]), определенную точкой A и выбранным направлением, то величина $EG-F^2$ определяет элемент площади соприкасающейся геодезической поверхности распределения Δ в точке A (см. [1]), $\widetilde{E}\widetilde{G}-\widetilde{F}^2$ — элемент площади проварьированной поверхности. Можно написать

$$\widetilde{E}\widetilde{G}-\widetilde{F}^2 = EG - F^2 - 2\mu_\alpha\left(E\Gamma^\alpha_{22} + G\Gamma^\alpha_{11} - F\left(\Gamma^\alpha_{12}+\Gamma^\alpha_{21}\right)\right).$$

Проинтегрируем это равенство по элементу площади соприкасающейся геодезической поверхности. Чтобы исходная поверхность имела наименьшую площадь по сравнению с проварьированной, необходимо, чтобы

$$\delta\iint\limits_\sigma \mu_\alpha\left[E\Gamma^\alpha_{22} + G\Gamma^\alpha_{11} - F\left(\Gamma^\alpha_{12}+\Gamma^\alpha_{21}\right)\right]d\sigma = 0,$$

где $d\sigma$ — элемент площади соприкасающейся поверхности. Это равенство должно иметь место при любом выборе скалярных величин μ_α. Учитывая, что $E=G=1$; $F=0$, получим $\Gamma^\alpha_{11}+\Gamma^\alpha_{22}=0$, откуда следует $\boldsymbol{H}=0$. Доказана.

Теорема 3. I. *Чтобы соприкасающаяся геодезическая поверхность распределения Δ имела наименьшую площадь, необходимо, чтобы вектор средней кривизны распределения обращался в этой точке в нуль.*

Если в каждой точке пространства E_4 вектор $\boldsymbol{H}=0$, распределение Δ будем называть минимальным.

4. Особые случаи расположения векторов нормальных кривизн и геодезического кручения. Теорема 4. I. *Существует единственная ортогональная пара направлений касательной 2-плоскости распределения, для которой векторы нормальных кривизн параллельны друг другу, при этом они параллельны вектору средней кривизны распределения в этой точке.*

Рассмотрим векторы (2.1) нормальной кривизны двух ортогональных направлений 2-плоскости $T(A)$: $v^a\boldsymbol{e}_a$ и $w^a\boldsymbol{e}_a$. Потребовав параллельности этих векторов, получим равенство

$$\frac{\Gamma^3_{ab}v^a v^b}{\Gamma^4_{ab}v^a v^b} = \frac{\Gamma^3_{ab}w^a w^b}{\Gamma^4_{ab}w^a w^b}.$$

Введем следующие обозначения:

$$\mathfrak{M}^\alpha = \Gamma^\alpha_{21}+\Gamma^\alpha_{12};\quad G^\alpha = \Gamma^\alpha_{21}-\Gamma^\alpha_{12};\qquad (4.1)$$
$$\mathfrak{L}^\alpha = \Gamma^\alpha_{22}+\Gamma^\alpha_{11};\quad \mathfrak{N}^\alpha = \Gamma^\alpha_{22}-\Gamma^\alpha_{11}.$$

Упростив рассматриваемое равенство при помощи соотношений (2.3), получим уравнение

$$t^2\Gamma^{[3}_{11}\Gamma^{4]}_{22} + t\mathfrak{L}^{[3}\mathfrak{M}^{4]} - \Gamma^{[3}_{11}\Gamma^{4]}_{22} = 0,$$

где $t = v^1/v^2$. Решения этого уравнения удовлетворяют условию $t_1t_2=-1$, что доказывает первую часть теоремы.

Расположив векторы e_1, e_2 репера R по полученным направлениям, можно записать равенство $\Gamma^{[3}_{11}\Gamma^{4]}_{22} = 0$ **(4.2)**.

При этом векторы нормальных кривизн координатных направлений принимают вид (2.5), (2.6). Согласно равенству (4.2), эти векторы параллельны вектору (3.1) средней кривизны распределения.

Теорема 4.II. *Существует единственная пара ортогональных направлений касательной 2-плоскости распределения, для которой векторы геодезических кручений параллельны между собой, причем они параллельны вектору среднего геодезического кручения распределения в данной точке.*

Потребовав параллельности векторов (2.2) геодезических кручений ортогональных направлений $v^a e_a$ и $w^a e_a$, получим

$$\frac{\Gamma^3_{ab} v^a w^b}{\Gamma^4_{ab} v^a w^b} = \frac{\Gamma^3_{ab} w^a v^b}{\Gamma^4_{ab} w^a v^b}.$$

Произведем необходимые преобразования и, воспользовавшись системой обозначений (4.1), придем к квадратному уравнению

$$t^2 \Gamma^{[3}_{12}\Gamma^{4]}_{21} + t\mathfrak{R}^{[3}G^{4]} - \Gamma^{[3}_{12}\Gamma^{4]}_{21} = 0, \quad \text{где } t_1 t_2 = -1.$$

Направим векторы e_1, e_2 репера R по полученным направлениям. Векторы геодезического кручения соответствующих интегральных кривых приобретут вид (2.5), (2.6). В силу условия $\Gamma^{[3}_{12}\Gamma^{4]}_{21} = 0$, которое вытекает из выбора координатных векторов e_1 и e_2, получим параллельность векторов кручений (2.5), (2.6) вектору (2.4) среднего геодезического кручения распределения Δ в рассматриваемой точке.

Теорема 4.III. *Существует единственная пара направлений касательной 2-плоскости распределения, для которой векторы геодезического кручения параллельны вектору средней кривизны. В интегрируемом случае направления этой пары ортогональны и биссекторны к паре направлений теоремы 4.I.*

Потребуем параллельности векторов (2.2) и (3.1):

$$\frac{\Gamma^3_{ab} w^a v^a}{\Gamma^4_{ab} w^a v^b} = \frac{\Gamma^3_{11} + \Gamma^3_{22}}{\Gamma^4_{11} + \Gamma^4_{22}}.$$

После преобразований получим

$$-t^2 \Gamma^{[3}_{21}\mathfrak{L}^{4]} + 2t\Gamma^{[3}_{11}\Gamma^{4]}_{22} + \Gamma^{[3}_{12}\mathfrak{L}^{4]} = 0.$$

Когда условия интегрируемости (1.4) выполнены, первый и последний коэффициенты этого уравнения становятся противоположными, что означает ортогональность определяемых этим уравнением направлений.

Чтобы получить последнее утверждение теоремы, достаточно направить векторы e_1 и e_2 репера R по полученным направлениям. При этом будут выполнены условия

$$\Gamma^{[3}_{21}\mathfrak{L}^{4]} = 0; \quad \Gamma^{[3}_{12}\mathfrak{L}^{4]} = 0.$$

При этих условиях уравнение теоремы 4.I принимает вид $t^2 = 1$, что и доказывает нужное утверждение.

Теорема 4.IV. *Существует пара направлений касательной 2-плоскости распределения, для которой векторы геодезического кручения ортогональны вектору средней кривизны. В интегрируемом случае эти направления ортогональны.*

Потребовав ортогональности векторов (2.2) и (3.1), получим

$$\sum_{\alpha=3}^{4} \Gamma^{\alpha}_{ab} w^a v^b \left(\Gamma^{\alpha}_{11} + \Gamma^{\alpha}_{22}\right) = 0.$$

Для $t = v^1/v^2$ приходим к квадратному уравнению

$$\sum_{\alpha=3}^{4} \left[- t^2 \Gamma^{\alpha}_{21} \mathfrak{L}^{\alpha} + t\left(\left(\Gamma^{\alpha}_{11}\right)^2 + \left(\Gamma^{\alpha}_{22}\right)^2\right) + \Gamma^{\alpha}_{12} \mathfrak{L}^{\alpha}\right] = 0.$$

В интегрируемом случае первый и последний коэффициенты уравнения противоположны, что доказывает последнее утверждение теоремы.

5. Скалярные инварианты интегральной кривой распределения Δ. Рассмотрим произвольную интегральную кривую C распределения Δ, проходящую через точку A. Расположим координатный вектор $\boldsymbol{e}_1$ репера R по касательной к выбранной интегральной линии, $\boldsymbol{e}_2$ — вдоль ортогональной кривой так, чтобы система координат была правой. При этом останутся нефиксированными только положения векторов $\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{e}_4$ ортонормированного базиса $R(A\ \boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2\ \boldsymbol{e}_3\ \boldsymbol{e}_4)$. Поэтому полным допустимым преобразованием репера R будет поворот векторов $\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{e}_4$ в нормальной 2-плоскости $N(A)$.

Поворот векторов $\boldsymbol{e}_3$ и $\boldsymbol{e}_4$ на угол β в нормальной 2-плоскости $N(A)$ при неизменном положении векторов $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ определяется формулами

$$A' = A; \quad \boldsymbol{e}_1' = \boldsymbol{e}_1; \quad \boldsymbol{e}_2' = \boldsymbol{e}_2;$$
$$\boldsymbol{e}_3' = \cos\beta \boldsymbol{e}_3 + \sin\beta \boldsymbol{e}_4; \quad \boldsymbol{e}_4' = -\sin\beta \boldsymbol{e}_3 + \cos\beta \boldsymbol{e}_4. \tag{5.1}$$

При этом преобразовании инвариантны векторы A, $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ и, следовательно, векторы dA, $d\boldsymbol{e}_1$, $d\boldsymbol{e}_2$. Так как в $dA = w^a \boldsymbol{e}_a$ не изменяются ни $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, ни dA, то и w^1, w^2 не изменяются.

Проекции инвариантных векторов $d\boldsymbol{e}_1$ и $d\boldsymbol{e}_2$ на инвариантную нормальную 2-плоскость образуют два инвариантных вектора $w^{\alpha}_a = \boldsymbol{e}_{\alpha}$ $(a = 1, 2)$.

Используя равенства (5.1), получим закон изменения величин w^{α}_a: $\left(\omega^3_a\right)' = \cos\beta\omega^3_a + \sin\beta\omega^4_a$; $\left(\omega^4_a\right)' = -\sin\beta\omega^3_a + \cos\beta\omega^4_a$. (5.2).

Из векторов (ω^1, ω^2), $\left(\omega^3_1, \omega^3_2\right)$, $\left(\omega^4_1, \omega^4_2\right)$ можно образовать квадратичные формы, инвариантные при рассматриваемом преобразовании,

$$(\omega_1)^2 + (\omega^2)^2; \ \left(\omega^3_a\right)^2 + \left(\omega^4_a\right)^2; \ \omega^3_1\omega^3_2 + \omega^4_1\omega^4_2. \tag{5.3}$$

$$\begin{vmatrix} \omega^3_1 & \omega^3_2 \\ \omega^4_1 & \omega^4_2 \end{vmatrix}. \tag{5.4}$$

Инвариантная форма $I=(\omega^1)^2+(\omega^2)^2$ является первой квадратичной формой интегральной кривой (см. п. 3).

Вторую инвариантную форму интегральной кривой распределения получаем, складывая квадратичные формы (5.3$_2$), инвариантные при рассматриваемом преобразовании

$$II=(\omega_1^3)^2+(\omega_2^3)^2+(\omega_1^4)^2+(\omega_2^4)^2. \tag{5.5}$$

Квадратичная форма (5.4) $III=\omega_1^3\omega_2^4-\omega_1^4\omega_2^3$ названа третьей инвариантной формой интегральной кривой распределения Δ.

Чтобы получить закон изменения величин $\Gamma_{ab}^{\alpha}\,(\alpha=3,\ 4)$, надо рассмотреть формулу (1.2). Каждому вектору $(\omega^1,\ \omega^2)$ касательной 2-плоскости $T(A)$ формула (1.2) сопоставляет вектор $(\omega_1^{\alpha},\ \omega_2^{\alpha})$. Значит, $\{\Gamma_{ab}^{\alpha}\}$ $(\alpha=3,\ 4)$ — есть линейная вектор-функция и, следовательно, при переходе к другим базисным векторам $e_1',\ e_2'$ величины $\Gamma_{ab}^3,\ \Gamma_{ab}^4$ изменяются как координаты двухвалентного несимметрического тензора. Для тензоров $\{\Gamma_{ab}^{\alpha}\}$ можно написать полную систему инвариантов

$$\Gamma_{11}^{\alpha}+\Gamma_{22}^{\alpha};\quad \begin{vmatrix}\Gamma_{11}^{\alpha} & \Gamma_{12}^{\alpha}\\ \Gamma_{21}^{\alpha} & \Gamma_{22}^{\alpha}\end{vmatrix} \tag{5.6}$$

и совместный инвариант

$$\begin{vmatrix}\Gamma_{11}^{3} & \Gamma_{12}^{3}\\ \Gamma_{21}^{3} & \Gamma_{22}^{3}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\Gamma_{11}^{4} & \Gamma_{12}^{4}\\ \Gamma_{21}^{4} & \Gamma_{22}^{4}\end{vmatrix}. \tag{5.7}$$

При этом скалярные инварианты (5.6$_1$) определяют координаты инвариантного вектора нормальной 2-плоскости $N(A)$ — вектора средней кривизны распределения Δ в точке A (см. п. 3). Сумма инвариантов (5.6$_2$) совпадает с выражением для гауссовой кривизны распределения Δ в точке A (см. [1]).

Изменение величин $\{\Gamma_{ab}^{\alpha}\}$ можно также проследить, используя равенства (1.2), (5.2) и тот факт, что величины $\omega^1,\ \omega^2$ не изменяются при данном преобразовании. Они образуют координаты четырех векторов

$$\boldsymbol{k}_{n1}=(\Gamma_{11}^3,\ \Gamma_{11}^4);\quad \boldsymbol{k}_{n2}=(\Gamma_{22}^3,\ \Gamma_{22}^4);$$

$$\vec{\varkappa}_{g1}=(\Gamma_{21}^3,\ \Gamma_{21}^4);\quad \vec{\varkappa}_{g2}=(\Gamma_{12}^3,\ \Gamma_{12}^4).$$

Это векторы (2.5), (2.6) нормальной кривизны и геодезического кручения координатных линий.

6. Теоремы, связанные со второй квадратичной формой интегральной кривой. Основным скалярным инвариантом кривой на поверхности трехмерного евклидова пространства есть нормальная кривизна кривой, которая определяется как отношение второй квадратичной формы к первой. Рассмотрим аналогичные построения для интегральной линии двумерного распределения пространства E_4.

Рассмотрим отношение квадратичных форм (5.5) и (5.3₁):

$$\frac{II}{I}=\frac{(\omega_1^3)^2+(\omega_2^3)^2+(\omega_1^4)^2+(\omega_2^4)^2}{(\omega^1)^2+(\omega^2)^2}. \qquad (6.1)$$

Подставляя в последнее равенство выражения (1.2), (2.5)—(2.8), получаем

$$\frac{II}{I}=\frac{\left(k_{na}^2+\vec{\varkappa}_{ga}^2\right)(\omega^a)^2+2\left(k_{n1}\vec{\varkappa}_{g2}+k_{n2}\vec{\varkappa}_{g1}\right)\omega^1\omega^2}{(\omega^1)^2+(\omega^2)^2}. \qquad (6.2)$$

Выражение (6.2) сопоставляет каждой интегральной кривой распределения определенный скалярный инвариант — сумму квадратов модулей векторов нормальной кривизны и геодезического кручения. Действительно, используя формулы (2.1), (2.2) и соотношения (2.3), находим $II/I=k_n^2+\vec{\varkappa}_g^2$. Из (6.2) следует, что этот инвариант зависит только от величин Γ_{ab}^a и отношения ω^1 к ω^2, определяющего направление, касательное к интегральной кривой. Следовательно, этот инвариант имеет одно и то же значение для касающихся интегральных линий распределения. Это дает аналог теоремы Менье.

Пусть касательная к произвольной интегральной кривой образует угол φ с вектором e_1 репера R, тогда $\omega^1:\omega^2=\cos\varphi:\sin\varphi$. Подставим это отношение в равенство (6.2), получим

$$II/I=\left(k_{n1}^2+\vec{\varkappa}_{g1}^2\right)\cos^2\varphi+\left(k_{n1}\vec{\varkappa}_{g2}+k_{n2}\vec{\varkappa}_{g1}\right)\cos\varphi\sin\varphi+$$
$$+\left(k_{n2}^2+\vec{\varkappa}_{g2}^2\right)\sin^2\varphi. \qquad (6.3)$$

Если векторы e_1 и e_2 выбрать по главным направлениям квадратичной формы III, т. е. чтобы имело место соотношение $\vec{k}_{n1}\varkappa_{g2}+k_{n2}\vec{\varkappa}_{g1}=0$ **(6.4),** то можно записать

$$k_n^2+\vec{\varkappa}_g^2=\left(k_{n1}^2+\vec{\varkappa}_{g1}^2\right)\cos^2\varphi+\left(k_{n2}^2+\vec{\varkappa}_{g2}^2\right)\sin^2\varphi. \qquad (6.5)$$

Равенство (6.5) есть аналог теоремы Эйлера. Из этого равенства следует, что для любой ортогональной пары интегральных линий сумма квадратов модулей векторов нормальных кривизн и геодезического кручения постоянна. Используя выражения для вектора средней кривизны (3.1) и вектора среднего геодезического кручения (2.4), можно показать, что эта сумма равна $4\left(H^2+\vec{\varkappa}_{gc}^2-k_\Gamma\right)$, где k_Γ — гауссова кривизна распределения Δ в точке A (см. [1]).

Теорема 6.1. *Для любой ортогональной пары интегральных линий распределения Δ сумма квадратов модулей векторов нормальных кривизн и геодезического кручения постоянна и равна* *учетверенной сумме квадратов модулей векторов средней кривизны и среднего геодезического кручения без гауссовой кривизны этого распределения.* Записывая эту теорему в виде

$$(k_n')^2 + (\vec{\varkappa}_2')^2 + (k_n'')^2 + (\vec{\varkappa}_g'')^2 = 4\,(H^2 + \vec{\varkappa}_{gc}^2 - k_\Gamma)$$

и, учитывая определения векторов H и $\vec{\varkappa}_{gc}$, получаем

$$k_n' k_n'' - \vec{\varkappa}_g{}' \vec{\varkappa}_g{}'' = k_\Gamma,$$

где k_n', $\vec{\varkappa}_g{}'$ и k_n'', $\vec{\varkappa}_g{}''$ — векторы нормальной кривизны и геодезического кручения произвольной ортогональной пары интегральных линий распределения.

Теорема 6.11. *Для любой ортогональной пары интегральных линий распределения Δ разность скалярных произведений векторов нормальных кривизн и векторов геодезического кручения постоянна и равна гауссовой кривизне распределения в этой точке.*

Легко видеть, что функция от φ, стоящая в правой части равенства (6.5), достигает экстремальных значений при $\varphi_1 = 0$ и $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$, т. е. в тех направлениях на касательной 2-плоскости распределения, для которых выполнено условие (6.4). Это равенство можно записать так:

$$\vec{H}\varkappa_{g2} + \vec{\varkappa}_{gc} k_{n2} = 0 \text{ или } \vec{H}\varkappa_{g1} - \vec{\varkappa}_{gc} k_{n1} = 0.$$

Так как при выполнении условий интегрируемости (1.4) вектор среднего геодезического кручения обращается в нуль, то существует единственная ортогональная пара направлений касательной 2-плоскости распределения Δ, для которой сумма квадратов модулей вектора нормальной кривизны и вектора геодезического кручения имеет экстремальное значение. В интегрируемом случае эта пара направлений совпадает с той, для которой вектор геодезического кручения ортогонален вектору средней кривизны.

7. Теоремы, связанные с третьей квадратной формой интегральной кривой распределения Δ.

Рассмотрим скалярный инвариант интегральной кривой, определенный отношением третьей квадратичной формы к первой:

$$\frac{III}{I} = \frac{\omega_1^3\omega_2^4 - \omega_1^4\omega_2^3}{(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2}.$$

Подставляя выражения (1.2) и используя (2.5), (2.6), получим

$$\frac{III}{I} = \frac{[k_{na}\vec{\varkappa}_{ga}]\,(\omega^a)^2 + ([k_{n1}k_{n2}] - [\vec{\varkappa}_{g1}\vec{\varkappa}_{g2}])\,\omega^1\omega^2}{(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2}. \qquad (7.1)$$

Можно проверить, что выражение (7.1) определяет для каждой кривой распределения площадь параллелограмма, построенного на векторах нормальной кривизны и геодезического кручения.

Так как эта величина зависит лишь от отношения ω^1 к ω^2, т. е. от направления касательной в 2-плоскости $T(A)$, то все интегральные кривые распределения Δ с общей касательной имеют общее значение III/I. Равенство (7.1) выражает аналог теоремы Менье.

Векторы $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ репера R направлены по собственным направлениям (7.1), когда выполнено условие

$$[\boldsymbol{k}_{n1}\boldsymbol{k}_{n2}] - [\vec{\varkappa}_{g1}\,\vec{\varkappa}_{g2}] = 0. \qquad (7.2)$$

В этом случае инвариант (5.7) обращается в нуль.

Если касательная к интегральной кривой образует угол φ с вектором $\boldsymbol{e}_1$ репера R, то $\omega^1 : \omega^2 = \cos\varphi : \sin\varphi$. Направив $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ по собственным направлениям квадратичной формы III из (7.1), получим аналог теоремы Эйлера

$$\frac{III}{I} = [\boldsymbol{k}_{n1}\vec{\varkappa}_{g1}]\cos^2\varphi + [\vec{\varkappa}_{g2}\boldsymbol{k}_{n2}]\sin^2\varphi. \qquad (7.3)$$

Из равенства (7.2) следует

Теорема 7.I. *Существует единственная ортогональная пара направлений касательной 2-плоскости распределения, для которой равны площади параллелограммов, построенных на векторах нормальных кривизн и на векторах геодезических кручений.*

Функция от φ, стоящая в правой части равенства 7.3, имеет экстремальные значения при $\varphi_1 = 0$ и $\varphi_2 = \pi/2$.

Теорема 7.II. *Площадь параллелограмма, построенного на векторах нормальной кривизны и геодезического кручения, имеет экстремальные значения вдоль тех интегральных линий распределения, для которых равны площади параллелограммов, построенных на векторах нормальных кривизн и на векторах геодезических кручений. В интегрируемом случае у этой пары направлений векторы нормальных кривизн параллельны.*

Из соотношения 7.3 также следует

Теорема 7.III. *Сумма площадей параллелограммов, построенных на векторах нормальной кривизны и геодезического кручения, одна и та же для любой ортогональной пары интегральных линий распределения.*

Список литературы: 1. *Глова Н. И.* К теории кривизны системы интегральных кривых двух уравнений Пфаффа в E_4.— Укр. геометр. сб., 1975, вып. 18, с. 37—48. 2. *Глова Н. И.* О геодезических линиях системы интегральных кривых двух уравнений Пфаффа в E_4.— Укр. геометр. сб., 1975, вып. 17, с. 44—50. 3. *Березина Л. Я.* Классическая дифференциальная геометрия.— Рига: Зинатне, 1970.— 104 с.

Поступила в редколлегию 17.10.80.

УДК 513

А. М. Гурин

РЕАЛИЗАЦИЯ СЕТЕЙ ВЫПУКЛЫХ МНОГОГРАННИКОВ С РАВНОУГОЛЬНЫМИ ВЕРШИНАМИ. I

В работах [1—3] были рассмотрены основные свойства выпуклых многогранников с равноугольными вершинами, т. е. многогранников с равными плоскими углами в каждой вершине. В работах [2, 3] построены все возможные сети ребер таких многогранников, но не выяснено, все ли они реализуемы в виде многогранников. В предлагаемой статье проверяется возможность реализации каждой из найденных сетей. Заметим, что реализация той или иной сети понимается с точностью до длин ребер. Так нужно понимать, в частности, единственность реализации какой-либо сети многогранником (например, для сети M_2, M_3, M_4, M_9 и т. д.; у многогранника с сетью M_2 конечная грань может быть прямоугольником любой формы).

Напомним некоторые символы, введенные в [1, 2]: (l, l, n), или (l^2, n), означают тип грани — треугольная грань с двумя l-гранными и одной n-гранной вершинами. В частности, (l) — бесконечная грань с одной l-гранной вершиной, (l, n) — бесконечная грань с двумя вершинами. Символ $[k, l]$ означает ребро, соединяющее вершины k и l; $\{k, l\}$ — двугранный угол при этом ребре; $v(n)$ — мера плоского угла n-гранной вершины; $\theta[k, l] = v(k) + v(l)$. Непосредственно вытекают из определения равноугольности вершин свойства $(\alpha, \beta, \ldots, \eta)$, указанные в [1—3]. Исследуемые в данной статье сети бесконечных и замкнутых многогранников можно найти в цитируемой литературе.

§ 1. Бесконечные многогранники

Теорема 1. *В трехмерном евклидовом пространстве существует лишь двадцать шесть бесконечных выпуклых многогранников с равноугольными вершинами, кроме бесконечной серии конусов.*

Доказательство. Рассмотрим каждую из тридцати сетей M_i $(i = \overline{1, 30})$ предполагаемых бесконечных многогранников [2]. Сеть M_1 определяет многогранник, если плоские углы ее не меньше $\pi/2$. В случае равенства плоских углов $\pi/2$ бесконечные грани (3) будут параллельными. Сети M_2, M_3 и M_4 однозначно реализуются многогранниками. Бесконечные ребра сети M_2 будут параллельными. В статье [3] приведены допустимые значения углов сети M_4: с точностью до $0{,}1°$ для нее $v(4) = 80{,}5°$, $v(3) = 114{,}8°$. Грань [4] и противоположная ей — грань (3,3) не параллельны, что можно проверить непосредственным вычислением. Многогранники, соответствующие сетям M_5 и M_6, существуют для различных значений плоских углов. В частности, в диапазон допустимых значений угла $v(5)$ попадает значение $(17\pi)/45$, при котором пятигранная вершина правильна. Реализация сети M_7 возможна для различных плоских углов граней. При этом бесконечные грани (3,3) остаются параллельными. Подобным образом реализуется и сеть M_8, но все ее бесконечные грани не параллельны. Напомним приведенное в [2, μ)].

Определение. *Цепью граней многогранника называется такая последовательность граней, в которой каждые две соседние грани имеют общее ребро, а несоседние грани не имеют общих вершин.*

Из свойств α) и β) [1] следует, что если число граней цепи нечетно, ее концевые грани бесконечны, а все промежуточные — четырехугольники, то при каждом общем ребре сумма углов грани равна π.

Сеть M_9 имеет пять цепей с конечными гранями. Две пары цепей по 3 и 5 граней расположены симметрично и позволяют сделать вывод, что трехгранные углы этой цепи граней равны. Пятая цепь указывает на равенство всех трехгранных углов. Следовательно, все вершины многогранника будут правильными, а бесконечные грани (3,3) — параллельными. Реализация однозначна.

Легко проверить, что сети M_{10} и M_{11} реализуемы для различных значений плоских углов. Сеть M_{12} имеет две цепи по три грани, и поэтому реализуется лишь многогранником с правильными вершинами; его грани (3) параллельны. Сеть M_{13} реализуется многогранником с равными трехгранными и четырехгранными углами в цепи бесконечных граней, так как соответствующие вершины имеют равные соответствующие двугранные углы. Трехгранная вершина в центре многогранника имеет плоские углы, не превышающие плоские углы остальных трехгранных вершин. В случае равенства всех трехгранных вершин все вершины многогранника станут правильными, а бесконечные ребра — параллельными. Сеть M_{14} аналогично сети M_{13} имеет равные трехгранные углы в цепи бесконечных граней. Вершины многогранника могут быть правильными; в этом случае никакие две бесконечные грани не параллельны, так как двугранные углы больше $(23\pi)/30$. Аналогично реализуется сеть M_{15}.

Сеть M_{16} (рис. 1) нельзя реализовать в виде многогранника. Для доказательства этого заметим, что трехгранные углы $3''$ равны и равны пятигранные углы. Кроме того, из оценок $\theta[3'', 4] \geqslant \pi$, $\theta[3', 4] \leqslant \pi$ следует $v(3') \leqslant v(3'')$. Если $v(3') = v(3'')$, то $v(5) = v(4)$, и пятигранная вершина будет правильной, поскольку $v(3) = v(3'') = v(3')$. Но тогда должно быть $v(5) < v(4)$, что противоречит исходному равенству $v(5) = v(4)$. Итак, $v(3') < v(3'')$.

Проверим, что $v(3) \neq v(3'')$. Действительно, в случае равенства получим $v(5) = v(4)$ и, следовательно, $\{4, 3\} < \{5, 3'\}$. Но это противоречит факту, что вершина $3'$ — правильная. Докажем, что $v(3) > v(3'')$. Пусть $v(3) < v(3'')$. Тогда, сравнивая $\theta[3'', 4]$ и $\theta[3, 5]$, получим $v(5) > v(4)$. Но, с другой стороны, $v(5)$ и $v(4)$ вычисляются при помощи трехгранных углов, у которых один двугранный угол — $\{3''\}$ общий, а два других — части двугранного угла $\{3'\}$. При этом часть $\{3'\}$, используемая для вычисления $v(5)$, меньше соответствующей части $\{3'\}$, используемой для вычисления $v(4)$. Следовательно, $v(5) < v(4)$. Полученное противоречие доказывает неравенство $v(3) > v(3'')$. И, наконец, отметим, что $v(3') > > 96°$, поскольку вершина $3'$ принадлежит грани $(3', 5, 3, 5)$. В результате можно записать цепочку неравенств: $v(3) > v(3'') > v(3') >$

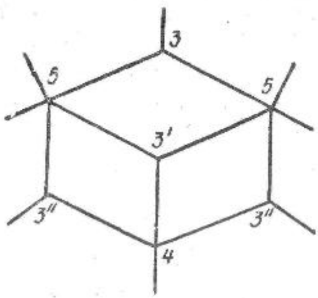


Рис. 1

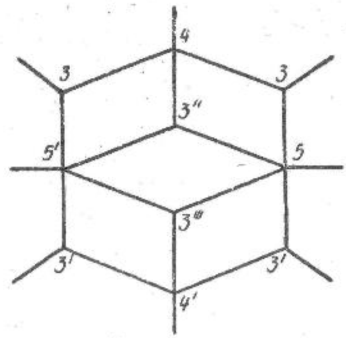


Рис. 2

$> v(4) > v(5)$. Учитывая приведенные соотношения для плоских углов предполагаемого многогранника ищем решения системы уравнений, описывающих зависимость между плоскими и двугранными углами предполагаемого многогранника. Оказывается, что решения не существуют, т. е. не существует многогранник.

На рис. 2 изображена сеть ребер M_{17}. Из существования двух цепей по пяти граней вытекает выполнение равенств $v(5) = v(5')$, $v(3'') = v(3''')$, $v(3) = v(3')$ и $v(4) = v(4')$. Отметим, что $v(5) \geqslant \geqslant v(4)$, поскольку $\theta[3, 4] = \pi$, а $\theta[3, 5] \geqslant \pi$. И, аналогично, $v(3'') \leqslant v(3)$. Но в случае, если $v(3'') = v(3)$ или $v(5) = v(4)$, вершины 5 и 4 правильные с одинаковым двугранным углом, следовательно, должно быть $v(5) < v(4)$. Значит, $v(3'') < v(3)$ и $v(5) > > v(4)$. С другой стороны, $v(4)$ и $v(5)$ можно найти при помощи трехгранных углов с общим двугранным углом $\{3\}$ и частями двугранного угла $\{3''\}$. Поскольку часть двугранного угла $\{3''\}$, используемая при вычислении $v(5)$, меньше соответствующей части двугранного угла $\{3''\}$, используемого при вычислении $v(4)$, то $v(4) > > v(5)$. Снова получается противоречие. Следовательно, многогранника с сетью ребер M_{17} не существует.

Сеть ребер M_{18} имеет грани типа $(3^2, 4, 5)$ и $(3, 5, 3, 5)$, у которых $\theta[3, 3] = \theta[3, 5]$. Следовательно, $\theta(3^2, 4, 5) < 2\pi$ и, значит, многогранник с сетью ребер M_{18} не существует.

Сети M_{19} и M_{20} реализуемы аналогично сети M_{14}. В частности, вершины многогранников могут быть правильными. Сети ребер M_{21}, M_{22} и M_{23} реализуются многогранниками неоднозначно. Вершины многогранников могут быть правильными.

Отметим, что если n-гранная и m-гранная вершины правильные с одним и тем же двугранным углом, то их плоские углы удовлетворяют уравнению

$$4\sin^2\frac{\pi(m-2)}{2m}(1+\cos v(n)) = 4\sin^2\frac{\pi(n-2)}{2n}(1+\cos v(m)). \quad \text{(A)}$$

Многогранник, соответствующий сети M_{24}, существует при различных значениях плоских углов граней. В частности, если вершины многогранника правильны, то углы $v(3)$ минимальны. При этом грани (3) параллельны; для доказательства этого предположим (это не нарушит общности рассуждения), что грань $(3, 5, 3, 5)$ есть ромб и проведем ломаную — сечение плоскостью, проходящей через вершины 3, 5, 5, 3 и перпендикулярной ромбу и граням (3). Сумма углов ломаной $\theta[3, 5, 5, 3] \geqslant 3\pi$. Докажем, что в случае правильных вершин $\theta[3, 5, 5, 3] = 3\pi$. Воспользуемся соотношением (A) и условием $\theta(3, 5, 3, 5) = 2\pi$. Из них найдем $\cos v(3) = \frac{1-4\sin^2 54°}{1+4\sin^2 54°}$ и $\cos v(5) = \frac{4\sin^2 54°-1}{1+4\sin^2 54°}$. Углы, полученные в результате сечения плоскостью, проходящей через вершины 3, 5, равны соответственно

$$\arccos\frac{1-4\sin^2 54°}{\sqrt{1+4\sin^2 54°}} \quad \text{и} \quad \arccos\frac{1-8\sin^3 54°}{4\sin 54°\sqrt{1+4\sin^2 54°}}.$$

Выражение, определяющее угол сечения пятигранной вершины, можно упростить до вида $\arccos\frac{-1}{\sqrt{1+4\sin^2 54°}}$. Поскольку в сечении 3, 5, 5, 3 имеется по два равных угла, то утверждение, что $\theta[3, 5, 5, 3] = 3\pi$, можно переписать: $\theta[3, 5] = \frac{3\pi}{2}$ или

$$\cos(w(3) + w(5)) = 0, \quad \text{(B)}$$

где $w(3)$, $w(5)$ — мера углов сечения вершин 3 и 5. Подставляя вместо $w(3)$ и $w(5)$ их значения, приведенные ранее, и выполняя тождественные преобразования, упрощающие полученное выражение, убеждаемся в существовании такого равенства для данных углов сечений $w(3)$ и $w(5)$. Приведем основные моменты расчетов. После тождественных преобразований исходного выражения (B) получим $-1 + 4\sin^2 54° = \sqrt{3-4\sin^2 54°}\cdot 4\sin^2 54°$, откуда $4\sin^2 54° = (3+\sqrt{5})/2$. (Заметим, что $4\sin^2 54° = 2(1+\cos 72°)$). Из тождества $\cos 36° = \cos 72° + 0,5$ получаем $\cos 72° = (-1 + \sqrt{5})/4$. Тогда $2(1+\cos 72°) = (3+\sqrt{5})/2$. Итак, доказано, что бесконечные грани (3) параллельны в случае правильных вершин многогранника M_{24}.

Сети M_{25} и M_{26} можно реализовать многогранником. Вершины этих многогранников могут быть правильными. Доказательство аналогично доказательству в случае сети M_{24}. Для сети M_{27} применимы рассуждения, приведенные для сети M_{17}. В частности, величина плоского угла внутренней трехгранной вершины не меньше чем величина плоского угла трехгранной вершины, принадлежащей бесконечной грани. Если все трехгранные вершины равны, то и пятигранные вершины равны и правильные. Следовательно, грани (5) параллельны. Доказательство этого факта повторяет доказательство, приведенное в случае сети M_{24}.

Рассмотрим сеть M_{28}. Из величин углов граней $(3^3, 5)$ и $(3, 5, 3', 5)$ и естественного условия $v(3') < 120°$ следует, что $v(3) < 96°$. Тогда выходит, что сумма углов грани $(3^3, 5)$ меньше 2π, что невозможно. Поэтому сеть M_{28} не реализуема многогранником. Сеть M_{29} не может быть реализована многогранником с правильными вершинами, ввиду возникающего в этом случае противоречия $\theta[3, 5] < \theta[3, 4]$, в то время как здесь должно быть равенство. Предположим, что внутренние трехгранные углы равны. Тогда мы можем составить систему уравнений для нахождения углов многогранника. Существует лишь одно решение системы, попадающее в область допустимых значений углов. При этом с точностью $0{,}1°$ плоский угол внутреннего трехгранного угла равен 110,9, а внешнего угла — $119{,}4°$. Бесконечные грани не параллельны. Многогранник существует.

Сеть M_{30} можно реализовать многогранником с правильными вершинами. Все его бесконечные ребра параллельны. Доказательство аналогично доказательству, что в случае сети M_{24} бесконечные грани (3) параллельны. Теорема доказана.

Замечание. В ходе доказательства теоремы попутно было доказано, что из двадцати шести бесконечных многогранников лишь один (M_{29}) не может иметь все вершины правильными.

§ 2. Замкнутые многогранники

1. Многогранники с равными двугранными углами. Условие равноугольности вершин вместе с условием равенства двугранных углов составляет условие правильности вершин многогранников. Справедлива

Теорема 2. *В трехмерном евклидовом пространстве существует лишь тридцать два замкнутых выпуклых многогранника с правильными вершинами, кроме правильных многогранников и бесконечных серий бипирамид и многогранников, двойственных антипризмам.*

Докажем несколько лемм, которые понадобятся при доказательстве теоремы.

Лемма 1. *Грани* $(3^2, 4^2)$ *и* (3^5) *не принадлежат одновременно многограннику с правильными вершинами.*

Доказательство. Поскольку вершины предполагаются правильными, то можно вычислить значения плоских углов грани $(3^2, 4^2)$. Оказывается, для грани $(3^2, 4^2)$ с точностью до $0{,}1°$ будет $v(3) = 109{,}5°$. Для грани (3^5) угол $v(3) = 108°$. Получились различные значения углов $v(3)$, и грани $(3^2, 4^2)$ и (3^5) не принадлежат одному многограннику. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Грани* $(3, 5^2)$, $(3^3, 5)$ *и* (3^5) *могут принадлежать одновременно многограннику с правильными вершинами.*

Доказательство. Найдем значения углов граней $(3, 5^2)$ и $(3^3, 5)$, учитывая, что вершины граней правильные. Для этого воспользуемся свойством (A). Углы грани $(3, 5^2)$ удовлетворяют системе уравнений $v(3) + 2v(5) = \pi$; $1 + \cos v(5) = 4\sin^2 54°(1 + \cos v(3))$, а углы грани $(3^3, 5)$ удовлетворяют системе уравнений $3v(3) + v(5) = 2\pi$; $1 + \cos v(5) = 4\sin^2 54°(1 + \cos v(3))$. Обе системы имеют единственное подходящее решение: $v(3) = 108$, $v(5) = 36°$. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Грани* $(4^2, 8)$ *и* $(3, 4^3)$ *могут принадлежать одновременно многограннику с правильными вершинами.*

Доказательство. Плоские углы грани $(4^2, 8)$ находятся из системы уравнений $2v(4) + v(8) = \pi$, $2\sin^2 67{,}5°(1 + \cos v(4)) = 1 + \cos v(8)$. После преобразований получим $\cos v(4) = 2^{-1}(1 - 1/\sqrt{2})$, $\cos v(8) = (1/4) + (1/\sqrt{2})$. Плоские углы граней $(3, 4^3)$ могут быть найдены из системы уравнений $v(3) + 3v(4) = 2\pi$, $\cos v(4) = 1 + 2\cos v(3)$. Выполнив тождественные преобразования, придем к уравнению $8\cos^3 v(4) - 7\cos v(4) + 1 = 0$. Решением этого уравнения является значение $\cos v(4) = 2^{-1}(1 - 1/\sqrt{2})$, найденное для грани $(4^2, 8)$, и лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Грани* $(4, 5, 10)$ *и* $(3, 4^2, 5)$ *могут принадлежать одновременно многограннику с правильными вершинами.*

Доказательство. Составим системы уравнений для нахождения величин углов граней $(4, 5, 10)$ и $(3, 4^2, 5)$ в предположении, что вершины граней правильны. Для грани $(4, 5, 10)$ упомянутая система имеет вид

$$v(4) + v(5) + v(10) = \pi; \quad 2(1 + \cos v(5)) = 4\sin^2 54°(1 + \cos v(4));$$
$$4\sin^2 54°(1 + \cos v(10)) = 4\sin^2 72°(1 + \cos v(5)).$$

Последовательно исключая величины $v(4)$ и $v(10)$ и выполняя тождественные преобразования, получаем уравнение

$$\cos^3 v(5)[2AC] + \cos^2 v(5)[A^2 + 4AC - 2BC - 2AB + C^2 + B^2] + \cos v(5)[2A^2 + 2AC - 4AB - 4CB + 2B^2 + 2C^2] + A^2 - 2AB - 2CB + B^2 + C^2 = 0,$$

где $A = 2$; $B = 4\sin^2 54°$; $C = 4\sin^2 72°$.

Если учесть, что

$$4\sin^2 54° = (3 + \sqrt{5})/2; \quad 4\sin^2 72° = (5 + \sqrt{5})/2,$$

то решением данного уравнения будет

$$\cos v(5) = (1 + 2\sqrt{5})/(10 + 2\sqrt{5}).$$

Тогда

$$\cos v(10) = (5 + 2\sqrt{5})/(6 + 2\sqrt{5}), \quad \cos v(4) = 1/(10 + 4\sqrt{5}).$$

Составив аналогичную систему уравнений для нахождения углов грани $(3, 4^2, 5)$, убедимся, что и для этой системы являются решениями значения углов $v(5)$ и $v(4)$, найденные для грани $(4, 5, 10)$, и лемма 4 доказана.

Доказательство теоремы. Развертка [4] многогранника с правильными вершинами может состоять или из граней одного типа или из граней нескольких типов. В первом случае существование многогранника проверяется непосредственным вычислением его углов. Множество таких многогранников состоит из бесконечной серии бипирамид, многогранников, двойственных антипризмам, всех правильных многогранников, тринадцати многогранников, двойственных полуправильным многогранникам [5] и семи многогранников, двойственных многогранникам с правильными гранями за номером соответственно 27, 34, 37, 72, 73, 74, 75 [5]. Теперь нужно доказать существование многогранников, развертка которых состоит из граней различных типов. С этой целью были рассмотрены все 253 сети [3] предполагаемых замкнутых выпуклых многогранников с равноугольными вершинами. Основная трудность доказательства приходится на сети, содержащие следующие комплекты граней: 1) $(4^2, 5)$, $(4^2, 3^2)$, (3^5); 2) $(3^3, 5)$, (3^5); 3) $(3^2, 4^2)$, (3^5); 4) $(4^2, 8)$, $(3, 4^3)$; 5) $(3, 5^2)$, $(3^3, 5)$, (3^5); 6) $(3, 5^2)$, $(3^3, 5)$; 7) $(4, 5, 10)$, $(3, 4^2, 5)$, $(3, 4, 5, 4)$. Остальные сети нельзя реализовать многогранниками с правильными вершинами. Для каждой сети это проверяется непосредственно. Согласно лемме 1 комплекты граней 1) и 3) не принадлежат одному многограннику с правильными вершинами. Леммы 2—4 указывают на согласованность углов граней остальных комплектов. Комплект граней 7) может быть реализован восемью различными многогранниками [3]. Они двойственны многогранникам с правильными гранями за номерами соответственно 76—83 [5]. Комплекты граней 2), 4), 5) и 6) образуют по одному многограннику [3]. Эти многогранники имеют двойственные себе среди многогранников с правильными гранями, соответственно, 11, 19, 62 и 63 [5]. Теорема доказана.

2. Многогранники с равными ребрами. Если к требованию равноугольности вершин добавить второе требование — равенство ребер, то получим двенадцать многогранников. Это пять правильных, пять правильногранных ($2M_1$, $2M_3$, M_{25}, Π_3+3M_2, $2M_2+A_4$ [5]) и два ромбоэдра [6, табл. VII, фиг. 2, 14]. Действительно, второе требование — равенство ребер существенно сокращает таблицу типов граней [1]. Из треугольных граней останутся: (3^3), $(3, 4^2)$, $(3, 4, 5)$, $(3, 5^2)$, (4^3), $(4^2, 5)$, $(4, 5^2)$

и (5^3); из четырехугольных граней останутся: (3^4), $(3, 4, 3, 4)$, $(3, 4, 3, 5)$ и $(3, 5, 3, 5)$; из пятиугольных граней останется только (3^5). Грани (3^3), (4^3), (5^3), (3^4) и (3^5) составят правильные многогранники. Грани $(3, 4, 3, 4)$ и $(3, 5, 3, 5)$ образуют два ромбоэдра. Многогранники $2M_1$ и $2M_3$ — бипирамиды, состоят из граней соответственно $(3, 4^2)$ и $(4^2, 5)$. Многогранник M_{25} состоит из граней $(4^2, 5)$ и $(4, 5^2)$. Многогранники $П_3+3M_2$ и $2M_2+A_4$ состоят из граней (5^3) и $(4,5^2)$.

3. Многогранники с правильными гранями. Второе условие — равенство углов каждой грани, является еще более сильным по сравнению с требованием равенства ребер. В таблицу типов граней теперь не могут входить четырехугольники $(3, 4, 3, 4)$, $(3, 4, 3, 5)$ и $(3, 5, 3, 5)$. Следовательно, все множество многогранников состоит из пяти правильных и пяти правильногранных, перечисленных в п. 2.

Список литературы: 1. *Гурин А. М.* О выпуклых многогранниках с равноугольными вершинами.— Укр. геометр. сб., 1980, вып. 23, с. 34—40. 2. *Гурин А. М.* Бесконечные выпуклые многогранники с равноугольными вершинами.— Укр. геометр. сб., 1981, вып. 24, с. 26—32. 3. *Гурин А. М.* Оценка числа замкнутых выпуклых многогранников с равноугольными вершинами.— Укр. геометр. сб., 1982, вып. 25, с. 22. 4. *Александров А. Д.* Выпуклые многогранники.— М.: Гостехиздат, 1950.—428 с. 5. *Залгаллер В. А.* Выпуклые многогранники с правильными гранями.— Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. мат. ин-та им. Стеклова АН СССР, 1967, т. 2, с. 220. 6. *Brückner M.* Vielecke und Vielfläche. Theorie und Geschichte.— Leipzig, 1900.— 227 S. und XII Taf.

Поступила в редколлегию 26.10.81.

УДК 513

В. Ф. Игнатенко

ОБ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЯХ С ГРУППОЙ СИММЕТРИЙ МНОГОГРАННИКА 4_{21}

Группа автоморфизмов 27 прямых гладкой кубической поверхности трехмерного проективного пространства определяет в вещественном евклидовом пространстве E^8 группу симметрий E_8 центрально-симметричного многогранника 4_{21} [1]—[4]. Различные свойства независимых образующих алгебры I многочленов, инвариантных относительно E_8, получены в работах [5] — [7], [8, гл. IV], [9], [10, доп.]. В данной статье устанавливаются новые свойства образующих алгебры I.

1°. Имеет место

Теорема. *Пусть* x_i $(i=\overline{1, 8})$ *есть прямоугольные координаты вектора* $\boldsymbol{x}$ *пространства* E^8,

$$\eta_k(\boldsymbol{x})=0, \quad k=\overline{1, 120}, \tag{1}$$

— *нормированные уравнения 7-мерных плоскостей симметрии многогранника* 4_{21}. *Тогда многочлены*

$$\sum_{k=1}^{120} \eta_k^{2r}(\boldsymbol{x}), \quad r = 1,\ 4,\ 6,\ 7,\ 9,\ 10 \tag{2}$$

являются образующими алгебры I.

Доказательство. Плоскости симметрии многогранника 4_{21} (их 120) зададим уравнениями

$$x_i \pm x_j = 0, \quad (i,\ j = \overline{1,\ 8};\ \ i < j);$$
$$x_1 \pm x_2 \pm x_3 \pm x_4 \pm x_5 \pm x_6 \pm x_7 \pm x_8 = 0, \tag{3}$$

где количество плюсов четно [11]. Выделим стенки камеры для группы симметрий E_8: $x_1 + x_2 = 0$; $x_2 + x_3 = 0$; $x_3 + x_4 = 0$; $x_4 + x_5 = 0$; $x_5 - x_6 = 0$; $x_6 + x_7 = 0$; $x_7 + x_8 = 0$; $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - x_6 + x_7 - x_8 = 0$. Степени 2, 8, 12, 14, 18, 20, 24, 30 (*4*) независимых образующих алгебры I можно найти по собственным значениям линейного преобразования S, являющегося произведением отражений в плоскостях стенок камеры группы E_8 [4].

Уравнения (3) показывают, что группа симметрий $D_8 < E_8$ [11]. Значит, произвольный элемент алгебры I принадлежит алгебре многочленов с группой симметрий D_8, которая порождается [4], [12] формами

$$\sum_{i=1}^{8} x_i^{2p} \ \ (p = \overline{1,\ 7}), \quad \prod_{i=1}^{8} x_i. \tag{5}$$

Поэтому числа (4) четны. Квадратичная образующая имеет вид $I_2(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{8} x_i^2$ **(6)**. Формы $\theta_{2r}(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{120} \eta_k^{2r}(\boldsymbol{x})$, $r \geqslant 1$ **(7)**,

где $\eta_k(\boldsymbol{x}) = 0$ есть нормированные уравнения (3), инвариантны относительно группы симметрий E_8. При этом

$$\theta_2(\boldsymbol{x}) = 15 I_2(\boldsymbol{x}); \quad \theta_4(\boldsymbol{x}) = 2^{-1} \cdot 9 I_2^2(\boldsymbol{x}); \quad \theta_6(\boldsymbol{x}) = 2^{-3} \cdot 15 I_2^3(\boldsymbol{x}). \tag{8}$$

На основании (5) и (7), формы

$$I_{2r}(\boldsymbol{x}) = 2^{3r-6}\theta_{2r}(\boldsymbol{x}), \quad r > 2, \tag{9}$$

в развернутом виде запишем

$$I_{2r}(\boldsymbol{x}) = (2^{2r-5} \cdot 7 + 1) \sum_{i=1}^{8} x_i^{2r} + (2^{2r-5} + 1) \times$$
$$\times \sum_{s=1}^{r-1} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{8} C_{2r}^{2s} x_i^{2(r-s)} x_j^{2s} + \sum \frac{(2r)!}{\prod_{i=1}^{8} (2r_i)!} \times$$

4 2-149

$$\times \prod_{i=1}^{8} x_i^{2r_i} + \sum \frac{(2r)!}{\prod\limits_{i=1}^{8} (2r_i' + 1)!} \prod_{i=1}^{8} x_i^{2r_i'+1}; \qquad (10)$$

суммирование проводится по всем целым неотрицательным числам r_i и r_i' таким, что $\sum\limits_{i=1}^{8} r_i = r$; $\sum\limits_{i=1}^{8} r_i' = r - 4$, причем среди r_i больше двух чисел отлично от нуля.

Рассмотрим случаи:

1. $r = 4$. Поскольку $I_8(\boldsymbol{x}) \neq cI_2^4(\boldsymbol{x})$, форма $I_8(\boldsymbol{x})$ — образующая 8-й степени.

2. $r = 5$. Согласно (4), должно быть $I_{10}(\boldsymbol{x}) = a_1 I_2^5(\boldsymbol{x}) + a_2 I_8(\boldsymbol{x}) I_2(\boldsymbol{x})$. Для нахождения a_1 и a_2 приравняем соответствующие коэффициенты при x_1^{10}, $x_1^8 x_2^2$. Получим следующую систему линейных уравнений: $a_1 + 57a_2 = 225$, $5a_1 + 309a_2 = 1485$. Она имеет решение: $a_1 = -630$, $a_2 = 15$; выражение для I_{10} принимает вид

$$15^{-1} I_{10}(\boldsymbol{x}) = -42 I_2^5(\boldsymbol{x}) + I_8(\boldsymbol{x}) I_2(\boldsymbol{x}). \qquad (11)$$

3. $r = 6$. Пусть

$$I_{12}(\boldsymbol{x}) = a_1 I_2^6(\boldsymbol{x}) + a_2 I_8(\boldsymbol{x}) I_2^2(\boldsymbol{x}). \qquad (12)$$

Тогда, приравняв соответствующие коэффициенты при x_1^{12}, $x_1^{10} x_2^2$, $x_1^8 x_2^4$, получим несовместную систему трех линейных уравнений относительно a_1 и a_2: $a_1 + 57a_2 = 897$, $a_1 + 61a_2 = 1419$, $5a_1 + 397a_2 = 21285$. Следовательно, равенство (12) невозможно; $I_{12}(\boldsymbol{x})$ — образующая 12-й степени.

4. $r = 7$. Если

$$I_{14}(\boldsymbol{x}) = a_1 I_2^7(\boldsymbol{x}) + a_2 I_8(\boldsymbol{x}) I_2^3(\boldsymbol{x}) + a_3 I_{12}(\boldsymbol{x}) I_2(\boldsymbol{x}), \qquad (13)$$

то, приравняв соответствующие коэффициенты при x_1^{14}, $x_1^{12} x_2^2$, $x_1^{10} x_2^4$, $x_1^8 x_2^6$, получим следующую систему линейных уравнений: $a_1 + 57a_2 + 897a_3 = 3585$, $7a_1 + 423a_2 + 9411a_3 = 46\,683$, $21a_1 + 1557a_2 + 72\,359a_3 = 513\,513$, $35a_1 + 2955a_2 + 183\,051a_3 = 1\,540\,539$. Так как она несовместна, то равенство (13) не выполняется; $I_{14}(\boldsymbol{x})$ — образующая 14-й степени.

5. $r = 8$. Форма $I_{16}(\boldsymbol{x}) = a_1 I_2^8(\boldsymbol{x}) + a_2 I_8(\boldsymbol{x}) I_2^4(\boldsymbol{x}) + a_3 I_8^2(\boldsymbol{x}) + a_4 I_{12}(\boldsymbol{x}) I_2^2(\boldsymbol{x}) + a_5 I_{14}(\boldsymbol{x}) I_2(\boldsymbol{x})$. Приравняв соответствующие коэффициенты при x_1^{16}, $x_1^{14} x_2^2$, $x_1^{12} x_2^4$, $x_1^{10} x_2^6$, получим систему четырех линейных уравнений относительно переменных a_l $(l = \overline{1, 5})$:

$$a_1 + 57a_2 + 3249a_3 + 897a_4 + 3585a_5 = 14\,337;$$

$$2a_1 + 120a_2 + 7182a_3 + 2577a_4 + 12\,567a_5 = 61\,470;$$

$$7a_1 + 495a_2 + 33\,831a_3 + 20\,445a_4 + 140\,049a_5 = 932\,295;$$

$$14a_1 + 1128a_2 + 86\,562a_3 + 63\,855a_4 + 513\,513a_5 = 4\,102\,098.$$

Возьмем мнимый вектор $\vec{\alpha} = (1,\ \varepsilon,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)$, $\varepsilon = \sqrt{-1}$ [13]; число $I_2(\vec{\alpha}) = 0$. Поскольку формула (10) дает значения $I_8(\vec{\alpha}) = 240$, $I_{16}(\vec{\alpha}) = 549\,120$, из предполагаемого представления для $I_{16}(\boldsymbol{x})$ находим $a_3 = 9\frac{8}{15}$.

Получив остальные $a_l\ (l \neq 3)$ из системы, запишем

$$I_{16}(\boldsymbol{x}) = -588\,588 I_2^8(\boldsymbol{x}) + 12\,012 I_8(\boldsymbol{x}) I_2^4(\boldsymbol{x}) + 9\frac{8}{15} I_8^2(\boldsymbol{x}) - \\ - 218\frac{2}{5} I_{12}(\boldsymbol{x}) I_2^2(\boldsymbol{x}) + 23\frac{1}{5} I_{14}(\boldsymbol{x}) I_2(\boldsymbol{x}). \tag{14}$$

6. $r = 9$. Пусть

$$I_{18}(\boldsymbol{x}) = a_1 I_2^9(\boldsymbol{x}) + a_2 I_8(\boldsymbol{x}) I_2^5(\boldsymbol{x}) + a_3 I_8^2(\boldsymbol{x}) I_2(\boldsymbol{x}) + \\ + a_4 I_{12}(\boldsymbol{x}) I_2^3(\boldsymbol{x}) + a_5 I_{14}(\boldsymbol{x}) I_2^2(\boldsymbol{x}). \tag{15}$$

Приравняем соответствующие коэффициенты при x_1^{18}, $x_1^{16}x_2^2$, $x_1^{14}x_2^4$, $x_1^{12}x_2^6$, $x_1^{10}x_2^8$, $x_1^{14}x_2^2x_3^2$. Тогда, как и в случаях $r = 6$ и 7, получим следующую несовместную систему линейных уравнений:

$$\begin{gathered} a_1 + 57a_2 + 3249a_3 + 897a_4 + 3585a_5 = 57\,345; \\ 3a_1 + 179a_2 + 10\,659a_3 + 3735a_4 + 17\,951a_5 = 417\,843; \\ 3a_1 + 205a_2 + 13\,671a_3 + 7674a_4 + 50\,872a_5 = 2\,089\,215; \\ 7a_1 + 541a_2 + 40\,131a_3 + 28\,100a_4 + 217\,854a_5 = 12\,674\,571; \\ 7a_1 + 579a_2 + 48\,703a_3 + 34\,529a_4 + 285\,285a_5 = 19\,917\,183; \\ 6a_1 + 340a_2 + 19\,362a_3 + 4953a_4 + 16\,659a_5 = 1530. \end{gathered}$$

Значит, равенство (15) невозможно; $I_{18}(\boldsymbol{x})$ — образующая 18-й степени.

7. $r = 10$. Предположив зависимость форм $I_{2r}(\boldsymbol{x})$, $r = 1, 4, 6, 7, 9, 10$, снова получим несовместную систему линейных уравнений для коэффициентов a_i; равенство для $I_{20}(\boldsymbol{x})$ и систему уравнений приводить не будем.

Таким образом, многочлены (2) являются образующими алгебры I; между (2) и соответствующими $I_{2r}(\boldsymbol{x})$, $r > 1$, при выбранном положении осей x_i существует зависимость (9). Теорема доказана.

Отметим, что здесь найдены по существу и степени шести образующих без применения S, см. (6), (8), (11), (14). Остальные две образующие должны иметь степени 24 и 30, так как сумма степеней всех образующих алгебры I равна 128, а их произведение — числу $192 \cdot 10!$ [14], [4]. Использование метода неопределенных коэффициентов при рассмотрении форм $I_{24}(\boldsymbol{x})$, $I_{30}(\boldsymbol{x})$ уже связано с большими техническими трудностями.

Итак, произвольная 7-мерная алгебраическая поверхность порядка < 24, инвариантная относительно группы симметрий E_8

и не содержащая своих плоскостей симметрии (3), определяется уравнением $\varphi = 0$ ($\deg \varphi < 24$), где φ — многочлен от образующих (2) алгебры I.

2°. Докажем невозможность равенств (12), (13), (15) другим способом, используя асимптотические направления изотропного конуса $I_2(\boldsymbol{x}) = 0$; этот способ применялся для нахождения коэффициента a_3 в п. 1°, 5.

1. $r = 6$. Подставив $\boldsymbol{x} = \vec{\alpha}$ (п. 1°, 5) в формулу (10) при $r = 6$, найдем $I_{12}(\vec{\alpha}) = -6720$. Предполагаемое же соотношение (12), поскольку $I_2(\vec{\alpha}) = 0$, дает значение $I_{12}(\vec{\alpha}) = 0$. Значит, соотношение (12) не существует.

2. $r = 7$. При этом значении r формула (10) дает $I_{14}(\vec{\alpha}) = 0$. Возьмем другой вектор: $\vec{\beta} = (1, 1, \sqrt{2}\varepsilon, 0, 0, 0, 0, 0)$. По формуле (10) получим $I_{14}(\vec{\beta}) = 5\,322\,240$, а поскольку $I_2(\vec{\beta}) = 0$, из соотношения (13) найдем $I_{14}(\vec{\beta}) = 0$; следовательно, (13) не существует ни при каких коэффициентах.

3. $r = 9$. Для этого значения r из формулы (10) находим $I_{18}(\vec{\beta}) = 1\,026\,514\,944$, что противоречит значению $I_{18}(\vec{\beta})$, получаемому из соотношения (15), и следовательно, соотношение (15) невозможно.

Рассмотрим теперь случаи $r = 10$, 12 и 15.

4. $r = 10$. Если форма $I_{20}(\boldsymbol{x})$ не является независимой, то должно выполняться соотношение $I_{20}(\boldsymbol{x}) = aI_8(\boldsymbol{x})I_{12}(\boldsymbol{x}) + I_2(\boldsymbol{x})\zeta(\boldsymbol{x})$, где $\zeta(\boldsymbol{x})$ — многочлен от образующих алгебры I степеней < 20. Подставляя сюда значение $I_{20}(\vec{\alpha}) = -33\,162\,240$, вычисленное по формуле (10), и значения $I_8(\vec{\alpha})$ и $I_{12}(\vec{\alpha})$, найденные в п. 1°, 5 и 2°, 1, получим $a = 20\frac{59}{105}$. Однако при $\boldsymbol{x} = \vec{\beta}$ по формуле (10) получим $I_{20}(\vec{\beta}) = 21\,120\,168\,190$, $I_8(\vec{\beta}) = 2160$ и $I_{12}(\vec{\beta}) = 399\,168$, подставив которые получим $a = 24\frac{281}{367}$. Из этого противоречия следует невозможность предположенного соотношения, т. е. независимость формы $I_{20}(\boldsymbol{x})$.

5. $r = 12$. Предположим, что форма I_{24} не является независимой, т. е.

$$I_{24}(\boldsymbol{x}) = aI_8^3(\boldsymbol{x}) + bI_{12}^2(\boldsymbol{x}) + I_2(\boldsymbol{x})\varkappa(\boldsymbol{x}), \tag{16}$$

где $\varkappa(\boldsymbol{x})$ — многочлен от образующих степеней < 24. Вычисляя по формуле (10) $I_{24}(\vec{\alpha}) = 2\,153\,779\,200$ и $I_{24}(\vec{\beta}) = 4\,077\,885\,689\,856$ и используя найденные выше значения I_2, I_8 и I_{12} при $\boldsymbol{x} = \vec{\alpha}$ и $\boldsymbol{x} = \vec{\beta}$, получим соответственно уравнения $15a + 49b = 2337$ и $10\,125a + 160\,083b = 4\,097\,027$. Из этой системы найдем $a = 90\frac{1211}{1215}$,

$b=19\frac{475}{567}$. Выберем новый вектор $\vec{\gamma}=(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\varepsilon, 0, 0, 0, 0, 0)$. Для него найдем $I_2(\vec{\gamma})=0$, $I_8^3(\vec{\gamma})=1626379776000$, $I_{12}^2(\vec{\gamma})=$ $=8529390342144$. Подставляя их в (16), получаем $I_{24}(\vec{\gamma})=$ $=317199054606336$ **(17)**.

Прямой подсчет значения $I_{24}(\vec{\gamma})$ по формуле (10) дает то же самое значение (17). Выберем еще один вектор $\vec{\delta}=(1, 1, \varepsilon, \varepsilon, 0, 0, 0, 0)$. Для него $I_2(\vec{\delta})=0$; $I_8^3(\vec{\delta})=56623104000$; $I_{12}^2(\vec{\delta})=$ $=184968806400$. Соотношение (16) при тех же a и b и формула (10) при $x=\vec{\delta}$ дают одно и то же значение $I_{24}=8821879603200$. Противоречия не получаем.

6. $r=15$. Предполагая зависимость форм $I_{2r}(x)$; $r=1, 4, 6, 7, 9, 10, 12, 15$ **(18)**, запишем равенство $I_{30}(x)=aI_8^2(x)I_{14}(x)+$ $+bI_{12}(x)I_{18}(x)+I_2(x)\lambda(x)$, где $\lambda(x)$ — многочлен от образующих алгебры I степеней <30. Формы $I_{2r}(x)$, $r=1, 7, 9, 15$, при $x=\vec{\alpha}, \vec{\delta}$ равны нулю; другими словами, при $x=\vec{\alpha}, \vec{\delta}$ из равенства для I_{30} даже не находим линейных уравнений относительно a, b.

Таким образом, предположение о том, что формы (18) являются образующими алгебры I, высказанное в работе [15], подтверждено для $r\neq 12$ и 15; остался открытым вопрос об $I_{24}(x)$ и $I_{30}(x)$*. Указанную задачу можно решить, представив (18) при $r>1$, как многочлены от переменных (5).

3°. Пусть O есть центр симметрии многогранника 4_{21}, V_q ($q=$ $=\overline{1, 240}$) — его вершины. Многочлены

$$\sum_{q=1}^{240}(\overrightarrow{OV}_q\cdot x)^{2r},\quad r\geqslant 1, \tag{19}$$

инвариантны относительно группы симметрий E_8. Так как $\overrightarrow{OV}_q$ — нормальные векторы плоскостей (1), то из теоремы вытекает

Следствие 1. *Многочлены* (19) *при* $r=1, 4, 6, 7, 9, 10$ *являются образующими алгебры* I.

Поскольку многогранник 4_{21} центрально-симметричен, вершины V_q в (19) можно заменить вершинами V_k ($k=\overline{1, 120}$), каждая из которых принадлежит только одной из диагоналей 4_{21}, соединяющих его противоположные вершины.

Заметим, что метод нахождения образующих вида (19) алгебр многочленов, инвариантных относительно конечных групп симметрий вещественного пространства E^n, разрабатывался в целом ряде статей. В качестве характерных отметим такие работы: Дж. Волш [16], Э. Бекенбах и М. Рид [17], Л. Флатто [13], [18], [19], Г. Хаюслейн [20], В. Ф. Игнатенко и А. С. Лейбин [21] — для групп симметрий правильных многогранников;

* В этих двух случаях предположение полностью подтвердилось.

Дж. Фрейм [22], В. Ф. Игнатенко [23] — для других групп симметрий.

4°. Пусть $\boldsymbol{x}_k$ $(k=\overline{1,\ 120})$ есть векторы, симметричные $\boldsymbol{x}$ относительно плоскостей (1). Многочлены $P_{2r}(\boldsymbol{x})=\sum_{k=1}^{120}(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}_k)^r$ принадлежат алгебре I [23]. Имеет место утверждение, аналогичное следствию 1:

Следствие 2. *Многочлены $P_{2r}(\boldsymbol{x})$ при $r=1,\ 4,\ 6,\ 7,\ 9,\ 10$ являются образующими алгебры I.*

Для доказательства следствия 2 рассмотрим в пространстве E^n одну лемму, представляющую и самостоятельный интерес.

Обозначим через G неприводимую конечную группу симметрий пространства E^n; m — число всех $(n-1)$-мерных плоскостей симметрии, отражения σ_k $(k=\overline{1,\ m})$, в которых принадлежат G. Будем считать, что эти плоскости проходят через начало координат и заданы нормированными уравнениями (1), если $k=\overline{1,\ m}$; P и Θ — кольца многочленов от форм

$$P_{2r}(\boldsymbol{x})=\sum_{k=1}^{m}(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}_k)^r, \tag{20}$$

где $\boldsymbol{x}_k$ симметричны $\boldsymbol{x}$ относительно (1), и

$$\theta_{2r}(\boldsymbol{x})=\sum_{k=1}^{m}\eta_k^{2r}(\boldsymbol{x}) \tag{21}$$

соответственно. Форма $\theta_2(\boldsymbol{x})=\rho I_2(\boldsymbol{x})$; коэффициент $\rho\neq0$ зависит от группы G. Справедлива

Лемма. *Кольцо $P\subset\Theta$; если $m\neq2\rho$, то $P=\Theta$.*

В самом деле, $2\eta_k^2(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^2-(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}_k)$ для любого k. Поэтому (20) и (21) принимают вид

$$P_{2r}(\boldsymbol{x})=\sum_{k=1}^{m}[\boldsymbol{x}^2-2\eta_k^2(\boldsymbol{x})]^r=mI_2^r(\boldsymbol{x})+$$
$$+\sum_{s=1}^{r}(-2)^sC_r^sI_2^{r-s}(\boldsymbol{x})\,\theta_{2s}(\boldsymbol{x});$$

в частности,

$$P_2(\boldsymbol{x})=mI_2(\boldsymbol{x})-2\theta_2(\boldsymbol{x})=(m-2\rho)\,I_2(\boldsymbol{x});$$

$$2^r\theta_{2r}(\boldsymbol{x})=\sum_{k=1}^{m}[\boldsymbol{x}^2-(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}_k)]^r=mI_2^r(\boldsymbol{x})+\sum_{s=1}^{r}(-1)^sC_r^sI_2^{r-s}(\boldsymbol{x})\,P_{2s}(\boldsymbol{x}).$$

Из этих соотношений следует, что $P_{2r}(\boldsymbol{x})\in\Theta$ и, если $m\neq2\rho$, $\theta_{2r}(\boldsymbol{x})\in P$.

Лемма устанавливает в известной мере связь между способом нахождения при помощи $\theta_{2r}(\boldsymbol{x})$ образующих J_i $(i=\overline{1,\ n})$ алгебры многочленов, инвариантных относительно G, и методом получения J_l ($G \neq D_{2l}$, $l \geqslant 2$) с использованием

$$P_r(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{\sigma \in G} (\boldsymbol{x} \cdot \sigma \boldsymbol{y})^r; \quad \boldsymbol{y} = (y_i), \tag{22}$$

где суммирование проводится по всем элементам σ группы G [6, теорема 3.1]; если в (22) положить $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ и суммирование провести только по σ_k, то получим многочлены $P_{2r}(\boldsymbol{x})$.

Так как группа $G = E_8$ определяется плоскостями (3), то число $\rho = 15$, см. (8). Поэтому следствие 2 непосредственно вытекает из леммы и теоремы п. 1°.

Список литературы: 1. *Gosset T.* On the regular and semi-regular figures in space of n-dimensions.— Messenger Math., 1900, **24**, p. 43—48. 2. *Schoute P.* On the relation between the vertices of a definite six-dimensional polytope and the lines of a cubic surface.— Proc. Sec. Sci., 1910, **13**, p. 375—383. 3. *Coxeter H. S. M.* The polytope 2_{21}, whose twenty-seven vertices correspond to the lines on the general cubic surface.— Amer. J. Math., 1940, **76**, № 3, p. 457—486. 4. *Goxeter H. S. M.* The product of the generators of a finite group generated by reflections.— Duke Math. J., 1951 **18**, p. 765—782. 5. *Доан Куинь.* Полиномы Пуанкаре компактных однородных римановых пространств с неприводимой стационарной группой.— Тр. семинара по векторному и тензорному анализу, 1968, вып. 14, с. 33—93. 6. *Flatto L., Weiner M. M.* Invariants of finite reflections groups and mean value problems. I.— Amer. J. Math., 1969, **51**, № 3, p. 591—598. 7. *Flatto L., Weiner M. M.* Invariants of finite reflections groups and mean value problems. II.— Amer. J. Math., 1970, **92**, № 3, p. 552—561. 8. *Манин Ю. И.* Кубические формы: алгебра, геометрия, арифметика.— М.: Наука, 1972.—304 с. 9. *Naruki I.* E_8 und die binäre Ikosaedergruppe.— Invent. math., 1977, **42**, S. 273—283. 10. *Saito K., Yano T., Sekiguchi J.* On a certain generator system of the ring of invariants of a finite reflection group.— Commun. Algebra, 1980, **8**, № 4, p. 373—408. 11. *Бурбаки Н.* Группы и алгебры Ли.— М.: Мир, 1972.—334 с. 12. *Goursat E.* Étude des surfaces qui admettent tous les plans de symétrie d'un polyèdre régulier.— Ann. sc. de l'Ecole Norm., 1887, **4**, № 3, p. 159—200. 13. *Flatto L.* Regular polytopes and harmonic polynomials.— Canad. J. Math., 1970, **22**, p. 7—21. 14. *Lecornu L.* Sur les surfaces possédant les mêmes plans de symétrie que l'un des polyèdres réguliers.— Acta Math., 1887, **10**, p. 201—280. 16. *Игнатенко В., Ф.* Геометрия алгебраических поверхностей с симметриями.— Проблемы геометрии. (Итоги науки и техники. ВИНИТИ АН СССР), 1980, **11**, с. 203—240. 16. *Walsh J. L.* A mean value theorem for polynomials and harmoni polynomials.— Bull. Amer. Math. Soc, 1936, XLII, № 12, p. 923—930. 17. *Beckenbach E. F., Reade M.* Regular solids and harmonic polynomials.— Duke Math. J., 1945, **12**, p. 629—644. 18. *Flatto L.* Basic sets of invaiants for finite reflection groups.— Bull. Amer. Math. Soc.,1968, **74**, № 4, p. 730—734. 19. *Flatto L.* Invariants of finite reflection groups.— Enseign. math., 1978, № 3—4, p. 237—292. 20. *Haeuslein G. K.* On the algebraic independence of symmetric functions.— Proc Amer. Math. Soc., 1970, **25**, № 1, p. 179—182. 21. *Игнатенко В. Ф., Лейбин А. С.* Об алгебраических поверхностях в E^4 с симметрией правильных четырехмерных симплекса и 600-гранника.— Укр. геометр. сб,, 1971, вып. 11, с. 26—31. 22. *Frame J. S.* The classes and representations of the groups of 27 lines and 28 bitangents.— Annali di Matematica, 1951, **32**, p. 83—119. 23. *Игнатенко В. Ф.* К проблеме нахождения полных базисов алгебр многочленов, инвариантных относительно конечных групп симметрий пространства E^n. — Тез. докл. Всесоюзн. симпозиума по теории симметрии и ее обобщение, М., 1980, с. 50—51.

Поступила в редколлегию 20.11.81.

УДК 514

Г. А. Кленовкин

ГЕОМЕТРИИ ВЕЙЛЯ, ПОРОЖДЕННЫЕ ЧЕТЫРЕХМЕРНОЙ ТРИ-ТКАНЬЮ

В работе Г. Боля [1] показано, что четырехмерная три-ткань, образованная тремя двупараметрическими семействами двумерных поверхностей, определяет на многообразии M^4 аффинную связность, являющуюся связностью Вейля. В настоящей статье показано, что всякая четырехмерная три-ткань $W(3, 2)$ определяет целый пучок конформных между собой связностей Вейля, строится тензор Вейля C^{p}_{qst}, инвариантно определяемый этим пучком, и с помощью этого тензора находятся необходимые и достаточные условия, чтобы ткань была трансверсально-геодезична [2] и изоклинна [3].

В статье используются обозначения, принятые в работах М. А. Акивиса и его учеников. Все рассмотрения носят локальный характер.

1. Рассмотрим на дифференцируемом многообразии M^4 три-ткань $W(3, 2)$, образованную двумерными поверхностями V_α; $\alpha = 1, 2, 3$. Эта три-ткань задается тремя вполне интегрируемыми системами форм Пфаффа $\underset{\alpha}{\omega}^i$, $i, j, k, l = 1, 2$, связанными соотношениями $\sum\limits_{\alpha} \underset{\alpha}{\omega}^i = 0$ и допускающими только согласованные преобразования вида

$$'\underset{\alpha}{\omega}^i = A^i_j \underset{\alpha}{\omega}^j. \qquad (1)$$

Введем обозначения: $\underset{1}{\omega}^i = \omega^i$, $\underset{2}{\omega}^i = \omega^{i+2}$. Тогда поверхности V_1, V_2, V_3 ткани будут определяться соответственно системами уравнений

$$\omega^1 = \omega^2 = 0; \quad \omega^3 = \omega^4 = 0; \quad \omega^1 + \omega^3 = \omega^2 + \omega^4 = 0. \qquad (2)$$

Так как тензор кручения ткани a^i_{jk} кососимметричен по нижним индексам [2], то на M^4 он имеет только две существенные компоненты и может быть записан в виде

$$a^i_{jk} = a_{[j}\delta^i_{k]}. \qquad (3)$$

Тогда уравнения структуры ткани [2] в новых обозначениях запишутся:

$$d\omega^1 = \omega^1 \wedge \theta^1_1 + \omega^2 \wedge (\theta^1_2 + a_2\omega^1); \quad d\omega^2 = \omega^1 \wedge (\theta^2_1 + a_1\omega^2) + \omega^2 \wedge \theta^2_2;$$

$$d\omega^3 = \omega^3 \wedge \theta^1_1 + \omega^4 \wedge (\theta^1_2 - a_2\omega^3);$$

$$d\omega^4 = \omega^3 \wedge (\theta^2_1 - a_1\omega^4) + \omega^4 \wedge \theta^2_2; \qquad (4)$$

$$d\theta^i_j - \theta^k_j \wedge \theta^i_k = b^i_{jkl}\omega^k \wedge \omega^{l+2}. \qquad (5)$$

Формы $\omega^p = \{\omega^i, \omega^{i+2}\}$ и $\theta^p_q = \begin{Bmatrix} \theta^i_j & 0 \\ 0 & \theta^i_j \end{Bmatrix}$, где $p, q, r, s, t, m = 1,$ $2, 3, 4$, определяют на многообразии M^4 аффинную связность $\tilde{\Gamma}$ [2]. При этом [3] $\tilde{\nabla} a_i = p_{ij}\omega^j + q_{ij}\omega^{j+2}$ **(6)**, где $\tilde{\nabla}$ — оператор ковариантного дифференцирования в связности $\tilde{\Gamma}$.

Дифференцируя ковариантно тензор (3) и учитывая при этом формулы (6), получим $\tilde{\nabla} a^i_{jk} = \delta^i_{[k} p_{j]l}\omega^l + \delta^i_{[k} q_{j]l}\omega^{l+2}$. Сравнивая эти разложения с формулой (24) работы [2], найдем

$$b^i_{[j|l|k]} = \delta^i_{[k} p_{j]l}; \quad b^i_{[jk]l} = \delta^i_{[k} q_{j]l}. \tag{7}$$

Пусть $b^i_{(jkl)} = S^i_{jkl}$. Используя тождество [3]

$$b^i_{jkl} = b^i_{(jkl)} + \frac{1}{3} b^i_{[jk]l} + \frac{1}{3} b^i_{[jl]k} + b^i_{[lk]j} + \frac{4}{3} b^i_{[j|k|l]} + \frac{2}{3} b^i_{[k|l|j]},$$

выразим тензор кривизны ткани $W(3, 2)$ через его симметрическую часть и тензоры p_{ij} и q_{ij}. В силу (7)

$$b^i_{jkl} = S^i_{jkl} + \frac{1}{3} \delta^i_{[k} q_{j]l} + \frac{1}{3} \delta^i_{[l} q_{j]k} + \delta^i_{[k} q_{l]j} + \frac{4}{3} \delta^i_{[l} p_{j]k} + \frac{2}{3} \delta^i_{[j} p_{k]l}. \tag{8}$$

2. Пусть x — точка многообразия M^4 и V_a — поверхности ткани, проходящие через эту точку. Если рассмотреть проективизацию касательного пространства $T_x(M^4)$ в точке x [1], то образами касательных плоскостей $T_x(V_a)$ поверхностей ткани будут три скрещивающиеся прямые трехмерного проективного пространства. Эти прямые определяют невырожденную линейчатую поверхность второго порядка Q, уравнение которой в силу (2) запишется в виде $x^1x^4 - x^2x^3 = 0$.

Семейство прямолинейных образующих $x^3 = \lambda x^1;\ x^4 = \lambda x^2$ **(9)** этой квадрики, которому принадлежат три исходные прямые, будет определять семейство изоклинных бивекторов три-ткани $W(3, 2)$, а семейство образующих $x^2 = \mu x^1;\ x^4 = \mu x^3$ **(10)** — семейство ее трансверсальных бивекторов.

Квадрики Q на многообразии M^4 задают поле конусов второго порядка $g_{pq}\omega^p\omega^q = 0$, где

$$g_{pq} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Эти конусы будут оставаться инвариантными при преобразованиях (1). Поэтому дифференциальная квадратичная форма $\varphi = g_{pq}\omega^p\omega^q$ является относительным инвариантом и определяет на M^4 угловую метрику.

Выполним преобразование связности Γ так, чтобы новая связность Γ была связностью Вейля с основным тензором g_{pq}, т. е. связностью без кручения, в которой поляритет направлений, заданный с помощью поля симметрического дважды ковариантного тензора g_{pq}, сохранялся при параллельном перенесении направлений [4]. Для этого необходимо и достаточно, чтобы $\nabla g_{pq} = 2\omega g_{pq}$ **(12)**, где ∇ — оператор ковариантного дифференцирования в связности Γ и ω — ее дополнительный ковектор.

Пусть связность Γ определяется формами ω_q^p, тогда $\nabla g_{pq} = dg_{pq} - g_{ps}\omega_q^s - g_{sq}\omega_p^s$ **(13)**. Так как координаты тензора g_{pq} заданы матрицей (11), то из (12) и (13) следует, что

$$\omega_1^4 = \omega_2^3 = \omega_3^2 = \omega_4^1 = 0;\quad \omega_2^4 = \omega_1^3;\quad \omega_3^4 = \omega_1^2;\quad \omega_4^3 = \omega_2^1;\quad \omega_4^2 = \omega_3^1;$$

$$\omega_1^1 + \omega_4^4 = \omega_2^2 + \omega_3^3 = -2\omega. \tag{14}$$

Ввиду (14) внешние дифференциалы базисных форм ω^p запишем следующим образом:

$$\begin{aligned} d\omega^1 &= \omega^1 \wedge \omega_1^1 + \omega^2 \wedge \omega_2^1 + \omega^3 \wedge \omega_3^1;\\ d\omega^2 &= \omega^1 \wedge \omega_1^2 + \omega^2 \wedge \omega_2^2 + \omega^4 \wedge \omega_3^1;\\ d\omega^3 &= \omega^1 \wedge \omega_1^3 + \omega^3 \wedge \omega_3^3 + \omega^4 \wedge \omega_2^1;\\ d\omega^4 &= \omega^2 \wedge \omega_1^3 + \omega^3 \wedge \omega_1^2 + \omega^4 \wedge \omega_4^4. \end{aligned} \tag{15}$$

Сравнивая (4) и (15), приходим к уравнениям

$$\begin{aligned} &\left(\omega_1^1 - \theta_1^1 - a_1\omega^1\right) \wedge \omega^1 + \left(\omega_2^1 - \theta_2^1 - a_2\omega^1\right) \wedge \omega^2 + \omega_3^1 \wedge \omega^3 = 0;\\ &\left(\omega_1^2 - \theta_1^2 - a_1\omega^2\right) \wedge \omega^1 + \left(\omega_2^2 - \theta_2^2 - a_2\omega^2\right) \wedge \omega^2 + \omega_3^1 \wedge \omega^4 = 0;\\ &\omega_1^3 \wedge \omega^1 + \left(\omega_3^3 - \theta_1^1 + a_1\omega^3\right) \wedge \omega^3 + \left(\omega_2^1 - \theta_2^1 + a_2\omega^3\right) \wedge \omega^4 = 0;\\ &\omega_1^3 \wedge \omega^2 + \left(\omega_1^2 - \theta_1^2 + a_1\omega^4\right) \wedge \omega^3 + \left(\omega_4^4 - \theta_2^2 + a_2\omega^4\right) \wedge \omega^4 = 0, \end{aligned} \tag{16}$$

которые позволяют установить связь между формами θ_j^i и ω_q^p.

Разрешая уравнения (16) по лемме Картана, а затем сравнивая разложения одинаковых форм по базисным формам и учитывая (14), получим, что формы ω_q^p, определяющие связность Вейля Γ, порожденную три-тканью $W(3, 2)$, могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} \omega_1^1 &= \theta_1^1 + (2p_1 - a_1)\,\omega^1 + (p_2 - a_2)\,\omega^2 + p_3\omega^3;\\ \omega_2^2 &= \theta_2^2 + (p_1 - a_1)\,\omega^1 + (2p_2 - a_2)\,\omega^2 + p_4\omega^4;\\ \omega_3^3 &= \theta_1^1 + p_1\omega^1 + (2p_3 - a_1)\,\omega^3 + (p_4 + a_2)\,\omega^4;\\ \omega_4^4 &= \theta_2^2 + p_2\omega^2 + (p_3 + a_1)\,\omega^3 + (2p_4 + a_2)\,\omega^4; \end{aligned}$$

$$\omega_2^1 = \omega_4^3 = \theta_2^1 + p_2\omega^1 + p_4\omega^3;\quad \omega_1^2 = \omega_3^4 = \theta_1^2 + p_1\omega^2 + p_3\omega^4;$$

$$\omega_3^1 = \omega_4^2 = p_3\omega^1 + p_4\omega^2;\quad \omega_1^3 = \omega_2^4 = p_1\omega^3 + p_2\omega^4;$$

$$\omega_1^4 = \omega_2^3 = \omega_3^2 = \omega_1^4 = 0, \tag{17}$$

где p_s — координаты ковектора, заданного на M^4.

Таким образом, получается целый пучок связностей Вейля, порожденных три-тканью $W(3, 2)$. Так как все эти связности имеют один и тот же основной тензор g_{pq}, то они находятся в конформном соответствии и отличаются друг от друга лишь дополнительными ковекторами $2\omega = -\theta_i^i + a_i(\omega^i - \omega^{i+2}) - 2p_s\omega^s$. Выделим из этого пучка связность Γ^0, определяемую нулевым значением ковектора p_s, $p_s = 0$. Для этой связности получим

$$\begin{gathered}
\omega_1^1 = \theta_1^1 - a_i\omega^i; \quad \omega_2^2 = \theta_2^2 - a_i\omega^i; \quad \omega_3^3 = \theta_1^1 + a_i\omega^{i+2}; \quad \omega_4^4 = \theta_2^2 + a_i\omega^{i+2}; \\
\omega_2^1 = \omega_4^3 = \theta_2^1; \quad \omega_1^2 = \omega_3^4 = \theta_1^2; \\
\omega_1^3 = \omega_2^4 = \omega_3^1 = \omega_4^2 = \omega_1^4 = \omega_2^3 = \omega_4^1 = \omega_3^2 = 0.
\end{gathered} \tag{18}$$

Дополнительный ковектор связности Γ^0 запишется в виде $2\omega^0 = -\theta_i^i + a_i(\omega^i - \omega^{i+2})$.

Ковектор $p = \omega - \omega^0 = -p_s\omega^s$ определяет конформное преобразование связности Γ^0 в связность Γ. Поскольку в дальнейшем построенная связность Вейля будет изучаться с точностью до конформного преобразования, все рассмотрения можно вести в связности Γ^0.

3. Уравнения структуры многообразия M^4, на котором задана аффинная связность, записываются

$$d\omega^p = \omega^q \wedge \omega_q^p; \quad d\omega_q^p - \omega_q^s \wedge \omega_s^p = \frac{1}{2} R^p_{qst}\omega^s \wedge \omega^t, \tag{19}$$

где R^p_{qst} — тензор кривизны этой связности.

Выразим тензор кривизны R^p_{qst} связности Γ^0 через тензор кривизны и кручения ткани $W(3, 2)$. Из уравнений структуры (19), используя соотношения (18) и уравнения структуры (5), получим

$$\begin{gathered}
R^i_{jpq}\omega^p \wedge \omega^q = 2b^i_{jkl}\omega^k \wedge \omega^{l+2} - 2\delta^i_j \tilde{\nabla} a_k \wedge \omega^k; \\
R^{i+2}_{j+2,pq}\omega^p \wedge \omega^q = 2b^i_{jkl}\omega^k \wedge \omega^{l+2} + 2\delta^i_j \tilde{\nabla} a_k \wedge \omega^{k+2}; \\
R^i_{j+2,pq} = 0; \quad R^{i+2}_{jpq} = 0.
\end{gathered} \tag{20}$$

Наконец, используя (8) и учитывая разложения (6), найдем

$$\begin{gathered}
R^1_{112} = p_{12} - p_{21}, \ R^1_{113} = S^1_{111} + q_{11}, \ R^1_{114} = S^1_{112} - \frac{2}{3}p_{21} + q_{12} + \frac{1}{3}q_{21}; \\
R^1_{123} = S^1_{112} + \frac{1}{3}p_{21} + \frac{1}{3}q_{21}, \quad R^1_{124} = S^1_{122} - \frac{1}{3}p_{22} + \frac{2}{3}q_{22}; \\
R^2_{212} = p_{12} - p_{21}, \ R^2_{224} = S^2_{222} + q_{22}, \ R^2_{223} = S^2_{122} - \frac{2}{3}p_{12} + \frac{1}{3}q_{12} + q_{21}; \\
R^2_{214} = S^2_{122} + \frac{1}{3}p_{12} + \frac{1}{3}q_{12}, \quad R^2_{213} = S^2_{112} - \frac{1}{3}p_{11} + \frac{2}{3}q_{11};
\end{gathered}$$

$$R^3_{313} = S^1_{111} + p_{11}, \quad R^3_{314} = S^1_{112} + \frac{1}{3} p_{21} + \frac{1}{3} q_{21},$$

$$R^3_{323} = S^1_{112} + p_{12} + \frac{1}{3} p_{21} - \frac{2}{3} q_{21};$$

$$R^3_{324} = S^1_{122} + \frac{2}{3} p_{22} - \frac{1}{3} q_{22}, \quad R^3_{334} = q_{21} - q_{12};$$

$$R^4_{424} = S^2_{222} + p_{22}, \quad R^4_{423} = S^2_{122} + \frac{1}{3} p_{12} + \frac{1}{3} q_{12},$$

$$R^4_{414} = S^2_{122} + \frac{1}{3} p_{12} + p_{21} - \frac{2}{3} q_{12};$$

$$R^4_{413} = S^2_{112} + \frac{2}{3} p_{11} - \frac{1}{3} q_{11}; \quad R^4_{434} = q_{21} - q_{12};$$

$$R^2_{113} = S^2_{111}, \; R^2_{114} = S^2_{112} + \frac{2}{3} p_{11} - \frac{1}{3} q_{11}, \; R^2_{123} = S^2_{112} - \frac{1}{3} p_{11} + \frac{2}{3} q_{11};$$

$$R^2_{124} = S^2_{122} + \frac{1}{3} p_{12} + \frac{1}{3} q_{12}; \; R^1_{224} = S^1_{222}, \; R^1_{223} = S^1_{122} + \frac{2}{3} p_{22} - \frac{1}{3} q_{22};$$

$$R^1_{214} = S^1_{122} - \frac{1}{3} p_{22} + \frac{2}{3} q_{22}; \quad R^1_{213} = S^1_{122} + \frac{1}{3} p_{21} + \frac{1}{3} q_{21}. \tag{21}$$

Остальные компоненты тензора кривизны связности Γ^0 равны нулю.

В дальнейшем будут нужны координаты тензора Риччи $R_{pq} = R^s_{pqs}$ связности Γ^0 и ее скалярная кривизна $R = g^{pq} R_{pq}$. Имеем

$$R_{11} = R_{22} = R_{33} = R_{44} = 0, \quad R_{12} = -R_{21} = p_{21} - p_{12},$$

$$R_{34} = R_{43} = q_{12} - q_{21};$$

$$R_{13} = -S^1_{111} - S^2_{112} + \frac{1}{3} p_{11} - \frac{5}{3} q_{11}, \; R_{24} = -S^1_{122} - S^2_{222} + \frac{1}{3} p_{22} - \frac{5}{3} q_{22};$$

$$R_{14} = -S^1_{112} - S^2_{122} - \frac{1}{3} p_{12} + \frac{2}{3} p_{21} - \frac{4}{3} q_{12} - \frac{1}{3} q_{21};$$

$$R_{23} = -S^1_{112} - S^2_{122} + \frac{2}{3} p_{12} - \frac{1}{3} p_{21} - \frac{1}{3} q_{12} - \frac{4}{3} q_{21};$$

$$R_{31} = S^1_{111} + S^2_{112} + \frac{5}{3} p_{11} - \frac{1}{3} q_{11}, \; R_{42} = S^1_{122} + S^2_{222} + \frac{5}{3} p_{22} - \frac{1}{3} q_{22};$$

$$R_{32} = S^1_{112} + S^2_{122} + \frac{4}{3} p_{12} + \frac{1}{3} p_{21} + \frac{1}{3} q_{12} - \frac{2}{3} q_{21};$$

$$R_{41} = S^1_{112} + S^2_{122} + \frac{1}{3} p_{12} + \frac{4}{3} p_{21} - \frac{2}{3} q_{12} + \frac{1}{3} q_{21}; \tag{22}$$

$$R = -2 (p_{12} - p_{21} + q_{12} - q_{21}). \tag{23}$$

4. Для связности Вейля, как и для римановой связности, можно построить тензор конформной кривизны (ср. [5])

$$C^p_{qst} = R^p_{qst} + \frac{1}{n(n-2)} \left[(n-2)(R_{st} - R_{ts}) \delta^p_q - (R_{sq} + (n-1) R_{qs}) \delta^p_t + \right.$$
$$+ (R_{tq} + (n-1) R_{qt}) \delta^p_s - \left(R_t^{\cdot p} + (n-1) R^p_{\cdot t} \right) g_{qs} +$$

$$+\left(R_{s\cdot}^{\ p}+(n-1)R_{\cdot s}^{p}\right)g_{qt}\big]+\frac{R}{(n-2)(n-1)}\left(g_{sq}\delta_t^p-g_{tq}\delta_s^p\right), \quad (24)$$

где $R_{q\cdot}^{\ p}=g^{pm}R_{qm}$; $R_{\cdot q}^{\ p}=g^{pm}R_{mq}$. Этот тензор, называемый также тензором Вейля, остается инвариантным при конформном преобразовании связности Вейля и обладает следующими свойствами: $C^p_{qst}+C^p_{stq}+C^p_{tqs}=0$, $C^s_{spq}=0$, $C^s_{pqs}=0$; $C_{pqst}=C_{stpq}=-C_{qpst}=-C_{pqts}$, где $C_{pqst}=g_{pr}C^r_{qst}$ — ковариантные компоненты тензора Вейля. Равенство тензора Вейля нулю характеризует конформно-плоские пространства Вейля [4].

Поскольку все связности пучка (17) находятся в конформном соответствии, то тензор (24) будет инвариантно связан с этим пучком, а значит, и с самой три-тканью $W(3, 2)$.

Найдем координаты тензора Вейля пучка связностей (17), порожденного три-тканью $W(3, 2)$, или короче — тензора Вейля три-ткани $W(3, 2)$. Из формулы (24) в силу (21) — (23) получим

$$C^1_{112}=C^2_{212}=-C^3_{312}=-C^4_{412}=C^3_{123}=C^4_{223}=-C^3_{114}=$$

$$=-C^4_{214}=\frac{1}{4}(p_{12}-p_{21});\quad C^1_{134}=C^2_{234}=-C^3_{334}=-C^4_{434}=C^1_{314}=$$

$$=C^2_{414}=-C^1_{323}=-C^2_{423}=\frac{1}{4}(q_{12}-q_{21});\quad C^1_{113}=-C^2_{213}=C^3_{313}=$$

$$=-C^4_{413}=-C^2_{114}=-C^4_{314}=-C^2_{123}=-C^4_{323}=\frac{1}{4}(S^1_{111}-3S^2_{112});$$

$$C^1_{124}=-C^2_{224}=C^3_{324}=-C^4_{424}=C^1_{214}=C^3_{414}=C^1_{223}=C^3_{423}=$$

$$=-\frac{1}{4}(S^2_{222}-3S^1_{122});\ C^1_{213}=C^3_{413}=-C^2_{124}=-C^4_{324}=\frac{1}{2}(S^1_{112}-S^2_{122});$$

$$C^1_{114}=-C^2_{223}=C^3_{323}=-C^4_{414}=\frac{1}{2}(S^1_{112}-S^2_{122})+$$

$$+\frac{1}{6}(p_{12}-p_{21}+q_{12}-q_{21});\quad C^1_{123}=-C^2_{214}=C^3_{314}=-C^4_{423}=$$

$$=\frac{1}{2}(S^1_{112}-S^2_{122})-\frac{1}{6}(p_{12}-p_{21}+q_{12}-q_{21});$$

$$C^2_{113}=C^4_{313}=S^2_{111},\quad C^1_{224}=C^3_{424}=S^1_{222};$$

$$C^1_{312}=C^2_{412}=-C^3_{134}=-C^4_{234}=\frac{1}{6}(p_{12}-p_{21}+q_{12}-q_{21}). \quad (25)$$

Все остальные компоненты этого тензора равны нулю.

5. Для того чтобы три-ткань была трансверсально-геодезической, необходимо и достаточно, чтобы симметрическая часть ее тензора кривизны удовлетворяла условию $S^i_{jkl}=\delta^i_{(j}S_{kl)}$; $S_{kl}=\frac{3}{r+2}S^i_{ikl}$ [2]. В случае четырехмерной три-ткани $W(3, 2)$ это условие принимает вид $S^1_{111}=S_{11}$; $S^1_{112}=\frac{2}{3}S_{12}$; $S^1_{122}=\frac{1}{3}S_{22}$; $S^2_{112}=\frac{1}{3}S_{11}$; $S^2_{122}=\frac{2}{3}S_{12}$; $S^2_{222}=S_{22}$, $S^1_{222}=S^2_{111}=0$, где $S_{11}=\frac{3}{4}(S^1_{111}+S^2_{112})$

$S_{12} = S_{21} = \frac{3}{4}(S^1_{112} + S^2_{122})$; $S_{22} = \frac{3}{4}(S^1_{122} + S^2_{222})$. Поэтому условия трансверсально-геодезичности ткани можно переписать:

$$S^1_{111} = 3S^2_{112};\quad S^1_{112} = S^2_{122};\quad S^2_{222} = 3S^1_{122};\quad S^1_{222} = S^2_{111} = 0. \quad (26)$$

Так как для четырехмерной три-ткани тензор кручения всегда имеет вид (3), то условием ее изоклинности [3] будет условие

$$p_{ij} = p_{ji};\quad q_{ij} = q_{ji}. \quad (27)$$

Сравнивая (26), (27) с выражениями (25) для координат тензора Вейля, убеждаемся, что справедливо

Предложение 1. *Связность Вейля, порожденная четырехмерной три-тканью $W(3, 2)$, тогда и только тогда будет конформно-плоской, когда рассматриваемая три-ткань является изоклинной и трансверсально-геодезической.*

Введем в рассмотрение тензор $C^p_q = C^p_{qst}V^{st}$, где $V^{st} = \xi^s\eta^t - \xi^t\eta^s$ — некоторый бивектор $\xi \wedge \eta$. Бивекторы, определяемые плоскими образующими квадрики Q, называются изотропными. Это — изоклинные и трансверсальные бивекторы ткани $W(3, 2)$.

Предложение 2. *Три-ткань $W(3, 2)$ является изоклинной тогда и только тогда, когда тензор C^p_q равен нулю в направлении любого изоклинного бивектора.*

Доказательство. Из (8) следует, что изоклинный бивектор можно задать, например, векторами $\xi = (1, 0, \lambda, 0)$; $\eta = (0, 1, 0, \lambda)$. Тогда $V^{12} = 1$; $V^{13} = 0$; $V^{14} = -V^{23} = \lambda$; $V^{24} = 0$; $V^{34} = \lambda^2$. Отсюда $C^1_2 = C^2_1 = C^1_4 = C^4_1 = C^2_3 = C^3_2 = C^3_4 = C^4_3 = 0$; $C^1_3 = C^2_4 = \frac{1}{3}(p_{12} - p_{21} + q_{12} - q_{21}) + (q_{12} - q_{21})\lambda$; $C^3_1 = C^4_2 = -(p_{12} - p_{21})\lambda - \frac{1}{3}(p_{12} - p_{21} + q_{12} - q_{21})\lambda^2$; $C^1_1 = C^2_2 = -C^3_3 = -C^4_4 = \frac{1}{2}(p_{12} - p_{21}) + \frac{2}{3}(p_{12} - p_{21} + q_{12} - q_{21})\lambda + \frac{1}{2}(q_{12} - q_{21})\lambda^2$.

Если три-ткань $W(3, 2)$ является изоклинной, то в силу (27) все $C^p_q = 0$. И, обратно, если все $C^p_q = 0$ для любого λ, то выполняются соотношения (27), и ткань будет изоклинной.

Предложение 3. *Три-ткань $W(3, 2)$ является трансверсально-геодезической тогда и только тогда, когда $C^p_q = 0$ в направлении любого трансверсального бивектора.*

Доказательство. В силу (9) трансверсальный бивектор можно задать векторами $\xi = (1, \mu, 0, 0)$; $\eta = (0, 0, 1, \mu)$. Тогда $V^{12} = V^{34} = 0$; $V^{13} = 1$; $V^{14} = V^{23} = \mu$; $V^{24} = \mu^2$. Отсюда находим координаты тензора C^p_q: $C^1_3 = C^3_1 = C^1_4 = C^4_1 = C^2_3 = C^3_2 = C^2_4 = C^4_2 = 0$; $C^1_2 = C^3_4 = -(S^2_{222} - 3S^1_{122})\mu + S^1_{222}\mu^2$; $C^2_1 = C^4_3 = S^2_{111} - (S^1_{111} - 3S^2_{112})\mu$; $C^1_1 = -C^2_2 = C^3_3 = -C^4_4 = \frac{1}{2}(S^1_{111} - 3S^2_{112}) + 2(S^1_{112} - S^2_{122})\mu - \frac{1}{2}(S^2_{222} - 3S^1_{122})\mu^2$, и убеждаемся в справедливости сформулированного предложения.

Предложение 4. *Связность Вейля, порожденная четырехмерной три-тканью $W(3, 2)$, является конформно-плоской тогда и только тогда, когда тензор C_q^p равен нулю в направлении любого изотропного бивектора.*

Справедливость этого утверждения непосредственно следует из предложений 3 и 4.

Список литературы: 1. *G. Bol.* Über Drei-Gewebe im vierdimensionalen Raum. (Topologische Fragen der Differentialgeometrie 59), Hamb. Abhandl., 1935, S. 431—463. 2. *Акивис М. А.* О три-тканях многомерных поверхностей.— Тр. геометр. семинара, 2. (Ин-т науч. информ. АН СССР).— М., 1969, с. 7—31. 3. *Акивис М. А.* Об изоклинных три-тканях и их интерпретации в линейчатом пространстве проективной связности.— Сиб. мат. журн., 1974, 15, № 1, с. 3—15. 4. *Норден А. П.* Пространства аффинной связности.— М.: Наука, 1967.— 463 с. 5. *Рашевский П. К.* Риманова геометрия и тензорный анализ.— М: Наука, 1967.— 664 с.

Поступила в редколлегию 14.02.81.

УДК 513

М. Д. Ковалев

МИНИМАЛЬНАЯ ВЫПУКЛАЯ ПОКРЫШКА ДЛЯ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Широко известен нерешенный вопрос Лебега о форме плоской фигуры наименьшей площади, способной накрыть любое множество на плоскости, если диаметр этого множества не превосходит единицы. В настоящей статье решается более элементарный вопрос: какова выпуклая фигура Φ наименьшей площади, способная накрыть любой треугольник со сторонами, не превосходящими единицы.

Теорема. *Наименьшей выпуклой покрышкой для семейства всех треугольников со сторонами, не превосходящими единицы, является треугольник* $\Phi = ABC$ *с основанием* $AB = 1$, *углом* $B = 60^\circ$ *при одном из концов основания и высотой* $CD = \cos 10^\circ$ *(рис. 1). Фигура* Φ *является единственной (с точностью до перемещений и отражений) минимальной покрышкой. Ее площадь равна* $2^{-1}\cos 10^\circ \approx 0{,}4924$.

Доказательство 1. Достаточно искать минимальную покрышку для семейства S, состоящего только из равнобедренных треугольников abc со сторонами $ac = bc = 1$ и углом $\gamma \leqslant 60^\circ$ при вершине c. Это следует из того очевидного факта, что любой треугольник со сторонами, не большими 1, можно вместить в один из треугольников семейства S.

2. Убедимся, что любой из треугольников $abc \in S$ можно вложить в упомянутый в теореме треугольник $\Phi = ABC$. Его углы $A = 60^\circ + \theta$, $B = 60^\circ$, $C = 60^\circ - \theta$, где $\theta \approx 6{,}34^\circ$.

Если $0^\circ \leqslant \gamma \leqslant 20^\circ$, то достаточно поместить вершину c треугольника abc в вершину C треугольника Φ и направить сторону cb вдоль CB; при $\gamma = 20^\circ$ вершина b будет лежать на стороне AB

Если $20° \leqslant \gamma \leqslant 60° - 2\theta$, то достаточно поместить вершину c в вершину C, а сторону ab расположить параллельно AB (с той же стороны от C).

Если $60° - 2\theta \leqslant \gamma \leqslant 60°$, то достаточно поместить вершину c в вершину B, а сторону cb направить вдоль BA.

3. Убедимся, что Φ — минимальная среди покрышек. Выделим в семействе S два треугольника: равносторонний T и треугольник t с углом $\gamma = 20°$. Очевидно, в минимальную покрышку должны вмещаться оба треугольника.

Минимальность покрышки Φ вытекает из следующей леммы.

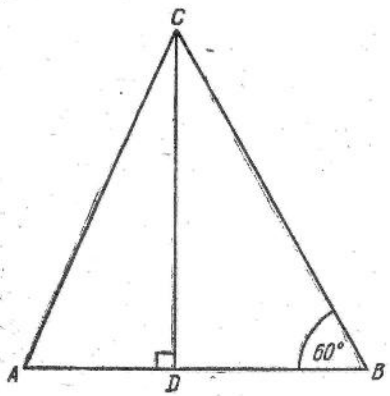


Рис. 1

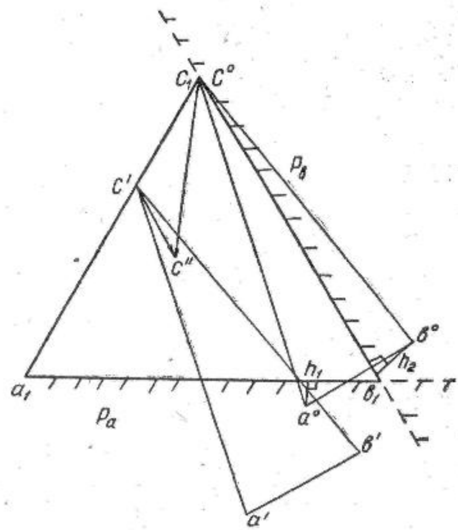


Рис. 2

Лемма 1. *Как бы ни были расположены на плоскости треугольники T и t, площадь их выпуклой оболочки Q будет не меньше, чем площадь $\Phi = 2^{-1} \cos 10°$.*

Доказательство. Будем считать треугольник $T = a_1b_1c_1$ неподвижным, а треугольник $t = abc$ — подвижным. Порядок вершин треугольников t и T таков, что обход треугольника от вершины a через вершину b к вершине c происходит против часовой стрелки. Положения треугольника t, в которых угол от вектора $\overrightarrow{a_1b_1}$ до вектора $\overrightarrow{ab}$ равен φ, будем помечать нижним индексом φ. Из симметрии каждого из треугольников T и t следует, что можно ограничиться рассмотрением выпуклых оболочек треугольника T и треугольников t_φ при $0° \leqslant \varphi \leqslant 60°$.

а) Случай $0° \leqslant \varphi \leqslant 20°$. Выпуклая оболочка Q треугольников T и t содержит в себе выпуклую оболочку вершин a_1 и b_1 треугольника T и вершин a и c треугольника t. Длина проекции отрезка ac на прямую, перпендикулярную a_1b_1, равна $\cos(\varphi - 10°)$.

Поэтому площадь выпуклой оболочки точек a_1, b_1, a, c не менее $2^{-1}\cos(\varphi - 10°)$, и площадь Q не меньше $2^{-1}\cos 10°$ при $\varphi = 0°$, $20°$ и строго больше $2^{-1}\cos 10°$ при $0° < \varphi < 20°$.

б) Случай $40° < \varphi \leqslant 60°$ рассматривается аналогично, только вместо вершин a_1, b_1 и a, c берутся вершины a_1, c_1 и c, b; при $40° < \varphi < 60°$ площадь Q строго больше площади Φ.

в) Случай $20° < \varphi \leqslant 40°$. Перенесем треугольник t_φ в такое положение t_φ^0, чтобы его вершина c^0 совпала с вершиной c_1 треугольника T (рис. 2). Площадь выпуклой оболочки Q треугольников T и t_φ^0 равна площади $T + 1/2\,h_1 + 1/2\,h_2 = \Pi$, где h_1 и h_2 — длины высот треугольников $a_1a^0b_1$ и соответственно $b_1b^0c_1$, опущенных на стороны a_1b_1 и b_1c_1. Покажем, что $\Pi > 2^{-1}\cos 10°$. Пусть угол $\chi = \varphi - 20°$ $(0° < \chi \leqslant 20°)$, тогда $h_1 = \cos(\chi + 10°) - \cos 30°$; $h_2 = \sin\chi$, и наше неравенство примет вид $2^{-1}\sin\chi + 2^{-1}\cos(\chi + 10°) \geqslant 2^{-1}\cos 10°$. Перенося $2^{-1}\cos 10°$ в левую часть и умножая на 2, найдем $\sin\chi + \cos(\chi + 10°) - \cos 10° = \sin\chi - 2\sin(\chi/2 + 10°)\sin(\chi/2) = 2\sin(\chi/2)(\cos(\chi/2) - \sin(10° + \chi/2)) > 0$, что, конечно, верно при $20° < \varphi \leqslant 40°$.

Теперь покажем, что при всевозможных параллельных переносах треугольника t_φ из положения t_φ^0 $(20° \leqslant \varphi \leqslant 40°)$ площадь его выпуклой оболочки с треугольником T не уменьшится. Рассмотрим параллельный перенос $\overrightarrow{c^0c''}$, переводящий вершину c в положение c'' (рис. 2). Представим его как последовательное выполнение двух переносов $\overrightarrow{c^0c''} = \overrightarrow{c^0c''} + \overrightarrow{c'/c''}$, из которых первый — $\overrightarrow{c^0c''}$ параллелен стороне c_1a_1, а второй — стороне b_1c_1 треугольника T.

Рассмотрим первый перенос. Пусть непересекающиеся с треугольником T замкнутые полуплоскости P_a и P_b (рис. 2) ограничены продолжениями сторон a_1b_1 и соответственно b_1c_1 треугольника T. Если вершина a' треугольника t'_φ находится в полуплоскости P_a, и вершина b' — в полуплоскости P_b, убывание площади одного из треугольников a_1ab_1, b_1bc_1 при переносе $\overrightarrow{c^0c'}$ компенсируется точно таким же приращением площади другого; при этом сторона ab разделяет точки b_1 и e_1; после того как сторона ab пройдет через b_1, площадь Q будет возрастать. Если же одна из вершин a, b выйдет из соответствующей полуплоскости, скажем, вершина b из полуплоскости P_b, то сумма площадей треугольника T и, треугольника, натянутого на вторую из вершин a, b, у нас a_1ab_1, станет больше Π.

Рассмотрим теперь перенос $\overrightarrow{c'c''}$. Площадь треугольника b_1bc_1 при этом переносе не изменяется. Если после первого переноса $a' \in P_a$, то площадь выпуклой оболочки Q после второго переноса не менее площадь $T +$ площадь $b_1b''e_1 =$ площадь $T +$ площадь $bb'b_1 > \Pi$. Если $b' \in P_b$, то площадь $T +$ площадь $a_1a'b_1 > \Pi$. Если вектор $\overrightarrow{c'c''}$ направлен в сторону треугольника T, то площадь

a_1ab_1 увеличивается, если — в противоположную, то убывание площади a_1ab_1 компенсируется приращением площади треугольника c_1ca_1. Так же разбирается и оставшийся случай $a' \in P_a$, $b' \in P_b$. Лемма доказана.

4. Из хода доказательства леммы 1 следует, что для установления единственности минимальной покрышки Φ достаточно изучить выпуклые оболочки Q треугольников T и t_φ при $\varphi = 0$, 20, $60°$.

Площадь выпуклой оболочки Q треугольников T и t_{60} больше $2^{-1}\cos 10°$, как бы ни был параллельно перенесен треугольник t_{60}. Действительно, ширина H выпуклой оболочки Q в направлении, перпендикулярном стороне c_1a_1 треугольника T, не меньше $\cos 10°$. Ясно, что если $H > \cos 10°$, то и площадь $Q > 2^{-1}\cos 10°$. Но и при $H = \cos 10°$ тоже площадь $Q > 2^{-1}\cos 10°$, ибо в этом случае площадь $Q = 2^{-1}\cos 10°$ только, если Q либо треугольник с основанием c_1a_1, либо четырехугольник с диагональю c_1a_1, однако ни тот ни другой случай не осуществляется.

5. Дальше будет использована доказанная в п. 8

Лемма 2. *Пусть треугольник Δ помещается в выпуклом многоугольнике M. Тогда Δ можно так поместить в многоугольник M, что одна из его вершин совместится с вершиной многоугольника.*

6. При $\varphi = 0°$ площадь $Q = 2^{-1}\cos 10°$ только в случае, когда основание ab треугольника t_0 находится на основании a_1b_1 треугольника T, и Q — треугольник a_1b_1c. Но этот треугольник Q способен покрыть любой из треугольников семейства S только в случае $Q = \Phi$. Действительно, пусть $Q \neq \Phi$ и углы треугольника Q таковы: $\angle a_1 = 60° + \theta_1$, $\angle b_1 = 60° + \theta_2$, $\angle c = 60° - \theta_1 - \theta_2$, где $0° < \theta_1$, $\theta_2 < \theta$. Больший из углов $\angle a_1ca = 20° - \theta_1 > 20° - \theta$, $\angle b_1cb = 20° - \theta_2 > 20° - \theta$ меньше $20°$, пусть он равен ψ. Тогда треугольники Δ' из семейства S с углами $\psi < \gamma < 20°$ нельзя покрыть треугольником Q. Вследствие леммы 2 достаточно рассмотреть лишь те положения треугольника Δ', в которых его вершина совпадает с одной из вершин треугольника Q. Поскольку углы при вершинах a и b треугольника Δ' больше любого из углов треугольника Q, то остается проверить, вмещается ли треугольник Δ' в Q, если его вершина c совпадает с какой-либо из вершин Q. Если вершина c треугольника $\Delta \in S$ совпадает с вершиной c треугольника Q, то треугольник Δ вмещается в Q лишь при $0° < \gamma \leqslant \psi$ или при $20° \leqslant \gamma \leqslant 60° - \theta_1 - \theta_2$; если c совпадает с вершиной a_1 треугольника Q, то — при $0° \leqslant \gamma° \leqslant \theta_1 + 2\theta_2$ или $40° < 60° - 2\theta_2 \leqslant \gamma \leqslant 60°$; если c совпадает с вершиной b_1 треугольника Q, то — при $0° \leqslant \gamma \leqslant \theta_2 + 2\theta_1$ или $40° < 60° - 2\theta_1 \leqslant \gamma \leqslant 60°$. Легко видеть, что угол $c = 60° - \theta_1 - \theta_2$ треугольника Q минимален для $Q = \Phi$, а значит, $\theta_1 + \theta_2 \leqslant \theta < 6{,}35°$. Отсюда получаем $\theta_1 + 2\theta_2 \leqslant 2(\theta_1 + \theta_2) \leqslant 2\theta < 20° - \theta$, аналогично и $\theta_2 + 2\theta_1 \leqslant 2\theta < 20° - \theta$.

7. При $\varphi = 20°$ площадь $Q = 2^{-1}\cos 10°$ только в случае, когда сторона bc треугольника t_{20} идет по стороне b_1c_1 треугольника T, и Q есть четырехугольник ca_1ab_1 или треугольник $ca_1b_1 =$

$=\Phi$. Однако ни один из четырехугольников ca_1ab_1 не является покрышкой для всего семейства треугольников S: им нельзя покрыть треугольники Δ' с углами $20^\circ < \gamma < 20^\circ + 2\chi$, где $\chi = \angle aa_1b_1$. Для проверки достаточно перебрать положения треугольника Δ', в которых какая-либо из его вершин совпадает с вершиной четырехугольника Q.

8. Остается доказать лемму 2. Рассмотрим в многоугольнике M все треугольники δ, подобные треугольнику Δ. Возьмем наибольший из них — δ_0, если наибольших несколько, то любой из них. Такой найдется, поскольку совокупность треугольников δ есть компактное подмножество декартова произведения $M\times M\times \times M$, и размер треугольника δ непрерывен на нем. Докажем, что треугольник δ_0 либо упирается в угол многоугольника M, либо его можно параллельно перенести так, чтобы он уперся в угол M, оставаясь в M. Это, очевидно, доказывает лемму.

Рассмотрим представляющиеся возможности:

1) Все вершины треугольника δ_0 не могут лежать внутри M, ибо в противном случае треугольник δ_0 не был бы, очевидно, наибольшим среди треугольников δ.

2) Не может быть, чтобы всего одна или две вершины δ_0 лежали внутри сторон многоугольника M. Действительно, в противном случае существует малый поворот треугольника δ_0, переводящий все его вершины внутрь M. За центр этого поворота можно взять точку, лежащую внутри M на перпендикуляре к стороне M, восставленном в вершине треугольника δ_0, лежащей на этой стороне M.

3) Все вершины δ_0 лежат внутри сторон многоугольника M. Сначала заметим следующее: пусть вершина p треугольника δ_0 лежит внутри стороны многоугольника M; восстановим в точке p внутреннюю нормаль n к этой стороне многоугольника и рассмотрим открытые полуплоскости, ограниченные прямой, содержащей эту нормаль. Точки правой относительно нормали полуплоскости обладают следующим свойством: для каждой из них найдется угол $\Theta_0>0$ такой, что поворот треугольника δ_0 вокруг нее на любой угол $0<\theta<\theta_0$ по часовой стрелке переводит вершину p внутрь многоугольника M. Такое же свойство имеют точки левой относительно нормали n полуплоскости, но с противоположным направлением поворота. Итак, пусть P, Q, S — три ориентированные прямые, нормальные к границе многоугольника M в вершинах треугольника δ_0.

а) Прямые P, Q, S попарно непараллельны и не пересекаются все в одной точке. Легко проверить, что либо все три правые, либо все три левые относительно этих прямых открытые полуплоскости имеют непустое пересечение. Возьмем любую точку этого пересечения. Найдется малый поворот вокруг нее, переводящий все вершины треугольника δ_0 внутрь M. Таким образом, возможность а) отпадает.

б) Совершенно так же отпадает возможность, когда ровно две из прямых P, Q, S параллельны, но не совпадают.

в) Все три прямые P, Q, S параллельны между собой. В этом случае вершины треугольника δ_0 находятся на двух параллельных друг другу сторонах многоугольника M. Сдвигая треугольник вдоль направления этих сторон, очевидно, можно совместить одну из его вершин с вершиной многоугольника M, при этом $\delta_0 \subseteq M$.

г) Прямые P, Q и S пересекаются в одной точке O (две из них могут совпадать). Если $O \in M$, то малое вращение треугольника δ_0 вокруг точки O переводит все три или хотя бы две вершины треугольника δ_0 внутрь M. Если $O \in M$, то после малого вращения вокруг точки O, переводящего ближайшую к O вершину p треугольника δ_0 в новое положение p', достаточно параллельно перенести треугольник δ_0' на вектор $\overrightarrow{p'b}$, где b — точка многоугольника M, ближайшая к p'. Тогда вершина p окажется на стороне, а две другие вершины треугольника δ_0 — внутри многоугольника M. Итак, возможность г) не осуществляется, и лемма доказана.

Поступила в редколлегию 28.10.81.

УДК 513

В. Т. Лисица

ПОГРУЖЕНИЕ n-МЕРНОГО МНОГООБРАЗИЯ С МЕТРИКОЙ $ds^2 = dx_1^2 + \varphi^2(x_1) ds_1^2$ В $(2n-1)$-МЕРНОЕ ПРОСТРАНСТВО ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ

1. Основные определения и доказательство основного результата.

В работе [1] доказано, что если пространство R^n постоянной кривизны k погружено в пространство R^{2n-1} постоянной кривизны $K > k$, то матрицу первой квадратичной формы поверхности R^n и матрицы всех вторых квадратичных форм погружения R^n в R^{2n-1} можно одновременно привести к диагональному виду. Это означает, что главные направления поверхности R^n относительно всех нормалей совпадают. Поверхности, у которых совпадают главные направления для всех нормалей, будем называть поверхностями с полем главных направлений. Для этих поверхностей связность нормального расслоения в пространстве R^{2n-1} локально плоская [2]. В работах Ю. А. Аминова [3, 4] дан способ построения произвольного локально-аналитического погружения областей пространства Лобачевского в евклидово пространство E^{2n-1}, при котором координатные линии являются линиями кривизны. В настоящей статье отражена возможность погружения n-мерных многообразий M^n с метрикой $ds^2 = dx_1^2 + \varphi^2(x_1)\, ds_1^2$ в пространство R^{2n-1} постоянной кривизны K в виде поверхности с плоской нормальной связностью. Здесь ds_1^2 — метрика $(n-1)$-мерного многообразия кривизны $K_0 = 0, \pm 1$. Многообразия M^n с указанной метрикой являются обобщением пространства Лобачевского в том смысле, что в случаях $K_0 = 0$; $\varphi(x_1) = e^{-x_1}$; $K = -1$; $\varphi(x_1) = \operatorname{ch}^2 x_1$ и $K_0 = +1$; $\varphi(x_1) = \operatorname{sh}^2 x_1$ получается метрика пространства Лобачевского $\mathfrak{L}^n$. При этом уравнение $x_1 = \text{const}$ задает в первом случае орисферу, во втором — эквидистантную поверхность, в третьем — сферу.

В случае, когда ds_1^2 — метрика произвольного $(n-1)$-мерного многообразия, внутреннее строение многообразий с метрикой ds^2 хорошо изучено Н. С. Синюковым и его учениками [5, 6]. Многообразия такого рода называются эквидистантными пространствами.

Сформулируем основной результат настоящей работы.

Теорема 1. *Если риманово n-мерное многообразие M^n имеет метрику $ds^2 = dx_1^2 + \varphi^2(x_1)\,ds_1^2$, где ds_1^2 — метрика многообразия кривизны $K_0 = 0, \pm 1$, то M^n допускает локально-изометрическое погружение в $(2n-1)$-мерное пространство постоянной кривизны в классе поверхностей с полем главных направлений. Если функция φ принадлежит классу C^k, то и поверхность, реализующая M^n, принадлежит классу C^k.*

Доказательство теоремы опирается на методы, развитые в работах [3, 4].

Докажем, что многообразие M^n с метрикой $ds^2 = dx_1^2 + \varphi^2(x_1) \times \times ds_1^2$ допускает такое погружение в пространство R^{2n-1} постоянной кривизны, что некоторые координатные линии поверхности M^n будут линиями кривизны. Чтобы погрузить риманово многообразие M^n в риманово пространство R^{2n-1} постоянной кривизны, достаточно найти такие функции $\Omega_{p|ij}$, $\mu_{pq|k}$ $(p, q = 1, \ldots, n-1;\ i, j = 1, \ldots, n)$, которые удовлетворяют уравнениям Гаусса — Кодацци — Риччи [7, с. 196]. Так как координатные линии должны быть линиями кривизны, то можно положить $\Omega_{p|ij} = 0$ при $i \neq j$, $\mu_{pq|k} = 0$ $(p, q = 1, \ldots, n-1;\ i, j = 1, \ldots, n)$. Так как метрика ds_1^2 имеет постоянную кривизну, ее можно записать так: $ds_1^2 = \sum\limits_{i=2}^{n} \tilde{g}_{ii}\, dx_i^2$, где $\tilde{g}_{ii}$ зависят только от $x_2, \ldots, x_n$.

Положив $g_{ii} = \varphi^2(x_1)\,\tilde{g}_{ii}$, получим $ds^2 = dx_1^2 + \sum g_{ii}\,dx_i^2$. Можно подсчитать, что $R_{1i1i} = -\varphi\varphi''\tilde{g}_{ii}$; $R_{hihi} = -\varphi^2(\varphi'^2 - K_0)\,\tilde{g}_{hh}\tilde{g}_{ii}$, K_0 — кривизна метрики ds_1^2. Уравнения Гаусса — Кодацци примут вид

$$R_{ijkl} = 0;\ R_{ikik} = \sum_p \Omega_{p|ii}\,\Omega_{p|kk} + K g_{ii} g_{kk}; \tag{1}$$

$$\frac{\partial \Omega_{p|ii}}{\partial x_k} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ii}}{\partial x_k}\left(\frac{\Omega_{p|ii}}{g_{ii}} + \frac{\Omega_{p|kk}}{g_{kk}}\right), \tag{2}$$

K — кривизна пространства R^{2n-1}. Положим теперь $\Omega_{n|11}=0$, $p=1, \ldots, n-2$, $\Omega_{n-1|11}=f(x_1)$. Тогда уравнения Гаусса при $i=1$ примут вид

$$\Omega_{n-1|11}\,\Omega_{n-1|kk}=-\varphi\varphi''\tilde{g}_{kk};\quad \Omega_{n-1|11}=-\varphi\varphi''\tilde{g}_{kk}\big/\Omega_{n-1|kk}.$$

Уравнения Кодацци (2) при $i=1$ будут выполняться. Рассмотрим уравнения Кодацци:

$$\frac{\partial\Omega_{p|ll}}{\partial x_1}-\varphi\varphi'\tilde{g}_{ll}\left(\frac{\Omega_{p|ll}}{\varphi^2\tilde{g}_{ll}}+\Omega_{p|11}\right)=0.$$

Если $p=1, \ldots, n-2$, то последнее уравнение (в силу того что при этих p будет $\Omega_{p|11}=0$) запишем

$$\frac{d\Omega_{p|ll}}{dx_1}=\frac{\varphi'}{\varphi}\,\Omega_{p|ll}.$$

Теперь положим $\Omega_{p|ll}=\varphi c_{p|ll}(x_2, \ldots, x_n)$, $p=1, \ldots, n-2$, и тогда последние уравнения Кодацци выполнятся. Если $p=n-1$, положим

$$\Omega_{n-1|11}=-(\varphi''+K\varphi)\big/\sqrt{-(\varphi'^2+K\varphi^2)+c};$$

$$\Omega_{n-1|ll}=\varphi\tilde{g}_{ll}\sqrt{-(\varphi'^2+K\varphi^2)+c},\quad c=\text{const},$$

и тогда все уравнения Кодацци, содержащие производную по x_1, будут выполняться. Кроме того, будут выполняться уравнения Гаусса, содержащие индекс $i=1$. Остальные уравнения Гаусса и Кодацци примут вид

$$\frac{dc_{p|ll}}{dx_k}-\frac{1}{2}\frac{d\tilde{g}_{ll}}{dx_k}\left(\frac{c_{p|ll}}{\tilde{g}_{ll}}+\frac{c_{p|kk}}{\tilde{g}_{kk}}\right)=0, \tag{3}$$

$$\sum_p c_{p|ll}\,c_{p|kk}=-(c-K_0)\tilde{g}_{ll}\tilde{g}_{kk}, \tag{4}$$

$k\neq l\neq 1\neq k$, $p=1, \ldots, n-2$. Здесь в уравнениях Гаусса c — постоянная, входящая в выражение для $\Omega_{n-1|ll}$. Если кривизна поверхности M^n по двумерным площадкам, натянутым на координатные векторы $\boldsymbol{x}_l$, $\boldsymbol{x}_k$ $(l,\ k>1)$, больше K, то $c<K_0$. Это следует из уравнений Гаусса и из того, что $c-(\varphi'^2+K\varphi^2)>0$, как выражение под радикалом в функциях для $\Omega_{n-1|ll}$. Обозначим $K_0-c=a^2=\text{const}$. Выбирая $c_{1|ll}=a\tilde{g}_{ll}$; $c_{p|ll}=0$ $(p=2, \ldots, n-2)$, добиваемся выполнения последних уравнений Гаусса и Кодацци. Таким образом, если кривизна K_{lk} многообразия M^n по двумерным площадкам, натянутым на координатные векторы $\boldsymbol{x}_l$, $\boldsymbol{x}_k$ $(l,\ k>1)$, больше кривизны K объемлющего пространства R^m, то M^n можно погрузить в R^{n+2} $(m=n+2)$ в виде поверхности, координатные линии которой являются линиями кривизны.

Пусть теперь $K_{lk} < K(l, \ k > 1$, тогда $c > K_0$. Обозначим $c - K_0 = a^2$. В этом случае проведем рассуждения, изложенные в работе [4]. Умножим (3) на $c_{p|ll}$ и просуммируем по p. Учитывая (4), получаем

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\sum_p (c_{p|ll})^2 - \frac{1}{\tilde{g}_{ll}}\frac{\partial \tilde{g}_{ll}}{\partial x_k}\sum_p (c_{p|ll})^2 + a^2\tilde{g}_{ll}\frac{\partial \tilde{g}_{ll}}{\partial x_k} = 0. \quad (5)$$

Обозначив $\operatorname{ctg}^2\sigma_i = \sum_p (c_{p|ii})^2 \Big/ a^2\tilde{g}_{ii}^2$, получим, как и в [4], $a\tilde{g}_{ii} = \sin^2\sigma_i$. Тогда $\sum_p (c_{p|ii})^2 = \cos^2\sigma_i \sin^2\sigma_i$. Рассмотрим набор величин $c_{p|ii}$ при фиксированном i как вектор, имеем

$$c_{p|ii} = \cos\sigma_i \sin\sigma_i \cos\varphi_{ip}, \quad (6)$$

$p = 1, \ldots, n-2$; $i = 2, \ldots, n$, причем

$$\sum_{p=1}^{n-2} \cos^2\varphi_{ip} = 1. \quad (7)$$

Из (4) следует, что

$$\sum_{p=1}^{n-2} c_{p|ii}c_{p|kk} = -a^2\tilde{g}_{ii}\tilde{g}_{kk} = -\sin^2\sigma_i\sin^2\sigma_k. \quad (8)$$

Используя (6), (8), получаем уравнения (4) в виде:

$$\sum_p \cos\varphi_{ip}\cos\varphi_{kp} = -\operatorname{tg}\sigma_i\operatorname{tg}\sigma_k. \quad (9)$$

Равенства (7), (9) выражают условие ортогональности матрицы

$$A = \begin{pmatrix} \sin\sigma_2 & \cdots & \sin\sigma_n \\ \cos\varphi_{21}\cos\sigma_2 & \cdots & \cos\varphi_{n1}\cos\sigma_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cos\varphi_{2n-2}\cos\sigma_2 & \cdots & \cos\varphi_{nn-2}\cos\sigma_n \end{pmatrix}.$$

Пусть $\Phi_{kp} = \cos\varphi_{kp}\cos\sigma_k$. Условие ортогональности, записанное для строк матрицы A, дает

$$\sum_{i=2}^{n} \sin^2\sigma_i = 1 \text{ или } \sum_{i=2}^{n}\tilde{g}_{ii} = \frac{1}{a}. \quad (10)$$

Если учесть, что теперь $c_{p|ii} = \Phi_{ip}\sin\sigma_i$, то уравнения Кодацци (3) примут вид

$$\frac{\partial\Phi_{jp}}{\partial x_k} = \frac{\Phi_{kp}}{\sin\sigma_k}\frac{\partial \sin\sigma_j}{\partial x_k}, \ j \neq k. \quad (11)$$

Из условия $\sum_j \Phi_{jp}^2 = 1$ и из (10) следует

$$\frac{\partial\Phi_{jp}}{\partial x_j} = -\sum_{k\neq j}\frac{\Phi_{kp}}{\sin\sigma_j}\frac{\partial \sin\sigma_k}{\partial x_j}. \quad (12)$$

Легко проверить, что условиями интегрируемости системы уравнений (11), (12) являются равенства $R_{ijjk}=0$ при $i\neq j\neq\neq k\neq i$ для компонент тензора кривизны метрики ds_1^2 постоянной кривизны K_0 при условии (10). Как доказано в [4], начальные условия при решении системы (11), (12) можно выбрать так, что матрица A всюду будет ортогональна, что означает выполнимость уравнений (4). Таким образом, выбирая в пространстве постоянной кривизны K_0 систему координат, в которой для коэффициентов ds_1^2 выполняется условие (10), находя функции φ_{ip} из (11) и (12) и задавая $c_{p|ii}$ в виде (6), можно добиться выполнения уравнений (3), (4). А это в итоге означает, что многообразие с метрикой $ds^2=dx_1^2+\varphi^2(x_1)\,ds_1^2$ погружается в пространство R^{2n-1} постоянной кривизны K.

Для нахождения ортогональной системы координат в пространстве постоянной кривизны K_0 такой, что коэффициенты линейного элемента $ds_1^2=\sum\limits_{i=2} g_{ii}dx_i^2$ удовлетворяют условию $\Sigma g_{ii}=$ $=\mathrm{const}$, необходимо и достаточно найти функции g_{ii} и $\beta_{ik}\,(i\neq k)$, удовлетворяющие системе

$$\frac{\partial\sqrt{g_{ii}}}{\partial x_k}=\beta_{ki}\sqrt{g_{kk}};\ \frac{\partial\sqrt{g_{ii}}}{\partial x_i}=-\sum_q\beta_{iq}\sqrt{g_{qq}},\ q\neq i;$$

$$\frac{\partial\beta_{ik}}{\partial x_j}=\beta_{ij}\beta_{ik};\ \frac{\partial\beta_{ik}}{\partial x_k}+\frac{\partial\beta_{ki}}{\partial x_i}+\sum_j\beta_{ij}\beta_{kj}=0;$$

$$\frac{\partial\beta_{ik}}{\partial x_i}+\frac{\partial\beta_{ki}}{\partial x_k}+\sum_j\beta_{ij}\beta_{jk}+K_0\sqrt{g_{ii}}\sqrt{g_{kk}}=0,\ i\neq j\neq k\neq i.$$

Можно проверить, что это — вполне интегрируемая система вида Бурлета [8]. Решения этой системы задают ортогональные системы в пространстве постоянной кривизны K_0, а первым интегралом системы является $\sum\limits_i g_{ii}=\mathrm{const}$ [3].

Исследуем регулярность поверхности M^n, реализующей рассматриваемую метрику. Запишем уравнения Вейнгартена поверхности M^n:

$$\nabla x_j X_i=\Gamma^l_{ij}X_l+\sum_\sigma\Omega_{\sigma|ij}n_\sigma;\quad \nabla x_i n_\sigma=\alpha^l_{i\sigma}X_l+\beta^\tau_{i\sigma}n_\tau, \tag{13}$$

где $\alpha^l_{i\sigma}$ и $\beta^\tau_{i\sigma}$ выражены через коэффициенты первой и вторых квадратичных форм. Условиями интегрируемости этой системы являются уравнения Гаусса — Кодацци — Риччи [7, с. 196], которые здесь выполняются. Решением системы будут вектор-функции X_i, причем $X_i=r_{u_i}$, где $r(u_1,\ \ldots,\ u_n)$ — радиус-вектор поверхности M^n. Систему (13) можно привести к виду

$$\frac{\partial Y_a}{\partial x_i}=h_{ij}(x,\ Y), \tag{14}$$

где через $\boldsymbol{Y}_\alpha$ обозначены $\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_n, \boldsymbol{n}_1, \ldots, \boldsymbol{n}_{n-1}$. Если коэффициенты метрики ds^2 принадлежат классу C^k, т. е. функция $\varphi \in C^k$, то функции в правых частях системы (13) принадлежат, вообще говоря, классу C^{k-2}, но тогда $h_{ij}(x, Y)$ принадлежит C^{k-2}, а решение системы (14) принадлежит C^{k-1} [9]. Следовательно, $\boldsymbol{r}(u_1, \ldots, u_n)$ принадлежит классу C^k.

В работе [3] Ю. А. Аминовым доказано, что не существует погружения всего пространства $\mathfrak{L}^n$ в E^{2n-1}, при котором линии кривизны одного семейства координатных линий — геодезические на $\mathfrak{L}^n$. Аналогичное утверждение выполняется и для многообразий M^n с метрикой $ds^2 = dx_1^2 + \varphi^2(x_1)\,ds_1^2$, где ds_1^2 — метрика $(n-1)$-мерного многообразия кривизны $K_0 = 0, \pm 1$.

Теорема 2. *Если $k - K \leqslant -a^2 < 0$ (где k — кривизна многообразия M^n, $K = 0$ (или $K = -1$)), то не существует погружения всего многообразия M^n в евклидово пространство E^m (или в пространство Лобачевского $\mathfrak{L}^m$), при котором координатные линии $x_1, \ldots, x_n$ являются линиями кривизны.*

Доказательство. Метрику многообразия M^n запишем в виде

$$ds^2 = dx_1^2 + \varphi^2(x_1)\left(\sum g_{ii}dx_i^2\right).$$

Уравнения Кодацци погружения M^n имеют вид

$$\frac{\partial \Omega_{p|li}}{\partial x_l} - \Gamma^l_{il}\Omega_{p|ii} + \Gamma^l_{ii}\Omega_{p|ll} = \sum_q \mu_{pq|l}\Omega_{q|li}, \tag{15}$$

$q, p = 1, \ldots, n-1$; $i, l = 1, \ldots, n$. Учтем, что для диагональной метрики ds^2 будет

$$\Gamma^l_{il} = \frac{1}{2}\frac{1}{g_{ii}}\frac{\partial g_{ii}}{\partial x_l};\quad \Gamma^l_{ii} = -\frac{1}{2g_{ll}}\frac{\partial g_{ii}}{\partial x_l};\quad \Gamma^i_{ii} = \frac{1}{2g_{ii}}\frac{\partial g_{ii}}{\partial x_i}.$$

Из уравнений Гаусса получим

$$\sum_{p=1}^{n-1} \Omega_{p|ii}\Omega_{p|ll} = (K_{il} - K)\,g_{ii}g_{ll}, \tag{16}$$

где K_{il} — кривизна метрики ds^2 по двумерным площадкам, натянутым на координатные векторы $\boldsymbol{X}_l$, $\boldsymbol{X}_i$, $K = 0$, -1 — кривизна объемлющего пространства E^m или $\mathfrak{L}^m$. Кроме того, так как

$$\mu_{qp|l} = -\mu_{pq|l}, \text{ то } \sum_{p,q}\mu_{qp|l}\Omega_{q|ii}\Omega_{p|ii} = 0.$$

С учетом этих замечаний уравнение (15) после умножения на $\Omega_{p|ii}$ и суммирования по p примет вид

$$\frac{\partial}{\partial x_l}\sum_p(\Omega_{p|ii})^2 - \frac{1}{g_{ii}}\frac{\partial g_{ii}}{\partial x_l}\sum_p(\Omega_{p|ii})^2 - g_{ii}\frac{\partial g_{ii}}{\partial x_l}(K_{il} - K) = 0. \tag{17}$$

Можно подсчитать, что для рассматриваемой метрики ds^2 будет

$$K_{1i} - K = -(\varphi'' + K\varphi)/\varphi,\quad K_{il} = -(\varphi'^2 + K\varphi^2 - K_0)/\varphi^2, \tag{18}$$

$i, l = 2, \ldots, n$, а также $g_{11} = 1$, $g_{ii} = \varphi^2(x_1)\tilde{g}_{ii}$, где $\tilde{g}_{ii}$ зависят только от $x_2, \ldots, x_n$.

Пусть в уравнении (17) индекс $l = 1$. Вводя $Y = \sum_p (\Omega_{p|ii})^2/\tilde{g}_{ii}^2$ и учитывая первое равенство (18), уравнение (17) приведем к виду

$$\frac{\partial}{\partial x_1} Y - 2\frac{\varphi'}{\varphi} Y + 2\varphi^2\varphi'(\varphi'' + K\varphi) = 0.$$

Решая его, находим

$$Y = \varphi^2[-(\varphi'^2 + K\varphi^2) + c(x_2, \ldots, x_n)]. \qquad (19)$$

Так как по условию теоремы $(K_{il} - K) \leqslant -a^2 < 0$, то из первого равенства (18) следует $\varphi'' \geqslant (a^2 - K)\varphi$. Но $K = 0, -1$, тогда $\varphi'' > 0$. Значит, $\varphi \to +\infty$ при $x_1 \to +\infty$ или $x_1 \to -\infty$. Из второго равенства (18) следует $\varphi'^2 + K\varphi^2 \geqslant a^2\varphi^2 + K_0$, но так как $\varphi^2 \to \infty$, то и $\varphi'^2 + K\varphi^2 \to \infty$ при $x_1 \to +\infty$ или $x_1 \to -\infty$. Значит, при достаточно большом x_1, как следует из (19), $Y < 0$. Но по определению $Y \geqslant 0$ для всех x_1. Это противоречие доказывает теорему.

В случае, когда объемлющее пространство S^m — сферическое, теорема 2, вообще говоря, неверна. По этому поводу см. [10].

Исследуем теперь внешне-геометрическое строение поверхностей, реализующих метрику $ds^2 = dx_1^2 + \varphi^2(x_1)\, ds_1^2$. Введем некоторые определения.

Подмногообразие F^p поверхности M^n называется подмногообразием кривизны, если $\nabla_X N = Y + N_1$, где X, Y — векторы, касательные к F^p; N, N_1 — векторы нормалей к M^n; ∇ — ковариантное дифференцирование в объемлющем пространстве. Конечно, векторы Y, N_1 зависят от векторов X, N. В основе этого определения лежит хорошо известное свойство линий кривизны, заключенное в теореме Родрига [7, 11].

Перенесем понятие резной поверхности из E^3 [12] в многомерное пространство постоянной кривизны R^n. Вполне геодезические подпространства размерности k в R^n будем называть k-плоскостями. Рассмотрим $(n-k)$-параметрическое семейство k-плоскостей в R^n. Проводя в каждой точке любой плоскости семейства ортогональные дополнения, получим некоторое распределение $(n-k)$-плоскостей в R^n, ортогональное к данному семейству k-плоскостей. Пусть x — точка в некоторой k-плоскости рассматриваемого семейства плоскостей. Если существует $(n-k)$-мерное подмногообразие F^{n-k} в R^n такое, что касательные плоскости к нему принадлежат построенному выше $(n-k)$-распределению, то будем называть F^{n-k} ортогональной траекторией точки x в данном семействе k-плоскостей.

В одной из k-плоскостей семейства выберем p-мерную поверхность F^p. Если ортогональные траектории точек поверхности F^p в рассматриваемом семействе существуют и составляют поверхность, то будем называть эту поверхность резной. Ортогональные траектории точек поверхности F^p будем называть параллелями, сечения резной поверхности плоскостями семейства — меридианами резной поверхности.

Выясним некоторые свойства резных поверхностей и подмногообразий кривизны.

2. Параболические поверхности и подмногообразия кривизны

А. А. Борисенко в работе [13] ввел определение параболических поверхностей. Пусть $A(\boldsymbol{N}, Q)$ — матрица коэффициентов второй квадратичной формы поверхности F^l в римановом пространстве R^n в точке $Q \in F^l$ относительно нормали $\boldsymbol{N}$. Пусть $\nu(Q)$ — размерность подпространства $L(Q)$ в касательном пространстве поверхности F^l в точке Q такого, что $A(\boldsymbol{N}, Q)\boldsymbol{Y} = 0$ для любого $\boldsymbol{Y} \in L(Q)$ и любой нормали $\boldsymbol{N}$ в точке Q. Поверхность F^l называется сильно k-параболической, если в каждой ее точке $\nu(Q) \geqslant k$.

Поверхность F^p в евклидовом пространстве E^n будем называть k-линейчатой, если она составлена из k-плоскостей пространства E^n.

Рассмотрим поверхность $F^p \subset E^n$. Пусть $\vec{\rho}(u_1, \ldots, u_p)$ — ее радиус-вектор. В каждой ее точке зададим ортонормированный базис $\boldsymbol{e}_1(u_1, \ldots, u_p), \ldots, \boldsymbol{e}_k(u_1 \ldots, u_p), k + p < n$. Вектор-функции $\vec{\rho}, \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k$ считаем дифференцируемыми достаточное число раз. Через каждую точку $x \in F^p$ проведем k-плоскость $E^k(x)$ пространства E^n, натянутую на $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k$. Получим некоторую k-линейчатую поверхность M^{p+k}. В каждой плоскости $E^k(x)$ выберем систему координат так, что x — начало координат, $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k$ направлены по осям координат. Тогда радиус-вектор поверхности M^{p+k} можно записать в виде $\boldsymbol{r}(u_1, \ldots, u_p, v_1 \ldots, v_k) = \vec{\rho}(u_1, \ldots, u_p) + v_1\boldsymbol{e}_1(u_1, \ldots, u_p) + \ldots + v_k\boldsymbol{e}_k(u_1, \ldots, u_p)$, где $v_i (i = 1, \ldots, k)$ — параметры в плоскости $E^k(x)$. Найдем координатные векторные поля поверхности M^{p+k}:

$$\boldsymbol{r}_{u_i} = \vec{\rho}_{u_i} + v_1\boldsymbol{e}_{1u_i} + \ldots + v_k\boldsymbol{e}_{ku_i};\ \boldsymbol{r}_{v_\alpha} = \boldsymbol{e}_\alpha,\ i = 1, \ldots, p;$$
$$\alpha = 1, \ldots, k. \tag{20}$$

Найденные векторные поля определяют касательную плоскость к M^{k+p} в произвольной точке. Касательная плоскость к поверхности M^{k+p} в точке $x \in F^p$ определяется векторами $\vec{\rho}_{u_i}, \boldsymbol{e}_\alpha (i = 1, p;\ \alpha = 1, \ldots, k)$ при $v_\alpha = 0$. Чтобы касательная к M^{k+p} плоскость была стационарна вдоль образующей, необходимо и достаточно, чтобы ее положение не зависело от параметров $v_1, \ldots, v_k$. А это, как следует из формул (20), возможно в том и только том случае, когда векторы $\boldsymbol{e}_{1u_i}, \ldots, \boldsymbol{e}_{ku_i} (i=1, \ldots, p)$ разлагаются по векторам $\vec{\rho}_{u_i}, \ldots, \boldsymbol{e}_\alpha$.

Докажем теперь теорему, обобщающую теорему Монжа для линий кривизны.

Теорема 3. *Подмногообразие F^p поверхности M^k в евклидовом пространстве E^n является подмногообразием кривизны тогда и только тогда, когда поверхность, составленная из нормальных $(n-k)$-плоскостей к поверхности M^k вдоль F^p будет сильно $(n-k)$-параболической,*

Доказательство. 1) Допустим, что F^p — подмногообразие кривизны. Нормальные к M^k $(n-k)$-мерные плоскости вдоль F^p образуют $(n-k)$-линейчатую поверхность M^{n+p-k}. Радиус-вектор этой поверхности можно записать в виде $\boldsymbol{r}(u, v) = \vec{\rho}(u_1, \ldots, u_p) + v_1\boldsymbol{n}_1(u_1, \ldots, u_p) + \ldots + v_{n-k}\boldsymbol{n}_{n-k}(u_1, \ldots, u_p)$, где $\vec{\rho}(u_1, \ldots, u_p)$ — радиус-вектор поверхности F^p, $\boldsymbol{n}_i$ — нормали к M^k. Тогда координатные векторные поля построенной поверхности имеют вид

$$\boldsymbol{r}_{u_i} = \vec{\rho}_{u_i} + v_1\boldsymbol{n}_{1u_i} + \ldots + v_{n-k}\boldsymbol{n}_{n-k,\, u_i};\ \boldsymbol{r}_{v_\alpha} = \boldsymbol{n}_\alpha,\ i = 1, \ldots, p;$$
$$\alpha = 1, \ldots, n-k.$$

Так как F^p — подмногообразие кривизны, то по определению векторы $\boldsymbol{n}_{1u_i}, \ldots, \boldsymbol{n}_{n-k_i,\, ui}$ — линейные комбинации векторов $\vec{\rho}_{u_i}, \ldots, \boldsymbol{n}_\alpha$. Отсюда и следует, что касательные плоскости поверхности M^{n+p-k} вдоль образующих стационарны. Значит, поверхность M^{n+p-k} — сильно $(n-k)$-параболическая.

2) Пусть теперь поверхность M^{n+p-k} — сильно $(n-k)$-параболическая. Тогда касательные плоскости вдоль образующих стационарны, и векторы $\boldsymbol{n}_{1u_i}, \ldots, \boldsymbol{n}_{n-k,\, u_i}$ разлагаются по векторам $\vec{\rho}_{u_i}, \boldsymbol{n}_\alpha (i = 1, \ldots, p;\ \alpha = 1, \ldots, n-k)$. Пусть теперь N — нормаль к поверхности M^k, X — касательный к F^p вектор; N можно представить в виде линейной комбинации векторов $\boldsymbol{n}_1, \ldots \boldsymbol{n}_{n-k}$, а X — в виде линейной комбинации векторов $\vec{\rho}_{u_i}, \ldots, \vec{\rho}_{u_k}$. Тогда производную N по X можно представить в виде линейной комбинации векторов $\vec{\rho}_{u_i}, \boldsymbol{n}_\alpha$. А это и означает, что F^p — подмногообразие кривизны поверхности M^k.

3. Резные поверхности

Теорема 4. *Подмногообразие F^p поверхности M^k в пространстве постоянной кривизны R^n будет вполне геодезическим подмногообразием кривизны на M^k тогда и только тогда, когда F^p и все нормали к M^k вдоль F^p лежат в $(n-k+p)$-плоскости пространства R^n.*

Доказательство. 1) Сначала докажем, что F^p является подмногообразием кривизны поверхности M^k. Пусть $X_1, \ldots, X_p$ — координатные векторные поля подмногообразия F^p, $\boldsymbol{n}_\alpha$ ($\alpha =$

$=1, \ldots, n-k$) — ортонормированный базис нормального пространства к M^k. По условию теоремы все $\mathbf{X}_i$, $\boldsymbol{n}_\alpha$ ($i=1, \ldots, p$; $\alpha=1, \ldots, n-k$) вдоль F^p принадлежат $(n-k+p)$-плоскости пространства R^n. Но $(n-k+p)$-плоскость — вполне геодезическое подмногообразие пространства R^n, значит, $\nabla_{X_i}\boldsymbol{n}_\alpha$ разлагается по векторам $\boldsymbol{X}_i$, $\boldsymbol{n}_\beta$ ($i, j=1, \ldots, p$; $\alpha, \beta=1, \ldots, n-k$); ∇ — ковариантное дифференцирование в R^n. А это означает, что F^p есть подмногообразие кривизны поверхности M^k.

Докажем, что F^p — вполне геодезическое подмногообразие поверхности M^k. Для этого достаточно показать, что $\tilde{\nabla}_{X_i}X_j$ разлагаются по векторам $\mathbf{X}_k$ ($i, j, k=1, \ldots, p$), где $\tilde{\nabla}$ — ковариантное дифференцирование на поверхности M^k.

Как известно, $\nabla_{X_i}\mathbf{X}_j = \tilde{\nabla}_{X_i}\mathbf{X}_j + \alpha(\mathbf{X}_i; \mathbf{X}_j)$ (21), где $\alpha(\mathbf{X}_i; \mathbf{X}_j)$ — второй фундаментальный тензор поверхности M^k [14]. Снова воспользуемся тем, что $\mathbf{X}_i$, $\mathbf{X}_j$ — касательные векторные поля к $(n-k+p)$-плоскости. Тогда $\nabla_{X_i}\mathbf{X}_j$ разлагается только по векторам $\mathbf{X}_k$, $\boldsymbol{n}_\alpha$ ($k=1, \ldots, p$; $\alpha=1, \ldots, n-k$), и из равенства (21) будет следовать, что $\tilde{\nabla}_{X_i}\mathbf{X}_j$ разлагается по векторам $\mathbf{X}_k$. Следовательно, F^p — вполне геодезическое подмногообразие поверхности M^k.

Обратное утверждение теоремы 4 следует из следующей леммы, доказанной в [15]:

Если некоторое подмногообразие F^p является вполне геодезическим подмногообразием кривизны поверхности M^k в пространстве постоянной кривизны R^n, то F^p принадлежит $(n-k+p)$-плоскости пространства R^n.

Следствие. *Меридианы резной поверхности являются вполне геодезическими подмногообразиями кривизны, параллели — подмногообразиями кривизны.*

Доказательство. Из определения резной поверхности следует, что нормальные пространства к резной поверхности вдоль меридиана F^p принадлежат k-плоскости семейства, в которой лежит меридиан F^p. Но тогда по теореме 4 меридианы являются вполне геодезическими подмногообразиями кривизны.

Докажем теперь, что и параллели резной поверхности являются подмногообразиями кривизны. Пусть $\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_p$ и $\boldsymbol{X}_{p+1}, \ldots, \boldsymbol{X}_k$ — координатные векторные поля семейства меридианов и параллелей соответственно. Из определения резной поверхности следует, что $\boldsymbol{X}_i \perp \boldsymbol{X}_r$ ($i=1, \ldots, p$; $r=p+1, \ldots, k$). Компоненты второй квадратичной формы поверхности M^k относительно произвольной нормали $\boldsymbol{N}$ имеют вид [16] $\langle \nabla_{X_\alpha}N; \boldsymbol{X}_\beta \rangle = \langle \nabla_{X_\beta}N; \boldsymbol{X}_\alpha \rangle = \Omega_{\Lambda|\alpha\beta}$.

Рассмотрим $\langle \nabla_{X_i}N; \boldsymbol{X}_r \rangle = \langle \nabla_{X_r}N; \boldsymbol{X}_i \rangle$. Так как меридианы поверхности M^k являются подмногообразиями кривизны, то

$\nabla x_i N = \sum_j a_{ij} X_j + N_1$ $(j = 1, \ldots, p)$, где N_1 — нормаль к M^k. Но векторы X_r перпендикулярны к X_j, значит, $\langle \nabla x_i N; X_r \rangle = \langle \nabla x_r N; X_i \rangle = 0$. Следовательно, $\nabla x_r N = \sum_s \alpha_{rs} X_s + N_2$, где N_2 — нормаль к M^k. По определению это и означает, что параллели поверхности M^k являются подмногообразиями кривизны.

Докажем теперь, что поверхность M^n, реализующая метрику ds^2 в теореме 1, резная. Рассмотрим семейство координатных линий x_1 и какое-либо координатное подмногообразие F^{n-1} $(x_1 = \mathrm{const})$ на поверхности M^n. Через каждую точку $z \in F^{n-1}$ проходит единственная координатная линия x_1. Так как координатные линии x_1 являются и геодезическими, и линиями кривизны поверхности M^n, то — это доказано в [15] — они принадлежат $(m - n + 1)$-плоскостям пространства R^m. Различные координатные линии x_1 принадлежат различным $(m - n + 1)$-плоскостям. Через каждую точку $z \in F^{n-1}$ проходит единственная $(m - n + 1)$-плоскость, которая содержит координатную линию x_1 и все нормали к поверхности M^n вдоль этой линии. Таким образом, в R^m эти плоскости составляют $(n - 1)$-параметрическое семейство. Касательные пространства к координатным подмногообразиям $x_1 = \mathrm{const}$ поверхности M^n перпендикулярны касательному вектору к координатной линии x_1 и ко всем нормалям поверхности M^n вдоль линии x_1. Таким образом, касательные пространства к подмногообразиям $x_1 = \mathrm{const}$ перпендикулярны $(m - n + 1)$-плоскостям построенного семейства. Значит, подмногообразия $x_1 = \mathrm{const}$ являются ортогональными траекториями координатных линий x_1, т. е. поверхность M^n — резная.

Список литературы: 1. *Moore J. D.* Isometric immersions of space forms in space forms.— Pacific J. Math., 1972, v. 40, № 1, p. 157—166. 2. *Chen B.—G.* Geometry of submanifolds.— New-York, 1973.— 298 p. 3. *Аминов Ю. А.* Изометрические погружения областей n-мерного пространства Лобачевского в $(2n-1)$-мерное евклидово пространство.— Мат. сб., 1980, **111**, **(153)**, № 3, с. 402—433. 4. *Аминов Ю. А.* Изометрические погружения областей n-мерного пространства Лобачевского в $(2n-1)$-мерное евклидово пространство.— ДАН СССР, **236**, № 3, 1977, с. 521—524. 5. *Синюков Н. С.* Эквидистантные пространства. В кн.: Научный ежегодник ОГУ.— Одесса: Маяк. 1957.—153 с. 6. *Синюков Н. С.* Геодезические отображения римановых пространств.— М.: Наука, 1979.— 255 с. 7. *Эйзенхарт Л. П.* Риманова геометрия.— М.: ГИИЛ, 1948.— 316 с. 8. *Bianchi L.* Lezioni di geometria differenziale, v. 2, part 2.— Bologna, 1924.—833 p. 9. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения.— М.: Мир, 1970.—720 с. 10. *Борисенко А. А.* О поверхностях отрицательной внешней кривизны с полем главных направлений.— Укр. геометр. сб., 1980, вып. 23, с. 30—32. 11. *Погорелов А. В.* Дифференциальная геометрия.— М.: Наука, 1974.— 176 с. 12. *Норден А. П.* Теория поверхностей.— М., 1956.— 260 с. 13. *Борисенко А. А.* О внешне геометрических свойствах параболических поверхностей и топологических свойствах седловых поверхностей в симметрических пространствах ранга один.— Мат. сб.:, **116**, № 3, с. 440—457. 14. *Kobayashi S., Nomizu K.* Foundations of differential geometry.— New—York, v. 1, 1963.—329 p.; v. 2, 1969.—470 p. 15. *Лисица В. Т.* О поверхностях с полем главных направлений в пространствах постоянной кривизны.— Укр. геометр. сб., 1980, вып. 23, с. 74—84. 16. *Громол Д., Клингенберг В., Мейер В.* Риманова геометрия в целом.— М.: Мир, 1971.—343 с.

Поступила в редколлегию 03.10.81.

УДК 513

В. Б. Маренич

МЕТРИЧЕСКОЕ СТРОЕНИЕ ОТКРЫТЫХ МНОГООБРАЗИЙ НЕОТРИЦАТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ

Объектом исследования является гладкое, полное, некомпактное (открытое), односвязное риманово многообразие неотрицательной кривизны V^n. В известной работе [1] в таком многообразии было построено семейство компактных абсолютно выпуклых множеств C_t, $0 \leqslant t \leqslant T$, со свойствами:

I. C_T может быть выбрано содержащим любой наперед заданный компакт в V^n. Внутренность C_T не пуста.

II. Существует разбиение $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = T$ отрезка $[0, T]$ такое, что для всякого $t_{i-1} < t < t_i$ справедливо

$$C_t = \{p \in C_{t_i} \mid \rho(p, \partial C_{t_i}) \geqslant t_i - t\}.$$

III. $\dim C_{t_{i-1}} < \dim C_{t_i}$.

IV. $C_0 = S$ — вполне геодезическое подмногообразие без края такое, что V^n диффеоморфно νS — пространству нормального расслоения S в V^n.

V. Если $\dim S > 0$, то для всякой точки p из S и любого двумерного направления σ, образованного векторами v из $\nu_p S$ (множества нормальных к S векторов в точке p) и e из $\tau_p S$ (множества касательных к S векторов в точке p), справедливо равенство $K_\sigma = 0$, где K_σ — секционная кривизна V^n в направлении σ.

Из точки p на S в направлении v из $\nu_p S$ проведем геодезическую $l_v(\rho)$, где ρ — длина дуги. Через $\sigma(p, v, w, e, \rho)$ обозначим двумерное направление, образованное векторами $w(\rho)$ и $e(\rho)$ — образами векторов w из $\nu_p S$ и e из $\tau_p S$ при параллельном переносе из p в $l_v(\rho)$ вдоль l_v. По свойству V $K_{\sigma(p, v, w, e, 0)} = 0$. Поэтому из неотрицательности кривизны V^n следует, что для всех p из S и v, w из $\nu_p S$, e из $\tau_p S$ выполнено, что $K_{\sigma(p, v, w, e, \rho)} \leqslant O(\rho^2)$. В работе доказываются две теоремы.

Теорема 1. *Если для всех точек p из S, всех v из $\nu_p S$ и e из $\tau_p S$ выполнено неравенство*

$$K_{\sigma(p, v, w, e, \rho)} \leqslant O(\rho^4), \tag{1}$$

а также для всех двумерных направлений σ, лежащих в $\nu_p S$, выполнено равенство $K_\sigma = 0$, то многообразие V^n изометрично прямому произведению S и некоторого многообразия неотрицательной *кривизны, диффеоморфного евклидову пространству соответствующей размерности.*

Теорема 2. *Если для всех точек p из S, всех v и w из $\nu_p S$ и e из $\tau_p S$ имеет место неравенство $K_{\sigma(p,\,v,\,w,\,e,\,\rho)} \leqslant O(\rho^4)$, то многообразие V^n изометрично прямому произведению S и некоторого многообразия неотрицательной кривизны, диффеоморфного евклидову пространству соответствующей размерности.*

Везде ниже предполагается, что V^n односвязно. Этим, очевидно, не ограничивается общность рассуждений, так как общий случай сводится к односвязному при переходе к $\widetilde{V}^n$ — универсальной накрывающей V^n; $\dim S = n - d + 1 > 0$.

1. Оператор параллельного переноса

Основным пунктом при доказательстве теорем 1 и 2 является доказательство того, что если выполнены условия этих теорем, то оператор I_ω — параллельного переноса вектора вдоль замкнутого пути ω, лежащего в S с началом и концом в точке p, действует тождественно на векторах из $\nu_p S$: $I_\omega(v) \equiv v$.

Пусть в S задана двумерная площадка $d(\tau, s)$, $0 \leqslant \tau \leqslant \tau'$, $0 \leqslant s \leqslant s'$, такая, что $d(0, 0) = p$. Обозначим через $\omega = \partial d(\tau, s)$ ее границу и найдем формулу для оператора I_ω — параллельного переноса вектора вдоль контура ω. Пусть v из $\tau_p V^n$ произвольно. На $d(\tau, s)$ определим векторное поле $v(\tau, s)$:

$$v(0, s) = I_{pd(0,\,s)}(v);\quad v(\tau, s') = I_{d(0,\,s')d(\tau,\,s')}(v(0, s'));$$
$$v(\tau, s) = I_{d(\tau,\,s')d(\tau,\,s)}(v(\tau, s')), \tag{2}$$

где I — операторы параллельного переноса вдоль соответствующих координатных линий в $d(\tau, s)$: $\tau = \mathrm{const}$ или $s = \mathrm{const}$. Направление обхода контура выбирается «против часовой стрелки», т. е. так, чтобы $I_\omega(v) = I_{d(\tau',\,0)p}(v(\tau', 0))$. По формуле Тейлора

$$I_{d(\tau',\,0)p}(v(\tau', 0)) = v + \int\limits_0^{\tau'} \frac{D}{\partial\tau} v(\tau, 0)\, d\tau,$$

где под интегралом от векторного поля $\frac{D}{\partial\tau} v(\tau, 0)$ вдоль кривой $d(\tau, 0)$, $0 \leqslant \tau \leqslant \tau'$, понимается обычный интеграл в $\tau_p V^n$ от векторного поля $I_{d(\tau,\,0)p}\left(\frac{D}{\partial\tau} v(\tau, 0)\right)$ — поля, полученного параллельным переносом векторного поля $\frac{D}{\partial\tau} v(\tau, 0)$ на кривой $d(\tau, 0)$ из точки $d(\tau, 0)$ в точку p вдоль $d(\tau'', 0)$, $0 \leqslant \tau'' \leqslant \tau$. Аналогично,

$$\frac{D}{\partial\tau} v(\tau, 0) = I_{d(\tau,\,s')d(\tau,\,0)}\left(\frac{D}{\partial\tau} v(\tau, s')\right) - \int\limits_0^{s'} \frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial\tau} v(\tau, s)\, ds.$$

По определению выполнено

$$\frac{D}{\partial\tau}v(\tau,\ s')\equiv 0,\ \frac{D}{\partial s}v(\tau,\ s)\equiv 0.$$

Поэтому

$$I_\omega(v)=v-\int_0^{\tau'}\int_0^{s'}\frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial\tau}v(\tau,\ s)\,d\tau ds=v-\int_0^{\tau'}\int_0^{s'}\left(\frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial\tau}v(\tau,\ s)-\right.$$

$$\left.-\frac{D}{\partial\tau}\frac{D}{\partial s}v(\tau,\ s)\right)d\tau ds.$$

Так как поля $\frac{\partial}{\partial\tau}$ и $\frac{\partial}{\partial s}$ координатные, т. е. коммутируют, то

$$\frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial\tau}v(\tau,\ s)-\frac{D}{\partial\tau}\frac{D}{\partial s}v(\tau,\ s)=\frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial\tau}v(\tau,\ s)-\frac{D}{\partial\tau}\frac{D}{\partial s}v(\tau,\ s)-$$

$$-\frac{D}{\partial\left[\frac{\partial}{\partial\tau},\ \frac{\partial}{\partial s}\right]}v(\tau,\ s)=R\left(\frac{\partial}{\partial s},\ \frac{\partial}{\partial\tau}\right)v(\tau,\ s).$$

Таким образом, искомая формула имеет вид

$$I_\omega(v)=v-\int_0^{\tau'}\int_0^{s'}R\left(\frac{\partial}{\partial s},\ \frac{\partial}{\partial\tau}\right)v(\tau,\ s)\,dsd\tau. \qquad (3)$$

Если выполнены условия теоремы 1 или 2, то для любого вектора v из ν_pS и любого e из τ_pS справедливо неравенство (1). Сначала докажем, что I_ω действует тождественно на ν_pS, если выполнены условия теоремы 1, т. е. в случае, когда, кроме условия (1) для любой точки p на S и любого двумерного направления σ, лежащего в ν_pS, справедливо равенство $K_\sigma=0$. Для этого, как будет показано ниже, достаточно доказать, что для произвольных векторов $\frac{\partial}{\partial\tau}$ и $\frac{\partial}{\partial s}$ из τ_pS и любого v из ν_pS будет $R\left(\frac{\partial}{\partial s},\ \frac{\partial}{\partial\tau}\right)v=0$. (Для доказательства последнего равенства его, очевидно, достаточно проверить для $\frac{\partial}{\partial s}$, $\frac{\partial}{\partial\tau}$ — координатных полей: $\frac{\partial}{\partial s}=e_j$; $\frac{\partial}{\partial\tau}=e_k$). Обозначим:

$$q=\exp_p\left(a\frac{\partial}{\partial s}\right);\ q'=\exp_p\left(a\frac{\partial}{\partial\tau}\right);\ v_{q'}=I_{pq'}(v);\ v_{q'}=I_{pq'}(v);$$

$$p_\xi=\exp_p(\xi v);\ \ q_\xi=\exp_q(\xi v_q);\ \ q'_\xi=\exp_{q'}(\xi v_{q'}),$$

где I_{pq} — оператор параллельного переноса вдоль соединяющей точки p и q кратчайшей pq, $\exp_p$ — экспоненциальное отображение V^n в точке p.

Лемма 1. *Для длин сторон $p_\xi q_\xi$ и $p_\xi q'_\xi$ треугольника $p_\xi q_\xi q'_\xi$ справедливы соотношения:*

$$|\rho(p,\ q)-\rho(p_\xi q_\xi)|\leqslant O(\xi^4);\ |\rho(p,\ q')-\rho(p_\xi,\ q'_\xi)|\leqslant O(\xi^4).$$

Доказательство легко следует из формул первой и второй вариаций длины (см. [2, с. 141]) и оценки (1) кривизны.

Лемма 2. *Пусть* $l_\xi(s)$ *и* $l'_\xi(s)$, $0 \leqslant s \leqslant a$, *— кратчайшие, соединяющие точки* p_ξ *и* q_ξ *и точки* p_ξ *и* q'_ξ *соответственно. Параметр* s *пропорционален длине дуги. Тогда*

$$\frac{D^2}{\partial\xi^2}\,\dot l_\xi(s)\,|_{\xi,\,s=0} = \frac{D^2}{\partial\xi^2}\,\dot l'_\xi(s)\,|_{\xi,\,s=0} = 0.$$

Доказательство. Обозначим через $\eta_\xi(s)$ якобиевы поля вдоль кратчайших $l_\xi(s)$, порожденные семейством $l_\xi(s)$: $\eta_\xi(s) = \frac{\partial}{\partial\xi'}\,l_{\xi'}(s)\,|_{\xi'=\xi}$. По определению, для полей $\eta_\xi(s)$ справедливы такие граничные условия: $\eta_\xi(0) = I_{pp_\xi}(v)$; $\eta_\xi(a) = I_{qq_\xi}(v_q)$. Из формулы (3) и равенств $\frac{\partial}{\partial\xi}(\xi,\ s) = \eta_\xi(s)$ и $\frac{\partial}{\partial s}(\xi,\ s) = \dot l_\xi(s)$ находим

$$I_{q_\xi p_\xi}(\eta_\xi(a)) - \eta_\xi(0) = -\int_0^\xi\int_0^a R\,(\dot l_\theta(s),\ \eta_\theta(s))\,\tilde\eta_\theta(s)\,d\theta ds, \tag{4}$$

где $\tilde\eta_\theta(s)$ — векторное поле на пленке $l_\theta(s)$, $0 \leqslant \theta \leqslant \xi$, $0 \leqslant s \leqslant a$, построенное способом (2). При $\theta = 0$ выполнено $\tilde\eta_0(s) = \eta_0(s)$, $R\,(\dot l_0(s),\ \eta_0(s))\,\eta_0(s) = 0$. Поэтому из (4) получаем $\|\,I_{q_\xi p_\xi}(\eta_\xi(a)) - \eta_\xi(0)\,\| \leqslant a\cdot O(\xi^2)$. Из системы уравнений Якоби для поля $\eta_\xi(s)$

$$\frac{D^2}{\partial s^2}\,\eta_\xi(s) + R\,(\dot l_\xi(s),\ \eta_\xi(s))\,\dot l_\xi(s) = 0; \tag{5}$$

по формуле Тейлора находим

$$I_{q_\xi p_\xi}(\eta_\xi(a)) = \eta_\xi(0) + a\cdot\frac{D}{\partial s}\,\eta_\xi(s)\Big|_{s=0} + \int_0^a\int_0^s R\,(\dot l_\xi(\theta),\ \eta_\xi(\theta))\,\dot l_\xi(\theta)\,d\theta ds.$$

Отсюда следует, что

$$\left\|\frac{D}{\partial s}\,\eta_\xi(s)\,|_{s=0}\right\| \leqslant \frac{1}{a}\,\|\,I_{q_\xi p_\xi}(\eta_\xi(a)) - \eta_\xi(0)\,\| + \\ + \frac{1}{a}\left\|\int_0^a\int_0^s R(\dot l_\xi(\theta),\ \eta_\xi(\theta))\,\dot l_\xi(\theta)\,d\theta ds\right\|. \tag{6}$$

Из системы уравнений (5) находим также

$$I_{l_\xi(s)p_\xi}\left(\frac{D}{\partial s}\,\eta_\xi(s)\right) = \frac{D}{\partial s}\,\eta_\xi(s)\,|_{s=0} - \int_0^s R\,(\dot l_\xi(\theta),\ \eta_\xi(\theta))\,\dot l_\xi(\theta)\,d\theta.$$

Поэтому из последнего равенства и неравенства (6) следует, что

$$\left\|\frac{D}{\partial s}\,\eta_\xi(s)\right\| \leqslant \frac{1}{a}\,\|\,I_{q_\xi p_\xi}(\eta_\xi(a)) - \eta_\xi(0)\,\| + \\ + \left\|\int_0^s R\,(\dot l_\xi(\theta),\ \eta_\xi(\theta))\,\dot l_\xi(\theta)\,d\theta\right\| + \frac{1}{a}\int_0^a\int_0^s R\,(\dot l_\xi(\theta),\ \eta_\xi(\theta))\,\dot l_\xi(\theta)\,d\theta ds\,\Big\| \leqslant$$

$$\leqslant O(\xi^2) + 2\int_0^a \| R(\dot{l}_\xi(s), \eta_\xi(s))\, \dot{l}_\xi(s) \|\, ds. \qquad (7)$$

Вдоль $l_0(s)$ определим векторное поле $v(s) = I_{pl_0(s)}(v)$. Так как v — из $\nu_p S$, то $v(s)$ принадлежит $\nu_{l_0(s)} V$. Поэтому кривизна V^n в любой точке $l_0(s)$ в двумерном направлении, образованном векторами $\dot{l}_0(s)$ и $v(s)$, равна нулю. Следовательно, якобиево поле $\eta_0(s)$ и поле $v(s)$ совпадают, $\eta_0(s) = v(s)$, поэтому $\frac{D}{\partial s}\eta_\xi(s)\big|_{\xi=0} \equiv 0$. Отсюда и из неравенства (7) находим

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left\| \frac{D}{\partial s}\eta_\xi(s) \right\|\Big|_{\xi=0} \leqslant 2\frac{\partial}{\partial \xi}\int_0^a \| R(\dot{l}_\xi(s), \eta_\xi(s))\, \dot{l}_\xi(s) \|\, ds\,\Big|_{\xi=0}.$$

Непосредственно выполняя дифференцирование в правой части последнего неравенства, находим, что для некоторой константы K

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left\| \frac{D}{\partial s}\eta_\xi(s) \right\|\Big|_{\xi=0} \leqslant K\int_0^a \left\| \frac{D}{\partial \xi}\dot{l}_\xi(s) \right\| ds\Big|_{\xi=0} + K\int_0^a \left\| \frac{D}{\partial \xi}\eta_\xi(s) \right\| ds\Big|_{\xi=0} +$$

$$+ K\int_0^a \left\| \frac{D}{\partial \xi} R(\alpha(\xi, s), \beta(\xi, s))\, \alpha(\xi, s) \right\| ds\,\Big|_{\xi=0}, \qquad (8)$$

где $\alpha(\xi, s)$ и $\beta(\xi, s)$ такие векторные поля на $l_\xi(s)$, что $\alpha(0, s) = \dot{l}_0(s)$; $\beta(0, s) = v(s)$;

$$\frac{D}{\partial \xi}\alpha(\xi, s)\Big|_{\xi=0} = 0;\ \frac{D}{\partial \xi}\beta(\xi, s)\Big|_{\xi=0} = 0.$$

По определению $\alpha(0, s)$ принадлежит $\tau_{l_0(s)} S$, а $\beta(0, s)$ принадлежит $\nu_{l_0(s)} S$. Поэтому из оценки (1) следует

$$\left\| \frac{D}{\partial \xi} R(\alpha(\xi, s), \beta(\xi, s))\, \alpha(\xi, s) \right\|\Big|_{\xi=0} = 0.$$

Так как

$$\frac{D}{\partial \xi}\dot{l}_\xi(s)\Big|_{\xi=0} = \frac{D}{\partial \xi}\frac{D}{\partial s} l_\xi(s)\Big|_{\xi=0} = \frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial \xi} l_\xi(s)\Big|_{\xi=0} = \frac{D}{\partial s}\eta_\xi(s)\Big|_{\xi=0} = 0,$$

то из (8) получаем

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left\| \frac{D}{\partial s}\eta_\xi(s) \right\|\Big|_{\xi=0} \leqslant K\int_0^a \left\| \frac{D}{\partial \xi}\eta_\xi(s) \right\|\Big|_{\xi=0} ds$$

или

$$\sup_s \frac{\partial}{\partial \xi}\left\| \frac{D}{\partial s}\eta_\xi(s) \right\|\Big|_{\xi=0} \leqslant Ka \sup_s \left\| \frac{D}{\partial \xi}\eta_\xi(s) \right\|\Big|_{\xi=0}.$$

Но так как $\frac{D}{\partial \xi}\eta_\xi(0) = 0$ по определению и поля $\frac{\partial}{\partial \xi}, \frac{\partial}{\partial s}$ коммутируют, то

$$I_{t_0(s)p}\left(\frac{D}{\partial\xi}\eta_\xi(s)\right)\Big|_{\xi=0}=\frac{D}{\partial\xi}\eta_\xi(0)+\int_0^s\frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial\xi}\eta_\xi(s)\,ds\Big|_{\xi=0}=$$

$$=\int_0^s R\left(\frac{\partial}{\partial s},\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\eta_\xi(s)\,ds\Big|_{\xi=0}+\int_0^s\frac{D}{\partial\xi}\frac{D}{\partial s}\eta_\xi(s)\,ds\Big|_{\xi=0}=\int_0^s\frac{D}{\partial\xi}\frac{D}{\partial s}\eta_\xi(s)\Big|_{\xi=0}ds.$$

Поэтому

$$\sup_s\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\left\|\frac{D}{\partial s}\eta_\xi(s)\right\|\Big|_{\xi=0}\right)\leqslant Ka^2\sup_s\left\|\frac{D}{\partial\xi}\frac{D}{\partial s}\eta_\xi(s)\right\|\Big|_{\xi=0}.$$

Так как $\frac{D}{\partial s}\eta_\xi(s)\Big|_{\xi=0}\equiv 0$, как уже отмечалось, то из последнего неравенства легко следует, что

$$\sup_s\left\|\frac{D}{\partial\xi}\frac{D}{\partial s}\eta_\xi(s)\right\|\Big|_{\xi=0}\leqslant Ka^2\sup_s\left\|\frac{D}{\partial\xi}\frac{D}{\partial s}\eta_\xi(s)\right\|\Big|_{\xi=0}. \tag{9}$$

А так как a можно считать достаточно малым, чтобы было $Ka^2<1$, то из (9) следует $\frac{D}{\partial\xi}\frac{D}{\partial s}\eta_\xi(s)\Big|_{\xi=0}\equiv 0$, откуда легко получаем требуемое

$$\frac{D^2}{\partial\xi^2}\dot{l}_\xi(s)\Big|_{\xi=0}=\frac{D^2}{\partial\xi^2}\frac{D}{\partial s}l_\xi(s)\Big|_{\xi=0}=\frac{D}{\partial\xi}\frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial\xi}l_\xi(s)\Big|_{\xi=0}=$$

$$=\frac{D}{\partial\xi}\frac{D}{\partial s}\eta_\xi(s)\Big|_{\xi=0}=0.$$

Совершенно аналогично для $l'_\xi(s)$ — кратчайшей, соединяющей p_ξ и q'_ξ, будет $\frac{D^2}{\partial\xi^2}\dot{l}'_\xi(s)|_{\xi=0}=0$. Лемма 2 доказана.

Оценим теперь изменение длины стороны $q_\xi q'_\xi$ в треугольнике $p_\xi q_\xi q'_\xi$. Пусть $\bar\gamma_\xi(t)$, $0\leqslant t\leqslant a$, — кратчайшая, соединяющая точки q_ξ и q'_ξ, а $\bar\gamma_{\xi,t}(s)$, $0\leqslant s\leqslant a$, — кратчайшая, соединяющая p_ξ и $\bar\gamma_\xi(t)$. Вектор скорости $\dot{\bar\gamma}_{\xi,t}(0)$ представим в виде суммы двух ортогональных векторов $\dot{\bar\gamma}_{\xi,t}(0)=w_\xi(t)+v_\xi(t)$, где $w_\xi(t)$ — вектор из двумерной плоскости, порожденной векторами $\dot{l}_\xi(0)$ и $\dot{l}'_\xi(0)$. Обозначим $\dot\gamma_{\xi,t}(0)=w_\xi(t)+I_{p p_\xi}(v_0(t))$. Из леммы 2 следует, что для всех t

$$\frac{D^2}{\partial\xi^2}\dot\gamma_{\xi,t}(0)\Big|_{\xi=0}=0. \tag{10}$$

Зададим семейство кривых $\gamma_\xi(t)$, соединяющих точки q_ξ и q'_ξ, $\gamma_\xi(t)=\exp_{p_\xi}(a\dot\gamma_{\xi,t}(0))$. Кратчайшая $\gamma_{\xi,t}(s)=\exp_{p_\xi}(s\dot\gamma_{\xi,t}(0))$, $0\leqslant s\leqslant a$, соединяет точки p_ξ и $\gamma_\xi(t)$. Из формулы первой вариации длины легко видеть, что $\frac{\partial}{\partial\xi}\|\gamma_\xi(t)\|\Big|_{\xi=0}=0$, где $\|\gamma_\xi(t)\|$ — длина кривой $\gamma_\xi(t)$. А так как $\gamma_\xi(t)$ соединяет q_ξ и q'_ξ, то $\rho(q_\xi, q'_\xi) \leqslant \leqslant \|\gamma_\xi(t)\|$. Поэтому из равенства $\rho(q, q') = \|\gamma_0(t)\|$ следует

$$\frac{d^2}{d\xi^2}\rho(q_\xi, q'_\xi)\Big|_{\xi=0} \leqslant \frac{d^2}{d\xi^2}\|\gamma_\xi(t)\|\Big|_{\xi=0}. \tag{11}$$

Семейство кратчайших $\gamma_{\xi, t}(s)$ задает семейство якобиевых полей $\eta_{\xi, t}(s) = \frac{\partial}{\partial t'}\gamma_{\xi, t'}(s)\Big|_{t'=t}$. По определению

$$\|\gamma_\xi(t)\| = \int_0^a \|\eta_{\xi, t}(a)\|\, dt;$$

по определению же якобиево поле $\eta_{\xi, t}(s)$ удовлетворяет следующим начальным условиям:

$$\eta_{\xi, t}(0) = 0;\ \frac{D}{\partial s}\eta_{\xi, t}(0) = \frac{D}{dt}\dot{\gamma}_{\xi, t}(0) \overset{\circ}{=} A_{\xi, t}.$$

Из системы уравнений Якоби для поля $\eta_{\xi, t}(s)$:

$$\frac{D^2}{\partial s^2}\eta_{\xi, t}(s) + R(\dot{\gamma}_{\xi, t}(s), \eta_{\xi, t}(s))\dot{\gamma}_{\xi, t}(s) = 0$$

находим

$$I_{\gamma_\xi(t)p_\xi}(\eta_{\xi, t}(a)) = aA_{\xi, t} - \int_0^a\int_0^s R(\dot{\gamma}_{\xi, t}(\theta), \eta_{\xi, t}(\theta))\dot{\gamma}_{\xi, t}(\theta)\, d\theta\, ds,$$

откуда следует

$$\frac{D}{\partial s}\|\eta_{\xi, t}(s)\|\Big|_{s=0} = \Big\|\frac{D}{\partial s}\eta_{\xi, t}(s)\Big|_{s=0}\Big\| = \|A_{\xi, t}\|;$$

$$\frac{D^2}{\partial s^2}\|\eta_{\xi, t}(s)\|\Big|_{s=0} = 0;\ \frac{D^3}{\partial s^3}\|\eta_{\xi, t}(s)\|\Big|_{s=0} = -\frac{R[\dot{\gamma}_{\xi, t}(0), A_{\xi, t}]}{\|A_{\xi, t}\|}.$$

Из (10) получаем

$$\frac{D^2}{\partial\xi^2}\frac{D}{\partial s}\|\eta_{\xi, t}(s)\|\Big|_{\xi, s=0} = 0;\ \frac{D^2}{\partial\xi^2}\frac{D^2}{\partial s^2}\|\eta_{\xi, t}(s)\|\Big|_{\xi, s=0} = 0;$$

$$\frac{D^2}{\partial\xi^2}\frac{D^3}{\partial s^3}\|\eta_{\xi, t}(s)\|\Big|_{\xi, s=0} = K\frac{D^2}{\partial\xi^2}R[\dot{\gamma}_{\xi, t}(0), A_{\xi, t}]\Big|_{\xi=0}, \tag{12}$$

где K — некоторая константа. Докажем, что правая часть последнего равенства есть нуль.

Лемма 3. *Если выполнено условие* (1) *и секционная кривизна V^n в любой точке p из S и в любом направлении, лежащем в $\nu_p S$, равна нулю, то*

$$\frac{D^2}{\partial\xi^2}R[\dot{\gamma}_{\xi, t}(0), A_{\xi, t}]\Big|_{\xi=0} = 0.$$

Доказательство. Из точки p в направлении $\dot{\gamma}_{0, t}(0)$ проводим геодезическую $\gamma(t)$. Эта геодезическая лежит в S. Построим систему координат Ферми $(x^1, \ldots, x^n)$ с осью $\gamma(t)$ так, чтобы e_i, $i<d$, — первые $d-1$ координатные векторы этой системы в точке p — образовывали ортонормированный базис в $\nu_p S$, $\gamma(t)$ являлась d-координатной осью, а вектор e_1 совпадал с v. Не ограничивая общности, можно также считать, что $A_{0,t}$ совпадает с некоторым вектором e_k, $k>d$, этой же системы координат в точке p. Геодезическая p_ξ есть тогда по определению 1-координатная ось. Через $g_{ik}(\xi)$, $\Gamma^i_{jk}(\xi)$ и $R_{ij,kl}(\xi)$ обозначим соответственно компоненты метрического тензора, символы Кристоффеля и компоненты тензора кривизны V^n в системе координат Ферми $(x^1, \ldots, x^n)$ с осью $\gamma(t)$, найденные в точке p_ξ.

Лемма 4. Если $k \geqslant d$ и выполнено (1), *то* $|\Gamma^s_{1k}(\xi)| \leqslant O(\xi^3)$.

Доказательство. Пусть $\bar{e}_k(\xi)$ — вектор e_k, параллельно перенесенный из p в p_ξ вдоль геодезической $p_{\xi'}$, $0 \leqslant \xi' \leqslant \xi$. Как известно, справедливо неравенство $|g_{ik}(\xi)-\delta_{ik}| \leqslant O(\xi^2)$. Поэтому, если $e_k(\xi)$ — координатные векторы этой системы в точке p_ξ, то $\|\bar{e}_k(\xi)-e_k(\xi)\| \leqslant O(\xi^2)$. (13). Так как по условию (1) $K_{\sigma(p,\, e_1,\, e_1,\, e_k,\, \xi)} \leqslant \leqslant O(\xi^4)$, то из неравенства (13) получаем $R_{1k,k1}(\xi) \leqslant O(\xi^2) \sum\limits_s |R_{1k,s1} \times (\xi)| + O(\xi^4)$. Из того, что кривизна V^n неотрицательна, следует $|R_{1k,s1}(\xi)| \leqslant \sqrt{R_{1k,k1}(\xi) R_{1s,s1}(\xi)}$. Поэтому $R_{1k,k1}(\xi) \leqslant \leqslant O(\xi^4)$ и $|R_{1k,s1}(\xi)| \leqslant O(\xi^2)$. По определению

$$R_{1k,s1}(\xi) = \left(-\frac{\partial\Gamma^r_{k1}}{\partial x^1}(\xi) + \frac{\partial\Gamma^r_{11}}{\partial x^k}(\xi) - \Gamma^l_{1k}(\xi)\Gamma^r_{1l}(\xi) + \Gamma^l_{11}(\xi)\Gamma^r_{kl}(\xi)\right) g_{rs}(\xi).$$

А так как в системе координат $(x^1, \ldots, x^n)$ выполнено неравенство $|\Gamma^l_{jk}(\xi)| \leqslant O(\xi)$, то

$$\left|\frac{\partial\Gamma^s_{1k}}{\partial x^1}(\xi) - \frac{\partial\Gamma^s_{11}}{\partial x^k}(\xi)\right| \leqslant O(\xi^2). \tag{14}$$

Если $k=d$, то, как известно, $\Gamma^s_{11}(\xi, t) \equiv 0$, где $\Gamma^s_{11}(\xi, t)$ — символ Кристоффеля в точке $p(\xi, t)$ с координатами $(p(\xi, t))^i = = \xi\delta_{i1} + t\delta_{id}$. Поэтому $\dfrac{\partial\Gamma^s_{11}}{\partial x^d}(\xi) = 0$, или $\left|\dfrac{\partial\Gamma^s_{1d}}{\partial \xi}(\xi)\right| \leqslant O(\xi^2)$; значит, $|\Gamma^s_{1d}(\xi)| \leqslant O(\xi^3)$. Если же $k \neq d$, то из того, что для всех λ и μ кривая $x(t)$, координаты которой суть $x^i(t) = \lambda t\delta_{i1} + \mu t\delta_{ik}$, является геодезической, нетрудно получить $\Gamma^s_{11}(x(t))(x^1(t))^2 + + 2\Gamma^s_{1k}(x(t))(x^1(t)\,x^k(t)) + \Gamma^s_{kk}(x(t))(x^k(t))^2 = 0$; дифференцируя по x^k при $x^k=0$, получим

$$2\Gamma^s_{1k}(x(t))(x^1(t)) + \frac{\partial\Gamma^s_{11}}{\partial x^k}(x(t))(x^1(t))^2 = 0.$$

Подставляя полученный результат в (14), находим $\left|\dfrac{\partial\Gamma^s_{1k}}{\partial x^1}(\xi) + \right.$

$+\frac{2}{\xi}\Gamma^{s}_{1k}(\xi)\Big| \leqslant O(\xi^2)$, откуда легко следует доказываемое утверждение леммы 4.

Продолжим доказательство леммы 3. Из леммы 2 следует, что

$$\frac{D^2}{\partial\xi^2}\dot{\gamma}_{\xi,t}(0)\Big|_{\xi=0} = \frac{D^2}{\partial\xi^2}A_{\xi,t}\Big|_{\xi=0} = 0.$$

А так как, согласно лемме 4, тем же свойством обладают координатные векторы e_k, $k \geqslant d$, системы координат $(x^1, \ldots, x^n)$ вдоль геодезической p_ξ, то для доказательства леммы достаточно проверить, что $\frac{D^2}{\partial\xi^2}R_{dk,\,dk}(\xi)\Big|_{\xi=0} = 0$. Действительно, согласно тождеству Бьянки [2, с. 53]

$$(R_{dk,\,dk})'_1(\xi) + (R_{dk,\,k1})'_d(\xi) + (R_{dk,\,1d})'_k(\xi) = \big(\Gamma^s_{d1}R_{sk,\,dk} + \Gamma^s_{dd}R_{sk,\,k1} + \\ + \Gamma^s_{dk}R_{sk,/1d} + \Gamma^s_{k1}R_{ds,\,dk} + \Gamma^s_{dk}R_{ds,\,k1} + \Gamma^s_{kk}R_{ds,\,1d}\big)(\xi),$$

где

$$(R_{ij,\,kl})'_s(\xi) = \frac{\partial R_{ij,\,kl}}{\partial x^s}(\xi),$$

пользуясь оценкой (1) и оценками леммы 4, запишем

$$\big((R_{dk,\,dk})''_{11}(\xi) + (R_{dk,\,1d})''_{k1}(\xi)\big)\big|_{\xi=0} = \left(\frac{\partial\Gamma^s_{dk}}{\partial\xi}(\xi)\,(R_{sk,\,1d}(\xi) + \\ + R_{ds,\,k1}(\xi))\right)\Bigg|_{\xi=0}.$$

Но $R_{sk,\,1d}(0) + R_{ds,\,k1}(0) = R_{sk,\,1d}(0) + R_{1k,\,sd}(0) = \langle R(e_s,\ e_k + e_d) \times \times e_1,\ e_k + e_d\rangle - R_{sk,\,1k}(0) - R_{sd,\,1d}(0) = 0$, откуда следует, что

$$(R_{dk,\,dk})''_{11}(\xi)\,|_{\xi=0} = -(R_{dk,\,1d})''_{k1}(\xi)\,|_{\xi=0}.$$

Докажем, что если секционная кривизна V^n во всех точках p из S и во всех двумерных направлениях из $\nu_p S$ равна нулю, то $(R_{dk,\,1d})''_{k1}(0) = 0$. **(15)**. Обозначим через $p(\alpha,\ \beta)$ точку, все координаты которой равны нулю, кроме 1-й, равной α, и k-й, равной β. Значение компоненты $R_{ij,\,kl}$ тензора кривизны в этой точке обозначим через $R_{ij,\,kl}(\alpha,\ \beta)$. Из неравенства $|R_{dk,\,1d}(\alpha,\ \beta)| \leqslant \leqslant \sqrt{R_{d1,\,1d}(\alpha,\ \beta)\,R_{dk,\,kd}(\alpha,\ \beta)}$ легко следует, что для доказательства (15) достаточно доказать, что для всех β будет

$$\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}R_{d1,\,1d}(\alpha,\ \beta)\Big|_{\alpha=0} = 0.$$

Через $\bar{p}(\alpha,\ \beta)$ обозначим $\exp_{p(0,\,\beta)}(\alpha I_{pp(0,\,\beta)}(v))$ и докажем, что $\rho(p(\alpha,\ \beta),\ \bar{p}(\alpha,\ \beta)) \leqslant O(\alpha^3)$. Действительно, если $\bar{l}_{\alpha,\,\beta}(s)$ — геодезическая, соединяющая точку p с точкой $\bar{p}(\alpha,\ \beta)$, то, повторяя рассуждения леммы 2 с соответствующими изменениями, нетрудно получить, что для всех β будет $\frac{D^2}{\partial\alpha^2}\,(\dot{\bar{l}}_{\alpha,\beta}(0)-\dot{l}_{\alpha,\beta}(0))\Big|_{\alpha=0}=0$, где $l_{\alpha,\beta}(s)$ — геодезическая, соединяющая точку p с точкой $p(\alpha,\beta)$. Отсюда и следует, что $\rho(p(\alpha,\beta,\bar{p}(\alpha,\beta))\leqslant O(\alpha^3)$ **(16).**

Вдоль кривых $\gamma_\beta(\alpha)=p(\alpha,\beta')|_{\beta'=\beta}$ и $\bar{\gamma}_\beta(\alpha)=\bar{p}(\alpha,\beta')|_{\beta'=\beta}$ зададим векторные поля $\bar{e}_i(\alpha,\beta)=I_{p(0,\beta)p(\alpha,\beta)}(e_i(p(0,\beta)))$; $\bar{\bar{e}}_i(\alpha,\beta)=$ $=I_{p(0,\beta)\bar{p}(\alpha,\beta)}(e_i(p(0,\beta)))$ и сравним равенства

$$\bar{R}_{d1,1d}(\alpha,\beta)=R\,[\bar{e}_1(\alpha,\beta),\ \bar{e}_d(\alpha,\beta)]$$

и $\bar{\bar{R}}_{d1,1d}(\alpha,\beta)=R\,[\bar{\bar{e}}_1(\alpha,\beta),\ \bar{\bar{e}}_d(\alpha,\beta)]$. Пользуясь (16), получаем $|\bar{R}_{d1,1d}(\alpha,\beta)-\bar{\bar{R}}_{d1,1d}(\alpha,\beta)|\leqslant O(\alpha^3)$ **(17).**

Сравним $\bar{R}_{d1,1d}(\alpha,\beta)$ с $\tilde{R}_{d1,1d}(\alpha,\beta)=R\,[e_1(p(\alpha,\beta)),\bar{e}_d(\alpha,\beta)]$. Из неравенства (16) и того, что кривая $\bar{\gamma}_\beta(\alpha)$ есть геодезическая, следует, что геодезическая кривизна кривой $\gamma_\beta(\alpha)$ в точке $\gamma_\beta(\alpha)$ есть величина порядка $O(\alpha)$. Поэтому $\|e_1(p(\alpha,\beta))-$ $-I_{p(0,\beta)p(\alpha,\beta)}(e_1(p(0,\beta)))\|\leqslant O(\alpha^2)$ или $\|e_1(p(\alpha,\beta))-\bar{e}_1(\alpha,\beta)\|\leqslant$ $\leqslant O(\alpha^2)$. По условию выполнено неравенство $|\bar{\bar{R}}_{d1,1d}(\alpha,\beta|\leqslant$ $\leqslant O(\alpha^4)$. Поэтому из (17) следует $|\bar{R}_{d1,1d}(\alpha,\beta)|\leqslant O(\alpha^3)$ **(18),** откуда уже легко получаем, что $|\bar{R}_{d1,1d}(\alpha,\beta)-\tilde{R}_{d1,1d}(\alpha,\beta)|<$ $<O(\alpha^3)$, или из (18) — что $|\tilde{R}_{d1,1d}(\alpha,\beta)|<O(\alpha^3)$. Таким образом, для всех β будет $\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\tilde{R}_{d1,1d}(\alpha,\beta)\Big|_{\alpha=0}=0$.

Заметим теперь, что из определения $\tilde{R}_{d1,1d}(\alpha,\beta)$ и того, что для всех i будет $R_{d1,di}(0,\beta)=0$, следует, что

$$\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}(R_{d1,1d}(\alpha,\beta)-\tilde{R}_{d1,1d}(\alpha,\beta))\Big|_{\alpha=0}=\sum_{i,j}R_{1i,j1}(0,\beta)\,\Gamma^i_{1d}(0,\beta)\,\Gamma^j_{1d}(0,\beta).$$

Если i или $j\geqslant d$, то $R_{1i,j1}(0,\beta)=0$. Если же i и $j<d$, то из неравенства $|R_{1i,j1}(0,\beta)|\leqslant\sqrt{R_{1i,i1}(0,\beta)\,R_{1j,j1}(0,\beta)}$ получаем, что если секционная кривизна V^n в точках p из S и во всех двумерных направлениях из ν_pS равна нулю, т. е. $R_{1i,i1}(0,\beta)\equiv 0$, то справедливо равенство $\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}R_{d1,1d}(\alpha,\beta)\Big|_{\alpha=0}=0$. Лемма 3 доказана.

Таким образом,

$$\frac{D^2}{\partial\xi^2}\,\frac{D^3}{\partial s^3}\,\|\eta_{\xi,t}(s)\|\Big|_{\xi,\,s=0}=\frac{D^2}{\partial\xi^2}\,\frac{R\,[\dot{\gamma}_{\xi,t}(0),\ A_{\xi,t}]}{\|A_{\xi,t}\|}\Big|_{\xi=0}=0.$$

Из соображений непрерывности получаем, что для всех $0 \leqslant s \leqslant a$ и некоторой константы K выполнено неравенство

$$\frac{D^2}{\partial \xi^2} \frac{D^3}{\partial s^3} \| \eta_{\xi, t}(s) \| \Big|_{\xi=0} \leqslant K.$$

Подставляя полученную оценку вместе с (12) в формулу

$$\| \eta_{\xi, t}(a) \| = a \frac{D}{\partial s} \| \eta_{\xi, t}(s) \| \Big|_{s=0} + \int\limits_0^a \int\limits_0^s \int\limits_0^\theta \frac{D^3}{\partial \lambda^3} \| \eta_{\xi, t}(\lambda) \| \, d\lambda d\theta ds,$$

получаем из (11) следующую оценку:

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \rho \left(q_\xi, q'_\xi\right) \Big|_{\xi=0} \leqslant K a^4. \tag{19}$$

Однако для стоящего слева в последнем выражении значения второй производной длины семейства кратчайших, соединяющих точки q_ξ и q'_ξ, можно воспользоваться формулой второй вариации длины. Пусть $\bar{\gamma}_\xi(t)$ — кратчайшая, соединяющая q_ξ и q'_ξ, а $\mu(t)$ — якобиево поле на $\bar{\gamma}_0(t)$, порожденное семейством $\bar{\gamma}_\xi(t)$; тогда $\mu(t) = \frac{\partial}{\partial \xi} \bar{\gamma}_\xi(t) \Big|_{\xi=0}$. Так как значения поля $\mu(0)$ и $\mu(a)$ соответственно лежат в $\nu_q S$ и $\nu_{q'} S$ и эти два множества переходят друг в друга при параллельных переносах $I_{qq'}$ и $I_{q'q}$ соответственно, то векторное поле $v(t)$ вдоль $\bar{\gamma}_0(t)$ вида

$$v(t) = \frac{a-t}{a} I_{q\bar{\gamma}_0(t)}(\mu(0)) + \frac{t}{a} I_{q'\bar{\gamma}_0(t)}(\mu(a)) \tag{20}$$

ортогонально подмногообразию S: $v(t)$ лежит в $\nu_{\bar{\gamma}_0(t)} S$. Так как для всех векторов w из $\nu_{\bar{\gamma}_0(t)} S$ будет $R[w, \dot{\bar{\gamma}}_0(t)] = 0$, то поле $v(t)$ якобиево. Отсюда и из (20) по формуле второй вариации длины [2, с. 141] получаем

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \rho \left(q_\xi, q'_\xi\right) \Big|_{\xi=0} = \int\limits_0^a \left\| \frac{Dv(t)}{dt} \right\|^2 dt = \frac{\| I_\omega(v) - v \|^2}{a}.$$

Сравнивая полученное соотношение с (19) видим, что $\| I_\omega(v) - v \| < o(a^2)$ **(21)**, т. е. для площадки $d(\tau, s)$, натянутой на контур ω из кратчайших pq, qq' и $q'p$, оператор I_ω параллельного переноса вдоль ω поворачивает произвольный вектор из $\nu_p S$ на угол более высокого порядка малости, чем площадь пленки $d(\tau, s)$. Отсюда легко следует, что для всех $\frac{\partial}{\partial s}$ и $\frac{\partial}{\partial \tau}$ из $\tau_p S$ и v из $\nu_p S$ будет

$$R\left(\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial \tau}\right) v = 0. \tag{22}$$

Действительно, если это равенство в какой-то точке p из S для некоторых векторов $\frac{\partial}{\partial s}$ и $\frac{\partial}{\partial \tau}$ из $\tau_p S$ и v из $\nu_p S$ не выполнено, то, строя семейство площадок вышеуказанного вида, при $a \to 0$ из формулы (3) находим, что $\| I_\omega(v) - v \| \geqslant Ka^2$. Последнее противоречит полученной оценке (21). Отсюда следует справедливость соотношения (22). Из формулы (3) теперь уже легко получается

Лемма 5. *Если выполнены условия теоремы 1, то для любого вектора v из $\nu_p S$ и любого контура ω, лежащего в S с началом и концом в точке p, оператор I_ω параллельного переноса переводит вектор v в себя.*

Пусть теперь выполнено условие теоремы 2, т. е. для всех точек p из S, всех v и w из $\nu_p S$ и e из $\tau_p S$ $K_{\sigma(p,\, v,\, w,\, e,\, \xi)} \leqslant O(\xi^4)$ **(23).** Рассмотрим треугольник pqq' малого диаметра a, лежащий в $\exp_p(\nu_p S): q = \exp_p(av)$; $q' = \exp_p(av')$; v, $v' \in \nu_p S$. Выберем произвольно e из $\tau_p S$ и положим $e_q = I_{pq}(e)$; $e_{q'} = I_{pq'}(e)$; $p_\xi = \exp_p(\xi e)$; $q_\xi = \exp_q(\xi e_q)$, $q'_\xi = \exp_{q'}(\xi e_{q'})$. Рассуждая так же как и при доказательстве леммы 2, нетрудно получить, что

$$\left| \angle \left(\overline{p_\xi q_\xi},\ \overline{p_\xi q'_\xi}\right)\Big|_{\xi=0}^{\xi=a} \right| \leqslant O(a^3). \tag{24}$$

Из формул первой и второй вариации длины и оценки (1) следует, что

$$\begin{gathered} |\rho(p,\ q) - \rho(p_a,\ q_a)| \leqslant O(a^4), \\ \left|\rho(p,\ q') - \rho\left(p_a,\ q'_a\right)\right| \leqslant O(a^4), \end{gathered} \tag{25}$$

а из (23) — что $K_{\sigma(\overline{qq'} e_q)} \leqslant O(a^4)$, $K_{\sigma(\overline{q'q},\, e_{q'})} \leqslant O(a^4)$, где $\sigma(\overline{qq'},\, e_q)$ — двумерное направление, образованное векторами e_q и $\overline{qq'}$ — вектором направления кратчайшей qq' в точке q. Поэтому из формулы второй вариации длины получим:

$$\left|\rho\left(q_a,\ q'_a\right) - \rho(q,\ q')\right| \geqslant \frac{\| I_\omega(e) - e \|^2}{a} - O(a^4), \tag{26}$$

где I_ω — оператор параллельного переноса вдоль контура, образованного сторонами треугольника pqq'.

Пусть σ_ξ — двумерное направление, образованное векторами $I_{pp_\xi}(v)$ и $I_{pp_\xi}(v')$. Покажем, что $\frac{d}{d\xi} K_{\sigma_\xi} \equiv 0$. Не ограничивая общности, можно считать, что $K_{\sigma_\xi} = R_{12,21}(p_\xi)$, т. е.

$$\frac{d}{d\xi} K_{\sigma_\xi} = (R_{12,21})'_d(p_\xi).$$

Запишем тождество Бьянки

$$(R_{12,21})'_d(p_\xi) + (R_{12,1d})'_2(p_\xi) + (R_{12,d2})'_1(p_\xi) = 0.$$

Так как из (23) следует, что $(R_{12,1d})'_2(p_\xi) \equiv 0$ и $(R_{12,d2})'_1(p_\xi) \equiv$ $\equiv 0$, т. е. $(R_{12,21})'_d(p_\xi) \equiv 0$, то $\frac{d}{d\xi} K_{\sigma_\xi} \equiv 0$, откуда находим

$$\frac{d^2}{d\xi^2} K_{\sigma_\xi}\Big|_{\xi=0} = 0. \tag{27}$$

Из оценок (24), (25) и (27) получаем $|\rho(q_a, q'_a) - \rho(q, q')| \leq O(a^4)$. Сравнивая последнее неравенство и оценку (26) видим, что $\| I_\omega(e) - e \| \leq o(a^2)$. Поэтому из формулы (3) и того, что p, q, q' и e были выбраны произвольно, заключаем, что для всех касательных к S векторов $\frac{\partial}{\partial s}$ и $\frac{\partial}{\partial \tau}$ и всех нормальных к S векторов v и v' будет $\left\langle R(v, v') \frac{\partial}{\partial \tau}, \frac{\partial}{\partial s} \right\rangle = 0$. А так как из того, что S — вполне геодезическое, для произвольного касательного вектора e следует, что $\left\langle R\left(\frac{\partial}{\partial \tau}, \frac{\partial}{\partial s}\right) e, v \right\rangle = 0$, то окончательно получим $R\left(\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial \tau}\right) v = 0$. Таким образом, доказана

Лемма 6. *Если выполнены условия теоремы 1 или 2, то для любого вектора v из $\nu_p S$ и любого замкнутого пути ω, лежащего в S с началом и концом в точке p, оператор параллельного переноса I_ω переводит v в себя.*

2. Доказательство теорем 1 и 2.

Лемма 6 является основным утверждением данной работы, а теоремы 1 и 2 простым следствием этой леммы.

Выберем произвольно точку p на S и вектор v_p из $\nu_p S$. На S определим векторное поле $v_q = I_{r_q}(v_p)$, где r_q — любой путь в S, соединяющий точки p и q. По лемме 6 вектор v_q не зависит от выбора пути r_q, поэтому поле v на S определено корректно. Зададим отображение $\psi_\theta : S \to V^n$, $\theta < r_{in}$, где r_{in} — радиус инъективности V^n, $\psi_\theta(q) = \exp_q(\theta v_q)$; $S_\theta = \psi_\theta(S)$.

Лемма 7. *Отображение ψ_θ не увеличивает длин.*

Доказательство. По лемме 6 для векторного поля v_q на S и любых точек q и q' на S выполнено $v_{q'} = I_{qq'}(v_q)$. Поэтому утверждение леммы следует из теоремы сравнения Берже (см. [4] или [3], теорема 6.4.1, замечание 2).

Воспользуемся теперь существованием сжимающего отображения $\varphi : C_T \to S$, построенного в работе [5].

Лемма 8. *Ограничение φ на S_θ отображает S_θ «на» S.*

Доказательство. Напомним построение отображения φ_N из [5]: отображение φ получается как предел отображений φ_N, которые являются суперпозициями сдвигов вдоль кратчайших $\varphi = \lim \varphi_N$; $\varphi_N = \varphi_{N,N} \circ \ldots \circ \varphi_{N,0}$, где $\varphi_{N,i}$ сопоставляет точке q из C_T ближайшую к ней точку из $C_{T\left(1-\frac{i}{N}\right)}$. Нас интересует ограничение отображения φ_N на r_{in}-окрестность подмногообразия S. Обозначим через α отображение, сопоставляющее точке из r_{in}-окрестности S ближайшую к ней точку из S. По индукции докажем, что $\beta_{N,i} = \alpha \circ \varphi_{N,i} \circ \ldots \circ \varphi_{N,0}|_{S_\theta}$ для достаточно больших N есть отображение S_θ «на» S. Действительно, так как $C_{t'}$ при $t' \to t$ сходятся к C_t, то $\beta_{N,i}$ получается из отображения $\beta_{N,i-1}$ $\varepsilon_i(N)$-сдвигом, где $\varepsilon_i(N) \to 0$ при $N \to \infty$. Поэтому для достаточно больших N все отображения $\beta_{N,i}$ имеют одинаковую степень, равную степени отображения $\beta_{N,0}$, т. е. 1. Отсюда следует, что все отображения $\varphi_N = \varphi_{N,N} \circ \ldots \circ \varphi_{N,0} = \alpha \circ \varphi_{N,N} \circ \ldots \circ \varphi_{N,0}$, начиная с некоторого N, являются отображениями «на». Поэтому и φ — их предел — есть отображение «на». Лемма 8 доказана.

Таким образом, композиция $\varphi \circ \psi_\theta$ двух отображений ψ_θ и φ, не увеличивающих длин, есть отображение S на себя, что может быть только если φ и ψ_θ — изометрии. Из того, что ψ_θ — изометрия, нетрудно получить (см. [3, п. 6.4.1]) $K_{\sigma(p,\, v_p,\, v_p,\, e,\, \theta)} \underset{\theta < r_{in}}{\equiv} 0$.

Из полученного равенства следует, что ψ_θ будет отображением, не увеличивающим длин для $\theta < r_{in} + \varepsilon$; т. е. θ — множество θ, при которых $K_{\sigma(p,\, v,\, v,\, e,\, \theta)} = 0$ — открыто, а так как из непрерывности $K_{\sigma(p,\, v,\, v,\, e,\, \theta)}$ следует, что θ замкнуто, то из связности $[0, \infty)$ находим $K_{\sigma(p,\, v,\, v,\, e,\, \theta)} \equiv 0$ **(28)**. Отсюда и из того, что для любого v из $\nu_p S$ и пути ω в S с началом и концом в точке p выполнено $I_\omega(v) = v$, нетрудно получить, что $S_{v,\rho} = \bigcup\limits_{q \in S} \exp_q(\rho v_q)$,

где $v_q = I_{r_{pq}}(v)$ — вполне геодезические, изометричные S, а для всех $W_p = \exp_p(\nu_p S)$ и точек r из W_p выполнено

$$\nu_r W_p = I_{pr}(\tau_p S). \tag{29}$$

Докажем теперь, что W_p — вполне геодезические изометричные друг другу для всех p из S и что выполнено $K_{\sigma(p,\, v,\, w,\, e,\, \rho)} \equiv$ $\equiv 0$. Выберем произвольно точку p из S, векторы e из $\tau_p S$, v из $\nu_p S$, зафиксируем $\rho > 0$, $\rho < r_{in}$ и построим $\gamma(t) = \exp_p(te)$; $v(t) = I_{v\gamma(t)}(v)$; $\gamma_\rho(t) = \exp_{\gamma(t)}(\rho v(t))$. Через $G_{\rho, e}(t)$ обозначим след оператора $A_\rho(t)$ — оператора второй формы поверхности $W_{\gamma(t)}$ относительно нормали $\dot{\gamma}_\rho(t)$ в точке $\gamma_\rho(t)$; т. е., если $\overline{e_i}(t)$ — ортонормированный базис $\tau_{\gamma_\rho(t)} W_{\gamma(t)}$, то

$$G_{\rho,\, e}(t) = \sum_{i=1}^{d-1} \left\langle \frac{D\dot{\gamma}_\rho(t)}{\partial \overline{e}_i(t)},\ \overline{e}_i(t) \right\rangle.$$

Не ограничивая общности, можно считать, что при $t = 0$ векторы $\overline{e_i}(0)$ — собственные для $A_\rho(0)$. Нетрудно видеть, что можно так ввести координаты Ферми $(\alpha^1, \ldots, \alpha^{d-1}, t, x^{d+1}, \ldots)$ вдоль $\gamma(t)$ с, вообще говоря, не ортогональным репером e_i в точке p, что в одной точке, именно в точке $\gamma_\rho(0)$, координатные векторы $e_i(\rho, 0)$ системы $(\alpha^1, \ldots, \alpha^{d-1}, t, x^{d+1}, \ldots)$ совпадают с $\overline{e_i}(0)$. При этом из (28) следует, что если e_i при $i < d$ — базис в $\nu_p S$, $\gamma(t)$ — d-координатная ось, а e_i при $i \geqslant d$ — базис в $\tau_p S$, то для всех $i < d$ векторы $e_i(\rho, t)$ нормальны $S_{v,\rho}$, а $e_i(\rho, t)$ для $i \geqslant d$ касательны к $S_{v,\rho}$, $\dot{\gamma}_\rho(t) =$ $= e_d(\rho, t)$. Так как $\overline{e_i}(t)$ при $t = 0$ — собственные для $A_\rho(0)$, то $\left\langle \frac{De_d(\rho, 0)}{\partial e_i(\rho, 0)},\ e_j(\rho, 0) \right\rangle = \lambda_i(0)\,\delta_{ij}$ для $i, j < d$, где $\lambda_i(t)$ — собственные числа $A_\rho(t)$. Заметим, что для $j \geqslant d$ векторы $e_j(\rho, t)$ — касательные ко вполне геодезическому подмногообразию $S_{v,\rho}$, а для $i < d$ они нормальны к $S_{v,\rho}$, и поэтому $\left\langle \frac{De_i}{De_d}(\rho, t), e_j(\rho, t) \right\rangle \equiv 0$, $i < d \leqslant j$. А так как для координатных векторов $\frac{De_i}{\partial e_d}(\rho, t) = \frac{De_d}{\partial e_i}(\rho, t)$, то

$$\frac{De_d}{\partial e_i}(\rho, 0) = \lambda_i(0) e_i(\rho, 0). \qquad (30)$$

Заметим теперь, что

$$\frac{\partial}{\partial t} G_{\rho, e}(t) = \frac{\partial}{\partial t} \sum_{i=1}^{d-1} \left\langle A_\rho(t) \bar{e}_i(t), \bar{e}_i(t) \right\rangle =$$

$$= \sum_{i=1}^{d-1} \left\langle \left(\frac{D}{\partial t} A_\rho(t) \right) \bar{e}_i(t), \bar{e}_i(t) \right\rangle + 2 \left\langle A_\rho(t) \bar{e}_i(t), \frac{D}{\partial t} \bar{e}_i(t) \right\rangle.$$

Так как при $t = 0$ векторы $\bar{e}_i(t)$ — собственные для $A_\rho(0)$ и $\bar{e}_i(0) = e_i(\rho, 0)$, то

$$\frac{\partial}{\partial t} G_{\rho, e}(0) = \sum_{i=1}^{d-1} \left\langle \left(\frac{D}{\partial t} A_\rho(0) \right) \bar{e}_i(0), \bar{e}_i(0) \right\rangle + \lambda_i(0) \frac{\partial}{\partial t} \| \bar{e}_i(t) \| \Big|_{t=0}^{2} =$$

$$= \sum_{i=1}^{d-1} \left\langle \left(\frac{D}{\partial t} A_\rho(0) \right) \bar{e}_i(0), \bar{e}_i(0) \right\rangle = \sum_{i=1}^{d-1} \left\langle \left(\frac{D}{\partial t} A_\rho(0) \right) e_i(\rho, 0), \right.$$

$$\left. e_i(\rho, 0) \right\rangle = \sum_{i=1}^{d-1} \frac{\partial}{\partial t} \left\langle A_\rho(t) e_i(\rho, t), e_i(\rho, t) \right\rangle \Big|_{t=0} -$$

$$- \lambda_i(0) \frac{\partial}{\partial t} \langle e_i(\rho, t), e_i(\rho, t) \rangle \big|_{t=0}.$$

А поскольку

$$A_\rho(t) e_i(\rho, t) = \frac{De_d}{\partial e_i}(\rho, t) = \frac{De_i}{\partial t}(\rho, t),$$

то

$$\frac{\partial}{\partial t} G_{\rho, e}(0) = \sum_{i=1}^{d-1} \frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{De_i}{\partial t}(\rho, t), e_i(\rho, t) \right\rangle \Big|_{t=0} -$$

$$- \lambda_i(0) \frac{\partial}{\partial t} \left\langle e_i(\rho, t), e_i(\rho, t) \right\rangle \Big|_{t=0} = \sum_{i=1}^{d-1} \left\langle \frac{D^2}{\partial t^2} e_i(\rho, t), \right.$$

$$e_i(\rho,\ t)\Big\rangle\Big|_{t=0}+\sum_{i=1}^{d-1}\left\langle\frac{De_i}{\partial t}(\rho,\ t),\ \frac{De_i}{\partial t}(\rho,\ t)\right\rangle\Big|_{t=0}-$$

$$-2\lambda_i(0)\left\langle\frac{De_i}{\partial t}(\rho,\ t),\ e_i(\rho,\ t)\right\rangle\Big|_{t=0}.$$

Отсюда и из (30) получаем:

$$\frac{\partial}{\partial t}G_{\rho,\ e}(0)=\sum_{i=1}^{d-1}\left\langle\frac{D^2}{\partial t^2}e_i(\rho,\ t),e_i(\rho,\ t)\right\rangle\Big|_{t=0}-\sum_{i=1}^{d-1}\lambda_i^2(0).$$

Однако поле координатных векторов $e_i(\rho,\ t)$ вдоль $\gamma_\rho(t)$ есть по определению поле вариации d-координатных линий, которые, как это следует из (28), суть геодезические. Поэтому $e_i(\rho,\ t)$ — якобиево поле вдоль $\gamma_\rho(t)$, и из уравнения Якоби найдем

$$\left\langle\frac{D^2}{\partial t^2}e_i(\rho,\ t),\ e_i(\rho,\ t)\right\rangle\Big|_{t=0}=\langle R(e_d(\rho,0),e_i(\rho,0))\,e_d(\rho,0),e_i(\rho,0)\rangle,$$

и окончательно

$$\frac{\partial}{\partial t}G_{\rho,\ e}(0)=-\sum_{i=1}^{d-1}\langle R(e_d(\rho,\ 0),\bar{e_i}(0))\,\bar{e_i}(0),\ e_d(\rho,\ 0)\rangle-\sum_{i=1}^{d-1}\lambda_i^2(0). \tag{31}$$

Заметим теперь, что так как $e_d(\rho,\ 0)=I_{\rho\gamma_\rho(0)}(e)$, то

$$\sum_{i=1}^{d-1}\langle R(e_d(\rho,\ 0),\ \bar{e}_i(0))\,\bar{e}_i(0),\ e_d(\rho,\ 0)\rangle=$$

$$=\sum_{i=1}^{d-1}K_{\sigma(p,\ v,I_{\gamma_\rho(0)_p}(\bar{e_i}(0))\ e,\ \rho)}\overset{0}{=}K_{\sigma(p,\ e)}.$$

не зависит от выбора базиса $\bar{e_i}(0)$ в точке $\gamma_\rho(0)$. Нетрудно также видеть, что так как S компактно, то найдется константа K такая, что для всех p из S и e из $\tau_p S$ выполнено $|G_{\rho,\ e}(0)|\leqslant K$. Интегрируя (31) и учитывая последнее соотношение, получаем

$$\frac{1}{T}\int_0^T K_{\sigma(\gamma(t),\ \dot\gamma(t))}dt<\frac{2K}{T}. \tag{32}$$

Отображение $\alpha^t:\tau S\to\tau S$, переводящее (p,e) в $(\gamma(t),\dot\gamma(t))$, как известно, сохраняет объем τS, и поэтому стоящее в (32) среднее по траектории потока α^t по теореме Биркгофа — Хинчина стремится к среднему значению $K_{\sigma(p,\ e)}$ на τS. Поэтому из (32) находим, что среднее значение функции $K_{\sigma(p,\ e)}$ на τS равно нулю, и тогда из неотрицательности этой функции следует $K_{\sigma(p,\ e)}\equiv 0$. Отсюда и из неотрицательности кривизны V^n находим

$$K_{\sigma(p,v\ ,\ w,\ e,\ \rho)}\equiv 0. \tag{33}$$

Так как $\sum_{i=1}^{a-1} \lambda_i^2(t)$, как легко видеть, также не зависит от выбора базиса $\bar{e}_i(t)$, а только от p и e, то, рассуждая как и при доказательстве (33), легко получаем $\lambda_i(t) \equiv 0$, что и означает вполне геодезичность W_p для всех p.

Пусть теперь q и q' произвольные точки из r_{in}-окрестности S. Найдем p и p' такие, что $q \in W_p$ и $q' \in W_{p'}$. Точки p и p' соединим геодезической $\gamma(t)$, $0 \leqslant t \leqslant t_0$, и построим отображение $\omega(t): W_p \to W_{\gamma(t)}$ вида: $\omega(t)(r) = \exp_{\gamma(t)}(\rho(p, r)(I_{p\gamma(t)}(\overline{pr})))$. Из (28) следует, что $\omega(t)(r)$ при фиксированном r есть геодезическая, а из вполне геодезичности $W_{\gamma(t)}$ и (29) следует, что $\omega(t)$ — изометрия для всех t. Соединим точки q' и $\omega(t_0)(q)$ кратчайшей $l(\xi)$. Так как $W_{p'}$ вполне геодезическое, то $l(\xi) \subset W_{p'}$. Рассмотрим пленку $\pi(\xi, t) = \omega(t)\,\omega^{-1}(t_0)\,l(\xi)$. Так как $\pi(\xi, t)$ при фиксированном ξ есть геодезическая, а из (33) следует, что поля $\frac{\partial}{\partial \xi}\pi(\xi, t)$ для всех ξ — параллельные вдоль геодезических $\pi(\xi', t)|_{\xi'=\xi}$, то пленка $\pi(\xi, t)$ — локально изометрична плоскости. Так как $l(\xi)$ — кратчайшая, то $\pi(\xi, t)$ — вполне геодезическая и $\rho(q, q') = \sqrt{\rho^2(p, p') + \rho^2(q, \omega^{-1}(t_0)(q'))}$; значит, V^n локально (в r_{in}-окрестности S) изометрично прямому произведению S и W_p, а изометрия задается отображением $i(q, v) = \exp_q(I_{pq}(v))$.

Чтобы завершить доказательство теорем 1 и 2, т. е. продолжить изометрию i до изометрии всего многообразия V^n и прямого произведения $S \times W_p$, достаточно заметить, что вышеприведенные рассуждения можно повторить, отправляясь от произвольного подмногообразия $S_{v,\rho}$ лежащего в области, где изометрия уже определена. Действительно, так как $S_{v,\rho}$ лежит в области, где V^n изометрично прямому произведению, то оператор I_ω параллельного переноса вдоль замкнутого пути ω, лежащего в $S_{v,\rho}$ с началом и концом в точке p, действует тождественно на векторах из $\nu_p S_{v,\rho}$. Поэтому, выбрав произвольно w из $\nu_p S_{v,\rho}$, на $S_{v,\rho}$ можно корректно определить векторное поле w_q следующим способом: $w_q = I_{pq}(w)$, и построить отображение $\bar{\psi}_\mu: S_{v,\rho} \to V^n$ именно, $\bar{\psi}_\mu(q) = \exp_q(\mu w_q)$. Это отображение не увеличивает длин для малых $\mu < \mu_0$. Так же как это было сделано ранее, нетрудно показать, что композиция $\psi_\rho \circ \varphi \circ \bar{\psi}_\mu$ есть отображение «на». Поэтому, повторяя выше приведенные рассуждения, нетрудно продолжить изометрию i на μ_0-окрестность $S_{v,\rho}$. А так как i по непрерывности продолжается и на замкнутую μ_0-окрестность, то из связности V^n следует, что i продолжается до изометрии прямого произведения $S \times W_p$ и всего многообразия V^n. То, что W_p — многообразие, легко следует из того, что в каждой достаточно малой окрестности любой своей точки r подмногообразие W_p совпадает с $\exp_r(\nu_r S_{v,\rho})$, где $\rho = \rho(p, r)$ и $v = \overline{pr}$. Также нетрудно доказать, что $W_p \cap C_t$ — абсолютно выпуклое множество. Поэтому из того, что $W_p \cap C_t \to p$ при $t \to 0$ и из свойства IV системы абсолютно выпуклых множеств $W_p \cap C_t$ в W_p, следует диффеоморфность W_p евклидову пространству соответствующей размерности.

Доказательство теорем 1 и 2 закончено.

Замечание. В работе [6] изучались аналитические многообразия V^n для $n=4$. Однако аналитичность V^4 не была использована при доказательстве леммы 6 этой работы. А именно, было доказано, что для V^4 справедливо соотношение (28), либо оператор I_ω действует тождественно на векторах из $\nu_p S$ (эти два случая взаимно не исключаются). Поэтому, рассуждая как и при доказательстве теорем 1 и 2, видим, что и в последнем случае выполнено соотношение (28). Как показано в [6] отсюда следует справедливость для $n=4$ известной гипотезы Чигера — Громола:

Теорема 3. *Если в V^4 есть точка, в которой все секционные кривизны строго больше нуля, то V^4 диффеоморфно R^4.*

Список литературы: 1. *Cheeger J.*, *Gromoll D.* On the strukture of complete manifolds of nonnegative curvature.— Ann. of Math., 1972, 96 : 3, p. 413—443. 2. *Громол Д.*, *Клингенберг В.*, *Мейер В.* Риманова геометрия в целом.— М.: Мир, 1971.—343. с. 3. *Бураго Ю. Д.*, *Залгаллер В. А.* Выпуклые множества в римановых пространствах неотрицательной кривизны.— Усп. мат. наук, 1977, 32, вып. 3, с. 3—55. 4. *Berger M.* An extension of Rauch's metric comparison theorem and some applications.— Illinois J. Math., 1962, 6 : 4, p. 700—712. 5. *Шарафутдинов В. А.* Теорема Погорелова — Клингенберга для многообразий, гомеоморфных R^n.— Сиб. мат. журн., 1977, **18**, вып. 4, с. 915—925. 6. *Маренич В. Б.* Метрическое строение четырехмерных открытых аналитических многообразий неотрицательной кривизны.— Сиб. мат. журн., 1980, **21**, вып. 5, с. 161—165.

Поступила в редколлегию 19.10.81.

УДК 513

А. С. Мартакова

СИММЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА, ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ ДУАЛЬНЫМИ РАСШИРЕНИЯМИ ГРУПП Ли

Со всякой группой Ли G связано ее дуальное расширение $G(\varepsilon)$, получаемое переходом от вещественных аналитических параметров группы G к параметрам, являющимся дуальными числами $a+b\varepsilon$, $\varepsilon^2=0$. Дуальное расширение $X_n(\varepsilon)$ всякого аналитического многообразия X_n можно рассматривать как касательное расслоение, определяемое многообразием X_n; поэтому группу $G(\varepsilon)$ можно рассматривать как касательное расслоение, определяемое группой G.

Так как группа G изоморфна некоторой подгруппе группы $G(\varepsilon)$, будем обозначать эту подгруппу той же буквой G. Группа

$G(\varepsilon)$ и ее подгруппа G определяют однородное пространство с фундаментальной группой $G(\varepsilon)$ и стационарной группой G; это однородное пространство можно отождествить с фактор-пространством $G(\varepsilon)/G$. Частные случаи пространств $G(\varepsilon)/G$ для групп G, являющихся простыми и квазипростыми группами Ли, рассматривались в [1,2].

Теорема 1. *Однородное пространство $G(\varepsilon)/G$ является симметрическим пространством.*

Переход от элементов x группы $G(\varepsilon)$ к элементам $'X = \overline{X}$ представляет собой инволютивный автоморфизм группы $G(\varepsilon)$, определяющий симметрическое пространство, а группа G состоит из элементов, переходящих в себя при этом автоморфизме ($X = \overline{X}$).

Теорема 2. *Симметрическое пространство $G(\varepsilon)/G$ можно некоторым естественным образом взаимно однозначно отобразить на алгебру Ли g группы G.*

Из того, что касательное расслоение $G(\varepsilon)$ является тривиальным расслоением, вытекает, что группа $G(\varepsilon)$ гомеоморфна топологическому произведению группы G на касательное пространство к ней. Так как касательное пространство к группе G можно отождествить с алгеброй Ли g этой группы, $G(\varepsilon) = G \times g$.

Теорема 3. *В случае групп Ли, допускающих точные линейные представления, взаимно однозначное соответствие между симметрическим пространством $G(\varepsilon)/G$ и алгеброй Ли g группы G можно получить, ставя в соответствие каждому классу смежности UG подгруппы G группы $G(\varepsilon)$ вещественную часть дуальной матрицы $U\overline{U}^{-1}$.*

В случае группы G, допускающей точные линейные представления, группа $G(\varepsilon)$ также допускает точные линейные представления дуальными матрицами, и можно считать элементы X группы $G(\varepsilon)$ элементами некоторой алгебры дуальных матриц.

Если некоторый класс смежности группы $G(\varepsilon)$ по ее подгруппе G имеет вид UG, где U — некоторый элемент группы $G(\varepsilon)$, не входящий в ее подгруппу G, то симметрия относительно этого класса смежности является переходом от элемента $Y = UX$ группы $G(\varepsilon)$ к элементу $'Y$ той же группы, имеющему вид $'Y = U'X$, поэтому $'X = U^{-1}{}'Y = \overline{X} = U^{-1}Y = \overline{U}^{-1}\overline{Y}$ и элементы Y и $'Y$ связаны соотношением $'Y = U\overline{U}^{-1}\overline{Y}$.

Матрицу $A = U\overline{U}^{-1}$ можно рассматривать как дуальную матричную координату класса смежности $G(\varepsilon)/G$ по ее подгруппе G, т. е. как матричную координату точки симметрического пространства $G(\varepsilon)/G$.

Если запишем дуальную матрицу U в виде $U = U_0 + \varepsilon U_1$, а матрицу U^{-1} в виде $U^{-1} = \tilde{U}_0 + \varepsilon \tilde{U}_1$, то $UU^{-1} = U_0\tilde{U}_0 + \varepsilon(U_0\tilde{U}_1 + U_1\tilde{U}_0) = I$, и следовательно, $U_0\tilde{U}_0 = I$ и $U_0^{-1} = \tilde{U}_0$, а $U_0\tilde{U}_1 + U_1\tilde{U}_0 = 0$, т. е. $\tilde{U}_1 = -U_0^{-1}U_1\tilde{U}_0 = U_0^{-1}U_1U_0^{-1}$. Поэтому $U^{-1} = \tilde{U}_0^{-1} - \varepsilon U_0^{-1}U_1U_0^{-1}$; $\overline{U}^{-1} = U_0^{-1} + \varepsilon U_0^{-1}U_1U_0^{-1}$; $A = U\overline{U}^{-1} = (U_0 + \varepsilon U_1)(U_0^{-1} + \varepsilon U_0^{-1}U_1\tilde{U}_0^{-1}) = I + 2\varepsilon U_1U_0^{-1}$.

Если дуальную матрицу A записать в виде $A = A_0 + \varepsilon A_1$, то $A_0 = I$ и точка пространства $G(\varepsilon)/G$ будет характеризоваться вещественной матрицей $A_1 = 2U_1U_0^{-1}$, которую мы будем называть вещественной матричной координатой этой точки. Так как матрицы U и $\tilde{U}$ принадлежат к группе $G(\varepsilon)$, матрица $A = U\overline{U}^{-1}$ также принадлежит к этой группе.

Так как всякая аналитическая функция $\psi(x + \varepsilon y)$ дуального переменного, являющаяся расширением вещественной аналитической функции $\psi(x)$, имеет вид $\psi(x + \varepsilon y) = \psi(x) + \varepsilon y\psi_1(x)$, то матрицы A можно рассматривать как производные от матриц группы G, т. е. как матрицы алгебры Ли g группы G.

Полученное соответствие между точками пространства $G(\varepsilon)/G$ и матрицами алгебры Ли g, являющимися их вещественными матричными координатами, и являются искомым соответствием.

Теорема 4. *Инвариантами двух точек пространства $G(\varepsilon)/G$ относительно группы $G(\varepsilon)$ являются собственные числа разности их вещественных матричных координат.*

При преобразовании $Z = VY$ группы G, где $V = V_0 + \varepsilon V_1$, матрица A заменяется матрицей $'A = VU\overline{U}^{-1}\overline{V}^{-1} = VA\overline{V}^{-1}$, а также

$$VU = (V_0 + \varepsilon V_1)(U_0 + \varepsilon U_1) = V_0U_0 + \varepsilon(V_0U_1 + V_1U_0),$$

то матрица A заменяется матрицей

$$'A_1 = 2(V_0U_1 + V_1U_0)(V_0U_0)^{-1} = 2(V_0U_1 + V_1U_0)U_0^{-1}V_0^{-1} =$$

$$= V_0(2U_1U_0^{-1})V_0^{-1} + 2V_1V_0^{-1},$$

т. е. закон преобразования вещественных матричных координат точек пространства $G(\varepsilon)/G$ при преобразованиях группы $G(\varepsilon)$ имеет вид $'A_1 = V_0A_1V_0^{-1} + B_1$, где $B_1 = 2V_1V_0^{-1}$—матрица того же типа, что и A_1. При преобразованиях группы $G(\varepsilon)$ разность вещественных матричных координат A_1 и B_1 двух точек пространства $G(\varepsilon)/G$ преобразуется по закону $'A_1 - 'B_1 = V_0(A_1 - B_1)V_0^{-1}$, откуда вытекает утверждение теоремы.

Как показала Л. М. Карпова [3], в случае простой группы G в пространстве $G(\varepsilon)/G$, являющемся базисным пространством квазипростой группы $G(\varepsilon)$, можно ввести инвариантную метрику, в которой оно локально изометрично евклидову или псевдоевклидову пространству. Что инварианты двух точек пространства $G(\varepsilon)/G$ в этом случае выражаются через расстояния между точками этих пространств [1], [2]. В случае дуального проективного пространства $P_n(\varepsilon)$, проективного пространства $P_n(i, \varepsilon)$ над алгеброй бидуальных чисел, являющейся тензорным произведением алгебр комплексных и дуальных чисел и проективного пространства $P_n(i, j, \varepsilon)$ над алгеброй дуокватернионов, являющейся тензорным произведением алгебр кватернионов и дуальных чисел, получаемых дуализацией вещественного, комплексного и кватернионного проективных пространств P_n, $P_n(i)$, $P_n(i, j)$ [4, с. 270, 275, 578, 602], роль пространств $P_n(\varepsilon)/P_n$, $P_n(i, \varepsilon)/P_n(i)$ и $P_n(i, j, \varepsilon)/P_n(i, j)$ играют соответственно n-цепи пространств $P_n(\varepsilon)$, $P_n(i, \varepsilon)$ и $P_n(i, j, \varepsilon)$, т. е. множеств точек, соответственно, с вещественными, комплексными и кватернионными координатами и множества точек, получаемых из них коллинеациями пространства. Вещественными матричными координатами n-цепей являются элементы алгебр Ли групп коллинеаций пространств P_n, $P_n(i)$, $P_n(i, j)$, являющихся группами унимодулярных вещественных и комплексных матриц $(n+1)$-го порядка, и группой квартенионных матриц $(n+1)$ го порядка с полуопределителем, равным 1.

В случае дуальных эллиптического и гиперболического пространств $S_n(\varepsilon)$ и $^lS_n(\varepsilon)$ бидуальных эллиптического и гиперболического пространств $\overline{S}_n(i, \varepsilon)$ и $^l\overline{S}_n(i, \varepsilon)$ и дуокватернионных эллиптического и гиперболического пространств $^l\overline{S}_n(i, j, \varepsilon)$ и $^l\overline{S}_n(i, j, \varepsilon)$ [4, с. 612], [5], [6], получаемых дуализацией вещественного, комплексного и кватернионного пространств S_n, $\overline{S}_n(i)$, $\overline{S}_n(i, j)$ [4, с. 151, 622], роль пространств $S_n(\varepsilon)/S_n$, $\overline{S}_n(i, \varepsilon)/\overline{S}_n(i)$, $\overline{S}_n(i, j, \varepsilon)/\overline{S}_n(i, j)$, $^lS_n(\varepsilon)/^lS_n$, $^lS_n(i, \varepsilon)/^lS_n(i)$, и $^lS_n(i, j, \varepsilon)/^lS_n(i, j)$ играют соответственно нормальные n-цепи, комплексные нормальные n-цепи и кватернионные нормальные n-цепи пространств $S_n(\varepsilon)$ $\overline{S}_n(i, \varepsilon)$, $\overline{S}_n(i, j, \varepsilon)$, $^lS_n(\varepsilon)$, $^l\overline{S}_n(i, \varepsilon)$ и $^l\overline{S}_n(i, j, \varepsilon)$. т. е. множества точек, соответственно, с вещественными, комплексными и кватернионными координатами и множества точек, получаемых из них движениями пространства.

Вещественными матричными координатами этих n-цепей являются элементы алгебр Ли групп движений пространств S_n, $\overline{S}_n(i)$; $\overline{S}_n(i, j)$, ^lS_n, $^l\overline{S}_n(i)$ и $^l\overline{S}_n(i, j)$, являющиеся группами, удовлетворяющими, соответственно, условиям $X^T = -X$; $EX^T = -XE$, $\overline{X}^T = -X$ и $\mathrm{Sp}X = 0$; $E\overline{X}^T = -XE$ и $\mathrm{Sp}X = 0$; $\overline{X}^T = -X$ и $E\overline{X}^T = -XE$, где T — знак транспонирования матрицы, Sp — след матрицы, E — диагональная матрица $(\varepsilon_i\delta_i^j)$, где $\varepsilon_i = \pm 1$.

Как показано в [1] пространства $P_1(\varepsilon)/P_1$ и $^1S_2(\varepsilon)/^1S_2$ допускают интерпретации в виде пространства $^1R_3$, а $S_3(\varepsilon)/S_3$, $^1S_3(\varepsilon)/^1S_3$ и $^2S_3(\varepsilon)/^2S_3$ в виде $R_3(e)$, $R_3(i)$ и $^1R_3(e)$.

Аналогично доказывается, что пространства $\overline{S}_1(i, \varepsilon)/\overline{S}_1(i)$, и $^1\overline{S}_1(i, \varepsilon)/^1\overline{S}_1(i)$ допускают интерпретацию в виде пространств R_3 и $^1R_3$, а $\overline{S}_1(i, j, \varepsilon)/\overline{S}_1(i, j)$ и $^1\overline{S}_1(i, j, \varepsilon)/^1\overline{S}(i, j)$ в виде R_5 и $^1R_5$ (Ср. [6]).

Список литературы: 1. *Розенфельд Б. А., Брик И. М., Орехова Н. И., Панфилова А. С.* Базисные симметрические пространства дуальных расширений вещественных простых групп Ли.— Изв. вузов (математика), 1971. № 6, с. 70—77. 2. *Розенфельд Б. А., Брик И. М., Орехова Н. И., Панфилова А. С.* Базисные симметрические пространства дуальных расширений вещественных квазипростых групп Ли.— Изв. вузов (математика), 1971, № 9, с. 70—78. 3. *Розенфельд В. А., Карпова Л. М.* Фланговые группы и сжатие групп Ли.— Тр. семинара по векторному и тензорному анализу при МГУ, 1966, 13, с. 168—203. 4. *Розенфельд Б. А.* Неевклидовы геометрии.— М.: Наука, 1955.—744 с. 5. *Егорова Л. Д., Крючкова Л. И., Лобанова Л. Б.* Бикомплексные и бидуальные пространства.— Учен. зап. МОПИ, 1969, 262, с. 76—103. 6. *Пецко Н. Д.* Бикватернионные эллиптические пространства и применение к вещественной геометрии.— Учен. зап. КПИ, 1965, 8, с. 144—164.

Поступила в редколлегию 23.06.77.

УДК 513

Л. А. Масальцев

О ГЕЛИКОИДАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ E^m

Э. Р. Розендорн сформулировал следующее понятие геликоидального погружения двумерной поверхности в евклидово пространство E^m $(m \geqslant 4)$ [1]. Пусть метрика поверхности F является так называемой метрикой вращения, т. е. ее путем надлежащего выбора полугеодезических координат можно привести к виду

$$ds^2 = du^2 + B^2(u)\, dv^2. \tag{1}$$

Предположим, что поверхность F допускает такой выбор попарно-ортогональных нормалей $n_1, n_2, \ldots n_{m-2}$, который обеспечивает равенства $H_2 = \ldots = H_{m-2} = 0$ (где H_j — средняя кривизна F, соответствующая нормали h_j) и потребуем, чтобы от параметра v не зависели все коэффициенты вторых квадратичных форм $\mathrm{II}(n_j)$ и все коэффициенты кручения $\mu_{ij|K}$. В таком случае поверхность F называется геликоидальной. Э. Р. Розендорн доказал, что на всякой геликоидальной поверхности F в пространстве E^4 метрика (1) такова, что функция B, ограничена. Как следствие, отсюда получается, что плоскость Лобачевского L^2 не допускает погружения в E^4 в виде регулярной геликоидальной поверхности.

В настоящей статье приводятся доказательства для случая геликоидальных поверхностей в E^m $(m \geqslant 4)$.

Теорема. *На всякой геликоидальной поверхности F в евклидовом пространстве E^m $(m \geqslant 4)$ метрика* (1) *такова, что функция B_u ограничена.*

Следствие. *Плоскость Лобачевского L^2 не допускает изометрического погружения в E^m в виде регулярной геликоидальной поверхности.*

Как и в работе [1], будем считать все исследуемые объекты класса гладкости C^∞. Воспользуемся специальным ортонормированным базисом в нормальном пространстве, выбор которого предложен Ю. А. Аминовым [2.3]. Опишем устройство этого базиса, который в дальнейшем будем называть специальным. Вектор n_1 направим вдоль вектора нормальной кривизны u-линии, вектор n_2 — ортогонально к n_1 и лежащим в плоскости эллипса нормальной кривизны (по поводу понятия эллипса нормальной кривизны поверхности [4, с. 252]). Вектор n_3 выберем из некоторого трехмерного пространства, содержащего точку $x \in F$, и ее эллипс нормальной кривизны и направим его ортогонально плоскости эллипса. Остальные орты специального базиса выбираются произвольно. В данном базисе вторые квадратичные формы поверхности F имеют вид:

$$\mathrm{II}(n_1) = b_{11}du^2 + 2Bb_{12}dudv + B^2b_{22}dv^2;$$
$$\mathrm{II}(n_2) = 2Bc_{12}dudv + B^2c_{22}dv^2;$$
$$\mathrm{II}(n_3) = \gamma du^2 + B^2\gamma dv^2;$$
$$\mathrm{II}(n_i) = 0 \quad (4 \leqslant i \leqslant m-2).$$

Пусть поверхность F с метрикой вида (1) погружена в m-мерное евклидово пространство E^m. Основные уравнения Гаусса—Кодацци — Риччи в специальном нормальном базисе, описанном выше, имеют следующий вид.

Уравнение Гаусса (K — гауссова кривизна поверхности F):

$$b_{11}b_{22} - b_{12}^2 - c_{12}^2 + \gamma^2 = K.$$

Из уравнений Кодацци мы выписываем лишь те, которые соответствуют вторым квадратичным формам $\mathrm{II}(n_i)$ $i = 1, 2, 3$:

$$\partial_v b_{11} - B\partial_u b_{12} = 2B_u b_{12} - \mu_{21|1}Bc_{12} + \mu_{31|2}\gamma;$$
$$B\partial_u b_{22} - \partial_v b_{12} = B_u(b_{11} - b_{22}) + \mu_{21|1}Bc_{22} - \mu_{21|2}c_{12} + \mu_{31|1}B\gamma;$$
$$B\partial_u c_{12} = -2B_u c_{12} - \mu_{12|2}b_{11} + \mu_{12|1}Bb_{12} - \mu_{32|2}\gamma;$$
$$B\partial_u c_{22} - \partial_v c_{12} = -B_u c_{22} + \mu_{12|1}Bb_{22} - \mu_{12|2}b_{12} + \mu_{32|1}B\gamma;$$
$$B\partial_u\gamma = \mu_{13|1}Bb_{22} - \mu_{13|2}b_{12} + \mu_{23|1}Bc_{22} - \mu_{23|2}c_{12}.$$

Уравнение Риччи для пары индексов нормалей (1, 2):

$$\partial_u\mu_{12|2} - \partial_v\mu_{12|1} = B(b_{11}c_{12} + b_{12}c_{22} - b_{22}c_{12}) + $$
$$+ \sum_l (\mu_{l1|1}\mu_{l2|2} - \mu_{l1|2}\mu_{l2|1}).$$

Для всех остальных пар (i, k) индексов нормалей уравнения Риччи имеют вид

$$\partial_u\mu_{ik|2} - \partial_v\mu_{ik|1} = \sum_e (\mu_{li|2}\mu_{lk|2} - \mu_{li|2}\mu_{lk|1}).$$

Доказательство теоремы. Из условия геликоидальности поверхности F следует, что существует ортогональное преобразование, зависящее только от параметра u, исходного нормального базиса в специальный базис. В самом деле, коэффициенты ортогонального преобразования определяются только расположением эллипса нормальной кривизны. В свою очередь, ввиду условия геликоидальности, все параметры, определяющие расположение эллипса, зависят только от u, поскольку определяются вторыми квадратичными формами поверхности. Принимая во внимание известные формулы преобразования вторых квадратичных форм и коэффициентов кручения [5, с. 198], заключаем, что и в специальном нормальном базисе все коэффициенты вторых квадратичных форм и коэффициенты кручения зависят только от параметра u. Приравняв нулю все частные производные по v в уравнениях Кодацци и Риччи, получим следующую систему уравнений:

$$(b_{12})_u = -2B_uB^{-1}b_{12} + \mu_{21|1}c_{12} + \mu_{13|2}B^{-1}\gamma,$$
$$(b_{22})_u = B_uB^{-1}(b_{11} - b_{22}) + \mu_{21|1}c_{22} - \mu_{21|2}B^{-1}c_{12} + \mu_{31|1}\gamma;$$
$$(c_{12})_u = -2B_uB^{-1}c_{12} - \mu_{12|2}B^{-1}b_{11} + \mu_{12|1}b_{12} - \mu_{32|2}B^{-1}\gamma,$$
$$(c_{22})_u = -B_uB^{-1}c_{22} + \mu_{12|1}b_{22} - \mu_{12|2}B^{-1}b_{12} + \mu_{32|1}\gamma;$$
$$\gamma_u = \mu_{13|1}b_{22} - \mu_{13|2}B^{-1}b_{12} + \mu_{23|1}c_{22} - \mu_{23|2}B^{-1}c_{12};$$
$$(\mu_{12|2})_u = B(b_{11}c_{12} + b_{12}c_{22} - b_{22}c_{12}) + \sum_l (\mu_{l1|1}\mu_{l2|2} - \mu_{l1|2}\mu_{l2|1});$$
$$(\mu_{ik|2})_u = \sum_l (\mu_{li|1}\mu_{lk|2} - \mu_{li|2}\mu_{lk|1}).$$

Используя антисимметричность по первым двум индексам коэффициентов кручения $\mu_{ik|l}$, из уравнений Риччи получаем:

$$\Big[\sum_{i<k} (\mu_{ik|2})^2\Big]_u = 2B\mu_{12|2}(b_{11}c_{12} + b_{12}c_{22} - b_{22}c_{12}). \tag{2}$$

Из уравнений Кодацци и Гаусса следует, что

$$\left[B^2\left(b_{12}^2 + b_{22}^2 + c_{12}^2 + c_{22}^2\gamma^2\right)\right]_u = 2BB_uK + \\ + 2B\mu_{12|2}(c_{12}b_{22} - b_{11}c_{12} - b_{12}c_{22}). \tag{3}$$

В полугеодезической системе координат (1) для гауссовой кривизны имеет место формула $K = -B^{-1}B_{uu}$ **(4)**.

Из совместного рассмотрения (2) — (4) имеем

$$\Big[B^2\left(b_{12}^2 + b_{22}^2 + c_{12}^2 + c_{22}^2 + \gamma^2\right) + \sum_{i<k} (\mu_{ik|2})^2 + (B_u)^2\Big]_u = 0.$$

Следовательно, выражение, записанное в квадратных скобках, является первым интегралом геликоидального погружения. Поэтому функция B ограничена. Теорема доказана.

Доказательство следствия ничем не отличается от приведенного в работе [1].

Список литературы: 1. *Розендорн Э. Р.* К вопросу о погружении двумерных римановых метрик в четырехмерное евклидово пространство.— Вестн. Моск. ун-та. Математика, механика, 1979, № 2, с. 47—50. 2. *Аминов Ю. А.* Кручение двумерных поверхностей в евклидовых пространствах.— Укр. геометр.

сб., 1975, вып. 17, с. 15—22. 3. *Аминов Ю. А.* О неустойчивости минимальной поверхности в n-мерном римановом пространстве положительной кривизны.— Мат. сб., 1976, 100, № 3, 400—419. 4. *Картан Э.* Риманова геометрия в ортогональном репере.— М.: Изд-во при Моск. ун-те, 1960.—307 с. 5. *Эйзенхарт Л. П.* Риманова геометрия.— М.: Изд-во иностр. лит., 1948.— 316 с.

Поступила в редколлегию 26.10.81.

УДК 513

А. Д. Милка

ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ И КРАТЧАЙШИЕ ЛИНИИ НА ВЫПУКЛЫХ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЯХ II

ГЛАДКОСТЬ ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ В ТОЧКАХ КРАТЧАЙШЕЙ

Статья является продолжением работы [1]. В ней рассматривается проблема о гладкой точке кратчайшей линии на выпуклой гиперповерхности в R, сформулированная автором в [2] и В. А. Залгаллером (для случая E^3) в [3], и дается внешне геометрическая характеристика точек кратчайшей как точек поверхности. Была установлена следующая лемма об угловой точке кратчайшей линии [4]: на выпуклой гиперповерхности в R каждая угловая точка кратчайшей является $(m-2)$ — ребристой точкой гиперповерхности, причем кратчайшая пересекает ребро поверхности трансверсально.

Теорема 1. На выпуклой гиперповерхности в R каждая гладкая точка кратчайшей, отличной от прямолинейного отрезка, является также гладкой точкой гиперповерхности.

Для трехмерного евклидова пространства этот результат одновременно и близкими методами установлен автором в [5] и А. А. Дубровиным в [6], для произвольного трехмерного R — автором в [7].

Доказательство теоремы 1. Пусть $F \subset R$ — выпуклая гиперповерхность, l — открытая, отличная от прямолинейного отрезка кратчайшая линия на F. Пусть P — гладкая точка линии l как кривой в пространстве. Покажем, что точка P является гладкой и на поверхности. Допустим противное, что в этой точке существуют по крайней мере две различные опорные к F гиперплоскости. Так как F выпуклая, то далее можно ограничиться случаем, когда P не принадлежит внутренности прямолинейного участка l.

Точка P разбивает l на две ветви. Пусть γ — ветвь l, которая в любой окрестности P — не прямолинейный отрезок. Пусть g — полукасательная к γ в P, λ — отрезок полукасательной в P к ветви l, дополнительной к γ, равный по длине этой ветви; Φ — выпуклая гиперповерхность, граница выпуклого тела, образованного пересечением содержащих F полупространств, граничными плоскостями которых являются гиперплоскости, опорные к F в точках открытой кратчайшей γ. Линия $\Lambda = \lambda \cup \gamma$ располагается на поверхности

Ф и является на ней кратчайшей; это, очевидно, вытекает из теоремы о двух полукасательных к кратчайшей линии.

Возможны два случая: точка P на поверхности Ф 1) гладкая, 2) ребристая.

Случай 1. Существует гиперплоскость Δ, отличная от касательной плоскости Ф в точке P, опорная в этой точке к поверхности F. Обозначим через $\overline{F}$ (рис. 1) выпуклую гиперповерхность, границу выпуклого тела, образованного пересечением содержащих F полупространств, граничными плоскостями которых являются

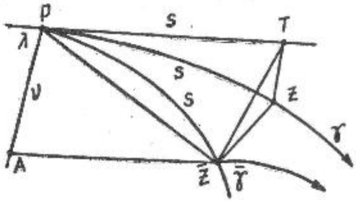


Рис. 1

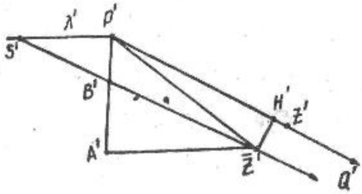


Рис. 2

плоскость Δ и гиперплоскости, опорные к гиперповерхности Ф. Пусть $\overline{\Phi}$ — часть Ф, а $\overline{\Delta}$ — часть Δ, принадлежащие $\overline{F}$. Линия Λ — кратчайшая на $\overline{F}$ и принадлежит $\overline{\Phi}$; линия $\gamma \setminus P$ принадлежит внутренности $\overline{\Phi}$; пересечение $\Gamma = \Delta \cap \Phi$, граница $\overline{\Delta}$ является в плоскости Δ выпуклой гиперповерхностью, гладкой в точке P. Обозначим через $\overline{\Lambda}$ пересечение Γ с двумерной плоскостью, проведенной через лучи g и ν, где ν — внутренняя нормаль в P в гиперплоскости Δ к поверхности Γ. Линия $\overline{\Lambda}$ — выпуклая, гладкая в точке P включает отрезок λ. Ветвь этой линии, определяемую точкой P, не содержащую λ, обозначим $\bar{\gamma}$. Луч g — полукасательная к $\bar{\gamma}$ в точке P. Обозначим через Q фиксированную внутреннюю точку на линии γ.

Пусть $A\overline{Z}$ — прямолинейный отрезок в $\overline{\Delta}$ с концами A на ν и $\overline{Z}$ на $\bar{\gamma}$, перпендикулярный линии ν. Пусть s — длина дуги $P\overline{Z} \subset \bar{\gamma}$, а $Z \in \gamma$ и $T \in g$ — точки, выбранные так, что длины дуги $PZ \subset \gamma$ и отрезка $PT \subset g$ равны s. Введем треугольник $\overline{Z}ZT$ в пространстве R, кратчайшую $\overset{\frown}{\overline{Z}Z}_{\Phi}$ на поверхности Ф, кратчайшие $\overset{\frown}{\overline{Z}Z}_{\overline{F}}$ и $\overset{\frown}{\overline{Z}Q}$ на $\overline{F}$ и прямолинейный отрезок $P\overline{Z} \subset \Delta$. Обозначим $\theta + \pi/2$ величину двугранного угла V, касательного к поверхности $\overline{F}$ в точке P. Можно считать, что $\theta > 0$, что обеспечивается соответствующим выбором плоскости Δ. Линия g, очевидно, принадлежит $(m-2)$-мерному ребру угла V.

При $A \to P$ будет также $\overline{Z}, Z, T \to P$. Тогда по лемме А. В. Погорелова об отклонении от полукасательной направления отрезков $T\overline{Z}$ и TZ при $A \to P$ сходятся соответственно к направлению внутренней нормали ν к $\overline{\Lambda}$ и внутренней нормали к Φ в точке P. Из гладкости Φ в P вытекает: при $A \to P$ прямая в R, несущая отрезок $\overline{Z}Z$, в пределе лежит в касательной плоскости к Φ в точке P, значит, ортогональна нормали поверхности в этой точке. Таким образом, для $\Delta\overline{Z}ZT$ при $A \to P$ получаем, что угол при вершине T этого треугольника стремится к величине θ, а угол при вершине Z — к $\pi/2$. Поэтому для длин сторон треугольника при $A \to P$ находим $|\overline{Z}T|/|AP| \to 1$, $|Z\overline{Z}|/|\overline{Z}T| \to \sin\theta$. Из гладкости поверхности Φ в точке P далее вытекает, что $|\overset{\frown}{\overline{Z}Z}|/|\overline{Z}Z| \to 1$, где $|\overset{\frown}{\overline{Z}Z}_\Phi|$ — длина соответствующей кратчайшей. А по теореме Буземана и Феллера $|\overset{\frown}{\overline{Z}Z}_F| \leqslant |\overset{\frown}{\overline{Z}Z}_\Phi|$. Таким образом, при достаточной близости A к P имеем неравенство $|\overset{\frown}{\overline{Z}Z}_F| \leqslant q|AP|$, где $0 < q = \mathrm{const} < 1$; q не зависит от выбора A.

Рассмотрим на поверхности $\overline{F}$ треугольники $AP\overline{Z}$ и $\overline{Z}PQ$. При $A \to P$ луч $P\overline{Z}$ сходится к лучу g, $\angle AP\overline{Z} \to \pi/2$, $\angle A\overline{Z}P \to 0$. Для треугольника $\overline{Z}PQ$ и для углов на поверхности $\overline{F}$, при $A \to P$ будет $\angle \overline{Z}QP \to 0$, так как Q — внутренняя точка кратчайшей γ, кратчайшая $\overline{Z}Q_{\overline{F}}$ сходится к кратчайшей $\overset{\frown}{PQ} \subset \gamma$ (по теореме о station неналегании кратчайших), $\angle \overline{Z}PQ \to 0$, так как стремится к нулю угол в точке P между полукасательными — лучами g и $P\overline{Z}$ к кратчайшим $\overset{\frown}{PQ}$ и $P\overline{Z}$. Заметим еще, что для углов между кратчайшими на $\overline{F}$ выполняется равенство $\angle AP\overline{Z} + \angle \overline{Z}PQ = \pi/2$.

Построим треугольники $A'P'\overline{Z}'$ и $\overline{Z}'P'Q'$ в двумерной плоскости в R (рис. 2), соответствующие треугольникам $AP\overline{Z}$ и $\overline{Z}PQ$ на $\overline{F}$. Считаем, что общая сторона $P\overline{Z}'$ плоских треугольников их разделяет. По теореме А. Д. Александрова об углах треугольника углы $\Delta\overline{Z}'P'Q'$ не превосходят соответствующих углов $\Delta\overline{Z}PQ$ на $\overline{F}$; $\Delta A'P'\overline{Z}'$ равен $\Delta AP\overline{Z}$. Отсюда следует, что в четырехугольнике $A'P'Q'\overline{Z}'$ имеем $\angle A'P'Q' \leqslant \pi/2$, и можно сделать определенные выводы о поведении углов этого четырехугольника и углов составляющих его треугольников при $A \to P$: $\angle A'P'Q' \to \frac{\pi}{2}$, $\angle \overline{Z}'P'Q' \to 0$, $\angle \overline{Z}'Q'P' \to 0$. Пусть $\overline{Z}'H'$, где $H' \in P'Q'$, — высота $\Delta\overline{Z}'P'Q'$, $Z' \in P'Q'$ — точка соответствующая точке $Z \in \overset{\frown}{PQ}$ по изометрии $P'Q' \to \overset{\frown}{PQ}$. Тогда $|\overline{Z}'H'| \leqslant |\overline{Z}'Z'|$, а по теореме об условии выпуклости $|\overline{Z}'Z'| \leqslant |\overset{\frown}{\overline{Z}Z}_F|$. Таким образом при достаточной близости A к P имеем неравенство $|\overline{Z}'H'| \leqslant q|A'P'|$.

Обозначим через λ' — прямолинейный отрезок в рассматриваемой двумерной плоскости, равный по длине отрезку λ, исходящий из точки P' перпендикулярно $A'P'$ и разделяющийся прямой $A'P'$ с построенным четырехугольником. Легко устанавливается, что луч $Q'\bar{Z}'$ при $A \to P$ пересекает отрезок $A'P'$ в некоторой внутренней для этого отрезка точке B', для которой $|B'P'|/|\bar{Z}'H'| \to \to 1$ и, следовательно, $|B'P'| \leqslant q'|A'P'|$, где $0 < q' = \text{const} < 1$, q' не зависит от выбора A. Заметим, что B' — внутренняя для $A'P'$ точка. Иначе окажется $B' \equiv P'$. Тогда линия $\overset{\smile}{Q\bar{Z}} \cup \bar{Z}P \cup \lambda$ будет кратчайшей на $\bar{F}$. Но это противоречит теореме о неналегании кратчайших.

Пусть R — евклидово пространство. Тогда луч $\bar{Z}'B'$ при A, близкой к P, пересекает отрезок λ', и точка пересечения S' при $A \to P$ стремится к P. Отметим на отрезке λ точку S, соответствующую точке S' по изометрии $\lambda' \leftrightarrow \lambda\,(P' \leftrightarrow P)$. Тогда получим, что линия $\overset{\smile}{Q\bar{Z}} \cup \bar{Z}S$, где $\bar{Z}S$–отрезок в Δ, располагающаяся на поверхности $\bar{F}$, короче кратчайшей линии $\overset{\smile}{QP} \cup PS$, где $PS \subset \lambda$. Это вытекает из сравнения длин сторон треугольника $S'P'Q'$. Тем самым получено противоречие. Следовательно, предположение о том, что P — ребристая точка на F, неверно.

Пусть теперь R — пространство сферическое или Лобачевского. Здесь доказательство завершается в том же плане. Только для доказательства существования точки S и факта стремления $S \to P$ здесь нельзя воспользоваться подобием прямоугольных треугольников $\bar{Z}'A'B'$ и $S'P'B'$. Надлежащие заключения теперь получаются из тригонометрических формул для этих треугольников. Приведем, например, соответствующие выкладки для гиперболического пространства кривизны -1. Обозначим $\beta = \angle A'B'\bar{Z}'$. При $A \to P$ имеем

$$\operatorname{th}|S'P'| = \operatorname{sh}|B'P'|\operatorname{tg}\beta \leqslant \operatorname{sh}\left(\frac{q'}{1-q'}|A'B'|\right)\operatorname{tg}\beta =$$

$$= \sigma(A)\frac{q'}{1-q'}\operatorname{sh}|B'A'|\cdot\operatorname{tg}\beta = \sigma(A)\frac{q'}{1-q'}\operatorname{th}|A'\bar{Z}'| \to 0,$$

где $\sigma(A) \to 1$. Отсюда вытекает, что луч $\bar{Z}'B'$ при A близком к P пересекает отрезок λ', и точка пересечения S' при $A \to P$ стремится к P'.

Исследование первого случая закончено полностью.

Случай 2. У касательного конуса V поверхности Φ в точке P вершинная фигура $G \subset V$, т. е. объединение прямых линий, лежащих на конусе и проходящих через P, является в R плоскостью размерности $\leqslant (m-2)$. Эта фигура содержит прямую, несущую луч g и отрезок λ. Пусть w — проходящая через P плоскость в R, вполне ортогональная плоскости G (сумма размерностей w и G равна m). Сечение $W = w \cap V$ — выпуклый в плоскости w конус, строго выпуклый в его вершине P. Пусть μ—гиперплоскость в w, строго опорная в точке P к конусу W и к полярному к W конусу, ν — луч с началом в P, перпендикулярный μ, проходящий, следовательно, через внутреннюю точку выпуклого тела в плоскости w с границей W, $v \subset R$ — плоскость, определяемая плоскостью G и лучом ν. Обозначим через μ_X плоскость в R, проведенную через точку $x \in \gamma$, полученную параллельным переносом μ вдоль v.

Легко устанавливается, что существует последовательность точек $\{X_k \mid X_k \in \gamma, X_k \to P$ при $k \to \infty\}$, такая, что в плоскости μ_{X_k} существует прямая l_k, опорная в точке x_k к поверхности Φ. Пусть l_X — прямая линия, опорная к Φ в точке $X \in \gamma \setminus P$, w_X — проходящая через X вполне ортогональная G плоскость в R, пересекающая плоскость G в некоторой точке T_X, $W_X = w_X \cap v$ — выпуклый в плоскости w_X конус с вершиной T_X. Конус W_X получается из конуса W параллельным переносом последнего в R вдоль прямолинейного отрезка $PT_X \subset G$. Прямая l_X пересекает конус W_X в точках, которые мы обозначим $Z_{1,X}$ и $Z_{2,X}$. Введем отрезки $T_X Z_{1,X}$ и $T_X Z_{2,X}$ на образующих конуса W_X и соответствующие им по параллельному перенесению $W_x \to W$ вдоль отрезка PT_X образующие ν_1 и ν_2 конуса W. Лучи ν_1 и ν_2 имеют началом точку P и принадлежат каждый двумерной плоскости, определяемой соответственно отрезками $T_X Z_{1,X}$, $T_X P$ и $T_X Z_{2,X}$, $T_X P$. Пусть $A_1 Z_{1,X}$ $A_2 Z_{2,X}$, где $A_1 \in \nu_1$ и $A_2 \in \nu_2$ — прямолинейные отрезки, перпендикулярные соответственно ν_1 и ν_2. Построим еще отрезки $PZ_{1,X}$, $PZ_{2,X}$ и $Z_{1,X}Z_{2,X}$. Точка X для отрезка $Z_{1,X}Z_{2,X}$ — внутренняя, иначе кратчайшая γ на дуге $\smile{PX}$ была бы прямолинейным отрезком.

Рассмотрим треугольник $\Delta_X = Z_{1,X} T_X Z_{2,X}$. Так как конус W в вершине P строго выпуклый, то угол при вершине T_X этого треугольника строго отделен от π независимо от выбора точки X. Так как плоскость μ — строго опорная к W, то углы Δ_X при двух других его вершинах, также независимо от выбора X, строго отделены от нуля и π. Следовательно, для x близких к P, существует постоянная $q\,(0 < q < 1)$, для которой длины сторон Δ_X связаны неравенством

$$|Z_{1,X}Z_{2,X}| \leqslant q\,(|Z_{1,X}T_X| + |T_X Z_{2,X}|). \qquad (*)$$

При $X \to P$ $\angle XPT_X$ стремится к нулю, так как отрезок XT_X перпендикулярен плоскости G и стремится к нулю угол между хордой PX кратчайшей γ и полукасательной $g \subset G$ к γ в точке P, поэтому $|XT_x| / |PX| \to 0$. Отсюда, поскольку стороны треугольника Δ_x одного порядка малости, вытекает $|PZ_{1,X}|$, $|PZ_{2,X}| \to 0$; $\angle Z_{1,X}PT_X$, $\angle Z_{2,X}PT_X$, $\angle Z_{1,X}PZ_{2,X} \to 0$; $\angle A_1PZ_{1,X}$, $\angle A_2PZ_{2,X} \to \pi/2$; $|Z_{1,X}T_X| / |A_1P| = 1$, $|Z_{2X}, T_X| / |A_2P| = 1$.

Пусть Q — внутренняя точка γ, $X\bar{Q}$ — отрезок полукасательной в точке X к дуге $\smile{XQ}$ кратчайшей γ, равный по длине $\smile{XQ}$. Обозначим через $\smile{PQ}$ дугу γ. По теореме 1 [1, § 2] о двух полукасательных к кратчайшей линия $\bar{\Lambda} = \lambda \cup \smile{PX} \cup X\bar{Q}$ в части пространства, внешней по отношению к поверхности Φ, есть кратчайшая.

Рассмотрим как двумерную метрику четырехугольник $\bar{\Delta}_X$, составленный из двух плоских треугольников в R, $Z_{1,X}PZ_{2,X}$ и

$Z_{1,X}\bar{Q}Z_{2,X}$. Плоскость второго из этих треугольников является в точке X опорной к Φ. Поэтому отрезки $\bar{Q}Z_{1,X}$ и $\bar{Q}Z_{2,X}$ располагаются с внешней стороны этой поверхности. При $X \to P$ угол при вершине $\bar{Q}$ в $\bar{\Delta}_X$ стремится к нулю. Линия $\gamma_X = \bar{Q}X \cup XP$ в $\bar{\Delta}_x$ короче кратчайшей γ, т. к. линия γ в окрестности точки P не сводится к прямолинейному отрезку. Отсюда следует, что четырехугольник $\bar{\Delta}_X$ — строго выпуклый, т. е. углы его при вершинах $Z_{1,X}$ и Z_{2X}, меньше π. В противном случае одна из линий $\bar{Q}Z_{1,X} \cup Z_{1,X}P$ или $\bar{Q}Z_{2,X} \cup Z_{2,X}P$ была бы короче γ_X, значит, короче дуги $\overset{\frown}{PQ}$ кратчайшей γ, что невозможно по цитированной теореме.

Проведем в четырехугольнике $\bar{\Delta}_X$ кратчайшую $\overset{\frown}{P\bar{Q}}$. Эта линия разбивает $\bar{\Delta}_X$ на два треугольника и пересекает отрезок $Z_{1,X}Z_{2,X}$ в некоторой точке Z_X. В силу соотношения (*), для одного из отрезков $Z_{1,X}Z_X$ или $Z_{2,X}Z_X$, пусть, например, для первого, при $X \to P$ выполняется неравенство $|Z_{1,X}Z_X| \leqslant q\,|Z_{1,X}T_X|$.

Теперь легко устанавливается, что существует точка $S \in \lambda$ $(S \neq P)$ такая, что линия $SZ_{1,X} \cup Z_{1,X}\bar{Q}$, составленная из прямолинейных отрезков в R, идущих с внешней стороны Φ, короче линии $SP \cup \overset{\frown}{P\bar{Q}}$, где $SP \subset \lambda$, следовательно, короче линии $SP \cup \overset{\frown}{PX} \cup \overset{\frown}{XQ}$, где $\overset{\frown}{PX} \subset \gamma$. Это противоречит цитированной теореме. Существование точки S доказывается тем же способом, который применялся в исследовании первого случая. Тогда мы воспользовались построениями, связанными с треугольниками $AP\bar{Z}$ и $\bar{Z}PQ$ на поверхности $\bar{F}$. Теперь эти построения буквально повторяются для соответствующих треугольников $A_1PZ_{1,X}$ и $Z_{1,X}P\bar{Q}$, второй из которых принадлежит четырехугольнику $\bar{\Delta}_X$. При этом угол в вершине P' соответствующего плоского четырехугольника может превосходить $\pi/2$. Но этот угол стремится к $\pi/2$ при $X \to P$ — по сути именно это обстоятельство использовалось ранее. Таким образом, в рассматриваемом случае также приходим к противоречию с предположением, что P — ребристая точка на поверхности F.

Теорема доказана.

Замечание. Случай 1 может быть рассмотрен тем же методом, что и случай 2, т. е. — основанным только на применении теоремы 1 [1, § 1].

Следствие. *На выпуклой гиперповерхности в R множество опорных гиперплоскостей к поверхности в точках ориентированной открытой кратчайшей, отличной от прямолинейного отрезка, непрерывно справа и слева; в гладких точках кратчайшей это множество непрерывно.*

Отметим, что утверждение следствия 1 по отношению к конечным точкам кратчайшей в общем случае неверно. Соответствующие примеры строятся в работе [8].

Следствие 2. *На выпуклой гиперповерхности F в R сферическое изображение открытой кратчайшей γ есть простая кривая.*

Для доказательства этого следствия достаточно ввести в множестве гиперплоскостей в R, опорных к F в точках γ, надлежащую параметризацию (линию γ считаем отличной от прямолинейного отрезка). Это осуществляется на основании следующих соображений.

Расширенное множество правых полукасательных к кратчайшей γ, введенное в [1, § 2], упорядочено. Каждой полукасательной сопоставляется несущая ее прямая линия. Так определенное множество прямых линий параметризуется — каждой прямой l сопоставляется вариация поворота множества полукасательных к γ, предшествующих полукасательной, которая определяет l. Линии l от параметра зависят непрерывно, разным линиям соответствуют разные значения параметра. Каждой линии сопоставляется содержащая ее гиперплоскость, опорная к поверхности F; каждой такой плоскости сопоставляется принадлежащая ей линия из $\{l\}$. Так определенное соответствие между опорными гиперплоскостями к F в точках γ и прямыми линиями из $\{l\}$ взаимно однозначно. Это, очевидно, вытекает из теоремы 1. Пусть Δ — гиперплоскость, опорная к F в точке γ, и l — соответствующая Δ прямая линия. Сопоставим Δ значение параметра, отвечающее l. Так в множестве $\{\Delta\}$ вводится параметризация, существование которой отмечалось в [1, § 2]; разным значениям параметра соответствуют разные гиперплоскости из $\{\Delta\}$, и эти гиперплоскости зависят от параметра непрерывно. Введенная параметризация есть одновременно и параметризация сферического изображения кратчайшей γ, которое, таким образом, есть простая кривая — это утверждается в следствии 2.

Следствие 3. *На выпуклой гиперповерхности в R кратчайшая линия, отличная от прямолинейного отрезка, в каждой точке имеет правую и левую соприкасающиеся двумерные плоскости, непрерывные соответственно справа и слева, совпадающие в гладкой точке кратчайшей.*

Этот результат обобщает теорему И. М. Либермана.

Как показывает теорема 1 и лемма автора об угловой точке кратчайшей, окрестность открытой геодезической линии на общей выпуклой гиперповерхности в R в первом приближении устроена так же, как и окрестность геодезической на выпуклом многограннике, т. е. в определенном смысле однородно (в работе [9] подобный факт устанавливался для многомерных многогранных метрик). Именно, имеет место

Теорема 2. *На выпуклой гиперповерхности в R геодезические линии, отличные от прямолинейных отрезков, проходят только через гладкие или $(m-2)$-ребристые точки и пересекают ребра поверхности трансверсально.*

Теорема 3. *Выпуклая гиперповерхность в R, на которой через любую точку в любом направлении проходит кратчайшая линия, в каждой своей точке гладкая или $(m-2)$-ребристая. В последнем случае соответствующая точка — внутренняя для $(m-2)$-мерного ребра на поверхности.*

Существенное применение теоремы 1 — к исследованию индикатрис полукасательных геодезических линий на выпуклых поверхностях в трехмерном евклидовом пространстве — дано В. В. Усовым [10].

Список литературы: 1. *Милка А. Д.* Геодезические и кратчайшие линии на выпуклых гиперповерхностях, I.— Укр. геометр. сб., 1982, вып. 25, с. 95. 2. *Милка А. Д.* Об одном признаке сферы.— Укр. геометр. сб., 1970, вып. 9, с. 78—84. 3. *Залгаллер В. А.* Вопрос о сферическом изображении кратчайшей.— Укр. геометр. сб., 1971, вып. 10, с. 12—18. 4. *Милка А. Д.* О внутренней метрике выпуклых гиперповерхностей.— Укр. геометр. сб., 1965, вып. 2, с. 59—69. 5. *Милка А. Д.* Теорема о гладкой точке кратчайшей.— Укр. геометр. сб., 1974, вып. 15, с. 62—70. 6. *Дубровин А. А.* О регулярности выпуклой поверхности в окрестности кратчайшей.— Укр. геометр. сб., 1974, вып. 15, с. 42—54. 7. *Милка А, Д.* Новые свойства кратчайших линий на выпуклых поверхностях.— Укр. геометр. сб., 1975, вып. 17, с. 128—132. 8. *Милка А. Д.* Особенность у конца кратчайшей на выпуклой поверхности, I.— Укр. геометр. сб., 1973, с. 48—55, ч. II — там же, 1975, вып. 17, с. 120—128. 9. *Милка А. Д.* Многомерные пространства с многогранной метрикой неотрицательной кривизны, I.— Укр. геометр. сб., 1968, вып. 5—6, с. 103—114, ч. II — там же, 1969, вып. 7, с. 65—77. 10. *Усов В. В.* О геодезических на выпуклых поверхностях.— Автореф. дис. ... д-ра мат. наук, Новосибирск, 1980,—20 с.

Поступила в редколлегию 15.11.81.

УДК 513

В. В. Можарский

ЛИНИЯ С ОСОБЕННОСТЬЮ ПОРЯДКА 2 НА ПОВЕРХНОСТИ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ГАУССОВОЙ КРИВИЗНЫ

1. В работе [1] исследовался вопрос о существовании поверхности σ отрицательной гауссовой кривизны, которая бы проходила через произвольно заданную кривую γ, причем γ являлась бы огибающей по крайней мере одного семейства асимптотических линий поверхности σ. Эта задача возникла при попытке обобщить на поверхность отрицательной кривизны известное представление поверхности нулевой гауссовой кривизны как совокупности касательных к произвольно заданной пространственной кривой. Исходя из этого, уравнение поверхности σ естественно искать в виде $\vec{r}(s, v) = \vec{\rho}(s) + v\vec{\tau}(s) + f(s, v)\vec{\nu}(s) + \varphi(s, v)\vec{\beta}(s)$ (1), обобщающем уравнение развертывающейся поверхности. В (1) $\vec{\rho}(s)$ — заданная пространственная кривая, отнесенная к длине дуги s; $\vec{\tau}, \vec{\nu}, \vec{\beta}$ — соответственно ее орты касательной, главной нормали и бинормали; координатными линиями v служат асимптотические поверхности σ, касающиеся кривой $\vec{\rho}(s)$, причем $v = 0$ на $\vec{\rho}(s)$; наконец, $f(s, v)$ и $\varphi(s, v)$ являются неизвестными функциями.

В [1] было показано, что при заданных кривой $\vec{\rho}(s)$ и функции $\lambda(s, v)$ существует единственная поверхность σ вида (1) гауссовой кривизны $K = -\lambda^2$. Эта поверхность определяется системой дифференциальных уравнений:

$$(1-kf)(\varphi_{vv}f_v - f_{vv}\varphi_v) - (vk - \varkappa\varphi + f_s)\varphi_{vv} + (\varkappa f + \varphi_s) f_{vv} = 0;$$
$$\varphi_{vvv}f_{vv} - f_{vvv}\varphi_{vv} = \lambda[(\varphi_{vv}f_v - f_{vv}\varphi_v)^2 + \varphi^2_{vv} + f^2_{vv}] \qquad (2)$$

и начальными условиями $f(s, 0) = \varphi(s, 0) = f_v(s, 0) = \varphi_v(s, 0) = 0$ (3). При доказательстве существования и единственности решения системы (2) с начальными условиями (3) был сделан ряд ограничений, а именно:

$$\lambda(s, 0) \neq 0;\ \lambda^2(s, 0) \neq \varkappa^2(s);\ f_{vv}(s, 0) \neq 0;\ k(s) \neq 0, \qquad (4)$$

где k и $\varkappa$ — соответственно кривизна и кручение кривой $\vec{\rho}(s)$. Кроме того, функции $\lambda(s, v)$, $k(s)$, $\varkappa(s)$ предполагались аналитическими.

В рассматриваемой работе [1] доказано также, что заданная кривая $\vec{\rho}(s)$ огибает оба семейства асимптотических σ и является ребром возврата этой поверхности, а произвольное сечение ξ поверхности σ нормальной плоскостью ребра возврата $\vec{\rho}(s)$ имеет в точке M пересечения с $\vec{\rho}(s)$ возврат первого рода.

Весьма интересно исследовать природу отмеченных выше ограничений (4) на класс поверхностей, рассматриваемых в [1], выяснить, какие из них внесены методом исследования, а какие носят более глубокий характер, будучи тесно связанными с особенностями поведения изучаемой поверхности. Для этого поставим задачу, в известной степени обратную сформулированной выше. Именно, поскольку в изученном случае кривая $\vec{\rho}(s)$ является особой линией (более точно, ребром возврата) поверхности σ, то в дальнейшем будем исследовать поведение поверхности вблизи особой линии в зависимости от того, выполняются или не выполняются условия (4). При этом оставим в силе требование, чтобы рассматриваемая особая линия не имела точек распрямления, а также условие $\lambda(s, 0) \neq 0$, обеспечивающее строгую отрицательность гауссовой кривизны K вблизи особой линии.

Выясним геометрический смысл остальных условий, ограничивших класс рассматриваемых поверхностей в работе [1]. То, что функция $\lambda(s, v)$ является аналитической, означает, в частности, существование предела этой функции при $v \to 0$, а следовательно, и предела гауссовой кривизны поверхности σ на особой линии $\vec{\rho}(s)$ Обозначим этот предел через $a(s)$. Тогда из условия $\lambda^2(s, 0) \neq \varkappa^2(s)$ следует, что $a \neq -\varkappa^2$. Наконец, выясним смысл условия $f_{vv}(s, 0) \neq 0$ Поскольку всякая координатная линия v поверхности (1) является асимптотической, а векторы $\boldsymbol{r}_v(s, v)$ и $\boldsymbol{r}_{vv}(s, v)$ при фиксированном s принадлежат соприкасающейся плоскости этой асимптотической, то указанные векторы лежат в плоскости, касательной к поверхности (1). При приближении к точкам особой линии, т. е. при $v \to 0$, предельные положения этих векторов $\boldsymbol{r}_v(s, 0)$ и $\boldsymbol{r}_{vv}(s, 0)$ определяют (конечно, при условии их неколлинеарности) предельное положение касательной плоскости в точках особой линии поверхности. Однако из (1) и (3) следует $\boldsymbol{r}_s(s, 0) = \vec{\tau}(s)$; $\boldsymbol{r}_{vv}(s, 0) = f_{vv}(s, 0)\vec{\nu}(s) + \varphi_{vv}(s, 0)\vec{\beta}(s)$ и, таким образом, $\boldsymbol{r}_v \times \boldsymbol{r}_{vv} \neq 0$ при $v = 0$ (предполагая, что $f^2_{vv}(s, 0) + \varphi^2_{vv}(s, 0) = 0$). Поэтому можно говорить о касательной плоскости к поверхности (1) в точках особой линии. Условия $f_{vv}(s, 0) \neq 0$; $\varphi_{vv}(s, 0) = 0$; $f_{vv}(s, 0) = 0$; $\varphi_{vv}(s, 0) \neq 0$ и т. п. определяют положение соприкасающейся плоскости особой линии $\vec{\rho}(s)$ относительно этой касательной плоскости.

2. Основные определения. Постановка задачи. Уточним некоторые определения, которые будем применять в дальнейшем.

Точку M кривой γ, принадлежащей классу C^m, назовем особой точкой индекса p ($p \leqslant m$) этой кривой, если для любой параметризации $\boldsymbol{r}(t)$ класса C^p кривой будет $\boldsymbol{r}' = 0$ в точке M.

Особую точку M индекса p кривой γ назовем особой точкой порядка n, если в любой параметризации $\boldsymbol{r}(t)$ класса C^p этой кривой $\frac{d^i \boldsymbol{r}}{dt^i} = 0$ в точке M для любого i такого, что $1 \leqslant i < n$, и существует параметризация $\vec{\rho}(t)$ класса C^p кривой γ, в которой $\frac{d^n \vec{\rho}}{dt^n} \neq 0$ в особой точке.

Далее будем пользоваться таким фактом. Пусть $\boldsymbol{r}(t)$ — произвольная параметризация класса C^m плоской кривой γ, а точка $t = t_0$ является особой точкой четного порядка n этой кривой. Обозначим через $\boldsymbol{r}_i$ значение i-й производной вектор-функции $\boldsymbol{r}(t)$ при $t = t_0$ и предположим, что существует такое число n_1 ($n_1 \leqslant \leqslant m$), что $\boldsymbol{r}_n \times \boldsymbol{r}_i = 0 \ \forall\, i < n_1$, $\boldsymbol{r}_n \times \boldsymbol{r}_{n_1} \neq 0$ (очевидно, $n < n_1$). Тогда особая точка кривой является точкой возврата первого рода, если n_1 нечетно, и второго рода, если n_1 четно. Это предложение является простой перефразировкой известных свойств плоских кривых, заданных уравнениями в координатно-параметрической форме [2].

Точку M поверхности σ класса C^m будем называть особой точкой индекса p ($p \leqslant m$) этой поверхности, если для любой параметризации $\boldsymbol{r}(u, v)$ класса C^p поверхности σ дискриминант первой квадратичной формы в этой точке обращается в нуль. Как и обычно, под особой линией поверхности будем понимать линию, каждая точка которой является особой точкой этой поверхности.

Пусть поверхность σ несет на себе особую линию γ. Рассмотрим произвольное сечение ξ поверхности σ нормальной плоскостью особой линии. Будем говорить, что особая линия γ обладает особенностью порядка n, если для любого сечения ξ точка M является особой точкой порядка n.

Теперь можно более точно сформулировать задачу настоящей статьи. Предположим, что поверхность σ класса C^6 обладает особой линией γ без точек распрямления, имеющей особенность порядка 2. Изучим поведение такой поверхности σ вблизи особой линии γ в зависимости от того, выполняются или нет следующие условия: 1) существует предел a гауссовой кривизны K поверхности σ на особой линии γ; 2) соприкасающаяся плоскость особой линии касается поверхности σ (в смысле, аналогичном определенному в предыдущем пункте); 3) предел a совпадает с $-\varkappa^2$, где $\varkappa$ — кручение особой линии. При изучении поведения поверхности σ основное внимание уделим выяснению характера возврата произвольного сечения ξ в точке M (поскольку особая линия, а следовательно, и особая точка M сечения ξ обладают особенностью второго порядка, то, как было отмечено выше, M может быть лишь точкой возврата первого или второго рода), а также исследованию поведения асимптотических линий поверхности σ вблизи особой линии.

3. Основные уравнения. Пусть уравнение кривой γ, отнесенной к длине дуги s, имеет вид $\boldsymbol{R} = \vec{\rho}(s)$. Обозначим через $\vec{\tau}, \vec{\nu}, \vec{\beta}$ соответственно орты касательной, главной нормали и бинормали этой кривой, а через k и $\varkappa$ — ее кривизну и кручение. Поскольку предполагается, что γ не имеет точек распрямления, то $k(s) \neq 0$ (5).

Для исследования поверхности σ параметризуем ее следующим образом. В качестве параметра s будем рассматривать длину дуги кривой γ, за координатные линии $s = \mathrm{const}$ примем сечения поверхности σ нормальными плоскостями кривой γ, а параметр v выберем так, чтобы было $v = 0$ на γ и $\boldsymbol{r}_{vv} \neq 0$ на γ и ее окрестности при выбранном s. Пусть уравнение поверхности σ, параметризованной таким образом, записывается в виде $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r}(s, v)$. Будем предполагать, что $\boldsymbol{r}(s, v) \in C^6$.

В силу выбора параметра v будет $\boldsymbol{r}(s, 0) = \vec{\rho}(s)$. Кроме того, $\boldsymbol{r}_v(s, 0) = 0$, ибо в противном случае дискриминант первой квадратичной формы поверхности σ был бы отличен от нуля на γ. Таким образом, разложение функции $\boldsymbol{r}(s, v)$ по формуле Тейлора имеет вид $\boldsymbol{r}(s, v) = \vec{\rho}(s) + \frac{v^2}{2}\boldsymbol{r}_2(s) + \frac{v^3}{6}\boldsymbol{r}_3(s) + \frac{v^4}{24}\boldsymbol{r}_4(s) + \frac{v^5}{120}\boldsymbol{r}_5(s) + o(v^5)$ (6), где $\boldsymbol{r}_i(s) = \left.\frac{\partial^i r}{\partial v^i}\right|_{v=0}$, $i = 2, 3, 4, 5$. Поскольку внутренние координаты s, v поверхности σ выбраны таким образом, что вектор $\boldsymbol{r}(s, v) - \vec{\rho}(s)$ ортогонален вектору $\vec{\tau}$, то $(\vec{\tau}\boldsymbol{r}_i) = 0$, $i = 2, 3, 4, 5$ (7).

Введем функцию $\alpha(s)$, положив $\alpha^2(s) = \boldsymbol{r}_2^2(s)$. В силу выбора параметризации поверхности σ вектор-функция $\boldsymbol{r}(s, v)$ описывает при фиксированном s сечение ξ поверхности σ нормальной плоскостью кривой γ. Поскольку γ обладает особенностью порядка 2, то точка M пересечения ξ с γ является особой точкой второго порядка кривой ξ. Поэтому можно считать, что $\boldsymbol{r}_2 \neq 0$ и, следовательно, $\alpha(s) \neq 0$ (8).

Продифференцировав (6) по s и по v*, находим коэффициенты первой квадратичной формы поверхности $E = 1 + e_2 v^2 + o(v^2)$; $F = f_3 v^3 + o(v^3)$; $G = g_2 v^2 + o(v^2)$ (9), где $e_2 = (\vec{\tau}\boldsymbol{r}_2')$; $f_3 = \frac{1}{2}(\boldsymbol{r}_2 \boldsymbol{r}_2')$;

---

* Законность этой операции следует из такого рассуждения. Пусть функция $f(s, v) \in C^2$. Тогда $f(s, v)$ можно разложить по формуле Тейлора: $f(s, v) = f_0(s) + v f_1(s) + \frac{v^2}{2} f_2(s) + o(v^2)$, где $f_0(s) = f(s, 0)$; $f_1(s) = f_v(s, 0)$; $f_2(s) = f_{vv}(s, 0)$. Далее, $f_v(s, v) \in C^1$, и ее также можно разложить по формуле Тейлора: $f_v(s, v) = a_0(s) + v a_1(s) + o(v)$. Но $a_0(s) = f_v(s, 0) = f_1(s)$; $a_1(s) = \left.\frac{\partial(f_v(s, v))}{\partial v}\right|_{v=0} = f_{vv}(s, 0) = f_2(s)$ и, таким образом, $f_v(s, v) = f_1(s) + v f_2(s) + o(v)$. Последнее же выражение можно получить из разложения $f(s, v)$ формальным дифференцированием по v. Аналогично можно обосновать возможность дифференцирования разложения функции $f(s, v)$ по s, а также рассмотреть случай более высокой степени регулярности функции $f(s, v)$.

$g_2 = \alpha^2$ **(10)**. Отсюда можно определить дискриминант первой квадратичной формы $W^2 = \alpha^2 v^2 + o\,(v^2)$ **(11)**. Как видим, $w^2 \neq 0$ в некоторой окрестности линии γ, за исключением самой γ. Поэтому вблизи γ (но вне нее) справедливы на σ все формулы классической теории поверхностей.

При $v \neq 0$ касательная плоскость поверхности σ определяется неколлинеарными векторами $\boldsymbol{r}_s(s,\ v)$ и $\boldsymbol{r}_v(s,\ v)\,v^{-1}$. При $v \to 0$ предельными значениями этих векторов будут соответственно $\vec{\tau}$ и $\boldsymbol{r}_2$, причем, как следует из (6), эти значения не зависят от направления, по которому мы приближаемся к точке особой линии γ. Кроме того, (7) означает, что векторы $\vec{\tau}$ и $\boldsymbol{r}_2$ неколлинеарны. Таким образом, в каждой точке особой линии γ существует плоскость, являющаяся предельным положением касательных плоскостей поверхности σ. Будем говорить о ней как о плоскости, касающейся поверхности σ в точке особой линии γ.

Определим гауссову кривизну поверхности σ в точках, не принадлежащих особой линии γ. Из (6) находим

$$l = (\boldsymbol{r}_{ss}\boldsymbol{r}_s\boldsymbol{r}_v) = l_1 v + l_2 v^2 + l_3 v^3 + l_4 v^4 + o(v^4);\ m = (\boldsymbol{r}_{sv}\boldsymbol{r}_s\boldsymbol{r}_v) = m_2 v^2 + \\ + m_3 v^3 + o\,(v^3);\ n = (\boldsymbol{r}_{vv}\boldsymbol{r}_s\boldsymbol{r}_v) = n_2 v^2 + n_3 v^3 + o\,(v^3), \tag{12}$$

где

$$l_1 = -k\,(\vec{\beta}\boldsymbol{r}_2),\ l_2 = -\frac{k}{2}(\vec{\beta}\boldsymbol{r}_3),\ l_3 = -\frac{k}{6}\,(\vec{\beta}\boldsymbol{r}_4) + \frac{k}{2}\,(\vec{\nu}\boldsymbol{r}_2' + \boldsymbol{r}_2) + \\ + \frac{1}{2}(\boldsymbol{r}_2''\vec{\tau}\boldsymbol{r}_2),\ l_4 = -\frac{k}{24}\,(\vec{\beta}\boldsymbol{r}_5) + \frac{k}{4}\,(\vec{\nu}\boldsymbol{r}_2'\boldsymbol{r}_3) + \frac{k}{6}\,(\vec{\nu}\boldsymbol{r}_3'\boldsymbol{r}_2) + \frac{1}{4}\times \\ \times(\boldsymbol{r}_2''\vec{\tau}\boldsymbol{r}_3) + \frac{1}{6}\,(\boldsymbol{r}_3''\vec{\tau}\boldsymbol{r}_2);\ m_2 = (\boldsymbol{r}_2'\vec{\tau}\boldsymbol{r}_2);\ m_3 = \frac{1}{2}[(\boldsymbol{r}_2'\vec{\tau}\boldsymbol{r}_3) + (\boldsymbol{r}_3'\vec{\tau}\boldsymbol{r}_2)];$$

$$n_2 = \frac{1}{2}(\boldsymbol{r}_3\vec{\tau}\boldsymbol{r}_2),\ n_3 = \frac{1}{3}\,(\boldsymbol{r}_4\vec{\tau}\boldsymbol{r}_3). \tag{13}$$

Тогда

$$\Delta = ln - m^2 = l_1 n_2 v^3 + (l_1 n_3 + l_2 n_2 - m_2^2)\,v^4 + o\,(v^4). \tag{14}$$

При $v \neq 0$ гауссова кривизна K поверхности σ определяется по формуле $K = \Delta W^{-4}$. Подставив сюда (14) и (11), получим

$$K = \frac{l_1 n_2 v^3 + (l_1 n_3 + l_2 n_2 - m_2^2)\,v^4 + o\,(v^4)}{\alpha^4 v^4 + o\,(v^4)}. \tag{15}$$

4. О поведении кривой вблизи особой линии поверхности. Изучим поведение кривых на поверхности σ, отличных от координатных линий s, в окрестности особой линии γ при условии, что рассматриваемое семейство задано дифференциальным уравнением вида $\frac{ds}{dv} = \mu\,(s,\ v)$, а функция μ является непрерывно дифференцируемой в некоторой замкнутой окрестности особой линии γ.

Тогда для любого фиксированного значения $s = s_0$ существует единственное решение задачи Коши $\frac{ds}{dv} = \mu\,(s, v)$; $s\,(0) = s_0$, поскольку существует производная $\mu_s(s, v)$, ограниченная в силу своей непрерывности в рассматриваемой окрестности. Иными словами, всякая кривая исследуемого семейства имеет с особой линией γ общую точку, причем через каждую точку γ проходит единственная кривая этого семейства.

Выберем произвольно из нашего семейства кривых некоторую линию. Вектор $\boldsymbol{t} = \mu \boldsymbol{r}_s + \boldsymbol{r}_v$ является касательным к этой линии, а угол θ между ней и координатной линией s равен углу между векторами $\boldsymbol{t}$ и $\boldsymbol{r}_s$, следовательно,

$$\cos\theta = \frac{(r_s t)}{|r_s||t|} = \frac{\mu E + F}{\sqrt{E}\sqrt{\mu^2 E + 2\mu F + G}}. \tag{16}$$

Поскольку $\mu \in C^1$, то μ можно представить в виде $\mu = \mu_0(s) + o(v^0)$, где $\mu_0(s) = \mu(s, 0)$. Подставив это соотношение вместе с (9) в (16), находим

$$\cos\theta = \frac{\mu_0 + o(v^0)}{\sqrt{1 + o(v)}\sqrt{\mu_0^2 + o(v^0)}}.$$

Если $\mu_0 \neq 0$, то отсюда следует, что $\lim\limits_{v\to 0} |\cos\theta| = 1$, т. е. рассматриваемая кривая касается особой линии.

Пусть теперь $\mu_0 = 0$. Тогда, поскольку $\mu \in C^1$, можно представить эту функцию в виде $\mu = v\mu^1$. Подставив последнее равенство вместе с (9) и (10) в (16) и перейдя к пределу при $v \to 0$, находим

$$\lim_{v\to 0} |\cos\theta| = |\mu_0^1| \left[(\mu_0^1)^2 + \alpha^2\right]^{-\frac{1}{2}}, \tag{17}$$

где $\mu_0^1 = \mu^1(s, 0)$. Этот переход к пределу возможен в силу неравенства (8). Это же неравенство означает, что выражение, стоящее в правой части (17), строго меньше 1. Следовательно, рассматриваемая кривая не касается особой линии, а при $\mu_0^1 = 0$ даже ортогонально пересекает γ. Таким образом, доказана

Лемма. *Пусть на поверхности σ задано однопараметрическое семейство кривых $s = s(v, C)$ с помощью дифференциального уравнения $\frac{ds}{dv} = \mu(s, v)$, причем функция μ принадлежит классу C^1 вблизи линии γ. Тогда, если $\mu(s, 0) \neq 0$, то γ является огибающей рассматриваемого семейства кривых. Если же $\mu(s, 0) = 0$, то каждая из кривых рассматриваемого семейства пересекает особую линию γ под некоторым углом (естественно, отличным от 0 и π), причем этот угол будет равен $\pi/2$ тогда и только тогда, когда $\mu_v(s, 0) = 0$.*

5. Классификация особых линий поверхности. Приступим теперь к выяснению вопроса о том, как влияют условия, которые были сформулированы в пункте 2 при постановке задачи исследования, на поведение поверхности σ вблизи особой линии γ. При этом не будем требовать заранее определенного знака гауссовой кривизны поверхности.

Предположим вначале, что не существует предела a гауссовой кривизны K поверхности σ на особой линии γ. Из (15) следует, что это возможно тогда и только тогда, когда $l_1 n_2 \neq 0$. Таким образом, в рассматриваемом случае должны выполняться неравенства $l_1 \neq 0$ и $n_2 \neq 0$. Первое из этих неравенств ввиду (13) означает, что $(\vec{\beta} \boldsymbol{r}_2) \neq 0$, т. е. вектор $\vec{\nu}$ не принадлежит касательной плоскости поверхности σ (которая, как установлено в пункте 3, определяется неколлинеарными векторами $\vec{\tau}$ и $\vec{\boldsymbol{r}}_2$). Следовательно, соприкасающаяся плоскость особой линии γ не касается поверхности σ. Из неравенства $n_2 \neq 0$, а также (13) и (7) следует, что $\boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{r}_3 \neq 0$ **(18)**.

Напомним, что координатные линии v являются сечениями ξ поверхности σ нормальными плоскостями особой линии γ, причем значению $v = 0$ соответствует на ξ точка M пересечения ее с γ, а векторы $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_3$, $\boldsymbol{r}_4$ при соответствующем значении s являются значениями производных порядка 2, 3 и 4 от вектор-функции, задающей сечение ξ. Поэтому в силу неравенств (18) и $\boldsymbol{r}_2 \neq 0$ точка M является точкой возврата первого рода сечения ξ. Особую линию γ, в случае, когда на ней не существует предела гауссовой кривизны K, назовем ребром возврата типа ∞. Отметим, что, как это следует из (15), особая линия такого типа делит поверхность σ на две области, гауссова кривизна в которых имеет разные знаки.

Пусть теперь существует предел a гауссовой кривизны K поверхности σ на особой линии $\gamma : a(s) = \lim\limits_{v \to 0} K(s, v)$. Тогда должно выполняться равенство $l_1 n_2 = 0$ **(19)**, и из (15) находим $a(s) = (l_1 n_3 + l_2 n_2 - m_2^2)\,\alpha^{-4}$ **(20)**. Отметим, что условие (18) гарантирует независимость значения предела a от направления, по которому точка приближается к соответствующей точке особой линии.

Здесь возможны различные случаи. Предположим, что соприкасающаяся плоскость особой линии γ касается поверхности σ. Тогда вектор $\vec{\beta}$ должен быть ортогонален этой плоскости и, следовательно, $(\vec{\beta} \boldsymbol{r}_2) = 0$. Отсюда и из (13), следует, что $l_1 = 0$; $\boldsymbol{r}_2 = \alpha \vec{\nu}$. Подставляя эти равенства в (13), а затем в (20), находим

$$a(s) = -\frac{k}{4\alpha^3} (\vec{\beta} \boldsymbol{r}_3)^2 - \varkappa^2. \tag{21}$$

Пусть $a(s) \neq -\varkappa^2$. Тогда в силу (5) $(\vec{\beta} \boldsymbol{r}_3) \neq 0$ и из того, что $\boldsymbol{r}_2 = \alpha \vec{\nu}$, следует справедливость неравенства (18). Как и ранее, это означает, что произвольное сечение имеет в точке M возврат первого рода. Особую линию в случае, когда на ней существует предел a гауссовой кривизны K, отличный от $-\varkappa^2$, и соприкасающаяся плоскость особой линии касается поверхности σ, назовем ребром возврата первого рода.

Если же на особой линии γ существует предел a, равный $-\varkappa^2$, а соприкасающаяся плоскость γ опять-таки касается поверхности σ, то такую особую линию назовем ребром возврата асимптотического типа. В этом случае выполняются равенства $l_1 = 0$; $\boldsymbol{r}_2 = \alpha\vec{\nu}$, однако из (21) следует теперь, что $(\vec{\beta}\boldsymbol{r}_3) = 0$, или $\boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{r}_3 = 0$ (22). Это означает, что в отличие от рассмотренных уже случаев ребра возврата типа ∞ и ребра возврата первого рода, условий, которые выделяют ребро возврата асимптотического типа, недостаточно для однозначного ответа на вопрос о характере возврата кривой ξ в точке M, т. е. при этих условиях M может быть точкой возврата как первого, так и второго рода кривой ξ. Например, если $\boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{r}_4 \neq 0$, то в M будет возврат второго рода, если $\boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{r}_4 = 0$, но $\boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{r}_5 \neq 0$, то M будет точкой возврата первого рода и т. д. Будем говорить, что в этом случае требуется дополнительное исследование для определения характера возврата линии ξ в точке M.

Рассмотрим далее случаи, когда соприкасающаяся плоскость γ не касается поверхности σ. Очевидно, при этом вектор $\vec{\beta}$ не ортогонален касательной плоскости: $(\vec{\beta}\boldsymbol{r}_2) \neq 0$. Но тогда вследствие (5) из (13) находим $l_1 \neq 0$ и из (19) следует, что $n_2 = 0$, т. е. выполняется равенство (22).

Выделим специально те типы особых линий, соприкасающаяся плоскость которых ортогональна поверхности σ. Для них $(\vec{\nu}\boldsymbol{r}_2) = 0$ и, следовательно, $\boldsymbol{r}_2 = \alpha\vec{\beta}$. Подставив это равенство вместе с (22) в (13), а затем в (20), находим $a(s) = \frac{k}{3\alpha^2}(\vec{\nu}\boldsymbol{r}_4) - \varkappa^2$. Если предположить $a(s) \neq -\varkappa^2$, то это в силу (5) и (18) означает, что $(\vec{\nu}\boldsymbol{r}_4) \neq 0$. Тогда $\boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{r}_4 \neq 0$ и, поскольку выполняется (22), то сечение ξ имеет в точке M возврат второго рода. Если на особой линии γ существует предел a гауссовой кривизны поверхности σ, отличный от $-\varkappa^2$, а соприкасающаяся плоскость γ ортогональна поверхности σ, то такую особую линию γ назовем ребром возврата второго рода.

Если же на особой линии γ существует предел a, равный $-\varkappa^2$, а соприкасающаяся плоскость γ ортогональна поверхности σ, то γ будем называть ребром возврата геодезического типа. Для такой особой линии $\boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{r}_4 = 0$ и так же, как и в случае ребра возврата асимптотического типа, требуется дополнительное исследование для определения характера возврата кривой ξ в точке M.

Наконец, особую линию, для которой ее соприкасающаяся плоскость не касается поверхности σ и не ортогональна ей, а предел a гауссовой кривизны поверхности существует на особой линии, назовем ребром возврата смешанного типа. В этом случае для определения характера возврата сечения ξ также необходимо дополнительное исследование.

6. Поведение асимптотических линий в окрестности ребра возврата. Для того чтобы вблизи особой линии существовали действительные асимптотические, достаточно потребовать, чтобы предел a, если он существует, был меньше нуля $a(s) < 0$ (23). Тогда по непрерывности и в некоторой окрестности ребра возврата гауссова кривизна поверхности σ будет отрицательна. Ограничимся этим простейшим случаем. Для ребра возврата типа ∞ действительные асимптотические вблизи особой линии всегда существуют, поскольку одна из тех двух частей, на которые делится поверхность σ особой линией γ, имеет отрицательную кривизну. Поведение асимптотических линий вблизи ребра возврата типа ∞ и асимптотического типа здесь исследовано не будет.

Каждое из семейств асимптотических линий поверхности σ можно задать с помощью дифференциального уравнения $\frac{ds}{dv} = \mu(s, v)$, где функция μ определяется равенством $l\mu^2 + 2m\mu + n = 0$ (24).

Чтобы воспользоваться леммой, полученной в пункте 4, необходимо доказать, что функция μ является непрерывно дифференцируемой. Из того, что σ есть поверхность класса C^6, следует, что функции l, m, n принадлежат классу C^4. Тогда равенства (12) означают, что lv^{-1}, mv^{-1}, nv^{-1} — функции класса C^3, mv^{-2} и nv^{-2} — класса C^2, а при $l_1 = 0$ и $lv^{-2} \in C^2$. Из (24) следует, что $\mu = -m/l \pm \sqrt{(m/l)^2 - n/l}$. Но приведенные рассуждения показывают, что при $l_1 \neq 0$ функции m/l, n/l принадлежат классу C^2 (так как, например, $m/l = mv^{-1}/lv^{-1}$ и $lv^{-1} \neq 0$ в окрестности линии $v = 0$, включая саму эту линию), а при $l_1 = 0$, $l_2 \neq 0$ функции m/l, n/l принадлежат классу C^1. Так как неравенство (23) гарантирует выполнение неравенства $(m/l)^2 - n/l > 0$ при $l_1 \neq 0$ и при $l_1 = 0$, $l_2 \neq 0$, то функция $\mu(s, v) \in C^1$. Равенства же $l_1 = l_2 = 0$ возможны, как это следует из предыдущего пункта, лишь для случая ребра возврата асимптотического типа, исключенного в настоящей работе из рассмотрения.

Таким образом, функция $\mu(s, v)$ непрерывно дифференцируема, и следовательно, ее можно представить в виде $\mu(s, v) = \mu_0(s) + v\mu_1(s) + o(v)$ (25), где $\mu_0(s)$ и $\mu_1(s)$ — непрерывно дифференцируемые функции аргумента s.

Подставим разложения (25) и (12) в (24) и приравняем нулю коэффициенты при первых трех степенях v полученного выражения:

$$l_1\mu_0^2 = 0; \; 2l_1\mu_0\mu_1 + l_2\mu_0^2 + 2m_2\mu_0 + n_2 = 0;$$

$$l_1\mu_1^2 + 2l_1\mu_0\mu_2 + 2l_2\mu_0\mu_1 + l_3\mu_0^2 + 2m_2\mu_1 + 2m_3\mu_0 + n_3 = 0. \qquad (26)$$

Для ребра возврата геодезического и смешанного типов, а также ребра возврата второго рода $l_1 \neq 0$; $n_2 = 0$, и система уравнений (26) принимает вид (второе уравнение удовлетворяется тождественно) $\mu_0 = 0$; $l_1\mu_1^2 + 2m_2\mu_1 + n_3 = 0$.

Функция μ_1 является непрерывно дифференцируемой функцией аргумента s в силу неравенств $l_1 \neq 0$ и (23). Следовательно, в соответствии с леммой пункта 4, асимптотические обоих семейств не касаются ребра возврата каждого из перечисленных только что типов. Поскольку для ребра возврата второго рода $\boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{r}_4 \neq 0$, то из (13) следует, что $n_3 \neq 0$ и, таким образом, $\mu_1 \neq 0$. Это означает что ни одна из асимптотических не может быть ортогональна ребру возврата второго рода. Ребро возврата геодезического типа характеризуется равенством $\boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{r}_4 = 0$, откуда следует, что $n_3 = 0$ и по крайней мере одна из двух функций $\mu_1 = 0$. Но последнее равенство означает, что линии одного из семейств асимптотических поверхности σ ортогонально пересекают ребро возврата геодезического типа. Наконец, если для ребра возврата смешанного типа любое сечение ξ имеет в точке M возврат первого рода, то опять-таки $n_3 = 0$, и асимптотические одного из семейств ортогонально пересекают особую линию.

Рассмотрим теперь ребро возврата первого рода, для которого $l_1 = 0$; $n_2 \neq 0$. Из (26) следует (первое уравнение удовлетворяется тождественно) $l_2\mu_0^2 + 2m_2\mu_0 + n_2 = 0$; $2(l_2\mu_0 + m_2)\mu_1 + l_3\mu_0^2 + 2m_3 \times \mu_0 + n_3 = 0$ (27). Непрерывная дифференцируемость функций μ_0, μ_1 обеспечивается неравенствами (23) и $l_2 \neq 0$ (если $l_2 = 0$, то необходимо $n_2 = 0$, что невозможно). Следовательно, обе функции μ, определяемые из (24), принадлежат классу C^1. Но поскольку $n_2 \neq 0$, то $\mu_0 \neq 0$, и из леммы пункта 4 следует, что ребро возврата первого рода огибает семейства асимптотических линий поверхности σ.

Как показывают результаты двух последних пунктов, ограничения, сделанные в работе [1], носят существенный характер. В качестве ограничений выступали такие условия, как существование предела a гауссовой кривизны на особой линии γ, отличие этого предела от $-\varkappa^2$ и касание соприкасающейся плоскости особой линии к поверхности σ. Если все эти условия выполнены, то γ будет ребром возврата первого рода. Именно этот тип особой линии был исследован в [1]. Нарушение же по крайней мере одного из перечисленных условий приводит к тому, что поведение поверхности σ вблизи особой линии принимает иной характер и получается новый тип особой линии.

Список литературы: 1. *Кованцов Н. И.* Ребро возврата поверхности неположительной кривизны.— Укр. геометр. сб., 1979, вып. 22, с. 81—92. 2. *Погорелов А. В.* Дифференциальная геометрия.— М.: Наука. 1974.—176 с.

Поступила в редколлегию 10.05.81.

УДК 513

В. В. Пелипенко, Д. Д. Соколов

ВНЕШНЯЯ ТЕОРЕМА СРАВНЕНИЯ ДЛЯ ВЫПУКЛЫХ ШАПОК В ПСЕВДОЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В римановой геометрии в целом важную роль играют внутренние теоремы сравнения, которые можно рассматривать как систему оценок, связывающих строение многообразий переменной кривизны со строением многообразий постоянной кривизны. С аналитической точки зрения эти теоремы представляют собой теоремы сравнения для уравнений Якоби $y'' + ky = 0$ при переменной и постоянной кривизне k [1].

Оказывается, что похожее соотношение можно установить для внешнегеометрических свойств выпуклых поверхностей, погруженных в евклидово или псевдоевклидово пространство, или, говоря аналитическим языком, для уравнений Монжа-Ампера различных видов.

В качестве примера рассмотрим уравнения Монжа-Ампера простейшего типа $rt - s^2 = k_i\varphi(p, q)$; $i = 1, 2$, с граничным условием $z_i|_\Gamma = 0$, и пусть $0 < k_i \leqslant k_2$.

Тогда, используя метод, приведенный в работе [2, гл. VIII, § 9], нетрудно проверить, что $z_1 \leqslant z_2$. Для выпуклых поверхностей в евклидовом пространстве такие оценки не находили широкого применения, так как оказывалось достаточным сравнение строения выпуклой поверхности со строением ее предельного конуса.

Иная ситуация возникает в псевдоевклидовом пространстве, где изотропный предельный конус не может аппроксимировать строение выпуклой поверхности на бесконечности [3]. В этой работе доказана одна из внешнегеометрических теорем сравнения, устанавливающая связь между строением выпуклых шапок с дефинитной метрикой постоянной и переменной кривизны в псевдоевклидовом пространстве $E^3_{(2,1)}$ с метрикой $ds^2 = dx^2 + dy^2 - dz^2$. Идея оценки сходна с идеей оценки в принципе максимума в теории выпуклых поверхностей [2] и использует ряд методов А. В. Погорелова в теории уравнений Монжа-Ампера.

Рассмотрим три выпуклые шапки ω_0, ω_1 и ω_2 с положительно определенной метрикой, изометричных геодезическим кругам с регулярной метрикой класса $C^{2,\alpha}$ $(\alpha > 0)$ одного и того же радиуса R. В силу теорем об априорной регулярности [4, 5] эти шапки являются поверхностями класса $C^{2,\alpha'}$ $(\alpha' < \alpha)$. В смысле внутренней геометрии они являются многообразиями отрицательной кривизны, на которых можно ввести геодезическую полярную метрику $ds^2 = d\rho^2 + c_i^2 d\varphi^2$; $i = 0, 1, 2$; $0 \leqslant \rho \leqslant R$ **(1)**. Установим соответствие между точками шапок с помощью координат (1) (такое соответствие называется экспоненциальным). Предположим, что шапки ω_i

имеют край в плоскости $z=0$ и обращены выпуклостью в сторону $z<0$. Пусть, наконец, шапки ω_1 и ω_2 имеют постоянные кривизны k_1 и k_2, которые, конечно, отрицательны, причем $k_1<k_2<0$. Тогда имеет место следующая

Теорема. *Пусть кривизна k шапки ω_0 удовлетворяет условию $k_1^{\frac{2}{3}}k_2^{\frac{1}{3}}<k<k_1^{\frac{1}{3}}k_2^{\frac{2}{3}}$. Тогда для z-координат соответствующих точек шапок ω_i выполнены неравенства $z_1\leqslant z_0\leqslant z_2$.*

Доказательство. Заметим сначала, что в силу теоремы единственности выпуклых шапок в псевдоевклидовом пространстве [5] шапки ω_1 и ω_2 конгруэнтны шапкам, отсеченным от компонент сфер $x^2+y^2-z^2=1/k_i$; $i=1, 2$, некоторыми плоскостями $z=\text{const}$.

Для доказательства неравенства $z_1\leqslant z_0$ (неравенство $z_0\leqslant z_2$ доказывается аналогично) достаточно доказать, что функция z_1- $-z_0$ не имеет при $\rho<R$ положительного максимума.

Докажем это утверждение сначала для точек, не совпадающих с началом координат $\rho=0$. В этих точках функция z_0 удовлетворяет уравнению Дарбу для поверхности в псевдоевклидовом пространстве, записанному в координатах (ρ, φ), $r(t+\alpha)-(s-\beta)^2+$ $+\gamma=0$ **(2)**, где

$$r=z_{0\rho\rho};\quad s=z_{0\rho\varphi};\quad t=z_{0\varphi\varphi};\quad p=z_{0\rho};\quad q=z_{0\varphi};\quad \alpha=cc_\rho p-\frac{c_\varphi}{c}q;$$

$$\beta=\frac{c_\rho}{c}q;\quad \gamma=-\frac{c_{\rho\rho}}{c}(c^2+c^2p^2+q^2);\quad c=c_0.$$

Следуя методу, описанному в [2, гл. VIII, § 9], построим функцию

$$\tilde{\gamma}=(s_1-\tilde{\beta})^2-r_1(t_1+\tilde{\alpha}), \tag{3}$$

где

$$r_1=z_{1\rho\rho};\quad s_1=z_{1\rho\varphi};\quad t_1=z_{1\varphi\varphi};\quad p_1=z_{1\rho};\quad q_1=z_{1\varphi};$$

$$\tilde{\alpha}=cc_\rho p_1-\frac{c_\varphi}{c}q_1;\quad \tilde{\beta}=\frac{c_\rho}{c}q_1.$$

Далее, вычитая (2) и (3), найдем

$$A(z_1-z_0)_{\rho\rho}-2B(z_1-z_0)_{\rho\varphi}+$$

$$+C(z_1-z_0)_{\varphi\varphi}=\frac{1}{2}(r_1+r_2)(\alpha-\tilde{\alpha})-(s_1+s-\beta-\tilde{\beta})+\gamma-\tilde{\gamma}, \tag{4}$$

где

$$A=\frac{1}{2}(t+t_1+\alpha+\tilde{\alpha});\quad B=\frac{1}{2}(s+s_1-\beta-\tilde{\beta});\quad C=\frac{1}{2}(r+r_1).$$

Пусть z_1-z_0 достигает положительного максимума в некоторой точке $(\bar{\rho}, \bar{\varphi})$. Тогда в этой точке $d(z-z_0)=0$, следовательно, $q=q_1=0$; $p=p_1$ и (4) примет вид

$$\frac{1}{2}(t+t_1+2cc_\rho p_1)(z_1-z_0)_{\rho\rho}-$$

$$-(s+s_1)(z_1-z_0)_{\rho\varphi}+\frac{1}{2}(r+r_1)(z_1-z_0)_{\varphi\varphi}=\gamma-\tilde{\gamma}. \tag{5}$$

В силу того что уравнение Дарбу для шапки ω_0 имеет эллиптический тип, левая часть соотношения (5) неположительно определена. Очевидно, теперь достаточно проверить, что правая часть (5) положительна, т. е. $\gamma > \tilde{\gamma}$ **(6)**. Учитывая, что в точке $(\bar{\rho}, \bar{\varphi})$ будет $\gamma = -\frac{c_{\rho\rho}}{c}(c^2 + c^2 p_1^2)$; $\tilde{\gamma} = -r_1 p_1 c c_\rho$ и что для интересующей нас компоненты сферы $p_1 = \operatorname{sh}\sqrt{-k_1}\rho$; $r_1 = \sqrt{-k_1}\operatorname{ch}\sqrt{-k_1}\rho$, получим, что неравенство (6) сводится к неравенству

$$-kc < \sqrt{-k_1}\, c_\rho \operatorname{th}\sqrt{-k_1}\,\rho. \tag{7}$$

При получении (7) мы учли, что функция c удовлетворяет уравнению $c_{\rho\rho} = -kc$. Делая подстановку $y = \frac{c}{c_\rho}$, запишем это уравнение в виде $(1 - y_\rho)/y^2 = -k$ **(8)**, а неравенство (7) — в виде $-ky < -k_1 y_1$ **(9)**, где $y_1 = \frac{1}{\sqrt{-k_1}}\operatorname{th}\sqrt{-k_1}\,\rho$ **(10)**.

Заметим, что y_1 является решением уравнения (8) с правой частью, равной $-k_1$. Решение $y(\rho, \varphi)$ уравнения (8) удовлетворяет граничным условиям $y|_{\rho=0} = 0$ **(*)**, так как $c|_{\rho=0} = 0$, $c_\rho|_{\rho=0} = 1$.

Необходимо выполнение дифференциального неравенства (9) лишь в точке $(\bar{\rho}, \bar{\varphi})$. Покажем, что оно справедливо для всех (ρ, φ). Для этого докажем сначала неравенства $\tilde{y} \leqslant y \leqslant \tilde{\tilde{y}}$ **(11)** с граничными условиями (*), где $\tilde{y}$ и $\tilde{\tilde{y}}$ — решения уравнения (8) с правыми частями $-k_1^{\frac{2}{3}}k_2^{\frac{1}{3}}$ и $-k_2^{\frac{2}{3}}k_1^{\frac{1}{3}}$ соответственно и граничными условиями (*). Явный вид функций $\tilde{y}$ и $\tilde{\tilde{y}}$ аналогичен (10).

Докажем (11) от противного. Пусть существует точка (ρ_0, φ_0), в которой, например, $\tilde{y} > y$. Рассмотрим функцию $f(\rho) = \tilde{y}(\rho, \varphi_0) - y(\rho, \varphi_0)$. Она равна нулю при $\rho = 0$ (так как $y|_{\rho=0} = \tilde{y}|_{\rho=0} = 0$) и принимает положительное значение при $\rho = \rho_0$, тогда найдется ρ_1 $(0 < \rho_1 < \rho_0)$, при котором как сама функция $f(\rho)$, так и ее производная положительны. Таким образом, в точке (ρ_1, φ_0) выполняются неравенства $-y_\rho > -\tilde{y}_\rho$; $\tilde{y} > y$. Прибавим к первому из них единицу, возведем второе в квадрат (учитывая, что $\tilde{y} > 0$, см. (10), и $y > 0$, так как $c > 0$, $c_\rho > 0$), поделим первое на второе. Получим, что в точке (ρ_1, φ_0) выполняется неравенство $\frac{(1 - y_\rho)}{y^2} > \frac{(1 - \tilde{y}_\rho)}{\tilde{y}^2}$ **(12)**. Это неравенство с учетом (8) означает, что в точке (ρ_1, φ_0) кривизна $k < k_1^{\frac{2}{3}}k_2^{\frac{1}{3}}$, что противоречит условиям теоремы. Вторая часть (11) доказывается аналогично.

Теперь для доказательства справедливости неравенства (9) достаточно заметить справедливость цепочки неравенств

$$-ky < -k_1^{\frac{2}{3}}k_2^{\frac{1}{3}}y < -k_1^{\frac{2}{3}}k^{\frac{1}{3}}\tilde{y} < -k_1^{\frac{2}{3}}k_2^{\frac{1}{3}}\sqrt{\frac{k_1}{k_1^{\frac{1}{3}}k_2^{\frac{2}{3}}}}\,y_1 = -k_1y_1,$$

где первые два неравенства следуют из условий теоремы и неравенства (11), а третье неравенство следует из явного вида (см. (10)) решений $\tilde{y}$ и y_1 уравнения (8).

Осталось доказать, что функция $z_1 - z_0$ не достигает положительного максимума при $\rho = 0$. Предположим, напротив, что в точке $\rho = 0$ функция $z_1 - z_0$ достигает максимума. Тогда касательные плоскости к шапкам ω_0 и ω_1 в точке $\rho = 0$ параллельны, так как $d(z_0 - z_1) = 0$. Кроме того, эти плоскости параллельны плоскостям $z_0 = 0$ и $z_1 = 0$ оснований шапок ω_0 и ω_1, так как это, очевидно, справедливо для шапки ω_1. Введем прямоугольные декартовые координаты (x, y) в касательной плоскости к шапке ω_1 с началом в точке касания $\rho = 0$. Перенося с помощью экспоненциального соответствия координаты (x, y) с шапки ω_1 на шапку ω_0, замечаем, что локально в точке $(0, 0)$ эти координаты будут образовывать прямоугольную декартовую систему на шапке ω_0, причем в точке $(0, 0)$ $z_{0x} = z_{0y} = z_{1x} = z_{1y} = 0$ **(13)**. В координатах (x, y) точка $\rho = 0$ шапки ω_0 не является особой точкой, поэтому в ней можно записать уравнение Дарбу, которое, с учетом (13), примет вид $z_{0xx}z_{0yy} - z_{0xy}^2 = -k$.

Повторяя рассуждение, проведенное ранее в координатах (ρ, φ), получим уравнение

$$A(z_1 - z_0)_{xx} - 2B(z_1 - z_0)_{xy} + C(z_1 - z_0)_{yy} = k - k_1, \qquad (14)$$

где

$$A = \frac{1}{2}(z_{0yy} + z_{1yy}); \quad B = \frac{1}{2}(z_{0xy} + z_{1xy}); \quad C = \frac{1}{2}(z_{0xx} + z_{1xx}).$$

Правая часть (14) согласно условиям теоремы положительна, левая же, как и ранее, не положительна (в силу эллиптичности уравнения). Полученное противоречие доказывает утверждение в точке $\rho = 0$. В силу граничных условий $z_0|_{\rho=R} = z_1|_{\rho=R} = 0$ заключаем, что неравенство $z_1 \leqslant z_0$ справедливо при $0 \leqslant \rho \leqslant R$. Теорема доказана.

Метод, использованный для доказательства теоремы, не позволяет ослабить условия на кривизну k в виде $k_1 < k < k_2 < 0$. Действительно, приведем пример, когда выполнение, например, условия $k_1 < k < 0$ не влечет за собой выполнения неравенства $k_1y_1 < ky$, т. е. нарушается неравенство (9).

Для простоты положим $k_1 = -1$. Рассмотрим функцию

$$y = \begin{cases} \operatorname{th}\rho\left[1 + \alpha\left(\frac{b}{2\pi n}x\right)^{\frac{2\pi n a}{\alpha}}\right], & \text{при } \rho \leqslant \frac{2\pi n}{b}, \\ \operatorname{th}\rho\,(1 + \alpha + a\sin b\rho), & \text{при } \rho > \frac{2\pi n}{b}. \end{cases} \qquad (15)$$

Нетрудно проверить непрерывность функции и ее производной в точке $\rho = \frac{(2\pi n)}{b}$. Положим $k = \frac{(y' - 1)}{y^2}$. Покажем, что при следующих условиях на параметры α, a, b, n

$$0 < a < \frac{\alpha}{4(1+\alpha)}; \quad \frac{9}{8}\alpha < ab < \frac{11}{8}\alpha;$$

$$n > \frac{b}{2\pi} \max\left\{\operatorname{arcch}\sqrt{8\left(1+\frac{a}{\alpha}\right)}, \quad \operatorname{arcsh}\sqrt{8}\right\}; \tag{16}$$

$$n \text{ — натуральное; } a,\ b,\ \alpha,\ n = \text{const},$$

хотя для всех ρ соответствующая решению (15) кривизна k удовлетворяет условию $k_1 < k < 0$, тем не менее при некоторых $\rho > \frac{2\pi n}{b}$ неравенство $k_1 y_1 < ky$ нарушается. Действительно, подставляя (15) в (8) при $\rho > \frac{2\pi n}{b}$ и учитывая условия (16), найдем

$$-k = \frac{1-y'}{y^2} = \frac{\operatorname{th}^2\rho - \dfrac{\alpha + a\sin b\rho}{\operatorname{ch}^2\rho} - ab\cos b\rho \operatorname{th}\rho}{\operatorname{th}^2\rho\,(1+\alpha+a\sin b\rho)^2} \leqslant$$

$$< \frac{1 + ab + \dfrac{\alpha + a}{\operatorname{ch}^2\rho}}{1 + 2\alpha - 2a(\alpha+1)} < \frac{1 + ab + \dfrac{\alpha}{8}}{1 + \dfrac{3}{2}\alpha} < \frac{1 + \dfrac{3}{2}\alpha}{1 + \dfrac{3}{2}\alpha} = 1 = -k_1.$$

Нетрудно проверить, что неравенство $k > k_1$ справедливо и при $0 \leqslant \rho \leqslant \frac{2\pi n}{b}$. Вычисляя $-\frac{ky}{y_1}$, где $y_1 = \operatorname{th}\rho$, получим

$$-\frac{ky}{y_1} = \frac{1-y'}{y\operatorname{th}\rho} = \frac{\operatorname{th}^2\rho - \dfrac{\alpha + a\sin b\rho}{\operatorname{ch}^2\rho} - ab\cos b\rho\operatorname{th}\rho}{\operatorname{th}^2\rho\,(1+\alpha+a\sin b\rho)}.$$

В точках $\rho = (2m+1)\frac{\pi}{b}$, где $m \geqslant n$, $\cos b\rho = -1$. Следовательно, в этих точках

$$-\frac{ky}{y_1} > \frac{1 - \dfrac{a}{\operatorname{sh}^2\rho} + ab}{1+\alpha} > \frac{1+\alpha}{1+\alpha} = -k_1,$$

где мы использовали условия (16). Итак, в этих точках, а следовательно и в некоторых их окрестностях неравенство $k_1 y_1 < ky$ нарушается. Аналогичный пример можно привести и для второй части двойного неравенства $k_1 < k < k_2 < 0$, показав, что из $k < < k_2 < 0$ не следует неравенство $ky < k_2 y_2$, а следовательно, наш метод не позволяет доказать теорему при более слабом условии на кривизну $k_1 < k < k_2 < 0$.

Однако, по крайней мере, для поверхностей вращения, когда $c \equiv c(\rho)$, $z \equiv z(\rho)$ (не зависят от φ), из $k_1 < k < k_2 < 0$ следует неравенство $z_1 \leqslant z \leqslant z_2$. В этом случае нетрудно найти решение уравнения Дарбу для шапки ω_0

$$z_0(\rho) = \int_R^\rho \sqrt{c_\rho^2 - 1}\, d\rho; \quad (0 \leqslant \rho \leqslant R).$$

Так как по условию $k_1 < k < 0$, то из уравнения для c находим, что

$$\frac{c_{1\rho\rho}}{c_1} > \frac{c_{\rho\rho}}{c}. \tag{17}$$

С другой стороны, из неравенства $k_1 < k < 0$ следует, что $y_1 < y$ (что доказывается точно так же, как и неравенство (11)), т. е. $\frac{c_{1\rho}}{c_1} > \frac{c_\rho}{c}$. Интегрируя это неравенство от произвольной точки ρ_0 при $\rho > \rho_0$, получим

$$\ln \frac{c_1(\rho)}{c_1(\rho_0)} > \ln \frac{c(\rho)}{c(\rho_0)},$$

откуда следует, что $\frac{c_1(\rho)}{c(\rho)} > \frac{c_1(\rho_0)}{c(\rho_0)}$. Переходя к пределу при $\rho_0 \to 0$ и используя правило Лопиталя, получим

$$\frac{c_1(\rho)}{c(\rho)} \geqslant \lim_{\rho_0 \to 0} \frac{c_1(\rho_0)}{c(\rho_0)} = \lim_{\rho_0 \to 0} \frac{c_1'(\rho_0)}{c'(\rho_0)} = 1,$$

т. е. для всех $\rho > 0$ $c_1(\rho) \geqslant c(\rho)$. Тогда из (17) следует, что $c_{1\rho\rho} > c_{\rho\rho}$. Интегрируя это неравенство и учитывая, что $c_{1\rho}|_{\rho=0} = c_\rho|_{\rho=0} = 0$, получим $c_{1\rho} > c_\rho$ для всех $\rho > 0$. Следовательно,

$$z_0(\rho) = -\int_\rho^R \sqrt{c_\rho^2 - 1}\, d\rho \geqslant -\int_\rho^R \sqrt{c_{1\rho}^2 - 1}\, d\rho = z_1(\rho),$$

где $0 \leqslant \rho \leqslant R$. Аналогично доказывается, что $z \leqslant z_2$. Утверждение доказано, причем при $\rho < R$ справедливы строгие неравенства $z_1 < z < z_2$. Подчеркнем, что хотя нам и удалось доказать теорему для поверхностей вращения при условиях на кривизну $k_1 < k < k_2 < 0$, но, как видно из приведенного выше примера, метод принципа максимума не дает этого результата, ибо зависимость решения от угла φ в этом примере не играла роли. Иными словами, хотя выполнены неравенства $z_1 \leqslant z \leqslant z_2$, тем не менее неравенство (6) $\gamma - \tilde{\gamma} > 0$ может нарушаться.

Обратим внимание на то, что доказанная теорема похожа на внутренние теоремы сравнения не только по формулировке, но и по методам доказательства. Они сводятся к установлению некоторых соотношений между решениями уравнения Якоби при постоянной и переменной кривизне.

Список литературы: 1. *Громол Д., Клингенберг В., Мейер В.* Риманова геометрия в целом.— М.: Мир, 1971.— 191 с. 2. *Погорелов А. В.* Внешняя геометрия выпуклых поверхностей.— М.: Наука, 1969.— 638 с. 3. *Соколов Д. Д.* О двумерных выпуклых поверхностях с дефинитной метрикой в трехмерном псевдоевклидовом пространстве.— Тр. геометр. семинара. Ин-т науч. и техн. информации АН СССР, 1974, **6**. 277—293. 4. *Соколов Д. Д.* О выпуклых поверхностях с ограниченной полной кривизной в псевдоевклидовом пространстве.— Усп. мат. наук. 1979, **34**, вып. 3. с. 213—214. 5. *О регулярности* выпуклых поверхностей с дефинитной метрикой в трехмерном псевдоевклидовом пространстве.— Пробл. геометрии, 1977, **8**, с. 252—277.

Поступила в редколлегию 07.05.81.

УДК 513

Л. Н. Сергиенко

К ГЕОМЕТРИИ МОНЖЕВЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧЕТЫРЕХМЕРНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Уравнением Монжа называется уравнение

$$\Phi(x,\ y,\ z;\ dx,\ dy,\ dz) = 0, \tag{1}$$

однородное степени $k > 1$ относительно дифференциалов (см., например, [1]). Каждой точке $A(x,\ y,\ z)$ уравнение Монжа подчиняет конус Монжа с вершиной в этой точке: $\Phi(x,\ y,\ z;\ X - x,\ Y - y,\ Z - z) = 0$ **(2)**, прямолинейные образующие которого служат касательными к интегральным кривым монжева уравнения.

1. Куспидальные линии системы двух монжевых уравнений в E_4.

Рассмотрим в четырехмерном евклидовом пространстве E_4 систему двух монжевых уравнений: $\Phi_j(x_i;\ dx_i) = 0$ **(3)**, (здесь и везде в дальнейшем $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4;\ j = 1,\ 2$). Эта система подчиняет точке $M(x_i)$ пространства E_4 двумерный конус, уравнения которого $\Phi_j(x_i;\ X_i - x_i) = 0$ **(4)**. Интегральные кривые системы (3) касаются прямолинейных образующих конуса (4).

Двумерная плоскость, касательная к конусу (4) вдоль образующей $\left(x_i' = \frac{dx_i}{ds}\right)$, определяется системой уравнений

$$\sum_{k=1}^{4} \Phi_{jx_k'}(X_k - x_k) = 0. \tag{5}$$

В работе [2] из совокупности интегральных кривых системы (3) были выделены классы геодезических линий: «прямейших» и «кратчайших». В этом параграфе из совокупности интегральных кривых выделим кривые, вдоль которых касательные 2-плоскости (5) в бесконечно близких точках пересекаются не в точке, а по прямой.

Перейдем от точки $M(x_i)$ к бесконечно близкой точке $M_1(x_i + dx_i)$ и запишем уравнение касательной 2-плоскости к конусу Монжа в точке M_1

$$\sum_{k=1}^{4} d\Phi_{jx_k'}(X_k - x_k) = 0. \tag{6}$$

Для того чтобы плоскости (5) и (6) пересекались по прямой, необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{vmatrix} \Phi_{1x_1'} & \Phi_{1x_2'} & \Phi_{1x_3'} & \Phi_{1x_4'} \\ \Phi_{2x_1'} & \Phi_{2x_2'} & \Phi_{2x_3'} & \Phi_{2x_4'} \\ d\Phi_{1x_1'} & d\Phi_{1x_2'} & d\Phi_{1x_3'} & d\Phi_{1x_4'} \\ d\Phi_{2x_1'} & d\Phi_{2x_2'} & d\Phi_{2x_3'} & d\Phi_{2x_4'} \end{vmatrix} = 0. \tag{7}$$

Приняв x_1 за независимую переменную, получим для определения трех функций $x_2(x_1)$, $x_3(x_1)$, $x_4(x_1)$ систему трех дифференциальных уравнений (3), (7) (два уравнения первого порядка и одно уравнение второго порядка), из которой искомые линии определяются с четырьмя произвольными постоянными. Следуя терминологии Фубини и Чеха [3], назовем эти линии куспидальными.

2. Уравнения Монжа комплексов прямых в E_4.

Комплекс прямых в E_3 подчиняет каждой точке пространства конус. Уравнение Монжа (1) также подчиняет каждой точке пространства конус (2). С. Ли установил форму, которую принимает монжево уравнение, если оно является уравнением комплекса прямых [4].

В E_3 комплекс прямых можно задать уравнением $\Phi(p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{23}, p_{42}, p_{34}) = 0$, где p_{ik} — плюккеровы координаты прямой, $p_{ik} = x_i y_k - x_k y_i$ $(i, k = 1, 2, 3, 4)$ [5]. Полагая $y_l = x_l + dx_l$ и переходя к неоднородным координатам $(x_4 = 1)$, получим монжево уравнение комплекса $\Phi(xdy - ydx, xdz - zdx, ydz - zdy; dx, dy, dz) = 0$ в виде, найденном С. Ли [4, с. 254].

Рассмотрим плюккеровы координаты в $E_4: p_{lm} = \begin{vmatrix} x_l & y_l \\ x_m & y_m \end{vmatrix}$ $(l, m = 1, \ldots, 5)$. Эти координаты (их всего 10) связаны тремя зависимостями: $p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0$; $p_{12}p_{35} + p_{13}p_{52} + p_{15}p_{23} = 0$; $p_{12}p_{45} + p_{14}p_{52} + p_{15}p_{24} = 0$ или $p_{1[2}p_{34]} = 0$, $p_{1[2}p_{35]} = 0$, $p_{1[2}p_{45]} = 0$.

Плюккеровы координаты определяют ∞^6 прямых в E_4, т. е. совокупность всех прямых пространства. В E_4 существуют комплексы двух типов: определяемые одним однородным уравнением относительно плюккеровых координат (эти комплексы изучались К. И. Гринцевичюсом под названием гиперкомплексов [6, 7]) и определяемые двумя однородными уравнениями относительно плюккеровых координат (такие комплексы В. Л. Карпенко назвал 4-комплексами [8], а В. А. Приходько называл их комплексами K_1 индекса один [9]).

Выясним, какую форму примут уравнения Монжа, если они будут уравнениями комплексов прямых в E_4. Гиперкомплекс прямых в E_4 можно задать уравнением $\Phi(p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{15}, p_{23}, p_{42}, p_{52}, p_{34}, p_{35}, p_{45}) = 0$, а комплекс K_1 — системой уравнений

$\Phi_j(p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{15}, p_{23}, p_{42}, p_{52}, p_{34}, p_{35}, p_{45}) = 0$. Взяв на прямой две бесконечно близкие точки с координатами (x_m), $(x_m + dx_m)$ $(m = 1, \ldots, 5)$ и переходя к неоднородным координатам $(x_5 = 1)$, получим монжево уравнение гиперкомплекса $\Phi(x_2dx_1 - x_1dx_2, x_3dx_1 - x_1dx_3, x_4dx_1 - x_1dx_4, x_3dx_2 - x_2dx_3, x_4dx_2 - x_2dx_4, x_4dx_3 - x_3dx_4; dx_1, dx_2, dx_3, dx_4) = 0$ и систему двух монжевых уравнений, определяющую комплекс K_1, $\Phi_j(x_2dx_1 - x_1dx_2, x_3dx_1 - x_1dx_3, x_4dx_1 - x_1dx_4, x_3dx_2 - x_2dx_3, x_4dx_2 - x_2dx_4, x_4dx_3 - x_3dx_4; dx_1, dx_2, dx_3, dx_4) = 0$.

Список литературы: 1. *Синцов Д. М.* Работы по неголономной геометрии.— К.: Вища школа, 1972.— 296 с. 2. *Сергиенко Л. Н.* Геодезические линии системы интегральных кривых двух уравнений Монжа в E_4.— Укр. геометр. сб., 1976, вып. 22, с. 128—131. 3. *Fubini G., Čech E.* Geometria Proiettiva Differenziole, t. 2. — Bologna, 1927.— 290 S. 4. *Lie S.* Geometrie der Berührungstransformationen.— Leipzig, 1896.— 696 S. 5. *Клейн Ф.* Высшая геометрия.— М.: ГОНТИ, 1939.— 400 с. 6. *Гринцевичюс К. И.* О гиперкомплексе прямых в четырехмерном проективном пространстве.— Автореф. дис. . . . канд. мат. наук, М., 1955.—16 с. 7. *Гринцевичюс К. И.* О гиперкомплексе прямых в проективном пространстве P_4.— ДАН СССР, 1956, т. 107, № 6, с. 785—788. 8. *Карпенко В. Л.* Нормальный репер n-комплекса прямых в n-мерном проективном пространстве.— Укр. геометр. сб., 1967, вып. 4, с. 23—31. 9. *Приходько В. А.* О комплексе K_1 прямых проективного пространства.— Геометр. сб., Томск, 1979, вып. 20, с. 16—22.

Поступила в редколлегию 12.10.81.

УДК 513

М. А. Улановский

О КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ ЛОРЕНЦОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

В статье доказываются некоторые утверждения о конформных отображениях лоренцовых пространств, в частности — пространств Эйнштейна. Лоренцово пространство — псевдориманово V_n с фундаментальной формой g сигнатуры $(+, -, \ldots, -)$. Конформное отображение — дифференцируемое отображение $f: V_n \to V_n^*$ такое, что для каждой точки $v \in V_n$ известным образом определенное отображение df^{-1} переводит фундаментальную форму g^* пространства V_n^* (в точке $f(v)$) в форму, пропорциональную $g(v)$,

$$df^{-1}g^* = e^{2\sigma}g; \quad \sigma = \sigma(v).$$

f — гомотетия, если σ не зависит от $v: \sigma = \text{const}$. Не предполагается, что f инъективно. Из определения следует лишь, что ранг f в каждой точке V_n максимален.

Лоренцово V_n будем называть изотропно полным (или нуль-полным), если на каждой непродолжаемой изотропной геодезической канонический параметр (аффинная дуга) принимает все вещественные значения. Изотропная полнота, как свойство метрики g на V_n, конформно не инвариантна. Изотропно полное V_n может, вообще говоря, быть конформно отображено на собственное открытое подмногообразие другого лоренцова V_n^*.

В работе [1] было сформулировано определение конформной полноты лоренцова V_n. Это определение основано на фундаментальном понятии «нормальной конформной связности», принадлежащем Э. Картану. С помощью нормальной конформной связности определяется «конформная развертка» изотропной геодезической — конформно инвариантное отображение такой геодезической в прямолинейную образующую однополостного гиперболоида, рассматриваемого как гиперповерхность вещественного проективного P_{n+1}. V_n конформно полно, если развертка каждого непродолжаемого изотропного геодезического луча «пробегает» образующую бесчисленное множество раз (впоследствии другими авторами также были сформулированы определения понятия конформной полноты, более или менее близкие к изложенному). Легко видеть, что конформно полное V_n не может быть конформно отображено на собственное открытое подмногообразие другого пространства.

В предлагаемой заметке понятие конформной развертки изотропной геодезической используется для доказательства следующих утверждений.

Теорема 1. *Изотропно полное пространство Эйнштейна (для которого по определению* $\mathrm{Ric}=\frac{\rho}{n}g$, *где* Ric — *тензор Риччи,* ρ — *скалярная кривизна) не может быть конформно отображено на собственное открытое подмногообразие лоренцова пространства, у которого форма Риччи имеет неположительные значения на всех изотропных векторах касательного пучка.*

Теорема 2. *Если* $f: V_n \to V_n^*$ — *конформное отображение изотропно полного пространства Эйнштейна* V_n *в пространство Эйнштейна* V_n^*, *то* f — *сюръективная гомотетия.*

Несколько ослабленный вариант этой теоремы: если g — *изотропно полная метрика Эйнштейна, то форма* $\bar{g}=e^{2\sigma}g$ *будет метрикой Эйнштейна тогда и только тогда, когда* $\sigma=\mathrm{const}$.

Теорема 3. *Если форма Риччи изотропно полного лоренцова* V_n *неотрицательна на всех изотропных векторах и отлична от нуля хотя бы на одном изотропном векторе, то* V_n *не может быть конформно отображено в лоренцово* V_n^*, *форма Риччи которого неположительна на всех изотропных векторах* (для случая, когда V_n^* — пространство Эйнштейна, этот результат был получен Dhooghe'ом [2]).

Понятие нормальной конформной связности Э. Картана в дальнейшем не используется в явном виде. Развертка изотропной геодезической вводится с помощью некоторого формально присоединенного к каждой такой геодезической обыкновенного дифференциального уравнения. Впрочем, это же уравнение можно найти в заметке [1], где подробно разобрано его происхождение.

Размерность n рассматриваемых лоренцовых пространств всюду предполагается больше двух; дифференцируемость понимается в смысле C^∞. Знак тензора Риччи выбран так, что форма Риччи на сфере со стандартной римановой метрикой положительна (в заметке [1] использовался тензор Риччи с противоположным знаком).

Пусть V_n — лоренцово пространство, g — его фундаментальная форма, $\gamma\colon (a;\, b) \to V_n$ — изотропная геодезическая с произвольным параметром $t \in (a;\, b)$, $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$; $\gamma(t)$ определяется уравнением $\nabla_\tau \tau = r(t)\,\tau$, где τ — касательный вектор геодезической (соответствующий выбранному параметру t), ∇_τ — ковариантная производная в направлении τ (в связности Леви — Чивита метрики g). Обозначим также через $\mathrm{Ric}(\tau)$ значение формы Риччи на векторе τ. В локальных координатах $u^1, \ldots, u^n$ уравнение $\gamma(t)$ и форма Риччи имеют вид

$$\frac{d^2u^i}{dt^2} + \Gamma^i_{jk}\frac{du^j}{dt}\frac{du^k}{dt} = r(t)\frac{du^i}{dt};\ \mathrm{Ric}(\tau) = R_{ij}\frac{du^i}{dt}\frac{du^j}{dt},$$

где Γ^i_{jk} — коэффициенты связности. Параметр t — аффинная дуга геодезической $\gamma(j)$, если $r(t) \equiv 0$.

Легко проверить, что при замене фундаментальной формы g формой $\bar{g} = e^{2\sigma}g$ дуга $\gamma\colon (a;\, b) \to V_n$ остается изотропной геодезической; связь между $\mathrm{Ric}(\tau)$ и $\overline{\mathrm{R}}\mathrm{ic}(\tau)$ (τ — по-прежнему касательный к $\gamma(t)$ вектор, $\overline{\mathrm{R}}\mathrm{ic}$ — форма Риччи в метрике $\bar{g}$) может быть выражена формулой

$$\overline{\mathrm{R}}\mathrm{ic}(\tau) = \mathrm{Ric}(\tau) - (n-2)\left(\frac{d^2\sigma}{dt^2} - \left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 - r(t)\frac{d\sigma}{dt}\right). \qquad (1)$$

Сопоставим каждой изотропной геодезической обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} - r(t)\frac{dx}{dt} + \frac{\mathrm{Ric}(\tau)}{n-2}x = 0. \qquad (2)$$

Если t — аффинная дуга ($r(t) = 0$), уравнение приобретает вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\mathrm{Ric}(\tau)}{n-2}x = 0 \qquad (3)$$

(в такой форме оно приведено в работе [1]).

Пусть $x_1(t)$, $x_2(t)$ — произвольная фундаментальная система решений уравнения (2); как известно, $x_1(t)$ и $x_2(t)$ можно считать определенными и линейно независимыми в целом на $(a;\, b)$ (для геодезической $\gamma\colon (a;\, b) \to V_n$). Для произвольного $t \in (a;\, b)$ будем интерпретировать $x_1(t)$, $x_2(t)$ как однородные проективные координаты стандартной вещественной проективной прямой P_1. Тем самым будет определено отображение $R_g\colon (a;\, b) \to P_1$: вещественному $t \in (a;\, b)$ поставлена в соответствие точка $(x_1(t),\, x_2(t))$. Это отображение и назовем конформной разверткой (короче — просто разверткой) изотропной геодезической $\gamma\colon (a;\, b) \to V_n$. Допуская некоторую неточность терминологии, можно назвать разверткой и образ $(a; b)$ в отображении R_g. При этом понятие развертки имеет смысл и для непродолжаемой геодезической, и для любого ее отрезка или луча.

Легко проверяются следующие свойства развертки.

1) Для любого $t \in (a; b)$ справедливо неравенство $x_1^2(t)+x_2^2(t)>0$, и поэтому $(x_1(t),\ x_2(t))$ — действительно определенная точка P_1.

2) Замена фундаментальной системы решений $(x_1(t),\ x_2(t))$ другой системой решений уравнения (2) приводит к отображению $R'_g = pR_g$, где p: $P_1 \to P_1$ — проективное отображение. Таким образом, развертка изотропной геодезической определена с точностью до проективного движения P_1.

3) Развертка инвариантна относительно допустимой замены параметра геодезической $\gamma(t)$: $\varphi:(a;\ b) \to (a_1;\ b_1)$, $\varphi'(t) \neq 0$. Точнее, если R_g: $(a_1;\ b_1) \to P_1$ — развертка, то $R_g f$: $(a;\ b) \to P_1$ — также развертка.

4) Отображение R_g было определено с помощью фундаментальной формы g. Решающее значение имеет следующее обстоятельство: если $\bar{g} = e^{2\sigma}g$, то R_g и $R_{\bar{g}}$ совпадают (разумеется, с точностью до проективного преобразования P_1). Другими словами, понятие конформной развертки конформно инвариантно. Действительно, несложные выкладки (с учетом формулы (1)) показывают, что подстановка $x = e^{-\sigma}y$ переводит уравнение (2) в уравнение

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \bar{r}(t)\frac{dy}{dt} + \frac{\overline{\mathrm{R}}\mathrm{ic}(\tau)}{n-2}\,y = 0,$$

определяющее развертку в метрике $\bar{g}$. Фундаментальная система решений $x_i(t)$, $i=1,\ 2$, уравнения (2) дает систему решений $y_i(t) = e^{\sigma}x_i(t)$. Очевидно, геометрические точки $(x_1(t),\ x_2(t))$ и $(y_1(t),\ y_2(t))$ совпадают для любого $t \in (a;\ b)$.

Более того, пусть f: $V_n \to V_n^*$ — конформное отображение, γ: $(a;\ b) \to V_n$ — изотропная геодезическая. Тогда $f\gamma$: $(a;\ b) \to V_n^*$ — изотропная геодезическая пространства V_n^*. Если $\overline{R}$: $(a,\ b) \to P_1$ — развертка изотропной геодезической $f\gamma(t) \subset V_n^*$, то легко видеть, что $\overline{R}$ — одновременно и развертка геодезической γ: $(a;\ b) \to V_n$. Понятно, что при этом $\gamma(t) \subset V_n$ может быть, например, непродолжаемой геодезической пространства V_n, тогда как $f\gamma(t)$ может быть собственной частью изотропной геодезической пространства V_n^*.

5) На проективной прямой P_1 (гомеоморфной окружности) может быть выбрана ориентация; легко видеть, что монотонному изменению параметра t соответствует постоянная ориентация перемещения точки $x_1(t)$, $x_2(t)$ (для проверки достаточно выбрать в качестве t аффинную дугу и заметить, что $x_1\frac{dx_2}{dt} - x_2\frac{dx_1}{dt} = \mathrm{const}$).

Пусть $(a;\ b)$ содержит отрезок $[a_1;\ b_1]$ такой что его развертка (образ в отображении $R = R_g$) есть полная проективная прямая P_1. Будем говорить, что развертка геодезической $\gamma(t)$ содержит проективную прямую. По-видимому, не требует пояснений выражение: развертка $\gamma(t)$ содержит $k \leqslant \infty$ проективных прямых (пробегает P_1 k раз). Имеет место

Лемма 1. *Развертка отрезка $[a_1;\ b_1]$ изотропной геодезической γ: $(a;\ b) \to V_n\,(a < a_1 < b_1 < b)$ тогда и только тогда есть проективная прямая P_1, когда a_1, b_1 — сопряженные точки уравнения (2), причем $[a_1;\ b_1]$ не содержит пары сопряженных точек, отличной от a_1, b_1.*

Для доказательства достаточно выбрать решения уравнения (2), удовлетворяющие условиям $x_1(a_1) = 0$; $x_2(a_1) \neq 0$. Точка $(x_1(b_1),$ $x_2(b_1))$ совпадает с точкой $(x_1(a_1),\ x_2(a_1))$, если $x_1(b_1) = 0$, следовательно, a_1 и b_1 сопряжены; если отрезок $[a_1;\ b_1]$ содержит и другую пару сопряженных точек, то развертка $[a_1;\ b_1]$ содержит $k > 1$ проективных прямых.

Пусть V_n — изотропно полное пространство Эйнштейна, $\mathrm{Ric} = (\rho/n)\,g$; следовательно, для любого изотропного вектора τ будет $\mathrm{Ric}(\tau) = 0$. Уравнение (3) (t — аффинный параметр) принимает вид $\frac{d^2x}{dt^2} = 0$. Если V_n изотропно полно и $\gamma(t)$ — непродолжаемая изотропная геодезическая, то $\gamma(t)$ определяется отображением γ: $(-\infty;\ \infty) \to V_n$. В качестве фундаментальной системы решений (3) можно выбрать $x_1(t) = t$; $x_2(t) = 1$. Очевидно, справедлива

Лемма 2. *Если V_n с метрикой g — изотропно полное пространство Эйнштейна, то разверткой каждой непродолжаемой изотропной геодезической служит аффинная прямая L — дополнение к одной точке в P_1. Если на L выбрать проективную координату l, определенную в каждой точке L ($l = x_1/x_2$,* где *$x_2 = 0$ в точке P_1, служащей дополнением к L; l — аффинная координата на L, определенная с точностью до линейного преобразования), то отображение R есть (как отображение $l = l(t)$, где t — аффинный параметр геодезической) линейное отображение $l = \alpha t + \beta$.*

Действительно, для выбранных выше $x_1(t)$, $x_2(t)$ будет $l = t$.

Лемма 3. *Если форма Риччи пространства V_n неположительна на всех изотропных векторах касательного пучка, то разверткой каждой изотропной геодезической служит отрезок, представляющий собой собственную или несобственную часть аффинной прямой.*

Доказательство этой леммы содержится в работе [1]. Однако там из него был сделан лишь вывод о конформной неполноте таких V_n. Утверждение непосредственно следует из леммы 1 и легко проверяемого факта: если в уравнении $\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda(t)\,x = 0$ $\left(\text{в нашем случае } \lambda(t) = \frac{\mathrm{Ric}(\tau)}{n-2}\right)$ $\lambda(t)$ определена, непрерывна и неположительна на $(a;\ b)$, то на $(a;\ b)$ нет ни одной пары сопряженных точек этого уравнения.

Лемма 4. *Если форма Риччи изотропно полного V_n неотрицательна на всех изотропных векторах* ($\mathrm{Ric}(\tau) \geqslant 0,\ g(\tau) = 0$) *и отлична от нуля хотя бы для одного изотропного вектора τ_0, то V_n содержит изотропную геодезическую, развертка которой содержит проективную прямую.*

Пусть изотропная геодезическая $\gamma(t)$ проходит через точку v_0 и ее касательный вектор в этой точке — упомянутый выше вектор τ_0. Уравнение (3) имеет вид $\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda(t)\,x = 0$, где $\lambda(t) \geqslant 0$ и $\lambda(t_0) > 0$ для некоторого $t_0 \in (-\infty;\ \infty)$. Легко видеть, что существует хотя бы одна пара сопряженных точек для этого уравнения. Для доказательства можно выбрать частное решение $x(t)$ так, чтобы $x(t_0) = 1$, $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t_0} = 0$. В некоторой окрестности точки t_0 производная $\frac{dx}{dt}$ строго убывает, и для некоторого $t_1 > t_0$ будет $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t_1} < 0$. Так как $\frac{dx}{dt}$ не возрастает при $x > 0$, легко видеть, что $x(t)$ обращается в нуль в некоторой точке $t_2 > t_0$. Точно так же проверяется, что $x(t)$ обращается в нуль в некоторой точке $t_3 < t_0$. Лемма 4 доказана.

Доказательства теорем 1, 2, 3. Пусть f: $V_n \to V_n^*$ — конформное отображение, V_n изотропно полно. Если f не сюръективно, то $f(V_n)$ есть собственное открытое подмногообразие V_n^*, и легко видеть, что V_n содержит непродолжаемую изотропную геодезическую γ: $(a;\ b) \to V_n$, образом которой $f\gamma$: $(a;\ b) \to V_n^*$ служит собственная часть изотропной геодезической пространства V_n^* (см. [1]). Если форма Риччи V_n^* неположительна на всех изотропных векторах, то развертка геодезической $f\gamma(t) \subset V_n^*$ есть заведомо собственная часть аффинной прямой L, что невозможно, если V_n — пространство Эйнштейна: развертка $f\gamma(t) \subset V_n^*$ есть также развертка геодезической $\gamma(t) \subset V_n$, тогда как последняя — полная аффинная прямая L. Теорема 1 доказана.

Пусть теперь V_n — изотропно полное пространство Эйнштейна, V_n^* — произвольное пространство Эйштейна. Тогда конформное отображение f: $V_n \to V_n^*$ сюръективно, образом любой непродолжаемой изотропной геодезической γ: $(a;\ b) \to V_n$ служит непродолжаемая изотропная геодезическая $f\gamma$: $(a;\ b) \to V_n^*$. Пусть $t \in (-\infty;\ \infty)$ — аффинная дуга $\gamma(t) \subset V_n$, t^* — аффинная дуга $f\gamma(t) \subset V_n^*$. Разверткой геодезической $f\gamma(t)$ служит полная аффинная прямая L (поскольку таковой является развертка прообраза $\gamma(t)$). Аффинная координата l прямой L есть одновременно линейная функция от t и от t^*, откуда следует, что аффинная дуга геодезической

$\gamma(t)$ есть одновременно и аффинная дуга ее образа $f\gamma(t) \subset V_n^*$. Соотношение $\bar{r}(t) = r(t) + 2\frac{d\sigma}{dt}$ между функциями $r(t)$, $\bar{r}(t)$ конформных метрик g и $\bar{g}$ показывает (поскольку $r(t) = \bar{r}(t) = 0$), что $\sigma = \mathrm{const}$ вдоль геодезической $\gamma(t)$. Так как любые две точки связного лоренцова пространства могут быть соединены ломаной, составленной из изотропных геодезических, $\sigma = \mathrm{const}$ в целом на V_n. Теорема 2 доказана.

Теорема 3 немедленно следует из леммы 4. Если V_n и V_n^* удовлетворяют условиям теоремы, то развертка одной из изотропных геодезических пространства V_n содержит проективную прямую, тогда как развертка ее образа в конформном отображении f: $V_n \to V_n^*$ должна быть частью аффинной прямой.

В заключение приведем некоторые замечания об определении конформной полноты лоренцова V_n.

Изотропная геодезическая γ: $(a; b) \to V_n$ по определению конформно полна, если развертка каждого ее луча $((a; t_0]$ и $[t_0; b)$, $a < t_0 < b)$ содержит $k = \infty$ проективных прямых, V_n конформно полно, если каждая его непродолжаемая изотропная геодезическая конформно полна. Предположим, что изотропная геодезическая γ: $(a; b) \to V_n$ не является конформно полной. Очевидно, в этом случае развертка некоторого ее луча, например, $[t_0; b)$ есть собственная часть P_1. Для этой части существует (неоднородная) проективная координата u, определенная в каждой ее точке. Эту координату можно считать допустимым параметром изотропного луча γ: $[t_0; b) \to V_n$. Очевидно, одна из фундаментальных систем решений для уравнения (2) должна иметь вид $x_1 = e^{-\sigma_0}u$; $x_2 = e^{-\sigma_0}$ (поскольку $x_1/x_2 = u$), где σ_0 — некоторая функция на $[u_1; u_2]$, если параметр u принимает значения из $[u_1; u_2]$ на развертке рассматриваемого геодезического луча. Если в V_n выбрать метрику $\bar{g} = e^{2\sigma}g$ так, чтобы на рассматриваемом геодезическом луче было $\sigma = \sigma_0$ (что возможно, если отображение γ: $[t_0; b) \to V_n$ инъективно), то в новой метрике $\bar{g}$ система решений уравнения (2) будет иметь вид $y_1(u) = u$; $y_2 = 1$, откуда следует, что на луче γ: $[t_0; b) \to V_n$ будет $\mathrm{Ric}(\tau) = 0$. Тем самым доказано утверждение: если γ: $(a; b) \to V_n$ — изотропная геодезическая и отображение γ инъективно (или, по крайней мере, существуют t_1, t_2 такие, что γ инъективно на $(a; t_1)$, $(t_2; b)$), то для того, чтобы $\gamma(t)$ была конформно неполной, необходимо и достаточно, чтобы для некоторого луча этой геодезической было $\overline{\mathrm{Ric}}(\tau) = 0$ в некоторой метрике $\bar{g}$, конформной заданной.

Заметим, что B. Schmidt, исходя из другого определения конформной полноты V_n, приходит к тому же выводу в вопросе о полноте изотропной геодезической [3].

Список литературы: 1. *Улановский М. А.* О конформной и геодезической полноте псевдоримановых пространств физического типа.— Укр. геометр. сб., 1973, вып. 13, с. 172—179. 2. *Dhooghe P. F. J.* A Theorem on the Conformal Structure of Interior Space-Time.— Gen. Relat. and Gravit., 1980, **12**, № 11, p. 895—901. 3. *Schmidt B. G.* A New Definition of Conformal and Projective Infinity of Space-Times.— Commun. math. Phys., 1974, **36**, p. 73—90.

Поступила в редколлегию 05.10.81.

УДК 513

В. Т. Фоменко, А. Н. Зубков

О ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ЖЕСТКОСТИ КУСКОВ РИМАНОВА ПРОИЗВЕДЕНИЯ ДВУМЕРНЫХ СФЕР ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

Рассмотрим в евклидовом пространстве $E_{3n} = E_3^{(1)} \times \ldots \times E_3^{(n)}$ $(n \geqslant 2)$ $2n$-мерную поверхность $S_{2n} = S_2^{(1)} \times \ldots \times S_2^{(n)}$, являющуюся римановым произведением n двумерных сфер $S_2^{(k)} \subset E_3^{(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ единичного радиуса. Введем на каждой сфере $S_2^{(k)}$ стереографические координаты u^k, u^{k+n}. Тогда S_{2n} можно задать уравнениями:

$$x^k = \frac{2u^k}{1 + (u^k)^2 + (u^{k+n})^2}, \quad -\infty < u^k, \ u^{k+n} < +\infty;$$
$$x^{k+n} = \frac{2u^{k+n}}{1 + (u^k)^2 + (u^{k+n})^2}; \tag{1}$$
$$x^{k+2n} = \frac{(u^k)^2 + (u^{k+n})^2 - 1}{1 + (u^k)^2 + (u^{k+n})^2}, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

или коротко в векторной форме: $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(u^1, u^2, \ldots, u^{2n})$. Из этих уравнений следует, что коэффициенты $g_{ij} = \boldsymbol{x}_i \boldsymbol{x}_j$ $(i, j = 1, 2, \ldots, 2n)$ метрического тензора поверхности S_{2n} образуют матрицу

$$\|g_{ij}\| = \begin{Vmatrix} g_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & g_{2n,2n} \end{Vmatrix}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, 2n;$$
$$g_{kk} = g_{k+n,k+n} = 4[1 + (u^k)^2 + (u^{k+n})^2]^{-2}, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{2}$$

На S_{2n} возьмем n векторных полей, состоящих из единичных, взаимно ортогональных в каждой точке $(u^1, u^2, \ldots, u^{2n}) \in S_{2n}$ векторов

$$\boldsymbol{N}_p = \frac{[\boldsymbol{x}_k \boldsymbol{x}_{k+n}]}{|[\boldsymbol{x}_k \boldsymbol{x}_{k+n}]|}, \quad p = 2n + k, \ k = 1, 2, \ldots, n, \tag{3}$$

где $[\boldsymbol{x}_k \boldsymbol{x}_{k+n}]$ — векторное произведение в $E_3^{(k)} \subset E_{3n}$ двух векторов $\boldsymbol{x}_k \subset E_3^{(k)}$ и $\boldsymbol{x}_{k+n} \subset E_3^{(k+n)}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Из формул (1) и (3) следует, что коэффициенты $b_{p|ij} = \boldsymbol{x}_{ij} \boldsymbol{N}_p$ $(p = 2n + 1, \ldots, 3n;$ $i,$

$j \leqslant 2n$) вторых квадратичных форм $\mathrm{II}\,(\boldsymbol{N}_p) = -\boldsymbol{dx}\boldsymbol{dN}_p$ поверхности S_{2n} удовлетворяют условиям:

$$b_{p|ij} = 0 \;\; (i,\ j \leqslant 2n;\ p = 2n+1,\ \ldots,\ 3n;\ i,\ j \neq k,\ k+n);$$
$$b_{p|k,k+n} = 0,\ b_{p|kk} = b_{p|k+n,k+n} = 4 \big/ [1 + (u^k)^2 + (u^{k+n})^2],$$
$$(k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \qquad (4)$$

Известно, что поверхность S_{2n} — геометрически жесткая в пространстве E_{3n} $(n \geqslant 2)$, т. е. не допускает нетривиальных бесконечно малых (б. м.) изгибаний в E_{3n}. В предлагаемой статье изучаются б. м. изгибания $2n$-мерных поверхностей Φ_{2n} с краем L, которые получаются из S_{2n} $(n \geqslant 2)$ удалением некоторых кусков с $(2n - d)$-мерными краями, $1 \leqslant d < n$, и не являющихся в общем случае римановым произведением кусков двумерных сфер $S_2^{(k)}$ $(k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$. Получены следующие результаты:

Теорема 1. *Пусть край L поверхности $\Phi_{2n} \subset E_{3n}$ $(n > 2)$ таков, что на Φ_{2n} существует целиком по крайней мере n координатных двумерных сфер u^k, u^{k+n} $(k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$. Тогда эта поверхность является геометрически жесткой в евклидовом пространстве E_{3n}.*

Теорема 2. *Поверхность $\Phi_{2n} \subset E_{3n}$ $(n \geqslant 2)$ с $(2n - d)$-мерным краем L, $1 \leqslant d < n$, является геометрически нежесткой в евклидовом пространстве E_{3n}, если все ее двумерные координатные поверхности хотя бы одного семейства $\{u^k,\ u^{k+n}\}$ $(k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ являются поверхностями с краем.*

Доказательство дается в п. 3. Из теорем 1 и 2 следует, что факт геометрической жесткости или нежесткости поверхности Φ_{2n} существенно зависит от формы края этой поверхности, другими словами, от формы областей, удаляемых из поверхности S_{2n} $(n \geqslant 2)$.

1. Уравнения б. м. изгибаний поверхности Φ_{2n} в E_{3n} $(n \geqslant 2)$. Введем в окрестности поверхности Φ_{2n} координаты пространства E_{3n}, нормально связанные с координатами поверхности Φ_{2n}: $v^i = u^i$, $v^p = t^p$ $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ 2n,\ p = 2n+1,\ \ldots,\ 3n)$, где t^p — длина отрезка прямой (со знаком), проходящей через точку $(u^1,\ u^2,\ \ldots,\ u^{2n}) \in \Phi_{2n}$ в направлении вектора $\boldsymbol{N}_p$. Тогда метрический тензор $a_{\alpha\beta}$ $(\alpha,\ \beta \leqslant 3n)$ пространства E_{3n} вдоль Φ_{2n} будет обладать свойством

$$a_{ij}\big|_{\Phi_{2n}} = g_{ij};\ \ a_{ip}\big|_{\Phi_{2n}} = 0;\ \ a_{pp}\big|_{\Phi_{2n}} = 1;\ \ a_{pq}\big|_{\Phi_{2n}} = 0$$
$$(i,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ 2n;\ p,\ q = 2n+1,\ \ldots,\ 3n;\ p \neq q). \qquad (5)$$

Пусть Φ_{2n} подвергается б. м. изгибанию, переходя к моменту t в поверхность $\Phi_{2n}(t)$, задаваемую уравнениями $v_t^\alpha = v_t^\alpha(u^1,\ u^2,\ \ldots,\ u^{2n},\ t)$; $\alpha = 1,\ 2,\ \ldots,\ 3n$. Подставляя эти уравнения в линейный элемент $ds^2 = a_{\alpha\beta}dv^\alpha dv^\beta$ пространства E_{3n}, получим линейный элемент ds_t^2 поверхности $\Phi_{2n}(t)$. По определению б. м. изгибания поверхности $\frac{d}{ds}\left(ds_t^2\right)\Big|_{t=0} = 0$. Отсюда следует, что контравариантные координаты $\xi^\alpha = \frac{\partial v^\alpha}{\partial t}\Big|_{t=0}$ $(\alpha \leqslant 3n)$ векторного поля $\vec{\xi} = \frac{\partial x}{\partial t}\Big|_{t=0}$

б. м. изгибания для Φ_{2n} (где $x(t)$ — точка поверхности $\Phi_{2n}(t)$, в которую при изгибании переходит точка $x \in \Phi_{2n}$) удовлетворяют системе уравнений

$$a_{sj}\frac{\partial \xi^s}{\partial u^i} + a_{is}\frac{\partial \xi^s}{\partial u^j} + \xi^\gamma \frac{\partial a_{ij}}{\partial v^\gamma}\Bigg|_{\Phi_{2n}} = 0; \quad i,\ j,\ s \leqslant 2n; \quad \gamma \leqslant 3n.$$

Следуя схеме, предложенной А. В. Погореловым [1, гл. 6, § 1], преобразуем последние уравнения к виду

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial u^i} - \Gamma^s_{ii}\xi_s - \sum_{p=2n+1}^{3n} b_{p|ii}\xi_p = 0;$$

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial u^j} + \frac{\partial \xi_j}{\partial u^i} - 2\Gamma^s_{ij}\xi_s = 0; \quad i,\ j,\ s = 1,\ 2,\ \ldots,\ 2n; \ i \neq j, \qquad (6)$$

где Γ^s_{ij} — символы Кристоффеля второго рода, вычисляемые по тензору $a_{\alpha\beta}$ в точках поверхности Φ_{2n}. В силу условий (4),

$$\det \begin{Vmatrix} b_{2n+1|11} & b_{2n+2|11} & \ldots & b_{3n|11} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ b_{2n+1|nn} & b_{2n+2|nn} & \ldots & b_{3n|nn} \end{Vmatrix} \neq 0.$$

Поэтому, зная ξ_i $(i \leqslant 2n)$, из системы (6_1) однозначно определим и ξ_p $(p = 2n+1,\ \ldots,\ 3n)$, причем, если $\xi_i = 0$ $(i \leqslant 2n)$, то и $\xi_p = 0$. В силу равенств (5_1) символы Γ^s_{ij} совпадают с соответствующими символами Кристоффеля $\widetilde{\Gamma}^s_{ij}$ поверхности Φ_{2n}. Из (2) следует, что среди символов $\widetilde{\Gamma}^s_{ij}$ отличны от нуля лишь те, для которых индексы $i,\ j,\ s$ принимают значения $k,\ k+n$ $(k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$, и, следовательно, система уравнений (6_2) для ковариантных компонент ξ_i $(i \leqslant 2n)$ тангенциальной составляющей поля ξ б. м. изгибания поверхности Φ_{2n} может быть записана в виде

$$\frac{\partial \xi_k}{\partial u^k} - \frac{\partial \xi_{k+n}}{\partial u^{k+n}} - \left(\widetilde{\Gamma}^k_{kk} - \widetilde{\Gamma}^k_{k+n,k+n}\right)\xi_k - \left(\widetilde{\Gamma}^{k+n}_{kk} - \widetilde{\Gamma}^{k+n}_{k+n,k+n}\right)\xi_{k+n} = 0;$$

$$\frac{\partial \xi_k}{\partial u^{k+n}} + \frac{\partial \xi_{k+n}}{\partial u^k} - 2\widetilde{\Gamma}^k_{k,k+n}\xi_k - 2\widetilde{\Gamma}^{k+n}_{k,k+n}\xi_{k+n} = 0;$$

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial u^j} + \frac{\partial \xi_j}{\partial u^i} = 0 \quad (i \neq j,\ j \neq k+n;\ i,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ 2n;\ k \leqslant n). \ (7)$$

2. Решения системы уравнений б. м. изгибаний для Φ_{2n} $(n \geqslant 2)$. Введем в рассмотрение комплексные переменные $z_k = u^k + iu^{k+n}$ $(i^2 = -1,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ и комплексные функции смещения $w_k = \xi_k + i\xi_{k+n}$; $w_k = w_k^*(z_1,\ \bar z_1,\ \ldots,\ z_n,\ \bar z_n)$; $i^2 = -1$, $k \leqslant n$. Тогда систему (7) можно представить в форме

$$\partial_{\bar z_k} w_k + A_k(z_k,\ \bar z_k)\, w_k = 0,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n;$$

$$\partial_{\bar z_l} w_k + \partial_{\bar z_k} w_l = 0, \quad l = 1,\ 2,\ \ldots,\ n;\ k \neq l;$$

$$\partial_{z_l} w_k + \partial_{\bar{z}_k} \bar{w}_l = 0, \tag{8}$$

где переменные $z_1, \bar{z}_1, \ldots, z_n, \bar{z}_n$ изменяются в комплексном пространстве C^n, $\partial_{\bar{z}_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u^k} + i\frac{\partial}{\partial u^{k+n}}\right)$, и, согласно [2, гл. 5, § 4],

$$A_k(z_k, \bar{z}_k) = -\partial_{\bar{z}_k} \ln 4(1 + z_k\bar{z}_k)^{-2}, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{9}$$

Сделаем замену искомых функций w_k в (8), положив $w_k = \varphi_k G_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$ **(10)**, где

$$G_k = \exp \frac{1}{\pi} \iint\limits_{C_k(z_k)} \frac{A_k(z_k, \bar{z}_k)}{\zeta_k - z_k} d\sigma_{\zeta_k} \equiv G_k(z_k, \bar{z}_k). \tag{11}$$

Тогда система (8) примет вид

$$\partial_{\bar{z}_k} \varphi_k = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n);$$

$$G_l^{-1} \partial_{\bar{z}_l} \varphi_k + G_k^{-1} \partial_{\bar{z}_k} \varphi_l = 0 \quad (l \neq k;\ l = 1, 2, \ldots, n);$$

$$\bar{G}_l^{-1} \partial_{z_l} \varphi_k + G_k^{-1} \partial_{\bar{z}_k} \bar{\varphi}_l = 0. \tag{12}$$

Справедливы следующие утверждения;

Лемма 1. *На поверхностях Φ_{2n} функции $f_{kl} = G_l^{-1} \partial_{\bar{z}_l} \varphi_k$ ($l \neq k$; $l, k \leqslant n$) являются аналитическими функциями переменной $z = z(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ в области изменения этой переменной.*

Лемма 2. *На поверхностях Φ_{2n} функции $h_{lk} = \bar{G}_k^{-1} \partial_{z_k} \varphi_l$ ($k \neq l$; $k, l \leqslant n$) являются антианалитическими по параметру z_k и аналитическими по z_l и z_m ($m, l \neq k$; $m, l = 1, 2, \ldots, n$).*

Доказательство лемм 1, 2 проводится с использованием системы (12).

Лемма 3. *Функция f_{kl} и h_{kl} ($k \neq l$; $k, l \leqslant n$) на поверхностях Φ_{2n} ($n \geqslant 2$) имеют вид*

$$f_{kl} = \left(a_{00}^{(kl)} + a_{01}^{(kl)} z_k + \bar{b}_{00}^{(lk)} z_k^2\right) + \left(a_{10}^{(kl)} + c_1^{(kl)} z_k - \bar{a}_{01}^{(kl)} z_k^2\right) z_l + \left(\bar{b}_{00}^{(lk)} - \bar{a}_{01}^{(kl)} z_k + \bar{a}_{00}^{(kl)} z_k^2\right) z_l^2;$$

$$\bar{h}_{lk} = \left(\bar{b}_{00}^{(lk)} - a_{01}^{(kl)} z_k + \bar{a}_{00}^{(kl)} z_k^2\right) + \left(a_{10}^{(kl)} + c_1^{(kl)} z_k - \bar{a}_{10}^{(kl)} z_k^2\right) \bar{z}_l + \left(a_{00}^{(kl)} + a_{01}^{(kl)} z_k + \bar{b}_{00}^{(lk)} z_k^2\right) \bar{z}_l^2; \quad (k \neq l;\ k, l = 1, 2, \ldots, n), \tag{13}$$

где $a_{01}^{(kl)}, a_{10}^{(kl)}, a_{00}^{(kl)}, b_{00}^{(lk)}$ — произвольные комплексные постоянные, а $c_1^{(kl)}$ — произвольные действительные числа, причем

$$a_{00}^{(kl)} = -a_{00}^{(lk)}; \quad a_{01}^{(kl)} = -a_{10}^{(lk)}; \quad \bar{b}_{00}^{(kl)} = -\bar{b}_{00}^{(lk)};$$

$$c_1^{(kl)} = -c_1^{(lk)}; \quad \bar{a}_{01}^{(kl)} = -\bar{a}_{10}^{(lk)}; \quad \bar{a}_{10}^{(kl)} = -\bar{a}_{01}^{(lk)} \quad (k \neq l,\ k, l \leqslant n). \tag{14}$$

Доказательство. Запишем систему (12) в виде

$\partial_{\bar{z}_k} \varphi_k = 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$; $\partial_{\bar{z}_l} \varphi_k = G_l f_{kl}$ $(l \neq k;\ l = 1, 2, \ldots, n)$;

$$\partial_{z_l}\varphi_k = -\overline{G}_l\overline{h}_{lk}; \quad \partial_{\bar{z}_l}\varphi_l = 0 \quad (l \neq k);$$

$$\partial_{\bar{z}_k}\varphi_l = -G_k f_{kl} \quad (l \neq k); \quad \partial_{\bar{z}_k}\varphi_l = \overline{G}_k h_{lk}. \tag{15}$$

Условиями совместности этой системы будут равенства при $l \neq m$; $m, l, k = 1, 2, \ldots, n$:

$$\partial_{z_l z_m}\varphi_k = \partial_{z_m z_l}\varphi_k; \quad \partial_{z_l \bar{z}_m}\varphi_k = \partial_{\bar{z}_m z_l}\varphi_k; \quad \partial_{z_m \bar{z}_l}\varphi_k = \partial_{\bar{z}_l z_m}\varphi_k;$$

$$\partial_{z_l \bar{z}_l}\varphi_k = \partial_{\bar{z}_l z_l}\varphi_k; \quad \partial_{\bar{z}_l \bar{z}_m}\varphi_k = \partial_{\bar{z}_m \bar{z}_l}\varphi_k, \tag{16}$$

которые вытекают из идемпотентности оператора $d = \partial + \overline{\partial}$ дифференцирования форм, где $\partial = \sum\limits_{l=1}^{n} \partial_{z_l}\varphi_k dz_l$ и $\overline{\partial} = \sum\limits_{l=1}^{n} \partial_{\bar{z}_l}\varphi_k d\bar{z}_l$, примененного к функциям φ_k, как к дифференциальным формам нулевых бистепеней. Из (15) и (16) вытекают уравнения связи между f_{kl} и h_{lk}, где $l, k = 1, 2, \ldots, n$; $l \neq k$:

$$f_{kl}\partial_{z_l}G_l + G_l\partial_{z_l}f_{kl} + \overline{h}_{lk}\partial_{\bar{z}_l}G_l + \overline{G}_l\partial_{\bar{z}_l}\overline{h}_{lk} = 0;$$

$$h_{lk}\partial_{\bar{z}_k}\overline{G}_k + \overline{G}_k\partial_{\bar{z}_k}h_{lk} + f_{kl}\partial_{z_k}G_k + G_k\partial_{z_k}f_{kl} = 0. \tag{17}$$

В силу лемм 1, 2 функции f_{kl} и h_{lk} можно представить в виде рядов Хартогса:

$$f_{kl} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda^{(kl)} z_l^\lambda; \quad h_{lk} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} b_\lambda^{(lk)} z_l^\lambda \quad (k \neq l;\ k, l = 1, 2, \ldots, n) \tag{18}$$

и

$$f_{kl} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} p_\lambda^{(kl)} z_k^\lambda; \quad h_{lk} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} q_\lambda^{(lk)} \bar{z}_k^\lambda \quad (k \neq l;\ k, l = 1, 2, \ldots, n), \tag{19}$$

где $a_\lambda^{(kl)}$ и $b_\lambda^{(lk)}$— аналитические функции в пространстве $C_{\hat{l}}^{n-1}(z_1, \ldots, z_{l-1}, z_{l+1}, \ldots, z_n)$, а $p_\lambda^{(kl)}$ и $q_\lambda^{(lk)}$ — аналитические функции в пространстве $C_{\hat{k}}^{n-1}$. Из формул (9) и (11) следует, что $G_k = 4(1 + z_k\bar{z}_k)^{-2}$, $k = 1, 2, \ldots, n$ **(20)**. Подставляя (18) в (17_1) и учитывая (20), получим равенства

$$-2a_0^{(kl)}\bar{z}_l - 2\bar{b}_0^{(lk)}z_l + a_1^{(kl)} + \bar{b}_1^{(lk)} + \sum_{\lambda=1}^{\infty}(\lambda+1)a_{\lambda+1}^{(kl)}z_l^\lambda +$$

$$+ \sum_{\lambda=1}^{\infty}(\lambda+1)\bar{b}_\lambda^{(lk)}z_l^\lambda + \bar{z}_l\sum_{\lambda=1}^{\infty}(\lambda-2)a_\lambda^{(kl)}z_l^\lambda + z_l\sum_{\lambda=1}^{\infty}(\lambda-2)\bar{b}_\lambda^{(lk)}z_l^\lambda = 0$$

$$(k, l = 1, 2, \ldots, n;\ k \neq l),$$

из которых следует, что $a_1^{(kl)} = -\bar{b}_1^{(lk)}$; $a_2^{(kl)} = \bar{b}_0^{(lk)}$; $a_0^{(kl)} = \bar{b}_2^{(lk)}$; $a_\lambda^{(kl)} = \bar{b}_\lambda^{(lk)} = 0$ при $\lambda \geqslant 2$. Таким образом, при $(k, l = 1, 2, \ldots, n;$ $k \neq l)$

$$f_{kl} = a_0^{(kl)} + a_1^{(kl)}z_l + \bar{b}_0^{(lk)}z_l^2; \quad \overline{h}_{lk} = \bar{b}_0^{(lk)} - a_1^{(kl)}\bar{z}_l + a_0^{(kl)}\bar{z}_l^2. \tag{21}$$

Аналогичным способом из (17_2), (19) и (20) получается, что

$$f_{kl} = p_0^{(kl)} + p_1^{(kl)} z_k + q_0^{(lk)} z_k^2; \quad h_{lk} = q_0^{(lk)} - \overline{p_1^{(kl)}}\bar{z}_k + \overline{p_0^{(kl)}}\bar{z}_k^2. \qquad (22)$$

Из (21_1) и (22_1) следует, что при ($k,\ l \leqslant n;\ k \neq l$)

$$p_0^{(kl)} + p_1^{(kl)} z_k + q_0^{(lk)} z_k^2 = a_0^{(kl)} + a_1^{(kl)} z_l + \bar{b}_0^{(lk)} z_l^2, \qquad (23)$$

а из (21_2) и (22_2) при тех же k и l —

$$q_0^{(lk)} - \overline{p_1^{(kl)}}\bar{z}_k + \overline{p_0^{(kl)}}\bar{z}_k^2 = b_0^{(lk)} - \bar{a}_1^{(kl)} z_l + \bar{a}_0^{(kl)} \bar{z}_l^2. \qquad (24)$$

Дифференцируя равенства (23) трижды по z_k и учитывая, что $a_0^{(kl)}$, $a_1^{(kl)}$, $\bar{b}_0^{(lk)}$ определены в комплексном пространстве $C^{n-1}_{\hat{l}}$, а $p_0^{(kl)}$, $p_1^{(kl)}$, $q_0^{(lk)}$ — в $C^{n-1}_{\hat{k}}$ получаем

$$\partial^3_{z_k} a_0^{(kl)} + z_l \partial^3_{z_k} a_1^{(kl)} + z_l^2 \partial^3_{z_k} \bar{b}_0^{(lk)} = 0 \ (k,\ l \leqslant n;\ k \neq l),$$

откуда вытекает, что (при тех же k и l)

$$\partial^3_{z_k} a_0^{(kl)} = \partial^3_{z_k} a_1^{(kl)} = \partial^3_{z_k} b_0^{(lk)} \equiv 0$$

и, следовательно,

$$a_0^{(kl)} = a_{00}^{(kl)} + a_{01}^{(kl)} z_k + a_{02}^{(kl)} z_k^2; \ a_1^{(kl)} = a_{10}^{(kl)} + a_{11}^{(kl)} z_k + a_{12}^{(kl)} z_k^2;$$
$$\bar{b}^{(lk)} = \bar{b}_{00}^{(lk)} + \bar{b}_{01}^{(lk)} z_k + \bar{b}_{02}^{(lk)} z_k^2,\ k,\ l = 1,\ 2,\ \ldots,\ n;\ k \neq l. \qquad (25)$$

Подставляя эти выражения в правые части равенств (23) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях неизвестных z_k, получим

$$p_0^{(kl)} = a_{00}^{(kl)} + a_{10}^{(kl)} z_l + \bar{b}_{00}^{(lk)} z_l^2; \ p_1^{(kl)} = a_{01}^{(kl)} + a_{11}^{(kl)} z_l + \bar{b}_{01}^{(lk)} z_l^2;$$
$$q_0^{(lk)} = a_{02}^{(kl)} + a_{12}^{(kl)} z_l + \bar{b}_{02}^{(lk)} z_l^2,\ k,\ l = 1,\ 2,\ \ldots,\ n;\ k \neq l.$$

Умножая первое из этих равенств на $\bar{z}_k^2$, второе на $-\bar{z}_k$ и складывая полученные соотношения с третьим равенством, найдем

$$q_0^{(lk)} - \overline{p_1^{(kl)}}\bar{z}_k + \overline{p_0^{(kl)}}\bar{z}_k^2 = \left(a_{02}^{(kl)} + a_{12}^{(kl)} z_l + \bar{b}_{02}^{(lk)} z_l^2\right) - \bar{z}_k\left(a_{01}^{(kl)} + a_{11}^{(kl)} z_l + \bar{b}_{01}^{(lk)} z_l^2\right) + \bar{z}_k^2\left(a_{00}^{(kl)} + a_{10}^{(kl)} z_l + \bar{b}_{00}^{(kl)} z_l^2\right);\ k,\ l = 1,\ 2,\ \ldots,\ n;\ k \neq l.$$

Отсюда и из (24) и (25) вытекает, что

$$a_{02}^{(kl)} = b_{00}^{(lk)};\ a_{12}^{(kl)} = -\bar{a}_{10}^{(kl)};\ \bar{b}_{02}^{(lk)} = \bar{a}_{00}^{(kl)};\ a_{01}^{(kl)} = b_{01}^{(lk)};\ a_{00}^{(kl)} = b_{02}^{(lk)};$$
$$a_{11}^{(kl)} = \bar{a}_{11}^{(kl)};\ a_{10}^{(kl)} = -\bar{a}_{12}^{(kl)};\ -\bar{b}_{01}^{(lk)} = \bar{a}_{01}^{(kl)};\ \bar{b}_{00}^{(lk)} = \bar{a}_{02}^{(kl)}\ (k,\ l = 1,\ 2,\ \ldots,\ n;\ k \neq l).$$

Поэтому из равенств (21) и (25) следует, что f_{kl} и $\bar{h}_{lk}$ ($k \neq l$; k, $l \leqslant n$) записываются в виде (13) соответственно, где $c_1^{(kl)} = a_{11}^{(kl)}$. Меняя местами индексы k и l в формулах (13), получим функции

$$f_{lk} = \left(a_{00}^{(lk)} + a_{01}^{(lk)} z_l + \bar{b}_{00}^{(kl)} z_l^2\right) + \left(a_{10}^{(lk)} + c_1^{(lk)} z_l - \bar{a}_{10}^{(lk)} z_l^2\right) z_k + \left(\bar{b}_{00}^{(kl)} - \bar{a}_{01}^{(lk)} z_l + \bar{a}_{00}^{(lk)} z_l^2\right) z_k^2;$$

$$\overline{h}_{lk} = \left(\overline{b}_{00}^{(kl)} - \overline{a}_{01}^{(lk)} z_l + \overline{a}_{00}^{(lk)} z_l^2\right) - \left(a_{10}^{(lk)} + c_1^{(kl)} z_l - \overline{a}_{10}^{(lk)} z_l^2\right) \overline{z}_k +$$
$$+ \left(a_{00}^{(lk)} + a_{01}^{(lk)} z_l + \overline{b}_{00}^{(kl)} z_l^2\right) \overline{z}_k^2, \; k, \; l = 1, \; 2, \; \ldots, \; n; \; k \neq l. \qquad (26)$$

Из системы (10) вытекает, что

$$f_{kl} = -f_{lk}; \; h_{lk} = -\overline{h}_{kl}, \; k, \; l = 1, \; 2, \; \ldots, \; n; \; k \neq l.$$

Отсюда и из (13) и (26) следуют равенства (14). Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Решая системы* (10) *для поверхностей* Φ_{2n} $(n \geqslant 2)$ *имеют вид*

$$\varphi_k = \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n} \frac{P_{kl}(z_k, \; z_l, \; \overline{z}_l)}{1 + |z_l|^2} + \psi_k(z_k), \; k = 1, \; 2, \; \ldots, \; n, \qquad (27)$$

где $P_{kl}(z_k, \; z_l, \; \overline{z}_l)$ — *известные комплексные многочлены, рассматриваемые в области изменения комплексных переменных* z_k, z_l, $\overline{z}_l$ $(k \neq l; \; k, \; l \leqslant n)$, *матрица которых* $\| P_{kl} \|$, $P_{kk} = 0$, $(k, \; l = 1, \; 2, \; \ldots, \; n)$ *зависит от* $9n(n-1)/2$ *произвольных вещественных постоянных, а* $\psi_k(z_k)$ — *произвольные аналитические функции комплексного переменного* z_k $(k = 1, \; 2, \; \ldots, \; n)$.

Доказательство. Согласно уравнениям (15_1), функции φ_k $(k \leqslant n)$ можно представить в виде

$$\varphi_k = \theta_k(z_1, \overline{z}_1, \; \ldots, \; z_k, \; z_{k+1}, \; \overline{z}_{k+1}, \; \ldots, \; z_n, \overline{z}_n) + \psi(z_k), \; k = 1,2, \; \ldots, \; n,$$

где $\psi_k(z_k)$ — произвольная аналитическая функция комплексного переменного z_k $(k = 1, \; 2, \; \ldots, \; n)$. Отсюда следует, что функции $\partial_{z_k}\varphi_k$ можно записать в виде

$$\partial_{z_k}\varphi_k = \omega_k(z_1, \overline{z}_1, \ldots, z_k, z_{k+1}, \overline{z}_{k+1}, \; \ldots, \; z_n, \; \overline{z}_n) + \chi_k(z_k) \; (k \leqslant n), \qquad (28)$$

где $\omega_k = \partial_{z_k}\theta_k$, а $\chi_k(z_k) = \partial_{z_k}\psi_k$. Из (15), ($16_1$), ($16_3$) и (28) (при $m = k$) получим систему уравнений для ω_k:

$$\partial_{\overline{z}_k}\omega_k = 0; \; \partial_{z_l}\omega_k = \partial_{z_k}(-\overline{G}_l\overline{h}_{lk}); \; \partial_{\overline{z}_k}\omega_k = \partial_{z_k}(G_l f_{kl}),$$
$$l, \; k = 1, \; 2, \; \ldots, \; n; \; l \neq k. \qquad (29)$$

Эта система будет интегрируема при выполнении условий ее совместности:

$$\partial_{z_l z_m}\omega_k = \partial_{z_m z_l}\omega_k, \; m \neq l; \; l \neq k; \; k, \; l, \; m \leqslant n;$$
$$\partial_{z_l \overline{z}_m}\omega_k = \partial_{\overline{z}_m z_l}\omega_k, \; k \neq l \neq m; \; k, \; l, \; m \leqslant n;$$
$$\partial_{z_m \overline{z}_l}\omega_k = \partial_{\overline{z}_l z_m}\omega_k, \; k \neq l, \; l \neq m; \; k, \; l, \; m \leqslant n;$$
$$\partial_{z_l \overline{z}_l}\omega_k = \partial_{\overline{z}_l z_l}\omega_k, \; k \neq l; \; k, \; l \leqslant n;$$
$$\partial_{\overline{z_l z_m}}\omega_k = \partial_{\overline{z}_m \overline{z}_l}\omega_k, \; k \neq l \neq m; \; k, \; l, \; m \leqslant n.$$

Эти условия выполнены, так как они получаются из равенств (16) путем дифференцирования их по параметру z_k и использования формул (28). Из этих условий следует, что в проекции на $C^{n-1}_{\hat{k}}$ существует частный дифференциал

$$d_{\hat{k}}\omega_k = \sum_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{n} (\partial_{z_l}\omega_k dz_l + \partial_{\bar{z}_l}\omega_k d\bar{z}_l), \; k = 1, 2, \ldots, n. \tag{30}$$

Из (20), (29) и леммы 3 следует, что

$$\partial_{z_l}\omega_k = -4(1+|z_l|^2)^{-2}\left(-\bar{a}_{01}^{(kl)} + 2\bar{a}_{00}^{(kl)}z_k - c_1^{(kl)}\bar{z}_l + \right.$$
$$\left. + 2\bar{a}_{10}^{(kl)}z_k\bar{z}_l + a_{01}^{(kl)}\bar{z}_l^2 + 2b_{00}^{(lk)}z_k\bar{z}_l^2\right);$$
$$\partial_{\bar{z}_l}\omega_k = 4(1+|z_l|^2)^{-2}\left(a_{01}^{(kl)} + 2\bar{b}_{00}^{(lk)}z_k + c_1^{(kl)}z_l - \right.$$
$$\left. - 2\bar{a}_{10}^{(kl)}z_k z_l - \bar{a}_{01}^{(kl)}z_l^2 + 2\bar{a}_{00}^{(kl)}z_k z_l^2\right).$$

Интегрируя (30), получим с учетом найденных выражений для $\partial_{z_l}\omega_k$ и $\partial_{\bar{z}_l}\omega_k$, что

$$\omega_k = \sum_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{n} \frac{4}{1+(z_l)^2}\left[\left(-c_1^{(kl)} + 2\bar{a}_{10}^{(kl)}z_k\right) + z_l\left(\bar{a}_{01}^{(kl)} - \right.\right.$$
$$\left.\left. - 2\bar{a}_{00}^{(kl)}z_k\right) + \bar{z}_l\left(a_{01}^{(kl)} + 2\bar{b}_{00}^{(lk)}z_k\right)\right] + \pi_k(z_k), \; k = 1, 2, \ldots, n, \tag{31}$$

где $\pi_k(z_k)$ — произвольная аналитическая функция комплексного переменного z_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Отсюда и из (28) вытекает, что

$$\varphi_k = \int \omega_k dz_k + \beta_k(z_1, \bar{z}_1, \ldots, z_k, z_{k+1}, \bar{z}_{k+1}, \ldots, z_n, \bar{z}_n) +$$
$$+ \eta_k(z_k) \; (k \leqslant n), \tag{32}$$

где $\eta_k(z_k)$ — произвольная аналитическая функция комплексного переменного z_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Функция $\eta_k(z_k)$ и $\int \omega_k dz_k$ удовлетворяют тождественно системе равенств (16). Поэтому для каждой функции β_k выполняются равенства вида (16), которые означают, что β_k имеет в проекции на $C^{n-1}_{\hat{k}}$ частный дифференциал

$$d_{\hat{k}}\beta_k = \sum_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{n} \left(\partial_{z_l}\beta_k dz_l + \partial_{\bar{z}_l}\beta_k d\bar{z}_l\right), \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Подсчитаем производные $\partial_{z_l}\beta_k$ и $\partial_{\bar{z}_l}\beta_k$. В силу (15), (20), (31) и (13) найдем

$$\partial_{z_l}\beta_k = \partial_{z_l}\varphi_k - \partial_{z_l}\int \omega_k dz_k = -4(1+|z_l|^2)^{-2}\left(\bar{b}_{00}^{(lk)} - a_{10}^{(kl)}z_l + a_{00}^{(kl)}\bar{z}_l^2\right);$$
$$\partial_{\bar{z}_l}\beta_k = \partial_{\bar{z}_l}\varphi_k - \partial_{\bar{z}_l}\int \omega_k dz_k = 4(1+|z_l|^2)^{-2}\left(a_{00}^{(kl)} + a_{10}^{(kl)}z_l + \bar{b}_{00}^{(lk)}z_l^2\right).$$

Таким образом,

$$d_{\hat{}}\beta_k = \sum_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{n} \frac{4}{(1+|z_l|^2)^2}\left[a_{00}^{(kl)}\left(d\bar{z}_l - z_l^2 dz_l\right) - \bar{b}_{00}^{(lk)}\left(dz_l - \right.\right.$$

$$-z_l^2 d\bar{z}_l) + a_{10}^{(kl)} d(z_l\bar{z}_l)\big], \; k \leqslant n.$$

Интегрируя эти равенства, получаем

$$\beta_k = \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n} \frac{4}{1+|z_l|^2} \left(a_{00}^{(kl)}\bar{z}_l - \bar{b}_{00}^{(lk)} z_l - a_{10}^{(kl)}\right) + \mu_k(z_k), \; k \leqslant n, \tag{33}$$

где $\mu_k(z_k)$ — произвольная аналитическая функция от z_k $(k \leqslant n)$. Итак, из (32) и (33) вытекает, что на поверхностях Φ_{2n} функции φ_k $(k \leqslant n)$ имеют вид (27), где

$$P_{kl} = 4\big[\big(-a_{10}^{(kl)} - c_1^{(kl)} z_k + \bar{a}_{10}^{(kl)} z_k^2\big) + z_l\big(-\bar{b}_{00}^{(lk)} + \bar{a}_{01}^{(kl)} z_k -$$
$$- \bar{a}_{00}^{(kl)} z_k^2\big) + \bar{z}_l\big(a_{00}^{(kl)} + a_{01}^{(kl)} z_k + \bar{b}_{00}^{(lk)} z_k^2\big)\big]; \; k, \; l = 1, \ldots, n; \; k \neq l.$$

Отсюда и из (13) видно, что P_{kl} зависят от того же набора вещественных параметров, что и функции f_{kl}. Из (14) следует, что каждая из функций f_{kl} зависит от девяти произвольных вещественных постоянных. Следовательно, матрица $\|P_{kl}\|$ $(P_{kk} = 0, \; k, l = 1, 2, \ldots, n)$ зависит от $9n(n-1)/2$ произвольных вещественных постоянных.

Из формул (10) и леммы 4 вытекает, что все решения системы (8) для Φ_{2n} $(n \geqslant 2)$ описываются функциями

$$w_k = \frac{4}{(1+|z_k|^2)^2} \left[\sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n} \frac{P_{kl}(z_k, \; z_l, \; \bar{z}_l)}{1+|z_l|^2} + \psi_k(z_k) \right], \; k \leqslant n. \tag{34}$$

3. Доказательство теорем 1, 2

Так как на $\Phi_{2n} \subset E_{3n}$ имеется целиком по крайней мере n координатных двумерных сфер u^k, u^{k+n} $(k \leqslant n)$, то на Φ_{2n} существует точка X_0, соответствующая бесконечно удаленной точке n-мерного комплексного пространства $C^n = C_1 \times \ldots \times C_n$, где C_k — плоскость комплексного переменного $z_k = u^k + iu^{k+n}$ $(k \leqslant n)$. Оценим поведение функций смещения $w_k = \xi_k + i\xi_{k+n}$ на Φ_{2n} в окрестности точки X_0, т. е. при $|z| = \sqrt{|z_1|^2 + \ldots + |z_n|^2} \to \infty$. Для этого перейдем на Φ_{2n} путем конформных преобразований $\overset{*}{z}_k = 1/z_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ от комплексных гауссовых координат z_k, $\bar{z}_k$ $(k \leqslant n)$ к комплексным гауссовым координатам $\overset{*}{z}_k$, $\bar{\overset{*}{z}}_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, в которых точка X_0 будет иметь координаты $(0, 0, \ldots, 0)$. Так как ξ_k и ξ_{k+n} являются компонентами ковариантного тензора, то (см. [3, гл. VII, § 2])

$$w_k = \overset{*}{\xi}_l \frac{\partial \overset{*}{z}_l}{\partial z_k} + i \frac{\partial \overset{*}{z}_l}{\partial z_k} \overset{*}{\xi}_{l+n} = \overset{*}{w}_l \frac{\partial \overset{*}{z}_l}{\partial z_k}, \; i^2 = -1; \; k, \; l \leqslant n.$$

где

$$\overset{*}{w}_l = \overset{*}{\xi}_l + i\overset{*}{\xi}_{l+n} = \overset{*}{w}_l\big(\overset{*}{z}_1, \; \bar{\overset{*}{z}}_1, \; \ldots, \; \overset{*}{z}_n, \; \bar{\overset{*}{z}}_n\big).$$

Поэтому $w_k = -(1/z_k^2)\, w_k^*,\ k = 1, 2, \ldots, n$.

Так как w_k^* ограничены при $|z_1^*| \to 0, \ \ldots, \ |z_n^*| \to 0$, то

$$w_k = O\left(\Delta_{\hat{k}} / |z_k|^2\right) \text{ при } |z_k| \to \infty \ \ (k \leqslant n), \tag{35}$$

где $\Delta_{\hat{k}}$ — постоянная относительно переменных $z_1, \bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_{k-1}, z_{k+1}, \ldots, z_n, \bar{z}_n$. Из (34) и (35) следует, что аналитическая функция $\psi_k(z_k)$ имеет на бесконечности полюс второго порядка, и в силу обобщенной теоремы Лиувилля

$$\psi_k(z_k) = a_{k0} + a_{k1} z_k + a_{k2} z_k^2, \ k = 1, 2, \ldots, n, \tag{36}$$

где $a_{k0}, \ a_{k1}, \ a_{k2}$ — произвольные комплексные постоянные. Из формул (34), (36) и леммы 4 вытекает, что все решения $w_k\,(k \leqslant n)$ системы (8) зависят от $9n(n-1)/2 + 6n = 3n(3n+1)/2$ произвольных вещественных постоянных.

Так как $w_k = \xi_k + i\xi_{k+n}$, то из (6) следует, что число всех вещественных произвольных параметров, определяющих поле $\vec{\xi}$ б. м. изгибания поверхности Φ_{2n}, равно $3n(3n+1)/2$, т. е. совпадает с числом линейно независимых б. м. изгибаний этой поверхности. Поэтому все найденные б. м. изгибания поверхности Φ_{2n} тривиальны, т. е. Φ_{2n} — геометрически жесткая в $E_{3n}\,(n \geqslant 2)$.

Отсюда заключаем, что $\vec{\xi} = B\boldsymbol{x} + \boldsymbol{C}$, где B — постоянная кососимметрическая матрица порядка $3n$, а $\boldsymbol{C}$ — постоянная матрица — столбец порядка $3n$ [4]. Если Φ_{2n} закреплена в некоторой точке $X \in \Phi_{2n}$ вместе с сопровождающим репером в этой точке, т. е. $\vec{\xi}|_X = 0$ и $d\vec{\xi}|_X = 0$, то $B \equiv 0$ и $\boldsymbol{C} \equiv 0$ на всей поверхности Φ_{2n} и, следовательно, Φ_{2n} — кинематически жесткая в $E_{3n}\ (n \geqslant 2)$, что доказывает теорему 1.

Доказательство теоремы 2 непосредственно вытекает из явного вида (34) решений системы (8) для поверхностей $\Phi_{2n}(n \geqslant 2)$.

Список литературы: 1. *Погорелов А. В.* Внешняя геометрия выпуклых поверхностей.— М.: Наука, 1969.—760 с. 2. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции. М.: Физматгиз, 1959.— 628 с. 3. *Векуа И. Н.* Основы тензорного анализа и теория ковариантов.— М.: Наука, 1978.— 296 с. 4. *Iasobowitz H.* Implicit function theorems and isometric embeddings.— Ann. Math., 1972, v. 95, p. 191—225.

Поступила в редколлегию 25.12.80.

СОДЕРЖАНИЕ