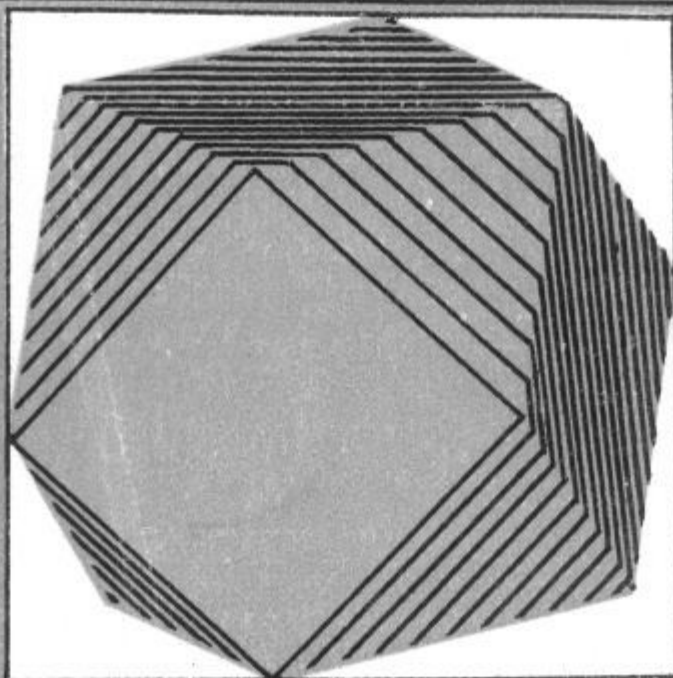


УКРАИНСКИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК

ВЫПУСК **24**



СОДЕРЖАНИЕ

Андибян М. А. Три-ткани в касательном расслоении, определяемом многомерной поверхностью аффинного пространства	3
Гарибе Т. Поверхности в E^1 с постоянной внешней и внутренней геометрией	12
Горох В. П. О гиперповерхностях, содержащих минимальные подмногообразия	18
Гурин А. М. Бесконечные выпуклые многогранники с равноугольными вершинами	26
Гурин А. М. Аналог теоремы Коши	32
Игнатьенко В. Ф. Об алгебраических поверхностях с группами симметрий A_n, B_n, D_n	33
Климентов С. Б. О степени изгибаемости поверхностей положительной кривизны	39
Кованцов А. Н. Сети, определяемые нелинейными проекторами	52
Кованцов Н. И. Поверхности отрицательной кривизны с прямолинейным ребром возврата	57
Макеев В. В. Универсальные покрывающие. I	70
Медяник А. И. Одно характеристическое свойство гиперболы	79
Милка А. Д. Аналог теоремы Либермана в римановом пространстве	82
Мягков В. И. Второе безынтегральное представление комплекса, допускающего H/K -расслоение	85
Пеклич В. А., Хантурина С. А. Алгебра прямых трехмерного квазисимплектического пространства	91
Солтан В. П. Числа замены и числа Каратеодори декартова произведения структур выпуклости	104
Стоян Ю. Г., Смеляков С. В. Нахождение оптимального пути в неодносвязной области на одном классе ломаных в R_1^2	108
Трушкина В. П. Теорема о раскраске и жесткость выпуклого многогранника	116
Улановский М. А. Конформно полные лоренцовы многообразия	122
Ямпольский А. Л. К геометрии сферических касательных расслоений римановых многообразий	129

УКРАИНСКИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК

Выпуск 24

Редактор А. Л. Алиева

Обложка художника А. И. Удовенко

Художественный редактор Т. П. Воробийченко

Технический редактор Л. Т. Момот

Корректоры В. Л. Максименко, Л. А. Федоренко

Информ. бланк № 5948

Сдано в набор 13.08.80. Подп. в печать 04.02.81. БЦ 09026, Формат 60 × 90/16. Бумага типогр. № 2. Лит. гарн. Выс. печать. 8,5 усл. печ. л. 10,1 уч.-изд. л. Тираж 1 000 экз. Изд. № 845. Зак. 346. Цена 1 р. 40 к.

Издательство при Харьковском государственном университете издательского объединения «Вища школа», 310003, Харьков-3, ул. Университетская, 16

Отпечатано с матриц книжной фабрики им. М. В. Фрунзе в Харьковской городской типографии № 16 Областного управления по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, 310003, Харьков-3, ул. Университетская, 16 Зак. 387.

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ УССР

ХАРЬКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени А. М. ГОРЬКОГО

УКРАИНСКИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СБОРНИК

ВЫПУСК 24

Республиканский
межведомственный
научный сборник

Основан в 1965 г.

ХАРЬКОВ
ИЗДАТЕЛЬСТВО ПРИ ХАРЬКОВСКОМ
ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ
ИЗДАТЕЛЬСКОГО ОБЪЕДИНЕНИЯ „ВИЩА ШКОЛА“
1981

Украинский геометрический сборник, вып. 24.— Респ. межвед. науч. сборник.— Харьков: Вища школа. Изд-во при Харьк. ун-те, 1981.—132+5 с.

Сборник посвящен геометрии «в целом», в нем рассматриваются аналог теоремы Либермана в римановом пространстве, характеристическое свойство гиперболы, изгибаемость и жесткость поверхностей, 2-поверхности с постоянной геометрией в E^4 , поверхности, содержащие минимальные подмногообразия, универсальные покрывающие множества, структуры выпуклости, свойства выпуклых многогранников. Изучаются также свойства обобщенных пространств, касательных расслоений над многообразиями, поверхности отрицательной кривизны с заданным ребром возврата, расслоения линейчатых комплексов, алгебраические поверхности с заданной симметрией и другие вопросы.

Для научных работников математических специальностей.

Списки лит. в конце статей.

Редакционная коллегия: акад. А. В. Погорелов (отв. ред.), проф. Я. П. Бланк (зам. отв. ред.), доц. А. С. Лейбин (отв. секр.), проф. Н. И. Кованцов, проф. Е. А. Косачевская, ст. науч. сотр. А. Д. Милка, доц. В. И. Михайловский, доц. Е. П. Сенькин, проф. Н. С. Синюков, доц. М. А. Улановский.

Адрес редакционной коллегии: 310077, Харьков-77, пл. Дзержинского, 4, Харьковский университет, механико-математический факультет, тел. 40-14-92.

Редакция естественнонаучной литературы

М. А. Андикян

ТРИ-ТКАНИ В КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ,
ОПРЕДЕЛЯЕМОМ МНОГОМЕРНОЙ
ПОВЕРХНОСТЬЮ АФФИННОГО ПРОСТРАНСТВА

1. М. А. Акивис [1] построил общую теорию три-тканей, образованных в некоторой области дифференцируемого многообразия X_{2r} размерности $2r$ тремя r -параметрическими семействами r -мерных поверхностей. В настоящей работе рассматриваются три-ткани в касательном расслоении $T(V_r)$ r -мерной поверхности V_r $2r$ -мерного аффинного пространства A_{2r} .

Пусть $\tilde{D}$ — область касательного расслоения $T(V_r)$, для которой естественное отображение $\varphi: \tilde{D} \rightarrow A_{2r}$, определяемое формулой $y = x + \xi$, где $(x, \xi) \in \tilde{D}$, $x \in V_r$, $\xi \in T_x(V_r)$, устанавливает биективное соответствие между $\tilde{D}$ и некоторой областью D аффинного пространства A_{2r} . В области D рассматривается три-ткань, одно семейство поверхностей которой образуют касательные плоскости T_x к поверхности V_r . Два других семейства поверхностей три-ткани образуются r -мерными поверхностями, пересекающими плоскости T_x . Требуется, чтобы через каждую точку области D аффинного пространства A_{2r} проходила одна и только одна поверхность каждого из трех семейств и чтобы две поверхности из разных семейств имели не более одной общей точки в области D . Такую три-ткань будем обозначать через W_r и называть три-тканью в касательном расслоении $T(V_r)$.

В работе найдены структурные уравнения рассматриваемой три-ткани W_r . Показано, что задание три-ткани в D определяет в касательном расслоении $T(V_r)$ инфинитезимальную связность. Найдено необходимое и достаточное условие того, чтобы эта инфинитезимальная связность индуцировала аффинную связность на исходной поверхности V_r . Получено условие, при выполнении которого рассматриваемая три-ткань W_r совпадает с три-тканью, определенной в касательном расслоении Φ . И. Каганом в [2].

2. Рассмотрим r -мерную поверхность V_r в n -мерном аффинном пространстве A_n . Отнесем пространство к подвижному реперу $\{x, e_1, e_2, \dots, e_n\}$, где x — произвольная точка аффинного простран-

ства A_n . Тогда дифференциальные уравнения движения репера запишутся так:

$$dx = \omega^I e_I, \quad de_I = \omega_J^I e_J. \quad (1)$$

Здесь и далее индексы I, J, K принимают значения от 1 до n . Компоненты ω^I, ω_J^I инфинитезимального перемещения репера удовлетворяют структурным уравнениям аффинного пространства, которые получаются при продолжении системы (1):

$$d\omega^I = \omega^J \wedge \omega_J^I, \quad d\omega_J^I = \omega_J^K \wedge \omega_K^I. \quad (2)$$

Пусть первые r векторов репера лежат в касательной плоскости T_x к поверхности V_r в точке x . Тогда уравнения, определяющие поверхность V_r , запишем в виде

$$\omega^\alpha = 0. \quad (3)$$

Греческие буквы α, β, γ будут принимать значения от $r+1$ до n . Дифференциальные уравнения движения репера, вершиной которого является точка x на поверхности, примут вид

$$dx = \omega^i e_i, \quad de_I = \omega_J^I e_J. \quad (4)$$

Латинские индексы i, j, k будут принимать значения от 1 до r .

Дифференцируя внешним образом систему уравнений (3), определяющую поверхность V_r , получим $\omega^i \wedge \omega_i^\alpha = 0$. В силу леммы Картана [3] формы ω_i^α являются главными на поверхности V_r и их разложения по базисным формам ω^i могут быть записаны следующим образом:

$$\omega_i^\alpha = h_{ij}^\alpha \omega^j, \quad \text{причем } h_{[ij]}^\alpha = 0. \quad (5)$$

Соприкасающаяся плоскость поверхности V_r определяется векторами e_i и $e_{ij} = h_{ij}^\alpha e_\alpha$. Предположим, что для каждой точки $x \in V_r$ эта плоскость совпадает с пространством A_n . Тогда $\text{rang}(h_{ij}^\alpha) = n - r$.

Дифференцируя внешним образом систему уравнений (5), получаем $\nabla h_{ij}^\alpha \wedge \omega^j = 0$, где ∇ — оператор ковариантного дифференцирования, так что

$$\nabla h_{ij}^\alpha = dh_{ij}^\alpha - h_{kj}^\alpha \omega_i^k - h_{ik}^\alpha \omega_j^k + h_{ij}^\beta \omega_\beta^\alpha.$$

Из предыдущих уравнений по лемме Картана следует, что

$$\nabla h_{ij}^\alpha = h_{ijk}^\alpha \omega^k, \quad (6)$$

Здесь тензор h_{ijk}^α симметричен по всем нижним индексам.

3. В дальнейшем будем предполагать, что размерность пространства A_n четна и равна $2r$.

Пусть ξ некоторый касательный вектор поверхности V_r в точке x , т. е. $\xi \in T_x$. Тогда

$$d\xi = (d\xi^i + \xi^j \omega_j^i) e_i + \xi^i \omega_i^\alpha e_\alpha. \quad (7)$$

Обозначим через δ символ дифференцирования по вторичным параметрам, т. е. при фиксированной точке x на поверхности. Тогда $\delta\xi = (\delta\xi^i + \xi^j \pi_j^i) e_i$, где $\pi_j^i = \omega_j^i(\delta)$, а $\delta e_i = \pi_i^j e_j$.

Положим $\theta^i(\delta) = \delta\xi^i + \xi^j \pi_j^i$ и введем формы Пфаффа

$$\theta^i = d\xi^i + \xi^j \omega_j^i + \omega^i. \quad (8)$$

Тогда $\theta^i|_{\omega^i=0} = \theta^i(\delta)$. Формы ω^i , θ^i будут базисными формами касательного расслоения $T(V_r)$, определяемого поверхностью V_r . Продифференцировав (8), получим

$$d\theta^i = \theta^j \wedge \omega_j^i + \omega^j \wedge \theta_j^i, \quad (9)$$

$$\text{где } \theta_j^i = \xi^l h_{lj}^\alpha \omega_\alpha^i. \quad (10)$$

Поэтому структурные уравнения касательного расслоения запишутся так:

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i, \quad d\theta^i = \theta^j \wedge \omega_j^i + \omega^j \wedge \theta_j^i. \quad (11)$$

Пусть y — некоторая точка касательной плоскости T_x . Тогда $y = x + \xi$, где x — текущая точка поверхности V_r , а ξ — вектор касательной к поверхности V_r в точке x , являющийся радиус-вектором точки y . Если точка x на поверхности фиксирована $x = x_0$, то точка y описывает касательную плоскость к поверхности V_r в точке x_0 . А если на поверхности V_r задано векторное поле $\xi = \xi(x)$, то точка $y = x + \xi$ описывает некоторую r -мерную поверхность в аффинном пространстве A_{2r} .

С помощью уравнений (4), (7) и (8) находим

$$dy = \theta^i e_i + \xi^i h_{ij}^\alpha \omega^j e_\alpha. \quad (12)$$

Так как точка y описывает $2r$ -мерную область D аффинного пространства A_{2r} , то формы θ^i и $\theta^\alpha = \xi^i h_{ij}^\alpha \omega^j$ должны быть линейно независимы. Отсюда следует, что $\det \|\xi^i h_{ij}^\alpha\| \neq 0$ в D . Это неравенство исключает из рассмотрения в каждом T_x алгебраическую коническую поверхность порядка r , определяемую уравнением $\det \|\xi^i h_{ij}^\alpha\| = 0$, которая является фокусной поверхностью плоскости T_x .

4. Перейдем к определению три-ткани W_r в касательном расслоении $T(V_r)$. В качестве нулевого семейства ткани берем касательные плоскости к поверхности V_r . Любая поверхность этого семейства определяется вполне интегрируемой системой уравнений $\omega^i = 0$. Два других семейства поверхностей ткани образу-

ются r -мерными поверхностями, пересекающимися плоскости T_x . Уравнения этих семейств могут быть записаны соответственно в виде $\theta^i = \lambda_j^i \omega^j$, $\theta^i = -\mu_j^i \omega^j$. При этом $\det \|\lambda_j^i + \mu_j^i\| \neq 0$.

Введем следующие формы Пфаффа:

$$\sigma_0^i = (\lambda_j^i + \mu_j^i) \omega^j, \sigma_1^i = \theta^i - \lambda_j^i \omega^j, \sigma_2^i = -\theta^i - \mu_j^i \omega^j. \quad (13)$$

Тогда каждое семейство поверхностей три-ткани. W_r определяется вполне интегрируемой системой уравнений $\sigma_a^i = 0$, где $a = 0, 1, 2$. А из уравнений (13) следует, что

$$\sigma_0^i + \sigma_1^i + \sigma_2^i = 0. \quad (14)$$

Обозначим $\lambda_j^i + \mu_j^i = 2g_j^i$, тогда из первого уравнения системы (13) следует, что

$$\omega^i = \frac{1}{2} f_j^i \sigma_0^j, \quad (15)$$

где f_j^i — матрица, обратная к g_j^i .

5. Проведем некоторую канонизацию репера, задаваясь целью привести уравнения в системе (13) к более простому виду.

Как уже было сказано, нулевое семейство поверхностей ткани, образованное плоскостями T_x , определяется вполне интегрируемой системой уравнений Пфаффа $\sigma_0^i = 0$. Эта система равносильна системе $\omega^i = 0$.

Первое семейство поверхностей ткани задается вполне интегрируемой системой форм $\sigma_1^i = 0$, эквивалентной системе $\theta^i = \lambda_j^i \omega^j$. Поэтому для поверхности V_1 первого семейства из (12) и (15) получим $dy = \frac{1}{2} \sigma_0^j (f_j^i \lambda_l^i e_l + \xi^k f_j^i h_{kl}^\alpha e_\alpha)$.

Обозначим $e_j^1 = \frac{1}{2} f_j^i (\lambda_l^i e_l + \xi^k h_{kl}^\alpha e_\alpha)$; эти векторы, касательные к поверхности первого семейства, образуют базис касательного слоя $T_y(V_1)$.

Второе семейство поверхностей ткани задается вполне интегрируемой системой $\sigma_2^i = 0$, равносильной системе $\theta^i = -\mu_j^i \omega^j$. Для поверхностей V_2 второго семейства $dy = \frac{1}{2} \sigma_0^j (f_j^i \xi^k h_{kl}^\alpha e_\alpha - f_j^i \mu_l^i e_l)$. В скобках стоят векторы, касательные к поверхности V_2 , образующие базис слоя $T_y(V_2)$. Обозначим их через e_j^2 : $e_j^2 = \frac{1}{2} f_j^i (\mu_l^i e_l - \xi^k h_{kl}^\alpha e_\alpha)$.

Введем еще следующие векторы, инвариантно связанные с точкой $y = x + \xi$:

$$-e_j^0 = e_j^1 + e_j^2 = \frac{1}{2} f_j^i (\lambda_l^i + \mu_l^i) e_l = \delta_j^i e_i = e_j; \quad (16)$$

$$e_j^* = e_j^1 - e_j^2 = \frac{1}{2} f_j^i (\lambda_l^i - \mu_l^i) e_l + \xi^k f_j^i h_{kl}^\alpha e_\alpha. \quad (17)$$

Векторы e_j^0 будут касательными к поверхности $V_0 = T_x$, принадлежащей нулевому семейству три-ткани, а векторы e_j^* инвариантно связаны с точкой y , через которую проходит по одной поверхности из каждого семейства ткани. Через $\Delta^a = e_1^a \wedge e_2^a \wedge \dots \wedge e_r^a$ ($a = 0, 1, 2$) обозначим r -вектор, касательный к поверхности ткани V_a и проходящий через точку y . Тогда r -вектор $\Delta^* = e_1^* \wedge e_2^* \wedge \dots \wedge e_r^*$ будет изоклинным [4] по отношению к r -векторам Δ^a и образует с ними гармоническую четверку. Инвариантное распределение Δ^* будет горизонтальным распределением касательного расслоения $T(V_r)$.

Выберем нормаль N_x к поверхности V_r в точке x параллельно к Δ^* . Тогда из формулы (17) следует, что $\lambda_j^i - \mu_j^i = 0$. Отсюда в силу того, что $\lambda_j^i + \mu_j^i = 2g_j^i$, получаем $\lambda_j^i = \mu_j^i = g_j^i$. При этом нормаль N_x зависит не только от точки x поверхности V_r , но и от вектора ξ , определяющего точку y : $N_x = N_x(y)$.

После такой канонизации базисные формы три-ткани примут вид

$$\sigma_0^i = 2g_j^i \omega^j, \quad \sigma_1^i = \theta^i - g_j^i \omega^j, \quad \sigma_2^i = -\theta^i - g_j^i \omega^j. \quad (18)$$

Векторы, касательные к поверхности ткани, а также векторы e_i^* теперь запишутся так:

$$e_j^0 = -e_j, \quad e_j^1 = \frac{1}{2}(e_j + \xi^k f_j^l h_{kl}^\alpha e_\alpha);$$

$$e_j^2 = \frac{1}{2}(e_j - \xi^k f_j^l h_{kl}^\alpha e_\alpha), \quad e_j^* = \xi^k f_j^l h_{kl}^\alpha e_\alpha.$$

6. Найдем условия полной интегрируемости систем уравнений, определяющих поверхности ткани. Используя структурные уравнения (11), можно записать внешние дифференциалы форм σ_1^i, σ_2^i , определяемых соотношениями (18):

$$d\sigma_1^i = \sigma_1^j \wedge \omega_j^i - \frac{1}{2} f_j^l (\nabla g_l^i + \theta_l^i) \wedge \sigma_0^j;$$

$$d\sigma_2^i = \sigma_2^j \wedge \omega_j^i - \frac{1}{2} f_j^l (\nabla g_l^i - \theta_l^i) \wedge \sigma_0^j. \quad (19)$$

Для того чтобы система уравнений Пфаффа $\sigma_a^i = 0$ ($a = 1, 2$) была вполне интегрируема, необходимо и достаточно, чтобы $d\sigma_a^i = \sigma_a^j \wedge \sigma_j^i$. Сравнение этих уравнений с уравнениями (19) показывает, что

$$\sigma_1^j \wedge (\omega_j^i - \sigma_j^i) - \frac{1}{2} f_j^l (\nabla g_l^i + \theta_l^i) \wedge \sigma_0^j = 0;$$

$$\sigma_2^j \wedge (\omega_j^i - \sigma_j^i) - \frac{1}{2} f_j^l (\nabla g_l^i - \theta_l^i) \wedge \sigma_0^j = 0.$$

Так как любая пара из форм Пфаффа σ_a^i ($a = 0, 1, 2$) является базисной в касательном расслоении $T(V_r)$, то в силу леммы Кар-

тана отсюда, в частности, следует: $\nabla g_j^i + \theta_j^i = \lambda_{jl}^i \sigma_1^l + \tilde{\lambda}_{jl}^i \sigma_0^l$; $\nabla g_j^i - \theta_j^i = \mu_{jl}^i \sigma_2^l + \tilde{\mu}_{jl}^i \sigma_0^l$; поэтому формы ∇g_j^i , θ_j^i являются главными в касательном расслоении и их разложения по базисным формам могут быть записаны в виде

$$\theta_j^i = Z_{jk}^i \omega^k + \tilde{Z}_{jk}^i \theta^k; \quad (20)$$

$$\nabla g_j^i = U_{jk}^i \omega^k + \tilde{U}_{jk}^i \theta^k. \quad (21)$$

Подставляя эти соотношения в уравнения (19) и учитывая (18), получаем

$$d\sigma_1^i = \sigma_1^j \wedge \left[\omega_j^i - \frac{1}{2} f_{kl}^i f_j^m (\tilde{U}_{lm}^i + \tilde{Z}_{lm}^i) \sigma_0^k \right] - \\ - \frac{1}{4} f_{jfk}^i (\tilde{U}_{lm}^i + \tilde{Z}_{lm}^i) + U_{lm}^i + Z_{lm}^i \sigma_0^k \wedge \sigma_0^j; \quad (22)$$

$$d\sigma_2^i = \sigma_2^j \wedge \left[\omega_j^i + \frac{1}{2} f_{kl}^i f_j^m (\tilde{U}_{lm}^i - \tilde{Z}_{lm}^i) \sigma_0^k \right] - \\ - \frac{1}{4} f_{jfk}^i (\tilde{U}_{lm}^i - \tilde{Z}_{lm}^i) - U_{lm}^i + Z_{lm}^i \sigma_0^k \wedge \sigma_0^j.$$

Сравнивая еще раз эти уравнения с $d\sigma_a^i = \sigma_a^j \wedge \sigma_j^i$ и учитывая сказанное о базисе касательного расслоения, определяем искомые условия интегрируемости в следующем виде:

$$\tilde{U}_{[jk]}^i + \tilde{Z}_{[jk]}^i + U_{[jk]}^i + Z_{[jk]}^i = 0; \\ \tilde{U}_{[jk]}^i - \tilde{Z}_{[jk]}^i - U_{[jk]}^i + Z_{[jk]}^i = 0.$$

А эти соотношения эквивалентны более простым:

$$\tilde{U}_{[jk]}^i = -Z_{[jk]}^i; \quad (23), \quad U_{[jk]}^i = -\tilde{Z}_{[jk]}^i. \quad (24)$$

Итак, условия полной интегрируемости систем уравнений Пфаффа, определяющих поверхности первого и второго семейства ткани, имеют вид соотношений (23), (24). В силу этих условий уравнения (22) принимают вид $d\sigma_1^i = \sigma_1^j \wedge \left[\omega_j^i - \frac{1}{2} f_{kl}^i f_j^m (\tilde{U}_{lm}^i + \tilde{Z}_{lm}^i) \sigma_0^k \right] + \tilde{Z}_{lm}^i \sigma_0^k$; $d\sigma_2^i = \sigma_2^j \wedge \left[\omega_j^i + \frac{1}{2} f_{kl}^i f_j^m (\tilde{U}_{lm}^i - \tilde{Z}_{lm}^i) \sigma_0^k \right]$.

Исключив формы σ_0^k с помощью соотношений (14), получим

$$d\sigma_1^i = \sigma_1^j \wedge \sigma_j^i + a_{jk}^i \sigma_1^j \wedge \sigma_1^k; \quad d\sigma_2^i = \sigma_2^j \wedge \sigma_j^i - a_{jk}^i \sigma_2^j \wedge \sigma_2^k, \quad (25)$$

где

$$\sigma_j^i = \omega_j^i + \frac{1}{2} f_{kl}^i f_j^m \tilde{U}_{lm}^i (\sigma_2^k - \sigma_1^k) + \frac{1}{2} f_{kl}^i f_j^m \tilde{Z}_{lm}^i (\sigma_2^k + \sigma_1^k); \\ a_{jk}^i = -f_{jfk}^i \tilde{U}_{lm}^i. \quad (26)$$

Уравнения (25) совпадают с уравнениями структуры три-ткани, полученными в работе [1]. Форма σ_j^i будет формой связности три-ткани, а тензор a_{jk}^i — ее тензором кручения.

Отметим, что всю информацию о три-ткани W_r на касательном расслоении поверхности $V_r \subset A_{2r}$ несут уравнения (20), (21) и их дифференциальные продолжения.

7. Определим инфинитезимальную связность в касательном расслоении $T(V_r)$.

Структурные уравнения касательного расслоения (11) после подстановки выражений (20) запишем в виде

$$\begin{aligned} d\omega^i &= \omega^j \wedge \omega_j^i; \\ d\theta^i &= \theta^j \wedge \omega_j^i + \tilde{Z}_{jl}^i \omega_j^l \wedge \theta^k + Z_{[jk]}^i \omega^j \wedge \omega^k. \end{aligned} \quad (27)$$

Следовательно, инвариантное горизонтальное распределение Δ^* определяет инфинитезимальную связность γ в касательном расслоении $T(V_r)$.

Структурные уравнения этой связности имеют вид (27). Здесь θ^i — форма инфинитезимальной связности. Тензор $Z_{[jk]}^i$ будет тензором неголономности горизонтального распределения $\theta^i = 0$. Его можно назвать так же тензором кривизны связности γ . При этом из соотношений (26) и условий интегрируемости (23) следует, что

$$Z_{[jk]}^i = g_j^m g_k^l a_{ml}^i. \quad (28)$$

Если $Z_{[jk]}^i = 0$, то из уравнений (27) следует, что распределение Δ^* будет инволютивным, а рассматриваемая инфинитезимальная связность параллелизуемой. Уравнения (28) показывают, что в этом случае $a_{jk}^i = 0$, т. е. три-ткань W_r будет изоклинно геодезической [4]. Следовательно, доказана

Теорема 1. Для того чтобы распределение Δ^* было инволютивным, необходимо и достаточно, чтобы определяющая его три-ткань W_r была изоклинно геодезической.

Заметим, что формы Пфаффа ω_j^i , вообще говоря, не определяют связности на многообразии V_r . В самом деле из уравнений (2), (5) следует, что

$$d\omega_j^i = \omega_j^k \wedge \omega_k^i + h_{jk}^\alpha \omega^k \wedge \omega_\alpha^i; \quad (29)$$

формы ω_α^i связаны с формами θ_j^i соотношениями (10), ввиду чего $\xi^i h_{ij}^\alpha \omega_\alpha^i = Z_{jk}^i \omega^k + \tilde{Z}_{jl}^i \theta^l$.

Так как $\det \|\xi^i h_{ij}^\alpha\| \neq 0$, то, разрешая эти уравнения относительно форм ω_α^i и подставляя их в соотношения (29), получаем

$$d\omega_j^i = \omega_j^k \wedge \omega_k^i + R_{jkl}^i \omega^k \wedge \omega^l + \tilde{R}_{jkl}^i \omega^k \wedge \theta^l, \quad (30)$$

где

$$R_{jkl}^i = \tilde{h}_\alpha^m h_{j[k}^\alpha Z_{|m|l]}^i, \quad \tilde{R}_{jkl}^i = \tilde{h}_\alpha^m h_{jk}^\alpha \tilde{Z}_{msl}^i. \quad (31)$$

Здесь мы обозначили через $\tilde{h}_\alpha^i = \tilde{h}_\alpha^i(\xi)$ матрицу, обратную к $(\xi^i h_{ij}^\alpha)$. Тогда из уравнений (30) в силу теоремы Картана-Лаптева [5] следует, что формы ω_j^i определяют связность на V_r тогда и только тогда, когда $\tilde{R}_{jkl}^i = 0$.

Так как $\tilde{h}_\alpha^i$ — матрица, обратная к $(\xi^i h_{ij}^\alpha)$, то, свертывая обе части второго соотношения (31) по ξ^j , находим $\xi^j \tilde{R}_{jkl}^i = \tilde{Z}_{km,l}^i$.

Так как $\det \|f_{ij}^i\| \neq 0$, то из $\tilde{R}_{jkl}^i = 0$ следует и $\tilde{Z}_{jk}^i = 0$. А обратное сразу видно из соотношений (31), поэтому справедлива

Теорема 2. Для того чтобы формы Пфаффа ω_j^i определяли линейную связность на поверхности V_r , необходимо и достаточно, чтобы $\tilde{Z}_{jk}^i = 0$.

8. Определим ковариантное дифференцирование векторов на $T(V_r)$ относительно связности γ . Для этого рассмотрим равенство (7). После проведенной выше канонизации векторы e_α являются базисными векторами инвариантного r -вектора $\Delta^*(y)$, где $y = x + \xi$. Поэтому соотношения (7) представляют собой разложение дифференциала вектора $d\xi$ на вертикальную и горизонтальную составляющие: $(d\xi)_v = (d\xi^i + \xi^j \omega_j^i) e_i$; $(d\xi)_h = \xi^i \omega_i^\alpha e_\alpha$.

Оба эти выражения будут инвариантными и первое из них, как обычно, определяет ковариантный дифференциал $\nabla \xi = (d\xi^i + \xi^j \omega_j^i) e_i$.

Параллельный перенос вектора ξ определяется уравнением $\nabla \xi = 0$, или $d\xi^i + \xi^j \omega_j^i = 0$. А уравнение геодезических связности γ запишется так:

$$d\omega^i + \omega^j \omega_j^i = \sigma \omega^i. \quad (32)$$

Теперь мы можем выяснить геометрический смысл тензора g_j^i . На поверхности V_1 первого семейства ткани $\theta^i = g_j^i \omega^j$, в силу чего уравнение (12) принимает вид $dy = (g_j^i e_i + \xi^i h_{ij}^\alpha e_\alpha) \omega^j$. Это уравнение определяет разложение вектора dy на вертикальную и горизонтальную составляющие: $(dy)_v = (g_j^i \omega^j) e_i$; $(dy)_h = (\xi^i h_{ij}^\alpha \omega^j) e_\alpha$. Так как $dx = \omega^i e_i$, то связь между векторами dx и $(dy)_v$ может быть записана в виде $(dy)_v = Gdx$, где G — линейный оператор с матрицей (g_j^i) . Точно так же на поверхности V_2 имеет место соотношение $(dy)_v = -Gdx$.

Таким образом, оператор $G = (g_j^i)$ определяет отображение пространства T_x , касательного к многообразию V_r , на проекцию на это пространство пространств $T_y(V_1)$, $T_y(V_2)$, касательных к многообразиям V_1 и V_2 в точке $y = x + \xi$.

9. Найдем интегральные линии для векторного поля $\xi(x)$, определяющего в касательном расслоении $T(V_r)$ поверхность V_1 первого семейства три-ткани. Так как эта поверхность определяется уравнениями $\theta^i = g_j^i \omega^j$, то в силу соотношения (8) координаты рассматриваемого векторного поля удовлетворяют

уравнениям $d\xi^i + \xi^j \omega_j^i = (g_j^i - \delta_j^i) \omega^i$. Интегральные линии поля $\xi(x)$ определяются из условия $dx = \theta \xi$, т. е. $\omega^i = \theta \xi^i$. Исключая из предыдущего уравнения координаты вектора ξ , найдем уравнения этих линий в виде

$$d\omega^i + \omega^j \omega_j^i = \theta g_j^i \omega^j + \theta_1 \omega^i, \quad (33)$$

где $\theta_1 = d \ln \theta - \theta$. Эта система уравнений определяет интегральные линии всех векторных полей, связанных с поверхностями первого семейства три-ткани W_r в касательном расслоении $T(V_r)$.

Линии, определяемые системой уравнений (33), будут геодезическими на V_r в связности γ , если это уравнение совпадает с уравнением (32). Легко убедиться, что такое совпадение будет только при условии $g_j^i = \mu \delta_j^i$.

Аналогичные рассуждения для векторных полей, связанных с поверхностями второго семейства три-ткани W_r , показывают, что справедлива

Теорема 3. Для того чтобы векторные поля $\xi(x)$, определяемые многообразиями три-ткани W_r , имели геодезические интегральные линии, необходимо и достаточно условие $g_j^i = \mu \delta_j^i$.

Если тензор g_j^i три-ткани W_r удовлетворяет условию $g_j^i = \mu \delta_j^i$, то уравнения (27) имеют вид $\sigma_0^i = 2\mu \omega^i$, $\sigma_1^i = \theta^i - \mu \omega^i$, $\sigma_2^i = -\theta^i - \mu \omega^i$.

Ковариантный дифференциал тензора $g_j^i = \mu \delta_j^i$ примет вид $\nabla g_j^i = \delta_j^i d\mu$. Но так как $\mu = \mu(y)$ — функция точки $y = x + \xi$, то можно написать, что $d\mu = \tilde{b}_k \omega^k + \tilde{a}_k \theta^k$. Следовательно, $\nabla g_j^i = \delta_j^i \tilde{b}_k \omega^k + \delta_j^i \tilde{a}_k \theta^k$. Сравнивая это выражение с уравнением (21) и учитывая, что теперь $f_j^i = \mu^{-1} \delta_j^i$, получаем $\tilde{U}_{jk}^i = \mu \delta_j^i \tilde{a}_k$. Подставляя последнее соотношение во второе из (26), находим, что $a_{jk}^i = a_{[j} \delta_{k]}^i$, где $a_j = \mu^{-1} \tilde{a}_j$. Но это условие при $r > 2$ представляет собой условие изоклинности три-ткани W_r [4]. Поэтому верна

Теорема 4. Если при $r > 2$ тензор g_j^i пропорционален единичному тензору δ_j^i , то три-ткань W_r изоклинна.

Заметим, что при $g_j^i = \mu \delta_j^i$ построенная три-ткань совпадает с три-тканью, определяемой в касательном расслоении Ф. И. Каганом [2].

Последней теореме в силу теоремы 3 равносильна

Теорема 4'. Если векторные поля $\xi(x)$, определяемые многообразиями три-ткани W_r , имеют геодезические интегральные линии, то такая три-ткань изоклинна.

Автор выражает глубокую благодарность проф. М. А. Акивису за постановку задачи и руководство работой.

Список литературы: 1. Акивис М. А. О три-тканях многомерных поверхностей. — Тр. геометр. семинара. М., ВИНТИ, 1969, т. 2, 7—91. 2. Каган Ф. И. Дифференциально-геометрические структуры в касательных расслоениях.

ниях: Дис. ...канд. мат. наук.— Казань, 1975.— 238 с. 3. Фиников С. П. Метод внешних форм Картана.— М.—Л.: ГИТТЛ, 1948.— 432 с. 4. Акивис М. А. Об изоклинных три-тканях и их интерпретации в линейчатом пространстве проективной связности.— Сиб. мат. журн., 1974, 15, № 1, с. 3—15. 5. Остиану Н. М., Рыжков В. В., Швейкин П. И.— Очерк научных исследований Г. Ф. Лаптева.— В кн.: Тр. геометр. семинара. М., ВИНТИ, 1973, т. 4, с. 7—68.

Поступила 27 февраля 1978 г.

УДК 513

Талёб Гарибе

ПОВЕРХНОСТИ В E^4 С ПОСТОЯННОЙ ВНЕШНЕЙ И ВНУТРЕННЕЙ ГЕОМЕТРИЕЙ

Среди вопросов, связанных с изучением подмногообразий евклидова пространства, представляет интерес вопрос о двумерных поверхностях с постоянной внешней и внутренней геометрией.

Определение. Двумерная поверхность $F^2 \subset E^n$ называется поверхностью с постоянной внешней геометрией, если для любых двух точек $x \in F^2$ и $y \in F^2$ существуют окрестности $U(x)$ и $U(y)$ на поверхности, конгруэнтные в E^n .

Из этого определения вытекает постоянство всех параметров эллипса нормальной кривизны в каждой точке поверхности, откуда следует постоянство внутренней геометрии поверхности.

В этой работе находятся все такие поверхности в E^4 .

Теорема. Единственные двумерные поверхности в E^4 класса регулярности C^3 с постоянной внешней геометрией есть плоскости, сферы, обобщенные торы Клиффорда и цилиндрические поверхности, направляющие которых — винтовые линии в некотором E^3 , а прямолинейные образующие ортогональны к E^3 .

Под обобщенным тором Клиффорда понимается поверхность в $E^4(x_1, x_2, x_3, x_4)$, заданная уравнениями: $x_1 = R \cos \varphi$; $x_2 = R \sin \varphi$; $x_3 = \rho \cos \psi$; $x_4 = \rho \sin \psi$.

Нетрудно видеть, что указанные поверхности действительно имеют постоянную внешнюю геометрию.

Доказательство теоремы. Если в нормальной плоскости N_x в точке $x \in F^2$ взять оси координат с ортами n_1 и n_2 , параллельными осям эллипса нормальной кривизны, и с началом в точке x , то на такой поверхности будут постоянны координаты центра эллипса α и β относительно этой системы координат и его полуоси a и b .

На поверхности F^2 определим систему координат (u, v) следующим образом: возьмем произвольную точку $x \in F^2$ и эллипс нормальной кривизны в этой точке. Будем предполагать сначала, что $a > b$.

Если A — вершина эллипса (конец большой полуоси), то ей соответствует касательное к поверхности направление $\tau(x)$ в точке x такое, что вектор нормальной кривизны для направления τ с началом в точке x имеет конец в точке A . Таким образом, на поверхности определяется векторное поле $\tau(x)$. С помощью интегральных кривых этого поля и их ортогональных траекторий определяем на поверхности ортогональные координаты (u, v) .

В такой системе координат первая квадратичная форма поверхности записывается так: $ds^2 = Edu^2 + Gdv^2$.

Коэффициенты вторых квадратичных форм имеют следующий вид [1]: $L_{11}^1 = (\alpha + a)E$, $L_{12}^1 = 0$, $L_{22}^1 = (\alpha - a)G$; $L_{11}^2 = \beta E$, $L_{12}^2 = b\sqrt{EG}$, $L_{22}^2 = \beta G$.

Через v_1 и v_2 обозначим коэффициенты кручения, т. е. $v_1 = (n_{1u} \cdot n_2)$, $v_2 = (n_{1v} \cdot n_2)$.

Уравнения Гаусса—Кодацци—Риччи [2] для поверхности $F^2 \subset E^4$ с постоянными α , β , a и b таковы.

Уравнения Кодацци:

$$aE_v + \beta E v_2 - b\sqrt{EG} v_1 = 0, \quad (1)$$

$$aG_u + \beta G v_1 + b\sqrt{EG} v_2 = 0;$$

$$\frac{G_u}{G} b\sqrt{EG} + (\alpha + a) v_2 E = 0, \quad (2)$$

$$\frac{E_v}{E} b\sqrt{EG} + (\alpha - a) v_1 G = 0.$$

Уравнение Риччи:

$$v_{2u} - v_{1v} = 2ab\sqrt{EG}. \quad (3)$$

Уравнение Гаусса:

$$-\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right) \right\} = K, \quad (4)$$

где K — гауссова кривизна поверхности. Она равна [1]

$$K = \alpha^2 + \beta^2 - a^2 - b^2. \quad (5)$$

Для рассматриваемых поверхностей выполняются также следующие условия:

$$v_1 = C_1(v)\sqrt{E}, \quad v_2 = C_2(u)\sqrt{G}. \quad (6)$$

Действительно, пусть s — длина дуги координатной линии u, x ; y — две точки на этой линии. Тогда существуют две конгруэнтные окрестности $U(x)$ и $U(y)$ этих точек. При движении, совмещающем точку x с точкой y и $U(x)$ с $U(y)$, u -линия переходит в себя, потому что эллипсы нормальной кривизны равны и вектор τ переходит в вектор τ_1 , направлению которого соответствует вектор нормальной кривизны с началом в точке y и кон-

цом в точке A . Поскольку τ касается u -линии, то и τ_1 касается этой линии. Значит, эта линия переходит в себя. Так как $(n_{1s} \cdot n_2)$ имеет конкретный геометрический смысл и его значения в точках x и y равны, оно не зависит от u , а может зависеть только от v . Поэтому $(n_{1s} \cdot n_2) = (n_{1u} \cdot n_2) \frac{du}{ds} = \frac{v_1}{\sqrt{E}} = C_1(v)$.

Аналогично найдем, что $v_2 = C_2(u) \sqrt{G}$.

Будем искать решение систем (1)–(4) с помощью соотношений (6). Подставляя значения v_i из уравнений (6) в (1) и предполагая, что $a \neq 0$, получаем

$$E_v = -\frac{\beta C_2 - b C_1}{a} E \sqrt{G}; \quad (7)$$

$$G_u = \frac{\beta C_1 - b C_2}{a} \sqrt{EG}. \quad (8)$$

Подставив значения соотношений (6) в (2), запишем $G_u = -\frac{(\alpha + a) C_2}{b} \sqrt{EG}$; $E_v = -\frac{(\alpha - a) C_1}{b} E \sqrt{G}$.

Сравнив эти выражения с (7), (8), получим

$$\beta b C_1 = (b^2 - a^2 - \alpha a) C_2, \quad \beta b C_2 = (b^2 - a^2 + \alpha a) C_1. \quad (9)$$

Допустим, что система имеет нетривиальное решение относительно C_1 и C_2 , т. е. ее определитель $\Delta = \beta^2 b^2 + \alpha^2 a^2 - (a^2 - b^2)^2 = 0$. Считая, что $\beta \neq 0$, $b \neq 0$, найдем

$$C_1 = \frac{b^2 - a^2 - \alpha a}{\beta b} C_2; \quad (10), \quad C_2 = \frac{b^2 - a^2 + \alpha a}{\beta b} C_1. \quad (11)$$

Поскольку $C_1 = C_1(v)$, $C_2 = C_2(u)$, из (10) и (11) видно, что $C_1 = \text{const}$ и $C_2 = \text{const}$.

Уравнение Риччи дает $C_2(\sqrt{G})_u - C_1(\sqrt{E})_v = \frac{C_2}{2} \frac{G_u}{\sqrt{G}} - \frac{C_1}{2} \frac{E_v}{\sqrt{E}} = 2ab \sqrt{EG}$. Подставив соотношения (7), (8) в последнее уравнение, получим

$$\frac{C_2}{2} \frac{\beta C_1 - b C_2}{a} \sqrt{EG} + \frac{C_1}{2} \frac{\beta C_2 - b C_1}{a} \sqrt{EG} = 2ab \sqrt{EG}. \quad (12)$$

Отсюда $2\beta(C_1 C_2) - b(C_1^2 + C_2^2) = 4a^2 b$. Подставив выражения (7), (8) в уравнение Гаусса, запишем $-\frac{1}{4} \left[\frac{(\beta C_1 - b C_2)^2}{a^2} + \frac{(\beta C_2 - b C_1)^2}{a^2} \right] = K$. Отсюда следует, что $K \leq 0$ и

$$-[(C_1^2 + C_2^2)(\beta^2 + b^2) - 4\beta b C_1 C_2] = 4a^2 K. \quad (13)$$

Подставим (10) в уравнение (12): $-2\beta \frac{\alpha a + a^2 - b^2}{\beta b} C_2^2 - b \times \times \left[\frac{(\alpha a + a^2 - b^2)^2}{\beta^2 b^2} + 1 \right] C_2^2 = 4a^2 b = -C_2^2 \left[2 \frac{\alpha a + a^2 - b^2}{b} + \frac{2b}{(\beta b)^2} \times \right.$

$\times (a^2 - b^2)(\alpha a + a^2 - b^2)]$. Отсюда $-C_2^2(\alpha a + a^2 - b^2)(\beta^2 + a^2 - b^2) = 2a^2b^2\beta^2$.

Так как $a > b$, то $\beta^2 + a^2 - b^2 > 0$. С другой стороны, $\alpha a + a^2 - b^2$ не может обращаться в нуль, иначе, согласно уравнениям (9), это повлекло бы за собой равенство нулю β или b , что исключается. Значит, можно записать

$$-C_2^2 = \frac{2a^2b^2\beta^2}{(\alpha a + a^2 - b^2)(\beta^2 + a^2 - b^2)}. \quad (14)$$

Теперь подставим соотношение (10) в (13)

$$-C_2^2 \left[\frac{2(a^2 - b^2)(\alpha a + a^2 - b^2)(\beta^2 + b^2)}{\beta^2 b^2} + 4\beta b \frac{\alpha a + a^2 - b^2}{\beta b} \right] = 4a^2 K.$$

Отсюда $-C_2^2[(a^2 - b^2)(\alpha a + a^2 - b^2)(\beta^2 + b^2) + 2\beta^2 b^2(\alpha a + a^2 - b^2)] = 2a^2 b^2 \beta^2 K$. Тогда

$$-C_2^2 = \frac{2a^2 b^2 \beta^2 K}{(\alpha a + a^2 - b^2)[a^2 \beta^2 + b^2(\beta^2 + a^2 - b^2)]}. \quad (15)$$

Заметим, что знаменатель правой части (15) не обращается в нуль в силу того, что $\beta \neq 0$, $b \neq 0$, и приведенных выше рассуждений.

Сравнив выражения (14) и (15), получим

$$K = \frac{a^2 \beta^2 + b^2(\beta^2 + a^2 - b^2)}{\beta^2 + a^2 - b^2}.$$

Так как $a > b$, то $K > 0$, что невозможно.

Следовательно, предположения $a > b$, $b \neq 0$, $\beta \neq 0$ приводят к противоречию.

Допустим $\beta = 0$, но $a > b$ и $b \neq 0$. Тогда из уравнений (3), (4) найдем $(b^2 - a^2 - \alpha a)C_2 = 0$, $(b^2 - a^2 + \alpha a)C_1 = 0$. Пусть $C_1 \neq 0$, $C_2 \neq 0$. Тогда $\alpha = 0$ и $b^2 - a^2 = 0$, но по предположению $a > b$. Значит, такой случай невозможен. Следовательно, либо $C_1 = 0$, либо $C_2 = 0$, либо оба C_1 и C_2 равны нулю.

Допустим, что $C_1 \neq 0$, а $C_2 = 0$. Тогда $b^2 - a^2 + \alpha a = 0$. Из второго уравнения системы (1) находим $G_u = 0$, а из первого —

$E_v = \frac{b}{a} C_1 E \sqrt{G}$. Подставляем эти выражения в уравнение (3):

$-(C_1 \sqrt{E})_v = -\frac{C_1^2}{2} \frac{b}{a} \sqrt{EG} = 2ab \sqrt{EG}$. Это равенство возможно лишь при $b = 0$. Следовательно, $\alpha = a$. Итак, имеем

$$\alpha = a; \beta = 0, b = 0; K = 0; C_2 = 0; C_1 \neq 0. \quad (16)$$

Покажем, что поверхности, для которых выполняются эти условия, являются цилиндрическими, направляющие которых есть винтовые линии в некотором E^3 , а прямолинейные образующие ортогональны к E^3 .

Сначала покажем, что для таких поверхностей эти условия выполнены. Поверхность запишем в виде $\tilde{r}(u, v) = r(u) + ve_4$, где $r(u)$ — винтовая линия в E^3 с кривизной k и кручением $\kappa \neq 0$; u — длина ее дуги; e_4 — четвертый базисный вектор в E^4 . Тогда $ds^2 = du^2 + dv^2$. Найдем коэффициенты вторых квадратичных форм, взяв в качестве нормали n_1 к поверхности главную нормаль, а в качестве n_2 — бинормаль к $r(u)$: $L_{11}^1 = (n_1 \cdot \tilde{r}_{uu}) = (n_1 \cdot kn_1) = k$, $L_{12}^1 = L_{22}^1 = L_{11}^2 = L_{12}^2 = L_{22}^2 = 0$, $v_1 = (n_{1u} \cdot n_2) = ((-kr_u + \kappa n_2) \cdot n_2) = \kappa = \text{const}$, $v_2 = (n_{1v} \cdot n_2) = 0$. Действительно, мы нашли, что $\beta = b = 0$; $L_{22}^1 = \alpha - a = 0$, т. е. $\alpha = a$; $L_{11}^1 = \alpha + a = 2a = k$; $v_2 = 0$ и $v_1 = \kappa$. Так как k и κ произвольны, то a и C_1 произвольны.

Имеет место теорема единственности [2], которая в данном случае гласит: пусть $I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$, $\Pi^i = L_{11}^i du^2 + 2L_{12}^i dudv + L_{22}^i dv^2$ ($i = 1, 2$) — три любые квадратичные формы, из которых первая является положительно определенной; v_1, v_2 — две функции, зависящие от u и v . Пусть для v_1, v_2 и коэффициентов квадратичных форм выполняются условия Гаусса — Кодаци — Риччи. Тогда существует и притом единственная с точностью до положения в пространстве E^4 двумерная поверхность, для которой эти формы будут первой и соответственно вторыми квадратичными формами, а v_1 и v_2 будут коэффициентами кручения.

Из сказанного выше заключаем, что поверхность, для которой выполняются условия (16), есть цилиндрическая поверхность, направляющая которой — винтовая линия в E^3 , а прямолинейная образующая ортогональна к E^3 .

Если допустить, что $C_1 = 0$, а $C_2 \neq 0$ при тех же остальных значениях (16), то, меняя местами параметры u и v , придем к предыдущему случаю.

Допустим теперь, что $C_1 = C_2 = 0$ и все остальные величины имеют значения (16). Из соотношений (1), (6) находим: $E_v = G_u = 0$, следовательно, $K = 0$. Из уравнения Риччи находим $b = 0$, т. е. $\alpha^2 = a^2$. Этот случай дает обычные круговые цилиндры.

Рассмотрим теперь второй возможный случай невыполнения условия $a > b$, $b \neq 0$, $\beta \neq 0$, т. е. случай, когда $b = 0$ (поверхности с $\beta = 0$ рассмотрены выше).

Из системы (2) получаем: $(\alpha + a)C_2 = 0$, $(\alpha - a)C_1 = 0$. Пусть $C_1 \neq 0$, тогда $\alpha = a$ и $C_2 = 0$. Из первого уравнения системы (1) получим $E_v = 0$. Из второго уравнения системы (1) находим $G_u = \frac{\beta}{a} C_1 G \sqrt{E}$ и подставляем в (4): $-\frac{1}{2\sqrt{EG}} \frac{\beta}{a} C_1 (V\bar{G})_u = -\frac{1}{4} \frac{\beta^2 C_1^2}{a^2} = K < 0$. Но согласно формуле (5) $K = \beta^2 > 0$. Следовательно, этот случай невозможен.

Если $C_2 \neq 0$, то $\alpha = -a$ и $C_1 = 0$. Этот случай аналогичен предыдущему.

Если $C_1 = C_2 = 0$, тогда из (1), (6) находим, что $E_v = G_u = 0$, т. е. $K = 0$.

Докажем, что поверхности, для которых выполняются условия $K = 0$, $\beta \neq 0$, $b = 0$, $C_1 = C_2 = 0$, являются обобщенными торами Клиффорда. Покажем сначала, что для такой поверхности выполняются перечисленные условия. Имеем $X = X(\varphi, \psi)$, тогда $X_\varphi = (-R \sin \varphi, R \cos \varphi, 0, 0)$, $X_\psi = (0, 0, -\rho \sin \psi, \rho \cos \psi)$, $X_{\varphi\varphi} = (-R \cos \varphi, -R \sin \varphi, 0, 0)$, $X_{\varphi\psi} = 0$, $X_{\psi\psi} = (0, 0, -\rho \cos \psi, \rho \sin \psi)$, $n_1 = (R \cos \varphi, R \sin \varphi, 0, 0)$, $n_2 = (0, 0, \rho \cos \psi, \rho \sin \psi)$.

Отсюда получаем, $v_1 = v_2 = 0$; $I = ds^2 = \sum_{i=1}^4 dx_i^2 = R^2 d\varphi^2 + \rho^2 d\psi^2$;

$L_{11}^1 = -R$, $L_{12}^1 = L_{22}^1 = 0$, $L_{11}^2 = L_{12}^2 = 0$, $L_{22}^2 = -\rho$; $\Pi^1 = -R d\varphi^2$, $\Pi^2 = -\rho d\psi^2$. Выпишем уравнение эллипса нормальной кривизны:

$x = \frac{\Pi^1}{ds^2} = -\frac{R d\varphi^2}{R^2 d\varphi^2 + \rho^2 d\psi^2}$; $y = \frac{\Pi^2}{ds^2} = -\frac{\rho d\psi^2}{R^2 d\varphi^2 + \rho^2 d\psi^2}$. Умножая

первое уравнение на R , второе на ρ и складывая их, получаем $Rx + \rho y = -1$, или $Rx + \rho y + 1 = 0$; это означает, что эллипс вырождается в отрезок и $b = 0$. Найдем остальные параметры эллипса α , β и a . Совершим поворот осей координат на угол γ , где $\cos \gamma = R/\sqrt{R^2 + \rho^2}$; новые координаты обозначим через x' и y' и сделаем замену: $R d\varphi = d\bar{\varphi}$, $\rho d\psi = d\bar{\psi}$. В результате получим

$$x' = \frac{-\frac{1}{\sqrt{R^2 + \rho^2}} d\bar{\varphi}^2 - \frac{1}{\sqrt{R^2 + \rho^2}} d\bar{\psi}^2}{d\bar{\varphi}^2 + d\bar{\psi}^2};$$

$$y' = \frac{\frac{\rho}{R \sqrt{R^2 + \rho^2}} d\bar{\varphi}^2 - \frac{R}{\rho \sqrt{R^2 + \rho^2}} d\bar{\psi}^2}{d\bar{\varphi}^2 + d\bar{\psi}^2}.$$

Отсюда заключаем, что

$$\beta = -\frac{1}{\sqrt{R^2 + \rho^2}}; \alpha + a = \frac{\rho}{R \sqrt{R^2 + \rho^2}}; \alpha - a = -\frac{R}{\rho \sqrt{R^2 + \rho^2}}.$$

Два последних уравнения дают

$$a = \frac{1}{2 \sqrt{R^2 + \rho^2}} \left(\frac{R}{\rho} + \frac{\rho}{R} \right) = \frac{\sqrt{R^2 + \rho^2}}{2R\rho}, \alpha = \frac{1}{2 \sqrt{R^2 + \rho^2}} \left(\frac{\rho}{R} - \frac{R}{\rho} \right).$$

Как видно, $\alpha = 0$ при $R = \rho$, что имеет место для известного тора Клиффорда.

Как легко проверить, параметры α , β и a зависят только от R и ρ и не связаны между собой никакими дополнительными условиями, кроме $K = \alpha^2 + \beta^2 - a^2 = 0$.

Отсюда и из теоремы единственности заключаем, что поверхность для которой выполнены условия $v_1 = v_2 = 0$, $b = 0$, $a \neq 0$

и $\beta \neq 0$, при $\alpha \neq 0$ есть обобщенный тор Клиффорда, а при $\alpha = 0$ — обычный тор Клиффорда.

Перейдем теперь к рассмотрению последнего случая невыполнения условий $a > b$, $b \neq 0$, $\beta \neq 0$, т. е. случая, когда $a = b$. Если вектор средней кривизны $H \neq 0$, то из работы [3] следует: $\nabla_2 \ln |H| = K - |H|^2$; $K = |H|^2 - 2a^2$. Отсюда следует, что $a \equiv 0$. Значит, мы имеем дело с поверхностью, для которой выполнены условия $K > 0$, $a = b = 0$. Эта поверхность лежит в E^3 , т. е. может быть только сферой.

Если $H = 0$, то из работы [4] следует $\nabla_2 \ln \sqrt[4]{-K} - \frac{3}{2} K = 0$, $K - \frac{1}{2} \nabla_2 \ln a = a^2$. Из первого равенства получаем, что $K = 0$, а из второго — $K = a^2 = 0$. Если $a = b = 0$ и $K = 0$, то $\alpha = \beta = 0$, следовательно, вторые квадратичные формы поверхности обращаются в нуль, а первая квадратичная форма имеет вид $ds^2 = du^2 + dv^2$. Эта поверхность, как легко видеть, есть плоскость E^2 .

В заключение отметим, что поверхности с постоянной внешней геометрией с $K = -1$ рассматривались также в работе [5]. Была показана невозможность локального существования таких поверхностей в E^n при условии, что движение в пространстве, совмещающее конгруэнтные окрестности $U(x)$ и $U(y)$, переводит в себя геодезические, соединяющие точки x и y .

Список литературы: 1. Картан Э. Риманова геометрия в ортогональном репере. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1960. — 307 с. 2. Эйзенхарт Л. П. Риманова геометрия. — М.: Изд-во иностр. лит., 1948. — 316 с. 3. Аминов Ю. А. Кручение двумерных поверхностей в евклидовых пространствах. — Укр. геометр. сб., 1975, вып. 17, с. 3—14. 4. Аминов Ю. А. Аналог внутреннего условия Риччи для минимального многообразия в римановом пространстве. — Укр. геометр. сб., 1975, вып. 17, с. 15—22. 5. Кадомцев С. Б. Невозможность некоторых специальных погружений пространств Лобачевского. — Мат. сб., 1978, т. 107 (149): 2 (10), с. 175—198.

Поступила 15 ноября 1979 г.

УДК 513

В. П. Горох

О ГИПЕРПОВЕРХНОСТЯХ, СОДЕРЖАЩИХ МИНИМАЛЬНЫЕ ПОДМНОГООБРАЗИЯ

В работах [1, 2] В. А. Топоногов доказал следующие две теоремы.

Теорема А. Если в односвязном четырежды непрерывно дифференцируемом m -мерном римановом пространстве $\bar{V}_1^m$, риманова кривизна которого в каждой точке и в каждом двумерном на-

направлении не превосходит единицы, существует замкнутая геодезическая γ длины 2π , индекс которой равен q , и не существует замкнутых геодезических меньшей длины, то в V_1^m существует $(q+1)$ -мерная вполне геодезическая поверхность, содержащая γ и изометричная $(q+1)$ -мерной сфере радиуса 1.

Теорема В. Если в односвязном m -мерном четырежды непрерывно дифференцируемом римановом пространстве $R^m(k_0)$, риманова кривизна K которого удовлетворяет неравенствам $k_0 \leq K \leq 1$, при $k_0 > \frac{1}{4}$ существует замкнутая геодезическая γ длины 2π , то риманово пространство $R^m(k_0)$ изометрично m -мерной сфере радиуса 1.

В. А. Топоногов также показал, что при $k_0 = \frac{1}{4}$ теорема В в общем случае неверна.

Пусть V^{2l} — компактная $2l$ -мерная четырежды непрерывно дифференцируемая гиперповерхность евклидова пространства E^{2l+1} . В этой статье доказывается

Теорема 1. Пусть риманова кривизна K гиперповерхности V^{2l} в каждой точке и в каждом двумерном направлении удовлетворяет неравенствам $0 < K \leq 1$ и V^{2l} содержит замкнутую геодезическую γ длины 2π , тогда

а) если γ лежит в трехмерной плоскости E^3 , то V^{2l} является гиперсферой радиуса 1;

б) если γ лежит в k -мерной плоскости E^k ($4 \leq k \leq 2l$), то в V^{2l} существует вполне геодезическая поверхность размерности $2l - k + 2$, содержащая γ и изометричная единичной сфере размерности $2l - k + 2$.

В статье изучаются также некомпактные гиперповерхности евклидова пространства, содержащие компактные минимальные подмногообразия.

Рассмотрим полную выпуклую m -мерную гиперповерхность F^m класса C^3 в евклидовом пространстве E^{m+1} , гомеоморфную E^m . Пусть F^m не содержит прямых линий из E^{m+1} .

Теорема 2. Если F^m содержит компактное минимальное n -мерное подмногообразие F^n класса C^3 ($2 \leq n \leq m-1$), то в F^m существует $(n+1)$ -мерный минимальный полуцилиндр, изометричный прямому произведению $F^n \times [0, +\infty[$.

Теорема 3. Если F^m содержит замкнутую геодезическую γ , то в F^m существует двумерный вполне геодезический полуцилиндр, изометричный прямому произведению $\gamma \times [0, +\infty[$.

1. Доказательство теоремы 1. Рассмотрим параллельный перенос вектора вдоль кривой на гиперповерхности. Обозначим через $r(u^1, u^2, \dots, u^m)$ радиус-вектор гиперповерхности V^m , а через $\rho(s)$ — радиус-вектор кривой γ , принадлежащей V^m (s — длина дуги). Пусть $n(s)$ — нормаль к V^m в точке $\rho(s)$. Рассмотрим семейство

плоскостей, касательных к V^m в точках кривой γ . Уравнение этого семейства записывается в следующем виде:

$$n(r - \rho) = 0. \quad (1)$$

Найдем огибающую семейства (1). Она задается системой уравнений

$$n(r - \rho) = 0, \quad n_s(r - \rho) = 0. \quad (2)$$

Лемма 1. *Параллельный перенос вектора вдоль кривой γ на гиперповерхности V^m совпадает с параллельным переносом вектора вдоль γ на огибающей касательных плоскостей (2).*

Доказательство. Возьмем в точке $\rho(s_0)$, вектор $a(s_0)$, лежащий в касательной плоскости к F^m в этой же точке. Пусть $a(s)$ — векторное поле, получающееся при параллельном переносе вектора $a(s_0)$ вдоль кривой γ на поверхности F^m . Уравнение параллельного переноса вдоль кривой γ на поверхности V^m имеет вид [3]: $da^i + \Gamma_{kj}^i a^k du^j = 0$. Так как $a = a^i r_{u_i}$, то $da = da^i r_{u_i} + a^i r_{u_i u_j} du^j$.

Используя разложение Гаусса, получаем

$$da = (da^i + \Gamma_{kj}^i a^k du^j) r_{u_i} + \Omega_{ij} a^i du^j n. \quad (3)$$

Таким образом, если вектор переносится параллельно вдоль кривой γ на поверхности V^m , то $da = \Omega_{ij} a^i du^j n$, т. е. полный дифференциал вектора направлен по нормали к V^m . Обратно, если полный дифференциал вектора направлен по нормали к V^m , то из (3) следует, что вектор $a(s_0)$ переносится параллельно вдоль γ на поверхности. Но нормаль к огибающей касательных плоскостей к V^m в точках кривой γ совпадает с нормалью к поверхности V^m в точках кривой γ . Лемма доказана.

Лемма 2. *Если гиперповерхность V^m содержит замкнутую геодезическую γ , лежащую в трехмерной плоскости E^3 , то существует $m - 1$ линейно независимых параллельных векторных полей $a_i(s)$ вдоль γ ($i = 1, 2, \dots, m - 1$), удовлетворяющих в точке s_0 условиям*

$$(a_i(s_0), \rho_s(s_0)) = 0; \quad (4)$$

$$a_i(s_0 + l) = a_i(s_0), \quad (5)$$

где l — длина геодезической γ .

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда геодезическая γ лежит в двумерной плоскости E^2 . Так как геодезическая γ не является геодезической в E^{m+1} , то ее главные нормали, рассматриваемые в пространстве E^{m+1} , являются нормальными к V^m ([3], с. 96). Следовательно, нормали к гиперповерхности V^m в точках геодезической γ лежат в двумерной плоскости E^2 . Используя этот факт и то, что огибающая касательных плоскостей к V^m в точках геодезической γ задается системой (2), получаем, что она представляет собою прямой цилиндр с $(m - 1)$ -мерной

образующей. Возьмем ортонормированный базис $a_1, a_2, \dots, a_{m-1}$ образующей этого цилиндра, проходящей через точку $\rho(s_0)$. Пусть $a_1(s), a_2(s), \dots, a_{m-1}(s)$ — векторные поля, получающиеся при параллельном переносе векторов $a_1, a_2, \dots, a_{m-1}$ вдоль γ на цилиндре. Параллельный перенос вектора вдоль γ на цилиндре совпадает с параллельным переносом вектора в пространстве E^{m+1} . С другой стороны он совпадает с параллельным переносом вектора вдоль γ на гиперповерхности V^m , поэтому векторные поля $a_1(s), a_2(s), \dots, a_{m-1}(s)$ удовлетворяют условиям (4) и (5). Пусть теперь геодезическая γ лежит в трехмерной плоскости E^3 . В этом случае огибающей касательных плоскостей к V^m в точках геодезической γ будет прямой цилиндр с $(m-2)$ -мерной образующей. Тогда существует $m-2$ линейно независимых параллельных векторных полей $a_1(s), a_2(s), \dots, a_{m-2}(s)$, удовлетворяющих условиям (4) и (5). В точке s_0 выберем единичный вектор $a_{m-1}(s_0)$, удовлетворяющий условиям $(a_{m-1}(s_0), \rho_s(s_0)) = 0, (a_{m-1}(s_0), a_i(s_0)) = 0$ ($i = 1, 2, \dots, m-2$). Обозначим через $a_{m-1}(s)$ векторное поле, получающееся при параллельном переносе вектора $a_{m-1}(s_0)$ вдоль геодезической γ на гиперповерхности. Тогда векторные поля удовлетворяют условиям (4) и (5). Действительно,

$$a_{m-1}(s_0 + l) = \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i a_i(s_0) + \alpha_0 \rho_s(s_0). \quad (6)$$

Умножив обе части на $a_i(s_0 + l) = a_i(s_0)$ ($i = 1, 2, \dots, m-2$) и на $\rho_s(s_0 + l) = \rho_s(s_0)$, получим $\alpha_i = 0$ ($i = 0, 1, \dots, m-2$). Тогда $a_{m-1}(s_0 + l) = \alpha_{m-1} a_{m-1}(s_0)$ и, следовательно, $a_{m-1}(s_0 + l) = a_{m-1}(s_0)$. Лемма доказана.

Напомним некоторые определения.

Координатами Ферми в m -мерном римановом пространстве R^m называются такие координаты в окрестности геодезической γ , что вдоль γ $x^2 = x^3 = \dots = x^m = 0, \Gamma_{jk}^i = 0$ ($i, j, k = 1, 2, \dots, m$) (см., например, [4]).

Нормированными координатами Ферми называются такие координаты Ферми, для которых вдоль γ $g_{ii} = 1, g_{ij} = 0$ ($i \neq j$) ($i, j = 1, 2, \dots, m$).

Лемма 3. Пусть риманова кривизна K компактной гиперповерхности V^m в каждой точке и в каждом двумерном направлении положительна. Пусть V^m содержит замкнутую геодезическую γ , лежащую в трехмерной плоскости E^3 . Тогда индекс γ равен $m-1$.

Доказательство. Выберем вдоль γ специальную систему координат Ферми [1]. Возьмем параллельное векторное поле $a_i(s)$, удовлетворяющее условиям (4) и (5). Сделаем вариацию геодезической следующим образом. Из точки $\rho(s)$ в направлении вектора $a_i(s)$ проведем геодезическую. Отложим на ней отрезок длины δ . Конец этого отрезка, который не лежит на γ , имеет координаты $u^1 = s, u^i = \delta, u^j = 0$ при $j \neq 1, i$. Рассмотрим кривые $\gamma(\delta)$, задан-

ные уравнениями $u^1 = s$, $u^i = \delta$, $u^j = 0$ при $j \neq 1, i$. В случае $\delta = 0$ получаем геодезическую γ . Применив формулу второй вариации

$$[4], \text{ запишем } \left. \frac{d^2 L}{d\delta^2} \right|_{\delta=0} = - \int_0^l R_{1i, 1i} ds, \text{ где } L(\delta) \text{ — длина кривой } \gamma(\delta)$$

Так как $K > 0$, то $\left. \frac{d^2 L}{d\delta^2} \right|_{\delta=0} < 0$. Следовательно, вариация геодезической γ в направлении векторного поля $a_i(s)$ уменьшает длину геодезической. Прделаем такую вариацию для каждого векторного поля $a_i(s)$ ($i = 1, 2, \dots, m-1$). Так как $a_i(s)$ линейно независимы, то отсюда и получаем утверждение леммы.

Докажем теперь теорему 1. Известно, что в односвязном римановом пространстве $R^{2l}(k_0)$ при $k_0 > 0$ длина любой замкнутой геодезической не меньше 2π .

Пусть гиперповерхность V^{2l} содержит геодезическую γ , лежащую в E^3 . Тогда, в силу леммы 3, ее индекс равен $2l-1$. По теореме А в V^{2l} существует $2l$ -мерная вполне геодезическая поверхность, содержащая γ и изометричная $2l$ -мерной сфере радиуса 1. В силу неизгибаемости гиперсферы в евклидовом пространстве, гиперповерхность V^{2l} является единичной гиперсферой.

Пусть теперь геодезическая γ лежит в k -мерной плоскости E^k ($4 \leq k \leq 2l$). Тогда огибающая касательных плоскостей к V^{2l} в точках геодезической γ является цилиндром с $(2l-k+1)$ -мерной образующей. Следовательно, существует $2l-k+1$ независимых параллельных векторных полей $a_i(s)$ вдоль γ ($i = 1, 2, \dots, 2l-k+1$), удовлетворяющих условиям (4) и (5). Применив рассуждения, приведенные в доказательстве леммы 3, получим, что индекс геодезической γ не меньше, чем $2l-k+1$. Поэтому в V^{2l} существует $(2l-k+2)$ -мерная вполне геодезическая поверхность, содержащая γ и изометричная $(2l-k+2)$ -мерной сфере радиуса 1.

2. Доказательство теорем 2 и 3. Будем рассматривать полную выпуклую гиперповерхность F^m класса C^3 в евклидовом пространстве E^{m+1} , гомеоморфную E^m . Пусть F^m не содержит прямых линий из E^{m+1} . Так как F^m выпуклая гиперповерхность в E^{m+1} , гомеоморфная E^m , то существует луч l_X с началом в некоторой точке X , который либо полностью лежит в выпуклом теле, границей которого является F^m , либо лежит на F^m . Тогда луч l_Y с началом в любой точке Y , принадлежащей F^m и одинаково направленный с лучом l_X также либо полностью лежит в выпуклом теле, границей которого является F^m , либо лежит на F^m (см., например, [5, § 7]).

Возьмем гиперплоскость, касательную к F^m в точке X . Выберем в E^{m+1} систему координат $x_1, x_2, \dots, x_{m+1}$ следующим образом.

За начало координат возьмем точку X , координаты $x_1, x_2, \dots, x_m$ выберем в этой гиперплоскости, а координату x_{m+1} будем отсчитывать на луче, который является противоположно направ-

ленным лучу l_x . Заметим, что при таком выборе системы координат угол между внешней нормалью к F^m в любой точке и осью x_{m+1} не превосходит $\pi/2$.

Пусть $r(u_1, u_2, \dots, u_n)$ — радиус-вектор минимального подмногообразия F^n . Возьмем единичный вектор a , который выходит из точки $r(u_1, u_2, \dots, u_n)$ и имеет направление оси x_{m+1} . Спроектируем этот вектор на касательную плоскость к гиперповерхности F^m в точке $r(u_1, u_2, \dots, u_n)$. Получим вектор $\tilde{a}(u_1, u_2, \dots, u_n) = a - (v, a)v$, где $v(u_1, u_2, \dots, u_n)$ — единичная нормаль к F^m в точке $r(u_1, u_2, \dots, u_n)$. В направлении вектора $\tilde{a}(u_1, u_2, \dots, u_n)$ проведем геодезическую. На расстоянии $\varepsilon |\tilde{a}(u_1, u_2, \dots, u_n)|$ от точки $r(u_1, u_2, \dots, u_n)$ возьмем на этой геодезической точку. Пусть $b(u_1, u_2, \dots, u_n, \varepsilon)$ — вектор с началом в точке $r(u_1, u_2, \dots, u_n)$ и концом в выбранной точке. Заметим, что вектор-функция $b(u_1, \dots, u_n, \varepsilon)$ является дважды непрерывно дифференцируемой по переменным u_i и ε .

Сделаем вариацию минимального подмногообразия F^n следующим образом:

$$\tilde{r}(u_1, u_2, \dots, u_n, \varepsilon) = r(u_1, u_2, \dots, u_n) + b(u_1, u_2, \dots, u_n, \varepsilon).$$

При каждом ε получаем компактную поверхность, лежащую в F^n , которую обозначим через $F^n(\varepsilon)$. При $\varepsilon = 0$ получим минимальное подмногообразие F^n . Найдем объем $s(\varepsilon)$ поверхности $F^n(\varepsilon)$:

$$s(\varepsilon) = \int_{F^n} \sqrt{\tilde{g}} du_1 du_2 \dots du_n, \quad (7)$$

где $\tilde{g}$ — определитель первой квадратичной формы поверхности $F^n(\varepsilon)$.

Найдем коэффициенты первой квадратичной формы поверхности $F^n(\varepsilon)$:

$$\tilde{g}_{ij} = g_{ij} + (r_{u_i} b_{u_j}) + (b_{u_i} r_{u_j}) + (b_{u_i} b_{u_j}), \quad (8)$$

где g_{ij} — коэффициенты первой квадратичной формы минимального подмногообразия F^n , рассматриваемого как поверхность в E^{m+1} .

Заметим, что

$$b_{u_j}(u_1, u_2, \dots, u_n, \varepsilon)|_{\varepsilon=0} = 0. \quad (9)$$

Подставив формулу (8) в (7), вычислим $s'(0)$, используя при этом, соотношение (9). Получим $s'(0) = \int_{F^n} \sqrt{g} (r_{u_i} b_{u_j}) g^{ij} du_1 \dots du_n$, да-

лее, $\tilde{a}(u_1, u_2, \dots, u_n) = b_\varepsilon(u_1, u_2, \dots, u_n, 0)$, откуда $b_{u_j \varepsilon}(u_1, u_2, \dots, u_n, 0) = \tilde{a}_{ij}(u_1, u_2, \dots, u_n)$. Следовательно, $s'(0) = \int_{F^n} (r_{u_i} \tilde{a}_{uj}) g^{ij} ds$

$\tilde{a}_{uj} = - (v_{uj} a) v - (va) v_{uj}$, поэтому $(r_{u_i} \tilde{a}_{uj}) g^{ij} = - (va) (r_{u_i} \times$

$\times \nu_{uj} g^{ij}$. Дифференцируя тождество $(\nu r_{ui}) = 0$ по u_j , запишем $(r_{ui} \nu_{uj}) = -(\nu r_{uij})$.

Используя разложение Гаусса для поверхности F^n в E^{m+1} [3, с. 194], получим $(r_{ui} \nu_{uj}) = -\Omega_{ij}^\sigma(n, \nu_\sigma)$, где Ω_{ij}^σ — коэффициенты второй квадратичной формы поверхности F^n относительно нормали ν_σ . Тогда $(r_{ui} \tilde{a}_{uj}) g^{ij} = (\nu a) g^{ij} \Omega_{ij}^\sigma(\nu \nu_\sigma)$. Следовательно, $(r_{ui} \tilde{a}_{uj}) g^{ij} = (\nu a) (H \nu)$, где H — вектор средней кривизны для поверхности F^n в E^{m+1} .

Так как F^n минимальное подмногообразие в F^m , то $s'(0) = 0$ и, следовательно, $\int_{F^n} (\nu a) (\nu H) ds = 0$. Кроме того, вектор H на-

правлен по нормали к гиперповерхности F^m . Поэтому $\int_{F^n} |H| (\nu a) ds = 0$. По выбору вектора a $(\nu a) \geq 0$, следовательно,

$$|H| (\nu a) = 0. \quad (10)$$

Если $|H|$ не обращается в нуль, то из (10) получаем $(\nu a) = 0$.

Пусть $|H| = 0$ в некоторой точке P , а в окрестности этой точки $|H| \neq 0$. Тогда в окрестности точки P $(\nu a) = 0$, следовательно, и в самой точке P $(\nu a) = 0$.

Рассмотрим теперь случай, когда $|H| = 0$ в некоторой замкнутой области D , а в окрестности области D вектор H отличен от нулевого. Тогда на границе области D $(\nu a) = 0$.

Вторые квадратичные формы подмногообразия F^n в E^{m+1} неотрицательно определены. Так как $H = 0$ в области D , то отсюда следует, что главные кривизны F^n в области D равны нулю. Используя формулы Родрига, получаем, что нормаль к гиперповерхности F^m стационарна в области D . Следовательно, $(\nu a) = 0$ в области D . Заметим, что H не может быть равно нулю в каждой точке F^n , так как F^n компактное подмногообразие в E^{m+1} . Таким образом, во всех точках подмногообразия F^n $(\nu a) = 0$.

Так как ν — нормаль к F^m , то вектор a лежит в касательной плоскости к F^m . С другой стороны, луч, с началом в любой точке F^m и направлением, противоположным вектору, либо полностью лежит в теле, границей которого является F^m , либо лежит на F^m . Следовательно, все лучи с началом в точках подмногообразия F^n и направлением, противоположным вектору a , лежат на F^m . Они и образуют $(n+1)$ -мерный полуцилиндр P^{n+1} , изометричный прямому произведению $F^n \times [0, +\infty[$.

Докажем, что P^{n+1} является минимальным подмногообразием в F^m . Каждая точка $r(u_1, u_2, \dots, u_n)$ является вершиной луча, который принадлежит гиперповерхности F^m . Отложим на каждом из этих лучей отрезок длины a . Концы этих отрезков образуют подмногообразие F_a^n . Оно задается радиусом-вектором $\rho(u_1, u_2, \dots, u_n) = r(u_1, u_2, \dots, u_n) + ae$, где e — единичный вектор, имеющий

направление луча. Так как касательная плоскость к P^{n+1} вдоль луча стационарна, то нормальные пространства к F^n и F_a^n в точках $r(u_1, u_2, \dots, u_n)$ и $\rho(u_1, u_2, \dots, u_n)$ совпадают. Кроме того, $r_{u_i} = \rho_{u_i}$, $r_{u_i u_j} = \rho_{u_i u_j}$. Следовательно, вектор средней кривизны для F^n в E^{m+1} совпадает с вектором средней кривизны для F_a^n в E^{m+1} . Таким образом, оба они направлены по нормали к F^m . Поэтому F_a^n — минимальное подмногообразие в F^m .

Подмногообразие F_a^n лежит в гиперплоскости, перпендикулярной вектору e [6]. Из точки $x \in P^{n+1}$ проведем $n+1$ геодезических линий l_i пространства P^{n+1} , ортогональных друг другу, причем линии $l_1, l_2, \dots, l_n$ проведены в подмногообразии F_a^n , которому принадлежит точка x , а линия l_{n+1} является образующей P^{n+1} , проходящей через точку x . Пусть k_i — вектор кривизны геодезической линии l_i , рассматриваемой как кривая в F^m . Тогда $\sum_{i=1}^{n+1} k_i = H(n+1)$, где H — вектор средней кривизны P^{n+1} в F^m .

Но $\sum_{i=1}^n k_i = 0$, следовательно, $H = 0$.

Докажем теперь теорему 3. Двумерный полуцилиндр P^2 , изометричный прямому произведению $\gamma \times [0, +\infty[$, строится точно так же, как это было сделано при доказательстве теоремы 2.

Докажем, что цилиндр P^2 является вполне геодезическим в F^m .

Построим на P^2 замкнутую кривую γ_a точно так же, как было построено подмногообразие F_a^n . Кривая γ_a и образующая полуцилиндра P^2 является геодезическими линиями на полуцилиндре. Кроме того, γ_a ортогональна образующей полуцилиндра. Докажем, что образующая полуцилиндра является на нем линией кривизны. Возьмем точку A на геодезической γ . Пусть τ — касательный вектор к геодезической γ в точке A . Перенесем вектор τ вдоль образующей полуцилиндра, проходящей через точку A , параллельно в E^{m+1} . При этом вектор τ , оставаясь касательным к полуцилиндру, будет параллельно переноситься вдоль образующей на гиперповерхности F^m . Выберем в точке A какую-нибудь нормаль ν к полуцилиндру P^2 . Будем переносить ее параллельно в F^m вдоль образующей полуцилиндра. В силу свойств параллельного переноса вектор ν будет оставаться все время нормальным к полуцилиндру P^2 . Следовательно, производная вектора ν , вычисленная вдоль образующей полуцилиндра, равна нулю. Поэтому образующая полуцилиндра является линией кривизны [3, с. 203]. Так как γ_a ортогональна образующей полуцилиндра, то она также является линией кривизны.

Образующая полуцилиндра и кривая γ_a являются геодезическими линиями на гиперповерхности F^m . Следовательно, они — асимптотические линии на полуцилиндре P^2 [3, с. 202]. Таким образом, координатные линии на полуцилиндре есть одновремен-

но линии кривизны и асимптотические линии. Отсюда и получаем, что полуцилиндр P^2 является вполне геодезическим в F^m .

В заключение автор выражает глубокую благодарность А.А. Борисенко за помощь в работе над этой заметкой.

Список литературы: 1. Топоногов В. А. Некоторые экстремальные теоремы римановой геометрии, — Сиб. мат. журн., 1967, 8, № 5, с. 1079—1103. 2. Топоногов В. А. Экстремальные теоремы для римановых пространств с кривизной, ограниченной сверху, — Сиб. мат. журн., 1974, 15, № 6, с. 1348—1371. 3. Эйзенхарт Л. П. Риманова геометрия, — М.: Гостехиздат, 1948, — 240 с. 4. Громоу Д., Клинггенберг В., Мейер В. Риманова геометрия в целом, — М.: Мир, 1971, — 343 с. 5. Бакельман И. Я., Вернер А. Л., Кантор Б. Е. Введение в дифференциальную геометрию «в целом», — М.: Наука, 1973, — 440 с. 6. Gardner R. B. New viewpoints in the geometry of submanifolds of R^N , — Bull. Amer. Math. Soc., 1977, 83, № 1, p. 1—35.

Поступила 12 ноября 1979 г.

УДК 513

А. М. Гури н

БЕСКОНЕЧНЫЕ ВЫПУКЛЫЕ МНОГОГРАННИКИ С РАВНОУГОЛЬНЫМИ ВЕРШИНАМИ

В предлагаемой статье доказывается

Теорема. В трехмерном евклидовом пространстве все множество бесконечных выпуклых многогранников с равноугольными вершинами с точностью до изоморфизма составляют не более тридцати многогранников, имеющих конечное ребро, и бесконечная серия конусов.

Существование конусов-многогранников с единственной вершиной, общей для всех ребер и граней, очевидно, также очевидно на их структура. Поэтому дальше речь будет идти о многогранниках, имеющих хотя бы одно конечное ребро; их общее обозначение будет M . Сети ребер их приведены на рисунке; отрезки со свободными концами на них соответствуют бесконечным ребрам.

Здесь будут использованы термины и обозначения, принятые ранее¹. Напомним их. Символ (l, l, n) , или (l^2, n) , означает тип грани — треугольная грань с двумя l -гранными и одной n -гранной вершинами. Бесконечные грани могут быть только двух типов (лемма 1): одноугольная (n) с одной n -гранной вершиной и двухугольная $(3, n)$ с одной трехгранной и одной n -гранной вершинами $n = 3, 4, 5$. Символ $[k, l]$ означает ребро, соединяющее вершины k и l (т. е. k -гранную и l -гранную), $\{k, l\}$ — двугранный угол при этом ребре; $[k, l, n]$ — угол между ребрами $[k, l]$ и $[l, n]$; $\beta[n]$ — бесконечное ребро, исходящее из вершины n ; $v(n)$ —

¹ Гури н А. М. О выпуклых многогранниках с равноугольными вершинами. — Укр. геометр. сб., 1980, вып. 23, с. 34—40.

мера плоского угла n -гранной вершины; $\theta[k, l] = v(k) + v(l)$, $\theta(k, l, m) = v(k) + v(l) + v(m)$. Из свойств ($\alpha - \eta$) напомним: ε) две трехгранные вершины с общим ребром конгруэнтны; η) у четырехгранной вершины противоположные двугранные углы равны. Добавим столь же очевидные свойства: κ) сумма углов двуугольной грани $\geq \pi$. Отсюда следует: λ) к ребру треугольной грани нельзя подклеить двуугольную грань; μ) если у цепи граней многогранника M концевые грани двуугольные, а промежуточных — нечетное число и все они четырехугольные, причем каждая из них подклеена к двум соседним по противоположным ребрам, то остальные ребра каждой грани цепи параллельны. Заметим также, что ν) у пятиугольной грани сумма углов при каждом ребре должна быть больше π .

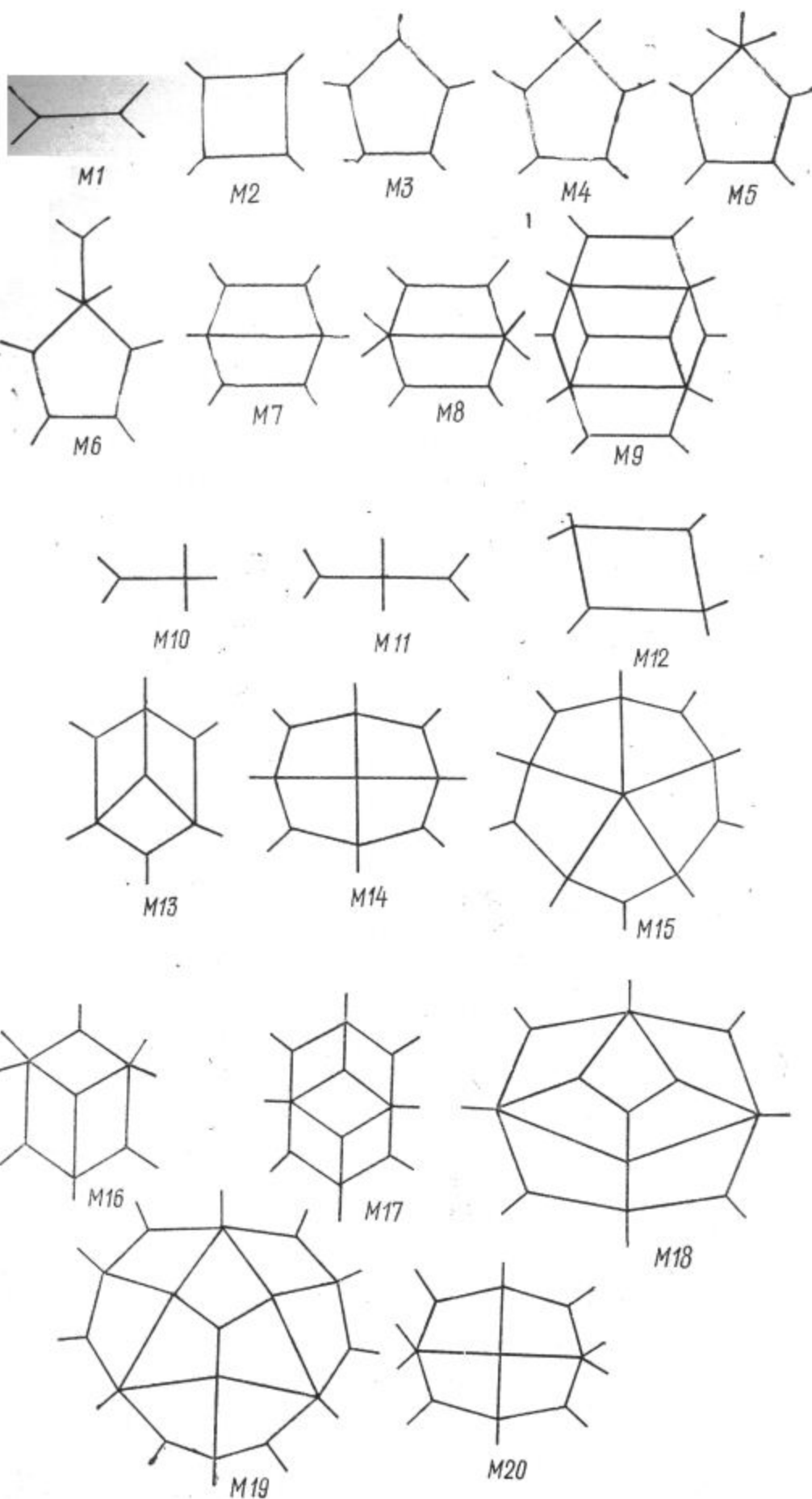
Доказательство. Из доказательства теоремы 2² следует, что бесконечный многогранник с равноугольными вершинами имеет бесконечные грани. Многогранник, составленный только из граней (n), принадлежит серии конусов. Если же многогранник M имеет двуугольную грань, то число его ребер конечно; поэтому достаточно рассмотреть все возможные варианты продолжения грани типа $(3, n)$ до многогранника M . Всякий раз, получая новую сеть ребер, будем проверять, можно ли ее реализовать в качестве многогранника. Если в сети очевидных противоречий нет, ее будем заносить в рисунок (с. 28-29), приписывая ей символ M_i , $i = 1, \dots, 30$.

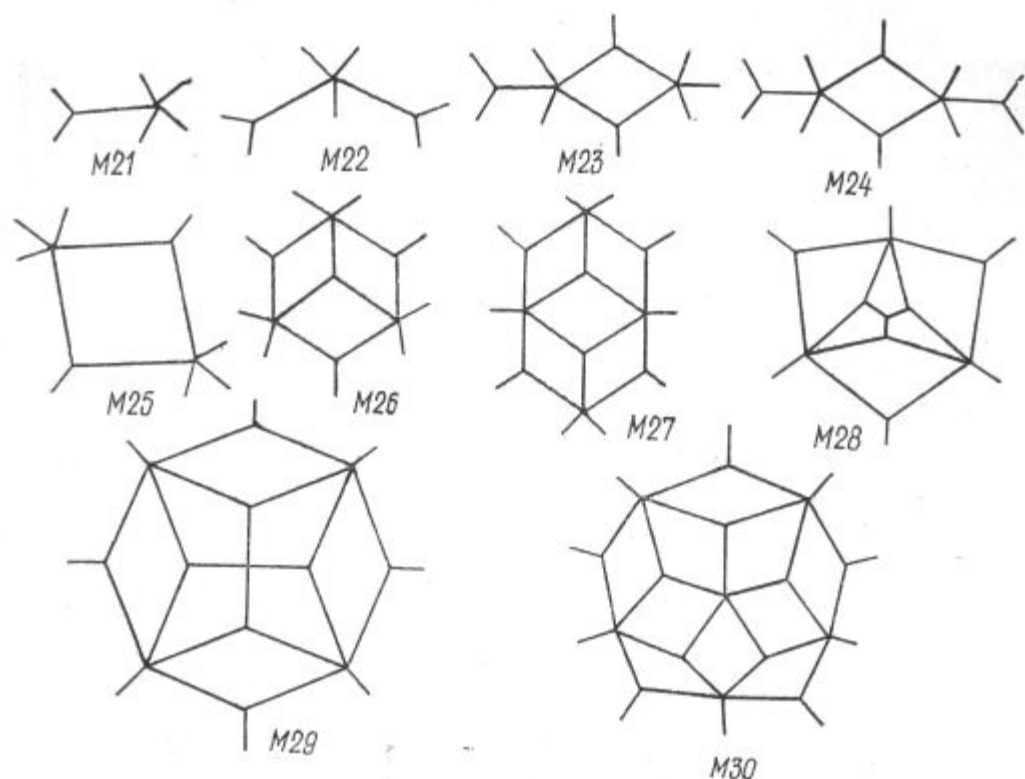
1. Грань $(3, 3)$. Ребро β [3] имеют грани (3) и $(3, n)$, $n = 3, 4, 5$. Подклеивание грани (3) однозначно приводит к многограннику M_1 . Подклеим к исходной грани по свободному ребру β [3] грань $(3, 3)$. К образовавшемуся углу $[3, 3, 3]$ можно подклеить, согласно λ , только четырехугольник или пятиугольник. К четырехугольнику будут подклеены только бесконечные грани, и в силу μ он будет прямоугольником — получим многогранник M_2 . Пятиугольник может быть³ только типа (3^5) или $(3^4, 4)$ — получим многогранники M_3, M_4 ; или типа $(3^4, 5)$ — получим M_5 и M_6 .

Пусть вторая бесконечная грань — $(3, 4)$. Вклеивание в свободный угол $[3, 3, 4]$ пятиугольника приведет к M_4 (в дальнейшем таких повторений оговаривать не будем). Вклеим четырехугольник $(3^2, 4, t)$, к нему подклеим грань $(3, t)$. В силу μ ребра $[3, 3]$ и $[4, t]$ параллельны, причем $v(t) = v(4)$ и $\{3, t\} = \{3, 4\}$ в силу ε . Построенный блок оказался симметричным относительно плоскости ω , перпендикулярной к ребру $[3, 3]$ и проходящей через его середину. Так как $v(t) + v(4) = 2v(4) < \pi$, к ребру $[4, t]$ можно подклеить, согласно ν , только четырехугольник $(4, 3^2, t)$, а к его свободным ребрам — грани $(4, 3)$, $(3, 3)$ и $(3, t)$. Эти четыре грани также образуют блок, симметричный относительно плоскости ω , поэтому $t = 4$, и получаем многогранник M_7 .

² Там же.

³ Там же, лемма 1.





Пусть вторая бесконечная грань — $(3, 5)$. К углу $[3, 3, 5]$ следует подклеить четырехугольник $(5, 3^2, 5)$ и к нему грань $(3, 5)$; в силу μ и ε он будет равнобедренной трапецией, а весь построенный блок симметричен относительно той же плоскости ω . К ребру $[5, 5]$ нельзя в силу ν подклеить пятиугольник. Если подклеить треугольник $(5^2, n)$, то поскольку $\nu(5) > \pi/3$, будет $\nu(n) < \pi/3$. К свободному ребру $\beta[5]$ нельзя подклеить грань (5) в силу λ , поэтому подклеим грань $(5, 3')$. Тогда к углу $[3', 5, n]$ можно подклеить только четырехугольник $(5, 3', 3', n)$, а к нему — $(3', 3')$ и $(3', n)$, и в силу μ и ε он будет равнобедренной трапецией, поэтому будет $\nu(n) = \nu(5)$, что невозможно.

Итак, к ребру $[5, 5]$ можно подклеить только четырехугольник $(5, 3^2, 5)$. Если после этого к ребру $\beta[5]$ подклеить грань (5) , то дальнейшее построение однозначно: $(5, 3)$, $(3, 3)$, $(3, 5)$ и (5) , получаем M_8 . Если же к ребру $\beta[5]$ подклеить грань $(5, 3')$, то в угол $[3, 5, 3']$, поскольку $\nu(5) + \nu(3) = \pi$, можно вклеить только трапецию $(3, 5, 3', 5')$ ⁴. По другую сторону плоскости ω необходимо подклеить грани $(5, 3'')$ и $(3, 5, 3'', 5'')$. Так как пятиугольная грань типа $(5, 3^2, 5, n)$ не существует⁵, к ломаной $[5', 3^2, 5'']$ подклеиваем четырехугольник $(5', 3^2, 5'')$, который по μ будет трапецией, а обе трапеции типа $(3, 5, 3, 5)$ — параллеле-

⁴ Там же, лемма 1.

⁵ Там же.

лограммами. Завершается построение только подклеиванием к ребру $[5', 5'']$ трапеции $(5', 3'', 5'')$ и затем граней $(3', 5')$ $(5', 3)$, $(3, 3)$, $(3, 5'')$ и $(5'', 3'')$. Получаем многогранник M_9 , симметричный относительно плоскости ω ; его двугольные грани $(3, 3)$, как и у M_7 , параллельны.

2. Грань $(3, 4)$. По ее ребру $\beta[3]$ можно подклеить грани 1) (3) , 2) $(3, 4')$ и 3) $(3, 5)$.

1) Подклеивание грани (3) необходимо приводит к многогранникам M_{10} и M_{11} .

2) Подклеим грань $(3, 4')$. По свободному углу $[4, 3, 4']$ можно подклеить только четырехугольник $(4, 3, 4', k)$, $k = 3', 4'', 5$.

$k = 3'$. Подклеим грани $(4')$, $(4', 3')$, $(3', 4)$ и (4) ; получим многогранник M_{12} , причем в силу μ $(4, 3, 4', 3')$ — параллелограмм. Подклеим теперь грани $(4, 3)$ и $(4', 3)$. К свободному углу $[3, 4', k]$ можно подклеить только четырехугольник $(3, 4', k, l)$, $l = 4, 5$, и затем $(l, k, 4, 3)$. Нетрудно видеть, что $v(4) = v(l) = v(4')$, а так как $\{k, l\} = \{k, 4\}$ и из η следует $\{3, 4\} = \{3, 4'\} = \{3, l\}$, то вершины $4, 4'$ и l конгруэнтны и $l = 4$. Доклеив двугольные грани, получим M_{13} .

$k = 4''$. По ребру $\beta[4]$ подклеим $(4, 3)$ и по $\beta[4']$ — грань $(4', 3)$, затем — грани $(3, 4, k, l)$ и $(3, 4', k, t)$, $l = 4, 5$ и $t = 4, 5$. Как и в случае M_{13} , убеждаемся, что конгруэнтны вершины $4'$ и l и вершины 4 и t , и поэтому возможно только $l = t = 4$; доклеивая грани $(l, 4'', t, 3)$, $(3, l)$, $(l, 3)$, $(3, t)$ и $(t, 3)$, получаем M_{14} .

$k = 5$. Как и в случае $k = 4''$, подклеим грани $(4', 3)$, $(3, 4', k, 4)$ и грани $(4, 3)$, $(3, 4, k, 4')$, затем грани $(3, 4')$ и $(3, 4)$. Очевидно, что дальнейшее построение должно быть таким: подклеиваем грань $(4, 3)$ грань $(4', 3)$, две грани $(3, 4, k, 4)$ и две грани $(4, 3)$. Получаем многогранник M_{15} .

3) Теперь по свободному ребру $\beta[3]$ исходной грани $(3, 4)$ подклеим грань $(3, 5)$. К свободному углу $[5, 3, 4]$ необходимо подклеить четырехугольник $(5, 3, 4, n)$, $n = 3, 4$.

Пусть $n = 3'$. Если подклеим грань (4) , то затем необходимо подклеить грани $(4, n)$ и $(n, 5)$. Согласно μ , грань $(5, 4, 3, n)$ — параллелограмм, и вершины 4 и 5 должны быть конгруэнтны, что невозможно. Подклеим грань $(4, 3)$; дальше необходимо подклеить $(n, 4, 3, 5)$, $(3, 5)$ и $(5, n, 5, 3')$. Если к ребру $\beta[5]$ подклеим грань (5) , то построение завершают грани $(5, 3'')$, $(3'', 5)$ и (5) — многогранник M_{16} . Если к $\beta[5]$ подклеим $(5, 3''')$, то потом нужно подклеить $(3''', 5, 3'', t)$, $t = 4, 5$, затем еще одну грань $(t, 3'', 5, 3''')$ и грани $(5, 3''')$, $(3''', t)$ и $(t, 3''')$. В силу μ грань $(5, n, 5, 3'')$ будет параллелограммом, и можно доказать, что сеть можно достроить только при $t = 4$. Это многогранник M_{17} .

Пусть $n = 4'$. Подклеим грани $(4, 3)$, $(3, 4, n, 5)$ и $(3, 5)$. К свободному ребру $[n, 5]$ можно подклеить четырехугольник или треугольник. Подклеим четырехугольник $(n, 5, t, 3')$ и четырехуголь-

ник $(n, 5, t', 3')$, t и $t' = 3, 4$. К ребру $\beta[5]$ нельзя подклеить грань (5), иначе при $t = 3$ вершина $3'$ окажется четырехгранной, а при $t = 4$ должно быть $v(4') + v(5) \geq \pi$, что невозможно. Подклеим к $\beta[5]$ грань $(5, 3'')$. Затем нужно подклеить грань $(3'', 5, t, l)$ и, на другой стороне, грани $(5, 3''')$, $(3''', 5, t', l')$, l и $l' = 4, 5$. Вершины t и t' одновременно либо трехгранные, либо четырехгранные. Пусть $t = t' = 3$. По свободной ломаной $[l, t, 3', t', l']$ нельзя подклеить пятиугольник, так как $\theta[l, t] \leq \pi$. Следовательно, вершины l и l' совпадают. Подклеив грани $(3''', l)$ и $(l, 3'')$, получим многогранник M_{18} . Если $t = t' = 4$, то следует подклеить грань $(t', 3', t, s)$, и тогда к углам $[l, t, s]$ и $[s, t', l']$ можно будет подклеить только четырехугольники $(l, t, s, 3_1)$ и $(s, t', l', 3_2)$, поэтому $s = 4, 5$. Но при $s = 4$ к углу $[3_1, s, 3_2]$ придется подклеить четырехугольник, вследствие чего нельзя будет подклеить грань $(l, 3_1)$, так как будет $\theta[l, 3_1] < \pi$. При $s = 5$ получаем многогранник M_{19} .

Теперь к свободному ребру $[n, 5]$ подклеим четырехугольник $(n, 5, 3', t)$, $t = 3, 4$, и такой же четырехугольник подклеим по второму свободному ребру $[n, 5]$. Нетрудно убедиться, что в случае $t = 3$ новый многогранник получить нельзя. При $t = 4$ к ребру $\beta[5]$ подклеим грань (5), затем $(5, 3')$, $(3', t)$, $(t, 3')$, $(3, 5)$ и (5)—получим многогранник M_{20} . Если же к ребру $\beta[5]$ подклеим грань $(5, 3'')$, то к углу $(3'', 5, 3')$ нужно будет подклеить четырехугольник $(3'', 5, 3', l)$ и к нему—двуугольник $(3'', l)$, что невозможно, так как $\theta[3'', l] = \theta[n, t] < \pi/2$.

Подклеим к свободному ребру $[n, 5]$ треугольник $(n, 5, m)$. К ребру $\beta[5]$ нельзя подклеить грань (5) в силу λ ; подклеим грань $(5, 3')$. К углу $[3', 5, m]$ подклеим четырехугольник $(5, 3'^2, m)$, затем $(3', 3')$ и $(3', m)$. По свойству μ , грань $(5, 3'^2, m)$ —равнобедренная трапеция. Но $v(m) = v(5) > \pi/3$, откуда следует, что $v(n) < \pi/3$, и поэтому $\theta(5, 3, 4, n) < 2\pi$, что невозможно.

3. Грань $(3, 5)$. По ребру $\beta[3]$ подклеим грань (3) и грани $(3, 5)$ и (5). Подклеив еще две грани (5), получим многогранник M_{21} , а подклеив $(5, 3')$, затем $(3')$ и $(3', 5)$, получим M_{22} . Если после второй грани $(3, 5)$ подклеим $(5, 3')$ и $(3', 5')$, то необходимо будет подклеить грани $(5, 3', 5', 3'')$, $(5, 3'')$ и $(3'', 5')$, поэтому грань $(5, 3', 5', 3'')$ —параллелограмм. Теперь закончить построение можно либо двумя гранями $(5')$ —получим M_{23} , либо двумя гранями $(5', 3''')$ и гранью $(3''')$ —получим M_{24} .

Подклеим по свободному ребру $\beta[3]$ грань $(3, 5')$. Угол $[5, 3, 5']$ принадлежит только четырехугольнику $(5, 3, 5', 3')$. Если теперь по ребру $\beta[5]$ и по ребру $\beta[5']$ подклеить по две грани (5) и $(5')$, то дальнейшее очевидное построение приведет к многограннику M_{25} .

Вернемся к моменту, когда ребра $\beta[5]$ и $\beta[5']$ еще свободны. К ребру $\beta[5]$ подклеим грань (5), к ней $(5, 3'')$; затем нужно подклеить $(3'', 5, 3', 5'')$, $(3'', 5'')$ и $(5'', 3', 5', 3''')$. Если теперь к ребру $\beta[5']$ подклеить грань $(5')$, то построение завершают грани

$(5', 3''')$, $(3''', 5'')$ и $(5'')$ — получим M_{26} . Если же к ребру $\beta[5']$ подклеить двуугольник $(5', 3^{IV})$, то нужно подклеить еще два четырехугольника $(3^{IV}, 5', 3''', 5''')$ и $(5'', 3''', 5''', 3^V)$, затем цикл бесконечных граней $(3^{IV}, 5''')$, $(5''')$, $(5''', 3^V)$ и $(3^V, 5'')$ — получим многогранник M_{27} .

Наконец, к исходной грани $(3, 5)$ по ребру $\beta[5]$ подклеим грань $(5, 3'')$. Чтобы не получить повторений, к свободному ребру $\beta[3'']$ необходимо подклеить грань $(3'', 5'')$. К углу $[5'', 3'', 5]$ можно подклеить только грань $(5'', 3'', 5, 3''')$. Аналогично, к ребру $\beta[5']$ подклеим $(5', 3^{IV})$, затем $(3^{IV}, 5''')$ и $(5', 3^{IV}, 5''', 3^V)$. К образовавшемуся углу $[3', 5, 3''']$ нельзя подклеить треугольник, потому что тогда будет $\vartheta(3') < \pi/15$, и пятиугольник, потому что $\theta[3', 5] \leq \pi$. Подклеим четырехугольник $(3', 5, 3''', t)$; возможные значения $t = 3, 4, 5$, так как $\theta[t, 3'''] = \theta[3, 5'] \geq \pi$. Так же и к углу $[3', 5', 3^V]$ подклеим четырехугольник $(t, 3', 5', 3^V)$. При $t = 3$ вершины 5 и $5'''$ должны совпадать — получим многогранник M_{28} . При $t = 4$ подклеим грань $(5'', 3''', t, s)$, $s = 3, 4$. Но $\theta[s, t] = \theta[5, 3''] \geq \pi$, следовательно, $s = 3$. Такую же грань подклеим с другой стороны. Вершина $5''$ уже имеет четыре ребра, симметричная ей вершина $5'''$ тоже имеет четыре ребра. Осталось подклеить грань $(5''', s, 5'', 3^V)$ и цикл бесконечных граней, чтобы получить многогранник M_{29} . Совершенно аналогичные построения в случае $t = 5$ приводят к многограннику M_{30} . Теорема доказана. Вопрос реализации ряда из этих сетей остается открытым.

Поступила 12 сентября 1979 г.

УДК 513

А. М. Гури н

АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ КОШИ

Стокер [1] высказал гипотезу, что плоские углы замкнутого выпуклого многогранника однозначно определяются двугранными углами (обращение теоремы Коши).

В настоящее время имеются лишь результаты Каршера [2] для пятивершинников и многогранников, описанных вокруг сферы, и результат Милки [3] для многогранников, вписанных в сферу.

В этой заметке приводится результат, также подтверждающий гипотезу Стокера, причем аналогичный результат верен и для бесконечных многогранников.

Теорема 1. *Замкнутый выпуклый многогранник однозначно определяется величинами ребер и двугранных углов.*

Доказательство. Положим, что нам даны два многогранника K_1 и K_2 с изоморфными сетками ребер и равными соответственными ребрами и двугранными углами. Отметим каждый плоский угол многогранника K_1 знаком плюс, если он больше,

чем соответственный плоский угол многогранника K_2 , и знаком минус, если он меньше; остальные плоские углы оставим неотмеченными. Если нет углов, отмеченных знаками, то все соответственные плоские углы многогранников K_1 и K_2 равны. В этом случае теорема доказана. Предположим, что существуют плоские углы, отмеченные знаками. Тогда, обходя вокруг отмеченной грани, получим не менее четырех перемен знаков плоских углов [4]; при обходе вершины с отмеченными плоскими углами также получим не менее четырех перемен знаков, для доказательства чего достаточно перейти к двойственному многогранному углу.

Соединим отрезками середины ребер многогранника K_1 , имеющих общую вершину. На отрезках, лежащих против отмеченных углов, поставим знаки углов. При обходе вокруг отмеченной «грани» новой сети ребер на многограннике K_1 будем иметь не менее четырех перемен знаков. Противоречивость этой сети ребер можно доказать, перейдя к двойственной сети. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Бесконечный полный выпуклый многогранник однозначно определяется длинами конечных ребер и величинами двугранных и предельных углов.*

Доказательство. Отсечем плоскостью бесконечную часть многогранника так, чтобы все внешние нормали граней были направлены в одно полупространство, ограниченное секущей плоскостью. Конечную часть многогранника дополним ее зеркальным отражением в секущей плоскости и тогда дальнейшее доказательство может быть проведено аналогично доказательству теоремы 1.

Список литературы: 1. *Stoker I. I. Geometrical Problems Concerning Polyhedra in the Large.*—Comm. Pure Appl. Math., 1968, XXI, p. 119-168. 2. *Karcher H. Remarks on Polyhedra with Given Dihedral Angles.*—Comm. Pure Appl. Math., 1968, XXI, p. 169—194. 3. *Милка А. Д. К одной гипотезе Стокера.*—Укр. геометр. сб., 1970, вып. 9, с. 85—86. 4. *Александров А. Д. Выпуклые многогранники.*—М.: ГИТТЛ, 1950.—428 с.

Поступила 26 ноября 1979 г.

УДК 513

В. Ф. Игнатенко

ОБ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЯХ
С ГРУППАМИ СИММЕТРИЙ A_n , B_n , D_n

Зададим в вещественном n -мерном евклидовом пространстве E^n прямоугольную систему координат Ox_i ($i = \overline{1, n}$). Пусть элементами конечной группы симметрий G являются ортогональные

отражения относительно $N(G)$ $(n-1)$ -мерных плоскостей симметрии пространства E^n ; $\eta_s(G)=0$ ($s=1, \overline{N(G)}$) — их нормированные уравнения. Тогда многочлены

$$\sum_{s=1}^{N(G)} \eta_s^{2r}(G), \quad r=1, 2, \dots \quad (1)$$

инвариантны относительно G . Если $I_i(G)$ — базисные инвариантные многочлены (образующие) алгебры $I(G)$ многочленов с группой симметрий G , то общее уравнение $(n-1)$ -мерной алгебраической поверхности, инвариантной относительно G , можно записать так:

$$\varphi(I_i(G))=0, \quad i=\overline{1, n}, \quad (2)$$

где φ — многочлен. В настоящей заметке находятся все r , при которых образующие степеней $2r$ алгебр $I(A_n)$, $I(B_n)$, $I(D_n)$ могут быть представлены в виде (1); указываются также некоторые способы построения полного базиса алгебры $I(B_n)$ и $n-1$ образующих алгебры $I(D_n)$, принадлежащих $I(B_n)$.

1. Группа A_n . Группа симметрий A_n правильного n -симплекса имеет порядок $(n+1)!$, число $N(A_n) = \frac{n(n+1)}{2}$. При $n=3$ многочлены $I_i(A_3)$ впервые нашли Л. Лекорню [1] и Э. Гурса [2]. Образующие $I_i(A_n)$ в E^{n+1} получил Г. С. М. Коксетер [3]. Различные способы нахождения $I_i(A_n)$ рассмотрены в работах [4], для $n=4$ и [5]. В ряде работ изучались отдельные типы (2). Так, Я. П. Бланк, Г. В. Паньков, В. В. Рокотянская [6] доказали, что кубическая поверхность, определяемая уравнением

$$2x_1x_2x_3 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 5 = 0, \quad (3)$$

не несет конических сетей, т. е. не является поверхностью Петерсона. В. В. Ермаков [7] рассмотрел действие специальной группы преобразований на поверхности Маркова, уравнение которой имеет вид

$$3x_1x_2x_3 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2. \quad (4)$$

Поверхности (3) и (4) симметричны относительно плоскостей $x_i \pm x_j = 0$ ($i, j=1, 2, 3$; $i < j$), причем $I_1(A_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, $I_2(A_3) = x_1x_2x_3$. В работе [8] указаны необходимые и достаточные условия инвариантности кубической поверхности пространства E^3 относительно группы симметрий A_3 и приведен способ нахождения уравнений соответствующих плоскостей симметрии.

1. 1. В пространстве E^{n+1} зададим плоскость правильного n -симплекса и его плоскости ортогональной симметрии уравнениями

$$\sum_{\alpha=1}^{n+1} y_\alpha = 0, \quad (5)$$

$$y_\alpha - y_\beta = 0 \quad (\alpha, \beta = \overline{1, n+1}; \alpha < \beta) \quad (6)$$

соответственно. Так как плоскости (6) ортогональны плоскости (5), то (5) инвариантна относительно группы симметрий A_n .

Степенные суммы

$$\sum_{\alpha=1}^{n+1} y_{\alpha}^{\beta}, \beta = \overline{1, n+1} \quad (7)$$

также инвариантны относительно A_n , они функционально независимы и, следовательно, являются образующими алгебры $I(A_n)$ [5].

Запишем для плоскостей (6) многочлены (1) при $r = 1, \left[\frac{n+1}{2} \right]$:

$$n \sum_{\alpha=1}^{n+1} y_{\alpha}^{2r} + P_{2r}; \quad (8)$$

формы

$$P_{2r} = \sum_{\gamma=1}^{2r-1} \sum_{\substack{\alpha, \beta=1 \\ \alpha < \beta}}^{n+1} (-1)^{\gamma} C_{2r}^{\gamma} y_{\alpha}^{2r-\gamma} y_{\beta}^{\gamma} \quad (9)$$

принадлежат алгебре $I(A_n)$. Здесь и дальше инварианты группы задаются с точностью до постоянного множителя.

Формы (8) можно представить так:

$$a \sum_{\alpha=1}^{n+1} y_{\alpha}^{2r} + Q_{2r}, \quad (10)$$

где

$$a = n - \rho \sum_{k=1}^{r-1} (-1)^k C_{2r}^k - \frac{1}{2} (-1)^r C_{2r}^r; \quad (11)$$

$$Q_{2r} = P_{2r} + \left(\rho \sum_{k=1}^{r-1} (-1)^k C_{2r}^k + \frac{1}{2} (-1)^r C_{2r}^r \right) \sum_{\alpha=1}^{n+1} y_{\alpha}^{2r}; \quad (12)$$

$\rho = 0$ при $r = 1$ и $\rho = 1$ при $r > 1$. Согласно формулам (9), (12),

$$Q_{2r} = \rho \sum_{k=1}^{r-1} (-1)^k C_{2r}^k \sum_{\alpha=1}^{n+1} y_{\alpha}^{2r-k} \sum_{\alpha=1}^{n+1} y_{\alpha}^k + \frac{1}{2} (-1)^r C_{2r}^r \left(\sum_{\alpha=1}^{n+1} y_{\alpha}^r \right)^2. \quad (13)$$

Это значит, что Q_{2r} есть многочлены относительно базисных инвариантов (7) степеней $< 2r$. Из тождества $(1-1)^{2r} = \sum_{\gamma=0}^{2r} (-1)^{\gamma} \times \times C_{2r}^{\gamma} = 0$ при $r > 1$ находим

$$-\sum_{k=1}^{r-1} (-1)^k C_{2r}^k = \frac{1}{2} (-1)^r C_{2r}^r + 1. \quad (14)$$

Равенства (11) и (14) дают $a = n + 1 > 0$, откуда и из (13) видим, что формы (10) зависят от образующих $\sum_{\alpha=1}^{n+1} y_{\alpha}^{2r}$, и поэтому сами являются образующими алгебры $I(A_n)$.

Итак, для алгебры $I(A_n)$ образующими четных степеней являются многочлены (1) при $r = 1, \left[\frac{n+1}{2} \right]$.

1. 2. От прямоугольных координат y_{α} , ($\alpha = \overline{1, n+1}$) пространства E^{n+1} к прямоугольным координатам x_i ($i = \overline{1, n}$) пространства E^n можно перейти так. При $y_i = x'_i$ заменим y_{n+1} линейной формой $-\sum_{i=1}^n x'_i$ (преобразование f). Тогда

$$\frac{1}{2} f \left(\sum_{\alpha=1}^{n+1} y_{\alpha}^2 \right) = \sum_{i=1}^n x_i'^2 + \sum_{i, j=1 \atop i < j}^n x'_i x'_j. \quad (15)$$

Некоторое центроаффинное преобразование g положительно определенную квадратичную форму (15) переводит в $\sum_{i=1}^n x_i^2$. Под действием преобразования $g \circ f$ образующие (7) и (8) алгебры $I(A_n)$ перейдут в ее образующие, заданные в прямоугольных координатах x_i пространства E^n .

Если, например, $n = 2$, то

$$f \left(\sum_{\alpha=1}^3 y_{\alpha}^2 \right) = -3 x'_1 x'_2 (x'_1 + x'_2). \quad (16)$$

При этом g задается формулами $x'_1 = x_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} x_2$,

$x'_2 = -x_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} x_2$. Действуя преобразованием g на форму (16), получим

$$\frac{2}{\sqrt{3}} x_2 (3 x_1^2 - x_2^2). \quad (17)$$

С точностью до постоянного множителя образующая (17) алгебры $I(A_2)$ является суммой третьих степеней левых частей нормированных уравнений сторон правильного треугольника с вершинами $(\sqrt{3}, 1)$, $(-\sqrt{3}, 1)$, $(0, -2)$ [5].

2. Группа B_n . Группа симметрий B_n ($n > 1$) n -куба имеет порядок $2^n \cdot n!$, $N(B_n) = n^2$. Инварианты $I_i(B_n)$ ($i = \overline{1, n}$) получил Э. Гурса [2]; $I_i(B_3)$ нашел также Л. Лекорню [1].

2. 1. Пусть плоскости симметрии n -куба в E^n определяются уравнениями

$$x_i = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad (18)$$

$$x_i \pm x_j = 0 \quad (i, j = \overline{1, n}; i < j). \quad (19)$$

Множество координатных плоскостей инвариантно относительно B_n . Степенные суммы

$$\sum_{i=1}^n x_i^{2j}, \quad j = \overline{1, n}, \quad (20)$$

функционально независимы и образуют полный базис алгебры $I(B_n)$. Запишем для плоскостей (18), (19) многочлены (1) при $r = \overline{1, n}$:

$$(n + 2^{r-1} - 1) \sum_{i=1}^n x_i^{2r} + R_{2r}; \quad (21)$$

формы

$$R_{2r} = \sum_{k=1}^{r-1} \sum_{\substack{i, j=1 \\ i < j}}^n C_{2r}^{2k} x_i^{2(r-k)} x_j^{2k} \quad (22)$$

являются элементами алгебры $I(B_n)$.

Представим (21) в следующем виде:

$$b \sum_{i=1}^n x_i^{2r} + S_{2r}; \quad (23)$$

здесь

$$b = n + 2^{r-1} - \delta \sum_{k=1}^{\frac{r-\varepsilon-1}{2}} C_{2r}^{2k} + \frac{\varepsilon}{2} C_{2r}^r - 1, \quad (24)$$

$$S_{2r} = R_{2r} + \left(\delta \sum_{k=1}^{\frac{r-\varepsilon-1}{2}} C_{2r}^{2k} + \frac{\varepsilon}{2} C_{2r}^r \right) \sum_{i=1}^n x_i^{2r}; \quad (25)$$

$\delta = 0$ при $r = 1$ или 2 , $\delta = 1$ при $r > 2$; $\varepsilon = 1$ при r четном, $\varepsilon = 0$ при r нечетном. Согласно формулам (22) и (25)

$$S_{2r} = \delta \sum_{k=1}^{\frac{r-\varepsilon-1}{2}} C_{2r}^{2k} \sum_{i=1}^n x_i^{2(r-k)} \sum_{i=1}^n x_i^{2k} + \frac{\varepsilon}{2} C_{2r}^r \left(\sum_{i=1}^n x_i^r \right)^2, \quad (26)$$

т. е. S_{2r} — многочлены относительно степенных сумм (20) степеней $< 2r$. Поэтому формы (23) — образующие алгебры $I(B_n)$ только

при таких значениях r , что $b \neq 0$. Чтобы $b = 0$, для r из (24) найдем условие

$$1 - 2^{r-1} + \delta \sum_{k=1}^{\frac{r-\varepsilon-1}{2}} C_{2r}^{2k} + \frac{\varepsilon}{2} C_{2r}^r = n. \quad (27)$$

В частности, это равенство выполняется при $r = 2$ на плоскости [9] и при $r = 3$ в пространстве E^{12} .

Из сказанного следует, что многочлены (1) являются образующими четных степеней алгебры $I(B_n)$ только при таких $r = 1, \dots, n$, которые не удовлетворяют условию (27).

Инварианты R_{2r} в силу (25) и (26) составляют полный базис алгебры $I(B_n)$ при всех $r = \overline{1, n}$.

2.2. В 1968 г. Л. Флатто [10] высказал предположение об алгебраической независимости многочленов

$$\sum_{\pm} (\pm x_1 \pm x_2 \pm \dots \pm x_n)^{2r}, \quad r = \overline{1, n}. \quad (28)$$

Это предположение подтвердил Г. Хаюслейн (11). Уравнения

$$x_1 \pm x_2 \pm \dots \pm x_n = 0 \quad (29)$$

задают плоскости, которые проходят через центр O n -куба ортогонально его диагоналям, соединяющим центрально-симметричные вершины. Множество плоскостей (29) имеет группу симметрий B_n . Так как (18) и (19) — плоскости симметрии n -куба, то при любом натуральном r сумма $2r$ -тых степеней левых частей уравнений (29) принадлежит алгебре $I(B_n)$. Из алгебраической независимости многочленов (28) следует, что в случае $r = \overline{1, n}$ указанные суммы образуют полный базис $I(B_n)$.

3. Группа D_n . Если из множества $(n-1)$ -мерных плоскостей симметрии n -куба исключить плоскости, параллельные его $(n-1)$ -граням, то получим $n(n-1)$ плоскостей симметрии, отражения в которых являются элементами группы симметрий $D_n < B_n$ порядка $2^{n-1} \cdot n!$. При этом D_2 есть циклическая группа четвертого порядка, $D_3 = A_3$. Образующие $I_i(D_n)$, $i = \overline{1, n}$, нашел Э. Гурса [2]. Глубокие связи между группой симметрий двадцати семи прямых на гладкой кубической поверхности в трехмерном проективном пространстве и алгебрами $I(A_4)$ и $I(D_5)$ установил Ю. И. Манин [12, гл. IV].

Группа симметрий D_n определяется плоскостями (19). Так как $D_n < B_n$, то элементы алгебры $I(B_n)$ принадлежат алгебре $I(D_n)$, причем, если $j = \overline{1, n-1}$, (20) совместно с $x_1 x_2 \dots x_n$ — относительным инвариантом группы B_n — задают полный базис $I(D_n)$. Многочлены (1) при $r = \overline{1, n-1}$ запишем так:

$$(n-1) \sum_{i=1}^n x_i^{2r} + R_{2r}. \quad (30)$$

Они приводятся к виду (23), если коэффициент b заменить на $b - 2^{r-1}$. Значит, при $r \mid b \neq 2^{r-1}$ формы (30) — образующие алгебры $I(D_n)$. Если же $b = 2^{r-1}$, то

$$1 + \delta \sum_{k=1}^{\frac{r-\varepsilon-1}{2}} C_{2r}^{2k} + \frac{\varepsilon}{2} C_{2r}^r = n; \quad (31)$$

равенство возможно уже при $r = 2$ в E^4 . Таким образом, многочлены (1) являются образующими степеней $2r$ алгебры $I(D_n)$ только при таких $r = \overline{1, n-1}$, которые не удовлетворяют условию (31). Согласно п. 2.1, R_{2r} ($r = \overline{1, n-1}$) — образующие алгебры $I(D_n)$.

Список литературы: 1. *Lecornu L.* Sur les surfaces possédant les mêmes plans de symétrie que l'un des polyèdres réguliers. — *Acta Math.*, 1887, 10, p. 201—280. 2. *Goursat E.* Étude des surfaces qui admettent tous les plans de symétrie d'un polyèdre régulier. — *Ann. sc. de l'École Norm.*, 1887, 4, N 3, p. 159—200. 3. *Coxeter H. S. M.* The product of the generators of a finite group generated by reflections. — *Duke Math. J.*, 1951, 18, p. 765—782. 4. *Игнатенко В. Ф., Лейбин А. С.* Об алгебраических поверхностях в E^4 с симметрией правильных четырехмерных симплекса и 600-гранника. — *Укр. геометр. сб.*, 1971, вып. 11, с. 26—31. 5. *Игнатенко В. Ф., Лейбин А. С.* Алгебраические поверхности с симметрией правильного m -мерного симплекса. — *Укр. геометр. сб.*, 1974, вып. 16, с. 3—8. 6. *Бланк Я. П., Паньков Г. В., Рокотянская В. В.* Конические сети на поверхностях третьего порядка. — *Укр. геометр. сб.*, 1968, вып. 5—6, с. 21—28. 7. *Ермаков В. В.* О группе преобразований, связанной с поверхностью Маркова. — *Мат. заметки*, 1976, 19, № 3, с. 419—428. 8. *Игнатенко В. Ф.* Условия инвариантности кубической поверхности относительно группы симметрий правильного тетраэдра. — *Укр. геометр. сб.*, 1979, вып. 22, с. 60—64. 9. *Игнатенко В. Ф.* О плоских алгебраических кривых с осями симметрии. *Укр. геометр. сб.*, 1978, вып. 21, с. 31—33. 10. *Flatto L.* Basic sets of invariants for finite reflection groups. — *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1968, 74, № 4, p. 730—734. 11. *Haeslein G. K.* On the algebraic independence of symmetric functions. — *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1970, 25, № 1, p. 179—182. 12. *Манин Ю. И.* Кубические формы: алгебра, геометрия, арифметика. — М.: Наука, 1972. — 304 с.

Поступила 1 ноября 1979 г.

УДК 513.81

С. Б. Климентов

О СТЕПЕНИ ИЗГИБАЕМОСТИ ПОВЕРХНОСТЕЙ
ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ

1. Введение

С. Э. Кон-Фоссен в своей работе «Изгибаемость поверхностей в целом» сформулировал задачу изучения «степени изгибаемости» куска сферы в зависимости от его размеров [1, с. 20—21] и в ка-

честве «меры изгибаемости» предложил изменение главных кривизн поверхности в процессе изгибания [1, с. 33] (здесь и везде далее речь идет о непрерывном изгибании). Н. В. Ефимов сформулировал эту же задачу для куска произвольного овалоида [2, с. 82]. Эта задача для односвязной, гомеоморфной кругу поверхности положительной гауссовой кривизны, расположенной в трехмерном евклидовом пространстве, изучалась В. Т. Фоменко [3]. В работе [3] введено понятие комплексного изгиба поверхности в точке, характеризующее изменение главных кривизн поверхности в данной точке в процессе изгибания. Воспроизведем определение этого понятия.

Пусть S — регулярная поверхность положительной гауссовой кривизны $K \geq k_0 > 0$, $k_0 = \text{const}$, расположенная в евклидовом пространстве E_3 , а S_t — ее непрерывное изгибание, т. е. семейство поверхностей, изометричных S , непрерывно зависящих от параметра $t \in [0, 1]$, причем $S_0 \equiv S$. Обозначим через τ касательную плоскость поверхности S в точке N . Построим в плоскости τ индикатрису D кривизны S в точке N . Пусть S подвергнута непрерывному изгибанию. Не нарушая общности, будем считать, что точка N вместе с ее касательной плоскостью остается при этом неизменной (исключая также вращение τ вокруг нормали к поверхности). Рассмотрим в плоскости τ индикатрису D_t кривизны поверхности S_t в точке N . Обозначим через ν_t угол между соответствующими главными направлениями α и α_t индикатрис D и D_t , считая, что $0 \leq \nu_t < \frac{\pi}{2}$. Главные кривизны поверхностей S_t и S в точке N по направлениям α_t и α соответственно обозначим k_{1t} и k_1 . Назовем изгибом поверхности S в точке N при изгибании S в S_t комплексное число $j_t(S, N) = \nu_t + i(k_{1t} - k_1)$. Очевидно, что изгиб является непрерывной функцией параметра t и что $j_0(S, N) = 0$.

В. Т. Фоменко [3] доказано, что односвязную гомеоморфную кругу поверхность S можно изогнуть с заданным изгибом в фиксированной точке при условии, что изгиб ограничен по модулю некоторой константой, определяемой поверхностью S и выбранной точкой (т. е. что поверхность S можно изгибать с заданным в точке изгибом, но, вообще говоря, «не очень сильно»). Дальнейшее развитие этого вопроса содержится в работе [4]. В ней рассматриваются такие же поверхности, как и в работе [3], и доказывается следующее: кусок данной поверхности, содержащий наперед заданный конечный набор точек, можно изогнуть с произвольно заданным (сколь угодно большим) изгибом в этих точках при условии, что площадь куска достаточно мала.

В предлагаемой статье результат работы [4] переносится на поверхности рода $p \geq 0$ положительной внешней кривизны, расположенные в односвязном полном трехмерном пространстве постоянной кривизны*. Рассматриваемые поверхности предпола-

* В работе [4] существенно использовано предположение о том, что объемлющее поверхность пространство евклидово.

гаются «разрезанными», т. е. превращенными в односвязные путем проведения системы канонических разрезов. На края разрезов налагается условие их конгруэнтного друг относительно друга смещения в процессе изгибания.

Работа состоит из пяти параграфов. В § 2 формулируется основной результат работы. В § 3 рассматривается вопрос о существовании рассматриваемых поверхностей. Показывается, что поверхности рода $p > 0$ положительной внешней кривизны с краем существуют в любом регулярном римановом пространстве и, в частности, в евклидовом (чего нельзя сказать о замкнутых поверхностях рода $p > 0$ положительной внешней кривизны). В § 4 приводится доказательство основного результата, а в § 5 доказывается одно вспомогательное утверждение, используемое при доказательстве основного результата.

Для классов регулярности геометрических объектов, для функциональных пространств и норм в них в работе применяются обозначения книги [5].

2. Формулировка результата

Пусть $\bar{S}$ — ориентируемая поверхность с краем рода $p \geq 0$ с положительной внешней кривизной $K \geq k_0 > 0$, $k_0 = \text{const}$, расположенная в трехмерном односвязном полном римановом пространстве V_3 постоянной кривизны. Через S обозначим поверхность рода p , являющуюся частью поверхности $\bar{S}$. Границу Γ поверхности S будем считать состоящей из m простых, замкнутых, попарно непересекающихся кривых Γ_i , $i = 1, \dots, m$. Через S^* обозначим односвязную поверхность, которая получается из поверхности S проведением $2p + m - 1$ (произвольных) гладких канонических разрезов Z_k , $k = 1, \dots, 2p + m - 1$ (если $p = 0$ и S односвязна, полагаем $S^* = S$). Противоположные берега разреза Z_k будем обозначать соответственно Z_k^+ и Z_k^- .

Пусть S_t^* — изгибание поверхности S^* . Будем говорить, что поверхность S^* изгибается с выполнением условия (*), если для любого значения параметра изгибания $t \in [0, 1]$ кривые Z_{kt}^+ и Z_{kt}^- , $k = 1, \dots, 2p + m - 1$, конгруэнтны.

В дальнейшем считаем выполненными следующие предположения о регулярности: $\Gamma \in C_\alpha^1$, $0 < \alpha < 1$; $Z_k \in C^1$, $k = 1, \dots, 2p + m - 1$; $\bar{S} \in D_{3, \rho}$, $\rho > 2$ (в окрестности каждой точки поверхности $\bar{S}$ существует такая локальная параметризация, что задающие ее функции имеют три обобщенные производные в смысле С. Л. Соболева, суммируемые со степенью ρ). В работе изучаются изгибания поверхности S^* с выполнением условия (*) и с сохранением класса $D_{3, \rho}$.

Изгибом поверхности S^* в точке N при изгибании S^* будем называть комплексное число $j_t(S^*, N)$, введенное в § 1 (об индикатрисе Дюпена поверхности, расположенной в римановом

пространстве, см. [6, § 12]). Основной результат работы составляет

Теорема 1. Пусть $\mu_i(t)$, $i = 1, \dots, n$ — непрерывные на $[0, 1]$ функции, $\mu_i(0) = 0$, и N_i — произвольные n различных точек поверхности S^* . Существует константа $\Omega > 0$, определяемая функциями $\mu_i(t)$, поверхностью $\bar{S}$ и набором точек N_i , такая, что если $\text{mes } S < \Omega$, то изгибание S^* при условии (*) можно осуществить таким образом, чтобы изгиб поверхности S^* в точках N_i принимал значения $\mu_i(t')$ для любого наперед заданного $t' \in [0, 1]$ (при этом для остальных $t \neq t'$ величина изгиба поверхности S^* в точках N_i не обязательно совпадает со значениями функций $\mu_i(t)$).

При $n = 1$ изгибание можно осуществить так, чтобы $j_t(S^*, N_1) = \mu_1(t)$, $\forall t \in [0, 1]$.

Здесь и далее mes означает площадь в обычном смысле.

3. О существовании поверхностей ненулевого рода положительной внешней кривизны

Впервые на факт существования замкнутых поверхностей рода $p \geq 1$ с положительной внешней кривизной в римановом пространстве указал А. В. Погорелов [7, гл. 6, § 12]. В примерах, построенных А. В. Погореловым, существование замкнутых поверхностей положительной внешней кривизны ненулевого рода обеспечивается сложной топологической структурой объемлющего пространства, поэтому можно предположить, что замкнутые поверхности ненулевого рода с положительной внешней кривизной могут отсутствовать в некоторых римановых пространствах. Действительно, такие поверхности не существуют в римановых пространствах неотрицательной кривизны. Это сразу же вытекает из формулы Гаусса—Бонне—Чженя [8, с. 270]. Такие поверхности также отсутствуют в пространстве Лобачевского. Докажем это. Допустим, что в трехмерном пространстве Лобачевского есть такая поверхность. Подвергнув ее движению (в случае $p = 1$ такому движению, чтобы одна точка поверхности осталась неподвижной), получим на поверхности ненулевое поле бесконечно малого изгиба. Вместе с тем известно, что замкнутая поверхность рода $p \geq 1$ положительной внешней кривизны не допускает ненулевого поля бесконечно малого изгиба (в случае $p = 1$ — при условии закрепления одной точки поверхности) [7, гл. 6, § 12], [9]. Полученное противоречие доказывает утверждение.

Существование в некоторых римановых пространствах замкнутых поверхностей ненулевого рода положительной внешней кривизны влечет за собой существование в этих пространствах соответствующих поверхностей с краем (полученных из замкнутых выбрасыванием каких-либо областей) и делает корректной задачу их изучения. Но, оказывается, поверхности рода $p \geq 1$ положительной внешней кривизны с краем образуют гораздо более обширный класс, именно поверхности ненулевого рода положительной внешней кривизны с краем существуют в произвольном

регулярном римановом пространстве. Построим примеры таких поверхностей в трехмерном евклидовом пространстве*. Предварительно опишем одну вспомогательную конструкцию.

Рассмотрим на плоскости (бесконечную) область G , ограниченную кривыми l_i , $i = 1, 2, 3, 4$ и отрезками прямых γ_j , $j = 1, \dots, 8$, $\gamma_1 \perp \gamma_2$, $\gamma_3 \perp \gamma_4$, $\gamma_5 \perp \gamma_6$, $\gamma_7 \perp \gamma_8$ (см. рис. 1), причем кривые l_i выберем достаточно гладко сопрягающимися с отрезками γ_j . Отрезки γ_1 и γ_7 (γ_3 и γ_6 , γ_2 и γ_4 , γ_5 и γ_8) берем лежащими на одной прямой. Угловые точки границы области обозначим A, B, C, D . Далее введем следующие обозначения: $\delta_1 = \gamma_1 \cup AC \cup \gamma_7$, $\delta_2 = \gamma_3 \cup BD \cup \gamma_6$, $\delta_3 = \gamma_2 \cup AB \cup \gamma_4$, $\delta_4 = \gamma_8 \cup CD \cup \gamma_5$

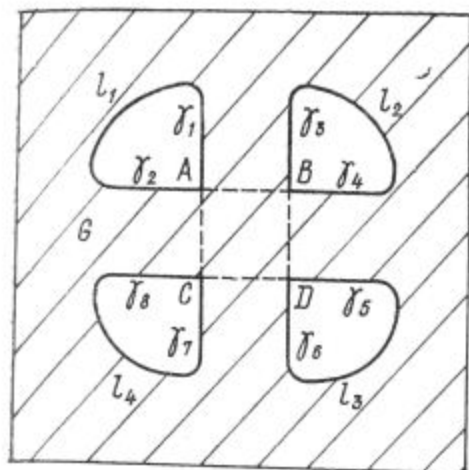


Рис. 1

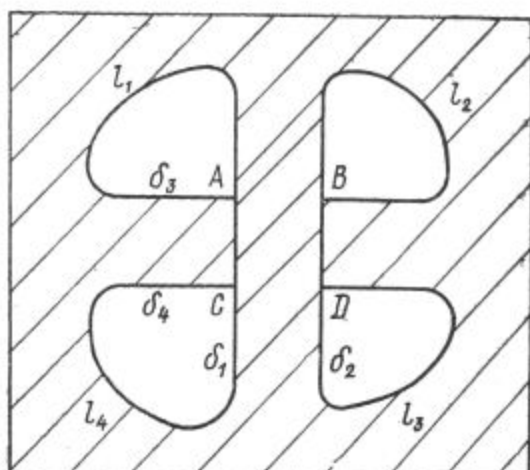


Рис. 2

Область G теперь будем рассматривать как поверхность с границей $L = (\bigcup_{i=1}^4 l_i) \cup (\bigcup_{i=1}^4 \delta_i)$, у которой квадрат $ABCD$ считается дважды покрытым, причем при прохождении границы по вертикали проходится верхний слой, по горизонтали — нижний (см. рис. 2). Очевидно, при такой интерпретации область G есть поверхность ненулевого рода с гладким краем. Такую же конструкцию можно построить из сферы, при этом получим поверхность положительной гауссовой кривизны рода $p = 1$ с гладким краем. Будем такую поверхность (с наложением) называть «сфера с лепестком». Строя на сфере p «лепестков», получим поверхность рода p положительной гауссовой кривизны с краем. Очевидно, что малой деформацией, сохраняющей регулярность и знак гауссовой кривизны, сферу с лепестками можно превратить в поверхность без наложений.

Теперь опишем построение соответствующей поверхности в произвольном римановом пространстве.

* Независимо от автора примеры поверхностей ненулевого рода положительной гауссовой кривизны с краем, расположенных в евклидовом пространстве, построены Е. В. Тюриковым. Эти примеры не опубликованы.

Рассмотрим трехмерное риманово пространство R_3 с k раз дифференцируемой метрикой ($k \geq 6$). Зафиксируем в пространстве R_3 двумерный элемент с центром в точке P . Если пространство R_3 неполное, расстояние от точки P до его границы обозначим δ . Рассмотрим в R_3 шар Δ радиуса $\delta' < \delta$ (если R_3 полно, то δ' произвольно) с центром в точке P . Этот шар будет компактным. Через c обозначим точную нижнюю грань кривизны пространства R_3 по двумерным направлениям в точках шара Δ . В евклидовом пространстве выберем сферу Δ_ϵ радиуса ϵ настолько малого, чтобы внутренний диаметр этой сферы был меньше δ' и чтобы гауссова кривизна сферы Δ_ϵ была больше c .

По теореме А. В. Погорелова о погружаемости метрик, заданных на сфере, в трехмерное риманово пространство [7, гл. 6] сфера Δ_ϵ допускает изометричное погружение в риманово пространство R_3 в виде регулярной замкнутой поверхности с положительной внешней кривизной, гомеоморфной сфере и касающейся в точке P заданного двумерного элемента (изометричного касательному к Δ_ϵ двумерному элементу). Строя из этой поверхности конструкцию с p «лепестками», получим поверхность рода p с положительной внешней кривизной с краем, расположенную в R_3 .

4. Доказательство теоремы 1

1. Вводя в окрестности каждой точки поверхности $\bar{S}$ сопряженно изотермическую параметризацию (u^1, u^2) , превратим S в риманову поверхность $\tilde{S}$ с краем Γ , с локальной униформирующей $z = u^1 + iu^2$ [9, 10]. Рассмотрим на римановой поверхности $\tilde{S}$ систему уравнений Гаусса—Петерсона—Кодацци, записанную в комплексной форме [10]:

$$\begin{aligned} \partial_{\bar{z}} w + B(z) \bar{w} &= \{-C(z) P(z) + \partial_z P \sqrt{g V K}\}, \\ P(z) &= -\sqrt{K} + \sqrt{K + |w|^2 (g V K)^{-1}}, \end{aligned} \quad (1)$$

где K — внешняя кривизна поверхности S ; $K \geq k_0 > 0$, $k_0 = \text{const}$, $w(z) = \sqrt[4]{K} (b_{11} - b_{22} - 2ib_{12})$ — комплексная функция напряжений; b_{ij} — второй основной тензор поверхности S ; g — дискриминант метрического тензора поверхности S ;

$$\begin{aligned} B(z) &= \frac{1}{4} \{\Gamma_{11}^1 - \Gamma_{22}^1 - 2\Gamma_{12}^2 + i(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{11}^2 - 2\Gamma_{12}^1)\}; \\ C(z) &= \frac{1}{2} \{-(\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^1) + i(\Gamma_{22}^2 + \Gamma_{11}^2)\}; \end{aligned}$$

Γ_{ij}^k — символы Христовфеля второго рода поверхности S .

Величины w , B , C , P , g , K при переходе в окрестности данной точки римановой поверхности $\tilde{S}$ к новой локальной униформирующей $z' = u^{1'} + iu^{2'}$ преобразуются по законам [10]:

$$w(z') = w(z) \left(\frac{dz}{dz'} \right)^2; \quad B(z') = B(z) \left(\frac{dz}{dz'} \right)^2 \frac{dz'}{dz}; \quad (2)$$

$$C(z') = C(z) \frac{dz}{dz'}; \quad g(z') = g(z) \left| \frac{dz}{dz'} \right|^4; \quad K(z') = K(z); \quad P(z') = P(z).$$

Кроме того, $B, C \in L_p(\tilde{S} \cup \Gamma)$, $p > 2$.

Покажем, что для доказательства существования изометрических преобразований поверхности S^* в классе $D_{3,p}$ при условии (*) достаточно построить не равные тождественно нулю решения системы (1) класса $D_{1,p}$.

Рассмотрим на S область G_k^- , гомеоморфную плоскому кольцу либо прямоугольнику, ограниченную в первом случае кривой Z_k^+ и гомотопной ей кривой $\overset{0}{Z}_k^-$, во втором случае еще частью границы Γ . Аналогично определим на S область G_k^+ , причем считаем,

что $\overset{0}{Z}_k^-$ и $\overset{0}{Z}_k^+$ расположены по разные стороны от Z_k , $k = 1, 2, \dots, 2p + m - 1$. Обозначим $\overset{0}{S} = S^* \cup \left(\bigcup_{k=1}^{2p+m-1} G_k^+ \right) \cup \left(\bigcup_{k=1}^{2p+m-1} G_k^- \right)$

и $S_k = G_k^+ \cup G_k^-$. Поверхность $\overset{0}{S}$ односвязна (с наложениями) класса $D_{3,p}$, $S^* \subset \overset{0}{S}$, $S_k \in D_{3,p}$.

Не равное тождественно нулю решение системы (1) класса $D_{1,p}(\tilde{S} \cup \Gamma)$ определяет изометрическое преобразование поверхности $\overset{0}{S}$ [11]. Кривые Z_k^- и Z_k^+ , $k = 1, \dots, 2p + m - 1$ после этого преобразования будут находиться на поверхностях класса $D_{3,p}$, полученных изометрическим преобразованием S_k и имеющих одинаковые первый и второй основные тензоры. Эти поверхности, а следовательно, и кривые Z_k^+ и Z_k^- будут конгруэнтны [11].

2. Обозначим через R дубль римановой поверхности $\tilde{S}$ [12, гл. 2, § 2]. Пусть $M(t, z)$ — ядро Коши на римановой поверхности R такое, что дивизор его особенностей лежит вне $\tilde{S}$ [13]. Через $\varphi(z)$ обозначим абелеву коварианту по z на римановой поверхности R , не имеющую нулей и полюсов в $\tilde{S}$ [14]. Справедлива

Лемма 1. Пусть $f(z)$ — аналитическая на $\tilde{S}$ и непрерывная в $\tilde{S} \cup \Gamma$ функция. Существует константа $\Omega_1 > 0$, зависящая от функции f , некоторой точки $z_1 \in \tilde{S}$ и поверхности S , такая, что при $\text{mes} S < \Omega_1$ на S существует коварианта по $\bar{z}$: $\xi = \xi(z, f, f'_z)$ класса L_p , $p > 2$, обладающая следующим свойством: функция

$$\hat{w}(z) = f(z) \exp \left\{ -\frac{1}{\pi} \int_{\tilde{S}} \xi(\zeta, f(\zeta), f'_\zeta(\zeta)) [M(\zeta, z) - M(\zeta, z_1)] dT_\zeta \right\}$$

определяет на $\tilde{S}$ комплексное поле напряжений $\omega(z)$ по формуле $\omega(z) = \varphi^2(z) \hat{\omega}(z)$, причем $\hat{\omega}(z_1) = f(z_1)$.

Эта лемма будет доказана в § 5.

3. Отметим взаимосвязь между изгибом поверхности S^* в точке N и значением комплексной функции напряжений в этой точке. Пусть поверхность S^* подвергнута непрерывному изгибанию S_t^* с изгибом $J_t(S^*, N)$ в точке N . Заданием изгиба в точке N однозначно определяется индикатриса кривизны Дюпена $\mathcal{D}_t$ поверхности S_t^* и, следовательно, коэффициенты b_{ij} второй основной формы поверхности S_t^* в точке N (вычисленные в какой-либо фиксированной локальной параметризации). Так как комплексная функция напряжений ω_t представима в виде $\omega_t = \sqrt[4]{K} (b_{11t} - b_{22t} - 2ib_{12t})$, то заданием изгиба поверхности в точке N однозначно определяются в этой точке значения функции ω_t (в зафиксированной локальной параметризации) и значения функции $\hat{\omega}_t = \omega_t/\varphi^2$ (значения функции $\hat{\omega}_t$ от параметризации не зависят). Из непрерывности $J_t(S^*, N)$ по t вытекает непрерывность в точке N по t функций ω_t , $\hat{\omega}_t$ и наоборот.

4. Докажем теорему 1. Пусть сначала $\mu_1(t)$ — та, что в условии теоремы, а $\mu_2(t) \equiv \dots \equiv \mu_n(t) = 0$. Точку N_k как точку римановой поверхности $\tilde{S}$ будем обозначать z_k , $k = 1, \dots, n$. Зададим в точке N_1 изгиб как функцию от t : $J_t(S^*, N_1) = \mu_1(t)$. В силу сказанного выше по функции $\mu_1(t)$ можно построить непрерывную функцию $\lambda_1(t)$ такую, что $\hat{\omega}_t(z_1) = \lambda_1(t)$ и обратно, по функции $\lambda_1(t)$ можно восстановить $\mu_1(t)$ [3, § 2].

Выберем семейство аналитических на $\tilde{S}$ и непрерывных на $\tilde{S} \cup \Gamma$ функций $f_t(z)$, $t \in [0, 1]$, непрерывное по t вместе со своими производными, равномерно ограниченное, удовлетворяющее следующим условиям: а) $f_0(z) \equiv 0$ на $\tilde{S}$; б) $f_t(z_1) = \lambda_1(t)$, $\forall t \in [0, 1]$; в) $f_t(z_k) = 0$, $k = 2, \dots, n$, $\forall t \in [0, 1]$.

В силу леммы 1, непрерывности и равномерной ограниченности этого семейства при $\text{mes } S < \Omega_1$, где Ω_1 — некоторая константа, существует непрерывное семейство комплексных функций напряжений $\omega_t(z)$ такое, что а) $\omega_0(z) \equiv 0$ на $\tilde{S}$; б) $\omega_t(z_1) = \varphi^2(z_1) \lambda_1(t)$, $\forall t \in [0, 1]$; в) $\omega_t(z_k) = 0$, $k = 2, \dots, n$, $\forall t \in [0, 1]$. Следовательно, при $\text{mes } S < \Omega_1$ поверхность S^* допускает непрерывное изгибание при условии (*) с сохранением точек конгруэнтности N_k , $k = 2, \dots, n$, и при $J_t(S^*, N_1) = \mu_1(t)$. Поверхность S_t^* , полученную при изгибании S^* , будем рассматривать как исходную. Представляя ее как риманову поверхность $\tilde{S}_t^*$, полученную локально-конформным склеиванием кривых Z_{kt}^+ и Z_{kt}^- [15], вопрос об изгибании поверхности S_t^* при условии (*) сведем к вопросу существования решений системы (1) на римановой поверхности $\tilde{S}_t^*$ (гомеоморфной $\tilde{S}$).

Зададим для поверхности S_i^* , $\mu_1(t) \equiv 0$, $\mu_2(t)$ — ту, что в условии теоремы, $\mu_3(t) \equiv \dots \equiv \mu_n(t) \equiv 0$. Рассуждая, как и выше, получим, что в точке N_1 изгиб не изменился (при изгибании поверхности S_i^*), в точке N_2 он принял значение $\mu_2(t')$, а точки $N_3, \dots, N_n$ остались точками конгруэнтности. Повторяя этот процесс еще $(n-2)$ раза, получим теорему 1.

5. Доказательство леммы 1

На поверхности $\bar{S}$ зафиксируем какой-либо атлас, среди карт которого содержится конечное покрытие поверхности S . Во всех дальнейших рассуждениях это покрытие будем считать неизменным. Зафиксируем триангуляцию $\{\Delta_i\}$ римановой поверхности $\bar{S}$ такую, что каждый элемент триангуляции лежит в области действия какой-либо карты из выбранного на $\bar{S}$ атласа. В пространстве $L_p(\bar{S} \cup \Gamma)$ определим норму по формуле

$$L_p(f, \bar{S} \cup \Gamma) = \sum_{\Delta_i} L_p(f, \Delta_i), \quad (3)$$

где $L_p(f, \Delta_i)$ — норма $f(z)$ в фиксированной карте, содержащей элемент Δ_i , определенная в работе [5, гл. 1, § 1].

$L_p(\bar{S} \cup \Gamma)$ с нормой (3) — банахово пространство [16].

Произведем замену комплексного поля напряжений $w(z)$ в уравнении (1) по формуле $w(z) = f(z) \varphi^2(z) v(z)$. Преобразуя вновь полученное уравнение по методу работы [3], получаем

$$\partial_z v + v_1(z, f, v) \partial_z v + v_2(z, f, v) \partial_z \bar{v} + d(z, f, f'_z, v) = 0, \quad (4)$$

$$\text{где} \quad v_1 = \frac{\beta}{1 - \alpha \bar{\alpha}}; \quad v_2 = \frac{-\alpha \beta}{1 - \alpha \bar{\alpha}}; \quad d = \frac{K_2 - \alpha \bar{K}_2}{1 - \alpha \bar{\alpha}};$$

$$\alpha = \frac{\bar{\Phi} v}{2 \sqrt{K + |\Phi v|^2}}; \quad \beta = \frac{\bar{\Phi} \bar{v}}{2 \sqrt{K + |\Phi v|^2}};$$

$$K_2 = K_1 v + \bar{B} \frac{\bar{\Phi} \bar{v}}{\Phi}; \quad K_1 = \frac{2C \bar{\Phi} \bar{v}}{\sqrt{K + |\Phi v|^2}} - \quad (5)$$

$$- \frac{2\bar{v} \left[\frac{\bar{\Phi}}{\Phi} \partial_z \Phi + \bar{\Phi} \partial_z \ln(g \sqrt{K})^{-\frac{1}{2}} \right]}{\sqrt{K + |\Phi v|^2}} -$$

$$- \frac{2\partial_z \sqrt{K} \bar{\Phi} \bar{v}}{\sqrt{K + |\Phi v|^2} (\sqrt{K} + \sqrt{K + |\Phi v|^2})}; \quad \Phi = \frac{f \varphi^2}{V_g \sqrt{K}};$$

$$\Phi \in L_p(\bar{S} \cup \Gamma), \quad \Phi(z') = \Phi(z) \frac{dz'}{dz} \frac{dz}{dz'};$$

причем $|\Phi(z)|$ — инвариант на $\bar{S}$.

Из соотношений (2) и (5) имеем

$$v_1(z') = v_1(z) \frac{dz}{dz'}, \quad v_2(z') = v_2(z),$$

$$d(z') = d(z) \frac{dz}{dz'}, \quad v(z') = v(z).$$

Кроме того,

$$|v_1| + |v_2| = (\sqrt{4K|\Phi v|^{-2} + 4} - 1)^{-1} \leq v_0(\Lambda) < 1 \quad (6)$$

при $\max_{\tilde{S} \cup \Gamma} |\Phi| \cdot \max_{\tilde{S} \cup \Gamma} |v| \leq \Lambda = \text{const}$, $\lim_{\Lambda \rightarrow +\infty} v_0(\Lambda) = 1$.

Будем искать решение уравнения (4), удовлетворяющее условиям

$$v(z_1) = 1, \quad \max_{\tilde{S} \cup \Gamma} |v| \leq \Lambda / \max_{\tilde{S} \cup \Gamma} |\Phi|, \quad (7)$$

где Λ — некоторая достаточно большая фиксированная в дальнейшем постоянная.

Произведем замену искомой функции в уравнении (4) по формуле $v = \exp(-\omega(z))$. От функции $\omega(z)$, требуем, чтобы она была: 1) непрерывна в $\tilde{S} \cup \Gamma$; 2) голоморфно продолжаема в $R \setminus S$; 3) $\omega(z_1) = 0$. Из (4) получаем уравнение для функции $\omega(z)$

$$\partial_{\bar{z}} \omega + \tilde{v}_1(z, \omega) \partial_z \omega + \tilde{v}_2(z, \omega) \partial_{\bar{z}} \bar{\omega} + \tilde{d}(z, \omega, f, f') = 0, \quad (8)$$

где $\tilde{v}_1(z, \omega) = v_1(z, e^{-\omega})$; $\tilde{v}_2(z, \omega) = v_2(z, e^{-\omega}) e^{-\bar{\omega} + \omega}$; $\tilde{v}_1 \equiv \tilde{v}_2 \equiv \tilde{d} \equiv 0$ в $R \setminus \tilde{S}$, причем коэффициенты уравнения (8) при переходе от параметра z к параметру z' преобразуются по тем же законам, что и коэффициенты уравнения (4). Кроме того, в силу неравенства (6) $|\tilde{v}_1| + |\tilde{v}_2| \leq v_0(\Lambda) < 1$ при условии $\max_{\tilde{S} \cup \Gamma} |e^{-\omega}| \times \max_{\tilde{S} \cup \Gamma} |\Phi| \leq \Lambda$.

Согласно результатам работы [17], решение уравнения (8) следует искать в виде $\omega = T\xi = -\frac{1}{\pi} \iint_{\tilde{S}} \xi(\zeta) [M(\zeta, z) - M(\zeta, z_1)] \times$

$\times dT_\zeta$, где $\xi(z)$ — искомая коварианта по $\bar{z}$ класса $L_\rho(\tilde{S} \cup \Gamma)$; $M(\zeta, z)$ — ядро Коши на R , то же, что и в § 4.

Подставляя это выражение в уравнение (8), получаем нелинейное сингулярное интегральное уравнение, которому удовлетворяет коварианта $\xi(z)$

$$\xi(z) + \tilde{v}_1(z, T\xi) \Pi \xi + \tilde{v}_2(z, T\xi) \bar{\Pi} \xi + \tilde{d}(z, T\xi, f, f') = 0, \quad (9)$$

где $\Pi \xi = \partial_z T\xi$ — коварианта по z на R .

Оценим $|\tilde{v}_1(z, T\xi)| + |\tilde{v}_2(z, T\xi)|$ как функцию от $\xi \in L_\rho(\tilde{S} \cup \Gamma)$. Рассмотрим в пространстве $L_\rho(\tilde{S} \cup \Gamma)$, $\rho > 2$ множество кова-

риант из шара $L_p(\sigma, \tilde{S} \cup \Gamma) \leq r_0$, полагая $r_0 = M_1 \ln(\Lambda / \max_{\tilde{S} \cup \Gamma} |\Phi|)$, где M_1 выбрана так, чтобы согласно работам [18, 19]

$$C(T\sigma, \tilde{S} \cup \Gamma) \leq M_1^{-1} L_p(\sigma, \tilde{S} \cup \Gamma). \quad (10)$$

Покажем, что при $L_p(\sigma, \tilde{S} \cup \Gamma) \leq r_0$ имеет место неравенство

$$\max_{\tilde{S} \cup \Gamma} |\Phi| \cdot \max_{\tilde{S} \cup \Gamma} |e^{-T\sigma}| \leq \Lambda. \quad (11)$$

Действительно, при $L_p(\sigma, \tilde{S} \cup \Gamma) \leq r_0$ будет $|\operatorname{Re} T\sigma| \leq |T\sigma| \leq M_1^{-1} L_p(\sigma, \tilde{S} \cup \Gamma) \leq \ln(\Lambda / \max_{\tilde{S} \cup \Gamma} |\Phi|)$, или $-\operatorname{Re} T\sigma \leq \ln(\Lambda / \max_{\tilde{S} \cup \Gamma} |\Phi|)$. Так как $|e^{-T\sigma}| = e^{-\operatorname{Re} T\sigma}$, то $|e^{-T\sigma}| \leq \Lambda / \max_{\tilde{S} \cup \Gamma} |\Phi|$, откуда и следует (11).

Обсудим теперь поведение константы M_1 в неравенстве (10) при изменении $\operatorname{mes} S$. Рассмотрим область действия U некоторой карты на S из зафиксированного покрытия и оператор

$$T\sigma = -\frac{1}{\pi} \iint_U \sigma(\zeta) [M(\zeta, z) - M(\zeta, z_1)] dT\zeta; \quad (12)$$

$\sigma(\zeta) \in L_p(\tilde{S} \cup \Gamma)$, ζ — параметр карты в U . Из неравенства Гельдера легко получить, что

$$|T\sigma| \leq M_2 L_p(\sigma, \bar{U}), \quad (13)$$

где $\bar{U}$ — замыкание U ;

$$M_2 = M_3 (\operatorname{mes} U)^{1/p'q}, \quad \frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} = 1, \quad q' \in \left(1, \frac{2}{q}\right),$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad M_3 = M_3(\rho) = \operatorname{const}. \quad (14)$$

Если учесть (3), то можно считать, что константа M_1^{-1} складывается из констант вида (14). Отсюда следует, что $M_1^{-1} \rightarrow 0$ при $\operatorname{mes} S \rightarrow 0$, т. е. $r_0 \rightarrow \infty$ при $\operatorname{mes} S \rightarrow 0$.

Рассмотрим линейное уравнение для ковариант по $\bar{z}$

$$\xi(z) + \tilde{v}_1(z, T\sigma) \Pi \xi + \tilde{v}_2(z, T\sigma) \bar{\Pi} \xi + \tilde{d}(z, T\sigma, f, f'_z) = 0, \quad (15)$$

где $\sigma \in L_p(\tilde{S} \cup \Gamma)$, $L_p(\sigma, \tilde{S} \cup \Gamma) \leq r_0$. На R существует единственное в классе $L_p(\tilde{S} \cup \Gamma)$ непрерывное решение уравнения (15), аналитическое в $R \setminus \tilde{S}$ [17]. Обозначим это решение $\xi = L\sigma$. L — нелинейный оператор, действующий в банаховом пространстве $L_p(\tilde{S} \cup \Gamma)$ ковариант по $\bar{z}$. Покажем, что оператор L при $\operatorname{mes} S \leq \Omega_1$, где Ω_1 — некоторая константа, отображает шар $L_p(\sigma, \tilde{S} \cup \Gamma) \leq r_0$ в шар меньшего радиуса r_1 . Зафиксируем

$\rho \in (2, 2 + \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$ — некоторая постоянная, так, чтобы выполнялось неравенство

$$\nu_0(\Lambda) L_\rho(\Pi, \tilde{S} \cup \Gamma) < 1, \quad (16)$$

что можно сделать в силу непрерывной зависимости $L_\rho(\Pi, \tilde{S} \cup \Gamma)$ от ρ и $L_2(\Pi, \tilde{S} \cup \Gamma) = 1$ [16]. Обозначим $K_3 = L_\rho(\tilde{d}, \tilde{S} \cup \Gamma)$. Тогда из уравнений (15) и (16) найдем

$$L_\rho(\xi, \tilde{S} \cup \Gamma) \leq \frac{K_3}{1 - \nu_0(\Lambda) L_\rho(\Pi, \tilde{S} \cup \Gamma)} = r_1 \quad (17)$$

для $\forall \sigma: L_\rho(\sigma, \tilde{S} \cup \Gamma) \leq r_0$. Выберем константу Ω_1 настолько малой, чтобы при $\text{mes } S < \Omega_1$ было

$$M_1 \ln(\Lambda / \max_{\tilde{S} \cup \Gamma} |\Phi|) = r_0 > r_1. \quad (18)$$

Такой выбор возможен, так как $M_1 \rightarrow +\infty$ при $\text{mes } S \rightarrow 0$.

Покажем, что оператор L слабо непрерывен в шаре $L_\rho(\sigma, \tilde{S} \cup \Gamma) \leq r_0$. Пусть $\{\sigma_m\}$ — последовательность ковариант по $\tilde{z}$ из шара $L_\rho(\sigma, \tilde{S} \cup \Gamma) \leq r_0$, слабо сходящаяся в $L_\rho(\tilde{S} \cup \Gamma)$ к коварианте σ_0 . Рассмотрим последовательность ковариант по $\tilde{z}$: $\xi_m = L\sigma_m$, являющихся решениями уравнения (15) при $\sigma = \sigma_m$, и пусть ξ_0 — решение этого уравнения при $\sigma = \sigma_0$. Разность $\xi_m - \xi_0$ есть решение уравнения

$$(\xi_m - \xi_0) + \tilde{v}_1(z, T\sigma_0) \Pi (\xi_m - \xi_0) + \tilde{v}_2(z, T\sigma_0) \bar{\Pi} (\xi_m - \xi_0) = F_m,$$

где $F_m = [\tilde{v}_1(z, T\sigma_0) - \tilde{v}_1(z, T\sigma_m)] \Pi \xi_m + [\tilde{v}_2(z, T\sigma_0) - \tilde{v}_2(z, T\sigma_m)] \times \times \bar{\Pi} \xi_m + [\tilde{d}(z, T\sigma_0) - \tilde{d}(z, T\sigma_m)]$.

Последовательность ковариант F_m слабо сходится в $L_\rho(\tilde{S} \cup \Gamma)$ к нулю. Действительно, так как $\sigma_m \xrightarrow{\text{сл.}} \sigma_0$, то в силу полной непрерывности оператора T , действующего из $L_\rho(\tilde{S} \cup \Gamma)$ в $C(\tilde{S} \cup \Gamma)$ [19], последовательность функций $T\sigma_m$ сходится равномерно на $\tilde{S} \cup \Gamma$ к $T\sigma_0$. Далее, так как ξ_m является решением уравнения (15) при $\sigma = \sigma_m$, то нормы $L_\rho(\xi_m, \tilde{S} \cup \Gamma)$, $L_\rho(\Pi \xi_m, \tilde{S} \cup \Gamma)$ ограничены в совокупности [19]. Отсюда, с учетом (5), следует, что последовательность $\{F_m\}$ удовлетворяет таким условиям:

- 1) последовательность норм $\{L_\rho(F_m, \tilde{S} \cup \Gamma)\}$ ограничена;
- 2) $\lim_{m \rightarrow \infty} \iint_{\tilde{S}} F_m \bar{g} dT_\zeta = 0$ для $\forall g(\zeta)$ из пространства $L_{\rho'}(\tilde{S} \cup \Gamma)$,

сопряженного пространству $L_\rho(\tilde{S} \cup \Gamma)$, $\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} = 1$,

что доказывает слабую сходимость к нулю последовательности $\{F_m\}$ [20, с. 198].

Рассмотрим линейный ограниченный оператор $V = \tilde{v}_1(z, T\sigma) \times \times \Pi + \tilde{v}_2(z, T\sigma) \bar{\Pi}$. Оператор V отображает пространство $L_\rho(\tilde{S} \cup \Gamma)$,

$\rho > 2$, ковариант по $\bar{z}$ в себя, кроме того, $L_\rho(V, \tilde{S} \cup \Gamma) \leq v_0 \times \times (\Lambda) L_\rho(\Pi, \tilde{S} \cup \Gamma) < 1$. Поэтому оператор $(I + V)$, где I — тождественный оператор, имеет обратный линейный ограниченный оператор $(I + V)^{-1}$. Оператор $(I + V)^{-1}$ переводит слабо сходящиеся последовательности в слабо сходящиеся [20, с. 230, 222], следовательно, $(\xi_m - \xi_0) \xrightarrow{\text{сл.}} 0$ в $L_\rho(\tilde{S} \cup \Gamma)$.

Таким образом, оператор L переводит $L_\rho(\sigma, \tilde{S} \cup \Gamma) \leq r_0$ в шар меньшего радиуса и слабо непрерывен. Так как шар слабо компактен в $L_\rho(\tilde{S} \cup \Gamma)$ [20, с. 202], то, согласно принципу Шаудера для слабо непрерывных отображений банаховых пространств [21, с. 306], оператор L имеет в шаре $L_\rho(\tilde{S} \cup \Gamma) \leq r_0$ неподвижную точку.

Итак, уравнение (9) разрешимо, а следовательно, разрешимо уравнение (8), причем решение $\omega(z)$ удовлетворяет условию $\omega(z_1) = 0$. Лемма 1 доказана.

Список литературы: 1. Кон-Фоссен С. Э. Некоторые вопросы дифференциальной геометрии в целом. — М.: Физматгиз, 1959. — 303 с. 3. Ефимов Н. В. Качественные вопросы теории деформаций поверхностей. — Усп. мат. наук, 1948, 3, вып. 2 (24), с. 47—158. 3. Фоменко В. Т. Изгибание поверхностей с сохранением точек конгруэнтности. — Мат. сб., 1965, 66 (108), № 1, с. 127—141. 4. Климентов С. Б. Изгибаемость поверхностей положительной кривизны. — Мат. заметки, 1976, 19, вып. 5, с. 815—823. 5. Векуа И. Н. Обобщенные аналитические функции. — М.: Физматгиз, 1959. — 628 с. 6. Схоутен И. А., Стройк Д. Дж. Введение в новые методы дифференциальной геометрии. — М.: Изд-во иностр. лит. — 1948. — Т. 2. 348 с. 7. Погорелов А. В. Внешняя геометрия выпуклых поверхностей. — М.: Наука, 1969. — 759 с. 8. Зуланке Р., Винтген П. Дифференциальная геометрия и расслоения. — М.: Мир, 1975. — 348 с. 9. Фоменко В. Т. О жесткости и однозначной определенности замкнутых поверхностей рода $\rho \geq 1$ в римановом пространстве. — Докл. АН СССР, 1973, 213, № 1, с. 45—48. 10. Фоменко В. Т. Об однозначной определенности замкнутых поверхностей рода $\rho \geq 1$ в пространстве постоянной кривизны. — Мат. заметки, 1974, 16, вып. 3, с. 441—445. 11. Климентов С. Б. Глобальная формулировка основной теоремы теории n -мерных поверхностей в m -мерном пространстве постоянной кривизны. — Укр. геометр. сб. 1979, вып. 22, с. 64—81. 12. Шиффер М., Спенсер Д. К. Функционалы на конечных римановых поверхностях. — М.: Изд-во иностр. лит., 1957. — 380 с. 13. Гусман С. Я., Родин Ю. Л. Ядро интеграла типа Коши на замкнутых римановых поверхностях. — Сиб. мат. журн., 1962, 3, № 4, с. 527—531. 14. Родин Ю. Л. Краевые задачи теории аналитических функций на римановых поверхностях конечного рода. Исследования по современным проблемам ТФКП. — М.: Физматгиз, 1960, с. 436—442. 15. Зверович Э. И., Литвинчук Г. С. Краевые задачи со сдвигом для аналитических функций и сингулярные функциональные уравнения. — Усп. мат. наук, 1968, 23, вып. 3 (141), с. 67—121. 16. Филимонова И. И. Некоторые свойства операторов T и Π на конечных римановых поверхностях. — Учен. зап. Пермского гос. ун-та, 1962, 22, № 2, с. 58—62. 17. Тюриков Е. В. К вопросу об изгибании поверхностей положительной внешней кривизны рода $\rho > 0$ с краем, расположенных в пространстве Лобачевского. — Депон. ВИНТИ, 32 с., № 2662—75, 1975, 12A706. 18. Фоменко В. Т., Климентов С. Б. Неизгибаемость замкнутых поверхностей рода $\rho \geq 1$ и положительной внешней кривизны. — Мат. сб., 1976, 101 (143), № 3 (11), с. 402—415. 19. Филимонова И. И. О полной непрерывности оператора T на замкнутой римановой поверхности. — Учен. зап. Пермск. гос. ун-та, 1966, 131, с. 44—48.

20. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа.— М.: Наука, 1976.— 542 с. 21. Красносельский М. А., Забрейко П. П. Геометрические методы нелинейного анализа.— М.: Наука, 1975.— 510 с.

Поступила 20 августа 1977 г.

УДК 513

А. Н. Кованцов

СЕТИ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ НЕЛИНЕЙНЫМИ ПРОЕКТОРАМИ

В теории систем линейных однородных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами важную роль играют так называемые линейные проекторы.

Системой линейных проекторов называют совокупность вырожденных квадратных матриц P_i ($i = \overline{1, n}$), удовлетворяющих следующим условиям

$$P_i P_i = P_i, \quad P_i P_j = 0 \quad (i \neq j), \quad \sum_{i=1}^n P_i = E,$$

где E — единичная матрица [1; 2, с. 108—112].

В настоящей статье мы ограничимся случаем $n = 2$. Заключение, которые при этом будут сделаны, могут быть естественным путем перенесены на $n > 2$. Нас интересуют преимущественно геометрические факты теории проекторов, в частности те сети, которые определяются этими проекторами.

Мы начнем с рассмотрения линейных проекторов с тем, чтобы их свойства в дальнейшем перенести на проекторы нелинейные, которым дадим соответствующее определение.

1. Линейные проекторы. Возьмем на плоскости E_2 две прямые линии (оси проекций), проходящие через начало координат, $l_1: x + \mu y = 0$, $l_2: y + \lambda x = 0$. Рассмотрим два вырожденных преобразования плоскости

$$\omega_1: x' = a(y + \lambda x), \quad y' = b(y + \lambda x), \quad (1)$$

$$\omega_2: x' = c(x + \mu y), \quad y' = d(x + \mu y). \quad (2)$$

Преобразование ω_1 переводит плоскость E_2 в прямую $y' = \frac{b}{a} x'$, преобразование ω_2 переводит плоскость E_2 в прямую $y' = \frac{d}{c} x'$. Выберем коэффициенты a, b, c, d так, чтобы каждая точка прямых l_1, l_2 в каждом из соответствующих преобразований оставалась неподвижной. Это значит, что имеют место тождества $x = a\left(-\frac{x}{\mu} + \lambda x\right)$, $x = c(x - \lambda \mu x)$, $y = b(y - \lambda \mu y)$, $y = d\left(-\frac{y}{\lambda} + \mu y\right)$.

Отсюда $a = -\frac{\mu}{1-\lambda\mu}$, $c = \frac{1}{1-\lambda\mu}$; $b = \frac{1}{1-\lambda\mu}$, $d = \frac{-\lambda}{1-\lambda\mu}$. Формулы преобразования (1), (2) принимают вид $x' = -\frac{\mu\lambda}{1-\lambda\mu}x - \frac{\mu}{1-\lambda\mu}y$, $y' = \frac{\lambda}{1-\lambda\mu}x + \frac{1}{1-\lambda\mu}y$; $x' = \frac{1}{1-\lambda\mu}x + \frac{\mu}{1-\lambda\mu}y$, $y' = -\frac{\lambda}{1-\lambda\mu}x - \frac{\mu\lambda}{1-\lambda\mu}y$. Матрицы этих преобразований, как легко проверить, есть проекторы

$$P_1 = \begin{pmatrix} -\frac{\mu\lambda}{1-\lambda\mu} & -\frac{\mu}{1-\lambda\mu} \\ \frac{\lambda}{1-\lambda\mu} & \frac{1}{1-\lambda\mu} \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-\lambda\mu} & \frac{\mu}{1-\lambda\mu} \\ -\frac{\lambda}{1-\lambda\mu} & -\frac{\mu\lambda}{1-\lambda\mu} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что уравнения (1) и (2) написаны так, что точки прямой l_2 в преобразовании ω_1 переходят в начало координат, а точки прямой l_1 в начало координат переводятся преобразованием ω_2 . Прямые l_1 , l_2 порождают на плоскости следующую сеть линий: $x + \mu y = u$, $y + \lambda x = v$. Линии l_1 , l_2 принадлежат этой сети и соответствуют значениям параметров $u = 0$ (линия l_1), $v = 0$ (линия l_2). Все точки линии $v = \text{const}$ в преобразовании ω_1 переходят в одну и ту же точку $x' = -\frac{\mu v}{1-\lambda\mu}$, $y' = \frac{v}{1-\lambda\mu}$, принадлежащую линии l_1 , в частности, все точки линии l_2 ($v = 0$) указанным преобразованием переводятся в начало координат. Аналогично преобразование ω_2 все точки линии $u = \text{const}$ переводит в одну и ту же точку $x' = \frac{u}{1-\lambda\mu}$, $y' = -\frac{\lambda u}{1-\lambda\mu}$, принадлежащую линии l_2 . В частности, точки линии l_1 ($u = 0$) это преобразование переводит в начало координат.

2. Нелинейные проекторы. Понятие нелинейных проекторов было впервые введено Валеевым К. Г. [3]. Эти проекторы при расщеплении нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (приведении системы к виду $\frac{dz_i}{dt} = f_i(z_i)$) играют такую же роль, какую линейные проекторы играют при расщеплении системы линейных уравнений. Однако в нелинейном случае нет вырожденных матриц P_i . Назовем поэтому системой нелинейных проекторов совокупность вырожденных преобразований пространства, которые обозначим по-прежнему буквами P_i и которые подчиним следующим условиям: $P_i P_i = P_i$, $P_i P_j = 0$ ($i \neq j$); однако понятие суммы вырожденных преобразований остается неопределенным, а потому у нас не будет теперь условия, согласно которому сумма проекторов оказывается равной единичной матрице.

Примечание. Впоследствии мы сопоставим с каждым вырожденным преобразованием вырожденную квадратную матрицу, составленную из частных производных координат точки-образа по координатам точки-прообраза. Тогда, требуя от получаемых

матриц, чтобы их сумма равнялась единичной матрице, придем к некоторому частному случаю вырожденных преобразований.

Пусть по-прежнему $n = 2$. Пусть плоскость E_2 отнесена к прямоугольной декартовой системе координат (что, однако, не уменьшает общности рассуждений). Зададим сеть линий, положив

$$F_1(x, y) = u, \quad F_2(x, y) = v, \quad (3)$$

где $F_1(x, y)$, $F_2(x, y)$ — произвольные функции, подчиненные ограничениям, которые будут сформулированы ниже.

Пусть кривые

$$\gamma_1: F_1(x, y) = 0, \quad \gamma_2: F_2(x, y) = 0 \quad (4)$$

проходят через начало координат. Рассмотрим два вырожденных преобразования

$$P_1: x' = F_1(x, y), \quad y' = \varphi(F_1(x, y)), \quad (5)$$

$$P_2: x' = \psi(F_2(x, y)), \quad y' = F_2(x, y), \quad (6)$$

где функции φ , ψ определяются из уравнений (4), т. е.

$$F_1(\psi(y), y) \equiv 0, \quad F_2(x, \varphi(x)) \equiv 0. \quad (7)$$

Легко видеть, что преобразование P_1 переводит плоскость E_2 в кривую γ_1 , а преобразование P_2 эту же плоскость переводит в кривую γ_2 . Потребуем, чтобы преобразование P_1 оставляло неподвижной каждую точку кривой γ_1 , а преобразование P_2 — каждую точку кривой γ_2 :

$$\begin{aligned} x &\equiv F_1(x, \varphi(x)), & x &\equiv \psi(F_2(\psi(y), y)); \\ y &\equiv \varphi(F_1(x, \varphi(x))), & y &\equiv F_2(\psi(y), y). \end{aligned} \quad (8)$$

Равенства (8) символически могут быть записаны в виде $P_1 P_1 = P_1$, $P_2 P_2 = P_2$. Равенства (7) означают, что преобразование P_1 переводит каждую точку кривой γ_2 , а преобразование P_2 — каждую точку кривой γ_1 — в начало координат. Эти равенства символически могут быть записаны в виде $P_1 P_2 = 0$, $P_2 P_1 = 0$. Равенства (8) и есть те ограничения, необходимость которых была оговорена выше. Эти ограничения не уменьшают общей широты класса функций F_1 , F_2 — две функции двух аргументов. Укажем геометрическое построение функций F_1 , F_2 . С этой целью будем отправляться от двух плоских кривых γ_1 , γ_2 , проходящих через начало координат: $\gamma_1: y = \varphi(x)$, $\gamma_2: x = \psi(y)$. Проведем через кривую γ_1 цилиндр C_1 , образующие которого перпендикулярны плоскости. Введя ось аппликат Oz , пересечем этот цилиндр биссекторной плоскостью $z = x$. В сечении получим некоторую плоскую кривую ε_1 . Проведем теперь произвольную поверхность $\sigma_1: z = F_1(x, y)$ через кривые ε_1 и γ_2 . Аналогично построим поверхность $\sigma_2: z = F_2(x, y)$, проходящую через кривую γ_1 и кривую ε_2 — линию пересечения биссекторной плоскости $z = y$ с цилиндром $C_2: x = \psi(y)$. Функции $F_1(x, y)$, $F_2(x, y)$ и есть те, которые в на-

ших рассуждениях осуществляют вырожденные преобразования P_1 и P_2 . Поскольку эти функции произвольны, то и определяемая ими сеть (мы будем называть ее проектирующей сетью) произвольна.

3. Проекторы, определяющие чебышевскую проектирующую сеть. Сопоставим с преобразованиями (5) и (6) вырожденные матрицы (обозначим их теми же буквами P_1, P_2), составленные из частных производных функций x', y' по x, y :

$$P_1 = \begin{pmatrix} F_{1x} & F_{1y} \\ \varphi' F_{1x} & \varphi' F_{1y} \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} \psi' F_{2x} & \psi' F_{2y} \\ F_{2x} & F_{2y} \end{pmatrix},$$

где φ, ψ — известные функции от F_1, F_2 . В общем случае эти матрицы не являются проекторами. Найдем функции F_1, F_2 так, чтобы матрицы P_1, P_2 удовлетворяли условиям $P_1 P_1 = P_1, P_2 P_2 = P_2, P_2 P_1 = P_1 P_2 = 0$.

Найдем

$$P_1 P_1 = \begin{pmatrix} F_{1x}(F_{1x} + \varphi' F_{1y}) & F_{1y}(F_{1x} + \varphi' F_{1y}) \\ \varphi' F_{1x}(F_{1x} + \varphi' F_{1y}) & \varphi' F_{1y}(F_{1x} + \varphi' F_{1y}) \end{pmatrix}.$$

Требуя, чтобы $P_1 P_1 = P_1$, приходим к единственному равенству

$$F_{1x} + \varphi' F_{1y} = 1. \quad (9)$$

Аналогично из равенства $P_2 P_2 = P_2$ получаем

$$F_{2y} + \psi' F_{2x} = 1. \quad (10)$$

Далее $P_1 P_2 = \begin{pmatrix} F_{2x}(\psi' F_{1x} + F_{1y}) & F_{2y}(\psi' F_{1x} + F_{1y}) \\ \varphi' F_{2x}(\psi' F_{1x} + F_{1y}) & \varphi' F_{2y}(\psi' F_{1x} + F_{1y}) \end{pmatrix}$. Требуя,

чтобы выполнялось равенство $P_1 P_2 = 0$, приходим к единственному соотношению

$$\psi' F_{1x} + F_{1y} = 0. \quad (11)$$

Аналогично из условия $P_2 P_1 = 0$ находим

$$\varphi' F_{2y} + F_{2x} = 0. \quad (12)$$

Равенства (9)—(12) приводят к следующим значениям частных производных:

$$\begin{aligned} F_{1x} &= \frac{1}{1 - \varphi' \psi'}, & F_{1y} &= -\frac{\psi'}{1 - \varphi' \psi'}, \\ F_{2y} &= \frac{1}{1 - \varphi' \psi'}, & F_{2x} &= -\frac{\varphi'}{1 - \varphi' \psi'}. \end{aligned} \quad (13)$$

Легко проверить, что для последних уравнений выполнены условия интегрируемости $F_{1xy} = F_{1yx}, F_{2xy} = F_{2yx}$. Следовательно, система уравнений (13) допускает решение, зависящее от двух произвольных постоянных. Эти постоянные выберем так, чтобы были выполнены равенства $F_1(0, 0) = 0, F_2(0, 0) = 0$. Легко видеть, что решение системы (13) есть неявные функции F_1, F_2 ,

определяемые следующей системой конечных уравнений: $x = F_1 + \psi(F_2)$, $y = F_2 + \varphi(F_1)$. Действительно, продифференцировав последние равенства по x , y , получим $1 = F_{1x} + \psi' F_{2x}$, $0 = F_{2x} + \varphi' F_{1x}$, $0 = F_{1y} + \psi' F_{2y}$, $1 = F_{2y} + \varphi' F_{1y}$. Решив эти уравнения относительно частных производных, придем к равенствам (13), что и доказывает утверждение.

Матрицы P_1 , P_2 принимают следующий вид:

$$P_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{1 - \varphi' \psi'} & -\frac{\psi'}{1 - \varphi' \psi'} \\ \frac{\varphi'}{1 - \varphi' \psi'} & -\frac{\varphi' \psi'}{1 - \varphi' \psi'} \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} -\frac{\varphi' \psi'}{1 - \varphi' \psi'} & \frac{\psi'}{1 - \varphi' \psi'} \\ -\frac{\varphi'}{1 - \varphi' \psi'} & \frac{1}{1 - \varphi' \psi'} \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что теперь справедливо соотношение $P_1 + P_2 = E$. В самом деле, возводя последнее равенство в квадрат и учитывая свойство проекторов, получим $(P_1 + P_2)^2 = P_1 + P_2$, что в случае невырожденных матриц справедливо лишь для единичной.

Сеть (3) может быть записана с помощью следующих уравнений

$$x = u + \psi(v), \quad y = v + \varphi(u). \quad (14)$$

Дифференцируя последние равенства, получим

$$dx = du + \psi' dv, \quad dy = dv + \varphi' du;$$

следовательно, $ds^2 = dx^2 + dy^2 = (1 + \varphi'^2) du^2 + 2(\varphi' + \psi') du dv + (1 + \psi'^2) dv^2$. Положив $\sqrt{1 + \varphi'^2} du = du'$, $\sqrt{1 + \psi'^2} dv = dv'$, найдем

$$ds^2 = du'^2 + 2 \cos \omega du' dv' + dv'^2, \quad (15)$$

где ω — угол между линиями u и v , а поэтому и между линиями u' и v' . Равенство (15) показывает, что сеть есть чебышевская [4].

Докажем, что справедливо и обратное утверждение, т. е. если сеть (3) является чебышевской, то матрицы вырожденных преобразований, составленные из частных производных функций x' , y' по x , y [см. (5), (6)], являются проекторами.

Действительно, решим уравнения (4) относительно x , y :

$$x = f_1(u, v), \quad y = f_2(u, v). \quad (16)$$

Отсюда $ds^2 = dx^2 + dy^2 = (f_{1u}^2 + f_{2u}^2) du^2 + 2(f_{1u}f_{1v} + f_{2u}f_{2v}) du dv + (f_{1v}^2 + f_{2v}^2) dv^2$. Для того чтобы сеть была чебышевской, должны быть выполнены равенства $(f_{1u}^2 + f_{2u}^2)_v = 0$, $(f_{1v}^2 + f_{2v}^2)_u = 0$, или

$$f_{1u}f_{1uv} + f_{2u}f_{2uv} = 0, \quad f_{1v}f_{1vu} + f_{2v}f_{2vu} = 0. \quad (17)$$

Поскольку равенства (16) определяют сеть, то якобиан функций f_1 , f_2 отличен от нуля. Поскольку далее $f_{1uv} = f_{1vu}$, $f_{2uv} = f_{2vu}$, то из равенств (17) получаем $f_{1uv} = 0$, $f_{2uv} = 0$. Отсюда $f_1 =$

$= \alpha_1(u) + \beta_1(v)$, $f_2 = \alpha_2(u) + \beta_2(v)$. Если мы положим $\alpha_1(u) = u'$, $\beta_2(v) = v'$, то, решив последние равенства относительно u и v , получим $\beta_1(v) = \psi(v')$, $\alpha_2(u) = \varphi(u')$. Отбросив штрихи, придем к равенствам (14), которые порождают матрицы-проекторы P_1 и P_2 . Утверждение доказано.

Мы отметили ранее, что все точки линии $u = \text{const}$ переводятся преобразованием P_1 в одну и ту же точку кривой γ_1 . Пусть это есть точка $M_1(x_1, y_1)$. Очевидно, $x_1 = u$, $y_1 = \varphi(u)$. Аналогично все точки кривой $v = \text{const}$ преобразованием P_2 переводятся в одну и ту же точку $M_2(x_2, y_2)$ кривой γ_2 . При этом $x_2 = \psi(v)$, $y_2 = v$. Равенства (14) могут быть записаны в виде

$$x = x_1 + x_2, \quad y = y_1 + y_2. \quad (18)$$

Эти равенства, таким образом, являются следствием того, что проектирующая сеть есть чебышевская. Наоборот, из равенств (18) следует, что проектирующая сеть — чебышевская.

Список литературы: 1. Валеев К. Г. Линейные дифференциальные уравнения (расщепление решений). — Киев: Знание, 1978. 2. Розенвассер Е. Н. Показатели Ляпунова в теории линейных систем управления. — М.: Наука, 1977. — 344 с. 3. Валеев К. Г., Жаутыков О. А. Бесконечные системы дифференциальных уравнений. — Алма-Ата: Наука, 1974 — 200 с. 4. Каган В. Ф. Основы теории поверхностей в тензорном изложении, ч. 2. — М.—Л.: Гостехиздат, 1948. — 407 с.

Поступила 5 июня 1979 г.

УДК 513

Н. И. Кованцов

ПОВЕРХНОСТИ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ С ПРЯМОЛИНЕЙНЫМ РЕБРОМ ВОЗВРАТА

В работе [1] доказана возможность построения поверхности заданной отрицательной кривизны, асимптотические линии которой касаются заданной пространственной кривой γ (ребра возврата). При этом метод, с помощью которого такое доказательство было дано, привел к исключению случая прямолинейного ребра. В настоящей статье несколько измененным методом будет доказано существование поверхностей σ заданной отрицательной (в частности, постоянной) кривизны, асимптотические линии которых касаются прямой линии (ребра возврата поверхности).

1. Системы уравнений с двумя независимыми переменными.

Рассуждения, которые приводятся ниже, представляют собой видоизменение рассуждений, используемых Р. Курантом в [2].

Пусть

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^i}{\partial t} &= G_j^i(u^1, \dots, u^m, v^1, \dots, v^p) \frac{\partial u^j}{\partial \theta}, \\ \frac{\partial v^\alpha}{\partial \theta} &= H_\beta^\alpha(u^1, \dots, u^m, v^1, \dots, v^p) \frac{\partial v^\beta}{\partial t}, \\ i, j, \dots &= 1, \dots, m; \alpha, \beta, \dots = 1, \dots, p, \end{aligned} \quad (1)$$

— система дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка при двух независимых переменных t, θ (у Р. Куранта $p = 0$). Функции G_j^i, H_β^α аналитичны в окрестности значений u_0^i, v_0^α . Пусть

$$f^i(\theta), \varphi^\alpha(t) \quad (2)$$

— аналитические функции в окрестности значений θ_0, t_0 . В таком случае уравнения (1) имеют единственное решение

$$u^i = u^i(t, \theta), \quad v^\alpha = v^\alpha(t, \theta), \quad (3)$$

подчиненное условию $u^i(t_0, \theta) = f^i(\theta), \quad v^\alpha(t, \theta_0) = \varphi^\alpha(t)$.

Доказательство. Составим формальные ряды для искомым решений (3), пользуясь уравнениями (1) и функциями (2):

$$\begin{aligned} u^i &= \lambda_{ab}^i (\Delta t)^a (\Delta \theta)^b; \quad a, b = 0, 1, \dots, \infty; \\ v^\alpha &= \mu_{ab}^\alpha (\Delta t)^a (\Delta \theta)^b; \quad \Delta t = t - t_0, \Delta \theta = \theta - \theta_0. \end{aligned} \quad (4)$$

Докажем сходимость рядов (4). С этой целью разложим функции G_j^i, H_β^α в ряды в окрестности значений u_0^i, v_0^α :

$$\begin{aligned} G_j^i &= A_{ja_1 \dots a_m b_1 \dots b_p}^i (\Delta u^1)^{a_1} \dots (\Delta u^m)^{a_m} (\Delta v^1)^{b_1} \dots (\Delta v^p)^{b_p}; \\ H_\beta^\alpha &= H_{\beta a_1 \dots a_m b_1 \dots b_p}^\alpha (\Delta u^1)^{a_1} \dots (\Delta u^m)^{a_m} (\Delta v^1)^{b_1} \dots (\Delta v^p)^{b_p}; \\ a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_p &= 0, 1, \dots, \infty; \\ \Delta u^i &= u^i - u_0^i, \Delta v^\alpha = v^\alpha - v_0^\alpha. \end{aligned} \quad (5)$$

В силу аналитичности функций G_j^i, H_β^α ряды (5) сходятся. Построим для этих рядов мажорирующие ряды (способ построения будет указан ниже):

$$\begin{aligned} A_{ja_1 \dots a_m b_1 \dots b_p}^{*i} &= (\Delta u^1)^{a_1} \dots (\Delta u^m)^{a_m} (\Delta v^1)^{b_1} \dots (\Delta v^p)^{b_p}; \\ H_{\beta a_1 \dots a_m b_1 \dots b_p}^{*\alpha} &= (\Delta u^1)^{a_1} \dots (\Delta u^m)^{a_m} (\Delta v^1)^{b_1} \dots (\Delta v^p)^{b_p}; \\ A_{ja_1 \dots a_m b_1 \dots b_p}^{*i} &\geq |A_{ja_1 \dots a_m b_1 \dots b_p}^i|; \\ H_{\beta a_1 \dots a_m b_1 \dots b_p}^{*\alpha} &\geq |H_{\beta a_1 \dots a_m b_1 \dots b_p}^\alpha|. \end{aligned} \quad (6)$$

Пусть ряды (6) сходятся соответственно к функциям

$$G_j^{*i}(u^1, \dots, u^m, v^1, \dots, v^p), \quad H_\beta^{*\alpha}(u^1, \dots, u^m, v^1, \dots, v^p). \quad (7)$$

Разложим функции (2) в ряды в окрестности значений θ_0, t_0 :

$$f^i = h_b^i (\Delta \theta)^b, \quad \varphi^\alpha = g_a^\alpha (\Delta t)^a. \quad (8)$$

В силу аналитичности функций (2) ряды (8) сходятся. Построим для них мажорирующие ряды (способ построения укажем ниже):

$$h_b^{*i} (\Delta \theta)^b, \quad h_b^{*i} \geq |h_b^i|; \quad g_a^{*\alpha} (\Delta t)^a, \quad g_a^{*\alpha} \geq |g_a^\alpha|. \quad (9)$$

Пусть функции, к которым сходятся ряды (9), есть соответственно

$$f^{*i}(\theta), \varphi^{*\alpha}(t). \quad (10)$$

Составим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^i}{\partial t} &= G_j^{*i}(u^1, \dots, u^m, v^1, \dots, v^p) \frac{\partial u^j}{\partial \theta}, \\ \frac{\partial v^\alpha}{\partial \theta} &= H_\beta^{*\alpha}(u^1, \dots, u^m, v^1, \dots, v^p) \frac{\partial v^\beta}{\partial t}. \end{aligned} \quad (11)$$

Пользуясь этой системой и функциями (10), составим формальные ряды

$$\lambda_{ab}^{*i}(\Delta t)^a(\Delta \theta)^b, \mu_{ab}^{*\alpha}(\Delta t)^a(\Delta \theta)^b. \quad (12)$$

Очевидно, эти ряды являются мажорирующими для рядов (4): $\lambda_{ab}^{*i} \geq |\lambda_{ab}^i|$, $\mu_{ab}^{*\alpha} \geq |\mu_{ab}^\alpha|$.

Обеспечим сходимость рядов (12) подходящим выбором рядов (6) и (9). Пусть ряды (8) сходятся при $|\Delta \theta| < \rho$, $|\Delta t| < \rho$. В этом случае существует число $M > 0$ такое, что для каждого a и b справедливы неравенства $|h_b^i \rho^b| \leq M$, $|g_a^\alpha \rho^a| \leq M$ (по a и b не суммируется). Следовательно, $|h_b^i| \leq M/\rho^b$, $|g_a^\alpha| \leq M/\rho^a$. Положим поэтому

$$h_b^{*i} = M/\rho^b, \quad g_a^{*\alpha} = M/\rho^a. \quad (13)$$

Пусть далее ряды (5) сходятся при $|\Delta u^i| < r$, $|\Delta v^\alpha| < r$. Существует такое $M > 0$ (не нарушая общности, мы считаем его равным предыдущему M), что для любых $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_p$ будут выполнены неравенства

$$\begin{aligned} |A_{ja_1 \dots a_m b_1 \dots b_p}^i r^{a_1 + \dots + a_m + b_1 + \dots + b_p}| &\leq M, \\ |H_{\beta a_1 \dots a_m b_1 \dots b_p}^\alpha r^{a_1 + \dots + a_m + b_1 + \dots + b_p}| &\leq M \text{ (не суммировать)}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} |A_{ja_1 \dots a_m b_1 \dots b_p}^i| &\leq M/r^{a_1 + \dots + a_m + b_1 + \dots + b_p}, \\ |H_{\beta a_1 \dots a_m b_1 \dots b_p}^\alpha| &\leq M/r^{a_1 + \dots + a_m + b_1 + \dots + b_p}. \end{aligned} \quad (14)$$

Положим

$$\begin{aligned} A_{ja_1 \dots a_m b_1 \dots b_p}^{*i} &= H_{\beta a_1 \dots a_m b_1 \dots b_p}^{*\alpha} = \\ &= \frac{M}{r^{a_1 + \dots + a_m + b_1 + \dots + b_p}} \frac{(a_1 + \dots + a_m + b_1 + \dots + b_p)!}{a_1! \dots a_m! b_1! \dots b_p!}. \end{aligned} \quad (15)$$

Очевидно, правые части равенств (15) будут не меньше правых частей неравенств (14), а потому мажорируемость рядов (6) будет обеспечена.

Легко понять, что ряды (6) сходятся к функциям

$$G_j^{*i} = H_\beta^{*\alpha} = \frac{M}{1 - \frac{\Delta u^1 + \dots + \Delta u^m + \Delta v^1 + \dots + \Delta v^p}{r}}, \quad (16)$$

равно как ряды (9) — к функциям

$$f^{*i} = \frac{M_\rho}{\rho - \Delta\theta}, \quad \varphi^{*\alpha} = \frac{M_\rho}{\rho - \Delta t} \quad (17)$$

[см. формулы (13)]. При этом должно быть наложено условие $|\Delta u^1| + \dots + |\Delta u^m| + |\Delta v^1| + \dots + |\Delta v^p| < r$.

Будем искать функцию, которая будет мажорантой для всех искомых функций $u^1, \dots, u^m, v^1, \dots, v^p$. С этой целью внесем в систему (1) вместо G_j^i, H_β^α функции (16) и положим $\Delta u^1 = \dots = \Delta u^m = \Delta v^1 = \dots = \Delta v^p = \Delta u = \Delta v$. Получим всего два уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{(m+p)M}{1 - [(m+p)\Delta u]/r} \frac{\partial u}{\partial \theta}; \quad (18)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{(m+p)M}{1 - [(m+p)\Delta v]/r} \frac{\partial v}{\partial t}. \quad (19)$$

Будем интегрировать уравнение (18) так, чтобы $u(t_0, \theta) = \frac{M_\rho}{\rho - \Delta\theta}$ [см. формулу (17)]. Если для получаемого таким образом решения $u(t, \theta)$ составить ряд, то он будет мажорирующим для всех рядов первой строки (4). Последние, таким образом, будут сходиться.

Аналогично проинтегрируем уравнение (19) так, чтобы $v(t, \theta_0) = \frac{M_\rho}{\rho - \Delta t}$ [см. формулу (17)]. Ряд для найденной таким образом функции $v(t, \theta)$ будет мажорирующим для всех рядов второй строки (4). Тем самым доказана сходимость и этих рядов.

Система (1) имеет специальный вид: в ее коэффициенты не входят независимые переменные. Кроме того, она линейна и однородна относительно частных производных. Несколько видоизменив прием, предложенный Р. Курантом, можно всякую систему первого порядка вида

$$\frac{\partial u^i}{\partial t} = P^i(t, \theta, u^1, \dots, u^m, v^1, \dots, v^p), \quad (20)$$

$$\frac{\partial v^\alpha}{\partial \theta} = Q^\alpha(t, \theta, u^1, \dots, u^m, v^1, \dots, v^p)$$

привести к виду (1). Действительно, присоединим к системе (20) уравнения

$$\frac{\partial \xi}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0, \quad (21)$$

которые будем интегрировать при начальных условиях $\xi(t, \theta_0) = t, \eta(t_0, \theta) = \theta$. Тогда решением системы (21), как легко сообразить, будет $\xi = t, \eta = \theta$. Система (20) вместе с системой (21) примут вид $\frac{\partial u^i}{\partial t} = P^i(\xi, \eta, u^1, \dots, u^m, v^1, \dots, v^p) \frac{\partial \eta}{\partial \theta}, \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0, \frac{\partial \xi}{\partial \theta} = 0, \frac{\partial v^\alpha}{\partial \theta} = Q^\alpha(\xi, \eta, u^1, \dots, u^m, v^1, \dots, v^p) \frac{\partial \xi}{\partial t}$. Это — частный случай системы (1). Очевидно, указанным путем можно привести к виду (1) также и следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial u^i}{\partial t} = P_j^i(t, \theta, u^1, \dots, u^m, v^1, \dots, v^p) \frac{\partial u^j}{\partial \theta} + L^i(t, \theta, u^1, \dots, u^m, v^1, \dots, v^p); \quad (22)$$

$$\frac{\partial v^\alpha}{\partial \theta} = Q_\beta^\alpha(t, \theta, u^1, \dots, u^m, v^1, \dots, v^p) \frac{\partial v^\beta}{\partial t} + M^\alpha(t, \theta, u^1, \dots, u^m, v^1, \dots, v^p).$$

2. Поверхности с прямолинейным ребром возврата.

Пусть $Oijk$ — неподвижный (T), $Aee'k$ — подвижный (T') ортонормированные базисы, причем $A = f(\theta)k, e = \cos \theta i + \sin \theta j, e' = -\sin \theta i + \cos \theta j$. Произвольная кривая l в базисе T' для каждого фиксированного значения θ может быть задана уравнением

$$r = (f + t)k + x(t, \theta)e + y(t, \theta)e'. \quad (23)$$

При одновременном изменении t и θ уравнение (23) определяет некоторую поверхность (σ).

Выберем функции f, x, y так, чтобы переменная кривая l была асимптотической линией поверхности σ и чтобы полная кривизна последней была равна заданной функции — $\lambda^2(t, \theta)$, аналитической в окрестности линии $t = 0$. Для решения поставленной задачи продифференцируем (23):

$$r_t = k + x_t e + y_t e', \quad r_{tt} = x_{tt} e + y_{tt} e', \\ r_{ttt} = x_{ttt} e + y_{ttt} e', \quad r_\theta = f' k + (x_\theta - y) e + (y_\theta + x) e'. \quad (24)$$

Условие того, что кривая l есть асимптотическая линия поверхности σ , сводится к равенству

$$(r_{tt} r_t r_\theta) = -x_{tt}(x + y_\theta - f' y_t) + y_{tt}(-y + x_\theta - f' x_t) = 0. \quad (25)$$

Условие того, что полная отрицательная кривизна поверхности σ есть $-\lambda^2$, запишется с помощью равенства $\lambda = \frac{(r_{ttt} r_{tt} r_t)}{[r_{tt} r_t]^2}$ или

$$x_{ttt} y_{tt} - y_{ttt} x_{tt} - \lambda [x_{tt}^2 + y_{tt}^2 + (x_{tt} y_t - y_{tt} x_t)^2] = 0 \quad (26)$$

(кручение линии l равно $\sqrt{\lambda^2}$). Уравнения (25), (26) определяют искомые поверхности. Наша цель состоит в том, чтобы среди

таких поверхностей найти те, асимптотические линии l которых касаются прямой линии. Примем эту прямую за ось Oz . Тогда

$$x(0, \theta) = y(0, \theta) = 0 \quad (27)$$

(кривая l проходит через точку A). Условия касания будут обеспечены равенствами

$$x_t(0, \theta) = y_t(0, \theta) = 0 \quad (28)$$

[см. (24)]. Будем исходить из предположения: точка A касания кривой l с осью Oz не есть точка распрямления этой кривой, т. е. $r_{tt}(0, \theta) \neq 0$. Следовательно, $x_{tt}^2 + y_{tt}^2 \neq 0$ ($t=0$). Не нарушая общности, можно считать, что $x_{tt}(0, \theta) \neq 0$; это неравенство будет справедливо и в окрестности точки $(0, \theta)$. Положим

$$y_{tt} = hx_{tt}, \quad (29) \quad x_t = a, \quad (30) \quad y_t = -c + ha \quad (31)$$

(a, c, h — новые переменные). Тогда уравнения (25), (26) по сокращении на x_{tt} и x_{tt}^2 соответственно примут вид

$$-x - y_0 - cf' + h(-y + x_0) = 0, \quad h_t = -\lambda(1 + h^2 + c^2). \quad (32)$$

Дифференцируя равенство (31) и учитывая (29) и (30), получаем

$$c_t = -\lambda a(1 + h^2 + c^2). \quad (33)$$

Таким образом, система двух уравнений (25), (26) свелась к системе пяти уравнений в частных производных первого порядка (30) — (33):

$$\begin{aligned} x_t &= a, \quad y_t = -c + ha, \quad y_0 = -x - cf' + h(-y + x_0), \\ c_t &= -\lambda a(1 + h^2 + c^2), \quad h_t = -\lambda(1 + h^2 + c^2). \end{aligned} \quad (34)$$

Ничто не мешает взять в качестве плоскости Aek соприкасающуюся плоскость асимптотической линии l . Тогда

$$h(0, \theta) = 0. \quad (35)$$

Следовательно, система (34) должна быть проинтегрирована при начальных условиях [см. (27), (28), (35)]:

$$x(0, \theta) = y(0, \theta) = a(0, \theta) = c(0, \theta) = h(0, \theta) = 0, \quad a_t(0, \theta) \neq 0. \quad (36)$$

Выписывая условие совместности $y_{t\theta} = y_{\theta t}$, получаем

$$c_\theta = a - \lambda(1 + h^2 + c^2)(af' + y - x_0) - h(c - ha) + ah_\theta. \quad (37)$$

Выпишем теперь условие совместности $c_{t\theta} = c_{\theta t}$:

$$\begin{aligned} a_t[1 + h^2 + h_\theta - \lambda f'(1 + h^2 + c^2)] + 2\lambda(1 + h^2 + c^2)[a_\theta + c - ha + \\ + \lambda(h + ac)(af' + y - x_0) - \frac{\lambda_t}{2\lambda}] = 0. \end{aligned} \quad (38)$$

(Деление на λ возможно; ниже из (42) будет показано, что $\lambda(0, \theta) \neq 0$).

Из равенств (36) следует, что $a_0(0, \theta) = x_0(0, \theta) = h_0(0, \theta) = 0$, следовательно, равенство (38) при $t = 0$ принимает вид

$$a_t(1 - \lambda f') - \lambda_t = 0. \quad (39)$$

Разложим функции a, x, y, c, h в формальные ряды по степеням t , учитывая начальные условия (36):

$$\begin{aligned} a &= a_1 t + \frac{1}{2} a_2 t^2 + \dots, & y &= y_1 t + \frac{1}{2} y_2 t^2 + \dots, \\ x &= x_1 t + \frac{1}{2} x_2 t^2 + \dots, & c &= c_1 t + \frac{1}{2} c_2 t^2 + \dots, \\ h &= h_1 t + \frac{1}{2} h_2 t^2 + \dots. \end{aligned} \quad (40)$$

Коэффициенты последних рядов есть некоторые (пока не известные) функции от θ . Дифференцируя последовательно по t все уравнения (34), кроме содержащего y_0 , и учитывая (36), получаем

$$\begin{aligned} x &= 0, & y &= 0, & h &= 0, \\ x_1 &= 0, & y_1 &= 0, & h_1 &= -\lambda, \\ x_2 &= a_1 \neq 0, & y_2 &= 0, & h_2 &= -\lambda_1, \\ x_3 &= a_2, & y_3 &= -\lambda a_1, & h_3 &= -\lambda_2 - 2\lambda^2, \\ x_4 &= a_3, & y_4 &= -\lambda_1 a_1 - 2\lambda a_2, & h_4 &= -\lambda_3 - 6\lambda_1 \lambda^2, \\ & \dots & & \dots & & \dots \\ & & c &= 0, \\ & & c_1 &= 0, \\ & & c_2 &= -\lambda a_1, \\ & & c_3 &= -\lambda a_2 - 2\lambda_1 a_1, \\ & & c_4 &= -\lambda a_3 - 3\lambda_1 a_2 - 3\lambda_2 a_1 - 6\lambda^3 a_1, \\ & & & \dots & & \dots \end{aligned} \quad (41)$$

Здесь $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ — коэффициенты разложения $\lambda(t, \theta) = \lambda + \lambda_1 t + \frac{1}{2} \lambda_2 t^2 + \dots$.

Закономерности, позволяющие найти общие члены разложения (41), слишком сложны для того, чтобы такие члены можно было выписать. Внесем найденные коэффициенты разложений в единственное уравнение системы (34), содержащее y_0 . Сравнив коэффициенты при степенях t , в частности, получим $a_1(1 - \lambda f') = 0$, откуда

$$1 - \lambda f' = 0. \quad (42)$$

(Из этого следует, что $\lambda \neq 0$ ($t = 0$), как сказано выше.) Внося последнее равенство в (39), найдем $\lambda_t = \lambda_1 = 0$. Из того же уравнения (34) получаем другие соотношения

$$\begin{aligned} a_1' &= \frac{\lambda'}{2\lambda} a_1, \\ a_2' &= \lambda a_1 + \frac{\lambda'}{\lambda} a_2 + 3 \frac{\lambda_2}{2\lambda^2} a_1, \\ &\dots \end{aligned} \quad (43)$$

Здесь также невозможно (по техническим причинам) выписать общий член получающейся последовательности.

Из предыдущего можно сделать вывод, что уравнение (38) не может быть решено относительно a_t .

Введем обозначения:

$$x_0 = \alpha, \quad h_0 = p, \quad a_t = \gamma. \quad (44)$$

Решим уравнение (38) относительно a_0 :

$$a_0 = \frac{[1 + h^2 + p - \lambda f' (1 + h^2 + c^2)] \gamma}{2\lambda (1 + h^2 + c^2)} - \\ - c + ha - \lambda (h + ac) (af' + y - \alpha) + \frac{\lambda_t}{2\lambda}. \quad (45)$$

Условия совместности $x_{t0} = x_{0t}$, $h_{t0} = h_{0t}$ приводят к уравнениям

$$\alpha_t = a_0 = - \frac{[1 + h^2 + p - \lambda f' (1 + h^2 + c^2)] \gamma}{2\lambda (1 + h^2 + c^2)} - \\ - c + ha - \lambda (h + ac) (af' + y - \alpha) + \frac{\lambda_t}{2\lambda}, \quad (46) \\ p_t = -2\lambda (ac + h) (1 + h^2 + c^2).$$

Наконец, условие совместности $a_{t0} = a_{0t}$ приводит к уравнению

$$\gamma_0 = - \frac{1 + h^2 + p - \lambda f' (1 + h^2 + c^2)}{2\lambda (1 + h^2 + c^2)} \gamma_t - \\ - \left[\frac{1 + h^2 + p - \lambda f' (1 + h^2 + c^2)}{2\lambda (1 + h^2 + c^2)} \right]_t \gamma + \\ + \left[-c + ha - \lambda (h + ac) (af' + y - \alpha) + \frac{\lambda_t}{2\lambda} \right]_t. \quad (47)$$

Таким образом, поверхность σ определяется системой уравнений (36), (37), (44) — (47):

$$x_t = a, \quad y_t = -c + ha, \quad c_t = -\lambda a (1 + h^2 + c^2), \\ h_t = -\lambda (1 + h^2 + c^2), \quad a_t = \gamma, \quad \alpha_t = A; \quad (48)$$

$$P_t = -2\lambda (ac + h) (1 + h^2 + c^2), \quad \gamma_0 = B\gamma_t + C; \quad (49)$$

$$x_0 = \alpha, \quad y_0 = -x - cf' + h(-y + \alpha), \quad c_0 = a - \lambda (1 + h^2 + \\ + c^2) (af' + y - \alpha) - h(c - ha) + ap, \quad h_0 = p, \quad a_0 = A, \quad (50)$$

где A — правая часть уравнения (45); B , C — соответствующие коэффициенты, стоящие в правой части уравнения (47). Поскольку $\lambda(t, \theta)$ ($\lambda(0, \theta) \neq 0$) — аналитическая функция, то правые части уравнений (48) — (50) есть аналитические функции аргументов t , θ (они входят в λ и f) и искомых функций x , y , c , h , a , α , p , γ . Система (48) — (50), как легко видеть, есть система вида (22).

Зададим произвольную аналитическую функцию

$$\gamma^*(t) = \gamma(t, 0) = \gamma_0 + \gamma_1 t + \frac{1}{2} \gamma_2 t^2 + \dots \quad (51)$$

Поскольку $\gamma(0, \theta) = a_t(0, \theta) \neq 0$, то $\gamma_0 \neq 0$. Будем интегрировать систему (48) — (50) при начальных условиях:

$$\begin{aligned} x(0, \theta) = y(0, \theta) = c(0, \theta) = h(0, \theta) = a(0, \theta) = \\ = \alpha(0, \theta) = p(0, \theta) = 0, \quad \gamma(t, 0) = \gamma^*(t). \end{aligned} \quad (52)$$

Согласно доказанному ранее, система имеет единственное решение. Чтобы убедиться в том, что найденное решение удовлетворяет системе (50), достаточно доказать, что оно удовлетворяет этим уравнениям при $t = 0$ (ибо тогда условия совместности уравнений (48) и (50) обеспечат выполнение уравнений (50) для любых значений t). Но в силу (52) и легко проверяемого условия $A = 0$ ($t = 0$) это обстоятельство будет иметь место.

Поскольку функция $\gamma^*(t)$ выбрана произвольно, можно сказать, что класс поверхностей с заданной функцией $\lambda(t, \theta)$, имеющих прямолинейное ребро возврата (наличие возврата будет показано позднее), существует с произволом одна функция одного аргумента. При этом следует учесть, что функция $f(\theta)$ находится, согласно (42), из условия

$$f' = \frac{1}{\lambda(0, \theta)}. \quad (53)$$

Заметим, что если функция $\lambda(t, \theta)$ разлагается в сходящийся ряд на всей плоскости $t\theta$, а ряд (51) сходится на всей числовой прямой, то, как видно из характера правых частей уравнений (48) — (50), поверхность σ будет определена также на всей плоскости $t\theta$.

3. Ребро возврата. Второе семейство асимптотических.

Убедимся теперь в том, что ось Oz действительно является ребром возврата поверхности σ . С этой целью, положив в уравнении (23)

$$f + t = 0, \quad (54)$$

получим линию пересечения поверхности σ плоскостью xy : $r = xe + ye'$ или

$$X = x \cos \theta + y \sin \theta, \quad Y = -x \sin \theta + y \cos \theta.$$

Принимая во внимание равенства (40) и (41), определяем коэффициенты X_a, Y_b ($a, b = 0, 1, 2, \dots$) разложений функций X и Y по степеням t :

$$\begin{aligned} X_0 &= Y_0 = 0, \\ X_1 &= x_1 \cos \theta + y_1 \sin \theta = 0, \\ Y_1 &= -x_1 \sin \theta + y_1 \cos \theta = 0, \\ X_2 &= x_2 \cos \theta + y_2 \sin \theta = a_1 \cos \theta, \\ Y_2 &= -x_2 \sin \theta + y_2 \cos \theta = -a_1 \sin \theta, \\ X_3 &= x_3 \cos \theta + y_3 \sin \theta = a_2 \cos \theta - \lambda a_1 \sin \theta, \\ Y_3 &= -x_3 \sin \theta + y_3 \cos \theta = -a_2 \sin \theta - \lambda a_1 \cos \theta. \\ &\dots \end{aligned}$$

Следовательно, уравнения линии пересечения будут иметь вид

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{2} a_1 \cos \theta t^2 + \frac{1}{3!} (a_2 \cos \theta - \lambda a_1 \sin \theta) t^3 + \dots, \\ Y &= -\frac{1}{2} a_1 \sin \theta t^2 + \frac{1}{3!} (-a_2 \sin \theta - \lambda a_1 \cos \theta) t^3 + \dots, \end{aligned} \quad (55)$$

где вместо t следует подставить его значение, определяемое равенством (54) и (53), т. е. $t = -\int \frac{d\theta}{\lambda(0, \theta)} + C$. Постоянную интегрирования выбираем таким образом, чтобы при $\theta = 0$ иметь $t = 0$.

Из уравнения (55) получаем для $\theta = 0$ (штрихами обозначены производные по θ): $X_0 = Y_0 = 0$, $X'_0 = Y'_0 = 0$, $X''_0 = \frac{a_1}{\lambda^2}$, $Y''_0 = 0$, $Y'''_0 = \frac{a_1}{\lambda^2}$. Следовательно, кривая (55) имеет уравнения $X = \frac{a_1}{2\lambda^2} \theta^2 + \dots$, $Y = \frac{a_1}{6\lambda^2} \theta^3 + \dots$. Видим, что начало координат $(0, 0)$ — точка, соответствующая значению $\theta = 0$ — есть точка возврата первого рода.

Второе семейство асимптотических (первое составляют линии l) определяется уравнением

$$2M dt + Nd\theta = 0, \quad (56)$$

где $M = (r_{t\theta} r_t r_\theta)$, $N = (r_{\theta\theta} r_t r_\theta)$. Но согласно (24) $r_{t\theta} = (x_{t\theta} - y_t) e + (y_{t\theta} + x_t) e'$, $r_{\theta\theta} = f'' k + (x_{\theta\theta} - 2y_\theta - x) e + (y_{\theta\theta} + 2x_\theta - y) e'$; следовательно,

$$\begin{aligned} M &= (x'_t - y_t) (y_t f' - y' - x) - (y'_t + x_t) (x_t f' - x' + y), \\ N &= (x'' - 2y' - x) (y_t f' - y' - x) - (y'' + 2x' - y) (x_t f' - x' + y) + f'' (x_t y' - y_t x' + x x_t + y y_t) \end{aligned} \quad (57)$$

(штрихами обозначено дифференцирование по θ). Из уравнения (57) с помощью (41) находим коэффициенты разложений по степеням t : $M_0 = (x'_1 - y_1) (y_1 f' - y' - x) - (y'_1 + x_1) (x_1 f' - x' + y) = 0$, $N_0 = (x'' - 2y' - x) (y_1 f' - y' - x) - (y'' + 2x' - y) \times (x_1 f' - x' + y) + f'' (x_1 y' - y_1 x' + x x_1 + y y_1) = 0$; $M_1 = (x'_2 - y_2) (y_1 f' - y' - x) + (x'_1 - y_1) (y_2 f' - y'_1 - x_1) - (y'_2 + x_2) (x_1 f' - x' - y) - (y'_1 + x_1) (x_2 f' - x'_1 - y_1) = 0$, $N_1 = (x'' - 2y'_1 - x_1) \times (y_1 f' - y' - x) + (x'' - 2y' - x) (y_2 f' - y'_1 - x_1) - (y'' + 2x'_1 - y_1) (x_1 f' - x' + y) - (y'' + 2x' - y) (x_2 f' - x_1 + y_1) + f'' (x_2 y' - y_2 x' + x_1 y'_1 - y_1 x'_1 + x^2_1 + y^2_1 + x x_2 + y y_2) = 0$; $M_2 = (x'_3 - y'_3) (y_1 f' - y' - x) + 2(x'_2 - y_2) (y_2 f' - y'_1 - x_1) + (x'_1 - y_1) (y_3 f' - y'_2 - x_2) - (y'_3 + x_3) (x_1 f' - x' - y) - 2(y'_2 + x_2) (x_2 f' - x'_1 - y_1) - (y'_1 + x_1) (x_3 f' - x'_2 - y_2) = -2 \frac{a_1^2}{\lambda}$, $N_2 = (x'' - 2y'_2 - x_2) (y_1 f' - y' - x) + \dots = 0$;

$N_3 = (x_3'' - 2y_3' - x_3)(y_1f' - y' - x') + \dots = -6 \frac{\lambda'}{\lambda^2} a_1^2 (t=0)$. Следовательно, уравнение (56) по сокращении на $-\frac{a_1^2 t^2}{\lambda}$ будет иметь вид

$$\frac{dt}{d\theta} = -\frac{N}{2M} = -\frac{\frac{\lambda'}{\lambda}t + \dots}{2 + \dots} (\lambda = \lambda(0, \theta)). \quad (58)$$

Точками, как обычно, обозначены члены, содержащие t в более высоких степенях по сравнению с первыми членами разложений.

Поведение интегральных кривых уравнения (58) совпадает с поведением интегральных кривых уравнения $\frac{dt}{d\theta} = t' = -\frac{1}{2} \frac{\lambda'}{\lambda} t$, или $2\lambda t' + t\lambda' = 0$ в окрестности точки $(0, \theta)$. Решение последнего уравнения есть $\lambda t^2 = C$, $C = \text{const}$. Мы видим, что эти кривые при $C \neq 0$ не пересекают оси Oz ($t=0$). К числу асимптотических линий второго семейства принадлежит сама ось Oz ($t=0$). Эта ось является интегральной кривой уравнения (58). Таким образом, огибающей первого семейства асимптотических линий поверхности σ является асимптотическая второго семейства. Эта асимптотическая есть и ребро возврата поверхности.

Отметим еще, что предположенный не равным нулю коэффициент a_1 имеет следующее геометрическое истолкование: $|a_1| = |[r_{tt}r_t]|/|r_t|^2$ ($t=0$), т. е. его модуль есть кривизна асимптотической l в точке ее касания с ребром возврата.

4. Поверхности постоянной отрицательной кривизны.

Поверхности постоянной отрицательной кривизны характеризуются равенством

$$f = \frac{\theta}{\lambda}, \quad \lambda = \text{const} \quad (59)$$

(постоянную интегрирования отбрасываем). Оно показывает, что соприкасающаяся плоскость асимптотической линии такой поверхности при перемещении точки A вдоль оси Oz совершает геликоидальное движение.

Поверхности постоянной отрицательной кривизны характеризуются еще и тем, что для них правые части уравнений системы (48) — (50) не зависят от аргументов t, θ . Они представляют собой целые рациональные и дробно-рациональные функции от переменных $x, y, s, h, a, \alpha, p, \gamma$. Такие функции разлагаются в сходящиеся ряды для значений этих переменных, взятых на всей числовой оси. Следовательно, если взять функцию $\gamma^*(t)$, для которой ряд, стоящий в правой части равенства (51), сходится на всей числовой оси, то поверхность σ будет определена на всей плоскости $t\theta$.

Для поверхности постоянной отрицательной кривизны может быть доказана справедливость равенства $N = \left(\frac{a}{\lambda} + y - x'\right)^2 (h' -$

$-c^2) = -\frac{1}{4}a_1^4\lambda^2t^6 + \dots$. Следовательно, дифференциальное уравнение второго семейства асимптотических [см. уравнение (58)]

имеет вид $\frac{dt}{d\theta} = -\frac{\frac{1}{4}a_1^2\lambda^3t^4 + \dots}{2 + \dots}$. Решение этого уравнения в окрестности $t=0$ имеет строение, подобное строению решения уравнения

$\frac{dt}{t^4} + \frac{1}{8}a_1^2\lambda^3d\theta = 0$. Решая последнее, находим $\frac{3}{8}Ca_1^2\lambda^3\theta t^3 - 3t^3 = C$. Отсюда видно, что переменная t стремится к нулю лишь при $\theta \rightarrow \infty$, т. е. асимптотические второго семейства наворачиваются на ребро возврата, удаляясь в бесконечность и приближаясь к этому ребру. Само ребро ($t=0$) соответствует параметру $C=0$.

5. Несколько соображений общего характера.

Предыдущие рассуждения дают возможность дать утвердительный ответ на вопрос, который естественным образом возникает при несколько ином подходе к решению задачи (определению поверхностей отрицательной кривизны с прямолинейным ребром возврата) и который не поддается прямому исследованию. Речь идет о следующем.

Вернемся к системе (34), где мы должны заменить f значением, получаемым из (53). Разложим искомые функции a, x, y, c, h в ряды по степеням t (40). Коэффициенты разложений будут функциями от θ . Все они будут выражаться через коэффициенты $a_1, a_2, \dots$, последние же определяются бесконечной системой обыкновенных дифференциальных уравнений (43). Постоянные интегрирования находятся из формулы (51). В случае поверхности постоянной кривизны коэффициенты $a_1, a_2, \dots$ будут последовательно находиться с помощью квадратур.

Вопрос ставится так: сходится ли ряд, коэффициентами которого являются функции $a_1, a_2, \dots$?

Теперь, после того, как доказано существование решения системы (48) — (50), ответ оказывается положительным — указанный ряд сходится при условии сходимости ряда (51).

Поскольку коэффициенты ряда (51) выбираются произвольно, то мы снова приходим к сформулированному ранее результату: решение системы (34) существует с произволом в одну функцию одного аргумента.

Можно усмотреть еще один аспект в найденном результате. Из способа получения коэффициентов ряда для функции a видно, что условия совместности $y_{t\theta} = y_{\theta t}$, $c_{\theta t} = c_{t\theta}$ будут выполняться тождественно. Вместе с тем можно было бы искать решение задачи о прямолинейном ребре возврата поверхности отрицательной кривизны, рассматривая не систему (34), а систему, состоящую из уравнений (34), (37), (38). Но уравнение (38), если его решить относительно a_t , будет иметь в правой части при $t=0$ неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Коэффициенты $a_1, a_2, \dots$ можно полу-

чить и из этого уравнения при условии внесения в него разложений (40) и приравнивания друг другу коэффициентов при соответствующих степенях t . Но можно, не делая этого, рассмотреть систему типа Коши: $x_t = a$, $y_t = -c + ha$, $y_\theta = -x - cf' + h(-y + \alpha)$, $c_t = -\lambda a(1 + h^2 + c^2)$, $c_\theta = a - \lambda(1 + h^2 + c^2)(af' + y - \alpha) - h(c - ha) + ap$, $h_t = -\lambda(1 + h^2 + c^2)$, $a_t = \frac{P}{Q}$ (60). P, Q имеют вид, указанный в уравнении (38). Они одновременно обращаются в нуль при $t = 0$. Условия интегрируемости $y_{t\theta} = y_{\theta t}$, $c_{t\theta} = c_{\theta t}$ выполнены.

Что можно сказать о решении системы (60) при начальных условиях (36), которые делают линию $t = x = y = c = h = a = 0$ в пространстве переменных t, θ, x, y, c, h, a особой? Эта задача является перенесением на высшие размерности задачи об интегрировании обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + T(x, y)}{cx + dy + H(x, y)} \quad (61)$$

$$(T(0, 0) = H(0, 0) = T_x(0, 0) = T_y(0, 0) = H_x(0, 0) = H_y(0, 0) = 0)$$

в окрестности особой точки. Последней задаче, являющейся очень грудной задачей теории дифференциальных уравнений, посвящен ряд работ А. Пуанкаре, И. Бендиксона, М. Фроммера, О. Перрона [3—7].

В частном случае, когда $a = d = 0$, $b = c$, числитель и знаменатель правой части, будучи разложенными по степеням x, y , а y — по степеням x

$$y = y_1x + \frac{1}{2}y_2x^2 + \dots \quad (62)$$

с неизвестными пока коэффициентами $y_1, y_2, \dots$, по сокращении на x приводят к уравнению

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y_1 + P_1x + \frac{1}{2}P_2x^2 + \dots}{1 + Q_1x + \frac{1}{2}Q_2x^2 + \dots}, \quad (63)$$

где $P_1, P_2, \dots, Q_1, Q_2, \dots$ — некоторые функции от $y_1, y_2, \dots$. Можно было бы из уравнения (63) последовательно найти все коэффициенты $y_1, y_2, \dots$, но даже в простейших случаях суждение о сходимости ряда (62) затрудняется чрезвычайной громоздкостью выражений, определяющих общий член ряда (63). Существуют иные способы доказательства существования решения уравнения (61), содержащиеся в упомянутых выше работах. Доказывается, что решение (не единственное) уравнения (63) существует, через точку $(0, 0)$ в каждом направлении проходит одна и только одна интегральная кривая.

Если подобные разложения выписать для правой части уравнения (38), решенного относительно a_t , то после сокращения числителя и знаменателя на t^4 , придем к уравнению

$$a_t = \frac{a_1 + A_1 t + \frac{1}{2} A_2 t^2 + \dots}{1 + B_1 t + \frac{1}{2} B_2 t^2 + \dots}, \quad (64)$$

где $A_1, A_2, \dots, B_1, B_2, \dots$ — некоторые функции (многочлены), зависящие от $\theta, a_1, a_2, \dots$ и их производных. Вопрос, таким образом, ставится о существовании решения уравнения (64). Теперь можно ответить на этот вопрос положительно: решение существует с произволом в одну функцию одного аргумента, но этим аргументом будет не θ , как, казалось, должно было бы быть, если принять во внимание вид уравнения (64) (слева стоит производная по t), а t .

Наконец, отметим еще один аспект. Проинтегрировав систему уравнений (48) — (50), мы по сути решили смешанную задачу, задав начальные значения для функций x, y, c, h, a, α, p на прямой $t = 0$, а для функций γ — на прямой $\theta = 0$.

Список литературы: 1. Кованцов Н. И. Ребро возврата поверхности неположительной кривизны. — Укр. геометр. сб., 1978, вып. 22, с. 81—92. 2. Курант Р. Уравнения с частными производными. — М.: Мир, 1964. — 832 с. 3. Poincaré H. Sur les propriétés des fonctions définies par les équations aux différences partielles. Thèses présentées à la Faculté des Sciences de Paris, 1879; Paris, p. 93. Oeuvres, t. 1, p. XLIX—CXXXI. 4. Бендиксон И. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. — Успехи мат. наук, 1941, вып. IX, с. 191—212. 5. Фроммер М. Интегральные кривые обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка в окрестности особой точки, имеющей рациональный характер. — Успехи мат. наук, 1941, вып. IX, с. 212—540. 6. Perron O. Math. Zeitschr., Bd. 15, 1922, Bd. 16, 1923. 7. Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.—Л.: ОГИЗ ГИТТЛ, 1947. — 196 с.

Поступила 20 марта 1978 г.

УДК 513

В. В. Макеев

УНИВЕРСАЛЬНЫЕ ПОКРЫШКИ. I

Множество $X \subset R^n$ называется универсальной покрывкой, если, передвигая X как твердое целое (отражения не допускаются), можно покрыть множеством X любое множество $Y \subset R^n$, имеющее диаметр не больше единицы.

Широко известна проблема Борсука: доказать, что всякое $Y \subset R^n$ диаметра 1 можно разбить на $n + 1$ часть с диаметрами, меньшими единицы. Это доказано при $n = 2$ и $n = 3$. В размерностях $n = 2, n = 3$ удалось построить такие универсальные покрывки,

которые сами разбиваются соответственно на 3 и 4 части с диаметрами, меньшими единицы [1]. При $n \geq 4$ проблема Борсука не решена. Есть предположение, что при $n \geq 4$ она верна, но не существует универсальных покрывающих, разбиваемых на $n + 1$ часть с диаметрами, меньшими единицы [2, с. 63]. Однако несуществование такой покрывающей тоже не доказано.

В связи со сказанным представляет интерес построение различных универсальных покрывающих. Ряду классов таких покрывающих и посвящена настоящая заметка.

Обозначим через $M(N)$ класс ограниченных выпуклых множеств $X \subset R^n$ ($n \geq 2$), каждое из которых есть пересечение N замкнутых слоев ($N \geq n + 1$) между парами параллельных гиперплоскостей, касательных к шару единичного диаметра с центром в $O \in R^n$. Ниже дается достаточный признак, позволяющий утверждать для многих $X \in M(N)$, что данный многогранник X является универсальной покрывающей.

§ 1. Основной результат. 1. Пусть $X \in M(N)$ и $l_1, l_2, \dots, l_N$ — идущие через $O \in R^n$ направленные прямые, ортогональные парам параллельных гиперплоскостей, ограничивающих X . Каждую прямую l_i считаем числовой осью. Буквой e_i обозначим единичный направляющий вектор оси l_i .

Лемма. *Ограниченность в R^n многогранника $X \in M(N)$ равносильна требованию, что среди векторов $e_1, e_2, \dots, e_N$ существует n линейно независимых.*

Действительно, если среди $e_1, e_2, \dots, e_N$ нет n линейно независимых, то размерность пространства, натянутого на $e_1, e_2, \dots, e_N$, меньше n . В R^n найдется прямая, проходящая через O ортогонально этому пространству. Она будет содержаться в X , что противоречит его ограниченности. Если же $e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_n}$ линейно независимы, то соответствующие им пары гиперплоскостей уже выделяют ограниченное множество.

Далее считаем, что нумерация $l_1, l_2, \dots, l_N$ выбрана так, что именно первые векторы $e_1, e_2, \dots, e_n$ линейно независимы.

2. Пусть многогранник $X \in M(N)$ не является универсальной покрывающей. Тогда существует замкнутое, выпуклое множество $Y \subset R^n$ постоянной ширины 1, не покрываемое множеством X .

Проведем N пар параллельных опорных к Y гиперплоскостей, ортогональных $l_1, l_2, \dots, l_N$. Обозначим через Y_1 многогранник, который они ограничат. Пары гиперплоскостей, соответствующие первым n нормальям, ограничивают центрально-симметричный выпуклый многогранник Y_2 . Очевидно, $Y \subset Y_1 \subset Y_2$.

Осуществив параллельный перенос Y , совместим центр Y_2 с $O \in R^n$. Для каждого $i = n + 1, n + 2, \dots, N$ пара гиперплоскостей, соответствующая l_i , пересекает ось l_i в двух точках x_{1i}, x_{2i} . Поло-

жим $u_i = \max\{x_{1i}, x_{2i}\} - \frac{1}{2}$. Таким образом, u_i есть координата (на l_i) пересечения средней гиперплоскости i -го слоя с осью l_i . Сопоставим набору осей $l = (l_1, l_2, \dots, l_N)$ набор $N - n$ чисел u_i .

Поддействуем на набор $l = (l_1, l_2, \dots, l_N)$ некоторым элементом T группы $SO(n)$ вращений пространства R^n . Получим новый набор $lT = (l_1T, l_2T, \dots, l_nT)$ осей, проходящих через O . Проведем для него аналогичные построения, получим $N - n$ чисел: $u_{n+1}(T), u_{n+2}(T), \dots, u_N(T)$. Таким образом, возникает отображение $f_y: SO(n) \rightarrow R^{N-n}$. Ясно, что оно непрерывно [1, с. 99].

То, что X не покрывает Y (как это видно из построения f_y), эквивалентно тому, что $f_y(SO(n))$ не содержит точки $O \in R^{N-n}$.

3. Пусть $G(X) \subset SO(n)$ есть группа самосовмещений многогранника X (группа X). При нечетном n группа $G(X)$ может оказаться состоящей только из тождественного преобразования. При четном n она заведомо содержит симметрию относительно O .

Пусть $t \in G(X)$. Действие t сохраняет набор прямых l_i , причем $e_{jt} = \varepsilon_j(t) e_{ij}$, где $\varepsilon_j(t) = +1$, если l_j переходит в l_{ij} с сохранением направления и $\varepsilon_j(t) = -1$, если l_j переходит в l_{ij} с изменением направления.

Будем представлять себе $SO(n)$, как пространство положений набора жестко связанных между собой осей $l = (l_1, l_2, \dots, l_N)$. Группа $G(X)$ действует на $SO(n)$ справа по закону $(l_1, l_2, \dots, l_N)t = (\varepsilon_1(t) l_{i_1}, \varepsilon_2(t) l_{i_2}, \dots, \varepsilon_N(t) l_{i_N})$.

Найдем $f_y(lt)$, зная t и $f_y(l)$. Пусть $f_y(l) = (u_{n+1}(l), \dots, u_N(l))$. Положим $u_1(l) = u_2(l) = \dots = u_n(l) = 0$. Рассмотрим многогранники Y_1 и Y_2 для набора l (см. п. 2). Считаем, что центр Y_2 совмещен с O .

У набора lt роль осей $l_1, l_2, \dots, l_N$ выполняют соответственно оси $\varepsilon_1(t) l_{i_1}, \varepsilon_2(t) l_{i_2}, \dots, \varepsilon_N(t) l_{i_N}$ исходного набора l . Далее буквами $l_1, l_2, \dots, l_N$ обозначаем соответствующие оси нового набора lt . За многогранник Y_1 для lt можно принять исходный многогранник Y_1 . Тогда центр O' соответствующего многогранника Y_2 (построенного для lt) уже не будет, вообще говоря, совпадать с O . Координата на оси l_j точки O' есть $\varepsilon_j(t) u_{i_j}(l)$, поэтому вектор $\vec{OO'}$ определяется системой уравнений

$$e_{ik}(l) \cdot \vec{OO'} = u_{ik}(l), \quad 1 \leq k \leq n. \quad (1)$$

В частности, $\vec{OO'}$ есть однородная функция от $u_{i_1}(l), \dots, u_{i_n}(l)$.

Теперь осуществляем перенос O' в O и вычисляем $u_{n+1}(lt), \dots, u_N(lt)$ ($n+1 \leq k \leq N$):

$$u_k(lt) = \varepsilon_k(t) (u_{i_k}(l) - \vec{OO'}(l, t) \cdot e_{ik}(l)), \quad (2)$$

откуда видно, что $u_k(lt)$ зависит от $u_i(l)$ однородно.

Возьмем в качестве $u_{n+1}(l), \dots, u_N(l)$ произвольный ненулевой набор вещественных чисел; вычисление по формулам (2) дает такой набор. Действительно, по всякому набору $N - n$ чисел можно однозначно построить многогранник Y_1 (возможно, он получится пустым). То, что набор ненулевой, означает, что в Y_1 нельзя вписать шар единичного диаметра. После поворота осей l многогранник Y_1 не перестанет обладать этим свойством. Итак, вновь получается ненулевой набор чисел.

Всякому $t \in G(X)$ мы сопоставили однородное непрерывное отображение $(R^{N-n} \setminus O)$ в себя, которое будем обозначать той же буквой t . Из построения видно, что получилось правое действие $G(X)$ на $(R^{N-n} \setminus O)$, т. е. выполняются тождества $xt = x$ и $(xs)t = x(st)$ для $x \in (R^{N-n} \setminus O)$ и $I, s, t \in G(X)$, где I — единичный элемент группы $G(X)$. Так как действие однородно, то, используя проекцию $\pi: (R^{N-n} \setminus O) \rightarrow S^{N-n-1}$ на сферу вдоль лучей, исходящих из O , можно считать, что $G(X)$ действует на сфере S^{N-n-1} . Итак, для всякого $X \in M(N)$ мы определили правое действие $G(X)$ на $SO(n)$ и S^{N-n-1} .

Рассмотрим отображение $\pi \circ f_y: SO(n) \rightarrow S^{N-n-1}$ (f_y определено в п. 2). Оно (по построению) сохраняет действие группы $G(X)$, т. е. является $G(X)$ — гомоморфизмом указанных пространств. Мы получили следующий результат.

Теорема 1. *Если $X \in M(N)$ не есть универсальная покрывка, то существует $G(X)$ -гомоморфизм $SO(n)$ в S^{N-n-1} .*

Следствие. *Если такого $G(X)$ -гомоморфизма не существует, то X есть n -мерная универсальная покрывка.*

4. Сделаем два замечания к теореме 1. Изложенная конструкция выглядит особенно просто, если рассматривать не всю группу многогранника X , а лишь ее подгруппу, состоящую из вращений, переводящих в себя набор первых n прямых $l_1, l_2, \dots, l_n$. В конкретных ситуациях, которые будут рассмотрены ниже, дело обстоит именно так.

В этом случае формула (2) выглядит особенно просто: $u_k(lt) = \varepsilon_k(t) u_{i_k}(l)$, ибо $O = O'$, как видно из (1). Соответствующее преобразование сферы S^{N-n-1} будет: $(x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_N)t = (\varepsilon_{n+1}(t)x_{i_{n+1}}, \dots, \varepsilon_N(t)x_{i_N})$.

Если $G(X)$ состоит только из единичного элемента, заключение теоремы 1 звучит так: существует непрерывное отображение $SO(n)$ в S^{N-n-1} , что выполняется всегда. В этом случае теорема 1 не может помочь выяснению, будет ли X универсальной покрывкой.

2. **Примеры универсальных покрывок.** В этом параграфе мы применим теорему 1 для построения нескольких классов универсальных покрывок.

1. **Теорема 2.** *Любой многогранник $X \in M(n+1)$ является n -мерной универсальной покрывкой.*

В этом пункте теорема 2 будет доказана только для случая, когда $G(X)$ содержит некоторый элемент t , переводящий l_{n+1} в себя с обращением направления. Заметим, что этим исчерпывается случай четного n , так как в качестве t можно взять симметрию относительно O . В случае нечетного n (как отмечалось выше) $G(X)$ может состоять только из единичного элемента. Полное доказательство теоремы 2, основывающееся на других соображениях, будет дано в Добавлении.

Для доказательства заметим, что на $S^{N-n-1} = S^0$ элемент t действует по формуле $xt = -x$ (это следует из § 1, п. 4). Если

бы существовал $G(X)$ -гомоморфизм $F: SO(n) \rightarrow S^0$, то для $l \in SO(n)$ было бы $F(lt) = F(l)t = -F(l)$. Значит, F было бы отображением «на», что невозможно ввиду связности $SO(n)$. Доказательство закончено.

Теорема 2 включает в себя некоторые хорошо известные результаты. Из нее следует, что правильный шестиугольник с единичным расстоянием между противоположными сторонами является плоской универсальной покрывшей, а правильный октаэдр с единичным расстоянием между противоположными гранями является трехмерной универсальной покрывшей. Эти утверждения впервые были установлены в работах [3] и [4] соответственно. Приведенное доказательство в применении к этим случаям по существу совпадает с изложенным в [1].

2. Рассмотрим серию трехмерных универсальных покрывших.

Теорема 3. Пусть трехмерный многогранник $X \in M(5)$ и l_1, l_2, l_3, l_4, l_5 — соответствующие прямые. Если X обладает самосовмещением T , переводящим каждую из прямых l_4, l_5 в себя с обращением направления, то X есть универсальная покрывшая.

Начнем с топологической леммы. Будем представлять себе $SO(3)$ как пространство положений в R^3 некоторого репера (a, b) .

Рассмотрим на $SO(3)$ инволюцию $(a, b)t = (-a, -b)$.

Лемма. Не существует непрерывного отображения $F: SO(3) \rightarrow S^1$ со свойством $F(xt) = -F(x)$.

Доказательство. Пусть такое F существует. Имеем коммутативную диаграмму непрерывных отображений.

$$\begin{array}{ccc} SO(3) & \xrightarrow{F} & S^1 \\ \downarrow t & & \downarrow \\ SO(3)_t & \xrightarrow{G} & S^1 \end{array}$$

Через $SO(3)/t$ обозначаем факторпространство $SO(3)$ по инволюции t . Правая вертикальная стрелка на диаграмме — факторизация по центральной симметрии. Нижняя горизонтальная стрелка определяется требованием коммутативности.

Соединим точку x и xt некоторым путем u в $SO(3)$. Тогда $F(u)$ соединяет две диаметрально противоположные точки окружности S^1 , поэтому образ $F(u)$ в нижней окружности S^1 диаграммы есть негомотопная нулю петля. Следовательно, гомоморфизм $G_*: \pi_1 \times \times (SO(3)/t) \rightarrow \pi_1(S^1)$ нетривиален, так как петля $G(t(u))$ негомотопна 0.

Хорошо известно, что группа $SO(3)$ гомеоморфна проективному пространству RP^3 . Имеем $\pi_1(SO(3)) \cong \mathbb{Z}_2$, $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$. Поэтому $\pi_1(SO(3)/t)$ конечна, так как имеется конечнолистное (двулистное) накрытие $t: SO(3) \rightarrow SO(3)/t$ (на самом деле $\pi_1(SO(3)/t) \cong \mathbb{Z}_4$, а $SO(3)/t$ — хорошо известная трехмерная линза). Мы получили противоречие, ибо не существует ненулевых гомоморфизмов конечной группы в $\mathbb{Z}$. Лемма доказана.

Замечание. В формулировке леммы окружность S^1 нельзя заменить сферой S^2 , так как в качестве F можно взять $F((a, v)) = a$. Это обстоятельство не позволяет получить более сильный геометрический результат.

Перейдем к доказательству теоремы 3. T — инволюция, ибо T^2 оставляет неподвижными l_4 и l_5 . Если X не универсальная покрывающая, то по теореме 1 существует $G(X)$ -гомоморфизм $F: SO(3) \rightarrow S^1$. По замечанию к теореме 1 $F(lT) = -F(l)$. Это противоречит доказанной лемме, так как можно положить $t = T$, а в качестве a и v взять направляющие векторы осей l_4 и l_5 . Теорема 3 доказана.

3. Остановимся на двух примерах трехмерных универсальных покрывающих.

Как уже отмечалось, правильный октаэдр с единичным расстоянием между противоположными гранями является трехмерной универсальной покрывающей. Теорема 3 позволяет усилить этот результат. От октаэдра можно отсечь две конгруэнтные шапки парой параллельных плоскостей, проходящих на единичном расстоянии друг от друга и ортогональных оси, соединяющей какую-нибудь пару противоположных вершин октаэдра.

Из теоремы 3 следует, что у всякого множества единичного диаметра проекция на некоторую плоскость содержится в правильном восьмиугольнике с расстоянием единица между противоположными сторонами. Однако можно показать, что этот восьмиугольник не является универсальной покрывающей на плоскости.

В заключение отметим, что теорема 3 может быть использована для улучшения оценки числа $d_3(4)$ [2, с. 64].

4. Серия четырехмерных универсальных покрывающих.

Теорема 4. Все элементы $M(7)$ являются универсальными покрывающими в R^4 .

Доказательство. Пусть $X \in M(7)$. Если X не универсальная покрывающая, то по теореме 1 существует $G(X)$ -гомоморфизм $F: SO(4) \rightarrow S^2$. Обозначим через t центральную симметрию относительно O . Как и в п. 2, имеем: $F(lt) = -F(l)$. Известно, что на сфере $S^3 \subset R^4$ существует такое непрерывное поле из ортонормированных 4-реперов, что реперы в диаметрально противоположных точках сферы отличаются знаком.

Вот пример такого поля (x_i — координаты точки сферы):

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_2 & -x_1 & x_4 & -x_3 \\ x_3 & -x_4 & -x_1 & x_2 \\ x_4 & x_3 & -x_2 & -x_1 \end{pmatrix}$$

Следовательно, возникает непрерывное отображение $f: S^3 \rightarrow SO(4)$, обладающее свойством $f(-x) = f(x)t$. Рассмотрим композицию $F \circ f: S^3 \rightarrow S^2$. Имеем $(F \circ f)(-x) = F(f(-x)) = F(f(x)t) = -F \times (f(x)) = -(F \circ f)(x)$. Но если $0 \leq m < n$, то не существует непрерыв-

ного отображения $g: S^n \rightarrow S^m$ со свойством $g(-x) = -g(x)$ [5, с. 343]. Доказательство закончено.

Сделаем несколько замечаний к доказательству теоремы 4.

1. Пусть n — четное число. Обозначим через $a(n)$ такое наименьшее натуральное число, что существует непрерывное отображение $F: SO(n) \rightarrow S^{a(n)}$ со свойством $F(lt) = -F(l)$. На самом деле мы доказали теорему: все элементы $M(n + a(n))$ являются n -мерными универсальными покрывками.

2. Все элементы $M(15)$ являются восьмимерными универсальными покрывками. Проходит изложенное доказательство, так как на сфере $S^7 \subset R^8$ существует соответствующее реперное поле, например, такое:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 \\ x_2 & -x_1 & x_4 & -x_3 & x_6 & -x_5 & x_8 & -x_7 \\ x_3 & -x_4 & -x_1 & x_2 & x_7 & x_8 & -x_5 & -x_6 \\ x_4 & x_3 & -x_2 & -x_1 & x_8 & -x_7 & x_6 & -x_5 \\ x_5 & -x_6 & -x_7 & -x_8 & -x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_6 & x_5 & -x_8 & x_7 & -x_2 & -x_1 & -x_4 & x_3 \\ x_7 & x_8 & x_5 & -x_6 & -x_3 & x_4 & -x_1 & -x_2 \\ x_8 & -x_7 & x_6 & x_5 & -x_4 & -x_3 & x_2 & -x_1 \end{pmatrix}$$

3. Теорема 4 дает довольно богатый класс четырехмерных универсальных покрывок. Если бы среди них нашлась разбиваемая на пять частей с диаметром, меньшим единицы, это дало бы доказательство проблемы Борсука при $n = 4$.

§ 3. **Добавление.** Будем говорить, что симплекс T описан вокруг замкнутого множества F , если F содержится в T и имеет общие точки с каждой его гранью.

Теорема 5. Пусть F — ограниченное замкнутое выпуклое множество в R^n , а T — симплекс, описанный вокруг шара, диаметр которого равен средней ширине тела F . Тогда, подвергая F движению без отражений, можно описать T вокруг F .

Для доказательства теоремы 5 рассмотрим инвариантную меру μ_n на топологической группе $SO(n)$. Мы не будем пользоваться общей теоремой существования инвариантных мер на компактных топологических группах, а построим μ_n непосредственно и воспользуемся этим построением при доказательстве теоремы.

Будем представлять себе $SO(n)$ как пространство одинаково ориентированных ортонормированных n -реперов в R^n . Нам нужно построить на $SO(n)$ меру μ_n , обладающую свойством $\mu_n(A(E)) = \mu_n(E)$, где E — измеримое (по мере μ_n) подмножество $SO(n)$, а A — произвольное вращение R^n .

Проведем индуктивное построение μ_n . Случай $n = 1$ бессодержателен (и теорема 5, очевидно, верна). $SO(2)$ можно представлять себе, как окружность единичного радиуса на плоскости. Обычная мера на окружности удовлетворяет нашим требованиям.

Пусть на $SO(n)$ ($n \geq 2$) требуемая мера уже построена. Определим меру μ_{n+1} . Для этого определим μ_{n+1} на открытых подмножествах $SO(n+1)$.

Далее, как обычно, определяется класс измеримых множеств, и μ_{n+1} распространяется на этот класс (эту часть рассуждений опустим).

Для всякого репера $e = (e_1, e_2, \dots, e_{n+1}) \in SO(n+1)$ буквой $\Gamma(e_1)$ обозначим множество реперов из $SO(n+1)$, имеющих e_1 своим первым вектором. На каждом $\Gamma(e_1)$ определим меру μ_{e_1} . Выделим в $SO(n+1)$ некоторый репер $e^0 = (e_1^0, e_2^0, \dots, e_{n+1}^0)$. $\Gamma(e_1^0)$ есть множество одинаково ориентированных ортонормированных n -реперов пространства R^n , ортогонального вектору e_1^0 в исходном пространстве R^{n+1} , а там мера μ_n уже определена, поэтому положим $\mu_{e_1^0} = \mu_n$. Для всякого e_1 выберем вращение A_{e_1} пространства R^{n+1} , переводящее e_1 в e_1^0 . Считаем $E \subset \Gamma(e_1)$ измеримым, если измеримо $A_{e_1}(E) \subset \Gamma(e_1^0)$ и положим $\mu_{e_1}(E) = \mu_{e_1^0}(A_{e_1}(E))$. Это определение корректно, ибо, если вращение B_{e_1} также переводит e_1 в e_1^0 , то множества $A_{e_1}(E)$ и $B_{e_1}(E)$ отличаются на преобразование пространства $\Gamma(e_1^0)$, равное $B_{e_1} \circ A_{e_1}^{-1}$, а мера $\mu_{e_1^0}$ инвариантна.

Множество единичных векторов e_1 естественным образом отождествляется с единичной сферой $S^n \subset R^{n+1}$ с центром в O . Символом μ'_n обозначим обычную меру на этой сфере. Заметим, что мера μ_n инвариантна относительно вращений сферы.

Пусть G — открытое подмножество $SO(n+1)$. Положим $\mu_{n+1}(G) = \int_{S^n} \mu_{e_1}(G \cap \Gamma(e_1)) d\mu'_n$. Проверим свойство инвариантности, т. е. что $\mu_{n+1}(A(G)) = \mu_{n+1}(G)$, где A — вращение пространства. Имеем: $\mu_{n+1}(A(G)) = \int_{S^n} \mu_{e_1}(A(G) \cap \Gamma(e_1)) d\mu'_n = \int_{S^n} \mu_{A^{-1}(e_1)}(G \cap \Gamma(A^{-1}(e_1))) d\mu'_n = \mu_{n+1}(G)$. Построение меры закончено.

Пусть на единичной сфере S^n задана суммируемая функция f и $x \in S^n$. Определим на $SO(n+1)$ функцию g , положив $g(A) = f(A(x))$. Из приведенных определений следует

Лемма 1. Функция g суммируема в смысле определенной выше меры μ_{n+1} и $\int_{SO(n+1)} g d\mu_{n+1} = \mu_n(SO(n)) \cdot \int_{S^n} f d\mu'_n$.

Перейдем к доказательству теоремы 5. Пусть r — половина средней ширины тела F ; $h_1, h_2, \dots, h_{n+1}$ — длины высот симплекса T ; $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{n+1}$ — площади соответствующих граней T ; V — объем T .

Расположим T и F в R^n так, чтобы точка $O \in R^n$ лежала внутри T и совпадала с некоторой точкой тела F . Проведем из O лучи $l_1, l_2, \dots, l_{n+1}$, ортогональные граням симплекса T . Считаем в дальнейшем, что эти лучи являются положительными частями числовых осей. Обозначим буквой x_i верхнюю грань проекции тела F на луч l_i . Если вращать данный набор жестко связанных между собой лучей, то x_i будут непрерывными функциями на $SO(n)$.

Лемма 2. $\int_{SO(n)} x_i d\mu_n = r \mu_n(SO(n))$, где $1 \leq i \leq n+1$.

Доказательство. Рассмотрим на S^{n-1} функцию f , заданную следующим образом: $f(x)$ есть верхняя грань проекции F на луч OX . Тогда x_i есть функция g , построенная по f так, как это указано перед леммой 1. Поэтому, согласно лемме 1, $\int_{SO(n)} x_i d\mu_n =$

$$= \mu_{n-1}(SO(n-1)) \cdot \int_{S^{n-1}} f d\mu_{n-1}, \text{ но } \int_{S^{n-1}} f d\mu'_{n-1} = r \mu'_{n-1}(S^{n-1}) \text{ по}$$

определению средней ширины тела. Следовательно, $\int_{SO(n)} x_i d\mu_n =$

$$= \mu_{n-1}(SO(n-1)) \cdot \mu'_{n-1}(S^{n-1}) \cdot r = r \mu_n(SO(n)).$$

Лемма доказана. Лемма 2 утверждает, что $\int_{SO(n)} (x_i - r) d\mu_n = 0$, по-

этому $\int_{SO(n)} \frac{x_i - r}{h_i} d\mu_n = 0$. Суммируя от 1 до $n+1$, получим

$$\int_{SO(n)} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{x_i - r}{h_i} d\mu_n = 0. \text{ Подынтегральная функция непрерывна на}$$

$SO(n)$, поэтому в некоторой точке $SO(n)$ она обращается в нуль. Таким образом, при некотором положении набора лучей $l_1, l_2, \dots, l_{n+1}$ соот-

ветствующие величины связаны соотношением $\sum_{i=1}^{n+1} \frac{x_i - r}{h_i} = 0$.

Проведем через точку x_i луча l_i гиперплоскость, ортогональную l_i . Эти гиперплоскости ограничат симплекс T' , описанный вокруг F . Докажем, что T' конгруэнтен T .

Ясно, что T' подобен T , обозначим буквой λ коэффициент подо-

бия. Имеем $0 = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{x_i - r}{h_i} = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{x_i \Delta_i - r \Delta_i}{h_i \Delta_i} = \frac{1}{nV} \left(\sum_{i=1}^{n+1} x_i \Delta_i - \sum_{i=1}^{n+1} \times \right.$
 $\times r \Delta_i \Big) = \frac{1}{nV} (\lambda nV - nV) = \lambda - 1$. Значит, $\lambda = 1$ и теорема 5 до-
 казана.

Теорема 5 усиливает результат работы Гэйла [2], где доказано, что всякое множество диаметра 1 можно поместить в правильный симплекс, описанный вокруг шара единичного диаметра.

Теперь легко доказать теорему 2 данной заметки в полном объеме. Пусть $X \in M(n+1)$ и $l_1, l_2, \dots, l_{n+1}$ — соответствующий набор осей, проходящих через точку O . Пусть Y — тело постоянной ширины, единица и точка O лежит внутри Y . Через x_i обозначим верхнюю грань проекции Y на l_i . Если вращать набор осей $l_1, l_2, \dots, l_{n+1}$, то x_i будут непрерывными функциями на $SO(n)$. Положим $u_i =$

$= x_i - \frac{1}{2}$. При всяком положении набора осей l_i будем рассматривать многогранник Y_1 , определенный в 1. 2. Как следует из приведенных в 1. 3. вычислений, Y_1 будет конгруэнтен X тогда и только тогда, когда величины u_i будут связаны между собой линейным соотношением вида

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_i u_i = 0, \quad \text{где } a_i \text{ — фиксированные}$$
 (для данного X) постоянные. Но, как следует из леммы 2 § 3,

$\int_{SO(n)S} u_i = 0$ для всякого i . Поэтому $\int_{SO(n)} \sum_{i=1}^{n+1} a_i u_i = 0$. Значит, в некоторой точке $SO(n)$ подынтегральная функция обратится в 0, ибо она непрерывна, а пространство $SO(n)$ связно. Доказательство завершено.

Список литературы: 1. Болтянский В. Г., Гохберг И. Ц. Теоремы и задачи комбинаторной геометрии. — М.: Наука, 1965. — 108 с. 2. Грюнбаум Б. Этюды по комбинаторной геометрии и теории выпуклых тел. — М.: Наука, 1971. — 95 с. 3. Pal I. Über ein elementares Variationsproblem. — Danske Videnskabs selskab. — Math — Fys Meddel, 1920, 3 N 2, S. 35. 4. Gale D. On inscribing n -dimensional setc in a regular n -simplex. — Proc. Amer. Math. Soc., 1953, 4, p. 222—225. 5. Спеньер Э. Алгебраическая топология. — М.: Мир, 1971. — 680 с.

Поступила 14 апреля 1979 г.

УДК 513

А. И. Медяник

ОДНО ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ СВОЙСТВО ГИПЕРСФЕРЫ

Пусть K — выпуклое тело в E^{n+1} : $H(n)$ — его опорная функция и $F_m(H, \omega)$ — m -я ($0 \leq m \leq n$) функция кривизны по А. Д. Александру [1], определенная на борелевских множествах единичной гипертсферы Ω . Как известно, $F_0(H, \omega)$ — площадь (n -мерный объем) ω , а $F_n(H, \omega)$ — поверхностная функция тела K , т. е. площадь $F(K, \omega)$ той части поверхности, сферическое изображение которой совпадает с ω . Если $H(n) \in C^2$ и ∂K имеет положительную гауссову кривизну, то

$$F_m(H, \omega) = \frac{1}{C_n^m} \int_{\omega} S_m(R_1, R_2, \dots, R_n) d\omega, \quad (1)$$

где $S_m(R_1, R_2, \dots, R_n)$ — m -я элементарно симметрическая функция главных радиусов кривизны R_i ($i = 1, 2, \dots, n$) гиперповерхности ∂K в точке с внешней нормалью $n \in \omega$ [1], причем $S_0 = 1$.

Р. Шнайдер [2] доказал следующую теорему:

Если для любого борелевского множества $\omega \subset \Omega$ выпуклое тело K в E^3 удовлетворяет неравенству

$$F_2(H, \omega) - 2rF_1(H, \omega) + r^2F_0(H, \omega) \leq 0,$$

где r — некоторая постоянная, и существует плоскость, ортогональная проекция K на которую является кругом, то K — либо шар радиуса r , либо круговой цилиндр того же радиуса, дополненный двумя полушариями.

В настоящей статье эта теорема (вместе с доказательством) обобщается по размерности.

Теорема. Пусть K — выпуклое тело в E^{n+1} , функции кривизны которого для $k = 1, 2, \dots, n-1$ удовлетворяют неравенствам

$$\Delta_k(\omega) = F_{k+1}(H, \omega) - 2rF_k(H, \omega) + r^2F_{k-1}(H, \omega) \leq 0 \quad (2)$$

с некоторой постоянной r . Если существует гиперплоскость E , ортогональная проекция K на которую является n -мерным шаром, то K — либо шар радиуса r , либо тело, представимое в виде суммы Минковского указанного шара и некоторого отрезка, перпендикулярного E .

В регулярном случае вторая возможность исключена и теорема тогда представляет собой характеристическое свойство гиперсферы. При этом неравенство (2) принимает вид $\sum_{i < j} (R_i - r)(R_j - r) S_{k-1}^{ij} \leq 0$, где S_{k-1}^{ij} — $(k-1)$ -я симметрическая функция всех главных радиусов кривизны, за исключением R_i и R_j , т. е. индикатрисы кривизн ∂K и гиперсферы радиуса r не помещаются одна строго внутри другой.

Доказательство теоремы. Не ограничивая общности, можно считать, что начало координат O находится в гиперплоскости E и центры ортогональных проекций тела K и единичного шара B совпадают с O . Рассмотрим тело $\bar{K} = \mu K + \lambda B$, где μ, λ — неотрицательные числа, а сложение понимается в смысле Минковского. Очевидно, проекция $\bar{K}$ на E является шаром радиуса $\mu r + \lambda$, где r — радиус шара, в который по условию теоремы проектируется K . По доказанному в [1] площадь этой проекции выражается следующим образом через поверхностную функцию тела $\bar{K}$: $(\mu r + \lambda)^n \omega_n = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |nn_0| F(\bar{K}, d\omega)$, где ω_n — объем n -мерного единичного шара; n_0 — единичная нормаль к E и $n \in \Omega$. По определению функций кривизны

$$F(\bar{K}, d\omega) = \sum_{i=0}^n C_n^i \mu^i \lambda^{n-i} F_i(H, d\omega), \quad (3)$$

поэтому

$$(\mu r + \lambda)^n \omega_n = \sum_{i=0}^n C_n^i \mu^i \lambda^{n-i} \left[\frac{1}{2} \int_{\Omega} |nn_0| F_i(H, d\omega) \right]. \quad (4)$$

Поскольку (4) справедливо при любых допустимых значениях μ и λ , то

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} |nn_0| F_i(H, d\omega) = \rho^i \omega_n. \quad (5)$$

Из соотношений (5) и (2) получаем $0 \geq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |nn_0| \Delta_k(d\omega) = (\rho - r)^2 \rho^{k-1} \omega_n \geq 0$. Значит, $\rho = r$ и для $\omega \in \Omega \setminus \Omega_0$, где Ω_0 — большая гиперсфера, задаваемая уравнением $nn_0 = 0$, $\Delta_k(\omega) = 0$ при $k = 1, 2, \dots, n-1$.

Покажем, что последние равенства имеют место для любого борелевского множества на Ω . Для этого рассмотрим выпуклое семейство тел $K_\lambda = (1 - \lambda)K + \lambda rB$, где $0 \leq \lambda \leq 1$. Все тела этого семейства находятся внутри одного и того же проектирующего (шарового) цилиндра. Так как B — шар, то для $\sigma \subset \Omega_0$

$$F(K_\lambda, \sigma) = (1 - \lambda) F(K, \sigma). \quad (6)$$

С другой стороны, на основании (3) и учитывая, что $C_n^i C_i^{n-i} = C_n^j C_j^{n-i}$, имеем

$$\begin{aligned} F(K_\lambda, \sigma) &= \sum_{i=0}^n C_n^i (1 - \lambda)^i \lambda^{n-i} r^{n-i} F_i(H, \sigma) = \\ &= \sum_{j=0}^n \lambda^j \left[\sum_{i=n-j}^n C_n^i C_i^{n-i} (-1)^{i+j-n} F_i(H, \sigma) r^{n-i} \right] = \\ &= \sum_{j=0}^n C_n^j \lambda^j \left[\sum_{i=n-j}^n (-1)^{i+j-n} C_j^{n-i} r^{n-i} F_i(H, \sigma) \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

Приравнявая правые части равенств (6) и (7) и замечая, что $F(K, \sigma) = F_n(H, \sigma)$, получаем

$$\begin{aligned} &\lambda [nr F_{n-1}(H, \sigma) - (n-1) F_n(H, \sigma)] + \\ &+ \sum_{j=2}^n C_n^j \lambda^j \left[\sum_{i=n-j}^n (-1)^{i+j-n} C_j^{n-i} r^{n-i} F_i(H, \sigma) \right] = 0. \end{aligned}$$

Так как λ — произвольно и при $j \geq 2$ $C_j^{n-i} = C_{j-2}^{n-i-2} + 2C_{j-2}^{n-i-1} + C_{j-2}^{n-i}$, то последнее равенство дает

$$\begin{aligned} \sum_{i=n-j}^n (-1)^{i+j-n} C_j^{n-i} r^{n-i} F_i(H, \sigma) &= \sum_{k=n+1-j}^{n-1} (-1)^{k+j-n-1} \times \\ &\times C_{j-2}^{n-k-1} r^{n-k-1} \Delta_k(\sigma) = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Однородная система линейных относительно $\Delta_k(\sigma)$ уравнений (8) имеет, очевидно, только тривиальное решение. Значит, при $k = 1, 2, \dots, n-1$ $\Delta_k(\sigma) = 0$. Поэтому для любого борелевского множества $\omega \subset \Omega$ $\Delta_k(\omega) = 0$ ($k = 1, 2, \dots, n-1$).

Тогда из (7) для $\omega = \Omega$ находим

$$F(K_\lambda, \Omega) = (1 - \lambda) F_n(H, \Omega) + \lambda r^n F_0(H, \Omega) + \\ + \sum_{k=1}^{n-1} \left[\sum_{i=0}^k (k-i) \alpha_i - k\lambda \right] r^{n-k-1} \Delta_k(\Omega), \quad (9)$$

где $\alpha_i = C_n^i (1 - \lambda)^i \lambda^{n-i}$. Действительно, для $0 \leq s \leq n-2$ коэффициент при $F_s(H, \Omega)$ в правой части (9) тривиально равен $\alpha_s r^{n-s}$.

Коэффициент при $F_n(H, \Omega)$ равен $\sum_{i=0}^{n-1} (n-1-i) \alpha_i - n\lambda + 1$. Но

так как $\sum_{i=0}^{n-1} (n-i) \alpha_i = n\lambda$, а $\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i = 1 - \alpha_n$, то этот коэффициент равен α_n . Для коэффициента при $F_{n-1}(H, \Omega)$ после приведения подобных членов получаем выражение $r[n\lambda - \sum_{i=0}^{n-2} (n-i) \alpha_i]$, что ввиду указанного представления для $n\lambda$ равно $r\alpha_{n-1}$.

Поскольку по доказанному все $\Delta_k(\Omega)$ тождественно исчезают и $r^n F_0(H, \Omega) = F(rB, \Omega)$, то на основании (9) имеем

$$F(K_\lambda, \Omega) = (1 - \lambda) F(K, \Omega) + \lambda F(rB, \Omega), \quad (10)$$

т. е. площадь поверхности тела K_λ является линейной функцией параметра λ .

Семейство тел K_λ представляет собой вполне вогнутый каналовой пучок [3, с. 340, 348—349]. Так как для этого пучка выполняется (10), то по теореме Хадвигера [3, с. 345, дополнение 1 к теореме X] тела K и rB либо равны, т. е. K — шар радиуса r , либо K — сумма Минковского шара того же радиуса и некоторого отрезка, перпендикулярного гиперплоскости E .

Теорема доказана.

Список литературы: 1. Александров А. Д. К теории смешанных объемов выпуклых тел. I—II.—Матем. сб. 1937. 2(44): 5—6, с. 947—972, 1205—1238. 2. Schneider R. Remark on a conjectured characterization of the sphere.—Ann. pol. math., 1975. 31, № 2, p. 187—190. 3. Хадвигер Г. Лекции об объеме, площади поверхности и изопериметрии.—М.: Наука, 1966.—416 с.

Поступила 8 октября 1979 г.

УДК 513

А. Д. Милка

АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ ЛИБЕРМАНА В РИМАНОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В евклидовом пространстве известна теорема И. М. Либермана о выпуклости следа геодезической линии на выпуклой гиперповерхности на проектирующем геодезическую цилиндре [1]. Этот

результат и его следствия, например — о дифференциальных свойствах геодезических, имеют в теории выпуклых поверхностей особенно важные применения [2]. Цель данной заметки — распространение указанной теоремы на риманово пространство.

Пусть R — риманово пространство; F — открытая локально выпуклая гиперповерхность в R ; $\tilde{g}$ — геодезическая, т. е. локально кратчайшая линия на F . Пусть X — точка на $\tilde{g}$; $g \supset X$ — дуга $\tilde{g}$; $l \supset X$ — кратчайшая в R , пересекающая F трансверсально; $O \neq X$ — точка на l . Предположим, что в R в окрестности X секционная кривизна K по двумерным площадкам подчинена неравенствам $\text{const} = \alpha \leq K \leq \beta = \text{const}$. Обозначим R_γ двумерную плоскость с кривизной γ ; $\gamma = \alpha$ или $\gamma = \beta$ соответственно, если точка O расположена со стороны вогнутости или со стороны выпуклости поверхности F . Считаем, что O близка к X и что длина дуги g достаточно малая.

Теорема. Пусть $C \supset R$ — конус кратчайших, проектирующих g из O . Тогда существует отображение $C \rightarrow R_\gamma$ ($O \rightarrow O'$, $g \rightarrow g'$), изометрическое на дуге g и на образующих конуса, переводящее образующие в прямолинейные отрезки, а g — в локально выпуклую кривую; кривая g' обращена к точке O' вогнутостью ($\gamma = \alpha$) или выпуклостью ($\gamma = \beta$) в соответствии с расположением точки O относительно F .

Доказательство. Пусть g_n — n -звенная ломаная из кратчайших в R , правильно вписанная в кривую g ; $\{X_m\}$ — взятые последовательно вершины ломаной; $\{l_m \subset C\}$ — проектирующие их кратчайшие. Пусть $\{O'X_mX_{m+1}; l'_m\}$ — разделяющиеся общими сторонами треугольники и проектирующие из точки O' точки $\{X'_m\}$ кратчайшие (прямолинейные отрезки) в R_γ , соответствующие по изометрии треугольникам и кратчайшим $\{OX_mX_{m+1}; l_m\}$ из R , g'_n — ломаная в R_γ со сторонами $\{X'_mX'_{m+1}\}$. Рассмотрим последовательность $\{g'_n\}$ ломаных с убывающими к нулю по длине звеньями, сходящуюся к дуге g . Можно предположить, что ломаные $\{g'_n\}$ также сходятся в R_γ к некоторой кривой g' . Утверждается, что кривая g' обладает свойствами, сформулированными в теореме.

Обозначим s длину g , s_n — длину g_n (и g'_n), s' — длину g' . Из полунепрерывности снизу длины кривой [3] имеем $s' \leq s = \lim s_n$. Достаточно доказать равенство $s' = s$ и выпуклость кривой g' .

Допустим, что $s' < s$ или что g' — не выпуклая кривая. Тогда при любом малом $\varepsilon > 0$ для всех больших n существуют ломаные $\{\bar{g}'_n\}$, которые обладают следующими свойствами. Взятые последовательно вершины $\bar{g}'_n$ — точки $\{\bar{X}'_m \subset l'_m\}$; вершина $\bar{X}'_m$ удалена от соответствующей вершины $X'_m \subset l'_m$ ломаной g'_n на расстояние r_m , удовлетворяющее неравенствам $0 < \varphi(\varepsilon) \leq r_m \leq \psi(\varepsilon)$, где функции $\varphi, \psi \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ и не зависят от m и n ; в соответствии с расположением точки O относительно поверхности F точка $\bar{X}'_m$ отделяется точкой X'_m на l'_m от точки O' ($\gamma = \alpha$) или не отделяется от

этой точки ($\gamma = \beta$); длина $\bar{g}'_n$ не превосходит $s - d$, где d от n не зависит. Существование функций φ , ψ и числа d устанавливается достаточно просто.

Пусть $\bar{g}_n$ — ломаная в R с вершинами $\{\bar{X}_m \subset l_m\}$, соответствующими точками $\{\bar{X}'_m \subset l'_m\}$ по изометрии. Длины звеньев этой ломаной и ломаной $\bar{g}'_n$ связаны неравенствами $\{|\bar{X}_m \bar{X}_{m+1}|_R \leq |\bar{X}'_m \bar{X}'_{m+1}|_{R'}\}$; для рассматриваемых случаев γ это соответственно вытекает из условий α — выпуклости и β — вогнутости метрики R [4]. Пусть A_n, B_n — концы g_n и, можно считать, дуги g , $\bar{A}_n, \bar{B}_n$ — их проекции из O , концы $\bar{g}_n$, $h_n = A_n \bar{A}_n \cup \bar{g}_n \cup \bar{B}_n B_n$ — ломаная в R , соединяющая концы g . Ломаная h_n при малом ε и при больших n в сравнении с дугой g имеет длину меньшую и располагается в R вне F . Следовательно, линия g на поверхности F — не кратчайшая. Полученное противоречие показывает, что наше допущение неверно, и, значит, $s' = s$, а кривая g' — локально выпуклая.

Теорема доказана.

Отсюда почти непосредственно получаем

Следствие. В условиях теоремы дуга g — кривая с ограниченной вариацией поворота в пространстве R . Эта кривая в каждой точке имеет правую (соответственно — левую) полукасательную, непрерывную справа (слева), и всюду, за исключением не более чем счетного множества точек, гладкая.

Сформулированные дифференциальные свойства геодезических линий на выпуклых гиперповерхностях риманова пространства достаточно трудным способом были получены ранее [5].

На основании доказанной теоремы на риманово пространство полностью распространяются и соответствующие теоремы И. М. Либбермана о сходимости для последовательностей геодезических линий. Достаточно лишь заметить следующее. В условиях теоремы для любых соответствующих точек $Y \subset g$ и $Y' \subset g'$ углы в этих точках в R и R' между отрезками OY и $O'Y'$ и соответствующими ветвями g и g' равны.

Список литературы: 1. И. М. Либберман. Геодезические линии на выпуклых поверхностях. — ДАН СССР 32, 1941, № 5, с. 310—313. 2. А. В. Погорелов. Внешняя геометрия выпуклых поверхностей. — М.: Наука, 1969. — 759 с. 3. А. Д. Александров. Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей. — М.—Л.: Гостехиздат, 1948. — 387 с. 4. Д. Громоу, В. Клинкаберг, В. Мейер. Риманова геометрия в целом. — М.: Мир, 1971. — 343 с. 5. С. В. Буяло. Кратчайшие на выпуклых поверхностях риманова пространства. — В кн.: Исследования по топологии II: Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. мат. ин-та АН СССР, 1976, 66, с. 114—132.

Поступила 1 декабря 1979 г.

В. И. Мягков

ВТОРОЕ БЕЗЫНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ
КОМПЛЕКСА, ДОПУСКАЮЩЕГО
H/K-РАССЛОЕНИЕ

Настоящая заметка является продолжением статьи [1]. В ней было найдено достаточно сложное безынтегральное представление комплекса Σ , допускающего H/K-расслоение. Это представление не позволяло выписать в явном виде решение системы дифференциальных уравнений (0.1), определяющих комплекс Σ . В данной заметке найдено более простое безынтегральное представление искомого комплекса Σ , отправляясь от которого, в явном виде записано решение системы дифференциальных уравнений (0.1).

Воспользуемся следующими формулами и фактами, полученными ранее [1]:

1. Искомый комплекс Σ , допускающий H/K-расслоение, существует с произволом в одну функцию двух аргументов и определяется системой уравнений:

$$\begin{aligned}\omega^2 &= k\omega_3^1, \quad \omega_1^2 = \beta\omega_3^2, \quad dk = q\omega_3^1 + \gamma\omega_3^2, \quad -\omega^3 + k\omega_1^2 = \\ &= \beta\omega^1 + \gamma\omega_3^1 + r\omega_3^2.\end{aligned}\quad (0.1)$$

(0.1) — уравнения комплекса Σ , отнесенного к нормальному сопровождающему трехграннику луча [2].

2. Выделено два полных дифференциала

$$\omega_3^1 = du, \quad -\frac{\omega_3^2}{\cos(u + f_1(\theta))} = d\theta. \quad (0.3)$$

3. Найдены функции

$$\begin{aligned}\beta &= -\operatorname{tg}(u + f_1(\theta)), \quad q = \int \varphi(u, \theta) du + f_3(\theta), \\ k &= \iint \varphi(u, \theta) du du + u f_3'(\theta) + f_4(\theta), \\ \gamma &= \frac{\iint \frac{\partial \varphi(u, \theta)}{\partial \theta} du du + u f_3''(\theta) + f_4'(\theta)}{-\cos(u + f_1(\theta))}.\end{aligned}\quad (0.5)$$

4. При $\omega^1 = 0$, $u = 0$ функция $k\beta - r$ зависит только от одного аргумента θ : $k\beta - r \Big|_{\substack{\omega^1=0 \\ u=0}} = f_2(\theta)$.

5. Функция f_1, f_2, f_3, f_4 — произвольные функции одного аргумента; $\varphi(u, \theta)$ — произвольная функция двух аргументов.

6. Рассмотрены две кривые L_1, L_2 :

L_1 — кривая, заданная натуральными уравнениями $k = -f_1'(\theta)$, $\kappa \equiv 1$, где θ — длина дуги кривой L_1 ; k, i, j — векторы нормального трехгранника Френе кривой L_1 .

L_2 — кривая, определяемая уравнением $dM_2(\theta) = -f_2(\theta) \cos f_1 \times [i \cos f_1 - k \sin f_1] d\theta$.

Дано безынтегральное представление комплекса (0.1).

Чтобы построить комплекс (0.1), возьмем в пространстве кривую L_1 (произвол — одна функция одного аргумента: $f_1(\theta)$). Векторы k, i, j образуют ее сопровождающий трехгранник Френе. Построим кривую L_2 (произвол — одна функция одного аргумента: $f_2(\theta)$). К каждой точке $M_2(\theta)$ кривой L_2 присоединим сопровождающий трехгранник $k(\theta), i(\theta), j(\theta)$ кривой L_1 . В плоскости $M_2(\theta), i(\theta), j(\theta)$ построим кривую $L_3(\theta)$, заданную параметрическими

$$\text{уравнениями} \quad x = - \int_0^u \left[\iint \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} du du + u f_3' + f_4' \right] du, \quad y = \int_0^u \left[\iint \varphi du du + u f_3 + f_4 \right] du \quad (\text{произвол — одна функция двух аргументов } \varphi(u, \theta) \text{ и две функции одного аргумента } f_3(\theta), f_4(\theta)).$$

Строим цилиндр $\sigma_1(\theta)$, образующие которого параллельны вектору $k(\theta)$, а направляющей служит кривая $L_3(\theta)$. Через каждую образующую цилиндра $\sigma_1(\theta)$ в направлении вектора $e_3 = -i \cos(u + f_1) + k \sin(u + f_1)$ проводим пучок параллельных прямых. Совокупность всех таких пучков, построенных для каждой образующей каждого цилиндра и составляет комплекс (0.1).

§ 1. Второе безынтегральное представление комплекса Σ . Рассмотрим ортонормированную тройку векторов

$$\tau = e_1 \sin u - e_3 \cos u, \quad \nu = e_2, \quad \beta = e_1 \cos u + e_3 \sin u. \quad (1.1)$$

Решим систему (1.1) относительно векторов e_1, e_2, e_3 :

$$e_1 = \tau \sin u + \beta \cos u, \quad e_2 = \nu, \quad e_3 = -\tau \cos u + \beta \sin u. \quad (1.2)$$

Общее смещение центра луча комплекса

$$dA = \omega^1 e_1 + \omega^2 e_2 + \omega^3 e_3,$$

учитывая соотношения (0.1), (1.2), запишем в виде

$$dA = \tau [(\sin u + \beta \cos u) \omega^1 + \gamma \cos u \omega_3^1 + (k\beta - r) \cos u \omega_3^2] + \nu [k\omega_3^1 + \beta [(\cos u - \beta \sin u) \omega^1 - \gamma \sin u \omega_3^1 - (k\beta - r) \sin u \omega_3^2]]. \quad (1.3)$$

На общее смещение точки A наложим два ограничения

$$\omega^1 = 0, \quad u = 0. \quad (1.4)$$

При этом точка A будет описывать некоторые кривые. Рассмотрим одну из них. Обозначим ее L . При ограничениях (1.4) выражение (1.3) принимает вид

$$dA = \tau f_2(\theta) \cos f_1(\theta) d\theta. \quad (1.5)$$

Обозначим

$$f_2(\theta) \cos f_1 d\theta = ds. \quad (1.6)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что вдоль кривой L имеют место равенства

$$dA = \tau ds, \quad d\tau = k^* \nu ds, \quad d\nu = -k^* \tau ds + \kappa^* \beta ds, \quad d\beta = -\kappa^* \nu ds. \quad (1.6^*)$$

Таким образом, s — длина дуги кривой L . Тройка векторов τ, ν, β является нормальным сопровождающим трехгранником Френе кривой L . Переход от параметра θ к натуральному параметру s определяется уравнением (1.6). Пусть

$$\theta = \theta(s) \quad (1.7)$$

— решение уравнения (1.6).

Каждую точку M , лежащую на кривой L , можно определить параметром θ [см. (1.7)] $M = M(\theta)$. При $\theta = \text{const}$ точка A описывает в пространстве поверхность. Обозначим ее $\sigma_1(\theta)$. Для выяснения строения поверхности $\sigma_1(\theta)$ введем в рассмотрение тройку векторов

$$\hat{\tau} = \tau \cos f_1 + \beta \sin f_1, \quad (1.8)$$

$$\hat{\nu} = \nu, \quad \hat{\beta} = \tau (-\sin f_1) + \beta \cos f_1.$$

Внесем $\theta = \text{const}$ в (1.3). Учтем соотношения (1.8), (0.5). Бесконечно малое смещение точки A по поверхности $\sigma_1(\theta)$ принимает вид

$$dA = \hat{\tau} [\gamma \cos(u + f_1) \omega_3^1] + \hat{\nu} [k \omega_3^1] + \hat{\beta} \left[\omega^1 \frac{1}{\cos(u + f_1)} - \gamma \sin(u + f_1) \omega_3^1 \right]. \quad (1.9)$$

При $\omega_3^1 = 0$ и $d\theta = 0$ получим $dA = \hat{\beta} \omega^1 \frac{1}{\cos(u + f_1)}$. Таким образом, поверхность $\sigma_1(\theta)$ является цилиндром с образующими, параллельными вектору $\hat{\beta}$. (Напомним, что векторы $\hat{\tau}, \hat{\nu}, \hat{\beta}$ при $\theta = \text{const}$ являются постоянными).

Движение проекции точки A на плоскость $\hat{\tau}M\hat{\nu}$ определяется уравнением

$$dA = \hat{\tau} \gamma \cos(u + f_1) du + \nu k du. \quad (1.10)$$

Совместим ось Ox с направлением вектора $\hat{\tau}$, а ось Oy — с направлением вектора $\hat{\nu}$. Интегрируя уравнение (1.10), получим параметрические уравнения направляющей цилиндра $\sigma_1(\theta)$:

$$x = \int_0^u \gamma \cos(u + f_1) du, \quad y = \int_0^u k du. \quad (1.11)$$

Для большей геометрической наглядности и простоты безынтегрального представления целесообразно от параметра θ перейти к натуральному параметру s — длине дуги кривой L .

Пусть k^* и κ^* — кривизна и кручение кривой L . Из (1.6) вытекает

$$k^*(s) = \frac{-1}{f_2(\theta)}, \quad \kappa^*(s) = \frac{\text{tg } f_1(\theta)}{f_2(\theta)}. \quad (1.12)$$

Так как f_1, f_2 — произвольные функции, а θ и s подчинены условию (1.7), то k^* и κ^* — произвольные функции одного аргумента, т. е. L является произвольной кривой. Решим (1.12) относительно f_1, f_2

$$f_1(\theta) = \pi - \operatorname{arctg} \frac{\kappa^*(s)}{k^*(s)}, \quad f_2(\theta) = -\frac{1}{k^*(s)}. \quad (1.13)$$

Легко получить, что

$$\frac{ds}{d\theta} = \frac{1}{\sqrt{k^{*2} + \kappa^{*2}}}. \quad (1.14)$$

Произвольную функцию двух аргументов $\varphi(u, \theta)$ сейчас необходимо считать произвольной функцией двух аргументов $\varphi^*(u, \theta)$.

Введем следующее обозначение

$$T(u, \theta) = \iint \varphi(u, \theta) du du + u f_3(\theta) + f_4(\theta). \quad (1.15)$$

После замены (1.7) произвольную функцию двух аргументов $T(u, \theta)$ нужно считать произвольной функцией двух аргументов $T^*(u, s)$. Учитывая сказанное и равенства (1.13) — (1.15), запишем (0.5), (1.11) в виде $\beta = \frac{-k^* \sin u + \kappa^* \cos u}{k^* \cos u + \kappa^* \sin u}$,

$$k = T^*(u, s), \quad q = \frac{\partial T^*(u, s)}{\partial u}, \quad \gamma = \frac{\partial T^*(u, s)}{\partial s} \frac{1}{k^* \cos u + \kappa^* \sin u}; \quad (1.15^*)$$

$$x = - \int_0^u \frac{\partial T^*}{\partial s} \frac{1}{\sqrt{k^{*2} + \kappa^{*2}}} du, \quad y = \int_0^u T^* du. \quad (1.15^{**})$$

Положение центра A луча комплекса Σ можно определить тремя параметрами: u, v, s . Параметр s определяет цилиндр σ_1 , проходящий через точку $M(s)$ кривой L . Параметром u задается образующая этого цилиндра σ_1 [см. (1.11)]. Пусть v является расстоянием точки A от плоскости $\hat{\tau}M\hat{\nu}$. В таком случае

$$A(s, u, v) = M(s) + \hat{\tau}x(u, s) + \hat{\nu}y(u, s) + \hat{\beta}v. \quad (1.16)$$

На цилиндре $\sigma_1(s_0)$ выделим образующую $u = u_0$. Через каждую точку этой образующей в направлении вектора $e_3 = \tau \times \times \cos(\pi - u_0) + \beta \sin(\pi - u_0)$ проходит прямая, принадлежащая комплексу Σ . Эти прямые $l(s_0, u_0, v)$ параллельны и образуют плоский пучок (векторы τ, β сейчас постоянны). Обозначим этот пучок $\Pi(s_0, u_0)$, или просто $\Pi(s, u)$. Легко видеть, что плоскость $\Pi(s, u)$ ортогональна к вектору $\nu(s)$ и удалена от точки $M(s)$ на расстояние

$$h = y(u, s). \quad (1.17)$$

Итак, получаем следующее безынтегральное представление комплекса Σ . Берем в пространстве произвольную кривую L : $M = M(s)$, s — длина дуги. Векторы $\tau = \tau(s)$, $\nu = \nu(s)$, $\beta = \beta(s)$ образуют нормальный сопровождающий трехгранник Френе кри-

вой L . От точки $M(s)$ в направлении вектора $\mathbf{y}$ откладываем отрезок длины $h(u, s) = \int_0^u T^*(u, s) du$. Через конец этого отрезка ортогонально к нему проводим плоскость $\Pi(u, s)$. В плоскости $\Pi(u, s)$ строим пучок прямых, параллельных вектору $\mathbf{e}_3 = \boldsymbol{\tau} \times \times \cos(\pi - u) + \beta \sin(\pi - u)$. Двупараметрическая совокупность таких плоских пучков $\Pi(u, s)$ и составляет рассматриваемый комплекс Σ .

Произвольной функцией двух аргументов, определяющей произвол существования комплекса Σ , можно считать $T^*(u, s)$.

§ 2. Решение системы дифференциальных уравнений (0.1). Используя найденное в § 1 безынтегральное представление комплекса Σ и взаимное положение цилиндров $\sigma_1(s)$, можно в явном виде выписать решение системы уравнений (0.1).

Рассмотрим уравнения (0.1) и перечислим переменные, входящие в эту систему уравнений. Для этого отнесем E_3 к неподвижной системе координат $T_0(\mathbf{e}_1^0, \mathbf{e}_2^0, \mathbf{e}_3^0)$. К каждой точке $A \in E_3$: $A = x^i \mathbf{e}_i$ присоединим ортогональный репер $T(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$

$$\mathbf{e}_i = \alpha_i^j \mathbf{e}_j^0. \quad (2.1)$$

Здесь α_i^j — направляющие косинусы вектора $\mathbf{e}_i$. Так как репер T ортогональный, то среди девяти параметров α_i^j независимых будет только три. (Положение репера T относительно T_0 можно определить, например, тремя углами Эйлера $\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3$.)

Формы ω^i, ω_i^j , определяющие бесконечно малое смещение точки A и тройки векторов $\mathbf{e}_i$, имеют вид $\omega^i = \alpha_k'^i dx^k, \omega_i^j = \alpha_k'^j d\alpha_i^k$ ($i, j, k = 1, 2, 3$), где $\alpha_k'^i$ — элементы матрицы, обратной к ортогональной матрице (α_k^i) (см. (2.1)).

Таким образом, в систему (0.1) входят следующие переменные: $x^1, x^2, x^3; \varphi^1, \varphi^2, \varphi^3; k, \beta, \gamma, q, r$, из которых три нужно считать независимыми переменными, а остальные восемь — искомыми функциями. (Отыскание α_i^j трудностей не представляет, так как α_i^j известным образом [3] выражаются через φ^i .)

Можно поступить и иначе, а именно, считать, что в систему (0.1) входит семнадцать переменных;

$$k, \beta, \gamma, q, r; x^i; \alpha_i^j \quad (2.2)$$

и представить решение системы (0.1) в параметрическом виде, т. е. выразить все семнадцать переменных (2.2) через три новых параметра u, s, v . При этом нужно учесть, что α_i^j — направляющие косинусы единичных взаимно ортогональных векторов $\mathbf{e}_i$.

Опуская обширные выкладки, укажем окончательный результат. Девять функций α_i^j определяются равенствами

$$\alpha_1^i = y^{i'} \sin u + \frac{p^i}{k^*} \cos u, \alpha_2^i = \frac{y^{i''}}{k^*}, \alpha_3^i = -y^{i'} \cos u + \frac{p^i}{k^*} \sin u. \quad (2.3)$$

Три функции x^i имеют вид

$$x^i = y^i + \frac{1}{\sqrt{k^{*2} + \kappa^{*2}}} \left\{ x \left[-ky^{i'} + p^i \frac{\kappa^*}{k^*} \right] - v [\kappa^* y^{i'} + p^i] \right\} + y \frac{y^{i''}}{k^*}. \quad (2.4)$$

Функции k, β, q, γ имеют вид (1.15*).

Используя равенства (1.15*), (1.16), (0.1), найдем функцию

$$r = T^*(u, s) \cdot \frac{-k^* \sin u + \kappa^* \cos u}{k^* \cos u + \kappa^* \sin u} + \frac{k^{*2} + \kappa^{*2}}{(k^* \cos u + \kappa^* \sin u)^2} \times \\ \times \left[v \frac{\kappa^* k^{*'} - k^* \kappa^{*'}}{(k^{*2} + \kappa^{*2})^{3/2}} + \frac{k^*}{k^{*2} + \kappa^{*2}} + \int_0^u \left[\frac{\partial^2 T^*}{\partial s^2} \cdot \frac{1}{k^{*2} + \kappa^{*2}} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\partial T^*}{\partial s} \frac{k^* k^{*'} + \kappa^* \kappa^{*'}}{(k^{*2} + \kappa^{*2})^2} - T^* \right] du \right]. \quad (2.5)$$

Таким образом, в явном виде получено решение системы дифференциальных уравнений (0.1). Семнадцать искомых функций имеют вид (1.15*), (2.3) — (2.5). В записи полученного решения приняты следующие сокращения:

1. $y^i = y^i(s)$ — три функции, подчиненные условию $\sum_{i=1}^3 (y^{i'})^2 = 1$;
2. $k^* = k^*(s) = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (y^{i''})^2}$; 3. $\kappa^* = \kappa^*(s) = \frac{1}{k^{*2}} \begin{vmatrix} y^{1'} & y^{2'} & y^{3'} \\ y^{1''} & y^{2''} & y^{3''} \\ y^{1'''} & y^{2'''} & y^{3'''} \end{vmatrix}$;
4. $p^1 = \begin{vmatrix} y^{2'} & y^{3'} \\ y^{2''} & y^{3''} \end{vmatrix}$, $p^2 = \begin{vmatrix} y^{3'} & y^{1'} \\ y^{3''} & y^{1''} \end{vmatrix}$, $p^3 = \begin{vmatrix} y^{1'} & y^{2'} \\ y^{1''} & y^{2''} \end{vmatrix}$; 5. $T^* = T^*(u, s)$ — произвольная функция двух аргументов; 6. $x = - \int_0^u \frac{\partial T^*}{\partial s} \frac{1}{\sqrt{k^{*2} + \kappa^{*2}}} du$;
7. $y = \int_0^u T^* du$.

Список литературы: 1. Мягков В. И. H/K — расслоение комплекса прямых в нормальные конгруэнции. — Укр. геометр. сб., 1980, вып. 23, с. 107—120. 2. Кованцов Н. И. Теория комплексов. — Киев: Изд-во Киевск. ун-та, 1963. — 292 с. 3. Бюшгенс С. С. Аналитическая геометрия, часть 1. — ОГИЗ, Госиздат, технико-теоретической литературы, 1946. — 560 с.

Поступила 26 апреля 1978 г.

В. А. Пеклич, С. А. Хантурина
 АЛГЕБРА ПРЯМЫХ ТРЕХМЕРНОГО
 КВАЗИСИМПЛЕКТИЧЕСКОГО
 ПРОСТРАНСТВА

Квазисимплектическое пространство Sr_3^1 — это проективное пространство P_3 , в котором некоторая прямая ∞ отмечена в качестве абсолюта [1]. В статье рассматриваются вопросы, связанные с введением на множестве A неособых (т. е. не пересекающихся ∞) прямых пространства Sr_3^1 структуры алгебры, изоморфной алгебре матриц второго порядка или алгебре антикватернионов [2].

§1. Сложение прямых. 1. Группа параболических гомологий в Sr_3^1 .

Рассмотрим семейство A коллинеаций K в P_3 , удовлетворяющих следующим условиям:

- 1) все точки прямой ∞ неподвижны в K ;
- 2) все плоскости пучка ∞ неподвижны в K ;
- 3) если точка $P \notin \infty$ неподвижна в K , то все точки плоскости $P \infty$ неподвижны в K ;
- 4) если плоскость $\pi \not\subset \infty$ неподвижна в K , то все плоскости связки $\pi \cap \infty$ неподвижны в K .

Требование 4, двойственное требованию 3, выписано здесь лишь «для симметрии». Легко проверить, что если коллинеация удовлетворяет первым трем условиям, то она удовлетворяет и четвертому.

Если $K \in A$, то в любой плоскости, проходящей через ∞ , K индуцирует элацию (т. е. перенос, если прямая ∞ — несобственная) или тождественное преобразование. Учитывая это, легко убедиться, что A — коммутативная группа.

Если 0 и a — две произвольные прямые из A , то существует единственная коллинеация $K \in A$, переводящая 0 в a , т. е. группа A действует на множестве A однотранзитивно. Действительно, если σ — произвольная плоскость пучка ∞ , то точка $0 \cap \sigma$ переходит в точку $a \cap \sigma$, чем однозначно определен перенос в плоскости σ , и с ним K .

Если прямые 0 и a скрещиваются, то K представляет собой параболическую гомологию, многообразие инвариантных прямых которой есть параболическая линейная конгруэнция с осью ∞ , состоящая из касательных к квадрике, содержащей прямые $0, a, \infty$, в точках прямой ∞ . Если прямые 0 и a пересекаются, то K — параболическая гомология другого сорта с плоскостью неподвижных точек, проходящей через точку $0 \cap a$ и прямую ∞ , и центром в точке пересечения плоскости $0a$ с прямой ∞ . Если, наконец, $0 = a$, то K — тождественное преобразование.

2. *Перенесение структуры группы A на A .* Зафиксируем прямую 0 и рассмотрим отображение $\varphi: A \rightarrow A$, сопоставляющее коллинеации $K_a \in A$ прямую $a \in A$, в которую K_a переводит прямую 0 , т. е. $a = \varphi(K_a) = K_a(0)$. В силу однотранзитивности группы A на A отображение φ биективно (коллинеация $\varphi^{-1}(a)$ переводит 0 в a) и, следовательно, оно переносит в A структуру группы A , т. е. A превращается в группу, изоморфную группе A .

Прямая 0 служит в группе A нулем (для группы A мы будем пользоваться аддитивной терминологией), поскольку φ^{-1} переводит ее в тождественное преобразование из A .

Если $a, b \in A$, а K_a, K_b — соответствующие коллинеации из A , то суммой прямых a и b будет прямая, в которую переходит 0 в произведении $K_a K_b = K_b K_a$, т. е. образ прямой b в гомотопии K_a , или образ прямой a в гомотопии $K_b: a + b = K_a K_b(0) = K_b K_a(0) = K_a(b) = K_b(a)$.

Другими словами, преобразования из A суть сдвиги группы A .

Противоположная прямая — a для прямой $a \in A$ определяется как образ прямой a в инволюционной гомотопии ω с осями 0 и ∞ . Если считать прямую ∞ несобственной прямой горизонтальных плоскостей, а прямую 0 вертикальной, то ω есть просто отражение от прямой 0 .

3. *Подгруппы группы A .* Пусть Σ — множество всех прямых в P_3 , а $K_\infty = \Sigma \setminus A$ — множество всех особых («горизонтальных») прямых в Sp_3^1 , т. е. специальный линейный комплекс с осью ∞ . Условимся пересечение линейчатого многообразия $M \subset \Sigma$ с A обозначать M_A ($M \cap A = M_A$). При этом для краткости называть M_A будем так же, как и M ; например, если M — конгруэнция, то и M_A — конгруэнция, а не «конгруэнция, из которой выброшены прямые комплекса K_∞ ».

Пусть L — линейный комплекс, содержащий прямые 0 и ∞ . Покажем, что L_A переходит в себя в сдвиге $K_a = \varphi^{-1}(a)$, где $a \in L_A$, и в инволюционной гомотопии ω . Это будет означать замкнутость комплекса L_A относительно операций сложения и перехода к противоположному элементу в группе A , т. е. будет означать, что L_A — подгруппа в A .

Для случая, когда комплекс L специальный, доказательство несложно, и мы его не приводим. Пусть комплекс L невырожденный. Прямые комплекса L , пересекающие прямую $l \in L$, образуют параболическую линейную конгруэнцию с осью l [3]. Пусть Π_∞, Π_0, Π_a — такие конгруэнции с осями $\infty, 0, a$. Покажем вначале, что K_a переводит Π_∞ в себя, а Π_0 в Π_a .

Поскольку $\infty \in L$, то полюс (нуль-точка) каждой плоскости σ пучка ∞ в нуль-системе комплекса L расположен на прямой ∞ . Другими словами, каждая такая плоскость σ содержит пучок параллельных (прямую ∞ считаем несобственной) прямых из L ; все эти прямые образуют Π_∞ . Но поскольку сужение K_a на σ есть перенос, этот пучок переходит в K_a в себя и $K_a(\Pi_\infty) = \Pi_\infty$.

Пусть P — какая-нибудь точка прямой 0 , а p — проходящая через нее прямая из Π_∞ . Поскольку $p \in L$ и пересекает 0 , то $p \in \Pi_0$. Гомология K_a переводит p в прямую $p' \in \Pi_\infty$, пересекающую a , т. е. принадлежащую Π_a . Таким образом, пучок прямых из Π_0 , содержащий 0 и p , переходит в K_a в пучок прямых из Π_a , содержащий a и p' , т. е. $K_a(\Pi_0) = \Pi_a$.

Произвольному пучку прямых из L принадлежит одна прямая из Π_∞ и одна прямая из Π_0 . В гомологии K_a он переходит в пучок, содержащий по одной прямой из Π_∞ и Π_a и, следовательно, целиком состоящий из прямых комплекса, т. е. $K_a(L) = L$.

Но так как $L_A = L \setminus \Pi_\infty$, $K_a(\Pi_\infty) = \Pi_\infty$ и $K_a(L) = L$, то $K_a(L_A) = L_A$.

Инволюционная гомология ω переводит пучок, содержащий 0 или ∞ , в себя. Поэтому $\omega(\Pi_0) = \Pi_0$, $\omega(\Pi_\infty) = \Pi_\infty$. Если прямая $a \in L$ скрещивается с 0 и ∞ , то $\omega(a) = -a$ принадлежит полуквадрике, содержащей 0 , ∞ , a . Но полуквадрика, содержащая три прямые комплекса, целиком состоит из прямых комплекса, т. е. $\omega(a) \in L$. Следовательно, $\omega(L) = L$ и $\omega(L_A) = L_A$.

Итак, линейные комплексы (общие и специальные), содержащие прямые 0 и ∞ , — суть подгруппы в A .

Поскольку пересечение подгрупп есть подгруппа, то линейные конгруэнции (гиперболические, параболические и эллиптические), содержащие 0 и ∞ , также являются подгруппами в A . Два специальных линейных комплекса, содержащих 0 и ∞ , могут пересечься по связке (плоскому полю), содержащей 0 , и плоскому полю (связке), содержащему ∞ . Выбрасывая из этого пересечения особые прямые, получим, что связки и плоские поля, содержащие 0 , суть подгруппы в A . И наконец, одномерными подгруппами в A являются полуквадрики, содержащие 0 и ∞ , и пучки, содержащие 0 .

Отметим, что подгруппе M_A группы A отвечает в A подгруппа $\varphi^{-1}(M_A)$ гомологий, переводящих в себя многообразие M_A .

4. Группа A изоморфна аддитивной группе четырехмерного векторного пространства V_4 . Пусть P_A — какая-нибудь связка с вершиной $P \in 0$; она является подгруппой в A , которой в A соответствует подгруппа гомологий с общей плоскостью P_∞ неподвижных точек. Очевидно, что гомологии этой подгруппы и переносы, порождаемые ими в произвольной плоскости σ пучка ∞ , не содержащей P , находятся во взаимно-однозначном соответствии, при котором произведению гомологий отвечает произведение переносов. Иначе говоря, подгруппа P_A изоморфна группе переносов аффинной плоскости или, что то же самое, аддитивной группе двумерного векторного пространства V_2 .

Смежные классы группы A по подгруппе P_A суть связки с вершинами в плоскости P_∞ (смежный класс с представителем a есть образ подгруппы в сдвиге K_a). Если Q_A — еще одна связка с вершиной Q на прямой 0 , то подгруппа Q_A (изоморфная P_A)

содержит в точности по одному представителю из каждого смежного класса, т. е. факторгруппа A/P_A изоморфна Q_A ; аналогично A/Q_A изоморфна P_A .

Пусть a — произвольная прямая из A ; P', Q' — точки ее пересечения с плоскостями P_∞ и Q_∞ , $p = PQ'$ и $q = QP'$ (рис. 1). Множество сумм $a + P_A = q + P_A$, т. е. смежный класс P'_A , содержит сумму $q + p$, так как $p \in P_A$. Аналогично, $a + Q_A = p + Q_A = Q'_A \ni p + q$. Поэтому $a = P'_A \cap Q'_A = p + q$, т. е. произвольная прямая $a \in A$ может быть представлена в виде суммы $p + q$, где $p \in P_A$, $q \in Q_A$, причем очевидно, что это представление однозначно. Следовательно, группа A есть прямая сумма двух своих подгрупп P_A и Q_A . Поэтому группа A изоморфна прямой

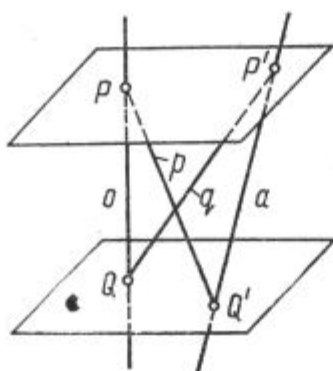


Рис. 1

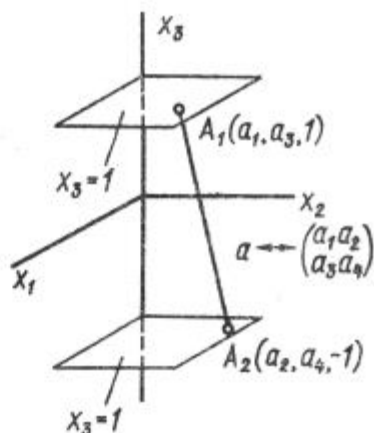


Рис. 2

сумме двух групп V_2 или группе V_4 , а одно-, дву- и трехмерные подгруппы в A изоморфны группам векторов пространств V_1, V_2, V_3 .

5. *Представление прямых матрицами.* В этом пункте мы считаем ∞ несобственной прямой горизонтальных плоскостей. Выберем в пространстве аффинную систему координат, ось x_3 которой совпадает с прямой 0, а оси x_1 и x_2 лежат в какой-либо горизонтальной плоскости (рис. 2). Пусть прямая $a \in A$ пересекает плоскость $x_3 = 1$ в точке $A_1(a_1, a_3, 1)$ и плоскость $x_3 = -1$ — в точке $A_2(a_2, a_4, -1)$. Поставим прямой a в соответствие матрицу

$$(a) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}.$$

Уравнениями

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 + \frac{a_1 - a_2}{2} x_3 + \frac{a_1 + a_2}{2}, \\ x'_2 &= x_2 + \frac{a_3 - a_4}{2} x_3 + \frac{a_3 + a_4}{2}, \\ x'_3 &= x_3 \end{aligned}$$

задается сдвиг $K_a = \varphi^{-1}(a)$ группы A , порождаемый прямой a . Легко проверить, что K_a переводит прямую 0, которой соответствует нулевая матрица, в прямую a , а прямую b — в прямую $a + b$.

$+b$. При этом прямой $a+b$ соответствует матрица, являющаяся суммой матриц (a) и (b) , т. е. группа A изоморфна группе действительных матриц второго порядка по сложению.

Уравнения инволюции ω в выбранной системе координат имеют вид $x'_1 = -x_1$, $x'_2 = -x_2$, $x'_3 = x_3$.

§ 2. Умножение прямых. 1. *Группа G_A коллинеаций, оставляющих на месте прямую ∞ и каждую точку прямой 0 .*

В этом параграфе мы введем операцию умножения на множестве $\Gamma = A \setminus K_0$, где K_0 — специальный линейный комплекс с осью 0 . В § 3 это умножение будет распространено на все множество A неособых прямых пространства S^3_1 .

Кроме прямых 0 и ∞ зафиксируем еще какую-нибудь скрещивающуюся с ними прямую 1 и рассмотрим группу G_A коллинеаций, оставляющих на месте прямую ∞ и каждую точку прямой 0 .

В любой коллинеации из G_A пучок плоскостей через 0 переходит в себя, а пучок плоскостей через ∞ подвергается тождественному преобразованию.

Коллинеация a_A из G_A будет определена, если указать прямую a , в которую она переводит прямую 1 ; при этом, разумеется, a не должна пересекать 0 и ∞ , поскольку ее прообраз 1 не пересекает эти (двойные!) прямые, т. е. $a \in \Gamma$. Действительно, пусть $a = a_A(1)$; тогда кроме тождественного преобразования в пучке ∞ определены проективное соответствие в пучке 0 и проективное отображение пучка 1 на пучок a , индуцируемые коллинеацией a_A . Соответствующие плоскости пучка 0 инцидентны соответствующим точкам прямых 1 и a , которые в свою очередь перспективны относительно прямой ∞ , пучки же 1 и a перспективны относительно прямой 0 . Поэтому образ точки P общего положения определяется как точка пересечения плоскостей пучков ∞ , 0 и a , соответствующих плоскостям пучков ∞ , 0 и 1 , проходящим через точку P . Это означает, что коллинеация a_A определена однозначно. Таким образом, группа G_A действует на Γ транзитивно.

Отметим, что двойные точки проективного преобразования, порождаемого коллинеацией a_A на прямой ∞ , определяются как следы на ∞ трансверселей четверки 0 , ∞ , 1 и $a = a_A(1)$. Если эти четыре прямые конквадричны, то трансверселей ∞^1 , т. е. все точки на ∞ неподвижны, и a_A есть гомотопия с осями 0 и ∞ . Если же эти прямые не принадлежат одной полуквадрике, то трансверселей две. Они могут быть вещественными — различными или совпавшими, и мнимыми; в соответствии с этим преобразование на ∞ будет гиперболическим, параболическим или эллиптическим.

2. *Перенесение структуры группы G_A на Γ .* Пусть G_n — группа коллинеаций, оставляющих на месте прямую 0 и каждую точку прямой ∞ . Четырехпараметрические группы G_A и G_n пересекаются по однопараметрической группе G_1 гомотопий с осями

0 и ∞ . Группы G_A и G_n некоммутативные, однако любые два преобразования $a_A \in G_A$ и $b_n \in G_n$ перестановочны. Для случая, когда хотя бы одна из коллинеаций $a_A, b_n \in G_1$, доказательство несложно. Рассмотрим случай, когда $a_A, b_n \notin G_1$. Пусть P — произвольная точка в P_3 ; докажем, что $P_{ab} = a_A b_n(P) = b_n a_A(P) = P_{ba}$. Пусть σ и $\sigma' = a_A(\sigma)$ — плоскости, проходящие через прямую 0 и точки P и $P_a = a_A(P)$, а τ и τ' — плоскости, проходящие через прямую ∞ и точки P и $P_b = b_n(P)$. Пусть далее $S_\infty, S'_\infty, T_0, T'_0$ суть точки $\sigma \cap \infty, \sigma' \cap \infty, \tau \cap 0, \tau' \cap 0$ (рис. 3). Поскольку в коллинеации a_A все точки прямой $0 = \sigma \cap \sigma'$

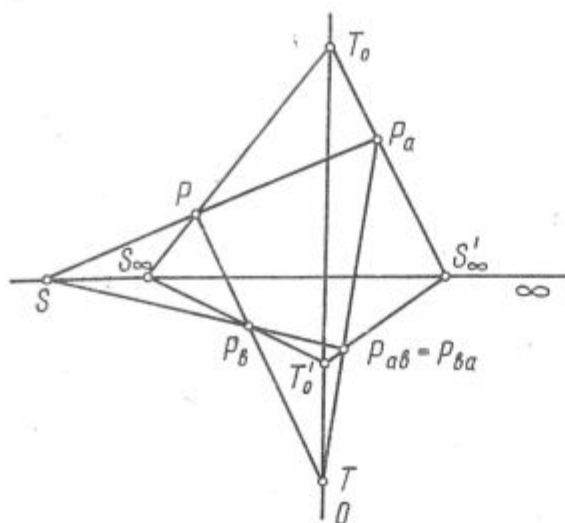


Рис. 3

неподвижны, то a_A переводит σ в σ' так же, как перспектива с центром S на прямой ∞ ($S = PP_a \cap S_\infty S'_\infty$). Аналогично b_n переводит τ в τ' как перспектива с центром $T = PP_b \cap T_0 T'_0$. Поскольку далее треугольники $PS_\infty P_b$ и $P_a S'_\infty P_{ab}$ перспективны относительно центра S , то по теореме Дезарга точки P_{ab} и P_a коллинейны с центром T , т. е. $P_{ab} = b_n(P_a) = P_{ba}$.

Пусть теперь φ_A — взаимнооднозначное отображение $G_A \rightarrow \Gamma$, переводящее коллинеацию a_A в прямую $a = a_A(1)$, а φ_n — аналогичное отображение $G_n \rightarrow \Gamma$.

Положим по определению $ab = \varphi_A(a_A b_n) = a_A b_n(1) = a_A(b)$, т. е. перенесем в Γ структуру группы G_A посредством отображения φ_A .

В силу только что доказанной коммутативности $a_A b_n = b_n a_A$ произведение ab есть не только образ прямой b в коллинеации a_A , но и образ прямой a в коллинеации b_n : $ab = a_A(b) = a_A b_n(1) = b_n a_A(1) = b_n(a)$.

Итак, мы превратили Γ в группу, изоморфную группе G_A , с умножением по правилу $ab = a_A(b) = b_n(a)$. Ясно, что при этом G_A является группой левых, а G_n — правых сдвигов группы Γ . Единицей группы Γ служит прямая 1, отвечающая тождественному преобразованию из G_A .

Группы G_A и G_n изоморфны; изоморфизмом, например, будет отображение $a_A \rightarrow i a_A i$, где i — какая-нибудь инволюционная коллинеация, меняющая местами прямые 0 и ∞ (например, инволюция взаимно обратных элементов группы Γ — см. ниже). Однако отображение $\varphi_A^{-1}(a) \rightarrow \varphi_n^{-1}(a)$ является антиизоморфизмом (произведение переходит в произведение с переставленными сомножителями); поэтому $\varphi_A(a_A b_n) \neq \varphi_n(a_n b_n)$.

3. Полуквадрика Q_Γ — центр группы Γ . Пусть Q — полуквадрика, содержащая прямые 0, 1, ∞ , а $Q_\Gamma = Q \cap \Gamma$, т. е. Q_Γ — полуквадрика Q без прямых 0 и ∞ . Полуквадрика Q_Γ — подгруппа

в Γ , в которую φ_a переводит подгруппу G_1 гомологий с осями 0 и ∞ . Левый и правый смежные классы aQ_Γ и $Q_\Gamma a$ группы Γ по подгруппе Q_Γ совпадают — это полуквадрика $a_a(Q_\Gamma) = a_n(Q_\Gamma)$, содержащая прямые 0, a и ∞ , в которые a_a и a_n переводят прямые 0, 1 и ∞ полуквадрики Q . Поэтому Q_Γ — нормальный делитель группы Γ .

Прямые полуквадрики $a_a(Q_\Gamma)$ отвечают тем коллинеациям группы G_a , которые индуцируют на прямой ∞ одно и то же проективное преобразование (в самом деле, если $P \in \infty$, то для построения точки $P' = a_a(P)$ следует провести через P прямую p , пересекающую 1 и 0, и через точку $p \cap 0$ провести прямую $p' = a_a(p)$, пересекающую a и ∞ , причем $p' \cap \infty = P'$; поэтому если $b \in a_a(Q_\Gamma)$, то $a_a(P) = b_a(P)$ для произвольной точки $P \in \infty$). Другими словами, факторгруппа Γ/Q_Γ изоморфна группе проективных преобразований прямой.

Гомологии из G_1 перестановочны со всеми коллинеациями из G_a в силу перестановочности левых и правых сдвигов и того, что $G_1 = G_a \cap G_n$. Поэтому G_1 — центр группы G_a , а $Q_\Gamma = \varphi_a(G_1)$ — центр группы Γ .

4. *Полуквадрика Q_A изоморфна полю действительных чисел.*

Подгруппа Q_Γ изоморфна мультипликативной группе действительных чисел без нуля, а подгруппа $Q_A = Q_\Gamma \cup 0$ группы A (см. § 1) — аддитивной группе действительных чисел. Сужая коллинеации из A и G_a , соответствующие прямым полуквадрики Q_A , на какую-нибудь прямую s , пересекающую 0, 1 и ∞ , мы получим на этой прямой s соответственно группу параболических проективных преобразований с двойной точкой $s \cap \infty$ и группу гиперболических проективных преобразований с двойными точками $s \cap 0$ и $s \cap \infty$. Сложение и умножение прямых полуквадрики Q_A будет эквивалентно при этом штаудтовскому сложению и умножению точек на прямой s [4]. Иначе говоря, полуквадрика Q_A относительно рассматриваемых операций сложения и умножения прямых является полем, изоморфным полю действительных чисел.

В группе G_1 есть одна инволюционная гомология, совпадающая с операцией ω перехода к противоположному элементу в A ; соответствующую ей прямую полуквадрики Q_Γ , гармонически сопряженную прямой 1 относительно пары 0, ∞ , мы будем обозначать — 1.

5. *Инволюции группы Γ .* В группе G_a содержатся центральные гомологии с центрами на ∞ и плоскостями неподвижных точек через 0. Такой гомологии a_a в группе Γ отвечает прямая a , пересекающая 1 в точке, принадлежащей плоскости неподвижных точек. Поэтому связка прямых с вершиной на прямой 1 является подгруппой в Γ , соответствующей подгруппе гомологий из G_a с общей плоскостью неподвижных точек. Центр гомологии a_a определяется как общая точка прямой ∞ и плоскости, натянутой на прямые 1 и a . Поэтому плоское поле прямых, содержащее 1, является подгруппой в Γ , в которую φ_a переводит подгруппу

гомологий из G_A с общим центром. Пучок прямых, содержащий 1, также является подгруппой в Γ как пересечение подгрупп — поля и связки.

Пусть центральная гомология a_A инволюционная. Покажем, что прямая $a = \varphi_A(a_A)$ пересекает не только 1, но и -1 . Через центр $S_\infty \in \infty$ гомологии a_A проведем прямую s , пересекающую 1 и 0 (в точках S_1 и S_0). Поскольку s пересекает три прямые 0, 1, ∞ полуквадрики Q , то она пересекает и $-1 \in Q$ (в точке S_{-1}). Пара S_1, S_{-1} гармонически делит пару S_0, S_∞ , так как пара 1, -1 гармонически делит пару 0, ∞ . Поэтому $S_{-1} = a_A(S_1)$, и прямая $a = a_A(1)$ проходит через точку S_{-1} , т. е. пересекает -1 .

Итак, инволюции группы Γ — это прямые 1, -1 и все прямые линейной конгруэнции J_Γ с осями 1, -1 .

6. *Обращение в группе Γ .* Прямая a^{-1} , обратная a , т. е. такая, что $aa^{-1} = 1$, есть образ прямой 1 в коллинеации a_A^{-1} ($a_A^{-1}(1) = a^{-1}$) или прообраз прямой 1 в коллинеации a_A ($a_A(a^{-1}) = 1$). Пусть s, t — трансверсали четверки 0, 1, a, ∞ , а S_0, S_1, S_a, S_∞ и T_0, T_1, T_a, T_∞ — соответствующие точки пересечения. Прямые s и t пересекают и прямую -1 в точках S_{-1} и T_{-1} . В коллинеации a_A прямая s переходит в себя, точки S_0 и S_∞ остаются на месте, а S_1 переходит в S_a . Аналогично $a_A(t, T_0, T_\infty, T_1) = (t, T_0, T_\infty, T_a)$. Оказывается, имеет место следующий факт, легко доказываемый перенесением проективного преобразования с прямой на конику: точка $S_{a^{-1}} = a_A^{-1}(S_1)$ гармонически сопряжена S_a относительно пары S_1, S_{-1} ; аналогично $T_{a^{-1}}, T_a \div T_1, T_{-1}$. Поэтому прямая $a^{-1} = S_{a^{-1}}T_{a^{-1}}$ гармонически сопряжена прямой a относительно пары 1, -1 . Другими словами, инволюция $\psi: a \rightarrow a^{-1}$ взаимно обратных прямых группы Γ есть инволюционная гомология с осями 1, -1 .

7. *Подгруппы группы Γ .* Некоторые подгруппы группы Γ — полуквадрика Q_Γ , связки, плоские поля и пучки, содержащие 1 — были рассмотрены выше.

Пусть K — линейный комплекс, содержащий прямую 1 и конгруэнцию $H(0, \infty)$ с осями 0 и ∞ . Легко проверить, что комплекс K_Γ переходит в себя в инволюции ψ и сдвиге a_A , порожденном произвольной прямой $a \in K_\Gamma$; это означает, что K_Γ замкнут относительно обращения и умножения, т. е. является подгруппой в Γ . Левый и правый смежные классы aK_Γ и $K_\Gamma a$ ($a \in \Gamma$) совпадают — это линейный комплекс $a_A(K_\Gamma) = a_n(K_\Gamma)$, содержащий прямую a и конгруэнцию $H(0, \infty)$. Поэтому K_Γ — нормальный делитель в Γ .

Пусть L — линейный комплекс, содержащий конгруэнцию J с осями 1, -1 и конгруэнцию $H(0, \infty)$. Комплексы K и L сопряжены в пучке линейных комплексов через $H(0, \infty)$. Комплекс L_Γ , являющийся одним из смежных классов по подгруппе K_Γ , замкнут относительно обращения в Γ ($\psi(L_\Gamma) = L_\Gamma$; поэтому пара комплексов $K_\Gamma \cup L_\Gamma$ — также подгруппа (инвариантная) в Γ .

Смежные классы по этой подгруппе — пары сопряженных комплексов пучка с носителем $H(0, \infty)$. Отметим, что конгруэнция J_Γ (инволюции) служит системой образующих подгруппы $K_\Gamma \cup L_\Gamma$; всей группы Γ инволюции не порождают.

Любой специальный линейный комплекс, ось l которого пересекает $0, 1, \infty$, является подгруппой в Γ ; в G_A ему соответствует подгруппа коллинеаций, оставляющих неподвижной точку $l \cap \infty$.

Гиперболические, параболические и эллиптические линейные конгруэнции, содержащие полуквадрику Q , мы будем обозначать K^h, K^p и K^e . Конгруэнции K_Γ^h, K_Γ^p и K_Γ^e суть подгруппы в Γ ; соответствующие подгруппы в G_A состоят из коллинеаций, порождающих на ∞ гиперболические, параболические и эллиптические проективные преобразования с общими двойными точками на осях конгруэнции.

Пусть m, n — оси конгруэнции $K^h (K^e)$, а M_0, N_0 и M_∞, N_∞ — точки их пересечения с 0 и ∞ (мнимые для K^e). Обозначим $L^h (L^e)$ конгруэнцию с осями $M_0 N_\infty$ и $N_0 M_\infty$. Конгруэнция $L_\Gamma^h (L_\Gamma^e)$ — смежный класс группы Γ по подгруппе $K_\Gamma^h (K_\Gamma^e)$, замкнутый относительно обращения (в G_A прямым этой конгруэнции отвечают коллинеации, меняющие местами точки M_∞ и N_∞), а пара конгруэнций $K_\Gamma^h \cup L_\Gamma^h (K_\Gamma^e \cup L_\Gamma^e)$ — подгруппа в Γ . Отметим, что произвольной подгруппе g из Γ соответствует в G_A подгруппа преобразований, оставляющих g инвариантной.

8. *Группа Γ и группа невырожденных 2×2 -матриц.* При отображении f прямых из A на матрицы второго порядка (см. § 1.5) прямым, пересекающим 0 , отвечают вырожденные, а прямым из Γ — невырожденные матрицы. На роль прямой 1 назначим прямую, проходящую через точки $(1, 0, 1)$ и $(0, 1, -1)$, которую f переводит в единичную матрицу.

Преобразование, задаваемое в выбранной в § 1.5 аффинной системе координат уравнениями $x'_1 = a_1 x_1 + a_2 x_2, x'_2 = a_3 x_1 + a_4 x_2$ ($a_1 a_4 - a_2 a_3 \neq 0$); $x'_3 = x_3$, оставляет на месте прямую ∞ и каждую точку прямой 0 и переводит прямую 1 в прямую a , т. е. является левым сдвигом a_A группы Γ , порождаемым прямой a . При этом $a_A(b) = ab$, где ab — такая прямая, которую f переводит в произведение $(a)(b)$ матриц (a) и (b) .

В проективных координатах ($u_i/u_4 = x_i, i = 1, 2, 3$) уравнения правого сдвига a_n имеют вид $u'_1 : u'_2 : u'_3 : u'_4 = u_1 : u_2 : (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)u_3 - (a_1 + a_2 - a_3 - a_4)u_4 : (-a_1 + a_2 - a_3 + a_4)u_3 + (a_1 - a_2 - a_3 + a_4)u_4$, а уравнения инволюции ψ — $u'_1 : u'_2 : u'_3 : u'_4 = u_3 + u_4 : -u_3 + u_4 : 2u_1 - 2u_2 : 2u_1 + 2u_2$.

Полуквадрику Q_Γ отображение f переводит в подгруппу скалярных матриц. Линейный комплекс K_Γ изображает подгруппу матриц с определителем $+1$, а произвольный линейный комплекс, содержащий конгруэнцию с осями 0 и ∞ (он является смежным

классом группы Γ по нормальному делителю K_Γ — множество матриц с одним и тем же определителем.

Связки и плоские поля прямых, содержащие 1, изображают соответственно подгруппы матриц вида $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и подгруппы, получаемые из них трансформированием (умножением слева и справа на взаимно обратные матрицы). Конгруэнции $K_\Gamma^h, K_\Gamma^p, K_\Gamma^e$ изображают соответственно подгруппы матриц вида $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ и подгруппы, получаемые из них трансформированием. Специальные линейные комплексы, содержащие полуквадрику Q , изоморфны группе треугольных матриц $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$.

9. *Отображение прямых из Γ на центроаффинные преобразования плоскости.* Прямой a , которой в отображении f из § 1.5 соответствовала матрица $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$, поставим теперь в соответствие пару точек $(a_1, a_3), (a_2, a_4)$, плоскости $x_3 = 0$. Эти две точки являются проекциями на плоскость $x_3 = 0$ по направлению оси x_3 следов прямой a на плоскостях $x_3 = 1, x_3 = -1$, т. е. отображение $a \rightarrow \{(a_1, a_3), (a_2, a_4)\}$, которое мы обозначим f_0 , есть обычный метод двух следов классической начертательной геометрии. Прямым из Γ будут при этом соответствовать пары точек, не коллинейные с началом, т. е. с точкой $(0, 0)$.

Легко проверяется, что преобразованию прямых из Γ в сдвиге a_λ , порожденном прямой $a \in \Gamma$, будет соответствовать такое преобразование пар точек в плоскости $x_3 = 0$, которое совпадает с центроаффинным преобразованием α с матрицей $(a) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} = f(a)$. В частности, пара точек $\{(1, 0), (0, 1)\} = f_0(1)$ переходит в α в пару точек $\{(a_1, a_3), (a_2, a_4)\} = f_0(a)$, а пара точек $\{(b_1, b_3), (b_2, b_4)\} = f_0(b)$ — в пару точек $\{(a_1b_1 + a_2b_3, a_3b_1 + a_4b_3), (a_1b_2 + a_2b_4, a_3b_2 + a_4b_4)\} = f_0(ab)$. Это соответствие является, таким образом, изоморфизмом группы G_λ или Γ и группы γ центроаффинных преобразований плоскости $x_3 = 0$.

Полуквадрика Q_Γ соответствует при этом изоморфизме подгруппе гомотетий из γ ; прямая -1 — центральной симметрии; прямые, пересекающие 1 — родственными преобразованиями; прямые конгруэнции J_Γ — косым симметриями; связки (плоские поля), содержащие 1, — подгруппам родственных преобразований с общей осью (направлением родства). Пара комплексов $K_\Gamma \cup L_\Gamma$ изображает подгруппу эквиаффинных преобразований из γ (K_Γ — первого, L_Γ — второго рода); специальные линейные комплексы, содержащие Q_Γ — подгруппы центроаффинных преобразований с общим инвариантным направлением. Конгруэнции $K_\Gamma^h, K_\Gamma^p, K_\Gamma^e$ изоморфны стационарным подгруппам точки соответственно в группе подобий и антиподобий

псевдоевклидовой плоскости, не переставляющих ее изотропные направления, в группе подобий флаговой плоскости и в группе подобий 1-го рода евклидовой плоскости. Пары конгруэнций $K^h_L \cup L^h_L$ и $K^e_L \cup L^e_L$ изоморфны стационарным подгруппам точки в полных группах подобий псевдоевклидовой и евклидовой плоскости.

10. *Об абсолютной эквицентроаффинной геометрии.* Сделаем небольшое отступление от основного предмета нашего исследования, чтобы указать одно из возможных его применений.

В вопросе о классификации геометрий по Клейну имеется, на наш взгляд, одна нерешенная задача — для любой подгруппы группы проективных преобразований найти фигуру или множество фигур (в частности, преобразование), которая(ое) не изменяется при преобразованиях этой подгруппы, т. е. построить абсолют соответствующей геометрии. Например, для евклидовой геометрии движений такая задача решена в работах [5, 6].

Построенная нами в § 2.9 модель группы γ центроаффинных преобразований плоскости позволяет легко обнаружить абсолют эквицентроаффинной геометрии. Поскольку эквиаффинным преобразованиям из γ соответствуют те преобразования из G_A , которые оставляют инвариантной пару комплексов $K_L \cup L_L$, то эта пара комплексов является моделью искомого абсолюта. Другими словами, эквиаффинные преобразования из γ оставляют инвариантным множество пар точек, в которые переходят прямые комплексов K_L и L_L в отображении f_0 .

Прямые комплекса K_L изображаются на плоскости $x_3 = 0$ такими парами точек, что при произвольном выборе первой точки A_1 из пары однозначно определяется прямая a_2 , на которой можно выбирать вторую точку A_2 той же пары, причем соответствие $A_1 \rightarrow a_2$ есть некоторая корреляция K . Иначе говоря, комплекс K_L изображается на плоскости $x_3 = 0$ корреляцией K . Далее оказывается, что комплекс L_L изображается обратной корреляцией K^{-1} . Пусть Π — поляритет относительно эллипса e : $x_1^2 + x_2^2 = 1$ и B — эллиптический поворот цикла 4 ($B^4 = 1$) с уравнениями $x'_1 = +x_2$, $x'_2 = -x_1$ в плоскости $x_3 = 0$. Абсолютная корреляция K представляет собой произведение поляритета Π на поворот B (в любом порядке), т. е. $K = \Pi B = B \Pi$, $K^{-1} = \Pi B^{-1} = B^{-1} \Pi$.

Из экономии мы не будем доказывать всех этих утверждений и лишь проверим непосредственно, что, если преобразование $\alpha \in \gamma$ эквиаффинное, оно либо сохраняет неизменной каждую из корреляций K и K^{-1} , либо меняет их местами.

В начале заметим, что прямые $K(Q)$ и $K^{-1}(Q)$, в которые переходит в корреляциях K и K^{-1} произвольная точка Q , параллельны прямой OQ , где O — начало координат (на рис. 4 координаты декартовы, e — окружность единичного радиуса и B — поворот на 90°). В самом деле, если (a, b) — координаты точки Q , то координаты точки $Q' = B(Q)$ суть $(b, -a)$ и полярная точка Q' относительно

эллипса e , т. е. прямая $\Pi(Q') = K(Q)$, имеет уравнение $bx_1 - ax_2 = 1$ и, следовательно, параллельна прямой OQ , уравнение которой $bx_1 - ax_2 = 0$.

Покажем далее, что если у треугольника OPQ с произвольной вершиной Q вершина $P \in K(Q)$ или $P \in K^{-1}(Q)$, то площадь такого треугольника равна соответственно $1/2$ или $-1/2$. Координаты (x_1, x_2) точки $P \in K(Q)$ должны удовлетворять уравнению $bx_1 - ax_2 = 1$ прямой $K(Q)$, и площадь треугольника OPQ с верши-

нами $O(0, 0)$, $P\left(x_1, \frac{bx_1 - 1}{a}\right)$, $Q(a, b)$ равна $\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_1 & \frac{bx_1 - 1}{a} & 1 \\ a & b & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$.

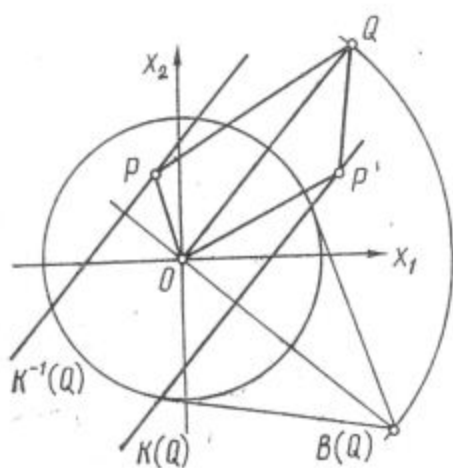


Рис. 4

Аналогично, если $P \in K^{-1}(Q)$, то площадь треугольника OPQ равна $-1/2$, т. е. этот и предыдущий треугольники равновелики, но противоположно ориентированы (рис. 4). Ясно, что, наоборот, если площадь треугольника OPQ равна $1/2$ или $-1/2$, то $P \in K(Q)$ или $P \in K^{-1}(Q)$.

Пусть теперь α — эквиаффинное преобразование 1-го рода. Произвольный треугольник OPQ , у которого $P \in K(Q)$, имеет площадь $1/2$, и поэтому переходит в α в треугольник $OP'Q'$, площадь которого так-

же равна $1/2$ и у которого, следовательно, $P' \in K(Q')$. Прямая $K(Q)$, инцидентная P и параллельная OQ , переходит в α в прямую, инцидентную P' и параллельную OQ' , т. е. в прямую $K(Q')$. Итак, соответствующие в K точка Q и прямая $K(Q)$ переходят в α в точку Q' и прямую $K(Q')$, также соответствующие в K , т. е. α не разрушает корреляцию K (а с ней и K^{-1}). Аналогично, если α — эквиаффинное преобразование 2-го рода, то K и K^{-1} меняются в α местами. Символически $\alpha(K) = K$, $\alpha(K^{-1}) = K^{-1}$, либо $\alpha(K) = K^{-1}$, $\alpha(K^{-1}) = K$, или, что то же самое, $\alpha K = K\alpha$, $\alpha K^{-1} = K^{-1}\alpha$, либо $\alpha K = K^{-1}\alpha$, $\alpha K^{-1} = K\alpha$.

§ 3. Алгебра неособых прямых. 1. Распространение операции умножения на все множество A неособых прямых

Дополним группу G_A вырожденными коллинеациями $x_1 = a_1x_1 + a_2x_2$, $x_2' = a_3x_1 + a_4x_2$ ($a_1a_4 - a_2a_3 = 0$), $x_3' = x_3$. Полученное множество коллинеаций A_A уже не будет группой, но останется замкнутым относительно умножения. Коллинеация $a_A \in A_A \setminus G_A$ переводит прямую l в прямую a , пересекающую O , которой в отображении f соответствует вырожденная матрица (a) . Произвольная прямая $b \in A$ переходит в a_A в прямую, соответствующую произведению матриц (a) и (b) . Поэтому можно положить $ab = a_A(b)$ для любых a и b из A ; при этом множество A отно-

сительно рассматриваемых операций сложения и умножения прямых будет алгеброй, изоморфной алгебре матриц второго порядка (отображение f является изоморфизмом, поскольку сумму и произведение прямых f переводит в сумму и произведение матриц).

Отметим, что умножение матриц на числа, эквивалентное умножению матриц на скалярные матрицы, можно интерпретировать как умножение прямых из A на прямые полуквадрики Q_A .

Прямой 0 (нулевой матрице) в A_A отвечает коллинеация 0_A , состоящая в проектировании пространства P_3 на прямую 0 плоскостями пучка ∞ . Произвольной вырожденной матрице (a) (прямой a , пересекающей 0) отвечает коллинеация a_A , оставляющая неподвижной каждую точку прямой 0 и переводящая P_3 в некоторую плоскость π через 0. Если прямая a принадлежит гиперболической линейной конгруэнции с осями 0 и 1, то a_A представляет собой проектирование P_3 на π из точки, лежащей на прямой ∞ , а матрица (a) является идемпотентом, т. е. $(a)^2 = (a)$. Если прямая a принадлежит параболической линейной конгруэнции касательных к квадрике Q в точках прямой 0, то $a_A(\pi) = 0$, а матрица (a) нильпотентная, т. е. $(a)^2 = (0)$. Наконец, если a пересекает 0, но не принадлежит этим конгруэнциям, то сужение a_A на π есть гомология с осью 0 и центром $\pi \cap \infty$.

2. *Подалгебры алгебры A .* Полуквадрика Q_A является одномерной подалгеброй в A , изоморфной алгебре действительных чисел (см. § 2.4).

Конгруэнции K_A^e , K_A^h и K_A^p суть двумерные подалгебры в A , изоморфные соответственно алгебрам комплексных, двойных и дуальных чисел.

Специальные линейные комплексы, содержащие полуквадрику Q_A , являются трехмерными подалгебрами в A , изоморфными алгебре треугольных матриц.

Пусть S — какая-нибудь связка прямых, содержащая 0. Поскольку произвольная коллинеация $a_A \in A_A$ оставляет вершину связки неподвижной, то прямые из S переходят в a_A снова в прямые из S . Это означает, что произведение произвольной прямой $a \in A$ на прямую из S_A справа есть снова прямая из S_A (символически $AS_A = S_A$). Вспоминая, что связка S_A является подгруппой аддитивной группы алгебры A (см. § 1.3), заключаем, что связка S_A — правосторонний идеал алгебры A . Соответствующий идеал алгебры матриц состоит из матриц вида $\begin{pmatrix} a & ka \\ b & kb \end{pmatrix}$.

Аналогично любое плоское поле прямых, содержащее 0, является левосторонним идеалом алгебры A ; его прямым соответствуют матрицы вида $\begin{pmatrix} a & b \\ ka & kb \end{pmatrix}$.

Список литературы: 1. Розенфельд Б. А. Неевклидовы пространства. — М.: Наука, 1969. — 547 с. 2. Розенфельд Б. А. Многомерные пространства. — М.: Наука, 1966. — 647 с. 3. Sturm R. *Liniengeometrie*. 1. — Leipzig, 1892. —

386 с. 4. Юнг Дж. В. Проективная геометрия. — М.: Наука, 1949. — 184 с.
 5. Кованцов Н. И. Об абсолюте евклидовой плоскости. — Укр. геометр. сб., 1966, вып. 2, с. 32—34. 6. Кованцов М. И. Проективная геометрия. — Київ.: Наук. думка, 1969. — 412 с.

Поступила 10 января 1977 г.

УДК 513/516:513.88

В. П. Солтан

ЧИСЛА ЗАМЕНЫ И ЧИСЛА КАРАТЕОДОРИ ДЕКАРТОВА ПРОИЗВЕДЕНИЯ СТРУКТУР ВЫПУКЛОСТИ

В работе приводятся точные значения чисел замены и чисел Каратеодори декартова произведения структур выпуклости. Перед формулировкой основных результатов (теоремы 2 и 3) приведены необходимые определения и вспомогательные предложения.

Пусть X — непустое множество. Семейство $\mathcal{G}$ подмножеств из X называется структурой выпуклости в X , а пара $(X, \mathcal{G})$ — пространством с выпуклостью, если $X \in \mathcal{G}$ и пересечение любой совокупности множеств из $\mathcal{G}$ также принадлежит $\mathcal{G}$. Отметим, что это определение отличается от обычного определения структуры выпуклости (см., например, [1, 2, 3]) отсутствием условия $\emptyset \in \mathcal{G}$.

Для любого множества $A \subset X$ естественным образом определяется его $\mathcal{G}$ -оболочка $\mathcal{G}(A) = \bigcap \{C \in \mathcal{G} : A \subset C\}$. Нетрудно убедиться, что оператор $\mathcal{G}$ -оболочки характеризуется следующими условиями: $A \subset \mathcal{G}(A)$, $\mathcal{G}(\mathcal{G}(A)) = \mathcal{G}(A)$, $\mathcal{G}(A) \subset \mathcal{G}(B)$, если $A \subset B$.

Числом Каратеодори пространства $(X, \mathcal{G})$ называется наименьшее целое число $c \geq 0$ (если оно существует) такое, что для любого $A \subset X$ выполняется соотношение $\mathcal{G}(A) = \bigcup \{\mathcal{G}(B) : B \subset A, |B| \leq c\}$, где $|B|$ — мощность множества B (оно в статье конечно). Числом замены (exchange-number) пространства $(X, \mathcal{G})$ называется наименьшее целое число $e \geq 1$ (если оно существует), при котором для любого элемента $p \in X$ и любого $A \subset X$, удовлетворяющего условию $e \leq |A| < \infty$, выполняется соотношение $\mathcal{G}(A) \subset \bigcup \{\mathcal{G}(p \cup (A \setminus a)) : a \in A\}$.

В работах [4, 5] показано, что для семейства всех выпуклых множеств n -мерного линейного пространства числа замены и числа Каратеодори удовлетворяют соотношениям $e = c = n + 1$. Нетрудно убедиться [6], что $e \leq c + 1$ для любого пространства $(X, \mathcal{G})$. Следующий результат является обобщением теоремы Каратеодори.

Теорема 1. Пусть числа замены и числа Каратеодори пространства $(X, \mathcal{G})$ удовлетворяют условию $e \leq c$. Тогда для любого множества $A \subset X$ и любого конечного множества $Y \subset \mathcal{G}(A)$, $|Y| = k$ существует такое множество $B \subset A$, что $Y \subset \mathcal{G}(B)$ и $|B| \leq k(c - 1) + 1$.

Доказательство. Пусть $Y = \{y_1, \dots, y_k\}$. Для каждого элемента y_i существует множество $F_i \subset A$, удовлетворяющее условиям: $|F_i| \leq c$, $y_i \in \mathcal{G}(F_i)$. Если $|F_i| = c$ для некоторого номера $i = 2, \dots, k$, то в силу неравенства $e \leq c$. $\mathcal{G}(F_i) \subset \bigcup \{\mathcal{G}(y_1 \cup \bigcup (F_i \setminus z)) : z \in F_i\}$. Следовательно, в этом случае существует такой элемент $z_i \in F_i$, что $y_i \in \mathcal{G}(y_1 \cup (F_i \setminus z_i))$. Полагаем теперь $B_i = F_i \setminus \{z_i\}$ при $|F_i| = c$ и $B_i = F_i$ при $|F_i| < c$ ($i = 2, \dots, k$). Тогда $Y \subset \bigcup_{i=2}^k \mathcal{G}(y_1 \cup B_i) \subset \mathcal{G}(y_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_k) \subset \mathcal{G}(F_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_k)$ и $|F_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_k| \leq k(c-1) + 1$.

В дальнейшем понадобятся вспомогательные леммы.

Лемма 1. Для пространства $(X, \mathcal{G})$ соотношение $c = 0$ выполняется тогда и только тогда, когда $\mathcal{G} = \{X\}$.

Лемма 2. Если $e = 1$, то $c \leq 1$.

Перейдем к рассмотрению декартова произведения структур выпуклости. Декартовым произведением пространств с выпуклостью $(X_i, \mathcal{G}_i)$, $i = 1, \dots, n$ (или пространством Эксхоффа [7]) называется множество $\tilde{X} = X_1 \times \dots \times X_n$ с выделенным в нем семейством подмножеств $\tilde{\mathcal{G}} = \mathcal{G}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{G}_n = \{A_1 \times \dots \times A_n : A_i \in \mathcal{G}_i\}$. Легко видеть, что пара $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{G}})$ является пространством с выпуклостью и для любого множества $A \subset \tilde{\mathcal{G}}$ выполняется соотношение $\tilde{\mathcal{G}}(A) = \bigtimes_{i=1}^n \mathcal{G}_i(\pi_i A)$, где $\pi_i A$ — проекция A на X_i . Обозначим через e_i , c_i и e , c числа замены и числа Каратеодори пространств $(X_i, \mathcal{G}_i)$ и $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{G}})$.

Теорема 2. $e = \sum_{i=1}^n [c_i + \text{sign}(e_i - c_i - 1)] + 1$ ($n \geq 2$).

Теорема 3. $c = \sum_{i=1}^n [c_i + \text{sign}(e_i - c_i - 1)] + \varepsilon_n$, причем $\varepsilon_n = 0$ в одном из трех случаев: 1) $c_1 = \dots = c_n = 0$; 2) $e_i = c_i + 1 > 1$ для некоторого индекса $i \in [1, n]$; 3) $\min\{c_i, c_j\} > 1$ для некоторых $i, j \in [1, n]$. В остальных случаях $\varepsilon_n = 1$.

Следствие 1. При $n \geq 2$ числа замены и числа Каратеодори декартова произведения пространств с выпуклостью $(X_i, \mathcal{G}_i)$, $i = 1, \dots, n$, удовлетворяют соотношениям: $e = c + 1 - \varepsilon_n \geq c$.

Следствие 2 [8]. Число Каратеодори декартова произведения конечномерных линейных пространств E_i , $i = 1, \dots, n$, равно $\sum_{i=1}^n \dim E_i + \delta$, где $\delta = 1$ при $n = 1$ и $\delta = 0$ при $n \geq 2$.

Следствие 3 [9]. Размерность Каратеодори $\text{sim} X$ ($= c(X) - 1$) декартова произведения метрических пространств X_i , $i = 1, \dots, n$ есть $\sum_{i=1}^n \text{sim} X_i + t - 1$, где $\text{sim} X_i$ — размер-

ность Каратеодори пространства X_t , а t — число пространств X_t , для которых $e_t > \text{sim } X_t$.

Отметим, что число Каратеодори декартова произведения произвольных структур выпуклости оценивалось ранее [3, 6] (в работе [3] вместо $\max_{1 \leq i \leq n} \text{sim } X_i$ и $\max_{1 \leq i \leq n} \text{rim } X_i$ следует читать $\sum_{i=1}^n \text{sim } X_i$

и $\sum_{i=1}^n \text{rim } X_i$).

Для доказательства теорем 2 и 3 понадобятся следующие леммы, в которых принято $n = 2$, т. е. $\tilde{X} = X_1 \times X_2$, $\tilde{\mathfrak{G}} = \mathfrak{G}_1 \oplus \mathfrak{G}_2$.

Лемма 3. $e \geq \max\{e_1, e_2\}$, $c \geq \max\{c_1, c_2\}$.

Лемма 4. $e \geq e_1 + e_2 - 1$.

Доказательство. Выберем элементы $p_i \in X_i$ и множества $A_i \subset X_i$, для которых $|A_i| = e_i - 1$ и $\mathfrak{G}_i(A_i) \not\subset \bigcup \{\mathfrak{G}_i(p_i \cup (A_i \setminus a)) : a \in A_i\}$. Из последних соотношений вытекает, что $p_1 \notin A_1$ и $p_2 \notin A_2$. Положим $p = (p_1, p_2)$ и $F = (A_1 \times \{p_2\}) \cup (\{p_1\} \times A_2)$. Пусть $y_i \in \mathfrak{G}_i(A_i) \setminus \bigcup \{\mathfrak{G}_i(p_i \cup (A_i \setminus a)) : a \in A_i\}$, $i = 1, 2$. Тогда $y = (y_1, y_2) \in \mathfrak{G}_1(\pi_1 F) \mathfrak{G}_2(\pi_2 F) = \tilde{\mathfrak{G}}(F)$. Если $z \in A_1 \times \{p_2\}$, то $y_1 \notin \mathfrak{G}_1(\pi_1(p \cup (F \setminus z)))$ и потому $y \notin \tilde{\mathfrak{G}}(p \cup (F \setminus z))$. Аналогично $y \notin \tilde{\mathfrak{G}}(p \cup (F \setminus z))$ при $z \in \{p_1\} \times A_2$. Итак, $y \notin \bigcup \{\tilde{\mathfrak{G}}(p \cup (F \setminus z)) : z \in F\}$. Следовательно, $\tilde{\mathfrak{G}}(F) \not\subset \bigcup \{\tilde{\mathfrak{G}}(p \cup (F \setminus z)) : z \in F\}$. Отсюда вытекает, что $e \geq |F| + 1 = e_1 + e_2 - 1$.

Лемма 5. $e \geq \max\{e_1 + c_2 - 1, c_1 + e_2 - 1\}$.

Доказательство. Покажем справедливость неравенства $e \geq e_1 + c_2 - 1$ (второе неравенство доказывается аналогично). Если $c_2 < 2$, то искомое неравенство вытекает из леммы 3. Поэтому считаем $c_2 \geq 2$. Пусть $p \in X_1$ и множества $A_i \subset X_i$, $i = 1, 2$ таковы, что $|A_1| = e_1 - 1$, $|A_2| = c_2$ и выполняются соотношения: $\mathfrak{G}_1(A_1) \not\subset \bigcup \{\mathfrak{G}_1(p \cup (A_1 \setminus a)) : a \in A_1\}$, $\mathfrak{G}_2(A_2) \not\subset \bigcup \{\mathfrak{G}_2(A_2 \setminus a) : a \in A_2\}$. Выберем произвольный элемент $b \in A_2$ и положим $q = (p, b)$, $F = (A_1 \times \{b\}) \cup (\{p\} \times (A_2 \setminus b))$. Если $e_1 = 1$, то в качестве p выберем любой элемент из X_1 и полагаем $F = \{p\} \times (A_2 \setminus b)$. Соотношение $\tilde{\mathfrak{G}}(F) \not\subset \bigcup \{\tilde{\mathfrak{G}}(q \cup (F \setminus z)) : z \in F\}$ доказывается аналогично соотношению $\tilde{\mathfrak{G}}(F) \not\subset \bigcup \{\tilde{\mathfrak{G}}(p \cup (F \setminus z)) : z \in F\}$ из леммы 4. Следовательно, $e \geq |F| + 1 = e_1 + c_2 - 1$.

Лемма 6. $e \geq c_1 + c_2 - 1$.

Доказательство. Если $\min\{c_1, c_2\} < 2$, то искомое неравенство вытекает из леммы 5. Пусть $\min\{c_1, c_2\} \geq 2$ и $A_i \subset X_i$, $i = 1, 2$ — такие множества, что $|A_i| = c_i$ и $\mathfrak{G}_i(A_i) \not\subset \bigcup \{\mathfrak{G}_i(A_i \setminus a) : a \in A_i\}$. Выберем в A_i различные элементы y_i, z_i и положим $p = (y_1, y_2)$, $F = ((A_1 \setminus z_1) \times \{y_2\}) \cup (\{y_1\} \times (A_2 \setminus z_2))$. Так же, как и выше, показывается, что $\tilde{\mathfrak{G}}(F) \not\subset \bigcup \{\tilde{\mathfrak{G}}(p \cup (F \setminus z)) : z \in F\}$. Следовательно, $e \geq |F| + 1 = c_1 + c_2 - 1$.

Из лемм 4 — 6 и соотношений $e_i \leq c_i + 1$ вытекает

Следствие 4. $e \geq c_1 + c_2 + \text{sign}(e_1 - c_1 - 1) + \text{sign}(e_2 - c_2 - 1) + 1$.

Лемма 7 [6]. $c \leq \begin{cases} c_1 + c_2, \\ c_1 + c_2 - 1, \text{ если } \min\{c_1, c_2\} \geq 1 \text{ и } (e_1 \leq c_1 \\ \text{или } e_2 \leq c_2), \\ c_1 + c_2 - 2, \text{ если } \min\{c_1, c_2\} \geq 1 \text{ и } e_1 \leq c_1, \\ e_2 \leq c_2. \end{cases}$

Из неравенства $e \leq c + 1$, следствия 4 и леммы 7 вытекает

Теорема 3. $c = c_1 + c_2 + \text{sign}(e_1 - c_1 - 1) + \text{sign}(e_2 - c_2 - 1) + e_2$, где $e_2 = 0$ в одном из четырех случаев: 1) $c_1 = c_2 = 0$; 2) $e_1 = c_1 + 1 > 1$; 3) $e_2 = c_2 + 1 > 1$; 4) $\min\{c_1, c_2\} > 1$; в остальных случаях $e_2 = 1$. Нам понадобится еще

Лемма 8. Если $e_1 \leq c_1$ и $e_2 = 1$, то $e = c_1$.

Доказательство. Из следствия 4 вытекает, что $e \geq c_1$. Покажем, что $e \leq c_1$. Для этого достаточно показать, что любой элемент $p \in \tilde{X}$ и множество $A \subset \tilde{X}$, состоящее из c_1 различных элементов, удовлетворяют соотношению $\tilde{\mathcal{G}}(A) \subset \bigcup \{\tilde{\mathcal{G}}(p \cup (A \setminus a)) : a \in A\}$. Нетрудно убедиться, что условие $e_2 = 1$ означает следующее: $\mathcal{G}_2(B) = X_2$ для любого непустого $B \subset X_2$.

Если $|\pi_1 A| = c_1$, то в силу неравенства $e_1 \leq c_1$ имеем $\tilde{\mathcal{G}}(A) = \mathcal{G}_1(\pi_1 A) \times \mathcal{G}_2(\pi_2 A) \subset (\bigcup \{\mathcal{G}_1(\pi_1(p \cup (A \setminus a))) : a \in A\}) \times X_2 = \bigcup \{\tilde{\mathcal{G}}(p \cup (A \setminus a)) : a \in A\}$. Если же $|\pi_1 A| < c_1$, то найдутся два различных элемента $y, z \in A$, для которых $\pi_1 y = \pi_1 z$. Тогда $\tilde{\mathcal{G}}(A) = \mathcal{G}_1(\pi_1 A) \times \mathcal{G}_2(\pi_2 A) = \mathcal{G}_1(\pi_1(A \setminus y)) \times X_2 = \tilde{\mathcal{G}}(A \setminus y) \subset \bigcup \{\tilde{\mathcal{G}}(p \cup (A \setminus a)) : a \in A\}$.

Теорема 4. $e = c_1 + c_2 + \text{sign}(e_1 - c_1 - 1) + \text{sign}(e_2 - c_2 - 1) + 1$.

Доказательство. Положим $\alpha = c_1 + c_2 + \text{sign}(e_1 - c_1 - 1) + \text{sign}(e_2 - c_2 - 1)$. Если e_2 в теореме 3 равно нулю, то $e \leq c + 1 = \alpha$. Тогда в силу следствия 4 $e = \alpha$. Соотношение $e_2 = 1$ выполняется в следующих и только следующих случаях: 1) $c_1 = 0, e_2 \leq c_2$; 2) $e_1 \leq c_1, c_2 = 0$; 3) $\min\{c_1, c_2\} = 1$ и $e_1 \leq c_1, e_2 \leq c_2$. В предположении $c_1 \geq c_2$ эти случаи сводятся к $e_1 \leq c_1, c_2 = 1$. Тогда в силу леммы 8 $e = c_1 = \alpha$.

Доказательство теорем 1 и 2 проведем одновременно, используя индукцию по n . Случай $n = 2$ сформулирован и доказан в теоремах 3 и 4. Пусть утверждения теорем 1 и 2 справедливы при $n \leq k$ и $\tilde{X} = X_1 \times \dots \times X_{k+1}$, $\tilde{\mathcal{G}} = \mathcal{G}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{G}_{k+1}$. Без ущерба для общности можно считать, что $c_1 \geq \dots \geq c_{k+1}$, при этом, если $c_i = c_{i+1}$, то $e_i \geq e_{i+1}$ ($i = 1, \dots, k$). Из этих предположений нетрудно вывести соотношение $e_{k+1} = e_k$.

Обозначим через e' и c' числа замены и числа Каратесдори пространства $X' = \bigtimes_{i=1}^k X_i$ с выпуклостью $\mathcal{G}' = \bigoplus_{i=1}^k \mathcal{G}_i$. Тогда $\tilde{X} = X' \times X_{k+1}$ и $\tilde{\mathcal{G}} = \mathcal{G}' \oplus \mathcal{G}_{k+1}$. Пусть e'_2 — функция, определенная для чисел e', c', e_{k+1}, c_{k+1} так же, как и e_2 из теоремы 3

для чисел e_1, c_1, e_2, c_2 . Перебором возможных вариантов показывается, что $\varepsilon'_2 = \varepsilon_{k+1}$. Тогда в силу теоремы 3 и индуктивного предположения $c = c' + c_{k+1} + \text{sign}(e' - c' - 1) + \text{sign}(e_{k+1} - c_{k+1} - 1) + \varepsilon'_2 =$
 $= \sum_{i=1}^{k+1} [c_i + \text{sign}(e_i - c_i - 1)] + \text{sign}(-\varepsilon_k) + \varepsilon_k + \varepsilon_{k+1} = \sum_{i=1}^{k+1} [c_i +$
 $+ \text{sign}(e_i - c_i - 1)] + \varepsilon_{k+1}.$

Аналогичным образом из теоремы 4 вытекает $e = c' + c_{k+1} +$
 $+ \text{sign}(e' - c' - 1) + \text{sign}(e_{k+1} - c_{k+1} - 1) + 1 = \sum_{i=1}^{k+1} [c_i + \text{sign}(e_i -$
 $- c_i - 1)] + \varepsilon_k + \text{sign}(-\varepsilon_k) + 1 = \sum_{i=1}^{k+1} [c_i + \text{sign}(e_i - c_i - 1)] + 1.$

Список литературы: 1. Kay D. C., Womble E. W. Axiomatic convexity theory and relationships between the Caratheodory, Helly and Radon numbers. — *Pacific J. Math.*, 1971, 38, N 2, p. 471—485. 2. Levi F. W. On Helly's theorem and the axioms of convexity. — *J. Indian Math. Soc.*, (N. S.), Part A, 1951, 15, p. 65—76. 3. Солтан В. П. Некоторые вопросы абстрактной теории выпуклости. — *ДАН СССР*, 1976, 228, № 2, с. 310—313. 4. Reay J. R. Generalizations of a theorem of Caratheodory. — *Mem. Amer. Math. Soc.*, 1965, N 54. 5. Caratheodory C. Über den Variabilitätsbereich der Koeffizienten von Potenzreihen, die gegebene Werte nicht annehmen. — *Math. Ann.*, 1907, 64, S. 95—115. 6. Sierksma G. Caratheodory and Helly — numbers of convex product structures. — *Pacific J. Math.*, 1975, 61, N 1, p. 275—282. 7. Eckhoff J. Der Satz von Radon in konvexen Rproduktstrukturen I, II. — *Monatsh. Math.*, 1968, 72, N 4, S. 303—313; 1969, 73, N 1, S. 7—30. 8. Reay J. R. Caratheodory theorems in convex product structures. — *Pacific J. Math.*, 1970, 35, N 1, p. 227—230. 9. Лассак М. Размерность Хелли, Каратеодори, Радона и метрическая независимость точек в теории d -выпуклых множеств. — *Дис. ... канд. физ.-мат. наук*. Кишинев, 1975. — 96 с.

Поступила 24 апреля 1979 г.

УДК 512+513

Ю. Г. Стоян, С. В. Смеляков

НАХОЖДЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО ПУТИ В НЕОДНОСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ НА ОДНОМ КЛАССЕ ЛОМАНЫХ В R^2

В строительстве, машиностроении, электронике возникает ряд задач, связанных с нахождением кратчайшей ломаной (трассы), лежащей в неодносвязной многоугольной области на плоскости. При этом требуется, чтобы эта ломаная имела минимальное число изломов, а ее стороны были параллельны осям заданной декартовой ортогональной системы координат [1, 2]. Формализация этих практических задач приводит к задаче о переборе [2] предельных ломаных, лежащих в различных классах эквивалентности путей, и к рассматриваемой задаче о построении предель-

ной ломаной в заданном классе эквивалентности. Перейдем к ее точной формулировке.

Рассмотрим метрическое пространство R_1^2 , где расстояние задается функцией вида

$$\rho(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|. \quad (1)$$

Из множества всех путей в R_1^2 , соединяющих несовпадающие точки A и B , выделим подмножество крагчайших (длины путей везде далее определяются метрикой (1)). Если точки A и B имеют одну общую координату, то это подмножество содержит единственный элемент, который назовем p_1 -кратчайшей. Если эти точки не имеют общих координат, то их соединяет бесконечное множество кратчайших. Назовем кратчайшую p из этого множества p_2 -кратчайшей, если существует такая точка $C \in p$, что на каждом из интервалов AC , CB изменяется только одна координата. В этом случае имеется две различные p_2 -кратчайшие, которые назовем p_2^i -кратчайшими ($i = \{1, 2\}$), где индекс i указывает на выбор одной из двух возможных последовательностей изменения координат. Путь с началом в точке M и концом в N назовем p -ломаной и будем обозначать $(M, N)_m$, если его можно разбить на некоторое число m p_1 -кратчайших $C_i C_{i+1}$ ($i = 0, 1, \dots, m-1$; $C_0 = M$, $C_m = N$), причем на меньшее число p_1 -кратчайших этот путь разбить уже невозможно. Точки C_j ($j = 1, 2, \dots, m-1$), если имеются, назовем точками излома. Множество p -ломаных в R_1^2 обозначим W .

В R_1^2 задана замкнутая неодносвязная многоугольная область $\bar{D}$, граница которой L представляется конечным числом простых замкнутых p -ломаных. Назовем трассами p -ломаные, лежащие в $\bar{D}$. Множество трасс, соединяющих точки A и B , обозначим $W(A, B)$. Пусть в $\bar{D}$ задана ломаная τ , соединяющая точки A и B . Она определяет [3] в $W(A, B)$ класс эквивалентности путей $[\tau]$, который обозначим $W_\tau(A, B)$. Ясно, что множество $W_\tau(A, B)$ не пусто и содержит p -ломаную минимальной длины. Пусть на W задан монотонно неубывающий по переменным функционал

$$F(p) = F(z_1, z_2), \quad z_1, z_2 \geq 0, \quad (2)$$

где z_1 — число изломов; z_2 — длина трассы p .

Задача. Построить трассу $p^* \in W_\tau(A, B)$, на которой функционал (2) $F(p^*) = \min_{p \in W_\tau(A, B)} F(p)$.

Решение поставленной задачи дается в предположении о том, что объединение трасс минимальной длины на $W_\tau(A, B)$ и трасс минимальной длины на множестве трасс минимального числа изломов в $W_\tau(A, B)$ образует локально эквивалентное семейство. Локальная эквивалентность трасс p_1 и p_2 означает эквивалентность их участков $p_1|_{T_1^2}$ и $p_2|_{T_1^2}$, лежащих между любой парой

общих точек T_1 и T_2 . Именно такие трассы представляют интерес в практических задачах, где требуется, чтобы трассы можно было «сдвигать», не изменяя длины и не выводя за пределы заданного «канала» (т. е. класса эквивалентности), и чтобы они не имели самопересечений. Достаточно ясно, что при этом предположении решение поставленной задачи существует. Перейдем к его построению.

Решение задачи. Назовем p -ломаную канонической, если ее длина равна расстоянию между начальной и конечной точками. Если точки M, N не имеют общих координат, то на плоскости все соединяющие их канонические p -ломанные лежат в прямоугольнике $\bar{Q}$, диагонально противоположными вершинами которого

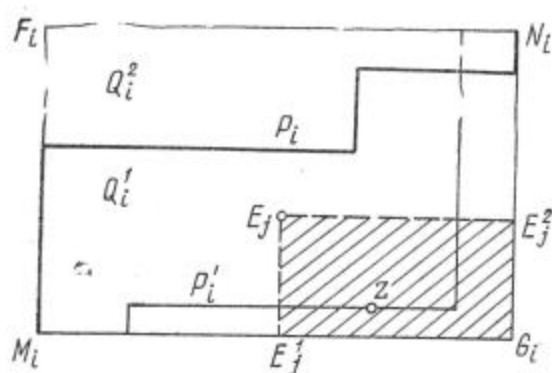


Рис. 1

являются точки M и N , а границей служат соединяющие эти точки две p_i^i -кратчайшие ($i = 1, 2$).

Рассмотрим трассу p минимальной длины на $[T]$. Если эта трасса на некотором участке $C_i C_{i+1} C_{i+2} C_{i+3}$ имеет не канонический вид, то на p_1 -кратчайшей $(C_{i+1}, C_{i+2})_1$ она должна иметь наложение с границей L . Обозначим через T последнюю точку

касания этой p_1 -кратчайшей с L при движении по p из A в B .

Начиная с точки A , выделим максимальный канонический участок и на нем, как описано выше, — последнюю точку T_1 касания с границей L . Примем $p_1 = p|_{A T_1}^{T_1}$. Затем найдем аналогичный участок $p_2 = p|_{T_1 T_2}^{T_2}$ и т. д. до p_n . Каждая из этих трасс определяет соответствующую замкнутую область $\bar{Q}_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

Пусть $\bar{Q}_i$ — одно из этих множеств, в котором трасса p_i соединяет соответствующие вершины M_i, N_i этого прямоугольника $M_i F_i N_i G_i$ (рис. 1). В общем случае трасса p_i разбивает Q_i на две области Q_i^1 и Q_i^2 , хотя одна из них может оказаться пустой.

Пусть область Q_i^1 не пуста и лежит справа от p_i при движении по p из точки M_i в N_i . Допустим, что в $\bar{Q}_i^1$ имеется точка излома E_j некоторой p -ломаной, составляющей границу L области D . Тогда каноническая трасса, эквивалентная p_i , будет допустимой, если она не попадает в область, ограниченную прямоугольником $E_j^1 E_j E_j^2 G_i$. Здесь E_j^1 и E_j^2 суть проекции точки E_j на соответствующие стороны прямоугольника $M_i F_i N_i G_i$. Действительно, если некоторая каноническая трасса p_i' проходит через внутреннюю точку Z прямоугольника $E_j^1 E_j E_j^2 G_i$, то трассы p_i и p_i' не эквивалентны, так как замкнутая p -ломаная $l = p_i \cup p_i'$ эквивалентна окружности, ограничивающей область с выколотой точкой.

Таким образом, не более чем конечное число точек излома границы L , лежащих в $\bar{Q}_i^1$, определяют области, объединение которых недопустимо для прохождения трасс из точки M_i в N_i . Объединение этих областей $\bar{Q}_i^1$, очевидно, покрывает области, не принадлежащие $\bar{D}$, которые лежат в Q_i^1 . При этом область $\bar{Q}_i^1$ ограничена некоторой канонической p -ломаной и одной из двух p_2 -кратчайших, образующих границу области Q_i . Заметим, что никакая p_1 -кратчайшая, принадлежащая L , не может пересекать $\bar{Q}_i$ так, чтобы ее начальная и конечная точки лежали вне $\bar{Q}_i$; иначе точки M_i и N_i не связаны в $\bar{Q}_i$. Проводя аналогичные рассуждения для $\bar{Q}_i^2$, получим, что наличие точек излома границы L в замкнутой области $\bar{Q}_i$ сужает ее до некоторого замкнутого множества $\bar{K}_i$. Его внутренность может оказаться несвязной и даже пустой. Границей множества $\bar{K}_i$ служат две канонические p -ломанные, соединяющие точки M_i (начальную) и N_i (конечную).

Лемма 1. *Существует единственная последовательность $(\bar{K}_1, \bar{K}_2, \dots, \bar{K}_n)$, в которой лежит множество H всех трасс минимальной длины на $[\tau]$. При этом множество трасс минимального числа изломов на $[\tau]$ содержит трассу из H .*

Доказательство. На $[\tau]$ существует трасса p минимальной длины, а значит, и трасса p^* минимального числа изломов. Трасса p определяет последовательность $(\bar{K}_1, \bar{K}_2, \dots, \bar{K}_n)$. Тогда множество трасс вида $p' = \bigcup_{i=1}^n p_i$, где p_i — произвольная

каноническая трасса в $\bar{K}_i$, определяет множество H трасс минимальной длины на $[\tau]$. Докажем, что H содержит все p -ломанные минимальной длины на $[\tau]$. Допустим существование трассы p_0 минимальной длины на $[\tau]$ такой, что содержащаяся в ней p -ломаная p'_0 с началом в точке $E_1 \in \bar{K}_f$ и концом в точке $E_2 \in \bar{K}_g$ лежит вне $(\bar{K}_f, \bar{K}_{f+1}, \dots, \bar{K}_g)$, $f \leq g$. В то же время в $(\bar{K}_1, \bar{K}_2, \dots, \bar{K}_n)$ существует трасса минимальной длины p_1 , которая содержит p -ломаную p'_1 , соединяющую точки E_1 и E_2 . Так как p_0, p_1 — трассы минимальной длины на $[\tau]$, то они локально эквивалентны. Поэтому p_0 и p_1 не имеют самопересечений и $p'_0 \sim p'_1$. Тогда замкнутая p -ломаная $l = p'_0 \cup p'_1$ также не имеет самопересечений и охватывает односвязную область из D . Поэтому при движении по p_1 из точки E_1 в точку E_2 трасса p'_1 может касаться границы L только «справа» или «слева». Достаточно рассмотреть случай касания справа. В каждой точке излома p -ломаной будем рассматривать левый угол поворота, который может быть равен $\pm \pi/2$. Тогда последовательность углов поворота в точках излома трассы p при движении из начальной точки E_1 в конечную точку E_2 можно записать в виде

$\Phi(p)|_{E_1}^{E_2} = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k)$, где $\varphi_j = \{\pm \pi/2\}$, $j = 1, 2, \dots, k$.

Можно считать, что трасса p'_1 состоит не менее чем из двух канонических p -ломанных; иначе трасса p'_0 должна лежать в соответствующем множестве $\bar{K}_j$. Не канонический вид трассы p'_1 означает, что в начальной и конечной точках некоторой p_1 -кратчайшей из p'_1 углы поворота имеют одинаковый знак. Поскольку трасса p'_1 касается границы L справа, этот знак будет отрицательным. Так как знаки углов поворота при движении по канонической p -ломаной чередуются, в последовательности $\Phi(p'_1)|_{E_1}^{E_2} = (\varphi'_1, \varphi'_2, \dots, \varphi'_m)$ углов со знаком минус не меньше, чем со знаком плюс. Тогда левый поворот p -ломаной p'_1 при движении из точки E_1 в точку E_2 составит $\varphi(p'_1)|_{E_1}^{E_2} = \sum_{j=1}^m \varphi'_j \leq 0$.

При выбранной ориентации поворот p -ломаной l , образующей многоугольник, равен 2π . Поэтому $\varphi(E_1) + \varphi(p'_1)|_{E_1}^{E_2} + \varphi(E_2) + \varphi(p'_0)|_{E_2}^{E_1} = 2\pi$, $\varphi(E_1) + \varphi(E_2) + \varphi(p'_0)|_{E_2}^{E_1} \geq 2\pi$, $\varphi(p'_0)|_{E_1}^{E_2} \leq -2\pi + \varphi(E_1) + \varphi(E_2)$.

Последнее неравенство означает, что в последовательности $\Phi(p'_0)|_{E_1}^{E_2}$ отрицательных углов поворота как минимум на два больше, чем положительных. Поэтому любая перестановка углов поворота в этой последовательности всегда содержит два поворота на $-\pi/2$ в соответствующих точках излома C_j, C_{j+1} , т. е. p -ломаная $(C_{j-1}, C_{j+2})_r$ не является канонической. Поскольку при движении по p_0 из E_1 в E_2 справа от нее лежит односвязная область с границей $l = p'_0 \cup p'_1$, то длина трассы p'_0 может быть уменьшена без изменения числа изломов.

Докажем вторую часть леммы. Пусть трасса p^* имеет минимальную длину на множестве трасс минимального числа изломов в $[\tau]$. Если она проходит через точки $M_i, N_i \in \bar{K}_i$, то $p^*|_{M_i}^{N_i} \sim p|_{M_i}^{N_i}$. Поэтому $p^*|_{M_i}^{N_i}$ лежит в $\bar{K}_i$ и имеет канонический вид — иначе она имела бы устранимые не канонические участки. Повторяя рассуждения первой части леммы, получим, что вне последовательности $(\bar{K}_1, \bar{K}_2, \dots, \bar{K}_n)$ трасса p^* также должна иметь устранимые не канонические участки — но это невозможно.

Следовательно, в H существует трасса $p^* \in W_\tau(A, B)$, имеющая минимум z_1 и z_2 . Лемма 1 доказана.

В любом множестве $\bar{K}_i$ все трассы из H совпадают на последней составляющей их p_1 -кратчайшей или в конечной точке B . Поэтому трасса $p^* = \bigcup_{i=1}^n p_i^*$ будет искомым решением, если каждая трасса $p_i^* \subset \bar{K}_i$ является канонической и имеет минимальное число изломов.

Рассмотрим некоторое множество $\bar{K}_i$ из $(\bar{K}_1, \bar{K}_2, \dots, \bar{K}_n)$. Начиная с точки M_i , построим в нем две трассы $p_{i,x} = (G_0, G_1,$

..., G_m) и $p_{i,y} = (C_0, C_1, \dots, C_q)$ по следующему рекуррентному правилу ($l > 0$):

$$\begin{cases} (G_j)_x = (G_{j-1})_x; (G_j)_y = (G_{j-1})_y + \delta_{j,y}, & \text{при } j = 2l, \\ (G_j)_x = (G_{j-1})_x + \delta_{j,x}; (G_j)_y = (G_{j-1})_y, & \text{при } j = 2l - 1; \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} (C_j)_x = (C_{j-1})_x + \delta_{j,x}; (C_j)_y = (C_{j-1})_y, & \text{при } j = 2l, \\ (C_j)_x = (C_{j-1})_x; (C_j)_y = (C_{j-1})_y + \delta_{j,y}, & \text{при } j = 2l - 1. \end{cases}$$

Здесь $(G_j)_\alpha$, $(C_j)_\alpha$ — α -координата ($\alpha = \{x, y\}$) соответственно точек G_j , C_j ; $G_0 = C_0 = M_i$, $G_m = C_q = N_i$; $\delta_{j,x}$, $\delta_{j,y}$ — максимальные приращения координат X или Y в $\bar{K}_i$, не изменяющие канонического вида трассы. Поскольку границей множества $\bar{K}_i$ служат две канонические p -ломанные, то $p_{i,x}$ и $p_{i,y}$ также канонические трассы. Обозначим число их изломов $n_{i,x}$ и $n_{i,y}$; ту из трасс $p_{i,x}$, $p_{i,y}$, на которой достигается $n_i = \min(n_{i,x}, n_{i,y})$, обозначим p_i^* .

Лемма 2. Любая p -ломаная, лежащая в множестве $\bar{K}_i$ и соединяющая точки M_i и N_i , имеет число изломов t не меньшее, чем n_i . При этом $|n_{i,x} - n_{i,y}| \leq 1$.

Доказательство. Не теряя общности, можно считать, что $(M_i)_x < (N_i)_x$, $(M_i)_y < (N_i)_y$, $p_i^* = p_{i,y}$. Проведем некоторые построения (рис. 2). Максимальность приращения координат трассы p_i^* в $\bar{K}_i$ означает, что p_1 -кратчайшие вида $(C_{2k+1}, C_{2k+2})_1$, лежащие на p_i^* , во внутренней точке касаются некоторых p_1 -кратчайших из $\bar{Q}_i^2$, принадлежащих границе L . То же самое имеет место для участков $(C_{2k}, C_{2k+1})_1$ и p_1 -кратчайших из $\bar{Q}_i^1$, принадлежащих L . Построение, аналогичное проведенному для множества $\bar{K}_i$, определяет по точкам C_j' множество $\bar{R}_i \subset \bar{Q}_i$, покрывающее $\bar{K}_i$. При этом p_1 -кратчайшие $(C_j, C_{j+1})_1$ разбивают $\bar{R}_i$ на n_i прямоугольников $(\bar{S}_1, \bar{S}_2, \dots, \bar{S}_{n_i})$ таких, что для любых двух точек $E_1 \in \bar{S}_j$ и $E_2 \in \bar{S}_{j+2}$ выполняется либо $(E_1)_x < (E_2)_x$, $(E_1)_y \leq (E_2)_y$, либо $(E_1)_x \leq (E_2)_x$, $(E_1)_y < (E_2)_y$; причем равенство достигается на соответствующих границах.

Доказательство первой части леммы проведем по индукции.

Пусть $n_i = 1$. Тогда в силу различия X - и Y -координат точек M_i и N_i их невозможно соединить p -ломаной, имеющей менее двух p_1 -кратчайших, т. е. $m \geq n_i$.

Пусть утверждение верно при $n_i \leq k$. Рассмотрим трассу p_i^* , $n_i = k + 1$, определяющую последовательность $(\bar{S}_1, \bar{S}_2, \dots, \bar{S}_{k+1})$.

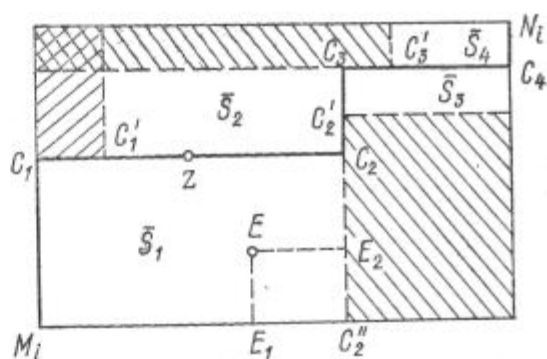


Рис. 2

Любая трасса $p \subset K_i$ с началом в точке M_i и концом в N_i имеет общую точку Z с отрезком $C_1 C_2$. При этом трасса p_i^* на участке от точки Z до N_i имеет k изломов ($k-1$, если точки Z и C_2 совпадают). Тогда для числа изломов m' трассы p на участке от точки Z до N_i по предположению выполняется условие $m' \geq k$ ($m' \geq k-1$).

Поскольку $(Z)_x > (M_i)_x$ и $(Z)_y > (M_i)_y$, точки Z и M_i могут быть соединены p -ломаной, имеющей в $\bar{S}_1$ не менее одного излома. Если точки Z и C_2 не совпадают, то $m \geq m' + 1 \geq k + 1 = n_i$. Допустим, что они совпадают. Тогда в области, ограниченной прямоугольником $M_i C_1 C_2 C_2''$, должна существовать граничная точка E . Иначе трасса $p_{i,x} = (M_i, C_2'', C_2, C_3, \dots, N_i)$ имела бы на один излом меньше, чем $p_{i,y} = p_i^*$. Наличие этой точки E приводит к существованию в $\bar{S}_1$ единственной допустимой p_2 -кратчайшей, соединяющей точки M_i и C_2 . Если в $\bar{S}_1$ трасса p совпадает с этой p_2 -кратчайшей, являющейся частью трассы p_i^* , то $m \geq m' + 1 + 1 \geq k + 1$; иначе $m \geq m' + 2 \geq k + 1 = n_i$. Первая часть леммы доказана.

Если, начиная с некоторой точки F , трассы $p_{i,x}$ и $p_{i,y}$ совпадают по p_1 -кратчайшей, то они совпадают на всем участке от точки F до N_i . При этом, если F не совпадает с M_i , то одна из них имеет излом в точке F . Поэтому для доказательства неравенства $|n_{i,x} - n_{i,y}| \leq 1$ достаточно показать, что трассы $p_{i,x}$ и $p_{i,y}$ имеют одинаковое число изломов между точками M_i и F .

Пусть трасса $p_{i,y} = p_i^*$ определяет последовательность $(\bar{S}_1, \bar{S}_2, \dots, \bar{S}_m)$ на участке от точки M_i до F . Границей множества $\bar{K}_i \cap \bar{S}_j$ служат p_2 -кратчайшая $(C'_{j-1}, C_{j+1})_2$, лежащая на p_i^* , и каноническая p -ломаная $(C'_{j-1}, C_{j+1})_r$, лежащая на границе множества $\bar{K}_i$. Это означает, что каноническая трасса $p_{i,x}$ пересекает p_1 -кратчайшие $(C'_{j-1}, C_j)_1$ и $(C_j, C_{j+1})_1$ во внутренних точках E_{j_1} и E_{j_2} . Поскольку трасса $p_{i,x} \subset \bar{K}_i$ получена из рекуррентного соотношения (3), она может соединять точки E_{j_1} и E_{j_2} в $\bar{S}_j \cap \bar{K}_i$ лишь по p_2 -кратчайшей. Следовательно, в каждом прямоугольнике $\bar{S}_j$ трасса $p_{i,x}$ имеет один излом, т. е. трассы $p_{i,x}$ и $p_{i,y}$ имеют равное число изломов между точками M_i и F . Лемма 2 доказана.

Проведенные рассуждения показывают, что в общем случае существует бесконечно много трасс, на которых достигается минимум как по длине, так и по числу изломов на $W_\tau(A, B)$.

Приведем конструктивный метод решения поставленной задачи, использующий алгоритм нахождения трассы минимальной длины на $[\tau]$. Для этого построим в $[\tau]$ семейство путей h_s , $0 \leq s \leq 1$, с фиксированными концами [3] такое, что $h_0 = \tau$, $h_1 = p_0 \in W_\tau(A, B)$, где p_0 — трасса минимальной длины. Воспользуемся параметрическим представлением пути τ : $\tau = \tau(t)$, $0 \leq t \leq$

≤ 1 ; $\tau(0) = A$, $\tau(1) = B$ и следующим свойством p_2 -кратчайших:

Если p_2^i -кратчайшая соединяет точки A и N , а p_2^j -кратчайшая соединяет точки N и T , то покрывающая их p -ломаная $(A, T)_k$ имеет индекс k , равный трем только при $i \neq j$.

Действительно, если $i \neq j$, то последовательность изменения координат p -ломаной $(A, T)_k$ имеет вид (X, Y, Y, X) или (Y, X, X, Y) , т. е. (X, Y, X) или (Y, X, Y) , что соответствует $k = 3$. При $i = j$ получим перестановку (X, Y, X, Y) или (Y, X, Y, X) , что соответствует $k = 4$.

Алгоритм. Выберем следующие начальные значения параметров: $t_0 = 0$, точка C совпадает с точкой $A = \tau(0)$, начальный индекс i p_2^i -кратчайшей равен $i = i_0$.

Непрерывно изменяя параметр t_1 от t_0 до 1 (при $t_1 = 1$ построение семейства h_s закончено), точкам C и $T = \tau(t_1)$ ставим в соответствие p_2^i -кратчайшую $(C, T)_2$. При этом может оказаться, что p_2^i -кратчайшая $(C, T)_2$ касается границы L так, что для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$, $T' = \tau(t_1 + \varepsilon)$ p_2^i -кратчайшая $(C, T')_2$ содержит точки не из $\bar{D}$. В этом случае ближайшая к точке $T = \tau(t_1)$ точка касания C' границы L с p_2^i -кратчайшей $(C, T)_2$ принимается за начальную, t_0 принимает значение t_1 , индекс i для p_2^i -кратчайшей меняется на противоположный и движение точки T по τ продолжается. При этом точке C предшествует последовательность ранее полученных начальных точек $(C_0, C_1, \dots, C_m)$, $C_0 = A$. В ней может существовать точка C с максимальным индексом g такая, что p -ломаная $(C_g, C)_r$ состоит не менее чем из двух p_1 -кратчайших.

Если такой точки нет, движение точки T по τ продолжается без дополнительных проверок. Иначе при достаточно малом $\varepsilon > 0$ p -ломаная $p' = (C_g, C)_r \cap (C, T)_2$, $T = \tau(t_0 + \varepsilon)$ имеет канонический (либо не канонический) вид. В этом случае при движении точки T по τ может оказаться, что без появления новой начальной точки p -ломаная p' стала не канонической (соответственно канонической). Тогда за начальную точку снова принимается C_g , индекс i для p_2 -кратчайшей выбирается тем же, что имелся в точке C_g , точки $(C_{g+1}, \dots, C_m)$ отбрасываются и движение точки T по τ продолжается, начиная с точки $\tau(t_1)$, в которой произошло изменение канонического вида.

В результате применения алгоритма начальные точки $C_1, C_2, \dots, \dots, C_m$ и индекс i начальной p_2^i -кратчайшей однозначно определяют некоторую p -ломаную p_0 . При непрерывном изменении параметра s от 0 до 1 всегда определена p -ломаная $p_s(t)$, $0 \leq t \leq \|p_s\|$, соединяющая точки A и T , $T = p_s(\|p_s\|) = \tau(s)$ и проходящая через начальные точки $C_1, C_2, \dots, C_g$. Следовательно, для $s \in [0, 1]$ определен путь

$$h_s(t) = \begin{cases} p_s(t), & 0 \leq t \leq \|p_s\|, \\ \tau(t + s - \|p_s\|), & \|p_s\| \leq t \leq \|p_s\| + 1 - s \end{cases}$$

с началом в точке A и концом в B . Поскольку время остановки $\|h_s\|$ непрерывно зависит от s , а функция h непрерывно отображает замкнутую область $0 \leq s \leq 1$, $0 \leq t \leq \|h_s\|$ в $\bar{D}$, то $h_s \in [\tau]$, $0 \leq s \leq 1$. Из леммы 1 следует, что p -ломаная $p_0 = h_1$ лежит в последовательности множеств $(\bar{K}_1, \bar{K}_2, \dots, \bar{K}_n)$, определяемых любой трассой минимальной длины и является канонической в каждой из них. Поэтому трасса p_0 имеет минимальную длину на $[\tau]$. Использование в алгоритме приведенного выше свойства p_2 -кратчайших означает, что в порождаемых трассой p_0 множествах $(\bar{K}_1, \dots, \bar{K}_n)$ она реализует одну из трасс вида $p_{j,x}$ или $p_{j,y}$. По тому же алгоритму в каждом из множеств $\bar{K}_j$ построим трассу, начиная с p_2^i -кратчайшей, индекс i которой противоположен тому, что имелся у трассы p_0 в начальной точке M_i этого множества. Согласно лемме 2 одна из этих трасс p_j^* будет иметь минимальную длину и минимальное число изломов в $\bar{K}_j$. Следовательно, трасса $p^* = \bigcup_{j=1}^n p_j^*$ будет решением рассматриваемой задачи.

Для данного метода была составлена программа на ФОРТРАНЕ. Среднее время решения поставленной задачи на ЭВМ БЭСМ-6 для области, граница которой имеет 25 компонент связности, составляет 0,2 секунды.

В заключение авторы выражают благодарность доценту Шору Л. А. за ряд полезных замечаний, учтенных в настоящей работе.

Список литературы: 1. Теория и методы автоматизации проектирования вычислительных систем/Под ред. М. Брейера. Пер. с англ. под ред. Л. Д. Райкова. — М.: Мир, 1977. — 283 с. 2. Смеляков С. В. Некоторый подход к задаче трассировки. — В кн.: Оптимизация и оптимальное размещение. Киев, 1977, с. 16 — 19. (ИК АН УССР, препринт — 77 — 61.) 3. Кроуэлл Р., Фокс Р. Введение в теорию узлов. — М.: Мир, 1967. — 348 с.

Поступила 4 сентября 1978 г.

УДК 513.73

В. И. Т р у ш к и н а

ТЕОРЕМА О РАСКРАСКЕ И ЖЕСТКОСТЬ ВЫПУКЛОГО МНОГОГРАННИКА

В R^3 на множестве вершин невырожденного замкнутого выпуклого многогранника зададим поле скоростей. Задание этого поля называется изгибанием многогранника. В классической постановке при изучении жесткости выпуклых многогранников [1] рассматривается поле скоростей, при котором длины ребер в начальный

момент стационарны. Если a — ребро, а v_1 и v_2 — скорости движения его концов, то это означает требование

$$a(v_1 - v_2) = 0. \quad (1)$$

Ослабим это требование, заменив его альтернативой:

А. Либо $av_1 = av_2 = 0$, либо $|av_1| > 0$ и $|av_2| > 0$ и знаки av_1 и av_2 одинаковы.

Назовем выполнение альтернативы А *условной жесткостью* ребер при изгибании. Условие А означает, что скорости движения концов ребер направлены так, что либо скорости обоих концов ребра перпендикулярны к ребру, либо вектор скорости одного конца ребра образует с ребром острый угол, другого конца — тупой. Вершину многогранника назовем *нулевой*, если она обладает нулевой скоростью.

В этой статье будет доказана

Теорема 1. *Если замкнутый выпуклый многогранник с условно жесткими ребрами и только треугольными гранями имеет при изгибании не менее трех нулевых вершин, то все его вершины нулевые.*

Для многогранников с треугольными гранями этот результат охватывает классическую теорему о жесткости. Действительно, пусть выполнено условие (1). Подвергнем многогранник как твердое тело дополнительному движению, выбрав последнее так, чтобы скорости трех его вершин стали нулевыми. При этом условие (1) сохраняется; по теореме 1 скорости всех вершин будут нулевыми, что означает, что с самого начала поле скоростей было полем движения многогранника как твердого тела.

1. Изгибание многогранника и раскраска ребер. Будем раскрашивать полуребра изгибаемого многогранника по следующему правилу: в красный цвет красим полуребро, у конца которого вектор скорости перпендикулярен ребру; в синий цвет — если вектор скорости конца образует с ребром угол $< \frac{\pi}{2}$; в зеленый — если вектор скорости конца образует угол $> \frac{\pi}{2}$. Из условия А вытекает, что ребра будут только красные или сине-зеленые.

Будем говорить, что в вершине треугольной грани имеется *инверсия*, если одно исходящее из этой вершины полуребро синее, другое зеленое; что при вершине O есть инверсия, если хотя бы одна инцидентная с этой вершиной грань имеет в ней инверсию. Числом инверсий при вершине O будем называть общее число инверсий при ней в треугольниках, инцидентных с ней. Вершину многогранника назовем *красной* (нулевой), если все инцидентные с ней ребра красные. Очевидно, если ребра треугольника все сине-зеленые, то в нем либо одна, либо три инверсии.

Лемма 1. *Для замкнутого выпуклого многогранника без ложных ребер при изгибании с условно жесткими ребрами справедливы следующие утверждения: а) если из вершины исходит более двух*

красных ребер, то все выходящие из нее ребра красные; б) если из вершины исходит два красных ребра, то в ней нет инверсий; в) если из вершины исходит одно красное ребро, то при этой вершине не более одной инверсии; г) если из вершины исходят только сине-зеленые ребра, то при ней есть не более двух инверсий.

Доказательство леммы элементарно. В случае а) скорость ортогональна трем некомпланарным ребрам, и потому нулевая. В случаях б) — г) вершина ненулевая. Достаточно провести через нее плоскость, ортогональную вектору скорости. При обходе вокруг вершины полуребра, лежащие по одну сторону от плоскости — синие, по другую — зеленые. Ввиду выпуклости многогранного угла отсюда следуют альтернативы б) — г).

Предположение, что теорема 1 неверна, приводит к такой раскраске сети ребер многогранника, что

- 1) сеть имеет не менее трех красных вершин;
- 2) сеть имеет по меньшей мере одно сине-зеленое ребро;
- 3) если из вершины исходит хотя бы одно сине-зеленое ребро, то из нее исходит не более двух красных ребер;
- 4) при вершине с двумя красными ребрами нет инверсии;
- 5) при вершине с одним красным ребром не более одной инверсии;

б) если из вершины исходят лишь сине-зеленые ребра, то при ней не более двух инверсий.

В п. 2 будет доказана более общая топологическая теорема о раскраске, из которой следует, что раскраска со свойствами 1) — 6) ребер замкнутого выпуклого многогранника с треугольными гранями невозможна, что доказывает основную теорему 1.

2. Теорема о раскраске. Сеть ребер многогранника можно рассматривать как частный случай сети триангуляции некоторой замкнутой ориентируемой поверхности. Раскрашивая ребра сети так же, как и на многограннике, можно говорить о цвете ребер и вершин, об инверсиях и их числе на треугольнике и при вершинах сети в том же смысле, как и в п. 1.

Теорема 2. Пусть двумерная ориентируемая замкнутая поверхность рода h ($h \geq 0$) протриангулирована так, что никакая пара вершин триангуляции не соединена более чем одним ребром, и ребра триангуляции раскрашены в три цвета так, что каждое ребро либо красное, либо одна половина его синяя, другая — зеленая. Такая раскраска со свойствами 1) — 6) невозможна.

Очевидно, что из теоремы 2 следует теорема 1.

Для доказательства теоремы 2 предположим, что триангуляция и ее раскраска со свойствами 1) — 6) существует.

2. 1. Можно считать, что ни одно красное ребро не входит в треугольник, имеющий инверсии. Действительно, допустим, что красное ребро AB входит в один или два треугольника с инверсиями. Три возможных случая прилегания треугольников к такому ребру с инверсиями представлены на рис. 1. Осуществим в этих случаях

перестройку триангуляции и ее окраски. На рис. 1, а, б заменяем в четырехугольнике $ABCD$ красное ребро AB сине-зеленым ребром CD (рис. 2, а, б). В случае рис. 1, в перекрашиваем ребро AB , как указано на рис. 2, в. При этом не возникает недопустимых правилами 1) — 6) инверсий, не исчезают имевшиеся красные вершины, комплекс остается триангулированным, сохраняется род поверхности, число вершин, ребер, треугольников. (Могут появиться вершины, из которых исходит только два ребра, но эти ребра сине-зеленые и входят в треугольники без красных ребер.)

2. 2. Фигурой Q_0 назовем симплициальный комплекс, получающийся из Q — триангулированной поверхности — после удаления открытых звезд всех красных вершин.

Комплекс Q_0 не совпадает с Q , у которого есть красные вершины. Если не все вершины Q красные, то комплекс Q_0 не пуст.

2. 3. Можно считать, что Q_0 состоит из одной связной компоненты, а удаленная часть Q/Q_0 состоит из конечного числа открытых областей, каждая из которых гомеоморфна кругу. Действительно, пусть Q_0 состоит из одной или большего числа связных

компонент. Сохраним только одну из них. Ее краем служит конечное число ориентированных (Q был ориентирован) замкнутых ломаных, быть может, имеющих самокасания и самоналожения, но заведомо не имеющих самопересечений. С внешней (для Q_0) стороны к каждой такой ломаной Γ прилегает открытое множество Q/Q_0 . Отре-

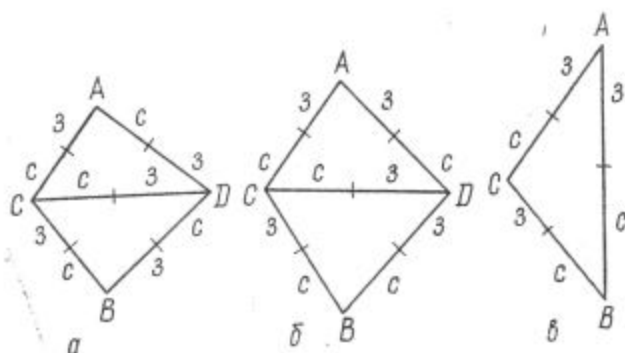


Рис. 2

жем вдоль Γ прилегающую извне область. Из вершин Γ вовне Q_0 выходили только красные ребра, по одному или по два из каждой вершины. Если вдоль Γ вовне Q_0 всюду выходило по одному красному ребру, то отрезанная область содержала внутри всего одну вершину и была одновершинной пирамидой, гомеоморфной кругу. Назовем ее шапочкой *первого рода*. Два красных ребра не могли исходить только из одной вершины ломаной Γ . Если по два красных ребра исходило из двух вершин Γ , то отрезанная область содержала внутри только две вершины и тоже была гомеоморфна кругу. Назовем ее шапочкой *второго рода*. Если два красных ребра исходили из трех или более вершин Γ , то прилегающий к Γ пояс

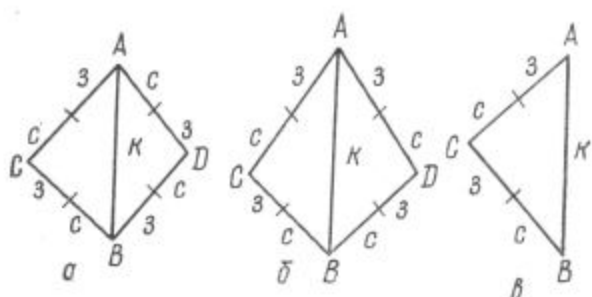


Рис. 1

из отрезаемых открытых треугольников гомеоморфен кольцу. Отсечем все лежащее за внешним краем этого кольца и заменим его боковой поверхностью пирамиды с соответствующим числом ребер. Кольцо вместе с этой надстройкой назовем шапочкой *третьего рода*. Все новые ребра красим в красный цвет.

После выполнения вдоль каждой кривой Γ такой перестройки получим Q_0 с указанными свойствами. Замкнутость, ориентируемость, правила раскраски перестроенной поверхности Q , наличие не менее трех красных вершин сохраняется. Может измениться род.

2. 4. Введем понятие *веса* вершины для двумерного симплициального комплекса с раскрашенными ребрами. Существенно, что вес каждый раз будет мажорировать количество возможных инверсий в вершине.

Будем удалять из Q по одной шапочке и оставшуюся часть после удаления l шапочек обозначать через Q^l . Каждой вершине комплекса Q^l в качестве веса припишем одно из чисел 0, 1, 2 по следующему правилу: если вершина внутренняя для Q^l , ее вес будет 2; если вершина не внутренняя и в Q при этой вершине было два красных ребра, которых уже нет у Q^l , ее вес будет 0; прочим вершинам приписываем вес 1. Весом фигуры Q^l назовем сумму весов всех ее вершин и обозначим через P^l . Вес фигуры Q_0 обозначим через P_0 .

2. 5. Число вершин, ребер, треугольников триангуляции комплекса Q обозначим соответственно через p^0, p^1, p^2 . Число треугольников, сохранившихся в составе Q_0 , обозначим через p_0^2 , род Q обозначим через h .

Лемма 2. В указанных предположениях

$$P_0 - p_0^2 \leq 2p^0 - p^2 - 5. \quad (2)$$

Прежде чем доказывать лемму 2, покажем, как из нее следует теорема 2.

2. 6. В фигуре Q_0 инверсии считаются только в оставшихся в составе Q_0 исходных треугольниках. В Q_0 могут быть инверсии и красные ребра, но изолированных красных ребер нет. Треугольники из Q_0 унаследовали ориентацию Q . Привяжем к каждому такому треугольнику, имеющему красное ребро, первую (при его обходе) половину этого ребра. Тогда каждое красное полуребро будет принадлежать одному и только одному треугольнику.

Пусть η_0 — удвоенное число красных ребер фигуры Q_0 , а μ_0 — суммарное число ее инверсий. Так как каждое красное полуребро и каждая инверсия принадлежат одной и только одной вершине, то из свойств 1) — 6) следует, что $\mu_0 \leq P_0$, $\eta_0 \leq P_0$.

2. 7. По теореме Эйлера [1] имеем $p^0 - p^1 + p^2 = 2 - 2h$. Так как Q — триангуляция, то $3p^2 = 2p^1$, поэтому

$$2p^0 - p^2 = 4 - 4h. \quad (3)$$

2. 8. Покажем, что из свойств 1) — 6) следует, что у Q_0 найдется по меньшей мере один сине-зеленый треугольник, и, следовательно, по меньшей мере одна инверсия.

Допустим, что в Q_0 сине-зеленого треугольника нет, т. е. каждый треугольник фигуры Q_0 имеет хоть одно красное ребро. Тогда к этому треугольнику принадлежит хоть одно красное полу-ребро. Поэтому общее число η_0 красных полуребер Q_0 удовлетворяет неравенству $p_0^2 \leq \eta_0 \leq P_0$, откуда $P_0 - p_0^2 \geq 0$. Из неравенств (2) и (3) получаем $2p^0 - p^2 - 5 \geq 0$, $4 - 4h - 5 \geq 0$, $-4h \geq 1$, что невозможно, так как $h \geq 0$. Утверждение (в начале этого пункта) доказано.

2.9. Теперь покажем, что в Q_0 инверсий не может быть. У фигуры Q_0 могут быть красные ребра, которые входят только в треугольники без инверсий. Пусть a — число красных ребер у Q_0 .

Будем последовательно в произвольном порядке удалять из Q_0 по одному открытому красному ребру вместе с прилегающими к нему открытыми треугольниками. На n -м шаге получаем фигуру Q_{0n} ; за ее вершинами, не являющимися концами удаляемого ребра, сохраняем прежний вес, а в концах удаляемого ребра вес понижаем на единицу (в концах он мог быть только 1 или 2). После a удалений суммарный вес будет $P_{0a} = P_0 - 2a$. Поскольку при каждом удалении снималось не более двух открытых треугольников, число оставшихся в Q_{0a} двумерных симплексов будет $\pi_a \geq p_0^2 - 2a$.

В Q_{0a} есть только сине-зеленые треугольники, в каждом из них минимум по одной инверсии. Поэтому общее число инверсий в Q_{0a} будет $\mu_{0a} \geq \pi_a$, а так как вес вершины ограничивает сверху число возможных в ней инверсий, то $\mu_{0a} \leq P_{0a}$. Таким образом, $p_0^2 - 2a \leq \mu_{0a} \leq P_{0a} = P_0 - 2a$, откуда $P_0 - p_0^2 \geq 0$, что вместе с (2) и (3) дает $-4h \geq 1$, противоречащее неравенству $h \geq 0$. Теорема доказана.

3. Доказательство леммы 2. Рассмотрим три возможных случая.

3.1. В Q есть шапочка третьего рода. Удалим из Q эту шапочку. При этом будет удалено $q + 1$ ($q \geq 3$) красных вершин, и число удаленных треугольников будет на q превосходить число красных ребер, удаленных из некрашенных вершин Q . Поэтому $P^1 - p^2(1) = 2p^0 - 2(q + 1) - p^2 + q = 2p^0 - p^2 - q - 2 \leq 2p^0 - p^2 - 5$, так как $q \geq 3$.

3.2. В Q нет шапочек третьего рода, но есть шапочка второго рода. Удалим ее из Q ; при этом число удаленных треугольников будет равно числу удаленных ребер, выходящих из некрашенных вершин. Число удаленных вершин равно 2. Поэтому $P^1 - p^2(1) = 2p^0 - 2 \cdot 2 - p^2 = 2p^0 - p^2 - 4$. Так как число красных вершин в Q не менее трех, в Q^1 должна быть еще одна шапочка первого или второго рода. Удалим ее. Если удалена шапочка второго рода, то число удаленных треугольников равно числу удаленных ребер, выходящих из некрашенных вершин, и было удалено две вершины. Поэтому $P^2 - p^2(2) = P^1 - p^2(1) - 2 \cdot 2 = 2p^0 - p^2 - 8 < 2p^0 - p^2 - 5$. Если удалена шапочка первого рода, то число удаленных треугольников равно числу удаленных

ребер, выходящих из некрасных вершин, и удалена одна вершина. Следовательно, $P^2 - p^2(2) = P^1 - p^2(1) - 2 = 2p^0 - p^2 - 6 < 2p^0 - p^2 - 5$.

3. 3. В фигуре Q есть шапочки только первого рода, их не менее трех. Удалим из Q три симплициальные звезды с центрами в красных вершинах. Так как при этом будет удалено три вершины и число удаленных треугольников равно числу удаленных ребер, выходящих из некрасных вершин, то $P^3 - p^2(3) = 2p^0 - 2 \cdot 3 - p^2 = 2p^0 - p^2 - 6 < 2p^0 - p^2 - 5$.

В каждом рассмотренном случае в Q^l могут быть еще шапочки из звезд красных вершин. Предположим, что при $l = d$ справедливо неравенство $P^d - p^2(d) \leq 2p^0 - p^2 - 5$. Покажем, что при $l = d + 1$ справедливо будет неравенство $P^{d+1} - p^2(d+1) \leq 2p^0 - p^2 - 5$. Можно считать, что фигура Q^{d+1} получена из Q^d удалением одной шапочки. Если это была шапочка третьего рода, то $P^{d+1} - p^2(d+1) = P^d - p^2(d) - 2(q+1) + q \leq 2p^0 - p^2 - q - 7 < 2p^0 - p^2 - 5$, так как $q \geq 3$. Если она была второго рода, то $P^{d+1} - p^2(d+1) = P^d - p^2(d) - 2 \cdot 2 \leq 2p^0 - p^2 - 9 < 2p^0 - p^2 - 5$. И если она первого рода, то $P^{d+1} - p^2(d+1) = P^d - p^2(d) - 2 < 2p^0 - p^2 - 7 < 2p^0 - p^2 - 5$. Удалив все шапочки, получим фигуру Q_0 и будет $P_0 - p_0^2 \leq 2p^0 - p^2 - 5$. Лемма доказана.

Автор выражает благодарность Ю. А. Волкову, поставившему задачу и много помогавшему в работе над ней, и В. А. Залгаллеру, прочитавшему рукопись и сделавшему ряд ценных замечаний.

Список литературы: 1. Кон-Фоссен С. Э. Некоторые вопросы дифференциальной геометрии в целом. — М.: Физматгиз, 1959. — 303 с. 2. Зейферт Г., Трельфаль В. Топология. М. — Л., ГОНТИ, 1938. — 400 с.

Поступила 14 октября 1979 г.

УДК 513

М. А. У л а н о в с к и й

КОНФОРМНО ПОЛНЫЕ ЛОРЕНЦОВЫ МНОГООБРАЗИЯ

Лоренцово многообразие — псевдориманово пространство V_n , фундаментальная форма которого ds^2 имеет сигнатуру $(+, \dots, +, -)$. Лоренцово V_n причинно ориентировано, если конусы $ds^2 \leq 0$ касательных пространств непрерывным образом разбиты на два полуконуса: полуконус направлений «в будущее» и полуконус направлений «в прошлое». Как известно, такая разметка полуконусов (возможная, в частности, в односвязном V_n) позволяет определить бинарное отношение $<$, которое в описании физического пространства-времени V_4 играет роль отношения причинного следования. Лоренцово V_n рассматривается как дифференцируемое многообразие, наделенное дополнительно структурой локального порядка; в рамках этой тео-

рии глобальное описание V_n означает прежде всего описание свойств отношения $\prec$.

Различными авторами [1, 3] были классифицированы и изучены многочисленные типы отношений $\prec$: максимальное отношение $\prec$ (для любых a, b $a \prec b$); «гиперболические» отношения порядка, основные свойства которых качественно такие же, как в плоском E_n (пространстве Минковского); типы отношения $\prec$, которые с физической точки зрения можно было бы считать промежуточными между максимальными и гиперболическими.

Заметим, что обычно примеры, иллюстрирующие возможные «патологические» черты отношения $\prec$, построены по следующему принципу: рассматривается открытое подмногообразие лоренцова V_n с известными свойствами — чаще всего плоского E_n или каких-либо его неодносвязных вариантов. Важно отметить также следующее обстоятельство: отношение $\prec$ конформно инвариантно, поэтому обычно нетрудно открытое подмногообразие лоренцова V_n представить как геодезически полное пространство за счет выбора подходящей фундаментальной формы из совокупности λds^2 ($\lambda > 0$ — функция на рассматриваемом подмногообразии).

В связи с этими фактами представляются естественными вопросы: можно ли произвольное V_n конформно отобразить на собственное открытое подмногообразие другого лоренцова пространства той же размерности, какова глобальная структура «конформно непродолжаемых» многообразий? В заметке [4] была предпринята попытка указать одно из возможных препятствий, не позволяющих данное V_n конформно погрузить в другое пространство той же размерности. Препятствие это связано с понятием конформной полноты, определение которого аналогично определению геодезической полноты — с заменой аффинной связности Леви-Чивита на нормальную конформную связность Э. Картана.

Цель настоящей заметки — описание глобальных свойств конформно полных лоренцовых пространств. Показано, что любое конформно полное причинно ориентированное лоренцово V_n имеет отношение $\prec$, принадлежащее одному из двух упомянутых выше «крайних» типов: это либо максимальное отношение, либо гиперболическое (причем в последнем случае V_n есть с физической точки зрения «пространство-время с компактной вселенной»). Из этого результата следует, что лоренцово V_n , для которого отношение $\prec$ принадлежит одному из «промежуточных» типов, конформно неполно. При этом, конечно, следует учесть, что конформная полнота, по-видимому, составляет лишь достаточное условие «конформной непогружаемости» (и здесь очевидна аналогия с понятием геодезической полноты, которая заведомо не является необходимым условием невозможности метрического продолжения V_n).

В этой заметке рассматриваются только связные лоренцовы V_n размерности $n \geq 3$. Обозначения: греческие индексы $\alpha, \beta, \dots$ во всех случаях принимают значения $0, 1, 2, \dots, n+1$; латинские $i, j, \dots$, — значения $1, 2, \dots, n$. $R = (-\infty, \infty)$ — вещественная

ось; $R^+ = (0, \infty)$; R_m — вещественное векторное пространство размерности m . Суммирование во всех случаях указано знаком $\sum$: обозначения типа $a_i b^i = \sum a_i b^i$ не применяются. δ_j^i — символ Кронекера ($\delta_j^i = 0$, $i \neq j$; $\delta_j^i = 1$, $i = j$).

Конформная связность (далее речь идет о конформных связностях, ассоциированных с метриками лоренцова типа) — линейная связность в расслоении $q: Q \rightarrow X_n$, стандартный слой которого можно рассматривать как однополостный гиперboloид Q_n (погруженный ради удобства выкладок в вещественное проективное P_{n+1}). В ряде вопросов было бы естественнее рассмотреть расслоение, стандартный слой которого — универсальное накрывающее гиперboloида Q_n — Q_n^* (Q_n^* диффеоморфно $S_{n-1} \times R$, где S_{n-1} — сфера). Однако это существенно усложнило бы многие вычисления. Ниже приведены в сокращенном виде лишь те сведения о «нормальной конформной связности» (Э. Картан), которые необходимы для дальнейшего изложения; за подробностями отсылаем читателя к заметке [4].

В качестве репера слоя $q^{-1}(x)$, $x \in X_n$ удобно взять $n+2$ «аналитических» точек A_α [Э. Картан; в однородных координатах проективного P_{n+1} — $x^0, \dots, x^{n+1}$ — A_α — набор координат $(x_0^0, x_0^1, \dots, x_0^{n+1})$]. Выбор реперов и конформная связность определяют таблицу линейных дифференциальных форм $\{\omega_\beta^\alpha\}$, определенных (локально) на X_n . С совокупностью конформных метрик $\lambda \cdot ds^2$ ($\lambda: X_n \rightarrow R$) ассоциируется одна и только одна «нормальная» конформная связность $\{\omega_\beta^\alpha\}$.

Пусть одна из конформных метрик ds^2 локально представлена в виде $ds^2 = \sum_i \varepsilon_i (\theta^i)^2$, $\varepsilon_1 = \dots = \varepsilon_{n-1} = 1$, $\varepsilon_n = -1$. Здесь θ^i — линейные формы, причем связность Леви-Чивита метрики ds^2 определяет формы $\{\theta_j^i\}$. Тогда за счет спецификации репера и условий, определяющих нормальную связность, можно получить таблицу $\{\omega_\beta^\alpha\}$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$\omega_0^i = \theta^i, \quad \omega_j^i = \theta_j^i; \quad (1)$$

$$\omega_0^{n+1} = \omega_{n+1}^0 = \omega_0^0 = \omega_{n+1}^{n+1} = 0, \quad \omega_i^{n+1} = \varepsilon_i \omega_0^i, \\ \omega_{n+1}^i = -\omega_0^i + \varepsilon_i \omega_i^0, \quad \omega_i^0 = \sum_j \Gamma_{ij} \omega_0^j; \quad (2)$$

$$\Gamma_{ij} = -\frac{1}{n-2} R_{ij} + \varepsilon_i \delta_j^i \frac{1}{(n-1)(n-2)} R - \frac{1}{n-2} \varepsilon_i \delta_j^i, \quad (3)$$

где R_{ij} , R — тензор Риччи и скалярная кривизна формы ds^2 , при этом замена $ds^2 \rightarrow \lambda \cdot ds^2$ влечет за собой — с сохранением соотношений (1), (2), (3) — замену таблицы $\{\omega_\beta^\alpha\}$, которую можно описать как результат замены канонических реперов.

Если $\gamma: [0, 1] \rightarrow X_n$ — кусочно-гладкая дуга, то система обыкновенных дифференциальных уравнений $dA_\alpha = \sum_\beta \omega_\alpha^\beta A_\beta$ (или $dx_\alpha^i =$

$= \sum_{\beta} \omega_{\alpha}^{\beta} x_{\beta}^{\gamma}$), где формы ω_{α}^{β} вычислены «вдоль γ », определяют развертку дуги γ — кривую $A_0(t)$, лежащую на гиперboloиде $Q_n = q^{-1}\gamma(0)$. Развертка дуги γ определена только конформной связностью и не зависит от выбора метрики из совокупности $\lambda \cdot ds^2$.

Геодезическая конформной связности $\{\omega_{\alpha}^{\beta}\}$ — дуга, развертка которой есть отрезок прямолинейной образующей гиперboloида Q_n . Множество всех геодезических нормальной конформной связности, ассоциированной с метриками $\lambda \cdot ds^2$, совпадает с множеством изотропных геодезических каждой из этих метрик (это замечание составляет одно из доказательств конформной инвариантности изотропных геодезических; его проверка приведена ниже).

Конформно полное лоренцово V_n — пространство, для которого развертка любого непродолжаемого луча $\gamma: [0, T) \rightarrow V_n$ изотропной геодезической (т. е. луча, не являющегося собственной частью другого луча с тем же началом $\gamma(0)$) «пробегают» бесчисленное множество раз замкнутую прямолинейную образующую гиперboloида $Q_n = q^{-1}\gamma(0)$. Если расслоение гиперboloидов Q_n заменить расслоением их универсальных накрывающих Q_n^* , то конформная полнота V_n означает, что развертка каждого непродолжаемого луча изотропной геодезической пространства V_n есть также непродолжаемый луч изотропной геодезической пространства Q_n^* (определение естественной конформной структуры на гиперboloиде Q_n и его универсальном накрывающем Q_n^* приведено ниже).

Основной результат настоящей заметки

Теорема 1. *Если V_n — конформно полное лоренцово пространство, то каждый непродолжаемый луч изотропной геодезической $\gamma: [0, T) \rightarrow V_n$ содержит пару сопряженных точек (следовательно, каждый такой луч несет на себе бесчисленное множество сопряженных пар).*

Как было показано в заметке [5] (теорема 8), для любого причинно ориентированного лоренцова V_n , обладающего указанным в теореме 1 свойством, справедливо одно из следующих двух утверждений:

А. V_n диффеоморфно декартову произведению $X_{n-1} \times R$, где X_{n-1} компактно; диффеоморфизм $V_n \rightarrow X_{n-1} \times R$ может быть выбран так, что слои $x = \text{const}$ ($x \in X_{n-1}$) времениподобны, а слои $t = \text{const}$ ($t \in R$) пространственноподобны.

В. Отношение $\prec$ в V_n не является отношением порядка — V_n содержит замкнутые непространственноподобные кривые.

Таким образом, для конформно полных лоренцовых V_n справедливо одно из утверждений А, В. Но альтернативу В можно уточнить: будет показано, что в случае В отношение $\prec$ максимально. Поэтому для конформно полных V_n справедлива

Теорема 2. *Если лоренцово V_n конформно полно и причинно ориентировано, то справедливо одно из следующих двух утверждений:*

А. $V_n = X_{n-1} \times R$, причем X_{n-1} компактно и в метрике V_n слои $t = \text{const}$ ($t \in R$) пространственноподобны, а слои $x = \text{const} \times (x \in X_{n-1})$ времениподобны. Отношение $\prec$ есть отношение порядка глобально гиперболического типа.

В*. Отношение $\prec$ в V_n максимально.

Доказательство теоремы 1. Запишем уравнения, определяющие развертку кривой $\gamma \subset V_n$: $dA_0 = \sum_i \omega_0^i A_i$, $dA_i = \omega_i^0 A_0 + \sum_j \omega_i^j A_j + \omega_i^{n+1} A_{n+1}$, $dA_{n+1} = \sum_i \omega_{n+1}^i A_i$; откуда с учетом соотношений (1), (2)

$$\begin{aligned} d^2 A_0 = & \sum_i (d\omega_0^i + \sum_j \omega_j^i \omega_0^j) \cdot A_i + \sum_i \omega_i^0 \omega_0^i \cdot A_0 + \\ & + \sum_i \varepsilon_i (\omega_0^i)^2 \cdot A_{n+1}. \end{aligned} \quad (4)$$

Для того чтобы развертка γ была отрезком прямолинейной образующей гиперboloида Q_n , необходимо и достаточно, чтобы «аналитические» точки A_0 , dA_0 , $d^2 A_0$ были линейно зависимы, что приводит к условиям $d\omega_0^i + \sum_j \omega_j^i \omega_0^j = \rho \cdot \omega_0^i$, $\sum_i \varepsilon_i (\omega_0^i)^2 = 0$. Очевидно, в силу этих условий γ — изотропная геодезическая метрики $V_n - ds^2$.

Выберем в качестве параметра непродолжаемого луча изотропной геодезической аффинный параметр t (соответствующий метрике ds^2). Заметим, что в общем случае t не принимает сколь угодно больших значений — конформно полное V_n может быть одновременно геодезически неполным. Таким образом, будем считать, что $0 \leq t < T$, $T \leq \infty$. Если второй дифференциал вычислен по аффинному параметру, то из (4) получим $d^2 A_0 = \sum_i \omega_i^0 \omega_0^i \cdot A_0 (d\omega_0^i + \sum_j \omega_j^i \omega_0^j = 0)$. Или с учетом формул (3) $d^2 A_0 = -\frac{1}{n-2} \sum_{i,j} R_{ij} \omega_0^i \omega_0^j \times A_0$, где $\sum R_{ij} \omega_0^i \omega_0^j$ — форма Риччи (метрики ds^2) вдоль дуги γ . Если $x_0^0(t), \dots, x_0^{n+1}(t)$ — однородные координаты точки $A_0(t)$, то $\frac{d^2 x_0^\alpha}{dt^2} = -\frac{1}{n-2} \text{Ric } \gamma(t) x_0^\alpha$. Здесь $\text{Ric } \gamma(t)$ — значение формы Риччи на параллельно переносимом (относительно ds^2) касательном векторе ξ дуги $\gamma(\sum_{i,j} R_{ij} \xi^i \xi^j)$.

Согласно определению конформной полноты V_n , точка $A_0(t)$ бесчисленное множество раз совпадает (как геометрическая точка) с $A_0(0) = (1, 0, \dots, 0)$, например, при $t = t_1, t_2, \dots$. Отсюда следует, что для каждого $t = 1, \dots, n$ $x_0^t(0) = x_0^t(t_1) = x_0^t(t_2) = \dots = 0$. В то же время из условия $dA_0|_{t=0} = \sum_i \omega_0^i A_i|_{t=0}$ оче-

видно, что хотя бы для одного $i \frac{dx_0^i}{dt} \Big|_{t=0} \neq 0$. Таким образом, «скалярное» уравнение 2-го порядка $\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{1}{n-2} \text{Ric } \gamma x$ имеет на отрезке $[0, T)$ бесчисленное множество точек t_a , сопряженных с точкой $t=0$. Требуется доказать, что на отрезке $[0, T)$ существуют сопряженные точки и для системы уравнений Якоби вдоль геодезической γ : $d^2\xi^i = -\sum_{j,k,l} R_{j,kl}^i \xi^j \xi^k \omega_0^l$, где $R_{j,kl}^i$ — тензор кривизны метрики ds^2 . В заметке [5] было показано, что сопряженные точки изотропной геодезической определяются частью последней системы — системой из $n-2$ линейных уравнений; существенно, что матрица этой системы приводима к симметричной (см. доказательство теоремы 7 упомянутой заметки). След матрицы этой системы — как раз форма Риччи ($-\text{Ric } \gamma$).

Очевидно, рассматриваемая ситуация может быть описана следующим образом: предположим, что уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a(t) x, \quad (5)$$

где $a: [0, T) \rightarrow R$ непрерывна; $x: [0, T) \rightarrow R$ — неизвестная функция, имеет на $[0, T)$ бесконечную последовательность точек, сопряженных с точкой $t=0$ — $t_1, t_2, \dots$. Требуется доказать, что отрезок $[0, T)$ содержит по крайней мере одну пару сопряженных точек для системы m линейных уравнений:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \alpha(t) y, \quad (6)$$

где y — m -вектор; $\alpha(t)$ — симметричная $(m \times m)$ -матрица, определенная и непрерывная на $[0, T)$. При этом $a(t) = \frac{1}{m} \text{Sp } \alpha(t)$; $\text{Sp } \alpha(t)$ — след $\alpha(t)$.

Метод изложенного ниже доказательства в принципе известен (см., например, [6]).

Множество решений векторного уравнения (6), равных нулю при $t=0$, можно описать формулой $y(t) = p(t) \dot{y}_0$, $\dot{y}_0 = \frac{dy}{dt} \Big|_{t=0}$, где $p(t)$ — $(m \times m)$ -матрица, неособенная в каждой точке t , не сопряженной с $t=0$, и $\det p(t) = 0$ в точках, сопряженных с $t=0$. Пусть $s(t) = \frac{dp}{dt} p^{-1}$. Легко показать, что $s(t)$ симметрична и удовлетворяет «уравнению Рикатти» [6]: $\frac{ds}{dt} = \alpha(t) - s^2$. Легко видеть также, что $\|s(0)\| = \infty$ и t' тогда и только тогда сопряжена с точкой $t=0$, когда $\|s(t')\| = \infty$. Здесь $\|s\|$ — норма матрицы s , например, квадратный корень из суммы квадратов элементов s ; поскольку s симметрична, $\|s\| = \text{Sp}(s^2)$. Положим $\rho(t) = \frac{1}{m} \text{Sp } s(t)$.

Получим $\frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{m} \text{Sp } \alpha(t) - \frac{1}{m} \|s\|^2$, или $\frac{d\rho}{dt} = a(t) - \frac{1}{m} \|s\|^2$. Легко показать, что $\|s\|^2 \geq \frac{1}{m} (\text{Sp } s)^2$, откуда

$$\frac{d\rho}{dt} \leq a(t) - \rho^2. \quad (7)$$

Аналогичные выкладки для скалярного уравнения (5) дает ($\bar{s} = \dot{x}/x$) уравнение

$$\frac{d\bar{s}}{dt} = a(t) - \bar{s}^2. \quad (8)$$

При этом легко видеть, что $\bar{s}(+0) = +\infty$, $\bar{s}(t_1 - 0) = -\infty$, $\bar{s}(t_1 + 0) = +\infty$ (рассмотреть знаки $x(t)$ в окрестности t_1 , $x(t_1) = 0$), если t_1 сопряжена с $t = 0$.

Пусть $s(t)$ определена на всем отрезке $[0, T)$, т. е. $[0, T)$ не содержит точек, сопряженных с $t = 0$ для системы (6); тогда и $\rho(t)$ определена на $[0, T)$. Поскольку $\bar{s}(t_1 + 0) = +\infty$, то для некоторого $t' > t_1$ $\bar{s}(t') > \rho(t')$. Сравнение неравенства (7) и уравнения (8) приводит к противоречию: на отрезке (t', t_2) (t_2 — вторая точка, сопряженная с $t = 0$), должно быть $\bar{s}(t) \geq \rho(t)$ [использовать элементарную теорему о сравнении решений уравнений $y' = f(x, y)$, $y' = \varphi(x, y)$, если $f(x, y) \geq \varphi(x, y)$]. В то же время $\bar{s}(t_2 - 0) = -\infty$.

Доказательство теоремы 2. Доказательства требует лишь утверждение: если при условиях теоремы 1 для причинно ориентированного лоренцова V_n справедливо утверждение В, то отношение $\prec$ в V_n максимально.

V_n , согласно В, содержит замкнутую непространственноподобную дугу. Пусть через точку $a \in V_n$ проходит такая дуга. Рассмотрим «будущее» F_a точки a ($F_a = \{x; a \prec x\}$). Покажем, что F_a содержит некоторую окрестность точки a . Это очевидно, если упомянутая дуга не является замкнутой изотропной геодезической (см., например, теорему 3 заметки [2]); в последнем случае утверждение следует из существования на этой изотропной геодезической сопряженных точек.

Пусть $\dot{F}_a$ — граница F_a . Если $x \in \dot{F}_a$, то x может принадлежать или не принадлежать F_a . В первом случае точку a можно соединить с точкой x непространственноподобной дугой, направленной (от точки a к x) «в будущее»; но тогда x — внутренняя точка F_a , $x \notin \dot{F}_a$ (поскольку F_a содержит окрестность точки a). Если же $x \notin F_a$, то существует последовательность непространственноподобных дуг, соединяющих точки x_m и a и ориентированных в прошлое от x_m к a , причем последовательность x_m сходится к точке x . Рассматривая предельную дугу (считая, что начала дуг последовательности — точки x_m [2]), получаем направленную в прошлое непространственноподобную дугу l с началом в точке x , причем каждая точка l принадлежит $\dot{F}_a$. Дуга l может быть только непродолжаемым лучом изотропной геодезической, но и в этом слу-

чае x — внутренняя точка F_a , поскольку l содержит сопряженные точки. Таким образом, F_a пусто и $F_a = V_n$. Дуальное рассуждение (с заменой будущее — прошлое) показывает, что и $P_a = V_n$, где P_a — «прошлое» точки a . Очевидно, для любых x, y из V_n $x \prec a \prec y$ и отношение $\prec$ максимально.

В заключение приведем определение естественной конформной структуры на гиперboloиде Q_n и его универсальном накрывающем Q_n^* (гиперboloид рассматривается как гиперповерхность проективного P_{n+1} , уравнение которой в однородных координатах можно, например, представить в виде $\sum_i \varepsilon_i (x^i)^2 + (x^{n+1})^2 - 2x^0 x^{n+1} = 0$).

Достаточно описать изотропные конусы конформных метрик: изотропные направления в каждой точке $a \in Q_n$ суть направления прямолнейных образующих Q_n (тем самым определена и конформная структура Q_n^*). Полная группа конформных движений Q_n состоит из проективных автоморфизмов P_{n+1} , оставляющих инвариантным Q_n (точнее, из их ограничений на Q_n). Q_n и Q_n^* — «универсальные» конформно плоские пространства: любое односвязное конформно плоское V_n может быть конформно отображено (вообще говоря, не инъективно) в Q_n (Q_n^*) — это утверждение легко доказать благодаря конформной полноте Q_n (Q_n^*).

Список литературы: 1. Seifert H. J. Global connectivity by timelike geodesics. — Zeitschrift für Naturforschung, 1967, Bd. 22a, H9, S. 1356—1360. 2. Улановский М. А. Упорядоченные псевдоримановы пространства. I. — Укр. геометр. сб., 1969, вып. 7, с. 153—165. 3. Улановский М. А. Упорядоченные псевдоримановы пространства. II. — Укр. геометр. сб., 1970, вып. 9, с. 96—110. 4. Улановский М. А. О конформной и геодезической полноте псевдоримановых пространств физического типа. — Укр. геометр. сб., 1973, вып. 13, с. 172—179. 5. Улановский М. А. Экспоненциальное отображение в псевдоримановых пространствах физического типа. — Укр. геометр. сб., 1974, вып. 16, с. 97—118. 6. Karcher H. Riemannian Center of Mass and Mollifier Smoothing. — Commun. Pure and appl. Math., 1977, 30, S. 509—541.

Поступила 26 ноября 1979 г.

УДК 513

А. Л. Ямпольский

К ГЕОМЕТРИИ СФЕРИЧЕСКИХ КАСАТЕЛЬНЫХ РАССЛОЕНИЙ РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ

В данной статье рассматривается кривизна сферического касательного расслоения двумерного риманова многообразия M^2 .

Если M^n — произвольное риманово многообразие с метрикой $ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k$, то на его сферическом касательном расслоении $T_1(M^n)$ индуцируется метрика

$$d\sigma^2 = g_{ik} dx^i dx^k + g_{ik} Dv^i Dv^k, \quad g_{ik} v^i v^k = 1, \quad (1)$$

где Dv^i — ковариантные дифференциалы координат касательного вектора в естественном базисе $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)$. Впервые эта метрика была получена С. Сасаки [1]. Если, следуя П. Надю [2], рассматривать касательное расслоение векторов, квадрат длины которых равен ρ , то получим также сферическое касательное расслоение, обозначаемое $T_\rho(M^n)$.

В 1975 г. В. Клингенбергом и С. Сасаки [3] было доказано, что $T_1(S^2)$ есть риманово многообразие постоянной положительной кривизны $1/4$. В 1977 г. П. Надь [2] для $T_\rho(M^2)$ установил, что $T_\rho(M^2)$ имеет постоянную положительную кривизну $k/4$, если M^2 — многообразие постоянной кривизны k и $\rho k = 1$.

Цель этой статьи — установить условие, при котором из положительности кривизны M^2 следовала бы положительность кривизны $T_\rho(M^2)$. Получен следующий результат:

Теорема. Пусть M^2 — риманово многообразие кривизны $k > 0$. Если $\nabla(k) < k^3\left(1 - \frac{3}{4}\rho k\right)$, где ∇ — первый дифференциальный параметр Бельтрами, то $T_\rho(M^2)$ — риманово многообразие положительной кривизны.

Доказательство. Как известно, на M^2 в окрестности каждой точки можно ввести полугеодезическую систему координат так, что в этой окрестности $ds^2 = (dx^1)^2 + G(x^1, x^2)(dx^2)^2$. В точке $O(0, 0)$ $G(0, x^2) = 1$, $\frac{\partial G(0, x^2)}{\partial x^1} = 0$. Так как касательное пространство к M^2 в каждой точке есть плоскость, то координаты (v^1, v^2) касательного вектора длины $\sqrt{\rho}$ могут быть записаны в виде $v^1 = \sqrt{\rho} \cos \omega$, $v^2 = (1/\sqrt{G}) \sqrt{\rho} \sin \omega$, где ω — угол, образуемый вектором с направлением базисного вектора $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)$. Коэффициент $1/\sqrt{G}$ появляется в силу условия $g_{ik}v^i v^k = 1$, $i, k = 1, 2$. Таким образом, в качестве локальных координат точки в $T_\rho(M^2)$ можно взять (x^1, x^2, ω) .

Следуя С. Сасаки [1], запишем метрику (1) в виде

$$d\sigma^2 = (g_{ik} + g_{\alpha\beta} \Gamma_{vi}^\alpha \Gamma_{\mu k}^\beta v^\mu v^\nu) dx^i dx^k + \Gamma_{\lambda\mu, k} v^\lambda dx^i dx^k + g_{ik} dv^i dv^k, \quad i, k, \mu, \nu, \alpha, \beta, \lambda = 1, 2, \quad (2)$$

где Γ — символы Кристоффеля исходного многообразия. В выбранных координатах $\Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial x^1}$; $\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2G} \frac{\partial G}{\partial x^1}$; $\Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2G} \frac{\partial G}{\partial x^2}$; $dv^1 = -\sqrt{\rho} \sin \omega d\omega$; $dv^2 = \frac{1}{\sqrt{G}} \sqrt{\rho} \cos \omega d\omega - \frac{1}{2G} \left(\frac{\partial G}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial G}{\partial x^2} dx^2 \right) \times \sqrt{\rho} \sin \omega$. Подставив эти значения в (2), получим $d\sigma^2 = (dx^1)^2 + \left(G + \frac{\rho}{4G} \left(\frac{\partial G}{\partial x^1} \right)^2 \right) (dx^2)^2 + 2 \frac{\rho}{2G} \frac{\partial G}{\partial x^1} dx^2 d\omega + \rho d\omega^2$.

Простое вычисление показывает, что для этой метрики в точке $O'(0, 0, 0)$ многообразия $T_p(M^2)$ отличны от нуля только такие символы Кристоффеля: $\Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial x^2}$; $\Gamma_{23}^1 = -\frac{\rho}{4} \frac{\partial^2 G}{(\partial x^1)^2}$; $\Gamma_{12}^3 = \frac{1}{4} \times \frac{\partial^2 G}{(\partial x^1)^2}$; $\Gamma_{13}^2 = \frac{\rho}{4} \frac{\partial^2 G}{(\partial x^1)^2}$; $\Gamma_{22}^3 = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^1 \partial x^2}$. Наконец, тензор кривизны $T_p(M^2)$ имеет вид $R_{23,23} = R_{13,13} = \frac{\rho^2}{16} \left(\frac{\partial^2 G}{(\partial x^1)^2} \right)^2$; $R_{23,31} = 0$; $R_{12,12} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{(\partial x^1)^2} \left(1 + \frac{3\rho}{8} \frac{\partial^2 G}{(\partial x^1)^2} \right)$; $R_{31,12} = \frac{\rho}{4} \frac{\partial^3 G}{(\partial x^1)^3}$; $R_{12,23} = -\frac{\rho}{4} \times \left(\frac{\partial^3 G}{(\partial x^1)^2 \partial x^2} - \frac{\partial G}{\partial x^2} \frac{\partial^2 G}{(\partial x^1)^2} \right)$. Остается только заметить, что в полугеометрических координатах кривизна k многообразия M^2 вычисляется по формуле $k = \frac{1}{G} \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{(\partial x^1)^2} + G \left(\frac{1}{2G} \frac{\partial G}{\partial x^1} \right)^2 \right)$; поэтому в точке $O(0, 0)$ будет $k = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{(\partial x^1)^2}$; $\frac{\partial k}{\partial x^1} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^3 G}{(\partial x^1)^3}$; $\frac{\partial k}{\partial x^2} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^3 G}{(\partial x^1)^2 \partial x^2} - \frac{\partial G}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 G}{(\partial x^1)^2} \right)$; следовательно, в точке $O'(0, 0, 0)$ многообразия $T_p(M^2)$ получим $R_{23,23} = \frac{(\rho k)^2}{4}$; $R_{13,13} = \frac{(\rho k)^2}{4}$; $R_{12,12} = k \left(1 - \frac{3}{4} \rho k \right)$; $R_{31,12} = -\frac{\rho}{2} \frac{\partial k}{\partial x^1}$; $R_{12,23} = \frac{\rho}{2} \frac{\partial k}{\partial x^2}$; $R_{23,31} = 0$.

Заметим, что теорема С. Сасаки и В. Клингенберга и теорема П. Нады следуют отсюда непосредственно.

Так как $T_p(M^2)$ трехмерно, то для исследования его кривизны можно воспользоваться индикатрисой Римана [4]: $R_{23,23}\alpha^2 + R_{13,13}\beta^2 + R_{12,12}\gamma^2 + 2R_{31,12}\beta\gamma + 2R_{12,23}\gamma\alpha + 2R_{23,31}\alpha\gamma = -1$, где α, β, γ — направляющие косинусы нормали к элементарной площадке.

Известно, что если индикатриса Римана есть мнимый эллипсоид, то кривизна пространства положительна во всех направлениях. Для этого достаточно, чтобы все угловые миноры определителя, составленного из коэффициентов, были положительны. В результате находим условие

$$\begin{vmatrix} \frac{(\rho k)^2}{4} & 0 & \frac{\rho}{2} \frac{\partial k}{\partial x^2} \\ 0 & \frac{(\rho k)^2}{4} & -\frac{\rho}{2} \frac{\partial k}{\partial x^1} \\ \frac{\rho}{2} \frac{\partial k}{\partial x^2} & -\frac{\rho}{2} \frac{\partial k}{\partial x^1} & k \left(1 - \frac{3}{4} \rho k \right) \end{vmatrix} > 0.$$

Раскрыв определитель, получим требуемое неравенство $\nabla k < k^3 \left(1 - \frac{3}{4} \rho k \right)$. Теорема доказана.

Следствие 1. Если M^2 — риманово многообразие постоянной кривизны $k > 0$, то $T_p(M^2)$ имеет положительную кривизну при условии $\rho k < \frac{4}{3}$.

Доказательство следствия очевидно.

Следствие 2. Если M^2 риманово многообразие отрицательной кривизны $k < 0$, то его сферическое касательное расслоение $T_p(M^2)$ не может быть многообразием знакоопределенной кривизны при любом ρ .

Список литературы: 1. Sasaki S. On the differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifolds.— I Tohoku Math. J., 1958, 10, p. 338—354; II Tohoku Math. J., 1962, 14, p. 146—155. 2. Nagy P. On the tangent sphere bundle of Riemannian 2-Manifold.— Tohoku Math. J., 1977, 29, p. 203—208. 3. Klingenberg W., Sasaki S. On the tangent sphere bundle of a 2-sphere.— Tohoku Math. J., 1975, 27, p. 49—56. 4. Картан Э. Геометрия римановых пространств.— М.: ОНТИ НКТП СССР, 1936.— 244 с.

Поступила 12 ноября 1979 г.

УДК 513

Три-ткани в касательном расслоении, определяемом многомерной поверхностью аффинного пространства. Андикьян М. А. — Украинский геометрический сборник, вып. 24. — Респ. межвед. науч. сборник. — Харьков: Вища школа. Изд-во при Харьк. ун-те, 1981, с. 3—12.

Исследуется широкий класс три-тканей в касательном расслоении над r -мерной поверхностью V_r в $2r$ -мерном аффинном пространстве A_{2r} . Требуется, чтобы касательные r -плоскости к V_r являлись одним из семейств поверхностей три-ткани. С этим ограничением для произвольной три-ткани в расслоении $T(V_r)$ получены управления структуры. С три-тканью ассоциируется инфинитезимальная связность в $T(V_r)$, которая имеет нулевую кривизну тогда и только тогда, когда три-ткань изоклинно геодезическая. Выделены условия, необходимые и достаточные для того, чтобы инфинитезимальная связность в $T(V_r)$, присоединенная к три-ткани, была порождена аффинной связностью на V_r .

Список лит.: 5 назв.

УДК 513

Поверхности в E^4 с постоянной внешней и внутренней геометрией. Гариб Т. — Украинский геометрический сборник, вып. 24. — Респ. межвед. науч. сборник. — Харьков: Вища школа. Изд-во при Харьк. ун-те, 1981, с. 12—18.

Под поверхностью с постоянной внешней геометрией понимается поверхность, для любых двух точек которой существуют на ней окрестности этих точек, конгруэнтные в E^4 . Доказывается, что единственные двумерные поверхности в E^4 класса регулярности C^3 с постоянной внешней геометрией есть плоскости, сферы, обобщенные торы Клиффорда и цилиндрические поверхности, направляющие которых — винтовые линии в некотором E^3 , а прямые образующие ортогональны к E^3 .

Список лит.: 5 назв.

УДК 513

О гиперповерхностях, содержащих минимальные подмногообразия. Горюх В. П. — Украинский геометрический сборник, вып. 24. — Респ. межвед. науч. сборник. — Харьков: Вища школа. Изд-во при Харьк. ун-те, 1981, с. 18—26.

Для компактных гиперповерхностей получен следующий результат. Пусть V^{2l} — компактная четырежды непрерывно дифференцируемая гиперповерхность евклидова пространства E^{2l+1} , ее риманова кривизна удовлетворяет в каждом двумерном направлении неравенствам $0 < K \leq 1$, и V^{2l} содержит замкнутую геодезическую γ длины 2π , лежащую в E^k . Доказывается, что если $k=3$, то V^{2l} — гиперсфера радиуса 1; если $4 \leq k \leq 2l$, то в V^{2l} существует вполне геодезическая поверхность размерности $2l-k+2$, содержащая γ и изометричная единичной сфере размерности $2l-k+2$.

Изучаются также некомпактные выпуклые гиперповерхности, содержащие минимальные подмногообразия.

Список лит.: 6 назв.

Бесконечные выпуклые многогранники с равноугольными вершинами. Г у р и н А. М. — Украинский геометрический сборник, вып. 24. — Респ. межвед. науч. сборник. — Харьков: Вища школа. Изд-во при Харьк. ун-те, 1981, с. 26—32.

Доказывается, что в трехмерном евклидовом пространстве бесконечных выпуклых многогранников с равноугольными вершинами существует с точностью до изоморфизма только тридцать, имеющих конечное ребро, и бесконечная серия конусов. Под равноугольностью вершин понимается равенство плоских углов в каждой вершине. Существование серии и строение конусов очевидны. Для каждого многогранника с конечным ребром строится, начиная с бесконечной грани, сеть ребер и исследуется возможность ее реализации как многогранника.

Библиогр. ссылка в подстроч. примеч.

Ил. 1.

УДК 513

Аналог теоремы Коши. Г у р и н А. М. — Украинский геометрический сборник, вып. 24. — Респ. межвед. науч. сборник. — Харьков: Вища школа. Изд-во при Харьк. ун-те, 1981, с. 32—33.

Доказывается, что в трехмерном евклидовом пространстве замкнутый выпуклый многогранник однозначно определяется величинами ребер и двугранных углов.

Список лит.: 4 назв.

УДК 513

Об алгебраических поверхностях с группами симметрий A_n , B_n , D_n . И г н а т е н к о В. Ф. — Украинский геометрический сборник, вып. 24. — Респ. межвед. науч. сборник. — Харьков: Вища школа. Изд-во при Харьк. ун-те, 1981, с. 33—39.

Пусть $I(G)$ есть алгебра многочленов, инвариантных относительно конечной группы симметрий G вещественного пространства E^n : $\eta_s(G) = 0$ ($s = 1, \dots, N(G)$) — нормированные уравнения соответствующих гиперплоскостей симметрии. Находятся все r , при которых образующие степеней $2r$ алгебр

$I(A_n)$, $I(B_n)$, $I(D_n)$ могут быть представлены в виде $\sum_{s=1}^{N(G)} \eta_s^{2r}(G)$; указываются также способы построения полного базиса алгебры $I(B_n)$.

Список лит.: 12 назв.

УДК 513. 81

О степени изгибаемости поверхностей положительной кривизны. К л и м е н т о в С. Б. — Украинский геометрический сборник, вып. 24. — Респ. межвед. науч. сборник. — Харьков: Вища школа. Изд-во при Харьк. ун-те, 1981, с. 39—52.

Доказывается, что «разрезанную» поверхность рода $p \geq 0$ положительной, отграниченной от нуля внешней кривизны, расположенную в трехмерном односвязном полном римановом пространстве постоянной кривизны, можно непрерывно изогнуть с заданным (сколь угодно большим) изгибом в конечном наборе точек, при условии, что площадь поверхности достаточно мала. «Разрезанной» называется односвязная поверхность, полученная из данной проведением системы канонических разрезов. При непрерывном изгибании на края разрезов накладывается условие их конгруэнтного друг относительно друга смещения.

Рассматривается вопрос существования объекта исследования. Доказывается, что регулярные поверхности ненулевого рода положительной внешней кривизны с краем существуют в каждом регулярном римановом пространстве, в то время как замкнутые поверхности — не в каждом.

Ил. 2. Список лит.: 21 назв.

Сети, определяемые нелинейными проекторами. К о в а н ц о в А. Н. — Украинский геометрический сборник, вып. 24. — Респ. межвед. науч. сборник. — Харьков: Вища школа. Изд-во при Харьк. ун-те, 1981, с. 52—57.

В работе вводится понятие проектирующей сети нелинейного проектора. Доказано, что для того чтобы вырожденные преобразования были проекторами, необходимо и достаточно, чтобы проектирующие сети, определяемые ими, были чебышевскими сетями переноса.

Список лит.: 4 назв.

Поверхности отрицательной кривизны с прямолинейным ребром возврата. К о в а н ц о в Н. И. — Украинский геометрический сборник, вып. 24. — Респ. межвед. науч. сборник. — Харьков: Вища школа. Изд-во при Харьк. ун-те, 1981, с. 57—70.

Доказывается существование поверхностей отрицательной (отделенной от нуля), в частности, постоянной кривизны с прямолинейным ребром возврата. Доказательство проводится методом, варьирующим метод Р. Куранта («Уравнения с частными производными», 1964), что позволяет применить этот метод для решения смешанной задачи.

Список лит.: 7 назв.

Универсальные покрывки. І. М а к е е в В. В. — Украинский геометрический сборник, вып. 24. — Респ. межвед. науч. сборник. — Харьков: Вища школа. Изд-во при Харьк. ун-те, 1981, с. 70—79.

В классе центрально-симметричных выпуклых многогранников X , описанных вокруг шара единичного диаметра в R^n , выделяются серии многогранников, заведомо являющихся универсальными покрывками, т. е. способные покрыть любое множество диаметра 1 в R^n . В частности, среди упомянутых X являются универсальными покрывками в R^n все X с $2n+2$ гранями; в R^3 все X с 10 гранями, допускающие без отражения самосовмещение, которое меняет ролями противоположные грани в двух парах; в R^4 все X с 14 гранями; в R^8 все X с 30 гранями. Устанавливается также, что в R^n вокруг выпуклого тела средней ширины d можно описать любой n -мерный симплекс T , имеющий d диаметром вписанного шара.

Список лит.: 5 назв.

Одно характеристическое свойство гиперсферы. М е д я н и к А. И. — Украинский геометрический сборник, вып. 24. — Респ. межвед. науч. сборник. — Харьков: Вища школа. Изд-во при Харьк. ун-те, 1981, с. 79—82.

Пусть K — выпуклое тело в E^{n+1} , $H(n)$ — его опорная функция и $F_m(H, \omega)$ — m -ая ($0 \leq m \leq n$) функция кривизны по А. Д. Александрову, определенная на борелевских множествах ω единичной гиперсферы. Если ортогональная проекция K на некоторую гиперплоскость E является n -мерным шаром и существует такая постоянная r , что для $k=1, 2, \dots, n-1$

$$F_{k+1}(H, \omega) - 2r F_k(H, \omega) + r^2 F_{k-1}(H, \omega) \leq 0.$$

то K — либо шар радиуса r , либо тело, представимое в виде суммы Минковского такого шара и отрезка, перпендикулярного E . Если $H(n) \in C^2$, то вторая возможность исключена и утверждение представляет собой характеристическое свойство гиперболы.

Полученный результат является обобщением по размерности теоремы Р. Шнайдера из РЖ Мат. 1976, 8А 927.

Список лит.: 3 назв.

УДК 513

Аналог теоремы Либермана в римановом пространстве. Милка А. Д. — Украинский геометрический сборник, вып. 24. — Респ. межвед. науч. сборник. — Харьков: Вища школа. Изд-во при Харьк. ун-те, 1981, с. 82—84.

Для риманова пространства для геодезической линии на выпуклой гиперповерхности доказывается теорема, аналогичная известной теореме И. М. Либермана — о выпуклости следа геодезической на проектирующем цилиндре. Как следствие, устанавливаются соответствующие результаты о дифференциальных свойствах геодезической.

Список лит.: 5 назв.

УДК 513

Второе безынтегральное представление комплекса, допускающего H/K -расслоение. Мягков В. И. — Украинский геометрический сборник, вып. 24. — Респ. межвед. науч. сборник. — Харьков: Вища школа. Изд-во при Харьк. ун-те, 1981, с. 85—90.

Дается новое безынтегральное представление решения системы дифференциальных уравнений, определяющих комплекс, который допускает функциональное H/K -расслоение в нормальные конгруэнции.

H — средняя, K — полная кривизна поверхности, ортогональной к нормальной конгруэнции комплекса, при этом отношение H/K зависит лишь от луча комплекса, но не от поверхности.

Найденное представление дает возможность получить решения системы уравнений комплекса в явном виде.

Список лит.: 3 назв.

УДК 513

Алгебра прямых трехмерного квазисимплектического пространства. Пелич В. А., Хантурин С. А. — Украинский геометрический сборник, вып. 24. — Респ. межвед. науч. сборник. — Харьков: Вища школа. Изд-во при Харьк. ун-те, 1981, с. 91—104.

Рассматриваются вопросы, связанные с введением на множестве неособых прямых трехмерного квазисимплектического пространства структуры алгебры, изоморфной алгебре матриц второго порядка. Строится также модель этой алгебры в четырехмерном псевдоевклидовом пространстве.

Ил. 4. Список лит.: 6 назв.

УДК 513/516:513.88

Числа замены и числа Каратеодори декартова произведения структур выпуклости. Солтан В. П. — Украинский геометрический сборник, вып. 24. — Респ. межвед. науч. сборник. — Харьков: Вища школа. Изд-во при Харьк. ун-те, 1981, с. 104—108.

Если e_i, c_i ($i = 1, \dots, n$) — числа замены и числа Каратеодори структур выпуклости ($X_i, \mathcal{G}_i$) (см. РЖ Мат., 1976, 10Б542), то числа замены e и числа Каратеодори c декартова произведения этих структур таковы:

$$e = \sum_{i=1}^{k+1} [c_i + \text{sign}(e_i - c_i - 1)] + 1, \quad c = e - 1 + \varepsilon_n,$$

где $\varepsilon_n = 0$ в одном из трех случаев: 1) $c_1 = \dots = c_n = 0$; 2) $e_i = c_i + 1 > 1$ для некоторого $i \in [1, n]$; 3) $\min\{c_i, c_j\} > 1$ для некоторых $i, j \in [1, n]$.

В остальных случаях $\varepsilon_n = 1$.

Список лит.: 9 назв.

Нахождение оптимального пути в неодносвязной области на одном классе ломанных в R_1^2 . Стоян Ю. Г., Смеляков С. В.— Украинский геометрический сборник, вып. 24.— Респ. межвед. науч. сборник.— Харьков: Вища школа. Изд-во при Харьк. ун-те, 1981, с. 108—116.

Рассматривается задача построения в данной неодносвязной многоугольной области в R_1^2 ломаной, гомотопной данному пути и имеющей минимальную длину и минимальное число изломов. Доказано существование такой ломаной и предложен эффективный алгоритм ее построения, который может быть реализован на ЭВМ.

Ил. 2. Список лит.: 3 назв.

УДК 513. 73

Теорема о раскраске и жесткость выпуклого многогранника. Трушкин В. И.— Украинский геометрический сборник, вып. 24.— Респ. межвед. науч. сборник.— Харьков: Вища школа. Изд-во при Харьк. ун-те, 1981, с. 116—122.

Доказывается невозможность специального рода трехцветной раскраски графа ребер триангуляции замкнутой ориентируемой поверхности. Как одно из применений этой теоремы устанавливается жесткость замкнутого выпуклого многогранника с треугольными гранями при ослаблении требования стационарности длин ребер.

Ил. 2. Список лит.: 2 назв.

УДК 513

Конформно полные лоренцовы многообразия. Улановский М. А.— Украинский геометрический сборник, вып. 24.— Респ. межвед. науч. сборник.— Харьков: Вища школа. Изд-во при Харьк. ун-те, 1981, с. 122—129.

В статье изучается глобальная структура конформно полных лоренцовых пространств.

Список лит.: 6 назв.

УДК 513

К геометрии сферических касательных расслоений римановых многообразий. Ямпольский А. Л.— Украинский геометрический сборник, вып. 24.— Респ. межвед. науч. сборник.— Харьков: Вища школа. Изд-во при Харьк. ун-те, 1981, с. 129—132.

В статье рассмотрена кривизна сферического касательного расслоения двумерного риманова многообразия. Получено условие, при котором из положительности кривизны исходного многообразия следует положительность кривизны его сферического касательного расслоения.

Список лит.: 4 назв.