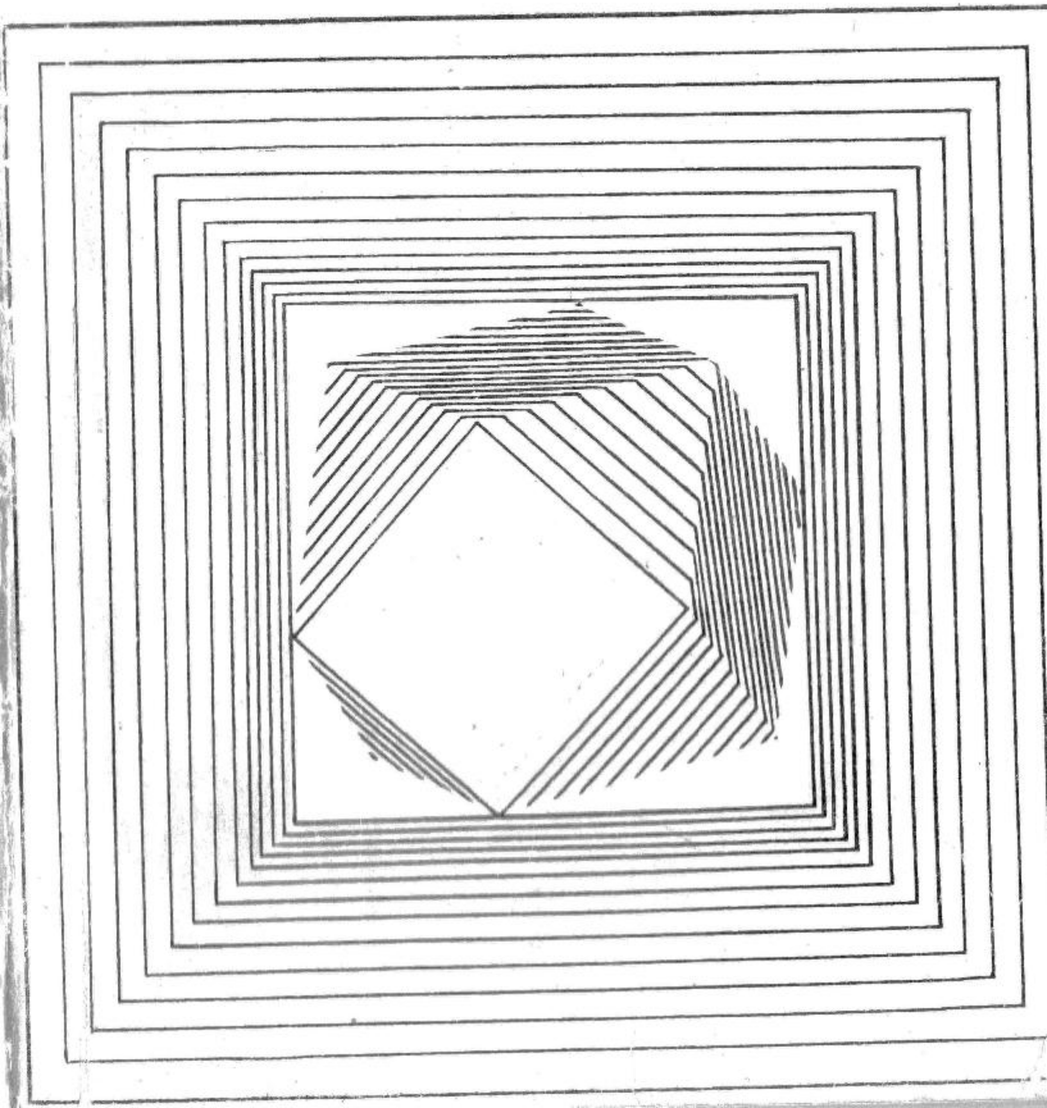
ISSN 0135-6992

УКРАИНСКИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК

ВЫПУСК 25



МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ УССР
ХАРЬКОВСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени А. М. ГОРЬКОГО

УКРАИНСКИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК

ВЫПУСК 25

Республиканский
межведомственный
научный
сборник

Основан в 1965 г.

ХАРЬКОВ
ИЗДАТЕЛЬСТВО ПРИ ХАРЬКОВСКОМ
ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ
ИЗДАТЕЛЬСКОГО ОБЪЕДИНЕНИЯ
«ВИЩА ШКОЛА»
1982

УДК 513

Украинский геометрический сборник: Респ. межвед. науч. сб. Вып. 25. — Харьков: Вища школа. Изд-во при Харьк. ун-те, 1982. — 144 с.

Статьи посвящены в основном геометрии в целом евклидова и неевклидовых пространств разной размерности. Рассматриваются геодезические и кратчайшие линии на выпуклых поверхностях, свойства функций кривизны, жесткость и изгибаемость поверхностей, структура множества решений уравнений теории поверхностей, алгебраические поверхности с симметрией, свойства кривых в физических пространствах и другие вопросы. Несколько статей посвящено классической дифференциальной геометрии, геометрии обобщенных пространств и другим вопросам геометрии.

Для научных работников математических специальностей.

Адрес редакционной коллегии: 310077, Харьков-77, пл. Дзержинского, 4, Харьковский университет, механико-математический факультет, тел. 40-14-92.

Редакция естественнонаучной литературы

У $\frac{1702040000-068}{М\ 226\ (04)-82}$ 441 — 82

УДК 513

А. А. Борисенко

О МНОГОМЕРНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЯХ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

С. З. Шефель ввел определение k-седловых многомерных поверхностей. При $k=2$ они изучались в работе [1], при произвольном k — В. В. Глазыриным в [2]. Мы вводим класс многомерных k-параболических поверхностей.

Пусть $A(N, Q)$ — матрица коэффициентов второй квадратичной формы поверхности F^l в римановом пространстве R^n в точке $Q \in F^l$ относительно нормали N; $r(N, Q) = \operatorname{rang} A(N, Q)$. Рангом второй квадратичной формы поверхности F^l в точке Q называется целое неотрицательное число $r(Q) = \max\limits_{N \in S^{p-1}} r(N, Q)$, где S^{p-1} — сфера единичных нормалей в точке Q. Поверхность F^l называется k-параболической, если в любой точке $r(Q) \leqslant l-k$.

В работе [3] был введен индекс $\nu(Q)$ точки поверхности. Индекс точки $Q \in F^l \subset R^n$ равен размерности подпространства $L(Q)$ в касательном пространстве F^l_Q в точке Q такого, что $A(N, Q)\,\boldsymbol{y} = 0$ для любого $\boldsymbol{y} \in L(Q)$ и любой нормали N в точке Q. Поверхность F^l называется k-сильно параболической, если в каждой точке индекс $\nu(Q) \geqslant k$; k-сильно параболические поверхности являются просто k-параболическими. При небольшой коразмерности вложения p-параболические поверхности являются сильно параболическими, так как ν, r, p связаны неравенством $\nu \geqslant l - \frac{r(p+1)}{2}$ [4].

Римановы пространства R^l принадлежат классу A_1^k, если при $l-k$ нечетном $\gamma_{l-k+1} = 0$, а при $l-k$ четном $\gamma_{l-k+2} = 0$, где γ_q — q-мерная секционная кривизна пространства R^l [5]. Римановы пространства R^l принадлежат классу A_2^k, если в касательном пространстве T_Q в каждой точке Q есть подпространство $L_k \subset T_Q$ такое, что для любого $\boldsymbol{x} \in L_k$, $R_{xy} = 0$, где $\boldsymbol{y}$ — любой вектор из T_Q; R — тензор кривизны пространства. Если в R^l мы возьмем координаты так, чтобы T_k была координатной плоскостью переменных $x_1, \ldots, x_k$, а плоскость переменных $x_{k+1}, \ldots, x_l$ была ортогональна плоскости T_k, то условие $R_{xy} =$

$=0$ перепишем следующим образом: $R_{i\alpha\beta\gamma}=0$, $i=1, \ldots, k$; α, β, $\gamma=1, \ldots, l$. В евклидовом пространстве E^n k-параболические поверхности принадлежат классу A_1^k, k-сильно параболические поверхности — классу A_2^k. При невырожденных аффинных преобразованиях E^n метрики поверхностей остаются в этих классах [6]. Справедливо и обратное утверждение.

Теорема. *Пусть F^l — поверхность в евклидовом пространстве E^n, которая несет метрику класса 1) A_2^k, отличную от плоской в каждой точке ($k<l$), 2) $A_1^k (k<l)$. Если при невырожденных аффинных преобразованиях пространства метрики поверхностей не выходят из соответствующих классов, то F^l есть 1) k-сильно параболическая поверхность, 2) к-параболическая поверхность. Если $к=l$, то F^l есть $(l-1)$-сильно параболическая поверхность.*

С. З. Шефель ввел понятие G-устойчивого погружения в евклидово пространство многообразий с римановой (внутренней) метрикой (1). Теорему, которую мы доказываем, можно переформулировать следующим образом: устойчивые относительно аффинных преобразований погружения метрик класса $A_1^k (A_2^k)$ являются k-(сильно) параболическими поверхностями.

Доказательство. 1) Допустим противное. Это значит, что найдется вектор $\boldsymbol{x}_0 \in L_к \subset F_Q^l$, для которого относительно одной из нормалей N_1 $A(N_1, Q)\boldsymbol{x}_0 \neq 0$ (1). Выберем в F_Q^l базис, состоящий из главных направлений матрицы $A(N_1, Q)$. В этом базисе матрица $A(N_1, Q)$ приводится к диагональному виду, и условие (1) сводится к тому, что хотя бы одна координата вектора $(a_{11}x_0^1, \ldots, a_{ll}x_0^l)$ отлична от нуля. Пусть для определенности $a_{11}x_0^1 \neq 0$. Если $a_{22}=\ldots=a_{ll}=0$, то $r(N_1, Q)=1$. Если для всех близких к N_1 нормалей $r(N, Q)=1$, то $r(Q)=1$ и поверхность изометрична в точке плоскому пространству, т. е. двумерная кривизна по всем направлениям равна нулю. Это противоречит условию теоремы. Поэтому для некоторой близкой к N_1 нормали $r(N, Q) \geqslant 2$. Не ограничивая общности, можем считать, что $r(N_1, Q)=2$ и $a_{22} \neq 0$. Так как $x_0^1 \neq 0$, то найдется вектор $\boldsymbol{y}_0$, перпендикулярный $\boldsymbol{x}_0$, такой, что $x_0^1 y_0^2 - x_0^2 y_0^1 \neq 0$. Так как a_{11}, $a_{22} \neq 0$, то $(a_{i1}a_{j2}-a_{i2}a_{j1})x_0^i y_0^j = a_{11}a_{22}(x_0^1 y_0^2 - x_0^2 y_0^1) \neq 0$. Так как $\boldsymbol{x}_0 \in L_к$, то $R_{ij12}x_0^i y_0^j=0$, где R_{ijkl} — компоненты тензора кривизны поверхности F^l. Пусть касательная плоскость F^l в точке Q есть плоскость переменных $x_1, \ldots, x_l$, оси этих переменных — главные направления второй квадратичной формы относительно нормали N_1; ось Z_1 направим по нормали N_1, остальные оси z_i — по ортонормированному базису нормалей N_m в точке Q. В некоторой окрестности этой точки поверхность F^l задается явно:

$$z_1=f_1(x_1, \ldots, x_l);$$
$$z_p=f_p(x_1, \ldots, x_l).$$

Рассмотрим поверхность $\bar{F}^l$, полученную из F^l путем невырожденного аффинного преобразования евклидова пространства $E^{l+p}: (x_1, \ldots, x_l, z_1, \ldots, z_p) \to (x_1, \ldots, x_l, \lambda z_1, z_2, \ldots, z_p)$. Для поверхности F^l будет $R_{ij12} x_0^i y_0^i = a_{11} a_{22} (x_0^1 y_0^2 - x_0^2 y_0^1) + \sum_{r=2}^{p} (a_{i1}^r a_{j2}^r - a_{i2}^r a_{j1}^r) x_0^i y_0^i = 0$, где a_{ij}^r — коэффициенты вторых квадратичных форм относительно базисных нормалей в точке Q, отличных от N_1. Для поверхности $\bar{F}^l$ в точке Q $\bar{R}_{ij12} x_0^i y_0^j = \lambda^2 a_{11} a_{22} (x_0^1 y_0^2 - x_0^2 y_0^1) + \sum_{r=2}^{p} (a_{i1}^r a_{j2}^r - a_{i2}^r a_{j1}^r) x_0^i y_0^j$. При достаточно больших λ будет $\bar{R}_{ij12} x_0^i y_0^j \neq 0$. Мы пришли к противоречию с предположением, что метрика $\bar{F}^l$ принадлежит классу A_2^κ.

2) Допустим противное. Пусть в некоторой точке $Q \in F^l$ ранг $r(Q) \geq l - \kappa + 1$; N_1 — нормаль в точке Q, для которой $r(Q) = r(N_1, Q)$; N_m — ортонормированный базис нормалей в точке Q. Пусть $P^{l-\kappa+1} \subset F_Q^l$ — плоскость такая, что ограничение на эту плоскость второй квадратичной формы относительно нормали N_1 имеет ранг $l - \kappa + 1$. Вычислим кривизну в направлении этой плоскости $\gamma_{l-\kappa+1} = \sum_{i_1, \ldots, i_p} \det A_{i_1, \ldots, i_p} = 0$, где $A_{i_1, \ldots, i_p}$ — матрицы, составленные из столбцов матриц a_{ij}^r так, что из каждой матрицы входит четное число столбцов [6]. Здесь a_{ij}^r — матрицы ограничений вторых квадратичных форм на P^{l-k+1}. По предположению $\det a_{ij}^r \neq 0$. Осуществим аффинное преобразование пространства такое же, как в случае 1). Кривизна поверхности $\bar{F}^l$ в направлении плоскости P^{l-k+1} будет $\bar{\gamma}_{l-k+1} = \lambda^{l-k+1} \det a_{ij}^1 + A^{l-k}(\lambda)$, где $A^{l-k}(\lambda)$ — многочлен относительно λ степени $\leq l - k$. Поэтому при достаточно большом λ будет $\bar{\gamma}_{l-k+1} \neq 0$, что противоречит условию теоремы.

Среди κ-параболических поверхностей можно ввести дополнительную классификацию. Если тип точки $j(Q) \leq s$ [4], то назовем поверхность $[s, \kappa]$-параболической. При $s = 0$ поверхность является κ-сильно параболической [4].

Список литературы: 1. *Шефель С. З.* О двух классах κ-мерных поверхностей в n-мерном евклидовом пространстве. — Сиб. мат. журн., 1969, **10**, № 2, с. 459—467. 2. *Глазырин В. В.* Топологические и метрические свойства κ-седловых поверхностей. — Докл. АН СССР, 1977, **233**, № 6, с. 1028—1030. 3. *Chern S. S. Kuiper N. H.* Some theorems on the isometric imbedding of compact Riemann manifolds in Euclidean space. — Ann. Math., **56**, 1952, p. 422—430. 4. *Борисенко А. А.* О строении l-мерных поверхностей с вырожденной квадратичной формой. — Укр. геометр. сб., 1972, вып. 13, с. 18—27. 5. *Борисенко А. А.* Полные l-мерные поверхности неположительной внешней кривизны в римановом пространстве. — Мат. сб., 1977, **104** (146), № 4 (12), с. 559—577. 6. *Борисенко А. А.* О характеристических классах Понтрягина компактной поверхности в сферическом пространстве. — Укр. геометр. сб., 1980, вып. 23, с. 24—30.

Поступила в редколлегию 08.09. 80.

УДК 513

А. А. Борисенко

О ЯВНО ЗАДАННЫХ МИНИМАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

С. Н. Бернштейн доказал, что явно заданная над всей плоскостью минимальная поверхность в евклидовом пространстве E^3 есть плоскость [1]. Здесь будет обобщена эта теорема для двумерных поверхностей в n-мерном евклидовом пространстве E^n и в сферическом пространстве S^n.

Пусть E_1^l, E_2^l — линейные подпространства в E^n; $E_1^1 \subset E_1^l$ — одномерное подпространство; E_2^1 — ортогональная проекция E_1^1 на E_2^l; $\varphi(E_1^1)$ — угол между E_1^1 и E_2^1. Если E_2^1 вырождается в точку, то $\varphi(E_1^1) = \frac{\pi}{2}$. Угол $\varphi = \max \varphi(E_1^1)$, взятому по всем одномерным подпространствам E_1^l, называется углом между E_1^l и E_2^l. Для минимальной поверхности F^2, явно заданной над плоскостью E^2 в E^n, угол между касательной плоскостью и координатной плоскостью E^2 назовем углом наклона касательной плоскости.

Теорема 1. *Пусть F^2 — явно заданная над всей плоскостью E^2 минимальная поверхность в E^n. Если угол наклона касательной плоскости достигает максимального значения в некоторой точке Q, то F^2 — плоскость.*

Доказательство. Не ограничивая общности, считаем, что точка Q совпадает с началом координат, прямая E^1 в касательной плоскости, которая образует с координатной плоскостью максимальный угол, проектируется в ось x_1, ось z_1 лежит в плоскости, натянутой на ось x_1 и прямую E^1. В этом частном случае функции $f^\kappa(x_1, x_2)$, задающие поверхность, удовлетворяют уравнению

$$\left(1 + \sum_{s=1}^{n-2} \left(\frac{\partial f^s}{\partial x_2}\right)^2\right) \frac{\partial^2 f^\kappa}{\partial x_1 \, \partial x_1} - 2\left(\sum_{s=1}^{n-2} \frac{\partial f^s}{\partial x_1} \frac{\partial f^s}{\partial x_2}\right) \frac{\partial^2 f^\kappa}{\partial x_1 \, \partial x_2} + \left(1 + \sum_{s=1}^{n-2} \left(\frac{\partial f^s}{\partial x_1}\right)^2\right) \frac{\partial^2 f^\kappa}{\partial x_2 \, \partial x_2} = 0.$$

Пусть $\kappa = 1$. Разделим уравнение на коэффициент при $\frac{\partial^2 f^1}{\partial x_1 \, \partial x_1}$ и продифференцируем по x_1. Функция $u = \frac{\partial f^1}{\partial x_1}$ удовлетворяет линейному эллиптическому уравнению $g^{11} u_{x_1 x_1} + 2g^{12} u_{x_1 x_2} + g^{22} u_{x_2 x_2} + a_1 u_{x_1} + a_2 u_{x_2} = 0$. В начале координат функция u достигает максимума. Из сильного принципа максимума следует, что $u = \frac{\partial f^1}{\partial x_1} = C$. Угол наклона φ касательной плоскости удовлетворяет неравенству $\operatorname{tg}^2\varphi \geqslant \sum\limits_{\kappa=1}^{n-2}\left(\frac{\partial f^\kappa}{\partial x_1}\right)^2 = C^2 + \sum\limits_{\kappa=2}^{n-2}\left(\frac{\partial f^\kappa}{\partial x_1}\right)^2$.

Так как в начале координат угол φ принимает максимальное значение φ_0, $\operatorname{tg}^2\varphi_0 = C^2$, то в окрестности нуля $\frac{\partial f^\kappa}{\partial x_1} = 0$ ($\kappa = 2, \ldots, n-2$). Из аналитичности следует, что $\frac{\partial f^\kappa}{\partial x_1} \equiv 0$. Отсюда следует, что поверхность F^2 — цилиндр. Но минимальный двумерный цилиндр есть плоскость.

Поверхность F^2 в сферическом пространстве S^n есть седловая в смысле Шефеля, если вторая квадратичная орма относительно любой нормали знаконеопределенна.

Теорема 2. *Пусть F^2 — аналитическая явно заданная седловая поверхность в S^n. Тогда F^2 — большая сфера.*

Доказательство. Пусть F^2 явно задается над большой сферой S^2_0. Ортогонально спроектируем F^2 на некоторую большую сферу S^3, которая содержит S^2_0. Образ поверхности F^2 есть аналитическая поверхность $\bar{F}^2 \subset S^3$, однозначно проектирующаяся на S^2_0, и ее гауссова кривизна $\leqslant 1$ (внешняя кривизна неположительна). Неположительность внешней кривизны следует из седлообразности поверхности F^2 и того факта, что вторая квадратичная форма поверхности $\bar{F}^2$ пропорциональна второй квадратичной форме F^2 относительно одной из нормалей [2]. Но поверхность $\bar{F}^2$, как доказано в [2], есть большая сфера. В силу произвольности выбора S^3 поверхность F^2 — большая сфера.

Следствие. *Минимальная явно заданная поверхность в S^n есть большая сфера.*

Минимальная поверхность является седловой, поэтому удовлетворяет условию теоремы 2.

В случае, когда F^l есть явно заданная минимальная гиперповерхность, теорема доказана Де Джорджи [3], А. В. Погореловым [4], Саймонсом [5]. В [5] Саймонс высказал предположение, что явно заданная минимальная поверхность F^l в сферическом пространстве есть большая сфера S^l. Из следствия вытекает, что для $l = 2$ предположение верно.

Список литературы: 1. *Бернштейн С. Н.* Собр. соч., т. 3. — М.: Изд-во АН СССР, 1960. — 439 с. 2. *Борисенко А. А.* Полные l-мерные поверхности неположительной внешней кривизны в римановом пространстве. — Мат. сб., 1977, **104** (146), № 4 (12), с. 559—577. 3. *Де Джорджи.* Обобщение теоремы Бернштейна. — В кн.: Целочисленные потоки и минимальные поверхности. М.: Мир, 1973. — 202 с. 4. *Погорелов А. В.* О минимальных гиперповерхностях в сферическом пространстве. — Докл. АН СССР, 1972, **206**, № 2, с. 291—292. 5. *Саймонс Дж.* Минимальные подмножества римановых многообразий. — В кн.: Целочисленные потоки и минимальные поверхности. М.: Мир, 1973. — 202 с.

Поступила в редколлегию 22. 10. 80.

УДК 513.83

Ю. Д. Бураго

СУЩЕСТВОВАНИЕ НА НЕКОМПАКТНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПОЛНОЙ МЕТРИКИ С ДАННОЙ КРИВИЗНОЙ

1. Дж. Каждан и Ф. Уорнер доказали [1, с. 68], что если открытая (т. е. некомпактная, без края) поверхность M допускает компактификацию в виде замкнутой поверхности, то любая гладкая функция k на M является гауссовой кривизной некоторой римановой метрики. Эта метрика может не быть полной. Например, она заведомо не полная, если $k \geqslant \text{const} > 0$. В связи с этим Дж. Каждан и Ф. Уорнер [1, с. 78, 129], [2, с. 408] поставили вопрос: какие функции могут быть кривизнами *полных* римановых метрик на открытой поверхности? Им же принадлежит [1, с. 71—77] решение этого вопроса в случае $M = R^2$; именно, для существования на R^2 полной метрики кривизны k необходимо и достаточно, чтобы $\varliminf_{|x| \to \infty} k(x) \leqslant 0$, где $|x|$ — обычная евклидова норма.

В настоящей статье дано простое решение этого вопроса для любой конечносвязной открытой поверхности. (Для замкнутых поверхностей аналогичный вопрос полностью решен, см. [1]).

2. В дальнейшем предполагаем, что все многообразия, метрики, функции, отображения и т. д. имеют гладкость C^∞. Напомним, что конечносвязная открытая поверхность M гомеоморфна некоторой замкнутой поверхности M_0, из которой удалено конечное число точек $p_1, \ldots, p_m$.

Теорема. *Пусть k — гладкая функция на конечносвязной открытой поверхности $M = M_0 \setminus \bigcup_{i=1}^{m} p_i$ и пусть эйлерова характеристика $\chi(M) \leqslant 0$. Для того чтобы k являлась кривизной полной римановой метрики, необходимо и достаточно выполнения следующих двух условий:*

а) $\varliminf_{x \to p_i} k(x) \leqslant 0$ *при всех* $i = 1, \ldots, m$;

б) *или* $\inf k(x) < 0$, *или* $\chi(M) = 0$ *и* $k \equiv 0$.

Как уже упоминалось, случай $\chi(M) = 1$ рассмотрен в [1].

3. Доказательство теоремы получается за счет совместного использования двух приемов, один из которых был применен Дж. Кажданом и Ф. Уорнером [3] в случае компактного M, а второй — ими же [1, с. 71—77] для отыскания полной метрики с данной кривизной на R^2.

Поверхность M разбивается на компактную часть Q и диффеоморфные полуцилиндру окрестности N_i точек p_i, $i = 1, \ldots, m$. На Q искомая метрика строится с помощью первого приема, а на полуцилиндрах N_i — с помощью второго и таким образом, чтобы метрики гладко склеивались вдоль окружностей $L_i = \partial N_i$.

4. Для реализации этого плана нам понадобится несколько лемм.

Лемма 1. *Пусть k — гладкая функция на замкнутой поверхности M' с римановой метрикой g', причем $\chi(M') < 0$. Если g' и k инвариантны относительно гладкой инволюции $\sigma: M' \to M'$, то на M' существует риманова метрика g кривизны k, конформно эквивалентная метрике g' и инвариантная относительно σ.*

Действительно, достаточно обратиться к доказательству теоремы 11.6 работы [3], включая предшествующие ей рассмотрения, и проследить, как все возникающие в процессе доказательств отображения и функции в условиях леммы 1 можно выбирать σ-инвариантными, что приводит к σ-инвариантной метрике g кривизны k, конформно эквивалентной метрике g'.

Лемма 2. *Пусть функция $f \in C^\infty[0, T]$ удовлетворяет условиям $f \leqslant A^2$ и $\operatorname{mes}\{t : f(t) > -b\} \leqslant \varepsilon$, где $A > 0$,*

$$b > 0,\ T = \sqrt{\frac{2}{b}},\ \varepsilon = \min\left\{\frac{1}{4}T,\ \frac{1}{4}\sqrt{\frac{b}{2}}A^{-2}e^{-A\sqrt{\frac{b}{2}}}\right\}.$$

Тогда в $[0, T]$ решение уравнения $u'' + fu = 0$, $u(0) = 1$, $u'(0) = 0$ **(1)** *положительно и $u'(T) > \frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{2}}$.*

Доказательство. Покажем, что если $t_0 \in (0, T)$таково, что $u > 0$ в $[0, t]$, то $p \equiv \min\{u(t), 0 \leqslant t \leqslant t_0\} > \frac{1}{2}$. Тогда, очевидно, $u \geqslant \frac{1}{2}$ всюду в $[0, T]$. Пусть для определенности $t_0 \geqslant \varepsilon$. По теореме сравнения Штурма $u(t) \leqslant \exp A\sqrt{\frac{2}{b}} \equiv P$ при $0 \leqslant t \leqslant t_0$. Интегрируя (1) в $[0, t]$, где $t \leqslant t_0$, и учитывая ограничения на f, получаем $u'(t) \geqslant bp(t - \varepsilon) - A^2P\varepsilon$ **(2)**. Еще раз интегрируя, находим $u(t) \geqslant 1 - A^2P\varepsilon t + bp\left(\frac{t^2}{2} - \varepsilon t\right)$ **(3)**.

Пусть $p = u(t')$, $0 \leqslant t' \leqslant t_0$. Из (3) следует $p\left(1 - \frac{bt'^2}{2} + b\varepsilon t'\right) \geqslant 1 - A^2Pt'\varepsilon$. По выбору T и ε имеем $1 - A^2Pt'\varepsilon \geqslant \frac{3}{4}$, $\frac{17}{16} \geqslant 1 + \frac{b^2\varepsilon}{2} \geqslant 1 - \frac{bt'^2}{2} + b\varepsilon t' > 0$, так что $p \geqslant \frac{3}{4} \cdot \frac{16}{17} > \frac{1}{2}$. Значит, $u \geqslant \frac{1}{2}$ в $[0, T]$. Теперь из (2) следует $u'(T) \geqslant \frac{1}{2}b\left(\sqrt{\frac{2}{b}} - \frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{b}}\right) - \frac{1}{4}\sqrt{\frac{b}{2}} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{2}}$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть на полуцилиндре $C = S^1 \times [t_0, \infty)$ с координатами (θ, t), $0 \leqslant \theta < 2\pi$, $t_0 \leqslant t < \infty$ задана гладкая функ-*

ция k, *причем* $\varlimsup_{t\to\infty} k(\theta, t) \leqslant 0$, *а на* $\partial C = S^1$ — *гладкие функции* g, $h > 0$. *Тогда найдется такой диффеоморфизм* $\psi: C \to C$, *тождественный вблизи* ∂C, *что задача Коши* $B_{tt} + k \circ \psi B = 0$, $B(\theta, t_0) = g(\theta)$, $B_t(\theta, t_0) = h(\theta)$ **(4)** *имеет положительное решение.*

Эта лемма доказывается точно так же, как теорема 4.1 [1, с. 71], с тем упрощением, что нет необходимости исследовать поведение решения в начале.

5. Доказательство теоремы. Необходимость условия а) следует из теоремы Бонне, а необходимость условия б) — из неравенства Кон-Фоссена $\int_M K dS \leqslant 2\pi\chi(M)$, где K и dS — гауссова кривизна и элемент площади полной метрики на M.

Докажем достаточность. Будем считать $\chi(M) < 0$, ибо в случае $\chi = 0$ доказательство лишь упрощается. По условию для некоторой точки $x_0 \in M$ будет $k(x_0) < 0$. Значит, найдутся такое число $b > 0$ и такая окрестность V точки x_0, что $k(x) < -b$ при $x \in V$. Пусть $\{Q_i\}_{i=1}^m$ — такой набор односвязных окрестностей точек $p_i \in M_0$, что их замыкания $\bar{Q}_i$ ограничены гладкими кривыми L_i и попарно не пересекаются. Эти окрестности выберем так, чтобы $L_i \cap V \neq \varnothing$ при всех $i = 1, \ldots, m$. Пусть $N_i = \bar{Q}_i \setminus p_i$. Введем на M риманову метрику g_0 таким образом, чтобы каждая область N_i была изометрична полуцилиндру $S^1 \times [0, \infty)$ с его канонической плоской метрикой. В частности, кривые L_i являются геодезическими метрики g_0. Пусть $Q = M_0 \setminus \bigcup_{i=1}^m Q_i$. Рассмотрим удвоение $M' = Q \cup \operatorname{cop} Q$. На M' действует естественная инволюция σ. Распространим σ-инвариантно с Q на M' функцию k и метрику g_0. Тогда по лемме 1 на M' существует σ-инвариантная риманова метрика $\tilde{g}$ кривизны k. Ввиду σ-инвариантност- кривые L_i являются геодезическими и в метрике $\tilde{g}$. Положим $g = \tilde{g}|_Q$. Пусть $2\pi c_i$ — длина L_i в метрике g. Введем на N_i координаты (θ, t), $0 \leqslant \theta < 2\pi c_i$, где θ — длина вдоль L_i, в которых метрика g_0 имеет вид $ds^2 = dt^2 + b^2(\theta, t)\, d\theta^2$. Пусть $t_0 = \sqrt{\frac{2}{b}}$, $N'_i = \{(\theta, t) \in N_i,\ 0 \leqslant t \leqslant t_0\}$.

Обозначим $A^2 = \max\{k(x),\ x \in N'_i\}$. В N'_i найдется односвязная область $U_i \subset V$, в которой всюду $k < -b$. Считаем, что ∂U_i — гладкая кривая, не пересекающаяся с $\partial N'_i$. Обозначим через P_i такую односвязную область в N'_i, ограниченную гладкой кривой, не пересекающейся с $\partial N'_i$, что каждая «образующая» $\theta = \mathrm{const}$ пересекается с P_i по множеству меры $\geqslant t_0 - \varepsilon$, где число ε выбрано в соответствии с леммой 2 по нашим b, A^2 и $T = t_0$. Область P_i с требуемыми свойствами можно получить, например, следующим образом: удалим из цилиндра N'_i малую окрестность его края, из оставшегося цилиндра — достаточно малую окрестность винтовой линии и сгладим 4 угловые точки. Обозначим через $\psi_i : N'_i \to N'_i$ диффеоморфизм, переводящий U_i на P_i и тождественный вблизи $\partial N'_i$. Теперь по лемме 2 решение $B^i(\theta, t)$ задачи Коши $B^i_{tt} + k \circ \varphi_i B^i = 0$, $B^i(\theta, 0) = 1$, $B^i_t(\theta, 0) = 0$ (5) положительно в $[0, t_0]$, причем $B^i_t(\theta, t_0) > \frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{2}}$. Применим теперь лемму 3 к каждому полуцилиндру $C_i = \{(\theta, t) \in N_i, t \geq t_0\}$, взяв в качестве g, h функции $B^i(\cdot, t_0)$, $B^i_t(\cdot, t_0)$. Соответствующий диффеоморфизм обозначим через ψ_i. Тем самым при всех $t \geqslant 0$ определены положительные гладкие функции B^i, удовлетворяющие уравнению $B^i_{tt} + k \circ \bar{\varphi}_i B^i = 0$, $B^i(\theta, 0) = 1$, $B^i_t(\theta, 0) = 0$, где $\bar{\varphi}_i = \varphi_i$ при $t \leqslant t_0$ и $\bar{\varphi}_i = \psi_i$ при $t > t_0$. Обозначим через g_i метрику C_i с линейным элементом $ds^2 = dt^2 + B^{i2} d\theta^2$ и продолжим метрику g с Q на M, положив $g(x) = \bar{\varphi}_i^* g_i(x)$ при $x \in N_i$. По построению g является гладкой римановой метрикой кривизны k и, как легко видеть, является полной. Теорема доказана.

Список литературы: 1. Исследования по метрической теории поверхностей.— Сб. статей. Сер. математики, вып. 18. М.: Мир, 1980. — 292 с. 2. *Green L.* Some open problems in differential geometry. —Proceed. of Sympos. in pure Mathem., 1975, **27**, Part I, p. 407—411. 3. *Kazdan I. L.*, *Warner F. W.* Curvature functions for compact 2-manifolds.— Ann. Math.,1974, **99**, p. 14—47.

Поступила в редколлегию 22.11.80.

УДК 513

Талеб Гарибе

ДВУМЕРНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ С ПОСТОЯННОЙ ВНЕШНЕЙ ГЕОМЕТРИЕЙ В E^5

Двумерную поверхность F^2 в евклидовом пространстве E^n называем поверхностью с постоянной внешней геометрией, если для любых двух точек x, $y \in F^2$ существуют на поверхности конгруэнтные окрестности этих точек.

В работе [1] рассмотрены такие поверхности в E^4 и доказано, что единственные поверхности с постоянной внешней геометрией в E^4 — это плоскость, сфера в E^3, обобщенный тор Клиффорда и цилиндрическая поверхность, направляющая которой есть винтовая линия в некотором E^3, а прямолинейная образующая ортогональна к E^3.

С. Б. Кадомцев в работе [2] рассматривал такие поверхности с гауссовой кривизной $K = -1$, при условии, что движение в пространстве, совмещающее конгруэнтные окрестности $U(x)$ и $U(y)$, переводит в себя геодезические, соединяющие точки x и y.

Орбиты дифференциальных подгрупп Ли движений эвклидовых пространств E^4 и E^5 изучались Лумисте Ю. Г. и Рийвес К. Доказываются следующие две теоремы.

Теорема 1. *Все двумерные поверхности с постоянной внешней геометрией и нулевой гауссовой кривизной в E^5 представляются в следующем виде:* $x_j = \sum_{i=1}^{2} [\cos \gamma_i v \sum_{k=1}^{2} (a^i_{j2k-1} \cos \delta_k u + a^i_{j2k} \times$

$\times \sin \delta_k u) + \sin \gamma_i v \sum_{k=1}^{2} (a^i_{j2k+3} \cos \delta_k u + a^i_{j2k+4} \sin \delta_k u)]$, $j = 1, 2, 3, 4,$

$x_5 = C_1 u + C_2 v$ (1), *где* a^i_{jk}, C_1 *и* C_2 *определяются через параметры эллипса нормальной кривизны и коэффициенты кручения поверхности.*

Мы указываем метод получения таких поверхностей и выделяем следующие их подклассы:

1. Поверхности с постоянной внешней геометрией, лежащие в E^4.

2. Поверхность, являющаяся прямым произведением винтовой линии в некотором E^3 на окружность в плоскости $E^2 \perp E^3$.

3. Цилиндрическая поверхность в E^5, направляющая которой есть винтовая линия в некотором E^4, а прямолинейная образующая ортогональна к этому E^4.

4. Поверхность, радиус-вектор которой $x_1 = A \cos u$, $x_2 = A \sin u$, $x_3 = B \cos v$, $x_4 = B \sin v$, $x_5 = C_1 u + C_2 v$ (2), где A, B, C_1 и C_2 — постоянные.

Другие подклассы таких поверхностей даются формулами (28), (29) и (30).

При специальном выборе координат и полей нормалей система уравнений Гаусса — Колдацци — Риччи сводится к системе алгебраических уравнений для некоторых постоянных величин. Коэффициенты кручения и вторых квадратичных форм определяются через эти постоянные. Если задать их значения, удовлетворяющие этой алгебраической системе, то, по теореме Бонне, в E^5 определяются поверхности с постоянной внешней геометрией.

Теорема 2. *Если двумерная поверхность в E^5 с положительной гауссовой кривизной имеет постоянную внешнюю геометрию, то она будет сферой или поверхностью Веронезе.*

Пусть x — точка на F^2. Эллипс нормальной кривизны в этой точке лежит в нормальном пространстве N_x. Определим в N_x систему координат, взяв ее начало в точке x и в качестве базисных орты нормалей n_1 и n_2, параллельные осям эллипса нормальной кривизны, n_3 — ортогональный к n_1 и n_2. В этой системе координаты центра эллипса α, β и γ и его полуоси a и b на всей поверхности F^2 будут постоянны. Не ограничивая общности, можно считать, что $a \geqslant b$.

В случае, когда $a > b$, определим на F^2 систему координат (u, v) следующим образом. Если точка M — конец большой полуоси эллипса нормальной кривизны в точке x, то M соответствует касательное к поверхности направление $\tau(x)$ в точке x такое, что вектор нормальной кривизны для направления τ с началом в x имеет конец в точке M. Таким образом, на F^2 определяется векторное поле $\tau(x)$. С помощью интегральных кривых этого поля и их ортогональных траекторий определяем на F^2 ортогональные координаты (u, v). В этой системе координат $ds^2 = Edu^2 + Gdv^2 = g_{11}du_1^2 + g_{22}du_2^2$. Коэффициенты вторых квадратичных форм поверхности имеют вид $L_{11}^1 = (\alpha + a)E$; $L_{12}^1 = 0$; $L_{22}^1 = (\alpha - a)G$, $L_{11}^2 = \beta E$; $L_{12}^2 = b\sqrt{EG}$; $L_{22}^2 = \beta G$; $L_{11}^3 = \gamma E$; $L_{12}^3 = 0$; $L_{22}^3 = \gamma G$, а гауссова кривизна $K = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - a^2 - b^2$ **(3)**. Введем коэффициенты кручения поверхности $\mu_{i/|k} = (n_{iu_k} n_j)$, $(k = 1, 2;\ i, j = 1, 2, 3)$. В статье [1] доказана

Лемма 1. *Для коэффициентов кручения рассматриваемой поверхности имеет место* $\mu_{ij|k} = C_{ij|k}\sqrt{g_{kk}}$ **(4)**, *где* $C_{ij|k} = \text{const}$.

Запишем основные уравнения погружения, приведенные в [3], учитывая (4) и вид коэффициентов вторых квадратичных форм.

Уравнения Кодацци: $E_v = \frac{1}{a}(C_{21|2}\beta - C_{21|1}b + C_{31|2}\gamma)E\sqrt{G}$; $G_u = -\frac{1}{a}(C_{21|1}\beta - C_{21|2}b + C_{31|1}\gamma)\sqrt{E}G$ **(5)**; $\frac{E_v}{E\sqrt{G}}b - C_{21|1}(\alpha - a) + C_{32|1}\gamma = 0$; $\frac{G_u}{G\sqrt{E}}b - C_{21|2}(\alpha + a) + C_{32|2}\gamma = 0$ **(6)**; $(\alpha + a)C_{31|2} + \beta C_{32|2} - bC_{32|1} = 0$; $(\alpha - a)C_{31|1} + \beta C_{32|1} - bC_{32|2} = 0$ **(7)**.

Уравнения Фосса — Риччи: $-\frac{C_{21|1}}{2}\frac{E_v}{\sqrt{E}} + \frac{C_{21|2}}{2}\frac{G_u}{\sqrt{G}} + (C_{31|1}C_{32|2} - C_{31|2}C_{32|1} + 2ab)\sqrt{EG} = 0$; $\frac{C_{32|1}}{2}\frac{E_v}{\sqrt{E}} - \frac{C_{32|2}}{2}\frac{C_u}{\sqrt{G}} + (C_{31|1}C_{21|2} - C_{31|2}C_{21|1})\sqrt{EG} = 0$; $\frac{C_{31|1}}{2}\frac{E_v}{\sqrt{E}} - \frac{C_{31|2}}{2}\frac{G_u}{\sqrt{G}} + (-C_{32|1}C_{21|2} + C_{32|2} \times C_{21|1})\sqrt{EG} = 0$ **(8)**.

Уравнение Гаусса: $-\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left\{\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right) + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right)\right\} = K$ (9).

Если подставить выражения для E_v и G_u из (5) в (9), получим $K = -\frac{1}{4a^2}\{(C_{21|1}\beta - C_{21|2}b + C_{31|1}\gamma)^2 + (C_{21|2}\beta - C_{21|1}b + C_{31|2}\gamma)^2\} \leqslant 0$ **(10)**. Поэтому в случае $a > b$ поверхностей с положительной гауссовой кривизной нет.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1. Если подставить выражения (5) в (6) и объединить полученные два уравнения с (7), то получится система, содержащая лишь постоянные величины $-\frac{b}{a}\gamma \times C_{31|1} + \gamma C_{32|2} = \frac{b}{a}\beta C_{21|1} + \left(\alpha + a - \frac{b^2}{a}\right)C_{21|2}$; $\frac{b}{a}\gamma C_{31|2} + \gamma C_{32|1} = \left(\alpha - a + \frac{b^2}{a}\right)C_{21|1} - \frac{b}{a}\beta C_{21|2}$; $(\alpha + a)C_{31|2} - bC_{32|1} + \beta C_{32|2} = 0$; $(\alpha - a)C_{31|1} + \beta C_{32|1} - bC_{32|2} = 0$ **(11)**. Найдем все возможные ее решения, считая неизвестными $C_{31|1}$, $C_{31|2}$, $C_{32|1}$, $C_{32|2}$. Определитель этой системы $\Delta = \frac{\gamma^2}{a^2}[\alpha^2 a^2 + \beta^2 b^2 - (a^2 + b^2)^2]$ **(12)**.

1. Пусть $C_{21|1} = C_{21|2} = 0$. Тогда система (11) однородна.

1а) В случае тривиального решения $C_{3j|k} = 0$ системы (11) из (8) следует, что $b = 0$. Эти условия выполняются на обобщенном торе Клиффорда, который, по теореме Бонне, и будет искомой поверхностью.

1б) Если (11) имеет нетривиальное решение, то $\Delta = 0$. Предположим, что $\gamma \neq 0$; из (10) получим $C_{31|1}^2 + C_{31|2}^2 = 0$, т. е. $C_{31|1} = C_{31|2} = 0$. Тогда из первых двух уравнений системы (11) следует, что $C_{32|1} = C_{32|2} = 0$, т. е. что система (11) имеет только тривиальное решение, что противоречит предположению. Поэтому $\gamma = 0$, и система уравнений Гаусса — Кодацци — Риччи сводится к следующей: $(\alpha + a) C_{31|2} - bC_{32|1} + \beta C_{32|2} = 0$; $(\alpha - a) C_{31|1} + \beta C_{32|1} - bC_{32|2} = 0$; $C_{31|1}C_{32|2} - C_{31|2}C_{32|1} + 2ab = 0$; $\alpha^2 + \beta^2 - a^2 - b^2 = 0$ **(13)**.

Из уравнений (5) следует, что $E_v = G_u = 0$. Изменим параметризацию так, чтобы было $E = G \equiv 1$ и чтобы выполнялась (13).

На такой поверхности $ds^2 = du^2 + dv^2$; $\mathrm{II}^1 = (\alpha + a)\, du^2 + (\alpha - a)\, dv^2$; $\mathrm{II}^2 = \beta du^2 + 2b du dv + \beta dv^2$; $\mathrm{II}^3 = 0$.

Запишем разложения Гаусса и Вейнгартена:

$$
\begin{aligned}
r_{uu} &= (\alpha + a)\, n_1 + \beta n_2, & n_{1u} &= -(\alpha + a)\, r_u - C_{31|1} n_3;\\
r_{uv} &= b n_2, & n_{1v} &= -(\alpha - a)\, r_v - C_{31|2} n_3;\\
r_{vv} &= (\alpha - a)\, n_1 + \beta n_2, & n_{2u} &= -\beta r_u - b r_v - C_{32|1} n_3;\\
& & n_{2v} &= -b r_u - \beta r_v - C_{32|2} n_3;\\
& & n_{3u} &= C_{31|1} n_1 + C_{32|1} n_2;\\
& & n_{3v} &= C_{31|2} n_1 + C_{32|2} n_2.
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Дифференцируя n_{1v} и n_{2v} по v, согласно уравнениям (14), получаем систему $n_{1vv} = -[(\alpha - a)^2 + C_{31|2}^2] n_1 - [\beta(\alpha - a) + C_{31|2}C_{32|2}]\, n_2$; $n_{2vv} = -[\beta(\alpha - a) + C_{31|2}C_{32|2}]\, n_1 - [\beta^2 + b^2 + C_{32|2}^2]\, n_2$ **(15)**. Для простоты запишем эту систему в виде $n_{1vv} = a_0 n_1 + b_0 n_2$; $n_{2vv} = b_0 n_1 + c_0 n_2$ **(15′)**. Из (15′) получим следующее уравнение: $n_{1vvvv} - (a_0 + c_0)\, n_{1vv} - (b_0^2 - a_0 c_0)\, n_1 = 0$ **(16)**. Его характеристическое уравнение $\lambda^4 - (a_0 + c_0)\lambda^2 + (a_0 c_0 - b_0^2) = 0$.

Пусть $\lambda^2 = \nu$, тогда

$$\nu_1 = \frac{a_0 + c_0}{2} - \frac{\sqrt{(a_0 - c_0)^2 + 4b_0^2}}{2}; \quad \nu_2 = \frac{a_0 + c_0}{2} + \frac{\sqrt{(a_0 - c_0)^2 + 4b_0^2}}{2}.$$

Как видно из (15) и (15′), число ν_1 всегда отрицательно. Выясним, какой знак имеет ν_2. Пусть $\nu_2 > 0$, тогда $\sqrt{(a_0 - c_0)^2 + 4b_0^2} > -(a_0 + c_0)$, отсюда следует, что $b_0^2 > a_0 c_0$ **(17)**. Подставляя в (17) значения a_0, b_0, c_0, получаем $b^2[(\alpha - a)^2 + C_{31|2}^2] + [\beta C_{31|2} - (\alpha - a) C_{32|2}]^2 < 0$, что невозможно, следовательно, $\nu_2 \leqslant 0$.

Пусть $\nu_2 = 0$. Это возможно при $\alpha = a$, $C_{31|2} = 0$. Поскольку $K = 0$, из (3) следует, что $\beta^2 = b^2$. Если взять, например, $\beta = b$, то из первого уравнения (7) следует, что $C_{32|1} = C_{32|2}$. Интегрируя разложения Гаусса — Вейнгартена, получаем радиус-вектор этой поверхности: $\left\{-\frac{b}{p^2}\cos p(u+v), \quad -\frac{b}{p^2}\sin p(u+v), \quad \frac{b^2}{pq}u - \frac{q}{p}v,\right.$ $\left.\frac{2a}{l^2}\cos lu, -\frac{2a}{l^2}\sin lu\right\}$, где $p^2 = 2b^2 + C^2_{32|2}$; $q^2 = b^2 + C^2_{32|2}$; $l^2 = 4a^2 + C^2_{31|1}$. В этих формулах предполагается, что $p \neq 0$; так как $a > 0$, то $l \neq 0$. Это поверхность вида (2); случай $\beta = -b$ рассматривается аналогично и приводит к поверхности такого же вида.

Если $p = 0$, то $\beta = b = 0$, $C_{32|2} = C_{32|1} = 0$. В этом случае получается поверхность, являющаяся прямым произведением винтовой линии из E^3 на окружность в плоскости E^2, перпендикулярной к E^3.

Пусть теперь $\nu_2 < 0$. Тогда $\lambda_1 = +\sqrt{\nu_1} = i\gamma_1$; $\lambda_2 = -\sqrt{\nu_1} = -i\gamma_1$; $\lambda_3 = +\sqrt{\nu_2} = i\gamma_2$; $\lambda_4 = -\sqrt{\nu_2} = -i\gamma_2$. Решение уравнения (16) напишем в виде $n_1 = \tilde{A}_1 e^{i\gamma_1 v} + \tilde{A}_2 e^{-i\gamma_1 v} + \tilde{A}_3 e^{i\gamma_2 v} + \tilde{A}_4 e^{-i\gamma_2 v}$, где $\tilde{A}_i$ — вектор-функция от u. Предполагая $b_0 \neq 0$, из первого уравнения (15') найдем $n_2 = -\frac{\gamma_1^2 + a_0}{b_0}(\tilde{A}_1 e^{i\gamma_1 v} + \tilde{A}_2 e^{-i\gamma_1 v}) - \frac{\gamma_2^2 + a_0}{b_0}(\tilde{A}_3 e^{i\gamma_2 v} + \tilde{A}_4 \times$ $\times e^{-i\gamma_2 v})$. Так как n_1 и n_2 вещественные, то должно быть $\tilde{A}_2 = \bar{\tilde{A}}_1$ и $\tilde{A}_4 = \bar{\tilde{A}}_3$. В случае $b_0 = 0$ система (15) легко интегрируется:

$$\begin{aligned} n_1 &= A_1(u)\cos\sqrt{-a_0}\,v + A_2(u)\sin\sqrt{-a_0}\,v, \\ n_2 &= B_1(u)\cos\sqrt{-c_0}\,v + B_2(u)\sin\sqrt{-c_0}\,v. \end{aligned} \tag{18}$$

Из того, что $n_1^2 = n_2^2 = 1$, $(n_1 \cdot n_2) = 0$, следует, что $A_1^2 = A_2^2 = 1$, $B_1^2 = B_2^2 = 1$ и все векторы A_1, A_2, B_1, B_2 взаимно ортогональны.

Функции n_1 и n_2 можно найти не из (15), как выше, а из системы, которая получается дифференцированием n_{1u} и n_{2u} по u с учетом других уравнений системы (14):

$$\begin{aligned} n_{1uu} &= -[(\alpha + a)^2 + C^2_{31|1}]\,n_1 - [\beta(\alpha + a) + C_{31|1}C_{32|1}]\,n_2 = \tilde{a}n_1 + \tilde{b}n_2; \\ n_{2uu} &= -[\beta(\alpha + a) + C_{31|1}C_{32|1}]\,n_1 - [\beta^2 + b^2 + C^2_{32|1}]\,n_2 = \tilde{b}n_1 + \tilde{c}n_2. \end{aligned} \tag{19}$$

Если и в этой системе предположить $b = 0$, то

$$n_1 = C_1(v)\cos\sqrt{-\tilde{a}}\,u + C_2(v)\sin\sqrt{-\tilde{a}}\,u,$$

$$n_2 = D_1(v)\cos\sqrt{-\tilde{c}}\,u + D_2(v)\sin\sqrt{-\tilde{c}}\,u,$$

где $C_1^2 = C_2^2 = D_1^2 = D_2^2 = 1$, и эти векторы взаимно ортогональны.

Сравнивая эти выражения для n_1 и n_2 с предыдущими, легко найти A_1, A_2, B_1 и B_2:

$$A_1=(\cos\sqrt{-\tilde a}\,u,\ \sin\sqrt{-\tilde a}\,u,\ 0,\ 0,\ 0);$$
$$A_2=(\sin\sqrt{-\tilde a}\,u,\ -\cos\sqrt{-\tilde a}\,u,\ 0,\ 0,\ 0);$$
$$B_1=(0,\ 0,\ \cos\sqrt{-\tilde c}\,u,\ \sin\sqrt{-\tilde c}\,u,\ 0);$$
$$B_2=(0,\ 0,\ \sin\sqrt{-\tilde c}\,u,\ -\cos\sqrt{-\tilde c}\,u,\ 0).$$

Тогда

$$n_1=\{\cos(\sqrt{-\tilde a}\,u-\sqrt{-a_0}\,v),\ \sin(\sqrt{-\tilde a}\,u-\sqrt{-a_0}\,v),\ 0,\ 0,\ 0\};$$
$$n_2=\{0,\ 0,\ \cos(\sqrt{-\tilde c}\,u-\sqrt{-c_0}\,v),\ \sin(\sqrt{-\tilde c}\,u-\sqrt{-c_0}\,v),\ 0\}.$$

Интегрируя разложение Гаусса — Вейнгартена, найдем радиус-вектор поверхности (2). В этом случае, так как n_1, n_2 и n_3 имеют простой вид, нетрудно найти L^i_{kj}, $C_{31|i}$, $C_{32|i}$ и убедиться, что они постоянны.

Если $\tilde b\neq 0$, тогда, решая систему (19), находим

$$n_1=C_1(v)\cos\delta_1u+C_2(v)\sin\delta_1u+C_3(v)\cos\delta_2u+C_4(v)\sin\delta_2u;$$

$$n_2=-\frac{\delta_1^2+\tilde a}{\tilde b}(C_1\cos\delta_1u+C_2\sin\delta_1u)+\left(-\frac{\delta_2^2+\tilde a}{\tilde b}\right)(C_3\cos\delta_2u+ + C_4\sin\delta_2u). \qquad (20)$$

Сравнивая эти выражения с (18), получаем

$$A_i=I_1^i\cos\delta_1u+I_2^i\sin\delta_1u+I_3^i\cos\delta_2u+I_4^i\sin\delta_2u;$$
$$B_i=t_1(I_1^i\cos\delta_1u+I_2^i\sin\delta_1u)+\tau_1(I_3^i\cos\delta_2u+I_4^i\sin\delta_2u),\quad i=1,\ 2, \qquad (21)$$

где $t_1=-\dfrac{\delta_1^2+\tilde a}{\tilde b}$, $\quad\tau_1=-\dfrac{\delta_2^2+\tilde a}{\tilde b}$; $\ I_j^i$ — постоянные векторы.

Имеет место

Лемма 2. *Если в тождестве относительно и будет* $A+ + \sum_{i=1}^{4}(a_i\cos\lambda_iu+b_i\sin\lambda_iu)=0$, *где* A, a_i, b_i *постоянны и все* $|\lambda_i|$ *отличны друг от друга, то* $A=a_i=b_i=0$.

Для доказательства надо взять выражения в левой части при $u=0$ и его нечетных производных при $u=0$ до 7-го порядка. Подставляя в равенство $A_1^2=1$ выражение для A_1 из (21) и применяя лемму 2, убедимся, что все векторы I_j^1 ортогональны друг к другу, причем $|I_1^1|=|I_2^1|$; $|I_3^1|=|I_4^1|$.

Аналогично из $A_2^2=1$ найдем, что все векторы I_j^2 ортогональны друг к другу и $|I_1^2|=|I_2^2|$, $|I_3^2|=|I_4^2|$; из равенства $A_1^2=A_2^2$ следует, что $|I_1^1|^2+|I_3^1|^2=|I_1^2|^2+|I_3^2|^2$.

Пусть единичный вектор $e_5 \perp I_j^1$ $(j=1,\ 2,\ 3,\ 4)$. Введем ортонормированный базис $e_i = I_i^1/|I_i^1|$, e_5, $i=1,\ 2,\ 3,\ 4$. Аналогично введем базис $e_i' = I_i^2/|I_i^2|$, e_5', $i=1,\ 2,\ 3,\ 4$, соответствующий A_2.

Выразим первый базис через второй. Пусть $Q=(q_j^i)$ — матрица перехода; как известно, Q есть ортогональная матрица. Выше было показано, что $(A_1 \cdot A_2)=0$; подставляя сюда вместо A_1 и A_2 их выражения (21) и применяя лемму 2, получаем соотношения

$$\sum_i I_i^1 I_i^2 = 0,\ I_i^1 I_i^2 = I_j^1 I_j^2 \ \ (i=1,\ j=2 \text{ и } i=3,\ j=4);$$
$$I_i^1 I_j^2 = -I_j^1 I_i^2 \ \ (i \neq j;\ i,\ j=1,\ 2,\ 3,\ 4). \tag{22}$$

С помощью этих соотношений легко установить, что матрица

$$Q=\begin{pmatrix} q_1^1 & q_2^1 & q_3^1 & q_4^1 & q_5^1 \\ -q_2^1 & q_1^1 & q_3^2 & q_4^2 & q_5^2 \\ -kq_3^1 & -kq_3^2 & -\rho q_1^1 & q_4^3 & q_5^3 \\ -kq_4^1 & -kq_4^2 & -q_4^3 & -\rho q_1^1 & q_5^4 \\ q_1^5 & q_2^5 & q_3^5 & q_4^5 & q_5^5 \end{pmatrix},$$

где $\rho = \dfrac{|I_1^1|\cdot|I_1^2|}{|I_3^1|\cdot|I_3^2|}$; $\quad k=\dfrac{|I_1^1|\cdot|I_3^2|}{|I_3^1|\cdot|I_1^2|}$.

Докажем, что $k=1$; сразу заметим, что $k>0$. Воспользуемся ортогональностью матрицы Q. Если перемножить третью и четвертую строки и такие же столбцы, получим $k^2 q_3^1 q_4^1 + k^2 q_3^2 q_4^2 + q_5^3 q_5^4 = 0$; $q_3^1 q_4^1 + q_3^2 q_4^2 + q_3^5 q_4^5 = 0$. Отсюда следует, что $q_5^3 q_5^4 = k^2 q_3^5 q_4^5$ или, возведя в квадрат,

$$(q_5^3 q_5^4)^2 = k^4 (q_3^5 q_4^5)^2. \tag{23}$$

С другой стороны, имеем

$$\begin{aligned} (q_5^3)^2 &= 1-k^2\,[(q_3^1)^2+(q_3^2)^2]-\rho^2\,(q_1^1)^2-(q_4^3)^2; \\ (q_5^4)^2 &= 1-k^2\,[(q_4^1)^2+(q_4^2)^2]-\rho^2\,(q_1^1)^2-(q_4^3)^2; \\ (q_3^5)^2 &= 1-[(q_3^1)^2+(q_3^2)^2]-\rho^2\,(q_1^1)^2-(q_4^3)^2; \\ (q_4^5)^2 &= 1-[(q_4^1)^2+(q_4^2)^2]-\rho^2\,(q_1^1)^2-(q_4^3)^2. \end{aligned} \tag{24}$$

Обозначим $p=(q_3^1)^2+(q_3^2)^2$; $q=(q_4^1)^2+(q_4^2)^2$; $\varphi=\rho^2\,(q_1^1)^2+(q_4^3)^2$. Подставив соответствующие выражения для q_5^3, q_5^4, q_3^5, q_4^5 из (24) в (23), получим равенство $(1-\varphi)\{[(1-\varphi)-(p+q)]\,k^4+(p+$

$+ q) k^2 - (1-\varphi)\} = 0$ **(25)**. Если $1-\varphi = 0$, то $q_3^1 = q_3^2 = q_4^1 = q_4^2 = 0$. Тогда $q_5^i = q_i^5 = 0$ $(i = 1, 2, 3, 4)$, а матрица имеет вид

$$Q = \begin{pmatrix} q_1^1 & q_2^1 & 0 & 0 & 0 \\ -q_2^1 & q_1^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\rho q_1^1 & q_4^3 & 0 \\ 0 & 0 & -q_4^3 & -\rho q_1^1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}. \qquad (26)$$

Если $1-\varphi \neq 0$, то на него можно сократить.

Пусть коэффициент при k^4 в (25) равен нулю, т. е. $1-\varphi-(p+q) = 0$. Тогда $k^2 = \frac{1-\varphi}{p+q} = 1$, следовательно, $k = 1$. Если $1-\varphi-(p+q) \neq 0$, то из равенства (25) находим

$$k_{1,2}^2 = \frac{-(p+q) \pm [(p+q) - 2(1-\varphi)]}{2[(1-\varphi)-(p+q)]}.$$

Если взять знак минус, то $k^2 = 1$ и $k = 1$. А при знаке плюс $k^2 = -\frac{1-\varphi}{(1-\varphi)-(p+q)}$. Но $k^2 > 0$ и $1-\varphi > 0$, значит, должно быть $1-\varphi-(p+q) < 0$ **(27)**. С другой стороны, если подставить последнее выражение для k^2 в выражение для $(q_5^3)^2$ из (24), получим $1-\varphi-k^2 p = (1-\varphi)\left(1 + \frac{p}{(1-\varphi)-(p+q)}\right) \geqslant 0$, или $\frac{1-\varphi-q}{(1-\varphi)-(p+q)} \geqslant 0$; пусть $1-\varphi-q > 0$, тогда и $(1-\varphi)-(p+q) > 0$, и это противоречит неравенству (27). Если $1-\varphi-q = 0$, т. е. $q_4^5 = 0$, тогда $k^2 = -\frac{q}{p}$. Из (23) следует, что $q_5^3 q_5^4 = 0$. В случае $q_5^4 = 0$ сразу получаем $k^2 = 1$. Если $q_5^4 \neq 0$, а $q_5^3 = 0$, то $(q_5^3)^2 = 1 - k^2 p - \varphi = 1-\varphi + q\frac{p}{q} = 1-\varphi+q = 0$, следовательно, $1-\varphi = 0$ и матрица имеет вид (26). Итак, мы доказали, что $k = 1$. В таком случае $q_i^5 = \pm q_5^i$ $(i = 1, \ldots, 4)$. Но из ортогональности матрицы Q следует, что $q_5^i = 0$. Тогда $q_5^5 = \pm 1$.

Если теперь перемножить первую строку на третью и первый столбец на третий, получится система двух уравнений, из которой вытекает, что $q_1^1 \cdot q_3^1 = 0$. Если $q_3^1 = 0$, то получим матрицу (26); если же $q_1^1 = 0$, то матрица Q может иметь один из двух видов:

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & q_2^1 & 0 & q_4^1 & 0 \\ -q_2^1 & 0 & \pm q_4^1 & 0 & 0 \\ 0 & \mp q_4^1 & 0 & \pm q_2^1 & 0 \\ -q_4^1 & 0 & \mp q_2^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}; \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & q_3^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pm q_3^1 & 0 \\ -q_3^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mp q_3^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, базис $I_i^1/|I_i^1|$ выражается через базис e_i', $i=1, \ldots, 4$, матрицами трех типов:

$$Q_1=\begin{pmatrix} m & l & 0 & 0 \\ l & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\rho m & n \\ 0 & 0 & -n & -\rho m\end{pmatrix};\quad Q_2=\begin{pmatrix} 0 & p & 0 & q \\ -p & 0 & \pm q & 0 \\ 0 & \mp q & 0 & \pm p \\ -q & 0 & \mp p & 0\end{pmatrix};\quad Q_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 & c & d \\ 0 & 0 & -d & c \\ -c & d & 0 & 0 \\ -d & -c & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Вектор $A_2=(\rho_1\cos\delta_1 u,\ \rho_1\sin\delta_1 u,\ \rho_2\cos\delta_2 u,\ \rho_2\sin\delta_2 u,\ 0)$, где $\rho_1=|I_1^1|$; $\rho_2=|I_3^1|$ (из того, что $k=1$ и соотношений между длинами векторов следует $|I_1^1|=|I_1^2|$; $|I_3^1|=|I_3^2|$). Аналогичные выражения получим для векторов A_1, B_1 и B_2. Подставим их в (18) и найдем n_1 и n_2. Интегрируя разложения Гаусса—Вейнгартена, найдем радиус-векторы трех поверхностей, которые соответствуют трем матрицам Q_i $(i=1, 2, 3)$. Для сокращения записи радиуса-вектора поверхности введем следующие обозначения: $d_1=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$, $d_2=\begin{pmatrix}x_3\\x_4\end{pmatrix}$; $\varphi_{ij}=\delta_i u+\gamma_j v$. Тогда если базис $I_i^1/|I_i^1|$ задать с помощью матрицы Q_1, то радиус-вектор соответствующей поверхности будет иметь вид

$$d_i=\sum_{j=1}^{2}a_{ij}\begin{pmatrix}\sin\varphi_{ij}\\-\cos\varphi_{ij}\end{pmatrix}+\sum_{j=1}^{2}\cos\gamma_i v\begin{pmatrix}p_{ij}\cos\delta_i u+q_{ij}\sin\delta_i u\\ r_{ij}\cos\delta_i u+s_{ij}\sin\delta_i u\end{pmatrix},$$
$$x_5=C_1u+C_2v\quad (i=1,\ 2),\tag{28}$$

где a_{ij}, p_{ij}, ... есть постоянные, удовлетворяющие некоторым соотношениям. Если базис $I_i^1/|I_i^1|$ выразить с помощью другой матрицы, например Q_2, то получится аналогичное выражение для радиуса-вектора соответствующей поверхности:

$$d_i=\sum_{j=1}^{2}a_{ij}\begin{pmatrix}\sin\varphi_{ij}\\-\cos\varphi_{ij}\end{pmatrix}+\sum_{j=1}^{2}\cos\gamma_i v\begin{pmatrix}p_{ij}\sin\delta_1 u+q_{ij}\sin\delta_2 u\\ r_{ij}\cos\delta_1 u+q_{ij}\cos\delta_2 u\end{pmatrix},$$
$$x_5=C_1u+C_2v\quad (i=1,\ 2).\tag{29}$$

Нетрудно найти радиус-вектор поверхности, соответствующей матрице Q_3.

Рассмотрим теперь общий случай, когда $b_0\neq 0$, $\tilde{b}\neq 0$. Тогда из (15) находим $n_1=A_1(u)\cos\gamma_1 v+A_2(u)\sin\gamma_1 v+A_3(u)\cos\gamma_2 v+A_4(u)\sin\gamma_2 v$; $n_2=t(A_1\cos\gamma_1 v+A_2\sin\gamma_1 v)+\tau(A_3\cos\gamma_2 v+A_4\times\sin\gamma_2 v)$, где $t=-\dfrac{\gamma_1^2+a_0}{b_0}$, $\tau=-\dfrac{\gamma_2^2+a_0}{b_0}$; легко найти, что $1+t\tau=0$. Сравнивая это выражение для n_1 с (20), можно видеть, что $A_i=I_1^i\cos\delta_1 u+I_2^i\sin\delta_1 u+I_3^i\cos\delta_2 u+I_4^i\sin\delta_2 u$, где I_j^i $(i, j=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ — постоянные векторы.

Обозначим $n_1 = x + y$; $n_2 = tx + \tau y$. Используя соотношени $n_1^2 = n_2^2 = 1$; $(n_1 \cdot n_2) = 0$, получаем систему трех уравнени с тремя неизвестными: x^2, xy, y^2. Решая ее, найдем

$$x^2 = \frac{1+\tau^2}{(t-\tau)^2}, \quad y^2 = \frac{1+t^2}{(t-\tau)^2}, \quad xy = -\frac{1+t\tau}{(t-\tau)^2} = 0.$$

Подставляя вместо x и y их выражения через A_i, находи $A_1^2 = A_2^2 = \frac{1+\tau^2}{(t-\tau)^2}$; $A_3^2 = A_4^2 = \frac{1+t^2}{(t-\tau)^2}$, и все A_i ортогональн друг другу, откуда следует выполнение условий вида (22).

Если повторить для A_i все, что было сделано в предыдущ случае, увидим, что базис $I_i^\alpha/|I_i^\alpha|$ $(\alpha = 1, 3, 4)$ будет выражатьс через базис $I_i^2/|I_i^2|$ с помощью некоторых матриц S_1, S_3, S_4. Н выбор S_i не произволен, поскольку должны выполняться услови (22) ортогональности A_i. Проверка выполнения этих условий по казывает, что можно взять только такие матрицы:

$$1)\ S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad S_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cos\psi & \sin\psi \\ 0 & 0 & -\sin\psi & \cos\psi \\ -\cos\psi & \sin\psi & 0 & 0 \\ -\sin\psi & -\cos\psi & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$S_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sin\psi & -\cos\psi \\ 0 & 0 & \cos\psi & \sin\psi \\ -\sin\psi & -\cos\psi & 0 & 0 \\ \cos\psi & -\sin\psi & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$2)\ S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad S_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad S_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно найти поверхности, соответствующие этим матрицам Если базисы $I_i^\alpha/|I_i^\alpha|$ $(\alpha = 1, 3, 4)$ выражаются с помощью матри S_α в случае 1), то поверхность имеет вид

$$d_i = A_i \begin{pmatrix} \sin\theta_i \\ \cos\theta_i \end{pmatrix} + B_i \begin{pmatrix} \sin\varphi_i \\ \cos\varphi_i \end{pmatrix}; \quad x_5 = C_1 u + C_2 v \quad (i = 1, 2), \quad (30$$

где $\theta_i = (\gamma_1 v - \delta_i u)$; $\varphi_1 = (\delta_2 u - \psi + \gamma_2 v)$; $\varphi_2 = (\delta_1 u + \psi - \gamma_2 v)$ Аналогично можно найти поверхности и в других случаях.

2. Рассмотрим случай, когда $C_{21|1}$ и $C_{21|2}$ не обращаютс в нуль одновременно, но выполняются условия $\frac{b}{a}\beta C_{21|1} + \Big(\alpha + a - \frac{b^2}{a}\Big) C_{21|2} = 0$; $\Big(\alpha - a + \frac{b^2}{a}\Big) C_{21|1} - \frac{b}{a}\beta C_{21|2} = 0$.

Определитель этой системы должен быть равен нулю

$$-\frac{1}{a^2}\left[\alpha^2 a^2 + \beta^2 b^2 - (a^2 - b^2)^2\right] = 0. \quad (31$$

Заметим, что система (11) остается однородной.

2а) Рассмотрим тривиальное решение системы (11), т. е. $C_{\alpha\beta|\gamma} = 0$. Из (10), поскольку $K = 0$, следует, что $C_{21|1}\beta - C_{21|2}b = 0$, $-C_{21|1}b + C_{21|2}\beta = 0$ **(32)**, следовательно, $\beta^2 - b^2 = 0$, $\Gamma_n = \Omega_n = 0$, и из (6) найдем $(\alpha - a)C_{21|1} = 0$, $(\alpha + a)C_{21|2} = 0$.

Пусть $C_{21|1} \neq 0$, $\alpha = a$, тогда $C_{21|2} = 0$, и из (32) получаем $b = \beta = 0$. Поверхность с такими условиями есть цилиндрическая в E^4.

2б) Пусть система (11) имеет нетривиальное решение, значит, $\Delta = 0$.

2б. 1) Пусть $[\alpha^2 a^2 + \beta^2 b^2 - (a^2 + b^2)^2] = 0$. Учитывая (31), получаем $b = 0$, $\alpha^2 = a^2$. Тогда, поскольку $K = 0 = \gamma^2 + \beta^2$, то и $\beta = \gamma = 0$. Если взять $\alpha = a$, то из системы (5)—(10) следует, что $C_{21|2} = C_{31|2} = 0$, и, поскольку $C_{21|1} \neq 0$, то $C_{32|2} = 0$. Поверхность с такими условиями есть цилиндрическая поверхность в E^5.

2б. 2) Пусть $[\alpha^2 a^2 + \beta^2 b^2 - (a^2 + b^2)^2] \neq 0$, $\gamma = 0$. Из (10) найдем, что $C_{21|1}\beta - C_{21|2}b = 0$, $-C_{21|1}b + C_{21|2}\beta = 0$, значит, $\beta^2 - b^2 = 0$; из (3), поскольку $K = 0$, следует $\alpha^2 = a^2$; возвращаясь опять к (31), найдем, что $b = 0$. В таком случае будет $[\alpha^2 a^2 + \beta^2 b^2 - (a^2 + b^2)^2] = 0$, что мы исключали.

3. Рассмотрим систему (11) без каких-либо ограничений. Чтобы она имела решение, необходимо, чтобы $\Delta \neq 0$, т. е. $\gamma \neq 0$ и $[\alpha^2 a^2 + \beta^2 b^2 - (a^2 + b^2)^2] \neq 0$. Из уравнения (10) получим $C_{21|1}\beta - C_{21|2}b + \gamma C_{31|1} = 0$, $-C_{21|1}b + C_{21|2}\beta + \gamma C_{31|2} = 0$ **(33)**. Из (11) найдем по правилу Крамера $C_{31|1}$ и $C_{31|2}$: $C_{31|1} = \frac{\gamma}{\Delta a^2}\{-\beta[a^2(\alpha^2 - a^2) + b^2(\beta^2 - b^2)]C_{21|1} + b[a^2(\alpha + a)^2 + b^2(\beta^2 - b^2)]C_{21|2}\}$; $C_{31|2} = \frac{\gamma}{\Delta a^2}\{b[a^2(\alpha - a)^2 + b^2(\beta^2 - b^2)]C_{21|1} - \beta[a^2(\alpha^2 - a^2) + b^2(\beta^2 - b^2)]C_{21|2}\}$. Подставляя эти выражения в (33), получаем, что $[\alpha^2 a^2 + \beta^2 b^2 - (a^2 + b^2)^2] = 0$, чего не может быть.

Рассмотрим теперь второй общий случай, когда $a = b$, т. е. когда эллипс нормальной кривизны обращается в окружность. Если α или β отличны от нуля, то всегда можно выбрать систему координат (u, v) на поверхности так, чтобы выполнялось условие (4). Следовательно, (10) будет выполнено ($K \leqslant 0$) (это будет использовано ниже в доказательстве теоремы 2) и в таком случае также нет поверхностей с положительной гауссовой кривизной.

Поверхности с нулевой гауссовой кривизной будут, как легко видеть, в случае, когда $a = b = 0$ и, следовательно, $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Поверхность, для которой выполняются эти условия, есть 2-плоскость. Теорема 1 полностью доказана.

Доказательство теоремы 2. Имеем $K > 0$. Поскольку из (10) следует, что при $a > b$ будет $K \leqslant 0$, рассмотрим случай $a = b$.

1. Если $a = b = 0$, то очевидно, что поверхность с этими условиями есть сфера в E^3.

2. Пусть $a = b \neq 0$. Тогда, как показано выше, должно быть $\alpha = \beta = 0$. Напишем основные уравнения погружения в некоторой

ортогональной системе координат. Уравнения Кодацци и Фосса — Риччи:

$$aE_v + a\mu_{21|1}\sqrt{EG} - \gamma\mu_{31|2}E = 0, \quad -aG_u + a\mu_{21|2}\sqrt{EG} - \gamma\mu_{31|1}G = 0; \tag{34}$$

$$aG_u/\sqrt{EG} - a\mu_{21|2} + \gamma\mu_{32|2} = 0; \quad aE_v/\sqrt{EG} + a\mu_{21|1} + \gamma\mu_{32|1} = 0; \tag{35}$$

$$\sqrt{E}\,\mu_{31|2} - \sqrt{G}\,\mu_{31|1} = 0; \quad \sqrt{G}\,\mu_{31|1} + \sqrt{E}\,\mu_{32|2} = 0; \tag{36}$$

$$\begin{gathered} -\mu_{21|1,2} + \mu_{21|2,1} + \mu_{31|1}\mu_{32|2} - \mu_{31|2}\mu_{32|1} + 2a^2\sqrt{EG} = 0, \\ \mu_{32|1,2} - \mu_{32|2,1} + \mu_{31|1}\mu_{21|2} - \mu_{31|2}\mu_{21|1} = 0, \\ \mu_{31|1,2} - \mu_{31|2,1} - \mu_{32|1}\mu_{21|2} + \mu_{32|2}\mu_{21|1} = 0. \end{gathered} \tag{37}$$

Если выразить E_v и G_u из (34) и подставить их в (35), то получим $\mu_{31|2}\sqrt{E} + \mu_{32|1}\sqrt{G} = 0$, $-\mu_{31|1}\sqrt{G} + \mu_{32|2}\sqrt{E} = 0$. Сравнивая эти два равенства с (36), получаем $\mu_{31|1} = \mu_{32|1} = \mu_{31|2} = \mu_{32|2} = 0$. Значит, как видно из (34), $E_v = -\mu_{21|1}\sqrt{EG}$, $G_u = \mu_{21|2}\sqrt{EG}$. Подставив эти выражения в уравнение Гаусса (9), получим $\frac{1}{2\sqrt{EG}}\{\mu_{21|1,2} - \mu_{21|2,1}\} = K$, но из (37) видно, что $\mu_{21|1,2} - \mu_{21|2,1} = 2a^2\sqrt{EG}$. Поэтому $K = a^2$. Значит, из (3) следует, что $\gamma^2 - 2a^2 = a^2$, т. е. $\gamma^2 = 3a^2$. Если $\gamma^2 = 1$, то $a^2 = K = \frac{1}{3}$. Поверхность с такими условиями есть поверхность Веронезе. Ее радиус-вектор имеет вид $\left(\frac{xy}{\sqrt{3}}, \frac{yz}{\sqrt{3}}, \frac{xz}{\sqrt{3}}, \frac{x^2 - y^2}{2\sqrt{3}}, \frac{x^2 + y^2 - 2z^2}{6}\right)$ при условии $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Теорема 2 доказана.

Список литературы: 1. *Гарибе Т.* Поверхности в E^4 с постоянной внешней и внутренней геометрией. — Укр. геометр. сб., 1981, вып. 24, с. 12—18. 2. *Кадомцев С. Б.* Невозможность некоторых специальных изометрических погружений пространств Лобачевского. — Мат. сб., 1978, **107** (149), № 2 (10), с. 175—198. 3. *Эйзенхарт Л. П.* Риманова геометрия. — М.: Изд-во иностр. лит., 1948. — 316 с.

Поступила в редколлегию 08.12.80.

УДК 513

А. М. Гурин

ОЦЕНКА ЧИСЛА ЗАМКНУТЫХ ВЫПУКЛЫХ МНОГОГРАННИКОВ С РАВНОУГОЛЬНЫМИ ВЕРШИНАМИ

1. Под многогранником с равноугольными вершинами понимается многогранник, в каждой вершине которого равны все плоские углы сходящихся в ней граней. В статье [1] доказано, что в т:ехмерном евклидовом пространстве из всех замкнутых выпуклых многогранников с равноугольными вершинами можно

выделить две бесконечные серии: бипирамид и многогранников, двойственных антипризмам, все же остальные многогранники составляют конечное множество. Оценка этого множества и предлагается в настоящей статье.

Теорема. *В трехмерном евклидовом пространстве существует с точностью до изоморфизма не более двухсот сорока трех замкнутых выпуклых многогранников с равноугольными вершинами, не являющихся правильными, двойственными полуправильным, бипирамидами или двойственными антипризмам.*

Бесконечные многогранники с равноугольными вершинами рассмотрены в статье [2].

Доказательство теоремы состоит в построении всех возможных сетей ребер рассматриваемых многогранников (будем обозначать их буквой M) путем подклеивания к исходной грани других граней с соблюдением необходимых ограничений. Эти построения проведены по такому плану: 1) Все возможные типы граней упорядочены [1, лемма 1]. 2) Грань каждого типа по очереди берется за исходную и строятся все возможные ее продолжения до сети многогранника M (или обнаруживается невозможность такого продолжения); этот тип грани уже не участвует в построениях с исходной гранью следующих типов. 3) Вопрос реализации всех полученных сетей в виде многогранника M весьма трудоемкий, находится пока в стадии разрешения; сети, уже оказавшиеся нереализуемыми, не вошли в указанное в теореме число 243. Следует согласиться с выводом В. А. Залгаллера [3], что не видно единого алгорифма при перечислении всех выпуклых многогранников с гранями из ограниченного перечня.

Объем статьи не позволяет привести все доказательство теоремы полностью. Здесь будут приведены только отдельные характерные его этапы.

2. Приведем употребляемые дальше термины, обозначения и ограничения; часть их была введена в работах [1], [2].

Из выпуклости и равноугольности вершин многогранника M следует, что его гранями могут быть только треугольники и выпуклые четырехугольники и пятиугольники. Тип грани определяется ее вершинами; например, (l, l, n) или (l^2, n) означает треугольную грань с двумя l-гранными и одной n-гранной вершинами. В статье [1] перечислены все возможные типы граней многогранников M; типов конечное число, кроме двух бесконечных серий граней $(4^2, n)$ и $(3^3, n)$, которые, начиная с $n = 42$, являются гранями только бипирамид и многогранников, двойственных антипризмам. Если две n-гранные вершины имеют разные плоские углы, то их обозначения различаются верхними индексами или штрихами, например $(3, 4, 3', 5)$. Блоком называется абстрактный многогранник с краем, край состоит из ребер: $[k, l]$ — ребро, соединяющее вершины k и l (т. е. k-гранную и l-гранную); $[k, l, m]$ — угол, образованный ребрами $[k, l]$ и $[l, m]$; $\{k, n\}$ — двугранный угол при ребре $[k, n]$; $v(k)$ — мера плоского угла k-гранной вершины; $\theta[k, l] = v(k) + v(l)$ — сумма плоских углов грани при ребре $[k, l]$; $\theta(k, l, m, n)$ — сумма плоских углов грани (k, l, m, n). Если плоские углы двух вершин равны, но числа граней, инцидентных этим вершинам, различны, то обозначения таких вершин отличаются нижними индексами, например, n_1, $n_2 : v(n_1) = v(n_2)$. При этом $n_1 \neq n_2$, $5_1 \neq 5_2$.

Свойства (ограничения): α) сумма внутренних углов выпуклого n-угольника $S_n = \pi(n-2)$; γ) $v(k) < 2\pi/k$; δ) всякая трехгранная вершина правильная и вполне определяется заданием одного угла, плоского или двугранного; ε) две трехгранные вершины с общим ребром равны; ξ) две треугольные грани с общим ребром равны; η) у четырехугольной вершины противоположные двугранные углы равны. К этим свойствам, приведенным в [1]—[2], добавим следующие: ζ) сумма любых двух углов пятиугольной грани больше π (следует из α и γ); ϰ) если грани $(3^4,5)$ и $(3^2,5,\ k)$ имеют равные $v(3)$ и равные $v(5)$, то $v(k) < \pi/3$ (из α: $4v(3) + v(5) = 3\pi$, $2v(3) + v(5) + v(k) = 2\pi$; вычитая и применяя γ, найдем $v(k) < \pi/3$).

3. Оказалось верным предположение А. И. Медяника:

Лемма. *На выпуклом многограннике с равноугольными вершинами пятиугольная и треугольная грани не могут иметь общих вершин.*

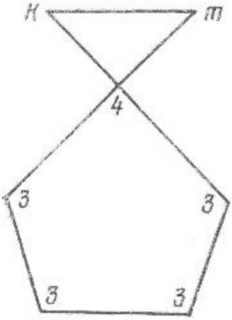


Рис. 1

Доказательство. В случае бесконечных многогранников достаточно сослаться на таблицу рисунков в работе [2]. Обратимся к замкнутым многогранникам M. Таблица 1 работы [1] допускает только три типа пятиугольных граней: $(3^4, n)$, $n = 3, 4, 5$. Допустим, что пятиугольник и треугольник имеют общую вершину. Если это вершина 3 или n при $n = 3$, то эти грани должны иметь и общее ребро, что в силу свойства ζ невозможно. Следовательно, эти грани могут иметь общей только вершину n при $n = 4,\ 5$: в обоих случаях $v(n) > \pi/3$ (следует из α и γ).

Пусть $n = 4$. Пятиугольник и треугольник составляют блок, изображенный на рис. 1. Согласно ε и η, вершина 4 правильна. Рассматривая двугранные углы вершин 3 и 4 блока, можно показать, что углы грани $(3^4,\ 4)$ определяются однозначно: $v(4) = 80{,}6°$, $v(3) = 114{,}8°$ с точностью до $0{,}1°$ (как и в дальнейшем).

Если $k = 3$, то, согласно η и δ, $v(k) = v(3)$ и $\theta[4,\ k] > \pi$, что невозможно, поэтому $k > 3$; аналогично $m > 3$. Согласно ζ в углы $[3,\ 4, k]$ и $[3,\ 4,\ m]$ можно вклеить только четырехугольники $(3,\ 4,\ k,\ l)$ и $(3,\ 4,\ m,\ s)$. Так как $\theta[3, l] \leqslant 2v(3) < 4\pi/3$, то $\theta[4,\ k] > 2\pi/3$, откуда следует $v(m) < \pi/3$ и аналогично $v(k) < \pi/3$. Но тогда $\theta[3,\ 4,\ k] < 255{,}4°$, и $v(l) > 104° > \pi/2$, т. е. $l = 3$; аналогично $S = 3$. Отсюда сразу следует, что $v(m) = v(k)$. Если бы было $k = 4$, то вершина k также была бы правильной и равной вершине 4, что невозможно, так как $v(k) < \pi/3$, $v(4) > \pi/3$. Поэтому $k,\ m > 4$.

а) Подклеим к ломаной $[3^2,\ l]$ пятиугольник $(3^2,\ l,\ 3, 4_1)$; вершина 4 — правильная, поскольку этот пятиугольник равен исходному. В получившийся свободный угол $[3,\ l,\ k]$, у которого $\theta[l,\ k] < \pi$, можно вклеить только четырехугольник $(k,\ l,\ 3,\ 4_2)$ с такими же углами, как у $(k,\ l,\ 3,\ 4)$. Теперь $\theta[3,\ 4_1] > \pi$,

$\theta[3,\ 4_2] > \pi$ и в угол $[4_1,\ 3,\ 4_2]$ можно вклеить только четырехугольник $(4_1,\ 3, 4_2,\ p)$. Если $p = 3$, то при каждом ребре этого четырехугольника сумма углов будет $> \pi$, что невозможно. Если $p = 4$, то вершина 4 тоже будет правильной, а также и вершина p; но тогда $\theta(4_1,\ 3,\ 4_2,\ p) = v(3) + 3v(4) < 357° < 2\pi$. При $p \geqslant 5$ сумма этих углов будет еще меньше. Следовательно, такое продолжение сети невозможно.

б) Подклеим к ломаной $[3^2,\ l]$ пятиугольник $(l,\ 3^3,\ 4_1)$ и такой же — с другой стороны, $(s,\ 3^3,\ 4_2)$. К получившейся ломаной $[3,\ 3, 3,\ 3]$ подклеиваем пятиугольник $(3^4,\ 4_3)$, все вершины 4_i правильные, равные вершине 4. В угол $[4_1,\ 3,\ 4_3]$, как и в угол $[4_2,\ 3,\ 4_3]$, нельзя вклеить никакой грани, как и в случае а).

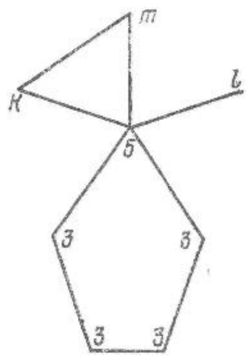


Рис. 2

в) Подклеим четырехугольник $(s,\ 3^2,\ p)$ к углу $[s,\ 3^2]$ (можно было бы аналогично подклеить $(l,\ 3^2, p)$ к $[l,\ 3^2]$). Тогда $v(p) = 2\pi - 3v(3) < 16°$. Поэтому к углу $[3^2,\ p]$ можно подклеить только четырехугольник $(p,\ 3^3)$ с такими же углами. Затем к ломаной $[3^4]$ подклеиваем $(3^4,\ 4_1)$. Теперь к углу $[4_1,\ 3,\ p]$ можно подклеить только четырехугольник $(4_1,\ 3,\ p,\ q)$; так как вершина 4 правильная, $q = 3$ и $v(p) = 2\pi - 3v(3) - v(4) > 49°$, что противоречит оценке $v(p) < 16°$. Таким образом, $n \neq 4$.

Пусть $n = 5$. Получаем блок, изображенный на рис. 2. Здесь $\pi/3 < v(5) < 2\pi/5$, поэтому $13\pi/20 < v(3) < 2\pi/3$, и можно положить $v(3) = (2/3 - t/60)\pi$, $0 < t < 1$; тогда $v(5) = (1/3 + t/15)\pi$. Так как $\theta[k,\ m] < 2\pi/3$, к ребру $[k, m]$ можно подклеить только треугольник $(k,\ m,\ 5_1)$. Вершины k и m не могут одновременно быть трехгранными, так как в противном случае, рассматривая двугранные углы вершины 5, можно доказать, что эта вершина правильная и поэтому $v(k) = v(3)$, т. е. $\theta[5,\ k] > \pi$, что невозможно.

Если $k = 3'$, $m > 3$, к ломаной $[3,\ 5, k,\ 5_1]$ можно подклеить только четырехугольник $(3,\ 5,\ k, 5_1)$. Тогда $v(k) = 2\pi - 2v(5) - v(3) = (2/3 - 7t/60)\pi$, $v(m) = t\pi/20$ и к ребру $[5,\ m]$ можно подклеить только треугольник $(5,\ m, l)$; по свойству ε будет $v(l) = v(k)$. К углу $[3,\ 5,\ l]$ подклеим четырехугольник $(3, 5,\ l, 5_2)$.

а) Если теперь к углу $[5_1,\ 3^2]$ подклеить четырехугольник $(5_1,\ 3^2,\ p)$, то, согласно свойству $\varkappa$, $v(p) < \pi/3$. Поэтому к углу $[p,\ 3^2]$ можно подклеить только четырехугольник $(p,\ 3^2,\ 5_3)$ и образуется свободная ломаная $[5_3,\ 3^2,\ 5_2]$, к которой нельзя подклеить ни пятиугольник, так как здесь два угла меры $v(5) < \pi/3$, ни четырехугольник, так как $\theta[3,\ 5_2] = \theta[3,\ 5_3] > \pi$.

б) Подклеим к углу $[5_1,\ 3^2]$ пятиугольник $(5_1,\ 3^4)$. К ребру $[5_1,\ m]$, поскольку $\theta[5_1,\ m] < \pi/2$, можно подклеить только треугольник $(5_1,\ m,\ k_1)$. К углу $[k_1,\ 5_1,\ 3]$ подклеиваем четырехугольник (k_1, 5_1,3, 5_3). Если теперь к углу [5_3, 3^2] подклеить четырехугольник (5_3, 3^2, p), то по свойству $\varkappa$ будет $v(p) < \pi/3$, и к ломаной [p, 3^3] нельзя подклеить ни пятиугольник, поскольку $\theta\,[5_3, 3] > \pi$, значит, $\theta\,[p, 3] < \pi$, ни четырехугольник, так как $v(5_3) < v(3)$.

Если $k = 4$, то к углу [3,5, k] можно подклеить четырехугольник двух видов: а) (k, 5,3^2). В этом случае по свойству $\varkappa$ $v(k) < \pi/3$, и можно подклеить грань (3, k, 5_1, 3), затем (3^4, 5_2).

К углу [5_2, 3^2] теперь можно подклеить четырехугольник (5_2, 3^2, k_1), тогда к углу [k_1, 3^2] — только четырехугольник (3^2, k_1, 5_3) и к углу [5_3, 3, 5] — четырехугольник (5, 3, 5_3, l); $v(l) = (2/3 - 7t/60)\,\pi$, т. е. $l = 3'$. Нетрудно видеть, что $v(m) = v(k) = (1/3 - t/30)\,\pi$. Поскольку $v(l) = v(3') > \pi/2$, к углу [m, 5, l] можно подклеить только четырехугольник (m, 5, l, $3''$); при этом должно быть $v(3'') = 2\pi - \theta\,[3', 5, m] = (2/3 + t/12)\,\pi > 2\pi/3$, что невозможно.

Вместо четырехугольников (5_2, 3^2, k_1) и (3^2, k_1, 5_3) можно подклеить два пятиугольника (5_2, 3^4) и (3^4, 5_3); завершение будет тем же. Наконец, после пятиугольника (5_2, 3^4) можно подклеить четырехугольник (3^3, p); $v(p) = 2\pi - 3v(3) = t\pi/20 < \pi/20$. Дальше можно подклеить только четырехугольник (p, 3, 5, l); $v(l) = 2\pi - \theta\,[5, 3, p] = (1 - t/10)\,\pi > 9\pi/10$, что невозможно.

б) (k, 5, 3, $4'$). Так как $\theta\,[3{,}5] = (1 + t/20)\,\pi > \pi$, то $\theta\,[k, 4'] = (1 - t/20)\,\pi > 19\pi/20$, и оба угла, k и $4'$, близки к $\pi/2$, $v(m)$ близко к $\pi/6$, и к ребру [5, m] можно подклеить только треугольник (5, m, l), $v(l) = v(k)$. К углу [l, 5,3] подклеиваем, как и с другой стороны, четырехугольник (l, 5,3, $4'$), затем два четырехугольника ($4'$, 3^2, p); теперь $\theta\,[p{,}3] < \pi$, и к ломаной [p, 3^2, p] нельзя подклеить никакой грани. Если же вместо четырехугольника ($4'$, 3^2, p) подклеить пятиугольник ($4'$, 3^4), то должно быть $v(5) = v(4')$, что невозможно, так как $v(5) < 2\pi/5 = 72°$, а $v(4') = 80{,}6°$.

Пусть $k = 5'$. Подклеиваем (k, m, 5_1), затем (k, 5, 3^2), (k, 5_1, 3^2) (так как треугольник (k, 5, m_1) приводит к противоречию), (3, k, 3, 5_2) и пятиугольник (5_2, 3^4), равный исходному. К вершине 5_2 подходит три ребра от равных трехгранных вершин, поэтому она правильная. Но тогда и вершины 5 и k правильные, следовательно, $v(k) = v(5)$, а это невозможно, ибо $v(5) > \pi/3$, $v(k) < \pi/3$.

Пусть $k = 6$. Подклеиваем (k, m, 5_1), (k, 5, 3^2) и пятиугольник (5_2,3^4), чтобы получился угол a) [k, 3, 5_2]. В него вклеиваем (k, 3, 5_2, 3), и вершина 5_2 стала правильной. К ребру [k, 5_1] нельзя подклеить треугольник (k, 3, m_1), так как $v(m) = (1/3 - t/30)\,\pi = v(k)$, и $\theta\,[m_1, k, 3] = (4/3 - t/12)\,\pi$; на оставшийся угол четырехугольника придется больше $2\pi/3$. Подклеиваем четырехугольник (5, k, 3^2), затем (3, k, 3, 5_3). К углу [5_2, 3, 5_3] можно подклеить только (5_2, 3, 5_3, 3) (вершина 5_2 правильная), сумма его углов должна быть $\theta\,[5_2, 3, 5_3, 3] = (2 + t/10)\,\pi > 2\pi$, что невозможно. б) $[k, 3^2]$. В этот угол вклеиваем $(3^2, k, 5_3)$, затем $(5_3, k, m_1)$ и $(m_1, k_1, 5_1)$. С другой стороны тоже подклеиваем $(5, m, l)$ $(v(l) = v(k))$, $(l, 5, 3^2)$ и $(3^4, 5_4)$; $\theta[5_3, 3^2, 5_4] = (2 + t/10)\pi$, и в эту ломаную нельзя вклеить никакой грани.

$k > 6$ невозможно, так как $v(k) = (1/3 - t/30)\pi > 3\pi/10$, а при $k \geqslant 7$ будет $v(k) < 2\pi/7 < 3\pi/10$.

Доказательство теоремы.

4. Рассмотрим в качестве исходных треугольные грани. В работе [1] доказано, что грань $(3^2, n)$ может принадлежать многограннику M только при $n = 3$ и только правильному тетраэдру.

Докажем, что грань $(3, 4, 4')$ может принадлежать только бипирамиде. Ее вершины 4 и $4'$ имеют общий двугранный угол, а соседние с ним двугранные углы равны, как общие с вершиной 3, поэтому $v(4) = v(4')$. Вершина 3 может иметь любой плоский угол $< 2\pi/3$, т. е. $v(3) = 2\pi t/3$, $0 < t < 1$, тогда $v(4) = (1/2 - t/3)\pi$.

Если к ребру $[4, 4']$ подклеить четырехугольник, то сумма углов у противоположного ребра будет $> \pi$, и поэтому хоть одна вершина при нем будет трехгранной. По свойству η она будет конгруэнтна вершине 3 треугольника. Но $\theta[3, 4^2] = \pi$, следовательно, на последний угол четырехугольника придется мера π, что невозможно. Итак, к ребру $[4, 4']$ можно подклеить только треугольник, равный исходному (по свойству ξ).

К ребру $[3, 4]$ можно подклеить либо треугольник, либо четырехугольник. Подклеим четырехугольник. Так как $\theta[3,4] = (1/2 + t/3)\pi < 5\pi/6$, то сумма углов при противоположном ребре будет $> 7\pi/6$, т. е. обе его вершины трехгранные — это грань $(3^3, 4)$. По свойству α будет $4v(3) + v(4) = 2\pi$, $v(3) + 2v(4) = \pi$, откуда находим $t = 9/10$, и $v(3) = 3\pi/5$, $v(4) = \pi/5$. В образовавшийся угол $[3^3, 4']$ можно вклеить только четырехугольник, так как $\theta[3, 3] > \pi$; это будет четырехугольник $(4', 3^3)$ с такими же углами. А так как $\theta[3, 4, 3] = 7\pi/5$, то в углы $[3, 4, 3]$ и $[3, 4, 3']$ можно вклеить только такие же четырехугольники; но при этом образуется свободная пространственная ломаная $[3^4]$, которую заклеить невозможно никакой гранью (можно даже доказать, что эта ломаная неплоская, вершины 3 и 4 оказываются неправильными).

Таким образом, к каждому ребру границы блока из двух треугольников $(3, 4^2)$ можно подклеить только треугольник; эти треугольники будут склеены и между собой по ребрам, исходящим из вершин границы блока. Получаем треугольную бипирамиду при любом значении параметра t.

Можно доказать, что грань $(3, 4, 5)$ не может принадлежать многограннику M: все ее продолжения до сети приводят к противоречиям.

Грань $(3, 4, 6)$ можно продолжить до образования четырех сетей. Доказательство ведется аналогично доказательству в случае грани $(3, 4, 4')$, только для грани $(3, 4, 6)$ получается гораздо больше вариантов продолжения. Для граней типа $(3, k, n)$ доказательства можно разбить на случаи, когда k и n оба нечетны, разной четности или оба четны. Трудность продолжения сетей значительно возрастает по мере увеличения числа четных вершин сети. Всего получено 53 замкнутые сети с исходными гранями типа $(3, k, n)$.

В дальнейших построениях не будут участвовать треугольные грани с трехгранной вершиной.

Грань $(4, 4', 4'')$ порождает только одну сеть, не содержащую треугольных граней с трехгранной вершиной, — сеть октаэдра (четырехугольная бипирамида, в ее основании может лежать произвольной формы ромб). Треугольные грани, не содержащие трехгранных вершин, порождают 180 замкнутых сетей.

5. Возьмем в качестве исходной четырехугольную грань $(3^3, n)$. Докажем, что, начиная с $n = 6$, такая грань принадлежит лишь многогранникам, двойственным антипризмам.

При $n = 3$ будет $v(3) = \pi/2$, и получаем сеть куба. При $n = 4$ все вершины грани $(3^3, 4)$ правильные; по свободному ребру $[3, 4]$ можно подклеить только четырехугольник с суммой новых углов, большей π, поэтому хотя бы один из них принадлежит трехгранной вершине. Легко видеть, что второй новый угол будет таким же, т. е. второй четырехугольник будет равен первому. Получим цикл из четырех равных четырехугольников вокруг вершины 4. К каждому свободному углу $[3, 3, 3]$ можно подклеить только четырехугольник $[3^3, n_1]$, $v(n_1) = v(4)$; получим многогранник, двойственный антипризме.

Пусть $n = 5$. Тогда $v(5) = 2\pi t/5$, $v(3) = (2/3 - 2t/15)\pi$, $0 < t < 1$. Так как $\theta[3, 5] = (2/3 + 4t/15)\pi < 14\pi/15$, то к ребру $[3, 5]$ можно подклеить только четырехугольник $(3, 5, x, y)$. При $y = 3$ будет $x = 3$, вершина 5 правильная, и необходимо подклеить еще три такие же грани. К свободным углам $[3, 3, 3]$ можно подклеить либо такие же четырехугольники — получим многогранник, двойственный антипризме, либо пятиугольники (3^5), и полученная ломаная (3^5) заклеивается еще одним таким же пятиугольником; шесть этих пятиугольников образуют половину правильного додекаэдра.

Если $y = 4$, то $x = 3'$. Нетрудно доказать, что если к свободному углу $[3^2, 4]$ подклеить пятиугольник, то будет $v(4) = v(3) > \pi/2$, что невозможно. Поэтому к углу $[3^2, 4]$ можно подклеить только четырехугольник $(3^2, 4, z)$. С другой стороны подклеим такие же четырехугольники: $(3, 5, 3', 4_1)$ и $(3^2, 4_1 z_1)$. При $z = 4$ получим $v(z) = v(4)$. К ребру $[4, z]$, так как $\theta[4, z] < \pi$, можно подклеить только четырехугольник $(4, z, 3^2)$. Далее подклеиваем грани $(3, 4, 3, 5_1)$ (пятиугольник подклеить нельзя, так как снова будет $v(4) = v(3)$) и $(5_1, 3', 5, 3'')$. Заметим, что $\theta[3, 4] = \theta[3'', 5_1] = \theta[5, 3']$, поэтому $v(3') = v(3'')$, вершина 5 — правильная, и $v(3') = v(3)$, что невозможно.

При $z = 5'$ к свободному ребру $[z, 4]$ можно подклеить четырехугольник: либо $(z, 4, 3^2)$, либо $(z, 4, 4', 3'')$. Подклеим $(z, y,$

3^3), затем к ребру $[z, 4_1]$ — $(z, 4_1, 3^2)$. К вершине z подходит три ребра от трехгранных равных вершин, поэтому вершина z правильная. Отсюда по свойству η для вершины 4 следует $v(3')=v(3)$, и по α для четырехугольника $(5,3,4,3')$ будет $v(4)=v(3)$, что невозможно. Подклеив к ребру $[z,4_1]$ грань $(z,4_1,4',3'')$, поскольку $\{4_1,z\}=\{4,z\}$, получим снова $v(3'')=v(3)=v(3')=v(4)$ — то же противоречие. Если же к ребру $[z,4]$ подклеим четырехугольник $(z,4,4',3'')$, а затем грани $(3',y,4',m)$, где $m=4'',5''$, и $(m,3',5,3''')$, то дальнейшее построение дает одну замкнутую сеть, однако можно доказать, что эту сеть нельзя реализовать как многогранник.

При $y=5'$, $x=3'$ будет $\theta[y,3']<16\pi/15$ и $v(3)<8\pi/15$, т. е. $\theta(3^3,5)<2\pi$. Аналогичный вывод получается при $y\geqslant 6$.

Пусть $n=6$. Выполним построения, аналогичные предыдущим: подклеим грани $(3,6,3',4)$, $(3,6,3',4_1)$, $(3^2,4,z)$ и $(3^2,4_1,z)$. Легко заметить (см. случай $n=5$), что достаточно рассмотреть случай $z=5$ и вариант продолжения построенного блока по свободным ребрам $[4,z]$, $[4_1,z]$ гранями $(z,4,4',3'')$ и $(z,4_1,4',3'')$. После этого можно подклеить только грани $(3'',z,3'',p)$, $(p,3'',4'3)$, $(4',4,3',m)$, $(3,4',m,3)$, $(p,3^3)$ и $(3^2,m,4')$ и такую же последовательность граней с другой стороны. Теперь $v(p)=v(6)$, и если $p=6$, то $v(3'')=v(3)$ в силу правильности вершины p по четырем равным двугранным углам, значит, $v(z)=v(3)$, что невозможно. Если $p=7$, нужно подклеить еще и грань $(p,3,4',3'')$, и снова вершина p будет правильной, что также приводит к противоречию. Значение $p>7$ невозможно в силу α для сходящихся в p граней.

Теперь рассмотрим блок из трех граней: двух $(3^3,6)$ и грани $(3,6,3',y)$. Если $y=4$, то к свободному углу $[3,3,3]$ подклеим грань $(3^3,6_1)$, после чего к ломаной $[6_1,3^2,4]$ можно подклеить только четырехугольник $(6_1,3^2,4)$; но это невозможно, так как $v(4)<v(3)$ и $\theta[6_1,3^2,4]<2\pi$. Пятиугольник к ребру $[3,6]$ подклеить нельзя, так как $\theta[3,6]<\pi$. Остается к ребру $[3,6]$ подклеить только грань $(3^3,6)$ с такими же углами, как у исходной. Тогда вершина 6 станет правильной, и придется подклеить еще три такие же грани к общей вершине 6. Полученный блок имеет свободную ломаную $[3^{12}]$.

К ломаной $[3^{12}]$ можно подклеить 6 пятиугольников $(3^4,p)$. Так как у исходного четырехугольника $(3^4,6)$ угол $v(6)=\pi t/3$, $v(3)=(2/3-t/9)\pi$, $0<t<1$, то у пятиугольников $v(p)=3\pi-4v(3)=(1/3+4t/9)\pi$. Свободные ребра этих шести пятиугольников образуют 6-угольную ломаную с чередующимися вершинами 3 и p; так как $v(p)<2\pi/3$, то $0<t<3/4$. Эта ломаная пространственная, в каждой ее вершине 3 сходится по два плоских угла, сумма которых $>\pi$. В каждой вершине этой ломаной уже сходится по три ребра, значит, новые ребра могут исходить только из вершин p и $p\geqslant 4$. Если $p=4$, то вершина p правильная; $v(p)=80{,}6°$ — получаем ту же ситуацию, что и в доказательстве леммы (п. 3, $n=4$, случай а); продолжение сети невозможно как при $p=4$, так и при $p=5$.

Остается достроить блок из шести граней $(3^3,6)$ таким же блоком до многогранника M, двойственного антипризме. Для исходной грани $(3^3,n)$ при $n=7$ проводятся аналогичные построения и рассуждения вплоть до образования блока из семи граней $(3^3,7)$ с общей вершиной 7, который также можно достроить только таким же блоком. В случае $n \geqslant 8$ по свободному ребру $[3,n]$ можно подклеить лишь такой же четырехугольник. Итак, доказано, что грань $(3^3,n)$ при $n \geqslant 6$ принадлежит лишь многограннику, двойственному антипризме.

Четырехугольные грани, взятые в качестве исходных, дают всего 43 замкнутые сети.

6. Возьмем за исходную грань пятиугольник $(3^4,n)$, $n=3,4,5$. При $n=3$ будет $v(3)=3\pi/5$ — это правильный пятиугольник, и продолжать его можно только равными ему пятиугольниками — получим додекаэдр. У грани $(3^4,4)$ все вершины правильные, поэтому $v(4)=80{,}6°$ и грани $(3^4,4)$ и $(3^4,5)$ не могут иметь общих вершин. Грань $(3^4,4)$ можно двумя способами дополнить такими же гранями до полного многогранника, полученные многогранники отличаются ориентацией. Аналогично грань $(3^4,5)$ также порождает два вида замкнутых многогранников, отличающихся только ориентацией.

Итак, всего получено 279 сетей. Если исключить сети бипирамид, многогранников, двойственных антипризмам, правильных и двойственных полуправильным, то останется двести сорок три сети. Теорема доказана.

Список литературы: 1. *Гурин А. М.* О выпуклых многогранниках с равноугольными вершинами.— Укр. геометр. сб., 1980, вып. 23, с. 34—40. 2. *Гурин А. М.* Бесконечные выпуклые многогранники с равноугольными вершинами.— Укр. геометр. сб., 1981, вып. 24, с. 26—32. 3. *Залгаллер В. А.* Выпуклые многогранники с правильными гранями.— Зап. науч. семинаров ЛОМИ, 2, Л., 1967. — 220 с.

Поступила в редколлегию 03. 11. 80.

УДК 530.12;531.51

В. И. Денисов

О СОПРЯЖЕННЫХ ТОЧКАХ В КОСМОЛОГИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ГЕДЕЛЯ

Точное решение уравнений тяготения Эйнштейна, найденное К. Геделем [1], имеет вид

$$ds^2 = dx^{0^2} + 2e^{x^1/b}\,dx^0\,dx^2 + \frac{1}{2}\,e^{2x^1/b}dx^{2^2} - dx^{1^2} - dx^{3^2}, \qquad (1)$$

где b — постоянная, которая определяется плотностью пылевидной материи и гравитационной постоянной Ньютона k: $b = (8\pi k\rho)^{-1/2}$.

Пространство-время (1) — мы будем обозначать его символом W — называют космологической моделью Геделя.

Исследованию свойств W посвящено много работ. Как правило, в этих работах изучаются локальные свойства модели Геделя. Некоторые свойства «в целом» этой модели исследованы в работах [1,2] — доказано, что односвязное пространство-время (1) гомеоморфно R^4, геодезически полно и в нем существуют замкнутые времениподобные кривые.

Одной из характеристик «в целом» пространства-времени является информация о гомотопическом типе множества кусочно-гладких времениподобных кривых, проходящих через точки A, B пространства-времени. Гомотопический тип этого множества определяется на основании теоремы Морса [3—6] и существенным образом зависит от наличия сопряженных точек на геодезической, проходящей через A, B.

Цель статьи — рассмотреть вопрос о сопряженных точках в модели Геделя. В исследовании доказано, что индекс сопряженной точки на произвольной геодезической в W не превосходит 2. Эта оценка точная, так как в W существует времениподобная геодезическая, на которой индекс сопряженной точки равен 2.

Пусть γ — геодезическая пространства-времени. Векторное поле $p^i(s)$, определенное на γ, является полем Якоби, если оно удовлетворяет уравнению

$$\frac{\delta^2 p^i}{ds^2} + R^i_{jkl}\, u^j p^k u^l = 0, \tag{2}$$

где u^i — касательный вектор γ; R^i_{jkl} — тензор кривизны пространства-времени; $\frac{\delta}{\delta s}$ — символ ковариантного дифференцирования по каноническому параметру s геодезической γ. Точки M_0 и $M_1 \in \gamma$ сопряжены, если существует нетривиальное поле p^i такое, что $p^i(s_0) = p^i(s_1) = 0$. Индексом, или кратностью сопряженной точки, называется размерность векторного пространства полей Якоби, обращающихся в нуль в точках M_0, M_1 геодезической γ [3]. Известно, что индекс сопряженной точки в 4-мерном римановом пространстве не превосходит 3, т. е. $\mathrm{Ind} \leqslant 3$ [3].

Д о к а ж е м, что в пространстве-времени (1) индекс сопряженной точки не превосходит 2. Действительно, так как в метрике (1) векторное поле $\xi^i = \delta^i_3$ ковариантно постоянно, то оно определяет поле Якоби на произвольной геодезической в W, которое имеет вид $p^i(s) = (a + bs)\,\delta^i_3$, где a, b — постоянные. Условие $p^i(0) = 0$ дает $a = 0$, и $p^i(s)$ указанного вида нигде более в нуль не обращается. Тогда размерность векторного пространства решений уравнений (2) на произвольной геодезической с $u^i \neq \delta^i_3$, удовлетворяющих условиям $p^i(M_0) = p^i(M_1) = 0$, не превосходит 2. На геодезической с $u^i = \delta^i_3$ сопряженных точек нет. Поэтому оценка $\mathrm{Ind} \leqslant 2$ верна для любой геодезической модели Геделя, что и требовалось доказать.

Докажем, что оценка $\mathrm{Ind} \leqslant 2$ является точной, т. е. существует геодезическая в метрике (1), на которой индекс сопряженной точки равен 2. В связи с этим рассмотрим сечение $x^1 = c_1$, $x^2 = c_2$ пространства-времени (1). Это сечение — двумерная поверхность σ с метрикой $ds^2 = dx^{0^2} - dx^{3^2}$ (3) является вполне геодезическим. Последнее означает, что геодезическая в метрике (3) является геодезической и в объемлющем пространстве-времени W. Далее, так как метрика (1) допускает транзитивную группу движений, то пространство-время Геделя однородно; можно считать, что поверхность σ определяется сечением $x^1 = x^2 = 0$. Пусть γ — геодезическая, лежащая в σ. Для определенности будем считать γ времениподобной. Построим на γ, рассматривая ее в объемлющем пространстве-времени, четверку взаимно ортогональных, нормированных векторов, параллельно переносимых вдоль γ. В качестве одного из этих векторов возьмем u^i — касательный вектор к γ. Далее, ковариантно постоянное поле $\xi^i = \delta^i_3$ определяет еще один вектор этой четверки:

$$\underset{3}{\tau^i} = \frac{\xi^i - u^i (\xi^l u_l)}{\sqrt{1 + u^{3^2}}} = \frac{\delta^i_3 + u^i u^3}{\sqrt{1 + u^{3^2}}}\,.$$

Недостающих два векторных поля определим следующим образом. Так как поле единичных нормалей к σ двумерно, возьмем в качестве базиса пространства нормалей векторы $\underset{1}{\tilde{n}^i} = g^{i1}$, $\underset{2}{\tilde{n}^i} = \frac{1}{\sqrt{2}} g^{i2}$, где g^{ik} — контравариантные компоненты метрического тензора (1). Эти векторы взаимно ортогональны в W, и ортогональны u^i и τ^i. Определим комплексное векторное поле $\tilde{t}^i$ на σ равенством $\tilde{t}^i = \frac{1}{\sqrt{2}} (\underset{1}{\tilde{n}^i} + i \underset{2}{\tilde{n}^i})$. Это векторное поле таково, что в метрике (1) $(\tilde{t}\tilde{t}) = 0$, $(\tilde{t} \cdot \bar{\tilde{t}}) = -1$.

Ковариантная производная поля $\tilde{t}^i$ вдоль геодезической γ равна $i \frac{u^0}{b\sqrt{2}} \tilde{t}^i$. Тогда, рассматривая векторное поле $t^i = e^{i\varphi(s)} \tilde{t}^i$, найдем такую функцию $\varphi(s)$, что поле t^i параллельно вдоль γ. Условие $\frac{\delta t^i}{\delta s} = 0$ дает $\varphi(s) = -\frac{u^0}{b\sqrt{2}} s$.

Вещественная и мнимая части поля $t^i(s)$ с указанной функцией $\varphi(s)$ определяют искомых два векторных поля на γ. Представляя в (2) $p^i(s)$ в виде $p^i(s) = a u^i + b \underset{3}{\tau^i} + c t^i + \bar{c} \bar{t}^i$, получаем уравнения Якоби в следующей форме: $\frac{d^2 a}{ds^2} = \frac{d^2 b}{ds^2} = 0$, $\frac{d^2 c}{ds^2} = c R_{iklm} \bar{t}^i \times$ $\times u^k t^l u^m + \bar{c} R_{iklm} \bar{t}^i u^k \bar{t}^l u^m$ (4), где a, b — вещественные функции от s; c — комплексная функция.

Для метрики (1) на геодезической γ будет

$$R_{ijln}\bar{t}^i u^j t^l u^n = -\left(\frac{u^0}{b\sqrt{2}}\right)^2, \quad R_{ijln}\bar{t}^i u^j \bar{t}^l u^n = 0.$$

Тогда решение уравнений (4), удовлетворяющее условию $p^i(0) = 0$, имеет вид $a = a_0 s$, $b = b_0 s$, $c = c_0 \sin\left(\frac{u^0}{b\sqrt{2}} s\right)$ (5),

где a_0, b_0 — вещественные постоянные; c_0 — постоянное комплексное число. Из (5) следует, что $a(s)$, $b(s)$ более в нуль не обращаются; $c(s)$ обращается в нуль при $s = \frac{\pi b\sqrt{2}}{u^0}$. Следовательно,

на геодезической γ точка $s = \frac{\pi b\sqrt{2}}{u^0}$ сопряжена с точкой $s = 0$.

Индекс сопряженной точки равен 2, что и требовалось доказать.

Аналогичное построение может быть проведено для изотропных и пространственноподобных геодезических с $u^0 \neq 0$, принадлежащих σ. Результат состоит в следующем: сопряженная точка находится на расстоянии $s = \frac{\pi b\sqrt{2}}{u_0}$ от начальной $s = 0$; индекс сопряженной точки равен 2. На пространственноподобной геодезической с $u_0 = 0$, лежащей в σ, сопряженных точек нет. Формально это следует из расходимости выражения $\pi b\sqrt{2}/u^0$ при $u^0 \to 0$. Другими словами, при $u^0 \to 0$ сопряженная точка уходит в бесконечность. В связи с доказанным заметим следующее.

1. Возьмем множество геодезических модели Геделя, выходящих из точки M_0 и не лежащих в сечении $x^1 = c_1$, $x^2 = c_2$. В силу однородности модели можем считать, что начальная точка этих геодезических $x^i(0) = 0$. Разделим множество этих геодезических на два класса $\bar{\Omega}$ и Ω, в зависимости от поведения проекции γ' геодезической γ на координатную плоскость $x^0 = x_3 = 0$. Именно $\gamma \in \bar{\Omega}$, если γ' — замкнутая кривая, в противном случае $\gamma \in \Omega$. Тогда верно следующее: если $\gamma \in \bar{\Omega}$, то индекс сопряженной точки $\geqslant 1$; если $\gamma \in \Omega$, то индекс сопряженной точки $\leqslant 1$.

Решая уравнения (2) на геодезической $x^1 = s\sin\varphi_0$, $x^3 = s\cos\varphi_0$, $x^0 = x^2 = 0$, где φ_0 — постоянная, не кратная π, убеждаемся, что на этой геодезической есть точка, сопряженная $s = 0$. Индекс любой сопряженной точки на этой геодезической равен 1. Поэтому оценка $\mathrm{Ind} \geqslant 1$ для $\bar{\Omega}$ — точная.

2. О единственности геодезической в модели Геделя.

Если в классе $\bar{\Omega}$ существует геодезическая $\bar{\gamma}$, пересекающая плоскость $x^1 = x^2 = 0$ в точке M^*, отличной от начальной, то существует геодезическая, отличная от $\bar{\gamma}$, проходящая через начало координат и M^*. Если в классе Ω существует геодезическая γ, пересекающая плоскость $x^0 = x^2 = 0$ в точке N^*, отличной от начальной, то существует геодезическая, отличная от γ, проходящая через начало координат и N^*.

3. В модели Геделя постоянная b определяет угловую скорость вращения $\omega = 1/b\sqrt{2}$. С другой стороны, в сечении $x^1 = x^2 = 0$ координата x^0 является временной Поэтому координатное время, за которое пробная частица, двигаясь по времениподобной геодезической указанного сечения, достигает сопряженной точки, равно $\pi b\sqrt{2}$. Оно равно полупериоду вращения T в модели Геделя. По оценке [1] $T \sim 2 \cdot 10^{11}$ лет, тогда координатное время, за которое частица достигает сопряженной точки, — $\sim 10^{11}$ лет.

В модели Геделя мировые линии частиц пылевидной материи геодезические $x^0 = s$, $x^\alpha = \text{const}$. Из доказанного следует, что на каждой из этих геодезических есть сопряженные точки, индекс которых 2.

Список литературы: 1. *Gödel K.* Rev. Mod. Phys., 1949, **21**, № 3, *p.* 447. 2. *Osinovsku M. E., Repjakh J.* Preprint ITP-74-48E, Kiev, 1974. 3. *Милнор Дж.* Теория Морса. — М.: Мир, 1965. — 184 с. 4. *Козлов С. Е.* Применение вариационной теории геодезических к исследованию псевдоримановых пространств кинематического типа. — Укр. геометр. сб., 1973, вып. 13, с. 101 — 106 5. *Woodhouse N. M. J.* Commun. Math. Phys., 1976, **46**, p. 135. 6. *Everson J., Talbot C. J.* Gen. Relat. and Grav., 1976, **7**, № 7, p. 609.

Поступила в редколлегию 08. 12. 80

УДК 513

В. Г. Дерягина

ОБ ОТОБРАЖЕНИИ КРИВЫХ КОМПЛЕКСНОГО ЦЕНТРОАФФИННОГО ПРОСТРАНСТВА A_3 НА ДВУМЕРНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ X_2 БИПЛАНАРНОГО ПРОСТРАНСТВА $Б_5$

1. Теория кривых в центроаффинном пространстве A_3.

Центроаффинная теория пространственных кривых изучалась в работах Попа [1]—[3]. В основе центроаффинной геометрии пространства A_3 лежит подгруппа проективной группы, движения которой оставляют на месте фиксированную точку пространства, называемую ее полюсом, и фиксированную плоскость, которую называют бесконечно удаленной плоскостью пространства. Полюс и бесконечно удаленная плоскость не инцидентны. Из этого определения видно, что центроаффинная геометрия, подобно проективной, обладает двойственностью. В центроаффинном пространстве естественно вводятся декартовы реперы, начальная точка которых совпадает с полюсом пространства. Координаты точки по отношению к такому реперу будем обозначать буквами X^i, $i=1, 2, 3$. Между ковекторами $\sum_i$ и неособыми плоскостями центроаффинного пространства, т. е. не проходящими через полюс, можно установить соответствие. Именно, ковектору $\sum_i$ ставится в соответствие плоскость, уравнение которой $\sum_i X^i = 1$, $i = 1, 2, 3$. Тогда кривую в пространстве A_3 можно задать или уравнениями $X^i = X^i(t)$, или уравнениями $\sum_i = \sum_i(t)$.

Иногда эти уравнения записываются в виде $X = X(t)$ (1), где X — радиус-вектор точки кривой, или в виде $\sum = \sum(t)$, где $\sum$ — дублет соприкасающейся плоскости в точке кривой, отнесенной к тому же значению параметра t. Предполагается, что функции $X(t)$ и $\sum(t)$ достаточное число раз дифференцируемы по параметру t. Имеют место [2] соотношения $X\sum = 1$; $\dot{X}\sum = \ddot{X}\sum = X\dot{\sum} = X\ddot{\sum} = 0$, и вся теория может быть построена двойственно как для векторного, так и для дублетного образа.

Пусть кривая задана уравнением (1). Тогда радиус-вектор X точки кривой удовлетворяет уравнению $\dddot{X} = P_1 X + P_2 \dot{X} + P_3 \ddot{X}$ (2), где $\dot{X} = \frac{dX}{dt}$, $\ddot{X} = \frac{d^2X}{dt^2}$, $\dddot{X} = \frac{d^3X}{dt^3}$, а $P_1 = \frac{(\dot{X}\ddot{X}\dddot{X})}{(X\dot{X}\ddot{X})}$, $P_2 = -\frac{(X\ddot{X}\dddot{X})}{(X\dot{X}\ddot{X})}$, $P_3 = \frac{(X\dot{X}\dddot{X})}{(X\dot{X}\ddot{X})}$; символ (A, B, C) обозначает знакопеременное произведение трех векторов A, B, C.

Уравнение, двойственное уравнению (2), имеет вид $\dddot{\sum} = \Pi_1 \sum + \Pi_2 \dot{\sum} + \Pi_3 \ddot{\sum}$ (3).

Величины P_i и Π_i связаны соотношениями $P_1 + \Pi_1 = 0$, $P_3 + \Pi_3 = 2\frac{\dot{P}_1}{P_1} = 2\frac{\dot{\Pi}_1}{\Pi_1}$, $P_2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{P}_1}{P_1} - P_3\right) = \Pi_2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{\Pi}_1}{\Pi_1} - \Pi_3\right)$.

а) Введем в рассмотрение центроаффинную дугу u пространственной кривой так [2]:

$$du^3 = \frac{(\dot{X}\ddot{X}\dddot{X})}{(X\dot{X}\ddot{X})}\,dt^3 = -\frac{\left(\dot{\sum}\ddot{\sum}\dddot{\sum}\right)}{\left(\sum\dot{\sum}\ddot{\sum}\right)}\,dt^3.$$

Если отнести кривую к центроаффинному параметру u, получим $P_1 = -\Pi_1 = 1$. Тогда основные уравнения центроаффинной теории кривых будут: $X''' = X + \bar{k}X' + \bar{\tau}X''$; $\sum''' = -\sum + (\bar{k} - \bar{\tau}')\sum' - \bar{\tau}\sum''$ (4); штрих означает производную по центроаффинной дуге. Роль центроаффинной кривизны и кручения кривой играют инварианты $\bar{k}(u) = -\frac{(XX''X''')}{(XX'X'')}$ и $\bar{\tau}(u) = \frac{d}{du}\ln T$, где $T = \frac{(X\dot{X}\ddot{X})^2}{(\dot{X}\ddot{X}\dddot{X})}$ — инвариант Цицейки.

Основная теорема центроаффинной теории пространственных кривых гласит: *натуральные уравнения $\bar{k} = \bar{k}(u)$ и $\bar{\tau} = \bar{\tau}(u)$ определяют кривую с точностью до центроаффинных преобразований.*

Все эти результаты изложены в работе Попа [2].

б) Пусть кривая в A_3 задана уравнением (1). Функцию $w(t)=\int_{t_0}^{t}|(X\dot{X}\ddot{X})|^{\frac{1}{3}}dt$ (5) назовем эквицентроаффинной дугой кривой. Относя кривую к эквицентроаффинному параметру w, найдем $(XX'X'')=1$, где штрихом обозначено дифференцирование по новому параметру w. Тогда $(XX'X''')=0$, и дифференциальное уравнение кривой в A_3, отнесенной к эквицентроаффинному параметру w, будет $X'''=kX+\tau X'$ (6), где k и τ называют соответственно эквицентроаффинными кривизной и кручением кривой: $k=(X'X''X''')$, $\tau=-(XX''X''')$. Очевидно, имеет место теорема: *Натуральные уравнения $k=k(w)$ и $\tau=\tau(w)$ определяют кривую с точностью до эквицентроаффинных преобразований.*

Двойственным образом можно ввести параметр $\breve{w}$, определив его условием $d\breve{w}=|\left(\Sigma\dot{\Sigma}\ddot{\Sigma}\right)|^{1/3}dt$. Уравнение (3) примет вид $\Sigma'''=\breve{k}\,\Sigma+\breve{\tau}\,\Sigma'$, где Σ', Σ''' — производные по параметру $\breve{w}$.

1) Покажем теперь, что параметры w и $\breve{w}$ связаны условием $\frac{d\breve{w}}{dw}=\sqrt[3]{\tau}$ (7). Действительно, так как $d\breve{w}=\sqrt[3]{|\left(\Sigma\dot{\Sigma}\ddot{\Sigma}\right)|}\,dt$ и $\Sigma=[\dot{X}\ddot{X}]$, $\dot{\Sigma}\,[X\ddot{X}]$, то, полагая $t=w$, получаем $\Sigma=[X'X'']$, $\Sigma'=[XX'']$, $\Sigma''=[X'X'']+[XX''']$, откуда $d\breve{w}=\sqrt[3]{|(\Sigma\Sigma'\Sigma'')|}\times$ $\times\,dw=\sqrt[3]{|(XX''X''')|}\,dw=\sqrt[3]{\tau}\,dw$. Таким образом получаем формулу (7).

2) Теперь докажем, что $du/dw=\sqrt[3]{k}$ (8). Действительно, $du=\sqrt[3]{(\dot{X}\ddot{X}\dddot{X})/(X\dot{X}\ddot{X})}\,dt$. Положим $t=w$; тогда, поскольку $(XX'X'')=1$ и в силу (6) $du=\sqrt[3]{(X'X''X''')}\,dw=$ $=\sqrt[3]{(X'X''(kX+\tau X'))}\,dw=\sqrt[3]{k}\,dw$, откуда следует (8).

В [2] рассматриваются кривые, для которых $\bar{\tau}=\text{const}$ и $\bar{k}=$ $=\text{const}$. А именно, если кривая отнесена к центроаффинному параметру u, то ее дифференциальные уравнения имеют вид (4) и (5). Перепишем уравнение (4) в виде $X'''-\bar{\tau}X''-\bar{k}X'-X=0$, и пусть $\bar{\tau}=\text{const}$ и $\bar{k}=\text{const}$. Составив характеристическое уравнение $\lambda^3-\bar{\tau}\lambda^2-\bar{k}\lambda-1=0$ (9), определим его корни λ_1, λ_2, λ_3.

а) Если корни λ_1, λ_2, λ_3 различны, то уравнения кривой будут $X^1=e^{\lambda_1 u}$, $X^2=e^{\lambda_2 u}$, $X^3=e^{\lambda_3 u}$, или $X^2=(X^1)^m$, $X^3=(X^1)^n$, где $m=$ $=\lambda_2/\lambda_1$, $n=\lambda_3/\lambda_1$

б) Если $\lambda_3=\lambda_2\neq\lambda_1$, то уравнения кривой таковы: $X^1=e^{\lambda_1 u}$, $X^2=e^{\lambda_2 u}$, $X^3=ue^{\lambda_2 u}$, или $X^2=(X^1)^m$, $X^3=(\lambda_1)^{-1}(X^1)^m\ln X^1$, где $m=\lambda_2/\lambda_1$.

c) Если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$, то получим $X^1 = e^{u\lambda}$, $X^2 = ue^{u\lambda}$, $X^3 = u^2 e^{u\lambda}$, или $(X^2)^2 = X^1 X^3$, $X^2 = X^1 \ln X^1$.

e) Если λ_1 — действительное число, а два других корня уравнения (9) комплексно-сопряженные $\lambda_2 \pm i\lambda_3$, то уравнения кривой будут: $X^1 = e^{\lambda_1 u}$, $X^2 = e^{\lambda_2 u} \cos \lambda_3 u$, $X^3 = e^{\lambda_2 u} \sin \lambda_3 u$, или $\ln X^2 = \lambda_1 \operatorname{arctg}(X^3/X^2)$, $\ln \sqrt{(X^2)^2 + (X^3)^2} = \lambda_2 \operatorname{arctg}(X^3/X^2)$.

Кривые, для которых $\bar{\tau} = \mathrm{const}$ и $\bar{k} = \mathrm{const}$, называют кривыми W или кривыми Клейна—Ли. В работе [2] рассматриваются также кривые, для которых $T = \mathrm{const}$ и $\bar{k} = \mathrm{const}$ или $\bar{\tau} = 0$, $\bar{k} = \mathrm{const}$. Такие кривые называют кривыми T или кривыми Цицейки. В этом случае кривые T лежат на одной из следующих поверхностей:

а) $X^1 X^2 X^3 = \mathrm{const}$. Уравнения кривых T имеют вид $X^1 = e^{\lambda_1 u}$, $X^2 = e^{\lambda_2 u}$, $X^3 = e^{\lambda_3 u}$, причем $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$;

б) $X^1 (X^2)^2 = \mathrm{const}$; в) $X^1 [(X^2)^2 + (X^3)^2] = \mathrm{const}$.

2. Отображение аналитических кривых комплексного центроаффинного пространства A_3 на двумерные аналитические поверхности X_2 бипланарного пространства $Б_5$.

Определение. *Бипланарным пространством $Б_5$ эллиптического типа называется вещественное проективное пространство P_5, в котором заданы две двумерные комплексно-сопряженные непересекающиеся абсолютные плоскости* [6].

В пространстве $Б_5$ эллиптического типа для аффинора абсолютной инволюции имеет место равенство [6, с. 125]: $g^a_b \times g^b_a = -\delta^a_b$.

Определение. *Точка $\tilde{x}$ в $Б_5$ называется сопряженной к точке x, если она соответствует ей в абсолютной инволюции:* $\tilde{x}^a = g^a_b x^b$ $(a, b = 1, 2, \dots, 6)$.

Пусть в $Б_5$ задана двумерная поверхность $X_2 : \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(u^1, u^2)$. Введем в рассмотрение репер, определив его вершинами x, $\tilde{x}$, x_1, x_2, n, $\tilde{n}$, где $x_k = \frac{\partial x}{\partial u^k}$, $k = 1, 2$. В пространстве $Б_5$ деривационные уравнения аналитической поверхности X_2 относительно этого репера [7] имеют вид

$$\partial_j \tilde{\boldsymbol{x}} = g^k_j \partial_k \boldsymbol{x} \ (A); \ \nabla_j \boldsymbol{x}_i = p_{ij} \boldsymbol{x} + b_{ij} \tilde{\boldsymbol{x}} + c_{ij} \boldsymbol{n} + d_{ij} \tilde{\boldsymbol{n}} \ (B); \ \nabla_j \tilde{\boldsymbol{x}}_i = p_{ij} \tilde{\boldsymbol{x}} - b_{ij} \boldsymbol{x} + c_{ij} \tilde{\boldsymbol{n}} - d_{ij} \boldsymbol{n} \ (C); \ \nabla_j \boldsymbol{n} = m^k_j \boldsymbol{x}_k + a_j \boldsymbol{x} + r_j \tilde{\boldsymbol{x}} + h_j \times \boldsymbol{n} + s_j \tilde{\boldsymbol{n}} \ (D); \ \nabla_j \tilde{\boldsymbol{n}} = m^k_j \tilde{\boldsymbol{x}}_k + a_j \tilde{\boldsymbol{x}} - r_j \boldsymbol{x} + h_j \tilde{\boldsymbol{n}} - s_j \boldsymbol{n} \ (E) \ (10).$$

Дифференцируя (10, A): $\tilde{\boldsymbol{x}}_j = g^k_j \boldsymbol{x}_k$, получаем $\nabla_s \tilde{\boldsymbol{x}}_j = (\nabla_s g^k_j) \boldsymbol{x}_k + g^k_j \nabla_s \boldsymbol{x}_k$; отсюда следует $\nabla_s g^k_j = 0$, т. е. связность на поверхности $X_2 \subset Б_5$ вейлева [4].

Если в бипланарном пространстве $Б_5$ ввести репер: m_k, $\tilde{m}_k$ $(k = 1, 2, 3)$, то относительно этого репера $\boldsymbol{x} = x^k \boldsymbol{m}_k + y^k \tilde{\boldsymbol{m}}_k$,

$x = x^k \tilde{m}_k - y^k m_k$, откуда $X = x - i\tilde{x} = (x^k + iy^k) m_k + (y^k - ix^k) \times \times \tilde{m}_k = (x^k + iy^k)(m_k - i\tilde{m}_k)$.

Займемся теперь отображением кривых комплексного центроаффинного пространства A_3 на двумерные поверхности $X_2 \subset Б_5$. Такое отображение не будет взаимнооднозначным, так как точкам (X^1, X^2, X^3) и (cX^1, cX^2, cX^3) в пространстве A_3, где c — вещественное число, будет соответствовать одна и та же точка в $Б_5$. Из уравнений (10, B) и (10, C) получим $\triangle_j X_i = P_{ij} X + C_{ij} N$ **(11)**, где $N = n - i\tilde{n}$, $P_{ij} = p_{ij} + ib_{ij}$, $C_{ij} = c_{ij} + id_{ij}$. Пусть в A_3 задана аналитическая кривая аналитической функцией $X = X(t)$, где t — комплексный параметр: $t = t^1 + it^2$. Отсюда $X_i = X' t_i$ (12), где $t_i = \frac{\partial t}{\partial t^i}$. Из (12) находим: $\nabla_j X_i = X'' t_i t_j + X' \nabla_j t_i$; подставляя это соотношение в уравнение (11) и полагая $N = X''$, получаем $X'' t_i t_j + X' \nabla_j t_i = P_{ij} X + C_{ij} X''$. Отсюда следует $\nabla_j t_i = 0$, $P_{ij} = 0$, $C_{ij} = t_i t_j$. Таким образом, уравнение (11) принимает вид $\nabla_j X_i = C_{ij} N$ **(13)**.

Условия интегрируемости уравнения $\nabla_j t_i = 0$ имеют вид $\nabla_{[k} \nabla_{j]} t_i = -\frac{1}{2} R_{kji}{}^{m} \cdot t_m = 0$. А так как t — комплексный параметр и тензор кривизны действительный, то $R_{kji}{}^{m} \cdot = 0$, т. е. связность на поверхности $X_2 \subset Б_5$ евклидова [4], и ее метрический тензор можно определить условием $g_{ij} = E_{ik} g^k_j$, где E_{ij} — бивектор, для которого $\nabla_k E_{ij} = 0$. Из уравнения (13) следует $C_{[ij]} = 0$.

Из уравнений (10, D) и (10, E) найдем $\nabla_j N = m^l_j X_l + M_j X + H_j N$ (14), где $M_j = a_j + ir_j$, $H_j = h_j + is_j$. Продифференцируем левую и правую части уравнения (14): $\nabla_k \nabla_j N = \nabla_k m^l_j X_l + m^l_j \times \nabla_k X_l + \nabla_k M_j X + M_j \nabla_k X + \nabla_k H_j N + H_j \nabla_k N$. Используя разложения (13) и (14), получаем $\nabla_k \nabla_j N = \nabla_k m^l_j X_l + m^l_j C_{kl} N + \nabla_k \times M_j X + M_j X_k + \nabla_k H_j N + H_j (m^l_k X_l + M_k X + H_k N)$. После альтернации получим условия интегрируемости уравнения (14):

$$\nabla_{[k} m^l_{j]} + M_{[j} \delta^l_{k]} + H_{[j} m^l_{k]} = 0; \ \nabla_{[k} M_{j]} + H_{[j} M_{k]} = 0;$$
$$m^l_{[j} C_{k]l} + \nabla_{[k} H_{j]} = 0.$$

Таким образом, при отображении аналитической кривой $X = X(t)$ в A_3 на $X_2 \subset Б_5$ дифференциальные уравнения, отвечающие этой кривой, будут

$$\nabla_j t_i = 0 \ (A); \ \nabla_j \tilde{X} = g^k_j X_k \ (B); \quad \nabla_j X_i = C_{ij} N \ (C);$$
$$\nabla_j N = m^l_j X_l + M_j X + H_j N \ (D); \tag{15}$$

где $C_{ij} = c_{ij} + id_{ij}$; $H_j = h_j + is_j$; $M_j = a_j + ir_j$; $N = X''$.

Условия интегрируемости этих уравнений имеют вид $R_{kji}{}^{m} \cdot = 0$; $C_{[ij]} = 0$; $\nabla_{[k} m^l_{j]} + M_{[j} \delta^l_{k]} + H_{[j} m^l_{k]} = 0$; $\nabla_{[k} M_{j]} + H_{[j} M_{k]} = 0$; $m^l_{[j} C_{k]l} + \nabla_{[k} H_{j]} = 0$.

Определение. *Прямая в комплексном центроаффинном пространстве A_3 называется особой, если она проходит через полюс этого пространства.*

Теорема 1. *Неособой касательной прямой к аналитической кривой в комплексном центроаффинном пространстве A_3 соответствует в $Б_5$ касательная плоскость к соответствующей поверхности X_2 в соответствующей точке.*

Доказательство. Пусть $X = X(t)$ — параметрическое уравнение аналитической кривой в A_3. Значению $t_0 = t_0^1 + it_0^2$ параметра t соответствует точка $M_0(X_0^1, X_0^2, X_0^3)$ на кривой. Уравнение касательной прямой к кривой в точке M_0 имеет вид $X(v) = X(t_0) + v\frac{\partial X}{\partial t}\Big|_0$ **(16)**, где $v = v^1 + iv^2$ — комплексный параметр. Пусть $X(v)$ имеет координаты: $x^k + iy^k$, $k = 1, 2, 3$. Тогда уравнению (16) прямой в A_3 соответствуют в $Б_5$ уравнения плоскости:

$$x^k = x_0^k + v^1\frac{\partial x^k}{\partial t^1}\Big|_0 + v^2\frac{\partial x^k}{\partial t^2}\Big|_0;\ y^k = y_0^k + v^1\frac{\partial y^k}{\partial t^1}\Big|_0 + v^2\frac{\partial y^k}{\partial t^2}\Big|_0,\ k=1, 2, 3,$$

$$\text{или } \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + v^1\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial t^1}\Big|_0 + v^2\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial t^2}\Big|_0, \tag{17}$$

где $\frac{\partial x}{\partial t^1}\Big|_0$ и $\frac{\partial x}{dt^2}\Big|_0$ — касательные векторы к координатным линиям $t^1 = \mathrm{const}$ и $t^2 = \mathrm{const}$ на поверхности $X_2 \subset Б_5$. Таким образом, (17) есть уравнение касательной плоскости к поверхности $X_2 \subset Б_5$, соответствующей касательной прямой к кривой в A_3.

Теорема 2. *Аналитическому параметру кривой комплексного центроаффинного пространства A_3 соответствует изотермическая сеть на соответствующей поверхности $X_2 \subset Б_5$.*

Доказательство. Так как в A_3 кривая $X^k = X^k(t) = x^k + iy^k$, $k = 1, 2, 3$, является аналитической, то x^k и y^k — сопряженные гармонические функции. Отсюда следует, что на поверхности $X_2 \subset Б_5$ линии $t^1 = \mathrm{const}$ и $t^2 = \mathrm{const}$ образуют изотермическую сеть [5].

Следствие. *Если $f = f(t)$ есть аналитическая функция параметра аналитической кривой, то она будет аналитической функцией и на соответствующей поверхности $X_2 \subset Б_5$.*

Займемся теперь отображением кривых в A_3, отнесенных к центроаффинному и эквицентроаффинному параметрам кривой, на двумерные поверхности $X_2 \subset Б_5$.

а) Пусть кривая в A_3 отнесена к центроаффинному параметру $u = u^1 + iu^2$. Подставляя (4) в (15, D), где взято $N = X''$, и полагая $\frac{\partial u}{\partial u^k} = u_k^m$, $k = 1, 2$, получаем $(\boldsymbol{X} + \bar{k}\boldsymbol{X}' + \bar{\tau}\boldsymbol{X}'')u_k = m_k^l\boldsymbol{X}'u_l + M_k\boldsymbol{X} + H_k\boldsymbol{X}''$. Сравнивая коэффициенты при $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{X}'$, $\boldsymbol{X}''$ слева и справа, найдем $M_k = u_k$, $\bar{\tau}u_k = H_k$, $\bar{k}u_k = m_k^l u_l$ (18). Из последнего равенства следует, что $\bar{k}$ — одно из характеристических чисел матрицы (m_k^l), а второе ему сопряжено. Из уравнения

(15, A) следует, что сеть на поверхности $X_2 \subset Б_5$ при $N = X''$ декартова.

Пусть координатами точки на поверхности $X_2 \subset Б_5$, в которую отобразилась данная кривая, будут действительная и мнимая части параметра u. Примем во внимание, что $M_k = a_k + ir_k$, $H_k = h_k + is_k$, $\bar{k} = \bar{k}^1 + i\bar{k}^2$, $\bar{\tau} = \bar{\tau}_1 + i\bar{\tau}_2$. Тогда из первого равенства (18) получим $a_k + ir_k = u_k$, откуда $a_1 = r_2 = 1$, $a_2 = r_1 = 0$. Из второго равенства (18) следует равенство $(\bar{\tau}_1 + i\bar{\tau}_2)u_k = h_k + is_k$, откуда $h_1 = s_2 = \bar{\tau}_1$, $h_2 = -s_1 = -\bar{\tau}_2$. Из третьего равенства (18) найдем $(\bar{k}_1 + i\bar{k}_2)u_k = \overset{l}{m}_k u_l$, откуда $m_1^1 = m_2^2 = \bar{k}_1$, $m_1^2 = -m_2^1 = \bar{k}_2$.

Для $X_2 \subset Б_5$ можно образовать следующие инварианты:

$$L_1 = m^{ij}a_i r_j = \bar{k}_1; \qquad L_3 = a^i h_i = -\bar{\tau}_2;$$
$$L_2 = m^{ij}a_i a_j = \bar{k}_2; \qquad L_4 = a^i s_i = \bar{\tau}_1,$$

в частности, $|\bar{\tau}| = g^{ij}h_i h_j$, $|\bar{k}| = \frac{1}{2} m_{ij}m_{sk}g^{is}g^{jk}$; здесь $g^{ij} = g_k^i E^{kj}$, $m_{ij} = \overset{k}{m}_i E_{kj}$, $m^{ij} = \overset{i}{m}_k E^{kj}$, $a^i = a_k E^{ki}$, а E^{ki} — бивектор, для которого $\nabla_k E^{ij} = 0$ и существенная компонента $E^{12} = 1$; E_{ij} — тензор, взаимный бивектору E^{ij}; g^{ij} — метрический тензор поверхности $X_2 \subset Б_5$. Очевидно, что по инвариантам L_k, заданным как функции u^1 и u^2 параметров поверхности $X_2 \subset Б_5$, можно восстановить центроаффинные кривизну и кручение кривой, отвечающей этой поверхности.

Для кривых W центроаффинного пространства A_3 инварианты L_k на $X_2 \subset Б_5$ будут величины постоянные. Для T-кривых инварианты L_3 и L_4 будут обращаться в нуль, так как $H_k = is_k + h_k$ для таких кривых будет обращаться в нуль.

б) Пусть теперь аналитическая кривая в A_3 отнесена к эквицентроаффинному параметру $w = w^1 + iw^2$. Подставляя (6) в (15, D), где взято $N = X''$, и обозначая $\frac{\partial w}{\partial w^k} = w_k$, $k = 1, 2$, найдем $(kX + \tau X')w_k = \overset{l}{m}_k X' w_l + M_k X + H_k X''$. Сравнивая коэффициенты при X, X', X'' слева и справа, получим $H_k = 0$, $M_k = kw_k$, $m_k^l w_l = \tau w_k$. Из последнего равенства следует, что τ является одним из характеристических чисел матрицы $(\overset{l}{m}_k)$, а второе ему сопряжено. Из уравнения (15, A) следует, что сеть на поверхности $X_2 \subset Б_5$ при $N = X''$ декартова.

Пусть, как и в случае а), координатами точки на поверхности $X_2 \subset Б_5$, в которую отобразилась данная кривая, будут действительная и мнимая части параметра w. Учитывая, что $M_k = a_k + ir_k$, $H_k = h_k + is_k$, $k = k_1 + ik_2$, $\tau = \tau_1 + i\tau_2$, из равенства $M_k = kw_k$ найдем $(a_k + ir_k) = (k_1 + ik_2)w_k$, откуда $a_1 = r_2 = k_1$, $a_2 = -r_1 = -k_2$. Из равенства $H_k = h_k + is_k = 0$ следует $h_k =$

$= s_k = 0$. Из равенства $m_k^l w_l = \tau w_k$ следует $m_k^l w_l = (\tau_1 + i\tau_2) w_k$, откуда $m_1^1 = m_2^2 = \tau_1$, $m_2^1 = -m_1^2 = -\tau_2$.

Пусть $m_{ij} = m_i^k E_{kj}$, где E_{kj} — бивектор, для которого $\nabla_i E_{kj} = 0$. Тогда $|k| = g^{ij} a_i a_j$, $|\tau| = \frac{1}{2} m_{ij} m_{sk} g^{is} g^{jk}$, где g^{ij} — метрический тензор поверхности.

Из уравнения (11) при $N = X''$ было получено $C_{ij} = w_i w_j = c_{ij} + i d_{ij}$, откуда

$$c_{11} = -c_{22} = 1, \qquad c_{12} = c_{21} = 0,$$
$$d_{11} = d_{22} = 0, \qquad d_{12} = d_{21} = 1.$$

Построим теперь следующие инварианты поверхности $X_2 \subset Б_5$:

$$L_1 = \frac{m^{ij} a_i a_j}{g^{ij} a_i a_j} = \tau_2;$$

$$L_2 = \frac{m^{ij} a_i r_j}{g^{ij} a_i a_j} = \tau_1, \qquad L_3 = c_{ij} a^i a^j = k_2^2 - k_1^2; \quad L_4 = g^{ij} a_i a_j = k_1^2 + k_2^2,$$

где $a^i = a_k E^{ki}$, $m^{ij} = m_k^i E^{kj}$, E^{kj} — бивектор, для которого $\Delta_k E^{ij} = 0$, а существенная компонента $E^{12} = 1$; g^{ij} — метрический тензор поверхности. Очевидно, что по инвариантам L_k, заданным как функции параметров w^1 и w^2 поверхности $X_2 \subset Б_5$, можно восстановить эквицентроаффинные кривизну и кручение кривой в A_3. Для кривых $k = \mathrm{const}$ и $\tau = \mathrm{const}$ инварианты $L_k = \mathrm{const}$.

Так как сети на поверхности $X_2 \subset Б_5$, отвечающие центроаффинному и эквицентроаффинному параметрам соответствующих кривых в A_3, будут декартовы, то, используя принцип двойственности в центроаффинном пространстве, сформулируем свойство

1. *Эквицентроаффинному параметру $\breve{w}$ 2-го рода кривой в A_3 соответствует декартова сеть в геометрии 2-го рода поверхности.*

Принимая во внимание (7), можно сформулировать свойство

2. *Эквицентроаффинное кручение кривой в A_3 равно кубу производной той аналитической функции, которая конформно отображает геометрию 1-го рода поверхности $X_2 \subset Б_5$ на геометрию 2-го рода этой же поверхности.*

Если $\tau = \mathrm{const}$, то из равенства $d\breve{w} = \sqrt[3]{\tau}\, dw$ следует $\breve{w} = \sqrt[3]{\tau} w + c$, т. е. аналитическая функция, которая конформно отображает геометрию 1-го рода на геометрию 2-го рода поверхности $X_2 \subset Б_5$, есть линейная функция относительно эквицентроаффинного параметра w. Конформное отображение в этом случае является отображением подобия с вращением.

Из соотношения (7) получим $d\breve{w} = \sqrt[3]{\tau}\, dw$, откуда $\breve{w}_i = \sqrt[3]{\tau}\, w_i$. Тогда $\ddot{g}_{ij} = \sqrt[3]{|\tau|^2} g_{ij}$ и, следовательно, $\ddot{g} = \sqrt[3]{|\tau|^4}\, g$.

Здесь g_{ij} и $\breve{g}_{ij}$ — метрические тензоры поверхности $X_2 \subset Б_5$ в геометриях 1-го и 2-го рода; g и $\breve{g}$ — соответственно их дискриминанты. Таким образом, $\breve{g}_{ij}/g_{ij} = |\tau|^{2/3}$, $\breve{g}/g = |\tau|^{4/3}$. Отсюда следует свойство

3. *Коэффициент растяжения при конформном отображении геометрии 1-го рода на геометрию 2-го рода поверхности* $X_2 \subset Б_5$ *равен* $|\tau|^{2/3}$.

При $\tau = \text{const}$ этот коэффициент растяжения, очевидно, будет постоянной величиной.

Представим теперь соотношение $\frac{d\breve{w}}{dw} = \sqrt[3]{\tau}$ в виде

$$\left|\frac{d\breve{w}}{dw}\right|(\cos\alpha + i\sin\alpha) = \sqrt[3]{|\tau|}\left(\cos\frac{\varphi}{3} + i\sin\frac{\varphi}{3}\right),$$

здесь α — угол между полями направлений соответственно в геометриях 1-го и 2-го рода поверхности $X_2 \subset Б_5$; φ — аргумент эквицентроаффинного кручения. Получаем следующее свойство

4. *Одна треть аргумента эквицентроаффинного кручения кривой равна углу между полями направлений параллельных соответственно в геометриях 1-го и 2-го рода поверхности* $X_2 \subset Б_5$.

Рассмотрим теперь соотношение (8): $\frac{du}{dw} = \sqrt[3]{k}$. Из него следует $G_{ij} = |k|^{2/3} g_{ij}$ и $G = |k|^{4/3} g$, где G_{ij} — метрический тензор поверхности $X_2 \subset Б_5$, соответствующей кривой, отнесенной к центроаффинному параметру; $G_{ij} = \frac{\partial x}{\partial u^i} \cdot \frac{\partial x}{\partial u^j} = x_i x_j$; g_{ij} — метрический тензор поверхности $X_2 \subset Б_5$, соответствующей кривой эквицентроаффинного пространства; $g_{ij} = \frac{\partial x}{\partial w^i} \cdot \frac{\partial x}{\partial w^j} = x_i x_j$. Таким образом:

5. *Эквицентроаффинная кривизна кривой в* A_3 *равна кубу производной той аналитической функции, которая конформно отображает геометрию 1-го рода поверхности* $X_2 \subset Б_5$, *соответствующей эквицентроаффинному параметру кривой, на геометрию 1-го рода поверхности* $X_2 \subset Б_5$, *соответствующей центроаффинному параметру той же кривой.*

6. *Коэффициент растяжения при конформном отображении геометрии 1-го рода поверхности* $X_2 \subset Б_5$, *соответствующей кривой эквицентроаффинного пространства, на геометрию 1-го рода той же поверхности, соответствующей кривой центроаффинного пространства, равен* $|k|^{2/3}$.

Соотношение $\frac{du}{dw} = \sqrt[3]{k}$ теперь представим в виде

$$\left|\frac{du}{dw}\right|(\cos\beta + i\sin\beta) = \sqrt[3]{|k|}\left(\cos\frac{\psi}{3} + i\sin\frac{\psi}{3}\right),$$

Здесь β — угол между касательными направлениями к линиям одного семейства декартовой сети, соответствующей центроаффинному параметру, и соответствующими касательными направлениями к линиям соответствующего семейства декартовой сети, отвечающей эквицентроаффинному параметру кривой; ψ — аргумент эквицентроаффинной кривизны. Из выше написанного равенства вытекает:

7. *Одна треть аргумента эквицентроаффинной кривизны кривой в A_3 равна углу между полями направлений к соответствующим координатным линиям декартовых систем координат, отвечающих центроаффинному и эквицентроаффинному параметрам кривой в геометриях 1-го рода поверхности.*

Список литературы: 1. *Popa J.* Géométrie centro-affine des courbes gauches. — Compt., Rend. Acad. Sci. Paris, 1934, 198, p. 2051—2053. 2. *Popa J.* Géométrie centro-affine hyperbolique des courbes gauches — Ann. sci. Univ. Jassy, 1934, 21, p. 78—140. 3. *Popa J.* Géométrie centro-affine parabolique des courbes et des surfaces. — Ann. sci. Univ. Jassy, 1934, 21, p. 141—181. 4. *Норден А. П.* Теория поверхностей. — М.: ГИТТЛ, 1956. — 260 с. 5. *Норден А. П.* Пространства аффинной связности. — М.: ГИТТЛ, 1950. — 46 с. 6. *Широков А. П.* Геометрия обобщенных биаксиальных пространств. — Учен. зап. Киев. ун-та, Математика, 114, кн. 2, 1954, с. 123—166. 7. *Дерягина В. Г.* К теории двумерных поверхностей в бипланарном пространстве. — Изв. ВУЗов, Математика, 1976, № 1, с. 116—119.

Поступила в редколлегию 02. 06. 80.

УДК 513.82

В. И. Дискант

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ МИНКОВСКОГО ДЛЯ ПЛОЩАДИ ПОВЕРХНОСТИ ВЫПУКЛЫХ ТЕЛ

Пусть A, X — ограниченные замкнутые выпуклые тела в n-мерном евклидовом пространстве R^n, $n \geqslant 3$. Сумма $\alpha A + \beta X$, где α, $\beta \geqslant 0$, будет означать сумму тел αA и βX в смысле Минковского. Обозначим через $V_{n-1}(\alpha A + \beta X)$ $(n-1)$-й интеграл кривизны тела $\alpha A + \beta X$. Отметим, что $V_{n-1}(\alpha A + \beta X) = \frac{1}{n} S(\alpha A + \beta X)$, где $S(\alpha A + \beta X)$ — площадь поверхности тела $\alpha A + \beta X$. Известно [1, с. 107], что функция $f(t) = V_{n-1}^{\frac{1}{n-1}}((1-t)A + tX)$ при $0 \leqslant t \leqslant 1$ выпукла вверх. А. Д. Александров показал [2, с. 1226], что для собственных тел A и X функция $f(t)$ линейна лишь в случае, когда A и X гомотетичны. В этом случае $f(t) = (1-t) V_{n-1}^{\frac{1}{n-1}}(A) + t V_{n-1}^{\frac{1}{n-1}}(X)$. Из выпуклости $f(t)$ следует, что разность $F(A, X, t) = V_{n-1}^{\frac{1}{n-1}}((1-t)A + tX) - \Big[(1 -$

$-t) V_{n-1}^{\frac{1}{n-1}}(A)+tV_{n-1}^{\frac{1}{n-1}}(X)\Big]$ при $t\in[0,1]$ неотрицательна. При фиксированном A на равенство $F(A,X,t)=0$ при $t\in[0,1]$ можно смотреть как на уравнение относительно X. Это уравнение назовем уравнением Минковского для площади поверхности выпуклых тел. Его решениями среди собственных тел являются тела, гомотетичные телу A. Если наложить условие $V_{n-1}(A)=V_{n-1}(X)$, то решение уравнения единственно: $X=A$. Поставим вопрос об устойчивости этого решения при изменении левой части уравнения. Предположим, что $F(A,X,t)<\varepsilon$ при $0\leqslant t\leqslant 1$ и $\varepsilon>0$ достаточно мало. Можно ли оценить сверху отклонение тел A и X величиной $\varphi(\varepsilon)$ такой, что $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+}\varphi(\varepsilon)=0$? В данной статье ответ на этот вопрос при $n\geqslant 5$ дает

Теорема. *Если* $F(A,X,t)<\varepsilon$ *при* $0\leqslant t\leqslant 1$, $\left|V_{n-1}^{\frac{1}{n-1}}(A)-V_{n-1}^{\frac{1}{n-1}}(X)\right|<\varepsilon$, $0\leqslant\varepsilon<\varepsilon_0$, $n\geqslant 5$, *то* $\delta(A,X)<C\varepsilon^{\frac{1}{4n^3}}$.

Здесь $\delta(A,X)$ — отклонение тел A и X, величины C и $\varepsilon_0>0$ зависят от n, r_A, R_A, где r_A — радиус максимального вписанного в A шара; R_A — радиус минимального описанного около A шара.

Замечание. Пусть $H(t)=(1-t)A+tX$, $0\leqslant t\leqslant 1$. Из справедливости условий теоремы для тел семейства $H(t)$ следует их справедливость и для семейства $G(\theta)=(1-\theta)A+\theta H\left(\frac{1}{2}\right)$, $0\leqslant\theta\leqslant 1$. В частности, $F\left(A,H\left(\frac{1}{2}\right),\theta\right)<\varepsilon$, $\left|V_{n-1}^{\frac{1}{n-1}}(A)-V_{n-1}^{\frac{1}{n-1}}\left(H\left(\frac{1}{2}\right)\right)\right|<\frac{3}{2}\varepsilon$. Кроме того, как показано в [3, с. 673], $\delta(A,X)\leqslant 2\delta\left(A,H\left(\frac{1}{2}\right)\right)$. Поэтому теорему достаточно доказать для семейства $G(\theta)$. Из определения смешения тел вытекает, что радиус шара, вписанного в тело $H\left(\frac{1}{2}\right)$, не меньше $\frac{1}{2}r_A$. Так как площадь поверхности тела A допускает оценку сверху через величину, зависящую от n и R_A, то по условию теоремы аналогичную оценку сверху допускает и площадь поверхности тела $H\left(\frac{1}{2}\right)$. Тем самым допускает оценку сверху и радиус описанного около $H\left(\frac{1}{2}\right)$ шара через величину, зависящую от n, r_A, R_A.

Таким образом, при доказательстве теоремы можно считать, что $r_X\geqslant\frac{1}{2}r_A$, $R_X<C_1$, где r_X — радиус вписанного в X шара;

R_X — радиус описанного около X шара; C_1 — величина, зависящая только от n, r_A, R_A.

Следовательно, все смешанные объемы тел A, X и их проекций на плоскости в R^n, интегралы кривизны тел A, X допускают оценки снизу величинами, отличными от нуля и зависящими от n, r_A и оценки сверху — величинами, зависящими от n, r_A, R_A. Поэтому в работе все величины $C_1, C_2, \ldots, C_{10}$ зависят от n, r_A, R_A.

Предварительно докажем восемь лемм.

Пусть $u \in \Omega$, где Ω — единичная сфера в R^n с центром в начале координат. Обозначим через A_u, X_u проекции тел A и X на гиперплоскость T_u в R^n, проходящую через начало координат перпендикулярно u.

Запишем для тел A_u, X_u неравенство Боннезена [1, с. 96]: $\varphi(\tau, u) = (n-2)V(A_u) - (n-1)\tau V_1(A_u, X_u) + \tau^{n-1}V(X_u)$ **(1)**, в котором $V(A_u)$ — объем тела A_u; $V_1(A_u, X_u) = V(\overbrace{A_u, \ldots, A_u}^{n-1}, X_u)$ — первый смешанный объем тел A_u, X_u [1, с. 59]. Неравенству (1) удовлетворяют значения τ, для которых τ^{n-2} является отношением объемов проекций тел A_u и X_u на одну и ту же произвольную $(n-2)$-мерную плоскость в T_u. В [1, с. 108] показано, что существует такое значение τ_0 для τ, которое удовлетворяет неравенству (1) при любом u.

Лемма 1. *Для τ_0 справедлива оценка* $|\tau_0 - 1| < C_2\sqrt{\varepsilon}$.

Доказательство. Подставляя τ_0 в (1) и интегрируя (1) по Ω, получаем $(n-2)V_1(A, E) - (n-1)\tau_0 V_{11}(A, X, E) + \tau_0^{n-1}V_1(X, E) \leqslant 0$ **(2)**, где E — единичный шар, для которого Ω является границей, $V_1(A, E) = V_{n-1}(A)$, $V_1(X, E) = V_{n-1}(X)$, $V_{11}(A, X, E) = V(\overbrace{A, \ldots, A}^{n}, X, E)$. Аналогично тому, как это доказано в [3, с. 673], условие теоремы $F(A, X, t) < \varepsilon$ при ее доказательстве можно заменить на условие $V_{11}^{n-1}(A, X, E) - V_1^{n-2}(A, E)V_1(X, E) < C_3\varepsilon$. Отсюда, в частности, следует, что вместе с неравенством $|V_1(A, E) - V_1(X, E)| < C_4\varepsilon$, вытекающим из условия теоремы, справедливо неравенство $|V_{11}(A, X, E) - V_1(A, E)| < C_5\varepsilon$. Используя последние и учитывая, что $\tau_0 < C_6$, можно показать, что из (2) для τ_0 следует неравенство $(n-2) - (n-1)\tau_0 + \tau_0^{n-1} \leqslant C_7\varepsilon$ **(3)**. Левая часть в (3) может быть записана в виде $(\tau_0 - 1)^2(\tau_0^{n-3} + 2\tau_0^{n-4} + 3\tau_0^{n-5} + \cdots + (n-3)\tau_0 + n - 2)$, поэтому (3) можно записать $(\tau_0 - 1)^2 \leqslant C_2^2\varepsilon$, откуда и следует утверждение леммы.

Лемма 2. *Имеют место оценки* $|\varphi(\tau_0, u)| < C_8\varepsilon^{\frac{1}{n}}$, $|\varphi(1, u)| < C_9\varepsilon^{\frac{1}{n}}$.

Доказательство. Так как $\varphi(\tau_0, u) \leqslant 0$, а $\int\limits_\Omega \varphi(\tau_0, u)d\omega =$

$= nV(E_u)((n-2)V_{n-1}(A) - (n-1)\tau_0 V_{11}(A,X,E) + \tau_0^{n-1} V_{n-1}(X))$
$\geqslant nV(E_u)V_{n-1}(A)((n-2) - (n-1)\tau_0 + \tau_0^{n-1} - C_{10}\varepsilon)$
$\geqslant -nV(E_u)V_{n-1}(A)C_{10}\varepsilon$, то согласно лемме 4 работы [4] будет $|\varphi(\tau_0, u)| < C_8\varepsilon^{\frac{1}{n}}$.

Подставляя в последнее неравенство оценку для τ_0 из леммы 1, получаем $|\varphi(1, u)| < C_9\varepsilon^{\frac{1}{n}}$.

Лемма 3. *Если* $\varphi(1, u) \geqslant -C_{11}\gamma$ и $\tau > 1$ *такое, что* $\varphi(\tau, u) \leqslant 0$, *то* $\tau V(X_u) \leqslant V(A_u) + \frac{C_{11}\tau\gamma}{(n-2)(\tau-1)}$.

Доказательство. Складывая соответствующие части неравенств $-(n-2)V(A_u) + (n-1)V_1(A_u, X_u) - V(X_u) \leqslant C_{11}\gamma$ (4), $(n-2)V(A_u) - (n-1)\tau V_1(A_u, X_u) + \tau^{n-1}V(X_u) \leqslant 0$, получаем $-(n-1)V_1(A_u, X_u)(\tau-1) + V(X_u)(\tau^{n-1}-1) \leqslant C_{11}\gamma$, откуда $V(X_u)(\tau^{n-2} + \tau^{n-3} + \cdots + 1) \leqslant (n-1)V_1(A_u, X_u) + \frac{C_{11}\gamma}{\tau-1}$ (5). Для величины $(n-1)V_1(A_u, X_u)$ из неравенства (4) получим оценку $(n-1)V_1(A_u, X_u) \leqslant (n-2)V(A_u) + V(X_u) + C_{11}\gamma$ и при $\tau > 1$ величина $\tau^{n-2} + \tau^{n-3} + \cdots + 1 > (n-2)\tau + 1$. Тогда из неравенства (5) следует неравенство $((n-2)\tau + 1)V(X_u) \leqslant$ $\leqslant (n-2)V(A_u) + V(X_u) + C_{11}\gamma + \frac{C_{11}\gamma}{\tau-1}$, равносильное утверждению леммы.

Лемма 4. *В условиях теоремы справедливо неравенство* $|V(H_u(t)) - (1-t)V(A_u) - tV(X_u)| < C_{12}\varepsilon^{\frac{1}{2n}}$, *где* $H_u(t)$ — *проекция тела* $H(t)$ *на плоскость* T_u.

Доказательство. Справедливо неравенство $\psi(\tau, u, t) = V(H_u(t)) - [(1-t)\tau^{2-n}V(A_u) + tV(X_u)][(1-t)\tau + t]^{n-2} \geqslant 0$ [1, с. 107]. Этому неравенству удовлетворяют значения τ, для которых τ^{n-2} является отношением объемов проекций тел A_u, X_u на одну и ту же произвольную $(n-2)$-мерную плоскость в T_u. В частности, при $\tau = \tau_0$ будет $\psi(\tau_0, u, t) \geqslant 0$.

Пользуясь оценками леммы 1 для τ_0, из последнего неравенства при фиксированных u и t получаем неравенство $\psi(1, u, t) \geqslant$ $\geqslant -C_{13}\sqrt{\varepsilon}$. Для интеграла $\int\limits_{\Omega} \psi(1, u, t)\, d\omega = nV(E_u)(V_{n-1}(H(t)) -$ $-((1-t)V_{n-1}(A) + tV_{n-1}(X)))$, используя условия теоремы, находим $\int\limits_{\Omega} \psi(1, u, t)\, d\omega \leqslant C_{14}\varepsilon$. Тогда по лемме 4 работы [4] $|\psi(1, u, t)| < C_{12}\varepsilon^{\frac{1}{2n}}$.

Следствие.

$$\left| \frac{2V\left(H_u\left(\frac{1}{2}\right)\right)}{V(A_u) + V(X_u)} - 1 \right| < C_{12}\varepsilon^{1/2n}.$$

Действительно, для того чтобы убедиться в этом, достаточно в неравенстве леммы положить $t = \frac{1}{2}$ и разделить обе части полученного неравенства на величину $V(A_u) + V(X_u)$.

Лемма 5. *Пусть A_u', X_u', $H_u'(t)$ — проекции тел A_u, X_u, $H_u(t)$ на некоторую $(n-2)$-мерную плоскость $T_u \subset T_u$. Если*

$$V(A_u') \leqslant V(X_u) \text{ и } \sqrt[n-2]{\frac{V\left(H_u'\left(\frac{1}{2}\right)\right)}{V(X_u)}} = q_0 > 1, \text{ то справедливо неравенство}$$

$$q_0 \leqslant \frac{2V\left(H_u\left(\frac{1}{2}\right)\right)}{V(A_u) + V(X_u)} + \frac{1}{V(A_u) + V(X_u)} \cdot \frac{C_{15}\, q_0\, \varepsilon^{\frac{1}{n}}}{q_0 - 1}. \tag{6}$$

Доказательство. Рассмотрим семейство тел $B(\theta) = (1-\theta) H\left(\frac{1}{2}\right) + \theta A$, $0 \leqslant \theta \leqslant 1$. Для семейства тел $B(\theta)$ выполняются условия теоремы. Поэтому для функции $\tilde{\varphi}(\tau, u) = (n-2) V\left(H_u\left(\frac{1}{2}\right)\right) - (n-1)\tau V_1\left(H_u\left(\frac{1}{2}\right), A_u\right) + \tau^{n-1} V(A_u)$ справедливо неравенство $\tilde{\varphi}(1, u) \geqslant C_{16}\, \varepsilon^{\frac{1}{n}}$. Применяя в этом случае лемму 3, получаем

$$q_0 V(A_u) \leqslant V\left(H_u\left(\frac{1}{2}\right)\right) + \frac{C_{17}\, q_0\, \varepsilon^{\frac{1}{n}}}{q_0 - 1}. \tag{7}$$

Аналогичные рассуждения применимы и к семейству тел $D(\theta) = (1-\theta) H\left(\frac{1}{2}\right) + \theta X$. В результате приходим к неравенству

$$q_0 V(X_u) \leqslant V\left(H_u\left(\frac{1}{2}\right)\right) + \frac{C_{18}\, q_0\, \varepsilon^{\frac{1}{n}}}{q_0 - 1}. \tag{8}$$

Складывая соответствующие части неравенств (7) и (8) и деля обе части полученного неравенства на $V(X_u) + V(A_u)$, приходим к утверждению леммы.

Следствие. *В условиях леммы $q_0 \leqslant 1 + C_{19}\varepsilon^{\frac{1}{2n}}$.*

Действительно, если $q_0 \leqslant 1 + \varepsilon^{\frac{1}{2n}}$, то это утверждение очевидно. Если же $q_0 \geqslant 1 + \varepsilon^{\frac{1}{2n}}$, то из (6) и следствия леммы 4 находим $q_0 \leqslant 1 + C_{19}\varepsilon^{\frac{1}{2n}}$.

Лемма 6. *Если* $\left|\sqrt[n-2]{\frac{V(A_u')}{V(X_u)}}-1\right|<\varepsilon^k$, *то* $\delta(A_u', X_u')<C_{20}\varepsilon^{a/n}$, *где* $k>0$, $a=\min(k, 1/2n)$.

Доказательство. Из условия леммы следует $|V(A_u) - V(X_u)|<C_{21}\varepsilon^k$. Для определенности можем предположить, что $V(A_u)\leqslant V(X_u')$. Если $\sqrt[n-2]{\frac{V\left(H_u'\left(\frac{1}{2}\right)\right)}{V(X_u)}}=q_0\leqslant 1$, то из выпуклости функции $\sqrt[n-2]{V(H_u'(t))}$ следует, что $|V(H_u(t)) - V(x_u')|<C_{21}\varepsilon^k$. Тогда по теореме работы [3] получим $\delta(A_u', X_u')<C_{22}\varepsilon^{k/n}$.

Если $q_0>1$, то из следствия леммы 5 вытекает, что $\left|V\left(H_u\left(\frac{1}{2}\right)\right)-V(X_u')\right|<C_{23}\,\varepsilon^{\frac{1}{2n}}$. Из последнего неравенства, условия этой леммы и выпуклости функции $\sqrt[n-2]{V(H_u'(t))}$ следует, что $|V(H_u(t)) - V(X_u')|<C_{24}\varepsilon^a$. Тогда по теореме работы [3] находим $\delta(A_u, X_u)<C_{25}\varepsilon^{a/n}$. Лемма доказана.

Лемма 7. *График функции* $y=\varphi(\tau, u)$ *при фиксированном* u *пересекает ось* τ *по крайней мере в одной точке интервала* $(1-C_{26}\,\varepsilon^{1/4n},\ 1+C_{26}\,\varepsilon^{1/4n})$.

Доказательство. Имеем $\varphi_\tau(\tau, u)=(n-1)(\tau^{n-2}V(X_u) - V_1(A_u, X_u))$. Если $|V(X_u)-V_1(A_u, X_u)|>\varepsilon^{1/2n}$, то $|\varphi_\tau(\tau_0 u)|>C_{27}\,\varepsilon^{1/2n}$. Так как $-C_8\,\varepsilon^{1/n}\leqslant\varphi(\tau_0, u)\leqslant 0$, то касательная к линии $y=\varphi(\tau, u)$ в точке $(\tau_0, \varphi(\tau_0, u))$ пересечет ось τ в точке q, для которой $|\tau_0-q|<C_{28}\varepsilon^{1/2n}$. Из выпуклости вниз графика линии $y=\varphi(\tau, u)$ следует, что функция $\varphi(\tau, u)$ обращается в нуль в точке, лежащей между точками τ_0 и q. Откуда и вытекает утверждение леммы.

Если же $|V(X_u) - V_1(A_u, X_u)|<\varepsilon^{1/2n}$, то из неравенства $\varphi(1, u)|<C_9\,\varepsilon^{1/n}$ следует, что $|V(A_u)- V_1(A_u, X_u)|<C_{29}\,\varepsilon^{1/2n}$. Тогда $n-2-(n-1)\bar\tau+\bar\tau^{n-1}\leqslant C_{30}\,\varepsilon^{1/2n}$ для любой точки $\bar\tau$, в которой $\varphi(\bar\tau, u)=0$. Рассуждая так же, как и при оценке τ_0 в лемме 1, получаем $|\bar\tau-1|<C_{26}\varepsilon^{1/4n}$. Лемма доказана.

Лемма 8. *Если* $\varphi(q, u)>0$ *и* $0<q<\tau_0$, *то* $V(X_u)<(1/q^{n-1})V(A_u)$.

Доказательство. Складывая левые части неравенств $((n-2)V(A_u) - q(n-1)V_1(A_u, X_u)+q^{n-1}V(X_u))\tau_0>0$, $(-(n-2)V(A_u)+\tau_0(n-1)V_1(A_u, X_u)-\tau_0^{n-1}V(X_u))q\geqslant 0$, получаем $(n-2)(\tau_0-q)V(A_u)+\tau_0 q(q^{n-2}-\tau_0^{n-2})V(X_u)>0$, откуда следует, что $(n-2)\,V(A_u) > \tau_0 q(\tau_0^{n-3} + \tau_0^{n-4} q + \cdots + \tau_0 q^{n-4} + q^{n-3})\,V(X_u)$. Из условия $0 < q < \tau_0$ правая часть в последнем неравенстве допускает оценку $\tau_0 q(\tau_0^{n-3} + \tau_0^{n-4} q + \cdots + \tau_0 q^{n-4} + q^{n-3})\,V(X_u) \geqslant (n-2)\,q^{n-1}\,V(X_u)$, подставляя которую и получаем утверждение леммы.

Доказательство теоремы. Обозначим через τ_1, τ_2 $(\tau_1 \leqslant \tau_2)$ точки пересечения графика функции $\varphi(\tau, \boldsymbol{u})$ с осью τ при фиксированном $\boldsymbol{u}$.

Проведем классификацию гиперплоскостей в R^n. Гиперплоскость T_u назовем гиперплоскостью первого типа, если τ_1 и $\tau_2 \in (1 - C_{26}\,\varepsilon^{1/4n},\ 1 + C_{26}\varepsilon^{1/4n})$. Гиперплоскость T_u назовем гиперплоскостью второго типа, если $\tau_2 \geqslant 1 + C_{26}\,\varepsilon^{1/4n}$. Гиперплоскость T_u назовем гиперплоскостью третьего типа, если $\tau_1 \leqslant 1 - C_{26}\,\varepsilon^{1/4n}$.

Рассмотрим следующих три случая, в каждом из которых покажем справедливость теоремы.

Первый случай. В R^n нет гиперплоскостей третьего типа. Тогда при любом $\boldsymbol{u}$ будет $\tau_1 > 1 - C_{26}\,\varepsilon^{1/4n}$ и $\varphi(q_0, \boldsymbol{u}) > 0$, где $q_0 = 1 - C_{26}\,\varepsilon^{1/4n}$. Из леммы 8 получаем $V(X_u) < V(A_u) + C_{31}\,\varepsilon^{1/4n}$. С другой стороны, по условию теоремы $\int\limits_{\Omega} (V(X_u) - V(A_u))\,d\omega > -C_{32}\,\varepsilon$. Следовательно, согласно лемме 4 работы [4] будет $|V(X_u) - V(A_u)| < C_{33}\,\varepsilon^{1/4n^2}$. Отсюда, пользуясь леммой 4 настоящей работы и теоремой работы [3], получаем $\delta(A_u, X_u) < C_{34}\,\varepsilon^{1/4n^3}$. Тогда согласно лемме 6 работы [4] будет $\delta(A, X) < C_{35}\,\varepsilon^{1/4n^3}$. Случай, когда в R^n нет гиперплоскостей второго типа, рассматривается совершенно аналогично.

Второй случай. В R^n есть плоскости второго и третьего типов, кроме того, в R^n имеется такая двумерная плоскость T^2, что любая ее содержащая гиперплоскость является гиперплоскостью второго типа (случай, когда все гиперплоскости, содержащие T^2, — гиперплоскости третьего типа, рассматривается аналогично).

Возьмем в R^n произвольную гиперплоскость T_u третьего типа и рассмотрим в ней произвольную двумерную плоскость Q^2. Пусть T_v — некоторая гиперплоскость, содержащая плоскости T^2 и Q^2. Такая гиперплоскость существует, так как по условию $n \geqslant 5$. Пересечение $T_u \cap T_v = T^{n-2}$ есть $(n-2)$-мерная плоскость, для которой $|q - 1| < C_{26}\,\varepsilon^{1/4n}$, где $q = \sqrt[n-2]{\dfrac{V(A_u')}{V(X_u')}}$; A_u, X_u — проекции тел A и X на T^{n-2}. Действительно, q удовлетворяет неравенствам $\varphi(q, \boldsymbol{u}) \leqslant 0$, $\varphi(q, \boldsymbol{v}) \leqslant 0$, а общие решения этих неравенств принадлежат промежутку $(1 - C_{26}\,\varepsilon^{1/4n},\ 1 + C_{26}\,\varepsilon^{1/4n})$, так как T_u — гиперплоскость третьего типа, а T_v — гиперплоскость второго типа. Тогда из неравенства $|q-1| < C_{26}\varepsilon^{1/4n}$, согласно лемме 6, будет $\delta(A_u, X_u') < C_{36}\varepsilon^{1/4n^2}$. Плоскость $Q^2 \subset T^{n-2}$, поэтому для проекций A^2, X^2 тел A и X на Q^2 справедливо утверждение $\delta(A^2, X^2) < C_{36}\varepsilon^{1/4n^2}$. Но Q^2 — произвольная двумерная плоскость в T_u. Следовательно, согласно лемме 6 работы (4), будет $\delta(A_u, X_u) < C_{37}\varepsilon^{1/4n^2}$. Отсюда следует, что для проекций A_u, X_u тел A и X на произвольную гиперплоскость третьего типа выполняется неравенство $|V(A_u) - V(X_u)| < C_{38}\varepsilon^{1/4n^2}$. Для произвольной гиперплоскости T_u первого или второго типов выполняется неравенство $\varphi(1 - C_{26}\varepsilon^{1/4n}, u) > 0$. Отсюда по лемме 8 вытекает, что $V(X_u) - V(A_u) < C_{31}\varepsilon^{1/4n}$.

Таким образом, для любой гиперплоскости T_u в этом случае выполнено неравенство $V(X_u) - V(A_u) < C_{38}\varepsilon^{1/4n^2}$.

Рассуждая так же, как в первом случае, приходим к выводу, что $\delta(A, X) \leqslant C_{39}\varepsilon^{1/4n^2}$.

Третий случай. В R^n имеются гиперплоскости второго и третьего типов, но не выполняется второй случай. Тогда произвольная двумерная плоскость T^2 либо содержится в некоторой гиперплоскости первого типа, либо содержится в пересечении гиперплоскостей, одна из которых — второго типа, а другая — третьего типа.

Если T^2 содержится в гиперплоскости T_u первого типа, то для любого $q = \sqrt[n-2]{\frac{V(A_u)}{V(X_u')}}$, где X_u, A_u — проекции тел X и A на произвольную $(n-2)$-мерную плоскость в T_u, выполняется неравенство $|q-1| < C_{26}\varepsilon^{1/4n}$. Действительно, q удовлетворяет неравенству $\varphi(q, u) \leqslant 0$, а в случае гиперплоскости первого типа решения этого неравенства принадлежат промежутку $(1 - C_{26}\varepsilon^{1/4n}, 1 + C_{26}\varepsilon^{1/4n})$. Тогда согласно лемме 6 будет $\delta(A_u', X_u') < C_{36}\varepsilon^{1/4n^2}$, откуда следует, что $\delta(A^2, X^2) < C_{36}\varepsilon^{1/4n^2}$.

Если же T^2 содержится в пересечении двух гиперплоскостей, одна из которых — второго типа, а другая — третьего типа, то, как было показано во втором случае, будет справедлива оценка $\delta(A^2, X^2) < C_{36}\varepsilon^{1/4n^2}$.

Таким образом, в третьем случае для любой двумерной плоскости T^2 в R^n будет выполнено неравенство $\delta(A^2, X^2) < C_{36}\varepsilon^{1/4n^2}$.

Тогда согласно лемме 6 работы [4] будет $\delta(A, X) < C_{40}\varepsilon^{1/4n^2}$. Так как перечисленные случаи образуют полную группу гипотез, то теорема доказана.

Список литературы: 1. *Bonnesen T. und Fenchel W.* Theorie der konvexen Körper. — Berlin, 1934. — 164S. 2. *Александров А. Д.* К теории смешанных объемов выпуклых тел. — Мат. сб., 1937, 2(44), № 6, с. 1205—1235. 3. *Дискант В. И.* Устойчивость решения уравнения Минковского. — Сибир. мат. журн., 1973, 14, № 3, с. 669—673. 4. *Дискант В. И.* Устойчивость выпуклого тела при изменении $(n-2)$-й функции кривизны. — Укр. геометр. сб., 1976, вып. 19, с. 22—33.

Поступила в редколлегию 07. 02. 80.

УДК 513

Л. И. Егорова

ГОМОТЕТИИ В ОБОБЩЕННЫХ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

В данной статье рассматриваются гомотетические преобразования в пространствах Финслера F_n; эти преобразования по определению переводят метрическую функцию $F(x, \dot{x})$ пространства в $\lambda F(x, \dot{x})$, где λ — величина, не зависящая от переменных x, $\dot{x}$. Совокупность гомотетических преобразований пространства F_n образует группу Ли преобразований $\mathfrak{G}_r$. Инфинитезимальные гомотетии в этих пространствах определяются векторными полями, вдоль которых производная Ли от метрической функции пространства совпадает с этой функцией с точностью до постоянного множителя.

Предположим, что L_r обозначает r-членную алгебру Ли, соответствующую группе гомотетий $\mathfrak{G}_r$ ($r = \dim \mathfrak{G}_r$). Эта алгебра содержит подалгебру L_{r-1} движений, которая является также идеалом. Возьмем в L_r в качестве базисных векторов линейно независимые операторы $X_1, \ldots, X_{r-1}$ движений и некоторый оператор X_r, не принадлежащий алгебре L_{r-1}. Составляя линейные комбинации с постоянными коэффициентами указанных векторов движений и X_r, получим все элементы алгебры Ли L_r группы гомотетий.

В римановых пространствах V_n справедлива теорема Фубини, утверждающая, что два конформных (в частности, гомотетических) инфинитезимальных преобразования не могут иметь общих траекторий. Подобное утверждение имеет место в теории движений финслеровых пространств F_n. Но одночленные подгруппы гомотетических преобразований в F_n могут иметь общие траектории. Количество операторов в группе гомотетий с общими траекториями определяет

Теорема 1. *В финслеровом пространстве F_n только два линейно-независимых оператора гомотетий могут иметь общие траектории.*

Действительно, если бы общие траектории имели три линейно независимых оператора гомотетий, то общие траектории имели бы два оператора движений, что невозможно.

Операторы гомотетических преобразований с общими траекториями называются особыми операторами; в дальнейшем мы получим теоремы о свойствах особых операторов в финслеровых F_n, необходимые для изучения гомотетий. Докажем теперь следующую теорему.

Теорема 2. *Особые операторы образуют подалгебру L_2 алгебры L_r.*

Предположим, что особые операторы X_{r-1}, X_r приняты в качестве базисных и приведены к виду $X_{r-1} = p_1$, $X_r = \psi(x)\, p_1$. Предположим также, что первые $r-2$ операторов имеют вид

$$X_i = \xi_i^1 p_1 + \ldots + \xi_i^n p_n \left(i = \overline{1,\ r-2};\ p_i = \frac{\partial}{\partial x^i}\right). \qquad (1)$$

Очевидно, никакая линейная комбинация (с постоянными коэффициентами) векторов $X_1, \ldots, X_{r-2}$ не может иметь вида $\varphi(x) \times X_{r-1}$ — в противном случае существовало бы 3 независимых оператора с общими траекториями. Так как операторы $X_1, \ldots, X_{r-2}$, X_{r-1}, X_r образуют базис алгебры Ли группы гомотетий $\mathfrak{G}_r$, то $[X_i, X_j]$ представляют собой линейные комбинации с постоянными коэффициентами базисных операторов: $[X_i, X_j] = C_{ij}^k\ X_k$. Поскольку в нашем случае $X_r = \psi(x)\ X_{r-1}$, скобка $[X_{r-1}, X_r]$ есть оператор вида $\varphi(x)\ X_{r-1}$; с другой стороны, $[X_{r-1}, X_r] = C_{r-1,\, r}^1\ X_1 + \ldots + C_{r-1,\, r}^{r-2}\ X_{r-2} + X_{r-1} + \varphi(x)\ \ X_{r-1}$, откуда $C_{r-1,\, r}^1 = \ldots = C_{r-1,\, r}^{r-2} = 0$.

Таким образом, особые операторы группы X_{r-1}, X_r действительно образуют двумерную подалгебру L_2. Для них верна

Теорема 3. *Особые операторы группы X_{r-1}, X_r образуют идеал, т. е. $[L_r X_{r-1}] \subset L_2$, $[L_r X_r] \subset L_2$.*

Доказательство. Операторы $\mathfrak{G}_2 \{X_{r-1}, X_r\}$ выбором системы координат всегда можно привести к одному из двух видов.

1. $X_{r-1} = p_1$, $X_r = x^2 p_1$, если $\mathfrak{G}_2$ — абелева, причем один из операторов можно считать движением, а другой — гомотетией;

2. $X_{r-1} = p_1$, $X_r = x^1 p_1$, если $\mathfrak{G}_2$ — неабелева.

Рассмотрим сначала случай 1, когда метрическая функция $F(x, \dot{x})$ допускает абелеву двумерную особую подгруппу $\mathfrak{G}_2$, порожденную операторами $X_{r-1} = p_1$, $X_r = x^2 p_1$. Этот случай распадается на два подслучая: (а) X_{r-1} — оператор движения, X_r — оператор гомотетии; (б) X_{r-1} — оператор гомотетии, X_r — оператор движения. Но подслучай (б) сводится к (а) преобразованием системы координат. Итак, пусть имеет место подслучай (а). Интегрируя обобщенные уравнения Киллинга (с учетом того, что X_{r-1}, X_r имеют указанный вид), получаем

$$F = \exp(2C_r u_2^1)\, \varphi[x^2, \ldots, x^n,\ \dot{x}^2, \ldots, \dot{x}^n];\ u_2^1 = \frac{\dot{x}^1}{\dot{x}^2}. \qquad (2)$$

Условие инвариантности метрической функции (2) относительно операторов $X_k = \xi_k^i(x)\ p_i\ (k = \overline{1,\ r-2})$ группы гомотетии приводится к виду $DF = A(\dot{x}^1)^2 + B\dot{x}^1 + C \equiv 0$ (3), где функции

$A = -2C_r \dfrac{\partial_1 \xi_k^2}{(\dot{x}^2)^2}$, $C = D\varphi + \dfrac{2C_r}{\dot{x}^2} \varphi (\partial_2 \xi_k^1 \dot{x}^2 + \ldots + \partial_n \xi_k^1 \dot{x}^n)$, $B = -\dfrac{2C_r}{(\dot{x}^2)^2} (\partial_2 \xi_k^2 \dot{x}^2 + \partial_3 \xi_k^2 \dot{x}^3 + \ldots + \partial_n \xi_k^2 \dot{x}^n) \varphi + \dfrac{2C_r}{\dot{x}^2} \partial_1 \xi_k^1 \varphi + \partial_1 \xi_k^2 \varphi_{\cdot 2} + \partial_1 \xi_k^3 \varphi_{\cdot 3} + \ldots + \partial_1 \xi_k^n \varphi_{\cdot n}$ не зависят от первой координаты опорного объекта. Из тождества (3) следует, что $A = B = C = 0$. Учитывая затем, что $F(x, \dot{x}) = \varphi \cdot \psi$, $\psi = \exp (2C_r u_2^1)$, условие инвариантности функции (2) можно представить в виде $\varphi \cdot D\psi + \psi \cdot D\varphi = 0$ **(4)**, где $D\varphi$ определяется из условия $C = 0$. Вставляя эту производную в (4), находим $D\psi = \dfrac{2C_r}{\dot{x}^2} (\partial_2 \xi_k^1 \dot{x}^2 + \partial_3 \xi_k^1 \dot{x}^3 + \ldots + \partial_n \xi_k^1 \dot{x}^n) \psi$ **(5)**. Исключив из (5) ψ и $D\psi$, получим $\partial_1 \xi_k^2 (\dot{x}^1)^2 + (\partial_2 \xi_k^2 - \partial_1 \xi_k^1) \dot{x}^1 \dot{x}^2 + \partial_3 \xi_k^2 \dot{x}^1 \dot{x}^3 + \ldots + \partial_n \xi_k^2 \dot{x}^1 \dot{x}^n = 0$. Это квадратичное соотношение выполняется тождественно относительно переменных направления $\dot{x}^i$, поэтому $\partial_1 \xi_k^2 = 0$, $\partial_2 \xi_k^2 - \partial_1 \xi_k^1 = 0$, $\partial_i \xi_k^2 = 0$; $i = \overline{3, n}$ **(6)**.

Таким образом, заключаем, что вторая компонента $\xi_k^2(x)$ может зависеть только от одной переменной x^2: $\xi_k^2 = \xi_k^2(x^2)$ **(7)**.

Теперь обратимся к условию $B = 0$, учитывая (6) и (7), приходим к равенству $\partial_1 \xi_k^3 \varphi_{\cdot 3} + \partial_1 \xi_k^4 \varphi_{\cdot 4} + \ldots + \partial_1 \xi_k^n \varphi_{\cdot n} = 0$ **(8)**. Дифференцируя (8) по $\dot{x}^2, \dot{x}^3, \ldots, \dot{x}^n$ и принимая во внимание затем условие невырожденности метрической функции, получаем $\partial_1 \xi_k^3 = \partial_1 \xi_k^4 = \ldots = \partial_1 \xi_k^n = 0$. Отсюда следует, что $[X_{r-1} X_k] = \partial_1 \xi_k^1 (x) p_1$ пропорционален X_{r-1}, т. е. $\partial_1 \xi_k^1 (x) = \mathrm{const}$, $[X_{r-1} X_k] \in L_2$. Оператор $[X_r X_k] = [x^2 \partial_1 \xi_k^1 (x) - \xi_k^2 (x)] p_1$ также является оператором движения ($x^2 \partial_1 \xi_k^1 (x) - \xi_k^2 (x) = \mathrm{const}$) и содержится в L_2. Аналогично рассматривается подслучай (б).

Переходим теперь к рассмотрению случая 2, когда метрическая функция $F(x, \dot{x})$ допускает неабелеву двумерную особую подгруппу $\mathfrak{S}_2$, порожденную операторами $X_{r-1} = p_1$, $X_r = x^1 p_1$. Так как $[X_{r-1} X_r] = X_{r-1}$, то X_{r-1} является оператором движения, X_r — оператором гомотетий и метрическая функция $F(x, \dot{x})$ будет $F(x, \dot{x}) = (\dot{x}^1)^{2C_r} \varphi [x^2, \ldots, x^n, \dot{x}^2, \ldots, \dot{x}^n]$ **(9)**. Условия инвариантности функции (9) относительно оператора $X_k = \xi_k^1 (x) p_i$ ($k \leqslant r-2$) также приводятся к виду $L (\dot{x}^1)^2 + M \dot{x}^1 + N \equiv 0$ **(10)**, где коэффициенты L, M, N не зависят от переменной x^1. Поэтому из (10) следует, в частности, что

$$L = \frac{\partial \xi_k^2}{\partial x^1} \varphi_{\cdot 2} + \ldots + \frac{\partial \xi_k^n}{\partial x^1} \varphi_{\cdot n} \equiv 0;$$

$$N = 2C_r \left(\frac{\partial \xi_k^1}{\partial x^2} \dot{x}^2 + \frac{\partial \xi_k^1}{\partial x^3} \dot{x}^3 + \ldots + \frac{\partial \xi_k^1}{\partial x^n} \dot{x}^n \right) \varphi \equiv 0.$$

Далее из первого тождества и условия невырожденности метрической функции (9) заключаем, что компоненты $\xi_k^2(x)$, $\xi_k^3(x)$, ..., $\xi_k^n(x)$ не содержат переменной x^1. Из второго тождества выводим, что $\frac{\partial\xi_k^1}{\partial x^2}\dot{x}^2+\frac{\partial\xi_k^1}{\partial x^3}\dot{x}^3+\ldots+\frac{\partial\xi_k^1}{\partial x^n}\dot{x}^n=0$. Так как это равенство выполняется тождественно относительно $\dot{x}^2, \ldots, \dot{x}^n$ и коэффициенты $\frac{\partial\xi_k^1}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial\xi_k^1}{\partial x^n}$ не зависят от координат опорного объекта, то $\frac{\partial\xi_k^1}{\partial x^2}=\ldots=\frac{\partial\xi_k^1}{\partial x^n}=0$, $\xi_k^1=\xi_k^1(x^1)$. Таким образом, $[X_{r-1}X_k]$, $[X_r X_k]$ являются операторами движений, пропорциональными X_{r-1}, т. е. $[X_{r-1}X_k]\in L_2$, $[X_r\ X_k]\in L_2$. Теорема доказана полностью.

Из этой теоремы следует, что группы гомотетий финслеровых пространств второго рода будут импримитивными группами преобразований — группами, допускающими одномерные системы импримитивности. Линии импримитивности являются общими траекториями особых операторов. В дальнейшем группы гомотетий с такими линиями импримитивности называются F-импримитивными. Группа $\mathfrak{G}_r$, линии импримитивности которой порождаются некоторым оператором этой группы, называется g-импримитивной.

Двучленный идеал L_2 с общими траекториями будем называть особым идеалом OI_2 в алгебре L_r. С другой стороны, алгебра L_r группы гомотетий содержит подалгебру L_{r-1} движений, которая является идеалом L_r. Отсюда следует, что в особом идеале OI_2 имеется один вектор движения, и мы его можем выбрать в качестве базисного оператора X_{r-1}, а в качестве оператора X_r возьмем какой-либо оператор гомотетии, принадлежащий алгебре L_r. В целом алгебра группы гомотетий L_r разлагается, вообще говоря, в полупрямую сумму идеала OI_2 и подалгебры L_{r-2}. Если же подалгебра L_{r-2} будет идеалом, то сумма будет прямой. Докажем также некоторые свойства, характеризующие особую одночленную алгебру $L_1\{X_{r-1}\}$ движений.

Теорема 4. *Особая одночленная алгебра $L_1\{X_{r-1}\}$ является идеалом в особом идеале OI_2.*

Действительно, коммутатор $[X_{r-1}X_r]=[X_{r-1},\ \psi(x)\ X_{r-1}]$ операторов X_{r-1}, X_r должен выражаться в силу приведенных выше рассуждений через оператор движения X_{r-1}. А это и означает, что X_{r-1} — идеал в OI_2.

Теорема 5. *Особая одночленная алгебра $L_1\{X_{r-1}\}$ является идеалом в алгебре L_r группы гомотетий.*

В самом деле, выберем базис в L_r так, чтобы $X_1, \ldots, X_{r-1}$ были в L_{r-1}, X_r — какой-нибудь вектор гомотетии. Возьмем любой вектор $X\in L_{r-1}$ и образуем коммутатор $[X X_{r-1}]=[C_1X_1+ + C_2X_2+\ldots+C_rX_r,\ X_{r-1}]=C_1[X_1X_{r-1}]+C_2[X_2X_{r-1}]+\ldots+ + C_r[X_rX_{r-1}]$. Коммутаторы $[X_iX_{r-1}]$ будут выражаться через X_{r-1}, X_r, так как, по доказанному ранее, $L_2\{X_{r-1},\ X_r\}$ — идеал. С другой стороны, X_r является вектором гомотетии и поэтому в производном идеале не содержится. Следовательно, получим $[X_i \quad X_{r-1}] = \mu_i X_{r-1}$, т. е. X_{r-1} будет идеалом в алгебре L_r.

Теорема 6. *Особая одночленная алгебра $L_1\{X_{r-1}\}$ является идеалом в подалгебре движений L_{r-1}.*

Эта теорема является непосредственным следствием предыдущей теоремы. Отметим также, что особая алгебра L_1 будет пересечением особого идеала OI_2 и идеала L_{r-1}: $L_1 = L_{r-1} \cap OI_2$.

Приведенные теоремы играют важную роль при определении финслеровых пространств F_n ($n = 2, 3, 4$), допускающих группы гомотетий.

В случае, когда алгебра L_r является алгеброй группы гомотетий первого рода, т. е. L_r не содержит особого идеала, указанная задача решается следующим образом. Для каждой алгебры Ли строится алгебра Ли бесконечно малых преобразований в дву-, трех- и четырехмерных пространствах, учитывая, что два различных оператора гомотетий первого рода не могут иметь общих траекторий. При этом система координат в пространстве представления выбирается так, чтобы операторы группы имели наиболее простой вид. Если в полученной таким образом локальной группе Ли преобразований $\mathfrak{G}_r\{X_1, X_2, \ldots, X_m, \ldots, X_r\}$ первые m базисных операторов образуют коммутант этой группы, чего можно всегда добиться выбором базиса, то они будут операторами движений в $\mathfrak{G}_r$, остальные базисные операторы являются операторами гомотетии. Затем составляется и интегрируется система обобщенных уравнений Киллинга и выясняется, для каких продолженных групп $\mathfrak{G}_r$ найденный абсолютный инвариант может быть сделан однородной функцией второй степени от $\dot{x}^\alpha$ с условием ее невырожденности. Таким образом получаются метрические функции финслеровых пространств, допускающих группы гомотетий первого рода [2].

Когда алгебра L_r будет алгеброй группы гомотетий второго рода, находим сначала возможные одномерные идеалы $I\{Y\}$ в L_{r-1}, порождающие линии g-импримитивности группы движений с данной алгеброй L_{r-1}. Алгебра L_{r-1} при этом предполагается погруженной в r-мерное векторное пространство E_r. Затем переходим к изоморфной алгебре векторных полей. Присоединяя векторное поле $Z = \psi(x)\, Y$, расширим эту алгебру полей до r-мерного векторного пространства E_r^0. Функция $\psi(x^1, \ldots, x^n)$ находится из условия, что расширенное пространство операторов E_r^0 образует алгебру Ли (эту алгебру можно перенести в E_r так, что последняя будет алгеброй, а L_{r-1} — ее подалгеброй). Далее примем Y, Z за базисные операторы особого идеала OI_2 и включим их в базисные операторы E_r^0 так, чтобы $Y = X_{r-1}$, $Z = X_r$. Затем, составляя и интегрируя систему обобщенных уравнений Киллинга, находим финслеровы пространства, для которых построенные операторы являются операторами группы Ли гомотетических преобразований второго рода. Траектории особых операторов будут системой F-импримитивности группы гомотетий.

Этим методом операторов с общими траекториями изучаются также автоморфизмы и гомотетии в пространствах Дейвиса D_n метрических пространствах опорных векторных u_i и ковекторных u_i плотностей веса p. Метрика в пространствах D_n определяется скалярной функцией $F(x, u^i)$, $F(x, u_i)$ второго измерения однородности относительно переменных $u^i(u_i)$ и удовлетворяет условию невырожденности [3].

Здесь также вводится понятие особых операторов и групп гомотетий первого и второго рода. Совокупность особых операторов изометрий образует подалгебру алгебры Ли группы всех изометрий. Если D_n допускает два особых оператора изометрий, то оно нерегулярно в смысле введения аффинной связности и допускает бесчисленное множество особых операторов; порождаемая ими подгруппа $\mathfrak{G}$ неразрешима.

Особая подгруппа $\mathfrak{G}$ изометрий пространства D_n является нормальным делителем всей группы изометрий.

Особая подгруппа $\mathfrak{G}_2$ группы гомотетий $\mathfrak{G}_r$ в пространстве D_n является инвариантной подгруппой $\mathfrak{G}_2$; в ней существует однозначно определенная одномерная подалгебра изометрий, которая будет трижды идеалом: в особой алгебре $\mathfrak{G}_2$, алгебре изометрий и алгебре группы $\mathfrak{G}_r$.

Эти теоремы позволяют определить все пространства D_n ($n = 2, 3, 4$) векторных и ковекторных плотностей веса p, допускающие изометрии и гомотетические преобразования [3]. Отметим также, что если вес векторных (ковекторных) плотностей $p = 0$ ($p = -1$), то D_n является пространством Финслера (Картана).

Список литературы: 1. *Лаптев Б. Л.* Дифференцирование Ли. — Итоги науки. Алг. Топол. Геом., 1965, М., 1967, с. 429—465. 2. *Егорова Л. И.* Гомотетические преобразования первого и второго рода в финслеровых пространствах.— Всесоюз. конф., Казань, 1976. Тез. докл,. с. 76. 3. *Егорова Л. И.* Автоморфизмы и гомотетии в пространствах Дейвиса.— Всесоюз. конф., Минск, 1979. Тез. докл., с. 65.

Поступила в редколлегию 15.03.80.

УДК 513

В. Ф. Игнатенко

ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ С ГРУППОЙ СИММЕТРИЙ МНОГОГРАННИКА 2_{21}

Известен метод [1] нахождения образующих (базисных инвариантов) алгебры многочленов с конечной группой симметрий G вещественного пространства E^m, основанный на свойствах многочленов $\theta_{2s} = \sum_{j=1}^{v} \eta_j^{2s}$, $s \geqslant 1$ (1), где $\eta_j = 0$ — нормированные уравнения $(m-1)$-мерных плоскостей симметрии E^m, отражения в которых являются элементами группы G. В данной заметке при помощи (1) находится полный базис $I_i\,(i = \overline{1,6})$ алгебры I многочленов, инвариантных относительно группы симметрий E_6 многогранника 2_{21} пространства E^6; попутно находятся и числа $n_i = \deg I_i$. Другие методы получения образующих I_i рассмотрены в работах Г. С. М. Коксетера [2] и Дж. Фрейма [3]; одно свойство I_i установили Л. Флатто и М. Вайнер [4].

1°. В прямоугольной системе координат $Ox_i\,(i = \overline{1,6})$ двадцать семь вершин многогранника 2_{21} (шестимерного многогранника Госсета [2]) зададим строками следующей матрицы (Г. С. М. Коксетер [5]):

$$\left\| \begin{matrix} 0 & 0 & c_\lambda & s_\lambda & -c_\mu & -s_\mu \\ -c_\mu & -s_\mu & 0 & 0 & c_\lambda & s_\lambda \\ c_\lambda & s_\lambda & -c_\mu & -s_\mu & 0 & 0 \end{matrix} \right\|, \tag{2}$$

где $c_\lambda = \cos\frac{2\pi\lambda}{3}$, $s_\lambda = \sin\frac{2\pi\lambda}{3}$; $\lambda,\ \mu = 1,\ 2,\ 3$. При этом все тридцать шесть плоскостей симметрии многогранника 2_{21} определяются такими уравнениями: $x_2 = 0$, $x_4 = 0$, $\sqrt{3}x_1 + x_2 = 0$, $\sqrt{3} \times x_3 + x_4 = 0$, $\sqrt{3}x_5 + x_6 = 0$, $x_1 + x_3 + x_5 = 0$ (3) и $x_6 = 0$, $\sqrt{3}x_1 - x_2 = 0$, $\sqrt{3}x_3 - x_4 = 0$, $\sqrt{3}x_5 - x_6 = 0$; $x_1 \pm \sqrt{3}x_2 - 2x_3 - 2x_5 = 0$, $x_1 \pm \sqrt{3}x_2 + x_3 \pm \sqrt{3}x_4 - 2x_5 = 0$, $x_1 \pm \sqrt{3}x_2 - 2x_3 + x_5 \pm \sqrt{3}x_6 = 0$, $x_1 \pm \sqrt{3}x_2 + x_3 \pm \sqrt{3}x_4 + x_5 \pm \sqrt{3}x_6 = 0$, $2x_1 - x_3 \pm \sqrt{3}x_4 + 2x_5 = 0$; $2x_1 - x_3 \pm \sqrt{3}x_4 + x_5 \pm \sqrt{3}x_6 = 0$, $2x_1 + 2x_3 - x_5 \pm \sqrt{3}x_6 = 0$ (4).

Плоскости (3) задают стенки камеры для группы симметрий E_6. Введем переменные

$$u_p = 3x_\beta^2 x_\alpha - x_\alpha^3,\quad v_p = x_\alpha^2 + x_\beta^2; \tag{5}$$

$p = 1,\ 2,\ 3$ соответственно $(\alpha\beta) = (12),\ (34),\ (56)$. Функции u_p, v_p являются криволинейными координатами точки пространства E^6 (матрицу (2) и координаты типа (5) использовал также Дж. Фрейм [3]). Пусть дифференциальный оператор

$$\Delta = \sum u_p (v_q - v_r)\frac{\partial}{\partial v_p} + \frac{1}{6}\sum u_p (u_q - u_r)\frac{\partial}{\partial u_p} - \sum u_p v_q (v_q - v_r) \times \frac{\partial^2}{\partial v_p \partial v_q} - \frac{1}{2}\left[\sum v_p^2 (u_q - u_r) - \frac{5}{2}\sum u_p (v_q^2 - v_r^2)\right]\frac{\partial^2}{\partial v_q^2}, \tag{6}$$

где $p,\ q,\ r = 1,\ 2,\ 3$ (циклически). Будем считать $H_{2s} = \nu(s)\,\theta_{2s}$ (7) при $\nu(1) = \frac{1}{6}$, $\nu(3) = 16$, $\nu(4) = 3 \cdot 2^6$, $\nu(6) = 3^3 \cdot 2^{10}$. Имеет место следующая

Теорема. *Формы H_2, ΔH_2, H_6, H_8, $\Delta(15H_2^3 - H_6)$, H_{12} образуют полный базис алгебры I многочленов, инвариантных относительно группы симметрий E_6.*

Таким образом, каждую пятимерную алгебраическую поверхность с группой симметрий E_6, не содержащую своих плоскостей симметрии (3), (4), можно задать в E^6 уравнением $\varphi = 0$, где φ есть многочлен относительно указанных в теореме образующих алгебры I.

2⁰. Для доказательства теоремы заметим, что согласно (3) и $x_6 = 0$ произвольная форма $I_n(\boldsymbol{x})$ алгебры I, где вектор $\boldsymbol{x} = (x_i)$ и $n = \deg I_n(\boldsymbol{x})$, допускает перестановку P: $(x_i) \to (x_3, x_4, x_5, x_6, x_1, x_2)$, причем переменные x_2, x_4, x_6 входят в $I_n(\boldsymbol{x})$ только в четных степенях. В каждой из трех координатных 2-плоскостей $Ox_\alpha x_\beta$ уравнения $x_\beta = 0$, $\sqrt{3}x_\alpha + x_\beta = 0$ определяют стенки камеры для диэдральной группы симметрий $G_{\alpha\beta}$ шестого порядка. Так как уравнения $x_i = c_i\,(i \neq \alpha, \beta)$, где c_i — постоянные, задают 2-плоскости, параллельные соответствующим $Ox_\alpha x_\beta$, то любой из многочленов $I_n(x_\alpha, x_\beta, c_i)$ принадлежит алгебре $I_{\alpha\beta}$ инвариантов группы симметрий $G_{\alpha\beta}$. Поскольку формы u_p, v_p (значение p зависит от α, β) образуют полный базис алгебры $I_{\alpha\beta}$ [6], то ее инварианты $I_n(x_\alpha, x_\beta, c_i)$ являются многочленами степени $\leqslant n - 1$ относительно переменных u_p, v_p.

Найдем теперь числа $n_i = \deg I_i$ $(i > 1,\ n_1 = 2)$ и сами образующие I_i. Рассмотрим первоначально следующие значения степени $n: 3 \leqslant n \leqslant 8$.

1. $n = 3$. Форма $I_3(\boldsymbol{x}) = a_1 u_1 + a_2(x_3 + x_5)v_1 + \psi(x_3, x_4, x_5, x_6)$, где a_1, a_2 — вещественные коэффициенты, $\deg\psi = 3$. Так как перестановка P переводит $x_3 + x_5$ в $x_5 + x_1$ и обратно, то коэффициент $a_2 = 0$; при этом $\psi = a_1(u_2 + u_3)$. Следовательно, $I_3(\boldsymbol{x}) = a_1 \sum u_p$. Преобразование $f: (x_i) \mapsto \left[\frac{1}{3}(x_1 - 2x_3 - 2x_5),\ x_2,\ \frac{1}{3}(-2x_1 + x_3 - 2x_5),\ x_4,\ \frac{1}{3}(-2x_1 - 2x_3 + x_5),\ x_6\right]$ задает отражение относительно плоскости $x_1 + x_3 + x_5 = 0$ — одной из плоскостей (3), определяющих фундаментальную область для группы симметрий E_6. Форма $I_3(\boldsymbol{x})$ должна быть инвариантна относительно f, что невозможно; значит, $n_2 > 3$.

2. $n = 4$. Инвариант $I_4(\boldsymbol{x}) = a_1 \sum v_p^2 + a_2 \sum\limits_{p<q} v_p v_q$. Так как $I_4(\boldsymbol{x}) = f[I_4(\boldsymbol{x})]$, то $a_2 = 2a_1$. Следовательно, $I_4(\boldsymbol{x}) = a_1 H_2^2$, где $H_2 = I_1 = \sum v_p$ (8). Поэтому $n_2 > 4$.

3. $n = 5$. Форма $I_5(\boldsymbol{x}) = a_1 \sum u_p v_p + \sum u_p(a_2 v_q + a_3 v_r)$; p, q, $r = 1, 2, 3$ (циклически), a_1, a_2, a_3 — вещественные коэффициенты. Поскольку $I_5(\boldsymbol{x}) = f[I_5(\boldsymbol{x})]$, то $a_1 = 0$, $a_2 = -a_3$; число $n_2 = 5$. Единственный (с точностью до постоянной) базисный инвариант $I_2 = \sum u_p(v_q - v_r)$. Согласно равенству (8) $I_2 = \Delta H_2$.

4. $n = 6$. Каждый инвариант $I_6(\boldsymbol{x}) = a_1 \sum u_p^2 + a_2 \sum u_p u_q + a_3 \sum v_p^3 + \sum v_p^2(a_4 v_q + a_5 v_r) + a_6 v_1 v_2 v_3$ при подходяще выбранных коэффициентах $a_i\,(i = \overline{1,6})$. Если $H_6 = I_6(\boldsymbol{x})$, то $a_1 = -2$, $a_2 = 20$, $a_3 = 21$, $a_4 = a_5 = 45$, $a_6 = 180$. Так как форма $H_6 \neq cH_2^3$, где $c = \mathrm{const}$, то она является базисным инвариантом, $n_3 = 6$. Все базисные формы шестой степени образуют однопараметрическое

семейство инвариантов $H_6 + kH_2^3$ (k — параметр). Положив здесь $k = -15$ и разделив на 2, получим упрощенную образующую

$$Q_6 = -\sum u_p^2 + 10 \sum_{p<q} u_p u_q + 3 \sum v_p^3 + 45 v_1 v_2 v_3. \tag{9}$$

5. $n = 7$. Как и в третьем случае, находим единственный (с точностью до постоянной) инвариант $\Delta H_2 \cdot H_2$, $n_4 > 7$.

6. $n = 8$. Любая форма $I_8(x) = a_1 \sum u_p^2 v_p + \sum u_p^2 (a_2 v_q + a_3 v_r) + \sum u_p v_p (a_4 u_q + a_5 u_r) + a_6 \sum u_p u_q v_r + a_7 \sum v_p^4 + \sum v_p^3 (a_8 v_q + a_9 \times v_r) + a_{10} \sum v_p^2 v_q^2 + a_{11} \sum v_p^2 v_q v_r$ при некоторых коэффициентах $a_j (j = \overline{1,11})$; $p, q, r = 1, 2, 3$ (циклически). Положив $H_8 = I_8(x)$, найдем следующие значения $a_j: a_1 = -64$, $a_2 = a_3 = 56$, $a_4 = a_5 = 280$, $a_6 = 1120$, $a_7 = 207$, $a_8 = a_9 = 252$, $a_{10} = 630$, $a_{11} = 2520$. Если $H_8 = b_1 H_2^4 + b_2 Q_6 H_2$ **(10)**, то, приравняв соответствующие коэффициенты при v_1^4, $v_1^3 v_2$, $v_1^2 v_2^2$, на основании (8), (9) получим несовместную систему линейных уравнений относительно переменных b_1 и $b_2: b_1 + 3b_2 = 207$, $4b_1 + 3b_2 = 252$, $b_1 = 106$. Следовательно, равенство (10) невозможно; H_8 — базисный инвариант, $n_4 = 8$. Все базисные формы восьмой степени образуют уже двупараметрическое семейство инвариантов $H_8 + kQ_6 H_2 + lH_2^4$ (k, l — параметры). При $k = 112$, $l = -129$ имеем образующую $4 \sum u_p^2 v_p + 14 \sum u_p^2 (v_q + v_r) - 70 \sum u_p v_p (u_q + u_r) + 36 \sum v_p^3 (v_q + v_r) + 117 \sum v_p^2 v_q^2 - 81 \sum v_p^2 v_q v_r$ **(11)**.

3°. Степени $n_i (i = \overline{1,6})$ базисных инвариантов I_i удовлетворяют равенствам: $\sum n_i = 42$ (Л. Лекорню [7]), $\Pi n_i = 72 \cdot 6!$ (Г. С. М. Коксетер [2]). Поэтому $n_5 + n_6 = 21$, $n_5 n_6 = 108$; отсюда $n_5 = 9$, $n_6 = 12$. Как и в случае $n = 5$ (при более сложных вычислениях), находим $I_5 = 4 \sum u_p^2 (u_q - u_r) + 18 \sum v_p^3 (u_q - u_r) - 18 \sum u_p v_p^2 (v_q - v_r) - 45 \sum u_p v_p (v_q^2 - v_r^2)$ **(12)**. Поскольку $\Delta Q_6 = -\frac{1}{2} I_5$ (см. (9), (12)), то $I_5 = \Delta (15 H_2^3 - H_6)$.

Инвариант $H_{12} = 10183 x_1^{12} + 27783 x_2^{12} + 216546 x_1^{10} x_2^2 + 11286 \times x_1^{10} x_3^2 + 63855 x_1^8 x_3^4 + 1870 x_1^3 x_3^9 + 5346 x_1^2 x_6^{10} + \zeta(x)$ **(13)**, где $\zeta(x)$ состоит из всех одночленов H_{12}, не выделенных в (13). Убедимся, что невозможно следующее равенство: $H_{12} = b_1 H_2^6 + b_2 I_2^2 \times H_2 + b_3 Q_6^2 + b_4 Q_6 H_2^3 + b_5 H_8 H_2^2$ **(14)**. Для этого формы Q_6 и H_8 запишем так: $2(x_1^6 + x_3^6 + x_5^6) + 3(x_2^6 + x_4^6 + x_6^6) + 15(x_1^4 x_2^2 + x_3^4 x_4^2 + x_5^4 x_6^2) + 10(x_1^3 x_3^3 + x_1^3 x_5^3 + x_3^3 x_5^3) + \chi(x)$ **(15)**, $143 x_1^8 + 207(x_2^8 + x_6^8) + 1148 x_1^6 x_2^2 + 308 x_1^6 x_3^2 + 280 x_1^3 x_3^5 + 252 x_1^2 x_6^6 + \xi(x)$ **(16)**; $\chi(x)$ и $\xi(x)$ не влияют в (14) на коэффициенты при одночленах x_1^{12}, $x_1^{10} x_2^2$, $x_1^{10} x_3^2$, $x_1^3 x_3^9$, $x_1^2 x_6^{10}$ **(17)**.

Отметим, что указанные одночлены не входят в $I_2^2 H_2$. Приравняв в (13) соответствующие коэффициенты при (17), на основании (15), (16) получим систему линейных уравнений: $b_1 + 9b_3 + 3b_4 + 207b_5 = 27783$; $2b_1 + 20b_3 + 7b_4 + 478b_5 = 72182$; $b_1 + b_4 + 99b_5 = 1181$; $4b_3 + b_4 + 28b_5 = 1870$; $2b_1 + 3b_4 + 222b_5 = 1782$ **(18)**.

Сложим эти уравнения, умножив их соответственно на -140, 51, 108, 60, -35; получим $1 = 0$, система (18) несовместна. Значит, H_{12} — образующая двенадцатой степени. Теорема доказана.

Примечание. Каждая из базисных поверхностей $H_{2s} = c$ ($s = 1, 3, 4, 6$) согласно (1), (7) обладает таким свойством: сумма $2s$-х степеней расстояний ее произвольной точки от всех плоскостей симметрии равна $\frac{c}{\nu(s)}$. Упрощение инвариантов H_{2s} ($s > 1$) (см. (9), (11)) геометрическую интерпретацию соответствующих поверхностей несколько усложняет.

Список литературы: 1. *Игнатенко В. Ф.* Геометрия алгебраических поверхностей с симметриями. — Проблемы геометрии (Итоги науки и техн., ВИНИТИ АН СССР), 1980, вып. 11, с. 203—240. 2. *Coxeter H. S. M.* The product of the generators of a finite group generated by reflections. — Duke Math J., 1951, 18, p. 765—782. 3. *Frame J. S.* The classes and representations of the groups of a 27 lines and 28 bitangents. — Annali di Matematica, 1951, 32, p. 83—119. 4. *Flatto L.* Invariants of finite reflection groups. — Enseign. math., 1978, 24, № 3—4, p. 237—292. 5. *Coxeter H. S. M.* The polytope 2_{21}, whose twenty-seven vertices correspond to the lines on the general cubic surface. — Amer. J. Math., 1940, 76, № 3, p. 457—486. 6. *Игнатенко В. Ф., Лейбин А. С.* Алгебраические поверхности с симметрией правильного m-мерного симплекса. — Укр. геометр. сб., 1974, вып. 16, с. 3—8. 7. *Lecornu L.* Sur les surfaces possédant les mêmes plans de symétrie que l'un des polyèdres réguliers. — Acta math., 1887, **10**, p. 201—280.

Поступила в редколлегию 14.11.80.

УДК 513.73;513.82

В. Ф. Кириченко

УСТОЙЧИВОСТЬ ПОЧТИ ЭРМИТОВЫХ СТРУКТУР, ИНДУЦИРОВАННЫХ 3-ВЕКТОРНЫМИ ПРОИЗВЕДЕНИЯМИ НА ШЕСТИМЕРНЫХ ПОДМНОГООБРАЗИЯХ АЛГЕБРЫ КЭЛИ

Пусть M^n — n-мерное риманово многообразие с метрикой $\langle,\rangle$ и римановой связностью ∇; $\mathfrak{X}(M^n)$ — модуль гладких векторных полей на M^n; d и δ — операторы внешнего дифференцирования и кодифференцирования соответственно. Все многообразия, тензорные поля и т. п. объекты предполагаются гладкими класса C^∞.

Определение 1. *r-векторным произведением на M^n называется тензорное поле P типа $(r, 1)$ на M^n, обладающее свойствами:* 1. $\forall X_1, \ldots, X_r \in \mathfrak{X}(M^n) \Rightarrow \langle P(X_1, \ldots, X_r), X_k\rangle = 0$ $(k = 1, \ldots, r)$; 2. $\forall X_1, \ldots, X_r \in \mathfrak{X}(M^n) \Rightarrow \| P(X_1, \ldots, X_r)\|^2 = \det(\langle X_i, X_j\rangle)$. *Естественно определяется изоморфизм r-векторных произведений* [1].

Пример 1. Обычное векторное произведение в R^3 и, более общо, $(n-1)$-векторное произведение в R^n, полученное поднятием индекса у ориентационного тензора [2].

Пример 2. Пусть $\boldsymbol{O}$ — алгебра Кэли, т. е. восьмимерное вещественное евклидово пространство с метрикой $\langle , \rangle$, в котором определена структура алгебры с единицей e_0, причем $\forall X, Y \in 0 \Rightarrow \Rightarrow \|X \cdot Y\| = \|X\| \|Y\|$. В ней каноническим образом определены два неизоморфных 3-векторных произведения P_1 и P_2, причем любое третье 3-векторное произведение в $\boldsymbol{O}$ изоморфно P_1 или P_2 [1]. Именно, $P_1(a, b, c) = \varepsilon(-a(\widetilde{bc}) + \langle a, b\rangle c + \langle b, c\rangle a - \langle c, a\rangle b)$; $P_2(a, b, c) = \varepsilon(-(\widetilde{ab})c + \langle a, b\rangle c + \langle b, c\rangle a - \langle c, a\rangle b)$; $(\varepsilon = \pm 1)$, где $b \to \tilde{b}$ — оператор сопряжения в алгебре Кэли [3].

Пример 3. Понятие почти эрмитовой структуры $\{J; \langle , \rangle\}$ на M^n, где J — оператор структуры; $J^2 = -\mathrm{id}$, эквивалентно понятию 1-векторного произведения [1]. Перечислим основные классы почти эрмитовых структур и их характеристики [1]: 1. Семикелеровы (SK): $\delta\Omega = 0$; 2. Эрмитовы (H): $\nabla_X(J)(Y) - \nabla_{JX}(J)(JY) = 0$; 3. Квазикелеровы (QK): $\nabla_X(J)(Y) + \nabla_{JX}(J)(JY) = 0$; 4. Почти келеровы (AK): $d\Omega = 0$; 5. Приближенно келеровы (NK): $\nabla_X \times \times (J)(X) = 0$; 6. Келеровы (K): $\nabla J = 0$ **(1)**.

Здесь $X, Y \in \mathfrak{X}(M^n)$; $\Omega(X, Y) = \langle X, JY\rangle$ — фундаментальная форма структуры.

Хорошо известно [1], что задание r-векторного произведения на M^n индуцирует задание $(m-n+r)$-векторного произведения на его m-мерном ориентируемом подмногообразии. В частности, каждое из 3-векторных произведений P_1 и P_2 индуцирует на 6-мерном ориентируемом подмногообразии алгебры Кэли почти эрмитовы структуры; обозначим их $\{J_1; \langle , \rangle\}$ и $\{J_2; \langle , \rangle\}$ и назовем структурами первого и второго рода соответственно. Именно, если $m \in M^6 \subset \boldsymbol{O}$, то $\forall X \in T_m(M^6) \Rightarrow J_\varkappa(X) = P_\varkappa(X, Y, Z)$ $(\varkappa = 1; 2)$, где $Y, Z \in T_m(M^6)^\perp$, $\|Y\| = \|Z\| = 1$; $\langle Y, Z\rangle = 0$; $Y \wedge Z$ согласовано с ориентациями $\boldsymbol{O}$ и M^6, причем оператор структуры $J_\varkappa$ не зависит от выбора Y и Z, удовлетворяющих указанным условиям [1]. Здесь $T_m(M^6)$ — касательное пространство к M^6 и $T_m(M_6)^\perp$ — его ортогональное дополнение. Грей доказал, что эти структуры являются семикелеровыми [1]. С другой стороны, Грей привел пример шестимерного подмногообразия алгебры Кэли, на котором одна из индуцированных структур некелерова, а другая — келерова [1]. В связи с этим назовем структуры $\{J_1, \langle , \rangle\}$ и $\{J_2, \langle , \rangle\}$ двойственными и введем

Определение 2. *Структуру, индуцированную на $M^6 \subset \subset \boldsymbol{O}$ и принадлежащую одному из перечисленных классов, назовем устойчивой, если двойственная ей структура принадлежит тому же классу.*

Например, согласно приведенному результату Грея такая структура всегда устойчиво семикелерова. В настоящей работе исследуются вопросы устойчивости других классов индуцированных структур. Напомним [4], что точка $m \in M^6 \subset \boldsymbol{O}$ называется особой, если $e_0 \in T_m(M^6)$, и общей — в противном случае. Общая точка называется специальной, если $T_m(M^6)$ ортогонально к e_0 и простой — в противном случае. Подмногообразия алгебры Кэли, состоящие из особых, общих или специальных точек, мы будем называть соответственно особыми, общими или специальными. Мы увидим, что вопрос об устойчивости индуцированной структуры на подмногообразии $M^6 \subset \boldsymbol{O}$ тесно связан с вопросом о принадлежности подмногообразия к одному из трех перечисленных типов. Именно Греем доказано [1], что индуцированные на $M^6 \subset \boldsymbol{O}$ структуры обоих родов совпадают тогда и только тогда, когда M^6 — специальное подмногообразие. В частности, в этом случае индуцированная на M^6 структура автоматически устойчива. В настоящей работе доказано, что структуры перечисленных классов устойчивы также в случае особых подмногообразий, хотя, согласно упомянутому результату Грея, индуцированные на них структуры в этом случае не совпадают. Наконец, в случае общего подмногообразия $M^6 \subset \boldsymbol{O}$ требование устойчивости индуцированной на M^6 структуры налагает весьма жесткие ограничения на M^6. Соблюдение этого требования делает вполне обозримой полученную классификацию общих подмногообразий с индуцированной на них устойчивой структурой данного класса. Полученные результаты являются обобщением известной классификации, полученной Греем [1], [5], специальных подмногообразий $M^6 \subset \boldsymbol{O}$, на которых индуцирована структура одного из перечисленных классов.

Обозначим через $L(a, \ldots, h)$ линейную оболочку векторов $a, \ldots, h$. Символом $M \asymp N$ обозначим локальную изометричность римановых многообразий M и N, а символом $M \stackrel{\sim}{\asymp} N$ — локальную голоморфную изометричность почти эрмитовых многообразий M и N (в данной работе относительно тождественного отображения). Символом $V^\perp$ обозначим ортогональное дополнение подпространства $V \subset \boldsymbol{O}$. Условимся, что индексы ξ, η пробегают значения от 0 до 7, индексы i, j, k — значения от 1 до 6, индексы χ, ψ — значения 7 и 8, индексы a, b, c, d, f, g, h — значения от 1 до 3, индексы $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — значения 2 и 3, индексы μ, ν — значения 1 и 2. Введем также обозначения $\breve{a} = 7 - a$, $\breve{a} = \breve{\nu} + 3$, $[a, \ldots, h]$ — альтернация объекта по индексам $a, \ldots, h$.

Хорошо известно, что группа автоморфизмов алгебры Кэли есть группа G_2 в классификации Картана [3] и уравнения вложения ее алгебры Ли $\mathfrak{g}_2 \subset \mathfrak{gl}(8, R)$ в каноническом базисе (т. е. ортонормированном базисе, в котором таблица умножения алгебры Кэли имеет канонический вид [3]) записываются следующим образом:

$$
\begin{array}{lll}
1.\ \omega_3^{\breve{2}} + \omega_2^{\breve{3}} = \omega_1^7; & 2.\ \omega_{\breve{3}}^1 + \omega_{\breve{1}}^3 = \omega_2^7; & 3.\ \omega_{\breve{2}}^1 + \omega_2^{\breve{1}} = \omega_3^7; \\
4.\ \omega_{\breve{3}}^{\breve{2}} + \omega_{\breve{3}}^2 = \omega_{\breve{1}}^7; & 5.\ \omega_{\breve{1}}^3 + \omega_1^3 = \omega_{\breve{2}}^7; & 6.\ \omega_{\breve{2}}^{\breve{1}} + \omega_1^2 = \omega_{\breve{3}}^7; \\
7.\ \omega_{\breve{1}}^1 + \omega_{\breve{2}}^2 - \omega_{\breve{3}}^3 = 0; & 8.\ \omega_\eta^\xi + \omega_\xi^\eta = 0; & 9.\ \omega_\xi^0 = \omega_0^\xi = 0. \quad (2)
\end{array}
$$

Здесь $\{\omega_\eta^\xi\}$ инвариантные формы группы Ли $GL(8, R)$ [6].

Пусть $M^6 \subset \boldsymbol{O}$ — общее подмногообразие; $m \in M^6$ — простая точка. Выберем репер $\{m, e_1, \ldots, e_8\}$ в $\boldsymbol{O}$ так, как указано в [4, с. 73]. Перейдем к комплексному реперу с векторами $\varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \times$ $\times (e_1 - \sqrt{-1} e_{\hat{1}})$; $\varepsilon_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_2 \pm \sqrt{-1}\, e_{\hat{3}} \cos\varphi - \sqrt{-1} e_{\hat{2}} \sin\varphi)$; $\varepsilon_3 =$ $= \frac{1}{\sqrt{2}}(e_3 \sin\varphi \pm e_2 \cos\varphi + \sqrt{-1}\, e_{\hat{3}})$; $\varepsilon^a = \tau(\varepsilon_a)$; $\varepsilon_\psi = e_\psi$, где φ — угол, введенный в рассмотрение в [4]; τ — оператор комплексного сопряжения [7]. Здесь и в дальнейшем первый и второй знаки $\pm$ сверху вниз соответствуют случаю структуры первого и второго рода. Назовем построенные реперы каноническими реперами первого и второго рода соответственно. Нетрудно вычислить матрицу перехода $\tilde{C}(\mathrm{I}, \mathrm{II})$ от канонического репера первого рода к каноническому реперу второго рода:

$$\tilde{C}(\mathrm{I}, \mathrm{II}) = \left(\begin{array}{c|c} C(\mathrm{I}, \mathrm{II}) & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} 10 \\ 01 \end{matrix} \end{array}\right); \quad C(\mathrm{I}, \mathrm{II}) = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline \bar{B} & \bar{A} \end{array}\right), \tag{3}$$

$$\text{где } A = \begin{pmatrix} 1; & 0 & 0 \\ 0; & \sin^2\varphi; & -\sqrt{-1}\sin\varphi\cos\varphi \\ 0; & -\sqrt{-1}\sin\varphi\cos\varphi; & \sin^2\varphi \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} 0; & 0; & 0 \\ 0; & \cos^2\varphi; & -\sqrt{-1}\sin\varphi\cos\varphi \\ 0; & \sqrt{-1}\sin\varphi\cos\varphi; & -\cos^2\varphi \end{pmatrix}.$$

Замечание 1. Векторы $\{\varepsilon_a, \varepsilon^b\}$ определяют собственный базис комплексификации оператора J_x, следовательно, определяют A-репер пространства $T_m(M^6)$ [8].

Непосредственным подсчетом можно убедиться, что в новом репере структурные уравнения (2) группы G_2 примут вид 1. $\omega^{ab} = \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon^{abc} (\mp \omega_c^8 + \sqrt{-1}\, \omega_c^7)$; 2. $\omega_{ab} = \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon_{abc} (\pm \omega_8^c + \sqrt{-1}\, \omega_7^c)$; 3. $\omega_b^a + \omega_{\hat{a}}^{\hat{b}} = 0$; 4. $\omega_a^\psi + \omega_\psi^a = \omega_{\hat{a}}^\psi + \omega_\psi^{\hat{a}} = 0$; 5. $\omega_1^\alpha = \omega^{\alpha 1} + \sqrt{-2} \times$ $\times\, \omega_8^\alpha \operatorname{tg}\varphi$; 6. $\omega_{\hat{1}}^{\hat{\alpha}} = \omega_{\alpha 1} - \sqrt{-2}\, \omega_8^{\hat{\alpha}} \operatorname{tg}\varphi$; 7. $\omega_1^1 = \sqrt{-\frac{1}{2}} (\omega_8^1 +$ $+ \omega_8^{\hat{1}}) \operatorname{tg}\varphi$; 8. $\omega_8^7 = \sqrt{-\frac{1}{2}} (\omega_{\hat{1}}^7 - \omega_1^7) \operatorname{ctg}\varphi$ **(4).**

Здесь, как и в [8], $\omega^{ab} = \omega_{\hat{b}}^a$; $\omega_{ab} = \omega_b^{\hat{a}}$; $\omega_a = \omega^{\hat{a}}$; $\varepsilon^{abc} = \varepsilon_{123}^{abc}$; $\varepsilon_{abc} = \varepsilon_{abc}^{123}$ — компоненты тензора Кронекера порядка 3 [7].

В построенном репере M^6 задается системой Пфаффа $\omega^\psi = 0$. Дифференцируя эти соотношения внешним образом и используя лемму Картана [6], получаем, что $\omega_i^\varphi = T^\varphi_{ij}\omega^j$ (5), где $\{T^\varphi_{ij}\}$ — система функций на пространстве расслоения комплексных реперов над M^6, симметричная по нижним индексам. Эти функции служат компонентами тензора эйлеровой кривизны [9] или в терминологии Грея конфигурационного тензора [5]. Из действительности этого тензора получаем, что $\overline{T}^\varphi_{ab} = T^\varphi_{\hat{a}\hat{b}}$; $\overline{T}^\varphi_{a\hat{b}} = T^\varphi_{\hat{a}b}$ (6). Следовательно, структурные уравнения почти эрмитовой структуры на M^6 [8] примут вид 1. $d\omega^a = \omega^a_b \wedge \omega^b + \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon^{ah[b}D^{c]}_h\omega_b \wedge \wedge\, \omega_c + \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon^{abh}D_{hc}\omega^c \wedge \omega_b$; 2. $d\omega_a = -\omega^b_a \wedge \omega_b + \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon_{ah[b}D^h_{c]}\omega^b \wedge \wedge\, \omega^c + \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon_{abh}D^{hc}\omega_c \wedge \omega^b$; 3. $d\omega^a_b = \omega^a_c \wedge \omega^c_b - \left(\frac{1}{2}\delta^{ah}_{bg}D_{h[i}D^g_{j]} + \sum_\varphi T^\varphi_{\hat{a}[i}T^\varphi_{j]b}\right)\omega^i \wedge \omega^j$ (7), где $D_{cj} = \mp T^8_{cj} + \sqrt{-1}\,T^7_{cj}$; $D_{\hat{c}j} = \mp T^8_{\hat{c}j} - \sqrt{-1}\,T^7_{\hat{c}j}$; $D^c_h = D_{h\hat{c}}$; $D^h_c = D_{\hat{h}c}$; $D^{hc} = D_{\hat{h}\hat{c}}$; $\delta^{ah}_{bg} = \delta^a_b\delta^h_g - \delta^a_g\delta^h_b$. При этом $\overline{\omega}^a = \omega_a$; $\overline{\omega}^a_b = -\omega^b_a$ [8]. В частности, (7_2) комплексно сопряжено (7_1), а (7_3) самосопряжено.

Лемма 1. *Пусть $\{J_\varkappa; \langle,\rangle\}$ — почти эрмитова структура, индуцированная на $M^6 \subset O$, и пусть $\{T^\varphi_{ij}\}$ — компоненты конфигурационного тензора M^6 в каноническом базисе рода $\varkappa$. Тогда* 1. $\{J_\varkappa; \langle,\rangle\} \in QK \leftrightarrow T^8_{ab} = \pm\sqrt{-1}\,T^7_{ab}$; 2. $\{J_\varkappa; \langle,\rangle\} \in H \leftrightarrow T^\varphi_{ab} = 0$; 3. $\{J_\varkappa; \langle,\rangle\} \in AK \leftrightarrow T^8_{ab} = \pm\sqrt{-1}\,T^7_{ab}$; $\sum\limits_a T^\varphi_{a\hat{a}} = 0$; 4. $\{J_\varkappa; \langle,\rangle\} \in NK$; $\{J_\varkappa; \langle,\rangle\} \notin K \leftrightarrow$ а. $T^\varphi_{a\hat{b}} = c\delta^b_a$; б. $T^\varphi_{ab} = 0$; 5. $\{J_\varkappa; \langle,\rangle\} \in K \leftrightarrow T^8_{ab} = \pm\sqrt{-1}\,T^7_{ab}$; $T^\varphi_{a\hat{b}} = 0$.

Доказательство. Известно [9], что компоненты $\{J^i_{j,k}\}$ тензора ∇J можно найти из соотношения $dJ^i_j + J^i_k\omega^k_j - J^k_j\omega^i_k = J^i_{j,k}\omega^k$. Используя это соотношение, а также (1), (4) — (6) и замечание 1, непосредственным подсчетом убеждаемся в справедливости утверждений 1 и 2 леммы 1. Справедливость 3 также проверяется непосредственным подсчетом с учетом того, что $AK \subset QK$ [1]. Справедливость 5 непосредственно следует из того, что $K = QK \cap H$ [1]. Наконец, соотношение 4а проверяется непосредственным подсчетом с учетом того, что $NK \subset QK$ [1], а соотношение 4б устанавливается с помощью 4а и следующей леммы:

Лемма 2. *В предположениях предыдущей леммы тензор кривизны квазикелерова подмногообразия J-инвариантен (т. е. $\forall X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M^6) \Rightarrow R(X, Y, Z, W) = R(JX, JY, JZ, JW)$) тогда и только тогда, когда* $\sum\limits_\varphi (T^\varphi_{\hat{a}b}T^\varphi_{\hat{c}d} - T^\varphi_{\hat{a}c}T^\varphi_{bd}) = 0$ (8).

Доказательство. Легко видеть, что тензор кривизны почти эрмитова многообразия J-инвариантен тогда и только тогда, когда формы кривизны $d\omega^i_j - \omega^i_k \wedge \omega^k_j$ этого многообразия будут чистыми формами типа (2.2) [7]. Как видно из структурных уравнений (7), именно это условие и выражается соотношениями (8). Лемма 2 доказана.

Для завершения доказательства леммы 1 остается заметить, что из структурных уравнений K-пространства (т. е. приближенно келерова многообразия) [8] с учетом сказанного непосредственно усматривается J-инвариантность его тензора кривизны.

Следствие. *На общем подмногообразии $M^6 \subset \boldsymbol{O}$ индуцируется некелерова приближенно келерова структура тогда и только тогда, когда M^6 — вполне омбилическое подмногообразие, т. е. является областью на шестимерной сфере. В частности, такая структура всегда устойчива.*

Это следует из вида метрического тензора в A-репере [7]. Этот результат из других соображений получен в [4].

С этого момента будем обозначать матрицы компонент конфигурационного тензора в каноническом репере первого рода через

$$T^{\psi} = (T^{\psi}_{ij}) = \left(\begin{array}{c|c} T^{\psi}_1 & T^{\psi}_2 \\ \hline \overline{T}^{\psi}_2 & \overline{T}^{\psi}_1 \end{array}\right),$$

а такие же матрицы в каноническом репере второго рода — через $S^{\psi} = (S^{\psi}_{ij}) = \left(\begin{array}{c|c} S^{\psi}_1 & S^{\psi}_2 \\ \hline \overline{S}^{\psi}_2 & \overline{S}^{\psi}_1 \end{array}\right)$, где T^{ψ}_{μ} и S^{ψ}_{μ} — (3×3)-матрицы (см. (6)). Учитывая (3), нетрудно установить, что $(S^{\psi}_{ij}) = C(\mathrm{I}, \mathrm{II})^t \times \times (T^{\psi}_{ij}) C(\mathrm{I}, \mathrm{II})$ $(\psi = 7;\ 8)$ **(9)**.

1. Пусть на общем подмногообразии $M^6_{\text{общ}} \subset 0$ индуцирована устойчиво квазикелерова структура. Тогда $\{J_1;\ \langle,\rangle\} \in QK \leftrightarrow T^8_1 = = \sqrt{-1}\, T^7_1$; $\{J_2;\ \langle,\rangle\} \in QK \leftrightarrow S^7_1 = \sqrt{-1}\, S^8_1$. С учетом (9) последнее соотношение можно переписать в виде $2AT^8_1A + B(\overline{T}^8_2 + + \sqrt{-1}\, \overline{T}^7_2)A + A(T^8_2 + \sqrt{-1}\, T^7_2)\overline{B} = 0$ **(10)**.

Пусть, в частности, структура $\{J_1;\ \langle,\rangle\}$ келерова. Тогда по лемме 1 $T^{\psi}_2 = 0$, следовательно, $AT^8_1A = 0$ и в силу невырожденности матрицы $AT^8_1 = 0$, следовательно, $T^7_1 = \sqrt{-1}\, T^8_1 = 0$, т. е. $M^6_{\text{общ}}$ — вполне геодезическое подмногообразие. Обратное очевидно, и отсюда вытекает

Предложение 1. *Келерова структура на $M^6_{\text{общ}} \subset 0$ устойчива $\leftrightarrow M^6_{\text{общ}}$ — вполне геодезическое подмногообразие.*

В общем случае, расписывая соотношение (10), получаем

$$1.\ T^8_{11} = 0;\ 2.\ T^8_{12} = \frac{1}{2}(-T^7_{1\hat{3}} + \sqrt{-1}\, T^8_{1\hat{3}}) \operatorname{ctg} \varphi;$$

$$3.\ T^8_{13} = \frac{1}{2}(T^7_{1\hat{2}} - \sqrt{-1}\, T^8_{1\hat{2}}) \operatorname{ctg} \varphi;\ 4.\ T^8_{23} = \frac{1}{2}(T^7_{2\hat{2}} - T^7_{3\hat{3}} + + \sqrt{-1}\, T^8_{3\hat{3}} - \sqrt{-1}\, T^8_{2\hat{2}}) \operatorname{ctg} \varphi;\ 5.\ T^8_{22} = (-T^7_{2\hat{3}} + \sqrt{-1}\, T^8_{2\hat{3}}) \operatorname{ctg} \varphi;$$

$$6.\ T^8_{33} = (T^7_{3\hat{2}} - \sqrt{-1}\, T^8_{3\hat{2}}) \operatorname{ctg} \varphi. \qquad (11)$$

Пусть тензор кривизны $M^6_{\text{общ}}$ J-инвариантен. Тогда выполнено условие (8). Решая систему этих уравнений с учетом (11), получаем $T^{\psi}_{ab}=0$; $T^{\psi}_{\alpha\hat{\beta}}=0$ $(\alpha\neq\beta)$; $T^{7}_{1\hat{\alpha}}=\sqrt{-1}\,T^{8}_{1\hat{\alpha}}$; $T^{\psi}_{2\hat{2}}=T^{\psi}_{\ldots}$ Отсюда и из соотношений (5) $\omega^7_1=T^7_{1\hat{a}}\omega_a$; $\omega^7_\alpha=T^7_{\alpha\hat{1}}\omega_1+T^{7}_{\ldots}\times\omega_\alpha$ (по α суммирования нет). Дифференцируя эти соотношения внешним образом с учетом уравнений (7), получаем, что либо $T^{\psi}_{a\hat{b}}=T^{\psi}\delta^b_a$, т. е. $M^6_{\text{общ}}$ — область на шестимерной сфере S^6, либо $T^{\psi}_{ab}=0$; $T^{\psi}_{\alpha\hat{\beta}}=T^{\psi}_{1\hat{\beta}}=0$, откуда $\omega^{\psi}_1=T^{\psi}_{1\hat{1}}\omega_1$; $\omega^{\psi}_{\alpha}=0$. С учетом этого структурные уравнения $M^6_{\text{общ}}$ запишем в виде 1. $d\omega^1=\omega^1_1\wedge\omega^1$; 2. $d\omega^\alpha=\omega^\alpha_\beta\wedge\omega^\beta-\frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon^{\alpha\beta1}(T^8_{1\hat{1}}-\sqrt{-1}\,T^7_{1\hat{1}})\operatorname{tg}\varphi\,\omega_1\wedge\omega_\beta$; 3. $d\omega^1_1=-[(T^7_{1\hat{1}})^2+(T^8_{11})^2]\,\omega^1\wedge\omega_1$; 4. $d\omega^\alpha_\beta=\omega^\alpha_\gamma\wedge\omega^\gamma_\beta$ (12) и формулы, комплексно сопряженные (ф. к. с.).

Повторяя рассуждение, примененное при выводе предложения 1 в [10], получаем отсюда, что $M^6_{\text{общ}}$ локально изометрично произведению двумерного келерова многообразия M^2 и 4-мерного локально евклидова пространства L^4. Структурные уравнения келеровой структуры на M^2 задаются соотношениями (12_1), (12_3) и ф. к. с., а его конфигурационный тензор определяется матрицами $\begin{pmatrix} T^{\psi}_{1\hat{1}} & 0 \\ 0 & T^{\psi}_{\hat{1}\hat{1}} \end{pmatrix}$, откуда видно, что M^2 — омбилическое подмногообразие, следовательно, локально изометрично двумерной сфере. Исследуем теперь подмногообразие $L^4\subset \boldsymbol{O}$. Поскольку $T^{\psi}_{\alpha\beta}=0$, оно имеет нулевой конфигурационный тензор, т. е. L^4 — вполне геодезическое, следовательно, является областью на 4-мерной плоскости.

Предложение 2. *Пусть $L(e_0)^{\perp}=A\oplus B$, где A и B — взаимно ортогональные подпространства размерностей 4 и 3 соответственно. Тогда $L(B,\ e_0)$ — подалгебра алгебры Кэли тогда и только тогда, когда A инвариантно относительно 3-векторного произведения P_1 или P_2, т. е. $\forall X,\ Y,\ Z\in A\Rightarrow P_\varkappa(X,\ Y,\ Z)\in A$ $(\varkappa=1;\ 2)$.*

Доказательство. 1. Если $L(B,\ e_0)$ — подалгебра алгебры Кэли, то, построив канонический базис $\boldsymbol{O}$ как в лемме 1 [4], выбрав при этом e_6, $e_7\in B$, видим, что $A=L(e_2,\ e_3,\ e_4,\ e_5)$. Что это подпространство инвариантно относительно P_1 и P_2, убеждаемся непосредственным подсчетом с учетом таблицы умножения алгебры Кэли и того факта, что $P_1(e_\alpha,\ e_\beta,\ e_\gamma)=-e_\alpha(e_\beta e_\gamma)$; $P_2(e_\alpha,\ e_\beta,\ e_\gamma)=-(e_\alpha e_\beta)\,e_\gamma$ $(\alpha,\ \beta,\ \gamma=2,\ \ldots,\ 5)$. 2. Пусть A инвариантно, скажем, относительно P_1. Тогда для любой тройки ортогональных векторов $X,\ Y,\ Z\in A\Rightarrow P_1(X,\ Y,\ Z)=-X(YZ)\in A$. Допустим, что $L(B,\ e_0)$ не является подалгеброй и пусть $\{X,\ Y,\ Z\}$ — ортонормированный базис B. Из предположения и леммы 1 в [4] легко вывести, что в этом случае $a = XY \in A$; $b = YZ \in A$; $c = ZX \in A$. Векторы a, b, c взаимно ортогональны, ибо, например, $\langle a, b \rangle = \langle XY, YZ \rangle = \langle X, Z \rangle = 0$. Значит, $P_1(a, b, c) \in A$. С другой стороны, из свойств алгебры Кэли [3], $P_1(a, b, c) = -(XY)[(YZ)(ZX)] = -(XY)\{[Z(ZX)]Y\} = (XY)(XY) = -e_0 \notin A$. Значит, предположение неверно. Предложение доказано.

Следствие. *Подпространство $A^4 \subset L(e_0)^\perp$ инвариантно относительно P_1 тогда и только тогда, когда оно инвариантно относительно P_2.*

Вернемся к рассмотрению $L^4 \subset \boldsymbol{O}$. Используя таблицу умножения алгебры Кэли и способ построения репера $\{m, e_1, \ldots, e_8\}$, легко убедиться, что $L(\tilde{e}_6, e_7, e_1, e_0)$ является подалгеброй. Следовательно, $L^4 = L(e_2, e_3, e_4, e_5)$ инвариантно относительно P_1 и P_2. Здесь $\tilde{e}_6$ — проекция e_6 на $L(e_0)^\perp$ параллельно e_0. Легко видеть, что обратное также справедливо. Отсюда следует

Теорема 1. *Квазикелерова структура, индуцированная на $M^6_{\text{общ}} \subset \boldsymbol{O}$ с J-инвариантным тензором кривизны устойчива тогда и только тогда, когда $M^6_{\text{общ}} \asymp S^2 \times L^4$, где $L^4 \subset L(e_0)^\perp$ — 4-мерная плоскость, инвариантная относительно P_1 или P_2, либо $M^6_{\text{общ}} \asymp S^6$, либо $M^6_{\text{общ}}$ — вполне геодезическое подмногообразие.*

Учитывая, что, согласно лемме 1, свойство квазикелеровой структуры на M^6 быть почти келеровой равносильно минимальности M^6, т. е. равенству нулю его вектора средней кривизны, а также, принимая во внимание предложение 1 и следствие леммы 2, видим, что справедлива.

Теорема 2. *Приближенно келерова структура, индуцированная на $M^6_{\text{общ}} \subset \boldsymbol{O}$ устойчива тогда и только тогда, когда $M^6_{\text{общ}} \asymp S^6$ либо когда $M^6_{\text{общ}}$ — вполне геодезическое подмногообразие.*

Теорема 3. *Почти келерова структура, индуцированная на $M^6_{\text{общ}} \subset \boldsymbol{O}$ с J — инвариантным тензором кривизны устойчива тогда и только тогда, когда $M^6_{\text{общ}}$ — вполне геодезическое подмногообразие.*

2. Пусть на общем подмногообразии $M^6_{\text{общ}} \subset \boldsymbol{O}$ индуцирована устойчиво эрмитова структура. Тогда $\{J_1; \langle , \rangle\} \in H \leftrightarrow T^\psi_2 = 0$; $\{J_2; \langle , \rangle\} \in H \leftrightarrow S^\psi_2 = 0$. С учетом (9) последнее соотношение можно записать в виде $AT^\psi_1 B + B\bar{T}^\psi_2 \bar{A} = 0$ **(13)**. Расписывая соотношение (13) с учетом (3), найдем $T^\psi_1 = \begin{pmatrix} T^\psi_{11} & 0 & 0 \\ 0 & T^\psi_{22} & T^\psi_{23} \\ 0 & T^\psi_{23} & -\bar{T}^\psi_{33} \end{pmatrix}$, причем $T^\psi_{33} = \bar{T}^\psi_{23}$. Отсюда $\omega^\psi_1 = T^\psi_{11}\omega^1$; $\omega^\psi_\alpha = T^\psi_{\alpha\beta}\omega^\beta$. Дифференцируя эти соображения внешним образом, получим, что $T^\psi_{\alpha\beta} = 0$. Следовательно, структурные уравнения $M^6_{\text{общ}}$ примут вид

9*

$$1.\ d\omega^1 = \omega_1^1 \wedge \omega^1;\ 2.\ d\omega^\alpha = \omega_\beta^\alpha \wedge \omega^\beta - \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon^{\alpha\beta 1} (\pm T_{11}^8 - \sqrt{-1} \times T_{11}^7)\, \omega^1 \wedge \omega_\beta;\ 3.\ d\omega_\beta^\alpha = \omega_\gamma^\alpha \wedge \omega_\beta^\gamma + \frac{1}{2} (\delta_1^\alpha \delta_\beta^1 - \delta_\beta^\alpha) | \pm T_{11}^8 - \sqrt{-1} T_{11}^7 |^2 \times \omega^1 \wedge \omega_1;\ 4.\ d\omega_1^1 = (|T_{11}^7|^2 + |T_{11}^8|^2)\, \omega^1 \wedge \omega_1 \text{ и ф. к. с.}$$

Теми же рассуждениями, как и в предыдущем случае, отсюда получаем, что $M^6_{\text{общ}} \asymp L^4 \times M^2$, где L^4 — то же, что и в теореме 1, M^2 — двумерное минимальное подмногообразие. Заметим, что $M^2 \subset (L^4)^\perp = V$. Нетрудно подсчитать, что в репере $\{m, e_1, \ldots, e_8\}$ уравнение эллипса индикатрисы нормальной кривизны M^2 в V [9] имеет вид $x^7 = u \cos 2t - v \sin 2t$; $x^8 = s \cos 2t - w \sin 2t$ **(14)**, где $u = \operatorname{Re}(T_{11}^7)$; $s = \operatorname{Re}(T_{11}^8)$; $v = \operatorname{Im}(T_{11}^7)$; $w = \operatorname{Im}(T_{11}^8)$. Он будет окружностью тогда и только тогда, когда $(x^7)^2 + (x^8)^2 = r^2$. Подставляя сюда выражения (14), легко получить, что это возможно тогда и только тогда, когда $u = w$, $v = -s$ либо $u = -w$, $v = s$, т. е. $T_{11}^7 = \pm\sqrt{-1} T_{11}^8$ и следовательно, $M^6_{\text{общ}}$ квазикелерово. Так как $M^6_{\text{общ}}$ эрмитово, то $M^6_{\text{общ}}$ — келерово многообразие. Получена

Теорема 4. *Эрмитова структура, индуцированная на $M^6_{\text{общ}} \subset \mathbf{O}$, устойчива тогда и только тогда, когда $M^6_{\text{общ}} \asymp M^2 \times L^4$, где $M^2 \subset \mathbf{O}$ — минимальное подмногообразие, $L^4 \subset L(e_0)^\perp$ — $P_\varkappa$-инвариантная плоскость. При этом данная структура или двойственная ей келерова тогда и только тогда, когда эллипс индикатрисы нормальной кривизны M^2 в $(L^4)^\perp$ — окружность.*

С л е с т в и е. *Структура на $M^6_{\text{общ}} \subset \mathbf{O}$, двойственная келеровой, эрмитова.*

Пусть теперь $M^6_{\text{ос}} \subset \mathbf{O}$ — особое подмногообразие, $m \in M^6_{\text{ос}}$. Выберем репер $\{m, e_0, \ldots, e_7\}$ так, как указано в [4, с. 74]. Перейдем к комплексному реперу с векторами

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (e_1 - \sqrt{-1} e_0);\ \ \varepsilon_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (e_2 \pm \sqrt{-1} e_3);\ \ \varepsilon_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\pm e_{\tilde{2}} + \sqrt{-1} e_{\tilde{3}});\ \ \varepsilon^\alpha = \tau(\varepsilon_\alpha);\ \ \varepsilon_\psi = e_{\psi - 1}.$$

Здесь двойные знаки интерпретируются как и в предыдущем случае. Как и раньше, легко проверить, что векторы $\{\varepsilon_a; \varepsilon^b\}$ определяют собственный базис комплексификации оператора $J_\varkappa$ ($\varkappa = 1;\ 2$), следовательно, определяют A-репер пространства $T_m(M^6)$. Непосредственным подсчетом убеждаемся, что в новом репере структурные уравнения (2) группы G_2 запишутся в виде

$$1.\ \omega^{ab} = \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon^{abc} (\pm \omega_c^7 + \sqrt{-1} \omega_c^8);\ 2.\ \omega_{ab} = \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon_{abc} (\mp \omega_7^c + \sqrt{-1} \times \omega_8^c);\ \ 3.\ \ \omega_{\hat{b}}^a + \omega_{\hat{a}}^b = 0;\ \ 4.\ \ \omega_a^\psi + \omega_\psi^{\hat{a}} = \omega_{\hat{a}}^\psi + \omega_\psi^a = 0;\ \ 5.\ \ \omega_1^1 = 0;$$
$$6.\ \omega_{1\alpha} = \omega_\alpha^1;\ 7.\ \omega^{1\alpha} = -\omega_1^\alpha;\ 8.\ \omega_1^\psi = \omega_{\hat{1}}^\psi;\ 9.\ \omega_2^2 + \omega_3^3 = \sqrt{-1}\, \omega_7^8. \quad (15)$$

В построенном репере подмногообразие M^8_{oc}, как и выше, задается системой Пфаффа $\omega^\psi = 0$, поэтому для него останутся справедливыми соотношения (5) — (7), однако теперь $D_{cj} = \pm T^7_{cj} + \sqrt{-1}T^8_{cj}$; $D_{\hat{c}j} = \pm T^7_{\hat{c}j} - \sqrt{-1}T^8_{\hat{c}j}$. Кроме того, теперь в (3)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

и $\varkappa$ в формулировке леммы 1 заменяется на $1 - \varkappa$.

Используя это, нетрудно проверить, что соотношения (10), (13) в данном случае удовлетворяются тождественно в силу (15_8). Кроме того, из леммы 1 с учетом (5), (15_8) следует, что приближенно келерова структура, индуцированная на особом подмногообразии алгебры Кэли, является келеровой. Следовательно, имеет место.

Теорема 5. *Почти эрмитовы структуры перечисленных шести классов, индуцированные на особом подмногообразии алгебры Кэли, устойчивы.*

Список литературы: 1. *Gray A.* Vector cross products on manifolds.— *Trans Amer. Math. Soc., 1969, July, 141, p. 465—504.*
2. *Розенфельд Б. А.* Многомерные пространства,— М.: Наука, 1966. — 647 с.
3. *Фрейденталь Г.* Октавы, октавные группы, октавная геометрия. — Математика, 1957, 1:1, с. 117—153. 4. *Кириченко В. Ф.* Почти келеровы структуры, индуцированные 3-векторным произведением на шестимерных подмногообразиях алгебры Кэли. — Вестн. Моск. ун-та. Математика, механика, 1973, 3, с. 70—75.
5. *Gray A.* Some examples of almost Hermitian manifolds.— *Illinois Math. J., 1966, 10,* p. 353—366. 6. *Лаптев Г. Ф.* Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии. — В кн.: Тр. геометр. семинара, 1, М.: ВИНИТИ, 1966, с. 139—191. 7. *Лихнерович А.* Теория связностей в целом и группы голономии. — М.: Изд-во иностр. лит., 1960. —216 с
8. *Кириченко В. Ф.* К-пространства постоянного типа. — Сиб. мат. журн 1976, 17, № 2, с. 282—289. 9. *Картан Э.* Риманова геометрия в ортогональном репере. — М.: Изд-во МГУ, 1960. —308 с. 10. *Кириченко В. Ф.* К-пространства максимального ранга. — Мат. заметки, 1977, 22, № 4, с. 365—476

Поступила в редколлегию 23.04.78

УДК 513.81

С. Б. Климентов

О СТРОЕНИИ МНОЖЕСТВА РЕШЕНИЙ ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Введение

Статья посвящена изучению топологического строения множества M решений уравнений Гаусса—Петерсона—Кодацци для диффеоморфной кругу поверхности S строго положительной внешней кривизны $K \geqslant \text{const} > 0$, расположенной в трехмерном пространстве постоянной кривизны. Установлено, что M гомеоморфно некоторому банахову пространству аналитических в единичном круге функций.

Остановимся вкратце на работах, инспирировавших предлагаемую статью, и на методах исследования.

В работах И. Н. Векуа исследовались решения эллиптических систем вида $\partial_{\bar z} w + A(z) w + B(z) \bar w = 0$, **(0.1)** где $w = w(z)$ — определенная в $\bar{\mathscr{D}} = \{z : |z| \leqslant 1\}$ искомая комплексная функция [1]. Установлено, что множество решений уравнения (0.1), принадлежащих, например, классу регулярности* $C^k_\alpha(\bar{\mathscr{D}})$, $k \geqslant 1$, $0 < \alpha < 1$, линейно изоморфно действительному банахову пространству комплексно-аналитических в $\mathscr{D}$ функций класса $C^k_\alpha(\bar{\mathscr{D}})$ и указаны способы построения решений уравнения (0.1) по заданной аналитической функции. Исследования И. Н. Векуа в этом направлении были продолжены Б. В. Боярским [2]. Им указан способ построения решения уравнения $\partial_{\bar z} w + \mu_1(z) \partial_z w + \mu_2(z) \partial_{\bar z} \bar w + A(z) w + B(z) \bar w = 0$, $|\mu_1(z)| + |\mu_2(z)| \leqslant \mu_0 = \mathrm{const} < 1$ **(0.2)**, по заданной аналитической функции. В основу рассуждений Б. В. Боярского положены свойства нормы двумерного сингулярного интегрального оператора

$$\frac{1}{\pi} \iint\limits_{\mathscr{D}} \frac{f(t)\, dx dy}{(t-z)^2}, \quad t = x + iy.$$

Метод Б. В. Боярского позволяет строить, вообще говоря, лишь обобщенные решения уравнения (0.2) класса $D_{1,p}(\bar{\mathscr{D}})$, $2 < p < p_0(\mu_0)$, где $p_0(\mu_0) \to 2$ при $\mu_0 \to 1$.

В. С. Виноградов [3], основываясь на идеях Б. В. Боярского, разработал метод построения решений краевой задачи Римана — Гильберта для квазилинейных равномерно эллиптических систем вида $\partial_{\bar z} w + \mu_1(z, w) \partial_z w + \mu_2(z, w) \partial_{\bar z} \bar w + A(z, w) w + B(z, w) \bar w = 0$, $|\mu_1(z, w)| + |\mu_2(z, w)| \leqslant \mu_0 = \mathrm{const} < 1$ (0.3). Этот метод пригоден для построения решений уравнения (0,3) и без краевых условий, по заданной аналитической функции. При этом решение уравнения также, вообще говоря, обобщенное класса $D_{1,p}(\bar{\mathscr{D}})$, где $p > 2$ и достаточно близко к двум. Методы Б. В. Боярского и В. С. Виноградова не позволяют сделать какие-либо выводы о структуре множества всех решений уравнений (0.2) и (0.3).

Уравнения бесконечно малых изгибаний поверхности S приводятся к виду (0.1) [1, гл. 5]. Таким образом, множество решений задачи о бесконечно малых изгибаниях поверхности S линейно изоморфно действительному банахову пространству аналитических функций с соответствующей нормой. Вместе с тем основные уравнения для поверхности S приводятся к виду (0.3) [4,5]. Уста-

* Для функциональных пространств, норм и классов регулярности геометрических объектов в статье используются обозначения книги [1].

новлению связи между аналитическими в круге функциями и изометрическими преобразованиями поверхности S посвящены работы В. Т. Фоменко [4,5]. Для исследования основных уравнений теории поверхностей применяется метод В. С. Виноградова. К сожалению, работы [4,5] содержат неточности: в [4] ошибочно утверждается, что система вида (0.3) основных уравнений теории поверхностей для S равномерно эллиптична; в [4,5] утверждается, что равномерно ограничены возникающие в процессе рассуждений коэффициенты $d_i(z, \varphi, V)$, что неверно. Вместе с тем отсутствие равномерной ограниченности этих коэффициентов делает метод В. С. Виноградова неприменимым.

Впоследствии Е. В. Тюриковым [6,7] выделен специальный класс аналитических функций, для которых коэффициенты d_i равномерно ограничены, и каждой аналитической функции из этого класса по схеме В. С. Виноградова ставится в соответствие изометрическое преобразование поверхности S. Решение уравнений Гаусса — Петерсона — Кодацци при этом получается, вообще говоря, обобщенное, класса $D_{1,p}(\overline{\mathscr{D}})$, $p>2$, где p достаточно близко к двум.

В настоящей статье предлагается новый метод построения решений уравнений вида (0.2), (0.3) по заданной в единичном круге аналитической функции (основанный на леммах 1 и 2). Если заданная аналитическая функция и коэффициенты уравнений при этом регулярны в $\overline{\mathscr{D}}$, то получаются регулярные решения. Для равномерно эллиптических систем вида (0.3) этот метод позволяет проанализировать структуру множества всех решений, которое представляет собой бесконечномерное аналитическое многообразие, моделируемое в соответствующем банаховом пространстве аналитических функций и гомеоморфное этому пространству. Для неравномерно эллиптических систем вида (0.3) (каковой является система уравнений Гаусса — Петерсона — Кодацци поверхности S) при наличии априорной оценки модуля решения через его граничные значения справедлив аналогичный результат. Соответствующий «принцип максимума» доставляют оценки А. В. Погорелова нормальных кривизн поверхности.

§ 1. Формулировка результатов. Пусть $\mathscr{D}$ — единичный круг $|z|<1$ комплексной z-плоскости, $z=u+iv$, $i^2=-1$, $\Gamma=\partial\mathscr{D}$, $\overline{\mathscr{D}}=\mathscr{D}\cup\Gamma$, S — параметризованная в $\overline{\mathscr{D}}$ поверхность, расположенная в трехмерном полном односвязном пространстве постоянной кривизны V_3 и принадлежащая классу регулярности $C_\alpha^{k+2}(\overline{\mathscr{D}})$, $k\geqslant 2$, $0<\alpha<1$*. Предположим, что S вплоть до края обладает положительной внешней кривизной $K\geqslant \text{const}>0$ **(1.1)**.

* Под поверхностью понимается погружение соответствующей гладкости замкнутой области $\overline{\mathscr{D}}$ в V_3. Запись $S\in C_\alpha^{k+2}(\overline{\mathscr{D}})$ (или $C_\alpha^{k+2}(\mathscr{D})$) означает, что существует параметризация в $\overline{\mathscr{D}}$ (в $\mathscr{D}$) поверхности S такая, что функции, задающие поверхность S в этой параметризации, будут класса $C_\alpha^{k+2}(\overline{\mathscr{D}})$ ($C_\alpha^{k+2}(\mathscr{D})$).

Аналитическим изгибанием поверхности S с сохранением класса регулярности будем называть однопараметрическое семейство поверхностей S_t, $t \in (t_0, t_1) \subseteq (-\infty, +\infty)$, $0 \in (t_0, t_1)$ такое, что 1) для $\forall t \in (t_0, t_1)$ поверхность S_t изометрична $S (\equiv S_0)$ и того же класса регулярности, что и S; 2) функции, задающие поверхность S_t, аналитически зависят от $t \in (t_0, t_1)$ как элементы банахова пространства $C_\alpha^{k+2}(\overline{\mathcal{D}})$. Аналогично определяются непрерывные и дифференцируемые изгибания.

Пусть изометричные поверхности S и S^* отнесены к одной и той же параметризации в $\overline{\mathcal{D}}$ (соответствующие по изометрии точки поверхностей S и S^* отображены в одну и ту же точку в $\mathcal{D}$). Если индуцированные параметризацией нормали обеих поверхностей S и S^* направлены одновременно в сторону выпуклости либо вогнутости, то поверхности S и S^* назовем одинаково ориентированными. Если S и S^* не одинаково ориентированы, то одинаково ориентированы S и зеркальное отражение поверхности S^*.

Рассмотрим изометричные одинаково ориентированные поверхности S и S^*. В силу (1.1) их общую параметризацию в $\overline{\mathcal{D}}$ можно считать изотермически-сопряженной для S, т. е. вторую основную форму поверхности S, имеющей вид $\mathrm{II} = \Lambda(u, v)(du^2 + dv^2)$ [1, гл. 2, § 6]*. Не ограничивая общности, положим $\Lambda(u, v) > 0$; тогда $\mathrm{II}^* = b_{11}(u, v)\ du^2 + 2b_{12}(u, v)\ du dv + b_{22}(u, v)\, dv^2 > 0$ **(1.2)**, где II^* — вторая основная форма поверхности S^*. При введенной параметризации основные уравнения теории поверхностей для S^* имеют вид [4, 5] $\partial_{\bar z} w + a^*(z)\, w + b^*(z)\, \overline{w} = c(z)\, \gamma(z) - \partial_z \gamma(z)$; $\gamma(z) = -\sqrt{K} + \sqrt{K + |w|^2}$ **(1.3)**, где $w = w(z) = \dfrac{b_{22} - b_{11} + 2ib_{12}}{2\sqrt{g}}$; g — дискриминант метрики поверхности S; $\partial_{\bar z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u} + i\frac{\partial}{\partial v}\right)$, $\partial_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u} - i\frac{\partial}{\partial v}\right)$ — вообще говоря, производные в смысле С. Л. Соболева; $K = K(z) \geq \mathrm{const} > 0$ — внешняя кривизна поверхности S; $a^*(z) = \frac{1}{4}\left\{\Gamma_{11}^1 - \Gamma_{22}^1 + 2\Gamma_{12}^2 + i\,(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{11}^2 + 2\Gamma_{12}^1)\right\}$; $b^*(z) = \frac{1}{4}\left\{\Gamma_{11}^1 - \Gamma_{22}^1 - 2\Gamma_{12}^2 + i\,(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{11}^2 - 2\Gamma_{12}^1)\right\}$; $c(z) = \frac{1}{2}\left\{-(\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^1) + i\,(\Gamma_{22}^2 + \Gamma_{11}^2)\right\}$ **(1.4)**; Γ_{ij}^k — символы Христоффеля второго рода поверхности S. После выполнения дифференцирования в правой части (1.3) и исключения $\partial_z \overline{w}$ уравнение (1.3) приводится к виду $\partial_{\bar z} w + q_1(z, w)\, \partial_z w + q_2(z, w)\, \partial_{\bar z} w + a(z, w)\, w + b(z, w)\, \overline{w} = 0$ **(1.5)**, где $q_1(z, w) = \dfrac{2\sqrt{K + |w|^2} \cdot \overline{w}}{4K + 3|w|^2}$;

---

* В дальнейшем параметризация (u, v) в $\overline{\mathcal{D}}$ всегда считается изотермически сопряженной для S.

$$q_2(z,\ w) = \frac{-w^2}{4K + 3|w|^2};\ a(z,\ w) = \frac{4a^*(K + |w|^2) - 2\bar{b}^* w \sqrt{K + |w|^2}}{4K + 3|w|^2};$$

$$b(z,\ w) = \frac{4b^*(K + |w|^2) - 2w\bar{a}^* \sqrt{K + |w|^2}}{4K + 3|w|^2} +$$

$$+ \frac{2w(\bar{c}\sqrt{K + |w|^2} + \partial_{\bar{z}}\sqrt{K}) - (c\sqrt{K + |w|^2} + \partial_z \sqrt{K})\, 4\sqrt{K + |w|^2}}{(4K + 3|w|^2)(\sqrt{K} + \sqrt{K + |w|^2})} \cdot w; \tag{1.6}$$

$|q_1(z,\ w)| + |q_2(z,\ w)| \leqslant q_0(w) < 1,\ \lim\limits_{|w| \to \infty} q_0(w) = 1$ (система (1.5) неравномерно эллиптична).

Ненулевому решению уравнения (1.5) соответствует нетривиальное изометрическое преобразование поверхности S в одинаково с ней ориентированную поверхность S^*; нулевому решению соответствует тривиальное изометрическое преобразование поверхности S. У регулярной поверхности S^* комплексная функция изгибаний $w(z)$ имеет ту же регулярность, что и вторая основная форма S^*. Очевидно, что аналитическому изгибанию S_t поверхности S соответствует множество решений $w_t(z)$ уравнения (1.5), аналитическое по t. Обратно, множество решений $w_t(z)$, аналитическое по t и содержащее нулевое решение, определяет аналитическое изгибание поверхности S. Действительно, вопрос о восстановлении поверхности по решению $w_t(z)$, аналитически зависящему от t, приводится к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений, аналитически зависящей от t [8], что, как известно, влечет за собой аналитическую зависимость от t решения этой системы и, окончательно, — множества поверхностей, изометричных S.

Обозначим $A_\alpha^k(\bar{\mathscr{D}})$, $A_{k,\,p}(\bar{\mathscr{D}})$ действительные банаховы пространства комплексно-аналитических в $\mathscr{D}$ функций класса $C_\alpha^k(\bar{\mathscr{D}})$, соответственно $D_{k,\,p}(\bar{\mathscr{D}})$ с нормой пространства $C_\alpha^k(\bar{\mathscr{D}})$, соответственно $D_{k,\,p}(\bar{\mathscr{D}})$.

Основной результат работы составляют следующие утверждения.

Теорема 1. *Множество M решений класса $D_{1,\,p}(\bar{\mathscr{D}})$, $p > 2$, уравнения (1.5) есть подмногообразие банахова пространства $D_{1,\,p}(\bar{\mathscr{D}})$, моделируемое в банаховом пространстве $A_{1,\,p}(\bar{\mathscr{D}})$ и гомеоморфное $A_{1,\,p}(\bar{\mathscr{D}})$**

Теорема 2. *Множество $\tilde{M}$ решений класса $C_\alpha^k(\bar{\mathscr{D}})$, $k \geqslant 2$, $0 < \alpha < 1$, уравнения (1.5) есть связное аналитическое подмногообразие банахова пространства $C_\alpha^k(\bar{\mathscr{D}})$, моделируемое в банаховом пространстве $A_\alpha^k(\bar{\mathscr{D}})$.*

Замечание. В теореме 2 утверждается только связность многообразия $\tilde{M}$, а не гомеоморфность его $A_\alpha^k(\bar{\mathscr{D}})$, т. е. нет полной

* О бесконечномерных многообразиях см. [9].

аналогии с теоремой 1. По-видимому, $\widetilde{M}$ гомеоморфно $A^k_\alpha(\mathscr{D})$, но метод доказательства теоремы 2 это утверждать не позволяет.

Одним из общих вопросов теории деформаций поверхностей является вопрос о соотношении понятий изометричности и непрерывного изгибания. Для аналитических поверхностей ненулевой кривизны, рассматриваемых «в малом», этот вопрос полностью решается известной теоремой Е. Е. Леви [10, § 19]. Теорема 2 позволяет решить этот вопрос для рассматриваемых поверхностей положительной кривизны «в целом».

Теорема 3. *Любая поверхность $S^* \subset V_3$ класса $C^{k+2}_\alpha(\overline{\mathscr{D}})$, изометричная S и одинаково с ней ориентированная, аналитически по параметру изгибаема в S.*

Действительно, всякой поверхности S^*, удовлетворяющей условиям теоремы 3, соответствует на $\widetilde{M}$ некоторая точка N, а поверхности S соответствует нулевая точка. Любая аналитическая кривая на $\widetilde{M}$, соединяющая точки O и N, определяет аналитическое по параметру изгибание поверхности S^* в поверхность S.

Теорема 4. *Всякое изометрическое преобразование в V_3 поверхности S с сохранением класса регулярности может быть получено аналитическим по параметру изгибанием и, быть может, зеркальным отражением.*

Эта теорема — непосредственное следствие предыдущей.

Очевидно, что утверждения теорем 3 и 4 справедливы и для аналитических поверхностей (принадлежащих в замкнутом круге $\overline{\mathscr{D}}$ классу C^{k+2}_α).

Теорема 5. *Для любой константы $E > 0$ существует изометричная S поверхность $S^* \in C^{k+2}_\alpha(\overline{\mathscr{D}})$ такая, что в каждой граничной точке S^* средняя кривизна поверхности S^* по модулю больше E.*

Для формулировки следующей теоремы воспроизведем понятие комплексного изгиба поверхности S в точке при непрерывном изгибании, введенное в [5].

Пусть τ — касательная плоскость поверхности S в точке N. Построим в плоскости τ индикатрису $\mathscr{L}$ кривизны S в точке N. Пусть S подвегнута непрерывному изгибанию S_t. Не нарушая общности, будем считать, что точка N вместе с ее касательной плоскостью остается при этом неизменной (исключая также вращение τ вокруг нормали к поверхности). Рассмотрим в плоскости τ индикатрису $\mathscr{L}_t$ кривизны поверхности S_t в точке N. Обозначим через ϑ_t угол между соответствующими главными направлениями α и α_t индикатрис L и L_t, считая, что $0 \leqslant \vartheta_t < \pi/2$. В омбилических точках угол ϑ_t определяем по непрерывности. Главные кривизны поверхностей S и S_t в точке N по направлениям α и α_t соответственно обозначим k и k_t.

Назовем изгибом поверхности S в точке N при изгибании S_t комплексное число $I_t(S, N) = \vartheta_t + i(k_t - k)$. Очевидно, I_t — не-

непрерывная по t функция; $I_0(S, N)=0$. Если $I_t(S, N)\equiv 0$, то N — точка конгруэнтности при изгибании S_t и наоборот. Заданием изгиба $I_t(S, N)$ однозначно определяется в точке N функция $w_t(N)$ и наоборот. Из непрерывности по t функции $I_t(S, N)$ следует непрерывность по t функции $w_t(N)$ и обратно.

Теорема 6. *Пусть $\mu(t)$ — непрерывная на $[0, 1]$ комплексно-значная функция такая, что $\mu(0)=0$, $\operatorname{Re}\mu(t)\in[0, \pi/2)$; N_0 — произвольная точка на границе поверхности S; N_l, $l=1, \ldots, m$, — произвольные попарно различные точки на поверхности S, $N_l\neq N_0$, $\forall l$. Существует непрерывное изгибание поверхности S в классе $C_\alpha^{k+2}(\mathscr{D})\cap D_{3,p}(\overline{\mathscr{D}})$ такое, что $I_t(S, N_0)=\mu(t)$, $\forall t\in[0, 1]$, и при этом изгибании для $\forall t\in[0, 1]$ точки N_l, $l=1,\ldots, m$, остаются точками конгруэнтности.*

Изгибаниям поверхностей положительной кривизны с заданным изгибом в фиксированных точках посвящены также работы [5, 11, 12].

При доказательстве теоремы 1 важную роль играет следующее утверждение.

Теорема 7. Пусть $\{S^r\}_{r\in R}$ *(R — множество индексов) — семейство изометричных S поверхностей класса $D_{3,p}(\overline{\mathscr{D}})$, $p>2$, отнесенных к тем же параметрам (u, v), что и поверхность S, посредством отображения $S^r \xrightarrow{\text{изом}} S \to \overline{\mathscr{D}}$. Если граничные значения вторых основных форм поверхностей S^r равномерно ограничены, то вторые основные формы поверхностей S^r равномерно ограничены в $\overline{\mathscr{D}}$.*

Поскольку гауссова кривизна поверхности S принадлежит классу $C_\alpha^k(\overline{\mathscr{D}})$, а $S^r\in C_\alpha^{k+2}(\mathscr{D})\cap D_{3,p}(\overline{\mathscr{D}})$ [13], теорема 7 является простым следствием оценки А. В. Погорелова для максимума нормальной кривизны поверхности S^r, достигаемого во внутренней точке [14, с. 105].

Поверхность S допускает аналитические по параметру изгибания со сколь угодно большим изменением нормальных кривизн в некоторых точках (см. теорему 6). Непосредственным следствием теоремы 7 является следующее утверждение, несколько проясняющее расположение этих точек на поверхности.

Теорема 8. *Если при изгибании поверхности S нормальные кривизны в некоторых точках по некоторым направлениям становятся больше любой наперед заданной константы, то такие точки обязательно присутствуют на крае поверхности S.*

Отметим, что по теореме 6 в любой близости от таких точек, расположенных на ∂S, могут находиться точки конгруэнтности.

§ 2. Доказательство аналитичности многообразия $\widetilde{M}$. Предварительно сформулируем результаты, необходимые в дальнейшем изложении. Рассмотрим линейный оператор $f(z)+T(q_1(z)\,\partial_z f\,+$

$+ q_2(z)\partial_{\bar z}\bar f + A(z) f + B(z)\bar f(z))$ **(2.1)**, где q_1, q_2 — измеримые ограниченные в $\mathscr{D}$ функции, удовлетворяющие неравенству $|q_1(z)| + |q_2(z)| \leqslant q_0 = \mathrm{const} < 1$; оператор T определяется формулой

$$Tf(z) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\mathscr{D}}\left[\frac{f(t)}{t-z} - \frac{z\overline{f(t)}}{z\bar t - 1} - \frac{f(t)}{t-1} + \frac{\overline{f(t)}}{\bar t - 1}\right] dxdy; \quad (2.2)$$

$t = x + iy$, $f \in D_{1,p}(\overline{\mathscr{D}})$, $p > 2$.

Отметим, что $\mathrm{Re}Tf|_{|z|=1} = 0$, $Tf(1) = 0$ **(2.3)**.

Лемма 1. *Если* $A(z), B(z) \in L_p(\overline{\mathscr{D}})$, $p > 2$, *а* q_1, q_2 *непрерывны почти всюду в* $\mathscr{D}$, *то оператор* (2.1) *есть изоморфизм банахова пространства* $D_{1,p}(\overline{\mathscr{D}})$, *причем норма обратного к нему оператора непрерывно зависит от* q_0 *и норм функций* $A(z), B(z)$.

Лемма 2. *Если* $q_1(z), q_2(z), A(z), B(z) \in C^k_\alpha(\overline{\mathscr{D}})$, $k \geqslant 0$, $0 < \alpha < 1$, *то оператор* (2.1) есть *изоморфизм банахова пространства* $C^{k+1}_\alpha(\overline{\mathscr{D}})$.

Доказательства лемм 1 и 2 здесь не приводятся.

Пусть $\mathscr{F}$ — некоторое банахово пространство. Если $\mathscr{F}_1$ — замкнутое подпространство в $\mathscr{F}$, для которого существует замкнутое дополнение $\mathscr{F}_2$ такое, что $\mathscr{F}$ изоморфно произведению $\mathscr{F}_1 \times \mathscr{F}$ при отображении $\mathscr{F}_1 \times \mathscr{F}_2 \to \mathscr{F}$, определяемом сложением, то следуя [9], будем говорить, что $\mathscr{F}_1$ разлагает $\mathscr{F}$.

Лемма 3. *Банахово пространство* $A^k_\alpha(\overline{\mathscr{D}})$, $k \geqslant 1$, $0 < \alpha < 1$ *разлагает банахово пространство* $C^k_\alpha(\overline{\mathscr{D}})$. *Аналогично* $A_{k,p}(\overline{\mathscr{D}})$ *разлагает* $D_{k,p}(\overline{\mathscr{D}})$, $k \geqslant 1$, $p > 2$.

Доказательство. Пусть $f \in C^k_\alpha(\overline{\mathscr{D}})$ или $D_{k,p}(\overline{\mathscr{D}})$. Тогда справедлива формула $f(z) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\mathscr{D}}\frac{\partial f}{\partial \bar t}\frac{dxdy}{t-z} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(t)\,dt}{t-z}$ [1, гл. 1, § 4], которая задает разложение. Лемма доказана.

Докажем теперь аналитичность многообразия $\tilde M$. Рассмотрим уравнение $\Psi(w) \equiv w(z) + T(q_1(z, w)\partial_z w + q_2(z, w)\partial_{\bar z}\bar w + a(z, w)w + b(z, w)\bar w) = \Phi(z)$ **(2.4)**, где $\Phi(z) \in A^k_\alpha(\overline{\mathscr{D}})$. Уравнение (2.4) эквивалентно дифференциальному уравнению (1.5) в следующем смысле: всякое решение уравнения (2.4) есть решение уравнения (1.5) и обратно, всякое решение уравнения (1.5) класса $C^k_\alpha(\overline{\mathscr{D}})$ есть решение уравнения (2.4) при некоторой функции $\Phi(z) \in A^k_\alpha(\overline{\mathscr{D}})$; при этом $\Phi(z)$ представима в виде

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{w(t)}{t-z}\,dt + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{z\overline{w(t)}\,d\bar t}{z\bar t - 1}. \quad (2.5)$$

Представление (2.5) выводится рассуждениями, аналогичными приведенным в [1, с. 41].

Оператор $\Psi : C^k_\alpha(\overline{\mathscr{D}}) \to C^k_\alpha(\overline{\mathscr{D}})$ есть аналитическое (по Фреше) отображение действительных банаховых пространств (как суперпозиция аналитических операций, см. (1, 6)). Дифференциал Фреше оператора Ψ имеет вид $\Psi'(w)\, h = h(z) + T\,(q_1(z, w)\,\partial_z h +$ $+ q_2(z, w)\,\partial_{\bar z}\bar h + \tilde a(z, w)\, h + \tilde b(z, w)\,\bar h)$; $h \in C^k_\alpha(\overline{\mathscr{D}})$ **(2.6)**, где $\tilde a(z, w) =$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial w} q_1(z,w)\right]\partial_z w + \left[\frac{\partial}{\partial w} q_2(z,w)\right]\partial_{\bar z}\bar w + a(z, w) + \left[\frac{\partial}{\partial w} a(z,w)\right]\times$$

$$\times w + \left[\frac{\partial}{\partial w} b(z, w)\right]\bar w;\ \tilde b(z,w) = \left[\frac{\partial}{\partial \bar w} q_1(z, w)\right]\partial_z w + \left[\frac{\partial}{\partial \bar w} q_2(z,w)\right]\times$$

$$\times \partial_{\bar z}\bar w + b(z, w) + \left[\frac{\partial}{\partial \bar w} a(z, w)\right] w + \left[\frac{\partial}{\partial \bar w} b(z, w)\right]\bar w \quad \textbf{(2.7)}.$$

Из (2.7), (1.4) и (1.6) видим, что при $w(z) \in C^k_\alpha(\overline{\mathscr{D}})$ будет $\tilde a(z,w),\ \tilde b(z, w) \in C^{k-1}_\alpha(\overline{\mathscr{D}}),\ q_1(z, w),\ q_2(z, w) \in C^k_\alpha(\overline{\mathscr{D}})$.

Из (2.6) и леммы 2 получаем, что $\Psi'(w)$ есть изоморфизм пространства $C^k_\alpha(\overline{\mathscr{D}})$. Отсюда по теореме о неявной функции [15, гл. 2, § 7], если уравнение $\Psi(w) = F(z)$ **(2.8)** разрешимо в классе $C^k_\alpha(\overline{\mathscr{D}})$ для $F = F_0 \in C^k_\alpha(\overline{\mathscr{D}})$, то оно разрешимо в том же классе для всех F, достаточно близких к F_0 в норме $C^k_\alpha(\overline{\mathscr{D}})$; при этом оператор $\Psi^{-1}: \{C^k_\alpha(F - F_0, \overline{\mathscr{D}}) \leqslant \varepsilon\} \to C^k_\alpha(\overline{\mathscr{D}})$ аналитичен.

Множество решений уравнения (2.8) не пусто, так как функции $F \equiv 0$ соответствует решение $w \equiv 0$. Покажем, что для данного F уравнение (2.8) имеет не более одного решения. Пусть $\Psi(w_1) = F,\ \Psi(w_2) = F,\ w_1 \neq w_2$. Вычитая эти равенства, получаем $w_1 - w_2 + T\,(q_1(z, w_1)\,\partial_z(w_1 - w_2) + q_2(z, w_1)\,\partial_{\bar z}(\bar w_1 - \bar w_2)) + T\,\times$ $\times\,(\tilde c(z, w_1, w_2)\,(w_1 - w_2) + b(z, w_1)\,(\bar w_1 - \bar w_2)) = 0$ **(2.9)**, где

$$\tilde c(z, w_1, w_2) = \frac{q_1(z, w_1) - q_1(z, w_2)}{w_1 - w_2}\,\partial_z w_2 + \frac{q_2(z, w_1) - q_2(z, w_2)}{w_1 - w_2}\times$$

$$\times\,\partial_{\bar z}\bar w_2 + a(z, w_1) + \frac{a(z, w_1) - a(z, w_2)}{w_1 - w_2}\, w_2 + \frac{b(z, w_1) - b(z, w_2)}{w_1 - w_2}\,\bar w_2 \quad \textbf{(2.10)},$$

$\tilde c = 0$ при $w_1(z) = w_2(z)$.

Из (2.10), (1.6) имеем $\tilde c(z) \in L_p(\overline{\mathscr{D}}),\ p > 2$. Отсюда и из (2.9) по лемме 1 $w_1(z) \equiv w_2(z)$.

Так как пространство $A^k_\alpha(\overline{\mathscr{D}})$ разлагает $C^k_\alpha(\overline{\mathscr{D}})$ (лемма 3) и $\Psi^{-1}\Psi$ при $\Psi \in A^k_\alpha(\overline{\mathscr{D}}) \cap \psi(C^k_\alpha(\overline{\mathscr{D}}))$ — решение уравнения (2.4), то в силу аналитичности Ψ^{-1} и инъективности Ψ множество $\widetilde M$ — аналитическое вложенное подмногообразие банахова пространства $C^k_\alpha(\overline{\mathscr{D}})$, моделируемое в $A^k_\alpha(\overline{\mathscr{D}})$ [9, гл. 2, §2].

§ 3. Доказательство теорем 1, 2, 5 и 6 Доказательство теоремы 1. Уравнение (1.5) можно записать в виде $\partial_{\bar z} w +$ $+ A(z, w, \partial_z w)\, w + B(z, w, \partial_z w)\, w = 0$ **(3.1)**, где $A = a(z, w) - \dfrac{w\partial_{\bar z}\bar w}{4K + 3|w|^4}$;

$B = b(z, w) + \frac{2\sqrt{K+|w|^2}}{4K+3|w|^2}\partial_z w$. Решение уравнения (3.1) $w \in D_{1,p}(\overline{\mathscr{D}})$, $p > 2$, можно представить в виде $w(z) = \Phi(z) e^{\varphi(z)}$ (3.2), где $\Phi \in A_{1,p}(\overline{\mathscr{D}})$, $\varphi(z) = T(A + B\overline{w}/w)$, оператор T определяется формулой (2.2) [1, гл. 3, § 4]; при этом в силу (2.3) $w(1) = \Phi(1)$, $\operatorname{Re}\varphi(z)|_{z\in\Gamma} = 0$, $|w||_{z\in\Gamma} = |\Phi||_{z\in\Gamma}$ **(3.3)**. Таким образом, каждому решению уравнения (3.1) $w \in D_{1,p}(\overline{\mathscr{D}})$ по формуле (3.2) ставится в соответствие единственная функция $\Phi(z) \in A_{1,p}(\overline{\mathscr{D}})$, непрерывно зависящая от w, как элемента банахова пространства $D_{1,p}(\overline{\mathscr{D}})$. Это запишем так: $\Phi = \Phi(w)$. Покажем, что установленное соответствие инъективно. Для этого выведем уравнение, которому удовлетворяет функция $\varphi(z)$ из (3.2). Подставляя $w = \Phi e^{\varphi} \not\equiv 0$ в (1.5), для φ получим дифференциальное уравнение $\partial_{\bar z}\varphi + \mu_1(z, \Phi, \varphi)\,\partial_z\varphi + \mu_2(z, \Phi, \varphi)\,\partial_{\bar z}\overline{\varphi} + d(z, \Phi, \varphi) = 0$ **(3.4)**, где $\mu_1 = q_1(z, \Phi e^{\varphi})$; $\mu_2 = q_2(z, \Phi e^{\varphi})\frac{\overline{\Phi}}{\Phi}e^{\overline{\varphi}-\varphi} - \frac{-|\Phi|^2 e^{\overline{\varphi}+\varphi}}{4K+3|\Phi e^{\varphi}|^2}$; $d = a(z, \Phi e^{\varphi}) + b(z, \Phi e^{\varphi})\frac{\overline{\Phi}}{\Phi}e^{\overline{\varphi}-\varphi} + \frac{2\sqrt{K+|\Phi e^{\varphi}|^2}\,\overline{\Phi}\Phi'}{[4K+3|\Phi e^{\varphi}|^2]\,\Phi}e^{\overline{\varphi}} - \frac{\Phi e^{\overline{\varphi}+\varphi}\,\overline{\Phi}'}{4K+3|\Phi e^{\varphi}|^2}$; $\mu_1, \mu_2 \in D_{1,p}(\overline{\mathscr{D}})$, $d \in L_p(\overline{\mathscr{D}})$ **(3.5)**. Дифференциальное уравнение (3.4) эквивалентно уравнению $\Omega(\varphi, \Phi) \equiv \varphi + T(\mu_1\partial_z\varphi + \mu_2\partial_{\bar z}\overline{\varphi} + d(z, \Phi, \varphi)) = \widetilde{\Phi}(z)$ **(3.6)**, где $\widetilde{\Phi}(z) \in A_{1,p}(\overline{\mathscr{D}})$. В силу (3.3) и (2.3) $\operatorname{Re}\widetilde{\Phi}|_{z\in\Gamma} = 0$, $\widetilde{\Phi}(1) = 0$, откуда $\widetilde{\Phi}(z) \equiv 0$. Обратно, для всякого решения $\varphi(z)$ уравнения (3.6) (при $\widetilde{\Phi} \equiv 0$) $w = \Phi e^{\varphi}$ — решение уравнения (3.1).

Итак, пусть различным решениям w_1 и w_2 уравнения (3.1) соответствует по формуле (3.2) одна и та же функция $\Phi(z)$. Для соответствующих φ_1 и φ_2 (можно считать, что $w_1(z) \not\equiv w_2(z)$, так как в противоположном случае рассуждение тривиально) имеем $\Omega(\varphi_1, \Phi) = 0$; $\Omega(\varphi_2, \Phi) = 0$. Вычитая эти уравнения, получаем $\varphi_1 - \varphi_2 + T(\mu_1(\varphi_1)\ \partial_z(\varphi_1 - \varphi_2) + \mu_2(\varphi_1)\partial_{\bar z}(\overline{\varphi}_1 - \overline{\varphi}_2) + \tilde d(z)\ (\varphi_1 - \varphi_2)) = 0$ **(3.7)**, где $\tilde d = (\varphi_1 - \varphi_2)^{-1}[(\mu_1(\varphi_1) - \mu_1(\varphi_2))\,\partial_z\varphi_2 + (\mu_2(\varphi_1) - \mu_2(\varphi_2))\,\partial_{\bar z}\overline{\varphi}_2 + d(\varphi_1) - d(\varphi_2)]$; $\tilde d(z) = 0$ при $\varphi_1(z) = \varphi_2(z)$ **(3.8)**. Так как μ_1, μ_2 и вещественное d аналитически зависят от φ и $\overline{\varphi}$, то $\tilde d \in L_p(\overline{\mathscr{D}})$, и из (3.7) получим $\varphi_1 - \varphi_2 \equiv 0$ (см. лемму 1), откуда $w_1 \equiv w_2$.

Теперь рассмотрим вопрос об определении решения $w(z)$ уравнения (3.1) по заданной функции $\Phi \in A_{1,p}(\overline{\mathscr{D}})$.

Лемма 4. *Множество R неравных тождественно нулю аналитических функций класса $A_{1,p}(\overline{\mathscr{D}})$, соответствующих решениям уравнения* (3.1) *по формуле* (3.2), *открыто в банаховом пространстве $A_{1,p}(\overline{\mathscr{D}})$.*

Доказательство. Пусть $w_0(z) = \Phi_0(z)e^{\varphi_0(z)} \not\equiv 0$ — решение уравнения (3.1), $\Phi_0 \in A_{1,p}(\overline{\mathscr{D}})$. Функция $\varphi_0(z)$ удовлетворяет уравнию $\Omega(\varphi_0, \Phi_0) = 0$. $\Omega(\varphi, \Phi)$ будем рассматривать как оператор на $D_{1,p}(\overline{\mathscr{D}}) \times [A_{1,p}(\overline{\mathscr{D}}) \setminus \{0\}]$. Для $0 \neq \Phi(z) \in A_{1,p}(\overline{\mathscr{D}})$ будем полагать, $\overline{\Phi}/\Phi = 1$ в тех точках, в которых $\Phi(z) = 0$. При таком соглашении оператор $\Omega(\varphi, \Phi)$ будет непрерывен на $D_{1,p}(\overline{\mathscr{D}}) \times [A_{1,p}(\overline{\mathscr{D}}) \setminus \{0\}]$, так как μ_1 и μ_2 будут непрерывно зависеть от φ и $\Phi \neq 0$ как элементы $D_{1,p}(\overline{\mathscr{D}})$, а d будет непрерывно зависеть от Φ и φ как элемент $L_p(\overline{\mathscr{D}})$. Дифференциал Фреше $\Omega_\varphi(\varphi_0, \Phi_0)h$, $h \in D_{1,p}(\overline{\mathscr{D}})$ оператора Ω имеет вид $\Omega_\varphi(\varphi_0, \Phi_0)h = h(z) + T(\mu_1(\varphi_0, \Phi_0)\partial_z h + \mu_2(\varphi_0, \Phi_0) \times$ $\times\, \partial_{\bar z} \bar h) + T(\lambda_1(\varphi_0, \Phi_0)\, h + \lambda_2(\varphi_0, \Phi_0)\bar h$, **(3.9)**

где $\lambda_1(\varphi, \Phi) = \frac{\partial}{\partial\varphi}\mu_1(\varphi, \Phi)\partial_z\varphi + \frac{\partial}{\partial\varphi}\mu_2(\varphi,\Phi)\partial_{\bar z}\bar\varphi + \frac{\partial}{\partial\varphi} d(\varphi, \Phi)$;

$\lambda_2(\varphi, \Phi) = \frac{\partial}{\partial\bar\varphi}\mu_1(\varphi, \Phi)\partial_z\varphi + \frac{\partial}{\partial\bar\varphi}\mu_2(\varphi, \Phi)\partial_{\bar z}\bar\varphi + \frac{d}{\partial\bar\varphi} d(\varphi, \Phi)$, причем $\lambda_1(z)$, $\lambda_2(z) \in L_p(\overline{\mathscr{D}})$, $\mu_1(z)$, $\mu_2(z) \in D_{1,p}(\overline{\mathscr{D}})$.

Согласно лемме 1 $\Omega_\varphi : h \to \Omega_\varphi h$ есть изоморфизм банахова пространства $D_{1,p}(\overline{\mathscr{D}})$. По теореме о неявной функции [15, с. 56] для всех функций $\Phi \in A_{1,}(\overline{\mathscr{D}})$, достаточно близких к Φ_0, уравнение $\Omega(\varphi, \Phi) = 0$ однозначно разрешимо относительно φ: $\varphi = \varphi(\Phi)$ **(3.10)** и $\varphi(\Phi)$ непрерывно зависит от Φ. Поэтому для всех $\Phi \in A_{1,p}(\overline{\mathscr{D}})$, достаточно близких к Φ_0 в норме $A_{1,p}(\overline{\mathscr{D}})$, функция $w = \Phi e^{\varphi(\Phi)} = w(\Phi)$ есть решение уравнения (3.1) и мы получаем гомеоморфное отображение окрестности элемента Φ_0 в множество M. Лемма 4 доказана.

Множество R непусто. Действительно, повторением рассуждений §2 (с применением леммы 1 вместо леммы 2) доказывается, что M есть аналитическое подмногообразие банахова пространства $D_{1,p}(\overline{\mathscr{D}})$, моделируемое в $A_{1,p}(\mathscr{D})$, содержащее точку $w \equiv 0$. Отсюда получаем существование функции $\Phi^* \neq 0$ такой, что ей по формуле (3.2) соответствует решение $w \neq 0$ уравнения (3.1).

Лемма 5. *Пусть $\{\Phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность аналитических функций из R, сходящаяся в норме $A_{1,p}(\overline{\mathscr{D}})$ к функции $\Phi \in A_{1,p}(\overline{\mathscr{D}})$, $\Phi \neq 0$. Тогда $\Phi \in R$.*

Доказательство. Из сходимости $\{\Phi_n\}$ и из формул (3.3) имеем $C(w_n, \Gamma) \leqslant \text{const}$ **(3.11)**, где константа от n не зависит. Из (3.11) по теореме 7 получаем равномерную по n оценку $C(w_n, \overline{\mathscr{D}}) \leqslant$ $\leqslant \text{const}$ **(3.12)**, откуда разномерно по n $C(\varphi_e, \overline{\mathscr{D}}) \leqslant \text{const}$ **(3.13)**, и $|\mu_1(\varphi_n, \Phi_n)| + |\mu_2(\varphi_n, \Phi_n)| \leqslant \mu_0 = \text{const} < 1$ **(3.14)**, где μ_0 от n не зависит, $\varphi_n = \varphi_n(\Phi_n)$.

Из сходимости последовательности $\{\Phi_n\}$, а также из (3.12), (3.13) по свойствам оператора T получаем равномерную по n оценку [1, гл. 4, §9] $D_{1,p}(T(d(\varphi_n, \Phi_n))) \leqslant \text{const}$ **(3.15)**.

В уравнении $\varphi_n + T(\mu_1\partial_z\varphi_n + \mu_2\partial_{\bar z}\bar\varphi_n) = -T(d(\varphi_n, \Phi_n))$ (3.16) оператор в левой части обратим в $D_{1,p}(\overline{\mathscr{D}})$; в силу (3.14) обратный оператор равномерно по n ограничен (см. лемму 1). Отсюда и из оценки (3.15) получаем равномерную по n оценку $D_{1,p}(\varphi_n, \overline{\mathscr{D}}) \leqslant \text{const}$ **(3.17)**, откуда по теореме вложения С. Л. Соболева [1, гл. 1, §5; 16)] следует компактность последовательности $\{\varphi_n\}$ в $C(\overline{\mathscr{D}})$. В дальнейшем будем считать, что совершен переход к подпоследовательности и $\{\varphi_n\}$ сходится в $C(\overline{\mathscr{D}})$ к $\varphi(z)$.

Вычитая уравнения $\Omega(\varphi_m, \Phi_m) = 0$, $\Omega(\varphi_n, \Phi_n) = 0$, получим

$$\varphi_m - \varphi_n + T(\mu_1(\varphi_m)\partial_z(\varphi_m - \varphi_n) + \mu_2(\varphi_m)\partial_{\bar z}(\overline{\varphi_m} - \overline{\varphi_n})) = -T(\tilde{d}(z)(\varphi_m - \varphi_n)), \tag{3.18}$$

где $\tilde{d}$ определяется формулой (3.8) с заменой φ_1 и φ_2 на φ_m и φ_n. Так как μ_1, μ_2, d аналитичны по φ, $\overline{\varphi}$, из сходимости $\{\Phi_n\}$ и из (3.17) следует равномерная по n ограниченность $\tilde{d}$ в норме $L_p(\overline{\mathscr{D}})$. Отсюда и из (3.18) находим $D_{1,p}(\varphi_m - \varphi_n, \overline{\mathscr{D}}) \leqslant \text{const} \cdot C(\varphi_m - \varphi_n, \overline{\mathscr{D}})$, где константа от n не зависит. Отсюда следует сходимость $\{\varphi_n\}$ в $D_{1,p}(\overline{\mathscr{D}})$. Переходя к пределу в норме $D_{1,p}(\overline{\mathscr{D}})$ при $n \to \infty$ в равенстве $\Omega(\varphi_n, \Phi_n) = 0$, с учетом непрерывности оператора $T: L_p(\overline{\mathscr{D}}) \to D_{1,p}(\overline{\mathscr{D}})$, получаем $\Omega(\varphi, \Phi) = 0$ **(3.19)**, $\varphi \in D_{1,p}(\overline{\mathscr{D}})$, откуда $\Phi \in R$. Лемма 5 доказана.

Таким образом, $R = A_{1,p}(\overline{\mathscr{D}}) \setminus \{0\}$, и отображение $\Phi = \Phi(w)$ устанавливает гомеоморфизм между R и $\overset{\circ}{M} = M \setminus \{0\}$. Формула (3.2) показывает, что этот гомеоморфизм продолжается до гомеоморфизма $A_{1,p}(\overline{\mathscr{D}})$ и M. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Следует доказать только связность $\tilde{M}$, остальное см. в §2. Рассмотрим отображение множества $\tilde{M}$ в множество аналитических функций $\Psi(w) = \Phi$, где оператор Ψ определяется формулой (2.4).

Лемма 6. *Оператор Ψ осуществляет (вещественно) аналитический диффеоморфизм многообразия $\tilde{M}$ в $A^k_\alpha(\overline{\mathscr{D}})$ и M в $A_{1,p}(\overline{\mathscr{D}})$.*

Для M доказательство содержится в §2; для M оно дословно повторяется (используется лемма 1).

В силу леммы 6 и теоремы 1 множество $\Psi(M) \subset A_{1,p}(\overline{\mathscr{D}})$ связно. Вместе с тем $\Psi(\tilde{M}) \subset \Psi(M)$ и для $\forall \Phi \in A^k_\alpha(\overline{\mathscr{D}}) \cap \Psi(M)$ $\exists w \in \tilde{M}: \Psi(w) = \Phi$ (последнее доказывается повторным применением леммы 2 при $k = 1, \ldots$ к равенству $\Psi(w) = \Phi$ с учетом того, что $D_{1,p}(\overline{\mathscr{D}}) \subset C_{(p-2)/p}(\overline{\mathscr{D}})$. Множество $\Psi(M)$ представляет собой объединение открытых шаров банахова пространства $A_{1,p}(\overline{\mathscr{D}})$, центры которых можно считать принадлежащими $\Psi(\tilde{M})$ (в силу плотности $A^k_\alpha(\overline{\mathscr{D}})$ в $A_{1,p}(\overline{\mathscr{D}})$). Обозначим через G такой шар.

Лемма 7. *Множество $G \cap A^k_\alpha(\overline{\mathscr{D}})$ связно в $A^k_\alpha(\overline{\mathscr{D}})$.*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать центр шара G нулем. Любая функция $\Phi \in G \cap A^k_\alpha(\overline{\mathscr{D}})$ соединяется нулем отрезком $t\Phi$, $t \in [0, 1]$ целиком состоящим из функций класса $A_\alpha^k(\overline{\mathcal{D}})$ и принадлежащим G, откуда следует утверждение леммы.

Пусть G_1 и G_2 — два из вышеописанных шара. Так как $A_\alpha^k(\overline{\mathcal{D}})$, плотно в $A_{1,p}(\overline{\mathcal{D}})$ из $G_1 \cap G_2 \neq \varnothing$ следует $(G_1 \cap G_2) \cap A_\alpha^k(\overline{\mathcal{D}}) \neq \varnothing$, откуда с учетом леммы 7 вытекает связность $\Psi(\widetilde{M})$, а следовательно, и $\widetilde{M}$. Теорема 2 доказана.

Лемма 8. *Для любой константы $E > 0$ существует решение $\widetilde{w}(z) \in C_\alpha^k(\overline{\mathcal{D}})$ уравнения (1.3) такое, что* $|\widetilde{w}(z)| > |E$, $\forall z \in \Gamma$.**(3.20)**

Доказательство. Существование решения $w(z) \in D_{1,p}(\overline{\mathcal{D}})$, удовлетворяющего условию (3.20), непосредственно следует из разрешимости уравнения (3.2) относительно $w(z)$ для $\forall \Phi \in A_{1,p}(\overline{\mathcal{D}})$. Обозначим $\Phi_*(z) = \Psi(w) \in A_{1,p}(\overline{\mathcal{D}})$. Поскольку $\Psi(\widetilde{M})$ плотно в $\Psi(M)$, $\exists\, \widetilde{\Phi} \in \Psi(\widetilde{M})$ сколь угодно близкая к Φ_* в норме $A_{1,p}(\overline{\mathcal{D}})$. Функция $\widetilde{w} = \Psi^{-1}(\widetilde{\Phi})$ для $\widetilde{\Phi}$, достаточно близкой к Φ_*, удовлетворяет условию (3.20) Лемма 8 и ее непосредственное следствие — теорема 5 — доказаны.

Доказательство теоремы 6. Сопряженно-изотермическую параметризацию (u,v) поверхности S можно выбрать так, чтобы точке $N_0 \in \partial S$ соответствовала точка $z = 1$ [1, гл. 2, § 6]. Обозначим $z_1, \ldots, z_m$ точки из $\overline{\mathcal{D}}$, соответствующие точкам $N_1, \ldots, N_m$ на S. Из взаимосвязи изгиба $I_t(S, N_0)$ и значений функции $w_t(z)$ в точке N_0 следует, что задача об изгибании поверхности S с условиями $I_t(S, N_0) = \mu(t)$, $\forall t \in [0,1]$; $I_t(S, N_l) \equiv 0$, $l = 1, \ldots, m$ **(3.21)**, эквивалентна задаче об изгибании поверхности S с условиями $w_t(1) = \lambda(t)$, $\forall t \in [0,1]$; $w_t(z_l) \equiv 0$, $l = 1 \ldots, m$ **(3.22)**, где функция $\lambda(t)$ определяется функцией $\mu(t)$.

Построим непрерывное семейство $\{\Phi_t\}_{t \in [0,1]}$ функций класса $A_{1,p}(\overline{\mathcal{D}})$ таких, что $\Phi_t(1) = \lambda(t)$ $\forall t \in [0,1]$, $\Phi_t(z_l) \equiv 0$, $l = 1, \ldots, m$. Семейство решений уравнения (1.5) $w_t = w_t(\Phi_t)$, соответствующих функциям Φ_t по формуле (3.2), будет удовлетворять условиям (3.22) и определять непрерывное изгибание S_t поверхности S с условиями (3.21). Так как $w_t(z) \in D_{1,p}(\overline{\mathcal{D}})$, поверхности $S_t \in D_{3,p}(\overline{\mathcal{D}})$ [8]. Вместе с тем известно, что $S_t \in C_\alpha^{k+2}(\overline{\mathcal{D}})$ [3]. Теорема 6 доказана.

Список литературы: 1. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции.— М.. Физматгиз, 1959. — 628 с. 2. *Боярский Б. В.* Обобщенные решения системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа с разрывными коэффициентами, Мат. сб., 1957, 43 (85), №4, с. 451 — 503. 3. *Виноградов В. С.* Об одной задаче для квазилинейных систем уравнений на плоскости, Докл. АН СССР, 1958, 121, № 3, с. 399 — 402. 4. *Фоменко В. Т.* Исследование решений основных уравнений теории поверхностей, Докл. АН СССР, 1962, 144, № 1, с. 69 — 71. 5. *Фоменко В. Т.* Изгибание поверхностей с сохранением точек конгруэнтности, Мат. сб., 1965, 66 (108), № 1 с. 127 — 141. 6. *Тюриков Е. В.* К вопросу об изгибании поверхностей рода $\rho > 0$ с краем, расположенных в пространстве Лобачевского. — Депон. ВИНИТИ. 32 с., № 2662 — 75, ДЕпон. РЖ Мат., 1975, 12А706. 7. *Фоменко В. Т., Тюриков Е. В.*

Исследование основных уравнений теории поверхностей положительной внешней кривизны, расположенных в пространстве постоянной кривизны, Изв. Сев. — Кав. науч. центра высшей школы, сер. «Естеств. науки», 1977, № 3, с. 3 — 7. 8. *Климентов С. Б.* Глобальная формулировка основной теоремы теории u — мерный поверхностей в m — мерном пространстве постоянной кривизны. — Укр. геометр. сб., 1979, вып. 22, с. 64 — 81. 9. *Ленг С.* Введение в теорию дифференцируемых многообразий. — М.: Мир, 1967. — 203 с. 10. *Ефимов Н. В.* Качественные вопросы теории деформаций поверхностей «в малом», Тр. МИАН им. В. А. Стеклова, 30 — М. — Л.: Изд-во АН СССР, 1949, с. 11. *Климентов С. Б.* Изгибаемость поверхностей положительной кривизны, Мат. заметки, 1976, 19, вып. 5, с. 815 — 823. 12. *Климентов С. Б.* О степени изгибаемости поверхностей положительной кривизны. — Укр. геометр. сб., 1981, вып. 24, с. 39 — 52. 13. *Сабитов И. Х.* Регулярность выпуклых поверхностей с регулярной в классах Гельдера метрикой. — Сиб. мат. журн., 1976, 17, № 4, с. 907 — 915. 14. *Погорелов А. В.* Внешняя геометрия выпуклых поверхностей, — М.: Наука, 1969. — 760 с. 15. *Ниренберг Л.* Лекции по нелинейному функциональному анализу. — М.: Мир, 1977. — 232 с. 16. *Бабич В. М.* К вопросу о распространении функций. — Усп. мат. наук, 1953, 8, № 2, с. 111 — 113.

Поступила в редколлегию 08. 12. 80.

УДК 514

В. В. Макеев

УНИВЕРСАЛЬНЫЕ ПОКРЫШКИ. II

Множество $X \subset R^n$ называется универсальной покрышкой, если им можно покрыть любое множество диаметра 1 в R^n, подвергая X движению без отражений.

В заметке [1] строятся универсальные покрышки в классе центрально симметричных ограниченных выпуклых многогранников X, описанных вокруг шара единичного диаметра в R^n. Символом $M(N)$ обозначим множество таких многогранников X, имеющих $2N$ граней. Настоящая заметка продолжает [1]. Здесь мы дадим необходимый и достаточный признак того, что $X \in M(N)$ является универсальной покрышкой, и с его помощью докажем, что все $X \in M(N)$ при $N > \frac{n(n+1)}{2}$ не являются универсальными покрышками.

1. Пусть $X \in M(N)$. Сопоставим X набор $l_1, l_2, \ldots, l_N$ числовых осей, проведенных через $O \in R^n$ и ортогональных парам противоположных граней X. Обозначим через $e_1, e_2, \ldots, e_N$ направляющие векторы осей $l_1, l_2, \ldots, l_N$ соответственно. Как указано в [1, §1], среди векторов $e_1, e_2, \ldots, e_N$ имеется n линейно независимых. Считаем нумерацию так, что векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$ независимы.

Пусть Y — тело постоянной ширины 1, содержащее точку O внутри. Пусть f — опорная функция тела Y; положим $g = f - \frac{1}{2}$. Рассмотрим сужение g на сферу S^{n-1} единичного радиуса с центром в $O \in R^n$, которое в дальнейшем будем обозначать буквой G. Функция G непрерывна на S^{n-1} и обладает свойством $G(-x) =$

$= -G(x)$, где $x \in S^{n-1}$. Всякая функция G с таким свойством в свою очередь определяет некоторое замкнутое выпуклое тело $K(G)$ диаметра не больше единицы по следующему правилу: для всякого единичного вектора $\boldsymbol{e} \in R^n$ строится слой единичной толщины, ортогональный прямой, натянутой на $\boldsymbol{e}$, серединная гиперплоскость которого пересекает указанную прямую в точке $G(\boldsymbol{e})\,\boldsymbol{e}$. Тело $K(G)$ есть пересечение указанных слоев по всем единичным векторам $\boldsymbol{e}$.

Символом $SO(n)$ обозначим группу сохраняющих ориентацию движений пространства R^n. Пространство положений набора $l = (l_1, l_2, \ldots, l_N)$ жестко связанных между собой осей, подвергнутых сохраняющим ориентацию движениям пространства R^n, естественным образом отождествляется с $SO(n)$ и в дальнейшем обозначается тем же символом. На $SO(n)$ определим N непрерывных функций $u_1, u_2, \ldots, u_N$. Положим $u_i(l) = G(\boldsymbol{e}_i)$, где $l \in SO(n)$, а $\boldsymbol{e}_i$ — единичный направляющий вектор оси l_i. Для всякого $l \in SO(n)$ будем рассматривать многогранник $У(l)$, полученный пересечением N единичных слоев, ортогональных осям l_i набора l, причем средняя гиперплоскость слоя, соответствующего l_i, пересекает его в точке $u_i(l)\,\boldsymbol{e}_i$. Из определения ясно, что X есть универсальная покрышка в том и только в том случае, если для любого тела Y постоянной ширины 1 в многогранник $Y(l)$ можно вписать шар единичного диаметра при некотором $l \in SO(n)$, т. е. при некотором $l \in SO(n)$ средние гиперплоскости соответствующих слоев должны пересекаться в одной точке. Выразим это условие аналитически. Зафиксируем $l \in SO(n)$. Средние гиперплоскости первых n слоев уже пересекаются ровно в одной точке O′ (в силу линейной независимости $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$). Вектор $\overrightarrow{OO'}$ определяется из уравнений $\overrightarrow{OO'} \cdot \boldsymbol{e}_i = u_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Пусть $\overrightarrow{OO'} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \boldsymbol{e}_j$, тогда $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{e}_i = u_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$; $\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j$ — фиксированные (для данного X) константы, поэтому $\lambda_j = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_i$, где a_{ij} — некоторые константы. Проекция O' на $l_j\ (j > n)$ имеет координату $\overrightarrow{OO'} \cdot \boldsymbol{e}_j$ на оси l_j. Таким образом, $\overrightarrow{OO'} \cdot \boldsymbol{e}_j = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \boldsymbol{e}_i\right) \cdot \boldsymbol{e}_j = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j = \sum_{i=1}^{n} A_{ij} u_i$, где A_{ij} — фиксированные (для данного X) константы. Точка O' принадлежит средним гиперплоскостям оставшихся $N - n$ слоев тогда и только тогда, когда выражения $v_j = u_j - \sum_{i=1}^{n} A_{ij} u_i$ (1), где $n < j \leqslant N$, одновременно обращаются в O. Заметим, что для определения функций u_i, а значит, и выражений (1), достаточно задать некоторую функцию G на S^{n-1}.

Обозначим буквой S класс непрерывных функций на сфере S^{n-1}, обладающих свойством $G(-x) = -G(x)$. Формулы (1) определяют непрерывное отображение $F: SO(n) \times S \to R^{N-n}$. X есть универсальная покрышка, если для любой $G \in S$ множество $F \times (SO(n) \times G)$ содержит $O \in R^{N-n}$. Следующий пункт посвящен доказательству того, что это условие является и необходимым.

2. **Теорема 1.** *$X \in M(N)$ есть универсальная покрышка тогда и только тогда, когда для всякой $G \in S$ множество $F(SO(n) \times G)$ содержит $O \in R^{N-n}$.*

Пусть $G \in S$ такова, что $O \notin F(SO(n) \times G)$. Покажем, что X не способен покрывать $K(\lambda G)$ (см. п. 1) при всех достаточно малых $\lambda > O$.

Положим $B = \inf\limits_{l \in SO(n)} (\max\limits_{j>n} |v_j(l)|)$, $A = \sum\limits_{i,j} |A_{ij}|$. По условию $B > O$. Обозначим через S^∞ множество бесконечно дифференцируемых функций из S. Можно найти $G' \in S^\infty$ такую, что $O \notin F(SO(n) \times G')$. Выберем такую $G' \in S^\infty$, что $\sup\limits_{e \in S^{n-1}} |G(e) - G'(e)| < B/2(A + 1)$. Для всякого $l \in SO(n)$ при некотором j будет $|v_j(l)| = |u_j(l) - \sum\limits_{i=1}^{n} A_{ij} u_i(l)| \geqslant B$. Символами v_i', u_i' обозначим соответствующие величины для G'. Имеем $|v_j'(l)| \geqslant |v_j(l)| - |v_j(l) - v_j'(l)| \geqslant B - |(u_j(l) - u_j'(l)) + \sum\limits_{i=1}^{n} A_{ij}(u_i(l) - u_i'(l))| \geqslant B - (A+1) \sup\limits_{e \in S^{n-1}} |G(e) - G'(e)| \geqslant B - (A+1)\frac{B}{2(A+1)} = \frac{B}{2}$. В дальнейшем считаем G бесконечно дифференцируемой.

Пусть f_λ — сужение опорной функции тела $K(\lambda G)$ на S^{n-1}, а $\|G\| = \sup\limits_{e \in S^{n-1}} |G(e)|$ — обычная норма в пространстве непрерывных функций. f_λ вовсе не обязательно равна $\lambda G + 1/2$, но ясно, что $f_\lambda \leqslant \lambda G + 1/2$. Оценим величину $\lambda G + 1/2 - f_\lambda$ сверху. Далее считаем, что $\lambda > 0$ и $\lambda G + 1/2 > 0$. На оси, натянутой на некоторый $\boldsymbol{e} \in S^{n-1}$, рассмотрим отрезок $I = [\lambda G(\boldsymbol{e}), \lambda G(\boldsymbol{e}) + 1/2]$. Посмотрим, что могут отсечь от правого его конца гиперплоскости слоев, дающих в пересечении $K(\lambda G)$. Ясно, что нужно рассматривать только гиперплоскости, соответствующие лучам, натянутым на векторы $\boldsymbol{j} \in S^{n-1}$, составляющие с $\boldsymbol{e}$ острый угол $\varphi(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{j})$. Эти гиперплоскости пересекают луч, натянутый на $\boldsymbol{e}$, в точках $(1/2 + \lambda G(\boldsymbol{j}))/\cos(\varphi(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{j}))$. Если такая гиперплоскость что-то отсекает от I, то $\lambda G(\boldsymbol{e}) + 1/2 \geqslant (\lambda G(\boldsymbol{j}) + 1/2)/\cos(\varphi(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{j}))$, поэтому $\cos(\varphi(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{j})) \geqslant (1/2 - \lambda\|G\|)/(1/2 + \lambda\|G\|)$. В частности, $\varphi(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{j}) \to 0$ при $\lambda \to 0$. Поэтому существует такая положительная функция $\psi(\lambda)$, что $\psi(\lambda) \to 0$ при $\lambda \to 0$, и гиперплоскость, соответствующая j, пересекает I только при $\varphi(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{j}) < \psi(\lambda)$. Вектор $\boldsymbol{e}$ выбирался произвольно, поэтому считаем, что ψ обслуживает всю S^{n-1}. Функция $G \in S^\infty$, значит, она удовлетворяет условию Липница, т. е. существует такая константа $C > 0$, что $|G(e) - G(j)| \leqslant C\varphi(e, j)$ для любых $e, j \in S^{n-1}$. Пусть $\varphi(e, j) < \psi(\lambda)$. Тогда $(\lambda G(j) + 1/2)/\cos(\varphi(e, j)) \geqslant \lambda G(j) + 1/2 = \lambda G(e) + 1/2 + \lambda(G(j) - G(e)) \geqslant \lambda G(e) + 1/2 - \lambda C\varphi(e, j) \geqslant \lambda G(e) + 1/2 - \lambda C\psi(\lambda)$. Значит, от правого конца I будет отрезан кусок не длиннее $\lambda C\psi(\lambda)$, поэтому $f_\lambda(e) \geqslant \lambda G(e) + 1/2 - \lambda C\psi(\lambda)$.

Пусть многогранник X в некотором положении покрывает $K(\lambda G)$ и $l = (l_1, l_2, \ldots, l_N)$ — набор осей, соответствующих этому положению X. Пусть u_i — проекция центра X на l_i. Величины u_i (см. п. 1) связаны соотношениями $u_j - \sum_{i=1}^{n} A_{ij}u_i = 0$, где $n < j \leqslant N$. Из доказанного двойного неравенства $\lambda G + 1/2 \geqslant f_\lambda \geqslant \lambda G + 1/2 - \lambda C\psi(\lambda)$ следует, что $|u_i - \lambda G(e_i)| \leqslant \lambda C\psi(\lambda)$. По определению B при некотором j будет $|\lambda v_j| = |\lambda G(e_j) - \sum_{i=1}^{n} A_{ij}\lambda G(e_i)| \geqslant \lambda B$. С другой стороны, $|\lambda G(e_j) - \lambda \sum_{i=1}^{n} A_{ij}G(e_i)| = |\lambda G(e_j) - u_j) - \sum_{i=1}^{n} A_{ij}(\lambda G(e_i) - u_i)| \leqslant |\lambda G(e_j) - u_j + \sum_{i=1}^{n} |A_{ij}| \times |\lambda G(e_i) - u_i| \leqslant \lambda C\psi(\lambda) + AC\lambda\psi(\lambda) = C(A+1)\lambda\psi(\lambda)$. Следовательно, $\lambda B \leqslant C(A+1)\lambda\psi(\lambda)$, откуда $\psi(\lambda) \geqslant B/C(A+1)$. Но $\psi(\lambda) \to 0$ при $\lambda \to 0$, поэтому X не покрывает $K(\lambda G)$ при всех достаточно малых λ. Теорема 1 доказана.

3. **Теорема 2.** *Все $X \in M(N)$ с $N > \frac{n(n+1)}{2}$ не являются универсальными покрышками.*

Доказательство. Как следует из теоремы 1, достаточно найти такую $G \in S$, что $0 \notin F(SO(n) \times G)$. Мы покажем, что такие функции составляют в S всюду плотное открытое множество (топология в S определяется с помощью описанной выше нормы). Очевидно, что это множество открыто. Покажем, что оно плотно в пространстве S^∞, которое плотно в S.

Пусть $l \in SO(n)$. Рассмотрим функции $U_l^1, U_l^2, \ldots, U_l^{N-n}$ из S^∞ со следующими свойствами: $U_l^k = 0$ в окрестности e_i при $i \neq n+k$ и $U_l^k(e_{n+k}) \neq 0$. Ясно, что функции $U_l^1, U_l^2, \ldots, U_l^{N-n}$ обладают указанными свойствами и в некоторой окрестности $V(l)$ элемента l в $SO(n)$. Множества $V(l)$ $(l \in SO(n))$ образуют открытое покрытие $SO(n)$. В силу компактности $SO(n)$ из него можно выделить конечное подпокрытие $V(l_1), V(l_2), \ldots, V(l_m)$. Вещественное векторное пространство, натянутое на функции $U_{l_i}^j \times (1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant N-n)$, обозначим через E.

Пусть $h \in S^\infty$, а H — векторное пространство, натянутое на E и h. Покажем, что сужение $F: SO(n) \times H \to R^{N-n}$ есть субмерсия. Пусть $(l, h') \in SO(n) \times H$. Набор l лежит в некотором элементе выбранного нами подпокрытия $SO(n)$; обозначим буквами $U^1, U^2, \ldots, U^{N-n}$ функции, соответствующие этому элементу. Рассмотрим сужение $F\colon (l,\ h' + \sum_{i=1}^{N-n} t_i U^i) \to R^{N-n}$, где $t_i \in R$. Вычислим якобиан F в точке $(0, \ldots, 0)$: $\frac{\partial F}{\partial t_k}(0) = (0, \ldots, 0, U^k(e_{n+k}), 0, \ldots, 0)$, где $U^k(e_{n+k}) \neq 0$ и стоит на k-м месте. Поэтому искомый якобиан $\left|\frac{\partial F}{\partial t}(0)\right| = \prod_{k=1}^{N-n} U^k(e_{n+k})$. Итак, F — субмерсия.

Тогда (как следует из теоремы о неявном отображении) $F^{-1}(0)$ есть гладкое (класса C^∞) подмногообразие $SO(n) \times H$ размерности $(\dim SO(n) + \dim H - N + n) = \dim H + \frac{n(n+1)}{2} - N < \dim H$, ибо $N > \frac{n(n+1)}{2}$ по условию. Рассмотрим проекцию $\pi\colon SO(n) \times H \to H$. $\pi(F^{-1}(0))$ имеет в H меру 0, как образ гладкого многообразия меньшей размерности при гладком отображении. Это утверждение — частный случай теоремы Сарда [2, с. 56]. Таким образом, $0 \notin F(SO(n) \times G)$ для почти всякой функции $G \in H$. Теорема 2 доказана.

4. *Замечания*. Из доказательства теорем 1 и 2 видно, что тела, не покрываемые $X \in M(N)$ с $N > \frac{n(n+1)}{2}$, можно получить сколь угодно малым шевелением шара единичного диаметра в R^n. Это следует из того, что $K(\lambda G)$ стремится к шару единичного диаметра при $\lambda \to 0$.

Теорема 2 остается верной, если с X снять требование ограниченности. Если бы многогранник X был универсальной покрышкой, то мы могли бы дополнить набор осей $l_1, l_2, \ldots, l_N$ осями, натянутыми на векторы какого-нибудь нормированного базиса ортогонального дополнения к пространству, натянутому на векторы $e_1, e_2, \ldots, e_N$, и получили бы универсальную покрышку из некоторого $M(N')$ с $N' > N$, что противоречит теореме 2.

Гипотеза. Вероятно, оценка $N > \frac{n(n+1)}{2}$ является точной, т. е. при всяком n имеются универсальные покрышки в $M\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)$. Автору известно доказательство этого предположения только при $n = 2$.

Список литературы: 1. *Макеев В. В.* Универсальные покрышки. I — Укр. геометр. сб., 1981, вып. 24, с. 70—79. 2. *Стернберг С.* Лекции по дифференциальной геометрии. — М.: Мир, 1970. — 412 с.

Поступила в редколлегию 14.11.79.

УДК 513

П. Е. Марков

БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ИЗГИБАНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ МНОГОМЕРНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Бесконечно малые (б. м.) изгибания первого порядка многомерных поверхностей рассматривались многими авторами. В частности, О. Мацзуйямой, Е. П. Сенькиным, Л. Ю. Лизуновой [1—3] были получены различные признаки жесткости гиперповерхностей в евклидовых и римановых пространствах. Г. Якобович [4] доказал нежесткость n-мерных поверхностей в m-мерном евклидовом пространстве при $m > n(n+3)/2$.

В настоящей статье будут рассмотрены б. м. изгибания k-го порядка и аналитические изгибания n-мерных поверхностей в m-мерном римановом или псевдоримановом (произвольного индекса) полном односвязном пространстве постоянной кривизны. Для таких поверхностей здесь выводится система уравнений для изгибающих полей и выделяются решения этой системы, определяющие б. м. или аналитические движения поверхности. Устанавливается необходимый и достаточный признак отсутствия б. м. изгибаний конечного порядка, отличных от б. м. движений того же порядка, а также достаточный признак аналитической неизгибаемости указанных поверхностей.

Основные результаты работы обобщают по размерности, коразмерности, индексу и кривизне пространства соответствующие результаты статьи Н. В. Ефимова [5, § 27].

§ 1. Обозначения и терминология. 1. Пусть S_m — m-мерное плоское (евклидово или псевдоевклидово) пространство произвольного индекса с аффинным репером $(0; e_1, \ldots, e_m)$ и метрическим тензором $G_{\alpha\beta}$, $\det\|G_{\alpha\beta}\| \neq 0$. Всюду будем считать, что индексы $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ пробегают множество $\{1, 2, \ldots, m\}$. Символами $a \cdot b$ и $a \wedge b$ будем обозначать соответственно скалярное и внешнее произведения векторов a и b. Если $a = a^\alpha e_\alpha$, $b = b^\beta e_\beta$, то $a \cdot b = G_{\alpha\beta} a^\alpha b^\beta = a^\alpha b_\alpha$, $a \wedge b = (1/2)(a^\alpha b^\beta - a^\beta b^\alpha) e_\alpha \wedge e_\beta$ (в обозначениях координат векторов и бивекторов условимся сохранять коренные буквы, снабжая их индексами).

Если дана упорядоченная система чисел $(A^{\alpha\beta})^m_{\alpha,\beta=1}$, такая, что $A^{\alpha\beta} = -A^{\beta\alpha}$, то инвариант $A = (1/2) A^{\alpha\beta} e_\alpha \wedge e_\beta$ называется бивектором в S_m с координатами $A^{\alpha\beta}$. Внутренним произведением бивектора A на вектор a называется вектор $A \cdot a = A^{\alpha\beta} a_\alpha b_\beta$. Скалярное произведение бивекторов A и B определяется формулой $A \cdot B = (1/4)\, G_{\alpha\beta,\gamma\sigma} A^{\alpha\beta} B^{\gamma\sigma}$, где $G_{\alpha\beta,\gamma\sigma} = G_{\alpha\gamma} G_{\beta\sigma} - G_{\alpha\sigma} G_{\beta\gamma}$. Если положить $A_{\alpha\beta} = (1/2)\, G_{\alpha\beta,\gamma\sigma} A^{\gamma\delta}$, то можно записать $A \cdot B = (1/2) A_{\alpha\beta} B^{\alpha\beta}$. Для скалярного произведения бивекторов A и $a \wedge b$ будет $A \cdot (a \wedge b) = (1/2) A^{\alpha\beta}(a_\alpha b_\beta - a_\beta b_\alpha) = A^{\alpha\beta} a_\alpha b_\beta = (A \cdot a) \cdot b$. Отсюда, в частности, следует, что $(A \cdot a) \cdot b = -(A \cdot b) \cdot a$.

2. Пусть V_m — m-мерное полное односвязное пространство произвольной постоянной кривизны K_0. При $K_0 = 0$ это пространство будем рассматривать как S_m, при $K_0 \neq 0$ — как гиперсферу в S_{m+1}, радиус-вектор z текущей точки которой удовлетворяет условию $(K_0 z)^2 = K_0$. **(1)** Во втором случае, говоря о векторах и бивекторах, будем считать их принадлежащими пространству S_{m+1}, содержащему V_m.

3. В пространстве V_m рассмотрим n-мерную поверхность F_n класса C^1, заданную уравнением $z = z(x^1, \ldots, x^n)$ с метрической формой $ds^2 = dz^2 = g_{ij} dx^i dx^j$, $\det \| g_{ij} \| \neq 0$. Всюду будем считать, что индексы i, j пробегают множество $\{1, \ldots, n\}$. Предположим, что, начиная с некоторого момента времени $\tau = 0$, поверхность F_n деформируется, переходя в момент $\tau \geqslant 0$ в поверхность F_n^τ с уравнением $z^\tau = z^\tau (x^1, \ldots, x^n)$, $z^0 \equiv z$. Каждая величина w на F_n перейдет при этом в некоторую величину w^τ на F_n^τ. Величину $\delta^r w \equiv \frac{1}{2r!} \left(\frac{d^r w^\tau}{d\tau^r} \right)_{\tau=0}$, если она существует, называют r-й вариацией величины w, $r = 1, 2, \ldots$. Мы будем рассматривать только такие деформации поверхности F_n, при которых вариации длины каждой дуги на F_n до некоторого порядка $k \geqslant 1$ включительно равны нулю. В этом случае поле $\delta^r z$ называется изгибающим полем порядка r, а система $(\delta^r z)_{r=1}^k$ — системой изгибающих полей порядка k. Всюду будем предполагать, что $\delta^r z \in C^1$, $r = 1, \ldots, k$.

Обратно, если на поверхности F_n задана система изгибающих полей порядка k, то деформация $\{F_n^\tau\}$ определяется с точностью до членов $(k+1)$-го порядка относительно τ по формуле $z^\tau = z + 2\sum_{r=1}^{k} \tau^r \delta^r z + \tau^{k+1}(\ldots)$ **(2)**. При $K_0 \neq 0$ поверхность F_n^τ не лежит в V_m. Будем говорить, что поверхность F_n деформируется в пространстве V_m, если выполнено условие $(K_0 z^\tau)^2 = K_0 + K_0 \tau^{k+1}(\ldots)$ **(3)**. Множество всех деформаций поверхности F_n в пространстве V_m, определенных данной системой изгибающих полей порядка k, называется б. м. изгибанием k-го порядка поверхности F_n в пространстве V_m.

4. Деформация поверхности F_n в пространстве V_m, определенная равенствами $z^\tau = z + 2\sum_{r=1}^{\infty} \tau^r \delta^r z$, $(K_0 z^\tau)^2 = K_0$ **(4)**, называется аналитическим изгибанием F_n в V_m, если ряд в правой части первого из этих равенств сходится и k-я вариация длины каждой дуги на F_n для всякого натурального k равна нулю. Бесконечная система полей $(\delta^r z)_{r=1}^{\infty}$ называется системой изгибающих полей при аналитическом изгибании поверхности F_n в пространстве V_m. Аналитические изгибания мы часто будем рассматривать как б. м. изгибания бесконечно высокого порядка.

§ 2. Система уравнений для изгибающих полей. Б. м. движения и тривиальные б. м изгибания. 1. Пусть на поверхности F_n задана система изгибающих полей $(\delta^r z)_{r=1}^k$. Для всякой деформации поверхности F_n в пространстве V_m вида (2) будет $\delta^1(ds^2) = \ldots = \delta^k(ds^2) = 0$ **(5)**, откуда следует, что $\delta^1 g_{ij} = \ldots = \delta^k g_{ij} = 0$. Учитывая, что $g_{ij} = z_{,i} \cdot z_{,j}$, получаем

$$\delta^1 z_{,i} \cdot z_{,j} + \delta^1 z_{,j} \cdot z_{,i} = 0; \quad 2\delta^1 z_{,i}\delta^1 z_{,j} + \delta^2 z_{,i} z_{,j} + z_{,i}\delta^2 z_{,j} = 0;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\delta^1 z_{,i} \cdot \delta^{k-1} z_{,j} + \delta^1 z_{,j}\delta^{k-1} z_{,i} + \ldots + \delta^{k-1} z_{,i}\delta^1 z_{,j} + \delta^1 z_{,i}\delta^{k-1} z_{,j} + \\ + \delta^k z_{,i} z_{,j} + z_{,i}\delta^k z_{,j} = 0.$$

Если $K_0 \neq 0$, то, варьируя k раз тождество (1), находим

$$\delta^1 z \cdot z = 0; \ \delta^1 z \cdot \delta^1 z + \delta^2 z \cdot z = 0;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\delta^1 z \cdot \delta^{k-1} z + \delta^2 z \cdot \delta^{k-2} z + \ldots + \delta^{k-1} z \cdot \delta^1 z \cdot \delta^k z \cdot z = 0.$$

Две последние системы можно записать в виде

$$\sum_{s=1}^{r} \delta^s z_{,(i}\delta^{r-s} z_{,j)} = 0; \ K_0 \cdot \sum_{s=1}^{r} \delta^s z \cdot \delta^{r-s} z = 0, \tag{6}$$

где $\delta^0 z \equiv z$, $r = 1, \ldots, k$, знак (i, j) означает симметризацию по индексам i, j.

Обратно, если $(\delta^r z)_{r=1}^k$ — решение системы (6) то для всякой деформации поверхности F_n, определенной формулой (2), выполняются условия (3), (5). Следовательно, это решение является системой изгибающих полей порядка k поверхности F_n в пространстве V_m.

Таким образом, для того, чтобы система полей $(\delta^r z)_{r=1}^k$ определяла б. м. изгибание конечного порядка k поверхности F_n в пространстве V_m, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла системе уравнений (6). При $k = \infty$ равенства (6) вместе с требованием сходимости ряда в первой формуле (4) являются необходимыми и достаточными условиями, при которых бесконечная система полей $(\delta^r z)_{r=1}^\infty$ определяет аналитическое изгибание поверхности F_n в пространстве V_m.

2. Система (6) всегда допускает решения, представимые в следующей рекуррентной форме

$$\delta^r z = \delta_0^r z \equiv \sum_{s=1}^{r} \Omega^{(s)} \cdot \delta^{r-s} z + \omega^{(r)}, \tag{7}$$

где $r = 1, \ldots, k$, $\Omega^{(r)}$ — произвольные постоянные бивекторы; $\omega^{(r)}$ — постоянные векторы, удовлетворяющие условию $K_0\omega^{(r)} = 0$. Формулами (7) описывается движение твердого тела в пространстве V_m. В связи с этим б. м. изгибание k-го порядка (аналитическое изгибание, если $k = \infty$) поверхности F_n в пространстве

V_m будем называть б. м. движением порядка k (аналитическим движением), если соответствующая система изгибающих полей имеет вид (7).

3. Б. м. изгибание k-го порядка поверхности F_n в пространстве V_m, а также соответствующую систему изгибающих полей $(\delta^r z)_{r=1}^k$ будем называть тривиальными, если поле $\delta^1 z$ определяет б. м. движение первого порядка F_n в V_m. В этом случае поле $\delta^1 z$ имеет вид $\delta^1 z = \delta_0^1 z = \Omega^{(1)} \cdot z + \omega^1$ (8).

Говорят, что поверхность F_n обладает жесткостью k-го порядка в пространстве V_m, если всякое б. м. изгибание k-го порядка F_n в V_m тривиально.

Для всякого натурального $k' \leqslant k$ система уравнений (6) содержит в качестве подсистемы систему уравнений, определяющую б. м. изгибание k'-го порядка поверхности F_n в пространстве V_m. Отсюда следует, что если F_n обладает жесткостью порядка k', то она обладает жесткостью и любого порядка $k \geqslant k'$.

§ 3. Б. м. изгибания конечного порядка. 1. В данном параграфе мы выясним условия, при которых поверхность F_n не допускает в пространстве V_m б. м. изгибаний конечного порядка, отличных от б. м. движений. Основной результат формулируется следующим образом.

Теорема 1. *Для того чтобы всякое б. м. изгибание конечного порядка k поверхности F_n в пространстве V_m являлось б. м. движением порядка k, необходимо и достаточно, чтобы поверхность F_n обладала жесткостью первого порядка в пространстве V_m.*

2. Доказательство теоремы 1 опирается на следующую лемму, которая будет использована также в § 4.

Лемма 1. *Пусть $(\delta^r z)_{r=1}^{k+1}$ — система изгибающих полей порядка $k+1$ поверхности F_n в пространстве V_m, и пусть $\delta^1 z = \delta_0^1 z$, $\delta^2 z = \delta_0^2 z, \ldots, \delta^k z = \delta_0^k z$, где поля $\delta_0^s z$, $s = 1, \ldots, k$ определены формулой (7). Тогда поле $\delta^{k+1} z$ имеет вид*

$$\delta^{k+1} z = \sum_{r=1}^{k} \Omega^{(r)} \delta_0^{k+1-r} z + \delta_*^1 z, \tag{9}$$

где $\delta_*^1 z$ — некоторое изгибающее поле первого порядка поверхности F_n в пространстве V_m.

Доказательство. Поле $\delta^{k+1} z$ определяется системой уравнений

$$\delta^{k+1} z_{,(i} \cdot z_{,j)} + \sum_{r=1}^{k} \delta_0^r z_{,(i}\, \delta^{k+1-r} z_{,j)} = 0;\ \ K_0 \Big(\delta^{k+1} z \cdot z + \sum_{r=1}^{k} \delta_0^r z \times \\ \times \delta_0^{k+1-r} z\Big) = 0. \tag{10}$$

Подставив формулу (7) в левую часть первого равенства, найдем

$$\delta^{k+1} z_{,(i} \cdot z_{,j)} + \sum_{r=1}^{k} \delta_0^r z_{,(i}\, \delta^{k+1-r} z_{,j)} = \delta^{k+1} z_{,(i} z_{,j)} + \sum_{r=1}^{k} \sum_{s=1}^{r} (\Omega^{(s)} \delta_0^{(r-s)} \times$$

$\times z_{,(i)} \cdot \delta^{k+1-r} z_{,j)} = \delta^{k+1} z_{,(i} \cdot z_{,j)} + \sum_{r=1}^{k} (\Omega^{(r)} z_{,(i)}\, \delta^{k+1-r} z_{,j)} + \sum_{r=2}^{k} \sum_{s=1}^{r-1} \times$
$\times (\Omega^{(s)} \delta_0^{r-s} z_{,(i)} \cdot \delta^{k+1-r} z_{,j)}$. Преобразуем двойную сумму: $\sum_{r=2}^{k} \sum_{s=1}^{r-1} \times$
$\times (\Omega^{(s)} \cdot \delta_0^{r-s} z_{,(i)} \cdot \delta^{k+1-r} z_{,j)} = \Omega^{(1)} \cdot (\delta_0^1 z_{,(i} \wedge \delta^{k-1} z_{,j)} + \delta_0^2 z_{,(i} \wedge$
$\wedge \delta_0^{k-2} z_{,j)} + \ldots + \delta_0^{k-1} z_{,(i} \wedge \delta_0^1 z_{,j)}) + \Omega^{(2)} \cdot (\delta_0^1 z_{,(i} \wedge \delta_0^{k-2} z_{,j)} + \delta_0^2 \times$
$\times z_{,(i} \wedge \delta_0^{k-3} z_{,j)} + \ldots + \delta_0^{k-2} z_{,(i} \wedge \delta_0^1 z_{,j)}) + \ldots + \Omega^{(k-1)} (\delta_0^1 z_{,(i} \wedge$
$\wedge \delta_0^1 z_{,j)}) = 0$. Таким образом, первое равенство системы (10) приводится к виду $\delta^{k+1} z_{,(i} \cdot z_{,j)} - \sum_{r=1}^{k} \Omega^{(r)} \cdot \delta_0^{k+1-r} z_{,(i} \cdot z_{,j)} = 0$. Аналогичным преобразованием второе равенство системы (10) приводится к виду

$$K_0 (\delta^{k+1} z \cdot z - \sum_{r=1}^{k} \Omega^{(r)} \cdot \delta_0^{k+1-r} z \cdot z) = 0.$$

Если положить $\delta_*^1 z = \delta^{k+1} z - \sum_{r=1}^{k} \Omega^{(r)} \delta^{k+1-r} z$, то система (10) примет вид $\delta_*^1 z_{,(i} \cdot z_{,j)} = 0$; $K_0 \delta_*^1 z \cdot z = 0$. Это — система уравнений для изгибающего поля первого порядка. Отсюда и из определения поля $\delta_*^1 z$ вытекает (9). Лемма доказана.

3. Докажем теорему 1. Пусть поверхность F_n обладает жесткостью первого порядка в пространстве V_m. Тогда всякое ее изгибающее поле первого порядка имеет вид (8), так что при $k = 1$ теорема справедлива. По индукции предположим, что всякое б. м. изгибание k-го порядка поверхности F_n в пространстве V_m является б. м. движением порядка k, и покажем, что этим свойством обладает всякое б. м. изгибание $(k+1)$-го порядка. Для этого достаточно показать, что всякое изгибающее поле $(k+1)$-го порядка имеет вид

$$\delta^{k+1} z = \sum_{r=1}^{k} \Omega^{(r)} \cdot \delta_0^{k+1} z + \Omega^{(k+1)} z + \omega^{(k+1)}, \tag{11}$$

где $\Omega^{(k+1)} = \mathrm{const}$, $\omega^{(k+1)} = \mathrm{const}$, $K_0 \omega^{(k+1)} = 0$. Действительно, в силу леммы 1 разность $\delta_*^1 z = \delta^{k+1} z - \sum_{r=1}^{k} \Omega^{(r)} \delta^{k+1-r} z$ является изгибающим полем первого порядка. А так как F_n обладает жесткостью первого порядка в V_m, то $\delta_*^1 z = \Omega^{(k+1)} z + \omega^{(k+1)}$. Отсюда вытекает формула (11).

Обратно, допустим, что поверхность F_n не обладает жесткостью первого порядка в пространстве V_m. Тогда система уравнений для изгибающего поля первого порядка имеет нетривиальное решение $\delta^1 z$. Покажем, что в этом случае существует б. м.

изгибание k-го порядка поверхности F_n в V_m, не являющееся б. м. движением. Для этого рассмотрим систему полей $(\delta_0^r z)_{r=1}^k$, определяющую б. м. движение порядка k поверхности F_n в пространстве V_m, и положим $\delta_*^1 z = \delta_0^1 z, \ldots, \delta_*^{k-1} z = \delta_0^{k-1} z$, $\delta_*^k \times z = \delta_0^k z + \delta^1 z$. Система полей $(\delta_*^r z)_{r=1}^k$ удовлетворяет системе уравнений (6) и, следовательно, определяет (тривиальное) б. м. изгибание k-го порядка поверхности F_n в V_m. Покажем, что это б. м. изгибание не является б. м. движением. Рассуждая от противного, положим, что система $(\delta_*^r z)_{r=1}^k$ определяет б. м. движение F_n в V_m порядка k. Тогда для поля $\delta_*^k z$ имеем

$$\delta_*^k z = \sum_{r=1}^{k-1} \Omega^{(r)} \cdot \delta_*^{k-r} z + \Omega_*^{(k)} z + \omega_*^{(k)},$$

где $\Omega_*^{(k)} = \mathrm{const}$, $\omega_*^{(k)} = \mathrm{const}$, $K_0 \omega_*^{(k)} = 0$. В силу определения полей $\delta_*^r z$, $r = 1, \ldots, k$, последнее равенство можно записать в виде $\delta_0^k z + \delta^1 z = \sum\limits_{r=1}^{k-1} \Omega^{(r)} \cdot \delta_0^{k-r} z + \Omega_*^{(k)} z + \omega_*^{(k)}$. Отсюда и из определения поля $\delta_0^k z$ получаем $\delta^1 z - \sum\limits_{r=1}^{k-1} \Omega^{(r)} \cdot \delta_0^{k-r} z + \Omega^{(k)} \cdot z + \omega^{(k)} = \sum\limits_{r=1}^{k-1} \Omega^{(r)} \delta_0^{k-r} z + \Omega_*^{(k)} \cdot z + \omega_*^{(k)}$, откуда следует, что $\delta^1 z = (\Omega_*^{(k)} - \Omega^{(k)}) \cdot z + \omega_*^{(k)} - \omega^{(k)}$. Это противоречит нетривиальности поля $\delta^1 z$. Теорема доказана.

4. Из определений предыдущего параграфа следует, что всякое б. м. движение k-го порядка поверхности F_n в пространстве V_m является тривиальным б. м. изгибанием того же порядка. Обратное утверждение, вообще говоря, не имеет места. Именно, из доказательства теоремы 1 вытекает

Следствие. *Для того чтобы всякое тривиальное б. м. изгибание конечного порядка k поверхности F_n в пространстве V_m являлось б. м. движением порядка k, необходимо и достаточно, чтобы поверхность F_n обладала жесткостью первого порядка в пространстве V_m.*

§ 4. **Об аналитической неизгибаемости поверхностей.** 1. Будем говорить, что поверхность F_n аналитически неизгибаема в пространстве V_m, если всякое аналитическое изгибание F_n и V_m является аналитическим движением. В этом параграфе мы установим достаточные условия аналитической неизгибаемости поверхностей.

Теорема 2. *Если поверхность F_n обладает жесткостью первого или второго порядка в пространстве V_m, то она аналитически неизгибаема в пространстве V_m.*

2. Доказательству теоремы 2 предпошлем вспомогательные рассуждения. Для бивекторов A_1, A_2 и вектора a определим век-

тор $A_2 A_1 a$ формулой $A_2 A_1 a = A_2 (A_1 \cdot a)$. Если даны p бивекторов $A_1, A_2, \ldots, A_p$, то определим вектор $A_p A_{p-1} \ldots A_1 a$ рекуррентным равенством $A_p A_{p-1} \ldots A_1 a = A_p \cdot (A_{p-1} \ldots A_1 a)$.

Лемма 2. *Для любых бивекторов $A_1, A_2, \ldots, A_p$ и векторов a и b справедлива формула* $(A_p \ldots A_2 A_1 a) \cdot b = (-1)^p (A_1 A_2 \ldots \times$ $\times A_p b) \cdot a$.

Доказательство. Справедливость леммы вытекает из следующих преобразований:

$$(A_p A_{p-1} \ldots A_2 A_1 a) \cdot b = (A_p \cdot (A_{p-1} \ldots A_2 A_1 a)) \cdot b = -(A_p \cdot b) \times$$
$$\times (A_{p-1} \ldots A_2 A_1 a) = -(A_{p-1} \ldots A_2 A_1 a) \cdot (A_p b) = (A_{p-1} A_p b) \times$$
$$\times (A_{p-2} \ldots A_1 a) = \ldots = (-1)^p (A_1 A_2 \ldots A_{p-1} A_p b) \cdot a.$$

Для всякого вектора a будем обозначать $\Pi_s^r a = \sum\limits_{t_1 + \ldots + t_s = r} \Omega^{(t_1)} \times$ $\times \Omega^{(t_2)} \ldots \Omega^{(t_s)} a$.

Лемма 3. *Для любых векторов a и b справедлива формула*

$$\sum_{s=1}^{r} (\Pi_s^r a) \cdot b = \sum_{s=1}^{r} (-1)^s (\Pi_s^r b) \cdot a.$$

Справедливость этой леммы вытекает из леммы 2 и того факта, что в левой части доказываемой формулы вместе с каждым слагаемым вида $(\Omega^{(t_1)} \ldots \Omega^{(t_s)} a) b$ присутствует слагаемое вида $(\Omega^{(t_s)} \ldots \Omega^{(t_1)} a) b$.

Лемма 3 остается справедливой и в случае, когда суммирование в указанной в ней формуле начинается с $s = 2$.

3. Перейдем к доказательству теоремы 2. Пусть $(\delta^r \times$ $\times z)_{r=1}^{\infty}$ — произвольная система изгибающих полей при аналитическом изгибании поверхности F_n в пространстве V_m. Так как F_n обладает жесткостью первого или второго порядка в пространстве V_m, то $\delta^1 z = \delta_0^1 z$. По индукции предположим, что для полей $\delta^r z$, $r = 1, \ldots, k$ справедливы формулы (7), и покажем, что поле $\delta^{k+1} z$ имеет вид (11).

Если поверхность F_n обладает жесткостью первого порядка в пространстве V_m, то доказательство этого факта не отличается от доказательства достаточности условий теоремы 1.

Пусть поверхность F_n обладает жесткостью второго порядка в пространстве V_m. Из формул (7) для полей $(\delta^r z)_{r=1}^{k}$ получаем.

$$\delta^r z = \delta_0^r z = \sum_{s=1}^{r} \Pi_s^{(r)} z + \tilde{\omega}^{(r)}, \ r = 1, \ldots, k, \tag{12}$$

где $\tilde{\omega}^{(r)} = \mathrm{const}$; $K_0 \tilde{\omega}^{(r)} = 0$. В силу леммы 1 для поля $\delta^{(k+2)} z$ будет

$$\delta^{k+1} z = \sum_{s=2}^{k+1} \Pi_s^{(k+1)} z + \delta_*^1 z. \tag{13}$$

Из системы (6) при $r=2k+2$ находим

$$2(\delta_0^1 z_{,(i}\,\delta^{2k+1} z_{,j)} + \delta_0^2 z_{,(i}\,\delta^{2k} z_{,j)} + \ldots + \delta_0^k z_{,(i}\,\delta^{k+2} z_{,j)}) + \delta^{k+1} z_{,(i} \times \delta^{k+1} z_{,j)} + \delta^{2k+2} Z_{,(i} z_{,j)} = 0;\ \ 2K_0(\delta_0^1 z\,\delta^{2k+1} z + \delta_0^2 z\delta^{2k} z + \ldots + \delta_0^k z\delta^{k+2} z) + K_0(\delta^{k+1} z\cdot\delta^{k+1} z + \delta^{2k+2} z\cdot z = 0. \quad (14)$$

В силу (12), (13) первое равенство этой системы можно записать в виде

$$2\sum_{r=1}^{k}\sum_{s=1}^{r}(\Pi_s^{(r)} z_{,(i)})\,\delta^{2k-r} z_{,j)} + (\sum_{s=2}^{k+1}\Pi_s^{(k+1)} z_{,(i)})\cdot(\sum_{s=2}^{k+1}\Pi_s^{(k+1)} z_{,j)}) + 2\times(\sum_{s=2}^{k+1}\Pi_s^{(k+1)} z_{,(i)})\cdot\delta_*^1 z_{,j)} + \delta^{2k+2} z_{,(i} z_{,j)} + \delta_*^1 z_{,(i}\,\delta_*^1 z_{,j)} = 0.$$

В силу леммы 3 получаем $2[\sum_{r=1}^{k}\sum_{s=1}^{r}(-1)^s(\Pi_s^{(r)}\delta^{2k-r} z_{,(i)}\cdot z_{,j)} + \sum_{s=2}^{k+1}(-1)^s \times (\Pi_s^{(k+1)}\delta_*^1 z_{,(i)}\cdot z_{,j)}] + [\sum_{s=2}^{k+1}(-1)^s\Pi_s^{(k+1)}(\Pi_s^{(k+1)} z_{,(i)})]\cdot z_{,j} + \delta^{2k+2}\times z_{,(i} z_{,j)} + \delta_*^1 z_{,(i}\,\delta_*^1 z_{,j)} = 0$. Положим $\delta_*^2 z = 2\sum_{r=1}^{k}\sum_{s=1}^{r}(-1)^s\Pi_s^{(r)}\times\delta^{2k-r} z + \sum_{s=2}^{k+1}(-1)^s\,[2\Pi_s^{(k+1)}\delta_*^1 z + \Pi_s^{(k+1)}(\Pi_s^{(k+1)} z)] + \delta^{2k+2} z + \tilde{\omega}_*^{(2)}$, где $\tilde{\omega}_*^{(2)} = \mathrm{const}$; $K_0\,\tilde{\omega}_*^{(2)} = 0$. Первое равенство системы (14) теперь можно записать в виде $\delta_*^2 z_{,(i} z_{,j)} + \delta_*^1 z_{,(i}\,\delta_*^1 z_{,j)} = 0$. Аналогичным образом второе равенство системы (14) приводится к виду $K_0(\delta_*^2 z\cdot z + \delta_*^1 z\cdot\delta_*^1 z) = 0$. Учитывая, что $\delta_*^1 z$ — изгибающее поле первого порядка поверхности F_n в пространстве V_m, для системы полей $(\delta_*^1 z,\ \delta_*^2 z)$ получаем $\delta_*^1 z_{,(i} z_{,j)} = 0$; $K_0\,\delta_*^1 z\cdot z = 0$; $\delta_*^2 z_{,(i} z_{,j)} + \delta_*^1 z_{,(i}\,\delta^1 z_{,j)} = 0$; $K_0(\delta_*^2 z\cdot z + \delta_*^1 z\cdot\delta_*^1 z) = 0$. Это — система уравнений для изгибающих полей при б. м. изгибании второго порядка поверхности F_n в пространстве V_m. Так как F_n обладает жесткостью второго порядка в V_m, то для поля $\delta_*^1 z$ получаем $\delta_*^1 z = \Omega^{(k+1)} z + \omega^{(k+1)}$, откуда следует (11). Теорема 2 доказана.

Список литературы: 1. *Matsuyama Ioshio.* Rigidity of hypersurfaces with constant mean curvature. — Tohoky Math. J. 1976, t. 28, № 2, p. 199—213. 2. *Сенькин Е. П.* Дополнение к статье «Неизгибаемость выпуклых гиперповерхностей». — Укр. геометр. сб., 1974, вып. 17, с. 132—134. 3. *Лизунова Л. Ю.* О бесконечно малых изгибаниях гиперповерхностей в римановом пространстве. —Изв. вузов, Математика, 1970, № 3, с. 36 — 42. 4. *Jacobowitz H.* Implicit function theorems and isometric embeddings. — Annals of Math., 1972, t. 95, № 2, p. 171 — 225. 5. *Ефимов Н. В.* Качественные вопросы теории деформации поверхностей. —Усп. мат. наук, 1948, **36**, № 24, с. 47 — 158.

Поступила в редколлегию 03.02.80.

УДК 513

А. Д. Милка

ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ И КРАТЧАЙШИЕ ЛИНИИ НА ВЫПУКЛЫХ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЯХ. I

В работе [1] автором анонсированы новые теоремы с геодезических и кратчайших линиях на выпуклых поверхностях. В данной статье эти теоремы излагаются подробно, устанавливаются их связи с классическими результатами Буземана и Феллера, И. М. Либермана, А. Д. Александрова и А. В. Погорелова, решаются некоторые известные проблемы о гладкости выпуклых гиперповерхностей, рассматриваются некоторые другие вопросы для геодезических и кратчайших линий. Через R в дальнейшем обозначается односвязное пространство произвольной размерности $m \geqslant 3$ с постоянной кривизной.

§ 1. Известные результаты. В настоящем параграфе для полноты приводятся основные известные результаты о геодезических и кратчайших линиях на выпуклых гиперповерхностях в R, играющие существенную роль в важнейших в теории выпуклых поверхностей исследованиях по внутренней и внешней геометрии [2—6].

Лемма Буземана и Феллера. *Пусть X, Y — две точки, расположенные вне выпуклого тела с границей F в R, где R — евклидово, и $\overline{X}$, $\overline{Y}$ — соответствующие проекции на F этих точек. Тогда в R расстояние между точками X и Y не меньше расстояния между точками $\overline{X}$ и $\overline{Y}$.*

Распространение этой леммы на сферическое и гиперболическое пространства дано в [7]. С леммой тесно связана следующая

Теорема Буземана и Феллера. *Пусть $F \subset R$ — выпуклая поверхность и γ — кривая, соединяющая две точки на этой поверхности, расположенная вне выпуклого тела с границей F. Тогда длина кривой γ не меньше расстояния между ее концами, измеренного на поверхности F.*

Сформулированные результаты обобщаются в теоремах 1, 2 §2. В соответствии с этим обобщением в лемме Буземана и Феллера под расстояниями между точками можно подразумевать также расстояния, измеряемые в метрике части пространства, внешней по отношению к F.

Лемма И. М. Либермана. *Пусть γ — геодезическая линия на выпуклой поверхности $F \subset R$, O — внутренняя точка выпуклого тела B с границей F, C — конус, проектирующий из точки O линию γ. Тогда на конусе C кривая γ — выпуклая, обращенная, как и поверхность F, выпуклостью от точки O.*

Для R евклидова приведенная формулировка леммы дополняется случаем, когда точка O — бесконечно удаленная; в этом случае проектирующий линию γ конус является цилиндром. Естественно расширяется формулировка леммы и для гиперболического пространства. В § 2 лемма существенно усиливается. Она включается в качественно новое утверждение для геодезических линий, которое мы назовем условно леммой о монотонных функциях.

Лемма И. М. Либермана может быть сформулирована и для точек O, не принадлежащих выпуклому телу B, именно:

Пусть точка O расположена вне рассматриваемого выпуклого тела. И пусть все образующие конуса, проектирующего линию γ из точки O, проходят через внутренние точки тела B. Тогда кривая γ на этом конусе — выпуклая, обращенная, как и поверхность F, выпуклостью к точке O.

В работе [8] эти две формулировки леммы соответствующим образом обобщены для геодезических линий на выпуклых гиперповерхностях в римановом пространстве.

Лемма А. В. Погорелова. *Пусть $F \subset R$ — выпуклая поверхность, где k — евклидово, X и Y — две точки на ней, γ — соединяющая их на поверхности F кратчайшая. Отложим на полукасательной к кратчайшей γ в точке X отрезок $X\overline{Y}$, равный по длине кратчайшей γ. Тогда единичный вектор, имеющий направление $Y\overline{Y}$, принадлежит выпуклой оболочке сферического изображения кратчайшей γ с исключенными концами.*

Лемма верна и в случаях сферического и гиперболического пространств в надлежащих формулировках понятия сферического изображения. Она также верна, если линию γ считать геодезической. Локальный аналог леммы для сферического пространства, распространяющийся и на пространство гиперболическое, доказывался в [3]. Случай многомерного пространства R рассматривался в [9]; там были распространены на этот случай некоторые общие теоремы о внутренней и внешней геометрии выпуклых поверхностей, известные для трехмерного пространства.

Этот результат мы будем называть леммой об отклонении кратчайшей линии от полукасательной. Можно сказать, что в нем определяется направление движения конца кратчайшей Y при выпрямлении кратчайшей γ в полукасательную. Лемма § 2 о монотонных функциях характеризует изменение при указанном выпрямлении кратчайшей расстояний точки Y при переходе в точку $\overline{Y}$ от точек F и точек ограничиваемого этой поверхностью выпуклого тела.

Приведем еще основные теоремы внутренней геометрии выпуклых гиперповерхностей.

Теорема А. Д. Александрова (об условии выпуклости). *Пусть γ и γ' — две кратчайшие, исходящие из точки O на выпуклой поверхности $F \subset R$, X и X' — переменные точки на этих кратчайших, x и x' — расстояния точек X и X' от точки O, $z(x, y)$ — расстояние между X и X', причем все расстояния измеряются на поверхности. Пусть $\alpha(x, x')$ — угол в плоском треугольнике со сторонами x, x', $z(x, x')$, лажащий против стороны, равной*

$\alpha(x, x')$. *Тогда* $\alpha(x, x')$ *является невозрастающей функцией* x *и* x' *на всяком интервале значений* $0 < x < x_0$, $0 < x' < x'_0$, *на котором существуют кратчайшие* XX' *на* F.

Теорема А. Д. Александрова (об углах треугольника). *Углы треугольника, образованного кратчайшими на выпуклой поверхности в* R, *измеряемые на поверхности, не меньше соответствующих углов плоского треугольника со сторонами той же длины.*

В условиях этой теоремы, если кривизна R равна $K > 0$, требуется, чтобы периметр рассматриваемого треугольника был меньше $2\pi/\sqrt{K}$.

Заметим, что теоремы А. Д. Александрова были обобщены по размерности, а также перенесены на римановы многообразия В. А. Топоноговым [5] (см. также [9] и [10]).

Напомним, что треугольник на поверхности и треугольник в двумерной плоскости в R называют соответствующими (по изометрии), естественным образом устанавливая соответствие между элементами этих треугольников и определяя изометрию между их соответствующими сторонами. Напомним также, что на выпуклой поверхности в R угол между двумя исходящими из одной точки кратчайшими равен углу между их полукасательными, измеренному на касательном конусе поверхности в указанной точке.

§ 2. Новые теоремы о кратчайших. Пусть B — замкнутое выпуклое множество, тело в R, F — полная выпуклая гиперповерхность, граница B, γ — непрямолинейная геодезическая, в частности кратчайшая, линия на F. В случае, когда R — сферическое пространство с кривизной $K > 0$ ($R \equiv R_K$), считаем, что длина γ не превосходит $\pi/\sqrt{K}$, т. е. диаметра R_K и верхней оценки длины кратчайшей на выпуклой гиперповерхности F. Линию γ считаем ориентированной, так что по отношению к любой ее точке имеют смысл выражения «справа» и «слева». Правую и левую полукасательные — лучи в R (в R_K, $K > 0$ — направленные кратчайшие с длиной $\pi/\sqrt{K}$) — в точке T кривой γ обозначаем соответственно τ, $-\tau$. В угловой точке γ, которая на поверхности является $(m-2)$-ребристой [9], к полукасательным относим и опорные к F линии, получаемые вращением истинных полукасательных к γ около $(m-2)$-мерного ребра F; введенная полукасательная называется правой или левой, если она получается вращением соответственно правой или левой истинной полукасательной . При таком определении каждой полукасательной во внутренней точке γ соответствует противоположная полукасательная. В правом конце рассматриваемой геодезической правой полукасательной будем называть луч, противоположный соответствующей левой полукасательной к γ. Аналогично определяется левая полукасательная в левом конце геодезической. Соотношение $\tau' \precsim \tau''$ означает далее, что на линии γ для указанных правых полукасательных точка приложения τ' предшествует точке приложения τ'' либо в их общей точке приложения полукасательная τ' с правой ветвью кривой γ образует угол больший, чем полукасательная τ''.

Пусть τ', τ'' — правые полукасательные с точками приложения T', T''. Углом между τ', τ'' назовем угол, образованный в точке T'' лучом τ'' и параллельно перенесенным в R в точку T'' вдоль отрезка $T'T''$ лучом τ'. Пусть τ — правая полукасательная с точкой приложения T, $\prec\tau$ — множество правых полукасательных, предшествующих τ. Пусть $C=\{T_i\}$ — конечное множество точек, не обязательно всех различных, на определяемой T левой ветви γ; δ_C — максимальная из длин дуг этой ветви, определяемых точками T_i; τ_C — естественно упорядоченное множество правых полукасательных к γ в этих точках; $\bar{\varkappa}(C)$ — сумма углов между соседними полукасательными из множества τ_C. Будем называть вариацией поворота множества полукасательных $\prec\tau$ выражение $\varkappa(\tau) = \lim\limits_{\delta\to 0} \sup\limits_{\tau_C:\, \delta_C<\delta} \bar{\varkappa}(C)$. Функция $\varkappa=\varkappa(\tau)$ ограничена, непрерывна, монотонна и в определенном смысле аддитивна; вариация поворота множества всех правых полукасательных геодезической не меньше обычной вариации поворота в R кривой γ. Это устанавливается методами, аналогичными разработанным А. В. Погореловым в [3] и В. А. Залгаллером в [12] для кривых с ограниченной вариацией поворота в пространстве (см. также [11], где некоторые из этих методов перенесены на R). Позже будет показано, что множество значений функции $\varkappa=\varkappa(\tau)$ можно использовать для параметризации множества гиперплоскостей, опорных к гиперповерхности F в точках геодезической γ.

Пусть точка T, рассматриваемая как переменная, принадлежит γ, s — длина определяемой точкой T правой ветви геодезической, τ — правая полукасательная к γ в T, $Z(\tau)\in\tau$ — точка, отстоящая от точки T на расстояние s. Для левой ветви γ и соответствующей левой полукасательной $-\tau$ аналогично вводится точка $Z(-\tau)\in-\tau$, отстоящая от T на длину левой ветви геодезической γ. Обозначим r и $|\cdot|$ метрику в R, а ρ — индуцированную ею внутреннюю метрику в $R'=R\setminus \operatorname{int} B$.

Лемма (о выпрямлении геодезической). *Пусть $Z\in B$ — произвольно выбранная точка, $\rho(\tau)\equiv\rho(Z, Z(\tau))$ для $Z\in F$ и $r(\tau)\equiv r(Z, Z(\tau))$. Тогда $\rho=\rho(\tau)$ и $r=r(\tau)$ — непрерывные невозрастающие функции τ: для любых правых полукасательных $\{\tau', \tau'' \mid \tau'\prec\tau''\}$ справедливы соотношения $\rho(\tau')\geqslant\rho(\tau'')$ и $r(\tau')\geqslant r(\tau'')$.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда гиперповерхность F является выпуклым многогранником. Известно, что в этом случае геодезическая γ представляет собой ломаную, звенья которой лежат на гранях многогранника, а внутренние вершины — внутри $(m-2)$-мерных ребер. Воспользуемся геометрической конструкцией, введенной А. В. Погореловым при доказательстве леммы об отклонении кратчайшей от полукасательной. Эта конструкция — назовем ее распрямлением геодезической — полностью переносится на многомерное пространство.

Обозначим $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ последовательные звенья ломаной γ при движении вдоль этой линии в положительном направлении, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — грани многогранника F, в которой лежат соответственно эти звенья, $k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}$ — $(m-2)$-мерные ребра F, которые пересекает ломаная, $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{n-1}$ — внешние углы многог анника при ребрах k. Подвергнем ломаную γ следующему непрерывному преобразованию. Сначала поворачиваем грань α_n вместе со звеном δ_n около ребра k_{n-1} на угол θ_{n-1} сторону «от многогранника». При этом грань α_n окажется в плоскости грани α_{n-1}, а звено δ_n — на продолжении звена δ_{n-1}. Затем грань α_{n-1} вместе со звеньями δ_{n-1} и δ_n поворачиваем около ребра k_{n-2} также в сторону «от многогранника» на угол θ_{n-2}. Грань α_{n-1} окажется в плоскости грани α_{n-2}, а звенья δ_{n-1} и δ_n — на продолжении звена δ_{n-2} и так далее. После поворота грани α_2 и выпрямленного участка геодезической около ребра k_1 ломаная γ переходит в прямолинейный отрезок. Заметим, что введенное преобразование многогранника F естественно разбивается на $n-1$ этапов.

Очевидно, каждой полукасательной τ к γ соответствует единственная гиперплоскость α, содержащая эту полукасательную, опорная к многограннику. Можно сказать, что выпрямленный участок геодезической с концом в точке приложения τ имеет своим другим концом точку $Z(\tau)$. В описанной конструкции непрерывному вращению граней F отвечают непрерывные изменения плоскости α и полукасательной τ, точки $Z(\tau)$, и, следовательно, непрерывные изменения функций ρ, r.

Покажем, что на каждом этапе преобразования многогранника функции ρ и r не возрастают. Ясно, что отсюда будет следовать и полное утверждение теоремы. Далее будет рассматриваться, в том числе и для произвольной выпуклой поверхности, лишь функция ρ; и для ρ, и для r доказательства осуществляются по одной схеме.

Пусть τ' и τ'' $(\tau' \to \tau'')$ — правые полукасательные к γ в общей точке приложения T на $(m-2)$-мерном ребре k, α' и α'' — соответствующие опорные к F гиперплоскости, содержащие эти полукасательные, и α — проходящая через k опорная к F биссекториальная по отношению к α', α'' гиперплоскость, пересекающая посредине отрезок $Z(\tau')\,Z(\tau'')$. Точки $Z(\tau')$ и $Z(\tau'')$ симметричны относительно α, плоскости α'' и α разделяют $Z(\tau')$ и F. Пусть Λ — кратчайшая линия в R' (с длиной $\rho(\tau')$), соединяющая точки $Z(\tau')$ и Z, P — точка пересечения Λ с α, $PZ(\tau'')$ — отрезок, симметричный относительно α отрезку $PZ(\tau') \subset \Lambda$. Линия, составленная из дуги $\widetilde{ZP} \subset \Lambda$ и отрезка $PZ(\tau'')$, располагается в R', соединяет Z с $Z(\tau'')$ и имеет длину $\rho(\tau')$. Следовательно, $\rho(\tau') \geqslant \rho(\tau'')$, что и требовалось установить.

Заметим, что здесь доказано несколько больше, чем предусматривалось леммой. Лемма верна и для точек $Z(\tau)$, выбранных на полукасательных τ на соответствующих расстояниях от точек T, равных $s+a$, где $a=\mathrm{const}$, и от s не зависит. Имея это в виду, установим теперь лемму в случае, когда F — общая выпуклая поверхность.

Ясно, что функция $\rho=\rho(\tau)$ непрерывна. Пусть точки T', T'' совпадают и представляют на γ угловую, следовательно, на F — $(m-2)$-ребристую точку, в которой γ пересекает ребро F трансверсально. Тогда доказательство неравенства $\rho(\tau')\geqslant\rho(\tau'')$ проводится, как и для многогранников. Лемма будет установлена и в общем случае, если это неравенство доказать в следующих условиях: T', T'' — гладкие внутренние точки γ (этим учитывается для общего случая соответствующая теорема И. М. Либермана об односторонней непрерывности полукасательных к геодезической [3] и соответствующие теоремы [1,9] А. Д. Александрова о сходимости и о неналегании кратчайших на выпуклых поверхностях); $\smile{T'T''}\subset\gamma$ — кратчайшая на F; $Z(\tau')$ и $Z(\tau'')$ — точки на τ' и τ'', отстоящие от точек T' и T'' соответственно на расстояния $s+a$ и a, где $s=|\overset{\smile}{T'T''}|$, $a\geqslant 0$, $s+a\leqslant\pi\sqrt{K}$ для пространства кривизны $K>0$. Будем считать эти условия выполненными.

Пусть $\{F_n\}$ — последовательность выпуклых многогранников, сходящихся к гиперповерхности F, $\{T'_n\in F_n\}$, $\{T''_n\in F_n\}$, $\{Z_n\in F_n\}$ — последовательности точек, сходящихся соответственно к точкам T', T'', Z. Кратчайшие $\overset{\smile}{T'_nT''_n}$ на F_n по теореме А. Д. Александрова о сходимости кратчайших сходятся вместе с длинами s_n к кратчайшей $\overset{\smile}{T'T''}$. Этим на кратчайших на многогранниках естественно индуцируется ориентация, согласованная с ориентацией γ, и в точках T'_n, T''_n определяются соответствующие правые полукасательные τ'_n, τ''_n к дуге $\overset{\smile}{T'_nT''_n}$. Пусть $Z(\tau'_n)$ и $Z(\tau''_n)$ — точки на τ'_n и τ''_n, отстоящие от точек T'_n и T''_n соответственно на расстояния s_n+a и a; можно считать, что при любом n будет $s_n<s$. Так как T' и T'' на кратчайшей γ — гладкие точки, то, по следствию леммы И. М. Либермана [3], полукасательные к кратчайшим на F_n сходятся: $\tau'_n\to\tau'$, $\tau''_n\to\tau''$; тогда и $Z(\tau'_n)\to Z(\tau')$, $Z(\tau''_n)\to Z(\tau'')$, поскольку $s_n\to s$. Рассмотрим соответствующие расстояния $\rho_n(\tau'_n)$ и $\rho_n(\tau''_n)$. Эти расстояния сходятся: $\rho_n(\tau'_n)\to\rho(\tau')$ и $\rho_n(\tau''_n)\to\rho(\tau'')$, что легко получается с помощью теоремы А. Д. Александрова о сходимости метрик сходящихся выпуклых поверхностей и факта непрерывности метрики пространства. Дело в том, что кратчайшая линия, соединяющая вне поверхности F_n точки Z_n и, например, $Z(\tau'_n)$, либо лежит на поверхности выпуклой оболочки в R точки $Z(\tau'_n)$ и многогранника F_n, либо представляет собой в R прямолинейный отрезок. Теперь неравенство $\rho(\tau')\geqslant\rho(\tau'')$ вытекает из справедливости аналогичного неравенства $\rho_n(\tau'_n)\geqslant\rho_n(\tau''_n)$ для многогранников F_n. Лемма доказана полностью.

Существует аналог леммы для точек $Z\in R$, не принадлежащих телу B, и для функции r, который рассматривается подобно.

Отметим (по существу еще раз), что усиление леммы, сделанное в процессе ее доказательства для выпуклых многогранников, верно и для общих выпуклых поверхностей.

Приведем важные следствия леммы — две теоремы о полукасательных к кратчайшим на выпуклых поверхностях в R.

Следующий результат обобщает теорему Буземана и Феллера.

Теорема 1. *Пусть для кратчайшей γ на F правые полукасательные τ' и τ'' в точках T' и T'' связаны соотношениями $\tau' \rightarrow\!\!\!\!\!\!\,3\, \tau''$. Пусть Λ — кривая, составленная из дуги $\overset{\frown}{T'T''}$ на γ и прямолинейных отрезков $Z(-\tau')T'$, $T''Z(\tau'')$. Тогда Λ — кратчайшая линия в $R' = R \setminus \operatorname{int} B$. При $\Lambda \not\equiv \gamma$ любая собственная дуга Λ — единственная кратчайшая в R', соединяющая свои конечные точки.*

Доказательство. Необходимо рассмотреть случай, когда линия Λ — не прямолинейный отрезок. Пусть эта линия не кратчайшая. В этом случае существуют внутренние точки прямолинейных отрезков $A' \in Z(-\tau')T'$, $B' \in T''Z(\tau'')$ такие, что кратчайшая $\Lambda' = A'\tilde{B}'$ в R', соединяющая эти точки, короче дуги $\overset{\smile}{A'B'} \subset \Lambda$ и имеет с F некоторую общую точку C. Пусть A, B — точки на γ, соответствующие по изометрии точкам A', B', которая естественно определяется правилом построения точек $Z(-\tau')$, $Z(\tau'')$, индуцирующим изометрию $\gamma \leftrightarrow \Lambda$. По лемме о монотонных функциях кратчайшая $\overset{\smile}{AC}$ на F не длиннее дуги $\overset{\smile}{A'C} \subset \Lambda'$, кратчайшая $\overset{\smile}{CB}$ на F не длиннее дуги $\overset{\smile}{CB'} \subset \Lambda'$. Следовательно, линия $\overset{\smile}{AC} \cup \overset{\smile}{CB}$ на F короче кратчайшей $\widehat{AB} \subset \gamma$ и получаем противоречие. Второе утверждение теоремы устанавливается с помощью леммы о монотонных функциях и теоремы А. Д. Александрова о неналегании кратчайших. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть γ_1 и γ_2 — кратчайшие на F линии с общим началом O, τ_1 и τ_2 — их соответствующие полукасательные в точке O, отрезки с теми же, что и у кратчайших, длинами. Тогда в R расстояние между концами кратчайших не превосходит расстояния между концами полукасательных; расстояние на поверхности между концами кратчайших не превосходит расстояния между концами полукасательных, измеренного в $R' = R \setminus \operatorname{int} B$.*

В обозначениях этой теоремы теорема А. Д. Александрова об углах треугольника допускает следующую внешне-геометрическую интерпретацию. Расстояние на поверхности между концами кратчайших не превосходит расстояния между концами их полукасательных, измеренного на касательном конусе поверхности в точке O. Таким образом, теорема 2 — некоторый аналог и усиление теоремы А. Д. Александрова. Теорема 2 может рассматриваться и как некоторое обобщение леммы Буземана и Феллера о проектировании в R на выпуклую поверхность концов отрезка; при этом в теореме 2 в качестве полукасательных к кратчайшим удобно рассматривать не только истинные полукасательные по аналогии с соответствующими рассуждениями в лемме о монотонных функциях. Можно заметить, что утверждение о проектировании концов отрезка на выпуклую поверхность в сферическом пространстве, рассматривающееся в работе [7], является по существу соответствующим вариантом теоремы 2.

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим утверждение теоремы для расстояний в R, так как для расстояний в R' доказательство аналогично. Пусть $Y_1 \in \gamma_1$ у $Y_2 \in \gamma_2$ — точки кратчайших, а $X_1 \in \tau_1$ и $X_2 \in \tau_2$ — соответствующие им по изометрии ($\gamma_1 \leftrightarrow \tau_1$, $\gamma_2 \leftrightarrow \tau_2$) точки полукасательных.

Первый случай. Отрезок X_1X_2 ни в какой внутренней своей точке при любом выборе X_1, X_2 не пересекает поверхность F. Утверждение теоремы здесь вытекает из теорем А. Д. Александрова об углах треугольника и о внешне геометрическом смысле угла между кратчайшими на выпуклой гиперповерхности.

Второй случай. Отрезок X_1X_2 (X_1, $X_2 \neq 0$) при любом выборе X_1, X_2 в некоторой внутренней точке пересекает F. Пусть тогда X_i — концы полукасательных, отличные от точки O, $Z_1 \in F$ и $Z_2 \in F$ — крайние точки пересечения $X_1X_2 \cap F$, взятые в таком же порядке, как и точки X_1, X_2, $\smile{Y_1Z_1}$, и $\smile{Z_2Y_2}$ — кратчайшие линии на F. По лемме о монотонных функциях имеем $|\smile{Y_1Z_1}| \leqslant |X_1Z_1|$ и $|\smile{Z_2Y_2}| \leqslant |Z_2X_2|$. Следовательно, $|Y_1Y_2| \leqslant |\smile{Y_1Z_1}| + |Z_1Z_2| + |\smile{Z_2Y_2}| \leqslant$ $\leqslant |X_1Z_1| + |Z_1Z_2| + |Z_2X_2| = |X_1X_2|$, т. е. $|Y_1Y_2| \leqslant |X_1X_2|$, что и утверждается теоремой.

Третий случай. Пересечение $A_1A_2 \cap F$ пусто, где $A_1 \in \tau_1$ и $A_2 \in \tau_2$ — свободные концы полукасательных; для некоторых точек X, внутренних для соответствующих полукасательных, пересечение $X_1X_2 \cap F$ не пусто, причем отрезок X_1X_2 принадлежит R', т. е. является опорным к поверхности F. Пусть $B_1 \in \gamma_1$ и $B_2 \in \gamma_2$ — свободные концы кратчайших, $\smile{Y_1Y_2}$ и $\smile{B_1B_2}$ — кратчайшие на F. Построим треугольники $O'Y'_1Y'_2$ и $O''B'_1B'_2$ в двумерной плоскости в R, соответствующие по изометрии геодезическим треугольникам OY_1Y_2 и OB_1B_2 на F; обозначим δ' и δ'' углы плоских треугольников соответственно в вершинах O' и O''. Пусть δ — угол в вершине O треугольника OA_1A_2. Имеем $|\smile{Y_1Y_2}| \leqslant |X_1X_2|$, что устанавливается как следствие леммы о выпрямлении геодезической способом, применявшимся в исследовании второго случая, с учетом обстоятельства, что линия $\smile{Y_1Y_2}$ — кратчайшая на F. Следовательно, $\delta \geqslant \delta'$. По теореме об условии выпуклости $\delta' \geqslant \delta''$. Значит, $\delta \geqslant \delta''$ и $|A_1A_2| \geqslant |\smile{B_1B_2}|$. Тем более $|A_1A_2| \geqslant |B_1B_2|$.

Теорема доказана.

Следствие. *Пусть F — выпуклый многогранник в R, H — множество раздела F относительно некоторой точки O, $\Phi \in$ $\in F \setminus H$ — выпуклый многогранник с краем. Тогда многогранник*

Φ изгибается в конус, касательный к F в точке O; при этом O неподвижна, а исходящие из нее кратчайшие на Φ преобразуются в их полукасательные. Утверждается, что с переходом к конусу пространственные расстояния между точками Φ не уменьшаются.

Напомним, что в случае E^3 известна теорема [13]:

Пусть F и Φ — нетривиально изометричные ограниченные выпуклые поверхности с краем. И пусть на каждой из них не существует прямолинейных отрезков с обоими концами на границе поверхности. Тогда при изометрическом отображении $F \to \Phi$ на крае F найдутся точки, пространственное расстояние между которыми уменьшается, и точки, пространственное расстояние между которыми увеличивается.

В приведенном нами следствии условие теоремы относительно прямолинейных отрезков существенно нарушается.

Лемма о выпрямлении геодезической может быть усилена.

Пусть Z, $H \subset B$ — некоторые не пересекающиеся множества, такие, что дополнение $R \setminus H$ содержит Z и γ, метрически связно, и, значит, обладает внутренней метрикой, которую мы обозначим h. Пусть $h(\tau) = h(Z, Z(\tau))$ — расстояние в метрике h в $R \setminus H$ между множеством Z и точкой $Z(\tau)$ (которую, впрочем, можно также заменить точечным множеством — изометрическим образом некоторого произвольно выбранного множества на геодезической γ). Тогда $h = h(\tau)$ — невозрастающая функция.

Докажем сформулированное утверждение.

Пусть $\tau' \prec \tau''$ — правые полукасательные к γ, $\Lambda_n \subset R \setminus H$ — последовательность спрямляемых линий, соединяющих некоторые точки множества Z с точкой $Z(\tau') \neq Z(\tau'')$, длины которых $s(\Lambda_n)$ сходятся к $h(\tau')$. Так как $Z(\tau') \in B$, то можно принять, что участок Λ_n вне поверхности F — прямолинейный в R отрезок. Пусть $C_n \subset F$ — конец этого отрезка. По доказанной лемме $|C_n Z(\tau')| \geqslant \rho(C_n, Z(\tau''))$. Расстояние $\rho(C_n, Z(\tau''))$ достигается на некоторой линии $\breve{C_n Z}(\tau'')$), расположенной в $R \setminus \operatorname{int} B$. Пусть Λ_n — линия, полученная из линии Λ_n заменой прямолинейного участка $C_n Z(\tau')$ дугой $\breve{C_n Z}(\tau'')$. Тогда, очевидно, $s(\Lambda_n) \geqslant s(\Lambda_n^{*}) \geqslant h(\tau'')$. Переходя по n к пределу, получаем требуемое неравенство $h(\tau') \geqslant h(\tau'')$.

Необходимо отметить, что когда Z — точка, то при пустом H имеем $h(\tau) \equiv r(\tau)$, а при $Z \in F$ и $H \equiv \operatorname{int} B$ будет $h(\tau) \equiv \rho(\tau)$. Как будет показано в дальнейшем, этим устанавливается глубокая связь между внешне геометрической леммой И. М. Либермана и внутренне геометрическими теоремами А. Д. Александрова. Таким образом, лемма о выпрямлении геодезической выражает важную зависимость между внутренней и внешней геометрией выпуклых гиперповерхностей в R.

Лемма о выпрямлении геодезической допускает следующую, удобную для применений, формулировку.

Пусть $\breve{AB}$ — геодезическая линия на выпуклой поверхности F в R, AB' — полукасательная в точке A к этой геодезической, равная по длине $\breve{AB}$, C — произвольная точка поверхности. Тогда расстояние BC, измеренное на поверхности F, не больше, чем расстояние $B'C$, измеренное в части пространства, внешней по отношению к F.

Подчеркнем, что утверждение доказанной нами леммы о функции ρ, утверждение леммы о функции r, а следовательно, лемма И. М. Либермана, которой это утверждение по существу эквивалентно, и является новой полезной ее интерпретацией, и лемма А. В. Погорелова об отклонении кратчайшей линии от полукасательной независимы. Их независимость очевидна в случае выпуклых многогранников, где эти факты устанавливаются одновременно с помощью общей геометрической конструкции.

Пусть выполнены условия теоремы 1 и Φ — выпуклая гиперповерхность, граница выпуклого тела — выпуклой оболочки поверхности F и точек $Z(-\tau')$, $Z(\tau'')$. Поверхность Φ составлена из конусов K', K'' с вершинами в указанных точках, для которых отрезки $Z(-\tau')T'$, $Z(\tau'')T''$ соответственно являются образующими, и из некоторой части $\overline{F}$ гиперповерхности F; линия Λ на поверхности $\overline{F}$ является кратчайшей. Это вытекает из теоремы 1.

Теорема 3. *Существует сжимающее отображение $\varphi:\Phi\to F$, тождественное на $\overline{F}$, переводящее изометрически Λ в γ.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай выпуклых многогранников; на общие выпуклые гиперповерхности результат переносится с помощью предельного перехода и процесса диагонализации. Можно принять, что линия Λ получается из кратчайшей γ выпрямлением только одного участка кратчайшей, примыкающего к ее концу. Доказательство для многогранников основывается на конструкции, использованной при выводе леммы о выпрямлении геодезической. Далее будем считать выполненными условия леммы и применим соответствующие обозначения, принятые в ее доказательстве. Итак, F — полная выпуклая многогранная гиперповерхность, γ — непрямолинейная ориентированная кратчайшая линия на F, τ — правая полукасательная к γ в точке T, Φ — выпуклая поверхность, граница выпуклой оболочки в R поверхности F и точки $Z(\tau)$.

Согласно рассматриваемой конструкции ломаная γ переводится в линию Λ некоторым преобразованием, подразделяющимся на ряд этапов. В соответствии с этим преобразование $\varphi^{-1}:F\to\Phi$ можно представить как произведение некоторых простых преобразований для некоторой последовательности гиперповерхностей $\{\Phi_\tau\}$, включающей как крайние поверхности F и Φ. Достаточно доказать, что каждая последующая поверхность допускает на предыдущую сжимающее отображение с теми свойствами, которые утверждаются в теореме.

Пусть τ' и τ'' ($\tau' \lesssim \tau''$) — правые полукасательные к γ в общей точке приложения на $(m-2)$-мерном ребре k поверхности $\Phi_{\tau''}$, являющейся по определению границей выпуклой оболочки точки $Z(\tau'')$ и предыдущей поверхности из последовательности $\{\Phi_\tau\}$, α' и α'' — соответствующие опорные к $\Phi_{\tau''}$ гиперплоскости, содержащие полукасательные τ' и τ'', α — проходящая через k опорная к $\Phi_{\tau''}$ биссекториальная по отношению к α' и α'' гиперплоскость, $\Phi_{\tau'} \in \{\Phi_\tau\}$ — выпуклая гиперповерхность, граница выпуклой оболочки $\Phi_{\tau''}$ и $Z(\tau')$. Укажем искомое сжимающее отображение $\Phi_{\tau'} \to \Phi_{\tau''}$.

Заменим часть поверхности $\Phi_{\tau'}$, отделяющуюся от поверхности $\Phi_{\tau''}$ плоскостью α, поверхностью, симметричной этой части относительно этой плоскости. Полученную из $\Phi_{\tau'}$ новую поверхность обозначим $\Phi'_{\tau'}$; естественно определяется сжимающее отображение $\Phi_{\tau'} \to \Phi'_{\tau'}$. Поверхность $\Phi'_{\tau'}$ охватывает поверхность $\Phi_{\tau''}$. Внешняя часть R по отношению к $\Phi_{\tau''}$ допускает на $\Phi_{\tau''}$ сжимающее отображение — проектирование. Этим определяется сжимающее отображение $\Phi'_{\tau'} \to \Phi_{\tau''}$, а в итоге — сжимающее отображение $\Phi_{\tau'} \to \Phi_{\tau''}$. Если R — сферическое пространство, то по поводу приведенной конструкции следует сделать некоторые пояснения. Гиперповерхность $\Phi'_{\tau'}$ как изометрический образ поверхности $\Phi_{\tau'}$ помещается в некоторой замкнутой полугиперсфере, поскольку на $\Phi_{\tau'}$ существуют взаимно полярные точки, и охватывает в этой полусфере гиперповерхность $\Phi_{\tau''}$. На поверхность $\Phi_{\tau''}$ на самом деле отображается внешность $\Phi_{\tau''}$ в полусфере — проектированием на $\Phi_{\tau''}$. Проектирование на выпуклую гиперповерхность в сферическом пространстве, являющееся сжимающим отображением, рассматривается в [7], где также исследуется и вопрос о существовании полярных точек.

Теорема доказана.

Пользуясь изложенным методом, можно установить следующее предложение:

Пусть F — полная выпуклая гиперповерхность в R, γ — открытая кратчайшая линия на F, $\alpha \subset R$ — гиперплоскость и $\Lambda \subset \alpha$ — открытый прямолинейный отрезок, равный по длине γ. Тогда существует сжимающее отображение некоторой окрестности Λ в R на некоторую окрестность γ на F, включающее в себя изометрию $\Lambda \to \gamma$.

Теорема 1 имеет внешне геометрический характер. Эта теорема существенно используется в дальнейшем при доказательстве теоремы о гладкой точке кратчайшей. Теорема 3 включает теорему 1. Она также содержит важную внутренне геометрическую информацию о свойствах кратчайшей линии на выпуклой поверхности. Теорема 3 показывает, что свойство линии на поверхности быть кратчайшей сохраняется и при некотором специальном изменении метрики поверхности в окрестностях концов этой линии. Этот факт оказывается весьма полезным. В [14] он использовался для получения оценок кривизны двумерной выпуклой поверхности в окрестности внутреннего участка кратчайшей.

§ 3. Поверхности с ограничениями на удельную кривизну. Дадим важные приложения результатов, установленных в § 2.

Известны теоремы А. Д. Александрова о гладкости и строгой выпуклости выпуклых поверхностей в E^3 с ограниченной удельной кривизной [3, 15]. Эти теоремы играют большую роль в исследовании вопроса о регулярности выпуклых поверхностей; они были распространены А. В. Погореловым на трехмерное сферическое и гиперболическое пространства [3]. Цель настоящего параграфа — перенести указанные теоремы и некоторые их важные следствия на выпуклые гиперповерхности в R. Тем самым будет дано решение проблемы, долгое время остававшейся открытой, отмечавшейся, например, Г. Буземаном в [6].

Далее изучаются открытые выпуклые поверхности в R, не обязательно полные, с ограниченной сверху или снизу в смысле А. Д. Александрова удельной кривизной. Считается, что $K = \mathrm{const}$. Напомним соответствующее определение.

Выпуклая поверхность F в R имеет кривизну, не большую K (не меньшую K), если для каждой точки существует окрестность $U \subset F$ этой точки такая, что для любого треугольника Δ на F с вершинами в U и соответствующего ему по изометрии треугольника Δ' в двумерной плоскости кривизны K средние линии треугольника Δ по длине не превосходят (не меньше) соответствующих им средних линий треугольника Δ'.

При таком определении каждый угол, каждая трансверсаль треугольника на F не превосходит (не меньше) по величине соответствующих угла, трансверсали плоского треугольника.

Замечание. Естественно, что предпочтительнее более слабое определение поверхности с ограниченной удельной кривизной — через относительный угловой избыток треугольника — принятое в [2]. В данном случае вопрос о выборе определения не принципиален. Взятое нами определение позволяет сократить изложение.

Перейдем непосредственно к результатам.

Рассмотрим сначала поверхности с кривизной, ограниченной сверху.

Теорема 1. *Пусть $F \subset R$ — выпуклая поверхность с кривизной $\leqslant K$. Тогда каждая точка F гладкая или $(m-2)$-ребристая и через каждую точку F в любом направлении проходит кратчайшая линия на длину, зависящую лишь от точки.*

Доказательство. Пусть $O \in F$ — точка, C — сфера направлений из O на F, S — сфера на F малого радиуса d с центром O. Сферы C и S гомеоморфны стандартной $(m-2)$-сфере. Это необходимо проверить лишь для S. Причем достаточно установить следующее утверждение.

Пусть l — прямая, проходящая через O и через внутреннюю точку выпуклого тела, частью границы которого является F,

L — сечение F произвольной двумерной полуплоскостью с границей l. Тогда в окрестности O при малом d пересечение $L \cap S$ состоит только из одной точки.*

Докажем это утверждение. Предположим противное, т. е. допустим, что существуют последовательности убывающих к нулю радиусов d, сфер $S \subset F$ с этими радиусами и соответствующих линий L, для которых пересечения $L \cap S$ содержат, по крайней мере, по паре точек. Эти точки мы обозначим X и Y и предположим, что $\widetilde{OX} \subset \widetilde{OY} \subset L$. Рассмотрим равнобедренный треугольник OXY на поверхности. Легко устанавливается, так как точки X, Y принадлежат плоскому сечению $L \subset F$, что углы этого треугольника на F при вершинах O и Y стремятся к нулю. Для доказательства здесь используются те же методы, которые применялись для выпуклых гиперповерхностей в [9] при исследовании понятия угла между кривыми. Это, однако, противоречит теореме о непрерывности кривизны треугольника на выпуклой гиперповерхности [2, 9]. Действительно, так как угол при вершине O треугольника стремится к нулю, то, по цитированной теореме, угол при вершине Y стремится к $\pi/2$, что невозможно.

В окрестности точки O на F нет двуугольников. Следовательно, радиусами — кратчайшими сферы S устанавливается точечное непрерывное отображение $f: S \to C$, имеющее непрерывное обратное. Согласно известной теореме топологии f отображает S на всю C. Это означает, что из точки O на F в любом направлении можно провести кратчайшую длины d.

Так как кривизна F не превосходит K, то евклидовский касательный конус к F в точке O (если R неевклидово, то это — выпуклый конус в евклидовом пространстве E, соприкасающемся к R в O, образ касательного конуса в R к поверхности F в точке O при геодезическом отображении $R \to E$) имеет кривизну, не большую нуля, значит, нулевую кривизну. Следовательно, этот конус изометричен гиперплоскости и сам представляет собой гиперплоскость или двугранный угол. Поэтому касательный конус к F в точке O в R — также гиперплоскость или двугранный угол, т. е. точка O — гладкая или $(m-2)$-ребристая. Отсюда в свою очередь вытекает, что каждой исходящей из O кратчайшей на F соответствует исходящая из O «противоположная» кратчайшая, образующая на F с первой кратчайшей угол π. Две такие кратчайшие, проведенные в точки сферы S, составляют линию, которую естественно назвать диаметром S. Из ограничения на кривизну следует, что при малом d каждый диаметр S — кратчайшая на F. Таким образом, через точку O на F в любом направлении можно провести кратчайшую длины $2d$, имеющую своей срединой O. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть $F \subset R$ — выпуклая поверхность с кривизной $\leqslant K$. Тогда каждая точка F — гладкая или $(m-2)$-ребристая, внутренняя для прямолинейного $(m-2)$-мерного отрезка на F.*

Доказательство. Допустим, что теорема неверна. Пус $O \in F$ есть $(m-2)$-ребристая точка, $V \subset R$ — двугранный уго касательный к F в точке O, Δ — ребро V, τ — луч в Δ с нача лом в O, не принадлежащий в окрестности O поверхности. Пус $\{\gamma_i, \tau_i$ и $X_i \in \gamma_i, \bar{X}_i \in \tau_i;\ i=1,\ 2\}$ — исходящие из O кратчайш на F, которые существуют по теореме 1, их полукасательные гранях V и точки, определяемые условиями $\bar{X}_i = Z(\tau_i)$ для кра чайшей γ_i, $|O\bar{X}_1| = |O\bar{X}_2| = s$; проекция τ_i на плоскость Δ со падает с τ; $\angle(\tau_1, \tau) = \angle(\tau_2, \tau) = \varphi$, $\bar{X}_1\bar{X}_2$ — опорный к F отр зок, существующий при малом φ. Обозначим 2θ величину угл V $2\bar{\varphi} = \angle(\tau_1, \tau_2)$, $2\bar{z} = |X_1X_2|$, $2z$ — расстояние между точкам X_1 и X_2 на поверхности F. При $\varphi \to 0$, очевидно, имеем $\bar{\varphi} = \delta\varphi \sin\theta$, $s \to 0$, $\bar{z} = \delta s \bar{\varphi}$, $\bar{z} \geqslant z$ (по лемме о монотонных фун циях), $z \geqslant \delta s \varphi$ (из условия на кривизну F); здесь δ $(\delta \to 1)$ — не которые величины. Следовательно, $\sin\theta \geqslant 1$, что невозможн Значит, наше допущение неверно. Теорема доказана.

Из этой теоремы вытекает

Теорема 3. *Выпуклая шапочка, замкнутая выпуклая повер ность в R с кривизной $\leqslant K$, отличная от конуса для R сфе рического, всюду гладкие.*

Рассмотрим теперь поверхности с кривизной, ограниченно снизу.

Теорема 4. *Пусть $F \subset R$ — выпуклая поверхность с криви ной $\geqslant K$, большей кривизны пространства. Тогда F не сод жит прямолинейных отрезков в R.*

Доказательство. Допустим, что теорема неверна. Пус $O \in F$ — некоторая точка, $X_1X_2 \subset F$ — малый (длины $2d$) отрезо имеющий срединой O, $Z \in F$ — отличная от O точка, равноотсто ящая в R (на величины s) от X_1 и X_2. Обозначим z — расстоя ние между O и Z на F, $\bar{z} = |OZ|$. Для упрощения примем, чт R — евклидово. При $Z \to 0$ имеем $s \to d$, $\bar{z}^2 = 2\delta(s-d)d$, $z^2 \geqslant 2\delta(s-d)\operatorname{tg}(d\sqrt{K})/\sqrt{K}$ (*). Здесь δ $(\delta \to 1)$ — некоторые величи ны. Следовательно, $1 = \lim(z/\bar{z})^2 \geqslant \operatorname{tg} d\sqrt{K}/d\sqrt{K} > 1$ и получил противоречие. Значит, наше допущение неверно. Неравенство (* вытекает из следующих соображений. Пусть $\Delta \equiv X_1X_2Z$ — тре угольник на поверхности, $\tilde{\Delta} \equiv \tilde{X}_1\tilde{X}_2\tilde{Z}$ — соответствующий по изо метрии Δ треугольник в двумерной K-плоскости, $\tilde{z}$ — длина ме дианы $\tilde{\Delta}$, соответствующей вершине $\tilde{Z}$, Δ' — треугольник в K-пло скости, полученный из треугольника $\tilde{\Delta}$ уменьшением его сторо до одинаковых значений s (очевидно, для длин кратчайших на F имеем неравенства $|\widetilde{X_1Z}|$, $|\widetilde{X_2Z}| \geqslant s$), z' — длина медианы в Δ' исходящей из вершины, которая соответствует $\tilde{Z}$. Из ограниче ния на кривизну F следует, что $z \geqslant \tilde{z}$, а из построения треуголь ников $\widetilde{\Delta}$, Δ' вытекает $\widetilde{z} \geqslant z'$. Следовательно, $z^2 \geqslant z'^2$. Для малых l' значение z'^2 просто выписывается и равно выражению справа в неравенстве (*). Теорема доказана.

Из теорем 2 и 4 следует

Теорема 5. *Выпуклая поверхность в R с двусторонне ограниченной удельной кривизной, строго отделенной снизу от кривизны пространства, строго выпуклая и гладкая.*

Теоремы 1—5 являются обобщением на R соответствующих теорем А. Д. Александрова.

Теорема 6. *Выпуклая поверхность в R с C^r-регулярной ($r \geqslant 2$) метрикой и с 2-секционной кривизной, большей кривизны пространства, C^r — регулярна.*

Эта теорема при дополнительном внешне геометрическом требовании гладкости поверхности доказана А. В. Погореловым в [16]. Требование гладкости теперь снимается на основании теоремы 5.

В заключение параграфа обратимся еще раз к теореме 4. В ее условиях требование выпуклости поверхности несущественно. Так же несущественно, что R — пространство с постоянной кривизной. Можно принять, что R — риманово пространство, F — поверхность с произвольной коразмерностью и что, например, F — гладкая или F в каждой точке имеет невырождающийся внешне-геометрический касательный конус, кратчайшие на F линии — кривые с ограниченной вариацией поворота в R, угол на F между неналегающими кратчайшими, начинающимися в общей точке, и угол в R между полукасательными к этим кратчайшим — ненулевые одновременно. Последнее выполняется, когда F — выпуклая гиперповерхность. Если еще F — с римановой метрикой, то в теореме можно использовать ослабленное требование: кривизна Риччи поверхности $\geqslant K >$ кривизны пространства.

В случае гладкой поверхности доказательство теоремы почти не изменяется. Только дополнительно от пространственного треугольника Δ' необходимо переходить к треугольнику в двумерной K_1-плоскости, где $K_1 = \mathrm{const} < K$ и 2-секционная кривизна пространства в окрестности рассматриваемой точки O не превосходит K_1. В случае произвольной поверхности приходится рассматривать не обязательно равнобедренные треугольники Δ'. Это усложняет аналитические выкладки; здесь необходимо учитывать существование кратчайших на F, идущих из средины отрезка $X_1 X_2$ и образующих с этим отрезком ненулевой угол.

Приведем общий критерий, когда некоторое подмножество метрического пространства не содержит в себе пространственных отрезков. Как показывают полученные результаты, такие критерии могут иметь полезные приложения.

Лемма. *Пусть R — метрическое пространство с кривизной $\leqslant = \mathrm{const}\, K_1$. Пусть F — изометрическое погружение в R метрического многообразия с кривизной $\geqslant K = \mathrm{const} > K_1$, в котором локально существуют исходящие из точек кратчайшие линии.*

Предположим, что это погружение обладает следующим свойством. Для каждой точки $O \in F$ и каждой точки $Z \in F$ расстояния z между этими точками в пространстве и в многообразии подчинены условию $z_R / z_F \to 1$ при $Z \to O$ на F. Тогда для каждой точки $O \in F$ и любых близких к ней точек X_1, X_2 пространственное расстояние между точками X_1, X_2 строго меньше, чем расстояние между этими точками в многообразии.

Доказательство леммы осуществляется тем же методом, который применялся нами для теоремы 4.

Заметим, что в применении к случаю трехмерного пространства R данные нами доказательства теорем 2 и 4 являются новыми. Известные доказательства [3, 15] на многомерное пространство не переносятся.

Список литературы: 1. *Милка А. Д.* Кратчайшие линии на выпуклых поверхностях. — Докл. АН СССР, 1979, **248**, № 1. с. 34 — 36. 2. *Александров А. Д.* Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей. — М. — Л.: Гостехиздат, 1948. — 387 с. 3. *Погорелов А. В.* Внешняя геометрия выпуклых поверхностей. — М.: Наука, 1969. — 760 с. 4. *Либерман И. М.* Геодезические линии на выпуклых поверхностях. — Докл. АН СССР, 1941, **32**, № 5, с. 310 — 313. 4. *Топоногов В. А.* Римановы пространства кривизны, ограниченной снизу. — Усп. мат. наук, 1959, **14**, № 1, с. 87 — 130. 6. *Буземан Г.* Выпуклые поверхности. — М.: Наука, 1964. — 238 с. 7. *Милка А. Д.* О лемме Буземана и Феллера в сферическом и гиперболическом пространстве. — Укр. геометр. сб., 1971, вып. 10, с. 40 — 49. 8. *Милка А. Д.* Аналоги леммы И. М. Либермана в римановом пространстве. — Укр. геометр. сб., 1980, вып. 24, с. 82 — 84. 9. *Милка А. Д.* О внутренней метрике выпуклых гиперповерхностей. — Укр. геометр. сб., 1965, вып. 2, с. 60 — 69. 10. *Громол Д., Клинкенберг В., Мейер В.* Риманова геометрия в целом. — М.: Мир, 1971. — 343 с. 11. *Милка А. Д.* О кривых с ограниченной вариацией поворота на выпуклых гиперповерхностях. — Укр. геометр. сб., 1966, вып. 3, с. 61 — 71. 12. *Залгаллер В. А.* О кривых с ограниченной вариацией поворота на выпуклой поверхности. — Мат. сб., 1950, **26** (68), с. 205 — 214. 13. *Сенькин Е. П.* Об изгибании общих выпуклых поверхностей с границей. — Вестн. Ленингр. ун-та, 1960, № 19, с. 88 — 94. 14. *Милка А. Д.* Оценки для кривизны области на выпуклой поверхности, примыкающей к кратчайшей. — Укр. геометр. сб., 1974, вып. 15, с. 70 — 80. 15. *Александров А. Д.* Гладкость выпуклой поверхности с ограниченной гауссовой кривизной. — Докл. АН СССР, 1942, **36**, № 7, с. 211—216. 16. *Погорелов А. В.* Регулярность выпуклых гиперповерхностей с регулярной метрикой. — Докл. АН СССР, 1975, **224**, № 1, с. 39 — 42.

Поступила в редколлегию 08. 12. 80.

УДК 513

В. В. Можарский

О ПОВЕРХНОСТЯХ НЕПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ С РЕБРОМ ВОЗВРАТА ПЕРВОГО РОДА

1. В последние десятилетия советскими геометрами получена серия фундаментальных результатов в теории поверхностей отрицательной кривизны. Среди них широко известна теорема Н. В. Ефимова [1] о непогружаемости в целом в трехмерное

евклидово пространство регулярных метрик существенно отрицательной (т. е. отделенной от нуля отрицательной постоянной) гауссовой кривизны. Это означает, что на всякой поверхности отрицательной, но не стремящейся к нулю, гауссовой кривизны существуют особые точки.

Поведению поверхности в окрестности особой точки, существованию на поверхности линии, все точки которой являются особыми точками поверхности (особой линии), свойствам поверхности вблизи особой линии посвящено значительное количество исследований по теории поверхностей отрицательной кривизны. В частности, в работе [2] найдены условия существования на поверхности с медленно изменяющейся отрицательной кривизной гладкой особой линии; эта линия представляет собой естественную границу поверхности [2]. В работе [3] выяснено, что при определенных требованиях к регулярности поверхности ее естественная граница является огибающей семейства асимптотических линий. Вблизи огибающей асимптотических линий поверхность отрицательной кривизны может иметь различное строение. К настоящему времени наиболее полно исследован случай так называемого ребра возврата первого рода [4,5].

2. Под особой точкой поверхности понимается точка, в которой обращается в нуль дискриминант первой квадратичной формы поверхности; под особой линией — линия, каждая точка которой является особой точкой поверхности.

Определение. Кривая γ, лежащая на некоторой поверхности σ, называется ребром возврата первого рода поверхности σ, если выполняются следующие условия:

а) γ является особой линией поверхности σ при произвольной параметризации последней;

б) существует конечный предел гауссовой кривизны K поверхности σ на γ, отличный от $-\varkappa^2$, где $\varkappa$ — кручение γ;

в) поверхность σ касается соприкасающейся плоскости кривой γ в каждой точке последней.

Н. И. Кованцовым показано [4], что ребро возврата первого рода огибает оба семейства асимптотических линий на поверхности существенно отрицательной гауссовой кривизны, соприкасаясь с этими асимптотическими. Всякое сечение поверхности нормальной плоскостью ребра возврата в точке пересечения с последним имеет возврат первого рода. В этой же работе [4] установлено, что для произвольно заданной аналитической функции $\lambda(s, v)$ и произвольной аналитической кривой $\gamma : \rho(s)$ (отличной от прямой линии) существует единственная поверхность σ вида $\boldsymbol{r}(s, v) = \rho(s) + v\tau + f(s, v)\nu + \varphi(s, v)\beta$, где τ, ν, β — орты касательной, главной нормали и бинормали кривой γ, такая, что ее гауссова кривизна $K = -\lambda^2$, а γ является ребром возврата первого рода этой поверхности.

3. В процессе доказательства вышеизложенных фактов в работе [4] было сделано предложение $f_{vv}(s,0) \neq 0$ (1).

С одной стороны, из неравенства (1) следует, что предел гауссовой кривизны на ребре возврата γ отличен от нуля. Поскольку все рассмотрения проводились «в малом», это условие эквивалентно тому, что гауссова кривизна K поверхности σ существенно отрицательна в окрестности γ. С другой стороны, следствием предположения (1) является отличие от нуля кривизны асимптотической в точке M соприкосновения ее с ребром возврата γ. Другими словами, для любой асимптотической точка M не является точкой распрямления.

Таким образом, соотношение (1) исключает из рассмотрения, по крайней мере, два класса поверхностей с ребром возврата первого рода: поверхности, у которых гауссова кривизна обращается в нуль на ребре возврата, и поверхности, асимптотические линии которых в точках, общих с ребром возврата, имеют распрямление. Различны ли эти классы? Ответ на этот вопрос отрицательный. Именно справедлива

Теорема 1. *Пусть γ является ребром возврата первого рода поверхности σ, гауссова кривизна K которой неположительна. Тогда следующие условия эквивалентны:*

а) общая точка асимптотической и ребра возврата является точкой распрямления асимптотической;

б) предел K на γ равен нулю.

Рассмотрим теперь, какие свойства поверхностей с ребром возврата первого рода, установленные в [4], переносятся на исследуемый класс поверхностей. Тот факт, что всякое сечение поверхности нормальной плоскостью ребра возврата в точке пересечения с последним имеет возврат первого рода, доказан в [5] для произвольных поверхностей с ребром возврата первого рода. Оказывается, что для рассматриваемого класса поверхностей сохраняются свойства ребра возврата как огибающей асимптотических.

Теорема 2. *Пусть γ является ребром возврата первого рода поверхности σ, гауссова кривизна K которой неположительна, а предел K на γ равен нулю. Тогда γ является огибающей обоих семейств асимптотических линий поверхности σ и соприкасается с этими асимптотическими.*

Утверждение о том, что ребро возврата первого рода может быть произвольной пространственной кривой, также доказано в [5]. К настоящему времени не удалось лишь выяснить, существует ли при заданной интерпретации параметров s, v поверхность σ с ребром возврата первого рода γ такая, что гауссова кривизна ее $K(s,v)$ в окрестности γ ведет себя как $-\lambda^2(s,v)$, где $\lambda(s,v)$ — произвольно заданная аналитическая функция и λ обращается в нуль на ребре возврата γ.

В заключение выпишем конечные уравнения частного, но довольно широкого подкласса поверхностей рассматриваемого типа.

Теорема 3. *Пусть γ является непрямолинейным ребром возврата первого рода поверхности σ неположительной гауссовой кри-*

визны К, причем последняя обращается в нуль на ребре возврата вместе со своей производной по направлению, ортогональному γ, а вторая производная К по этому направлению отлична от нуля. Тогда поверхность σ можно задать уравнением

$$r(s,t)=\rho(s)-\frac{1}{2}t^2\nu(s)+\frac{1}{6}t^3\xi(s)\beta(s)+\frac{1}{24}t^4\eta(s)\beta(s)+ \\ +\frac{1}{120}t^5\psi(s,t)\beta(s), \quad (2)$$

где $\rho(s)$ — *радиус-вектор кривой* γ, $\nu(s)$; $\beta(s)$ — *ее орты главной нормали и бинормали;* $k(s)$ *и* $\varkappa(s)$ — *соответственно кривизна и кручение* γ, $\xi^2(s)=\frac{4\varkappa^2}{k}$, $\eta(s)=\frac{1}{k^2}(2k'\varkappa-3k\varkappa')$ (3);

$$\xi(s)\Psi(s,0)<U(s) \quad (4);$$

$$U(s)=18\varkappa^2-22\frac{\varkappa^4}{k^2}-8\frac{\varkappa\varkappa''}{k^2}-16\frac{k'\varkappa\varkappa'}{k^2}+6\frac{k''\varkappa^2}{k^3}+\frac{40}{3}\frac{k'^2\varkappa^2}{k^4}. \quad (5)$$

Обратно, если γ — неплоская кривая (в частности, γ не является прямой линией,) то поверхность σ, заданная уравнениями (2) — (5), имеет γ своим ребром возврата первого рода, а гауссова кривизна поверхности σ неположительна и обращается в нуль на γ вместе со своей производной по направлению, ортогональному γ.

4. Доказательство теоремы 1. В работе [5] было показано, что поверхность σ в окрестности ребра возврата первого рода всегда можно представить в виде $r(s,v)=\rho(s)+\frac{1}{2}\alpha(s)\times\times v^2\nu(s)+\frac{1}{6}v^3\varphi(s,v)\beta(s)$ (6), где $\rho(s)$ — радиус-вектор ребра возврата γ; ν, β — орты главной нормали и бинормали γ; $\alpha(s)$ и $\varphi(s,v)$ удовлетворяют условиям $\alpha(s)\neq0$, $\varphi(s,0)\neq0$ (7). При этом параметр s является длиной дуги γ, а линии v суть сечения поверхности σ нормальными плоскостями γ.

Дифференцируя (6) по s и v, получаем $r_s=\tau+\left(\frac{1}{2}\right)v^2(-k\alpha\tau+\alpha'\nu+\varkappa\alpha\beta)+o(v^2)$; $r_v=v\alpha\nu+\left(\frac{1}{2}\right)v^2\varphi(s,0)\beta+o(v^2)$; $r_{ss}=k\nu+o(v)$, $r_{sv}=v(-k\alpha\tau+\alpha'\nu+\varkappa\alpha\beta)+o(v)$; $r_{vv}=\alpha\nu+v\varphi(s,o)\beta+o(v)$ (8). Отсюда $l=(r_{ss}r_sr_v)=\left(-\frac{1}{2}\right)v^2k\varphi(s,0)+o(v^2)$; $m=(r_{sv}r_sr_v)=v^2\varkappa^2\alpha^2+o(v^2)$; $n=(r_{vv}r_sr_v=\frac{1}{2}v^2\alpha\varphi(s,0)+o(v^2)$ (9).

Асимптотические линии поверхности (6) будем искать в виде $s=s(v)$. Обозначим угловой коэффициент асимптотической через $\mu=\frac{ds}{dv}$. Тогда при $v\neq0$ этот угловой коэффициент удовлетворяет соотношению $l\mu^2+2m\mu+n=0$, откуда, принимая во внимание (9) и переходя к пределу при $v\to0$, получим для $\mu_0=\lim\limits_{v\to0}\mu$ уравнение $-(1/2)k\varphi(s,0)\mu_0^2+2\varkappa\alpha^2\mu_0+(1/2)\alpha\varphi(s,0)=0$ (10).

Так как γ не является прямой линией, то $k(s) \neq 0$. Вместе с условиями (7) это означает, что $\mu_0 \neq 0$ (11).

Рассмотрим вектор $\boldsymbol{p}_1(v) = \boldsymbol{r}_s\mu + r_v$, касательный к асимптотической линии. Очевидно, $\lim\limits_{v \to 0} \boldsymbol{p}_1(v) = \mu_0\tau \neq 0$ **(12)** в силу (8), (11). Это означает, что точка $v = 0$ асимптотической, т. е. точка, общая ей и ребру возврата, не является ее особой точкой.

Рассмотрим вектор $\boldsymbol{p}_2 = \frac{d\boldsymbol{p}_1}{dv}$, где дифференцирование осуществляется вдоль асимптотической. Очевидно, $\boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{r}_{ss}\mu^2 + 2\boldsymbol{r}_{sv}\mu + \boldsymbol{r}_{vv} + \boldsymbol{r}_s(\mu_s\mu + \mu_v)$ (13). Поскольку точка $v = 0$ асимптотической обыкновенная, то необходимым и достаточным условием равенства нулю кривизны асимптотической является $\lim\limits_{v \to 0}(\boldsymbol{p}_1 \times \boldsymbol{p}_2) = 0$ или $\lim\limits_{v \to 0} \boldsymbol{p}_1 \times \lim\limits_{v \to 0} \boldsymbol{p}_2 = 0.$ (14)

Но из (13), (8) находим $\lim\limits_{v \to 0}\boldsymbol{p}_2 = (k\mu_0^2 + \alpha)\boldsymbol{\nu} + (\mu_0\mu_s(0) + \mu_v(0))\,\tau$. Это равенство вместе с (12) означает, что условие (14) эквивалентно следующему: $k\mu_0^2 + \alpha = 0$. Исключая отсюда и из (10) μ_0, получаем $\varphi^2(s, 0) = -\frac{4\chi^2\alpha^3}{k}$ **(15)**. Очевидно, это равенство возможно лишь при $\alpha < 0$. Как было показано в [5], из соотношения (15) следует, что $\lim\limits_{v \to 0} K(s, v) = 0$, т. е. на ребре возврата предел гауссовой кривизны равен нулю. Таким образом, мы показали, что из условия а) теоремы следует условие б).

Установим теперь, что и обратно из условия б) следует условие а). Как следует из соотношений (8), (9), вне ребра возврата (т. е. при $v \neq 0$) гауссова кривизна K выражается формулой

$$K = \frac{ln - m^2}{((r_s \times r_v)^2)^2} = \frac{-v^4\left(\frac{1}{4}k\alpha\varphi^2(s,0) + \varkappa^2\alpha^4\right) + o(v^4)}{v^4\alpha^4 + o(v^4)}.$$

Следовательно, $\lim\limits_{v \to 0} K(s, v) = -\left(\frac{k\varphi^2(s,0)}{4\alpha^3} + \varkappa^2\right)$.

Так как по условию б) этот предел равен нулю, то справедливо соотношение (15). Но тогда из (10) находим $\mu_0 = \frac{2\varkappa\alpha^2}{k\varphi(s,0)}$ **(16)** и

$$\lim_{v \to 0}(\boldsymbol{p}_1 \times \boldsymbol{p}_2) = \mu_0\left(\frac{4\varkappa^2\alpha^4}{k\varphi^2(s,0)} + \alpha\right)\boldsymbol{\beta} = 0 \tag{17}$$

в силу (15). Поскольку на ребре возврата первого рода $\lim\limits_{v \to 0} K(s, v) \neq -\varkappa^2$, а в рассматриваемом случае $\lim\limits_{v \to 0} K(s, v) = 0$, то $\varkappa \neq 0$ (т. е. γ не является плоской). Но последнее неравенство вместе с (7) показывает, что $\mu_0 \neq 0$. Тогда из (12) следует, что точка $v = 0$ асимптотической не является особой. Поэтому (17) означает равенство нулю кривизны асимптотической в точке пересечения ее с ребром возврата, т. е. условие а) вытекает из условия б). Теорема 1 доказана полностью.

5. Доказательство теоремы 2. Поскольку предел гауссовой кривизны поверхности на ребре возврата равен нулю, то справедливо равенство (15), а для предельных значений μ_0 углового коэффициента μ асимптотических обоих семейств выполняется (16). Приведенные выше рассуждения показывают, что в этом случае $\mu_0 \neq 0$. Но тогда имеют место соотношения (12) и, так как $\boldsymbol{p}_1$ касается асимптотической, то ребро возврата является огибающей как одного, так и другого семейств асимптотических. Соприкасающаяся плоскость асимптотической совпадает с касательной плоскостью поверхности σ. Следовательно, поверхность σ касается плоскости, являющейся предельной для соприкасающейся плоскости асимптотической при $v \to 0$. С другой стороны, по определению ребра возврата первого рода поверхность σ касается соприкасающейся плоскости этого ребра. Таким образом, произвольная асимптотическая имеет с ребром возврата в точке касания соприкосновение порядка, не меньшего двух. Этим доказательство теоремы 2 завершено.

6. Доказательство теоремы 3. Пусть поверхность σ представлена в окрестности ребра возврата первого рода в виде (6). Как было показано выше, $\alpha < 0$. Сделаем замену $t = \sqrt{-\alpha(s)}\,v$ и обозначим $\varphi^*(s, t) = \varphi\left(s, \frac{t}{\sqrt{-\alpha}}\right) \cdot (-\alpha)^{-3/2}$. Тогда уравнение (6) поверхности σ примет вид $\boldsymbol{r}(s, t) = \rho(s) - \frac{1}{2} t^2 \boldsymbol{\nu}(s) + \frac{1}{6} t^3 \varphi^*(s, t) \times \times \boldsymbol{\beta}(s)$. Очевидно, сделанная замена не изменила линий $s = \mathrm{const}$, которые остались сечениями поверхности σ нормальными плоскостями ребра возврата. Введем следующие обозначения: $\xi(s) = \varphi^*(s, 0)$, $\eta(s) = \frac{1}{4} \varphi^*_t(s, 0)$, $\psi(s, t) = \frac{1}{20t^2}(\varphi^*(s,t) - \xi(s) - 4t\eta(s))$, что позволяет нам переписать уравнение исследуемой поверхности в форме (2).

Гауссова кривизна $K(s, t)$ поверхности (2) для точек, не принадлежащих ребру возврата (т. е. для $t \neq 0$), определяется формулой

$$K(s, t) = \frac{k_4 + tk_5 + t^2 k_6 + o(t^2)}{1 + o(t)},$$

$$\text{где } k_4 = \frac{k\xi^2}{4} - \varkappa^2; \; k_5 = \frac{1}{4} k\xi\eta - \frac{1}{4}\varkappa'\xi + \varkappa\xi';$$

$$k_6 = \frac{1}{12} k\xi\psi(s, 0) + \frac{k^2\xi^2}{4} - \frac{3\varkappa^2\xi^2}{4} - \frac{\varkappa'\eta}{6} + \frac{\varkappa\eta'}{12} + \frac{k\eta^2}{18} + \frac{\xi\xi''}{2} - \frac{\xi'^2}{4}. \quad (18)$$

Отсюда $K(s, 0) = k_4$, $K'_t(s, 0) = k_5$. Но тогда из условия теоремы следует, что $k_4 = k_5 = 0$. Из (18) вытекают соотношения (3) и $k_6 = \frac{k}{12}(\xi\psi(s, 0) - U(s))$ **(19)**, где $U(s)$ определяется формулой (5), а $\psi(s, 0) = \lim\limits_{t \to 0} \psi(s, t)$. Кроме того, $K(s,t) = \frac{t^2 k_6 + o(t^2)}{1 + o(t)}$. (20)

Таким образом, знак гауссовой кривизны в окрестности γ определяется знаком k_6. Следовательно, поверхность σ имеет отрицательную кривизну в окрестности ребра возврата, если $k_6 < 0$, т. е. выполнено неравенство (4).

Обратно, пусть поверхность σ задана уравнениями (2) — (5), а кривая γ не является плоской. Тогда из (2) следует, что γ является особой линией поверхности, а гауссова кривизна последней в точках, не принадлежащих γ, определяется формулой (20), где k_6 задается соотношениями (19), (3), (5). В силу (20) существует предел гауссовой кривизны на γ, равный нулю. Поскольку γ не является плоской, то этот предел отличен от $-\varkappa^2$. Из (2) следует также, что векторы $\boldsymbol{\tau}$ и $-\boldsymbol{\nu}$ определяют предельное положение касательной плоскости поверхности σ на ребре возврата, причем эта плоскость совпадает с соприкасающейся плоскостью этого ребра. Следовательно, в силу определения γ является ребром возврата первого рода поверхности σ. Соотношение (20) означает равенство нулю производной K по направлению, ортогональному γ. Таким образом, теорема 3 доказана.

Список литературы: 1. *Ефимов Н. В.* Возникновение особенностей на поверхностях отрицательной кривизны. — Мат. сб., 1964, **64**, № 2, с. 286 — 320. 2. *Виноградский А. С.* Граничные свойства поверхностей с медленно меняющейся кривизной. — Мат. сб., 1970, **82**, № 2, с. 285—299. 3. *Виноградский А. С.* Причины непродолжаемости поверхностей отрицательной, отделенной от нуля кривизны за гладкую границу. — Вестн. Моск. ун-та, сер. Математика, механика, 1970, № 5, с. 83—86. 4. *Кованцов Н. И.* Ребро возврата поверхности неположительной кривизны. — Укр. геометр. сб., 1979, вып. 22, с. 81 — 92. 5. *Можарський В. В.* Дослідження поведінки поверхні в околі ребра звороту першого роду. — Вісн. Київ. ун-ту, — Математика, механіка, 1980, вип. 22, с. 116.

Поступила в редколлегию 16. 05. 80.

УДК 513

О. А. Сдвижков

О ЧЕБЫШЕВСКИХ СЕТЯХ НА МНОГОМЕРНЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ В R_n

В статье показано, что обобщение понятия чебышевской сети $\sum_2 \subset V_2 \subset R_3$ на случай многомерной сети $\sum_m \subset V_m \subset R_n$, основанное на свойстве параллельного перенесения касательных векторов к линиям сети вдоль линий сети [1, с. 479], не является единственным. С учетом работы [2] такие сети названы чебышевскими I рода.

Существует более широкий класс сетей $\sum_m \subset V_m \subset R_n$, совпадающий при $m = 2$ с классом чебышевских на $V_2 \subset R_3$. Сети этого класса названы чебышевскими III рода, так как название «чебышевские сети II рода» следует оставить за ранее введенным обобщением понятия чебышевской сети $\sum_2 \subset V_2 \subset R_3$ [2] на многомерный случай.

В статье определяется ряд геометрических и аналитических признаков чебышевских сетей III рода и проводится их сравнение с основными признаками чебышевских сетей I рода. Дается пример чебышевской сети III рода $\sum_3 \subset V_3 \subset R_5$, не являющейся чебышевской I рода.

Введенное понятие чебышевской сети III рода легко может быть перенесено на случай сети на многомерной поверхности любого метрического пространства, включая пространства с вырожденными метриками [3, с. 309, 310].

1. Чебышевские сети I и II родов. Известно [4, с. 347], что сеть $\sum_2 \subset V_2 \subset R_3$, в каждом сетевом четырехугольнике которой противоположные стороны имеют одиниковую длину, называется чебышевской. Чебышевские сети обладают тем характеристическим свойством, что касательный вектор линии одного семейства при параллельном перенесении вдоль линии другого семейства остается в каждой точке касательным вектором первого семейства [4, с. 369]. Данное свойство, часто принимаемое за определение чебышевской сети, лежит в основе различных обобщений этого понятия, включая понятие ступенчато-чебышевской сети [5].

Рассмотрим основные свойства чебышевских сетей I и II родов на m-поверхностях евклидова пространства R_n. Пусть на регулярной m-поверхности V_m евклидова пространства R_n, определенной погружением $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(u^1, \ldots, u^m)$, задана сеть $\sum_m$. Отнесем обычным образом [1] поверхность V_m к подвижному полуортогональному реперу, состоящему из векторов $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$, взяв векторы $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_m$ в каждой точке $x \in V_m$ на касательных к линиям сети $\sum_m$. Уравнения инфинитезимального преобразования такого репера $d\boldsymbol{x} + \omega^i \boldsymbol{e}_i$, $d\boldsymbol{e}_\alpha = \omega_\alpha^\beta \boldsymbol{e}_\beta$.

Здесь и в дальнейшем $i, j, k = \overline{1, m}$; $\alpha, \beta = \overline{1, n}$; $p, q = \overline{m+1, n}$; $(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = g_{ij}$, $(\boldsymbol{e}_p, \boldsymbol{e}_q) = \delta_{pq}$, $(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_p) = 0$ (1). При этом $\omega_i^j = a_{ik}^j \omega^k$, $\omega_i^p = \Lambda_{ij}^p \omega^j$.

Согласно [1] сеть $\sum_m$ является чебышевской, если касательный вектор к линии любого семейства линий сети $\sum_m$ при параллельном перенесении вдоль линий всех других семейств остается касательным вектором первого семейства.

Если векторы $\boldsymbol{e}_i$ нормированы, например, условиями $g_{ii} = 1$, то такие сети характеризуются условиями $\boldsymbol{a}_{ij} = 0$, $i \neq j \leftrightarrow a_{ij}^k = 0$, $i \neq j \leftrightarrow \omega^i \wedge \omega_i^k = 0$, где по индексу i нет суммирования. В силу последнего равенства $d\omega^i = 0$ и, следовательно, для чебышевских сетей $\omega^i = dv^i(u^1, u^2, \ldots, u^m)$, что вытекает из теоремы Пуанкаре [6].

Переходя к переменным $v^i = v^i(u^1, u^2, \ldots, u^m)$, получаем

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{m} (dv^i)^2 + \sum_{i \neq j} g_{ij}\, dv^i\, dv^j. \tag{2}$$

Из равенства $dx = dv^i e_i$ также следует, что сеть теперь координатная, а репер — натуральный. В силу условий $a_{ij}^k = 0$ и (1) имеем $\frac{\partial g_{ij}}{\partial v^l} \partial_l g_{ij} = (\partial_l e_i, e_j) + (e_i, \partial_l e_j) = a_{il}^k g_{kj} + a_{jl}^k g_{ik} = 0$, откуда следует, что каждая из функций g_{ij} зависит только от двух переменных: $g_{ij} = g_{ij}(v^i, v^j)$, $i \neq j$ **(3).**

Докажем обратное. Если в некотором натуральном репере выполнены условия (2), (3), то в силу (2) векторы репера единичны, а в силу (3) $(\partial_k e_i, e_j) + (e_i, \partial_k e_j) = 0$, $k \neq i, j$ (4).

Рассмотрим два равенства, получающиеся из (4) перестановкой индексов: $(\partial_j e_i, e_k) + (e_i, \partial_j e_k) = 0$, $(\partial_i e_k, e_j) + (e_k, \partial_i e_j) = 0$; вычитая из первого равенства второе и учитывая соотношения $\partial_i e_j = \partial_j e_i$, получаем $(e_i, \partial_j e_k) - (e_j, \partial_i e_k) = 0$, откуда $(e_i, \partial_k e_j) - (e_j, \partial_k e_i) = 0$ **(5).** Складывая (4) и (5), имеем $(e_i, \partial_k e_j) = 0$, $k \neq i, j$. Отсюда с учетом равенств $(e_j, \partial_k e_j) = 0$ следует, что координатная сеть $\sum_m$ является чебышевской. Таким образом, доказано

Предложение 1. *Голономная сеть $\sum_m \subset U_m$ является чебышевской тогда и только тогда, когда квадрат элемента длины дуги линии на поверхности V_m имеет вид (2), причем выполнены условия (3), если сеть $\sum_m$ принята за координатную.*

Рассмотренные сети можно назвать чебышевскими I рода, так как если в последнем определении заменить требование «параллельного перенесения» на «параллельность», получим определение чебышевской сети I рода $\sum_m$ в аффинном пространстве A_m, которое можно найти в работе [2]. Оттуда же известно, что сеть $\sum_m$ называется чебышевской II рода, если плоскости любого однопараметрического семейства $(m-1)$-плоскостей, содержащих $m-1$ касательных к линиям сети, параллельны вдоль оставшейся линии сети. Если в этом определении заменить требование «параллельности» на «параллельность перенесений», то придем к определению сетей $\sum_m \subset V_m \subset R_n$, которые естественно называть чебышевскими II рода.

Предложение 2. *Сеть $\sum_m \subset R_n$ является чебышевской II рода тогда и только тогда, когда на касательных к линиям сети псевдофокусы [1] не существуют.*

Доказательство. Предположим, что плоскость $\pi_i = [x, e_1, \ldots, e_{i-1}, e_{i+1}, \ldots, e_m]$ переносится параллельно вдоль линии ω^i [2], т. е. $\forall \xi \in \pi_i$ будет $d_i \xi = [x, e_1, \ldots, e_{i-1}, e_{i+1}, \ldots, e_n]$. Так как $d_i \xi = d\xi^i e_i + \xi^j a_{ji}^k \omega^i e_k + \xi^j \Lambda_{ji}^p \omega^i e_p$, где $i \neq j$ и по индексу i нет суммирования, то $\forall \xi^j$ будет $\xi^j a_{ji}^i = 0$. Следовательно, $a_{ji}^i = 0$, $i \neq j$, откуда и вытекает прямое утверждение. Обратное — очевидно.

Замечание. Сеть $\sum_m$ называется голономной [6], если $d\omega^i \wedge \wedge \Lambda\omega^i = 0$, что равносильно условиям $a_{ij}^k = a_{ji}^k$, $k \neq i, j$ (6)

2. Чебышевские сети III рода. Определение. *Назовем сеть $\sum_m (m>2)$ чебышевской III рода, если* $d(\omega^i\sqrt{g_{ii}})=0$ **(7)**, *где по индексу i нет суммирования.* Раскрывая левую часть с помощью уравнений структуры, получаем $d\sqrt{g_{ii}}\wedge\omega^i+\sqrt{g_{ii}}\,\omega^j\wedge\wedge\omega_j^i=0$ **(8)**.

Умножая (8) внешним образом на ω^i, соответственно приходим к соотношениям $\omega^i\wedge\omega_j^i\wedge\omega^i=0$, показывающим, что чебышевские сети III рода принадлежат классу голономных сетей.

Подставляя в (8) $dg_{ii}=2g_{ki}\,\omega_i^k$, имеем $g_{ki}\,\omega_i^k\wedge\omega^i+g_{ii}\,\omega^j\wedge\times\omega_j^i=0$ **(9)**, где по индексу i нет суммирования.

Не нарушая общности, можно считать, что $\omega_i^i\wedge\omega_j^i=0\leftrightarrow a_{jk}^i=a_{kj}^i$ **(10)**. Действительно, для голономной сети $\omega^i=\varphi^i\,dv^i$. Обозначая $\boldsymbol{E}=\varphi^i\boldsymbol{e}_i$ (по i нет суммирования) и $\tilde{\omega}^i=dv^i$, в новом репере будем иметь $d\tilde{\omega}^i=\tilde{\omega}^j\wedge\omega_j^i=0$.

Внося (10) в (9) и учитывая свойства внешнего произведения, приходим к соотношениям $g_{ki}\,a_{ij}^k=0,\ j\neq i$, в силу которых $(\boldsymbol{e}_i,\ d_j\boldsymbol{e}_i)=0,\ (\boldsymbol{e}_j,\ d_i\boldsymbol{e}_j)=0$ **(11)**.

Условия (11) показывают, что на каждой 2-мерной подповерхности $V_2\subset V_m$, определяемой линиями ω^i и ω^j, линии сети $\sum_2$, принадлежащей чебышевской $\sum_m$ III рода, образуют чебышевскую сеть в классическом смысле.

Докажем обратное. Если для заданной голономной сети $\sum_m\subset\subset V_m$ на каждой 2-мерной подповерхности, определяемой линиями ω^i и ω^j, линии сети $\sum_2\subset\sum_m$ образуют чебышевскую сеть, т. е. имеют место условия (11), то $a_{ij}^k g_{kj}=0;\ a_{ij}^k g_{ki}=0$ **(12)**. Вычитая из этих равенств соответственно $a_{ji}^k g_{kj}=0,\ a_{ji}^k g_{ki}=0$, с учетом соотношений (6) и $g_{[ij]}=0$, получаем систему относительно $a_{ij}^i-a_{ji}^i$ и $a_{ij}^j-a_{ji}^j$: $(a_{ij}^i-a_{ji}^i)\,g_{ii}+(a_{ij}^j-a_{ji}^j)\,g_{ij}=0;\ (a_{ij}^i-a_{ji}^i)\,g_{ij}+(a_{ij}^j-a_{ji}^j)\,g_{jj}=0$ (по индексам $i,\ j$ нет суммирования), определитель матрицы которой заведомо отличен от нуля. Следовательно, $a_{ij}^i=a_{ji}^i$. Присоединяя полученные равенства к (6), имеем соотношения (10), в силу которых и соотношений (11) оказываются выполненными условия (9), эквивалентные (7). Итак, доказано

Предложение 3. *Голономная сеть $\sum_m\subset V_m\subset R_n$ является чебышевской III рода тогда и только тогда, когда на любой 2-мерной подповерхности, определяемой парой пересекающихся линий сети $\sum_m$, сеть $\sum_2\subset\sum_m$ является чебышевской в классическом смысле.*

Следствие. *В любом сетевом четырехугольнике чебышевской сети III рода противоположные стороны имеют одинаковую длину.*

Замечание. Свойства сетей, данные в предложении 3 и следствии, могут быть приняты за определения чебышевских сетей III рода.

Из определения чебышевских сетей III рода и теоремы Пуанкаре вытекает, что $\omega^i \sqrt{g_{ii}} = dv^i$. Принимая сеть $\sum_m$ за координатную, находим $d\boldsymbol{x} = (\sqrt{g_{ii}})^{-1} dv^i \boldsymbol{e}_i$. Возводя в квадрат, получаем $ds^2 = \sum\limits_{i=1}^{m} (dv^i)^2 + \sum\limits_{i \neq j} \frac{g_{ij}}{\sqrt{g_{ii}} \cdot \sqrt{g_{jj}}} dv^i dv^j$ **(13).** Отсюда следует

Предложение 4. *Голономная сеть* $\sum_m \subset V_m \subset R_n$ *является чебышевской III рода тогда и только тогда, когда квадрат элемента длины дуги линии на поверхности* V_m *имеет вид (13), если сеть* $\sum_m$ *принята за координатную.*

Следствие. *Поверхность* V_m *изометрична* R_m *тогда и только тогда, когда она несет ортогональную чебышевскую сеть III рода.*

Если $g_{ii} = \mathrm{const}$, то условия (7), характеризующие чебышевские сети III рода, можно записать в виде $d\omega^i = 0$ или $a^i_{[jk]} = 0$. Очевидно следующее

Предложение 5. *При* $m > 2$ *чебышевские сети I рода принадлежат классу чебышевских сетей III рода, а при* $m = 2$ *они совпадают.*

3. Существование чебышевских сетей III рода. Как следует из сказанного, координатная сеть поверхности $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u^1, u^2, \ldots, u^m)$ является чебышевской III рода в том и только в том случае, когда $\boldsymbol{r}_i^2 = f_i(u^i)$. Дифференцируя эти равенства, получаем $(\boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{r}_{ij}) = 0,\ i \neq j$ **(14).**

Аналогичные этим характеристические условия для чебышевских сетей I рода имеют вид $\left(\boldsymbol{r}_k,\ \partial_j \frac{\boldsymbol{r}_i}{|\boldsymbol{r}_i|}\right) = 0$ **(15).**

Рассмотрим координатную сеть поверхности $x^1 = \cos(u + v) + f(\omega)$, $x^2 = \sin(u + v) + \psi(\omega)$, $x^3 = u$, $x^4 = v$, $x^5 = \omega$. В данном случае $\boldsymbol{r}_u^2 = \boldsymbol{r}_v^2 = 2$, $\boldsymbol{r}_\omega^2 = f'(\omega)^2 + \psi'(\omega)^2 + 1$. Следовательно, эта координатная сеть поверхности является чебышевской III рода. Однако она не является чебышевской сетью I рода, поскольку не все условия (15) выполнены.

Используя теорию квадратичных форм с переменными коэффициентами, можно утверждать, что при $m > 2$ не на всякой m-поверхности существует чебышевская сеть III рода.

Список литературы: 1. *Базылев В. Т.* О многомерных сетях в евклидовом пространстве. — Liet. mat. rinkinys. Литов. мат. сб., 1966, **6**, № 4, с. 475—491 (РЖ Мат.1968, 2А 555). 2. *Либер А. Е.* О чебышевских сетях и чебышевских пространствах. — Тр. сем. по век. и тенз. анализу при МГУ, 1974, вып. XVII, с. 177—183 (РЖ Мат. 1974, 10А604). 3. *Розенфельд Б. А.* Неевклидовы пространства.— М.: Наука, 1969. —547 с. 4. *Каган В. Ф.* Основы теории поверхностей, ч. II. — М.: ГТТИ, 1948. — 407 с. 5. *Тихонов В. А.* Ступенчато-че

бышевские сети на многомерных поверхностях аффинного пространства. —Дифференциальная геометрия многообразий фигур, 1976, вып. 7, с. 119—129.
6. *Акивис М. А.* Многомерная дифференциальная геометрия. Учеб. пособие. —Калинин: Моск. рабочий, 1977. —83 с.

Поступила в редколлегию 02.06.80.

УДК 513

Л. Н. Сергиенко

ОБ ОДНОМ ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ СВОЙСТВЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ЛИНИЙ УРАВНЕНИЯ МОНЖА В E_n

Уравнением Монжа называется уравнение $\Phi(x_i;\ dx_i) = 0$ **(1)**, однородное степени $k > 1$ относительно дифференциалов; здесь и всюду в дальнейшем $i = 1, 2, \ldots, n$ [1].

Каждой точке $A(x_i)$ уравнение Монжа подчиняет конус Монжа с вершиной в этой точке $\Phi(x_i;\ X_i - x_i) = 0$ **(2)**, прямолинейные образующие которого служат касательными к интегральным кривым уравнения (1).

В работе [2] М. А. Николаенко выделила из множества интегральных кривых монжева уравнения в E_3 характеристические линии. Уравнения характеристических линий были получены двумя способами: аналитическим, с использованием связи между уравнением Монжа $\Omega(x, y, z;\ dx, dy, dz) = 0$ и дифференциальным уравнением в частных производных первого порядка $F(x, y, z;\ p, q) = 0$, и геометрическим.

В работе [3] характеристические линии уравнения Монжа в пространстве E_n были получены аналитическим способом. В настоящей работе приводится геометрический вывод дифференциальных уравнений характеристик в E_n.

1. Рассмотрим произвольную интегральную кривую γ уравнения (1) или (если разделить на dt в соответствующей степени) $\Phi(x_i;\ x_i') = 0$ **(1')**. Через точку $O(x_i)$ кривой γ проведем касательную $t(x_i')$ — образующую конуса (2) с вершиной в точке O. Уравнение касательной гиперплоскости α к конусу вдоль t имеет вид $\sum\limits_{k=1}^{n} \Phi'_{x k}(X_k - x_k) = 0$ **(3)**.

Через бесконечно близкую точку O' кривой γ проведем касательную t'-образующую конуса с вершиной в точке O'. Касательная гиперплоскость α' к этому конусу вдоль t' пересекает α по $(n-2)$-плоскости τ'.

При $O' \to O$ эта $(n-2)$-плоскость $\tau' \to \tau$, τ лежит в α и проходит через точку O. Прямые же t и t' в пределе определяют соприкасающую 2-плоскость β к интегральной кривой γ с касательной t.

Если в точке O' вместо образующей t' конуса взять другую образующую $\bar{t}'$, получим в пределе соприкасающуюся 2-плоскость

β другой интегральной кривой $\bar{\gamma}$, проходящей через точку O с той же касательной t. 2-плоскости $\bar{\beta}$ будет соответствовать $(n - 2)$-плоскость $\bar{\tau}$, проходящая через точку O и лежащая в касательной гиперплоскости α.

Таким образом, $(n-2)$-параметрическому множеству соприкасающихся 2-плоскостей β к интегральным кривым с общей касательной t соответствует $(n-2)$-параметрическое множество $(n - 2)$-плоскостей τ с центром O, лежащих в гиперплоскости α.

2. Рассмотрим в E_n произвольную гиперплоскость ν: $\sum\limits_{k=1}^{n} A_k \times x_k + B = 0$. Точки этой гиперплоскости служат вершинами $(n-1)$-параметрического множества конусов Монжа (2). Выделим из этого множества подмножество конусов, касательных к гиперплоскости ν.

Так как уравнение гиперплоскости, касательной к конусу Монжа вдоль образующей (x_i'), имеет вид (3), то условие касания конуса Монжа с вершиной в точке (x_i) с гиперплоскостью ν запишем:

$$\frac{A_1}{\Phi_{x_1'}} = \frac{A_2}{\Phi_{x_2'}} = \ldots = \frac{A_n}{\Phi_{x_n'}}.$$

Если за независимую переменную принять, например, x_n и исключить $x_1', x_2', \ldots, x_{n-1}'$ из $n-1$ уравнений последней системы и уравнения (1'), то получим некоторую зависимость $F(x_i) = 0$. Это уравнение вместе с уравнением гиперплоскости ν определяет $(n-2)$-мерную поверхность φ, обладающую тем свойством, что конусы Монжа с вершинами в точках поверхности φ касаются гиперплоскости ν.

3. Рассмотрим конус Монжа (2). В гиперплоскости α, касательной к конусу вдоль его образующей t, содержится $(n-2)$-мерная поверхность φ, проходящая через вершину конуса O. Этой же гиперплоскости α принадлежит $(n-2)$-параметрическое множество $(n-2)$-плоскостей, проходящих через точку O и соответствующих соприкасающимся 2-плоскостям интегральных кривых уравнения Монжа с общей касательной t. Среди этих $(n - 2)$-плоскостей есть плоскость, касательная к поверхности φ.

Теорема. *Интегральная кривая γ монжева уравнения, для каждой точки которой $(n-2)$-плоскость τ, соответствующая соприкасающейся 2-плоскости β кривой γ, касается поверхности φ, есть характеристика.*

Доказательство. Уравнение гиперплоскости α имеет вид (3). А уравнение гиперплоскости α' можно записать так:

$\sum\limits_{k=1}^{n} (\Phi_{x_k'} + d\Phi_{x_k'})(X_k - x_k - dx_k) = 0$, или $\sum\limits_{k=1}^{n} \Phi_{x_k'}(X_k - x_k) - \sum\limits_{k=1}^{n} \times \Phi_{x_k'} dx_k + \sum\limits_{k=1}^{n} d\Phi_{x_k'} (X_k - x_k) - \sum\limits_{k=1}^{n} d\Phi_{x_k} dx_k = 0$. Первое слагаемое последнего уравнения равно 0, оно совпадает с левой частью уравнения (3); второе слагаемое равно 0 в силу однородности уравнения Монжа относительно дифференциалов. Отбрасывая в последнем равенстве члены второго порядка малости, получаем уравнения τ в следующем виде: $\sum_{k=1}^{n} \Phi_{x_k'}(X_k - x_k) = 0$, $\sum_{k=1}^{n} (\Phi_{x_k'})' \times$ $\times (X_k - x_k) = 0$.

Пусть δx — произвольное направление $(n-2)$-плоскости τ: δx удовлетворяет уравнениям

$$\sum_{k=1}^{n} \Phi_{x_k'}\delta x_k = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} (\Phi_{x_k'})'\delta x_k = 0. \tag{4}$$

Потребуем, чтобы τ касалась φ. Напомним, что точка $O(x_i)$ — вершина конуса Монжа (2), лежащая на φ, $t(x_i')$ — образующая конуса (2), вдоль которой конус касается α и выполняется соотношение $\Phi(x_i;\ x_i') = 0$. Пусть O' — точка, бесконечно близкая к точке O и лежащая на φ. Тогда конус Монжа с вершиной в точке O' также касается α вдоль некоторой образующей t' и $\Phi(x_i + \delta x_i;\ x_i' + \delta x_i') = 0$. Но $\Phi(x_i + \delta x_i;\ x_i' + \delta x_i') =$ $= \Phi(x_i; x_i') + \sum_{k=1}^{n} \Phi_{x_k}\delta x_k + \sum_{k=1}^{n} \Phi_{x_k'}\delta x_k' = 0$, откуда $\sum_{k=1}^{n} \Phi_{x_k}\delta x_k = 0$ (5).

Итак, для того чтобы τ касалась φ, ее произвольное направление δx должно удовлетворять уравнениям (4) и (5):

$$\sum_{k=1}^{n} \Phi_{x_k}\delta x_k = 0; \quad \sum_{k=1}^{n} \Phi_{x_k'}\delta x_k = 0; \quad \sum_{k=1}^{n} (\Phi_{x_k'})'\delta x_k = 0. \tag{6}$$

Выберем на τ $(n-2)$ линейно независимых направлений $\delta_j x$, $j = 1, 2, \ldots, n-2$, а именно: $\delta_j x = (\delta_j x_1,\ \delta_j x_2,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ \delta_j x_{j+2},\ 0,\ \ldots,\ 0)$, где $\delta_j x_1$, $\delta_j x_2$, $\delta_j x_{j+2}$ отличны от нуля. Так как любое направление δx удовлетворяет системе уравнений (6), то, значит, $\delta_j x$ $(j = 1, 2, \ldots, n-2)$ также удовлетворяют системе (6). Обратно, если потребовать, чтобы $\delta_j x$ при $1 \leqslant j \leqslant n-$ -2 удовлетворяли системе (6), то произвольное $\delta x = \sum_{j=1}^{n-2} a_j\delta_j x$, где $a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}$ — некоторые постоянные, также будет удовлетворять системе (6).

Подставив в систему (6) $\delta_j x$, получим систему уравнений $\Phi_{x_1}\delta_j x_1 + \Phi_{x_2}\delta_j x_2 + \Phi_{x_{j+2}}\delta_j x_{j+2} = 0$; $\Phi_{x_1'}\delta_j x_1 + \Phi_{x_2'}\delta_j x_2 + \Phi_{x_{j+2}'} \times$ $\times \delta_j x_{j+2} = 0$; $(\Phi_{x_1'})'\delta_j x_1 + (\Phi_{x_2'})'\delta_j x_2 + (\Phi_{x_{j+2}'})'\delta_j x_{j+2} = 0$. Итак, для того чтобы τ касалась φ, необходимо и достаточно выполнения условий

$$\begin{vmatrix} \Phi_{x_1} & \Phi_{x_2} & \Phi_{x_{j+2}} \\ \Phi_{x_1'} & \Phi_{x_2'} & \Phi_{x_{j+2}'} \\ (\Phi_{x_1'})' & (\Phi_{x_2'})' & (\Phi_{x_{j+2}'})' \end{vmatrix} = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n-2),$$

которые совпадают с уравнениями характеристических линий [3]. Теорема доказана.

4. В заключение заметим, что доказательство теоремы: «Если кривая обладает двумя из трех свойств: а) быть характеристикой, б) быть геодезической «прямейшей», в) быть геодезической «кратчайшей», то она обладает и третьим свойством», данное в п. 6 работы [2], дословно переносится на случай пространства n переменных.

Список литературы: 1. *Lie S.* Geometrie der Berührungstransformationen. — Leipzig, 1896. — 696 S. 2. *Николаенко М. А.* О характеристиках монжевых уравнений. – Вестн. ХГУ, № 3, сер. математики, 1965, 31, с. 101—110. 3. *Николаенко М. А.* Характеристики монжева уравнения в многомерном пространстве. — Укр. геометр. сб., 1966, вып. 3, с. 72—77.

Поступила в редколлегию 14.02.80.

УДК 513

Л. В. Тен

ИССЛЕДОВАНИЕ ЖЕСТКОСТИ НЕКОМПАКТНЫХ ОБЛАСТЕЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ПАРАБОЛОИДА

1°. *Определение.* Поверхность S в трехмерном евклидовом пространстве будем называть B-жесткой, если из ограниченности поля Z бесконечно малого изгибания на поверхности S и обращения Z в нуль в какой-либо одной точке следует, что $Z = 0$ всюду на S.

B-жесткими являются, например, бесконечные выпуклые поверхности, удовлетворяющие теореме А. В. Погорелова [1, с. 300], гиперболический параболоид [2], полные поверхности отрицательной кривизны, совпадающие с гиперболическим параболоидом вне компактной области [3]. В настоящей работе мы распространим свойство B-жесткости на некоторые односвязные и двусвязные некомпактные поверхности, являющиеся частями гиперболического параболоида. Точные формулировки смотри ниже, пп. 3°, 4° теоремы 1, 2.

2°. На вспомогательной плоскости (u, v) произвольный прямой угол со сторонами, параллельными координатным осям, обозначим θ_i, если путем параллельного переноса (без вращения и зеркального отражения) его можно совместить с i-м квадрантом, $i = 1, 2, 3, 4$. Угол θ_i будем предполагать замкнутым, т. е. множество θ_i состоит из всех внутренних точек угла, его сторон и вершины. Символом $\theta_i(B)$ здесь и ниже будем обозначать угол θ_i с вершиной в точке B $(1 \leqslant i \leqslant 4)$.

Определение. Будем говорить, что множество G на плоскости R_2 удовлетворяет условию A, если для каждой точки $B \in \overline{G} = R_2 \setminus G$ найдется хотя бы один содержащий ее угол $\theta_i(B)$, целиком лежащий в $\overline{G}$.

3°. Рассмотрим гиперболический параболоид S_0, для которого линии $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ являются асимптотическими. В этом случае будем говорить, что плоскость (u, v) является плоскостью асимптотических параметров. Рассмотрим на ней односвязное компактное множество G, образ которого на S_0 обозначим G^*. Для того чтобы не отвлекать внимания на теоретико-множественные вопросы, связанные со строением границы ∂G множества G, будем считать, что ∂G представляет собой замкнутую кусочно-монотонную кривую.

Примечание. Функцию $f(t)$ будем называть кусочно-монотонной в интервале вида $t_1 < t < t_2$, если этот интервал можно разбить на конечное число промежутков, в каждом из которых $f(t)$ монотонна; строгой монотонности требовать не будем. Линию L на плоскости (u, v) будем называть кусочно-монотонной, если каждая ее точка имеет окрестность, в которой линию L можно представить как график непрерывной кусочно-монотонной функции вида $v = v(u)$ или $u = u(v)$.

Теорема 1. *Если множество G односвязно и компактно, то поверхность $S = S_0 \setminus G^*$ является В-жесткой тогда и только тогда, когда множество G удовлетворяет условию A.*

Доказательство теоремы 1 изложено в п. 9° и опирается на леммы, сформулированные в пп. 5°, 6°.

4°. На плоскости асимптотических параметров рассмотрим односвязное замкнутое неограниченное множество G, образ которого на гиперболическом параболоиде S_0 снова обозначим G^*. Предположим, как и выше, что граница ∂G множества G кусочно-монотонна.

Теорема 2. *Если поверхность $S = S_0 \setminus G^*$ односвязна, то она является В-жесткой в том и только в том случае, когда множество G удовлетворяет условию A.*

Доказательство теоремы 2 изложено в п. 10°.

5°. Будем называть параболоидным квадрантом часть гиперболического параболоида, заключенную между любыми двумя лучами прямолинейных образующих, исходящими из одной точки.

Лемма 1. *Параболоидный квадрант является В-жестким.*

Доказательство леммы 1 содержится в работе [2].

Лемма 2. *Связная часть гиперболического параболоида, представляющая собой объединение конечного числа параболоидных квадрантов, является В-жесткой.*

Доказательство леммы 2 проводится, исходя из леммы 1, индукцией по числу параболоидных квадрантов.

6°. Пусть G — односвязное, замкнутое, ограниченное или неограниченное множество на плоскости асимптотических параметров, имеющее кусочно-монотонную границу ∂G. Тогда справедливы следующие две леммы, доказанные в пп. 7° и 8°:

Лемма 3. *Если не выполнено условие A, то в $\overline{G}$ содержится гомеоморфная кругу область M, граница которой состоит* *из отрезка, параллельного какой-либо координатной оси, и части ∂G, заключенной между концами этого отрезка.*

Лемма 4. *Если в $\bar{G}$ содержится гомеоморфная кругу область M, граница которой ∂M состоит из отрезка AB, параллельного одной из координатных осей, и части ∂G, заключенной между концами этого отрезка, то поверхность $S = S_0 \setminus G^*$ не является B-жесткой.*

7°. Доказательство леммы 3. Так как условие A не выполнено, то существует точка $P \in \bar{G}$, для которой любой содержащий ее угол θ_i пересекается с G. Следовательно, если провести через точку P лучи l_1, l_2, l_3, l_4, параллельные координатным осям, то ни один из прямых углов, ограниченных этими лучами, не лежит целиком в $\bar{G}$. Перечислим все логически возможные ситуации: 1) ни один из лучей l_i не лежит целиком в $\bar{G}$; 2) только один из лучей l_i целиком лежит в $\bar{G}$, а остальные три пересекаются с G; 3) два соседних луча целиком лежат в $\bar{G}$, а два других пересекаются с G; 4) два луча, составляющих одну прямую, целиком лежат в $\bar{G}$, а два других пересекаются с G; 5) более двух лучей целиком лежат в $\bar{G}$.

Рассмотрим случай 1). Так как G — замкнутое множество, то $\bar{G}$ — открытое и P — внутренняя точка $\bar{G}$. Следовательно, существует окрестность U точки P, не содержащая точек множества G, и на каждом из лучей l_i (вне окрестности U) существуют точки, принадлежащие G. Воспользовавшись теоремой Жордана, получаем, что на каждом из лучей l_i найдется точка Q_i пересечения l_i с границей ∂G множества G. Область, ограниченная отрезком Q_1Q_3 (или Q_2Q_4) и частью границы ∂G, заключенной между точками Q_1 и Q_3 (соответственно Q_2 и Q_4), является искомой областью M.

Рассмотрим случай 2). Пусть для определенности лучи l_1, l_2, l_3 пересекаются с G. Как и в случае 1), отметим точки Q_1, Q_2, Q_3 пересечения l_i с ∂G. Область, ограниченная отрезком Q_1Q_3 и частью ∂G, заключенной между Q_1 и Q_3 и содержащей Q_2, является искомой областью M.

Докажем теперь, что последние три случая в действительности не могут быть реализованы. Рассмотрим случай 3). Пусть два соседних луча, целиком лежащих в $\bar{G}$, образуют угол θ_i. В силу односвязности G и того, что P — внутренняя точка множества $\bar{G}$, замкнутый угол θ_i не содержит точек, принадлежащих G. Таким образом, θ_i целиком лежит в $\bar{G}$, что противоречит условию леммы.

Случай 4) противоречит односвязности G. Случай 5) сводится к случаю 3); действительно, так как в $\bar{G}$ лежат более двух лучей l_i, то среди них найдутся два соседних, целиком лежащих в $\bar{G}$.

8°. Доказательство леммы 4. Пусть для определенности отрезок AB (обозначим его m), являющийся частью границы ∂M

области M, расположен параллельно оси $v=0$ и область M лежит выше отрезка m.

Покажем сначала, что из кусочной монотонности ∂G следует существование области $M_1 \subseteq M$, граница которой ∂M_1 состоит из отрезка m_1, параллельного m, и двух или трех монотонных дуг, являющихся частью $\partial M \diagdown m$. Действительно, ордината точки на $\partial M \diagdown m$ достигает максимума в некоторой точке C; при этом возможны следующие два случая:

1) C — изолированная точка максимума; в этом случае можно провести горизонтальную прямую $A_1 B_1$ так, чтобы дуги $A_1 C$ и CB_1 были монотонными; тогда $A_1B_1 = m_1$, а $\partial M_1 \diagdown m_1$ состоит из двух монотонных дуг;

2) C — неизолированная точка максимума, т. е. на ∂G существует горизонтальный отрезок A_2B_2, содержащий точку C; проведем горизонтальную прямую A_1B_1 ниже отрезка A_2B_2 и столь близко к нему, чтобы дуги A_1A_2 и B_2B_1 были монотонными; в этом случае $A_1B_1 = m_1$, а $\partial M_1/m_1$ состоит из трех монотонных дуг A_1A_2, A_2B_2, B_2B_1.

Зададим изгибающее поле Z равным нулю в $\overline{G} \diagdown M_1$ и отличным от нуля в M_1. Напомним, что если $Z \in C^1$, то его компоненты α, β, γ удовлетворяют гиперболической системе дифференциальных уравнений, для которой путем задания на начальных характеристиках функций $\varphi(v)$ и $\psi(u)$ ставится задача Дарбу. Решение этой системы имеет вид [2]: $\alpha = (1+u^2)(1+u^2+ v^2)^{-1} \cdot [(1+v^2)\varphi(v) - uv\psi(u)]$; $\beta = (1+v^2)(1+u^2+v^2)^{-1} \times [(1+u^2)\psi(u) - uv\varphi(v)]$; $\gamma = uv(1+u^2+v^2)^{-1/2} \cdot [u\varphi(v) + v\psi(u)] + \frac{1}{2}(1+u^2+v^2)^{1/2} \cdot [(1+v^2)\varphi'(v) + (1+u^2)\psi'(u)]$. **(1)**

Зададим в $\overline{G}/M_1$ поле $Z \equiv 0$ точно так же, как это делается для полного параболоида. Кроме того, в M_1 зададим дополнительно $Z \neq 0$, которое в $\overline{G} \diagdown M_1$ может быть продолжено нулем с сохранением гладкости класса C^1. Покажем, как это можно сделать в каждом из случаев 1) и 2). Сначала введем обозначения: C_1 — проекция точки C на A_1B_1; (u_0, v_1) — координаты C_1; (u_0, v_2) — координаты C. Так как мы рассматриваем случай, когда C расположена выше C_1, то $v_1 < v_2$. Введем в рассмотрение функцию

$$\varphi_0(v) = \begin{cases} \exp\dfrac{1}{(v-v_1)(v-v_2)}, & v_1 < v < v_2; \\ 0, & v \geqslant v_2,\ v \leqslant v_1. \end{cases} \tag{2}$$

Она имеет производные всех порядков и отлична от нуля лишь при $v_1 < v < v_2$.

В случае 1) положим $\varphi(v) \equiv \varphi_0(v)$ при $u = u_0$; $\psi(u) \equiv 0$ на A_1B_1. Если в случае 2) дуга A_1A_2 задается монотонно возрастающей функцией, а B_2B_1 — монотонно убывающей, то φ и ψ возьмем такими же, как и в случае 1).

Если в случае 2) обе дуги A_1A_2 и B_2B_1 заданы монотонно возрастающими (убывающими) функциями, то в качестве C возьмем ту точку отрезка A_2B_2, проекция C_1 которой на A_1B_1 совпадает с точкой B_1 (A_1). Положим $\varphi(v)=\varphi_0(v)$ при $u=u_0$, а $\psi(u)\equiv 0$ на A_1C_1 и CB_2 (A_2C и C_1B_1). Случай, когда дуга A_2A_1 задана монотонно убывающей функцией, а B_1B_2 — монотонно возрастающей, сводится к рассмотренному выше.

С помощью формул (1), (2) можно непосредственно убедиться в том, что построенное выше поле Z является всюду ограниченным, равным нулю в $\bar{G}\setminus M_1$ и отличным от нуля в M_1. Бесконечная дифференцируемость функции $\varphi_0(v)$ обеспечивает необходимую гладкость поля Z.

Отметим, что точки отрезка A_2B_2 не принадлежат рассматриваемой поверхности, поэтому, чтобы на A_2C или CB_2 задать начальную функцию, надо дополнить поверхность соответствующими точками гиперболического параболоида.

9°. Доказательство теоремы 1. Предположим, что поверхность $S=S_0\setminus G^*$ является B-жесткой, а множество G не удовлетворяет условию A. Тогда по лемме 4 в $\bar{G}$ существует ограниченная область M, граница которой состоит из отрезка, параллельного какой-либо координатной оси, и части ∂G, заключенной между концами этого отрезка. Отсюда и из леммы 5 заключаем, что $S=S_0\setminus G^*$ не обладает свойством B-жесткости, что противоречит предположению.

Докажем теперь, что если условие A выполнено, то из равенства нулю ограниченного изгибающего поля Z в какой-либо одной точке следует его тождественное равенство нулю всюду на поверхности $S=S_0\setminus G^*$. Поле Z будем рассматривать заданным на множестве $\bar{G}$ плоскости асимптотических параметров. Пусть $Z(B)=0$, B — заданная точка $\bar{G}$; докажем, что $Z(C)=0$, где C — произвольная точка $\bar{G}$. Для доказательства нашего утверждения построим цепочку областей $D_1,\ldots,D_n$, являющихся прообразами B-жестких частей гиперболического параболоида и таких, что $D_i\in\bar{G}$, $D_i\cap D_{i+1}\neq\varnothing$, $B\in D_1$, $C\in D_n$. Для этого рассмотрим на плоскости асимптотических параметров прямоугольник Q со сторонами, параллельными координатным осям, и такой, что $G\subset Q$. Заметим, что по лемме 3 дополнение $\bar{Q}$ является прообразом B-жесткой части гиперболического параболоида. Возьмем произвольную точку в $Q\setminus G$ и проведем через нее две взаимно перпендикулярные прямые, образующие углы θ_1, θ_2, θ_3, θ_4. Так как расстояние от произвольной точки $Q\setminus G$ до стороны прямоугольника Q конечно, то любой из углов θ_i пересекается с $\bar{Q}$. В силу условия A, по крайней мере, один из углов θ_i целиком лежит в $\bar{G}$; таким образом, можно положить $D_1=\theta_i(B)$, $D_2=\bar{Q}$, $D_3=\theta_j(C)$.

10°. Доказательство теоремы 2. Необходимость доказывается точно так же, как в теореме 1.

Достаточность. Рассмотрим отдельно следующие случаи: 1) множество G может быть заключено в полуполосу P_1 со сторонами, параллельными координатным осям; 2) множество G может быть заключено в прямой угол P_2, стороны которого соответственно параллельны координатным осям, но не может быть заключено в полуполосу P_1; 3) множество G расположено в полуплоскости P_3, граница которой параллельна какой-либо координатной оси, и не может быть заключено ни в P_1, ни в P_2; 4) G не может целиком лежать ни в P_1, ни в P_2, ни в P_3.

Пусть на $S_0 \setminus G^*$ задано ограниченное изгибающее поле Z. Будем считать его заданным на множестве $\overline{G}$ плоскости асимптотических параметров. Пусть $Z(B) = 0$, $B \in \overline{G}$; докажем, что тогда $Z(C) = 0$, где C — произвольная точка $\overline{G}$. Для доказательства в каждом из перечисленных выше случаев построим цепочку областей $D_1, \ldots, D_n$, являющихся прообразами B-жестких частей гиперболического параболоида и таких, что $D_i \in \overline{G}$, $D_i \cap D_{i+1} \neq \neq \varnothing$, $B \in D_1$, $C \in D_n$.

Рассмотрим случай 1). Возьмем произвольную точку в $P_1 \setminus G$, проведем через нее две взаимно перпендикулярные прямые, образующие углы θ_1, θ_2, θ_3, θ_4; каждый из этих углов θ_i пересечется с P_1. По леммам 1 и 2 θ_i и $\overline{P}_1$ являются прообразами B-жестких частей гиперболического параболоида; таким образом, в случае 1) $D_1 = \theta_i(B)$, $D_2 = \overline{P_1}$, $D_3 = \theta_j(C)$, где $\theta_j(C)$ строится аналогично тому, как $\theta_i(B)$ построено для точки B. Если $B \in \in \overline{P}_1 (C \in \overline{P_1})$, то построение упрощается: $D_1 (D_3)$ можно отбросить, ограничившись оставшимися областями.

Рассмотрим случай 2). Как и в случае 1), для произвольной точки из $P_2 \setminus G$ построим θ_i, $i = 1, 2, 3, 4$. При выбранном нами расположении P_2 (случаи иного расположения P_2 рассматриваются аналогично) только угол θ_1 не пересекается с $\overline{P}_2$. Покажем, что θ_1 не может целиком лежать в $\overline{G}$. Предположим противное, тогда $G \subset \bigcup\limits_{i=2}^{4} \theta_i \setminus P_2$. Если G ограничена сверху или справа, то задача сводится к случаю 1). Если G не ограничена ни сверху, ни справа, то нарушается односвязность $\overline{G}$. Так как условие A выполнено, то, по крайней мере, один из углов $\theta_2, \theta_3, \theta_4$ целиком лежит в $\overline{G}$, но каждый из них пересекается с P_2. Итак, в случае 2) $D_1 = \theta_i(B)$, $D_2 = \overline{P}_2$, $D_3 = \theta_j(C)$ $(i \neq 1,\ j \neq 1)$.

Рассмотрим случай 3). При выбранном нами расположении полуплоскости $\overline{P}_3$ углы θ_1 и θ_4 не пересекаются с $\overline{P}_3$. Покажем, что они не могут целиком лежать в G. Предположим противное, тогда $G \subset (\theta_2 \cup \theta_3) \setminus \overline{P}_3$. Если G ограничена и сверху и снизу, то задача сводится к рассмотренному выше случаю 1), если G ограничена только сверху или только снизу, то задача сводится к случаю 2); если G не ограничена ни сверху, ни снизу, то нарушается односвязность $\bar{G}$. Таким образом, принадлежать полностью $\bar{G}$ могут лишь пересекающиеся с P_3 углы θ_2 и θ_3, а в силу условия A хотя бы один из этих углов обязательно целиком лежит в $\bar{G}$. Итак, в случае 3) $D_1 = \theta_i(B)$, $D_2 = \bar{P}_3$, $D_3 = \theta_j(C)$ $(i, j \neq 2,3)$. Случай другого расположения полуплоскости P_3 рассматривается аналогично.

Рассмотрим случай 4). Граница ∂G множества G может быть задана либо монотонно убывающей, либо монотонно возрастающей функцией (строгой монотонности не требуется), так как в противном случае либо ∂G будет иметь один экстремум, и тогда G будет содержаться в полуплоскости типа P_3, либо ∂G будет иметь и минимум и максимум, и тогда в $\bar{G}$ будет содержаться область типа M, и условие A не будет выполнено.

Пусть для определенности ∂G монотонно возрастает, тогда для любой точки $\bar{G}$ лишь угол θ_2 целиком лежит в $\bar{G}$ и для любых двух различных точек B и C будет $\theta_2(B) \cap \theta_2(C) \neq \varnothing$. Тогда положим $D_1 = \theta_2(B)$, $D_2 = \theta_2(C)$, чем и завершается доказательство теоремы 2.

11°. Следствия из теорем 1 и 2: *B-жестким является гиперболический параболоид с выколотой точкой; гиперболический параболоид с разрезом по конечной или бесконечной кривой, удовлетворяющей условию A; гиперболический параболоид с вырезом, имеющим выпуклый прообраз на плоскости асимптотических параметров.*

Список литературы: 1. *Погорелов А.В.* Внешняя геометрия выпуклых поверхностей, — М.: Наука, 1969. — 760 с. 2. *Тен Л. В.* Бесконечно малые изгибания гиперболического параболоида. — Вестн. МГУ, 1975, № 1, с. 43 — 48. 3. *Тен Л. В.* Жесткость полных поверхностей отрицательной кривизны, совпадающих с гиперболическим параболоидом вне компактной области. —Усп. мат. наук, 1980, 35, вып. 6, с. 179—180.

Поступила в редколлегию 16. 06. 80.

УДК 513

В. П. Федотов

ПОЛЯРНОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ ВЫПУКЛОГО КОМПАКТА

Центральным результатом статьи является доказательство связности носителя p-ой функции кривизны μ_p выпуклого компакта $K \subset R^n$ при $p \leqslant n-2$. Это утверждение сформулировано автором в работе [1], где показано, что его следствием является отрицательный ответ на вопрос У. Дж. Фаэри [2]. При $p=1$ связность носителей доказал В. Вейль [3]. Хотя гипотеза Фаэри уже опровергнута автором [4], вопрос о строении носителей представляет самостоятельный интерес. Следующее утверждение высказал в качестве гипотезы В. Вейль [3], а доказал Р. Шнейдер [5]:

Носитель p-ой функции кривизны выпуклого компакта $K \subset R^n$ есть замыкание множества $(n-p-1)$-экстремальных нормалей K, т. е. нормалей, не содержащихся (внутри) ни в каком $(n-p+1)$-мерном конусе нормалей какой-либо точки $x \in K$.

Введем аналогичное сферическому изображение на поляре $\hat{K} = \{y : \langle x, y\rangle \leqslant 1, \ \forall x \in K\}$. Для этого каждому подмножеству $\omega \subset \partial K$ сопоставим объединение граней $F_x = \hat{K} \cap \{y : \langle x, y\rangle = 1\}$, сопряженных $x \in \omega$. Хотя ни сферическое, ни полярное изображения не являются даже отображениями и необратимы, соответствие между нормалями в этих двух изображениях есть гомеоморфизм. Действительно, различаются они только нормировкой и соответствие $\partial K \to S^{n-1}$ задается формулой $y \to y/\|y\|$. Последнее замечание приводит к следующей характеризации i-экстремальных нормалей.

Лемма 1. *Нормаль i-экстремальна, если и только если ее образ в ∂K является i-экстремальной точкой, т. е. содержится в i-остове $\partial_i K$ (объединении всех граней разменности не выше i).*

Теорема. *Носитель p-ой функции кривизны произвольного выпуклого компакта $K \subset R^n$ связен, если $p \leqslant n-2$.*

Доказательство. Цитированный результат Шнейдера сводит теорему к вопросу о связности множества $(n-p-1)$-экстремальных нормалей. Но так как полярное изображение отличается от сферического только гомеоморфизмом, а гомеоморфизм сохраняет связность, то лемма 1 сводит теорему к следующей лемме 2.

Лемма 2. *При $i \geqslant 1$ остов $\partial_i K$ линейно связен.*

Доказательство. Пусть $x, y \in \partial_i K$. Рассмотрим грани F_x и F_y размерности не выше i, содержащие эти точки, и выберем в них крайние точки x_0 и y_0. Согласно теореме Лармана и Роджерса [6] x_0 и y_0 можно соединить путем, содержащимся в $\partial_1 K$, а значит, и в $\partial_i K$ с $i \geqslant 1$. Остается соединить отрезками точку x_0 с x, а y_0 с y и заметить, что эти отрезки лежат в гранях F_x и F_y, входящих в состав остова $\partial_i K$.

Следствие (ответ на вопрос Фаэри). *При $n/2 \leqslant p \leqslant n-2$ существуют выпуклые тела в R^n, сумма p-ых функций кривизны которых не является p-ой функцией кривизны никакого выпуклого тела в R^n.*

Доказательство (контрпример к гипотезе Фаэри). Носителем p-ой функции кривизны выпуклого многогранника $K \subset R^n$ является $(n-p-1)$-мерное клеточное подпространство сферы S^{n-1}. Если $p \geqslant n/2$, то общим положением для двух таких подпространств является отсутствие общих точек. Поэтому сумма p-ых функций кривизны, «находящихся в общем положении» многогранников, имеет несвязный носитель и согласно теореме при $n/2 \leqslant p \leqslant n-2$ не может быть p-ой функцией кривизны никакого выпуклого компакта в R^n.

В заключение отметим большую универсальность введенного понятия: полярное изображение определено для произвольных линейных пространств в двойственности, тогда как сферическое — только для нормированных пространств.

Список литературы: 1. *Федотов В. П.* О сумме p-ых поверхностных функций.— Укр. геометр. сб., 1978, вып. 21, с. 125—131. 2. *Firey W. J.* Some open questions on convex surfaces.— Proc. Int. Congr. Math. 1974, Vancouver, 1975, 1, s. 1, p. 479—484. 3. *Weil W.* Ein approximation Satz für konvexen Körper.— Manuscr. math., 1973, 8. S. 137—149. 4. *Федотов В. П.* Контрпример к гипотезе Фаэри.— Мат. заметки, 1979, **26**, № 2, с. 269—276. 5. *Schneider R.* Kinematische Berührmasse von Firey für konvexen Körper.— Manuscr. math., 1975, **10**, p. 111—125. 6. *Larman D., Rogers C. A.* Paths on the 1-skeleton of a convex body.— Mathematika, 1975, **20**, № 1, p. 75—80.

Поступила в редколлегию 12. 11. 79.

УДК 513

С. И. Федищенко

СПЕЦИАЛЬНЫЕ КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ РИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВ. II.

В статье отражены результаты исследований, начатых в [1], где изучалось такое конформное соответствие между двумя римановыми пространствами V_n и $\overline{V}_n$, при котором в точках этих пространств, имеющих одинаковые координаты в общей по отображению системе координат, их римановы кривизны K и $\overline{K}$ в соответствующих двумерных направлениях связаны условием $\overline{K} = \rho K$, $\rho = \rho(x^1, \ldots, x^n)$ **(1)**.

Отсюда, учитывая соотношения, которыми связаны основные тензоры g_{ij} и $\bar{g}_{ij}$ пространств V_n и $\bar{V}_n$, а также их тензоры кривизны [2], мы получаем на функцию σ, осуществляющую конформное отображение V_n на $\bar{V}$, дифференциальные уравнения $\sigma_{,ij} = \sigma_{,i}\sigma_{,j} + vL_{ij} - \frac{1}{2}\Delta_1\sigma\, g_{ij}$ **(2)**, где $v = 1 - \rho e^{2\sigma}$ (3); $L_{ij} = -\frac{1}{n-2}R_{ij} + \frac{R}{2(n-1)(n-2)}g_{ij}$ **(4)**; $\Delta_1\sigma$ — дифференциальный параметр первого рода; R — скалярная кривизна пространства V_n; R_{ij} — тензор Риччи; запятой обозначено ковариантное дифференцирование в V_n $(i, j = 1, \ldots, n)$. Исследование данного вопроса привело к соотношению $(\rho e^{2\sigma} - 1)C_{hijl} = 0$, где C_{hijl} — тензор конформной кривизны пространства V_n. Полагая $\rho \neq e^{-2\sigma}$ и $\rho \neq 1$ (эти случаи рассмотрены в работах [1] и [3]), получаем $C_{hijl} = 0$, откуда следует, что V_n при $n > 3$ является конформно-плоским и его тензор кривизны имеет вид $R_{hijl} = g_{il}L_{hj} + g_{hj}L_{il} - g_{ij}L_{hl} - g_{hl}L_{ij}$ **(5)**, а тензор L_{ij} удовлетворяет условиям $L_{ij,l} - L_{il,j} = 0$ **(6)**.

Ясно, что $L_{ij} \neq 0$ (V_n не является плоским) и $v \neq \mathrm{const}$, так как в противном случае из (3) следует $\rho = Ce^{-2\sigma}$, что отличается от рассмотренного в [1] отображения лишь гомотетией.

Равенства (5), как известно, имеют место для любого V_3. Условия же (6) при $n > 3$ являются следствием (5), а при $n = 3$ выполняются лишь для конформно-плоского пространства. Поэтому мы включим в рассмотрение и конформно-плоские V_3, оставив в стороне те пространства V_3, для которых условия (6) не выполняются.

Свернув (2) с σ^i, $(\sigma^i, = g^{im}\sigma_{,m})$, получим $(\Delta_1\sigma)_{,j} = (\Delta_1\sigma)\sigma_{,j} + 2v\sigma_{,}^{m}L_{mj}$ **(7)**. Условия интегрируемости уравнений (2) вследствие (2), (5) — (7) можно представить в виде $(v-1)[\sigma_{,j}L_{il} - \sigma_{,l}L_{ij} + \sigma_{,}^{m}(g_{il}L_{mj} - g_{ij}L_{ml})] + v_{,l}L_{ij} - v_{,j}L_{il} = 0$ **(8)**.

Свернув (8) с $\sigma_{,}^{i}$, получим $\sigma_{,}^{m}L_{mj} = \mu v_{,j}$ **(9)**, где μ — некоторый инвариант.

В результате свертки (8) с g^{il} приходим вследствие (9) к соотношению $v_{,}^{m}L_{mj} = [L - (n-2)(v-1)\mu]v_{,j} - L(v-1)\sigma_{,j}$, где $L = g^{mr}L_{mr}$. Свернув (8) с $v_{,}^{i}$ и приняв во внимание (9) и последнее соотношение, получим $\mu(\sigma_{,j}v_{,l} - \sigma_{,l}v_{,j}) = 0$. Здесь могут представиться две возможности: 1) $\sigma_{,j}v_{,l} - \sigma_{,l}v_{,j} = 0$, т. е. $v = v(\sigma)$; 2) $\mu = 0$. Рассмотрим первую из этих возможностей. При $v = v(\sigma)$ из (3) следует $\rho = \rho(\sigma)$ и условие (1) принимает вид $\bar{K} = \rho(\sigma)K$ **(10)**. В рассматриваемом случае (9) превращается в $\sigma_{,}^{m}L_{mj} = \tau\sigma_{,j}$ **(11)**, где τ — инвариант. Условия (8) интегрируемости уравнений (2) вследствие (11) примут вид $[v'(\sigma) - v(\sigma) + 1](\sigma_{,l}L_{ij} - \sigma_{,j}L_{il}) + \tau[v(\sigma) - 1](\sigma_{,j}g_{il} - \sigma_{,l}g_{ij}) = 0$ **(12)**, где штрихом обозначена производная по σ.

Заметим, что $v' - v + 1 \neq 0$, так как в противном случае из соотношений (12) следовало бы, что $\sigma_{,j} = 0$, т. е. что соответствующее конформное отображение есть гомотетия. Свернув (12) с g^{il}, получим $(v'-v+1)(\tau-L)+(n-1)(v-1)\tau=0$ **(13)**, вследствие чего условия (12) запишем в виде $\sigma_{,j}L_{il}-\sigma_{,l}L_{ij}+\frac{\tau-L}{n-1}(\sigma_{,j}g_{il}-\sigma_{,l}g_{ij})=0$ **(14)**.

Свернув (14) с $\sigma^{l}_{,}$ и приняв во внимание (11), придем к соотношению $(L_{ij}+\frac{\tau-L}{n-1}g_{ij})\Delta_1\sigma-\frac{n\tau-L}{n-1}\sigma_{,i}\sigma_{,j}=0$ **(15)**. Отсюда ясно, что надо рассмотреть отдельно изотропный и неизотропный случаи.

а) Изотропный случай. Полагая $\Delta_1\sigma=0$, из (7), (11) находим $\tau=0$, а тогда из (15) следует $L=0$. Условия (14) дают $L_{ij}=A\sigma_{,i}\sigma_{,j}$ **(16)**, где A — некоторый инвариант.

Тензор L_{ij} должен удовлетворять условиям (6). Дифференцируя (16) ковариантно по x^l, подставляя полученное в (6) и учитывая (2), (16), получаем $A_{,l}\sigma_{,j}-A_{,j}\sigma_{,l}=0$, откуда следует, что $A=A(\sigma)$. Так как из (4) при $L=0$ вытекает $R=0$ и, следовательно, $(n-2)L_{ij}=-R_{ij}$, то (16) принимает вид $R_{ij}=\lambda(\sigma)\sigma_{,i}\sigma_{,j}$ **(17)**, где $\lambda(\sigma)=-(n-2)A(\sigma)$. Уравнения (2) запишутся следующим образом:

$$\sigma_{,ij}=[1+\frac{\rho(\sigma)e^{2\sigma}-1}{n-2}\lambda(\sigma)]\sigma_{,i}\sigma_{,j}. \tag{18}$$

Соотношения (17) и (18) говорят о том, что V_n в рассматриваемом изотропном случае является исключительным субпроективным пространством [4]. Взяв субпроективное пространство $V_n\ (n\geqslant 3)$ исключительного случая, для которого $R_{ij}=A(\sigma)\sigma_{,i}\sigma_{,j}$; $\sigma_{,ij}=B(\sigma)\sigma_{,i}\sigma_{,j}$, где $A(\sigma)$ и $B(\sigma)$ — некоторые дифференцируемые функции, а σ — функция, осуществляющая конформное отображение, убеждаемся, что при изотропном $(\Delta_1\sigma=0)$ конформном отображении V_n на $\bar{V}_n$ его риманова кривизна в каждом двумерном направлении изменяется по закону (10). При этом функция $\rho(\sigma)$ определяется из равенства $\rho(\sigma)A(\sigma)e^{2\sigma}=A(\sigma)+(n-2)[B(\sigma)-1]$.

При заданном законе преобразования кривизны, т. е. при заданной функции $\rho=\rho(\sigma)$, и известной функции $A(\sigma)$ функция $B(\sigma)$ определяется равенством $B(\sigma)=1+\frac{\rho(\sigma)e^{2\sigma}-1}{n-2}A(\sigma)$, так что для V_n будут иметь место (17), (18). Таким образом, доказана

Теорема 1. *Для того чтобы конформно-плоское пространство* $V_n\ (n\geqslant 3)$ *допускало нетривиальное* $(\sigma\neq \text{const})$ *изотропное* $(\Delta_1\sigma=0)$ *конформное отображение на* $\bar{V}_n$, *изменяющее риманову кривизну каждой его двумерной площадки по закону* (10), *необходимо и достаточно, чтобы оно было субпроективным пространством исключительного случая, тензор Риччи которого имеет вид* (17), *а отображающая функция* σ *удовлетворяла уравнениям* (18), *где* $\lambda(\sigma)$ — *произвольная дифференцируемая функция.*

Заметим, что при $\rho=1$ отсюда следует результат, полученный в работе [3].

Для произвольного субпроективного пространства исключительного случая имеем $R_{ij}=A(v)\,v_{,i}v_{,j};\ v_{,ij}=B(v)\,v_{,i}v_{,j}$ **(19)**, где $A(v)$ и $B(v)$ — некоторые дифференцируемые функции и $v\neq\neq\mathrm{const}$ (здесь v не является функцией, определенной равенством (3)). Если v не удовлетворяет уравнениям (18), то всегда можно найти функцию $\sigma=\sigma(v)$, которая будет им удовлетворять (т. е. будет осуществлять рассматриваемое конформное отображение). В самом деле, пусть $\sigma=\sigma(v)$ — дважды дифференцируемая функция. Тогда $\sigma_{,i}=\sigma'(v)\,v_{,i};\ \sigma_{,ij}=\sigma'(v)\,v_{,ij}+\sigma''(v)\,v_{,i}v_{,j}$ и соотношения (17), (18) примут вид $R_{ij}=\lambda(\sigma)(\sigma')^2v_{,i}v_{,j};\ v_{,ij}==[\sigma'+\frac{\rho(\sigma)\,e^{2\sigma}-1}{n-2}\lambda(\sigma)\,\sigma'-\frac{\sigma''}{\sigma'}]\,v_{,i}\,v_{,j}$ (штрихом обозначена производная по v). Сравнивая последние соотношения с (19), видим, что должно быть $(\sigma')^2\lambda=A;\ \ \sigma'+\frac{\rho\,e^{2\sigma}-1}{n-2}\lambda\,\sigma'-\frac{\sigma''}{\sigma'}=B$, т. е. функция $\sigma(v)$ должна удовлетворять дифференциальному уравнению второго порядка

$$\frac{d^2\sigma}{dv^2}+B(v)\frac{d\sigma}{dv}-\left(\frac{d\sigma}{dv}\right)^2=\frac{\rho(\sigma)\,e^{2\sigma}-1}{n-2}A(v),\tag{20}$$

которое имеет нетривиальное решение, так как правая часть его отлична от нуля. Следовательно, имеет место

Теорема 2. *Каково бы ни было субпроективное пространство V_n исключительного случая* (19), *всегда найдется функция $\sigma=\sigma(v)$, которая осуществляет нетривиальное изотропное ($\Delta_1\sigma=0$) конформное отображение V_n на $\overline{V}_n$, изменяющее его ненулевую риманову кривизну в каждом двумерном направлении по закону* (10). *При этом функция σ является решением дифференциального уравнения* (20).

б) Неизотропный случай. В неизотропном случае $\Delta_1\sigma\neq 0$. Соотношения (7) с учетом (11) запишем в виде $(\Delta_1\sigma)_{,j}=[\Delta_1\sigma++2v(\sigma)\,\tau]\,\sigma_{,j}$. Отсюда и из (13) следует $\Delta_1\sigma=f(\sigma);\ \tau=\tau(\sigma);$ $L=L(\sigma)$. Из (15) находим

$$L_{ij}=\frac{L(\sigma)-\tau(\sigma)}{n-1}g_{ij}+\frac{n\,\tau(\sigma)-L(\sigma)}{(n-1)\,\Delta_1\sigma}\sigma_{,i}\sigma_{,j},\tag{21}$$

вследствие чего условия (14) выполняются тождественно. В полученном выражении $L-\tau\neq 0$, так как в противном случае в соответствии с (13) будет $\tau=L=0$, т. е. $L_{ij}=0$ и пространство V_n — плоское.

Уравнения (2) вследствие (21) принимают вид

$$\sigma_{,ij}=\left[\frac{(L-\tau)\,v}{n-1}-\frac{\Delta_1\sigma}{2}\right]g_{ij}+\left[1+\frac{(n\tau-L)\,v}{(n-1)\,\Delta_1\sigma}\right]\sigma_{,i}\sigma_{,j}.\tag{22}$$

Тензор L_{ij} должен удовлетворять условиям (6), что с учетом (22) приводит к соотношению $\frac{(L-\tau)\,v}{n-1}-\frac{\Delta_1\sigma}{2}=\frac{(L'-\tau')\,\Delta_1\sigma}{n\tau-L}$. (23)

Так как L, τ, v, $\Delta_1\sigma$ — функции от σ, то из (5), (6) и (21) следует, что V_n является субпроективным пространством основного случая. Условия интегрируемости уравнений (22) выполняются тождественно вследствие их самих, также соотношений (5), (13), (21) и (23).

В получаемых нами соотношениях явно не участвует функция $\rho(\sigma)$, входящая в условие (10), а поэтому закон (10) изменения римановой кривизны пространства V_n в соответствии с (3) перепишем в виде $\overline{K} = e^{-2\sigma}[1 - v(\sigma)]\ K$ **(24)**.

Пусть мы имеем произвольное субпроективное пространство основного случая. Для него, как известно, будет $L_{ij} = P(\sigma) g_{ij} + Q(\sigma)\sigma_{,i}\sigma_{,j}$; $\sigma_{,ij} = A(\sigma) g_{ij} + B(\sigma)\sigma_{,i}\sigma_{,j}$ **(25)**, где $P(\sigma)$, $Q(\sigma)$, $B(\sigma)$ — некоторые дифференцируемые функции и $AQ = P'$.

Соотношение (23) имеет место для любого субпроективного пространства основного случая, так как оно представляет собой равенство $AQ = P'$.

Непосредственной проверкой убеждаемся, что при неизотропном конформном отображении произвольного субпроективного пространства V_n основного случая (25) на риманово пространство $\overline{V}_n$ с помощью функции σ его риманова кривизна в каждом двумерном направлении изменяется по закону (24) лишь в случае, когда $B - Qv - 1 = 0$; $2A - 2Pv + \Delta_1\sigma = 0$, т. е., когда для V_n будут иметь место (21), (22). Исключая из последних соотношений функцию v и принимая во внимание равенство $AQ = P'$, получаем следующее выражение для функции $B(\sigma)$, входящей в (25): $B = \frac{1}{2P}(2P' + 2P + Q\Delta_1\sigma)$.

Функции L, τ, v, входящие в (21), (22), удовлетворяют дифференциальному уравнению (13), которое можно представить в виде

$$\frac{d\ln|v(\sigma) - 1|}{d\sigma} + \frac{(n-2)\tau(\sigma) + L(\sigma)}{\tau(\sigma) - L(\sigma)} = 0. \qquad (26)$$

В итоге может быть сформулирована

Теорема 3. *Для того чтобы конформно-плоское пространство V_n $(n \geqslant 3)$ допускало нетривиальное неизотропное $(\Delta_1\sigma \neq 0)$ конформное отображение на $\overline{V}_n$ с помощью функции σ, изменяющее риманову кривизну каждой его двумерной площадки по закону* (24), *необходимо и достаточно, чтобы оно было субпроективным пространством основного случая, тензор L_{ij} которого имеет вид* (21), *а функция σ удовлетворяла системе дифференциальных уравнений* (22). *При этом имеют место соотношения* (23), (26).

В предположении, что $L \neq \text{const}$, т. е. что скалярная кривизна пространства V_n не является постоянной, можно получить условия внутреннего характера.

Пусть $L \neq \text{const}$. Тогда вместо $L = L(\sigma)$ мы можем считать $\sigma = \sigma(L)$, а следовательно, $v = v(L)$, $\Delta_1\sigma = \varphi(L)$, $\tau = \tau(L)$. В таком случае $\sigma_{,i} = \sigma'(L) L_{,i}$; $\sigma_{,ij} = \sigma'(L) L_{,ij} + \sigma''(L) L_{,i} L_{,j}$, где штрихом обозначена производная по L.

Так как $\Delta_1\sigma = (\sigma')^2 \Delta_1 L$, то отсюда следует $\Delta_1 L = F(L)$.

Соотношения (21), (22) преобразуем соответственно в следующие $L_{ij} = \frac{L - \tau(L)}{n-1} g_{ij} + \frac{n\tau(L) - L}{(n-1)\Delta_1 L} L_{,i} L_{,j}$; (27)

$$L_{,ij} = \left[\frac{(L-\tau)v}{(n-1)\sigma'} - \frac{1}{2}\sigma'\Delta_1 L\right] g_{ij} + \left[\frac{(n\tau - L)v}{(n-1)\sigma'\Delta_1 L} + \sigma' - \frac{\sigma''}{\sigma'}\right] L_{,i} L_{,j}. \tag{28}$$

Уравнение (26) перепишем в виде

$$\frac{d\ln|v-1|}{dL} + \frac{(n-2)\tau + L}{\tau - L}\frac{d\sigma}{dL} = 0. \tag{29}$$

Условия (27) — (29) носят внутренний характер.

Таким образом, теорему 3 можно сформулировать так.

Для того чтобы конформно-плоское пространство V_n $(n \geqslant 3)$ с непостоянной скалярной кривизной допускало нетривиальное неизотропное конформное отображение на $\overline{V}_n$ с помощью функции $\sigma = \sigma(L)$, изменяющее риманову кривизну каждой его двумерной площадки по закону $\overline{K} = \rho(L) K$, необходимо и достаточно, чтобы оно было субпроективным пространством основного случая, для которого имеют место соотношения (27) — (29).

Перейдем к исследованию второй возможности: $\mu = 0$. Тогда (9) принимает вид $\sigma_{,}^{m} L_{mj} = 0$ **(30)**, а из (7) следует $\Delta_1\sigma = 2Ce^{\sigma}$ $(C = \mathrm{const})$ **(31)**.

Условия (8) интегрируемости системы уравнений (2) вследствие (30) можно представить в виде $L_{ij}\psi_{,l} - L_{il}\psi_{,j} = 0$ **(32)**, где $\psi = e^{-\sigma}(v-1)$ **(33)**; при этом $\psi \neq \mathrm{const}$, в противном случае из (3), (33) следует $\rho = Ce^{-\sigma}$.

Свернув (32) с g^{il}, получим $\psi_{,}^{m} L_{mj} = L\psi_{,j}$. А тогда свертка (32) с $\psi_{,}^{l}$ дает $L_{ij}\Delta_1\psi - L\psi_{,i}\psi_{,j} = 0$.

Если мы предположим, что пространство V_n имеет ненулевую скалярную кривизну $R \neq 0$, то из (4) следует $L \neq 0$. Но тогда в последнем соотношении $\Delta_1\psi \neq 0$ и $L_{ij} = \frac{L}{\Delta_1\psi}\psi_{,i}\psi_{,j}$ **(34)**. Условия (32) вследствие (34) выполняются тождественно.

Тензор L_{ij} должен удовлетворять условиям (6), что дает $L(\psi_{,il}\psi_{,j} - \psi_{,ij}\psi_{,l}) + (\psi_{,j}L_{,l} - \psi_{,l}L_{,j})\psi_{,i} - \frac{L}{\Delta_1\psi}[\psi_{,j}(\Delta_1\psi)_{,l} - \psi_{,l}(\Delta_1\psi)_{,j}]\psi_{,i} = 0$ **(35)**. Свернув (35) с $\psi_{,}^{l}$, получим $\left(\frac{L^2}{\Delta_1\psi}\right)_{,l}\psi_{,j} - \left(\frac{L^2}{\Delta_1\psi}\right)_{,j}\psi_{,l} = 0$, откуда следует $\frac{L^2}{\Delta_1\psi} = f(\psi)$ **(36)**. Тогда (34) принимает вид $L_{ij} = \frac{f(\psi)}{L}\psi_{,i}\psi_{,j}$ **(37)**. Условия (35) вследствие (36) дают $(L\psi_{,il} - \psi_{,i}L_{,l})\psi_{,j} - (L\psi_{,ij} - \psi_{,i}L_{,j})\psi_{,l} = 0$. Отсюда в результате свертки с $\psi_{,}^{l}$ находим, учитывая (36), $\psi_{,ij} = \frac{1}{L}(\psi_{,i}L_{,j} + \psi_{,j}L_{,i}) - \left[\frac{f(\psi)}{L^3}\psi_{,}^{m}L_{,m} + \frac{f'(\psi)}{2f(\psi)}\right]\psi_{,i}\psi_{,j}$ **(38)**, где штрихом обозначена производная по ψ.

Вследствие (38) соотношения (35) выполнены, т. е. тензор L_{ij} удовлетворяет условиям (6).

Условия интегрируемости уравнений (38) имеют вид

$$L_{,il}\psi_{,j}-L_{,ij}\psi_{,l}+\frac{L^2}{n-2}(g_{il}\psi_{,j}-g_{ij}\psi_{,l})-\frac{f(\psi)}{L^2}(\psi_{,}^{m}L_{,ml}\psi_{,j}-$$
$$-\psi_{,}^{m}L_{,mj}\psi_{,l})\psi_{,i}-\frac{2}{L}(L_{,l}\psi_{,j}-L_{,j}\psi_{,l})(L_{,i}-\frac{f(\psi)}{L^2}\psi_{,}^{m}L_{,m}\psi_{,i})=0. \tag{39}$$

Свернув (39) с $\psi_{,}^{l}$, получим

$$L_{,ij}-\frac{2}{L}L_{,i}L_{,j}+\frac{2f(\psi)\psi_{,}^{m}L_{,m}}{L^3}(L_{,i}\psi_{,j}+L_{,j}\psi_{,i})-\left[\frac{2f^2(\psi)(\psi_{,}^{m}L_{,m})^2}{L^5}-\right.$$
$$\left.-\frac{f^2(\psi)}{L^4}\psi_{,}^{m}\psi_{,}^{r}L_{,mr}+\frac{f(\psi)}{n-2}\right]\psi_{,i}\psi_{,j}+\frac{L^2}{n-2}g_{ij}-\frac{f(\psi)}{L^2}(\psi_{,}^{m}L_{,mi}\psi_{,j}+$$
$$+\psi_{,}^{m}L_{,mj}\psi_{,i})=0.$$

Вследствие этих соотношений условия (39) тождественно выполняются. С учетом (37) последние соотношения можно записать в виде

$$L_{,ij}-\frac{2}{L}L_{,i}L_{,j}-\frac{1}{L}\left(L_{i}^{m}L_{,mj}+L_{j}^{m}L_{,mi}\right)+\left(\frac{1}{L^2}L^{mr}L_{,mr}-\right.$$
$$\left.-\frac{2}{L^3}L_{,}^{m}L_{,}^{r}L_{mr}-\frac{L}{n-2}\right)L+\frac{L^2}{n-2}g_{ij}+\frac{2}{L^2}\left(L_{,}^{m}L_{mi}L_{,j}+L_{,}^{m}L_{mj}L_{,i}\right)=0. \tag{40}$$

Условия (40) носят внутренний характер.

Если в пространстве V_n условия (40) выполнены, то условия интегрируемости дифференциальных уравнений (38) будут выполнены тождественно вследствие (37).

Вектор $\psi_{,i}$ удовлетворяет дифференциальным уравнениям (38) и конечным уравнениям (37), они составляют смешанную систему. Найдем дифференциальные продолжения уравнений (37). Дифференцируя (37) ковариантно по x^k и используя (37) и (38), получаем $L^2L_{ij,k}+2L_{,}^{m}L_{mk}L_{ij}-L(L_{ij}L_{,k}+L_{ik}L_{,j}+L_{jk}L_{,i})=0$. Эти условия носят внутренний характер, т. е. дифференциальные продолжения конечных уравнений (37) никаких условий на вектор $\psi_{,i}$ не налагают.

Условие (1) с учетом (3), (33) превращается в $\bar{K}=-\psi e^{-\sigma}K$ **(41)**, а уравнения (2) на функцию σ, осуществляющую конформное отображение, ввиду (31), (33) перепишутся в виде $\sigma_{,ij}=\sigma_{,i}\sigma_{,j}+(1+\psi e^{\sigma})L_{ij}-Ce^{\sigma}g_{ij}$ (42).

Заметим, что мы пришли к выражению (37) для тензора L_{ij} в предположении $L\neq 0$. Оказывается, что такое предположение налагает на величину L более жесткие требования: L не только не может быть величиной постоянной, но даже функцией от ψ. В самом деле, если в (37) $L=L(\psi)$, то получим уравнения $\psi_{,ij}=B\psi_{,i}\psi_{,j}$, условия интегрируемости которых приводят к равенствам $L=0$, $\Delta_1\psi=0$, что противоречит предположению.

Если предположить $R = 0$, то при $\Delta_1 \sigma = 0$ мы придем к рассмотренному выше изотропному случаю (теорема 1). Если же $\Delta_1 \sigma \neq 0$ при $R = 0$, то исследование получающихся в этом случае соотношений в специальной системе координат (как это сделано в [1] для неизотропного случая) приводит к $\psi = \mathrm{const}$, что не представляет интереса.

Итак, имеет место

Теорема 4. *Для того чтобы конформно-плоское риманово пространство V_n с непостоянной скалярной кривизной R допускало нетривиальное конформное отображение на $\bar{V}_n$ с помощью функции σ, изменяющее риманову кривизну каждой его двумерной площадки по закону* (41), *необходимо и достаточно, чтобы его тензор L_{ij} имел вид* (37), *где L не является функцией от ψ, а функции ψ и σ удовлетворяли системам дифференциальных уравнений* (38), (42). *При этом должны быть выполнены условия* (40).

Список литературы: 1. *Федищенко С. И.* Специальные конформные отображения римановых пространств. I. — Укр. геометр. сб., 1975, вып. 17, с. 134—141. 2. *Эйзенхарт Л. П.* Риманова геометрия. — М.: Изд-во иностр. лит., 1948.— 316 с. 3. *Федіщенко С. І.* Про один клас конформних відображень ріманових просторів.— В кн.: Матеріали наук. конф. молодих вчених ун-ту, 1968, Одеса, с. 220—224. 4. *Каган В. Ф.* Субпроективные пространства.— М.: Физматгиз, 1961.— 218 с.

Поступила в редколлегию 29. 06. 79.

СОДЕРЖАНИЕ

УКРАИНСКИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК

Выпуск 25

Редактор *Н. И. Верховская*, художественный редактор *В. Е. Петренко*, технический редактор *Л. Т. Момот*, корректоры *Л. П. Пипенко*, *В. В. Николаева*

Информ. бланк № 6722

Сдано в набор 30. 07. 81. Подписано в печать 26.07.82.
БЦ 08850. Формат 60 × 90/16. Бумага типогр. № 1
Лит. гарн. Выс. печать. 9 печ. л. 9,25 кр.-отт. 10,1 уч.-изд. л.
Тираж 1000 экз. Изд. № 953. Зак 1-312. Цена 1 р. 40 к.

Издательство при Харьковском государственном университете издательского объединения «Вища школа»,
310003, Харьков-3, ул. Университетская, 16

Отпечатано с матриц книжной ф-ки им. М. В. Фрунзе
в Харьковской городской типографии № 16,
310003, Харьков-3, ул. Университетская, 16 Зак. 1113.

РЕФЕРАТЫ

УДК 513

О многомерных параболических поверхностях в евклидовом пространстве. Борисенко А. А. — Укр. геометр. сб., 1982, вып. 25, с. 3—5.

Вводятся классы k-параболических и k-сильно параболических поверхностей в евклидовом пространстве. Доказывается, что вполне регулярные в смысле Шефеля изометрические погружения некоторых классов метрик в евклидово пространство являются k- (сильно) параболическими поверхностями. Библиогр.: 6 назв.

УДК 513

О явно заданных минимальных поверхностях. Борисенко А. А. — Укр. геометр. сб., 1982, вып. 25, с. 6—7.

Рассматриваются достаточные условия, при которых явно заданная минимальная поверхность F^l в евклидовом пространстве E^n является цилиндром. Доказывается, что явно заданная двумерная минимальная поверхность в сферическом пространстве S^n есть большая сфера.

Библиогр.: 5 назв.

УДК 513.83

Существование на некомпактной поверхности полной метрики с данной кривизной. Бураго Ю. Д. — Укр. геометр. сб., 1982, вып. 25, с. 8—11.

Найдены необходимые и достаточные условия на функцию $f \in C^\infty(M^2)$ для того, чтобы она являлась гауссовой кривизной полной римановой метрики на некомпактной конечносвязной поверхности M^2.

Библиогр.: 3 назв.

УДК 513

Двумерные поверхности с постоянной внешней геометрией в E^5. Гарибе Т. — Укр. геометр. сб., 1982, вып. 25, с. 11—22.

Найдены двумерные поверхности с постоянной внешней геометрией в E^5, имеющие неотрицательную гауссову кривизну K.

Поверхности с $K > 0$ есть сфера и поверхность Веронезе. Если $K = 0$, то ее общее уравнение имеет вид

$$x_j = \sum_{i=1}^{2} [\cos \gamma_i v \sum_{k=1}^{2} (a^i_{j2k-1} \cos \delta_k u + a^i_{j2k} \sin \delta_k u) +$$

$$+ \sin \gamma_i v \sum_{k=1}^{2} (a^i_{j2k+3} \cos \delta_k u + a^i_{j2k+4} \sin \delta_k u)], \; j = 1, 2, 3, 4,$$

$$x_5 = C_1 u + C_2 v.$$

Библиогр.: 3 назв.

УДК 513

Оценка числа замкнутых выпуклых многогранников с равноугольными вершинами. Гурин А. М. — Укр. геометр. сб., 1982, вып. 25, с. 22—30.

Вершина многогранника в E^3 называется равноугольной, если все сходящиеся в ней плоские углы граней равны. Двугранные углы могут быть различны. В предыдущей статье (Укр. геометр. сб., вып. 23) автор доказал конечность множества выпуклых замкнутых многогранников с равноугольными вершинами, не являющихся правильными, двойственными полуправильным, бипирамидами или двойственными антипризмам. В статье дана оценка этого множества: число таких многогранников, с точностью до изоморфизма, не превосходит 243.

Ил. 2. Библиогр.: 3 назв.

УДК 530.12; 531.51

О сопряженных точках в космологической модели Геделя. Денисов В. И. — Укр. геометр. сб., 1982, вып. 25, с. 30—34.

Доказано, что индекс любой сопряженной точки геодезической модели Геделя (МГ) не превосходит 2.

Эта оценка точна:в МГ есть геодезическая, на которой индекс сопряженной точки равен 2.

Библиогр.: 6 назв.

УДК 513

Об отображении кривых комплексного центроаффинного пространства A_3 на двумерные поверхности X_2 бипланарного пространства $Б_5$. Дерягина В. Г.— Укр. геометр. сб., 1982, вып. 25, с. 34—43.

В статье изучаются свойства аналитических поверхностей X_2 в бипланарном пространстве $Б_5$, на которые отображаются аналитические кривые комплексного пространства A_3. Устанавливается соответствие между аналитическими параметром, к которому отнесена кривая в A_3, и сетью на соответствующей поверхности $X_2 \subset Б_5$. Дается геометрическое истолкование кривизны и кручения кривой в A_3, отнесенной к эквицентроаффинному параметру.

Библиогр.: 7 назв.

УДК 513.82

Устойчивость решения уравнения Минковского для площади поверхности выпуклых тел. Дискант В. И. — Укр. геометр. сб., 1982, вып. 25, с. 43—51.

Доказывается теорема устойчивости решения уравнения

$$V_{n-1}^{\frac{1}{n-1}}(H(t)) - \left[(1-t)\ V_{n-1}^{\frac{1}{n-1}}(A) + tV_{n-1}^{\frac{1}{n-1}}(X)\right] = 0$$

при $t \in [0, 1]$, где A и X — ограниченные выпуклые тела в евклидовом n-мерном пространстве R^n, $n \geqslant 5$, $H(t) = (1-t)A + tX$, $V_{n-1}(H(t))$ есть $(n-1)$-й интеграл кривизны тела $H(t)$.

Библиогр.: 4 назв.

УДК 513

Гомотетии в обобщенных метрических пространствах. Егорова Л. И. — Укр. геометр. сб., 1982, вып. 25, с. 51—56.

Изучаются гомотетические преобразования в метрических финслеровых пространствах F_n. Доказывается, что общие траектории могут иметь только два линейно независимых оператора гомотетий. Они образуют идеал алгебры Ли, соответствующей группе гомотетий пространства F_n. Изучаются свойства этого идеала. Они играют важную роль при определении пространств F_n ($n = 2, 3, 4$), допускающих группы гомотетий, и позволяют записать их метрические функции.

Библиогр.: 3 назв.

УДК 513

Общее уравнение алгебраической поверхности с группой симметрий многогранника 2_{21}. Игнатенко В. Ф. — кр. геометр. сб., 1982, вып. 25, с. 56—60.

Пусть в прямоугольной системе координат пространства E^6 уравнения $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $\sqrt{3}\,x_1 + x_2 = 0$, $\sqrt{3}\,x_3 + x_4 = 0$, $\sqrt{3}\,x_5 + x_6 = 0$, $x_1 + x_3 + x_5 = 0$ задают стенки камеры для группы симметрий E_6 мно огранника 2_{21}.

Если $\eta_j = 0$ $(j = \overline{1,36})$ — нормированные уравнения всех гиперплоскостей симметрии многогранника 2_{21}, то положим $H_{2s} = \nu(s) \sum_{j=1}^{36} \eta_j^{2s}$, $s \geqslant 1$, при $\nu(1) = \frac{1}{6}$, $\nu(3) = 16$, $\nu(4) = 3 \cdot 2^6$, $\nu(6) = 3^3 \cdot 2^{10}$. Обозначим через Δ дифференциальный оператор $\sum u_p (v_q - v_r) \frac{\partial}{\partial v_p} + \frac{1}{6} \sum u_p (u_q - u_r) \frac{\partial}{\partial u_p} - \sum u_p v_q (v_q - v_r) \frac{\partial^2}{\partial v_p \partial v_q} - \frac{1}{2} \left[\sum v_p^2 (u_q - u_r) - \frac{5}{2} \sum u_p (v_q^2 - v_r^2) \right] \frac{\partial^2}{\partial v_\sigma^2}$; $p, q, r = 1, 2, 3$ (циклически), $u_p = 3x_\beta^2 x_\alpha - x_\alpha^3$, $v_p = x_\alpha^2 + x_\beta^2$, где $p = 1, 2, 3$ соответственно $(\alpha\beta) = (12), (34), (56)$. Доказано, что формы H_2, ΔH_2, H_6, H_8, $\Delta(15 H_2^3 - H_6)$, H_{12} образуют полный базис алгебры многочленов, инвариантных относительно группы симметрий E_6.

Библиогр.: 7 назв.

УДК 513.73: 513.82

Устойчивость почти эрмитовых структур, индуцированных 3-векторными произведениями на шестимерных подмногообразиях алгебры Кэли. Кириченко В. Ф. — Укр. геометр. сб., 1982, вып. 25, с. 60—69.

В работе получена классификация шестимерных подмногообразий алгебры Кэли, на которых 3-векторные произведения, канонически определенные в алгебре Кэли, индуцируют почти эрмитовы структуры, являющиеся одновременно квазикелеровыми либо почти келеровыми с J-инвариантным тензором кривизны, а также структуры, являющиеся одновременно приближенно келеровыми либо эрмитовыми, либо келеровыми. Выяснены условия, при которых одна из индуцированных эрмитовых структур является келеровой. Полученные результаты обобщают ряд результатов Грея.

Библиогр.: 10 назв.

УДК 513.81

О строении множества решений основных уравнений теории поверхностей. Климентов С. Б. — Укр. геометр. сб., 1982, вып. 25, с. 69—82.

Установлено, что множество решений уравнений Гаусса-Петерсона-Кодацци, записанных для регулярной поверхности S, диффеоморфной кругу и строго положительной кривизны, есть аналитическое бесконечно мерное подмногообразие некоторого банахова пространства, моделируемое в подпространстве аналитических функций этого банахова пространства. Приведены следствия этого факта, касающиеся изгибаний поверхности S. В частности, показано, что любые две регулярные, одинаково ориентированные, диффеоморфные кругу поверхности положительной вплоть до края кривизны аналитически по параметру изгибаемы друг в друга.

Библиогр.: 16 назв.

УДК 514

Универсальные покрышки. II. Макеев В. В. — Укр. геометр. сб., 1982, вып. 25, с. 82—86.

Рассматривается класс $M(N)$ центрально симметричных выпуклых ограниченных многогранников X в R^n, описанных вокруг шара единичного диаметра и имеющих $2N$ граней. Дается необходимый и достаточный признак того, что $X \in M(N)$ есть универсальная покрышка для множеств диаметра 1 и доказывается, что при $N > \frac{n(n+1)}{2}$ все $X \in M(N)$ не являются универсальными покрышками.

Библиогр.: 2 назв.

УДК 513

Бесконечно малые изгибания высших порядков многомерных поверхностей. Марков П. Е. — Укр. геометр. сб., 1982, вып. 25, с. 87—94.

Рассматриваются бесконечно малые изгибания k-го порядка и аналитические изгибания n-мерных поверхностей в m-мерном полном односвязном римановом пространстве произвольного индекса и произвольной постоянной кривизны. Для таких поверхностей устанавливается необходимый и достаточный признак отсутствия бесконечно малых изгибаний конечного порядка, отличных и бесконечно малых движений того же порядка, а также достаточный признак аналитической неизгибаемости.

Библиогр.: 5 назв.

УДК 513

Геодезические и кратчайшие линии на выпуклых гиперповерхностях. I. Милка А. Д. — Укр. геометр. сб., 1982, вып. 25, с. 95—110.

Подробно излагаются новые результаты о геодезических и кратчайших линиях на выпуклых гиперповерхностях, анонсированные автором в Докл. АН СССР, **248**, № 1.

Библиогр.: 16 назв.

УДК 513

О поверхностях неположительной кривизны с ребром возврата первого рода. Можарский В. В. — Укр. геометр. сб., 1982, вып. 25, с. 110—116.

В работе исследуется поверхность σ, несущая ребро возврата первого рода, т. е. особую линию (отличную от прямой), на которой существует предел K_0 гауссовой кривизны $K \leqslant 0$ поверхности и соприкасающаяся плоскость которой является предельным положением касательных плоскостей поверхности σ. Основным результатом является утверждение о том, что условие $K_0 = 0$ эквивалентно наличию распрямления асимптотических линий поверхности в точке их встречи с ребром возврата. Показано также, что если $K_0 = 0$, то ребро возврата огибает оба семейства асимптотических, соприкасаясь с ними. Получены конечные уравнения довольно широкого класса изучаемых поверхностей.

Библиогр.: 5 назв.

УДК 513

О чебышевских сетях на многомерных поверхностях в R_n. Сдвижков О. А. — Укр. геометр. сб., 1982, вып. 25, с. 116—121.

Доказывается, что голономная сеть $\Sigma_m \subset V_m \subset R_n$ является чебышевской тогда и только тогда, когда квадрат элемента дуги на поверхности V_m имеет вид $ds^2 = \sum_{i=1}^{m} (dv^i)^2 + \sum_{i \neq j} g_{ij} dv^i dv^j$, причем g_{ij} зависит только от двух переменных: v^i и v^j, если сеть Σ_m принята за координатную. Такие сети автор называет чебышевскими I-го рода. А. Е. Либер ввел чебышевские сети II-го рода, где автор доказывает, что на касательных к линиям этой сети не существует псевдофокусов.

Автор вводит понятие чебышевских сетей III-го рода. Это такие сети $\sum_m \subset V_m \subset R_n$, что на любой двумерной поверхности, определяемой парой пересекающихся линий сети $\sum_m$, сеть $\sum_2 \subset \sum_m$ является чебышевской в классическом смысле. При $m > 2$ сеть I-го рода, принадлежит классу сетей III рода, при $m = 2$ они совпадают. Приводится пример чебышевской сети III-го рода, не являющейся сетью I-го рода. Библиогр.: 6 назв.

УДК 513

Об одном геометрическом свойстве характеристических линий уравнения Монжа в E_n. Сергиенко Л. Н. — Укр. геометр. сб., 1982, вып. 25, с. 121—124.

В работе устанавливается соответствие между множеством соприкасающихся 2-плоскостей β к интегральным кривым монжева уравнения с общей касательной t и множеством $(n-2)$-плоскостей τ, лежащих в касательной гиперплоскости α к конусу Монжа вдоль t. В гиперплоскости α выделяется $(n-2)$-мерная поверхность φ, обладающая тем свойством, что конусы Монжа с вершинами в точках этой поверхности касаются α. Доказывается теорема: интегральная кривая γ монжева уравнения, для каждой точки которой $(n-2)$-плоскость τ, соответствующая соприкасающейся 2-плоскости β кривой γ, касается поверхности φ, есть характеристика. Библиогр.: 3 назв.

УДК 513

Исследование жесткости некомпактных областей гиперболического параболоида. Тен Л. В. — Укр. геометр. сб., 1982, вып. 25, с. 124—130.

Работа посвящена исследованию жесткости поверхностей отрицательной кривизны в трехмерном евклидовом пространстве, представляющих собой некомпактные области гиперболического параболоида. Никаких условий закрепления поверхности, в том числе на ее крае, не ставится, а требуется лишь ограниченность изгибающего поля на всей поверхности. При этих предположениях доказаны необходимые и достаточные условия жесткости для односвязных и двусвязных частей гиперболического параболоида.

Библиогр.: 3 назв.

УДК 513

Специальные конформные отображения римановых пространств. II. Федищенко С. И. — Укр. геометр. сб., 1982, вып. 25, с. 130—137.

Статья посвящена изучению конформного соответствия между двумя римановыми пространствами V_n и $\overline{V}_n$, римановы кривизны K и $\overline{K}$ которых в соответствующих двумерных направлениях связаны условием $\overline{K} = \rho(x^1, \ldots, x^n) K$. Показано, что при $\rho = \rho(\sigma)$, где σ — функция, осуществляющая отображение V_n на $\overline{V}_n$ и $\rho \neq \exp \sigma$, исследуемое конформное отображение как в изотропном, так и в неизотропном случаях имеет место лишь для субпроективных пространств.

Библиогр.: 4 назв.

УДК 513

Полярное изображение выпуклого компакта. Федотов В. П. — Укр. геометр. сб., 1982, вып. 25, с. 137—138.

Доказывается теорема: носитель p-ой функции кривизны произвольного выпуклого компакта $K \subset R^n$ связен, если $p \leqslant n-2$.

Библиогр.: 6 назв.